Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

1-3

33. évfolyam, 1982—1986

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.

33. évfolyam (1982—1986), 1—3. szám

A megadott két évszám közül az első a kötet esedékességének, a második a kézirat nyomdába adásának évét jelöli.

Szerkesztőség: 1061 Budapest VI., Anker köz 1—3. I. em. 111. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest V., József nádor tér 1., 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra.
Előfizethető és példányonként megvásárolható az *Akadémiai Kiadó*-nál, (1363 Budapest, Alkotmány utca 21., tel.: 111-010), pénzforgalmi jelzőszám: 215-11-488, a *Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22, tel.: 185-881) és a *Magiszter* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) Akadémiai Kiadó könyvesboltjaiban.
Előfizetési díj egy évre 48 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

EMLÉKÜLÉSEK

A Magyar Tudományos Akadémia

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA,

a

KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM,

a

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM

és a

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

1984. november 20-án

TUDOMÁNYOS EMLÉKÜLÉST

rendezett

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KISELŐADÓ TERMÉBEN

VARGA OTTÓ

születésének 75. évfordulója alkalmából.

Az emlékülés napirendje:

1. MEGNYITÓ
FEJES TÓTH LÁSZLÓ akadémiai rendes tag
2.* VARGA OTTÓ MUNKÁSSÁGA ÉS HATÁSA
RAPCSÁK ANDRÁS akadémiai rendes tag
3.* A VARGA OTTÓ ÁLTAL KIDOLGOZOTT OSZKULÁLÓ TEREK ELMÉLETÉNEK TOVÁBBFEJLESZTÉSE
MOÓR ARTHUR, a matematikai tudomány doktora
4. A GLOBÁLIS DIFFERENCIÁLGEOMETRIA, MINT A LOKÁLIS ELMÉLET TOVÁBBFEJLESZTÉSE
SOÓS GYULA, a matematikai tudomány doktora
5.* A VARGA OTTÓ ÁLTAL ALAPÍTOTT DEBRECENI DIFFERENCIÁL-GEOMETRIAI ISKOLA JELENLEG
TAMÁSSY LAJOS, a matematikai tudomány doktora

Az emlékülés befejezése után a Magyar Tudományos Akadémia, a Kossuth Lajos Tudományegyetem, a Budapesti Műszaki Egyetem és a Bolyai János Matematikai Társulat képviselői koszorút helyeztek el VARGA OTTÓ Farkasréti temetőben levő sírján.

* Az előadást, ill. kibővített változatát ebben a számban közöljük.

A Magyar Tudományos Akadémia

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA,
MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZETE

és a

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

1985. október 7-én és 8-án

TUDOMÁNYOS EMLÉKÜLÉST

rendezett

AZ MTA MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZETE NAGYTERMÉBEN

TURÁN PÁL

születésének 75. évfordulója alkalmából.

Az emlékülés napirendje:

Október 7.:

1. MEGNYITÓ
TARJÁN IMRE, az MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának elnöke
2. TURÁNNAL KÖZÖS EREDMÉNYEINKRŐL
ERDŐS PÁL, az MTA rendes tagja
3. ON THE FIRST JOINT PAPER OF ERDŐS AND TURÁN
Professor ROBERT TIJDEMAN (Hollandia)
4. EFFEKTÍV VÉGESSÉGI TÉTELEK A DIOFANTIKUS EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN
GYŐRY KÁLMÁN, a matematikai tudomány doktora
5. KOMBINATORIKUS ALGORITMUSOKRÓL
SZEMERÉDI ENDRE, az MTA levelező tagja
6. POZÍCIÓS JÁTÉKOK ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS
BECK JÓZSEF, a matematikai tudomány kandidátusa
7. RÁCSGEOMETRIAI ELOSZLÁSI PROBLÉMÁKRÓL
SURÁNYI JÁNOS, a matematikai tudomány doktora
8. SZÁMRENDSZEREK ÉS FÜGGVÉNYEGYENLETEK
KÁTAI IMRE, az MTA rendes tagja
9. IRREGULARITÁSOK A PRÍMSZÁMELMÉLETBEN
PINTZ JÁNOS, a matematikai tudomány doktora
10. ADDITÍV FÜGGVÉNYEK MOMENTUMAIRÓL
RUZSA Z. IMRE, a matematikai tudomány kandidátusa
11. STATISZTIKUS PARTÍCIÓELMÉLETI PROBLÉMÁK
SZALAY MIHÁLY, a matematikai tudomány kandidátusa
12. PERMUTÁCIÓK ARITMETIKAI TULAJDONSÁGAIRÓL
FREUD RÓBERT, a matematikai tudomány kandidátusa

Október 8.:

13. TURÁN-TÍPUSÚ TÉTELEK
HAJNAL ANDRÁS, az MTA rendes tagja
14. TÚLTELÍTETT GRÁFOKRÓL
SIMONOVITS MIKLÓS, a matematikai tudomány doktora
15. FABER-SOROK KONVERGENCIÁJA ÉS SZUMMABILITÁSA
KŐVÁRI TAMÁS
16. OPTIMUM-SZÁMÍTÁS NEM DIFFERENCIÁLHATÓ FELTÉTELEKKEL
DANCS ISTVÁN, a matematikai tudomány kandidátusa
17. A FÜGGETLEN VÁLTOZÓ TRANSZFORMÁCIÓJÁNAK HATÁSA FÜGGVÉNYSOROKRA
ALPÁR LÁSZLÓ, a matematikai tudomány doktora
18. KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN ÉS GRAVITÁCIÓ
LEMPERT LÁSZLÓ, a matematikai tudomány kandidátusa
19. RACIONÁLIS APPROXIMÁCIÓRÓL
SZABADOS JÓZSEF, a matematikai tudomány doktora
20. ÚJABB EREDMÉNYEK A LAKUNÁRIS INTERPOLÁCIÓ ELMÉLETÉBEN
VÉRTESI PÉTER, a matematikai tudomány doktora
21. FOURIER-TRANSZFORMÁLTAK APPROXIMÁCIÓJA
BALÁZS JÁNOS, a matematikai tudomány kandidátusa
22. INTERPOLÁCIÓ RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEKKEL
KISS OTTÓ, a matematikai tudomány kandidátusa
23. NÉHÁNY HATVÁNYÖSSZEG-EGYENLŐTLENSÉG
HALÁSZ GÁBOR, a matematikai tudomány doktora

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

III. osztálya,

a

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT,

valamint az

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

szervezésében
1986. február 19-én
került sor az

ELTE TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLAI KARÁN

a

PÉTER RÓZSA-TEREM

felavatására.

Az ünnepség műsora:

1. Császár Ákos akadémikus ünnepi megnyitója
2. Részletek Kardos István „Magyar Tudósok" című sorozatának Péter Rózsáról készített filmjéből
3. Hajnal András akadémikus előadása Péter Rózsáról
4. Bencédy József, a kar igazgatója felavatja a Péter Rózsa-termet
5. Madrigálok
   Előadja az ELTE TFK énekkara
   Vezényel Pap Enikő

МЕМОРИАЛЬНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ
MEMORIAL SESSIONS

VARGA OTTÓ MUNKÁSSÁGA ÉS HATÁSA*

RAPCSÁK ANDRÁS

Varga Ottó munkásságáról és hatásáról kellene előadást tartanom 25 percben. Ez természetesen lehetetlen. Így azt az utat választottam, hogy kiemelem Varga Ottó eredményei közül a legjelentősebbeket, s itt mutatok rá, hogy ezek milyen hatással voltak a magyar differenciálgeometriai iskola megalakulására.

Varga Ottó 1909. november 22-én született a Zala megyei Szepetneken. Születése után családja Poprádra költözött, s így középiskoláit már Késmárkon végezte el. Érettségi vizsgája után felsőfokú tanulmányait a bécsi műegyetemen kezdte el, de 1928-ban, érettségije után egy évvel már a prágai egyetem hallgatója volt. 1933-ban szerzett matematika—ábrázoló geometria szakos tanári oklevelet. Ugyanebben az évben benyújtott doktori disszertációja alapján doktorrá avatták. Doktori disszertációjában egy akkor igen fontos és modern kérdést tárgyalt. Új levezetését és részletes kifejtését adta a Finsler-féle geometria Cartan-féle megalapozásának. Paul Finsler Carathéodory doktorandusa volt, s egy variációszámítási probléma vizsgálatával kapcsolatosan építette fel térelméletét. Ha ugyanis $L(x, \dot{x})$ egy reguláris variációs függvény, melynek extremális serege a következő differenciálegyenlet-rendszernek tesz eleget:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -2G^i(x, \dot{x}),$$

akkor, ha a görbék ívhosszát

$$s = \int_{t_0}^{t} L(x, \dot{x})\, dt$$

integrállal definiálom, ebből a tér egy geometriáját vezethetem le. Látható, ez a geometria általánosabb, mint a Riemann-féle (de azt speciális esetként tartalmazza, ha az $L(x, \dot{x})$ függvény x-ben kvadratikus). Tulajdonképpen az első matematikus, aki a Finsler-féle tér szerkezetét vizsgálta és a térösszefüggéseket kimutatta, Varga Ottó prágai mestere, L. Berwald volt. Berwald a G^i függvények, illetve ezek differenciálhányadosai segítségével görbe menti párhuzamos eltolást vezetett be, s ezzel meghatározta a tér struktúráját. Kiderült azonban, hogy a Berwald-féle párhuzamos eltolás nem euklideszi, azaz a vektor hosszát nem hagyja változatlanul. Ezért E. Cartan más módon közelítette meg a problémát. Ő nem ponttérből, hanem vonalelemtérből indult ki, s az általa bevezetett párhuzamos eltolás már változatlanul hagyta a vektor hosszát. Varga Ottó disszertációjában először az affinösszefüggő

* Varga Ottó születésének 75. évfordulója alkalmából 1984. november 20-án a Magyar Tudományos Akadémián tartott emlékülés egyik előadása.

vonalelemtereket értelmezi görbe menti párhuzamos eltolással, s ha ebben a térben be lehet vezetni egy $L(x, \dot{x})$ függvénnyel metrikát, az már Finsler tér Cartan összefüggéssel. Kiderült, hogy a térnek három görbületi tenzora van. Doktorálása után 1934—35-ben ösztöndíjjal a hamburgi tudományegyetemre került, ahol W. Blaschke mellett folytatott differenciálgeometriai és integrálgeometriai vizsgálatokat. Ebben az időszakban főleg a Blaschke által megalapozott integrálgeometriában ért el eredményeket. Az integrálgeometria tulajdonképpen lineáris alakzatokon bevezetett mértékmeghatározáson alapszik. Hamburgi tartózkodása után visszakerült a prágai tudományegyetem matematikai intézetébe, ahol 1937-ben habilitált matematikából. Itt tette közzé azt a dolgozatát, amely a mai napig is mintául szolgál különböző tértípusok geometriai jellemzőinek meghatározásánál. Ez az ún. oszkuláló terek módszere. Ezt részletesebben majd Moór Arthur kollégám fogja tárgyalni. Prága német megszállásakor kellemetlenségei támadtak, többek közt azért, mert Berwald professzorral — aki zsidó származású volt — továbbra is szoros kapcsolatot tartott fent. Emiatt 1941-ben hazatért Magyarországra és eleget téve Szőkefalvi Nagy Gyula professzor hívásának, a kolozsvári egyetem matematikai intézetébe ment intézeti tanárnak. Magyarországon akkor a leggyengébb matematikai tanszék a debreceni egyetemen volt, ahol még intézeti tanári szintű oktatót sem lehetett találni. Ilyen körülmények között érte a debreceni egyetemre az intézeti tanári kinevezés. Ezt elfogadta és célul tűzte ki a matematikai tanszék megerősítését és magas színvonalra emelését. Tulajdonképpen ettől az időponttól lehet számítani a magyar differenciálgeometriai iskola megalapítását is. Varga Ottó hatalmas energiával kezdett hozzá a debreceni egyetemen a matematikai élet megindításához és igen jó érzékkel, magas fokú emberséggel választotta ki tanítványait, akiket jó pedagógiai módszerrel vezetett a modern differenciálgeometria problematikájába. Emellett a matematika többi ágát sem hanyagolta el. Minden lehetőséget megteremtett arra, hogy Debrecenben necsak a differenciálgeometria, hanem a matematika számos más ága is az érdeklődés középpontjába kerüljön, s így sikerült rövid idő alatt olyan intézetet kialakítani, amely világhírre is szert tett. Ezt nagymértékben elősegítette a felszabadulás, mert ez után az állam is minden anyagi és erkölcsi támogatást megadott a debreceni matematikai intézet fejlesztéséhez. Ez tette lehetővé, hogy 1949-ben Rényi és Szele professzorokkal együtt megalapítsa a később nemzetközileg is elismert debreceni matematikai folyóiratot, a Publicationes Mathematicae-t.

Varga Ottó 1942-ben a kolozsvári egyetem magántanára lett. 1944-ben elnyerte az Eötvös Loránd Matematikai-Fizikai Társulat König Gyula jutalomérmét. 1947-ben egyetemi rendkívüli, 48-ban nyilvános rendes tanárrá nevezték ki. Debreceni évei alatt számos publikációban ismertette eredményeit. Ezek közül kiemelnék néhányat. Ilyen pl. a Minkowski térről írt dolgozata, melyben szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy Finsler tér mikor Minkowski. Az első magyar matematikai kongresszuson tartott előadásában a normálkoordináták geometriai értelmezése segítségével meghatározta az általános affinösszefüggő terek teljes invarianciarendszerét.

Berwald egyik dolgozatában bevezette a skaláris és konstans görbületű Finsler terek fogalmát, s kimutatta, hogy ha a normált vonalelemet egy zárt felületi görbén párhuzamosan körültoljuk, akkor a vektor kezdeti és véghelyzet közötti különbségvektora egy jól meghatározott három vektor által kifeszített térben van. Varga Ottó levelező tagi székfoglalójában kimutatta, hogy ez nemcsak szükséges, hanem elegendő is.

E. Bompiani jubileumára írt dolgozatában a konstans görbületű Riemann terekre ad igen szép és elegáns geometriai kritériumot. Foglalkozott még Varga

Ottó és kiemelkedő eredményt ért el az ún. Hilbert geometriákkal, a terek szorzatelőállításával, a Finsler tér szögmetrikájával stb.

Amint látjuk, Varga Ottó elsősorban nem az öncélú absztrakciót tekintette feladatának, hanem a problémák geometriai tartalmát igyekezett kideríteni, mert az volt a véleménye, hogy a geometriai vizsgálatok csak akkor lehetnek eredményesek, ha azoknak a tényleges geometriai tartalma is megmutatkozik.

Varga Ottó tudományos munkájának elismeréseként 1950-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, 1965-ben rendes tagja lett. 1952-ben Kossuth-díjjal tüntették ki.

1958-ban kinevezték az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem matematikai tanszékére, ahol 1967. augusztus 31-éig oktatott. Innen a Matematikai Kutató Intézethez került s itt haláláig vezette a differenciálgeometriai kutatócsoportot. Varga Ottó nemcsak itthon, külföldön is méltóképpen képviselte a magyar differenciálgeometriai iskolát.

Varga Ottó számos dolgozatot készített, melyek előkelő hazai és külföldi lapokban jelentek meg. Mint tudóst a rendkívüli alaposság, lelkiismeretesség és invencióképesség jellemezte. Hosszú beszélgetéseink alatt nem egyszer töltött el csodálattal az a kristálytiszta logika és geometriai szemlélet, amellyel problémáit megvilágította. Módszere az volt, hogy mindig a közönséges euklideszi térben igyekezett szemléltetni saját magának és másoknak a legmélyebb és legkomplikáltabb terekben meglevő összefüggéseket. Varga Ottóról, mint emberről is csak a legnagyobb elismeréssel és megbecsüléssel emlékezhetünk. Egész életét arra szentelte, hogy tanítványainak, barátainak ahol csak lehet segítsen és ezért semmiféle hálát nem várt. Emlékét, munkásságát, barátságát soha nem fogjuk elfelejteni.

ТВОРЧЕСТВО И ВЛИЯНИЕ ОТТО ВАРГА

А. РАПЧАК

OTTO VARGA'S WORK AND INFLUENCE

A. RAPCSÁK

FINSLER—ŌTSUKI-TEREK OSZKULÁLÓ PONTTEREIRŐL*

MOÓR ARTHUR

A Finsler—Ōtsuki-terek oly vonalelemterek, amelyekben a vektorok parallel eltolása kétféle eltolási paraméterrel: $'\Gamma_j{}^i{}_k$ és $''\Gamma_j{}^i{}_k$-vel van meghatározva, aszerint, hogy ko-, illetve kontravariáns vektor parallel eltolásáról van-e szó. Ezen két eltolási paraméter egy P^i_j vegyes tenzorral képezett

$$\partial_k P^i_j - (\dot{\partial}_t P^i_j)'\Gamma_s{}^t{}_k \dot{x}^s - {}'\Gamma_j{}^t{}_k P^i_t + {}''\Gamma_t{}^i{}_k P^t_j = 0 \tag{1}$$

relációval van összekapcsolva egymással, ahol a P^i_j tenzorról feltételezzük, hogy létezik az egyértelműen meghatározott Q^j_k inverz tenzora. A Finsler—Ōtsuki-térben ezen kívül definiálva van egy $F(x, \dot{x})$ függvénnyel a metrika és a Finsler-terekben szokásos módon a $g_{ik} := (1/2)\dot{\partial}_i \dot{\partial}_k F^2$ képlettel a metrikus alaptenzor. Az (1) egyenleten kívül fennáll még a

$$\overset{\circ}{\nabla}_k g_{ij} \equiv \partial_k g_{ij} - (\dot{\partial}_t g_{ij})'\Gamma_s{}^t{}_k \dot{x}^s - {}''\Gamma_i{}^t{}_k g_{tj} - {}''\Gamma_j{}^t{}_k g_{it} = 0 \tag{2}$$

reláció, így tehát a $'\Gamma_j{}^i{}_k$ és $''\Gamma_j{}^i{}_k$ eltolási paraméterek, amelyek közül az utóbbit j, k-ban szimmetrikusnak tételezzük fel, (1) és (2) egyenletekkel vannak meghatározva.

A Finsler-terek ma már klasszikusnak számító elméletében igen fontos szerepet játszanak az ún. oszkuláló pontterek, amelyek a tér struktúráját jelentős mértékben egyszerűsítik. Az első vizsgálat az oszkuláló terek elméletéből A. Nazim nevéhez fűződik (dissz. München, 1936). Az oszkuláló Riemann-tér elméletének megalapozása és ennek segítségével az invariáns differenciál bevezetése a Finsler-terekbe, az oszkuláló Riemann-tér és a Finsler-tér görbületi tenzoraira vonatkozó vizsgálatok elsősorban Varga Ottó nevéhez kapcsolódnak. További jelentősebb vizsgálatok a Finsler-tér oszkuláló tereire vonatkozóan D. Laugwitz munkásságában fordulnak elő.

A következőkben a Finsler—Ōtsuki-terek oszkuláló ponttereinek konstrukciójára vonatkozóan adunk egy rövid vázlatot, a részletesebb kidolgozást később publikálandó munkánkban tárgyaljuk.

Az oszkuláló terek alapgondolatából indulunk ki. Legyen adva egy $\dot{x}^i = r^i(x)$ iránymező, amely vagy egy n-dimenziós B_n tartományban, vagy legalábbis egy kiválasztott L_c: $\{x^i = x^i(t), \dot{x}^i = \dot{x}^i(t)\}$ vonalelemsorozat mentén egy

$$\partial_k r^i(x) + {}'\Gamma_j{}^i{}_k(x, r(x)) r^j(x) = 0 \tag{3}$$

$$\hat{P}^i_j(x) := P^i_j(x, r(x)) \tag{4}$$

* Varga Ottó születésének 75. évfordulója alkalmából 1984. november 20-án a Magyar Tudományos Akadémián tartott emlékülés egyik előadása.

egyenletrendszernek tesz eleget. („ˆ"-vel a továbbiakban az oszkuláló ponttér mennyiségeit fogjuk jelölni.) Ha

$$(5) \qquad {}'\hat{\Gamma}_{j\,k}^{\,i}(x) := {}'\Gamma_{j\,k}^{\,i}(x, r(x))$$

definiáló relációval értelmezünk egy csak a helytől függő és iránytól független eltolási paramétert, akkor a (3)—(5) relációk egy *oszkuláló affinösszefüggő Ōtsuki-féle pontteret* határoznak meg, amelyről a

$$(6) \qquad {}''\Gamma_{s\,k}^{\,i}\dot{x}^s = {}'\Gamma_{s\,k}^{\,i}\dot{x}^s + \dot{x}^i q_k$$

esetben számos előnyös tulajdonság mutatható ki. Például: *az affinösszefüggő oszkuláló Ōtsuki-térnek és a Finsler—Ōtsuki-térnek L_c mentén megegyeznek az invariáns differenciáljai és a különböző ${}'\Gamma_{j\,k}^{\,i}$, ill. ${}''\Gamma_{j\,k}^{\,i}$-ból képzett görbületi tenzorai. Ha* (3) *az egész B_n-ben fennáll, akkor a görbületi tenzorok kovariáns differenciáljai is azonosak lesznek.*

A Finsler—Ōtsuki-terek oszkuláló terei esetében a (3) és (4) relációk fennállását legalábbis egy L_c vonalelemsorozat mentén, (4)-et pedig egy B_n résztartományban mindig érvényesnek vesszük. Ezzel szemben (5) helyett más objektumoknak az azonosságát is alapul vehetjük és ily módon más Ōtsuki-féle pontterek állnak elő. Ezek közül elsősorban az *oszkuláló Riemann—Ōtsuki-féle pontteret* emeljük ki, amelynél (5) helyett a

$$(7) \qquad \hat{g}_{ik}(x) := g_{ik}(x, r(x))$$

definíció áll fenn. Ekkor Varga Ottó módszerét követve a (3) reláció az L_c mentén lesz érvényes, amennyiben (6) fennáll, hiszen (7)-ből és (6)-ból a (2) alapján először ${}''\hat{\Gamma}_{j\,k}^{\,i}(x) = {}''\Gamma_{j\,k}^{\,i}(x, r(x))$ érvényességét kapjuk meg az L_c mentén. *Az eltolási paraméterek és az invariáns differenciálok azonosak lesznek,* de a görbületi tenzorok azonossága csak további feltételek teljesülése esetén következik be.

Végül még utalunk rá, hogy a (6) reláció és ${}''\Gamma_{j\,k}^{\,i}$-nak j, k-ban való szimmetriája a (2) egyenlet miatt azt eredményezi, hogy a ${}''\Gamma_{j\,k}^{\,i}$ eltolási paraméterek a Cartan-elmélet $\Gamma_{j\,k}^{*i}$ eltolási paramétereivel fognak megegyezni és (1) révén a ${}'\Gamma_{j\,k}^{\,i}$ a P_j^i inverz tenzorával való kontrakció révén közvetlenül meghatározható. A (6) összefüggés egyszerűsíti és könnyen kezelhetővé teszi a teret jellemző egyenleteket, de ez a reláció nem feltétlenül szükséges és bizonyos tenzorok inverzei létezésének feltételezésével gyengíthető.

IRODALOM

[1] D. Laugwitz: Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen, *Archiv der Math.* **6** (1955), 448—453.

[2] A. Moór: Über oskulierende Punkträume von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten, *Annals of Math.* **56** (1952), 397—404.

[3] A. Nazim: *Über Finslersche Räume.* Diss. München, 1936.

[4] T. Ōtsuki: On general connections, I. *Math. J. Okayama Univ.* **9** (1960), 99—164.

[5] O. Varga: Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.* **50** (1941), 165—175.

[6] O. Varga: Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern, *Commentarii Math. Helv.* **19** (1946—1947), 367—380.

[7] O. Varga: Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 116—122.

О СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ФИНСЛЕРА—ОЦУКИ

А. МОР

ON OSCULATING POINT SPACES OF FINSLER—ŌTSUKI SPACES

A. MOÓR

A VARGA OTTÓ ÁLTAL ALAPÍTOTT DIFFERENCIÁLGEOMETRIAI ISKOLA JELENLEG[1]

TAMÁSSY LAJOS

Varga Ottó 1941-től 1958-ig, közel két évtizedig vezette a matematika oktatását és a differenciálgeometria kutatását a Debreceni Egyetemen. Előtte több évig dolgozott Prágában L. Berwald mellett, ahol már egész fiatalon magántanár lett. Közben egy esztendőt töltött Hamburgban W. Blaschke mellett, ahol az integrálgeometriában végzett kutatásokat. Azon geometria intenzív vizsgálatának és kiépítésének a megkezdése, amit ma Finsler geometriának nevezünk[2] Varga Ottó prágai tartózkodásának az idejére esik, és tulajdonképpen L. Berwald és É. Cartan nevéhez fűződik. Az ő érdemük az első jelentős eredmények elérése is. Varga Ottó ezekbe a kezdődő vizsgálatokba kapcsolódott be, és már számottevő eredmények birtokában, a differenciálgeometriai kutatások élvonalának képviselőjeként került Debrecenbe. Munkájához Debrecenben igen mostoha személyi körülmények között, lényegében egyetlen kinevezett munkatárs nélkül kezdett hozzá, de távozásakor — a kedvezőbbre fordult körülményeket is kihasználva — egy tudományos iskolát hagyott maga mögött. 75. születésnapjára emlékezve az általa létrehozott iskola jelenlegi tagjainak[3] munkáiból és eredményeiből szeretnék egy párat[4] felvillantani ebben az előadásban.

Varga Ottó munkásságának döntő részét a Finsler geometria és az affinösszefüggő vonalelemterek vizsgálatának szentelte. Nevét az ilyen vizsgálatok körében ma is az elsők között említik (lásd Rund [1]). A Finsler-típusú terek, valamint az affinösszefüggések általánosítását jelentő konnexió-elmélet ma is a debreceni geometriai kutatások két csomópontja. Az anyagot ezen két téma köré csoportosítjuk.

[1] Varga Ottó születésének 75. évfordulója alkalmából 1984. november 20-án a Magyar Tudományos Akadémián tartott emlékülés egyik előadása.

[2] A „Finsler geometria" elnevezés az amerikai J. H. Taylortól származik (1927). Előtte az ilyen tereket általánosított metrikájú tereknek nevezték. A Finsler-tér elnevezés elég véletlenszerű, később használata azonban általánosan elterjedt. A svájci Paul Finsler (1894—1970) csak egyetlen munkájában foglalkozott ezzel a térrel, az 1918-ban megjelent, C. Carathéodory mellett írt nevezetes disszertációjában, ahol a variációszámítás szemszögéből vizsgálja a kérdést. Finsler később matematikai logikával és filozófiával foglalkozott Basel-ban. Az általánosított metrikájú terek gondolata egyébként B. Riemannál jelenik meg először világosan 1854-ben.

[3] Debrecenből Varga Ottó mellől több kiváló geométer került az ország más egyetemeire és tudományos intézményeibe. Ezeknek munkásságát, továbbá azokét, akikre Varga Ottó budapesti működése alatt volt hatással, ez a munka nem öleli fel. Ezek az eredmények és hatások, vagy azok egy része bizonyára fellelhető az emlékülés többi előadásában.

[4] A cikk természetesen nem törekszik teljességre a jelenlegi debreceni differenciálgeométerek munkásságának ismertetésében. Általában egyszerűbben megközelíthető, megfogalmazható, és inkább újabb eredményeket mutat be.

A) Finsler geometria

1. *Pályaterek.* Az euklideszi geometriának alapvető fogalma az egyenes. Ennek metrikus általánosítása a legrövidebb ívhosszú görbe, a geodetikus vonal; az affin általánosítás pedig az egymással (önmagukkal) párhuzamos érintőkkel rendelkező görbe, az autoparallel görbe. Ezek a görbék a szokásos diffierenciálgeometriai terekben olyan görbeseregeket alkotnak, hogy minden pontból minden irányban egyetlen görbe indul ki. Így ezek közös összefoglalása és egyben bizonyos általánosítása a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -2G^i(x, \dot{x}) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

közönséges másodrendű differenciálegyenlet rendszer megoldásaiból álló pályasereg. Itt $x \equiv (x^1, x^2, ..., x^n)$ egy pont koordinátáit, $\dot{x}$ pedig az $x(t)$ első deriváltját jelenti. A szereplő függvényekről, leképezésekről és geometriai objektumokról, vektor és tenzormezőkről, összefüggési objektumokról stb. megfelelően sokszori, általában tetszőleges sokszori folytonos differenciálhatóságot teszünk fel[5]. (1) megoldásait pályáknak, a pályákkal ellátott teret pályatérnek, és egy ilyen tér geometriáját pályageometriának nevezzük.

Legyenek adva egy x koordinátákkal ellátott n-dimenziós X_n téren a pályák a $G^i(x, y)$, $y^j \equiv \frac{dx^j}{dt}$ függvényekkel. Ez egy $P_n(x)$ pályatér. Legyen $\bar{P}_n(\bar{x})$ egy másik pályatér, adva a $\bar{G}^i$ függvények által, és legyen $N: (x) \leftrightarrow (\bar{x})$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a két tér között. $\bar{P}_n$-en bevezethetők olyan új koordináták, hogy a képpont koordinátái az őspont x koordinátáival egyezzenek meg. N ekkor egy $P_n \leftrightarrow \bar{P}_n$ leképezés közös koordinátákkal. A leképezéseket ilyen közös koordinátákban fogjuk tekinteni. Egy alapvető kérdés, hogy N mikor visz át pályákat pályákba, azaz mikor pályatartó, vagy más szóval geodetikus. Ez a kérdés már Berwaldot is foglalkoztatta, és ő erre a következő feleletet találta (Berwald [1]): akkor és csak akkor, ha létezik olyan $p(x, y)$ y-ban elsőfokú pozitív homogén skalár függvény, hogy

$$\bar{G}^i = G^i + py^i. \tag{2}$$

Ez az eredmény azonban minden szépsége mellett sem effektív olyan értelemben, hogy N pályatartó voltának a problémáját átalakítja egy megfelelő tulajdonságú p létezésének a kérdésébe, de ezt már nem dönti el. Rapcsák András [1] effektív szükséges és elegendő feltételt adott N pályatartó voltára. Eredménye szerint N akkor és csak akkor pályatartó, ha P_n és $\bar{P}_n$ egymásnak megfelelő, azaz az azonos koordinátájú vonalelemeiben a két tér Douglas-féle D és Weyl-féle W tenzorai megegyeznek, továbbá ezen tenzorok saját terükben képezett kovariáns deriváltjainak különbségei megadott egyszerű módon képződnek ezen tenzorokból, valamint a pályatereket meghatározó G^i, illetve $\bar{G}^i$ függvényekből. Ebből az eredményből már rögtön következik, hogy D, W és ezek első kovariáns és y szerinti parciális deriváltjai a P_n egy teljes invariáns rendszerét alkotják. Ha ugyanis két pályatérnél ezek megegyeznek, akkor a mondott tétel szerint a pályák, és így az őket meghatározó G^i és $\bar{G}^i$ függvények is megegyeznek, ekkor pedig a két pályatér azonos. A pályatartó le-

[5] Az ilyen jellegű feltételek szűkítése a differenciálgeometriában általában nem játszik döntő szerepet.

képezés a pályageometriáknál az algebrai struktúrák izomorfizmusának, vagy a topologikus terek homeomorfizmusának a szerepét játssza.

A pályatér igen általános fogalmának speciális esetét kapjuk, ha egy Finsler-tér geodetikus vonalait tekintjük pályáknak. Így két Finsler-tér geodetikus leképezhetőségének feltétele kifejezhető az előző tételekkel, de eldönthető a Finsler-tereket közvetlenül meghatározó alapfüggvényekből is. Az igen egyszerűen és elegánsan megfogalmazható eredmény a következő:

Tétel (Rapcsák [2]): Egy F_n és egy $\bar{F}_n$ Finsler-tér akkor és csak akkor képezhető le egymásra geodetikusan, ha

$$\bar{L}_{|i} = \frac{\partial \bar{L}_{|s}}{\partial y^i} y^s, \tag{3}$$

ahol $\bar{L}(x, y)$ az $\bar{F}_n$ alapfüggvénye, $|i$ pedig az F_n-ben vett x^i szerinti Berwald-féle kovariáns derivált.

Rapcsák az F_n és $\bar{F}_n$ geodetikus leképezhetőségére még két másik feltételt is adott.

Fontos kérdés, hogy egy $P_n(x, y)$[6] mikor metrizálható, tehát mikor adható meg a pályatér $M = \{(x, y)\}$ alapsokaságán egy $\bar{F}_n$ Finsler-tér úgy, hogy $\bar{F}_n$ geodetikusai a P_n pályáival összeessenek. Ez a tágabb értelemben vett metrizálhatóság.

Tétel (Rapcsák [3]): Egy P_n pályatér akkor és csak akkor metrizálható (tágabb értelemben), ha létezik P_n-en y-ban nulladfokú pozitív homogén vektormező úgy, hogy

$$\lambda_{i|k} = \lambda_{k|i}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^i}, \quad \lambda_r y^r \quad y\text{-ban konvex.} \tag{4}$$

A pályateret szűkebb értelemben metrizálhatónak nevezzük, ha tágabb értelemben metrizálható, de bármely pálya (1)-ben használt t paramétere egyúttal a Finsler-térben mért ívhosszának lineáris függvénye. A szűkebb értelemben vett metrizálhatóságnak a pótlólagos szükséges és elegendő feltétele $\lambda_{i|k} = 0$.

Megjegyezzük, hogy a metrizálhatóság kérdésének az eldöntését visszavezethetjük a Finsler-terek geodetikus leképezhetőségének az előző tételben megválaszolt kérdésére. (3)-ban ugyanis az F_n metrikája nem játszik szerepet (az L alapfüggvény nem szerepel benne), csak a konnexió által meghatározott kovariáns derivált. Tehát (3) úgy is értelmezhető, mint egy P_n pályatér és egy $\bar{F}_n$ Finsler-tér geodetikus leképezhetőségének feltétele. Ha viszont egy P_n-hez van olyan $\bar{F}_n$, melyre az geodetikusan leképezhető, akkor P_n metrizálható (például magával az $\bar{F}_n$-nel). Tehát P_n metrizálhatóságának egy kritériuma (3) megoldhatósága egy $\bar{L}(x, y)$ alapfüggvényre, ahol $|j$ a P_n-ben vett Berwald-féle kovariáns derivált.

A geodetikus leképezhetőségnek egy igen egyszerű, de talán épp ezért kiemelt jelentőségű esete az, amikor egy pályatér, vagy speciálisan egy Finsler-tér az euklideszi térre képezhető le geodetikusan, azaz amikor a tér projektív[7] euklideszi. Ez azzal egyenértékű, hogy a pályákat egy megfelelő koordinátarendszerben lineáris egyenletek írják le. Ekkor (1)-ből láthatóan $G^i = 0$. Ha tehát P_n egy olyan pályatér, melynek egy alkalmas koordinátarendszerében $G^i = 0$, akkor pontosan az erre

[6] Bár a P_n alapjában ponttér, ahogy azt a $P_n(x)$ jelölés is mutatja, mégis a pályákat meghatározó G^i, és a tér minden további lényeges mennyisége, így a p skalár, a D és a W tenzor stb. x és y függvénye. Ezért célszerű vonalelemtérnek tekinteni a teret, és mint ilyet $P_n(x, y)$-nal jelölni.

[7] A projektív jelző itt a projektív transzformációknak arra a karakterisztikus tulajdonságára utal, hogy ezek a projektív tér egyeneseit újra egyenesekbe viszik át.

geodetikusan leképezhető, tehát az ezt metrizáló terek a projektív euklideszi terek. Egy P_n metrizálhatóságának a kritériuma azonban már ismert. Ezt fejezi ki (4). A mi P_n-ünk $G^i=0$ specialitása abban tükröződik, hogy a $|j$-vel jelölt kovariáns derivált az x^j-szerinti parciális deriváltba megy át. Így az előző tétel eredményének ilyen módosítása alapján azt kapjuk, hogy

Tétel (Rapcsák [4]): Pontosan azon Finsler-terek geodetikusai lesznek egyenesek egy megfelelő koordinátarendszerben, melyekben a

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^i}, \quad \lambda_r y^r \quad y\text{-ban konvex}$$

egyenletrendszernek létezik $\lambda_i(x, y)$-ra nulladfokú pozitív homogén megoldása. Ezen terek metrikus alapfüggvényei az ilyen koordinátarendszerekben $L(x, y)=\lambda_i(x, y)y^i$.

Ez Hilbert 4. problémájának megoldása a Finsler-terekre vonatkozóan. A projektív euklideszi Finsler-terek metrikus alapfüggvényét Rapcsák András más formában is ki tudta fejezni. A fentieket Matsumoto a témakör legalapvetőbb eredményeinek nevezi.

2. *Speciális Finsler-terek.* A vizsgálatoknak speciális Finsler-terekre való szűkítése egy megszorítás. Vegyük azonban figyelembe, hogy a Finsler-terek a metrikus differenciálgeometriai terek egy igen tág osztályát jelentik. Viszonylag kevés olyan érdekes kijelentés mondható, mely minden Finsler-térre igaz. Így az egyszerűbb Riemann, Minkowski vagy euklideszi terekhez valamilyen vonatkozásban többé vagy kevésbé közelebb fekvő, több jó tulajdonsággal rendelkező, valamilyen szempontból speciális Finsler-terekre való szorítkozás inkább a jelentőség fokozását, az érdekesség növelését jelenti. — Ma a lokális Finsler geometriai vizsgálatok túlnyomó többsége speciális Finsler-terekre vonatkozik. A speciális esetek jobb megismerésétől várnak általánosabb érvényű eredményt. — Az alábbiakban először speciális Finsler-terek egymásra való geodetikus leképezhetőségét, illetve az ilyen leképezések létezésének a következményeit tárgyaljuk.

Az E_3 euklideszi tér felületeinek vizsgálatánál Gauss által bevezetett görbület alapvető fogalma a V_n Riemann-terekbe a $P(x)$ ponthoz, és a ξ és η vektorok által felfeszített σ síkálláshoz rendelt $R(x, \xi, \eta)\equiv R(x, \sigma)$ szekcionális (metszet) görbület formájában vivődik át a következő alakban. Tekintsük a P-ből kiinduló, és σ-t érintő geodetikusokat. Ezek egy 2-dimenziós X_2 pontsokaságot, egy felületet határoznak meg. Ezen az X_2-n a V_n egy Riemann metrikát indukál, így X_2-t egy V_2-vé teszi, amely mint az E_3 egy felülete reprezentálható. Ennek Gauss görbülete az $R(x, \sigma)$ szekcionális görbület. Cartan óta a Finsler-tereket vonalelem-tereknek tekintjük[8]: minden objektum, így a vektor is egy x pontból és egy y irányból álló (x, y) vonalelemben van értelmezve. A görbület definíciójánál a ξ vektornak az (x, y)-ban értelmezett y^i komponensű vektort választjuk, tehát ξ már az (x, y) vonalelem által meg van határozva. η az (x, y)-ban értelmezett valamilyen másik vektor. Így a görbület $R(x, y, \eta)$. Ha ez független az $\eta(x, y)$-tól, akkor egy az alapulvett M vonalelemsokaságon értelmezett $R(x, y)$ skalár mezőhöz jutunk, és az F_n-et skalár görbületűnek nevezzük.[9] Ha R y-tól is független, akkor megmutatható, hogy x-től sem függ. Az ilyen tér konstans görbületű.

[8] Ez a szemlélet nélkülözhetetlen ahhoz, hogy a Finsler-terek elméletét a Riemann terek elméletéhez közelebb hozzuk, és ez utóbbi apparátusát bizonyos korlátok között alkalmazni tudjuk.

[9] Ez az eset a Riemann térben nem fordulhat elő, mert ott az η-tól való függetlenség a σ-tól való függetlenséget jelenti, aminek F. Schur egy ismert tétele szerint rögtön az x-től való függetlenség a következménye.

Rund [2], valamint Fukui és Yamada [1] a (2)-ben szereplő p függvény segítségével kifejezett szükséges feltételt találtak arra nézve, hogy egy skalár, illetve egy konstans görbületű Finsler-tér egy másik hasonló tulajdonságúra geodetikusan legyen leképezhető. Bácsó Sándor [1] hasonló jellegű, de lényegesen erősebb tételt igazolt. Két tetszőleges Finsler-tér esetén Rapcsák [2] dolgozatának felhasználásával megadott egy a $p_i \equiv \frac{\partial p}{\partial y^i}$-re vonatkozó differenciálegyenletekből és algebrai összefüggésekből álló vegyes rendszert, melynek megoldhatósága (integrabilitása) szükséges és elegendő a két tér geodetikus leképezhetőségéhez. Ez a feltétel (3)-nál összetettebb. Ennek skalár, illetve konstans görbületű Finsler-terekre való specializálása Rund, valamint Fukui és Yamada említett tételeinek az erősítése. Felhasználva Szabó Zoltán [1] azon érdekes eredményét, mely szerint egy Finsler-tér pontosan akkor skalár görbületű, ha a tér Weyl-tenzora eltűnik, olyan feltételekhez is jut, melyet egy Finsler-térnek szükségképpen teljesítenie kell, ha az egy másik, konstans görbületű Finsler-térre geodetikusan leképezhető.

Ez már egy Beltrami jellegű tétel. Beltrami megmutatta, hogy a Riemann-terek közül egy euklideszi térre a konstans görbületűek, és csak azok képezhetők le geodetikusan. Tehát azok, melyek az elliptikus, és a Bolyai-féle hiperbolikus geometriának a lokális modelljei. Ezen tétel szerint egy euklideszi térre való geodetikus leképezhetőség szigorú követelmény egy Riemann-térrel szemben, amit csak igen kevés Riemann-tér teljesít. Bácsó egy sor hasonló jellegű tételt talált speciális Finsler-terekben.

Egy Finsler-tér rekurrens görbületű, ha a $H_i{}^h{}_{jk}$ Berwald-féle görbületi tenzor Berwald-féle kovariáns deriváltja előáll egy λ vektornak és a görbületi tenzornak a szorzataként, tehát ha $H_i{}^h{}_{jk|l} = \lambda_l H_i{}^h{}_{jk}$. Ha $\lambda = 0$, akkor a teret szimmetrikusnak nevezzük, ha pedig a H görbületi tenzor szerepét a projektív deviáció $W^i{}_j$ tenzora veszi át, akkor a tér projektív rekurrens, illetve projektív szimmetrikus.

Tétel (Bácsó [2]): Ha két különböző, rekurrens görbületű Finsler-tér geodetikusan képezhető le egymásra, akkor mindkettő konstans görbületű Riemann-tér, és így mindkettő projektív euklideszi, feltéve, hogy $H_i{}^r{}_{jr} y^i y^j \neq 0$.

Hasonló Beltrami jellegű eredményekhez jutott $P^* - F_n$ és Cartan-rekurrens, valamint projektív rekurrens, általánosított projektív rekurrens, továbbá projektív félig szimmetrikus terekben [3]. A Finsler-teret projektív félig szimmetrikusnak nevezzük, ha $W^i{}_{j|k|l} = W^i{}_{j|l|k}$; és általánosított projektívnek, ha $W^i{}_{j|k} = \sigma_k W^i{}_j + v_j W^i{}_k + \mu^i \tilde{W}_{jk}$, ahol σ, v, μ valamilyen vektor, $\tilde{W}$ pedig egy (0, 2) típusú tenzor. A legutóbbi fogalom N. Szinyukovtól származik, a projektív rekurrens, szimmetrikus, illetve félig szimmetrikus terek fogalmát R. B. Misra vezette be. Különböző rekurrens terekkel sokat foglalkozott Moór Arthur. A $P^* - F_n$ tér fogalma pedig H. Izumi-tól származik.

Említettük, hogy ha egy skalár görbületű Finsler-térben az $R(x, y)$ görbületi skalár az y iránytól független, akkor a Finsler-terekre vonatkozó Schur-tétel szerint x-től is független, tehát konstans görbületű. Bácsó megmutatta, hogy itt az y-tól való függetlenség a rekurrenciával [2], illetve egy bizonyos tenzor relációval pótolható [4].

Az F_n Finsler-tereknek a két legfontosabb speciális esete az M_n Minkowski-tér és a V_n Riemann-tér. Ezek úgy jellemezhetők, hogy megfelelő koordinátarendszerben az $L(x, y)$ alapfüggvény független x-től, illetve a $g_{ik}(x, y)$ mérték tenzor független y-tól. Ezek nem tenzori jellemzések (az első például egy kitüntetett koordinátarendszer típushoz kötött). A Minkowski-tér egy elegáns tenzori jellemzése az $R_j{}^i{}_{kl}$ görbületi tenzor és a $C_{ijk|l}$ tenzor eltűnése. Ezt már Cartan is észrevette, de a bizonyítás

Varga Ottótól származik. Ha csak az utóbbi eltűnését kívánjuk meg, akkor a B_n Berwald-terekhez jutunk, melyeknek jellemző geometriai tulajdonsága, hogy megfelelő koordinátarendszerben a párhuzamos eltolás, és így annak $\Gamma^{*i}_{j\ k}$ együtthatói függetlenek az y iránytól, csak a helytől függnek. Kántorné Varga Tünde [1] és Numata egymástól függetlenül megmutatták, hogy

Tétel (Varga Tünde [1]): A konstans görbületű Berwald-terek vagy konstans görbületű Riemann-terek, vagy lokálisan Minkowski-terek, attól függően, hogy az R görbületi konstans különbözik zérótól, illetve egyenlő zéróval.

Ezt az eredményt M. Hashiguchival [1] közösen a Berwald-tér általánosítását jelentő Wagner-terekre is sikerült átvinni. Itt az eredmény nem konstans, hanem az azoknál bővebb skalár görbületű Wagner-terek osztályára vonatkozik. Az állítás pedig annyiban enyhébb, hogy az ilyen tereknek csak a konformitását mondja ki a konstans görbületű Riemann, illetve a lokálisan Minkowski-terekhez.

Ezen rész befejezéseként egy olyan problémát említünk, melynek megoldásában a direkt, konstruktív módszer meglepően hasznosnak bizonyult. Hogy erre kitérünk, annak egyik oka, hogy a direkt geometriai módszert Varga Ottó is kedvelte. Ez alapvetően geometriai gondolkodásának tulajdonképpen nagyon megfelelt, bár ismeretes, hogy ez a módszer a Finsler-, sőt a differenciálgeometriában is csak elvétve jut szóhoz, használhatósága a differenciálgeometriában meglehetősen korlátozott.

Legyen az E_2 euklideszi síkon P egy változó, F_1 és F_2 két fix pont, F és g egy rögzített pont, illetve egyenes, a és λ pedig két konstans. Ekkor $\varepsilon_1 := \{P | \overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a > 0\}$ és $\varepsilon_2 := \{P | \frac{\overline{Pg}}{\overline{PF}} = \lambda > 1\}$ az ellipszisek két definíciója. Ha az egyenest geodetikus vonallal pótoljuk, akkor az ε_1 és ε_2-re adott definíciók a Minkowski-tér síkjaira, továbbá a 2-dimenziós Riemann és Finsler síkokra is átvihetők[10]. Így ott $\{\varepsilon_1\}$ és $\{\varepsilon_2\}$ két görbeosztályt ad. Moór Arthurtól származik a kérdés, hogy a két görbeosztály a felsorolt terekben mikor esik össze. Miután az analitikus vizsgálatok nehezen kezelhető formulákhoz vezettek, főleg a direkt módszert alkalmazva sikerült megmutatni (Tamássy—Bélteky [1]), hogy az összeesés minden esetben a tér euklideszi voltával egyenértékű.

3. *Areal terek*. Míg a Finsler geometria az ívhosszmérést általánosítja:

$$s := \int_{t_1}^{t_2} L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt, \quad ds^2 = L^2(x, dx) = g_{ij}(x, \dot{x})\, dx^i dx^j,$$

addig az areal terek a térfogat (felszín) mérés általánosításaként jöttek létre. Egy $A_n^{(m)}$ $(1 \leqq m \leqq n-1)$ areál térben az m dimenziós $x^i = x^i(u^1, \dots, u^m)$ felület felszíne

$$A := \int_B \mathfrak{F}\big(x(u), p(u)\big)\, du, \quad p := \frac{\partial x}{\partial u^1} du^1 \wedge \dots \wedge \frac{\partial x}{\partial u^m} du^m,$$

ahol $\mathfrak{F}$ a tér metrikus alapfüggvénye, B pedig a felület értelmezési tartománya. A differenciálgeometriai módszerek alkalmazásához mindenekelőtt egy olyan g_{IK} metrikus m-tenzorra van szükség, melyre

$$g_{IK}(x, p) p^I p^K = \mathfrak{F}^2(x, p) \quad \forall x, p. \tag{5}$$

[10] V_n-ben és F_n-ben nehézség merül fel. Ezekben a sík legtermészetesebb megfelelője a totálgeodetikus felület. De ilyen felületek a V_n-ben és az F_n-ben általában nem léteznek. A kérdéssel Varga Ottó is foglalkozott.

Itt I és K az $1, 2, \ldots, m$ számok m-ed osztályú variációi, és g_{IK} teljesen antiszimmetrikus mind az I-t jelentő első m számú indexben, mind a K-t jelentő utolsó m indexben. Egy ilyen metrikus m-tenzornak az $\mathfrak{F}$ alapfüggvényből való megkonstruálását A. Kawaguchi és H. Iwamoto végezték el. (Megjegyezzük, hogy a g_{IK}-t az $\mathfrak{F}$-ből $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}^2}{\partial p^I \partial p^K}$ formában a Finsler geometria hasonlatára nem lehet képezni, mert a p egyszerű m-vektor p^I komponensei $\mathfrak{F}$-nek nem független változói, mivel közöttük a Plücker reláció áll fenn.)

A g_{IK} metrikus m-tenzorból a legtöbb esetben egy (0, 2) típusú $g_{ik}(x, p)$ metrikus 1-tenzort is le lehet vezetni. Egy V_n Riemann-tér által indukált $A_n^{(m)}(V_n)$ areál térben a metrikus m-tenzort és 1-tenzort a

$$(6) \qquad g_{IK} = m!\, g_{[i_1[j_1} g_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot g_{i_m] j_m]}$$

reláció köti össze. $[\ldots]$ itt alternálást jelent az $i_1, i_2, \ldots, i_m$, illetve $j_1, \ldots, j_m$ indexekre. (6) lehetővé teszi a viszonyok lényeges egyszerűsítését, és a Riemann-tér elméletéhez való közelítést. (6) azonban — mint azt K. Tandai megmutatta — a Kawaguchi-féle metrikus m-tenzorra és 1-tenzorra csak a szélső eseteket jelentő $m=1$, illetve $m=n-1$ esetében, azaz csak a Finsler és Cartan geometriában áll fenn. — A legtöbb areál térben, melyeket regulárisnak nevezünk, sikerült az $\mathfrak{F}$ alapfüggvényből olyan, a Kawaguchiétól különböző $\hat{g}_{IK}$ tenzort konstruálni, mely kielégíti (5)-öt, tehát metrikus m-tenzor $A_n^{(m)}$-ben, és (6)-ot is kielégíti, tehát rendelkezik az említett kedvező tulajdonságokkal (Tamássy [1]). Ebből már rögtön következik a

Tétel (Tamássy [1]): Minden reguláris $A_n^{(m)}$ areál tér bármely m-dimenziós síkállásban egy E_m euklideszi térrel approximálható.

B) Konnexió elmélet

A vektorok párhuzamossága minden differenciálgeometriai térben alapvető kérdés. Varga Ottó is több dolgozatában foglalkozott ilyen, tulajdonképpen konnexióelméleti kérdésekkel. Egyik legelső dolgozatában (Varga Ottó [1] és [2]) lényegében E. Cartan-nal egyidőben, és tőle függetlenül a vonalelem terek affin összefüggését alapozza meg.[11]

1. *Tenzori konnexiók.* Egy differenciálgeometriai struktúra nélküli ponttér, vagy egy differenciálható sokaság esetén a párhuzamosságot a szomszédos x és $x+dx$ pontok érintőterei közötti $T_x \to T_{x+dx}$ lineáris vagy nem lineáris leképezés segítségével definiáljuk. A $\xi^i(x(t))$ vektorok párhuzamossága a vektormező $\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_j{}^i{}_k(x)\xi^j \frac{dx^k}{dt}$ abszolút deriváltjának az eltűnésével egyenlő. Mivel a tenzorok vektorok tenzori szorzataként, vagy ezek összegeként állíthatók elő, ezért az abszolút deriválást, és így a párhuzamos eltolást ilyen úton lehetséges és szokásos

[11] Varga Ottó itt nem használ metrikát, és ennyiben Cartan-nál általánosabb.

a vektorokról a tenzorokra kiterjeszteni. (2, 0) típusú tenzorok esetén[12] ez az abszolút derivált

$$\frac{DT^{ij}}{dt} = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^s} + \Gamma_r{}^i{}_s T^{rj} + \Gamma_r{}^j{}_s T^{ir}\right)\frac{dx^s}{dt}. \tag{7}$$

Ezen az úton azonban a szomszédos pontokhoz tartozó $T_x^{(2)}$, $T_{x+dx}^{(2)}$ tenzorterek között a párhuzamos eltolás révén nem jöhet létre akármilyen $T_x^{(2)} \to T_{x+dx}^{(2)}$ leképezés, csak erősen speciálisak. Ezeket a Γ vektori konnexió által indukált tenzori konnexiónak nevezzük. Az általános esetnek a $\dfrac{\vartheta T^{ij}}{dt} \equiv \left(\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^s} + \gamma^{ij}{}_s(T, x)\right)\dfrac{dx^s}{dt}$ formájú abszolút derivált felel meg. Ez pontosan akkor redukálódik (7)-re, ha

$$\gamma^{ij}{}_s(T, x) = (\delta_k^i \Gamma_l{}^j{}_s(x) + \delta_l^j \Gamma_k{}^i{}_s(x))T^{kl}.$$

Ebben az esetben a γ tenzori konnexiót redukálódónak nevezzük. A redukció történhet nemlineáris vektori konnexióra, vagy két különböző vektori konnexióra is.

A fenti észrevételekből kiindulva több dolgozatban vizsgáltuk a tenzori konnexiókat, a redukció esetét és feltételeit, a redukció esetén a tenzori és a vektori konnexiók megfelelő objektumai közötti kapcsolatokat és további kérdéseket. Két különböző $\gamma(T, x)$ és $\bar{\gamma}(\bar{T}, \bar{x})$ tenzori konnexió equivalenciájának a vizsgálata egy A és egy R görbületi- és egy S torzió-tenzorhoz vezetett, melyek kovariáns deriváltjaikkal együtt a tenzori konnexiót már teljesen meghatározzák. Megmutattuk, hogy a (2, 3) típusú A tenzor eltűnése a szimmetrikus vektori konnexióra való redukálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Ezen esetben R és S az indukáló vektori konnexió görbületi és torzió tenzorába megy át (Tamássy [2] és [3]). Érdekes eredmény, hogy egy affin tenzori konnexiót indukálhatnak nem affin vektori konnexiók is (Nguyen van Tu [1]).

A tenzorok speciális esetei a bivektorok (illetve az m-vektorok). Ezek egy síkállást (illetve m-dimenziós síkállást) határoznak meg. A bivektorok párhuzamosságával tehát a síkállások párhuzamosságát jellemezhetjük, természetesen a vektorok párhuzamosságának a fogalma nélkül. Megjegyezzük, hogy a bivektorok párhuzamosságához lényegében csak a tenzori konnexió redukciójának az esetében létezik a vektorok olyan párhuzamossága, hogy a bivektort (síkállását) felfeszítő két vektor párhuzamos eltoltja a bivektor eltoltjának a síkállását feszíti fel. Ebben az esetben a vektoroknak a kívánt párhuzamosságát éppen az a vektori konnexió adja meg, amelyre a tenzori konnexió redukálódik. Bivektortartó tenzoriálisan összefüggő terekben értelmeztük és vizsgáltuk az autoparallel görbék analogonját, amit quasiautoparallel görbének neveztünk (Tamássy—Bácsó [1]). Egy ilyen térben egy $x^i(t)$ görbét akkor nevezünk quasiautoparallelnek, ha létezik a görbe mentén egy párhuzamosan eltolt $p^{ij}(t)$ bivektor mező, melynek síkállása tartalmazza a görbe érintőjét, azaz ha

$$\frac{dp^{ij}}{dt} + \gamma^{ij}{}_r(p, x)\frac{dx^r}{dt} = f(t)p^{ij} \quad \text{és} \quad p^{ij} \wedge \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Ahogy affin térben az autoparallel görbék az egyeneseket adják, ugyanúgy a quasiautoparallel görbék az affin térben a síkgörbékkel azonosak. Ilyen értelemben a quasiautoparallel görbék a síkgörbék általánosításai. Míg azonban az autoparallel

[12] (2, 0) típusú tenzorok helyett minden nehézség nélkül tekinthetünk (p, q) típusú tenzorokat is. Ebben az esetben azonban az explicit formulák alakja bonyolultabb, így ezt mellőzzük.

görbékből minden irányban pontosan egy indul ki, addig a quasiautoparallel görbéknél nemcsak a kiinduló $\underset{\circ}{x}^i$ pontot és ebben a p_0^{ij} ($p_0^{12} \neq 0$) bivektort adhatjuk meg tetszőlegesen, hanem a görbe $[x^1, x^2]$ koordináta síkra vetett $x^\alpha(t)$ $\alpha = 1, 2$ $(x^\alpha(t_0) = \underset{\circ}{x}^\alpha)$ projekcióját is. Ez az affin esetben igen szemléletes. A quasiautoparallel görbe fogalma igen közel áll Szinyukov majdnem geodetikus görbéjének a fogalmához (H. C. Синюков [1]), csak ő ezt a fogalmat affinösszefüggő térben alkotta meg, ahol a síkállások párhuzamosságánál több, a vektorok párhuzamosságának a létezése van megkövetelve. A két fogalom közötti kapcsolatot is mutatja a következő

Tétel (Tamássy—Bácsó [1]): Egy gyengén lineáris redukálódó tenzorkonnexió quasiautoparallel görbéi azon affinösszefüggő tér majdnem geodetikus görbéivel esnek össze, melyre a tenzori konnexió redukálódik.

Bácsó Sándor vizsgálata bivektor tartó tenzorösszefüggéssel ellátott terek quasiautoparallel tartó leképezéseit [5], valamint ilyen terek autoparallel és quasiautoparallel felületeit.

Egy $\varphi^i(x)$ vektormezővel ellátott affinösszefüggő tér egy $x(t)$ görbéjét Szinyukov és Mikes φ-planárisnak nevezi, ha bármely $\dot{x}(t)$-nek az $\underset{\circ}{x} = x(t_0)$-ba való párhuzamos eltoltja benne van az $[\dot{x}(t_0), \varphi(\underset{\circ}{x})]$ síkban. Ezek vizsgálatába bekapcsolódva Verhoczki László [1] megmutatta, hogy két ilyen tér között egy leképezés pontosan akkor φ-planáris görbe tartó, ha a leképezés az egyik φ vektormezőt a másikba viszi át.

Ezen lokális jellegű vizsgálatoknak a kezdete Varga Ottó debreceni működéséig nyúlik vissza. További részletezésük helyett rátérünk az utóbbi időben végzett globális konnexióelméleti vizsgálatainkra.

2. *Vektornyaláb konnexiók.* A globális differenciálgeometria eszköztára és apparátusa lényegesen különbözik a lokálistól. Egyik alapfogalma a $\xi = (E, \pi, M, F)$ fibrált nyaláb, ahol M az alapsokaság, E a totáltér, π a projekció leképezés, és F a fibrum típus. A szokásos differenciálgeometriai terek konnexióinak vizsgálata esetén F legtöbbször egy véges dimenziós valós vektortér, amikor is ξ-t vektornyalábnak nevezzük. Ennek legegyszerűbb esete a τM érintőnyaláb, amikor E az M összes érintőiből áll: $E = \bigcup_{p \in M} T_p M$. Konnexióelméleti vizsgálataink elsősorban vektor nyalábokra, illetve a fibrált nyalábok egy másik hasonlóan egyszerű esetére, a principális nyalábokra irányultak.

Mint ismeretes, egy ξ vektornyalábon egy H konnexiót az $0 \to V\xi \xrightarrow{\iota} \tau E \xrightarrow{j} \pi^*(\tau M) \to 0$ rövid egzakt sor egy $H: \pi^*(\tau M) \to \tau E$ hasításaként lehet megadni, ahol H rendelkezik a $j \circ H = \mathrm{Id}$ tulajdonsággal. Ebben az egzakt sorban $V\xi$ a $\mathrm{Ker}\, d\pi = 0$ által meghatározott vertikális nyaláb, $\pi^*(\tau M) = (E \underset{M}{\times} TM, pr_1, E, R^n)$ a τM-nek a $\pi: \xi \to M$ leképezés által indukált nyalábja (pull back nyaláb, indukált nyaláb), ι a résznek az egészbe való beágyazása (inklúzió), j pedig a $TE \to E \underset{M}{\times} TM$, $T_z E \ni v \mapsto (z, d\pi(v))$; $(z \in E)$ leképezés. Egy ilyen konnexió lineáris, ha a fibrumok párhuzamos eltoltja a lineáris kombinációt változatlan együtthatókkal megőrzi. Az általános konnexiónak egy fontos speciális esete a homogén konnexió, ahol bármely fibrum tetszőleges z eleme (vektora) konstans-szorosának a párhuzamos eltoltja z párhuzamos eltoltjának a szorzata az előző konstanssal. Szilasi József [2] azokat a konnexiókat vizsgálta, melyek $\forall t \in R$-re teljesítik a

$$\text{(HC)} \qquad h \circ d\mu_t = d\mu_t \circ h$$

homogenitási feltételt, ahol $\mu_t: E \to E$, $z \mapsto tz$; $h := H \circ j$ pedig a τE-n ható horizontális projekció. Megmutatta, hogy a (HC) lokális komponensekben a $\Gamma_i^\alpha(x, y)$

$i=1, 2, \dots, \dim M(=n)$ $\alpha=1, 2, \dots, \dim F(=r)$ összefüggési koefficiensek y-ban való $\Gamma_i^\alpha(x, ty)=t\Gamma_i^\alpha(x, y)$ elsőfokú homogenitásával egyenértékű.

Jelöljük $\dot{E}$-tal azt a sokaságot, amit ξ totálteréből, E-ből a nullvektorok, azaz az M feletti zéró-metszet (zero-section) elhagyásával kapunk. Figyelemre méltó Szilasinak az az alapjában véve egyszerű észrevétele, hogy (HC) a $H\in C^r$ $(r\geqq 1)$ feltétellel (amit mindig fel szoktak tételezni, ha csak mást nem kötnek ki) már a H konnexió linearitását indukálja, míg a $H|_{T\dot{E}}\in C^r$ és $H\in C^0$ az úgynevezett homogén konnexiókat adja, melyek az összefüggési koefficiensek mondott homogenitásával jellemezhetők. Szilasi ennek segítségével több, a konnexió linearitásával egyenértékű feltételt talált. Ilyenek a (HC)-n kívül pl. a $d\mu_t\circ v=v\circ d\mu_t$, a $K\circ d\mu_t=\mu_t\circ K$, vagy a $[C, X^h]=0$ $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$, ahol $v:=\iota-h$ a vertikális projekció, $K\colon TE\to E$ a Dombrowski leképezés, X^h az X horizontális liftje, $C(z)$ az a kanonikus vektor mező, mely egy (x^i, y^α) lokális koordinátarendszerben az e_α bázisú F_x fibrum y^α komponensű $z=y^\alpha e_\alpha$ pontjához a $C(z):=y^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_z$ vertikális vektort rendeli, $[\,,]$ pedig a Lie szorzat szokásos szimbóluma.

A konnexióelméletnek lényeges kérdése a horizontális leképezés integrálhatósága, ami a disztribúciónak felfogható $\operatorname{Im} H$ integrálhatóságát jelenti. Az integrálhatóság vizsgálatának az eszköze az $R:=-\frac{1}{2}[h, h]$, $R\colon \mathfrak{X}(E)\times\mathfrak{X}(E)\to\mathfrak{X}_V(E)$ Nijenhuis-féle görbületi tenzor, és az $\tilde{R}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\operatorname{End}\operatorname{Sec}\xi$ görbületi forma. Ezeknek a kapcsolatát adja a következő

Tétel (Szilasi [3]): Egy ξ vektornyaláb H lineáris konnexiójának esetén $\alpha\circ R(X^h, Y^h)\circ\sigma=\tilde{R}(X, Y)(\sigma)$.

Ez az

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tilde{R}(X,Y)(\sigma)"'] & E \arrow[d, "R(X^h, Y^h)"] \\ E & VE \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

diagramm záródását jelenti, és Dombrowski [1] megfelelő eredményének az általánosítása.

A H integrálhatóságára számos equivalens feltétel nyerhető (Szilasi [3]). Ilyenek pl., hogy a h, vagy a v, vagy a majdnem szorzat struktúrát meghatározó $P:=2h-1$ operátorok valamelyike integrálható, vagy az, hogy $\tilde{v}\circ[\tilde{h}, \tilde{h}]=0$, illetve $[\tilde{P}, \tilde{P}]=0$. Az itt szereplő operátorok mindegyike $\operatorname{End}\tau E$ egy eleme. Egy ilyennek az integrálhatósága az invariáns résznyalábjainak, és azok direkt összegeinek az integrálhatóságát jelenti. $\tilde{h}$ az az $(1, 1)$ tenzormező $\mathfrak{X}(E)$-n, melynek hatása a $h\colon \mathfrak{X}(E)\to\mathfrak{X}(E)$-vel megegyezik. Hasonlóan értelmezhető $\tilde{v}$ és $\tilde{P}$ is.

Megjegyezzük, hogy a görbület-fogalom közvetlenül a Dombrowski leképezés segítségével is leírható. L. N. Patterson megmutatta, hogy lineáris konnexiók esetén a $C:=K\circ dK-K\circ dK\circ S\colon TTE\to TE$ leképezés tekinthető a H-hoz tartozó görbületi formának ($S\colon TTE\to TTE$ a jól ismert kanonikus involúció). Ezt az eredményt T. Q. Binh [1] általánosította homogén konnexiókra. R és C kapcsolatát illetően a következő összefüggést kapta:

$$R(X^h, Y^h)\circ\sigma = \alpha^{\#}\sigma\circ C\circ dY^h\circ X^h\circ\sigma,$$

ahol $\alpha^{\#}\sigma$ a $\sigma\in\operatorname{Sec}\xi$ metszetnek az $\alpha\colon VE\to E$ kanonikus leképezés által meghatározott visszahúzott (pull back) leképezése.

A globális vizsgálatok megindulása után indokolt volt a tenzori konnexiók problémáit globális szempontból is megvizsgálni és továbbgondolni. Egy M alapsokaság különböző pontjaiban vett azonos valenciájú, (p, q) típusú tenzorok összessége egy vektornyalábot képez, melynek rangja $(\dim M)^{p+q}$. Így a tenzori konnexiók vizsgálata besorolható a vektornyaláb konnexiók vizsgálatába, bár az utóbbiak később kezdődtek, mint az előbbiek. Ilyen globális vizsgálatokat végzett Szilasi [1].[13] Vizsgálataiban a kiinduló vektornyalábok rangja egymástól és a közös bázis sokaság dimenziójától független érték. Külön figyelmet szentel a homogén konnexióknak, ahol újra hasznos fogalomnak bizonyul a (HC) homogenitási feltétel.

Két tetszőleges közös bázisterű $\overset{\nu}{\xi}=(\overset{\nu}{E}, \overset{\nu}{\pi}, M, \overset{\nu}{F})$, $\nu=1, 2$ fibrált nyalábból egy harmadik $\tilde{\xi}=(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M, \tilde{F})$ fibrált nyaláb készíthető, ha $\overset{\nu}{F}$-re egy $\beta\colon \overset{1}{F}\times\overset{2}{F}\to\tilde{F}$ leképezés is van értelmezve. Ha $\overset{\nu}{\xi}$-n még két $\overset{\nu}{H}$ konnexió is adva van, akkor ezekhez $\tilde{\xi}$-on egy $\tilde{H}$ konnexiót konstruálhatunk (Tamássy [4]). Ez az indukált tenzori konnexió lényeges általánosításnak tekinthető. Tenzori konnexióhoz úgy jutunk vissza, ha feltételezzük, hogy $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$ vektorterek, β pedig a $\otimes$-al jelölt tenzori szorzat. Ekkor $\tilde{F}$ egy F vektor (tenzor) tér dekomponálható elemeiből álló része, és $\tilde{H}$ egyszerűen és egyértelműen terjeszthető ki egy H konnexióvá a $\xi=(E, \pi, M, F)$-en. Ezzel kapcsolatban megmutattuk, hogy

Tétel (Tamássy [4]): H akkor és csak akkor indukálható két $\overset{\nu}{H}$-ből, ha a H által meghatározott disztribúció $T\tilde{E}$-ban fekszik.

Az antiszimmetrikus tenzorok nyalábján értelmezett konnexiókat vizsgálta Kozma László [1]. Megmutatta, hogy ezeknek egy lineáris konnexiójához tartozó párhuzamos eltolás pontosan akkor bivektor (m-vektor) tartó, ha a konnexió redukálódó.

3. *Finsler konnexiók.* A vektornyalábok azért játszanak fontos szerepet a Finsler geometriában, mert az n dimenziós Finsler vektorok még a klasszikus esetben is az eredeti n dimenziós M bázis sokaság $2n$ dimenziós $\xi\equiv\tau M=(B, \pi, M, R^n)$ érintőnyalábján vannak értelmezve, és így a Finsler vektorok az $\eta=V\xi=(E, \pi_E, B, F)$ $F=R^n$ vektornyaláb elemei. Tehát a Finsler konnexió a $V\xi$ egy lineáris konnexiója. A Finsler geometriában azonban a $V\xi$ lineáris konnexiója mellett a ξ egy általános (vagy homogén) konnexiója is szerepet játszik, aminek megadása a $\tau\xi$-nek egy $V\xi\oplus H\xi$ formájú Whitney decompozíciójával egyenértékű. Ennek egy újabban gyakran vizsgált általánosításához jutunk, ha a Finsler vektorok terének a rangját az alapsokaság dimenziójától független r értéknek tekintjük. Ekkor ξ is szükségképpen M feletti r rangú vektornyaláb. R. Miron és munkatársai előnyösnek találták a $V\xi$ konnexióját a $\tau\xi=V\xi\oplus H\xi$ konnexiója részeként felfogni és tanulmányozni. Így érthetően közel esik a Finsler geometriához az $\eta=\eta_1\oplus\eta_2$ vektornyalábok olyan konnexiójának a vizsgálata, mely invariáns a vektornyaláb két η_1, η_2 Whitney komponensén. Ilyen konnexiók létezésével, valamint a fellépő nyalábok Dombrowski leképezésével foglalkozik Tamássy és Kis Béla [1] dolgozata. Az $r=n$ esetben vizsgálták a $V\xi$ konnexiójának egy kiterjesztését $\tau\xi$-re, és ennek az inverzét, azt, hogy a $\tau\xi$-n adott és $V\xi$-n invariáns konnexió mikor lesz egy ilyen kiterjesztés. Szilasi és Kozma László [1] az η_1 és η_2-n adott vertikális projekciókból vertikális projekciót, és így konnexiót konstruáltak η-n. Ezen konnexiókat alkalmazták a Finsler geometriában, továbbá megmutatták, hogy

[13] Ilyen vizsgálatokat természetesen sokan mások is folytattak. Így pl. K. Yano, S. Kobayashi stb.

Tétel (Szilasi—Kozma [1]): Egy vektornyaláb H horizontális leképezése akkor és csak akkor homogén, ha a H-ból konstruált ∇^B Berwald konnexió deflexió mentes.

Így a Berwald konnexió bizonyos tulajdonságából az eredeti konnexióra tudtak visszakövetkeztetni. Azt is megmutatták, hogy ∇^B mindig lineáris; és $R = \nabla^B v$, ahol R a H görbületi tenzora.

Ismeretes, hogy τB egy konnexiója egy olyan $\nabla\colon \mathfrak{X}(B)\times\mathfrak{X}(B)\to\mathfrak{X}(B)$, $X, Y\mapsto \nabla_X Y$ leképezés, mely eleget tesz Koszul négy axiómájának, azaz $C^\infty(B)$ lineáris X-ben, R-lineáris Y-ban, és $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$, $f\in C^\infty(B)$. Di Comite 1969-ben ezt úgy általánosította, hogy τB egy A endomorfizmusának a pótlólagos megadása után az utolsó összefüggés helyett a $\nabla_X fY = (A\circ X)fY + f\nabla_X Y$-t követelte meg. Az ilyen (∇, A) párt pszeudokonnexiónak nevezte. I. Candela 1982-ben a fogalmat τB helyett tetszőleges ξ vektornyalábra vitte át. Szilasi és Kovács Zoltán [1] észrevették, hogy ez az érdekes fogalom lényegesen tovább fejleszthető, és ilyen formában jól használható a Finsler típusú konnexiók vizsgálatában. Általánosításuk abban rejlik, hogy az X vektorokat τB helyett egy tetszőleges B bázisú $\tilde{\xi}$ vektornyalábból veszik. Ekkor $\nabla\colon \mathrm{Sec}\,\tilde{\xi}\times\mathrm{Sec}\,\xi\to\mathrm{Sec}\,\xi$, $X\in\mathrm{Sec}\,\tilde{\xi}$, $Y\in\mathrm{Sec}\,\xi$, $f\in C^\infty(B)$ és A egy $\tilde{\xi}\to\tau B$ morfizmus. Ekkor a (∇, A) párt egy ξ-ben vett, $\tilde{\xi}$-ra vonatkozó pszeudokonnexiónak nevezik.

Ez a fogalom tulajdonképpen a Finsler-típusú konnexiók vizsgálata közben jött létre. — Legyen adva ξ-ben egy konnexió, és így a H horizontális leképezés. Ez meghatározza $\tau\xi$-nek a $V\xi\oplus H\xi$ Whitney felbontását. $\tau\xi$-nek egy ∇ lineáris konnexióját Finsler típusúnak nevezik H-ra vonatkozóan, ha invariánsan hagyja ezt a felbontást. H ismeretében könnyen lehet ilyet konstruálni. Kérdés, $\tau\xi$ mely konnexiói Finsler típusúak. A válasz megadásához tekintsük a következő pszeudokonnexiókat:

$$(\nabla^h, H);\quad \nabla^h\colon \mathrm{Sec}\,\pi^*(\tau B)\times\mathrm{Sec}\,\pi^*(\tau B)\to\mathrm{Sec}\,\pi^*(\tau B)$$

$$(\tilde{\nabla}^h, H);\quad \tilde{\nabla}^h\colon \mathrm{Sec}\,\pi^*(\tau B)\times\mathrm{Sec}\,V\xi\to\mathrm{Sec}\,V\xi$$

$$(\nabla^v, H);\quad \nabla^v\colon \mathrm{Sec}\,V\xi\times\mathrm{Sec}\,V\xi\to\mathrm{Sec}\,V\xi$$

$$(\tilde{\nabla}^v, H);\quad \tilde{\nabla}^v\colon \mathrm{Sec}\,V\xi\times\mathrm{Sec}\,\pi^*(\tau B)\to\mathrm{Sec}\,\pi^*(\tau B)$$

és ezekből képezzük $\tau\xi$-n a

$$\nabla\colon (X, Y)\to\nabla_X Y := H\circ\nabla^h_{X^h}Y^h + \nabla^v_{X^v}Y^v + H\circ\tilde{\nabla}^v_{X^v}Y^h + \tilde{\nabla}^h_{X^h}Y^v \tag{8}$$

konnexiót.

Ehhez kapcsolódva Kovács Zoltán [1] kimutatta, hogy a Finsler típusú konnexióknak R. Miron és Szabó Zoltán által adott látszólag meglehetősen különböző két felépítése lényegében ugyanaz, és egészen természetes kapcsolatban áll a Matsumoto-féle elmélettel.

Az itt ismertetett eredmények több szálon is kapcsolódnak és kötődnek Varga Ottó munkáihoz. Közvetve, vagy sokszor közvetlenül az ő munkájára épülnek. A debreceni differenciálgeométerek hálásan emlékeznek egykori professzorukra és tudományos vezetőjükre.

IRODALOM

BÁCSÓ S.: [1] A remark on geodesic mappings of Finsler spaces, *Proc. of the third Nat. Sem. on Finsler spaces*, Brasov (1984), 43—48.

[2] Rekurrens Finsler terek geodetikus leképezése (oroszul), *VINITI* **1215** (1984), 15.

[3] Projektív félig szimmetrikus Finsler terek geodetikus leképezései (oroszul), *VINITI* **2621** (1982), 11.

[4] Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume von konstanter Krümmung, *Acta Math. Hung.* **43** (1983), 233—236.

[5] Kváziautoparallel tartó leképezésekről, *Publ. Math. Debrecen* **29** (1982), 155—161 (oroszul).

BERWALD, L.: [1] Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV, *Ann. of. Math.* **48** (1947), 753—781.

BINH, T. Q.: [1] A remark on the curvature of vector bundles, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai,* Vol. **45** (1987).

DOMBROWSKI, P.: [1] On the geometry of tangent bundle, *J. Reine Angew. Math.* **210** (1962), 73—88.

FUKUI, M.—YAMADA, T.: [1] On projective mappings in Finsler geometry, *Tensor N. S.* **35 (1981)**. 216—222.

HASHIGUCHI, M.—VARGA T.: [1] On Wagner spaces of *W*-scalar curvature, *Studia Sci. Math. Hung.* **14** (1979), 11—14.

KOVÁCS Z.: [1] A note on Finsler connections, *Publ. Math. Debrecen* **34** (1987).

KOZMA L.: [1] On linear connection of the bivectors, *Per. Math. Hung.* **18** (1987).

RAPCSÁK A.: [1] Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 225—230.

[2] Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 285—290.

[3] Über die Metrisierbarkeit affinzusammenhängender Bahnräume, *Annali di Mat. Pura ed Appl.* **57** (1962), 233—238.

[4] Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 164—167.

[5] Metrikus és affinösszefüggő pályaterek pályatartó leképezései, *MTA III, Oszt. Közleményei* **11** (1961), 339—369.

RUND, H.: [1] *The Differential Geometry of Finsler Spaces,* Springer, Berlin, 1959.

SZABÓ Z. I.: [1] Ein Finslerscher Raum ist gerade dann von skalarer Krümmung, wenn seine Weylsche Projektivkrümmung verschwindet, *Acta Sci. Math. Szeged* **39** (1977), 163—168.

SZILASI J.: [1] Notes on tensorial connections, *Publ. Math. Debrecen* **31** (1984), 29—37.

[2] Horizontal maps with homogeneity condition, *Rend. Palermo Suppl.* **3** (1984), 307—320.

[3] On the curvature and integrability of horizontal maps, *Acta Math. Hung.* **46** (1986), 183—188.

SZILASI J.—KOVÁCS Z.: [1] Pseudoconnections and Finsler-type connections, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai,* Vol. **44** (1987).

SZILASI J.—KOZMA L.: [1] Remarks on Finsler-type connections, *Proc. of the third Nat. Sem. on Finsler spaces,* Brasov (1984), 181—195.

СИНЮКОВ, Н. С.: [1] *Геодезические отображения римановых пространств,* Наука, Москва, 1979.

TAMÁSSY L.: [1] Metric tensors of areal spaces, *Tensor N. S.* **31** (1977), 165—174.

[2] Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), 65—82.

[3] On nonlinear tensorial connections, *Publ. Math. Debrecen* **16** (1969), 193—197.

[4] Some questions of tensor connections, *Tensor N. S.* **39** (1982), 90—94.

TAMÁSSY L.—BÁCSÓ S.: [1] On quasi-autoparallel curves in tensorially connected spaces, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **31** (1979), 725—737.

TAMÁSSY L.—BÉLTEKY K.: [1] On the coincidence of two kinds of ellipses in Minkowskian spaces and in Finsler planes, *Publ. Math. Debrecen* **31** (1984), 157—161.

TAMÁSSY L.—KIS B.: [1] Relations between Finsler and affine connections, *Rend. Palermo Suppl.* **3** (1984), 329—337.

TU, NGUYEN VAN: [1] On affine reducible tensorial connections, *Per. Math. Hung.* **6** (1975), 245—253.

VERHOCZKI L.: [1] Affinösszefüggő terek kváziplanáris leképezései. I. díjas OTDK dolgozat, 1984. Közlésre előkészületben.

НАСТОЯЩЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ, ОСНОВАННОЙ ПРОФЕССОРОМ ОТТО ВАРГА

Л. ТАМАШИ

THE PRESENT OF THE DIFFERENTIAL GEOMETRIC SCHOOL, FOUNDED BY OTTO VARGA

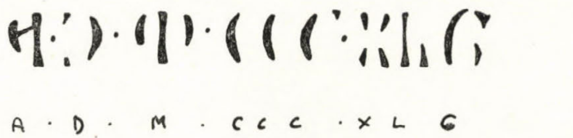
L. TAMÁSSY

HINDU-ARAB SZÁMJEGYEK A 14. SZÁZADI MAGYARORSZÁGON

LŐVEI PÁL

A hindu-arab számjegyírás eddig közölt legkorábbi magyarországi példái az erdélyi Magyarvalkó (Văleni) templomában olvasható 1407-es évszámban, illetve egy 1436-ból való selmecbányai (Banská Štiavnica) számadáskönyvben találhatók: [1], [2]. Az itt következők mutatják, hogy az új számjegyek, ha szórványosan is, de már a 14. században megjelentek hazánkban.

A Magyar Nemzeti Múzeum egy, a Somogy megyei Segesdről származó sírkövén (leltári száma: 1878. 95. 4) a halálozási évszám feloldása nehézségekbe ütközött: A. D. (= Anno Domini = időszámításunk szerint), majd a római számjegyekből álló MCCCXL után egy furcsa, semelyik római számjeggyel nem egyező, G betűhöz hasonló jel szerepelt (l. a mellékelt ábrát). A megoldást a sírkő szövegének és az



1. ábra

írott forrásoknak az elemzése szolgáltatta. A sírkövet egy bizonyos Miklós mesternek állították, akinek eleinte még ismeretlen nevű apja báni méltóságot viselt. A név, az 1340-es évekre tehető halálozási időpont, az apa rangja, a Somogy megyei eredet követelményrendszerének egyetlen, az okleveles anyagból ismert személy tett eleget: Gutkeled nembeli Miklós szlavón bán fia Miklós mester. Egy 1346. október 21-én kelt oklevélben már hátrahagyott birtokairól olvashatunk. A sírkő szövege szerint halála október 20-án következett be — a számba jöhető örökösök már másnap bejelentették igényüket a hagyatékra. Az évszám végén álló ismeretlen jel tehát 6-ot jelöl — a legkorábbi ma ismert hindu-arab számjegy Magyarországon, [3].

Az említett, 1407-es magyarvalkói felirat és a sírkő röviddel 1346 utáni keletkezése közötti mintegy 60 év túl nagy ugrásnak tűnt, ezért megkíséreltünk további korai emlékeket találni. A sírkövek vizsgálata nem látszott célravezetőnek, mert a középkori magyarországi síremlékek összegyűjtése során nyert tapasztalataink szerint a segesdi sírkő ebből a szempontból egyedül áll, a hindu-arab számjegyek csak a 15. század második feléből származó sírköveken tűnnek fel ismét. Nem fordulnak elő az új számjegyek, Engel Pál szíves közlése szerint, az oklevelek dátumaiban sem a 15. század vége előtt. Érdemesnek tűnt azonban a városok írásos anyagában körülnézni, ott is elsősorban a hosszabb jegyzékek ígértek sikert. És valóban, az 1379-es, legkorábbi soproni telekkönyvben — a háztulajdonosok összeírásában —, a házak csoportjainak sorszámaként megtalálható a 2, 3, 4, 5 és 6 hindu-arab számjegyekkel, [4].

Már a 15. században, 1435-ben, de még mindig elég korán íródott egy levél, amelyet Bazini György „anno domini 3° 5°" keltezett a ma Burgenlandban található Ruszton (Rust) [5], minden bizonnyal a szomszédos osztrák vidékeken akkor már jócskán elterjedt „új divatot" követve.

IRODALOM

[1] Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története,* Budapest, 1974²., 19—20., 9. ábra.
[2] Filep László—Bereznai Gyula: *A számírás története,* Budapest, 1982., 115—116., ábrával.
[3] Engel Pál—Lővei Pál—Varga Lívia: Gótikus sírkövek Máriavölgyről és Segesdről, *Művészettörténeti Értesítő* XXX(1981), 142—143., 3. kép.
[4] Házi Jenő: *Sopron szabad királyi város története I/1,* Sopron, 1921., 185—187, 189.
[5] Uo. *I/3,* Sopron, 1924., 110.

ИНДИЙСКО-АРАБСКИЕ ЦИФРЫ В ВЕНГРИИ XIV-ГО ВЕКА

П. ЛЁВЕИ

INDIAN-ARABIC NUMERALS IN HUNGARY OF THE 14TH CENTURY

P. LŐVEI

EGY MÁSODRENDŰ ALGEBRAI DIFFERENCIÁLEGYENLETRŐL II.

FÉNYES TAMÁS

Bevezetés

A dolgozatban a Mikusiński-féle M operátortestben értelmezett

$$fD^2(y)+[f^2-D(f)]D(y)+af^3y=0 \tag{1}$$

algebrai differenciálegyenlettel foglalkozunk. D az ismert algebrai deriválást jelöli, $f\neq 0$ a $\langle 0, \infty)$ tartományon értelmezett adott lokálisan integrálható függvény, a tetszőleges adott valós szám, $y\in M$ az (1) differenciálegyenlet ismeretlenje. A lokálisan integrálható függvények L konvolúciógyűrűjében (1) nyilvánvalóan ekvivalens egy konvolúciótípusú integrálegyenlettel. A dolgozatban az f függvény origó környezetében való viselkedésére kirótt alább ismertetett feltétel teljesülése mellett előállítjuk (1) általános operátoros megoldását és megadjuk a nemtriviális függvénymegoldások egzisztenciájára vonatkozó feltételeket. Az alábbiakban a D helyett a $'$ jelölést használjuk.

A dolgozat feltételezi az operátorszámítás és az abban alkalmazott jelölések ismeretét.

Az (1) algebrai differenciálegyenlet vizsgálata

(1)-et f-fel osztva az

$$y''+\left(f-\frac{f'}{f}\right)y'+af^2y=0 \tag{1.1}$$

alakra jutunk. Az f-re nézve megköveteljük az

$$\frac{f(t)-\gamma}{t}\in L \tag{i}$$

feltétel teljesülését, ahol γ valamilyen valós szám. (Az (i) feltételnek eleget tevő γ szám unicitása triviális) (lásd [1]).

Keressük (1.1) egy partikuláris operátoros megoldását

$$y=s^{\alpha\gamma}\exp\left\{\alpha\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\}u \tag{1.2}$$

alakban, ahol $u\in M$ és α valamilyen (egyelőre ismeretlen) valós vagy komplex számot jelöl. (1.2)-t (1.1)-be helyettesítve — a számolások mellőzésével — u-ra az alábbi differenciálegyenlet adódik

$$u''+\left(2\alpha f+f-\frac{f'}{f}\right)u'+(\alpha^2+\alpha+a)f^2u=0. \tag{1.3}$$

Ha α értékét úgy választjuk, hogy

$$\alpha^2+\alpha+a=0,$$

azaz

$$\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2},$$

akkor az (1.3) egy megoldása

$$u=1.$$

Következésképp, ha $a\neq\frac{1}{4}$, akkor (1.1) partikuláris megoldásai

$$\begin{aligned} y_1&=s^{\alpha_1\gamma}\exp\left\{\alpha_1\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\},\\ y_2&=s^{\alpha_2\gamma}\exp\left\{\alpha_2\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\}\end{aligned} \tag{1.4}$$

és az általános megoldás

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

(C_1, C_2 tetszőleges számok).

Ha $a=\frac{1}{4}$, akkor $\alpha_1=\alpha_2=-\frac{1}{2}$ és

$$y_1=s^{-\frac{\gamma}{2}}\exp\left\{\frac{f(t)-\gamma}{2t}\right\}.$$

Könnyen meghatározható az y_2 másik partikuláris megoldás is (melynek egzisztenciájáról ab ovo nem tudhatunk semmit). Ekkor (1.3) az

$$u''-\frac{f'}{f}u'=0 \tag{1.5}$$

alakra redukálódik és azonnal látható, hogy (1.5) általános megoldása

$$u=c_1+c_2\int f, \tag{1.6}$$

ahol az integrál az ún. Gesztelyi-féle algebrai integrált jelöli, mely az algebrai deriválás inverze (lásd Gesztelyi [2]).

Az algebrai integrált könnyen kiszámíthatjuk. (i) feltételt figyelembe véve

$$\int f=\int\{f(t)-\gamma+\gamma\}=\left\{\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\}-\gamma s\{\log t\}. \tag{1.7}$$

Végeredményben kapjuk, hogy

$$y_2=\left[\left\{\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\}s^{-\frac{\gamma}{2}}-\gamma s^{1-\frac{\gamma}{2}}\{\log t\}\right]\exp\left\{\frac{f(t)-\gamma}{2t}\right\} \tag{1.8}$$

és az általános megoldás

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Rátérünk a lokálisan integrálható függvénymegoldások vizsgálatára. Itt az a értékétől függően több esetet kell megkülönböztetni. Bevezetjük a $\varrho = \left\{\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\}$ jelölést.

I. $a<0$. Ekkor

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 < 0.$$

Az operátorszámítás elemeiből ismeretes, hogy $s^{\alpha\gamma}$ akkor és csakis akkor függvény, ha $\operatorname{Re}[\alpha\gamma]<0$ és ekkor

$$s^{\alpha\gamma} = \left\{\frac{t^{-\alpha\gamma-1}}{\Gamma(-\alpha\gamma)}\right\},$$

ahol Γ a gammafüggvényt jelöli, továbbá

$$\exp\left\{\alpha\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\} = e^{\alpha\varrho} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\{\varrho(t)\}^k.$$

Rögtön látható, hogy

ha $\gamma > 0$, akkor $y_2 \in L$, $y_1 \notin L$,

ha $\gamma < 0$, akkor $y_2 \notin L$, $y_1 \in L$,

ha $\gamma = 0$, akkor $y_2 \notin L$, $y_1 \notin L$,

(lásd Fényes [1]). Azonban $\gamma=0$ esetben is létezik függvénymegoldás. Ugyanis

$$y_1 - y_2 \in L,$$

mivel

$$y_1 - y_2 = e^{\alpha_1\varrho} - e^{\alpha_2\varrho} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_1^k}{k!}\{\varrho(t)\}^k - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_2^k}{k!}\{\varrho(t)\}^k.$$

II. $a=0$. Ekkor $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-1$. (1.4)-ből

$$y_1 = 1, \quad y_2 = s^{-\gamma}e^{-\varrho}. \tag{1.9}$$

Nyilvánvalóan $y_1 \notin L$, továbbá $y_2 \in L$ akkor és csakis akkor, ha $\gamma>0$. Ha $\gamma=0$, akkor

$$y_1 - y_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\varrho^k \in L.$$

Ha $\gamma<0$, akkor nemtriviális függvénymegoldás nem létezik. Tegyük fel az ellenkezőjét, legyen az (1.9) alapján felírt

$$y = C_1 + C_2 s^{-\gamma}e^{-\varrho} \tag{1.10}$$

megoldás lokálisan integrálható függvény valamely $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ mellett. Ekkor írható, hogy

$$\{y(t)\}s^{\gamma} = C_1 s^{\gamma} + C_2 e^{-\varrho}.$$

Ez azonban lehetetlen, mert a kapott egyenlőség bal oldalán függvény áll, jobb oldalán nem.

III. $0<a<\frac{1}{4}$. Ekkor

$$\alpha_1<0, \quad \alpha_2<0$$

és (1.4) figyelembevételével

$$y_1 \in L, \quad y_2 \in L, \quad \text{ha} \quad \gamma>0;$$

$$y_1 \notin L, \quad y_2 \notin L, \quad \text{ha} \quad \gamma \leqq 0;$$

azonban $\gamma=0$-ra csakúgy, mint I. és II. esetekben

$$y_1-y_2=e^{\alpha_1 \varrho}-e^{\alpha_2 \varrho} \in L,$$

$\gamma<0$ esetén nemtriviális függvénymegoldás nincs. Ugyanis, ha léteznének olyan $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ számok, mely mellett az

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2=C_1 s^{\alpha_1 \gamma} e^{\alpha_1 \varrho}+C_2 s^{\alpha_2 \gamma} e^{\alpha_2 \varrho} \tag{1.11}$$

lokálisan integrálható függvény lenne, úgy (1.11)-et az

$$\{y(t)\} s^{-\alpha_2 \gamma}=C_1 s^{(\alpha_1-\alpha_2) \gamma} e^{\alpha_1 \varrho}+C_2 e^{\alpha_2 \varrho} \tag{1.12}$$

alakra átírva $\alpha_1>\alpha_2$ miatt azt kapnánk, hogy (1.12) bal oldalán függvény áll, jobb oldalán nem. Ellentmondás.

IV. $a=\frac{1}{4}$.

Nyilvánvalóan $y_1 \in L$, akkor és csakis akkor, ha $\gamma>0$. Megmutatjuk, hogy

$$y_2 \in L, \quad \text{ha} \quad \gamma \geqq 0,$$

$$y_2 \notin L, \quad \text{ha} \quad \gamma<0.$$

Az állítás $\gamma=0$ esetben egyszerűen következik (1.8)-ból. Ha $\gamma>0$, úgy csak azt kell megmutatnunk, hogy az (1.8)-ban

$$s^{1-\frac{\gamma}{2}}\{\log t\} \in L.$$

Ha ez igaz, akkor (1.8)-ból adódik, hogy $y_2 \in L$. Valóban,

$$s^{-\frac{\gamma}{2}}\{\log t\}=\left\{\frac{t^{\gamma/2-1}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right\}\{\log t\}=$$

$$=\left\{\frac{t^{\gamma/2} \log t}{\frac{\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}+\frac{t^{\gamma/2}}{\frac{\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\left[\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}-\frac{2}{\gamma}\right]\right\}.$$

(Itt a $'$ jelölés természetesen a közönséges — nem az algebrai — deriválást jelöli.)

A kapott függvényt differenciálva adódik, hogy

$$s^{1-(\gamma/2)}\{\log t\} = \left\{\frac{t^{\gamma/2-1}\log t}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{t^{\gamma/2-1}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\left[\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right]\right\}.$$

Végül, ha $\gamma<0$, úgy írhatjuk, hogy

$$\frac{y_2}{y_1} = \left\{\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\} - \gamma s\{\log t\}.$$

Mivel

$$\frac{1}{y_1} \in L, \quad \text{ha} \quad \gamma < 0,$$

ezért y_2 nem lehet függvény, mert akkor $\frac{y_2}{y_1}$ is az lenne, ami lehetetlen, mert

$$\left\{\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\} - \gamma s\{\log t\}$$

nem függvény.

Azt kell még kimutatni, hogyha $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ tetszőleges számok, akkor $\gamma<0$ esetén

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \notin L,$$

azaz ekkor (1)-nek nincs nemtriviális függvénymegoldása. Valóban, tegyük fel, hogy $y \in L$, akkor

$$\frac{y}{y_1} = C_1 + C_2\frac{y_2}{y_1} = C_1 + C_2\int f = C_1 + C_2\left\{\frac{f(t)-\gamma}{-t}\right\} - C_2\gamma s\{\log t\} \tag{1.13}$$

beletartozik L-be, de akkor triviálisan

$$C_1 - C_2\gamma s\{\log t\}$$

is lokálisan integrálható lenne. Ez azt jelenti, hogy létezne olyan $z \in L$ függvény, melyre teljesül, hogy

$$\left\{\int_0^t z(\tau)\,d\tau\right\} = \{C_1 - C_2\gamma \log t\}, \quad t \geqq 0.$$

Ez lehetetlen, így $y \notin L$.

V. $a > \frac{1}{4}$. Ekkor.

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + i\nu,$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} - i\nu,$$

$$\nu = \frac{\sqrt{4a-1}}{2}.$$

(1.4)-ből

$$y_1 \in L, \quad y_2 \in L, \quad \text{ha} \quad \gamma > 0;$$

$$y_1 \notin L, \quad y_2 \notin L, \quad \text{ha} \quad \gamma \leqq 0;$$

$$y_1 - y_2 \in L, \quad \text{ha} \quad \gamma = 0.$$

Az (1.4) operátorok által megadott függvények komplex értékűek. Célszerű (1.1) megoldásait valós alakban előállítani. Ez könnyen elérhető. (1.4) alapján $\gamma>0$-ra

$$(1.14) \quad y_1 = \left\{ \frac{t^{\gamma/2-1}(\cos(\nu\gamma \log t) - i \sin(\nu\gamma \log t))}{\Gamma\left[\gamma\left(\frac{1}{2} - i\nu\right)\right]} \right\} e^{-\varrho/2}(\cos(\nu\varrho) + i \sin(\nu\varrho)),$$

$$y_2 = \left\{ \frac{t^{\gamma/2-1}(\cos(\nu\gamma \log t) + i \sin(\nu\gamma \log t))}{\Gamma\left[\gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu\right)\right]} \right\} e^{-\varrho/2}(\cos(\nu\varrho) - i \sin(\nu\varrho)),$$

mely megoldásokból elemi módon az alábbi valós értékű lineárisan független függvénymegoldásokat nyerjük

$$(1.15) \quad \bar{y}_1 = \left\{t^{\frac{\gamma}{2}-1} \cos(\nu\gamma \log t)\right\} e^{-\frac{\varrho}{2}} \cos \nu\varrho + \left\{t^{\frac{\gamma}{2}-1} \sin(\nu\gamma \log t)\right\} e^{-\frac{\varrho}{2}} \sin \nu\varrho,$$

$$\bar{y}_2 = \left\{t^{\frac{\gamma}{2}-1} \cos(\nu\gamma \log t)\right\} e^{-\frac{\varrho}{2}} \sin \nu\varrho - \left\{t^{\frac{\gamma}{2}-1} \sin(\nu\gamma \log t)\right\} e^{-\frac{\varrho}{2}} \cos \nu\varrho.$$

Ha $\gamma=0$, akkor

$$(1.16) \quad y_1 = e^{\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\varrho} = e^{-\frac{\varrho}{2}}(\cos \nu\varrho + i \sin \nu\varrho),$$

$$y_2 = e^{-\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)\varrho} = e^{-\frac{\varrho}{2}}(\cos \nu\varrho - i \sin \nu\varrho).$$

Ezekből a valós alakú megoldásokat az alábbi alakban nyerjük:

$$(1.17) \quad \bar{y}_1 = e^{-\frac{\varrho}{2}} \cos \nu\varrho \notin L,$$

$$\bar{y}_2 = e^{-\frac{\varrho}{2}} \sin \nu\varrho \in L.$$

Végül legyen $\gamma<0$. Ekkor nemtriviális függvénymegoldás nem létezik. Tételezzük fel az ellenkezőjét, legyenek $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ olyan számok, melyekkel a

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 s^{\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\gamma} \exp\left[\left(-\frac{1}{2}+i\nu\right)\varrho\right] + C_2 s^{-\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)\gamma} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)\varrho\right]$$

operátor egy $y(t) \neq 0$ függvényt állít elő. Ekkor írható, hogy

$$(1.18) \quad y s^{\left(\frac{1}{2}-i\nu\right)\gamma} e^{i\nu\varrho} = C_1 e^{2i\nu\varrho} + C_2 s^{-2i\nu\gamma}.$$

Mivel $\gamma<0$, ezért (1.18) bal oldalán függvény áll, jelöljük ezt $F(t)$-vel. (1.18)-at s-sel osztva:

$$(1.19) \quad \left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{C_1}{s} e^{2i\nu\varrho} + \frac{C_2}{s^{1+2i\nu\gamma}};$$

mivel

$$e^{2iv\varrho} = 1+h, \quad \text{ahol} \quad h\in L,$$

kapjuk, hogy

$$(1.20) \quad \int_0^t F(u)\,du = C_1 + C_1 \int_0^t h(u)\,du + \frac{C_2}{\Gamma(1+2iv\gamma)} (\cos(2v\gamma \log t) + i \sin(2v\gamma \log t)),$$

mely nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen a

$$\cos(2v\gamma \log t), \quad \sin(2v\gamma \log t)$$

függvények nem is abszolút folytonosak. Ellentmondás. Érvényes tehát az alábbi

Tétel. (1) *algebrai differenciálegyenletnek az* (i) *feltétel teljesülése esetén két lineárisan független megoldása van az operátortestben. A lokálisan integrálható nem-triviális függvénymegoldások egzisztenciájára vonatkozólag az alábbi táblázat érvényes.*

	$\gamma>0$	$\gamma=0$	$\gamma<0$
$a<0$	y_2	y_1-y_2	y_1
$a=0$	y_2	y_1-y_2	—
$0<a<\frac{1}{4}$	$y_1,\ y_2$	y_1-y_2	—
$a=\frac{1}{4}$	$y_1,\ y_2$	y_2	—
$a>\frac{1}{4}$	$y_1,\ y_2$	y_1-y_2	—

IRODALOM

[1] Fényes Tamás: Egy harmadfajú integrálegyenletről, *Matematikai Lapok* **32** (1981—1985), 247—248.

[2] Gesztelyi, E.: Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 215—243.

[3] Mikusiński, J.: *Operátorszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, 1961.

ОБ ОДНОМ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА II.

Т. ФЕНЕШ

ON A SECOND-ORDER ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATION II.

T. FÉNYES

A HAHN—BANACH-FÉLE INVARIÁNS KITERJESZTÉSI TÉTEL IS ÉLESÍTHETŐ

PÁLES ZSOLT és SZÁZ ÁRPÁD

J. D. Weston [7], konvex halmazok egy alapvető elválasztási tételének a felhasználásával megmutatta, hogy a klasszikus Hahn—Banach-féle kiterjesztési tételben a majoráló funkcionálról a szublinearitás helyett elegendő csak a konvexséget feltételezni.

Mi itt most ugyanezt bizonyítjuk az alábbi, jóval általánosabb és sokkal jobban alkalmazható, úgynevezett invariáns kiterjesztési tétellel kapcsolatban, ami a klasszikus kiterjesztési tételből elemi, de eléggé hosszadalmas számolással nyerhető [5, 252.].

1. Tétel. *Legyen f egy lineáris funkcionál az X valós vektortér Z alterén, p egy szublineáris funkcionál az X-en és a $\mathcal{T}$ az X lineáris operátorainak egy kommutatív félcsoportja úgy, hogy*

$$f(z) \leqq p(z), \quad f(T(z)) = f(z), \quad p(T(x)) \leqq p(x)$$

minden $z \in Z$, $T \in \mathcal{T}$ és $x \in X$ esetén. Akkor létezik egy olyan F lineáris funkcionál az X-en, amire

$$F(z) = f(z), \quad F(x) \leqq p(x), \quad F(T(x)) = F(x)$$

teljesül minden $z \in Z$, $x \in X$ és $T \in \mathcal{T}$ esetén.

Az 1. Tétel említett élesítéséhez egyedüli segédeszközünk a következő alapvető észrevétel, ami a konvex függvények tanításánál is jól hasznosítható.

Lemma. *Legyen q egy konvex funkcionál az X valós vektortéren úgy, hogy $q(0) \geqq 0$, és legyen*

$$p(x) = \inf \{t^{-1} q(tx) \colon t > 0\}$$

minden $x \in X$ esetén. Akkor a p a legnagyobb olyan szublineáris funkcionál az X-en, amire $p \leqq q$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $x \in X$, akkor minden $t > 0$ esetén

$$(1+t)^{-1} q(tx) + t(1+t)^{-1} q(-x) \geqq q(0) \geqq 0,$$

vagyis $t^{-1} q(tx) \geqq -q(-x)$, amiből világos, hogy $p(x) \geqq -q(-x) > -\infty$.

Másrészt, ha $x, y \in X$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $t > 0$ és $s > 0$ úgy, hogy

$$p(x) + \varepsilon 2^{-1} > t^{-1} q(tx) \quad \text{és} \quad p(y) + \varepsilon 2^{-1} > s^{-1} q(sy).$$

Ezekből látható, hogy

$$p(x)+p(y)+\varepsilon > (t+s)(ts)^{-1}(s(t+s)^{-1}q(tx)+t(t+s)^{-1}q(sy)) \geqq$$
$$\geqq (t+s)(ts)^{-1}q\big(ts(t+s)^{-1}(x+y)\big) \geqq p(x+y).$$

Következésképpen $p(x)+p(y) \geqq p(x+y)$.

Továbbá, ha $x \in X$ és $\alpha > 0$, akkor nyilván

$$t^{-1}q(t\alpha x) = \alpha(t\alpha)^{-1}q(t\alpha x) \geqq \alpha p(x),$$

vagyis $p(\alpha x) \geqq \alpha p(x)$. Ebből, az α, ill. az x helyébe α^{-1}-et, ill. αx-et téve világos, hogy $\alpha p(x) \geqq p(\alpha x)$ is teljesül. Tehát $p(\alpha x) = \alpha p(x)$. (Innen, az x helyére 0-át írva $p(0)=0$, vagyis $p(0x)=0p(x)$ is kiadódik.)

Végül, ha h egy szublineáris funkcionál az X-en úgy, hogy $h \leqq q$, és $x \in X$, akkor speciálisan minden $t > 0$ esetén

$$h(x) = t^{-1}h(tx) \leqq t^{-1}q(tx),$$

amiből $h(x) \leqq p(x)$ következik. (Továbbá, a p definíciójának a természetes volta is láthatóvá válik.)

Ezen Lemma felhasználásával most már az 1. Tétel a következőképpen élesíthető:

2. Tétel. *Legyen f egy lineáris funkcionál az X valós vektortér Z alterén, q egy konvex funkcionál az X-en és $\mathscr{T}$ az X lineáris operátorainak egy kommutatív félcsoportja úgy, hogy*

$$f(z) \leqq q(z), \quad f\big(T(z)\big) = f(z), \quad q\big(T(x)\big) \leqq q(x)$$

minden $z \in Z$, $T \in \mathscr{T}$ és $x \in X$ esetén. Akkor létezik egy olyan F lineáris funkcionál az X-en, amire

$$F(z) = f(z), \quad F(x) \leqq q(x), \quad F\big(T(x)\big) = F(x)$$

teljesül minden $z \in Z$, $x \in X$ és $T \in \mathscr{T}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen p olyan mint az előző Lemmában. Akkor nyilván $f(z) \leqq p(z)$ minden $z \in Z$ esetén.

Másrészt, ha $x \in X$ és $T \in \mathscr{T}$, akkor minden $t > 0$ esetén

$$p\big(T(x)\big) \leqq t^{-1}q\big(tT(x)\big) = t^{-1}q\big(T(tx)\big) \leqq t^{-1}q(tx),$$

vagyis $p\big(T(x)\big) \leqq p(x)$ is teljesül.

Így az 1. Tétel garantálja a megfelelő tulajdonságú lineáris funkcionál létezését.

Megjegyzések. A klasszikus Hahn—Banach-féle kiterjesztési tétel Weston-féle élesítése úgy látszik elkerülte a tankönyvírók figyelmét, hiszen az csak R. B. Holmes [3] kiemelkedő könyvében található meg. A [7] cikk pedig csupán csak Holmes, egy a könyve irodalomjegyzékében elsőként szereplő cikkében van idézve.

Így valószínűnek látszik, hogy a Hahn—Banach-féle invariáns kiterjesztési tétel itt közölt élesítése explicit formában korábban még sehol sem szerepelt. Meglepő módon a bizonyításhoz felhasznált alapvető lemmát sem találtuk meg a konvex függvények kiterjedt irodalmában.

A Hahn—Banach-féle kiterjesztési tételek történetét, illetve modern irodalmát illetően B. Fuchssteiner és W. Lusky [2] kitűnően megírt könyvét ajánljuk az érdeklődő olvasó figyelmébe. Speciálisan az invariáns kiterjesztési tételek eredetét illetően Agnew—Morse [1], Klee [4] és Silverman [6] klasszikus cikkei adnak útmutatást.

Végül megjegyezzük, hogy véleményünk szerint a Hahn—Banach-féle kiterjesztési tételek konvex funkcionálos alakjainak a jelentősége nem az esetleges szélesebb körű alkalmazhatóságban, hanem abban az egységesítésben van, hogy most már nemcsak a szeparációs tételekben, hanem a kiterjesztési tételekben is a konvexség szerepel a linearitás mellett.

IRODALOM

[1] R. P. Agnew, A. P. Morse: Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures and densities, *Ann. of. Math.* **39** (1938), 20—30.

[2] B. Fuchssteiner, W. Lusky: *Convex Cones,* North-Holland, Amsterdam, 1981.

[3] R. B. Holmes: *Geometric Functional Analysis and its Applications,* Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[4] V. L. Klee: Invariant extension of linear functionals, *Pacific J. Math.* **4** (1954), 37—46.

[5] A. Mukherjea, K. Pothoven: *Real and Functional Analysis,* Plenum Press, New York, 1978.

[6] R. J. Silverman: Invariant linear functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **81** (1956), 411—424.

[7] J. D. Weston: A note on the extension of linear functionals, *Amer. Math. Monthly* **67** (1960), 444—445.

ТЕОРЕМА ХАНА—БАНАХА ОБ ИНВАРИАНТНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ТАКЖЕ МОЖЕТ БЫТЬ УСИЛЕНА

Ж. ПАЛЕШ и А. САЗ

В настоящей заметке, мы показываем, что сублинейный функционал в теореме Хана—Банаха об инвариантном распространении может быть заменен на выпуклый.

THE HAHN—BANACH INVARIANT EXTENSION THEOREM CAN ALSO BE SHARPENED

ZS. PÁLES and Á. SZÁZ

In this note, we show that the sublinear functional in the Hahn—Banach invariant extension theorem can be replaced by a convex one.

KÖZÉPÉRTÉKEK ÉRZÉKENYSÉGÉNEK KÜLÖNBÖZŐ FOKOZATAIRÓL

DUX ERIK és GODA LÁSZLÓ

Az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív számok valamilyen középértékét jelölje $M(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ vagy röviden $M(\mathbf{a})$. $M(\mathbf{a})$ értéke az a_i számok minimuma és maximuma között helyezkedik el. Középértékek vizsgálata során fontos annak eldöntése, hogy az átlagolandó adatok kis változása (pl: mérési bizonytalansága) hogyan változtatja meg a középértéket. A későbbiekben azt a középértéket nevezzük érzékenyebbnek, mely az adatok változása esetén nagyobb mértékben változik meg. Ez azt is jelenti, hogy ha M_1 és M_2 két folytonosan differenciálható középérték, akkor azt nevezzük érzékenyebbnek, melynek grandiense minden $\mathbf{a}$-ra nagyobb abszolút értékű (illetve gradiensének négyzete nagyobb). Egyenlőség csak az $\mathbf{a}_0= =[a_0, a_0, \ldots, a_0]$ esetben állhat fenn.

Az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok n-edik hatványközepe $Q_n=\sqrt[n]{\dfrac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}{k}}$. Ennek nevezetes speciális esetei a számtani közép ($n=1$) és a kvadratikus közép ($n=2$). Ha kiszámítjuk ezen közepek grandiensének négyzetét azt tapasztaljuk, hogy $|\mathbf{grad}\, Q_1|^2=|\mathbf{grad}\, Q_2|^2=\dfrac{1}{k}$, azaz megegyezők és minden más n esetén ettől az értéktől eltérő.

A fentiek alapján válasszuk ezt az $\dfrac{1}{k}$ értéket az összehasonlítás alapjául, és nevezzük kis érzékenységűnek azt a közepet, melyre $|\mathbf{grad}\, M|^2\leqq\dfrac{1}{k}$.

A kis érzékenységű közepek esetében a fogalom további finomítása lehetséges.

1. *Definíció.* Az $M(\mathbf{a})$ közepet mérsékelten kis érzékenységűnek nevezzük, ha

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial M}{\partial a_i}\leqq 1.$$

2. *Definíció.* Az $M(\mathbf{a})$ közepet gyengén kis érzékenységűnek nevezzük, ha

$$\sqrt[k]{M'_{a_1}\cdot M'_{a_2}\cdot\ldots\cdot M'_{a_k}}\leqq\frac{1}{k}.$$

Itt fel kell tételeznünk, hogy $M(\mathbf{a})$ valamennyi parciális deriváltja nemnegatív (az ilyen közepeket a továbbiakban regulárisnak nevezzük).

Létezik ugyanis nem reguláris közép. Például az $a \geqq 0$ és $b \geqq 0$ számokhoz rendeljük az $M(a, b) = a + b - \sqrt{ab}$ közepet. Ez valóban középérték, ugyanis $M(a, b)$ az a és b számok $\sqrt{a}$, ill. $\sqrt{b}$-vel súlyozott számtani közepe.

Viszont pl.: $M'_a = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} < 0$, ha $b > 4a$.

Megjegyzés. Az ilyen nem reguláris közepek nem mindenütt monoton növekvő függvényei a független változónak, pl.: $a = 1$ és $b = 400$ esetén $M(a, b) = 381$ $a = 10$ és $b = 422{,}5$ esetén $M(a, b) = 367{,}5$.

1. Tétel. *Amennyiben* $M(\mathbf{a})$ *kis érzékenységű, akkor mérsékelten kis érzékenységű is, valamint a mérsékelten kis érzékenységű közép gyengén kis érzékenységű is.*

Bizonyítás. A tétel első állításának bizonyításához a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel ($Q_2 \geqq Q_1$), a második állítás a számtani és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenségből közvetlenül adódik.

2. Tétel. *A* Q_n *hatványközép kis érzékenységű, ha* $1 < n < 2$, *mérsékelten kis érzékenységű, ha* $n > 1$, *és gyengén kis érzékenységű, ha* $n > 1$ *vagy* $n < 0$.

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználjuk a hatványközepek monotonitását, azaz $Q_n \geqq Q_m$, ha $n > m$. Q_n parciális deriváltjai: $\frac{\partial Q_n}{\partial a_i} = \frac{a_i^{n-1}}{kQ_n^{n-1}}$, ezekből:

$$|\mathbf{grad}\, Q_n|^2 = \frac{1}{k}\left[\frac{Q_{2n-2}}{Q_n}\right]^{2n-2} \leqq \frac{1}{k}, \quad \text{ha} \quad 1 < n < 2,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial Q_n}{\partial a_i} = \left[\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right]^{n-1} \leqq 1, \quad \text{ha} \quad n > 1 \quad \text{és}$$

$$\sqrt[k]{\frac{\partial Q_n}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial a_k}} = \frac{1}{k}\left[\frac{Q_0}{Q_n}\right]^{n-1} \leqq \frac{1}{k},$$

ha $n > 1$ vagy $n < 0$.

3. *Definíció.* Az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív számok K típusú közepén értjük a

$$K(a_1, a_2, \ldots, a_k) = f^{-1}\left[\frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_k)}{k}\right]$$

értéket, ahol az f generáló függvény differenciálható, és $f' < 0$ vagy $f' > 0$ az értelmezési tartományban. A K típusú közép karakterisztikus függvényének pedig azt a $g(y)$ (időnként $g(f)$-fel is jelölt) függvényt nevezzük (ahol $y = f(x)$), melyre $g(y_0) = g(f(x_0)) = f'(x_0)$, vagyis $g = f' \circ f^{-1}$.

3. Tétel. *Minden* K *típusú közép reguláris.*

Bizonyítás. A definiáló formulát átalakítva

$$f(K(a_1, a_2, \ldots, a_k)) = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_k)}{k}.$$

Képezzük most mindkét oldal a_i szerinti parciális deriváltját:

$$f'(K)\cdot\frac{\partial K}{\partial a_i}=\frac{f'(a_i)}{k},\quad \text{azaz}\quad \frac{\partial K}{\partial a_i}=\frac{1}{k}\frac{f'(a_i)}{f'(K)}>0,$$

hiszen f' előjele állandó.

4. Tétel. *A K típusú közép akkor és csak akkor kis érzékenységű, ha karakterisztikus függvényének négyzete konkáv, mérsékelten kis érzékenységű, ha karakterisztikus függvényének abszolút értéke konkáv, illetve gyengén kis érzékenységű, ha karakterisztikus függvénye abszolút értékének logaritmusa konkáv.*

Bizonyítás. A három állítás bizonyítása hasonló módon történik, ezért példaként a másodikat bizonyítjuk be.

Mint az előző tétel bizonyításánál láttuk:

$$\frac{\partial K}{\partial a_i}=\frac{1}{k}\frac{f'(a_i)}{f'(K)}=\frac{1}{k}\frac{|f'(a_i)|}{|f'(K)|},\quad \text{hiszen } f' \text{ állandó előjelű.}$$

Ebből:

$$\frac{\partial K}{\partial a_i}=\frac{|g(f(a_i))|}{k\cdot\left|g\left(\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_k)}{k}\right)\right|}.$$

Összegezve

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial K}{\partial a_i}=\frac{\dfrac{|g(f(a_1))|+|g(f(a_2))|+\ldots+|g(f(a_k))|}{k}}{\left|g\left(\dfrac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_k)}{k}\right)\right|}\leqq 1,$$

hiszen $|g|$ konkáv.

5. Tétel. *Legyen a K típusú közép generáló függvénye* (f) *mindenütt legalább háromszor differenciálható. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy K*

a) *kis érzékenységű legyen:*

$$\frac{f'''}{f'}<0,$$

b) *mérsékelten kis érzékenységű legyen:*

$$\frac{f'''}{f'}<\left(\frac{f''}{f'}\right)^2,$$

c) *gyengén kis érzékenységű legyen:*

$$\frac{f'''}{f'}<2\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Bizonyítás. A tétel állításai itt is hasonlóan bizonyíthatók, így példaként az a) állítást bizonyítjuk.

Az előző tétel alapján a K típusú közép kis érzékenységű, ha karakterisztikus függvényének négyzete konkáv, azaz második deriváltja negatív. $g^2(f)=f'^2$,

$$\frac{d[g^2(f)]}{df} = 2f' \cdot \frac{df'}{dx} \cdot \frac{dx}{df} = 2f'',$$

$$\frac{d^2[g^2(f)]}{df^2} = 2\frac{df''}{dx} \cdot \frac{dx}{df} = 2\frac{f'''}{f'} < 0.$$

Ezeket az eredményeket példaként alkalmazzuk a hatványközepekre. A generáló függvény $f(x)=x^n$.

A Q_n hatványközép kis érzékenységű, ha

$$\frac{f'''}{f'} = \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{nx^{n-1}} < 0, \quad \text{azaz ha } 1 < n < 2,$$

mérsékelten kis érzékenységű, ha

$$\frac{f'''}{f'} - \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{1-n}{x^2} < 0, \quad \text{azaz } n > 1,$$

valamint gyengén kis érzékenységű, ha

$$\frac{f'''}{f'} - 2\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{n-n^2}{x^2} < 0, \quad \text{azaz} \quad n > 1 \quad \text{vagy} \quad n < 0.$$

4. *Definíció.* A G közepet összetett középnek mondjuk, ha

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k) = M[B_1(a_1, \ldots, a_k), \ldots, B_r(a_1, \ldots, a_k)],$$

ahol M és B_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ valamilyen középértékek.

6. Tétel. *Kis érzékenységű közepekből összetett közép is kis érzékenységű, valamint mérsékelten kis érzékenységű reguláris közepekből összetett közép is mérsékelten kis érzékenységű.*

Bizonyítás. Az első állítás bizonyításához a Bunyakovszkij—Schwarz egyenlőtlenséget használhatjuk, a második a fellépő szorzatok megfelelő sorrendben történő összegezésével adódik.

5. *Definíció.* Az $M(\mathbf{a})$ közepet homogénnek nevezzük, ha

$$M(\lambda\mathbf{a}) = \lambda M(\mathbf{a}) \quad (\lambda > 0).$$

Homogén közép például a mértani közép vagy a hatványközepek. A homogén közepek kifejezhetők parciális deriváltjaik segítségével az alábbi módon:

$$M(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_1 \cdot M'_{a_1} + \ldots + a_k \cdot M'_{a_k}.$$

6. *Definíció.* Az $M(\mathbf{a})$ közepet erős érzékenységűnek nevezzük, ha reguláris és

$$\sqrt[k]{M'_{a_1} \cdot M'_{a_2} \cdot \ldots \cdot M'_{a_k}} \geqq \frac{1}{k}.$$

7. Tétel. *A kis érzékenységű homogén közepek közül a négyzetes közép a legnagyobb.*

Bizonyítás.

$$M(\mathbf{a})=\sum_{i=1}^{k}a_iM'_{a_i}\leqq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}\cdot\sqrt{M'^2_{a1}+M'^2_{a2}+\ldots+M'^2_{a_k}}\leqq$$

$$\leqq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}=Q_2.$$

8. Tétel. *Ha az $M(\mathbf{a})$ homogén közép reguláris, és nem nagyobb a mértani középnél, akkor gyengén kis érzékenységű.*

Bizonyítás.

$$\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}\geqq M(\mathbf{a})=a_1M'_{a_1}+a_2M'_{a_2}+\ldots+a_kM'_{a_k}\geqq$$

$$\geqq k\cdot\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\cdot\sqrt[k]{M'_{a_1}M'_{a_2}\ldots M'_{a_k}}.$$

Ebből

$$\sqrt[k]{M'_{a_1}M'_{a_2}\ldots M'_{a_k}}\leqq\frac{1}{k}.$$

9. Tétel. *Ha az $M(\mathbf{a})$ homogén reguláris közép erős érzékenységű, akkor nagyobb a mértani középnél.*

Bizonyítás. A bizonyítás az előzőhöz hasonlóan végezhető.

7. *Definíció.* Az $M(\mathbf{a})$ közepet az R középpel mérve kis érzékenységűnek mondjuk, ha

$$R(M'_{a_1},M'_{a_2},\ldots,M'_{a_k})\leqq\frac{1}{k}.$$

Ebben speciális esetként szerepelnek a korábbi érzékenységi kategóriák. Ha az R mérő közép a kvadratikus közép, akkor a kis érzékenység, ha a számtani közép, akkor a mérsékelten kis érzékenység, és ha a mértani közép, akkor a gyengén kis érzékenység fogalmához jutunk.

10. Tétel. *A K típusú közép a Q_r hatványközépre, mint mérőközépre vonatkoztatva akkor és csak akkor kis érzékenységű, ha $r>0$ és $|g|^r$ konkáv, vagy $r<0$ és $|g|^r$ konvex.*

Bizonyítás. Esetünkben $R(K'_{a_1},K'_{a_2},\ldots,K'_{a_k})=\sqrt[r]{\frac{K'^r_{a_1}+K'^r_{a_2}+\ldots+K'^r_{a_k}}{k}}$. Mint korábban láttuk (a 4. tétel bizonyításánál): $\frac{\partial K}{\partial a_i}=\frac{1}{k}\cdot\frac{|g(f(a_i))|}{|g(f(K))|}$. Ezt figyelembe véve

$$\sqrt[r]{\frac{\frac{1}{k^r}\cdot[|g(f(a_1))|^r+\ldots+|g(f(a_k))|^r]}{k|g(f(K))|^r}}=$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\sqrt[r]{\frac{|g(f(a_1))|^r+\ldots+|g(f(a_k))|^r}{k\left|g\left(\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_k)}{k}\right)\right|^r}}\leqq\frac{1}{k}.$$

11. Tétel. *Legyen a K típusú közép generáló függvénye (f) mindenütt legalább háromszor differenciálható. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a K közép a Q_r mérőközépre nézve kis érzékenységű legyen:*

$$\frac{f'''}{f'} < (2-r)\cdot\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Bizonyítás. Az előző tétel alapján $|g|^r = |f'|^r$ második deriváltját vizsgáljuk. Legyen $f'>0$ ($f'<0$ esetén a bizonyítás analóg), ekkor $|g|^r = (f')^r$,

$$\frac{d|g|^r}{df} = r\cdot(f')^{r-1}\cdot\frac{f''}{f'} = r\cdot(f')^{r-2}\cdot f'',$$

$$\frac{d^2|g|^r}{df^2} = r(r-2)\cdot(f')^{r-3}\cdot\frac{(f'')^2}{f'} + r\cdot(f')^{r-2}\cdot\frac{f'''}{f'},$$

azaz

$$\frac{d^2|g|^r}{df^2} = r\cdot(f')^{r-2}\left[(r-2)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{f'''}{f'}\right].$$

A kifejezés negatív, ha $(r-2)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{f'''}{f'} < 0$ és $r>0$, azaz $|g|^r$ konkáv, illetve $r<0$ és $(r-2)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{f'''}{f'} < 0$ esetén pozitív, azaz $|g|^r$ konvex.

Példaként vizsgáljuk azt az esetet, amikor K generáló függvénye $f(x)=x^n$. A feltétel:

$$\frac{f'''}{f'} = \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{nx^{n-1}} < (2-r)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = (2-r)\left(\frac{n(n-1)x^{n-2}}{nx^{n-1}}\right)^2.$$

Ebből: $n^2(r-1)+n(1-2r)+r<0$ egyenlőtlenség adódik, mely teljesül, ha

$$r>1 \quad \text{és} \quad 1<n<\frac{r}{r-1},$$

valamint

$$r<1 \quad \text{és} \quad n>1, \quad \text{illetve} \quad n<\frac{r}{r-1}.$$

Ez összhangban van korábbi eredményeinkkel, ugyanis $r=2$ esetén $1<n<2$, $r=1$ esetén $n>1$ feltételek adódnak.

12. Tétel. *Legyen az R mérőközép homogén és az M mért közép K típusú. Ha g az M karakterisztikus függvénye, $|g|$ konkáv és R nem nagyobb a számtani középnél, akkor M az R középpel mérve kis érzékenységű.*

Bizonyítás.

$$R(M'_{a_1}, M'_{a_2}, \dots, M'_{a_k}) = R\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{|f'(a_1)|}{|f'(M)|}, \frac{1}{k}\cdot\frac{|f'(a_2)|}{|f'(M)|}, \dots, \frac{1}{k}\cdot\frac{|f'(a_k)|}{|f'(M)|}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{|g(f(M))|}\cdot R\left(|g(f(a_1))|, |g(f(a_2))|, \dots, |g(f(a_k))|\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{\dfrac{|g(f(a_1))|+\dots+|g(f(a_k))|}{k}}{\left|g\left(\dfrac{f(a_1)+\dots+f(a_k)}{k}\right)\right|}\cdot\frac{R\left(|g(f(a_1))|, \dots, |g(f(a_k))|\right)}{\dfrac{|g(f(a_1))|+\dots+|g(f(a_k))|}{k}} \leqq \frac{1}{k}.$$

13. Tétel. *Legyen az R mérőközép homogén és az M mért közép K típusú. Ha g az M karakterisztikus függvénye, $|g|$ konvex, és R nem kisebb a számtani középnél, akkor M az R középpel mérve nagy érzékenységű.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításával analóg.

14. Tétel. *Ha az R mérőközép és az M mért közép egyaránt kis érzékenységű közepek, valamint R homogén közép, akkor M az R mérőközépre vonatkoztatva is kis érzékenységű.*

Bizonyítás.

$$R(M'_{a_1}, M'_{a_2}, \dots, M'_{a_k}) = M'_{a_1}\cdot R'_{M'_{a_1}} + M'_{a_2}\cdot R'_{M'_{a_2}} + \dots + M'_{a_k}\cdot R'_{M'_{a_k}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{R'^2_{M'_{a_1}} + R'^2_{M'_{a_2}} + \dots + R'^2_{M'_{a_k}}}\cdot\sqrt{M'^2_{a_1} + M'^2_{a_2} + \dots + M'^2_{a_k}} \leqq \frac{1}{k}.$$

IRODALOM

[1] E. Dux: Sensibility of mean values, *Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering,* Vol. **23**, No. 4, Budapest, 1979.

[2] E. Dux: The concept and some properties of hyperconcave functions and their application to the examination of the sensibility of K-type means, *Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering,* Vol. **25**, No. 3, Budapest, 1981.

О РАЗНЫХ СТЕПЕНЯХ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Э. ДУКС и Л. ГОДА

ON SEVERAL DEGREES OF THE SENSITIVITY OF MEAN VALUES

E. DUX and L. GODA

RIESZ-KÖZEPEKKEL VALÓ APPROXIMÁCIÓ NAGYSÁGRENDJÉRŐL

NGUYEN XUAN KY
(Hanoi—Budapest)

1. Bevezetés

Legyen $C_{2\pi}$ a 2π-periodikus folytonos függvények ismert Banach tere. Legyen továbbá $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$ az α-ad rendű egyenletes Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvények osztálya. Jelentse az $R_n(r,f)$ az $f\in C_{2\pi}$ függvény Fourier sorának n-edik r-ed rendű Riesz-közepét, azaz

$$R_n(r,f,x)=\sum_{k=0}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right]A_k(x) \quad (r\geqq 1 \text{ egész, } n=0,1,\ldots), \tag{1}$$

ahol

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x).$$

Jelöljük $\tilde{f}$-mal az f függvény konjugált függvényét.

Igazak a következő állítások:

A (Alexits [1]):

$$f\in\mathrm{Lip}\,1 \Leftrightarrow \|\tilde{f}-R_n(1,\tilde{f})\|_C=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

B (Zamansky [8], Zygmund [9]): $r\geqq 2$

$$f^{(r-1)}\in\mathrm{Lip}\,1 \Leftrightarrow \begin{cases} \|f-R_n(r,f)\|_C=O\left(\dfrac{1}{n^r}\right), & \text{ha } r \text{ páros} \\ \|\tilde{f}-R_n(r,\tilde{f})\|_C=O\left(\dfrac{1}{n^r}\right), & \text{ha } r \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Alexits professzor a fenti állítást elemi módszerrel bizonyította. A bizonyítás a sorok egy elemi tulajdonságán alapult (lásd [1], Lemma 1, 2). Ezt a tulajdonságot később Králik D. professzor kiterjesztette tetszőleges rendű Riesz-közepekre (lásd [4]). Ezeket az eredményeket alkalmazva bizonyíthatók a fenti ekvivalencia relációk tetszőleges $L^p[2\pi]$-térre is $(1\leqq p<\infty)$.

Ebben a dolgozatban az [1], [4] módszereit követve vizsgálni fogjuk a fenti állítások analogonját súlyozott $L^p_u[2\pi]$-terekben, ahol $u(x)$ az ún. A_p feltételnek eleget tevő súlyfüggvény.

2. Az A_p feltétel

Legyen $1<p<\infty$. Egy 2π-periodikus mérhető $u(x)$ függvényről akkor mondjuk ([3] nyomán), hogy eleget tesz az A_p feltételnek, ha $0<u(x)<\infty$ m.m., továbbá bármely I véges intervallum esetén fennáll a

$$\left[\frac{1}{|I|}\int_I u(x)\,dx\right]\left[\frac{1}{|I|}\int_I [u(x)]^{-1/(p-1)}\,dx\right]^{p-1} \leqq c\,(p) \tag{2}$$

egyenlőtlenség, ahol $|I|$ jelöli az I intervallum hosszát, $c(p)$ csak p-től függő konstans (később $c(x, y, \ldots)$ szimbólumokkal olyan konstansokat fogunk jelölni, amelyek csak $x, y, \ldots$ változóktól függnek).

Jelöljük Ω_p-vel az összes, A_p feltételnek eleget tevő függvények halmazát ($1<p<\infty$). Könnyen látható, hogy az $u_0(x)\equiv 1$ függvény eleme az Ω_p osztálynak minden $1<p<\infty$ esetén. Az Ω_p osztály tulajdonságai, valamint az A_p feltétellel ekvivalens feltételek [3]-ban megtalálhatók. Itt megemlítünk továbbá egy nem konstans függvényt is:

$$u_\alpha(x) = |\sin x|^\alpha \quad (|\alpha| < 1). \tag{3}$$

Ez a függvény szintén eleme minden Ω_p osztálynak ($1<p<\infty$). Ennek belátása a [3]-ban levő állítások alapján végezhető.

Legyen most $L^p_u = L^p_u[2\pi]$ az összes olyan 2π-periodikus függvények tere, amelyekre létezik

$$\|f\|_{p,u} = \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p u(x)\,dx\right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty).$$

Az $u_0\equiv 1$ esetén az $L^p_{u_0}$ és $\|f\|_{p,u_0}$ helyett L^p és $\|f\|_p$ jelöléseket használunk.

Bizonyítsuk be először a következő segédtételt, amely rámutat a súlyozott L^p_u és a súly nélküli L^1 közötti kapcsolatra.

1. Segédtétel. *Legyen* $u\in\Omega_p$ ($1<p<\infty$). *Ha* $f\in L^p_u$, *akkor* $f\in L^1$ *és*

$$\|f\|_1 \leqq c(u, p)\|f\|_{p,u}. \tag{4}$$

Bizonyítás. Legyen $I=[0, 2\pi]$. Mivel $u\in\Omega_p$, azért $\int_I u(x)dx>0$, tehát (2) miatt igaz, hogy

$$\int_I [u(x)]^{-1/(p-1)}\,dx < \infty.$$

Legyen most $1/p+1/q=1$. Akkor

$$f = (f u^{1/p})(u^{-1/(p-1)})^{1/q} = g\cdot h$$

alakban írható. Mivel $g\in L^p$, $h\in L^q$, így állításunk következik a Hölder-féle egyenlőtlenségből.

Szükségünk lesz még a következő segédtételre:

2. Segédtétel. *Legyen* $u\in\Omega_p$ ($1<p<\infty$), $r\geqq 1$ *egész. Akkor*

$$\|R_n(r,f)\|_{p,u} \leqq c(p, u)\|f\|_{p,u} \quad (f\in L^p_u,\quad n = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

$$\|R_n(r, f)-f\|_{p,u} \to 0 \quad (n \to 0) \quad (f\in L^p_u). \tag{6}$$

Bizonyítás. Legyen $f\in L_u^p$. Akkor az 1. segédtétel szerint $f\in L^1$, tehát f-nek van Fourier sora

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x).$$

Legyen továbbá

$$s_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(x)\quad(n=0,1,\ldots).$$

A szerzők [4] dolgozatukban bizonyították, hogy

$$\|s_n(f)\|_{p,u}\leqq c(p,u)\|f\|_{p,u}\quad(f\in L_u^p,\ n=0,1,\ldots),\tag{7}$$

$$\|s_n(f)-f\|_{p,u}\to 0\quad(n\to\infty)\quad(f\in L_u^p).\tag{8}$$

Most az (5) egyenlőtlenség következik a (7) egyenlőtlenségből az Abel-transzformáció alkalmazásával. A (6) állítás bizonyításához először megjegyezzük, hogy (6) nyilván igaz, ha f egy tetszőleges trigonometrikus polinom. Továbbá (8)-ból következik, hogy az összes trigonometrikus polinomok halmaza mindenütt sűrű az L_u^p-térben. A mondottak alapján (6) az (5) egyenlőtlenségből a Banach—Steinhaus-tétel alkalmazásával nyerhető (lásd [2], 285. oldal).

3. Riesz-közepekre vonatkozó szaturációs tételek

Jelöljük $D^r(L_u^p)$-val az összes olyan 2π-periodikus f függvények halmazát, amelyekre $f, f', \ldots, f^{(r-1)}$ abszolút folytonosak és $f^{(r)}\in L_u^p$.
Igaz a következő tétel:

1. Tétel. *Legyen* $f\in L_u^p$ $(1<p<\infty,\ u\in\Omega_p)$. *Legyen továbbá* $r\geqq 1$ *egész. Akkor*

1. $\|R_n(r,f)-f\|_{p,u}=o\left(\frac{1}{n^r}\right)\Rightarrow f=\text{const.}$

2. *Ha u korlátos is, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

$$\|R_n(r,f)-f\|_{p,u}=O\left(\frac{1}{n^r}\right).\tag{9}$$

$$f\in D^r(L_u^p).\tag{10}$$

$$\tilde{f}\in D^r(L_u^p).\tag{11}$$

A tétel bizonyításához szükséges lesz a következő segédtétel:

3. Segédtétel. *Legyen* $u\in\Omega_p$ $(1<p<\infty)$ *és korlátos. Legyen továbbá*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\tag{12}$$

egy tetszőleges sor. Ha a (12) *sor* $R_n(r,x)$ *Riesz-közepeiből álló sorozat az* L_u^p *térben korlátos, akkor létezik olyan* $g\in L_u^p$, *amelynek Fourier-sora éppen a* (12) *sor.*

Bizonyítás. Legyen

$$v(x)=[u(x)]^{-1/(p-1)}.$$

Mivel $u \in \Omega_p$, *ezért* $v \in \Omega_q$ $(1/p+1/q=1)$ (lásd [3], 233. oldal). Értelmezzük a következő operátorokat:

$$(13) \qquad F_n\varphi = \int_0^{2\pi} R_n(r,x)\varphi(x)\,dx \quad (\varphi \in L_v^q, \quad n = 0, 1, \ldots).$$

A könnyen látható

$$u^{1/p}v^{1/q} = 1$$

egyenlőség alapján a Hölder-féle egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(14) \qquad |F_n\varphi| \leqq \|R_n(r,x)\|_{p,u}\|\varphi\|_{q,v} \leqq c(\varphi)O(1) \quad (\varphi \in L_v^q).$$

Továbbá az ortogonalitás miatt igaz, hogy

$$(15) \qquad \begin{cases} F_n(\cos kx) = \left[1-\left(\dfrac{k}{n+1}\right)^r\right]\pi a_k \to \pi a_k \quad (n\to\infty) \quad (k=0,1,\ldots), \\ F_n(\sin kx) = \left[1-\left(\dfrac{k}{n+1}\right)^r\right]\pi b_k \to \pi b_k \quad (n\to\infty) \quad (k=1,2,\ldots). \end{cases}$$

Tehát $F_n\varphi$ az összes trigonometrikus polinomok T halmazán konvergens. Mivel $v \in \Omega_q$, (8)-ból következik, hogy a T halmaz mindenütt sűrű az L_v^q térben. Tehát a mondottakat és a (14)-et együtt tekintve, következik a Banach—Steinhaus-tétel értelmében, hogy létezik olyan $g \in L_v^p$, amelyre

$$(16) \qquad \int_0^{2\pi} R_n(r,x)\varphi(x)\,dx \to \int_0^{2\pi} g(x)\varphi(x)\,dx \quad (n\to\infty) \quad (\varphi \in L_v^q).$$

Ha most φ helyére a $\cos kx$ és $\sin kx$ függvényeket írjuk, akkor (15)-öt figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$a_k = \int_0^{2\pi} g(x)\cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \int_0^{2\pi} g(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Tehát a (12) sor valóban a $g \in L_v^p$ függvénynek Fourier sora. Segédtételünket teljesen bizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy $g \in L_u^p$. Ez viszont következik a

$$v(x) = [u(x)]^{-1/(p-1)} \geqq c(p)u(x)$$

egyenlőtlenségből (mivel $u(x)$ korlátos).

Az 1. tétel bizonyítása.

1. Ha $f \in L_u^p$ és $\|R_n(r,f)-f\|_{p,u} = o\left(\dfrac{1}{n^r}\right)$, akkor az 1. segédtételből következik, hogy

$$\|R_n(r,f)-f\|_{p,u} = o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Ahonnan azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} [R_n(r, f, x)-f(x)]\varphi(x)\,dx \to 0 \quad (n \to \infty)$$

bármely φ korlátos függvény esetén. Így a φ helyére a $\cos kx$, $\sin kx$ $(k=1, 2, \ldots)$ függvényeket írva az $a_k(f)=b_k(f)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$ egyenlőségeket nyerjük, tehát $f=\text{const}$.

2. Nyilvánvaló, hogy a (9), (10), (11) állítások ekvivalenciáját elegendő olyan f függvényekre bebizonyítani, amelyekre $a_0(f)=\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$. Ha ugyanis f egy tetszőleges függvény, akkor az $f_1=f-a_0(f)$ függvényt bevezetve, nyilvánvaló, hogy egyrészt $a_0(f_1)=0$, másrészt az f és f_1 függvényekre vonatkozó bizonyítandó állítás egymással ekvivalens.

A mondottak alapján tehát legyen $f\in L^p_u$ és

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx+b_k \sin kx). \tag{17}$$

Az 1. segédtétel értelmében $f\in L^1$, tehát létezik konjugált függvénye, továbbá a ([3], 4. tétel) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\|\tilde{f}\|_{p,u} \leqq c(p, u)\|f\|_{p,u} \leqq c'(p, u)\|\tilde{f}\|_{p,u}. \tag{18}$$

a) (11)$\Rightarrow$(9): Legyen $f\in L^p_u$, $\tilde{f}\in D^r(L^p_u)$ $(r\geqq 1)$. Ha f függvény Fourier sora a (17) sor, akkor mivel $\tilde{f}$ folytonos,

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx-a_k \sin kx). \tag{19}$$

Továbbá az 1. segédtétel értelmében $\tilde{f}^{(r)}\in L^1$. Így (19)-ből következik, hogy (lásd [10], 40. old., 2.1. tétel)

$$\begin{cases} \tilde{f}^{(r)}(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} (k^r a_k \cos kx+k^r b_k \sin kx), & \text{ha } r \text{ páratlan}, \\ \widetilde{\tilde{f}^{(r)}}(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} (k^r a_k \cos kx+k^r b_k \sin kx), & \text{ha } r \text{ páros}. \end{cases} \tag{20}$$

Mármost (5), (18) és (20) szerint

$$\|R_n(r,\tilde{f}^{(r)})\|_{p,u} \leqq c(p, u)\|\tilde{f}^{(r)}\|_{p,u} = O(1). \tag{21}$$

Innen (9)-et úgy kapjuk meg, hogy a (17) és (20) sorokra alkalmazzuk ([4], Satz 1)-t.

b) (9)$\Rightarrow$(11): Ha (9) teljesül, akkor a ([4], Satz 1)-t alkalmazva a

$$\|R_n(r, x)\|_{p\ u} \leqq c(r, u, p) \tag{22}$$

becslést nyerjük, ahol $R_n(r, x)$ a következő sor Riesz-közepei

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{23}$$

Innen a 2. segédtétel szerint létezik olyan $g\in L_u^p$, amelynek Fourier sora éppen a (23) sor és így

$$R_n(r,x)=R_n(r,g,x)\quad (n=0,1,\dots).$$

Most (6)-ot alkalmazva kapjuk

$$(24)\qquad \|R_n(r,g)-g\|_{p,u}\to 0\quad (n\to\infty).$$

Mivel $f\in L_u^p$, a ([3], 4. tétel) szerint $\tilde f\in L_u^p$, így az 1. segédtétel értelmében $\tilde f\in L^1$, tehát

$$(25)\qquad \tilde f(x)\sim \sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx-a_k\sin kx).$$

De (23)-at és (25)-öt tekintve igaz, hogy

$$R_n(r,g_r,x)=R_n^{(r)}(r,\tilde f,x)\quad (n=0,1,\dots),$$

ahol

$$g_r=\begin{cases} g, & \text{ha } r \text{ páratlan},\\ \tilde g, & \text{ha } r \text{ páros}.\end{cases}$$

Tehát (24) a következőbe megy át

$$(26)\qquad \|R_n^{(r)}(r,\tilde f)-g_r\|_{p,u}\to 0\quad (n\to\infty).$$

Másrészt $\tilde f\in L_u^p$ miatt, (6) szerint

$$(27)\qquad \|R_n(r,\tilde f)-\tilde f\|_{p,u}\to 0\quad (n\to\infty).$$

Végül a (26) és (27) relációkból az 1. segédtétel értelmében következik, hogy

$$\begin{cases}\|R_n^{(r)}(r,\tilde f)-g_r\|_1\to 0 & (n\to\infty),\\ \|R_n(r,\tilde f)-\tilde f\|_1\to 0 & (n\to\infty).\end{cases}$$

Innen az ismert módon kapjuk, hogy f a g_r függvény r-szeres integrál függvénye, továbbá, mivel $g_r\in L_u^p$, így $g_r\in L^1$ is, azért $\tilde f\in D^r(L_u^p)$, ami a bizonyítandó volt.

Ezek után a következő probléma áll előttünk: tudjuk, hogy az $u_0\equiv 1$ esetén egy f függvény akkor és csak akkor tartozik bele a $D^r(L_u^p)=D^r(L^p)$ osztályba, ha f $(r-1)$-szer folytonosan differenciálható és $f^{(r-1)}\in \mathrm{Lip}\,1\,(L^p)$. A probléma tehát az, hogy általánosabb súlyfüggvények esetén milyen struktúra-tulajdonsággal jellemezhetők a $D^r(L_u^p)$ osztály elemei. Korábbi [5], [6] dolgozataimban definiáltam olyan folytonossági modulust, amely alkalmazható a legjobb közelítésre vonatkozó direkt és fordított tételek vizsgálatára. Most megmutatjuk, hogy a fenti problémára választ adhatunk ilyen típusú modulussal súlyfüggvények egy bizonyos osztálya esetén. E célból vezessük be a következő súlyfüggvények osztályát:

Legyen S az összes olyan 2π-periodikus integrálható függvények osztálya, amelyekre létezik a $[0,2\pi]$ intervallumnak valamely beosztása

$$[0,2\pi]=\bigcup_{i=1}^{s} I_i,$$

ahol I_i páronként diszjunkt intervallumok, továbbá létezik olyan $\tau>0$ valós, $0\leqq r\leqq s$ egész szám, amelyekre fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$(28)\qquad \begin{cases} u(x)\leqq c(\delta)u(x+h) & (x\in I_i,\ 0\leqq h\leqq\delta<\tau,\ i=1,2,\dots,r),\\ u(x)\leqq c(\delta)u(x-h) & (x\in I_i,\ 0\leqq h\leqq\delta<\tau,\ i=r+1,\dots,s).\end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az

$$u_\alpha(x) = |\sin x|^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

függvény rendelkezik az említett tulajdonsággal, azaz $u_\alpha \in S$, mégpedig lehet úgy választani, hogy

$$s = 4, \quad r = 2, \quad \tau = \pi/2,$$

$$I_1 = [0, \pi/2), \quad I_2 = [\pi, 3\pi/2), \quad I_3 = [\pi/2, \pi), \quad I_4 = [3\pi/2, 2\pi).$$

Legyen most $u \in S \cap \Omega_p$ $(1 < p < \infty)$. Értelmezzük a következő függvénytranszformációt:

$$(29) \qquad T_t f(x) = \begin{cases} f(x+t), & \text{ha } x \in \bigcup_{i=1}^{r} I_i, \\ f(x-t), & \text{ha } x \in \bigcup_{i=r+1}^{s} I_i, \end{cases} \qquad (f \in L_u^p, \quad 0 \leqq t < \infty)$$

(ezt a transzformációt az eltolás-operátor módosításának tekinthetjük). Ha $f \in L_u^p$, akkor a (29) egyenlőségből következik, hogy

$$(30) \qquad \|T_t f\|_{p,u} \leqq c(\delta) \|f\|_{p,u} \quad (0 \leqq t \leqq \delta < \tau).$$

Ezek után egy tetszőleges $f \in L_u^p$ $(u \in S \cap \Omega_p)$ függvény folytonossági modulusát a következőképpen értelmezzük:

$$\omega(L_u^p, f, \delta) = \sup_{0 \leqq t \leqq \delta} \|T_t f - f\|_{p,u} \quad (0 \leqq \delta < \tau).$$

A modulus létezése következik (30)-ból. Továbbá nem nehéz belátni, hogy erre a modulusra

$$(31) \qquad \omega(L_u^p, f, \delta) = O(\delta) \quad (\delta \to 0+)$$

akkor és csak akkor igaz, ha f abszolút folytonos minden egyes I_i intervallumban $(i = 1, 2, \dots, s)$ és $f' \in L_u^p$.

Jelöljük most Lip 1 (L_u^p)-val az összes olyan $f \in L_u^p$ függvények halmazát, amelyekre (31) igaz.

A mondottak alapján az 1. tételből kapjuk a következő tételt:

2. Tétel. *Legyen* $u \in S \cap \Omega_p$ $(1 < p < \infty)$ *korlátos súlyfüggvény. Egy tetszőleges* $f \in L_u^p$ *függvény esetén a következő állítások ekvivalensek:*

1. $\|R_n(r, f) - f\|_{p,u} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.
2. $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ *abszolút folytonosak és* $f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}\, 1\, (L_u^p)$.
3. $\tilde{f}, \tilde{f}', \dots, \tilde{f}^{(r-1)}$ *abszolút folytonosak és* $\tilde{f}^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}\, 1\, (L_u^p)$.

Befejezésül hálás köszönetemet fejezem ki Králik Dezső professzor úrnak azért, hogy a Riesz-közepekre vonatkozó eredményeit és az e témakörrel kapcsolatos irodalmat ajánlotta nekem, amelyeket sikeresen tudtam alkalmazni.

IRODALOM

[1] G. ALEXITS: Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction periodique par les sommes de Fejér, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952), 29—40.
[2] P. L. BUTZER, H. BERENS: *Semi-groups of operators and approximation,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
[3] R. HUNT, B. MUCKENHOUFT, R. WHEEDEN: Weighted norm inequalities for conjugate function and Hilbert transform, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227—251.
[4] D. KRÁLIK: Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969), 361—373.
[5] NGUYEN XUAN KY: On Jackson and Bernstein type theorems in the case of approximation by algebraic polynomials in L-space, *Studia Sci. Math. Hung.* **9** (1974), 405—415.
[6] NGUYEN XUAN KY: On approximation by algebraic polynomials in weighted spaces (to appear).
[7] NGUYEN XUAN KY: On approximation by trigonometric polynomials in L^p_w-spaces (to appear).
[8] M. ZAMANSKY: Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonometriques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **67** (1950), 161—198.
[9] A. ZYGMUND: The approximation of functions by typical means of the Fourier series, *Duke Math. J.* **12** (1945), 695—704.
[10] A. ZYGMUND: *Trigonometric series,* Vol. I., Cambridge, 1959.

(Beérkezett: 1985. április 24-én)

О ПОРЯДКЕ ВЕЛИЧИНЫ АППРОКСИМАЦИИ СРЕДНИМИ РИСА

НГУЙЕН СУН КИ

ON THE ORDER OF MAGNITUDE OF THE APPROXIMATION BY RIESZ MEANS

NGUYEN XUAN KY

A MODULO-PRÍM ÉRTELMEZETT ÖNINVERZ MÁTRIXOK SZÁMA ÉS VÉLETLEN GENERÁLÁSUK

URECZKY JÓZSEF

1. Bevezetés

Legyen p egy prímszám, és tekintsük azokat az $n \times n$-es mátrixokat, amelyeknek az elemei a $0, 1, \ldots, p-1$ egész számok. Értelmezzük ezen mátrixok körében a modulo-p aritmetikában hagyományos értelemben vett szorzást. Egy ilyen mátrixot *öninverznek* nevezünk, ha négyzete az egységmátrix. Dolgozatunkban adott p mellett n függvényében egy kétváltozós, lineáris rekurziót adunk meg az *összes* öninverz mátrixok számára. Bebizonyítjuk, hogy ennek nagyságrendje lényegében megegyezik az összes $n \times n$-es, modulo-p értelmezett mátrixok számának négyzetgyökével. Végül megadunk egy gyors eljárást véletlen, egyenletes eloszlású öninverz mátrixok generálására. Az eljárás átlagos műveletigénye $\frac{1}{2} n^3$. Mielőtt elméleti vizsgálatainkra rátérnénk, két olyan gyakorlati problémát ismertetünk, melyek a problémafelvetést motiválják.

2. Egy rejtjelezési eljárás

Ismertetünk egy olyan rejtjelezési eljárást, amelynek célja pusztán egyszerűen implementálható „fátyolozás", mely az illetéktelen megoldást jelentékenyen megnehezíti, s a paraméterek megfelelő nagyságrendű megválasztása esetén gyakorlatilag kivitelezhetetlenné teszi.

Az eljárás leírása előtt szükségesnek látszik néhány kriptográfiai fogalom ismertetése. A rejtjelezendő üzenetet, adatsorozatot *nyílt szöveg*-nek nevezik. A nyílt szöveg elemei egy véges halmazból kerülnek ki, melyet *nyílt ábécé*-nek neveznek. A rejtjelezési eljárás definiálása során megadják olyan T_k transzformációknak egy $\{T_k; k \in K\}$ halmazát, melyek tetszőleges nyílt szöveghez kölcsönösen egyértelműen hozzárendelnek egy adott véges halmaz elemeiből álló sorozatot. Ezt az utóbbi halmazt *rejtjel-ábécé*-nek, a hozzárendelés eredményeként fellépő sorozatot *rejtjeles szöveg*nek nevezik. A transzformációk paraméterének K halmazát *kulcstér*nek, elemeit (rejtjelezési) kulcsnak hívják.

A modern kriptográfiában feltételezik, hogy az ellenfél ismeri a teljes $\{T_k; k \in K\}$ halmazt, csak azt nem tudja, hogy a konkrét rejtjelezés során melyik T_k-t használják, lásd Diffie, Hellman [2]. Ezért szükséges, hogy a K halmaz elég nagy legyen ahhoz, hogy a *teljes kipróbálás* (azaz minden T_k transzformáció végigpróbálása) ne legyen gyakorlatilag megvalósítható. Statisztikai következtetések megakadályozására olyan T_k transzformációkat kell alkalmazni, amelyek a nyílt szövegben esetleg meglevő struktúrát, statisztikai összefüggéseket eltüntetik. Ezért a kulcstér elemeit véletlenszerűen, egyenletes eloszlással célszerű kiválasztani.

Legyen a nyílt ábécé elemszáma N. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ábécé azonos a $\{0, 1, ..., N-1\}$ számhalmazzal. Ezt mi fel is fogjuk tenni. Ugyancsak feltesszük, hogy p mindig egy N-nél nem kisebb prímszámot jelöl.

A javasolt rejtjelezési eljárásban a feladó a továbbítandó információt azonos hosszúságú blokkokra bontja, és az eredeti $\mathbf{x}$ helyett egy $\mathbf{y}$-t küld el, amelyre

$$\mathbf{y} \equiv A\mathbf{x} \pmod{p}.$$

Az $\mathbf{x}$ vektor elemei a fentiek értelmében számok, amik mindig kisebbek egy alkalmasan megválasztott prímszámnál, p-nél:

$$0 \leqq x_i \leqq p-1 \quad i = 1, ..., n\text{-re.}$$

$\mathbf{x}$ a nyílt szöveg egy n hosszúságú blokkja. A jelöli annak a transzformációnak a mátrixát, mellyel $\mathbf{x}$-ből $\mathbf{y}$-t megkaptuk, A elemeire is teljesül, hogy

$$0 \leqq a_{ij} \leqq p-1 \quad i, j = 1, ..., n\text{-re.}$$

A vevőnek ahhoz, hogy megtudja, mi volt az $\mathbf{x}$, alkalmaznia kell $\mathbf{y}$-ra egy A^{-1} transzformációt, vagyis

$$\mathbf{x} \equiv A^{-1}\mathbf{y} \pmod{p}.$$

Az A-val szemben támasztott követelmény tehát, hogy invertálható legyen.

Még egy fontos követelményt írunk elő, mégpedig azt, hogy a vevő ugyanazzal az A transzformációval kapja meg $\mathbf{x}$-et, amelyikkel $\mathbf{y}$-t előállították. Vagyis $A^{-1} = A$, vagy ami ugyanazt jelenti:

$$A^2 \equiv E \pmod{p},$$

ahol E az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli. Az ilyen transzformációt öninverz transzformációnak, mátrixát pedig öninverz mátrixnak nevezzük. Ezen mátrixok használata azzal az előnnyel jár, hogy ugyanazzal az eszközzel végezhető el a kódolás és a dekódolás.

A fentiek alapján tehát azt kell megvizsgálni, hogy elegendően sok öninverz mátrix van-e, s ha igen, hogyan lehet közülük egyenletes eloszlással egyet véletlenszerűen kiválasztani.

Nem célunk jelen dolgozat keretein belül kriptográfiával bővebben foglalkozni. Utalunk pusztán Bánvölgyi [1], Kerekes [5], Révay [9], Svékus [8] magyar nyelvű munkáira. Nemcsak történelmi tabló, de érdekes olvasmány is Kahn [4] műve. A fenti eljárás egy általánosabb — bizonyos keretek között elméletileg is fejthetetlen — változatát a [7] dolgozatban adtuk meg.

3. Írott szövegek 1-rátájú hibajelzőkódjai

Az információ-átvitel megbízhatósága hibajelző vagy hibajavító kódok alkalmazásával biztosítható. Ezek a kódok nagyfokú redundanciát visznek a rendszerbe, ezáltal megnövelik az üzenet hosszát. A növekedés nehezen indokolható abban az esetben, ha az üzenet maga is redundáns, mint amilyenek az európai nyelvek. A következőkben ismertetésre kerülő módszer kis tévedési valószínűséggel jelzi, hogy az átvitelnél hiba történt, anélkül, hogy az üzenet hosszát megnövelné, amennyiben az üzenet valamilyen élő nyelven írt szöveg. A módszert angol nyelv esetére M. Hellman [3] publikálta.

Jelölje $\mathbf{x}$ az eredeti szöveg egy blokkját, és legyen A egy ugyanolyan méretű öninverz mátrix. A feladó $\mathbf{x}$ helyett egy $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ szöveget küld el. Ha az átvitel hibamentes volt, akkor $\mathbf{x}=A\mathbf{y}$-nal a vevő visszakapja az eredeti szöveget, míg ha az átvitel hibás volt, akkor $\mathbf{y}$ helyett $\mathbf{y}'=\mathbf{y}+\mathbf{h}$-val számolva a vevő az

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{y}' = A(\mathbf{y}+\mathbf{h}) = A\mathbf{y}+A\mathbf{h} = \mathbf{x}+A\mathbf{h}\text{-t kapja meg.}$$

Az A mátrix véletlen választása mellett Nemetz [6] megmutatta, hogy ha A egyenlő valószínűséggel veszi fel az $n\times n$-es invertálható mátrixok valamelyikét, akkor minden $\mathbf{h}$-ra ($\mathbf{h}\neq\mathbf{0}$) az $A\mathbf{h}$ vektor egyenletes eloszlású az n hosszúságú, nem nulla (mod p) vektorok felett. (Mivel A invertálható, $A\mathbf{h}$ nem nulla.) Továbbá, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{h}$ statisztikailag függetlenek, akkor $\mathbf{x}'$ és $\mathbf{h}$ is függetlenek lesznek.

E tulajdonság felhasználásával megadható olyan statisztikai eljárás, mely nagy megbízhatósággal jelzi, hogy történt-e meghibásodás. Erre vonatkozó eredményeinket egy későbbi dolgozatban szeretnénk publikálni.

4. Az öninverz mátrixok száma: egy rekurzió

Ebben a részben azt vizsgáljuk meg, hogy adott n és adott p prím esetén mennyi az $n\times n$-es, mod p öninverz mátrixok száma.

4.1. Lemma. *Az $n\times n$-es öninverz mátrixok utolsó sorában minden szám n-es előfordulhat, kivéve* $(00\dots 0k)$, *ahol* $0\leq k\leq p-1$, *de* $k\neq 1$ *és* $k\neq p-1$.

Bizonyítás. A fenti szám n-es valóban nem fordulhat elő, mert ekkor az A^2 mátrix utolsó sorában $a_{nn}^2=k^2$ lenne, de $k^2\equiv 1 \pmod p$ akkor és csak akkor teljesül, ha $k=1$ vagy ha $k=p-1$.

Minden más esetben fel lehet írni legalább egy olyan mátrixot, amelynek az utolsó sora a kívánt. Később látni fogjuk, hogy az összeset is fel lehet írni.

Ha az utolsó sor $(00\dots 01)$, akkor ilyen mátrix az E.

Ha az utolsó sor $(00\dots 0\,p-1)$, akkor ilyen a $-E$. Ha az utolsó sor $(10\dots 00)$, akkor ilyen az

$$A = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

mátrix. Az általános esetben legyen a mátrix utolsó sorában r db 0-tól különböző elem, melyek az $i_1<i_2<\dots<i_r$-edik helyen vannak és értékük rendre $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$.

Az $A=\begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$ mátrixhoz mindig meg tudok adni olyan F invertálható mátrixot, hogy $F^{-1}AF$ utolsó sora a kívánt. Az ilyen mátrixok négyzete szintén az egységmátrix, hiszen $(F^{-1}AF)^2=F^{-1}AFF^{-1}AF=F^{-1}A^2F=F^{-1}EF=E$. (Itt és a továbbiakban E mindig egységmátrixot jelöl.)

Ha $r=1$ és $i_1=1$, akkor

$$G=\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}=\begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

jelöléssel az $F=G$ választás megfelelő.

Az $r=1$ és $i_1=n$ esetet már megvizsgáltuk.

Ha $r=1$ és $2\leqq i_1\leqq n-1$, akkor

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccccc} & & & i_1 & & & \\ & & & \vdots & & & \end{array} \\ H=i_1\cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & a_{i_1} & & & \\ \vdots & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccccc} & & & i_1 & & & \\ & & & \vdots & & & \end{array} \\ H^{-1}=i_1\cdots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ \vdots & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ a_{i_1}^{-1} & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

jelöléssel az $F=H$ választás a megfelelő.

Ha $r\geqq 2$ és $i_1=1$, akkor rendre a

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccccc} & & & i_j & & & \\ & & & \vdots & & & \end{array} \\ D_j=i_j\cdots & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & a_{i_j} & & & \\ \vdots & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccccc} & & & i_j & & & \\ & & & \vdots & & & \end{array} \\ D_j^{-1}=i_j\cdots & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & -a_{i_j} & & & \\ \vdots & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

mátrixokat alkalmazzuk. D_j segítségével az utolsó sor i_j-edik eleméhez hozzáadjuk az első elem a_{i_j}-szeresét, majd az utolsó lépésben az első elemet megszorozzuk a_1-gyel. Vagyis ekkor az $F=D_r\cdot D_{r-1}\cdot\ldots\cdot D_2\cdot G$ választás a megfelelő.

Ha $r\geqq 2$ és $i_1\neq 1$, akkor az utolsó lépésben a H mátrixszal szorzunk, vagyis $F=D_r\cdot D_{r-1}\cdot\ldots\cdot D_2\cdot H$.

4.2. Lemma. *Azon öninverz mátrixok száma, amelynek az utolsó sora rögzített, de nem* $(00\ldots 0k)$ *alakú, ahol* $0\leqq k\leqq p-1$, *nem függ az utolsó sortól, tehát bármely utolsó sorhoz ugyanannyi mátrix tartozik.*

Bizonyítás. Jelölje B_n azon öninverz mátrixok számát, melyeknek utolsó sora (10...00). Az előző lemmában láttuk, hogy $B_n \geqq 1$. Azt is beláttuk, hogy bármi legyen is az utolsó sor (00...0*k*) kivételével, mindig van olyan F mátrix, hogy $F^{-1}AF$ utolsó sora a kívánt. Könnyen belátható, hogy ez a megfeleltetés A és $F^{-1}AF$ között kölcsönösen egyértelmű, hiszen ha $A_1 \neq A_2$ esetén $F^{-1}A_1F = F^{-1}A_2F$ állna fenn, akkor balról F-fel, jobbról F^{-1}-gyel való szorzással $A_1 = A_2$ adódna, ami ellentmondás. Mivel a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, ezért mindenfajta utolsó sorhoz B_n számú öninverz mátrix tartozik.

4.1. Tétel. $B_n = p^{n-2} \cdot S_{n-2}$, *ahol* S_n *jelöli az összes* $n \times n$*-es öninverz mátrixok számát. (*B_n *azon* $n \times n$*-es öninverz mátrixok száma, amelynek az utolsó sora* 10...00*).*

Bizonyítás. Ha az utolsó sor (10...00), akkor a négyzetmátrix utolsó sora akkor és csak akkor egyezik meg az egységmátrix utolsó sorával, ha az első sor (00...01). Bontsuk fel a mátrixot a következőképpen:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0\ldots0 & 1 \\ \hline \mathbf{y} & A & \mathbf{x} \\ \hline 1 & 0\ldots0 & 0 \end{array}\right].$$

Jelölje $\mathbf{y}$ a mátrix első, $\mathbf{x}$ pedig a mátrix utolsó oszlopvektorának középső $(n-2)$-es vektorát. A mátrix belsejében levő $(n-2)\times(n-2)$-es mátrixot jelölje A. A mátrixszorzás tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0\ldots0 & 1 \\ \hline \mathbf{y} & A & \mathbf{x} \\ \hline 1 & 0\ldots0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0\ldots0 & 1 \\ \hline \mathbf{y} & A & \mathbf{x} \\ \hline 1 & 0\ldots0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0\ldots0 & 0 \\ \hline A\mathbf{y}+\mathbf{x} & A^2 & \mathbf{y}+A\mathbf{x} \\ \hline 0 & 0\ldots0 & 1 \end{array}\right].$$

Ahhoz, hogy a szorzatmátrix az egységmátrix legyen, kell, hogy $A^2 \equiv E \pmod p$, $A\mathbf{y}+\mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \pmod p$, $\mathbf{y}+A\mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \pmod p$ teljesüljön.

Ha $A^2 \equiv E \pmod p$ teljesül, akkor bármi legyen is az $\mathbf{x}$, mindig megválasztható úgy $\mathbf{y}$, hogy ekkor $\mathbf{y} \equiv -A\mathbf{x} \pmod p$. De ekkor $A\mathbf{y}+\mathbf{x} \equiv -A^2\mathbf{x}+\mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \pmod p$ is teljesül.

Beláttuk tehát, hogy annyi mátrix rendelkezik a fenti tulajdonsággal, ahányféleképpen választhatjuk $\mathbf{x}$-et (p^{n-2}) és ahányféleképpen tőle függetlenül megválaszthatjuk az A $(n-2)\times(n-2)$-es mátrixot (S_{n-2}).

4.2. Tétel. *Azon* $n \times n$*-es öninverz mátrixok száma, melyeknek utolsó sora* (00...01) *és utolsó oszlopa* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: S_{n-1}.

Bizonyítás. Írjuk fel az ilyen mátrixoknak a négyzetét, A-val jelölve a bal felső sorokban levő $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixot.

$$\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0\ 0\ldots0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0\ 0\ldots0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A^2 & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0\ 0\ldots0 & 1 \end{array}\right].$$

A szorzatmátrix akkor és csak akkor lesz az egységmátrix, ha $A^2 \equiv E (\operatorname{mod} p)$, de az ilyen mátrixok száma: S_{n-1}.

4.3. Lemma. *Azon $n \times n$-es öninverz mátrixoknak, amelyeknek utolsó sora $(00\dots01)$, az utolsó oszlopvektorának a felső $(n-1)$-es vektorában bármilyen szám $(n-1)$-es előfordulhat.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy mindig fel lehet írni olyan mátrixot, amelynek utolsó oszlopa a kívánt. Legyen a mátrix utolsó oszlopának felső $(n-1)$-es vektorában r db 0-tól különböző elem, melyek az $i_1 < i_2 < \dots < i_r$-edik helyen vannak, és értékük rendre $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ $(i_r \leq n-1)$.

Az $r=0$ esetet már láttuk.

Ha $r=1$, $i_r = i_1 = n-1$ és $a_{n-1} = 1$, akkor egy ilyen mátrix a következő:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ \hdashline & 0 & & p-1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} E_{n-2} & & 0 \\ \hdashline & p-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Az általános esetben ehhez az A mátrixhoz mindig meg lehet adni olyan F invertálható mátrixot, hogy $F^{-1}AF$ öninverz mátrix utolsó oszlopa a kívánt lesz, miközben az utolsó sora $(00\dots01)$ marad.

Ha $r=1$ és $i_r = i_1 = n-1$, akkor

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a_{n-1} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a_{n-1}^{-1} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

jelöléssel az $F=G$ választás megfelelő.

Ha $r=1$ és $i_r \neq n-1$, akkor

$$H = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i_r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i_r & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & & \vdots & & & 1\;\vdots & \\ & & & a_{i_r}^{-1} & \cdots & \cdots & 0 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad H^{-1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i_r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i_r & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{i_r} & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & & \vdots & & & 1\;\vdots & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

jelöléssel az $F=H$ választás a megfelelő.

Ha $r \geqq 2$, és $i_r = n-1$, akkor a következő mátrixokkal

$$D_j = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} & & & i_j & & & & & \end{array} \\ i_j & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{i_j} & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad D_j^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} & & & i_j & & & & & \end{array} \\ i_j & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i_j} & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

az utolsó oszlop i_j-edik eleméhez hozzáadjuk az $n-1$-edik elem a_{i_j}-szeresét, majd az utolsó lépésben az $n-1$-edik elemet megszorozzuk a_{n-1}-gyel.

Tehát ekkor az $F = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_{r-1} \cdot G$ választás a megfelelő.

Ha $r \geqq 2$ és $i_r \neq n-1$, akkor az utolsó lépésben a H mátrixszal szorzunk, vagyis $F = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_{r-1} \cdot H$.

Jelölés. Legyen C_n azon $n \times n$-es öninverz mátrixok száma, amelyekben az utolsó sor (00...01).

4.4. Lemma. *Azon $n \times n$-es öninverz mátrixok száma, melyekben az utolsó sor* $(00\ldots0\,p-1)$, *szintén* C_n.

Bizonyítás. Ebben az esetben a két mátrix-típus közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a $p-1$ számmal való szorzás.

4.5. Lemma. *Öninverz mátrixok transzponáltja is öninverz.*

Bizonyítás. Ha $A^2 \equiv E \pmod p$, akkor

$$A^T \cdot A^T \equiv (A \cdot A)^T \equiv E^T \equiv E \pmod p.$$

4.6. Lemma. *Azon $n \times n$-es öninverz mátrixok száma, melyeknek utolsó sora* (00...01) *és utolsó oszlopa* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: C_{n-1}.

(Az utolsó oszlop két „alsó" eleme 1, *a többi* 0.*)*

Bizonyítás. Bontsuk fel az ilyen mátrixokat a következőképpen:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{e}_{n-1} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{e}_{n-1} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A^2 & \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{e}_{n-1} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array}\right].$$

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ vektorok egy $(n-1)\times(n-1)$-es öninverz mátrixot alkotnak. Az utolsó oszlop akkor és csak akkor lesz a kívánt, ha $\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{a}_{n-1} = -\mathbf{e}_{n-1}$.

Tehát a bal felső sarokban levő $(n-1)\times(n-1)$-es öninverz mátrixok közül csak azok a jók, melyeknek az utolsó oszlopa $\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\p-1\end{bmatrix}$, de ezek száma, mint láttuk: C_{n-1}.

A 4.2 Lemma bizonyításának megismétlésével nyerhető a következő eredmény, melyet éppen ezért bizonyítás nélkül közlünk:

4.7. Lemma. *Ha az A öninverz mátrix utolsó sora* (00...01) *és utolsó oszlopa nem* $\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$, *akkor bármely utolsó oszlophoz ugyanannyi mátrix tartozik, mégpedig* C_{n-1}.

4.3. Tétel. *Azon $n\times n$-es öninverz mátrixok C_n száma, melyeknek utolsó sora* (00...01):

$$C_n=(p^{n-1}-1)\cdot C_{n-1}+S_{n-1}.$$

Bizonyítás. Ha az utolsó sor a fenti, akkor az utolsó oszlop első $n-1$ eleme bármi lehet, összesen p^{n-1} féle. Ebből 1 esetben $\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, amihez S_{n-1} különböző mátrix tartozhat, a többi $p^{n-1}-1$ eset mindegyikéhez, mint láttuk, C_{n-1} mátrix tartozik. Ezek összes száma:

$$C_n=(p^{n-1}-1)\cdot C_{n-1}+S_{n-1}.$$

4.4. Tétel. *Az $n\times n$-es öninverz mátrixok száma*

$$S_n=p^{n-1}(p^{n-1}-1)\cdot S_{n-2}+C_n,\quad \text{ha}\quad p=2;$$

$$S_n=p^{n-1}(p^{n-1}-1)\cdot S_{n-2}+2\cdot C_n,\quad \text{ha}\quad p\neq 2.$$

Bizonyítás. Mint láttuk, az öninverz mátrixok utolsó sora p^n-p+1 féle lehet, ha $p=2$ és p^n-p+2 féle lehet, ha $p\neq 2$. Ebből 1, illetve 2 esethez C_n számú mátrix tartozik, míg a maradék p^n-p eset mindegyikéhez B_n. De $B_n=p^{n-2}\cdot S_{n-2}$, így p^n-p helyett $p(p^{n-1}-1)$-et írva:

$$S_n=p(p^{n-1}-1)\cdot p^{n-2}\cdot S_{n-2}+C_n=p^{n-1}(p^{n-1}-1)\cdot S_{n-2}+C_n,\quad \text{ha}\quad p=2,$$

illetve

$$S_n=p(p^{n-1}-1)\cdot p^{n-2}\cdot S_{n-2}+2\cdot C_n=p^{n-1}(p^{n-1}-1)\cdot S_{n-2}+2\cdot C_n,\quad \text{ha}\quad p\neq 2.$$

Ahhoz, hogy a rekurzív képletünk teljes legyen, kezdeti értékeket kell adnunk. Nyilvánvaló, hogy a kezdeti értékek a következők:

$$S_0=1,\quad C_1=1,\quad S_1=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad p=2;\\ 2, & \text{ha}\quad p\neq 2.\end{cases}$$

Eddigi eredményeinket összefoglalva felírhatjuk az $n\times n$-es öninverz mátrixok számára vonatkozó rekurzív képletet:

4.5. Tétel.

$p=2$ *esetén:* $S_0=1,\quad C_1=1,\quad S_1=1.$

$$n \geqq 2\text{-re: } S_n = p^{n-1}(p^{n-1}-1)\cdot S_{n-2}+C_n,$$

$$\text{ahol: } C_n = (p^{n-1}-1)\cdot C_{n-1}+S_{n-1}.$$

$p \neq 2$ *esetén:* $S_0=1,\quad C_1=1,\quad S_1=2.$

$$n \geqq 2\text{-re: } S_n = p^{n-1}(p^{n-1}-1)\cdot S_{n-2}+2\cdot C_n,$$

$$\text{ahol: } C_n = (p^{n-1}-1)\cdot C_{n-1}+S_{n-1}.$$

$p=2$ esetén a rekurzív képlet alapján készített 1. táblázatban C_n és S_n mellett feltüntettük az összes $n\times n$-es mod p mátrixok számát (1. oszlop), ezek között az invertálhatók számát (2. oszlop), végül az utolsó oszlopban összehasonlításul az összes mod p mátrixok számának négyzetgyökét.

1. táblázat

n	p^{n^2}	$n\times n$-es invertálhatók	C_n	S_n	$\sqrt{p^{n^2}}$
2	16	6	2	4	4
3	512	168	10	22	22,6274
4	65536	20160	92	316	256
5	$3{,}35\cdot 10^{7}$	$9{,}99\cdot 10^{6}$	1696	6976	5792,62
6	$6{,}87\cdot 10^{10}$	$2{,}01\cdot 10^{10}$	59552	373024	262144
7	$5{,}62\cdot 10^{14}$	$1{,}63\cdot 10^{14}$	$4{,}12\cdot 10^{6}$	$3{,}22\cdot 10^{7}$	$2{,}37\cdot 10^{7}$
8	$1{,}84\cdot 10^{19}$	$5{,}34\cdot 10^{18}$	$5{,}56\cdot 10^{8}$	$6{,}61\cdot 10^{9}$	$4{,}29\cdot 10^{9}$
9	$2{,}41\cdot 10^{24}$	$6{,}99\cdot 10^{23}$	$1{,}48\cdot 10^{11}$	$2{,}25\cdot 10^{12}$	$1{,}55\cdot 10^{12}$
10	$1{,}26\cdot 10^{30}$	$3{,}66\cdot 10^{29}$	$7{,}80\cdot 10^{13}$	$1{,}81\cdot 10^{15}$	$1{,}12\cdot 10^{15}$
11	$2{,}65\cdot 10^{36}$	$7{,}68\cdot 10^{35}$	$8{,}17\cdot 10^{16}$	$2{,}44\cdot 10^{18}$	$1{,}63\cdot 10^{18}$
12	$2{,}23\cdot 10^{43}$	$6{,}44\cdot 10^{42}$	$1{,}69\cdot 10^{20}$	$7{,}75\cdot 10^{21}$	$4{,}72\cdot 10^{21}$
13	$7{,}48\cdot 10^{50}$	$2{,}16\cdot 10^{50}$	$7{,}02\cdot 10^{23}$	$4{,}16\cdot 10^{25}$	$2{,}73\cdot 10^{25}$
14	$1{,}00\cdot 10^{59}$	$2{,}90\cdot 10^{58}$	$5{,}79\cdot 10^{27}$	$5{,}26\cdot 10^{29}$	$3{,}16\cdot 10^{29}$
15	$5{,}39\cdot 10^{67}$	$1{,}55\cdot 10^{67}$	$9{,}55\cdot 10^{31}$	$1{,}12\cdot 10^{34}$	$7{,}34\cdot 10^{33}$
16	$1{,}15\cdot 10^{77}$	$3{,}34\cdot 10^{76}$	$3{,}14\cdot 10^{36}$	$5{,}68\cdot 10^{38}$	$3{,}40\cdot 10^{38}$
17	$9{,}94\cdot 10^{86}$	$2{,}87\cdot 10^{86}$	$2{,}06\cdot 10^{41}$	$4{,}86\cdot 10^{43}$	$3{,}15\cdot 10^{43}$
18	$3{,}41\cdot 10^{97}$	$9{,}87\cdot 10^{96}$	$2{,}71\cdot 10^{46}$	$9{,}79\cdot 10^{48}$	$5{,}84\cdot 10^{48}$
19	$4{,}69\cdot 10^{108}$	$1{,}35\cdot 10^{108}$	$7{,}11\cdot 10^{51}$	$3{,}35\cdot 10^{54}$	$2{,}16\cdot 10^{54}$
20	$2{,}58\cdot 10^{120}$	$7{,}45\cdot 10^{119}$	$3{,}77\cdot 10^{57}$	$2{,}69\cdot 10^{60}$	$1{,}60\cdot 10^{60}$

5. Az öninverz mátrixok aszimptotikus száma

Szeretnénk tudni, hogyan viszonylik az $n\times n$-es öninverz mátrixok száma az összes invertálható, illetve az összes $n\times n$-es mod p mátrixok számához. Az előző fejezet végén közölt táblázat azt sugallja, hogy az öninverz mátrixok száma körülbelül az összes mátrixok négyzetgyöke. Ebben a fejezetben ezt a kérdést vizsgáljuk meg.

Nyilvánvaló, hogy mind S_n, mind pedig C_n p-nek egy polinomja. Célunk ezekben a polinomokban p legmagasabb fokú hatványának kitevőjét megkeresni.

Jelöljük s_n-nel S_n-ben a p legnagyobb kitevőjét, c_n-nel C_n-ben a p legnagyobb kitevőjét.

Egyszerű számolás után ezekre a következő rekurzív képlet adódik:

$$s_0 = 0,$$

$$s_1 = 0, \qquad c_1 = 0,$$

$$s_n = 2(n-1)+s_{n-2} \quad c_n = n-1+c_{n-1}, \quad n \geqq 2.$$

Zárt alakban felírva:

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, & \text{ha} \quad n = \text{páros}, \\ \dfrac{n^2-1}{2}, & \text{ha} \quad n = \text{páratlan}. \end{cases}$$

$$c_n = \frac{n^2-n}{2}.$$

C_n és S_n felírható úgy, mint a legmagasabb fokú tag n-től függő többszöröse:

$$C_n = C_n' \cdot p^{(n^2-n)/2},$$

$$S_n = S_n' \cdot p^{(n^2-1)/2}, \quad \text{ha } n = \text{páratlan és}$$

$$S_n = S_n' \cdot p^{n^2/2}, \quad \text{ha } n = \text{páros}.$$

Ahol tehát C_n' és S_n' p-től és n-től függő szorzók. Ezeknek a szorzóknak a kiszámítására szintén felírhatunk egy, az S_n-re és C_n-re felírthoz hasonló képletet.

$p = 2$ esetén:

$$S_0' = 1,$$

$$S_1' = 1,$$

$$C_1' = 1.$$

$$C_n' = a_n \cdot C_{n-1}' + b_n \cdot S_{n-1}', \quad n \geqq 2,$$

$$S_n' = a_n \cdot S_{n-2}' + b_n \cdot C_n', \quad n \geqq 2.$$

$p \neq 2$ esetén:

$$S_0' = 1,$$

$$S_1' = 2,$$

$$C_1' = 1.$$

$$C_n' = a_n \cdot C_{n-1}' + b_n \cdot S_{n-1}', \quad n \geqq 2,$$

$$S_n' = a_n \cdot S_{n-2}' + 2b_n \cdot C_n', \quad n \geqq 2.$$

itt

$$a_n = 1 - \frac{1}{p^{n-1}}$$

$$\text{és } b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{n/2}}, & \text{ha} \quad n = \text{páros}, \\ \dfrac{1}{p^{(n-1)/2}}, & \text{ha} \quad n = \text{páratlan}. \end{cases}$$

Most egy analítikus felső becslést adunk S_n'-re.

$$S_0' = 1,$$

$$S_1' \leqq 2,$$

$$C_1' = 1.$$

Mivel $a_n < 1$ és $b_n \leqq \frac{1}{2^{n/2}}$, ha n=páros; $b_n \leqq \frac{1}{2^{(n-1)/2}}$, ha n=páratlan, így $C_n' \leqq (1+2b_n)\cdot \max(C_{n-1}', S_{n-1}')$, $n \geqq 2$, $S_n' \leqq (1+2b_n)\cdot \max(S_{n-2}', C_n')$, $n \geqq 2$. Innen adódik, hogy

$$S_n' \leqq 2\cdot\left[\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^i}\right)\right]^4, \quad n \geqq 2.$$

De

$$\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^i}\right) = e^{\sum_{i=0}^{n} ln(1+(1/2^i))} \leqq e^{\sum_{i=0}^{n}(1/2^i)} \leqq e^2$$

miatt $S_n' \leqq 2\cdot e^8 = K$, vagyis S_n' korlátos. Ekkor viszont $b_n > 1 - a_n$ miatt $|S_n' - S_{n-2}'| \leqq K\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, amiből következik, hogy az S_n' sorozat konvergens is, külön a páros és külön a páratlan n-ekre.

Adott p esetén az egyes sorozatok határértékei számítógéppel könnyen meghatározhatók. Néhány p esetén $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$-re vonatkozó közelítő értékeket a 2. táblázat adja.

2. táblázat

$n \diagdown p$	2	3	5	11	31	251
páros	1,67937	2,18259	1,42043	1,12843	1,03659	1,00404
páratlan	2,19129	3,61471	2,63463	2,22031	2,06889	2,00803
Küszöbszám	38	28	16	10	6	4

A táblázatban a küszöbszám azt az N_0 indexet jelöli, amelyre $M, N > N_0$ esetén $|S_M' - S_N'| < 10^{-5}$ fennáll. Az eredmények 6 értékes jegy pontossággal számoló számítógéppel adódtak.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ véges érték, ezért S_n nagyságrendje:

$$S_n \approx p^{(n^2-1)/2}, \text{ ha } n = \text{páratlan};$$

$$S_n \approx p^{n^2/2}, \text{ ha } n = \text{páros}.$$

Ebben az értelemben tehát körülbelül tényleg „négyzetgyök-annyi" öninverz mátrix van, mint ahány mátrix összesen.

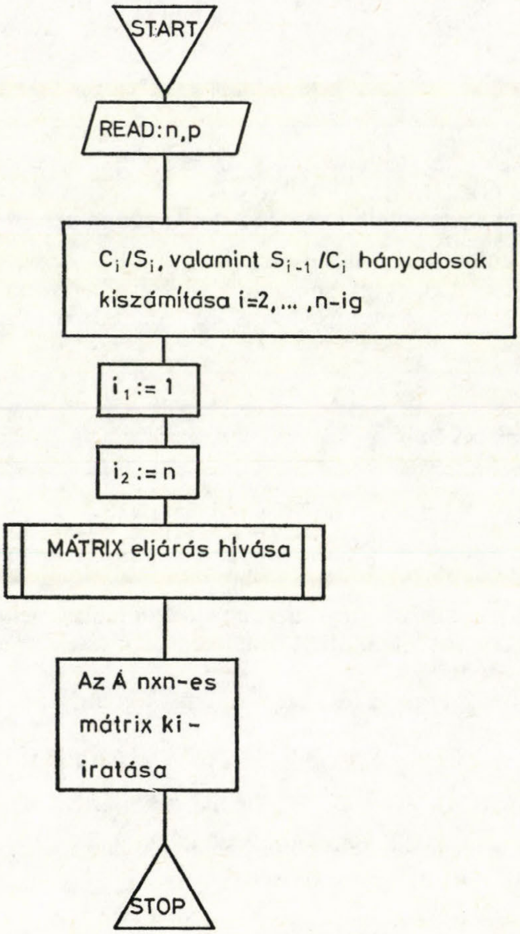
6. Véletlen öninverz mátrixok generálása

Kriptográfiai alkalmazások során fontos, hogy az alkalmazott kulcsról (esetünkben a konkrét öninverz mátrixról) a lehető legkevesebb információ derüljön ki. Úgy is fogalmazhatjuk ezt a követelményt, hogy a kulcselem vonatkozásában a lehető legnagyobb legyen a bizonytalanság. Jól ismert, hogy ez úgy valósítható meg, hogy az összes megengedett kulcs közül egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen választunk ki egyet. Ezért az összes öninverz mátrix közül is véletlenszerűen szeretnénk egyet választani.

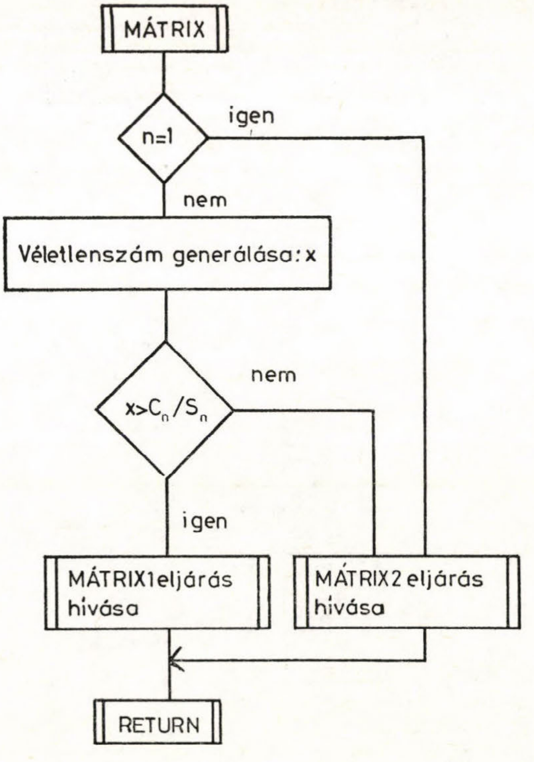
A következőkben ilyen algoritmust adunk meg. Az algoritmus a 4. fejezet eredményein alapszik. A felhasznált jelölések megegyeznek az előzőekben leírtakkal.

Az algoritmust blokkdiagram formájában ismertetjük. Először az algoritmus vázát képező főprogramot adjuk meg, majd a fontosabb részeit részletezzük is. Az algoritmus ismertetése után műveletigényét is megvizsgáljuk.

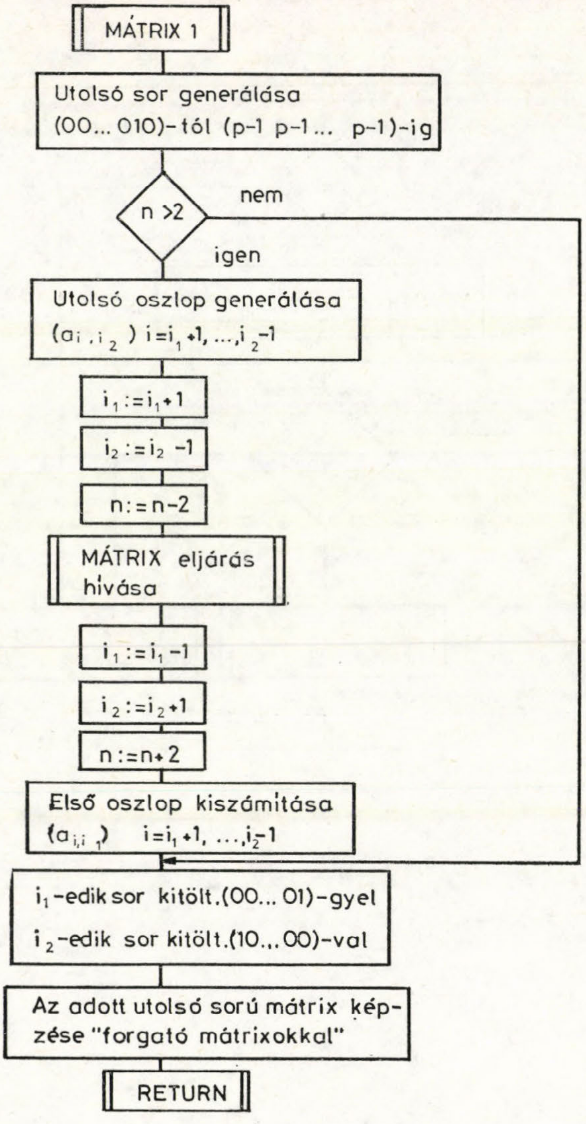
Főprogram



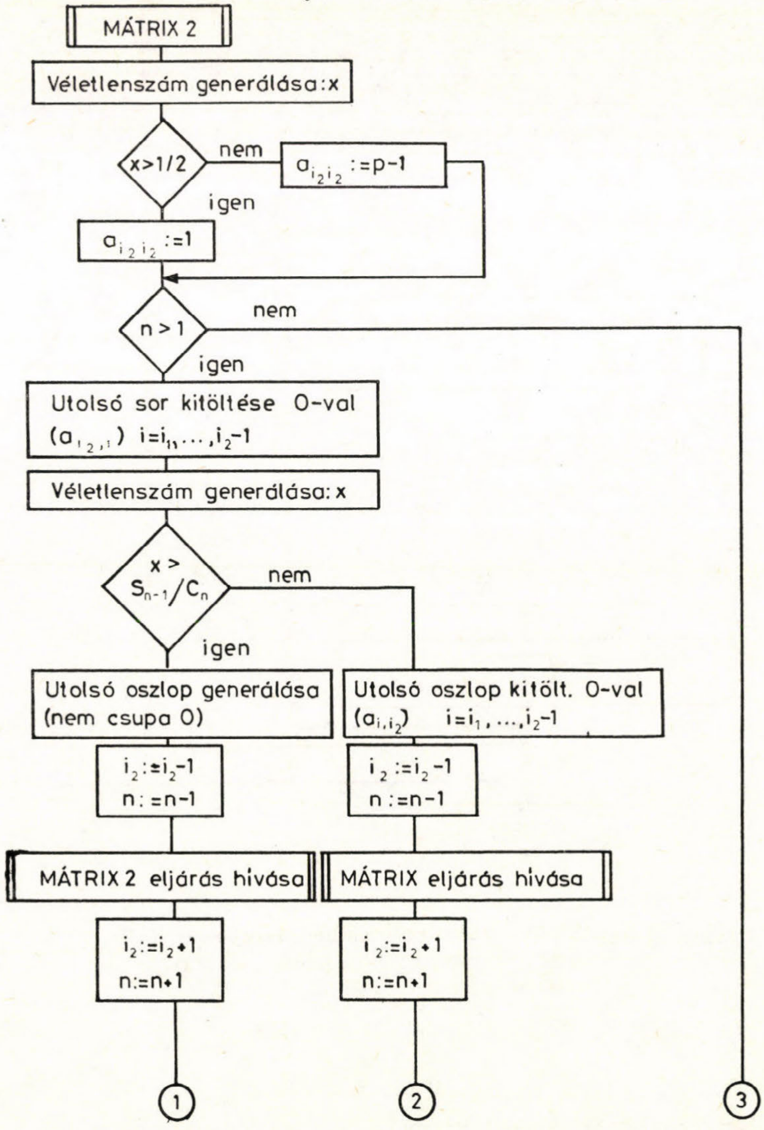
MÁTRIX eljárás (nxn-es öninverz mátrix generálása)

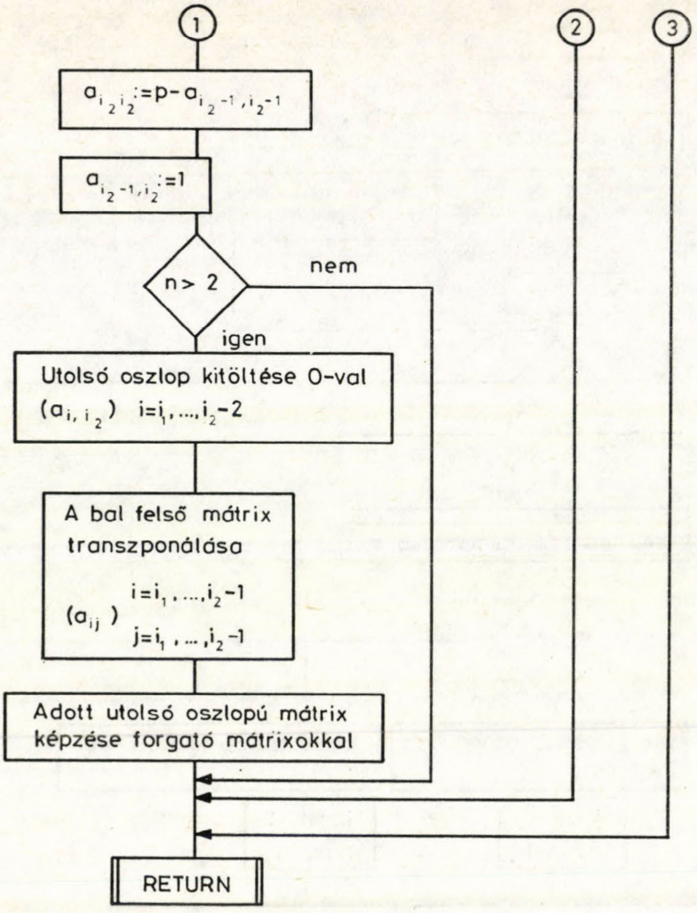


MÁTRIX 1 eljárás (Olyan nxn-es öninverz mátrix generálása, amelyben az utolsó sor nem(00..0k)alakú)



MÁTRIX 2 eljárás (Olyan nxn-es öninverz mátrix generálása, amelyben az utolsó sor (00....0K) alakú)





Megjegyzés: Véletlenszám alatt minden esetben a (0,1) intervallumba eső egyenletes eloszlású véletlenszámot értünk.

A következőkben az algoritmus műveletigényének nagyságrendjét határozzuk meg.

A mátrix generálása során egy-egy lépésben vagy a MÁTRIX 1 vagy a MÁTRIX 2 eljárásban leírt számolást kell végrehajtani. A műveletek összeszámolásánál a legkedvezőtlenebb és az átlagos műveletigénnyel számolnak. Az összeadást, kivonást és értékadást nem számoljuk, mivel azok végrehajtási ideje elhanyagolható a szorzás, osztáshoz képest.

$k \times k$-as mátrixok esetén az egyes eljárásokban a következő műveletigények adódnak:

MÁTRIX 1 eljárás műveletigénye	Legkedvezőtlenebb eset	Átlagos eset
Utolsó sor generálása	k	k
Utolsó oszlop generálása	$k-2$	$k-2$
Első oszlop kiszámítása	$(k-2)^2$	$(k-2)^2$
Adott utolsó sorú mátrix előállítása forgató mátrixokkal	$2k^2$	$\frac{p-1}{p}\cdot 2k^2$

MÁTRIX 2 eljárás műveletigénye	Legkedvezőtlenebb eset	Átlagos eset
Utolsó oszlop generálása	$k-1$	$k-1$
Adott utolsó oszlopú mátrix előállítása forgató mátrixokkal	$2k(k-1)$	$\frac{p-1}{p}\cdot 2k(k-1)$

Vagyis a legkedvezőtlenebb esetben a MÁTRIX 1 eljárás $3k^2$ nagyságrendű, a MÁTRIX 2 eljárás pedig $2k^2$ nagyságrendű, míg az átlagos esetben $\left(1-\frac{2}{3p}\right)\cdot 3k^2$, illetve $\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot 2k^2$ nagyságrendű egy-egy lépésben.

A forgatómátrixokkal való szorzáskor kihasználjuk a szorzásnak azt a tulajdonságát, hogy a forgatómátrix és az inverze is csak egy sorát vagy oszlopát változtatja meg a szorzandó mátrixnak. Az átlagos eset műveletigényénél adódó $\frac{p-1}{p}$ -s szorzó azt jelenti, hogy az esetek ennyied részében kell elvégezni a szorzást, ugyanis a 0 értékre nem kell.

Felhasználva, hogy $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\approx\frac{n^3}{3}$, a következőket mondhatjuk: Ha minden lépésben a MÁTRIX 1 eljárásban leírtakat kellene elvégezni, akkor a műveletigény $\frac{1}{2}\cdot n^3$, illetve $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{3p}\right)\cdot n^3$ nagyságrendű lenne, míg ha minden lépésben a MÁTRIX 2 eljárásban leírtakkal kellene számolni, akkor a műveletigény $\frac{2}{3}\cdot n^3$, illetve $\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot n^3$ nagyságrendű lenne. Megjegyezzük, hogy mivel $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{S_n}=0$, ezért nagy n-ekre majdnem mindig a MÁTRIX 1 eljárásban leírt számolás történik.

Megfontolásainkat alátámasztja az alább közölt táblázat, amely a számítógépes program néhány futási idejének átlagát mutatja:

$n \backslash p$	2	31	251
10	2,3″	3,3″	3,5″
20	13″	20″	21″
30	1,36″	2,20″	2,21″
54	3,43″	5,29″	5,33″

Az algoritmus konkrét számítógépes megvalósítása egy 64 Kbyte központi tárkapacitású MØ8X személyi számítógépen történt, a számítógépes program PASCAL nyelven készült. Ez a számítógép kategória alkalmas arra, hogy a gyakorlati felhasználáskor szóba jövő mátrixokat rövid idő alatt előállítsa. Az elkészült program bármilyen $2 \leqq p \leqq 251$ prímszám és bármilyen $2 \leqq n \leqq 54$ esetén használható. A kész program listáját a dolgozat függelékeként csatoljuk.

Függelék

$n \times n$-es modulo-p véletlen öninverz mátrixokat generáló program PASCAL nyelven.
Paraméterek: n: egész szám $\geqq 2$, p: tetszőleges prímszám

```
Nest   Source Statement

 0     PROGRAM ONINVERZ;
 0     label   2,22,4,44,222,444;
 1     VAR     A,B     :ARRAY[1..54,1..54] OF INTEGER;
 1             X,PR,KONST        :REAL;
 1             S,C,P2,P1         :ARRAY[1..55] OF REAL;
 1             N,I1,I2,I,J,P,NN,IQ,M,MM:INTEGER;
 1             INV      :ARRAY[1..251] OF INTEGER;
 1             W,WP     :WORD;
 1             OUTFILE :TEXT;
 1             RESULT  :INTEGER;
 1             FILENAME:STRING[16];
 1     PROCEDURE MATRIX;
 1     VAR         Q:REAL;
 2     PROCEDURE RND(VAR X:REAL);
 2     CONST M=2797;
 3           A=350;
 3           C=1399;
 3     VAR   Y,H:REAL;
 3     BEGIN   X:=M*X;
 3             Y:=A*X+C;
 3             H:=TRUNC(Y/M);
 3             X:=Y-H*M;
 3             X:=X/M
 3     END;
 2     PROCEDURE MATRIX1;
 2     VAR      I,J,Q:INTEGER;
 3     PROCEDURE GENERS;
 3     VAR      I:INTEGER;
 4     BEGIN    IF N<=NN THEN
 4              BEGIN   RND(X);
 5                      Q:=TRUNC(X*(P1[N]-P))+P;
 5                      FOR I:=I2 DOWNTO I1 DO
 5                      BEGIN   B[I2,I]:=Q MOD P;Q:=Q DIV P
 6                      END;
 5              END
 5              ELSE BEGIN RND(X);Q:=TRUNC(X*(P1[NN]-P))+P;
 5                      FOR I:=I2 DOWNTO I2-NN+1 DO
 5                      BEGIN   B[I2,I]:=Q MOD P;Q:=Q DIV P
 6                      END;
 5                      FOR I:=I1 TO I2-NN DO
 5                      BEGIN   RND(X);B[I2,I]:=TRUNC(P*X)
 6                      END
 6              END;
 4     END;
 3     PROCEDURE SZOROZS;
 3     VAR      I,J,M,II:INTEGER;
 4     BEGIN    II:=I1;
 4              WHILE B[I2,II]=0 DO II:=II+1;
 4              FOR I:=II+1 TO I2 DO
 4              IF B[I2,I]<>0 THEN
 4              FOR J:=I1 TO I2 DO
 4              BEGIN   M:=A[J,I]+B[I2,I]*A[J,I1];
 5                      MOVE(M,W,2);
 5                      W:=W MOD WP;
```

```
Nest    Source Statement

5                           MOVE(W,A[J,I],2);
5                           M:=A[I1,J]+(P-B[I2,I])*A[I,J];
5                           MOVE(M,W,2);
5                           W:=W MOD WP;
5                           MOVE(W,A[I1,J],2)
5                 END;
4                 IF II=I1 THEN
4                 FOR I:=I1+1 TO I2 DO
4                 BEGIN     M:=A[I,I1]*B[I2,I1];
5                           MOVE(M,W,2);
5                           W:=W MOD WP;
5                           MOVE(W,A[I,I1],2);
5                           M:=A[I1,I]*INV[B[I2,I1]];
5                           MOVE(M,W,2);
5                           W:=W MOD WP;
5                           MOVE(W,A[I1,I],2)
5                 END
5                 ELSE BEGIN FOR I:=I1 TO I2 DO
5                           BEGIN     M:=A[I,I1];
6                                     A[I,I1]:=A[I,II];
6                                     M:=B[I2,II]*M;
6                                     MOVE(M,W,2);
6                                     W:=W MOD WP;
6                                     MOVE(W,A[I,II],2)
6                           END;
5                           FOR I:=I1 TO I2 DO
5                           BEGIN     M:=A[I1,I];
6                                     A[I1,I]:=A[II,I];
6                                     M:=M*INV[B[I2,II]] MOD P;
6                                     MOVE(M,W,2);
6                                     W:=W MOD WP;
6                                     MOVE(W,A[II,I],2)
6                           END
6                 END
5       END;
3       BEGIN     GENERS;
3                 IF N>2 THEN
3                 BEGIN     FOR I:=I1+1 TO I2-1 DO
4                           BEGIN     RND(X);A[I,I2]:=TRUNC(X*P)
5                           END;
4                           I1:=I1+1;I2:=I2-1;N:=N-2;MATRIX;I1:=I1-1;I2:=I2+1;N:=N+2;
4                           FOR I:=I1+1 TO I2-1 DO
4                           BEGIN     A[I,I1]:=0;
5                                     FOR J:=I1+1 TO I2-1 DO
5                                     BEGIN     M:=(A[I,I1]+A[I,J]*A[J,I2]);
6                                               MOVE(M,W,2);
6                                               W:=W MOD WP;
6                                               MOVE(W,A[I,I1],2)
6                                     END;
5                                     A[I,I1]:=(P-A[I,I1]) MOD P
5                           END;
4                 END;
3                 A[I1,I1]:=0;A[I1,I2]:=1;A[I2,I1]:=1;A[I2,I2]:=0;
3                 IF I2>I1+1 THEN
```

```
Stmt  Nest    Source Statement

       3              FOR I:=I1+1 TO I2-1 DO
       3              BEGIN   A[I1,I]:=0;A[I2,I]:=0
       4              END;
       3              SZORZS
       3      END;
       2      PROCEDURE MATRIX2;
       2      VAR     I,J:INTEGER;
       3      PROCEDURE NULLAS;
       3      VAR     I:INTEGER;
       4      BEGIN   FOR I:=I1 TO I2-1 DO
       4              A[I2,I]:=0
       4      END;
       3      PROCEDURE NULLAD;
       3      VAR     I:INTEGER;
       4      BEGIN   FOR I:=I1 TO I2-1 DO
       4              A[I,I2]:=0
       4      END;
       3      PROCEDURE GENER;
       3      VAR     I,Q:INTEGER;
       4      BEGIN   IF N<=NN+1 THEN
       4              BEGIN   RND(X);
       5                      Q:=TRUNC(X*(P1[N-1]-1))+1;
       5                      FOR I:=I2-1 DOWNTO I1 DO
       5                      BEGIN   B[I,I2]:=Q MOD P;
       6                              Q:=Q DIV P
       6                      END;
       5              END
       5              ELSE BEGIN RND(X);
       5                      Q:=TRUNC(X*(P1[NN]-1))+1;
       5                      FOR I:=I2-1 DOWNTO I2-NN DO
       5                      BEGIN   B[I,I2]:=Q MOD P;
       6                              Q:=Q DIV P
       6                      END;
       5                      FOR I:=I1 TO I2-NN-1 DO
       5                      BEGIN   RND(X);
       6                              B[I,I2]:=TRUNC(P*X)
       6                      END
       6              END;
       4      END;
       3      PROCEDURE TRANSPON;
       3      VAR     I,J,M:INTEGER;
       4      BEGIN   FOR I:=I1 TO I2-2 DO
       4              FOR J:=I+1 TO I2-1 DO
       4              BEGIN   M:=A[I,J];
       5                      A[I,J]:=A[J,I];
       5                      A[J,I]:=M
       5              END
       5      END;
       3      PROCEDURE SZOROZO;
       3      VAR     I,J,M,II          :INTEGER;
       4      BEGIN   II:=I2-1;
       4              WHILE B[II,I2]=0 DO II:=II-1;
       4              IF II>I1 THEN
       4              FOR I:=I1 TO II-1 DO
```

```
Stmt  Nest    Source Statement

 163    4              IF B[I,I2]<>0 THEN
 164    4              FOR J:=I1 TO I2 DO
 165    4              BEGIN   M:=A[I,J]+B[I,I2]*A[I2-1,J];
 166    5                      MOVE(M,W,2);
 167    5                      W:=W MOD WP;
 168    5                      MOVE(W,A[I,J],2);
 169    5                      M:=A[J,I2-1]+(P-B[I,I2])*A[J,I];
 170    5                      MOVE(M,W,2);
 171    5                      W:=W MOD WP;
 172    5                      MOVE(W,A[J,I2-1],2)
 173    5              END;
 174    4              IF II=I2-1 THEN
 175    4              FOR I:=I1 TO I2 DO
 176    4              BEGIN   M:=A[I,II]*INV[B[II,I2]];
 177    5                      MOVE(M,W,2);
 178    5                      W:=W MOD WP;
 179    5                      MOVE(W,A[I,II],2);
 180    5                      M:=A[II,I]*B[II,I2];
 181    5                      MOVE(M,W,2);
 182    5                      W:=W MOD WP;
 183    5                      MOVE(W,A[II,I],2)
 184    5              END
 185    5              ELSE BEGIN FOR I:=I1 TO I2 DO
 186    5                      BEGIN   M:=A[I,II];
 187    6                              MM:=A[I,I2-1]*INV[B[II,I2]];
 188    6                              MOVE(MM,W,2);
 189    6                              W:=W MOD WP;
 190    6                              MOVE(W,A[I,II],2);
 191    6                              A[I,I2-1]:=M
 192    6                      END;
 193    5                      FOR I:=I1 TO I2 DO
 194    5                      BEGIN   M:=A[I2-1,I];
 195    6                              A[I2-1,I]:=A[II,I];
 196    6                              M:=M*B[II,I2];
 197    6                              MOVE(M,W,2);
 198    6                              W:=W MOD WP;
 199    6                              MOVE(W,A[II,I],2)
 200    6                      END
 201    6              END
 202    5      END;
 203    3      BEGIN   RND(X);
 204    3              IF X>0.5 THEN A[I2,I2]:=1 ELSE A[I2,I2]:=P-1;
 205    3              IF N>1 THEN
 206    3              BEGIN   NULLAS;
 207    4                      RND(X);
 208    4                      IF X>S[N-1] THEN
 209    4                      BEGIN   GENER;
 210    5                              I2:=I2-1;N:=N-1;
 211    5                              MATRIX2;
 212    5                              I2:=I2+1;N:=N+1;
 213    5                              A[I2,I2]:=P-A[I2,I2];
 214    5                              A[I2-1,I2]:=1;
 215    5                              A[I,J]:=P-A[I,J];
 216    5                              IF N>2 THEN
```

```
Stmt  Nest   Source Statement

 217   5                           BEGIN    FOR I:=I1 TO I2-2 DO A[I,I2]:=0;
 218   6                                    TRANSPON
 219   6                           END;
 220   5                           SZOROZO
 221   5                   END
 222   5                   ELSE BEGIN
 223   5                           NULLAD;
 224   5                           I2:=I2-1;N:=N-1;
 225   5                           MATRIX;
 226   5                           I2:=I2+1;N:=N+1
 227   5                   END
 228   5           END
 229   4   END;
 230   2   BEGIN IF N=1 THEN MATRIX2
 231   2           ELSE BEGIN
 232   3                   RND(X);
 233   3                   IF X>C[N] THEN MATRIX1 ELSE MATRIX2
 234   3           END
 235   3   END;
 236   1   PROCEDURE KIIR(VAR F:TEXT);
 237   1   VAR     I,J,K:INTEGER;
 238   2   BEGIN   FOR I:=I1 TO I2 DO
 239   2           FOR J:=I1 TO I2 DO
 240   2           WRITE(F,A[I,J]:3)
 241   2   END;
 242   1   PROCEDURE INVERT;
 243   1   VAR     I:INTEGER;
 244   2   BEGIN   INV[1]:=1;
 245   2           IF P>2 THEN
 246   2           BEGIN   INV[P-1]:=P-1;
 247   3                   IF P>3 THEN
 248   3                   FOR I:=2 TO P-2 DO
 249   3                   IF INV[I]=0 THEN
 250   3                   BEGIN   J:=I+1;
 251   4                           M:=I*J;
 252   4                           MOVE(M,W,2);
 253   4                           W:=W MOD WP;
 254   4                           MOVE(W,M,2);
 255   4                           WHILE M<>1 DO
 256   4                           BEGIN   J:=J+1;
 257   5                                   M:=I*J;
 258   5                                   MOVE(M,W,2);
 259   5                                   W:=W MOD WP;
 260   5                                   MOVE(W,M,2)
 261   5                           END;
 262   4                           INV[I]:=J;
 263   4                           INV[J]:=I
 264   4                   END
 265   4           END
 266   3   END;
 267   1   BEGIN   WRITE('N=');
 268   1           READ(N);WRITE('X=');
 269   1           READ(X);WRITE('P=');
 270   1           READ(P);PR:=1.0*P;MOVE(P,WP,2);
```

```
Stmt  Nest    Source Statement

      1          NN:=TRUNC(15*LN(2.0)/LN(PR));
      1          INVERT;
      1          IF P=2 THEN KONST:=1.0 ELSE KONST:=2.0;
      1          S[1]:=KONST;
      1          IF P=2 THEN C[2]:=1.0 ELSE C[2]:=1.0+1.0/P;
      1          IF P=2 THEN S[2]:=1.0 ELSE S[2]:=1.0+(PR+2)/P/P;
      1          P1[2]:=P*PR;P2[1]:=PR;P2[2]:=P*PR;
      1          IF N>2 THEN
      1          BEGIN   I:=3;
      2          4:      C[I]:=C[I-1]-C[I-1]/P1[I-1]+S[I-1]/P2[I-2];
      2                  S[I]:=S[I-2]-S[I-2]/P1[I-1]+KONST*C[I]/P2[I-2];
      2                  P1[I]:=P*P1[I-1];P2[I]:=P*P2[I-2];
      2                  I:=I+1;
      2                  IF I>N+1 THEN GOTO 444;
      2                  IF S[I-1]<>S[I-3] THEN GOTO 4;
      2          44:     C[I]:=C[I-1];S[I]:=S[I-2];I:=I+1;
      2                  IF I<=N+1 THEN GOTO 44;
      2     444: END;
      1          S[1]:=S[1]/C[2]/P;C[2]:=C[2]/S[2]/P;
      1          IF N>2 THEN
      1          BEGIN   I:=3;
      2          2:      S[I-1]:=S[I-1]/C[I]/P2[I-2];
      2                  C[I]:=C[I]/S[I]/P2[I-2];
      2                  I:=I+1;
      2                  IF I>N THEN GOTO 222;
      2                  IF S[I-1]<>S[I+1] THEN GOTO 2;
      2                  22:     S[I-1]:=S[I-3]/P;C[I]:=C[I-2]/P;I:=I+1;
      2                          IF I<=N THEN GOTO 22;
      2     222: END;
      1          I1:=1;I2:=N;
      1          FILENAME:='MATRIX.DAT';
      1          ASSIGN(OUTFILE,FILENAME);
      1          REWRITE(OUTFILE);
      1          IF IORESULT=255 THEN WRITELN('HIBA A NYITASNAL:',FILENAME)
      1          ELSE BEGIN
      2                  FOR IQ:=1 TO N DO
      2                  BEGIN   MATRIX;
      3                          KIIR(OUTFILE)
      3                  END;
      2                  CLOSE(OUTFILE,RESULT);
      2                  IF RESULT=255 THEN WRITELN('HIBA A ZARASNAL:',FILENAME)
      2                  ELSE WRITELN('SIKERES LEZARAS:',FILENAME)
      2          END
      2     END.
A>
```

IRODALOM

[1] BÁNVÖLGYI GYÖRGY: *Lineáris shift-regiszter sorozatok alkalmazási lehetőségei adat- és beszédjelek titkosítására,* Egyetemi doktori értekezés, BME, 1979.

[2] DIFFIE, W., HELLMAN, M. E.: New Directions in Criptography, *IEEE Trans. on Info. Th.,* **IT—22** (1976), pp. 644—654.

[3] HELLMAN, M. E.: On using natural redundancy for error detection, *IEEE Trans. on Communications,* **COM—22** (1979), pp. 1690—1693.

[4] KAHN, D.: *The Codebreakers,* 5-th Edition, MacMillan Comp., Toronto, 1969.

[5] KENYERES SÁNDOR: *Gazdasági információs rendszerek biztonsági kérdéseiről,* Egyetemi doktori értekezés, MKKE, 1981.

[6] NEMETZ, T.: Run-test discrimination between written Hungarian and random sequences, *Lecture Notes in Statistics: The first Pannonian Symposium on Math. Stat.,* ed. by P. Révész et al., Springer, 1981, pp. 182—194.

[7] NEMETZ, T., URECZKY, J.: A random linear secret-key encryption, Előadás az 5. Pannon Matematikai Statisztikai Szimpoziumon, Visegrád, 1985. május.

[8] Svékus Olivér: *Titkosírások*, Móra Könyvkiadó, Bp., 1964.
[9] Révay Zoltán: *Titkosírások*, Zrínyi Katonai Kiadó, Bp., 1968.
[10] Ureczky, J.: Self-inverse matrices; — a building stone in cryptography, submitted to *Transactions of EUROCRYPT* 85, Linz, April 9—11, 1985.

(Beérkezett: 1985. július 8-án)

ЧИСЛО И СЛУЧАЙНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ИНВОЛЮЦИОННЫХ ПО МОДУЛЮ *p* МАТРИЦ

Й. УРЕЦКИ

ON THE NUMBER OF MODULO-PRIME SELF-INVERSE MATRICES AND THEIR RANDOM GENERATION

J. URECZKY

Let p be a prime number and $n \geqq 2$ an integer. In this paper we investigate $n \times n$ matrices with integer entries from $0, 1, \ldots, p-1$, such that their quadrat in the usual $\bmod p$ arithmetic is the unit matrix. A linear recursion of two variables is derived for their number. It is shown that they are asymptotically as many as the square root of all $n \times n$ $\bmod p$ matrices.

An algorithm is constructed for generating uniformly a random matrix with this property. Its complexity (measured by the average number of operations) is $n^3/2$, independently of p.

LUCAS- ÉS LEHMER-PSZEUDOPRÍM SZÁMOKRÓL

BUI MINH PHONG

1. Bevezetés és eredmények

Fermat kongruencia tétele alapján jól ismert, hogy

$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

ha n egy páratlan prímszám. Sokáig azt sejtették, hogy a fenti kongruencia akkor és csak akkor igaz, ha n prímszám. Sarrus döntötte el a problémát 1819-ben egy ellenpéldával, kimutatta, hogy $n=341=11\cdot 31$ esetén $341 \mid 2^{340}-1$. Azóta több szerző talált hasonló tulajdonságú összetett számokat, sőt 1904-ben M. Cipolla [3] bizonyította, hogy ezek száma végtelen. Az ilyen tulajdonságú összetett számokat pszeudoprím számoknak nevezzük. Ha n összetett és valamely $c>1$ természetes szám esetén

$$c^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

ahol $(n, c)=1$, akkor az n természetes számot pszeudoprímnek nevezzük c vonatkozásában.

A pszeudoprím számokkal kapcsolatos 1972-ig elért eredményekről A. Rotkiewicz [17] adott jó összefoglalást, könyvében számos problémát is felvetett. Az utóbbi időben egyre több szerző foglalkozik pszeudoprím számokkal és különböző általánosításukkal, mert a prímtesztek elméletében igen jól használhatók. Az egyik általánosítás az Euler pszeudoprím szám. Egy n természetes számot Euler pszeudoprímnek nevezünk c vonatkozásában, ha összetett, $(n, 2c)=1$ és

$$c^{\frac{n-1}{2}} \equiv (c/n) \pmod{n},$$

ahol (c/n) a Jacobi-szimbólum (lásd pl. [15], [23]).

A pszeudoprím számokkal kapcsolatos problémák visszavezethetők másodrendű lineáris rekurzív Lucas és Lehmer sorozatokkal kapcsolatos problémákra is, így a Lucas és Lehmer sorozatokkal kapcsolatos eredmények jól használhatók a pszeudoprím számok vizsgálatához (lásd pl. [4], [12], [18]).

Legyen A és B két nem-zérus egész szám, amelyekre $D=A^2-4B\neq 0$. Definiáljuk az $R=R(A, B)=\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $S=S(A, B)=\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lucas sorozatokat az A, B paraméterekkel, az $R_0=0$, $R_1=1$, $S_0=2$, $S_1=A$ kezdőelemekkel és az

$$R_n = AR_{n-1}-BR_{n-2} \quad (n>1),$$

illetve

$$S_n = AS_{n-1}-BS_{n-2} \quad (n>1)$$

rekurzív formulákkal. Ismert, hogy ha az $x^2-Ax+B=0$ egyenlet gyökei α, illetve

β, akkor minden $n \geqq 0$ esetén

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{és} \quad S_n = \alpha^n + \beta^n.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az R, ill. S sorozat nem degenerált, azaz $(A, B)=1$ és α/β nem egységgyök.

Ismert, hogy ha n egy prímszám, amelyre $(n, 2BD)=1$, akkor

$$R_{n-(D/n)} \equiv 0 \pmod{n}, \tag{1}$$

$$R_n \equiv (D/n) \pmod{n}, \tag{2}$$

és

$$S_n \equiv S_1 \pmod{n}, \tag{3}$$

ahol $D=A^2-4B$ és (D/n) a Jacobi-szimbólum (lásd pl. [10]). Ha n összetett, $(n, 2BD)=1$, de az (1) kongruencia teljesül, akkor az n számot Lucas pszeudoprímnek nevezzük az R sorozat vonatkozásában. Továbbá, ha egy $n>0$ összetett egészre

$$R_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n}, \quad \text{ha} \quad (B/n) = 1,$$

vagy

$$S_{\frac{n-(D/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n}, \quad \text{ha} \quad (B/n) = -1$$

teljesül, akkor az n számot Euler—Lucas pszeudoprímnek nevezzük az R sorozat vonatkozásában. Könnyen belátható, hogy ezek a definíciók az $A=c+1$ és $B=c$ esetben az $(n, c-1)=1$ feltételt kielégítő közönséges c vonatkozású pszeudoprím, illetve Euler pszeudoprím számokat definiálják.

A lineáris másodrendű rekurzív sorozatok körében a Lehmer sorozatok sokkal általánosabbak, mint a Lucas sorozatok. Legyen L és M két nem zérus egész szám, amelyekre $K=L-4M\neq 0$. Definiáljuk az $U=U(L, M)=\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $V=V(L, M)= =\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ Lehmer sorozatokat az L, M paraméterekkel, az $U_0=0$, $U_1=1$, $V_0=2$, $V_1=1$ kezdőelemekkel és az

$$U_n = \begin{cases} LU_{n-1} - MU_{n-2}, & \text{ha} \quad 2\nmid n, \\ U_{n-1} - MU_{n-2}, & \text{ha} \quad 2\mid n, \end{cases}$$

illetve

$$V_n = \begin{cases} LV_{n-1} - MV_{n-2}, & \text{ha} \quad 2\mid n, \\ V_{n-1} - MV_{n-2}, & \text{ha} \quad 2\nmid n \end{cases}$$

rekurzív formulákkal. Ismert, hogy ha α és β a $z^2-\sqrt{L}z+M=0$ egyenlet gyökei, akkor minden $n \geqq 0$ esetén

$$U_n = \begin{cases} (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta), & \text{ha} \quad 2\nmid n, \\ (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha^2 - \beta^2), & \text{ha} \quad 2\mid n, \end{cases}$$

illetve

$$V_n = \begin{cases} \alpha^n + \beta^n, & \text{ha} \quad 2\mid n, \\ (\alpha^n + \beta^n)/(\alpha + \beta), & \text{ha} \quad 2\nmid n. \end{cases}$$

Ezek alapján könnyen belátható, hogy az $L=A^2$, $M=B$ esetben az $R(A, B)$ és $S(A, B)$ sorozatok tagjai megadhatók az $U(A^2, B)$ és $V(A^2, B)$ Lehmer sorozatok tagjaiként (lásd [10], 421. oldal). Hasonlóan mint a Lucas sorozatoknál, a Lehmer sorozatokat nem degeneráltaknak nevezzük, ha $(L, M)=1$ és α/β nem egységgyök.

A. Rotkiewicz [18, 20] a közönséges pszeudoprímek mintájára bevezette a Lehmer és Euler—Lehmer pszeudoprím számok fogalmát. Mint ismert, ha n prímszám és $(n, 2LMK)=1$, akkor érvényesek az

$$U_{n-(LK/n)} \equiv 0 \pmod{n}, \tag{4}$$

$$U_n \equiv (K/n) \pmod{n}, \tag{5}$$

és

$$V_n \equiv (L/n) \pmod{n} \tag{6}$$

kongruenciák, ahol $(\cdot/n)$ a Jacobi-szimbólum (lásd [10]). Ha n összetett és $(n, 2LMK)=1$, de a (4) kongruencia teljesül, akkor az n számot Lehmer pszeudoprímnek nevezzük az U sorozat vonatkozásában, továbbá Euler—Lehmer pszeudoprímnek nevezzük U vonatkozásában, ha

$$U_{\frac{n-(LK/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n}, \quad \text{ha} \quad (LM/n) = 1,$$

vagy

$$V_{\frac{n-(LK/n)}{2}} \equiv 0 \pmod{n}, \quad \text{ha} \quad (LM/n) = -1.$$

E dolgozat célja a Lehmer és Euler—Lehmer pszeudoprím számok tanulmányozása. Be fogjuk bizonyítani, hogy rögzített s természetes szám esetén végtelen sok olyan Euler—Lehmer pszeudoprím szám létezik, mely pontosan s különböző prímszám szorzata és ezek a prímszámok választhatók egy számtani sorozat tagjaiból. Ezenkívül foglalkozunk az s prímtényezős Lehmer pszeudoprím számok eloszlásával, valamint azokkal az s prímtényezős Lehmer pszeudoprím számokkal, amelyek bizonyos kikötések mellett egyidejűleg kielégítik a (4), (5) és (6) kongruenciákat. Tételeink az előzőek alapján speciális esetként Lucas, ill. Euler—Lucas pszeudoprímekre vonatkozó eredményeket is tartalmaznak, így általánosítunk, illetve javítunk néhány korábbi eredményt.

C. Pomerance, J. L. Selfridge és S. S. Wagstaff, Jr. [15] bizonyították, hogy tetszőlegesen adott s természetes szám esetén mindig található olyan Euler pszeudoprím szám, mely pontosan s különböző prímszám szorzata. A. J. van der Poorten és A. Rotkiewicz [16], valamint A. Rotkiewicz [20] eredményeiből következik, hogy minden $ax+b$ számtani sorozatban, ahol $(a, b)=1$, található végtelen sok olyan tag, mely c vonatkozású Euler, illetve Euler—Lehmer pszeudoprím szám az $U(L, M)$ Lehmer sorozat vonatkozásában, ha $L>0$ és $K=L-4M>0$. A. Rotkiewicz Lehmer pszeudoprím számokra vonatkozó [20]-beli eredménye tulajdonképpen javítja R. Baillie és S. S. Wagstaff, Jr. [1] egy eredményét. Másrészt P. Erdős [5] és E. Lieuwens [12] bizonyították, hogy tetszőleges $c, s>1$ természetes számok esetén végtelen sok c vonatkozású pszeudoprím szám van, mely pontosan s különböző prímszám szorzata. Ezt az eredményt P. Kiss és E. Lieuwens szerzőkkel közösen általánosítottuk [9]-ben Euler—Lucas pszeudoprímekre, többek között megmutattuk, hogy ha $R(A, B)$ egy nem degenerált Lucas sorozat, amelyre $D=A^2-4B>0$, akkor végtelen sok Euler—Lucas pszeudoprím szám létezik az R sorozat vonatkozásában, mely pontosan s különböző $ax+1$ alakú prímszám szorzata, ahol $a, s>1$ tetszőlegesen adott természetes számok.

Ezen eredményekhez kapcsolódva a következőket fogjuk bizonyítani.

1. Tétel. *Legyen $U=U(L, M)$ egy tetszőleges nem degenerált Lehmer sorozat és $s>1$ egy tetszőleges természetes szám. Ekkor létezik egy w_0 pozitív egész szám úgy, hogy bármely, az $(a, bw_0)=1$ feltételt kielégítő a, b természetes számok esetén végtelen sok $ax+b$ alakú p prímszámhoz található olyan n Euler—Lehmer pszeudoprím szám az U sorozat vonatkozásában, mely pontosan s különböző prímszám szorzata és p az n legkisebb prímosztója.*

2. Tétel. *Legyen $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre $L(L-4M)>0$ és legyenek $a, s>1$ tetszőleges természetes számok. Ekkor végtelen sok olyan Euler—Lehmer pszeudoprím szám létezik az U sorozat vonatkozásában, mely pontosan s különböző $ax+1$ alakú prímszám szorzata.*

A. Rotkiewicz [19] bizonyította, hogy ha $R(A, B)$ egy nem degenerált Lucas sorozat, amelyre $B=1$ vagy $B=-1$, és a, b relatív prím természetes számok, akkor végtelen sok két prímtényező szorzatából álló, illetve $ax+b$ alakú összetett szám létezik, amelyek egyidejűleg kielégítik az (1), (2) és (3) kongruenciákat. [9]-ben megmutattuk, hogy a fenti feltételek mellett végtelen sok olyan Euler—Lucas pszeudoprím szám létezik, mely pontosan s különböző $ax+1$ alakú prímszám szorzata és egyidejűleg kielégíti az (1), (2) és (3) kongruenciákat. Ez érvényes az Euler—Lehmer pszeudoprím számokra is.

3. Tétel. *Legyen $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre $M=\pm 1$ és $L(L-4M)>0$, továbbá legyenek $a, s>1$ természetes számok. Ekkor végtelen sok olyan Euler—Lehmer pszeudoprím szám létezik az U sorozat vonatkozásában, mely pontosan s különböző $ax+1$ alakú prímszám szorzata és egyidejűleg kielégíti a* (4), (5) *és* (6) *kongruenciákat.*

Végül a Lehmer pszeudoprím számok eloszlásával foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy eddig csak a c vonatkozású pszeudoprím számok és Lucas pszeudoprím számok eloszlásával kapcsolatos eredmények ismertek. Jelölje $P(c, x)$ az x pozitív valós számnál nem nagyobb c vonatkozású pszeudoprímek számát. P. Erdős [6] és D. H. Lehmer [11] bizonyították, hogy léteznek C_1 és C_2 pozitív számok úgy, hogy elég nagy x esetén

$$C_1 \log x < P(2, x) < x \cdot \exp\{-C_2(\log x \log\log x)^{1/2}\}.$$

C. Pomerance [13, 14] javította ezeket az eredményeket, kimutatva, hogy elég nagy x esetén

$$P(c, x) > \exp\{(\log x)^{5/14}\}$$

és

$$P(c, x) < x \cdot \exp\{-\log x \log\log\log x / 2 \log\log x\},$$

minden $c>1$ természetes szám esetén. A Lucas pszeudoprím számokra R. Baillie és S. S. Wagtaff, Jr. [1], valamint P. Kiss [8] bizonyították, hogy léteznek C_3 és C_4 pozitív számok úgy, hogy elég nagy x esetén

$$C_3 \log x < P(R, x) < x \cdot \exp\{-C_4(\log x \log\log x)^{1/2}\},$$

ahol $P(R, x)$ az x-nél nem nagyobb Lucas pszeudoprímek száma és $R=R(A, B)$ egy nem degenerált Lucas sorozat. Az alsó korlátot P. Erdős, P. Kiss és A. Sárközy [7] javították, bizonyítva hogy

$$P(R, x) > \exp\{(\log x)^{C_5}\},$$

ahol $C_5>0$. Másrészt, ha $P_s(c, x)$ jelöli azon x-nél nem nagyobb c vonatkozású pszeudoprímek számát, melyek pontosan s különböző prímszám szorzatai, akkor K. Szymiczek [25] bizonyította, hogy

$$P_2(2, x) > \frac{1}{4}\log x,$$

ha $x \geqq 2^{22}-1$ és

$$P_s(2, x) > \frac{1}{4}\log_{s-1} x,$$

ha x elég nagy, ahol $\log_1 x = \log x$ és $\log_i x = \log(\log_{i-1} x)$ $(i=2, 3, \ldots)$.

A továbbiakban $k(m)$-mel jelöljük az m egész szám négyzetmentes magját (vagyis $m=u^2 \cdot k(m)$, ahol u egész szám és $k(m)$ nem osztható egy prímszám négyzetével sem). Legyenek

$$\Delta = k(M \cdot \max(L, K))$$

és

$$\Omega = \begin{cases} 1, & \text{ha } \Delta \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & \text{ha } \Delta \equiv 2, 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Használva ezen jelöléseket, a következő eredményt bizonyítjuk.

4. Tétel. *Legyen $s>1$ egy természetes szám és $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre $L>0$. Jelölje $P_s(U, x)$ azon x valós számnál nem nagyobb Lehmer pszeudoprímek számát, melyek pontosan s különböző prímszám szorzatai. Ekkor elég nagy x esetén*

$$P_2(U, x) > \frac{1}{4\log|\alpha|}\left(1+\frac{2}{|\Delta|\,\Omega}\right)\log x$$

és

$$P_{s+1}(U, x) > P_s\left(U, \frac{\log x}{\log|\alpha|}\right),$$

ahol α a $z^2-\sqrt{L}z+M=0$ egyenlet nem kisebb abszolút értékű gyöke.

Mint már az előzőekben láttuk, végtelen sok c vonatkozású pszeudoprím szám van, de a természetes számok halmazában „sokkal ritkábban" fordulnak elő mint a prímszámok. Valóban, mint jól ismert, a $\sum 1/n$ sor konvergens, ahol n végigfut a c vonatkozású pszeudoprím számok halmazán (lásd pl. [25], [1]). Másrészt, ha $\psi_s(U)$-val, illetve $\psi_s(c)$-vel jelöljük azon $U=U(L, M)$ Lehmer sorozat, illetve c egész szám vonatkozásában pszeudoprímek halmazát, melyek pontosan s különböző prímszám szorzatai, akkor a 4. Tétel alapján könnyen belátható, hogy a

$$\sum_{n\in\psi_2(c)} \frac{1}{\log n} \quad \text{és} \quad \sum_{n\in\psi_2(U)} \frac{1}{\log n}$$

sorok divergensek. [2]-ben megmutattuk, hogy

$$\sum_{n\in\psi_s(c)} \frac{1}{\log_{s-1} n}$$

szintén divergens sor minden $c, s>1$ természetes szám esetén. Most a következőt fogjuk bizonyítani.

5. Tétel. *Legyen* $U=U(L, M)$ *egy tetszőleges nem degenerált Lehmer sorozat. Ekkor minden* $s \geqq 3$ *természetes szám esetén a*

$$\sum_{n \in \psi_s(U)} \frac{1}{\log_{s-2} n}$$

sor divergens.

2. Ismert eredmények és lemmák

Ebben a részben megadjuk a továbbiakban szükséges fogalmak definícióit, bevezetjük a használt jelöléseket és felsorolunk néhány alapvető ismert eredményt a Lehmer sorozatokkal kapcsolatban.

Legyen $U=U(L, M)$ egy tetszőleges nem degenerált Lehmer sorozat. Jól ismert, hogy ha n egy tetszőleges természetes szám, amelyre $(n, M)=1$, akkor az U sorozat tagjai között találhatók n-nel osztható tagok. Jelöljük $u(n)$-nel azt a legkisebb pozitív u számot, amelyre $n|U_u$. Az $u(n)$ számot az n szám U sorozatban való előfordulási rendjének nevezzük. Egy p prímszámot az U_n primitív prímosztójának nevezünk, ha $p|U_n$, de $p \nmid LMKU_1 \dots U_{n-1}$, ahol $K=L-4M$. Érvényesek a következő tulajdonságok:

(i) $n|U_m$ akkor és csak akkor, ha $u(n)|m$,

(ii) $u(p)\left|p-\left(\frac{LK}{p}\right)\right.$,

(iii) $u(p)\left|\left(p-\left(\frac{LK}{p}\right)\right)\right/2$ akkor és csak akkor, ha $\left(\frac{LM}{p}\right)=1$,

(iv) $u([n, n'])=[u(n), u(n')]$,

ahol n, n', m egész számok, amelyekre $(nn', M)=1$; p prímszám $(p, LMK)=1$ feltétellel; $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ a Jacobi-szimbólum és $[x, y]$ az x, y egész számok legkisebb közös többszöröse (lásd pl. [10]-ben).

Továbbiakban sokszor használjuk azt a tényt, hogy a Lehmer sorozat U_n tagjainak van egy, illetve két primitív prímosztója bizonyos n-ek esetén. A. Schinzel [21, 22] és C. L. Stewart [24] bizonyították a következőket:

1. Lemma ([21], [24]). *Minden nem degenerált* $U(L, M)$ *Lehmer sorozat esetén létezik egy abszolút konstans* n_0 *szám úgy, hogy minden* $n > n_0$ *természetes esetén* U_n*-nek van legalább egy primitív prímosztója.*

2. Lemma ([22]). *Legyen* $U(L, M)$ *egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre* $L>0$. *Továbbá legyenek* $\Delta=k(M \cdot \max(L,$ *és*

$$\Omega = \begin{cases} 1, & ha \quad \Delta \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & ha \quad \Delta \equiv 2, 3 \pmod 4), \end{cases}$$

ahol $K=L-4M$ *és* $k(m)$ *az* m *egész szám négyzetmentes magja. Ekkor létezik egy effektíve meghatározható* n_1 *konstans úgy, hogy minden* $n > n_1$ *természetes szám esetén, amelyre* $n/\Delta\Omega$ *páratlan egész, az* U_n *tagnak van legalább két primitív prímosztója.*

J. Wójcik [26, 27] foglalkozott bizonyos prímszámok sűrűségével, többek között bizonyította a következő eredményt:

3. Lemma ([26, 27]). *Legyen $U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat. Ekkor létezik egy w_1 természetes szám úgy, hogy minden olyan w, a, b pozitív egész szám esetén, amelyekre $w_1|w$, $(a, b)=1$ és $b\equiv 1 \pmod{(a, w)}$, végtelen sok p prímszám létezik*

$$p \equiv b \pmod a, \quad p \equiv 1 \pmod w \quad \text{és} \quad u(p)|(p-1)/w$$

feltételekkel. Továbbá ezen prímszámok Dirichlet sűrűsége pozitív.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy J. Wójcik meghatározta a w_1 és a Dirichlet sűrűség explicit alakját is (lásd [27], Theorem 1′). A w_1 explicit alakjából következik, hogy

$$8k(LK)|w_1. \tag{7}$$

A tételeink bizonyításánál szükségünk lesz még egy segédtételre.

4. Lemma. *Legyen $U(L, M)$ egy tetszőleges nem degenerált Lehmer sorozat és p egy prímszám, amelyre $(p, 2LMK)=1$. Ha $8k(LK)\cdot k(M)|u(p)$, akkor $(LM/p)=$ $=1$ és $u(p)|(p-(LK/p))/2$; ezenkívül $(LK/p)=1$ is teljesül, ha $LK>0$.*

Bizonyítás. $k(\cdot)$ definíciója miatt nyilvánvaló, hogy $k(mn)=k(m)\cdot k(n)$, ha $(m, n)=1$. Így könnyen belátható, hogy

$$k(LM) = k(L)\cdot k(M) \quad \text{és} \quad k(L)\cdot k(K)|4k(LK), \tag{8}$$

mert a kikötések miatt $(L, M)=1$ és $K=L-4M$.

Mivel $LMK\neq 0$, azért $k(LM)$, illetve $k(LK)$ felírható

$$k(LK) = \pm 2^a\cdot t, \quad \text{illetve} \quad k(LM) = \pm 2^b \cdot h$$

alakban, ahol a, b, t, h természetes számok, $0\leqq a$, $b\leqq 1$ és t, h páratlanok. Ha p olyan prímszám, amelyre $(p, 2LMK)=1$ és $8k(LK)k(M)|u(p)$, akkor (ii) miatt

$$p = 8k(LK)\cdot k(M)\,x+(LK/p), \tag{9}$$

ahol x egész szám. Így

$$(2^a/p) = (2^b/p) = 1 \quad \text{és} \quad (-1/p) = (LK/p). \tag{10}$$

Legyen először $LK>0$ és így $k(LK)=2^a\cdot t$. Ebben az esetben (9) és (10) alapján $p\equiv(LK/p) \pmod t$ és

$$(LK/p) = \big(k(LK)/p\big) = (2^a\cdot t/p) = (t/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{t-1}{2}}(p/t) =$$

$$= (-1/p)^{\frac{t-1}{2}}\big((LK/p)/t\big) = (LK/p)^{\frac{t-1}{2}}(LK/p)^{\frac{t-1}{2}} = 1.$$

Így (9) alapján p felírható $p=8y+1$ alakban és (8) miatt $h|y$, mert h páratlan szám; ezért

$$(LM/p) = \big(k(LM)/p\big) = (h/p) = (p/h) = (1/h) = 1 \tag{11}$$

következik.

Legyen most $LK<0$. Ekkor $LK=L^2-4LM<0$ miatt $LM>0$. Így (8), (9) és (10) alapján $p\equiv(LK/p) \pmod h$ és

$$(LM/p) = \big(k(LM)/p\big) = (2^b h/p) = (h/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{h-1}{2}}(p/h) = \tag{12}$$

$$= (-1/p)^{\frac{h-1}{2}}\big((LK/p)/h\big) = (LK/p)^{\frac{h-1}{2}}(LK/p)^{\frac{h-1}{2}} = 1.$$

Tehát (11) és (12) alapján $(LM/p)=1$ minden $LK\neq 0$ esetén, amiből (iii) felhasználásával

$$u(p)\,\Big|\,\frac{p-(LK/p)}{2}$$

következik; továbbá, mint előbb láttuk, valóban $(LK/p)=1$, ha $LK>0$.

3. Tételek bizonyítása

Az 1. Tétel bizonyítása. Legyen $U=U(L,M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat. Továbbá legyen

$$w_0=[4w_1, k(M)],$$

ahol w_1 a 3. Lemmában meghatározott természetes szám. Így (7) alapján nyilvánvaló, hogy

$$16k(LK)\cdot k(M)|w_0, \tag{13}$$

mert a feltételek miatt $(LK, M)=1$.

Legyenek a és b pozitív egész számok, amelyekre $(a, bw_0)=1$. Ekkor a 3. Lemma szerint végtelen sok olyan prímszám létezik, melyre

$$p\equiv b \pmod a,\ p\equiv 1 \pmod{w_0} \text{ és } u(p)|(p-1)/w_0 \tag{14}$$

teljesülnek. Ezen prímszámokra (ii) miatt $(LK/p)=1$ is fennáll.

Egy $s\geqq 1$ természetes szám esetén jelöljük T_s-sel az összes $n=p_1...p_s$ alakú számok halmazát, amelyekre az

$$u(n)\,\Big|\,\frac{n-(LK/n)}{2}, \tag{15}$$

$$(LM/n)=1, \tag{16}$$

$$n\equiv (LK/n)\ \big(\mathrm{mod}\ 16k(LK)k(M)\big), \tag{17}$$

$$g(n)=\frac{n-(LK/n)}{u(n)}>2, \tag{18}$$

$$p_1 \text{ kielégiti a (14) feltételt} \tag{19}$$

és

$$p_1<...<p_s \tag{20}$$

feltételek teljesülnek. Teljes indukcióval bizonyítani fogjuk, hogy T_s végtelen halmaz minden $s\geqq 1$ esetén, amiből (i) alapján már következik az 1. Tétel.

Mivel végtelen sok p prímszám kielégíti a (14) feltételt, ezért (13), (14), (ii) és (iii) alapján következik, hogy T_1 végtelen halmaz. Legyen $n=p_1...p_s\in T_s$ és $\frac{n-1}{2}>$ $>|LMK|n_0$, ahol n_0 az 1. Lemmában meghatározott konstans. Ekkor az 1. Lemma szerint van olyan q prímszám, amelyre

$$u(q)=\frac{n-(LK/n)}{2}. \tag{21}$$

Nyilvánvaló, hogy $(q, LMK)=1$ és $q \nmid n$, mert (18) miatt $u(q)>u(n)$. Így (15), (21) és (iv) alapján $u(nq)=u(q)$. Másrészt (17) miatt $8k(LK)\cdot k(M)|u(q)$, amiből a 4. Lemma miatt

$$u(q)\left|\frac{q-(LK/q)}{2}\right. \quad \text{és} \quad (LM/q)=1 \tag{22}$$

következnek. Így (15)—(22) felhasználásával

$$u(nq) = u(q)\left|\frac{nq-(LK/nq)}{2}\right.,$$

mert

$$\frac{nq-(LK/nq)}{2} = \frac{n-(LK/n)}{2}\cdot q + \frac{q-(LK/q)}{2}(LK/n),$$

továbbá

$$(LM/nq) = (LM/n)(LM/q) = 1,$$

$$nq \equiv (LK/n)(LK/q) = (LK/nq) \pmod{16k(LK)k(M)},$$

$$g(nq) = \frac{nq-(LK/nq)}{u(nq)} = 2\cdot\frac{nq-(LK/nq)}{n-(LK/n)} > 2$$

és

$$p_1 < \ldots < p_s < q$$

adódik, amiből $nq \in T_{s+1}$ következik. Így T_1 végtelensége miatt T_s szintén végtelen halmaz minden $s \geq 1$ természetes szám esetén. Ezzel az 1. Tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az 1. Tétel állítása érvényesen marad, ha az $(a, bw_0)=1$ feltételt az $(a, b)=1$ és $b \equiv 1 \pmod{(a, w_0)}$ feltételekkel helyettesítjük.

A 2. Tétel bizonyítása. Legyen $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre $LK>0$ és legyenek $a, s>1$ adott természetes számok. Továbbá legyen w_0 az 1. Tétel bizonyításában definiált természetes szám.

Jelöljük N_s-sel az összes $n=p_1\ldots p_s$ alakú egészek halmazát, amelyekre $p_1<\ldots$ $\ldots<p_s$ különböző prímek, $u(n)|(n-1)/2$, $(LK/n)=1$, $(LM/n)=1$, $g(n)>2$ és $p_i \equiv 1 \pmod{aw_0}$. A 3. Lemma alapján végtelen sok p prímszám létezik, amelyre

$$p \equiv 1 \pmod{aw_0} \quad \text{és} \quad u(p)|(p-1)/aw_0.$$

Így (13), (ii) és (iii) alapján következik, hogy N_1 végtelen halmaz.

Legyen $n=p_1\ldots p_s \in N_s$ és $\frac{n-1}{2}>|LMK|n_0$. Az 1. Lemma szerint van olyan q prímszám, amelyre $u(q)=\frac{n-1}{2}$. Mivel $LK>0$, ezért az előzőekhez hasonlóan az N_s és w_0 definíciója valamint a 4. Lemma felhasználásával $nq \in N_{s+1}$ adódik. Ebből már következik, hogy N_s végtelen halmaz minden $s \geq 1$ esetén, ami bizonyítja a 2. Tétel állítását.

A 3. Tétel bizonyítása. Legyen $U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre $M=\pm 1$ és $LK=L(L-4M)>0$. Továbbá legyenek $a, s>1$ természetes számok.

Az $U(L, M)$ és $V(L, M)$ Lehmer sorozatok tagjainak explicit alakja alapján könnyen belátható, hogy minden $n=4m+1$ alakú természetes szám esetén fennállnak az

$$(23)\qquad U_n - M^{\frac{n-1}{2}} = L\cdot U_{\frac{n-1}{2}}\cdot V_{\frac{n+1}{2}}$$

és

$$(24)\qquad V_n - M^{\frac{n-1}{2}} = K\cdot U_{\frac{n-1}{2}}\cdot U_{\frac{n+1}{2}}$$

összefüggések.

Legyen N_s az a halmaz, amelyet a 2. Tétel bizonyításában definiáltunk. Ha $n\in N_s$, akkor a (13) miatt

$$(25)\qquad n = p_1 \ldots p_s \equiv 1 \pmod 4$$

és mivel $M=\pm 1$, azért (23) és (24) alapján

$$(26)\qquad U_n \equiv 1 \pmod n \quad \text{és} \quad V_n \equiv 1 \pmod n$$

következnek. Másrészt $n\in N_s$ miatt $(LK/n)=(LM/n)=1$, amiből $M=\pm 1$ feltétel és (25) miatt $(L/n)=(K/n)=1$ adódik. Tehát (26) alapján, ha $n\in N_s$, akkor

$$U_{\frac{n-1}{2}} \equiv 0 \pmod n,$$

$$U_n \equiv 1 = (K/n) \pmod n,$$

és

$$V_n \equiv 1 = (L/n) \pmod n.$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást, mivel az előzőekben már bizonyítottuk, hogy N_s végtelen halmaz és minden eleme s darab $ax+1$ alakú prím szorzata.

A 4. Tétel bizonyítása. Legyen $U=U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, amelyre $L>0$. Legyen n_0, illetve n_1 az 1. Lemmában, illetve a 2. Lemmában meghatározott konstansok és legyenek m_0 az a legkisebb páratlan szám, amelyre $m_0>\max(n_0, n_1, |LMK|)$. Továbbá vezessük be a természetes számok következő részhalmazait:

$$A(x) = \{n \mid n = pq\in\psi_2(U),\ u(n) = u(q) = 2u(p),\ n \leqq x\},$$

$$B(x) = \{n \mid n = pq\in\psi_2(U),\ u(n) = u(q) = u(p),\ n \leqq x\},$$

$$C(x) = \{n \mid n = pq\in\psi_2(U),\ u(n) = u(q) > 2u(p),\ n \leqq x\}.$$

Nyilvánvaló, hogy minden $x\geqq 0$ esetén $P_2(U, x)\geqq |A(x)|+|B(x)|+|C(x)|$.

U_n explicit alakja alapján könnyen belátható, hogy

$$(27)\qquad |U_n| < 2|\alpha|^n$$

minden $n\geqq 0$ esetén, ahol α a $z^2-\sqrt{L}z+M=0$ egyenlet nem kisebb abszolút értékű gyöke. Az U sorozat nem degenerált, ezért $|\alpha|>1$. Legyen M_0 egy olyan természetes szám, hogy ha $x>M_0$ és m_x, n_x két páratlan szám, amelyekre

$$(28)\qquad 2|\alpha|^{2m_x} \leqq x < 2|\alpha|^{2(m_x+2)}$$

és

$$(29)\qquad 2|\alpha|^{|\Delta|\Omega n_x} \leqq x < 2|\alpha|^{|\Delta|\Omega(n_x+2)}$$

teljesülnek, akkor $m_x>m_0$ és $n_x>m_0$.

Legyen x egy valós szám, amelyre $x > M_0$ és legyenek m_x, illetve n_x a (28)-ban, illetve (29)-ben meghatározott páratlan egészek. Ha m egy páratlan szám és

$$m_0 < m \leqq m_x, \tag{30}$$

akkor az 1. Lemma alapján vannak olyan p és q prímszámok, amelyekre $u(p)=m$ és $u(q)=2m$. Mivel p, q és m páratlanok és

$$pq-(LK/pq) = \bigl(p-(LK/p)\bigr)\,q+\bigl(q-(LK/q)\bigr)(LK/p),$$

ezért (ii) alapján $2m|pq-(LK/pq)$, továbbá $u(pq)=2m$. Így (i) miatt $pq\in\psi_2(U)$. Tehát minden, a (30) feltételt kielégítő páratlan m szám esetén található egy $pq\in\psi_2(U)$, amelyre $u(pq)=2m$. Ezekre a pq egészekre (27), (28) és (30) alapján

$$pq \leqq |U_{2m}| < 2|\alpha|^{2m} \leqq 2|\alpha|^{2m_x} \leqq x$$

következik, amiből

$$|A(x)| \geqq (m_x-m_0)/2 \tag{31}$$

adódik.

Hasonló módon legyen n egy páratlan szám

$$m_0 < n \leqq n_x, \tag{32}$$

feltétellel. Ekkor a 2. Lemma alapján vannak olyan p és q prímszámok, amelyekre $u(p)=u(q)=|\Delta|\Omega n$. Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy $pq\in\psi_2(U)$. Így (27), (29) és (32) alapján $pq\in B(x)$. Tehát

$$|B(x)| \geqq (n_x-m_0)/2, \tag{33}$$

ha $x > M_0$.

Legyen m_1 olyan természetes szám, amelyre

$$m_1 > m_0+\frac{\log 2}{2\log|\alpha|}+\frac{\log 2}{|\Delta|\,\Omega\log|\alpha|}+4. \tag{34}$$

Mivel $w_0 \geqq 8$, az 1. Tétel bizonyításából következik, hogy minden p prímszámhoz, amely kielégíti a (14) feltételt, található olyan q prímszám, melyre $pq\in\psi_2(U)$ és $u(pq)=u(q)>2u(p)$. Tehát létezik egy M_1 szám úgy, hogy $x>M_1$ esetén

$$|C(x)| > m_1. \tag{35}$$

Legyen $M_2=\max(M_0, M_1)$. Ekkor (28), (29), (31), (33), (34) és (35) alapján

$$P_2(U,x) \geqq |A(x)|+|B(x)|+|C(x)| \geqq \frac{m_x+n_x}{2}+(m_1-m_0) >$$

$$> \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\log x-\log 2}{2\log|\alpha|}-2\right)+\left(\frac{\log x-\log 2}{|\Delta|\,\Omega\log|\alpha|}-2\right)\right]+(m_1-m_0) >$$

$$> \frac{1}{4\log|\alpha|}\left(1+\frac{2}{|\Delta|\,\Omega}\right)\log x$$

adódik, ha $x>M_2$, ami bizonyítja a tétel első állítását.

Most bebizonyítjuk a tétel második állítását.

Legyen x egy pozitív valós szám és vezessük be a

$$(36) \qquad t_x = \frac{\log x}{\log|\alpha|} - \frac{\log 2}{\log|\alpha|} - 1$$

jelölést. Ha egy n természetes számra $2n_0 < n \leqq t_x$, akkor az 1. Lemma alapján van olyan p prím, melyre $u(p) = n - (LK/n)$. Ha $s > 1$ és $n \in \psi_s(U)$, akkor az előzőekhez hasonlóan könnyen belátható, hogy $np \in \psi_{s+1}(U)$ és különböző n-ekhez különböző np számok tartoznak, továbbá (27) és (36) miatt

$$np \leqq |U_{n-(LK/n)}| < 2|\alpha|^{n+1} \leqq x.$$

Másrészt az 1. Tétel alapján végtelen sok olyan m egész szám található, melyre $m \in \psi_s(U)$ és $u(m) | (m - (LK/m))/2$. Jelöljük $P_s'(U, x)$-szel az x-nél nem nagyobb ezen m-ek számát. Ha q egy prímszám, melyre $u(q) = (m - (LK/m))/2$, akkor $m \in \psi_s(U)$ és $u(m) | (m - (LK/y))/2$ feltételekből $mq \in \psi_{s+1}(U)$ következik, és ha $m \leqq t_x$, akkor $mq \leqq x$.

Belátható, hogy $m > 2n_0$ esetén különböző m egészekhez különböző mq számok tartoznak és $mq \neq nq$ bármely $m, n (> 2n_0)$ számpárra. Ezért

$$P_{s+1}(U, x) \geqq P_s(U, t_x) + P_s'(U, t_x) - 2P_s(U, 2n_0) \geqq$$

$$\geqq P_s\left(U, \frac{\log x}{\log|\alpha|}\right) + P_s'(U, t_x) - 2P_s(U, 2n_0) - \frac{\log 2}{\log|\alpha|} - 1 > P_s\left(U, \frac{\log x}{\log|\alpha|}\right)$$

ha x elég nagy, mert $P_s'(U, t_x) \to \infty$ ha $x \to \infty$. Ezzel a tétel minden állítását bizonyítottuk.

Az 5. Tétel bizonyítása. Legyen $U = U(L, M)$ egy nem degenerált Lehmer sorozat, továbbá legyen w_0 az 1. Tétel bizonyításában definiált természetes szám. A 3. Lemma szerint végtelen sok p prímszám létezik, amelyekre a

$$(37) \qquad p \equiv 1 \pmod{w_0} \quad \text{és} \quad u(p) | (p-1)/w_0$$

feltételek teljesülnek és ezen prímszámok Dirichlet sűrűsége pozitív. Ezért a

$$(38) \qquad \sum \frac{1}{p}$$

sor divergens, ahol p végigfut a (37) feltételeket kielégítő prímek halmazán.

Legyen p egy prímszám, amelyre $p > 2n_0$ és a (37) feltételek teljesülnek. Nyilvánvaló, hogy (ii) miatt $(LK/p) = 1$. Ekkor az 1. Lemma alapján vannak q és r prímszámok, amelyekre $u(q) = (p-1)/2$ és $u(r) = p - 1$. Tehát (13) és (37) alapján $8k(LK)k(M) | u(q)$ és így a 4. Lemmából $p - 1 | q - (LK/q)$ következik. Tehát $u(pqr) = p - 1$. Így (ii) és $(LK/p) = 1$ miatt

$$pqr - (LK/pqr) = (p-1)\, qr + (q - (LK/q))\, r + (r - (LK/r))(LK/q)$$

osztható $u(pqr)$-rel, vagyis $pqr \in \psi_3(U)$. Mivel $u(pqr) = p - 1$, ezért (27) felhasználásával

$$pqr \leqq |U_{p-1}| < 2|\alpha|^{p-1} < 2|\alpha|^p < |\alpha|^{2p},$$

ha p elég nagy. Így

$$\sum_{n \in \psi_3(U)} \frac{1}{\log n} \geqq \sum_{pqr \in \psi_3(U)} \frac{1}{\log(pqr)} > \frac{1}{2\log|\alpha|} \sum \frac{1}{p},$$

ahol $\sum 1/p$ a (38)-ban megadott összeg. Ebből már következik az állításunk $s=3$ esetben.

Legyen $s\geqq 3$, $n\in\psi_s(U)$ és $n>n_0$. Ekkor az 1. Lemma alapján van olyan q prímszám, amelyre $u(q)=n-(LK/n)$, amiből az előzőekhez hasonlóan $nq\in\psi_{s+1}(U)$ következik, továbbá

$$nq \leqq |U_{n-(LK/n)}| < 2|\alpha|^{n+1} < |\alpha|^{2n}. \tag{39}$$

Legyen $\tau_s>n_0$ olyan szám, amelyre $n>\tau_s$ esetén

$$\log_{s-2}(2\cdot\log|\alpha| n) < 2\cdot\log|\alpha|\log_{s-2} n. \tag{40}$$

Ekkor (39) és (40) alapján

$$\sum_{n\in\psi_{s+1}(U)} \frac{1}{\log_{s-1} m} \geqq \sum_{\substack{n\in\psi_s(U)\\ n>\tau_s}} \frac{1}{\log_{s-1} nq} >$$

$$> \sum_{\substack{n\in\psi_s(U)\\ n>\tau_s}} \frac{1}{\log_{s-2}(2\cdot\log|\alpha|\, n)} > \frac{1}{2\log|\alpha|} \sum_{\substack{n\in\psi_s(U)\\ n>\tau_s}} \frac{1}{\log_{s-2} n}$$

adódik, amiből már következik a tételünk állítása minden s-re ($s\geqq 3$) teljes indukciós gondolatmenettel, mert az $s=3$ esetén már igazoltuk az állítást.

IRODALOM

[1] R. Baillie, S. S. Wagstaff, Jr.: Lucas pseudoprimes, *Math. Comp.* **35** (1980), pp. 1391—1417.

[2] Bui Minh Phong: A generalization of A. Mąkowski's theorem on pseudoprime numbers (vietnami nyelven), *Tap chi Toan hoc* **7** (1979), 4, pp. 16—19.

[3] M. Cipolla: Sui numeri composti che verificano la congruenza di Fermat $a^{P-1}\equiv 1 \pmod P$), *Annali di Matematica* (3) **9** (1904), pp. 139—160.

[4] H. J. A. Duparc: On almost primes of the second order, *Report Z. W.* **1955—013**, Math. Center, Amsterdam, 1955, pp. 1—13.

[5] P. Erdős: On the converse of Fermat's theorem, *Amer. Math. Monthly* **56** (1949), pp. 623—624.

[6] P. Erdős: On pseudoprimes and Carmichael numbers, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), pp. 201—206.

[7] P. Erdős, P. Kiss, A. Sárközy: A lower bound for the counting function of Lucas pseudoprimes, to appear.

[8] P. Kiss: Some results on Lucas pseudoprimes, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math., **28** (1985), pp. 153—159.

[9] P. Kiss, Bui Minh Phong, E. Lieuwens: On Lucas pseudoprimes which are products of s primes, *Fibonacci Numbers and Their Applications* (ed. by A. N. Philippon et al.), D. Reidel Publishing Company, 1986, pp. 131—139.

[10] D. H. Lehmer: An extended theory of Lucas' functions, *Ann. Math.* **31** (1930), pp. 419—448.

[11] D. H. Lehmer: On converse of Fermat's theorem, *Amer. Math. Monthly* **43** (1936), pp. 347—354.

[12] E. Lieuwens: *Fermat pseudoprimes*, Doctor thesis, Delft, 1971.

[13] C. Pomerance: On the distribution of pseudoprimes, *Math. Comp.* **37** (1981), pp. 587—593.

[14] C. Pomerance: A new lower bound for the pseudoprime counting function, *Illinois J. Math.* **26** (1982), pp. 4—9.

[15] C. Pomerance, J. L. Selfridge, S. S. Wagstaff, Jr.: The pseudoprimes to $25\cdot 10^9$, *Math. Comp.* **35** (1980), pp. 1003—1026.

[16] A. J. van der Poorten, A. Rotkiewicz: On strong pseudoprimes in arithmetic progressions, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **29** (1980), pp. 316—321.

[17] A. Rotkiewicz: *Pseudoprime numbers and their generalizations*, Univ. of Novi Sad, 1972.

[18] A. Rotkiewicz: On the pseudoprimes of the form $ax+b$ with respect to the sequence of Lehmer, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* **20** (1972), pp. 349—354.

[19] A. Rotkiewicz: On pseudoprimes with respect to the Lucas sequences, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* **21** (1972), pp. 793—797.

[20] A. Rotkiewicz: On Euler—Lehmer pseudoprimes and strong Lehmer pseudoprimes with parameters L, Q in arithmetic progressions, *Math. Comp.* **39** (1982), pp. 239—247.
[21] A. Schinzel: Primitive divisors of the expression $A^n - B^n$ in algebraic number fields, *J. reine angew. Math.* **268/269** (1974), pp. 27—33.
[22] A. Schinzel: On primitive prime factors of Lehmer numbers I, *Acta. Arith.* **8** (1963), pp. 213—223.
[23] D. Shanks: *Solved and unsolved problems in number theory*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1978.
[24] C. L. Stewart: Primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers, *Transcendence Theory: Advances and applications*, Acad. Press, London—New York—San Francisco, 1977, pp. 79—92.
[25] K. Szymiczek: On pseudoprimes which are products of distinct primes, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), pp. 35—37.
[26] J. Wójcik: Contributions to the theory of Kummer extensions, *Acta Arith.* **40** (1982), pp. 155—174.
[27] J. Wójcik: On the density of some sets of primes connected with cyclotomic polynomials, *Acta Arith.* **41** (1982), pp. 117—131.

(Beérkezett: 1985. szeptember 5-én)

О ПСЕВДОПРОСТЫХ ЧИСЛАХ ЛЮКА И ЛЕМЕРА

БУИ МИН ФОНГ

ON LUCAS AND LEHMER PSEUDOPRIME NUMBERS

BUI MINH PHONG

Let $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a Lehmer sequence and its associated sequence, respectively, defined by

$$U_n = \begin{cases} (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta) & \text{for } n \text{ odd} \\ (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha^2 - \beta^2) & \text{for } n \text{ even} \end{cases}$$

and

$$V_n = U_{2n}/U_n,$$

where α and β are roots of the polynomial $z^2 - \sqrt{L}z + M$ and L, M are non-zero integers with conditions $(L, M) = 1$, $K = L - 4M \neq 0$. We suppose that the sequences are non-degenerate, i.e., α/β is not a root of unity. Let $(\cdot/n)$ denote the Jacobi symbol. An odd composite number n is called Lehmer pseudoprime if $(n, LMK) = 1$ and $U_{n-(LK/n)} \equiv 0 \pmod{n}$. If $U_{(n-(LK/n))/2} \equiv 0 \pmod{n}$ in case $(LM/n) = 1$ or $V_{(n-(LK/n))/2} \equiv 0 \pmod{n}$ in case $(LM/n) = -1$ then we say n is an Euler—Lehmer pseudoprime number.

The following results are proved in the paper. If $s(>1)$ is a fixed natural number, then there exists a positive integer w_0 such that for any integers a, b with condition $(a, bw_0) = 1$ and for infinitely many primes p of the form $ax + b$ there exists an Euler—Lehmer pseudoprime which is the product of exactly s distinct primes and p is the least prime divisor of it. If $LK > 0$ and a, s are fixed natural numbers greater than one, then there are infinitely many Euler—Lehmer pseudoprimes which are products of exactly s distinct primes of the form $ax + 1$. If $M = \pm 1$ and $LK > 0$, then there exist infinitely many Euler—Lehmer pseudoprimes n which are products of exactly s distinct primes of the form $ax + 1$ and satisfy the congruences

$$U_{n-(LK/n)} \equiv 0, \quad U_n \equiv (K/n) \quad \text{and} \quad V_n \equiv (L/n) \pmod{n}$$

simultaneously. The distribution of Lehmer pseudoprimes is also investigated. Among others the following result is proved. The series $\sum (1/\log_{s-2} n)$, where n runs through all Lehmer pseudoprimes which are products of exactly $s(\geqq 3)$ distinct primes and $\log_k$ denotes the k times iterated logarithm, is divergent.

The results also hold for Lucas pseudoprimes as special cases.

AZ n-DIMENZIÓS RÁCSOK MINKOWSKI- ÉS HERMITE-BÁZISAIRÓL

G. HORVÁTH ÁKOS

A többdimenziós rácsok elméletének egyik alapfeladata olyan bázisok kiválasztása, amelyek „viszonylag rövid" vektorokból állnak. Ez a dolgozat a különféle báziskiválasztó algoritmusok közül kettővel foglalkozik, az egyik Minkowskitól, a másik Hermite-től származik. (Ezen eljárásokból adódó bázisok a Minkowski, illetve Hermite bázisok.) A definíciók ismeretében könnyen ellenőrizhető, hogy minden Hermite bázis Minkowski bázis. P. P. Tammela igazolta, hogy a hétnél kisebb dimenziós rácsok esetén a fordított állítás is igaz (azaz a két algoritmus ugyanazon bázisokat adja meg), viszont, ha $n \geqq 7$, akkor van n-rács olyan bázissal, amely Minkowski-féle, de nem Hermite-féle. Tammela eredményének illusztrálására Sz. Sz. Ryskov adott példát minden tíznél nagyobb dimenziós esetre. Ez a cikk egy egyszerű kilenc dimenziós példát tartalmaz, amely könnyen általánosítható tetszőleges kilencnél nagyobb dimenziós példára.

1. Definíciók, jelölések

— E^n: Az n-dimenziós euklideszi tér.
— $\mathbf{Z}$: Az egész számok halmaza.
— *n-rács*: Legyen $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ E^n-beli lineárisan független vektor n-es. Jelölje $[\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n]$ a következő halmazt: $\{\mathbf{x} \in E^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{r}_i, \forall i \; (1 \leqq i \leqq n) \; x_i \in \mathbf{Z}\}$. Ekkor $[\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n]$ az $\{\mathbf{r}_i\}$ bázis által kifeszített n-rács.
— *primitív rendszer*: Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ a Γ n-rács lineárisan független vektorrendszere. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{a}_i\}$ $(i=1, \ldots, k)$ vektorhalmaz Γ-beli primitív rendszer, ha bázisa annak a k-dimenziós Γ-beli részrácsnak, amely Γ-nak és az $\{\mathbf{a}_i\}$ által kifeszített k-dimenziós lineáris altérnek a metszeteként áll elő. Jelölje ezentúl $L[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k]$ az $\{\mathbf{a}_i\}$ $(i=1, \ldots, k)$ vektorok által kifeszített lineáris alteret. Nyilván $\{\mathbf{a}_i\}$ $(i=1, \ldots, k)$ pontosan akkor Γ-beli primitív rendszer, ha teljesül a következő feltétel:

$$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k] = \Gamma \cap L[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k]$$

— *primitív vektor*: Az egy elemű primitív rendszer.
— *Minkowski bázis*: Jelölje $\mathbf{a}_1$ az adott n-rács egyik legrövidebb vektorát. Legyen $\mathbf{a}_2$ az $\mathbf{a}_1$-től lineárisan független, $\mathbf{a}_1$-gyel primitív rendszert alkotó vektorok közül az egyik legrövidebb, $\mathbf{a}_3$ az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ vektoroktól független, velük primitív rendszert alkotó vektorok közül az egyik legrövidebb. Az eljárást folytatva az n-rács egy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisához jutunk. Ez az n-rács egy Minkowski bázisa.

— *Hermite bázis*: Jelölje $\mathbf{a}_1^{i_1}$ az adott n-rács egyik legrövidebb vektorát. Ha σ jelenti a rács minimális vektorainak a számát, az i_1 index az $i_1=1, \ldots, \sigma$ értékeket veheti fel. Határozzuk meg az $\mathbf{a}_1^1$ vektortól lineárisan független, az $\mathbf{a}_1^1$ vektorral primitív rendszert alkotó vektorok közül a legrövidebbeket. Jelölje ezeket $\mathbf{a}_2^{11}, \ldots, \mathbf{a}_2^{1k_1}$. Hasonlóan, az $\mathbf{a}_1^2$ vektorhoz határozzuk meg az $\mathbf{a}_2^{21}, \ldots, \mathbf{a}_2^{2k_2}$ vektorokat, és így tovább, az $\mathbf{a}_1^\sigma$ vektorhoz az $\mathbf{a}_2^{\sigma 1}, \ldots, \mathbf{a}_2^{\sigma k_\sigma}$ vektorokat. Nyilvánvaló, hogy $|\mathbf{a}_2^{ij}|=|\mathbf{a}_2^{ik}|$ minden i, j és k indexre $(i=1, \ldots, \sigma)$, $(j, k=1, \ldots, k_i)$, ugyanakkor $|\mathbf{a}_2^{1j}|$ és $|\mathbf{a}_2^{ik}|$ lehet különböző, ha $1 \neq i$. A fenti $\{\mathbf{a}_1^{i_1}, \mathbf{a}_2^{i_1 i_2}\}$ kéttagú primitív rendszerek közül válasszuk ki mindazokat, amelyekben az $\mathbf{a}_2^{i_1 i_2}$ vektor nem nagyobb mint az összes $\mathbf{a}_2^{i_1 i_2}$ vektor között fellépő legrövidebb vektor $(1 \leqq i_1 \leqq \sigma;\ 1 \leqq i_2 \leqq k_{i_1})$. A kiválasztott primitív rendszerek mindegyikéhez határozzuk meg a lehetséges $\mathbf{a}_3^{i_1 i_2 i_3}$ vektorokat ugyanúgy, ahogy azt az $\mathbf{a}_2^{i_1 i_2}$ vektorok meghatározásánál tettük. A létrejövő háromtagú $\{\mathbf{a}_1^{i_1}, \mathbf{a}_2^{i_1 i_2}, \mathbf{a}_3^{i_1 i_2 i_3}\}$ primitív rendszerek közül őrizzük meg azokat, amelyekben az $\mathbf{a}_3^{i_1 i_2 i_3}$ vektor nem hosszabb mint az összes lehetséges $\mathbf{a}_3^{i_1 i_2 i_3}$ vektor között fellépő legrövidebb vektor. Az eljárást folytatva, a rács bázisainak egy $\{\mathbf{a}_1^{i_1}, \mathbf{a}_2^{i_1 i_2}, \ldots, \mathbf{a}_n^{i_1 i_2 \cdots i_n}\}$ halmazához jutunk. Ezek a bázisok a rács Hermite bázisai.

A következő állítások egyszerűen bizonyíthatók:

— Egy primitív rendszer minden részhalmaza szintén primitív rendszer.

— A rács legrövidebb vektorai primitív vektorok.

— Minden n-rácsban van Minkowski bázis.

— Minden n-rácsban van Hermite bázis.

— Az Hermite bázisok a rács nagyság szerint rendezett bázisainak lexikografikus minimumai.

— Ha egy bázis Hermite-féle, akkor Minkowski-féle is.

— Ha egy bázis valamennyi eleme a rács legrövidebb vektora, akkor a bázis Hermite bázis.

2. A rács konstrukciója

Az alábbi bázisával adjuk meg a Γ rácsot:

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right),\\
\mathbf{e}_2 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),\\
\mathbf{e}_3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0),\\
\mathbf{e}_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0),\\
\mathbf{e}_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),\\
\mathbf{e}_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0),\\
\mathbf{e}_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),\\
\mathbf{e}_8 &= \left(\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, -\tfrac{1}{2}\right),\\
\mathbf{e}_9 &= \left(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right).
\end{aligned}
$$

A bázis 9 lineárisan független vektort tartalmaz, amelyeket a 12 dimenziós tér $\{\mathbf{h}_i\}$ ortonormált bázisában írtunk fel, így minden koordináta könnyen kezelhetővé válik. Egyszerű kiszámolni, hogy minden bázisvektor egységnyi hosszú. Ezentúl jelölje Γ az (I) rendszer által kifeszített rácsot.

3. Állítások, a kilenc dimenziós Γ rács tulajdonságai

1. Lemma. *Az* (I) *által definiált Γ rácsban nincs* (**0**-*tól különböző) egységnyinél rövidebb vektor.*

2. Lemma. *Legyen* $\mathbf{e}_8^* = 3\mathbf{e}_9 + 2\mathbf{e}_8 - 2\mathbf{e}_1 - \sum_{i=2}^{7} \mathbf{e}_i = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$. *Ekkor* $\mathbf{e}_8^*$ *Γ-beli egységnyi hosszúságú vektor, amelyre* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*$ *Γ-beli primitív rendszer.*

3. Lemma. *Legyen* $\mathbf{e}_9^*$ *olyan Γ-beli vektor, amelyre* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*, \mathbf{e}_9^*$ *bázis. Ekkor* $|\mathbf{e}_9^*| \geqq \sqrt{\frac{7}{6}} > 1$.

Az első lemma alapján nyilvánvaló lesz, hogy a Γ rácsban az (I) bázis Hermite bázis, hiszen minden vektora minimális hosszúságú vektor. A definícióból viszont azonnal adódik, hogy tetszőleges két Hermite bázis megfelelő vektorai páronként egyenlő hosszúak, így ha egy Γ-beli bázisban van egységnyinél hosszabb vektor, akkor a bázis nem Hermite-féle. Mivel $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*$ vektorok mindegyike egységnyi hosszú és $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*$ Γ-beli primitív rendszer, ezért a Minkowski algoritmus megengedi ezen vektorok egymásutáni kiválasztását, így van Minkowski bázis Γ-ban, amelynek ez a nyolc vektor eleme. A harmadik lemma alapján a kilencedik vektor hossza nagyobb, mint egységnyi, így igaz a következő:

1. Tétel. *Az* (I) *rendszerre épített Γ-rácsban van olyan bázis, amely Minkowski-féle, de nem Hermite-féle.*

Könnyen megadhatunk konkrétan is egy Minkowski-féle, de nem Hermite-féle bázist. Legyen $\mathbf{e}_9^* = \mathbf{e}_9 + \mathbf{e}_8 - \mathbf{e}_1 = (0, -1/6, -1/6, -1/6, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, -1/6)$. Ekkor $\mathbf{e}_9^*$ Γ-beli vektor, a hossza $\sqrt{\frac{7}{6}}$. Ha igazoljuk, hogy $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*, \mathbf{e}_9^*$ bázis, akkor a harmadik lemma alapján Minkowski bázis is, és a fenti gondolatmenet alapján nem lehet Hermite bázis. Ahhoz, hogy bázis, elegendő bizonyítani, hogy az $\mathbf{e}_8$ és $\mathbf{e}_9$ előáll az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*, \mathbf{e}_9^*$ vektorok egész együtthatós lineáris kombinációjaként. Ez pedig teljesül, hiszen

$$\mathbf{e}_8 = \mathbf{e}_1 - \sum_{i=2}^{7} \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_8^* + 3\mathbf{e}_9^*; \quad \mathbf{e}_9 = \sum_{i=2}^{7} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_8^* - 2\mathbf{e}_9^*.$$

4. Bizonyítások, n-dimenziós példa $n \geqq 9$ esetén

Az 1. Lemma bizonyítása

Legyen $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{12})$ Γ-beli (**0**-tól különböző) vektor. Ekkor $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{9} k_i \mathbf{e}_i$, ahol $k_i \in \mathbf{Z}$ és $\mathbf{e}_i \in (\mathrm{I})$. Négy esetet fogunk megkülönböztetni:

1. $k_8 = k_9 = 0$; 2. $k_8 \neq 0$, $k_9 = 0$;

3. $k_8 = 0$, $k_9 \neq 0$; 4. $k_8 \neq 0$, $k_9 \neq 0$.

Az 1. és 2. esetekben triviálisan adódik, hogy $\boldsymbol{\alpha}$ hossza legalább egységnyi. A 3. esetben $|\alpha_7|, \ldots, |\alpha_{12}|$ egyaránt legalább $\frac{1}{3}$ ($|k_9| \leqq 2$ feltehető), továbbá, vagy $|\alpha_2|, |\alpha_3|, |\alpha_4|$ mindegyike legalább $\frac{1}{3}$, vagy $|\alpha_1| \geqq \frac{1}{2}$ és $|\alpha_2|, |\alpha_3|, |\alpha_4| \geqq \frac{1}{6}$. Minden esetben $|\boldsymbol{\alpha}| \geqq 1$. A 4. esetben újabb 3 esetet kell megvizsgálni:

$$\text{i) } |k_9| \geqq 3, \quad \text{ii) } |k_9| = 2, \quad \text{iii) } |k_9| = 1.$$

Az i) eset triviális, a ii) és a iii) analóg módon bizonyítható. Bizonyítsuk például iii)-at. Ha k_8 páratlan egész, akkor $|\alpha_5|, |\alpha_6| \geqq \frac{1}{2}$ és $|\alpha_7|, \ldots, |\alpha_{11}| \geqq \frac{1}{3}$, így $|\boldsymbol{\alpha}| \geqq 1$ teljesül. Ha k_8 páros, akkor mivel nem lehet nulla, $|\alpha_{12}| \geqq \left|\frac{1}{3} - \frac{|k_8|}{2}\right| \geqq \frac{2}{3}$ és $|\alpha_7|, \ldots, |\alpha_{11}| \geqq \frac{1}{3}$, következésképpen ekkor is $|\boldsymbol{\alpha}| \geqq 1$. Valamennyi esetben láttuk: $|\boldsymbol{\alpha}| \geqq 1$, így az 1. Lemmát igazoltuk.

A 2. Lemma bizonyítása

A következő egyenlőséget kell bizonyítani:

$$[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*] = \Gamma \cap L[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*].$$

Mivel $\boldsymbol{\alpha} \in L[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*] \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \in L[\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{11}]$ (ahol $\{\mathbf{h}_i\}$ az E^{12} tér ortonormált bázisa), ezért

$$\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma \cap L[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*] \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \Gamma \cap L[\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{11}].$$

Ha a

$$(*) \qquad \{\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma \cap L[\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{11}] \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*]\}$$

állítást már igazoltuk, akkor ebből egyszerűen következik, hogy

$$\Gamma \cap L[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*] \subseteqq [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*].$$

A fordított tartalmazás triviális, így elegendő a ($*$) állítást bizonyítanunk. Legyen $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{9} k_i \mathbf{e}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{12})$ egy vektor $\Gamma \cap L[\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{11}]$-ből, ahol $k_i \in \mathbf{Z}$ és α_i valós szám. Nyilvánvaló, hogy $\alpha_{12} = 0$ teljesül és így $-\frac{1}{2}k_8 + \frac{1}{3}k_9 = 0$. Mivel k_8 és k_9 egész, ezért k_8 páros és k_9 hárommal osztható. Legyen $\mathbf{e}_i = (x_1^i, \ldots, x_{12}^i)$ $i = 1, \ldots, 9$. Ekkor könnyen látható, hogy $k_8 x_j^8, k_9 x_j^9$ egészek ($1 \leqq j \leqq 12$), így valamennyi j-re, ahol $5 \leqq j \leqq 12$ α_j egész és $2\alpha_1 = 2\alpha_2 = 2\alpha_3 = 2\alpha_4$ szintén egész szám. Vegyük észre, hogy az $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*]$ vektorait ez a tulajdonság jellemzi, így $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*]$. Ezzel a második lemmát is igazoltuk.

A 3. Lemma bizonyítása

Legyen $\mathbf{e}_9^*$ tetszőleges olyan vektor, amellyel $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*, \mathbf{e}_9^*$ bázisa Γ-nak. Legyenek $\mathbf{e}_9^*$ koordinátái $(x_1, \ldots, x_{12})$. Mivel $\mathbf{e}_9^*$ Γ-beli, előáll mint az (I) rendszer egész együtthatós lineáris kombinációja. Ebből következik, hogy az x_2, x_3, x_4, x_{12} koordináták vagy nullák vagy az abszolút értékük $\frac{1}{6}$-nál nem kisebb, az x_5, x_6 koordináták vagy nullák vagy az abszolút értékük $\frac{1}{2}$-nél nem kisebb, az x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} koordináták vagy nullák vagy pedig az abszolút értékük $\frac{1}{3}$-nál nem kisebb. Mivel $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*, \mathbf{e}_9^*$ bázisa Γ-nak, ezért egész együtthatós, lineáris kombinációjuk előállítja az $\mathbf{e}_8$-at és $\mathbf{e}_9$-et. Ebből viszont az következik, hogy $x_2, \ldots, x_{12}$ közül egyik sem lehet nulla, így $|\mathbf{e}_9^*| \geqq \sqrt{\frac{7}{6}}$. Így a harmadik lemmát is beláttuk.

Legyen $n \geqq 9$ és jelölje $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n+3}$ az E^{n+3}-beli ortonormált bázist. Jelölje $\mathbf{e}_i$ $(i=1, \ldots, 9)$ és $\mathbf{e}_j^*$ $(j=8, 9)$ az eddig megkonstruált vektorokat az $(n+3)$-dimenziós euklideszi térben felírva. (Azaz az utolsó $(n+3)-12$ koordinátájuk nulla.) Legyen Γ az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_9, 7\mathbf{h}_{13}, \ldots, 7\mathbf{h}_{n+3}$ vektorok által kifeszített rács. Az előbbi gondolatmenettel adódik, hogy az $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8^*, \mathbf{e}_9^*, 7\mathbf{h}_{13}, \ldots, 7\mathbf{h}_{n+3}\}$ vektorrendszer Γ-ban Minkowski bázis, de nem Hermite bázis. Így következményként kimondható az alábbi tétel:

2. Tétel. *Legyen $n \geqq 9$ tetszőleges egész, ekkor van olyan n-rács, amelyben található Minkowski-féle, de nem Hermite-féle bázis.*

IRODALOM

[1] H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, *J. reine und angew. Math.* **129** (1905), 220—294.

[2] П. П. Таммела, К теории приведения положительных форм, *Исследования по теории чисел, 3, Зап. научных семинаров ЛОМО* **50** (1975), 6—97.

[3] С. С. Рышков, К проблеме отыскания совершенных квадратичных форм от многих переменных, *Труды Математического института АН СССР* **142** (1976), 215—239.

(Beérkezett: 1985. szeptember 26-án)

О БАЗИСАХ n-РЕШЕТОК ПРИВЕДЕННЫХ ПО МИНКОВСКОМУ И ПО ЭРМИТУ

А. Г. ХОРВАТ

Базисом, приведенным по Минковскому, называется такая совокупность n векторов n-решетки, где $\mathbf{a}_1$ — минимальный вектор, $\mathbf{a}_2$ — минимальный по длине вектор, линейно независимый от $\mathbf{a}_1$, который с $\mathbf{a}_1$ дает примитивную систему, и.т.д. (Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ определяют примитивную систему, если $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — базис подрешетки в их подпространстве.) Для базиса $\{\mathbf{a}_i\}$ выполняются неравенства $|\mathbf{a}_1| \leqq |\mathbf{a}_2| \leqq \ldots \leqq |\mathbf{a}_n|$.
Базисом, приведенным по Эрмиту, называется лексикографический минимальный базис, упорядоченный по длине его элементов.

П. П. Таммела [2] доказал, что для решеток размерности $n \leqq 6$ эти два определения эквивалентны. Для $n \geqq 11$ С. С. Рышков [3] нашел решетку и базис в ней, который приведен по Минковскому но не по Эрмиту. В этой работе построена аналогичная серия примеров для n-решеток размерности $n \geqq 9$.

ON n-DIMENSIONAL LATTICE BASES, REDUCED BY MINKOWSKI AND BY HERMITE

Á. G. HORVÁTH

Denote by $\mathbf{a}_1$ a shortest vector of an n-lattice. Let $\mathbf{a}_2$ be the shortest from $\mathbf{a}_1$ linearly independent vector, which gives a primitive system with $\mathbf{a}_1$ (i.e., $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ is a basis of the sublattice in their subspace) and similarly for $\mathbf{a}_i$ $(i=3, \ldots, n)$. $\{\mathbf{a}_i\}$ is called a Minkowski-reduced basis of the lattice. Obviously, $|\mathbf{a}_1| \leqq |\mathbf{a}_2| \leqq \ldots \leqq |\mathbf{a}_n|$.

The bases reduced by Hermite are the lexicographical minima of bases, arranged by the length of their elements.

Tammela [2] has proved that for the lattices of dimension $n \leqq 6$ the two definitions are equivalent. For $n \geqq 11$ Ryškov [3] has given a lattice and a basis of it, which is reduced by Minkowski but not by Hermite. In this note an analogous series of examples has been constructed for n-lattices of dimension $n \geqq 9$.

STEINER-FÉLE SZERKESZTÉSEK A PROJEKTÍV METRIKUS SÍKON

CSORBA FERENC és MOLNÁR EMIL

Kárteszi Ferenc Professzor Úrnak 80. születésnapja alkalmából

1. Bevezetés

Poncelet és Steiner bizonyították a következő tételt: Minden euklideszi értelemben elvégezhető szerkesztés megoldható a vonalzó kizárólagos használatával, ha adott a rajz síkjában egy kör a középpontjával.

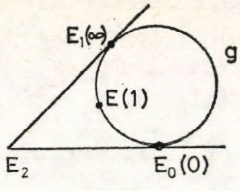
Strommer Gyula [15]-ben kimutatta, hogy az Euklidesz-féle párhuzamossági axióma el nem fogadása esetén nem lehet minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztési feladatot csak vonalzóval megoldani akkor sem, ha ismert a síkon egy kör a középpontjával együtt. Megmutatta, hogy ha a középpontjával együtt kirajzolt körön kívül ismeretes a kör középpontjától nem egyenlő távolságra levő két adott pont által határolt szakasz felezőpontja, vagy két, egymásra merőleges egyenes, melyek közül egyik sem megy át a kör középpontján, akkor bármely körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés csupán vonalzóval is elvégezhető; e szerkesztéseknél a kör középpontja nem nélkülözhető.

Dolgozatunkban a Steiner-tétel ezen általánosítását algebrai módszerrel igazoljuk, egységes módon kezelve az euklideszi és a hiperbolikus sík esetét a beágyazó projektív metrikus síkban [2, 4, 7, 8, 10, 11].

Strommer Gyula eredményén túlmenve megmutatjuk, hogy bármely ciklus (kör, paraciklus, hiperciklus) középpontjával együtt történő megadása, továbbá egy a sík metrikus állandóját jellemző többletadat felvétele után, minden euklideszi értelemben vett szerkesztés elvégezhető csak vonalzó segítségével is. A szerkesztések végrehajtása majd a szerkesztőcikluson való pontszámolás alapján történik, ezért ehhez szükségünk van a síkbeli pontoknak, egyeneseknek, köröknek cikluspontok segítségével való projektív koordinátázására. Módszerünk alapgondolata a Hilbert-féle végkalkulusból származik [1, 2]. Az újabb axiomatikai kutatásokban is nyomon követhetjük ennek a módszernek a hatását [1, 3, 7, 12, 13].

2. A kvádrik koordinátázásának grafikus módszere

A K koordinátatesten értelmezett $\mathcal{P}^2(K)$ projektív sík ismert koordinátázását felhasználva rögzítsük koordinátarendszerünket egy előre megrajzolt $\mathcal{g}$ körhöz, ciklushoz, vagy még általánosabban kvádrikhoz, mint szerkesztőgörbéhez a következő módon: Az E_0, E_1 alappontok és az E egységpont illeszkedjenek a $\mathcal{g}$ görbére, az E_0E_2 és az E_1E_2 egyenesek pedig legyenek a görbe érintői. Így a $\mathcal{g}$ kvádrik $\mathbf{x}(x^0; x^1; x^2)$ koordinátájú pontjainak egyenlete: $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x^0x^1 - x^2x^2 = 0$. Az $\frac{x^1}{x^2} = \frac{x^2}{x^0} =: \lambda \in K \cup \{\infty\}$ paramétert a ∞-re vonatkozó szokásos megállapodásokkal



2.1 ábra

bevezetve: $x^1-\lambda x^2=0$ és $x^2-\lambda x^0=0$, azaz g az E_0 és az E_1 tartópontú projektív sugársorok megfelelő elemeinek metszeteként adódik.

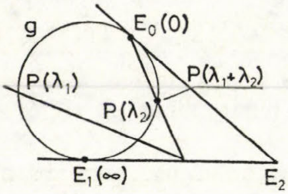
A g görbe tehát az

$$\{(1;\lambda^2;\lambda)\in\mathscr{P}^2(K):\lambda\in K\cup\{\infty\}\}$$

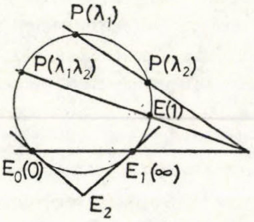
ponthalmazzal azonos; $E_0(\lambda=0)$, $E_1(\lambda=\infty)$, $E(\lambda=1)$.

Az egyenesen értelmezett grafikus műveletek mintájára a g kvádrik pontjai között is definiálhatunk grafikus összeadást és szorzást, s a kvádrik három alappontjából kiindulva koordinátázhatjuk a görbét. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ez összhangban lesz a fenti paraméterezéssel.

A grafikus összeadást a 2.2, a szorzást pedig a 2.3 ábráról olvashatjuk le.



2.2 ábra



2.3 ábra

Egyszerű számolással adódik, hogy ily módon a λ_1 és a λ_2 paraméterekkel jellemzett pontokhoz összeadással a $\lambda_1+\lambda_2$, illetve szorzással a $\lambda_1\lambda_2$ paraméterű pontokat rendeltük hozzá.

A kvádrik pontjai a fenti műveletekkel a projektív egyenesen szokásosan [12] származtatható K alaptesttel izomorf testet alkotnak. Az izomorfiát geometriailag a kvádriknak az E_1 pontból az E_0E_2 egyenesre történő vetítése szolgáltatja. A kvádrikon bizonyos elemekből vonalzós szerkesztéssel már gyököt is tudunk vonni. (A klasszikus, valós számtestre épített projektív síkon ezek felelnek meg a pozitív elemeknek.) Könnyen szerkeszthetjük meg bármely elem inverzét is az összeadásra, illetve a szorzásra nézve.

3. A kvádrik koordináták és a sík homogén koordinátáinak kapcsolata

Szükségünk lesz arra, hogyan lehet a kvádrik (kör, illetve ciklus) paraméterezésének segítségével jellemezni a projektív síknak a kvádrikra nem illeszkedő $P(\alpha;\beta;\gamma)$ koordinátákkal megadott pontját; illetve ha egy pont koordinátáit előállítottuk a kvádrikon, akkor hogyan szerkeszthetjük meg magát a pontot.

Tekintsük ezért az $(1; \lambda^2; \lambda)$ és az $(1; \mu^2; \mu)$ pontokon áthaladó egyenes $[\lambda\mu; 1; -(\lambda+\mu)]$ vonalkoordinátáit. Erre az egyenesre akkor és csak akkor illeszkedik a $P(\alpha; \beta; \gamma)$ koordinátákkal megadott pont, ha $\lambda\mu\alpha+\beta-(\lambda+\mu)\gamma=0$ teljesül. Ebből $\lambda=\frac{\gamma\mu-\beta}{\alpha\mu-\gamma}$ $(\alpha\beta-\gamma^2\neq 0)$, amiből láthatjuk, hogy ha az $(\alpha; \beta; \gamma)$ koordinátákkal jellemzett pontot összekötjük a kvádrik egy tetszőleges $(1; \mu^2; \mu)$ pontjával, ebből hogyan határozható meg a kvádrik másik, esetleg az előbbivel azonos $(1; \lambda^2; \lambda)$ metszéspontja.

A $\lambda=\frac{\gamma\mu-\beta}{\alpha\mu-\gamma}$ formulával a kvádrik pontjai között egy-egy értelmű és a pontműveletek alapján vonalzóval szerkeszthető megfeleltetést létesíthetünk, melyet a kvádrik két pontja és ezek képe meghatároz. Ez a leképezés lineárisan kiterjeszthető a teljes síkra. A

$$\mu \mapsto \lambda = \frac{\gamma\mu-\beta}{\alpha\mu-\gamma}$$

lineáris törtfüggvény a síknak egy olyan kollineációját származtatja, amely az előre megrajzolt kvádrikot önmagába viszi át.

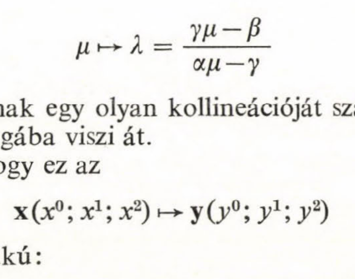
Könnyű ellenőrizni, hogy ez az

$$\mathbf{x}(x^0; x^1; x^2) \mapsto \mathbf{y}(y^0; y^1; y^2)$$

kollineáció a következő alakú:

$$y^0 \sim \gamma^2 x^0+\alpha^2 x^1-2\alpha\gamma x^2$$
$$y^1 \sim \beta^2 x^0+\gamma^2 x^1-2\beta\gamma x^2$$
$$y^2 \sim \beta\gamma x^0+\alpha\gamma x^1-(\alpha\beta+\gamma^2)x^2.$$

Ez a leképezés a síkon is involúció, melynek centruma $P(\alpha; \beta; \gamma)$, tengelye pedig P polárisa $[\beta/2; \alpha/2; -\gamma]$. Látható, hogy P koordinátái és az involúció paraméterei egymást kölcsönösen meghatározzák. Ebből következik, hogy egy a kvádrikra nem



3.1 ábra

illeszkedő pontot olyan két egyenes metszéspontjaként kaphatjuk meg, melyek mindegyike a kvádriknak az illető pont által meghatározott involúciónál egymáshoz rendelt pontjait köti össze. Például az előbbi $(\alpha; \beta; \gamma)$ pontot, ha $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ és $\gamma\neq 0$, a $P(0)=(1; 0; 0)$ és $P\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)=\left(1; \frac{\beta^2}{\gamma^2}; \frac{\beta}{\gamma}\right)$ pontok összekötő egyenesének, valamint a $P(\infty)=(0; 1; 0)$ és $P\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\left(1; \frac{\gamma^2}{\alpha^2}; \frac{\gamma}{\alpha}\right)$ pontok összekötő egyenesének a metszéspontjaként is megkaphatjuk.

Tehát, ha a kvádrik $0, 1, \infty, \alpha, \beta, \gamma$ paraméterű pontjai ismertek, akkor a $\frac{\beta}{\gamma}$ és $\frac{\gamma}{\alpha}$ paraméterű pontok vonalzós szerkesztése után az $(\alpha; \beta; \gamma)$ pont vonalzós szerkesztését is megoldottuk. Mellékesen tudjuk, hogy $(\alpha; \beta; \gamma) \sim \left(1; \frac{\beta}{\alpha}; \frac{\gamma}{\alpha}\right)$, $\alpha \neq 0$ ugyanazt a pontot jellemzi, de az ehhez hasonló részletek elemzése túl hosszadalmas lenne, most a szerkeszthetőség kérdése és nem a leggazdaságosabb végrehajtás érdekel bennünket.

4. A testtel koordinátázott $\mathscr{P}^2(K)$ projektív sík

Az alábbiakban a projektív metrika azon kérdéseivel foglalkozunk, melynek segítségével a hiperbolikus, az euklideszi és az elliptikus geometria viszonylag egyszerű analitikus geometriai módszerekkel tárgyalható [2, 11].

A $\mathscr{P}^2(K)$ projektív sík pontjait a $\dot{\mathbf{V}}^3/\dot{K}$ „faktorstruktúra", egyeneseit pedig $\dot{\mathsf{V}}_3/\dot{K}$ jellemzi

Esetünkben $\dot{\mathbf{V}}^3 := \mathbf{V}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\dot{K} := K \setminus \{0\}$, ahol $\mathbf{V}^3$ egy K kommutatív testen értelmezett vektortér, $\mathbf{0}$ a zérusvektor. A faktorstruktúra a következő $\sim$ ekvivalenciareláció szerint adódik:

Bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \dot{\mathbf{V}}^3$ esetén $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, ha létezik $c \in \dot{K}$ úgy, hogy $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$. Az $X\langle\mathbf{x}\rangle$ pont tehát egy $\mathbf{x} \in \dot{\mathbf{V}}^3$ vektor által reprezentált $\langle\mathbf{x}\rangle$ egydimenziós altér a háromdimenziós $\mathbf{V}^3$ vektortérben.

Ha megadjuk a $\mathbf{V}^3$ vektortér egy $\mathbf{e}_i$ bázisát, ez kitűzi a $\mathscr{P}^2(K)$ síkban az $\langle\mathbf{e}_0\rangle, \langle\mathbf{e}_1\rangle, \langle\mathbf{e}_2\rangle, \langle\mathbf{e}\rangle = \langle\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\rangle$ koordinátarendszert. Az $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i \in \dot{\mathbf{V}}^3$ által kitűzött pont koordinátái (x^i), amit sormátrix alakban is írhatunk (használjuk az azonos felső és alsó indexekre vonatkozó összegezési konvenciót).

A V_3 duális vektortér elemeit mint $\mathbf{V}^3$-on definiált K-beli értékeket felvevő lineáris függvényeket, másképpen formákat a következő módon értelmezhetjük: $\mathsf{u} \in \mathsf{V}_3$, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^3$ és $c \in K$ esetén

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathsf{u} = \mathbf{x}\mathsf{u} + \mathbf{y}\mathsf{u} \quad \text{és}$$

$$(c\mathbf{x})\mathsf{u} = c(\mathbf{x}\mathsf{u})$$

teljesülnek.

Értelmezhető V_3-ban az összeadás és a K elemeivel (jobbról) történő szorzás művelete a következő definícióval: Minden $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathsf{V}_3$ és $c \in K$-ra $(\mathbf{x} \in \mathbf{V}^3)$

$$\mathbf{x}(\mathsf{u}+\mathsf{v}) := \mathbf{x}\mathsf{u} + \mathbf{x}\mathsf{v}$$

$$\mathbf{x}(\mathsf{u}c) := (\mathbf{x}\mathsf{u})c.$$

Ellenőrizhető, hogy $\mathsf{u}+\mathsf{v}$ és $\mathsf{u}c$ valóban lineáris függvények, s a bevezetett műveletekkel V_3 maga is lineáris tér, a $\mathbf{V}^3$ duális tere. Legyen $\dot{\mathsf{V}}_3 := \mathsf{V}_3 \setminus \{\mathsf{0}\}$, $\mathsf{0}$ az a forma, amely minden $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^3$-hoz a $0 \in K$ „zérus számot" rendeli.

Az $\mathsf{u} \in \dot{\mathsf{V}}_3$ forma, illetve az $\langle\mathsf{u}\rangle$ egydimenziós V_3-beli altér leírja a $\mathbf{V}^3$ vektortér egy kétdimenziós alterét, az $\{\mathbf{x} : \mathbf{x}\mathsf{u} = 0\}$ vektorhalmazt. Az $\mathbf{x}\mathsf{u} = 0$ egyenlet az $\langle\mathbf{x}\rangle$ pont és az $\langle\mathsf{u}\rangle$ egyenes illeszkedését fejezi ki.

A $\mathbf{V}^3$ vektortér és a V_3 formatér bázisai között egy megfeleltetést definiálunk: Ha $e^0, e^1, e^2 \in V_3$ úgy, hogy a $\mathbf{V}^3$ vektortér $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisára teljesül az

$$\mathbf{e}_i e^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k, \end{cases}$$

akkor e^k a V_3 bázisa, amely duálisa a $\mathbf{V}^3$-beli $\mathbf{e}_i$ bázisnak. Legyen $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, $u = e^k u_k$, ekkor

$$\mathbf{x}u = (x^i \mathbf{e}_i)(e^k u_k) = x^i(\mathbf{e}_i e^k) u_k = x^i u_i.$$

Az $u = e^k u_k$ forma által meghatározott egyenes koordinátái $[u_k]$, ezt oszlopmátrix alakban is írhatjuk. Az $\mathbf{x}u = x^i u_i = 0$ tekinthető az u egyenesre illeszkedő pontok egyenletének, de tekinthető az $\mathbf{x}$ pontra illeszkedő egyenesek egyenletének is.

Most a $\mathcal{P}^2$ projektív sík kollineációit a $\mathbf{V}^3$ lineáris transzformációinak segítségével értelmezzük: Az $\alpha: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\alpha = \mathbf{y}$ leképezés lineáris, ha bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}^3$, $c \in K$ esetén az

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\alpha = \mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\alpha$$

$$(c\mathbf{a})\alpha = c(\mathbf{a}\alpha)$$

egyenlőségek teljesülnek. A $\mathbf{V}^3$ $\mathbf{e}_i$ bázisát rögzítve legyen $\mathbf{e}_i\alpha = a_i^k \mathbf{e}_k$. Ekkor

$$y^k \mathbf{e}_k =: \mathbf{y} := \mathbf{x}\alpha = x^i(\mathbf{e}_i\alpha) = x^i a_i^k e_k, \quad \text{tehát} \quad y^k = x^i a_i^k.$$

Az α leképezés egy-egy értelmű, ha $(\mathrm{Det}\, a_i^k) \neq 0$, ezt a továbbiakban mindig feltesszük. α származtatja a $\mathcal{P}^2$ projektív sík projektív kollineációját.

A $\mathbf{V}^3$ α egy-egy értelmű lineáris leképezése a V_3 formatér egy-egy értelmű lineáris $\alpha^+: v \mapsto \alpha^+ v =: u$ leképezését származtatja az $(\mathbf{x}\alpha)v =: \mathbf{x}(\alpha^+ v)$ egyenlőség szerint. Ekkor $\mathbf{y}v = 0$ esetén $\mathbf{x}u = 0$ is teljesül és viszont. Az $\alpha^{+-1}: u = \alpha^+ v \mapsto v$ adja meg, hogy az α leképezésnél $\mathcal{P}^2$ egyenesei hogyan transzformálódnak. Ha $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, $u = u_i e^i$, $v = v_k e^k$, akkor $(x^i a_i^k) v_k = x^i (a_i^k v_k)$, $a_i^k v_k =: u_i$, $A_m^i a_i^k = \delta_m^k$ választással $v_m = A_m^i u_i$ mutatja, hogy α^{+-1} mátrixa éppen az (a_i^k) inverze, az (A_m^i).

Különösen fontos az alábbi projektív kollineáció: Egy $\langle \mathbf{a} \rangle$ centrumú, $\langle t \rangle$ tengelyű kollineáció formuláját

$$\sigma: \langle \mathbf{x} \rangle \mapsto \langle \mathbf{y} \rangle, \quad \mathbf{y} \sim \mathbf{x} - (\mathbf{x}t)\mathbf{a} \tag{4.1}$$

alakba írhatjuk az $\mathbf{a}$ vektor, a t forma és az $\mathbf{a}t \neq 1$ paraméter alkalmas megválasztásával. Ha $\mathbf{a}t = 2$, akkor a fenti kollineáció involutív (hacsak a K kommutatív test karakterisztikája nem 2, ezt a továbbiakban is mindig feltesszük). Az egyenesek körében is megadhatunk egy $\langle \mathbf{a} \rangle$ centrumú, $\langle t \rangle$ tengelyű projektivitást:

$$\sigma: \langle u \rangle \mapsto \langle v \rangle, \quad v \sim u - t(\mathbf{a}u) \tag{4.2}$$

az $\mathbf{a}$ vektor, a t forma és az $\mathbf{a}t \neq 1$ paraméter alkalmas megválasztásával. Ha $\mathbf{a}t = 2$, akkor most is involutív kollineációhoz jutunk.

A projektív metrikát most úgy adjuk meg, hogy majd az euklideszi és a hiperbolikus esetben is analóg formulákat nyerjünk. A V_3 formatérnek a $\mathbf{V}^3$ vektortérbe történő

$$F: u \mapsto uF =: \mathbf{u}$$

leképezését polaritásnak nevezzük, ha bármely $u, v \in V_3$ és $c \in K$ esetén

$$(u+v)F = uF + vF$$

$$(uc)F = c(uF)$$

és

$$(\mathsf{u}F)\mathsf{v} = (\mathsf{v}F)\mathsf{u}$$

teljesülnek.

Az F polaritás megadása egyenértékű az $F(\mathsf{u}, \mathsf{v}) := (\mathsf{u}F)\mathsf{v}$ szimmetrikus, bilineáris forma, azaz skalárszorzat megadásával. Ha megadjuk az $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^k$ bázispárt, akkor $\mathsf{e}^k F := F^{ki}\mathbf{e}_i$ $(F^{ki} = F^{ik})$ meghatározza az F polaritás mátrixát. Mivel $\mathbf{u}$ és $c\mathbf{u}$ ugyanazt a pontot tűzik ki, ezért F^{ik} csak egy konstans erejéig adott, azaz F^{ik} és cF^{ik} ugyanazt a polaritást határozzák meg. Az F polaritás, az $(\mathsf{e}^k u_k)F = u_k(\mathsf{e}^k F) = u_k F^{ki}\mathbf{e}_i := u^i \mathbf{e}_i$ jelöléssel, az $F\colon [u_k] \mapsto (u_k F^{ki}) = (u^i)$ mátrixegyenlőséggel jellemezhető.

Az $\mathsf{u} = \mathsf{e}^i u_i$ és a $\mathsf{v} = \mathsf{e}^k v_k$ által meghatározott egyenesek merőlegesek, ha u pólusa illeszkedik v-re és megfordítva: v pólusa is illeszkedik u-ra, tehát $(\mathsf{u}F)\mathsf{v} = 0$, azaz $u^i F^{ik} v_k = 0$.

Ha az F polaritás reguláris, azaz invertálható leképezés, akkor definiálható az $f := F^{-1}\colon \mathbf{x} \mapsto F^{-1}\mathbf{x} =: \mathsf{x}$ leképezés és az $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(F^{-1}\mathbf{y}) = F(F^{-1}\mathbf{x}, F^{-1}\mathbf{y})$ skalárszorzat a $\mathbf{V}^3$ vektortéren. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ értelmezi az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontok konjugáltságát.

A reguláris hiperbolikus polaritás, mint abszolút polaritás megadja a hiperbolikus projektív metrikát, amikor is az

$$\mathscr{F} = \{\langle \mathsf{u} \rangle\colon F(\mathsf{u}, \mathsf{u}) = 0\}$$

másodrendű vonalalakzat, az

$$\mathscr{f} = \{\langle \mathbf{x} \rangle\colon f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}$$

másodrendű pontalakzat nem üres, sőt el nem fajuló vonalkvádrik, illetve kvádrik lesz. Ha az abszolút polaritás képalakzata egyetlen egyenes pontjaiból áll, ezt választjuk majd az ideális egyenesnek. Az ideális egyenes tehát bármely egyenesre merőleges, de feltesszük még, hogy ezen kívül egyetlen egyenes sem merőleges saját magára. Ekkor az euklideszi (szinguláris) projektív metrikához jutunk.

5. A kör és a ciklus egyenlete

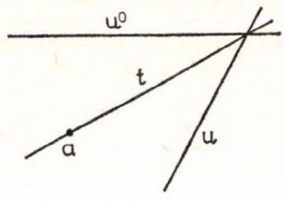
Az $\mathbf{a}$ és $\mathsf{a}F = \mathbf{a}$ poláris-pólus párhoz tartozó involutív centrális axiális kollineációt, másképpen tükrözést az alábbi egyenes-egyenes leképezés származtatja akár a hiperbolikus, akár az euklideszi síkon:

$$(5.1) \qquad \sigma\colon \langle \mathsf{u} \rangle \mapsto \langle \mathsf{v} \rangle, \quad \mathsf{v} \sim \mathsf{u} - \mathsf{a}\frac{2F(\mathsf{a}, \mathsf{u})}{F(\mathsf{a}, \mathsf{a})}, \quad F(\mathsf{a}, \mathsf{a}) \neq 0.$$

A vonalkör, vagy a vonalciklus egyenletét úgy kapjuk, hogy egy u^0 egyenest az $\mathbf{a}$ tartópontú $\mathbf{a}\mathsf{t} = 0$ egyenletű egyenessereg minden egyes t tengelyére tükrözzük. Az u tükörképegyenesek halmaza egy vonalciklus egyeneseit adja:

$$(5.2) \qquad \mathscr{C}(\mathbf{a}, \mathsf{u}^0) := \left\{\mathsf{u}\colon \mathsf{u} \sim \mathsf{u}^0 - \mathsf{t}\frac{2F(\mathsf{t}, \mathsf{u}^0)}{F(\mathsf{t}, \mathsf{t})}, \quad \mathbf{a}\mathsf{t} = 0, F(\mathsf{t}, \mathsf{t}) \neq 0\right\}.$$

Itt feltesszük, hogy $\mathbf{a}\mathsf{u}^0 \neq 0$ és $\mathsf{u}^0 F \not\sim \mathbf{a}$. Ezen $\mathscr{C}(\mathbf{a}, \mathsf{u}^0)$ vonalciklus egyenletét a következő módon kapjuk meg:



5.1 ábra

Az $\mathbf{at}=0$ feltétel teljesülését a $\mathsf{t}\sim\mathsf{u}^0(\mathbf{au})-\mathsf{u}(\mathbf{au}^0)$, $\mathsf{u}\not\sim\mathsf{u}^0$ választással biztosítjuk. Ekkor $\mathsf{u}^0, \mathsf{t}, \mathsf{u}$ egy egyenessereghez tartoznak. A tükrözési feltételbe ezt a t formát helyettesítve az u^0 együtthatójára

$$(5.3) \qquad 1-2(\mathbf{au})\frac{F(\mathsf{t}, \mathsf{u}^0)}{F(\mathsf{t}, \mathsf{t})},$$

az u együtthatójára pedig

$$(5.4) \qquad 2(\mathbf{au}^0)\frac{F(t, \mathsf{u}^0)}{F(\mathsf{t}, \mathsf{t})}$$

adódik, ahol

$$(5.5) \qquad F(\mathsf{t}, \mathsf{u}^0) = (\mathbf{au})F(\mathsf{u}^0, \mathsf{u}^0)-(\mathbf{au}^0)F(\mathsf{u}, \mathsf{u}^0),$$

$$(5.6) \qquad F(\mathsf{t}, \mathsf{t}) = (\mathbf{au})^2F(\mathsf{u}^0, \mathsf{u}^0)-2(\mathbf{au})(\mathbf{au}^0)F(\mathsf{u}, \mathsf{u}^0)+(\mathbf{au}^0)^2F(\mathsf{u}, \mathsf{u}).$$

(5.2)-ből látható, hogy az u^0 együtthatójának, (5.3)-nak 0-nak kell lennie, az u együtthatója, (5.4) viszont nem lehet zérus.

$F(\mathsf{t}, \mathsf{t})\neq 0$, $\mathsf{u}\not\sim\mathsf{u}^0$ esetén $F(\mathsf{t}, \mathsf{u}^0)\neq 0$ is teljesül, ekkor u együtthatója valóban nem lesz zérus. A vonalciklus u elemére tehát

$$(5.7) \qquad F(\mathsf{t}, \mathsf{t})-2(\mathbf{au})F(\mathsf{t}, \mathsf{u}^0) = 0$$

teljesül. (5.5) és (5.6) figyelembevételével

$$(5.8) \qquad C(\mathsf{u}, \mathsf{u}) \equiv (\mathbf{au}^0)^2F(\mathsf{u}, \mathsf{u})-(\mathbf{au})^2F(\mathsf{u}^0, \mathsf{u}^0) = 0$$

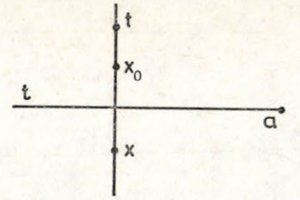
adódik, s ez az általános vonalciklus egyenlete, ha az $F(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ bilineáris forma ismert. Mint látható, a ciklust meghatározó u^0 is kielégíti az (5.8) egyenletet.

Az (5.8) egyenlet és $\mathbf{au}\neq 0$ teljesülése esetén $F(\mathsf{t}, \mathsf{u}^0)\neq 0$ is teljesül, tehát valóban meghatároztuk az (5.2)-höz tartozó u elemeket. Az (5.8)-ból látható azonban, hogy $C(\mathsf{u}, \mathsf{u})=0$ akkor is teljesül, ha $F(\mathsf{u}, \mathsf{u})=0$ és $\mathbf{au}=0$ egyszerre fennáll. A továbbiakban ezen feltételeket kielégítő u elemeket is — ha egyáltalán léteznek — a ciklushoz fogjuk számítani. (Paraciklus és hiperciklus esetén léteznek ilyen elemek.)

Az (5.8) egyenlet alapján vonalkvádrikhoz jutottunk, a hozzá tartozó $C(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ bilineáris forma reguláris C polaritást értelmez, ha mátrixa (C^{ik}) invertálható. Ekkor, ismeretes módon, az előbbiből mátrixinvertálással mindig adódik annak a pontkvádriknak a (c_{ik}) mátrixa és így az egyenlete, melyek érintői éppen a $\mathscr{C}$ vonalkvádrikot alkották. Itt is elegendő (c_{ik}) megadása egy konstans erejéig.

Ha az F polaritás invertálható, azaz mint láttuk a $\mathbf{V}^3$ vektortéren értelmezett $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilineáris forma létezik, akkor segítségével a vonalciklus levezetésével analóg módon is megadhatjuk a pontciklus egyenletét.

Egy $\mathbf{x}_0$ pontot az $\mathbf{a}$ tartópontú egyenessereg minden egyes $\mathbf{t}$ pólusára tükrözünk.



5.2 ábra

Az $\mathbf{x}$ tükörképpontok egy c ciklust adnak:

$$(5.9)\qquad c(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) := \left\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \sim \mathbf{x}_0 - \frac{2f(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)}{f(\mathbf{t}, \mathbf{t})}\mathbf{t}, f(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = 0 \quad \text{és} \quad f(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \neq 0\right\}.$$

Itt is feltesszük, hogy $f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) \neq 0$ és $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$. A $\mathbf{t} \sim f(\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{x}_0 - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \nsim \mathbf{x}_0$ választással biztosítjuk, hogy $\mathbf{a}$ illeszkedjen $\mathbf{t}$ polárisára, azaz $f(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = 0$ legyen. Ekkor $\mathbf{t}$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}$ egy egyenesen vannak. Ezt a $\mathbf{t}$ vektort a tükrözési feltételbe behelyettesítve $\mathbf{x}_0$ együtthatójára

$$(5.10)\qquad 1 - \frac{2f(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)}{f(\mathbf{t}, \mathbf{t})}f(\mathbf{x}, \mathbf{a}),$$

$\mathbf{x}$ együtthatójára

$$(5.11)\qquad \frac{2f(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)}{f(\mathbf{t}, \mathbf{t})}f(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})$$

adódik, ahol

$$(5.12)\qquad f(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}, \mathbf{a})f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

$$(5.13)\qquad f(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{a})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) - 2f(\mathbf{x}, \mathbf{a})f(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + $$
$$+ f(\mathbf{x}_0, \mathbf{a})^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

(5.9)-ből következik, hogy $\mathbf{x}_0$ együtthatójának 0-nak, $\mathbf{x}$ együtthatójának pedig zérustól különbözőnek kell lennie. A feltételeket figyelembe véve, $\mathbf{x} \nsim \mathbf{x}_0$ esetén $f(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0) \neq 0$ is teljesül, ekkor $\mathbf{x}$ együtthatója nem zérus, a pontkör $\mathbf{x}$ elemére

$$(5.14)\qquad f(\mathbf{t}, \mathbf{t}) - 2f(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0.$$

(5.12) és (5.13) felhasználásával

$$(5.15)\qquad c(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0$$

adódik, s ez az általános pontkör egyenlete, ha az $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ skalárszorzat már ismert. A kapott $\mathbf{x}$ pontok mindegyike (5.9)-hez tartozik. Látható, hogy (5.15) egyenletet a pontciklust meghatározó $\mathbf{x}_0$ is kielégíti, s ezen kívül még az $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ és $f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$ feltételeket egyszerre kielégítő $\mathbf{x}$ pont is (ha ilyen létezik). Megállapodás szerint ez utóbbiakat is a ciklus elemének tekintjük, így (5.15) teljesen általánosan megadja a pontciklus egyenletét.

Koordinátarendszerünket úgy vesszük fel, hogy a szerkesztőgörbe egyenlete egységesen

$$(5.16)\qquad g(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \equiv y^0 y^1 - y^2 y^2 = 0,$$

mátrixa

$$(5.17)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

legyen. Ezen kvádrik érintőiből alkotott „vonalkvádrik" egyenlete mátrixinvertálással (és konstanssal való szorzással):

$$(5.18)\qquad G(\mathsf{v}, \mathsf{v}) \equiv 4v_0 v_1 - v_2 v_2 = 0,$$

mátrixa

$$(5.19)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezután a metrikát meghatározó $F(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ bilineáris formát (illetve az $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ formát) úgy kell majd megválasztanunk, hogy a szerkesztőgörbe rendre kör, paraciklus, hiperciklus legyen.

A következőkben meghatározzuk $F(\mathsf{u}, \mathsf{v})$-t, illetve $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-t, valamint a pontciklusok mátrixát, ahol erre szükségünk lesz.

6. Az abszolút polaritás felvétele

I. Tekintsük először az euklideszi esetet

Az F polaritás képalakzata most egy egyenes pontjaiból áll, legyen ez az ideális egyenes. Az (5.16) kvádrik érintőiből álló vonalkvádrik egyenletére mátrixinvertálással az (5.18) képletet kaptuk. Az ideális egyenesnek megfelelő i forma az $\mathbf{a}(1; 1; 0)$ középpont $\mathcal{g}$ kvádrikra vonatkozó polárisának felel meg, tehát az $\mathbf{e}_i$-hez duális $\mathbf{e}^i$ bázisban $\mathsf{i}[1/2; 1/2; 0] \sim [1; 1; 0]$.

Ha tekintjük a $\mathsf{v}^0[1/2; 1/2; -1]$ G-hez tartozó formát, ekkor $\mathbf{a}\mathsf{v}^0 = 1$ teljesül, és így

$$G(\mathsf{v}, \mathsf{v}) \equiv 4v_0 v_1 - v_2 v_2 \equiv F(\mathsf{v}, \mathsf{v}) - (v_0 + v_1)^2 F(\mathsf{v}^0, \mathsf{v}^0).$$

Legyen $F(\mathsf{v}^0, \mathsf{v}^0) =: k$, ekkor

$$F(\mathsf{v}, \mathsf{v}) \equiv (v_0 + v_1)^2 k + 4v_0 v_1 - v_2 v_2.$$

Az $F(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ bilineáris forma

$$F(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \equiv k u_0 v_0 + (k+2) u_0 v_1 + (k+2) u_1 v_0 + k u_1 v_1 - u_2 v_2$$

szerint adódik. Az $(1; 1; 0)$ középpont g-re vonatkozó $[1/2; 1/2; 0]$ polárisa — mint ideális egyenes — akkor lesz bármely $[u_0; u_1; u_2]$ egyenesre merőleges, ha $k = -1$, hiszen:

$$[k v_0 + (k+2) v_1] u_0 + [k v_1 + (k+2) v_0] u_1 - v_2 u_2 = 0$$

$v_0 = 1/2$, $v_1 = 1/2$, $v_2 = 0$ választás mellett csak $k = -1$ esetén teljesülhet tetszőleges u_0, u_1, u_2 értékekre. Az euklideszi esetben tehát:

$$(6.1)\qquad F(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \equiv -u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_1 v_0 - u_1 v_1 - u_2 v_2,$$

azaz mátrixa:

(6.2) $$(F^{ik}) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy ez a mátrix nem invertálható, hiszen Det $(F^{ik})=0$. Ezután tetszőleges **a** középpontra és u^0-ra ($\mathbf{a}\mathrm{u}^0 \neq 0$), a $\mathscr{C}(\mathbf{a}, \mathrm{u}^0)$ vonalkör egyenletét (5.8) adja.

A továbbiakban legyen $\mathbf{a}\mathrm{u}^0=1$ ($\mathbf{a}\mathrm{u}^0 \neq 0$ miatt az u^0 alkalmas választásával ezt mindig megtehetjük) és $F(\mathrm{u}^0, \mathrm{u}^0)=: r \neq 0$.

$$\mathbf{a}(a^0; a^1; a^2), \quad \text{így} \quad (\mathbf{a}\mathrm{u})^2 = (a^0 u_0 + a^1 u_1 + a^2 u_2),$$

azaz

(6.3) $$C(\mathrm{u}, \mathrm{u}) \equiv -u_0 u_0 + 2u_0 u_1 - u_1 u_1 - u_2 u_2 - (a^0 u_0 + a^1 u_1 + a^2 u_2)^2 \cdot r.$$

Ebből a vonalkör mátrixa:

(6.4) $$\begin{pmatrix} -(1+ra^0a^0) & 1-ra^0a^1 & -ra^0a^2 \\ 1-ra^0a^1 & -(1+ra^1a^1) & -ra^1a^2 \\ -ra^0a^2 & -ra^1a^2 & -(1+ra^2a^2) \end{pmatrix}.$$

A pontkör mátrixát ebből invertálással kapjuk:

(6.5) $$\begin{pmatrix} 1+r(a^1a^1+a^2a^2) & 1+r(a^2a^2-a^0a^1) & -r(a^0+a^1)a^2 \\ 1+r(a^2a^2-a^0a^1) & 1+r(a^0a^0+a^2a^2) & -r(a^0+a^1)a^2 \\ -r(a^0+a^1)a^2 & -r(a^0+a^1)a^2 & r(a^0+a^1)(a^0+a^1) \end{pmatrix}.$$

Itt a kört tehát a középpontjával és egy érintőjével adtuk meg. Ez egyenértékű azzal, hogy megadjuk a kör középpontját és egy tetszőleges pontját. Ha $\mathbf{x}_0$ adott, $c(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)=$ $=0$-ból r egyértelműen kifejezhető $\mathbf{x}_0$ és **a** segítségével.

II. Vizsgáljuk meg a hiperbolikus esetet

A $\mathscr{g}$ szerkesztő kvádrikhoz, $\mathscr{G}$ vonalkvádrikhoz speciálisan vesszük fel a projektív metrikát meghatározó $\mathscr{F}$, illetve $\mathscr{f}$ abszolút kvádrikot úgy, hogy a $\mathscr{g}$, illetve $\mathscr{G}$ rendre kör, paraciklus, hiperciklus, illetve ezek érintőhalmaza legyen.

A $\mathscr{c}$ (ill. $\mathscr{C}$) ciklus kör (vonalkör), ha az **a** középpontra a $\mathscr{C}$ egyetlen eleme sem illeszkedik. Paraciklushoz jutunk, ha a $\mathscr{C}$-nek pontosan egy eleme, hiperciklushoz, ha a $\mathscr{C}$-nek pontosan két eleme illeszkedik **a**-ra.

Az $\mathscr{F}$-re korlátozó feltételeket jelent, hogy a továbbiakban a hiperbolikus projektív metrikával foglalkozunk, illetve a $\mathscr{g}$, $\mathscr{G}$ szerkesztő kvádrik középpontját a koordinátarendszerhez rögzítjük. Külön-külön meg kell tehát vizsgálnunk azokat az eseteket, amikor az előre megrajzolt kvádrik kör, paraciklus, illetve hiperciklus.

a) *Legyen az előre megrajzolt szerkesztő kvádrik kör.* Az $F(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ bilineáris formát úgy kell tehát megválasztanunk, hogy a szerkesztőgörbe kör legyen. Az $\mathbf{a}(1; 1; 0)$ középponthoz válasszuk a $\mathrm{v}^0[1/2; 1/2; -1]$ egyenest. Ekkor $\mathbf{a}\mathrm{v}^0=1$, tehát

(6.6) $$G(\mathrm{v}, \mathrm{v}) \equiv 4v_0 v_1 - v_2 v_2 \equiv F(\mathrm{v}, \mathrm{v}) - (v_0+v_1)^2 F(\mathrm{v}^0, \mathrm{v}^0).$$

Legyen $F(\mathrm{v}^0, \mathrm{v}^0) =: k$, ekkor

$$F(\mathrm{v}, \mathrm{v}) \equiv (v_0+v_1)^2 k + 4v_0 v_1 - v_2 v_2,$$

azaz $F(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ bilineáris forma ezek szerint:

$$F(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \equiv ku_0 v_0 + (k+2)u_0 v_1 + (k+2)u_1 v_0 + ku_1 v_1 - u_2 v_2. \tag{6.7}$$

Ebből $F(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ mátrixa:

$$(F^{ik}) \sim \begin{pmatrix} k & k+2 & 0 \\ k+2 & k & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

(Eddigi vizsgálataink megegyeznek az euklideszi esettel.) (F^{ik}) inverze csak $k \neq -1$ esetén létezik, így $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mátrixa az alábbinak választható:

$$(f_{ik}) \sim \begin{pmatrix} -k & k+2 & 0 \\ k+2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -4(k+1) \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Az $F(\mathrm{u}, \mathrm{v})$, illetve az $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mátrixának ismeretében egységesen felírhatnánk a vonalciklus, illetve a pontciklus mátrixát. A k paraméterre kikötést jelent, hogy például az $(1; 1; 1)$ egységpont az abszolút kvádrik belső pontja legyen, azaz ne lehessen az $\mathscr{F}$-fel közös illeszkedő egyenese. Az $(1; 1; 1)$ pontra illeszkedő $\mathrm{u}[u_0; u_1; u_2]$ egyenesek egyenlete: $u_0+u_1+u_2=0$, amiből $u_2=-(u_0+u_1)$.

$$\begin{aligned} F(\mathrm{u}, \mathrm{u}) &= k(u_0+u_1)^2 + 4u_0 u_1 - u_2 u_2 = \\ &= (k-1)(u_0+u_1)^2 + 4u_0 u_1 = \\ &= (k-1)u_0 u_0 + 2(k+1)u_0 u_1 + (k-1)u_1 u_1 \neq 0, \end{aligned}$$

sőt a kvadratikus alak diszkriminánsa $(k+1)^2-(k-1)^2<0$ kell legyen, azaz a k paraméternek eleget kell tennie a $0>k\neq -1$ feltételnek, hogy a hiperbolikus esetben a szerkesztőgörbe kör legyen.

b) *Az* $F(\mathrm{u}, \mathrm{v})$*-t úgy fogjuk megválasztani, hogy a szerkesztőgörbe paraciklus legyen.* Ez azt jelenti, hogy az abszolút kvádriknak és a szerkesztőgörbének pontosan egy közös pontja létezik. Megtehetjük — a koordinátarendszer alkalmas megválasztásával —, hogy ez a közös pont éppen az $\mathbf{a}(0; 1; 0)$ legyen. Az $\mathbf{a}(0; 1; 0)$, $\mathrm{v}^0[1; 1; -2]$ választással $\mathbf{a}\mathrm{v}^0=1$ teljesül, így

$$0 = G(\mathrm{v}, \mathrm{v}) \equiv 4v_0 v_1 - v_2 v_2 \equiv F(\mathrm{v}, \mathrm{v}) - v_1^2 F(\mathrm{v}^0, \mathrm{v}^0). \tag{6.10}$$

Bevezetve az $F(\mathrm{v}^0, \mathrm{v}^0) := p$ jelölést, $F(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ mátrixa:

$$(F^{ik}) \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Ebből $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mátrixát invertálással kapjuk:

$$(f_{ik}) \sim \begin{pmatrix} -p & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a-ra valóban $\mathscr{G}$-nek és $\mathscr{F}$-nek pontosan az $[1;0;0]$ egyenese illeszkedik. Az $(1;1;1)$ pontra illeszkedő $\mathsf{u}[u_0;u_1;u_2]$ egyenesek egyenlete: $u_0+u_1+u_2=0$, az $(1;1;1)$ ismét belső pont, azaz

$$F(\mathsf{u},\mathsf{u}) \equiv 4u_0u_1+pu_1u_1-u_2u_2 = (p-1)u_1u_1+2u_0u_1-u_0u_0 \neq 0,$$

diszkriminánsa $1+(p-1)<0$, amiből $p<0$ következik.

c) *$F(\mathsf{u},\mathsf{v})$-t úgy választjuk meg, hogy a szerkesztőgörbe hiperciklus legyen.* Ez azt jelenti, hogy az abszolút kvádriknak és szerkesztőgörbénknek pontosan két közös eleme van. Felvehetjük úgy a koordinátarendszert, hogy a közös pontok az $(1;0;0)$ és a $(0;1;0)$ legyenek. $\mathscr{G}$ középpontja legyen $\mathbf{a}(0;0;1)$, és $\mathsf{v}^0[-1/2;-1/2;1]$ választással $\mathbf{a}\mathsf{v}^0=1$ teljesül, tehát:

(6.13) $$0 = G(\mathsf{v},\mathsf{v}) \equiv 4v_0v_1-v_2v_2 \equiv F(\mathsf{v},\mathsf{v})-v_2v_2F(\mathsf{v}^0,\mathsf{v}^0).$$

Az $F(\mathsf{v}^0,\mathsf{v}^0):=h$ jelöléssel $F(\mathsf{u},\mathsf{v})$ mátrixa:

(6.14) $$(F^{ik}) \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix};$$

$h\neq 1$, így $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ mátrixát invertálással kapjuk:

(6.15) $$(f_{ik}) \sim \begin{pmatrix} 0 & 2(h-1) & 0 \\ 2(h-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & h-1 & 0 \\ h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

h-ra az előzőek mintájára biztosítanunk kell, hogy a szerkesztőgörbe $(1;1;1)$ pontja belső pont legyen: $u_0+u_1+u_2=0$,

$$F(\mathsf{u},\mathsf{u}) = 4u_0u_1+(h-1)u_2u_2 =$$
$$= (h-1)u_0u_0+2(h+1)u_0u_1+(h-1)u_1u_1 \neq 0,$$

diszkriminánsára $(h+1)^2-(h-1)^2<0$ adódik, azaz $h<0$.

Most már $F(\mathsf{u},\mathsf{v})$, illetve $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ mátrixainak ismeretében egységesen felírhatnánk a vonalciklus, illetve a pontciklus mátrixát.

Az $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ mátrixának meghatározására közvetlenül is van lehetőségünk a pontciklusnál levezetett (5.15) egyenlet segítségével.

a1) *A szerkesztőgörbe kör:*
Rögzítsük az $\mathbf{y}_0$ $(1/2;1/2;1/2)$-et, a legyen $\mathbf{a}$ polárisa g-re és f-re is, azaz $\mathsf{a}[1;1;0]$ és válasszuk az $f(\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0)=:k^*$ jelölést. Ekkor $f(\mathbf{a},\mathbf{y}_0)=\mathbf{y}_0\mathsf{a}=1$ teljesül, és

(6.16) $$f(\mathbf{y},\mathbf{y}) \equiv g(\mathbf{y},\mathbf{y})+k^*(y^0+y^1)^2.$$

Ebből már meghatározható $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ mátrixa:

(6.17) $$(f_{ik}) \sim \begin{pmatrix} k^* & 1/2+k^* & 0 \\ 1/2+k^* & k^* & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A (6.8)—(6.9)-ben szereplő k és az előbbi k^* között az áttérést $k^*=-\dfrac{k}{4(k+1)}$ adja meg. $(-1<k<0$ esetén $k^*>0.)$

b1) *A szerkesztőgörbe paraciklus:*
Legyen $f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) =: p^*$, $\mathbf{a}[1; 0; 0]$ és $\mathbf{y}_0$ $(1; 1; 1)$ választással $f(\mathbf{a}, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 \mathbf{a} = 1$ teljesül, és

(6.18) $$f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \equiv g(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + p^* y^0 y^0,$$

amiből

(6.19) $$(f_{ik}) \sim \begin{pmatrix} p^* & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A (6.11)- és (6.12)-ben szereplő p és az előbbi p^* között a $p = -4p^*$ kapcsolat áll fenn. Mivel $p < 0$, ezért $p^* > 0$.

c1) *A szerkesztőgörbe hiperciklus:*
Legyen $f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) =: h^*$, $\mathbf{a}[0; 0; 1]$ és $\mathbf{y}_0(1; 1; 1)$ választással $f(\mathbf{a}, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 \mathbf{a} = 1$ ismét teljesül, s

(6.20) $$f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \equiv g(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + h^* y^2 y^2,$$

ebből

(6.21) $$(f_{ik}) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^*+1 \end{pmatrix}.$$

A (6.14)- és a (6.15)-beli h és az előbbi h^* közötti kapcsolatot $h^* = \dfrac{2-h}{h-1}$ adja. Mivel ott $h < 0$ volt, ezért most $-2 < h^* < -1$ kell, hogy teljesüljön.

A (6.2)—(6.21) mátrixok és egyenletek megadása után rátérhetünk Steiner-tételének bizonyítására. Bizonyításunkat két lépésben fogjuk elvégezni: először az euklideszi, majd a hiperbolikus síkon igazoljuk a tétel helyességét.

7. Steiner-tételének bizonyítása az euklideszi síkon

A tétel bizonyításához elegendő megmutatni, hogy kör és egyenes, valamint két kör metszéspontjai szerkeszthetők.

Egyenes és kör metszéspontjai

Az általános pontkör mátrixát (6.5) adta, egyenlete $a_{ik} x^i x^k = 0$ alakú. Az egyenest két pontja egyértelműen meghatározza, legyenek ezek $\mathbf{x}(x^0; x^1; x^2)$ és $\mathbf{y}(y^0; y^1; y^2)$. Ezen egyenes pontjai $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ alakúak. Egy konkrét $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ pont pontja az $a_{ik} x^i x^k = 0$ egyenletű görbének, ha

$$a_{ik}(\lambda x^i + \mu y^i)(\lambda x^k + \mu y^k) = 0$$

teljesül. A műveleteket elvégezve és bevezetve a következő jelöléseket:

$$a_{ik} x^i x^k =: P$$

$$a_{ik} x^i y^k =: Q$$

$$a_{ik} y^i y^k =: R$$

$\lambda^2 P + 2\lambda\mu Q + \mu^2 R = 0$ adódik, amely $\dfrac{\lambda}{\mu}$ -re egy másodfokú egyenletet ad. Ez pontosan akkor oldható meg, ha a kör és az egyenes metszik egymást. A megoldás során csak másodfokú (négyzetgyökös) testbővítés lép fel, a gyököket a szerkesztő ciklus segítségével meg tudjuk szerkeszteni, a metszéspontokat elő tudjuk állítani.

Két kör metszéspontjai

Ezt a feladatot az előzőre vezetjük vissza. Meghatározzuk a két, nem koncentrikus kör hatványvonalát. A kört a középpontjával és egy érintőjével adtuk meg, illetve jellemeztük a két kört (6.5) szerint az $\mathbf{a}(a^0; a^1; a^2)$, $\mathbf{b}(b^0; b^1; b^2)$ és az r, illetve s paraméterekkel. A két kör egyenlete $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$ alakú. Az általuk létesített körsor elemeit a $\lambda K_1 + \mu K_2 = 0$ alakú egyenlet írja le. Ezek közül meg kell találnunk azt az elemet, amely két egyenesből tevődik össze. Ez a két egyenes az $x^0 + x^1 = 0$ egyenletű ideális egyenes és a két kör hatványvonala lesz. Mivel $b^0 + b^1 \neq 0$, a t paraméter megválasztható úgy, hogy $r(a^0+a^1)(a^0+a^1) - t \cdot s(b^0+b^1)(b^0+b^1) = 0$ legyen.

Tekintsük a körsor $K_1 - tK_2 = 0$ egyenlettel adott elemét, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
(1-t)x^0x^0 + [r(a^1a^1 + a^2a^2) - t \cdot s(b^1b^1 + b^2b^2)]x^0x^0 + \\
+2(1-t)x^0x^1 + 2[r(a^2a^2 - a^0a^1) - t \cdot s(b^2b^2 - b^0b^1)]x^0x^1 - \\
-2[r(a^0+a^1)a^2 - t \cdot s(b^0+b^1)b^2]x^0x^2 + \\
+(1-t)x^1x^1 + [r(a^0a^0 + a^2a^2) - t \cdot s(b^0b^0 + b^2b^2)]x^1x^1 - \\
-2[r(a^0+a^1)a^2 - t \cdot s(b^0+b^1)b^2]x^1x^2 + \\
+[r(a^0+a^1)(a^0+a^1) - t \cdot s(b^0+b^1)(b^0+b^1)]x^2x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Az x^2x^2 együtthatója t választása folytán 0, egyenletünk bal oldalát szorzattá alakíthatjuk, és

$$(x^0+x^1)[(A+1-t)x^0 + (B+1-t)x^1 + Cx^2] = 0$$

adódik, ahol

$$A = r(a^1a^1 + a^2a^2) - t \cdot s(b^1b^1 + b^2b^2),$$

$$B = r(a^0a^0 + a^2a^2) - t \cdot s(b^0b^0 + b^2b^2)$$

és

$$C = -2[r(a^0+a^1)a^2 - t \cdot s(b^0+b^1)b^2].$$

Azt kell még megmutatni, hogy

$$A + B = 2[r(a^2a^2 - a^0a^1) - t \cdot s(b^2b^2 - b^0b^1)]$$

teljesül, hiszen x^0x^1 együtthatója

$$(A+1-t) + (B+1-t) = 2(1-t) + (A+B)$$

kell legyen. Az $r(a^0+a^1)(a^0+a^1) = t \cdot s(b^0+b^1)(b^0+b^1)$ feltételből

$$\begin{aligned}
r(a^0a^0 + 2a^0a^1 + a^1a^1 + a^2a^2 + a^2a^2 - 2a^2a^2) = \\
= t \cdot s(b^0b^0 + 2b^0b^1 + b^1b^1 + 2b^2b^2 - 2b^2b^2),
\end{aligned}$$

csoportosítva és kiemelve:

$$r(a^1a^1+a^2a^2)+r(a^0a^0+a^2a^2)-2r(a^2a^2-a^0a^1) =$$
$$= t\cdot s(b^1b^1+b^2b^2)+t\cdot s(b^0b^0+b^2b^2)-2t\cdot s(b^2b^2-b^0b^1)$$

adódik, amiből átrendezéssel következik a bizonyítandó állítás.

Euklideszi esetben tehát két kör metszéspontjainak meghatározását visszavezettük kör és egyenes metszéspontjainak meghatározására. Az előzőeket is figyelembe véve euklideszi síkon a tétel bizonyítását befejeztük.

8. Steiner-tételének bizonyítása a hiperbolikus síkon

Hiperbolikus esetben, amikor (f_{ik}) ismert, először azt mutatjuk meg, hogy ciklus és egyenes, illetve két ciklus metszéspontjának meghatározása (legfeljebb) négyzetgyökös bővítést igényel a szerkesztő kvádrikon bevezetett testben.

Egyenes és ciklus metszéspontjai

Az egyenest két pontja egyértelműen meghatározza. Legyenek ezek $\mathbf{x}(x^0; x^1; x^2)$ és $\mathbf{y}(y^0; y^1; y^2)$. Ezen egyenes pontjai $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$ alakúak. A $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$ pont pontja az (5.15) egyenletű görbének, ha

$$0 = f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) - f(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$$

teljesül, ebből

$$\begin{aligned} &\lambda^2[f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)] + \\ &+2\lambda\mu[f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) f(\mathbf{a}, \mathbf{y})] + \\ &+\mu^2[f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) f(\mathbf{a}, \mathbf{y})^2] = 0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

adódik, ami $\frac{\lambda}{\mu}$ -re egy másodfokú egyenlet. A szögletes zárójelben álló kifejezések csak az egyenest meghatározó, előre felvett két pont koordinátáitól és a ciklust meghatározó adatoktól függnek, s ezekből a grafikus műveletek segítségével előállíthatók.

A (8.1) egyenletet $\frac{\lambda}{\mu}$-re megoldva látjuk, hogy csak négyzetgyökös bővítés lép fel, s a gyököket, — ha léteznek, azaz az egyenesnek és a ciklusnak van közös pontja — az adott szerkesztő kvádrik segítségével meg tudjuk szerkeszteni.

Két ciklus metszéspontjai

Legyen

$$c_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \sim f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$$

az $\mathbf{a}$ középpontú, $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ paraméterű,

$$c_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \sim f(\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{b}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$$

pedig a $\mathbf{b}$ középpontú, $f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$ paraméterű ciklus egyenlete. A $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0$ ciklussereg azon elemét keressük, amely két egyenesből tevődik össze. Ezért szorozzuk meg a c_1-et $f(\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)^2$-nel, c_2-t $f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2$-nel, s tekintsük a kettő különbségét:

$$(8.2) \qquad 0 = f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) - f(\mathbf{b}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$$

adódik. Vezessük be az ismert mennyiségekre a

$$\mu_1^2 := f(\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$$
$$\mu_2^2 := f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)^2 f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$$

jelölést. Ezt megtehetjük, mert választásunk folytán $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) > 0$ és $f(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) > 0$. Így (8.2) a következőképpen írható:

$$[f(\mathbf{a}, \mathbf{x})\mu_1 - f(\mathbf{b}, \mathbf{x})\mu_2][f(\mathbf{a}, \mathbf{x})\mu_1 + f(\mathbf{b}, \mathbf{x})\mu_2] =$$
$$= f(\mu_1 \mathbf{a} - \mu_2 \mathbf{b}, \mathbf{x}) f(\mu_1 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0,$$

ami valóban két (nem feltétlenül valódi) egyenes egyenlete.

Ezzel a ciklusok metszéspontjának számítását sikerült visszavezetnünk egyenes és ciklus metszéspontjainak meghatározására.

Hátra van még a paraméterek szerepének tisztázása. Az abszolút kvádrik meghatározásánál bevezettük az $F(\mathrm{v}^0, \mathrm{v}^0) =: k$ (p, h), illetve az $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) =: k^*$ (p^*, h^*) jelöléseket. Az euklideszi eset vizsgálatánál $k = -1$ adódott. A hiperbolikus esetben nincsenek olyan feltételek, amelyekből paramétereinkre konkrét érték adódhatna.

Egyenes és ciklus, ciklus és ciklus metszéspontjainak meghatározásakor másodfokú, vagy másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletek megoldása szükséges. Ez, az előzőekkel egybevetve, azt jelenti, hogy minden, körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés elvégezhető a vonalzó kizárólagos használatát feltételezve is, ha adott a hiperbolikus síkon egy rögzített ciklus (kör, paraciklus, hiperciklus) a középpontjával, valamint megfelelően k, p, h értéke.

Abból, hogy paramétereink valamilyen rögzítésére szükség van, következik: a hiperbolikus síkon a körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztéseket nem lehet csak vonalzóval végrehajtani, ha a rajz síkjában csak egy, a középpontjával együtt megrajzolt ciklust adtunk meg.

A k, p, h paraméterek rögzítése az alábbiak szerint történhet:

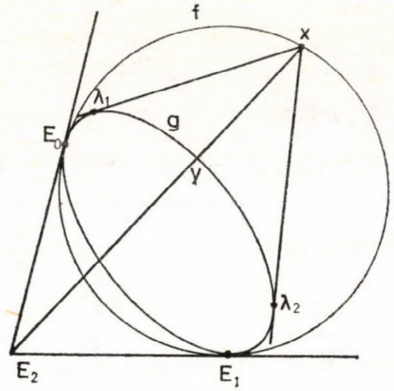
I. A szerkesztőgörbe tetszőleges pontját az ismert középponttal kötjük össze, meghatározzuk ezen két pont által adott egyenes és az abszolút kúpszelet metszéspontjából a szerkesztő ciklushoz húzott érintők érintési pontjait.

II. a) Megadunk két, egymásra merőleges egyenest, amelyek közül egyik sem megy át a rögzített ciklus középpontján.

b) Megadunk egy szakaszt a felezőpontjával úgy, hogy a szakasz végpontjai a ciklus középpontjától különböző távolságra vannak.

9. A paraméterek rögzítése

I. A k, p, h paraméterek rögzítése érdekében megtehetjük, hogy a szerkesztőgörbe tetszőleges $\mathbf{y}(1; \eta^2; \eta)$ pontját az ismert $\mathbf{a}$ középponttal kötjük össze. Meghatározzuk ezután az f abszolút kúpszelet $\mathbf{x} \sim \mathbf{a} + c\mathbf{y}$ pontját, majd ebből a pontból a szerkesztőciklushoz húzott érintők $(1; \lambda_1^2; \lambda_1)$ és $(1; \lambda_2^2; \lambda_2)$ érintési pontjait. Ez utóbbiak egyikének ismeretében, η segítségével, paraméterünket rögzítettük, szerkesztéseink a vonalzó kizárólagos használatával elvégezhetők. (Hiperciklus szerkesztőgörbe esetén a 9.1 ábra szemlélteti eljárásunkat.)



9.1 ábra

1. A szerkesztőgörbe kör

Legyen $\mathbf{a}(1;1;0)$, $\mathbf{y}(1;\eta^2;\eta)$. Ekkor $\mathbf{x}(1+c;1+c\eta^2;c\eta)$. A c meghatározása (6.17) segítségével történhet:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{x}) \equiv g(\mathbf{x},\mathbf{x})+k^*(x^0+x^1)^2,$$

$\mathbf{x}\sim\mathbf{a}+c\mathbf{y}$-t helyettesítve:

$$0 = g(\mathbf{a}+c\mathbf{y},\mathbf{a}+c\mathbf{y})+k^*(2+c+c\eta^2)^2.$$

$g(\mathbf{a},\mathbf{a})=1$, $g(\mathbf{a},\mathbf{y})=1/2(\eta^2+1)$, $g(\mathbf{y},\mathbf{y})=0$, tehát

$$0 = 1+c(\eta^2+1)+k^*[2+c(1+\eta^2)]^2 =$$
$$= 1+c(\eta^2+1)+k^*[4+4c(1+\eta^2)+c^2(1+\eta^2)^2] =$$
$$= 1+4k^*+(1+4k^*)c(1+\eta^2)+k^*c^2(1+\eta^2)^2.$$

$k^*=-\dfrac{k}{4(k+1)}$-et figyelembe véve, amiből $1+4k^*=\dfrac{1}{k+1}$, egyenletünk:

$$0=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}c(1+\eta^2)-\frac{k}{4(k+1)}c^2(1+\eta^2)^2,$$

$k+1\neq 0$, tehát

(9.1) $$0 = 4+4c(1+\eta^2)-kc^2(1+\eta^2)^2$$

adódik. Az $\mathbf{x}(1+c;1+c\eta^2;c\eta)$ és az $(1;\lambda^2;\lambda)$ pontok g-re vonatkozó konjugáltságát felhasználva (ahol $\lambda=\lambda_1$ vagy λ_2):

(9.2) $$1/2(1+c)\lambda^2+1/2(1+c\eta^2)-c\eta\lambda = 0.$$

A (9.1) és (9.2) egyenletrendszerből η és λ kapcsolata kifejezhető. A (9.1)-ből

$c=\dfrac{2+\sqrt{k+1}}{k(1+\eta^2)}$ választással

$$\frac{2+\sqrt{k+1}}{k}=-\frac{(1+\lambda^2)(1+\eta^2)}{(\lambda-\eta)^2}.$$

Itt is leolvasható, hogy k eleget tesz a $-1\leqq k<0$ feltételnek.

2. A szerkesztőgörbe paraciklus

Legyen $\mathbf{a}(0;1;0)$, $\mathbf{y}(1;\eta^2;\eta)$, ekkor $\mathbf{x}(c;1+c\eta^2;c\eta)$. A c meghatározható a $-pc^2+4c(1+c\eta^2)-4c^2\eta^2=0$ egyenletből. $c\neq 0$, így $c=4/p$. Az $\mathbf{x}$ és az $(1;\lambda^2;\lambda)$ pontok konjugáltak a g-re nézve, ebből $1/2c\lambda^2+1/2(1+c\eta^2)-c\eta\lambda=0$, átalakítva

$$c(\lambda-\eta)^2+1=0,$$

a $c=4/p$ értéket helyettesítve: $(\lambda-\eta)^2=-p/4$, s ebből is kiolvasható a $p<0$ feltétel.

3. A szerkesztőgörbe hiperciklus

Legyen $\mathbf{a}(0;0;1)$, $\mathbf{y}(1;\eta^2;\eta)$, ekkor $\mathbf{x}(c;c\eta^2;1+c\eta)$. A c meghatározására a $4(h-1)c^2\eta^2+4(1+c\eta)^2=0$, azaz a

$$hc^2\eta^2+2c\eta+1=0 \tag{9.3}$$

egyenletet kaptuk. Az $\mathbf{x}$ és az $(1;\lambda^2;\lambda)$ pontok $\mathcal{G}$-re vonatkozó konjugáltságából $1/2c\lambda^2+1/2c\eta^2-\lambda(1+c\eta)=0$, azaz

$$c(\lambda-\eta)^2-2\lambda=0. \tag{9.4}$$

(9.3)-ból $c=\dfrac{-1-\sqrt{1-h}}{h}$-t választva, a (9.4)-ből kapott $c=\dfrac{2\lambda}{(\lambda-\eta)^2}$-nel egybevetve:

$$\frac{-1-\sqrt{1-h}}{h}=\frac{2\lambda\eta}{(\lambda-\eta)^2}$$

összefüggés adódik h, λ és η között.

II. Strommer Gyula [14]-ben kimutatta, hogy bármely olyan geometriában, amelyben érvényes a (Hilbert-féle) I. 1-3, II., III. axiómákon kívül a köraxióma is, és a középpontjával együtt kirajzolt körön kívül ismeretes a kör középpontjától nem egyenlő távolságra levő két adott pont által határolt szakasz felezőpontja, vagy két egymásra merőleges egyenes, melyek közül egyik sem megy át a kör középpontján, akkor bármely körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztés pusztán vonalzóval is elvégezhető. Hasonló feltételek megadása esetünkben is egyenértékű k, p, h rögzítésével a szerkesztőgörbén. Konkrétan, az előzőekben követett sorrendben haladva:

a) Legyen adott két, egymásra merőleges egyenes u és v. $\mathsf{u}\perp\mathsf{v}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $F(\mathsf{u},\mathsf{v})=0$.

1. A szerkesztőgörbe kör

$$F(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = ku_0v_0+(k+2)u_0v_1+(k+2)u_1v_0+ku_1v_1-u_2v_2 = 0,$$

amiből

$$k = -\frac{2u_0v_1+2u_1v_0-u_2v_2}{(u_0+u_1)(v_0+v_1)}, \quad (u_0+u_1)(v_0+v_1) \neq 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy sem az u, sem a v nem illeszkedhet az $\mathbf{a}(1; 1; 0)$ középpontra.

2. A szerkesztőgörbe paraciklus

$F(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \equiv 2u_0v_1+2u_1v_0+pu_1v_1-u_2v_2=0$, ebből

$$p = \frac{2u_0v_1+2u_1v_0-u_2v_2}{u_1v_1}, \quad u_1v_1 \neq 0,$$

vagyis p meghatározott, ha u és v egyike sem illeszkedik az $\mathbf{a}(0; 1; 0)$ középpontra.

3. A szerkesztőgörbe hiperciklus

$F(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \equiv 2u_0v_1+2u_1v_0+(h-1)u_2v_2=0$, ebből

$$h = -\frac{2u_0v_1+2u_1v_0-u_2v_2}{u_2v_2}, \quad u_2v_2 \neq 0,$$

azaz u, v egyike sem illeszkedik az $\mathbf{a}(0; 0; 1)$ középpontra.

b) Vizsgáljuk meg a másik feltételt is: adva van egy szakasz a felezőpontjával. Látni fogjuk, hogy k, p, h értéke ekkor is meghatározható. Legyen a szakasz megadva az $\mathbf{x}(x^0; x^1; x^2)$ és a $\mathbf{z}(z^0; z^1; z^2)$, felezőpontja pedig az $\mathbf{y}(y^0; y^1; y^2)$ vektorokkal. Ekkor $\mathbf{z} \sim \mathbf{x} - \frac{2f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\mathbf{y}$, x-et és y-t választhatjuk úgy, hogy $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ legyen. Valóban

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = f\left(\mathbf{x} - \frac{2f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{2f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\mathbf{y}\right) =$$

$$= f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{4f(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{f(\mathbf{y}, \mathbf{y})} + \frac{4f(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 f(\mathbf{y}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y}, \mathbf{y})^2} = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Most $\mathbf{y} \sim \mathbf{x} - \mathbf{z}$ és $\mathbf{y} \sim \mathbf{x} + \mathbf{z}$ egyike a felezőpont, a másik a felezőmerőleges pólusa lesz.

Mindhárom esetben megválaszthattuk az $\mathbf{x}_0$-at úgy, hogy $f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = 1$ teljesült, ezért az $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) := k^*, p^*, h^*$ paraméterre:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0),$$

illetve

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = g(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{a}, \mathbf{z})^2 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0).$$

A bal oldalak egyenlősége miatt ebből

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{z}, \mathbf{z}) - g(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 - f(\mathbf{a}, \mathbf{z})^2}$$

adódik, azaz a k^*, p^*, h^* paraméterek kifejezhetők, szerkeszthetők. Az $f(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 - f(\mathbf{a}, \mathbf{z})^2 \neq 0$ feltétel éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{z}$ nem lehet egyforma távolságra az $\mathbf{a}$ középponttól.

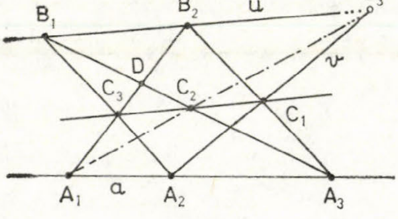
10. Vonalzós szerkesztések ideális elemekkel

Eddigi vonalzós szerkesztéseinkben a beágyazó projektív síkban érvényes illeszkedési axiómákat vettük figyelembe. Ha a Cayley—Klein modellen követjük a hiperbolikus síkra vonatkozó eljárásunkat, akkor szerkesztéseinknél csak az abszolút kvádrik belső pontjait és az ezeket összekötő egyeneseket, vagyis a „valódi" pontokat és egyeneseket szabad használnunk, a nem valódi, azaz ideális elemeket közvetett módon kell szerkesztenünk.

Ezt biztosítja a következő három segédszerkesztés, melyeket a [16]-ban tárgyalt korlátos szerkesztések analógiájára a beágyazó projektív síkra vonatkozó Papposz—Pascal-tétel, valamint az abszolút síkra vonatkozó rendezési axiómák felhasználásával igazolunk.

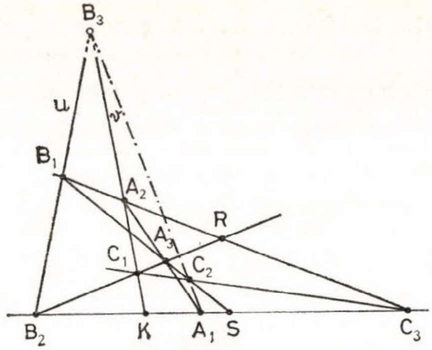
1. Segédszerkesztés

Az u és v valódi egyenesek nem valódi B_3 metszéspontjának és a tetszőlegesen felvett valódi A_1 pont összekötő valódi egyenesének megszerkesztése.



10.1 ábra

a) A 10.1 ábra mutatja azt az esetet, amikor A_1 az u és v között van. A v egyenesre illeszkedő valódi A_2 pont felvétele után az A_1A_2 szakasz meghosszabbításán felvesszük az A_3 valódi pontot. Az u egyenes valódi B_1 és B_2 pontjait úgy vegyük fel, hogy az A_1B_2 egyenes válassza el az A_3 és B_1 pontokat. Ekkor léteznek a $C_1 := B_2A_3 \cap \mathrm{v}$ és $D := B_1A_3 \cap A_1B_2$ valódi pontok. Az $A_2A_3B_1$ háromszögre alkalmazva a Pasch-axiómát, kapjuk, hogy $C_3 := A_1B_2 \cap B_1A_2$ a B_1A_2 szakasz valódi belső pontja. A B_1A_3 egyenes a fentiek szerint elválasztja a C_1 és C_3 pontokat, ezért $C_2 := C_1C_3 \cap B_1A_3$ valódi pont. Az A_1C_2 egyenes a Papposz—Pascal-tétel értelmében „áthalad" a B_3 ideális ponton.



10.2 ábra

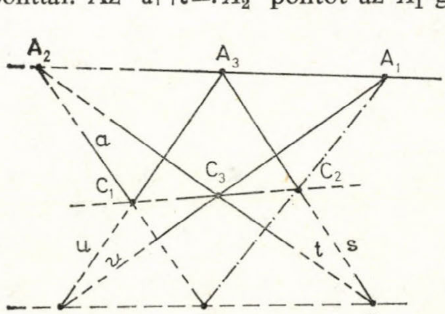
b) A 10.2 ábra mutatja azt az esetet, amikor a v egyenes elválasztja az u egyenest és az A_1 pontot.

Legyen $B_1, B_2 \mathrm{I}\, \mathsf{u}$. B_2A_1 meghosszabbításán vegyük fel a C_3 valódi pontot. $A_2 := B_1C_3 \cap \mathsf{v}$ és $K := B_2C_3 \cap \mathsf{v}$ valódi pontok léteznek. Az A_1A_2 szakasz belső A_3 pontját v elválasztja az u egyenestől. Az A_1A_2K háromszögre alkalmazva a Pasch-axiómát, adódik, hogy a $C_1 := B_2A_3 \cap \mathsf{v}$ valódi pont az A_2K szakasz belső pontja. Az $A_1C_3A_2$ háromszögre alkalmazott Pasch-axiómából következik, hogy $S := B_1A_3 \cap B_2C_3$ az A_1C_3 szakasz belső pontja. Most már $C_2 := B_1A_3 \cap C_1C_3$ is valódi pont. Az A_1C_2 egyenes a Papposz—Pascal-tétel szerint áthalad a B_3 ideális ponton.

2. *Segédszerkesztés*

A valódi a egyenes és az ideális B_1B_2 egyenes B_3 metszéspontjának a valódi A_1 ponttal való összekötése.

A 10.3 ábrán a B_2 és B_1 pontokat valódi egyenesek metszéspontjaiként tűzhetjük ki (az egyenesek nincsenek feltüntetve). Az 1. segédszerkesztés alapján az $A_1B_2 =: \mathsf{v}$ egyenes szerkeszthető. A v-nek egy valódi pontja legyen C_3, és kösse ezt össze a t egyenes a B_1 ideális ponttal. Az $\mathsf{a} \cap \mathsf{t} =: A_2$ pontot az A_1-gyel összekötő egyenes

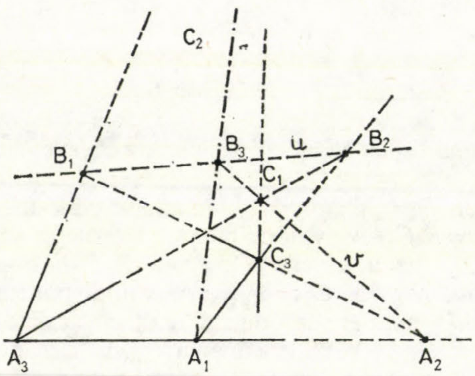


10.3 ábra

szerkeszthető (ha A_2 nem valódi, akkor alkalmazzuk az 1. segédszerkesztést), és tekintsük ezen egyenes valódi A_3 pontját. $A_3B_2=:$u és $A_3B_1=:$s egyenesek az 1. segédszerkesztéssel nyerhetők. Az u$\cap$a$=:C_1$ pontot C_3-mal összeköthetjük, és a $C_1C_3\cap$s$=:C_2$ pontot az A_1 valódi ponttal összekötő egyenes a Papposz—Pascal-tétel értelmében áthalad a B_3 ponton.

3. Segédszerkesztés

Az u és v ideális egyenesek B_3 (ideális) metszéspontjának és egy valódi A_1 pont összekötő egyenesének szerkesztése.



10.4 ábra

A 10.4 ábrán az u és v ideális egyeneseket a két-két pontjukat kitűző 4 valódi egyenessel adtuk meg (de ezeket nem tüntettük fel). Tekintsük a valódi A_3 és C_3 pontokat. A 2. segédszerkesztés segítségével $A_1A_3\cap$v$=:A_2$ összeköthető C_3-mal. Ugyanígy A_3-at összekötjük az u$\cap A_1C_3=:B_2$ ponttal, a C_3 pontot pedig a v$\cap A_3B_2=:C_1$ ponttal. Ezután az 1. segédszerkesztés szerint adódik az A_1C_2 egyenes, ahol $C_2:=C_1C_3\cap A_3B_1$. A Papposz—Pascal-tétel szerint A_1C_2 áthalad a B_3 ideális ponton.

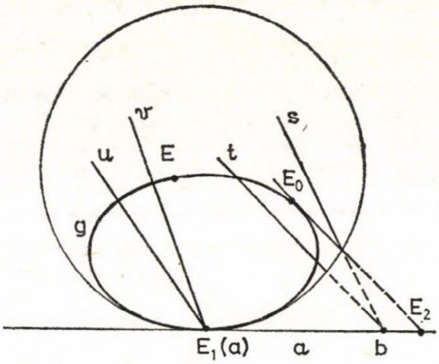
Segédszerkesztéseink biztosítják, hogy minden szerkesztés, ahol ideális elemeket is használunk, elvégezhető csupán valódi pontok és egyenesek felhasználásával. Az ideális elemek felvétele azonban tárgyalásunkat egységesebbé, rövidebbé tette.

Most röviden visszatérünk arra, mit jelent a szerkesztőciklus megadása.

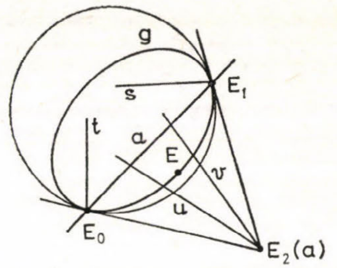
Ha a szerkesztő ciklus kör, akkor ezt a középpontjával együtt tekintjük adottnak.

Ha a szerkesztő ciklus paraciklus, akkor az E_1(a) ideális középpont megadása az u, v egyenesekkel egyben az itteni a ideális érintő megadását is jelentse (például a **b** ideális ponttal, amit a t, s egyenespár rögzít). További két pont: E, E_0 és E_0-ban az érintő megrajzolása már rögzíti a paraciklushoz (10.5 ábra) a projektív koordinátarendszert.

Hiperciklus szerkesztőgörbe esetén, a 10.6 ábrának megfelelően megadjuk az E_0, E_1, E_2 pontokat az a, t, s, u és v egyenesek segítségével. Ezáltal adottak az E_0 és az E_1 pontban húzott érintők is. Rögzítenünk kell még a hiperciklus tetszőleges E pontját.



10.5 ábra

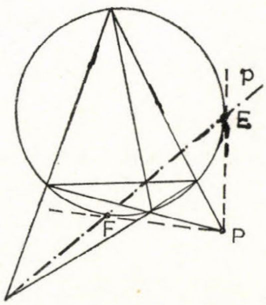


10.6 ábra

Ezután a pontműveletek a szerkesztőciklusokon a három segédszerkesztés segítségével elvégezhetők.

Megemlítjük, hogy a pozitív elemek négyzetgyökének megszerkesztése kivételével, a szerkesztőciklusból 5 (pont, pont és pontbeli érintő) adat is elegendő, hiszen a Pascal-tétel közvetítésével is elvégezhetők a pontműveletek [3, 7, 13].

Utalunk arra, hogy a négyzetgyök szerkesztéséhez külső P pontból kell érintőt húzni a szerkesztő ciklushoz. Ez pedig igényli, hogy a külső pont p polárisának a ciklussal való E és F metszéspontjait ki tudjuk jelölni a 10.7 ábra szerint.



10.7 ábra

Megjegyezzük még, hogy szerkesztéseink a K koordinátatestre vonatkozó enyhébb feltételek mellett is érvényesek, ehhez a megfelelő egyenletek megoldhatóságát kell megvizsgálnunk. A kérdéskört még nem tekinthetjük lezártnak, hiszen a klasszikustól különböző metrikus síkok modelljeit még nem ismerjük kielégítően [2]. Ez az analitikus tárgyalás talán rámutatott a geometriai eredetű témakör algebrai vonatkozásaira is, ami szerkesztéselméleti kérdéseknél persze már egyáltalán nem meglepő [16]. Az elliptikus sík esetét itt egyáltalán nem említettük, pedig a hiperbolikus síkra vonatkozó tárgyalásunk értelemszerűen, jóval egyszerűbben, az elliptikus síkra is átvihető.

IRODALOM

[1] Bolyai János: *Appendix. A tér tudománya.* Szerkesztette, bevezetésekkel ellátta Kárteszi Ferenc. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
[2] F. Bachmann: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Springer, Berlin, 1959, 1973.
[3] F. Buekenhout: Plans projectifs à ovoides Pascaliens, *Arch. Math.* **17** (1966), 89—93.
[4] Csorba Ferenc: *Steiner-féle szerkesztések az abszolút síkon (egységes projektív geometriai tárgyalásban).* Egyetemi doktori értekezés, ELTE, 1983.
[5] Hajós György: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[6] Kárteszi Ferenc: *A modern geometria tanítási kérdései a középiskolában.* Fővárosi Pedagógiai Intézet, Budapest, 1981.
[7] Kárteszi Ferenc: *Bevezetés a véges geometriákba.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
[8] Kerékjártó Béla: *A geometria alapjairól. 2. kötet. Projektív geometria.* Magyar Tudományos Akadémia kiad., Budapest, 1944.
[9] Molnár Emil: *A tükrözés fogalom abszolút geometriai alkalmazásai.* Kandidátusi értekezés, Budapest, 1976.
[10] Molnár Emil: Kegelschnitte auf der metrischen Ebene, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **31** (3—4), (1978), 317—343.
[11] Molnár Emil: Kreisgeometrie und konforme Interpretation des mehrdimensionalen metrischen Raumes, *Periodica Mathematica Hungarica* **10** (4), (1979), 237—259.
[12] Radó Ferenc—Orbán Béla: *A geometria mai szemmel.* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár — Napoca, 1981.
[13] J. F. Rygby: Pascal ovals in projective planes, *Canad. J. Math.* **21** (1969), 1462—1476.
[14] Strommer Gyula: *A párhuzamosok axiómájától független geometriai szerkesztések elméletéhez.* Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 1974.
[15] Strommer Gyula: Zu den Steinerschen Konstruktionen. *Periodica Polytechnica* **21** (2), (1977), 83—102.
[16] Szőkefalvi Nagy Gyula: *A geometriai szerkesztések elmélete.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

(Beérkezett: 1986. január 7-én)

ПОСТРОЕНИЯ ШТЕЙНЕРА В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Ф. ЧОРБА и Э. МОЛНАР

STEINER CONSTRUCTIONS ON THE PROJECTIVE-METRIC PLANE

F. CSORBA and E. MOLNÁR

It is a well-known theorem of Poncelet and Steiner that all the Euclidean constructions, by means of ruler and compasses, can be carried out in the Euclidean plane by a ruler if we are given a circle with the centre.

J. Strommer [15] extended this theorem to the Bolyai—Lobachevskian hyperbolic plane. In the paper we generalize the theorem by using a point calculus on the given cycle (circle, horocycle, hypercycle) in the embedding projective-metric plane. We proved the following

Theorem. *All generalized Euclidean constructions, i.e. by a ruler and cycle compasses, can be carried out by one ruler if we are given a cycle with additional data (detailed in the paper) characterizing the centre of the cycle and the metric (curvature) constant of the hyperbolic plane.*

The method is motivated by the classical introduction of a projective coordinate on a conic, or, by the *Hilbert's end calculus,* which is the same.

VÉLETLENSZÁM-GENERÁLÁS SZEMÉLYI SZÁMÍTÓGÉPEKEN

BALÁZS ISTVÁN

Bevezetés

A gyakorlati élet számos olyan feladatot vet fel, amelyek az explicit számolásnál gyorsabban oldhatók meg szimulálással, véletlen megfigyelések alkalmazásával. Sok esetben egyedül ilyen eljárások vezetnek célra. Összefoglaló nevük: Monte Carlo-módszerek. Ilyen feladatokat sorakoztat fel pl. Srejgyer [6] könyve.

A Monte Carlo-módszerek közös jellemzője, hogy alkalmazásukhoz nagyszámú, azonos eloszlású, független valószínűségi változóra van szükség. Ezért régi igény, hogy ilyen valószínűségi változó sorozatot gyorsan és egyszerűen tudjunk előállítani. Mivel a [0, 1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó alkalmas transzformációja segítségével tetszőleges eloszlású valószínűségi változó előállítható, így a vizsgálatokat ezekre lehet korlátozni. Jelen dolgozatban a véletlenszám sorozat kifejezést ebben az értelemben fogjuk használni: független, a [0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata.

A számítógépes gyakorlat a véletlenszámokkal kapcsolatban azonnal egy kompromisszumhoz kényszerít bennünket: valós számok csak korlátozott pontossággal ábrázolhatók a gépen. Ezért valószínűségi változóink sem az egész [0, 1)-en, hanem annak egy rácsozatán veszik fel értékeiket. A gyors és egyszerű előállítás igénye egy további kompromisszumhoz vezetett. Az alkalmazók lemondtak arról, hogy valódi véletlen, egymástól független számokat állítsanak elő. A feladatok többségében helyes eredményhez lehet jutni akkor is, ha pusztán olyan sorozatokat alkalmaznak, melyek sok szempontból úgy viselkednek, mintha véletlenszámok lennének. Ilyen sorozatokat determinisztikusan lehet generálni, megfelelő algoritmusok segítségével, néhány paraméter megválasztása után. Ezeket a determinisztikus sorozatokat pszeudo-véletlen vagy álvéletlen számsorozatoknak hívják.

A legtöbb számítógép rendelkezik egy úgynevezett pszeudo-véletlen számgenerátorral. Ez egy determinisztikus algoritmus segítségével (általában a [0, 1) intervallumon) egyenletes eloszlású, független valószínűségi változókból származó minta statisztikai tulajdonságait több-kevesebb sikerrel megközelítő pszeudo-véletlen számsorozatot állít elő. A felhasználás során tekintettel kell lenni arra, hogy ez a közelítés mennyire jó, azaz a felhasznált pszeudo-véletlen sorozat előállításakor mennyire sikerült az azonos, egyenletes eloszlású, független valószínűségi változókból vett minta tulajdonságait megközelíteni.

A mesterségesen előállított számok véletlenszerűségének vizsgálatára statisztikai próbák egy rendszerét először M. G. Kendall és B. Babington-Smith alkalmazta [2]-ben. Különböző próbákból összeállított, javasolt próbarendszer található [1]-ben és [3]-ban is. Egy konkrét véletlenszerűségi vizsgálatnál aszerint célszerű összeállítani az egyes próbákat, kijelölni a kritikus tartományokat, hogy mire és mennyit kívánunk felhasználni a pszeudo-véletlen számokból. (A véletlenszerűségtől való milyen típusú eltérés okozhat a felhasználás során hibákat, veszteségeket.) Kétféle próbát különböztethetünk meg: empirikus próbákat, melyek a vizsgált konkrét sorozat statisztikai jellegzetességeit vizsgálják és értékelik; elméleti próbákat, melyeknél a generálást meghatározó rekurzív összefüggés ismeretében elméleti (elsősorban számelméleti) módszerekkel állapítják meg a sorozat jellegzetességeit.

Ebben a dolgozatban fejezetenként vizsgáljuk a hazánkban legelterjedtebb személyi számítógépek véletlenszám-generátorainak három típusát. Ennek során a leghatékonyabbnak tartott empirikus próbák közül ismertetünk és alkalmazunk néhányat.

A következő kérdésekre keresünk választ:

a) A pszeudo-véletlen szám generálása milyen algoritmussal történik? (A legtöbb kézikönyv, szoftver leírás nem tartalmazza a generálás konkrét módját.)

b) Az egyes algoritmusokból milyen hosszú periódusokat határoznak meg a különböző kezdeti értékek?

c) Megbízhatóan véletlenszerű sorozatokat generálnak-e az egyes eljárások? (A véletlenszerűséget ellenőrző statisztikai vizsgálatokat végeztünk az így generált sorozatokra. Ezek eredményeiből írunk le néhányat táblázatos formában.)

d) Mik az egyes véletlenszám-generátorok gyenge pontjai? (A generáló algoritmusok ismeretében olyan statisztikai próbákat konstruáltunk, melyek érzékenyek a generált sorozatban meglevő összefüggésekre, egyenetlenségekre. A felhasználóknak egy adott feladat megoldásakor ügyelniük kell arra is, vajon a konkrét szimulációs eljárás érzékeny-e az adott gyengeségekre.)

1. ZX spectrum, ZX 81

Jelöljük VG_{ZX}-szel a ZX spectrum véletlenszám-generátorát. Ez az RND utasítás segítségével hívható, és egy 0 és 1 közötti 2 byte-os pontosságú álvéletlenszámot generál. A generálás szabálya:

(1) $$s_i \equiv 75 \cdot s_{i-1} \pmod{2^{16}+1} \quad (1 \leqq s_{i-1},\ s_i \leqq 2^{16}),$$

ahol s_{i-1} az előző lépésben, s_i pedig az újonnan generált sorozattag. ($i=1, 2, 3, \ldots$). A felhasználásra kínált i-edik véletlen szám:

(2) $$v_i = (s_i - 1)/2^{16}.$$

A VG_{ZX} kezdeti feltöltésére kétféle mód van:

— a RANDOMIZE(d) (d pozitív egész) utasítás hatására v_0-nak a $d/2^{16}$ értéket tekintve képződik a véletlenszám sorozat első eleme.

— a RANDOMIZE(0) vagy RANDOMIZE utasítás hatására v_0 értékét a ZX-spectrum beépített időszámláló regisztereinek aktuális értéke határozza meg. Az első esetben egy reprodukálható, a második esetben egy véletlenített indítását adtuk meg VG_{ZX}-nek.

(1)-ből látható, hogy a VG_{ZX} a közvetlenül megelőzően generált számból egyszerű algebrai művelettel képezi a következő számot. Az (1) és (2) képletekkel megvalósított generálás klasszikus módja a véletlenszám generálásnak. Ez az általánosabb $s_i \equiv \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot s_{i-j} \pmod{q}$ képlettel definiálható k-adrendű lineáris rekurzió legegyszerűbb esete.

Első állításunk a VG_{ZX} által generált sorozatok periódusára vonatkozik:

1. Állítás

A VG_{ZX} által generált $\{s_i\}$ $i=0, 1, 2, \ldots$ sorozat tetszőleges $1 \leqq s_0 \leqq 2^{16}$ induló-állapot mellett egy $2^{16} = 65\,536$ hosszú periódusú sorozat lesz. Ebben a sorozatban valamennyi $1 \leqq s \leqq 2^{16}$ elem pontosan egyszer fordul elő.

Bizonyítás

$p = 2^{16} + 1 = 65\,537$ prím szám, így a p modulus szerinti maradékosztályok (a modulo p-vel vett összeadásra és szorzásra nézve) testet, a 0-t nem tartalmazó maradékosztályok pedig (a modulo p-vel vett szorzásra nézve) csoportot alkotnak. Ebben a testben a 75 primitív gyök, amiről hatványozással könnyen meggyőződhetünk:

$$(75)^{2^{15}} \equiv 65\,536 \equiv -1 \pmod p$$

$$(75)^{2^{16}} \equiv 1 \pmod p$$

(1)-et átírva a vele ekvivalens:

$$s_i \equiv s_0 \cdot (75)^i \pmod p \tag{3}$$

alakra, az állítás most már közvetlenül adódik a primitív gyök definíciójából, és a csoportokban érvényes egyszerűsítési szabályokból. □

Könnyen meggondolható, hogy a kapott periódusérték egyben a 2 byte-os regiszterekkel elsőrendű lineáris rekurzióval elérhető maximális periódushossz is.

Most rátérünk a VG_{ZX} által generált sorozatok véletlenszerűségének statisztikai vizsgálatára. Az alább ismertetett 5 statisztikai próba azonos elvre épül (részletes leírásukat lásd pl. [3]-ban):

— A VG_{ZX} által generált $v_1, v_2, \ldots, v_N$ sorozat helyett, annak egy kis jelkészletű $w_1, w_2, \ldots, w_N$ sorozattá transzformált változatát vizsgálja. (A jelkészlet számosságát a továbbiakban JEL-lel jelöljük.)

$$\left(w_j = [v_j \cdot \mathrm{JEL}]; \;\; \text{így} \;\; w_j \in \{0, 1, \ldots, (\mathrm{JEL}-1)\} \;\; j = 1, 2, \ldots\right)$$

[.]-vel jelöltük az egész-rész képzést.

— A vizsgált $w_1, w_2, \ldots$ sorozatot rögzített, K hosszú blokkokra osztjuk fel. A blokkokat valamilyen (az adott próbára jellemző) tulajdonságuk alapján különböző osztályokba soroljuk.

— Meghatározzuk az i-edik osztályba kerülés valószínűségét (P_i) és az ide kerülő számok várható értékét (E_i) azon feltétel mellett, hogy a $w_1, w_2, \ldots$ sorozat egy a $0, 1, \ldots, \mathrm{JEL}-1$ értékeken egyenletes eloszlású valószínűségi változóból származó független minta. (Ezt a feltételt tekintjük a H_0 nullhipotézisnek.)

— Az elméleti úton meghatározott értékek és a tapasztalt gyakoriság értékek illeszkedésvizsgálattal való egybevetésével kiértékeljük, hogy az adott statisztikai próba, adott megbízhatósági szinten elfogadja vagy elveti-e a sorozat véletlenszerűségének hipotézisét.

A következő gyakran használható próbákat végeztük el:

Gyakoriságpróba K-s blokkokra

Ez a próba a számok (amikor $K=1$), az egymást követő számpárok (amikor $K=2$), illetve általában az egymást követő szám K-asok egyenletességét vizsgálja. Összesen JEL^K féle különböző osztály van, mindegyikbe kerülés egyformán valószínű.

$$p_i = 1/\mathrm{JEL}^K$$

$$E_i = m/\mathrm{JEL}^K \quad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{JEL}^K), \quad m \text{ a blokkok száma.}$$

Permutáció-próba

Egy $x_1, x_2, \ldots, x_K$ blokk elemeinek rendezett mintává való alakítása K elem egy permutációját adja. Különböző x_i értékek mellett ez a permutáció egyértelmű. Az azonos permutációt meghatározó nagyságrendi viszonyokat tartalmazó blokkokat soroljuk egy osztályba. Külön osztályt képeznek a megegyező értékeket is tartalmazó blokkok. Az egyes osztályba kerülés valószínűsége:

$$P_0 = P(\exists i \neq j:\ x_i = x_j) = 1 - \left(\frac{1}{\mathrm{JEL}}\right)^K \cdot \binom{\mathrm{JEL}}{K} \sum_{j=0}^{K-1} (-1)^j \binom{K}{j} (K-j)^K$$

$$P_1 = P(x_1 > x_2 > \ldots > x_K) = \ldots = P_{K!} = P(x_1 < x_2 < \ldots < x_K) = \frac{1-P_0}{K!}.$$

K-tagú, mod-JEL összegek vizsgálata

A modulo JEL-lel vett K-tagú összegzés eredménye az osztályba sorolás alapja.

$$P_0 = P_1 = \ldots = P_{\mathrm{JEL}-1} = 1/\mathrm{JEL}.$$

„K-ból a legnagyobb (legkisebb)”-próba

Az egy blokkon belül előforduló legnagyobb (legkisebb) érték szerint sorolunk osztályokba.

$$P_i = P(x_{\max} = i) = \left(\frac{i+1}{\mathrm{JEL}}\right)^K - \left(\frac{i}{\mathrm{JEL}}\right)^K, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{JEL}-1;$$

$$P_i' = P(x_{\min} = i) = \left(\frac{\mathrm{JEL}-i}{\mathrm{JEL}}\right)^K - \left(\frac{\mathrm{JEL}-1-i}{\mathrm{JEL}}\right)^K, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{JEL}-1.$$

Valamennyi fenti próbát a teljes periódushosszra is, és 32 egyenlő 2048 részre osztás mellett külön-külön az egyes részsorozatokra is elvégeztük ($s_0 = 75$-tel indítva). Az eredmények az 1—4. táblázatokban szerepelnek.

Az eredmények kiértékelését a véletlenszerűség fennállása esetén adódó várható értékek és a tapasztalt gyakoriságértékek illeszkedésvizsgálatával, a χ^2 próbával végeztük.

1. táblázat

Gyakoriságpróba $K=2$ blokkméretre (és $K=1$-re) a VG_{ZX} által generált 2048 és 65536 hosszú 6-os jelkészletű sorozatra

	1	2	3	4	5	6	Σ	$(K=1)$
1	25	29	32	17	37	28	168	328
2	31	22	40	29	35	28	185	345
3	29	21	32	32	33	30	177	363
4	18	33	29	28	34	27	169	332
5	28	28	31	30	25	20	162	352
6	29	27	22	27	26	32	163	328
Σ	160	160	186	163	190	165	1024	2048

$\chi^2_{35}=30,9$ $\chi^2_5=3,0$

	1	2	3	4	5	6	Σ	$(K=1)$
1	956	893	962	899	971	849	5 530	10 923
2	922	863	951	911	909	871	5 427	10 923
3	923	892	907	865	969	871	5 427	10 922
4	872	968	865	907	892	923	5 427	10 923
5	871	909	911	951	863	922	5 427	10 923
6	849	971	899	963	892	956	5 530	10 922
Σ	5393	5496	5495	5496	5496	5392	32 768	65 536

$\chi^2_{35}=56,5$ $\chi^2_5=0,0$

Ahogyan a χ^2 próba alkalmazhatóságának „konyhareceptje" megköveteli, ahol az elméleti értékek 10 alá estek, ott összevontuk a szomszédos osztályokat. (A χ^2 próba illeszkedésvizsgálathoz való alkalmazhatóságáról lásd [4].)

Az eredmények azt mutatják, hogy 99%-os megbízhatósági szinten egyetlen fenti statisztikai próba sem mondott ellent a véletlenszerűség nullhipotézisének.

Az 1. táblázatban a $K=2$ blokkhossz mellett az első és második pozícióban tapasztalt összgyakoriság értékeket egymással is egybevetettük.

A homogenitás vizsgálat eredménye alapján 99%-os megbízhatósági szinten azt is elfogadhatjuk, hogy a 2—2 különböző pozícióban vett minta azonos eloszlású sokaságból származik.

A 4. táblázat megszerkesztésénél kihasználtuk a minimális és maximális értékek eloszlásai között meglevő szimmetriát:

$$P(x_{\max}=i)=P(x_{\min}=\mathrm{JEL}-1-i).$$

A VG_{ZX} által generált sorozat több, véletlenszerűséget ellenőrző statisztikai próbát kiállt tehát. Mégsem tekinthetjük véletlenszerűnek, főleg a függetlenség szempontjából nem viselkedik elég jól. Ezt egy olyan próbán mutatjuk meg, mely iskolai demonstráció esetén alapos buktató lehetne:

A jól ismert „torpedó" játék számítógépes szimulálásával szeretnénk egymással, ill. a géppel versenyezni, ezen keresztül bizonyos események valószínűségét relatív gyakoriságuk segítségével közelíteni, meghatározni.

Vegyünk fel egy koordinátarendszert, jelöljünk ki ebben egy $n\times m$-es mezőt. Rögzítsen minden játékos ebben a mezőben előre K db egész koordinátájú x_i, y_i

2. táblázat

A permutáció vizsgálat eredménye a VG_{ZX} által generált 6-os jelkészletű, 2048 és 32-szer 2048 hosszú sorozatra

Osztályozási szám (i)	Tapasztalt gyakoriságértékek $K=2$		$K=3$		$K=4$	
0	164	5 452	299	9 876	365	11 870
1	443	13 521	68	2 075	5	189
2	417	13 795	60	1 929	12	192
3			70	2 020	5	187
4			62	2 028	3	175
5			56	1 926	7	193
6			67	1 970	9	204
7					5	168
8					7	198
9					9	198
10					0	192
11					5	168
12					3	206
13					8	202
14					4	183
15					3	186
16					6	183
17					9	193
18					2	189
19					12	191
20					6	186
21					10	197
22					7	172
23					6	186
24					4	176
Összesen:	1024	32 768	682	21 824	512	16 384
elméleti érték:						
$p_0=$	170,6	5461,4	303,1	9 699,7	369,8	11 832,8
$p_1=\ldots=p_{K!}=$	426,7	13 653,3	63,15	2 020,7	5,93	189,63
	χ_2^2:1,1	2,8	χ_6^2:2,4	14,6	χ_{24}^2:13,4	14,0
	$P(\chi_2^2<9{,}2)=0{,}99$		$P(\chi_6^2<16{,}8)=0{,}99$		$P(\chi_{24}^2<43{,}0)=0{,}99$	

pontot. (Ezek jelzik az egységnyi területű hajókat, vagy a szomszédos pontokat is lefedő nagyobb területű hajókat.) Ezután generáljunk a számítógép véletlenszám generátora segítségével a mezőbe eső véletlen torpedólövéseket: (x_j^*, y_j^*): $1 \leqq x_i$, $x_j^* \leqq n$, $1 \leqq y_i$, $y_j^* \leqq m$, $i=1, \ldots, K$, $j=1, \ldots, N$. A játék során vizsgálhatjuk:

— Hányadik lépésben sikerül a gépnek az 1., 2., ..., K. hajót kilőni egy rögzített állásban?

— Kinek sikerült úgy elhelyezni a hajóit, hogy az túlélje a többiekét?

— Előre megadott lövésszám után a számítógép hány találatot ér el?

Példaképp ez utóbbi feladatot szimuláljuk a következő algoritmussal:

[S1]: Inicializálás $N \leftarrow$ a kísérletek tervezett száma,

$N1 \leftarrow \emptyset$ (ciklus változó),

$(n, m) \leftarrow$ a pálya mérete,

$(x_i, y_i) \leftarrow$ a hajók koordinátái ($i=1, 2, \ldots, K$),

$T \leftarrow 0$ (a találatok száma).

3. táblázat

K-tagú, modulo 16-tal vett összegek vizsgálata $K=2, 3, 4, 5$ blokkméretre, a VG_{ZX} által generált 2048 és 65 536 hosszú 16-os jelkészletű sorozatra

Összeg értéke (mod 16)	Tapasztalt gyakoriságértékek $K=2$		$K=3$		$K=4$		$K=5$	
0	75	2099	43	1359	23	1013	21	795
1	74	2064	40	1346	35	1007	29	829
2	59	1989	37	1389	27	1038	27	819
3	64	2048	42	1365	42	1032	33	855
4	49	2005	29	1344	37	987	28	810
5	69	2033	31	1337	34	1041	20	822
6	64	2048	43	1343	30	1023	26	808
7	76	2063	57	1363	22	1012	26	829
8	57	2091	44	1314	17	1029	28	838
9	73	2048	44	1361	36	1045	31	782
10	58	2107	38	1388	30	1062	29	759
11	59	2032	51	1400	31	1030	21	859
12	58	1997	46	1348	34	1037	22	802
13	66	2057	43	1386	27	1039	18	853
14	58	2048	42	1419	44	1003	32	830
15	65	2039	52	1362	43	986	18	798
közös elméleti érték:	64	2048	42,5	1364	32	1024	25,5	818
$\chi^2_{15}=$	14,2	8,3	17,9	7,8	27,8	6,5	14,2	13,7

[S2]: Véletlen számok generálása

$$X^* = \mathrm{INT}(n \cdot \mathrm{RND}+1),$$
$$Y^* = \mathrm{INT}(m \cdot \mathrm{RND}+1),$$
$$N1 \leftarrow N1+1.$$

(Ha RND [0, 1)-ben egyenletes, akkor $n \cdot \mathrm{RND}+1$ az $[1, n+1)$-ben lesz egyenletes, így ennek egész-része valóban egyenlő valószínűséggel veheti fel az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyikét.)

[S3]: Kiértékelés

ha $X^*=X_i$ és $Y^*=Y_i$ valamely $1 \leqq i \leqq K$-ra, akkor: [S4], különben: [S2].

[S4]: Számlálás

ha $N1 \leqq N$, akkor $T \leftarrow T+1$ és [S2].

[S5]: Kimenő adat

T kiíratása.

Elvárás az adott esetben $T/N \approx K/n \cdot m$.

Ezzel szemben $n > 75$ esetén mindig rögzíthetők úgy pontok a fenti szimuláció előtt, hogy azokat a VG_{ZX} sohasem fogja generálni! Ez a véletlenszerűségnek igencsak ellentmondó tény azon alapul, hogy ha s_{i-1} egy P érték d sugarú környezetébe esik, akkor a VG_{ZX} képzési szabálya miatt s_i egy Q érték $75 \cdot d$ sugarú környezetébe fog esni, ahol $Q \equiv 75 \cdot d \pmod{2^{16}+1}$.

4. táblázat

Maximális és minimális érték vizsgálata $K=2, 3, 4$ blokkméretre, a VG_{ZX} által generált 65 536 és 2048 hosszú 16-os jelkészletű sorozatra

Max.	Min.	$K=2$			$K=3$			$K=4$		
értékek		T		E	T		E	T		E
0	15	123	123	128	5	5	5,3	0	0	0,2
1	14	398	389	384	39	39	37,3	7	4	3,8
2	13	649	642	640	90	102	101,2	16	15	16,3
3	12	921	877	896	209	216	197,1	42	47	43,7
4	11	1142	1159	1152	322	331	325,0	98	85	92,2
5	10	1445	1398	1408	479	475	484,9	167	179	167,8
6	9	1664	1702	1664	679	677	676,7	281	285	276,2
7	8	1922	1895	1920	914	884	900,5	421	419	423,8
8	7	2193	2165	2176	1166	1152	1156,2	635	630	616,2
9	6	2418	2441	2432	1457	1472	1443,9	845	901	850,8
10	5	2663	2659	2688	1796	1727	1763,6	1176	1128	1160,2
11	4	2955	2930	2944	2119	2092	2115,3	1525	1487	1523,8
12	3	3156	3210	3200	2427	2486	2498,9	1911	1944	1956,2
13	2	3439	3429	3456	2941	2870	2914,5	2480	2446	2463,8
14	1	3739	3761	3712	3380	3438	3362,0	3070	3082	3052,2
15	0	3941	3988	3968	3801	3858	3841,6	3710	3732	3727,8
Σ		32 768			21 824			16 384		
szabadságfok (n):		15	15		14	14		13	13	
$\chi_n^2=$		4,1	3,4		6,0	6,6		3,3	6,5	
0	15	3	5	4	0	0	0,2	0	0	0,0
1	14	10	8	12	1	2	1,2	0	0	0,1
2	13	22	27	20	2	8	3,2	0	1	0,5
3	12	28	35	28	8	12	6,2	2	2	1,4
4	11	32	35	36	14	11	10,2	1	3	2,9
5	10	42	46	44	11	19	15,1	6	7	5,2
6	9	60	55	52	27	21	21,2	15	10	8,6
7	8	54	63	60	22	25	28,1	10	20	13,2
8	7	60	64	68	29	31	36,1	22	19	19,3
9	6	79	74	76	54	53	45,1	24	28	26,9
10	5	69	87	84	47	52	55,1	33	38	36,3
11	4	102	74	92	72	61	66,1	51	44	47,6
12	3	103	95	100	78	71	78,1	58	55	61,1
13	2	116	109	108	95	83	91,1	77	64	77,0
14	1	139	114	116	122	107	105,0	113	98	95,4
15	0	105	133	124	100	126	120,0	100	123	116,5
Σ		1024			682			512		
szabadságfok (n):		14	14		12	12		9	9	
$\chi_n^2=$		16,1	10,1		16,7	17,8		7,6	8,1	

T: tapasztalt gyakoriságértékek
E: elméleti értékek

Az azonos X^* koordinátákat kijelölő pontokra $s_{i-1} \in \left[(X^*-1)\cdot\frac{2^{16}}{n}+1,\ X^*\cdot\frac{2^{16}}{n}+1\right)$ lehet csak, mely intervallum P_1 felezőpontjának $2^{16}/2n$ sugarú környezete. A közvetlenül ezután generált s_i érték így csak a $P_2 \equiv P_1 \pmod{2^{16}+1}$ pont $75\cdot 2^{16}/2n$

sugarú környezetébe eshet (a távolság számításánál figyelembe kell venni az esetleges moduló képzést is). $n>75$ esetén ez az intervallum a $(0,2^{16})$ intervallumnak csupán $75/n$-ed részét fedi le. Ezért az s_i-ből számított Y^* koordinátaérték az összes szóba jöhető m féle értékből csak $\left[m\cdot\frac{75}{n}\right]+1$ féle lehet.

Így $n=100$ esetén minden X^* érték után a lehetséges értékeknek csak kb. 75%-a ($n=1000$ esetén már csak mintegy 7,5%-a) kerülhet Y^*-ként, amennyiben a generálást a VG_{ZX}-szel végezzük. Hasonlóan hamis eredményeket kapnánk a feltett többi kérdésre is. Ugyanilyen meggondolással alkalmatlannak minősíthetjük a VG_{ZX}-et nagy intervallumon integrál közelítő meghatározására szolgáló Monte Carlo módszerekhez is (ha a véletlen (x_i, y_i) pontpárokat egymás után generáljuk).

A megmutatott rossz véletlenszerűségi tulajdonság könnyen javítható. X^* és Y^* generálása közé beiktatva néhány ($n<75^2$ esetén 1, általában $n<75^k$ esetén k—1 db) üres RND utasítást, a fenti egyenetlenség már nem mutatható ki.

Ez a példa világosan mutatja, hogy nem szabad minden feladathoz, mérlegelés nélkül felhasználni VG_{ZX}-et.

2. TRS—80, HT—1080, PRIMO, IBM (PC, XT, AT)

Az RND(0) utasítás az előző véletlenszám értékére építve egy 3 byte-os pontosságú számot generál [0, 1)-ben. Az i-edik lépésben a generálás képlete:

$$s_i \equiv a\cdot s_{i-1}+b \pmod m, \tag{4}$$

ahol

$$a = 4\,253\,261,$$

$$b = 372\,837,$$

$$m = 2^{24}.$$

A felhasználásra kínált véletlen szám:

$$v_i = s_i/2^{24}. \tag{5}$$

Az RND(N) utasítás segítségével 0 és N közötti véletlen egész értékeket is generálhatunk a

$$v_i' = s_i\cdot([N]+1)/2^{24} \quad \text{képlettel.}$$

Mód van a (VG_{TRS}-sel jelölt) véletlenszám-generátor reprodukálható, illetve véletlenített inicializálására is. A TRS—80 esetében az s_i értékek a memória 16 675, 16 674, 16 673-as regiszter 3-asában tárolódnak. Ezek kezdeti feltöltése történhet a RANDOMIZE(d) utasítással. ($d\neq 0$ esetén d értéke, $d=0$ esetén az időszámláló regiszterek tartalma kerül beléjük.)

A VG_{TRS} 3 byte-os regiszterre épülő véletlenszám-generátor, így elvileg 2^{24} hosszú periódusú sorozatot is generálhat (szemben a ZX—81 2^{16}-os periódushosszával).

A 2^{24} modulus mellett a VG_{ZX} sémája nem jöhet szóba, ha maximális periódus biztosítása a cél. Az $s_i\equiv a\cdot s_{i-1} \pmod{2^{24}}$ rekurzióval nem generálhatunk teljes, 2^{24} hosszú periódust, bárhogyan is választjuk meg az a (páratlan) szorzó értékét: Az Euler-tétel értelmében $a^{\varphi(2^{24})}\equiv 1 \pmod{2^{24}}$ (φ az Euler-féle φ-függvény). Könnyen igazolható, hogy ha $a^h\equiv 1 \pmod{2^{24}}$ minimális h-val, akkor $h|\varphi(2^{24})=2^{23}$. Ismeretes az is, hogy csak a p^e, $2p^e$, 1, 2 és 4 (ahol p páratlan prím, e pozitív egész) modulus mellett létezik primitív gyök (vagyis olyan m-hez relatív prím a elem, melyre az adott m modulus mellett teljesül: $\varphi(m)$ lesz a legkisebb pozitív egész, melyre $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ (mod m), lásd [5]-ben a 2.23 és 2.25 tételeket). Ezekből az következik, hogy bárhogy is választjuk a páratlan a értékét, $a^{2^{22}} \equiv 1 \pmod{2^{24}}$ már biztosan teljesülni fog. De ekkor (3)-at is figyelembe véve adódik, hogy legfeljebb 2^{22} lépés után az s_0 induló-állapot visszatér és innen már biztos a periodikus ismétlődés.

Vajon a (4)-beli konstans hozzáadásával sikerül-e a maximális periódust elérni? A válasz igen, a és b választására egyszerű feltétel is adható: [1]-ben szerepel a következő eredmény (3.12. Tétel, 56. old.):

A (4) alatti rekurzív képlet maximális periódusú sorozatot generál, ha:

$$a \equiv 1 \pmod 4,$$

$$b \equiv 1 \pmod 2.$$

A maximális periódus független s_0 megválasztásától. Visszatérve a VG_{TRS} vizsgálatára, kimondható a következő:

2. Állítás

A VG_{TRS} az s_0 induló értéktől függetlenül, a lehetséges maximális, 2^{24} periódusú sorozatot generál.

Bizonyítás. A fent idézett tétel feltételei teljesülnek:

$$4\,253\,261 \equiv 1 \pmod 4$$

és

$$372\,837 \equiv 1 \pmod 2. \quad \square$$

Az IBM-kompatibilis gépeken futtatható GW—BASIC nyelv RND függvénye ugyanezt a generálást valósítja meg, más konstans értékeket használva ($a = 214\,013$, $b = 1\,744\,579$).

Nagyon hasonló módon generál véletlenszámot a TPA—Quadró személyi számítógép is. A generálás alapképlete itt:

$$s_i \equiv a \cdot s_{i-1} \pmod{2^{36}}$$

ahol

$$a = 2^{17} + 3.$$

A fenti 2-hatvány modulus mellett mint láttuk 2^{36} nem, de 2^{34} hosszú periódus elérhető. A szorzókonstans úgy van megválasztva, hogy ez valóban teljesül is.

$$(2^{17}+3)^{2^{33}} \equiv 2^{35}+1 \pmod{2^{36}}$$

és

$$(2^{17}+3)^{2^{34}} \equiv 1 \pmod{2^{36}}.$$

A VG_{TRS} által generált sorozatok statisztikai vizsgálata a VG_{ZX}-hez nagyon hasonló eredménnyel járt. Itt mindössze két, eddig nem szereplő próbával való vizsgálat eredményeit mutatjuk be.

Póker-próba

Rögzített hosszú, diszjunkt blokkokra osztás mellett, az egy blokkon belül előforduló különböző elemek száma a kiértékelés alapja. $P_i = P\big(\text{az } (s_1, s_2, \ldots, s_K)\text{-}$ blokkban pontosan i különböző fajta elem van $|H_0\big) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{JEL}^K} \cdot \dbinom{\mathrm{JEL}}{i} \cdot \sum\limits_{j=0}^{i-1} (-1)^j \dbinom{i}{j} (i-j)^K & i = 1, 2, \ldots, \min\,(\mathrm{JEL}, K), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Futam-próba

Az $s_0, s_1, \ldots$ sorozat elemeit 2 osztály (melyet 0-val, illetve 1-gyel jelölünk) valamelyikébe soroljuk valamely tulajdonság teljesülése, illetve nem teljesülése szerint. Futamnak nevezzük az egymást követő azonos osztályba sorolt elemekből álló maximális részsorozatokat. A futamot alkotó elemek számát a futam hosszának hívjuk. A próba a különböző i hosszúságú 0-s és 1-es futamok tapasztalt gyakoriságértékeinek egybevetése a nullhipotézis esetén kiszámolható elméleti várható értékekkel. Elég nagy N értékre a következő közelítések alkalmazhatók (lásd részletesen

5. táblázat

Póker-próba $K=2, 3, 4, 5$ blokkméretre a $\mathrm{VG_{TRS}}$ által generált 2048 és 65 536 hosszú 10-es jelkészletű sorozatra

Blokkhossz	Különböző elemek száma	T	E	T	E
$K=2$	1	88	102,4	3 311	3 276,8
	2	936	921,6	29 457	29 491,2
	Σ	1024	1024,0	32 768	32 768,0
		$\chi_1^2=2{,}2$		$\chi_1^2=0{,}4$	
$K=3$	1	8	6,8	206	218,2
	2	185	184,2	5 876	5 892,5
	3	489	491,0	15 742	15 713,3
	Σ	682	682,0	21 824	21 824,0
		$\chi_1^2=0{,}03$		$\chi_2^2=0{,}8$	
$K=4$	1	1	0,5	7	16,4
	2	33	32,3	1 151	1 032,2
	3	225	221,2	6 932	7 077,8
	4	253	258,0	8 294	8 257,6
	Σ	512	512,0	16 384	16 384,0
		$\chi_2^2=0{,}2$		$\chi_2^2=14{,}7$	
$K=5$	1	0	0,0	0	1,3
	2	4	5,5	165	176,7
	3	82	73,6	2 401	2 355,8
	4	205	206,1	6 519	6 596,4
	5	118	123,8	4 003	3 957,8
	Σ	409	409,0	13 088	13 088,0
		$\chi_2^2=0{,}8$		$\chi_3^2=3{,}2$	

T: tapasztalt gyakoriságértékek
E: elméleti várható értékek

[7]-ben, ahol futam helyett széria elnevezés szerepel): Az i hosszúságú 0-s szériák darabszámának várható értéke

$$(N_0+N_1)\cdot\left(\frac{N_0}{N_0+N_1}\right)^i\left(\frac{N_1}{N_0+N_1}\right)^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1),$$

az i hosszúságú 1-es szériák darabszámának várható értéke

$$(N_0+N_1)\cdot\left(\frac{N_0}{N_0+N_1}\right)^2\left(\frac{N_1}{N_0+N_1}\right)^i \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1),$$

ahol az N hosszú sorozatban N_0 elem került a 0-s, N_1 pedig az 1-es osztályba.

A póker-próba eredménye az 5. táblázatban szerepel. Mind a 4 blokkméret mellett 99%-os szinten elfogadható a véletlenszerűség nullhipotézise.

A VG_{TRS} ismeretében megadható a széria próbánál említett osztályba sorolási szabály úgy, hogy a sorozat strukturális összefüggéseire érzékeny próbát nyerjünk. Igaz ugyanis a következő:

3. Állítás

A VG_{TRS} által generált $s_0, s_1, \ldots, s_i, \ldots$ sorozatban:

$$s_{2K} \equiv s_{2L} \pmod 2$$

$$s_{2K+1} \equiv s_{2L+1} \pmod 2$$

és

$$s_{2K} \not\equiv s_{2L+1} \pmod 2$$

minden K, L pozitív egészre. (Vagyis a sorozat tagjai felváltva párosak, illetve páratlanok.)

Bizonyítás

Elég belátni, hogy $s_i - s_{i-1}$ minden $i > 0$-ra páratlan szám. (4) alapján: $s_i - s_{i-1} \equiv a \cdot s_{i-1} + b - s_{i-1} \equiv (a-1) \cdot s_{i-1} + b \pmod{2^{24}}$, ahol a és b egyaránt páratlan konstansok. $s_i - s_{i-1}$ valóban páratlan szám lesz, mert egy páros számmal való

6. táblázat

A Futam-próba eredménye a VG_{TRS} által generált 128 hosszú sorozatra. (Az osztályba sorolás a véletlenszámok paritása alapján történt.)

Hosszúság értékek (i)	i hosszú 0-s szériák tapasztalt gyakoriságai	i hosszú 0-s szériák elméleti értékei	i hosszú 1-es szériák tapasztalt gyakoriságai	i hosszú 1-es szériák elméleti értékei
1	64	16	64	16
2	0	8	0	8
3	0	4	0	4
4	0	2	0	2
5	0	1	0	1
6—	0	1	0	1
	$\chi_1^2 = 159{,}5$	$P(\chi_1^2 < 6{,}63) = 0{,}99$		$P(\chi_1^2 < 10{,}83) = 0{,}999$

(páros modulus mellett vett) szorzás eredménye mindig páros, majd egy páratlan számmal való (páros modulus mellett vett) összeadás megváltoztatja ezt a paritást. □

Ezek után válasszuk a széria próbában felhasznált osztályba sorolást úgy, hogy:

$$s_i' = 1, \quad \text{ha } s_i \text{ páros}; \quad s_i' = 0, \quad \text{ha } s_i \text{ páratlan}; \quad i=0, 1, 2, \ldots.$$

H_0 esetén nyilván az $s_0', s_1', \ldots, s_i'$ sorozat egy 2 jelkészletű véletlen sorozat lesz. A 6. táblázatban szereplő eredmények már a $\mathrm{VG_{TRS}}$ által generált 128 hosszú sorozatra is kiugró értékekkel vetik el ezt a hipotézist.

3. Commodore és Apple gépcsalád

Az RND(n) utasítás segítségével, ha $n>0$, akkor n értékétől függetlenül az előző s_{i-1} számból a következő algoritmussal képződik a következő s_i: s_{i-1} egy 4 byte-os szám, jelöljük A, B, C, D-vel.

[S1]: Inicializálás

$a \leftarrow B5447A$. (szorzó konstans)

$b \leftarrow .000000A8B146$ (additív konstans)

(a, b értéke hexadecimális alakban értendő)

$K \leftarrow 0$

$M \leftarrow 0$

[S2]: Szorzás, összeadás

(A', B', C', D', E') legyen az $a \cdot (A, B, C, D)+b$ szám első 40 bitje.

[S3]: Byte-os tördelés

$$(A'', B'', C'', D'', E'') := (D', C', B', A', E').$$

[S4]: $D'K$-adik bítjének letapogatása a $D'=(d_0, d_1, \ldots, d_7)$ jelölés mellett,

$$\text{ha } d_K=0, \text{ akkor: [S7]}.$$

[S5]: Eredmény eltolása balra

$$(A'', B'', C'', D'', E'') \leftarrow 2 \cdot (A'', B'', C'', D'', E'')$$

$$M \leftarrow M+1$$

$$K \leftarrow K+1.$$

[S6]: Számlálás

$$\text{ha } K < 8, \quad \text{akkor [S4]}.$$

[S7]: Kimenő adat

$$s_i = 2^{-M}(A'', B'', C'', D'').$$

A felhasználásra kínált véletlen szám:

(6) $$v_i = 2^{(-32-M)} \cdot (A'', B'', C'', D'').$$

A fenti algoritmus rögzített konstansokkal való szorzás és összeadás után az eredményt csonkolja, byte-os tördelésben megkeveri, majd a 40 bit pontossággal kezelt eredmény első 32, nem nullával kezdődő elemét őrzi meg. A Commodore—64 személyi számítógépben az M és az $ABCD$ byte-ok a 0. lap 139—143-as memória részben kerültek tárolásra. RND(0) hatására a 139—143 regiszterekbe a belső időszámláló aktuális értékei töltődnek, az RND(n) utasítás $n<0$ esetén pedig n értékétől függően tölti fel ezeket a regisztereket. Így egyaránt mód van véletlenített és reprodukálható kezdeti értékadásra.

Ez a véletlenszám generálás (a továbbiakban: VG_{COM}), alapvetően eltér az eddig ismertetett és vizsgált többi generálástól.

A ZX—81, TRS—80, TPA—Quadró gépeknél egy jól kezelhető algebrai struktúrát választottak a generálás alapjául, melyben elméletileg biztosítható az elérhető maximális periódus, s ezzel bizonyos elemi egyenletesség. A VG_{COM} a 4 byte-os sorrend cserével, az első 1-es bitig való balra shifteléssel (egy 5. puffer-byte-on keresztül), egy bonyolult, nem lineáris rekurziót valósít meg, elméletileg áttekinthetetlen állapotgráfot indukál. (A VG_{COM} állapotgráfja egy olyan irányított gráf, melynek csúcsai a generálható s_i értékek, az s csúcsból az s^* csúcsba pedig pontosan akkor vezet nyíl, ha elindítható a VG_{COM} generálás úgy, hogy az s, s^* értékek közvetlenül egymás után képződnek.)

Empirikus vizsgálatokat végeztünk VG_{COM} állapotgráfjának megismerésére. Amíg a VG_{ZX} és VG_{TRS} állapotgráfjáról könnyen látható, hogy egy 2^{16}, illetve 2^{24} hosszúságú tiszta ciklus, addig a VG_{COM}:

— különböző ciklusokat tartalmaz,

— a ciklusok bizonyos csúcsaiba, mint gyökérbe fák csatlakoznak.

A generálást meghatározó 5 byte-os méret elvben 2^{40} hosszú tiszta ciklust (periódust) is meghatározhatna. Ezzel szemben különböző kezdeti értékek mellett a generált véletlen sorozatok mindegyike (mint utak) 2^{40}-hez képest rendkívül hamar egy rövid ciklusba torkollik.

160 különböző indulóérték mellett adódó eredményeket tartalmaz a 7. táblázat.

7. táblázat

A VG_{COM} által generált sorozatok periodikus tulajdonságai

Ciklus sorszáma	Becsatlakozó utak száma db	%	Ciklushossz	Példa reprodukálható, az adott ciklusba vezető kezdeti értékadásra
1	135	84	58 078	RND (—6), RND (—7)
2	19	12	724	RND (—3)
3	3	4	5 660	M (139, 140, 141, 142, 143)= (127, 122, 0, 94, 0)
4	2		7 036	M (139, 140, 141, 142, 143)= (128, 0, 7, 209, 180)
5	1		4 232	M (139, 140, 141, 142, 143)= (127, 253, 104, 101, 103)
	160	100		

Néhány száz vagy ezer véletlenszám generálás után az esetek 12%-ában belejutunk egy 724 hosszúságú periódusba!

Az első ismétlődő szakasz visszatéréséig statisztikailag a VG_{COM} által generált sorozatok is nagyon jól illeszkednek a véletlenszerűség hipotézise esetén meghatározható elméleti értékekhez. Példaképp az előzőektől eltérő, változó blokkhosszon operáló, véletlenszerűség ellenőrzésére alkalmas próbákat mutatunk be. Ezeknél a próbáknál a vizsgált $s_0, s_1, \ldots$ sorozat elejéről indulva meghatározzuk annak a legrövidebb részsorozatnak a hosszát, melyre valamely (az adott próbára jellemző) tulajdonság már teljesül. Ezután ennek végpontjától kezdve ismételjük a vizsgálatot. A kiértékelés: ezen részsorozatok hosszértékeinek egybevetése a véletlenszerűség nullhipotézise mellett meghatározott elméleti értékekkel.

Hézagok vizsgálata (Gap Test)

Egy rögzített érték két egymás utáni előfordulása közti hézagot vizsgáljuk. A hipotetikus eloszlás geometriai eloszlás lesz:

$$P_i = (1-1/\mathrm{JEL})^{i-1} \cdot 1/\mathrm{JEL}, \quad i = 1, 2, 3\dots.$$

Szelvénygyűjtő próba (Coupon collector Test)

Azokra a legrövidebb részsorozatokra osztjuk az $s_0, s_1, \dots$ sorozatot, melyeken belül már minden lehetséges elem előfordul.

Ismétlődés-vizsgálat

A még csupa különböző elemeket tartalmazó blokkok hossza alapján végezzük a véletlenszerűség ellenőrzését.

$$P_i = \binom{\mathrm{JEL}}{i-1}(i-1)! \cdot (i-1)/\mathrm{JEL}^i \quad (i = 2, 3, \dots, \mathrm{JEL}).$$

8. táblázat

A hézagok vizsgálatának eredménye a VG_{COM} által generált 10-es jelkészletű sorozatra, 1000 blokk hosszon

Távolság	Megfigyelt gyakoriságértékek két szomszédos „k” jel közötti távolságra										Elméleti értékek
(i)	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	($1000 \cdot p_i$)
1	83	97	107	97	107	88	114	109	83	89	100
2	100	78	108	82	89	98	96	109	79	97	90
3	84	84	61	96	82	84	68	98	93	81	81
4	71	81	66	71	61	60	77	57	60	68	72,9
5	55	69	62	69	64	68	78	46	84	60	65,6
6	63	65	65	66	69	81	59	60	72	68	59
7	70	62	60	54	55	47	48	44	47	50	53,1
8	49	39	40	54	40	56	41	53	50	40	47,8
9	43	36	45	37	56	45	34	37	49	47	43
10	30	42	22	36	44	35	34	39	46	33	38,7
11	32	31	31	22	34	25	40	27	43	35	34,9
12	37	32	31	35	36	38	30	33	28	32	31,4
13	26	35	34	24	24	30	23	26	21	37	28,2
14	19	26	28	22	32	21	23	26	22	27	25,4
15	31	15	23	17	19	17	25	17	38	27	22,9
16	18	18	25	21	18	16	22	17	14	16	20,6
17	21	17	14	23	17	15	15	21	20	18	18,5
18	14	24	11	15	8	17	13	16	12	22	16,7
19	15	15	21	23	17	16	14	21	8	12	15
20	15	10	22	8	11	17	11	17	15	8	13,5
21	13	10	11	16	12	9	19	14	11	9	12,2
22	17	13	9	10	5	14	5	14	7	11	10,9
23	7	14	15	5	8	15	13	12	12	17	9,8
24	7	8	14	4	5	9	9	12	11	12	8,9
25--	80	79	75	93	87	79	89	75	75	84	80
$\chi^2_{24}=$	25,2	20,0	40,0	30,5	25,4	29,2	24,3	31,6	43,6	23,2	1000

$P(\chi^2_{24} < 42{,}98) = 0{,}99$

Valamennyi próbát az RND(—7) kezdeti értékadás mellett generált sorozatra végeztük. Ez a sorozat 60 000 hosszúságig nem tartalmaz periodikus ismétlődéseket. Mindhárom próba elfogadta a véletlenszerűség nullhipotézisét 99%-os megbízhatósági szinten.

Az eredményeket a 8—10. táblázatokban adjuk meg.

9. táblázat

A szelvénygyűjtő próba eredménye a VG_{COM} által generált 10-es jelkészletű sorozatra, 1000 blokk hosszon

i	μ_i	$1000p_i$	i	μ_i	$1000p_i$	i	μ_i	$1000p_i$
10—13	23	14,3	24	50	44,7	35	30	23,4
14	13	13,0	25	40	43,8	36	24	21,5
15	12	18,6	26	44	42,4	37	24	19,7
16	29	24,4	27	37	40,6	38	16	18,0
17	23	29,8	28	36	38,7	39	19	16,4
18	29	34,6	29	38	36,5	40	13	15,0
19	39	38,5	30	44	34,3	41	9	13,6
20	31	41,6	31	26	32,0	42	9	12,4
21	40	43,6	32	32	29,8	43	23	11,2
22	49	44,7	33	35	27,6	44	6	10,2
23	54	45,1	34	23	25,5	45—	80	94,5
							1000	1000,0

$\chi^2_{32}=46,85$ $\qquad P(\chi^2_{32}<52,19)=0,99$

10. táblázat

Az ismétlődés-vizsgálat eredménye a VG_{COM} által generált 10-es jelkészletű sorozatra, 1000 blokk hosszon

i	μ_i	$1000p_i$
2	89	100
3	200	180
4	202	216
5	190	201,6
6	160	151,3
7	102	90,8
8	42	42,5
9	15	14,5
10	0	3,3
	1000	1000,0

$\chi^2_7=7,36$ $\qquad P(\chi^2_7<18,47)=0,99$

A VG_{COM} által generált sorozatokhoz is találhatunk a generálás szabályosságát kimutató statisztikai próbát. Az alább ismertetett próba minden periodikusan ismétlődő sorozatra, a periodikus többszörös hosszúságára vonatkozó vizsgálattal kimutatja a véletlenszerűtől való szignifikáns eltérést. (Amíg a VG_{ZX} és még inkább a VG_{TRS} garantált nagy periódusai gyakorlatilag kizárták ennek a próbának a gyakorlati felhasználhatóságát, addig a VG_{COM} esetén a lehetséges kezdeti értékek mintegy 16%-ában olyan rövid periódusérték adódik, amelyre a 10 000 vagy 100 000 hosszúság már a periódus többszöröse lesz, így a próba reálisan elvégezhető.)

A próba a következő:

— Rögzítsünk le egy P pontot, és ennek egy d átmérőjű környezetét úgy, hogy $(P-d/2, P+d/2) \subset (0, 1)$ teljesüljön.

— X legyen a $v_1, v_2, \ldots, v_N$ egymást követő N db (0, 1)-ben véletlenszerű számból a lerögzített $(P-d/2, P+d/2)$-be esők darabszáma.

H_0 esetén X N darab független, azonos d-paraméterű binomális eloszlású valószínűségi változó összegeként áll elő. X-re nagy N mellett jó közelítéssel a következő konfidencia-intervallum adható meg:

$$P\left(N\cdot d-\lambda\sqrt{N\cdot d(d-1)} < X < N\cdot d+\lambda\sqrt{N\cdot d(d-1)}\right) \approx 2\Phi(\lambda)-1,$$

amely 99%-os megbízhatósági szinthez $\lambda=2{,}57$, 99,9%-os megbízhatósági szinthez pedig $\lambda=3{,}40$ értéket ad (lásd [4]-ben 316—319. oldal).

11. táblázat

A VG_{COM} véletlentől eltérő tulajdonságát kimutató statisztikai próba eredménye

	P	a $(P-d/2, P+d/2)$-be eső pontok száma 4 sorozatra S_1	S_2	S_3	S_4
	0,1	8	14	13	14
$N=1000$	0,2	11	9	7	13
	0,3	11	11	14	10
	0,4	6	7	16	15
$d=1/100$	0,5	15	10	9	10
	0,6	8	14	11	5
	0,7	6	15	9	18
	0,8	10	8	9	4
	0,9	10	8	9	8
	0,1	6	19+	3	0+
	0,2	12	11	12	0+
$N=10\,000$	0,3	7	11	21+	0+
	0,4	14	9	7	0+
$d=1/1000$	0,5	14	10	9	14
	0,6	10	12	9	0+
	0,7	10	11	6	27+
	0,8	10	16	13	0+
	0,9	18	8	12	14
	0,1	0+	36++	0+	0+
	0,2	0+	17	0+	0+
$N=100\,000$	0,3	0+	0+	0+	0+
	0,4	28++	17	0+	0+
$d=1/10\,000$	0,5	14	0+	24++	0+
	0,6	14	0+	24++	0+
	0,7	0+	0+	0+	0+
	0,8	14	34++	0+	0+
	0,9	14	0+	0+	138++

$P(1<\mu<19 \mid H_0) \approx 0{,}99$
$P(0<\mu<21 \mid H_0) \approx 0{,}999$

		periódus
S_1 sorozat indítása:	M(139—143): (128, 81, 5, 88, 156)	7036
S_2 sorozat indítása:	M(139—143): (128, 14, 192, 213, 154)	5660
S_3 sorozat indítása:	M(139—143): (126, 77, 140, 6, 210)	4232
S_4 sorozat indítása:	M(139—143): (127, 104, 58, 59, 61)	724

A 11. táblázat P és d különböző értékei mellett a 4 viszonylag kis periódusú sorozatra tartalmaz vizsgálati eredményeket. Ebben:
+ -szal jelöltük meg azokat az eseteket, amelyekben 99%-os szinten;
+ + -szal pedig, amelyekben 99,9%-os szinten
is a próba elvetette a véletlenszerűség nullhipotézisét. Az eredményből jól látszik, hogy
— 1000 hosszon mindegyik próba elfogadja még a véletlenszerűség hipotézisét,
— 10 000 hosszon a legrövidebb, 724 periódusú sorozat már 9 kísérletből 7-szer elveti a nullhipotézist,
— 100 000 hosszúságon vizsgálva a sorozatokat szinte valamennyi P választás a nullhipotézis elvetésével jár.

4. Záró megjegyzések

Megállapíthatjuk, hogy a 3 különböző véletlenszám generálási eljárás vizsgálata pozitív eredménnyel járt. Mindhárom módszerrel generált számsorozatok kiállták a legtöbb véletlenszerűség ellenőrzésére használt statisztikai próbát. A három eljárás periodikus ismétlődésmentes sorozatszakaszt is biztosít (VG_{ZX}-re 2^{16}, VG_{TRS}-re 2^{24}, VG_{COM}-ra 724 ez a minimális garantált periodikus hosszúság). Ezért a fenti véletlenszám generálások a legtöbb személyi számítógépes felhasználáshoz kielégítőek. Ugyanakkor fennáll annak a veszélye is, hogy a generált sorozat tagjai között meglevő szoros, rekurzív összefüggések torzító hatást váltanak ki egyes esetekben. A véletlenszám generálás módját és a felhasználást igénylő adott, konkrét feladatot ismerve, célszerű mérlegelni ennek a torzító hatásnak a bekövetkezését, illetve következményét. Bonyolultabb, hibaérzékeny feladatokra a következő módosított felhasználás javasolható:

a) Az egymást közvetlenül követő sorozattagok soros felhasználását zárjuk ki, fel nem használt véletlenszám generálások gyakori közbeiktatásával. (Ez különösen ajánlatos a VG_{ZX} esetében, ahol egy felhasznált elem után akár több üres RND utasítás is közbeiktatható!)

b) Tartózkodjunk az egymást követő sorozattagok meghatározott biteinek önálló felhasználásától. (Különösen a VG_{TRS} által generált 24 bites véletlenszámok utolsó néhány bitét ne használjuk így!)

c) Ne használjunk fel azonos indulóérték mellett túl sok egymást követő véletlenszámot! (Erre elsősorban a VG_{COM} esetében ügyeljünk. Ekkor célszerű 500 felhasznált véletlenszám után új kezdeti értékadást végrehajtani.)

IRODALOM

[1] JANSSON, B.: *Random Number Generators*. Stockholm, 1966.
[2] KENDALL, M. G.—BABINGTON-SMITH, B.: Randomness and Random Sampling Numbers, *Journal of the Royal Statistical Society* **101** (1938), 147—166.
[3] KNUTH, D. E.: *The Art of Computer Programing*, Vol. 2., 2nd ed., Addison-Wesley, 1981.
[4] MESZÉNA GY.—ZIERMANN M.: *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1981.
[5] NIVEN, I.—ZUCKERMAN, H. S.: *Bevezetés a számelméletbe*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978.
[6] SREJGYER, JU. A. (ed.): *Monte Carlo-módszerek*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1965.
[7] И. В. Дунин—Н. В. Смирнов: *Теория вероятностей и математическая статистика в технике.*

(Beérkezett: 1986. február 3-án)

ОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ НА ЛИЧНЫХ ЭВМ

И. БАЛАЖ

RANDOM NUMBER GENERATION ON PERSONAL COMPUTERS

I. BALÁZS

This paper investigates the quality of the random number generators of 3 groups of personal computers, namely,

— ZX spectrum, ZX 81;
— TRS—80, HT—1080, Primo, IBM (PC, XT, AT);
— Commodore—64, Apple.

Different statistical tests are applied to these groups. The results are summarized in 11 Tables. They show that these generators are satisfactory for most applications in the range of personal computers. Possible drawbacks of the deterministic generation are illustrated by an unfair game in connection with ZX machines.

HASHING

TUSNÁDY GÁBOR

Gyakorlati feladatok megoldása során általában kétféleképpen találkozhatunk a véletlennel: vagy úgy, hogy kárt okoz, és a mi dolgunk e kár csökkentése, vagy úgy, hogy eredetileg fel se bukkan a feladatban, de ha sikerül belekevernünk, az hasznunkra válik.

A számítógépek egyik leggyakoribb felhasználási területe a kiterjedt és dinamikusan változó adatállományok tárolása. Ennek a feladatnak az egyik megoldása az ún. HASHING, amit magyarra talán terítésnek lehetne fordítani.

Az eljárás a következő: egyforma, és egyesével számozott területeket hozunk létre, ezekben tároljuk az adatmező részeit, és egymástól függetlenül adminisztráljuk őket. Az adatmező feltöltésekor minden egységhez, pusztán annak tartalma alapján hozzárendelünk egy N-nél nem nagyobb pozitív egészet, ahol N a kialakított helyek száma. Ha ez a hely üres, abba tesszük az új elemet. Ha nem, választunk egy másik számot, még mindig az új elem tartalma alapján, és így tovább. Végül is az új elemhez az N hely teljes permutációját rendeljük hozzá, persze csak akkor, amikor a rendszerbe a legutolsó elemet visszük be. Mivel nem tudjuk előre, hogy az adatok milyen rend szerint érkeznek, viszont ismerjük a teljes állományt, ahonnan egyáltalán az adataink származnak, megtehetjük, hogy minden szóba jöhető egységhez eleve hozzárendelünk egy permutációt. Ha ezután aktuálisan azt az $M \leqq N$ elemet kapjuk, amelyhez a

$$P_1, P_2, \ldots, P_M \tag{1}$$

permutációkat rendeltük, akkor közülük a k-adik elhelyezéséhez szükséges lépések L_k száma attól függ, hogy az első $(k-1)$ elem hova került. Jelöljük az általuk elfoglalt helyek halmazát F_k-val.

Az első N pozitív egész tetszőleges

$$P = P(1),\ P(2), \ldots, P(N)$$

permutációjához és F részhalmazához rendeljük hozzá a

$$H(P, F) = \{\min m\colon\ P(m) \notin F\} \tag{2}$$

számot, ez tehát P első F-beli elemének az indexe, ahol F az F komplementerét jelöli. Ezzel a jelöléssel a k-adik elem elhelyezéséhez szükséges lépések száma

$$L_k = H(P_k, F_k),$$

és az első M elem elhelyezéséhez

(3) $$L(P_1, \ldots, P_M) = \sum_{k=1}^{M} H(P_k, F_k)$$

lépésre van szükségünk.

Tegyük fel, hogy a teljes állományhoz a

(4) $$\mathscr{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_T\}$$

permutációhalmazt rendeltük, és feltöltéskor egy-egy elem tetszőlegesen sokszor ismétlődhet. Ismétlődés esetén vigyük fel az elemet többszörösen, tehát ne vegyük figyelembe az azonosságot. Ekkor (1) a (4) halmaz ismétléses variációiból kerül ki és (4) jóságát a (3) lépésszámok átlagával minősíthetjük. Ez az átlag

(5) $$\lambda_M = \lambda_M(\mathscr{P}) = \frac{1}{T^M} \sum_{\substack{(P_1, \ldots, P_M) \\ P_i \in \mathscr{P}}} L(P_1, \ldots, P_M),$$

és a feladat az, hogy adott N, M, T számokhoz megtaláljuk a λ_M-et minimalizáló $\mathscr{P}$-t.

Ez tehát determinisztikus, tisztán kombinatorikus feladat, a véletlenről szó sincs benne. Ennek ellenére nézzük meg, mi történik, ha a P_i-ket véletlen permutációknak választjuk. Ilyenkor λ_M is függ a véletlentől, amitől legegyszerűbben úgy szabadulhatunk meg, hogy feltesszük, hogy $T=N!$, és $\mathscr{P}$ azonos az összes permutáció halmazával. Ekkor maga az (5) alatti λ_M is várható érték, éppen a véletlen permutációk mellett várható lépésszám. (Ez a jelentése λ_M-nek általában is megvan, hiszen az összes ismétléses variációra vett átlag identikus azzal a várható értékkel, amikor a P_i-ket $\mathscr{P}$-ből véletlenszerűen, ún. „visszatevéssel" választjuk.)

Ha (1) tisztán véletlen, tetszőleges k mellett F_k is az és

(6) $$P(L_k > j) = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{k-1-i}{N-i} = \frac{\binom{k-1}{j}}{\binom{N}{j}}.$$

Mivel $EL_k = \sum_{j=0}^{k-1} P(L_k > j)$,

(7) $$\sum_{k=1}^{N} EL_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\binom{k-1}{j}}{\binom{N}{j}} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \frac{\binom{k-1}{j}}{\binom{N}{j}} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\binom{N}{j+1}}{\binom{N}{j}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{j+1} = (N+1) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} - N \sim N \log N - cN.$$

Tehát mire a rendszer tele lesz, átlagosan körülbelül ($N \log N - cN$) lépésre van szükség. Kérdés, található-e ennél jobb $\mathscr{P}$? Megválaszolatlan kérdés, bármilyen ártatlanul hangzik is. Ajtai—Komlós—Szemerédi [1] és Yao [3] eredményei alapján csak annyit mondhatunk, hogy ha van is, az nem lehet lényegesen jobb a véletlennél. Itt jegyzem meg, hogy a hash-elésről általában Knuth [2] hamarosan magyarul is megjelenő könyvében a III. kötet 6.4 fejezetében van szó.

Tétel. *Tetszőleges* $N>1$ *és tetszőleges* $\mathscr{P}$ *mellett*

$$\lambda_N \geqq N \log N - N \log\log N - 3N. \tag{8}$$

Bizonyítás. Legyen $D=[3 \log N]$, $M=N-D$. Véletlenszerűen választunk (visszatevéssel) $\mathscr{P}$ elemei közül permutációkat és a kapott $L(P_1, ..., P_N)$ lépésszám várható értékét becsüljük. Legyen n az 1 és N között tetszőleges rögzített szám és jelöljük $X_n(P_1, ..., P_N)$-nel azoknak a lépéseknek a számát, ahányszor a $P_1, ..., P_N$ elemek elhelyezése során n-be kell lépnünk. Nyilvánvaló, hogy

$$L(P_1, ..., P_N) = \sum_{n=1}^{N} X_n(P_1, ..., P_N), \tag{9}$$

tehát elég az $X_n(P_1, ..., P_N)$ mennyiségek várható értékét alulról becsülni.

Rögzített n mellett megváltoztatjuk a $P_1, ..., P_N$ permutációk adminisztrációját. Megtiltjuk, hogy bárki is n-be lépjen, egy adott helyzetben rossznak minősítünk minden olyan permutációt, amely olyan keresési eljárásra vezet, amelynek során n-be kell lépnünk. Jelöljük a k-adik lépés során rossznak minősülő $\mathscr{P}$-beli permutációk halmazát $\mathscr{R}_k$-val, $\mathscr{R}_1$ tehát $\mathscr{P}$ n-nel kezdődő elemeiből áll.

Magukat a lépéseket is másképp fogjuk számolni. Minden lépés a következő eljárásból áll. Addig húzunk visszatevéssel $\mathscr{P}$ elemei közül, amíg jó permutációt nem találunk (jó egy permutáció, ha nem rossz). A közben talált rossz permutációkat nem dobjuk el, csak félre tesszük, számon tartjuk őket, de azok alapján nem foglalunk el helyet. Végül a jó permutációt a szokásos módon adminisztráljuk: ha Q_k a k-adik jó permutáció, és G_k az első $(k-1)$ jó permutáció elhelyezése során elfoglalt helyek halmaza (G_1 az üres halmaz), akkor $H(Q_k, G_k)$ lépésben helyezzük el a k-adik jó elemet (ahol H a (2) alatti függvény), és az új elem helye a Q_k permutáció $H(Q_k, G_k)$-adik eleme. G_k alapján rossznak minősül $\mathscr{P}$ mindazon P eleme, amelynek $H(P, G_k)$-adik eleme n. Mint mondtuk, ezek halmazát $\mathscr{R}_k$-val jelöljük, a k-adik lépés során húzott rossz permutációk számát pedig jelölje ϱ_k.

Rögzített k és $Q_1, ..., Q_k$ mellett ϱ_k geometriai eloszlású és rögzített $Q_1, ..., Q_M$ mellett a $\varrho_1, ..., \varrho_M$ változók függetlenek. Mivel minden egyes permutációt $\mathscr{P}$-ből szabadon és a korábbi húzásoktól függetlenül választunk, a kihúzott permutációk együttes eloszlása nem változik, ugyanaz, mint az eredeti visszatevéses véletlen választásnál. Csak annyi a különbség, hogy a kihúzott permutációk száma függ a véletlentől és esetenként N-nél nagyobb is lehet. Ez a szám ugyanis M-nél ϱ-val nagyobb, ahol

$$\varrho = \sum_{k=1}^{M} \varrho_k. \tag{10}$$

Tekintsük a kihúzott $(M+\varrho)$ permutációt. Ha $\varrho<D$, akkor illesszünk a végükre $\mathscr{P}$-ből szabadon választott $(D-\varrho)$ elemet. Ha $\varrho=D$, ne csináljunk semmit. Ha $\varrho>D$, akkor hagyjuk el az utolsó $(\varrho-D)$ elemet. Jelöljük az így kapott permutációkat $(P_1, ..., P_N)$-nel. A konstrukció miatt $(P_1, ..., P_N)$ eloszlása megfelelő, a kétféle adminisztráció viszonyát a következő lemma mutatja.

1. Lemma. $X_n(P_1, ..., P_N) \geqq \min(D, \varrho)$. (Ezt és a többi lemmát később bizonyítjuk.)

Tudjuk már, hogy a ϱ_k-knak a $Q_1, ..., Q_M$ permutációkra vett feltételes eloszlása geometriai eloszlás. Jelöljük a $Q_1, ..., Q_M$ permutációk által generált σ-algebrát σ_M-mel.

Definíció. Legyenek az X, Y valószínűségi változók lehetséges értékei nemnegatív egészek. Azt mondjuk, hogy X eloszlásban dominálja Y-t, ha

$$P(X \geqq t) \geqq P(Y \geqq t) \tag{11}$$

teljesül minden pozitív t egészre, és (11)-ben $t=1$ mellett egyenlőség érvényes.

2. Lemma. *Legyen X geometriai, Y Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ha $P(X=0)=P(Y=0)$, akkor X eloszlásban dominálja Y-t.*

3. Lemma. *Ha tetszőleges $1 \leqq i \leqq M$ mellett X_i eloszlásban dominálja Y_i-t, és az X_i-k, Y_i-k egymás között függetlenek, akkor $\sum_{i=1}^{M} X_i$ eloszlásban dominálja $\sum_{i=1}^{M} Y_i$-t.*

Legyen rögzített $Q_1, \ldots, Q_M$ mellett η az a Poisson eloszlású valószínűségi változó, amelyre

$$P(\varrho > 0) = P(\eta > 0). \tag{12}$$

Akkor a 2. és 3. Lemma alapján ϱ eloszlásban dominálja η-t. Így az 1. Lemma alapján elég $\min(D, \eta)$ várható értékét megbecsülni. Mivel a Poisson eloszlásnak csak egy paramétere van és ezt $P(\eta > 0)$ egyértelműen meghatározza, $\min(D, \eta)$ várható értéke is a $P(\eta > 0)$ szám függvénye.

4. Lemma. *Tetszőleges D pozitív egészhez található olyan ψ_D konvex függvény, hogy*

$$E \min(D, \eta) = \psi_D(P(\eta > 0)) \tag{13}$$

teljesül tetszőleges Poisson eloszlású változóra.

Ne feledjük, hogy mindaz, amit csinálunk, egy rögzített n-től függ. Ezt figyelembe véve, jelöljük a $Q_1, \ldots, Q_M$ permutációktól is függő $P(\varrho > 0)$ számot π_n-nel és ennek a várható értékét p_n-nel.

5. Lemma.

$$\sum_{n=1}^{N} p_n = M.$$

Mindezek alapján a bizonyítás így fejezhető be. Induljunk ki (9)-ből:

$$\lambda_N = EL(P_1, \ldots, P_N) = \sum_{n=1}^{N} EX_n(P_1, \ldots, P_N).$$

Az 1. Lemma alapján nem növelünk, ha $X_n(P_1, \ldots, P_N)$ helyett $\min(D, \varrho)$-t írunk. Térjünk rá a σ_M szerinti feltételes várható értékre. Rögzített $Q_1, \ldots, Q_M$ mellett a 2. és 3. Lemma alapján nem növelünk, ha ϱ helyett azt az η Poisson eloszlású változót írjuk, amelyre $P(\eta > 0) = \pi_n$. Tehát

$$\lambda_N \geqq E \sum_{n=1}^{N} \psi_D(\pi_n).$$

ψ_D konvexsége miatt bevihetjük a várható érték képzést az argumentumba, és a konvexségre való ismételt hivatkozással alkalmazhatjuk az 5. Lemmát.

$$\lambda_N \geqq \sum_{n=1}^{N} \psi_D(p_n) \geqq N\psi_D\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_n\right) = N\psi_D\left(\frac{M}{N}\right).$$

6. Lemma. *Ha* $D=[3\log N]$ *és* $M=N-D$, *akkor*

$$\psi_D\left(\frac{M}{N}\right) \geqq \log N - \log\log N - 3.$$

A tétel bizonyítását ezzel befejeztük.

Rátérünk a lemmák bizonyítására. Az első lemma bizonyítása két részből áll. Egyrészt világos, hogy amiatt, hogy a rossz permutációkat nem adminisztráljuk, az ütközések száma nem növekedhet. Másrészt, ha $\varrho > D$, akkor nyilván legalább D ütközés van. Ez utóbbi meggondolásánál csak azt kell figyelembe venni, hogy az adminisztráció megváltoztatása miatt elképzelhető, hogy nem is kerül sorra mind az M jó permutáció. Dehát csak rosszak tudják kiszakítani őket, így azok száma valóban legalább D.

A 2. Lemma bizonyítása kedvéért tekintsük egy tetszőleges Z, természetes számokat felvevő valószínűségi változóra a

$$\varphi(t) = \frac{P(Z > t)}{P(Z \geqq t)}$$

hányadost t függvényében. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$P(Z > t) = \sum_{s=0}^{t} \varphi(s).$$

Emiatt a lemma annak a két egyszerű ténynek a következménye, hogy geometriai eloszlásra $\varphi(t)$ állandó, Poisson eloszlásra pedig $\varphi(t)$ monoton fogy.

A 3. Lemmát nyilván elég $M=2$ mellett belátni. Jelöljük $X \gg Y$-nal azt, hogy X eloszlásban dominálja Y-t. Akkor

$$X_1+X_2 \gg Y_1+X_2 \gg Y_1+Y_2,$$

hiszen mindkét oldalhoz ugyanazt (a szóban forgó változóktól független) változót adva nyilván ez az egyenlőtlenség is érvényben marad.

A 4. Lemma bizonyításához jelöljük az η Poisson eloszlású változó paraméterét λ-val, és legyen

$$x = e^{-\lambda} = P(\eta = 0).$$

Mivel

$$E\min(D,\eta) = \sum_{k=1}^{D} P(\eta \geqq k),$$

elég belátni, hogy $P(\eta < k)$ tetszőleges $k \geqq 1$ mellett az x konkáv függvénye. Legyen

$$g(\lambda) = P(\eta < k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!},$$

akkor

$$\frac{d}{dx} g\left(\log\frac{1}{x}\right) = \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda^{j-1}e^{-\lambda}}{(j-1)!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

és ennek x szerinti deriváltja negatív (illetve $k=1$ mellett azonosan 0).

Az 5. Lemmát bizonyítandó jelöljük ε_n-nel azt a valószínűségi változót, amelynek 1 vagy 0 az értéke aszerint, hogy elfoglaljuk-e n-et az első M lépés során, vagy sem. Ekkor $\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n = M$, és $p_n = E\varepsilon_n$.

Végül, ha η λ paraméterű Poisson eloszlású változó, $D \geqq 2\lambda$, akkor

$$E\min(D,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \min(D,k)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \geqq \lambda - \sum_{k=D+1}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda - \lambda P(\eta \geqq D)$$

és

$$P(\eta \geqq D) = \sum_{k=D}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \leqq \frac{\lambda^D e^{-\lambda}}{D!} \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{D}\right)^j \leqq 2^{-D+2\lambda+1}.$$

Legyen $D=[3\log N]$, $\lambda = \log\frac{N}{D}$, akkor azt kell belátni, hogy

$$\lambda - \lambda 2^{-D+2\lambda+1} \geqq \log N - \log\log N - 3,$$

vagyis

$$\log\log N + 3 \geqq \log D + \lambda 2^{-D+2\lambda+1},$$

ami numerikusan ellenőrizhető (hiszen minden tag az N függvénye és a 6. Lemma értelme miatt eleve feltehetjük, hogy $N \geqq 90$).

IRODALOM

[1] AJTAI, M., KOMLÓS, J., SZEMERÉDI, E.: There is no single hashing algorithm, *Information processing letters* 7/6 (1978), 270—273.

[2] D. E. KNUTH: *The art of computer programming.* Reading, Massachusetts, 1969.

[3] A. C. YAO: Szóbeli közlés.

(Beérkezett: 1986. június 10-én)

ХЕШИРОВАНИЕ

Г. ТУШНАДИ

HASHING

G. TUSNÁDY

JELENTÉS AZ 1985. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1985. november 1. és november 11. között rendezte meg az 1985. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, középiskolás diák, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1985-ben fejezték be. A versenybizottság 12 feladatot tűzött ki a versenyre (l. alább).

Az 1. feladatot Gesztelyi Ernő, a 2-at Pap Gyula, a 3-at Páles Zsolt, a 4-et Erdős Pál, az 5-et Győry Kálmán, a 6-at Kovács Béla, a 7-et Rimán János, a 8-at Daróczy Zoltán és Kátai Imre, a 9-et Maksa Gyula, a 10-et Szabó György, a 11-et Szilasi József, a 12-et pedig Fazekas István bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A kitűzött feladatokra 34 versenyző 183 megoldást küldött be. Minden feladatra érkezett helyes megoldás. Nehéznek bizonyult a 11. feladat, melyre csak egy helyes megoldás érkezett.

A versenybizottság 1985. december 2-i ülésén a következő határozatot hozta.

I. díjat és 4500,— Ft pénzjutalmat kap Tardos Gábor, az ELTE negyedéves hallgatója.

II. díjat és 3000,— Ft pénzjutalmat kap Szenes András, az ELTE ötödéves hallgatója.

III. díjat és 1500—1500,— Ft pénzjutalmat kapnak Bohus Géza, az ELTE ötödéves, Elek Gábor, az ELTE negyedéves és Károlyi Gyula, az ELTE negyedéves hallgatói.

Dicséretben részesülnek Beleznay Ferenc, az ELTE ötödéves, Erdős László, az ELTE elsőéves, Mócsy Miklós, az ELTE másodéves, Ódor Tibor, az ELTE negyedéves, Szabó Endre, az ELTE harmadéves, Szabó László, a JATE ötödéves, valamint Szabó Zoltán, az ELTE elsőéves hallgatói.

Tardos Gábor a 3. és 5. feladatokra részmegoldást, a többi feladatra pedig teljes megoldást adott. A 11. feladatot egyedül ő oldotta meg.

Szenes András a 3., 6. és 11. kivételével minden feladatra tömör és világos megoldást nyújtott be. Különösen szép a 8. feladatra adott megoldása.

Bohus Géza teljes megoldást adott az 1., 6., 7., 8., 10. és 12. feladatokra és részmegoldást a 9-re.

Elek Gábor teljes megoldást adott az 1., 6., 8., 9., 10. és 12. feladatokra és részeredményt ért el a 4., 5. és 7. feladatokban. Különösen értékes a 6. és 12. feladatokra adott megoldása.

Károlyi Gyula megoldotta az 1., 7., 9., 10. és 12. feladatokat és részeredményt ért el a 3-ban és az 5-ben.

Beleznay Ferenc megoldotta az 1., 8. és 12. feladatokat és részmegoldást adott a 3-ra, 7-re és a 10-re.

Erdős László az 1., 3., 5. és 7. feladatokra nyújtott be teljes megoldást. Kiemelkedő az 5. feladatra adott megoldása.

Mócsy Miklós megoldotta az 1., 5., 8. és 9. feladatokat.

Ódor Tibor teljes megoldást adott az 1., 3., 4. és 9. feladatra és részmegoldást az 5-re és a 7-re. A 4-re adott megoldása kiemelkedő.

Szabó Endre megoldotta az 1., 5., 7. és 10. feladatokat. Részben megoldotta a 3. és 8. feladatokat.

Szabó László megoldotta az 1., 3., 7. és 10. feladatokat, míg a 9-ben részeredményt ért el. Említésre méltó a 7-re és a 10-re adott megoldása.

Szabó Zoltán teljes megoldást adott az 1., 7., 8. és 10. feladatra.

A Versenybizottság említésre méltónak tartja Hajdú Sándor, a Fazekas Mihály Gimnázium (Budapest) IV. osztályos tanulójának teljesítményét, aki megoldotta az 1. és a 7. feladatokat.

A Versenybizottság:

Arató Mátyás
Brindza Béla — titkár
Buzási Károly
Daróczy Zoltán — elnök
Dragálin Albert
Gesztelyi Ernő
Győry Kálmán
Lajkó Károly
Pap Gyula
Páles Zsolt — titkár
Szabó György
Székelyhidi László
Tamássy Lajos

AZ 1985. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY FELADATAI

1. Valamely S véges halmaz $P_1, \dots, P_n$ valódi (azaz legalább két osztályból álló) partícióit függetleneknek nevezzük, ha bárhogyan is választunk a partíciók mindegyikéből legfeljebb egy osztályt, a kiválasztott osztályok metszete nem üres. Bizonyítsuk be, hogy ha a $P_1, \dots, P_n$ független partíciókra az

$$(*) \qquad \frac{|S|}{2} < |P_1| \dots |P_n|$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor $P_1, \dots, P_n$ maximális abban az értelemben, hogy a $P, P_1, \dots, P_n$ partíciók nem függetlenek az S halmaz egyetlen valódi P partíciója mellett sem. Mutassuk meg azt is, hogy a $(*)$ egyenlőtlenség a fenti értelemben vett maximalitásnak nem szükséges feltétele.

2. Legyen adott $\mathbf{R}^n$-ben hipersíkoknak egy véges S halmaza és egy O pont. Bizonyítsuk be, hogy megadható olyan $K \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt halmaz, amely tartalmazza O-t és amelyből az S elemeire való merőleges vetítés nem vezet ki.

3. Legyenek k és K koncentrikus körök a síkon és K tartalmazza a belsejében k-t. Tételezzük fel, hogy a k kör belsejét lefedi olyan konvex szögtartományoknak egy véges rendszere, amelyek csúcsai a K körön vannak. Bizonyítsuk be, hogy a szögtartományok nyílásszögeinek az összege nem kisebb a k körnek a K kör egy pontjából vett látószögénél.

4. Az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egy S részhalmazát kitüntetettnek nevezzük, ha bármely két eleme relatív prím. Bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy és ha S egy olyan kitüntetett részhalmaz, amelyre az S elemeinek az összege a lehető legnagyobb, akkor S bármely elemének legfeljebb két különböző prímtényezője van.

5. Legyenek $F(x, y)$ és $G(x, y)$ legalább elsőfokú egész együtthatós relatív prím homogén polinomok. Bizonyítsuk be, hogy van olyan, csupán az F és G fokszámaitól és együtthatóik abszolút értékeinek a maximumától függő c szám, hogy ha x és y relatív prím egészek és $\max\{|x|, |y|\} > c$, akkor $F(x, y) \neq G(x, y)$.

6. Adjuk meg az összes olyan G véges csoportot, amelynek van olyan f automorfizmusa, hogy a G minden valódi H részcsoportjára $H \nsubseteq f(H)$.

7. Legyenek p_1 és p_2 pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $f_i\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények, hogy az f_i legkisebb pozitív periódusa p_i $(i=1, 2)$ és $f_2 - f_1$ is periodikus.

8. Legyen $\frac{2}{\sqrt{5}+1} \leq p < 1$ és tegyük fel, hogy az (a_n) valós számsorozat a következő tulajdonságú: minden olyan, a $-1, 0, 1$ számokból készített (e_n) soro-

zatra, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} e_n p^n = 0$ fennáll, egyben $\sum_{n=1}^{\infty} e_n a_n = 0$ is teljesül. Bizonyítsuk be, hogy van olyan c valós szám, amellyel $a_n = cp^n$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

9. Legyen $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ és $B = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| = 1\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon D \times B \to \mathbf{C}$ kielégíti az

$$f\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}\right) = f(z,w) + f\left(\frac{b}{\bar{a}}, \frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}\right)$$

egyenletet minden $z \in D$, $w \in B$ és $a, b \in \mathbf{C}$, $|a|^2 = 1 + |b|^2$ értékekre, akkor létezik olyan $L\colon]0, \infty[\to \mathbf{C}$ függvény, hogy minden $p, q > 0$-ra

$$L(pq) = L(p) + L(q)$$

és bármely $z \in D$, $w \in B$ esetén

$$f(z, w) = L\left(\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\right).$$

10. Mutassuk meg, hogy bármely két pozitív hosszúságú $A, B \subseteq \mathbf{R}$ intervallum megszámlálhatóan átdarabolható egymásba, azaz van olyan $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, illetve $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$ páronként diszjunkt halmazokra való felbontásuk, hogy A_i és B_i kongruens halmazok minden $i \in \mathbf{N}$-re.

11. Legyen $\xi = (E, \pi, B)$ $(\pi\colon E \to B)$ véges rangú valós vektornyaláb és

$$(*) \qquad \tau_E = V\xi \oplus H\xi,$$

ahol τ_E az E érintőnyalábja, $V\xi = \operatorname{Ker} d\pi$ a τ_E vertikális résznyalábja. A $(*)$ felbontáshoz tartozó projekció operátorokat jelölje v, ill. h. Konstruáljunk $V\xi$-n olvan ∇ lineáris konnexiót, melyre

$$\nabla_X vY - \nabla_Y vX = v[X, Y] - v[hX, hY].$$

(X és Y vektormező E-n, $[\,.\,,\,.\,]$ a Lie zárójel, továbbá minden adat C^∞-osztályú.)

12. Legyen (Ω, A, P) valószínűségi mező, (X_n, F_n) $(n \in \mathbf{N})$ adaptált sorozat (Ω, A, P)-n (azaz, az F_n σ-algebrákra $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots \subseteq A$ teljesül és X_n F_n-mérhető integrálható valószínűségi változó minden $n \in \mathbf{N}$-re). Tegyük fel, hogy

$$E(X_{n+1} | F_n) = \frac{1}{2} X_n + \frac{1}{2} X_{n-1}, \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $\sup_n E|X_n| < \infty$, akkor $n \to \infty$ esetén X_n 1 valószínűséggel konvergál.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

Tegyük fel, hogy fennáll (1), amivel a feladatbeli egyenlőtlenséget jelöljük és az állítással ellentétben mégis volna olyan P_0 valódi partíció, hogy a $P_0, P_1, \ldots, P_n$ partíciók függetlenek. Válasszunk ki a fenti partíciók mindegyikéből pontosan egy elemet, azaz osztályt és képezzük ezek metszetét. A rövidség kedvéért nevezzük el ezeket a metszeteket osztálymetszeteknek. Nyilvánvaló, hogy az összes osztálymetszetek száma $|P_0||P_1| \dots |P_n|$ és bármely két különböző osztálymetszet diszjunkt. Ez az utóbbi állítás abból következik, hogy két különböző osztálymetszetben van a metszeteket alkotó osztályok közt legalább két különböző, melyek egy és ugyanazon partícióba tartoznak, tehát szükségképp diszjunktak. Mivel a $P_0, \dots, P_n$ partíciók függetlenek, egyik osztálymetszet sem üres. A fentiekből következik, hogy S-nek legalább annyi eleme van, mint amennyi osztálymetszet van:

$$|P_0||P_1|\dots|P_n| \leqq |S|. \tag{2}$$

Az (1) egyenlőtlenségnek mind a két oldalát megszorozva $|P_0|$-val, a (2) egyenlőtlenség figyelembevételével kapjuk, hogy $(1/2)|S||P_0|<|S|$, ahonnan $S\neq\emptyset$ miatt a $|P_0|<2$ ellentmondáshoz jutunk (P_0 valódi osztályozás és így legalább két osztályt tartalmaz). Ezzel igazoltuk, hogy (1)-ből következik $\{P_1, \dots, P_n\}$ maximalitása.

A következő példa mutatja, hogy az (1) feltétel nem szükséges a maximalitáshoz: Legyen $S=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ és így $|S|=8$. A partíciók legyenek a következők:

$$P_1 = \{S_{11}, S_{12}\}, \quad P_2 = \{S_{21}, S_{22}\},$$

ahol

$$S_{11} = \{a, b, c, d\}, \quad S_{12} = \{e, f, g, h\}, \quad S_{21} = \{a, e\}, \quad S_{22} = \{b, c, d, f, g, h\}.$$

Ekkor

$$S_{11} \cap S_{21} = \{a\} \tag{3}$$

és könnyen ellenőrizhető, hogy a többi osztálymetszet sem üres. Tehát P_1, P_2 függetlenek. $|P_1||P_2|=2\cdot 2=4=\frac{|S|}{2}$ miatt nem teljesül (1), $\{P_1, P_2\}$ mégis maximális. Megmutatjuk ugyanis, hogy P_0, P_1, P_2 egyetlen P_0 valódi partíció mellett sem lehet független. Mivel P_0 valódi osztályozás, legalább két osztályból áll: $P_0=\{S_{01}, S_{02}, \dots\}$, ahol természetesen

$$S_{01} \cap S_{02} = \emptyset. \tag{4}$$

Ha most P_0, P_1, P_2 független lenne, akkor S_{01}-nek a (3) halmazzal képzett osztálymetszete nem lehet üres és így (3)-ból $a\in S_{01}$ következik. Ugyanígy következik, hogy $a\in S_{02}$ és így metszetük nem üres, ellentétben (4)-gyel.

Megoldották: Beleznay Ferenc, Bohus Géza, Buczolich Zoltán, Szabó László, Dong Vu Giang, Elek Gábor, Erdős László, Hajdú Sándor, Hátsági Zsolt, Hegedűs Péter, Hetyei Gábor, Károlyi Gyula, Király Zoltán, Kiss György, Kurucz János, Lipusz Csaba, Magyar Ákos, Mócsy Miklós, Montágh Balázs, Nádor Péter, Ódor Tibor, Pásztor László, Pluhár András, Stipsicz András, Szabó Csaba, Szabó Endre, Szabó Zoltán, Szenes András, Tardos Gábor.

Részben megoldotta: Csere Kálmán.

A 2. feladat megoldása

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy O az $\mathbf{R}^n$ euklideszi tér origója és, hogy az S-beli hipersíkok normálvektorai $\mathbf{R}^n$-nek egy generátorrendszerét alkotják (ha ez utóbbi feltétel nem teljesülne, akkor S-et újabb hipersíkokkal a kívánt tulajdonságúra bővíthetjük).

Jelöljük $\mathcal{P}_1$-gyel az S-beli hipersíkokkal párhuzamos $n-1$ dimenziós alterekhez tartozó projekció operátorok halmazát, és $i=2, \dots, n$-re legyen $\mathcal{P}_i$ az összes olyan projekció operátoroknak a rendszere, amelyeknek $n-i$ dimenziós képtere előáll $\mathscr{P}_1$-beli operátorok képtereinek a metszeteként. Ekkor S végessége és az S-beli hipersíkok normálvektoraira tett kikötés miatt $\mathscr{P}_i$ minden $1 \leqq i \leqq n$-re véges és nem üres halmaz. Így $\mathscr{P}_n$ szükségképpen egyelemű: $\mathscr{P}_n = \{P_n\}$, ahol P_n a nulla operátor. Az egységes írásmód kedvéért legyen még $\mathscr{P}_0 = \{P_0\}$, ahol P_0 az identikus leképezés. Ha $P_i \in \mathscr{P}_i$, $P_j \in \mathscr{P}_j$ és P_i képtere tartalmazza P_j képterét (vagy ami ugyanezt jelenti, P_i nulltere benne van P_j nullterében), akkor ezt $P_i \geqq P_j$-vel jelöljük.

Valamely S-beli s síkra vonatkozó merőleges vetítést az $x \to P_s x + p_s$ alakban adhatunk meg, ahol $P_s \in \mathscr{P}_1$ az s síkkal párhuzamos $n-1$ dimenziós altérre való vetítés operátora és p_s az O pontból az s síkra állított merőleges vektor. Nyilván $P_s p_s = 0$ bármely $s \in S$-re.

Lemma. *A* $0 = R_0 < R_1 < \ldots < R_n$ *számok megválaszthatóak úgy, hogy bármely* $1 \leqq j \leqq n$, $P_j \in \mathscr{P}_j$ *és* $R \geqq R_j$ *esetén a* $G(P_j, R) := \{x \in \mathbf{R}_n | P_j x = 0;$ *bármely* $0 \leqq i \leqq j-1$*-re és bármely* $P_j \leqq P_i \in \mathscr{P}_i$*-re* $\|P_i x\|^2 \leqq R^2 - R_i^2\}$ *halmazból nem vezet ki az összes olyan* $s \in S$ *síkra való* $x \to P_s x + p_s$ *vetítés, amelyre* $P_s \geqq P_j$.

Ha a fenti Lemmát $j = n$-re és $R = R_n$-re alkalmazzuk, akkor $P_n = 0$ miatt azt kapjuk, hogy a $K = G(0, R_n)$ zárt halmazból semmilyen S-beli síkra vonatkozó vetítés sem vezet ki, másrészt ez a halmaz korlátos, hiszen része az origó körüli R_n sugarú gömbnek, így tehát eleget tesz a feladatban megfogalmazott követelményeknek.

A Lemmát j szerinti indukcióval bizonyítjuk.

$j = 1$ esetén legyen $P_1 \in \mathscr{P}_1$ tetszőleges. Ekkor

$$G(P_1, R) = \{x \in \mathbf{R}^n | P_1 x = 0, \|x\| \leqq R\}.$$

Ha valamely $s \in S$-re $P_s \geqq P_1$, akkor — mivel mindkét operátor képtere $n-1$ dimenziós — $P_s = P_1$, tehát $x_0 \in G(P_1, R)$ esetén $P_s x_0 + p_s = p_s$. Így ha R_1-et $\sup\limits_{s \in S} \|p_s\|$-nek választjuk, akkor a Lemma állítása teljesül.

Ezek után tegyük fel, hogy a Lemma állítását az $1, 2, \ldots, j-1$ értékekre már beláttuk és hogy az $R_0 < R_1 < \ldots < R_{j-1}$ számokat már megkonstruáltuk. Legyen $P_j \in \mathscr{P}_j$ tetszőleges és $s \in S$ olyan, hogy $P_s \geqq P_j$.

Ha $P_j x_0 = 0$, akkor $P_j(P_s x_0 + p_s) = P_j x_0 + P_j p_s = 0$, tehát az s-re való vetítés megőrzi a $G(P_j, R)$-beli elemek első tulajdonságát.

Másodszor azt mutatjuk ki, hogy ha $R \geqq R_{j-1}$ és $x_0 \in G(P_j, R)$, akkor

$$\|P_i(P_s x_0 + p_s)\|^2 \leqq R^2 - R_i^2 \tag{1}$$

teljesül, ha $0 \leqq i \leqq j-2$ és $P_j \leqq P_i \in \mathscr{P}_i$.

Ha $P_s \geqq P_i$, akkor $P_i(P_s x_0 + p_s) = P_i x_0$, s ezért nincs mit bizonyítani.

Ha $P_s \ngeqq P_i$, akkor jelöljük P_{i+1}-gyel azt a $\mathscr{P}_{i+1}$-beli projekció operátort, amelynek képtere P_s és P_i képterének a metszete. Tekintsük a $G(P_{i+1}, R^*) = G\left(P_{i+1}, \sqrt{R^2 - \|P_{i+1} x_0\|^2}\right)$ halmazt. Ekkor

$$R^{*2} = R^2 - \|P_{i+1} x_0\|^2 \geqq R^2 - (R^2 - R_{i+1}^2) = R_{i+1}^2,$$

tehát $R^* \geqq R_{i+1}$. Így $i+1 \leqq j-1$ és az indukciós feltevés miatt $G(P_{i+1}, R^*)$-ból az $x \to P_s x + p_s$ vetítés nem vezet ki, (hiszen $P_s \geqq P_{i+1}$). De $(P_0 - P_{i+1}) x_0 \in G(P_{i+1}, R^*)$, ugyanis $P_{i+1}(P_0 - P_{i+1}) x_0 = 0$ és $P_{i+1} \leqq P_k \in \mathscr{P}_k$ $(k = 0, \ldots, i)$ esetén

$$\|P_k(P_0 - P_{i+1}) x_0\|^2 = \|(P_k - P_{i+1}) x_0\|^2 = \|P_k x_0\|^2 - \|P_{i+1} x_0\|^2 \leqq$$

$$\leqq R^2 - R_k^2 - \|P_{i+1} x_0\|^2 = R^{*2} - R_k^2.$$

Tehát $P_s(P_0-P_{i+1})x_0+p_s=(P_s-P_{i+1})x_0+p_s$ is benne van $G(P_{i+1}, R^*)$-ban. így

$$\|P_i[(P_s-P_{i+1})x_0+p_0]\|^2 \leqq R^{*2}-R_i^2,$$

azaz

$$\|P_i(P_s x_0+p_s)-P_{i+1}x_0\|^2 \leqq R^2-\|P_{i+1}x_0\|^2-R_i^2,$$

ahonnan az (1) egyenlőtlenséget kapjuk.

A Lemma igazolásához most már csak azt kell belátnunk, hogy ha $R \geqq R_{j-1}$ elég nagy, akkor (1) fennáll $i=j-1$-re bármely $x_0 \in G(P_j, R)$-re és bármely $P_{j-1} \in \mathscr{P}_{j-1}$-re, amelyre $P_{j-1} \geqq P_j$.

Ha $P_s \geqq P_{j-1}$, akkor $P_{j-1}(P_s x_0+p_s)=P_{j-1}x_0$ miatt készen vagyunk.

Ha $P_s \ngeqq P_{j-1}$, akkor P_s és P_{j-1} képterének a metszete $h-j$ dimenziós, ezért egyenlő P_j képterével.

Megmutatjuk, hogy $P_{j-1}P_s$ kontrakció a P_j operátor nullterén. Ehhez elég belátni, hogy ha $x \neq 0$, $P_j x=0$, akkor $\|P_{j-1}P_s x\|<\|x\|$. Ez utóbbi egyenlőtlenségben egyenlőséget feltételezve $\|P_s x\|=\|x\|$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $P_s x=x$. Megismételve ezt a gondolatmenetet, nyerjük, hogy $P_{j-1}x=x$. Tehát x benne van P_s és P_{j-1} képterében, vagyis P_j képterében. Azonban $x \neq 0$ és $P_j x=0$ miatt ez ellentmondás. Ez azt mutatja, hogy $P_{j-1}P_s$ valóban kontrakció, azaz létezik $0<q<1$, hogy ha $P_j x=0$, akkor $\|P_{j-1}P_s x\| \leqq q\|x\|$. Ezek után válasszuk meg $r_j=r_j(P_s, P_{j-1}, P_j)$-t úgy, hogy

$$\text{(2)} \qquad qR+R_1 \leqq \sqrt{R^2-R_{j-1}^2}, \quad \text{ha} \quad R \geqq r_j.$$

(Ez lehetséges, mert R-rel osztva mindkét oldalt, $R \to \infty$ esetén a bal oldal q-hoz, a jobb oldal pedig 1-hez tart.)

Ha most $R \geqq r_j$ és $x_0 \in G(P_j, R)$, akkor

$$\|P_{j-1}(P_s x_0+p_s)\| \leqq q\|x_0\|+\|p_s\| \leqq qR+R_1,$$

tehát (2) miatt (1) teljesül $i=j-1$-re. Legyen ezek után R_j az $r_j=r_j(P_s, P_{j-1}, P_j)$ értékek P_s, P_{j-1}, P_j választásától független maximuma. Ekkor azt kapjuk, hogy $R \geqq R_j$ esetén (1) fennáll

$$i=j-1\text{-re,} \quad \text{ha} \quad P_j \in \mathscr{P}_j, \quad x_0 \in G(P_j, R), \quad P_j \leqq P_{j-1} \in \mathscr{P}_{j-1},$$

$$s \in S \quad \text{és} \quad P_s \geqq P_j.$$

Ezzel a Lemma bizonyítása teljes.

Páles Zsolt

Megoldották: Tardos Gábor és Szenes András.

A 3. feladat megoldása

Legyen a körök közös középpontja O, jelölje r, illetve R a k, illetve a K kör sugarát. Értelmezzük az F függvényt a k körlap belsején a következőképpen: Ha P az O ponttól ϱ távolságra van, akkor legyen

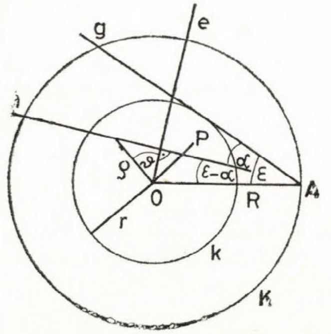
$$F(P)=f(\varrho)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{R^2-\varrho^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2-r^2}{r^2-\varrho^2}}.$$

Ha T a k belsejének mérhető részhalmaza, akkor legyen

$$m(T) = \int_T F(P)dP.$$

Az m halmazfüggvény nyilvánvalóan mérték a k belsején. Megmutatjuk, hogy m rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:

Ha g és h a K kör A pontján átmenő félegyenesek, g érinti, h pedig metszi k-t és egymással α szöget zárnak be, akkor a g és h félegyenesek által meghatározott szögtartomány a k belsejéből egy olyan körszeletet metsz ki, amelynek az m mértéke α.



Jelöljük T-vel az imént leírt körszeletet és számítsuk ki $m(T)$-t szukcesszív integrálással. Legyen e az O pontból kiinduló h-ra merőleges félegyenes. Vezessünk be a síkon egy polárkoordináta rendszert, amelynek tengelye e. Ekkor a $P=P(\varrho, \varphi)$ pont akkor tartozik T-hez, ha $d \leqq \varrho \leqq r$, $-\vartheta \leqq \varphi \leqq \vartheta$, ahol $\varrho \cos \vartheta = d$, $d = R \sin(\varepsilon-\alpha)$ a h-nak O-tól való távolsága, ε az AO és g félegyenesek által bezárt szög. Ezek alapján

$$m(T) = \int_T F(P)\,dP = \int_d^r \int_{-\arccos(d/\varrho)}^{\arccos(d/\varrho)} f(\varrho)\varrho\, d\varphi\, d\varrho =$$

$$= \int_d^r 2f(\varrho)\varrho \arccos(d/\varrho)\, d\varrho = \int_{R\sin(\varepsilon-\alpha)}^r 2f(\varrho)\varrho \arccos\left(\frac{R\sin(\varepsilon-\alpha)}{\varrho}\right) d\varrho.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy bármely $0 \leqq \alpha \leqq 2\varepsilon$ esetén

$$\int_{R\sin(\varepsilon-\alpha)}^r 2f(\varrho)\varrho \arccos\left(\frac{R\sin(\varepsilon-\alpha)}{\varrho}\right) d\varrho = \alpha.$$

$R \sin(\varepsilon-\alpha) = t$ helyettesítés után ez azt jelenti, hogy

$$\int_t^r 2f(\varrho)\varrho \arccos(t/\varrho)\, d\varrho = \varepsilon - \arcsin(t/R),$$

ha $-r \leqq t \leqq r$. Ez az összefüggés $t=r$ esetén nyilvánvalóan fennáll, ezért elegendő azt belátnunk, hogy a jobb és baloldal t szerinti deriváltja azonos:

$$\int_t^r \frac{2f(\varrho)\varrho}{\sqrt{\varrho^2-t^2}}\, d\varrho = \frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}, \quad -r \leqq t \leqq r.$$

De

$$\int_t^r \frac{2f(\varrho)\varrho}{\sqrt{\varrho^2-t^2}}\,d\varrho = \int_t^r \frac{2}{\pi}\frac{\varrho}{R^2-\varrho^2}\sqrt{\frac{R^2-r^2}{(r^2-\varrho^2)(\varrho^2-t^2)}}\,d\varrho =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2-t^2}\frac{\varrho^2-t^2}{r^2-\varrho^2}}\right]_{\varrho=t}^{\varrho=r} = \frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}.$$

A bebizonyított állításból, a mérték additivitása alapján, rögtön következik az is, hogy ha egy szögtartomány mindkét szárának van közös pontja k-val, csúcsa K-n van és a nyílásszöge α, akkor a k belsejéből kimetszett rész m mértéke éppen α. (Mivel minden ilyen alakzat két körszelet különbségeként áll elő.)

Legyenek ezek után adott a k körnek egy tetszőleges, konvex szögtartományokkal történő lefedése. Az egyes szögtartományok nyílásszöge legyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, a k kör belsejéből kimetszett alakzatokat pedig jelölje rendre $T_1, \ldots, T_n$. Ekkor az imént igazoltak szerint $\alpha_i \geqq m(T_i)$, $i=1, \ldots, n$. (Egyenlőség itt csak akkor állhat, ha az i-edik szögtartomány mindkét szárának van k-val közös pontja.) Tehát a mérték szubadditivitása szerint

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n \geqq m(T_1)+\ldots+m(T_n) \geqq m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\Big) = 2\varepsilon,$$

(hiszen $\bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$ kiadja a k kör belsejét és a k belsejének m mértéke éppen 2ε). Ezzel a megoldás teljes.

Megoldották: Erdős László, Ódor Tibor, Szabó László.

Részben megoldották: Beleznay Ferenc, Hegedűs Péter, Károlyi Gyula, Montágh Zsolt, Szabó Endre, Tardos Gábor.

A 4. feladat megoldása

A következő általánosabb állítást bizonyítjuk:

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy S részhalmazát k-kitüntetettnek nevezzük, ha bármely k különböző eleme relatív prím. Akkor, ha n elég nagy és S elemeinek összege maximális, akkor S bármely elemének legfeljebb két különböző prímosztója van.

$k=2$ esetén kapjuk a kitűzött feladat állítását.

Először egy lemmát bizonyítunk.

Lemma. *Legyen $\varepsilon>0$, $0<c<1$. Ekkor van olyan $N=N(\varepsilon, c)$, hogy bármely $n>N$ és $x<\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{k-1}}\,(1-\varepsilon)\sqrt{n}$ esetén az $\left(c\dfrac{n}{x}, \dfrac{n}{x}\right)$ intervallumba legalább $(k-1)\pi\left(\dfrac{x}{a}\right)+2$ prím esik.*

Bizonyítás. Először is világos, hogy ha $x<x_0(\varepsilon, c, k)$, akkor az állítás igaz minden elég nagy n-re.

Legyen $\varepsilon_1 = \frac{1-c}{3}\varepsilon$; akkor a prímszámtétel szerint van olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy bármely $m > n_0$-ra

$$(1) \qquad (1-\varepsilon_1)\frac{m}{\log m} < \pi(m) < (1+\varepsilon_1)\frac{m}{\log m}.$$

Legyen $n > n_0/c$ és $n_0 < x < cn/n_0$, akkor (1) igaz $m = c\frac{n}{x}$, $\frac{n}{x}$ és $\frac{x}{c}$ mindegyikére. Így a lemma bizonyításához elegendő belátni, hogy

$$(2) \quad (1-\varepsilon_1)\frac{n/x}{\log n - \log x} - (1+\varepsilon_1)\frac{c\,(n/x)}{\log n - \log x + \log c} > 2 + (1+\varepsilon_1)\frac{((k-1)/c)x}{\log x - \log c}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy (2)-nél $n > n_1 = n_1(\varepsilon)$-ra még erősebb az

$$(3) \qquad n(1-c)(1-\varepsilon) > \frac{k-1}{c}\frac{x^2}{\log x}(\log n - \log x)$$

egyenlőtlenség. A továbbiakban (3)-at bizonyítjuk.

1. eset. Legyen $\delta < \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}$ és $n^{1/2-\delta} < x < \sqrt{\frac{c(1-c)}{k-1}}(1-\varepsilon)\sqrt{n}$. A jobb oldalból

$$\frac{k-1}{c}x^2 < (1-c)(1-\varepsilon)^2 n$$

közvetlenül következik, ebből pedig

$$(1-c)(1-\varepsilon)n > \frac{k-1}{c}x^2\frac{1}{1-\varepsilon} > \frac{k-1}{c}\frac{x^2}{\log x}(\log n - \log x),$$

ami éppen (3). Elég nagy n-re $\sqrt{\frac{c(1-c)}{k-1}}(1-\varepsilon)\sqrt{n} < \frac{cn}{n_0}$, így ebben az esetben a lemma állítása igaz.

2. eset. Legyen $x > \max\{n_0, n_1, e^{\frac{k-1}{c(1-c)}}\}$ és

$$(4) \qquad n(1-\varepsilon) > x^2\left(\log n - \frac{k-1}{c(1-c)}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy (4)-ből következik (3) és $x < (1-\varepsilon_2)\sqrt{\frac{n}{\log n}}$. Tekintettel arra, hogy elég nagy n-re $\sqrt{\frac{n}{\log n}}(1-\varepsilon_2) < \frac{cn}{n_0}$, így ebben az esetben is igazoltuk a lemmát.

Mivel az 1. és 2. eset és a bizonyítás levezetőjében leírt feltételek kimerítik x összes lehetséges értékét, így a lemmát bebizonyítottuk.

A feladat állításának bizonyítása. A feltételekből nyilvánvaló, hogy tetszőleges prím az S-nek legfeljebb $k-1$ elemét oszthatja.

Tegyük fel, hogy van olyan $t \in S$, melynek legalább három különböző prímosztója van, azaz $t = u^\alpha v^\beta w^\gamma r$, $u < v < w$ prímek; $\alpha, \beta, \gamma > 0$ és $r \geqq 1$ egészek.

Először is nyilvánvaló, hogy $u \leqq \sqrt{\frac{c(1-c)}{k-1}}(1-\varepsilon)\sqrt{n}$ teljesül alkalmas ε-ra, hacsak n elég nagy.

a)
$$v \leqq \sqrt{\frac{c(1-c)}{k-1}}(1-\varepsilon)\sqrt{n}.$$

Ekkor az $I_1 = \left(\frac{cn}{u}, \frac{n}{u}\right)$ illetve az $I_2 = \left(c\frac{n}{v}, \frac{n}{v}\right)$ intervallumokba eső prímeket legfeljebb az $\left(u, \frac{u}{c}\right) \leqq \left(1, \frac{u}{c}\right)$, illetve a $\left(v, \frac{v}{c}\right) \leqq \left(1, \frac{v}{c}\right)$ intervallumokba eső prímekkel szorozhatjuk meg, hogy n-nél nem nagyobb számot kaphassunk. Ha c-t 1-hez elég közel választjuk, akkor I_1-, illetve I_2-beli prímek hatványai nem lehetnek S-ben. Valóban $\left(c\frac{n}{v}\right)^2 \geqq \frac{c(k-1)}{(1-c)(1-\varepsilon)^2} n > n$, hacsak c elég közel van 1-hez. Így a lemma szerint I_1-ben van két olyan prím, amelyik önmaga eleme S-nek (különben S nem lenne maximális). Hasonló igaz I_2-re is. (Ez a négy prím nem feltétlenül különböző, mert $I_1 \cap I_2$ nem feltétlenül üres.)

Legyenek $p_1 \in I_1$ és $p_2 \in I_2$, $p_1 \neq p_2$ a fenti tulajdonságú prímek. Ekkor S-ben kicserélve t, p_1, p_2-t $w^\gamma r, p_1 u, p_2 v$-re, k-kitüntetett halmazt kapunk és

$$up_1 + vp_2 + w^\gamma r \geqq uc(n/u) + vc(n/v) + w^\gamma r > 2cn > t + p_1 + p_2,$$

hacsak $1 > c > 11/12$ és n elég nagy. Ebben az esetben tehát S nem lehet maximális.

b)
$$w > v > \sqrt{\frac{c(1-c)}{k-1}}(1-\varepsilon)\sqrt{n}.$$

Válasszunk $c = 1/2$-et, ekkor $wv > \frac{(1-\varepsilon)^2}{4(k-1)} n > \frac{n}{5(k-1)}$, hacsak ε elegendően kicsi. Így $u < 5(k-1)$. Válasszuk meg most a $\delta > 0$ egészet és $\eta > 0$-t úgy, hogy minden $x \leqq 5(k-1)$-re

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{4(k-1)} - \eta > \frac{1}{x^\delta}; \tag{5}$$

ez nyilván lehetséges és η, δ független n-től. Legyen most n olyan nagy, hogy $n > (5(k-1))^\delta > u^\delta$ és az $I_3 = \left((1-\eta)\frac{n}{u^\delta}, \frac{n}{u^\delta}\right)$-ba legalább $(k-1)u^\delta + 1$ prím essen. Ez a prímszámtétel, valamint u, δ és η n-től való függetlensége miatt lehetséges. Így I_3-ban van magányos prím, mondjuk p_3. Cseréljük most ki S-ben t és p_3-at $u^\delta p_3$ és $v^\beta w^\gamma r$-re, így ismét k-kitüntetett halmazt kapunk és

$$u^\delta p_3 + v^\beta w^\gamma r > (1-\eta)u^\delta \frac{n}{u^\delta} + \frac{(1-\varepsilon)^2}{4(k-1)} n > n + \frac{n}{u^\delta} > t + p_3.$$

Ez ismét ellentmond S maximalitásának, így az állítást bebizonyítottuk.

Ódor Tibor megoldása alapján

Megoldották: Ódor Tibor, Tardos Gábor, Szenes András és Törőcsik Jenő.

Részben megoldotta: Elek Gábor.

Az 5. feladat megoldása

A bizonyítás során c_1, c_2 és c_3 csupán F és G fokszámaitól és együtthatóik abszolút értékeinek a maximumától függő számokat fognak jelölni.

Legyen x, y egy tetszőleges, relatív prím egész megoldása az

$$F(X,Y) = G(X,Y) \tag{1}$$

egyenletnek. Meg fogjuk mutatni, hogy $\max\{|x|, |y|\}<c$ egy alkalmas, kívánt tulajdonságú c konstanssal, s ebből azonnal következni fog az állítás. Feltételezhető, hogy $xy\neq 0$, mert ellenkező esetben $(x,y)=1$ miatt $\max\{|x|, |y|\}\leqq 1$. Jelölje F és G fokszámát m, ill. n, és tegyük fel, hogy $m\geqq n$. Legyen $f(X)=F(X, 1)$ és $g(X)=G(X, 1)$. Feltevés szerint F és G relatív prímek, ezért az $f(X)$ és $g(X)$ polinomok közül legalább az egyik nem konstans. Feltételezhető továbbá, hogy egyik sem konstans. Valóban, ha például $f(X)$ konstans, úgy G-ben X^n együtthatóját a-val jelölve $a\neq 0$ adódik. Ekkor pedig (1)-ből $(x,y)=1$ miatt $y|a$ és végül, mivel $F(X,a)-G(X,a)$ nem azonosan zérus polinom, $\max\{|x|, |y|\}<c_1$ következik.

Az F és G relatív prím volta miatt f és g is relatív prímek. Ha tehát f és g rezultánsát R-rel jelöljük, úgy $R\neq 0$. Továbbá $|R|\leqq c_2$. Egy ismert tétel szerint (ld. pl. Rédei: *Algebra*, Budapest, 1954, 196. tétel) léteznek olyan egész együtthatós $A(X)$, $B(X)$ polinomok, melyekre $\deg A<\deg g\leqq n$, $\deg B<\deg f\leqq m$ és $A(X)f(X)+ +B(X)g(X)=R$. Következésképpen léteznek olyan egész együtthatós $B_1(X, Y)$, $A_1(X, Y)$ és $B_2(X, Y)$, $A_2(X, Y)$ homogén polinomok, melyekre

$$A_1(X,Y)F(X,Y)+B_1(X,Y)G(X,Y) = R\cdot X^{m+n-1} \tag{2}$$

és

$$A_2(X,Y)F(X,Y)+B_2(X,Y)G(X,Y) = R\cdot Y^{m+n-1}. \tag{3}$$

Ekkor viszont (1), (2), (3) és $(x,y)=1$ következtében $F(x,y)$ és $G(x,y)$ 0-tól különbözők és osztói R-nek. Ha tehát $F(x,y)=G(x,y)=d$, úgy $d|R$ és ezért $|d|\leqq c_2$. Ennélfogva x/y gyöke a

$$H_\alpha(x) = d^{m-n}f^n(x)-g^m(x)$$

egész együtthatós polinomnak, mely nem azonosan zérus, mivel f és g relatív prímek. Ekkor viszont Rolle tétele következtében $\max\{|x|, |y|\}<c_2$, amiből a $c=\max\{c_1, c_3\}$ választás mellett adódik a bizonyítandó állítás.

Erdős László megoldása alapján

Megoldották: Erdős László, Mócsy Miklós, Szabó Csaba, Szabó Endre, Szenes András, Törőcsik Jenő.

Részeredményeket értek el: Elek Gábor, Károlyi Gyula, Ódor Tibor, Tardos Gábor.

Megjegyzések:

1. Fenti bizonyítás során c_1, c_2, c_3 és c könnyen kifejezhetők F és G fokszámainak, valamint együtthatóik abszolút értékei maximumának explicit függvényeként.
2. A feladat állításának messzemenő általánosításai és jelentős élesítései találhatók J. H. Evertse, K. Győry (a kitűző), T. N. Shorey és R. Tijdeman „Equal values of binary forms at integral points" című, megjelenés alatt levő cikkében.

A. 6. feladat megoldása

Legyen $\varphi \in \operatorname{Aut} G$. Ha φ-nek van fixpontja $(e \neq a \in G$ és $\varphi(a) = a)$, úgy G ciklikus vagy a G-nek valódi részcsoportjára $H = \varphi(H)$.

Ha φ fixpontmentes, úgy könnyen igazolható, hogy G-nek van olyan $S_p p$-Sylow részcsoportja, amire $S_p = \varphi(S_p)$. (Lásd pl. D. Gorenstein: *Finite Groups*, Harper Row Publishers, New York, Evanston and London, 335. old., Theorem 1.2.) Így G p-csoport, vagy van olyan H valódi részcsoportja, amire

$$H = \varphi(H).$$

Ha G p csoport, úgy $z(G)$ centruma nem az egységalcsoport. De $z(G)$ invariáns minden $\varphi \in \operatorname{Aut} G$-re, ezért G szükségképpen Abel csoport kell, hogy legyen.

Abel csoportban a p (prím) rendű elemek minden $\varphi \in \operatorname{Aut} G$-re invariáns részcsoportot alkotnak, ezért G vagy egy elemű csoport, vagy egy adott p-re minden eleme p rendű, azaz G p rendű ciklusok direkt szorzata.

Ha $G = \langle e \rangle$, úgy nyilván kielégíti a feladat feltételeit.

Legyen $G = \prod_{i=1}^{n} C(p)$, azaz n db. p rendű ciklikus csoport direkt szorzata. Tekinthetjük G-t mint a p elemű M_p test fölötti n-dimenziós vektorteret és a $\varphi \in \operatorname{Aut} G$-ket mint ezen vektortér önmagába való reguláris transzformációit. A $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ esetén, a H részcsoport pontosan akkor teljesíti a $H \nsubseteq \varphi(H)$ feltételt, ha a H nem invariáns altere a φ reguláris transzformációnak. Ha a φ karakterisztikus polinomja irreducibilis, úgy φ-nek nincs nem triviális invariáns altere. Ugyanakkor M_p fölött létezik n-edfokú irreducibilis polinom. Minden polinomhoz létezik olyan transzformáció, aminek ő a karakterisztikus polinomja, így $G = \prod_{i=1}^{n} C(p)$-nek van olyan automorfizmusa, ami kielégíti a feladat feltételeit.

Megoldották: Bohus Géza, Elek Gábor, Tardos Gábor.
Részben megoldották: Buczolich Zoltán, Király Zoltán és Törőcsik Jenő.

A 7. feladat megoldása

a) Ha p_1/p_2 racionális, akkor van olyan $m, n \in \mathbf{N}$, hogy $np_1 = mp_2$. Ekkor például az

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = kp_i, \quad k \in \mathbf{Z} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

függvények legkisebb pozitív periódusa p_i. Ugyanakkor f_1, f_2 s így $f_1 - f_2$ is periodikus $np_1 = mp_2 = p$ szerint.

b) Ha p_1/p_2 irracionális, akkor legyen $i, j = 1,2$-re

$$f_i(x) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{ha } x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Z}, \quad i \neq j; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

f_i jól definiált, mert $x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \alpha_1' p_1 + \alpha_2' p_2$ $(\alpha_i, \alpha_i' \in \mathbf{Z})$ esetén p_1/p_2 racionális, ha $\alpha_i \neq \alpha_i'$, ami ellentmondás, így $\alpha_i = \alpha_i'$ $(i = 1, 2)$.

f_i periodikus p_i szerint, mert

$$f_i(x + p_i) = \begin{cases} \alpha_j = f_i(x), & \text{ha } x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2; \\ 1 = f_i(x), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A definícióból következik, hogy $f_i(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha_i p_i$, így f_i legkisebb pozitív periódusa p_i. f_1-f_2 periodikus p_1+p_2 szerint, mert

$$(f_1-f_2)(x+p_1+p_2)=\begin{cases}(\alpha_2+1)-(\alpha_1+1)=(f_1-f_2)(x), & \text{ha} \quad x=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2;\\ 1-1=(f_1-f_2)(x), & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Szabó Csaba, Szabó Zoltán és Pásztor László megoldása alapján

Megoldották: Bohus Géza, Buczolich Zoltán, Csere Kálmán, Dong Vu Giang, Erdős László, Hajdú Sándor, Károlyi Gyula, Magyar Ákos, Pásztor László, Pluhár András, Sigray István, Szabó Csaba, Szabó Endre, Szabó László, Szabó Zoltán, Szenes András, Tardos Gábor, Törőcsik Jenő.

Részben megoldották: Beleznay Ferenc, Elek Gábor, Hátsági Zsolt, Hetyei Gábor, Ódor Tibor.

A 8. feladat megoldása

Definíció. Jelölje Λ az összes $\lambda_n>\lambda_{n+1}>0$ és $L=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$ feltételeknek eleget tevő sorozatokat. A $\{\lambda_n\}$ sorozatot *intervallumkitöltőnek* nevezzük, ha minden $x\in[0, L]$-hez van olyan $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ sorozat, hogy $x=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n$.

1. Lemma. *Ha egy* $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *sorozatra*

$$\lambda_n \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i \quad (n=1, 2, \ldots)$$

akkor $\{\lambda_n\}$ *intervallumkitöltő.*

Bizonyítás. $x\in[0, L]$ esetén indukcióval definiáljuk az ε_n sorozatot a következőképpen:

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\lambda_i+\lambda_n<x;\\ 0, & \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\lambda_i+\lambda_n\geqq x.\end{cases}$$

Minden olyan n-re, amelyre $\varepsilon_n=0$,

$$0\leqq x-\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\lambda_i\leqq x-\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\lambda_i\leqq\lambda_n,$$

így ha végtelen sok ilyen n létezik, akkor $x=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\lambda_i$. Ha csak véges sok ilyen n-re teljesül, akkor a legnagyobb ilyen n-re

$$x-\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\lambda_i\leqq\lambda_n\leqq\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i=\sum_{i=n+1}^{\infty}\varepsilon_i\lambda_i,$$

ahonnan

$$x \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i,$$

tehát a lemma állítása ekkor is teljesül.

2. Lemma. $1 > p \geqq \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$ *esetén a*

$$p,\ p^2,\ p^3, \ldots$$

és minden $N \in \mathbf{N}$*-re a*

$$p, p^2, \ldots, p^{N-2}, p^{N-1}, p^{N+1}, p^{N+2}, \ldots$$

sorozatok intervallumkitöltőek.

Bizonyítás. Az 1. Lemma szerint a fenti sorozatok intervallumkitöltőek, ha a

$$p_n \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} p^i \quad \text{minden } n \in \mathbf{N}\text{-re,}$$

illetve a

$$p^{n-1} \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} p^i \quad \text{minden } n \in \mathbf{N}\text{-re}$$

feltételek teljesülnek. Az első feltétel az $1 \leqq \dfrac{p}{1-p}$, a második az $1 \geqq \dfrac{p^2}{1-p}$ feltétellel ekvivalens, így $1 > p \geqq \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$ esetén mindkettő teljesül.

3. Lemma. *Legyenek A és B nem üres, diszjunkt halmazok, egyesítésük* $\mathbf{N}$ *és* $1 > p \geqq \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$. *Ekkor léteznek olyan A' és B' nem üres halmazok, amelyekre $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ és*

$$\sum_{i \in A'} p^i = \sum_{i \in B'} p^i. \tag{1}$$

Bizonyítás. Legyen $L = \dfrac{p}{p-1}$, $x = \sum_{i \in A} p^i$. Válasszunk olyan $N \in A$-t, amelyre $x < L - p^N$. Ha A véges, akkor N lehet az A legnagyobb eleme, egyébként bármely, elég nagy A-beli elem megfelel. Mivel a 2. Lemma szerint a

$$p, p^2, \ldots, p^{N-2}, p^{N-1}, p^{N+1}, p^{N+2}, \ldots$$

sorozat intervallumkitöltő, van olyan $C \subseteq \mathbf{N} \setminus \{N\}$ halmaz, hogy

$$\sum_{i \in C} p^i = x = \sum_{i \in A} p^i.$$

Legyen $A' = A \setminus C$, $B' = C \setminus A$. (1) nyilván teljesül, és $N \in A'$ miatt A' nem üres. Ebből (1) miatt kapjuk, hogy B' sem üres.

A feladat állításának bizonyítása. Bármely $c \in \mathbf{R}$-re az $a_n' = a_n - cp^n$ összefüggéssel definiált sorozat is eleget tesz az a_n-re kirótt feltételeknek. Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem teljesül. Ekkor választhatunk olyan c valós számot, amelyre van olyan n, hogy $a'_n>0$ és van olyan n is, hogy $a'_n<0$. Legyen

$$A = \{n\in\mathbf{N}\colon a'_n > 0\},\ B = \{n\in\mathbf{N};\ a'_n \leqq 0\}.$$

Alkalmazva a 3. Lemmát, a kapott A' és B' halmazok felhasználásával legyen

$$e_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n\in A'; \\ -1, & \text{ha } n\in B'; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i p^i = \sum_{i\in A'} p^i - \sum_{i\in B'} p^i = 0,$$

de

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i a'_i = \sum_{i\in A'} a'_i - \sum_{i\in B'} a'_i > 0.$$

A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy a'_n azonosan nulla.

Szenes András megoldása alapján

Megoldották: Szenes András, Szabó Zoltán, Elek Gábor, Beleznay Ferenc, Mócsy Miklós, Bohus Géza, Tardos Gábor.

Részben megoldották: Hetyei Gábor, Szabó Endre, Buczolich Zoltán.

A 9. feladat megoldása

Először azt igazoljuk, hogy ha f kielégíti az egyenletet, akkor létezik olyan $\varphi\colon D\to\mathbf{C}$, hogy

(1) $$f(z,w) = \varphi(z\bar{w}) \quad (z,w)\in D\times B,$$

(2) $$\varphi\left(\frac{t(1-s)+s(1-\bar{s})}{t\bar{s}(1-s)+1-\bar{s}}\right) = \varphi(t)+\varphi(s) \quad t,s\in D.$$

Legyen ugyanis $(z,w)\in D\times B$, $b=0$ és $a\in\mathbf{C}$ olyan, hogy $a^2=\bar{w}$. Ekkor az f-re vonatkozó függvényegyenletből

(3) $$f(z\bar{w},1) = f(z,w)+f(0,1)$$

következik. Ebből a $z=0$, $w=1$ helyettesítésekkel $f(0,1)=0$ adódik, így a

$$\varphi(z) = f(z,1) \quad z\in D$$

módon definiált $\varphi\colon D\to\mathbf{C}$ függvénnyel — (3) miatt — teljesül (1).

Az f-re vonatkozó függvényegyenletből — (1) figyelembevételével — φ-re az alábbi egyenlet adódik:

(4) $$\varphi\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\cdot\frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{b\bar{w}+a}\right) = \varphi(z\bar{w})+\varphi\left(\frac{b}{\bar{a}}\cdot\frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{b\bar{w}+a}\right); \quad \begin{matrix}(z,w)\in D\times B,\\ |a|^2 = 1+|b|^2.\end{matrix}$$

Legyen $t, s \in D$. Akkor (4)-ből az

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-|s|^2}}, \quad b = as, \quad w = \frac{1-s}{1-\bar{s}}, \quad z = tw$$

helyettesítésekkel — mivel ekkor $\dfrac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{b\bar{w}+a} = 1$ — (2) következik.

Ezek után legyen $A = \{u \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} u > 0\}$ és

$$\psi(u) = \varphi\left(\frac{u-1}{u+1}\right) \quad u \in A. \tag{5}$$

Ha $u, v \in A$, akkor (2)-ből a $t = \dfrac{u-1}{u+1}$, $s = \dfrac{v-1}{v+1}$ helyettesítésekkel

$$\psi(u \operatorname{Re} v + i \operatorname{Im} v) = \psi(u) + \psi(v) \quad u, v \in A \tag{6}$$

következik. Most kimutatjuk, hogy

$$\psi(u) = \psi(\operatorname{Re} u) \quad u \in A. \tag{7}$$

Legyen ugyanis $x \in]0, +\infty[$, $y \in \mathbf{R}$. Ekkor, (6)-ot felhasználva, egyrészt

$$\psi(1+2iy) = \psi\big((1+iy)1+iy\big) = \psi(1+iy) + \psi(1+iy) = 2\psi(1+iy).$$

Másrészt — ismét (6) miatt —

$$\begin{aligned}\psi(1+2iy) &= \psi(2) + \psi(1+2iy) - \psi(2) = \psi(2+2iy) - \psi(2) = \\ &= \psi\big((1+iy)\cdot 2\big) - \psi(2) = \psi(1+iy) + \psi(2) - \psi(2) = \psi(1+iy).\end{aligned}$$

Ezért $\psi(1+iy) = 0$ és így (6)-ból

$$\psi(x+iy) = \psi(x \cdot 1 + iy) = \psi(x) + \psi(1+iy) = \psi(x)$$

következik.

Legyen végül $L(p) = \psi(p)$, $p \in]0, +\infty[$. Ekkor (6)-ból nyilvánvalóan adódik, hogy

$$L(pq) = L(p) + L(q) \quad p, q \in]0, +\infty[.$$

Másrészt — (1), (5) és (7) miatt —

$$f(z, w) = \varphi(z\bar{w}) = \psi\left(\frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}}\right) = \psi\left(\operatorname{Re}\frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}}\right) = \psi\left(\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\right) = L\left(\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\right)$$

minden $(z, w) \in D \times B$ esetén.

Megoldották: Csere Kálmán, Elek Gábor, Hetyei Gábor, Károlyi Gyula, Mócsy Miklós, Ódor Tibor, Szenes András, Tardos Gábor.

Részben megoldották: Bohus Géza, Szabó László.

A 10. feladat megoldása

1. megoldás. Tekintsük $\mathbf{R}$-ben a $\sim = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x - y \in \mathbf{Q}\}$ ekvivalencia-relációt, amely az $\mathbf{R} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{Q}_\gamma$ diszjunkt osztályozást indukálja. Világos, hogy minden

$\mathbf{Q}_\gamma$ ekvivalencia-osztály sűrű $\mathbf{R}$-ben, ezért $A\cap\mathbf{Q}_\gamma$ és $B\cap\mathbf{Q}_\gamma$ egyaránt megszámlálhatóan végtelen halmazok. Így minden index esetén létezik közöttük

$$\varphi_\gamma\colon A\cap\mathbf{Q}_\gamma \to B\cap\mathbf{Q}_\gamma$$

bijekció — a kiválasztási axiómát feltételezve. Ekkor $\varphi_\gamma(x)\sim x$ minden $\gamma\in\Gamma$, $x\in A\cap\mathbf{Q}_\gamma$ esetén.

Legyen $\mathbf{Q}=\{q_1, q_2, \ldots\}$ a racionális számok egy sorozatba-rendezése és tekintsük az

$$A_i = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{x\in A\cap\mathbf{Q}_\gamma\colon \varphi_\gamma(x)-x = q_i\},$$

$$B_i = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{\varphi_\gamma(x)\colon x\in A\cap\mathbf{Q}_\gamma, \varphi_\gamma(x)-x = q_i\}$$

halmazokat ($i\in\mathbf{N}$). Az értelmezésből látható, hogy

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{ill.} \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

páronként diszjunkt halmazokra való felbontások és $B_i=A_i+q_i$ minden $i\in\mathbf{N}$-re.

Szabó László megoldása alapján

2. megoldás. Jelölje σ az $\mathbf{R}$ részhalmazai között értelmezett megszámlálhatóan átdarabolhatóság relációját. Könnyen ellenőrizhető, hogy σ transzláció-invariáns ekvivalencia-reláció, amelyre $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)$ teljesül, ha S_n, ill. T_n páronként diszjunkt halmazok ($n\in\mathbf{N}$) és $S_n\sigma T_n$ minden $n\in\mathbf{N}$-re.

Vegyük most észre, hogy minden intervallum felbomlik megszámlálhatóan végtelen sok nyílt intervallum és egy megszámlálhatóan végtelen halmaz diszjunkt egyesítésére. Így — tekintettel a fenti megjegyzésekre — feltehetjük, hogy $A=]0, a[$, $B=]0, b[$, $0<a\leqq b$.

Tekintsük most $\mathbf{R}$-ben a $\sim=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\colon x-y\in\mathbf{Q}\}$ ekvivalencia-relációt. Ennek ekvivalencia-osztályai sűrűek $\mathbf{R}$-ben, ezért — a kiválasztási axiómát feltéve — létezik olyan $X\subset]0, a/3[$ halmaz, amely minden osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Legyen ezután

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}\cap]0, 2a/3[, \quad \mathbf{Q}_B = \mathbf{Q}\cap]0, b-a/3[$$

és

$$A^* = \bigcup_{q\in\mathbf{Q}_A} (X+q), \quad B^* = \bigcup_{q\in\mathbf{Q}_B} (X+q),$$

ahol $X+q$ az X halmaz $q\in\mathbf{R}$ számmal való eltoltját jelöli. Világos, hogy A^* és B^* egyaránt X-szel kongruens halmazok megszámlálhatóan végtelen diszjunkt egyesítése, azaz $A^*\sigma B^*$. Ugyancsak könnyen ellenőrizhetőek az alábbi tartalmazások: $[a/3, 2a/3]\subset A^*\subset A$, $[a/3, b-a/3]\subset B^*\subset B$. Legyen

$$A^- =]0, a/3[\setminus A^*, \quad A^+ =]2a/3, a[\setminus A^*,$$

$$B^- =]0, a/3[\setminus B^*, \quad B^+ =]b-a/3, b[\setminus B^*.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy $B^-=A^-$ és $B^+=A^++(b-a)$, tehát az

$$A = A^-\cup A^*\cup A^+ \quad \text{és} \quad B = B^-\cup B^*\cup B^+$$

diszjunkt felbontások az állítást igazolják.

Sigray István megoldása alapján

Megoldották: Bohus Géza, Buczolich Zoltán, Elek Gábor, Hátsági Zsolt, Hetyei Gábor, Károlyi Gyula, Király Zoltán, Magyar Ákos, Pluhár András, Sigray István, Szabó Endre, Szabó László, Szabó Zoltán, Szenes András, Tardos Gábor, Zubor Zoltán.

Részben megoldották: Beleznay Ferenc, Pásztor László, Stipsicz András, Szabó Csaba.

Megjegyzések:

1. A feladat állításának egyenes következménye az a nevezetes tény, hogy nem létezik az **R** összes részhalmazán értelmezett σ-additív transzláció-invariáns mérték, amelyre az egységintervallum 1 mértékű lenne.

2. Az első bizonyítás közvetlenül átvihető nem diszkrét szeparábilis Hausdorff topologikus Abel csoportok nem üres belsejű részhalmazaira.

3. A mértékelmélet szokásos eszközeivel az állítás kiterjeszthető Lebesgue-mérhető halmazokra a következőképpen: bármely két $A, B \subseteq \mathbf{R}$ pozitív Lebesgue-mértékű halmaz megszámlálhatóan majdnem átdarabolható egymásba, azaz van olyan $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, ill. $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ páronként diszjunkt halmazokra való felbontásuk, hogy A_0 és B_0 nulla mértékűek, míg A_i és B_i kongruens minden $i \in \mathbf{N}$-re.

4. Az előző megjegyzés állítása nem élesíthető a nulla mértékű halmazok elhagyásával, ugyanis egy első Baire-kategóriájú halmazt nem lehet megszámlálhatóan átdarabolni második Baire-kategóriájúba — amint Elek Gábor észre is vette —, viszont pozitív Lebesgue-mértékű halmazokra vannak ilyen példák.

A 11. feladat megoldása

Legyen $C^\infty(E)$ az $E \to \mathbf{R}$ differenciálható ($\equiv C^\infty$-osztályú) függvények gyűrűje és jelölje $\mathfrak{X}(E)$, ill. $\mathfrak{X}_V E$ az E fölötti vektormezők, ill. vertikális vektormezők $C^\infty(E)$-modulusát. Nevezzünk $V\xi$-beli *pszeudokonnexió*nak egy olyan

$$D\colon \mathfrak{X}_V E \times \mathfrak{X}_V E \to \mathfrak{X}_V E, \quad (Z, W) \mapsto D_Z W$$

leképezést, amely rendelkezik a lineáris konnexiók formális tulajdonságaival: Z-ben $C^\infty(E)$-lineáris, W-ben $\mathbf{R}$-lineáris és deriváció $\big(D_Z fW = (Zf)W + fD_Z,\ f \in C^\infty(E)\big)$. Tegyük föl, hogy $\mathring{D}$ olyan pszeudokonnexió, amelyre

$$\forall Z, W \in \mathfrak{X}_V E\colon\ \mathring{D}_Z W - D_W Z = [Z, W]$$

és definiáljuk a

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(E) \times \mathfrak{X}_V E \to \mathfrak{X}_V E, \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

leképezést a

$$\nabla_X Y := \mathring{D}_{vX} Y + v[hX, Y]$$

előírással. Ekkor ∇ *lineáris konnexió:* közvetlenül látható, hogy X-ben és Y-ban $\mathbf{R}$-lineáris; $\forall f \in C^\infty(E)$:

$$\nabla_X fY = fD_{vX} Y + (vX)fY + fv[hX, Y] + v(hX)fY =$$

$$= f\nabla_X Y + (vX + hX)fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

(alkalmazva a pontonkénti linearitást és azt, hogy $vY = Y$); végül hasonlóan egyszerű számolás mutatja $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ teljesülését. Belátjuk, hogy ∇ eleget tesz a kívánt összefüggésnek. — Valóban,

$$\nabla_X vY - \nabla_Y vX = \mathring{D}_{vX} vY - \mathring{D}_{vY} vX + v[hX, vY] - v[hY, vX] = [vX, vY] + v[hX, vY] -$$
$$- v[hY, vX] = v([vX, vY] + [hX, vY] - [hY, vX]) =$$
$$= v([X, Y] - [hX, hY]) = v[X, Y] - v[hX, hY].$$

Annak igazolása van még hátra, hogy a D „kisegítő" pszeudokonnexió csakugyan létezik. Ezt egyszerű lokális konstrukcióval mutatjuk meg. Tegyük föl, hogy $\dim B = n$, rang $\xi = r$. A vektornyaláb lokális trivialitása miatt B minden pontjának van olyan U környezete, hogy $\pi^{-1}(U)$ diffeomorf $U \times \mathbf{R}^r$-rel. Ha $\psi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^r$ egy ilyen diffeomorfizmus, $(u^i)_{i=1}^n$ lokálisan koordinátarendszer U-n, $(l^\alpha)_{\alpha=1}^r$ $\mathbf{R}^r$ kanonikus bázisának duálisa, akkor

$$x^i := u^i \circ \pi \quad (1 \leqq i \leqq n), \quad y^\alpha := l^\alpha \circ pr_2 \circ \psi \quad (1 \leqq \alpha \leqq r)$$

lokális koordinátarendszer $\pi^{-1}(U)$-n és közvetlen számolás mutatja, hogy a $\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$ vektormezők lokális bázisát képezik $\mathfrak{X}_V E$-nek. Definiáljuk mármost a $\mathring{D}$ pszeudokonnexiót a

$$\mathring{D}_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = 0 \quad (1 \leqq \alpha, \beta \leqq r)$$

előírással. (Ez a lineáris konnexiók elméletéből jól ismert meggondolás folytán lehetséges.) Ekkor tetszőleges $Z = Z^\alpha \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $W = W^\beta \dfrac{\partial}{\partial y^\beta}$ $\pi^{-1}(U)$ fölötti vektormezőre

$$\mathring{D}_Z W = Z^\alpha \frac{\partial W^\beta}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta},$$

következőleg $\mathring{D}_Z W - \mathring{D}_W Z = [Z, W]$, ami teljessé teszi az érvelést.

Tardos Gábor megoldása alapján

Megoldotta: Tardos Gábor.

A 12. feladat megoldása

Legyen $Y_n = X_n + (1/2) X_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Ekkor Y_n F_n-mérhető, integrálható valószínűségi változó. Továbbá

$$E(Y_{n+1} | F_n) = E\left(X_{n+1} + \frac{1}{2} X_n | F_n\right) = \frac{1}{2} X_n + \frac{1}{2} X_{n-1} + \frac{1}{2} X_n = Y_n$$

minden $n \geqq 2$-re. Tehát $(Y_n, F_n, n = 2, 3, \ldots)$ martingál.

Mivel $\sup_n E|Y_n| \leqq \frac{3}{2} \sup_n E|X_n| < \infty$, így a martingál-konvergencia tétel alapján Y_n 1 valószínűséggel konvergál:

$$\lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega),$$

ha $\omega \in \Omega'$, ahol $P(\Omega') = 1$. Itt Y 1 valószínűséggel véges valószínűségi változó, tehát feltehetjük, hogy $Y(\omega)$ véges, ha $\omega \in \Omega'$.

Belátjuk, hogy $\omega \in \Omega'$-re az $X_n(\omega)$ sorozat is konvergens. Legyen $\omega \in \Omega'$ rögzített és $a_n = X_n(\omega)$. Azt fogjuk igazolni, hogy ha a $b_n = a_n + (1/2)a_{n-1}$ sorozat c-hez konvergál, akkor az a_n sorozat $(2/3)c$-hez konvergál.

Legyen először $c=0$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik N, hogy $|b_n| \leqq \varepsilon/2$, ha $n > N$. Tehát

$$|a_{n+1}| = \left| b_{n+1} - \frac{1}{2} a_n \right| \leqq |b_{n+1}| + \frac{1}{2} |a_n| \leqq \frac{\varepsilon + |a_n|}{2}$$

minden $n \geqq N$-re. Ezt az egyenlőséget az $n = N, \ldots, N+k-1$ értékekre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$|a_{N+k}| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{|a_N|}{2^k} < \varepsilon + \frac{|a_N|}{2^k} < 2\varepsilon,$$

ha k nagyobb egy alkalmas K értéknél. De ekkor $n > N+k$-ra

$$|a_n| < 2\varepsilon.$$

Tehát a_n valóban nullához konvergál.

A $c \neq 0$ esetben a fenti gondolatmenetet az $a'_n = a_n - (2/3)c$ sorozatra alkalmazva az állítást kapjuk.

Elek Gábor megoldása alapján.

Megoldották: Beleznay Ferenc, Bohus Géza, Elek Gábor, Hátsági Zsolt, Károlyi Gyula, Király Zoltán, Sigray István, Szenes András, Tardos Gábor.

Részben megoldotta: Csere Kálmán.

ДОКЛАД О МЕМОРИАЛЬНОМ КОНКУРСЕ ИМЕНИ МИКЛОША ШВЕЙЦЕРА 1985-ГО ГОДА

REPORT ON THE 1985 M. SCHWEITZER MEMORIAL COMPETITION

PROBLEMS OF THE 1985 M. SCHWEITZER MEMORIAL COMPETITION

1. The proper partitions $P_1, \ldots, P_n$ (i.e. partitions consisting of at least two classes) of a finite set S are said to be independent if choosing arbitrarily one class from each partition, their intersection is nonempty. If $P_1, \ldots, P_n$ are independent partitions such that

(1) $$\frac{|S|}{2} < |P_1| \ldots |P_n|$$

holds then prove that $P_1, \ldots, P_n$ is maximal in the sense that $P, P_1, \ldots, P_n$ are independent for any proper partition P of S. Further show that the inequality (1) is not a necessary condition of the maximality in the above sense.

2. Let S be a given finite set of hyperplanes and O be a fixed point in $\mathbf{R}^n$. Prove the existence of a compact set $K \subseteqq \mathbf{R}^n$ containing the point O which is closed under the orthogonal projections onto the hyperplanes of S.

3. Let k and K be concentric circles on a plane such that k is inside K. Assume that the interior of K is covered by a finite set of angular regions having their vertices on K. Prove that the sum of angles of these regions is not less than the angle of sight of k from an arbitrary point of K.

4. A subset S of $\{1, \ldots, n\}$ is said to be admissible if any two of its elements are relatively primes. Prove that if n is sufficiently large and S is such an admissible subset that the sum of the elements of S is maximal then each element of S has at most two distinct prime factors.

5. Let $F(x, y)$ and $G(x, y)$ be nonconstant relatively prime homogeneous polynomials with rational integer coefficients. Show that there exists a constant c depending only on the degrees of F and G and on the maximum of the absolute values of their coefficients so that if x and y are relatively prime integers and $\max\{|x|, |y|\} > c$ then $F(x, y) \neq G(x, y)$.

6. Determine all finite groups G having an automorphism f such that $H \subsetneqq f(H)$ holds for all proper subgroup H of G.

7. Let p_1 and p_2 be positive real numbers. Prove that there exist functions $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ with smallest positive period p_i $(i=1, 2)$ such that $f_2 - f_1$ is also periodic.

8. Let $\frac{2}{\sqrt{5}+1} \leqq p < 1$ and suppose that a real sequence (a_n) has the following property: For all sequences (e_n) having values $-1, 0, 1$, the equality $\sum_{n=1}^{\infty} e_n p^n = 0$ implies $\sum_{n=1}^{\infty} e_n a_n = 0$. Prove that there exists a real number c such that $a_n = cp^n$ for all $n \in \mathbf{N}$.

9. Let $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ and $B = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| = 1\}$. If $f: D \times B \to \mathbf{C}$ satisfies the functional equation

$$f\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}\right) = f(z, w) + f\left(\frac{b}{\bar{a}}, \frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}\right)$$

for all $z \in D$, $w \in B$ and $a, b \in \mathbf{C}$ with $|a|^2 = 1 + |b|^2$ then prove that there exists a function $L:]0, \infty[\to \mathbf{C}$ such that

$$L(pq) = L(p) + L(q)$$

for all $p, q > 0$ and

$$f(z, w) = L\left(\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}\right)$$

for all $z \in D$, $w \in B$.

10. Show that any two intervals $A, B \subseteq \mathbf{R}$ with positive length have disjoint partitions $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ and $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots$ such that A_i and B_i are congruent sets for all $i \in \mathbf{N}$.

11. Let $\xi = (E, \pi, B)$ $(\pi: E \to B)$ be a real vector bundle of finite rank and

$$(*) \qquad \tau_E = V\xi \oplus H\xi$$

the tangent bundle of E where $V\xi = \ker d\pi$ is the vertical subbundle of τ_E. Denote by v and h the projection operators belonging to $(*)$. Construct a linear connection ∇ on $V\xi$ such that

$$\nabla_X vY - \nabla_Y vX = v[X, Y] - v[hX, hY].$$

(X and Y are vector fields on E, $[.\,,.]$ denotes the Lie bracket, further all data are of class C^∞,

12. Let (Ω, A, P) be a probability field and (X_n, F_n) $(n \in \mathbf{N})$ be an adopted sequence on (Ω, A, P) (i.e., the σ-algebras F_n satisfy $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots \subseteq A$ and X_n is an F_n-measurable random variable for all $n \in \mathbf{N}$). Assume that

$$E(X_{n+1} | F_n) = \frac{1}{2} X_n + \frac{1}{2} X_{n-1}, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

If $\sup_n E|X_n| < \infty$ then prove that X_n converges almost certainly if $n \to \infty$.

FELADATROVAT

SZERKESZTI: LACZKOVICH MIKLÓS

A feladatrovatnak szánt küldemények a következő címre küldendők: Matematikai Lapok, feladatrovat, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Anker köz 1—3, 1061. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

231. feladat. Egy fogadáson n ember van jelen. Mindenkinek van jelen ismerőse, és van olyan $k(<n)$ szám, hogy bármelyik k résztvevőhöz van olyan a jelenlevők között, aki egyiküket sem ismeri. Bizonyítandó, hogy a jelenlevők közül alkalmas $2k+2$ személyt leültethetünk egy hosszú asztalhoz úgy, hogy az asztal mindkét oldalán $k+1$ személy ül, és mindegyikük a vele átellenes oldalon ülők közül egyedül a vele szemben ülőt ismeri.

HAJÓS GYÖRGY† ÉS SURÁNYI JÁNOS

232. feladat. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olyan divergens sor, amelynek a tagjai pozitívak és nullához tartanak, és legyen $\sum_{i=1}^{k} a_i = s_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Bizonyítandó, hogy $n \to \infty$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{s_k}} \sim 2\sqrt{s_n}.$$

PETRUSKA GYÖRGY

233. feladat. Legyen P a 19-edrendű alternáló csoport olyan eleme, amely előáll nyolc kételemű és egy háromelemű diszjunkt ciklus szorzataként. Bizonyítsuk be, hogy P nem állítható elő két hetedrendű permutáció szorzataként.

J. L. BRENNER (Palo Alto, California)

215. feladat. Legyen k és N természetes szám. A és B a következő játékot játssza: A választ egy egész számot, B pedig ezt kiszínezi k adott szín valamelyikével. A további lépésekben A a korábbi számoktól különbözőt választ, a színek azonban ismétlődhetnek. A játék a k-adik lépés után ér véget. B nyer, ha a végén a szomszédos számok egyszínűek és két egyszínű szám különbsége legfeljebb N. Állapítsuk meg, hogy mikor van A-nak és mikor B-nek nyerő stratégiája.

BECK JÓZSEF

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy ha $N<2^{k-1}-1$, akkor az A játékosnak van nyerő stratégiája. Ez a következő. Legyen $N_1=0$, $N_2=2^{k-2}$, $N_3=N_2+2^{k-3}$, ..., $N_i=N_{i-1}+2^{k-i}$, ..., $N_k=N_{k-1}+1$. A felsorolja az $N_1, N_2, \ldots$ számokat egészen addig, amíg be nem következik, hogy valamely $2\leqq i\leqq k$-ra N_{i-1} és N_i B által adott színei különbözőek. Ha ez a k-adik lépés után sem következik be, akkor N_1 és N_k egyszínűek, és távolságuk $2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+1=2^{k-1}-1>N$, tehát B veszít. Így feltehetjük, hogy N_{i-1} és N_i különböző színűek. Ekkor A $i+1$-edik lépése legyen N_{i-1} és N_i számtani közepe. Ennek B bármilyen színt is ad, az $i+1$-edik lépés után lesz két különböző színű szám, melyek távolsága $2^{k-(i+1)}$. A $i+2$-edik lépése legyen ezen két szám számtani közepe. Ennek B akármilyen színt is ad, az $i+2$-edik lépés után lesz két különböző színű szám, melyek távolsága $2^{k-(i+2)}$. Ezt az eljárást folytatva, a k-adik lépés után lesz két különböző színű szám, melyek távolsága $2^{k-k}=1$. Tehát B mindenképpen vesztett.

Másodszor azt mutatjuk, hogy $N\geqq 2^{k-1}-1$ esetén B-nek van nyerő stratégiája. Az i-edik számot B attól függően színezi, hogy az milyen messze van az előzőleg mondott $i-1$ számtól. Ha az i-edik számnak az előző számok mindegyikétől való távolsága $>2^{k-i}$, akkor B eddig még nem használt, új színt ad neki. Ha viszont valamelyiktől való távolsága $\leqq 2^{k-i}$, akkor B ennek színét adja az i-edik számnak. Meg kell mutatnunk, hogy ezzel a stratégiával B soha nem kerülhet lehetetlen helyzetbe. Tegyük fel ugyanis, hogy a játszma során B az i-edik lépésben először elakad, azaz, valamilyen $1\leqq j_1<j_2<i$-re az i-edik szám távolsága a j_1-ediktől és az j_2-ediktől egyaránt $\leqq 2^{k-i}$, de a j_1-edik és a j_2-edik számok különböző színűek. Ekkor a j_1-edik és a j_2-edik számok távolsága $\leqq 2\cdot 2^{k-i}\leqq 2^{k-j_2}$, és ezért B-nek már korábban, a j_2-edik lépésben is lehetetlen helyzetbe kellett volna kerülnie. Ez az ellentmondás mutatja, hogy B stratégiája jól definiált.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy ez nyerő stratégia B számára. Ez pedig nyilvánvaló, hiszen a szomszédos számok mindig egyszínűek lesznek, továbbá, két egyszínű szám távolsága $\leqq 2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+1=2^{k-1}-1\leqq N$. Tehát B valóban megnyeri a játékot.

GÖNDŐCS FERENC

217. feladat. Legyen $\varphi\neq\emptyset$ egy X halmazon értelmezett valós függvények olyan rendszere, hogy $c\in\mathbf{R}$, $f, g\in\varphi$ esetén cf, $f+c$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)\in\varphi$, továbbá $f\in\varphi$, $f>0$ esetén $\frac{1}{f}\in\varphi$, végül $f_n\in\varphi$ esetén $f\in\varphi$, ha $f_n\to f$ egyenletesen. Mutassuk meg, hogy ha még $f, g\in\varphi$ esetén $f+g\in\varphi$ is teljesül, akkor $f, g\in\varphi$, $f\geqq 0$, $g\geqq 0$ esetén $fg\in\varphi$, ez az állítás azonban nem fordítható meg.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldás. Ha $f\in\varphi$, $f>0$, akkor $g=\frac{1}{f}-\frac{1}{f+1}\in\varphi$. Mivel $g>0$, így $\frac{1}{g}=$ $=f^2+f\in\varphi$ és $f^2=\frac{1}{g}-f\in\varphi$. Ha $f\in\varphi$ és f alulról korlátos, $f>K$, akkor a fentiek szerint $(f-K)^2=f^2-2Kf+K^2\in\varphi$, tehát $f^2\in\varphi$. Most legyen $f,g\in\varphi$, ahol $f\geqq 0$ és g korlátos. Ekkor $f+g$ és $f-g$ alulról korlátosak, tehát $fg=\frac{1}{4}(f+g)^2-$ $-\frac{1}{4}(f-g)^2\in\varphi$. Ha $f,g\in\varphi$, $f\geqq 1$ és $g>0$, akkor legyen $g_n=\min(g,n)$. A fentiek szerint $fg_n\in\varphi$ és $fg_n>0$. Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{fg_n}\to\frac{1}{fg}$ egyenletesen X-en. Valóban,

$$\left|\frac{1}{fg_n}-\frac{1}{fg}\right|=\frac{g-g_n}{fgg_n}\leqq\frac{g-g_n}{gg_n}\leqq\frac{1}{n},$$

hiszen $g(x)<n$ esetén $g(x)=g_n(x)$, $g(x)\geqq n$ esetén pedig $g_n(x)=n$. Mivel $\frac{1}{fg_n}\in\varphi$, ezért $\frac{1}{fg}\in\varphi$, és így $fg>0$ miatt $fg\in\varphi$.

Végül, ha $f,g\in\varphi$, $f\geqq 0$, $g\geqq 0$, akkor $(f+1)(g+1)=fg+f+g+1\in\varphi$, amiből $fg\in\varphi$.

Azt, hogy az állítás nem fordítható meg, az alábbi egyszerű példa mutatja. Álljon φ mindazon $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényekből, amelyek alulról vagy felülről korlátosak. Könnyű ellenőrizni, hogy φ rendelkezik a szükséges tulajdonságokkal. Ha $f\geqq 0$ és $g\geqq 0$, akkor nyilván $fg\in\varphi$, ha pedig $f(x)=\max(x,0)$, $g(x)=\min(x,0)$ $(x\in\mathbf{R})$, akkor $f,g\in\varphi$ és $f+g\notin\varphi$.

Megjegyzés. Ha $f,g\in\varphi$, $f\geqq 0$ esetén $fg\in\varphi$, akkor ebből (a többi feltétel fennállása mellett) már következik, hogy $f+g\in\varphi$. Valóban, tegyük fel először, hogy $f,g\in\varphi$ és $g>0$. Ekkor $\frac{1}{g}>0$ és $\frac{1}{g}\in\varphi$, tehát $\frac{1}{g}f\in\varphi$, amiből $f+g=g\left(\frac{f}{g}+1\right)\in\varphi$. Ha $f,g\in\varphi$ tetszőleges, akkor legyen $g_1=\max(g,0)+1$, $g_2=-\min(g,0)+1$. Nyilván $g_1,g_2\in\varphi$, $g_1>0$, $g_2>0$ és $g=g_1-g_2$. A fentiek szerint $-f+g_2\in\varphi$ és $f+g=[-(-f+g_2)]+g_1\in\varphi$.

LACZKOVICH MIKLÓS

218. feladat. Egy X metrikus térben egy (a_n) pontsorozat hiperkonvergál az $A\subset X$ halmazhoz, ha $A\neq\emptyset$, és minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan n, hogy $R_n\subset S(A,\varepsilon)$, és minden n-re $A\subset S(R_n,\varepsilon)$, ahol $R_n=\{a_k: k\geqq n\}$ és $S(A,\varepsilon)$ az A halmaz ε sugarú környezetét jelöli. (a_n) kvázi-Cauchy-sorozat, ha van Cauchy-féle részsorozata. Mutassuk meg, hogy X pontosan akkor teljes (kompakt), ha minden Cauchy-(kvázi-Cauchy)-sorozat hiperkonvergens.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldás. Minden konvergens sorozat hiperkonvergál a limeszpontból álló egyelemű halmazhoz. Ha X teljes, akkor tehát minden Cauchy-sorozat hiperkonvergens. A megfordításhoz elég belátni, hogy ha az (a_n) Cauchy-sorozat hiperkonvergál az A halmazhoz, akkor A egyelemű, $A=\{a\}$ és $a_n\to a$. Valóban, minden n-re és $\varepsilon>0$-ra $A\subset S(R_n,\varepsilon)$, tehát $\operatorname{diam}A\leqq\operatorname{diam}R_n+2\varepsilon$. Mivel (a_n) Cauchy, ezért

$\operatorname{diam} R_n \to 0$ és így $\operatorname{diam} A \leqq 2\varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$-ra. Az A halmaz tehát egyelemű, $A = \{a\}$. Mivel minden $\varepsilon > 0$-ra $R_n \subset S(\{a\}, \varepsilon)$, ha n elég nagy, ezért $a_n \to a$.

Most tegyük fel, hogy X kompakt, és legyen (a_n) egy tetszőleges sorozat X-ben. Ha $\bar{R}_n$ jelöli R_n lezártját, akkor X kompaktsága miatt $A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{R}_n$ nem üres. Bármely $\varepsilon > 0$-ra $A \subset \bar{R}_n \subset S(R_n, \varepsilon)$, továbbá X kompaktságából egyszerűen következik, hogy $R_n \subset S(A, \varepsilon)$, ha n elég nagy. Így (a_n) hiperkonvergál A-hoz.

Tegyük fel végül, hogy X-ben minden kvázi-Cauchy-sorozat hiperkonvergens. Ekkor minden Cauchy-sorozat is hiperkonvergens, tehát X teljes. X kompaktságához elég megmutatni, hogy teljesen korlátos. Legyen $\varepsilon > 0$ adott; be kell látnunk, hogy nincs olyan végtelen $Y \subset X$ halmaz, amelyben bármely két elem távolsága nagyobb, mint ε. Tegyük fel, hogy van ilyen Y, és legyen (a_n) olyan sorozat, amelyre $a_1 = a_{2n-1} \in Y$, $a_1 \neq a_{2n} \in Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $a_{2n} \neq a_{2m}$ $(n \neq m)$. Ekkor (a_n) kvázi-Cauchy, tehát hiperkonvergál egy $A \neq \emptyset$ halmazhoz. Ekkor $n \geqq n_0$-ra $R_n \subset S(A, \varepsilon/2)$, tehát van olyan $a \in A$, amelyre $d(a, a_{2n_0}) < \varepsilon/2$. Másrészt $A \subset S(R_{2n_0+1}, \varepsilon/2)$, tehát van olyan $m > 2n_0$, hogy $d(a, a_m) < \varepsilon/2$. Így $d(a_{2n_0}, a_m) < \varepsilon$ és $m \neq 2n_0$, ami lehetetlen.

LACZKOVICH MIKLÓS

219. feladat. Számítsuk ki $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ értékét 10 tizedesjegyre úgy, hogy legföljebb zsebszámológépet használunk.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

1. Megoldás. Bár a $\zeta(3)$ definíciójában szereplő sor konvergens, numerikus számolásra kevéssé alkalmas; az n-edik részletösszeg hibája ugyanis kb. $1/2n^2$, így ahhoz, hogy a hiba kisebb legyen mint 10^{-10}, mintegy 10^5 tagot kellene összeadnunk. Ez nemcsak, hogy reménytelenül sok, de az utolsó tagok már 13 0-val kezdődnek, így ezeket a zsebszámológép 0-nak veszi, és így a hibánk nagyobb lesz, mint 10^{-10}.

Felhasználhatjuk azonban például a következő, Apéry-től származó formulát:

$$(*) \qquad \zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}}.$$

Ez alternáló előjelű, monoton csökkenő abszolút értékű tagokból áll, így részletösszegeinek hibája kisebb, mint az első elhagyott tag. További előnye, hogy a tagok exponenciálisan csökkennek. Ebből könnyű kiszámítani, hogy az első 14 tagja már megfelelő közelítést ad, mivel

$$\frac{5}{2} \frac{1}{15^3 \binom{30}{15}} < 10^{-10}.$$

Az egyes tagokat az

$$a_1 = \frac{5}{4}, \quad a_{k+1} = -\frac{k^3}{2(k+1)^2(2k+1)} a_k$$

rekurzió alapján könnyű kiszámítani és összeadni. Így kapjuk, hogy

$$\zeta(3) = 1{,}2020569032.$$

(Feltesszük, hogy zsebszámítógépünk legalább 12 jegyre pontosan számol: ha ez nem áll, akkor még egy számítást kell végeznünk modulo 10^{-8} az utolsó jegyek meghatározására.)

A ($*$) azonosságot a következőképpen lehet belátni. Vezessük be a következő jelölést:

$$s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^3\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k}}.$$

Ekkor

$$s_k + s_{k-1} = \frac{1}{k^3\binom{2k-1}{k-1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^3\binom{n-1}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}} + \frac{1}{n^3\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k^3\binom{2k-1}{k-1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\frac{n-k}{k}\cdot\frac{n+k}{k}+1}{n^3\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k}} =$$

$$= \frac{1}{k^3\binom{2k-1}{k-1}} + \frac{1}{k^2}\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k}}.$$

Felhasználva a közismert és egyszerűen igazolható

$$\sum_{n=t}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{t}} = \frac{t}{t-1} \qquad (t \geqq 2)$$

azonosságot, egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$s_k + s_{k-1} = \frac{1}{k^3\binom{2k-1}{k-1}} + \frac{((k-1)!)^2}{(2k+1)!}\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{2k+1}} =$$

$$= \frac{1}{k^3\binom{2k-1}{k-1}} + \frac{((k-1)!)^2}{(2k+1)!}\cdot\frac{2k+1}{2k} = \frac{5}{2k^3\binom{2k}{k}}.$$

Ebből

$$\xi(3) = s_0 = (s_0+s_1)-(s_1+s_2)+(s_2+s_3)-\ldots = \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}.$$

LOVÁSZ LÁSZLÓ

2. Megoldás. Kiindulhatunk a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = \frac{5}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{4k^4(k+1)^4}$$

azonosságból is (lásd N. M. Gjunter—R. O. Kuzmin: Felsőbb matematikai példatár III. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952). Ha a jobb oldalon álló szummának első m tagját összeadjuk, akkor az elkövetett hiba kisebb, mint $1/12m^6$, ugyanis

$$\frac{2k+1}{4k^4(k+1)^4} < \frac{2(k+1)}{4k^4(k+1)^4} = \frac{1}{2k^4(k+1)^3} < \frac{1}{2k^7},$$

és

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2k^7} < \int_m^{\infty} \frac{1}{2} x^{-7}\, dx = 1/12m^6.$$

Ha az összeget $5 \cdot 10^{-11}$ pontossággal akarjuk kiszámítani, akkor ehhez 35 tagot kell összeadnunk. A szükséges pontosság eléréséhez a tagokat 13 jegyre kell kiszámítanunk. Ez azonban nem jelent többletmunkát, mert a harmadik tagtól kezdve a tagok 10^5-szeresét számíthatjuk, és így akár 15 jegy pontosságot is kaphatunk.

DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

ЗАДАЧИ

PROBLEMS

Problem 231. There are n people at a party. We suppose that each participant is aquainted with at least one other person at the party and that there is a $k<n$ such that for any set of k participants there is at least one person at the party not aquainted with any of them. Prove that there are $2k+2$ participants which can be seated at a long table in such a way that there are $k+1$ persons on either side of the table and each person of the $2k+2$ knows the one seated directly across him/her but knows nobody else on the opposite side of the table.

G. HAJÓS† and J. SURÁNYI

Problem 232. Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a divergent series with $a_n>0$ and $a_n \to 0$, and let $\sum_{i=1}^{k} a_i = s_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{s_k}} \sim 2\sqrt{s_n}$$

as $n \to \infty$.

G. PETRUSKA

Problem 233. Let $P \in \mathrm{Alt}\,(19)$ be a permutation of type $2^8 3^1$. Prove that P cannot be written as the product $P=QR$ of two permutations $Q, R \in \mathrm{Alt}\,(19)$ each of period 7.

J. L. BRENNER (Palo Alto, California)

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1985. évi odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor Emlékérem bizottsága 1985. december 11-i ülésén az összes beérkezett javaslatot figyelembe véve az 1985. évi emlékérmet Halász Gábornak ítélte oda.

Indoklás:

HALÁSZ GÁBOR az analitikus számelmélet és komplex függvénytan területén a nemzetközi élvonalba tartozó matematikus. Multiplikatív számelméleti függvényekre vonatkozó középérték-tétele, melyet igen fiatalon, 15 évvel ezelőtt igazolt, a témakör egyik legfontosabb és legáltalánosabb tétele. Módszerével mind ő, mind mások igen fontos további eredményeket nyertek számelméleti üggvények vizsgálatában. A Riemann-féle zeta és Dirichlet-féle L-függvények gyökeire Turán Pállal közösen nyert sűrűségi tételei szintén alapvető jelentőségűek és igen sok további kutatásnak szolgáltak kiindulópontjául; az ún. Halász—Montgomery-módszer a modern analitikus számelmélet egyik leghatékonyabb eszköze.

Halász Gábor az ELTE-n rendszeresen tart számelméleti és komplex függvénytani speciál-előadásokat, melyeknek színvonala igen magas. Szakdolgozatok, szakmai gyakorlatok és diákköri dolgozatok témavezetésével, diákköri előadások tartásával, a Schweitzer verseny bizottságában való rendszeres részvételével sokat tesz azért, hogy a legtehetségesebb egyetemi hallgatókból jó matematikusok válhassanak. Több különféle témájú nemzetközi kollokvium, többek közt az 1982. évi varsói nemzetközi Banach szeminárium szervezésében történő közreműködéssel elősegíti a bel- és külföldi fiatal kutatók tudományos lehetőségeinek kibontakozását. Több mint 20 éve dolgozik az MTA Matematikai Kutatóintézet Komplex Függvénytani Osztályán, Turán Pál 1976-ban bekövetkezett halála óta osztályvezetőként. Már korábban is közreműködött a Komplex Függvénytani Osztály Szemináriumának szervezésében, majd később osztályvezetőként igen nagy szaktudással és lelkiismeretességgel szervezi a szemináriumot és irányítja az Osztály tudományos munkáját, és így Turán Pállal és Erdős Pállal együtt nagy szerepet játszik abban, hogy Magyarországon nívós számelméleti iskola működik. A Komplex Függvénytani Osztály Szemináriumán, mely egyúttal az ELTE-n is szemináriumként van meghirdetve, az ELTE oktatóin kívül rendszeresen részt vesznek és előadásokat tartanak egyetemi hallgatók is, akiknek ez nagymértékben hozzájárul tudományos fejlődésükhöz. Turán Pál tudományos hagyatékának rendezésében is igen nagy részt vállalt, ami szintén nagy segítséget jelent mind a jelen, mind a jövő bel- és külföldi tudósgenerációjának.

Azok közül, akik (legalább részben) tanítványainak tekinthetők, Balog Antal, Révész Szilárd György, Ruzsa Imre és a fiatalon elhunyt Somorjai Gábor nevét sorolhatnánk fel. Ezenkívül több fiatal magyar matematikusnak nyújtott tudományos munkájában irányításával és szakértelmével fontos segítséget vagy követte munkájukat érdeklődéssel és segítette tanácsokkal. Közülük Beck Józsefet, Freud Róbertet, Lempert Lászlót, Pintz Jánost és Szalay Mihályt említhetnénk.

A bizottság külön is kiemelte azt az örvendetes tényt, hogy az utóbb felsoroltak közül ketten is meghívott előadók lesznek az 1986. évi berkeley-i Nemzetközi Matematikus Kongresszuson.

Jelentés a Beke Manó Emlékdíjak 1985. évi odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége 1984. szeptember 6-i ülésén az 1985. évi Beke Manó Emlékdíj bizottság összetételére a következő határozatot hozta:

elnök: Surányi János

titkár: Czapáry Endre

tagok: C. Neményi Eszter, Békefi Zsuzsa, Csordás Andrásné, Kálmán Attila, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Scharnitzky Viktor.

A bizottság nehéz helyzetben volt. Ugyanis a Társulat helyi tagozataiból beérkezett javaslatok mérlegelése után úgy találta, hogy szerte az országban szép számban találhatók olyan kollégák, akik matematikai munkásságuk miatt feltétlenül érdemesek a korlátozott számban kiosztható 1985. évi Beke Manó Emlékdíjra. Három ülésen sokoldalúan vizsgálva a jelöltek tevékenységét (figyelembe véve a korábbi években beérkezett javaslatokat is), a bizottság végül is egyhangúlag a következő határozatot hozta:

a Bolyai János Matematikai Társulat 1985-ben a Beke Manó Emlékdíj II. fokozatával tünteti ki:

Asztalos Kálmánnét, a Budapesti XII. kerületi Virányos úti Általános Iskola tanárát,
Csabai Attilánét, a Zalakomári Általános Iskola tanítóját,
Kovácsné Győri Idát, a Szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola nyugalmazott adjunktusát,
Oláh Györgyöt, a Komárnói Gépipari Szakközépiskola tanárát,
Novák Lászlónét, az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Osztályának helyettes vezetőjét,
Szepesi Lászlót, a Miskolci Kilián György Gimnázium tanárát és Borsod-Abaúj-Zemplén megye középiskolai vezető szakfelügyelőjét,
Tóth Lászlót, a Lébénymiklósi Általános Iskola tanárát és Győr-Sopron megye általános iskoláinak vezető szakfelügyelőjét.

Indoklás:

ASZTALOS KÁLMÁNNÉ, matematika—ábrázoló geometria szakos középiskolai tanár Budapesten a XII. kerületi Virányos úti általános iskolában tanít es 1972 óta a XII. kerületi általános iskolák matematikai munkaközösségének példamutató vezetője.

Mint szaktanár kiemelkedő szaktárgyi felkészültségű és jó pedagógiai érzékkel rendelkezik. Mint nevelő segítőkész és gyermekszerető.

Oktatásában megosztott figyelemmel fordul a különböző képességű tanulók felé. Tehetséges tanulóit megtaláljuk az országos versenyek helyezettjei között és hátrányos helyzetű tanítványai is megállják a helyüket a későbbi munkahelyeiken.

Mint munkaközösségvezető lelkiismeretesen segíti pályakezdő kollégáit. Az új tanterv bevezetése idején sok segítséget nyújtott az alsó tagozatban tanítóknak is.

Bemutató órákat tartott a kerületi szaktanároknak, amelyeken élményszámba menő módon mutatta meg, hogyan lehet az új tantervet eredményesen oktatni.

Vállalt előadásaira mindig lelkiismeretesen készült. A központi útmutatókat saját tapasztalataival kiegészítve továbbította a munkaközösség tagjainak.

Jól szervezett oktatásával, előadásaival mint tanár és mint munkaközösség vezető a kerületi és fővárosi szakvezetésnek biztos segítőtársa.

CSABAI ATTILÁNÉ, közmegbecsülésnek örvendő alsó tagozatos tanítónő Zalakomár községben. Lelkiismeretes és példamutató munkájának elismerését igazolja az is, hogy területi munkaközösségvezető.

Oktató-nevelő munkáját nehéz körülmények között végzi. Ugyanis egymástól nagyon eltérő értelmi képességű tanulókat oktat, akik a szülői házból nagyon differenciált érdeklődést, s műveltséget, neveltséget hoznak magukkal. Tanítványainak mintegy harmada cigány származású.

Közismert, hogy a nehézségek ellenére a tanulók jó számolási készséggel kerülnek ki osztályaiból. A differenciált szellemi képességek és érdeklődés ellenére a tanterv minden részletét szakavatott módon feldolgozza, a jobbakkal eredményesen. A matematika iránti érdeklődést, a fogalmak megértését színvonalas és sokoldalú szemléltetéssel igyekszik segíteni. Az óralátogató óráin matematikatörténeti érdekességeket is hallhat.

Pedagógus munkájának régről ismert nagy értéke a gyermekek — származásuktól független — szeretete, munkájuk megbecsülése. Ez az emberi magatartás teszi igazi értékké a sokszor nem csillogó teljesítmények eléréséért végzett becsületes, példamutató, szívós és kemény tanítói munkáját, amely mintául szolgálhat minden hasonló körülmények között oktató nevelőnek.

KOVÁCSNÉ GYŐRI IDA, nyugalmazott főiskolai adjunktus, 24 éven át dolgozott a Szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán; előbb kollégiumi igazgatóként, majd a Matematikai Tanszék oktatójaként.

Oktatói tevékenységét kiemelkedő szinten látta el. Különösen az általános iskolai új matematika tanterv bevezetéséért tett sokat. Az alsó tagozaton végzett ilyen jellegű tevékenységei közül kiemelkedők a főiskolai körzethez tartozó megyék, de Budapest alsó tagozatos tanítóinak továbbképzésében is vállalt előadásai. Egyedülálló az a tevékenysége is, amit az összevont osztályú tanulócsoportok részére készített magnós órák írásában végzett.

Mint főiskolai oktató is sokat tett a tanárjelölteknek az új tanterv tanítására való felkészítésében.

Gazdag és sokoldalú munkásságát fémjelzik publikációi is. Hat tanulmányt az általános iskolai tankönyvekkel kapcsolatban, 14 segédanyagot és 11 egyéb szakmódszertani dolgozatot jelentetett meg.

OLÁH GYÖRGY, 1962-ben szerzett matematika—földrajz szakos tanári oklevelet a Pozsonyi Komensky Egyetem Természettudományi Karán. 1964-től 1970-ig a Komárnói Magyar Tanítási Nyelvű Gimnáziumban tanított. 1970-től 1978-ig a Nyitrai Pedagógiai Főiskola Matematika Tanszékének adjunktusa volt. Itt a tanárképzés mellett a Nyugat-Szlovákiai Matematikai Olimpiai Bizottság tagjaként is dolgozott. A főiskola magyar tagozatának megszűnése után 1978-ban átkerült jelenlegi munkahelyére, a Komárnói Gépipari Szakközépiskolába.

Iskolájában mozgalmas, aktív matematikai szakköri életet valósított meg. Szakkörösei, tanítványai nemcsak a csehszlovákiai szakközépiskolások matematikai versenyein kerültek az élvonalba (eddig 16 tanítványa végzett a nyugat-szlovákiai kerület matematikai tanulmányi versenyein az élmezőnyben), de a Magyarországon megjelenő Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyeiben is sikereket értek el. Ezt igazolja az a 35 emléklap, amelyet tanítványai kaptak az elmúlt 6 évben a KöMaL Szerkesztőségétől.

Hasznosan és eredményesen ápolja Csehszlovákia és Magyarország ifjú matematikusainak határ-menti baráti kapcsolatát. Komárnóban többször szervezett matematikai klubdélutánt magyarországi előadókkal, 1984-ben pedig maga vállalt előadást Tatabányán a Rátz László Vándorgyűlésen „Tehetséggondozás Csehszlovákiában" címmel. Jó versenykapcsolatot tart fenn a Komárom megyei, hazai középiskoláinkkal.

Sokoldalú irodalmi munkássága is. A Matematika Tanítása című folyóiratunkban megjelenő feladatok megoldásaiban 16 éve vesz részt alkalmankint. Két ízben megnyerte a kerületében működő Pedagógiai Intézet pályázatát. 38 tanulmányt írt, 8 fordítást készített el szlovák nyelvről magyarra (tankönyv, példatár, tanári segédkönyv), hogy megkönnyítse a magyar tannyelvű iskolák tanárainak és diákjainak a munkáját; 10 recenzióval járult hozzá a matematikai ismeretek terjesztéséhez és népszerűsítéséhez.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ, 1976-ban került az Országos Pedagógiai Intézet Matematika Osztályára, ahol osztályvezetőhelyettes lett. Munkakörének ellátásában nagy biztonságot jelent számára az a gazdag tapasztalat és eredményes oktató-nevelő munka, amelyet előzőleg hosszú tanári, majd igazgatóhelyettesi működése alatt szerzett. Az általános iskola felső tagozatában a matematika tantárgy gondozását, a tanterv megvalósulásának nyomon követését, a tanterv pontosabb, jobb megfogalmazását és tartalmi javítását nagy hozzáértéssel és lelkiismeretesen végezte, illetve végzi jelenlegi beosztásában. Emellett sok önként vállalt feladatban is részt vesz.

Igen jó kapcsolatot épített ki az elmúlt 10 év alatt az általános iskolai matematika szakfelügyelőkkel. Munkásságának egyik célkitűzése az, hogy minden gyermeket, minden emberi értéket fejleszteni és a legrosszabb feltételek között élő gyermekeknek is biztosítani kell és lehet a legszükségesebb, a legalapvetőbb tudás megszerzését.

Az általános iskolai matematika-tanároknak számos továbbképző tanfolyamot szervezett. Folyamatos kapcsolatot tart a tanárok széles rétegével. Egyrészt sok matematika órát látogatott meg, az órákat követően konzultált a tanárokkal, másrészt a Bolyai Társulat Segítőszolgálata keretében havonta más-más kerületben beszélte meg a tanárokkal az éppen aktuális problémákat. Hasonló céllal vett részt számos alkalommal a megyei tanácskozásokon is, amelyekre nagy tudása, a gyakorlati problémák iránti fogékonysága, segítőkészsége, őszinte, egyenes és világos állásfoglalásai miatt mindenütt szívesen hívták és várták a rendezők.

Vándorgyűléseinken is többször vállalt előadást, konzultációt.

Sokat tett a tehetséges tanulók felkutatásáért és gondozásáért. Az úttörők országos matematikai versenyének szervezésében évről évre részt vesz, feladatok kitűzését és a dolgozatok elbírálását vállalta. A TIT által szervezett Kalmár László KMBK Emlékverseny lebonyolításában aktívan közreműködött. Részt vett a Pajtás című lapban meghirdetett feladatmegoldó verseny tartalmi irányításában.

Irodalmi tevékenységét jelzik A Matematika Tanítása című folyóiratunkban megjelent cikkei. Társszerzőként vett részt általános iskolai munkalapok és kézikönyvek összeállításában. Munkatárs volt több országos felmérésben.

SZEPESI LÁSZLÓ, megyei középiskolai szakfelügyelő 10 év óta irányítja Borsod megyében a matematika oktatását és a matematikatanárok továbbképzését. A Bolyai János Matematikai Társulat Borsodi Tagozatának vezetőségi tagja. Ebben a minőségben is áldozatos munkát vállal mind a matematika népszerűsítésében, mind a tehetséges tanulók gondozásában.

A munkája nyomán szerveződött Borsod megye középiskolai tanulói számára például az a pályázati rendszer, amelynek az a lényege, hogy a tanulók a KöMaL feladatain túlmenően új feladatokat készítenek, egy-egy feladatot továbbfejlesztenek. Aktívan részt vesz a benyújtott feladatokat elbíráló bizottság munkájában.

Irányítja és vezeti a megyei és a városi középiskolák tanulóinak hagyományossá vált megyei versenyét.

Külön figyelmet érdemelnek az ifjúság körében tartott előadásai, amelyek témái elsősorban a tehetségek gondozását, a korszerű matematikai ismeretek terjesztését és a matematikai gondolkodás megszerettetését eredményezik.

Szakfelügyelői munkáját, a matematika tanítását példamutatóan végzi.

TÓTH LÁSZLÓ, a lébénymiklósi 1. sz. általános iskola tanára és Győr-Sopron megye általános iskolai vezető matematika szakfelügyelője. Emellett régebbi körzetében a fizika oktatás felügyeletét is ellátja, a TIT megyei matematika szakosztályának alelnöke.

Tóth László kezdettől fogva kitűnik eredményes oktatásával, a lelkiismeretes tanár fogalmát is meghaladó önzetlen tevékenységével.

Szakfelügyelőként az új tanterv bevezetésével kapcsolatos munkásságával hívta fel magára a figyelmet.

A matematika tanterv eredményes oktatására, a tanterv tartalmi vonatkozásainak, összefüggéseinek tisztázására tanfolyamokat szervezett s ezeken előadóként is részt vett.

Győr-Sopron megyében az ő kezdeményezésére és irányítása mellett úgynevezett alkotó matematikai munkaközösségek alakultak. Ezekben a szaktanárok aktív közreműködésével feldolgozták a differenciált munkáltató oktatás lehetőségeit. A munkaközösségek tevékenységéről és végzett munkájáról többek között Zánkán, egy országos konferencián, illetve A Matematika Tanítása című szaklapunkban számolt be. A Megyei Pedagógiai Intézet gondozásában két dolgozatot jelentetett meg az 5. osztály, illetve a 6. osztály tantervi anyagának újszerű oktatásáról.

Jelentősek azok a felmérések, amelyek Tóth László irányítása mellett folynak Győr-Sopron megyében az általános iskolákban.

Tagja az OPI mellett működő korrekciós bizottságnak. Ebben a minőségben értékelte a 7. és a 8. osztályos matematika tankönyveket és tantervet, majd 1983-ban benyújtott dolgozatában tett javaslatot a tantervi korrekcióra.

Jelentősek a tehetséges tanulók továbbképzését célzó munkái. Négy év óta évenként mintegy 20—25 általános iskolai tanuló részvételével kéthetes szaktábor működik a megyében. Az általános iskolai tanulók országos matematikai versenyén versenybizottsági tagként működik közre. Iskolájában számítástechnikai szakkört szervezett.

Követésre méltó az a jó kapcsolat és együttműködés, amelyet az általános iskolai és a középiskolai munkaközösségek között teremtett Győr-Sopron megyében.

Képességeit, munkáját a vezető szakfelügyelői testület is igen nagyra értékeli, szavának, véleményének súlya van. Szerénysége, szorgalma, segítőkészsége, emberséges magatartása és igen korrekt vitakészsége miatt szívesen látott szakfelügyelő a megye minden iskolájában is,

Jelentés az 1985. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítéléséről

Ebben az évben lenne 75 éves Grünwald Géza, az interpolációelmélet sokat ígérő tehetségű tudósa. Egyetemi tanulmányait Szegeden végezte, majd az Egyesült Izzó kutatólaboratóriumában dolgozott. 32 évesen esett a fasiszta őrület áldozatául. A Társulat 1953-ban Grünwald Géza emlékére díjat alapított. Ez évben az Elnökség az alábbi bizottságot küldte ki a Grünwald díj odaítélésére: Császár Ákos (elnök), Fritz József (titkár), Bihari Imre, Hajnal András, Rapcsák András, Schmidt Tamás, Tandori Károly, T. Sós Vera. A díjra 5 javaslat érkezett, a Bizottság december 5-én és 11-én ülésezett és az alábbi döntést hozta:

Az 1985. évi Grünwald Géza Emlékdíjjal és 4500—4500 Ft pénzjutalommal tünteti ki a következő fiatal matematikusokat:

BRINDZA BÉLÁT, a KLTE tud. ösztöndíjasát;
HORVÁTH MIKLÓST, az ELTE TTK tud. ösztöndíjasát;
MAGYAR ZOLTÁNT, az ELTE TTK tud. ösztöndíjasát;
PYBER LÁSZLÓT, az MTA Mat. Kut. Int. tud. ösztöndíjasát.

Indoklás:

Brindza Béla 1958-ban született, 16 tudományos dolgozatot írt; négyet társszerzőkkel, eddig 7 dolgozata jelent meg. [2] és [6] munkáiban algebrai kódelmélettel, [1]-ben egy kombinatorikus számelméleti problémával, a többi dolgozatában pedig diofantikus egyenletekkel foglalkozik. [6]-ban S. D. Berman egy 1967-ből származó algebrai kódelméleti sejtését cáfolja meg és egyben jelentős előrelépést tesz pozitív irányban. A [2], [3], [7], [8], [9], [12], [14] dolgozataiban az $y^m=f(x)$ hiperelliptikus egyenlettel (és annak különféle általánosításaival, alkalmazásaival) foglalkozik, ahol $f(x)$ adott polinom, $m\geqq 2$ adott természetes szám, az ismeretlenek x és y. Az ilyen típusú egyenletek rendkívül fontos szerepet játszanak a diofantikus egyenletek elméletében. Számos matematikus, közöttük Mordell, Siegel, LeVeque, Baker és Szprindzsuk nyertek hiperelliptikus egyenletekre végességi tételeket. LeVeque-nek 1964-ben az m és $f(x)$-re vonatkozó lehető legáltalánosabb feltételek mellett sikerült a megoldásszám végességét bizonyítania egy tetszőleges, de rögzített algebrai számtest egészeinek a gyűrűje felett. Bizonyítása azonban ineffektív. Baker 1969-ben LeVeque eredményét effektivizálta abban a fontos speciális esetben, amikor az alapgyűrű **Z** és $f(x)$-nek van legalább 3 ($m\geqq 3$ esetén legalább 2) egyszeres gyöke. Brindza Béla a [3] munkájában LeVeque tételét teljes általánosságban effektivizálja és egyben Baker tételét magában foglalja — máris sok cikkben idézik. T. N. Shorey és R. Tijdeman exponenciális diofantikus egyenletekről írt, megjelenés alatt levő könyvükben Brindza Béla tételét részletesen (bizonyítással együtt) tárgyalják. [8]-ban Brindza Béla (R. C. Masonnal közösen) ennek a fontos eredménynek függvénytestek feletti analógját adja, lényegesen általánosítva W. M. Schmidt és R. C. Mason ilyen irányú korábbi eredményeit. [14]-ben a [3]-ban nyert eredményét (effektív formában) tovább általánosítja arra a (lehető legáltalánosabb) esetre, amikor az alapgyűrű **Z**-nek egy végesen generált, de nem szükségképpen csak algebrai számokat tartalmazó gyűrűbővítése. Ezzel a hiperelliptikus egyenletekre vonatkozó effektív végességi vizsgálatokat bizonyos értelemben lezárja.

A [7], [12] dolgozatokban egyebek között az $y^m=f(x)$ egyenleteket (ill. azok bizonyos általánosításait) abban az általánosabb esetben vizsgálja, amikor m is ismeretlen. Számos korábbi eredményt javítva effektív korlátokat ad m-re. Hiperelliptikus egyenletekre nyert eredményeinek fontos alkalmazásait adja [2], [4], [5], [7], [10], [12], [13] és [16]-ban. [4]-ben effektivizálja, egyben lényegesen általánosítja R. Tijdeman, M. Voorhoeve és Győry Kálmán $1^k+2^k+\ldots+x^k+R(x)=by^z$ típusú exponenciális egyenletekre vonatkozó végességi eredményeit. [5], [7] és [12]-ben fontos effektív eredményeket nyer a Fermat-féle egyenlettel kapcsolatban abban az esetben, amikor bizonyos alapváltozók adott polinomok értékei. Ezen eredményei jelentős mértékű élesítései, ill. általánosításai K. Inkeri, C. L. Stewart és A. J. van der Poorten korábbi idevágó eredményeinek. [10], [13] és [16]-ban Tijdemannak a Catalan-egyenletre vonatkozó nevezetes effektív végességi tételét általánosítja előbb egy tetszőleges algebrai számtest egészeinek a gyűrűje feletti egyenletekre, majd a számtest tetszőleges S-egészei gyűrűje feletti egyenletekre, végül egy tetszőleges, **Z** felett végesen generált integritástartomány feletti egyenletekre. Brindza Béla diofantikus egyenletekkel foglalkozó munkáiban mély és modern eszközöket (egyebek között Baker módszerét, valamint a diofantikus egyenletek elméletének és az algebrai számelméletnek sok mély eredményét) használja fel.

Brindza Béla dolgozatainak jegyzéke

[1] Az $r_k(n)$ függvények és Erdős Pál egy sejtése, *Mat. Lapok* **30** (1978—1982), 127—133.

[2] *Vizsgálatok a számelméletben és az algebrai kódelméletben*, Egyetemi doktori értekezés, 1983, Debrecen.

[3] On S-integral solutions of the equation $y^m=f(x)$, *Acta Math. Hung.* **44** (1984), 133—139.

[4] On some generalizations of the diophantine equation $1^k+\ldots+x^k=y^z$, *Acta Arith.* **44** (1984), 99—107.

[5] On a diophantine equation connected with the Fermat equation, *Acta Arith.* **44** (1984), 357—363.

[6] О кодовых расстояниях некоторых классов (p, p)-кодов, *Продлемы передачи информации, Москва*, **XXI** (1985), 10—19.

[7] The Fermat equation with polynomial values as base variables, *Invent. Math.* **80** (1985), 139—151. (Győry Kálmánnal és R. Tijdemannal közösen.)

[8] LeVeque's superelliptic equation over function fields, *Acta Arith.*, megjelenés alatt (R. C. Masonnal közösen).

[9] On the equation $F(x, y)=z^m$ over function fields, *Acta Math. Hung.*, megjelenés alatt.

[10] On the Catalan equation over algebraic number fields, *J. Reine Angew. Math.*, megjelenés alatt (Győry Kálmánnal és R. Tijdemannal közösen).

[11] Inhomogeneous norm form equations over function fields, *Acta Math. Hung.*, megjelenés alatt (Gaál Istvánnal közösen).

[12] On some diophantine equations over algebraic number fields, *Compositio Math.*, megjelenés alatt.

[13] On S-integral solutions of the Catalan equation, *Acta Arith.*, megjelenés alatt.

[14] On the equation $y^m=f(x)$ over finitely generated domains over **Z**, *J. Number Theory*, megjelenés alatt.

[15] On the diophantine equation $f(x, y)=g(z)$ over function fields, kéziratban.

[16] The Catalan equation over finitely generated domains over **Z**, kéziratban.

Horváth Miklós 1960-ban született, 10 tudományos dolgozata van, négyet társszerzőkkel írt, eddig egy dolgozata jelent meg.

[1] dolgozata az irodalomban találhatóknál lényegesen egyszerűbb bizonyítást ad Ky Fan nevezetes minimax-tételére, továbbá általánosítja a Nikaido—Isoda-tételt egy általánosított konvexitásfogalom mellett. [2]-ben Joó és Tandori egy előjeltípusú ortonormált rendszerekre vonatkozó tételére elemi bizonyítást ad. [3]-ban a teljes változás fogalmát L^p-beli függvényekre általánosítja és megmutatja, hogy az L^p-korlátos változású függvények majdnem minden pontban folytonosak. [4]-ben megmutatja, hogy $p \geq 1$-re nincs $L^p(\Omega)$-ban univerzális függvény, ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ tetszőleges tartomány. Ez a tétel választ ad Joó egy problémájára. [5]-ben általánosítja S. A. Avdonin exponenciális bázisokra vonatkozó stabilitási tételét, majd ezt felhasználva általánosítja Joó egy tételét, amely szerint bizonyos fajta exponenciális bázisokból kiválasztható egy részintervallumon bázist alkotó részhalmaz. [6]-ban igazolja, hogy a bázistulajdonságnak magasabbrendű exponensek esetében a Muckenhoupt-feltétel szükséges feltétele is (a feltétel elégségessége A. M. Szedleckij egy korábbi eredménye). [7]-ben a szerzők általánosítják V. A. Il'in bázistételét tetszőleges komplex sajátértékek esetére. [8]-ban a végtelen húr rezgését és irányíthatóságát vizsgálják. [9]-ben egy Erdős, Joó és Székely által vizsgált kérdéskör kapcsán konstrukcióval igazolja, hogy egy sorokra vonatkozó sejtés folytonos megfelelője nem teljesül. [10]-ben bizonyítja, hogy a szigorúan reguláris peremfeltételű Schrödinger operátor sajátfüggvényeinek deriváltjai Riesz bázist alkotnak és ezzel általánosítja Joó Istvánnak a rögzített végpontú húrra vonatkozó eredményeit.

Horváth Miklós sokoldalú és eredményes kutatómunkát folytatott a matematikai analízis területén. Külön kiemelendő a [4] dolgozata, amelyben Marcinkiewicz nevezetes vizsgálatait folytatja, másrészt [6] dolgozata, melyben azt mutatja meg, hogy egy nagyon ismert tételben szereplő elégséges feltétel szükséges is. Az utóbbi eredmény értékét mutatja, hogy ezt a kérdéskört napjainkban rendkívül intenzíven vizsgálják (l. ezzel kapcsolatban Nyikolszkij, Pavlov, Hruscsov [1] cikkét a [6] dolgozatban).

Horváth Miklós dolgozatainak jegyzéke

[1] On convex functions (Sövegjártó Andrással), *Annales Univ. Sci. Bud. Sectio Math.* (megjelenés alatt, lektorálva).

[2] A remark on signum type orthonormal systems (N. H. Loijal), *Annales Univ. Sci. Bud. Sectio Math.* **28** (1985), 195—198.

[3] Total variation in L^p-sense, *Annales Univ. Sci. Bud. Sectio Math.* (megjelenés alatt, lektorálva).

[4] On multidimensional universal functions, *Studia Sci. Math.* (megjelenés alatt, lektorálva).

[5] Riesz bases from elements of the form $x^i e^{i\lambda x}$, *Acta Sci. Math.* (lektorálás alatt, leadva).

[6] On the Muckenhoupt condition, *Periodica Math. Hung.* (megjelenés alatt, lektorálva).

[7] On equiconvergence theorems (Joó Istvánnal és Komornik Vilmossal), *Annales Univ. Sci. Bud. Sectio Math.* (lektorálás alatt, leadva).

[8] On the control of strings (Joó Istvánnal és Bogmér Antallal), *Proc. of Haar Memorial Conference* (lektorált).

[9] Answer to a problem of I. Joó, *Studia Sci. Math.* (lektorált).

[10] Vibrating strings with free ends, *Acta Math. Hung.* (lektorálás alatt, leadva).

MAGYAR ZOLTÁN 1959-ben született, 3 dolgozata jelent meg, további három sajtó alatt van, egyet társszerzőkkel írt.

Az [1] dolgozatban egy érdekes, elemi algebrai állítást bizonyít be igen elegánsan. A többi dolgozat fő témája absztrakt Banach *-algebrák vizsgálata, ezen belül a C^*-algebrák és ekvivalens C^*-algebrák jellemzése. Bár ezeket a kérdéseket már sokan vizsgálták, és azt lehetne gondolni, hogy az amúgy sem nagyon gazdag lehetőségeket kimerítették, Magyarnak sikerült több kiváló szerző eredményeit élesíteni, ill. kiterjeszteni, továbbá új feladatokat megoldani. Többek között élesítette Berkson és Glickfeld 1966-os eredményét, kijavította Palmer 1970-es hibáját, kiterjesztette Pták 1972-es eredményét. Magyar, a szokástól eltérően, a valós skalárok esetének is nagy figyelmet szentel. A legérdekesebb eredmény Araki és Elliott 1973-as híres sejtésének bebizonyítása a [6] dolgozatban. Ez a dolgozat Sebestyén Zoltánnal közös, de a segédtételeként is szolgáló és nehéz 1. tétel teljesen Magyartól származik.

Magyar tételei természetesek, egyszerűen megfogalmazhatók. A bizonyítások általában nem könnyűek és a Banach-algebrák elméletének összes eszközeit felhasználják.

Magyar Zoltán dolgozatainak jegyzéke

[1] Egy számnégyesekre vonatkozó rekurzió, *Mat. Lapok* **29** (1977—81), 345—347 (megjelent az *Amer. Math. Monthly*-ban is).

[2] Conditions for hermiticity and for existence of an equivalent C^*-norm, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **46** (1983), 305—310.
[3] A sharpening of the Berkson—Glickfeld-theorem, *Proc. Edinburgh Mat. Soc.* **26** (1983), 275—278.
[4] On commutativity and spectral radius property of real generalized *-algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, (elfogadva).
[5] A characterization of (real and complex) Hermitian algebras and equivalent C^*-algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, (leadva).
[6] (SEBESTYÉN ZOLTÁNnal közösen) On the definition of C^*-algebras II., *Canad. J. Math.* 37 (4) (1985) (leadva: 1982).

PYBER LÁSZLÓ 1960-ban született, két dolgozata már megjelent, további három megjelenés alatt áll.

Cikkeiben jó néhány régi sejtést old meg, így igazolja Erdős és Gallai 1966-ból származó sejtését, miszerint minden n pontú gráf élhalmaza $n-1$ körrel és éllel lefedhető [2]. Megoldja Erdős és Sauer 1975-ös sejtését, hogy minden $c_k n \log n$ élű gráfnak van k-reguláris részgráfja [5]. Rödllel és Szemerédivel közös előkészületben levő cikkükben megmutatják, hogy az élek számára adott korlát $c\, n \log \log n$ alá nem csökkenthető. Bebizonyítja azt a szintén Erdőstől származó sejtést, hogy egy gráf lefedéséhez és komplementumának lefedéséhez együttesen szükséges teljes részgráfok száma legfeljebb $n^2/4+2$, ha a pontok száma, n, elég nagy [4]. Előkészületben levő munkái közül még kettőt emelünk ki. Először annak bizonyítását, hogy minden Hamilton-kört tartalmazó gráf (elég nagy alaphalmazon) él-rekonstruálható, amint azt Lovász sejtette. Másodszor, ha egy csoportban maximálisan n páronként fel nem cserélhető elem található, akkor a csoport centrumának indexére Pyber nagyságrendileg pontos exponenciális felső korlátot ad. (A kérdés B. H. Neumanntól származik.)

Összegezve, elmondhatjuk, hogy Pyber László munkáit nagy bizonyító erő és ötletgazdagság ellemzi.

Pyber László dolgozatainak jegyzéke

[1] An extension of a Frankl—Füredi theorem, *Discrete Math.* **52** (1984), 253—268.
[2] An Erdős—Gallai conjecture, *Combinatorica* **5** (1985), 67—79.
[3] A new generalization of the Erdős—Ko—Rado theorem, *J. Combinat. Theory* (*A*) (elfogadva).
[4] Clique coverings of graphs, *Combinatorica* (elfogadva).
[5] Regular subgraphs of dense graphs, *Combinatorica* (elfogadva).

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1985. évi odaítéléséről

A Bizottság 1985. november 12-én tartotta ülését, melyen részt vettek: Vincze Endre (alelnök), Recski András (titkár), Fischer János, Kelle Péter, Kis Ottó és Straziczky Beáta.

A Bizottság a beérkezett 8 javaslat és mellékletei alapján megvitatta a jelöltek alkalmazott matematikai munkásságát és az alábbi határozatot hozta:

Az alkalmazott matematikai kutatásokban és modellalkotásban, illetve a számítástechnikai módszerek fejlesztésében kifejtett munkásságuk alapján az 1985. évi Farkas Gyula Emlékdíjban és egyenként 4500 Ft jutalomban részesíti az alábbiakat:

BOROS ENDRÉT, az ELTE Operációkutatási Tanszékének aspiránsát (MTA SZTAKI);
KERÉKFY PÁLT, az MTA SZTAKI tudományos munkatársát;
PAP GYULÁT, a KLTE tanársegédjét; és
TARDOS ÉVÁT, a TKI tudományos munkatársát.

Indoklás:

BOROS ENDRE 1953-ban született, diplomáját az ELTE matematikus szakán szerezte 1978-ban. Az MTA SZTAKI tudományos munkatársa, jelenleg aspiráns. Széles körű a szakmai érdeklődése. A diszkrét programozás területén a darabolási feladat megoldásában és az S-feltétel általánosításában ért el új eredményeket. Kombinatorikai, geometriai jellegű témákban is több társszerzővel publikált. Ismereteit jó érzékkel alkalmazta közvetlen ipari-gazdasági feladatok megoldására. Termelésirányítási, villamos terhelés-előrejelzési és a Balaton környékének csatornázását segítő programrendszer kifejlesztésében jelentős alkalmazási eredményeket ért el.

Boros Endre publikációinak jegyzéke

[1] Su un teorema di Kárteszi nella geometria combinatoria, *ARCHIMEDE* **1977**, 71—76. (közösen Füredi Zoltánnal).
[2] A two stage approach for large scale sewer systems design with application to the Lake Balaton resort area, *Eutrophication of Shallow Lakes: Modelling and Management. The Lake Balaton Case Study* (ed. L. Somlyódi in collaboration with S. Heródek and J. Fischer), IIASA, Laxenburg (Austria), 1983, 315—333 (közösen Kovács László Bélával és Inotay Ferenccel).
[3] On the number of subdivisions of the unit square, *Proc. Coll Math. Soc. J. Bolyai* **37**, *Finite and Infinite Sets*, Eger (Hungary), 1981, 893—898.
[4] Network flows and non-guillotine cutting patterns, *European Journal of Operational Research (EJOR)* **16** (1984), 215—221 (közösen Bíró Miklóssal).
[5] *S-feltételek a* 0—1 *programozásban*, Egyetemi doktori dolgozat, ELTE, Budapest, 1985.
[6] Kétlépcsős matematikai modell és interaktív programrendszer csatorna- és szennyvíztisztító hálózatok tervezésére, *Alk. Mat. Lapok* **10** (1984), 87—102 (közösen Kovács László Bélával és Inotay Ferenccel).
[7] Constructions of complete arcs using a computer, *Bulletin of the Computer Center and Network Department*, Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Sciences, **1** (1984), 38—47 (közösen Szőnyi Tamással).
[8] The number of triangles covering the center of an *n*-set, *Geometriae Dedicate* **17** (1984), 69—77 (közösen Füredi Zoltánnal).
[9] Analysis and Short-Term Forecasting of Daily Electric Load, *ZAMM* **66** (4/5) (1985) (közlésre elfogadva).
[10] A two stage approach for large scale sewer systems design with application to the Lake Balaton resort area, *EJOR* (1985). (Közösen Kovács László Bélával és Inotay Ferenccel.) (Közlésre elfogadva.)
[11] On the sharpness of a theorem of B. Segre, *Combinatorica* (1985), (közösen Szőnyi Tamással). (Közlésre elfogadva.)
[12] On Partial Projective Planes, *Discr. Math.* (közösen Szőnyi Tamással). (Közlésre elfogadva.)
[13] On the Complexity of the Surrogate Dual of 0—1 Programming, *Zeitschrift für Operations Research Serie (A)*. (Közlésre elfogadva.)

KERÉKFY PÁL 1955-ben született, matematikus diplomát 1978-ban az ELTE-n szerzett. Az MTA SZTAKI tudományos munkatársa. Statisztikai módszerek számítógépes implementációjával, majd szoftverfejlesztéssel foglalkozott. Mikrogépek és mikrogépes hálózatok egészségügyi és mezőgazdasági alkalmazásai terén vannak kimagasló eredményei. Munkatársaival együtt kifejlesztett „micro—SHIVA" űrlapszerkesztő és -kezelő rendszere az ember-gép kapcsolat megvalósításának a jövőbe mutató mintaszerű megvalósítása.

Kerékfy Pál publikációinak jegyzéke

[1] A robusztus becslésekről *Alkalmazott Matematikai Lapok* **4** (1978), 327—357.
[2] Szisztyema SIS79/GENERA. *MTA SZTAKI Közlemények*, Budapest, **24** (1980), 113—126.
[3] GENERA: A Program Generator System. *Progress in Cybernetics and Systems Research*, (European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Wien, April 8—12, 1980), Hemisphere, Washington, **11** (1982), 117—122.
[4] SIS79/GENERA Statistical Information System. *Progress in Cybernetics and Systems Research*, (European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Wien, April 8—12, 1980), Hemisphere, Washington, **11** (1982), 123—128 (társszerzőkkel).
[5] Statistical and Software Means in Medical Research. *Proceedings of the Third Hungarian Biometric Conference* (Budapest, April 13—15, 1981), Budapest (1981), 191—195 (társszerzökkel).
[6] Ideoj pri la mildigo de la programara krizo. *Apliko de Komputiloj*, STS AE SSR, Zilina (1981), 58—63 (társszerzővel).
[7] Program Optimization and Manipulation on User Level. *Cybernetics and Systems Research* (European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Wien, April 13—16, 1982), North-Holland, Amsterdam (1982), 797—802 (társszerzővel).
[8] Medical Information System on Desktop Computers. *Computer-Based Information Servicing* (Várna, October 3—8, 1983).
[9] Mikrogépek alkalmazása kórházi és rendelőintézeti információs rendszerekben, *Számítástechnikai és Kibernetikai Módszerek Alkalmazása az Orvostudományban és a Biológiában*, 11. Kollokvium (Szeged, 1982. dec. 6—9.) eds Győri et al., SZOTE — NJSZT, Szeged (1984), 344—349 (társszerzővel).

[10] Some Remarks on Statistical Data Processing, *MTA SZTAKI Közlemények*, Budapest, **30** (1984), 37—51 (társszerzőkkel).
[11] Micro-SHIVA User Friendly Information System Development in Medical Application, In: D. A. B. Lindberg, P. L. Reichertz, *Lecture Notes in Medical Informatics, Vol.* **24**. *Proceedings, Medical Informatics Europe* **84** (Brussels, Sept 10—13, 1984), eds F. H. Roger, J. L. Willems, R. O. Moore, Springer-Verlag, Berlin (1984), 235—239 (társszerzővel).
[12] A System Model for Microcomputers in Health-Care Applications, In: W. van Eimeren, R. Engelbrecht and Ch. D. Flagle (eds) *Third International Conference on System Science in Health Care* (München, July 16—20, 1984), Springer-Verlag.
[13] Patient Registers on Microcomputers, In: R. Trappl (ed.) *Cybernetics and Systems Research* **2**. (European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Wien, April 24—27, 1984), North-Holland, Amsterdam (1984), 519—522 (társszerzőkkel).

PAP GYULA 1954-ben született, 1977-ben végzett a KLTE matematikus szakán. 1981-ben kezdett levelező aspirantúrát a Szovjetunióban. Aspiránsi témája a Banach-tereken értelmezett stabilis eloszlások vizsgálata, mely összefüggésben van a centrális határeloszlástételekbeli konvergencia sebességével, így statisztikai alkalmazásokkal is. Kutatási területe kiterjed lineáris programozásbeli algoritmusok, illetve számítógéprendszerek matematikai vizsgálatára.

Pap Gyula publikációinak jegyzéke

[1] On the asymptotic behaviour of the generalized binomial distribution. — *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* **21**. *Analytic Function Methods in Probability Theory*, 1977, 269—276.
[2] Az általánosított binomiális eloszlás határeloszlásai. — *Studium* **VIII**. 2, 1979, Debrecen, 173—177.
[3] Banach-térbeli Gauss-vektorok normájának eloszlásáról (oroszul). — *Litovszkij mat. szbornyik*, 1984, 140—144.
[4] Dependence of Gaussian measure on covariance in Hilbert space. — In: *Proc. of the Cont. "Probab. Theory on Vector Spaces III."* Lect. Notes in Math., 1983, v. 1980, 188—194.
[5] *Banach-térbeli stabilis vektorok normájának eloszlásáról* (oroszul). — Kandidátusi disszertáció, 1985, Vilniusz.
[6] (M. D. RICHTERrel) Gauss mértékek aszimptotikus viselkedéséről (németül). — Megjelenés alatt, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.*
[7] (JUHÁSZ ISTVÁNnal) A note on measurement bias in feldback queues. — Megjelenés alatt, *Foundations of Control Engineering.*
[8] (RÓZSA GYÖRGY-gyel) Lineáris programozási feladatok megoldása vetítéses módszerrel. — Megjelenés alatt. *Alkalmazott Mat. Lapok.*
[9] (V. PAULAUSKASszal) Megjegyzés c_0 Banach-térbeli Gauss-vektor normájának eloszlásáról. — Megjelenés alatt. *Litovszkij Mat. Szbornyik*, 1986.
[10] Hilbert-térbeli stabilis véletlen vektor normájának sűrűség-függvényének korlátossága. — Megjelenés alatt, *Tyeorija Ver. i Matem. Stat.*, 1986.
[11] (V. BENTKUSsal) Hilbert-térbeli stabilis véletlen vektorok normájának eloszlásáról. — Megjelenés alatt, *Litovszkij Mat. Szbornyik*, 1986.

TARDOS ÉVA 1957-ben született, 1981-ben végzett az ELTE matematikus szakán. A Távközlési Kutató Intézetben digitális jelfeldolgozással és számítógépes áramkörtervezéssel foglalkozik. Emellett számos dolgozatot publikált — részben Frank Andrással és más társszerzőkkel közösen — matroidokkal és szubmoduláris függvényekkel kapcsolatban. Legjelentősebb eredménye a minimálköltséges cirkulációs problémára adott, erősen polinomiális rendszer algoritmus [8]: ezzel egy hosszú ideje nyitott problémára adott — élénk nemzetközi visszhangot kiváltó — megoldást.

Tardos Éva publikációinak jegyzéke

[1] A. FRANK—É. TARDOS, Matroids from crossing families, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **37** (1985), 295—304.
[2] I. ABOS—A. FRANK—É. TARDOS, Algorithms for edge-disjoint paths in a rectangular grid and their applications in layout design, *Proc. 7th Colloquium on Microwave Communication*, 1982, 178—181.
[3] A. FRANK—É. TARDOS, An algorithm for the unbounded matroid intersection polyhedra, *Discrete Mathematics* **19** (1984), 129—134.
[4] A. FRANK—A. SEBŐ—É. TARDOS, Covering directed and odd cuts, *Mathematical Programming Study* **22** (1984), 99—112.

[5] É. Tardos, Generalized matroids and supermodular colourings, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **40** (1985), 359—382.
[6] A. Frank—P. Lévai—J. Mózes—P. Scsaurszki—É. Tardos, Sufficient conditions for the solvability of channel routing problems, *Proc. IEEE ISCAS*, Montréal, 1984.
[7] A. Frank—É. Tardos, On routing around a rectangle, *Proc. ETAN Network Theory Symposium* (Jugoszlávia), 1984.
[8] É. Tardos, A strongly polynomial algorithm for the minimum cost circulation problem, *Combinatorica*, sajtó alatt.
[9] A. Frank—É. Tardos, An application of simultaneous approximation in combinatorial optimization, *Proc. 26th Symposium on Foundations of Computer Science*, 1985, 459—463.
[10] É. Tardos, A strongly polynomial algorithm for solving combinatorial linear programs, *Operations Research*, sajtó alatt.
[11] W. Cook—A. M. Gerards—L. Schrijver—É. Tardos, Sensitivity theorems in integer linear programming, *Mathematical Programming*, sajtó alatt.
[12] É. Tardos—C. A. Tovey—M. A. Trick, Layered augmenting path algorithms, *Mathematics of Operations Research*, sajtó alatt.
[13] Dobrovits A.—Elekes J.—Kapitánffy K.—Semegi J.—Simonyi E.—Tardos É., *Digitális FDM/PCM és PCM/FDM transzmultiplexer berendezések kidolgozásának problémái*, Távközlési Kutató Intézet, Budapest, 1982.

Jelentés a Rényi Kató Emlékdíj 1985. évi odaítéléséről

A Rényi Kató Emlékdíj Bizottság a beérkezett javaslatok megvitatása után a következő döntést hozta:

I. díjban és 2500—2500 Ft-os pénzjutalomban részesíti *BUCZOLICH ZOLTÁNT* és *ERDÉLYI TAMÁST*, az ELTE V. éves matematikus hallgatóit,

II. díjban és egyenként 1600 Ft-os pénzjutalomban részesíti *KOVÁCS ZOLTÁNT* (KLTE, V. mat.—fiz.), *PINTÉR FERENCET* (ELTE, V. mat.) és *WIERDL MÁTÉT* (ELTE, V. mat.).

Indoklás:

BUCZOLICH ZOLTÁN meghatározta, hogy milyen p-re van olyan függvény, aminek az általános deriváltjai L_p-ben sűrűn lennének, ezen kívül Erdős Pál egy kérdését megválaszolva olyan mérhető, lineáris halmazt konstruált, amelynek minden $0 \leqq c \leqq 1$ számhoz kontinuum sok c sűrűségű pontja van.

ERDÉLYI TAMÁS olyan polinomok deriváltjainak becslésével foglalkozik, melyek gyökei bizonyos korlátozásnak vannak alávetve (tehát Markov- és Bernstein-típusú becslésekkel). Számos igen éles becslést bizonyít, megjavítva az addig ismerteket, belátja hogy azok (esetleges konstanstól eltekintve) a legjobbak.

KOVÁCS ZOLTÁN fibrált nyalábok Finsler-típusú konnexióival foglalkozik. Kapcsolatot talált Szabó Zoltán és R. Miron konnexiói között. A pszeudokonnexió fogalmát átviszi és alkalmazza a Finsler-konnexiók elméletében.

PINTÉR FERENC a teljes számegyenesen értelmezett függvények interpolációjával foglalkozik. Egy Butzer—Freud-féle problémát megoldva interpolációs bizonyítást ad a teljes számegyenesre felírt Jackson-tételre. Általánosítja Grünwald Géza és J. Marcinkiewicz tételeit is, a Lagrange-interpoláció egy új alakja segítségével.

WIERDL MÁTÉ valós függvénytannal és számelmélettel foglalkozik. Laczkovich Miklós problémáját igazolva belátta, hogy ha egy korlátos, folytonos függvény két periodikus függvény összege, akkor előáll két folytonos, periodikus függvény összegeként is. Ruzsa Imre eredményét általánosítva belátta, hogy x^n előáll $n+1$ periodikus függvény összegeként, de kevesebbel nem. Additív számelméleti vizsgálataiban olyan $B_1, \ldots, B_k$ h-rendű bázist konstruált, amire $B_1 + \ldots + B_k$ „ritka" halmaz. Plünnecke egy eredményéből következik, hogy ez az eredmény tovább már nem is javítható.

1985. évi nagyrendezvények

Intuitív geometria kollokvium (Siófok, május 13—18.)

A Bolyai János Matematikai Társulat 1985. május 13—18. között nemzetközi konferenciát rendezett „Intuitive Geometry" címmel Siófokon. A cím nem a matematika valamely jól körülhatárolt területét jelöli, hanem olyan geometriai problémák összességét, amelyek, Hilbert szavaival, elmagyarázhatók az intelligens járókelőknek. A rendezvénynek 121 résztvevője volt, ebből 38 magyar, 83 külföldi 16 különböző országból. Sajnálatos, hogy az általunk meghívott mintegy 30 szovjet matematikus közül csupán kettő tudott eljönni rendezvényünkre. Rajtuk kívül a szovjetek még két fizikussal képviselték magukat, akiket, bár mi örömmel fogadtunk, nem hívtunk meg. Különösen fájdalmas, hogy a plenáris előadás tartására meghívott három szovjet geométer közül egy sem tudott eljönni, bár egyikük utazásának támogatását magától a Szovjetunió művelődésügyi minisztérétől is kértük.

A konferencián 108 előadás hangzott el. A plenáris előadások a következők voltak:

J. Böhm (NDK): Folgerungen aus Schläflis Differentialform in der nichteuklidischen Polyedergeometrie,
Erdős Pál: Unsolved problems in combinatorial geometry,
A. Florian (Ausztria): Packing and covering with convex discs,
R. Schneider (NSZK): Equidecomposable polyhedra,
J. J. Seidel (Hollandia): On the volume of a hyperbolic simplex.

A további előadások három párhuzamos szekcióban folytak. Szerveztünk továbbá egy plenáris ülésszakot, amelyen megoldatlan problémák kerültek ismertetésre és megvitatásra.

A tudományos programot egy jól sikerült fogadás és egy, a Balaton keleti medencéje körül tett félnapos autóbuszkirándulás egészítette ki, amelyet a résztvevők költségére szerveztünk.

A magyar geometriai hagyományoknak megfelelően az előadások többsége diszkrét- és kombinatorikus geometriával, valamint a konvex testek elméletével foglalkozott. Több előadás témája volt a (geometriai) kristálytan és a klasszikus differenciálgeometria. Egyes előadások a geometria biológiai, építészeti, művészeti, sőt pszichológiai kapcsolatairól szóltak. Sor került egy igen érdekes film vetítésére Escher művészetének matematikai vonatkozásairól. Végeredményben megállapítható, hogy az előadók többsége érdekes új matematikai eredményeket ismertetett olyan problémákról, amelyek eleget tesznek a fent említett Hilbert-féle követelményeknek.

A konferencia kötetét szeretnénk egy éven belül nyomdakész állapotba hozni. Az eddig benyújtott 41 cikk közül 29 van lektorálva, 14-et lényegében változtatás nélkül elfogadtunk, 7 cikket átdolgozásra visszaküldtünk a szerzőnek, 8 cikket sajnos el kellett utasítanunk.

A résztvevők egybehangzó véleménye szerint a konferencia jól sikerült, lebonyolítása minden zökkenő nélkül folyt, s ezért a Társulat áldozatkész és fáradságot nem kímélő munkatársain kívül dicséret illeti a rendezvénynek otthont adó Dunai Vasmű Üdülőjének dolgozóit, akik a vendégek számos apró igényének kielégítésében is készséggel álltak rendelkezésünkre.

Csillag Pál találkozó (Balatonlelle, június 7—12.)

A Csillag Pál Találkozót június 7—12. között rendeztük Balatonlellén az 1978-ban vagy azután végzett matematikusok részére. A találkozón a tavalyinál kicsit kevesebben, 130-an vettek részt.

A szállás az elmúlt évekhez hasonlóan a Budapesti Műszaki Egyetem balatonlellei KISZ-táborában volt, az előadásokra is a tábor előadótermében került sor. Ebédet és vacsorát a közeli Tünde bisztróból hozattunk, a reggelit a tábor mellett levő üzletben szereztük be.

A találkozó tudományos programján 22, egyenként húsz perces előadás szerepelt. Bíró Balázs: Reláció-algebrák, Bodó Zalán: Egy DB-locking probléma, Boros Endre: Új LP megoldó módszerek, Császár Gyula: Párhuzamos kiszolgálás osztott memória-vezérlőben, Gáspár Csaba: Elliptikus egyenletek inverz problémái, Gyepesi György—Petróczki Hedvig: Nyelvi modellek rendszerek leírására, Kornai András: Természetes nyelvi generálórendszer, Lang Zsolt: Sztochasztikus folyamatok a szénhidrogén-kutatásban, Mészáros András: A „néha" sose rosszabb, mint a „mindig", Molnár Árpád: Algoritmusok párhuzamos processzálása, Molnár Bálint: Expert Systems, Ruttkay Zsófia: Nagy számok reprezentációja, Szabó Kálmán: Buszhozzáférés és adatkapcsolati protokoll, Szalkai István: Lokálisan invertálható konkrét monoidokról, Székely László: Holiday-számok, Telcs András: Lila ködök I—II., Tóth Bálint: A Brown mozgás mechanikai modelljeiről, Toczki János: Automatikus fordítóprogram generálás, Tutsek Endre: Regionális légszennyeződési model és eredményeinek megjelenítése színes rajzgéppel, Tuza Zsolt: Extremális problémák megoldása halmazpárok segítségével, Ureczky József: Mod p öninverz mátrixok, Nayak Prashant: On a problem of Pósa.

A találkozó jól sikerült, hasznos tapasztalatcserére adott lehetőséget kellemes körülmények között.

Matematikai diákolimpia (Finnország, július 1—10.)

A 26. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát 1985. július 1. és július 10. között a finnországi Joutsában rendezték meg. 38 ország küldött (általában hattagú) csapatot (zárójelben a csonka csapatok létszáma): Ausztrália, Ausztria, Belgium, Bulgária, Brazília, Kanada, Kína (2), Kolumbia, Csehszlovákia, Kuba, Ciprus, NDK, NSZK, Algéria, Finnország, Franciaország, Anglia, Görögország, Magyarország, Izrael, Irán (1), Izland (2), Olaszország (5), Kuwait (5), Marokkó, Mongólia, Hollandia, Norvégia, Lengyelország, Románia, Svédország, Spanyolország (4), Szovjetunió, Tunézia, Törökország, USA, Vietnam, Jugoszlávia, India (megfigyelővel képviseltette magát).

A verseny színhelye a középfinnországi Joutsa nevű város (faluközpont) volt, egy környékbeli üdülőközpont volt a szálláshely, luxuselhelyezéssel és ellátással. Az eredményhirdetést a helsinki egyetemen tartották, az utolsó 3 napot a versenyzők Helsinkiben töltötték. Két nagyobb városnéző kiránduláson (Jyvaskyla és Lahti) vettek részt, és ezenkívül megismerkedtek Joutsa környékének több, főként népi jellegű nevezetességével, táncaival, ételeivel, fát ültettek az IMO emlékére létesített parkban stb. Nagy mennyiségű személyi számítógép állt a velük foglalkozni akarók rendelkezésére, s a sportolási lehetőségek kimeríthetetlenek voltak.

A verseny hat feladatának megoldására kétszer 4,5 óra állt rendelkezésre, minden feladat pontértéke 7 volt. A díjak elosztásánál pontosan betartották (a szükséges kiegészítéssel) az eddig irányelvként alkalmazott elosztási elvet: a versenyzők fele kapott díjat (101), ezen belül az első, második, ill. harmadik díjasok aránya 1:2:3; ez 14 első, 35 második és 52 harmadik díjnak felelt meg. A díjhatárok: I. díj: 42—34, II. díj: 33—22, III. díj: 21—15 pontig.

A magyar versenyzők teljesítménye ebben az óriási mezőnyben figyelemre méltó, különösen örvendetes, hogy a maximális pontszámot elérő két versenyző közül az egyik magyar (a másik román) és a harmadik helyet is magyar versenyző foglalta el. A magyarok részletes eredménye:

	1.	2.	3.	4. feladat	5.	6.	Pont összesen
Bán	7	2	0	7	7	3	26
Birkás	7	7	1	0	0	0	15
Bóna	7	1	0	7	1	3	19
Kós	7	7	7	7	7	7	42
Makay	7	7	6	2	1	5	28
Megyesi	7	7	3	7	7	7	38

Rátz László vándorgyűlés (Győr, július 2—5.)

Az Oktatási Szakosztály 1985. évi Rátz László Vándorgyűlését július 2—5. között rendezte meg Győrött a Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskolán. A Vándorgyűlés keretén belül július 3—4-én a Felsőoktatási Bizottság Felsőoktatási Ankétot rendezett. A teljes vándorgyűlésre mintegy 560 pedagógus, az ankétra 40 felsőoktatásban tanító tanár jelent meg.

A Vándorgyűlésen minden szekcióban (alsótagozatos, felsőtagozatos, középiskolai — ezen belül: gimnáziumi és szakközépiskolai, szakmunkásképző) foglalkoztak a matematikatanítás időszerű kérdéseivel; szó esett a tantervi korrekciók elvi és gyakorlati kérdéseiről, elhangzottak a tananyagon túlmutató szakmai előadások is.

Igen nagy sikere volt a plenáris ülésnek: Dömölki Bálintnak sikerült személyes élményei alapján úgy bemutatnia Kalmár László munkásságát, hogy a hallgatóság maga elé képzelhette Kalmár László színes egyéniségét is. Gazsó Ferenc miniszterhelyettes igen tárgyszerűen elemezte az oktatásügy helyzetét és megismertette a jelenlevő pedagógusokat az oktatási kormányzat felelősségteli koncepciójával. Külön köszönet illeti a Társulat Győr megyei Tagozatát, amiért a Vándorgyűlésen 19 előadást, illetve szemináriumot a házigazdák tartottak meg.

Sikeresek voltak a feladatmegoldó szemináriumok (a középiskolai anyagot júniusban széttküldtük a résztvevőknek) és az ankétok is. Bár az általános és középiskolai átmenet ankétján a hozzászólások nem maradtak minden esetben a témánál és a témával érdemében nem foglalkozott az ankét — a tervtől eltérően —, azért az elhangzottak jól rávilágítottak a matematikatanítás „szűk keresztmetszeteire”. Nagy érdeklődés kísérte a matematikatanárok továbbképzéséről tartott ankétot, amelyet Szalay István, a Továbbképzési Tanács elnöke vezetett be. (A továbbképzési tervezet kivonatát minden résztvevő előre megkapta.)

A Tanítóképző Főiskola technikai segítsége tette lehetővé, hogy Lénárt István „Axiomatizálás a gömbön" c. OOK videofilmjét levetíthettük. Nagy sikere volt a filmnek és az azt követő alőadásnak is. A Vándorgyűlés szakmai részét jól egészítette ki a győri városnézés, a mikroprocesszoros kutató-fejlesztő laboratórium meglátogatása, a Trubadur c. opera megtekintése és a 4 féle kirándulás (Pannonhalma, Mosonmagyaróvár, Abda-Lébénymiklós, Szigetköz).

A vándorgyűlés befejezése után az Oktatási Bizottság ülést tartott Győrött, ahol a jelenlevők megtárgyalták a vándorgyűlés tartalmi és szervezési kérdéseit.

Haar Alfréd emlékkonferencia (Budapest, augusztus 11—16.)

A Társulat augusztus 11—16. között nemzetközi konferenciát rendezett a világhírű magyar matematikus, Haar Alfréd születésének 100. évfordulója alkalmából. A konferencián 23 ország 151 résztvevője (köztük 38 magyar) 127 előadást tartott, köztük négy meghívott előadó az alábbiakat:

Szőkefalvi-Nagy Béla: Alfred Haar (1885—1933): invariant measure of mathematical excellence,
Z. Ciesielski (Lengyelország): Haar functions in probability and analysis,
E. Hewitt (USA): Haar measure — past, present and future,
P. L. Uljanov (Szovjetunió): On properties of convergence of Haar series.

Jóleső érzés volt tapasztalni, hogy külföldi vendégeink milyen megbecsüléssel emlegetik Haar Alfréd nevét: számos előadás épült a Haar mérték és a Haar-féle ortogonális rendszer fogalmára. A szervezők szándéka az volt, hogy elsősorban a Haar Alfréd által művelt témakörök (halmazelmélet, ortogonális függvénysorok és szinguláris integrálok, analitikus függvények, parciális differenciálegyenletek, variációszámítás, függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek, diszkrét csoportok és függvényalgebrák, folytonos csoportok) szakértőit hívja meg a konferenciára. Végül is a három szekcióban megtartott előadások többsége az approximáció elmélet (pontosan természetesen nem meghatározható) témakörébe esett. A konferencia jó alkalmat nyújtott néhány fiatal magyar matematikusnak, hogy kezdődő kutatásaikról beszámoljanak és megismerkedjenek a nemzetközi konferenciák légkörével.

A tudományos programot egy a Hilton Hotelben (igen kedvező feltételek mellett) tartott fogadás, valamint egy a harmincöt fokos hőség ellenére is jól sikerült szentendrei kirándulás egészítette ki, melyet a résztvevők költségére szerveztünk.

A résztvevők többsége kifejezte azt a véleményét, hogy a konferencia igen jól sikerült. Reméljük, az elhangzott előadások anyagát sikerül két év alatt megjelentetni — ennél rövidebb időtartam a mai átfutási idők mellett illuzórikus lenne.

A konferenciának a Budapesti Műszaki Egyetem központi épülete adott otthont. Itt is megragadjuk az alkalmat, hogy kifejezzük a szervezőbizottság nevében köszönetünket a Műegyetem illetékeseinek, akik mindent megtettek, hogy a rendezvény zökkenőmentesen bonyolódhasson le.

Diákköri nyári iskola (Szombathely, augusztus 21—28.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikus, Matematika—Fizika és Programozó Tudományos Diákköre sikeres *nyári iskolát* tartott Szombathelyen a Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola és a TIT Vas megyei Szervezete támogatásával augusztus 21—28. között. A három diákkör, néhány közös előadás mellett, önálló szakmai programot bonyolított le. A Társulat 10 ezer forinttal támogatta a matematikus, 6 ezer forinttal a matematika-fizika szakos rendezvényt. (A kísérletből kiderült, hogy a rendezőknek a jövőben rögzíteniük kell a szervezés mikéntjére vonatkozó elképzeléseiket.)

Rendezett halmazok elmélete kollokvium (Szeged, augusztus 26—30.)

A kollokviumnak 16 országból 89 résztvevője volt, ebből 62 külföldi. A korábbi évekhez viszonyítva jelentősen nőtt a kapitalista országokból érkezők száma (40, amelyből 17 NSZK-beli), de ugyanakkor csökkent a szocialista országokból érkezők száma, s ennek eredményeként a külföldi vendégek száma csak alig emelkedett. A képviselt országok a következők: Csehszlovákia, Finnország, Franciaország, Magyarország, NDK, Nigéria, NSZK, Portugália, Svájc, Szovjetunió, USA.

A konferencia előkészítésében nemcsak egy háromtagú helyi szervezőbizottság (Czédli Gábor, Huhn András, Klukovits Lajos), hanem egy azt a témakör hírneves művelőivel (Babai L., M. Kolibar, I. Rival, Schmidt T., Szász G., R. Wille) kiegészítő kilenctagú nemzetközi programbizottság is tevékenykedett. Fő feladata a konferencia népszerűsítése, valamint a konferencia előtti napon a plenáris előadások kiválogatása és az előadások időzítése volt. A nemzetközi programbizottság a hozzáfűzött reményeket beváltotta, jóllehet a konferenciára csak öt tagja tudott eljönni.

A konferenciát nem sokkal megelőzően, június 6-án tragikus esemény történt: váratlanul elhunyt Huhn András, a konferencia szakmai vezetője és egyik fő szervezője.

A nemzetközi programbizottság augusztus 24-én, a vendégek zöme pedig augusztus 25-én érkezett. A konferencia augusztus 26-án 9.30-kor megnyitó ünnepséggel kezdődött (melynek részeként Schmidt Tamás részletesen megemlékezett Huhn András matematikai munkásságáról) és 30-án délben ért véget. Összesen ötvenhat, egyenként 30 perc időtartamú előadás hangzott el. A kilenc plenáris előadás kivételével az előadásokra két párhuzamos szekcióban került sor. A plenáris előadók az alábbiak voltak: E. A. Babajev (SU), J. R. Griggs (USA), W. Ch. Holland (USA), H. A. Kierstead (USA), W. A. Lampe (USA), G. F. McNulty (USA), K. Reuter (NSZK), J. Tuma (CS) és R. Wille (NSZK).

Az előadások általában igen tartalmasak, a plenáris előadások pedig kimagaslóak voltak. A sok nagyszerű előadás közül az alábbiakat emelnénk ki. A plenáris előadók közül W. A. Lampe eredménye, amely szerint például az M_3 nem lehet részvarietáshálóval izomorf, régóta folyó kutatásokat terel egészen új mederbe. R. Wille fogalomhálókról szóló előadásában nemcsak a hálóelmélet ezen általa indított új irányzatának elméleti jelentőségére világított rá, hanem számos, az adatfeldolgozás terén már meg is valósított alkalmazásra is utalt. A fogalomhálókra Wille egyik fiatal tanítványa, K. Reuter is támaszkodott ismertető plenáris előadása során. A nem plenáris előadók közül H. Gross (C. Hermann-nal és R. Moresivel elért eredménye) a hálóelmélet egy új alkalmazási lehetőségére világított rá: hálók segítségével sikerült Witt tételét 2 karakterisztikájú alaptestekre kiterjeszteni, azaz végesdimenziós, szimmetrikus bilineáris formával ellátott vektortér altereihez olyan invariánsokat rendelni, hogy pontosan az egymásba automorfizmussal átvihető alterek rendelkezzenek azonos invariánssal. W. Dziobiak pedig (Grätzer, Lakser, Igoshin és Jonsson korábbi eredményeit messze továbbfejlesztve) megmutatta, hogy egy moduláris hálóvarietás részkvázivarietáshálója vagy disztributív vagy semmilyen hálóazonosság (a triviálisakat leszámítva) nem teljesül benne.

A tudományos programban az előadások mellett egy problémafelvető ülés is helyet kapott augusztus 29-én.

A konferencia három rokon, bár nem mindig közvetlenül kapcsolódó résztémakörnek, a rendezett halmazok, a hálók, és a matroidok algebrai vonatkozásai témakörének művelőit látta vendégül. A nagyszámú színvonalas előadásra, az azonos és a rokon témakörök legújabb eredményeinek és problémáinak megismerési lehetőségére hivatkozva úgy véljük, hogy a konferencia további vizsgálatokat elősegítő és ösztönző volt.

Nem szakmai jellegű programként a konferencia vendégei augusztus 26-án állófogadáson vettek részt. Augusztus 27-én este pedig egy vancouveri matematikus, az éppen Szegeden tartózkodó Divinsky professzor sakkszimultánt adott a konferencia érdeklődő résztvevőinek, s ezt sakkbajnokság követte.

KÖZGYŰLÉS

1985. október 26-án megtartottuk a Társulat tisztújító közgyűlését. A küldöttválasztó értekezletek kiírása előtt a Társulat tagjainak száma 2260 volt, Budapesten 1082, a vidéki tagozatokban 1178 tagot tartottunk nyilván. Ennek megfelelően Budapestről 108, a többi tagozatból 121 küldöttet választottak meg. Csak három vidéki tagozatban — Békés, Somogy, Szolnok — nem voltak meg a küldöttválasztás feltételei. A határozatképességhez 115 fő jelenléte volt szükséges, a vezetőségválasztáskor 174 küldött adott le szavazatot.

A közgyűlés miután elfogadta a főtitkár alábbi, írásban közreadott jelentését a hozzá fűzött kiegészítésekkel, a pénztáros és az Ellenőrző Bizottság jelentését és megadta a lelépő vezetőségnek a felmentést, aTársulat tiszteletbeli elnökévé választotta Gyires Bélát, a matematikai tudomány doktorát.

Főtitkári jelentés

1. Bevezetés

Az alábbi jelentés a Bolyai János Matematikai Társulat működéséről kíván képet adni az 1983. december 17-én tartott közgyűlés óta eltelt időszakban, és egyben áttekintést nyújt az 1980. december 30-án tartott közgyűlésen megválasztott vezetőség ebben az időszakban végzett munkájáról. E közgyűlés fő feladata, hogy az elmúlt időszak munkájának értékelése után, megválassza a Társulat új vezetőségét és orientálja a Társulat további munkáját.

A beszámolási időszakban a Társulat tovább folytatta tevékenységét a korábban hagyományosan kialakult irányokban — új kezdeményezésekkel igyekezvén alkalmazkodni a társadalmi szükségletek szabta igényekhez. Iránymutatónak tekintettük a MTESZ 1978—1985. évekre kidolgozott cselekvési programját és az 1980-ban és 1983-ban tartott közgyűlésünk állásfoglalásait. Ezek értelmében a társulati munka súlypontja egyrészt magas szintű konferenciák szervezése volt a korszerű matematika legélénkebben fejlődő fejezeteiből és a matematika gyakorlatilag is legfontosabb alkalmazásaiból, másrészt a matematika oktatásának elősegítése a matematika különböző szintű oktatóinak folyamatos tájékoztatása, tapasztalat-cseréjük elősegítése révén, valamint a kiemelkedő matematikai tehetségek felkutatásában nyújtott segítség által. Az oktatás előmozdítására irányuló munkában végig kiemelten kezeltük az általános iskola új matematikai tanterve tanításának támogatását, a középiskolai tantervek továbbfejlesztésével és a korrekciós tantervek előkészítésével kapcsolatos kísérletező munkát és tapasztalatcserét, valamint az iskolai számítógépes oktatás bevezetésének segítését. A Társulat folyamatosan foglalkozott a matematika felsőszintű oktatásának problémáival is. A Felsőoktatási bizottság több színvonalas vitát rendezett és kibővített üléseken vitatta meg a felsőoktatás fejlesztésére kiadott miniszteri koncepciót, a tanártovábbképzés minisztériumi tervezetét és a matematikus továbbképzés problémáit. A kialakult állásfoglalásokat a minisztérium illetékeseinek eljuttattuk.

A népgazdaság általános helyzetével kapcsolatos nehézségek továbbra is érezhetőek voltak a MTESZ és tagegyesületei munkájában. A MTESZ gazdasági rendje ebben az időszakban sem állandósult és egyes kényszerintézkedések akadályozták a Társulat működését, jelentékeny többletmunkát róttak az adminisztrációra és megnehezítették a tervezést is. Ma már remény van arra, hogy a gazdálkodás végleges szabályozásának kérdése megoldódik, de már itt fel kell hívni a figyelmet arra, hogy akármilyen is lesz ez a gazdasági szabályozórendszer részleteiben, mindenképpen meg fogja követelni, hogy működési költségeinket magunk termetsük elő. Úgy érezzük, köszönettel tartozunk a MTESZ vezetőinek, akiknek segítőkészsége a nehezebb körülmények között is lehetővé tette, hogy a társulati tevékenység tartalmának minden lényeges csorbítása nélkül folytathassuk munkánkat az elmúlt években.

2. A Társulat szervezete

A Társulat munkájának zömét hagyományosan a szakosztályok és a vidéki tagozatok végzik, egyes konkrét feladatok ellátására pedig a Választmány, az Elnökség, a szakosztályok, illetve a tagozatok vezetőségei állandó jelleggel, vagy egy-egy alkalomra szóló megbízással munkabizottságokat küldenek ki.

Társulatunkban az előző időszakkal megegyezően a következő három szakosztály működött:
a) Tudományos szakosztály,
b) Oktatási szakosztály,
c) A matematika alkalmazásai szakosztály.

Vidéki tagozataink száma sajnos megfogyatkozott az előző közgyűlés óta: Működnek a Baranya megyei, a Bács-Kiskun megyei, Borsod megyei, Csongrád megyei, Fejér megyei, Győri, Hajdú-Bihar megyei, Heves megyei, Komárom megyei, Nógrád megyei, Szabolcs-Szatmár megyei, Szolnok megyei, Vas megyei, Veszprém megyei, Zala megyei tagozatok. A társulati tagok számának csökkenése miatt, az Alapszabály előírásai alapján a Békés megyei, a Somogy megyei és a Soproni tagozatok helyett a létszám remélhető kedvező változásáig csoportok működnek. Ugyancsak létszám-csökkenés miatt megszűnt működni a Dunaújvárosi csoport. Így ma már a régebbi három városi csoport közül csak a bajai és a gödöllői működik.

3. Szakosztályok

a) *Tudományos szakosztály.* A kialakult gyakorlat szerint a szakosztály munkájának zömét tudományos konferenciák és előadóülések szervezése jelenti. Az előadóülések túlnyomó részét az MTA Matematikai Kutató Intézetével közösen szerveztük, ezeken részben a Társulat külföldi vendégei adtak elő, részben az Intézet egyes munkatársai mint az intézeti szemináriumok sorozatának előadói. A szakosztály vezetőségének és a mellette működő Tudományos bizottságnak minden igyekezete ellenére továbbra sem sikerült számottevően fokozni a matematika egyes ágait vagy új eredményeit nagy vonásokban ismertető, más területek szakemberei számára is tanulságos előadások számát; elsősorban vidéki matematikusok Budapesten tartott előadásait hiányolhattuk. Mégis bizonyos tartalmi előrelépést jelentettek az utóbbi években a gyakoribbá vált Turán-emlékelőadások. Ennek az Erdős Pál által létesített alapítványnak a keretében (l. 8. pontot is) 1984-ben A. Schinzel és J. P. Kahane, 1985-ben Ja. G. Sinai és A. Selberg tartottak nagy érdeklődéssel kísért előadássorozatokat. 1985-ben a Szakosztály vezetőségének javaslatára az Elnökség kiküldött egy ad hoc bizottságot, hogy az igényeket felmérve javaslatokat dolgozzon ki az ilyen általános érdeklődésre számottartó előadások programjára és megszervezésére.

A Tudományos szakosztály operatív bizottságának fő tevékenysége a szakosztály által szervezett konferenciák, kollokviumok tervének összeállítása volt; ezekről a 6. pontban részletesen lesz szó. Ugyanott számolunk be a Tudományos szakosztály és a matematika alkalmazásai szakosztály közös szervezésében évenként megrendezett fiatal matematikusok Csillag Pál Találkozójáról is. Szintén A matematika alkalmazásai szakosztállyal közös rendezvény a végző matematikus hallgatók számára évente tartott klubest. Ez a bevált kezdeményezés jelentékenyen hozzájárul a fiatal matematikusoknak a társulati munkába való eredményes bevonásához. Az 1980-as és 1983-as közgyűléseken ismételten megfogalmazódott az igény, hogy az erre alkalmas fiatalokat már egyetemi éveik alatt vonjuk be a Társulat munkájába. Ebben az időszakban ebben az irányban különösen példamutató munkát végzett a Hajdú-Bihar megyei és a Heves megyei Tagozat, de történtek kezdeményezések Budapesten is. E tevékenységet azonban továbbra is biztatni és fokozni kell.

A szakosztályi munka keretébe tartozik a társulati könyvtár kezelése és fejlesztése, a folyóiratok cseréje, gondozása. Ezt a munkát nemrégiben elhunyt tagtársunk, Székely Gábor irányította nagy odaadással. A könyvtár jobb kihasználásának és megfelelő elhelyezésének nem kis problémája utódjának feladata lesz.

b) *Oktatási szakosztály.* A szakosztály munkája hagyományosan két részre oszlik: a tanárok és a tanulók körében végzett munkára. Mindkét irányban a szakosztály vezetősége és az Oktatási bizottság által kidolgozott évi munkatervek szabták meg a feladatokat, de a menet közben felmerült kérdéseket is rugalmasan programba iktatták.

A szakosztály ebben az időszakban is részt vett az új általános iskolai tantervre épülő középiskolai kísérlet irányításában. A Művelődési Minisztérium és az Országos Pedagógiai Intézet munkatársaival együttműködve figyelemmel kísérte az új tantervekkel kapcsolatos nehézségeket és segítette a minél zökkenőmentesebb munkát. Úgyszintén javaslatokat dolgozott ki, melyeket az esedékes tantervkorrekciónál lehet hasznosítani. A budapesti tanárok részére továbbképzés jellegű előadássorozatokat szervezett a szakosztály az FPI-vel közösen. Az 5., 6., 7. osztályban tanító tanárok számára rendezett sikeres továbbképző előadások után a beszámolási időszakban a 7., 8. osztályok tananyagából, valamint a felsőtagozatos matematika-tanterv új témaköreiből és azok kapcsolatairól szóló előadássorozatok folytak. A középiskolai tanárok számára a matematika egy-egy ágáról szóló előadásokat tartott a szakosztály. Az előadások a „Véletlen elemi matematikájáról" és az analízis egyes fejezeteiről szóltak.

A személyi számítógépek iskolában való megjelenése nyomán megélénkült a szakosztály tevékenysége a tanárok számítástechnikai képzésével és továbbképzésével kapcsolatban. E tevékenységet korábban akadályozta, hogy a tanárok, akik számítógép közelébe nem jutottak, általában vonakodtak az elméleti képzésben részt venni. Ez a magatartás igen kedvezően változott meg. A „Számítástechnika oktatását segítő" bizottság áldásos tevékenységének is köszönhetően közismerten erős túlterheltségük ellenére is egyre több tanár lett a számítástechnika oktatásának lelkes híve. A bizottság konzultációkat, ismeretbővítő előadásokat, „Így kezdtük" címmel igen nagy látogatottságú kiállítást szervezett. Sikerült beszereznünk öt darab HT gépet, melyekkel bekapcsolódtunk a „mikro-klub" hálózatba.

A szakosztály már az előző beszámolási időszakban létrehozott egy bizottságot, a tudományos tevékenységet is folytató matematikatanárok segítésére alkalmas módszerek felkutatására. E bizottság javaslatára 1979—1984-ig folyamatosan megrendezték a matematikatanárok feladatmegoldó versenyét. Sajnos, a verseny nem tudott elég sok tanárt megmozgatni, holott a módszer az volt, hogy „A matematika tanításában" a verseny előtt megjelentettük a feladatok megoldását segítő irodalmat, valamint a tanárok számára rendezett vándorgyűlésünkön előkészítő előadások hangzottak el. Az Oktatási szakosztály egyik feladata lesz az elkövetkező időben új formákat keresni a tanárok tudományos tevékenységének előmozdítására. Néhány éve lehetőség van arra, hogy tudományos munkával foglalkozni kívánó tanárok pályázat alapján egy éves, havi 500 Ft-os minisztériumi ösztöndíjjal egy-egy kutatóhelyen tudományos vezetést kapjanak. A Matematikai Kutatóintézetben például évi négy ilyen ösztöndíjas képzésére van lehetőség. A szakosztály segítséget nyújtott a legalkalmasabb pályázók felkutatásában.

A korábbiakhoz hasonló jelleggel működtek a diákolimpiára felkészítő szakkörök. 1984-ben Prágában, 1985-ben Heinolaban rendezték a matematikai diákolimpiát. A magyar diákok mindkét rendezvényen igen jól szerepeltek: 1984-ben a nem hivatalos pontversenyben a 4., idén a harmadik helyen végeztek diákjaink. A diákok felkészítésében a szakkörök vezetőin kívül Reiman István végezte a feladatok oroszlánrészét, mely tevékenységéért e helyen is köszönetet mondunk. Az Oktatási szakosztály javaslatára Társulatunk levélben fordult a Művelődési Minisztérium illetékeseihez, melyben az olimpiák előkészítésére még az eddigieknél is hatékonyabb új módszereket javasoltunk. Tekintettel arra, hogy a kérdésnek anyagi vonzata is van, azt a választ kaptuk, hogy csak a következő költségvetési év kezdete után térhetünk vissza a témára.

Fontos feladata volt a szakosztály vezetőségének a Rátz László vándorgyűlés évenként való megrendezése, programjának összeállítása (erről részletesebben l. a 6. pontot).

A diákok körében végzett munka hagyományos formái a különböző tanulóversenyek (l. 8. pontot). Rendszeresen működött az Ifjúsági Matematikai Kör is, melynek számára a téli szünetekben megszerveztük a szokásos kétnapos ülésszakot vidéki diákok bevonásával.

A szakosztály évenként megszervezte a végző matematika-tanárjelöltek szokásos klubdélutánját. Ezek hozzájárultak a fiatal tanároknak a társulati munkába való bevonásához, de a lehetőségek ezen a téren még nincsenek eléggé kiaknázva. Jobban kellene az egyetemi és főiskolai hallgatókat a vándorgyűléseken való részvételre mozgósítani, aminek többek között anyagi nehézségek is útját állják.

c) *A matematika alkalmazásai szakosztály.* Ez a szakosztály is a vezetőség és A matematika alkalmazásai bizottság által kidolgozott évi munkaterve alapján végezte a munkát. Tevékenységének hagyományos formája nemzetközi részvételű konferenciák szervezése (6. pont), továbbá a Tudományos szakosztállyal közösen az a) alatt már említett Csillag Pál találkozónak és a végző matematikus hallgatók klubestjének évenkénti megrendezése.

A matematika alkalmazásai bizottságon belül négy albizottság működik, ezek közül a „Valószínűségszámítás és statisztika albizottság" munkáját kell kiemelni. A néhány évvel ezelőtt rendezett nagy érdeklődéssel kísért „Fejezetek a matematikai statisztika alkalmazásaiból" c. tanfolyam 1984 januárjában „Többváltozós matematikai statisztikai módszerek" címmel folytatódott. Az előadások színvonalasak voltak, a résztvevők számára nagy haszonnal jártak. Sajnos, azonban a résztvevők száma a tervezettnél kevesebb volt és így ez a vállalkozásunk veszteséges volt. Ezt a jövőben gondosabb előkészítőmunkával mindenképpen el kell kerülnünk.

Sajnálatos módon lecsökkent a szakosztály tevékenysége a matematika alkalmazásairól szóló előadások szervezése terén. Ezt a tevékenységet a jövőben ismét fokozni kellene.

Jelentős részt vállalt a szakosztály a Társulat Elnöksége által különböző szervek felkérésére készített állásfoglalások kimunkálásában (l. 10. pont). Ugyancsak aktív támogatást nyújtanak a „Számítástechnika oktatását segítő" bizottság munkájához.

Az 1980-as és 1983-as közgyűlések ajánlásai szellemében jelentősen előreléptünk a MTESZ többi tagegyesületével való együttműködésben. A Neumann János Számítógéptudományi Társasággal és a Közgazdasági Társaság Matematikai-közgazdasági társaságával közösen Operációkutatási konferenciát szerveztünk, a Híradástechnikai Tudományos Egyesülettel és a Közlekedéstudományi Egyesülettel részt vettünk a „Megbízhatóság az elektronikában" c. konferencia szervezésében. A Magyar Hidrológiai Társasággal közösen előadóülést szerveztünk a „Gauss folyamatok alkalmazásáról".

4. Vidéki tagozatok

Szervezeteink az ország területét csaknem teljesen behálózzák, egyedül Tolna megyében nincs még társulati tagozat vagy csoport. Ennek szervezésére a beszámolási időszakban ismét tettünk, sajnos eredménytelen kísérletet. Az egyes tagozatok tevékenységének köre és intenzitása, a helyi adottságoktól függően, igen széles körben változik. Mindegyikük foglalkozik a tanárok pedagógiai munkájának segítését és az érdeklődő tanulók körében végzett matematikai ismeretterjesztést szolgáló rendezvények szervezésével, közreműködnek a Társulat által szervezett országos tanulóversenyek megrendezésében, emellett sok helyen szerveznek tudományos, illetve a matematika alkalmazásaival foglalkozó előadásokat is.

A Schweitzer Miklós emlékverseny szervezését 1983-ban a Csongrád megyei tagozat, 1985-ben a Hajdú-Bihar megyei tagozat végezte, illetve végzi.

Jelentős segítséget kaptunk tagozatainktól nagyrendezvények szervezésében. Az egyes tagozatok területén rendezett konferenciák, vándorgyűlések előkészítése és lebonyolítása elképzelhetetlen volna az ott működő tagtársak aktív közreműködése nélkül. Ezen a téren ismét kiemelkedő munkát végzett a Csongrád megyei tagozat (Differenciálegyenletek qualitatív elmélete kollokvium, Rendezett halmazok elmélete kollokvium), úgyszintén jelentős mértékben vették ki a munkából részüket a következők is: Baranya megyei tagozat (Algoritmuselméleti kollokvium), Hajdú-Bihar megyei tagozat (Goodness of fit kollokvium), Győri tagozat (Rátz László vondorgyűlés 1985), Komárom megyei tagozat (Rátz László vándorgyűlés 1984).

Sikerült előrelépni a vidéki tagozatokkal való kapcsolattartás és a tagozatok egymás közötti tapasztalatcseréje terén, továbbá a munkatervek és a költségvetések elkészítésében korábban mutatkozott bizonytalanságokat megszüntetni, vagy legalábbis csökkenteni; ez elsősorban a tagozati titkárok és a vidéki tagozatokkal kapcsolatot tartó két társulati titkár jó munkájának eredménye. Mindezek ellenére van néhány kisebb tagozat, amellyel kapcsolatunk változatlanul meglehetősen laza; a jövő feladata, hogy ezekkel a tagozatokkal is megjavítsuk a kapcsolatot, amihez elsősorban helyi tagtársaink együttműködési készségére van fokozottabban szükség.

5. Állandó munkabizottságok

a) *Emlékőrző bizottság.* Az MTA-val közösen megemlékeztünk Varga Ottó születésének 75. évfordulójáról. Haar Alfréd születése 100. évfordulója megünneplésére sikeres konferenciát rendeztünk az általa művelt területen szakembereinek jelenlétével. Kalmár László születése 80. évfordulója alkalmából egyrészt a vándorgyűlésen hangzott el előadás, másrészt a Csongrád megyei tagozattal együtt rendezünk emlékülést. Az MTA III. osztályával közösen javaslatot tettünk az ELTE Tanárképző Főiskolai kara, Természettudományi Intézetének Péter Rózsáról való elnevezésére — születése 80. évfordulója kapcsán —, a javaslatunkra még nem kaptunk választ.

b) A *Felsőoktatási Bizottság* a tanárversenyekkel és a tudományos munkát végezni kívánó tanárokkal kapcsolatos tevékenységéről az 1. és a 3. b) pontokban már esett szó. A bizottság korábbi kezdeményezése nyomán az utolsó öt évben tartott Rátz László vándorgyűléseken működött Felsőoktatási szekció. Ezeknek munkáját nagy érdeklődés kísérte és kívánatos, hogy ezt a bevált kezdeményezést a jövőben is folytassuk. Felvetődött az idei vándorgyűlésen, hogy egy-egy alkalommal a Felsőoktatási szekció egy-egy felsőoktatási intézmény problémáival foglalkozzon kiemelten, valamint, hogy a Műszaki főiskolai napok már 9 éve szervezett rendezvénysorozatához csatlakoznunk kellene. Úgy gondoljuk, hogy mindkét javaslat megfontolást érdemel. Megvalósításukkal a megválasztandó új vezetőségnek kell majd foglalkozni.

c) A *Könyvbizottság* munkája ugyancsak örvendetesen élénk és eredményes volt ebben az időszakban.

A bizottság fő feladatául a következőket tekintette: Javaslatok kidolgozása matematikai tárgyú könyvek kiadására. Az egyes könyvkiadók (matematikai irányú) terveinek a meghallgatása, esetleges egyeztetése, tanácsadás. Adatszolgáltatás a Magyarországon megjelent matematikai tárgyú könyvekről. Tanácsadás lektorok, bírálók, fordítók megbízásával kapcsolatban. A már megjelent könyvek népszerűsítése.

A bizottság ebben az időszakban ülésein a következő fontosabb kérdésekkel foglalkozott: Találkozást szervezett meg a kereskedelem képviselőivel. Összeállította az ún. sztandard könyvek listáját, a kiadandó és újra kiadandó könyvek listáját. Eredményesen részt vett a főiskolai tankönyvpályázat elbírálásában. A bizottság munkájának jelentős része volt abban, hogy Miskolcon 1983. október 19-én megnyílt a Fejér Lipót könyvesbolt, ahol valamennyi, az országban megjelent matematika könyv állandóan kapható, illetve megrendelhető. Az egyes könyvkiadóknak a bizottságban részt vevő képviselői egyöntetűen úgy látják, hogy a bizottság léte és tevékenysége hézagpótló, mert ez az egyetlen olyan fórum, amely módot nyújt a tapasztalatcserére, terveik, elképzeléseik egyeztetésére.

6. Nagyrendezvények

a) *Kollokviumok.* A beszámolási időszakban a következő kollokviumokat rendeztük meg:

A Tudományos szakosztály szervezésében:

Illeszkedésvizsgálati kollokvium, Debrecen, 1984. június 25—29.; 115 (58 külföldi) résztvevő, 90 előadás.

Algoritmuselméleti kollokvium, Pécs, 1984. július 23—27.; 87 (39 külföldi) résztvevő, 56 előadás.

Véletlen mezők: a statisztikus fizika szigorú eredményei, Kőszeg, 1984. augusztus 26—szeptember 1.; 118 (98 külföldi) résztvevő, 85 előadás.

Intuitív geometria konferencia, Balatonszéplak, 1985. május 13—18.; 121 (83 külföldi) résztvevő, 108 előadás.

Haar Alfréd emlékkonferencia, Budapest, 1985. augusztus 11—16.; 151 (113 külföldi) résztvevő, 127 előadás.

Rendezett halmazok elmélete kollokvium, Szeged, 1985. augusztus 26—30.; 88 (60 külföldi) résztvevő, 53 előadás.

A matematika alkalmazásai szakosztály rendezésében:

Differenciálegyenletek qualitatív elmélete kollokvium, Szeged, 1984. augusztus 27—31.; 122 (72 külföldi) résztvevő, 81 előadás.

Erkölcsi és anyagi támogatásunkkal zajlott le a Hajdúszoboszlón 111 fő részvételével 1984-ben szervezett „Differenciálgeometriai kollokvium". Erkölcsi támogatást nyújtottunk a Debrecenben tartott „Általánosított függvények" c. konferenciához (1984), valamint a PSMS Statisztikai konferenciájához.

Mindegyik megrendezett kollokviumról elmondható, hogy magához tudta vonzani a témakör számos szakértőjét, közöttük a nemzetközileg is kiválóbbak jónéhányát, s hogy a külföldi résztvevők jelentékeny része családjával együtt érkezett, a résztvevők számát néhány tucat további vendéggel gyarapítva. A tudományos program magas színvonala ekként eleve biztosítva volt;

a résztvevők képet kaphattak a témakör terén folyó legfrissebb kutatásokról. A résztvevők tapasztalatcseréjét változatos kiegészítő programokkal (kirándulás, fogadás) igyekeztünk biztosítani. Az alkalmanként adódó kisebb-nagyobb, részben rajtunk, de nagyobb részben rajtunk kívül álló okokból bekövetkező szervezési zökkenő ellenére is elmondhatjuk, hogy valamennyi ilyen rendezvényünk szép sikerrel zárult.

Kollokviumaink megrendezését általában több évre előre megtervezzük; a minél hosszabb távú tervezés némileg csökkenti ugyan a rugalmasságot, de elkerülhetetlen, különösen olyan esetekben, amikor más szervek, elsősorban nemzetközi szervezetek segítségét kívánjuk igénybe venni. Jelenleg rendezvénytervünk 1987-ig van rögzítve (kivéve az ICME '88-at, l. 13. pont) és a megválasztandó új vezetőség egyik első feladata kell legyen a tervek további néhány évre való rögzítése.

Kiadványaink csökkenő jövedelme és a MTESZ gazdálkodási rendjének módosulása szükségessé tette, hogy rendezvényeinket, ha kis mértékben is, de nyereségessé tegyük. Ez és a különféle költségek rohamos emelkedése rendezvényeinket jelentősen megdrágította. Az ebből adódó problémákkal azokat előrelátva már előző közgyűléseinken is foglalkoztunk. Úgy gondoljuk, hogy a tagság támogatásával sikerült a problémákat viszonylag fájdalommentesen megoldani. Mégis e helyütt is kérnünk kell valamennyi tagtársunk megértését abban, hogy a költségtérítési kötelezettség alól senkivel sem tehetünk kivételt.

b) *Vándorgyűlések.* A Rátz László vándorgyűlést az Oktatási szakosztály szervezésében a beszámolási időszakban a következő városokban rendeztük meg: Tatabánya (1984), Győr (1985).

A már kialakult gyakorlat szerint a vándorgyűlések munkája a három hagyományos szekcióban folyt, rengeteg hasznos és tanulságos információt nyújtva az alsó tagozatos, felső tagozatos és középiskolában dolgozó tanárok számára egyaránt mind a szakmai, mind a szakdidaktikai továbbképzés terén.

A tanárok részvételével kapcsolatos anyagi problémák többé-kevésbé rendeződtek. Erre mutat, hogy a vándorgyűlés résztvevői száma 1984-ben 450, 1985-ben 560 volt. A nem társulati tagok részvétele azonban nem eléggé tervszerű: annak ellenére, hogy a megyei művelődési osztályokon és minden terület szakfelügyelői hálózatán keresztül megkíséreljük a rendezvény hírét az egész országban elterjeszteni, nem mindenkihez jut el az információ.

Az Oktatási szakosztály vezetősége különös gondot fordított a vándorgyűlések programjának színvonalas összeállítására, így e találkozók mind sikeresebben töltik be szerepüket.

Nagyon hasznos, hogy a Szakosztály vezetőségének kezdeményezése nyomán, a résztvevő tanárok első kézből kaphatnak információkat a Minisztérium Vándorgyűlésen megjelenő képviselőitől.

c) *Fiatal matematikusok Csillag Pál találkozója.* Ebben az időszakban is minden évben megrendeztük ezt a találkozót a jól bevált helyen (Balatonlelle).

A rendezvényen 1984-ben 151-en, 1985-ben 130-an vettek részt. A résztvevők száma is mutatja, hogy ez a jól bevált évi rendezvény ebben az időszakban is hatékonyan szolgálta célját: a különböző területeken dolgozó fiatal matematikusok számára lehetőséget nyújtott arra, hogy kollégáik munkájával megismerkedjenek, problémáikról tájékozódjanak, a közeli területeken dolgozók pedig értékes, munkájukban felhasználható ötleteket kapjanak egymástól.

d) *Nyári Iskolák.* Ebben az időszakban is anyagi és szervezési segítséget nyújtottunk a Természettudományi Karok Matematikai Tudományos Diákköreinek évenként megrendezett nyári iskoláihoz. 1984-ben a Matematikusok nyári iskoláját Szegeden (18 résztvevő), a matematika-fizika szakos hallgatók rendezvényét Dombóváron (43 hallgató, 16 tanár) rendezték meg. 1985-ben kísérletképpen első ízben tartották együtt a matematikus, matematika-fizika és programozó szakos hallgatók diákköri nyári iskoláját (Szombathely, 58 hallgató). Az első próbálkozás során felmerült számos — anyagi és szervezési — gond figyelmeztet arra, hogy az új kezdeményezést a szervezés első pillanatától az utolsóig alaposan át kell gondolni és bizonyos alapelveket (elsősorban pl. azt, hogy ki részesüljön a Társulat anyagi támogatásából) írásban le kell fektetni.

7. Emlékdíjak

A matematikai tudományos utánpótlás nevelésében kiemelkedő érdemeket szerzett kutatók részére alapított Szele Tibor emlékérmet az 1983. évi közgyűlésen adtuk át Császár Ákosnak, 1984-ben az érmet Leindler László kapta. A matematika oktatásában és népszerűsítésében elért kiváló teljesítményéért 1984-ben 6, 1985-ben 7 kartársunk részesült Beke Manó emlékdíjban. Két ízben sikerült elérnünk, hogy a díjat határainkon kívül élő kiváló magyar matematikusok is megkapták (1984-ben Weszely Tibor, 1985-ben Oláh György). A matematikai kutatómunka területén kiemelkedő matematikusok jutalmazását szolgáló Grünwald Géza-emlékdíjban 1984-ben 2 kutató részesült. A matematika alkalmazásai területén kiváló teljesítményt nyújtó fiatalok közül 4-en nyerték el 1984-ben a Farkas Gyula-emlékdíjat. A jelentős önálló teljesítményt elért matematikus hallgatók részére alapított Rényi Kató-emlékdíjat 1984-ben 4, 1985-ben 5 egyetemi hallgató kapta meg. 1985-

ben a díj alapszabályának (hallgatólagos) módosítására került sor: Kísérletképpen néhány évig a díj II. fokozatában V. éves kora előtt nem részesít jelöltet a bizottság.

Sajnálatos, hogy az egyes emlékdíjakra fordítható pénzügyi keretek összege egyre kevésbé teszi lehetővé a jutalmazott teljesítménnyel arányos díjösszegek odaítélését, így emlékdíjaink a nem lebecsülendő erkölcsi elismerés jellegét öltik.

8. Alapítványok

a) Néhány éve Turán Pál emléke megőrzésére Erdős Pál 200 000 Ft-os alapítványt létesített, hogy annak kamataiból évről évre világhírű matematikusokat hívjunk meg ún. Turán-emlékelőadások tartására. Ez az alapítvány kezdeti adminisztratív nehézségek után egyre jobban és hasznosabban működik, nagymértékben hozzájárulva az ország matematikai kultúrájának és tekintélyének növeléséhez. 1984-ben A. Schinzel (lengyel) és J. P. Kahane (francia), 1985-ben Ja. G. Sinai (szovjet) és A. Selberg (amerikai) matematikusok látogattak Magyarországra előadások tartására.

b) A Fejér megyei tagozat kezeli az úgyszintén Erdős Pál által tett 20 000 Ft-os Lázár Dezső alapítványt. Ennek 1984. évi kamataiból a Székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium 3 matematikából kiemelkedő eredményt elért tanítványa részesült.

c) Patai Lászlóné 1975. májusában 100 000 Ft-ot helyezett el takarékbetétkönyvben, férje — néhai Patai László, az ígéretes tehetségnek indult, fiatalon elhunyt matematikus — emlékének megőrzésére. Az azóta részben kamatokkal, részben újabb letétbe helyezett összegekkel megnőtt pénzt Patai Lászlóné kívánságára ez év augusztusában „Patai László alapítvány" elnevezéssel helyeztük csekkszámlára. Az alapító kívánsága, hogy a kamatokból évente egy egyetemi hallgató vagy pályakezdő matematikus részesüljön ösztöndíjban. A megválasztandó vezetőség feladata lesz az alapító levél kitételeinek eleget tevő, a matematika terén önálló tudományos alkotóképességű egyetemi hallgató, vagy pályakezdő fiatal matematikus évről évre történő kiválasztásának megszervezése.

9. Tanulóversenyek

Évenként megrendeztük a következő hagyományos tanulóversenyeket:
Kürschák József verseny érettségizettek számára,
Schweitzer Miklós Emlékverseny egyetemi hallgatók számára,
Tanárképző főiskolák matematikai versenye a tanárképző főiskolák hallgatói számára.

Megrendeztük minden évben a középiskolák I. és II. osztályos tanulói számára az Arany Dániel versenyt is. E versenyek szervezése az Oktatási szakosztály gondos munkája nyomán igen jó.

Hagyományosan részt vettünk a beszámolási időszakban is az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikai szekciójának megrendezésében. A verseny szervezéséből azonban egyre több adminisztratív feladat hárul ránk és a Művelődési Minisztériummal való többszöri levélváltás sem segített részvételünk jellegének pontosításához.

A versenyek díjait részben költségvetésünkből, részben a Művelődési Minisztérium támogatásából fedeztük. A Schweitzer Miklós Emlékverseny díjait néhai Gaál Jenőné örököseinek alapítványából egészítettük ki.

A versenyek szervezését az évről évre kiküldött versenybizottságok végezték, a dolgozatok javításába több fordulóban lebonyolított versenyek esetén számos külső munkatársat is bevontunk.

A Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyén legjobb eredményt elért tanulókat az elmúlt időszakban is a Művelődési Minisztérium által rendelkezésre bocsátott keretből jutalmaztuk. Hozzájárultunk az Iskolarádió „Törd a fejed" pályázatára benyújtott legjobb dolgozatok jutalmazásához is.

Felmerült az a gondolat, hogy az általános iskolák tanulói részére is indítsunk valamely folyóiratban feladatmegoldó versenyt. Itt történt bizonyos előrelépés. A Művelődési Minisztérium és az Állami Ifjúsági Bizottság illetékeseihez fordultunk támogatásért. A versenyt több fordulósra tervezzük, irányítását egy erre a célra kiküldött bizottság fogja végezni.

10. Kiadványok

a) *Folyóiratok.* A Matematikai Lapok elmaradásának felszámolására az Akadémiai Kiadóval és a Szegedi Nyomdával folytak tárgyalások. Utoljára a 31. kötet (1978—1983) 4. száma jelent meg, 1983. évi Társulati hírekkel. Ez azt jelenti, hogy a jelentős elmaradást nem sikerült csökkenteni. Ez csak részben magyarázható Székely Gábor tagtársunk halálával és azt megelőző betegségével. Az Elnökség Szalay Mihályt bízta meg a lap technikai szerkesztésével. Az ő munkája sikerének is feltétele azonban, hogy a Társulat tagsága aktívabban járuljon hozzá a lap cikkanyaggal való ellátásához. Ezt nehéz anyagi helyzetünk ellenére a szerzői és lektori díjak emelésével is ösztönözni javasoljuk.

A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését a Művelődési Minisztérium támogatásával végeztük ebben az időszakban is, a fizikai rovat szerkesztését pedig az Eötvös Loránd Fizikai Társulat látta el. 1982 óta a lap szerkesztőbizottságát Csirmaz László vezeti. A lap terjedelmének nagyobb részét változatlanul a megoldásra kitűzött gyakorlatok és feladatok, s ezek megoldásai töltötték ki, de a szerkesztőség ebben az időszakban is több cikk közlésére talált lehetőséget. Folytatódott az előző időszakban elkezdett számítástechnikai rovat is. A megjelenés pontosságával, a szerkesztésben részt vevő munkatársak minden dicséretet megérdemlő munkája ellenére időnként még mindig akadnak problémák.

A Matematika Tanítása (a Művelődési Minisztériummal közös szerkesztésben) ebben az időszakban is igyekezett a tanárok számára változatos és a tanításban jól felhasználható anyagot nyújtani.

A Periodica Mathematica Hungarica, melynek nincs számottevő késése, hasznosan tölti be helyét a nemzetközi olvasóközönségnek szánt hazai matematikai folyóiratok között. A kéziratok átfutási ideje a kívánatosnál mindenesetre lényegesen nagyobb, ez azonban olyan világjelenség, amely alól alig akad kivétel. A szerkesztőktől mindenesetre továbbra is elsősorban a színvonal lelkiismeretes megőrzését várjuk, ehhez a lehetőség szerint az átfutási idő csökkentésére való igyekezetet is hozzákapcsolva. A Combinatorica, a Társulat néhány éve alapított idegen nyelvű kombinatorikai folyóirata, ebben az időszakban világszerte ismert rangos folyóirattá vált, előfizetőinek száma azonban még nem magas.

b) *Kollokviumi kötetek.* A beszámolási időszakban a Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozat következő kötetei jelentek meg:
34. Topics in classical number theory
35. Functions, series, operators
36. Limit theorems in probability and statistics
37. Finite and infinite sets.

Előkészületben, illetve nyomdában vannak a következő kötetek: Semigroups, Matroid theory, Theory of radicals (ez a három könyv májusban, illetve júliusban kellett volna hogy megjelenjen!), Topology-theory and applications; Algebra, combinatorics and logics in computer science; Lectures in universal algebra; Theory of algorithms. Gépelés stádiumában van a Goodness of fit, Differential equations, Differential geometry kollokviumok anyaga. Előkészítés alatt áll az Intuitive geometry és a Haar memorial conference kötet.

Ez az impozáns méretű könyvsorozat hosszú évek óta jelentékeny részét adja a hazai matematikai könyvkiadásnak, a világ minden tájára eljutván jelentős mértékben emelte a magyar matematika tekintélyét, nagyban hozzájárult későbbi hazai kollokviumaink sikeréhez, biztosította, hogy olyan kollokviumokról is tudtunk kötetet kiadni, amelyek megrendezését mi fontosnak tartottuk, de esetleg nem álltak a nemzetközi érdeklődés homlokterében. Végül, de nem utolsó sorban e kiadványok bevétele képezte a Társulat működésének anyagi alapját, ezek jövedelméből fizettük az újabb kollokviumok meghívott előadóit, az egyéb hazánkba látogató külföldiek meghívását, számos kutatónk külföldi kollokviumi részvételét, egyszóval a nemzetközi kapcsolatok fejlesztéséhez nélkülözhetetlen költségeket.

Itt szeretnénk külön megemlékezni 1985-ben elhunyt tagtársunkról és barátunkról Székely Gáborról, akinek e könyvsorozat létrehozásában meghatározó szerepe volt. Az ő lelkesedése, ügyszeretete tette lehetővé, hogy a sokszor áthághatatlannak látszó adminisztratív és technikai akadályok ellenére e könyvsorozat létrejött, fennmaradt és betölthette fent leírt fontos funkcióit. A Társulat vezetősége 1985-ben Székely Gábort MTESZ-díjra kívánta felterjeszteni, sajnos már túl későn. Az új vezetőségre vár a feladat, hogy emlékét valamilyen módon méltón megtisztelje. Székely Gábor funkcióját a könyvkiadás irányításában az Elnökség megbízásából Oláh Gyuláné vette át.

Az 1983-as közgyűlésen részletesen foglalkoztunk a könyvkiadás nehézségeivel és a könyvkiadás rendjére új szabályokat fogadtunk el. Ennek lényege az, hogy felhatalmazzuk és felkérjük a szervező bizottságokat, hogy amennyiben a Társulat 2 hónapon belül nem tudja saját kapacitásában a gépelést biztosítani, öntevékenyen keressenek gépelői kapacitást a társulat költségére (a mindenkori megszabott költséghatáron belül). Ezen felül a jövőben meg kell kísérelni bizonyos kötetek camera ready eljárással való készítését, éspedig a kéziratok előzetes bekérésével. Nem szabad kizárni továbbá annak lehetőségét, hogy egyes más szervekkel közös rendezvényeink kötetei a sorozaton kívül jelenjenek meg. Ennek megfelelően az 1984-ben rendezett Random fields... kollokvium előadásaiból készült könyvet — rendhagyó módon — a Birkhäuser Boston gondozásában jelentettük meg. A Szerzői Jogvédő Hivatalon keresztül kötött szerződés értelmében minden év elején kap Társulatunk az előző évben eladott példányok után 10% jutalékot. (Ez az összeg nem éri el egy más kötet profitját; a gyorsaság volt a fő szempont e kísérlet elbírálásában.) Augusztus közepén a North-Holland kiadó képviselőivel folytattunk Budapesten tárgyalásokat a kötetek gyorsabb megjelenését előmozdítandó. Bízzunk abban, hogy a jövőben 2—2,5 évre tudjuk leszorítani a megjelenés idejét. Ennek érdekében itt is szükségesnek látszik a szerkesztői és szerzői díjak emelése.

11. Kapcsolatok más szervekkel

A beszámolási időszakban is állandóan tapasztaltuk a MTESZ vezetőinek érdeklődését és segítőkészségét Társulatunk problémáival kapcsolatban. A MTESZ 1984. január elsejével egyesületek szövetségéből társadalmi szervezetté alakult. A MTESZ felügyeleti szerve — az OMFB helyett — a Minisztertanács lett. Az egyesületek megmaradtak egyesületekként működni, főhatóságuk a MTESZ Végrehajtó Bizottsága lett. Ezen változásokból következően egyrészt az eddigieknél is több kérdésben fogják a különböző főhatóságok a MTESZ véleményét — ezen keresztül a tagegyesületekét — kérni; így több témában van beleszólási jogunk. Egy másik következmény, hogy a gazdálkodó mechanizmus megváltozott. Nagyobb önállóságot kaptak az egyesületek gazdálkodásukban; ez azonban pl. azt is jelenti, hogy a béreket és fenntartási költségeket is teljességükben nekünk kell fedeznünk. Biztosra vesszük, hogy együttműködésünk az ezután következő időszakban is zavartalan és gyümölcsöző lesz; erre annál is inkább szükség van, mert a gondokkal teli gazdasági helyzetben csak a kölcsönös megértés teheti zökkenőmentessé a feladatok ellátását.

Társulatunk javaslatára 1983-ban Prékopa Andrást, 1984-ben Recski Andrást tüntették ki MTESZ-díjjal.

A MTESZ tagegyesületei közül hagyományos az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal való együttműködésünk a lapszerkesztés, továbbá a végző matematika-fizika szakos hallgatók klubestjének megrendezése területén. Nagyrendezvények szervezésében ápoltuk kapcsolatainkat a Neumann János Számítógéptudományi Társasággal, a Magyar Hidrológiai Társasággal és a Híradástechnikai Tudományos Egyesülettel.

Folyamatos volt együttműködésünk a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályával, valamint Matematikai Kutató Intézetével. A III. Osztállyal közösen vettünk részt számos megemlékező ülés megrendezésében. A kutatóintézettel közösen rendeztünk nagyszámú előadóülést, legtöbbször az intézet helyiségeit is igénybe véve.

Kapcsolataink a Tudományos Ismeretterjesztő Társulattal is jók. Noha ezeknek a kapcsolatoknak nincs szervezett formája, a Társulat számos vezetője tölt be vezetői tisztet a TIT-ben is és ezek tevékenységével, különösen az Oktatási szakosztály jól működött közre a TIT munkájában.

A Művelődési Minisztériummal is kialakultak már hagyományos együttműködési területeink. Ilyenek a folyóiratok szerkesztése, tanulóversenyek rendezése, az oktatási kísérletek szakmai irányítása és szervezése, az olimpiai szakkörök irányítása, véleményadás és javaslattétel az oktatás különféle kérdéseiben. Mindezek olyan feladatok, amelyekkel Társulatunk eredményesen járulhatott hozzá a Minisztérium céljainak megvalósításához. Reméljük, hogy a jövőben, mint a múltban is szoros kapcsolat fog kialakulni a Minisztérium illetékes szerveivel közös gondjaink megbeszélésére. Nagy örömmel vettük, hogy a Minisztérium Társulatunkat is felkérte a most kialakuló, a matematikatanárok továbbképzésére vonatkozó koncepció véleményezésére; bízunk benne, hogy a kialakítási folyamat későbbi szakaszában is nyomon tudjuk követni a terv megszületését.

Közös rendezvények szervezésében jutott kifejezésre együttműködésünk a Magyar Közgazdasági Társasággal. Számos intézmény járult hozzá egy-egy rendezvényünk sikeréhez helyiségek és szálláslehetőségek rendelkezésre bocsátásával (Budapesti Műszaki Egyetem, Dunai Vasmű Üdülője, a kőszegi Jurisich Művelődési Központ, a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola, a Janus Pannonius Tudományegyetem Tanárképző Főiskolai Kara, a Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola). Külön kiemelendő hagyományos együttműködésünk a József Attila Tudományegyetemmel a szegedi algebrai konferenciák megrendezésében. Valamennyi természettudományi karral kapcsolatba kerültünk a diákkörök nyári iskolájának megszervezése révén.

Ugyancsak hagyományosnak mondható volt kapcsolatunk a KISZ Központi Bizottságával a kétévenként megrendezett Országos Tudományos Diákköri Konferenciákon bemutatott kiváló matematikai dolgozatok részére felajánlott díjak formájában. Sajnos, a diákköri konferenciákon bemutatott dolgozatok díjazását egy időben beszüntették, így ma már csak a zsűrizés munkájában veszünk részt. A Társulat Elnöksége egyébként írásban fordult a Minisztériumhoz a pályázatok díjazásának visszaállítását kérve. Örömmel állapíthatjuk meg, hogy idén, 1985-ben, ismét lehetővé vált a diákköri pályázatok díjazása és 6000 Ft-tal, valamint kollokviumi kötetek ajándékozásával hozzá is járultunk a magas színvonalú pályázatok díjazásához.

A Magyar Rádió Iskolarádió c. rovatát „Törd a fejed” feladatok megoldóinak felajánlott könyvjutalmak révén támogattuk.

A MTESZ kérésére részt vettünk a műszaki értelmiség nyelvtudásának felmérésében, a természettudományi képzés távlati fejlesztésének és a Budapesti Műszaki Egyetem távlati fejlesztési koncepciójának elbírálásában.

A velünk kapcsolatban álló szervezetek, intézmények nagy száma mutatja, hogy társadalmunk igényli a matematikusok közreműködését olyan feladatokban, amelyek csak széles körű összefogással oldhatók meg kielégítően. Az irántunk mutatkozó bizalom kötelez arra, hogy ezeknek az elvárásoknak minden igyekezetünkkel törekedjünk megfelelni.

12. Nemzetközi kapcsolatok

Társulatunk a beszámolási időszakban is fontos feladatának tartotta, hogy tevékenyen kivegye a részét a hazai matematika nemzetközi kapcsolatainak ápolásából; mind a Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága, mind pedig a Nemzetközi Matematikai Unió Magyar nemzeti bizottságának a szerepét ellátó IMU bizottság jó munkájának eredményeképpen változatlanul elmondhatjuk, hogy ezen a téren Társulatunk tevékenysége kiemelkedően fontos és sikeres.

Az 1986-ban Berkeley-ben (USA) rendezendő matematikai világkongresszus programbizottságának felkérésére ezúttal első ízben az IMU-bizottság gondosan kidolgozott személyi javaslatokat tett a kongresszusra meghívandó hazai előadókra. E javaslatokat természetesen a programbizottság bírálja el.

A Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága a Társulat egyik legnagyobb aktivitású, állandóan készenlétben álló testülete, amely ebben a periódusban is nagy volumenű, értékes munkát végzett.

A bizottság munkájának fő területei a következők:

a) csereegyezmények kötése és az azokból eredő feladatok ellátása,
b) magyar matematikusok és matematikatanárok szakmai célú kiutazásainak elősegítése,
c) külföldi matematikusok vendégül látása, előadások és tapasztalatcsere céljából.

Csereegyezményeink kerete a beszámolási időszakban a következőképpen alakult: Bulgária: 20 nap, Csehszlovákia: 50+20 nap, NDK: 20 nap, Lengyelország: 40 nap (a csehszlovák egyezményben 20 nap a pozsonyi matematikusok közvetlen cseréje céljából szerepel). Az NDK Matematikai Társulatával — az ő kezdeményezésükre — olyan megállapodást kötöttünk, hogy az évi keretből 10-10 nap átvihető a következő évre.

A csereegyezményeinkből adódó utazási lehetőségeket főleg magas részvételi díjú konferenciákon való részvételekre igyekeztünk felhasználni, de ezekből tudtunk tapasztalatcsere lehetőséget biztosítani általános és középiskolai tanárok részére is.

A szovjet tudósokkal való kapcsolatot, közvetlen csereegyezmény hiányában részint a SZUTA—MTESZ csereegyezményben való utazásokkal, illetve egyéni meghívások útján tudjuk biztosítani.

A Bizottság figyelmet fordított arra, hogy a támogatások mértékében ne legyenek feltűnő aránytalanságok. Kiküldötteinktől általában elvárjuk, hogy előadást tartsanak, de indokolt esetben, elsősorban pályakezdő fiatalok kiutazásakor eltekintünk ettől.

Külföldi matematikusok meghívásának elbírálásakor fő szempontunk az volt, hogy matematikusaink jobban megismerkedjenek egy-egy nálunk kevéssé művelt területtel, vagy pedig a bennünket intenzíven foglalkoztató területeken másutt folyó munkával. A szovjet matematikusok esetében 2—4 hetes tartózkodást is szoktunk fizetni. Egyébként meghívottaink itt-tartózkodását legfeljebb hét napig, de általában csak 3—4 napig tudjuk fizetni.

A beszámolási időszakban a ki- és beutazások (beutazásoknál nem véve figyelembe a konferenciákra saját költségükön érkezőket) a következőképpen alakultak:

Év	Ki	Be
1983.	45	95
1984.	59	88
1985. első félév	29	24

Az európai országok matematikai társulatai képviselőiből alakult Európai Matematikai Tanács munkájában megalakulása óta igen aktívan veszünk részt.

A nemzetközi kapcsolatok fenntartása mind a bizottság aktívái, mind a Társulat apparátusa számára rengeteg adminisztratív munkát jelent, amelyet azonban az ügy fontosságának tudatában minden nehézség ellenére is örömmel vállalunk. Ma már szinte közhely, hogy a nemzetközi kapcsolatok fenntartása és fejlesztése a tudomány és alkalmazásai egészséges fejlődésének elengedhetetlen feltétele. Sajnálatos, hogy számos adminisztratív intézkedés gátolja a nemzetközi kapcsolatok fenntartására fordított összegek emelését, ugyanakkor, amikor ezek költségei állandóan emelkednek, és ezért az utazások száma csökken. Különösen elégtelen a külföldiek beutazásaira fordítható összeg. Ha ezt különböző, nem rugalmas rendelkezések nem gátolnák, még jelenlegi szűkös anyagi helyzetünkben is módot kellene találni arra, hogy erre a célra más forrásokból, pl. a kiutazási keretből bizonyos összegeket átirányítsunk.

13. A vezető szervek működése

Társulatunk 1980. december 30-i közgyűlésének ajánlására az 1983. december 17-i közgyűlés új ügyrendet fogadott el és elfogadta az Ügyrend életbe lépéséhez szükséges alapszabály módosításokat. Az új ügyrend rendelkezéseinek egy része a választások rendjével foglalkozik és ezek alkalmazhatóságának próbája éppen jelen közgyűlésünk választása lesz. A választás lebonyolításának módjáról a közgyűlést a jelölőbizottság és a szavazatszámláló bizottság elnökei fogják tájékoztatni. E közgyűlésünkön is külön napirendi pontban foglalkozunk az Alapszabály néhány apró, a mindennapi élet követelményeinek megfelelő módosításával.

A MTESZ keretén belül, 1980. október óta a budapesti tagozat szerepét vállaló Budapesti Intéző Bizottság működött. A Bizottság — egyéb teendők mellett — előkészítette a Budapesti Szervezet vezető szerveinek megválasztását. Társulatunk az Intéző Bizottságba (Révész Pált, majd helyébe) Pálmay Lórántot delegálta. A bizottság helyébe 1984 novemberében a MTESZ Budapesti Szervezete Intéző Bizottsága lépett. Társulatunk (egyelőre) nem kíván budapesti tagozatot létrehozni, azonban az információk áramlását továbbra is meg kívánja tartani. Az új Elnökség egyik feladata lesz a Társulat képviselőjének kijelölése.

A Választmány évenként kétszer, az Elnökség általában kéthavonként tartott ülést. A vezetőségi ülések látogatottsága ebben a periódusban is biztosította mindenkor a határozatképességet.

A hosszabb időre ideiglenesen távollevő vezetőségi tagok helyettesítését az Alapszabály rendelkezéseinek megfelelően oldottuk meg.

Az Elnökség és a Választmány ülésein ebben a periódusban, a Társulat közvetlen irányítására és működésére vonatkozó feladatokon kívül, több közérdekű témát is megtárgyaltunk. Ilyenek voltak a 11. pontban említettek, valamint a Budapesti Szervezet számára készített „A műszaki innováció problémái, nehézségei, korlátai hazánkban" c. anyagról írott vélemény. Reméljük, hogy mindezen véleményeinkkel az ügyek előbbre vitelében segítettünk.

Ebben az időszakban is folyamatosan tájékoztattuk a Választmányt és az Ellenőrző bizottság tagjait a Társulat munkájáról, az időközönként kiadott Tájékoztatókban. A vezetőség javaslatára megvalósítottuk az adréma-rendszer finomítását, mellyel lényeges postaköltség megtakarítását értük el.

A Társulat Választmánya 1983 novemberében egyetértett azzal, hogy a Nemzetközi Matematikai Unió „International Commission on Mathematical Instruction" elnevezésű bizottsága 1988-ban soron következő kongresszusát Magyarországon lenne kívánatos megszervezni. Az 1984. nyarán tartott „ICME—5" rendezvényen ajánlkozásunkra az a döntés született, hogy Társulatunk legyen az „ICME—6" rendezője. A konferencia szervezéséhez az előkészítő lépéseket — bizottság kijelölése, társszervezők, időpont, helyszín megválasztása — megtettük. 1984. őszén az ICMI elnöke és titkára Magyarországon járt, hogy a szervezésről tárgyaljunk. Ez év nyarán a konferencia nemzetközi programbizottsága megbeszélést tartott Oxfordban. A plenáris előadók, szemináriumvezetők felkérő levelei elmentek. A konferenciát kb. 2000 főre tervezzük, a Budapesti Műszaki Egyetem termeiben fogjuk rendezni.

14. A központi apparátus munkája

Megállapíthatjuk, hogy a Társulat sokrétű tevékenysége hatalmas szervező és adminisztratív munkával jár. E munka elvégzése a társadalmi aktívák számára szinte lehetetlen volna, ha nem lenne az apparátusnak olyan vezetője, aki a számtalan tennivalót jó ítélőképességgel, öntevékenyen irányítani és összefogni képes. Ezért kell külön köszönetet mondanunk Szabados Józsefné egyesületi titkárnak, akinek a jelen közgyűlés Alapszabály módosítása keretében főtitkárhelyettesi címet szeretnénk adni. Köszönet illeti az apparátus minden dolgozóját önfeláldozó munkájukért.

Ezután a Társulat Alapszabálya módosítását az alábbiak szerint hagyta jóvá a Közgyűlés:

1. I. § (2) bekezdés (1. oldal) A Társulat a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének (továbbiakban: Szövetség), mint társadalmi szervezetnek tagegyesülete.

VÁLTOZÁS: a „mint társadalmi szervezetnek" rész új; a MTESZ megváltozott jogállása teszi szükségessé a változtatást.

2. III. 3. § (2) (3. oldal) A Társulat rendes tagja lehet minden olyan magyar állampolgár, továbbá a Szövetség hozzájárulásával minden olyan külföldi állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit, megvalósításukra képes, részt kíván venni a Társulat tevékenységében, elfogadja a Társulat Alapszabályát és vállalja, hogy rendszeresen fizeti a tagsági díjat.

VÁLTOZÁS: a régi szövegből kimarad a „tartósan Magyarországon tartózkodó" rész.

3. X. 15. § (3) bekezdés (18. oldal) Az IMU Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból és 10—15 tagból áll. Képviseli a Társulatot az IMU-ban. Munkájához tervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

VÁLTOZÁS: eddig 6—10 tagja volt a bizottságnak.

4. XVII. 22. § (1) (22. oldal) A Társulat függetlenített titkárságának munkatársait (a társulati titkárt és további alkalmazottakat) a Szövetség alkalmazza. Ők látják el a Társulat és a Szövetség határozatainak végrehajtásával kapcsolatosan folyamatos ügyintéző és szervező munkát. Ha a Társulat titkára szakirányú végzettséggel rendelkezik, az Elnökség javaslatára, a Választmány egyetértésével, a „főtitkárhelyettes" címet viselheti.
VÁLTOZÁS: a bekezdés utolsó mondata új.

5. 24. § (1) (23. oldal) A Társulat felett a felügyeletet a MTESZ Országos Elnökségének Végrehajtó Bizottsága látja el.
VÁLTOZÁS: kimarad a "— az Ellenőrző Bizottság közreműködésével —" rész. A változást a MTESZ Alapszabályának változása indokolja.

A közgyűlés a következő vezetőséget választotta meg:
Elnök: Császár Ákos, az MTA rendes tagja
Budapesti alelnök: Kőváry Károly vez. tanár
Vidéki alelnök: Tandori Károly, az MTA rendes tagja
Főtitkár: Hajnal András, az MTA rendes tagja
Dunán inneni titkár: Scharnitzky Viktor főiskolai tanár
Dunántúli titkár: Pálmay Lóránt budapesti vezető szakfelügyelő
Pénztáros: Recski András tudományos főmunkatárs

Tudományos szakosztály

Elnök: Győry Kálmán egy. tanár
Alelnök: Móricz Ferenc egy. tanár
Titkár: Simányi Nándor tud. s. munkatárs

A matematika alkalmazásai szakosztály

Elnök: Vincze Endre egy. tanár
Alelnök: Gulyás Ottó tud. tanácsadó
Titkár: Kelle Péter tud. munkatárs

Oktatási szakosztály

Elnök: Békefi Zsuzsa középisk. tanár
Alelnök: Laczkó László középisk. tanár
Titkár: C. Neményi Eszter előadó

Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága

Elnök: Fried Ervin tanszékvez. egy. tanár
Titkár: Juhász István
Tagok: Czédli Gábor egy. tanársegéd
Halmos Istvánné tud. munkatárs
Kroó András tud. főmunkatárs
Lempert László egy. adjunktus
Losonczi László egy. docens
Major Péter tud. munkatárs
Márki László tud. főmunkatárs
Szendrei Ágnes egy. docens

Póttagok (behívásuk sorrendjében):
Garay Barna egy. adj.
Terdik György egy. adj.
Kerékfy Pál tud. munkatárs

Ellenőrző Bizottság

Elnök: Kiss Péter főisk. tanár
Titkár: Vértesi Péter tud. tanácsadó
Tagok: Fritz József tud. főmunkatárs
Nagy Péter tanszékvez. egy. docens
Pethő Attila egy. adjunktus

Póttagok (behívásuk sorrendjében):
Elbert Árpád tud. főmunkatárs
Reményi Gusztáv ny. középisk. tanár

Fegyelmi Bizottság

Elnök: Szénássy Barna ny. egy. tanár
Titkár: Lee Anna tud. főmunkatárs
Tagok: Knoll János gimn. igazgató
Szakál Péter szakfelügyelő

Póttagok (behívásuk sorrendjében):
Tomor Benedek egy. docens
Szvetits Zoltán középisk. tanár

IMU Bizottság

Elnök: Szőkefalvi-Nagy Béla az MTA r. tagja
Titkár: Nemetz Tibor tud. főmunkatárs

Tagok: Császár Ákos az MTA r. tagja
Daróczy Zoltán az MTA lev. tagja
Halász Gábor tud. tanácsadó
Hajnal András az MTA r. tagja
Kátai Imre az MTA r. tagja
Leindler László az MTA r. tagja
Lovász László az MTA r. tagja
Prékopa András az MTA r. tagja
Rapcsák András az MTA r. tagja
Révész Pál az MTA lev. tagja
Szemerédi Endre az MTA lev. tagja
Szendrei János főig. főisk. tan.
Tandori Károly az MTA r. tagja
T. Sós Vera az MTA lev. tagja
Varga Tamás ny. főelőadó

Választmányi tagok

Alpár László tud. tanácsadó
Andrásfai Béla egy. docens
Ács Pál főszerkesztő
Babai László egy. docens
Bakos Tibor ny. középisk. tanár
Bakó Zsuzsa középisk. tanár
Bogdán Zoltán középisk. tanár
Bognár Jánosné egy. adjunktus
Csákány Béla egy. tanár
Gécseg Ferenc egy. tanár
Halász Gábor tud. tanácsadó
Katona Gyula tud. tanácsadó
Lánd Hugó középisk. tanár
Nemetz Tibor tud. főmunkatárs
Oláh Judit vez. szerkesztő
Pálfalvi Józsefné főisk. docens
Pelikán József egy. adjunktus
Pollák György tud. főmunkatárs
Pósa Lajos egy. adjunktus
Prőhle Péter főisk. tanársegéd
Reiman István egy. docens
Rényi Gusztávné ny. középisk. tanár
Szalay István egy. docens
Szalay Mihály egy. adjunktus
Tóth László ált. isk. szakfelügyelő
T. Sós Vera az MTA lev. tagja
Urbán János osztályvezető
Vincze István tud. tanácsadó

Póttagok (behívásuk sorrendjében):

Tamássy Lajos egy. tanár
Petruska György egy. docens
Révész Pál az MTA lev. tagja
Prékopa András az MTA r. tagja
Gábos Adel középisk. tanár
Bognár Mátyás egy. tanár
Lippner György egy. tanársegéd
Fenyő István ny. egy. tanár
Schmidt Tamás tud. ig. hely.
Varga Tamás ny. főelőadó

A továbbiakban a közgyűlés jóváhagyta a Társulat lapjainak szerkesztőbizottságait, kijelölte a MTESZ közgyűlésére a Társulat 9 képviselőjét és az alábbi gondolatokkal, javaslatokkal értett egyet:

1. Fokozni kell a tagtoborzást különösen a vidéki tagozatokban, a műszaki főiskolákon és az általános iskolai tanárok körében.
2. A vidéki tagozatok — általában nagyon jó — munkájára még nagyobb figyelmet kell fordítani. A következő közgyűlésre készülő főtitkári beszámoló foglalkozzék részletesebben az egyes vidéki tagozatok munkájával.
3. Minden erőfeszítést meg kell tenni, hogy az 1988-as Budapesten megrendezésre kerülő — nagyszabású ICME Kongresszus lehetőségeit jól kihasználjuk.
4. Jelenleg 1987-ig rögzített tudományos rendezvénytervünket legalább 1990-ig el kell készíteni.
5. Fokozni kell az Alkalmazási szakosztály egyes albizottságainak aktivitását.
6. Továbbra is figyelemmel kell kísérni és támogatni kell a most meginduló tanártovábbképzést.
7. Meg kell kísérelni kollokviumi kiadványaink átfutási idejének csökkentését, jövedelmezőségük emelését.
8. Meg kell kísérelni a Matematikai Lapok késésének csökkentését. A Társulat tagjainak közlésre szánt cikkekkel kellene támogatni a lapot.
9. A Társulatnak továbbra is aktívan foglalkoznia kell a középiskolai és általános iskolai matematikaoktatás problémáival, a széles közvélemény által megfogalmazott javaslatokat és problémákat folyamatosan el kell juttatni a minisztérium illetékeseihez.
10. Meg kell valósítani az általános iskolások számára tervezett pontversenyt.
11. Foglalkozni kell a nyugdíjasok problémáival. Azokat a nyugdíjasokat, akiket korábban tagdíjhátralék miatt kizártunk, a megváltozott tagdíjfizetési rend értelmében ismét tagoknak kellene tekinteni. Ezt egyénenként, a szükségnek megfelelően fogjuk elbírálni.

A közgyűlés egyetértett a Társulat tevékenységével, annak fő irányaival, és azt várja, hogy munkánkat hasonló szellemben folytassuk tovább. A közgyűlésen a MTESZ képviseletében részt vett Jéki László főtitkárhelyettes is, aki nagyra értékelte a Társulat munkáját, és a megválasztott vezetőségnek további jó munkát kívánt.

Hatodik Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszus, Budapest, 1988

A Nemzetközi Matematikaoktatási Bizottság (International Commission on Mathematical Instruction = ICMI) négyévenként rendez Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszust (International Congress on Mathematical Education = ICME). Az ICME—6 Budapesten lesz 1988. júl. 27—aug. 3. A szervezésre a Bolyai János Matematikai Társulatot kérték fel, amely a Magyar Tudományos Akadémiával és a Művelődési Minisztériummal együttműködve látja el ezt a feladatot. Az összes főbb kérdésben a Nemzetközi Programbizottság (International Program Committee = IPC) dönt, a megvalósítás irányítása a magyar szervezőbizottság feladata.

A kongresszus mintegy 1500—2000 külföldi és minél több magyar résztvevő aktív közreműködésére számít. A magyar matematika és matematikaoktatás nemzetközi elismerését és megbecsülését jelzi, hogy az ICME—6-ot Magyarországon rendezik, de ez egyúttal nagy felelősséget és igen komoly előkészítő munkát is jelent. A konferencia sikere nagymértékben múlik a magyar matematikaoktatók hozzáállásán és tevékenységén, és ugyanakkor az ő számukra jelenti a legnagyobb hasznot azáltal, hogy lehetőség nyílik igen sokfajta vélemény, tapasztalat és módszer megismerésére és cseréjére.

A szervezők igyekeznek olyan programot összeállítani, hogy abban mindenki, aki bármilyen intézményben bármilyen korosztályt matematikára tanít, találjon őt érdeklő területet, előadást, vitapartnert. Ezért plenáris előadások éppúgy lesznek, mint kis munkacsoportok, és sok lehetőség lesz kötetlen eszmecserékre és kapcsolatok kialakítására is.

A konferencia fő nyelve az angol. Néhány előadást szinkrontolmácsok több nyelvre, köztük magyarra is fordítani fognak.

A szakmai program fő területei:

1. Plenáris előadások (felkért előadókkal):
   Andrej ERSOV (Novoszibirszk): Az új szovjet matematika tantervről
   Jean-Pierre KAHANE (Párizs), az ICMI elnöke: Pólya György munkássága
   LOVÁSZ László (Budapest): Algoritmusok, és szerepük a matematika tanításában és tanulásában
   Bienvenido NEBRES (Manila): Az iskolai matematikaoktatás az 1990-es években, ill. a harmadik világban
   Gérard VERGNAUD (Párizs): Kognitív pszichológia a matematika tanításával és tanulásával kapcsolatban
2. Korcsoportok (Action groups): 7 párhuzamos csoportban dolgoznak 4 napon át reggel 8.30—10-ig.
   A1 4—8 évesek
   A2 7—12 évesek
   A3 11—16 évesek
   A4 14—18 évesek
   A5 Felsőoktatás
   A6 Tanárképzés
   A7 Felnőttoktatás
3 Témacsoportok (Theme groups): 7 párhuzamos csoportban dolgoznak 4 napon át délután 14—15.30-ig.
   T1 Tanári hivatás
   T2 Számítógépek és a matematika tanítása
   T3 Problémamegoldás, modellkészítés, alkalmazások
   T4 Értékelés és felmérés
   T5 A tanítás gyakorlata és didaktikai kutatások
   T6 Matematika és más tárgyak
   T7 Tananyag 2000 körül

4—5. Tárgykörök (Topic areas) és Nemzetközi kutatócsoportok (International study groups): ezek általában azonos tárgykörbe tartozó előadásokat fűznek össze, ill. dolgoznak fel. A rendelkezésükre bocsátott idő eltérő nagyságú. Sem a „Korcsoportokkal", sem a „Témacsoportokkal" nem ütköznek, de egymással ütközhetnek.

To 1 Video, film
To 2 Szemléltetés
To 3 Versenyek
To 4 Hátrányos helyzetű tanulók
To 5 Nemzetközi összehasonlítás
To 6 Valószínűségszámítás és statisztika
To 7 Bizonyítás, igazolás és meggyőzés
To 8 Nyelv és matematika
To 10 Tehetséggondozás
To 11 Matematikai játékok
To 13 Nők és matematika (az IOWME = International Organization for Women in Mathematics Education kutatócsoport programja)
To 15 A matematikaoktatás elmélete
To 16 Terek és geometriák
To 17 Információ és dokumentáció
To 18 Szisztematikus együttműködés a matematikaoktatás elmélete és gyakorlata között
HPM (= History and Pedagogy of Mathematics) kutatócsoport: A matematika története és pedagógiája
PME (= Psychology of Mathematics Education) kutatócsoport: A matematikaoktatás pszichológiája

Az eredetileg még javasolt To 9, To 12 és To 14 az IPC javaslatára más csoportokba olvadt be.

6. Áttekintő előadások: a kor- és témacsoportok szerinti osztályozásban, de azoktól függetlenül, összefoglaló ismertetést adnak a terület főbb irányzatairól és problémáiról.
7. Nemzeti bemutatkozások: Az IPC felkérésére Argentina, Bulgária, Malawi és Spanyolország képviselői ismertetik országuk iskolarendszerét, és ezen belül a matematikaoktatás helyzetét.
8. Ötödik nap: Matematika, Oktatás és Társadalom (MES = Mathematics, Education and Society). A program sokoldalúan elemzi a matematikaoktatás és a társadalom bonyolult és növekvő problémáktól terhes kapcsolatát.

9—10. Egyéni előadások és poszterek

11. Projektek (nagyobb kutatási feladatok és tevékenységek rövid bemutatása).

A különböző munkacsoportok lényegében önállóan alakítják ki programjukat. Ezek részletesebb ismertetését a csoportok főszervezőinek és magyar koordinátorainak címével együtt a kongresszus (angol nyelvű) második tájékoztatója tartalmazza, amely megtekinthető a Bolyai Társulat központjában (Budapest, VI., Anker köz 1—3.) és megyei tagozatainál. A második tájékoztató magában foglalja a kongresszussal kapcsolatos egyéb tudnivalókat is, ezek főképp a külföldi résztvevőket érintik. A magyar kollégákra vonatkozó teendőkről a Társulat tagjaihoz 1987 őszén körlevelet juttat el és ehhez jelentkezési lapot is csatol. Az ICME—6-tal kapcsolatos bármilyen kérdésben készséggel nyújt felvilágosítást a Társulat központja, postacím: Bolyai János Matematikai Társulat, ICME—6, Budapest, Pf. 240, 1368, telefon: 427-741.

A szervezőbizottság a kongresszussal kapcsolatban örömmel fogadja mindenki jelentkezését, javaslatait, észrevételeit, (munka) felajánlásait és közreműködését.

A szervezők nevében

Császár Ákos	Szendrei János	Nemetz Tibor
az IPC elnöke	a szervezőbizottság elnöke	a szervezőbizottság titkára

ИЗ ЖИЗНИ ОБЩЕСТВА

ACTIVITY OF THE SOCIETY

KÖNYVISMERTETÉSEK

Simon László—E. A. Baderko: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

Tankönyvkiadó, Budapest, 1983., 510 oldal, 55 Ft

A parciális differenciálegyenletek utáni érdeklődés az utóbbi évtizedekben rohamosan növekedett, ezt bizonyítja a referáló folyóiratokban megjelent ismertetések nagy és növekvő száma. Fizikai jelenségek modellezése gyakran vezet lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletekre, sőt nemlineáris eseteknél is a numerikus megoldások jelentős hányada a probléma linearizálására épül fel. Másrészt a klasszikus analízis századunk második felében lényegesen kibővült a funkcionálanalízis általánosított szemléleti módjával. Bevezetésre és mindennapos használatra kerültek az általánosított függvények, az általánosított megoldások, melyek a klasszikus megoldásokra is engednek újszerű következtetéseket.

Simon László és E. A. Baderko könyve, mely egyetemi előadásokra épült, eleget tesz mind a gyakorlati, mind az elméleti követelményeknek is.

Az I—III. Fejezetekben a könyv összefoglalja a felhasználandó alapismereteket a klasszikus- és a funkcionálanalízisből, a másodrendű egyenletekről, az általánosított függvényekről. Rámutat arra, hogy a disztribuciók bevezetése hogyan függ össze a természet modellezésével és megadja annak Sz. L. Szoboljevtől származó egzakt megalapozását. Az olvasó számára természetessé válik a Szoboljev-féle függvényterek alkalmazása, valamint a disztribúciók körében végzett műveletek gyakorlata is.

A III. Fejezetben a hiperbolikus egyenletek kezdeti érték Cauchy feladatát tárgyalja klasszikus- és általánosított esetben. Gondot fordít annak tisztázására, hogy az általánosított megoldások milyen feltétel teljesülése mellett válnak klasszikus értelemben is megoldássá. Hasonló célkitűzéssel hozza közelségbe a parabolikus típusú egyenleteket is.

A IV. Fejezetben az elliptikus típusú egyenletek kerülnek sorra, melyek fizikai szempontból stacionárius jelenségek modelljeként lépnek előtérbe. A konkrét feladatok természete peremérték feltételek megoldását indokolják, a szerzők jól megvilágítják, hogy ezeknél a Cauchy feladat nem korrekt kitűzésű. Mindegyik tárgyalt típusnál külön ismerteti a könyv az állandó és változó (függvény) együtthatójú egyenleteket, a mellékfeltételeknél a klasszikus függvények mellett az általánosított peremfeltételek is szerepelnek.

Az V. Fejezetben vegyes feladatokat kapunk hiperbolikus egyenletekre. Ezek fontosságát fokozza a gyakorlatban is használatos módszerek (Fourier—Galjorkin eljárások) megmutatása klasszikus- és általánosított problémákra.

Hasonló elgondolással mutat be parabolikus egyenletekre példákat.

Nagy haszna a könyvnek, hogy jól érthető, stílusa világos. Szemlélete nem szakad el a fontos konkrét alkalmazásoktól. Korábban (20—30 éve) ebben a témakörben a klasszikus feladatokról jelentek meg tankönyvek, kézikönyvek (magyar nyelven még azokról sem), itt pedig a modern tárgyalásmódot kapjuk, szélesebb látókörrel. Elfogadhatjuk azt a véleményt, hogy a klasszikus analízisnek az érintett fejezetei, a matematikai fizika differenciálegyenletei a klasszikus, makroszkopikus fizikának, az előttünk álló pedig a modern fizikának a modellezésére is alkalmas.

Az irodalomjegyzék bőséges, ugyanannak a műnek más nyelvű kiadványaira is felhívja a figyelmet. A fejezetekhez mellékelt minta- és gyakorló feladatok jó didaktikai módszerről tanúskodnak.

A könyvet nemcsak matematikai szakos hallgatók, hanem azok is haszonnal olvashatják, akik természeti jelenségek matematikai modellezésével és számításával foglalkoznak.

Nikodémusz Antal

Philip J. Davis—Reuben Hersh: A matematika élménye

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984., 459 oldal, 98 Ft

„Két ideális matematikus (sőt hiperideális, hiszen amerikai) elhatározza, hogy áttöri a szűk szakmai bezárkózás korlátait és körülnéz a való világban, amelynek talán mégiscsak része az a rezervátum is, amelyet matematikának neveznek. Kérdések sokaságát teszik föl maguknak: Mi az, amit csinálunk — a szakmabeli, a felhasználó és a kívülálló szempontjából? Mi az értéke? Megbízható ismereteket nyújt-e, és főleg miről? Hol és hogyan léteznek a matematikai objektumok, s hogyan tanulmányozhatjuk őket?

A fölvetett kérdések egy részére megvannak a kész válaszok a XX. századi matematikafilozófia három közismert iskolájában. A kérdezők — könyvünk szerzői — nem fogadhatják el egyik iskola válaszait sem, mert ezek a válaszok dogmatikus előítéletekre épülnek, összeegyeztethetetlenek az élő matematikai gyakorlattal és a matematika kozmetikázatlan történetével. Nekilátnak hát saját felfogásuk kialakításának. Alaposan körbejárják a témát és — meg kell adni — jószemű túristaként derítik föl az ismeretlen tájakat is, kapásból észrevéve a prospektus és a valóság eltéréseit. (Más kérdés, hogy egy ilyen turistaúton fontos részletek esetleg mégis felderítetlenül maradhatnak.)

A könyv utolsó lapjain a szerzők eljutnak saját álláspontjuk megfogalmazásához. Eszerint a matematika a popperi *harmadik világ* egyik jelensége: az emberi kultúra azon része, amelyben elérhető a természettudományokra jellemző általános egyetértés, mert reprodukálható gondolati objektumokkal foglalkozik." (Részlet Ruzsa Imre: *Utóhang: Kétkedés a kétkedésről* című, e kötet végén megjelent tanulmányából.)

A könyv tárgya tehát a matematika lényege, története, filozófiája, a matematikai tudás keletkezésének a módja.

A könyv anyagának a földolgozása, az az út, amit a szerzők végigjárnak és az a tájkép, amit az olvasónak bemutatnak, nem egyszerű, de rendkívül érdekes. Rendkívül érdekes matematikusnak és kívülállónak egyaránt, mégpedig azért, mert a szerzők viszonylag kevés konkrét matematikai ismeretet felhasználva lényeges — és nemcsak a matematikában felbukkanó — kérdéseket vetnek föl, tárgyalnak meg könnyed, szinte társalgási stílusban, érthető megfogalmazásban. Ennek ellenére a kötet nem túl könnyű olvasmány.

A könyv 8 fő részből áll. A részek (az érdekesség kedvéért kissé különcködő) címe:

A matematika tájai
A matematikai tapasztalatok skálája
Külügyek
Belügyek
Válogatott matematikai témák
Tanítás és tanulás
A bizonyosságtól a kétségig
Matematikai realitás.

A fejezeteket Bevezetés és Nyitány előzi meg, Kislexikon (az előbb idézett), Utóhang, továbbá rendkívül gazdag Irodalomjegyzék, Név- és tárgymutató követi.

Elismerés illeti a szerzőket azért, hogy e könyvükben új matematikai állítások kitalálása és bizonyítása helyett (amire ugyancsak képesek lettek volna), azokat a gondolatokat, kétségeket gyűjtötték össze és írták le, amelyek a matematika művelése, alkalmazása, oktatása, értékelése közben fejükben és mások fejében megfordultak. Ezek a gondolatok természetesen sokfélék, változatosak és gyakran ellentmondanak egymásnak, mert a matematika lényegét illetően — bármilyen furcsán hangzik is — sem egységes a matematikusok álláspontja. A kötetben részletesen szerepelnek a matematika alapjait különbözőképpen megítélő három, ma már klasszikusnak tekinthető fő irányzat, a platonizmus, a formalizmus és a konstruktivizmus híveinek a nézetei, érvei. A szerzők a három irányzat egyikével sem értenek egyet, és kifejtik saját véleményüket, amelynek gyengeségeire viszont az Utóhangban éppen Ruzsa Imre mutat rá.

Már az eddigiek is érzékeltetik, hogy a kötet szokatlan, eltér a matematikai tárgyú könyvek túlnyomó többségétől, mert nem állítások, bizonyítások, alkalmazások megfogalmazása alkotja szövegét, hanem egymástól eltérő, sőt egymással szembenálló vélemények vitatkoznak lapjain.

A kötet lefordítása sem volt éppen könnyű feladat, de Székely J. Gábor példásan oldotta meg.

A könyvet nemcsak azoknak ajánlom szíves figyelmébe, akik bármilyen szinten foglalkoznak (vagy foglalkozni fognak) a matematika művelésével és/vagy oktatásával, vagy akik legalább középfokon tanulják a matematikát, hanem azoknak is, akiket csupán érdekel egy-egy tudományág (esetünkben a matematika) fejlődésének sok-sok nehézsége, ellentmondása és ezek megítélése. Rendkívül tanulságos és érdekes könyv.

Scharnitzky Viktor

Az utóbbi néhány évtizedben a matematika is hatalmas fejlődésen ment át. A kutatás új területeket tárt fel, új elméletek születtek, új kapcsolatokra derült fény, és a matematikai eredmények közvetlen vagy közvetett alkalmazása új tudományterületekre tört be.

A fejlődés és gyarapodás során rengeteg új fogalom született és ezeket el is kellett nevezni. Egy új eredményeket tartalmazó és érdeklődésre is számot tartó publikáció csak úgy jut el a matematikai közvéleményhez, ha az a világnyelvek valamelyikén lát napvilágot. Matematikai vonatkozásban jelenleg angol nyelven írják a legtöbb dolgozatot, de sok cikk jelenik még meg orosz, német és francia nyelven is. Ha egy matematikus egy új matematikai fogalmat vezet be, akkor ennek a fogalomnak az elnevezése leggyakrabban angol szóval történik, amit azután a témával foglalkozó, de más nyelven publikáló matematikusok lefordítanak (vagy átültetnek) saját nyelvükre. Ha a fogalom eredeti elnevezése találó volt és az átültetés is jól sikerült, akkor a fogalom eredeti elnevezését és fordításait a matematikusok gyorsan elfogadják és a fogalom elnevezése végleges polgárjogot nyer.

Sajnos, sok esetben azonban nem ilyen egyszerű egy új elnevezés elfogadásának az útja. Előfordul, hogy egy-egy új fogalomra már az eredeti nyelven is találóbb vagy logikusabb elnevezést talál egy másik matematikus vagy a fordítók más-más kifejezéssel fordítják le egy másik világnyelvre ugyanazt a kifejezést, vagy hasznosabbnak tűnik a fogalomnak egy másik nyelven nagyon találó elnevezését „visszafordítani" az eredeti nyelvre és így tovább. (Azokat a nehézségeket már meg sem említem, amelyek az új elnevezéseknek a kevesek által beszélt nyelvekre vagy nyelvekről való átültetése során lépnek fel.) Mindezek a bonyodalmak ahhoz vezettek, hogy napjainkban a matematikai fogalmak elnevezése terén helyenként többértelműség, esetleg zavar lép fel. Ez ellen sok cikkíró például úgy védekezik, hogy minden cikke elején leszögezi, hogy ő ebben a cikkben mit minek nevez és mit mivel jelöl.

E nehézségek láttán különös örömmel kell fogadni az NDK-beli VEB Verlag Technik könyvkiadó 1982-ben megjelent nagyszabású munkáját, a *Technik-Wörterbuch* sorozatban megjelent **Mathematik** című kétkötetes művet, amelyben a szerzők, G. Eisenreich és R. Schube a matematikában használatos fogalmak több mint 35 000 elnevezését rendezték négy nyelvű (angol, német, francia, orosz) szótárba. Ehhez a négynyelvű szótárhoz az *Akadémiai Kiadó* — párját ritkító vállalkozással — **1984**-ben egy magyar kötettel csatlakozott, amely a magyar szóanyagot tartalmazza. A magyar kötet szerkesztője Merza József, aki 15 matematikus és nyelvész munkáját fogta össze.

Az immár három kötetes szótárba a címszavakat a matematika következő fejezeteiből gyűjtötték össze: a matematika alapjai, algebra, topológia, analízis, valószínűségszámítás és matematikai statisztika, optimalizálás, játékelmélet, geometria, matematikai eszközök, automaták elmélete. E fejezeteken belül 76 önálló témakört dolgoztak fel.

Egy lexikon vagy szótár értékét nemcsak a benne felhalmozott ismeretanyag mennyisége és ennek korrekt feldolgozása határozza meg, hanem az is, hogy a művet az olvasó milyen könnyen és gyorsan tudja használni. Ezt a követelményt a szerzők és a szerkesztők nagyon ügyesen elégítették ki a következő módon:

Az *első kötet* minden oldala 5 hasábból áll. A második hasábokban áll a feldolgozott 35 000 címszó *angol* nyelven, szigorú abc sorrendben felsorolva. Ha egy fogalomra több kifejezés is létezik (az angol nyelvben), akkor az összes szerepel a szótárban és valamennyinél utalás van a (szerzők véleménye szerint legjobban elterjedt és ezért) kiemelt változatra. A kiemelt változat sorában áll a 3—5. hasábban a fogalom leggyakrabban használt német, francia és orosz nyelvű elnevezése. Az utalásokat az első hasábban álló sorszám teszi lehetővé. Ha egy kifejezést több fogalom megjelölésére is használnak, akkor valamennyi értelmezés megtalálható és arra is mindig van utalás, hogy mely témakörben mit jelöl a szó vagy szócsoport.

A *második kötet* 3 részből áll. Egy-egy részében a feldolgozott fogalmak német, francia, valamint orosz nyelvű elnevezései és ezek szinonimái állnak szigorú abc sorrendben, és minden címszó mögött ott áll az angol nyelvű változatnak az első kötetben levő sorszáma. A sorszám ismeretében a fogalom angol nyelvű elnevezése és ennek esetleges szinonimái könnyen megtalálhatók és ezek sorában áll a többi nyelvű elnevezés is.

A *harmadik kötet* a magyar szóanyagot tartalmazza és két különálló részből áll: a négynyelvű (angol, német, francia, orosz) szóanyag sorrendjét követő, betű- és számjellel ellátott magyar nyelvű *szóanyagból* (ez elvileg a hatodik hasáb is lehetett volna az első kötetben) és egy a magyar ábécérendbe sorolt *szójegyzékből.*

A magyar szóanyag az angol nyelvű szóanyag számsorrendjében adja a használónak az angol, német, francia és az orosz szóanyag magyar megfelelőjét. Ezért e rendszer segítségével az első kötetben a szavak előtt álló betű és vezérszám alapján a használó könnyűszerrel kikeresheti a négy világnyelv bármelyikén adott szó vagy szócsoport magyar egyenértékű megfelelőjét.

A fordított esetben, amikor egy magyar szó vagy szócsoport idegennyelvű megfelelőjét keresi a használó, akkor a magyar kötet második részében, a szójegyzékben megkeresi a szóban forgó kifejezést, majd a kifejezés mögött álló betűjel és vezérszám segítségével az első kötetben megtalálja a magyar szó angol, német, francia és orosz megfelelőjét.

Az első pillanatra talán egy kissé bonyolultnak látszó, valójában azonban rendkívül egyszerű és szellemes elrendezés lehetővé teszi, hogy egy matematikai fogalom bármelyik elnevezése az öt nyelv bármelyikéről bármelyikére pillanatokon belül szakszerűen átültethető. Ezért ajánlható ez a rendkívül gondos és aprólékos munkával összeállított szótár mindazoknak, akik ezen öt nyelv valamelyikén matematikai jellegű szöveget olvasnak, írnak, illetve e nyelvekre vagy nyelvekről fordítanak.

Scharnitzky Viktor

Abdul J. Jerri: Introduction to Integral Equations with Applications

(Pure and Applied Mathematics, Vol. 93.) Marcel Dekker, New York, 1985.

A szerző előszava szerint a mű tankönyv olyan kezdő hallgatók számára, akik már lehallgatták a bevezető differenciál- és integrálszámítást és egy elemi differenciálegyenlet kurzust.

Két jellegzetességét szeretnénk kiemelni, az egyik tárgyi, a másik pedig didaktikai természetű.

Ami a tárgyi jellegzetességet illeti, a szerző erősen kidomborítja az alkalmazásokat. Már a bevezetésben felsorol egy sor érdekes, nem konvencionális fizikai, technikai, biológiai, ökológiai problémát, melyek integrálegyenletekre vezetnek, sőt a 2. fejezetben visszatér ezekre és részletesen kifejti azokat a modellezési fogásokat, melyek révén eljuthatunk egy integrálegyenletre.

A könyv a 3. fejezettől kezdve a lineáris integrálegyenletek elméletét akarja — rendkívül leegyszerűsített és szinte gyermekesen elemi módon — olvasóival megismertetni egy merőben szokatlan és véleményünk szerint erősen vitatható módszertani fogással. Ennek lényege, hogy az utolsó, 6. fejezetig heurisztikus módon tárgyalja az anyagot, míg az utolsóban röviden, összesen 27 oldalon betekintést ad a dolgok matematikai hátterébe. Itt bizonyít be néhány, előzőleg már (bár nem kifogástalanul) megfogalmazott tételt. Első olvasásra a könyv erősen kiábrándító, mert az utolsó rövid fejezet kivételével erősen idézi a két világháború közötti idők német nyelvterületen divatos „Ingenieurmathematik" felületes stílusát. A 6. fejezetet olvasván az igényesebb olvasó kissé megnyugszik, de sajnos nem teljesen, hiszen így is marad a könyvben több felületesen megfogalmazott tétel, melyre végül is precíz magyarázatot az olvasó nem kap. Például csupán az egész könyv végigolvasása után válik világossá, hogy a szerző „függvényen" folytonos függvényt ért és ebből kifolyóan integrálon a folytonos függvények integrálját érti.

A bevezető 1. és 2. fejezetek után, melyekről már részletesen szóltunk, a 3. a lineáris Volterra-féle integrálegyenleteket tárgyalja ugyancsak felületes módon. Például minden skrupulus nélkül tagonként integrál végtelen sorokat (75. oldal), az általa kapott megoldásról nem bizonyítja, hogy az valóban megoldás, „a megoldásról" beszél, de az unicitást meg sem említi (az unicitás a 6. fejezet végén válik nyilvánvalóvá). Alkalmazza a Laplace-transzformációt konvolúciós Volterra-féle integrálegyenlet megoldására, anélkül, hogy egy szó is esnék a módszer alkalmazhatóságáról és a Laplace-transzformáció megfordíthatóságáról.

A 4. fejezet a másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó Green-magok megszerkesztését tárgyalja és azt, hogy hogyan lehet egy másodrendű differenciálegyenletre vonatkozó peremértékfeladatot Fredholm-típusú integrálegyenletre visszavezetni. E fejezetben is bőven találunk példákat meg nem alapozott, heurisztikus gondolatmenetekre. Hogy csak egyet említsünk: szerepelnek formális sorfejtések (112. oldal) a konvergencia és előállíthatóság legcsekélyebb említése nélkül.

Az 5. fejezet a Fredholm-féle lineáris integrálegyenleteknek van szentelve. Kimondja az alternatívatételt, de azt csak a triviális esetre, a degenerált magokra bizonyítja (ami önmagában még nem volna baj, baj azonban, hogy nem húzza alá, hogy amit bizonyításként közöl, csak egy speciális esetre vonatkozik). Beszél magoknak ún. degenerált magokkal való approximációjáról, de a szövegből nem derül ki, hogy milyen értelemben approximál (133. oldal). A 124. oldalon felsorolja a sajátértékek egyes tulajdonságait, de exisztenciájukról egy szót sem szól.

Egyes helyeken megsejti a precízebb fogalmazás szükségességét, de ezeken a helyeken olyan dolgok születnek, mint ami a 140. oldalon olvasható: „If the kernel $K(x, t)$ is symmetric and *square integrable* on the square $\{(x, t)\colon a \leqq x \leqq b;\ a \leqq t \leqq b\}$, *continuous*...". De azt sem hisszük, hogy a kezdő hallgató valamit is megért a resolvensnek a Fredholm-féle minor és determináns előállításából. Itt ugyanis e függvények nevén és együtthatóira vonatkozó rekurzív képleteken kívül semmi sincsen (a rekurzív képletek bizonyítása sincs).

Nagyon hiányoljuk, hogy az elsőfajú Fredholm-féle integrálegyenletekről semmi sincsen, pedig ezeknek nagyon széles körű alkalmazásai vannak.

A 6. fejezetben ismerteti a metrikus tér fogalmát és bizonyítja a metrikus terekben értelmezett kontrakciókra vonatkozó Banach-féle fixponttételt. Itt is nagyon elemi a tárgyalás, de korrekt. E tételt alkalmazza integrálegyenletekre, amiből azok existencia- és unicitás tétele következik Fredholm-féle egyenletek esetén kis paraméterértékekre és Volterra-egyenleteknél minden paraméter értéknél. Egészen röviden rámutat arra, hogy bizonyos nemlineáris integrálegyenletek esetén hogyan alkalmazható a szukcesszív approximáció azok megoldására.

A könyv négy függelékkel zárul. Az első a Fourier- és Hankel-transzformációról szól, a második néhány peremértékfeladat Green-magjait sorolja fel, a harmadik a Poisson-egyenletnek négyzetre vonatkozó megoldását adja homogén peremfeltételek esetére (a Green-függvényt végtelen sor alakban adja meg, konvergenciára való utalás nélkül). A negyedik függelékben (terjedelme két oldal) említi, hogy az adott függvények folytonossága helyett a négyzetes integrálhatóságot is meg lehet követelni (de, hogy itt mit kell érteni integrálon, az sehol sincs megemlítve).

Mindent összevetve, nem hiszem, hogy nálunk e tankönyv alapján matematikushallgatóknak kurzust lehetne tartani. Talán matematikai szempontból kevésbé igényes mérnökhallgatók első bevezetésként használni tudnák.

Fenyő István

L. Narici, E. Beckenstein: Topological Vector Spaces

(Pure and Applied Mathematics, Vol. **95**.) Marcel Dekker, New York, 1985.

A mű igen részletes, alapos és jól megírt monográfia a topologikus vektorterek, elsősorban a lokálisan konvex terek általános elméletéről. Az olvasótól a halmazelméleti topológiában nem túl széles körű ismereteket, de nagy gyakorlottságot tételezve fel, a topologikus vektortér definíciójától eljut a Hahn—Banach, a Krein—Milman, a Banach—Steinhaus és a zárt gráf tétel különböző alakjaiig. Ennek során tárgyalásra kerül többek között a dualitás, a hordóterek, az induktív limesz és a bornologikus terek.

A szerzők igyekeznek minden, természetesen felvetődő kérdésre választ adni, mégpedig tétel, példa, irodalmi utalás vagy a megoldatlanság jelzése útján. A tételeket a lehető legáltalánosabbban mondják ki, sokszor több rokon alakban is. Számos alkalmazást mutatnak be az analízis területén, pl. a disztribúcióelméletben. A fejezeteket jól sikerült áttekintések vezetik be és — két nehézségi fokozatba sorolt — feladatok zárják. Az irodalomjegyzék a történetileg fontos műveken kívül a korszerű feldolgozásokat is felöleli.

Nagyon megkönnyíti a könyvben való eligazodást, hogy a legtöbb definíciónak, állításnak, példának, sőt feladatnak is, saját címe van, feltűnően szedve, rendszerint távirati stílusban.

A könyv a témával való első ismerkedésre, mindenre kiterjedő aprólékossága miatt, nem ajánlható. Viszont a disztribúcióelmélet és a funkcionálanalízis művelői és alkalmazói enciklopédiaként, a topologikus vektorterek iránt speciálisan érdeklődők pedig akár magas színvonalú tankönyvként, akár enciklopédiaként kiválóan használhatják.

Bognár János

Mathematical logic and formal systems

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **94**.) Szerkesztette L. P. de Alcantara. Marcel Dekker, New York, 1985, xiv+297 oldal

Ez a kötet Newton C. A. da Costa, a São Paulo-i egyetem (Brazília) logika professzorának tiszteletére összeállított cikkgyűjtemény. Da Costa professzor (1929-ben született) a brazil matematikai élet jelentős alakja, a parakonzisztens logika egyik megalkotója. Ezzel kapcsolatban modális logikai kutatásokat is végzett. Foglalkozott a halmazelmélet olyan kiterjesztéseivel is, amelyek a kategóriaelmélet tárgyalását teszik lehetővé. Kutatásokat végzett logikai formulák algebraizálásáról, implicit definíciókról, induktív logikáról, intuitív valószínűségszámításról, valamint a filozófiához közelebb álló logikai stúdiumokról is.

J. E. Bosch cikke a vektortér fogalmának egy olyan általánosításával foglalkozik, ami a számelmélet és a geometria megalapozásához használható, s érdekes logikai háttere adható.

M. Corrada cikke osztályok halmazelméletével foglalkozik.

I. M. Loffredo D'Ottaviano és E. G. K. Lopez-Escobar cikke parakonzisztens logikákkal foglalkozik, tehát olyanokkal amelyekben van ellentmondás, de nem igaz, hogy minden formula levezethető.

S. Gottwald olyan elsőrendű logikákkal foglalkozik, ahol a formulák értéke 0 és 1 közötti szám.

M. Guillaume cikke monadikus Boole-algebrákkal foglalkozik.

W. S. Hatcher cikkében elemi bővítések algebrai jellemzését adja, s ezt a testbővítésekre alkalmazza.

C. Mortenson és R. K. Meyer írása a Peano-axiómarendszer (logikájának) bizonyos módosításait tárgyalja.

W. H. Reinhardt cikke néhány, a Russell-paradoxonnal kapcsolatos fogalom tisztázását tartalmazza. Ehhez közeli témájú P. Dedecker kategóriaelmélet-megalapozási írása. A. M. Sette és L. W. Szczerba azzal foglalkozik, hogy elemi elméletek interpretációi mikor funktorok.

R. Chuaqui írása a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásának elvi problémáival foglalkozik.

R. Fraïssé cikke Ajtai Miklós egy tételéhez kapcsolódóan új bizonyítást ad arra a tételre, hogy a konstruálhatósági axiómát feltéve, másodrendben ekvivalens megszámlálható struktúrák izomorfak.

A kötet leghosszabb írása C. Di Prisco és W. Marek-é. Ez nagy (szuperkompakt, óriási) számosságokkal, stacionárius halmazokkal és más ideáltulajdonságokkal kapcsolatos újabb eredményeket ismertet, bizonyításokkal.

Komjáth Péter

Rings of Continuous Functions

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **95**.) Szerkesztette Charles E. Aull. Marcel Dekker, New York, 1985, 336 oldal

A kötet anyaga a folytonos függvények gyűrűiről tartott speciális ülés előadásain alapszik, amelyet az Amerikai Matematikai Társulat Cincinnatiban (Ohio) tartott évi találkozója alkalmából rendeztek 1982-ben. Több mint húsz évvel L. Gillman és M. Jerison hasonló című klasszikus monográfiájának megjelenése után a jelen kötet olvasója kitűnő áttekintést kap mind a problémakör történetéről, mind pedig legújabb fejleményeiről. Nagy hangsúlyt kapnak a kategóriaelméleti módszerek, valamint a halmazelmélet mély eredményeivel kapcsolatos problémák, ideértve a számosságfüggvényekre vonatkozókat is. A könyvben foglalt cikkek szerzői között találjuk C. E. Aull, R. L. Blair, D. E. Cameron, W. W. Comfort, T. Retta, A. Dow, W. A. Feldman, J. F. Porter, R. Fox, L. Gillman, A. W. Hager, M. E. Henriksen, M. Jerison, R. Levy, M. D. Rice, J. Mack, S. Mrówka, R. M. Stephenson, M. A. Swardson, W. S. Silliams, R. G. Woods nevét. Ezeknek a kiemelkedő specialistáknak a listája biztosítja, hogy a kötet lényeges időszerű ismereteket szolgáltat az algebrának és a topológiának erről a vonzó határterületéről.

Császár Ákos

László Fuchs and Luigi Salce: Modules Over Valuation Domains

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **97**.) Marcel Dekker, New York, 1985, xi+317 oldal

Az értékelés gyűrűk igen fontos szerepet játszanak az algebrai geometriában és az algebrai számelméletben. Ennek alapja az az analízisbeli tény, hogy egy hely környezetében azokkal a folytonos függvényekkel oszthatunk, amelyeknek e helyen nem nulla az értéke. Ez a „lokalizálás" vezet el az értékeléshez. Mint a gyűrűelméletben általában, itt is a jobb leírást elősegíti az adott gyűrű feletti modulusok vizsgálata.

Ez a könyv az első olyan rendszeres mű, amely összegyűjti mindazokat az eredményeket, amelyeket az értékelés gyűrű feletti modulusok elméletében a kezdettől a mai napig elértek. A könyv nemcsak rendszeres bevezetést és áttekintést nyújt, hanem a szükséges (nem elemi) alapokat is tárgyalja. Mindazokat a kutatásokat és vizsgálatokat összefoglalja, amelyek az Abel-csoportok elméletén alapuló komoly technikai eszközöket a modulusok és gyűrűk elméletén keresztül e témában alkalmazták. Ez az egyedülálló áttekintő mű nemcsak azoknak a matematikusoknak szolgál alapkönyvül, akik az értékelés gyűrűk feletti modulusok témakörének specialistái, hanem azoknak is egy remek bevezetést nyújt, akik a tárgy iránt érdeklődnek. Minden fejezet végén találhatók a megértést elősegítő feladatok; továbbá olyan kutatási problémák, amelyek az önálló kutatást is elősegíthetik. Az egyik szerző nálunk is ismert neve biztosíték arra, hogy a könyv igen jól olvasható és világos.

A könyv a következő 14 fejezetből áll: 1. Értékelés gyűrűk, 2. Modulusok elemi tulajdonságai, 3. Elemi homologikus tulajdonságok, 4. Projektivitás és projektív dimenzió, 5. Topológia és filtráció*, 6. Oszthatóság és injektivitás, 7. Univerzális modulusok, 8. Magasság és indikátor*, 9. Végesen generált és többsorozatú* modulusok, 10. Invariáns és bázis részmodulusok, 11. RD-injektivitás* és tiszta-injektivitás, 12. Torzió-teljes és kotorzió modulusok, 13. Torzió modulusok, 14. Torziómentes modulusok.

Fried Ervin

Ordered algebraic structures

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 99.) Szerkesztette W. B. Powell és C. Tsinakis. Marcel Dekker, New York, 1985, 216 oldal

A kötet az Amerikai Matematikai Társulat 1982-ben Cincinnatiben rendezett vándorgyűlésének keretében tartott "Rendezett algebrai strukturák" szekció anyagát adja közre. A tizenhét dolgozat többsége hálószerűen rendezett csoportokkal foglalkozik, de találunk cikket absztrakt ideálelméletről, Mathiak-féle értékelésekről és polinom-azonosságokról is. A kötetet Paul Conrad dolgozatainak jegyzéke egészíti ki, ő a rendezett csoportok elméletének vezető egyénisége, a konferenciát az ő hatvanadik születésnapjának — elkésett — megünnepléseként tartották.

Magyarországon ezzel a kutatási iránnyal ma senki sem foglalkozik, pedig annak idején Fuchs László 1963-ban megjelent Partially Ordered Algebraic Systems című könyve úttörő jelentőségű volt. (Megemlíthetjük, hogy az egyik szerkesztő, W. B. Powell, Fuchs vezetésével szerzett Ph. D.-t 1978-ban.) A kötet egyes dolgozataiban Fuchson kívül Steinfeld Ottó cikkeire is találunk hivatkozást.

A kiadvány jó áttekintést nyújt a hálószerűen rendezett csoportok elméletének legújabb (pontosabban 1982-es) eredményeiről és aktuális problémáiról. Végül álljon itt a szerzők névsora: M. Anderson, R. N. Ball, J. P. Bixler, P. Conrad, M. Darnel, J. Dauns, T. Feil, A. M. W. Glass, W. Ch. Holland, M. Huss, J. T. Lloyd, J. J. Madden, J. Martinez, S. H. McCleary, F. D. Pedersen, K. R. Pierce, W. B. Powell, N. R. Reilly, W. S. Sizer, S. A. Steinberg és C. Tsinakis.

Pálfy Péter Pál

Differential Geometry, Calculus of Variations, and their Applications

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 100.) Szerkesztette George M. Rassias és Themistocles M. Rassias. Marcel Dekker, New York, 1985, 544 oldal

A kötet cikkek gyűjteménye, melyeket a felkért szerzők Leonhard Euler (1707—1783) emlékének szenteltek, halála 200. évfordulója alkalmából. Euler minden idők egyik legtermékenyebb kiváló matematikusa, jelentősen járult hozzá kora matematikájának minden ágához. Itt a figyelem mégis elsősorban a címben jelzett területekre koncentrálódik, de marad hely a különböző fizikai kérdések, az analízis, a topológia, a történeti visszapillantások és még egyéb területek számára is. A cikkek napjaink kutató munkájának lényeges problémáit tárgyalják. Jellegük a tisztán áttekintő, összefoglaló karakterűektől az új eredményeket bemutatókig terjed. A kötetben található és a legjobb szakemberek által írt nagyobb számú áttekintő, vagy áttekintő jelleggel is bíró cikk kapcsán talán érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy ezek a cikkek igen számottevően megkönnyítik egy-egy témakör megközelítését, eredményeinek megértését azok számára, akiknek a tárgykör nem teljesen idegen, de az nem közvetlen kutatási területük. A tárgykör kutatói számára pedig az esetleges új hangsúlyok, a valamelyest különböző nézőpontok adhatnak értékes gondolatokat.

A kötet tartalmáról talán akkor tudjuk a legjobb képet adni, ha bemutatunk néhány címet és szerzőt a 33 dolgozat közül: Melvyn S. Berger (Amherst, Mass.): The simplest nonlinear Yang-Milles theory that works. (4 old.); C. Brezinski (Lille): The birth and early development of Padé approximants. (18 old.); A. E. Fischer (Santa Cruz, Calif.): Conservation laws in gauge field theories (44 old.); E. W. Leadke—K. H. Spatschek (Essen): Variational principles in soliton physics (24 old.); T. M. Rassias (Athén): On the Morse-Smale index theorem for minimal surfaces (26 old.).

*Ezek a fogalmak az Abel-csoportok és a modulusok alapvető elméletében nem általánosan ismertek, így az ismertetésben a lehetőségekhez képest szószerinti fordításuk szerepel.

Abban, hogy ma, 200 év után is érdemben lehet Euler gondolatait alkalmazni, az nyilvánul meg, hogy a klasszikusok eszméi hosszú ideig hatnak. A kötet ezt a tényt demonstrálja és ezáltal rója le kegyeletét a nagy matematikus emléke előtt.

Tamássy Lajos

Robert S. Doran—Victor A. Belfi: Characterization of C^*-algebras: The Gelfnad—Naimark Theorems

(Pure and Applied Mathematics, Vol. **101**.) Marcel Dekker, New York, 1986, 440 oldal

A Banach-algebrák, eredeti néven normált gyűrűk, elmélete I. M. Gelfand úttörő munkássága nyomán, különösen M. A. Nairmarkkal való együttműködés eredményeképpen nyerte el méltó helyét a mai matematikában. 1943 óta a C^*-algebrák, a legfontosabb Banach-algebra típus elméletének alapköve a Gelfand—Naimark tétel néven ismert alábbi két tétel:

I. Tétel. *Minden kommutatív (komplex) C^*-algebra izometrikusan $*$-izomorf valamely lokálisan kompakt Hausdorff téren folytonos, végtelenben eltűnő, komplex értékű függvények algebrájával.*

II. Tétel. *Minden (komplex) C^*-algebra izometrikusan $*$-izomorf valamely Hilbert-tér folytonos lineáris operátorainak normában zárt $*$-részalgebrájával.*

A fentiekben a Banach-algebrának a Banach-tértől való megkülönböztető axiómája a norma szubmultiplikatív tulajdonsága:

$$(0^\circ)\qquad \|xy\| \leqq \|x\|\,\|y\|.$$

A $*$ egy involúció jelölésére szolgál, amely kétperiódusú antiautomorfizmus; a fenti két tételben a függvények esetén a (komplex) konjugálás, illetve az adjungálás (konjugált transzponált) műveletét jelenti.

A C^*-algebra (az irodalomban gyakran B^*-algebra) ezenfelül olyan involutorikus Banach-algebra, amelyben

$$(1^\circ)\qquad \|x^*x\| = \|x^*\|\|x\| \qquad (C^*\text{-feltétel})$$

$$(2^\circ)\qquad \|x^*\| = \|x\| \qquad (\text{izometria feltétel})$$

$$(3^\circ)\qquad e+x^*x \text{ invertálható} \qquad (\text{szimmetria feltétel})$$

kikötések is teljesülnek; utóbbiban e az algebra egységeleme.

Észre kell venni, hogy (0°) ismeretében (1°) és (2°) együttesen a

$$(4^\circ)\qquad \|x^*x\| = \|x\|^2 \qquad (B^*\text{-feltétel})$$

kirovását jelenti.

A Gelfand—Naimark sejtés 1943-ból arra vonatkozott, hogy a szimmetria (3°), de különösen az izometria (2°) feltétele felesleges-e, csak a tételek bizonyításához szükséges kikötések, vagy — mint gondolták — a többi folyományai. Előbbi igazolásáról a matematika történetében példátlan módon Schatz (1953) Fukamiya-referátumából értesülhetett a világ, míg az, hogy a C^*- és B^*-feltételek ekvivalensek, Glimm és Kadison (1960), illetve — egységelem feltétele nélkül — Vowden (1967) dolgozatából került nyilvánosságra. A problémakörben új fejezetet jelentett a Doran (1972) kérdésére, miszerint az alapvetőnek számító szubmultiplikatív (0°) tulajdonság vajon folyománya-e a többinek, adott Araki—Elliott (1973) válasz, miszerint

1. Tétel. *Minden (komplex) $*$-algebra, amely egyúttal Banach-tér és normája teljesíti a* (4°) *B^*-feltételt, C^*-algebra.*

2. Tétel. *Minden (komplex) $*$-algebra, amely egyúttal Banach-tér és involúciója folytonos, valamint normája kielégíti az* (1°) *C^*-feltételt, C^*-algebra.*

Araki és Elliott egyúttal sejtették, hogy a B^*-, illetőleg C^*-feltételt elég az algebra minden normális elemére, amelyre $x^*x=xx^*$ áll, kikötni, de különösen azt, hogy a 2. tételben az involúció folytonosságát kirovó feltétel felesleges. Az, hogy az első sejtés hamis, már dolgozatuk kiegészítéseként megjelent, egyszerű ellenpélda formájában.

Az igazi problémát felvető utóbbi sejtés beigazolódását (Magyar—Sebestyén, 1985), amely a problémakör ez idei záró fejezetét képezi, megtudhatja az olvasó a 166. oldal kommentárjából, illetve az idézett dolgozatból.

Doran és Belfi könyve arra vállalkozik, hogy a C^*-algebrák axiomatikus jellemzését adó Gelfand—Naimark tételeket és minden eddigi, hasonló tételt naprakész formában, egységes tárgyalásmódban, egy kötetben megjelentesse. Az olvasó érdekében ismétlések fordulnak elő nemcsak bizonyítás közben, hanem tételek kimondásában. Figyelemre méltó törekvés ez mind figyelmességben, mind hangsúlyozást segítendő módszer használatában. Ezért is jelenhetnek bátran meg először e könyv keretein belül eddig dolgozatokban elérhető eredmények, bizonyítási módszerek. Utóbbiak részletes, változatos bemutatása a könyv erénye még akkor is, ha hivatkozás nélkül teszi is. Az olvasótól csak a valós és komplex függvénytanban való jártasságot és a funkcionálanalízis elemeivel való ismeretséget tételezik fel a szerzők. Cserében többet kap kezdő és járatos olvasó egyaránt annál, amit a könyv címe ígér: a C^*-algebrák elmélete feltárja minden szépségét, minden hasznos és hatásos módszerét a könyv lapjain. Olyan különlegességet tapasztalhat az olvasó, mint Gelfand—Naimark rövid bibliográfiája, külön fejezetet a további fejlődés távlatairól és két függeléket a funkcionálanalízis, illetőleg a Banach-algebrák alapvető tételeiről. Gyakorlatok a fejezetek végén — amelyek megoldási útmutatója, hivatkozással kiegészítve a bibliográfia és a jelölés-, példa-, név- és tárgymutatók között a könyv végén található.

Doran és Belfi könyve a szerzők szándéka szerint nem helyettesít létező monográfiát, témája szerint eléggé speciális, mégis minden valószínűség szerint találkozik az érdeklődők igényével, igazi sikerkönyv.

A kötet 10 fejezetének címe:

Gelfand—Naimark tételek: történelmi áttekintés,
A kommutatív C^*-algebrák Gelfand—Naimark tétele,
Gelfand—Naimark tétel: tetszőleges C^*-algebra,
Banach $*$-algebrák: általános tudnivalók,
$*$-reprezentációk Hilbert-téren: közelebbi betekintés,
Hermitikus és szimmetrikus $*$-algebrák,
C^*-axiómák további gyengítése,
C^*-algebrák geometriai jellemzése,
Lokálisan C^*-ekvivalens algebrák,
A karakterizációs tételek alkalmazásai.

Sebestyén Zoltán

Leindler László: Strong Approximation by Fourier Series

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985., 209 oldal, 270 Ft

1876-ban du Bois Reymond példát adott olyan folytonos függvényre, melynek Fourier-sora egy pontban divergál, tehát nem állítja elő a függvényt. Ez a tény indokolttá tette a Fourier-sor részletösszegeiből képzett összegezési eljárások vizsgálatát. A számtani közepekkel való összegezés eljárását Fejér Lipót vezette be a Fourier-sorok elméletébe 1900-ban. Alapvető eredménye, mely szerint a Fourier-sor részletösszegeinek számtani közepei minden olyan pontban a kifejtett függvényhez tartanak, ahol az folytonos, további kutatások egész sorát nyitotta meg. Egy $f(x)$ függvényből és Fourier-sorának $s_k(x)$ részletösszegeiből képzett $|s_k(x)-f(x)|$ mennyiségek felhasználásával különböző ún. erős közepek definiálhatók. Hardy és Littlewood még 1913-ban bizonyították, hogy az $|s_k(x)-f(x)|$ mennyiségek számtani közepei nullához tartanak, azonban általánosabb erős közepekre vonatkozó vizsgálatok csak mintegy ötven évvel később, Alexits György nyomán kezdődtek el. Ettől kezdve az erős középről szóló dolgozatok száma rohamosan növekedett. A szerző célja az e téren elért eredmények rendszerezése, áttekintése. Nagy figyelmet szentel arra, hogy a témával csak most ismerkedő olvasó is minél könnyebben eligazodjon. Az egyes fejezetek elején található rövid ismertetések, a különböző jellegű tételek nagy gonddal elkészített csoportosítása, a részletes név- és tárgymutató elősegíti azok dolgát, akik csak magukra a tételekre és a köztük levő összefüggésekre kíváncsiak. A szerző a bizonyításokat mozgató módszerek bemutatására helyezi a hangsúlyt, ezért ha a létező legáltalánosabb tétel bizonyítása technikailag aránytalanul bonyolult, akkor egy a módszer lényegét jobban kidomborító kissé gyengébb állítás bizonyítását közli. Ez megkönnyíti azok munkáját, akik most szeretnének a témában elmélyedni. A könyv négy fejezetre oszlik.

Az első fejezet az ún. direkt tételeket tárgyalja, melyek a függvény strukturális tulajdonságaiból a különböző erős közepek nagyságrendjére való következtetésekről szólnak.

A második fejezet az ún. inverz tételekkel foglalkozik. Itt azok az eredmények vannak összegyűjtve, melyek a különböző erős közepek nagyságrendjéből a függvény strukturális tulajdonságaira következtetnek.

A harmadik fejezet az előző két fejezet eredményeire támaszkodva beágyazási tételeket mond ki. Ez különböző feltételek megadását jelenti, melyek maguk után vonják, hogy az erős approximáció bizonyos tulajdonságaival definiált függvényosztály beágyazható legyen egy másik, jól ismert függvényosztályba.

Végül a negyedik fejezet olyan eredményeket tartalmaz, melyek nem illettek az előző fejezetekbe.

Erdélyi Tamás

László Lovász and Michael D. Plummer: Matching Theory

Akadémiai Kiadó — North-Holland Publishing Co., 1986., 544 oldal, 680 Ft

Lovász László és Michael D. Plummer könyve a párosítások elméletének első — és nagyon régóta várt — monográfiája. Igen nagy anyagot dolgoz fel, didaktikailag jól átgondolt módon. Az egész könyvet áthatja a korszerű algoritmikus szemlélet, a kombinatorika és az optimalizáció kapcsolata.

Tekintsük át a tárgyalt kérdéseket! Az első fejezet a páros gráfok párosításait tárgyalja, a második a hálózati folyamokat. A maximális párosítások méretével és szerkezetével foglalkozik a 3. fejezet, míg a teljes párosítással rendelkező gráfokat a 4. és az 5. fejezet tárgyalja. A következő három fejezet párosítások kapcsolatát ismerteti más gráfelméleti kérdésekkel, a lineáris programozással és a determinánsokkal. A 9. fejezetben kerül csak sor arra, hogy párosítási algoritmust lássunk nem páros gráfok esetére, ezt két fejezet követi az *f*-faktorok, ill. a matroid-párosítások problémáiról. Az utolsó fejezet pont-pakolási és fedési kérdéseket tárgyal. A könyvet tárgy- és jelölésmutató, valamint igen gazdag bibliográfia zárja (kb. 550 könyv és cikk, melyek mindegyikére hivatkoznak is a szövegben).

Külön kell szólni a „box'-okról. Ez az angol szó eredetileg dobozt (is) jelent; angolszász nyelvterületen szokták így nevezni a szöveg közé tördelt (és általában vastag keretbe — „dobozba" — foglalt) olyan rövid cikkeket, melyek a főcikk témájához kapcsolódnak ugyan, de önmagukban is logikailag zárt egészet alkotnak. Főleg újságok szerkesztésekor alkalmazzák, pl. a Time és Newsweek hírmagazinok, vagy a magyar nyelvű folyóiratok közül a Heti Világgazdaság.

A szerzők e forma átvételével oldották meg, hogy egy-egy, a témához csak lazábban kapcsolódó kérdésre ne kelljen a főszövegben kitérni — és így a tárgyalást feleslegesen lelassítani —, ugyanakkor az ezen kérdésekre vonatkozó legfontosabb mondanivalóikat összefoglalhassák. Érdemes ízelítőül néhányat felsorolni a 18 „box"-ból: *NP*-tulajdonságok, jó karakterizáció, minimax-tételek; algoritmusok; matroidok; keresési algoritmusok; *NP*-teljesség; lineáris programozási algoritmusok; valószínűségszámítási módszerek a gráfelméletben; orákulumok; szubmoduláris függvények minimalizálása.

Végezetül feltétlenül fel kell hívni az olvasó figyelmét a közel 20 oldalas előszóra, mely többek között részletes történeti áttekintést ad a témakörről. Mivel a szerzők didaktikai szempontok szerint építették fel a könyvet, nem követhették a történeti sorrendet (már az első fejezetben is találhatunk 2—3 éves eredményt és az utolsóban is majdnem fél évszázadosat). Így — legalábbis e sorok írójának — az előszó utólag való újraolvasása is nagyon hasznosnak bizonyult.

Recski András

Popper György: A végeselem-módszer matematikai alapjai

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985., 158 oldal, 35 Ft

Kurutzné Kovács Mária—Scharle Péter: A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985., 164 oldal, 37 Ft

A végeselem-módszer napjainkban a szerkezetek tervezésének egyik leghatékonyabb módszere. Széles körű gyakorlati alkalmazását a számítógépek elterjedése tette lehetővé. Mint numerikus módszer, a végeselem-módszer peremérték-feladatok általánosított (gyenge) megoldásának a közelítő meghatározására szolgál.

Bár a végeselem-módszert mérnöki feladatok megoldására már majdnem negyed évszázada sikerrel alkalmazzák, a matematikai elmélet kidolgozása csak később indult meg és a mai napig sem tekinthető befejezettnek. Az eddigi eredmények is már elegendőek az olyan kérdések tisztázásához, mint amilyenek például a közelítés pontossága, a konvergencia, a bázisfüggvények célszerű alakja és még néhány további, a módszerhez kapcsolódó matematikai kérdés. Csak a fentiek ismeretében érthető meg, hogy a végeselem-módszer egyáltalában miért működik és miért ennyire hatékony módszer a mérnöki gyakorlat kontinuumfeladatainak numerikus megoldása során.

Rendkívül fontos és dicséretes ezért, hogy a Műszaki Kiadó e két (egymással összefüggő) könyv egyidejű megjelentetésével lehetőséget adott arra, hogy a matematikai ismeretek alkalmazásának eme új fejezetét szélesebb körben is megismerhessék.

Az elsőnek említett kötet három fő fejezetből ál. Ezek:

A funkcionálanalízis néhány fogalma,

Variációs módszerek,

A végeselem-módszerben alkalmazott interpoláció.

Az első két fejezet egy-egy, a fejezettel azonos témájú könyv bevezető részének tömörített változata is lehetne, a harmadik fejezetben pedig az egy- és többváltozós függvényeknek — különböző geometriai alakzatokon: pontokon, téglalap, paralelogramma, háromszög, téglatest, tetraéder elemeken értelmezett — interpolációs polinomjairól van szó.

Ez a könyv elsősorban azoknak a kutató- és tervezőmérnököknek az igényeit igyekszik kielégíteni, akiknek a végeselem-módszer alkalmazása terén már vannak tapasztalataik, de érdeklődnek az olyan matematikai kérdések iránt, mint amilyenek például a közelítés pontossága, a konvergencia, a bázisfüggvények célszerű alakja.

A másodiknak említett könyv hét fejezetből áll. Ezek:

Vonatkozási rendszerek és interpolációs függvények,

Vonalelemek,

Felületelemek,

Térfogatelemek,

A végeselemek alkalmazása építőmérnöki feladatokban. Az elemek fizikai szabadságfoka,

Paraméteres elemek,

Integrálkifejezések kiszámítása.

Az első négy és a 6. fejezet az előző könyv utolsó fejezetében felsorolt ismeretek részletes, alapos és rendszerezett kifejtése. Az 5. fejezet alkalmazásokat mutat be, a 7. fejezet határozott integrálok közelítő kiszámítására mutat eljárásokat.

Ez a kötet elsősorban a gyakorló szakemberek számára hasznos, hiszen benne megtalálhatják a munkájukhoz szükséges e tárgykörbe tartozó matematikai összefüggéseket.

Scharnitzky Viktor

V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985., 430 oldal, 90 Ft

A könyv a klasszikus mechanika modern tankönyve. A szerzőnek a Lomonoszov Egyetem harmad-negyedéves matematika szakos hallgatói számára tartott előadásai alapján készült. Az eredeti cím: „A klasszikus mechanika matematikai módszerei". A szerző végigkíséri az olvasót a mechanika történetén, a differenciál- és integrálszámítás felfedezésétől egészen a századfordulóig.

Közismert, hogy a mechanika párhuzamosan fejlődött a matematikával és hogy Newton, Euler, Lagrange, Liouville, Jacobi, Hamilton, Poincaré — Arnold könyvének főszereplői — mind a matematikában, mind a mechanikában alapvető eredményeket értek el, munkásságukkal bizonyítva a mechanika és a matematika egymást kölcsönösen megtermékenyítő hatását. Mégis, úgy érzem, hogy Magyarországon ma az átlag matematikus/matematika szakos hallgató a mechanikát inkább sorolja a műszaki tudományokhoz vagy a fizikához, mint a matematikához és bizonyos idegenkedéssel néz rá mint különböző Elvek (pl. D'Alembert-elv, legkisebb hatás elve) — tehát nem Tételek! —, illetve Praktikus Módszerek gyűjteményére. Hasonlóképpen, a műszaki szakember — tisztelet a kivételnek — sem sokat tudhat nálunk a mechanika matematikai megalapozottságáról, megalapozásáról. Arnold könyvének tanulmányozása mind a matematikus, mind a műszaki szakember számára sokat nyújthat: nem utolsó sorban azt, hogy jobban értsék és megértsék egymást (ami alapfeltétele lenne az alkalmazott analízis/differenciálegyenletek hazai fejlődésének).

Arnold könyve tehát végigkíséri az olvasót a mechanika 1600—1900 közötti történetén. Három részből (Newton-mechanika — 60 oldal; Lagrange-mechanika — 100 oldal; Hamilton-mechanika — 120 oldal) és az ezeket követő, összesen 140 oldalt kitevő 13 függelékből áll.

A szerző az olvasótól nagy elszánást, továbbá az analízis, a lineáris algebra és a közönséges differenciálegyenletek elemeinek ismeretét tételezi csak fel. A könyv első 160 oldala a Műegyetemen tanított matematika-anyag alapján maradéktalanul megérthető. A harmadik részhez szükséges matematikai apparátust (differenciálformák, szimplektikus sokaságok) annak első 60 oldala tartalmazza. A „nagy elszánás" arra vonatkozik, hogy a szerző mindvégig az olvasó aktív közreműködését igényli. A könyv stílusát bizonyos nagyvonalúság, elegancia és csipetnyi humor jellemzi. A szerző mindig a lényeget emeli ki és a mélyebb megértést segíti elő — utalásai rendkívül pontosak —, de ennek megfelelően elvárja az olvasótól, hogy gondolkodva, a saját maga számára, a saját maga szintjén, át- meg újraértelmezve kövesse végig az egyes fejezeteket. Tanácsos azoknak az elemi feladatoknak a megoldása, amelyek a bevezetett fogalmak tartalmának kifejtését jelentik. Ehhez képest az esetenként csak vázlatszerű bizonyítások kiprecizirozása (szándékosan kerülöm a „precízzé tétele" kifejezést: a bizonyítások nagyon is precízek) másodlagos. (A könyv nehezebb, ill. nehéz feladatokat is tartalmaz, a szerző ezeket megoldási útmutatóval látta el.)

Nagyon fontos a könyvben szereplő példák gondos áttanulmányozása. Történetileg az elmélet jórészt ezeknek a példáknak a kapcsán fejlődött ki, és a mai olvasót is ezek a példák segítik el az absztrakt fogalmak és tételek megértéséhez:

Pont mozgása centrális erőtérben — bolygók.

Kis rezgések — különféle ingák, paraméterrezonancia.

Merev testek mozgása — pörgettyűk.

Hatás- és szögváltozók — integrálhatóhoz közeli perturbált rendszerek, a Naprendszer stabilitása (vö. 8. Kiegészítés).

A könyvet mintegy 250 ábra illusztrálja.

A fordítás Szűcs András munkáját dícséri, aki — különösen az egyes függelékek fordításakor — nagy és nehéz munkát végzett.

„A mechanika matematikai módszerei" 13 függelékkel zárul, amelyek a modern matematikának a klasszikus mechanikához kapcsolódó egyes, a mai érdeklődés homlokterében álló kutatási irányairól — pl. geodetikus áramok (a geodetikus folyamok kifejezést találóbbnak érzem), ideális folyadékok hidrodinamikája, KAM-elmélet („A" mint Arnold), folytonos közegek rezgése, szingularitás-elmélet (ezen alapul a katasztrófaelmélet, amelyről a szerzőnek a Tankönyvkiadó Középiskolai Szakköri Füzetek sorozatában jelent meg kiváló pedagógiai érzékkel megírt, ugyanakkor matematikailag is hallatlanul igényes ismertetése), Korteweg — de Vries-egyenlet — adnak áttekintést. Ha a szerzőnek 13 élete lenne, 13 külön könyvet írt volna. Így idejéből 13 esszére futotta csak.

Szerencsére Arnold „A mechanika matematikai módszerei" mellett további könyveket is írt. A Műszaki Könyvkiadó minden elismerést megérdemel azért, hogy Arnoldnak három, a 70-es években írott könyvét adta ki (illetve készül kiadni), gyors egymásutánban. Akárcsak a most röviden ismertetett könyv, a „Közönséges differenciálegyenletek elmélete" és a külön kötetet képező „Kiegészítő fejezetek a közönséges differenciálegyenletek elméletéhez" is — utóbbit angolra „A differenciálegyenletek geometriai módszerei" címmel fordították — közkedvelt a világ számos országában, referencia és inspiráció forrása. Mindhárom könyv megjelentetése (egyenként is, de együtt különösen) nagy eseménye matematikai könyvkiadásunknak.

Garay Barnabás

Horst Schubert: Topológia

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986., 356 old., 75 Ft

A topológia témaköréből magyar nyelven korábban megjelent önálló művek és fordítások — rövid utalásoktól eltekintve — vagy kizárólag az általános topológiába, vagy pedig csak a homológiaelmélet alapjaiba vezették be az olvasót. Nagyon is indokoltnak látszott tehát olyan mű lefordítása, amely megadja mind az általános, mind az algebrai topológia alapjait.

Horst Schubert könyve egyike ezeknek a munkáknak. Nem túlságosan terjedelmes, jól felépített mű. A tárgyalást helyenként példák teszik szemléletessé, a paragrafusok végén megadott feladatok pedig az addig elsajátított ismeretek megszilárdítását szolgálják.

A könyv négy részre oszlik:

I. Topologikus terek.

II. Uniform terek.

III. Homotópia.

IV. Szinguláris homológiaelmélet.

Az I. részre közvetlenül támaszkodik nemcsak a II., hanem a III. rész is, míg a IV. szinte teljesen önálló. A könyv szerkezete egységes, bár ez helyenként oda vezet, hogy egy-egy tétel bizonyítása az indokoltnál jóval nagyobb előkészítést igényel. Sajnos előfordul az is, hogy a bizonyítások egyes lépései hiányosak, vagy kifejezetten hibásak. Ezek megfelelő szerkesztői megjegyzésekkel korrigálhatók lettek volna. Ez nem történt meg.

A magyar fordítással azonban nem ez a legfőbb gond. A magyar szövegben olyan tömegű nyomdai és fordítási hiba van — köztük számos igen súlyos is —, hogy a fordítás egyszerűen olvashatatlan. Annak alapján a tárgyalt anyag nem érthető meg. Előfordul az is, hogy sorok, bekezdések, vagy egész oldal fordítása kimarad. Kisebb a probléma akkor, ha mind a tétel megfogalmazása, mind annak a bizonyítása hiányzik a fordításból, de amikor a tétel megfogalmazása ott van, csak a bizonyítás fordítása marad el, vagy egy olyan példa fordítása hiányzik, amelyre később hivatkozik a fordítás, az olvasó számára teljesen misztikussá válik a szöveg.

Példátlan az a gondatlanság, ahogy ez a fordítás elkészült. A könyvkiadónak fontolóra kellene vennie, mi a teendő annak érdekében, hogy ilyen felelőtlenül elvégzett munka többé ne kerüljön az olvasó kezébe.

Bognár Mátyás

W. Preuss, A. Bleyer, H. Preuss: Disztribúcióelmélet műszaki alkalmazásokkal

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986., 282 oldal, 77 Ft

Hézagpótló művet jelentetett meg a Műszaki Könyvkiadó a szerző trió NDK-ban megjelent könyvének (Distributionen und Operatoren. Ihre Anwendung in Naturwissenschaft und Technik.) magyar fordításában. Szerencsés a magyar fordítás címe, ugyanis a szerzők könyvükben elsősorban disztribúciókkal foglalkoznak, az operátorszámítást viszonylag röviden érintik.

A hazai irodalomban több könyvet találhatunk, amelyek a disztribúcióelmélettel, illetőleg annak alkalmazásaival foglalkoznak. Ezen művek inkább elméleti jellegűek, a bennük közölt műszaki alkalmazások csupán illusztrációknak tekinthetők.

Szerzők könyve az első olyan magyar nyelven megjelentetett mű, amely a disztribúcióelméletet az alkalmazott matematikus és mérnök igényeinek megfelelően ismerteti. A könyv stílusa, tárgyalásmódja élvezetes a téma iránt érdeklődők részére. A disztribúcióelmélet alapjait szerzők — a Schwartz-féle megközelítésben — matematikai szigorúsággal, precízen és tömören ismertetik, a tételek bizonyítását mellőzik. A mű legfőbb erénye a benne tárgyalt rengeteg műszaki alkalmazás. Az egyes fejezetek végén számos feladat szerepel, ezek megoldása igen hasznos lehet az olvasó számára.

A három részre tagolódó könyv rövid tartalma:

Az első rész címe: Bevezetés az elméletbe. Ebben szerzők a disztribúcióelmélet alapjait ismertetik, majd rátérnek a műszaki gyakorlatban oly fontos disztribúciós Laplace transzformáció tárgyalására. Az első rész végén szerzők a Heaviside-féle kalkulust és a Mikusiński-féle operátorszámítás alapjait tárgyalják, definiálják a Mikusiński operátor Laplace transzformáltját és röviden érintik az operátorszámítás és a disztribúcióelmélet közötti összefüggés kérdését.

A könyv második részének címe: Alkalmazások. Ebben a szerzők az első részben ismertetett elmélet alapján a disztribúciókat számos matematikai és műszaki feladat megoldására alkalmazzák. A konvolúciós egyenletek és a Green függvények ismertetése után a szerzők rátérnek az állandó együtthatójú differenciálegyenletekkel, illetve differenciálegyenlet-rendszerekkel leírható folyamatok vizsgálatára.

Itt szeretnénk egy kitérő megjegyzést tenni. A műszakiak jól ismerik a Laplace transzformáció klasszikus elméletéből a $[0, \infty)$ intervallumon definiált $f(t)$ függvény deriváltjának Laplace transzformáltjára vonatkozó

$$L[f'(t)] = pL[f(t)]-f(+0) \tag{1}$$

szabályt. Itt

$$f(+0) = \lim_{t\to+0} f(t) \tag{2}$$

a kezdeti érték. Azonban (1) alkalmazása már a legegyszerűbb műszaki feladatok vizsgálatában arra az eredményre vezethet, hogy a vizsgált rendszer működését helyesen leíró $f(t)$ függvény nem elégíti ki a (2) feltételt, még akkor sem, ha a rendszer nem disztribúcióval, hanem függvénnyel van gerjesztve. Fizikailag arról van szó, hogy a műszaki rendszer kezdeti állapotát a $t=0$ pillanatban fellépő gerjesztés esetén nem (2), hanem

$$f(-0) = \lim_{t\to-0} f(t) \tag{3}$$

adja meg és a gerjesztés hatására $f(t)$-nek ugrása lehet a $t=0$ pillanatban. És mivel a BME Villamosmérnöki Karán a heti előadott matematikai órák száma az utóbbi évtizedekben az idő monoton csökkenő függvénye, a Laplace transzformáció és még sok egyéb fontos disciplina oktatására régóta nincs idő, így a hallgatók a Laplace-transzformációs ismereteiket egyéb helyekről szerezték és szerzik meg. Ennek az lett a szomorú következménye, hogy az (1) formula a magyar műszaki irodalomban a tökéletesen értelmetlen, de mindig helyes eredményt szolgáltató

$$L[f'(t)] = pL[f(t)] - f(-0) \tag{4}$$

összefüggéssé alakult át.

A Laplace transzformációt felhasználó mérnöktől nem is várható el, (ha egyáltalán észreveszi, hogy egy $[0, \infty)$ tartományon számított integrál értéke nem függ az $f(t)$ $t<0$-ra felvett értékeitől), hogy egy helyes eredményre vezető értelmetlen képletet ne alkalmazzon.

Szerzők könyvükben a fenti látszólagos paradoxont a disztribúcióelmélet alkalmazásával sikeresen feloldják.

A könyv második része néhány változó együtthatójú lineáris differenciálegyenletet is ismertet, ezután kissé részletesebben tárgyalja az állandó együtthatós differencia- és differenciálegyenletekkel leírható ún. késleltetett rendszereket. Ezt néhány parciális differenciálegyenlet rövid disztribúcióelméleti vizsgálata követi. (Ideális távvezeték egyenlete, hővezetési egyenlet, vegyipari reaktorok egyenlete.)

A könyv utolsó része egy viszonylag terjedelmes Függelék. Ebben a szerzők a több dimenziós disztribúcióelmélet alapjait ismertetik, bemutatva az elmélet számos fontos fizikai és műszaki alkalmazását is.

A könyv végén az egyes fejezetek végén kitűzött feladatok megoldásai szerepelnek. Szerzők néhány, a konkrét gyakorlati problémák megoldását megkönnyítő, jól használható táblázatot is bevettek könyvükbe.

A fordítás elég jól sikerült, a könyv nyomdatechnikailag tetszetős.

Fényes Tamás

Hajdú Sándor, Czeglédy István, Czeglédy Istvánné, Kovács Csongorné, Sztrókayné Földvári Vera: Matematika — feladatrendszerek, 5. osztály

Szerk.: Hajdú Sándor, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985., 192 oldal

A szerzők világosan megfogalmazzák céljukat a könyv elején levő útmutatóban: „Ez a feladatgyűjtemény a tankönyvvel együtt használható, csupán kiegészíti azt. A feladatok egy meghatározott feldolgozási sorrendet képviselnek." (3. oldal)

A könyvben szereplő 1307 feladat tehát egy meghatározott feldolgozási sorrendet képvisel, a feladatrendszert a szerzők a tankönyv kiegészítésére, differenciált feldolgozást lehetővé téve állították össze.

Örvendetes és a mai tankönyvírási gyakorlatban még ritkán fordul elő, hogy a szerzők igyekeztek végiggondolni, melyik feladattal milyen feldolgozási módban (frontális, csoport, egyéni munka) lehet várhatóan a legeredményesebben foglalkozni, illetve mely feladatokat érdemes házi feladatnak feladni. Az útmutatóban egyértelműen a heterogén csoportok kialakítását javasolják. A korábbi matematika tanítási kisérletekben (igaz ezek középiskolákban folytak) más tárgyakkal ellentétben a matematika tanításában — tanulásában éppen a homogén csoportok munkája bizonyult eredményesebbnek. A kategorikus állásfoglalás a heterogén csoportok mellett veszélyeket hordoz, ezt a szakirodalomban és a pedagógusok között is sok vitát kiváltó, bonyolult kérdést nem szabad lett volna az útmutatóban egyetlen mondattal elintézni. Annál is inkább, mert a csoportmunkára javasolt feladatok a könyvben igen sokfélék, s a csoportmunka számos változatát teszik szükségessé és lehetségessé.

Az útmutatóból nem derül ki a feladatrendszer és a munkalapok kapcsolata. Sajnos, a gyakorlatból tudjuk, hogy a munkalapokat már ebben az évben sem adták ki megfelelő példányszámban. Ez nagy kár, hiszen a két könyv célja egészen más. A munkalapok elsősorban az ismeretek előkészítését, a tapasztalatszerzést szolgálták igen érdekes, sokszor élményszerű, ötletes, a matematikai gondolkodás fejlesztésére kiválóan alkalmas feladatokkal. E feladatok sokszínűségétől vétek lenne megfosztani a jó pedagógusokat, az oktatási gyakorlatot,

A feladatrendszerek megszületését indokolja az a tény, hogy a pedagógusok többsége nehezen birkózott meg a tankönyv és a munkalapok által kínált gazdag anyaggal, a szinte korlátlan lehetőségekkel kevesen tudtak élni a tervezésben. Indokolt volt tehát egy a pedagógusok előzetes tervező, tanórai szervező és irányító munkáját segítő feladatrendszer születése. Kérdés azonban, nem rejti-e ez a feladatrendszer a kötött feldolgozási sorrendjével, a szinte a programozott oktatásban megszokott aprólékossággal kimunkált részleteivel a tanítási-tanulási folyamatban az uniformizálás veszélyét.

A könyvben vastagon szedték az új ismeretekhez vezető feladatokban a lényeges új tudnivalót hordozó szavakat, gondolatokat. Kiemelkednek a feladatok megoldásához adott instrukciók is, ezekkel a szerzők igyekeztek megteremteni az eredményes önálló munka tankönyvi feltételeit. A feladatok nagy része több lépésből áll, több hasonló kérdést kell megválaszolniuk a tanulóknak. Így egy-egy problémát több oldalról, több esetet vizsgálva járhatnak végig. Igen gondosan kidolgozottak az ismeretek gyakorlását szolgáló feladatok, feladatsorok.

Közismertek az érvényes matematika tankönyv használhatóságával kapcsolatos nehézségek, a munkalapok szerkezete körüli viták. Megfontolandó lenne a három, önmagában színvonalas, de egymástól alaposan eltérő elgondolásokra épült segédeszköz egy könnyen kezelhető, a pedagógus munkáját segítő, de alkotó módszertani szabadságát is érvényre juttató, munkáltató tankönyvbe történő ötvözése.

Bartal Andrea

Andrásfai Béláné—Danyi Istvánné—Halmos Istvánné: Matematika feladatgyűjtemény, Általános Iskola 4. osztály

Szerk.: Andrásfai Béláné, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985., 182 oldal

A feladatgyűjtemény — az első három osztály számára készült gyűjteményekhez hasonlóan — gazdag, változatos feladatanyagot ad a 4. osztályos tantervhez. A feladatok elrendezése a tanítás tervezését segíti azzal, hogy a szerzők tanítási ciklusok szerint állították össze a fejezeteket. Egy-egy fejezetbe az öt tantervi témakörből megfelelő arányban válogattak feladatokat. Ezzel nagy segítséget nyújtottak a tanítóknak, hiszen a tapasztalatok szerint a tanításban az egyik legnagyobb gondot az öt tantervi téma anyagának „keverése", megfelelő logikai sorrendbe állítása jelenti. A könyvet a gyerekek és a szülők is könnyen használhatják, hiszen az egymásra épülés és a tanítás sorrendjével való egyezés megkönnyíti számukra a megfelelő feladatok kiválasztását, ha gyakorolni akarnak.

Az új, a korábbi tantervekben nem szereplő témakörökhöz összeállított színes, érdekes, fokozatosan nehezedő feladatsorok remélhetően segítik majd a ma még idegenkedő pedagógusokat is e témák tanításában.

A feladatok szorosan épülnek az első három osztály példatárainak feladatanyagára. A tanultak felelevenítését szolgálja az első fejezet (ismétlés) 73 feladata is. Az új anyagot jelentő fejezetek feladatsorai rendszerint nehézségi sorrendben épülnek, sok közülük felhasználható a tanítási-tanulási folyamat bármely szakaszában, új ismereteket előkészítő feladatként, vagy gyakoroltatásra egyaránt. Szellemes ábrákkal, táblázatokkal segíti a könyv a tanulókat az önálló munkában, a feladatmegoldásban jól használható módszerekre tanítva őket.

Az utolsó, összefoglaló fejezet jól mutatja, hová kell eljuttatni a gyerekeket a 4. osztály végére. A fejezetek végén tudáspróbával ellenőrizhetik a tanulók tudásukat. A tudáspróba feladataival a törzsanyag tudása mérhető le. Remélhetően a pedagógusokat is orientálják majd ezek a feladatsorok a dolgozatok összeállításánál, ezzel hozzájárulva a tantervi követelményrendszer értelmezése körüli eltérések kiküszöböléséhez, az egyes iskolákban a számonkérésben jelenleg mutatkozó nagy különbségek elmosódásához.

A feladatgyűjtemény a 4. osztályok számára készült Matematika-munkalapokat jól egészíti ki. A munkalapok igen változatos, érdekes feladatanyaga mellett szisztematikusabb felépítésével segíti a pedagógusok tervezőmunkáját, a tanulók önálló feladatmegoldó készségre nevelését. Nagy előnye ugyanakkor, hogy nem köti meg a pedagógusok kezét, hiszen az elvégezhetőnél sokkal több feladatával az egyéni elképzeléseknek megfelelő válogatásra készteti őket.

Bartal Andrea

Takács Gáborné, Takács Gábor: Matematika a kisegítő iskola 5. osztálya számára

Tankönyvkiadó, Budapest, 1985., 208 oldal

A tankönyv munkalapok sorozata. A szerzők a munkalapok összeállításánál messzemenően igyekeztek alkalmazkodni a kisegítő iskolába járó gyerekek sajátosságaihoz. Az általános iskolai munkalapokban, tankönyvekben megszokottnál egyszerűbben, részletezőbben fogalmazták meg a kérdéseket, feladatokat. Minden feladatnál pontos útmutatást ad a könyv arra, hogy a tanulók hogyan dolgozzanak, mit, hová írjanak. Sok feladatot differenciáltan fogalmaztak meg: aki képes rá, önállóan megoldhatja a feladatot; aki segítségre szorul, annak rávezető, segítő kérdéseket adtak, ezzel irányítva a gyengébb tanulók önálló próbálkozásait.

A tankönyv sokkal színesebb, a fejlettebb nyomdatechnikával is közelebb hozva a tanulókhoz a tantervi anyagot. A szokásosnál nagyobb betűk, számok könnyebben olvashatóvá teszik, ami ebben az iskolatípusban különösen indokolt. A testekkel való ismerkedést megkönnyítik a könyv végén található színes hálózati rajzok, amelyeket kivágva a gyerekek szép, esztétikus, jól használható méretű testeket ragaszthatnak össze. A munkalapokon elég helyet hagytak a feladatok megoldására, ebben a könyvben így kényelmesen és áttekinthetően dolgozhatnak a tanulók. Az egyenletek, egyenlőtlenségek (nyitott mondatok), a kombinatorikai és valószínűségszámítási feladatoknál a könyv helyesen a próbálkozásra, az összes eset megkeresésére késztet.

Az új fogalmakat, elnevezéseket a feladatok között a megfelelő helyen, röviden, érthetően, vastag betűkkel szedve megadja a tankönyv. Az új ismereteket hasonlóan kiemelve könnyen megtalálhatják a tanulók a könyvben, de a szerzők igyekeztek az új ismeretek megfogalmazásába is bevonni a tanulókat: egy-egy rávezető, fokozatosan nehezedő feladatsor végén hiányosan fogalmazták meg az új tudnivalókat, a hiányos részeket a tanulóknak kell kiegészíteniük — a tanár vezetésével — az előzetes tapasztalatok alapján. Így a tanulók szinte részt vehetnek tankönyvük megírásában, amely ezután várhatóan érthetőbb és könnyebben tanulható lesz számukra egy hagyományos, leíró tankönyvnél.

A munkalapok egy részén a feladatok egy-egy matematikai témához kapcsolódnak, így lehetővé téve egy-egy részprobléma körüljárását. Vannak olyan munkalapok is, amelyeken több témából szerepelnek feladatok, ezek célja talán a gyakoroltatás, a gondolkodás rugalmasságának fejlesztése.

A tankönyv messzemenően alkalmas arra, hogy a tanulók az órákon minél többet dolgozzanak önállóan, egyéni, esetleg páros vagy csoportmunkában oldjanak meg feladatokat. A tanár számára a könyv megkönnyíti a tanulók egyéni előrehaladásához illeszkedő, differenciált, az egyéni képességeket messzemenően figyelembe vevő és fejlesztő tanítási-tanulási folyamat tervezését és órai megvalósítását, szervezését, irányítását.

A feldolgozott tananyag az iskolatípusnak megfelelően természetesen könnyebb, mint az általános iskolai 5. osztályos anyag, mégis úgy érzem, egy ilyen érdeklődést keltő, a tanulók önálló munkájára építő, a matematikai gondolkodást fejlesztő tankönyv hatékonyan járulhat hozzá, hogy a kisegítő iskolások is megfelelő képet alkossanak a matematikáról, szemléletük, gondolkodásmódjuk fejlődjön.

Bartal Andrea

Egy a gyakorlat követelményeit is számba vevő tankönyv

Dr. Koller Lászlóné: Matematika a dolgozók gimnáziuma IV. osztálya részére c. tankönyvében az 1985—86-os tanévtől kitűnő segítséget kaptak a diákok az egyéni tanuláshoz. A dolgozók tagozatán teljesen szokatlan, az önálló feldolgozást szolgáló munkatankönyv elfogadtatását, megszerettetését a tanár ismertetése a tanév kezdetén támogathatja.

A nem túlságosan nagy új tananyagot két részben dolgozza fel a könyv. Először a sorozatokat, azon belül részletesebben a számtani, majd a mértani sorozatokat ismerteti meg. A következőkben a kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás elemei kerülnek sorra — a tantervnek megfelelően gondosan elkerülve az integrálszámítást. Ezt követi a négy esztendő tananyagának ismétlése. Ennek során így csoportosítja a tanultakat: számok, műveletek, függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, algebrai alapfogalmak, függvények a geometriában, háromszögek trigonometriája, koordinátageometria.

A tankönyv jellegénél fogva a szokáshoz híven bevezetésében tisztázza az önálló tanulás módszerét és a könyv felépítéséről tájékoztat. A „szigorúan vett tankönyvi rész" után a Munkalapok, majd az 1977—83-as érettségi írásbeli tételek sora, aztán a megoldások, a javasolt vizsgakérdések, az ütemterv és a fogalomjegyzék következik igen áttekinthetően.

Ez a kiadvány is a nappali tagozaton már választhatóan bevezetett „munkatankönyv". A munkalapok megoldása során maga a tanuló jut el az új eredményekre, az új összefüggéseket maguktól kutatják fel. Az eredményeket összefüggően, a megfelelő feladatra rendszeresen utalva, többnyire általános bizonyítással közli tömören a tankönyvi rész.

A most ismertetett összeállítás igen szerencsés eljárásnak bizonyult. Egyrészt a munkalapok megoldásakor van lehetőség az önálló munkára, az új felfedezés örömének átélésére, a tankönyv végén levő megoldások nem vonják el szükségtelenül a figyelmet a gondolkodástól, másrészt ismétléskor, a tanultak rögzítésekor „kéznél van" a lényeg, az elméleti tudnivaló.

A könyvben az előző három kötetben használatos jelöléseket alkalmazzák továbbra is a képletek, fontos megállapítások, megjegyzések, a kiegészítő anyag feltüntetésére. Nem ártott volna ezt a szokásrendszert a könyv elején, a tanulás módszerének megmagyarázása után feleleveníteni. Így ez a tanárra hárul.

Észrevehető a tankönyvön, hogy szerzője jól ismeri a felnőtt diákok képességeit, igényeit. Tudja, hogy a dolgozók iskolájának legfőbb feladata — még a nappali tagozatnál is erősebb mértékben —, az érdeklődés felkeltése, majd ébren tartása (sokszor a szó szoros értelmében véve!). Éppen ezért már az első fejezetet, a számsorozatok tárgyalását egy minden tanulót érdeklő, fejtörő feladatból indítja, kilátásba helyezve, hogy ha majd megtanulják a sorozatokat, akkor megismerkedhetnek a feladat egyszerűbb megoldásával. Az ismert feladatgyűjtemények példáit még más, érdekes példák is élénkítik, példaképpen a „kocogással" kapcsolatos feladat. A könyv sok érdekes történeti feladatot is leír. Rendszeresen utal a matematika történetére. Így a matematika iránt egyébként kevésbé érdeklődő tanulókat is megnyeri a tantárgynak.

Az elméleti részben világos bizonyításokat közöl, amelyek minden esetben figyelembe veszik a tanultakat és csakis azokat használják fel. A feladatokat rendszerint nehezedő sorrendben közli, számítva a felnőtt hallgatók igényeire.

Kár, hogy a felsorolt érettségi írásbeli feladatsorok megoldását nem adja meg a tankönyv. Célszerű ezért legalább az eredményeket ismertetni a tanórán.

Egyik-másik feladat túlságosan elméleti jellegű, de általában olyan gazdag választék áll példákból a tanulók rendelkezésére, hogy mindenki könnyen találhat magának kedvére való feladatokat. A példák között akad olyan is, amely túlmutat a dolgozók gimnáziumának tananyagán és a matematika modern fejezeteit érinti. Az igényesebb feladatok megmaradhatnak a kivételesen jó képességű érdeklődők számára.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a tanulók jelentős része akár a tanár ellenkező véleményével is szembeszállva ragaszkodik a hagyományos tanári előadásokhoz. Ezért célszerű a tanári előadásokat a diákok önálló feladatmegoldásával váltogatni az órákon. Fokozatosan lehet csak rávenni a tanulók említett csoportját a munkatankönyv önálló használatára.

Végül, de nem utolsósorban ki kell emelni azt, hogy a tankönyv az élőbeszéd természetességével szól, közvetlenül, könnyen érthető, szép, világos magyar nyelven az olvasóhoz. Ezzel kedvet ébreszt a helyes magyar beszéden kívül a matematikához is.

Berényi Zsuzsanna Ágnes

Új feladatlapok a dolgozók általános iskolájának 5—6. osztálya számára

Ábel Lajosné—Kecsedi Imréné—dr. Révész Józsefné: Matematikai feladatlapok a dolgozók általános iskolájának 5—6. osztálya számára c. munkája nem elsősorban a tanulók iskolán kívüli munkájára, hanem arra készült, hogy az órai munkához adjon igen hatásos segítséget. Ennek az osztálynak a tanulói ugyanis életkoruk ellenére még nem képesek általában az önálló tanulásra. A feladatlapok segítségével a tanárnak nem kell időt vesztegetnie a feladatok felírásával a táblára. Ebből egyéb előnyök is következnek. Például minden diák jól látja a példát, nem kell másolnia, ami ebben az évfolyamban egyébként is nehézkesen menne. Hátránya a tanári munka egyéni vonásainak leszűkítése. A választék azonban olyan gazdag, hogy általában minden tanár talál benne diákjai részére megfelelő példasort. Ha pedig mégsem tetszik, természetesen van lehetőség a feladatlapok félretételére is.

A kiadvány ötvenhat feladatlapot tartalmaz, egy felmérő lapot és négy témazárót. Az utóbbiaknál megkülönbözteti az A és a B csoportot. Az első harminchárom lap számtani, a harmincnegyediktől az ötvenedikig mértani, az ötvenegyedik logikai, az ötvenkettőtől ötvenhatodikig ismétlő-összefoglaló anyagot tartalmaz. Természetesen a tanár egyéni döntésétől függ, hogy milyen sorrendben oldatja meg az egyes lapokat. Lehet felváltva számtani és mértani feladatlapokat megoldatni, más vélemények szerint hatásosabb egy tömbben hagyni a számtani, illetőleg a mértani anyagot. Örvendetes, hogy már a dolgozók általános iskolájában is megjelent a halmaz fogalma és a logikai ítéletek is szerepet kaptak!

Egy-egy feladatlap elegendő munkát ad az osztálynak akár kettős órára is, még otthoni megoldásra is marad a példákból. A feladatlapok jól kapcsolódnak a tankönyv anyagához (ugyanez a szerzőhármas írta azt is!), azzal együtt használhatók.

A nehezebb, csillaggal jelölt feladatok közül a legtöbbet az egész osztály meg tudja oldani, — kellő tanári segítséggel. Ilyen a harmadik lap 10-estől eltérő számrendszerbe történő átírásra, a tizenegyedik lap számok összehasonlítására, a tizenhatodik lap gyakorlati életre vonatkozó feladatai, melyekben csak a mértékegység okozhat gondot, a huszonegyedik lap számainak összehasonlítása, a huszonharmadik lap törtjeinek összeadása, a huszonötödik lap törtátírásai, a számegyenesen történő ábrázolásai, a huszonhetedik, huszonnyolcadik és harmincegyedik lap gyakorlati példái, a harmincadik lap sorrendezési feladata, a harminckettedik lap gyakorlati példái, a harmincnyolcadik lap szögeinek összeadása, az ötvenötödik lap szögrajzolása. Általában ezeket a feladatokat — a csillaggal nem jelöltekhez hasonlóan —, a tanár állandó segítségadása mellett a diákok valamennyien megoldják az óra során. Természetesen örömet okoz nekik, hogy e nehezebb feladatokkal is sikeresen megbírkóztak.

A ritkán előforduló kiemelkedő képességű tanulók is találnak ezeken kívül igényes feladatokat, például a harmadik lapban az elméleti jellegű kérdésekben, a hetedik lap helyiértéktáblázat szerint történő összeadásában, a kilencedik lap első három feladatában, ahol az összeg és különbség függvényszerű változásait a gyakorlatban kell alkalmazni, a tizenhetedik lapban, ahol betűvel jelöli a feladat az ismeretlent, a huszadik, huszonkettedik, huszonharmadik lapból a negyedik feladat, ahol az alapműveletek különböző tagjait, illetőleg tényezőit keresi a példa betűvel jelölve, másutt üresen hagyva az ismeretlen helyét. Ilyen a huszonnyolcadik lap gondolkodtató példája, a harmincnyolcadik lap ötletet igénylő néhány rajza, a harminckilencedik lap összetett feladatsora, a negyvenegyedik lap logikai készséget feltételező több példája, a negyvenkilencedik lap egyik-másik rajza, a szerkesztéssel megoldható ötvenedik lap és az ötvenegyedik lap logikai döntéssorozata.

A feladatlapokon sok a mértékegységátváltás a példák között. Ez a gyakorlati élet számára valóban szükséges. Mindig sok gondot okoz a mértékegységátváltás iskolában és iskolán kívül! Ezeken a feladatokon keresztül a tanulók rögtön látják, hogy a tanultakat azonnal hasznosíthatják. Ez köztudottan a dolgozók iskolájában fokozott igényként lép fel, különösen az ötödik—hatodik osztályban.

A kiadványban szereplő felmérő jó tájékoztatást ad a tanárnak a tanulók tudásszintjéről. Elvégzése a kezdő tanulók munkasebességét figyelembe véve általában két-három órát vesz igénybe. Ennek ellenére tanácsos az első alkalommal elvégeztetni a diákokkal. Így némileg ők is ráébrednek saját ismereteik szintjére.

A témazáró lapokban nincsen a szerkesztésre vonatkozó példa. Célszerű ezt pótolni, hiszen az alapszerkesztések ismerete is tantervi követelmény.

A feladatlapok módszere tehát sok előnyt ad. Ellene szól az, hogy a tanuló előre dolgozva, esetleg külső segítséget igénybe véve oldja meg a példákat. Felnőttekről lévén szó, nem volna helyes az iskolában tartani az egész tanév során a feladatlapokat! Különben a diákok akkor is meg tudnák szerezni és a másik példányt tanulmányoznák az iskolán kívül. Ilyen esetben a tanár a tanuló szorgalmát és az azzal elért tudását értékelheti nyugodt lélekkel. Természetesen „az előre gyártott elemeket" nem fogadhatja el egyetlen tanár sem.

Berényi Zsuzsanna Ágnes

ОБЗОР КНИГ

BOOK REVIEWS

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek **1985**-ben jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai tankönyvek és felsőoktatási jegyzetek nem szerepelnek.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Ismerkedés a gráfelmélettel* (3. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 237 oldal, 46 Ft.

ARATÓ PÉTER: *Logikai rendszerek tervezése*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 52 Ft.

ARNOLD, V. I.: *A mechanika matematikai módszerei*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 430 oldal, 90 Ft.

ÁBEL LAJOSNÉ—KECSEDI IMRÉNÉ—RÉVÉSZ JÓZSEFNÉ: *Útmutató a dolgozók általános iskolája 5—6. osztályos tankönyv és feladatlap használatához. Matematika*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 58 oldal, 10 Ft.

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZÉTÉNYI CSABA—ifj. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 51 Ft.

BALÁZSNÉ MÉHES VERA: *Számlétra*, Matematikai programozott képeskönyv Balázs Béla programozási rendszerének alkalmazásával, Budapest, 1985, Móra Könyvkiadó, 49 oldal, 36 Ft.

BAZILJEV, V. T.—DUNYICSEV, K. I.—IVANYICKAJA, V. P.: *Geometria I.—II.* (Egyetemi segédkönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 354 és 379 oldal, 49 és 50 Ft.

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA—CZÉDLI GÁBOR—SZENDREI ÁGNES: *Absztrakt algebrai feladatok* (Egyetemi segédkönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 504 oldal, 41 Ft.

BIZÁM GYÖRGY—HERCZEG JÁNOS: *Sokszínű logika* (175 logikai feladat), (2. kiadás), Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 435 oldal, 60 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika* 1. *osztályos anyagának tanításához*, (4. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 424 oldal, 50 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika* 4. *osztályos anyagának tanításához* (2. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 350 oldal, 43 Ft.

COPI, I. M.—GOULD, J. A.: *Kortárs-tanulmányok a logikaelmélet kérdéseiről*, Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 606 oldal, 72 Ft.

CSÁKÁNY ANTAL—VAJDA FERENC: *Játékok számítógéppel* (2. kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 284 oldal, 57 Ft.

CSÁSZÁR, Á. (Editor): *Topology, Theory and Applications*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **41**, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 728 p., 660 Ft.

DEMETROVICS JÁNOS—JORDAN DENEV—RADISLAV PAVLOV: *A számítástudomány matematikai alapjai*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 374 oldal, 49 Ft.

DEMETROVICS, J.—KATONA, G.—SALOMAA, A. (Editors): *Algebra, Combinatorics and Logics in Computer Science*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **42**, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 887 p., 800 Ft.

DUSZA ÁRPÁD—VARGA ANTAL: *A BASIC nyelvű programozás ábécéje*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 171 oldal, 66 Ft.

Évfordulók a műszaki és természettudományokban 1986, Budapest, 1985, MTESZ, 108 oldal, 50 Ft.

FEKETE ZOLTÁN—ZALAY MIKLÓS: *Többváltozós függvények analízise. Példatár*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 359 oldal, 45 Ft.

FILEP LÁSZLÓ: *Játékelmélet*, Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 243 oldal, 29 Ft.

FRIED ERVIN: *Klasszikus és lineáris algebra* (3. jav. kiadás), (Egyetemi tankönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 275 oldal, 27 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák II—IV. osztályos matematika tananyagának tanításához. C variáns*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 308 oldal, 40 Ft.

GILDE, WERNER—ALTRICHTER, SIEGFRIED: *A józan ész furcsaságai* (2. kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 147 oldal, 24 Ft.

HAJNAL IMRE—NEMETZ TIBOR—PINTÉR LAJOS: *Tanári kézikönyv a fakultatív „B" tantervű gimnáziumi matematika tankönyvekhez*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 447 oldal, 55 Ft.

HALMAI ERZSÉBET: *Lineáris algebra* (2. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 339 oldal, 39 Ft.

HALMOS, PAUL R.: *Mértékelmélet*, Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 261 oldal, 47 Ft.

HENRICI, PETER: *Numerikus analízis*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 370 oldal, 126 Ft.

IRHÁS JÁNOS: *A fejszámolás titkai*, Budapest, 1984, Irhás János kiadása, 150 oldal, 50 Ft.

JAGLOM, I. M.: *Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria*, Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 458 oldal, 63 Ft.

KANTOR, I. L.—SZOKOLNYIKOV, A. Sz.: *Hiperkomplex számok*, Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 192 oldal, 32 Ft.

KARLIN, SAMUEL—TAYLOR, HOWARD M.: *Sztochasztikus folyamatok*, Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 536 oldal, 96 Ft.

KIRILLOV, A. A.: *Representation of Lie Groups and Lie Algebras*, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 225 oldal, 280 Ft.

KIRILLOV, A. A.—GIVISLANI, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből* (Egyetemi segédkönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 301 oldal, 51 Ft.

KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika, Tanári kézikönyv a gimnázium I—II. osztálya számára* (2. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 275 oldal, 33 Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához* (3. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 366 oldal, 43 Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához* (3. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 397 oldal, 47 Ft.

KURUTZNÉ KOVÁCS MÁRIA—SCHARLE PÉTER: *A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 164 oldal, 37 Ft.

LATKA FRANTISEK: *Matematikai képletgyűjtemény* (4. bővített kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 150 oldal, 19 Ft.

LEINDLER LÁSZLÓ: *Ortogonális sorok szummálhatósága*, Akadémiai székfoglaló, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 44 oldal, 17 Ft.

LOVÁSZ, L.—SZEMERÉDI, E. (Editors): *Theory of Algorithms*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **44**, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 430 p., 400 Ft.

LŐCS GYULA: *A BASIC és a Kíváncsi*, Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 235 oldal, 34 Ft.

LŐCS GYULA—VIGASSY JÓZSEF: *A FORTRAN programozási nyelv* (6. bővített kiadás), Budapest, 1985, 433 oldal, 77 Ft.

LŐRINCZ PÁL: *Ábrázoló geometria* (3. kiadás), (Egyetemi tankönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 323 oldal, 53 Ft.

MARX GYÖRGY: *A természet játékai:* 30 *játék és modell a természettudományok tanításához*, Budapest, 1985, Ifjúsági Lapkiadó, 316 oldal, 86 Ft.

MÁRKI, L.—WIEGANDT, R. (Editors): *Radical Theory*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **38**, Budapest—Amsterdam, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 753 p., 660 Ft.

NEUGEBAUER, OTTO: *Egzakt tudományok az ókorban*, Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 260 oldal, 55 Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Matematika: Középiskolai, technikumi tanulók, egyetemi hallgatók és technikusok számára gyakorlati alkalmazásokkal* (12. kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 807 oldal, 80 Ft.

PESCHEL, MANFRED: *Jelek és rendszerek modellezése*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 325 oldal, 65 Ft.

POLLÁK, G.—SCHWARZ, ST.—STEINFELD, O. (Editors): *Semigroups*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **39**, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 501 p., 440 Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *A problémamegoldás iskolája* (4. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 228 oldal, 33 Ft.

POPPER GYÖRGY: *A végeselem-módszer matematikai alapjai*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 158 oldal, 35 Ft.

POSTON, TIM—STEWART, IAN: *Katasztrófaelmélet és alkalmazásai*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 359 oldal, 106 Ft.

RÁBAI IMRE: *Készüljünk együtt matematikából!*, Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 388 oldal, 50 Ft.

RECSKI, A.—LOVÁSZ, L. (Editors): *Matroid Theory*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **40**, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 439 p., 390 Ft.

REIMANN JÓZSEF—TÓTH JULIANNA: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika* (Matematika a műszaki főiskolák számára), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 269 oldal, 27 Ft.

RÉTHÁTI LÁSZLÓ: *Valószínűségelméleti megoldások a geotechnikában*, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 303 oldal, 115 Ft.

ROHOVSZKI RUDOLF: *Matematika, középiskolára előkészítő tanfolyam anyaga* (11. átdolgozott kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 160 oldal, 24 Ft.

SACHS, LOTHAR: *Statisztikai módszerek*, Budapest, 1985, Mezőgazdasági Könyvkiadó, 138 oldal, 47 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Vektorgeometria és lineáris algebra* (Matematika a műszaki főiskolák számára), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 185 oldal, 19 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából VI. kötet, 1980—1982*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 406 oldal, 28 Ft.

SCHRÖDINGER, ERWIN: *Válogatott tanulmányok* (2. kiadás), Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 355 oldal, 54 Ft.

SCHUMANN, HERMANN: *Kristálygeometria és a fémek rácstranszformációi*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 215 oldal, 77 Ft.

SIMMONDS, JAMES G.: *Tenzoranalízis dióhéjban*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 118 oldal, 62 Ft.

SOLT GYÖRGY: *Valószínűségszámítás, példatár* (5. kiadás), Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 265 oldal, 35 Ft.

STAAR GYULA (szerk.): *Bolyai-emlékfüzet*, A Kilátó különszáma 1985, Budapest, 1985, TIT, 56 oldal, ár nélkül.

STEINHAUS, HUGO: *Matematikai kaleidoszkóp*, Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 375 oldal, 46 Ft.

SZABÓ IMRE: *Rendszer- és irányítástechnika* (Egyetemi tankönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 457 oldal, 50 Ft.

SZABÓ, L.—SZENDREI, Á. (Editors): *Lectures in Universal Algebra*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **43**, Budapest—Amsterdam, 1985, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 655 p., 600 Ft.

SZERÉNYI TIBOR: *Analízis* (Tanárképző főiskolai tankönyv), (3. kiadás), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 578 oldal, 61 Ft.

SZÉP JENŐ—FORGÓ FERENC: *Introduction to the Theory of Games*, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 392 oldal, 460 Ft.

SZÉPFALUSY PÉTER: *Univerzális törvényszerűségek nemlineáris rendszerek dinamikájában* (Értekezések, Emlékezések), Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 31 oldal, 14 Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA (szerk.): *Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához*, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 467 oldal, 55 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (2. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 23 Ft.

Útmutató a kisegítő iskola 5. osztályának tankönyveihez. 2. Matematika, ének-zene, technika, Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 310 oldal, 38 Ft.

VARGA JÓZSEF: *Gyakorlati programozás* (5. kiadás), (Egyetemi tankönyv), Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 324 oldal, 38 Ft.

WOSCHNI, E. G.: *Becslési eljárások az automatikában*, Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó, 91 oldal, 31 Ft.

WACZULIK MARGIT (válogatta, bevezetéssel és jegyzetekkel ellátta): *A táguló világ magyarországi hírmondói, XV.—XVII. század*, Budapest, 1985, Gondolat Könyvkiadó, 535 oldal, 78 Ft,

ZASLAVSKY, CLAUDIA: *Afrika számol*, Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 350 oldal, 70 Ft.

Scharnitzky Viktor

НОВЫЕ КНИГИ

NEW BOOKS

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1986. X. 6. — Terjedelem: 19,60 (A/5) ív
86-3961 — Szegedi Nyomda, Szeged — Felelős vezető: Surányi Tibor igazgató

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Ára: 36 Ft

Évi előfizetés: 48 Ft

ISSN 0025—519X

Matematikai Lapok

Bolyai János

Matematikai

Társulat

Budapest

33. évfolyam, 1982—1986

4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.

33. évfolyam (1982—1986), 4. szám

A megadott két évszám közül az első a kötet esedékességének, a második a kézirat nyomdába adásának évét jelöli.

Felelős szerkesztő: Császár Ákos

Szerkesztők: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János, Tandori Károly

Szerkesztőség: 1061 Budapest VI., Anker köz 1—3. I. em. 111. Telefon: 427-741.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. Telefon: 111-010.

A kiadvány előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest V., József nádor tér 1., 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az *Akadémiai Kiadó*-nál, (1363 Budapest, Alkotmány utca 21., tel.: 111-010), pénzforgalmi jelzőszám: 215-11-488, a *Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22., tel.: 185-881) és a *Magiszter* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) Akadémiai Kiadó könyvesboltjaiban.

Előfizetési díj egy évre 48 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

PÓLYA GYÖRGY ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

G. L. ALEXANDERSON és JEAN PEDERSEN
Santa Clara Egyetem, Santa Clara, Kalifornia

A szerzők ezt a cikket — amely „The Oregon Mathematics Teacher" folyóirat 1985. január-februári számában jelent meg — Pólya Györgynek ajánlották 97. születésnapja alkalmából.[1]

„Sok múlik a matematika tanáron. Ha a rendelkezésére álló időt azzal tölti ki, hogy sablonos példákon gyakoroltatja tanítványait, akkor kiöli belőlük az érdeklődést, fékezi szellemi fejlődésüket és visszájára fordítja kedvező lehetőségeit. Ha azonban tudásukhoz mért feladatokkal felkelti érdeklődésüket és rávezető kérdésekkel segítségükre van a megoldásban, kedvet csinálhat nekik és eszközt adhat kezükbe az önálló gondolkodáshoz."[2]

Pólya György

Lehetetlen volna egyetlen cikk keretébe belesűríteni mindazt, amit Pólya György a matematika oktatás színvonalának emeléséért tett. Ezért szerényebb célt tűzünk magunk elé. Csupán néhány vonással vázoljuk Pólya Györgyöt: a nagy egyéniséget, a tudóst, a tanárt — és utalunk műveire; így maga az olvasó jöhet rá arra, hogy milyen örömöt szerez Pólya György matematikai fejtegetéseinek a tanulmányozása.

Természetesen sokféle szempontból értékelhetnők Pólya Gyögy munkásságát és annak hatását. Mi most figyelmünket azokra a területekre összpontosítjuk, amelyekről úgy véljük, hogy azok a diákjaikat főiskolai tanulmányokra előkészítő matematika tanárok számára különösen értékesek és hasznosak.

Az I. rész életrajzi adatokat tartalmaz középpontba állítva Pólyának a matematika tanításáról vallott elveit. Hangsúlyozni szeretnők, hogy Pólya első sorban kiváló matematikus. Az oktatás színvonalának az emeléséért azért tudott olyan sokat tenni, mert csodálatra méltó matematikai éles látása párosult a diákok tanulási módszere iránti érdeklődésével.

A II. részben felsoroljuk mindazokat a könyveket, amelyeket Pólya írt és néhány, a matematika tanítására vonatkozó cikkét. A kiválasztott cikkekhez megjegyzéseket fűztünk. A III. és IV. részben tartjuk magunkat Pólya azon megállapításához, hogy „a matematika nem a nézők sportja". A III. részben elemi területszámítási problémát vetünk fel és az olvasót rávezetjük (ahogyan más szinten a tanulókat rá lehet vezetni) egy tétel megsejtésére. Végül a IV. részben azt a bizonyítást vázoljuk, amelyet Pólya adott erre (az ún. Pick-tételre).

Három okunk is volt arra, hogy éppen ezt a példát válasszuk. Először is mert úgy véljük, hogy ez a példa felkelti sok, a matematikát elemi fokon tanító tanár és tanuló diák érdeklődését. Másodszor, mert fényt vet a „Pólya-típusú" bizonyítás lényegére, vagyis mély betekintést enged arra, hogy a tétel miért igaz. Olyan alapos megértés érzetét kelti bennünk, hogy szinte az tűnik meglepőnek, miért nem jöttünk rá azonnal. Szerintünk ez is hozzátartozik a Pólya bizonyítás „lényegéhez". A harmadik okunk pedig az, hogy Pólya ugyan kigondolta a bizonyítást, de nem közölte, bár felhasználta középiskolai tanárok továbbképzésére tartott tanfolyamokon.

[1] *Pólya György 1985. szeptember 7-én halt meg. Ford.*

[2] *A gondolkodás iskolája,* Pólya legnépszerűbb könyvének előszavából. Ezt a könyvet 16 nyelvre fordították le és csaknem 1 millió példányt adtak el belőle.

I. Pólya életrajza

Vannak kiváló kutató matematikusok és kiváló matematika tanárok és talán nem nagyon bő a két halmaz „közös része". Perzse, sok kiváló kutató a saját tanítványainak jó tanára, csak nem töpreng sokat azon, hogy hogyan is tanítson; részint azért sem, mert a matematika igényes tárgy és ha valaki elsőrendű kutató munkát akar végezni, nem engedheti meg magának, hogy ettől bármi más elvonja a figyelmét.

Pólya biztosan a „közös részben" van. Ő az egyik legkiemelkedőbb példája azon valóban kiváló matematikusoknak, akik hosszú időn át foglalkoztak a tanítás problémáival.

Kétség sem férhet ahhoz, hogy valóban elsőrendű matematikus. Több, mint 250 cikket írt. Ezek nagy hatást gyakoroltak a matematika olyan különböző területeire, mint a valós- és komplex függvénytan, kombinatorika, számelmélet, geometria és valószínűségszámítás. Néhány eredménye szerepel már bevezető előadásokban, mint a Pólya féle eloszlás, bolyongási probléma, stb. Egyik, Szegő Gáborral írott műve: *Feladatok és tételek az analízis köréből* a XX. század egyik klasszikus matematika könyve. Öt akadémia választotta Pólyát tiszteletbeli tagjává: a párizsi *Académie des Sciences,* a brüsszeli *Académie Internationale de Philosophie des Sciences,* az amerikai National Academy of Sciences, az American Academy of Arts and Sciences és a Magyar Tudományos Akadémia. Négy egyetem avatta tiszteletbeli doktorává. Kétféle díjat neveztek el róla: Pólya Prize in Combinatorics of the Society for Industrial and Applied Mathematics és Pólya Prize for Expository Writing in the *College Mathematics Journal* of the Mathematical Association of America díjakat.[3]

Pólya Budapesten született, iskoláit is itt végezte, itt avatták 1912-ben doktorrá. Disszertációját valószínűségszámítási kérdésekről írta. A bécsi, göttingai és párizsi egyetemeken képezte magát tovább. Először 1914-ben kapott kinevezett állást a zürichi műegyetemen.

1940-ben ment Amerikába, ahol a Brown Egyetemnél kezdett dolgozni. 1942-től a stanfordi egyetemen folytatta munkáját. Vendégelőadó volt — többek között — Princetonban, Genfben, Göttingában, Cambridgeben és Torontóban.

Ezek az adatok is mutatják, hogy Pólya milyen kiváló matematikus. De korán megmutatkozott a tanítás iránti érdeklődése is. Már mint egyetemi hallgató tanított gimnazistákat. Gimnáziumi tanári oklevelet szerzett — amit sohasem használt. Régóta javasolta a való élettel kapcsolatos problémák alkalmazását a tanításban, melyeket megkülönböztetett a csak számolási készséget gyakoroltató feladatoktól. Előtte mások — például Descartes és Hadamard is — mélyen elgondolkoztak azon, hogy az emberek hogyan próbálják megoldani a matematikai problémákat; de mégis, ha manapság problémamegoldásról vagy heurisztikáról beszélgetünk, kizárólag Pólyára gondolunk. A „Gondolkodás Iskolája" nagy könyvsiker; tartós hatást gyakorolt ezen a területen a többi könyve és cikke is. Olyan elveket fogalmazott meg, amelyeket bárki alkalmazhat a problémamegoldás bármely szintjén. Eszméi most nyerték el a nekik méltán kijáró figyelmet: nemrégiben jelent meg az amerikai matematika tanárok (NCTM, azaz National Council of Teachers of Mathematics) problémamegoldásról szóló évkönyve, a Berkeleyben tartott Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszuson (ICME, azaz International Congress on Mathematical Education) 1980-ban is sok szó esett a feladatokról. Mostanában bajosan lehetne olyan, a matematika oktatással foglalkozó folyóiratot találni, amelyben nem írnának valamit a problémamegoldásról.

[3] Az említett folyóiratban az év folyamán megjelent legjobb cikkért odaítélt díj. Ford.

Érdekes elgondolkodni azon, hogy a tanítással való foglalkozás és a heuresztika alapelveinek a vizsgálata milyen hatást gyakorolt Pólya kutató munkájára. Egyik 1977-ben adott interjú alkalmával azt mondta; „Az érdeklődés befolyásolta kutató munkámat. Voltak olyan kérdések, melyekkel azért foglalkoztam, mert a vizsgálatuk módszerére akartam rájönni." Talán ezzel is magyarázható, hogy miért alkotott a matematika olyan szerteágazó területein. Tudta, hogy milyen kérdéseket kell feltenni, milyen problémákkal érdemes foglalkozni és hogyan célszerű rájuk választ keresni. Tudomásunk szerint Pólya az első olyan matematikus, aki vizsgálta a plauzibilis gondolkodás szerepét a matematikai kutatásban és tanításban.

Számos tanárképző tanfolyamot vezetett az 1950-es és 60-as években Stanfordban, a stanfordi egyetemen és Svájcban. Sok tanár kedves emlékként gondol azokra a különleges tanfolyamokra, amelyeken gyakran hangsúlyozta a problémamegoldás fontosságát és a matematikai módszerek szerepét is a természettudományokban. Pólya nemcsak a matematika szépségét és meggyőző erejét tudta megmutatni, hanem áradt belőle valamilyen egyéni melegség és emberség, amiért tanítványai és kollégái megszerették.

II. Pólya bibliográfia

Az alábbiakban felsoroljuk könyveit csillaggal megjelölve a — véleményünk szerint — tanárok számára különösen értékeseket. (A szerzőknek a felsorolt fordításokról van tudomása; lehet, hogy vannak más fordítások is.)

1. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* 2 kötetben, Berlin: Springer, 1925 (Szegő Gáborral együtt). (Angolra fordítva; a bővített kiadást Springer megjelentette 1972-ben és 1976-ban *Theorems and Problems in Analysis* címmel, fűzött kiadásban 1976-ban.) (További fordítások: bolgár, magyar és orosz nyelveken.) (Magyarra fordította Nagy Zsigmond *Feladatok és tételek az analízis köréből* címen; Tankönyvkiadó, 1980.)

2. *Inequalities.* Cambridge:Cambridge University Press, 1934 (G. H. Hardyval és J. E. Littlewooddal együtt). (Oroszra fordítva.)

*3. *How to Solve It/A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press, 1945. (Doubleady kiadta fűzve.) (Lefordítva a következő nyelvekre: arab, francia, héber, holland, horvát, japán, lengyel, magyar, német, olasz, orosz, román, spanyol, svéd és szlovák.) (Magyarra fordította Lakatos Imre és Pataki Béláné *A Gondolkodás Iskolája* címen, IV. kiadás, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1977.)

4. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.* Princeton: Princeton University Press, 1951 (Szegő Gáborral együtt). (Oroszra fordítva.)

*5. *Mathematics and Plausible Reasoning,* I. kötet: *Induction and Analogy in Mathematics,* II. kötet: *Patterns of Plausible Inference.* Princeton: Princeton University Press, 1954. (A II. kötet 2. bővített kiadása 1968.) (Lefordítva a következő nyelvekre: francia, japán, német, orosz, román, spanyol.) (Egyes fejezeteinek magyar fordítása Varga Tamás: *A Matematika Tanítása* szemelvénygyűjteményében jelent meg, Tankönyvkiadó, 1964.)

*6. *Mathematical Discovery/On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* 2 kötet. New York: John Wiley and Sons, 1962, 1965. (Összevont, fűzött kiadás 1981.) (Lefordítva a következő nyelvekre: francia, japán, lengyel, magyar, német, olasz, orosz, román.) (Magyarra fordította Pataki Béláné *A Problémamegoldás Iskolája* címen, 2 kötet, IV. kiadás, Tankönyvkiadó, 1985.)

7. *Complex Variables.* New York: John Wiley and Sons, 1974 (G. Lattaval együtt.) (Spanyolra fordítva.)

*8. *The Stanford Mathematics Problem Book/With Hints and Solutions.* New York: Teacher's College Press, 1974 (J. Kilpatrickkal együtt).

9. *George Pólya: Collected Papers. I. kötet: Singularities of Analytic Functions* (kiadta: R. Boas). *II. kötet: Location of Zeros* (kiadta: R. Boas). *III. kötet: Analysis* (kiadta: J. Hersch és G.-C. Rota). *IV. kötet: Probability, Combinatorics, Teaching and Learning Mathematics* (kiadta: G-C. Rota). Cambridge: MIT Press, 1974, 1974, 1984, 1984.

*10. *Mathematical Methods in Science.* (Kiadta: Leon Bowden.) Washington: A New Mathematical Library sorozat 26. kötete. (Eredetileg a School Mathematics Studies Group-nak a Studies in Mathematics sorozat XI. köteteként jelent meg 1963-ban.) (Magyarra fordította Seres Iván, *Matematikai Módszerek a Természettudományban* címen, Gondolat Könyvkiadó, 1984.)

11. *Notes on Introductory Combinatorics.* Boston: Birkhäuser, 1983 (R. Tarjannal és D. Woods-szal együtt).

Az alább felsorolt cikkeket részint csak azért választottuk ki, mert könnyen hozzáférhetőek. További cikkek jelentek meg nehezen beszerezhető újságokban és könyvekben. Az olvasó a tanítási tárgyú cikkekről további tájékoztatást talál a *Collected Papers* 4. kötetében.

1. Generalization, specialization, analogy, *Amer. Math. Monthly 55* (1948), 241—43.

A szerző a címben felsorolt három módszert (általánosítás, specializálás és analógia) alkalmazva elegánsan bizonyítja be a Pitagorasz tételt.

2. With or without motivation, *Amer. Math. Monthly* **56** (1949), 684—91.

Az ún. *deus ex machina* típusú bizonyítás ellen érvel a szerző egy középértékekre vonatkozó, meglehetősen bonyolult egyenlőtlenség bizonyításával.

3. On plausible reasoning, *Proc. of the International Congress of Mathematicians,* Providence: American Mathematical Society gondozásában, 1950, I. kötet, 739—47.

A szerző a plauzibilis okoskodás alkalmazása mellett érvel a matematikában, abban a tudományban, amelyben szigorú bizonyításra van lehetőség. Példák a számelméletből és a geometriából.

4. On picture writing, *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 689—97.

Generátorfüggvény intuitív bevezetése három kombinatorikai feladat megoldására: (1) hányféleképp lehet felváltani 1 dollárt? (2) egy konvex *n*-szög feldarabolási lehetőségeinek megszámlálása; (3) a gyökeres fák megszámlálása.

5. On the curriculum for prospective high school teachers, *Amer. Math. Monthly* **65** (1958), 101—4.

Pólya a stanfordi intézményekben középiskolai tanároknak tartott továbbképző tanfolyamokon szerzett tapasztalataira alapozva 10 jó tanácsot ad; a két első: (1) Érdekeljen a szaktárgyad, és (2) Ismerd a szaktárgyadat.

6. Then commandments for teachers, *Journal of Education of the Faculty and College of Education of the University of British Columbia* **(3)** (1959), 61—69.

Az előbb említett cikkben adott jó tanácsok finomítása.

7. Heuristic reasoning in the theory of numbers, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 375—84.

A kísérletező tudós módszerének alkalmazása az ikerprímszámokéhoz hasonló, általánosabb problémára, ebben az esetben a prímpárok különbsége 2-nél nagyobb páros szám; D. H. Lehmer és Emma Lehmer munkái alapján.

8. On learning, teaching and learning teaching, *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), 605—19.

Pedagógiából tanároknak szóló jó tanácsok néhány geometriai példával.

9. Inequalities and the principle of nonsufficient reason, *Inequalities,* kiadta Oved Shisha, N. Y., Academic Press, 1967, 1—15 old.

Néhány példa a matematikából a Leibniz-féle nem elegendő ok elvének a szemléltetésére: „Ha nincs elegendő ok a megkülönböztetésre, akkor nem szabad megkülönböztetni."

10. A story with a moral, *Math. Gazette* **57** (1973), 86—7.

Egy Emmy Noetherrel folytatott beszélgetés ismertetése az általánosítás és a specializálás előnyeiről.

11. As I read them. *Developments in Mathematical Education, Proceedings of the 2nd International Congress of Mathematical Education.* A. E. Howson adta ki, N. Y., Cambridge University Press, 1973, 77—8. old.

Tanításra alkalmas idézetek Szokratesztől Einsteinig.

12. Guessing and Proving, *California Math.* **1** (1976), 1—8. (Utánnyomtatva: *Two-Year College Math. Journal* **9** (1978), 21—7.)

Sejtés és bizonyítás a poliéderek osztályozásával kapcsolatban; az Euler formula elemzése.

13. More on guessing and proving, *Two-Year College Math. Journal* **10** (1979), 255—58.

További általános megjegyzések a tanulók arra való tanításáról, hogy matematikai gondolatokra hogyan jöjjenek rá önállóan.

14. On problems with solutions obtainable in more than one way (Jean Pedersennel együtt), *College Math. Journal* **15** (1984), 218—28.

A szerzők az aritmetikából, a geometriából és a differenciál-integrálszámításból vett példákkal szemléltetik valamilyen probléma különböző módszerekkel való megoldásának előnyeit.

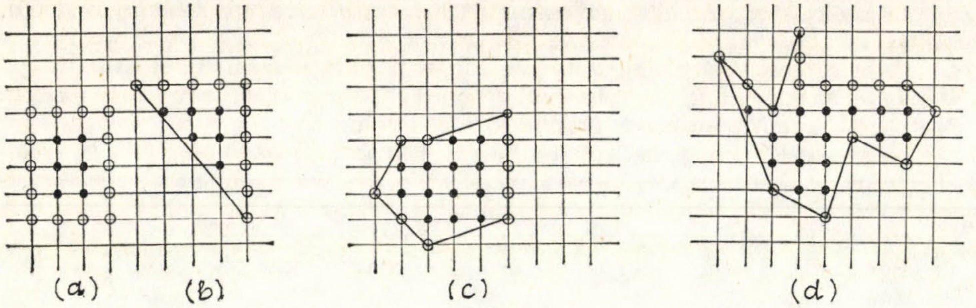
III. Egy területszámítási feladat

Határozzuk meg egy egyszerű rács-sokszög (rács-poligon) *területét* (olyan sokszögét, amelynek csúcsai rácspontok és oldalai nem metszik egymást).

Tudjuk, hogyan kell kiszámítani az olyan téglalap és az olyan háromszög területét, amelynek csúcsai egyúttal valamilyen egységnyi oldalhosszúságú négyzetekből álló rácshálózat rácspontjai; feladatunkat megoldhatnánk úgy, hogy az adott sokszöget ilyen háromszögekre és téglalapokra osztanánk, meghatároznánk, majd összeadnánk az egyes részek területét. Ez az eljárás azonban fáradságos lenne és könnyen el is hibázhatnánk. Így vetjük fel azt a kérdést, hogy vajon kiszámíthatjuk-e közvetlenebbül (vagy könnyebben) a területet?

Vizsgáljunk meg néhány speciális esetet. Vegyük sorra az 1. ábrában feltüntetett idomokat és töltsük ki a következő táblázat I-gyel jelölt részét.

I.				II.	III.
Ábra	B=Belső rácspontok száma	K=Kerületi rácspontok száma	Terület	$\frac{K}{2}$	$B+\frac{K}{2}$
1. (a)	6	14	12		
1. (b)	6	10	10		
1. (c)	13	10	17		
1. (d)	16	15	$22^1/_2$		



1. ábra

Tanulmányozzuk az adatokat és keressünk valamilyen összefüggést. Látunk-e valamilyen nyilvánvaló kapcsolatot, amelynek segítségével B-ből és K-ból kiszámíthatjuk a területet? (Meglepő lenne, ha most ilyet meglátnánk!) Egy kis gondolkodás után arra jöhetünk rá, hogy általában nagyobb területdarab feleltethető meg a belső rácspontoknak, mint a kerületen fekvőknek — így hasznos lehet, ha K-nak csak valamilyen tört részével, mondjuk a felével próbálkozunk. Ha a táblázat II-vel jelölt részét is kitöltjük, érdekes megfigyelést tehetünk. Ha a III. részbe is beírjuk a megfelelő adatokat és ezeket a számokat összehasonlítjuk a területekkel, akkor biztos, hogy valamilyen sejtésünk támad.

Szeretnők az olvasót rávenni arra, hogy mielőtt tovább olvasna, töltse ki a táblázat II. és III. részét. Megjegyezzük, hogy így tulajdonképpen a tanároknak adott 9. Pólya-tanácsot követjük (A Problémamegoldás Iskolája, II. kötet, 126. old.), mely szerint: „Ne áruld el egy csapásra minden titkodat — hadd találgassanak a diákok —, találjanak ki annyit belőle, amennyit csak képesek."

A sejtés természetesen a következő:

Az olyan sokszög területe, amelynek csúcsai a négyzetrács rácspontjai

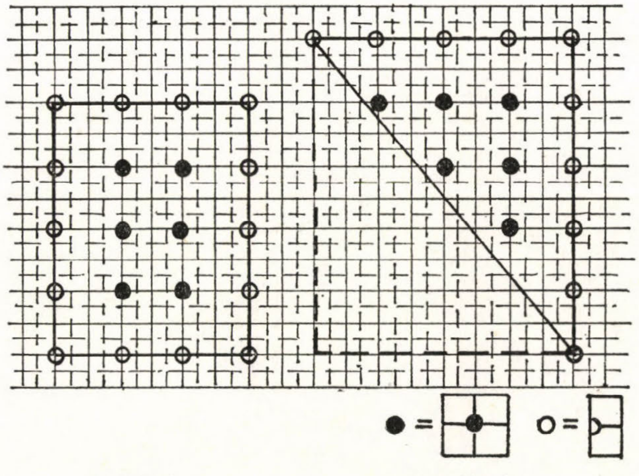
$$T = B + \frac{K}{2} - 1.$$

Ellenőrizhetjük képletünk helyességét más síkidomokon is, így vizsgálgassuk, hogy mennyire bízhatunk sejtésünk helyességében. Végezhetjük ezt nagyon rendszeresen. Tekintetbe vehetjük pl. először az 1 szélességű téglalapokat, hosszúságukat egységenként növelve, majd azokat a téglalapokat, amelyeknek szélessége 2 és ugyancsak lépésről lépésre növeljük a másik oldal hosszát, stb. Így egyre jobban bízhatunk sejtésünkben, de azt ezzel a módszerrel sohasem bizonyíthatjuk be. Ismét Pólyát idézve: „Jó valamit kitalálni, de még jobb bebizonyítani!"

IV. A Pólya-féle bizonyítás vázlata

A bizonyítás vázlata három részből áll. Először megmutatjuk, hogy tételünk igaz bármely téglalapra. Majd felhasználjuk a téglalapokra vonatkozó eredményt arra, hogy bebizonyítsuk a tételt derékszögű háromszögekre. Végül, ha feltételezzük, hogy bármely egyszerű rácssokszög feldarabolható derékszögű háromszögekre és téglalapokra, vagy előállítható az őt körülvevő téglalap és derékszögű háromszögek különbségeként,[4] akkor a tétel be van bizonyítva.

Pólya bizonyításának kulcsmozzanata azon alapszik, hogy eltolja a rácsot fél egységgel vízszintesen is, függőlegesen is.[5] Ekkor minden téglalapra jellemző lesz a következő, amit a 2.(a) ábra szemléltet: a belső rácspontokat olyan egységnyi területű négyzet veszi körül, amelyik teljesen a téglalapban van, a kerületen levő rácspontokat pedig — a 4 csúcspont kivételével — olyan egységnyi területű négyzet, amelynek a fele van a téglalapban. Amint megjegyeztük, a 4 csúcspont speciális helyzetű, az őket körülvevő négyzeteknek csak a negyedrésze van benne a téglalapban. Most már látjuk, hogy a képlet miért igaz téglalapokra és világossá válik a képletben levő „-1" szerepe — azért van szükségünk rá, mert ellensúlyoznunk kell azt a területtöbbletet, amelyet akkor kaptunk, amikor az összes kerületi rácsponthoz fél területegységet rendeltünk. Figyeljük meg, hogy ez az okoskodás minden téglalapra igaz (azokra is, amelyeknek nincsen belső rácspontja).



2. (a) ábra 2.(b) ábra

Most vizsgáljuk meg a téglapokéhoz közelálló esetet, a derékszögű háromszögekét. Amint a 2.(b) ábrán látjuk, a derékszögű háromszög területe éppen a fele az ott feltüntetett téglalap területének. Tegyük fel, hogy a szóban forgó téglalapnak B_t belső és K_t számú kerületi rácspontja van. Szeretnénk megmutatni, hogy megsejtett képletünkbe a háromszögre vonatkozó B_h, K_h értékeket behelyettesítve valóban a háromszöghöz rendelt téglalap területének a felét kapjuk. (A 2.(b) ábránkban $B_h=6$, $K_h=10$.)

Tegyük fel, hogy a szóban forgó téglalapnak k számú belső rácspontja esik a derékszögű háromszög átfogójára (a 2.(b) ábra a $k=0$ speciális esetet szemlélteti). Ebből következik, hogy a háromszög belső rácspontjainak a száma

$$B_h = \frac{B_t - k}{2}.$$

[4] A bizonyítást — amely a teljes indukciónak érdekes, nem numerikus alkalmazása — [1]-ben is, [2]-ben is megtaláljuk.

[5] A 2.(a) és 2.(b) ábrákon az eltolt rácsot szaggatott vonallal tüntettük fel.

A derékszögű háromszög kerületi rácspontjainak a számát megkapjuk, ha az átfogón és annak végpontjain fekvő $k+2$ számú rácsponthoz hozzáadjuk a hozzárendelt téglalap további K_t-2 számú kerületi rácspontjainak a felét:

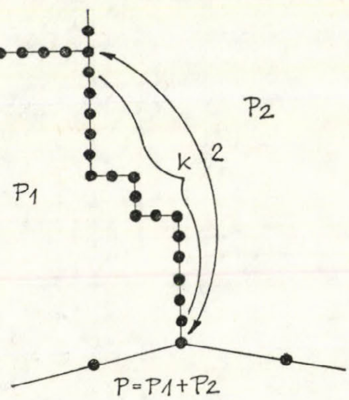
$$K_h = k+2+\frac{K_t-2}{2} = \frac{K_t}{2}+k+1.$$

Behelyettesítve K_h és B_h értékét a megsejtett képletbe, azt kapjuk, hogy

$$T_h = \frac{B_t-k}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{K_t}{2}+k+1\right)-1 = \frac{1}{2}\left(B_t-k+\frac{K_t}{2}+k+1-2\right) = \frac{1}{2}\left(B_t+\frac{K_t}{2}-1\right),$$

s ez igazolja, hogy megsejtett képletünk helyes eredményre vezet a derékszögű háromszögek területére is.

Feltételeztük, hogy minden egyszerű rácssokszög felépíthető derékszögű háromszögekből. Bizonyításunk teljes lesz, hogyha megmutatjuk a következőt: ha egy P sokszög összetehető olyan P_1 és P_2 sokszögből, amelyek területe kiszámítható a Pick-féle képlettel, akkor P-re is érvényes a Pick formula.



Sokszög (Poligon)	Belső rácspontok	Kerületi rácspontok	Terület
P_1	B_1	K_1	T_1
P_2	B_2	K_2	T_2
P	B	K	T

3. ábra

A 3. ábra az általános esetben szemlélteti P_1 és P_2 csatlakozását; jelöljük a közös határvonalukon levő rácspontok számát $k+2$-vel. A határvonal két végpontját az okoskodás folyamán külön tárgyaljuk.

A 3. ábra jelöléseit használva, tudjuk, hogy

$$T_1 = B_1+\frac{K_1}{2}-1, \quad T_2 = B_2+\frac{K_2}{2}-1.$$

Meg akarjuk mutatni, hogy T_1+T_2 egyenlő $B+\frac{K}{2}-1$-gyel.

Világos, hogy $B=B_1+B_2+k$, mert P_1 és P_2 minden belső pontja egyúttal P-nek is belső pontja, azonkívül a P_1 és P_2 közös határvonalán megjelölt k rácspont P-nek ugyancsak belső pontja. P kerületi pontjai egyrészt P_1 azon kerületi pontjai, amelyek nincsenek a közös határvonalon, másrészt P_2-nek nem a közös határvonalon levő kerületi pontjai és harmadszor a közös határvonal 2 végpontja. Ezért

$$K = K_1-(k+2)+K_2-(k+2)+2.$$

Ebből közvetlenül adódik, hogy

$$B+\frac{K}{2}-1 = B_1+B_2+k+\frac{K_1}{2}+\frac{K_2}{2}-(k+2)+1-1 = T_1+T_2.$$

S ezzel a bizonyítás vázolását befejeztük.

Ezt a tételt George Pick fedezte fel 1899-ben és azóta az irodalomban számos bizonyítás jelent meg rá (sok alkalmaz közülük teljes indukciót, l. pl. [1], [2], és [3]).

Figyeljük meg Pólya bizonyításának a legjellemzőbb vonását, azt ugyanis, hogy a rács eltolásával világos, szemléletes jelentést ad, a téglalap esetében, a Pick-féle formula jobb oldalán szereplő mindegyik tagnak. Pólya rendkívüli tehetségének ez az a vonása, amelyet sokan nehezen (vagy egyáltalán nem) tudunk utánozni. De cikkeit és könyveit olvasva — különösen a tanárok számára írtakat — sokat tanulhatunk tőle. Aki elolvassa bármelyik, a II. részben felsorolt könyvét, láthatja, milyen szerfelett bőkezűen bánik a saját tudásával. A „titkait" mint egy forgatókönyvet alkotva mondja el, mellyel arra irányítja az olvasót, hogy önállóan fedezzen fel szép és meglepő tételeket. A matematikát és a kutató munkát szerető tanár ne fossza meg magát attól az örömtől, amit Pólya írásainak olvasásával (és tanácsai szerinti „végigdolgozásával") magának megszerezhet.

IRODALOM

[1] LOREN C. LARSON: *Problem Solving through Problems*, Springer, 1983, 38—39, 68.
[2] A. LIU: A direct proof of Pick's Theorem. *Crux Mathematicorum* **4** (1978), 242—244.
[3] DUANE DE TEMPLE, JACK ROBERTSON: The Equivalence of Euler's Theorem and Pick's Theorems, *The Mathematics Teacher* **67** (1974), 222—226.

Fordította és magyar vonatkozású adatokkal kiegészítette: PATAKI BÉLÁNÉ.

Kedves kötelességem, hogy ez alkalommal is hálás köszönetet mondjak:
a cikk szerzőinek, G. L. Alexandersonnak, a Santa Clara egyetem matematika professzorának és Jean Pedersennek, a Santa Clara egyetem matematika tanszéke docensének (Senior Lecturer), akik a magyarra fordításhoz hozzájárultak és értékes tanácsaikkal munkámban segítségemre voltak. Továbbá Marjorie Enneking professzornak, az Oregon Mathematics Teacher folyóirat szerkesztőjének (Portland State University, Portland, Oregon) szíves engedélyéért, mellyel a cikk magyarra fordítását lehetővé tette. Pataki Béláné.

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО ДЬЁРДЯ ПОЙА

Г. Л. АЛЕКСАНДЕРСОН и Дж. ПЕДЕРСЕН

Перевод статьи публикованной оригинально в журнале

The Oregon Mathematics Teacher.

GEORGE PÓLYA: HIS LIFE AND WORK

G. L. ALEXANDERSON and J. PEDERSEN

Translation of a paper published in The Oregon Mathematics Teacher originally.

FODOR GÉZA MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA

KOMJÁTH PÉTER

Fodor Géza születésének 60. évfordulója és halálának 10. évfordulója alkalmából

Az alábbi tanulmány célja, hogy a halmazelmélet elemeiben jártas olvasó számára ismertesse Fodor Géza (1927—1977) eredményeit és megpróbálja érzékeltetni azt a rendkívüli hatást, amit ezek a mai halmazelmélet kialakulására tettek. Az egyszerűség — és áttekinthetőség — kedvéért a dolgozatokat témakörök szerint bontottam.

A) Stacionárius halmazok

Először Alekszandrov és Uriszon igazolták, hogy, ha $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ (tehát a megszámlálható rendszámok halmazát önmagába képező) függvény, amire $f(\alpha) < \alpha$ teljesül minden $\alpha \neq 0$ esetén, akkor valamelyik értékét $\aleph_1$-szer veszi fel. Ezt a tényt annak bizonyítására használták, hogy ω_1 a rendezéstopológiával ellátva nem-metrizálható teret ad. Mindenesetre ez a tétel a rendszámok rendezett halmazainak egy igen lényeges „furcsaságát" ragadja meg, amint az alábbi (nem túl precíz, de igen népszerű) átfogalmazás mutatja: képzeljünk el egy olyan automatát, ami 1 Ft bedobása után $\aleph_0$ 1 Ft-ost ad ki. Ha valaki egy ilyen automatán a végtelenségig, sőt azon túl is játszik, előbb-utóbb minden pénzét elveszti .... Visszatérve az eredeti megfogalmazáshoz, a fentiekben megfogalmazott tulajdonsággal rendelkező függvényeket (tehát aminél $f(\alpha) < \alpha$ minden $\alpha \neq 0$-ra, ahol $f(\alpha)$ értelmezve van) ma regresszív függvényeknek nevezzük.

Az Alekszandrov—Uriszon tétel nyomán meginduló kutatások két irányba haladtak: egyrészt, ω_1 helyett más számosságokra milyen, hasonló típusú tétel adható, másrészt, ω_1 milyen részhalmazaira igaz, hogy rajta adott regresszív függvények valamelyik értéküket $\aleph_1$-szer veszik fel. Az első irányba esik Duschnik (1931) [43] tétele, ami ω_1-ről $\varkappa^+$ $(\varkappa > \omega)$ alakú számosságokra terjeszti ki az eredményt. Erdős (1950) [44] további általánosítása azt mondta ki, hogy, ha λ számosság, $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$ és f λ-n regresszív, akkor valamelyik értékét kofinális halmazon veszi fel. Vegyük észre, hogy szinguláris λ esetén ez a halmaz λ-nál kisebb is lehet, ott az eredeti állítás nem is igaz, továbbá $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ mellett a tétel még ebben a formájában sem igaz. A második irányba esik Novák (1950) [57] tétele, ami szerint, ha egy regresszív függvény ω_1-ben kofinális és (a rendezéstopológia szerint) zárt halmazon van értelmezve, akkor van olyan érték, amit $\aleph_1$-szer vesz fel. Ezek, tehát a kofinális, zárt halmazok, központi szerepet játszanak a stacionárius halmazok elméletében. Neumer 1951-es [56] tételében tovább terjesztette Novák eredményét is, kimutatta, hogy, ha $\varkappa > \omega$ reguláris, $A \subseteq \varkappa$ olyan, hogy $\varkappa - A$-ban nincs kofinális, zárt részhalmaz, és $f\colon A \to \varkappa$ regresszív, akkor f valamelyik értékét $\varkappa$-szor veszi fel. Itt már az is igaz, hogy, ha A-ra nem teljesül a feltétel, tehát A diszjunkt valamelyik kofinális, zárt halmaztól, akkor van olyan regresszív, A-n értelmezett függvény, ami mindegyik értékét csak $\varkappa$-nál kevesebbszer veszi fel, tehát a tétel pontos. Fodor [15] dolgozatában belátja, hogy $\mathrm{cf}(\varkappa)>\omega$ $A\subseteq\varkappa$ esetén, ha $\varkappa-A$ nem tartalmaz kofinális, zárt részhalmazt, $f\colon A\to\varkappa$ regresszív függvény, akkor van olyan $\beta<\varkappa$ rendszám, hogy kofinális halmazon f értéke β-nál kisebb.

Reguláris $\varkappa$ esetén a fentebb említett halmazokat, tehát $\varkappa$ azon részhalmazait, amik minden kofinális, zárt halmazt metszenek, *stacionárius* halmazoknak nevezzük. Neumer tétele ezek után úgy fogalmazható, hogy stacionárius halmazon értelmezett regresszív függvény kofinális halmazon konstans. Ezt meglepő módon erősíti a híres *Fodor-tétel:* az adott feltételek mellett olyan érték is van, amit a függvény stacionárius halmazon vesz fel ([17]).

Nehéz lenne túlbecsülni e tétel jelentőségét. A stacionárius halmaz fogalma a halmazelmélet egyik legfontosabb eszköze, s ahol megjelenik, majdnem mindenütt szükség van Fodor tételére. Ez az egyik legtöbbet idézett halmazelméleti tétel. Egy érdekes és az olvasó számára is hozzáférhető alkalmazása J. E. Baumgartner tétele: van olyan $\aleph_1$ számosságú rendezett halmaz, amiben minden $\aleph_1$-es részhalmaz tartalmaz $\aleph_1$ számosságú jólrendezett részt, de az eredeti halmaz nem áll elő megszámlálható sok jólrendezett halmaz egyesítéseként (Schweitzer feladat volt, lásd [55]). Fodor Géza tétele nem vált azonnal ismertté. Minden különösebb túlzás nélkül állíthatjuk, hogy ennek az az oka, hogy megelőzte korát, ugyanis sokrétű alkalmazásaira csak a halmazelméletnek a hatvanas évekbeli, egyrészt Paul Cohen, másrészt a „magyar iskola": Erdős, Hajnal és éppen Fodor tevékenységét követő kivirágzása teremtett alkalmat. Így vált egy egzotikus érdekességet jelentő tételből naponta felhasznált segédeszköz. Meg kell jegyeznem, hogy Fodor prioritása csak lassan derült ki, hosszú ideig állandóan újra-felfedezték. Ma minden tankönyvben szerepel.

Fodor Gézának tanítványával, Máté Attilával közösen írt [37] cikkében a szerzők bebizonyítják, hogy, ha $N\subseteq\omega_1$ nem stacionárius halmaz, akkor nemcsak olyan (a Neumer tétel kiegészítése szerint létező) $f\colon N\to\omega_1$ regresszív függvény van, ami minden értéket legfeljebb $\aleph_0$-szor vesz fel, hanem olyan is, ami minden értékét legfeljebb *kétszer* veszi fel. Ez könnyen láthatóan éles. Ha viszont $\varkappa>\omega_1$ számosság és $\mathrm{cf}(\varkappa)>\omega$, úgy van $N\subseteq\varkappa$ nemstacionárius halmaz, hogy minden $\lambda<\varkappa$ számossághoz és minden $f\colon N\to\varkappa$ regresszív függvényhez van olyan érték, amit f legalább λ-szor vesz fel.

A [31] dolgozatban Fodor bebizonyítja, hogy, ha minden limesz $\alpha<\omega_1$ rendszámra az $f_n(\alpha)\colon n<\omega$ sorozat α-hoz konvergál, akkor elég nagy n-re van $\aleph_1$ olyan γ érték, amire $f_n^{-1}(\gamma)$ stacionárius. Ehhez hasonló ötlet segítségével bizonyítja, hogy ha λ számosság, $\mathrm{cf}(\lambda)>\omega$ és $\mathrm{cf}(\lambda)$ nem Mahlo-számosság (ld. [49]), akkor minden $S\subseteq\lambda$ stacionárius halmaz felbomlik $\mathrm{cf}(\lambda)$ diszjunkt stacionárius halmazra: $S=\bigcup\{S_\alpha\colon\alpha<\mathrm{cf}(\lambda)\}$, sőt ez úgy is megtehető, hogy minden stacionárius $T\subseteq S$ esetén legyen olyan $\alpha<\mathrm{cf}(\lambda)$, amire $T\cap S_\alpha$ stacionárius. Ez fontos adalék a következő problémához: igaz-e, hogy, ha $\varkappa$ reguláris és $S\subseteq\varkappa$ stacionárius, akkor S felbomlik $\varkappa$ darab páronként diszjunkt stacionárius halmaz egyesítésére. Ezt az állítást később R. Solovay-nek sikerült bizonyítania.

Ugyancsak R. Solovay kezdte meg a stacionárius halmazok elmélete általánosításának kidolgozását: ha $\varkappa>\omega$ reguláris számosság, egy $I\subseteq P(\varkappa)$ halmazrendszert *ideál*nak nevezünk, ha $\alpha<\varkappa$-ra $\{\alpha\}\in I$, $A, B\in I$-re $A\cup B\in I$, $B\subseteq A\in I$-re $B\in I$, $\varkappa\notin I$. Az ideál *$\varkappa$-teljes,* ha $\varkappa$-nál kevesebb ideálbeli halmaz egyesítése is ideálbeli. *I normális,* ha $A\notin I$ és $f\colon A\to\varkappa$ regresszív függvény esetében van $\alpha<\varkappa$ amire $f^{-1}(\alpha)\notin I$. Fodor tétele éppen azt mondja ki, hogy a nemstacionárius halmazok rendszere normális ideál. A [35] dolgozatban Hajnal és Fodor megmutatta, hogy, ha $\varkappa$-n van egy olyan normális ideál, amire nem igaz a Solovay-tétel (tehát van $S\in I$, ami nem bomlik $\varkappa$ diszjunkt nem I-beli halmaz uniójára), akkor $\varkappa$ nagy számosság: legalábbis Mahlo.

A [31] dolgozathoz csatlakozó [39]-ben Fodor felveti a következő sejtést: ha $\varkappa<\lambda$ reguláris számosságok, $A\subseteqq\lambda$ $\varkappa$-val kofinális rendszámok halmaza és minden $\alpha\in A$-ra van egy $B_\alpha\subseteqq\alpha$ α-ban kofinális, $\varkappa$ típusú halmaz, továbbá van olyan $\tau<\varkappa$ számosság, hogy minden $\alpha, \beta\in A$, $\alpha\neq\beta$-ra $|B_\alpha\cap B_\beta|<\tau$, akkor A nemstacionárius. Könnyű látni, hogy az Általánosított Kontinuumhipotézis mellett ez igaz, hacsak λ reguláris limesz, vagy μ^+ alakú $\mathrm{cf}(\mu)\geqq\varkappa$-val. Az első érdekes eset tehát $\varkappa=\aleph_1$, $\lambda=\aleph_{\omega+1}$. Be lehet látni, hogy a konstruálhatósági axióma mellett ekkor is igaz az állítás, legújabban azonban S. Shelah bebizonyította [50], hogy szuperkompakt számosság létezése esetén létezik olyan modell, amelyben a fenti ($\aleph_{\omega+1}$-es) esetre ellenpélda van.

Fodor Géza másik nevezetes, stacionárius halmazokra vonatkozó sejtése a következő: ha $S_\alpha\subseteqq\omega_1$ $(\alpha<\omega_1)$ stacionárius halmazok, akkor vannak *páronként diszjunkt* stacionárius $A_\alpha\subseteqq S_\alpha$ részhalmazok. Ha igaz, ez nyilván adja Solovay tételét (az $S_\alpha=$ $=S$ választással). E sejtéssel először J. E. Baumgartner, Hajnal A. és Máté A. foglalkoztak, [41] cikkükben többek között belátták, hogy igaz a konstruálhatósági axióma feltételezése mellett. Később A. Taylor $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$-ből is levezette [63]. Már Baumgartner, Hajnal és Máté észrevették, hogy, ha Fodor sejtése nem igaz, akkor van $S\subseteqq\omega_1$ stacionárius halmaz, s ennek $A_\alpha(\alpha<\omega_1)$ stacionárius részhalmazai úgy, hogy minden $T\subseteqq S$ stacionáriusra van $\alpha<\omega_1$, amire $A_\alpha-T$ nemstacionárius. Másszóval, ha a $P(S)$ Boole-algebrát faktorizáljuk a nemstacionárius halmazok ideáljával, olyan Boole-algebrát kapunk, aminek $\aleph_1$ számosságú ko-iniciális része van (pontosabban a $\neq 0$ részének van). Ha a nem-stacionárius halmazok rendszere helyett egy ideálra átfogalmazva igaz az állítás, azt mondjuk, az ideál valahol (S alatt) $\aleph_1$-sűrű. Ennél gyengébb tulajdonság, ha az ideál $\aleph_2$-szaturált: I λ-szaturált, ha nincs $A_\alpha\notin I$ $(\alpha<\lambda)$ halmazrendszer, hogy $\alpha\neq\beta$-ra $A_\alpha\cap A_\beta\in I$. K. Kunen és Máté Attila bizonyította, hogy ha a konstruálhatósági axióma teljesül, akkor $\aleph_1$-en nincs $\aleph_2$-szaturált ideál ([51, 54]).

Kunen [52] azt is belátta, hogy, ha ún. óriási számosság létezése feltehető, akkor az is, hogy ω_1-en van $\aleph_2$-szaturált normális ideál. J. R. Steel és R. van Wesep [62] azt is el tudta érni, hogy ez a nemstacionárius halmazok ideálja legyen és $2^{\aleph_0}=\aleph_2$ teljesüljön, de ehhez olyan modellt használtak kiindulásul, amiben igaz az AD, az „Axiom of Determinacy", tehát a valós játékok eldöntöttsége és AC_R, azaz a kiválasztási axióma arra az esetre, ha a valós számok halmaza az indexhalmaz (AD a kiválasztási axiómának ellentmond). Újabban ([47]) M. Foreman, M. Magidor és S. Shelah ezt egy olyan modellből is megcsinálták, amiben van egy szuperkompakt számosság. H. Woodin adott példát ([64]) olyan modellre, amiben van $\aleph_1$-en $\aleph_1$-sűrű normális ideál, feltéve, hogy $\mathrm{ZF}+\mathrm{AD}_R+$„$\theta$ reguláris" konzisztens, ahol AD_R AD-nek az az élesítése, ahol a játékosok felváltva valós számokat mondanak (0, 1 jegyek helyett), θ pedig a legkisebb jólrendezett számosság, amire R-nek nincs szürjekciója. Ma is megoldatlan, lehet-e a szóban forgó ideál a nemstacionárius ideál, és hogy a Steel—Wesep eredményben $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ elérhető-e. Annyi ismert (Magidor—Shelah), hogy ha a nemstacionárius ideál $\aleph_1$-sűrű, akkor a kontinuumhipotézis nem teljesülhet.

B) Halmazleképezések

A halmazleképezések elmélete (ma már a kombinatorikus halmazelmélet egyik fontos fejezete) Turán Pál alábbi egyszerű kérdéséből fejlődött ki: tegyük fel, hogy minden valós számhoz hozzárendeltünk véges sok másikat. Igaz-e, hogy mindenképpen van végtelen sok olyan szám, hogy egyik sincs semelyik másik hozzárendeltjei között? Hogy a tételeket megfogalmazhassuk, vezessünk be néhány fogalmat. Ha X halmaz, az f függvényt *halmazleképezés*nek nevezzük, ha $x \in X$-re $f(x)$ $X - \{x\}$-nek egy részhalmaza. Az $Y \subseteq X$ részhalmazt *független*nek nevezzük, ha $x, y \in Y$, $x \neq y$ esetén $x \notin f(y)$.

Fodor Géza első cikkei a fenti, Turán-féle probléma közvetlen általánosításaival foglalkoznak. [1]-ben bebizonyítja, hogy, ha $g: R \to R$ mérhető függvény és a halmazleképezés a következőképpen van megadva: $f(x) = (-\infty, x - g(x)] \cup [x + g(x), \infty)$, akkor van pozitív mértékű független halmaz. Tetszőleges g-re csak kontinuumszámosságú függetlent ad meg, s mint [6]-ban megmutatja, van olyan (természetesen nemmérhető) $g: R \to R$ függvény, aminél a fenti módon elkészített f halmazleképezésnek nincs pozitív külső mértékű független halmaza. Van viszont pozitív külső mértékű független halmaz, ha $f(x)$ $(-\infty, x - g(x)] \cup [x + g(x), \infty)$-nek egy nullmértékű részhalmaza [4].

Visszatérve az eredeti Turán-féle problémára, nyilvánvaló, hogy a következő tisztán számossági kérdés általánosítja azt: ha $|X| = \lambda$ és f egy olyan halmazleképezés, amire $|f(x)| < \varkappa$ teljesül minden $x \in X$-re, akkor $\varkappa < \lambda$ esetén van λ számosságú független halmaz. A jólrendezési tétel segítségével azonnal látható, hogy $\varkappa \geqq \lambda$ esetén már kételemű független halmaz létezése sem garantálható. A sejtést ebben a formában S. Ruziewicz mondta ki 1936-ban [60], Lázár Dezső bebizonyította abban az esetben, amikor $\varkappa = \aleph_0$ és λ rákövetkező [53], W. Sierpiński, amikor $\varkappa = \aleph_0$ és $\lambda = 2^\tau$ alakú [61], illetve S. Picard abban az esetben, amikor $\varkappa$ tetszőleges és λ reguláris vagy ω-val kofinális [58, 59].

A megoldás felé vezető úton a következő lépést Erdős Pál tette meg, 1950-es cikkében [44] belátta a teljes eredeti sejtés érvényességét, az Általánosított Kontinuumhipotézis feltételezésével. Minden feltétel nélkül a tételt először Hajnal András bizonyította be 1960-ban [48], tehát Fodor Géza tárgyalt cikkei megírásakor ez még nem született meg. A Sierpiński- és Lázár-féle bizonyítás azt is adja, hogy $\varkappa = \aleph_0$, $\lambda = 2^\tau$ esetén az alaphalmaz $\aleph_0$ darab független halmaz egyesítése. De Bruijn és Erdős azt is bebizonyították [42], hogy, ha $\varkappa < \aleph_0$, akkor az alaphalmaz $2\varkappa - 1$ független halmaz egyesítése (és ez éles). Erdős Pál sejtette, hogy $\varkappa \geqq \aleph_0$ esetén általában igaz, hogy az alaphalmaz $\varkappa$ független halmaz uniója. Érdemes átgondolni, hogy $\mathrm{cf}(\lambda) > \varkappa$ esetén (és csak akkor) ez adja Ruziewicz sejtését. E problémát oldotta meg Fodor [8] dolgozatában. Célszerű a halmazleképezéseket gráfokkal interpretálni, így Erdős sejtése (azaz hogy Fodor tétele) a következőképpen fogalmazható meg: ha egy irányított gráfban minden szögpont ki-foka kisebb mint $\varkappa$ (itt $\varkappa$ egy végtelen számosság), akkor a gráf kromatikus száma legfeljebb $\varkappa$. A bizonyítás a következő, erősebb állítást is adja: a szögpontok halmaza jólrendezhető úgy, hogy minden csúcs csak $\varkappa$-nál kevesebb (a jólrendezésben) kisebb csúccsal van összekötve. Azonnal látható, hogy ebből következik a $\varkappa$ színnel színezhetőség, és érdemes átgondolni, hogy minden ilyen tulajdonságú gráf irányítható úgy, hogy minden pont ki-foka kisebb, mint $\varkappa$; tehát a két tulajdonság ekvivalens. (Az említett jólrendezési tulajdonságot Erdős Pál és Hajnal András vezette be és használta végtelen gráfok kromatikus számának tanulmányozásához [45]).

Következő [12, 13] dolgozatában Fodor az akkor még bizonyítatlan Hajnal-tétel alábbi gyengítését igazolja: ha f egy halmazleképezés, mint fent, akkor van az X alaphalmaznak egy olyan λ-s Y részhalmaza, hogy $X-f(Y)$ λ számosságú. A [16] cikk bebizonyítja Ruziewicz sejtését abban az esetben, ha $\mathrm{cf}(\lambda)<\varkappa$ és minden pont $<\varkappa$ másik pont f-jében van benne.

A [14] dolgozatban felveti a következő problémát: legyenek $\varkappa$, λ, τ számosságok, $\varkappa<\lambda$, $\tau\leqq\lambda$, X egy λ-s halmaz, $\alpha<\lambda$-ra $A_\alpha\subseteqq X$, $|A_\alpha|<\varkappa$, $A_\alpha\neq A_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$. Mikor igaz, hogy van λ db olyan A_α, $\{A_\alpha:\alpha\in S\}$, hogy uniójuk λ számosságú, páronkénti metszeteik uniója pedig τ-nál kisebb. Könnyű belátni, hogy a $\tau=\lambda$ eset általánosítja a Ruziewicz sejtést. Fodor bebizonyítja ezt az esetet, $\mathrm{cf}(\lambda)\leqq\varkappa$ esetén felhasználva az ÁKH-t. Megállapítja azt a tényt, hogy a szinguláris részt elég az ω kofinalitású esetre bizonyítani. Ez az állítás azonban (ZFC-ben) mind a mai napig nincs bebizonyítva, bár bizonyos részeredmények megtalálhatók [14]-ben: ha λ $\aleph_{\alpha+\omega}$ alakú; és bizonyos más szinguláris számosságokra is [26]-ban.

A [25] dolgozat a következő, némileg rokon tételt tartalmazza: ha $\tau<\varkappa$ számosságok, van $\varkappa$ db nemüres, egymástól eltérő τ-nál kisebb számosságú halmazunk, akkor kiválasztható közülük $\varkappa$, hogy még az uniójuk is $\varkappa$-s, páronkénti metszeteik uniója pedig $\varkappa$-nál kisebb számosságú, feltéve, hogy

$$\alpha<\varkappa\text{-ból következik, hogy } \alpha^{<\tau}<\varkappa$$

és ez a feltétel szükséges is. E tétel (nem triviális fele) tulajdonképpen a néhány évvel korábbi Erdős—Rado féle delta-rendszer tétel (ld. [46]) újrafelfedezése.

A [20] cikkben Erdős Pál, Fodor Géza és Hajnal András a következő két problémát vizsgálják: legyenek adva a $\varkappa$, λ, μ, τ számosságok. Mikor igaz, hogy minden halmazleképezéshez, ami egy $\varkappa$ számosságú halmaz összes μ-eséhez ennek egy τ-s részhalmazát $(\tau<\mu)$ rendeli, van olyan τ-s halmaz, ami értékként λ-szor vétetik fel; illetve a másik kérdésnél van-e olyan τ-s halmaz, amelynek részhalmazai λ helyen vétetnek fel. A szerzők belátják, hogy az első kérdésre igen a válasz, ha $\varkappa^\mu=\varkappa^\lambda$ és $\mu^\tau<\mathrm{cf}(\varkappa^\mu)$; a másodikra, ha $\mu^\tau<\mathrm{cf}(\varkappa)$. Nemleges a válasz, ha $\lambda=2$ és $\mu=\tau$ illetve $\varkappa^\mu=\mu^\tau$ az első esetben; és $\lambda=\mu^+$ valamint $\mu=\tau$ vagy $\varkappa^\mu=\mu^\tau$ esetén a második esetben. Ez lehetővé teszi a kérdés majdnem teljes diszkusszióját az ÁKH feltételezésével.

A [19] dolgozatban Erdőssel az alábbi problémákat vizsgálja. Tegyük fel, hogy adva van egy halmazleképezés egy $\varkappa$ számosságú halmazon, továbbá bizonyos „nagy" részhalmazok, mikor igaz, hogy van olyan független részhalmaz, ami minden „nagy" halmazba sok elemmel metsz. Igenlő a válasz, ha a „nagy" egy valamilyen $\tau\leqq\varkappa$-ra τ-additív ideálban nem levőt jelent, a halmazleképezés minden ponthoz véges sok másikat rendel és a kijelölt „nagy" halmazok száma megszámlálható. Vizsgálják azt az esetet is, amikor egy metrikus térben adott halmazleképezés olyan, hogy minden pont pozitív távolságra van a képpontjaitól, a „kis" halmazok egy mérték szerinti nullmértékű halmazok, „nagy" halmaz nem nullmértékű, de Borel és van olyan $c>0$ valós szám, hogy pozitív mértékű halmazra a képpont legalább c távolságra van az eredeti ponttól. Az első eredményhez felteszik, hogy $\varkappa<\varkappa_0$, a másodikhoz pedig, hogy a térben van $\varkappa_0$-nál kisebb számosságú sűrű halmaz, ahol $\varkappa_0$ az első (gyengén) elérhetetlen számosságot jelöli. Végül belátják a következő tételt: ha egy $\varkappa$-s alaphalmazon van egy halmazleképezés, ami minden ponthoz $<\tau$ másik pontot rendel $(\tau<\varkappa)$, és $\{A_\alpha:\alpha<\mu\}$ diszjunkt, $\varkappa$ számosságú részhalmazok (ismét $\mu<\varkappa$), akkor van olyan független halmaz, ami minden A_α-ba $\varkappa$ elemmel metsz. A szinguláris eset Hajnaltól ered és felhasználja az ÁKH-t. A (néhány évvel ezutáni) Hajnal-féle bizonyítás a Ruziewicz-sejtésre kiadja ezt az élesítést is, az ÁKH nélkül.

A [27] dolgozatban Fodor Géza és Máté Attila a következő általános kérdést vizsgálja: tegyük fel, hogy f halmazleképezés egy $\varkappa$ számosságú S halmazon, F, I $\varkappa$-additív ideálok, $x \in S$-re $f(x)$, $f^{-1}(x) \in F$, mikor igaz, hogy van nem I-beli független halmaz. Igenlő a válasz, ha vannak diszjunkt halmazok, hogy I az ezeket tartalmazó legszűkebb $\varkappa$-additív ideál, az $I \cup F$-fel generált ideál sem tartalmazza S-et (és ez lényeges feltétel). Ha $I=F$, annyi is elég, hogy majdnem-diszjunkt halmazokkal generálható.

A kérdés tovább vihető: tegyük fel, hogy az S halmaz a diszjunkt S_α $(\alpha<\tau)$ halmazok egyesítése, $|S_\alpha|=\varkappa_\alpha$, S_α-n adottak az I_α és F_α valódi $\varkappa_\alpha$-additív ideálok, f egy halmazleképezés S-en úgy, hogy minden $x \in S$-re, $\alpha<\tau$-ra $f(x) \cap S_\alpha \in I_\alpha$ és $x \in S_\alpha$-ra $f^{-1}(x) \cap S_\alpha \in F_\alpha$; mikor van olyan X független halmaz, hogy $X \cap S_\alpha \notin I_\alpha$ minden $\alpha<\tau$-ra. Igenlő a válasz, ha I_α diszjunkt halmazokkal generált, $I_\alpha \cup F_\alpha$ valódi ideált generál és $\varkappa_\alpha > \prod \{\varkappa_\beta : \beta<\alpha\}$ $\alpha<\tau$-ra (és ez megint nem hagyható el). $I_\alpha = F_\alpha$ esetén, ha I_α majdnem-diszjunkt halmazokkal generálható és

$$\prod_{\beta<\alpha} \varkappa_\beta^{\varkappa_\beta} < \varkappa_\alpha \quad (\alpha < \tau),$$

ismét „igen" a válasz.

A [28] dolgozatban Fodor Géza tanítványával, Máté Attilával a következő tételeket bizonyítja. Legyen f egy $\varkappa$ számosságú S alaphalmazon értelmezett, „közönséges" halmazleképezés, azaz, $x \in S$-re $f(x)$ egy x-et nem tartalmazó részhalmaz S-ben. Tekintsük az alábbi két állítást:

(A) Minden x pontra $\{f(y): f(y) \subseteq f(x)\}$ a $\subseteq$ reláció szerint jólrendezett és, ha típusát $\xi(x)$-szel jelöljük, akkor $\xi(x)<\varkappa$, $\sup\{\xi(x): x \in S\}=\varkappa$. Továbbá $\xi<\varkappa$-ra $|\{x: \xi(x)=\xi\}|<\varkappa$ és $\{f(x): x \in S\}$-nek nincs $\varkappa$ számosságú jólrendezett része.

(B) Bárhogy bontjuk fel S-et $\tau<\varkappa$ darab diszjunkt $\varkappa$-s halmazra, valamelyikben az $\{f(x): x \in S\}$ halmazrendszer nyoma olyan, hogy nem tartalmaz $\varkappa$ számosságú, $\subseteq$ szerint szigorúan növő sorozatot.

Belátják, hogy (A)-ból nem következik $\varkappa$-s független halmaz létezése, míg (B)-ből reguláris $\varkappa$-ra következik, hogy van $\aleph_0$-ás független halmaz.

C) Egyéb

[7]-es dolgozatában Fodor belátja, hogy $2^\varkappa = \varkappa^+$ ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $E \subseteq (2^\varkappa) \times (2^\varkappa)$ halmaz, hogy tetszőleges rögzített x esetén $\{y: (x, y) \in E\}$ legfeljebb $\varkappa$ számosságú és tetszőleges $B \subseteq 2^\varkappa$, $|B|=\lambda>\varkappa$ esetén van $b \in B$, amire $\{x \in B: (x, b) \in E\}$ λ számosságú. Hasonló jellegű ekvivalenciát ad az ÁKH-ra a [9] dolgozat.

A [11] cikk egyszerű bizonyítást ad a $\varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)} > \varkappa$ tételre.

A [29]-es, Máté Attilával közösen írt dolgozat a majdnem-diszjunkt halmazrendszerekre és halmazleképezésekre vonatkozó számos tétel ideálelméleti általánosításait adja. A [32—34] dolgozatokban Fodor azt bizonyítja, hogy, ha $\varkappa$ Mahlo-számosság, akkor a nála kisebb különböző (konkrét) módokon „elérhető" számosságok halmaza nemstacionárius. A [36] dolgozat (a társszerző ismét Máté A.) hasonló eszközökkel belátja, hogy majdnem minden (tehát kofinális, zárt sok) $\varkappa$-ra

$$\mathrm{cf}(\varkappa) = \min\{\lambda: \varkappa^\lambda > \varkappa\}.$$

Itt és a [38] dolgozatban számos megjegyzést tesznek bizonyos operációkkal szembeni elérhetetlenséggel kapcsolatban.

IRODALOM

Fodor Géza dolgozatai

[1] G. FODOR: On two problems concerning the theory of binary relations, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949—50), 199—200.

[2] G. FODOR, I. KETSKEMÉTY: Some theorems on the theory of aggregates, *Portugaliae Math.* **9** (1950), 145—147.

[3] G. FODOR, I. KETSKEMÉTY: Some theorems on the theory of sets, *Fundamenta Math.* **37** (1950), 249—250.

[4] G. FODOR: On a theorem in the theory of binary relations, *Compositio Math.* **8** (1951), 250.

[5] G. FODOR, I. KETSKEMÉTY: Einige Sätze über die binären Relationen, *Studii si Cercetari Math.* **2** (1951), 7—10.

[6] G. FODOR: On a problem concerning the theory of binary relations, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **23** (1951), 247—248.

[7] G. FODOR: Über eine mit der verallgemeinerten Kontinuumphypothese äquivalente Behauptung, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1952), 232.

[8] G. FODOR: Proof of a conjecture of P. Erdős, *Acta Sci Math.* **14** (1952), 219—227.

[9] G. FODOR: An assertion which is equivalent to the general continuum hypothesis, *Acta Sci. Math.* **15** (1953), 77.

[10] FODOR GÉZA: A halmazleképezések szerkezete, kandidátusi disszertáció, 1954.

[11] G. FODOR, I. KETSKEMÉTY: Über eine Eigenschaft der singulären Kardinalzahlen, *Colloquium Math.* **3** (1954), 39—40.

[12] G. FODOR: On a problem in set theory, *Acta Sci. Math.* **15** (1954), 240—242.

[13] FODOR GÉZA: A halmazelmélet egyik problémájáról, *MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának közleményei* **5** (1955), 57—59.

[14] G. FODOR: Some results concerning a problem in set theory, *Acta Sci. Math.* **16** (1955), 232—240.

[15] G. FODOR: Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn, *Acta Sci. Math.* **16** (1955), 204—206.

[16] G. FODOR: On a problem in set theory, *Publ. Math.* **4** (1956), 57—60.

[17] G. FODOR: Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, *Acta Sci. Math.* **17** (1956), 139—142.

[18] P. ERDŐS, G. FODOR: Some remarks on set theory, V, *Acta Sci Math.* **17** (1956), 250—260.

[19] P. ERDŐS, G. FODOR: Some remarks on set theory, VI, *Acta Sci. Math.* **18** (1957), 243—260.

[20] P. ERDŐS, G. FODOR, A. HAJNAL: On the structure of inner set mappings, *Acta Sci. Math.* **20** (1959), 81—90.

[21] G. FODOR: Über transfinite Funktionen, I, *Acta Sci. Math.* **21** (1960), 343—345.

[22] G. FODOR: Über transfinite Funktionen, II, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 289—295.

[23] G. FODOR: Über transfinite Funktionen, III, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 296—300,

[24] G. FODOR: Über die Äquivalenz von zwei Sätzen in der Mengenlehre, *Colloquium Math.* **8.** (1961), 233—235.

[25] G. FODOR: Equivalence of a problem of set theory to a hypothesis concerning the powers of cardinal numbers, *Acta Sci. Math.* **24** (1963), 152—156.

[26] G. FODOR: An application of the theory of regressive functions, *Acta Sci. Math.* **24** (1963), 255—257.

[27] G. FODOR, A. MÁTÉ: Free sets and the structure of additive ideals, *Annali di Mat. Pura ed Applicata* **65** (1964), 361—376.

[28] G. FODOR, A. MÁTÉ: On the structure of set mappings and the existence of free sets, *Acta Sci. Math.* **27** (1965), 1—7.

[29] G. FODOR, A. MÁTÉ: Disjoint systems over set ideals—A generalization of the usual conception of almost disjoint set systems, *Fundamenta Math.* **62** (1968), 211—222.

[30] FODOR GÉZA: A regresszív függvények elmélete és alkalmazása, Akadémiai doktori disszertáció, 1966.

[31] G. FODOR: On stationary sets and regressive functions, *Acta Sci. Math.* **27** (1966), 105—110.

[32] G. FODOR: On a process concerning inaccessible cardinals, I, *Acta Sci. Math.* **27** (1966), 111—121.

[33] G. FODOR: On a process concerning inaccessible cardinals, II, *Acta Sci. Math.* **27** (1966), 129—140.

[34] G. FODOR: On a process concerning inaccessible cardinals, III, *Acta Sci. Math.* **28** (1967), 197—200.

[35] G. FODOR, A. HAJNAL: On regressive functions and α-complete ideals, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* **25** (1967), 427—432.

[36] G. Fodor, A. Máté: Cardinals inaccessible with respect to a function defined on pairs of cardinals, *Acta Sci. Math.* **30** (1969), 107—111.
[37] G. Fodor, A. Máté: Some results concerning regressive functions, *Acta Sci. Math,* **30** (1969), 247—254.
[38] G. Fodor, A. Máté: On arithmetical classifications of inaccessible cardinals and their applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **175** (1973), 69—100.
[39] G. Fodor: Principal sequences and stationary sets, *Acta Sci. Math.* **34** (1973), 81—84.

Egyéb hivatkozott cikkek

[40] P. S. Alexandroff, P. S. Urysohn: Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. K. Akad. Amsterdam* **14** (1929), 1—96.
[41] J. E. Baumgartner, A. Hajnal, A. Máté: Weak saturation properties of ideals, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai* **10.** *Infinite and finite sets,* Hungary, (1975), 137—158.
[42] N. G. de Bruijn, P. Erdős: A color problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Akad. Amsterdam* **13** (1951), 371—373.
[43] B. Dushnik: A note on transfinite ordinals, *Bull. Amer. Math. Soc.* **37** (1931), 860—862.
[44] P. Erdős: Some remarks on set theory, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 127—141.
[45] P. Erdős, A. Hajnal: On chromatic number of graphs and set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **17** (1966), 61—99.
[46] P. Erdős, R. Rado: Intersection theorems for systems of sets, *J. London Math. Soc.* **35** (1960). 85—90.
[47] M. Foreman, M. Magidor, S. Shelah: Martin's maximum, saturated ideals, and non-regular ultrafilters, I, kézirat.
[48] A. Hajnal: Proof of a conjecture of S. Ruziewicz, *Fund. Math.* **50** (1961), 123—128.
[49] Hajnal András, Hamburger Péter: *Halmazelmélet,* egyetemi tankönyv, Budapest, 1983.
[50] A. Hajnal, I. Juhász, S. Shelah: Splitting strongly almost disjoint families, *Trans. Amer. Math. Soc.* **265** (1986), 369—387.
[51] K. Kunen: Some applications of iterated ultrapowers in set theory, *Annals of Math. Logic* **1** (1970), 109—158.
[52] K. Kunen: Saturated ideals, *J. Symb. Logic.* **43** (1978), 65—76.
[53] D. Lázár: On a problem in the theory of aggregates, *Compositio Math.* 3 (1936), 304.
[54] A. Máté: Incompactness in infinitary languages with respect to Boolean-valued interpretations, kézirat, 1971.
[55] Máté Attila: Jelentés az 1971. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről, *Mat. Lapok* **22** (1971), 337—357.
[56] W. Neumer: Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschrift* **54** (1951), 254—261.
[57] J. Novák: A paradoxical theorem, *Fund. Math.* **37** (1950), 77—83.
[58] S. Picard: Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations, *Fund. Math.* **29** (1937), 5—9.
[59] S. Picard: Solution du problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations pour les nombres cardinaux $m<\aleph_\Omega$, *Comptes Rendus Varsovie* **30** (1937), 12—18.
[60] S. Ruziewicz: Une généralisation d'un théorème de M. Sierpiński, *Publ. Math. de l'Université de Belgrade* **5** (1936), 23—27.
[61] W. Sierpiński: Sur un problème de la théorie des relations, *Fund. Math.* **28** (1937), 71—74.
[62] J. R. Steel, R. van Wesep: Two consequences of determinacy consistent with choice, *Trans. Amer. Math. Soc.* **272** (1982), 67—85.
[63] A. Taylor: Regularity properties of ideals and ultrafilters, *Annals of Math. Logic.* **16** (1979), 33—55.
[64] H. Woodin: An $\aleph_1$-dense ideal on $\aleph_1$, kézirat, 1978.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО ГЕЗА ФОДОРА

П. КОМЙАТ

THE MATHEMATICAL WORK OF GÉZA FODOR

P. KOMJÁTH

RÉDEI LÁSZLÓ MUNKÁSSÁGA A CSOPORTELMÉLETBEN

PÁLFY PÉTER PÁL és SZÉP JENŐ

Rédei László matematikai munkásságának egyik súlyponti területe volt a véges csoportok elmélete, erről tanúskodik 38 idevágó dolgozata, valamint könyvei. Kutatási módszerének alapvető jellemzője volt a valamilyen áttekinthető formában megadott csoportelemekkel való aprólékos, néha hallatlanul bonyolult számítás. Csodálatraméltó kitartással, szívóssággal végezte — olykor évtizedeken át is — oldalak százait kitöltő számításait, amelyeket aztán kicsiszolva, fogalmilag is kellően megvilágítva, gondosan kidolgozott (sőt, esetenként már túlzásba menően precíz) formában tárt az olvasók elé.

Kutatási irányainak kiválasztásában Rédei mindig a saját elképzelése után ment, ezzel magyarázható, hogy (lényegében az egy Hajós tétel kivételével) mások vizsgálatai mélyebb hatással nem voltak munkáira, viszonylag elszigetelten dolgozott. Ennek elkerülhetetlen következménye, hogy bizonyos dolgokat újrafelfedezett, így például az elsőfokban nemkommutatív és az elsőfokban nemnilpotens csoportokat. Ezzel szemben más vizsgálatai szinte előzmény nélküliek, úttörő jelentőségűek. Ilyenek például a Rédei-féle ζ-függvény, az egyszerű csoportokra vonatkozó 1950-ből való karakterizációs tétele, a Rédei-féle általános ferdeszorzat fogalma, a véges p-csoportok természetes elmélete.

Az alábbiakban részletesen ismertetjük Rédei László jelentősebb csoportelméleti eredményeit. Ezek a következő négy témakör köré csoportosíthatók: **I.** A véges Abel-csoportok Hajós-féle faktorizációjával kapcsolatos vizsgálatok; **II.** Az elsőfokban és a másodfokban nemkommutatív, ill. az elsőfokban nemnilpotens csoportok vizsgálata; **III.** Csoportok ferdeszorzataival kapcsolatos, valamint bővítéselméleti kutatások; **IV.** A véges p-csoportok természetes elmélete.

I.

Rédei Lászlónak a véges Abel-csoportok körében végzett vizsgálatai csaknem kivétel nélkül Hajós György híres tételéhez kapcsolódnak. E tétel szerint ha egy G véges Abel-csoport minden eleme egyértelműen áll elő

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n} \quad (0 \leqq x_i \leqq e_i - 1;\ i = 1, 2, \dots, n)$$

alakban (ahol $a_i \in G$, $|a_i| \geqq e_i \geqq 2$; $i = 1, 2, \dots, n$), akkor legalább egy a_i elem rendje éppen e_i. Hajós 1938-ban közzétett doktori értekezésében erre a csoportelméleti állításra vezette vissza Minkowski kockarácsokra vonatkozó sejtését, de magát a tételt csak három évvel később sikerült bizonyítania (ld. [30]). Rédei figyelmét már ekkor felkeltette az eredmény, és nagyon meglepődött, hogy a bizonyítás ennyire nehéz. Ám a bizonyítás egyszerűsítésére tett kísérletei csak évek múltán vezettek eredményre [53], [54]. Később egy másik bizonyítást is talált [97], ez került bele aztán Algebra című könyvébe [K1], amely az első és mindmáig egyetlen algebra tankönyv, amelyik Hajós tételét tartalmazza.

Több mint két évtizedes vizsgálódásait végül a Hajós tétel messzemenő általánosítása koronázta meg. Az általános kérdés a következőképpen vethető föl: Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ egy G véges Abel-csoport tetszőleges részhalmazai, amelyekre az teljesül, hogy G minden eleme egyértelműen áll elő $g_1 g_2 \ldots g_n$ szorzatként, ahol $g_i \in A_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Lényegtelen, de hasznos megszorítás, ha feltesszük, hogy mindegyik A_i tartalmazza a csoport egységelemét. Hajós tétele úgy fogalmazható, hogy ha az A_i-k ún. szimplexek, azaz $A_i = \{a_i^x | 0 \leqq x \leqq e_i - 1\}$ alakú részhalmazok, akkor valamelyik A_i szükségképpen csoport. Könnyen belátható, hogy ez tetszőleges A_i részhalmazokra már nem marad igaz. Nem nehéz azonban kimutatni, hogy a Hajós tétel visszavezethető arra a speciális esetére, amikor minden egyes szimplex elemszáma prímszám. A tételnek ezt az alakját sikerült Rédeinek 1965-ben általánosítania tetszőleges felbontás esetére [121]. A bizonyítás rendkívüli nehézségeit érzékelteti az a tény, hogy csupán a p^2 elemű nem-ciklikus csoport esete 11 oldalt foglal el. Ezt a részeredményt egyébként Rédei már 1947-ben publikálta [48], ennek bizonyításához a hézagos polinomok módszerét használta, amelyet később terebélyes elméletté fejlesztett [K4]. Ennek az esetnek a vizsgálatát egyébként később E. Wittmann-nak [L] sikerült jelentősen lerövidítenie. Nemrégiben pedig Corrádi Keresztély és Szabó Sándor talált egyszerűbb bizonyítást Rédei fő tételére.

Meg-megújuló vizsgálódásai több, önmagában is nagy jelentőségű „mellékterméket" eredményeztek. Már említettük a hézagos polinomok elméletét. A ciklikus csoportok faktorizációjával foglalkozó kutatásai (ld. [72]) vezettek a körosztási testek „természetes bázisainak" tanulmányozásához [111], [117]. És végül, a Hajós tételhez kapcsolódik a Rédei-féle ζ-függvények bevezetése is (a kapcsolatot illetően lásd [98]).

Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ egy G véges Abel-csoport rögzített részcsoportjai, definiáljuk a

$$\varrho(z) = \sum_I (-1)^{|I|} \left|\langle A_i \mid i \in I \rangle\right|^{-z}$$

függvényt, ahol az összegezés az $\{1, \ldots, n\}$ indexhalmaz részhalmazaira történik. Ekkor a

$$\zeta(z) = \varrho(z)^{-1}$$

függvény a Riemann-féle ζ-függvény analogonjának tekinthető. Kiemelkedik Rédei „tehetetlenségi tétele" [96], amely szerint pozitív egész z értékekre

$$0 \leqq \varrho(z) < 1,$$

még pontosabban $\varrho(z)=0$, ha $z=1, \ldots, t-1$, és $0<\varrho(z)<1$, ha $z=t, t+1, \ldots$, ahol t a legkisebb olyan szám, amelyhez található G-nek olyan H részcsoportja, amelyik az A_i részcsoportok egyikét sem tartalmazza, és a G/H faktorcsoport t elemmel generálható.

A Rédei-féle ζ-függvényeket nemrégiben jelentősen általánosította Kung, Murty és Rota [G], ez az általánosítás többek között magában foglalja a Weil-féle ζ-függvényt, gráfok kromatikus polinomját, stb. Rámutattak Rédei említett „tehetetlenségi tételének" szemléletes magyarázatára is: $\varrho(k)$ annak a valószínűsége, hogy a G Abel-csoport k számú egymástól függetlenül véletlenszerűen választott karaktere az A_i részcsoportok egyikére megszorítva sem adja mind a triviális karaktert.

II.

Rédei László csoportelméleti gondolkodását áthatotta a véges csoportok egyfajta hierarchikus szemlélete. A legegyszerűbbeknek a kommutatív csoportok tekinthetők, ezeknek teljes leírását (ti. ciklikus csoportok direkt szorzataiként) Frobenius és Stickelberger [B] adta 1879-ben. A következő réteget azok a nemkommutatív csoportok alkotják, amelyeknek minden valódi részcsoportjuk kommutatív. Ezeknek az ún. elsőfokban nemkommutatív csoportoknak a szerkezetét Rédeinek már 1924-ben sikerült meghatároznia, ám eredményét akkor nem publikálta. Ennek két oka volt. Egyrészt tudomást szerzett Miller és Moreno 1903-as dolgozatáról [H], amely ezekről a csoportokról szól, másrészt pedig saját bizonyítását túlságosan bonyolultnak találta. Később kiderült, hogy van még mit hozzátenni Miller és Moreno eredményéhez, így Szép Jenő egy dolgozatának inspirációjára Rédei újra elővette a kérdést, és a ferdeszorzat fogalmát is felhasználva 1947-ben sikerült egyszerű leírást adnia [47]. Eszerint az elsőfokban nemkommutatív véges csoportok a következők:

a. p-csoportok:

1. $G = \langle a, b \mid a^{p^k} = 1,\ b^{p^l} = 1,\ [a, b] = a^{p^{k-1}} \rangle, \quad k \geqq 2,\ l \geqq 1;$

2. $G = \langle a, b \mid a^{p^k} = 1,\ b^{p^l} = 1,\ [a, b]^p = 1,\ [a, b, a] = 1,\ [a, b, b] = 1 \rangle,$
$$k \geqq l \geqq 1;$$

3. G a (8 elemű) kvaterniócsoport;

(Ezek a csoportok páronként nem-izomorfak, egyetlen kivétellel, nevezetesen $p=2$ esetén az 1. alatti $k=2$, $l=1$ ill. a 2. alatti $k=l=1$ paraméterű csoport egyaránt a 8 elemű diédercsoport. Így a p^e $(e \geqq 3)$ rendű elsőfokban nemkommutatív csoportok száma $e-2+\left[\frac{e-1}{2}\right]$.)

b. $|G| = p^e q^f$, ahol p, q különböző prímszámok. A két prím szerepe nem szimmetrikus, az egyikhez tartozó, mondjuk a p-Sylow részcsoport, normálosztó G-ben. Ekkor e a p multiplikatív rendje modulo q $\left(\text{jelben } e = \operatorname{ord} p (\operatorname{mod} q)\right)$. Adott p-hez és q^f-hez egyetlen ilyen csoport tartozik, amelyet a p^e-elemű véges test additív csoportjának és a q^f elemű ciklikus csoportnak a ferdeszorzataként állíthatunk elő a következőképpen: Legyen α egy rögzített primitív q-adik egységgyök $GF(p^e)$-ben, ennek segítségével a csoportbeli szorzást így definiáljuk:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + \alpha^{y_1} x_2, y_1 + y_2)$$

$$\left(x_1, x_2 \in GF(p^e), y_1, y_2 \in Z(q^f)\right).$$

Talán az előbbi tétel Rédei legismertebb és legtöbbet idézett eredménye. Ennek nyomán egyik kedvenc témája lett az elsőfokban nem valamilyen tulajdonságú struktúrák meghatározása.

Ebbe a sorba illeszkedik az elsőfokban nemnilpotens csoportok vizsgálata is. Széleskörű alkalmazhatóságuk miatt ezek a csoportok ismételt érdeklődést váltottak ki, itt csak O. Ju. Schmidt [I], K. Iwasawa [F] és Ju. A. Golfand [C] dolgozatait említjük. Ezek szerint egy ilyen csoport rendje $p^h q^f$, ahol a p-Sylow részcsoport normálosztó, a q-Sylow részcsoport ciklikus, továbbá adott p és q^f mellett van egy maximális elsőfokban nemnilpotens csoport, amelynek rendje $p^{h_0} q^f$, úgy, hogy neki homomorf képe minden olyan $p^h q^f$ rendű, elsőfokban nemnilpotens csoport, amelyben a p-Sylow részcsoport normálosztó; itt $h_0 = e$ vagy $h_0 = \frac{3}{2} e$, aszerint, hogy $e = \text{ord}\, p$ $(\text{mod}\, q)$ páratlan vagy páros. A pontot az i-re Rédei László tette fel 1956-ban [101]. Ő Golfandtól függetlenül bebizonyítja az előbbi tételt, sőt, a maximális $p^{h_0} q^f$ rendű csoportot explicite megadja. Ehhez egy [78]-ban igazolt determinánsazonosságot is felhasznál.

Rédei László foglalkozott a másodfokban nemkommutatív csoportok vizsgálatával is. (Ezek azok a csoportok, amelyeknek minden valódi részcsoportjuk kommutatív vagy elsőfokban nemkommutatív.) Erről a kérdésről csupán egy dolgozatot [61] publikált, még 1950-ben. Ebben azt a figyelemre méltó tételt bizonyítja be, hogy egyetlen párosrendű egyszerű csoport tartozik a másodfokban nemkommutatív csoportok közé, nevezetesen az ikozaédercsoport (másképpen az ötödfokú alternáló csoport). Vitathatatlanul ez Rédei legkiemelkedőbb csoportelméleti dolgozata. A bizonyításban központi szerepet játszik egy nagy jelentőségű új módszer, amely a másodrendű elemek kéttényezős szorzataiként előálló csoportelemek megszámlálásán alapul. Ez a módszer finom becsléseket tesz lehetővé, amelyek elvezetnek a végső eredményhez. Rédei joggal hasonlította „brüsszeli csipkéhez" ezt a bizonyítást.

Sajnos, Rédei maga nem dolgozott tovább ebben az irányban, így nem lehetett részese a véges egyszerű csoportok 1955 után megélénkült kutatásának. Eredményét és módszerét Michio Suzuki [J] fejlesztette tovább, aki többek közt megmutatta, hogy nincsen páratlan rendű, másodfokban nemkommutatív, egyszerű csoport (ez még Feit és Thompson híres eredménye [A] előtt történt, sőt annak egyik előfutárának tekinthető), és más munkáiban is előszeretettel alkalmazott a Rédeiéhez hasonló leszámolási módszereket.

III.

Rédei László több munkájában foglalkozott csoportok úgynevezett ferdeszorzataival. Már az elsőfokban nemkommutatív csoportok leírásához [47] nagyon hasznosnak bizonyult ez a fogalom, amelyet később még általánosabban definiált [69]. Ez utóbbi, nagy hatású cikkében két csoport (G és Γ) ferdeszorzatán egy olyan csoportot ért, amelynek elemei az (a, α) párok ($a \in G$, $\alpha \in \Gamma$) és a csoportbeli szorzás

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$$

alakban adható meg, ahol b^α, β^α, a^b, α^b alkalmas kétváltozós függvények (pl. b^α: $G \times \Gamma \to G$). Függvényegyenletek formájában megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy valamely függvénynégyes csoportot határozzon meg. A nagyszámú feltétel mindegyike külön-külön igen egyszerű és szükségessége nyilvánvaló. Ami nem könnyű, az az, hogy a kiválasztott feltételek együttesen már elegendőek is ahhoz, hogy a fenti képlettel definiált szorzás csoportművelet legyen. Az alkalmazások során különösen fontos az az eset, amikor Γ egy gyűrű additív csoportja és az a^b, α^b függvények a gyűrűbeli szorzás segítségével definiálhatók (ld. [47], [69]).

A Rédei-féle ferdeszorzat nagyfokú általánosságát mutatja, hogy speciális esetként tartalmazza egyrészt a Schreier-féle bővítést (ha $b^\alpha = b$ és $\beta^\alpha = e$ [G egységeleme], akkor az (e, α) alakú elemek Γ-val izomorf normálosztót alkotnak és a faktorcsoport G-vel izomorf), másrészt a Zappa—Szép faktorizációt (ha $\beta^\alpha = e$ és $a^b = \varepsilon$ [Γ egységeleme], akkor az (e, α), ill. az (a, ε) alakú elemek Γ-val, ill. G-vel izomorf részcsoportok a ferdeszorzatban, és minden elem egyértelműen áll elő a két részcsoportból vett egy-egy elem szorzataként). Sőt, a Rédei-féle ferdeszorzat pontosan ezeknek a legszűkebb közös általánosítása, ugyanis amint azt Tibiletti [K] megmutatta, minden ferdeszorzat felépíthető Schreier-féle bővítések és Zappa—Szép-féle szorzatok segítségével.

Később Rédei a ferdeszorzat több variánsával is foglalkozott. Így Stöhrrel [86] azt az esetet vizsgálta, amikor a definiáló egyenlet

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta} b, \alpha^{b} \beta)$$

alakú. Széppel [100] általánosította a konstrukciót arra az esetre, amikor az

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \beta\alpha^{b})$$

szorzás mellett az alaphalmazt az

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \quad \text{ha} \quad \varphi(a^{-1}b) = \alpha^{-1}\beta$$

ekvivalenciareláció szerint faktorizáljuk (itt φ G és Γ egy-egy részcsoportja közötti izomorfizmus). Steinfelddel [94] megadta annak feltételét, hogy a Schreier-bővítésben mikor van olyan N normálosztó, hogy $N \cong G$ és a faktorcsoport $\cong \Gamma$ (ún. kölcsönös Schreier-bővítés).

Az általános elmélet alkalmazásaképp tanulmányozta a két ciklikus csoportra faktorizálható csoportokat [70]. Legyen tehát $G=\langle a\rangle\langle b\rangle$, ahol $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$. Az az eset, amikor mind a, mind b végtelen rendű, teljes általánosságban mindmáig megoldatlan. Azzal a mellékfeltevéssel élve, hogy valamely $x_0(\neq 0)$-ra $b^y a^{x_0} = a^{x_0} b^{y'}$ teljesül minden y-ra alkalmas y'-vel, Rédei a következő eseteket találta:

1. $b^y a^x = a^x b^y$;
2. $b^y a^x = a^{(-1)^y x} b^{(-1)^x y}$;
3. $b^y a^x = a^{(-1)^y x} b^{y+2\gamma x \bar{y}}$, ahol $\bar{y}$ az y 2-es maradékát jelöli, γ tetszőleges. (Megjegyzendő, hogy a felsorolt relációk által meghatározott csoportok között vannak izomorfak is.)

Ha a végtelen rendű, de $|\langle b\rangle| = \mu$ véges, akkor a következő esetek lehetségesek:
1. $b^y a^x = a^x b^{y\gamma^x}$, ahol $(\gamma, \mu) = 1$;
2. (csak páros μ esetén)

$$b^y a^x = a^{(-1)^y x} b^{y+(\alpha-1)\bar{x}y+\beta x\bar{y}}, \text{ ahol } \alpha+\beta \text{ páratlan, } \frac{\mu}{2} | \alpha^2-1 \text{ és } \mu | \alpha^2-1+(\alpha-1)\beta.$$

Végül abban az esetben, ha G véges, egészen más jellegű nehézségek lépnek föl. Ezzel a problémával Huppert [D] és Itô [E] foglalkozott.

Főleg a gyűrű- és a félcsoportelmélet szempontjából nagy jelentőségűek Rédei bővítéselméleti tanulmányai [82], [93]. Ezekből csupán egy egyszerű, de érdekes csoportelméleti észrevételt ragadunk ki. Ha egy G véges csoport normálosztó a holomorfjában, akkor G vagy teljes csoport, vagy egy teljes csoportnak és a kételemű ciklikus csoportnak a direkt szorzata [93, 3_0. tétel].

Említést érdemel még Rédeinek az a dolgozata [63] (külön felhívjuk a figyelmet a hozzá tartozó javításra), amelyben meghatározza azokat a véges csoportokat, amelyeknek nincs direkt felbontható részcsoportjuk. Ezek az alábbiak:
1. ciklikus p-csoportok;
2. általánosított kvaterniócsoportok;
3. $p^e q^f$ rendű csoportok: $\langle a, b | a^{p^e}=1, b^{q^f}=1, b^{-1}ab=a^r\rangle$, ahol p, q prímszámok, $q^f | p-1$ és $\operatorname{ord} r \pmod{p^e} = q^f$.

IV.

Utolsó nagyszabású tudományos munkájaként Rédei László a véges p-csoportok egy újfajta elméletének alapjait fektette le. Erről eddig csupán két előzetes ismertetése látott napvilágot [129], [130], könyvének [K5] megjelenése még várat magára. Ez a — Rédei által — „természetes"-nek nevezett elmélet a véges p-csoportok tanulmányozásának egy új irányát indíthatja el.

Egy G véges p-csoport bázisának nevezi az $a_1, \ldots, a_n \in G$ elemeket, ha az $N_i = \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ részcsoportok normálosztók G-ben. Az elnevezést az indokolja, hogy ha $q_i = |N_i : N_{i-1}|$, akkor G minden eleme egyértelműen áll elő $a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n}$ alakban, ahol $0 \leqq x_i \leqq q_i - 1$. (Nem nehéz felfedezni ebben a Hajós tétel hatását.) A G csoportot definiálják az

$$a_j^{q_j} = a_1^{r_{1j}} \ldots a_{j-1}^{r_{j-1,j}} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$a_k^{-1} a_j a_k = a_1^{s_{1jk}} \ldots a_j^{s_{jjk}}, \qquad (1 \leqq j < k \leqq n)$$

összefüggésekből kiolvasható q_i $(1 \leqq i \leqq n)$, r_{ij} $(1 \leqq i < j \leqq n)$, s_{ijk} $(1 \leqq i \leqq j < k \leqq n)$ struktúrakonstansok.

Természetes módon értelmezhetők a g^x hatványok abban az esetben is, amikor az x p-adikus egész szám. A p-adikus hatványok bevezetése a tárgyalást egyszerűsíti, szükségtelenné téve az egyébként szokásos esetszétválasztásokat. A (bonyolult) „általános számolási szabályok" a szorzat, ill. a hatvány

$$(a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n})(a_1^{y_1} \ldots a_n^{y_n}) = a_1^{z_1} \ldots a_n^{z_n}$$

$$(a_1^{u_1} \ldots a_n^{u_n})^t = a_1^{v_1} \ldots a_n^{v_n}$$

báziselőállításában szereplő z_i, ill. v_i kitevőket adják meg az x_j-k és y_j-k, illetve az u_j-k és t, valamint a struktúrakonstansok függvényeként. Érdekes és fontos észrevétel, hogy ezek a függvények a p-adikus topológiában folytonosak (vö. [134]).

A fő kérdés a véges p-csoportok osztályozása, ehhez minden p-csoportban kanonikus módon kellene bázist választani, tehát úgy, hogy a csoportok izomorfiaosztályai és a hozzájuk tartozó struktúrakonstansok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés legyen. Első lépésekként a kitüntetett bázis számára Rédei a következő követelményeket állítja fel:
(i) a lehető legkevesebb elemből álljon, (ii) a báziselemek rendje a lehető legkisebb legyen, (iii) a struktúrakonstansok minél „egyszerűbbek" legyenek (így pl. minél több $r_{ij} = 0$ legyen; a pontos feltételek ismertetésére itt nincs módunk).

A kételemű bázissal bíró (ún. metaciklikus) p-csoportok esetére sikerül végigvinnie az osztályozást, ezeket 9, ill. 3 (attól függően, hogy $p = 2$ vagy $p > 2$) ún. paraméterosztályba sorolja. Egy-egy paraméterosztályon belül a csoportok egységesen adhatók meg, pl. — a legegyszerűbb esetet véve — a metaciklikus Abel-csoportokat a

$$q_1 = pt_1, \quad q_2 = pt_1 t_2, \quad r_{12} = 0, \quad s_{112} = 1$$

struktúrakonstansok definiálják, ahol a t_1, t_2 paraméterek az $1, p, p^2, \ldots$ értékeket vehetik föl. A vizsgálatok során Rédei megadja a metaciklikus p-csoportok egy teljes invariánsrendszerét is:

$$|G|, \quad \exp G, \quad |G/G'|, \quad \exp(G/G'), \quad |Z(G)|, \quad \exp Z(G),$$

$$\left|\{g^p \mid g \in G\}\right|, \quad \left|\{g \in G \mid g^p = 1\}\right|.$$

RÉDEI LÁSZLÓ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Az $x^{\varphi(p^{\alpha})}-1\equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}$ congruentia primitív gyökének existentiatétele, *A Szent István Akadémia Értesítője* **6** (1921), 199—202.

[2] a) Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **2** (1925), 134—138.

b) Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, *J. reine angew. Math.* **155** (1926). 103—106.

[3] Über die Klassenzahl des imaginären quadratischen Zahlkörpers, *J. reine angew. Math.* **159** (1928), 210—219.

a) A másodfokú képzetes számtest osztályszámáról, *Mat. Term. Tud. Ért.* **44** (1927), 230—246.

[4] A másodfokú valós számtest osztályszámáról s alapegységéről, *Mat. Term. Tud. Ért.* **48** (1932), 648—682.

[5] A másodfokú számtest osztályszámáról, *Mat. Term. Tud. Ért.* **48** (1932), 683—707.

[6] Gauss egyik számelméleti tételének kibővítéséről, *A mezőtúri ref. gimn. Értesítője*, 1932—33, 4—12.

[7] A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, *Mat. Term. Tud. Ért.* **49** (1933), 338—363.

[8] Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers (H. Reichardttal), *J. reine angew. Math.* **170** (1933), 69—73.

[9] Megjegyzés H. Rademacher úr megelőző dolgozatához, *Mat. Fiz. Lapok* **40** (1933), 35—39.

[10] Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **171** (1934), 55—60.

a) A másodfokú számtest egyik tételének új bizonyítása, *Mat. Term. Tud. Ért.* **50** (1934), 219—230.

[11] Megjegyzések K. Borsuk egy geometriai tételéhez, *Mat. Fiz. Lapok* **41** (1934), 36—40.

[12] Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **171** (1934), 61—64.

a) Felső korlát a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai számára, *Mat. Term. Tud. Ért.* **51** (1934), 219—226.

[13] Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **171** (1934), 131—148.

a) A másodfokú számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai, *Mat. Term. Tud. Ért.* **50** (1934), 195—218.

b) A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsairól, *Mat. Term. Tud. Ért.* **51** (1934), 227—259.

[14] Ein kombinatorischer Satz, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **7** (1934), 39—43.

[15] Über die Pellsche Gleichung $t^2-du^2=-1$, *J. reine angew. Math.* **173** (1935), 193—221.

a) A $t^2-du^2=-1$ Pell-féle egyenletről, *Mat. Term. Tud. Ért.* **54** (1936), 1—44.

[16] Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **174** (1935), 15—55.

a) Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben, *Mat. Term. Tud. Ért.* **54** (1936), 45—116.

[17] Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nyolccal osztható invariánsaira, *Mat. Term. Tud. Ért.* **54** (1936), 736—768.

[18] Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern (H. Behrbohmmal), *J. reine angew. Math.* **174** (1936), 192—205.

[19] A négyzetes maradékok eloszlásáról összetett modulus esetében, *Mat. Term. Tud. Ért.* **56** (1937), 54—88.

[20] A másodfajú *D*-felbontásokról, *Mat. Term. Tud. Ért.* **56** (1937), 89—125.

[21] Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportja 4-gyel osztható invariánsainak számosságára vonatkozó néhány középértékkérdés, *Mat. Term. Tud. Ért.* **57** (1938), 88—104.

[22] Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper, I, *J. reine angew. Math.* **180** (1938), 1—43.

a) Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére, I, *Mat. Term. Tud. Ért.* **56** (1937), 807—847.

b) Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportjának 2-, 4-, és 8-cal osztható invariánsai, *Mat. Term. Tud. Ért.* **56** (1937), 848—853.

c) Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére, II, *Mat. Term. Tud. Ért.* **57** (1938), 488—500.

[23] Die Diophantische Gleichung $mx^2+ny^2=z^4$, *Monatsh. Math. Phys.* **48** (1939), 43—60.

[24] Algebrai számtestek ideálosztálycsoportjainak páros részéről, *Mat. Term. Tud. Ért.* **59** (1940), 829—841.

[25] Konvex testek támasztófüggvényéről, *Mat. Term. Tud. Ért.* **60** (1941), 64—69.

[26] Über den Fundamentalsatz der Abelschen Gruppen von endlicher Ordnung, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **10** (1941), 109—111.

[27] Zur Gaussischen Theorie der Reduktion binärer quadratischer Formen, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **10** (1941), 134—140.

[28] Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern, *J. reine angew. Math.* **183** (1941), 183—192.
a) Euklides algoritmusáról valós másodfokú számtestekben, *Mat. Fiz. Lapok* **47** (1940), 78—90.

[29] Egy diophantosi approximációról az algebrai számok körében. *Mat. Term. Tud. Ért.* **61** (1942), 460—470.

[30] Hajós György munkáinak ismertetése, *Mat. Fiz. Lapok* **49** (1942), 1—16.

[31] A rácsparallelogrammákról, *Mat. Fiz. Lapok* **49** (1942), 73—75.

[32] Zur Frage des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern, *Math. Ann.* **118** (1942), 588—608.

[33] Zu einem Approximationssatz von Koksma, *Math. Z.* **48** (1942), 500—502.

[34] Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2+sy^2=z^{2n}$ diophantosi egyenletről, I, *Mat. Term. Tud. Ért.* **62** (1943), 13—34.

[35] Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2+sy^2=z^{2n}$ diophantosi egyenletről, II, *Mat. Term. Tud. Ért.* **62** (1943), 35—47.

[36] Másodfokú számtestek gyűrűosztálycsoportjának páros részéről, a Pell-féle és az $rx^2+sy^2=z^{2n}$ diophantosi egyenletről, III, *Mat. Term. Tud. Ért.* **62** (1943), 48—62.

[37] Megjegyzés Waldapfel László dolgozatához, *Mat. Fiz. Lapok* **50** (1943), 260—261.

[38] A hipergeometrikus sorok alkalmazása az $1-x^{p-1}$ Fermat-féle polinom bizonyos szorzatelőállításaira a p törzsmodulus szerint, kapcsolatban a négyzetes maradékok elméletével *Mat. Term. Tud. Ért.* **62** (1943), 335—348.

[39] Kurze Darstellung des fünften Gauss'schen Beweises für den quadratischen Reziprozitätssatz, *Comment. Math. Helv.* **16** (1943—44), 264—265.

[40] Über die Klassengruppen und Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **186** (1944), 80—90.

[41] Bemerkung zu einer Arbeit von R. Fueter über die Klassenkörpertheorie, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1946), 37—38.

[42] Über einige merkwürdige Polynome in endlichen Körpern mit zahlentheoretischen Beziehungen, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1946), 39—54.

[43] Zur Theorie der Gleichungen in endlichen Körpern, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1946), 63—70.

[44] Über eindeutig umkehrbare Polynome in endlichen Körpern, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1946), 85—92.

[45] Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1946), 96—105.

[46] Bemerkung zu meiner Arbeit "Über die Gleichungen dritten und vierten Grades in endlichen Körpern", *Acta Sci. Math. (Szeged)* **11** (1947), 184—190.

[47] Das "schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören, *Comment. Math. Helv.* **20** (1947), 225—264.

[48] Zwei Lückensätze über Polynomen in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen, *Acta Math.* **79** (1947), 273—290.

[49] Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe, I (Szele Tiborral), *Acta Math.* **79** (1947), 291—320.

[50] Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1949), 21—35.

[51] О представлении чисел 1, 2, ..., N посредством разностей (Rényi Alfréddal), *Матем. сб.* **24** (1949), 385—389.

[52] Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron (Szőkefalvi-Nagy Bélával), *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 42—50.

[53] Die Reduktion des gruppentheoretischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen, *Monatsh. Math.* **53** (1949), 221—226.

[54] Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Comment. Math. Helv.* **23** (1949), 272—282.

[55] Die Primfaktoren der Zahlenfolge 1, 3, 4, 7, 11, 18. ..., *Portugal. Math.* **8** (1949), 59—61.

[56] Kurzer Beweis eines Satzes von Vandiver über endliche Körper, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 99—100.

[57] Die Ringe "ersten Ranges" (Szele Tiborral), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **12A** (1950), 18—29.

[58] Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einer Reziprozitätsformel von Dedekind, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **12B** (1950), 236—239.

[59] Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe, II (Szele Tiborral), *Acta Math.* **82** (1950), 209—241.

[60] Über die Anzahl der Potenzreste mod p im Intervall $(1, \sqrt{p})$, *Nieuw Arch. Wisk.* **23** (1950), 150—162.

[61] Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen, *Acta Math.* **84** (1950), 129—153.

[62] Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes, *Acta Math.* **84** (1950), 155—158.

[63] Die endlichen Gruppen ohne direkt unzerlegbare Untergruppen, *Math. Ann.* **122** (1950), 127—130. Berichtigung, *ibid.* **123** (1951), 340.

[64] Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern (Fáry Istvánnal), *Math. Ann.* **122** (1950), 205—220.

[65] Ein Satz über quadratische Formen, *Math. Ann.* **122** (1950), 340—342.

[66] Über das Dreieckpaar, *Stud. Cerc. Mat.* **1** (1950), 114—137.
a) Asupra perechilor de triunghiuri, *Stud. Cerc. Mat.* **1** (1950), 87—113.

[67] On factorisable groups (Szép Jenővel), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1950), 235—238.

[68] Über die Wertverteilung des Jacobischen Symbols, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1950), 242—246.

[69] Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *J. reine angew. Math.* **188** (1950), 201—227. Ergänzung, *ibid.* **208** (1961), 144.

[70] Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950), 74—98.

[71] A short proof of a theorem of Št. Schwarz concerning finite fields, *Časopis Pěst. Mat. Fys.* **75** (1950), 211—212.

[72] Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950), 197—207.

[73] Über die endlichen nilpotenten Gruppen (Szép Jenővel), *Monatsh. Math.* **55** (1951), 200—205.
a) Véges nilpotens csoportok (Szép Jenővel), *I. Magyar Mat. Kongresszus Közleményei,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950, 225—232.

[74] Über die Basen endlicher Gruppen, *Math. Z.* **53** (1951), 454—455.

[75] Einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes, *Math. Z.* **54** (1951), 25—26.

[76] Die Einfachheit der alternierenden Gruppe, *Monatsh. Math.* **55** (1951), 328—329.

[77] Über eine Verschärfung eines zahlentheoretischen Satzes von Thue, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **2** (1951), 75—82.

[78] Eine Determinantenidentität für symmetrische Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **2** (1951), 105—107.

[79] Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **2** (1951), 185—189.

[80] Über Ringe mit gemeinsamer multiplikativer Halbgruppe (Steinfeld Ottóval), *Comment. Math. Helv.* **26** (1952), 146—151.

[81] Die Vollidealringe, *Monatsh. Math.* **56** (1952), 89—95.

[82] Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **14** (1952), 252—273.

[83] Über die Determinantenteiler, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 3 (1952), 143—150.

[84] Kurzer Beweis der Waringschen Formel, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 3 (1952), 151—153.

[85] Vollidealringe im weiteren Sinn, I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 3 (1952), 243—268.

[86] Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie (A. Stöhrrel), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **15** (1953), 7—11.

[87] Die Existenz eines ungeraden quadratischen Nichtrestes mod p im Intervall $(1, \sqrt{p})$, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **15** (1953), 12—19.

[88] Eine Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung (Szép Jenővel), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **15** (1953), 85—86.

[89] Bedingtes Artinsches Symbol mit Anwendung in der Klassenkörpertheorie, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1953), 1—29.

[90] Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1953), 31—87.

[91] Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 17—25.

[92] Über das Kreisteilungspolynom, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 27—28.

[93] Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar,* **5** (1954), 169—195.

a) Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **4** (1954), 25—48.

[94] Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen (Steinfeld Ottóval), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **15** (1954), 243—250.

[95] Über die Ringe mit gegebenem Modul, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **15** (1954), 251—254.

[96] Zetafunktionen in der Algebra, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **6** (1955), 5—25.

[97] Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **6** (1955), 27—40.

[98] Die gruppentheoretischen Zetafunktionen von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **6** (1955), 271—279.

[99] Hazai vizsgálatok a véges csoportok elméletében, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **5** (1955), 315—325.

[100] Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa—Casadio (Szép Jenővel), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **16** (1955), 165—170.

[101] Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 303—324.

[102] Äquivalenz der Sätze von Kronecker—Hensel und von Szekeres für die Ideale des Polynomringes einer Unbestimmten über einem kommutativen Hauptidealring mit Primzerlegung, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **17** (1956), 198—202.

[103] Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 401—442.

[104] Über die algebraisch-zahlentheoretische Verallgemeinerung eines elementarzahlentheoretischen Satzes von Zsigmondy, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **19** (1958), 98—126.

[105] Eine Bemerkung über die endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **19** (1958), 127—128.

[106] Zur Theorie der Polynomideale über kommutativen nullteilerfreien Hauptidealringen, *Math. Nachr.* **18** (1958), 313—332.

[107] Die einstufig Nicht-Zeroringe und Verallgemeinerungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **22** (1958), 201—214.

[108] Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind (Pollák Györggyel), *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 126—130.

[109] Neuer Beweis eines Satzes von Delone über ebene Punktgitter, *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 205—207.

[110] Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern (Turán Pállal), *Acta Arith.* **5** (1959), 223—225.

[111] Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers, I, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **23** (1959), 180—200.

[112] Ein spezieller Diskriminantensatz über Polynome, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **20** (1959), 234—237.

[113] Die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **20** (1959), 238—244.

[114] Neumann János munkássága az algebrában és a számelméletben, *Mat. Lapok* **10** (1959), 226—230.

[115] Halbgruppen und Ringe mit Linkseinheiten ohne Linkseinselemente, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), 217—222.

[116] Über die quadratischen Zahlkörper mit Primzerlegung, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **21** (1960), 1—3.

[117] Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers, II, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **24** (1960), 12—40.

[118] Hajós György 50. születésnapjára, *Mat. Lapok* **13** (1962), 217—227.

[119] Ein Überdeckungssatz für endliche Abelsche Gruppen im Zusammenhang mit dem Hauptsatz von Hajós, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **26** (1965), 55—61.

[120] Logische Dualität der Frobenius—Stickelbergerschen und Hajósschen Hauptsätze der Theorie der endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965), 327.

[121] Die neue Theorie der endlichen Abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965), 329—373. Berichtigung, *ibid.* **17** (1966), 461.

[122] Ein Gleichverteilungssatz für Systeme homogener Linearformen modulo p (H. J. Weinerttel) *Acta Sci. Math. (Szeged)* **27** (1966), 41—43.

[123] Verallgemeinerung eines Satzes über homogene Linearformen (H. J. Weinerttel), *Acta Sci. Math. (Szeged)* **27** (1966), 45—48.

[124] Powers in groups, *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), 1001.

[125] Polynome mit eingeengtem Wertevorrat über Körpern, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **33** (1969), 29—31.
[126] Mátrix rangjának gyűrűelméleti értelmezése (Lee Annával), *Mat. Lapok* **20** (1969), 39—41.
[127] The matrix equation $A^k = E$ $(a_{ij} \geqq 0)$ over a strict partially ordered integral domain (Lee Annával), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **21** (1970), 453—455.
[128] Die einstufig nichtkommutativen Halbgruppen mit Ausnahme von unendlichen Gruppen (A. N. Trahtmannal), *Period. Math. Hungar.* **1** (1971), 15—23.
[129] Endliche p-Gruppen, *Studien zur Algebra und ihre Anwendungen,* Schr. Zentralinst. Math. Mech. Akad. Wissensch. DDR, Heft **16**, Akademie-Verlag, Berlin, 1972, 144—146.
[130] Eine Vektorrechnung mit Anwendung in der Theorie der endlichen p-Gruppen, *Rings, Modules and Radicals* (Proc. Colloq. Keszthely, 1971), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, **6**, North-Holland, Amsterdam, 1973, 423—445.
[131] Einige Teilbarkeitskriterien, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **34** (1973), 345—348.
[132] Einiges über Gruppoid-Verbände mit Anwendungen auf Gruppen, Ringe, Halbgruppen (Steinfeld Ottóval), *Publ. Math. Debrecen* **21** (1974), 145—150.
[133] Die wissenschaftliche Tätigkeit von Andor Kertész (Steinfeld Ottóval és Wiegandt Richárddal), *Publ. Math. Debrecen* **23** (1976), 1—9.
[134] Verallgemeinerter Summenbegriff in der p-adischen Analysis mit Anwendung auf die endlichen p-Gruppen (Márki Lászlóval), *Publ. Math. Debrecen* **24** (1977), 101—106.
[135] On the mathematical theory of the „Fifteenth-Puzzle", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **36** (1980), 123—124.

RÉDEI LÁSZLÓ KÖNYVEINEK JEGYZÉKE

[K1] *Algebra, I* (magyarul), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
a) *Algebra, I* (németül), Akademische Verlagsgesellschaft, Geest Portig, Leipzig, 1959.
b) *Algebra, I* (angolul), Akadémiai Kiadó, Budapest — Pergamon Press, Oxford, 1967.
[K2] *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen,* Akadémiai Kiadó, Budapest — Physica Verlag, Würzburg — Teubner Verlag, Leipzig, 1963.
a) *The theory of finitely generated commutative semigroups,* Akadémiai Kiadó, Budapest — Pergamon Press, Oxford, 1965.
[K3] *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein,* Akadémiai Kiadó, Budapest — Teubner Verlag, Leipzig, 1965.
a) *Foundation of the Euclidean and non-Euclidean geometries according to F. Klein,* Akadémiai Kiadó, Budapest — Pergamon Press, Oxford, 1968.
[K4] *Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern,* Akadémiai Kiadó, Budapest — Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin — Birkhäuser Verlag, Basel, 1970.
a) *Lacunary polynomials over finite fields,* Akadémiai Kiadó, Budapest — North-Holland, Amsterdam, 1973.
[K5] *Endliche p-Gruppen, I,* Akadmiai Kiadó, Budapest (megjelenőben).

TOVÁBBI IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[A] W. Feit, J. G. Thompson: Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 755—1029.
[B] G. Frobenius, L. Stickelberger: Über Gruppen von vertauschbaren Elementen, *J. reine angew. Math.* **86** (1879), 217—262.
[C] Ю. А. Гольфанд: О группах, все подгруппы которых специальные, *ДАН СССР* **60** (1948), 1313—1315.
[D] B. Huppert: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen, *Math. Z.* **58** (1953), 243—264.
[E] N. Itô: Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 517—520.
[F] K. Iwasawa: Ueber die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **23** (1941), 1—4.
[G] J. P. S. Kung, M. R. Murty, G.-C. Rota: On the Rédei zeta function, *J. Number Theory* **12** (1980), 421—436.
[H] G. A. Miller, H. C. Moreno: Non-abelian groups in which every subgroup is abelian, *Trans. Amer. Math. Soc.* **4** (1903), 398—404.

[I] О. Ю. Шмидт: Группы, все подгруппы которых специальные, *Матем. сб. (стар. серия)* **31** (1924), 366—372.
[J] M. Suzuki: The non-existence of a certain type of simple groups of odd order, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 686—695.
[K] C. M. Tibiletti: Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei, *Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat.* **17** (1957—58), 209—221.
[L] E. Wittmann: Einfacher Beweis des Hauptsatzes von Hajós—Rédei für elementare Gruppen von Primzahlquadratordnung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 227—230.

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ЛАСЛО РЕДЕИ В ТЕОРИИ ГРУПП

П. П. ПАЛФИ и Й. СЕП

THE WORK OF LÁSZLÓ RÉDEI IN GROUP THEORY

P. P. PÁLFY and J. SZÉP

EGY ELEM ÁLTAL GENERÁLT TRANSZFORMÁCIÓCSOPORTOK A PROJEKTÍV SÍKON

MÉSZÁROS FERENC és MOLNÁR EMIL

1. Bevezetés

Dolgozatunkban az egy elem által generált nemfolytonos projektív transzformációcsoportok geometriai szempont szerinti osztályozását végezzük el. Megkíséreljük a fundamentális halmazzal történő leírás lehetőségeit tisztázni, erre utalunk, amikor „geometriai" jellemzésről beszélünk. Ez azért is érdekes lehet, mert a hiperbolikus sík diszkrét transzformációcsoportjainak témaköre még sok megoldatlan kérdést tartalmaz [11, 12]. Ezek a csoportok a projektív sík bizonyos tulajdonságú transzformációcsoportjainak is tekinthetők, így természetesen vetődik fel a projektív sík néhány nemfolytonos transzformációcsoportjának áttekintése.

A pszeudo-euklideszi vagy általánosabban az affin sík diszkrét transzformációcsoportjai [1] is más megvilágításba kerülhetnek ilyen módon. Ugyanis egy α projektív transzformáció (mindig létező) invariáns egyenesét ideális egyenesnek tekintve, ezt elhagyva, a fennmaradó affin síkon α affin transzformációként hat. Tehát osztályozásunkból az egy elem által generált affin transzformációcsoportok áttekintése is adódik, de ezt most nem emeljük ki.

Először a projektív síkon ható transzformációcsoport geometriai jellemzésének általános módszerét ismertetjük. Utána megadjuk az egy elem által generált transzformációcsoportok típusait, és ez egyes típusokon belül a különbözőnek tekintett eseteket bizonyos állandó paraméterektől függően. Végül a típusok geometriai jellemzését ismertetjük, és utalunk a további vizsgálatok módszerére.

A $\mathscr{P}^2$ klasszikus projektív sík egy 2 dimenziós kompakt összefüggő C^∞ differenciálható sokaság, melyet ábráinkon félgömbmodelljével, illetve „affin térképeken" szemléltetünk. Legyen G egy $\mathscr{P}^2$-n ható transzformációcsoport, és tekintsük a $\mathscr{P}^2/G$ struktúrát.

Általánosabban, legyen $\mathscr{X}(=\mathscr{P}^2)$ topologikus tér, G pedig az $\mathscr{X}$-en jobbról ható transzformációcsoport, azaz legyen értelmezve az

$$\mathscr{X}\times G \to \mathscr{X}, \quad (x, g) \mapsto xg$$

effektív csoporthatás, az alábbi tulajdonságokkal:

1. Bármely $x\in\mathscr{X}$ esetén a G csoport 1 egységelemére, és csak erre teljesül $x\cdot 1=x$.
2. Bármely $x\in\mathscr{X}$ és $g_1, g_2\in G$ esetén $x(g_1g_2)=(xg_1)g_2$.

Az $\mathscr{X}$ téren egy $\sim$ ekvivalenciarelációt definiálhatunk: $x, y\in\mathscr{X}$ esetén $x\sim y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$létezik $g\in G$, amelyre $xg=y$.

A fenti ekvivalenciaosztályokból álló faktorteret szokás $\mathscr{X}/G$-vel jelölni. Az ekvivalenciaosztályokat G-pályáknak (G-orbitoknak) nevezzük. Az x pályáját $\{x\}$ is jelöli. Az $\mathscr{X}/G$ pályatér topológiáját az $\mathscr{X}$ topológiája segítségével úgy definiálhatjuk, hogy a $\varkappa\colon \mathscr{X}\to\mathscr{X}/G$, $x\mapsto\{x\}$ kanonikus projekció folytonos legyen. Ez azt jelenti, hogy a $\mathscr{V}\subset\mathscr{X}/G$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a $\mathscr{V}\varkappa^{-1}$ teljes inverz kép nyílt $\mathscr{X}$-ben.

Ellenőrizhető, hogy $\mathcal{X}/G$ valóban topológikus tér [3, 6]. A G csoport hatása diszkontinuus az $x\in\mathcal{X}$ pontban, vagy — másképpen mondva — G nemfolytonos transzformációcsoport az $x\in\mathcal{X}$ pontban, ha létezik x-nek olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy a $\{g\in G|\mathcal{U}\cap(\mathcal{U})g\neq\emptyset\}$ halmaz véges sok elemet tartalmaz.

A fenti definíció alapján $\mathcal{X}$ pontjait először két részhalmazba soroljuk. Egy $x\in\mathcal{X}$ pontot közönségesnek nevezünk, ha rá a definíció teljesül, és különlegesnek, ha rá a definíció nem teljesül. Ilyen G nemfolytonos csoportok esetén van értelme beszélni a G egy fundamentális halmazáról — vagy alaphalmazáról — amelyet $\mathcal{F}_G$-vel jelölünk. A G egy fundamentális halmaza $\mathcal{F}_G$, ha:

1. $\mathcal{F}_G$ az $\mathcal{X}$ tér nyílt halmaza (lehetőleg legyen $\mathcal{F}_G$ összefüggő $\mathcal{X}$-ben, de ez nem mindig elérhető).
2. Bármely $g\in G\setminus\{1\}$ esetén $\mathcal{F}_G\cap(\mathcal{F}_G)g=\emptyset$.
3. Tetszőleges $x\in\mathcal{X}$ ponthoz létezik olyan $g\in G$, hogy $xg\in\overline{\mathcal{F}_G}$, vagy pedig x különleges pont. $\overline{\mathcal{F}_G}$ jelöli az $\mathcal{F}_G$ $\mathcal{X}$-beli lezárását.

$\mathcal{F}_G$ a határán $(\overline{\mathcal{F}_G}\setminus\mathcal{F}_G)$-n történő azonosításokkal együtt geometriailag jellemzi az $\mathcal{X}/G$ topológikus teret, ha még az $\overline{\mathcal{F}_G}$-ben nem szereplő különleges pontokat is figyelembe vesszük. Ehhez megadjuk az $\mathcal{X}/G$-beli pályák pályakörnyezeteinek jellemzését. Előbb $\overline{\mathcal{F}_G}$ tipikus pontjainak $\mathcal{X}$-beli jellegzetes környezeteit, illetve azok $\overline{\mathcal{F}_G}$-beli megfelelőit tekintjük, majd ugyanezt a különteges pontok pályáira is megvizsgáljuk. Ennek megfelelően például $\overline{\mathcal{F}_G}$-nek vesszük egy P pontját, vesszük P egy jellegzetes környezetét $\mathcal{X}$-ben, majd ennek a $\varkappa$ projekciónál származó képét $\mathcal{X}/G$-ben, vagyis a $\{P\}$ környezetében levő G-pályákat, ezután e pályákat $\overline{\mathcal{F}_G}$-ben jellemző pontok adják a $\{P\}$ adott környezetének $\overline{\mathcal{F}_G}$-beli leírását.

A G csoportokat ezután úgy adjuk meg, hogy a $\mathcal{P}^2$-n nemfolytonos módon hassanak, próbálunk hozzájuk egy $\mathcal{F}_G$ fundamentális halmazt találni, továbbá jellemezzük $\overline{\mathcal{F}_G}$-t a különleges pontokkal együtt. Ez akkor egyszerűbb, ha G egyetlen A elem által generált $\langle A\rangle:=\{A^n|n\in Z\}$ kollineációcsoportja $\mathcal{P}^2$-nek. A vizsgálathoz a folytonossá, sőt differenciálhatóvá tett $\{x\cdot A^t\in\mathcal{P}^2|t\in R\}$ alakú pályákat is felhasználjuk, hiszen az $\{x\cdot A^n\in\mathcal{P}^2|n\in Z\}$ pályák ezek részhalmazai.

További feladatot jelent majd, hogyan lehet szempontjainkat a transzformációcsoportok általános elméletébe beilleszteni [10].

2. A klasszikus projektív sík kollineációi

A lineáris algebrából ismeretes az R valós számtesten értelmezett $\mathbf{R}^3$ vektortér reguláris lineáris transzformációinak osztályozása [4, 5]. Ezek mátrix alakban az alábbiak (a mátrix soraiban $\mathbf{R}^3$ alkalmas bázisvektorai képeinek az előbbi bázisbeli koordinátái vannak; a feltüntetett alesetek a későbbi finomabb osztályozásra utalnak):

1. $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$ **1.1.** $0<|a|=|b|=|c|$ **1.2.** $0<|a|=|b|<|c|$ **1.3.** $0<|a|<|b|<|c|$

2. $\begin{pmatrix} a & & \\ & r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ & -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0<\varphi<\pi$ **2.1.** $0<|a|=r$ **2.2.** $0<|a|<r$

3. $\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$ **3.1.** $0 < a$

4. $\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$ **4.1.** $0 < |a| = |b|$
4.2. $0 < |a| < |b|$.

A fentiekből a $\mathcal{P}^2 := \dot{\mathbf{R}}^3/\dot{R}$ klasszikus projektív sík ($\dot{\mathbf{R}}^3 = \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\dot{R} = R \setminus \{0\}$) kollineációinak osztályozása is kiderül. Ugyanis $\mathbf{R}^3$ egydimenziós alterei jelentik a $\mathcal{P}^2$ pontjait, $\mathbf{R}^3$ kétdimenziós alterei a $\mathcal{P}^2$ egyeneseit. $\mathbf{R}^3$ reguláris lineáris transzformációinak bizonyos ekvivalenciaosztályai alkotják a $\mathcal{P}^2$ kollineációit. Az α és β lineáris transzformációk ekvivalensek: $\alpha \sim \beta$, ha alkalmas $c \in \dot{R}$ mellett $\beta = c \cdot \alpha$. Az α transzformáció ekvivalenciaosztályát $\{\alpha\}$ is jelöli. Az $\mathbf{R}^3$-hoz tartozó α-sajátvektorok jellemzik a $\mathcal{P}^2$-hez tartozó $\{\alpha\}$-fixpontokat, $\mathbf{R}^3$ kétdimenziós α-invariáns alterei a $\mathcal{P}^2$-hez tartozó $\{\alpha\}$-fixegyeneseket.

Most tisztázzuk, hogy egy transzformációtípuson belül hány esetet különböztetünk meg „geometriailag". E célból először nyilvánvaló azonosító tulajdonságokat keresünk. Világos, hogy az A és $c \cdot A$ ($c \in \dot{R}$) lineáris transzformációk a projektív geometria szempontjából azonosak, továbbá A és B azonos geometriai típusú lineáris transzformációk, ha létezik olyan T reguláris lineáris transzformáció, hogy $B = T^{-1}AT$. Újabb szempontot jelent, hogy az A és A^{-1} lineáris transzformációkat is azonos geometriai típusba soroljuk, hiszen $\langle A \rangle := \{A^n | n \in Z\}$ és $\langle A^{-1} \rangle := \{A^{-n} | n \in Z\}$ azonos transzformációcsoportok. A fenti azonosítások kombinációi is azonosításhoz vezetnek. Ezután minden $x \in \mathcal{P}^2$ pontra az $\{xA^t | t \in R\}$ folytonosan differenciálható pályák tipizálása következik majd. Eközben az $\{xA^n | n \in Z\}$ pályákat is áttekinthetjük. Az $\mathcal{F}_{\langle A \rangle}$ fundamentális halmazt így jelölhetjük ki, a különleges pontok pályái is ehhez segítenek. A fundamentális halmaz kijelölésére utaló „geometriai tipizálás" után még a paraméterek választásában lesz bizonyos „szabadsági fokunk". A fent leírt vizsgálatok elvégzése után az alábbi „geometriai osztályozáshoz" jutunk.

1.

1.1. $0 < |a| = |b| = |c|$

1.1.1. $0 < a = b = c$

1.1.2. $a < 0 < b = c$

1.2. $0 < |a| = |b| < |c|$

Az $\left|\dfrac{a}{c}\right| \in (0, 1)$ ezen típus „szabad" paramétere. Azokat a csoportokat „geometriailag" nem különböztetjük meg, ahol pályák típusai és így a választható fundamentális halmaz „kombinatorikus szerkezete" azonos lesz (lásd a későbbi ábrákat). Ábráinkon a projektív sík félgömb modelljén (alkalmas nézetből), illetve az ideális elemekkel bővített affin (euklideszi) síkon szemléltetjük a viszonyokat az $(E_0E_1E_2)$ koordinátaháromszög alappontjainak feltüntetésével, az E egységpontot nem mindig tüntetjük fel.

1.2.1. $0 < a = b < c$

1.2.2. $a < 0 < b < c$

1.2.3. $c < 0 < a = b$

1.3. $0 < |a| < |b| < |c|$

Az $\left|\frac{a}{c}\right|, \left|\frac{b}{c}\right| \in (0, 1)$ $\left(\left|\frac{a}{c}\right| < \left|\frac{b}{c}\right|\right)$ a szabad paraméterek.

1.3.1. $0 < a < b < c$

1.3.2. $a < 0 < b < c$

1.3.3. $b < 0 < a < c$

2.

2.1. $0 < r = a, \quad \varphi \in (0, \pi),$

φ a szabad paraméter

2.1.1. $\varphi = \frac{2\pi}{q}, \quad q = 2k; \quad 2 \leqq k \in N$

2.1.2. $0 = \frac{2\pi}{q}, \quad q = 2k+1; \quad 1 \leqq k \in N$

2.2. $0 < a < r, \quad \varphi \in (0, \pi).$

Az $\frac{a}{r} \in (0, 1)$ és $\varphi \in (0, \pi)$ a szabad paraméterek.

2.2.1. $0 < \varphi = \frac{2\pi}{q}, \quad q = 2k; \quad 2 \leqq k \in N$

2.2.2. $0 < \varphi = \frac{2\pi}{q}, \quad q = 2k+1; \quad 1 \leqq k \in N$

2.2.3. $0 < \varphi = 2\pi \cdot c, \quad c \in R \setminus Q, \quad c \in (0, 1/2)$

3.
3.1. $a \in R^+$ a szabad paraméter
4.
4.1. $0 < |a| = |b|$, $|a| \in R^+$ a szabad paraméter
4.1.1. $0 < a = b$
4.1.2. $b < 0 < a$
4.2. $0 < |a| < |b|$

Az $|a|, |b| \in R^+$ a szabad paraméterek.

4.2.1. $0 < a < b$
4.2.2. $b < 0 < a$.

Ezzel minden típusnál megadtuk az egyes esetekhez tartozó „szabad paramétereket”.
Először az **1.** típus geometriai jellemzését ismertetjük részletesebben.

3. Az 1. típusú transzformáció által generált csoportok vizsgálata

1.1. $0 < |a| = |b| = |c|$

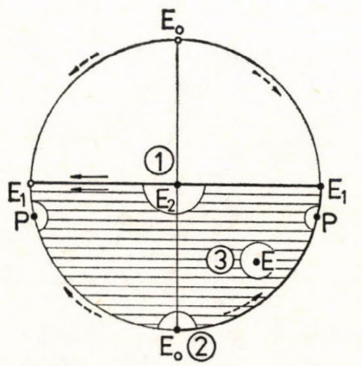
1.1.1. $0 < a = b = c$. Ez a $\mathcal{P}^2$ sík I-vel jelölt identikus leképezése.

1.1.2. $a < 0 < b = c$

$$(A) = \begin{pmatrix} -b & & \\ & b & \\ & & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ez az E_0 centrumú E_1E_2 tengelyű involutív kollineáció: $A^2 \sim I$.

A $\mathcal{P}^2/\langle A \rangle$ tér szerkezetét és az $\langle A \rangle$ egy alaptartományát $\mathcal{F}_{\langle A \rangle}$-t az (1.1.2.) ábra szemlélteti.



(1.1.2.) ábra

1.2. $0 < |a| = |b| < |c|$

1.2.1. $0 < a = b < c$

$$(A^n) = \begin{pmatrix} a^n & & \\ & a^n & \\ & & c^n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{c}\right)^n & & \\ & \left(\frac{a}{c}\right)^n & \\ & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \left(\frac{c}{a}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Nézzük egy tetszőleges pont képét:

$$\{(x^0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(a^n x^0, a^n x^1, c^n x^2)\} \sim$$

$$\sim \left\{\left(x^0, x^1, \left(\frac{c}{a}\right)^n x^2\right)\right\} \sim \left\{\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x^0, \left(\frac{a}{c}\right)^n x^1, x^2\right)\right\}.$$

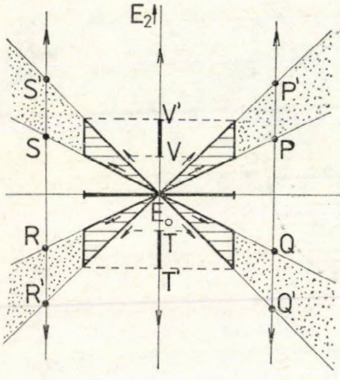
Ebből következik, hogy az E_0, E_1, E_2 alappontok fixpontok, és az általuk meghatározott egyenesek fixegyenesek, sőt az E_0E_1 egyenes tengely.

$$\lim_{n\to+\infty}(x^0, x^1, x^2)A^n \sim \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x^0, \left(\frac{a}{c}\right)^n x^1, x^2\right) \sim (0, 0, x^2).$$

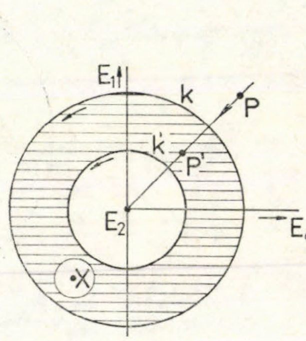
Ez azt jelenti, hogy az E_2 centrum pálya torlódási pont, ha $x^2 \neq 0$. Ha $x^2=0$, akkor az E_0E_1 tengely pontjait kapjuk, melyek mind fixpontok.

$$\lim_{n\to-\infty}(x^0, x^1, x^2)A^n \sim \lim_{n\to-\infty}\left(x^0, x^1, \left(\frac{c}{a}\right)^n x^2\right) \sim (x^0, x^1, 0).$$

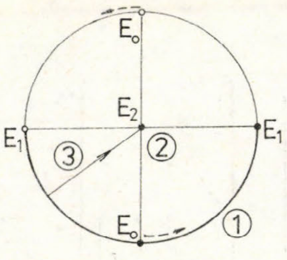
Tehát az E_0E_1 tengely pontjai is pálya torlódási pontok, ha $(x^0, x^1, 0) \neq (0, 0, 0)$. Ha $(x^0, x^1, x^2)=(0, 0, x^2)$ $(x^2 \neq 0)$, akkor az E_2 centrumot kapjuk, mely természetesen fixpont is.



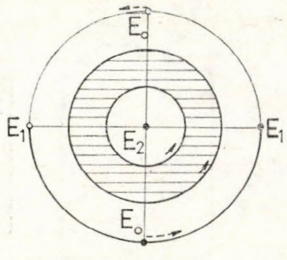
(1.2.1.) 1. ábra



(1.2.1.) 2. ábra



(1.2.1.) 3. ábra



(1.2.1.) 4. ábra

A pályák típusai:

1. E_0E_1 tengely pontjai, például E_0.
2. E_2 pont, amely centrum és torlódási pont.
3. A további (x^0, x^1, x^2) pontok pályái, amelyek mindegyike egyenesen van. A „folytonossá tett" pályákat az (1.2.1.) 3. ábra szemlélteti.

Nézzük a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképet, ahol tehát

$$x^0 \neq 0, \quad \frac{x^1}{x^0} =: x_0^1, \quad \frac{x^2}{x^0} =: x_0^2 \text{ jelöléssel}$$

$$(x_0^1, x_0^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(x_0^1, \left(\frac{c}{a}\right)^n x_0^2\right).$$

Az $\langle A\rangle$ pályák E_0E_2-vel párhuzamos egyeneseken vannak. Ebből adódik $\{E_0\}$ egy tipikus pályakörnyezetének az (1.2.1.) 1. ábrán látható alakja, sőt az E_0E_1 tengely többi pontjának pályakörnyezetét is hasonló módon kapjuk. Az ábrán $\frac{c}{a}=2$.

Most nézzük a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ affin térképet, ahol

$$x^2 \neq 0, \quad \frac{x^0}{x^2} =: x_2^0, \quad \frac{x^1}{x^2} =: x_2^1 \text{ jelöléssel}$$

$$(x_2^0, x_2^1) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x_2^0, \left(\frac{a}{c}\right)^n x_2^1\right).$$

Az $\langle A\rangle$ pályák az E_2 tartópontú sugársor egyenesein vannak. Vegyünk fel egy tetszőleges E_2 középpontú k kört, és alkalmazzuk erre $\{A\}$-t, azaz most az E_2 középpontú $\frac{a}{c}$ arányú középpontos hasonlóságot. A k képét jelölje k', amely szintén kör. A két kört azonosítva, kapjuk $\{E_2\}$ pályakörnyezetét, amelyet az (1.2.1.) 2. ábra szemléltet. Az ábrán $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$. Ez utóbbi ábrán egy tetszőleges 3. típusú X pont pályakörnyezetét is szemléltettük.

Az (1.2.1.) 4. ábra a $\mathscr{P}^2/\langle A\rangle$ tér szerkezetét és az $\langle A\rangle$ egy alaptartományát $\mathscr{F}_{\langle A\rangle}$-t szemlélteti. E_2 és az E_0E_1 egyenes pontjai fixpontok és egyben pálya torlódási pontok, amelyek nem tartoznak $\overline{\mathscr{F}}_{\langle A\rangle}$-hoz. $\overline{\mathscr{F}}_{\langle A\rangle} \cup E_2 \cup E_0E_1$ minden pályából tartalmaz legalább egy pontot.

1.2.2. $a<0<b<c$

$$(B) = \begin{pmatrix} -b & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B^n) = \begin{pmatrix} (-1)^n b^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Egy tetszőleges pont képe:

$$\{(x^0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{B^n\}} \{((-1)^n b^n x^0, b^n x^1, c^n x^2)\}.$$

A fixegyenesek ugyanazok mint (1.2.1.)-nél, továbbá E_0, E_1, E_2 fixpontok.

Nézzük a torlódási pontokat.

$$\lim_{n\to+\infty}(x^0, x^1, x^2)B^n \sim \lim_{n\to+\infty}\left((-1)^n\left(\frac{b}{c}\right)^n x^0, \left(\frac{b}{c}\right)^n x^1, x^2\right) \sim (0, 0, x^2).$$

Tehát ha $x^2 \neq 0$, akkor itt is E_2 lesz a pályák torlódási pontja.

Ha $x^2=0$, de $(x^0, x^1, 0) \neq (0, 0, 0)$, akkor

$$((-1)^{2n}b^{2n}x^0, b^{2n}x^1, 0) \sim (x^0, x^1, 0) \quad (n \in Z)$$

$$((-1)^{2n+1}b^{2n+1}x^0, b^{2n+1}x^1, 0) \sim (-x^0, x^1, 0) \quad (n \in Z).$$

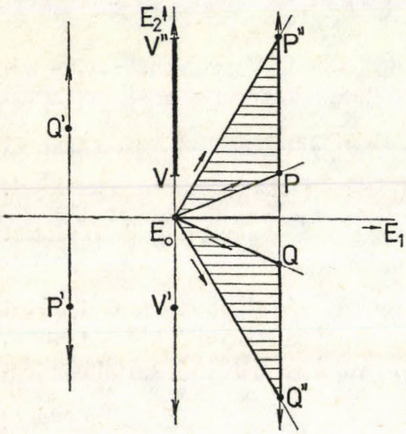
Ha $n \to -\infty$, látjuk, hogy az E_0E_1 egyenes pontjai is torlódási pontok, az E_0E_1 fixegyenes azonban most nem tengely. A fentiek miatt változik az alaptartomány.

Tekintsük a $\langle B\rangle$ csoport két alábbi komplexusát:

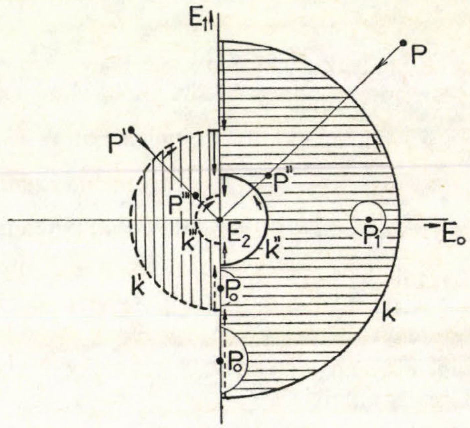
$$B_1 := \{B^{2n} | n \in Z\}, \quad B_2 := \{B^{2n-1} | n \in Z\}.$$

B_1 2-indexű részcsoportja $\langle B\rangle$-nek.

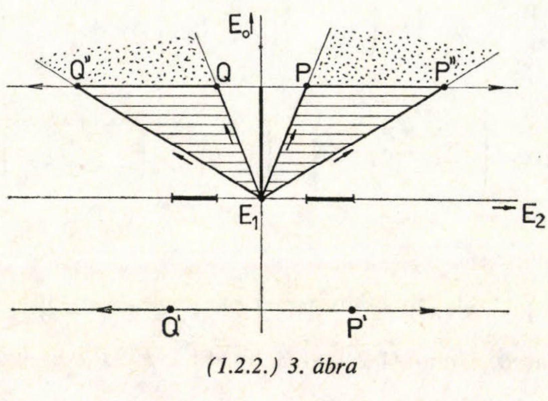
Egy pont folytonossá tett B_1 pályája hasonló típusú mint az (1.2.1.)-ben szereplő $\langle A\rangle$ pálya. Egy pontnak a B_2 komplexusnál származó képei pedig a fenti B_1-pálya B-nél származó képét alkotják. A B transzformáció alakjában fellépő E_0 centrumú E_1E_2 tengelyű involúció megkönnyíti a pályák áttekintését.



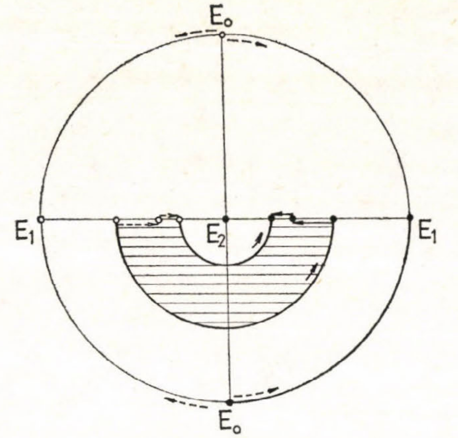
(1.2.2.) 1. ábra



(1.2.2.) 2. ábra



(1.2.2.) 3. ábra



(1.2.2.) 4. ábra

Nézzük a változást a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképen. Egy pont pályája most két E_0E_2-vel párhuzamos egyenesen van, amelyek az E_0-ra tükrözve egymásba vihetők, mivel ezen a térképen a fenti involúció az E_0 pontra vonatkozó tükrözés. E_0 tipikus pályakörnyezetét az (1.2.2.) 1. ábra szemlélteti, ahol $\frac{c}{a} = -\frac{c}{b} = -2$.

Nézzük most a változást a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ affin térképen. Mivel ezen a térképen a fenti involúció az E_2E_1 egyenesre vonatkozó tükrözés, ezért a folytonossá tett B_1 pályát tükrözve E_2E_1-re, kapjuk a folytonossá tett B_2 pályát. Vegyünk fel ismét egy E_2 középpontú k kört, és erre alkalmazzuk $\{B\}$-t, azaz egy E_2 középpontú $\frac{b}{c}$ arányú középpontos hasonlóságot, majd egy E_2E_1 tengelyre való tükrözést. A k képét jelölje k', k' fenti $\{B\}$-nél keletkező képét pedig jelölje k''. A k és k'' körök megfelelő íveit azonosítva kapjuk $\{E_2\}$ pályakörnyezetét és a $\langle B \rangle$ egy alaptartományát, amelyet az (1.2.2.) 2. ábra szemléltet. Ugyanitt az előbbi alaptartomány $\{B\}$-nél származó képét is szemléltettük. Az ábrán $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$.

Végül nézzük a $(\varphi_1, \mathscr{U}_1)$ affin térképet, hiszen az E_0E_1 fixegyenes most nem tengely.

$$x^1 \neq 0, \quad \frac{x^0}{x^1} =: x_1^0, \; \frac{x^2}{x^1} =: x_1^2 \quad \text{jelöléssel}$$

$$(x_1^0, x_1^2) \xmapsto{\{B^n\}} \left((-1)^n x_1^0, \left(\frac{c}{b}\right)^n x_1^2\right).$$

$\{E_1\}$ pályakörnyezetét az (1.2.2.) 3. ábra szemlélteti, ahol $\frac{c}{b} = 2$. Az (1.2.2.) 2. ábra egy tetszőleges $P_1 \in E_0E_2$ ($P_1 \neq E_0$ és $P_1 \neq E_2$) pont, valamint egy tetszőleges $P_0 \in E_1E_2$ ($P_0 \neq E_1$ és $P_0 \neq E_2$) pont pályakörnyezetét is szemlélteti.

Összefoglalásul az (1.2.2.) 4. ábra a $\mathscr{P}^2/\langle B \rangle$ tér szerkezetét és $\langle B \rangle$ egy alaptartományát $\mathscr{F}_{\langle B \rangle}$-t szemlélteti. Az E_2 fixpont és pálya torlódási pont, valamint az E_0E_1

fixegyenes nem tartozik $\overline{\mathscr{F}}_{\langle B\rangle}$-hoz. E_0E_1 minden pontja pálya torlódási pont, E_0E_1 két ekvivalens szakaszra bomlik.

$\overline{\mathscr{F}}_{\langle B\rangle}\cup E_2\cup E_0E_1$ minden pályából tartalmaz legalább egy pontot.

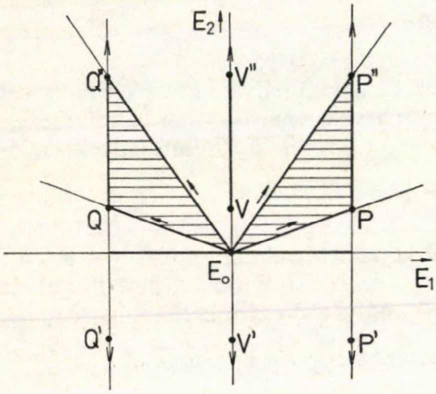
1.2.3. $c<0<a=b$

$$(C^n)=\begin{pmatrix}a^n&&\\&a^n&\\&&c^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^n&&\\&a^n&\\&&|c^n|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(-1)^n\end{pmatrix}.$$

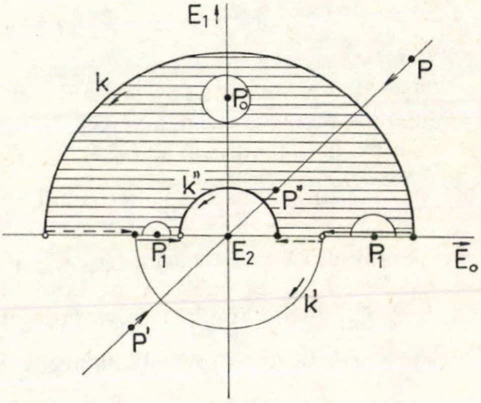
A torlódási pontok, fixpontok valamint a fixegyenesek ugyanazok mint (1.2.1.)-nél. Az E_0E_1 fixegyenes most szintén tengely, E_2 pedig centrum. Vegyük a $\langle C\rangle$ csoport két komplexusát:

$$C_1:=\{C^{2n}|n\in Z\},\quad C_2:=\{C^{2n-1}|n\in Z\},$$

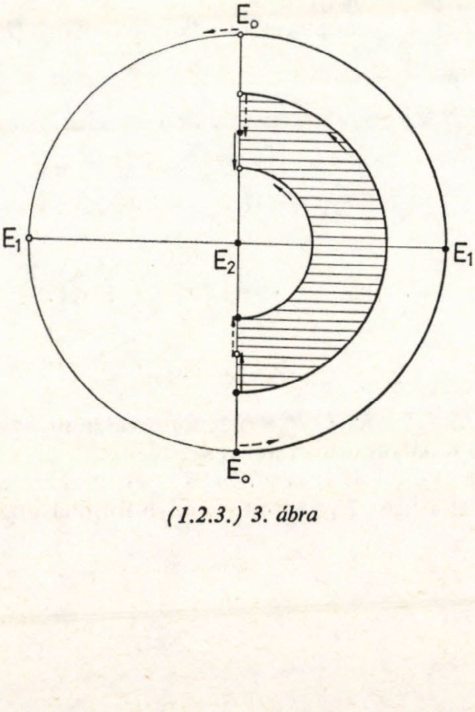
C_1 2-indexű részcsoportja $\langle C\rangle$-nek.



(1.2.3.) 1. ábra



(1.2.3.) 2. ábra



(1.2.3.) 3. ábra

A folytonossá tett C_1 pályákból a folytonossá tett C_2 képek a $\{C\}$ alkalmazásával adódnak. A $\{C\}$ felbontásában szereplő E_2 centrumú E_0E_1 tengelyű involúció a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképen az E_0E_1 egyenesre vonatkozó tükrözést jelenti, a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ affin térképen pedig E_2 pontra vonatkozó tükrözést jelent. Az (1.2.3.) 1. ábra és az (1.2.3.) 2. ábra e két térképen szemlélteti az $\{E_0\}$ illetve az $\{E_2\}$ pályakörnyezetét, és az ábrákon $\frac{c}{a}=-2$, illetve $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$. Az (1.2.3.) 3. ábra a $\mathscr{P}^2/\langle C\rangle$ tér szerkezetét és $\mathscr{F}_{\langle C\rangle}$-t szemlélteti. E_2 és E_0E_1 nem tartoznak $\overline{\mathscr{F}}_{\langle C\rangle}$-hez. $\overline{\mathscr{F}}_{\langle C\rangle} \cup E_0E_1 \cup E_2$ minden pályából tartalmaz legalább egy pontot.

1.3. $0<|a|<|b|<|c|$

1.3.1. $0<a<b<c$

$$(A)=\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c\end{pmatrix}, \quad (A^n)=\begin{pmatrix} a^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n\end{pmatrix}.$$

Egy tetszőleges pont képe:

$$\{(x^0,x^1,x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(a^nx^0, b^nx^1, c^nx^2)\} \sim$$

$$\sim \left\{\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x^0, \left(\frac{b}{c}\right)^n x^1, x^2\right)\right\} \sim \left\{\left(x^0, \left(\frac{b}{a}\right)^n x^1, \left(\frac{c}{a}\right)^n x^2\right)\right\} \sim \left\{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n x^0, x^1, \left(\frac{c}{b}\right)^n x^2\right)\right\}.$$

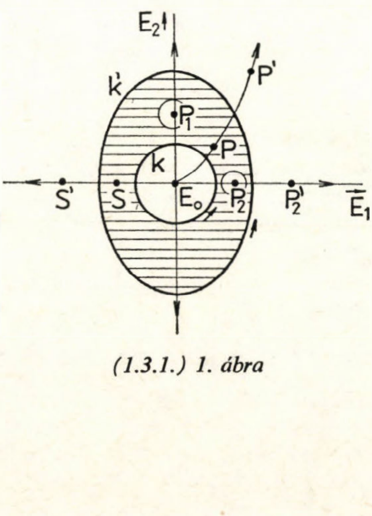
Ebből adódik, hogy az E_0, E_1, E_2 alappontok fixpontok és az általuk meghatározott egyenesek fixegyenesek.

$$\lim_{n\to+\infty}(x^0,x^1,x^2)A^n \sim \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x^0, \left(\frac{b}{c}\right)^n x^1, x^2\right) \sim (0,0,x^2).$$

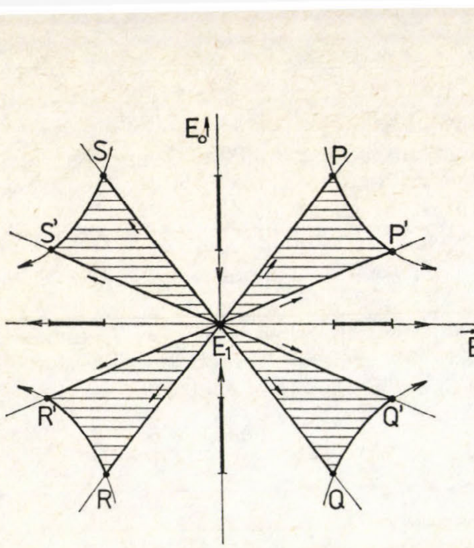
Ez azt jelenti, hogy az E_2 fixpont a pályák torlódási pontja, ha $x^2\neq 0$. Ha $x^2=0$, akkor az előbbi számolás kis módosításával E_1-et kapjuk, ha $x^1\neq 0$. Ha $x^1=0$ és $x^2=0$, akkor az E_0 fixpontot kapjuk ($x^0\neq 0$).

$$\lim_{n\to-\infty}(x^0,x^1,x^2)A^n \sim \lim_{n\to-\infty}\left(x^0, \left(\frac{b}{a}\right)^n x^1, \left(\frac{c}{a}\right)^n x^2\right) \sim (x^0,0,0).$$

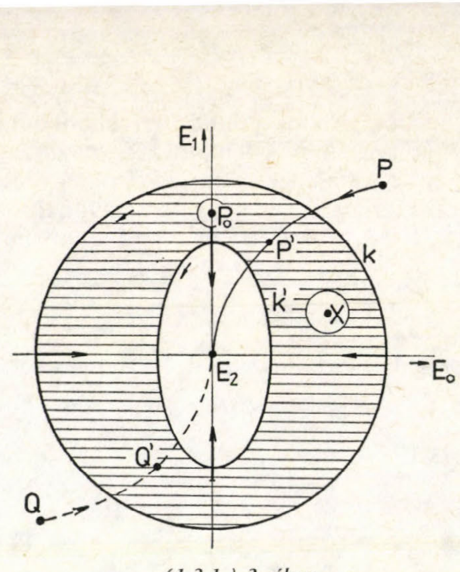
Tehát az E_0 fixpont is a pályák torlódási pontja, ha $x^0\neq 0$. Ha $x^0=0$, akkor kis módosítással az E_1 fixpontot kapjuk, ha $x^1\neq 0$. Ha $x^1=0$ és $x^0=0$, de $x^2\neq 0$, akkor az E_2 fixponthoz jutunk.



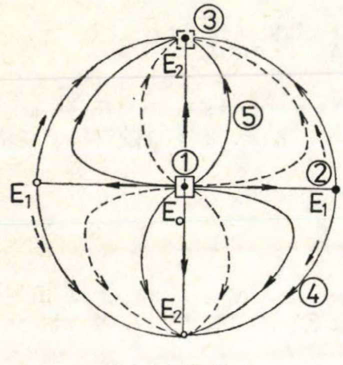
(1.3.1.) 1. ábra



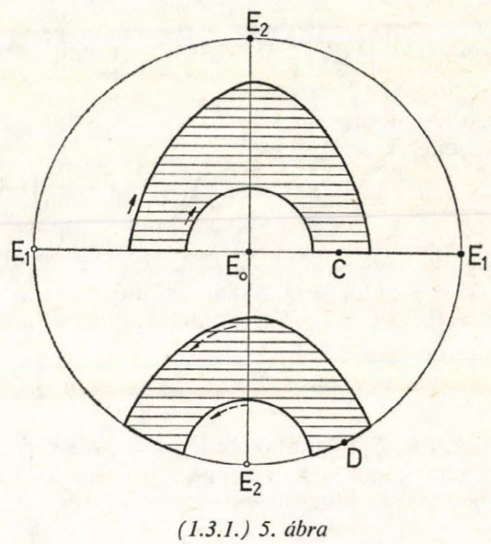
(1.3.1.) 2. ábra



(1.3.1.) 3. ábra



(1.3.1.) 4. ábra



(1.3.1.) 5. ábra

Pályatípusok:

1. E_0 fixpont és pálya torlódási pont, ha $x^0 \neq 0$.
2. E_1 fixpont és pálya torlódási pont, ha $x^2=0$ vagy $x^0=0$.
3. E_2 fixpont és pálya torlódási pont, ha $x^2 \neq 0$.
4. Az E_0E_1, E_1E_2, E_2E_0 fixegyenesek — E_0, E_1, E_2-től különböző — pontjainak pályái, amelyek egyeneseken vannak.
5. A további $\{(x^0, x^1, x^2)\}$ pontok pályái, amelyek E_0-ból „kiinduló", E_2-be „befutó" „exponenciálisokon" vannak.

A folytonossá tett pályákat az (1.3.1.) 4. ábra szemlélteti.

Nézzük a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképet, (x_0^1, x_0^2) koordinátákkal:

$$(x_0^1, x_0^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^n x_0^1, \left(\frac{c}{a}\right)^n x_0^2\right).$$

Vegyünk fel egy E_0 középpontú k kört. Ennek $\{A\}$-nál származó képe egy $\frac{c}{b}$ tengelyarányú ellipszis, amelyet k'-vel jelölünk. A kör és ellipszis azonosításával kapjuk $\{E_0\}$ pályakörnyezetét, amelyet az (1.3.1.) 1. ábra szemléltet, ahol $\frac{b}{a}=2$ és $\frac{c}{a}=3$.

A $(\varphi_1, \mathscr{U}_1)$ affin térképen nézzük $\langle A\rangle$-t, az (x_1^0, x_1^2) koordinátákkal:

$$(x_1^0, x_2^0) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n x_1^0, \left(\frac{c}{b}\right)^n x_1^2\right).$$

Tekintsük a P, Q, R, S pontokat. Ezek $\{A\}$-nál származó képét jelölje rendre P', Q', R', S'. Az E_1P és E_1P', E_1Q és E_1Q', E_1R és E_1R', E_1S és E_1S' egyenesek közé eső tartományok, továbbá az E_1E_2 és E_1E_0 egyenesekre eső szakaszok jellemzik az $\{E_1\}$ pályakörnyezetét. Ezt az (1.3.1.) 2. ábra szemlélteti, ahol $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ és $\frac{c}{b}=\frac{3}{2}$.

És végül nézzük a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ affin térképet az (x_2^0, x_2^1) koordinátákkal:

$$(x_2^0, x_2^1) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x_2^0, \left(\frac{b}{c}\right)^n x_2^1\right).$$

Vegyük fel egy E_2 középpontú k kört. Erre alkalmazzuk $\{A\}$-t. Egy $\frac{b}{a}$ tengelyarányú ellipszist kapunk, amelyet k'-vel jelölünk. A k kör és a k' ellipszis azonosításával kapjuk az $\{E_2\}$ pályakörnyezetét, amelyet az (1.3.1.) 3. ábra szemléltet, ahol $\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$ és $\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$.

Legyen $P_2 \in E_0E_1$ $(P_2 \neq E_0$ és $P_2 \neq E_1)$, ekkor $\{P_2\}$ pályakörnyezete választható az (1.3.1.) 1. ábra szerint.

Legyen $P_1 \in E_2E_0$ $(P_1 \neq E_2$ és $P_1 \neq E_0)$, ekkor $\{P_1\}$ pályakörnyezete az (1.3.1.) 1. ábrán látható.

Legyen $P_0 \in E_1E_2$ $(P_0 \neq E_1$ és $P_0 \neq E_2)$, ekkor $\{P_0\}$ pályakörnyezete választható az (1.3.1.) 3. ábra szerint.

Legyen X tetszőleges — a fentiektől különböző — pont, ekkor pályakörnyezete választható az (1.3.1.) 3. ábra szerint.

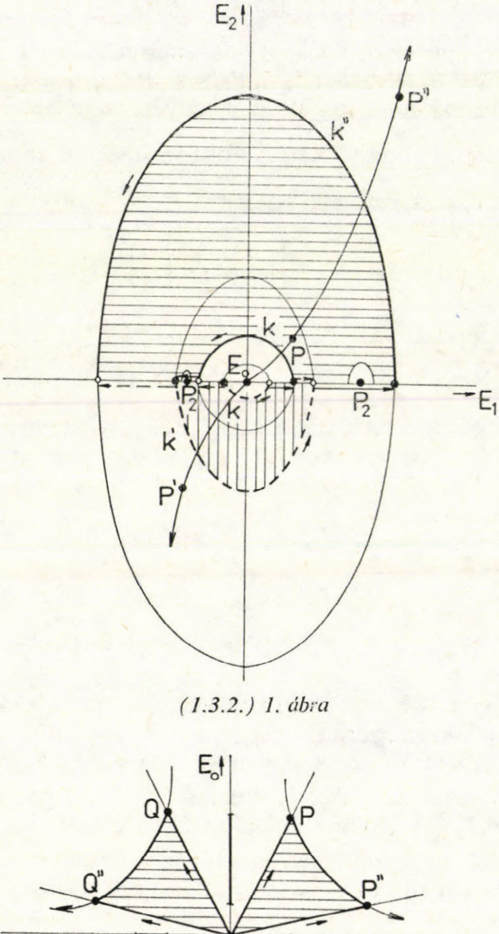
A $\mathscr{P}^2/\langle A\rangle$ tér szerkezetét és az $\langle A\rangle$ egy alaptartományát $\mathscr{F}_{\langle A\rangle}$-t az (1.3.1.) 5. ábra szemlélteti. E_0, E_1, E_2 nem tartozik $\overline{\mathscr{F}}_{\langle A\rangle}$-hoz. A $\{C\}$, $\{D\}$ pályákra mint a $\mathscr{P}^2/\langle A\rangle$ pontjaira nem igaz a T_2 (Hausdorff)-tulajdonság. De igaz a T_1-tulajdonság, azaz bármelyiküknek van olyan környezete, amely nem tartalmazza a másikat. $\overline{\mathscr{F}}_{\langle A\rangle} \cup \cup E_0 \cup E_1 \cup E_2$ minden pályából tartalmaz legalább egy pontot.

1.3.2. $a < 0 < b < c$

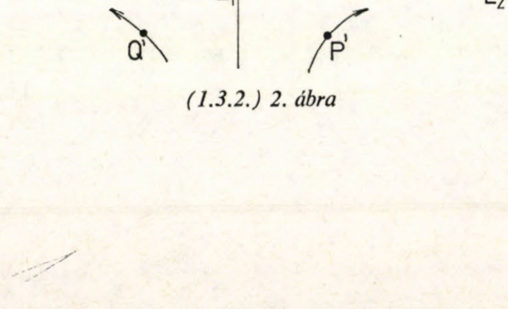
$$(B^n) = \begin{pmatrix} a^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

A fixegyenesek és a fixpontok — amelyek egyben pálya torlódási pontok — ugyanazok mint az (1.3.1.) esetben. A változást az E_0 centrumú E_1E_2 tengelyű involúció okozza, hasonlóan az (1.2.2.) -ben leírtakhoz.

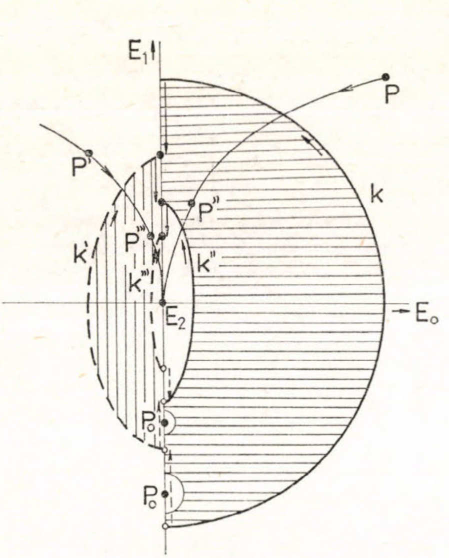
Nézzük a változást a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképen. Vegyünk fel egy E_0 középpontú k kört, erre alkalmazzuk $\{B\}$-t, egy $\frac{c}{b}$ tengelyarányú k' ellipszist kapunk. A k' $\{B\}$-nél származó képét jelölje k'', amely szintén ellipszis. A k kör és k'' ellipszis megfelelő íveinek azonosításával kapjuk $\{E_0\}$ pályakörnyezetét, amelyet az (1.3.2.) 1. ábra szemléltet. Az ábrán $\frac{b}{a}=-2$ és $\frac{c}{a}=-3$. Ugyanezen az ábrán az előbbi $\{B\}$-nél származó képét és E_0E_1 tetszőleges P_2 ($P_2 \neq E_0$ és $P_2 \neq E_1$) pontjának környezetét is szemléltettük.



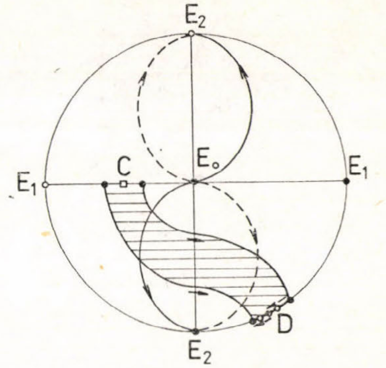
(1.3.2.) 1. ábra



(1.3.2.) 2. ábra



(1.3.2.) 3. ábra



(1.3.2.) 4. ábra

Nézzük a $(\varphi_1, \mathscr{U}_1)$ affin térképet. Tekintsük a P és Q pontokat. Ezek $\{B\}$-nél származó képét jelölje P' és Q', az utóbbiak $\{B\}$-nél származó képe legyen P'' és Q''. Az E_1P és E_1P'', E_1Q és E_1Q'' egyenesek közé eső tartományok, továbbá az E_1E_2 és E_1E_0 egyenesekre eső szakaszok jellemzik az $\{E_1\}$ pályakörnyezetét. Ezt az (1.3.2.) 2. ábrán szemléltettük, ahol $\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$ és $\frac{c}{b}=\frac{3}{2}$.

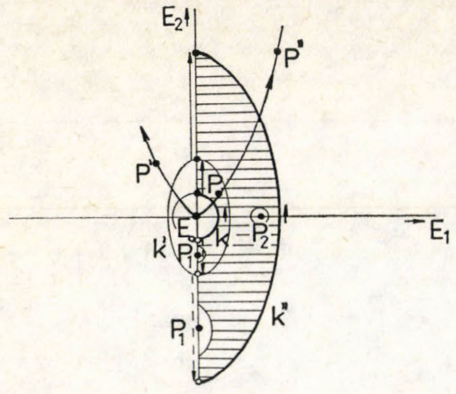
És végül nézzük a változást a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ affin térképen. Vegyünk fel egy E_2 középpontú k kört. Erre alkalmazzuk $\{B\}$-t, egy $\frac{b}{a}$ tengelyarányú k' ellipszist kapunk. A k' $\{B\}$-nél származó képét jelölje k'', amely szintén ellipszis. A k kör és a k'' ellipszis megfelelő íveinek azonosításával kapjuk $\{E_2\}$ pályakörnyezetét, amelyet az (1.3.2.) 3. ábra szemléltet. Az ábrán $\frac{a}{c}=-\frac{1}{3}$ és $\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$. Ugyanitt szemléltettük egy tetszőleges $P_0 \in E_1E_2$ ($P_0 \neq E_1$ és $P_0 \neq E_2$) pont környezetét.

Végül az (1.3.2.) 4. ábra a $\mathscr{P}^2/\langle B\rangle$ tér szerkezetét és $\overline{\mathscr{F}}_{\langle B\rangle}$-t szemlélteti. Az E_0, E_1, E_2 fixpontok és pálya torlódási pontok nem tartoznak $\overline{\mathscr{F}}_{\langle B\rangle}$-hez. A $\{C\}$, $\{D\}$ pályákra mint $\mathscr{P}^2/\langle B\rangle$ pontjaira nem igaz a T_2-tulajdonság, de a T_1-tulajdonság teljesül. $\overline{\mathscr{F}}_{\langle B\rangle} \cup E_0 \cup E_1 \cup E_2$ minden pályából tartalmaz legalább egy pontot.

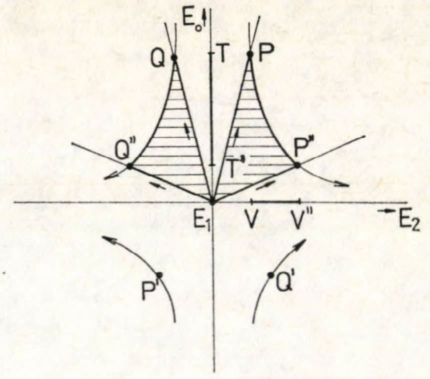
1.3.3. $b < 0 < a < c$

$$(C^n) = \begin{pmatrix} a^n & & \\ & b^n & \\ & & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & & \\ & |b^n| & \\ & & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^n & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

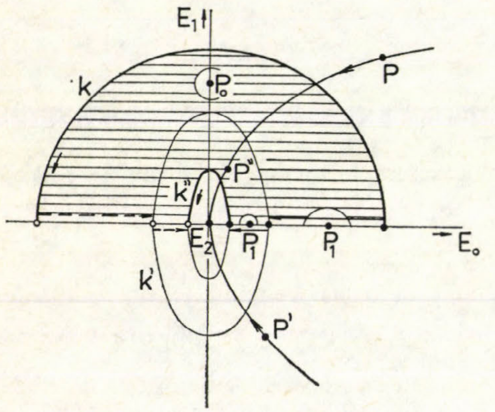
A fixegyenesek és a fixpontok — amelyek egyben pálya torlódási pontok — ugyanazok most is mint az (1.3.1.) esetben. A változást most az E_1 centrumú E_0E_2 tengelyű involúció okozza. Ezeket a változásokat a különböző térképeken ugyanúgy állapíthatjuk meg, mint (1.3.2.) esetén — de itt természetesen más adódik —. Most csak a végeredményt közöljük.



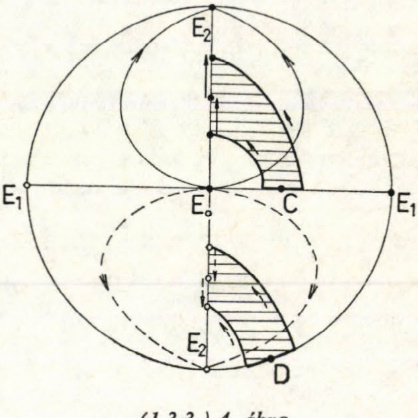
(1.3.3.) 1. ábra



(1.3.3.) 2. ábra



(1.3.3.) 3. ábra



(1.3.3.) 4. ábra

Az (1.3.3.) 1. ábra a $(\varphi_0, \mathcal{U}_0)$, az (1.3.3.) 2. ábra a $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$, az (1.3.3.) 3. ábra pedig a $(\varphi_2, \mathcal{U}_2)$ affin térképen szemlélteti a változást. Végül az (1.3.3.) 4. ábra a $\mathcal{P}^2/\langle C\rangle$ tér szerkezetét és $\mathcal{F}_{\langle C\rangle}$-t szemlélteti. A T_2-tulajdonság itt sem teljesül a $\{C\}$, $\{D\}$ pályákra, de a T_1-tulajdonság igen.

És végül szólunk a vizsgálatok egy módszeréről. Az (1.2.1.) és (1.2.2.), az (1.3.1.) és (1.3.2.) vagy (1.3.3.) esetek vizsgálata után arra következtetünk, hogy az előálló esetek alaphalmazából a többiek alaphalmaza megfelelő „kettévágással" illetve „átdarabolással" előállítható. Ez nem véletlen. Tekintsük például az (1.2.2.) esetet. Vegyük a

$$(B^2) = \begin{pmatrix} a^2 & & \\ & a^2 & \\ & & c^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \left(\frac{c}{a}\right)^2 \end{pmatrix}$$

transzformáció által generált részcsoportot, amelyet $\langle B^2\rangle$ jelöl. A $\langle B^2\rangle$ csoport 2-indexű részcsoportja a $\langle B\rangle$ csoportnak. Másrészt $\langle B^2\rangle$ azonos típusú, mint az (1.2.1.)

eset $\langle A\rangle$ csoportja, csak $0<a^2<c^2$ paraméterekkel. Tehát (1.2.2.) $\langle B\rangle$ csoportjának van olyan részcsoportja, amely azonos típusú, mint (1.2.1.) $\langle A\rangle$ csoportja, és ennek a részcsoportnak az indexe 2, ez utal a „kettévágásra". Az említett másik esetnél is ugyanezt a megállapítást tehetjük, sőt ugyanez teljesül a (4.1.1.) és (4.1.2.) valamint a (4.2.1.) és (4.2.2.) eseteknél is.

4. A 2. típusú transzformáció által generált csoport vizsgálata

2.1. $0 < r = |a|, \quad 0 < \varphi < \pi.$

Legyen először $0<r=a$.

$$(A^n) = \begin{pmatrix} r^n & & \\ & r^n\cos n\varphi & r^n\sin n\varphi \\ & -r^n\sin n\varphi & r^n\cos n\varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ & -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

Nézzük a φ szerinti diszkussziót:

1. $\varphi = \dfrac{2\pi}{q}, \quad q \geqq 3, \qquad (q\in N);$

2. $\varphi' = 2\pi\dfrac{p}{q}, \quad (p,q) = 1 \quad (q,p\in N).$

Belátjuk, hogy 1. és 2. geometriailag azonos.

1.-nél $n\varphi = (lq+r)\dfrac{2\pi}{q}, \quad 0 \leqq r \leqq q-1, \quad n\in Z, \quad l\in Z;$

2.-nél $n\varphi' = (lq+r)2\pi\dfrac{p}{q} = (lqp+rp)\dfrac{2\pi}{q}.$

Mivel $(p,q)=1$, ezért a $0, p, 2p, \ldots, (q-1)p$ is teljes maradékrendszer $\bmod q$, ezért mindkét esetben ugyanazokat a pályákat kapjuk, csak más a pontok képeinek sorrendje, de ez geometriailag azonos eset.

Ha $0<\varphi=2\pi\cdot c<\pi$, ahol $c\in R\setminus Q$, akkor nem lesz $\mathscr{P}^2$-ben olyan nyílt halmaz, amelynek képei diszjunktak. Ezt az esetet kizárjuk. Tehát elég a $0<\varphi=\dfrac{2\pi}{q}<\pi$ $(q\geqq 3,\ q\in N)$ esettel foglalkozni. Itt különbség lesz a $q=2k$ és $q=2k+1$ $(k\in N)$ esetek között, melyeket (2.1.1.), illetve (2.1.2.) számozással látunk el.

Most már rátérhetünk a konkrét vizsgálatokra. $\langle A\rangle$ véges q-adrendű ciklikus csoport. Nézzük egy tetszőleges pont képeit.

$$\{(x^0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(x^0, x^1\cos n\varphi - x^2\sin n\varphi, x^1\sin n\varphi + x^2\cos n\varphi)\}.$$

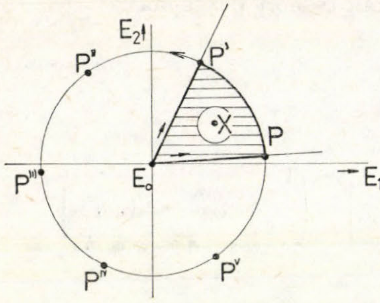
Egy pont pályája most véges sok pontból áll, mivel $\langle A\rangle$ végesrendű csoport. A transzformáció fixelemei: E_0 fixpont, E_1E_2 fixegyenes.

Pályatípusok:

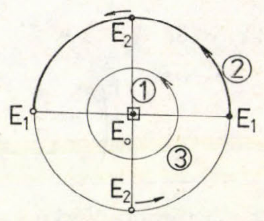
1. E_0 fixpont
2. E_1E_2 fixegyenes pontjai
3. A többi $\{(x^0, x^1, x^2)\}$ pontok pályái, amelyek „körön" helyezkednek el.

Nézzük a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképet:

$$(x_0^1, x_0^2) \xmapsto{\{A^n\}} (x_0^1 \cos n\varphi - x_0^2 \sin n\varphi,\, x_0^1 \sin n\varphi + x_0^2 \cos n\varphi).$$

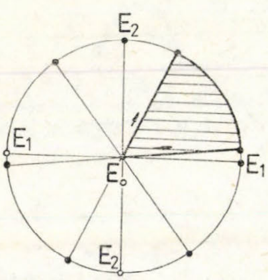


(2.1.) 1. ábra

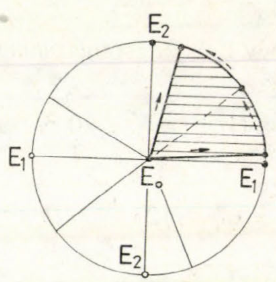


(2.1.) 2. ábra

Itt a folytonossá tett pályák az E_0 középpontú körök. A (2.1.) 1. ábra a pályákat és $\{E_0\}$ pályakörnyezetét szemlélteti, az ábrán $q=6$. Az előbbi ábrán egy tetszőleges 3. típusú pont — az ábrán X-szel jelöltük — környezetét is feltüntettük.



(2.1.1.) ábra



(2.1.2.) ábra

Ez az eset tartalmazza az euklideszi sík $\varphi = \dfrac{2\pi}{q}$ $(q \in N,\, q \geqq 3)$ szögű forgások által generált diszkrét ciklikus csoportjait. A (2.1.) 2. ábra a pályákat, a (2.1.1.) és (2.1.2.) ábrák pedig a $\mathscr{P}^2/\langle A\rangle$ tér szerkezetét és $\langle A\rangle$ egy alaptartományát $\mathscr{F}_{\langle A\rangle}$-t szemlélteti. Előbbi a $q=2k$, utóbbi a $q=2k+1$ esetet mutatja — az ábrákon $q=6$, illetve $q=5$ —.

2.1.* Legyen másodszor $a<0<r$.

$$(B) = \begin{pmatrix} -r & & \\ & r\cos\varphi' & r\sin\varphi' \\ & -r\sin\varphi' & r\cos\varphi' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\varphi' & \sin\varphi' \\ & -\sin\varphi' & \cos\varphi' \end{pmatrix}.$$

Belátjuk, hogy (2.1.*) azonos típusú mint (2.1.), ha $\varphi'=\pi-\varphi$. A már ismert okok miatt B helyett vegyük B^{-1}-t;

$$(B^{-1})=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & \cos\varphi' & -\sin\varphi' \\ & \sin\varphi' & \cos\varphi'\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & & \\ & -\cos\varphi' & \sin\varphi' \\ & -\sin\varphi' & -\cos\varphi'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi \\ & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Ezzel megkaptuk a (2.1.) esetet.

2.2. $0<|a|<r$

Legyen először $0<a<r$.

$$(A^n)=\begin{pmatrix}a^n & & \\ & r^n\cos n\varphi & r^n\sin n\varphi \\ & -r^n\sin n\varphi & r^n\cos n\varphi\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & & \\ & \left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\varphi & \left(\frac{r}{a}\right)^n\sin n\varphi \\ & -\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin n\varphi & \left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\varphi\end{pmatrix}$$

Egy tetszőleges pont képe:

$$\{(x^0,x^1,x^2)\}\xmapsto{\{A^n\}}\{(a^nx^0,r^n(x^1\cos n\varphi-x^2\sin n\varphi),r^n(x^1\sin n\varphi+x^2\cos n\varphi))\}\sim$$

$$\sim\left\{\left(x^0,\left(\frac{r}{a}\right)^n(x^1\cos n\varphi-x^2\sin n\varphi),\left(\frac{r}{a}\right)^n(x^1\sin n\varphi+x^2\cos n\varphi)\right)\right\}\sim$$

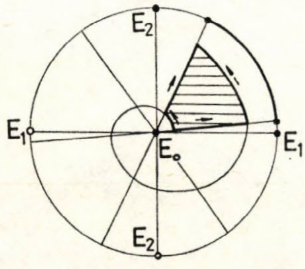
$$\sim\left\{\left(\left(\frac{a}{r}\right)^n x^0,x^1\cos n\varphi-x^2\sin n\varphi,x^1\sin n\varphi+x^2\cos n\varphi\right)\right\}.$$

Fixelemek: E_0 fixpont, E_1E_2 fixegyenes

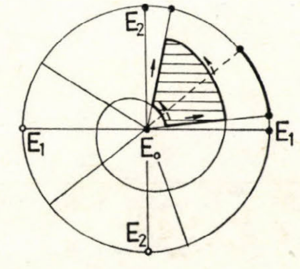
Mivel $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n=0$, az E_0 fixpont a pályák torlódási pontja is, ha $x^0\neq 0$.

Viszont $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n=0$ miatt, ha $(x^1,x^2)\neq(0,0)$, (x^0,x^1,x^2) pont képei az E_1E_2 egyenes $(0,x^1\cos k\varphi-x^2\sin k\varphi,x^1\sin k\varphi+x^2\cos k\varphi)$ $(k=0,\ldots,q-1)$ pontjaihoz torlódnak, hacsak $\varphi=2\pi\cdot\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$.

Nézzük a φ szerinti eseteket.



(2.2.1.) ábra



(2.2.2.) ábra

2.2.1. $\varphi = \dfrac{2\pi}{q}$, $q = 2k$; $2 \leqq k \in N$

A (2.2.1.) ábra a $q=6$ esetet mutatja a spirális pályákat is érzékeltetve. A $\overline{\mathscr{F}}$ alaptartomány 4 oldalát páronként az

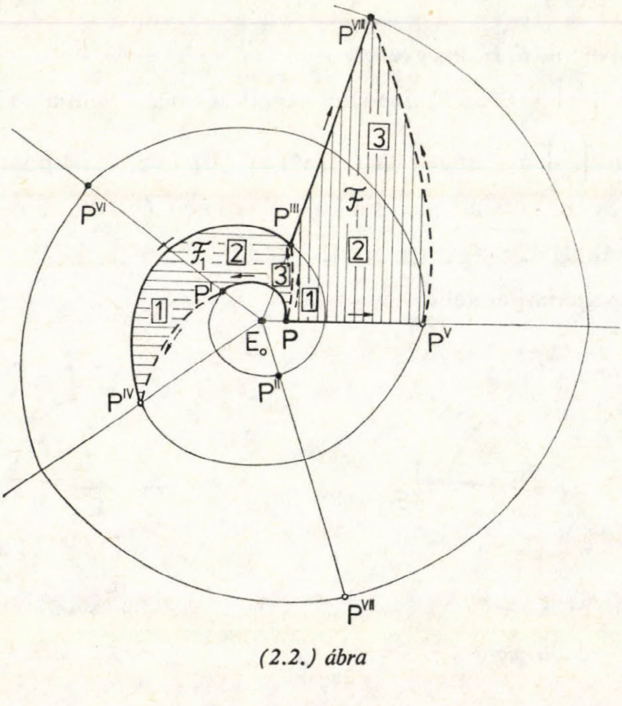
$$\{A\}: PP^{vi} \to P'P^{vii} \quad \text{illetve} \quad \{A^q\}: PP' \to P^{vi}P^{vii}$$

„geometriai generátorok" rendelik egymáshoz. Az $\{A^q\}$ egy E_0 centrumú, E_1E_2 tengelyű kollineáció. Az E_1E_2 egyenesen $\dfrac{q}{2}=k$ ekvivalens szakasz keletkezik (a (2.2.1.) ábra félgömbmodelljén $q=6$ darabot látunk, de a szemköztiek azonosaknak számítanak).

2.2.2. $\varphi = \dfrac{2\pi}{q}$, $q = 2k+1$; $1 \leqq k \in N$.

A (2.2.2.) ábra a $q=5$ esetet szemlélteti a spirális pályákkal együtt. Az $\overline{\mathscr{F}}$ alaptartomány oldalait páronként az $\{A\}$, illetve $\{A^q\}$ geometriai generátorok rendelik egymáshoz. Az E_1E_2 egyenesen $q=2k+1$ ekvivalens szakasz keletkezik (a félgömbmodellen $2q$ darab, páronként azonos szakasz).

Most megmutatjuk, hogy a $\varphi=2\pi\cdot\dfrac{p}{q}$, $(p, q)=1$ esetek geometriailag azonosnak tekinthetők az előbbiekkel. A (2.2.) ábrán az E_0 középpontú $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképen a $q=5$ $p=2$ esetet szemléltetjük. Az $\overline{\mathscr{F}}_1$ alaptartományhoz tartozó geometriai



(2.2.) ábra

generátorok:

$$\{A\}:\ PP''' \to P'P^{iv},\ \{A^3\};\ PP' \to P'''P^{iv}.$$

Az $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ alaptartományhoz tartozó geometriai generátorok:

$$\{A^3\}:\ PP^{v} \to P'''P^{viii},\ \{A^5\}:\ PP''' \to P^{v}P^{viii}.$$

Az $\{A^5\}$ most is E_0 centrumú, E_1E_2 tengelyű kollineáció. A (2.2.) ábrán számokkal jelöltük meg azokat a tartományokat, melyekkel az $\overline{\overline{\mathscr{F}}}_1$ az $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$-be „átdarabolható" az $\langle A\rangle$ csoport szerint.

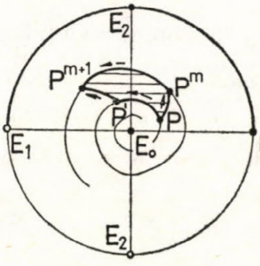
Az E_1E_2 egyenes a $\varphi=\frac{2\pi}{5}$ esethez hasonlóan bomlik ekvivalens szakaszokra.

A most kapott $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ alaptartományt „kombinatorikusan azonosnak" tekinthetjük a (2.2.2.) ábra alaptartományával, ahol a $\varphi=\frac{2\pi}{5}$ esetet szemléltettük.

A fenti gondolatmenetet általánosan $\varphi=2\pi\cdot\frac{p}{q}$ esetén is elvégezhetjük. Az $\{A^q\}$ generátor mellé $m\cdot p\equiv 1$ (mod q) szerint az $\{A^m\}$ generátort választjuk az $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ oldalait azonosító transzformációk szerepébe. Az E_1E_2 egyenesen q-tól függően a (2.2.1.), illetve (2.2.2.) eseteknek megfelelően kapunk ekvivalens szakaszokat.

2.2.3. $\varphi = 2\pi\cdot c,\quad c\in R\setminus Q,\quad c\in(0,\ 1/2).$

Mivel c irracionális szám, az $\{A\}$ transzformáció egyik hatványa sem lesz E_0 centrumú E_1E_2 tengelyű kollineáció. Az E_1E_2 fixegyenes bármely pontjának képei mindenütt sűrűn helyezkednek el az egyenesen, sőt egy ilyen pont tetszőleges környezetében (E_0 kivételével) a sík bármely pontjának létezik képe.



(2.2.3.) ábra

A (2.2.3.) ábra mutatja, hogy az E_0-tól különböző, E_1E_2-re nem illeszkedő pontokból kényelmesen (többféleképpen is) választhatunk 4 oldalú $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ alaptartományt. Ehhez, mint korábban is, egy általános helyzetű P pont $\{P\{A^t\}|t\in R\}$ folytonos pályáját használjuk fel. $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ generátorai

$$\{A\}:\ PP^m \to P'P^{m+1},\quad \{A^m\}:\ PP' \to P^mP^{m+1}.$$

Itt m az a természetes szám, melyre $(m-1)\cdot c<1<mc$.

2.2.* $a' < 0 < r',\quad 0 < \varphi' < \pi.$

Megmutatjuk, hogy (2.2.*) geometriailag ekvivalens (2.2.)-vel. Legyen $\frac{r'}{a'}=-\frac{r}{a}$ és

$\varphi' = \pi - \varphi$. Ekkor

$$(B) = \begin{pmatrix} a' & & \\ & r'\cos\varphi' & r'\sin\varphi' \\ & -r'\sin\varphi' & r'\cos\varphi' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{r'}{a'}\cos\varphi' & \frac{r'}{a'}\sin\varphi' \\ & -\frac{r'}{a'}\sin\varphi' & \frac{r'}{a'}\cos\varphi' \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{r}{a}\cos\varphi & -\frac{r}{a}\sin\varphi \\ & \frac{r}{a}\sin\varphi & \frac{r}{a}\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = (T^{-1}) \text{ választással}$$

$$(T^{-1})(B)(T) \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{r}{a}\cos\varphi & \frac{r}{a}\sin\varphi \\ & -\frac{r}{a}\sin\varphi & \frac{r}{a}\cos\varphi \end{pmatrix} = (A).$$

Tehát egy (2.2.*) esethez mindig hozzárendelhetünk egy vele geometriailag egyenértékű (2.2.) esetet.

5. A 3. típusú transzformáció által generált csoport vizsgálata

3.1. $a > 0$

$$(A) = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix} \Rightarrow (A^n) = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \binom{n}{2} a^{n-2} \\ & a^n & na^{n-1} \\ & & a^n \end{pmatrix}.$$

Ez n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható. Nézzük egy tetszőleges pont képét:

$$\{(x^0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \Big\{\Big(a^n x^0,\, n\,a^{n-1}x^0 + a^n x^1,\, \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}x^0 +$$

$$+ n\,a^{n-1}x^1 + a^n x^2\Big)\Big\} \sim \Big\{\Big(x^0,\, \frac{n}{a}x^0 + x^1,\, \frac{n(n-1)}{2a^2}x^0 + \frac{n}{a}x^1 + x^2\Big)\Big\}.$$

A transzformáció fixelemei: E_2 fixpont, E_1E_2 fixegyenes.

$$\lim_{n\to\pm\infty}(x^0,x^1,x^2)A^n \sim \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{x^0}{n(n-1)},\ \frac{x^0}{(n-1)a}+\frac{x^1}{n(n-1)},\ \frac{x^0}{2a^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^1}{(n-1)a}+\frac{x^2}{n(n-1)}\right) \sim \left(0,0,\frac{x^0}{2a^2}\right).$$

Ha $x^0 \neq 0$, akkor az E_2 fixpont a pályák torlódási pontja. Ha $x^0=0$, akkor

$$\{(0,x^1,x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \left\{\left(0,x^1,\frac{n}{a}x^1+x^2\right)\right\};\ \lim_{n\to\pm\infty}\left(0,x^1,\frac{n}{a}x^1+x^2\right) \sim$$

$$\sim \lim_{n\to\pm\infty}\left(0,\frac{x^1}{n},\frac{x^1}{a}+\frac{x^2}{n}\right) \sim \left(0,0,\frac{x^1}{a}\right).$$

Tehát $x^0=0$ és $x^1 \neq 0$ esetén is E_2 a pálya torlódási pont. Ha $x^1=0$ és $x^0=0$, de $x^2 \neq 0$, akkor is az E_2 fixpontot kapjuk. Tehát bármely pályának az E_2 a torlódási pontja.

Pályatípusok:

1. E_2 fixpont és a pályák torlódási pontja
2. E_1E_2 fixegyenes E_2-től különböző pontjai
3. A többi $\{(x^0,x^1,x^2)\}$ pontok pályái.

A pályateret az egyes pályatípusok vizsgálata után szemléltetjük ((3.1.) 2. ábra).

Nézzük először a $(\varphi_0, \mathcal{U}_0)$ affin térképet.

$$(x_0^1,x_0^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\frac{n}{a}+x_0^1,\ \frac{n(n-1)}{2a^2}+\frac{n}{a}x_0^1+x_0^2\right)$$

(1) $$y_0^1=\frac{n}{a}+x_0^1$$

(2) $$y_0^2=\frac{n(n-1)}{2a^2}+\frac{n}{a}x_0^1+x_0^2$$

(1)-ből kapjuk: $n=ay_0^1-x_0^1$, ezt behelyettesítve (2)-be adódik: $y_0^2=\frac{1}{2}\left(y_0^1-\frac{1}{2a}\right)^2-$ $-\frac{1}{2}\left(x_0^1-\frac{1}{2a}\right)^2+x_0^2$, ahol (x_0^1,x_0^2) tetszőleges, de rögzített pont. A folytonossá tett pályaegyenlet parabola egyenlete. Az egyenletből az is kiolvasható, hogy tetszőleges (x_0^1,x_0^2) rögzített pont esetén a parabolák tengelye közös. Vizsgáljuk meg a pályaérintőket: ($n\to t$ helyettesítés)

$$\frac{dy_0^1}{dt}=\frac{1}{a},\quad \frac{dy_0^2}{dt}=\frac{2t-1}{2a^2}+\frac{x_0^1}{a},$$

$$\left(\frac{dy_0^1}{dt}\right)_{t=0}=\frac{1}{a},\quad \left(\frac{dy_0^2}{dt}\right)_{t=0}=-\frac{1}{2a^2}+\frac{x_0^1}{a}.$$

Ha $x_0^1 = \frac{1}{2a}$, akkor $\left(\frac{dy_0^2}{dt}\right)_{t=0} = 0$, tehát az érintő párhuzamos az E_0E_1 egyenessel. Ez várható volt, mivel a parabolák csúcspontjai az $x_0^1 = \frac{1}{2a}$ egyenesen vannak. Az x_0^1 változtatásával minden érintőt megkapunk x_0^2-től függetlenül. Azt kapjuk, hogy a pályák az E_1E_2 egyeneshez simulnak, amely szintén egyezésben van a pályaegyenlettel. Most ezen a térképen meghatározunk egy alaptartományt.

Tekintsük az $x_0^2 = \frac{1}{x_0^1 - \frac{1}{2a}}$ egyenletű ZE_2, ZE_1 aszimptotájú félhiperbolát. Ez minden folytonossá tett pályát metsz egy pontban. Nézzük ennek $\{A\}$-nál származó képét.

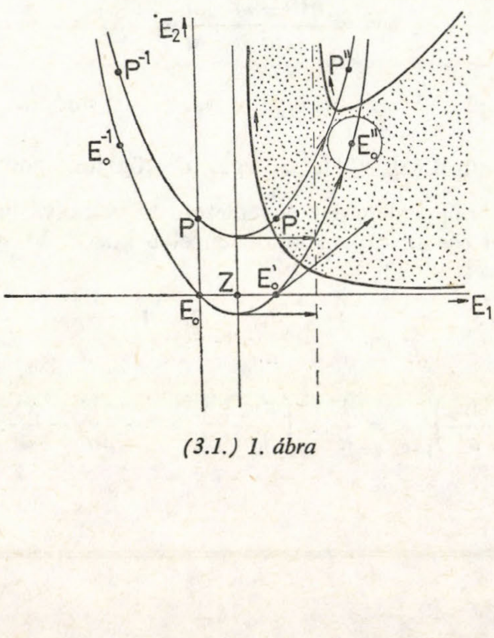
(1) $\quad y_0^1 = \frac{1}{a} + x_0^1 \qquad$ (2) $\quad y_0^2 = \frac{1}{a} x_0^1 + x_0^2$

(1)-ből kapjuk: $x_0^1 = y_0^1 - \frac{1}{a}$.

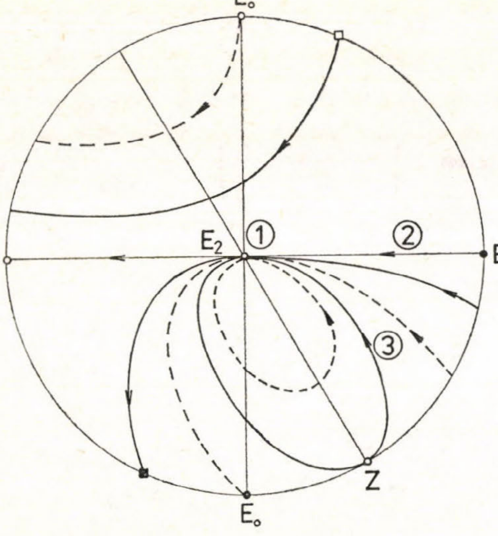
Ezt (2)-be helyettesítve — felhasználva hogy (x_0^1, x_0^2) a fenti kúpszelet pontjai — kapjuk a kúpszelet $\{A\}$-képének egyenletét:

$$y_0^2 = \frac{1}{a} y_0^1 + \frac{1}{y_0^1 - \frac{3}{2a}} - \frac{1}{a^2}.$$

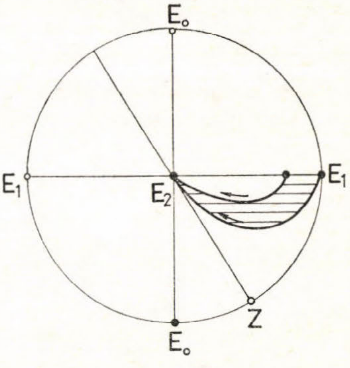
Ez is hiperbolaág, a két görbe meghatározza $\mathscr{F}_{\langle A \rangle}$-t. A (3.1.) 1. ábra $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ a pályákat és az érintőket, valamint $\{E_0\}$ pályakörnyezeteit, és a fenti meghatározott alaptartományt szemlélteti. A többi 3. típusú pont pályakörnyezete is ugyanolyan mint E_0-é.



(3.1.) 1. ábra



(3.1.) 2. ábra



(3.1.) 3. ábra

Vizsgáljuk most a $(\varphi_2, \mathcal{U}_2)$ affin térképet a félgömbmodellel kombinálva a (3.1.) 2. ábrán:

$$(x_2^0, x_2^1) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\frac{x_2^0}{\frac{n(n-1)}{2a^2}x_2^0+\frac{n}{a}x_2^1+1}, \frac{\frac{n}{a}x_2^0+x_2^1}{\frac{n(n-1)}{2a^2}x_2^0+\frac{n}{a}x_2^1+1} \right).$$

A nevező: $\frac{x_2^0}{2a^2}n^2-\left(\frac{x_2^0}{2a^2}-\frac{x_2^1}{a}\right)n+1$ az n-ben másodfokú, diszkriminánsa $D=$ $=\left(\frac{x_2^0-2ax_2^1}{2a^2}\right)^2-\frac{2x_2^0}{a^2}$.

Ebből következik, hogy a pályák kúpszeletek, melyek ellipszisek, egy parabola és hiperbolák rendre, ha a $D<0$, $D=0$, illetve $D>0$.

Ha $x_2^0=0$, akkor az E_1E_2 egyenes pontjait kapjuk, és mivel E_1E_2 fixegyenes, ezért pontjainak pályája is ezen egyenesen van. A (3.1.) 2. ábra a $(\varphi_2, \mathcal{U}_2)$ térképen szemlélteti a pályákat.

A (3.1.) 3. ábra a $\mathcal{P}^2/\langle A\rangle$ tér szerkezetét és $\langle A\rangle$ egy lezárt alaptartományát $\overline{\mathcal{F}_{\langle A\rangle}}$-t szemlélteti. Az előzőkkel összhangban az $\{E_2\}$ pályakörnyezete a teljes $\overline{\mathcal{F}_{\langle A\rangle}}$. Az E_1E_2 egyenes E_2-től különböző pontjai különösen érdekes pályakörnyezetekkel rendelkeznek. $\{E_1\}$ pályakörnyezetét az E_1 középpontú $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$ affin térképen tudjuk szemléltetni, de ezt nem részletezzük. Ugyancsak az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy az a $(0\neq a\in R)$ paraméter választható mindig pozitívnak és geometriailag hasonló eseteket kapunk.

6. A 4. típusú transzformáció által generált csoport vizsgálata

4.1. $0 < |a| = |b|$

4.1.1. $0 < a = b$

$$(A) = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} \Rightarrow (A^n) = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \\ & a^n & \\ & & a^n \end{pmatrix}.$$

Ez teljes indukcióval belátható.

Nézzük egy tetszőleges pont képét:

$$\{(x^0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(a^n x^0, n\, a^{n-1} x^0 + a^n x^1, a^n x^2)\} \sim \left\{\left(x^0, \frac{n}{a} x^0 + x^1, x^2\right)\right\}.$$

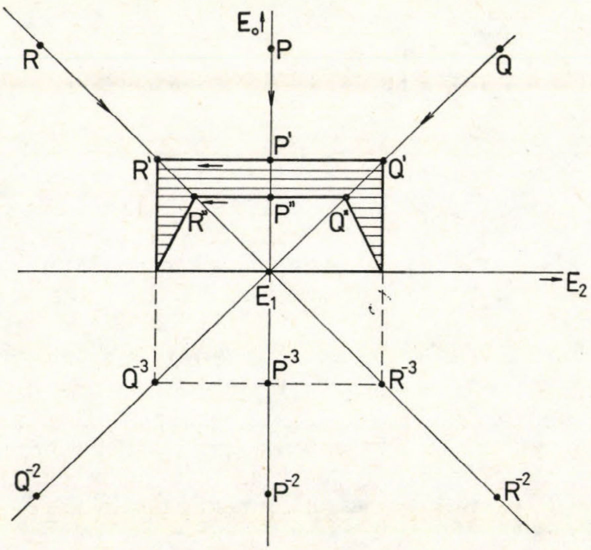
Az $\{A^n\}$ transzformációnak E_1 centruma, $E_1 E_2$ tengelye.

$$\lim_{n\to\pm\infty} (x^0, x^1, x^2) A^n \sim \lim_{n\to\pm\infty} \left(\frac{x^0}{n}, \frac{x^0}{a} + \frac{x^1}{n}, \frac{x^2}{n}\right) \sim \left(0, \frac{x^0}{a}, 0\right).$$

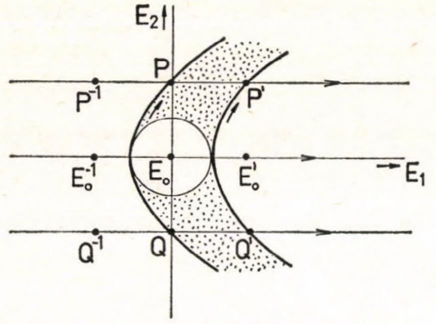
Tehát az E_1 centrum pálya torlódási pont, ha $x^0 \neq 0$. Ha $x^0 = 0$, akkor az $E_1 E_2$ tengelyt kapjuk, amelynek minden pontja fixpont.

Pályatípusok:

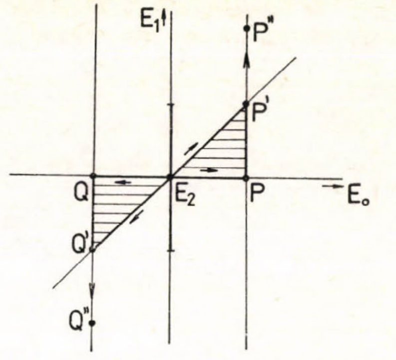
1. E_1 centrum és pálya torlódási pont
2. $E_1 E_2$ tengely E_1-től különböző pontjai
3. A további $\{(x^0, x^1, x^2)\}$ pontok pályái, amelyek egyeneseken vannak — az E_1 tartópontú sugársor elemein.



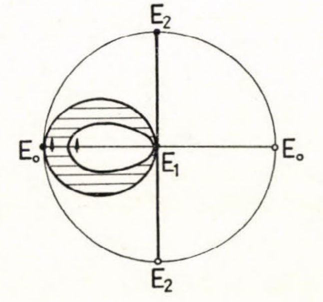
(4.1.1.) 1. ábra



(4.1.1.) 2. ábra



(4.1.1.) 3. ábra



(4.1.1.) 4. ábra

Vizsgáljuk a $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$ affin térképet:

$$(x_1^1, x_1^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\frac{x_1^0}{\frac{n}{a}x_1^0+1}, \frac{x_1^2}{\frac{n}{a}x_1^0+1}\right).$$

A (4.1.1.) 1. ábra a pályákat és $\{E_1\}$ pályakörnyezeteit szemlélteti, az ábrán $a=1$.

Nézzük most a $(\varphi_0, \mathcal{U}_0)$ térképet:

$$(x_0^1, x_0^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\frac{n}{a}+x_0^1, x_0^2\right).$$

A folytonossá tett pályák most az E_0E_1 egyenessel párhuzamosak. A (4.1.1.) 2. ábra a pályákat és egy tetszőleges 3. típusú pont — az ábrán $\{E_0\}$ — pályakörnyezetét szemlélteti. Egy parabola és $\{A\}$-eltolt képe a későbbi $\mathcal{F}_{\langle A\rangle}$ alaptartományra utal ((4.1.1.) 4. ábra.)

Végül nézzük a $(\varphi_2, \mathcal{U}_2)$ affin térképet:

$$(x_2^0, x_2^1) \xmapsto{\{A^n\}} \left(x_2^0, \frac{n}{a}x_2^0+x_2^1\right).$$

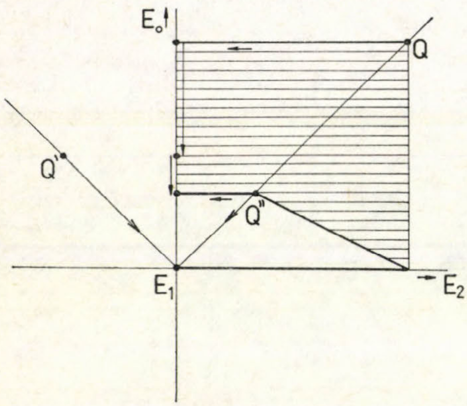
A folytonossá tett pályák itt az E_2E_1 egyenessel párhuzamos egyenesek. A (4.1.1.) 3. ábra a pályákat és egy tetszőleges 2. típusú pont — az ábrán $\{E_2\}$ — pályakörnyezetét szemlélteti, az ábrán $a=1$.

A (4.1.1.) 4. ábra pedig a $\mathscr{P}^2/\langle A\rangle$ térszerkezetét és $\mathscr{F}_{\langle A\rangle}$-t szemlélteti. Az E_1E_2 tengely E_1-től különböző pontjai nem tartoznak $\overline{\mathscr{F}}_{\langle A\rangle}$-hoz. $\overline{\mathscr{F}}_{\langle A\rangle}\cup E_1E_2$ minden pályából tartalmaz legalább egy pontot.

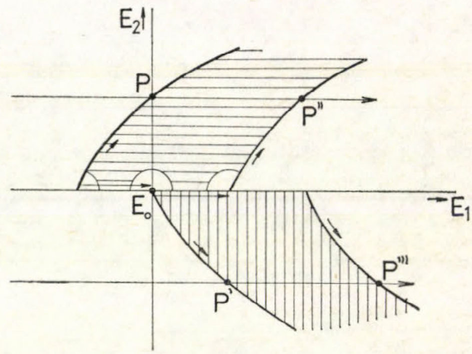
4.1.2. $b<0<a$, de $0<a=|b|$

$$(B^n)=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \\ & a^n & \\ & & (-1)^n a^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \\ & a^n & \\ & & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

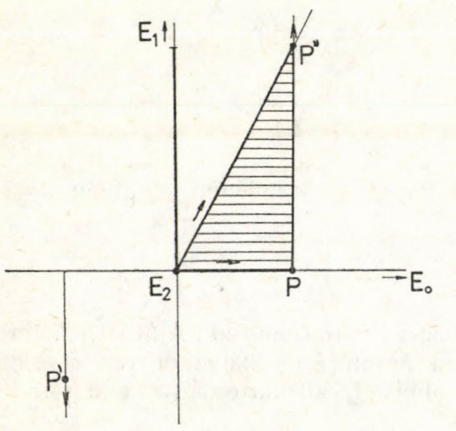
Az előző esethez képest a változást az E_2 centrumú E_0E_1 tengelyű involúció okozza.



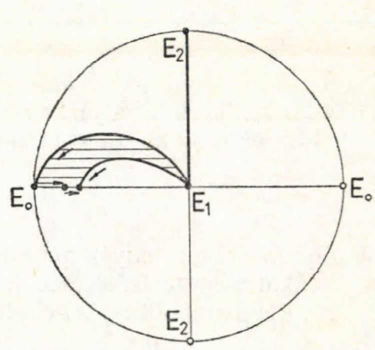
(4.1.2.) 1. ábra



(4.1.2.) 2. ábra



(4.1.2.) 3. ábra



(4.1.2.) 4. ábra

A (4.1.2.) 1. ábra a $(\varphi_1, \mathscr{U}_1)$ térképen, a (4.1.2.) 2. ábra a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ térképen, a (4.1.2.) 3. ábra a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ térképen szemlélteti a változást. Végül a (4.1.2.) 4. ábra a $\mathscr{P}^2/\langle B\rangle$ tér szerkezetét és $\mathscr{F}_{\langle B\rangle}$-t szemlélteti. Itt E_1E_2 fixegyenes nem tengely, a többi fixelem és a torlódási pont ugyanaz, mint (4.1.1.)-nél.

4.2. $0 < |a| < |b|$

4.2.1. $0 < a < b$

$$(A) = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}, \quad (A^n) = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \\ & a^n & \\ & & b^n \end{pmatrix}.$$

Egy tetszőleges pont képe:

$$\{(x^0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(a^n x^0, n a^{n-1} x^0 + a^n x^1, b^n x^2)\} \sim$$

$$\sim \left\{\left(x^0, \frac{n}{a} x^0 + x^1, \left(\frac{b}{a}\right)^n x^2\right)\right\} \sim \left\{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n x^0, \frac{n}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^n x^0 + \left(\frac{a}{b}\right)^n x^1, x^2\right)\right\}.$$

A fixelemek: E_1, E_2 fixpont, E_0E_1 és E_1E_2 fixegyenesek.

$$\lim_{n\to+\infty} (x^0, x^1, x^2) A^n \sim \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n x^0, \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{n}{a} x^0 + x^1\right), x^2\right) \sim (0, 0, x^2).$$

Ez azt jelenti, hogy az E_2 fixpont a pályák torlódási pontja, ha $x^2 \neq 0$. Ha $x^2 = 0$, $\{(x^0, x^1, 0)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(a^n x^0, na^{n-1} x^0 + a^n x^1, 0)\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} (x^0, x^1, 0) A^n \sim \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x^0}{n}, \frac{x^0}{a} + \frac{x^1}{n}, 0\right) \sim \left(0, \frac{x^0}{a}, 0\right).$$

Azt kaptuk, hogy $x^0 \neq 0$, de $x^2 = 0$ esetén E_1 lesz a pályák torlódási pontja. Ha $x^0 = 0$ és $x^2 = 0$, (de $x^1 \neq 0$), akkor az E_1 fixpontot kapjuk.

$$\lim_{n\to-\infty} (x^0, x^1, x^2) A^n \sim \lim_{n\to-\infty} \left(\frac{x^0}{n}, \frac{x^0}{a} + \frac{x^1}{n}, \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n x^2\right) \sim \left(0, \frac{x^0}{a}, 0\right).$$

Azt kaptuk, hogy E_1 pálya torlódási pont, ha $x^0 \neq 0$. Ha $x^0 = 0$:

$$\{(0, x^1, x^2)\} \xmapsto{\{A^n\}} \{(0, a^n x^1, b^n x^2)\}.$$

$$\lim_{n\to-\infty} (0, a^n x^1, b^n x^2) \sim \lim_{n\to-\infty} \left(0, x^1, \left(\frac{b}{a}\right)^n x^2\right) \sim (0, x^1, 0).$$

Ekkor is E_1 lesz a pálya torlódási pont, ha $x^1 \neq 0$. Ha $x^1 = 0$ és $x^0 = 0$, de $x^2 \neq 0$, akkor az E_2 fixpontot kapjuk.

Pályatípusok:

1. E_1 fixpont és pálya torlódási pont
2. E_2 fixpont és pálya torlódási pont
3. E_0E_1 fixegyenes E_1-től különböző pontjainak pályái
4. E_1E_2 fixegyenes E_1-től és E_2-től különböző pontjainak pályái
5. A többi $\{(x^0, x^1, x^2)\}$ pontok pályái, amelyek „exponenciálisok”.

Vizsgáljuk a $(\varphi_1, \mathscr{U}_1)$ affin térképet:

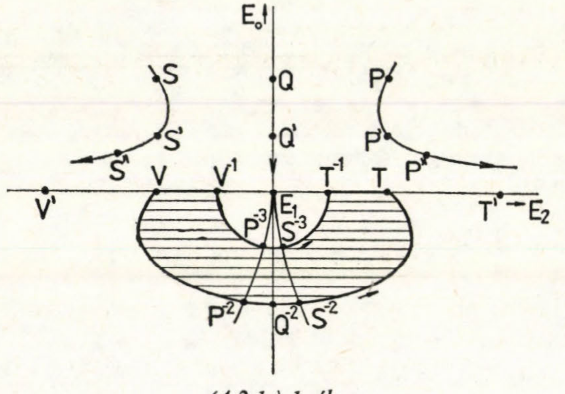
$$(x_1^0, x_1^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\frac{x_1^0}{\frac{n}{a} x_1^0 + 1}, \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n x_1^2}{\frac{n}{a} x_1^0 + 1} \right).$$

$$(1) \qquad y_1^0 = \frac{x_1^0}{\frac{n}{a} x_1^0 + 1}, \qquad (2) \qquad y_1^2 = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n x_1^2}{\frac{n}{a} x_1^0 + 1}.$$

(1)-ből kapjuk: $n = \frac{a}{y_1^0} - \frac{a}{x_1^0}$, ezt (2)-be helyettesítve adódik:

$$y_1^2 = \frac{x_1^2}{x_1^0} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{a/x_1^0} \left(\frac{b}{a}\right)^{a/y_1^0} \cdot y_1^0.$$

A folytonossá, sőt differenciálhatóvá tett pályagörbéket $n \to t$ helyettesítéssel megvizsgálva azt kapjuk, hogy $t \to \infty$ esetén a görbék az E_1E_2 egyeneshez, $t \to -\infty$ esetén az E_0E_1 egyeneshez símulnak.



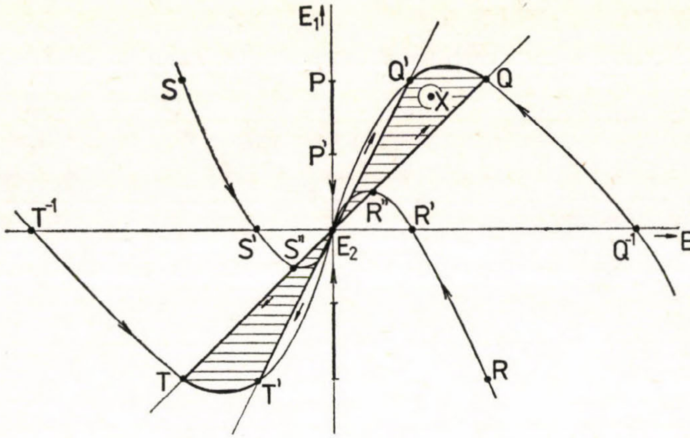
(4.2.1.) 1. ábra

A (4.2.1.) 1. ábra a pályákat és $\{E_1\}$ pályakörnyezeteit szemlélteti. Az $\{A^{-1}\}$-nél keletkező képek közül több az E_0E_2 egyenesen van, ezért nem lehet ábrázolni ezen a térképen. Az ábrán $\frac{b}{a} = 2$ és $a = 1$.

Nézzük a $(\varphi_2, \mathscr{U}_2)$ affin térképet:

$$(x_2^0, x_2^1) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n x_2^0, \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{n}{a} x_2^0 + x_2^1\right) \right).$$

$$(1) \qquad y_2^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^n x_2^0, \qquad (2) \qquad y_2^1 = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{n}{a} x_2^0 + x_2^1\right).$$



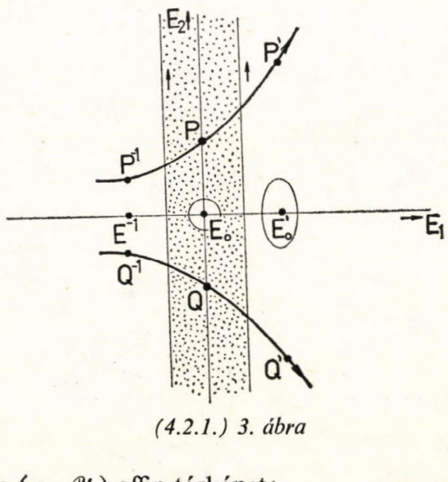
(4.2.1.) 2. ábra

(1)-ből kapjuk: $n = \log_{a/b} \frac{y_2^0}{x_2^0}$, ezt (2)-be helyettesítve adódik az alábbi pályaegyenlet:

$$y_2^1 = \frac{y_2^0}{x_2^0}\left(\frac{x_2^0}{a}\log_{a/b}\frac{y_2^0}{x_2^0} + x_2^1\right),$$

ahol (x_2^0, x_2^1) rögzített pont és $x_2^0 \neq 0$.

A (4.2.1.) 2. ábra a pályákat és $\{E_2\}$ pályakörnyezeteit szemlélteti $\left(\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, a = 1\right)$.



(4.2.1.) 3. ábra

Végül vizsgáljuk a $(\varphi_0, \mathscr{U}_0)$ affin térképet:

$$(x_0^1, x_0^2) \xmapsto{\{A^n\}} \left(\frac{n}{a} + x_0^1, \left(\frac{b}{a}\right)^n x_0^2\right).$$

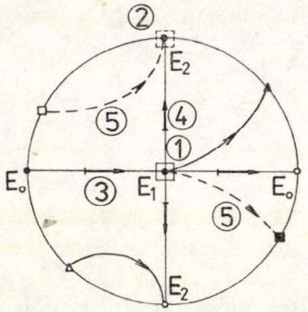
(1) $\quad y_0^1 = \frac{n}{a} + x_0^1, \qquad$ (2) $\quad y_0^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^n x_0^2.$

(1)-ből n-et kifejezve és beírva (2)-be kapjuk a pályaegyenletet:

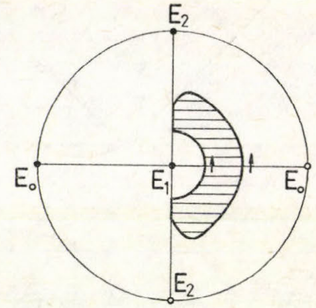
$$y_0^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{ax_0^1} \cdot x_0^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{ay_0^1}.$$

ahol (x_0^1, x_0^2) rögzített pont.

A (4.2.1.) 3. ábra a pályákat és $\{E_0\}$ pályakörnyezeteit szemlélteti. Az ábrán $\dfrac{b}{a}=2$, $a=1$.



(4.2.1.) 4. ábra



(4.2.1.) 5. ábra

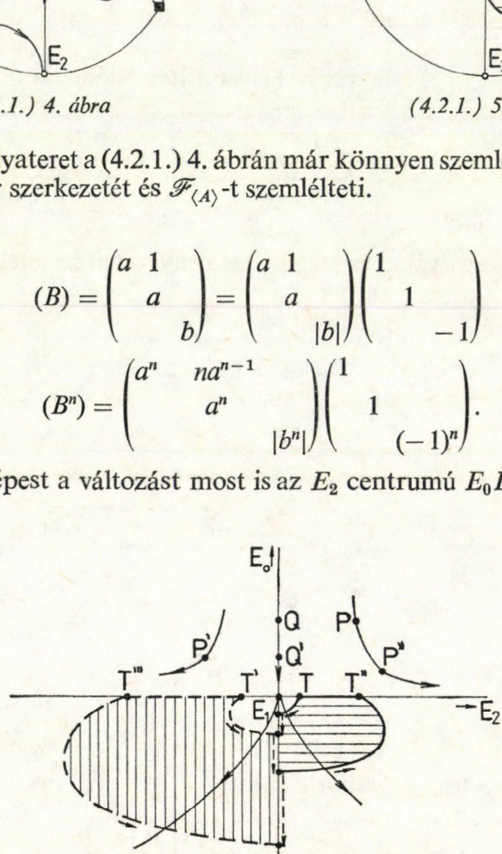
Ezek után a pályateret a (4.2.1.) 4. ábrán már könnyen szemléltethetjük. A (4.2.1.) 5. ábra a $\mathscr{P}^2/\langle A\rangle$ tér szerkezetét és $\mathscr{F}_{\langle A\rangle}$-t szemlélteti.

4.2.2. $b < 0 < a$

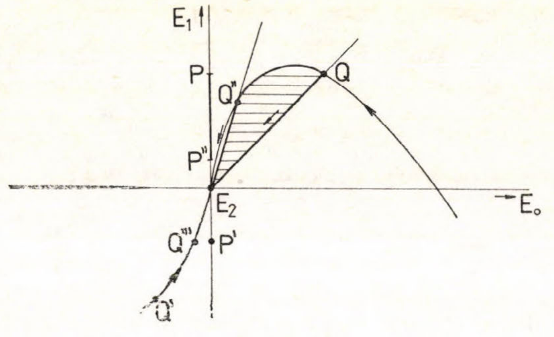
$$(B) = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & |b| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$(B^n) = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \\ & a^n & \\ & & |b^n| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

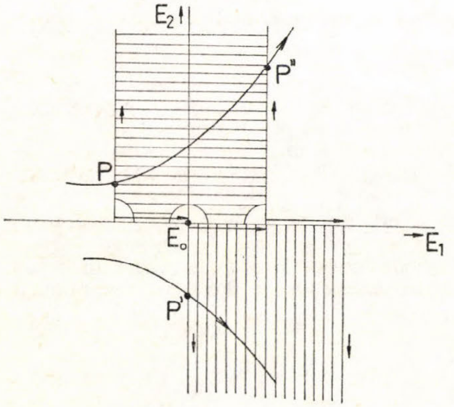
Az előző esethez képest a változást most is az E_2 centrumú E_0E_1 tengelyű involúció okozza.



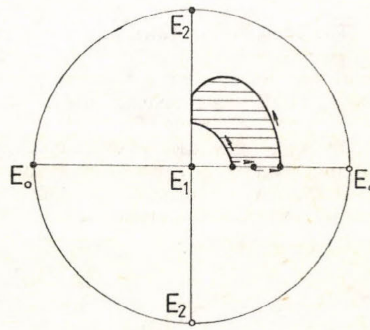
(4.2.2.) 1. ábra



(4.2.2.) 2. ábra



(4.2.2.) 3. ábra



(4.2.2.) 4. ábra

A fixelemek és a torlódási pontok ugyanazok, de a fundamentális tartomány megint „feleződik".

A (4.2.2.) 1. ábra a $(\varphi_1, \mathcal{U}_1)$ affin térképen, a (4.2.2.) 2. ábra a $(\varphi_2, \mathcal{U}_2)$ térképen, a (4.2.2.) 3. ábra a$(\varphi_0, \mathcal{U}_0)$ térképen szemlélteti a változást. Végül a (4.2.2.) 4. ábra a $\mathcal{P}^2/\langle B\rangle$ tér szerkezetét és $\mathcal{F}_{\langle B\rangle}$-t szemlélteti.

IRODALOM

[1] И. А. Балтаг—В. П. Гарит: *Двумерные дискретные аффинные группы*, «Штиинца», Кишинёв, 1981.

[2] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser: *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972. Г. С. М. Коксетер—У. О. Дж. Мозер: *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп*, «Наука», Москва, 1980.

[3] Császár Á.: *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

[4] Fried E.: *Klasszikus és lineáris algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[5] A. G. Kuros: *Felsőbb algebra*, XIII. fejezet 389—416. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[6] W. S. Massey: *Algebraic topology: An introduction*, Harcourt, Brace and World, Inc, New York—Chicago—San Francisco—Atlanta, 1967. У. Масси: *Алгебраическая топология*, «Мир», Москва, 1977.

[7] Mészáros F.: Nemfolytonos transzformációcsoportok a projektív síkon. Egyetemi doktori értekezés, ELTE 1984.

[8] MOLNÁR E.—SZALÓKI D.: Csoportelmélet és kristálycsoportok, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei*, Matematika—Fizika 33—83 (1979. XII. 1.)
[9] Л. С. Понтрягин: *Непрерывные группы*, Москва, 1973. L. S. PONTRJAGIN: *Topologische Gruppen*, Leipzig, 1957. L. S. PONTRJAGIN: *Topological Groups*, New York, 1966.
[10] SZENTHE J.: A szeletfogalom a transzformációcsoportok elméletében, *Matematikai Lapok* **31** (1980—1983), 39—66.
[11] H. C. WILKIE: On non-euclidean crystallographic groups, *Math. Zeitschr.* **91** (1966), 87—102.
[12] ZIESCHANG—VOGT—COLDEWEY: *Surfaces and planar discontinuous groups*, Lecture notes in math. 835. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980.

(Beérkezett: 1986. május 21-én)

ОДНОПОРОЖДЕННЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ф. МЕСАРОШ и Э. МОЛНАР

ONE-GENERATOR TRANSFORMATION GROUPS IN THE PROJECTIVE PLANE

F. MÉSZÁROS and E. MOLNÁR

The projective collineations in the classical projective plane have been classified now. Each of them generates a transformation group acting discontinuously on the points of the plane with some exceptions. Our purpose is to classify these groups called one-generator transformation groups by giving a „fundamental domain" for each of them and describing all the types of orbits. The results are illustrated in the figures.

To derive these case we examined also the continuous orbits of the one-parameter groups which are determined by the generator considered.

In this way we can get a view of the corresponding affine groups, hyperbolic groups and so on. Some interesting phenomena occur which help us to understand better the theory of discontinuous transformation groups.

DIREKT SZORZATRA NEM BONTHATÓ CSOPORTOK RENDJÉRŐL

ERDŐS PÁL és PÁLFY PÉTER PÁL

Ebben a dolgozatban *felbonthatatlan*nak fogunk nevezni egy csoportot, ha nem bontható két valódi részcsoportjának direkt szorzatára. C. Sudler [7] vetette föl a kérdést, hogy mely n számokra létezik n-edrendű felbonthatatlan csoport. Ha n páros, akkor könnyű ilyen csoportot találni (1. Állítás). Ezzel szemben dolgozatunk fő eredménye (7. Tétel) azt mondja ki, hogy *majdnem minden* páratlan n számra minden n-edrendű csoport valódi részcsoportok direkt szorzatára bontható, azaz azoknak a páratlan n számoknak a halmaza, amelyekhez van n-edrendű felbonthatatlan csoport, nulla sűrűségű.

A bizonyításban a csoportelmélet és a számelmélet ötvöződik. Mindkét területről jól ismert eredményeket és gyakran alkalmazott módszereket fogunk felhasználni. Ám ami az egyik terület ismerőjének kézenfekvő, azt a másik terület specialistáinak kedvéért igyekeztünk részletezni.

A vizsgált csoportok mindig végesek; p és q mindig prímet, C, c_1, ... abszolút konstansokat jelöl.

1. Állítás. *Ha* $n=2^k m$, m *páratlan,* $k\geqq 1$, *akkor a*

$$G = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^{2^k} = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$$

definiáló relációkkal megadott csoport felbonthatatlan és rendje n.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $G=G_1\times G_2$, és legyen $a=a_1a_2$, $b=b_1b_2$, a_i, $b_i\in G_i$ $(i=1,2)$. Mivel b rendje b_1 és b_2 rendjének legkisebb közös többszöröse, ezért — mondjuk — b_1 rendje is 2^k. Ekkor 2^k osztja G_1 rendjét, így G_2 páratlan rendű és $b_2=1$. A $b^{-1}ab=a^{-1}$ relációból azt kapjuk, hogy $(b_1^{-1}a_1b_1)a_2=a_1^{-1}a_2^{-1}$, ahonnan $a_2^2=1$. Ám láttuk, hogy $|G_2|$ páratlan, ezért $a_2=1$. Tehát $G_2=1$, így G-nek csak triviális felbontása van.

A továbbiakban — ha szükségünk lesz rá — mindig feltehetjük, hogy n páratlan. Nehéznek látszik pontos feltételt adni arra, hogy mely páratlan számokra létezik ilyen rendű felbonthatatlan csoport. A dolgozat végén bizonyítás nélkül közlünk két erre vonatkozó részeredményt. Ezekből következik, hogy például van $3\cdot 7$ és $7\cdot 29$ rendű, de nincs $3\cdot 7\cdot 29$ rendű felbonthatatlan csoport; van $3^5\cdot 11$ és 3^6 rendű, de nincs $3^6\cdot 11$ rendű felbonthatatlan csoport. Ezért azzal a könnyebben kezelhető kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy mikor lehet minden n-edrendű csoportot egységesen direkt szorzatra bontani, azaz mikor létezik olyan $n=n_1n_2$ $(n_1, n_2>1)$ faktorizáció, hogy minden n-edrendű csoport egy n_1-edrendű és egy n_2-edrendű részcsoportjának direkt szorzata. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor n_1 prímszám.

2. Segédtétel. *Legyen $p|n$, p prím. Akkor és csak akkor lehet minden n-edrendű csoportot egy p-edrendű és egy n/p-edrendű részcsoportjának direkt szorzatára bontani, ha (i) $p^2 \nmid n$, (ii) nincs olyan $q^k|n$ (q prím, $k \geqq 1$), amelyre $p|q^k-1$, és (iii) nincs olyan $q|n$ prím, amelyre $q|p-1$.*

Bizonyítás. A feltételek szükségességét a következő csoportok mutatják: (i) az n-edrendű ciklikus csoport, C_n; (ii) $\{x \to ax+b \mid a, b \in GF(q^k),\ a^p=1\} \times C_{n/pq^k}$; (iii) $\{x \to ax+b \mid a, b \in GF(p),\ a^q=1\} \times C_{n/pq}$.

Tegyük most föl, hogy $p|n$ és teljesülnek az (i), (ii), (iii) feltételek. Legyen G egy n-edrendű csoport, P egy Sylow p-részcsoport G-ben. Az (i) feltétel folytán $|P|=p$. A P részcsoport G-beli $N_G(P)$ normalizátorának elemeivel való konjugálások P-nek automorfizmusait indukálják. P automorfizmuscsoportja $p-1$ elemű, ezért a (iii) feltétel miatt $N_G(P)$ minden eleme az identikus automorfizmust indukálja, azaz centralizálja P-t. Burnside nevezetes tétele (lásd [3], 252. old.) szerint ekkor létezik G-ben olyan K normálosztó, hogy $KP=G$ és $K \cap P=1$, azaz $|K|=n/p$.

Vegyük n-nek egy p-től különböző q prímosztóját. Mivel K rendje p-vel nem osztható, ezért van K-nak olyan Q Sylow q-részcsoportja, amelyet P normalizál (lásd [3], 224. old.). Ha $|Q|=q^m$, akkor Q automorfizmuscsoportjának rendje osztója $q^{m(m-1)/2}(q^m-1)(q^{m-1}-1)\dots(q^2-1)(q-1)$-nek (lásd [5], 275. old.), ám ez a (ii) feltétel szerint p-vel nem osztható, így P elemenként felcserélhető Q-val, $Q \leqq C_K(P)$. Tehát $C_K(P)$ K rendjének minden q prímosztójához tartalmaz egy Sylow q-részcsoportot, ennélfogva $C_K(P)=K$, és így valóban $G=P \times K$.

Az első két feltételnek eleget tevő prímosztót általában igen könnyen találunk.

3. Segédtétel. *Majdnem minden n szám minden* log log *n-nél nagyobb prímosztója első hatványon szerepel n prímtényezős felbontásában.*

Bizonyítás. Azoknak az n, $1 \leqq n \leqq x$ számoknak a száma, amelyek oszthatók egy log log $\sqrt{x}$-nél nagyobb szám négyzetével, vagy kisebbek $\sqrt{x}$-nél, legfeljebb

$$\sum_{\log\log \sqrt{x} < k \leqq \sqrt{x}} \frac{x}{k^2} + \sqrt{x} < \frac{x}{\log\log \sqrt{x}} + \sqrt{x} = o(x).$$

4. Segédtétel. *Legyen $\varepsilon > 0$. Majdnem minden n számnak nincsenek olyan p és q^k osztói, ahol p és q prímek, $k \geqq 1$, hogy $p > (\log\log n)^{1+\varepsilon}$ és $q^k \equiv 1 \pmod{p}$.*

Bizonyítás. Azoknak az n számoknak a száma, amelyekhez van olyan p, q prímszám és $k \geqq 1$, hogy $pq^k|n$, $p > (\log\log \sqrt{x})^{1+\varepsilon}$ és $q^k \equiv 1 \pmod{p}$, vagy $n \leqq \sqrt{x}$, legfeljebb

$$\sum_{\substack{p > (\log\log \sqrt{x})^{1+\varepsilon} \\ q^k \equiv 1 (p) \\ q^k \leqq x}} \frac{x}{pq^k} + \sqrt{x} = x \sum_p \frac{1}{p} \sum_{\substack{q^k \equiv 1 (p) \\ q^k \leqq x}} \frac{1}{q^k} + o(x) \leqq$$

$$\leqq x \sum_p \frac{1}{p} \cdot \frac{C \log\log x}{p-1} + o(x)$$

(lásd [6], 147. old.; most $p < \sqrt{x}$)

$$\leqq x \cdot \frac{C \log\log x}{(\log\log \sqrt{x})^{1+\varepsilon}} + o(x) = o(x).$$

A harmadik feltételnek eleget tevő prímek számának meghatározásához már mélyebb számelméleti segédeszközökre lesz szükségünk.

5. Segédtétel. *Legyenek* $p_1, \ldots, p_t$ *különböző prímszámok. Ekkor*

$$\sum_{\substack{q \text{ prím} \\ q \leq x \\ p_i \nmid q-1}} \frac{1}{q} = (1+o(1)) \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i - 1}\right) \cdot \log\log x.$$

Bizonyítás. Legyen $k = p_1 \ldots p_t$. Azok a q prímszámok, amelyekre $p_i \nmid q-1$ a k-hoz relatív prím $\varphi(k) = (p_1-1)\ldots(p_t-1)$ maradékosztály közül $(p_1-2)\ldots$ $\ldots(p_t-2)$-ben helyezkednek el. A Dirichlet tétel kvantitatív alakja (lásd [6], 138. old.) azt mondja, hogy egy-egy ilyen maradékosztályban x-ig aszimptotikusan

$$\frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x}$$

prím van. Innen állításunk parciális szummációval könnyen adódik.

6. Tétel. *Jelölje* $g(n)$ *az* n *páratlan szám olyan* q *prímosztóinak számát, amelyekre* $q-1$ n*-hez retíval prím. Majdnem minden páratlan* n*-re*

$$g(n) = (1+o(1)) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \cdot \log\log n.$$

Bizonyítás. Elegendő azt megmutatnunk, hogy minden pozitív ε-ra és η-ra a páratlan számok egy legfeljebb 2η felső sűrűségű részhalmazának kivételével

$$\left| \frac{g(n)}{\prod_{p|n} (1 - 1/(p-1)) \cdot \log\log n} - 1 \right| < \varepsilon$$

teljesül a többi páratlan n számra. Ehhez alkalmasan nagyra fogjuk választani az A számot, amelyet aztán rögzítettnek tekintünk.

Jelölje M az A-ig terjedő prímek szorzatát (a 2-t is beleértve), és az $n \equiv a \pmod M$ maradékosztályon, ahol $1 \leq a < M$ páratlan, vizsgáljuk azt a $g_A(n)$ függvényt, amivel az n (páratlan) szám olyan q prímosztóinak számát jelöljük, amelyekre $q > A$ és $q-1$ nem osztható n-nek egyetlen $p \leq A$ prímosztójával sem.

A $g_A(n)$ függvény átlagos viselkedését Turán módszerével állapítjuk meg. A maradékosztály minden elemének ugyanazok az A-nál nem nagyobb prímosztói, legyenek ezek $p_1, \ldots, p_t$. Ekkor

$$\sum_{\substack{n \equiv a(M) \\ n \leq x}} g_A(n) = \sum_{\substack{n \equiv a(M) \\ n \leq x}} \sum_{\substack{q|n \\ p_i \nmid q-1}} 1 = \sum_{\substack{q \leq x \\ p_i \nmid q-1}} \sum_{\substack{n \equiv a(M) \\ q|n \\ n \leq x}} 1 = \sum_{\substack{q \leq x \\ p_i \nmid q-1}} \left(\frac{x}{Mq} + \delta_q\right),$$

ahol $|\delta_q| < 1$. Így $g_A(n)$ átlagértéke az $n \equiv a \pmod M$ maradékosztályon x-ig

$$\sum_{\substack{q \leq x \\ p_i \nmid q-1}} \frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Az 5. Segédtétel szerint

$$K = \sum_{\substack{q \leq x \\ p_i \nmid q-1}} \frac{1}{q} = (1+o(1)) \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i - 1}\right) \cdot \log\log x.$$

A $g_A(n)$ függvénynek K-tól vett négyzetes eltérésére a következő adódik (ahol minden $|\delta_i|<1$):

$$\sum_{\substack{n\equiv a(M)\\ n\leqq x}} (g_A(n)-K)^2 = \sum_n g_A(n)^2 - 2K\sum_n g_A(n) +$$

$$+\left(\frac{x}{M}+\delta_1\right)K^2 = \sum_{\substack{q_1\leqq x\\ p_i\nmid q_1-1}} \sum_{\substack{q_2\leqq x\\ p_i\nmid q_2-1}} \sum_{\substack{n\equiv a(M)\\ n\leqq x\\ q_1|n\\ q_2|n}} 1 - K^2\frac{x}{M}+o(x) = \sum_{\substack{q\leqq x\\ p_i\nmid q-1}}\left(\frac{x}{Mq}+\delta_q\right)+$$

$$+\sum_{\substack{q_1\leqq x\\ p_i\nmid q_1-1}} \sum_{\substack{q_2\leqq x\\ p_i\nmid q_2-1}}\left(\frac{x}{Mq_1q_2}+\delta_{q_1q_2}\right)-\sum_{\substack{q\leqq x\\ p_i\nmid q-1}}\left(\frac{x}{Mq^2}+\delta_{q^2}\right)-$$

$$-K^2\frac{x}{M}+o(x)\leqq K\frac{x}{M}+K^2\frac{x}{M}-K^2\frac{x}{M}+O(x)=K\frac{x}{M}+O(x).$$

Tehát $g_A(n)/K$-nak 1-től vett átlagos négyzetes eltérése

$$\frac{1}{K}+O\left(\frac{1}{K^2}\right),$$

így a Csebisev egyenlőtlenség szerint majdnem minden n-re

$$g_A(n) = (1+o(1))\prod_{\substack{p|n\\ p\leqq A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\cdot\log\log n.$$

Nézzük most $g(n)$-et! $g_A(n)$ kiszámításánál nem vettük tekintetbe azokat a prímeket, amelyek A-nál nem nagyobbak, így $g(n)\leqq g_A(n)+\pi(A)$. Másrészt viszont számoltunk olyan q prímeket is, amelyekre $q|n$ és van olyan $p|n$ prím, $p>A$, hogy $p|q-1$. Felülről becsülve az ilyen prímek számának átlagát, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x}\sum_{\substack{p>A\\ q\equiv 1(p)\\ pq|n}} 1 \leqq \frac{1}{x}\sum_{\substack{p>A\\ p\leqq x}}\sum_{\substack{q\equiv 1(p)\\ q\leqq x}}\frac{x}{pq} < \sum_{p>A}\frac{1}{p}\sum_{\substack{q\equiv 1(p)\\ q\leqq x}}\frac{1}{q} \leqq \sum_{p>A}\frac{1}{p}\cdot\frac{C\log\log x}{p-1} < \frac{C\log\log x}{A},$$

vö. a 4. Segédtétellel. Így egy legfeljebb ηx elemű halmaz kivételével

$$g(n)\geqq g_A(n)-\frac{C\log\log x}{A}\cdot\frac{1}{\eta}.$$

A megmaradó legalább $(1-\eta)x-o(x)$ számra tehát

$$1+o(1)\geqq\frac{g(n)}{g_A(n)}\geqq 1-(1+o(1))\frac{C}{A\prod\limits_{3\leqq p\leqq A}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)}\cdot\frac{1}{\eta}.$$

Vegyük észre, hogy itt

$$A\prod_{3\leqq p\leqq A}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\geqq A\exp\left(-(\log 8)\sum_{3\leqq p\leqq A}\frac{1}{p}\right)\geqq$$

$$\geqq c_1 A\exp\left(-(\log 8)\log\log A\right)=\frac{c_1 A}{(\log A)^{\log 8}}.$$

Továbbá, tekintetbe kell még vennünk, hogy a tétel kimondásában $\prod(1-1/(p-1))$-et az összes prímosztóra képeztük. Becsüljük meg a

$$\prod_{\substack{p|n\\p>A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) > 1-\sum_{\substack{p|n\\p>A}}\frac{1}{p-1}$$

szorzatot! Itt átlagban

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x}\sum_{\substack{p|n\\p>A}}\frac{1}{p-1} \leqq \frac{1}{x}\sum_{A<p\leqq x}\frac{x}{p}\cdot\frac{1}{p-1} \leqq \frac{1}{A}.$$

Ezért legfeljebb ηx szám kivételével

$$\sum_{\substack{p|n\\p>A}}\frac{1}{p-1} \leqq \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\eta},$$

azaz

$$\prod_{\substack{p|n\\p>A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) > 1-\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\eta}.$$

Összegezve eddigi számításainkat, azt kapjuk, hogy egy legfeljebb 2η felső sűrűségű halmaz kivételével már minden más n páratlan számra

$$\left|\frac{g(n)}{\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\cdot\log\log n}-1\right| =$$

$$= \left|\frac{g(n)}{g_A(n)}\cdot\frac{g_A(n)}{\prod_{\substack{p|n\\p\leqq A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\log\log n}\cdot\frac{1}{\prod_{\substack{p|n\\p>A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)}-1\right| \leqq$$

$$\leqq c_2\left\{\left|\frac{g(n)}{g_A(n)}-1\right|+\left|\frac{g_A(n)}{\prod_{\substack{p|n\\p\leqq A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\cdot\log\log n}-1\right|+\left|\prod_{\substack{p|n\\p>A}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)-1\right|\right\} \leqq$$

$$\leqq c_2\left\{\frac{(1+o(1))C(\log A)^{\log 8}}{c_1 A}\cdot\frac{1}{\eta}+o(1)+\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\eta}\right\} < \varepsilon,$$

ha A-t elég nagynak választjuk.

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Eddigi eredményeink együttesen szolgáltatják a dolgozat fő tételét.

7. Tétel. *Majdnem minden páratlan n számnak*

$$(1+o(1))\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\cdot\log\log n$$

olyan q prímosztója van, hogy minden n-edrendű csoport egy q-adrendű és egy n/q-adrendű részcsoportjának direkt szorzatára bontható.

Bizonyítás. A 2. Segédtétel szerint az olyan q prímosztók számát kell meghatároznunk, amelyekre (i) $q^2 \nmid n$, (ii) $q \nmid p^k-1$ n egyetlen p^k prímhatvány-osztójára sem és (iii) $(n, q-1)=1$. A 6. Tétel megadja a (iii) feltételnek megfelelő prímosztók számát. Azt kell megmutatnunk, hogy majdnem minden n-re ezen prímosztók $1-o(1)$ része teljesíti az (i) és (ii) feltételt is. A 3. és a 4. Segédtétel szerint majdnem minden szám minden $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$-nál nagyobb prímosztója eleget tesz az (i) és (ii) feltételeknek. A $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$-nál kisebb prímosztók száma viszont majdnem minden n-re csupán $O(\log\log\log\log n)$ (lásd [1]), és ez a (iii) feltételnek megfelelő prímosztók számához,

$$(1+o(1))\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\cdot \log\log n\text{-hez}$$

képest elenyésző, ugyanis páratlan n-re

$$\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) \geqq \exp\left(-\log 8 \sum_{p|n}\frac{1}{p}\right),$$

és itt átlagban

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x}\sum_{p|n}\frac{1}{p} \leqq \frac{1}{x}\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}\cdot\frac{x}{p} < \sum_{p}\frac{1}{p^2} < 1,$$

így majdnem minden n-re

$$\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) > \exp(-\log\omega(n)) = \frac{1}{\omega(n)},$$

ahol $\omega(n)$ tetszőlegesen lassan tart végtelenhez.

Kimutatható, hogy a páratlan számok pozitív százalékára q-nak az n legnagyobb prímosztója is választható.

Most általánosítjuk a 2. Segédtételt az n tetszőleges — nemcsak prím — osztóira. A bizonyításban felhasználjuk Feit és Thompson híres tételét [2] is, miszerint minden páratlan rendű csoport feloldható.

8. Segédtétel. *Legyen $n=n_1n_2$ páratlan szám. Akkor és csak akkor lehet minden n-edrendű csoportot egy n_1-edrendű és egy n_2-edrendű részcsoportjának direkt szorzatára bontani, ha (i) n_1 és n_2 relatív prímek, (ii) nincs olyan $p|n_1$, $q^k|n_2$ (p, q prímek, $k\geqq 1$), amelyekre $p|q^k-1$, és szimmetrikusan (iii) nincs olyan $p^k|n_1$, $q|n_2$ (p, q prímek, $k\geqq 1$), amelyekre $q|p^k-1$.*

Bizonyítás. A feltételek szükségességét a következő csoportok mutatják: (i) C_n; (ii) $\{x\to ax+b | a, b\in GF(q^k),\ a^p=1\}\times C_{n/pq^k}$; (iii) ugyanez, p és q szerepét fölcserélve.

Tegyük most fel, hogy teljesülnek az (i), (ii), (iii) feltételek és legyen G egy n-edrendű csoport. Mivel n páratlan, Feit és Thompson tétele [2] szerint G feloldható. Hall tétele (lásd [3], 232. old.) szerint minden p_i prímosztóhoz kiválasztható G-nek egy P_i Sylow p_i-részcsoportja úgy, hogy minden P_i, P_j párra $P_iP_j=P_jP_i$ teljesüljön. Jelölje G_1 az n_1-et osztó prímekhez tartozó kiválasztott Sylow részcsoportok szorzatát, G_2 pedig az n_2 prímosztóihoz tartozókét. Az (i) feltétel alapján $|G_1|=n_1$ és $|G_2|=n_2$. Vegyük most n_1-nek egy p prímosztóját és a hozzá tartozó P Sylow p-részcsoportot és n_2-nek egy q prímosztóját és a megfelelő Q részcsoportot. A Sylow részcsoportoknak a Hall tételben előírt választása folytán $PQ=QP$ részcsoport. A (ii) és (iii) feltételek miatt ez a részcsoport Pazderski eredménye (lásd [5], 285. old.)

szerint nilpotens, azaz P és Q elemenként felcserélhető, $PQ=P\times Q$. Ez bármely prímosztó-párra fennáll, ezért G_1 és G_2 is elemenként felcserélhető, tehát $G=G_1\times G_2$.

Az ilyen faktorizációk vizsgálatához már sokkal mélyebb számelméleti segédtételre lesz szükségünk; ennek bizonyítását csak vázlatosan ismertetjük.

9. Segédtétel. *Legyen* $0<\varepsilon<1$. *Majdnem minden* n *számra igaz a következő:* n *minden* $(\log\log n)^{1-\varepsilon}$*-nál kisebb* d *osztójához van olyan* $q|n$ *prímszám, hogy* $q\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ d)$.

Bizonyítás. Felső becslést adunk azoknak az $n\leqq x$ számoknak a részarányára, amelyekhez van olyan $d<(\log\log x)^{1-\varepsilon}$, hogy $q\not\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ d)$ n egyetlen q prímosztójára sem. Először rögzítsük d-t! Ekkor Brun módszerét alkalmazva (lásd [4]) belátható, hogy azon n-ek részaránya x-ig, amelyek egyetlen $q\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ d)$ prímmel sem oszthatók legfeljebb

$$c_3 \prod_{\substack{q\equiv 1(d)\\ q\leqq x}}\left(1-\frac{1}{q}\right) < c_3\exp\left(-\sum_{\substack{q\equiv 1(d)\\ q\leqq x}}\frac{1}{q}\right),$$

valamely alkalmas c_3 abszolút konstanssal. Most a számtani sorozatokra vonatkozó Siegel—Walfisz tételből (lásd [6]) parciális szummációval azt nyerjük, hogy

$$\sum_{\substack{q\equiv 1(d)\\ q\leqq x}}\frac{1}{q} = (1+o(1))\frac{\log\log x}{\varphi(d)} \geqq (1+o(1))\frac{\log\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}} \geqq c_4(\log\log x)^{\varepsilon}$$

teljesül minden $d<(\log\log x)^{1-\varepsilon}$ esetén, ahol $c_4>0$ alkalmas konstans. Tehát a kivételes n-ek részaránya összesen is legfeljebb

$$(\log\log x)^{1-\varepsilon}c_3\exp\left(-c_4(\log\log x)^{\varepsilon}\right),$$

ami tart 0-hoz, ha $x\to\infty$.

Még két egyszerű észrevételre is szükségünk lesz.

10. Segédtétel. *Legyen* $0<\varepsilon<1$. *Azoknak az* n *számoknak a halmaza, amelyeknek van* $(\log\log n)^{1-\varepsilon}$ *és* $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ *közé eső prímosztójuk, legfeljebb* $\log(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ *felső sűrűségű.*

Bizonyítás. Az ismert módszerek (lásd [1]) azt adják, hogy a $(\log\log n)^{1-\varepsilon}$ és $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ közé eső prímosztók átlagos száma

$$\log\log(\log\log n)^{1+\varepsilon}-\log\log(\log\log n)^{1-\varepsilon}+o(1) = \log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+o(1).$$

Innen állításunk azonnal következik.

11. Segédtétel. *Legyen* A *pozitív szám. Azoknak a számoknak a halmaza, amelyeknek nincs* A*-nál kisebb prímosztójuk, legfeljebb* $c_5/\log A$ *sűrűségű, valamely* $c_5>0$ *konstanssal.*

Bizonyítás. E halmaz sűrűsége nyilvánvalóan

$$\prod_{p<A}\left(1-\frac{1}{p}\right) < \exp\left(-\sum_{p<A}\frac{1}{p}\right) \leqq \exp(-\log\log A+\log c_5) = \frac{c_5}{\log A}.$$

Eddigi előkészületeink annak megmutatásához kellenek, hogy a 8. Segédtételben megadott tulajdonságú felbontások általában csak néhány, a 2. Segédtételben leírt tulajdonságú „izolált” prím leválasztását jelentik.

12. Tétel. *Majdnem minden n számra igaz a következő: Ha $n=n_1n_2$ olyan faktorizáció, hogy minden n-edrendű csoport egy n_1-edrendű és egy n_2-edrendű részcsoportjának direkt szorzatára bontható, és n legkisebb prímosztója n_1-nek osztója, akkor n_2 minden prímosztója teljesíti a 2. Segédtétel feltételeit, és így minden n_2-edrendű csoport ciklikus.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy tetszőleges pozitív η-ra a tételben megfogalmazott tulajdonsággal rendelkező n-ek halmaza legalább $1-\eta$ alsó sűrűségű. Válaszszuk ε-t $(0<\varepsilon<1)$ és A-t $(A>0)$ úgy, hogy

$$\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+\frac{c_5}{\log A}<\eta$$

legyen. Vegyük azoknak az n számoknak a halmazát, amelyekre a következők mindegyike teljesül:

(a) n minden $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$-nál nagyobb prímosztója a prímtényezős felbontásban első hatványon szerepel;

(b) Nincsenek olyan q, r prímek és $k\geqq 1$, hogy $qr^k|n$, $q>(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ és $r^k\equiv 1 \pmod q$;

(c) n minden $d<(\log\log n)^{1-\varepsilon}$ osztójához van olyan $q|n$ prím, hogy $q\equiv 1 \pmod d$;

(d) n-nek nincs $(\log\log n)^{1-\varepsilon}/A$ és $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ közé eső prímosztója ; és

(e) n-nek van A-nál kisebb prímosztója.

A 3.. 4., 9., 10. és 11. Segédtételek szerint ennek a halmaznak az alsó sűrűsége legalább

$$1-\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{c_5}{\log A}>1-\eta.$$

Belátjuk, hogy az ilyen tulajdonságú n számokra teljesül a tételbeli állítás. Legyen n egy ilyen szám, és jelölje legkisebb prímosztóját p, (e) szerint $p<A$. Ha $r<(\log\log n)^{1-\varepsilon}/A$ n-nek tetszőleges prímosztója, akkor (c) szerint van olyan $q|n$ prím, hogy $rp|q-1$. A 8. Segédtétel (ii) feltétele szerint ekkor $q|n_1$, a (iii) feltétel szerint pedig r is n_1 prímosztója. Így (i) miatt n_2-nek nincs $(\log\log n)^{1-\varepsilon}/A$-nál kisebb prímosztója. A (d) tulajdonság miatt tehát n_2 minden prímosztója nagyobb mint $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$. Legyen $q|n_2$ prím. Ekkor a 2. Segédtétel feltételei közül q-ra teljesül (i) az (a) tulajdonság szerint, (ii) pedig a (b) tulajdonság szerint. Végül $(q-1, n)=1$ is fennáll, hiszen a 8. Segédtétel (ii) pontja szerint $(q-1, n_1)=1$, másrészt (b) alapján $(q-1, n_2)=1$ is teljesül.

Így a 2. Segédtétel értelmében megmutattuk tehát, hogy minden $q|n_2$ prímszámra minden n-edrendű csoport Sylow q-részcsoportja q-adrendű és direkt tényező. Ezért az n_2-edrendű részcsoport ciklikus csoportok direkt szorzata, tehát maga is ciklikus.

Bár dolgozatunkban aszimptotikus kérdésekkel foglalkoztunk, végezetül hadd említsünk meg — bizonyítás nélkül — két pontos eredményt is, amelyek talán érzékeltetik a kérdés bonyolultságát. Nyilvánvalóan minden prímhatvány-rendű ciklikus csoport felbonthatatlan. Eredményeink a nemtriviális esetek közül a két szélsőségre, a négyzetmentes számokra, illetve a csak két különböző prímmel osztható számokra vonatkoznak.

13. Tétel. *Legyen n négyzetmentes szám. Pontosan akkor létezik n-edrendű felbonthatatlan csoport, ha n prímosztóinak halmaza két diszjunkt részre, P-re és Q-ra bontható úgy, hogy az a páros gráf, amelynek csúcshalmaza* $P\cup Q$, *élhalmaza* $\{\{p,q\}: p\in P, q\in Q, p|q-1\}$ *összefüggő legyen.*

14. Tétel. *Legyen* $n=p^a q^b$, $r=\operatorname{ord} p \pmod q$, $s=\operatorname{ord} q \pmod p$. *Pontosan akkor létezik n-edrendű felbonthatatlan csoport, ha az alábbiak valamelyike teljesül:*

(1) $r=1$;

(2) r *páros*, $a\geqq r$;

(3) $r\geqq 3$, *páratlan és* $a=r$ *vagy* $a\geqq 2r$; *illetve szimmetrikusan:*

(1′) $s=1$;

(2′) s *páros*, $b\geqq s$;

(3′) $s\geqq 3$, *páratlan és* $b=s$ *vagy* $b\geqq 2s$.

A dolgozat megfogalmazásában nyújtott segítségéért köszönetet mondunk Pintz Jánosnak és Szalay Mihálynak.

IRODALOM

[1] P. Erdős: On the distribution of prime divisors, *Aequationes Math.* **2** (1969), 177—183.
[2] W. Feit, J. G. Thompson: Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 755—1029.
[3] D. Gorenstein: *Finite groups,* Harper and Row, New York, 1968.
[4] H. Halberstam, H. E. Richert: *Sieve methods,* Academic Press, 1974.
[5] B. Huppert: *Endliche Gruppen, I,* Springer, 1967.
[6] K. Prachar: *Primzahlverteilung,* Springer, 1957.
[7] C. Sudler: Query #331, *Notices Amer. Math. Soc.* **32** (1985), 472.

(Beérkezett: 1986. július 16-án)

О ПОРЯДКАХ ПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

П. ЭРДЁШ и П. П. ПАЛФИ

Неразложимые группы четных порядков легко построятся (Утверждение 1). С другой стороны мы покажем, что почти все нечетные числа n (т.е. за исключением множества плотности 0) имеют

$$(1+o(1))\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\cdot\log\log n$$

такие простые делители что соответствующая силовская подгруппа является прямым множителем в каждой группе порядка n (Теорема 7). В теоретико-групповой части доказателства мы покажем что простой делитель p числа n обладает этим свойством тогда и только тогда, когда (i) n не делится на p^2, (ii) если n делится на q^k (q простое, $k\geqq 1$) тогда $p\nmid q^k-1$, и (iii) нод $(p-1,n)=1$ (Лемма 2). Для почти всех чисел n каждый простой делитель больше чем $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ удовлетворяет (i) и (ii) (Леммы 3, 4). Суть теоретико-числовой части доказательства — определение число простых делителей с свойством (iii) (Теорема 6).

Пусть $n=n_1n_2$ — такое разложение что всякая группа порядка n разлагается в прямое произведение подгрупп порядков n_1 и n_2. Тогда для почти всех чисел n один из множителей всегда является циклической группой (Теорема 12).

ON THE ORDER OF DIRECTLY INDECOMPOSABLE GROUPS

P. ERDŐS and P. P. PÁLFY

Indecomposable groups of even order are easily constructed (Prop. 1). In contrast, we show that almost all odd numbers n (i.e. with the exception of a set of density 0) have

$$(1+o(1)) \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p-1}\right) \log\log n$$

prime divisors such that the corresponding Sylow subgroup is a direct factor in each group of order n (Theorem 7). In the group theoretic part of the proof we show that a prime divisor p of n has this property iff (i) p^2 does not divide n; (ii) if q^k (q prime, $k\geqq 1$) divides n then $p \nmid q^k-1$; and (iii) $\gcd(p-1, n)=1$ (Lemma 2). For almost all n all prime divisors exceeding $(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ satisfy (i) and (ii) (Lemmas 3,4). The bulk of the number theoretic part of the proof is the determination of the number of prime divisors with property (iii) (Theorem 6).

If $n=n_1n_2$ is a factorization such that all groups of order n decompose into the direct product of subgroups of order n_1 and n_2, it turns out that for almost all n one of the direct factors is always a cyclic group (Theorem 12).

EGY SZABÁLYOS SOKSZÖGEKRE VONATKOZÓ TÉTELRŐL

RÓKA SÁNDOR

A Matematikai Lapokban jelent meg egy cikk Szabó Sándortól [1], melyben egy, a szabályos sokszögekre vonatkozó észrevételét bizonyítja. Az alábbiakban erre rövid bizonyítást adok. Úgy vélem, ez a bizonyítás a tétel második felére egyszerűbb is az eredetinél.

Tétel. *Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_n$ egy körvonalat egyenlő hosszúságú ívekre bontó pontok. A $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ szakaszok közt, ha n páros, van két párhuzamos, ha n páratlan, akkor köztük pontosan kettő párhuzamos nem lehet.*

Bizonyítás. A sokszög csúcsait számozzuk meg, mondjuk pozitív körüljárás szerint, a $0, 1, \ldots, n-1$ számokkal. A töröttvonalat az $a_n=a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ számsorozat egyértelműen meghatározza. Ezt a sorozatot úgy kapjuk, hogy a töröttvonalat a $P_n=P_0$ csúcsából indulva bejárjuk, s a sokszög érintett csúcsaihoz tartozó számokat felírjuk. Az $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ számok a $0, 1, \ldots, n-1$ számok egy permutációját alkotják. Mikor párhuzamos az (a_i, a_{i+1}) számpárhoz tartozó szakasz az (a_j, a_{j+1}) számpárhoz tartozó szakasszal? Pontosan akkor, ha az a_i-hez tartozó csúcs az a_j csúcstól akkora távolságra van, mint az a_{i+1} csúcs az a_{j+1} csúcstól, és a két szakasz nem metszi egymást. Az [1]-ben is szereplő megfontolással könnyen belátható, hogy ez az $a_i+a_{i+1} \equiv a_j+a_{j+1}$ (mod n) feltétellel ekvivalens. A $b_0 \equiv a_0+a_1, b_1 \equiv a_1+a_2, \ldots$ $\ldots, b_{n-1} \equiv a_{n-1}+a_n$ (mod n) maradékosztályok közt két egyenlő tehát két párhuzamos szakaszt jelent.

Legyen n páros és tegyük fel, hogy a $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ maradékosztályok mind különbözők, azaz teljes maradékrendszert alkotnak. Ekkor

$$(1) \qquad b_0+b_1+\ldots+b_{n-1} \equiv 2\cdot(a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}) \pmod{n}.$$

Ez a feltevés miatt $\frac{n\cdot(n-1)}{2} \equiv 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ (mod n) alakban írható, vagyis $\frac{n}{2}\cdot(n-1) \equiv 0$ (mod n), lenne ami nem teljesülhet, ha n páros. Ezért a maradékosztályok közt van megegyező, a szakaszok közt van két párhuzamos.

Legyen n páratlan és tegyük fel, hogy a $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ maradékosztályok közt pontosan kettő megegyezik $b_i \equiv b_j$ (mod n), a többi páronként különböző. Ekkor a teljes maradékrendszerből egy maradékosztály hiányzik, jelölje ezt r. Most az (1) összefüggés a következőképp írható:

$$n\cdot\frac{n-1}{2}-r+b_i\equiv 0 \pmod n$$

azaz $r\equiv b_i \pmod n$.
Ellentmondásra jutottunk.

IRODALOM

[1] SZABÓ SÁNDOR: Egy szabályos sokszögekre vonatkozó észrevétel, *Matematikai Lapok* **28** (1977—1980), 199—202.

(Beérkezett: 1986. július 21-én)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Ш. РОКА

ON A THEOREM ON REGULAR POLYGONS

S. RÓKA

HATVÁNYOK ELŐÁLLÍTÁSA BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓKKAL

NASZÁDI GÁBOR

A Pascal-háromszög tanulmányozása során könnyen észrevehető, hogy az $\binom{N}{2}$ megfelelő „sorában" két egymást követő elem összege mindig négyzetszám:

$$\binom{N}{2}+\binom{N+1}{2}=N^2.$$

Próbálkozás útján az is látszik, hogy ha az $\binom{N}{3}$ „sorából" három egymást követő elemet az 1, 4, 1 együtthatókkal súlyozva adunk össze, N^3-t kapunk.

$$1\cdot\binom{N}{3}+4\cdot\binom{N+1}{3}+1\cdot\binom{N+2}{3}=N^3.$$

Borza László vetette fel általánosan a kérdést: $\binom{N}{k}$ „sorában" k db. egymást követő tagot milyen súlyokkal kell ellátni, hogy összegük minden N-re N^k legyen. Vagyis olyan $C(k,j)$ számokat keresünk $(j=1, 2, \ldots, k)$, amelyekkel

$$N^k=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{N+j}{k}C(k,j+1) \tag{1}$$

teljesül minden N-re!

Először a $C(k,j)$ együtthatókra egy rekurzív előállítást mutatok (I.). Majd az egyértelműség igazolása (II.) után az együtthatók explicit előállításának egyik lehetősége következik (III.). Végül a $C(k,j)$-k néhány érdekes tulajdonságára szeretném felhívni a figyelmet (IV.).

I. *A $C(k,j)$-k rekurzív előállítása*

$${}_{1}1_{1}$$
$${}_{2}1_{1}\quad {}_{1}1_{2}$$
$${}_{3}1_{1}\quad {}_{2}4_{2}\quad {}_{1}1_{3}$$
$${}_{4}1_{1}\quad {}_{3}11_{2}\quad {}_{2}11_{3}\quad {}_{1}1_{4}$$
$${}_{5}1_{1}\quad {}_{4}26_{2}\quad {}_{3}66_{3}\quad {}_{2}26_{4}\quad {}_{1}1_{5}$$
$${}_{6}1_{1}\quad {}_{5}57_{2}\quad {}_{4}302_{3}\quad {}_{3}302_{4}\quad {}_{2}57_{5}\quad {}_{1}1_{6}$$

Azt állítjuk, hogy a C együtthatók rekurzív módon a mellettük levő két index, illetve a fölöttük levő két elem segítségével állíthatók elő:

$$C(k,j) = j \cdot C(k-1,j) + (k+1-j) \cdot C(k-1,j-1).$$

Továbbá $C(1,1)=1$, értelemszerűen $C(k,0)=0$, valamint $j>k$-ra is $C(k,j)=0$.

Például: 66 26

$$3 \cdot 66 + 4 \cdot 26 = 302.$$

${}_3C_4$

A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük. $k=1$-re (1) triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy k-ra is igaz; azaz (1)-et részletesebben kiírva:

$$N^k = \binom{N}{k} C(k,1) + \binom{N+1}{k} C(k,2) + \binom{N+2}{k} C(k,3) + \ldots + \binom{N+i}{k} C(k,i+1) + \ldots$$

$$+ \binom{N+k-2}{k} C(k,k-1) + \binom{N+k-1}{k} C(k,k).$$

Megmutatjuk, hogy

$$N^{k+1} = \binom{N}{k+1} C(k+1,1) + \binom{N+1}{k+1} C(k+1,2) + \binom{N+2}{k+1} C(k+1,3) + \ldots$$

$$+ \binom{N+i}{k+1} C(k+1,i+1) + \binom{N+i+1}{k+1} C(k+1,i+2) + \ldots$$

$$+ \binom{N+k-1}{k+1} C(k+1,k) + \binom{N+k}{k+1} C(k+1,k+1),$$

ha a C együtthatókat a rekurzióval származtatjuk. A jobb oldal ekkor

$$\binom{N}{k+1} [1 \cdot C(k,1) + (k+2-1) \cdot C(k,0)] +$$

$$+ \binom{N+1}{k+1} [2 \cdot C(k,2) + (k+2-2) \cdot C(k,1)] +$$

$$+ \binom{N+2}{k+1} [3 \cdot C(k,3) + (k+2-3) \cdot C(k,2)] + \ldots$$

$$+ \binom{N+i}{k+1} [(i+1) \cdot C(k,i+1) + (k+2-i-1) \cdot C(k,i)] +$$

$$+ \binom{N+i+1}{k+1} [(i+2) \cdot C(k,i+2) + (k+2-i-2) \cdot C(k,i+1)] + \ldots$$

$$+ \binom{N+k-1}{k+1} [k \cdot C(k,k) + (k+2-k) \cdot C(k,k-1)] +$$

$$+ \binom{N+k}{k+1} [(k+1) \cdot C(k,k+1) + C(k,k)].$$

Ha ezt most a C együtthatók szerint rendezzük:

$$C(k,1)\left[1\cdot\binom{N}{k+1}+(k+2-2)\cdot\binom{N+1}{k+1}\right]+C(k,2)\times$$

$$\times\left[2\cdot\binom{N+1}{k+1}+(k+2-3)\cdot\binom{N+2}{k+1}\right]+\ldots+C(k,i+1)\left[(i+1)\cdot\binom{N+i}{k+1}+\right.$$

$$\left.+(k-i)\cdot\binom{N+i+1}{k+1}\right]+\ldots+C(k,k)\left[k\cdot\binom{N+k-1}{k+1}+\binom{N+k}{k+1}\right].$$

Könnyű megmutatni, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezések éppen N-szeresei az (1) indukciós feltevésben levő C-k együtthatóinak. Így az egész összeg N-szerese lesz (1)-nek. Ezzel az állítást igazoltuk.

II. Tegyük fel, hogy létezik N^k-nak még egy, az első formulában megkívánt előállítása. Legyenek ezek az együtthatók $B(k,j)$-k. Mivel az előállítás minden N-re igaz kell hogy legyen,

$$1^k=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{1+j}{k}B(k,j+1),$$

$$2^k=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2+j}{k}B(k,j+1),$$

$$\vdots$$

$$k^k=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+j}{k}B(k,j+1);\quad \text{azaz}$$

$$\begin{aligned}
k^k &= \binom{k}{k}B(k,1)+\binom{k+1}{k}B(k,2)+\binom{k+2}{k}B(k,3)+\ldots+\binom{k+k-1}{k}B(k,k),\\
(k-1)^k &= 0+\binom{k}{k}B(k,2)+\binom{k+1}{k}B(k,3)+\ldots+\binom{k+k-2}{k}B(k,k),\\
&\vdots\\
1^k &= 0+0+0+\ldots+\binom{k}{k}B(k,k).
\end{aligned}$$

Ez k darab lineárisan független egyenlet (mert az egyenletrendszer determinánsa 1), $B(k,j)$-kre nézve. Tehát az egyenletrendszer egyértelműen oldható meg és így $B(k,j)=C(k,j)$ minden j-re. Ez természetesen minden k-ra érvényes. Azaz a hatványok (1)-ben megkívánt előállítása egyértelmű.

III. Ez utóbb felírt egyenletrendszer lehetőséget nyújt a C együtthatók explicit előállítására is. Ugyanis az egyenletrendszer determinánsának értéke 1, tehát a Cramer-szabály szerint:

$$C(k,j)=\begin{vmatrix} \binom{k}{0} & 0 & 0 & \dots 1^k \dots & 0 \\ \binom{k+1}{1} & \binom{k}{0} & 0 & \dots 2^k \dots & 0 \\ \binom{k+2}{2} & \binom{k+1}{1} & \binom{k}{0} & \dots 3^k \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{k+k-1}{k-1} & \binom{k+k-2}{k-2} & \binom{k+k-3}{k-3} & \dots k^k \dots & \binom{k}{0} \end{vmatrix}.$$

$$\uparrow$$
j. oszlop

E nehezen kezelhető, de szép determináns helyett tekintsük a következő explicit formulát.

$$(2) \qquad C(k,j)=\sum_{i=0}^{k-j}(k-j+1-i)^k\binom{k+1}{i}(-1)^i.$$

Ennek a képletnek a helyessége ugyan igazolható a fent látható determináns ügyes kifejtésével is, de most mi ahelyett, hogy ezt a mégis körülményes utat választanánk, közvetlenül a rekurzióval bizonyítunk.

$C(1, 1)$-re a formula helyes, hiszen $\sum\limits_{i=0}^{0} 1^1\binom{2}{0}(-1)^i=1$.

Emlékezzünk a rekurzív megadásra:

$$C(k,j)=j\cdot C(k-1,j)+(k+1-j)\cdot C(k-1,j-1).$$

Ennek alapján csak azt kell igazolnunk, hogy a (2) explicit formula kielégíti ezt a rekurziót, azaz

$$\sum_{i=0}^{k-j}(k-j+1-i)^k\binom{k+1}{i}(-1)^i=$$

$$=j\sum_{i=0}^{k-1-j}(k-j-i)^{k-1}\binom{k}{i}(-1)^i+(k+1-j)\sum_{i=0}^{k-j}(k-j+1-i)^{k-1}\binom{k}{i}(-1)^i.$$

A bal oldalon az i-edik tag megegyezik a jobb oldali $(i-1)$-edik és i-edik tag összegével. Ugyanis a

$$(k-j+1-i)^k\binom{k+1}{i}=-j(k-j-i+1)^{k-1}\binom{k}{i-1}+(k+1-j)(k-j+1-i)^{k-1}\binom{k}{i}$$

egyenlőség a $(k-j+1-i)^{k-1}$-gyel történő egyszerűsítés után, a binomiális együtthatók beírásával már könnyen bizonyítható.

IV. Végezetül a C együtthatók néhány figyelemre méltó tulajdonságát bizonyítjuk.

a) $$\sum_{j=1}^{k} C(k,j)=k! \quad \text{minden } k\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Mivel

$$N^k = \binom{N}{k} C(k, 1) + \binom{N+1}{k} C(k, 2) + \ldots + \binom{N+k-1}{k} C(k, k),$$

$$N^k k! = N(N-1)(N-2)\ldots(N-k+1)\cdot C(k, 1) + (N+1)N(N-1)\ldots$$
$$\ldots(N-k+2)\cdot C(k, 2) + \ldots + (N+k-1)(N+k-2)\ldots N\cdot C(k, k),$$

ezért

$$N^k [k! - (C(k, 1) + C(k, 2) + \ldots + C(k, k))]$$

k darab maximum $(k-1)$-ed fokú polinom összege.

Mivel az egyenlőségnek minden N-re igaznak kell lennie, ez csak úgy lehetséges, ha a bal oldali szögletes zárójelben álló kifejezés 0, de ez éppen a bizonyítandó állítás.

b) $\quad C(p-1, j) \equiv 1 \pmod{p}, \quad j = 1, 2, \ldots, p-1 \quad$ (p prím).

c) $\quad C(p, j) \equiv 1 \pmod{p}, \quad j = 1, 2, \ldots, p \quad$ (p prím).

Bizonyítás.

b) $\quad C(p-1, j) = \sum_{i=0}^{p-1-j} (p-1-j+1-i)^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^i \quad$ (explicit képlet).

Jól látszik, hogy az összegben az első tag ($i=0$) egyet ad maradékul mod p, mert $(p-j, p)=1$, tehát $(p-j)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (kis Fermat-tétel), viszont az összes többi tag $\equiv 0 \pmod{p}$, mert $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$, ha $0<k<p$. Így az összeg $\equiv 1 \pmod{p}$.

c) $\quad C(p, j) = j\cdot C(p-1, j) + (p+1-j)\cdot C(p-1, j-1)\quad$ a rekurzió szerint.

$$C(p-1, j) \equiv 1 \pmod{p}, \quad C(p-1, j-1) \equiv 1 \pmod{p}$$

az előbb bizonyítottak miatt, így

$$C(p, j) \equiv j\cdot 1 + (p+1-j)\cdot 1 \pmod{p},$$

azaz

$$C(p, j) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Végül megjegyezzük, hogy (1) és (2) összeolvasásával az alábbi szép azonosságot nyerjük:

$$N^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{N+j}{k} \sum_{i=0}^{k-j-1} (k-j-i)^k \binom{k+1}{i} (-1)^i.$$

Érdekes lenne erre közvetlen kombinatorikai bizonyítást találni.

(Beérkezett: 1986. december 15-én)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ ИЗ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Г. НАСАДИ

Рассматривается представление (1) числа N^k. Коэффициенты $C(k, j+1)$ единственно существуют. Доказываются формулы (2) и $C(k,j)=j\cdot C(k-1,j)+(k+1-j)\cdot C(k-1,j-1)$, а еще несколько других свойств чисел $C(k,j)$.

REPRESENTATION OF POWERS USING BINOMIAL COEFFICIENTS

G. NASZÁDI

In this paper the representation (1) of N^k is investigated. The coefficients $C(k, j+1)$ exist and are unique. We prove the recursion $C(k,j)=j\cdot C(k-1,j)+(k+1-j)\cdot C(k-1,j-1)$, and also the explicit formula (2). Some further properties are considered, as well.

FELADATROVAT

SZERKESZTI: LACZKOVICH MIKLÓS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Anker köz 1—3., I. em. 111., 1061. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

234. feladat. Tetszőleges valós x esetén definiáljuk az $a_n(x)$ sorozatot az alábbi rekurzióval:

$$a_1(x) = x \quad \text{és} \quad a_{n+1}(x) = a_n(x) - \frac{1}{a_n(x)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

a) Mutassuk meg, hogy ha az $a_n(x)$ sorozat végtelen (azaz $a_n(x) \neq 0$ minden $n \geqq 1$-re), akkor a sorozat végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ előjelsorozat végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz, akkor létezik egy és csak egy olyan x valós szám, amelyre az $a_n(x)$ sorozat végtelen és $a_n(x)$ előjele e_n minden $n \geqq 1$-re.

LACZKOVICH MIKLÓS

235. feladat. Mutassuk meg, hogy az $xy+z=3$, $xz+y=1$, $yz+x=0$ egyenletrendszer gyökjelekkel megoldhatatlan, bár van valós x, y, z megoldása.

LACZKOVICH MIKLÓS és PETRUSKA GYÖRGY

236. feladat. Jelöljük A_n-nel azon pontok maximális számát $\mathbf{R}^n$-ben, melyek közül bármely kettő távolsága 0,99 és 1 közé esik. Mutassuk meg, hogy alkalmas $c > 1$-gyel

$$A_n > c^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

LACZKOVICH MIKLÓS

MEGOLDOTT FELADATOK

220. feladat. Egy $GF(p)$ fölötti $f(x, y)$ polinomnak és mindkét parciális deriváltjának az értéke 0 minden $(x, y) \neq (0, 0)$, $x, y \in GF(p)$ elempárra, de $f(0, 0) \neq 0$. Bizonyítandó, hogy $\deg f \geqq 3p-3$.

ALEXANDER SCHRIJVER és LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és válasszunk olyan f ellenpéldát, melyben az x változó foka a lehető legkisebb. Írjuk fel a polinomot

$$f(x, y) = f_0(y) + f_1(y)x + \dots + f_k(y)x^k$$

alakban. Vegyük észre, hogy az $(x^p - x)^2$ polinomnak és mindkét parciális deriváltjának az értéke minden $x \in GF(p)$ helyettesítésre 0. Így ha $k \geqq 2p$, akkor az $(x^p - x)^2$ polinom alkalmas többszörösét $f(x, y)$-ból levonva, csökkenteni tudjuk benne x fokát, ami ellentmond a feltételnek. Így tehát $k \leqq 2p-1$.

Másrészt az $f(x, 0)$ egyváltozós polinom nem azonosan 0, de minden $x \neq 0$ hely kétszeres gyöke. Így $f(x, 0)$ foka legalább $2p-2$, és ezért $k \geqq 2p-2$.

Mivel $\deg f < 3p-3$, emiatt $\deg f_k < p-1$ és így van olyan $c \in GF(p) - \{0\}$ elem, hogy $f_k(c) \neq 0$. De akkor $f(x, c)$ olyan egyváltozós polinom, mely deriváltjával együtt minden $GF(p)$-beli elemen eltűnik, nem azonosan 0, és foka kisebb, mint $2p$. Ez nyilvánvalóan lehetetlen.

Megjegyzés. Az

$$f(x, y) = (x^{p-1} - 1)(y^{p-1} - 1)((x+y)^{p-1} - 1)$$

polinom mutatja, hogy a tétel éles.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

221. feladat. Egy n dimenziós kockát olyan hipersíkkal metszünk, mely átmegy a kocka középpontján, de nem megy át egyetlen csúcsán sem. Bizonyítandó, hogy a metszet csúcsainak száma legalább 2^{n-1}.

BÁRÁNY IMRE

1. Megoldás. Legyen a szóban forgó kocka az egységkocka, amelynek csúcsai az $(a_1, \dots, a_n)$ pontok, ahol $a_i = 0, 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Az $\bar{a} = 1 - a$ jelölést bevezetve az $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ csúccsal átellenes csúcs az $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ pont lesz. A kocka élgráfjában bármely csúcs összeköthető n hosszúságú úttal az átellenes csúccsal. Tekintsük például azt az $L_{\mathbf{a}}$ utat, amelynek csúcspontjai

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n),\ (a_1, \dots, a_{n-1}, \bar{a}_n),\ (a_1, \dots, a_{n-2}, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n),\ \dots,$$
$$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \bar{\mathbf{a}}.$$

A kocka bármely éle pontosan két $L_{\mathbf{a}}$ útban szerepel. Ugyanis legyen

$$(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n),\ (a_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, a_n)$$

a kocka egy tetszőleges élének két csúcspontja. Könnyen láthatóan ezt az élt csakis az $(a_1, \dots, a_j, \bar{a}_{j+1}, \dots, \bar{a}_n)$ és $(a_1, \dots, \bar{a}_j, \bar{a}_{j+1}, \dots, \bar{a}_n)$ csúcsokból kiinduló út mentén járjuk be. Ha a kockát egy középpontján átmenő S hipersíkkal metsszük, akkor az átellenes csúcsok az S által meghatározott különböző féltérbe esnek, és így S mindegyik $L_{\mathbf{a}}$ utat metszi. Mivel ezen utak száma 2^n és minden él két útban szerepel, így S legalább 2^{n-1} élt metsz. A metszéspontok mindegyike csúcsa lesz a kocka és S metszetének, amivel a bizonyítást befejeztük.

BACSÓ GÁBOR, BORBÉLY ALBERT és SARKADI KÁROLY megoldása

2. Megoldás. Jelöljük az n dimenziós egységkocka csúcsainak halmazát K_n-nel. Legyen S olyan hipersík, amely átmegy a kocka középpontján, de nem megy át K_n egyetlen elemén sem, és jelöljük H-val az S által meghatározott egyik féltérbe eső csúcsok halmazát. Elég belátni, hogy a kockának legalább 2^{n-1} éle fut a H és a $K_n \setminus H$ halmazok között. Ugyanis S ezen élek mindegyikét metszi, és e metszéspontok mindegyike csúcspontja lesz a kocka és S metszetének.

A fenti állításnál többet bizonyítunk. Azt fogjuk megmutatni, hogy *tetszőleges* $H \subset K_n$-re a H és $K_n \setminus H$ között futó élek száma legalább $\min(|H|, |K_n \setminus H|)$. (Mivel a fenti esetben $|H| = 2^{n-1}$, ezért ott 2^{n-1} élt kapunk.) Az állítás $n=1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy n-re igaz, és legyen $H \subset K_{n+1}$ tetszőleges. Könnyű belátni, hogy K_{n+1} élgráfját úgy kapjuk, hogy K_n élgráfját felvesszük két diszjunkt példányban (legyenek ezek A és B), majd A és B között behúzunk egy elsőfokú faktort. Legyen $|A \cap H| = a$ és $|B \cap H| = b$; feltehetjük, hogy $a \leqq b$. Ha $a \leqq 2^{n-1}$, $b \leqq 2^{n-1}$, akkor az indukciós feltevés szerint $A \cap H$ és $A \setminus H$ között, illetve $B \cap H$ és $B \setminus H$ között legalább a, illetve b él fut. Így a H és $K_{n+1} \setminus H$ között futó élek száma legalább $a+b = |H|$.

Most tegyük fel, hogy $a \leqq 2^{n-1}$ és $b > 2^{n-1}$. Az indukciós feltevés szerint az $A \cap H$ és $A \setminus H$ között, illetve $B \cap H$ és $B \setminus H$ között futó élek száma legalább a, illetve $2^n - b$. Az A és B futó élek közül $A \cap H$-ból a számú, $B \cap H$-ból pedig b számú él indul ki. Így ezek között van legalább $b-a$ olyan él, amelynek egyik végpontja B-be esik, másik végpontja pedig $A \setminus H$-ba. Összesen tehát a H és $K_{n+1} \setminus H$ között futó élek száma legalább

$$a + (2^n - b) + (b - a) = 2^n \geqq \min(|H|, |K_{n+1} \setminus H|).$$

Végül, ha $a > 2^{n-1}$ és $b > 2^{n-1}$, akkor az $A \cap H$ és $A \setminus H$ között, illetve $B \cap H$ és $B \setminus H$ között futó élek száma legalább $2^n - a$, illetve $2^n - b$, tehát a H és $K_{n+1} \setminus H$ között futó élek száma legalább

$$(2^n - a) + (2^n - b) = 2^{n+1} - (a+b) = |K_{n+1} \setminus H|.$$

LACZKOVICH MIKLÓS

Megjegyzés. Bárány és Lovász bebizonyították, hogy ha az n dimenziós kockát olyan d dimenziós altérrel metszük, amely átmegy a kocka középpontján, de nem metszi a kocka $n-d-1$ dimenziós lapjait, akkor a metszetnek legalább 2^d csúcspontja van. (I. Bárány, L. Lovász: Borsuk's theorem and the number of facets of centrally symmetric polytopes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **40** (1982), 323—329.)

222. feladat. Hány Riemann-integrálható függvény van a [0, 1] intervallumon, ha két függvényt azonosnak tekintünk, ha

(a) egy Lebesgue szerint 0 mértékű,

(b) egy Jordan szerint 0 mértékű halmazon különböznek?

GEHÉR LÁSZLÓ

1. Megoldás. Jelölje a két számosságot $\varkappa_a$, illetve $\varkappa_b$. Mivel a konstans függvények az (a) feltétel szerint is különbözőek, az összes valós függvények számossága pedig 2^c, ezért nyilván $c \leqq \varkappa_a \leqq \varkappa_b \leqq 2^c$ (c jelöli a kontinuum számosságot). Megmutatjuk, hogy $\varkappa_a = c$ és $\varkappa_b = 2^c$. Minden Riemann-integrálható függvény Lebesgue-mérhető, így $\varkappa_a = c$ bizonyításához elég megmutatni, hogy a Lebesgue-mérhető függvények számossága (egyenlőnek tekintve két függvényt, ha (a) teljesül) legfeljebb c. Luzin tétele szerint bármely Lebesgue-mérhető f függvényhez hozzárendelhetjük zárt halmazok egy F_n sorozatát úgy, hogy $F_n \subset [0, 1]$, $\lambda(F_n) > 1 - \frac{1}{n}$ és az $f|F_n$ megszorítás folytonos minden $n = 1, 2, \dots$ esetén. Ha az f_1 és f_2 függvényekhez ugyanazt az F_n

sorozatot rendeljük, és $f_1|F_n=f_2|F_n$ minden n-re, akkor $f_1=f_2$ majdnem mindenütt. Mivel [0, 1] zárt részhalmazainak száma c, és egy adott zárt halmazon értelmezett folytonos függvények száma (mint általában egy szeparábilis metrikus téren értelmezett folytonos függvények száma) legfeljebb c, ezért azon (F, g) párok száma, ahol $F\subset[0, 1]$ zárt és $g: F\to\mathbf{R}$ folytonos, $c\cdot c=c$. Az ilyen párokból kiválasztható sorozatok száma $c^{\aleph_0}=c$, és így a fenti okoskodásból $\varkappa_a\leqq c$ következik.

$\varkappa_b=2^c$ bizonyításához konstruálunk 2^c Riemann-integrálható függvényt úgy, hogy bármely kettő különbözzön [0, 1] egy mindenütt sűrű részhalmazán. Legyen $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ [0, 1] racionális végpontú részintervallumainak egy sorozatba rendezése. Legyen $P_1\subset I_1$ nullmértékű és perfekt. Ha a nullmértékű, perfekt P_k halmazokat már definiáltuk minden $k<n$-re, akkor legyen P_n az $I_n\setminus\bigcup_{k<n} P_k$ halmaz egy nullmértékű, perfekt részhalmaza. Így indukcióval definiáltuk a páronként diszjunkt P_n halmazokat minden $n=0, 1, \ldots$-re. Ha f: $[0, 1]\to\mathbf{R}$ olyan, hogy $x\in[0, 1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ esetén $f(x)=0$, $x\in P_n$ esetén pedig $0\leqq f(x)\leqq 1/n$ $(n=1, 2, \ldots)$, akkor f korlátos és majdnem mindenütt folytonos, tehát Lebesgue kritériuma szerint Riemenn-integrálható. Tudjuk, hogy $|P_n|=c$; legyen φ_n $\mathbf{R}$-nek P_n-re képező bijekciója. Tetszőleges $H\subset\mathbf{R}$-re legyen

$$f_H(x)=\begin{cases}1/n, & x\in\varphi_n(H) \quad (n=1, 2, \ldots)\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

A fenti megjegyzés szerint f_H Riemann-integrálható minden $H\subset\mathbf{R}$-re. Ha $H_1\neq H_2$ és

$$A=\{x\in[0, 1]; f_{H_1}(x)\neq f_{H_2}(x)\},$$

akkor nyilván $A\cap P_n\neq\emptyset$ minden n-re. Mivel $P_n\subset I_n$, így A mindenütt sűrű [0, 1]-ben. Az f_H $(H\subset\mathbf{R})$ függvények száma 2^c, amivel $\varkappa_b=2^c$ bizonyítását befejeztük.

LACZKOVICH MIKLÓS

2. Megoldás. Az (a) rész ekvivalencia-relációja által indukált osztályok száma c, hiszen a konstans függvények Riemann-integrálhatóak és más-más osztályba tartoznak, másrészt az $\int_0^x f(t)\,dt$ integrálfüggvény segítségével az osztályok halmaza egy-egyértelműen leképezhető az abszolút folytonos függvények c számosságú halmazának egy részhalmazára.

A (b) kérdés megválaszolásához válasszunk egy c számosságú, nulla Lebesgue-mértékű zárt halmazt [0, 1]-ben (a Cantor halmaz ilyen). Könnyen belátható, hogy ebből kiválaszthatunk egy c számosságú H halmazt, amelyben bármely két elem különbsége irracionális. Tetszőleges $A\subset H$ esetén jelölje S_A az $x+r$ alakú számok halmazát, ahol $x\in A$, r racionális és $x+r\in[0, 1]$. Mivel S_A lefedhető egy nullmértékű zárt halmaz racionális eltoltjaival, így megadható egy olyan f_A függvény, amely S_A-n pozitív, S_A komplementerén nulla, továbbá S_A komplementerén folytonos. Ekkor f_A majdnem mindenütt folytonos, tehát Riemann-integrálható. Ha A, B a H halmaz különböző részhalmazai, akkor az f_A és f_B függvények egy mindenütt sűrű halmazon különböznek. Így az $\{f_A : A\subset H\}$ függvénycsalád 2^c, a (b) feltétel szerint különböző Riemann-integrálható függvényt tartalmaz.

SZÁZ GÉZA

Megjegyzés. E megoldás (a) részéből szintén következik, hogy a Lebesgue-mérhető függvények halmaza (egyenlőnek tekintve két függvényt, ha Lebesgue szerint nullmértékű halmazon különböznek) c számosságú. Tekintsük ugyanis az $f \to \int_0^x \text{arc tg}\,(f)\,dt$ hozzárendelést.

223. feladat. Legyenek $C_1, \dots C_n$ az n pontú irányított G gráf bizonyos irányított körei. Bizonyítandó, hogy kiválasztható minden C_i körnek egy-egy éle úgy, hogy az így kiválasztott élek között legyenek olyanok, melyek egy irányított kört alkotnak.

FRANK ANDRÁS és LOVÁSZ LÁSZLÓ

1. Megoldás. Legyen $V(G) = \{1, \dots, n\}$, és rendeljük hozzá az (ij) élhez az $\mathbf{R}^n$ tér $(v_1, \dots, v_n)$ vektorát, ahol

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = i, \\ -1, & \text{ha } k = j, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy ezek a vektorok egy $n-1$ dimenziós altérben fekszenek. Könnyű látni azt is, hogy ezen vektorok egy halmaza akkor és csakis akkor tartalmazza a 0 vektort konvex burkában, ha a megfelelő élek legalább egy irányított kört alkotnak. Ezért a feladat állítása következik az alábbi tételből:

Ha az $A_1, \dots, A_n$ halmazok az $n-1$ dimenziós tér olyan részhalmazai, melyek mindegyike az origót konvex burkában tartalmazza, akkor kiválasztható minden A_i-ből egy-egy a_i elem úgy, hogy ezeknek az elemeknek a konvex burka tartalmazza a 0-t.

Ezt a segédtételt viszont a következőképpen lehet bebizonyítani. Nyilván feltehetjük, hogy minden A_i véges. Válasszunk ki a lehető legtöbb A_i halmazból egy-egy a_i pontot úgy, hogy a kiválasztott pontok lineárisan függetlenek legyenek. Legyen B a kiválasztott halmaz, és mondjuk $|B| = k$. Legyen e olyan, az origóból kiinduló félegyenes, mely a B által feszített kúp relatív belsejében halad, és mely semelyik $k-1$ pont konvex burkát nem metszi (ilyen nyilván van). Rögzítsük az e félegyenest, és válasszuk a B halmazt úgy, hogy konvex burkának e-vel vett metszéspontja minél közelebb legyen az origóhoz. Fektessünk B-n át olyan H hipersíkot, mely az origót nem tartalmazza (ilyen van, mert B elemei lineárisan függetlenek), és tekintsünk egy olyan A_i-t, melyből nem választottunk pontot (ilyen van, mert n darab A_i-nk van, és legfeljebb $n-1$ pontot választottunk ki). Mivel A_i az origót konvex burkában tartalmazza, van olyan a pontja, mely a H hipersíknak ugyanarra az oldalára esik, mint az origó.

Azt állítjuk, hogy $B \cup \{a\}$ konvex burka tartalmazza az origót. Az a pont B-től lineárisan függ, mert különben hozzá lehetne venni, és ellentmondásra jutnánk k maximális választásával. Mármost az e félegyenes a $B \cup \{a\}$ által feszített szimplex egyik lapját „belülről kifelé" metszi, így vagy belülről indul (és akkor készen vagyunk), vagy egy másik lapját is metszi. Akkor viszont B helyett ennek a lapnak a csúcsait tekintve, ellentmondásra jutunk B választásával.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

2. Megoldás. Indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n=1$-re nyilvánvaló, hiszen ekkor C_1 csak egy hurokélből állhat. Tegyük fel, hogy az n-nél kisebb számokra az állítást már beláttuk, és legyenek $C_1, \dots, C_n$ irányított körök az $\{x_1, \dots, x_n\}$ szögpontokból álló irányított gráfban. Ha a $C_1, \dots, C_n$ körök valamely i elemű részrendszerének uniója i-nél kisebb elemszámú, akkor az indukciós feltevésből azonnal következik az állítás. Így feltehetjük, hogy a körök bármely i elemű részrendszerének uniója legalább i elemű. Így Hall tétele szerint a köröknek van különböző pontokból álló reprezentáns-rendszere. Feltehetjük, hogy $x_i \in C_i$ $(i=1, \ldots, n)$; tehát minden i-hez van olyan j_i, hogy az (i, j_i) él C_i-hez tartozik. Az (i, j_i) élek olyan irányított gráfot alkotnak, amelyben minden pontból indul ki él. Egy ilyen (véges) gráfban mindig van irányított kör, és esetünkben ennek élei különböző C_i-khez tartoznak. Ezzel az állítást beláttuk.

LACZKOVICH MIKLÓS

ЗАДАЧИ

PROBLEMS

Problem 234. For every real x we define the sequence $a_n(x)$ by the recursion

$$a_1(x)=x, \quad a_{n+1}(x)=a_n(x)-\frac{1}{a_n(x)} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

a) Suppose the sequence $a_n(x)$ is infinite, i.e. $a_n(x) \neq 0$ for every $n \geqq 1$. Prove that the sequence contains infinitely many positive as well as negative terms.

b) Let the sequence $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ consist of the signs $+$ and $-$ such that the sets $\{n; e_n=+\}$ and $\{n; e_n=-\}$ are both infinite. Prove that there is exactly one real number x such that the sequence $a_n(x)$ is infinite and the sign of $a_n(x)$ is e_n for every $n=1, 2, \ldots$.

M. LACZKOVICH

Problem 235. Show that the system of equations $xy+z=3$, $xz+y=1$, $yz+x=0$ is unsolvable by radicals, although it has a solution with real x, y, z.

M. LACZKOVICH and G. PETRUSKA

Problem 236. Let A_n denote the maximal number of points in $\mathbf{R}^n$ such that the distance between any two of them is between 0.99 and 1. Prove that there is a constant $c>1$ such that $A_n>c^n$ for every $n=1, 2, \ldots$.

M. LACZKOVICH

KÖNYVISMERTETÉSEK

Rolando Chuaqui: Analysis, geometry, and probability

(Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **96**), Marcel Dekker, New York and Basel 1985, 274+viii oldal

Az első chilei matematikai kutató központot Juan Gómez Millas szervezte 1957-ben. Az első szimpoziumot 1981-ben december 18 és 20 között tartották, hogy áttekintsék a kezdeti eredményeket. Erre meghívták mindazokat a külföldön élő chilei származású matematikusokat, akiknek valamilyen kapcsolatuk volt a hazaiakkal. Az ismertetendő könyv a legjobb előadások átdolgozott anyagát tartalmazza.

Néhány érintett téma (és kidolgozója) a következő: nem lineáris közönséges differenciálegyenletek periódikus megoldásának egy új approximációja, a harmónikus kiegyensúlyozás módszere (P. Miletta); a kvantummechanika szóródáselmélete (C. A. Fernández); komplex sokaságok pszeudokonvex tartományai (M. Elgueta); hiperbolikus egyenletek Cauchy feladatának megoldása (G. A. Uhlmann); gráfok kromatikus polinomjai (R. W. Frucht); absztrakt Hardy algebrák maximál tételei (L. Salinas—Carrasco); a valószínűségszámítás egy új modellje: a sztochasztikus matematikai logika (R. Chuaqui); csoportreprezentációk (J. Soto—Andrade); kromatikusan egyértelművé tett gráfok egy új csoportja (R. E. Giudici); magnetohidrodinamika (O. L. Betancourt és G. McFadden); Grassmann sokaságok (W. Reyes); holomorf függvények képterének karakterizációja Banach terekben (J. Mujica); szintetikus differenciálgeometria (L. Bélair és G. E. Reyes); véges dinamikus rendszerek topologikus entrópiája (S. A. Martinez); Gauss folyamatok aszimptotikus statisztikai vizsgálata (G. E. del Pino); martingálok funkcionális centrális határeloszlástétele (R. Rebolledo).

Tusnády Gábor

H. S. M. Coxeter: Projektív geometria

Budapest, 1986, Gondolat, 179 oldal, 45 Ft

Az euklideszi geometriában körzővel és vonalzóval szerkesztünk, a projektív geometriában csak vonalzóval; az euklideszi geometriában méréssel hasonlítjuk össze az alakzatokat, a projektív geometriában nem mérünk, hanem vetítéssel, projektivitással hozzuk összefüggésbe az egyik alakzatot a másikkal. A projektív geometria megszületéséhez a szépművészet adta a kiinduló pontot. Ha egy festőművész például egy vízszintes csempézett padló képét egy függőleges vászonra festi, akkor a négyzetalakú csempék a képen eltorzulnak, méreteik, szögeik megváltoznak, de a valóságos egyenes vonalak a képen is egyenes vonalak maradnak, mert ezek a képen levő vonalak a valóságos vonalakat a művész szemével összekötő síkoknak és a kép síkjának a metszésvonalai. A művész szeme az a pont, amelyen valamennyi (vetítő) sík áthalad. A projektív geometria az alakzatok azon tulajdonságainak a vizsgálatával foglalkozik, amelyek a (középpontos) vetítéssel nem változnak, invariánsak.

Coxeter most magyar nyelven is megjelent könyve a projektív geometriáról mindazt tartalmazza, amit e tárgykörben tudni érdemes.

A könyv 12 fejezetre oszlik. Az első fejezet az alapfogalmakat vezeti be, a második a tárgykör logikai megalapozásáról gondoskodik. A 3. és 4. fejezet Desargues és Pappos tételeit írja le. Az 5. és 6. fejezet az egy- és a kétdimenziós projektivitásokat tárgyalja. A következő három fejezet a kúpszeletek leírását adja. A 10. fejezet a véges projektív síkkal foglalkozik, a 11. és 12. fejezet a projektív geometria kapcsolatát mutatja be az euklideszi és a koordináta-geometriával.

Minden alfejezet végén számos (összesen 225) gyakorlat áll, amelyeknek a megoldása a könyv végén található meg. Külön meg kell említeni a könyvben található gazdag metamatika-történeti utalásokat, amelyek nyomon követik a projektív geometria fejlődését a kialakulásától kezdve a 20. század második feléig és megemlítik az ebben közreműködő személyeket.

A fordítás, amely az 1974-ben megjelent második kiadás alapján készült, Bártfai Ferenc hozzáértő, gondos munkáját dícséri.

Elismerés illeti a Gondolat Könyvkiadót azért, hogy ezt a ma már világhírű könyvet a csak magyarul olvasók számára is hozzáférhetővé tette.

Scharnitzky Viktor

Robert Hardy: Geometriai játékok

Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 112 oldal, 90 Ft

A könyvben kirakójátékokat találunk. E játékok elvi, esetünkben geometriai hátteréről, a síknak vagy egy részének alakzatokkal való kitöltéséről csak elbeszélés szintjén szól a szerző, de ez az elbeszélés rendkívül gazdag, szerteágazó és érdekes.

A könyv első része 3 fejezetre oszlik.

Az első fejezet négy kirakójátékot mutat be. A PINO (ez a szó a pentomino rövidítése) az a játék, amelyben a játékosok különböző módon egymás mellé helyezett öt egybevágó négyzetből álló elemek (12 különböző ilyen van) segítségével alakzatokat raknak ki a síkon. Ha a négyzeteket egybevágó szabályos háromszögekkel váltjuk fel és számukat hatra növeljük, a TRICO elnevezésű játékot kapjuk. A HEXO nevű játékokban négy egybevágó szabályos hatszögből állnak az elemek (számuk 7), amelyekkel alakzatokat lehet kirakni. Végül a DIABOLÓ nevű játéknak az elemei négy egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszögből állnak. Az ilyen típusú különböző elemek száma 14. Érdekes apróság, hogy a Diaboló viszonylag új játék; az angol S. J. Collins e játékkal nyerte meg 1962-ben a New Scientist című folyóirat játékpályázatát. A kötet szerzője elmondja mind a négy játék történetét, a játékokkal kapcsolatos egyéb (ezen belül matematikai) érdekességeket, számos feladatot tűz ki és beszél több, még meg nem oldott kérdésről is.

A második fejezet a síkidomok átdarabolásán alapuló, kínai eredetű, négyezer éves múltra visszatekintő játék, a TANGRAM ismertetéséből, vizsgálatából és számos ezzel kapcsolatos feladatból áll.

A harmadik fejezetben (Játék a kombinatorikával) ismertetett kirakójátékok valahol a dominó és a képes kirakójátékok között helyezkednek el: színes egybevágó szabályos sokszögekkel kell alakzatokat kirakni a síkon.

A könyv „A feladatok megoldásáról" című útmutatójához a magyar kiadás ajánlott irodalmat fűzött (összeállítója Nagy Dénes), amelyben az elmúlt 20 év idevágó magyar nyelvű irodalma szerepel. A csaknem teljes irodalomjegyzék terjedelme is mutatja, hogy Magyarországon is milyen nagy érdeklődés mutatkozott és mutatkozik e téma iránt. A csaknem szót az előbb azért használtam, mert az irodalomjegyzékben szívesen láttam volna még például Péter Rózsa „Játék a végtelennel" című könyvét is.

A könyv második részét alkotja (a szöveges résztől elkülönítve) a három fejezethez tartozó 100, és az egyes feladatok megoldásához való további 25 ábra.

Végül — kivételesen — a könyv technikai kivitelezéséről is kell szólni. (A kötet az ÉTK Nyomdaüzemében készült.) A könyv szövegét (30 oldal) és ábráit (125 ábra, 80 oldal) külön-külön egy-egy tömbbe tömörítették. Ez gazdaságossági szempontból indokolt lehet, de ekkor a könyv csupán egyszeri áttanulmányozása is legalább 125-szöri oda-vissza lapozást igényel. Ezt az igénybevételt, az egyszeri elolvasást, a könyvnek ki kellene bírnia. Arról már nem is beszélve, hogy a szerző a könyv tulajdonosát így biztatja: „A legfontosabb: ezt a könyvet ne olvasd, hanem játssz vele! Ez a könyv akár egymillió évre is munkát adhat." Az én példányom a harmadik lapozás után szétesett és az áttanulmányozása után különálló lapok halmaza lett. Ez lehet szerencsétlen véletlen, de hasonló jelenséget figyeltem meg a számomra hozzáférhető könyvtári példányokon is. A ragasztott eljárással készült könyvhöz — és ez a könyv ilyen — szükséges egyik alapanyag a kiváló minőségű ragasztó. Én azonban valamilyen ragasztónak csak a nyomait láttam a borító megfelelő részén, ezzel szemben a 112 oldalas könyv 90 forintos ára — amiben a ragasztó ára is benne van — világosan látszik. Úgy gondolom, hogy a Műszaki Könyvkiadó jó híre megköveteli, hogy csak olyan nyomdaüzemeknek adjon megbízást, amelyek tudnak könyvet készíteni.

A könyvben leírtak és lerajzoltak megértése különösebb matematikai előismereteket nem kíván, ezért ajánlható kortól és végzettségtől függetlenül mindenkinek, aki szeret játszani.

Scharnitzky Viktor

ОБЗОР КНИГ

BOOK REVIEWS

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azoknak a matematikai tárgyú könyveknek az adatai szerepelnek, amelyek 1986-ban jelentek meg Magyarországon. A jegyzékben általános és középiskolai tankönyvek, felsőoktatási és tanfolyami jegyzetek, továbbá intézmények saját kiadásában megjelent kiadványai általában nem szerepelnek.

Ábrahám István—Bedő László—Czétényi Csaba—Ifj. Frigyesi Miklós—Juhász Attila—Korányi Erzsébet: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 51 Ft.

Andrásfai Béla: *Versenymatek gyerekeknek (Általános és középiskolai tanulók számára)*, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 168 oldal, 27 Ft.

Bánkövi, Gy.—Veliczky, J.—Ziermann, M.: *Dynamic factor analysis*, Budapest, 1986, K. Marx Univ. of Economics, 81 oldal, ár nélkül.

Bartha Gábor—Kun Péter: *Válogatott fejezetek a matematikából*, Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 250 oldal, 38 Ft.

Bojtár Imre—Vörös Gábor: *A végeselemmódszer alkalmazása lemez és héjszerkezetekre*, Budapest, 1986, Műszaki Kiadó, 163 oldal, 48 Ft.

Bolla Marianna: *Mátrixok spektrálfelbontásának és szinguláris felbontásának módszerei*, Budapest, 1985, SZTAKI, 118 oldal, ár nélkül.

Borsodi István—Göndöcs László: *Matematika a tanárképző intézet első évfolyama számára*, Ideiglenes tankönyv (11. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 355 oldal, 33 Ft.

Bozsaki Géza: *Kirándulás a számítógépek szigetére*, (Utazások Matematikaországban), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 35 Ft.

Bőhm János (szerk.): *Egyetemek és főiskolák 1985. évi felvételi írásbeli tételei*, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 206 oldal, 35 Ft.

Cervenakné Neményi Eszter (szerk.): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának a tanításához* (4. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 392 oldal, 51 Ft.

Cervenakné Neményi Eszter: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához, 1—4. osztály.*, Budapest, 1986, OPI, 62 oldal, ár nélkül.

Cervenakné Neményi Eszter—R. Szendrei Júlia—Török Judit: *Útmutató a Kis Matematikusok Baráti Köre 3. és 4. évfolyamának vezetői részére*, (Utánnyomás), Budapest, 1986, Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, 80 oldal, 25 Ft.

Cimev, K. N.: *Separable sets of arguments of functions*, Budapest, 1986, SZTAKI, 173 oldal, ár nélkül.

Coxeter, Harold Scott Macdonald: *Projektív geometria*, Budapest, 1986, Gondolat Könyvkiadó, 179 oldal, 45 Ft.

Csiszár, Imre—Körner, János: *Information theory, Coding theorems for discrete memoryless systems*, Disquisitiones Mathematicae Hungaricae 12. Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 452 oldal, 420 Ft.

Czapári Endre: *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák I. és II. osztályos matematika tananyagának tanításához* (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 254 oldal, 35 Ft.

Daróczi Erzsébet: *Útmutató a matematikai feladatlapok felhasználásához óvónők számára*, Budapest, 1986, Minerva Könyvkiadó, 41 oldal, 11 Ft.

Deák Ervin: *Tanári kézikönyv a Matematika I. kiegészítő tankönyvhöz a műszaki középiskolák részére*, Budapest, 1986, Országos Pedagógiai Intézet, 124 oldal, ár nélkül.

Deák István: *Véletlenszám-generátorok és alkalmazásuk*, (Az operációkutatás matematikai módszerei, 3.), Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 235 oldal, 96 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítási gyakorlatok* (3. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 340 oldal, 45 Ft.

DÖMÖTÖR FERENC—HUSZTHY LÁSZLÓ—VINCZE ENDRE: *Valószínűségszámítási példatár* (5. kiadás) Miskolc, 1986, Nehézipari Műszaki Egyetem, 33 oldal, ár nélkül.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Szállítási és korlátozott szállítási feladat megoldása magyar módszerrel*, Miskolc, 1986, Nehézipari Műszaki Egyetem, 106 oldal, ár nélkül.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Stepping stone módszerek 1, 2*, (Matematikai és számítástechnikai füzetek), Miskolc, 1986, Nehézipari Műszaki Egyetem, 108+104 oldal, ár nélkül.

Évfordulóink a műszaki és természettudományokban 1986, Budapest, 1985, MTESZ, 108 oldal, 50 Ft.

FEKETE ISTVÁN: *Matematika és számítástechnika 1—2*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó 205+23; 300+20 oldal, 66; 66 Ft.

FOMENKO, A. T.—FUCHS, D. B.—GUTENMACHER, V. L.: *Homotopic Topology*, Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 310 oldal, 430 Ft.

FRIED KATALIN—POGÁTS FERENC: *Középiskolai matematikai versenyek 1980—1984*, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 481 oldal, 65 Ft.

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei*, Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 525 oldal, 115 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAY LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—REIMAN ISTVÁN—SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (3. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58 Ft.

GALILEI, GALILEO: *Matematikai érvelések és bizonyítások két új tudományág, a mechanika és a mozgások köréből*, Budapest, 1986, Európa Könyvkiadó, 399 oldal, 82 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ: *Mátrixaritmetikai gyakorlatok* (3. kiadás), Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 442 oldal, 57 Ft.

GNÄDIG PÉTER—JÁNOSSY LAJOS—TASNÁDI PÉTER: *Vektorok integrálása*, Egyetemi tankönyv, (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 398 oldal, 45 Ft.

HAJNAL IMRE: *Beke Manó tanári munkássága*, Budapest, 1986, Bolyai János Matematikai Társulat, 13 oldal, ár nélkül.

HARDY, ROBERT: *Geometriai játékok*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 112 oldal, 90 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ—REIMAN ISTVÁN—URBÁN JÁNOS: *Fejtörő feladatok felsősöknek, Általános iskolai tanulók számára*, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 312 oldal, 42 Ft.

JEGOROV, I. P.: *Geometria*, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 320 oldal, 43 Ft.

KALMÁR LÁSZLÓ: *Intergrállevél, Matematikai írások*, (Válogatta, szerkesztette, az előszót és a bevezetést írta Varga Antal), Budapest, 1986, Gondolat, 274 oldal, 45 Ft.

KÁNTOR SÁNDORNÉ: *Matematikát, fizikát oktató tudós és nevezetes tanárok Hajdú, Szabolcs és Szolnok megye középiskoláiban, 1850—1948*, Debrecen, 1986, Kossuth Lajos Tudományegyetem, 473 oldal, ár nélkül.

KIRILLOV, A. A. (editor): *Representations of Lie groups and Lie algebras*, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 225 oldal, 280 Ft.

KÓSA ANDRÁS—MEZEI ISTVÁN—S. GYARMATI ERZSÉBET: *Analízis példatár*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 415 oldal, 156 Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához* (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 436 oldal, 58 Ft.

KOVÁCS JÓZSEF—TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS MIKLÓS: *Analízis*, Főiskolai tankönyv, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 471 oldal, 45 Ft.

KÖRMENDY LÁSZLÓ: *Bevezetés a matematikai statisztikába*, Budapest, 1986, BME Mérnöki Továbbképző Intézet, 106 oldal, 75 Ft.

LEINDLER, LÁSZLÓ: *Strong approximation by Fourier series*, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 209 oldal, 270 Ft.

LEONTE, A.—TRANDAFIR, R.: *A valószínűségszámítás klasszikus és aktuális problémái*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 275 oldal, 77 Ft.

LOVÁSZ, LÁSZLÓ and PLUMMER MICHAEL D.: *Matching theory*, Budapest—Amsterdam, 1986, Akadémiai Kiadó and North Holland Publ. Co., 544 oldal, 680 Ft.

MANYIN, JU. I.: *Bevezetés a kiszámíthatóság matematikai elméletébe*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 144 oldal, 40 Ft.

MATOLCSI TAMÁS: *A Concept of Mathematical Physics, Models in Mechanics*, Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 335 oldal, 420 Ft.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNE: *Tankönyvi útmutató az I. osztályos matematika munkatankönyvhöz, Gimnázium*, (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 91 oldal, 15 Ft.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató a II. osztályos matematika* *munkatankönyvhöz, Gimnázium,* (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 64 oldal, 11 Ft.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató a III. osztályos matematika munkatankönyvhöz, Gimnázium* (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 91 oldal, 15 Ft.

MÁRKUS LÁSZLÓ: *Algoritmus mátrix alapú logaritmus kiszámítására kriptográfiai alkalmazásokkal,* Budapest, 1985, SZTAKI, 96 oldal ár nélkül.

MEGYERI JENŐ: *Vasúti mozgásgeometria,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 380 oldal, 118 Ft.

MESZÉNA GYÖRGY (szerk.): *Sztochasztikus módszerek a döntéselőkészítésben, Modellek, esettanulmányok,* Egyetemi segédkönyv, (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 252 oldal, 29 Ft.

MÉRŐ LÁSZLÓ (összeállította): *Matematika tanmenet-javaslatok, 1—4. osztály,* Budapest, 1986, Ifjúsági Lapkiadó, 60 oldal, 25 Ft.

MISER HUGH J.—QUADE, EDWARD S. (szerk.): *A rendszerelemzés kézikönyve. A felhasználás, az eljárás, az alkalmazások és a gyakorlat áttekintése,* Budapest, 1986, Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság, Statisztikai Kiadó, 400 oldal, 198 Ft.

MÓRI F. TAMÁS—SZÉKELY GÁBOR: *Többváltozós statisztikai analízis,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 393 oldal, 97 Ft.

NÉMETH JÓZSEF—VARGA ANTAL: *Az integrálról,* Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 261 oldal, 31 Ft.

PÁLFY SÁNDOR: *Törheted a fejed! Matematikai versenyfeladatok és fejtörők a Kis Matematikusok Baráti Körök részére,* (Utánnyomás), Budapest, 1986, TIT, 31 oldal, 16 Ft.

POGÁTS FERENC—VARGA KATALIN: *Kis Matematikusok Baráti Köre, Munkafüzet,* Budapest, 1986, TIT, 31 oldal, 9 Ft.

PREUSS WOLFGANG—BLEYER ANDRÁS—PREUSS HEINRICH: *Disztribúcióelmélet műszaki alkalmazásokkal,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 282 oldal, 77 Ft.

PRÉKOPA, ANDRÁS (editor): *Studies in Applied Stochastic Programming* (utánnyomás), Budapest, 1985, SZTAKI, 209 oldal, ár nélkül.

Proceedings of the 4th Pannonian Symposium on Mathematical Statistic Vol. A, B, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 314, 339 oldal, 875 Ft.

REIMAN ISTVÁN: *A geometria és határterületei,* Budapest, 1986, Gondolat Könyvkiadó, 418 oldal, 90 Ft.

ROHOVSZKY RUDOLF: *Matematika* (11. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 159 oldal, 24 Ft.

SAIN MÁRTON: *Nincs királyi út!*,Budapest, 1986, Gondolat Könyvkiadó, 831 oldal, 195 Ft.

SCHARLE PÉTER—SZILÁGYI GYÖRGY: *A végeselem módszer vegyes analitikus eljárásai,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 113 oldal, 38 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Mátrixszámítás, Példatár* (4. kiadás), Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 339 oldal, 54 Ft.

SCHUBERT, HORST: *Topológia,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 356 oldal, 75 Ft.

SCHANNON, CLAUDE E.—WARREN, WEAVER: *A kommunikáció matematikai elmélete,* Budapest, 1986, Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtár, 183 oldal, 75 Ft.

SZENDREI JÁNOS: *Algebra és számelmélet,* Tanárképző főiskolai tankönyvek, (3. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 51 Ft.

SZÉKELY J. GÁBOR: *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics,* Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 250 oldal, 300 Ft.

SZIDAROVSZKI FERENC—MOLNÁR SÁNDOR: *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal: többcélú programozás klasszikus és differenciajátékok,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 239 oldal, 75 Ft.

SZLÁVI PÉTER—ZSAKÓ LÁSZLÓ: *Módszeres programozás,* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 116 oldal, 50 Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA (szerk.): *Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához* (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 467 oldal, 62 Ft.

TATÁR ISTVÁN: *Feladatok az úttörő-matematikusok vetélkedőin,* Általános és középiskolai tanulók számára, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 274 oldal, 39 Ft.

TÓTH LÁSZLÓ (szerk.): *A differenciált foglalkoztatás lehetőségei a 7. osztályos matematika tantárgy tanításában,* Módszertani segédanyag, Győr, 1985, Megyei Pedagógiai Inzézet, 88 oldal, ár nélkül.

TUSNÁDY GÁBOR—ZIERMANN MARGIT (szerk.): *Idősorok analízise,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 341 oldal, 118 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (3. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 23 Ft.

Útmutató a kisegítő iskola 6. osztályának tankönyveihez, 2. Matematika, ének-zene, természeti ismeretek, technika, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 232 oldal, 45 Ft.

VÁGÓ, ISTVÁN: *Graph Theory*, Application to the Calculation of Electrical Networks, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 338 oldal, 380 Ft.

VÁRADI TAMÁS: *Integration of Free-form Surfaces into a Volumetric Modeller*, Budapest, 1985, SZTAKI, 179 oldal, ár nélkül.

VÁRLAKI PÉTER: *Bevezetés a statisztikai rendszer-identifikációba*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 290 oldal, 50 Ft.

Scharnitzky Viktor

НОВЫЕ КНИГИ

NEW BOOKS

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1987. II. 24. — Terjedelem: 8,4 (A/5) ív
87-1074—Szegedi Nyomda, Szeged — Felelős vezető: Surányi Tibor igazgató

MTA KÖNYVTÁRA
INFORMATIKAI IGAZGATÓSÁG

EGY SZAKTERÜLET, AMELYNEK LEGÚJABB EREDMÉNYEI MEGVÁLTOZTATHATJÁK FIZIKAI ISMERETEINKET

SZUPRAVEZETÉS

Az 1986. októberi, ill. 1987. márciusi frontáttörés óta hetente táguló keretekkel

---

KÖVESSE A TÉMA SZAKIRODALMÁT
HETI SZÁMÍTÓGÉPES SZAKIRODALMI SZOLGÁLTATÁSUNK IGÉNYBEVÉTELÉVEL

Beküldendő: **MTA Könyvtára Informatikai Igazgatóság 1361 Bp. Pf. 7.**

Kérem, hogy a gépi szakirodalmi információszolgáltatás díjmentes ismertetőjét az alábbi címre sziveskedjék megküldeni:

Név: ....

Munkahely: ....

Postai cím: ....

....

Kelt: .... 198 .... hó .... nap

....
aláírás

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Ára: 12 Ft
Évi előfizetés: 48 Ft

ISSN 0025—519X