MATEMATIKAI LAPOK

V. ÉVFOLYAM

1.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1954

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1954. június V. évfolyam 1. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

Felelős kiadó: Mestyán János.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20.— Ft.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V. József Attila-u. 3 szám alatti Ujságboltjában.

TARTALOMJEGYZÉK

A kínai matematika történetének egy problémájáról

Írta: TURÁN PÁL

1. A matematikatörténeti kutatások eddig is sok meglepő eredményre vezettek. Eredmények kerültek napvilágra, melyekről igen nehéz elképzelni, hogyan találhatták őket felfedezőik. Gondoljunk csak arra, hogy pl. O. Neugebauer kutatásai szerint a babilonok bizonyos harmadfokú egyenletek megoldását ismerték, a hindu Bhaskara-nak jelentős eredményei voltak a másodfokú diofantikus egyenletek elméletében. A régi matematikai kultúrák feltárása most újult erővel folyik. A hindu matematika mellett a kínai az, melynek történeti vizsgálata sok meglepetést ígér; ennek eredményei közül a matematikai köztudat csupán a lineáris kongruenciarendszerek „kínai maradéktétel" néven ismert megoldási módját tartja számon.

1937-ben Szekeres György barátom, aki a Hitler-fasizmus elől Shanghaiba menekült, ott összeköttetésbe került Csang-Junggal, a Göttingában végzett, fiatalon meghalt kínai matematikatörténésszel. Csang-Jung sokat foglalkozott Li Zsen-Su kínai matematikus (1810—1882) 1867-ben Nankingban megjelent Cō ku hszi csaj szuan hszue c. könyvével,[1] mely — úgy látszik — a fennmaradt kínai matematikai felfedezések egy részének összefoglalását tűzte ki céljául. Erre vallanak legalább is a könyv 13 fejezetének címei, melyek közül egyesek a következők:

1. Négyszögek és körök titkainak felderítése.
2. A körszelet magassága rejtélyének megfejtése.
3. A logaritmus forrásainak kutatása.

Egy további fejezetben sokat foglalkozott az ú. n. sokszöges számok[2] térbeli általánosításával, melyre vonatkozó eredmények egy részét Csu Si-Csie 13. századbeli híres kínai matematikus Sze

[1] Ezen adatokat a [3] alatti dolgozatból veszem. A fordításért Somogyiné Éva egyetemi kínai lektornak, Csongor Barnabás adjunktusnak és Varga Tamás kollegámnak tartozom köszönettel.

[2] A sokszöges számok körülményes geometriai módon vannak értelmezve. A k-szöges számok direkt definíciója szerint ezek fix $k \geqq 3$ mellett az

$$n+\frac{n^2-n}{2}(k-2) \qquad n=1,2,3,\ldots$$

által adott számok.

jüan jü csien c. művéből vette át. Bizonyítások e fejezetben — mint egyáltalán a régi kínai matematikai irodalomban — nincsenek; ezek közlése, vagy az út jelzése legalább, úgy látszik nem volt szokás még az újabb időkben sem. A talált összefüggések egy részét Csang-Jung különböző nyugati szerzők munkáiban, így egyeseket Fermat-nál és Eulernél megtalálta. De több érdekes összefüggést sem megtalálnia, sem bebizonyítania nem sikerült; így pl. azt sem, mely szerint — modern jelölésben —

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2. \tag{1. 1}$$

Erre akkoriban Szekeres is, magam is találtunk egy-egy bizonyítást; ezeket Csang-Jung egyebekkel együtt publikálta kínai nyelven,[3] kémiai, etnológiai, fizikai és egyéb cikkek társaságában. A magam bizonyítását még csak tudtam reprodukálni belőle, az sem volt nagyon egyszerű; Szekeresét már nem sikerült reprodukálnom, de — amenynyire Szekeres egy akkori leveléből emlékszem, — az sem volt egyszerű. Felmerül a kérdés, milyen úton jutott kínai felfedezője egyáltalán tételeihez. Nem lehetetlen, hogy egy értékes, előttünk ismeretlen elv birtokában volt.

A keleti matematikusok, különösen a régiek, módszerei nem nagyon ismertek. E módszerek tanulmányozása igen érdekes volna. Ez a legvilágosabban nem is az itt említett tényeken látható. S. Ramanujanra gondolok itt elsősorban, a 34 éves korában elhunyt hindu matematikusra, aki valami definiálhatatlan módon középen állott a régi és a modern matematika között. Pár éves angliai tartózkodása — mint tudjuk — a modern számelméletre igen jelentős hatást gyakorolt, főleg az additív számelmélet analitikus módszereivel kapcsolatban. Ez annál is inkább figyelemre méltó, mert felfedezője és életrajz-írója, Hardy szerint, aki könyvet írt róla, ugyanakkor a Cauchy-féle integráltételt sohasem értette meg teljes egészében. Hogy sajátos matematikai egyénisége mégis mennyire frappírozta Hardy-t, azt az a történet is mutatja, hogy Hardy egy beszélgetés alkalmából a korabeli matematikusok közül — talán a matematikai egyéniség originalitására vonatkozólag — Ramanujannak 100 pontot adott akkor, mikor Hilbertnek 80-at és más kiváló matematikusoknak még sokkal kevesebbet.

2. A következőkben az (1. 1) formulára adott bizonyításomat fogom reprodukálni. Tekintsük $-1<x<1$-re a

$$\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2 x^j\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{2k+\nu}{2k}x^\nu\right) \tag{2. 1}$$

[3] A dolgozat a Ko hszüe (Science) c. folyóiratban jelent meg a XXIII. kötet 11. számában 1939. novemberében p. 647—663.

szorzatot. Mivel a szereplő végtelen sor abszolút konvergens, tehát átrendezés meg van engedve. Így x^n együtthatója (2. 1)-ben

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k}$$

ami épp (1. 1) baloldalán álló kifejezés. Ha tehát azt sikerül bebizonyítani, hogy $-1 < x < 1$-re

$$\left\{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^j\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{2k} x^\nu\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k}^2 x^n, \qquad (2.\ 2)$$

akkor a hatványsorok jólismert egyértelműségi tétele alapján (1. 1) bizonyítva lesz.

3. A bizonyításban az ú. n. Legendre-polinomok bizonyos jólismert tulajdonságai szerepet játszanak.[4] A k-ik Legendre-polinomot, $P_k(x)$-et a

$$P_k(x) = \frac{1}{k!\,2^k} \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k \qquad (3.\ 1)$$

által értelmezzük. Erre nem nehéz verifikálni, hogy kielégíti az

$$(1-x^2)P_k''(x) - 2xP_k'(x) + k(k+1)P_k(x) = 0 \qquad (3.\ 2)$$

differenciálegyenletet; (3. 1)-ből pl. a Leibnitz-szabály alkalmazásával adódik

$$P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k. \qquad (3.\ 3)$$

(3. 2) és (3. 3)-ból verifikálható, hogy

$$P_k(t) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \binom{k+\nu}{k} \left(\frac{1+t}{2}\right)^\nu. \qquad (3.\ 4)$$

t helyébe $\frac{1+x}{1-x}$-et téve és $(1-x)^k$-val szorozva adódik

$$(1-x)^k P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{k+\nu}{k} (x-1)^{k-\nu}. \qquad (3.\ 5)$$

Másrészt $P_k(t)$ (3. 1) alatti definíciójából kiindulva, a $(t^2-1)^k$ kifejezést $(t+1)^k(t-1)^k$ alakba írva és a Leibnitz-szabályt alkalmazva adódik

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \frac{k!}{(k-\nu)!} (t+1)^{k-\nu} \times$$

$$\times \frac{k!}{\nu!} (t-1)^\nu = \left(\frac{t+1}{2}\right)^k \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^\nu.$$

[4] L. pl. G. Szegő „Orthogonal polinomials" c. könyvének 57, 59, és 60-ik lapjait.

$\frac{t-1}{t+1}=x$ helyettesítéssel nyerjük a Hurwitz-féle

$$(1-x)^k P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu \tag{3. 6}$$

formulát. Ebből és (3. 5)-ből nyerjük, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu. \tag{3. 7}$$

Erre lesz szükségünk.

4. (1. 1) ill. (2. 2) bizonyítása az

$$A=-\frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left(z^k(z+x)^{-k-1}\right)\right\}_{z=-1} \tag{4. 1}$$

kifejezés két úton való előállításán fog alapulni. Először a Leibnitz-szabályt alkalmazva

$$-A=\frac{1}{k!}\left\{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{k!}{(k-\nu)!}z^{k-\nu}(-k-1)(-k-2)\cdots\right.$$

$$\left.\cdots(-2k+\nu)(z+x)^{-2k+\nu-1}\right\}_{z=-1}=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{k}\binom{k}{\lambda}\binom{2k-\lambda}{k}(x-1)^{-2k+\lambda-1}.$$

λ helyett $(k-\nu)$-t írva

$$-A=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{-\nu-k-1}=$$

$$=(x-1)^{-2k-1}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}.$$

Felhasználva (3. 7)-et adódik ebből

$$-A=(x-1)^{-2k-1}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu=-\left\{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{-2k-1}{\nu}x^\nu\right\}.$$

Tekintve, hogy egész a és b-vel

$$(-1)^b\binom{-a-1}{b}=\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}{b!}=$$

$$=\binom{a+b}{b}=\binom{a+b}{a}, \tag{4. 2}$$

előbbiből

$$A=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{2k+\nu}{2k}x^{\nu}\right\}\left\{\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^{2}x^{j}\right\}. \tag{4. 3}$$

5. Hogy a (4. 1) alatti A egy más előállítását nyerjük, írjuk azt

$$-A=\frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{1}{z}\left(1+\frac{x}{z}\right)^{-k-1}\right)\right\}_{z=-1}$$

alakba. Mivel $-1<x<1$, tehát $\left(1+\frac{x}{z}\right)^{-k-1}$ hatványsorba fejthető $|z|>|x|$-re $\frac{x}{z}$ szerint és a z-szerinti akárhányadik derivált a $z=-1$ helyen tagonkinti deriválással nyerhető. Így adódik ismét alkalmazva (4. 2)-t,

$$-A=\frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left(\sum_{\nu=J}^{\infty}\binom{-k-1}{\nu}\right)x^{\nu}z^{-\nu-1}\right\}_{z=-1}=$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{k+\nu}{\nu}(-1)^{\nu}x^{\nu}(-\nu-1)(-\nu-2)\cdots(-\nu-k)(-1)^{-\nu-k-1}=$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{k+\nu}{\nu}^{2}x^{\nu}=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{k+\nu}{k}^{2}x^{\nu},$$

azaz

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}^{2}x^{n}.$$

Ebből és (4. 3) következik (2. 2) és így (1. 1) is.

6. (2. 2) ezen bizonyítása csak a valós analízist használja fel. Komplex függvénytannal operálva a bizonyítás valószínűleg egyszerűbb lesz. Csak arra kell gondolnunk, hogy ha l_1 tetszőleges oly Jordan-görbe, mely a 0-pontot körülveszi, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l_1)}(1+z)^k\left(1+\frac{x}{z}\right)^k\frac{dz}{z}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^{2}x^{j}$$

és ha l_2 oly Jordan-görbe, mely teljesen az $|x|<|z|<1$ gyűrűben fut, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l_2)}\frac{1}{(1-z)^{k+1}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{z}\right)^{k+1}}\frac{dz}{x}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{k+\nu}{\nu}^{2}x^{\nu}.$$

Érdekes feladat volna a (2. 2) identitást ezen integrálelőállítások alapján kimutatni.

РЕЗЮМЕ

Подтверждение идентичности

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

которая была опубликована без доказательства в 1867 году в одном из трудов китайского математика Ли Чзен-су.

SUMMARY

A proof of the identity

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

is given which occured without proof in a book of the Chinese mathematician Le-Jen Shoo from 1867. Some properties of the Legendre-polinomials are used.

Rekurzív definíciók, melyek változó számú korábbi függvényértéket használnak fel

Írta: PÉTER RÓZSA

SKOLEM[1] az általánosan-rekurzív függvények explicit alakjára vonatkozó kutatásai közben, és BERECZKI ILONA[2] az elemi függvények vizsgálatában olyan rekurzív definícióval került szembe, amelyben egy-egy függvényérték kiszámításához nem határozott számú korábbi függvényértékre van szükség, hanem a helytől, sőt esetleg magának a definiálandó függvénynek korábbi értékeitől is függő számú korábbi függvényértékre. (Ilyen jelenség eddig csak az „értékkészletrekurzióban"[3] lépett fel, de ott könnyen ki is lehetett küszöbölni.) Ez a függés jóval bonyolultabb is lehet, mint a SKOLEM- és BERECZKI-féle különleges esetben: a felhasznált korábbi függvényértékek lehetnek akárhányszorosan egymásba skatulyázottak is; hogy hányszorosan, az ismét függhet a helyen kívül magának a definiálandó függvénynek akárhányszorosan egymásba skatulyázott korábbi értékeitől is, s. í. t.; az ebben az „s, í. t."-ban foglalt szám ismét változó lehet. SKOLEM a maga aránylag egyszerű példáját egy különleges fogással primitív rekurzióra vezette vissza; BERECZKI ILONA inkább más úton bizonyította be, hogy a primitív rekurzió kivezet az elemi függvények osztályából.[4]

Dolgozatom 1. §-ában megmutatom, hogy a szóbanforgó definíciómód legbonyolultabb esetei is a „II. osztályú" primitív rekurziónak egy aránylag egyszerű alesetébe sorolhatók; és ezért közön-

[1] TH. SKOLEM, Remarks on recursive functions and relations; Some remarks on recursive arithmetic, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger, 17 (1944) 89—92; 103—106.

[2] Ezt 1949-ben levélben közölte velem.

[3] R. PÉTER (Politzer), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Ann. 110 (1934) 612—632, 1. §; A rekurzív függvények elméletéhez, Matematikai és Fizikai Lapok, 42 (1935), 25—49. 2. §.

[4] I. BERECZKI, Existenz einer nichtelementaren rekursiven Funktion, Az Első Magyar Matematikai Kongresszus közleményei (1952) 415—417.

séges többszörös rekurziókra vezethetők vissza.[5] A II. osztályon át vezető kerülőút könnyen el is kerülhető: a II. osztályú rekurzív függvények vizsgálatában alkalmazott általános gondolatmenetből esetünkben közvetlen módszer is könnyen kiolvasható. Az általános gondolatmenetét is vázolom egy függelékben annak, hogy hogyan vezethető vissza a II. osztályú primitív-rekurzív definíció I. osztályú többszörös rekurziókra.

Már az ACKERMANN—PÉTER-féle[6] nem-primitív-rekurzív függvény, melynek

$$\psi(0, n) = n+1$$

$$\psi(m+1, 0) = \psi(m, 1)$$

$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n))$$

alakú kétszeresen-rekurzív definíciója

$$(*) \quad \begin{aligned} &\psi(0, n) = n+1 \\ &\psi(m+1, n) = \overbrace{\psi(m, \psi(m, \ldots, \psi(m,}^{n+1\text{-szer}} 1) \ldots)) \end{aligned}$$

alakban is írható, mutatja, hogy a vizsgált definíciómód általában kivezet a primitív-rekurzív függvények osztályából. A ψ-t definiáló kétszeres rekurzióban a $\psi(m+1, n+1)$ értéket $\psi(m, x)$ és $\psi(m+1, n)$ alakú egymásba skatulyázott korábbi értékek segítségével határozhatjuk meg. Módszeremet a SKOLEM- és a BERECZKI-féle különleges esetre alkalmazva, az előbbi esetben beskatulyázatlan háromszoros rekurzióhoz jutunk, az utóbbi esetben pedig olyan kétszereshez az n és s változók szerint, amelyben egy függvényérték felépítéséhez egymásbaskatulyázottan csupán 1-gyel kisebb n argumentumú korábbi függvényértékeket kell felhasználni. Már régebben bebizonyítottam, hogy a beskatulyázatlan többszörös rekurzió nem vezet ki a primitív-rekurzív függvények osztályából;[7] a 2. §-ban most hasonló módszerrel megmutatom, hogy az olyan beskatulyázott k-szoros rekurziók sem vezetnek ki innen, melyekben (normírozott kezdőértékek[8] és összevont paraméter[9] mellett) a definiált φ függvény $\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a)$ értéke véges számú

$$\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k), \varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots,$$

$$, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)$$

[5] R. PÉTER, Probleme der Hilbertschen Theorie der höheren Stufen von rekursiven Funktionen, Acta Hungarica 2 (1951) 247—274.

[6] W. ACKERMANN, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Ann. 99 (1928) 118—133; R. PÉTER, Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, Math. Ann. 111 (1935) 42—60.

[7] R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, Math. Ann. 113 (1936) 489—527, 3. §.

[8] A [7] lábjegyzetben idézett cikk 1. §-a.

[9] A [3] lábjegyzetben idézett első cikk, Einleitung III.

korábbi értékből úgy épül fel, hogy egymásbaskatulyázva csakis $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$ alakú korábbi értékek szerepelnek. (Ezzel egyszersmind új bizonyítást nyerünk arra, hogy a primitív rekurzió kivezet az elemi függvények osztályából.)

Ha csak egyetlen beskatulyázás történik egy ilyen definícióban két $\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1})$ alakú korábbi függvényérték közt, akkor a szóbanforgó többszörös rekurzió már kivezethet a primitívrekurzív függvények közül: ugyanis ilyen természetű kétszeres rekurzióhoz jutunk, ha az 1. § módszerét az ACKERMANN—PÉTER-féle nem-primitív-rekurzív függvény (*) alakú definíciójára alkalmazzuk.

Резюме научной статьи, опубликованной на немецком языке на стр. 33—70 3. тома (1953 г.) Publicationes Mathematicae, г. Дебрецен.

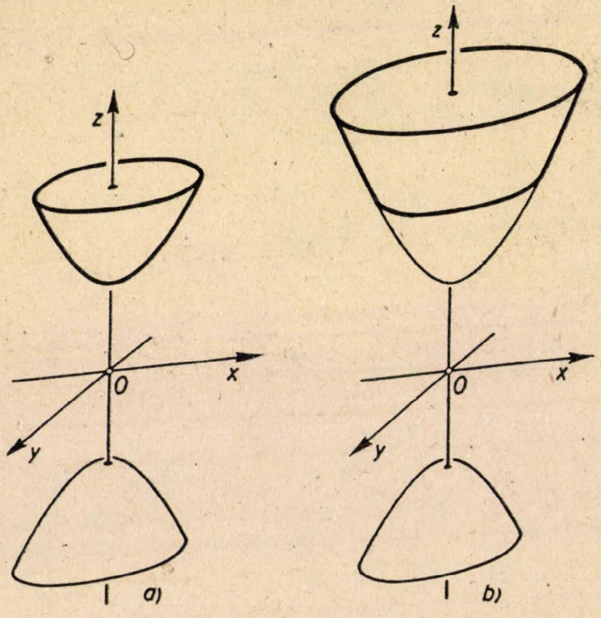
Auszug der Arbeit: „Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden." (Publicationes Mathematicae, Debrecen, Bd. 3. 1953. S. 33—70.)

A Publicationes Mathematicae, Debrecen 3. (1953), kötetének 33—70. oldalán német nyelven megjelent dolgozat kivonata.

Hiperboloidrészek térfogatának meghatározása elemi úton

Írta: Kovács György gimn. tanár.[1]

Bevezetés. Mint ismeretes, minden hiperboloidfelületnek az egyik tengelye olyan tulajdonságú, hogy a rajta átmenő bármely sík a felületet hiperbolában metszi. A rövidség kedvéért nevezzük ezt a tengelyt ebben a dolgozatban „kitüntetett tengely"-nek. A kitüntetett tengelyre merőleges síkmetszetek általában ellipszisek.



1. a. ábra 1. b. ábra

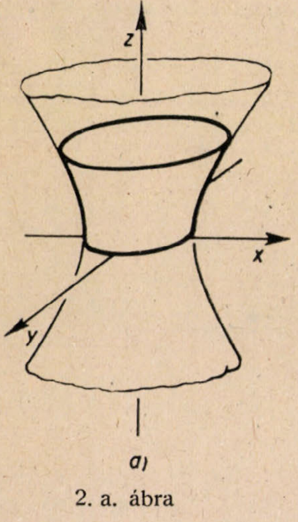
Messük el a kétköpenyű (más néven: elliptikus) hiperboloidot egy olyan síkkal, amely merőleges a felület kitüntetett tengelyére. A felület elmetszett köpenye és a metszősík egy görbevonalú testet határol (1. a. ábra). Nevezzük ezt a testet a gömbszelet mintájára

[1] Átdolgozta: Szász Gábor.

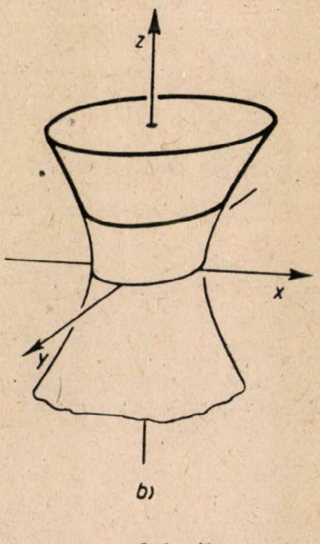
*elliptikus hiperboloidszelet*nek, a határoló hiperboloidrészt pedig *elliptikus hiperboloidsüveg*nek.

Ha az elliptikus hiperboloid egyik köpenyét két olyan síkkal metsszük el, amelyek a felület kitüntetett tengelyére mindketten merőlegesek, akkor a két sík és a felület ismét egy görbevonalú testet határol: ezt a testet *elliptikus hiperboloidréteg*nek nevezzük (1. b. ábra).

Egy egyköpenyű (más néven hiperbolikus) hiperboloidot a torokellipszisének[2] síkja két félre osztja. Tárgyalásunkban mindig csak egy ilyen félhiperboloidra fogunk szorítkozni. Ennek megfelelően, *hiperbolikus hiperboloidszelet*nek fogunk nevezni egy olyan testet, amelyet egy egyköpenyű hiperboloid, továbbá a felület torokellipszisének síkja és a kitüntetett tengelyre merőleges valamely sík határol (2. a. ábra). Ha viszont az egyköpenyű hiperboloidnak a torokellipszis síkja által határolt egyik felét a kitüntetett tengelyre merőleges két tetszésszerinti síkkal metszük, akkor a síkok és a hiperboloid által határolt testet *hiperbolikus hiperboloidréteg*nek fogjuk nevezni (2. b. ábra).



2. a. ábra



2. b. ábra

A dolgozat tárgya a felsorolt hiperboloidrészek térfogatképletének elemi úton való levezetése. Tárgyalásunk kiindulópontjául a felületek analitikus geometriai jellemzése fog szolgálni.

[2] Egy egyköpenyű hiperboloid *torokellipszis*ének nevezzük a kitüntetett tengelyre merőleges s a középponton átmenő síkban fekvő minimális ellipszist.

A kitüntetett tengelyre merőleges síkmetszetekről. Tulajdonképpeni tárgyunk megkezdése előtt némi előkészületeket kell tennünk. Az általános kétköpenyű hiperboloid középponti egyenlete a térbeli derékszögű koordinátarendszerben

$$(1)\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ahol a, b, c jelentik a tengelyek félhosszát. Az (1)-ben rendre $z=0$, $y=0$, $x=0$ értékeket helyettesítve kapjuk az xy, xz, yz-koordinátasíkok által kimetszett görbék egyenletét:

$$(2.1)\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$(2.2)\qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

$$(2.3)\qquad -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

A (2.1) szerint az xy-síkban nincs pontja a felületnek,[3] a (2.2) és (2.3) pedig egy-egy c fél-főtengelyű és a, ill. b félmelléktengelyű hiperbolát jelent. Vagyis, az (1)-gyel adott felület kitüntetett tengelye a z-tengely.

Határozzuk meg a kitüntetett tengelyre merőleges síkmetszetek területét. Tudjuk, hogy egy z-tengelyre merőleges sík egyenlete $z=h$ (ahol h állandó), s így az (1)-ből a keresett görbe egyenlete

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1,$$

vagy más alakban

$$(3)\qquad \frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{h^2-c^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{h^2-c^2}\right)^2}=1.$$

Vagyis a metszet $|h|>|c|$ esetén

$$(4)\qquad a'=\frac{a}{c}\sqrt{h^2-c^2},\qquad b'=\frac{b}{c}\sqrt{h^2-c^2}$$

féltengelyű ellipszis, $h=\pm c$ esetén pedig a felület valamelyik köpenyének csúcspontjává zsugorodik össze. A kitüntetett tengelyre merőleges síkok tehát a h növekedésével folyton növekvő hasonló ellipsziseket adnak.

[3] Szokás beszélni „képzetes pont"-okról is: képzeteseknek nevezzük az olyan pontokat, amelyek koordinátái (legalább részben) komplex számok. Ebben az értelemben azt is mondhatjuk, hogy az xy-sík a felületből „képzetes ellipszis"-t metsz ki.

Az ellipszis ismert területképlete szerint a $h(>c)$ magasságú síkmetszet területe (4) miatt

$$t=\frac{\pi ab}{c^2}(h^2-c^2). \tag{5}$$

Ugyanennek a síkmetszetnek a távolságát a hiperboloid csúcspontjától számítva és h'-vel jelölve, a h' és h között nyilván a $h=c+h'$ összefüggés áll fenn. Ebből (5) szerint

$$t=\frac{\pi ab}{c^2}(2ch'+h'^2). \tag{6}$$

Most már hozzáfoghatunk a bevezetés végén kitűzött feladatunk megoldásához.

Hiperboloidszelet térfogata. Tekintsünk egy olyan hiperboloidszeletet, amelyet az (1) egyenlettel adott kétköpenyű hiperboloidból a kitüntetett tengelyre merőleges z_0 magasságú sík metsz ki. A metszet alatti süveg magasságát jelölje m; $m=z_0-c$.

Ezen m magasságot n egyenlő részre osztva minden egyes osztásponton át az xy-síkkal párhuzamos síkot fektetünk. Így n számú, $\frac{m}{n}$ magasságú elliptikus hiperboloidréteget kapunk. Mivel a tekintett hiperboloidsüveg felfelé szélesedik, ezért az alsó határoló ellipszisek kisebbek a felső ellipsziseknél. A süveg minden rétegének térfogata tehát nagyobb, mint a rétegbe írt, alsó határlappal közös (ellipszis-) alapú henger térfogata és kisebb, mint a réteg köré írt, felső határlappal közös alapú henger térfogata. Így az összes rétegek térfogatának V_{sz}^{+} összege[4] (vagyis a hiperboloidszelet V_{sz}^{+} térfogata) kisebb a körülírt hengerek térfogatának S_1 összegénél és nagyobb a beírt hengerek térfogatának S_2 összegénél.

Az S_1 és S_2 összeget a (6) felhasználásával kiszámíthatjuk. Ugyanis, a határoló ellipszisek síkjának távolsága a süveg csúcspontjától rendre $h'=0,\ h'=\frac{m}{n},\ h'=\frac{2m}{n},\ldots,h'=\frac{(n-1)m}{n}$, $h'=\frac{nm}{n}\,(=m)$, a hengerek magassága pedig $\frac{m}{n}$. Tehát a (6) fel-

[4] Az egyes hiperboloidrészek térfogatát a következőképpen jelöljük:

	elliptikus	hiperbolikus
szelet	V_{sz}^{+}	V_{sz}^{-}
réteg	V_r^{+}	V_r^{-}

A V alsó indexe tehát a hiperboloidrész nevének kezdőbetűje, a felső „index" pedig a felület pontjaihoz tartozó ú. n. „görbület" előjele.

használásával

$$(7)\quad S_1=\frac{\pi ab}{c^2}\left\{\left[2c\cdot\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2\right]\frac{m}{n}+\left[2c\cdot\frac{2m}{n}+\left(\frac{2m}{n}\right)^2\right]\frac{m}{n}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left[2c\cdot\frac{nm}{n}+\left(\frac{nm}{n}\right)^2\right]\frac{m}{n}\right\}\qquad (>V_{sz}^{+});$$

$$(8)\quad S_2=\frac{\pi ab}{c^2}\left\{\left[0\cdot\frac{m}{n}+0^2\right]\frac{m}{n}+\left[2c\cdot\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2\right]\frac{m}{n}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left[2c\cdot\frac{(n-1)m}{n}+\left(\frac{(n-1)m}{n}\right)^2\right]\frac{m}{n}\right\}\qquad (<V_{sz}^{+}).$$

A (7) és (8) különbsége

$$S_1-S_2=\frac{\pi ab}{c^2}\cdot[2cm+m^2]\frac{m}{n},$$

amely $n\to\infty$ mellett 0-hoz tart. Ha tehát a $\lim\limits_{n\to\infty} S_1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_2$ határértékek léteznek, akkor egyenlők is.

A (8)-at átrendezve,

$$S_2=\frac{\pi abm^2}{c^2}\left(2c\cdot\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}+\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}m\right).$$

A zárójelbeli első tört számlálójában számtani haladvány, a második tört számlálójában pedig az $1, 2, \ldots, n-1$ számok négyzetösszege szerepel. Az ismert képletek szerint tehát a két tört számlálója $\frac{n^2-n}{2}$, illetve $\frac{2n^3-3n^2+n}{6}$ értékű. Így az első tört értéke n^2-tel osztás után $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$, a második törté pedig n^3-nal osztás után $\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$. Tehát

$$S_2=\frac{\pi abm^2}{c^2}\left\{2c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)m\right\},$$

amiből már látjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} S_2$ létezik, éspedig

$$\lim_{n\to\infty} S_2=\frac{\pi abm^2}{c^2}\left(c+\frac{m}{3}\right).$$

Ezzel megkaptuk az a, b, c féltengelyű (kitüntetett tengely a z-tengely) elliptikus hiperboloid m magasságú hiperboloidszeletének

V_{sz}^{+} térfogatát:

$$(9) \qquad V_{sz}^{+}=\frac{\pi a b m^2}{c^2}\left(c+\frac{m}{3}\right)=\frac{\pi a b m^2}{3c^2}(3c+m).$$

Az a, b féltengelyek egyenlővé válásakor az általános kétköpenyű hiperboloid forgási kétköpenyű hiperboloidba megy át. Vagyis a kétköpenyű forgási hiperboloid m magasságú szeletének térfogata (9) szerint, $b=a$ miatt $\frac{\pi a^2 m^2}{3c^2}(3c+m)$, ahol c a kitüntetett tengely (s egyben forgástengely) félhossza.

Hiperbolikus hiperboloidszelet térfogata. Hasonló módon kapható a hiperbolikus hiperboloidszelet V_{sz}^{-} térfogatképlete is. Legyen az a, b, c féltengelyű egyköpenyű hiperboloid középpontja a koordinátarendszer origója, kitüntetett tengelye pedig a z-tengely. Egyenlete akkor

$$(10) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

A fentebb már látott módon kapjuk, hogy a $z=h$ (h állandó) magasságú síkmetszet egy $\frac{a}{c}\sqrt{h^2+c^2}$, $\frac{b}{c}\sqrt{h^2+c^2}$ féltengelyű, s így $\frac{\pi a b}{c^2}(h^2+c^2)$ területű ellipszis.

Tekintsük a $z=0$ (torokellipszis síkja) és a $z=m$ sík közötti (m magasságú) hiperbolikus hiperboloidszeletet, s osszuk fel n számú egyenlő vastag rétegre. Ekkor, az előbbi módon minden réteghez található egy köréírható és egy beírható ellipszisalapú henger, $\frac{m}{n}$ magassággal. Ezek térfogatösszegét S_1-gyel, ill. S_2-vel jelölve

$$(11) \qquad S_1=\frac{\pi a b}{c^2}\left\{\left[\left(\frac{m}{n}\right)^2+c^2\right]\frac{m}{n}+\left[\left(\frac{2m}{n}\right)^2+c^2\right]\frac{m}{n}+\right.$$
$$\left.\cdots+\left[\left(\frac{nm}{n}\right)^2+c^2\right]\frac{m}{n}\right\}$$

és

$$(12) \qquad S_2=\frac{\pi a b}{c^2}\left\{[0^2+c^2]\frac{m}{n}+\left[\left(\frac{m}{n}\right)^2+c^2\right]\frac{m}{n}+\right.$$
$$\left.\cdots+\left[\left(\frac{(n-1)m}{n}\right)^2+c^2\right]\frac{m}{n}\right\}.$$

Ezekből $S_1-S_2=\frac{\pi a b m^3}{c^2 n^2}$, tehát $n\to\infty$ esetén az S_1-S_2 különbség 0-hoz tart. Így, amennyiben a határértékek léteznek, $\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty} S_2$. Mivel pedig a hiperboloidszelet V_{sz}^- térfogatára $S_1 > V_{sz}^- > S_2$, ezért $\lim_{n\to\infty} S_1 = V_{sz}^- = \lim_{n\to\infty} S_2$.

Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} S_2$ értékét. Ehhez a (12)-t átírjuk

$$S_2 = \frac{\pi abm}{c^2}\left\{m^2\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}+\frac{c^2+c^2+\cdots+c^2}{n}\right\}$$

alakba, ahol a második tört számlálójában n számú c^2 szerepel. Vagyis, figyelembe véve a négyzetszámok összegére vonatkozó azonosságot,

$$S_2 = \frac{\pi abm}{c^2}\left\{m^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)+c^2\right\},$$

s így

$$V_{sz}^- = \lim_{n\to\infty} S_2 = \frac{\pi abm}{3c^2}(m^2+3c^2). \tag{13}$$

A kétféle hiperboloidszelet térfogatának összehasonlítása. Érdekes eredményre jutunk, ha a (9) és (13) képletekben $m = c$ helyettesítést végzünk. Ekkor ugyanis $V_{sz}^+ = \frac{4\pi}{3}abc$ és $V_{sz}^- = \frac{4\pi}{3}abc$ adódik. Vagyis, az (1) egyenlettel adott kétköpenyű hiperboloid c magasságú szeletének térfogata megegyezik a (10) egyenlettel adott egyköpenyű hiperboloid ugyanilyen magas szeletének térfogatával. Sőt, mindkét említett hiperboloidrész térfogata megegyezik az ugyanakkora tengelyhosszú ellipszoid térfogatával (lévén az a, b, c féltengelyű ellipszis térfogata is $\frac{4\pi}{3}abc$).

Hiperboloidrétegek térfogata. A xy síkkal párhuzamos síkok közti elliptikus hiperboloidréteg térfogata két (elliptikus) hiperboloidszelet térfogatának különbsége. A réteg xy síkkal párhuzamos határsíkjainak távolsága a kezdőponttól legyen z_1 ill. z_2, és álljon fenn $z_1 > z_2 \geqq c$. A kezdőponttól z_1 távolságban lévő sík és a felület által határolt szelet magassága $z_1 - c$, a z_2 távolságban levő sík és a felület által határolt szelet magassága pedig $z_2 - c$. Alkalmazva tehát a (9)-et, az elliptikus hiperboloidréteg térfogata

$$V_r^+ = \frac{\pi ab(z_1-c)^2}{c^2}\left(c+\frac{z_1-c}{3}\right)-\frac{\pi ab(z_2-c)^2}{c^2}\left(c+\frac{z_2-c}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi ab}{c^2}\left[\left(\frac{2c^3}{3}-c^2z_1+\frac{z_1^3}{3}\right)-\left(\frac{2c^3}{3}-c^2z_2+\frac{z_2^3}{3}\right)\right]$$

azaz

$$(14) \qquad V_r^+ = \frac{\pi ab}{c^2}\left[\frac{1}{3}(z_1^3 - z_2^3) - c^2(z_1 - z_2)\right].$$

Ha az egyköpenyű hiperboloidot az xy síkkal párhuzamos és attól $z_1, z_2 (z_1 > z_2 \geqq 0)$ távolságra eső két síkkal metsszük, akkor a nyert hiperbolikus hiperboloidréteg térfogata kiszámítható úgy, mint két hiperbolikus hiperboloidszelet térfogatának különbsége. Alkalmazva tehát a (13)-at,

$$V_r^- = \frac{\pi ab}{c^2}[(z_1^3 + 3c^2 z_1) - (z_2^3 + 3c^2 z_2)],$$

azaz

$$(15) \qquad V_r^- = \frac{\pi ab}{c^2}\left[\frac{1}{3}(z_1^3 - z_2^3) + c^2(z_1 - z_2)\right].$$

A (14) és (15) összehasonlítása mutatja, hogy a megegyező hosszúságú és helyzetű tengelyekkel bíró egy- és kétköpenyű hiperboloidok ugyanazon síkokkal kimetszett rétegeinek térfogatképlete csak a szögletes zárójelben álló második tag előjelében tér el egymástól. Így az azonos tengelyű egy- és kétköpenyű hiperboloidok ugyanazon párhuzamos síkok közé eső rétegeinek térfogatkülönbsége

$$V_r^- - V_r^+ = \frac{\pi ab}{c^2} \cdot 2c^2(z_1 - z_2) = 2\pi abh,$$

ahol h a két párhuzamos sík távolsága.

Vagyis a két hiperboloidfelület és két sík által határolt test térfogata olyan ellipszisalapú henger térfogatával egyenlő, melynek alapja az egyköpenyű hiperboloid torokellipszise, magassága pedig a határoló síkok távolságának kétszerese.

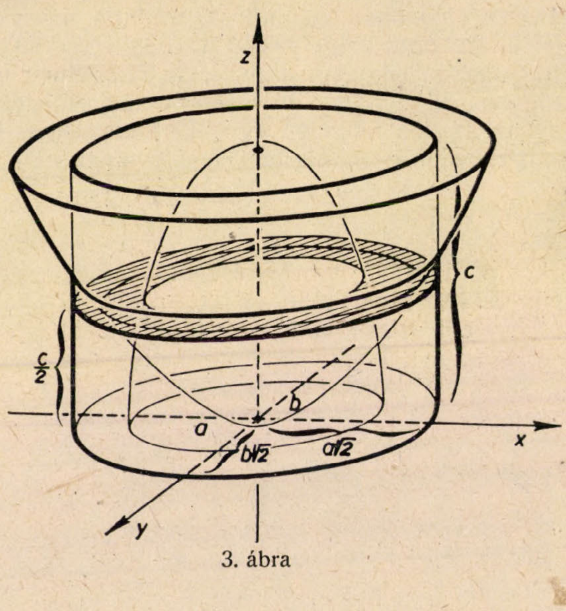
A c magasságú elliptikus hiperboloidszelet térfogatának más meghatározása. Az a, b, c féltengelyű kétköpenyű hiperboloid c magasságú szeletének térfogata egy másik elemi úton is nyerhető. Mégpedig, ki fogjuk mutatni, hogy a *c magasságú elliptikus hiperboloidszelet térfogata úgy is megkapható, hogy az ugyanolyan féltengelyű félellipszoid térfogatát kivonjuk egy olyan c-magasságú egyenes henger térfogatából, amelynek alapja egy* $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$ *féltengelyű ellipszis.*

Helyezzük az ellipszisalapú hengert az xyz derékszögű térbeli koordinátarendszerbe úgy, hogy tengelye a koordinátarendszer z-tengelyével, alapellipszisének $a\sqrt{2}$, ill. $b\sqrt{2}$ hosszú tengelye pedig az x-, ill. y-tengellyel essék egybe. Az elliptikus hiperboloidot csúcsával, a vele egyező tengelyű ellipszoidot pedig centrumával a koordinátarendszer kezdőpontjába helyezzük úgy, hogy a c félhosszúságú tengelyük a z-tengelyre essék, az a és b félhosszúságú tengelyük az ellipszoid esetén az x, illetve y tengelyen, a hiperboloidszelet esetén viszont ugyanezekkel a tengelyekkel párhuzamosan helyezkedjenek el. (3. ábra).

Számítsuk ki mindhárom felületre az xy síkkal párhuzamos $\frac{c}{2}$ magasságú metszet területét. A hiperboloid $\frac{c}{2}$ magasságú metszete megegyezik egy az xy-sík felett, csúcsával c magasan álló (azaz (1) egyenlettel adott) hiperboloid $c+\frac{c}{2}$ magasságú metszetével s így ez a metszet (6) szerint egy

$$\frac{\pi ab}{c^2}\left[\left(c+\frac{c}{2}\right)^2-c^2\right]=\frac{5\pi}{4}ab \tag{16}$$

területű ellipszis.



3. ábra

Az ellipszoidmetszet területe a következő meggondolás alapján számítható ki. Az ellipszoid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{17}$$

amelyből a $\frac{c}{2}$ magasságú metszet egyenletére $z=\frac{c}{2}$ helyettesítés és átrendezés után

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

adódik. Eszerint a metszetellipszis területe

$$\frac{\pi a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{3\pi}{4}ab.$$

Végül, az ellipszisalapú hengernek az xy síkkal párhuzamos minden metszete $\pi\cdot a\sqrt{2}\cdot b\sqrt{2}=2\pi ab$ területű. Így az ellipszoiddal kivájt henger $\frac{c}{2}$ magasságú síkmetszetének területe

$$2\pi ab-\frac{3\pi}{4}ab=\frac{5\pi}{4}ab. \tag{18}$$

Tehát (16) és (18) szerint a kétköpenyű hiperboloid és a vájt henger $\frac{c}{2}$ magasságú síkmetszetei egyenlő területűek.

Ezután a $h'=\frac{c}{2}+h\left(0\leqq h\leqq\frac{c}{2}\right)$ magasságú metszetek területét számítjuk ki. A h' magasságú hiperboloidmetszet területe megegyezik egy középponti helyzetű (s így (1) egyenletű) hiperboloid $h'+c=\frac{3c}{2}+h$ magasságú metszetének területével. Tehát a metszet t_1 területe (5) szerint

$$t_1=\frac{\pi ab}{c^2}\left(\left(\frac{3c}{2}+h\right)^2-c^2\right)=\frac{\pi ab}{c^2}\left(\frac{5}{4}c^2+3ch+h^2\right)= \tag{19}$$

$$=\frac{5\pi}{4}ab+\frac{\pi ab}{c^2}(3ch+h^2).$$

A vájt henger h' magasságú „ellipszisgyűrű"-metszetének területéhez ismét az ellipszoid megfelelő síkmetszetének területét kell kiszámítani. A (17) egyenlet alapján a $h'=\frac{c}{2}+h$ magasságú ellipszoidmetszet egyenlete, $z=\frac{c}{2}+h$ helyettesítés és átrendezés után,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{3c^2}{4}-(ch+h^2)}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{3c^2}{4}-(ch+h^2)}\right)^2}=1$$

alakú, amelyből a metszetellipszis területére

$$(20)\qquad \frac{\pi ab}{c^2}\left(\frac{3c^2}{4}-(ch+h^2)\right)=\frac{3\pi}{4}ab-\frac{\pi ab}{c^2}(ch+h^2)$$

adódik. Ebből pedig a vájt henger síkmetszetének t_1' területére

$$(21)\qquad t_1'=2\pi ab-\left(\frac{3\pi}{4}ab-\frac{\pi ab}{c^2}(ch+h^2)\right)=$$

$$=\frac{5\pi}{4}ab+\pi\frac{ab}{c^2}(ch+h^2)$$

adódik.

A (19) és (21) szerint a kétköpenyű hiperboloid $h'=\frac{c}{2}+h$ magasságú metszetének területe a vájt henger ugyanezen síkbeli (ellipszisgyűrű alakú) metszeténél

$$(22)\qquad t_1-t_1'=\frac{\pi ab}{c^2}2ch=\frac{2\pi abh}{c}$$

értékkel nagyobb.

A $h''=\frac{c}{2}-h\left(0\leqq h\leqq\frac{c}{2}\right)$ magasságú metszetekre az előbbi meggondolások alkalmazhatók, csak mindenütt h helyébe $-h$-t helyettesítve. Így a hiperboloid h'' magasságú metszetének t_2 területe (19)-ből

$$(23)\qquad t_2=\frac{5\pi}{4}ab+\frac{\pi ab}{c^2}(-3ch+h^2),$$

míg a vájt henger h'' magasságú metszetének t_2' területe (21)-ből

$$(24)\qquad t_2'=\frac{5\pi}{4}ab+\frac{\pi ab}{c^2}(-ch+h^2).$$

Most tehát $t_2'>t_2$, mégpedig a különbségük értéke (24) és (23) miatt

$$(25)\qquad t_2'-t_2=\frac{2\pi abh}{c},$$

vagyis megegyezik a (22)-ben szereplő t_1-t_1' különbséggel. Eszerint a c magasságú elliptikus hiperboloidszelet és a vájt henger középmetszetei (azaz $\frac{c}{2}$ magasságú metszetei) egyenlő területűek, az ettől egyenlő távol eső $\frac{c}{2}+h$ és $\frac{c}{2}-h$ magasságú hiperboloid-metszetek pedig $\frac{2\pi abh}{c}$-val nagyobbak, ill. kisebbek a vájt henger ugyanazon síkbeli metszetének területénél.

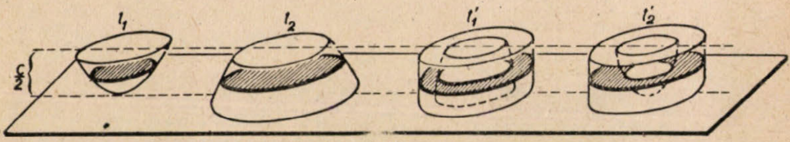
De akkor, a (22) egyenletből a (25) egyenletet kivonva

$$(t_1+t_2)-(t'_1+t'_2)=0,$$

azaz

$$t_1+t_2=t'_1+t'_2. \tag{26}$$

Ezt az észrevételt pedig könnyen felhasználhatjuk a hiperboloidszelet térfogatának meghatározására vonatkozó fentebbi állításunk igazolására. Vágjuk ketté $\frac{c}{2}$ magasságban a hiperboloidszeletet és a vájt hengert is, s a testek felső felét helyezzük felső lapjukkal lefelé fordítva a testek alsó fele mellé (4. ábra).



4. ábra

Ha most egy, a (közös magasságban levő) fedőlapoktól h távolságra lévő síkkal elmetszük mind a négy testet, akkor rendre az előbbi t_1, t_2, t'_1, t'_2 területű metszeteket kapjuk. Így a hiperboloidszeletből keletkezett két résztest azonos magasságú síkmetszeteinek területösszege a (26) miatt megegyezik a vájt hengerből keletkezett két résztest ugyanolyan magasságú síkmetszeteinek területösszegével. Vagyis a két darabból álló testekre alkalmazható a Cavalieri-elv,[5] s így a hiperboloidszeletből keletkezett két résztest térfogatösszege egyenlő a vájt hengerből keletkezett két test térfogatösszegével. Ezzel a fejezet elején kimondott állításunkat igazoltuk.

Ebből pedig az a, b, c féltengelyű ellipszoid teljes térfogata $\frac{4\pi}{3}abc$ lévén, a c magasságú elliptikus hiperboloidszelet V térfogata

$$V=2\pi abc-\frac{2\pi}{3}abc$$

azaz

$$V=\frac{4\pi}{3}abc.$$

[5] Ha két test egy X, Y, Z koordinátarendszerben elhelyezhető úgy, hogy az azonos Z magasságú, az XY tengellyel párhuzamos síkokkal való metszetben egyenlő területűek, akkor a két test köbtartalma egyenlő. Ez az elv az integrálszámítás segítségével igazolható.

РЕЗЮМЕ

При помощи обычного метода приближений. Определяется овъем тел, называемых в статье гиперболоидными отрезками т. е. слоями, затем применением принципа Кавальери автор устанавливает связь между обвемами специального валика, полуэллипсоидного и гиперболоидного сегментов.

SUMMARY

By applying the customary approximation method the author determines the volumina of bodies called hyperboloid segments *viz.* layers (parts) in this paper and with the help of the Cavalieri principle he establishes a relation between the volumina of a special cylinder, of a semi-ellipsoid and a hyperboloid segment.

Az I. gimnáziumi kísérleti matematikakönyvről[1]

Írta: Reményi Gusztáv és Varga Tamás

1.

Az 1953—54. tanévben kísérletképpen 40 gimnázium I. osztályába új könyvet vezettek be, azzal a céllal, hogy egy kísérleti év után mindenütt ez a könyv — illetőleg ennek végleges formája — váljék kötelezővé.

Érdemes itt felidézni a szovjet középiskolai matematikakönyvek példáját. Ismeretes, hogy a jelenleg használt Kiszeljov- és Ribkin-féle könyveket elég éles formában támadják; hibáik köztudomásúak. Jelentek is már meg olyan új könyvek, amelyek a bírálók egybehangzó véleménye szerint lényeges előrehaladást jelentenek ezekhez a könyvekhez képest.[2] Végleges használatba való bevezetésükig azonban — már amelyik eljut oda — sok bírálatnak kell megjelennie a Matyematyika v skole-ban és egyéb folyóiratokban, eredeti, majd átdolgozott kiadásukról. Hiszen az a cél, hogy ha új könyvei vezetnek be, az aztán végleges legyen, hogy a változtatással járó zökkenőt csak egyszer kelljen elszenvedni. Évtizedek óta talán az egyetlen új középiskolai matematikakönyv, amelyet — legalább az iskolák egy részében — állandó használatra bevezettek, Laricsev Algebrai feladatgyűjteménye.[3]

Önként adódik a kérdés: olyan értékű könyv született-e minálunk a kísérleti könyvvel, amelyet érdemes — a jelenlegi könyvet félredobva — állandó tankönyvként bevezetni? Ezt a

[1] Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára. Fiala Albert, Hursán Pál és Csánk István munkája.

[2] P. Sz. Alekszandrov—A. N. Kolmogorov, Algebra (1940), D. K. Faggyejev—I. Sz. Szominszkij, Algebra (1951), N. A. Glagolev, Elementarnaja geometrija (I. kiadás 1944, II. kiadás 1949, III. kiadás 1954), A. F. Bermant—L. A. Ljusztyernyik, Trigonometrija (I. kiadás 1940, II. kiadás 1947, III. kiadás 1950).

[3] I. kiadás 1948, III. kiadás (amellyel az állandó használatba való bevezetés megkezdődött) 1951.

kérdést fel kell vetni attól függetlenül is, hogy van-e valakinek kifogása, s ha igen, milyen természetű, a jelenlegi tankönyvvel szemben.

2.

A kísérleti könyvnek kétségtelenül vannak egyes értékes vonásai. Helyeselni lehet például azt, hogy az egyenletek mellett az egyenlőtlenségekkel is foglalkozik,[4] és hogy az egyenletekkel kapcsolatban rámutat pl. az ekvivalencia fogalmára. Ügyesek a geometriai részben a szerkesztést megelőzően kézzel megrajzolt vázlatok, amelyek alapján a szerkesztési feladatok megoldásának legfontosabb mozzanata, az elemzés történik.

Általában emelik a könyv értékét tetszetős, világos ábrái. A rajzolók, nagyon helyesen, nem szakították azzal az ábrastílussal, amelyet éppen az új gimnáziumi matematika-könyvek honosítottak meg, hogy t. i. a vonalvastagságok közötti éles különbségtétellel is kidomborítják az ábra mondanivalóját. Dícséretet érdemel a könyv nyomdatechnikai kivitele. Jól áttekinthetővé teszi a szöveget a fontosabb eredmények, megállapítások kiemelése, dőlt vagy kövér szedéssel.

A könyvön meglátszik, hogy a szerzőknek célja volt beépíteni a könyvbe azt a tudást, amelyhez a szovjet módszertan eredményeinek megismerése révén az elmúlt években hozzájutottunk. S ha céljukat nem tudták elérni, akkor ennek legelső oka az, hogy nem mérték fel, micsoda hatalmas feladattal állottak szemben: úgy építeni be az újonnon megismert szempontokat a könyvbe, hogy eddigi értékeink se menjenek közben veszendőbe. Természetes, hogy ezt a feladatot a szerzők nem tudták egy párhónapos rohammunkában sikerrel megoldani, hiszen ezt évek értékelő munkájának, tudósok és pedagógusok véleménycseréjének, kritikai működésének kellett volna megelőznie. A birálatok hiánya — mégpedig nem magánbeszélgetésekben elhangzó, hanem nyomtatásban is megjelenő, nem előre feltett szándékkal dicsőítő vagy ledorongoló, hanem különféle szempontokból tárgyilagosan elemző bírálatok hiánya — a legnagyobb akadálya annak, hogy a tankönyvek terén előrehaladást tehessünk.

E hiányt enyhítendő, lássunk most a kísérleti könyv hibáinak elemzéséhez.

[4] Itt meg kell jegyeznünk, hogy a Gallai–Péter-féle I. gimnáziumi tankönyv 1949-es kiadásában is volt egy fejezet az egyenlőtlenségekről, ez azonban a következő kiadásokból, mint tanterven kívüli anyag, kimaradt.

3.

Sok a könyvben a tárgyi tévedés vagy erre alkalmat adó kijelentés, következetlenség, logikai hiba.[5]

»Ha az egyenlet mindkét oldalához (oldalából) ugyanazt a számot vagy kifejezést hozzáadjuk (kivonjuk), akkor az első egyenlettel egyenértékű egyenletet kapunk« — olvassuk a 199. oldalon. Ellenpélda:

$$x-1=0$$

$$x-1+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

Csak helyeselni tudjuk, hogy a diákok ismerjék meg annak pontos fogalmazását is, hogy mit »szabad« az egyenlettel csinálni: vagyis ismerkedjenek meg az ekvivalencia és a következmény fogalmával. De semmiképen sem tudjuk helyeselni, hogy ezen a címen egy csomó téves állítást tanítsunk meg nekik. Márpedig a könyvben ennek az egész kérdésnek a tárgyalása értelmetlen és hibás. Ez a 217. oldalon a következőkben csúcsosodik ki:

»Láthatjuk, hogy „hamis" gyökök lépnek fel abban az esetben, ha:

1. az egyenlet mindkét oldalát olyan kifejezéssel szorozzuk, amely az ismeretlent is tartalmazza. Ekkor a gyökök számában növekedés áll elő;

2. az egyenlet mindkét oldalát olyan kifejezéssel osztjuk, mely az ismeretlent is tartalmazza. Ezen átalakítás esetén a gyökök számának csökkenése áll be.«

Az igazság az, hogy az 1. esetben egyáltalán nem biztos, hogy növekedés »áll elő« a gyökök számában: előállhat csökkenés is, előállhat egyszerre növekedés és csökkenés (persze nem a gyökök »számában«, hiszen maga ez a megfogalmazás rossz; gyökök eshetnek ki és ugyanakkor új gyökök léphetnek fel), és az is megtörténhet, hogy az egyenlet gyökei maradnak a régiek. Mindezek az esetek egytől-egyig megvalósulhatnak a 2. esetben is. Azonkívül pl. akkor is, ha az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a kifejezést adjuk. Hibásak volnának ezek a »tételek« akkor is, ha ismeretlent tartalmazó kifejezés helyett polinomról volna szó bennük, mert ebben az esetben sem következik be feltétlenül növekedés vagy csökkenés a gyö-

[5] Félreértések eloszlatása végett már itt hangsúlyozni szeretnénk, hogy cikkünk a hibák felsorolásában a teljességre *semmiféle igényt* sem támaszt.

kök számában (s ha bekövetkezik, akkor sem tekinthető a csökkenés a hamis gyökök fellépése 2. esetének).

Nézzük tovább a könyvet.

»*Szabad az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanarra a hatványra emelni,* de csak ha páratlan kitevőre hatványozunk, illetőleg ha az egyenlőtlenség két oldalának előjele megegyezik.« (244. old.) (Ha az »illetőleg« szó »vagy«-ot jelent, a megszorítás kevés, ha »és«-t jelent, sok.)

»... a következő egyenlet alakjában írhatjuk fel:

$$x+y=21,$$

vagy függvény alakjában kifejezve:

$y=21 - x$« (255. old.).

Vajjon csakugyan ez volna a különbség egyenlet és függvény közt? $x+y=21$ nem függvény, és $y=21 - x$ nem egyenlet? »Két határozatlan egyenlet már elegendő két ismeretlen számértékének meghatározásához (mindig?). Ezek az egyenletek a két ismeretlenre nézve két különböző (biztos, hogy különböző?) feltételt szabnak meg; e két egyenlet tehát szükségképen összetartozó (mit jelent itt ez a szó?) és egymástól különböző. Több ilyen összetartozó egyenlet **egyenletrendszert** alkot« (256. old.; zárójeles betoldások tőlünk).

»... két háromszög egybevágó, ha .. **egy-egy oldal és két szög egyenlő**.« (305. old.) Ellenpélda: az 1 és a $\sqrt{2}$ befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög.

A 317. oldal alján bebizonyítja a könyv két egyenesről, hogy egy derékszögű háromszög átfogójának felezőpontjában metszik egymást. A bizonyítás hallgatólagosan felhasználja azt, hogy a két egyenes az átfogón metszi egymást.

A 319. oldalon a háromszög három magasságvonalának közös metszéspontját elnevezzük a háromszög magasságpontjának. Azt a kérdést azonban, hogy ilyen pont egyáltalán létezik-e, csak a következő oldalon veti fel a könyv.

A 332—333. oldalon egy mintapéldában deltoidot szerkesztünk két oldalából (2 cm és 4 cm) és átlójából (3 cm). A diszkusszió szerint abban az esetben, ha az átló nem szimmetriatengely, »egy megoldás van, mert az ismert adatokkal csak egy háromszög szerkeszthető«. Az ismert adatokkal azonban (2 és 4 cm-es oldal és a harmadikhoz tartozó 1,5 cm-es magasság) két egymással nem egybevágó háromszög szerkeszthető, és ezek két lényegesen különböző deltoidhoz is vezetnek.

Ugyanígy hibás a 324—326. oldalon található feladat (háromszög-szerkesztés egy oldal és a másik kettőhöz tartozó magasság alapján) diszkussziója is:

»Csak akkor van megoldás, ha m_b és m_c kisebb a-nál.« (Van akkor is, ha az egyik kisebb a-nál, a másik egyenlő vele, csak akkor a szerkesztés menete más.)

»Egy megoldás van, ha mindkét magasság nagyobb, mint a megadott oldal fölé írt félkörbe rajzolható egyenlőszárú háromszög szára.« (Két megoldás van, hacsak nem egyenlő a két magasság.)

»Két megoldást kapunk, ha az egyik magasság rövidebb, mint az egyenlőszárú háromszög szára.« (A feltétel helyesen: ha a két magasság különböző, és mindkettő kisebb a-nál. Ez és az előbbi *egy eset*.)

»Egyenlőszárú háromszöget kapunk, ha a két magasság egyenlő, és mindkettő nagyobb, mint a félkörbe írható egyenlőszárú háromszög szára.

Egy megoldást kapunk, ha a két magasság egyenlő, és kisebb a félkörbe írható egyenlőszárú háromszög száránál.«

(A két eset megkülönböztetése teljesen felesleges. Mindkét esetben egy megoldás van, és ez a megoldás mindkét esetben egyenlőszárú háromszög.)

A helyes diszkusszió: lényegében egy megoldás van, ha $m_b < m_c = a$ vagy $m_c < m_b = a$ vagy $m_b = m_c < a$, kettő, ha $m_b \neq m_c$ és mindkettő kisebb a-nál.

A geometriai részben gyakran felmerül a tételek megfordításának a fogalma, de sohasem tisztázódik, hogy ez tulajdonképen mit is jelent. Például a 290. oldalon a könyv kifogástalan módon bizonyítja a következő két tételt:

»Az egyenlőszárú háromszögben a szárszöget felező egyenes felezi az alapot.«

»Az egyenlőszárú háromszögben az alappal szemben fekvő szöget felező egyenes merőleges az alapra.«

— és még egy harmadik tételt. Utána ezt írja:

»Az első két tétel megfordításából következik, hogy *az egyenlőszárú háromszögben az alapot merőlegesen felező egyenes akkor* (ez a szó, itt nyilván sajtóhiba) *felezi a szárszöget.*«

Hogy értik meg ebből a tanulók, mi egy tétel megfordítása? De még jobb is, ha nem értik meg: mert ha mégis kihámoznák, akkor a mondottak alapján azt kell hinnünk, hogy ha egy tétel igaz, igaz a megfordítása is. Hiszen arról nem beszél a könyv, hogy az első két tételnek a megfordítása viszont miből következik. Azonkívül mindjárt utána — bizonyítás és bármiféle indokolás nélkül — kimondja egy előbb szerepelt tétel megfordítását (a háromszög egyenlőszárú, ha két szöge egyenlő).

Az alábbi mondatok is azt az elképzelést támasztják alá, hogy egy tételt minden további nélkül meg lehet fordítani, hogy a megfordítás ugyanannak a tételnek más fogalmazását jelenti:

»A húrnégyszög két-két szembenfekvő szögének összege egyenlő.

Megfordítva a tételt így fogalmazhatjuk:

Ha a négyszögben két-két szembenfekvő szög összege egyenlő, akkor ez a négyszög húrnégyszög.« (400. old.)

Igaz, utána mindjárt következik az utóbbi állítás bizonyítása. De miről győzi ez meg a tanulót? Legfeljebb arról, hogy a matematikában sohasem lehet tudni, mit miért bizonyítunk. Vagy esetleg arról, hogy a matematikusok bármit be tudnak bizonyítani, és bárminek az ellenkezőjét is be tudják bizonyítani, nekik ez a kedvtelésük. A kérdéses bizonyítás ugyanis így kezdődik:

»Elegendő kimutatni egy pár szembenfekvő szögről, hogy összegük 180°, mert akkor a másik 2 szög összegének is ennyinek kell lenni. Most éppen az ellenkezőjét fogjuk bizonyítani.« (Vagyis megcáfoljuk azt, amit bizonyítanunk kellene.)

Arról, hogy egy tételnek a (formális) megfordítása lehet helyes és helytelen állítás, és így ha helyes is, helyessége külön bizonyításra szorul, csak az győzi meg a tanulót, ha lát példát olyan tételre, amelynek nem igaz a megfordítása. Ilyen példát — mégpedig klasszikusan szép példát — ad a jelenlegi I. gimnáziumi könyv, amikor azzal vezeti be az érintőnégyszögekre vonatkozó tétel megfordításának a bizonyítását, hogy megmutatja: az érintőhatszögekre vonatkozó analóg tétel már nem fordítható meg.

4.

Különösen sok baj van a könyvben a *definiciók körül.* Ezek néha egyenesen a régi rendszer méltán letűnt könyveinek tudományoskodó, de tudománytalan szellemét idézik. A legtöbbször azonban egyszerűen nem gondolták át a szerzők, mit is tartalmaz a definíció. Nem egy esetben a saját — egyébként helyes — definíciójukat ők maguk nem tartják tiszteletben. Példák a különféle természetű hibákra:

»Az összeadás olyan alapművelet, amelynek segítségével meghatározhatjuk két vagy több szám összegét. Az összeg olyan szám, mely annyi egységet tartalmaz, amennyi az összes adott számban együttvéve van.« (18. old.)

»A félegyenes forgása közben a szög nagysága is állandóan változik. A szög nagyságát éppen ezért a félegyenesek egymástól való elhajlásával mérjük.« (És az elhajlást mivel mérjük? 279. old.)

»Az idom **területe** kifejezi, hogy mekkora síkrészt fed.« (367. old.)

»..a műveleti jelekkel egybekapcsolt algebrai mennyiségeket algebrai kifejezéseknek nevezzük. Ezek az *algebrai kifejezések* lehetnek: 1. **egytagúak** és 2. **többtagúak,** aszerint, hogy szerepel-e bennük vagy sem az összeadás vagy kivonás jele.« (81. old.) 2^{x+y} egytagú, vagy többtagú?

»Az összeadás és kivonás jelével egybekapcsolt kifejezéseket *többtagú kifejezéseknek* nevezzük. A többtagú algebrai kifejezést mindig annyi tagúnak nevezzük, ahány egytagú kifejezés van benne.« (81. old.) $(a+b)\ x^{m-n}$ hánytagú?

»...a többtagú kifejezések lehetnek:

1. kéttagúak (binom): $a+b$; $a-b$; $a+2b$.
2. háromtagúak (trinom): $a-b+c; 2ab+2ac+2bc$.
3. többtagúak (polinom): $a_1+a_2+a_3+a_4+\dots a_n$.« (81. old.)

Nem világos, hogy a háromnál több tagú kifejezéseket nevezzük-e polinomoknak vagy azokat, amelyek tagjainak száma nem ismeretes. Mindkét felfogás újszerű.

»Az egyenlőség jelével összekapcsolt, egyenlő egységet tartalmazó két számot vagy algebrai kifejezést **egyenlőségnek** nevezzük. Például egyenlőségnek tekinthetjük a következőt:

$$a=b+c,$$

mely helyes marad, ha $a=6$; $b=5$; $c=1$..« (85. old.) Itt egy sereg kérdés merül fel, és marad tisztázatlan. Mit értünk azon, hogy két algebrai kifejezés egyenlő egységet tartalmaz? Egyenlőségek-e az egyenletek? Vagy talán csak gyökhelyeiken, gyökeik helyettesítésekor válnak egyenlőségekké? Eszerint egyenlőség ugyanazt jelenti, mint azonosság? Akkor miért adunk neki mégis külön nevet? — Nem tisztázódnak ezek a kérdések a későbbiek folyamán sem, amikor megismerkedünk az egyenlőségek tulajdonságaival, és ilyeneket olvasunk: »Az egyenlőség *változatlan marad,* ha mindkét oldalához ugyanazt a mennyiséget (számot, kifejezést) hozzáadjuk.« »Az egyenlőség akkor is *helyes marad,* ha mindkét oldalából ugyanazt a mennyiséget (számot, kifejezést) kivonjuk.« »Ha az egyenlőség mindkét oldalát ugyanazzal a számmal (kifejezéssel) szorozzuk vagy osztjuk, az egyenlőség továbbra is *egyenlőség marad.*« (Kiemelések tőlünk.)

»Bármely mennyiség a vele egyenlő értékűvel *helyettesíthető*, vagyis ha:

$A = B$, akkor egyszersmind $B = A$...« (85. old.)

Ezt értenénk helyettesítésen?

Helyeseljük a rombusz definícióját: »*Ha a parallelogramma minden oldala egyenlő, akkor rombusznak nevezzük*« (340. old.). Ennek a definíciónak a következetes alkalmazása megkönnyíti a tételek, bizonyítások, diszkussziók stb. fogalmazását. Kár, hogy a könyv nem következetes; a 357. oldalon egy szerkesztési feladatból adódó négyszögről u. i. a következő ismertetőjelek alapján látjuk be, hogy rombusz: »átlói merőlegesen felezik egymást és szögei közt nincs derékszög.« (Valójában a megszerkesztett négyszögnek nyugodtan lehetnek derékszögei is.) Hasonló következetlenségeket látunk a parallelogramma, a trapéz, a deltoid definíciójával kapcsolatban.

Mulatságos definíciókra vezet a 180°-nál nagyobb szögek hagyományos rossz elnevezése:

»Azokat a négyszögeket, amelyekben domború szög is van, homorúaknak mondjuk ... azok a négyszögek, amelyekben nincs domború szög, a konvex (domború) négyszögek.« (329. old.; ugyanígy a 372. oldalon is.)

A felsorolt példák közt több olyan is van, ahol a hiba, legalább részben, fogalmazási eredetű. Lássunk még egy jellemző példát arra, hogy hibák olyankor is születhetnek, amikor a szerző előtt teljesen világos, amit mondani akar, csak nem tudja azt megfelelően kifejezni:

»Az olyan számokat, amelyeknek nincs valódi osztójuk, **törzsszámoknak**, vagy **prímszámoknak** nevezzük. Az első néhány törzsszám

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Az 1 kivételével többi számoknak van valódi osztója.« (43. old.)

Eldöntheti-e a tanuló ezek alapján, hogy az 1 törzsszám-e vagy nem? Az első mondat után azt kell hinnie, hogy az. A második mondat megingatja ebben a hitében, hiszen az 1 nem szerepel a felsorolásban. Talán felvilágosítást ad a kérdésről a harmadik mondat? Eszerint a többi (értsd: a felsorolásból kihagyott természetes) számoknak van valódi osztójuk. Ezek tehát nem törzsszámok. De van egy kivétel — állítja a mondat — t. i. az 1. Az 1 tehát mégiscsak törzsszám. — A 140. oldalon, ahol a könyv ismét definiálja a törzsszámokat, a hiba megismétlődik.

Ne tételezzünk fel túlsokat a diákról: ezt nem fogja így végiggondolni. De világos kép sem marad benne a kérdésről.

5.

A kísérleti könyvnek a már említett hibák mellett és azokkal egybefonódva egyik alapvető fogyatékossága éppen nehézkes, pontatlan, nem a lényegest kidomborító *nyelve.*

Nyissuk ki a könyvet akárhol. Itt van mindjárt az első szövegoldal közepéről néhány mondat:

»Számlálással azt állapítjuk meg, hogy például az osztályban 38 tanuló és 38 könyv van. A 38 tanuló és a 38 könyv megnevezett számok, ahol az egység 1 tanuló vagy 1 könyv. Ha azonban azt mondjuk 19 és nem mondunk hozzá egységet, nevezetlen (másképen: puszta vagy elvont) számot mondottunk. Hasonlóan megnevezett számhoz juthatunk mérés útján is. Ha a tanterem hossza 12 m, azt jelenti, megállapítottuk, hogy az egységül választott méterből a tanterem hossza hányat tartalmaz.«

Az első mondatban »azt« felesleges. A második mondatban »ahol« pongyola. A harmadik mondatban az »egység« szó más értelemben szerepel, mint a másodikban (ott »1 tanuló«, itt »tanuló« jelentené az egységet). A negyedik mondat szórendje hibás. Az ötödik mondatban »Ha ... azt jelenti« sántít, »az egységül választott méter« pedig úgy is érthető, mintha tőlem függene, hogy milyen métert választok egységül.

Nagyjából ez jellemzi a könyv stílusának átlagos színvonalát. De merítsünk csak a sürejéből is:

»Látjuk ebből azt, hogy az eredményünk *valószínűleg* helyes. Hogy pontos-e, azt úgy is ellenőrizhetjük, hogy ha az oszlopokban első számításkor alulról felfelé haladtunk, úgy most felülről lefelé haladva, elég jó ellenőrzést végezhetünk.« (20. oldal.)

»**A szorzás az az alapművelet, amellyel több egyenlő összeadandó összegét határozzuk meg.**

Ezért (?) új jelölést kell (?) bevezetni: ...« (26. old.)

»Itt természetesen a *nulla* nem helypótló számjegy, hanem a *számsor kibővítésének egyik eleme.* A nulla mint szám (?), egységet nem tartalmaz. A nullának nincs előjele, így (?) sem a pozitiv, sem a negativ számokhoz nem sorolható.« (93 old.)

»Mindkét függvénnyel kapcsolatban megvizsgálhatjuk még azt a kérdést is, hogy minden függvény végtelen sok összetartozó értékpárt tartalmaz; továbbá pedig azt, hogy a függvény képének bármely pontjához egy megfelelően összetartozó értékpár tartozik és megfordítva.« (182. old.)

»Ha (?) az előzőkben megismert $y=k \cdot x$ függvényben a kx kifejezést szorzatnak tekintjük (?), akkor az y ennek a szorzatnak értéke.« (190. old.)

»E példákból is láthatjuk. hogy mivel az egyenlet megoldása rendszerint abban áll, hogy egyenértékű egyenletek láncolatán keresztül mind egyszerűbb alakú egyenlethez jussunk, gyakran előfordulhat az egyenértékűség megsértése: mert olyan egyenletté alakítjuk át az eredeti egyenletet, amely annak következménye, de vele nem egyenértékű, ami azt jelenti, hogy a megoldásnál hamis gyökök léphetnek fel.« (217. old.)

6.

A könyv nyelvezetével kapcsolatban külön meg kell említenünk az *elnevezések túlburjánzását.* Nélkülözhetőnek tartjuk a könyvben a következő elnevezéseket: *számjel* (9. old.), *rend, csoport, osztály* (10. old.), *üregység* (17. old.), *számtani arány, mértani arány* (65. old.), *algebrai mennyiség, betűszám, általános szám* (77. old.), sőt: *általános betűszám* (174. old.), *mutatószám* (80. old.), *monom, binom, trinom* (81. old.), *relatív szám* (92. old.), *kibővített számsor, algebrai számsor* (93. old., egész számok helyett), *egységszám* (97. old., abszolút érték helyett), *egyszerű szám* (140. old., törzsszám helyett), *valódi tört kifejezés, áltörtkifejezés* (149. old., algebrai kifejezésekre), *egynemű törtek* (155. old.), *koordinátasík* (179. old.), *szubsztitúció* (182. old.), *részérték* (191. old.), *betűkifejezéses egyenlet* (212. old.), *mellékgyök* (215. old.), *monotónia* (243. old.), *függvényegyenes* (250. old.); *irányzó, vezérvonal* és *direktrix* közül is elég volna egy (439. old.).

A felsorolt kifejezések közül némelyik csak alkalomszerűen fordul elő, némelyiket rendszeresen használja a könyv. Nem egy közülük nemcsak felesleges, hanem ártalmas is, mert téves elképzeléseket sugall. Például a régebben szokásos »relatív szám« elnevezés abból az elképzelésből fakad, hogy a pozitív és negatív számok, mint *relatív* számok szemben állnak az előjel nélküli, abszolút számokkal, és így pl. $+2$ és $|+2|=2$ két különböző szám.

Téves elképzelésekre adhat alkalmat a »betűszám« elnevezés is.

A »mellékgyök« szó (értsd: az egyenlet formális megoldása során adódó, de az egyenletet ki nem elégítő, hamis gyök) azt az elképzelést támasztja alá, mintha ez is gyök volna, csak valahogyan kevésbbé fontos, mint a többi gyök. Ha pl. ezt a mondatot olvassuk: »Eszerint tehát $x_1=-3$ valódi gyöke, míg

$x_2 = 1$ mellékgyöke, hamis gyöke az eredeti egyenletnek« (217. old.), hajlandók vagyunk azt hinni, hogy azért az 1 is *gyöke* az eredeti egyenletnek — holott nem az.

7.

A tárgyi és stiláris hibák egyik oka talán az a nagy sietség volt, amellyel a könyv készült. Paradoxonnak hangzik, de főleg ennek kell tulajdonítanunk a könyvnek még egy alapvető hibáját: *roppant terjedelmét.*

Egyetlen osztály matematika-anyagát 444 oldalon tárgyalni azt jelenti: eleve lemondani arról, hogy a könyvet a diákok (taián a legelszántabbak kivételével) használják is. Semmiképpen sem vagyunk hívei a száraz, csak levezetéseket tartalmazó tankönyvnek; az egyes lépések miértjének és az egész anyag összefüggéseinek illusztrálása példákon, megmagyarázása szavakban, a felszabadulás előtti könyvekénél nagyobb terjedelmet követel meg. Egyes új anyagrészek beillesztése, új szempontok érvényesítése is a terjedelem növekedésére vezet. Nem hisszük azonban, hogy mindez együttvéve is indokolná a jelenlegi gimnáziumi tankönyvek terjedelmének kb. 100 oldallal való túllépését.

A nagy terjedelmet az egyik szerzőnek a könyvet ismertető cikke[6] azzal menti, hogy ezt nem annyira a nagy tananyag, mint inkább a sok megoldott mintafeladat és a terjedelmes ábraanyag okozza. Való igaz, hogy a feldolgozott anyag ilyen nagy terjedelmet nem tesz indokolttá. A kísérleti könyv terjedelmének megnövekedésében azonban, véleményünk szerint, az említett két tényező mellett más tényezőknek is volt szerepe:

1. A kidolgozott mintafeladatoknak nem annyira a száma, mint inkább a terjedelme túlzottan nagy (elsősorban az algebrai részben; erre még visszatérünk).

2. Egyébként is rendkívül bőbeszédű a könyv, tele van töltelékmondatokkal, felesleges ismételgetésekkel. Pl.:

»... egyenlőségünk:

$$x+5=18$$

alakban írható fel.

Átgondolva a feladatot, a keresett számot könnyen kitaláljuk, mert az csak 13 lehet, mivel $13+5=18$.

Ugyanis a fenti egyenlőség csak az $x=13$ mellett áll fenn, mert bármilyen más számot írunk is az x helyébe, egyenlőségünk nem marad fenn.« (87. old.)

[6] Csánk István: Két új középiskolás matematika tankönyv, A matematika tanítása, I. kötet, 3. szám (1953 december). 84—85. old.

»Arról pedig, hogy az egyenletet helyesen oldottuk-e meg, vagyis, hogy a nyert érték valóban megfelel-e a feladatban jelzett ismeretlen mennyiség értékének, és hogy ez a kapott érték, mint az egyenlet gyöke, eleget tesz-e (kielégíti-e) az egyenlet követelményeinek, az egyenlet *próbájával* győződhetünk meg.« (207. old.)

»*Ha* azonban *az egyenlőtlenség mindkét oldalát* »—1«-gyel vagy pedig valamilyen más *negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor ellenkező* (ellentétes) *értelmű egyenlőtlenséghez jutunk,* vagyis az egyenlőtlenség iránya megváltozik (mert az egyenlőtlenség tagjainak előjelváltozása az egyenlőtlenségi jel megfordítását vonja maga után).« (244. old.)

3. Számos fogalmat, tételt, szabályt, stb. kétszer, háromszor is megtanít a könyv, hivatkozás nélkül arra, hogy erről már máskor is volt szó.

8.

Utóbbi megjegyzésünkkel kapcsolatban a terjedelem kérdésén túl a *rendszeresség* kérdése is mindjárt felvetődik. Hogy a könyv íróinak egyik főszempontja éppen a rendszeresség volt, az kiderül többek között az idézett cikknek egy mondatából is.[7] De vajjon rendszerességnek nevezhetjük-e azt, hogy a könyv a 19. oldalon kimondja az összeadás »kommutativ törvényét« és »asszociatív törvényszerűségét«, mindkettőt leírja »általános számokkal« is:

$$a+b+c+d=a+c+b+d=d+c+a+b=\ldots,$$

illetve

$$a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)=\ldots;$$

majd a 98. oldalon általánosítja ezeket »relatív számokra« is, s újra leírja betűkkel, most már így:

$$a+b=b+a$$

és

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b= \text{ stb.}$$

— az azonosságok neve most: »az összeadás felcserélési (kommutáció) törvénye« és »a csoportosítás (asszociáció) törvénye« —; ezek után pedig a 109. oldalon a következőket mondja:

»Így az azonosságok lehetőséget nyujtanak ahhoz, hogy az alapműveletekre tanult törvényszerűségeket azonosságok segítségével is megfogalmazzuk.

[7] „... szükségessé vált az algebrai alapfogalmak, alapműveletek rendszeres tanítása...“, 85. old.

a) Az összeadás egyik alapvető tulajdonsága az, hogy **az összeg nem változik, ha az összeadandók sorrendjét felcseréljük.** Tehát:

$$-3a^2b+6a^2b=6a^2b-3a^2b=3a^2b.$$

Ez a *kommutáció (felcserélés) törvénye,* melyet általánosan így írhatunk fel:

$$a+b=b+a$$

b) Több összeadandó esetén az összeadást úgy végezzük el, hogy bármelyik két tag összegéhez hozzáadjuk a harmadik tagot.

Az összeg tehát változatlan marad, ha az összeadandókat tetszés szerint csoportosítjuk.

Ez az *asszociáció* (csoportosítás) *törvénye.*

Általánosan felírva:

$$\begin{aligned} a+b+c &= (a+b)+c \\ &= (a+c)+b \\ &= (b+c)+a \\ &= \ldots \text{ stb.} \end{aligned}$$

c) **Összeget úgy adunk egy számhoz, hogy az összeg minden tagját hozzáadjuk a számhoz.** Tehát:

$$a+(b+c)=a+b+c$$

d) **Különbséget úgy adunk egy számhoz, hogy a kisebbítendőt hozzáadjuk, a kivonandót pedig kivonjuk.** Tehát:

$$a+(b-c)=a+b-c\text{« és így tovább.}$$

Eltekintve az elnevezések sokféleségétől, a kommutativitásnak és asszociativitásnak a szokásostól eltérő, egybefolyó értelmezésétől — mi szükség van erre a három helyen, három különböző módon való tálalásra? És mi szükség van külön kivonási azonosságokra a negatív számok bevezetése *után*? Nem lehetne-e a természetes számoknál egyszer felírni az összeadás alaptulajdonságait pl. $a+b=b+a$ és $a+(b+c)=(a+b)+c$ alakban, utalni általánosításaikra, és attól kezdve minden új számfajta bevezetésekor megmutatni, legalább egyes példákon, hogy ezek továbbra is érvényben maradnak? (Az azonosságok alkalmazását algebrai kifejezésekre egyetlen megjegyzéssel elintézhetjük: ezek is számokat jelentenek.)

Három helyen szerepelnek a szorzás megfelelő tulajdonságai is (28., 101. és 111. old.). Érdekes azonban, hogy utoljára, amikor — 20 oldallal a negatív számok, 65 oldallal a törtek bevezetése után — a legtágabb szempontból vizsgálhatnánk érvényességüket, a kommutativitás következő indokolásával találkozunk:

»Az a számot b számmal szorozni annyit jelent, mint az a számot b-szer venni összeadandóul. Tehát:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots & b \\ a \cdot b & = & a + & a + & a + & a + & \ldots\ldots\ldots\ldots & + a \end{array}$$

A szorzás olyan összeadás, amelynél az összeadandók egyenlők. Ennélfogva a szorzásnál is érvényesek az összeadás törvényei.

Tehát: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

Mivel ez minden számra igaz, éppen azért betűkkel is felírhatjuk ezt az azonosságot

$a \cdot b = b \cdot a$« (111. old.)

(Az okfejtés, ha jól értjük, a következő: Az összeadás kommutatív. A szorzás is összeadás. Tehát a szorzás kommutatív. Csakhogy ebben a szillogizmusban 1. a propositio minor 65 oldallal előbb — mikor a törteket bevezettük — már érvényét vesztette; 2. a kommutativitás mást jelent a propositio maiorban és mást a conclusioban.)

Még felsorolunk néhány példát — a teljességre való igény nélkül — a könyv rendszertelenségére.

A 96. oldalon az előjeles számok összeadásával és kivonásával kapcsolatban — nagyon helyesen — algebrai kifejezések összevonására is hoz fel példákat a könyv. De miért veti fel akkor ezt a 104. oldalon új problémaként?

Kétszer ismerkedünk meg a szorzás előjelszabályával (101. és 113. old.), háromszor az osztásával (104., 126. és 149. old.).

Az egynemű kifejezések összevonásakor nem tudjuk meg, hogy tulajdonképen kiemelést végeztünk. Ez a fogalom a 129. oldalon merül fel először. De nem utoljára: A 136. oldalon »**A közös tényező kiemelése**« c. fejezet az egész kérdést elölről veti fel.

Kétszer definiálja a könyv — más és más fogalmazásban — a reciprok értéket (55. és 159. old.).

A törtes törtek egyszerű törtté alakítása is külön szerepel a számtani részben (56. old.) és külön mégegyszer az algebrai részben (165. old.). A két tárgyalásmód között vannak eltérések. Egyben azonban megegyeznek: mindkettő gondosan hangsúlyozza a törtes törtek eltávolításának azt a módját, hogy előbb »a főtörtvonalat osztásjellel helyettesítjük«. Félreértés elkerülése végett az algebrai rész írója zárójelben odateszi, hogy ilyen (:) osztásjelre gondol. Komolyan gondolják a szerzők, hogy egy műveleti jel helyettesítése egy másik, vele teljesen egyenértékű műveleti jellel valamivel is előreviszi a dolgot?

A 295. oldalon szerepel ez a feladat:

»*Szerkesszünk háromszöget, amelynek ismerjük három oldalát.*« A megoldáshoz, helyesen, hozzáfűzi a könyv: »A feladatnak csak akkor van megoldása, ha bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.« Ennek a diszkussziónak az elméleti megalapozása 7 oldallal később található meg. Kérdés, szükség van-e erre egyáltalán ezen a fokon; de ha igen, akkor feltétlenül előbbre kell kerülnie, mint az alkalmazásának.

A szimmetriát (290. oldal) és a tükrözést (311. old.) külön vezeti be a könyv.

A 308. oldalon bizonyítással szerepel az a tény, hogy a szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a száraktól; a 318. oldalon bizonyítás nélkül és a 308. oldal eredményére való hivatkozás nélkül olvassuk azt, hogy a szög száraitól egyenlő távol lévő pontok a szögfelezőn helyezkednek el; a mértani hely fogalmát azonban csak az utolsó fejezetben vezeti be a könyv, és így csak a 432. oldalon tudjuk meg, milyen pontok mértani helye a szögfelező. Holott ezt a kérdést nem itt, nem is a 318. vagy a 308. oldalon, hanem már a 293. oldalon, a szögfelező szerkesztésével kapcsolatban tisztázni lehetett volna, hiszen a szimmetria fogalma ott már rendelkezésre állt. Hasonló a helyzet a szakaszfelező merőlegessel (292., 317., 416. old.). Persze a kérdés más és más oldalról merül fel az egyes helyeken. De ha ezek a helyek egymás mellé kerülnének, akkor csökkenne a terjedelem, főleg pedig az anyag megtanításához, megtanulásához szükséges munka.

A 321. oldalon a tapasztalat alapján fogadjuk el, hogy a súlyvonalak egy pontban metszik egymást. Annak a tételnek a bizonyítása, hogy a súlyvonalak 1 : 2 arányban osztják egymást — amelyből az előbbi rögtön következik — csak a 352. oldalon található meg. De hogy e két tény között összefüggés van, arról itt sem értesülünk.

A háromszög középvonalának tulajdonságait három helyen is kimondja a könyv:

»*. . . a háromszög két szomszédos oldalának felezési pontjait összekötő szakaszok párhuzamosak a harmadik oldallal, és minden ilyen szakasz hossza fele a harmadik oldalnak.*« (320. oldal.)

»Bármely háromszögben két oldal felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos a harmadik oldallal, és fele annak az oldalnak, amellyel párhuzamos« (334. oldal; hivatkozás van a 320. oldalra).

»Ha egy háromszög két oldalának felező pontjait összekötjük, akkor az összekötő szakasz fele a harmadik oldalnak és azzal párhuzamos.« (350. old.; nincs hivatkozás az előbbiekre.) Bizonyítással és a »középvonal« elnevezéssel csak itt találkozunk.

A 391—393. oldalon megtaláljuk annak bizonyítását, hogy egy körívhez tartozó kerületi szögek egyenlők. Az a probléma viszont, hogy egy egyenesszakasz a sík mely pontjaiból látszik egyenlő szögek alatt, csak a 425. oldalon vetődik fel.

Rendszeresnek ezek után igazán nem mondhatjuk a könyvet. Mi az, ami mégis a rendszeresség látszatát kelti bennünk, legalább is addig, amíg közelebbről meg nem nézzük? Az, hogy a fejezetcímek a régi könyvekből ismert sorrendben következnek egymás után; pl. a mértani részben: I. Alapfogalmak. II. Háromszögek. III. Négyszögek. IV. Sokszögek. V. A kör. VI. Mértani helyek.

Csakhogy ennek a rendnek nagy ára van: a felsorolt rendszertelenségek jórésze éppen ebből az át nem gondolt, de kötelezőnek érzett rendszerezésből veszi eredetét (pl. a háromszög szögfelezői a háromszögnél találhatók, kerületi szög a körnél, de szögfelező és látószög-kör, mint mértani helyek, az utolsó fejezetben.)

9.

Egy tankönyv értékelésekor szükségszerűen felmerülnek *didaktikai* szempontok is. Tanítható-e — és még inkább: tanulható-e — a könyv? Bírálatunk erre a kérdésre több vonatkozásban már meg is adta a feleletet (pl. a terjedelemmel kapcsolatban), de nem lesz felesleges néhány további vonatkozásra is felhívni a figyelmet, anélkül, hogy a kérdést ki akarnánk meríteni.

Sok pedagógusnak bizonyára az lesz a véleménye a kísérleti könyvről, hogy hibái ellenére is aránylag jól tanítható. Ez érthető is, hiszen azelőtt mindnyájan nagyjából ilyen felépítésű könyvekből tanultunk és tanítottunk. A tradíció szerepe nem lebecsülendő. A Kiszeljov-könyvek például hibáik ellenére is haladó hagyományt jelentenek a szovjet matematikatanítás történetében, ez indokolja a hozzájuk való ragaszkodást. Viszont kérdéses, hogy a Horthy-korszak legelterjedtebb matematikakönyvei, a Borosay- és a Mérey-féle könyvek bármilyen szempontból is haladó hagyományt jelentenek-e!

A tradíció kérdése azonban csak a tanárok szempontjából merül fel. Arra szeretnénk kérni a kartársakat, hogy nézzék a dolgot egy kicsit a diákok szemével is. Meg tudja-e győzni ez a könyv a diákokat arról, hogy érdemes algebrát és geometriát tanulni, arról, hogy a matematikával valami értékes eszközt kapnak a kezükbe? Helyes fogalmat ad-e a matematika és a környező világ kapcsolatáról? Felkelti-e érdeklődésüket azzal, hogy rámutat az egyes matematikai kérdések egymással való kapcsolatára? (Egy másik didaktikai kérdésre, a készségek begyakorlásának a kérdésére később visszatérünk.)

Nem akarunk túlzott és felesleges követelményeket támasztani. Nem volna könnyű akár az algebrát, akár a geometriát logikailag helyes felépítésben folyamatosan tárgyalni olyan módon, hogy mindig valami gyakorlati problémából induljunk ki. De erre nincs is szükség. Senki sem kívánja — remélhetőleg —, hogy a kéttag köbét akár a tankönyv, akár a tanár tsz.-példával vezesse be. Valahogyan mégis meg kell értetnünk a diákokkal, hogy amit tanítunk nekik, az nem az élettől teljesen különálló valami. Az olyan indokolás, hogy »tanuld fiam, majd a végén meglátod, mire jó« nem szokta kielégíteni a diákokat — teljes joggal.

Nem kívánhatjuk például a diákoktól, hogy átrágják magukat az algebrai átalakítások kásahegyén (a kísérleti könyvben ez közel 90 oldal; ebből 12 »azonos átalakítások«, a többi »műveletek« néven), anélkül, hogy megmutatnánk nekik, hogyan lehet ezeket alkalmazni ott, ahol valami hasznukat látjuk, például egyenletek megoldásában. A szovjet metodika már hosszabb ideje felfigyelt arra, milyen lélekölő az algebrai átalakításoknak az egyenletektől független tanítása. Az újabb módszertani könyvek egyértelműen állást foglalnak amellett, hogy az azonos átalakításokat kapcsolatba kell hozni az egyenletekkel.[8] Kiszeljov algebrájának hibájául róják fel, hogy ezt nem teszi. Faggyejev és Szominszkij már említett kísérleti tankönyve ezt a hibát részben kiküszöböli, az azonos átalakítások tanítása közben felszínen tartja az egyenletek megoldását is, hogy ezzel is indokoltabbá, érdekesebbé tegye az azonos átalakításokat. Érthetetlen, hogy amikor a Szovjetunióban egy hiba kiküszöbölésére történik kísérlet, ugyanakkor mi a hiba visszaállítására teszünk kísérletet. A kísérleti könyvnek az azonos átalakításokkal foglalkozó részében ugyanis nyoma sincs bármiféle hivatkozásnak arra, hogy az azonos átalakításoknak hasz-

[8] Lásd pl. Bragyisz, A középiskolai matematikatanítás módszertana, 256—257. old., Barszukov, Uravnyenyija pervoj sztyepenyi, 15—16. és 26—27. old.

nát vehetjük egyenletek megoldásában vagy paraméteres egyenletek megoldásának ellenőrzésében.

Annak a követelménynek, hogy »az egyenletekkel az algebratanítás minél korábbi fokán meg kell ismertetni a tanulókat«[9] azzal igyekszik eleget tenni a könyv, hogy az algebrai rész elején, a 87—90. oldalon összefoglalja, mit »szabad« az egyenlettel csinálni. Egyenletekre azonban nem azért van szükség az anyag elején, hogy ott elmondhassunk róluk valamit, amit száz oldallal később majd megint elmondunk, de másképpen (más kérdés, hogy itt is, ott is rosszul), hanem éppen az azonos átalakítások indokolása céljából.

Nem sokkal jobb a helyzet az azonos átalakításoknak numerikus példákon való szemléltetése tekintetében sem. Az I. gimnazisták többsége aligha képes arra, hogy egyetlen olyan példa alapján, ahol a kitevők ugyan adott számok, de az alapok nem:

$$x^3 \cdot x^5 = (x \cdot x \cdot x)\,(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8,$$

olyan világos képet alakítsanak ki magukban az egyenlőalapú hatványok szorzásáról, hogy ezt mindjárt

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

alakban is rögzíthessük (114. old.). Márpedig ha a tanárnak minden órán 3—4 oldalt kell elvégeznie — mint ebből a könyvből — akkor nem várható, hogy a könyvben foglaltakat további példákkal egészítse ki. Ennyi előkészítés után pedig a diák legjobb esetben formálisan megtanulja, mit kell csinálnia egytagok szorzásakor a kitevőkkel, de nem alakul ki benne az algebrai kifejezésnek mint konkrét számkifejezések általánosításának a szemlélete. Betűket lát, betűkkel dolgozik, hiába mondjuk neki, hogy a betűk számokat jelentenek.[10]

De még ott is, ahol a könyv numerikus példákat hoz fel az azonosságokra, baj van a sorrenddel: nem a konkrét példákból absztraháljuk az általános szabályt, hanem elénk pottyan az általános szabály, és azt alkalmazzuk a konkrét esetre. Csak a kommutatív és asszociatív tulajdonságok felírását előzik meg konkrét példák. Itt viszont, mint már említettük, az általánosság körül van baj: teljesen elhibázott dolog a szorzásra vonatkozó azonosságokat a negatív számok bevezetése után csak a természetes számok köréből vett példákból absztrahálni (111. oldal).

[9] Barszukov, i. m. 15. old.
[10] V. ö. Bragyisz, i. m. 262. old.

Hogy mennyire nem látják a szerzők, mit lehet ebben a korban absztrakciós képesség terén feltételezni, arra jellemző példa, hogy amikor a tanulók életükben először tanulnak függvényekről, és még összesen csak négy konkrét függvényt ismernek, elérkezettnek látják az időt az $s=f(t)$, $k=f(a;b)$, $T=f(r)$, $f=\varphi(t)$ jelölések bevezetésére (176. old.).

Tankönyvíráskor a legfontosabb az, hogy a szerző bele tudja élni magát a tanulók gondolatvilágába; hogy mindig az ő gondolatmenetüket igyekezzék tovább vinni, problémáikra válaszolni (persze nem gügyögve, hanem a saját hangján, hiszen az a célja, hogy nevelje, saját szintje felé közelítse őket). Ez a »hozzáállás« az, amit erősen hiányolunk a kísérleti könyvben. Vegyük csak elő saját diákkori élményeinket! Ki tudott-e elégíteni bennünket az, hogy »most ezt tanuljuk, mert ez következik az anyagban«? Nem az adja-e meg éppen a matematika szépségét, hogy amint egy problémára választ kaptunk, új problémák merülnek fel, és ezek visznek bennünket mindig tovább? A kísérleti könyvnek ehelyett inkább leckefelmondás-jellege van. A szerzők elmondják az anyagot — de nem a diák felől nézve, hanem úgy, ahogy azt ők tudják.

»Természetesen a kiküszöbölés ezen módját akkor is alkalmazhatjuk« — olvassuk a 265. oldalon, miután megismerkedtünk olyan egyenletrendszerekkel, amelyekből az egyik ismeretlen egyszerű összeadással vagy kivonással kiesik — »ha az ismeretlenek együtthatói az adott egyenletrendszer mindkét egyenletében különböznek«. A szerzőknek ez természetes, de nem a diákoknak! Helyesebb lett volna felvetni a problémát: alkalmazhatjuk-e a módszert, s ha igen, hogyan?

Vagy például — hogy az egyenletrendszereknél maradjunk — a 259. oldalon értesülünk arról, hogy az egyenletrendszerek algebrai megoldásai közül »először az *összehasonlító* vagy *kiegyenlítési* módszerrel ismerkedünk meg«. A gyerek még meg sem született, de már két neve is van! Következik a módszer ismertetése. Majd utólag megtudjuk azt is, ami pedig egyedül indokolja ennek a módszernek az előrevételét az algebrai megoldási módok közül (sőt egyáltalán a létjogosultságát is):

»Az összehasonlító módszer alapjául tulajdonképpen a grafikus módszer szolgál, mert amikor a grafikus ábrázoláshoz mindkét egyenletből kifejezzük az y-t,

$$y=\frac{3-30x}{2},$$

$$y=\frac{8x-22}{3},$$

akkor a két egyenlet közös x és y értékeit keresve, az így kapott kifejezéseket egy egyenletben kapcsolhatjuk össze, mert ha két mennyiség külön-külön egyenlő egy harmadikkal, akkor azok egymás között is egyenlők. Mivel pedig fenti kifejezéseinkben mindkét kifejezés baloldala ugyanazzal az y értékkel egyenlő, így az y-ok egyenlősége mellett a jobboldalak is egyenlők, vagyis felírható, hogy:

$$\frac{3-30x}{2}=\frac{8x-22}{3}.«$$

Ez a mondat nemcsak indokolásnak kései és logikailag hibás; egyáltalán az is kérdéses, hogy megértik-e belőle a tanulók a grafikus és az összehasonlító módszer összefüggését.

Említettük mint didaktikai követelményt a konkrét alkalmazások bemutatását, a valósággal való kapcsolat ébrentartását ott, ahol ez megvalósítható. Ezen a téren számos hibát követ el a könyv. Az egyenlőtlenségekről szóló fejezetben például sehol sem derül ki, hogy az egyenlőtlenségeket valamire használni is lehet.

Az élettől való idegenség tekintetében azért mégis a geometriai rész vezet. »A geometria tárgya a tér tanulmányozása« — jelenti ki az első mondat (277. old.). Erről a térről egyelőre azt tudjuk meg, hogy »pontokból tevődik össze, amelyeket nagybetűvel szoktunk jelölni: A, B, C stb. Néha ezeket indexekkel látjuk el (lent) és vesszőkkel (fent). Például: X_1, X_2, K', K'' stb.« De hogy ennek a térnek volna valami köze ahhoz a térhez, amelyben élünk, arról 35 oldalon keresztül semmit sem tudunk meg. A 312. oldalon találkozunk az első olyan példával, amelyben a geometriai alakzatoknál konkrétabb valamiről is szó van: »Egy fal előtt A golyó áll. Milyen irányban kell az A golyót löknünk, ha azt akarjuk, hogy a falról való visszapattanás után a B ponton haladjon át?« Holott közben nem egy esetben lett volna alkalom konkrét példák megemlítésére (szögek mérése, háromszögek egybevágósági tételeinek alkalmazása a gyakorlatban). Ugyanezt látjuk a feladatanyagban is: az első száz feladat közt csak egyet találunk, amely a geometriai fogalmakat a valóságra vonatkoztatja (281. old. 10.) Nem a sematikus álgyakorlati vagy a felesleges részletkérdésekbe merülő gyakorlati feladatokat hiányoljuk, hanem annak érzékeltetését, hogy a geometriának van köze a valósághoz. Tizenötéves diákoknak szól a könyv!

Kétségtelen, hogy az érdeklődés felkeltése, a gyakorlattal való kapcsolatnak és az egyes matematikai problémák közötti kapcsolatoknak a megvilágítása lényegesen inkább múlik a tanáron, mint a tankönyvön. Mégsem lehet tagadni, hogy a tankönyv is nagy nevelőhatást fejthet ki — pozitív és negatív irányban egyaránt — egyrészt közvetlenül a diákokra, másrészt azonban a tanárokra is, különösen a fiatalabb, pályájuk kezdetén álló pedagógusokra.

10.

Didaktikai hibákról szólva beszélnünk kell a könyv *formalizmusáról* is — anélkül, hogy ezt a többi didaktikai vagy egyéb hibáktól el akarnánk vagy tudnánk határolni.

A matematika egyik legnagyobb erőssége sok évszázad folyamán kicsiszolódott formanyelve: tömör jelölésmódjai, a már többször megtett gondolatsorok átugrására képessé tevő algoritmusai. A formanyelv elsajátíttatása, az ezzel kapcsolatos készségek begyakoroltatása iskoláink egyik legfontosabb feladata. Köztudomású, hogy ezen a téren igen nagy hibák vannak. Azért talán, mert a diákok gondolkozni ugyan megtanulnak, eljutnak oda, hogy az anyagot megértik, de ez olyan sok időt és energiát vesz igénybe, hogy az anyag gyakorlására már nem futja? Lehetséges, hogy egyes esetekben ez az ok. Tapasztalatunk azonban az, hogy az esetek túlnyomó részében más baj van. A diák — mint arra az előző pontban egyes példák kapcsán már rá is mutattunk — nem lát elég konkrétumot, nem fut végig elég sok konkrét gondolatsoron, elég tudatosan ahhoz, hogy a formanyelv absztrakciójáig eljusson, hogy az számára ne üres formát, hanem a valóságnak általánosabb, sűrített kifejezését jelentse. Mégis felszed valamit a formanyelvből, de persze csetlik-botlik benne, tudása formális, holt tudás.

Ezzel a tapasztalatunkkal nem állunk egyedül. A szovjet metodika világosan rámutat arra, hogy itt van a probléma lényege.

»Tekintetbe kell vennünk, hogy a tanulók általános formában esetleg jól megtanulták az egytagúak szorzásának szabályát, és a feladatgyűjteményben előforduló, rendszerint elvont példák megoldásában is jártasságra tettek szert, és mégis gyakran követnek el hibát a szabály alkalmazásánál; ez pedig azt bizonyítja, hogy tudásuk formális.«[11]

Ugyanebből a felismerésből fakadt a szovjet matematikatanításnak nálunk is meghonosulófélben lévő kitűnő módszere az algebra előkészítésére: évek során át mind összetettebb szöveges feladatokat oldani meg egyenlet nélkül, és így fokozatosan megérlelni annak szükségességét, hogy a már gépiessé váló gondolatokat alkalmas tömör formában rögzítsük.

[11] Bragyisz, i. m. 263. old.

Ha ide eljutottak a tanulók, akkor kerülhet sor a tudatosan megszerzett és mindig újra tudatosítható formális eljárások gyakorlására, további bőséges, változatos példaanyagon.

Mit kívánunk hát ezen a téren egy tankönyvtől? Azt, hogy a formanyelvet akkor és olyan mértékben adja a tanulók elé, amikor és amilyen mértékben arra szükség van. Hogy öltöztesse a gondolatokat mindig a legkifejezőbb módon formába, és ne alkalmazzon soha gondolatnélküli, üres formákat.

A formalizmus veszélye különösen nagy az algebrában. Az azonos átalakításokról eleget beszéltünk, lássuk, hogy áll ezen a téren a kísérleti könyvnek az egyenletekről szóló része.

Mit jelent egyenletet megoldani? Mi a célunk, ha egy egyenletet meg kell oldanunk? Megtalálni az egyenlet gyökeit, azaz mindazokat a számokat, amelyeket az ismeretlen helyébe írva helyes egyenlőséget kapunk. Ez a cél; a formális eljárás alkalmazása pedig (pl. mindkét oldal egyenlő változtatása) a célhoz vezető — egyik lehetséges — út. Amint célunkat elértük, azaz rájöttünk arra, hogy az egyenletnek mi a gyöke vagy mik a gyökei, a formális eljárás további alkalmazása céltalan. Ha mégis alkalmazzuk: a formanyelv öncélúvá válik a kezünkben, a formalizmus hibájába esünk. Az ilyen oktatás eredménye: a diákok előtt elködösítjük a matematika célját, felesleges nehézségeket támasztunk nekik, elriasztjuk őket a matematikától.

Tegyük fel például, hogy egy egyenlet megoldása során ezt kapjuk:

$$-72x = -72.$$

Van-e itt szükség további átalakításra? Nyilvánvaló, hogy nincs. Ez az egyenlet az $x=1$ esetben teljesül, más esetben nem teljesül, hiszen -72-nek az 1-szerese és csakis az 1-szerese egyenlő -72-vel.

Feltéve, de meg nem engedve, hogy valaki mégsem találná ki ezt a gyököt, még mindig végigoszthat -72-vel (negatív számokkal már tudunk osztani!), és akkor is ugyanezt kapja.

A kísérleti könyv ezzel szemben, hogy eleget tegyen hat pontból álló egyenletmegoldási sablonja követelményeinek, a 207. oldalon a fenti egyenletet a következő lépésekben oldja meg:

$$-72x = -72$$

$$72x = 72$$

$$\frac{72x}{72} = \frac{72}{72}$$

$$x = 1.$$

Ez éppen az, amit az előbb a formanyelv öncélú alkalmazásának, formalizmusnak neveztünk.

Nem akarjuk elhallgatni, hogy a könyv többször figyelmeztet arra — például, mindjárt a fenti egyenlet megoldása után — hogy a hat pontból álló sablont »nem szabad merev sablonnak tekintenünk« (207. old.) »nem szabad csupán formálisan alkalmazni, hanem gondolkodva, egy kis előrelátással kell a feladatokat megoldani« (218. old.). Itt azonban felvetődik a kérdés: azzal nevel-e egy könyv, amit mond, vagy azzal, amit csinál? Nyilvánvaló, hogy egy tankönyv is elsősorban a példájával nevel. Márpedig mindjárt az utóbbi megjegyzés után is egy olyan egyenletmegoldás következik, ahol a mondottaknak éppen az ellenkezőjét látjuk megvalósítva. A közölt egyenlet egyszerűsítés után ilyen alakot ölt:

$$5-2x+\frac{x}{4}-3-\frac{x}{3}=\frac{(2-6x)-2}{4}-\frac{x}{3}+5.$$

Ha az egyenletmegoldás hat pontból álló sablonját nem tekintjük merev sablonnak — sőt, ha egyáltalán nem is ismerjük, csak a józan eszünkre hallgatva igyekszünk az egyenletet minél egyszerűbb alakra hozni — akkor az első, ami feltűnik, az, hogy 5 és $-\frac{x}{3}$ mindkét oldalon szerepel, tehát mindkét oldalról elhagyható. Ha ezekután 4-gyel végigszorzunk, a

$$-8x+x-12=-6x$$

egyenlethez jutunk, és ebből $7x$ hozzáadása után máris adódik a gyök:

$$-12=x.$$

A könyv azonban — nyilván azért, mert sablonja szerint most a törtek eltávolítása van soron — nem hagyja el az egyenlő tagokat, hanem végigszoroz a nevezők legkisebb közös többszörösével, 12-vel:

$$60-24x+3x-36-4x=6-18x-6-4x+60.$$

Ezekután eljut a

$$-3x=36$$

egyenlethez. Sablonjának következő pontját alkalmazva, ezt előbb

$$3x=-36$$

alakra hozza, s így kapja meg végül az

$$x=-12$$

eredményt.

Nem értjük: hogy lehet az, hogy a tanulók negatív számot pozitívval (-36-ot 3-mal) tudnak osztani, de pozitívot negatívval (36-ot -3-mal) nem tudnak? Mert ha az utóbbihoz is értenek, akkor ugyan mire jó az utolsóelőtti lépés?

Ugyanúgy formalizmus, egy rossz sablonhoz való merev ragaszkodás az, hogy a

$$2ay+2b=2(2a+2b)$$

egyenlet megoldását nem azzal kezdi a könyv, hogy 2-vel egyszerűsít, hanem mindenekelőtt »elvégzi a kijelölt műveleteket«, hogy azután a következő lépésben ugyanezt visszacsinálja. (210. old.)

Ez a sok céltalan átalakítás rendkívül fel is duzzasztja a könyv algebrai részének terjedelmét. Felesleges lépések bonyolítják pl. a 200. oldalon található mintapélda, ugyanúgy a 202. oldal 3., a 204. oldal 2., a 222. oldal 5. és 6. mintapéldájának megoldását. Ezek nem elszigetelt példák, a formalista tárgyalásmód végigvonul a könyvön.

A geometriai rész sem mentes ettől. Itt sem a szokásos jelölésmódok használatát nevezzük formalizmusnak, hanem csupán *felesleges használatukat,* a velük való visszaélést, a megértés ilyen módon való megnehezítését. Jellemző példa erre a 400. oldalon a húrnégyszögek alaptulajdonságainak mondhatni algebrai bizonyítása:

$$\beta_1=2\beta,$$
$$\delta_1=2\delta.$$

A két egyenletet összeadva:

$$\beta_1+\delta_1=2(\beta+\delta).$$

De az ábrából nyilvánvaló, hogy

$$\beta_1+\delta_1=360^\circ.$$

Ezért

$$360^\circ=2(\beta+\delta).$$

Tehát

$$\beta+\delta=180^\circ.$$

Ugyanilyen áttekinthetetlenül bizonyítja a könyv az érintőnégyszögek analóg tulajdonságát is (401. old.). Érdemes idézni az utóbbi tétel megfordításának a bizonyítását (402. old.):

»Legyen *ABCD* négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, tehát

$$AB+CD=AD+BC.$$

Tegyük fel, hogy a négyszög három oldalát érintő kör a negyedik — CD oldalt nem érinti. Ebben az esetben a C pontból a körhöz érintő rajzolható, mely az AD oldalt E pontban metszi. $ABCE$ négyszög érintő négyszög, tehát szembefekvő oldalainak összege egyenlő:

$$AB+CE=AE+BC.$$

A feltétel szerint:

$$AB=AD+BC-CD.$$

Behelyettesítve az előző egyenletbe:

$$AD+BC-CD+CE=AE+BC.$$

De AD helyett írhatunk $AE+ED$-*t:*

$$AE+ED+BC-CD+CE=AE+BC.$$

$AE+BC$-t kivonva az egyenlet mindkét oldalából:

$$ED+CE-CD=0.$$

Ebből pedig:

$$ED+CE=CD.$$

Ez pedig annyit jelent, hogy CDE háromszögben két oldal öszszege egyenlő a harmadik oldallal, ami lehetetlen.«[12]

Az ilyenfajta tárgyalás csak arra alkalmas, hogy elriassza a diákokat a matematikától.

Egyébként ez a levezetés, amellett, hogy a lényeg elsikkad benne, még csak nem is pontos: nem kötöttük, és nem is köthettük ki, hogy $AD > AE$, tehát AD helyett — minthogy a tanulók irányított szakaszokról nem tudnak — *nem írhatunk* $AE+ED$-t.

11.

Összefoglaljuk véleményünket. A könyv jószándékú szerzők rosszulsikerült műve. Akadnak benne egyes helyes kezdeményezések is. Azt a reményt azonban, hogy kötelező használatba való bevezetése matematikatanításunknak nyereségére válhatna, semmiképpen sem látjuk indokoltnak.

[12] A tétel szép, szemléletes bizonyítását lásd a jelenlegi I. gimnáziumi könyvben (az 1949. évi kiadásban a 315—316. oldalon).

FELADATROVAT

Szerkeszti: Hajós György

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda-utca 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük.

Az utolsó feladatrovat megjelenése előtt a 43. feladat megoldását beküldötte még Takács Lajos.

A 48. feladatra, melyet Obláth Richárd a megoldást nem ismerve tűzött ki, megoldás nem érkezett. Ha a jövőben megoldás érkezik erre a feladatra, azt közölni fogjuk.

Kitűzött feladatok

68. Van-e olyan az (a, b) intervallumban ortogonális, teljes függvényrendszer, amely (a, b)-ben még egy nem-negatív, nem állandó és 1. folytonos, 2. abszolút folytonos $p(x)$ súlyfüggvényre nézve is ortogonális

Császár Ákos

69. A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvények közül melyek tesznek eleget az

$$f(ax+b)=cf(x)+d$$

függvényegyenletnek, ahol a, b, c, d adott valós számok.

Aczél János

70. Bizonyítandó, hogy az érintőtrapéz párhuzamos oldalainak mértani közepe nem kisebb távolságuknál.

Surányi János

71. Jelentse $d(n)$ az n természetes szám osztóinak számát. Bizonyítandó, hogy minden pozitív N számhoz található olyan n, hogy

$$d(n-1)-d(n)>N \quad \text{és} \quad d(n+1)-d(n)>N.$$

Turán Pál

72. Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha minden részhalmaza hasonló a halmaz valamelyik szeletéhez. (Szelet az olyan részhalmaz, amely bármely elemével együtt minden előbbi elemet tartalmaz.

Kalmár László

Megoldott feladatok

45. feladat. Egy háromszög három csúcsát rendre α, β, γ, majd β, γ, α, végül γ, α, β súlyokkal súlyozzuk. Az így adódó három súlypont által alkotott háromszög mikor hasonló az eredetihez?

(Egerváry Jenő)

I. megoldás. Csak akkor lehet súlypontokról szó, ha $\mu = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Legyenek egy síkbeli komplex koordinátarendszerben az adott három csúcs helyvektorai z_1, z_2, z_3. A súlypontok $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ komplex helyvektoraira tehát

$$\mu\zeta_1 = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3,$$
$$\mu\zeta_2 = \gamma z_1 + \alpha z_2 + \beta z_3,$$
$$\mu\zeta_3 = \beta z_1 + \gamma z_2 + \alpha z_3.$$

A háromszögek z_1, z_2, z_3 és $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ körüljárásának iránya megegyezik. Az így irányított háromszögek előjeles területe ugyanis

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix}.$$

Az itt fellépő determinánsok előjele viszont megegyezik, mert a fenti egyenletek értelmében

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \mu^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix},$$

és az első determináns-tényező előjele μ előjelével megegyezik, hiszen

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \frac{\mu}{2}[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2].$$

Korlátozzuk figyelmünket egyelőre arra az esetre, amikor a hasonlóság a z_1 csúcshoz a ζ_1 csúcsot rendeli. Egyszerűség kedvéért legyen $z_1 = 0$. Két esetet különböztetünk meg.

Ha a z_2 csúcsnak a hasonlóságnál a ζ_2 csúcs felel meg, akkor a körüljárások irányának egyezése folytán a hasonlóság feltétele

$$\sigma=\frac{z_2}{z_3}=\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_1}=\frac{(\alpha-\beta)z_2+(\beta-\gamma)z_3}{(\gamma-\beta)z_2+(\alpha-\gamma)z_3}=\frac{(\alpha-\beta)\sigma+(\beta-\gamma)}{(\gamma-\beta)\sigma+(\alpha-\gamma)}.$$

Ha $\beta=\gamma$, ez azonosan teljesül, vagyis *a hasonlóság minden háromszögre fennáll.* Ha $\beta\neq\gamma$, akkor a σ-ra adódó egyenletet $(\gamma-\beta)$-val osztva

$$\sigma^2-\sigma+1=0.$$

Ennek gyökei $\sigma=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$. Ez azt jelenti, hogy *szabályos háromszögből indulva ki, mindig hasonló háromszöget kapunk.*

Ha a z_2 csúcsnak a ζ_3 csúcs felel meg a hasonlóságnál, akkor a hasonlóság a körüljárás irányát megváltoztatja, így tehát a hasonlóság feltétele

$$\frac{\bar z_2}{\bar z_3}=\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}=\frac{(\gamma-\beta)z_2+(\alpha-\gamma)z_3}{(\alpha-\beta)z_2+(\beta-\gamma)z_3},$$

azaz

$$(\alpha-\beta)z_2\bar z_2+(\gamma-\alpha)z_3\bar z_3+(\beta-\gamma)(\bar z_2 z_3+z_2\bar z_3)=0.$$

Legyenek az adott háromszög oldalai $|z_2-z_3|=r_1$, $|z_3|=r_2$, $|z_2|=r_3$, tehát

$$\bar z_2 z_3+z_2\bar z_3=z_2\bar z_2+z_3\bar z_3-(z_2-z_3)(\bar z_2-\bar z_3)=r_2^2+r_3^2-r_1^2.$$

Ezt felhasználva a kapott feltétel

$$(r_3^2-r_2^2)\alpha+(r_2^2-r_1^2)\beta+(r_1^2-r_3^2)\gamma=0$$

alakban írható. *E feltétel teljesülése mellett a súlypontok háromszöge tükrösen hasonló az eredetihez.*

A figyelmen kívül hagyott esetek a súlyok ciklikus cseréjével adódnak.

Izsák Imre

II. megoldás. Ha az adott háromszög szabályos, akkor a forgásszimmetria miatt a szerepeltetett súlypontok is szabályos háromszöget alkotnak.

Legyen tehát az adott H háromszög nem-szabályos. Jelölje H_1 a súlypontok háromszögét. Legyen E és E_1 e háromszögek oldalait felezőpontjukban érintő két (Steiner-féle) ellipszis. E és E_1 koncentrikus, hasonló és párhuzamos helyzetű, mert mindkét ellipszis körré alakul, ha olyan affinitást alkalmazunk, amelyik a H háromszöget szabályossá alakítja. Ez abból következik, hogy a súlypontképzés affín transzformációval szemben invariáns, a szabályos háromszögre vonatkozó fenti megállapításunk értelmében tehát a mondott affinitás H_1-et is szabályos háromszöggé alakítja.

Ha H és H_1 hasonló, akkor a H háromszöget H_1-be átvivő hasonlóság E-hez E_1-et rendeli, E egyes pontjaihoz tehát vagy ugyanazon az átmérőn, vagy ennek a főtengelyekre vonatkozó tükörképén elhelyezkedő pontot rendel. Ezért H és H_1 csúcsai páronként vagy azonos átmérőn, vagy pedig szimmetrikus átmérőkön vannak. Ha ez egy csúcspárra bekövetkezik, akkor a háromszögek hasonlók. Ez a szerepeltetett affinitás alkalmazásával közvetlenül belátható. Ha a csúcspár ugyanazon az átmérőn van, H és H_1 párhuzamos helyzetű; a másik esetben ellentétes körüljárással hasonlók. Ha H egyenlőszárú, akkor a H csúcsain áthaladó átmérők tükrözésével ugyanaz az átmérőhármas adódik.

Tekintsük E-nek a H háromszög A csúcsán áthaladó átmérőjét, valamint ennek E főtengelyeire vonatkozó tükörképét. Megállapításaink értelmében H_1 akkor és csak akkor hasonló H-hoz, ha valamelyik csúcsa e két átmérőnek egyikén helyezkedik el.

Legyen H a baricentrikus koordinátarendszer alapháromszöge. Az $A(1,0,0)$ ponton áthaladó átmérő áthalad E centrumán, az $S(1,1,1)$ súlyponton, egyenlete tehát

$$(1) \qquad x_1 = x_3.$$

Ez a végtelen távoli $x_1+x_2+x_3=0$ egyenest $P(-2,1,1)$ pontban metszi.

A szimmetrikus átmérő egyenletének meghatározása végett hivatkozunk arra, hogy ha H oldalai rendre a, b, c, akkor a körülírt K kör és a H csúcsain áthaladó, E-ből kétszeres nagyítással keletkező E^* ellipszis egyenlete

$$K \equiv a^2x_2x_3 + b^2x_1x_3 + c^2x_1x_2 = 0,$$
$$E^* \equiv x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = 0.$$

(Könnyű meggyőződni arról, hogy e kúpszeletek a csúcsokon áthaladnak, és a csúcsokban vont érintőik a szemközti oldalt az előírásnak megfelelő pontban metszik.)

K és E^* kúpszeletsora a végtelen távoli egyenest olyan involúcióban metszi, amelynek kettőspontjai mindkét kúpszeletre nézve egymáshoz konjugáltak, ezért éppen E^* (és egyben E) főtengelyeinek végtelen távoli pontjai. A keresett szimmetrikus átmérő végtelen távoli pontja tehát e sor P ponton áthaladó $K(P)\cdot E - E^*(P)\cdot K = 0$ kúpszeletének másik végtelen távoli Q pontja. E kúpszelet egyenlete $K(P) = a^2 - 2b^2 - 2c^2$ és $E(P) = -3$ folytán

$$(4a^2-2b^2-2c^2)x_2x_3 + (a^2+b^2-2c^2)x_1x_3 + (a^2-2b^2+c^2)x_1x_2 = 0,$$

ennek végtelen távoli pontja P és

$$Q(-2a^2+b^2+c^2,\ a^2+b^2-2c^2,\ a^2-2b^2+c^2),$$

a keresett SQ átmérő egyenlete pedig

(2) $$(c^2-b^2)x_1+(b^2-a^2)x_2+(a^2-c^2)x_3=0.$$

Ezek szerint a súlypontok háromszöge akkor és csak akkor hasonló az eredeti háromszöghöz, ha vagy szabályos háromszögből indulunk ki, vagy pedig az α, β, γ súlyoknak valamilyen ciklikus permutációja kielégíti az (1) és (2) egyenletek valamelyikét. Egyenlőszárú háromszög esetében elég ezeknek az egyenleteknek egyikét szerepeltetni. Ha mind a három súly egyenlő, a súlypontok egybeesnek, háromszöget nem alkotnak.

Hajós György

A 45. feladat megoldását beküldötte még SARKADI KÁROLY.

47. feladat.* Legyen $f(x)$ a $(0, 1)$ intervallumban fogyó, pozitív függvény, melyre $\int_0^1 f(x)dx = +\infty$. Jelentsen E olyan mérhető halmazt, melynek sűrűsége a 0 pontban 0, és jelölje E_h az E halmaznak $(h, 1)$ intervallumba eső részét. Kimutatandó, hogy

$$\liminf_{h\to 0} \int_{E_h} f(x)\,dx \Big/ \int_h^1 f(x)\,dx = 0.$$

(Bognár Mátyás)

I. megoldás. Először a következő segédtételt bizonyítjuk: Ha $a_1, a_2, \ldots$ pozitív elemű, monoton fogyó és $b_1, b_2, \ldots$ monoton fogyó nullsorozat, továbbá $b_n/a_n \to 0$, akkor

$$\liminf \frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}} = 0.$$

Ellenkező esetben ugyanis valamely pozitív δ-ra és minden elég nagy n-re

$$b_n-b_{n+1} > \delta(a_n-a_{n+1}),$$

amiből összegezéssel

$$b_n-b_m > \delta(a_n-a_m) \qquad (n < m)$$

adódik. Ebből viszont $m \to \infty$ határátmenettel $b_n > \delta a_n$, ami ellentmond feltevésünknek.

Legyen most már $g(x)$ az az egész értékű függvény, melyre

$$g(x) \leqq f(x) < g(x)+1.$$

Nyilvánvaló, hogy $g(x)$ is eleget tesz a feladatban $f(x)$-re kirótt

* V. ö. 27. feladat és megoldásai, III. évf. 87—90. l.

követelményeknek. Minthogy

$$\int_{E_h} f(x)\,dx < \int_{E_h} [g(x)+1]\,dx < \int_{E_h} g(x)\,dx + 1,$$

a vizsgált hányadosra

$$\int_{E_h} f(x)\,dx \Big/ \int_h^1 f(x)\,dx < \int_{E_h} g(x)\,dx \Big/ \int_h^1 g(x)\,dx + 1 \Big/ \int_h^1 f(x)\,dx$$

(hacsak h nem olyan nagy, hogy a jobboldali első tört nevezője 0). Elegendő ezért a feladat állítását $g(x)$-re igazolni, hiszen az utolsó tag 0-hoz tart, ha $h \to 0$.

Legyen $(0, p_n)$ az a szakasz, ahol $g(x) \geqq n$. Legyen q_n az E halmaz e szakaszra eső részének mértéke. Minthogy $g(x)$ monoton fogyó és integrálja divergens, $g(x)$ jobboldali határértéke a 0 helyen $+\infty$, ezért $p_n > 0$ és $p_n \to 0$, következőleg $q_n \to 0$. Ismert módon következik ebből (a Cauchy-féle határértéktétel segítségével, l. 27. feladat I. megoldása, III. évf. 88—89. l.), hogy az

$$a_n = \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} \quad \text{és} \quad b_n = \frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{n}$$

értékek sorozatai is 0-hoz tartanak. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat pozitív elemű, mert a p_n értékek pozitívok.

Téglalapok területének összegezésével

$$\int_{p_n}^1 g(x)\,dx = (p_1-p_2)+2(p_2-p_3)+\cdots+(n-1)(p_{n-1}-p_n) =$$
$$= p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-(n-1)p_n = n(n-1)(a_{n-1}-a_n).$$

Minthogy ez az integrál n növekedtével ∞-hez tart, még inkább igaz, hogy a $p_1+p_2+\cdots$ sor divergens. Minthogy E sűrűsége a 0 helyen 0, $q_n/p_n \to 0$. A Cauchy-féle határértéktétel szerint tehát $b_n/a_n \to 0$. A fentivel azonos átalakítás alapján

$$\int_{E_{p_n}} g(x)\,dx = n(n-1)(b_{n-1}-b_n).$$

Minthogy $g(x) \geqq 0$, a két integrálátalakítás azt mutatja, hogy az a_n és b_n értékek sorozata monoton fogy.

Beláttuk, hogy az a_n és b_n értékek sorozataira teljesülnek segédtételünk kirovásai. A segédtétel szerint tehát

$$\frac{b_{n-1}-b_n}{a_{n-1}-a_n} = \int_{E_{p_n}} g(x)\,dx \Big/ \int_{p_n}^1 g(x)\,dx$$

alsó határértéke 0. Ez a feladat állítását bizonyítja.

Hajnal András

II. megoldás. A feladat állításánál általánosabban azt fogjuk bebizonyítani, hogy ha $e(x)$ a $(0, 1)$ intervallumban integrálható nem-negatív függvény, amelyre

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\int_0^h e(x)\,dx = 0,$$

akkor a feladat kirovásainak eleget tevő $f(x)$ függvényre

$$\liminf_{h\to+0} \int_h^1 e(x)f(x)\,dx \Big/ \int_h^1 f(x)\,dx = 0.$$

Ebből a feladat állítása adódik, ha $e(x)$ az E halmaz karakterisztikus függvénye.

Legyen tehát állításunk bizonyítása céljából

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta e(x)\,dx.$$

Világos, hogy $Q(\alpha, \beta)$ változóinak folytonos függvénye, s hogy $Q(\alpha, \beta) \geqq a$, $Q(\beta, \gamma) \geqq a$ esetén $Q(\alpha, \gamma) \geqq a$ $(\alpha < \beta < \gamma)$. Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Az $e(x)$ függvényre vonatkozó feltevésünk folytán található $(0, 1)$ belsejében olyan η, hogy $0 < h \leqq \eta$ esetén $Q(0, h) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Azt állítjuk, hogy lehet találni tetszőlegesen kicsiny pozitív h számot, melyre

(*) $$Q(h, x) < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad h < x \leqq \eta.$$

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Van akkor $(0, \eta)$ belsejében olyan δ, hogy $(0, \delta)$ minden belső h helyéhez található olyan x_h, amelyre

$$h < x_h \leqq \eta \quad \text{és} \quad Q(h, x_h) \geqq \varepsilon.$$

Legyen $h < \frac{\delta}{2}$, és legyen h_0 a $(h, \eta]$ köz azon x helyei (nem üres) halmazának felső határa, amelyekre $Q(h, x) \geqq \varepsilon$. A folytonosság miatt $Q(h, h_0) \geqq \varepsilon$. Nem lehet $h_0 < \delta$, mert akkor $h_0 < x_{h_0} \leqq \eta$, továbbá $Q(h, h_0) \geqq \varepsilon$ és $Q(h_0, x_{h_0}) \geqq \varepsilon$ miatt $Q(h, x_{h_0}) \geqq \varepsilon$, ami ellentmond h_0 értelmezésének. Nem lehet azonban $h_0 \geqq \delta$ sem, mert akkor $2h < h_0$, azaz $h_0 < 2(h_0 - h)$ miatt

$$Q(0, h_0) = \frac{1}{h_0}\int_0^{h_0} e(x)\,dx \geqq \frac{1}{2(h_0-h)}\int_h^{h_0} e(x)\,dx = \frac{1}{2}\,Q(h, h_0) \geqq \frac{\varepsilon}{2},$$

ami ellentmond η megválasztásának, hiszen $h_0 \leqq \eta$. Van tehát valóban tetszőlegesen kicsiny, (*)-nak megfelelő pozitív h szám.

Ha h ilyen számot jelent, akkor a 27. feladat II. megoldásának jelöléseivel ($E(x)=\int_0^x e(\xi)\,d\xi$; $f_\eta(x)=f(x)$, ha $x<\eta$; $f_\eta(x)=0$, ha $x\geqq\eta$)

$$\int_h^\eta e(x)f(x)\,dx=-\int_h^\eta [E(x)-E(h)]\,df_\eta(x)\leqq-\varepsilon\int_h^\eta (x-h)\,df_\eta(x)=$$

$$=\varepsilon\int_h^\eta f(x)\,dx\leqq\varepsilon\int_h^1 f(x)\,dx.$$

$f(x)$ integráljának divergenciája miatt elég kis h-ra

$$\int_\eta^1 e(x)f(x)\,dx\leqq\varepsilon\int_h^1 f(x)\,dx.$$

Egyenlőtlenségeink összegezése alapján

$$\int_h^1 e(x)f(x)\,dx\Big/\int_h^1 f(x)\,dx\leqq 2\varepsilon.$$

Mivel ez a pozitív h értékeknek 0-hoz tartó sorozatára teljesül, a baloldal alsó határértéke $h\to+0$ mellett 2ε-nál nem nagyobb. Mivel ε tetszőleges pozitív szám, ez az alsó határérték csak 0 lehet.

Császár Ákos

A 47. feladat megoldását beküldötte még CZIPSZER JÁNOS.

49. feladat. Bizonyítandó, hogy ha $a_1, a_2, \ldots$ pozitív elemű sorozat és $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots$ konvergens, akkor található olyan $n_1, n_2, \ldots$ indexsorozat, amelyre $n_{k+1}/n_k\to 1$ és $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots$ konvergens.

(Erdős Pál)

Megoldás. Először azt bizonyítjuk, hogy adott $\varepsilon>0$ számhoz kiválasztható olyan konvergens részsor, melynek indexsorozatára $n_{k+1}/n_k<1+\varepsilon$.

Legyen $1<\beta^2<1+\varepsilon$ és $1<\alpha<\beta$. Legyen $m_1, m_2, \ldots$ olyan végtelen indexsorozat, amelyre

$$\alpha<m_{k+1}/m_k<\beta \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Jelölje n_k az $m_k\leqq i<m_{k+1}$ indexmegszorításnak eleget tevő a_i számok (egyik) legkisebbikének indexét. Az $n_1, n_2, \ldots$ indexsorozat megfelel kívánalmainknak, mert

$$n_{k+1}/n_k<m_{k+2}/m_k<\beta^2<1+\varepsilon,$$

továbbá $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots$ konvergens, hiszen tagjai rendre kisebbek a feltevés értelmében konvergens

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left[\frac{a_{m_k}}{m_k}+\frac{a_{m_k+1}}{m_k+1}+\cdots+\frac{a_{m_{k+1}-1}}{m_{k+1}-1}\right]$$

sor tagjainál. E sor k-adik tagjában ugyanis $m_{k+1}-m_k>\frac{\alpha-1}{\alpha}m_{k+1}$ tagú összeg szerepel, s ennek az összegnek minden tagja nagyobb, mint a_{n_k}/m_{k+1}.

Legyen most már a feladat állításának bizonyítása céljából $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots$ egy pozitív tagú konvergens sor. A bizonyítottak értelmében kiválasztható az adott sornak olyan konvergens részsora, melyben a szomszédos indexek hányadosa $(1+\varepsilon_k)$-nál kisebb. E részsor kellő sok kezdő tagját elhagyva olyan R_k részsort kapunk, amelynek összege ε_k-nál kisebb. Az $R_1, R_2, \ldots$ részsorok egyesítésével adódó sor megfelel a feladat előírásának. E sor ugyanis konvergens, mert $R_1, R_2, \ldots$ összegei konvergens sort alkotnak. A szomszédos indexek hányadosa 1-hez tart, mert ha már R_k kezdő tagját követő tagoknál vagyunk, az indexhányados kisebb R_k szomszédos tagjai indexének hányadosánál, tehát kisebb $(1+\varepsilon_k)$-nál.

Szűsz Péter

A 49. feladat megoldását beküldötték még CSÁSZÁR ÁKOS, GEHÉR LÁSZLÓ, HAJNAL ANDRÁS, HAJÓS GYÖRGY, KŐVÁRI TAMÁS, MAKAI ENDRE, RÉNYI ALFRÉD.

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a feladat előírásának megfelelő sorhoz jutunk akkor is, ha az $R_1, R_2, \ldots$ részsorok mindegyikének csak azokat a kezdő tagjait tartjuk meg, amelyeket nem előz meg egyetlen nagyobb indexű R_k részsornak egyetlen tagja sem.

Szerk.

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp., V., Reáltanoda-u. 13—15.). A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Kitűzésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri.

Kitűzött példák

44. Adva van egy egyenes és rajta kívül két pont, A és B. Szerkesszünk az egyenesen olyan P pontot, hogy $AP+PB$ adott hosszúságú legyen.

45. Szerkesszünk húrnégyszöget az oldalaiból.

46. Bontsuk tényezőkre az

$$(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n$$

kifejezést.

47. Bizonyítsuk be vagy cáfoljuk meg a következő állítást: „Egy parallelepipedont mindig átdarabolhatunk két vágással téglatestté".

Anyagtorlódás miatt példamegoldásokat csak lapunk rövidesen megjelenő 2—3. számában közlünk.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Szovjetunió

1953. május 8-án, 85 éves korában elhunyt Benjámin Fjodorovics Kagan, a kiváló szovjet geométer, a szovjet differenciálgeometriai iskola alapítója. B. F. Kagant a magyar matematikusok nemcsak értékes tudományos munkáiból ismerték, hanem úgy is, mint aki Bolyai János Appendixének orosz kiadását szerkesztette és azt jegyzetekkel és előszóval látta el. — B. F. Kagan tanulmányait az odesszai egyetemen kezdte meg 1887-ben. A cári kormány azonban alig 2 év mulva a diákmozgalomban való részvétele miatt kizárta az egyetemről. Ennek ellenére Kagan magánúton folytatta tanulmányait és a kievi és pétervári egyetemen letette vizsgáit. 1908-ban írta meg »A geometria alapjai« című matematikai disszertációját. 1922-ben nevezték ki a moszkvai egyetemre tanárnak és ettől kezdve egész 1951-ig vezette a differenciálgeometriai tanszéket. B. F. Kagan két munkaterülete a geometria alapjai és a tenzor-differenciálgeometria volt. Rendkívül sokat tett a Bolyai—Lobacsevszkij geometria népszerűsítéséért és továbbfejlesztéséért. Ő rendezte sajtó alá N. I. Lobacsevszkij összegyűjtött műveit is, és egy kiváló Lobacsevszkij-életrajzot írt. B. F. Kagan alapította 1927-ben a moszkvai egyetem vektor- és tenzorszámítási szemináriumát, és azt élete végéig vezette. A tenzor-differenciálgeometriával foglalkozó szovjet matematikusok majdnem kivétel nélkül Kagan tanítványai. Ez a szeminárium világviszonylatban élenjárt a tenzor-differenciál-geometria terén, amit világosan megmutatott az 1934-ben Moszkvában B. F. Kagan elnöklése mellett megtartott sikeres tenzor-differenciálgeometriai konferencia. Különösen kiemelkedő eredményeket ért el Kagan a szubprojektív terek vizsgálatában. A szovjet kormány B. F. Kagant eredményes tudományos munkájáért 1940-ben a Munka Vörös Zászlórendjével, 1943-ban Sztálin-díjjal tüntette ki.

Az Uszpehi Matyematyicseszkih Nauk 1953. évi 5. számában P. K. Rasevszki emlékezik meg B. F. Kaganról. Ugyanez a szám közli Kagan tudományos munkáinak jegyzékét, amely 83 eredeti munkát tartalmaz.

*

A Moszkvai Matematikai Társulat egy külön szakosztálya foglalkozik a műszaki egyetemek matematika-oktatásának kérdésével. A szakosztály 1953. január 29-i ülésén N. M. Benkin tartott előadást a matematikai szabatosság a műegyetemi matematikai oktatásban szükséges színvonaláról. Az előadást élénk vita követte. A vitában felszólalók kiemelték, hogy nem szabatos bizonyítások az oktatásban nem engedhetők meg, az előadó mindig mutasson rá, hogy hol használt fel be nem bizonyított tételt. A hallgatók figyelmét fel kell hívni a megismert tételek érvényességi határaira; a műegyetemi matematika-oktatásnak nemcsak az a célja, hogy konkrét matematikai ismereteket adjon, hanem egyik alapvető eszköze annak, hogy a leendő mérnökök a szigorú logikus gondolkodást elsajátítsák. Fejleszteni kell a hallgatók matematikai szemléletét is. A szakosztály 1953. február 26-i ülésén V. I. Levin tartott előadást a műszaki egyetemek matematika programmjáról. Az előadást követő vita olyan élénk volt, hogy azt még a következő, március 12-én és március 26-án tartott üléseken is folytatták. A felszólalók rámutattak, hogy a szovjet mérnökök matematikai felkészültségével szemben a követelmények napról napra növekszenek és ezért szükséges a matematikai előadások számának felemelése. A május 28-án tartott ülésen B. A. Fuksz referátuma »A középiskolát végzettek matematikai felkészültségének analízise a műszaki egyetemek felvételi vizsgáinak tapasztalatai alapján«, továbbá V. Sz. Jaltunovszkij »A főiskolák kívánságai a középiskolákkal szemben a tanulók matematikai képzettségét illetően« c. referátuma hangzott el. A referátumok vitája a június 11-i ülésen is folytatódott. A vitában a középiskolai szakosztály tagjai és a Szovjetunió Pedagógiai Akadémiájának kiküldöttei is részt vettek. A vita eredményeképpen a szakosztály egy határozatot fogadott el.

A határozat megállapítja, hogy a középiskolát végzettek matematikai előképzettsége az utóbbi években jelentősen megjavult. A határozat arra is rámutat azonban, hogy még mindig vannak lényeges hiányosságok a középiskolát végzettek tudásában, ami megnehezíti a főiskolák munkáját. Így például rámutat a határozat, hogy sok diák nem tudja elég szabatosan kifejezni magát, sokan tudásukat nem tudják kellően alkalmazni, hiányosak a matematika történetére vonatkozó ismereteik. A határozat rámutat a hibák kijavításának útjára. Hangsúlyozza a szakkörök jelentőségét, a középiskolai és főiskolai matematika tanárok állandó kapcsolatának fontosságát, továbbá, hogy a főiskolák matematikai tanszékei a felvételi vizsgák után tájékoztassák a középiskolákat tapasztalataikról.

A határozat rámutat, hogy a logaritmustáblával való számolás bizonyos mértékig csökkenthető, ezzel szemben kívánatos, hogy a középiskolai diákok a logarléccel való bánást elsajátítsák.

A határozat rámutat, hogy a diákok trigonometriai tudása sem mindenben kielégítő, és kívánatosnak tartja, hogy a középiskolákban a háromszögekre vonatkozó feladatokkal való foglalkozásra szánt időt csökkentsék, ezzel szemben több időt kell szentelni a trigonometrikus függvények tulajdonságainak alapos megismerésére.

*

1953. április 25-én ünnepelték a szovjet matematikusok A. N. Kolmogorov akadémikus, a ma élő matematikusok egyik legnagyobbikának ötvenedik születésnapját. Ebből az alkalomból az Uszpehi Matyematyicseszkih Nauk c. folyóirat 1953. évi 3. száma közli P. Sz. Alexandrov és A. Ja. Hincsin tanulmányát Kolmogorov munkásságáról, továbbá A. N. Kolmogorov tudományos műveinek jegyzékét, amely 168 munkát tartalmaz.

*

Leningrádban 1953. február 10-én a Tudósok Házában tartotta alakuló ülését a leningrádi matematikai szeminárium. A szemináriumon Leningrád számos főiskolájának és tudományos kutatóintézetének munkatársai vettek részt. Megnyitóbeszédében A. D. Alexandrov akadémikus ismertette a szeminárium célkitűzéseit. A szemináriumon összefoglaló előadások fognak elhangzani a matematika különböző problémáiról és vitákat fognak rendezni a matematika aktuális alapvető kérdéseiről. A szeminárium elnökévé V. I. Szmirnov akadémikust, alelnökévé Ju. V. Linnik Sztálin-díjas professzort, az Akadémia levelező tagját, az elnökség tagjaivá A. A. Markov, Sz. M. Lozinszkij és B. A. Venkov professzorokat, és A. A. Ivanov kutatót, a szeminárium titkárává M. F. Sirohov docenset választották. A szeminárium havonta két ülést fog tartani. Az első előadást V. I. Szmirnov akadémikus tartotta »A matematikai fizika aktuális problémái« címen. Az előadóhoz a résztvevők számos kérdést intéztek, melyekre kimerítő választ adott.

*

A Priroda c. szovjet folyóirat 1953. novemberi száma közölte Rényi Alfréd cikkét »A matematika és a gyakorlat kapcsolatának megszilárdításáról«, melyben a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének munkájáról számol be.

*

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája 1953-tól kezdve Referativnij Zsurnal címen matematikai folyóiratot indított. A folyóirat főszerkesztője Sz. M. Nyikolszkij, (aki két ízben járt hazánkban, legutóbb a Bolyai-héten).

A matematika főbb ágaira vonatkozó részek szerkesztői a következők: P. Sz. Alexandrov, Sz. P. Finikov, A. N. Kolmogorov, V. M. Kurocskin, K. K. Mardzsanisvili, A. I. Markusevics, P. Sz. Novikov, D. Ju. Panov, I. N. Vekua.

A referáló folyóirat a matematikai munkákat a következő tárgykörök szerint csoportosítja:

Általános kérdések

A matematika alapjai és matematikai logika

Számelmélet

Algebra
- Polinomok és lineáris algebra
- Csoportok
- Testek, gyűrűk, strukturák

Topológia

Valós függvénytan
- Függvények közelítése polinomokkal
- Integráltranszformációk

Komplex függvénytan

Differenciálegyenletek
- Közönséges differenciálegyenletek
- Parciális differenciálegyenletek

Integrál egyenletek

Variációszámítás

Analízis (egyéb kérdések)
- Speciális függvények
- Sorelmélet

Funkcionális analízis

Valószínűségszámítás
- Matematikai statisztika
- Valószínűségszámítási és statisztikai módszerek technikai alkalmazásai

Geometria

Elemi geometria, a háromszög és a tetraéder geometriája
Projektív, nemeuklideszi és algebrai geometria
Differenciálgeometria a 3 dimenziós térben
Általános terek és relativitáselmélet
Konvex sokaság geometriája

Numerikus és grafikus módszerek

Táblázatok

Számológépek és matematikai eszközök

Számolóeszközök és elemeik alkalmazása a technikában

Matematikatörténet. Életrajzok.

A referáló folyóirat havonta egyszer jelenik meg. Az egyes referátumok sorszámmal vannak megjelölve — a hivatkozások megkönnyítése céljából. A számozás évente újra kezdődik. A külföldi munkák címét a folyóirat oroszul és az eredeti nyelven is közli. A referátumok orosz nyelvűek. Minden füzethez névmutató van mellékelve. Az 1. szám közel 530 referátumot tartalmaz. Minden referátum írójának neve fel van tüntetve. A matematikai gépekre vonatkozó rész a szükséghez képest fényképeket is tartalmaz, és találmányokat is ismertet. A folyóirat nyomtatásban meg nem jelent disszertációkról is közöl referátumot.

*

1954. február 12-én Lenin-renddel tüntették ki a következő szovjet matematikusokat: P. Sz. Alexandrov, N. N. Bogoljubov, I. M. Vinogradov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentyev, M. A. Leontovics, B. Sz. Nyemcsinov, I. G. Petrovszkij, Sz. L. Szoboljev, Sz. A. Hrisztianovics. A Munka Vörös Zászló rendjével tüntették ki M. V. Keldis akadémikust. A kitüntetetteknek — több más szovjet tudóssal együtt — K. J. Vorosilov, a Szovjetunió Legfelső Tanácsa Elnökségének elnöke nyújtotta át a rendjeleket.

Csehszlovákia

V. Knichalt nevezték ki a Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének igazgatójává. V. Knichal ez év májusában a csehszlovák-magyar kulturális egyezmény keretében ellátogatott hazánkba; a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének munkáját tanulmányozta.

*

A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete és a Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Intézete 1953. novemberében könyv- és folyóiratcsere megállapodást kötöttek, amely kiterjed a két országban megjelenő összes matematikai kiadványokra.

Lengyelország

Zastosowonia Matematyki (A matematika alkalmazásai) címen a Lengyel Állami Matematikai Intézet új folyóiratot indított.

Németország

1953. augusztus 15-én elhunyt L. Prandtl, a kiváló hydro- és aerodinamikus, a Göttingeni Egyetem Alkalmazott Matematikai Intézetének vezetője.

*

Hamburgban Alkalmazott Matematikai Intézet alakult.

*

H. Hasse professzort (Hamburg, Nyugat-Németország) a Német Demokratikus Köztársaság kormánya az algebra és a számelmélet terén végzett kutatásaiért a nemzeti díj első fokozatával tüntette ki.

*

Az Alkalmazott Matematikai és Technikai Társaság Münchenben 1954. április 20—24-ig tudományos napokat tartott. A plenáris üléseken összefoglaló referátumok és azok megbeszélése szerepelt. Emellett szekciós üléseken 10—15 perces időtartamú előadást tartottak a részvevők.

Olaszország

A Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával Olaszországban 1953. szeptember 20-tól 26-ig differenciálgeometriai kongresszust tartottak; a kongresszus ülései Velencében, Padovában, Bolognában és Pisában voltak.

Hollandia

Az 1954. szeptember 2—9-i Amsterdamban megrendezendő Nemzetközi Matematikai Kongresszuson a következő matematikusok fognak plenáris előadást tartani:

K. Borsuk (Varsó)
R. Brauer (Cambridge, Mass.)
I. Dieudonné (Ann Arbov)
S. Goldstein (Haifa)
Harish-Chandra (Bombay)
B. Jessen (Kopenhága)
A. Lichnerovitz (Párizs)
Neumann János (Princeton)
J. Neyman (Berkeley)
B. Segre (Róma)
C. L. Siegel (Göttingen)
E. Stiefel (Zürich)
A. Tarski (Berkeley)
E. C. Titchmarsh (Oxford)
K. Yosida (Osaka)

A kongresszuson a következő szekciós ülések lesznek:

1. Algebra és számelmélet
2. Analízis
3. Geometria és topológia
4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika
5. Matematikai fizika és alkalmazott matematika
6. Logika és a matematika alapjai
7. Filozófia, matematika történet és pedagógia.

P. Sz. Alekszandrov—A. N. Kolmogorov: Bevezetés a halmazelméletbe és a függvénytanba. Első rész: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. 276 o.

A kiváló szovjet szerzők e kétkötetes munkája, melynek első része magyar fordításban áll immár az érdeklődök rendelkezésére, kettős célkitűzéssel íródott. Mindenekelőtt egyetemi és főiskolai tankönyvül kíván szolgálni a hasonló tárgyú előadásokhoz, másrészt pedig bevezetést nyújt az olvasónak az említett problémakörhöz, elvezetve őt nemcsak a tárgykört feldolgozó monográfiák, hanem eredeti közlemények olvasásáig is. A kettős célkitűzésből gyakran adódó egymásnak ellentmondó követelményeket igen szerencsésen hidalja át a mű szóban forgó első része: a bevezető egyetemi analízis-előadásokban megismert fogalmakból indul ki, fokozatosan tér át az egyre elvontabb fogalomalkotásokra és meglehetősen nagy anyagot dolgoz fel, felépítésében azonban módot nyújt arra is, hogy aki csak a szorosan vett egyetemi anyag iránt érdeklődik, az ezt tárgyaló fejezeteket a közbeiktatott fejezetek kihagyásával olvashassa.

Az első fejezet a halmazokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat ismerteti, s lényegében a halmazok számosságára vonatkozó Cantor—Bernstein-féle tételig vezet. A második fejezet a valós számok Dedekind-féle elméletét tárgyalja, s ezzel kapcsolatban a kontinuum-számosság néhány tulajdonságát említi meg. A harmadik fejezet a rendezett halmazok elméletével foglalkozik; tárgyalja a racionális, illetőleg a valós számok rendtípusának ismert jellemzését, majd a jólrendezett halmazok elméletére tér rá, ennek keretében bebizonyítja Zermelo jólrendezési tételét, s ennek segítségével a kardinális számok számos fontos (s a későbbiekben alkalmazásra kerülő) tulajdonságát.

A további fejezetek a ponthalmazok, s az ezeken értelmezett függvények elméletébe nyújtanak bevezetést, mégpedig a következő, negyedik fejezet egyelőre csupán az egyenesen és a síkon fekvő ponthalmazok elméletének alapfogalmaival ismertet meg. Az itt szereplő fogalmak és tételek alig lépnek túl a bevezető előadásokban tárgyalni szokott anyagon, s így kitűnő előkészítésül szolgálnak a következőkhöz. Az ötödik fejezet az egyváltozós valós függvények elméletét tárgyalja (folytonos, félig folytonos függvény, korlátos változású függvények, Weierstrass approximáció-tételének Bernstein-féle bizonyítása, differenciálhányados, van der Waerden sehol sem differenciálható folytonos függvénye).

A hatodik fejezet a metrikus tér fogalmának és a legfontosabb metrikus tereknek ismertetésével kezdődik, megismétli — most már ebben az általánosabb gondolatkörben — a negyedik fejezetben mondottakat, foglalkozik az összefüggő halmazok legfontosabb tulajdonságaival, majd a megszámlálható bázisú metrikus terek alaptulajdonságait tárgyalja.

Megismerkedünk azután a folytonos leképezés fogalmával, mint a folytonos függvény fogalmának általánosításával, ennek legfontosabb tulajdonságaival, köztük a zárt halmazon folytonos függvények kiterjesztéséről szóló Tietze-féle tétellel. Az e fejezethez tartozó kiegészítés az általános topologikus tér fogalmát ismerteti, majd mintaszerűen áttekinthető tárgyalásban végigvezet a tér fogalmának különféle szűkítésein, s elvezet a megszámlálható bázisú normált terek metrizálására vonatkozó Uriszon-féle tételhez.

A hetedik fejezet — ismét a metrikus terek osztályához visszatérve — a kompakt halmaz fogalmának, s a kompakt terek legnevezetesebb tulajdonságainak ismertetésével kezdődik. Tárgyalja a kompakt terek összefüggési viszonyait, s a kompakt tereknek a Cantor-féle perfekt halmaz folytonos képeiként való előállítását. Ezután a teljes metrikus tér definiciója és a legfontosabb metrikus terek teljességének kimutatása következik, majd az ezzel kapcsolatos alaptételekkel, s Uriszon beágyazási tételével ismerkedünk meg (az általános topologikus tér fogalmának felhasználása nélkül). Ezután találjuk a lokálisan kompakt metrikus terek alaptulajdonságait, valamint a kompakt terek redukálható részhalmazairól szóló nevezetes tételt. Egy kiegészítés a bikompakt topologikus terek elméletével foglalkozik, s elvezet Uriszonnak a kompakt Hausdorff-terek metrizálásáról szóló tételéig, valamint Tyihonovnak a teljesen reguláris terekre vonatkozó beágyazási tételéig. Egy második kiegészítés a kvázi-egyenletes konvergenciáról szóló Arzelà-féle tételnek általánosítását tárgyalja.

A könyv gazdag tartalmának ez a futólagos áttekintése is meggyőz — úgy gondolom — arról, hogy Alekszandrov munkájának lefordítása magyarnyelvű matematikai irodalmunk igen értékes nyeresége. A halmazelméleti topológia hazánkban évtizedeken át rendkívül el volt hanyagolva, s az e téren mutatkozó nagy elmaradás felszámolására első lépésként el sem lehetett volna gondolni szerencsésebbet, mint egy ilyen, aránylag igen kevés előismerettel olvasható, gondos fokozatossággal felépített, kitűnően áttekinthető és aránylag széles anyagot tárgyaló munka lefordítását. Hozzá kell még tennünk, hogy nemcsak a könyv felépítése mintaszerű, hanem az egyes részletekről is csak a legnagyobb elismeréssel szólhatunk. A bizonyítások tömören, s mindamellett igen jól követhetően vannak megfogalmazva, hosszabb gondolatmenetek részállításokra vannak tagolva, s ezeknek logikai összefüggése külön ki van emelve. Talán érdemes megemlíteni azt a talán magától értetődőnek látszó, de oly sok szerző által nem követett elvet, amelyet Alekszandrov következetesen alkalmaz, hogy t. i. egy fogalom különféle lehetséges definiciói közül mindig azt választja, amely a későbbi általánosításokkal összhangban van (pl. metrikus térben megszámlálható bázisról beszél és nem mindenütt sűrű megszámlálható részhalmazról, a kompakt halmazt azáltal definiálja, hogy minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja, s nem a sorozatok konvergens részsorozataival, stb.).

A fordítás — Bizám György munkája — igen jónak mondható; tartalmilag igen kevés kivételtől eltekintve kifogástalan és magyarosság szempontjából is alig akad benne kivetni való. Sajnálatra méltó azonban, hogy a különben oly kiváló munkát számos, gyakran rendkívül zavaró sajtóhiba ékteleníti.

Úgy hiszem, hogy a munka Kolmogorov által megírandó második kötetének lefordítása és kiadása nem kisebb érdeklődésre tarthat majd számot.

Császár Ákos

TAGNÉVSOR

Az alábbiakban közöljük a Bolyai János Matematikai Társulat budapesti tagjai névsorának egy részét. Kérjük Tagtársainkat, hogy amennyiben belépésük óta lakáscímükben, vagy beosztásukban változás történt, szíveskedjenek azt a Társulat központjában (V. Reáltanoda-u. 13—15.) közölni. A következő számokban folytatólagosan közölni fogjuk a Társulat vidéki tagjainak névsorát.

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti tagjai:

(Folytatás.)

141.	Kedvessy Kornél	középisk. tanár	XI. Budafoki-út 14.
142.	Kemény Sándorné	„	I. Attila-u. 79.
143.	Kardos Gyula	egy. tanársegéd	Krudy-u. 6.
144.	Kiss Ottó	aspiráns	XIII. Sallai I.-u. 31.
145.	Klingerné Wolf Margit	középisk. tanár	II. Harangvirág-u. 9.
146.	Koczkás Ferencné	egy. tanársegéd	VIII. Baross-u. 70.
147.	Kocsis Erzsébet	ált. isk. szaktanár	Alsógöd
148.	Koncz Károly	műegy. adjunktus	VIII. Wesselényi-u. 8.
149.	Koncsek Anna	középisk. tanár	VIII. Baross-u. 9.
150.	Konrád Éva	ált. isk. tanár	VI. Izabella-u. 90.
151.	Koralewsky Vilmos	középisk. tanár	Ráczkeve
152.	Koródi Albert	mérnök	XIII. Csáky-u. 40.
153.	Koszó Éva	aspiráns	XI. Zenta-u. 1.
154.	Kovács Lóránt	főisk. tanársegéd	VIII. Rákóczi-út 71.
155.	Kovács Ottó	tisztviselő	Dunaharaszti
156.	Kováts György	középisk. tanár	Vecsés, Berzsenyi-u. 4.
157.	Kozma Péter	„	Szentendre
158.	Körmendi István	műegy. adjunktus	Műegyetem, II. Mat. Tsz.
159.	Kővári Tamás	aspiráns	XIII. Katona J.-u. 21.
160.	Knapecz Géza	műegy. tanársegéd	XI. Budafoki-út 8.
161.	Kratofil Dezső	középisk. tanár	XI. Dombovári-u. 2.
162.	Králik Dezső	aspiráns	VII. Barcsay-u. 3.
163.	Krekó Béla	főisk. tanár	III. Csillaghegy, Hegyalja-u.
164.	Kripácz Ferenc	középisk. tanár	V. Nádor-u. 36.
165.	Kun Kuti Márton	középisk. tanár	V. Váci-u. 8.
166.	Kunfalvi Rezső	középisk. tanár	XI. Eszék-u. 13—15.
167.	Lajtha György	egy. hallg.	XI. Budafoki-u. 10/a.
168.	Láczay Ervinné	előadó	II. Kunfi Zsigmond-u. 9.
169.	Lami Rudolf	kalkulátor	Hungária-krt 135.
170.	Lánczi Ivánné	egy. tanársegéd	XIII. Pannónia-u. 19.
171.	Lantos Lajosné	középisk. tanár	XI. Bercsényi-u. 10.
172.	László Katalin	„	XIX. John Ferenc-u. 238.
173.	Lengyel Tamás	egy. hallg.	XIV. Laky Adolf-u. 82.
174.	Lénárth Lajos	középisk. tanár	Budafok, Árpád-u. 52.
175.	Ligeti Béla	Bp-i Továbbképző Int. tansz. vez.	VIII. Horváth M.-tér 8.

176. Lipták J. Tamás	tud. kutató	III. Bécsi-út 88.
177. Lőrincz Pál	műegy. docens	XI. Karolina-u. 53.
178. Lugossy Margit	szakfelügyelő	VIII. Horváth Mihály-tér 8.
179. Lukács Andrásné	középisk. tanár	VI. Rippl-Rónai-u. 17.
180. Lukács Ernőné	Művelt Nép kiadó igazgatója	XI. Siroki-u. 4.
181. Macsek Zoltán	„	II. Ribáry-u. 12.
182. Magyar Ádám Szilveszter	mérnökhallg.	VIII. József-krt 59.
183. Magyar Pál	szerkesztő	VI. Lenin-krt 9—11.
184. Málnási Katalin	ált. isk. tanár	V. Wekerle-u. 43.
185. Marossy Ferencné	középisk. tanár	XIV. Semsey A.-u. 10.
186. Marx György	egy. docens	XI. Lágymányosi-u. 20.
187. Martinusz Ferenc	tanár	Kürt-u. 6.
188. Mátrai Tibor	vegyészmérnök	XI. Biblia-u. 8.
189. Medveczky Julianna	középisk. tanár	XII. Hegyalja-u. 134.
190. Medgyesi Pál	aspiráns	VI. Hunyadi-tér 8.
191. Mentes Imre	egy. tanársegéd	VIII. Rökk Szilárd-u. 20.
192. Melis Endre	tanár	XIV. Ida-u. 2.
193. Mikle Jánosné	O. M. előadó	XI. Szobieszki János 40.
194. Mikolás Miklós	egy. adjunktus	VIII. Népszinház-u. 42—44.
195. Mikolás Miklósné	egy. tanársegéd	VIII. Népszinház-u. 42—44.
196. Milhofer Hugóné	középisk. tanár	IX. Lónyai-u. 41.
197. Mittelmann Zsoltné	„	V. Szt. István-krt 15.
198. Mitnyán László	műegy. docens	XI. Eszék-u. 3.
199. Molnár József	aspiráns	XII. Trencséni-út 25.
200. Monostori István	egy tanársegéd	V. Szerb-u. 23.
201. Móritz Péter	műegy. tanársegéd	II. Budai A.-u. 5/c.
202. Muszély Gabriella	középisk. tanár	IV. Istvántelki-út 46.
203. Nagy Elemér	„	XVIII. Ságvári-u. 21.
204. Nagy Ferenc	főisk. tanár	IX. Bakáts-u. 5.
205. Nagy György	műegy. tanársegéd	III. Bécsi-u. 88.
206. Nagy Imre	főisk. adjunktus	I. Derék-u. 5.
207. Nagy István	egy. hallg.	VIII. Rákóczi-u. 5.
208. Nagy József	főisk. hallg.	VIII. Mária-u. 18.
209. Nagy Lajos	középisk. tanár	V. Veres Pálné-u. 8.
210. Nábrádi István	O. M. előadó	VI. Benczur-u. 35.
211. Nádor Béla	egy. hallg.	VIII. Krudy-u. 11.
212. Neukomm Gyula	K. M. L. fel. szerk.	VI. Kmety-u. 17.
213. Nyilas Dezső	középisk. tanár	XII. Böszörményi-u. 14.
214. Obláth Richárd	tanár	VIII. Rákóczi-u. 5.
215. Olgyay József Ferenc	osztályvez. mérnök	XIII. Katona J.-u. 27.
216. Oltvay István	középisk. tanár	XII. Márvány-u. 31.
217. Ozoray Mária	műegy. tanársegéd	XI. Bartók B.-út 33.
218. Pachné Sós Klára	„	VII. Benczur-u. 35/c.
219. Pados István	egy. tanársegéd	V. Falk Miksa u. 24—26.
220. Pap Margit	középisk. tanár	II. Lorántffy Zs.-u. 3.
221. Pataki Béláné	„	VI. Liszt F.-tér 10.
222. Pál Sándor	tud. kutató	V. Pannónia-u. 22.
223. Pásztor István	aspiráns	VI. Bajcsy Zs.-út 8.
224. Pázmány Béla	műegy. adjunktus	XII. Svájci-u. 9.
225. Prékopa András	aspiráns	VI. Sztálin-út 31.
226. Pagonyi Erzsébet	főisk. hallg.	Botond-u. 15.
227. Pécsváradi Vladimirné	középisk. tanár	XI. Budaörs-Kamaraerdő
228. Péter Rózsa	főisk. tanár	V. Czukor-u. 6.
229. Raksányi Aliz Klára	O. M. előadó	XIV. Nürnberg-u. 26.
230. Resser Sarolta	ált. isk. tanár	XI. Albert-u. 7/b.

231. Reuter Veronika	ált. isk. tanár	IX. Kinizsi-u. 22.
232. Rejtő Magda	tanszékvezető	VII. Elemér-u. 41.
233. Reményik Pál	egy. hallg.	II. Bolyai-u. 11.
234. Rényi Alfréd	egy. tanár	VI. Jókai-tér 10.
235. Rényi Kató	aspiráns	„
236. Réti Lenke	ált. isk. tanár	II. Dénes-u. 2.
237. Rieger Richárd	középisk. tanár	V. Személynök-u. 25.
238. Riesz Frigyes	egy. tanár	XIII. Sallai Imre-u. 12/b.
239. Rózsa Pál	aspiráns	VI. Sztálin-út 31.
240. Runtág Tivadarné	középisk. tanár	XI. Verpeléti-út 15.
241. Sarkadi Károly	tud. kutató	Eszter-u. 12/b.
242. Sas György	középisk. tanár	XIII. Kiss József-u. 15.
243. Sattler Tamásné	„	II. Bimbó-u. 63.
244. Sárkány Sándorné	„	II. Gizella leánygimn.
245. Seregély József	„	XIV. Tamás-u. 13.
246. Seres Iván	tud. kutató	VII. Rumbach Seb.-u. 3.
247. Simonfai Irén	középisk. tanár	XIX. Bocskay-u. 11.
248. Simonovits Istvánné	aspiráns	XIV. Dózsa György-út 102.
249. Skotnyár Ottó	főisk. hallg.	Krudy-u. 11.
250. Szamosi Géza	egy. docens	VIII. Puskin-u. 5—7.
251. Soltész István	középisk. tanár	XX. Hajnal-u. 10/a.
252. Solti Ernő	„	XXI. Szabadkai-u. 37.
253. Sólyom Károly	„	Vác, Damjanich-tér 8.
254. Somogyi Antalné	„	VI. Hajós-u. 15.
255. Sós Vera (Turán Pálné)	aspiráns	VIII. Rákóczi-út 5.
256. Strommer Gyula	műegy. docens	V. Váci-u. 46.
257. Surányi János	egy. docens	V. Bajcsy Zsilinszky-út 66.
258. Schág Mária	középisk. tanár	Plőrinc, Kolozsvári-u. 1.
259. Schönwald Miklós	műszerész	VIII. Bródy Sándor-u. 17.
260. Szabó Erzsébet	középisk. tanár	XIX. Vöröshadsereg-ú. 148.
261. Szabó Ferenc	„	Budajenő, Templom-u. 134.
262. Szabó János	egy. hallg.	VI. Tél-u. 71.
263. Szabó József	középisk. tanár	XVIII. Bercsényi-u. 26.
264. Szabó Mária	főisk. hallg.	VII. Kürt-u. 3.
265. Szabó Rózsa	„	VIII. Thék E.-u. 5.
266. Szalkay Mária	középisk. tanár	XI. Bartók Béla-u. 77.
267. Szász Pál	egy. docens	VIII. Múzeum-krt 6—8.
268. Szeidel Irma	egy. tanársegéd	XII. Győri-út 12.
269. Szekeres László	gépészmérnök	Budafok, Dévényi-u. 37.
270. Személyi Kálmán	középisk. tanár	IX. Ráday-u. 49.
271. Szentmártony Tibor	tud. kutató	XI. Bartók Béla-u. 15/b.
272. Székely Gábor	„	II. Udvarhelyi-u. 3.
273. Szépfalvi Kálmán	gépésztechnikus	VI. Lenin-krt. 99.
274. Szép Jenő	főisk. tanár	XI. Tass vezér-u. 20.
275. Szlavecz Lászlóné	statisztikus	XIII. Pozsonyi-u. 57.
276. Szőnyi Sándor	tanár	XII. Hieronymi-út 22.
277. Szüsz Péter	tud. kutató	II. Malinovszkij-f. 13—15.
278. Takács Lajos	„	XII. Alkotás-u. 51/b.
279. Takács Sándor	csoportvezető	Dunaharaszti
280. Takács Tibor	gépésztechnikus	XI. Budaörsi-út 4/b.
281. Targonszky Iván	műegy. tanársegéd	I. Attila-u. 79.
282. Tasnády István	műegy. tanársegéd	VIII. Kálvária-tér 20.
283. Tekse Kálmán	egy. hallg.	XV. Dugonics-u. 19.
284. Tettamanti Béla	középisk. tanár	VI. Rudas László-u. 67.
285. Tirninczey Karola	egy. hallg.	XVI. Béla-u. 8.
286. Tolnai Jenő	főisk. docens	XIII. Balzac-u. 31.

287.	Tomkó József	egy. hallg.	VII. Kürt-u. 6.
288.	Torbik Ernő	műegy. tanársegéd	XI. Budafoki-u. 10/a.
289.	Toroczkói Kornélia	középisk. tanár	XV. Rpalota, Bocskai-u. 87.
290.	Tóth Gáborné	egy. tanársegéd	VIII. Múzeum-krt 6—8.
291.	Tóth Józsefné	középisk. tanár	VIII. Víg-u. 6.
292.	Trubel László	főmérnök	VIII. Rákóczi-u. 59.
293.	Turán Pál	egy. tanár	VIII. Múzeum-krt 6—8.
294.	Ujvári Amália	középisk. tanár	XII. Karap-u. 10.
295.	Ujvári István	egy. hallg.	Vác, Dózsa György-u. 61.
296.	Ujvári Imre	középisk. tanár	Rmihály XVI. Mária-u. 81.
297.	Urbán János	„	VIII. Mikszáth K.-tér 4.
298.	Urbán László	egy. hallg.	Pongrácz-u. 17.
299.	Vajay László	középisk. tanár	XIII. Pozsonyi-u. 12.
300.	Varga Rózsa	„	Bartók Béla-út 6.
301.	Varga Tamás	egy. tanársegéd	II. Ürömi-u. 24.
302.	Varga Zoltán	középisk. tanár	VII. Bethlen Gábor-u. 29.
303.	Vargha Károly	„	II. Szász Károly-u. 4.
304.	Veress Lászlóné	„	XI. Bartók B.-u. 35.
305.	Veress Sándor	„	I. Bérc-u. 9.
306.	Vermes Miklós	„	XIII. Sziget-u. 27.
307.	Vigassy Lajos	középisk. tanár	I. Attila-u. 35.
308.	Vincze Lajosné	„	I. Hegyalja-út 58.
309.	Vincze István	igazgató h.	VI. Sztálin-út 31. Alk. Mat. Int.
310.	Vitalis Kálmán	középisk. tanár	Plőrinc, Nagybánya-u. 68—70.
311.	Vörös Tibor	egy. hallg.	VIII. Krudy-u. 11.
312.	Wolf Erika	„	Rmihály, XVI. Lajos-u. 50.
313.	Zajta Aurél	egy. tanársegéd	IX. Tűzoltó-u. 23.
314.	Zalán Frigyes	középisk. tanár	Aszód, Szt. Imre hg-u. 10.
315.	Zana István	„	IX. Zsil-u. 2—4.
316.	Zányi László	„	XX. Csokonai-u 7.
317.	Ziermann Margit	aspiráns	II. Pengő-u. 5.
318.	Zigány Ferenc	műegy. tanár	XI. Bartók Béla-út 88.

Felhívjuk Tagjaink figyelmét arra, hogy a Matematikai Lapokra a Posta Központi Hirlapiroda Vállalatnál, Budapest, V. József nádor-tér 1. alatt lehet előfizetni. Előfizetési csekk kapható a Társulat központjában (V. Reáltanoda-u. 13—15.), valamint a vidéki tagozatok titkárainál. (Szendrei János adjunktus, Szeged, Bolyai Intézet, Szénássy Barna adjunktus, Debrecen, Mat. Intézet, Batár Zoltán tanársegéd, Miskolc, Acházt Imréné szakfelügyelő, Pécs, Somkuti Lajosné tanársegéd, Veszprém, Vegyipari Egyetem, Mat. Tsz., Darvas Andorné főisk. adjunktus, Eger, Ped. Főisk. Mat. Tsz., Szeliánszky Ferenc, Győr, Bartók Béla-út 10/b, Garai József tanár, Sopron, Szakérettségis Kollégium, Paár Jozefin tanársegéd, Szolnok, Közlekedéstudományi Egyetem, Ambrózi Géza, Nyíregyháza, Czapáry Endre, Szombathely.)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Ára 7,— Ft.
Előfizetés évi 20,— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

A kiadásért felelős: Mestyán János Műszaki felelős: Tóth Ferenc
A kézirat beérkezett: 1954. III. 5. — Példányszám: 750
Terjedelem $4\frac{1}{2}$ (A/5) ív, 5 ábra

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54 1580 Felelős vezető: Vincze György

MATEMATIKAI LAPOK

V. ÉVFOLYAM

2-3.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1954

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1954. november V. évfolyam 2—3. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20.— Ft.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Ujságboltjában.

TARTALOMJEGYZÉK

Az elemi körmérésről

Irta: Szász Pál

Jelölje a szokott módon π a kör kerületének az átmérőhöz való viszonyát, amely megegyezik a kör területének a sugár négyzetéhez való viszonyával. Az *elemi körmérés* feladata e számnak elemi geometriai úton való közelítő meghatározása.

Ismeretes, hogy *Archimedes*[1] a be-, ill. köréírt szabályos 96-szög kerületének közelítő kiszámításával fáradságos négyzetgyökvonások után a

$$(1) \qquad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

becsléshez jutott, amelyből következik, miszerint két tizedesig meghatározva

$$(2) \qquad \pi = 3{\cdot}14\cdots.$$

A matematikusok azóta elemi geometriai úton számos egyenlőtlenséget állítottak fel, amelyek π kétoldali megbecslését eszközlik és lényegesen egyszerűsítik az elemi körmérést.[2] Ilyenek többek között a következők.

Legyen k_n és t_n az egységnyi sugarú körbe beírt, K_n és T_n viszont e kör köré írt szabályos n-szög kerülete, ill. területe. *Chr. Huygens*[3] bebizonyította, hogy

$$(3) \qquad t_{2n} + \frac{1}{3}(t_{2n} - t_n) < \pi < t_n + \frac{2}{3}(T_n - t_n)$$

[1] Archimedes, Κύκλου μέτρησις (Dimensio circuli), Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit J. L. Heiberg vol. I., Lipsiae 1910, 231—243, speciálisan 236—243 (görög szöveg latin fordítással a páratlan oldalakon), németül lásd pl. F. Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig 1892, 73—81, speciálisan 75—81. V. ö. továbbá Kürschák József, A körmérés története és elmélete (Első közlemény), Matematikai és Fizikai Lapok 1 (1892), 31—51, speciálisan 40—43.

[2] V. ö. M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften etc. III AB 9, 859—1172, speciálisan 934—938.

[3] Chr. Huygens, De circuli magnitudine inventa, Lugduni Batavorum 1654, §§ 5, 6, továbbá §§ 7, 9, németül lásd F. Rudio[1] i. h. 93—101. V. ö. még Kürschák József, A körmérés történetete és elmélete (Második közlemény), Matematikai és Fizikai Lapok 1 (1892), 130—142, speciálisan 139—142.

továbbá

$$(4)\qquad k_{2n}+\frac{1}{3}(k_{2n}-k_n)<2\pi<k_n+\frac{1}{3}(K_n-k_n).$$

S ha r_n a 2 kerületű szabályos n-szög köréírt, ϱ_n viszont e sokszög beírt körének sugara, akkor *E. Rouché*[4] szerint

$$(5)\qquad r_{2n}-\frac{1}{3}(r_n-r_{2n})<\frac{1}{\pi}<\varrho_{2n}+\frac{1}{3}(\varrho_{2n}-\varrho_n).$$

Újabban pedig *H. Dörrie*[5] megmutatta, hogy

$$(6)\qquad \frac{3K_nk_n}{k_n+2K_n}<2\pi<\sqrt[3]{K_nk_n^2}.$$

O. Eckhardt[6] szerint egyben érvényes a

$$(7)\qquad \frac{3K_nk_n}{k_n+2K_n}<2\pi<\sqrt{\frac{3K_nk_n^2}{K_n+2k_n}}$$

egyenlőtlenség is, amelyben köbgyök helyett csak négyzetgyök szerepel.

Nemcsak a (6) vagy (7) alatti egyenlőtlenség alkalmazása kíván gyökvonást, hanem a (3), (4) és (5) alattiaké is, mert az oldalszám kettőzésénél a megfelelő adatok kiszámítása négyzetgyökvonást igényel. Így pl. t_n és T_n-ből a t_{2n} és T_{2n} annak alapján számítható ki, hogy *W. Snellius*[7] tétele szerint t_{2n} a t_n és T_n geometriai közepe, azaz

$$(8)\qquad t_{2n}^2=t_nT_n$$

vagy más alakban

$$(8^*)\qquad \frac{1}{t_{2n}^2}=\frac{1}{t_n}\frac{1}{T_n},$$

J. Gregory[8] tétele értelmében pedig T_{2n} a t_{2n} és T_n harmonikus

[4] E. Rouché, Sur la méthode des isopérimétres, Nouvelles Annales de Mathématiques (3) 1 (1882), 325—329, speciálisan 326.

[5] H. Dörrie, Eine Ergänzung der Archimedischen Kreismessung, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht etc. 49 (1918), 41—45, speciálisan 42; továbbá ugyanattól Triumph der Mathematik, Breslau 1933, 186—187.

[6] O. Eckhardt, Zur Archimedischen Kreismessung, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht etc. 51 (1920), 20—21.

[7] W. Snellius, Cyclometricus, Lugduni Batavorum 1621, prop. 9. V. ö. Kürschák József[3] i. h. 131—132, és lásd még pl. K. Fladt, Elementargeometrie 2. Teil, Leipzig—Berlin 1928, 118.

[8] J. Gregory, Vera circuli et hyperbolae quadratura (1667), Christiani Hugenii opera varia vol. I. (1724), 405—462, prop. 1. et 12. V. ö. Kürschák József[3], i. h. 131, és lásd még pl. K. Fladt[7] i. h.

közepe, vagyis

$$(9)\qquad \frac{1}{T_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{2n}}+\frac{1}{T_n}\right).$$

Az alábbiakban hasonlóan *H. Dörrie*[5] meggondolásához, amellyel a (6) alatti kettős egyenlőtlenséget bebizonyította, *megmutatjuk, hogy*

$$(10)\qquad \frac{3t_n T_n}{T_n+2t_n}<\pi<\frac{t_n+2T_n}{3}.^{9}$$

Mint látni fogjuk, ennek alapján *a* (2) *alatti eredmény a*

$$(11)\qquad \sqrt{3}=1{\cdot}7320\cdots$$

érték birtokában további gyökvonás nélkül nyerhető, a

$$(12)\qquad \sqrt{3}=1{\cdot}73205\cdots,\ \sqrt{2-\sqrt{3}}=0{\cdot}51763\cdots$$

értékek ismeretében pedig három tizedesig határozható meg π értéke. Ez a középiskolai és az elsőéves egyetemi, ill. főiskolai oktatás szempontjából talán nem érdektelen.

(10) bebizonyítása a következő. (8*) alapján (minthogy a geometriai közép kisebb, mint a számtani közép)

$$\frac{2}{t_{2n}}<\frac{1}{t_n}+\frac{1}{T_n},$$

(9) szerint viszont

$$\frac{2}{T_{2n}}=\frac{1}{t_{2n}}+\frac{1}{T_n}.$$

Ezeket összeadva és mindkét oldalból $1/t_{2n}$-et kivonva

$$(13)\qquad \frac{1}{t_{2n}}+\frac{2}{T_{2n}}<\frac{1}{t_n}+\frac{2}{T_n}.$$

Hasonlókép (8) alapján

$$2t_{2n}<t_n+T_n,$$

(9)-ből folyólag pedig (minthogy a harmonikus közép kisebb a számtani középnél)

$$2T_{2n}<t_{2n}+T_n.$$

Összeadva és mindkét oldalból t_{2n}-et kivonva

$$(14)\qquad t_{2n}+2T_{2n}<t_n+2T_n.$$

[9] Itt tehát a felső korlát ugyanaz, mint Chr. Huygens[3] (3) alatti kettős egyenlőtlenségben (loc. cit. §§ 5, 6).

(13) és (14) értelmében az oldalszám szukcesszív kettőzésénél t_n, T_n, T_n harmonikus közepe folyvást növekedik, a számtani közepe viszont egyre csökken. Mivel $n \to +\infty$ esetén $t_n \to \pi$, valamint $T_n \to \pi$ és így e közepek is π-hez tartanak, következik, hogy a harmonikus közép a π-nél kisebb, a számtani közép ellenben π-nél nagyobb, amivel (10)-et bebizonyítottuk.[10]

A (2) alatti eredményt előállítandó, alkalmazzuk (10)-et $n = 12$-re. Minthogy nyilván $t_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ s ennélfogva $T_6 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 t_6 = 2\sqrt{3}$, (8) és (9)-ből folyólag

$$(15) \qquad t_{12} = 3^{11}, \quad T_{12} = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{12}{2+\sqrt{3}} = 12(2-\sqrt{3}),$$

és így (10)-*ből* $n = 12$-*re adódik a*

$$(16) \qquad \frac{18}{4+\sqrt{3}} < \pi < 17 - 8\sqrt{3}$$

egyenlőtlenség.[12]

Miután (11) értelmében

$$1{\cdot}7320 < \sqrt{3} < 1{\cdot}7321,$$

(16)-ból következik, hogy még inkább

$$3{\cdot}140 < \pi < 3{\cdot}144$$

s ebből (2) folyik.

[10] Érvényes a jobboldalinál erősebb

$$\pi < \sqrt[3]{t_n T_n^2}$$

egyenlőtlenség is. U. i. (9) alapján (a harmonikus közép a geometriai középnél kisebb lévén)

$$T_{2n}^2 < t_{2n} T_n$$

s ezt t_{2n}-nel végigszorozván (8)-ra tekintettel adódik

$$t_{2n} T_{2n}^2 < t_n T_n^2.$$

Eszerint az oldalszám szukcesszív kettőzésénél t_n, T_n, T_n geometriai közepe folyvást csökken. Mivel pedig e középérték $n \to +\infty$ esetén t_n és T_n-nel együtt π-hez tart, ebből az állítás következik.

[11] Ennek minden számítás nélkül való bebizonyítására lásd Kürschák József, A szabályos tizenkétszögről, Matematikai és Fizikai Lapok 7 (1898), 53—54.

[12] Ezt egyébként úgy is megkaphatjuk, hogy a (6) baloldalán álló egyenlőtlenséget $n = 6$-ra, a (3) jobboldalán állót pedig (amely (10) jobboldali egyenlőtlenségével egyezik) $n = 12$-re alkalmazzuk.

A π szám harmadik tizedesjegyét pedig a (12) alatti értékek birtokában következőképp határozhatjuk meg. (15) alapján a (8) és (9) képletek alkalmazásával nyerjük, hogy

$$t_{24}=6\sqrt{2-\sqrt{3}},\quad T_{24}=\frac{24(2-\sqrt{3})}{1+2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

s így (10)-*ből* $n=24$-*re előáll a*

$$\frac{36(2-\sqrt{3})}{1+4\sqrt{2-\sqrt{3}}}<\pi<\frac{20(2-\sqrt{3})+2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{1+2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \tag{17}$$

egyenlőtlenség. De mivel (12)-ből folyólag

$$0{\cdot}26794<2-\sqrt{3}<0{\cdot}26795$$

és

$$0{\cdot}51763<\sqrt{2-\sqrt{3}}<0{\cdot}51764,$$

(17)-ből következik, hogy annál inkább

$$3{\cdot}1413<\pi<3{\cdot}1418,$$

tehát három tizedesig meghatározva

$$\pi=3{\cdot}141\cdots.$$

Ez az eredmény az (1) alatti klasszikus becslést is igazolja.

Ugyancsak a (12) alatti két négyzetgyökvonást igényli, de csupán két tizedesig határozza meg a π számot a

$$8\sqrt{2-\sqrt{3}}-1<\pi<4(2-\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{3}}) \tag{4*}$$

valamint a

$$\frac{18}{4+\sqrt{3}}<\pi<\frac{9\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \tag{5*}$$

egyenlőtlenség, és az a kettő is, amely ezekből keletkezik a korlátok kombinációjával. (4*) úgy származik, hogy a (4) baloldalán álló egyenlőtlenséget $n=6$-ra, a jobboldalán állót viszont $n=12$-re alkalmazzuk, (5*) pedig az (5) egyenlőtlenségnek $n=6$-ra vonatkozó speciális esete. Ezeknél tehát előnyösebb a (17) egyenlőtlenség, amelyből a π számot három tizedesig határozhattuk meg.[13]

[13] Amint már maga Chr. Huygens[3] is kiemelte (loc. cit. § 10, németül lásd F. Rudio[1], i. h. 101—102), a (4*) egyenlőtlenség az (1) alatti becslést szintén igazolja. Ez tehát többet nyújt mint (5*), amely a (2) alatti eredményt magábanfoglalja ugyan, de belőle (1) még nem következik.

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕНЕНИЯ КРУГА

П. САС

Резюме

Относительно числа Лудольфа доказывается элементарно-геометрическим путем неравенство (10), в котором t_n и T_n означают площадь правильного n-угольника, помещенного в круге с единичным радиусом и вокруг него. Верхний предел тот же, как и в неравенстве (3) Chr. Huygens.[3] Доказательство подобно одной из аргументаций H. Dörrie.[5]

Из (10) получается неравенство (16) для $n=12$, а неравенство (17) — для $n=24$. Показано, что этим способом π поддается определению до точности двух и даже трех десятичных знаков без необходимости дальнейшего извлечения квадратного корня.

ÜBER DIE ELEMENTARE KREISMESSUNG

PAUL SZÁSZ

Bezüglich der Ludolphschen Zahl π wird auf elementargeometrischem Wege die Ungleichung (10) bewiesen, wobei t_n bzw. T_n den Inhalt des dem Kreise vom Radius 1 ein-, resp. umgeschriebenen regelmässigen n-Ecks bedeutet. Die obere Schranke ist dieselbe, wie in der Ungleichung (3) von CHR. HUYGENS.[3] Der Beweis verläuft einem Gedankengange von H. DÖRRIE[5] ähnlich.

Für $n=12$ resp. $n=24$ ergibt sich aus (10) die Ungleichung (16) bzw. (17). Es wird gezeigt, dass sich π auf Grund dieser Ungleichungen bis auf zwei bzw. drei Dezimalen berechnen lässt, ohne nochmaliges Ausziehen von Quadratwurzeln.

Elsőfokú határozatlan egyenletek egész megoldásai és lánctörtek

SURÁNYI JÁNOS

1. Többismeretlenes egész együtthatós elsőfokú egyenletek egész megoldásainak előállítására egyszerű eljárás[1] ismeretes, mely az összes megoldásokat egy vagy több segédváltozó (paraméter) segítségével adja meg. A paraméter vagy paraméterek helyébe bármilyen egész számot téve mindig megoldást kapunk és megkapjuk ilyen alakban az összes megoldást. Az eljárást — két változó esetében — még gépiesebbé és gyorsabbá lehet tenni a lánctörtek elméletének néhány egyszerű eredményét segítségül véve. Kézenfekvő gondolat azonban, — bár eddig még nem találkoztam vele az irodalomban — hogy közvetlenül az egyenletek megoldására alkalmazott módszerből olvassunk le egész gépies eljárást a gyökök megkeresésére. Így egyrészt a szokásosnál bizonyos szempontból egyszerűbb és célszerűbb megoldási eljáráshoz jutunk. Főként pedig a lánctörteknek a diofantoszi egyenleteken át történő bevezetését látom természetesebbnek és didaktikailag is alkalmasabbnak a szokásos eljárásnál. Emellett még bizonyos előnyöket is nyújt. Perron[2] pl. a tárgyról szóló kitűnő monográfiájában, bár sem az egyenletek megoldására, sem a lánctörtek bevezetésére nem az alábbiakhoz hasonló utat választ (ezt ott a kérdések általánosabb felvetése nehezítené is), mégis éppen a (II. 12)-nek megfelelő, alapösszefüggésnek nevezett azonosság levezetéséhez lényegében az ittenivel megegyező utat választ.

A lánctörtekre vonatkozó néhány egyszerű tény bebizonyítása után be fogom mutatni a lánctörtek egy érdekes számelméleti alkalmazását is.

[1] Az eljárást részletesen ismertette a Középiskolai Matematikai Lapok. Lásd *K. M. L.*, 7 (1953), 65—81. old. A cikk ismerete nem szükséges a továbbiak megértéséhez.

[2] O. PERRON: *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* (1913 Leipzig und Berlin. B. G. Teubner) L. különösen 12—16. old.

I. Elsőfokú egyenletek egész megoldása

2. A megoldási eljárás, amire utaltam, abban áll, hogy kifejezzük azt az ismeretlent, amelyiknek együtthatója a legkisebb abszolút értékű (vagy egyet az ilyenek közül) és a jobboldalon elvégezzük, amennyire lehet, az osztásokat. Ha nem marad tört, akkor a jobboldalon szereplő ismeretlen vagy ismeretlenek bármilyen egész választásánál a baloldalinak olyan értékét kapjuk, amely az előbbiekkel együtt megoldást szolgáltat és egész szám. Ha a jobboldalon marad egy ismeretlent nem tartalmazó tört, akkor is megoldást kapunk a jobboldali változók bármilyen választása mellett, de ha ezeket az ismeretleneket mind egésznek választjuk, akkor a baloldalon hagyott ismeretlen értéke biztosan nem lesz egész, tehát az egyenletnek nincs egész megoldása.

Végül, ha a jobboldalon ismeretlent is tartalmazó tört marad, akkor ezt egy betűvel jelölve új változót vezetünk be. Úgy kell a törtben szereplő ismeretleneket választani, hogy az új változó értéke is egész legyen. Ez egy újabb egyenletet jelent, melyben a legkisebb abszolút értékű együttható abszolút értéke biztosan kisebb, mint az eredeti egyenletben volt. Ennek az egyenletnek bármely megoldásához kiszámítva az első lépésben kifejezett változó értékét, az eredeti egyenlet megoldásához jutunk, és ilyen módon megkapunk minden megoldást. Erre ismételve az eljárást a legkisebb abszolút értékű együttható abszolút értékének csökkenése miatt ennek véges számú lépésben véget kell érnie, ami azt jelenti, hogy végül vagy az első vagy a második eshetőség következik be. Ennek megfelelően megoldható az egyenlet egész számokkal vagy sem.

Lássunk erre egy példát:

$$7x-26y=17 \qquad \text{(I.1)}$$

$$x=3y+2+\frac{5y+3}{7}=3y+2+t_1, \qquad 5y+3=7t_1;$$

$$y=t_1+\frac{2t_1-3}{5}=t_1+t_2, \qquad 2t_1-3=5t_2; \qquad \text{(I.2)}$$

$$t_1=2t_2+1+\frac{t_2+1}{2}=2t_2+1+t_3, \qquad t_2+1=2t_3;$$

$$t_2=2t_3-1.$$

Ha most t_3-at tetszés szerint megválasztjuk, és kiszámítjuk lépésről lépésre t_2, t_1, y és x ehhez tartozó értékeit, akkor azok sorra kielégítik a jobboldalon álló egyenleteket, tehát végül az eredetit is. Pl. $t_3=0$-hoz $t_2=-1$, $t_1=-1$, $y=-2$, $x=-5$ értékrendszer tartozik és valóban

$$7\cdot(-5)-26\cdot(-2)=-35+52=17.$$

(De hasonlóan fennállnak a

$$-1+1=20, \quad 2\cdot(-1)-3=5\cdot(-1), \quad 5\cdot(-2)+3=7\cdot(-1)$$

egyenlőségek is, hiszen ezek egyszerűen az egymásutáni ismeretlenek kiszámítására használt kifejezések visszaalakításával keletkeznek.)

Az egyes ismeretleneket határozatlanul hagyott t_3 mellett is kifejezhetjük t_3-mal:

$$t_2=2t_3-1, \quad t_1=2(2t_3-1)+1+t_3=5t_3-1,$$
$$y=5t_3-1+2t_3-1=7t_3-2,$$
$$x=3(7t_3-2)+2+5t_3-1=26t_3-5.$$

Bármilyen értéket adunk is tehát t_3-nak,

$$x=26t_3-5, \quad y=7t_3-2 \tag{I.3}$$

megoldása az (I.1) egyenletnek. Ha t_3 egész, akkor x és y is az, de megfordítva is, az (I.2) egyenletrendszerhez éppen abból a meggondolásból jutottunk, hogy ha x és y egész, akkor t_1-nek is egésznek kell lennie, ha y és t_1 egész, akkor t_2 is, ha pedig t_1 és t_2 egész, akkor t_3 is az. Így *az* (I.3) *értékek egész* t_3 *mellett mindig egész megoldását adják az* (I.1) *egyenletnek és minden egész megoldás előállítható ilyen alakban.*

3. Amit itt egy példán bemutattunk, az általában is elvégezhető. Írjunk egy tetszésszerinti két ismeretlenű egész együtthatós egyenletet

$$ax-by=c \tag{I.4}$$

alakban. Feltehetjük, hogy $|a|\leqq|b|$, mert ellenkező esetben x-et és y-t felcseréljük, továbbá azt is feltehetjük, hogy a pozitív, mert ellenkező esetben szorozhatjuk az egyenletet -1-gyel. Tehát

$$0<a\leqq|b|. \tag{I.5}$$

Természetesen b és c előjele már tetszőleges lehet. Osszuk el b-t és c-t a-val:

$$b=ak_1+r_1, \quad 0\leqq r_1<a; \quad c=al_1+s_1.$$

Ekkor

$$x=k_1y+l_1+\frac{r_1y+s_1}{a}=k_1y+l_1+t_1,$$

ahol

$$r_1y+s_1=at_1.$$

Az új egyenlet együtthatói közül r_1 pozitív és kisebb a-nál — Figyeljük meg, hogy a konstans tagok nagysága nem játszik szerepet meggondolásunkban; s_1-ről nem is tettünk fel semmit azon kívül, hogy természetesen egész szám. Lehet akár $l_1=0$ és $s_1=c$ is. — Ha x és y egész, akkor t_1 is egész kell hogy legyen. Ha $r_1=0$ és $a \nmid s_1$, akkor ez lehetetlen, tehát az egyenlet nem megoldható. Ha $a|s_1$, akkor feltehetjük, hogy $l_1=c/a$ és $s_1=0$; ekkor t_1 is 0 és minden egész y-nal $x=k_1y+l_1$ természetesen megoldása az (I.4) egyenletnek. Ha $r_1>0$, akkor folytatjuk az eljárást. Osztunk r_1-gyel:

$$a=r_1k_2+r_2 \quad 0\leqq r_2<r_1, \quad s_1=r_1l_2+s_2;$$

$$y=k_2t_1-l_2+\frac{r_2t_1-s_2}{r_1}=k_1t_1-l_2+t_2,$$

ahol

$$r_2t_1-s_2=r_1t_2.$$

Ismét vagy befejeződik itt az eljárás, (ha $r_2=0$) és akkor kiderül, hogy megoldható-e az egyenlet, vagy sem; vagy pedig a kapott újabb egyenletre kell megismételni az eljárást.

Mindenesetre azonban véges számú lépésben célhoz érünk. Az egymásutáni együtthatók ugyanis úgy keletkeznek, hogy b-t osztjuk a-val, majd a-t a maradékkal, aztán mindig az előző osztót az osztási maradékkal. A maradékok eközben csökkenő pozitív egész számok, amelyek sora véget kell hogy érjen. Ez pedig akkor következik be, ha valamelyik osztás maradék nélkül elvégezhető.

Párhuzamosan ismételt osztást kell végeznünk az állandókkal is: c-t osztjuk a-val, majd sorra az egymásutáni maradékokat az előbbi osztási eljárás osztóival. Itt azonban nem kell a szokott értelemben vett osztást végezni (bár célszerű), hanem bármilyen egész számot választhatunk hányadosul. Egy kényelmes választás pl. — amit időnkint alkalmazni is fogunk — hogy minden hányadost 0-nak választunk, tehát minden maradék c lesz, csak az utolsó osztóval osztjuk tényleg el c-t. Az eljárás szkémája tehát a következő:

$$\begin{array}{lll}
b=ak_1+r_1, & 0<r_1<a, & c=al_1+s_1; \\
a=r_1k_2+r_2, & 0<r_2<r_1, & s_1=r_1l_2+s_2; \\
r_1=r_2k_3+r_3, & 0<r_3<r_2, & s_2=r_2l_3+s_3; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
r_{i-1}=r_ik_{i+1}+r_{i+1}, & 0<r_{i+1}<r_i, & s_i=r_il_{i+1}+s_{i+1}; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
r_{n-2}=r_{n-1}k_n+r_n, & 0<r_n<r_{n-1}, & s_{n-1}=r_{n-1}l_n+s_n; \\
r_{n-1}=r_nk_{n+1}\,[3] & & s_n=r_nl_{n+1}+s_{n+1}.
\end{array} \qquad (I.6)$$

[3]) Megjegyezzük, hogy $r_n<r_{n-1}$ folytán $k_{n+1}>1$, vagyis $k_{n+1}\geqq 2$.

osztója r_1-nek is. Ekkor azonban a második egyenletből következik, hogy osztója r_2-nek is. Így haladva tovább kapjuk, hogy a legnagyobb közös osztó osztója mindegyik r_i-nek, az utolsóelőtti egyenletből kapjuk, hogy r_n-nek is osztója. r_n tehát nem lehet kisebb a legnagyobb közös osztónál.

Másrészt viszont az utolsó egyenlet szerint r_n osztója r_{n-1}-nek, ekkor az utolsóelőtti egyenletből következik, hogy r_{n-2}-nek is osztója és lépésről lépésre visszafelé haladva sorra kiderül, hogy mindegyik r_i-nek osztója. Végül a második, majd az első egyenlet adja, hogy r_n osztója $r_0 = a$-nak és $r_{-1} = b$-nek is. r_n tehát olyan közös osztó, mely legalábbis akkora, mint a legnagyobb közös osztó, vagyis maga a legnagyobb közös osztó.[4]

Azt kaptuk tehát, hogy *az* (I.4) *egyenlet akkor és csakis akkor oldható meg egész x és y-nal, ha az ismeretlenek együtthatóinak legnagyobb közös osztója osztója az állandó tagnak is.* Ebben az esetben az előbbiekhez hasonlóan azonnal látható, hogy minden s_i, tehát s_n is osztható r_n-nel, s így l_{n+1} megválasztható s_n/r_n-nek, amikoris s_{n+1} és vele együtt t_{n+1} is 0. A továbbiakban általában feltesszük, hogy az egyenlet megoldható és hogy utolsó két sora helyett csak

$$r_n t_{n-1} + (-1)^{n-1} s_n = r_{n-1} t_n, \qquad t_{n-1} = k_{n+1} t_n + (-1)^n l_{n+1} \tag{I.7'}$$

áll.

5. Fejezzük most ki sorra az egyes t paramétereket t_n-nel, tehát

$$t_{n-\nu} = d_\nu t_n + \tau_n \tag{I.8}$$

alakban.

Ekkor

$$x = t_{-1} = d_{n+1} t_n + \tau_{n+1}, \quad y = t_0 = d_n t_n + \tau_n \tag{I.9}$$

adja az (I.4) egyenlet általános megoldását. Speciálisan $t_n = 0$ mellett adódik, hogy

$$x_0 = \tau_{n+1}, \quad y_0 = \tau_n \tag{I.9'}$$

egy megoldása az egyenletnek.

Nézzük meg, hogyan számíthatók ki a d_ν együtthatók és τ_ν állandók.

Mivel

$$t_n = t_n, \quad \text{így} \quad d_0 = 1, \quad \tau_0 = 0.$$

(Ha tetszik, a fentebbi $t_{n+1} = 0$ megállapodásból írhatjuk, hogy

$$t_{n+1} = 0 \cdot t_n + 0, \quad \text{tehát} \quad d_{-1} = 0, \quad \tau_{-1} = 0.)$$

[4] Célszerűbb a legnagyobb közös osztót a nagysága helyett egy oszthatósággal kapcsolatos tulajdonságával határozni meg: *egy szám akkor legnagyobb közös osztója a-nak és b-nek, ha egyrészt közös osztójuk, másrészt a és b minden közös osztójával osztható.* A fentiekhez teljesen hasonlóan látható, hogy r_n-nek megvan ez a tulajdonsága.

Ennek alapján az egyenlet megoldása lépésről-lépésre a következő egyenleteket adja:

$$ax = by + c, \quad x = k_1 y + l_1 + \frac{r_1 y + s_1}{a} = k_1 y + l_1 + t_1,$$

$$r_1 y + s_1 = a t_1, \quad y = k_2 t_1 - l_2 + \frac{r_2 t_1 - s_2}{r_1} = k_2 t_1 - l_2 + t_2,$$

$$r_2 t_1 - s_2 = r_1 t_2, \quad t_1 = k_3 t_2 + l_3 + \frac{r_3 t_2 + s_3}{r_2} = k_3 t_2 + l_3 + t_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_i t_{i-1} + (-1)^{i-1} s_i = r_{i-1} t_i, \quad t_{i-1} = k_{i+1} t_i + (-1)^i l_{i+1} + $$
$$+ \frac{r_{i+1} t_i + (-1)^i s_{i+1}}{r_i} = k_{i+1} t_i + (-1)^i l_{i+1} + t_{i+1}, \tag{I.7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n-1} t_{n-2} + (-1)^{n-2} s_{n-1} = r_{n-2} t_{n-1}, \quad t_{n-2} = k_n t_{n-1} + (-1)^{n-1} l_n +$$
$$+ \frac{r_n t_{n-1} + (-1)^{n-1} s_n}{r_{n-1}} = k_n t_{n-1} + (-1)^{n-1} l_n + t_n,$$

$$r_n t_{n-1} + (-1)^{n-1} s_n = r_{n-1} t_n, \quad t_{n-1} = k_{n+1} t_n + (-1)^n l_{n+1} +$$
$$+ \frac{(-1)^n s_{n+1}}{r_n} = k_{n+1} t_n + (-1)^n l_{n+1} + t_{n+1},$$

$$(-1)^n s_{n+1} = r_n t_{n+1}.$$

Látható, hogy itt x és y szerepe a t-kétől, a és b-é az r-ekétől, c-é pedig az s-ekétől nem különbözik lényegesen, ezért párhuzamosan használni fogjuk számukra az $y = t_0$, $x = t_{-1}$, $a = r_0$, $b = r_{-1}$, $c = s_0$ jelölést is.

4. *Az egyenlet megoldhatósága* attól függ, hogy az utolsó egyenlet megoldható-e vagy sem. A megoldhatóság természetesen független attól, hogy hogyan választjuk az l-eket. Speciálisan az $l_1 = l_2 = \cdots = l_{n+1} = 0$ választás mellett $s_1 = s_2 = \cdots = s_{n+1} = c$, tehát az (I.4) egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a $(-1)^n c = r_n t_n$ egyenlet megoldása egész szám, azaz ha

$$r_n | c.$$

Az (I.6) eljárás baloldali oszlopa az a és b számok közti euklideszi algoritmus, aminek utolsó osztójáról tudjuk, hogy a és b legnagyobb közös osztóját adja:

$$r_n = (a, b).$$

Ezt így láthatjuk be: (I.6) baloldali oszlopának első egyenletéből következik, hogy a és b legnagyobb közös osztója (mint minden közös osztójuk)

(I.7) módosított utolsó sorából, (I.7′)-ből kapjuk, hogy

$$d_1 = k_{n+1}, \quad \tau_1 = (-1)^n l_{n+1}.$$

(I.7) utolsó előtti sorába helyettesítve t_{n-1} nyert értékét

$$t_{n-2} = k_n t_{n-1} + (-1)^{n-1} l_n + t_n = (k_n d_1 + 1) t_n + k_n \tau_1 + (-1)^{n-1} l_n =$$
$$= (k_n d_1 + d_0) t_n + (k_n \tau_1 + (-1)^{n-1} l_n) =$$
$$= (k_n k_{n+1} + 1) t_n + (-1)^n (k_n l_{n+1} - l_n);$$

tehát

$$d_2 = k_n d_1 + d_0 = k_n k_{n+1} + 1,$$
$$\tau_2 = k_n \tau_1 + (-1)^{n-1} l_n = (-1)^n (k_n l_{n+1} - l_n).$$

Folytathatnánk a formulák írását, de felesleges. Sokkal egyszerűbb és hasznosabb megjegyezni, hogyan számítható ki egy-egy d_ν ill. τ_ν az előzőkből. Erre általában a

$$d_{\nu+1} = k_{n-\nu+1} d_\nu + d_{\nu-1}, \quad \tau_{\nu+1} = k_{n-\nu+1} \tau_\nu + \tau_{\nu-1} + (-1)^{n-\nu} l_{n-\nu+1} \quad \text{(I.10)}$$

képlet lesz érvényes. Valóban $d_{\nu+1}$ és $\tau_{\nu+1}$ a $t_{n-\nu-1}$-nek (I. 8) alakú előállításában lép fel. Az (I. 7) rendszer $t_{n-\nu-1}$-re azt adja, hogy

$$t_{n-\nu-1} = k_{n-\nu+1} t_{n-\nu} + t_{n-\nu+1} + (-1)^{n-\nu} l_{n-\nu+1}.$$

Helyettesítsük ide be a

$$t_{n-\nu} = d_\nu t_n + \tau_\nu, \quad t_{n-\nu+1} = d_{\nu-1} t_n + \tau_{\nu-1}$$

értékeket, akkor

$$t_{n-\nu-1} = (k_{n-\nu+1} d_\nu + d_{\nu-1}) t_n + (k_{n-\nu+1} \tau_\nu + \tau_{\nu-1} + (-1)^{n-\nu} l_{n-\nu+1}),$$

amivel igazoltuk állításunkat. Figyelembevéve a d_0, τ_0 értékeket látható, hogy az (I. 10) előállítás $\nu = 1$-re (sőt d_{-1}, τ_{-1}-et figyelembevéve már $\nu = 0$-ra is) érvényes.

A d_ν-k számítására nem is lett volna szükség, mert belátható, hogy ezek éppen az r_i-k r_n-nel osztva és fordított sorrendben:

$$r_n d_\nu = r_{n-\nu}.$$

Valóban $r_n d_0 = r_n$, és ha (I. 10) első egyenletét r_n-nel végigszorozzuk és $r_n d_j$ helyébe r_{n-j}-t gondolunk ($j = \nu - 1$, ν, $\nu + 1$-gyel), akkor ráismerünk, hogy csupán az (I. 6) alatti első oszlop osztásaiban számoltuk vissza ki az osztandókat az utolsó maradék és a hányadosok ismeretében.

6. Ezt $\nu = n$-re és $\nu = n + 1$-re az (I. 4) egyenlet (I. 9) alatti általános megoldásába beírva és figyelembe véve (I. 9′)-t is

$$x = \frac{b}{r_n} t_n + \tau_{n+1} = \frac{b}{r_n} t_n + x_0, \quad y = \frac{a}{r_n} t_n + \tau_n = \frac{a}{r_n} t_n + y_0;$$

tehát csak $\tau_{n+1}=x_0$ és $\tau_n=y_0$ vagyis egy speciális megoldás megkeresésére van szükség, ami az (I. 10) alatti formulák alapján történhet. A gyakorlatban természetesen ha ismerjük a és b legnagyobb közös osztóját, akkor osztjuk vele előbb az (I. 4) egyenletet. Ekkor könnyű látni, hogy formuláink mindössze annyiban változnak, hogy az összes r_i-k és s_i-k helyébe az r_n-nel osztott értékeik kerülnek, a k_i és l_i hányadosok azonban változatlanul maradnak. (Éppen ezért ha csak az (I. 6) osztások elvégzése után kaptuk meg a legnagyobb közös osztót, akkor már fölösleges is leosztani vele.) Így az (I. 4) egyenlet megoldására a következő gépies eljárást nyertük: *Végezzük el az* (I. 6) *osztási algoritmust. Ha a jobboldali utolsó osztás nem végezhető el maradék nélkül, akkor az egyenlet nem megoldható, ellenkező esetben ezt az osztást végezzük el maradék nélkül. Ezután számítsuk ki a* $\tau_{-1}=\tau_0=0$ *kezdő értékekből kiindulva a*

$$\tau_{\nu+1}=k_{n-\nu+1}\tau_\nu+\tau_{\nu-1}+(-1)^{n-\nu}l_{n-\nu+1}$$

értékek sorozatát. Ekkor

$$x=\frac{b}{r_n}t_n+\tau_{n+1},\quad y=\frac{a}{r_n}t_n+\tau_n$$

adja az egyenlet általános megoldását.

Illusztrációképpen oldjuk meg a

$$11x+18y=28$$

		k	$(\pm)l$	τ
-18				
11	28	-2	$(+)2$	14
4	6	2	$(-)1$	-7
3	2	1	$(+)0$	-2
1	2	3	$(-)2$	-2
			$(\tau_0=)$	0
			$(\tau_{-1}=)$	0

egyenletet.

A számítást gyakorlatban pl. úgy vihetjük keresztül, hogy egymás alá írjuk b-t, a-t és a mellé c-t, majd melléjük írjuk b-nek és c-nek a-val való osztási hányadosát, az osztási maradékokat pedig a ill. c alá, és azután mindig az első oszlop utolsó számával osztjuk a fölötte és mellette álló számot. Az adódó általános megoldás

$$x=-18t+14,\quad y=11t-7.$$

II. Összefüggés az ismeretlenek együtthatói közt, lánctörtek.

7. Az előző pontban hangsúlyoztam, hogy a d_ν együtthatók kiszámítására nincs is szükség az egyenlet általános megoldásának megkereséséhez; egy más szempontból viszont éppen az ismeretlenek együtthatói fognak érdekelni. Összpontosítsuk most ezekre a figyelmet. Ennek érdekében tegyük fel, hogy az (I. 4) egyenletben $c=0$. Tegyük még fel a továbbiakban, hogy a és b relatív prímek. Ennek megfelelően az összes l-ek és s-ek is 0-nak választhatók s így a τ-k értéke is 0. Az $x=y=0$ triviális megoldástól eltekintve (mely a $t_n=0$ értéknek felel meg) bármely megoldásra ekkor

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{a}.$$

Az (I. 7) alatti második oszlop egyenletei ekkor ($x=t_{-1}$, $y=t_0$-t írva) így alakulnak:

$$(x=)t_{-1}=k_1t_0+t_1, (y=)t_0=k_2t_1+t_2, \ldots, t_{i-1}=k_{i+1}t_i+t_{i+1}, \ldots, t_{n-2}=$$
$$=k_nt_{n-1}+t_n,\ t_{n-1}=k_{n+1}t_n+t_{n+1},\ \text{ahol } t_{n+1}=0. \qquad \text{(II. 1)}$$

Az i-edik egyenlet így is írható:

$$t_{i-1}/t_i=k_{i+1}+\frac{1}{t_i/t_{i+1}}. \qquad \text{(II. 2)}$$

Az egymásutáni egyenleteket sorra az előzőbe helyettesítve kapjuk $t_{n+1}=0$ mellett, hogy

$$\frac{b}{a}=\frac{x}{y}\frac{t_{-1}}{t_0}=k_1+\frac{1}{t_0/t_1}=k_1+$$
$$+\frac{1}{k_2+\cfrac{1}{t_1/t_2}}=\cdots=k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cdots+\cfrac{1}{k_{n+1}}}}\ ^{5)}$$

Ezzel b/a számára egy első ránézésre bonyolult, ú. n. lánctört előállítását kaptuk, aminek viszont az lesz az előnye, hogy ha a (II. 1) egyenletrendszerben t_{n+1}-nél előbbi valamelyik t_i-t választjuk 0-nak, akkor az egyenletrendszer jó közelítő értéket fog

[5]) Más szokásos írásmódok: $\frac{b}{a}=k_1+\frac{1|}{|k_2}+\frac{1|}{|k_3}+\cdots+\frac{1|}{|k_{n+1}}=$
$=k_1+\frac{1}{k_2+}\frac{1}{k_3+}\cdots\frac{1}{k_{n+1}}=k_1+\frac{1}{k_2}\dot{+}\frac{1}{k_3}\dot{+}\cdots\dot{+}\frac{1}{k_{n+1}}$, stb.

szolgáltatni b/a számára, azon lánctört alakjában, amely a fentiből keletkezik, ha azt már k_i-nél befejezzük. Ennek a közelítő értéknek a kiszámítására fogunk egyszerűbb utat is találni. Ilyen közelítő értékek racionális számoknál is hasznosak lehetnek, különösen értékesek azonban irracionális számoknál, amikre minden nehézség nélkül átvihetők lesznek eredményeink.

8. Az említett $t_i = 0$-hoz tartozó közelítő törtet egyszerűbb alakban kaphatjuk meg, ha sikerül x-et és y-t t_{i-1} és t_i segítségével kifejezni és itt írunk t_i helyett 0-t. Ez viszont, ha áttekintést akarunk nyerni az összes közelítő törtekről $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$-re, akkor azt a feladatot tűzi ki, hogy most ne az utolsó egyenletből kiindulva lépésről lépésre visszafelé fejezzük ki az egyes t-ket t_n-nel, hanem x-et és y-t fejezzük ki sorra egyre nagyobb indexű t-k segítségével. A továbbiakban először ezen előállítás együtthatóit és ilyenek közti összefüggéseket fogunk megállapítani, azután térünk vissza a lánctörtekre.

Figyeljük meg először is azt, hogy a (II. 1) egyenletrendszerben bármely két különböző t értékét tetszésszerint megadhatjuk, ezek a többit egyértelműen meghatározzák. Valóban legyen megadva t_i és $t_j, i < j$. Ha $j = i+1$, akkor állításunk nyilvánvaló. Ellenkező esetben t_{j-2} kifejezését t_{j-1} és t_j segítségével helyettesítsük t_{j-3}-éba majd így haladva visszafelé végül lineáris egyenletet kapunk t_i, t_{j-1} és t_j között, ahonnan t_{j-1} egyértelműen meghatározható t_i és t_j ismeretében. Ezután két szomszédos t ismeretében a többi előre és visszafelé is lépésről lépésre egyértelműen meghatározható. Ez egyben azt is jelenti — és ezt fogjuk ismételten kihasználni — hogy ha sikerül három különböző t között két különböző összefüggést találni, akkor ezek csak formailag különbözhetnek, lényegében meg kell egyezniök.

Hajtsuk most már végre a fönti tervet, fejezzük ki x-et és y-t sorra egyre későbbi két szomszédos t-vel. A triviális összefüggéseket is felírva:

$$x = t_{-1} = t_{-1} + 0 \cdot t_0, \qquad y = t_0 = 0 \cdot t_{-1} + t_0,$$
$$x = k_1 t_0 + t_1, \qquad y = t_0 = t_0 + 0 \cdot t_1,$$
$$x = k_1(k_2 t_1 + t_2) + t_1 = (k_1 k_2 + 1) t_1 + k, t_2), \quad y = k_2 t_1 + t_2,$$
$$x = (k_1 k_2 + 1)(k_3 t_2 + t_3) + k_1 t_2 = \{(k_1 k_2 + 1) k_3 + k_1\} t_1 + (k_1 k_2 + 1) t_3,$$
$$y = k_2(k_3 t_2 + t_3) + t_2 = (k_2 k_3 + 1)\, t_2 + k_2 t_3.$$

Ismét nem lesz célszerű felírni az egyes együtthatók explicit előállítását a k-k segítségével, hanem inkább rekurziós formulákat keressünk az együtthatókra. Figyeljük meg eddigi egyenleteinkben azt, hogy mindkét oszlopban a kisebb indexű t együtthatója jelentkezik a következő sorban a nagyobb indexű együtthatójaként és a formulákból már észrevehető, hogy ez nem véletlen. A következők ezt igazolni is fogják. Ennek alapján x és y kifejezését ilyen alakban várjuk:

$$x = A_i t_{i-1} + A_{i-1} t_i, \qquad y = B_i t_{i-1} + B_{i-1} t_i. \qquad \text{(II. 3)}$$

Írjuk ide be t_{i-1} helyébe (II. 1) alatti kifejezését. Rendezve a kifejezéseket:

$$x = (A_i k_{i+1} + A_{i-1}) t_i + A_i t_{i+1}, \qquad y = (B_i k_{i+1} + B_{i-1}) t_i + B_i t_{i+1}.$$

Látjuk először is, hogy valóban t_{i-1} együtthatóját örökölte az újonnan fellépő t_{i+1}. A t_i szorzójaként fellépő új együtthatók pedig a következő rekurziós egyenleteket adják:

$$A_{i+1} = A_i k_{i+1} + A_{i-1}, \qquad B_{i+1} = B_i k_{i+1} + B_{i-1}. \qquad \text{(II. 4)}$$

Az A-k és B-k rekurziós egyenlete tehát megegyezik, különbséget csak a kezdő értékek különbsége ad. Az explicite felírt előállítások első sorából ezekre $A_{-1} = 0$, $A_0 = 1$; $B_{-1} = 1$, $B_0 = 0$ adódik és könnyen ellenőrizhető, hogy a további együtthatók megfelelnek a (II. 4) képzési szabálynak.

9. Figyeljük meg azt is, hogy a B_0, B_1 értékek megegyeznek az A_{-1}, A_0 értékekkel, vagyis a B-ket ugyanúgy képezzük, mint az A-kat, csak az indexet eggyel növelni kell és a k-k sorából ennek megfelelően k_1-et el kell hagyni. Annak jelölésére, hogy az A_i-k hogyan függenek a k_i-ktől és melyektől függenek, vezessük be az

$$A_i = M(k_1, k_2, \ldots, k_i) \qquad \text{(II. 5)}$$

függvényeket. Ekkor a fönt leírt összefüggést az A_i-k és B_i-k között a

$$B_i = M(k_2, \ldots, k_i) \qquad \text{(II. 6)}$$

egyenlőség fejezi ki. Ezzel valójában végtelen sok függvényt vezettünk be a változók száma szerint, melyek közül a nulla- és egyváltozós

$$M() = 1, \quad M(k_1) = k_1$$

és a továbbiak közt (II. 4) szerint az

$$M(k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}) = M(k_1, \ldots, k_i) k_{i+1} + M(k_1, \ldots, k_{i-1}),\ i = 1, 2, \ldots \qquad \text{(II. 7)}$$

összefüggés áll fenn.

Ezzel a rekurziós egyenlettel tulajdonképpen már találkoztunk a d_ν-k (I. 10) alatti rekurziós formulájában. A kezdeti értékek megegyeznek az A-k kezdeti értékeivel csak a k-k szerepelnek fordított sorrendben, vagyis az ott szereplő együtthatókra

$$d_\nu = M(k_{n+1}, k_n, \ldots, k_{n-\nu+2}).$$

(I. 10)-ben előállítottuk x-et és y-t t_n segítségével. (Ott fel volt téve, hogy $t_{n+1}=0$, míg a most tárgyalt esetnek $r_{n+1}=r_n=0$ felel meg.) (II. 4)-ből ebben az esetben

$$x=A_{n+1}t_n, \quad y=B_{n+1}t_n$$

adódik. Ez nem különbözhetik az (I. 9) alattiból adódó előállítástól. Felhasználva (I. 11)-et is, továbbá azt, hogy a és b relatív prím, vagyis $r_n=(a,b)=1$, nyerjük, hogy

$$A_{n+1}=d_{n+1}=b, \quad B_{n+1}=d_n=a.$$

Ezt a (II. 5) jelöléssel felírva

$$M(k_1,k_2,\ldots,k_{n+1})=M(k_{n+1},\ldots,k_2,k_1);\ M(k_2,\ldots,k_{n+1})=M(k_{n+1},\ldots,k_2),$$

ami az M-szimbólum ugyanazon szimmetriatulajdonságát fejezi ki és itt nyilván az n indexnek nincs semmi kitüntetett szerepe[6], tehát a k-kban azonosan fennáll az

$$M(k_1,\ldots,k_i)=M(k_i,\ldots,k_1), \quad i=1,2,\ldots \qquad \text{(II. 8)}$$

összefüggés.

Egy további fontos összefüggést kapunk, ha x-et és y-t felírjuk egyrészt t_{i-1} és t_i-vel másrészt t_i és t_{i+1}-gyel kifejezve és innen t_{i-1}-et ill. t_{i+1}-et kiküszöböljük:

$$x=A_{i-1}t_i+A_it_{i-1}, \qquad y=B_{i-1}t_i+B_it_{i-1};$$
$$x=A_it_{i+1}+A_{i+1}t_i, \qquad y=B_it_{i+1}+B_{i+1}t_i.$$

Innen kapjuk, hogy

$$B_ix-A_iy=(A_{i-1}B_i-A_iB_{i-1})t_i \qquad \text{(II. 9)}$$
$$=(A_{i+1}B_i-A_iB_{i+1})t_i.$$

Tudjuk, hogy a két előállítás nem különbözhet egymástól, kell tehát hogy

$$A_{i-1}B_i-A_iB_{i-1}=-(A_iB_{i+1}-A_{i-1}B_i)=A_{i+1}B_i-A_iB_{i+1}$$

legyen. A középső zárójelben levő kifejezést Δ_i-vel jelölve a kapott összefüggés $\Delta_{i+1}=-\Delta_i$ alakban írható, amit ismételten alkalmazva adódik, hogy $\Delta_i=(-1)^i\Delta_0$, ahol $\Delta_0=A_0B_{-1}-A_{-1}B_0=1\cdot 1-0\cdot 0=1$, tehát kaptuk, hogy

$$\Delta_i=A_iB_{i-1}-A_{i-1}B_i=(-1)^i \quad \text{[7]} \qquad \text{(II. 10)}$$

[6] Hiszen tetszésszerinti értékű és tetszésszerinti i számú k értéksorozathoz kiszámíthatjuk azt a $b=A_i$ és $a=B_i$ számot, amelyek, mint mindjárt látni fogjuk, relatív prímek és amelyek közti euklideszi algoritmus a k értékeknek éppen ezen sorozatát szolgáltatja.

[7] Az összefüggést $i=n+1$-gyel felírva (I. 11) folytán látjuk, hogy $(-1)^nA_n$, $(-1)^nB_n$ az (I. 4) egyenlet megoldását adja a $c=1$ esetben, tehát

10. Kifejezhetjük x-et és y-t valamely két szomszédos t_{k+i-1}, t_{k+i} paraméter segítségével két lépésben is, úgy, hogy először kifejezzük mindkettőt t_{k-1} és t_k segítségével, ezeket azután kifejezzük a későbbi t-kkel, ugyanúgy mint ahogy x-szel és y-nal tettük, speciálisan pl. t_{k+i-1} és t_{k+i} segítségével. Bevezetve a

$$t_{h-1} = A_{h,i-1} t_{h+i} + A_{h,i} t_{h+i-1}, \quad t_h = B_{h,i-1} t_{h+i} + B_{h,i} t_{h+i-1}$$

jelöléseket nyilván

$$A_{0,i} = A_i, \quad B_{0,i} = B_i,$$

másrészt

$$A_{h,i} = M(k_{h+1},\ldots,k_{h+i}), \quad B_{h,i} = M(k_{h+2},\ldots,k_{h+i}) = A_{h+1,i-1} \qquad \text{(II. 11)}$$

Ezek alapján x-re és y-ra a következő kifejezéseket nyerjük:

$$x = A_h t_{h-1} + A_{h-1} t_h = A_h (A_{h,i-1} t_{h+i} + A_{h,i} t_{h+i-1}) + A_{h-1}(B_{h,i-1} t_{h+i} +$$
$$+ B_{h,i} t_{h+i-1}) = (A_h A_{h,i-1} + A_{h-1} B_{h,i-1}) t_{h+i} + (A_h A_{h,i} + A_{h-1} B_{h,i}) t_{h+i-1},$$
$$y = B_h t_{h-1} + B_{h-1} t_h = B_h (A_{h,i-1} t_{h+i} + A_{h,i} t_{h+i-1}) + B_{h-1}(B_{h,i-1} t_{h+i} +$$
$$+ B_{h,i} t_{h+i-1}) = (B_h A_{h,i-1} + B_{h-1} B_{h,i-1}) t_{h+i} + (B_h A_{h,i} + B_{h-1} B_{h,i}) t_{h+i-1}.$$

Tudjuk másrészt, hogy

$$x = A_{h+i-1} t_{h+i} + A_{h+i} t_{h+i-1}, \quad y = B_{h+i-1} t_{h+i} + B_{h+i} t_{h+i-1},$$

mivel a két előállítás nem különbözhet így t_{h+i-1} együtthatóit összehasonlítva nyerjük, hogy

$$A_h A_{h,i} + A_{h-1} B_{h,i} = A_{h+i}, \quad B_h A_{h,i} + B_{h-1} B_{h,i} = B_{h+i},$$

vagy az M-szimbolumok segítségével felírva

$$M(k_1,\ldots,k_h) M(k_{h+i},\ldots,k_{h+i}) + M(k_1,\ldots,k_{h-1}) M(k_{h+2},\ldots,k_{h+i}) =$$
$$= M(k_1,\ldots,k_{h+i}) \qquad \text{(II. 12)}$$

$$M(k_2,\ldots,k_h) M(k_{h+1},\ldots,k_{h+i}) + M(k_2,\ldots,k_{h-1}) M(k_{h+2},\ldots,k_{h+i}) =$$
$$= M(k_2,\ldots,k_{h+i}).$$

Látható, hogy a két azonosság nem különbözik lényegesen, csak az utóbbi a k_1 elhagyásával eggyel kevesebb változós M-eket tartalmaz mindenütt. Hasonlóan nem kapnánk lényegesen új összefüggést, ha $x = t_{-1}$ és $y = t_0$ helyett t_{j-1}-et és t_j-t fejeznénk ki a fönti módon közvetlenül is és két lépésben is későbbi t-kkel. Ekkor csak k_1 helyett k_{j+1}-gyel ill. k_2 helyett k_{j+2}-vel kezdődik a k-k sorozata. A megfelelő összefüggések A-kban és B-kben kifejezve:

$$A_{j,h} A_{j+h,i} + A_{j,h-1} B_{j+h,i} = A_{j,h+i}, \quad B_{j,h} A_{j+h,i} + B_{j,h-1} B_{j+h,i} = B_{j,h+i}.$$

ezek c-szerese megadja a megoldást az általános esetben. Lényegében ezen alapon szokás a lánctörteket diofantoszi egyenletek megoldására alkalmazni. Ehhez párhuzamosan ki kell számítani az A-k és B-k sorozatát és általában elég nagy megoldásokat kapunk.

(A két kifejezés megint csak annyiban különbözik mint a fentiek, és kifejezhető tisztán az A-k segítségével is, pl. az elsőből

$$A_{j,h}A_{j+h,i}+A_{j,h-1}B_{j+h+1,i-1}=A_{j,h+i}$$

adódik.)

Itt (II. 12) nyilván (II. 7) általánosítása, azt az $i=1$ speciális esetként tartalmazza. Hasonlóan általánosítható (II. 10) is, ha (II. 9)-ben egyrészt t_i-t a föntebbi módon, másrészt x-et és y-t kifejezzük t_{h+i-1}, és t_{h+i} segítségével:

$$\begin{aligned} B_i x - A_i y &= (B_i A_{h+i-1} - A_i B_{h+i-1})\, t_{i+h-1} + (B_i A_{h+i} - A_i B_{h+i})\, t_{h+i-1} \\ &= (A_{i-1}B_i - A_i B_{i-1})\, t_i = (A_{i-1}B_i - A_i B_{i-1})\, B_{i,h-1} t_{h+i} + \\ &\quad + (A_{i-1}B_i - A_i B_{i-1}) B_{i,h} t_{h+i-1}. \end{aligned}$$

t_{h+i-1} együtthatóit összehasonlítva továbbá felhasználva (II. 10)-et

$$A_{i+h}B_i - A_i B_{i+h} = -(A_i B_{i-1} - A_{i-1}B_i)\, B_{i,h} = (-1)^{i+1} B_{i,h}. \qquad \text{(II. 13)}$$

Különösen érdekes lesz számunkra a $h=2$ eset ($h=1$-re (II. 10)-et kapjuk vissza):

$$A_{i+2}B_i - A_i B_{i+2} = (-1)^{i+1} k_{i+2}. \qquad \text{(II. 14)}$$

11. Ezekben — különösen (II. 7), (II. 8), (II. 12) és (II. 14)-ben — megkaptuk azokat az összefüggéseket, amikre a továbbiakban szükségünk lesz. Megjegyezzük, hogy (II. 7)-ből (II. 8) kivételével a többi teljes indukcióval bizonyítható. Ez különben a bizonyítás egyik szokásos menete. A másik az, hogy explicit előállítást adnak meg az A_i-kre determináns alakban. Ha ugyanis (II. 1) első i egyenletében $x=t_{-1}$, $y=t_0$, $t_1, \ldots, t_{i-1}$-et tekintjük ismeretlennek, t_i-t és t_{i+1}-et paraméternek, ennek megfelelően csak az utolsó két változót hagyjuk az egyenletek jobboldalán, ahol előfordulnak, akkor az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determináns értéke 1 lesz, s így x-re

$$x=\begin{vmatrix} 0 & -k_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -k_{i-1} & -1 \\ t_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -k_i \\ k_{i+1}t_i+t_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Innen t_{i+1} együtthatóját felírva és azt az első oszlop szerint kifejtve nyerjük (a 0-ák helyét üresen hagyva), hogy

$$A_i=\begin{vmatrix} 0 & -k_1 & -1 & & & & & \\ 0 & 1 & -k_2 & -1 & & & & \\ & & 1 & -k_3 & -1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & & 1 & -k_{i-1} & -1 \\ 0 & & & & & & 1 & -k_i \\ 1 & & & & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{i+2}\begin{vmatrix} -k_1 & -1 & & & & \\ 1 & -k_2 & -1 & & & \\ & 1 & -k_3 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & -k_{i-1} & -1 \\ & & & & 1 & -k_i \end{vmatrix};$$

vagy minden oszlopot —1-gyel (tehát a determinánst $(-1)^i=(-1)^{i+2}$-nel) szorozva

$$A_i=\begin{vmatrix} k_1 & 1 & & & & \\ -1 & k_2 & 1 & & & \\ & -1 & k_3 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & k_{i-1} & 1 \\ & & & & -1 & k_i \end{vmatrix}. \qquad \text{(II. 15)}$$

Ebből az előállításból szintén leolvashatók az összes tulajdonságok a determinánsokkal végezhető átalakítások kihasználásával.

12. Térjünk most vissza a lánctörtekre. Ha t_i-t 0-nak választjuk, akkor az ehhez tartozó x_i, y_i értékek hányadosa b/a számára a

$$\delta_i=\frac{x_i}{y_i}=\frac{A_i}{B_i}$$

közelítő törtet adja. (II.10) folytán $A_i$és B_i-nek csak olyan közös osztója lehet, ami osztója $(-1)^i$-nek is, vagyis a közelítő törtet redukált (nem egyszerűsíthető) alakban kapjuk. Vizsgáljuk ennek eltérését b/a-tól. Válasszuk e célból t_n-t 1-nek, t_{n+1}-et 0-nak. Tudjuk, hogy ekkor $x=b$, $y=a$. Tegyük fel, hogy mindkettő pozitív, ekkor pozitívok a k-k is, az összes B-k (és A-k) is, s így (II. 4)-ből láthatóan a B-k monoton növekedő sorozatot alkotnak. Így (II. 9)-ből és (II. 10)-ből

$$B_ix-A_iy=(A_iB_{i-1}-A_{i-1}B_i)\,t_i=(-1)^{i+1}t_i.$$

Innen

$$\frac{b}{a}-\frac{A_i}{B_i}=\frac{x}{y}-\frac{A_i}{B_i}=\frac{B_ix-A_iy}{B_iy}=\frac{(-1)^{i+1}t_i}{B_i(B_it_{i+1}+B_{i+1}t_i)}=$$
$$=\frac{(-1)_{i+1}}{B_iB_{i+1}+B_i^2t_{i+1}/t_i}. \qquad \text{(II. 16)}$$

Ez először is azt mutatja, hogy a közelítő törtek közül a páratlan indexűek „alulról“ a páros indexűek „felülről“ közelítik meg a törtet. Másrészt a közelítés hibájára

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{A_i}{B_i}\right|=\frac{1}{B_iB_{i+1}+B_i^2t_{i+1}/t_i}<\frac{1}{B_iB_{i+1}}<\frac{1}{B_i^2}. \quad \text{(II. 17)}$$

Hogy ez „jó“ közelítést jelent az abból látható, hogy ha egy előre adott m egész számmal az m nevezőjű törtek közül megkeressük azt a két szomszédosat, amelyek közé b/a esik és vesszük ezek közül a közelebbit, arról még mindig csak annyit tudunk általában mondani, hogy legfeljebb $1/2m$ hibával közelíti meg b/a-t, nem pedig $1/m^2$-nél kisebb hibával. (Természetesen közelítő lánctört nevezőjéül viszont nem lép fel minden pozitív egész szám, csak egyes, elég távoli értékek.)

Ha két szomszédos lánctörtet nézünk:

$$\frac{A_{i+1}}{B_{i+1}}-\frac{A_i}{B_i}=\frac{A_{i+1}B_i-A_iB_{i+1}}{B_iB_{i+1}}=\frac{(-1)^{i+1}}{B_iB_{i+1}}.$$

Mivel ezek közrefogják a b/a törtet, valamelyikük még $1/2B_i^2$-nél is kisebb hibával közelíti meg azt. Ha ez az i-edik közelítő tört, akkor a (II. 17) hibabecslés jobboldala $1/2B_i^2$-re javítható. Valójában megmutatható, hogy ez a kisebb érték is mindig jó hibakorlát, sőt az a még kisebb $1/\sqrt{5}B_i^2$-tel helyettesíthető, de ezzel itt nem foglalkozunk.

Minden második közelítő törtet véve láttuk már, hogy ezek ugyanarról az oldalról közelítenek. Nézzük két ilyen tört távolságát: (II. 14) alapján

$$\frac{A_{i+2}}{B_{i+2}}-\frac{A_i}{B_i}=\frac{A_{i+2}B_i-A_iB_{i+2}}{B_iB_{i+2}}=\frac{(-1)^{i-2}k_{i+2}}{B_iB_{i+2}}.$$

Futtassuk végig i-t a páratlan, ill. páros számokon, akkor azt kapjuk, hogy a páratlan indexű közelítő törtek állandóan növekednek, a páros indexűek viszont állandóan fogynak.

13. Az (I. 6) alatti euklideszi algoritmus egyenlőségeit az osztókkal elosztva, a nyert egyenlőségek meg fogják mutatni az utat irracionális számok lánctörtbe fejtéséhez is. A következő egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{b}{a}=k_1+\frac{r_1}{a},\ 0<\frac{a}{r_1}<1;\frac{a}{r_1}=k_2+\frac{r_2}{r_1},\ 0<\frac{r_2}{r_1}<1;\frac{r_1}{r_2}=$$

$$=k_3+\frac{r_3}{r_2},\ 0<\frac{r_3}{r_2}<1,\ldots.$$

Itt k_i tehát mindig a legnagyobb egész szám, ami a baloldali törtnél még nem nagyobb, vagyis a baloldali tört egész része: $k_i=[r_{i-2}/r_i]$.

Hasonlóan eljárhatunk egy α irracionális számmal is, mint ahogy most az $\alpha = \frac{b}{a}$ racionális számmal tettük. A maradék reciprok értékét jelölve mindig új betűvel kapjuk sorra az

$$\alpha = k_1 + \frac{1}{\alpha_1},\ k_1 = [\alpha],\ \alpha_1 > 1;\ \alpha_1 = k_2 + \frac{1}{\alpha_2},\ k_2 = [\alpha_1],\ \alpha_2 > 1;$$

$$\alpha_2 = k_3 + \frac{1}{\alpha_3},\ k_3 = [\alpha_2]\ \alpha_3 > 1; \ldots$$

egyenlőségeket, amelyek lényegében megegyeznek a (II. 2) egyenletekkel ha α_i-t t_{i-1}/t_i-vel azonosítjuk. Továbbra is érvényben maradnak tehát eredményeink. Így a most megadott k_i értékekkel kiszámított A_i, B_i értékekből adódó $\delta_i = A_i/B_i$ közelítő törtek a

$$k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{k_i}}}}$$

közelítő lánctört közönséges tört alakja, mégpedig nem egyszerűsíthető alakban. A különbség csak az, hogy utóbbi egyenletrendszerünk végtelen, hiszen ha α irracionális, akkor α_1 sem lehet racionális, de akkor α_2-nek is irracionálisnak kell lennie és hasonlóan sorra az összes α_i-knek, tehát egyik sem lehet egész szám, az eljárásnak nem szakadhat vége. Ennélfogva a közelítő törteknek is végtelen sorát kapjuk. Ezek α-t felváltva alulról és felülről közelítik meg. A páratlan indexű közelítő törtek növekedő számsorozatot alkotnak, a páros indexűek fogyó számsorozatot és két szomszédos tört távolsága tetszésszerinti kis korlát alatt marad, amint i elég nagy. Ugyanis δ_i kevesebbel különbözik δ_{i+1}-től, mint $1/B_i^2$, a B_i-k pedig legalábbis $i = 2$-től határozottan növekedő egész számok, tehát biztosan fennáll

$$B_i > i - 1, \qquad \text{amiből} \qquad |\delta_{i+1} - \delta_i| < \frac{1}{(i-1)^2}.$$

(Persze ez nagyon durva hibabecslés, ami lényegesen jobbal is helyettesíthető volna.) A közelítő törtek sorozata tehát valóban megközelíti tetszésszerinti pontossággal α-t.

14. A lánctörteknek sok érdekes tulajdonsága van. Az már az eddigiekből is látható, hogy racionális szám véges lánctörtet ad, irracionális szám pedig végtelent. Megmutatható, hogy irracionális szám lánctört fejtése mindig egyértelműen meg van határozva, racionális számé viszont még kicsit módosítható, pl.

$$\frac{10}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}},$$

és minden racionális szám hasonlóan kétféleképpen írható lánctörtbe. Az (I. 6) alatti euklideszi algoritmussal kapcsolatban u. i. megjegyeztük, hogy ott az utolsó hányados $k_{n+1} \geqq 2$ s így a lánctörtben mindig helyettesíthető $(k_{n+1}-1)+\frac{1}{1}$-gyel is. Racionális szám lánctört alakjánál tehát ez a kétértelműség jelentkezik.

Éppen úgy, ahogy a tizedestörtek közt, a lánctörtek közt is lehet periodikus (vagy szakaszos). Így nevezünk egy végtelen lánctörtet, ha a k résznevezők sorozatában valahonnan kezdve bizonyos $k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_{i+h}$ értékek ismétlődnek állandóan és ugyanebben a sorrendben. Könnyű megmutatni egy ilyen lánctörtről, hogy az általa előállított szám mindig egy egész együtthatós másodfokú egyenlet egyik gyöke. Az azonban már nem ilyen könnyen látható, amit LAGRANGE bizonyított be először, hogy minden olyan pozitív számnak a lánctörtfejtése, amely szám kielégít egész együtthatós másodfokú egyenletet, periodikus lánctört. GALOIS bebizonyította azt is, hogy az egyenlet két gyökének periódusa ugyanazon számokból áll, csak fordított sorrendben. A lánctörtek számtalan más tulajdonságáról, különböző alkalmazásairól és általánosításairól világos és kimerítő felvilágosítást ad PERRON idézett műve.

15. Az alábbiakban egy első pillanatra meglepő alkalmazást mutatunk még be, bebizonyítjuk, hogy a $4g+1$ *alakú prímszámok előállíthatók két négyzetszám összegeként, a* $4g-1$ *alakúak pedig nem.* Az állítás első részének bizonyítását Fritz NEISStől[8] vesszük át. Legyen $p=4g+1$ prím. Azt fogjuk megmutatni, hogy található p-re egy

$$p=M(k_1, k_2, \ldots, k_l, k_l, \ldots, k_2, k_1) \qquad l \geqq 1 \qquad \text{(II. 18)}$$

alakú előállítás. Ebből a tétel első fele már következik, mert (II. 12) szerint ekkor

$$p=M(k_1, \ldots, k_l, k_l, \ldots, k_1)=M(k_1, \ldots, k_l)\,M(k_l, \ldots, k_1)+$$
$$+M(k_1, \ldots, k_{l-1})\,M(k_{l-1}, \ldots, k_1),$$

és (II. 8) folytán tovább

$$p=\{M(k_1, \ldots, k_l)\}^2+\{M(k_1, \ldots, k_{l-1})\}^2,$$

ami bizonyítandó volt. ($l=1$ esetben a második tag, mint tudjuk, 1-et jelent.)

(II. 18) bizonyításához fejtsük lánctörtbe sorra a

$$\frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \ldots, \frac{p}{2g}$$

[8] F. NEISS: *Einführung in die Zahlentheorie,* (Leipzig, 1952 Hirzel). Különösen 15—17. old. Az idézett hely szerint az előállítás egyértelműsége is következnék a bizonyításból, ez azonban nem látszik megalapozottnak.

törteket. Ezek száma páratlan, mindegyikük nagyobb 2-nél, és nem egyszerűsíthető törtek. Mindegyikük ad egy

$$p = M(k_1, \ldots, k_v)$$

alakú előállítást p-re, itt $v \geqq 2$, mert egyik tört sem állíthat elő egész számot; $k_1 \geqq 2$ és mint tudjuk, megkövetelhető, hogy $k_v \geqq 2$ legyen. (II. 8) szerint egyszersmind

$$p = M(k_v, \ldots, k_1),$$

és ez (II. 6) szerint az

$$\frac{M(k_v, \ldots, k_1)}{M(k_{v-1}, \ldots, k_1)}$$

tört lánctörtbe fejtéséből adódik. Mivel (II. 7) és (II. 8) szerint

$$p = M(k_1, \ldots, k_v) = M(k_1, \ldots, k_{v-1})\, k_v + M(k_1, \ldots, k_{v-2}) >$$
$$> M(k_1, \ldots, k_{v-1}) \cdot 2 = 2M(k_{v-1}, \ldots, k_1),$$

így

$$M(k_{v-1}, \ldots, k_1) < \frac{p}{2}, \quad \text{azaz} \quad M(k_{v-1}, \ldots, k_1) \leqq 2g,$$

tehát a fenti tört szerepel azok közt, amelyeket lánctörtbe fejtettük. Eszerint a p-re nyert előállítások párosíthatók úgy, hogy két összetartozó előállítás ugyanazon k-kból álljon, csak ellenkező sorrendben. Mivel azonban ezen előállítások száma páratlan, kell olyannak lennie (a bizonyításból nem következik, hogy csak egynek) amelyik a sajátmaga párja.

Lehet-e egy ilyen előállításban a k-k száma páratlan? Állítjuk, hogy nem, mert (II. 12) és (II. 8) folytán

$$M(k_1, \ldots, k_l, k_{l+1}, k_l, \ldots, k_1) = M(k_1, \ldots, k_{l+1}) M(k_l, \ldots, k_1) +$$
$$+ M(k_1, \ldots, k_l) M(k_{l-1}, \ldots, k_1) = M(k_1, \ldots, k_l)(M(k_1, \ldots, k_{l+1}) +$$
$$+ M(k_1, \ldots, k_{l-2})).$$

Itt a második tényező nagyobb mint az első, az pedig, mivel $l+1$ nem lehet 1, legalábbis akkora, mint k_1, aminek az értéke legalább 2. Ez tehát nem lehet prímszám. Ezzel bizonyítottuk (II. 18)-at, amiből a tétel első része következik.

16. A tétel második része könnyen következik FERMAT egy nevezetes tételéből, de belátható anélkül is (lánctörtektől is függetlenül). Az itt közölt bizonyítás REJTŐ Péter egyetemi hallgatótól származik. Általánosabban megmutatjuk, hogy *egy* $a^2 + b^2$ *alakú számnak nem lehet olyan* $4g-1$ *alakú pozitív osztója, mely* a*-hoz* (és ekkor b-hez is) *relatív prím.*

Az állítást indirekt úton fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy volna olyan két négyzetszám összegéből álló szám, melynek van $d=4g-1$ alakú osztója, ekkor d jelentse a legkisebb ilyen osztót és a^2+b^2 a legkisebb négyzetösszeget, melyre $d|a^2+b^2$ és $(d, a)=1$.

a) Állítjuk először, hogy a és b relatív prímek és nem nagyobbak d felénél. Mivel d relatív prím a-hoz és b-hez, relatív prím a legnagyobb közös osztójukhoz is. Ekkor azonban a-t is b-t is osztva a legnagyobb közös osztóval a négyzetösszeg osztható marad d-vel. A legkisebb négyzetösszegnél tehát ez a közös osztó csak 1 lehet.

Másrészt, ha pl. $a>\frac{a}{2}$ volna, akkor jelentse qd az a-hoz legközelebb eső többszörösét d-nek. Ekkor minden esetre

$$a'=|a-qd|<\frac{d}{2}<a, \qquad a=qd\pm a'$$

és

$$a^2+b^2=d(q^2d\pm 2a'q)+a'^2+b^2,$$

tehát a'^2+b^2 szintén osztható volna d-vel és kisebb volna a^2+b^2-nél a feltétellel ellentétben.

b) Legyen

$$a^2+b^2=dd'.$$

Megmutatjuk másodszor hogy d' vagy $4g-1$, vagy $2(4g'-1)$ alakú. Nem lehet a is b is páros, mert $(a, b)=1$. Ha egyik páratlan, a másik páros, akkor négyzetösszegük páratlan, s így d' is ilyen kell, hogy legyen; másrészt páros szám négyzete osztható 4-gyel, páratlan szám négyzete 4-gyel (sőt még 8-cal is) osztva 1-et ad maradékul, mert $(2u+1)^2=4u(u+1)+1$ (és itt u és $u+1$ közül valamelyik még páros szám). Így a^2+b^2 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Mint beszorzással azonnal látható, d-t $4q'+1$ alakú számmal szorozva $4h-1$ alakút, $4g'-1$ alakúval szorozva $4h+1$ alakút kapunk, tehát ez esetben $d=4g'-1$.

Ha a is, b is páratlan, akkor a mondottak szerint négyzeteik összege 8-cal osztva 2-t ad maradékul, vagyis olyan páros szám, melynek a fele $4h+1$ alakú páratlan szám. Ez esetben d' is páros kell hogy legyen, a fele viszont az előbbi meggondolás szerint $4g'-1$ alakú: $d'=2(4g'-1)$.

c) Figyeljük meg azt is, hogy $(d', a)=1(=(d', b))$, mert ha az egyik taggal volna valódi közös osztója d'-nek, akkor a másikkal is, de ezek egymáshoz a) szerint relatív prímek. Ez azonban már ellentmondásra vezet, ha d' nagyságát figyelembe vesszük, ugyanis a) szerint

$$a^2+b^2<\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{d^2}{2},$$

így

$$4g'-1\leqq d'=\frac{a^2+b^2}{d}<\frac{d}{2}<d,$$

$$4g'-1\,|\,a^2+b^2 \quad \text{és} \quad (4g'-1, a)=1;$$

holott feltétel szerint d volt a legkisebb $4g-1$ alakú szám, mely osztója két négyzetszám összegének.

17. A bebizonyított tétel és egy azonosság segítségével teljes feleletet adhatunk arra a kérdésre, hogy mely természetes számok bonthatók két négyzetszám összegére. Először is jegyezzük meg, hogy $2=1^2+1^2$ is felbontható két négyzetszám összegére. Az

$$(a^2+b^2)(u^2+v^2)=(au-bv)^2+(av+bu)^2$$

azonosság szerint pedig ha két szám felírható mint két-két négyzetszám összege, akkor a szorzatuk is. Ezt ismételten alkalmazva kapjuk, hogy az állítás akárhány tényezőre is igaz. Ezek szerint minden olyan természetes szám, amelynek páratlan prímtényezői mind $4g+1$ alakúak, felírható két négyzetszám összegeként. Ha egy számot, mely két négyzetszám összegeként írható, egy négyzetszámmal szorzunk, ismét két négyzetszámból álló összeget nyerünk. (Ennek a szorzónak lehet $4g-1$ alakú prímosztója is, de természetesen csak páros kitevőn szerepelhet benne.) A bizonyított tétel második fele szerint viszont $4g-1$ alakú prímosztója csak úgy lehet egy a^2+b^2 alakú számnak, ha osztója a-nak is b-nek is, de ekkor ezen prím négyzete kiemelhető mindkét tagból és ismét két négyzetszám összege marad vissza. Az eljárást tehát ismételten alkalmazhatjuk, ha maradt $4g-1$ alakú osztó. Ezzel bizonyítást nyert a következő tétel: *Azok és csak azok a természetes számok írhatók két négyzetszám összegeként, amelyeknek prímtényezős felbontásában az esetleg előforduló $4g-1$ alakú prímtényezők mind páros hatványon szerepelnek*

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

Резюме

При известном решении линеарных диофантовых уравнений, изложенном схематически в формулах (I. 6) и (I. 7), выражая парамеры t по очередности убывающих индексов при , мы получим формулу (I. 8.), константы в которой определяются рекуррентной формулой (I. 10) путем начальных величин $d_{-t}=0$, $d_0=1$, $\tau_{-1}=\tau_0=0$. Из этого согласно (I. 9) весьма кратко можно определить партикулярное решение.

В случае $c=0$ получается система уравнений (II. 1), из которой можно получить цепную дробиу $b/a=x/y$ и легко получить соотношения (II. 3), (II. 4), (II. 5), (II. 6), (II. 7), (II. 8), (II. 10), (II. 12), (II. 13) для числителей и знаменателей подходящих дробей. Из числа известных применений автор приводит доказательство того, что простые числа формы $4g+1$ могут быть представлены в виде суммы двух квадратных чисел, а также и простое доказательство студента Петера Рейтё того, что простые примовые делители суммы двух кбадратных чисел по отношению к членам не могут иметь форму $4g-1$.

EQUATIONS DIOPHANTIQUES ET FRACTIONS CONTINUES

Les formules (I. 6), (I. 7) donnent le schème de la méthode due à Bachet de Mésiriac, à résoudre des équations diophantiques linéaires de la forme (I. 4). En exprimant les paramètres t dans l'ordre des indices décroissants, on obtient les expressions de la forme (I. 8) avec des constantes définies par récurrence par (I. 10) et par $d_{-1}=0, d_0=1$; $\tau_{-1}=\tau_0=0$. On obtient ainsi selon (I. 9') un algorithme très simple pour calculer une solution particulière de l'équation. En posant $c=0$, nous obtenons les équations (II. 1) qui fournissent le développement en fraction continue du nombre $b/a=x/y$. Aussi les relations fondamentales (II. 3), (II. 4), (II. 5), (II. 6), (II. 7), (II. 8), (II. 10), (II. 12), (II. 13) entre les numérateurs et dénominateurs des fractions continues approchées découlent aisément de ces équations. L'auteur présente enfin une application connue très élégante pour démontrer que les nombres premiers de la forme $4g+1$ peuvent être décomposés en somme de deux nombres carrés et la démonstration élémentaire (sans l'aide du théorème de Fermat) de l'étudiant M. P. Rejtő pour le théorème que les diviseurs d'une somme de deux nombres carrés, premiers à ces deux nombres carrés, ne peuvent pas être de la forme $4g-1$.

Bolyai Farkas átdarabolási tétele[1]

Varga Tamás

1

(Haladó hagyományaink megbecsüléséről)

Három évvel ezelőtt Beszkin geometria-módszertanának[2] olvasása közben megütötte a szememet ez a név: Вольфганг Болиаи[3]. Hogy kerül *Bolyai Farkas* neve egy szovjet módszertankönyvbe? Meglepetésem még fokozódott, amikor megtudtam, hogy az elemi geometriának egy igen nevezetes, az általános és középiskolai oktatás szempontjából is fontos tétele fűződik *Bolyai Farkas* nevéhez, és ezt a tételt bizonyítja és méltatja itt *Beszkin*. A tétel így hangzik: *bármely két egyenlő területű sokszög átdarabolható egymásba* (azaz: felbontható véges számú páronkint egybevágó idomra).

Egy készülőfélben levő tankönyvbe[4] éppen beleillett a tétel, beletettem hát, a *Beszkin* módszertanában talált rövid (ha nem is éppen a legegyszerűbb) bizonyításával együtt.

Másfél évre rá megint találkoztam a tétellel, ismét egy szovjet könyvben[5], méghozzá a könyv legelső oldalának legelső mondatában:

„Ismeretes a geometriából Bolyai Farkas magyar matematikus nevezetes tétele: ha két sokszög egyenlő területű, akkor mindig felbonthatjuk az egyiket végesszámú olyan sokszögre, amelyekből a másikat össze lehet állítani.“

Elkerülhetetlen volt a kérdés: hogyan becsüljük mi meg haladó hagyományainkat, ha ezt az érdekes és fontos, elemien bizonyítható tételt, amelyet egy kétszázezres példányszámban meg-

[1] A Bolyai János Matematikai Társulat Szombathelyi Tagozatán 1954 március 28-án, a Magyar-Szovjet Barátsági Hónap alkalmával elhangzott előadás.

[2] Н. М. Бескин, Методика геометрии, Учпедгиз, 1947, 194. lap.

[3] *Bolyai Farkas* németül is, latinul is *Wolfgang Bolyai*nak nevezte magát, ennek betűszerinti átírásából adódott így a név.

[4] Matematika a tanítóképzők IV. osztálya számára, 1951, 218. l.

[5] Б. А. Кордемский—Н. В. Русалев, Удивительный квадрат, Гостехиздат, 1952.

jelent népszerű szovjet geometriakönyv jólismert (mégpedig *Bolyai Farkas* neve alatt ismert) tételként idéz, iskoláinkban nem tanítjuk, nem is nagyon ismerjük, s ha igen, akkor sem *Bolyai Farkas* neve alatt?

Utánanéztem, és még több más szovjet könyvben is nyomára akadtam *Bolyai Farkas* tételének.[6] A közölt bizonyítások számos részletben eltérnek egymástól, de lényegében azonos gondolatmenetet követnek.

Kutuzov a könyvében közölt bizonyításhoz a következő megjegyzést fűzi: „Ezt a tételt, kissé más fogalmazásban, a magyar *Bolyai Farkas* bizonyította be először a XIX. század első felében. A tétel bizonyítását többízben egyszerűsítették. Az egyik ilyen bizonyítás legegyszerűbb változata *V. F. Kagan*tól származik. Ezt a bizonyítást közöljük itt, néhány helyen pontosabbá téve az eredeti gondolatmenetet."

Elővettem a *Tentament*,[7] hogy meggyőződjem arról, milyen volt az a bizonyítás, amelyet többször egyszerűsíteni kellett, míg a *Kutuzov*nál található, igen érdekes és tanulságos, de túlságosan egyszerűnek nem mondható bizonyítás kerekedett ki belőle. A kérdés annál inkább érdekelt, mert közben, átgondolva a tételt, magam is eljutottam egy bizonyításhoz, amely — más úton haladva — lényegesen egyszerűbben ér célt, mint az idézett művekben talált bizonyítások.

Tartozunk *Bolyai Farkas* emlékének azzal a megállapítással, hogy bizonyítása semmivel sem bonyolultabb, mint a *Kutuzov* könyvében olvasható, *Kagan*tól származó bizonyítás, vagy ennek bármelyik változata. Az a bizonyítás, amelyet én találtam, lényegében azonos *Bolyai* bizonyításával, azt mondhatnám, hogy a különbség csak két lépés sorrendjében van; valójában azonban ez a sor-

[6] A már említetteken kívül a következőkben:

С. А. Богомолов, Геометрия, Учпедгиз, 1949, 237–238. l.

Б. В. Кутузов, Геометрия. Пособие для учительских и педагогических институтов, Учпедгиз, 1950, 209—212 l.

Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, I., Гостехиздат, 1948, 206—210. l.

Kutuzov idézi ezenkívül a következő könyvet, amelyre a jelek szerint a többi könyvben található bizonyítások is mind visszavezethetők:

В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, ОНТИ, 1933. — Sajnos, *Kagan* könyvét nem sikerült megszereznem.

[7] *Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici*, Marosvásárhely, 1832—1833; II. kiadása: Budapest, 1897—1904. (A tétel bizonyítása a II. kiadásban a II. kötet 108—109. oldalán található.) Sajnos, a magyar matematikai irodalomnak ez a klasszikus alkotása — egyes részletek kivételével — csak latin nyelven olvasható, és így az érdeklődők számára szinte teljesen hozzáférhetetlen.

rendcsere, mint látni fogjuk, a bizonyítás jelentős egyszerűsödését vonja maga után. Remélhető, hogy *Bolyai* bizonyításának ez az egyszerűbb változata alkalmas lesz arra, hogy biztosítsa a tétel elterjedését iskoláinkban.

A következőkben ismertetni fogom, szorosan a megjelölt források alapján haladva, először a *Kutuzov* könyvében található bizonyítást, azután *Bolyai Farkas* eredeti bizonyítását (mai magyar terminológiára és jelölésmódra átültetve), végül *Bolyai* bizonyításának említett egyszerűbb változatát és alkalmazását néhány konkrét esetben.

2

(Kagan bizonyítása Kutuzov szövegezésében)

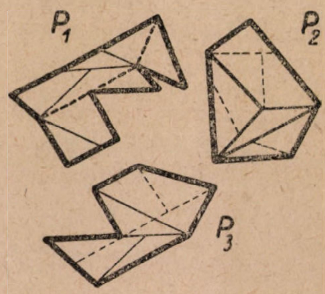
A tétel bizonyításában nem tűzzük ki célunkul azt, hogy csak az axiómákra építsünk. A mozgások alaptulajdonságait is ismerteknek tekintjük. Bizonyítottnak tekintjük azonkívül azt is, hogy ha két, egy oldalában megegyező háromszög területe egyenlő (pl. egybevágó idomokkal egybevágó idomokká egészíthetők ki), akkor a két háromszög egyenlő oldalaihoz tartozó magasságok is egyenlők.

A bizonyítást a következő lépésekben végezzük:

1. tétel. *Ha két sokszög*[8] *különkülön átdarabolható*[9] *egy harmadikba, akkor egymásba is átdarabolhatók.*

Bizonyítás. Legyen a két sokszög P_1 és P_2, és tegyük fel, hogy mindkettő átdarabolható egy P_3 sokszögbe (1. ábra).

A feltétel szerint P_1-et és P_3-at felbonthatjuk páronkint egybevágó sokszögekre, (az ábrán szaggatottan je-



1. ábra

[8] Sokszögön itt a síknak végesszámú szakasz határolta véges részét értjük; többszörösen összefüggő vagy több darabból álló idomokat is megengedünk. Szemléletileg nyilvánvaló, hogy minden így értelmezett sokszög felbontható háromszögekre: az összes határoló szakaszok meghosszabbításai ugyanis a sokszöget nyilván végesszámú konvex sokszögre darabolják fel, az utóbbiakat pedig egy-egy csúcsból kiinduló átlóik háromszögekre bontják. Ezt a tényt a továbbiakban felhasználjuk. *V. T.*

[9] Nyilvánvaló, hogy az átdarabolhatóság relációja *reflexiv* (minden idom átdarabolható önmagába) és *szimmetrikus* (ha egy idom egy másikba átdarabolható, akkor az utóbbi is átdarabolható az előbbibe). Az 1. tétel azt állítja — és ez már kevésbé triviális, mint a reflexivitás és a szimmetria — hogy az átdarabolhatóság relációja amellett *tranzitív* is. *V. T.*

lölve) s ugyanígy P_2-t és P_3-at is (az ábrán folytonos vonalakkal jelölve). Egyesítsük P_3-ban mindkét felbontás osztásvonalait. A második felbontásban szereplő sokszögeket az első felbontás (szaggatottan jelölt) osztásvonalai ismét sokszögekre bontják. Rajzoljuk be ezeket az osztásvonalakat a P_2 idom megfelelő sokszögeibe is, ugyanúgy, ahogyan a P_3-ban szerepelnek. Hasonló módon vigyük át a P_1 sokszögbe is a P_3 újabb felbontásából származó osztásvonalakat. Ilyen módon P_1-et és P_2-t egybevágó sokszögekre bontottuk, P_1 és P_2 tehát egymásba átdarabolhatók.[10]

2. tétel. Ha két háromszög összeilleszthető egy háromszöggé úgy, hogy közös oldaluk a keletkezett háromszögnek súlyvonala lesz, akkor ezek a háromszögek átdarabolhatók egymásba.

Bizonyítás. Húzzunk a C pontból (2. ábra) párhuzamosokat az AD, illetve AB oldallal. Nyilvánvaló, hogy ezzel az ABC és ACD háromszöget páronkint egybevágó háromszögekre bontottuk:

$$BEC\triangle \cong CFD\triangle, \qquad AEC\triangle \cong CFA\triangle.$$

3. tétel. *Ha két egyenlő területű háromszög egy oldalában megegyezik, akkor ezek a háromszögek egymásba átdarabolhatók.*

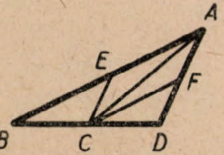
Bizonyítás. Illesszük egymás mellé ezeket a háromszögeket megegyező oldaluk mentén. Ezt mindig megtehetjük úgy, hogy két hegyesszög egymás mellé kerüljön. Az így keletkezett négyszög lehet konvex vagy konkáv. Mindenképpen áll azonban az, hogy a két háromszög közös A_1A_2 oldala a négyszög másik átlóját (BC) felezi. (A két háromszög ugyanis egyenlő területű és alapú, tehát magasságuk is megegyezik, és így a BC átló két szakasza két egybevágó derékszögű háromszög átfogója.)

a) Ha a keletkezett A_1BA_2C négyszög konvex (3. ábra), akkor a BC átló a két háromszöget az A_1BD, BDA_2, A_1DC és DCA_2 részháromszögekre vágja szét. Ezek közül a 2. tétel szerint az első és a harmadik, s ugyanúgy a második és a negyedik is egymásba átdarabolható, tehát A_1BA_2 és A_1CA_2 is átdarabolhatók egymásba.

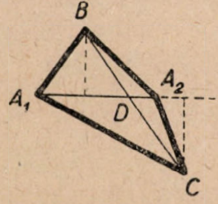
b) Tegyük fel most, hogy az A_1BA_2C négyszög például az A_2 szögénél konkáv. Mérjük fel ekkor az A_1A_2 szakaszt A_2-n túl annyiszor, hogy éppen túljussunk a két átló D metszéspontján.

[10] Sz. A. Bogomolov idézett művében a tranzitivitás bizonyításával kapcsolatban a következő megjegyzés olvasható: „Teljesen szigorú tárgyalását (t. i. a tranzitivitás bizonyításának) V. F. Kagan professzornak egy könyvében találhatjuk meg („Опыт обоснования евклидовой геометрии“, azaz „Kísérlet az euklidesi geometria megalapozására“ 490—496.), azonban a sokszögek felbontásával és az ezzel határos egyéb kérdésekkel foglalkozó előzetes vizsgálatok ebben a könyvben kb. 65 oldalt vesznek igénybe.“ (229. lap.) *V. T.*

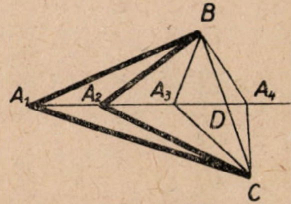
Tegyük fel, hogy pl. az A_3A_4 szakasz már belsejében vagy határán tartalmazza a D pontot (lásd a 4. ábrát). Ekkor az A_3BA_4 és A_3CA_4 háromszög egymásba átdarabolható (a) eset), másrészt a B csúcsban összefutó egyenlő alapú A_1A_2B, A_2A_3B stb. háromszögek is átdarabolhatók egymásba (2. tétel) ugyanígy a C csúcsban összefutók is, tehát az átdarabolhatóság tranzitivitása folytán az A_1BA_2 háromszög is átdarabolható az A_1CA_2 háromszögbe.



2. ábra



3. ábra



4. ábra

4. tétel. *Bármely két egyenlő területű háromszög átdarabolható egymásba.*

Bizonyítás. Legyen a két háromszög ABC és $A_1B_1C_1$, és tegyük fel, hogy például $AB > A_1B_1$. Húzzunk az $A_1B_1C_1$ háromszög B_1 csúcsán át párhuzamost az A_1C_1 oldallal, és keressük meg ezen az egyenesen azon két pont egyikét (jelöljük ezt B'-vel), amelyeknek A_1-től való távolsága egyenlő AB-vel (5. ábra). Minthogy az $A_1B'C_1$ háromszög egy oldalban megegyezik az $A_1B_1C_1$ háromszöggel, egy oldalban pedig az ABC háromszöggel, továbbá mindhárom háromszög területe egyenlő, az $A_1B'C_1$ háromszög átdarabolható az $A_1B_1C_1$ háromszögbe is és az ABC háromszögbe is; tehát az utóbbiak egymásba is átdarabolhatók.

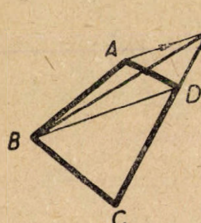
5. ábra

5. tétel. *Bármely sokszög átdarabolható vele egyenlő területű háromszöggé.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely két háromszögből álló idom átdarabolható valamilyen konvex négyszöggé.

Ha a megadott háromszögek, ABC és $A_1B_1C_1$, egyetlen oldalban sem egyeznek meg, és pl. $AB > A_1B_1$, akkor szerkesszünk meg egy olyan, $A_1B_1C_1$-be átdarabolható $A_1B'C_1$ háromszöget, amelyben $A_1B' = AB$ (lásd ismét az 5. ábrát). Helyezzük most az ABC és $A_1B'C_1$ háromszöget egyenlő oldaluk mentén egymás mellé a 3. tétel bizonyításában leírt módon. Vagy konvex négyszöget kapunk (és akkor készen is vagyunk), vagy alkalmazhatjuk a kapott konkáv négyszögre a 3. tétel bizonyításának *b*) pontjában leírt eljárást. Ilyen módon végül mindenképpen kapunk egy olyan konvex négyszöget (vagy esetleg mindjárt háromszöget), amelybe az eredeti két háromszög átdarabolható.

Most már a kapott $ABCD$ konvex négyszöget átalakíthatjuk háromszöggé olyan módon, hogy egy csúcsát (a 6. ábrán A) eltoljuk a BD átlóval párhuzamosan egy olyan E pontba, amely rajta van pl. a CD oldal meghosszabbításán. A 3. tétel értelmében az ABD és EBD háromszög egymásba átdarabolható, tehát ugyanezt mondhatjuk az $ABCD$ négyszögről és a BCE háromszögről is.



6. ábra

Minthogy minden sokszög — mint láttuk — háromszögekre bontható, ennek az eljárásnak a megismétlésével az így adódó háromszögeket egyetlen háromszöggé tudjuk átdarabolni.

6. tétel. *Bármely két egyenlő területű sokszög átdarabolható egymásba.* (*Bolyai Farkas* tétele.)

Bizonyítás. Legyen P_1 és P_2 két egyenlő területű sokszög. Daraboljuk át ezeket a velük egyenlő területű H_1, ill. H_2 háromszögbe. Minthogy H_1 és H_2 területe egyenlő, ezek egymásba átdarabolhatók. Ezért, tekintettel az átdarabolhatósági reláció szimmetrikus és tranzitív voltára, P_1 is átdarabolható P_2-be.

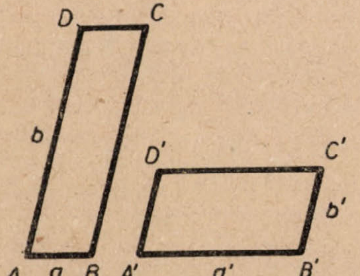
3

(Bolyai Farkas eredeti, a Tentamenben közölt bizonyítása)

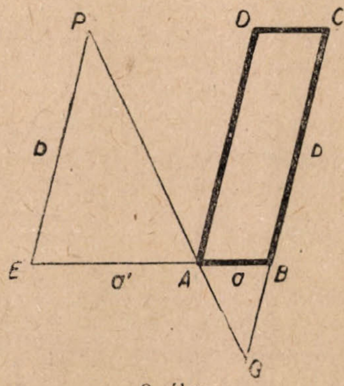
1. §

Ha az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ parallelogrammákban (7. ábra) $ab = a'b'$ *és* $A\sphericalangle = A'\sphericalangle$ *akkor a két parallelogramma egymásba átdarabolható.*

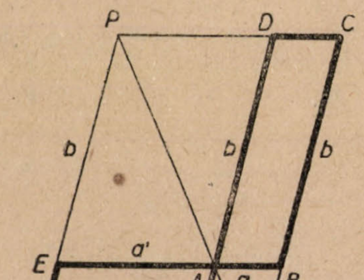
Ha az $ABCD$ parallelogramma AB oldalának meghosszabbítására A irányában felmérjük az $AE = a'$ szakaszt, majd ennek E végpontjából a 8. ábra szerint az AD-vel párhuzamos és egyenlő EP szakaszt, akkor PA metszeni fogja a CB egyenest egy Q pontban, hiszen $EP \| BC$; hasonlóképpen a Q ponton át BE-vel húzott párhuzamos is metszeni fogja a PE egyenest egy F pontban, AD pedig az FQ egyenest egy G pontban (9. ábra). Minthogy $GQ \| EA$ és $PE \| AG$, az AGQ és PEA háromszögek hasonlók; az $AG = x$ szakaszra tehát fennáll az $a : x = a' : b$, azaz $ab = a'x$ összefüggés, és így nyilván $x = b'$, hiszen feltettük, hogy $ab = a'b'$.



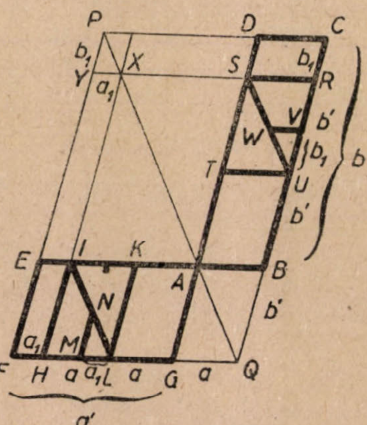
7. ábra



8. ábra



9. ábra



10. ábra

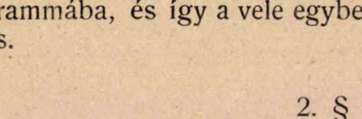
A PD szakaszról beláthatjuk, hogy egy egyenesbe esik DC-vel, és párhuzamos EB-vel; ugyanis $DC \| EB$, továbbá EP párhuzamos és egyenlő AD-vel.

Az $FGAE$ parallelogramma tehát egybevágó az $A'B'C'D'$ parallelogrammával. Másrészt azonban $FGAE$ átdarabolható az $ABCD$ parallelogrammába. Mérjük fel ugyanis az utóbbinak b

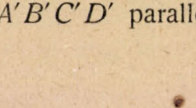
hosszúságú oldalaira a b' szakaszt ahányszor csak lehet, az utóbbi parallelogramma a' hosszúságú oldalaira pedig az a szakaszt ahányszor csak lehet (10. ábra). Minthogy a két parallelogramma egyenlő területű, ezt mindkét esetben ugyanannyiszor tehetjük meg. Legyen a maradék az első esetben b_1, a második esetben a_1. Megtörténhetik, hogy $b_1 = 0$, és akkor a_1 is 0, hiszen $a' : a = b : b'$. Ha viszont a_1 és b_1 nem 0, akkor az utoljára felmért a szakaszból az ábra szerint vágjuk le az a_1 szakaszt, ennek M végpontjából (lásd a 10. ábrát) húzzunk párhuzamost a $HIKL$ négyszög IL átlójáig, és hasonló szerkesztést végezzünk el a másik parallelogrammán is a b_1 szakasszal. Az így keletkező LMN és WVU háromszög egybevágó, mert mindkettő külön-külön egybevágó az XYP háromszöggel, tekintettel arra, hogy egy-egy oldalukban és (a szakaszok párhuzamossága folytán) szögeikben is megegyeznek. Ebből következik, hogy az $FMNIE$ ötszög is egybevágó a $CDSWV$ ötszöggel, hiszen oldalaik és szögeik rendre megegyeznek; így pl. az $IHLK$ és $STUR$ egybevágó parallelogrammák egyenlő átlóiból az egyenlő NL, illetve WU szakaszt levonva az egyenlő IN, ill. SW szakaszokat kapjuk; azonkívül az is nyilvánvaló, hogy ha az $a + a_1$ hosszúságú FL szakaszból az a_1 hosszúságú ML szakaszt levonjuk, a megmaradt FM szakasz hossza a, hasonlóképpen a CV szakasz hossza b' lesz. Páronkint egybevágók az $ABCD$ és $FGAE$ parallelogrammákból levágott többi idomok is. Az $ABCD$ parallelogramma tehát átdarabolható az $FGAE$ parallelogrammába, és így a vele egybevágó $A'B'C'D'$ parallelogrammába is.

2. §

Nyilvánvaló továbbá, hogy bármely parallelogrammát átdarabolhatunk olyan parallelogrammává, amelynek egy szöge egy adott α szög; mégpedig úgy, hogy a parallelogramma két szem-



11. ábra



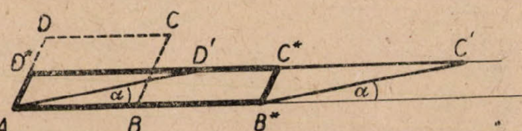
12. ábra

közti oldalának meghosszabbításával kapott párhuzamosokhoz e két oldal valamelyikének végpontjaiból α szög alatt hajló egyeneseket húzunk (11. ábra). Ilyen módon tehát bármely parallelogrammát átdarabolhatunk adott oldalú és adott szögű parallelogrammává. Ugyanígy bármely háromszöget is, hiszen bármely háromszög átdarabolható egy vele egyenlő magasságú és feleakkora alapú parallelogrammává (12. ábra).

Eszerint akárhány parallelogrammát összerakhatunk egyetlen parallelogrammává, olyan módon, hogy előbb mindegyiket ugyanolyan szögűvé és alapúvá daraboljuk át; mivel pedig az α szög derékszög is lehet, bármely olyan idomot, amely háromszögekre bontható, egyenlő alapú téglalapok összegeként állíthatunk elő, és így adott (pl. egységnyi) alapú téglalappá darabolhatunk át.

* * *

Bolyai Farkas a továbbiakban a tételt — amelyet itt explicite ki sem mond, nyilván, mert nagyobb jelentőséget tulajdonít a téglalappá alakításnak, mint az egyenlő területű sokszögek egymásba való átdarabolásának — alkalmazza téglalapnak négyzetté és két négyzetnek egyetlen négyzetté való átdarabolására.



13. ábra

Megjegyezzük, hogy az adott szögű parallelogrammává való átdarabolás — amelyet Bolyai itt nem részletezett* — $\alpha < BAC\sphericalangle$ esetén is, és egyáltalán bármekkora hegyesszög esetén elvégezhető, ha a parallelogrammát szükség esetén előbb két egybevágó parallelogrammára bontjuk, ezeket egy másik, félakkora magasságú és kétszerakkora alapú parallelogrammává illesztjük össze (13. ábra), és az eljárást szükség szerinti számban megismételjük.

4

(Bolyai Farkas bizonyításának egyszerűsítése)

Mi is hát *Bolyai Farkas* bizonyításának gondolatmenete? Milyen lépésekből tevődik össze az az eljárás, amelynek segítségével két egyenlő területű sokszöget mindig átdarabolhatunk egymásba? Ezek a lépések a következők:

1. *A két sokszöget háromszögekre bontjuk.*

2. *Minden egyes háromszöget átdarabolunk parallelogrammává* (12. ábra).

3. *Az utóbbiakat átdaraboljuk olyan parallelogrammákká, amelyek szögeikben megegyeznek* (11. és 13. ábra).

* Ennek az esetnek részletes tárgyalását lásd a Tentamen Erratáiban, I. kiadás II. kötet, XXXVII. oldal.

4. *Az így keletkezett parallelogrammákat olyan parallelogrammákká daraboljuk át, amelyek nemcsak szögeikben, hanem egy oldalukban is megegyeznek.*

5. *Ezek után külön az egyik, külön a másik sokszög darabjaiból kapott parallelogrammákat összeilleszthetjük egy-egy olyan parallelogrammává, amelyek egy oldalukban és szögeikben megegyeznek; mivel pedig ezeknek a területe egyenlő (hiszen egyenlő területű sokszögekből indultunk ki), azért kell, hogy egybevágók legyenek.*

6. *Egyesítjük a kapott két parallelogramma osztásvonalait. Ha a parallelogrammát az így adódó összes osztásvonal mentén szétvágjuk, darabjaiból az eredeti két sokszög bármelyikét össze tudjuk állítani.*

A bizonyítás hat lépése közül csak a 4. lépés okoz némi bonyodalmat. Érthető, hogy *Bolyai Farkas* maga is csupán ennek a bizonyítására tér ki bővebben, a többi lépésre csak mellékesen utal, vagy — mint magától értetődőt — meg sem említi.

Mi az oka annak, hogy a 3. lépésnél (közös szögűvé tétel) annyival nehezebb a 4. lépés (közös oldalúvá tétel)? Az, hogy az utóbbi esetben fontos a számunkra az is, hogy a közös szög megmaradjon. Ha úgy kell egy parallelogrammát adott oldalúvá átdarabolni, hogy szögeire nem teszünk semmi kikötést, akkor ezt sokkal egyszerűbben is elérhetjük: *pontosan ugyanazzal az eljárással, amellyel a parallelogrammákat adott szögűekké daraboljuk át* (11. és 13. ábra; *most azonban nem a D'AB∢, hanem az AD' oldal van megadva!).*

Legyen most ez átdarabolási eljárásunk 3. lépése! De nem válik-e ekkor megint a 4. lépés bonyolulttá? Nem, mert az az eljárás, amellyel a parallelogrammákat adott szögűekké daraboljuk át, egy oldalt amúgy is változatlanul hagy (11. ábra), vagy pedig egyszer vagy többször megdupláz (13. ábra). Még ez az utóbbi eset sem okoz zavart, hiszen ha egy parallelogramma alapját meg kellett dupláznunk, ugyanakkor megduplázhatjuk a többi parallelogramma alapját is a 13. ábrán látható módon, ezzel semmit sem rontunk el. A 4. lépés tehát a következő lesz:

A parallelogrammákat úgy daraboljuk át szögeikben megegyezőkké, hogy a már egyenlő oldaluk vagy változatlanul maradjon, vagy mindegyiké ugyanannyiszor duplázódjék meg (t. i. annyiszor, ahányszor arra maximálisan szükség van).[11]

A bizonyítás többi (1., 2., 5. és 6.) lépése változatlan marad.

[11] Ha a közös oldalt a 3. lépésben elég nagyra választjuk (pl. akkorára, mint a legnagyobb parallelogramma-oldal), akkor a közös szöget 90°-nak véve a 4. lépés egy vágással is mindig megoldható, duplázásra nincs szükség.

5

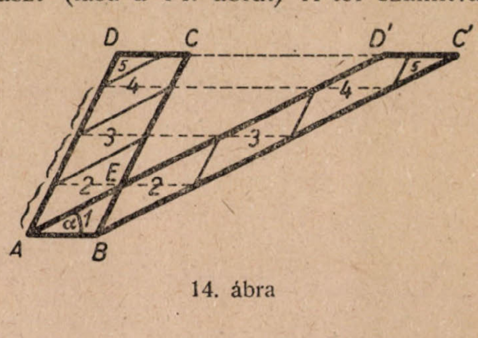
(Didaktikai megjegyzések, alkalmazás konkrét esetekben)

Ahhoz, hogy egy ilyen bizonyítást a diákok jól követni tudjanak, szükséges, hogy a számukra ebben a formában túlságosan absztrakt gondolatmenetet konkrét átdarabolási példákkal is illusztráljuk. Természetesen vigyáznunk kell, hogy eközben az idomokat ne kelljen túlságosan sok részre feldarabolnunk, vagyis hogy az eljárás szemléletileg követhető legyen. Ezt elérhetjük, ha a fent leírt eljárást nem alkalmazzuk mereven, hanem az egyes idomok tulajdonságainak megfelelően szükség esetén értelemszerűen módosítjuk.

Így például a bizonyítás 1. lépésére, az idomok háromszögekre bontására azért van szükség, hogy a 2. lépésben ezeket a háromszögeket parallelogrammákká darabolhassuk át. Nyilvánvaló tehát, hogy ha az átdarabolandó idomok már maguk parallelogrammák, akkor felesleges őket háromszögekre bontani. Vagy: a felbontásban megengedhetünk háromszögeken kívül parallelogrammákat és trapézokat is. (Az utóbbiak egy vágással éppúgy parallelogrammákká alakíthatók, mint a háromszögek.)

A 3. és 4. lépéssel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az AD' szakaszt az $ABCD$ (11. ábra) vagy $AB^*C^*D^*$ (13. ábra) parallelogramma belsejében önmagával párhuzamosan tetszésszerint elcsúsztathatjuk; ez a további átdarabolások szempontjából gyakran előnyös.

Ami a 4. lépést illeti, ha ez egy vágással nem végezhető el, akkor a 13. ábra mutatta eljárás helyett a következő átdarabolást is végezhetjük: a BE szakaszt (lásd a 14. ábrát) A-tól számítva annyiszor mérjük rá az AD szakaszra, ahányszor lehet, és a kapott osztáspontokból AE-vel párhuzamosokat húzunk. Nem nehéz belátni, hogy az így keletkező darabokból összeállítható az $ABCD$-vel egyenlő alapú, magasságú, de α szögű $ABC'D'$ parallelogramma. (Ezzel a 4. lépés bizonyos tekintetben egyszerűbbé válik, mert nincs többé szükség valamennyi parallelogramma oldalának ugyanannyiszor való megduplázására; viszont a 3. és 4. lépés egyöntetűsége ekkor elvész.) Az osztásvonal elcsúsztatására fent tett megjegyzés erre az eljárásra is vonatkozik.

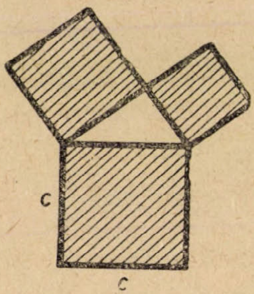


14. ábra

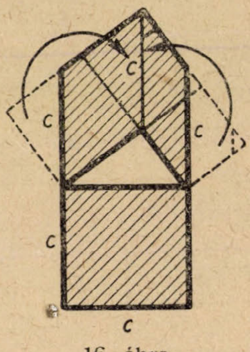
Ha a bizonyításban leírt eljárást a fenti megjegyzések tekintetbevételével alkalmazzuk, akkor egyszerűbb esetekben az átdarabolást szemlélettel elejétől végig követni tudjuk.

Lássunk erre két példát!

1. *Egy derékszögű háromszög befogóira emelt két négyzetet daraboljunk át a háromszög átfogójára emelt négyzetté* (15. ábra).



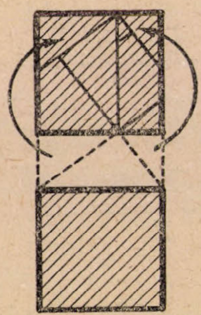
15. ábra



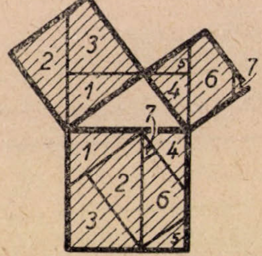
16. ábra

Az 1. és 2. lépésre nincs szükség.

A 3. lépést alkalmazzuk úgy, hogy a két kisebb négyzetet is c oldalúvá daraboljuk át (c a nagy négyzet oldala). A nagy négyzet eközben változatlan marad (16. ábra). Az eredeti háromszög egybevágó a szaggatottan jelölt háromszögekkel (két oldal és a



17. ábra



18. ábra

derékszög egyezése folytán). A megfelelő befogók $\pm 90^\circ$-os elforgatással mennek át egymásba, tehát ugyanezt mondhatjuk a megfelelő átfogókról is. Ebből következik, hogy az ábra helyes, kétkét c hosszúságú oldal egy egyenesbe esik, további kettő egybeesik.

A 4. lépésben a szög nagyságát megint úgy választjuk meg, hogy a nagy négyzet változatlan maradhasson, vagyis derékszögnek. A mondottakból már következik, hogy az a két téglalap, amelyet a parallelogrammából kapunk (17. ábra), együtt ismét *c* oldalú négyzetet alkot (5. lépés).

A 6. lépés megint elmarad, hiszen az eredeti nagy négyzetben egyetlen osztásvonal sincs.

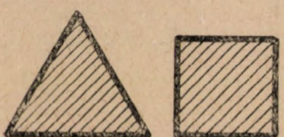
Állítsuk össze a kapott részekből a két kis négyzetet (18. ábra): Pythagoras tételének egy ismert átdarabolásos bizonyításához, a *Dobriner* és *Thieme*-féle bizonyításhoz jutottunk.[12]

2. *Daraboljunk át egymásba egy egyenlőoldalú háromszöget és egy (vele egyenlő területű) négyzetet* (19. ábra).

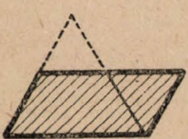
Az 1. lépés ismét elesik.

A 2. lépésben is csak a háromszöghöz kell hozzányúlni (20. ábra).

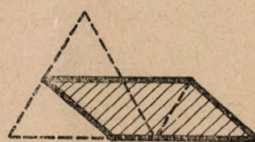
A 3. lépésben a négyzet oldalát választjuk közös oldalnak, így megint csak a háromszögből kapott parallelogrammát kell továbbdarabolnunk. Az átdarabolást végezzük el a 21. ábrán látható módon (több egyformán egyszerű lehetőség kínálkozik, de ez folytatható tovább a legjobban).



19. ábra

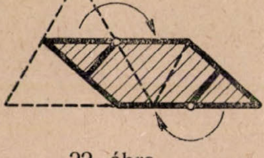


20. ábra

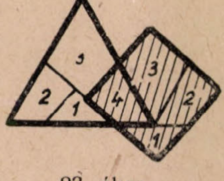


21. ábra

A 4. lépésben természetesen megint derékszögnek választjuk a szöget. Az átdarabolást egy vágással nem tudjuk elvégezni. Alkalmazzuk a 14. ábrán bemutatott eljárást, de csúsztassuk el az osztásvonalakat úgy, hogy minél kevesebb és minél egyszerűbb idomhoz jussunk (22. ábra). Nyilvánvaló a mondottakból, hogy a két-



22. ábra



23. ábra

[12] *W. Lietzmann*, Der Pythagoreische Lehrsatz, Leipzig, 1951. VI. kiadás, 22. lap.

oldalt levágott kis háromszögeket egy csúcsuk körül 180°-kal elforgatva a oldalú négyzethez jutunk.

A négyzetben és a darabjaiból összeállítható egyenlőoldalú háromszögben két részidom egyformán illeszkedik egymáshoz, a köztük lévő osztásvonalat tehát megszüntethetjük (23. ábra). Így végül a *Steinhaus* népszerű könyvéből ismert szép átdaraboláshoz jutunk.[13]

ТЕОРЕМА ФАРКАША БОЯИ О РАВНОСОСТАВЛЕННОСТИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Т. Варга

РЕЗЮМЕ

Если два многоугольника равновелики, то всегда возможно расчленить их на конечное число попарно равных многоугольников. Популяризация этой теоремы, первое доказательство которой дано венгерским математиком Фаркаш Бояи, является предметом этой статьи. Причем дано упрощение первоначального доказательства теоремы.

DER SATZ VOM W. BOLYAI ÜBER DIE VERLEGUNGSGLEICHHEIT VON POLYGONEN

T. VARGA

ZUSAMMENFASSUNG

Zwei Polygone, die denselben Flächeninhalt haben, können in eine endliche Anzahl paarweise kongruenter Polygonen zerlegt werden. Dieser, zum erstenmal von dem ungarischen Mathamatiker Farkas Bolyai bewiesene Satz wird in dem vorliegenden Artikel an die breitere Öffentlichkeit gebracht, und der von F. Bolyai stammende Beweis vereinfacht.

[13] *H. Steinhaus*, Matematikai kaleidoszkop, Művelt Nép, 1950, 5. lap.

Megjegyzés a matematikai-fizika egy integrálegyenletének elméletéhez

Fenyő István

Számos fizikai problémában olyan lineáris homogén integrálegyenletek lépnek fel, melyeknek magja csupán a független változók különbségétől függ. Így például a geometriai-optikában gyakran lépnek fel a mondott típusba tartozó integrálegyenletek. Hogy csak egy ilyen kérdést említsünk, felhozzuk a lencsék által létesített hasonló leképezés problémáját. Itt arról van szó, hogy a lencse megvilágítás szempontjából a tárgyhoz hasonló képet hoz létre. Ha a megvilágítás $y(x)$, ahol x jelenti a geometriai tengelytől való távolságot, akkor ez a függvény a következő alakú integrálegyenletet elégíti ki[1]

$$y(x)=\lambda\int_0^a K(|x-t|)y(t)\,dt. \tag{1}$$

Az arányossági tényező, λ, az integrálegyenletben fellépő mag sajátértéke. Fizikai szempontból a legkisebb abszolút értékű sajátérték meghatározása különösen fontos.

A csillagászatban, a sugárzási egyensúly Schwarzschild—Milne—Hopf-féle tárgyalásában nagy szerepet játszik az

$$y(x)=\lambda\int_0^\infty K(|x-t|)y(t)\,dt. \tag{2}$$

alakú homogén lineáris integrálegyenlet. Itt az $y(x)$ sajátfüggvény meghatározása mellett a legkisebb abszolút értékű sajátérték kiszámításában áll a matematikai probléma.[2]

Nemrégen R. Bellmann és R. Latter foglalkoztak az (1) és (2) alatti integrálegyenletek legkisebb abszolút értékű sajátértéknek meghatározásával.[3] Bebizonyították azt, hogy ha $K(t)$ nem negatív és monoton csökkenő függvény, akkor az (1) integrálegyen-

[1] L. Mandelstam: Festschrift H. Heber. 1912. p. 228.
[2] E. Hopf: Mathematical problems of radiative equilibrum. 1934.
[3] R. Bellmann—R. Latter: Proc. of the Amer. Math. Soc. 3. 1952. p. 884.

let legkisebb sajátértékre, λ_0-ra (ez mindig pozitív), érvényes a következő becslés:

$$2\int_0^a K(t)dt - \frac{2}{a}\int_0^a tK(t)dt \leqq \frac{1}{\lambda_0} \leqq 2\int_0^{a/2} K(t)dt.$$

Ez a becslés azért is figyelemreméltó, mert a legkisebb sajátértékekre kevés alsó becslési képlettel rendelkezünk. Az idézett szerzők fenti egyenlőtlenségre két, meglehetősen bonyolult és nagy apparátust igénylő bizonyítást adtak.

A következőkben kissé általánosabb feltételek mellett egyszerű módon hasonló tételt bizonyítunk be:

Legyen $K(t)$ $(0,a)$-ban értelmezett nem negatív integrálható függvény, akkor érvényes az (1) egyenlet legkisebb sajátértékre, λ_0-ra a következő egyenlőtlenség

$$2\int_0^a K(t)dt - \frac{2}{a}\int_0^a tK(t)dt \leqq \frac{1}{\lambda_0} \leqq 2\int_0^a K(t)dt.$$

Ha K monoton, ebből következik Bellmann és Latter egyenlőtlensége.

Bizonyítás: λ_0-hoz tartozik olyan f korlátos nem azonosan eltűnő függvény, melyre

$$f(x) = \lambda_0 \int_0^a K(|x-t|)f(t)dt$$

teljesül. Akkor

$$\frac{1}{\lambda_0}\int_0^a |f(x)|dx \leqq \operatorname*{Max}_{(t)} \int_0^a K(|x-t|)dx \int_0^a |f(t)|dt \leqq 2\int_0^a K(t)dt \cdot$$

$$\cdot \int_0^a |f(t)|dt,$$

amiből a jobboldali egyenlőtlenség azonnal következik.

Ami a baloldali egyenlőtlenséget illeti, tudjuk, hogy

$$\frac{1}{\lambda_0} = \operatorname{Max} \int_0^a\int_0^a K(|x-t|)g(x)g(t)dxdt,$$

ha g befutja az összes 1-re normált négyzetintegrálú függvények halmazát.[4] Ezért tehát g helyébe $\frac{1}{\sqrt{a}}$-t helyettesítve:

$$\frac{1}{\lambda_0} = Max \int_0^a \int_0^a K(|x-t|) g(x) g(t) dx dt \geqq \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^a K(|x-t|) dx dt =$$

$$= 2 \int_0^a K(t) dt - \frac{2}{a} \int_0^a t K(t) dt.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

A bebizonyított becslés alkalmas arra, hogy az

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty K(|x-t|) y(t) dt$$

integrálegyenlet legkisebb sajátértékét szolgáltassa bizonyos feltételek mellett. Ha $K(t)$ minden pozitív t mellett értelmezett függvény és olyan, hogy

$$\int_0^\infty K(t) dt = A$$

létezik, akkor könnyen be lehet látni, hogy

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} \int_0^a t K(t) dt = 0.$$

Mert ha

$$\int_0^x K(t) dt = \varkappa(x),$$

akkor $\int_0^a t K(t) dt$-re alkalmazva a parciális integrálás módszerét, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^a t k(t) dt = [t \varkappa(t)]_0^a - \int_0^a \varkappa(t) dt = a \varkappa(a) - \int_0^a \varkappa(t) dt,$$

[4] L. pl. Sz. A. Mihlin: Integrálegyenletek. 1953. 77. old.

vagyis

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^a tK(t)\,dt=\lim_{a\to\infty}\varkappa(a)-\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^a\varkappa(t)\,dt=A-\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^a\varkappa(t)\,dt.$$

Itt a jobboldal második tagjának megállapítására alkalmazzuk a l'Hospital szabályt:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^a\varkappa(t)\,dt=\lim_{a\to\infty}\varkappa(a)=A$$

és ebből az állítás evidens.

Ha most a bebizonyított egyenlőtlenség tagjaiban $a\to\infty$, akkor az egyenlőtlenség első és harmadik oldala

$$2\int_0^\infty K(t)\,dt=A$$

számhoz konvergál, úgyhogy a szóbanforgó integrálegyenlet sajátértéke

$$\lambda_0=\frac{1}{2\int\limits_0^\infty K(t)\,dt}$$

lesz.

Érdemes megjegyezni, hogy ha K-ról nem kötjük ki azt, hogy az nem negatív, akkor érvényes, hogy a szóbanforgó integrálegyenletnek az

$$\frac{1}{2\int\limits_0^\infty |K(t)|\,dt}\leqq\lambda\leqq\frac{1}{2\left|\int\limits_0^\infty K(t)\,dt\right|}$$

egyenlőtlenség által meghatározott számközbe legalább egy sajátértéke esik.

ПРИМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ОДНОЙ ИЗ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОИ ФИЗИКИ

И. Феньё

Резюме

Настоящая статья посвящена вопросу наименьшей собственной величины интегрального уравнения

$$y(x)=\lambda\int_0^a k(|x-t|)y(t)\,dt$$

Если $k(t)$ является неотрицательной интегрируемой функцией, определяемой в интервале $(0, a)$, то для наименьшую собственную величину обсуждаемого интегрального уравнения — для λ_0 действительно следующее неравенство

$$2\int_0^a k(t)\,dt-\frac{2}{a}\int_0^a tk(t)\,dt\leqq\frac{1}{\lambda_0}\leqq 2\int_0^a k(t)\,dt.$$

Если, кроме того, полагать, что $k(t)$ является монотонным, то из доказанного неравенства получаетстя недавно установленную оценку Бельмана и Латтера.

BEMERKUNG ZUR THEORIE EINER INTEGRALGLEICHUNG DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

STEFAN FENYŐ

Folgender Satz wird bewiesen: $k(t)$ sei eine im Intervall (o, a) definierte integrierbare nichtnegative Funtktion, so genügt der kleinste Eigenwert λ_0 der Integralgleichung

$$y(x)=\lambda\int_0^a k(|x-t|)y(t)\,dt$$

folgender Ungleichung

$$2\int_0^a k(t)\,dt-\frac{2}{a}\int_0^a tk(t)\,dt\leqq\frac{1}{\lambda_0}\leqq 2\int_0^a k(t)\,dt.$$

Der Beweis des Satzes ist äusserst einfach. Ist $k(t)$ auch noch monoton, so erhalten wir die von Bellmann und Latter jüngst bewiesene Abschätzung.

Jelentés az 1953. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 1953 november 21-én tartotta ötödik Schweitzer Miklós emlékversenyét. A versenytételek déli 12 órakor a következő egyetemek, főiskolák és tudományos intézetek hirdetőtábláin lettek kifüggesztve.

Budapesten az Eötvös Loránd Tudományegyetem, Műszak Egyetem, Közgazdaságtudomány Egyetem és a Pedagógiai Főiskola matematikai tanszékein és az Alkalmazott Matematikai Intézetben.

Szegeden a Tudományegyetem Bolyai-Intézetében és a Pedagógiai Főiskola matematikai tanszékén.

Debrecenben a Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetében.

Miskolcon a Rákosi Mátyás Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai tanszékén.

Veszprémben a Vegyipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszékén.

Szolnokon a Közlekedési Műszaki Egyetem Matematikai Tanszékén.

Pécsett a Pedagógiai Főiskola Matematikai Tanszékén.

Egerben a Pedagógiai Főiskola Matematikai Tanszékén.

Sopronban a Rákosi Mátyás Nehézipari Műszaki Egyetem Bányamérnöki Karának Matematikai Tanszékén.

A megoldások benyújtásának ill. postáraadásának végső időpontja 1953. dec. 3 volt; a szokott egyhetesnél hosszabb munkaidő azért vált szükségessé, mert közben volt a Konstruktív függvénytani kollokvium és számítani kellett arra, hogy a versenyzők egy része ezen résztvesz. Ezen idő alatt 20 versenyző nyújtott be összesen 108 megoldást; a versenyzők közül heten a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem, ketten a budapesti Műszaki Egyetem hallgatói, öten a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem hallgatói, hárman a szegedi Egyetem kötelékébe tartoznak, míg három versenyző középiskolás. A verseny úgy a résztvevők számát, mint a beadott jó dolgozatok számát tekintve sikeresnek mondható.

A versenybizottság döntése az, hogy ez alkalommal 3 elsődíjat ad ki, fejenként 700 frt.-ot a három szegedi versenyzőnek, Hajnal András elsőéves aspiránsnak, Korányi Ádám negyedéves hallgatónak és Pollák György tanársegédnek. Hajnal a tíz versenyfeladat közül az első kilenc feladatra helyes megoldásokat küldött be, a tizediket is helyesen közelítette meg; megoldásai nem mindig egyszerűek, és fogalmazásuk messze a másik kettő mögött marad. Korányi a tizedik feladat mellett a két geometriai feladat megoldásával sem foglalkozott és így csak hét feladat megoldását küldötte be; ezek között az első és második feladat megoldása jelentékeny általánosítással szerepel, különösen a második és a többié is elegáns és jól fogalmazott. Pollák György az első kilenc feladatra küldött be megoldást, melyek közül azonban az elsőre adott megoldás hibás; a többi megoldás mind tartalomra, mind formára kifogástalan. Második díjat (300 frt.-ot) nyert Csima József, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem harmadéves alkalmazott matematika-szakos hallgatója, aki az első, második, negyedik, ötödik, hatodik feladatokra és hetedik feladat második felére küldött be helyes és jól megfogalmazott megoldásokat. Dicséretet és könyvjutalmat nyertek Fried Ervin salgótarjáni gimnáziumi tanár, aki az első, negyedik, ötödik, és hetedik feladatokra küldött igen elegáns, rövid megoldásokat és Kovács László, a debreceni ref. gimnázium IV. osztályú tanulója, aki a negyedik, ötödik és hetedik feladatokat teljesen, a második és hatodikat pedig részben helyesen oldotta meg, igen jól megfogalmazva megoldásait.

A versenybizottság:

Alexits György
Hajós György
Rényi Alfréd
Turán Pál.

Az alábbiakban közöljük a verseny feladatait és azok megoldásait.

1. feladat

Legyenek az a_ν-k olyanok, hogy

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n > 0 \tag{1}$$

és

$$b_1 \geqq a_1, \quad b_1 b_2 \geqq a_1 a_2, \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots b_n \geqq a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{2}$$

Ekkor

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{3}$$

Megoldás. (2)-ből nyilván következik, hogy minden b_ν pozitív. Ha a pozitív λ_ν számokat a

$$b_\nu = a_\nu \lambda_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

által értelmezzük, akkor a (2) feltételek a

$$\lambda_1 \geqq 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 \geqq 1, \ldots, \quad \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \geqq 1 \tag{4}$$

feltételekbe mennek át és kimutatandó, hogy (1) és (4) mellett

$$(\lambda_1 - 1) a_1 + (\lambda_2 - 1) a_2 + \cdots + (\lambda_n - 1) a_n \geqq 0. \tag{5}$$

Ha

$$L_\nu = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + \cdots + (\lambda_\nu - 1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu) - \nu,$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

akkor a számtani-mértani közép tétele miatt

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu}{\nu} \geqq \sqrt[\nu]{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu} \tag{7}$$

azaz (4)-ből

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_\nu}{\nu} \geqq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu - \nu \geqq 0 \tag{8}$$

tehát

$$L_\nu \geqq 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Jelöljük (5) baloldalát H_n-el; ekkor igazolandó, hogy $H_n \geqq 0$. De parciális összegezéssel

$$H_n = L_1 a_1 + (L_2 - L_1) a_2 + \cdots + (L_n - L_{n-1}) a_n =$$
$$= L_1 (a_1 - a_2) + L_2 (a_2 - a_3) + \cdots + L_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + L_n a_n. \tag{10}$$

Ebből a bizonyítandó $H_n \geqq 0$ egyenlőtlenség rögtön következik, mert (9) és (1) alapján (10) jobboldalán minden tag nemnegatív.

Nézzük, mikor állhat (3)-ban az egyenlőség jele. Nyilván akkor és csak akkor, ha (5)-ben áll, azaz (10)-ben

$$L_\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$L_n a_n = 0.$$

Mivel $a_n > 0$, tehát $L_n = 0$. De, mint tudjuk, pozitív λ-k esetén (7)-ben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$$

azaz $L_n = 0$-ból

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$$

ill. a λ-k definíciójából

$$b_\nu = a_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

Tehát a vizsgált egyenlőtlenségben az egyenlőség jele akkor és csak akkor állhat, ha

$$b_\nu = a_\nu. \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

Fried Ervin, Korányi Ádám.

Megoldották részben hasonló, részben más, főleg induktív bizonyításokkal Csima J., Hajnal A., Kálmán L., Rejtő P.

Megjegyzés. A feladat állítása a

$$\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \geqq 0$$

ill.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_n} \geqq 0$$

alakokba írható. Csíma József ehelyett a többetmondó

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_n} \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_\nu} > 0 \qquad (12)$$

egyenlőtlenséget bizonyítja. Hogy

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_\nu} > 0,$$

az azonos a (8)-egyenlőtlenséggel. A

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_n} \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_\nu} \qquad (13)$$

egyenlőtlenség n szerinti indukcióval látható be. $n = 1$-re egyenlőség áll fenn; tegyük fel, hogy (13) már $n < N$-re igazolva van és legyen $n = N$. Ekkor

$$\sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_{N-1}} \geqq \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_\nu}.$$

Mindkét oldalt az

$$\frac{a_{N-1}}{a_N} \geqq 1$$

egyenlőtlenség megfelelő oldalaival szorozva adódik

$$\sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_N} \geqq \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{b_\nu - a_\nu}{a_\nu}$$

és mindkét oldalhoz

$$\frac{b_N - a_N}{a_N}$$

-et adva épp (13)-at kapjuk $n = N$-el. Q. e. d.

Másirányú általánosításokat ad meg Korányi Ádám. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a feladat állítását nyilván

$$\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \geqq \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

alakba írhattuk volna. Mármost Korányi új változókat vezet be

$$\log a_\nu = \alpha_\nu, \quad \log b_\nu = \beta_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

által; ekkor a feltételek

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_n, \quad \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu \geqq \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (14)$$

alakban jelentkeznek és az állítás

$$\sum_{\nu=1}^{k} e^{\beta_\nu} \geqq \sum_{\nu=1}^{k} e^{\alpha_\nu}.$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

E helyett Korányi mindjárt azt mutatta ki, hogy ha (14) fennáll és $f(x)$ folytonos monoton növekvő és alulról konvex függvény, akkor

$$\sum_{\nu=1}^{k} f(\beta_\nu) \geqq \sum_{\nu=1}^{k} f(\alpha_\nu). \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad (15)$$

E tételt integrálokra is kiterjesztette. Mindezen vizsgálatok a konvexitás különböző értelmezései mellett Hardy—Littlewood—Pólya: Inequalities c. könyvében is részletesen vannak tárgyalva, valamint a (14)—(15) alatti tétel megfordítása is.

2. feladat

Rakjunk a sakktáblára 32 világos és 32 sötét bábut. Két különböző színű bábura azt mondjuk, hogy párt alkotnak, ha ugyanazon sorban vagy ugyanazon oszlopban vannak. Mi a párok számának maximuma és minimuma?

Megoldás. a) A feladat első részét mindjárt abban az általánosabb formában tárgyaljuk, midőn a „tábla" $2k$ sorból és $2l$ oszlopból áll és $2kl$ számú fehér és $2kl$ számú fekete bábu van.

Tekintsük előbb a maximum kérdését; a párok maximális száma legyen M. Egy sorban, pl. az első sorban, ha x számú fehér és $(2l—x)$ számú fekete bábu van, akkor *e sor által* adott párok száma $x(2l—x) \leqq l^2$. Tehát az összes sorok által adott párok száma $\leqq 2kl^2$. Az első oszlop által adott párok száma analóg módon $\leqq k^2$, azaz az összes oszlop által adott párok száma $\leqq 2lk^2$. Így a párok számára, tehát M-re is

$$M \leqq 2kl(k+l). \tag{16}$$

Ha (16)-ban tehát elérhető az egyenlőség, akkor

$$M = 2kl(k+l). \tag{17}$$

Az egyenlőség (16)-ban nyilván azon és csak azon elrendezéseknél érhető el, mikor minden sorban és oszlopban ugyanannyi fekete és fehér bábu van. Egy ilyen bábúeloszlás a „triviális", mikor minden bábu saját színű mezőn áll. Nyilván ezen elrendezésből sor- és oszlopcserékkel létrejövő elrendezésekre az egyenlőség (16)-ban szintén érvényes marad, de ezzel nincsenek megadva az összes extremális elrendezések, mint azt pl. $k = l = 2$-re a

$$\begin{matrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

mutatja, ha —1 áll a fehér, 1 pedig a fekete bábuk helyén. Az *összes* extremális elrendezések megadása nehéznek látszik.

Megjegyzés. Hasonlóképp volna tárgyalható az az eset is, mikor a tábla $(2k_1+1)$-soros és $2l_1$-oszlopos. Ha a tábla $(2k_2+1)$-soros és $(2l_2+1)$-oszlopos, akkor a fehér és fekete bábuk száma nem lehet egyenlő; ekkor $(2k_2l_2+k_2+l_2+1)$ drb. fehér és $(2k_2l_2+k_2+l_2)$ drb. fekete bábu felvétele volna a feladatnak megfelelő. Ezek a példarovatban fognak szerepelni. Bizonyos szempontból általánosabb, bizonyos szempontból speciálisabb kérdés szerepel Pollák György dolgozatában, melyben a tábla n-soros és n-oszlopos, és $\mu < n$ mellett a fehér bábuk száma μn, a feketéké $(n—\mu)n$. Ebben az esetben, mint kimutatta, a párok száma akkor és csak akkor maximális, ha minden sorban és oszlopban μ fehér bábu szerepel és ez realizálható is.

Az eredeti feladat esetén $k = l = 4$, azaz

$$M = 256.$$

b) Térjünk rá a minimum nehezebb kérdésére, de csak $k = l$ esetében; legyen a minimum m. Tekintsük a bábuk egy „minimális" elrendezését (t. i. olyat, melynél a párok száma minimum).

Jelentse r_{ij} azt, hogy az i-ik sor j-ik eleme hány párban vesz részt és legyen

$$\sum_{i=1}^{2k} r_{ij} = K_j.$$

Nyilván

$$\sum_{j=1}^{2k} K_j = 2m \tag{18}$$

mert minden párt kétszer vettünk számba. Becsüljük alulról pl. K_1-et. Mivel K_1 nyilván nem változik sorcseréknél, tehát sorcserékkel elérhető, hogy az első oszlopban a felső v helyen fehér, az alatta következő $s=2k-v$ helyen fekete bábu álljon. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy

$$v \leqq k \tag{19}$$

mert ha nem, csupán az egész tábla fehér bábui helyébe kell feketét tennünk és fordítva. Legyen a tábla első v számú sorában S drb. fekete bábu, a következő s számú sorában pedig V drb. fehér. Ekkor az első oszlop fehér bábuinak adaléka K_1-hez,

$$vs+S,$$

a feketéké

$$vs+V,$$

azaz

$$K_1 = 2vs+S+V = 2v(2k-v)+S+V. \tag{20}$$

Ha az első v-sorból egy fekete bábut kicserélünk a következő s-sor egy fehérével, ezáltal K_1 nyilván fogy; K_1 tehát csökken, ha az első v-sorból lehetőleg sok fekete bábut a következő s-sorba viszünk és onnan helyébe fehéret teszünk. Mivel az összes fehér bábuk száma $2k^2$ és az első v-sor helyeinek száma csak $2vk$, tehát (19) miatt az is elérhető, hogy az első v-sorban *csakis* fehér bábu legyen, mikoris az utolsó s-sorban csak

$$2k^2-2kv = 2k(k-v)$$

számú fehér bábu maradt, azaz

$$K_1 \geqq 2vs+2k(k-v) = 2\{k^2+v(k-v)\} \geqq 2k^2. \tag{21}$$

Nyilván ugyanez áll bármely K_j-re; azaz (18) és (21)-ből

$$2m \geqq 2k \cdot 2k^2$$

$$m \geqq 2k^3. \tag{22}$$

(21)-ben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $v=k$ azaz az első k sor csupa fehér bábuból áll, a további k sor csupa feketéből. Ekkor és csak ekkor érhető el (22)-ben az egyenlőség.

Csima József

Megoldották bonyolultabban: *Búzi K., Hajnal A., Kálmán L., Kántor S., Korányi Á., Pollák Gy.*

Csak az első részt: *Hőnig J., Kovács L., Schmidt E.*

Megjegyzés. Pollák György a minimum meghatározását is az előbbi általános esetben végezte el, mikor n-soros, n-oszlopos táblán μn fehér és $(n-\mu)n$ fekete bábu helyezendő el. Előbbivel analóg gondolatmenet adja, hogy ezesetben a minimum akkor és csak akkor éretik el, ha az első μ számú sorban csupa fehér, a további $(n-\mu)$ számú sorban csupa fekete bábu áll. A minimum kérdése $2k\times 2l$-es, ill. $(2k_1+1)\times 2l_1$-es tábla esetén a Feladatrovatban fog szerepelni.

Egy érdekes alkalmazási lehetőségre mutatott rá dolgozatában Korányi Ádám, ha $k\to\infty$. Ha a $0<x<a$, $0<y<a$ négyzetben adva van egy $\frac{1}{2}a^2$ területű ψ tartomány, melyet pl. egy Jordan-görbe határol és $\begin{Bmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\vartheta)\end{Bmatrix}$ jelentik az $\begin{matrix}x=\tau\\ y=\vartheta\end{matrix}$ egyeneseknek T-be eső részének lineáris méretét, akkor

$$\frac{a^3}{4}\leqq\int_0^a\mu(\tau)\{a-\mu(\tau)\}\,d\tau+\int_0^a\nu(\vartheta)\{a-\nu(\vartheta)\}\,d\vartheta\leqq\frac{a^3}{2}$$

vagy

$$\frac{a^3}{2}\leqq\int_0^a\mu(\tau)^2\,d\tau+\int_0^a\nu(\vartheta)^2\,d\vartheta\leqq\frac{3a^3}{4}.$$

Feladatunkban $k=4$, azaz ezesetben

$$m=128.$$

3. feladat

Ha

$$c_0\geqq c_1\geqq\cdots\geqq c_n>0 \tag{23}$$

és

$$f(x)=c_0+c_1\cos x+c_2\cos 2x+\cdots+c_n\cos nx, \tag{24}$$

és E jelenti a fenti típusú polinomok osztályát, akkor

$$\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n+1}\leqq\min_E\frac{\max\limits_{\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi}|f(x)|}{\max\limits_{0\leqq x\leqq 2\pi}|f(x)|}\leqq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n+1}.$$

Megoldás. Nyilván az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy

$$c_0+c_1+\cdots+c_n=1. \tag{25}$$

Ekkor

$$\max_{0\leqq x\leqq 2\pi}|f(x)|=c_0+c_1+\cdots+c_n=1,$$

azaz igazolandó, hogy (23) és (25) mellett

$$M\equiv\max_{\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi}|f(x)|\geqq\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n+1} \tag{26}$$

és alkalmas E-beli $f_0(x)$-el (23) és (25) mellett

$$\max_{\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi}|f(x)|\leqq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n+1}. \tag{27}$$

(27) igazolására legyen

$$f_0(x)=\frac{1}{n+1}(1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx).$$

Ekkor (23) és (25) teljesülnek; mint tudjuk továbbá,

$$f_0(x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right).$$

Így

$$\max_{\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi}|f(x)|\leqq\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\max_{\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n+1}.$$

Tehát (26) igazolandó még. Nyilván

$$\frac{\pi}{2}M\geqq\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\,dx\right|=\left|c_0\frac{\pi}{2}-c_1+\frac{c_3}{3}-\frac{c_5}{5}+\cdots\right|. \tag{28}$$

Mivel az együtthatók monotonitása miatt

$$c_0\frac{\pi}{2}-c_1\geqq c_0\frac{\pi}{2}-c_0=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)c_0\geqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{c_0+c_1+\cdots+c_n}{n+1}=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{n+1},$$

$$\frac{c_3}{3}-\frac{c_5}{5}+\cdots>0,$$

tehát (28)-ból

$$\frac{\pi}{2} M \geqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{1}{n+1}, \quad M \geqq \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n+1}.$$

Megoldották: *Hajnal A., Korányi Á., Pollák Gy.*
Részben: *Csima J.*

Megjegyzés: A feladat értelme az, hogy egy pozitív monoton fogyó együtthatós cosinus-polinom maximuma nem lehet „túl éles". Ha (23) helyett az együtthatók csupán pozitívok, a maximum már sokkal élesebb lehet mint az

$$f_1(x) = \cos^{2n}\frac{x}{2} = \frac{1}{2^{2n-1}}\cos nx + \frac{\binom{2n}{1}}{2^{2n-1}}\cos(n-1)x + \cdots$$

példa mutatja. Ekkor $\max\limits_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f_1(x)| = 1$ és $\max\limits_{\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi} |f_1(x)| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}$, azaz a feladatban szereplő hányados ez esetben 2^{-n} is lehet.

4. feladat

Az egységgömbre rajzolt 2π-nél kisebb ívhosszú zárt l görbét mindig tartalmazza a gömb egy félgömbje.

Megoldás. Legyenek A és B a görbe oly pontjai, melyek l kerületét, $2L$-t, két egyenlő részre bontják, AB húr felezőpontja D és a gömb középpontja O. Azt állítjuk, hogy l teljesen azon két félgömb egyikén van, mellyé a DO-ra merőleges h főkör vágja a gömböt. Ennek bizonyítására először is jegyezzük meg, hogy, ha C az l görbe kerületének tetszőleges pontja, akkor*

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} \leqq L < \pi. \tag{29}$$

Ha tehát igazoljuk, hogy h főkör tetszőleges P pontjára

$$\widehat{AP} + \widehat{BP} \geqq \pi, \tag{30}$$

akkor igazolva lesz, hogy l-nek nem lehet h-n pontja. (30) igazolására tükrözzük A, B és P-t DO-ra. Ekkor A képe B, B-é A és P-é legyen P'. Jegyezzük meg, hogy ekkor

$$\widehat{BP} = \widehat{AP'}.$$

* $\widehat{UV}$ jelenti mindig az U és V pontokat összekötő kisebbik főkör hosszát.

De ekkor

$$\widehat{AP}+\widehat{BP}=\widehat{AP}+\widehat{AP'}=\pi,$$

ami máris igazolja az állítást.

Kovács László
Fried Ervin

Megoldották: *Csima J., Hajnal A., Kántor S., Kemény P., László Z., Pollák Gy., Schay G.*

5. feladat

Minden pozitív egész számnak legalább annyi $(3k+1)$-alakú osztója van, mint $(3k-1)$-alakú (persze pozitív osztókról van szó).

Megoldás. Jelentse $u(d)$ d-nek $(3k+1)$-alakú osztóinak számát, $v(d)$ pedig a $(3k-1)$-alakúét, és legyen

$$N=mn \qquad (m,n)=1.$$

Ekkor m-nek tetszőleges $(3k+1)$-alakú osztóját n-nek $(3k+1)$-alakú osztójával szorozva, továbbá m-nek $(3k-1)$-alakú osztóit n-nek $(3k-1)$-alakú osztóival szorozva N-nek $(3k+1)$-alakú osztóit nyerjük és fordítva, N-nek minden $(3k+1)$-alakú osztója előállítható előbbi módon, mégpedig m és n relatív prím volta miatt csak egyféleképpen. Tehát

$$u(N)=u(m)\,u(n)+v(m)\,v(n). \tag{31}$$

Teljesen analóg módon

$$v(N)=u(m)v(n)+u(n)v(m). \tag{32}$$

Ha

$$u(d)-v(d)=H(d),$$

akkor (31) és (32)-ből

$$H(N)=u(N)-v(N)=\{u(m)u(n)+v(m)v(n)\}-\{u(m)v(n)+ \\ +u(n)v(m)\}=(u(m)-v(m))\,(u(n)-v(n))=H(m)H(n). \tag{33}$$

Ha tehát N törzstényezős előállítása

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},$$

akkor (33)-ból

$$H(N)=\prod_{\nu=1}^{r}H(p_\nu^{\alpha_\nu}). \tag{34}$$

Ha $p_1=3$, akkor $p_1^{\alpha_1}$-nek $(3k+1)$ alakú osztója csak egy van, az 1, $(3k-1)$-alakú pedig nincs, azaz

$$H(3^{\alpha_1})=1. \tag{35}$$

Ha p_ν $(3k+1)$-alakú, akkor $(3k-1)$-alakú osztó nincs, azaz

$$H(p_\nu^{\alpha_\nu}) = 1 + \alpha_\nu. \tag{36}$$

Ha végül p_ν $(3k-1)$-alakú, akkor $p_\nu^{\alpha_\nu}$ $(3k+1)$-alakú osztói

$$1, p_\nu^2, p_\nu^4, \ldots$$

a $(3k-1)$-alakú osztók pedig

$$p_\nu, p_\nu^3, p_\nu^5, \ldots$$

azaz

$$H(p_\nu^{\alpha_\nu}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \alpha_\nu \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } \alpha_\nu \text{ páratlan.} \end{cases} \tag{37}$$

(34)—(35)—(36)—37)-ből

$$H(N) = \prod_{p \equiv 1 \bmod 3} (1 + \alpha_\nu) \geqq 1, \tag{38}$$

ha n-nek minden $(3k-1)$-alakú prímfaktora páros kitevőn szerepel, külön pedig 0. Q. e. d.

Fried Ervin
Korányi Ádám

Megoldották: *Ádám A., Csima J., Erdős J., Hajnal A., Kálmán L., Kemény J., Molnár F., Pollák Gy.*

Megjegyzés. Nem érdektelen megjegyezni, hogy $H(N)$-nek direkt számelméleti jelentés is adható, mely nemnegativitását evidenciába helyezi. Kimutatjuk u. i., hogy $H(N)$ megegyezik az

$$x^2 - xy + y^2 = N \tag{39}$$

diofantoszi egyenlet egész megoldásai számának hatodával.* Ennek legegyszerűbb igazolására az

$$a + b\varrho \qquad a, b \text{ rac. egészek}$$

alakú algebrai egészek $K(\varrho)$ gyűrűjét használjuk fel, ahol

$$\varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}. \tag{40}$$

Fel fogjuk használni azon jólismert tényt, hogy $K(\varrho)$ felbonthatatlan elemei vagy $(3k-1)$ alakú racionális prímek, vagy $(1-\varrho)$ és hat asszociáltja, valamint azon $(a+\varrho b)$ számok, melyekre valamely $(3k+1)$ alakú racionális prímmel $a^2 - ab + b^2 = p$. Utóbbi esetben egy p-hez két, lényegileg különböző felbonthatatlan elem tartozik

* Jegyezzük meg, hogy az (x_0, y_0) megoldással triviálisan adódó $(\pm x_0, \pm y_0)$, $(\pm y_0, \pm x_0)$ megoldásokat, amennyiben nem azonosak egymással, különböző megoldásoknak tekintjük!

és mindegyiknek hat asszociáltja van. Legyen

$$N = 3^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s} \tag{41}$$

$$p_\nu \equiv 1 \bmod 3, \quad q_j \equiv -1 \bmod 3.$$

Ekkor N felbomlása $K(\varrho)$-ban, mivel

$$3 = -\varrho^2(1-\varrho)^2$$

$$p_\nu = \Pi'_\nu \Pi''_\nu \quad \overline{\Pi''_\nu} = \Pi'_\nu,$$

nyilván

$$N = (-\varrho^2)^{\alpha}(1-\varrho)^{2\alpha} \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j} \prod_{\nu=1}^{r} \Pi_\nu'^{\alpha_\nu} \Pi_\nu''^{\alpha_\nu}. \tag{42}$$

(39)-et írhatjuk

$$(x+\varrho y)(x+\bar\varrho y) = N \tag{43}$$

alakban, azaz $K(\varrho)$-ban

$$x+\varrho y / N.$$

Mivel $K(\varrho)$-ban fennáll az egyértelmű felbonthatóság tétele, tehát

$$x+\varrho y = \varepsilon(1-\varrho)^{\alpha'} \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j'} \prod_{\nu=1}^{r} (\Pi'_\nu)^{\alpha'_\nu} (\Pi''_\nu)^{\alpha''_\nu}, \tag{44}$$

ahol ε egy egység,

$$0 \leqq \alpha' \leqq 2\alpha, \quad 0 \leqq \beta_j' \leqq \beta_j, \quad 0 \leqq \alpha'_\nu \leqq \alpha_\nu, \quad 0 \leqq \alpha''_\nu \leqq \alpha_\nu.$$

$$j = 1, \ldots, s \qquad \nu = 1, \ldots, r$$

Ekkor

$$x+\bar\varrho y = \bar\varepsilon(1-\bar\varrho)^{\alpha'} \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j'} \prod_{\nu=1}^{r} (\Pi''_\nu)^{\alpha'_\nu} (\Pi'_\nu)^{\alpha''_\nu}$$

ill. tekintve, hogy

$$1-\bar\varrho = 1 - \frac{1}{\varrho} = -\frac{1-\varrho}{\varrho} = -\varrho^2(1-\varrho),$$

ebből

$$x+\bar\varrho y = \bar\varepsilon(-\varrho^2)^{\alpha'}(1-\varrho)^{\alpha'} \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j'} \prod_{\nu=1}^{r} (\Pi''_\nu)^{\alpha'_\nu} (\Pi'_\nu)^{\alpha''_\nu}. \tag{45}$$

(44) és (45)-ből

$$x^2 - xy + y^2 = (-\varrho^2)^{\alpha'}(1-\varrho)^{2\alpha'} \prod_{j=1}^{s} q_j^{2\beta_j'} \prod_{\nu=1}^{r} (\Pi'_\nu \Pi''_\nu)^{\alpha'_\nu+\alpha''_\nu}.$$

Ezt (42) és (43)-al egybevetve adódik, hogy (42)-ben, ill. (41)-ben minden β_j-nek párosnak kell lennie, sőt

$$\alpha' = \alpha, \qquad \begin{matrix} \beta_j' = \frac{1}{2}\beta_j & j = 1, 2, \ldots, s \\ \alpha_\nu' + \alpha_\nu'' = \alpha_\nu & \nu = 1, 2, \ldots, r. \end{matrix}$$

Mivel egy $(\alpha_\nu', \alpha_\nu'')$ pár $(1+\alpha_\nu)$-féleképp választható $\nu = 1, \ldots, r$-re és $K(\varrho)$-ban 6 egység van, tehát (39)-egyenlet egész megoldásai száma

$$6 \prod_{p_\nu \equiv 1 \bmod 3} (1+\alpha_\nu),$$

ami (38)-cal egybevetve az állítást igazolja.

6. feladat

Ha az n-edik Hermite-polinom a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

kifejezéssel van értelmezve, akkor tetszőleges y-ra keresendő

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{y}{2n}\right)^n H_n\left(\frac{n}{y}\right)$$

értéke.

Megoldás. Induljunk ki a jólismert

$$H_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{n(n-1)\cdots(n-2\nu+1)}{\nu!}(2x)^{n-2\nu} \tag{46}$$

előállításból. Ha röviden

$$\left(\frac{y}{2n}\right)^n H_n\left(\frac{n}{y}\right) = f_n(y),$$

akkor (46)-ból

$$f_n(y) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right). \tag{47}$$

Jegyezzük meg, hogy a

$$\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\left|\frac{y}{2}\right|^{2\nu}$$

sor konvergens. Tehát, mivel y fix, tetszőleges kis pozitív ε-hoz van oly $\omega=\omega(\varepsilon, y)$, hogy, ha $\left[\frac{n}{2}\right]>\omega$, akkor

$$\left|\sum_{\omega<\nu\leqq\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right)\right|<$$

$$<\sum_{\nu>\omega}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{y}{2}\right|^{2\nu}<\varepsilon.$$

Így

$$\left|f_n(y)-\sum_{\nu\leqq\omega}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right)\right|<\varepsilon,$$

ill.

$$\left|f_n(y)-\sum_{\nu\leqq\omega}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu}\right|\leqq\varepsilon+$$

$$+\sum_{\nu\leqq\omega}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{y}{2}\right|^{2\nu}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right)\right\}. \quad (48)$$

Így, tekintve, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu}=e^{-\frac{y^2}{4}}$$

azaz, hogy ω-t (ismét csak ε-tól és y-tól függően) szükség szerint még alkalmasan növelve

$$\left|\sum_{\nu\leqq\omega}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu}-e^{-\frac{y^2}{4}}\right|<\varepsilon,$$

adódik (48)-ból

$$|f_n(y)-e^{-\frac{y^2}{4}}|\leqq 2\varepsilon+$$

$$+\sum_{\nu\leqq\omega}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{y}{2}\right|^{2\nu}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right)\right\}. \quad (49)$$

De mivel $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$-re

$$\log(1-t)>-2t,$$

tehát $n>4\omega$-ra

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right)>e^{-2\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{2\nu-1}{n}\right)}=e^{-\frac{2\nu(2\nu-1)}{n}}.$$

Vagyis

$$0<1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu-1}{n}\right)<1-e^{-\frac{2\nu(2\nu-1)}{n}}<$$

$$<\frac{2\nu(2\nu-1)}{n}<\varepsilon e^{-\left|\frac{y}{2}\right|^2},$$

ha

$$n>\frac{2}{\varepsilon}\omega(2\omega-1)e^{\left|\frac{y}{2}\right|^2}.$$

Tehát, ha utóbbi teljesül, akkor (49)-ből

$$\left|f_n(y)-e^{-\frac{y^2}{4}}\right|\leqq 2\varepsilon+\varepsilon e^{-\left|\frac{y}{2}\right|^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{y}{2}\right|^{2\nu}<3\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges kis pozitív szám volt, azért a keresett limesz

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y}{2n}\right)^n H_n\left(\frac{n}{y}\right)=e^{-\frac{y^2}{4}}. \tag{50}$$

Megoldották: *Csima J., Hajnal A., Kántor S., Korányi Á., László Z., Pollák Gy., Szász F.*

Megjegyzés: Több versenyző nem vette észre, hogy a határátmenet nemcsak a (47) alatti egyes tagokra, hanem a tagok *számára* is vonatkozik. Vagyis az a tény, hogy egy *fix* tagszámú összeg határértékét az egyes tagok határértékeinek összege adja, itt nem alkalmazható minden további nélkül. Így következtetve az

$$a_n=\underbrace{\frac{1}{n}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{2}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{n}}_{n}$$

összeg határértéke $n\to\infty$-re 0 volna, pedig minden n-re valójában $a_n=1$.

A megoldásból következik, hogy az (50) limes-reláció az y-sík minden véges tartományában egyenletesen teljesül.

A feladat értelmére vonatkozólag a következőleg jegyezzük meg. Az (50)-formula úgy is írható, hogy fix y-ra és $n\to\infty$-re

$$H_n\left(\frac{n}{y}\right)\sim\left(\frac{2n}{y}\right)^n e^{-\frac{y^2}{4}}. \tag{51}$$

Ily módon tehát az n-ik $H_n(z)$ Hermite-polinomra a komplex sík

$$c_1 n\leqq|z|\leqq c_2 n \tag{52}$$

körgyűrűjében az (51) alatti aszimptotikus előállítás áll fenn, ahol $c_1, c_2, \ldots$ numerikus (tehát n-től független) állandók. Ez áll a fortiori a valós tengely (52)-nek megfelelő részére is. Tájékoztatásul jegyezzük meg, hogy a Hermite-polinomokra a valós tengelyen két aszimptotikus előállítás ismert. Az első a Fejér—Perron-féle, mely a valós tengelynek a $|z| \leqq c_3$ körbe eső részén ad $H_n(z)$-re jó közelítést. A másik, a Plancherel—Rotach-féle, a valós tengelynek az $|z| \leqq c_4 \sqrt{n}$ körébe eső szakaszán közelít jól. Az $|z| > c_4 \sqrt{n}$-nek megfelelő szakaszokon Szegőnek az orthogonális polinomokról szóló könyve 1939-ből semmi felvilágosítást nem ad, még a feladatok között sem; az (51) alatti egyszerű előállítás tehát e tényt legalább az (52) tartományban pótolja. Érdekes és nem jelentőségnélküli kérdés volna $H_n(z)$-re a hiányzó tartományokban asszimptotikus előállításokat találni.

7. feladat

Az adott t_1, t_2, t_3, t_4 számok mindegyike kisebb, mint a többi összege. Bizonyítandó, hogy van olyan tetraéder, melynek lapjai rendre t_1, t_2, t_3, t_4 területűek.

I. megoldás. A t-kre vonatkozó feltétel alapján van olyan torznégyszög, melynek oldalhosszai épp az adott t_ν-értékek. Ezen négyszög oldalait fogjuk fel, mint $\mathbf{a}_\nu$ vektorokat, ahol tehát az $\mathbf{a}_\nu$-k $|\mathbf{a}_\nu|$ hosszára

$$|\mathbf{a}_\nu| = t_\nu \qquad \nu = 1, 2, 3, 4, \tag{53}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4} \mathbf{a}_\nu = 0. \tag{54}$$

Ha

$$q = \sqrt{\frac{2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}} \quad (= \text{skaláris}), \tag{55}$$

akkor azt állítjuk, hogy azon tetraéder, melynek egyik csúcsa az origó és ebből kiinduló élvektorok

$$\mathbf{u}_1 = q \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{u}_2 = q \cdot \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_3 = q \cdot \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$$

kielégíti a követelményeket. Pl. az $\mathbf{u}_3$ és $\mathbf{u}_1$ vektorok által alkotott lap kétszeres területvektora

$$\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = q^2 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3). \tag{56}$$

De általában $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorokra, mint ismeretes,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a},$$

azaz jelen esetben

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$$

választással, mivel ezesetben

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

következik, hogy

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}\, \mathbf{a}_2,$$

ill. (56)-ból és (55)-ből

$$\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = 2\mathbf{a}_2. \tag{57}$$

Vagyis (53) alapján $\mathbf{u}_3$ és $\mathbf{u}_1$ által alkotott lap területe tényleg t_2 és hasonlóan látható be az is, hogy az origót tartalmazó másik két lap területe rendre t_3, ill. t_1. A negyedik lap területvektora

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2,$$

azaz (57)-ből, ill. (54)-ből

$$-2\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_4. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Ilyen módon tehát feladatunknak végtelen sok megoldása van, mert a kiindulási torznégyszög végtelen sokféleképp választható. Mivel viszont minden tetraédernél a területvektorok összege 0, tehát ily módon a feladat *összes* megoldásait nyertük.

Fried Ervin

Megoldották az összes megoldások áttekintése nélkül: *Buzi K., Csima J., Hajnal A., Kálmán L., Kántor S., Kemény P., Kovács L., László Z., Molnár F., Pollák Gy.*

II. megoldás. Ismét az adott t_ν-kkel adjunk meg egy c_1 torznégyszöget, melynek oldalai rendre $t_1, \ldots, t_4$. Ennek oldalaira merőleges síkok meghatároznak egy A tetraédert; tekintsük ezek területvektorait. Ezek vektorösszege 0 lévén, ezekből is alakítható egy c_2 torznégyszög. c_1 és c_2 megfelelő oldalai nyilván parallelek; de ekkor, mint ismert, a négyszögek hasonlóak, azaz a megfelelő oldalak arányosak. De ez azt jelenti, hogy A-t alkalmasan felnagyítva a követelményeknek megfelelő tetraéderhez jutunk.

8. feladat

Van-e olyan euklideszi gyűrű, mely a valós számtest valódi része és melynek hányadosteste a valós számtest?

Megoldás. A válasz tagadó még abban az esetben is, mikor — az ismert definíciónál valamivel gyengébben — csak azt teszszük fel a gyűrűről, hogy minden, a nullelemtől különböző η eleméhez van oly $\varphi(\eta)$ nemnegatív egész és a gyűrű bármely két

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ eleméhez oly gyűrűbeli γ és δ, hogy

$$\alpha = \beta\gamma + \delta$$

úgy, hogy vagy $\delta = 0$, vagy

$$\varphi(\delta) < \varphi(\beta).$$

Ekkor u. i., mint ismeretes, minden gyűrűbeli $\eta \neq 0$ elem lényegileg egyértelműleg bontható fel véges sok felbonthatatlan elem szorzatára. Ebből a feladat állítása rögtön következik. Legyen u. i. V a valós test és tegyük fel, hogy ennek volna kívánt tulajdonságú P euklideszi részgyűrűje. Legyen π P-nek egy felbonthatatlan eleme, melyről feltehető, hogy pozitív. Ekkor $\sqrt{\pi} \in V$, azaz a feladat követelményei szerint

$$\sqrt{\pi} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \alpha, \beta \in P$$

ill.

$$\pi\beta^2 = \alpha^2 \tag{58}$$

α és β P-beli egyértelmű felbontásait behelyettesítve máris ellentmondáshoz jutottunk, mert π a baloldalon csak páratlan kitevőn szerepelhet, a jobboldalon pedig csak párosan.

Megoldották: *Erdős J., Hajnal A., Korányi Á., László Z., Pollák Gy.*

Megjegyzés. Mint látható, általánosabban az is igaz, hogy a valós számok V testét nem lehet előállítani, mint egyértelmű felbontással bíró gyűrű hányadostestét. Erdős Jenő dolgozatában azt is megmutatta, hogy a valós számok V teste nem állítható elő oly gyűrű hányadosteste gyanánt sem, melynek minden α eleméhez hozzárendelhető oly $\varphi(\alpha)$ egész, hogy $\varphi(0) = 0$, $\alpha \neq 0$-ra $\varphi(\alpha) > 0$ és tetszőleges α, β gyűrűelemekre $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$.

9. feladat

Ha $w = f(z)$ reguláris $|z| \leqq 1$-ben és a kép maximális húrhossza 1, akkor $0 \leqq r < 1$-re az $|z| \leqq r$ kör képében a maximális húr hossza $\leqq r$.

Megoldás. Legyen $0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi$-vel

$$d = \max|f(re^{i\varphi_1}) - f(re^{i\varphi_2})| = |f(re^{i\alpha}) - f(re^{i\beta})|, \tag{59}$$

φ_1 és φ_2 valósak és tekintsük $|z| \leqq 1$-re az itt reguláris

$$\varphi(z) = f(ze^{i\alpha}) - f(ze^{i\beta})$$

függvényt. Az $|z|=1$ kör kerületén a feltevés miatt $|\varphi(z)| \leqq 1$. Mivel $\varphi(0)=0$, tehát a Schwarz-lemma alapján $|z| \leqq 1$-ben $|\varphi(z)| \leqq |z|$, ill.

$$|\varphi(r)| \leqq r \tag{60}$$

ami (59) alapján épp a bizonyítandó $d \leqq r$ egyenlőtlenséget jelenti.

Ha $f(z)=c+ze^{i\gamma}$, γ valós, c komplex számok, akkor a tételben az egyenlőtlenségben az egyenlőség jele áll fenn. Az *összes* esetek feltárása, mikor az egyenlőség jele áll fenn, nem látszik könnyűnek.

Megoldották: *Hajnal A.*, *Korányi Á.*, *Pollák Gy.*

10. feladat

Egy pont végezzen bolyongó mozgást a síkon megadott szabályos háromszögrácson, úgy, hogy bárhonnan is érkezzen a pont a rács egy tetszőleges rácspontjába, egyforma valószínűséggel folytassa útját a rácspontból kiinduló 6 él mindegyikén. Bebizonyítandó, hogy ha a pont bolyongó mozgását minden határon túl folytatja, annak a valószínűsége, hogy előbb vagy utóbb visszatér kiindulási pontjába, 1.

Megoldás. A sík, melyen a bolyongó pont mozog, legyen a komplex sík, a háromszögrácsot alkossák az

$$l_0+l_1\omega+l_2\omega^2+l_3\omega^3+l_4\omega^4+l_5\omega^5 \tag{61}$$

alakú pontok, ahol az l_ν-k racionális egészek,

$$\omega=e^{\frac{\pi i}{3}}$$

és a pont induljon ki az origóból. Ha a pont z_ν-ből a

$$z_{\nu+1}=z_\nu+\omega^r$$

által adott pontba lép, mondjuk azt, hogy r-típusú lépést tett ($r=0, 1, 2, 3, 4, 5$). Legyen egy n-lépéses bolyongás olyan, hogy k_r drb. r-típusú lépés szerepel benne ($r=0, \ldots, 5$) és az n-ik lépés után a pont kezdeti helyzetébe tér vissza. Ekkor

$$\sum_{\nu=0}^{5} k_\nu=n \tag{62}$$

$$\sum_{\nu=0}^{5} k_\nu\omega^\nu=0 \tag{63}$$

ill. (63) valós és képzetes részeit 0-vá téve

$$2k_0+k_1-k_2-2k_3-k_4+k_5=0 \tag{64}$$

$$k_1+k_2-k_4-k_5=0. \tag{65}$$

Ha az n-lépésben való visszatérés valószínűsége P_n, akkor tehát

$$P_n=\frac{1}{6^n}\sum{}'\frac{n!}{k_0!\,k_1!\dots k_5!}, \tag{66}$$

ahol a vessző azt jelenti, hogy az összegezés a (62), (64) és (65)-t kielégítő nemnegatív $(k_0, k_1, \dots, k_5)$-értékrendszerekre terjesztendő ki. Ennek meghatározására tekintsük a

$$P_n(\vartheta,\varphi)=$$
$$=\frac{1}{6^n}\sum_{k_0+k_1+\dots+k_5=n}\frac{n!}{k_0!\,k_1!\dots k_5!}\left(e^{i\vartheta}\right)^{2k_0+k_1-k_2-2k_3-k_4-k_5}\left(e^{i\varphi}\right)^{k_1+k_2-k_4-k_5}$$

kétváltozós trigonometrikus polinomot; P_n nyilván ennek konstans tagja lesz. Nyilván

$$P_n(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{6^n}\sum_{k_0+k_1+\dots+k_5=n}\frac{n!}{k_0!\,k_1!\dots k_5!}\left(e^{2i\vartheta}\right)^{k_0}\cdot\left(e^{i(\vartheta+\varphi)}\right)^{k_1}\cdot\left(e^{i(\varphi-\vartheta)}\right)^{k_2}\cdot$$
$$\cdot\left(e^{-2i\vartheta}\right)^{k_3}\cdot\left(e^{-i(\vartheta+\varphi)}\right)^{k_4}\cdot\left(e^{i(\vartheta-\varphi)}\right)^{k_5}=$$
$$=\left(\frac{e^{2i\vartheta}+e^{-2i\vartheta}+e^{i(\vartheta+\varphi)}+e^{-i(\vartheta+\varphi)}+e^{i(\varphi-\vartheta)}+e^{-i(\varphi-\vartheta)}}{6}\right)^n=$$
$$=\left(\frac{\cos 2\vartheta+\cos(\varphi+\vartheta)+\cos(\varphi-\vartheta)}{3}\right)^n=\left(\frac{\cos 2\vartheta+2\cos\vartheta\cos\varphi}{3}\right)^n,$$

azaz

$$P_n=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos 2\vartheta+2\cos\vartheta\cos\varphi}{3}\right)^n d\vartheta\, d\varphi. \tag{67}$$

Kimutatjuk azon (ismert) segédtételt, hogy, ha Q_n jelenti annak valószínűségét, hogy a pont az n-ik lépésben ér *először* vissza az origóba, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a bolyongó pont 1 valószínűséggel visszatérjen az origóba, azaz, hogy

$$\sum_{n=2}^{\infty}Q_n=1 \tag{68}$$

legyen, az, hogy

$$\sum_{n=2}^{\infty}P_n=\infty \tag{69}$$

legyen. Nyilván

$$P_n = Q_n + Q_{n-2}P_2 + Q_{n-3}P_3 + \cdots + Q_2 P_{n-2}. \qquad (70)$$

Ha tehát

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n z^n = P(z), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} Q_n z^n = Q(z),$$

akkor (70) alapján, mivel $P(z)$ és $Q(z)$ nyilván $|z| < 1$-re regulárisak,

$$P(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n + Q_{n-2}P_2 + Q_{n-3}P_3 + \cdots + Q_2 P_{n-2}) z^n =$$
$$= Q(z) + Q(z)P(z),$$

azaz

$$P(z) = \frac{Q(z)}{1 - Q(z)}. \qquad (71)$$

Ha tehát (68) igaz, akkor Abel tételéből

$$\lim_{z \to 1-0} Q(z) = 1$$

azaz (71)-ből

$$\lim_{z \to 1-0} P(z) = +\infty$$

ami a P_ν-k pozitivitása miatt épp (69)-et adja. A fordított állítás analóg módon látható be; ezzel a segédtételt bebizonyítottuk és a feladatot a $\sum_{n=2}^{\infty} P_n$ sor divergenciájának kimutatására redukáltuk.

Mivel a P_n-k nemnegatívok, tehát elég a $\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}$ sor divergenciáját kimutatni. De ezt könnyű kimutatni. U. i. a (67) előállítás alapján mivel az integrandusz nemnegatív,

$$P_{2n} > \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \left(\frac{\cos 2\vartheta + 2\cos\vartheta \cos\varphi}{3} \right)^{2n} d\vartheta \, d\varphi.$$

Mivel a jelen ϑ- és φ-kre

$$\cos 2\vartheta > 1 - 2\vartheta^2 > 1 - \frac{1}{2n}$$

$$2\cos\vartheta \cos\varphi > 2\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) > 2\left(1 - \frac{\vartheta^2 + \varphi^2}{2}\right) > 2 - \frac{1}{2n},$$

tehát

$$P_{2n} > \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{4n}\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} > \frac{c}{n},$$

ahol c n-től nem függ. Így az állítás a harmonikus sor divergenciája miatt igazolva van.

Megjegyzés. Hajnal A. helyesen indult ki, a ΣP_n sor divergenciáját azonban nem tudta igazolni.

A mondottakból egyszerűen következik azon többetmondó tény is, hogy a bolyongás folyamán a pont 1 valószínűséggel tér vissza végtelen sokszor a kezdeti helyzetébe, sőt bármely más kiszemelt rácspontba.

Ha síkbeli háromszögrács helyett térbeli kockarácson bolyong a pont, akkor is minden rácspontból hat él indul ki és mégis (l. G. Pólya, Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz, Math. Annalen 84 (1921) 149—160.) az origóba való visszatérés valószínűsége 1-nél kisebb. Ennek oka az, hogy mivel jelen esetben a rács kétdimenziós, (62) mellett csupán (64) és (65)-nek, tehát két feltételnek kell teljesülnie, addig a háromdimenziós rács esetén ezek helyébe *három* egyenlet kerül, tehát a k_ν-k közül már csak kettő választható szabadon.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük.

Kitűzött feladatok

73. A projektív sík ponthalmazát konvexnek mondjuk, ha bármely két pontjával együtt tartalmazza e két pont összekötő szakaszainak legalább az egyikét. Bizonyítandó, hogy ha egy ponthalmaz konvex, akkor vagy ez a halmaz, vagy a kiegészítő halmaz tartalmazza egy egyenesnek minden pontját.

Czipszer János

74. Mutassuk meg, hogy a komplex síknak a képzetes tengellyel párhuzamos minden egyenesén a gamma-függvény abszolút értéke a valós tengelytől távolodva monoton fogy.

Turán Pál

75. A G csoport C centrumában csak az egységelem véges rendű, a G/C faktorcsoport Abel-féle és minden eleme véges rendű. Bizonyítandó, hogy G Abel-féle csoport.

Szele Tibor

Megoldott feladatok

50. feladat*. Adva van $n+2$ pont az egységsugarú n-dimenziós gömb felületén, s ezek között nincs kettő, melynek távolsága $\sqrt{2}$-nél kisebb. Bizonyítandó, hogy akkor legalább $2n$-féleképpen választható ki közülük kettő, melyeknek távolsága $\sqrt{2}$.

(Hajós György)

*V. ö. 20. és 35. feladat és megoldásaik (II. évf. 76—77. l.; III. évf. 94—95. l.)

I. megoldás. A feladat állítása így fogalmazható: Ha az n-dimenziós térben adott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+2}$ vektorok között nincs nullvektor, és skaláris szorzataik között nincs pozitív, akkor e skaláris szorzatok közül legalább $2n$ egyenlő 0-val. Ez az állítás $n=1$ esetben semmitmondó, $n=2$ esetben nyilvánvaló. Feltehető tehát, hogy $n>2$, és hogy az állítás $(n-1)$-re igaz.

Bontsuk fel az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+1}$ vektorokat $\mathbf{a}_{n+2}$-re merőleges és azzal párhuzamos komponensekre: legyen $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$, ahol $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{a}_{n+2}$ és $\mathbf{c}_i \parallel \mathbf{a}_{n+2}$. Minthogy $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{n+2} \leqq 0$, a $\mathbf{c}_i$ komponensek — amennyiben 0-tól különböznek — mind $\mathbf{a}_{n+2}$-vel ellentétes irányúak. Ezért $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j \geqq 0$ $(i, j < n+2)$.

Ha a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n+1}$ vektorok között van nullvektor, pl. $\mathbf{b}_{n+1} = 0$, akkor az $\mathbf{a}_{n+1}$ és $\mathbf{a}_{n+2}$ vektorok párhuzamosak és ellentétes irányúak. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok mindegyike merőleges e két vektorra, hiszen különben egyikükkel hegyes szöget alkotna, pozitív skaláris szorzatot adna. Így $2n$ merőleges vektorpárhoz jutottunk.

Ha az $\mathbf{a}_{n+2}$-re merőleges $(n-1)$-dimenziós térben elhelyezkedő $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n+1}$ vektorok között nincs nullvektor, akkor az indukciós feltevés alapján kiválasztható közülük $(2n-2)$-féleképpen két egymásra merőleges vektor. Ha $\mathbf{b}_i$ és $\mathbf{b}_j$ merőleges egymásra, akkor $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{a}_j$ is merőleges, hiszen egyrészt $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \leqq 0$, másrészt $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i\mathbf{b}_j + \mathbf{c}_i\mathbf{c}_j = \mathbf{c}_i\mathbf{c}_j \geqq 0$, tehát szükségképpen $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = \mathbf{c}_i\mathbf{c}_j = 0$. További két merőleges vektorpárhoz jutunk, ha meggondoljuk, hogy $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j = 0$ teljesülése esetén a párhuzamos $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{c}_j$ vektorok egyike nullvektor. Kell tehát, hogy a $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n+1}$ vektorok között legalább két nullvektor legyen, mert ha csak egy nullvektor volna közöttük, akkor $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j = 0$ csak n esetben teljesülhetne, márpedig ez $2n-2$ esetben teljesül, és $n>2$ miatt $n<2n-2$. Minthogy $\mathbf{c}_i = 0$ esetén $\mathbf{a}_i$ merőleges $\mathbf{a}_{n+2}$-re, további két merőleges vektorpárhoz jutottunk így. Ezzel igazoltuk, hogy a vizsgált esetben szintén van összesen legalább $2n$ merőleges vektorpár.

Hosszú Miklós

II. megoldás. A feladat állításán túlmenően azt bizonyítjuk, hogy az $n+2$ pont két csoportba sorolható úgy, hogy mindegyik csoportban legalább két pont van, továbbá bármely két, más-más csoportba tartozó pont távolsága $\sqrt{2}$. Ebből a feladat állítása nyilvánvalóan következik.

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$ esetben nincsenek a feltételt kielégítő pontok. $n=2$ esetben állításunk nyilván igaz. Feltesszük, hogy állításunk $(n-1)$-re igaz.

Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_{n+2}$ az adott pontok. Legyen Q a P_{n+2}-vel átellenes gömbi pont. Feltehetjük, hogy Q nem szerepel az adott pontok között, mert különben P_{n+2} és Q alkothatja az egyik csoportot, a többi a másikat, és állításunk közvetlenül belátható. Jelölje $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ a $P_i P_{n+2}$ főkörívnek azt a pontját, amelyre $Q_i P_{n+2} = \sqrt{2}$.

A $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ pontok távolságainak egyike sem lehet $\sqrt{2}$-nél kisebb. Ha ugyanis ellenkező esetben $Q_i Q_j < \sqrt{2}$ volna, akkor ebből a QQ_iQ_j gömbháromszög oldalain elhelyezkedő P_iP_j pontokra nézve $P_iP_j < \sqrt{2}$ adódnék (v. ö. 35. feladat I. megoldása). Minthogy a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ pontok egy $(n+1)$-dimenziós egységgömbnek pontjai, indukciós feltevésünk értelmében állításunknak megfelelő két csoportba sorolhatók. Jelentsen a következőkben Q_i és Q_j két, más-más csoportba tartozó pontot.

A QQ_iQ_j gömbháromszög minden oldala derékszög. Ennek oldalain helyezkedik el a P_i és P_j pont, és tudjuk, hogy $P_iP_j \geqq \sqrt{2}$. Ez csak úgy lehetséges, hogy vagy P_i azonos Q_i-vel, vagy P_j azonos Q_j-vel, és $P_iP_j = \sqrt{2}$. Így tehát a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ pontoknak csoportokba sorolásával a $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ pontokat is állításunknak megfelelő két csoportba soroltuk.

A P_{n+2} pont is besorolható e csoportnak valamelyikébe. Ha ugyanis P_{n+2} nem sorolható az első csoportba, mert a második csoport valamely P_j pontjára $P_jP_{n+2} > \sqrt{2}$, akkor az első csoport minden P_i pontjára nézve a bizonyítottak szerint $P_i = Q_i$ miatt $P_iP_{n+2} = \sqrt{2}$. Ezért ekkor P_{n+2} a második csoportba sorolható.

Sarkadi Károly

III. megoldás. Bizonyos vektorok között fennálló lineáris összefüggést *redukáltnak* mondunk akkor, ha az összefüggésben szereplő vektorok közül bármelyiket elhagyva a maradó vektorok lineárisan függetlenek. Nyilvánvaló, hogy lineárisan összefüggő vektorok közül (szükség esetén) egyesek elhagyhatók úgy, hogy a maradó vektorok között redukált összefüggés álljon fenn.

Mutassanak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+2}$ vektorok az adott pontokhoz vezető sugarak irányába. E vektorok páronkénti skaláris szorzatai között a feladat kirovása miatt nincs pozitív.

1. segédtétel. A $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+2}$ vektorok között fennálló redukált összefüggés együtthatói egyező előjelűek. — Tegyük fel ugyanis, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok redukált összefüggése ellentmond állításunknak, tehát pozitív együtthatókkal

$$(1) \qquad \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{a}_i = \alpha_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k \quad (1 \leqq i < k)$$

összefüggés áll fenn. $\mathbf{v}$ két kifejezését skalárisan összeszorozva $\mathbf{v}^2$

számára nem-pozitív érték adódik. Ezért csak $\mathbf{v}=0$ mellett volna lehetséges, ami viszont az összefüggés redukáltsága miatt lehetetlen.

2. segédtétel. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+2}$ vektorok között fennálló redukált összefüggésben szereplő vektorok a többi vektorra merőlegesek. — Ha ugyanis

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k = 0$$

redukált összefüggés, akkor — mint láttuk — $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív számok. Ha tehát az $\mathbf{a}_j$ vektorra $(j > k)$ az $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ szorzatoknak $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nem mindegyike volna 0, akkor az összefüggés baloldalát $\mathbf{a}_j$-vel szorozva negatív eredmény adódnék, ami lehetetlen.

3. segédtétel. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+2}$ vektorok között fennálló két, lineárisan független redukált összefüggésben csupa különböző vektor szerepel. — Ellenkező esetben ugyanis az egyik összefüggésben szereplő vektoroknak egy csoportja nem szerepel, a többi meg szerepel a másik összefüggésben is. A vektoroknak e két csoportját két oldalra gyüjtve az összefüggést (1) alakjában írhatjuk. A két oldal vektorai a 2. segédtétel miatt páronként merőlegesek, ezért a két oldal összeszorzásával $\mathbf{v}^2 = 0$, azaz $\mathbf{v} = 0$ adódik, ami az összefüggés redukáltsága miatt lehetetlen.

Az n-dimenziós térben adott $n+2$ vektor között fennáll lineáris összefüggés, tehát egy R_1 redukált összefüggés is. Hagyjuk el a vektorok közül az R_1-ben szereplő vektorok egyikét. A maradó $n+1$ vektor között is fennáll lineáris összefüggés, tehát egy R_2 redukált összefüggés is. A 3. segédtétel szerint R_1-ben és R_2-ben más-más vektorok szerepelnek. Ebből következik, hogy az adott $n+2$ vektor közül legalább kettő szerepel és legalább kettő nem szerepel R_1-ben. Minthogy a 2. segédtétel szerint a vektoroknak e két csoportja egymásra páronként merőleges, vektoraink közül legalább $2n$ merőleges vektorpár választható ki.

Hajós György

Az 50. feladat megoldását beküldötték még *Corradi Keresztély, Császár Ákos, Czipszer János, Gehér László, Hajnal András, Szele Tibor.*

51. feladat. Mutassuk ki, hogy minden n természetes számra

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(Turán Pál)

I. megoldás. A vizsgált kifejezést a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{n+k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 x^{n+k}dx=$$

$$=\int_0^1 x^n\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k\right]dx=$$

$$=\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx.$$

Ennek az integrálnak értéke viszont a béta-függvény értelmezése szerint

$$\mathrm{B}(n+1,n+1)=\frac{[\Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)}=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Ugyanehhez az eredményhez sorozatos parciális integrálással is eljuthatunk.

Lipták József

II. megoldás. Parciális törtekre való bontással

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x+k+1},$$

hiszen $1/(x+k+1)$ együtthatóját megkapjuk, ha a baloldali tört nevezőjéből az $x+k+1$ tényezőt elhagyjuk, és ezután az $x=-k-1$ helyettesítést alkalmazzuk.

A feladat állítása a bizonyított azonosságnak $x=n$ helyettesítéssel adódó speciális esete.

Takács Lajos

Az 51. feladat megoldását beküldötték még *Aczél János, Balázs János, Császár Ákos, Corradi Keresztély, Darkó Béla, Gehér László, Hajnal András, Hosszú Miklós, Kővári Tamás, Makai Endre, Móritz Péter, Szele Tibor, Szüsz Péter, Takács Lajos* (további két megoldást), *Tekse Kálmán, L. Ziermann Margit.*

Megjegyzés. A feladat állítása a következő alakban írható

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{n+k+1}\binom{n+k}{n}=1.$$

Ez viszont

$$\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i\binom{2n+1}{i}\binom{i-1}{n}=0$$

alakban írható, hiszen ebben az összegben az $i=1, 2, \ldots, n$ értékéhez 0 értékű tagok tartoznak. Ez az átalakítás mutatja, hogy feladatunk a 46. feladatnak (megoldása III. évf. 180—183. l.) az a speciális esete, amikor k, n, l helyén rendre $2n+1, -1, n$ szerepel.

Ez a megjegyzés csak akkor helytálló, ha meggondoljuk, hogy a 46. feladat azonossága negatív n értékekre is fennáll. Ha a $\binom{p}{q}$ binomiális együttható értéke nem-negatív egész q mellett $p(p-1)\cdots(p-q+1)/q!$, viszont negatív egész q mellett értéke 0, akkor a 46. feladat azonossága tetszőleges nem-negatív egész k, egész l, és valós n értékre fennáll. A feladat I. és III. megoldása változatlanul alkalmas ennek bizonyítására. A II. megoldás is alkalmazható, ha abban polinom helyett egy közben konvergens hatványsorról beszélünk. (Itt említjük, hogy a 46. feladat I. megoldásában az utolsó kitevő k helyett helyesen $k+1$, az utolsóelőtti egyenlőségjel után pedig hiányzik a negatív előjel.)

Megjegyzésünk azt is mutatja, hogy a 46. feladat mondott három megoldása megfelelő módosítással az 51. feladat megoldásának bizonyítására is alkalmazható.

Szerk.

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp., V. Reáltanoda-u. 13—15). A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDA-ROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Kitűzésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri.

Kitűzött példák

48. Az $ABCD$ trapéz AB szára mint átmérő fölé rajzolt kör érintse a CD szárat egy E pontban. Bizonyítsuk be a következőket:

a) A CD szár mint átmérő fölé rajzolt kör is érinti az AB szárat. (Legyen az érintési pont F.)

b) $AE \| FC$ és $BE \| FD$.

(Surányi János)

49. Általánosítsuk a **48.** példát arra az esetre, amikor a trapéz egyik szára mint átmérő fölé rajzolt kör metszi a másik szárat. (Mit mondhatunk ki ekkor?)

(Surányi János)

50. Bizonyítsuk be, hogy ha két tetraéder olyan helyzetű, hogy az egyiknek a csúcsaiból a másiknak a lapjaira bocsátott merőlegesek egy pontban metszik egymást, akkor ez a tulajdonság kölcsönös.

51. Oldjuk meg az I. gimnáziumi matematikakönyv következő feladatát: „Megrajzoltuk egy háromszög három (egy ponton áthaladó) szögfelező egyenesét és egy oldalának egyik pontját. Hogyan szerkeszthető meg ezekből a háromszög?“ (Az 1949. évi kiadásban a 348. lapon a 13. feladat.) Bizonyítsuk be a talált szerkesztés helyességét!

52. Oldjuk meg a tetszésszerinti oldalszámú sokszögekre vonatkozó, az előbbivel analóg feladatot!

53. Szerkesszünk sokszöget, ha adva vannak (helyzetüket tekintve) az oldalfelező merőlegesei!

54. Az 1953. évi Schweitzer Miklós emlékverseny második feladatával kapcsolatban * határozzuk meg a párok maximális számát, ha a „tábla" $(2k_1+1)$-soros és $2l_1$-oszlopos.

(Kárteszi Ferenc)

55. Ugyane feladattal kapcsolatban, ha a „tábla" $(2k_1+1)$-soros és $(2l_1+1)$-oszlopos, határozzuk meg a párok maximális számát, ha a fehér bábuk száma $2k_2l_2+k_2+l_2+1$, és a feketéké $2k_2l_2+k_2+l_2$.

(Kárteszi Ferenc)

Megoldott példák

32. példa. Keressük meg a hibát (vagy hibákat) a következő „bizonyításban":

„A tetraéder térfogatképletére következő gondolatmenet vezet: Kockába három, a kockával egyenlőalapú és magasságú négyzetes gúla fér. A „kockába írt" gúlára jellemző, hogy öt csúcspontja megegyezik a kocka nyolc csúcspontja valamelyikével. 1. A kockában hézagtalanul éppen három gúla van. 2. A gúla csúcspontjai azonosak a kocka valamely öt csúcspontjával. 3. A gúla alapterülete és a hozzátartozó magasság a bennfoglaló test alapterületével és az ahhoz tartozó magassággal egyenlő. Ez a három tény nem fog változni akkor sem, ha a kocka éleit (és vele együtt a kockát) egy vagy több irányban nyújtjuk vagy rövidítjük. Mivel a ... párhuzamos oldalú hatlap a leírt módon keletkezett a kockából, ezért a bennefoglalt eltorzult gúlák mindegyike a párhuzamos oldalú hatlap térfogatának harmadrésze..."

Megoldás. A bizonyításnak (kisebb pontatlanságokra nem is nézve) alapvető hibája az, hogy *semmit sem bizonyít.* Abból indul ki, hogy a „kockába három, a kockával egyenlőalapú és magasságú négyzetes gúla fér". A lényeges azonban itt az — és erről szó sincs a szövegben — hogy e három gúla *egybevágó*, és *ezért* egyenlő a gúla köbtartalma a vele közös alapterületű és magasságú kocka köbtartalmának harmadrészével. A kocka megfelelő meg-

* Lásd lapunk e számának 125. lapján.

nyújtása után keletkezett párhuzamos oldalú hatlapban foglalt eltorzult gúlák viszont már nem egybevágóak. Ezért azt a tényt, hogy a gúla köbtartalma harmada a párhuzamos oldalú hatlap köbtartalmának, külön kell bizonyítani. (Eudoxus tétele.) A fenti „bizonyítás" ezt figyelmen kívül hagyja.

Hammer Endre

Megoldotta még: BALATONI FERENC, BUKOVSZKY FERENC, KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV, SCHMIDT ELIGIUS.

34. példa. Ábrázoljuk a következő implicit függvényeket:

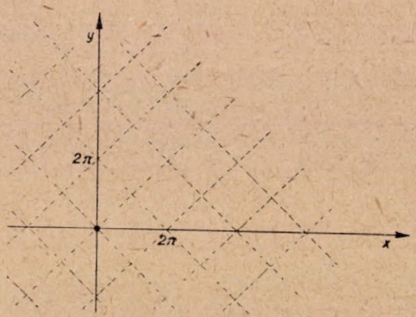
a) $\cos x = \cos y$; *b*) $[\sin x] = [\sin y]$.

($[a]$ a legnagyobb, a-nál nem nagyobb egész számot jelenti.)

Megoldás. Az ábrázolásban csak a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ és $0 \leqq y \leqq 2\pi$ értékeket vesszük figyelembe, mert a sinus- és cosinus-függvények 2π szerinti periodicitása miatt az ebben a négyszögben nyert ábrát kell csak párhuzamosan eltolni az x és y tengelyek mentén (velük párhuzamosan) $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$-vel, és megkapjuk a kívánt függvényképet.

a) Ismeretes, hogy x és $2\pi - x$ cosinusa egyenlő, és csak ezeké egyenlő $0 \leqq x \leqq 2\pi$ esetén. Ebből következik, hogy a $\cos x = \cos y$ egyenletet az $x = y$ és $2\pi - x = y$ egyenesek pontjainak koordinátái kielégítik, és csak ezek elégítik ki (1. ábra).

Kántor Sándor

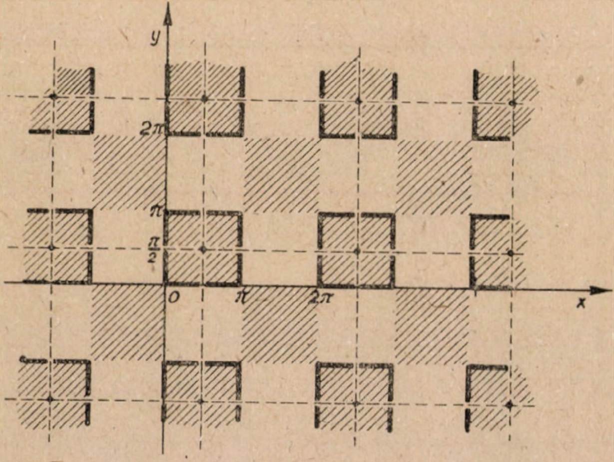


1. ábra

Megoldotta még: AMBRÓZY GÉZA, ÁDÁM ANDRÁS, BALATONI FERENC, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, KOVÁCS LÁSZLÓ, SCHMIDT ELIGIUS.

$$b)\quad [\sin x] = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leqq x < \frac{\pi}{2} \text{ és } \frac{\pi}{2} < x \leqq \pi, \\ 1, & \text{ha } x = \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \text{ha } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Hasonló megállapítás tehető $[\sin y]$-ra. Az egyenlet mindkét oldalán 0 áll tehát a $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π), $(0, \pi)$ zárt négyzet pontjaiban, a középvonalak kivételével, 1 áll ennek a négyzetnek a középpontjában, végül -1 áll a (π, π), $(2\pi, \pi)$, $(2\pi, 2\pi)$ $(\pi, 2\pi)$ négyzet belső pontjaiban. Ezek a pontok együttvéve alkotják tehát a felírt függvény képét (vagy ami ugyanaz, a felírt egyenlet megoldásainak halmazát) a $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(2\pi, 2\pi)$, $(0, 2\pi)$ négyzetben, és hasonlóképpen, 2π többszöröseivel eltolva, a sík többi pontjaiban (2. ábra).



2. ábra

Bukovszky Ferenc

Megoldotta még: Ambrózy Géza, Ádám András, Balatoni Ferenc, Kántor Sándor, Kovács László, Reményi Gusztáv, Schmidt Eligius.

35. példa. Adva van a térben két párhuzamos egyenes. Hogyan helyezkednek el azok az egyenesek, amelyek ettől a két egyenestől egyenlő távol vannak?

Megoldás. Legyen a két adott egyenes a és b. Egy rájuk merőleges K síkra vetítsük merőlegesen a tér egyeneseit. a és b képe az A és B pont.

A feltételt kielégítő egyenes vetületétől A és B nyilván egyenlő távol van. Ha a vetület pont, akkor ezek és csak ezek vannak rajta AB felező merőlegesén. Ha a vetület egyenes, akkor AB egyenessel párhuzamos vagy AB felezőpontján áthaladó egyenes ilyen, és csak ez ilyen.

Tehát a követelmény kielégítésének szükséges és elegendő feltétele: 1. Vagy legyen benne az a, b sávját felező e egyenesen át a, b síkjára merőlegesen haladó síkban. 2. Vagy legyen e-vel közös pontja. 3. Vagy legyen benne az a, b síkjával párhuzamos síkban, de ne legyen párhuzamos a, b-vel.

Kántor Sándor

Megoldotta még: BALATONI FERENC, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, FRIED VILMOS, KOVÁCS LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV.

36. példa. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaédernek nincs hatnál többoldalú síkmetszete.

(Surányi János)

Megoldás. A szabályos oktaéder mindegyik élét tartalmazza 3 egymásra merőleges síknégyzet. A metszősík minden síknégyszögnek legfeljebb két oldalát metszheti (vagy mindegyik oldalát tartalmazza, de akkor a metszési idom négyzet). Mivel pedig három síknégyszög metszéséről van szó, a metszéspontok maximális száma $3 \cdot 2 = 6$.

Schmidt Eligius

Megoldotta még: AMBRÓZY GÉZA BALATONI FERENC, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV.

Hibaigazítás. A 22. példa megoldásának (IV. évf. 2—3. szám, 192. old.) első mondata helyesen így hangzik: Tükrözzük az egyenesnek a lapszög éléből kiinduló véges szakaszát a lapokra és az élre. A megoldás beküldőjénél ez a helyes szövegezés szerepelt, a hibás szöveg két megoldás helytelen kombinációjából adódott.

TÁRSULATI ÉLET

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadásai.

1953 szeptember 12. *Mikolás Miklós:* „A Fermat-féle sejtésről.“ (Középiskolai délután.)

1953 október 3. *Aczél János:* „Korovkin és Perelman módszerei szélsőértékfeladatok megoldására.“ (Középiskolai délután.)

1953 október 14. *Évadnyitó klubest.* *Hajós György* és *Rényi Alfréd* beszámoltak a lengyel matematikai kongresszusról.

1953 október 30. *Császár Ákos:* Többváltozós függvények nívóhalmazainak struktúrája.
Egy $f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) hely környezetében való viselkedését abból a szempontból vizsgálta az előadó, hogy az $[f(x, y) < f(x_0, y_0)]$ stb. nívóhalmazoknak az (x_0, y_0) pontból kiinduló körcikkekkel közös része hozzátartozik-e egy bizonyos megszorításoknak alávetett, $\mathfrak{N}$ halmazrendszerhez, s megmutatta, hogy az (x_0, y_0) pontból kiinduló különböző körcikkekben az említett nívóhalmazok struktúrájának bizonyos kombinációi csak kivételesen léphetnek fel.

1953 november 14. *Varga Tamás:* Egyenletek ekvivalenciájáról. (Középiskolai délután.)

1953 november 21. *Szele Tibor:* Egy geometriai módszer a gyűrűelméletben. Előadó ismertette azt az új geometriai módszert, amelyet E. Noether és N. Jacobson dolgozott ki az első Wedderburn—Artin-féle gyűrűelméleti struktúratétel igen egyszerű direkt bizonyítására. A módszer továbbfejlesztésével megmutatta, hogy ez alkalmas a második Wedderburn—Artin-féle struktúratétel bizonyítására is, más mélyebb segédeszközök igénybevétele nélkül.

1953 december 5. *E. Marczewski* (Wroclaw): Sur le théorème ergodique aléatoire.
Kakutani 1950-ben (Second Berkeley Symposium on

Math. Stat. and Probability) közölte a következő, általa sztohasztikus ergodikus tételnek nevezett tételt: Legyen M egy X tér részhalmazaiból képezett Borel-féle halmaztest, m pedig egy teljesen additív mérték, amely M elemeire van értelmezve; legyen továbbá $f(x) \in L(m)$, $x \in X$, és $\varphi_t(x)$ $(m(x) = 1)$ egy mértéktartó transzformáció-sereg, ahol t eleme egy T térnek, amelynek egy Borel-féle P halmaztestén szintén értelmezve van egy p mérték $(m(T) = 1)$, legyen továbbá $\varphi_t(x)$ mérhető $X \times T$-ben, akkor létezik egy oly $\bar{f}(x) \in L(m)$, hogy az $X \times T \times T \times \ldots$ térben majdnem mindenütt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{x} f(\varphi_{t_i} \ldots \varphi_{t_1}(x)) \to \bar{f}(x).$$

Később Pitt kimutatta, hogy ha a $\varphi_t(x)$ transzformációk felbonthatatlanok, vagyis annak a halmaznak a mértéke, amely önmagába megy át, csak 0 vagy 1 lehet, akkor $\bar{f}(x) = \text{const.}$ majdnem mindenütt az X térben.
Előadó ismertette az előbbi szerzők hosszadalmasan bizonyított tételeinek Ryll—Nardzewskitől származó egyszerű bizonyítását, amely Jessen egy tételére és egy Gladisz-féle lemmára támaszkodik.

1953 december 5. *Obláth Richárd:* Egy geometriai módszer: az inverzió. (Középiskolai délután.)

1953 december 12. *M. Fisz* (Warszawa): The limiting distributions of some sums of random variables.
Előadó a következő tételt bizonyította be:
Legyen

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{nk} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ahol az Y_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak,

$$P(Y_{nk} = a_{nl}) = p_{nl} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r)$$

ahol $r \geqq 2$; $0 \leqq p_{nl} \leqq 1$; $\sum_{l=1}^{r} p_{nl} = 1$ és a_{nl}, valamint p_{nl} n-nek tetszőleges függvényei. Ha valamely A_n és $B_n \neq 0$ konstans sorozatra a

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_{kn}}{B_n} - A_n$$

valószínűségi változók $F_n(z)$ eloszlásfüggvénysorozata minden olyan z pontban, amely a nem-szinguláris $F(z)$ eloszlásfüggvénynek folytonossági pontja konvergál $F(z)$-hez, akkor $F(z)$ vagy s ($0 \leqq s \leqq r-2$) független Poisson-eloszlású változó és v ($v=0$ vagy 1) normális eloszlású változó összegének az eloszlásfüggvénye vagy $r-1$ független Poisson-eloszlású változó összegének az eloszlása. A tétel néhány speciális esetét is tárgyalta az előadó, továbbá foglalkozott a tétel kiterjesztésével arra az esetre, amikor az Y_{nk} valószínűségi változók végtelen sok különböző értéket vehetnek fel.

1953 december 19. *Fuchs László:* Egy dualitási probléma a csoportelméletben.
Szele Tibor és Kertész Andor vetették fel azt a kérdést, hogy melyek azok a G és H csoportpárok, amelyekre teljesül: G minden faktorcsoportjához található H-ban egy vele izomorf alcsoport és H minden alcsoportjához G-nek egy ezzel izomorf faktorcsoportja. Szele, Kertész és az előadó megoldották e kérdést megszámlálható Abel-csoportokra. Az előadó ismertette a tetszőleges számosságú Abel-csoportok esetére vonatkozó eredményeit, részletesebben kifejtve a p-csoportok esetét.

1953 december 21. *Rédei László:* „A gyűrű holomorfjai".
(1. Szeged, szeptember 26.)
A félév folyamán kéthetenként „Geometriai szélsőértékfeladatok" címmel szemináriumot vezetett *Fejes-Tóth László.* A szemináriumon a következő anyagot dolgozták fel: Az izoperimetrikus egyenlőtlenség és különböző élesítéseinek elemi bizonyításai a belső paralleltartományok, illetőleg Poincaré egy tételének felhasználásával (Santaló integrálgeometriai bizonyításának elemi változata). Az integrálgeometria alapfogalmainak és különféle izoperimetrikus egyenlőségeknek ismertetése.

A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi tagozatának előadásai

1953 február 15. *Szász Gábor:* A függvénytan tanítása. (Pedagógus előadás középiskolai tanárok részére.)

1953 február 21. *Szendrei János:* A Fibonacci számokról. (Középisk. délután.)

1953 február 24. *Mosonyi Kálmán:* Elemi szélsőértékfeladatok a szovjet iskolákban. (Pedagógus előadás, általános iskolai tanárok részére.)

1953 március 3. *Horváth Jánosné:* A matematikusi hivatásról (Középisk. délután.)

1953 március 5. *Rábai Imre:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai délután Hódmezővásárhelyen.)

1953 március 7. *Szőkefalvi-Nagy Béla:* M. A. Najmark egy tétele és ennek egy alkalmazása.
Előadó bizonyítással együtt ismertette M. A Najmark következő tételét: Ha $\{F(\lambda)\}$ a H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak a λ valós paramétertől függő olyan serege, amely „általánosított spektrálsereg", azaz amelyre $F(\lambda) \leqq F(\lambda')$, ha

$$\lambda < \lambda', \ F(\lambda+0) = F(\lambda), \ F(\infty) = 1, \ F(-\infty) = 0,$$

akkor van olyan H_+ Hilbert-tér, amelynek H altere, és H_+-ban van olyan közönséges (tehát vetítésekből álló) $E_+(\lambda)$ spektrálsereg, hogy

$$F(\lambda) = P_+ E_+(\lambda),$$

ahol P a H-ra való vetítést jelenti. Előadó e tétel alapján egyszerű bizonyítást ad Kadison ú. n. „általánosított Schwarz-féle tétel"-ére, amely így szól: Ha $A_0, A_1, A_2, \ldots$ a H Hilbert-tér korlátos sorozatainak egy olyan sorozata, hogy a következő két feltétel teljesül:
(α) valahányszor

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \geqq 0$$

a valós x-tengely egy rögzített X kompakt részhalmazán, akkor

$$c_0 A_0 + c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_n A_n \geqq 0$$

(β) $$\|A_0\| \leqq 1,$$

akkor áll a következő egyenlőtlenség:

$$A_1^2 \leqq A_2.$$

Bebizonyítja azt is, hogy itt egyenlőség csak abban az esetben áll, ha

$$A_k = A_i^1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

1953 március 14. *Horváth Jánosné:* Miért tanulunk matematikát. (Középiskolai délután.)

1953 március 21. *Szendrei János:* Miért tanulunk matematikát. (Középiskolai délután Makón.)

1953 március 28. *Paár Piroska:* Matematikai olimpiászok. (Középisk. délután.)

1953 március 28. *Rényi Alfréd:* Új szovjet és hazai eredmények a rendezett minták elméletében.

Előadó ismertette a rendezett minták elméletében, különösen az empirikus és elméleti eloszlásfüggvények összehasonlítására vonatkozólag a Szovjetunióban elért legújabb eredményeket, továbbá azokat az eredményeket, amelyeket a szovjet matematikusok munkáihoz csatlakozva a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetében előadó és munkatársai elértek. [lásd ezen eredményekre vonatkozólag Rényi A. A rendezett minták elméletéről c. dolgozatát (MTA, III. Oszt. Közleményei III. 4, (1953) 467—503).

1953 március 24. *Szendrei János:* Geometriai feladatok a szovjet oktatásban. (Pedagógus előadás általános iskolai tanárok részére.)

1953 április 18. *Szász Gábor:* Az asszociativitásfeltételek függetlensége. Adott S halmazból képezzük az összes lehetséges S^* multiplikatív struktúrákat, s nevezzük az $(xy)z = x(yz)$ $(x, y, z \in S)$ egyenleteket az S halmaz asszociativitásfeltételeinek. Az előadó kimutatta, hogy ha a szorzásra semmiféle kikötést nem teszünk, akkor legalább négyelemű S-re az asszociativitásfeltételek függetlenek. A kommutativitás feltevése esetén is, ugyancsak legalább négyelemű S-re, az asszociativitásfeltételek független teljes rendszerének előállításához csak azok az asszociativitásfeltételek hagyhatók el, amelyek — nem egészen pontos kifejezéssel — a kommutativitás miatt triviálisan törölhetők. A négynél kevesebb elemű halmazok esetén fellépő kivételes helyzettel az előadó szintén részletesen foglalkozik.

1953 május 16. *Rédei László:* A négyzetes maradékok elméletéről. Kevésszámú, könnyen megadható kivételtől eltekintve minden p prímszámhoz található legalább egy olyan pozitív négyzetes maradék, amely $\sqrt{p}$ alatt van. Az előadás ennek a tételnek új, egyszerű, elemi eszközökkel való bizonyítását tartalmazta. Ismeretes a tételnek „majdnem minden“ p-re vonatkozó Vinogradov-féle élesítése. Elemi, de bonyolult eszközökkel A. Brauer is nyert Vinogradovénál kevésbé éles eredményeket, s egyszersmind felső korlátot adott meg a kivételes p-kre. A. Nagell a fenti tételeknek egy részét szintén nyerte elemi, de kevésbé egyszerű úton.

1953 június 10., 11., 12. *Medgyessy Pál:* Kevert valószínűség-eloszlások felbontása összetevőikre.

Előadó a következő problémát tárgyalta 3 előadásban: Ha egy kevert valószínűségi eloszlás komponensei stabilis valószínűség-sűrűségfüggvények, a komponensek jellemző paraméterei az eredő Fourier-transzformáltja segítségével tetszőleges pontosan meghatározhatók. Ezenkívül részletesen foglalkozott a speciális esetet képező Gauss eloszlással („Gauss-analízis"), a gyakorlati kivitellel és az alábbi kérdésekkel:

Az egyes vonalaktól származó komponensek megállapítása. Spektrumok intenzitáseloszlása az egyes vonalaktól származó Gauss eloszlási intenzitáseloszlások szuperpozíciója; az eredőből a komponensek meghatározása a június 10-i előadásban ismertetett módszerrel elvégezhető. A gyakorlati kivitel Fourier analízisre és szintézisre vezethető vissza.

Spektrumok intenzitáseloszlásának feldolgozása speciális esetekben.

A június 11-i előadásban említett módszerek alkalmazhatóságának megbeszélése adott spektroszkópiai intenzitásfelvételek kapcsán.

1953 szeptember 5. *Szele Tibor:* Direkt felbonthatatlan csoportok. Előadó ismerteti Pontrjagin, Kuros, Malcev és Baer ama legújabb eredményeit, amelyek direkt felbonthatatlan torziómentes Abel-féle csoportokra vonatkoznak, s bebizonyít egy olyan új tételt, amely magában foglalja ezeket az eredményeket. Ez a tétel úgy szól, hogy a p-adikus egész számok additív csoportjának bármely endomorfizmusát egy p-adikus egész sámmal való szorzás indukálja. Ismerteti továbbá az előadó azokat az új eredményeit is, amelyek valószínűvé teszik azt a sejtését, mely szerint Abel-féle csoport csak az esetben lehet direkt felbonthatatlan, ha a csoport számossága nem nagyobb kontinuumnál.

1953 szeptember 26. *Rédei László:* A gyűrű holomorfjai. A csoportelméletből jólismert karakterisztikus részcsoport és holomorf fogalmak átültethetők a gyűrűelméletbe, miközben a csoport-, illetve gyűrűelméleti „holomorfelméletek" között szoros analógia érvényesül. Újszerű jelenség, hogy a gyűrűnek általában több holomorfja van. Speciálisan a prímideálok karakterisztikusok, továbbá az egységelemes gyűrűk összes ideáljai szintén karakterisztikusok. Az egységelemes gyűrűk az ismert teljes csoportok analogonjának tekintendők. Így például mint ahogy a teljes csoport azzal jellemezhető, hogy minden Schreier-féle bővítésében direkt tényező, hasonlóan a gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha minden Schreier-féle bővítésében direkt összeadandó.

1953 szeptember 26. *Bakos Tibor:* Területátdarabolások. (Középiskolai délután.)

1953 október 17. *Szendrei János:* Hogyan oldjunk meg versenyfeladatokat? (Középiskolai délután.)

1953 november 14. *Gazsó István:* Körzővel végezhető szerkesztésekről. (Középiskolai délután.)

1953 december 7. *E. Marczewski* (Wroclaw): A sztochasztikus ergodtételről.

1953 december 7. *Fejes-Tóth László:* Szabályos testek szélsőérték tulajdonságai.
A szabályos testekhez vezető változatos szélsőértékproblémák ismertetése. Az előadó rámutat arra a gazdag kutatási területre, amit ez a problémakör nyújt.

1953 december 11. *Szendrei János:* Gyűrűk és testek. (Pedagógus előadás középiskolai tanárok részére.)

1953 december 12. *Rábai Imre:* Egyenlőtlenségek. (Középiskolai délután.)

1953 december 19. *Császár Ákos:* Többváltozós függvények nívóhalmazainak struktúrájáról.
(l. Budapest, okt. 30.)

A Bolyai János Matematikai Társulat debreceni tagozatának előadásai

1953 február 9. *Gacsályi Sándor:* Algebrailag zárt csoportok.
Előadó bebizonyítja azt a tételt, hogy algebrailag zárt Abel-féle csoportban bármely olyan egyenletrendszer megoldható, amely kompatibilis, azaz a csoport valamely bővítésében megoldható. Az egyenletrendszer tetszőleges számosságú egyenletet, ill. ismeretlent tartalmazhat. Operátorcsoportokra is kiterjeszti a tétel érvényességét. Az így nyert általánosításból speciális esetként adódik, hogy bármely akárhány egyenletet, ill. ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer megoldható abban a ferde testben, amelyhez az együtthatók tartoznak, ha a rendszer eleget tesz a (véges esetből jólismert) triviális kompatibilitási feltételnek.
Szele Tibor: Végtelen lineáris egyenletrendszerek.
Gacsályi Sándor előbbi tétele szerint bármely kompatibilis egyenletrendszer megoldható az együtthatókat tartalmazó ferde testben, az egyenletek, illetve az ismeretlenek tetszőleges számossága mellett. Előadó megmu-

tatja, hogyan vihető át az összes megoldás előállítására szolgáló klasszikus módszer a véges esetről erre az általános esetre.

1953 február 17. *Tóth Lajosné:* A függvényfogalom kialakítása a középiskolában. (Pedagógus előadás.)

1953 február 19. *Szénássy Barna:* Szemelvények a szovjet matematikai olimpiászok anyagából. (Középiskolai délután.)

1953 február 21. *Szőkefalvi-Nagy Béla:* Az 1952. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny feladatairól. (1. Matematikai Lapok 1953. évf. 2—3. szám.)

1953 február 23. *Bán Elek:* Szovjet matematikusok kádereinek feltöltése. (Középiskolai délután a Hajdúnánási Áll. gimnáziumban.)

1953 február 26. *Szénássy Barna:* A szovjet és magyar matematikai élet kapcsolatai. (Középiskolai délután az Állami Szakérettségis Diákotthonban.)

1953 március 2. *Bán Elek:* A matematikus hivatásáról. (Középiskolai délután a Hajdúnánási Ált. gimnáziumban.)

1953 március 2. *Mátyás Antal:* A matematikai körök, olimpiászok a Szovjetunióban és előkészület az egyetemi felvételi vizsgákra. (Középiskolai délután a Hajdúszoboszlói Áll. gimnáziumban.)

1953 március 4. *Rényi Alfréd:* Újabb szovjet eredmények a matematikai statisztikában. Előadó ismertette B. V. Gnyegyenko és V. Sz. Koroljuk, B. V. Gnyegyenko és E. A. Rvacseva, B. V. Gnyegyenko és V. Sz. Mihalevics I. N. Gihman és más szovjet matematikusok eredményeit a rendezett minták elméletében.

1953 március 5. *Aczél János:* Szovjet módszerek szélsőértékfeladatok elemi megoldására.
Perelman: Szórakoztató algebra és Szórakoztató geometria c. könyvei, Korovkin: Nyeravensztva (Egyenlőtlenségek) c. füzete és részben Natanson: Egyszerű maximum és minimum feladatok c. füzete alapján gyakorlati példákon bemutatja a Bernoulli egyenlőtlenség, a diszkrimináns nem-negativitását kimondó egyenlőtlenség és a számtani és mértani közép egyenlőtlenségnek megfelelően választott együtthatók alkalmazásával való használatát szélsőértékfeladatok elemi megoldására. Mindhárom módszer alkalmazhatósági körére vonatkozó állítást is megfogalmaz.

1953 március 9. *Bán Elek:* A matematikai olimpiászok feladataiból. (Középiskolai délután a Hajdúnánási Áll. gimnáziumban.)

1953 március 12. *Tamássy Lajos:* Kúpszeletek tárgyalása a szovjet középiskolában. (Középiskolai délután a Kossuth Lajos gimnáziumban.)

1953 március 20. *Moór Arthur* klubesten ismerteti J. G. Petrovszkij: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről c. könyvét.

Különösen kiemelte a könyvben is nagy alapossággal tárgyalt kontrakciós elvet (Tyihonov—Cacciopoli-tétel) és több példán mutatta be ezen tételnek széleskörű alkalmazási lehetőségét a matematika különböző fejezeteiben. A differenciálegyenletek szempontjából a kontrakciós elv segítségével közvetlenül adódik az $y' = f(x, y)$ típusú differenciálegyenletek exisztencia tétele.

1953 március 26. *Barna Béla* ismertette Gerszevanov: Iterációszámítás c. munkáját.

Az előadó általában, majd fejezetenként ismerteti a munkát és rámutat arra, hogyan fűződik benne az elmélet és gyakorlat szoros egységgé. Előadását néhány, az első fejezet tartalmához fűződő megjegyzéssel zárja be.

1953 április 11. *Fejes-Tóth László:* Körök elhelyezése állandó görbületű felületeken.

Előadó bebizonyítja a következő tételt: Legyen n 1-nél nagyobb egész szám, s bontsuk fel a gömböt vagy euklideszi, illetve hiperbolikus síkot egybevágó szabályos n-szögekre úgy, hogy bármely szögpontban három él fusson össze. Ekkor az így nyert hálózat lapjaiba beírt körök a lehető legsűrűbb elhelyezést szolgáltatják.

1953 május 14. *Szendrei János:* „Megjegyzések a Schreier-féle gyűrűbővítéshez."

Előadó a Schreier-féle gyűrűbővítés Jacobson-féle radikálját vizsgálja meg abból a szempontból, hogy a bővítés radikálja milyen kapcsolatban van a maggyűrű és faktorgyűrű radikáljaival. Jacobson egy tételét speciális esetként kapja. Végül megadja a bővítés féligegyszerű voltának szükséges és elégséges feltételét.

1953 május 18. *Kalmár László:* A matematika megcsonkítására irányuló törekvések kritikája.

A Whitehead—Russel-féle logicizmus, a kiválasztási axiómát elvető iskola, a Weyl—Brouwer-féle intuícionizmus és a Lorenzen-féle konstruktivizmus kritikája a dialektikus materializmus alapján, annak kidomborításával, hogy ezeknek az irányoknak helyes értékelése ma már nemcsak a matematikai logikával foglalkozó matematikus számára nélkülözhetetlen, hanem pl. az algebrista is csak a dialektikus materializmus alapján való értékelésük segítségével tud eligazodni az ilyen irányok befolyása alatt keletkezett algebrai cikkeken.

1953 október 16. *Kertész Andor:* Alcsoportok és homomorf képek. Előadó az algebrailag zárt és a szabad Abel-féle csoportoknak egy új jellemzését adja, miközben rávilágít az alcsoport és a homomorf kép fogalmának bizonyos duális kapcsolatára. Bebizonyítja a következő tételeket: az Abel-féle csoportok közül pontosan az A algebrailag zárt csoportok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha A alcsoportja valamely csoportnak, akkor egyidejűleg homomorf képe is. Egy olyan Abel-féle csoport, amely, ha homomorf képe valamely csoportnak, akkor van vele izomorf direkt faktor is, algebrailag zárt és szabad Abel-féle csoportok direkt összege.

1953 november 24. *Aczél János:* A klasszikus ortogonális polinom rendszerek egy jellemzéséről. A Jacobi, Laguerre és Hermite polinomokat és csak ezeket együttesen jellemző tulajdonságok megadása: ortogonalitás, másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és Rodrigues formula létezése. Pontosabban: A polinomok előállíthatók, mint egy $u_n(x)$ n-edik deriváltjának és a $p(x)$ súlyfüggvény hányadosai, $u_n(x)$-nek minden 0-nál nagyobb n-re két közös valós (véges, vagy végtelen) gyöke van és eleget tesz egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek, melynek első együtthatója legfeljebb másodfokú, második együtthatója legfeljebb elsőfokú polinom. A kérdéskörbe vágó egyéb eredmények is ismertetésre kerültek, továbbá az a sejtés, hogy csak ezek az ortogonális polinomok tesznek eleget másodrendű Sturm—Liouville-típusú egyenletnek.

1953 október 29. *Fejes-Tóth László:* Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben. Tekintsünk egy állandó k görbületű térben négy r sugarú egymást kölcsönösen érintő gömböt. Legyen ezek sűrűsége a középpontjaik által meghatározott tetraéderben $D = D(kr^2)$. Az előadó különböző meggondolásokkal valószínűsítette azt a sejtését, amely szerint egy k görbületű térben elhelyezett r sugarú gömbök sűrűsége mindig D, s rámutatott ennek a sejtésnek számos érdekes következményére.

1953 november 13. *Erdős Jenő:* Fjodorov tételének bizonyítása. Fjodorov 1951-ben bizonyította be a következő tételt:

Ha egy G végtelen csoport bármely (nem egyelemű) α-csoportja véges índexű, akkor G ciklikus csoport. Fjodorov bizonyítása O. Ju. Schmidt egy mély tételére támaszkodik. Előadó egészen elemi eszközökkel dolgozó, új bizonyítást ad Fjodorov tételére.

1953 december 7. Az Alkalmazott Matematikai Intézet debreceni csoportjával közösen rendezett ülésen:
M. Fisz (Warszawa): The limiting distributions of some functions of two random variables. (Két valószínűségi változó néhány függvényének határeloszlása.)
Legyenek ξ_t és η_t független és pozitív valószínűségi változók, véges $m(\xi_t)$ és $m(\eta_t)$ várható értékkel és $\sigma(\xi_t)$ és $\sigma(\eta_t)$ szórással, ahol a t index valamely T halmazhoz tartozó bármely értéket felvehet.
Előadó a következő tételt bizonyította:
Legyen $t_0 \in T$. Ha $t \to t_0$ és
1. a $\frac{\xi_t}{m(\xi_t)}$ és $\frac{\eta_t}{m(\eta_t)}$ változók sztochasztikusan konvergálnak 1-hez, továbbá
2. a ξ_t és η_t változók aszimptotikusan normális eloszlásúak $m(\xi_t)$ és $\sigma(\xi_t)$, illetve $m(\eta_t)$ és $\sigma(\eta_t)$ várható értékkel és szórással, és
3. az $\frac{m(\xi_t)}{m(\eta_t)}$ hányados 1-hez konvergál, akkor a
$\zeta_t = \frac{\xi_t - \eta_t}{(\xi_t + \eta_t)^p}$ (p tetszőleges pozitív szám) valószínűségi változó is aszimptotikusan normális eloszlású, ha $t \to t_0$ $\frac{m(\xi_t) - m(\eta_t)}{(m(\xi_t) + m(\eta_t))^p}$ ill. $\frac{\sqrt{\sigma^2(\xi_t) + \sigma^2(\eta_t)}}{(m(\xi_t) + m(\eta_t))^p}$ várható értékkel, ill. szórással. A tétel alkalmazásaira előadó több példát adott.

1953 december 8. *E. Marczewski* (Wroclaw): Sur les classes et mesures compacts. (Kompakt osztályok és mértékek.) Az előadó definiálta halmazosztályok kompaktságát és vizsgálta az ilyen halmazosztályok tulajdonságait. Eredményeit alkalmazta halmazok projekcióinak és mértékének vizsgálatára és rámutatott az elmélet valószínűségszámítási vonatkozásaira.

1953 december 17. *Nyilvános intézeti nap*, melynek keretében a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete a Bolyai János Matematikai Társulat debreceni tagozatával és a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének debreceni csoportjával karöltve bemutatta az intézetben folyó munkát.

A tárgysorozat a következő volt:

Varga Ottó: Megnyitó.

Gyarmathi László: Intézetünk fejlődése, tudományos és társadalmi kapcsolataink.

Varga Ottó: Geometriai vizsgálatok az intézetben.

Szele Tibor: Modern algebrai vizsgálatok az intézetben.

Aczél János: Az analízis terén végzett vizsgálatok az intézetben.

Gyires Béla: Valószínűségszámítási vizsgálatok az intézetben. Az Alkalmazott Matematikai Intézet debreceni csoportjainak munkája.

Barna Béla: Problémák az egyetem és középiskola matematikai oktatásával kapcsolatban.

Szénássy Barna: Az alkalmazott matematikai kutatások hazai történetéhez.

A Bolyai János Matematikai Társulat miskolci tagozatának előadásai

1953 január 28. *Bede Lajos:* Matematikai tanításunk problémáiról. (Pedagógus előadás.)

1953 január 31. *Alexits György:* Bolyai János élete és munkássága.
Kárteszi Ferenc: A Bolyai- és Lobacsevszkij-féle geometria.

1953 február 18. *Parai Gusztáv:* Hasonlósági szerkesztésekről.

1953 február 23. *Pénzes László:* A matematikus hivatásáról. (Középiskolai délután.)

1953 február 25. *Obadovics J. Gyula:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai délután a Zrínyi Ilona Tanítóképzőben.)

1953 február 27. *Firtkó János:* A szovjet matematika.
Dömötör Ferenc: A matematikusi hivatásról. (Középiskolai délután.)

1953 március 6. *Vághó Ildikó:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai délután a miskolci gépipari technikumban.)

1953 március 12. *Huszthy László:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai délután a diósgyőri Kilián György gimnáziumban.)

1953 március 18. Ankét matematikai tanításunk problémáiról. (A január 28-i Bede-előadás nyomán kialakult vita.)

1953 március 19. *Varga Tamás:* A logikai gondolkodásra nevelés a Szovjetunióban a matematikán keresztül. (Pedagógus előadás.)

1953 március 19. *Huszthy László:* A matematikus hivatásáról. (Középiskolai délután az ózdi József Attila ált. gimnáziumban.)

1953 március 23. *Vághó Ildikó:* Feladatmegoldások. (Középiskolai délután a Kohóipari Technikumban.)

1953 március 25. *Evva Leona:* Az átmenet problémája a matematikaoktatásban az általános iskola és a középiskola között. (Pedagógus előadás.)

Háromnapos konferencia Sárospatakon a Közoktatásügyi Minisztérium, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, a Bolyai Társulat és a Pedagógus Szakszervezet Területi Bizottságának rendezésében, középiskolai tanárok számára, a következő előadásokkal:

1953 április 19. *Rényi Alfréd:* Szakkörökben bemutatható valószínűségszámítási kísérletekről.
Gáspár Gyula: A trigonometria alaptételeinek összefüggése.
Szele Tibor: Szemléletes algebra.

1953 április 20. Bemutató tanítás és vita.

1953 április 21. *Marx György:* Az atommag szerkezete.
Szabó Ilona: Középiskolában bemutatható kísérletek a rádióaktivitásból.

1953 április 22. *Nagy Sarolta:* Szemléltető eszközök szerepe a számtan tanításában. (Pedagógus előadás.)

1953 április 29. *Szele Tibor:* A vektoralgebra alapjairól.

1953 május 20. *Lovass Nagy Viktor:* Hővezetési problémák.

1953 november 4. *Nikodémusz Antal:* Matematikai feladatok megoldása.
Tóth Sándor: Bemutató kísérletek kémiából. (Középiskolai délután.)

1953 november 11. Évadnyitó ülés. *Borbély Samu:* Megnyitó. (A tagozat programmja és a továbbképzés szervezeti kérdései.)
Gáspár Gyula: A számfogalom axiomatikus felépítése. (Az előadás a középiskolai tanárok továbbképzéséhez kapcsolódott.)

1953 december 9. *Borbély Samu:* A polinomok néhány gyakorlati alkalmazása. (Az előadás a középiskolai tanárok továbbképzéséhez kapcsolódott.)

A Bolyai János Matematikai Társulat pécsi tagozatának előadásai

1953 február 14. *Kárteszi Ferenc:* A Bolyai- és Lobacsevszkij-féle geometria. (Pedagógus előadás.)
Tanári konferencia a Közoktatásügyi Minisztériummal és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben, a következő előadásokkal:

1953 február 15. *Kárteszi Ferenc:* Az inverzióról.
Pál László: A halmazelmélet elemei.
Jeges Károly: Egyszerűen összeállítható előadási kísérletek a fizikai optika köréből.

1953 február 16. *Hódi Endre:* Egyenletek közelítő megoldása.
Keszthelyi Lajos: Atommagreakciók.

1953 február 17. Bemutató tanítás és vita.

1953 február 28. *Schuszter Gyula:* Koordináta transzformációk. (Középiskolai délután.)

1953 március 6. *Csaba Magdolna:* A matematikus hivatásáról. (Középiskolai délután.)
Bóka István: A matematikai módszerek jelentősége a műszaki feladatok megoldásában.

1953 március 26. *Frey Tamás* ismertette Petrovszkij: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről c. könyvét.

1953 október 28. *Szász Gábor:* A függvényekről. (Pedagógus előadás.)

A Bolyai János Matematikai Társulat veszprémi tagozatának előadásai

1953 február 26. *Berend Iván:* A Bolyai—Lobacsevszkij geometria és a modern fizika.

1953 március 2. *Dékány Mihályné:* Bolyai János élete és munkássága. (Középiskolai előadás a veszprémi vegyipari technikumban.)

1953 március 11. *Szepesi Tibor:* A szovjet matematikatanítás módszere és eredményei. (Előadás a keszthelyi gimnáziumban.)

1953 március 28. *Galánfi Ede:* A matematikus hivatásáról. (Előadás a pápai közgazdasági technikumban.)

1953 március 30. *Somkuti Lajosné:* Miért tanulunk matematikát? (Előadás a veszprémi áll. ált. gimnáziumban.)

1953 március 31. *Fáy László:* Lobacsevszkij élete és munkássága.

1953 április 25. *Róth Erzsébet:* A matematikusi hivatásról. (Előadás a keszthelyi gimnáziumban.)

1953 április 29. *Kádár Imre:* A szovjet matematikusokról. (Előadás a keszthelyi gimnáziumban.)

1953 április 23. *Somkuti Lajosné:* „Cikloisokról". A közönséges ciklois származtatása. A ciklois evolvense is ciklois. A ciklois a nehézségi erő tautokronja. A ciklois lejtőn jut egy tömegpont legrövidebb idő alatt adott *A* pontból *B*-be. Epi- és hipocikloisok származtatása. — Egy optikai tünemény magyarázata. — Azon hipocikloisok néhány érdekes sajátsága, melyeket egy körön gördülő felényi, harmadrésznyi, ill. negyedrésznyi sugarú kör kerületi pontja ír le.

1953 október 1. *Fejes-Tóth László:* Szabályos alakzatok. Ismeretterjesztő előadás a szabályos testek-, csillagtestek-, testkomplexumok (pl. Kepler stella octangulája), valamint ezek többdimenziós analogonjairól.

1953 november 12. *Varga Dezső:* A lineáris interpoláció.

Bolyai János Matematikai Társulat egri tagozatának előadásai

1953 január 4. *Kárteszi Ferenc:* Bolyai János geometriája. 1. Az euklideszi axiómarendszer V. axiómája. A párhuzamosság V-től független értelmezése. Izogonális megfeleltetés, paraciklus, paraszféra. Abszolút sinus-tétel, a kör kerülete, (x) explicit alakja, a háromszög területe. A geometria és a valóság viszonya. A matematikai térfogalom fejlődése. Az Appendix hatása és jelentősége.
Kárteszi Ferenc: A geometria tanítás módszere. A geometria oktatása, a szemléletes rávezetéstől a szigorú bizonyításig. A táblai rajz szerepe és jelentősége. Sztereometria és planimetria együtt-tartása. Az új anyag bevezetésének helyes módjáról. Az alkalmazás és az e téren tapasztalt formalizmus. Tanulságos feladatmegoldások bemutatása.
Pallós Emil: Bolyai János munkásságának világnézeti jelentősége.

1953 márcis 17. *Pallós Emil:* A Szovjetunió matematikatanítása a felsőoktatásban. (Előadás a főiskolai hallgatók számára.)

1953 március 9. *Hartly Domokos:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai előadás a hatvani vegyipari technikumban.)

1953 március 8. *Pásztor István* ismertette P. Sz. Alexandrov: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe c. könyvét. (Pedagógus előadás.)

1953 március 18. *Balogh Viktória:* A matematikusi hivatásról. (Előadás az egri tanítóképzőben.)

1953 március 18. *Darvas Andorné:* Egyenlőtlenségek. (Középiskolai előadás.)

1953 március 22. *Pallós Emil:* Matematika tanárok feladatai a módszertan kérdésében. (Előadás a Pedagógiai Főiskolán.)

1953 március 25. *Pallós Emil:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai előadás a Dobó István ált. gimnáziumban.)

1353 március 25. *Rónai Kálmán:* A matematikusi hivatásról. (Középiskolai előadás a gyöngyösi Ált. Gimnáziumban.)

1953 március 26. *Darvas Andorné:* A matematikusi hivatásról. (Előadás az egri Szakérettségis Kollégiumban.)

1953 március 30. *Hartly Domokos:* A matematikusi hivatásról. (Előadás az Egri Közgazdasági Középiskolában.)

1953 október 30. *Nagy Ferenc:* A Bezout-tétel és alkalmazásai.

1953 december 1. *Kalmár László:* Az analízis módszere. (Előadás főiskolai hallgatók számára.)

HÍREK

Január 19-én folyt le az első két matematikus kandidátusi disszertáció nyílvános megvédése. *Freud Géza* „Tauber típusú tételek maradéktaggal" című kandidátusi értekezésének opponensei *Turán Pál* akadémikus és *Szőkefalvi-Nagy Béla* a MTA lev. tagja voltak. A bizottság elnöke *Fejér Lipót* akadémikus, tagjai: Alexits György, Egerváry Jenő, Hajós György, Riesz Frigyes akadémikusok, Kalmár László, Varga Ottó MTA lev. tag, Fejes Tóth László, Péter Rózsa a matematikai tudományok doktorai és Aczél János, Fenyő István a matematikai tudományok kandidátusai voltak. Freud Géza aspiránsvezetője Rényi Alfréd volt.

A kandidátusi értekezés téziseit az alábbiakban közöljük:

A Tauber-típusú tételek problémaköre *A. Tauber* [1] klasszikus tételétől nyerte nevét, amely szerint ha

$$(1)^* \qquad \lim_{s\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

ahol a baloldali sor $|x|<1$-re konvergál és

$$(2)^* \qquad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

akkor az (1)* baloldalán álló hatványsor $x=1$-re is konvergál és

$$(3)^* \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

A. Tauber tételének továbbfejlesztésével századunk első felében számos neves matematikus foglalkozott, akik közül *G. H. Hardy* [2], *J. E. Littlewood* [3], *E. Landau* [4], *J. Karamata* [5] és *N. Wiener* [6] nevét említjük. *Hardy* és *Littlewood* tétele szerint (1)*-ből már akkor is következik (3)*, ha (2)* helyett az annál gyengébb

$$(4)^* \qquad a_n > -\frac{K}{n}, \quad n=1,2,\ldots$$

feltételt kötjük ki. A tételt később *E. Landau* [7] és *Szász Ottó* [8] általánosították Laplace-Stieltjes transformációra, az alábbi módon: Legyen $s \to +0$ esetén

$$(5)^* \qquad \int_0^{\infty} e^{-st} d\tau(t) \sim \frac{A}{s^{\gamma}} \qquad \gamma \geqq 0$$

ahol $\tau(t)$ monoton nem csökkenő függvény és az (5)* baloldalán álló integrál $s>0$ esetén konvergál.

Akkor $t\to+\infty$-re

$$(6)^* \qquad \tau(t) \sim \frac{At^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}$$

Ha pedig $\tau(t)$ olyan $[0, \infty)$ minden véges részintervallumán korlátos ingadozású függvény, amelyre

$$(7)^* \qquad \lim_{s=+0} \int_0^\infty e^{-st} d\tau(t) = A$$

ahol a baloldali integrál $s>0$-ra konvergál és található olyan $[0, \infty)$-ben definiált $\beta(t)$ függvény, melyre $\beta(0)=0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\beta(t)}{t} = 1$$

és $L>0$ alkalmas választása mellett

$$(8)^* \qquad \gamma(t) = L\beta(t) + \int_0^t u\, d\tau(u)$$

-nek monoton nem csökkenő függvénye, akkor a (7)* integrál $s=0$-ra s konvergens és értéke A.

A Tauber-tételek jelentősége abban rejlik, hogy segítségükkel meg tudjuk határozni egy $\tau(t)$ függvény asszimptotikus viselkedését, ha az

$$(9)^* \qquad f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\tau(t)$$

generátorfüggvény asszimptotikus magatartását ismerjük. A generátorfüggvény a valószínűségszámítás és az analitikus számelmélet számos fontos problémájában sokkal könnyebben határozható meg, mint az eredeti függvény, amelyből leszármaztatható.

A határérték (ill. asszimptotika) meghatározása azonban csak az első lépés, és a matematika alkalmazásaiban szükséges, hogy azt maradéktag becsléssel egészítsük ki. A maradéktag becslések kérdését a matematika belső fejlődése is felvetette, elsősorban az analitikus számelmélet terén. A sorelmélet újabb feladata napjainkban, hogy a korábban csak a határérték létezésére kimondott tételeket hibabecslésekkel élesítse. A sorelmélet ezt a feladatát oldom meg disszertációmban a Tauber-típusú tételek egy csoportjára. Ezzel a kérdéssel foglalkozott tőlem függetlenül *A. G. Posztnyikov* [9] és *J. Korevaar* [10]. Az itt közölt eredmények Posztnyikov és Korevaar eredményénél pontosabbak és általánosabbak.

Az eredmények áttekintésének megkönnyítése céljából azokat először speciális esetre mondom ki:

I. tétel: Legyen $x \to 1-0$ esetén

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{A}{1-x}\left(1+O\{(1-x)^\delta\}\right) \delta > 0;$$

ha most

(2) $$s_n > -K \qquad n = 1, 2, \ldots$$

akkor $m = 0, 1, 2, \ldots$-re

(3) $$\sum_{n \leqq X}\left(1-\frac{n}{X}\right)^m s_n = AX\left[1+O\left(\frac{1}{\log^{m+1} X}\right)\right]$$

II. tétel: Teljesüljön $x \to 1-0$ esetén (1)* és legyen

(4) $$a_n > -\frac{K}{n}$$

akkor $m = 0, 1, 2, \ldots$-re

(5) $$\sum_{n \leqq X}\left(1-\frac{n}{X}\right)^m a_n = A + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} X}\right)$$

Jelöljük $\sigma_N^{(k)}$-val az $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ sor N-edik k-adrendű Cesaro-közepét, vagyis legyen:

$$s_n^{(0)} = s_n, \quad s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)} \text{ és } \sigma_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$$

Az I. tételből elemi becslésekkel levezethető, hogy

(6) $$\sigma_N^{(k)} = A + O\left(\frac{1}{\log^k N}\right)$$

és a II. tételből ugyancsak elemi becslésekkel:

(7) $$\sigma_N^{(k)} = A + O\left(\frac{1}{\log^{k+1} N}\right)$$

III. tétel: Ha (1)* teljesül és

(8) $$a_n > -\varepsilon_n \frac{\log n}{n}$$

ahol $\{\varepsilon_n\}$ pozitív számsorozat, akkor a Σa_n sor konvergál és határértéke A.

J. Korevaar egy eredményéből következik, hogy fenti tételekben a maradéktag nagyságrendje nem javítható, ill. a III. tételben (8) nem helyettesíthető az $a_n = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ feltétellel.

A tételek az általános esetben az alábbi módon hangzanak:

Ia. tétel: Legyen $\tau(t)$ egy $(0, \infty)$-ben definiált, monoton nem fogyó függvény, melyre $s \to +0$ esetén

$$\int_0^\infty e^{-st} d\tau(t) = A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha}[1 + O(R(s))] \tag{9}$$

ahol a baloldali integrál $s>0$-ra konvergens és $R(s)$ monoton növekedő függvény, melyre

$$R(ks) < e^{ck} R(s), \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{10}$$

Ha most $\alpha > \frac{1}{2}$ és $f(x)$ egy korlátos ingadozású függvény m-edik integrálfüggvénye,* akkor

$$\int_0^\infty f(e^{-t/x}) e^{-t/x} d\tau(t) = \tag{11}$$

$$= A x^\alpha \left[\int_0^1 (\log 1/x)^{\alpha-1} f(x)\, dx + O\left\{ \left(\log \frac{1}{R(1/x)} \right)^{-m-1} \right\} \right]$$

Ez a becslés akkor is érvényes, ha $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ és emellett $f^{(m)}(x)$ egy alkalmasan választott $(1-h, 1)$ intervallumban 1 exponensű Lipschitz feltételnek tesz eleget.

IIa. tétel: $\tau(t)$ legyen (O, ∞) minden véges részintervallumában valós korlátos ingadozású függvény és $s \to +0$ esetén

$$\int_0^\infty e^{-st} d\tau(t) = A + O\{R(R(s)\} \tag{12}$$

ahol a baloldali integrál $s>0$-ra konvergál és $R(s)$ eleget tesz ugyanazon feltételeknek, mint az Ia. tételben.

$\beta(t)$ legyen olyan monoton nem csökkenő függvény, melyre $s \to +0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st} d\beta(t) = \frac{1}{s} \left| 1 + O\{R_1(s)\} \right| \tag{13}$$

* A függvény klasszikus definiciójának itt közölt módosítása Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus opponensi véleményének figyelembevételével történt.

ahol

(14) $$R_1(s) = O\{[R(s)]^{c_2}\}$$

Végül az $L>0$ állandó alkalmas választása mellett legyen

(15) $$\gamma(t) = L\beta(t) + \int_0^t u\, d\tau(u)$$

t-nek monoton nem csökkenő függvénye. Akkor $x \to \infty$ esetén

(16) $$\int_0^x (x-t)^m d\tau(t) = A\frac{x^m}{m!}\left[1 + O\left\{\left(\log\frac{1}{R(1/x)}\right)^{-m-1}\right\}\right]$$

Fenti tétel levezetésére az alábbi újtípusú approximációtételt használjuk fel:

IV. tétel: $f(x)$ legyen az $[a, b]$ intervallumban definiált, megszámlálható sok hely kivételével m-szer differenciálható függvény és $f^{(m)}(x)$ legyen $[a, b]$-ben korlátos ingadozású. Akkor találhatók olyan legfeljebb N-edfokú $P_N(x)$ és $p_N(x)$ polinomok, melyekre

(17) $$p_N(x) \leqq f(x) \leqq P_N(x)$$

és

(18) $$\int_a^b [P_N(x) - p_N(x)] \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right)$$

Ha fenti integrált $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ helyett egy olyan (a, b) minden belső részintervallumban korlátos $w(x)$ súlyfüggvénnyel képezzük, amelynek valamelyik (vagy mindkét) végpont környezetében ennél rohamosabban emelkedő értékei vannak, akkor ugyanez a becslés érvényes marad, hacsak $f^{(m)}(x)$ a megfelelő végpont egy kis egyoldalú környezetében 1 exponensű Lipschitz feltételnek tesz eleget.

Ez a tétel $m=0$ esetén úgy értendő, hogy maga $f(x)$ korlátos ingadozású. *A tételben a maradéktag nagyságrendje nem javítható.*

Amennyiben $f^{(m)}(x)$ (a, b)-ben 1 exponensű Lipschitz feltételnek tesz eleget, (18) már *D. Jackson* approximációtételéből következik. Az alkalmazások során azonban éppen olyan $f(x)$ függvényeket kell választanunk, amelyekre $f^{(m)}(x)$-nek elsőfajú szakadása van.

A IV. approximációtétel nemcsak a fenti Tauber-típusú tételekkel kapcsolatban jelentős, hanem az analízis más területein is igen eredményesen alkalmazható. Segítségével a szakirodalomban ismertnél pontosabb hibabecslés adható integráloknak Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratúra segítségével való közelítésére. Ezenkívül a szerző egy korábban megjelent dolgozatában ortogonális polinomsorok konvergenciaelméletére alkalmazta.

[1] *A. Tauber:* Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte für Math. und Phys. *8* (1897) 273—277. o.

[2] *G. H. Hardy:* Theorems relating on the summability and convergence of slowly oscillating series. Proc. London Math. Soc. *9* (1910) 301—320. o.

[3] *J. E. Littlewood:* The converse of Abel's theorem on power series. Proc. Londom Math. Soc. *9* (1911) 434—448 o.

[4] *E. Landau:* Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace matematyczno-fiziczne *21* (1910) 97—177 o.

[5] *J. Karamata:* Über die Hardy—Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Zeitschr. *32* (1930) 519—520 o.

[6] *N. Wiener:* Tauberian theorems. Annals of Math. *23* (1932) 1—100 o.

[7] *E. Landau:* Ein Konvergenzkriterium für Integrale. Sitzungsber. Bayer. Akad. 1913. 416—467 o.

[8] *O. Szász* Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art. Sitzungsber. Bayer. Akad. 1929. 325—340 .o.

[9] А.-Г. Постников: Остаточный член в тауберовой теореме Харли и Литтлевуда. Доклады АН. СССР. *77* (1951) 193—196 o.

[10] *J. Korevaar.* An estimate of the error in tauberian theorems for power series. Duke Math. Journal. *18* (1951) 723—734 o.

FREUD GÉZA 1953. ÁPRILISIG[1] MEGJELENT TUDOMÁNYOS MUNKÁI:

G. Freud: Restglied eines Tauberschen Satzes, I. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 2 (1951) 299—308 o.

G. Freud: Über die starke (C, 1) Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952) 83—88 o.

G. Freud: Über die Konvergenz orthogonaler Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952) 89—98 o.

G. Freud: Über einen reihentheoretischen Satz von L. Fejér. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952) 173—176 o.

Békéssy—Freud—Marx—Nagy: Elméleti Fizikai Feladatok. Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

Freud Géza: Kétkomponensű, ideális gázelegy eloszlása centrifugális erőtérben. Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei 1 (1952) 365—367 o.

Arató Mátyás—Freud Géza: Módosított egycentrumú kölcsönhatási integrálok számítása. Ugyanott, 369—375 o.

Freud Géza: Párhuzamos elektromos vezeték mágneses terének számításáról. Ugyanott, 377—387 o.

Freud Géza: A statisztikus atommodell kinetikus energia korrekciójáról. Ugyanott, 389—391 o.

G. Freud: Über die Mehrensteinsche Berechnung des H_2-Moleküls. Acta Phys. Ac. Sci. Hung. 1 (1952) 325—328 o.

A tézisek ismertetése, az opponensi vélemények elhangzása és a vita után a bizottság egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy Freud Gézát nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

[1] A disszertáció benyújtásáig.

Ezután került sor Tandori Károly „Ortogonális polinomsorok Cesàro-szummációja“ című kandidátusi értekezésének megvédésére. Az értekezés opponensei Turán Pál akadémikus és Szőkefalvi-Nagy Béla a MTA lev. tagja voltak.

A bírálóbizottság elnöke: *Riesz Frigyes* akadémikus, tagjai: Alexits György és Fejér Lipót akadémikusok, Rényi Alfréd és Kalmár László MTA lev. tagok, Péter Rózsa a matematikai tudományok doktora, Aczél János és Császár Ákos a matematikai tudományok kandidátusai voltak. Tandori Károly aspiráns vezetője Alexits György volt.

A kandidátusi értekezés téziseit az alábbiakban közöljük:

A matematikai analízisben a különböző ortogonális sorfejtések közül a Fourier-féle sorok mellett az ortogonális polinomok szerinti kifejtések azok, amelyeknél az előállítás kérdését részletesebben vizsgálták. Ennek az ortogonális polinomsorok széleskörű alkalmazása mellett még további két oka van. Egyrészt ugyanis a klasszikus polinomokra — értve alattuk a Jacobi-, Laguerre- és Hermite-polinomokat — számos jól kezelhető előállítás, éles nagyságrendi becslés és aszimptotikus előállítás ismeretes, másrészt a Christoffel—Darboux-féle formula felhasználásával a részletösszegek magját elő lehet állítani zárt alakban, ami az általános ortogonális polinomok szerinti kifejezések konvergenciájának a részletesebb vizsgálatát teszi lehetővé.

Minthogy az ortogonális polinomok szerinti kifejezések — ugyanúgy, mint a Fourier-soroknál — még a sorbafejtett függvény folytonossága mellett is divergálhatnak, ezért természetes módon felmerül az ortogonális polinomok szerinti kifejezések szummálhatóságának a kérdése. Az első ezzel kapcsolatos eredményt 1908-ban *Fejér Lipót* érte el, aki bebizonyította, hogy abszolút integrálható függvény Laplace-sora és így Legendre-sora is a függvény minden folytonossági pontjában $(C, 2)$-szummálható. Azóta sokan foglalkoztak a klasszikus polinomok szerinti kifejtések Cesàro-szummálhatóságával és erre vonatkozóan igen sok, éles eredmény ismeretes.

A klasszikus polinomokkal szemben az általános ortogonális polinomok szerinti kifejtések szummálhatóságára vonatkozó eredmény nagyon kevés van. Ennek fő oka az, hogy a szummáció magjaira nem ismeretes a Christoffel—Darboux-féle formulához hasonló, zárt előállítás.

Kandidátusi dolgozatom általános ortogonális polinomok szerinti kifejtések $(C, \alpha > 0)$-szummációjával foglalkozik. Kiindulásul az az észrevétel szolgál, hogy — míg a szummáció magjai zárt formulájának hiányában a Cesàro-szummálhatóság közvetlenül nem vizsgálható — a *Hardy* és *Littlewood* által Fourier-sorokra bebizonyított erős szummációs tételek átvihetők, a polinomrendszerre tett korlátossági feltevések mellett, általános ortogonális polinomok szerinti kifejtésekre is. Ez az általánosítás azért lehetséges, mert ezeknek a tételeknek a bizonyításánál nincs szükség a szummáció magjára, pusztán a részletösszegek magjának bizonyos tulajdonságából következik a $(C, \alpha>0)$-szummálhatóság. A szummálhatóságból ismert módszerrel következtetni lehet a szummáció Lebesgue-függvényeinek egyenletes korlátosságára, ami már a $(C, \alpha>0)$-szummáció közvetlen vizsgálatát is lehetővé teszi.

Legyen $\{p_n(x)\}$ az $[a, b]$ alapintervallumon a $w(x)$ súlyfüggvényre vonatkozóan ortonormált polinomrendszer. Tegyük fel, hogy $[a, b]$-n majdnem mindenütt $w(x)>0$. Jelöljük L_w^p-vel $(p \geqq 1)$ azoknak a függvényeknek az osztályát, amelyekre

$$\int_a^b |f(x)|^p w(x)\,dx < \infty.$$

Jelölje továbbá $s_\nu(f; x)$ az $f(x)$ függvénynek a $\{p_n(x)\}$ rendszer szerinti kifejtése ν-edik részletösszegét.

Definíciók. *Ha a $p_n(x)$ polinomok egy $[c, d]$ $(a \leqq c < d \leqq b)$ részintervallumon egyenletesen korlátosak, akkor azt mondjuk, hogy a polinomrendszer a $[c, d]$ intervallumon eleget tesz az A feltételnek.*

Ha a polinomok a $[c, d]$ intervallumon egyenletesen korlátosak és ezen a szakaszon a $w(x)$ súlyfüggvény lényegében korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a polinomrendszer a $[c, d]$ intervallumon eleget tesz a B feltételnek.

I. tétel: *Legyen $f(x) \varepsilon L_w^2$.* a) *Ha a $\{p_n(x)\}$ polinomrendszer a $[c, d]$ intervallumon eleget tesz az A feltételnek, akkor $[c, d]$-n majdnem mindenütt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} [s_\nu(f; x) - f(x)]^2 = 0. \tag{1}$$

(1) *fennáll minden olyan $x \varepsilon (c, d)$ pontban, amelyre*

$$\int_0^h [f(x \pm v) - f(x)]^2 w(x \pm v)\,dv = o(h).$$

Ha $c = a$, illetve $d = b$, akkor (1) *az $x = a$, illetve az $x = b$ pontban is fennáll, feltéve, hogy*

$$\int_0^h [f(a+v) - f(a)]^2 w(a+v)\,dv = o(h),$$

illetve

$$\int_0^h [f(b-v) - f(b)]^2 w(b-v)\,dv = o(h).$$

b) *Ha a polinomrendszer a* $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor* (1) *teljesül minden olyan* $x \varepsilon (c, d)$ *pontban, amelyben* $f(x)$ *folytonos. Ha* $f(x)$ *egy* $(c_1, d_1) \subset [c, d]$ *intervallumon folytonos, akkor* (1) *bármely* $[c_1 + \delta, d_1 - \delta]$ $(\delta > 0)$ *intervallumon egyenletesen fennáll.*

Következmény. *Ha a polinomrendszer bármely belső* $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz az A, illetve a B feltételnek, akkor* (1) $[a, b]$*-n majdnem mindenütt teljesül, illetve ha a függvény* (a, b)*-n folytonos, akkor* (1) *bármely* $[a + \delta, b - \delta]$ $(\delta > 0)$ *intervallumon egyenletesen fennáll.*

II. tétel: *Legyen* $1 < p \leqq 2$, $a \leqq c_2 < d_2 \leqq b$ *és tegyük fel, hogy*

$$\int_a^{c_2} f^2(x) w(x) dx < \infty, \quad \int_{c_2}^{d_2} |f(x)|^p w(x) dx < \infty, \quad \int_{d_2}^{b} f^2(x) w(x) dx < \infty.$$

a) *Ha a* $\{p_n(x)\}$ *polinomrendszer a* $[c, d]$ $(a \leqq c \leqq c_2 < d_2 \leqq d \leqq b)$ *részintervallumon eleget tesz az A feltételnek, akkor bármely pozitív* r *számra* $[c, d]$*-n majdnem mindenütt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f; x) - f(x)|^r = 0. \tag{2}$$

(2) *fennáll minden olyan* $x \varepsilon (c, d)$ *pontban, amelyre*

$$\int_0^h |f(x \pm v) - f(x)|^p w(x \pm v) dv = o(h). \tag{3}$$

Ha $c = a$, *illetve* $d = b$, *akkor* (2) *az* $x = a$, *illetve* $x = b$ *pontban is fennáll, feltéve, hogy*

$$\int_0^h |f(a + v) - f(a)|^p w(a + v) dv = o(h), \tag{4a}$$

illetve

$$\int_0^h |f(b - v) - f(b)|^p w(b - v) dv = o(h). \tag{4b}$$

b) *Ha a polinomrendszer a* $[c, d]$ *intervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor* (2) *minden olyan* $x \varepsilon (c, d)$ *pontban teljesül, amelyben* $f(x)$ *folytonos. Ha* $f(x)$ *egy* $(c_1, d_1) \subset [c, d]$ *részintervallumon folytonos, akkor* (2) *bármely* $[c_1 + \delta, d_1 - \delta]$ $(\delta > 0)$ *intervallumon egyenletesen fennáll.*

Következmények. *Ha a polinomrendszer bármely belső* $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz az A feltételnek és* $f(x) \varepsilon L^2_w$, *akkor* (2) $[a, b]$*-n majdnem mindenütt teljesül. Ha a polinomrendszer a teljes* $[a, b]$ *alapintervallumon egyenletesen korlátos és* $f(x) \varepsilon L^p_w$ $(p > 1)$, *akkor* (2) $[a, b]$*-n majdnem mindenütt teljesül. Ha a polinomrendszer bármely belső részintervallumon eleget tesz a B feltételnek és* $f(x)$ *folytonos* (a, b)*-n, akkor* (2) *bármely* $[a+\delta, b-\delta]$ $(\delta>0)$ *intervallumon egyenletesen fennáll.*

A II. tétel az I. tétel általánosítása. A II. tételből sorelméleti eszközökkel adódik a

III. tétel: *Tegyük fel, hogy az* $f(x)$ *függvényre teljesülnek a II. tétel feltevései.* a) *Ha a polinomrendszer a* $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz az A feltételnek, akkor bármely* $\alpha>0$, $r>0$ *mellett* $[c, d]$*-n majdnem mindenütt*

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} |s_\nu(f;x)-f(x)|^r = 0 \quad \left(A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}\right).$$

(5) *fennáll minden olyan* $x\varepsilon\,(c, d)$ *pontban, amelyre* (3) *teljesül. Ha* $c=a$, *illetve* $d=b$, *akkor* (5) *az* $x=a$, *illetve* $x=b$ *pontban is fennáll, feltéve, hogy a megfelelő* (4) *feltétel teljesül.*

b) *Ha a polinomrendszer a* $[c, d]$ *intervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor* (5) *minden olyan* $x\varepsilon\,(c, d)$ *pontban teljesül, amelyben* $f(x)$ *folytonos. Ha* $f(x)$ *egy* $(c_1, d_1)\subset[c, d]$ *részintervallumon folytonos, akkor* (5) *bármely* $[c_1+\delta, d_1]$ $(\delta>0)$ *részintervallumon egyenletesen fennáll.*

Következmény. *Legyen* $f(x)$ *az* $[a, b]$ *alapintervallumon folytonos. Ha a polinomrendszer a* $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor bármely* $[c+\delta, d-\delta]$ $(\delta>0)$ *részintervallumon*

$$(6)\qquad \sigma_n^\alpha(f;x) \Rightarrow f(x) \qquad (\alpha>0),$$

ahol $\sigma_n^\alpha(f;x)$ *az* $f(x)$ *függvény kifejtésének az n-edik* (C, α) *közepe:*

$$\sigma_n^\alpha(f;x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} s_\nu(f;x).$$

Ha a polinomrendszer minden belső $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor* (6) *bármely* $[a+\delta, b-\delta]$ $(\delta>0)$ *részintervallumon fennáll.*

Ebből a következményből adódik a

IV. tétel: *Ha a polinomrendszer a* $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor a* $(C, \alpha>0)$*-szummáció Lebesgue-függvényei bármely* $[c+\delta, d-\delta]$ $(\delta>0)$ *szakaszon egyenletesen korlátosak:*

$$(7)\qquad L_n^\alpha(x) = \int_a^b \left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} p_k(x) p_k(t) \right\} \right| w(t)\,dt = O(1).$$

Ha a polinomrendszer minden belső részintervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor (7) *bármely* $[a+\delta, b-\delta]$ $(\delta>0)$ *részintervallumon egyenletesen teljesül.*

V. tétel: *Legyen* $a \leqq c < d \leqq b$ *és az* $f(x)$ *függvényről tegyük fel, hogy*

$$\int_a^c f^2(x)w(x)\,dx<\infty, \quad \int_c^d |f(x)|\,w(x)\,dx<\infty, \quad \int_d^b f^2(x)w(x)\,dx<\infty.$$

Ha a polinomrendszer a $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz a B feltételnek, akkor minden olyan* $x \varepsilon (c, d)$ *pontban, amelyben* $f(x)$ *folytonos,*

$$\sigma_n^\alpha(f;x)\to f(x). \qquad (\alpha>0).$$

Ha $f(x)$ *egy* $(c_1, d_1)\subset[c, d]$ *részintervallumon folytonos, akkor ez bármely* $[c_1+\delta, d_1-\delta]$ $(\delta>0)$ szakaszon egyenletesen fennáll.

Ha például a polinomrendszer a teljes $[a, b]$ *alapintervallumon egyenletesen korlátos és* $w(x)$ $[a, b]$ *minden belső részintervallumán lényegében korlátos, akkor bármely* L_w*-beli* $f(x)$ *függvény kifejtése az alapintervallumnak minden olyan belső pontjában* $(C, \alpha>0)$*-szummálható, amelyben* $f(x)$ *folytonos.*

A fenti tételek bizonyításánál a következő lemmákat használom fel:

1. lemma. *Legyen* $\{\varphi_n(x)\}$ *a* $w(x)$ *súlyfüggvényre vonatkozóan ortonormált függvényrendszer, vagyis legyen*

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)w(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{ha } n\neq m,\\ 1, & \text{ha } n=m.\end{cases}$$

Tegyük fel továbbá, hogy egy $[c, d]$ $(a\leqq c<d\leqq b)$ *részintervallumon a* $\varphi_n(x)$ *függvények egyenletesen korlátosak:* $|\varphi_n(x)|\leqq M$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. *Ha az* $f(x)$ *függvény a* $[c, d]$ *szakaszon kívül* 0*-val egyenlő és*

$$\int_c^d |f(x)|^p w(x)\,dx<\infty \qquad (1<p\leqq 2),$$

akkor

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}|c_\nu|^q\right\}^{1/q}\leqq M^{(2-p)/p}\left\{\int_c^d |f(x)|^p w(x)\,dx\right\}^{1/p},$$

ahol $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ *és*

$$c_\nu=\int\limits_c^d f(x)\varphi_\nu(x)w(x)dx \qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

2. lemma. *Legyen* $\{s_n\}$ *tetszőleges számsorozat. Ha minden pozitív* ϱ*-ra*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu-s|^\varrho=0, \tag{8}$$

akkor bármely $\alpha>0$, $r>0$ *mellett*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}|s_\nu-s|^r=0. \tag{9}$$

Ha s_n *és* s *paramétertől függnek és* (8) *egyenletesen teljesül, akkor* (9) *is egyenletesen fennáll.*

A fenti tételek általánosíthatók egy $d\alpha(x)$ eloszlásra vonatkozóan ortogonális polinomok szerinti kifejtésekre is, ha $\alpha(x)$ az $[a,b]$ alapintervallumon értelmezett, korlátos, nem csökkenő függvény, amelynek végtelen sok növekedési pontja van és a $p_n(x)$ polinomok az

$$\int\limits_a^b p_m(x)p_n(x)d\alpha(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } n\neq m,\\ 1, & \text{ha } n=m\end{cases}$$

ortogonalitási relációkkal vannak meghatározva. Például a III. tétel megfelelője a következő:

Jelöljük E-vel az $[a,b]$ *alapintervallum olyan* x *pontjainak a halmazát, amelyekben* $\alpha(x)$ *differenciálható és a differenciálhányadosa véges. Legyen* $a\leqq c_2<d_2\leqq b$ *és* $p>1$. *Tegyük fel, hogy az* $f(x)$ *függvényre*

$$\int\limits_a^{c_2}f^2(x)d\alpha(x)<\infty,\quad \int\limits_{c_2}^{d_2}|f(x)|^p d\alpha(x)<\infty,\quad \int\limits_{d_2}^{b}f^2(x)d\alpha(x)<\infty.$$

Ha a $[c,d]$ $(a\leqq c\leqq c_2<d_2\leqq d\leqq b)$ *részintervallumon a* $\{p_n(x)\}$ *polinomrendszer eleget tesz az A feltételnek, akkor bármely* $\alpha>0$, $r>0$ *mellett az* $\mathrm{E}[a,b]$ *halmazon* α*-majdnem mindenütt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}|s_\nu(f;x)-f(x)|^r=0. \tag{10}$$

(10) *teljesül minden olyan* $x \varepsilon (c, d)$ *pontban, amelyre*

$$\int_0^h |f(x \pm v) - f(x)|^p d\alpha(x \pm v) = o(h).$$

Ha $c = a$, *illetve* $d = b$, *akkor* (10) *az* $x = a$, *illetve* $x = b$ *pontban is fennáll, feltéve, hogy*

$$\int_0^h |f(a+v) - f(a)|^p d\alpha(a+v) = o(h),$$

illetve

$$\int_0^h |f(b-v) - f(b)|^p d\alpha(b-v) = o(h).$$

Ha $[c, d]$*-n majdnem mindenütt* $\alpha'(x) > 0$, *akkor* (10) $[c, d]$*-n majdnem mindenütt érvényes.*

Ha a polinomrendszer a $[c, d]$ *részintervallumon eleget tesz a B feltételnek és a* $[c, d]$ *szakaszon* $\alpha(x) \varepsilon$ Lip 1 *továbbá majdnem mindenütt* $\alpha'(x) > 0$, *akkor* (10) *minden olyan* $x \varepsilon (c, d)$ *pontban teljesül, amelyben* $f(x)$ *folytonos. Ha* $f(x)$ *egy* $(c_1, d_1) \supset [c, d]$ *szakaszon folytonos, akkor* (10) *bármely* $[c_1 + \delta, d_1 - \delta]$ $(\delta > 0)$ *szakaszon egyenletesen fennáll.*

Ennél az általánosításnál felhasználom az 1. lemma megfelelőjét és a következő lemmát:

Ha $f(x) \varepsilon L^p_\alpha (p \geq 1)$, *akkor az E halmazon* α*-majdnem mindenütt*

$$\int_0^h |f(x \pm v) - f(x)|^p d\alpha(x \pm v) = o(h).$$

A tézisek ismertetése, az opponensi vélemények elhangzása és a vita után a bizottság egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy Tandori Károlyt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

* * *

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya március 2-án ankétot tartott az Akadémia matematikai könyvkiadásának eddigi eredményeiről és jövő feladatairól. Vitavezető Alexits György r. tag volt, bevezető előadást Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag tartott. Az ankét vitáját és határozatait az Osztályközlemények IV. 2. száma ismertette.

* * *

A Magyar Tudományos Akadémia és a Kossuth Lajos Tudományegyetem 1954 március 26—27-én Debrecenben akadémiai napokat rendezett. Az akadémiai napokon a Nyelv- és Irodalom Tudományok, a Társadalmi- Történeti Tudományok és a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának munkájáról és feladatairól hangzott el beszámoló.

Az akadémiai napokon a következő matematikai előadásokat tartották:

Rényi Alfréd és *Gyires Béla:*
Egy matrixokra vonatkozó függvényegyenletről.

Szőkefalvi-Nagy Béla:
Konvex testek parallel eltolása.

Varga Ottó és *Aczél János:*
A Cayley—Klein-féle távolsági képletek levezetése a geometriát meghatározó csoporttulajdonságokból.

Rényi Alfréd bemutatta *Gyires Béla:*
A valószínűségszámítás határeloszlás-tételének általánosítása c. dolgozatát.

LIGETI BÉLA:

A magyar matematika története a XVIII. század végéig

A matematikai szakkörök számára. Tankönyvkiadó 41 oldal

SZÉNÁSSY BARNA:

Vázlatok a magyar matematika újkori történetéből

A matematikai szakkörök számára. Tankönyvkiadó 68 oldal

A két felsorolt füzettel a Tankönyvkiadó kellemes olvasmánnyal lepi meg a matematikát kedvelő középiskolai tanuló ifjúságot, mely révükön szórakozva ismerheti meg a magyar matematika múltját. A múlt természetesen nem éri el a fényes jelent, de szégyenkeznünk sem kell miatta. Ha az elmúlt századokban nem fejlesztettük tovább a tudományt, ennek mindkét füzetben megtaláljuk az okát gazdasági és általános kulturális elmaradottságunkban. Mindkét füzet kimerítően ismerteti a kor társadalmi mozgalmait, amelyek, amint ma már eléggé tudjuk, a matematika fejlődését is oly lényegesen befolyásolják. Csakugyan, amint a hazai gazdasági életnek és a kifejlődő kapitalizmusnak szüksége volt a matematikára, bőven jelentkeztek kiváló elmék a szükséglet kielégítésére. Referenset a matematika történetének tanulmányozása rávezette annak felismerésére, hogy ahol a közviszonyok (állam, magánpártolás stb.) lehetővé teszik a kultúra kifejlődését, ahol tehát a tudósok, művészek megkapják a létfenntartásukhoz szükséges eszközöket és ahol megbecsülik őket, ott nyomban akadnak tudósok. Epigrammatikusan így mondhatnám: a tehetség gyakoribb a mecénásnál.

Ligeti könyve a honfoglalás korától vezet el a 18. század végéig, SÍPOS Pálig, mai tudomásunk szerint a legrégibb matematikusunkig, aki valóban új felfedezésekkel gyarapította a tudományt. Ligeti nem érezteti Sípos tragédiáját a magyar ugaron, akinek első felfedezése jóformán az utolsó is, de eléggé kiemelte ezt JELITAI József disszertációjában és a legutóbbi időkben referens a Középiskolai Matematikai Lapokban „Képek a magyar matematika múltjából, I. Az úttörők“ címen a múlt évben megjelent cikkében. Ligeti füzetének első része Mátyás király haláláig terjed, ebből az olvasó szemléletesen megtanulja, mily primitív kezdetekből fejlődött ki a legelemibb számtan is mai fokáig. Részletesen, példán mutatja be a kezdetleges „számvetési“ módokat (a szó eredetét is megmagyarázza) az ujjakkal való számolást és az abakuszt. Ebben talán nem minden olvasója fogja követni.

A II. fejezet a 16. század elejétől a 18. század végéig terjedő háromszáz év történetét adja elő igen vonzóan. Kezdi természetesen Magyarországi György mester 1499-ből való Aritmetikájával, majd részletesebben tér ki az első magyar nyelvű számtankönyvre, az ú. n. *Debreceni Aritmetikára* 1577-ből. Ezután Apáczai CSERI János Enciklopédiáját (1653) ismerteti matematikai szempontból. ALSTED szintén gyulafehérvári tanár matematikai enciklopédiáját, melyet pedig

Leibniz is dicsér, nem említi. Igaz viszont, hogy szerzője külföldi származású, bár műve részben Magyarországon keletkezett. Menyői Tolvaj Ferenc gyöngyösi iskolamester 1675-ben megjelent Aritmetikája és Onadi János Aritmetikájának (1693) ismertetése után áttér Maróthi György 1743-ban megjelent híres „Arithmetica"-jára, melyet érdeme szerint méltat. Felemlíti, hogy $\frac{\pi}{2}$ helyett csak 1.5-et vesz. Pedig már a 17. században Spinoza nem győzi ezért eléggé gúnyolni a zsidók tudatlanságát, mert a bibliában ez az érték áll Salamon temploma leírásánál. Mindegyik tárgyalt könyvből szószerinti példákkal élénkíti előadását. Állandóan figyelemmel van az illető kor tanítási gyakorlatára. A következő fejezet a trigonometria hazai őstörténetét mutatja be, főleg Sárközi Pál ismert monográfiája alapján. A magyar szerzőktől eredő legrégibb trigonometria 1694-ből való. Itt találkozunk a „tudós professzor Hatvanival" is, aki sok egyéb tevékenysége mellett Debrecen földrajzi szélességét is meghatározta. Megemlékezik Makó Pálról a tudós jezsuitáról, majd részletesen kitér Dugonics András matematikai munkásságára, amelyhez a matematikai műnyelv megmagyarosítása is tartozik. Oly mindennap használt szavak, mint egyenlet, gömb, derékszög, henger, gyök, stb. Dugonicstól származnak. Természetesen Dugonics műveiből is ad szemelvényeket. Sípos Pál és Csernák László méltatása zárja le a hasznos füzetet.

Ahol Ligeti abbahagyja, ott folytatja az elbeszélést Szénássy füzete. Szénássy füzete terjedelmesebb Ligetiénél, holott címében a „Vázlatok" szó szerénykedik. Ez persze nem meglepő, hisz ez a füzet már abba a korba vezet el, amelyben Magyarország valóságos nagyhatalom a matematika területén és a szerzőnek az okozhatott gondot, mit válogasson ki az óriási anyagból, mi lehet az, ami a középiskolai tanuló érdeklődését is leköti és amit a tanuló megérthet. Ebben a korban a jelentékenyebb matematikusok már — részben igen fontos — új felfedezésekkel gyarapították tudásunk kincseit és ezek bizony általában messze túlhaladják a matematika elemeit. Mert igaz ugyan, hogy a matematika a legegyszerűbb dolgokkal foglalkozik a világon, ahogy Engels mondja a mennyiségi és alaki viszonyokkal, de ezek láncként szorosan összefonódnak, tehát csak az érthet meg egy matematikai állítást, aki összes előzményeit, a bizonyításban felhasznált tételeket is ismeri. Igen nehéz dolog tehát matematikát népszerűsíteni. Szerzőnk ezt a feladatot igen jól oldotta meg. Sikeréhez hozzájárult, hogy ahol valamely mesteri összeállítás állt rendelkezésére (pl. Kőnig Gyula némely eredményének Kürschák-féle ismertetése) azt habozás nélkül felhasználta.

Tekintsük tehát röviden át a könyvben tárgyalt gazdag anyagot. Mindenekelőtt kiemeljük, hogy a matematikát sohasem tekinti légüres térből vagy a hírhedt elefántcsonttoronyból, hanem mindig a társadalmi, pontosabban az ipari fejlődés függvényeképp mutatja be. A magyar matematika felvirágzását az 1782-ben alapított Gyakorlati geometriai és víztani intézettel (mondjuk mérnökképző) hozza kapcsolatba, melynek végzett növendékei munkájuk közben matematikai feladatokkal találták magukat szemben. Ez eléggé plauzibilis, mindenki tudja, mennyire előrelendítette a matematikát az École Polytechnique alapítása a francia forradalomban. A régi magyar matematikusok majdnem valamennyien mérnökök voltak — köztük a világhírre vergődött, később méltatlanul elfelejtett Petzval József is. Petzvallal szerzőnk nem foglalkozik. Referens ezt azért sajnálja, mert oly kiváló szerző, mint Gegenbauer, Petzval utóda a bécsi egyetemen „Ein vergessener Österreicher" címen ír róla, pedig Petzval József nem tagadta meg magyar voltát.

A 2. igen érdekes fejezet Bolyai Farkasról szól. Ennek tartalmából kiemeljük azt a megállapítását, hogy Bolyai Farkas már felemelkedett a függvényfogalom ma szokásos definíciójáig, mely szerint függvénynek tekintendő minden olyan összefüggés, mely időben és térben elképzelhető, attól függetlenül, hogy az összefüggést képletileg elő tudjuk állítani vagy sem. Ugyancsak meg tudjuk belőle, hogy a műveleti szabályok megtartásának elve, az ú. n. „Hankel-féle permanencia elv“ mint a számfogalom kibővítésének vezérgondolata már Bolyai Farkasnál megtalálható. A 3. fejezet Bolyai Jánossal foglalkozik oly módon, hogy a középiskolai tanuló is megértheti belőle munkásságának lényegét és megérzi Bolyai rendkívüli nagyságát.

A 4. fejezet a Bolyaiak utáni akadémikusokkal foglalkozik, ezek gyenge matematikusok, produkciójuk jóformán szóra sem érdemes, de Vesta már meggyújtott tüzét még sem engedték kialudni. Megtudjuk a könyvből, hogy legnagyobb részük az önkényuralom dühének áldozata, akinek nem sikerült külföldre menekülnie, hosszabb-rövidebb börtönbüntetést szenvedett. De a nagy magyar matematikusok kora már közeledik. Kezdetben persze kevesen vannak. Az 5. fejezet Hunyadi Jenőről, a maga korában elismert legrégibb magyar matematikusról szól, a 6. fejezet pedig Kőnig Gyula — a Bolyai János és Fejér Lipót közé eső kor legnagyobb magyar matematikusa — működését ismerteti Kürschák igen találó jellemzésének felhasználásával. A 7. fejezet a közelmúltba vezet, a századforduló magyar matematikusai között már világszerte elismert nagy neveket találunk. A külföldre távozott matematikusok közül törölni kell Dienes Valéria nevét, aki csakhamar visszatért, de matematikai produkcióját abbahagyta; referens nézete szerint fel kellett volna sorolni Wald Ábrahám nevét, mert nem mindenki tudja, hogy ez a nagy matematikus magyar. Alexits György professzor, Társulatunk elnöke mondja, hogy mikor Menger professzorhoz Bécsbe került, ott egy fiatal ember, Wald magyarul szólította meg. Alexits csodálkozására Wald azt válaszolta, hiszen csakis magyarul tudja magát pontosan kifejezni.

A 8. fejezet Kürschák Józsefről szól és kiemeli Kürschák kapcsolatait a középiskolai matematikával. A 9. fejezet a magyar matematika jelenéhez vezet el. A 10. fejezet végül néhány magyar matematikai eredményt és bizonyítást mutat be.

Az igen jól megírt könyvet néhány — valljuk be, elég gyenge kivitelű — kép is díszíti.

Nem hagyható azonban szó nélkül néhány hiba, mely a különben igen érdemes könyvecskében előfordul. A legsúlyosabbak a 9. és 10. lapon találhatók. Legendre tételéből, hogy π^2 irracionális, még az sem következik, hogy π nem tehet eleget egész együtthatós másodfokú egyenletnek. $1+\sqrt{2}$ négyzete is irracionális, mégis kielégíti az $x^2-2x-1=0$ másodfokú egyenletet. Az sem igaz, hogy körzővel és vonalzóval *legföljebb*[1] másodfokú algebrai egyenlet gyöke szerkeszthető meg. $\sqrt{1+\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ kényelmesen megszerkeszthető körzővel és vonalzóval, holott csak 8-ad fokú egyenletet elégít ki. Elég különben a szabályos 17 szög szerkeszthetőségére gondolnunk, hogy belássuk, miszerint ez az állítás hamis. A körzővel és vonalzóval való megszerkeszthetőségre a választ a Galois-féle elmélet adja meg, nevezetesen Galois tételének következőképp specializált esete:[2] *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely irreducibilis egyenlet négyzetgyökökkel megoldható legyen, az, hogy az egyenlet fokszáma 2 valamely hatványa legyen és, hogy Galois csoportjának index sorozata csupa 2-esből álljon.*

Ezt a hibát egy pótló betétlappal helyesbíteni kellene.

A 9. lapon foglalt azon megállapítás, hogy „Geometriailag megszerkeszthetőnek ... akkor nevezünk egy feladatot; ha az *egy*[1] körző és *egy* vonalzó igénybevételével ... elvégezhető“, értelmetlen, mert hisz akárhány körzővel és

[1] A kiemelés szerzőnktől származik. A téves állítás a 9. és a 10. lapon is megvan.

[2] Ld. pl. Perron: *Algebra* II., 2. kiadás, 1933. p. 194., Satz 96., vagy pl. H. Lebesgue: *Leçons sur les constructions géométriques* 1950., p. 160.

akárhány vonalzóval is csak olyan szerkesztéseket végezhetünk, mint egyetlen-eggyel. Az elemi geometria szerkesztő eszközei közül ez — legalább régebben — a derékszögre állt, mióta LILL megmutatta, hogy két derékszöggel minden harmad- és negyedfokú feladat precízen megszerkeszthető, ma már ez a derékszögnél is fölösleges, mert referens[3] 1933-ban ezeket a szerkesztéseket *egyetlen* derékszöggel hajtotta végre.

A GOLDBACH-tétel idézése sem helyes (66. lap). Goldbach Eulerrel közölt sejtése az, hogy minden *páros* szám *két prímszám összege*, amire EULER válaszolta, hogy az állítás helyessége esetén nyomban be lehet bizonyítani, hogy minden páratlan szám három prímszám összege. Fordítva nem ily egyszerű a dolog, hiszen Vinogradov bebizonyította, hogy minden elég nagy páratlan szám 3 prímszám összege, de páros számokra az analog tétel ma sincs igazolva. Csak annyi van bebizonyítva, hogy majdnem minden páros szám két prímszám összege (Van der CORPUT, HEILBRONN, CSUDAKOV, ESTERMANN), de ezt sem VINOGRADOV eredményéből, csak Vinogradov módszerével kapták. Az, hogy minden elég nagy páros szám négy prímszám összege a Vinogradov—Goldbach tétel szinte triviális következménye.

Merész állítás, hogy „a harmadfokú egyenlet megoldása N. TARTAGLIA érdeme". A megoldó formulát ő közölte CARDANOval, de SCIPIONE dal FERRONE találta, a modern kritika kétségbe vonja Tartaglia bármely érdemét.

Referenst kellemetlenül érintette ez a két kifejezés, mert némi lekicsinylő íze van: „egy Weber nevű fizikussal" (12. lap) és „A. THUE nevű matematikus". Webert 100 évnél hosszabb idő távlatából ma is nagy fizikusnak tartják, Axel THUE pedig századunk egyik legnagyobb aritmetikusa, akiről T. NAGELL, a világszerte ismert uppsalai professzor Mémorial füzetében így ír: „Axel THUE a attaqué cette question difficile par une méthode vraiment géniale, ses recherches profondes l'ont conduit à une des plus belles découvertes de la théorie des nombres".[4]

Néhány sajtóhiba is akad, a formulákban is, de ezeket a figyelmes olvasó könnyen helyesbíti. Az évszámokban is. A Matematikai és Természettudományi Értesítő 1943-ban szűnt meg, a Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn is 1883-ban indult meg. Cardano a formuláját nem 1539-ben, hanem 1545-ben közölte. A híres axióma, amelyet Bolyai Farkas a párhuzamossági axióma pótlására ajánlott, hogy t. i. három nem egy egyenesen fekvő pont mindig egy körön fekszik, az 1851-ben megjelent „Kurzer Grundriss etc."-ban szerepel, nem pedig a Gausshoz az 1804. évi értekezés után „nemsokára" küldött dolgozatban, amint szerző a 22. lapon állítja. Ez a második dolgozat az előbbinek 1808-ban írt toldaléka.

A lényegesebb hibák azonban egy pótlappal, de legkésőbb az új kiadással könnyen kijavíthatók. Mindkét füzet nyeresége matematikatörténeti irodalmunknak és legmelegebben ajánlható. Az olvasónak igaz gyönyörűsége telik bennük.

Obláth Richárd

[3] OBLÁTH: *Sur la théorie des constructions cubiques.* Comptes-Rendus 197. (1933) p. 1383—1385.

[4] Axel THUE ezen nehéz kérdéshez valóban zseniális módszerrel fogott hozzá, mély vizsgálatai a számelmélet egyik legszebb felfedezéséhez vezették.

A kézirat beérkezett: 1954. VII. 16. — Példányszám: 800
Terjedelem $7^1/_4$ (A/5) ív, 25 ábra
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója   Műszaki felelős: Tóth Ferenc

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54 4330   Felelős vezető: Vincze György

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Ára 14.— Ft.

Előfizetés évi 20.— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gepírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

MATEMATIKAI LAPOK

V. ÉVFOLYAM

4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1954

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.
Budapest, 1955. február. V. évfolyam 4. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.
Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20.— Ft.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

TARTALOMJEGYZÉK

Szőkefalvi-Nagy Gyula matematikai munkássága

Írta: OBLÁTH RICHÁRD

SZŐKEFALVI-NAGY GYULÁról lapunk már rövid cikkben megemlékezett. Ez a cikk elmondta Sz.-Nagy Gyula életkörülményeit. A tudós kutató és a művész, általában az alkotó, külső életkörülményeinek azonban az ad jelentőséget, mennyire segítették elő vagy akadályozták a tehetség kibontakozását. Romain Rolland műveinek egyik vezető eszméje, hogy az erős tehetség leküzdi a külső akadályokat és mindenképp megnyilvánul. A jelen dolgozatot záró kb. 150 műre kiterjedő bibliográfia mutatja, hogy a néha kedvezőtlen életkörülmények sem vehettek erőt Sz.-Nagy Gyula munkakedvén és képességein. Élete utolsó 10 évének súlyos betegsége és a háborús megrázkódtatások nem csökkentették alkotó készségét, sőt produktivitása ez idő alatt inkább emelkedett, hisz oeuvrejének majdnem harmada erre az időre esik.

Sz.-Nagy Gyula tudományos fejlődésére nagy befolyással voltak kolozsvári egyetemi évei. Egyetlen tanárának irányát sem követi, de mindvégig méltányolta tanárainak jelentékeny egyéniségét és a tőlük kapott benyomásokat. A század elején, Sz.-Nagy Gyula egyetemi évei alatt, a Műegyetem mellett csakugyan Kolozsvár volt a magyar matematika centruma. A tantestületben többek között SCHLESINGER LAJOS, FEJÉR LIPÓT, VÁLYI GYULA, FARKAS GYULA működtek, akik nemcsak kitűnő matematikusok, hanem elsőrangú tanárok is voltak és ezért minden tehetséges hallgatójukra nagy hatást gyakoroltak. Sz.-Nagy Gyula még legutolsó leveleiben is nagy melegséggel ír volt mestereiről, hogy Vályi előadásai mily tökéletesek voltak, és hogy utóda, HAAR ALFRÉD is megállapította, hogy a komplex változó függvénytanát sehol sem adták akkor elő a Vályiénál magasabb színvonalon, és hogy a magyar matematika mily nagy kára, hogy nem jelentek meg. Büszkén írta, hogy Schlesingerrel mindvégig összeköttetésben maradt és pl. egy — már Schlesinger halála után megjelent — dolgozatban hivatkozik Schlesinger levélbeli közléseire.

Jelen cikk Sz.-Nagy Gyula tudományos munkásságának és eredményeinek van szentelve, de itt is meg kell emlékeznünk kivételesen szeretetreméltó, lebilincselő, sőt elbájoló egyéniségéről, mert ezzel is hatott, tanítványainak szűk körén túl is.

Sz.-Nagy Gyulát az Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat 1926. évi KÖNIG GYULA jutalmával tüntette ki, munkásságát ez alkalommal SZŰCS ADOLF ismertette, jelentését hellyelközzel felhasználtam.

Ennek az áttekintésnek célja, hogy az olvasót megismertesse Sz.-Nagy Gyula matematikai munkásságának főirányaival és legfőbb eredményeivel. Ennek a munkásságnak nagy terjedelme miatt természetesen igen sok figyelemre méltó részleteredménye van, amelyre nem térhetek ki. Célomat elértem, ha általános képet sikerült adnom. Sz.-Nagy Gyula munkásságában az egy-egy tárgykörbe tartozó dolgozatok sokszor időben is összekapcsolódnak, ámbár ugyanarra a problémakörre néha évek mulva is visszatér. Ez eléggé érthető és nem véletlen, mert természetes, hogy ha a matematikus valamely témában elmélyed, a vizsgált alakzatnak egyre több sajátságát veszi észre, minden tétel új világosságot áraszt és további kérdésekre vezet, hogy Turán Pál szellemes fogalmazását idézzem, „mint a laernei hydra levágott fejeiből, egy megoldott feladatból két új lesz“, azért a kutató, aki valamely érdekes, szerencsés témára talált, jó ideig meríthet belőle inspirációt. Sz.-Nagy Gyula munkáiban továbbá sokszor megfigyelhető, hogy látszólag igen távol eső tárgyú dolgozatok szorosan összefüggnek, látni fogjuk, hogy pl. egyes geometriai tételekhez algebrai vagy számelméleti vizsgálatai vezették. Áttekintésünk témakörök szerint csoportosul, mégis nagyjában időrendi lesz. Sz.-Nagy Gyula 150 munkája persze a matematika igen sok ágából meríti tárgyát, de azért egy általános vezető eszme is kihámozható tevékenységéből. Sz.-Nagy Gyula geometer, de legjelentékenyebb művei az algebra és geometria határterületeiről valók, pontosabban a „polinomok geometriájából“. Hogy zenei kifejezéssel éljek, ezeken a húrokon játszik sok szép változatot, amelyekben hol az algebrai, hol a geometriai elemé a vezető szólam.

I. FEJEZET

DIOFANTIKA

1. §. Diofantikus egyenletek

Sz.-Nagy Gyula első dolgozatai[1] [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [20] diofantikus egyenletekről szólnak. A diofantikus egyenletek rendszeres elmélete ugyan csak FERMAT-val kezdődik, de már régebben is sokan foglalkoztak vele, Fermat óta pedig a matematika egyik legkedveltebb ága, amiről eléggé tanuskodik DICKSON közismert történeti munkája, mely ámbár jóformán csak a címeket sorolja fel és csak 1918-ig terjed, mégis majdnem 1000 oldal. Az áttekinthetetlenül óriási irodalom ellenére a diofantikának rengeteg sok elintézetlen problémája van. Schlesinger Lajos ösztönzésére, aki 1909 körül maga is sikerrel foglalkozott nehéz diofantikus problémákkal, Sz.-Nagy Gyula első dolgozatai — köztük doktori értekezése is — diofantikus egyenletekről szólnak, beállítottságának megfelelően ezek is geometriai formában.

A diofantikus egyenletek elméletének alapproblémája, hogy az adott határozatlan egyenlet vagy egyenletrendszer megoldásait keressük valamely adott számtesten vagy gyűrűn belül. Mi itt csak a legegyszerűbb esettel, a racionális, illetve egész számú megoldásokkal foglalkozunk. A kérdés nehézségét eléggé illusztrálja, hogy pl. ily egyszerű diofantikus egyenletre, mint

$$y^2 = f(x),$$

ahol $f(x)$ harmad- vagy negyedfokú polinom, sincs eldöntve. Ha nem tudjuk a megoldásokat explicite előállítani — és általában ez az eset —, felmerülhet az a kérdés, hogy véges számú vagy végtelen sok megoldás van-e, találhatunk-e felső korlátot a megoldások száma részére. Ezek a kérdések is rendkívül nehezek. Az utolsó, a felső korlátra vonatkozó kérdésről ma sem tudunk jóformán semmit, a megoldások számára vonatkozó THUE—SIEGEL-féle tételcsoportot pedig méltán tekintik a huszadik század matematikájа egyik legnagyobb vívmányának.

A diofantikus egyenletek geometriai fogalmazásában az

$$f(x, y) = 0$$

görbe racionális pontjait keressük, ami alatt azt értjük, hogy azon pontjait, amelyekre x és y mindketten racionálisak vagy esetleg

[1] A szögletes zárójelben álló számok Sz.-Nagy Gyula műveinek jelen dolgozat végén található jegyzékére utalnak.

egész számúak. (Homogén $f(x, y)$ esetén a két probléma azonos.) Sz.-Nagy Gyula azon esettel foglalkozik, amikor $f(x, y)$ racionális együtthatójú polinom. Első- és másodfokú polinomok esetén FERMAT, EULER, LAGRANGE, LEGENDRE, GAUSS, DIRICHLET lényegében — ha nem is teljesen — megoldották a problémát. Ha $f(x, y)$ magasabb rendű polinom, HILBERT és HURWITZ (1890), valamint POINCARÉ (1901) vizsgálataiból kitűnt, hogy a polinom fokszáma nem lényeges, annál fontosabb a *nem száma*,[2] mert kimutatták, hogy minden páratlan fokú racionális görbe ekvivalens[3] egy racionális egyenessel, tehát végtelen sok racionális pontja van, minden páros fokú pedig egy racionális kúpszelettel. Nagyobb nemszámú algebrai diofantikus egyenletekről, illetve görbékről nincsenek ily lezárt eredmények. Poincaré bebizonyította, hogy ha a $p = 1$ nemű görbének van racionális pontja, akkor ekvivalens valamely harmadrendű görbével. Poincarétól való még az a tétel, hogy ha egy $p = 1$ nemű harmadrendű görbének van racionális pontja, akkor ekvivalens egy oly görbével, melynek egyenlete (az elliptikus függvények elméletéből ismert) WEIERSTRASS-féle normálalakban:

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Közismert CLEBSCH és LUCAS azon tétele, mely szerint harmadrendű görbe egy racionális pontjában húzott érintője, vagy két racionális pontjának összekötő egyenese a görbéből további racionális pontot vág ki, de magasabb rendű görbéknél általában egy racionális pontból nem lehet további racionális pontokhoz jutni. Poincaré egy zseniális gondolata azonban megnyitotta az utat a további kutatások részére. Ez az idea abban áll, hogy az egyes pontok helyett a *„p elemű racionális pontcsoportokat"* vizsgálja. A racionális pontcsoport egyes pontjai nem okvetlenül racionálisak, de a koordinátáikból alakított szimmetrikus függvények racionális számok. Poincaré tétele szerint p elemű racionális pontcsoportból kiindulva új p elemű racionális pontcsoporthoz juthatunk. Ennek akkor van jelentősége, ha $p < n$.

[2] Az n-ed rendű görbe *neme* (genre) alatt a következő p számot értjük:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r, \qquad (1,1)$$

ahol d a görbe kettős pontjainak, r a hegyeinek (Spitze, points de rebroussement, cusp) száma. *Zérus nemű* vagy *racionális* (unikurzális) görbe egyetlen menetből áll és előállítható egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ egyenletrendszerrel, ahol $x(t), y(t)$ egy t paraméter racionális függvényei.

A görbe neméről geometriai viszonylatban is lesz még a jelen referátumban szó.

[3] *Ekvivalens*nek mondunk két görbét, ha biracionális transzformációval egymásba átvihetők. Nemük természetesen ugyanaz.

Sz.-Nagy Gyula dolgozatai itt kapcsolódnak Poincaréhoz, mert Poincaré nem döntötte el, hogy valamely adott racionális együtthatójú algebrai görbén vannak-e egyáltalán racionális pontcsoportok és igenlő esetben hogyan lehet őket meghatározni. Sz.-Nagy Gyula bebizonyítja [3], [4], hogy *ha a görbe rendje, n és $p-1$ relatív prímek, akkor van p elemű racionális pontcsoport a görbén.* Ebből következik, hogy *minden $p=2$ nemű görbén van két elemű racionális pontcsoport.* Az n és $2p-2$ számok $Q=(n, 2p-2)$ legnagyobb közös osztóját „*alapszám*"-nak nevezi, és megmutatja, hogy ez határozza meg azon görbék rendszámát, amelyekbe egy n-edrendű p-ednemű görbe ($=C_n^p$) biracionális transzformációval mindig átvihető, valamint a görbén lévő racionális pontcsoportok elemeinek számát. Ha ugyanis h tetszőleges, csak az $m=hQ>p-1$ feltételt kielégítő egész szám, pl. ha $m=2p-2$, akkor minden C_n^p görbén vannak m-edrendű pontcsoportok. Ha C_n^p-n van (a szinguláris pontjain kívül) valamely $m>p+1$ elemű pontcsoport, akkor és csak akkor biracionális transzformációval átvihető egy C_m^p-be, tehát *minden másodnemű görbe negyedrendű másodnemű görbébe.* Szemmel látható az analógia Hilbertnek és Hurwitznak az unikurzális görbékről szóló alapvető tételével. Ez az aritmetikai sajátság vezette rá továbbá Sz.-Nagy Gyulát a negyedrendű másodnemű görbékkel való foglalkozásra [8], [20].

Leglényegesebb eredménye azonban — amely eléggé ismeretes a szakirodalomban, Dickson említett kézikönyvének előszavában külön felhívja rá a figyelmet —, hogy a $p>1$ *nemű görbe valamely racionális pontjából kiindulva a görbének önmagába való biracionális transzformációival legfeljebb véges számú egyéb racionális ponthoz juthatunk,* mert ha egyáltalán van ilyen transzformáció, csak véges számmal van. *Számuk ugyanis* $\leqq 84(p-1)$. Ezen görbékről már nem állítható, hogy minden racionális pontjuk egy racionális pontból biracionális transzformációval megkapható. Például az

$$y^2=x^6+4x^4-2x^2+1$$

hiperelliptikus görbe csak a négy $x'=\pm x$, $y'=\pm y$ biracionális transzformációval vihető át önmagába, másrészt (0,1), (1,2), (2,11) racionális pontjai, amelyek nyilván nem keletkeznek a fenti transzformációval egymásból.

Ebbe a csoportba tartozik Sz.-Nagy Gyula következő szép eredménye [10], [13], mely szerint, *ha a több változós irreducibilis algebrai függvény a változók bármely egész számú értékénél racionális értéket is felvesz, akkor a függvény a változók racionális függvénye, sőt egész függvénye, ha racionális értékei véges nevezőjű törtek* (vagyis, ha legkisebb közös nevezőjük véges), egyébként tört függvény. Ez a tétel elegáns általánosítása MERTENS tételének,[4] mely szerint a polinom az egyetlen irreducibilis algebrai függvény, mely az argumentum minden egész számú értékére egész számú értéket vesz fel. Az ily irányú vizsgálatokat is Hilbert indította el[5] és Sz.-Nagy Gyula is hozzákapcsolódik.

Sz.-Nagy Gyula dolgozatának többi eredménye közül felemlítjük még a következő érdekes tételt:

Ha az irreducibilis algebrai függvény minden pozitív egész számú argumentumra legalább egy oly értéket vesz fel, mely valamely racionális szám k-adik hatványa, akkor maga is egy racionális együtthatójú racionális függvény k-adik hatványa.

Ugyanezen dolgozat következő tétele is általános érdeklődésre tarthat számot:

Ha az algebrai görbe valamely meghatározott pontjából racionális szerkesztéssel juthatunk a görbe valamely másik pontjához, ebből egy harmadikhoz stb., *és minden ily pont a megelőzőtől különbözik, akkor a görbe neme* 0 *vagy* 1, *és a szerkesztés a görbe bármely pontjából kiindulva mindig a görbe valamely pontját szolgáltatja.*

Tételei segítségével egyszerűbben vezeti le HILBERT tételét, mely szerint az az algebrai függvény, mely bármely kicsiny intervallum racionális pontjaiban racionális értéket vesz fel, racionális függvény. Ezt a tételt Sz.-Nagy Gyula nyomban ki is terjeszti *m* változó függvényeire.

Sz.-Nagy Gyula ezen ifjúkori dolgozatainak legfőbb jelentősége abban áll, hogy a diofantikus egyenletek egy érdekes osztályáról megállapítja, hogy csak véges számú megoldásuk van és ezzel még THUE alapvető közleményei előtt tett egy lépést ama nagy probléma megoldása felé, amelyet ma a Thue—Siegel-féle tétel intéz el, sőt a diofantikus egyenletek ezen osztályánál tétele a Thue—Siegel tételnél többet mond, mert explicit felső korlátot ad a gyökök lehetséges száma részére.

Sz.-Nagy Gyula mindvégig megőrízte a diofantika iránt való érdeklődését, de 1915 óta többé nem publikált határozatlan egyenletekről szóló dolgozatokat.

[4] F. MERTENS: Über die Zerfällung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen in zwei Faktoren, *Sitzungsberichte d. kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien,* 2/a Classe, Bd. 120, p. 12—16.

[5] D. HILBERT: Über die Irreduktibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Journal für die reine und angewendete Mathematik*, **110**, p. 104—129.

II. FEJEZET

A POLINOMOK GEOMETRIÁJA

2. §. Laguerre tételeihez kapcsolódó eredmények a differenciálhányadosok gyökeiről

Bármely komplex szám tudvalevőleg ábrázolható a komplex számsík valamely pontjával. Természetesen a polinomok gyökeit is pontokkal ábrázolhatom, így a gyökök eloszlását illető kérdésből geometriai kérdés lett. Az így kapott geometriai alakzatok elmélete alkotja a „polinomok geometriáját". A polinomok geometriájának tekinthető ismeretág igen régi, hiszen az algebrai egyenlet gyökeloszlásáról szóló minden tétel értelmezhető geometriailag. Nem csoda tehát, hogy a matematikának ezt a minden matematikust érdeklő szép területét sok kiváló kutató művelte és műveli.

Sz.-Nagy Gyula munkásságának talán számban is ([23—29], [56], [60—63], [65—69], [73], [75], [76], [85], [89], [92], [93], [98], [99], [101], [102], [105], [106], [110—113], [117], [119], [121], [126], [127], [131], [133], [134], [136], [140], [141], [143], [144], [147], összesen 48 dolgozata), de tudományos értékben mindenesetre legjelentősebb művei a polinomok geometriájába tartoznak. Két tétele különösen érdekes, ezért a kronológikus sorrend mellőzésével először ezeket ismertetem.

Ez a két tétel — és a polinomok geometriájának sok egyéb tétele — LAGUERRE következő ismert szép tételéhez kapcsolódik:

Ha az n-edfokú valós együtthatójú $f(z)$ polinom minden nullahelye valós, és két egymásra következő nullahely között az intervallumot n egyenlő részre osztjuk, akkor $f'(z)$ derivált polinom nem tűnhetik el a két szélső intervallumban.

Sz.-Nagy Gyula két irányban általánosította ezt a tételt. Az egyik így hangzik [23]:

Ha az n-edfokú valós együtthatójú $f(x)=0$ algebrai egyenlet minden gyöke valós, és a legnagyobb és legkisebb gyök távolságát n egyenlő részre osztjuk, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek mindkét szélső intervallumban van gyöke.

A bizonyítás rendkívül egyszerű. Rendezzük az $f(x)=0$ egyenlet gyökeit nagyság szerint:

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_k \leqq \alpha_{k+1} \cdots \leqq \alpha_n .$$

Minthogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_k} + \frac{1}{x-\alpha_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n},$$

azért $f'(x)=0$ minden gyökére

$$\frac{1}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}=0.$$

$f'(x)=0$ legkisebb gyöke α_1 és α_2 között fekszik $(\alpha_1<x<\alpha_2)$, tehát erre

$$\frac{1}{x-\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_2-x}+\frac{1}{\alpha_3-x}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n-x}\geqq\frac{n-1}{\alpha_n-x},$$

mert minden tag az egyenlet mindkét oldalán pozitív. Ezzel a nagyon egyszerű gondolattal már meg is van a bizonyítás lényege. Ez az egyenlőtlenség ugyanis így is írható:

$$(n-1)(x-\alpha_1)\leqq\alpha_n-x,$$

vagy ha mindkét oldalhoz $x-\alpha_1$-et hozzáadjuk és azután n-nel osztunk,

$$x-\alpha_1\leqq\frac{\alpha_n-\alpha_1}{n},$$

amivel a tétel egyik fele már bizonyítva is van. Az utolsó n-edrészre vonatkozó analog állítás ugyanúgy látható be.

Ezt a tételt több irányban is élesíti, illetve pontosabbá teszi. Például bebizonyítja, hogy az említett $f'(x)=0$ egyenletnek az

$$\left(\alpha_k,\ \alpha_k+\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{n-k+1}\right) \text{ és } \left(\alpha_{k+1}-\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{k+1},\ \alpha_{k+1}\right)$$

intervallumok egyikének belsejében sincs gyöke. Érvényes továbbá a következő lényeges élesítés: *Ha az $f(x)=0$ egyenlet legkisebb és legnagyobb gyöke közé eső távolságot $2(n-1)$ részre osztjuk, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek legalább az egyik szélső intervallumban van gyöke.*

Ebből az eszmekörből még a következő figyelemreméltó tételét említjük, amely az irodalomban meglehetős érdeklődést keltett és amelyet több szerző is általánosított:

Ha egy csupa valós gyökökkel bíró algebrai egyenlet három legmagasabb hatványú tagjának együtthatója rendre a_0, a_1, a_2, és ha d azon intervallum hossza, mely az összes gyököket tartalmazza, akkor az egyenlet fokszámától függetlenül

$$d<\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-2\frac{a_2}{a_0}}.$$

Ez a felső korlát *pontos.* A bizonyításnál felhasználja I. Schur nevezetes tételét, mely szerint ha az $f(x)=0$ algebrai egyenlet minden gyöke valós és legnagyobb gyöke x_n, az $f^{(\nu)}(x)=0$

egyenlet legnagyobb gyöke x_{n-r}, akkor

$$x_n - x_{n-1} \leqq x_{n-1} - x_{n-2} \leqq \cdots \leqq x_2 - x_1 .$$

Az egyenlőségjelek akkor és csak akkor érvényesek, ha az $f(x)$ polinomnak $(n-1)$-szeres gyöke van.

Sz.-Nagy Gyula másik igen érdekes tétele más irányban általánosítja Laguerre híres tételét. [73], [76]. Ennek az általánosításnak lényege a tétel premisszáinak enyhítése. A kezdeményező ez irányban P. MONTEL francia matematikus. Montel bebizonyította a következő tételt:

Ha az n-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenlet minden együtthatója valós és az α_k, α_{k+1} valós gyökök közé egyetlen gyökének valós része sem esik, akkor, ha az α_k és α_{k+1} közé eső intervallumot n egyenlő részre osztjuk, az $f'(x)=0$ egyenlet egyetlen gyöke sem eshetik a két szélső intervallumba.

Sz.-Nagy Gyula ezen tétel jelentékeny általánosításával nyeri fenn említett tételét, mely szerint:

Ha az n-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenlet minden együtthatója valós, és az α_k és α_{k+1} valós gyökei mint átmérő fölött leírt körben az egyenletnek gyöke nincs, akkor az (α_k, α_{k+1}) intervallumot n egyenlő részre osztva, az $f'(x)=0$ egyenlet egyetlen gyöke sincs a két szélső részintervallumban.

Montel tétele általánosabb Laguerre-énél, mert megenged komplex gyököket, de a gyököket a valós tengelyre α_k-ban és α_{k+1}-ben emelt merőlegesek közé eső síksávból — tehát végtelen nagy területről — kizárja, míg Sz.-Nagy Gyula tételének érvényességéhez elegendő, ha csak egy pontosan meghatározott kör belsejében nem lehetnek az egyenletnek gyökei.

Ennek a méltán híressé vált tételnek is elég egyszerű a bizonyítása [73], [76]. Az az olvasóm, aki LANDAU műveit tanulmányozta, többször találkozhatott azzal a fordulattal: az állítást elkomplikáljuk, hogy könnyebben bebizonyíthassuk. Ezt teszi a jelen esetben Sz.-Nagy Gyula is. A bizonyítandó tétel helyett a következőt bizonyítja, mely a kívánt tételt magában foglalja:

Ha α és β $(>\alpha)$ a valós együtthatójú n-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenletnek egy m_α, illetőleg m_β-szoros valós gyöke, ha továbbá az egyenletnek egyetlen gyöke sincs az (α, β) átmérőjű K kör belsejében és ha h_α, h_β jelöli az egyenlet azon gyökeinek számát, amelyeknek valós része α-nál nagyobb, illetve β-nál kisebb, akkor az $f'(x)$ differenciálhányados nem tünhetik el az

$$\left(\alpha, \alpha_1 = \alpha + m_\alpha \frac{\beta-\alpha}{m_\alpha + h_\alpha}\right) \text{ és } \left(\beta_1 = \beta - m_\beta \frac{\beta-\alpha}{m_\beta + h_\beta}, \beta\right)$$

intervallumok belsejében.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan járunk el. Ha x az $f'(x)$ polinomnak az (α, β) számköz belsejében fekvő egy zérushelye, akkor az

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m_\alpha}{x-\alpha} + \frac{m_\beta}{x-\beta} + \cdots = 0$$

egyenlet az

$$\frac{m_\alpha}{x-\alpha} + \cdots = \frac{m_\beta}{\beta - x} + \cdots \tag{2, 1}$$

alakban is írható, ahol $f(x) = 0$ valamely γ gyöke az egyenlet bal, illetve jobb oldalán szerepel aszerint, amint valós része x-nél kisebb, vagy nagyobb. Ha γ valós része éppen x, akkor mindegy, hogy melyik oldalon áll; ebben az esetben $1/(x-\gamma)$ valós része 0. A többi esetben $1/(x-\gamma)$ valós része az x és γ ponton átmenő, a valós tengelyen fekvő középponttal bíró K_γ kör átmérőjének reciprok értékével egyenlő. Ha ugyanis $\gamma - x = re^{i\varphi}$, akkor

$$\frac{1}{\gamma - x} = \frac{\cos\varphi}{r} - i\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Mivel az x pont a K körön belül, a γ pont pedig a feltevés szerint a K körön kívül, vagy a K körön van, azért a K_γ kör metszi a K kört. A K_γ körlap tartalmazza az α vagy a β pontot, aszerint, amint $\Re(x-\gamma)$, ill. $\Re(\gamma - x)$ pozitív. A K_γ kör D_γ átmérője tehát az $\Re(x-\gamma) > 0$ esetben nem kisebb $x-\alpha$-nál, az $\Re(\gamma - x) > 0$ esetben pedig nem kisebb $\beta - x$-nél.[6]

A (2, 1) egyenletből a tagok valós részeinek figyelembevételével következik tehát ez a két egyenlőtlenség:

$$\frac{m_\alpha}{x-\alpha} \leqq \frac{h_\alpha}{\beta - x}$$

és

$$\frac{m_\beta}{\beta - x} \leqq \frac{h_\beta}{x-\alpha},$$

amelyek az

$$x-\alpha \geqq m_\alpha \frac{\beta - \alpha}{m_\alpha + h_\alpha} = \alpha_1 - \alpha$$

és

$$\beta - x \geqq m_\beta \frac{\beta - \alpha}{m_\beta + h_\beta} = \beta - \beta_1$$

alakban írhatók. Ezzel állításunkat és a bizonyítandó tételt bebizonyítottuk.

[6] $\Re(q)$ szokás szerint a q komplex szám valós részét jelenti, $\Im(q)$ pedig a képzetes részét.

Ugyanezen dolgozataiban [73], [76] régebbi [23] főtételét így általánosítja:

Ha α és β ($>\alpha$) a valós együtthatójú n-edrendű $f(x)$ polinom két zéróhelye és ha az α illetve β pontokon kívül $f(x)$ valamennyi zéróhelye az

$$\left(\alpha_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n},\beta\right) \quad \textit{illetőleg} \quad \left(\alpha,\beta_1=\beta-\frac{\beta-\alpha}{n}\right)$$

átmérőjű kör belsejébe vagy kerületére esik, akkor a derivált $f'(x)$ polinom az (α,α_1), illetve (β,β_1) zárt intervallumban legalább egyszer eltűnik.

Laguerre idézett és egyéb tételeihez fűződő kérdésekkel Sz.-Nagy Gyula még sokszor foglalkozott, tételei között igen szépeket is találhatunk, de megelégszünk a bemutatott csemegékkel.

3. §. A Gauss—Lucas-féle poligon szűkítésére vonatkozó tételek

Szőkefalvi-Nagy Gyula további eredményeinek egy sorozata a polinomok geometriájának egyik igen nevezetes tételéhez, az ún. GAUSS—LUCAS-féle tételhez kapcsolódik, mely szerint az $f(x)$ polinom $f'(x)$ deriváltjának zéróhelyei az $f(x)$ zéróhelyeivel meghatározott legkisebb konvex sokszög belsejében vagy határán helyezkednek el.

Sz.-Nagy Gyulának sikerül ezt a területet csökkenteni, meg tudja határozni a sokszög olyan részeit, amelyekben $f'(x)$-nek nem lehetnek zéróhelyei, ezzel a gyökök helyzete tehát pontosabban van meghatározva. Új bizonyítást ad magára a Gauss—Lucas tételre is [56]. További tételek nyerésére is sokszor felhasználja a bizonyításnak azt a döntő gondolatát, mely szerint a valamely gyökponton át húzott, a poligon belsejébe eső egyenesdarab szétválasztja az egyenlet gyökeit.

Bizonyítását reprodukálom. Kiinduló pontja egy jól ismert és a megelőző paragrafusban is felhasznált formula. Ha $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ az n-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenlet gyökei és β az $f'(x)=0$ egyenletnek valamely az alfáktól különböző gyöke, akkor az idézett formula szerint

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha_1}+\frac{1}{\beta-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\beta-\alpha_n}=0.$$

Ha az $\alpha_k-\beta$ komplex szám argumentuma $\varphi_k=\psi_k+\psi$, azaz $\alpha_k-\beta=r_ke^{i\varphi_k}=r_ke^{i(\psi_k+\psi)}$, akkor

$$\Im[e^{i\psi}/(\alpha_k-\beta)]=\frac{r_k}{\sin\psi_k}=a_k \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

és így a fenti egyenletből következik, hogy

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\Im\left[-e^{i\psi}\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}\right]=0. \qquad (3,1)$$

Itt $|a_k|$ annak az α_k és β pontokon átmenő körnek az átmérője, amelynek érintője a β ponton átmenő és a valós tengellyel ψ szöget alkotó e egyenes. Az a_k értéke az e egyenes egyik oldalán lévő α_k gyökpontokra vonatkozólag pozitív, a másik oldalon fekvőkre negatív, az e egyenesen fekvő gyökpontokra nézve pedig $1/a_k=0$. A (3,1) egyenletből következik, hogy ha van pozitív az a-k közt, akkor van negatív is, és fordítva, következésképpen az α_k pontok nem lehetnek mind az a egyenes ugyanazon oldalán, vagy e-n. A ψ szöget azonban szabadon választhattuk, következtetésünk tehát bármily irányú egyenesre fennáll, amiből a Gauss—Lucas-tétel következik.

A fenti (3,1) alatti egyenlet egyszerű elemzése vezeti Sz.-Nagy Gyulát a Gauss-féle sokszög oly tartományaira, amelyekben az $f'(x)=0$ egyenletnek nem lehet gyöke. Az indexek ugyanis az általánosság megszorítása nélkül úgy választhatók, hogy (3,1) első h tagja pozitív, a következő k tag negatív, az utolsó $n-k-h\geqq 0$ tag nulla, és

$$0<a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_h, \quad b_i=-a_{h+i} \quad (i=1,2,\ldots,k)$$
$$0<b_1\leqq b_2\leqq\cdots\leqq b_k,$$

azaz (3,1) így írható:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_h}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}.$$

Ha α_i $(i\leqq h)$, illetőleg α_j $(h<j\leqq h+k)$ az $f(x)=0$ egyenlet egy tetszőleges, legfeljebb p-szeres, illetve legfeljebb q-szoros gyöke, amelyhez az a, illetőleg b átmérő tartozik, akkor nyilván fennáll

$$\frac{p}{a}\leqq\frac{k}{b_1}; \quad \frac{q}{b}\leqq\frac{h}{a_1} \qquad (3,2)$$

is. Ezzel már megszerezte az eszközt tételének bizonyítására. Ez a tétel [60]:

Ha α az n-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenletnek olyan p-szeres gyöke, amelyen átmenő egyenesek bármelyik oldalán az egyenletnek legfeljebb s gyöke fekszik és ha K az α gyökponton átmenő olyan kör, amelynek belsejében az egyenletnek egyetlen gyöke sincs, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek nincs gyöke a K kört az

α pontban belülről érintő és $\frac{p}{p+s}$-szer kisebb sugarú kör belsejében.

(Az ellenkező feltevés ugyanis ellentétben áll a (3,2) egyenlőtlenségekkel.)

Ennek a tételnek sok érdekes speciális esete, illetve következménye van. Megelégszünk egy-kettőnek a felsorolásával. Megfogalmazásukra a következő terminológiával él. Legyen G_α az a legkisebb körívpoligon, melynek belsejében az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek legalább p-szeres α gyökén kívül nincs más gyöke és amely az α-n keresztülmenő minden olyan kört, melyen belül az egyenletnek nincs gyöke, egészen magában foglal. $G_\alpha(\varrho)$-val jelöli a G_α tartománynak α-ra, mint külső hasonlósági pontra vonatkozólag $\frac{1}{\varrho}$ $(\varrho<1)$ arányban kisebbített képét. A felemlítendő speciális eset: *Ha α az n-edfokú $f(x)=0$ egyenlet legalább p-szeres gyöke, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs α-tól különböző gyöke a $G_\alpha\left(\frac{p}{n}\right)$ tartomány belsejében.*

Tételei szoros rokonságban vannak J. L. Walsh[7] következő szép tételével:

Ha az $n=n_1+n_2$-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenlet n_1 gyöke a K_1, a többi n_2 gyöke a K_2 körtartományban fekszik, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet bármely gyöke beleesik a

$$K_1,\ K_2 \text{ és } K_3=\frac{n_1K_2+n_2K_1}{n_1+n_2}$$

körtartományok valamelyikébe.

E tétel egy, ugyancsak Walsh által kimondott következménye a következő tétel, amelynek Sz.-Nagy Gyula fent ismertetett tételeivel való rokonsága szembeszökő:

Ha az n-edfokú $f(x)=0$ egyenletnek α valamely p-szeres gyöke és a többi $n-p$ gyöke a K körtartományban van, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek az α-tól különböző gyökei K-ban és abban a K' körtartományban fekszenek, amely a K körtartománynak az α-ra vonatkozólag $\frac{p}{n}$ arányban kisebbített képe.

Sz.-Nagy Gyula idevágó tételei közűl már csak a következő, a harmadfokú egyenletre specializált szép tételt ismertetjük:

[7] J. L. Walsh: On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivative of rational functions. *Transact. of the Amer. Math. Soc.* **22** (1921) p. 101—116., speciálisan p. 115. Ld. még Pólya—Szegő: *Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis* II, p. 245—246., 1925.

Ha az $f(x)=0$ harmadfokú egyenlet $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gyökeivel meghatározott háromszögnek az α_1 csúcsánál fekvő szöge $2\varphi > \frac{\pi}{3}$, akkor ezt a szöget alkotó $S(2\varphi)$ szögtér közepén szimmetrikusan fekvő $S\left(2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$ szögtér belsejében nincs az $f'(x)=0$ egyenletnek gyöke.

Ismeretes, hogy harmadfokú $f(x)=0$ egyenlet esetében a derivált $f'(x)=0$ egyenlet gyökei az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ háromszög oldalait felezőpontjukban érintő ú.n. STEINER-féle ellipszis fókuszai.[8]

Sz.-Nagy Gyula megjegyzi, hogy tételei nemcsak a polinomok zérushelyeinek helyzetéről adnak felvilágosítást, hanem azon pontokéról is, amelyekben a polinom valamely tetszésszerinti A értéket vesz fel, hiszen $f(x)-A$ differenciálhányadosa is $f'(x)$. A polinomok A helyeire vonatkozó vizsgálataira még visszatérünk.

A bemutatott tételek tulnyomó része a differenciálszámítás elemeiből jól ismert ROLLE tételt teszi pontosabbá, egyrészt azon intervallum megszűkítésével, amelyben a differenciálhányadosnak zéróhelye lehet, részben pedig komplex változók bizonyos függvényeire való kiterjesztésével.

4. §. Jensen tételeihez fűződő vizsgálatok

J. L. W. V. JENSEN[9] dán matematikusnak köszönhető a következő két nevezetes tétel, amelyek bizonyos esetekben a Gauss-féle poligonnál szűkebb területre szorítják a polinom differenciálhányadosának gyökeit.

Nevezzük Sz.-Nagy Gyulával azon köröket, melyek az $f(z)=0$ egyenlet valamely konjugált komplex gyökpárja, mint átmérő fölött kifeszíthetők, *Jensen-féle köröknek.*

1. Ha $f(z)$ valós együtthatójú polinom, vagy zérus vagy 1 nemű transzcendens egész függvény, akkor az $f'(z)=0$ derivált egyenlet mindegyik gyöke legalább egy Jensen-féle körben van. A tétel nemcsak az $f'(z)=0$, hanem az általánosabb $\delta f(z)+f'(z)=0$ egyenlet gyökeire is igaz (ha δ tetszőleges valós szám).

2. Ha $f(z)$ értelme a fenti és a

$$g(z)\equiv a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k=0$$

[8] H. W. E. JUNG: Zwei merkwürdige Punkte des Dreiecks. Mathematische Abhandlungen, *Hallische Monographien* No. 6., 1948., p. 1. A tétel azonban már CESÀROtól származik. E. CESÀRO: *Period. di Mat.* 1890.

[9] J. L. W. V. JENSEN: Recherches sur la théorie des équations, *Acta Mathematica* **36**, 1913., p. 181—195., főleg p. 190.

egyenlet minden gyöke valós, akkor az

$$F(z)\equiv a_0 f(z)+a_1 f'(z)+\cdots+a_k f^{(k)}(z)\equiv$$
$$\equiv g(0)f(z)+\frac{g'(0)}{1!}f'(z)+\cdots+\frac{g^{(k)}(0)}{k!}f^{(k)}(z)=0$$

egyenlet minden képzetes gyöke legalább egy oly ellipszisben van, melynek kis tengelye azon távolság, amelynek végpontjai $f(z)=0$ egy-egy konjugált komplex gyökpárját összekötik és amelynek nagy tengelye a kis tengely $\sqrt{k}$-szorosa.

Jensen ezeket a tételeket bizonyítás nélkül közölte. Sz.-Nagy Gyula mindkét tételt bebizonyítja [24], [89] és megjegyzi, hogy az 1. tételnek az irodalomban található bizonyításait nem tartja kielégítőnek. A tételeket kiterjeszti az

$$F(z)=e^{-\frac{\gamma^2}{2}z^2+\delta z}f(z)$$

alakú függvényekre is, ahol γ, δ tetszésszerinti valós számok; sőt élesíti, mert megmutatja, hogy a $F'(z)=0$ egyenlet *minden, az* $f(z)=0$ *többszörös gyökeitől különböző* ζ *gyöke csak akkor nincs valamely Jensen kör belsejében, ha valamennyi kör kerületén van.* Ennek szükséges (de nem elegendő) feltételei, hogy $\gamma=0$ legyen és hogy $f(z)=0$-nak ne legyen valós gyöke. További (valamint a 2. tétel) általánosításaira nem térünk ki, de felemlítjük a specializálásukkal nyert következő tételt:

Ha az $f(z)=0$ *n-edfokú, valós együtthatójú algebrai egyenletnek egyetlen k-szoros konjugált komplex gyökpáron kívül minden gyöke valós, és az egyenlet egyetlen Jensen körével koncentrikus kört, melynek sugara a Jensen kör sugarának* $\sqrt{\frac{n-2k}{n}}$*-szerese,* K_0*-nak nevezzük, akkor az* $f'(z)=0$ *egyenletnek az* $f(z)=0$ *k-szoros gyökpárjától különböző konjugált komplex gyökpárja — ha egyáltalán van ilyen — a* K_0 *kör belsejében vagy kerületén van.*

Ugyanebben a dolgozatban [24] az egyenlőoldalú hiperbolát is felhasználja a gyökök elhatárolására. Nevezzük a hiperbola belsejének a síknak azt a részét, ahonnan nem húzhatunk hozzá valós érintőket, külsejének pedig azt, ahonnan érintők indulhatnak ki. Bebizonyítja a következő tételt:

Legyen $f(z)$ *polinom, vagy* 0 *vagy* 1 *nemű egész függvény,* δ *tetszőleges* (valós vagy komplex) *szám. A* $\delta f(z)+f'(z)=0$ *egyenlet* β_1 *és* β_2 *gyöke különbözzék* $f(z)=0$ *bármely gyökétől. A* β_1 *és* β_2 *pontokon át vezessünk át egy tetszésszerinti olyan egyenlő oldalú hiperbolát, melynek* $\beta_1\beta_2$ *átmérője. E hiperbola szét-*

választja az $f(z)=0$ egyenlet gyökeit, hacsak nem megy át az egyenlet összes gyökein.

A bizonyítás a már ismertetett módszerekkel történik.

5. §. Polinom értékkészlete adott tartományban

Egy másik érdekes problémakörbe vezetnek Sz.-Nagy Gyula [28] és [29] dolgozatai. A problémát eleve polinomokra specializáljuk. Az a kérdés, ha ismerem az $f(z)$ polinom értékét két különböző a_1, a_2 pontban, mit mondhatok a polinom ill. deriváltja értékkészletéről? Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_1=-1$, $a_2=+1$.

Az egyik első eredmény ebben a problémakörben GRACE és HEAWOOD tétele: ha az n-edfokú $f(z)$ polinom értéke a -1, $+1$ pontokban ugyanaz, akkor $f'(z)$-nek a 0 pont körül $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$ sugárral írt körben biztosan van zérushelye. További szép eredmény ebben az irányban FEKETE MIHÁLYnak 1923-ban közölt következő tétele: ha az $f(z)$ polinom értékei a -1, $+1$ pontokban α_1 ill. α_2, akkor a 0 pont körül $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$ sugárral írt körben $f(z)$ minden, α_1 és α_2 közé eső (vagyis az $\alpha_1\alpha_2$ szakaszon levő) értéket felvesz. FEKETE e tételeket később élesítette, amennyiben megmutatta, hogy az n fokszám helyett a polinom 0-tól különböző együtthatóinak számát, $k+1$-et lehet venni. Létezik ugyanis egy olyan c abszolút konstans, hogy minden $f(z)$ polinomra, amely a ± 1 pontokban eltűnik, $f(z)$-nek a 0 pont körüli ck sugarú körben van zérushelye. Létezik továbbá egy olyan c' abszolút konstans, hogy ha $f(-1)=\alpha_1$, $f(+1)=\alpha_2$, akkor a 0 körüli $c'k$ sugarú körben $f(z)$ minden olyan értéket felvesz, amely α_1 és α_2 közé esik. Sz.-Nagy Gyula a két speciális érték helyett m tetszőleges pontot vezet be és a tételt így általánosítja:

Ha az n-edfokú $Q(z)$ polinom értéke az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pontokban rendre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, továbbá P és Π az a-kat, illetve α-kat körülzáró legkisebb konvex poligon, K a legkisebb kör, melynek kerületi pontjaiból a P sokszög $\leqq \frac{\pi}{n}$ szög alatt látszik, akkor $Q(z)$ a K kör belsejében vagy kerületén minden Π-ben lévő értéket felvesz.

A bizonyítás segédeszköze a következő tétele [29]:

Mindazon pontok, amelyekből valamely ponthalmaz legfeljebb π szög alatt látszik, az illető halmazt burkoló legkisebb konvex tartomány (konvex burok) külsejét határozzák meg. Ha azon pontokat tekintjük, amelyekből a halmaz adott φ vagy kisebb szög alatt látszik ($\varphi < \pi$), az előbbi külső tartomány egy részét kapjuk. Ha $\varphi = \frac{\pi}{n}$, nevezzük ezt a kiegészítő tartományt T_n-nek. A szóbanforgó tétel pedig [29]:

Legyen adva bármily s számú n-edfokú egyenlet

$$f_1(z) = 0, \ldots, f_s(z) = 0$$

és határozzuk meg a gyökeik halmazához tartozó T_n tartományt. *Ha $a_1, \ldots, a_s$ tetszőleges nem negatív valós számok, akkor az*

$$a_1 f_1(z) + \cdots + a_s f_s(z) = 0$$

úgyszintén az

$$\frac{a_1}{f_1(z)} + \cdots + \frac{a_s}{f_s(z)} = 0,$$

egyenletek összes gyökei a T_n tartomány belsejében vannak és a T_n tartomány általában nem pótolható kisebbel.

A most referált problémakörrel függ össze R. Jentzsch érdekes tétele,[10] amelyet Fekete Mihály bizonyított be:[11]

Ha $f(z)-a$ és $f(z)-b$ minden gyöke benne van valamely T konvex tartományban, akkor $f(z)-c$ minden gyöke szintén benne van T-ben, ha c az $\overline{ab}$ segmentum bármely pontja.

Ezt a tételt Sz.-Nagy Gyula így általánosítja [29], [105], [136]. *Ha az R sugarú K körlap az*

$$F_1(z) = f(z) - g_1(z) \quad \text{és} \quad F_2(z) = f(z) - g_2(z)$$

polinomok összes zérushelyeit tartalmazza és $f(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ fokszáma rendre n, $m_1 \leqq m \leqq n-1$, ill. $m_2 \leqq m \leqq n-1$ és ha

$$\varrho = \mathrm{Min}\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{\frac{1}{m+1}}, \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{\frac{1}{m+1}} \right) \neq 1,$$

akkor az $R_1 = \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ sugarú, K-val koncentrikus K_1 körlap az

$$F(z) = \frac{\lambda_1 F_1(z) + \lambda_2 F_2(z)}{\lambda_1 + \lambda_2} = f(z) - \frac{\lambda_1 g_1(z) + \lambda_2 g_2(z)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

[10] R. Jentzsch: *Archiv d. Math. u. Phys.* 3. Reihe, Band 25, 1917., p. 196. Aufgabe Nr. 526.

[11] M. J. Dieudonné: La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques). *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. XCIII, Paris, 1938, p. 62. Ugyanezen lapon Fekete M. idevonatkozó tételei is találhatók.

polinom összes zérushelyeit tartalmazza. A K_1 kör általában nem helyettesíthető oly koncentrikus nála kisebb körrel, amely $F(z)$ összes nullahelyeit tartalmazza.

A bizonyítás, melyet nem részletezünk, Laguerre és Walsh következő tételein alapszik.

Laguerre[12] tétele felhasználja a polinom ζ poláris pontja fogalmát (erre még visszatérünk). Ennek definíciója: z_0 pontnak az

$$f(z) = a_0(z-z_1)\cdots(z-z_n)$$

polinomra vonatkozó ζ polárisa az

$$\frac{n}{z_0-\zeta} = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_0-z_k} = F'(z_0) \tag{5, 1}$$

egyenletből számítható ki $(F(z) = \log f(z))$:

$$\zeta = z_0 - n\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Laguerre szerint, ha valamely zárt körtartomány tartalmazza $f(z)$ minden gyökpontját, de z_0-t nem, akkor z_0 polárisát, ζ-t is tartalmazza. Walsh[13] felhasznált tétele pedig: ha $z_1, z_2, \ldots, z_n$ egy K körben feküsznek, akkor minden z_0 ponthoz található a K körben egy oly Z pont, amelyre a

$$(z_0-z_1)(z_0-z_2)\cdots(z_0-z_n) = (z_0-Z)^n$$

egyenlet teljesül.

6. §. Polinom polárisa

Most volt szó az (5, 1) egyenlettel definiált „polinom polárisáról a z_0 pontra vonatkozólag". Ezzel Sz.-Nagy Gyula több dolgozatában foglalkozik [63], [101], [102], [113], [117], [134], [136] és további tételeket állapít meg, amelyeket azonban csak nagyon kivonatosan ismertethetünk.

Bevezeti ezt a fogalmat: a z_0 pont p-edik polárkörét vagy a z_0 középpontú p-edik *polárkört* az $f(z)$ polinomra vonatkozólag [117]. Ennek definíciója: az

$$\frac{n}{(z_0-\zeta)^p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z_0-z_k)^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p)}(z_0)$$

[12] E. Laguerre (Oeuvres I. p. 56—63 és 133—143) a polárist z_0 *derivált pontjának*, Pólya és Szegő (*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* II. p. 56—57) *$f(x)$ zérushelyei z_0-ra vonatkozó súlypontjának* nevezik.

[13] J. L. Walsh: On the location of the roots of certain types of polynomials, *Transact. of the Amer. Math. Soc.* **24**, 1922, p. 163—180.

egyenlet ζ_k gyökei egy szabályos p oldalú sokszög csúcsai, melynek középpontja z_0. Az ezen sokszög körül írt kör a fennemlített polárkör. Megállapított tételei közül csak a következőt említjük:

Az $f(z)$ polinom bármelyik polárkörének belseje a polinom legalább egy zérushelyét tartalmazza. Ha $f(z)$-nek nincs a polárkörben gyöke, akkor összes zérushelyei a polárkör kerületén vannak.

Ebbe az eszmekörbe tartozó némelyik eredménye [63] LAGUERRE és FEJÉR LIPÓT tételeihez kapcsolódik. Laguerre szóbanforgó tétele: ha $f(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom, z_0 a sík oly pontja, amelyre $f(z_0)f'(z_0) \neq 0$, akkor minden a z_0 és $z_0 - n\dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ pontokon átmenő kör belseje $f(z)$ legalább egy zérushelyét tartalmazza. Ha $f(z)$ nem minden zérushelye van egy ily kör kerületén, akkor $f(z)$-nek a körön kívül is vannak zérushelyei. Ezt a tételt Fejér Lipót így élesítette:[14]

Ha $f(z_0)f'(z_0) \neq 0$ és a differenciálhányadosok $f'(z_0), f''(z_0), \ldots, f^{(n)}(z_0)$ sorozatában p számú tag nem tűnik el, akkor az n-edfokú $f(z)$ polinomnak bármely a z_0 és $z_0 - p\dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ pontokon átmenő kör belsejében vagy kerületén van gyöke. Ez a tétel azon pontokban, amelyekben $f''(z), f'''(z), \ldots, f^{(n-1)}(z)$ valamelyike eltűnik, többet mond Laguerre tételénél.

Sz.-Nagy Gyula ezeket a tételeket több irányban általánosítja. Tételei közül csak ezt idézzük:

Ha z_0 az n-edfokú $f(z)$ polinomhoz tartozó Gauss—Lucas poligon belsejének vagy kerületének tetszőleges pontja és $f(z_0)f'(z_0) \neq 0$, akkor a polinomnak minden a z_0 és $z_0 - (n-1)\dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ pontokon átmenő kör belsejében vagy kerületén legalább egy zéróhelye van.

Tételeinek alkalmazásaképp megad igen általános típusú egyenleteket, melyeknek gyökei valamely adott görbe, pl. lemniszkáta, szinuszspirális stb. belsejében vagy kerületén vannak.

Sz.-Nagy Gyula 1942-ben közölte [102] a következő tételt és egyszerűbb bizonyítással 1950-ben visszatért rá [136]:

Legyenek λ és μ tetszésszerinti (valós vagy komplex) *számok, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ pedig tetszőleges pozitív számok, legyen továbbá*

$$f(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

[14] L. FEJÉR: Über Kreisgebiete in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt. *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung* **26**, 1917, p. 114—128, különösen p. 124.

és

$$g(z)=f(z)\left(\lambda+\mu\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{z-z_k}\right).$$

Ha $f(z)$ összes zérushelyei a

$$K:\ |z-z_0|\leqq r$$

kör belsejében vannak, akkor a

$$K_1:\ |z-z_0|\leqq r_1=r\sqrt{2}$$

kör $g(z)$-nek legalább $n-1$ zérushelyét tartalmazza.

A K_1 kör egyszermind az

$$f(z)g'(z)-g(z)f'(z)$$

polinom összes zérushelyeit is tartalmazza, azaz a $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ tört deriváltjának összes végesben fekvő zérushelyeit.

A tétel az $m_1=\ldots=m_n=1$ speciális esetben BIERNACKItól származik 1927-ből[15] és így is fogalmazható:

Ha az

$$R(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{z-z_k}\qquad (m_k>0,\ k=1,2,\ldots,n)$$

racionális függvény pólusai a $|z-z_0|=r$ kör belsejében foglaltatnak, akkor $R(z)$ az $|z-z_0|=r\sqrt{2}$ körön kívül univalens.[16]

7. §. Polinomok A-helyei

Eddig is volt már szó azon helyekről, ahol a polinom valamely előírt értéket vesz fel. Ha A ez az érték, akkor azt mondjuk, hogy ez a hely a polinom *„A-helye"*. Szóljunk még róluk, mert Sz.-Nagy Gyula több szép dolgozatot szentel nekik [24], [102], [106], [110], [111] és mert az Eötvös Lóránd Matematikai és Fizikai Társulatban tartott egyetlen előadása is ezzel a kérdéssel foglalkozott. Polinomok zérushelyeinek és A-helyeinek összefüggéséről a legrégibb tétel Walshtól[17] származik és így hangzik:

[15] M. BIERNACKI: Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires. *Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences et de Lettres,* Classe des Sciences Math., Série A, 1927, p. 541—685.

[16] Ez alatt azt értik, hogy ha $a\neq b$, $R(a)\neq R(b)$. Erre a fogalomra magyarul is sokszor a német *schlicht* szót használják. Fejér *egyrétű*vel magyarosítja.

[17] WALSH i. h. (13) különösen p. 173.

Ha n-edfokú ($n \geqq 2$) $f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)$ polinom minden zérushelye a ζ középpontú r sugarú körlapon van, akkor az az n számú körlap ($h = 1, 2, \ldots, n$), amelynek sugara r és középpont

$$\zeta_h = \zeta + |\sqrt[n]{A}|\, e^{\frac{2\pi i}{n} h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

együttvéve $f(z)$ valamennyi A-helyét (az $f(z) - A$ polinom valamennyi zérushelyét) tartalmazza.

Sz. Nagy Gyula a következő tételt bizonyítja be [106], [111]:

Jelentse K_k az $f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)$ ($n \geqq 2$) polinom z_k zérushelye mint középpont körüli $\varrho = |\sqrt[n]{A}|$ sugarú zárt körlapot. Ekkor a K_k ($k = 1, \ldots, n$) körlapok mindegyike tartalmazza az $f(z)$-nek legalább egy A-helyet. A K_k körlapok együttesen tartalmazzák az $f(z)$ összes A helyeit. Ha az n számú K_k körlapnak a közös része nem üres, akkor ennek egy belső pontja sem lehet a polinom A-helye.

A bizonyítás egyszerű. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $f(z)$ függvény A helyei, akkor

$$f(z) - A = (z-a)\cdots(z-a_n).$$

Ha most $f(z)$ minden A-helye a K_k körlapon kívül lenne, akkor fennállnának az

$$|z_k - a_h| > \varrho = |\sqrt[n]{A}| \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőtlenségek. Ebből következnék, hogy

$$|f(z_k) - A| = |A| = |(z_k - a_1)\cdots(z_k - a_n)| > \varrho^n = A,$$

ami a tétel első részét bizonyítja. Ha most az a_h A-hely minden K_k körlap belsejében, ill, minden K_k körlap külsejében lenne, akkor fennállnának az

$$|a_h - z_k| < \varrho \text{ illetőleg az } |a_h - z_k| > \varrho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőtlenségek, amelyekből

$$|f(a_h)| = |(a_h - z_1)(a_h - z_2)\cdots(a_h - z_n)| < \varrho^n = |A|$$

illetőleg

$$|f(a_h)| < \varrho^n = |A|$$

következnék. Ezen ellenmondásból a tétel második része folyik.

E tétel következménye:

Ha az $f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)$ polinom minden zérushelye az $|z-\zeta| \leqq r$ körlapon van és ha $|A| = \varrho^n$, akkor $f(z)$ bármely A-helye az

$$|z-\zeta| \leqq \varrho + r$$

körlapon van, $f(z)$ bármely olyan A-helye pedig, amelyre

$$|A| = \varrho^n > r^n,$$

a

$$\varrho - r \leqq |z - \zeta| \leqq \varrho + r$$

körgyűrűben van.

Számos egyéb idevonatkozó tétele közül csak kettőt említünk.

Ha az egyébként tetszésszerinti $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ $(n \geqq 2)$ pozitív számok kielégítik a

$$\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n = |A|$$

feltételt és K_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ a

$$|z - z_h| \leqq \varrho_h$$

körlapot jelöli, akkor az

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

polinom egyetlen A-helye sem lehet az összes K_h körlapokon kívül vagy az összes K_h körlapokon belül.

A tétel még kiegészíthető így:

Az n számú K_h körlapok összessége az $f(z)$ polinom valamennyi A-helyét tartalmazza, és minden B helyét is, ha $|B| \leqq |A|$. Ha a K_h körlapoknak van valamely közös K' részük, ez nem tartalmazhatja a polinom egyetlen A helyét sem. (De ez a B helyekről nem mondható, ha $|B| < |A|$).

A következő tétele is érdekes [24], [106].

Ha K_1 és K_2 az n-edfokú $(n \geqq 2)$ $f(z)$ polinom deriváltjának egy z_0 zérushelyén egymást kívülről érintő olyan körpár, amelyek közül K_2 sugara K_1 sugaránál $(n-1)$-szer nagyobb, akkor az $f(z)$ polinom a K_1 körlapon felvett bármely értékét a K_2 körlapon is felveszi. Ha egy ilyen A értéket $f(z)$ nem vesz fel K_2 belsejében, akkor pontosan $(n-1)$-szer veszi fel a K_2 kör kerületén és egyszer a K_1 kör kerületén.

8. §. Extrémum polinomok

Sz.-Nagy Gyula dolgozatainak egy része [61], [62], [127] extrémum, illetve minimális polinomok gyökeinek elhelyezkedését tárgyalja. Ez a témakör FEJÉRre[18], illetve FEKETE MIHÁLY és NEUMANN JÁNOS egy közös dolgozatára[19] megy vissza.

[18] L. FEJÉR: Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen. Hilbert Festschrift, *Math. Annalen*, **85**, 1922, p. 41—48.

[19] M. FEKETE u. J. L. v. NEUMANN: Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome, *Jahresbericht d. deutschen Math. Ver.*, **31**, 1922, p. 125—138.

Mindenekelőtt a fellépő fogalmakat kell megmagyaráznunk. P legyen egy korlátos zárt ponthalmaz a z komplex síkban, p ennek tetszőleges pontja, és legyen

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \tag{8, 1}$$

(az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatók tetszőleges komplex számok). P minden p pontjában rendeljünk hozzá $A(z)$-hez egy nem negatív, p-től folytonosan függő $D_A(p)$ számot és nevezzük ezt a polinom nullától való *eltérésének a p-pontban.* A P-ben foglalt p pontokra a $D_A(p)$ maximuma a *polinom eltérése a P ponthalmazon,* jelöljük ezt $D_A(P)$-vel.

Ez a definíció, határozatlanságánál fogva, az eltérés többféle értelmezését engedi meg. *Monoton*nak nevezzük az eltérést, ha két tetszőleges n-edfokú (8, 1) alakú $A_1(z)$ és $A_2(z)$ polinomra P valamely p pontjában

$$D_{A_1}(p) > D_{A_2}(p); \quad D_{A_1}(p) < D_{A_2}(p)$$

illetve

$$D_{A_1}(p) = D_{A_2}(p)$$

aszerint, amint

$$|A_1(p)| > |A_2(p)|; \quad |A_1(p)| < |A_2(p)|$$

illetve

$$|A_1(p)| = A_2(p)|.$$

A $D_A(p)$ eltérés *folytonos,* ha két olyan polinomra, amelyek abszolút értékeinek különbsége a p pontban elég kicsiny, az eltérések különbsége is kicsiny.

A legegyszerűbben definiálható eltérés az ú.n. Csebisev-féle (amely egyszerűen a felvett értékek abszolút értéke, illetve a halmazban ezek maximuma):

$$D_A(p) = |A(p)|,$$
$$D_A(P) = \max_{p \in P} |A(p)|.$$

Ez az eltérés nyilván folytonos, monoton és $A(z)$ zéróhelyein és *csak ott* tűnik el. Az ezen tulajdonságokkal bíró eltéréseket *normális eltérések*nek nevezik.

Még az *al-* és *felpolinomok* fogalmaival kell megismerkednünk. Fekete és Neumann a (8, 1) alakú polinomok közül $A_2(z)$-t $A_1(z)$ alpolinomjának nevezi P-ben, ha P minden p pontjában $|A_2(p)| < |A_1(p)|$ ill. $A_2(p) = 0$, aszerint, hogy ott $|A_1(p)| > 0$ ill. $A_1(p) = 0$. $A_1(z)$ akkor $A_2(z)$ felpolinomja.

Azon (8, 1) alakú polinomokat, melyekre a P-n való eltérés a lehető *legkisebb, minimumpolinomok*nak hívjuk. Azon (8, 1) alakú polinomok, amelyeknek P-ben nincs alpolinomjuk, az *extrémum-*

polinomok. Világos, hogy minden minimumpolinom egyszersmind extrémumpolinom.

Az extrémumpolinomok legfőbb sajátságát mondja ki Fejér tétele:

Az extrémumpolinomok nullahelyei mindannyian a P halmaz konvex burkán belül feküsznek, ha a polinom foka nem haladja meg P pontjainak számát.

Fekete és Neumann főtétele: Ha a P ponthalmaz a valós tengelyre nézve szimmetrikus, és ha a ponthalmaznak a valós tengelyre nézve szimmetrikus bármely pontpárjához megszerkesztjük azt a kört, amelyben a pontpár egy átmérő két végpontja, akkor a P-hez tartozó valós együtthatójú extrémum polinomoknak minden nem valós nullahelye legalább egy ilyen kör belsejében vagy kerületén van, ha a polinom fokszáma nem haladja meg P pontjainak számát.

Legyen A^* valamely normális eltérés-értelmezésre vonatkozólag minimumpolinom, melynek foka kisebb P pontjainak számánál, és P^* legyen a P azon pontjainak halmaza, amelyekben $A^*(z)$ eltérése maximális. Az ily polinomokról Sz.-Nagy Gyula a következő három tételt állítja fel:

1. *$A^*(z)$ zéróhelyei mind P^* konvex burkában feküsznek.*

2. *Ha P minden pontja a valós tengelyen fekszik, akkor a P^* halmaz tartalmaz $n+1$ olyan pontot, melyet az $A^*(z)$ polinom n zéróhelye egymástól elválaszt.*

3. *Ha a P halmaz a valós tengelyre szimmetrikus és minden koefficiense valós, akkor $A^*(z)$ minden nemvalós zéróhelye legalább egy oly kör belsejében vagy kerületén van, amelyben P^*-nek két, a valós tengelyre szimmetrikus pontja egy átmérő két végpontja.*

Kiterjeszti továbbá a 4. § végén ismertetett tételét [27], [61], [127] extrémális polinomokra:

Ha α_1 és α_2 a P-re extrémális polinom két zéróhelye, akkor az egész P ponthalmaz nem fekhet teljesen annak az egyenlő oldalú hiperbolának az egy oldalán, melynek főtengelye az $\alpha_1\alpha_2$ távolság.

A bizonyítások elég egyszerűek, de ismertetésükre nincs terünk.

9. §. Racionális függvények

A polinomokról nyert tételeinek egy részét átviszi a racionális törtfüggvényekre is [113],[121],[126],[131], [144]. Feltesszük, hogy az

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}$$

racionális függvényben $f(z)$-nek és $g(z)$-nek nincs közös osztója.

$F(z)$ foka n, ha $|a_n|+|b_n|\neq 0$, $F(z)$-t *teljes*nek mondja, ha az $n+1$ számú

$$|a_h|+|b_h| \qquad (h=0, 1, \ldots, n)$$

számok mindegyike pozitív. Az ellenkező esetben *hézagos.*

Az $F(z)$ függvény Z-helyei a

$$P(z)=f(z)-Zg(z)=a_0-Zb_0+(a_1-Zb_1)z+\cdots+(a_n-Zb_n)z^n$$

polinom zérushelyei. $z=\infty$-ben $Z=\frac{a_n}{b_n}$, ezen szinguláris érték kivételével az n-edfokú $F(z)$ minden más értéket n számú (esetleg részben összeeső) véges helyen veszi fel. $F(z)$-ről bebizonyított tételei közül a következőkre hívjuk fel a figyelmet.

Ha

$$F(z)=\frac{a_0+a_1z+a_2z^{n_2}+\cdots+a_pz^{n_p}}{b_0+b_1z+b_2z^{n_2}+\cdots+b_pz^{n_p}}$$

$$a_0b_1-a_1b_0=0, \quad a_0b_0a_1b_1\neq 0, \quad 1<n_2<n_3<\cdots<n_p=n,$$

akkor $F(z)$ racionális függvény a 0 *pontot és a* $-n\frac{a_0}{a_1}$, *vagy a* $-p\frac{a_0}{a_1}$, *vagy a* $-q\frac{a_0}{a_1}$ $\left(q=\frac{n_2}{n_2-1}\,\frac{n_3}{n_3-1}\cdots\frac{n_p}{n_p-1}\right)$ *pontot tartalmazó tetszőleges körtartományban minden értéket felvesz.*

A bizonyítás azon a jóformán magától értetődő megjegyzésen alapszik, hogy ha két pont valamely körtartományban van, akkor a körtartomány legalább egy oly körtartományt is tartalmaz, melynek az adott két pont kerületi pontja. A bizonyítás továbbá felhasználja Laguerre következő ismert tételét:

Ha ζ nem zérushelye az n-edfokú

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$

polinomnak, akkor minden a

$$\zeta \quad \text{és} \quad \zeta'=\zeta-n\frac{P(\zeta)}{P'(\zeta)}$$

pontpáron átmenő K kör elválasztja a $P(z)$ polinom gyökpontjait. A tétel akkor is érvényes, ha a K kör a ζ ponton és

$$Q(z)=nP(z)+(\zeta-z)P'(z)$$

valamely ζ_h zérushelyén megy át. Vagyis a K körrel elválasztott két körtartomány mindenike (a belső és a külső) tartalmazza $P(z)$-nek legalább egy zérushelyét, vagy pedig $P(z)$ minden záruspontja a K kör kerületén van.

A következő tétel szintén elemien bizonyítható: *Ha*

$$a_0 b_m - a_m b_0 = 0 \quad \textit{és} \quad a_0 b_0 a_m b_m \neq 0 \quad (1 \leqq m \leqq n),$$

akkor az

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m + \cdots + b_n z^n}$$

függvény az

$$|z| \leqq R = \left| \binom{n}{m} \frac{a_0}{a_m} \right|^{\frac{1}{m}}$$

körlapon minden értéket felvesz.

Ez a tétel rokon MONTEL következő sejtésével (először VAN VLECK bizonyította be 1925-ben, utána sok bizonyítása szerepel az irodalomban). A

$$P(z) = c_0 + c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \cdots + c_n z^n \qquad \begin{matrix} (c_0 c_m \neq 0) \\ (1 \leqq m < n) \end{matrix}$$

polinomnak a

$$|z| < \left| \binom{n}{m} \frac{c_0}{c_m} \right|^{\frac{1}{m}}$$

körlapon legalább m zérushelye van. Ebből a $c_h = a_h - Z b_h$ $(h = 0, m, m+1, \ldots, n)$ helyettesítéssel következteti Sz.-Nagy Gyula a következő tételt:

Az

$$F(z) = \frac{a_0 + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \cdots + b_n z^n}$$

racionális függvény az

$$|z| \leqq \left| \binom{n}{m} \frac{a_0}{a_m} \right|^{\frac{1}{m}}$$

körlapon minden értéket legalább m-szer vesz fel.

Ezekben a tételekben a 0 pont kitüntetett szerepet játszik. Nehézség nélkül általánosíthatók azonban ezek a tételek úgy, hogy egy tetszésszerinti z_0 pont vegye át a 0 pont szerepét.

Egyik, polinomokra vonatkozó régebbi tételének [24] általánosításaként a következő tételt nyeri:

Ha $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ *legfeljebb n-edfokú racionális törtfüggvény,* $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, $f(z_0)\, g(z_0) \neq 0$, *és ha k és K a* z_0 *pontban egymást kívülről érintő, r ill.* $(n-1)r$ *sugarú zárt körlapok, akkor* $F(z)$ *K-ban minden olyan értéket felvesz, amelyet k-ban felvesz.*

Szóljunk egy szót a totálreális racionális függvényekről. Totálreális a függvény, ha a valós tengelyen és csak ott valós.

$$F(z)=\frac{a_0+\cdots+a_nz^n}{b_0+\cdots+b_nz^n}=\frac{f(z)}{g(z)} \qquad (a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n<0)$$

irreducibilis, ha $f(z)$-nek és $g(z)$-nek nincs közös osztója.

Sz.-Nagy Gyula többek között bebizonyítja, hogy *ha* $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ *irreducibilis totálreális racionális törtfüggvény, amelyre* $a_0b_1-a_1b_0<0$, *és ha* $P(z)$ *tetszésszerinti olyan polinom, amelynek minden együtthatója valós, akkor az*

$$S(z)=P(z)f(z)+P'(z)g(z)$$

polinomnak legalább annyi valós zérushelye van, mint $P(z)$*-nek.*

Sz.-Nagy Gyulának a totálreális függvényekről bebizonyított tételei közül még csak ezt az egyet idézzük ([131], Satz VII):

Ha $D=a_0b_1-a_1b_0$ *a totálreális függvény „karakterisztikája“,* A, B, B' *valós számok és* $D=BB'$, *akkor a*

$$(f(z)-A)^2+B^2g^2(z)$$

polinom zérushelyei az $|\Im z|\leqq|B'|$ *parallelsávban helyezkednek el.*

Ha $f(z)=g'(z)$, akkor $D=-n$, ezért a most bemutatott tételből folyik E. Cesàro egy régebbi tétele: *Ha az* n*-edfokú* $g(z)$ *polinom minden gyöke valós, akkor a*

$$g^2(z)+g'^2(z)$$

polinom nullahelyei az $|\Im z|\leqq\sqrt{n}$ *parallelsávban vannak.*

10. §. Szögeltérés, értékeltérés

Az $f(z)$ analitikus függvény $W(c,d)$ *szögeltérés*ének [141] a komplex számsík c és d pontjai között Sz.-Nagy Gyula a

$$W(c,d)=\left|\operatorname{arc}\frac{f(d)}{f(c)}\right|=\left|\operatorname{arc}\frac{f(c)}{f(d)}\right| \qquad (0\leqq W(c,d)\leqq\pi)$$

értéket nevezi; a definíciónak csak akkor van értelme, ha $f(c)f(d)\neq 0$.

Ha $f(z)$-nek valamely $\mathfrak{B}$ tartományban nincs nullahelye és c, illetve z a $\mathfrak{B}$ valamely szilárd, illetve tetszőleges pontja, akkor $W(c,z)$ maximumát az $f(z)$ függvény szögeltérésének nevezi a $\mathfrak{B}$ tartományban a c pontra vonatkozólag.

Érvényes a következő tétel:

Ha az $f(z)$ n-edfokú polinomnak a $|z-c| \leqq r$ körben nincs zéróhelye, akkor a c középpontra vonatkozó szögeltérése a koncentrikus

$$|z-c| \leqq r \sin \frac{\omega}{n} \qquad (0 < \omega \leqq \pi)$$

körben kisebb ω-nál.

A tétel így általánosítható:

Ha $z_1, z_2, \ldots, z_n$ az n-edfokú $f(z)$ polinom zéróhelyei és

$$f(c) \neq 0, \quad |z_k - c| = r_k \quad (r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n > \varrho > 0),$$

és ha a pozitív ϑ_k szögek ($k = 1, 2, \ldots, n$) kielégítik az

$$r_1 \sin \vartheta_1 = r_2 \sin \vartheta_2 = \cdots = r_n \sin \vartheta_n = \varrho$$

és

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \omega \leqq \pi$$

feltételeket, akkor az $f(z)$ polinom szögeltérése az $|z-c| \leqq \varrho$ körben a kör c középpontjára vonatkozólag legfeljebb ω. Ez arra a konvex sokszögre is áll, amelyet az $f(z)$ polinom zéróhelyein átmenő, a $|z-c| = \varrho$ körhöz húzott érintőpárok alkotnak.

Ahelyett, hogy ezen tétel további általánosításával foglalkoznánk, inkább az ugyanazon dolgozatban bevezetett **é r t é k e l t é r é s** fogalmával fogunk megismerkedni. (L. jelen munka 8. §-át is.)

A c pontban el nem tűnő $f(z)$ polinom z_0 és c pontok közötti *értékeltérésén* Sz.-Nagy Gyula a

$$B(z_0, c) \equiv \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \qquad (f(c) \neq 0)$$

hányadost érti. Ha tehát $f(z_0) \neq 0$, akkor $B(z_0, c)\, B(c, z_0) = 1$. Erről a következőt állíthatjuk.

Ha az n-edfokú $f(z)$ polinomnak a nyilt $|z-c| < r$, illetve $|z-c| > r$ körtartományban nincs zérushelye és $f(c) \neq 0$, $0 < t < 1$, illetve $t > 1$, akkor

$$(1-t)^n \leqq B(z_0, c) \equiv \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leqq (1+t)^n,$$

illetve

$$(t-1)^n \leqq B(z_0, c) \equiv \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leqq (t+1)^n$$

a zárt $|z-c| \leqq rt$ ill. $|z-c| \geqq rt$ körtartomány minden z_0 pontjában. Egyenlőség akkor és csak akkor váltja fel az egyenlőtlenséget, ha az $f(z)$ polinom zérushelyei összeesnek a $|z-c| = r$ kör valamely ζ pontjával és z_0 a $|z-c| = rt$ körnek a c és ζ pontokat összekötő egyenessel való metszéspontja.

Ámbár ebben a gondolatkörben is számos tételt állít fel, megelégszünk a bemutatott legegyszerűbb mintákkal.

Szőkefalvi-Nagy Gyulának a polinomok geometriájában elért főeredményeit ekkép futólag áttekintve, láthattuk, hogy klasszikus tételeket messzemenően élesítve és általánosítva igen szép, tartalmas eredményekhez jutott. Bizonyításai legtöbbször igen természetesek, a dolog lényegére tapintók és elemiek. Bizonyítási módszere — néhány példán bemutattuk — meglehetős egységes. Rendesen a logaritmikus differenciálhányados additív előállításából indul ki és ügyes fogásokkal becsüli meg az egyes összeadandók alsó korlátját. Egész ily irányú munkássága kül- és belföldön nagy figyelmet keltett, a témakör mindkét monográfiája, DIEUDONNÉ-é is[11], MARDEN-é is[20] számos eredményét ismerteti. Ő maga is tervezte, hogy a polinomok geometriájáról könyvet fog írni, de Marden könyvének megjelenése után lemondott erről a szándékáról.

Az említettek miatt nem vállalkozhatunk arra, hogy azon munkákat, melyek idézik, vagy amelyek rája építenek, felsoroljuk. Csak néhány kiváló hazai szerzőre hivatkozunk, akik munkásságukhoz tőle is nyertek inspirációt. Így pl. GALLAI TIBOR tartalmas doktori disszertációja[21], mely Laguerre tételének igen szép általánosításait tartalmazza, lényegesen kihasználja Sz.-Nagy Gyulának a 2. §-ban ismertetett eredményeit. TURÁN PÁL[22] és RÉNYI ALFRÉD is hivatkozik Sz.-Nagy Gyula eredményeire.

III. FEJEZET

ANALÍZIS

11. §. Általánosságok. Függvények zérushelyei és pólusai

Szőkefalvi-Nagy Gyulának aránylag kevés dolgozata tartozik az analízisbe. Sőt az ebben a fejezetben referált dolgozatok is egyetlen kivétellel a polinomok geometriájának eszmeköréből erednek, de külön beszélünk róluk, mert magasabbnemű egész függvényekről szólnak. Ezekhez is Laguerretől nyerte az ösztönzést. Általánosan ismeretes, hogy az egész függvény nemének fogalma

[20] MARDEN M.: The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable. Mathematical Surveys, No. 3, Amer. Math. Soc. New-York, 1949.

[21] GRÜNWALD T.: Valós zéróhelyekkel bíró polinomokról. *Mat. Fiz. Lapok* **46**, 1939, p. 31—57.

[22] P. TURÁN: On rational polynomials. *Acta Szeged* **11**, 1946—1948, p. 106—113.

is Laguerretől ered, úgyszintén annak felismerése is, hogy a 0 és az 1 nemű egész függvények (Sz.-Nagy Gyula nullad stb. *fajú*-nak hívja ezeket a függvényeket) a polinomok sok tulajdonságát megőrzik.

Most ismertetjük Sz.-Nagy Gyula [22] dolgozatát, az egyetlent, melynek tárgyát is, módszerét is az analízisből merítette.

Legyen az $f(z)$ meromorf fügyvény a $|z|=r$ kör kerületén reguláris, a kör középpontjában nem nulla, a kör belsejében az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pontok legyenek a zéróhelyei, és az m számú $\beta_1, \ldots, \beta_n$ pólusai kivételével a körön belül mindenütt maradjon véges. Jelöljük továbbá a polárkoordinátákban megadott

$$R = |f(re^{i\varphi})| = F(\varphi)$$

görbét G-vel, az

$$R = R_0 = r^{n-m} \left| \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \right|$$

kört K-val. Az alfák és béták multiplicitásukkal számítandók. Egy CARATHÉODORY- és FEJÉR-től[23] származó, sokszor alkalmazott módszerrel kimutatja, hogy k-nak bármely pozitív egész értéke mellett

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^k \, d\varphi \geqq 2\pi R_0^k.$$

Ennek sok következménye közül csak ezeket említjük:

1. *A G görbének nem lehetnek összes pontjai sem a K körön belül, sem pedig azon kívül.*

2. *A G görbe kerülete nem kisebb a K kör kerületénél* ($k=1$).

3. *A G görbe területe nem lehet kisebb a K kör területénél* ($k=2$).

12. §. Kritikus pontok

Az egész függvényt akkor nevezzük valósnak, ha a valós tengely minden pontjában, és csak ott, valós értékeket vesz fel. Ha $f(z)$ valós polinom vagy nullad- vagy elsőfajú ($=0$ vagy 1 nemű) egész függvény és ha γ nem negatív valós szám, az

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$$

legfeljebb másodfajú egész függvényt PÓLYA GYÖRGY nyomán felemelt elsőfajú, vagy 1^* fajú egész függvénynek nevezi. A γ-t $F(z)$ *kitevőjének* hívja. $F(z)$ logaritmikus deriváltjának,

$$M(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$$

[23] C. CARATHÉODORY et L. FEJÉR: Remarques sur le théorème de M. Jensen. *Comptes Rendus* **145**, 1907, 163—165.

-nek az $a+ib$ és $a-ib$ konjugált komplex számpárhoz tartozó differencia hányadosát, a

$$K=\frac{M(a+ib)-M(a-ib)}{2bi}$$

számot az $F(z)$ 1*-fajú egész függvény $a\pm ib$ helyeken felvett *kritikus értékének* nevezik. Ez a fogalom és elnevezése FOURIER-ig megy vissza. Sz.-Nagy Gyula több dolgozatban [65—69], [144] foglalkozik velük.

Ha $b=0$, akkor

$$K=M'(a)=\frac{F(a)\,F''(a)-F'(a)^2}{F(a)^2}.$$

A kritikus érték definíciója szerint mindig valós. Ha

$$M(a+ib)=A+iB, \text{ akkor } K=\frac{B}{b}.$$

A számsík azon pontjait, ahol a kritikus érték nem negatív, az $F(z)$ *elsőrendű kritikus pontjainak* (röviden kritikus pontjainak) nevezi, de ide nem számítanak $F(z)$ valós zéróhelyei. $F'(z)$ zéróhelyei nyilván $F(z)$ kritikus pontjai. Az $F(z)$ 1*-fajú egész függvény kritikus pontjai ugyanazok, mint a

$$G(z)=e^{\delta z+\varepsilon}F(z)$$

függvény kritikus pontjai, ahol δ és ε valós számok.

Számos bebizonyított tétele közül itt is csak néhány jellemzőnek az ismertetésére fogok szorítkozni.

Az $F(z)$ 1-fajú egész függvénynek akkor és csak akkor vannak kritikus pontjai, ha vannak képzetes zéróhelyei.*

$F(z)$-nek az $a+ib$ kritikus pontjához tartozik egy H egyenlőoldalú hiperbola, melynek tengelye az $a+ib$ és $a-ib$ pontok közti szakasz. *$F(z)$-nek mindig van legalább két zéróhelye a hiperbolán vagy a hiperbola belsejében.* Hasonló tételek mondhatók ki bizonyos esetekben a két oválisból álló Cassini-féle görbékről is.

Az $F^{(k)}(z)$ differenciálhányados kritikus pontjait az $F(z)$ függvény $k+1$-edrendű kritikus pontjainak nevezi.

Az 1*-fajú függvény minden kritikus pontja a függvény legalább egy Jensen-körének belsejében vagy kerületén van.

k-adfajú Jensen-ellipszisnek hívja azt az ellipszist, melynek kis tengelye két konjugált komplex zéróhelye összekötő szakasza, nagy tengelye $\sqrt{k}$-szor akkora. Az 1*-fajú függvény minden k-adrendű kritikus pontja legalább egy k-adfajú Jensen ellipszis belsejében vagy kerületén van.

Mindezen tételeket különféle irányban jelentékenyen általánosítja, de az előadottakból is fogalmat nyerhettünk vizsgálatainak irányáról. Látni, hogy mindezek a tételek rokonok azokkal, amelyekkel a polinomok geometriájában megismerkedtünk.

IV. FEJEZET

GEOMETRIA

13. §. Speciális tételek

Említettük már, hogy Sz.-Nagy Gyula — nagykiterjedésű és jelentékeny algebrai munkássága ellenére — elsősorban geométer, amiről igen sok dolgozata tanúskodik. Igen sokszor persze egyéb vizsgálatai vezették geometriai kérdésekre, hiszen az algebrának az az ága, amely elsősorban foglalkoztatta, szorosan össze van fonódva a geometriával. De már ifjúkori tárgyainak, a diofantikának is vannak geometriai vonatkozásai, első geometriai dolgozatai, a negyedrendű másodfajú ([8], [20]) és a negyedrendű hyperelliptikus görbék sajátságai felderítésének [14] szentelt dolgozatai a megfelelő diofantikus egyenletek vizsgálatából erednek.

A negyedrendű másodnemű (Sz.-Nagy Gyula *másodfajú*-nak mondja) görbével tehát már találkoztunk az 1. §-ban, ezt C_4^2-vel jelöljük. A görbének kettőspontja van, egyenlete pedig a kettőspontnak $O \equiv (0, 0, 1)$ pontba való helyezésével homogén koordinátákban ilyen alakban írható:

$$f(x, y, z) \equiv z^2 f_2(x, y) + 2z f_3(x, y) + f_4(x, y) = 0,$$

ahol $f_k(x, y)$ $(k = 2, 3, 4)$ x-nek és y-nak homogén k-adfokú függvénye. $f_2(x, y)$ az O kettőspontban húzható két érintő egyenlete. A negyedrendű görbék közül épp ezek elmélete volt legkevésbé kidolgozva. Sz.-Nagy Gyula részben ROBERTS XIX. századbeli angol matematikus tételeit vezeti le egyszerűbben, részben új tételeket talál. Tételei közül néhányat bemutatunk:

Az O kettőspontból a C_4^2 görbéhez húzható hat érintő érintéspontja egy kúpszeleten, az ún. BERTINI-féle kúpszeleten fekszik. *A Bertini-féle kúpszelet a görbét még egy oly B_1, B_2 pontpárban metszi, amely azzal a pontpárral, amelyet a kettőspont két érintője metsz ki a görbéből, egy o egyenesen fekszik. Ez az o egyenes az O kettőspontnak a Bertini-féle kúpszeletre vonatkozó polárisa és így a B_1, B_2 pontpárban a Bertini-féle kúpszelet érintői a kettősponton mennek keresztül.*

Másik eredménye: *A C_4^2 kettőspontján átmenő sugársor sugaraival a görbéből és a Bertini-kúpszeletből kimetszett pontpárok harmonikusan választják el egymást.*

Továbbá: *A C_4^2 görbének egy tetszőleges egyenessel kimetszett 4 pontját az O-ból a görbére vetítve olyan négy pontot kapunk, amelyek az O, B_1 és B_2 pontokkal egy kúpszeleten vannak. Ha a kettőspont mindkét érintője inflexiós érintő, a görbét egy oly involuciós perspektivitás, melynek középpontja O és tengelye a jelen esetben a Bertini-kúpszelet szerepét átvevő egyenes, önmagába viszi át.*

Figyelemre méltó a C_4^2 következő származtatása [20]: *Egy közönséges és egy olyan degenerált kúpszeletsor képződménye, melyet két egyenest egymástól harmonikusan elválasztó involuciós egyenespár alkot, oly negyedrendű másodfajú görbe, melynek kettőspontja az involuciós egyenespárok középpontja.*

Ugyancsak a diofantikus egyenletekkel való foglalkozásból ered [14] a *negyedrendű hyperelliptikus görbe* származtatása mint két speciális helyzetű kúpszeletsor képződménye.

Most néhány oly tételt ismertetünk, amelyekre algebrai kutatásai vezették. A tételekre szüksége volt az algebrai állítás bizonyításánál. Ilyen pl. ez a tétel [101]:

Ha K_1 az R sugarú K körrel koncentrikus $R_1 = R\sqrt{2}$ sugarú kör, akkor a K_1 körlapon kívül fekvő bármely P_1 és P_2 ponton át lehet olyan egyenlő oldalú hiperbolát rajzolni, amelynek a K körrel nincs közös (valós) *pontja és amelynek középpontja a P_1P_2 távolság felező pontja.*

Ugyancsak a hiperbola egy sajátságát fejezi ki az a tétele [123], mely szerint *azon pontok mértani helye, melyeknek a parallelogramma szembenfekvő csúcsaitól való távolságainak szorzata egyenlő: egyenlőoldalú hiperbola, melynek középpontja a parallelogramma átlóinak metszéspontja. Derékszögű parallelogramma esetén a hiperbola a két oldalfelező párhuzamosba degenerál.* Megállapítja ennek a hiperbolának néhány tulajdonságát, pl.: *Ha az F_1F_2 távolság felezőpontja* 0, *akkor a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre $PF_1 \cdot PF_2 = PO^2$, egyenlőoldalú hiperbola, melynek fókuszai F_1, F_2.*

Viszont *az egyenlőoldalú hiperbolába beírt parallelogramma szemben fekvő oldalai a hiperbola tetszőleges pontjából egyenlő vagy kiegészítő szögek alatt látszanak.*

Nyilvánvaló ezeknek a tételeknek a *lemniszkátákról* szóló vizsgálataiból való eredete [114], [118], [123], [128], [130], amelyek viszont a polinomok geometriájával függnek össze.

Az n-edrendű lemniszkáta a komplex sík azon pontjainak mértani helye, amelyekben valamely n-edrendű polinom abszolút értéke ugyanaz. Ezen polinom zérushelyei a lemniszkáta középpontjai. (Sokan inkább fókuszainak nevezik.) Az egymástól különböző középpontokat a lemniszkáta *mag*jainak nevezi. Valamely meghatározott ponton a koncentrikus lemniszkátáknak csak egyike megy át.

Az n-edrendű lemniszkátának a végtelen távol fekvő képzetes körpontok n-szeres pontjai, a görbe tehát $2n$-edrendű n-szeresen cirkuláris.

Nem fáraszthatom az olvasót a számos tétel elmondásával, amelyeket az általános lemniszkátáról megállapít. Beszámolómban csak néhány tételre fogok szorítkozni, főleg a polinomok geometriájával összefüggőkre.

Az n-edrendű $L_n(\varrho)$ lemniszkáta egyenlete

$$|f(z)| = |(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)| = \varrho^n$$

vagy

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(\overline{z})} = \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)(\overline{z}-\overline{z}_k) = \prod_{k=1}^{n}|z-z_k|^2 =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}((x-x_k)^2+(y-y_k)^2) = \varrho^{2n},$$

amiből látszik, hogy a görbe n-szeresen ciklikus. Ha a középpontok pontra vagy egyenesre szimmetrikusak, a görbe is az. A lemniszkáta reguláris, ha fókuszai ($=$ középpontjai) szabályos sokszöget alkotnak. A szabályos lemniszkáta egyenlete tehát

$$|(z-a)^n - b| = \varrho^n \qquad b \neq 0. \qquad (13,1)$$

A lemniszkáta szinguláris, ha legalább egy valós szinguláris pontja van. Az $L_n(0)$ lemniszkáta ($\varrho = 0$) nyilván szinguláris. A valódi szinguláris lemniszkátának a körpontokon kívül csak a legegyszerűbb szinguláris pontjai vannak, valós többszörös pontok, egymástól különböző érintőkkel. Ha

$$f(z) = (z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\cdots(z-z_m)^{p_m}$$

$$(p_k \geqq 1; \quad p_1 + \cdots + p_m = n; \quad z_h \neq z_k),$$

az

$$|f(z)| = |f(\zeta)| = \varrho^n \quad (\neq 0, \ \zeta \neq z_k, \ k = 1, 2, \ldots, m)$$

valódi lemniszkáta akkor és csak akkor szinguláris, ha ζ az $f'(z)$ differenciálhányados olyan nullahelye, amelyre $f(\zeta) \neq 0$. Ha ζ $f'(z)$-nek egyszeres zérushelye, akkor ζ a lemniszkáta kettőspontja, ahol a két érintő egymásra merőleges. Ha a ζ pont $f'(z)$ többszörös zéróhelye, akkor a lemniszkáta $k+1$-szeres pontja. Érintői itt $k+1$ sugarú „szélrózsát" alkotnak.

Bizonyítása $f(z)$-nek Taylor-sorba fejtésével történik. Ebből a tételből következik, hogy a (13,1) valódi szabályos lemniszkáta csak akkor szinguláris, ha $|b|=\varrho^n$. Ha $b=-\varrho^n$, egyenlete polárkoordinátákban (a a pólus, a pozitív valós tengely a polártengely)

$$r^n=2\varrho^n\cos n\varphi.$$

A szabályos szinguláris *n-edrendű lemniszkáták* tehát *n* indexű *szinusz-spirálisok* és viszont, minden szinusz-spirális, melynek *indexe pozitív egész szám*, szabályos lemniszkáta.

A polinomok geometriájából ismert Gauss—Lucas, illetve Jensen tételekből közvetlenül következik, hogy a koncentrikus valódi lemniszkáták szinguláris pontjai középpontjaik legkisebb konvex burkának belsejében vannak. Ha az $L_n(\varrho)$ ($\varrho>0$) lemniszkáta középpontjai az a tengelyre vonatkozólag szimmetrikusak és K_h-val ($h=1,2,\ldots,\nu$) jelölünk egy-egy oly kört, melynek átmérője a lemniszkátának két, az a tengelyre szimmetrikus középpontját összekötő egyenesdarab, akkor a koncentrikus lemniszkátáknak minden a tengelyen kívül eső szinguláris pontja legalább egy K_h körlapon van ($h=1,2,\ldots\nu$).

Figyelemreméltó még ez a tétele:

A Q középpontú ϱ sugarú zárt körlapon van legalább egy pontja minden ϱ sugarú olyan lemniszkátának, melynek valamelyik középpontja Q.

Ha $z_1,z_2,\ldots,z_m$ *egy* $L_n(\varrho)$ *lemniszkáta magjai, akkor a lemniszkátának egyetlen pontja sincsen valamennyi* (m számú)

$$|z-z_h|=\varrho \qquad (h=1,2,\ldots,m)$$

K_h *körön belül, vagy valamennyin kívül. Ezen* m *számú* K_h *kör összessége a lemniszkáta minden pontját tartalmazza.* (Ha tehát van oly síkrész, amelyet valamennyi körlap lefed, abban a lemniszkátának egyetlen pontja sincs.)

Ebből következik, hogy ha az $|z-a|\leqq r$ *körlap az* $L_n(\varrho)$ *lemniszkáta valamennyi magját tartalmazza, akkor a lemniszkáta az*

$$|z-a|\leqq\varrho+r$$

körlapon terül el. Ha $\varrho>r$, *akkor az egész lemniszkáta a*

$$\varrho-r\leqq|z-a|\leqq\varrho+r$$

körgyűrűben halad. Ha $\varrho>2r$, akkor a lemniszkáta egyetlen menetből áll. Elég nagy ϱ-ra tehát a lemniszkáta alakja mindinkább közeledik a köréhez, mert

$$\varrho\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)\leqq|z-a|\leqq\varrho\left(1+\frac{1}{\varrho}\right).$$

Ez Lucas tétele 1838-ból, de csak Sz.-Nagy Gyula bizonyította be 1948-ban [114].

Felemlítjük még ezt a tételt:

A lemniszkáta középpontjainak konvex burkolóját a görbe minden normálisa két részre osztja, kivéve ha valamennyi középpont ugyanazon egyenesen van, mert akkor ez az egyenes is a görbe normálisa.

Külön dolgozatban [118] tárgyalja a lemniszkátán fekvő pontcsoportokat, de a tételekben felhasznált sok definiálandó fogalom miatt ismertetésüktől eltekintek. A lemniszkáta felületekről analóg megállapításokat tesz, de ezekre sem terjeszkedhetek ki.

A lemniszkáta görbék közelfekvő általánosításai azok a görbék, amelyeket Sz.-Nagy Gyula *Apollonius-féle görbék*-nek nevez és amelyeknek egy nagyobb dolgozatot szentelt [130]. Ez a fogalomalkotása nevét onnan nyerte, hogy az elemi geometriából jólismert Apollonius-féle kör általánosításának tekinthető. Azon P pontok mértani helye, amelyeknek az A, B szilárd pontoktól való távolságainak

$$\frac{AP}{BP} = T$$

viszonya állandó, *kör*, az ún. Apollonius-féle kör, T paraméterrel, A, B pólusokkal. Ennek általánosításaképp nyeri az Apollonius-féle görbék következő értelmezését: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontcsoportok szilárdak. Az

$$\frac{A_1P \cdot A_2P \ldots A_nP}{B_1P \cdot B_2P \ldots B_nP} = T$$

feltételnek eleget tevő P pontok mértani helyét, a $C_n(A, B, T)$ görbét nevezi Apollonius-féle görbének T paraméterrel. Az A ill. B pontcsoportokat a görbe pólusainak nevezi. Az elnevezés jogosult, mert belőle $m = 1$-re az Apollonius-féle kör lesz. $C_n(A, B, T)$ egyenlete ilyen alakban írható:

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = T,$$

ahol $f(z)$ és $g(z)$ n-edfokú polinomok. C_n $2n$-edrendű n-szeresen cirkuláris görbe, ennélfogva bármely egyenes és bármely kör legfeljebb $2n$ valós pontban metszi. A görbe csak akkor kisebb rendű $2n$-nél, ha $T = 1$. A

$$w = \frac{f(z)}{g(z)}$$

konform leképezésnél az $\frac{f(z)}{g(z)}=T$ görbének a w síkban a $|w|=T'$ „kör" felel meg, ezen fogalom segítségével a kör kerületi szög tételével analóg tételt állapít meg a C_n görbékre. Ez a tétel így szól: *Ha* $T_1 < T_2 < T_3$ *és az* A, B *pontcsoport a* T_1, T_2, T_3 *paraméterű három görbére azonos* („kopolárisak"), *akkor* $C_n(A, B, T_2)$ *görbe elválasztja a* $C_n(A, B, T_1)$ *és* $C_n(A, B, T_3)$ *görbéket.*

Számos tételt állít fel ezekről a görbékről, közülük csak egyet sorolok fel, amely megmutatja, hogy gyökerük szintén a polinomok geometriájában van. *Ha* $f(z)$ *és* $g(z)$ *n-edfokú polinomok relatív prímek és* $f(z_0) \neq 0, g(z_0) \neq 0$, *akkor az n-edrendű*

$$|F(z)| = \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = F(z_0)$$

Apollonius-féle görbének a z_0 *pont akkor és csak akkor szinguláris pontja, ha*

$$F'(z_0) = 0.$$

z_0 pont kettős pont, melyben a két érintő egymásra merőleges, esetleg k-szoros pont, melyben az érintők k sugarú „szélrózsát" alkotnak, aszerint amint $F''(z_0) \neq 0$, illetve $F'(z_0) = F''(z_0) = \cdots = F^{(k-1)}(z_0) = 0$ de $F^{(k)}(z_0) \neq 0$. A szinguláris pontoknak az A és B póluscsoportokra vonatkozó helyzetét ugyanazok a tételek írják le, mint amelyek $F'(z)$ differenciálhányados nullahelyeinek $f(z)$ és $g(z)$ nullahelyeire vonatkozó helyzetéről adnak felvilágosítást.

Ezektől a görbeosztályoktól természetes út vezet azokhoz a görbékhez, illetve felületekhez, amelyeket *Tschirnhaus-féle görbéknek*, ill. *felületeknek* nevez [135], [139]. Ezek a görbék is a polinomok geometriájából erednek. Ezek olyan görbék (felületek), melyeknek n számú adott $F_1, F_2, \ldots, F_n$ szilárd pontoktól való adott pozitív $q_1, q_2, \ldots, q_n$ konstans számokkal („súlyokkal") szorzott távolságainak összege *állandó* $= nR$. Az

$$r_k = PF_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

jelölés bevezetése után a görbe (felület) egyenlete

$$\sum_{k=1}^{n} q_k r_k - n R = 0.$$

A görbe (felület) konvex, tehát ovális, E_n-nek nevezi. A R változásával kapott konfokális görbe (felület) csak akkor valós, ha $R > R_0$. Sok megállapított tétele közül csak egyet idézünk:

Legyen 0 *az* F_k *pontok súlypontja* (mindenik q_k súlyú), *ekkor* $E_n(R)$ *bármely pontjának* 0-*tól való távolsága nem nagyobb* R-*nél,* *R-et csak akkor éri el, ha az F_k pontok egy egyenesen feküsznek.* Ekkor forgási felület, melynek az egyenes tengelye.

STAUDTtól származik az a tétel, hogy két algebrai görbének páros vagy páratlan számú közös pontja van, aszerint, amint legalább egyikük páros rendű, vagy mindkettő páratlan rendszámú. Ezt a tételt teszi pontosabbá Sz.-Nagy Gyula [31], [39], [55], mert bebizonyítja, hogy ha a G_m és G_n egymenetű görbéknek egyszerű kettős pontokon és inflexiós érintőkön kívül más szingularitásuk nincs, továbbá nincs közös érintőjük és ha van a síkban oly pont, amelyből a görbék valamelyikéhez nem indul érintő, *akkor a két görbének pontosan mn számú közös pontja van, ha a G_m görbét G_n valamely érintője m, G_n-et pedig G_m valamelyik érintője n számú pontban metszi.* E tétel duálisa is igaz.

[129] dolgozatában egyszerű szemléletes levezetést ad az ún. első PLÜCKER-féle formulára:

$$k=(n-1)n-2d-3r,$$

ahol n a görbe *rend-, k osztály-száma, d kettőspontjainak, r hegyeinek száma.* ZEUTHEN módszerét egyszerűsíti a STEINER-féle szimmetrizálás felhasználásával.

Egy SCHLESINGER LAJOStól felvetett kérdést megoldva, bebizonyítja [21], *hogy a p nemű $p+1$ valós menetből álló görbéhez tartozó* RIEMANN-*féle felület egy egyrétű felületre konform leképezhető.*

Egy két oldalas dolgozatában [104] új bizonyítást ad az ún. *négycsúcs tételre* (Vierscheitelsatz). Ezen nevezetes tétel szerint *a folytonos görbületű zárt konvex görbének legalább négy csúcsa van. Csúcs*-on itt a görbe olyan pontjait értjük, amelyekben a görbületnek relatív szélső értéke van.

A tételt a legtöbben A. KNESERnek tulajdonítják, de S. MUKHOPADHYAYA[24] hindu matematikustól származik. A tételnek igen sok bizonyítása ismeretes. Sz.-Nagy Gyula bizonyítása figyelemreméltó egyszerűsége és rövidsége miatt. Bizonyításában H. BRUNN egy ismert egyszerű tételéből indul ki. Holdacskának (Mond) neveznek oly zárt görbét, mely két folytonos görbületű konvex ívből áll, és mindkettő a közös A_1A_2 végpontokat összekötő egyenes ugyanazon oldalán van, ezen két végponton kívül egyéb közös pontjuk nincs. Az egyik ívet külsőnek, a másikat belsőnek nevezik. (A γ_1 belső ív a külső γ_2 ívvel és az A_1A_2 egyenessel határolt területen belül van.) A konvex ív akkor egyszerű, ha teljes görbülete $\leq \pi$. Az M holdacska egyszerű, ha külső íve egyszerű.

[24] S. MUKHOPADHYAYA: New Methods in the Geometry of Plane Arc, *Bull. of Calcutta Math. Soc.* 1, 1909. KNESER cikke a WEBER emlékkönyvben jelent meg 1912-ben.

H. Brunn tétele szerint: Az egyszerű holdacska külső ívének maximális görbülete nem kisebb belső ívének minimális görbületénél:

A_1 és A_2-n át ugyanis húzhatunk két g_1 és g_2 párhuzamos egyenest, melyeknek a két ívvel A_1-en és A_2-n kívül nincs több közös pontjuk. Ha γ_2-t a g_1 mentén önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy γ_1-en áthaladjon, akkor γ_2 végül átmegy egy olyan γ_2' ívbe, mely teljesen γ_1 konkáv oldalán fekszik és legalább egy közös pontja van γ_1-gyel. Ebben a közös P pontban γ_1 és γ_2' érintkezik, mert hisz M csúcsai nem jöhetnek szóba. P-ben γ_2' simulóköre nem nagyobb a γ_1-énél, γ_2' görbülete P-ben tehát nem kisebb γ_1-énél. Brunn tétele ezzel igazolva van.

Magán a C görbén mindig találhatunk 3 olyan P_1, P_2, P_3 pontot, amelyek háromszöge hegyesszögű. A $P_1P_2P_3 \triangle$ körül írt K' körnek a C görbével páros számú közös pontja van $= 2n$, ezek (szükség esetén P_1, P_2, P_3 kis megváltoztatása után) mind különbözők, C-t és K-t ez a $2n$ számú pont $2n$ egyszerű ívre osztja, de akkor minden osztópont egyszersmind egy holdacska egyik csúcsa. Ekkor Brunn tétele szerint mindegyik íven van egy pont, amelyben a görbület a belső görbéét felülmulja és mivel $2n \geqq 4$, a görbület legalább négy pontban vesz fel relatív szélső értéket és épp ezt kellett bizonyítanunk.

Sz.-Nagy Gyula egyéb geometriai kérdésekkel is foglalkozott. Azokról, amelyekre több dolgozatban visszatér, külön §§-okban számolunk be. Azokat, amelyekben valamely kérdést csak egy-két munkában tárgyalt, csak futólag említhetjük. [17]-ben az elliptikus görbén lévő pontkonfigurációk részére a WEYRtől megadott szimbolikus kalkulust indokolja meg. [103] arról a legkisebb körgyűrűről szól, mely valamely adott konvex görbét tartalmaz. [63] és [124]-ben a görbe, illetve felület átmérőiből kiindulva, a „centrális felületeket" vizsgálja. Tételei részben JORDAN KÁROLY és FIEDLER vizsgálataihoz [25] kapcsolódnak.

Egyik dolgozatában [120] olyan algebrai felületről van szó, melynek „alakja valamely görbe." Egyenlete — ha $f(x, y) = 0$ valamely algebrai görbe egyenlete —

$$z^2 + f^2(x, y) - \varepsilon^2 \leqq 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

[132] a csuklós négyszögeket tárgyalja. A [145] dolgozat 3. tétele: ha egy tetraéder minden lapja egyenlő területű, akkor — D-vel jelölve a tetraéder köré írt gömb átmérőjét — az élek négyzetösszege 4 D^2.

[25] JORDAN K. és FIEDLER R.: Zárt konvex görbékkel kapcsolatos görbékről, *Math. és Phys. Lapok*, **24**, 1915, p. 207—228. és egyéb közleményeik is.

14. §. Topológia

A topológia Sz.-Nagy Gyula kedvelt tárgya volt, nálunk egyik úttörője. A külön §-ban tárgyalandó maximális indexű görbék és felületek elméletén kívül topológiai tárgyúak [11], [12], [15], [18—20], [31], [33—37], [39], [43], [50—52], [54—56], [78], [81], [87], [90], [91], [97], [100], [104], [107], [115], [120], [122] dolgozatai. Ezek közül csak néhánynak az ismertetésével kell beérnem.

Fontos szerepet játszik nála az *elemi görbe*. Ezalatt egy menetű, folytonos zárt, véges számú konvex ívből álló síkgörbét ért, melynek minden pontjában meghatározott, a ponttal együtt folytonosan változó érintője van. MÖBIUS és KNESER klasszikus tételei szerint a pont- és érintőszingularitás nélküli görbék oválisok, sőt annak az algebrai görbének, melynek szingularitásai csak kettős pontok, kettős pontjai sincsenek. Sz.-Nagy Gyula erre a tételre tisztán topológiai bizonyítást ad és általánosítja pl. így: *azok a síkgörbék, melyeknek elsőfajú csúcson* (így hívja Sz.-Nagy Gyula azt a pontszingularitást, melyet eddig *hegy*nek, *visszatérő pont*nak, Spitze neveztünk, a továbbiakban Sz.-Nagy Gyula terminológiáját követve — hacsak kifejezetten nem mondjuk az ellenkezőjét — a *csúcs* szót ebben az értelemben használjuk) *kívül, más pont, vagy érintőszingularitásuk nincs, harmadosztályúak 3 csúccsal.*

Korai dolgozatai [12], [19] foglalkoznak *hurkolt és láncolt térgörbék* algebrai előállításával. A zárt térgörbét hurkoltnak nevezi, ha a görbe nem határvonala elemi felületnek, a görbét láncoltnak nevezi, ha több össze nem függő darabból áll, amelyek közül egy sem foglalható elemi (azaz a gömb folytonos deformációjával keletkező) térrészbe. Ezekre a görbékre a következő kérdés vezet: Ha adva van egy algebrai síkgörbe, melynek kettős pontjain kívül egyéb szingularitása nincs, találhatunk-e olyan térgörbét, melynek a síkgörbe derékszögű vetülete és ahol elő van írva, hogy a síkgörbe kettős pontjainál látszólag kereszteződő térbeli ágak közül, melyik legyen a felső és melyik az alsó. A válasz igenlő és két módszert is ad, amelyekkel a térgörbék megtalálhatók. Analog kérdéssel Sz.-Nagy Gyulával egyidejűleg a magyar matematikusok közül PÁL GYULA[26] is foglalkozott.

A görbék kettős pontjairól GAUSS szép tételt állított fel. Tekintsünk egy a síkban, vagy a gömbön fekvő zárt görbét, n kettős ponttal, de hármas vagy többszörös pontok nélkül. Valahonnan kiindulva számozzuk meg kettőspontjait az $1, 2, \ldots, n$ számokkal.

[26] PÁL GY.: Térbeli Jordan görbékről. *Math. és Phys. Lapok* **24.** 1915. 236—242. és Über Funktionen die Jordan-sche Gebilde darstellen. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **145.**, 1914., p. 1—8.

A görbét az egymásra következő kettős pontok sorszámával keletkező P_{2n} ismétléses permutáció jellemzi. Gauss szerint *a permutációban minden kettőspont egyszer páros, egyszer pedig páratlan helyen fordul elő.*

Gauss a tételt nem bizonyította be, az irodalomban az első bizonyítás Sz.-Nagy Gyulától való [33—35], [43], [122]. A tételt Sz.-Nagy Gyulára való hivatkozással, kissé eltérő bizonyítással részletesen bemutatják RADEMACHER és TOEPLITZ ismert pompás könyvükben.[27] Bizonyítás végett a tételt a gráfelmélet nyelvére átfogalmazza ekképp: *Egy G végesben fekvő síkgörbét n kettőspontja 2n vonaldarabra bontja. Ezek a vonalak két színnel (α és β) úgy festhetők be, hogy a görbének egy befutásakor különböző színű vonalak felváltva következnek egymásra és annak a két vonalnak a színe, amely a görbe befutásakor akármelyik kettős pontba vezet, valamint annak a két vonalnak színe, amely abból a kettős pontból kiindul, különböző.*

Sz.-Nagy Gyula a görbének ciklusokra bontásával bebizonyítja és kimutatja, hogy ha két görbéhez ugyanaz a permutáció tartozik, akkor a két görbe folytonos deformációval egymásba átvihető.

Ezek a kérdések természetesen vezették el a gömbön fekvő zárt görbékhez, amelyeket [37], [51], [52] dolgozataiban tárgyal. Ezekről csak azt a tételt említjük fel, hogy *a gömbi görbén* — kellő multiplicitással számítva — *páros számú* (esetleg 0) *vagy végtelen sok diametrálisan szembenfekvő pontpár van.*

Rokon témája van [54], [74], [78], [80] dolgozatainak. „*Buschenveloppe*“-nak hívja H. BRUNN azt a teljesen a végesben fekvő görbét — némelyek „bokrétagörbével“ magyarosítják —, melynek minden irányban pontosan egy érintője van. Érintőszíngularitásai tehát nem lehetnek, de kettős és visszatérő pontjai igen. Ezekről a görbékről disszertációjában (1889) H. Brunn és mások — a magyarok közül Jordan Károly — analitikai úton számos tételt bizonyítottak be. Sz.-Nagy Gyula ezeket a tételeket számos újjal együtt geometriai úton származtatja. Mindezekből csak némi ízelítőt adhatunk. A görbét B_r-rel jelöli, ha r a görbe visszatérő pontjainak száma, és két visszatérő pont közötti ívét, amelyen más visszatérő pont (= hegy) már nincs, a görbe komponensének nevezi. Bármily g egyenes B_r-nek csak egyetlen konponensét metszheti két pontban, még pedig azt, amely a g-hez párhuzamos érintőt tartalmazza. A többi komponenst legfeljebb egy pontban metszheti. Egyetlen komponens sem metszheti önmagát. Két szomszédos komponens sem metszheti egymást. Két nem szomszédos komponensnek legfeljebb egy közös pontja

[27] H. RADEMACHER és C. TOEPLITZ: *Von Zahlen und Figuren,* Berlin, 2. kiadás 1933, p. 50–55. és p. 169. A tétel kimondását l. GAUSS: *Werke* Bd 8. p. 272., 282—286.

lehet. A visszatérő pontok száma, r mindig páratlan és legalább 3. A kettős pontok száma legfeljebb $\frac{r(r-3)}{2}$. Ezek a tételek régebbiek. Sz.-Nagy Gyulától származók: *Ha* B_r *rendje* n, *osztálya* m, *akkor* $m \leqq n-1 \leqq r$. *A kettős pontok száma* $\geqq \frac{r-3}{2}$. *Minden* $r \geqq 3$ *páratlan számhoz találhatók* r*-edosztályú* $r+1$*-edrendű* B_r *görbék* stb.

A B_r görbék közelfekvő általánosításai az *érintőszingularitás nélküli görbék* [54], [90]. Ezeket G_r-rel jelöli, ahol r jelöli elsőfajú csúcspontjai számát. A kapcsolatot a következő tétel létesíti: *Egy* G_r *görbének bármely egyenessel egy, illetőleg két párhuzamos érintője van, aszerint, amint* r *páratlan, illetőleg páros.* Ezekre a görbékre is — mutatis mutandis — átviszi a B_r görbékre megállapított tételeit.

Tételeit többméretű terekben elterülő görbékre is kiterjeszti [81].

Itt emlékezem meg végül — ámbár anyagának nagy részéről csak a következő §-ban lesz szó — nagy referátumáról a *végesrendű geometriáról* [97], [107], amelyben az algebrai görbéknek algebrai előállításuktól független tulajdonságait mutatja be, amelyekkel tehát bizonyos nem algebrai görbék és felületek is rendelkeznek. A valós algebrai síkgörbének minden pontjában az érintésponttal folytonosan változó érintője van, a sík bármely egyenesével pedig véges számú valós közös pontja van. Az algebrai síkgörbéknek olyan zárt síkgörbék az általánosításai, amelyeknek megvan ez a két tulajdonságuk. Hasonló a helyzet a térgörbéknél és felületeknél. Ezt az ismeretágat sokan C. JUEL hírneves dán matematikusról „Juel-féle geometriának" nevezik, mert alapvető eredményei Juelnak köszönhetők. Sz.-Nagy Gyula, akinek szintén igen nagy érdemei vannak ezen a téren — mint már említettük —, végesrendű geometriának hívja. Tekintettel arra, hogy Sz.-Nagy Gyula legfontosabb eredményeit már ismertettük, illetve a következő §-ban ismertetni fogjuk, szükségtelennek látszik az ott megbeszélt idegen eredmények akár kivonatos felsorolása.

15. §. Maximális indexű görbék és felületek

A görbe *rendszáma*, illetőleg *indexe*, azoknak a pontoknak *maximális*, illetőleg *minimális* száma, amelyekben a sík egy egyenese a görbét metszheti. A görbe *osztályszáma*, illetőleg *osztályindexe* azoknak az érintőknek *maximális*, illetőleg *minimális* száma, amelyek a síknak egy pontjából a görbéhez húzhatók. Térgörbe indexe alatt azon valós pontok minimális számát értjük, amelyben egy valós sík a térgörbét metszi. Az „index" név és fogalom bevezetése Miss CH. A. SCOTT amerikai matematikusnőtől származik.[28]

Mindezekről a metszéspontokról, egyenesekről, érintőkről feltesszük, hogy valósak, a görbék tehát nem okvetlenül algebraiak, sőt lehet, hogy a „valós“ rend vagy osztályszám nem egyezik meg az algebraival. Ez Sz.-Nagy Gyula topológiai vizsgálataira általában áll. SCOTT állított fel először összefüggéseket a görbe rendszáma, neme és indexe között, és kimutatta azt az alapvető tételt, hogy minden n rendszámnál vannak olyan 0 vagy 1 nemű görbék, melyeknek indexe $n-2$. Maximális indexű (osztályindexű) az a görbe, melynek indexe (osztályindexe) adott n rendszám (osztályszám) mellett a lehető legnagyobb. Ez a maximális szám $n-2$. A maximális indexű görbékkel főleg két geométer foglalkozott, a már említett C. JUEL és Sz.-Nagy Gyula. Ez utóbbi két kutatónak köszönhető, hogy a maximális indexű görbéknek (felületeknek) immár kiterjedt részletes elmélete van. Sz.-Nagy Gyula munkásságának jelentékeny része a maximális indexű görbék elméletének kiépítésére esik. Nagyszámú idevágó dolgozatában [18], [30], [32], [38—42], [44], [49], [53], [55], [58], [59], [64], [71], [72], [74], [77], [79—84], [86—88], [90], [94—97], [100], [107—109], [115], [146] sok tulajdonságukat bizonyítja be. Tételei közül csak nagyon kevésnek bemutatására szorítkozhatunk, amelyeket úgy választottunk ki, hogy fogalmat adjanak kutatásainak irányáról és legfőbb erdményeiről.

CH. A. SCOTT módszerét — a CREMONA transzformációt — használva kimutatja [18], hogy minden n rendszámhoz találhatók oly n-edrendű p-edfajú (= nemű) $(0 \leq p \leq n-2)$ $p+1$ menetből álló algebrai görbék, amelyek egyes ágainak indexei $i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}$ csupán az

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_{p+1} = n-2$$

feltételt tartoznak kielégíteni, közülük egy index nulla is lehet. Sz.-Nagy Gyula megállapította, és erre a felfedezésére különösen büszke volt [30], hogy *a görbe indexe nagyobb lehet menetei indexeinek összegénél.*

Maximális indexű görbének legfeljebb egy elsőfajú csúcsa van, maximális osztályindexű görbének pedig *legfeljebb egy inflexiós érintője. Egyéb pont-, illetve érintőszingularitásuk nem lehet.* Maximális indexű görbének nincs kettős érintője két különböző érintési ponttal, maximális osztályindexű görbének nem lehet oly kettős pontja, amelyben a két érintő különbözik [30], [58].

Szívesebben foglalkozik maximális osztályindexű görbével, mert ennek topológiai viszonyai könnyebben áttekinthetők, de mivel ennek valamely kúpszeletre vonatkozó polárábrája maximális indexű

[28] CH. A. SCOTT: On the Circuits of plane Curves. *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, **3**, 1902, p. 388—398.

görbe, köztük dualitási viszony áll fenn és az egyik görbeosztályra megállapított tételek könnyen vihetők át a másikra. A maximális osztályindexű görbék tulajdonságai megegyeznek a valós algebrai görbék tulajdonságaival [97], [107]. A maximális osztályindexű görbe összerakható véges számú elemi ívből.

A maximális indexű (osztályindexű) görbe minden menete is maximális indexű (osztályindexű).

Bevezeti és sokszor használja a C valós görbe reducibilitásának és irreducibilitásának fogalmát [30]. Az n-edosztályú görbe „a realitás szempontjából reducibilis“ (röviden *reducibilis*), ha menetei két vagy több csoportba oszthatók, úgy, hogy egy-egy csoport meneteiből álló görbék osztályszámainak összege megegyezik C osztályszámával, ha tehát C a $C_1, C_2, \ldots, C_k$ görbékből áll, melyek osztályszámai rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$, és ha

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

akkor a görbe reducibilis és szétesik a $C_1, C_2, \ldots, C_k$ görbékre. Ha a görbe egyetlen menetből áll, vagy ha a fenn leírt szétesés nem valósítható meg, a görbe *irreducibilis*. Az irreducibilitást másképp is definiálja [97], [107]. Ha a síknak azok a pontjai, amelyekből egy n-edosztályú maximális osztályindexű görbéhez $n-2$ érintő húzható, a projektiv síkon összefüggő tartományt alkotnak, akkor a görbe irreducibilis. Ez a fogalom nem azonos az algebrai görbék reducibilitásával, illetve irreducibilitásával. Pl. 4-edrendű 4-edosztályú két oválisból álló algebrai görbe algebrai szempontból irreducibilis, realitás szempontjából azonban két oválisra bomlik. Viszont az ellipszisből és a belsejében lefolyó Steiner-féle 3 csúcsú hypocykloisból álló görbe realitás szempontjából harmadosztályú irreducibilis, algebrailag reducibilis. A maximális osztályindexű reducibilis görbe maximális osztályindexű görbékre esik szét. Maximális osztályindexű görbe akkor és csak akkor reducibilis, ha osztályindexe nagyobb menetei osztályindexeinek összegénél.

Egy érdekes dolgozatnak [58] a maximális indexű *és* maximális osztályindexű görbe a tárgya. *Egymenetű görbék közül csak az ovális és a harmadrendű harmadosztályú görbe lehet egyszerre maximális indexű és maximális osztályindexű. A többmenetű* maximális indexű és maximális osztályindexű görbe *minden menete ovális,* legfeljebb három oválisból állhat, melyek egymást kettesével kívülről érintik.

Egymenetű maximális $n-2$ osztályindexű algebrai görbe vagy racionális, vagy elliptikus [46]. Maximális osztályindexű irreducibilis görbe faja, menetei fajainak összege [47].

A síkgörbe *cirkulációjá*nak fogalmát is Miss Ch. A. Scott vezette be ugyanazon dolgozatában, amelyben az index fogalmát. A cirkuláció azon pontok minimális száma, amelyekben a görbét síkjának egy páratlan rendű görbéje metszi. A görbe indexe és cirkulációja különbözhetik, de *a maximális indexű görbék indexe és cirkulációja egymással egyenlő. A maximális indexű görbék egyszersmind maximális cirkulációjúak és viszont.* [80], [97], [107]. Bizonyítási módszere geometriai, nem számító. A görbe folytonos deformációjával dolgozik, még pedig olyannal, melynél a görbe lényeges jellemzői, osztályszáma, ill. rendje és faja változatlanok maradnak.

Csak néhány mintát adtunk sok tételéből, referens reméli, hogy jellemzőket. Tételeit térgörbékre és felületekre is értelemszerűen, a dolog természetéhez képest kiterjeszti, de miután elvben ezek nem hoznak újat, részletezésükbe nem bocsátkozom.

16. §. A geometriai szerkesztések elmélete

A geometriai szerkesztések elmélete az ógörög matematikáig nyúlik vissza, de a geometriának — ahogy BIEBERBACH szellemesen mondja — ez az örökifjú ága, mely mai napig sem veszített semmit vonzóerejéből és üde szépségéből, természetesen minden matematikust érdekel. Nem meglepő tehát, hogy oly vérbeli geométernek, aminő Sz.-Nagy Gyula, mindvégig kedves témája volt, amelyre egyetemi és a tanári továbbképzőn tartott előadásaiban is sokszor visszatért. Erről szól egyetlen könyve és [70], [116], [138], [149] dolgozatai. Utolsó két évében főként a geometriai szerkesztések foglalkoztatták.

Közismert PONCELET és STEINER klasszikus tétele, mely szerint minden, körzővel és vonalzóval végrehajtható szerkesztés pusztán vonalzóval is megszerkeszthető, ha adva van egy kör és ennek középpontja. HILBERT pedig először 1896-ban megjelent általánosan ismert fontos könyvének VII. fejezetében megmutatta,[29] hogy a geometriának 5 alapfeladata van, melyekre okvetlen szükség van. Hilbert azt is bebizonyította, hogy az 5 alapfeladat megszerkesztésénél a körző szerepe távolságok átvivésére korlátozódik, amit KÜRSCHÁK JÓZSEF 1902-ben egyetlen távolság — az egység — átvitelére csökkentett. Referens 1915-ben megjelent közleményében[30] teljesen elemi úton megmutatta, hogy ezen szerkesztések esetében a Poncelet—Steiner kör tetszésszerinti kicsiny ívével (sőt az első 3 alapfeladat esetén 5 pontjával) pótolható. Sz.-Nagy Gyula észrevette [70], hogy referens módszerével kimutatható, hogy *bármily quadratikus szerkesztés pusztán vonalzóval végrehajtható egy kör középpontjának és tetszőleges kicsiny ívének ismeretében.* A hátralévő fel-

[29] D. HILBERT: Grundlagen der Geometrie, 1. kiadás 1896. Utána számos kiadás, a 7. Teubner 1930.

[30] R. OBLÁTH: Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. *Monatshefte f. Math. u. Phys.* **26.**, 1915., p. 295—299.

adat, a körnek adott egyenessel való — természetesen az adott köríven kívül fekvő — metszéspontjainak megszerkesztése. Ezt egyszerűen úgy éri el, hogy a körívet egyik végpontjánál tükrözi, míg az egyenes két ily pont közé kerül és akkor az egyenest tükrözi, míg az adott ívbe ér, amikor metszéspontja közvetlenül adva van.

Még Sz.-Nagy Gyula könyvéről kell beszélnem. Ez a könyv a geometriai szerkesztések *elméletét* adja, tehát nem szerkesztési módszereket vagy utasításokat egyes szerkesztések végrehajtására. Mindenki tudja, hogy a kocka megkettőzése, a szög megharmadolása nem hajtható végre körzővel és vonalzóval, de itt a könyvben megtalálható a teljes bizonyítás, amely persze csak algebrai segédeszközökkel végezhető. Ugyancsak megtalálható benne annak szükséges feltétele, hogy valamely irreducibilis algebrai egyenlet gyöke körzővel és vonalzóval megszerkeszthető legyen, hogy t. i. az egyenlet fokszáma a 2 valamely hatványa legyen. Az elégséges feltétel csak a Galois-féle elmélet segítségével bizonyítható, amit szerzőnk nem feltételez. De a könyv nemcsak mások eredményeiről számol be egészen a legújabbakig, hanem sok saját vizsgálatát is tartalmazza. Pl. Kortum és St. Smith tételének, mely szerint egy, a körtől különböző kúpszelet tetszőleges kicsiny ívének ismeretében — a középpont nem szükséges! — minden harmad- és negyedfokú feladatot körzővel és vonalzóval meg lehet szerkeszteni. Ezt a bizonyítást utóbb külön is közölte [116] és Bieberbach is átvette kitűnő könyvébe. *Sz.-Nagy Gyula bizonyítása túl is megy Kortum és Smith tételén,* akik az egész kúpszelet ismeretét feltételezik, viszont már Descartes ebben az általánosabb alakban mondta ki, persze bizonyítás nélkül a tételt.

Nem sorolom fel a könyv valamennyi önálló eredményét, csak még egyre hívom fel a figyelmet. Hilbert azon tételére célzok, mely szerint a Poncelet—Steiner-féle kör középpontjának ismerete nélkülözhetetlen. Ennek bizonyítását D. Cauer közölte 1913-ban. Sz.-Nagy Gyula könyve természetesen ismerteti Cauer bizonyítását, de újat is ad, még pedig a térgeometria azon tételének felhasználásával, hogy egy köralapú ferde kúp alapkörén átmenő gömbök a kúpból még egy-egy kört vágnak ki.

A matematikai irodalom nem szűkölködik a geometriai szerkesztések elméletét tárgyaló kitűnő könyvekben. Elég lesz Enriques,[31] Adler,[32] Vahlen,[33] Hilda Hudson[34] és a már Sz.-Nagy

[31] F. Enriques: *Questioni riguardanti la geometria elementare.* II. Bologna 1900, második kiadása 1926, német fordítása *Fragen der Elementargeometrie* II, Leipzig 1907., második kiadása 1923.

[32] A. Adler: *Theorie der geometrischen Konstruktionen.* Leipzig. 1906, Sammlung Schubert LII.

[33] Th. Vahlen: *Konstruktionen und Approximationen.* Leipzig u. Berlin 1911. Teubners Lehrbücher d. math. Wiss. XXXIII.

Gyula könyve után megjelent H. LEBESGUE[35] és L. BIEBERBACH[36] közismerten kiváló könyveire utalnom. Hogy Sz.-Nagy Gyula könyve mindezek mellett megállja a helyét és nem fölösleges, legjobban az bizonyítja, hogy 1952-ben egy berlini kiadó felkérte őt, hogy járuljon hozzá könyvének német kiadásához („es erscheint uns eine Übersetzung äusserst wünschenswert"). Ez időtől Sz.-Nagy Gyula — súlyos betegsége ellenére — ifjú tűzzel, lelkesen és nagy szorgalommal dolgozott műve új kiadásán, amelyet egy percig sem szánt egyszerű fordításnak, hanem lényeges — a könyv tervére és célkitűzéseire kiható — átdolgozásnak. A változás nemcsak egyes újabb eredmények felvételében állt volna, hanem az volt a szándéka, hogy megszünteti könyvének szigorúan elméleti jellegét és elméletileg is érdekes szerkesztések megadásával még változatosabbá teszi. A körosztást is részletesebben adta volna elő. A könyv profilját pedig a harmadfokú szerkesztések széleskörű figyelembevétele adta volna meg, úgy hogy valóságos monográfiájukká nőtt volna.

Az ógörög matematikának egyik főproblémája a *harmadfokú szerkesztések* voltak. Nem volt ismeretlen előttük — ha nem is tudták bebizonyítani —, hogy ezeket a feladatokat nem lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszteni, hanem egyéb eszközök kellenek hozzá. Felismerték, hogy a *betolás* erre alkalmas, jóformán harmadik szerkesztő eszköznek tekintették. A konchois használatának lényege éppen a betolás. A betolás abban áll, hogy valamely ismert vonaldarabot úgy helyezünk el, hogy két végpontja két adott egyenesre (vagy esetleg görbére) essék. De a legtöbb ily szerkesztésnél a betoló vonalzón — ez oly vonalzó, amelyen két pont meg van jelölve, tehát azonos a mértékegységgel, étalonnal, csak persze a használata más — kívül körző, vagy kirajzolt kör is szerepel. Sz.-Nagy Gyula nagy buzgalommal keresett és talált oly szerkesztéseket, melyeket pusztán a betoló vonalzóval hajtott végre. Több új szerkesztése a kúpszelet ívét használja ki. Megmutatja pl., hogy a parabola csúcsából kiinduló bármily kicsiny ívének ismerete elegendő a szögharmadolásnak körzővel és vonalzóval való végrehajtására. A bizonyítás teljesen elemi geometriai.

Nagy kár, hogy könyvét korai halála miatt nem fejezhette be.

*

Áttekintettük SZŐKEFALVI-NAGY GYULA matematikai munkásságának főirányait és meggyőződhettünk érdeklődésének sokfelé ágazásáról. A legkülönbözőbb matematikai disciplinákhoz tartozó

[34] HILDA HUDSON: *Ruler and Compasses*, London 1916.
[35] H. LEBESGUE: *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris 1950.
[36] L. BIEBERBACH: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Basel, 1952. Birkhäusers mathem. Lehrbücher Bd. 13.

problémái azonban bensőleg szorosan összefüggnek. A magyar tudomány lankadatlan szorgalmú kutatót veszített időelőtti halálával, aki elmerült problémáiban és akinek számos terve maradt megvalósítatlanul.

НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Д. СЁКЕФАЛВИ-НАДЬ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

Р. Облат

Данная вводная статья обозревает научную деятельность покойного академика Д. Сёкефалви-Надь в области математики. Деятельность выдающегося ученого документируется одной книгой о теории геометрических построений и 150 статьями. Темы этих статьей охватывают диофантические уравнения, геометрию полиномов, — которую он отчасти распространяет на целые функции нулевого и первого рода, — геомегрические проблемы, топологию, — главным образом кривые и поверхности с максимальными индексами, — и теорию геометрических построений.

L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE GYULA SZŐKEFALVI-NAGY

Par R. Obláth

Le mémoire précédent parcourt et apprécie l'oeuvre mathématique de (Gyula) Jules SZŐKEFALVI-NAGY, contenant une monographie sur la théorie des constructions géométriques et 150 travaux originaux. Ces derniers se divisent entre les sujets suivants: analyse diophantienne, géométrie des polynomes et des fonctions entières de genre zéro et un, problèmes de géométrie, topologie, surtout des courbes (et surfaces) d'index maximal, constructions géométriques.

Szőkefalvi-Nagy Gyula.

matematikai munkáinak jegyzéke

Könyv:

A geometriai szerkesztések elmélete (Kolozsvár, 1943), VIII + 87 lap.

Dolgozatok:

1. Über ein Theorem von Jacobi und seine Verallgemeinerung.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **18** (1909), 4—7.
2. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn P. v. Schaewen.
Uo., **18** (1909), 401—402.
3. Algebrai görbék arithmetikai tulajdonságairól.
Math. és Phys. Lapok, **18** (1909), 331—348, **21** (1912), 58—66.
4. Über arithmetische Eigenschaften algebraischer Kurven.
Math. u. Naturwiss. Ber. aus Ungarn, **26** (1910), 168—195.
5. Eine Aufgabe von J. Neuberg.
Arch. d. Math. und. Phys., **18** (1911), 197—198.
6. Die Anwendung der birationalen Transformationen einer algebraischen Kurve von höherem Geschlechte in sich auf ein Diophantisches Problem.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **21** (1912), 183—191.
7. Aritmetikai vizsgálatok a magasabbfokú ternaer egyenletek köréből.
Math. és Term.-tud. Ért., **30** (1912), 441—457.
8. Negyedrendű másodfajú görbék származtatásáról.
Math. és Phys. Lapok, **22** (1913), 23—24.
9. Zur arithmetischen Theorie der ternären Gleichungen von höherem Geschlechte.
Math. Annalen, **73** (1913), 230—240.
10. Algebrai függvények aritmetikai tulajdonságairól.
Math. és Term.-tud. Ért., **32** (1914), 69—84.
11. Sík- és térbeli algebrai görbék reális meneteiről.
Uo., **33** (1915), 544—560.
12. Hurkolt és láncolt algebrai térgörbék algebrai előállításáról.
Uo. **33** (1915), 500—506; **34** (1916), 787—800.
13. Über arithmetische Eigenschaften algebraischer Funktionen.
Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn, **30**, (1915), 324—340.
14. Über eine neue Ableitung der hyperelliptischen Kurven vierter Ordnung. *Uo.*, **30** (1915), 341—342.
15. Másodfajú normálgörbékről.
Math. és Term.-tud. Ért., **34** (1916), 71—89.
16. Über einen Satz von H. Jung.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **24** (1916), 390—392.
17. Über den symbolischen Kalkül von Emil Weyr auf den elliptischen Kurven.
Uo., **24** (1916), 457—461.
18. Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raum-Kurven.
Math. Annalen, **77** (1916), 416—429.
19. Über die algebraische Darstellung der verknoteten und verketteten algebraischen Raum-Kurven.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **25** (1917), 285—293.
20. Negyedrendű másodfajú görbékről.
Math. és Phys. Lapok, **26** (1917), 107—124.

21. Über eine räumliche Darstellung Riemann-scher Flächen vom Geschlechte p mit $p+1$ Symmetrielinien.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **26** (1917), 109—113.
22. Adott nullapontokkal és pólusokkal bíró függvényekről.
Math. és Phys. Lapok, **27** (1918), 72—75.
23. Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **27** (1918), 37—43.
24. Über geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten.
Uo., **27** (1918), 44—48.
25. Geometriai relációk valamely racionális egész függvénynek és logarithmusa deriváltjainak zérus-helyei között.
Math. és Term.-tud. Ért., **38** (1921), 429—441.
26. A poláris egyenletek gyökeinek helyzetéről.
Uo., **38** (1921), 442—445.
27. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **31** (1922), 238—251.
28. Über einen Satz von M. Fekete.
Uo., **32** (1923), 307—309.
29. Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math., **1** (1923), 127—138.
30. Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex.
Math. Annalen, **89** (1923), 32—75; **90** (1924), 152—153.
31. Über einen v. Staudt-schen Satz.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math., **2** (1924), 65—68.
32. Maximális indexü felületek.
A Szent István-Akadémia Értesítője, 9 (1924), 117—132.
33. Általános vizsgálatok egy Gauss-féle topológiai problémáról.
Math. és Term.-tud. Ért., **42** (1925), 254—268.
34. Speciális vizsgálatok egy Gauss-féle topológiai problémáról.
Uo., **42** (1925), 269—278.
35. Végesben fekvő síkgörbék többszörös pontjairól.
Uo., **42** (1925), 279—291.
36. Végesbe nem projiciálható síkgörbékről.
Uo., **43** (1926), 266—279.
37. Gömbi görbékről.
Uo., **43** (1926), 280—289.
38. Maximális osztályindexü síkgörbék jellemző számairól.
Uo., **43** (1926), 290—306.
39. Olyan síkgörbékről, amelyeknek elsőfajú csúcspontokon kívül más szingularitásuk nincs.
Uo., **44** (1927), 421—433.
40. Maximális osztályindexü síkgörbék meneteiről.
Uo., **44** (1927), 434—445.
41. Maximális osztályindexü síkgörbék rendszámáról.
Uo., **44** (1927), 446—459.
42. Egy menetből álló maximális osztályindexü síkgörbék rendszámáról.
Uo., **44** (1927), 460—476.

43. Über ein topologisches Problem von Gauss.
Math. Zeitschr., **26** (1927), 579—592.
44. Über die irreduziblen ebenen Kurven von Maximalindex.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math,, 3 (1927), 96—106.
45. Über Flächen vom Maximalindex.
Math. Annalen, **98** (1927), 657—683.
46. Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximal-Klassenindex.
Uo., **100** (1928), 164—178.
47. Über die Züge der ebenen Kurven von Maximal-Klassenindex.
Uo., **100** (1928), 179—187.
48. Maximális osztályindexü síkgörbék rendszámára fennálló egyenlőtlenségekről.
Math. és Term.-tud. Ért., **45** (1928), 260—277.
49. Maximális osztályindexü síkgörbék jellemző számai között fennálló relációkról.
Uo., **45** (1928), 245—259.
50. Über einen topologischen Satz.
Acta. Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient, Math,, **4** (1929), 246—247.
51. Topológiai vizsgálatok a gömbön fekvő zárt görbéken.
Math. és Term.-tud. Ért., **46** (1929), 758—792.
52. Zur Topologie der geschlossenen Kurven auf der Sphäre.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math,, 5 (1930), 1—12.
53. Über die ebenen reduziblen Kurven gegebener Klasse vom Maximal-Klassenindex mit der Maximalanzahl ineinander liegender Ovale.
Math. Annalen, **103** (1930), 502—515.
54. Érintőszingularitásnélküli végesben fekvő síkgörbékről.
Math. és Term.-tud. Ért., **47** (1930), 693—715.
55. Einige Sätze über ebene Elementarkurven.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math,, 5 (1931), 83—89.
56. Egy polinom deriváltja zéróhelyeinek helyzetéről.
Math. és Fiz. Lapok, **38** (1931), 41—60.
57. Konvex felületek centrális felülete.
Mat. és Term.-tud. Ért., **43** (1931), 832—848.
58. Über die ebenen Kurven von Maximalindex und von Maximalklassenindex.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **41** (1931), 82—87.
59. Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex.
Math. Zeitschr., 35 (1932), 80—92.
60. Über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms.
The Tôhoku Mathematical Journal, **35** (1932), 126—135.
61. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimal- und Extremalpolynome.
Acta. Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient, Math., **6** (1932), 49—58.
62. Bizonyos minimumpolinomok zéróhelyeinek helyzetéről.
Mat. és Term.-tud. Ért., **49** (1932), 1—15.
63. Über einen Satz von Laguerre.
Journ. f. d. reine u. angew. Math., **169** (1933), 186—192.

64. Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex.
Math. Zeitschr., **37** (1933), 493—513.
65. Vizsgálatok reális polinomok és bizonyos egész függvények zéróhelyeinek helyzetéről.
Math. és Term.-tud. Ért., **50** (1933), 167—194.
66. Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen.
Journal f. d. reine u. angew. Math., **170** (1934), 133—147.
67. Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen.
Uo., **170** (1934), 148—153.
68. Zur Theorie der algebraischen und gewisser transzendenten Gleichungen.
Uo., **172** (1934), 25—36.
69. Algebrai és transzcendens egyenletekről.
Math. és Term.-tud. Ért., **52** (1934), 36—53.
70. Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen.
The Tôhoku Mathematical Journal, **40** (1934), 76—78.
71. Maximális indexü felületekre vonatkozó vizsgálatok.
Math. és Term.-tud. Ért., **53** (1935), 420—474.
72. Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex.
Acta Litt, ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math., **7** (1935), 244—274.
73. Valós együtthatójú polinomok deriváltjának valós zéróhelyeiről.
Math. és Term.-tud. Ért., **53** (1935), 781—792
74. Érintőszingularitásnélküli és zéróindexü síkgörbékről.
Uo., **54** (1936), 358—374.
75. Über die Nullstellen gewisser rationaler Funktionen.
The Tôhoku Mathematical Journal, **41** (1936), 415—422.
76. Über die reellen Nullstellen des Derivierten eines Polynoms mit reellen Koeffizienten.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math., **8** (1936), 42—52.
77. Maximális indexü térgörbékről.
Math. és Term.-tud. Ért., **54** (1936), 685—711.
78. Über die Buschenveloppen von H. Brunn.
Math. Zeitschr., **41** (1936), 479—492.
79. Über eine Zerlegung der ebenen Kurven vom Maximalindex.
Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Hung. Franc.-Ios., Sect. Scient. Math,, **8** (1937), 136—146.
80. Über die Zirkulation der ebenen Kurven vom Maximalindex.
Uo., **8** (1937), 147—148.
81. Többméretű térben fekvő többméretű görbékről.
Mat. és Term.-tud. Ért., **55** (1937), 540—549.
82. Többméretű terekben fekvő maximális indexü görbékről.
Uo., **55** (1937), 550—573.
83. Über Raumkurven vom Maximalindex.
Journal f. d. reine u. angew. Math., **178** (1937), 197—214.
84. Über die aus Regelflächen zweiter Ordnung bestehenden Flächen vom Maximalindex.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **47** (1937), 145—149.
85. Véges fajszámú egész függvények képzetes zéróhelyeiről.
Mat. és Term.-tud. Ért., **56** (1937), 353—375.

86. Olyan maximális indexü felületekről, amelyeknek egyik köpenye másodrendű torzfelület.
Uo., **56** (1937), 783—195.
87. Síksokszögekről különösen az egyszerű síksokszögekről.
Uo., **57** (1938), 51—78.
88. Egyköpenyű maximális indexü felületek fajszáma.
Uo., **58** (1939), 298—312.
89. Valós zéróshelyekkel bíró polinomokról.
Uo., **59** (1940), 72—94.
90. Über die Eigenschaften der beschränkten ebenen Kurven ohne Tangentensingularität.
Math. Zeitschr., **46** (1940), 605—626.
91. Über die Kurven n-ter Ordnung im projektiven q-dimensionalen Raum für $n < 2q$.
Journal f. d. reine u. angew. Math., **183** (1940), 1—8.
92. Über ganze Funktionen mit lauter reellen Nullstellen.
Revista Matematica y Fisica Teoretica Tucuman, **1** (1940), 303—312.
93. Über die reellen Nullstellen gewisser Polynome mit Parametern.
Acta Sci. Math. Szeged, **10** (1941), 36—41.
94. Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex.
Journal f. d. reine u. angew. Math., **183** (1941), 129—147.
95. Maximális indexü reducibilis algebrai görbék a többméretű térben.
Mat. és Term.-tud. Ért., **60** (1941), 33—48.
96. Maximális indexü irreducibilis algebrai görbék a többméretű térben.
Uo., **60** (1941), 49—63.
97. Végesrendű geometria.
Mat. és Fiz. Lapok, **48** (1941), 207—242.
98. Dieudonné egyik tételéről.
Mat. és Term.-tud. Ért., **60** (1941), 700—761.
99. Zérushelyek fekvésére vonatkozó tételek.
Uo., **61** (1942), 1—13.
100. Kapcsolt sokszögek a projektív síkban.
Uo., **61** (1942), 441—459.
101. Egy elemi geometriai tétel és alkalmazása a polinomok geometriájában.
Uo., **61** (1942), 776—785.
102. Polinomok lineáris sorának zérushelyei.
Uo., **61** (1942), 786—808.
103. Über konvexe Kurven und einschliessende Kreisringe.
Acta Sci. Math. Szeged, **10** (1943), 178—184.
104. Ein Beweis des Vierscheitelsatzes.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **52** (1943), 198—200.
105. Verallgemeinerung eines Satzes von Jentzsch.
Monatshefte f. Math. u. Phys., **51** (1943), 59—62.
106. Összefüggések a polinomok zérushelyei és A-helyei között és alkalmazásuk algebrai egyenletek gyökeinek vizsgálatára.
Múzeumi Füzetek Kolozsvár, **1** (1943), 132—152.
107. Geometrie endlicher Ordnung.
Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver., **53** (1944), 103—136.
108. Kurven vom Maximalindex in projektiven mehrdimensionalen Räumen.
Journal f. d. reine u. angew. Math., **186** (1944), 30—39.

109. Algebraische Kurven vom Maximalindex im mehrdimensionalen Raum.
Uo., **186** (1944), 40—48.
110. Polinomok értékkészlete bizonyos tartományokban.
Mat. és Term.-tud. Ért., **62** (1944), 1—12.
111. Die Lage der *A*-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen.
Acta Sci. Math. Szeged, **11** (1947), 147—151.
112. Generalisation of certain theorems of G. Szegő on the location of zeros of polynomials.
Bulletin of the Amer. Math. Soc., **53** (1947), 1164—1169.
113. Über den Wertvorrat gebrochener rationaler Funktionen in Kreisbereichen.
Hungarica Acta Math., **1**, 3. füzet (1948), 1—13.
114. Über die allgemeinen Lemniskaten.
Acta Sci. Math. Szeged, **11** (1948), 207—22.
115. Über die Lage der Doppelgeraden von gewissen Flächen gegebener geometrischer Ordnung.
Uo., **11** (1948), 234—238.,
116. Ein Beweis des Satzes H. J. S. Smith und H. Kortum.
Elemente der Mathematik, **3** (1948), 95—97.
117. Die Polarkreise eines Punktes in bezug auf ein Polynom.
Portugaliae Mathematica, **7** (1948), 51—58.
118. Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten.
Acta Sci. Math. Szeged, **13** (1949), 1—13.
119. Über die Lage der Nullstellen eines Abstandspolynoms und seiner Derivierten.
Bulletin of the Amer. Math. Soc., **55** (1949), 329—342.
120. Darstellung algebraischer Flächen von Gestalt einer Kurve.
Hungarica Acta Math., **1**, 4. füzet (1949), 85—86.
121. Über rationale Funktionen, deren Nullstellen und Pole an entgegengesetzten Seiten einer Geraden liegen.
Uo., **1**, 4. füzet (1949), 12—16.
122. Ein topologischer Satz über endliche geschlossene Kurven in der Ebene.
Elemente der Math., **4** (1949), 85—86.
123. Gleichseitige Hyperbel und Parallelogramme.
Publicationes Math. Debrecen, **1** (1949), 24—28.
124. Zentralsymmetrisierung konvexer Körper.
Uo., **1** (1949), 29—32.
125. Schwerpunkt von konvexen Kurven und Flächen.
Portugaliae Math., **8** (1949), 17—22.
126. Über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen.
(Commentarii Mathematici Helvetici, **23** (1949), 288—293.
127. Zur Nullstellenverteilung von Extremalpolynomen.
Duke Math. Journal, **16** (1949), 575—577.
128. Über die Lemniskatenflächen.
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, (3. sor.) **2** (1950), 39—53.
129. Ein anschaulicher Beweis der ersten Plückerschen Formel.
Publicationes Math. Debrecen, **1** (1950), 71—72.
130. Apollonische Kurven.
Uo., **1** (1950), 73—88.

131. Totalreelle rationale Funktionen.
Acta Sci. Math. Szeged, **12 A** (1950), 1—10.
132. Csuklós négyszögek.
Középisk. Mat. Lapok, **1** (1950), 166—171.
133. Kurzer Beweis eines Satzes über die obere Schranke der absoluten Beträge von mehreren Nullstellen eines Polynoms.
Publicationes Math. Debrecen, **1** (1950), 251—253.
134. Verallgemeinerung der Derivierten in der Geometrie der Polynome.
Acta Sci. Math. Szeged, **13** (1950), 169—178.
135. Tschirnhaus'sche Eiflächen und Eikurven.
Acta Math. Acad. Sci. Hung., **1** (1950), 36—45.
136. Sur un théorème de M. Biernacki.
Annales de la Soc. Polonaise de Math., **23**, (1950), 224—229.
137. Az ellipszis és hiperbola egyenletének egy szimmetrikus levezetése.
Középisk. Mat. Lapok, **2** (1951), 252—255.
138. Zwei nicht konstruierbare Aufgaben des Dreiecks.
Elemente d. Math., **6** (1951), 81—83.
139. Tschirnhaus'sche Flächen und Kurven.
Acta Math. Acad. Sci. Hung., **1** (1951), 167—181.
140. Über Polynome mit lauter reellen Nullstellen.
Acta Math. Acad. Sci. Hung., **1** (1951), 225—228.
141. Winkelabweichung und Betragsabweichung bei Polynomen.
Uo., **2** (1952), 210—216.
142. Realitätsgrad und Realitätsstellen von komplexen Polynomen.
Uo., **2** (1952), 99—102.
143. Über Polynome, deren Nullstellen auf einem Kreis liegen.
Uo., **2** (1952), 157—163.
144. Über die Lage der kritischen Punkte rationaler Funktionen.
Acta Sci. Math. Szeged, **14** (1952), 179—185.
145. Mittelkante, Mittelebene, Mittelpunkt von Kanten einer Ecke.
Publicationes Math. Debrecen, **2** (1952), 161—165.
146. Ableitung einer algebraischen Kurve vierter Ordnung vom Index 2 aus Kegelschnitten.
Uo., **2** (1952), 166—168.
147. Wertverteilung bei Polynomen mit lauter reellen Nullstellen und Koeffizienten.
Acta Math. Acad. Sci. Hung., **3** (1952), 269—274.
148. Über die nichtreellen Werte einer totalreellen rationalen Funktion.
Uo., **4** (1953), 89—93.
149. Bolyai János szögharmadolása.
Mat. Lapok, **4** (1953), 84—86.
150. Konvexes Polyeder als geometrischer Ort, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), (Megjelenés alatt.)

Szőkefalvi Nagy Gyulának az 1926. évet megelőző időre eső munkásságát ismerteti a következő jelentés:

SZŰCS ADOLF: Jelentés az 1926. évi Kőnig Gyula jutalomról.
Math. és Phys. Lapok, **33** (1926), 1—11.

Újabb bizonyítás arra, hogy a Csillag—Kalmár-féle elemi függvények osztálya szűkebb, mint a primitív-rekurzív függvényeké

Írta: PÉTER RÓZSA

Kalmár Lászlónak, mesteremnek és barátomnak, akinek a legnagyobbat köszönhetem: hogy matematikus lettem — nagy hálával és szeretettel 50-ik születésnapjára.

Bevezetés

1. A különböző rekurzív függvényosztályok összefüggéseinek vizsgálatát az a mód indította meg, amit HILBERT[1] a kontinuumprobléma megoldására javasolt. Mint ismeretes, itt arról a sejtésről van szó, hogy nincs más számosság a megszámlálható és a kontinuum között. Minthogy a számelméleti függvények halmaza kontinuum számosságú, és a megszámlálható rendszámok halmazának (az úgynevezett 2-ik számosztálynak) számossága közvetlenül a megszámlálható után következik, HILBERT ezt a sejtést úgy akarta igazolni, hogy a második számosztály egyre nagyobb transzfinit számaihoz egyre „magasabbfajta" rekurziókat rendel hozzá, és azután megmutatja: az a feltevés, hogy az egyre magasabb rekurziókkal definiált számelméleti függvények kimerítik az összes számelméleti függvény halmazát, nem vezethet ellentmondásra. Az elgondolás keresztülviteléhez mindenekelőtt azt kellene megmutatni, hogy az egyre magasabb fokok bevezetése mindig hoz valami újat is: olyan függvényeket, amelyek alacsonyabb fokon nem definiálhatók. Ez indított annak megvizsgálására, hogy milyen rekurziófajták vezethetők még vissza egymásra, és melyek nyújtanak valami újat.

2. A továbbiakban „számon" mindig természetes számot fogok érteni (a 0-t is beleértve), „függvényen" és „reláción" pedig számelméleti függvényt, illetőleg relációt.

[1] D. HILBERT: Über das Unendliche. Math. Ann. 95, 161—190 (1926).

Egy függvényt primitív-rekurzívnak nevezünk, ha 0-ból és $n+1$-ből kiindulva véges számú helyettesítéssel és

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r)$$
$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r))$$

alakú „primitív-rekurzióval" építhető fel (itt $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ definíciója a már definiált $\alpha(a_1, \ldots, a_r)$, $\beta(n, a_1, \ldots, a_{r+1})$ függvények segítségével történik). Egy $B(a_1, \ldots, a_r)$ relációt az $a_1, \ldots, a_r$ változók között primitív-rekurzívnak mondunk, ha van olyan primitív-rekurzív $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$ függvény, amely olyan és csak olyan argumentumok mellett tűnik el, melyek a szóbanforgó relációban vannak egymással. A leghasználatosabb számelméleti függvények és relációk primitív-rekurzívok, így pl. minden szám mint konstans, az n, $m+n$, $m \cdot n$, m^n, $|m-n|$ függvények és az $m < n$, $m = n$ relációk, továbbá a B, B_1 és B_2 relációkkal együtt B tagadása is, a „B_1 és B_2" konjunkció is, a „B_1 és B_2 közül legalább az egyik" diszjunkció is. Még felsorolok néhány kevésbé közismert primitív-rekurzív függvényt, amit fel fogok használni a továbbiakban:

1. $$\left[\frac{a}{n}\right] = \begin{cases} \text{az } \frac{a}{n}\text{-ben foglalt legnagyobb egész szám, ha } n \neq 0 \\ 0, \text{ ha } n = 0. \end{cases}$$

2. $p_n =$ az $n+1$-ik törzsszám.

3. $\exp_a(n) = p_a$ kitevője n törzstényezős felbontásában.

4. $$\operatorname{long}(n) = \begin{cases} n \text{ legnagyobb törzstényezőjének indexe, ha } n > 1 \\ 0 \text{ máskor.} \end{cases}$$

5. $\alpha(a_1, \ldots, a_r, b)$-vel együtt

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) \text{ és } \prod_{i=0}^{n} \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) \text{ is.}$$

6. Az $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ függvényekkel és a $B_1, \ldots, B_{k-1}$ relációkkal együtt a következő „összetákolt" függvény is:

$$\varphi(a_1, \ldots, a_r) = \begin{cases} \alpha_1(a_1, \ldots, a_r), \text{ ha } B_1(a_1, \ldots, a_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k-1}(a_1, \ldots, a_r), \text{ ha } B_{k-1}(a_1, \ldots, a_r) \\ \alpha_k(a_1, \ldots, a_r) \text{ különben.} \end{cases}$$

3. Ha a rekurzióban részt nem vevő változók, az úgynevezett „paraméterek" helyén helyettesítések is történnek, mint pl. a

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, n+a))$$

rekurziósegyenletben, vagy a „beskatulyázott"

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \varphi(n, a)))$$

rekurziósegyenletben, akkor azt gondolná az ember, hogy így tágabb függvényosztályhoz jutunk; azonban bebizonyítottam,[2] hogy még a legbonyolultabb ilyenfajta definíciók is primitív rekurziókra és helyettesítésekre vezethetők vissza.

Nem vezet ki a primitív-rekurzív függvények osztályából az „értékkészletrekurzió" sem,[3] amelyben $\varphi(n+1, \cdot)$ definiálására nemcsak $\varphi(n, \cdot)$ alakú függvényértékeket használunk fel, hanem tetszésszerinti $\varphi(k, \cdot)$ alakú függvényértékeket, ahol $k \leqq n$. Hogy ezekkel szemben a beskatulyázott „többszörös" rekurzió, amelyben a rekurzió egyszerre több változó szerint megy végbe, kivezet a primitív-rekurzív függvények osztályából, azt már ACKERMANN bebizonyította;[4] mégpedig úgy, hogy kétszeres rekurzióval definiált egy függvényt, amely minden primitív-rekurzív függvényt „majorizál" egy bizonyos értelemben. A be nem skatulyázott többszörös rekurziókat még sikerült visszavezetnem primitív rekurziókra és helyettesítésekre.[5] Más rekurziófajtákra most nem térek ki.

4. A primitív-rekurzív függvények osztályánál szűkebb osztálynak bizonyult BERECZKI szerint[6] az „elemi" függvények osztálya. Az „elemi" megjelölést régebben CSILLAG PÁL, majd később, tőle függetlenül, KALMÁR is javasolta az olyan számelméleti függvények számára, amelyek úgyszólván az elemi iskola műveleteivel, azaz a négy alapművelettel építhetők fel 1-ből és változóknak egy $n_1, n_2, \ldots$ sorozatából kiindulva; mindenesetre az összeadás és szorzás fogalmának olyan tágításával, amely szumma- és produktumképzéseket is megenged változó határokig, és a kivonás és osztás fogalmának olyan szűkítésével, amely nem engedi átlépni a természetes számok kereteit: „aritmetikai kivonáson" a különbség abszolút értékének, $|a-b|$-nek előállítását értjük, „aritmetikai osztáson" $\left[\frac{a}{b}\right]$ előállítását. Világos, hogy minden elemi függvény

[2] R. PÉTER: Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. Math. Ann. 110, 612—632 (1934); A rekurzív függvények elméletéhez. Mat. Fiz. Lapok 42, 25—49 (1935).

[3] Lásd az előző lábjegyzetet.

[4] W. ACKERMANN: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Math. Ann. 99, 118—133 (1928); lásd még R. PÉTER: Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. Math. Ann. 111, 42—60 (1935).

[5] R. PÉTER: Über die mehrfache Rekursion. Math. Ann. 113, 489—527 (1936). (Ebben azt is kimutattam a CANTOR-féle átlós módszerrel, hogy a $k+1$-szeres rekurzió minden k-ra kivezet a k-szoros rekurziókkal definiálható függvények osztályából.)

[6] I. BERECZKI: Nem elemi rekurzív függvény létezése. Az Első Magy. Mat. Kong. Közl. 409—417 (1952).

primitív-rekurzív. Viszont BERECZKI megadott egy primitív-rekurzív függvényt, amely minden elemi függvényt „majorizál", és így nem lehet elemi.

BERECZKI[7] levélben közölte velem, hogy a CANTOR-féle átlós módszerrel is megpróbált megadni egy primitív-rekurzív de nem elemi függvényt. De itt egy ponton akadályba: egy eddig fel nem tárt rekurziófajtába ütközött. A továbbiakban ezt az útat akarom követni.

I

1. Minthogy az elemi függvények az 1-ből és megszámlálható sok $n_1, n_2, \ldots$ változóból véges sok operációsmód alkalmazásával épülnek fel, megszámlálható

$$\psi_0(n_1, \ldots, n_{i_0}),\ \psi_1(n_1, \ldots, n_{i_1}), \ldots$$

sorozatba rendezhetők. Meg fogok adni egy ilyen sorozatot, melyben minden elemi függvény minden határon túl egyre újra fellép, és amelynek minden ψ_k tagja vagy 1, vagy a változók egyike, vagy két előbb következő $\psi_{k'}$ és $\psi_{k''}$ függvényből a megengedett operációk egyikével jön létre; ha pl. összeadással, akkor

$$\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k}) = \psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k}) + \psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k}),$$

ha szummaképzéssel, akkor

$$\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k}) = \sum_{j=0}^{\psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k})} \psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k}, j),$$

s. í. t. (Itt $\psi_{k'}$ és $\psi_{k''}$ nem függhet más változótól, mint $n_1, \ldots, n_{i_k}$-tól és a szumma- vagy produktumképzésben j-től, de nem kell mindezektől a változóktól ténylegesen függniük.) Maguk a $\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k})$ függvények helyett egyváltozós

$$\varphi_k(n) = \psi_k(\exp_1(n), \ldots, \exp_{i_k}(n))$$

„képviselőiket" fogom felsorolni. Ezekből a ψ_k függvények a

$$\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k}) = \varphi_k(p_1^{n_1} \ldots p_{i_k}^{n_{i_k}})$$

helyettesítéssel kaphatók, és ha ψ_k a $\psi_{k'}$ és $\psi_{k''}$ függvényekből a megengedett operációk egyikével épül fel, akkor φ_k ugyanezzel az operációval jön létre $\varphi_{k'}$-ből és $\varphi_{k''}$-ből, csak arra kell ügyelnünk, hogy amikor $\psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k}, j)$ képviseletében lép fel $\varphi_{k'}$, akkor

[7] 1949-ben.

$\varphi_{k'}$ argumentuma nem $p_1^{n_1}\dots p_{i_k}^{n_{i_k}}=n$, hanem

$$p_1^{n_1}\dots p_{i_k}^{n_{i_k}}p_{i_k+1}^{j}=n\cdot p_{\log(n)+1}^{j}.$$

Legyen a rövidség kedvéért

$$\beta(j,n)=n\cdot p_{\log(n)+1}^{j}.$$

Ha φ indexét is argumentumnak tekintjük, akkor $\varphi_m(n)=\varphi(m,n)$ így definiálható:

$$\varphi(m,n)=\begin{cases} 1, \text{ ha } m=0 \\ \exp(n)_{\exp_0(m)}, & \text{ha } m\neq 0 \text{ és } \exp_2(m)=0 \\ \varphi(\exp_0(m),n)+\varphi(\exp_1(m),n), & \text{ha } \exp_2(m)=1 \\ |\varphi(\exp_0(m),n)-\varphi(\exp_1(m),n)|, & \text{,, } \exp_2(m)=2 \\ \varphi(\exp_0(m),n)\cdot\varphi(\exp_1(m),n), & \text{,, } \exp_2(m)=3 \\ \left[\dfrac{\varphi(\exp_0(m),n)}{\varphi(\exp_1(m),n)}\right], & \text{,, } \exp_2(m)=4 \\ \sum\limits_{j=0}^{\varphi(\exp_1(m),n)}\varphi(\exp_0(m),\beta(j,n)), & \text{,, } \exp_2(m)=5 \\ \prod\limits_{j=0}^{\varphi(\exp_1(m),n)}\varphi(\exp_0(m),\beta(j,n)) \text{ különben.} \end{cases}$$

(Lényegtelen eltéréssel ez a Bereczki-féle definíció.) $\varphi(m,n)$ értékei között csakugyan előfordul 1 is (ez önmagát képviseli); minden n_r változó is képviselve van itt, hiszen pl.

$$\varphi(2^r,n)=\exp_r(n),$$

és $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots$-re az n_r változót $\exp_r(n)$ képviseli. Továbbá $\varphi(m,n)$ értékei között $\psi_{k'}$ és $\psi_{k''}$ képviselőivel, $\varphi(k',n)$-nel és $\varphi(k'',n)$-nel együtt a $\psi_{k'}$-ből és $\psi_{k''}$-ből megengedett operációval felépülő függvények képviselői is előfordulnak; pl.

$$|\varphi(k',n)-\varphi(k'',n)|=\varphi(2^{k'}3^{k''}5^2,n),$$

és

$$\prod_{j=0}^{\varphi(k'',n)}\varphi(k',\beta(j,n))=\varphi(2^{k'}3^{k''}5^6,n).$$

Így m különböző értékei mellett minden elemi függvény képviselője fellép $\varphi(m,n)$ értékei közt.

Ennélfogva a — kissé módosított — „átlós függvény": $\varphi(n_1,p_1^{n_1})+1$ nem lehet elemi. Mert ha elemi volna, akkor egy alkalmas k-val

$$\varphi(k,n)$$

képviselné, és ebből ezt az egyváltozós függvényt úgy lehetne visszakapni, ha n helyébe $p_1^{n_1}$-et helyettesítenénk. Így minden n_1-re

$$\varphi(n_1, p_1^{n_1}) + 1 = \varphi(k, p_1^{n_1})$$

állna fenn, de ebből $n_1 = k$-ra

$$\varphi(k, p_1^k) + 1 = \varphi(k, p_1^k),$$

vagyis ellentmondás adódnék.

Ha tehát ki lehet mutatni, hogy $\varphi(m, n)$ primitív-rekurzív, akkor $\varphi(n_1, p_1^{n_1}) + 1$ is primitív-rekurzív, és így példánk van primitív-rekurzív nem-elemi függvényre.

2. Vegyük tehát szemügyre $\varphi(m, n)$ definícióját. Hozzuk előbb szokottabb alakra. Az m rekurzióssváltozó helyébe írjunk n-et, és a paraméter-szerepet játszó n helyébe a-t, majd adjuk meg egy primitív-rekurzív α függvény

$$\alpha(n, a, b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{cases} \underset{\exp_0(n+1)}{\exp}(a), & \text{ha } \exp_2(n+1) = 0 \\ b_1 + b_2, & \text{,,}\ \exp_2(n+1) = 1 \\ |b_1 - b_2|, & \text{,,}\ \exp_2(n+1) = 2 \\ b_1 \cdot b_2, & \text{,,}\ \exp_2(n+1) = 3 \\ \left[\dfrac{b_1}{b_2}\right], & \text{,,}\ \exp_2(n+1) = 4 \\ b_3, & \text{,,}\ \exp_2(n+1) = 5 \\ b_4 \text{ különben} & \end{cases}$$

definícióját. Akkor φ definíciója így alakul:

$$\varphi(0, a) = 1$$

$$\varphi(n+1, a) = \alpha(n, a, \varphi(\exp_0(n+1), a), \varphi(\exp_1(n+1), a),$$
$$, \sum_{j=0}^{\varphi(\exp_1(n+1), a)} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(j, a)), \prod_{j=0}^{\varphi(\exp_1(n+1), a)} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(j, a))).$$

Ez értékkészletrekurzió, mert $\varphi(n+1, a)$ értékét $\varphi(\exp_0(n+1), \cdot)$ és $\varphi(\exp_1(n+1), \cdot)$ értékek segítségével adja meg, és

$$\exp_0(n+1) < n+1, \qquad \exp_1(n+1) < n+1\,;$$

ezenkívül az a paraméter helyére $\beta(j, a)$ értékek lépnek benne. Mint már említettem, már régebben sikerült az ilyenfajta definíciókat primitív rekurziókra és helyettesítésekre visszavezetnem. Itt azonban új helyzet előtt állunk: $\varphi(n+1, a)$ definíciójában nem adott számú, hanem változó (sőt φ-től függő) számú $\varphi(\exp_0(n+1),\cdot)$ és $\varphi(\exp_1(n+1),\cdot)$ alakú függvényérték vesz részt. A régi módszerek itt nem használhatók. BERECZKI ezért elejtette az átlós módszer alkalmazását, és a majorizálás módszerével bizonyította be, hogy az elemi függvények osztálya szűkebb, mint a primitív-rekurzív függvényeké.

II

1. Azóta bebizonyítottam,[8] hogy a legbonyolultabb rekurziók is, amelyek változó számú korábbi függvényértéket használnak fel, közönséges többszörös rekurziókra és helyettesítésekre vezethetők vissza. Azonkívül tisztáztam, hogy a többszörös rekurzióknak milyen fajtái oldhatók fel primitív rekurziókra és helyettesítésekre.[9] A BERECZKI-féle speciális eset ilyenfajta többszörös rekurzióra volt visszavezethető.

2. Azonban ebben a speciális esetben könnyen kiiktatható a többszörös rekurzión át vezető kerülőút. Az a paraméterhez tartozó

$$\psi(n, a) = \prod_{i=0}^{a} p_i^{\varphi(n, i)}$$

„értékkészletfüggvény" ugyanis közvetlenül definiálható; ebből pedig $\varphi(n, a)$ így kapható vissza:

(*) $$\varphi(n, a) = \exp_a(\psi(n, u)), \text{ minden } u \geqq a\text{-ra};$$

így pl.

$$\varphi(n, a) = \exp_a(\psi(n, a)).$$

A $\psi(n, a)$ függvény φ definíciósegyenleteinek felhasználásával definiálható. Először is φ első definíciósegyenlete szerint

$$\psi(0, a) = \prod_{i=0}^{a} p_i^{\varphi(0, i)} = \prod_{i=0}^{a} p_i.$$

φ második definíciósegyenlete szerint pedig

$$\psi(n+1, a) = \prod_{i=0}^{a} p_i^{\varphi(n+1, i)},$$

[8] R. PÉTER: Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden. Publicationes Mathematicae, Debrecen, 3, 33—70 (1953).

[9] Lásd az előző lábjegyzetet.

és itt (*) szerint

$$\varphi(n+1, i) = \alpha(n, i, \varphi(\exp_0(n+1), i), \varphi(\exp_1(n+1), i),$$

$$, \sum_{j=0}^{\varphi(\exp_1(n+1), i)} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(j, i)), \prod_{j=0}^{\varphi(\exp_1(n+1), i)} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(j, i))) =$$

$$= \alpha(n, i, \exp_i(\psi(\exp_0(n+1), u)), \exp_i(\psi(\exp_1(n+1), u)),$$

$$, \sum_{j=0}^{\exp_i(\psi(\exp_1(n+1), u))} \exp_{\beta(j, i)}(\psi(\exp_0(n+1), v)),$$

$$, \prod_{j=0}^{\exp_i(\psi(\exp_1(n+1), u))} \exp_{\beta(j, i)}(\psi(\exp_0(n+1), v))),$$

tetszésszerinti

$$u \geqq i, \quad v \geqq \beta(j, i)$$

mellett.

Minthogy i itt 0 és a közötti, j pedig 0 és $\exp_i(\psi(\exp_1(n+1), u))$ közötti értékeket vesz fel,

$$u = a$$

és,

$$\gamma(a, c) = \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{\exp_i(c)} \beta(j, i)$$

esetén,

$$v = \gamma(a, \psi(\exp_1(n+1), a))$$

mindenesetre kielégíti a feltételeket.

Ha tehát

$$\delta(n, a, b, c, d) =$$

$$= \prod_{i=0}^{a} p_i^{\alpha(n, i, \exp_i(b), \exp_i(c), \sum_{j=0}^{\exp_i(c)} \exp_{\beta(j,i)}(d), \prod_{j=0}^{\exp_i(c)} \exp_{\beta(j,i)}(d))},$$

akkor δ primitív-rekurzív, és $\psi(n, a)$ így definiálható:

$$\psi(0, a) = \prod_{i=0}^{a} p_i$$

$$\psi(n+1, a) = \delta(n, a, \psi(\exp_0(n+1), a), \psi(\exp_1(n+1), a),$$

$$, \psi(\exp_0(n+1), \gamma(a, \psi(\exp_1(n+1), a)))).$$

Ez a definíció a $\psi(n+1, a)$ értéket három korábbi függvényérték segítségével adja meg; ennélfogva ez az egyszeres beskatulyázott értékkészletrekurzió a régi módon feloldható primitív rekurziókra és helyettesítésekre.

De

$$\varphi(n, a) = \exp_a(\psi(n, a))$$

miatt $\psi(n, a)$-val együtt $\varphi(n, a)$ is primitív-rekurzív. Az I. 1. pontjának végén mondottak szerint ezzel példát kaptunk primitív-rekurzív de nem elemi függvényre.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО КЛАСС ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ЧИЛЛАГА - КАЛЬМАРА УЖЕ, ЧЕМ КЛАСС ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Р. Петер

Резюме

В своей статье „Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden“ (Publicationes Mathematicae, Debrecen, **3** (1953) стр. 33—70) автор доказывает, что даже самые сложные из указанных в заглавии типов рекурсий могут быть сведены на обыкновенные многократные рекурсии, а в некоторых случаях даже на примитивные рекурсии. Автор указал на то, что в качестве специального случая возникает новое доказательство того, что класс примитивно-рекурсивных функций шире, чем класс элементарных функций Чиллага—Кальмара, но это доказательство автором не было изложено во всех деталях. Упомянутый специальный случай поддается более простому доказательству, чем общий, что и излагается в настоящей статье. Это же доказательство появится в журнале „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“, который будет издаваться в Берлине.

NEUER BEWEIS DAFÜR, DASS DIE KLASSE DER CSILLAG—KALMÁRSCHEN ELEMENTAREN FUNKTIONEN ENGER IST ALS DIE KLASSE DER PRIMITIV-REKURSIVEN FUNKTIONEN.

R. PÉTER

Meinem Meister und Freund, László Kalmár, dem ich das grösste zu verdanken habe: dass ich Mathematiker geworden bin — mit herzlichem Dank zu seinem 50-sten Geburtstag.

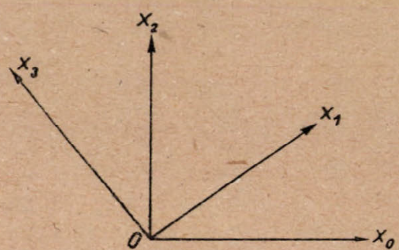
In meiner Arbeit: *Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden* (Publicationes Mathematicae, Debrecen, **3** (1953), S. 33—70) habe ich bewiesen, dass sich auch die verwickeltesten Typen der im Titel angedeuteten Rekursionen auf gewöhnliche mehrfache Rekursionen, und in gewissen Fällen sogar auf primitive Rekursionen zurückführen lassen. Hier wurde darauf hingewiesen, dass sich als Spezialfall auch ein neuer Beweis dafür ergibt, dass die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen weiter ist, als die der elementaren Funktionen; dieser Beweis wurde aber nicht in allen Einzelheiten angegeben. Nun kann der hier benutzte Spezialfall wesentlich einfacher als der allgemeine Fall behandelt werden; in dieser Arbeit wird der Beweis auf dieser einfachen Weise durchgeführt. Derselbe Beweis ist im Erscheinen in der „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“, Berlin.

A vetítő térelemek alkalmazása a négydimenziós lineáris tér Maurin-féle leképezésében

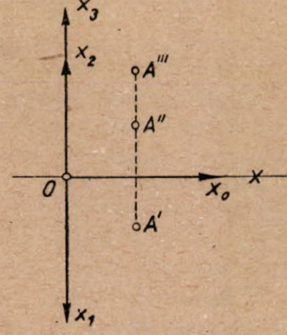
Írta: GYARMATHI LÁSZLÓ

Maurin 1947-ben[1] a négydimenziós lineáris (euklidesi) tér (R_4) leképezésének egy igen előnyös módját mutatta be. Az ő elgondolása az volt, hogy a négy és annál magasabb dimenziójú terek leképezését a közönséges háromdimenziós tér Monge-féle leképezésére vezesse vissza s az ott használt közismert eljárások alkalmazásával oldja meg a magasabb dimenziójú terek konstruktív feladatait.

Maurin leképezéséhez egy Descartes-féle (derékszögű) koordináta hipertetraedert $(0x_0x_1x_2x_3)$-at használt és az x_0-on átmenő három $\varkappa_i \equiv [x_0x_i]$ $(i = 1, 2, 3)$ koordinátasíkot alkalmazta képsíknak (l. az 1. szemléltető ábrát).



1. ábra



2. ábra

Egy A pont — amelynek Descartes-féle koordinátái (a_0, a_1, a_2, a_3) — ábrázolása úgy történik, hogy meghatározzuk annak a három képsíkon való merőleges vetületét[2] s így A-hoz három képet A', A''

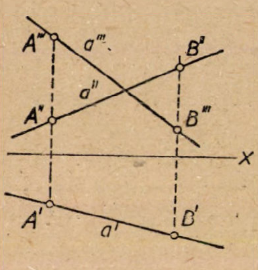
[1] Comptes Rendus Acad. Sci Paris, 225 (1947), 560–562. o.

[2] A képsík és az A pont által meghatározott R_3-ban közönséges (háromdimenziós) értelemben történik a merőleges vetítés.

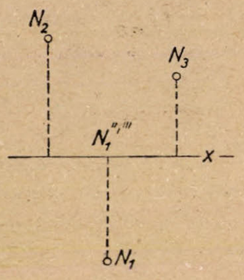
és A'''-t rendelünk. A vetítés után a három képsíkot az x_0 (röviden x) tengely körül valamelyik képsíkba beleforgatjuk (a pozitív félképsíkok mindig az x-nek a 2. ábrán bemutatott oldalára kerülnek), ezáltal a pont három képe egy az x tengelyre merőleges egyenesen helyezkedik el s a képek r_1, r_2 és r_3 rendezői egyenlők a megfelelő koordinátákkal:

$$r_1 = a_1, \; r_2 = a_2, \; r_3 = a_3.$$

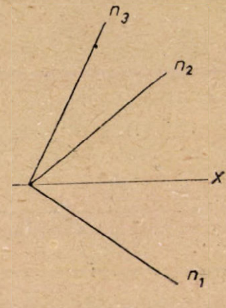
(Továbbiakban alkalmazzuk a következő jelöléseket; egyenesre: $|\;\;|$, síkra: $[\;\;]$ és hipersíkra: $\{\;\;\}$, továbbá a pontokat dűlt nagy latin betűkkel, egyeneseket kis latin betűkkel, a síkokat kis görög betűkkel, a hipersíkokat nagy görög betűkkel jelöljük, pl.: $A \equiv \{ABCD\}$ az A, B, C és D pontok által meghatározott A hipersíkot jelenti.)



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Egyenest három olyan (a', a'', a''') affin pontsorral képezhetünk le, amelyeknek a megfelelő három-három pontját összekötő egyenese párhuzamos (3. ábra).

Síkot a három képsíkon való három nyompontjával (N_1, N_2, N_3) vagy két metsző egyenesével ábrázolhatunk (4. ábra az első esetet tünteti fel).

Hipersíkot pedig — többek közt — három egymást a tengelyben metsző nyomvonalával (n_1, n_2, n_3) adhatunk meg (5. ábra).

A három képsík közül kettő-kettő egy segédhipersíkot (háromdimenziós teret)

$$\Sigma_{12} \equiv \{\varkappa_1 \varkappa_2\}, \; \Sigma_{13} \equiv \{\varkappa_1 \varkappa_3\}, \text{ és } \Sigma_{23} \equiv \{\varkappa_2 \varkappa_3\}$$

határoz meg s abban minden szerkesztés éppen úgy elvégezhető, mint a Monge-féle projekcióban.

Maurin az [1] alatt idézett értekezésének megjelenése után kidolgozta e leképezési rendszer helyzetgeometriai feladatait[3]. E szer-

[3] J. Maurin: „Geometrie Descriptive A Quatre Dimensions" Paris, 1948. (Gauthier—Villars Imprimeur—Editur.)

kesztések azonban sokszor hosszadalmasak, mivel ő legtöbb helyen általános térgeometriai elvek alkalmazása során jut célhoz, és nem használja ki azokat az előnyöket, amelyeket az ún. speciális — elsősorban a képsíkokra merőleges (vetítő) — helyzetű térelemek alkalmazása nyújt.

E dolgozat az ún. négydimenziós „vetítősík“ és „vetítő hipersík“ fogalmát vezeti be és azok ábrázolását adja. Majd két lényegesnek látszó helyzetgeometriai feladat: *a hipersíkra illeszkedő egyenes ábrázolása,* majd pedig *hipersík és egyenes metszespontjának szerkesztése* során mutatja be azok alkalmazhatóságát. Ezen eljárás előnyét igazolja többek közt az, hogy pl. a második feladat bemutatott megoldása geometrografia[4] szempontjából kb. fele annyi szerkesztési mozzanatból áll, mint a Maurin által összeállított megfelelő szerkesztés. A vetítő elemeknek a Maurin-féle leképezésben való széleskörű alkalmazását az is indokolja, hogy ezen ábrázolás a Monge-féle projekcióval szoros analógiában van és ott közismerten előnyös e térelemek használata.

Mivel a „vetítő térelemek“ képsíkra merőleges helyzetűek, ezért érdemes szem előtt tartani azt a tényt, hogy az R_4 térelemeinek merőlegességét akkor tekinthetjük át legkönnyebben, ha bevezetjük a végtelen távoli térelemeket és figyelembe vesszük, hogy — értelmezésük is történhet így — a merőleges térelemek végtelen távoli elemei polárreciprok vonatkozásban vannak az R_4 abszolút gömbjére nézve[5].

Vetítősík és annak ábrázolása. Vetítősíkoknak nevezzük a képsíkokra merőleges síkokat. Pl. első vetítősík a $\varkappa_1$-re merőleges sík. A merőlegesség előbbi értelmezéséből következik, hogy a képsíknak és a rá merőleges vetítősíknak csak egy közös pontja van és a képsíknak minden egyes pontjához csak egy vetítősík (s az R_4 bármely pontjához csak egy egyfajta vetítősík) tartozik. Továbbá a vetítősík pázhuzamos azzal a síkkal, amely háromdimenziós értelemben merőleges az x tengelyre és a másik két képsík által meghatározott segédhipersíkra illeszkedik. Ezek szerint pl. a π_1 első vetítősík P_1 első nyompontja a $\varkappa_1$ egy végesben fekvő pontja, a másik két nyompontja a $P_{2\infty}$ és $P_{3\infty}$ a másik két képsík azon két végtelen távoli pontja, amelyek egyesítés után a P_1-en átmenő rendező végtelen távoli pontjába kerülnek (6. ábra). Mivel, ha a π_1 első vetítősík bármely pontját összekötjük a P_1 első nyompontjával, olyan egyenest kapunk, amely merőleges a $\varkappa_1$-re, azért a π_1 minden pontjának az első képe a P_1-ben van.

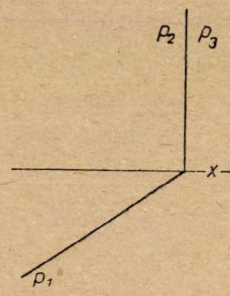
4 Szőkefalvi-Nagy Gyula: A Geometriai Szerkesztések Elmélete, Kolozsvár, 1943. 69. o.

5 Enzykl. d. Mat. Wiss. III. 2, 798. o.

(Hasonló igaz a többi vetítősíkokra is.) Az elmondottakból következik, hogy egy pont három képét úgy is meghatározhatjuk, hogy a ponton keresztül első, második és harmadik vetítősíkot vezetünk és ezek metszik ki a megfelelő képsíkokból a pont képeit.

Vetítő hipersík és annak ábrázolása. Vetítő hipersíknak nevezzük azt a hipersíkot, amely egy vetítősíkra illeszkedik. Így pl. első vetítő hipersík az a sík, amely egy első vetítősíkra illeszkedik. Ezért a Π_1 első vetítő hipersík p_1 első nyomvonala $\varkappa_1$ végesben

6. ábra



7. ábra

lévő egyenese, a második és harmadik nyomvonala a p_2 és p_3 — egyesítés után — az x-re merőleges (egybeeső) egyenes (7. ábra). — Mivel az első vetítősíkban fekvő minden pont első képe a vetítősík első nyompontjában van, ezért az első vetítő hipersíkban fekvő minden egyenes első képe annak első nyomvonalába esik. (Hasonló igaz a többi vetítő hipersíkra is.) Az előzőekhez hasonlóan itt is következik, hogy egy egyenes három képét megkapjuk, ha az egyenesen keresztül első, második és harmadik vetítő hipersíkot vezetünk (a merőlegesség értelmezéséből következik, hogy egy egyeneshez csak egy-egy ilyen tartozik) és e három vetítő hipersík metszi ki a megfelelő képsíkokból az egyenes képeit.

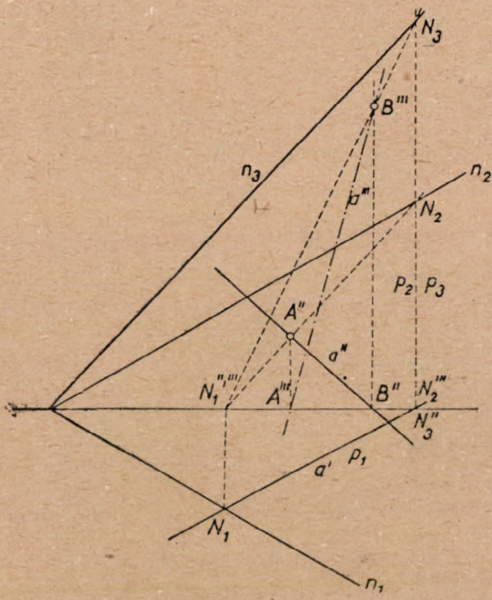
A pontoknak és az egyeneseknek a képéből való *térbeli visszaállítása* a vetítési eljárás megfordítása útján történhetik. Pl. egyenest képeiből úgy állíthatjuk vissza, hogy meghatározzuk — egyesítés előtt — az egyenes képeihez tartozó vetítő hipersíkokat. A három vetítő hipersík közös egyenese lesz a keresett térbeli egyenes[6].

Hipersíkra illeszkedő egyenes ábrázolása. A térelemeknek a képsíkrendszerhez képest általános helyzete mellett a hipersíkra illeszkedő egyenes ábrázolásánál az egyenes két képét tetszőle-

[6] Csak az x tengelyre merőleges hipersíkra illeszkedő egyenesek vonják ki magukat ezen visszaállítási eljárás alól.

gesen vehetjük fel, mert a két képhez tartozó vetítő hipersík és az adott sík közös egyenese lesz a keresett egyenes.

Legyen adva $A(n_1, n_2, n_3)$ hipersík a egyenesének két képe pl. a' és a'', szerkesztendő az a'''. Vezessünk az egyik képen pl. a'-n keresztül egy $\Pi_1(p_1, p_2, p_3)$ vetítő hipersíkot. A Π_1 az A-ból a $\sigma \equiv [N_1, N_2, N_3]$ nyompontokkal — a megfelelő nyomvonalak met-



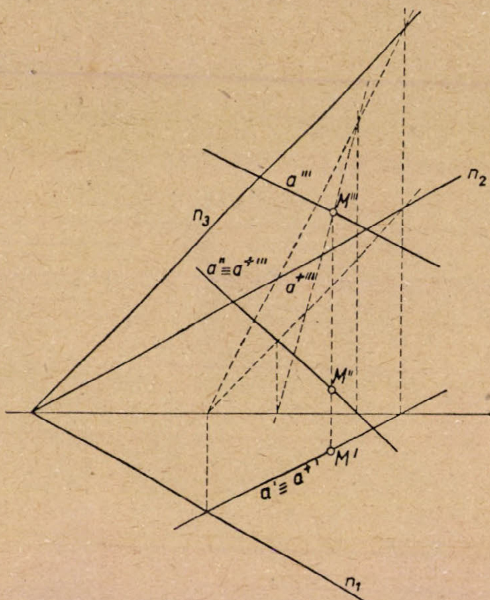
8. ábra

széspontja adja a nyompontokat — biró síkot metsz ki. Az a egyenes a σ síkban fekszik, s így e sík egyenesei metszik azt, azaz pl. az $|N_1''N_2|$, illetve $|N_1''N_3''|$ képeknek az a''-vel való A'', illetve B'' metszéspontjai az a egyenes A, illetve B pontjainak második képe. Ha az A'', illetve B'' pontokat a $|N_1'''N_2'''|$, illetve $|N_1'''N_3|$ egyenesekre vetítjük rá, az A''', illetve B''' pontokat kapjuk; ezek összekötő egyenese adja az a'''-t (8. ábra).

Hipersík és egyenes metszéspontjának szerkésztése. Szerkeszszük meg az $A(n_1, n_2, n_3)$ hipersík és $a(a', a'', a''')$ egyenes M metszéspontját. Az előző szerkesztés alapján állítsuk elő az A hipersíknak azt az a^+ egyenesét, amelyre $a^{+\prime} \equiv a'$, $a^{+\prime\prime} \equiv a''$. A térbeli visszaállítással kapcsolatban tett megállapitás szerint úgy az a, mint az a^+ illeszkedik az a' és a'' képekhez tartozó vetítő hipersíkok közös síkjára és így metszik egymást, de akkor az $a^{+\prime\prime\prime}$ és

a''' M''' metszéspontja a keresett metszéspont harmadik képe. A metszéspont másik két képét megkapjuk, ha M'''-t az a', illetve a''-re vetítjük (9. ábra).

Megjegyezni kívánjuk, hogy a vetítő elemes eljárás a (képsíkrendszerhez képest) különleges helyzetű térelemek esetén — természetesen nem alkalmazható mindig akadály nélkül.



9. ábra

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКТИРУЮЩИХ ЕЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВА ПРИ ОБОБРАЖЕНИИ МОРЕНА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Л. Дьярмати

(Р е з ю м е)

При отображении Морена в настоящей работе вводятся и изображаются проектирующая плоскость четырех измерений и проектирующая гиперплоскость. В связи с двмя задачами геометрии положения объясняется, как применить эти понятияу к изображению прямой, лежащей в гиперплоскости, и к конструкции точки пересечения гиперплоскости с прямой. Приведенные конструкции значительно проще, чем те, которые были сообщены Й. Мореном.

DIE ANWENDUNG DER PROJEKTIERENDEN RAUMELEMENTE BEI DER MAURINSCHEN ABBILDUNG DES VIERDIMENSIONALEN LINEAREN RAUMES

von L. GYARMATHI

(Zusammenfassung.)

In dieser Arbeit werden bei der Maurinschen Abbildung des R_4 die vierdimensionale projektierende Ebene und projektierende Hyperebene eingeführt und dargestellt. Sodann wird an der Hand von zwei lagegeometrischen Aufgaben die Anwendbarkeit dieser Begriffe zur Darstellung einer in der Hyperebene liegenden Geraden, sowie zur Konstruktion des Schnittpunktes einer Hyperebene und einer Geraden dargelegt. Die so erhalten Konstruktionen sind wesentlich einfacher, als die jenigen, die von J. Maurin zur Lösung derselben Aufgaben angegeben wurden.

KOSSUTH-DÍJASAINK

Az alábbiakban közöljük az 1953. és 1954. évben Kossuth-díjjal kitüntetett matematikusaink munkáinak jegyzékét.

Riesz Frigyes

tudományos munkáinak jegyzéke

1. A negyedrendű elsőfajú térgörbén lévő pontkonfigurációk helyzetgeometriai tárgyalása. — Doktori értekezés. — Math. és Phys. Lapok, 11. (1902), 293—309.; 13. (1904), 191—204.
2. Über einen Satz der Analysis Situs. — Math. Annalen, 59. (1904), 409—415.
3. Sur la résolution approchée de certaines congruences. — Comptes Rendus (Paris), 139. (1904), 459—462.
4. Über mehrfache Ordnungstypen I. — Math. Annalen, 61. (1905), 406—421.
5. Az analysis situsnak egy tételéről. — Math. és Phys. Lapok, 14. (1905), 13—24.
6. Sur un théorème de M. Borel. — Comptes Rendus (Paris), 140. (1905), 224—226.
7. Sur les ensembles discontinus. — Comptes Rendus (Paris), 141. (1905), 650—653.
8. A térfogalom genesise. — Math. és Phys. Lapok, 15. (1906), 97—122. 16, (1907), 223—235.
9. Sur les ensembles de fonctions. — Comptes Rendus (Paris), 143. (1906), 738—741.
10. Új módszer a térbeli alakzatok ábrázolására. — Math. és Phys. Lapok, 15. (1906), 280—291., 16. (1907), 223—235.
11. Die Genesis des Raumbegriffes. — Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn, 24. (1907), 309—353.
12. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. — Comptes Rendus (Paris), 144. (1907), 615—619.
13. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm. — Comptes Rendus (Paris), 144. (1907), 734—736.
14. Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables. — Comptes Rendus (Paris), 144. (1907), 1409—1411.
15. Über orthogonale Funktionensysteme. — Nachrichten Göttingen, 1907, 116—122.
16. Über die Approximation einer Funktion durch Polynome. — Jahresbericht der deutschen Math. - Vereinigung, 17. (1908), 196—211.
17. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. — Atti del IV. congresso internazionale dei mat. Roma, 2. (1908), 18—24.
18. A lineár homogén integrálegyenletről. — Math. és Term.-tud. Ért., 27. (1909), 220—240.

19. Sur les suites de fonctions mesurables. — Comptes Rendus (Paris), 148. (1909), 1303—1305.
20. Sur les opérations fonctionnelles linéaires. — Comptes Rendus (Paris), 149. (1909), 974—977.
21. Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues. — Comptes Rendus (Paris), 150. (1910), 674—677.
22. Integrálható függvények sorozatai. — Math. és Phys. Lapok, 19. (1910), 165—182. és 228—243.
23. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. — Math. Annalen, 69. (1910), 449—497.
24. Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen. — Nachrichten Göttingen, 1910, 190—195.
25. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. — Annales de l'École Normale Supérieure, 28. (1911), 53—62.
26. Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables. — Comptes Rendus (Paris), 154. (1912), 641—643.
27. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. — VI + 182., Paris, 1913.
28. Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires. — Annales de l'École Normale Supérieure, 31. (1914), 9—14.
29. Sur les polynomes trigonométriques. — Comptes Rendus (Paris), 158. (1914), 1657—1661.
30. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. — Journal f. die r. u. ang. Math., 146. (1916), 83—87.
31. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. — Riesz Marcellel együtt. — Comptes rendus du 4. congrès des math. scand., Stockholm, (1916), 27—44.
32. Lineáris függvényegyenletekről. — Math. és Term.-tud. Ért., 35. (1917), 544—578.
33. Megadott tagokkal kezdődő hatványsorokról. — Math. és Term.-tud. Ért., 35. (1917), 605—632.
34. Végtelen sorozatok integrálásáról. — Math. és Phys. Lapok, 26. (1917), 67—73.
35. Über lineare Funktionalgleichungen. — Acta Math., 41. (1918), 71—98.
36. Über Integration unendlicher Folgen. — Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, 26. (1918), 274—278.
37. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung. — Math. Zeitschrift, 2. (1918), 312—315.
38. Folytonos és korlátos ingadozású függvény Fourier-féle együtthatóiról. — Math. és Phys. Lapok, 27. (1918), 67—71.
39. Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern. — Acta Math., 42. (1920), 145—171.
40. Sur l'intégrale de Lebesgue. — Acta Math., 42. (1920), 191—205.
41. Folytonos függvényoperációkról. — Math. és Term.-tud. Ért. 37. (1920), 29—36.
42. Analytikus függvény kerületi értékeiről. — Szegő Gáborral együtt. — Math. és Term.-tud. Ért., 38. (1921), 113—127.
43. Über einige funktionentheoretische Ungleichungen. — Fejér Lipóttal együtt. — Math. Zeitschrift, 11. (1921), 305—314.

44. Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires. — Acta Sc. Math. 1. (1922—23), 18—26.
45. Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques. — Acta Sc. Math., 1. (1922—23), 27—32.
46. Sur les suites de fonctions analytiques. — Acta Sc. Math., 1. (1922—23), 88—97.
47. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. — Math. Zeitschrift, 18. (1923), 87—95.
48. Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. — Math. Zeitschrift, 18. (1923), 117—124.
49. Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie. — Acta Sc. Math. 2. (1924—26), 87—100.
50. Jelentés az 1924. évi Kőnig Gyula jutalomról. — Math. és Phys. Lapok, 32. (1925), 1—6.
51. Elemi módszerek a felsőbb matematikában. — Math. és Phys. Lapok, 32. (1925), 112—124.
52. Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. — Radó Tiborral együtt. — Math. Zeitschrift. 22. (1925), 41—44.
53. Sur une inégalité de M. Littlewood dans la théorie des fonctions. — Proceedings of the London Math. Soc. II, 23. (1925), 36—39.
54. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. (I.) — Acta Math., 48. (1926), 329—343.
55. Sur la formule d'inversion de Fourier. — Acta Sc. Math, 3. (1927), 235—241.
56. Sur la convergence en moyenne (I.) — Acta Sc. Math., 4. (1928—29), 58—64.
57. Su alcune disuguaglianze. — Bolletino dell'Unione Mat. Ital., 7. (1928), 77—79.
58. Elementarer Beweis des Egoroffschen Satzes. — Monatshefte für Math. und Physik, 35. (1928), 243—248.
59. Sur la convergence en moyenne. (II.) — Acta Sc. Math., 4. (1928—29), 182—185.
60. A lineáris függvényoperációk szétbontásáról. — Mat. és Fiz. Lapok, 36. (1929), 1—9.
61. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires. — Atti del cong. int. dei mat. Bologna, 1928, 3. (1930), 143—148.
62. Sur l'approximation des fonctions continues et des fonctions sommables. — Bulletin of the Calcutta Math. Soc., 20. (1930), 55—58.
63. Sur les valeurs moyennes des fonctions. — Journal of the London Math. Soc., 5. (1930), 120—121.
64. Sur une inégalité intégrale. — Journal of the London Math. Soc., 5. (1930), 162—168.
65. Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes. — Acta Sc. Math., 5. (1930—32), 23—34
66. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (II.). — Acta Math., 54. (1930), 321—360.
67. Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood. — Journal of the London Math. Soc., 7. (1931), 10—13.
68. A monoton függvények differenciálhatóságáról. — Mat. és Fiz. Lapok, 38, (1931), 125—131.

69. Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. — Acta Sc. Math., 5. (1930—32), 208—221.
70. Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle. — Verhandlungen des intern. Math. Kongr. Zürich, (1932), 258—269.
71. Über Sätze von Stone und Bochner. — Acta Sc. Math. 6., (1932—34), 184—198.
72. Sur les points de densité au sens fort. — Fundamenta Math., 22. (1934), 221—225.
73. Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. — Acta Sc. Math. 7. (1934—35), 34—38.
74. A Lebesgue-féle integrálról, mint a differenciálás műveletének megfordításáról. — Mat. és Fiz. Lapok, 42. (1935), 1—24.
75. Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert. — Acta Sc. Math. 7. 147—159.
76. Sur l'intégrale de Lebesgue comme l'opération inverse de la dérivation. — Annali di Pisa, II, 5. (1936), 191—212.
77. The Integral Representation of Unbounded Self-Adjoint Transformations in Hilbert Space. — E. R. Lorch-csal. — Transactions of the Am. Math. Soc., 39. (1936), 331—340.
78. Eine Ungleichung für harmonische Funktionen. — Monatshefte für Math. u. Phys., 43., (1936), 401—406.
79. A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról. — Math. Term.-tud. Ért., 56. (1937), 1—46.
80. Some Mean Ergodic Theorems. — Journal of the London Math. Soc., 13. (1938), 274—278.
81. A Jordan-féle görbetételről. — Math. Term.-tud. Ért., 57. (1938), 477—482.
82. Sur le théorème de Jordan. — Acta Sc. Math., 9. (1939), 154—162.
83. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. — Annals of Math., 41. (1940), 176—206.
84. Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. — Acta Sc. Math., 10. (1941), 1—20.
85. Another Proof of the Mean Ergodic Theorem. — Acta Sc. Math., 10. (1941), 75—76.
86. Rectification au travail „Sur la théorie ergodique des espaces abstraits". — Acta Sc. Math., 10. (1941), 141.
87. Az ergodikus elmélet néhány kérdéséről. — Mat. és Fiz. Lapok, 49. (1942), 34—62.
88. Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes. — Sz.-Nagy Bélával együtt. — Acta Sc. Math., 10. (1942), 202—205.
89. Sur la théorie ergodique. — Commentarii Math. Helv., 17. (1944—45), 221—239
90. On a Recent Generalisation of G. D. Birkhoff's Ergodic Theorem. — Acta Sc. Math., 11. (1948), 193—200
91. L'évolution de la notion d'intégrale de Lebesgue. — Ann. de l'Institut Fourier, Grenoble, (1949), 29—42.
92. Lebesgue integrálfogalmának fejlődése. — Mat. Lapok, 1. (1950), 79—90.
93. Nullahalmazok és szerepük az analízisben. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. 205—215.

94. Ua. franciául, uo. 216—224.
95. Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des integrales de Stieltjes. Fysiogr. Sällsk. Lund. Förhdl. (1952.) (147—152.)
96. Leçons d'Analyse Fonctionnelle. (Szőkefalvi Nagy Bélával együtt), Budapest, 1952, Akadémiai Kiadó, VIII + 448 o. Átdolgozott 2. kiadás 1953, VIII + 455 o.; 3. kiadás 1955, VIII + 488 o.

Egerváry Jenő

tudományos munkáinak jegyzéke

1. Az integrálegyenletek egy osztályáról, Math. és Phys. Lapok, 23, 301—355, 1914.
2. A seismikus trajektóriákról s az azokkal kapcsolatos Bertrand-féle problémáról, Math. és Phys. Lapok, 26, 1—8, 1917. Ennek német fordítása: Über die seismischen Trajektorien und über das Bertrandsche Problem in der Seismologie, Gerlands Beiträge zur Geophysik 14, 284—299, 1918.
3. Über die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome, Archiv d. Math. u. Physik (3) 27, 17—24, 1918.
4. On a maximum-minimumproblem and its connexion with the roots of equations, Acta lit. ac scient., 1, 39—45, 1922.
5. Egy a symmetrikus, multilineáris formára vonatkozó minimum-föladat, Math. és Phys. Lapok, 29, 22—43, 1922.
6. Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie, Math. Annalen 99, 542—561, 1928.
7. Einige Extremprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome (közösen Szász Ottó-val), Math. Zeitschrift, 27, 641—652, 1928.
8. A trinom egyenletről, Mat. és Fiz. Lapok, 37, 36—57, 1930.
9. On a generalisation of a theorem of Kakeya, Acta litt. ac scient., Szeged, 5, 78—82, 1931.
10. Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, Mat. és Fiz. Lapok, 38, 16—28, 1931.
11. Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome, Math. Zeitschrift, 34, 741—757, 1932.
12. Jelentés az 1934. évi Kőnig Gyula jutalomról., Matematikai és Fizikai Lapok, XLI, 1934.
13. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei (Könyvismertetés) Matematikai és Fizikai Lapok, XLII, 1935.
14. Abbildungseigenschaften der arithmetischen Mittel der geometrischen Reihe, Mathematische Zeitschrift, Bd. 42, 1937.
15. A tetraéderről. Középiskolai Matematikai Lapok XIV. 1937.
16. A magasságponttal bíró tetraéderről. Matematikai és Fizikai Lapok XLV., 1938.
17. Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 178, 1938.
18. Az elektromágneses térben elektronmozgás differenciálegyenleteiről, M. Tud. Ak. Matematikai- és Természettudományi Értesítő LVII. 1938.
19. On Orthocentric Simplexes, Acta Szeged, IX., 1940.

20. Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 182, 1940.
21. Az n-méretű euklidesi tér görbéiről. M. Tud. Ak. Matematikai és Természettudományi Értesítő, LVIII. 1939.
22. Az n-méretű euklidesi tér görbéinek simulógörbéiről. M. Tud. Ak. Matematikai és Természettudományi Értesítő, LVIII. 1939.
23. Fondements d'une théorie de la courbe linéaire. (Alexits Györggyel) Commentarii Mathematici Helvetici. 13, 1940.
24. Azonosságok alkalmazása. Középiskolai Matematikai Lapok, 1943.
25. Differenciálegyenletek. Mérnöktovábbképző Intézet Kiadványai, 1943.
26. A remark on the length of the circle and on the exponential function. Acta Szeged, 1945.
27. On a new form of differential equations of the problem of three bodies, Hungarica Acta Mathematica, I. 1946.
28. On a generalization of a theorem of Sylvester, Hungarica Acta Mathematica, II. 1947.
29. Об одном обощении решения лагранжа задачи трех тел, Доклады Академии Наук 1947.
30. A mechanika differenciálegyenleteiről. Mérnöktovábbképző Intézet Kiadványai, 1947.
31. Középérték és Laplace-operátor, Előadás a Bolyai János Matematikai Társulat-ban, 1949. (Kézirat közlés alatt).
32. A Rayleigh-módszer alkalmazása forgó rendszerek kritikus szögsebességének meghatározásánál. Matematikai Lapok, 1949.
33. Komplex koordináták alkalmazása a síkbeli háromtest problémában, Előadás a Bolyai János Matematikai Társulatban, 1951. (Kézirat Közlés alatt.)
34. On a certain point of the kinetic theory of gases (Turán Pállal) Studia Mathematica, XII., 1951.
35. On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 1949.
36. Eine Bemerkung über definite quadratische Formen, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 1950.
37. On the mapping of the unit-circle by polynomials, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 1950.
38. A remark on the curvature and tortuosity of space-curves, Acta Mathematica, 1950.
39. On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex, Acta Mathematica, 1950.
40. A matematika gyakorlati alkalmazásai, különös tekintettel a technika differenciál-egyenleteire. (Előadva: az 1950. nov. 29-én tartott Osztályülésen.)
A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Osztályának Közleményei, I. kötet, 1. szám.
41. Sur une nouvelle solution particulière du problème des trois corps, Commentarii Mathematici Helvetici, 1950.
42. Az ortocentrikus koordináta-rendszerről és annak néhány alkalmazásáról (előadva: az első magyar matematikai kongresszuson, 1950). Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, 1952.
43. (Lovass-Nagy Viktorral) A hővezetési differenciál-egyenlet megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltétel mellett. A M. Tud. Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, I. kötet, 1952.

44. Differenciál-egyenletek. Az Eötvös Egyetem Term. Tud. Karán az alkalmazott matematika szakos hallgatók részére tartott előadásokról készült jegyzet. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, 1953.
45. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a matematikai fizika és annak ipari alkalmazása terén. (Előadva: az 1953. május 28-án tartott nyilvános Osztályülésen.)
A M. Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei, 1953.
46. Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. (Előadva: az 1953. jan. 5-én tartott felolvasóülésen.)
A M. Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei, 1953.
47. On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions.
Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 1953.
48. On the Hermitian normal form of a matrix and Sylvester's law of nullity, Publicationes Mathematicae, Debrecen.
maticarum, Szeged.
49. On a theorem of Stieltjes on matrices, Acta Scientiarum Mathe-
50. Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldása. A M. Tud. Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, II. kötet, 1953.
51. Kontrakciós matrixok felbontása projektor és ortogonális matrix szorzatára. (Előadatott: a varsói matematikai kongresszuson, 1953.)
Megjelent angol nyelven: On the contractive linear transformations of n-dimensional vector space. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 15 (1954), 178—182.
52. On hypermatrices with commutable blocks and their application in lattice dynamics, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged.
53. Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. (sajtó alatt.)

Rényi Alfréd

tudományos munkáinak jegyzéke*

1945.

1. On a Tauberian theorem of O. Szász. Acta Scientiarum Mathematicarum, 11 (1946) 119—123.

1946.

2. Integral formulae in the theory of convex curves. Acta Scientiarum Mathematicarum. 11 (1947), 158—166.
3. On the minimal number of terms of the square of a polynomial. Hungarica Acta Mathematica, 1 (1947), 30—34.

* A sajtó alatt lévő munkák csillaggal vannak megjelölve; azok a dolgozatok, amelyek több nyelven jelentek meg, egy szám alatt, a), b) jelzéssel szerepelnek; a dolgozatok az elkészülés (nem a megjelenés) éve szerint vannak csoportosítva.

1947.

4. Об одном новом применении метода акад. И. М. Виноградова, Доклады Акад. Наук СССР 56 (1947), 675—679.
5. О представлении четных чисел в виде суммы одного простого и одного почти-простого числа. Доклады Акад. Наук СССР 56 (1947), 455—458.
6. О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти-простого числа. Известия Акад. Наук СССР 12 (1948), 57—78.
7. О некоторых гипотезах теорий характеров Дирихле. (*Ju. V. Linnik*-kel együtt.) Известия Акад. Наук СССР 11 (1947), 539—546.
8. О представлении чисел $1, 2, \ldots, N$ посредством разностей (*Rédei László*-val együtt). Математический Сборник 24 (1949), 385—389.

1948.

9. Játék a véletlennel. I. és II. Középiskolai Matematikai Lapok, 1 (1948), 101—111 és 144—157.
10. Simple proof of a theorem of Borel and of the law of the iterated logarithm. Matematisk Tidsskrift. B (1948), 41—48.
11. Some remarks on independent random variables. Hungarica Acta Mathematica, 1 (1949), 17—20.
12. Remarque à la note précédente. Acta Scientiarum Mathematicarum, 11 (1948), 253. (Megjegyzés *Alexits György* egy dolgozatához.)
13. On the measure of equidistribution of point sets. Acta Scientiarum Mathematicarum, 13 (1949), 77—92.
14. Generalization of the „large sieve" of Ju. V. Linnik. Matematisch Centrum, 1948. (kőnyomatos). 1—5.
15. On the zeros of the L-functions of Dirichlet. Mathematisch Centrum. 1948. (kőnyomatos). 1—4.
16. Proof of the theorem that every integer can be represented as the sum of a prime and an almost prime. Mathematisch Centrum, 1948. (kőnyomatos). 1—3.
17. Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications à la théorie des nombres. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 28 (1949), 137—149.
18. On a theorem of Erdős and Turán. Proceedings of the American Mathematical Society, 1 (1950), 7—10.

1949.

19. A szovjet matematika harminc éve. Természet és Technika, 108 (1949), 220—227.
20. Probability methods in number theory. Publicationes Mathematicae Collectae, Budapest, 1 (1949), 1—9.
21. Some Problems and Results on Consecutive Primes. Simon Stevin, (1950), 115—125. (*Erdős Pál*lal együtt).
22. Sur un théorème général de probabilité. Annales de l'Institut Fourier, 1 (1949), 43—52.
23. On the coefficients of schlicht functions. Publicationes Mathematicae, 1 (1949) 18—23.
24. A szovjet matematika 30 éve. I. A valószínűségszámítás megalapozásáról. Matematikai Lapok, 1 (1950), 27—64.
25. A szovjet matematika 30 éve. II. A valószínűségszámítás új irányai. Matematikai Lapok, 1 (1950), 91—137.

26. On the large sieve of Ju. V. Linnik. Compositio Mathematica, (1950), 68—75.
27. On the geometry of conformal mapping. Acta Scientiarum Mathematicarum, 3 (1950), 215—222.
28. On the algebra of distributions. Publicationes Mathematicae, 1 (1950), 135—149.
29. Az aprítás matematikai elméletéről. Építőanyag. (1950), 1—8.
30. A Newton-féle gyökközelítő eljárásról. Matematikai Lapok, 1 (1950), 1—16.

1950.

31. On the summability of Çauchy—Fourier series. Publicationes Mathematicae, 1 (1950), 162—164.
32. Об одной общей теореме теорий вероятностей и о её применении в теории чисел, Zprávy o společnem 3. sjezdu matematiků Československých a 7. sjezdu matematiků Polských, Praha 1950, 167—174.
33. a) К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Acta Mathematica, 1 (1950), 99—108.
    b) A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról. MTA III. o. Osztályközleményei. 1 (1951), 351—355.
34. A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének feladatairól. Akadémiai Értesítő. (1951), 1—7.
35. Harc a formalizmus ellen a matematika tanításában. A középiskolai matematikatanítás kérdései. Szocialista Nevelés Kiskönyvtára. 4. sz. Közoktatásügyi Kiadó, (1950), 24—28.
36. A Poisson-eloszlás problémaköréről. MTA III. o. Osztályközelményei, 1 (1950), 202—212.
37. On some problems concerning Poisson processes. Publicationes Mathematicae, 2 (1951), 66—73.
38. Remarks concerning the zeros of certain integral functions. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 3 (1951), 9—10.
39. Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace euclidien a n-dimension. Colloquium Mathematicum, 2 (1951), 130—135. (*Rényi Katóval* és *Surányi János*sal együtt).
40. a) On composed Poisson distributions I. Acta Mathematica. 1 (1950), 209—224.
    b) Összetett Poisson-eloszlásokról I. MTA III. o. Osztályközleményei, 1 (1951), 315—328. (*Jánossy Lajos*sal és *Aczél János*sal együtt).
41. a) Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, 299—308.
    b) Стохастическая независимость и полные системы функций, uo. 309—316.

1951.

42. a) Об основах теорий вероятностей, Annuaire du faculté des sc. phys. et math. Sofia, 47 (1952) 227—236.
    b) Základy theorie pravděpodobnosti, Mat. Ustav Československe Akad. Věd. (Kőnyomatos) 1—10.
43. a) On composed Poisson distributions. II. Acta Mathematica, 2 (1951), 83—98.
    b) Összetett Poisson eloszlásokról II. MTA III. o. Osztályközleményei. 1 (1951), 329—341.

44. Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére. MTA III. o. Osztályközleményei, 1 (1951), 369—370. (*Turán Pál*lal együtt).
45. Hőmunkások víz és sóanyagcseréje. — A matematikai statisztika módszereinek alkalmazása az orvostudományban. Orvosi Hetilap, (1951), 4—9.
46. a) On a conjecture of H. Steinhaus. Annales de la Societé Polonaise de Mathématique, 25 (1952), 279—287.
b) H. Steinhaus egy sejtéséről. MTA III. o. Osztályközleményei, 3 (1953), 37—44.
47. On the approximation of measurable function. Publicationes Mathematicae, 2 (1951), 146—149. (*Pukánszky Lajos*sal együtt).
48. Új eredmények a valószínűségszámítás terén. MTA III. o. Osztályközleményei, 2 (1952), 125—144.
49. a) A valószínűségszámítás elvi kérdései a dialektikus materializmus megvilágításában. Filozófiai Évkönyv, 1 (1953), 63—97.
b) Základni problémy počtu pravděpodobnosti ve světle dialektického materialismu, Časopis pro pěstováni matematiky, 79 (1954), 189—218.

1952.

50. Укрепление связи математики с практикой. Природа, 1953, 69—73.
51. Poznámka o uhlech mnohoúhelnika. Časopis pro pestováni matematiky, 78 (1953). 305—306.
52. a) Valószínűség-eloszlások vetületeiről. Acta Mathematica, 2 (1952), 59—69.
b) On projections of probability distributions. MTA III. o. Osztályközleményei, 3. (1953), 131—142.
53. a) Elementary proofs of some basic facts concerning order statistics. Acta Mathematica, 5 (1954), 1—2. (*Hajós Györggy*el együtt).
b)* Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére. Sajtó alatt az MTA III. o. Osztályközleményeiben.
54. Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása. Matematikai Lapok. 4 (1952), 129—139. (*Szentmártony Tibor*ral együtt).
55.* Egy kombinatorikai probléma és annak alkalmazása a lucerna nemesítésénél. (Sajtó alatt a Matematikai Lapokban).
56.* Szakkörökben elvégezhető valószínűségszámítási kísérletek. (Sajtó alatt az Előadások a középiskolai matematika köréből. Tankönyvkiadó. c. kötetben.)
57. Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének egyidejűségi tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei. 1 (1952), 85—105. *Szentmártony Tibor*ral együtt).
58. Jordan Károly matematikai munkásságáról. Matematikai Lapok. 3 (1952), 111—121.
59. Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 1 (1952), 105—138.
60. Poisson-folyamatok által származtatott történés-folyamatokról és azok technikai és fizikai alkalmazásairól. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 1 (1952), 139—146. (*Takács Lajos*sal együtt).

61. Megjegyzések Gombás Pál és Gáspár Rezső egy dolgozatához. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 1 (1952), 393—397.
62. On the zeros of polynomials. Acta Mathematica. 3 (1952), 275—284. (*Turán Pál*lal együtt).
63. Bolyai János felfedezésének tudományos és világnézeti jelentősége. Természet és Technika. 112 (1953), 1—4.
64. Bolyai János, a tudomány nagy forradalmára. Matematikai Lapok. 3 (1952), 173—178.
65. a) A Bolyai—Lobacsevszkij geometria világnézeti jelentősége. MTA III. o. Osztályközleményei. 3 (1953), 253—273.
b) Ideologický význam geometrie Bolyai—Lobačevského. Časopis pro pestováni matematiky. 78 (1953), 149—168.
c)* Об идеологическом значении геометрии Бойяи—Лобачевского. (Sajtó alatt az Acta Mathematicában.)
66. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a valószínűségszámítás ipari alkalmazásai terén. MTA III. o. Osztályközleményei. 3 (1953), 363—379
67. Felszólalás Sztálin nyelvtudományi munkái megjelenésének második évfordulóján, a Tudományegyetem és a Magyar Tudományos Akadémia I. és II. Osztálya által 1952. június 20—21-én tartott tudományos ülésszakon. Tankönyvkiadó. (1953), 21—26.

1953.

68. a) A rendezett minták elméletéről. MTA III. o. Osztályközleményei. 3 (1953), 467—503.
b) On the theory of order statistics. Acta Mathematica 4 (1953), 191—231.
69. Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben. (A berlini Humboldt egyetemen tartott előadás). Berl. Math. Tagung (1953), 203—212.
70. Felszólalás O. J. Smidt „Négy előadás a Föld keletkezésének elméletéről" című könyvéről rendezett ankéton. MTA III. o. Osztályközleményei 3 (1953), 595—600.
71. Hozzászólás Gombás Pál „Elméleti fizikai kutatásokban alkalmazott matematikai módszerek" c. előadásához. MTA III. o. Osztályközleményei 3 (1953), 344—347.
72. Hozzászólás Jánossy Lajos „Beszámoló a berlini fizikus kongresszus egyes problémáiról" c. előadásához. MTA III. o. Osztályközleményei 3 (1953), 326—327.
73. Kémiai reakciók tárgyalása a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, 2 (1953), 83—101.
74. Újabb kritériumok két minta összehasonlítására. MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, 2 (1953), 243—265.
75. Hozzászólás Fogarasi Béla „A tudomány törvényei Sztálin „A szocializmus gazdasági problémái a Szovjetunióban" című művének megvilágításában" c. előadásához. MTA II. o. Osztályközleményei. (1953), 306—310.
76. A valószínűségszámítás alapfogalmairól. Mérnöki Továbbképző Intézet. (1953), 1—51.
77. A raktárkészlet pótlásáról. I. MTA Alkalmazott Matematikai Intézeté-

nek Közleményei, 2 (1953), 187—201. *(Palásti Ilonával, Szentmártony Tiborral* és *Takács Lajossal* együtt).
78. A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése. MTA III. o. Osztályközleményei, 4 (1954), 369—427.
79.* A valószínűségszámítás történetének rövid áttekintése. (Sajtó alatt a MTA III. o. Osztályközleményeiben).

1954.

80.* Bizonyos trigonometrikus rendszerek teljességéről. Sajtó alatt az MTA III. o. Osztályközleményeiben. *(Czipszer Jánossal* együtt.)
81.* On a new axiomatic foundation of the theory of probability. (Sajtó alatt az Amsterdami Matematikai Kongresszus Közleményeiben.)
82.* On the theory of order statistics. (Sajtó alatt az Amsterdami Matematikai Kongresszus Közleményeiben.)
83.* Axiomatisches Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Sajtó alatt a berlini Valószínűségszámítási Konferencia Közleményeiben.)
84. Valószínűségszámítás (egyetemi tankönyv) Tankönyvkiadó, 1954, 1—746.

Szőkefalvi-Nagy Béla

tudományos munkáinak jegyzéke

A) Könyvek

1. *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, Springer-Verlag, 1942), 80 lap. (Az „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" c. sorozatban.) — Fotografikus eljárással készült új kiadás belőle 1947-ben az USA-ban.
2. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* (Riesz Frigyessel együtt, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952), VIII + 448 oldal. — Átdolgozott második kiadás (1943), VIII + 455 oldal. — Harmadik kiadás (1955), VIII + 488 oldal.
3. *Valós függvények és függvénysorok* (Budapest, Tankönyvkiadó, 1954) 307 oldal.

B) Dolgozatok

1. Ein Verfahren zur Gewinnung von Atomformfaktoren, *Zeitschrift f. Phys.*, 91 (1934), 105—110.
2. Berechnung einiger neuer Atomformfaktoren, *uo.*, 94 (1935), 229—230.
3. Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Math. Annalen*, 112 (1936), 286—296.
4. Sur la mesure invariante dans des groupes topologiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 202 (1936), 1248—1250.
5. Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift*, 41 (1936), 541—544.
6. Izomorf függvényrendszerekről, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 54 (1936), 712—735.
7. Über Isomorphe volltsändige Funktionensyteme, *Mat. Zeitschrift*, 43 (1937), 1—16.
8. Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme, *uo.*, 17—31.
9. Önmagában zárt ortogonális függvényrendszer szorzótáblázatáról, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 55 (1937), 574—591.

10. Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems, *Annali di Pisa*, 6. (1937), 211—224.
11. Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen, *Math. Annalen*, 114 (1937), 373—384.
12. Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum, *Acta Sci. Math.* 8 (1937), 166—176.
13. On the set of positive functions in L_2, *Annals of Math.*, 39 (1938), 1—13.
14. Propriétés extrémales des séries de Fourier transformées par des suites absolument monotones, *Comptes Rendus Acad, Sci. Paris*, 206 (1938), 808—811.
15. Sur des suites de facteurs multiplement monotones, *uo.*, 1342—1344.
16. Projektív sokszögekről és sokoldalakról, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 57 (1938), 105—120.
17. Egy Bohr-féle tételről, *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 57 (1938), 121—135. (Strausz Antallal együtt.)
18. On semi-groups of selfadjoint transformations in Hilbert space, *Proceedings National Acad. USA*, 24 (1938), 559—560.
19. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall, *Berichte Akad. Wiss. Leipzig*, 90 (1938), 103—134.
20. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall, *uo.*, 91 (1939), 3—24.
21. Sur un problème d'extremum pour les fonctions définies sur tout l'axe réel. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 208 (1939), 1865—1867.
22. Über ein geometrisches Extremalproblem, *Acta Sci. Math.*, 9 (1940), 253—257.
23. Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *uo.*, 10 (1941), 64—74.
24. Egy Carlson-féle és néhány azzal rokon egyenlőtlenségről, *Mat. Fiz. Lapok*, 48 (1941), 162—175.
25. Sur un problème pour les polyèdres convexes dans l'espace n-dimensionel, *Bulettin Soc. Math. de Fance*, 69 (1941), 3—4.
26. Függvények megközelítése Fourier-soruk számtani közepeivel, *Mat. Fiz. Lapok*, 49 (1942), 123—138.
27. Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, 10 (1943), 202—204. (Riesz Frigyessel együtt)
28. A Hilbert-féle tér normális átalakításainak félcsoportjairól, *Szent István Akadémia Értesítője*, 28 (1943), 87—95.
29. Perturbációk a Hilbert-féle térben. I. *Mat. Term. Tud. Értesítő*, 61 (1942), 755—775.
30. Perturbációk a Hilbert-féle térben. II., *uo.*, 62 (1943). 63—79.
31. Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Commentarii Math. Helvetici*. 17 (1944), 209—213.
32. Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, *Acta Sci. Math.* II. (1946), 71—84.
33. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *ugyanott*, 11 (1947), 152—157.
34. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Commentarii Math. Helvetici*, 19 (1947), 347—366.
35. Vibrations d'une corde non homogène, *Bulletin Soc. Math. France*, 75 (1947), 193—208.

36. Expansion theorems of Paley—Wiener type, *Duke Math. Journal*, 14 (1947), 975—978.
37. Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Hungarica Acta Math.*, 1, (1948), 14—52.
38. Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron, *Publicationes Math. Debrecen*, 1 (1949), 42—50. (Rédei Lászlóval együtt.)
39. Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées, *Acta Sci. Math.* 13 (1949), 118—133.
40. Méthodes de sommation des séries de Fourier, I., *uo.*, 12B (1950), 204—210.
41. Une caractérisation affine de l'ensemble des fonctions positives dans l'espace L^2, *Acta Sci. Math.* **12A** (1950), 228—238.
42. Riesz Frigyes tudományos munkásságának ismertetése, *Mat. Lapok*, **1** (1950), 170—181.
43. Méthodes de sommation des séries de Fourier. II, *Časopis pro pestování mat. a fys.*, **74** (1949), 210—219.
44. Méthodes de sommation des séries de Fourier. III, *Acta Sci. Math.*, **13** (1950), 247—251.
45. Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 50—55.
46. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), 183—187.
47. Szovjet eredmények a funkcionális analízis terén, *Mat. Lapok*, **2** (1951), 5—33.
48. Ortogonális polinomsorok konvergenciájáról, *Az I. Magyar Mat. Kongresszus Közleményei* (1953), 249—258.
49. Sajátértékfeladatok perturbációszámítása, *M. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei*, **1** (1951), 288—293.
50. Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math.* **14** (1951), 125—137.
51. Eredmények az analizis területén, *M. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei*, **2** (1952), 59—71.
52. On the stability of the index of unbounded operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 49—52.
53. On the spectral problem of Atkinson, *uo.*, 61—66.
54. Magyar matematikusok hozzájárulása a spektrálelmélethez, *M. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei*, **3** (1953), 85—100.
55—56. Pozitív polinomok, *Mat. Lapok*, **3** (1952), 140—147; **4** (1953). 13—17.
57. Über die Ungleichung von H. Bohr, *Math. Nachrichten*, **9** (1953), 255—259.
58. A moment problem for selfadjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*,, **3** (1952), 285—292.
59. Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 31—37
60. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *uo.*, 87—92.
61. О сопряжённых конусах в гильбертовом пространстве, Успехи матем. наук, VIII. **5 (57)** (1953), 167—168.
62. Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 104—114.
63. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer körper, *uo.*, **15** (1954), 169—177.
64. Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert, qui sortent de cet espace 36. oldal, Akadémiai Kiadó, 1955.

Az 1953. évi Grünwald Géza jutalomdíj nyerteseinek pályamunkáiról szóló jelentések*

Freud Géza dolgozata maradéktagos Tauber-típusú tételekkel foglalkozik. A dolgozat I. fejezete jó történeti áttekintést ad, a II. fejezetben a maradéktagos tételek eddigi irodalmát ismerteti. A III. §-ban a dolog lényegét alkotó approximációs tétel van igazolva. A bizonyítás ügyesen használ fel az interpoláció elméletéből vett eredményeket. A IV. fejezetben ebből Karamata—Wiener nyomán kimutatja például, hogy a nem-negatív együtthatós

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

-re $x \to 1-0$-ra $\alpha>0$ mellett és $\delta>0$ mellett

$$F(x)=A\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^\alpha}\{1+O(1-x)^\delta\} \qquad (1)$$

akkor $n\to+\infty$-re

$$\sum_{\nu\leqq n} a_\nu = An^\alpha\left\{1+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right\}.$$

Az V. §-ban eredményeit alkalmazza Hardy—Littlewood $O-A-K$ tételének „maradéktagosítására“ és nyeri, hogy, ha $a_n \geqq -\frac{K}{n}$ és pozitív δ-val $x\to 1-0$-ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A+O(1-x)^\delta \qquad (2)$$

akkor

$$\sum_{\nu\leqq n} a_\nu = A+O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

A VI. §. hasonló vizsgálattal foglalkozik az esetben, ha $F(x)$ $x\to 1-0$-ra

* A bizottság munkájáról szóló jelentést lásd a Mat. Lapok IV. évf. 2-3. 221. old.

$\frac{\log \frac{1}{1-x}}{(1-x)^{\alpha}}$-szerűen viselkedik. A VII. §-ban megmutatja, a (2) premissza már az

$$a_n \geqq -\varepsilon \frac{\log n}{n} \qquad n > n_0(\varepsilon) \tag{3}$$

megszorítás mellett kiadja a Σa_ν sor konvergenciáját. Példával megmutatja, hogy (3) helyett az

$$|a_n| \leqq K \frac{\log n}{n}$$

premissza mellett (1)-ből a Σa_ν konvergenciájára már nem következik. Általában kiterjeszti vizsgálatait Dirichlet-sorokra, sőt Laplace-integrálokra is. A függelékben még alkalmazza az approximációtételt a mechanikus quadratura közelítésének vizsgálatára és bizonyos orthogonális polinomok szerinti kifejtések konvergenciakritériumaira. A dolgozat eredményekben számottevő, a díjra feltétlen számbaveendő munka.

A bíráló bizottság.

Kertész Andor dolgozatát a „Teljesen redukálható Abel-féle torzió csoportok"-ról az alábbiakban ismertetjük:

Jelentsen „csoport" mindvégig additív módon írt Abel-féle p-csoportot. Különösen $C(p^m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ és $C(p^\infty)$ jelentse az m-rendű ciklikus csoportot, illetve a Prüfer-féle úgynevezett kvaziciklikus csoportot.

A dolgozat egy G-csoportnak $G = \Sigma C(p^\nu)$ direkt összegként való előállíthatóságát új módszerrel vizsgálja, amelyben vezető szerepet visz a szerző által bevezetett főrendszer (l. alább) fogalma, s ez úton jelentős újabb eredményeket nyer, amelyeknek egy része többeknek korábbi tételeit általánosítja.

A korábbi vizsgálatokban is fontos szerepet vitt a

$$G^* = G \cap pG \cap p^2G \cap \ldots$$

metszet. Egy $a(\in G, \neq 0)$ elemre vagy $a \in G^*$ teljesül, vagy van egy legnagyobb n $(= 0, 1, \ldots)$, amelyre $a \in p^n G$. Megfelelőleg legyen $H(a) = \infty$, illetve $H(a) = n$. Ezt a $H(a)$-t az a magasságának nevezzük. (Ha $G^* = 0$, akkor minden $H(a)$ véges.)

Az említett főrendszert szerző így definiálja. A G csoport B részcsoportjának egy maximális független elemrendszerét B főrendszerének nevezzük, ha annak egyik eleme sem cserélhető ki nála (G-ben) magasabb elemmel a függetlenség megsértése nélkül. (A főrendszernek G^*-on kívüli elemei p-rendűek, s a G^*-beli elemei is kicserélhetők p-rendűekkel.)

Szerzőnek további újítása, hogy figyelembe veszi még a $G^{**} = (G^*)^*$ csoportot is. (Ennek $\neq 0$ elemeit belsőleg végtelen magasságú elemeknek nevezi, a G^*-nak többi $\neq 0$ elemét külsőleg végtelen magasságúnak.)

Egyik alaptényként nyeri a következő kritériumot:

A $G^* = 0$ esetben G akkor és csak akkor $\Sigma C(p^n)\,(n < \infty)$, ha G-nek van főrendszere.

Ebből a kritériumból szerző azután a tételeknek egész sorozatát nyeri. Mindenekelőtt triviális következmény a véges G-re szóló ismert alaptétel. Továbbá kritériuma alapján bebizonyítja a következő tételt:

G akkor és csak akkor $\Sigma C(p^n)\,(n < \infty)$, ha van olyan B részcsoportja, amelyre $B \cap G^* = 0$, B-nek van főrendszere és $G/B = \Sigma C(p^\nu)$.

Ebből előáll Dieudonné tétele:

Legyen B G-nek olyan részcsoportja, amelyre $G/B = \Sigma C(p^n)$ $(n < \infty)$. Akkor és csak akkor $G = \Sigma C(p^m)\,(n < \infty)$, ha B olyan

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

részcsoportoknak egyesítési halmaza, amelyben minden r-re $H(a)$ $(a \in A_r)$ korlátos.

Ennek $B = G$ esete éppen Kulikov egyik nevezetes tétele. A megszámlálható G-kre való további specializálással előáll Prüfernek ismert tétele, amely szerint ekkor az elemrend korlátos voltából folyik a $G = \Sigma C(p^n)$ előállítás lehetősége. Ugyancsak előáll ennek Baer-féle általánosítása, amely szerint elegendő az elemrend korlátossága.

Szerző további vizsgálatai a $G = \Sigma C(p^\nu)\,(\nu \leqq \infty)$ előállításokra vonatkoznak (úgynevezett teljesen redukálható csoportok.) Erre vonatkozó főeredménye a következő tétel:

$G = \Sigma C(p^\nu)\,(\nu \leqq \infty)$ akkor és csak akkor, ha $G^{**} = G^*$ és G-nek van főrendszere.

Szerző ebből az érdekes tételből is nyer még további tételeket, amelyek Prüfer, Kulikov, Dieudonné további tételeinek általánosításai.

Összegezve a dolgozat eredményeit, szerző igen fontos kutatási területen új kutatóeszköz bevezetésével lényegesen új tételeket nyer, amelyek részben a többször is említett Prüfer, Baer, Kulikov, Dieudonné kiváló matematikusok tételeit jelentősen általánosítják. Ezek szerint szerző új módszere igen hatásos, vizsgálatainak érdekességére nézve megjegyzem, hogy Fuchs László azokat csakhamar folytatta. A dolgozat tárgyalása világos és egyszerű. Az egész dolgozatból kiérzik szerző komoly tehetsége s a végtelen Abel-csoportok terén való jártassága. A dolgozat stílusa is kifogástalan, leszámítva a „fordított birtokviszony“ gyakori indokolatlan alkalmazását, ami — referens véleménye szerint sajnálatosképpen — más szerzőink magyar nyelvű matematikai írásaiban is tapasztalható. Mindezek alapján az utóbbi, a dolgozat érdemére nézve lényegtelen körülmény figyelmen kívül hagyásával a dolgozatot az emlékdíj odaítélése szempontjából feltétlenül tekintetbe veendőnek javasolom.

A bíráló bizottság.

T a k á c s L a j o s dolgozata a várakozási idő problémájával foglalkozik.

Az úgynevezett „várakozási idő“-problémák már régóta foglalkoztatják a valószínűségszámítással foglalkozó matematikusokat, részben a problémakör gyakorlati alkalmazásainak jelentősége, részben a problémakör matematikai érdekessége folytán. A szóbanforgó problémakör, melyet Takács Lajos dolgozata felölel, a következő típusú sztochasztikus folyamatok tárgyalására vonatkozik: Tegyük fel, hogy bizonyos, véletlentől függő $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ időpontokban érkeznek egy repülőtér fölé repülőgépek. Tegyük fel, hogy a repülőtér olyan, hogy egyszerre csak egy repülőgép szállhat le és minden egyes repülőgép leszállásához bizonyos időtartam szükséges, amelynek hossza maga is esetről esetre más és más, véletlen ingadozásokat végez. Tegyük fel, hogy a τ_n időpontban érkező repülőgép a repülőteret χ_n időtartamra foglalja le ($n = 1, 2, \ldots$). Ha egy repülőgép t időpontban érkezik a repülőtér fölé és ekkor a repülőtér foglalt (vagyis egy már előbb érkezett repülőgép leszállása éppen folyamatban van), akkor a repülőgépnek várnia kell addig, amig az előbb érkezett repülőgép leszáll, továbbá amíg az összes előbb érkezett és a t időpontban sorrakerülésükre várakozó repülőgépek mind le nem szálltak. Azt az időtartamot, amelyet egy repülőgépnek, ha a t időpontban érkezik, érkezésétől leszállásának megkezdéséig várakoznia kell, $\eta(t)$-vel jelöljük*; $\eta(t)$ a t időpontban esetleg érkező repülőgép ún. várakozási ideje, amely szintén véletlentől függő mennyiség. Gyakorlati szempontból a következő problémák megoldására van szükség: ha ismeretes a τ_n időpontok által alkotott sztochasztikus pont-folyamat és a χ_n valószínűségi változók eloszlása, meghatározandók:

1. Az $\eta(t)$ várakozási idő valószínűség-eloszlásfüggvénye, vagyis a $P(\eta(t) < x) = F(t, x)$ függvény, valamint ennek $\lim_{t \to \infty} F(t, x) = F^*(x)$

* $\eta(t)$ t minden értékére definiálva van, függetlenül attól, hogy valójában érkezik-e repülőgép a t időpontban, vagy nem.

határértéke, vagyis a várakozási idő eloszlásfüggvényének határértéke a stacionárius esetben, (feltéve, hogy létezik).

2. Az n-edik érkező repülőgép várakozási idejének $F_n(x)$ valószínűség-eloszlásfüggvénye, ill. ennek határértéke, ha $n \to \infty$.

3. A t időpontban leszállásra várakozó repülőgépek számának valószínűségeloszlása.

4. A repülőtér megszakítás nélküli foglalt, ill. szabad állapotai időtartamának valószínűségeloszlása, ill. a repülőtér foglalt és szabad állapotainak valószínűségei a t időpontban és ezek határértéke, ha $t \to \infty$.

Fentiekben az ún. várakozási idő problémát a repülőterek konkrét példáján keresztül mutattuk be. Matematikai szempontból azonos probléma merül fel számos más alkalmazási területen, pl. telefonhívásoknál a kapcsolásra való várakozás időtartamára vonatkozólag, vagy pl. egy hivatalban, üzletben, pénztárnál a kiszolgálásra való várakozással kapcsolatban, stb.

Ezzel a problémakörrel a valószínűségszámítás számos kiváló művelője foglalkozott, így pl. Th. C. Fry (1928), A. N. Kolmogorov (1931), A. Ja. Hincsin (1932), W. Feller (1949), F. Pollaczek (1950), D. G. Kendall (1951), D. V. Lindley (1952) és mások. Takács Lajos eredményei lényegesen túlhaladják az említett kutatók eredményeit. Eredményei általánosabb esetet ölelnek fel, mint elődeié, ugyanakkor a bizonyítások, melyeket az általános esetre ad, egyszerűbbek, mint az eddig ismert, speciális esetekre vonatkozó bizonyítások. Takács Lajos vizsgálatainak sikere elsősorban annak következménye, hogy egy új, igen szerencsés módszerrel tárgyalja a szóbanforgó problémakört. Módszerének kiindulópontja az a megjegyzés, hogy ha a τ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ időpontok $\lambda(t)$ sűrűségfüggvényű (nem szükségképpen homogén) Poisson-folyamatot alkotnak, akkor az $\eta(t)$ sztochasztikus folyamat Markov-típusú, míg ha a τ_n időpontok nem alkotnak ugyan Poisson-folyamatot, azonban a $\tau_n - \tau_{n-1} = \delta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $(\tau_0 \equiv 0)$ valószínűségi változók függetlenek, akkor az $\eta(t)$ folyamatnak a τ_n időpontok ú.n. Markov-pontjai (regenerációs pontjai).

Tegyük fel, hogy a χ_n változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, közös eloszlásfüggvényük $P(\chi_n < x) = H(x)$. Ez esetben, mint Takács kimutatja, az $F(t, x)$ függvény eleget tesz a

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda \int_0^x (1 - H(x - y))\, d_y F(t, y) \qquad (1)$$

parciális integro-differenciálegyenletnek. (1) alapján $F(t, x)$ Laplace-transzformáltja $\Phi(t, s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, dF(t, x)$ explicite kifejezhető a

$$\Phi(t, s) = e^{st-(1-\psi(s))\Lambda(t)}\left[1 - s\int\limits_0^t e^{-su+(1-\psi(s))\Lambda(u)} F(u, 0)\, du\right] \qquad (2)$$

alakban, ahol $\psi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, dH(x)$ és $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(u)\, du$. Ilyenmódon, ha $F(t, 0)$ (annak valószínűsége, hogy a t időpontban a repülőtér szabad), ismeretes, $F(t, x)$ t és x minden értékére meghatározható. Abban az esetben, ha az alapul szolgáló Poisson-folyamat homogén, vagyis $\lambda(t) \equiv \lambda$ állandó,

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} F(t, 0)\, dt = \frac{1}{s + \lambda - \lambda\Gamma(s)},$$

ahol $\Gamma(s)$ a következő függvényegyenletnek tesz eleget: $\Gamma(s) = \psi(s + \lambda(1 - \Gamma(s)))$. $\Gamma(s)$ egyébként nem más, mint annak a $G(x)$ függvénynek a Laplace-transzformáltja, amely a repülőtér egy megszakítás nélküli foglaltsági periódusának az eloszlásfüggvénye. Ami a $t \to \infty$ határátmenetet illeti, TAKÁCS kimutatja, hogy ha $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda$ létezik, $\alpha = \int\limits_0^\infty x\, dH(x)$ (a leszállás átlagos időtartama) véges és $\lambda\alpha < 1$ (ez a feltétel azt fejezi ki, hogy a szóbanforgó repülőtéren a forgalom nem sűrűbb, mint ami még a leszállási lehetőségek figyelembevételével lebonyolítható), akkor létezik $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x) = F^*(x)$ és $F^*(x)$ eleget tesz a $\frac{dF^*(x)}{dx} = \lambda\left[F^*(x) - \int\limits_0^x H(x-y)\, dF^*(y)\right]$ integro-differenciálegyenletnek és az $F^*(0) = 1 - \lambda\alpha$ kezdeti feltételnek. Kimutatja továbbá, hogy a szóbanforgó esetben $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ is létezik és szintén $F^*(x)$-szel egyenlő. A $\lambda\alpha \geq 1$ esetben $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$ x minden véges értékére.

Az időben homogén esetben meghatározza TAKÁCS a foglaltsági idő $G(x)$ eloszlásfüggvényét, kimutatja, hogy az átlagos foglaltsági idő $\mu = \int\limits_0^x x\, dG(x) = \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha}$, meghatározza annak P_j valószínűségét, hogy (a $t \to \infty$ határesetben) egyszerre éppen j repülőgép várakozzék, kimutatja, hogy ha $\Pi(\omega)=\sum_{j=0}^{\infty} P_j \omega^j$ jelöli a $\{P_j\}$ eloszlás generátorfüggvényét, akkor

$$\Pi(\omega)=\frac{(1-\lambda\alpha)\,\psi(\lambda(1-\omega))}{1-\dfrac{\psi(\lambda(1-\omega))}{1-\omega}}.$$

Végül azzal az esettel is foglalkozik, amikor az alapul szolgáló pont-folyamat nem Poisson-folyamat, hanem annál általánosabb típusú. Végül az elmélet egy igen érdekes másirányú alkalmazási lehetőségére mutat rá, víztárolók vízszintjének ingadozásai vizsgálatánál.

TAKÁCS LAJOS dolgozata módszerének eredetiségére, eredményeinek jelentőségére, valamint tárgyalásmódjának alaposságára és szabatosságára való tekintettel minden szempontból érdemes a Grünwald Géza-emlékdíjjal való kitüntetésre.

A bíráló bizottság.

MAGYAR SZERZŐK IDEGEN NYELVEN MEGJELENT MUNKÁINAK MAGYAR NYELVŰ ISMERTETÉSE

A csoport definíciójáról

Írta: FARAGÓ TIBOR

Publ. Math. T. 3. Fasc. 1—2 (1953)

(Tartalmi kivonat)

Kiindulva a csoport definíciójában szereplő szokásos négy axiómából (a halmaz zártsága a csoportműveletre nézve, asszociativitás, baloldali egységelem létezése és baloldali inverz-elem létezése), a szerző megvizsgálja, hogy milyen algebrai struktúra keletkezik, ha az asszociatív törvényt olyan, formailag hasonló követelménnyel helyettesítjük, amely az asszociatív törvényből az abban szereplő elemek tetszőleges permutálása és a zárójelek helyzetének megváltoztatása útján áll elő. *Az összesen tizenötféle lehetőség közül kilenc esetben szükségképpen kommutatív csoport keletkezik; három esetben olyan szükségképpen kommutatív rendszer, amely általában nem csoport; három esetben olyan rendszer, amely általában sem a kommutatív, sem az asszociatív törvényt nem teljesíti; végül egy esetben kvázi-csoport keletkezik.*

Az autodisztributivitás függvényegyenletéről

Írta: HOSSZU MIKLÓS

Publ. Math. T. 3. Fasc. 1—2 (1953)

(Tartalmi kivonat)

Az $M(x, y)$ függvényt önmagára nézve (kétoldalról) disztributívnak nevezik, ha fennáll a következő két egyenlet:

$$M[M(x, y), z] = M[M(x, z), M(y, z)], \tag{1a}$$

$$M[z, M(x, y)] = M[M(z, x), M(z, y)]. \tag{1b}$$

Ha $M(x, y)$ szimmetrikus, azaz $M(x, y) = M(y, x)$, akkor e két egyenlet ekvivalens. Ez esetben a (folytonos, szigorúan monoton) megoldás, mint C. RYLL-NARDZEWSKI és B. KNASTER bebizonyították:

$$M(x, y) = f^{-1}\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)\right] \tag{2}$$

azaz ún. kváziaritmetikai közép, ahol $f(t)$ tetszőleges folytonos, szigorúan monoton függvény és $f^{-1}(t)$ az inverze.

(1a) nem szimmetrikus megoldását ACZÉL JÁNOS adta meg $M(x, y)$-ról feltételezve, hogy kétszer differenciálható és szigorúan monoton. Így a megoldás kvázilineáris közép:

$$M(x, y) = f^{-1}[pf(x) + qf(y)], \quad p + q = 1, \tag{3}$$

ahol p tetszőleges állandó. Szerző bebizonyítja, hogy ha $M(x, y)$ *mindkét oldalról disztributív önmagára nézve, akkor elég egyszeres differenciálhatóságot feltételezni.* A megoldás ekkor két lemma felhasználásával történik. Az egyik ACZÉL JÁNOStól származik, és azt állítja, hogy $M(x, y)$ reflexív: $M(t, t) = t$, továbbá az $y = x$ egyenes mentén $M(x, y)$ mindkét parciális deriváltja állandó és azok összege 1. A másik szerint a $t_1 = M(x, u)$, $t_2 = M(x, v)$, $t_3 = M(y, u)$, $t_4 = M(y, v)$ négyváltozós függvényrendszer nem független. (Ugyanis ellenkező esetben (1a) és (1b) alapján azt kapnánk, hogy $M(x, y)$ biszimmetrikus: $M[M(t_1, t_2), M(t_3, t_4)] = M[M(t_1, t_3), M(t_2, t_4)]$ s a biszimmetria függvényegyenletének megoldása ismeretében a t_1, t_2, t_3, t_4 függvényrendszer feltételezett függetlenségével jutnánk ellentmondásba). Felirva tehát a szóbanforgó függvényrendszer JACOBI-féle determinánsát, $u = y$ esetén s rögzített $v = v_0$ mellett egyszerű átalakítással egy olyan függvénydeterminánst nyerünk, melynek eltűnése az $M(x, y)$ és $pf(x) + qf(y)$ függvények függőségét mutatja, ahol

$$p = M_x(t, t), \quad q = M_y(t, t) = 1 - p, \quad f'(t) = \frac{M_x(t, v_0)}{M_y(t, v_0)}.$$

Ebből már könnyen adódik a (3) megoldás.

Torziómentes endomorfizmusgyűrűkről

Írta: SZÉLPÁL ISTVÁN

Publ. Math. T. 3. Fasc. 1—2. (1953)

(Tartalmi kivonat)

Egy Abel-féle csoportot akkor nevezünk torziómentesnek, ha egyetlen véges rendű eleme az identitás. Ha viszont a csoport összes eleme véges rendű, akkor a csoportot torziócsoportnak nevezzük. A csoport endomorfizmusgyűrűjét a gyűrű additív csoportjának megfelelően nevezzük torziógyűrűnek, illetve torziómentes gyűrűnek. A szerző meghatározza *az összes olyan Abel-féle csoportokat, amelyek endomorfizmusgyűrűje torziómentes.* Főeredménye azt mondja ki, hogy ez az eset olyankor is bekövetkezhetik, amikor a csoport torziócsoport. *Egy torziócsoport endomorfizmusgyűrűje akkor és csak akkor torziómentes, ha a csoport algebrailag zárt, azaz ha kváziciklikus p-csoportok direkt szorzata.*

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda-utca 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük.

Az 54. feladatra, melyet szerzője a megoldást nem ismerve tűzött ki, megoldás nem érkezett. Ha a jövőben megoldás érkezik erre a feladatra, azt közölni fogjuk.

Ha egy feladat megoldásának közlése után érkezik a feladatra a közölt megoldásoktól lényegesen eltérő, érdekes megoldás, azt pótlólag közöljük. Így szerepel e számban a 45. feladatnak egy újonnan érkezett megoldása.

Kitűzött feladatok

76. Adott konvex, centrálszimmetrikus síktartományból készítendő olyan, az egész síkot lefedő tartományrács, melynek sűrűsége 4/3-nál kisebb.

Grätzer György és Schmidt Eligius

77. Szerkesszünk korlátos differenciálhányadosú függvényt, amelyik egy adott nullmértékű halmazon nem differenciálható.

Czipszer János

78. Melyek azok a poliéderek, amelyeknek minden síkmetszete legfeljebb ötszögű poligon?

Hajós György

Megoldott feladatok

45. feladat.* Egy háromszög három csúcsát rendre α, β, γ, majd β, γ, α, végül γ, α, β súlyokkal súlyozzuk. Az így adódó három súlypont által alkotott háromszög mikor hasonló az eredetihez?

(Egerváry Jenő)

* 45. feladat I. és II. megoldását l. V. évf. 49—52. old.

III. megoldás. Legyenek az adott háromszög oldalai r_1, r_2, r_3. A súlyokról feltesszük — egyszerűbb számolás érdekében —, hogy $\alpha+\beta+\gamma=1$. A súlypontok háromszögének s_1, s_2, s_3 oldalaira tehát a baricentrikus koordinátarendszer távolságképlete szerint

$$-s_i^2=r_i^2(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)+r_{i+1}^2(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)+r_{i+2}^2(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)$$
$$(i=1, 2, 3),$$

ahol $r_{i+3}=r_i$ értendő. E három egyenlet összegezésével

$$s_1^2+s_2^2+s_3^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)(r_1^2+r_2^2+r_3^2). \qquad (1)$$

A két háromszög akkor hasonló, ha az

$$\frac{s_1}{r_j}=\frac{s_2}{r_{j+1}}=\frac{s_3}{r_{j+2}}=k, \qquad (2)$$

$$\frac{s_1}{r_j}=\frac{s_2}{r_{j+2}}=\frac{s_3}{r_{j+1}}=k \qquad (3)$$

összefüggések valamelyike teljesül. Mindkét esetben (1) szerint

$$k^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma.$$

Ennek figyelembevételével pl. a $j=1$ esetben (2) és (3) így módosul:

$$(\gamma-\beta)[r_i^2(\gamma-\beta)+r_{i+1}^2(\beta-\alpha)+r_{i+2}^2(\alpha-\gamma)]=0 \quad (i=1, 2, 3), \qquad (2a)$$

$$\left.\begin{aligned} &A[r_1^2(\gamma-\beta)+r_2^2(\beta-\alpha)+r_3^2(\alpha-\gamma)]=0\\ &(A=\gamma-\beta,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\alpha).\end{aligned}\right. \qquad (3a)$$

A (2a) egyenletek nyilván akkor teljesülnek, ha $\beta=\gamma$, vagy $a_1=a_2=a_3$. A (3a) egyenletek viszont akkor, ha $\alpha=\beta=\gamma$ (amikor is a súlypontok egybeesnek), vagy

$$r_1^2(\gamma-\beta)+r_2^2(\beta-\alpha)+r_3^2(\alpha-\gamma)=0. \qquad (4)$$

Háromszögeink tehát akkor hasonlók, ha az adott háromszög szabályos, ha két súly egyenlő, vagy ha (4), ill. az ebből ciklikus cserével adódó egyenletek valamelyike teljesül.

Detre László

52. feladat. Legyen p tetszésszerinti törzsszám. Jelölje $C(p^n)$ a p^n-edik egységgyökök multiplikatív csoportját és jelölje $C(p^\infty)$ valamennyi p-edik, p^2-edik, p^3-edik, ... egységgyökök multiplikatív csoportját. Bizonyítandó, hogy minden Abel-féle csoport homomorf módon leképezhető a $C(p^k)$ csoportok $(k=1, 2, 3, \dots, \infty)$ valamelyikére.

(Szele Tibor)

I. megoldás. A következő, valamivel többetmondó állítást bizonyítjuk: Bármely Abel-féle csoport homomorf módon leképezhető — alkalmas p törzsszám választása mellett — $C(p)$ és $C(p^\infty)$ csoportok valamelyikére. Additív írásmódot használunk. Két esetet különböztetünk meg.

1. Az adott G Abel-féle csoporthoz található olyan p törzsszám, amelyre $pG \neq G$. (pG az összes pg elemekből álló alcsoportot jelöli, ahol g befutja G összes elemeit.) Ekkor pG valódi alcsoportja G-nek, és így a G/pG faktorcsoport egynél több elemet tartalmaz. E faktorcsoport bármely (0-tól különböző) elemének rendje p, úgyhogy e csoport jól ismert tétel szerint előállítható p rendű ciklikus csoportok direkt összegeként. Minthogy pedig direkt összegnek bármely direkt komponens homoform képe.

$$G \sim G/pG \sim C(p).$$

2. Az adott G csoportra és bármely p törzsszámra $pG = G$. Tekintsük előbb azt az esetet, amikor G tartalmaz (0-tól különböző) véges rendű elemet, tehát egyúttal p rendű a_1 elemet is, ahol p valamely törzsszám. Ekkor $G = pG$ miatt van a csoportban olyan $a_2, a_3, \ldots$ végtelen elemsorozat, amelyre $pa_2 = a_1, pa_3 = a_2, \ldots$ Ezek az elemek egy $C(p^\infty)$ típusú alcsoportot generálnak. BAER egy tétele szerint $C(p^\infty)$ direkt komponense minden olyan Abel-féle csoportnak, amelynek alcsoportja. Így tehát ez áll a G csoportra is, és a direkt komponensről fentebb mondottak szerint

$$G \sim C(p^\infty).$$

Ha viszont G nem tartalmaz (0-tól különböző) véges rendű elemet és b tetszőleges végtelen rendű eleme G-nek, akkor a $\bar{G} = G/\{pb\}$ faktorcsoport már tartalmaz p rendű elemet. Itt $\{pb\}$ a pb elem által generált ciklikus csoportot jelöli, és p tetszőleges törzsszám. Minthogy $G \sim \bar{G}$ és $pG = G$, következik, hogy $p\bar{G} = \bar{G}$. Ennélfogva az előbbiek szerint $\bar{G} \sim C(p^\infty)$, és így

$$G \sim \bar{G} \sim C(p^\infty).$$

Szélpál István

II. Megoldás. A feladat állítását rövidebben bizonyíthatjuk, ha az Abel-féle csoportok elméletének mélyebb eredményeit is felhasználjuk. Mi csak a csoportelmélet alapfogalmaira támaszkodunk. Az additív írásmódot használjuk.

Az állítást elég olyan Abel-féle csoportra igazolnunk, melynek van (0-tól különböző) véges rendű eleme, tehát alkalmas p törzsszámra p rendű eleme is. Ha ugyanis x végtelen rendű elem, akkor px elem által generált $\{px\}$ alcsoport szerinti $G/\{px\}$ faktorcsoport G-nek homomorf képe, ez tartalmaz p rendű elemet, s ha a feladat állítása teljesül e faktorcsoportra, akkor teljesül az eredeti csoportra is.

Legyen a G-nek p rendű eleme. Legyen B G-nek egy olyan maximális alcsoportja, melyre $B \cap \{a\} = 0$. Ilyen B alcsoport létezését ZORN lemmája biztosítja. Legyen g G-nek tetszőleges, B-hez nem tartozó eleme. Feltevésünk folytán a B és g által generált $\{B, g\}$ alcsoport tartalmazza $\{a\}$-nak 0-tól különböző elemét, tehát az a elemet is. Van tehát B-nek olyan eleme, s olyan n természetes szám, hogy $a = b + ng$.

Tekintsük a $\bar{G} = G/B$ faktorcsoportot. Ennek az $\bar{a} = a + B$ mellékosztály p rendű eleme. $\bar{G}$-nek bármely $\bar{g} \neq 0$ elemére a fentiek szerint $n\bar{g} = \bar{a}$, ahol n alkalmas ($\bar{g}$-től függő) természetes szám. Minthogy $G \sim \bar{G}$, elég a következőt igazolnunk: *Ha valamely $\bar{G}$ csoport minden elemének egy többszöröse a p rendű a elem, akkor G izomorf a $C(p^m)$ $(1 \leqq m \leqq \infty)$ csoportok valamelyikével.*

Ennek bizonyítása céljából először is megjegyezzük, hogy $\bar{G}$ bármely elemének rendje nyílván csak p hatványa lehet. Megmutatjuk (k szerinti teljes indukcióval), hogy $\bar{G}$ legfeljebb egyetlen p^k rendű ciklikus alcsoportot tartalmaz. Ez $k = 1$ esetén feltevésünkből nyomban következik. A k-ra vonatkozó állítás bizonyítása végett legyen $\{\bar{a}_k\}$ és $\{\bar{c}\}$ két p^k rendű ciklikus alcsoport. Az indukciós feltevés következtében $\{p\bar{a}_k\} = \{p\bar{c}\}$, tehát $p\bar{c} = rp\bar{a}_k$, azaz $p(\bar{c} - r\bar{a}_k) = 0$. Minthogy egyetlen p rendű ciklikus alcsoport van, és ezt $\{\bar{a}_k\}$ tartalmazza, eredményünkből következik, hogy $\bar{c} - r\bar{a}_k$ és így $\bar{c}$ is eleme $\{\bar{a}_k\}$-nak, tehát $\{\bar{a}_k\}$ és $\{\bar{c}\}$ azonos.

Megállapításainkból következik, hogy $\bar{G}$-ban található olyan (véges vagy végtelen) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots$ elemsorozat, amelyre $p\bar{a}_1 = 0$, $p\bar{a}_2 = \bar{a}_1, p\bar{a}_3 = \bar{a}_2, \ldots$, s hogy ezek az elemek generálják a $\bar{G}$ csoportot. Ilyen módon igazoltuk, hogy $\bar{G}$ izomorf a $C(p^m)$ $(1 \leqq m \leqq \infty)$ csoportok egyikével, s egyúttal a feladat állításának bizonyítását is befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a feladat állításán túlmenően az is igaz, hogy bármely Abel-féle csoport homomorf módon leképezhető alkalmas p törzsszám választása esetén a $C(p)$ és $C(p^\infty)$ csoportok valamelyikére, hiszen véges m mellett $C(p)$ homomorf képe a $C(p^m)$ csoportnak.

Kertész Andor

Az 52. feladat megoldását beküldötték még: FRIED ERVIN, FUCHS LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY.

53. feladat. Legyen H az n dimenziós tér egy tetszésszerinti E halmazán értelmezett és ott alulról félig folytonos függvényekből álló halmaz. Bebizonyítandó, hogy ki lehet választani H-ból véges vagy megszámlálható sok függvényt úgy, hogy e függvények felső burkolója H valamennyi függvényének felső burkolója legyen. Függvények felső burkolója azt a függvényt jelenti, melynek értéke minden helyen az e helyhez tartozó függvényértékek felső határa. (A $+\infty$ és $-\infty$ is lehet függvényérték.)

(Gehér István)

Megoldás. Az n dimenziós tér E halmazán értelmezett valós értékű $f(x_1,\dots,x_n)$ függvény ordinátahalmazának nevezzük az $n+1$ dimenziós tér azon $(x_1,\dots,x_n,y)$ pontjainak halmazát, melyekre $(x_1,\dots,x_n)$ pontja E-nek és $y<f(x_1,\dots,x_n)$. Nyilvánvaló, hogy H felső burkolójának ordinátahalmaza a H-hoz tartozó függvények ordinátahalmazainak egyesítése. Azt kell bizonyítanunk, hogy a felső burkoló ordinátahalmazát a H halmaz legfeljebb megszámlálható sok elemének ordinátahalmaza is lefedi. Ez azonban igaz LINDELÖF lefedési tétele szerint, hiszen alulról félig folytonos függvények ordinátahalmaza nyílt, és az $n+1$ dimenziós tér szeparábilis.

Gehér László

Az 53. feladat megoldását beküldötték még: CSÁSZÁR ÁKOS, és KRÁLIK DEZSŐ.

Megjegyzés. A feladat állítása akkor is igaz, ha E tetszőleges, a Hausdorff-féle második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus tér.*

Császár Ákos

55. feladat. Igaz-e, hogy $k=1,2,3,\dots$ mellett

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2^x}-e^{-2^{x+1}})\cdot\begin{Bmatrix}\cos 2k\pi x\\ \sin 2k\pi x\end{Bmatrix}dx=0\,?$$

(Barna Béla)

Megoldás. A feladatban szereplő integrálok léteznek és értékük 0. Ezt belátjuk, ha bizonyítjuk, hogy az (A, B) intervallumon számított integrálok $A\to-\infty$, $B\to+\infty$ mellett 0-hoz tartanak. A két integrál egyformán kezelhető, ezért csak a sinus-szorzós integrállal foglalkozunk.

Egyszerű átalakítással

$$\int_A^B(e^{-2^x}-e^{-2^{x+1}})\sin 2k\pi x\,dx=$$

$$=\int_A^B e^{-2^x}\sin 2k\pi x\,dx-\int_{A+1}^{B+1}e^{-2^x}\sin 2k\pi x\,dx=$$

$$=\int_A^{A+1}e^{-2^x}\sin 2k\pi x\,dx-\int_B^{B+1}e^{-2^x}\sin 2k\pi x\,dx.$$

* A közölt megoldás csekély módosítással ezt az általánosítást is bizonyítja. *(Szerk.)*

E két integrálban az első tényezők az integrálási tartományban egyenletesen 1-hez, ill. 0-hoz tartanak, ha $A \to -\infty$, ill. $B \to +\infty$. Ezért e határátmenetnél ezek az integrálok a korlátos második tényező integráljának (azaz 0-nak) 1-szereséhez, ill. 0-szorosához, tehát valóban 0-hoz tartanak.

Változatlan gondolatmenettel bizonyításunk a következő általánosabb eredményt adja: Legyen $f(x)$ korlátos, integrálható és T szerint periodikus; legyen az integrálható $g(x)$ függvény határértéke $-\infty$-ben és $+\infty$-ben véges; akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(x+T)-g(x)]f(x)\,dx = [g(+\infty)-g(-\infty)]\int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

Surányi János

Az 55. feladat megoldását beküldötték még: Császár Ákos Gehér László, Kővári Tamás, Rejtő Péter.

56. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a p prímszám osztója egy x^2+ay^2 és egy u^2-av^2 alakú számnak, akkor $4n+1$ alakú. (Valamennyi betű egész számot jelöl, $(x,y)=(u,v)=1$.)

(Obláth Richárd)

Megjegyzés. A feladat szövegezése hiányos. Feltesszük azt is, hogy p páratlan és nem osztója a-nak. E feltevés nélkül a feladat állítása nem igaz, ezt egyszerű példák mutatják.

Megoldás. Az x, y, u, v számok egyike sem lehet p-vel osztható, mivel $(x,y)=(u,v)=1$ és p nem osztója a-nak. Ezért az alább szerepeltetett Legendre-szimbolumok értelmezve vannak.

Minthogy $p \mid u^2-av^2$,

$$1=\left(\frac{u^2}{p}\right)=\left(\frac{av^2}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right).$$

Ugyanígy következik $p \mid x^2+ay^2$ alapján, hogy

$$1=\left(\frac{-a}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right).$$

Ezekből $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ adódik, tehát a páratlan p törzsszám $4n+1$ alakú.

Sarkadi Károly

Az 56. feladat megoldását beküldötték még: Corradi Keresztély, Gehér László, Kővári Tamás, Rejtő Péter, Surányi János, Takács Lajos.

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp., V. Reáltanoda u. 13—15). A borítékra írjuk rá feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Kitűzésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri. Az előző számokban kitűzött példákra is megoldást lehet küldeni, ha megoldásuk a lapban még nem jelent meg.

Kitűzött példák

56. Adva van három szakasz: a, b és c. Osszuk fel a c szakaszt $a^5 : b^5$ arányban egységszakasz felvétele nélkül.

(Schopp János)

57. Hilbert bebizonyította, hogy a vonalzóval és körzővel megszerkeszthető sokszögek vonalzóval és egységátrakóval (étalon) is megszerkeszthetők, de az irodalomban nincs ilyen szerkesztés közölve. Szerkesszük meg a szabályos *ötszöget* vonalzóval és étalonnal! (Az étalon olyan eszköz, amellyel adott szakaszt bármely egyenesre felmérhetünk. Ez kétféle megszorítást jelent a körző alkalmazásával szemben: egyrészt adott pont körül nem lehet vele kört rajzolni, csak a kör *véges számú* pontját lehet kijelölni — nem lehet tehát körnek egyenessel vagy másik körrel való metszéspontját sem képezni — másrészt ennek a körnek a sugarát sem változtathatjuk.)

(Obláth Richárd)

58. Bizonyítsuk be, hogy adott téglalapba írható adott átfogójú, egymással nem egybevágó téglalapok területének összege egyenlő az eredeti téglalap területével. (Egy téglalapról akkor mondjuk, hogy egy másik téglalapba írtuk, ha az utóbbinak minden oldalán van az előbbinek egy csúcsa.)

(Steinfeld Ottó)

59. Legfeljebb hány részre osztható a gömbfelület n főkörrel?

60. Egy vándor megy Bagdadból Bokharába. Egy falunál elágazik az útja; egyik ága Bokharába vezet, a másik a sivatagba. Csak a falubeliek tudják, melyik a helyes út; ezekről viszont ismeretes, hogy egyrészük mindig igazat mond, a többi mindig hazudik. Egyet közülük megkérdez a vándor, anélkül hogy tudná, igazmondóval beszél, vagy hazuggal, s a feleletből (amely csak egyetlen „igen"-ből vagy egyetlen „nem"-ből állhat) megállapítja, melyik a helyes út. Milyen kérdést tett fel?

61.[1] Vegyünk n számú halmazt (lehetnek köztük üresek is, részben vagy egészen fedhetik is egymást). Bárhogyan válasszunk is ki ezek közül egy vagy több halmazt, beszélhetünk azon elemek összességéről, amelyek a kiválasztott halmazok mindegyikének elemei, de a többi halmaz egyikének sem. Nevezzük ezt a kiválasztott halmazokhoz tartozó atomnak.

a) Hányféleképpen helyezkedhetik el egymáshoz képest n halmaz, ha két elhelyezkedést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy atom az egyikben üres, a másikban nem?

b) Hányféle elhelyezkedés lehetséges akkor, ha üres halmazokat nem engedünk meg? (A határozottság kedvéért felsoroljuk két nem üres halmaz, A és B lehetséges elhelyezkedéseit: idegenek; egybeesnek; közös részük nem üres, de egyikkel sem esik egybe; A része B-nek; B része A-nak. A két utolsó esetet tehát külön esetnek tekintjük!)

Megoldott példák

31. példa. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$x-3<\sqrt{-x^2+3x+10}.$$

1. megoldás. A megoldásban x valós értékeire kell szorítkoznunk, hiszen a „kisebb" relációnak csak valósszámok között van értelme. Egyenlőtlenségünk jobboldala a valósszámok körében csak a $[-2, 5]$ zárt intervallumban van értelmezve, tehát ezek között a számok között kell keresnünk a gyököket. A négyzetgyökjelet a szokásos megállapodás szerint úgy értjük, hogy az a nemnegatív gyököt jelenti. Az egyenlőtlenség jobboldala tehát egy olyan félkörívvel ábrázolható, amely az x-tengely felett húzódik, és a tengely -2 és 5 koordinátájú pontjait köti össze. A baloldal viszont egy olyan egyenessel, amely a körívet *egy pontban metszi.* Erről

[1] A 41. példa helyett.

úgy győződhetünk meg, hogy megoldjuk az

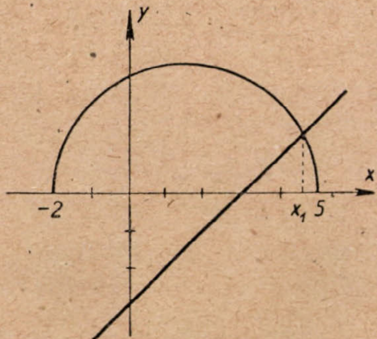
$$x-3=\sqrt{-x^2+3x+10}$$

egyenlet négyzetreemeléséből adódó

$$(x-3)^2=-x^2+3x+10$$

egyenletet. Ennek az utóbbi egyenletnek két gyöke van, de ezek közül csak a nagyobbik:

$$x_1=\frac{9+\sqrt{89}}{4}\approx 4{,}6$$



1. ábra

jelenti az egyenes és a körív metszéspontjának abszcisszáját; a másik csak az

$$x-3=-\sqrt{-x^2+3x+10}$$

egyenletet elégíti ki, vagyis az egyenes és a kiegészítő körív metszéspontjának abszcisszáját adja. Az egyenes emelkedik, tehát a felső félkörívvel való egyetlen metszéspontjáig a félkörív alatt van. Ebből következik, hogy az egyenlőtlenséget a $[-2, 5]$ intervallum x_1-nél kisebb értékei elégítik ki, tehát egyenlőtlenségünk megoldása:

$$-2\leqq x<\frac{9+\sqrt{89}}{4}\approx 4{,}6.$$

Ambrózy Géza

Megoldotta még: Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Fried Vilmos, Hammer Endre, Horváth Márton.

2. megoldás. Megoldást csak a $-2\leqq x\leqq 5$ intervallumban kereshetünk, mert csak itt van értelme a jobboldalnak.

a) Ha

$$-2 \leqq x < 3,$$

akkor az egyenlőtlenség teljesül, ugyanis a baloldalon negatív, a jobboldalon nemnegatív szám áll.

b) Ha

$$3 \leqq x \leqq 5,$$

akkor mindkét oldal nemnegatív, tehát négyzetreemeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk:

$$x^2-6x+9 < -x^2+3x+10.$$

Ebből

$$\frac{9-\sqrt{89}}{4} < x < \frac{9+\sqrt{89}}{4}.$$

Ezt összevetve az eredeti megszorítással és *a*)-val, kapjuk az egyenlőtlenség megoldását:

$$-2 \leqq x < \frac{9+\sqrt{89}}{4}.$$

Csiszár Imre

Megoldotta még: ÁDÁM ANDRÁS, BALATONI FERENC, KOVÁCS LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV.

37. példa. Az ABC derékszögű háromszög köré írt kör AB ívét érintse a C_0 pontban egy olyan C_1C_2 szakasz, amelynek végpontjai az AC és BC egyeneseken vannak és amelyre $C_0C_1 = C_0C_2$. Hasonló tulajdonságú szakaszok érintsék a másik két ívet is (a betűzést cikklikusan folytassuk). Bizonyítsuk be, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszög egyenlő oldalú.

Megoldás. Betűzés az ábra szerint. Legyen a rövidség kedvéért $BAC\sphericalangle = \alpha$, $C_2C_1C\sphericalangle = \beta$ és $B_1B_2C\sphericalangle = \gamma$. A feladat feltételeit felhasználva a C_1CC_2 derékszögű háromszögben

$$C_0C_1 = C_0C_2 = C_0C,$$

tehát a kerületi és középponti szögek összefüggése folytán

$$\beta = CC_1C_0\sphericalangle = C_0CC_1\sphericalangle = \frac{AOC_0\sphericalangle}{2}.$$

Az AOC_0C_1 négyszög szögeinek összege

$$(180^\circ - \alpha) + \beta + 90^\circ + 2\beta = 360^\circ,$$

és így

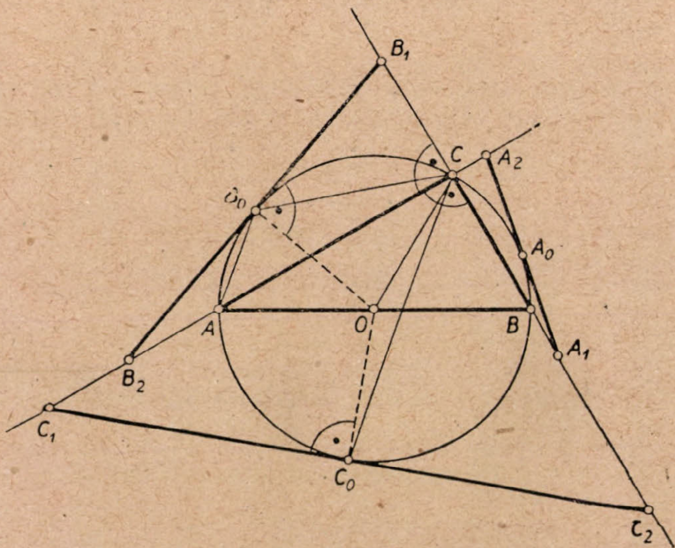
$$AOC_0\sphericalangle = 2\beta = 60^\circ + \frac{2\alpha}{3}.$$

Ugyanígy a B_1B_2C háromszögben

$$B_0B_1 = B_0B_2 = B_0C,$$

tehát a kerületi szögek összefüggése és a külső szögek tétele folytán

$$\gamma = B_1B_2C\sphericalangle = B_0CB_2\sphericalangle = \frac{B_1B_0C\sphericalangle}{2} = \frac{B_0AC\sphericalangle}{2}.$$



2. ábra

Így

$$AB_0C\sphericalangle = 180° - \gamma - 2\gamma = 180° - ABC\sphericalangle = 90° + \alpha,$$

amiből

$$AOB_0\sphericalangle = 180° - 2B_0AO\sphericalangle = 180° - 2(\alpha + 2\gamma) =$$

$$= 180° - 2\left(\alpha + 2\left[30° - \frac{\alpha}{3}\right]\right) = 60° - \frac{2\alpha}{3}.$$

Ennélfogva

$$B_0OC_0\sphericalangle = AOB_0\sphericalangle + AOC_0\sphericalangle = 120°.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy $A_0OC_0\sphericalangle = 120°$, tehát az $A_0B_0C_0$ háromszög bármely oldalához tartozó középponti szög 120°-os, vagyis ez a háromszög valóban egyenlőoldalú.

Biczó Géza

Megoldotta még: Bukovszky Ferenc, Kovács László.

38. példa. Meg akartuk oldani az

$$\frac{y^2}{4} - xy + 3z = 6,$$

$$\frac{y^2}{4} - x + 3z = 6,$$

$$2x + 2xy - \frac{y^2}{2} = 0$$

egyenletrendszert. Kivontuk egymásból az első két egyenletet, majd hozzáadtuk az első egyenlet kétszereséhez a harmadikat, végül mindhárom egyenletet összeadtuk. Így a következő egyenletekhez jutottunk:

$$x(1-y) = 0,$$

és innen $x = 0$, $y = 1$;

$$2x + 6z = 12,$$

tehát, mivel $x = 0$, azért $z = 2$;

$$x + xy + 6z = 12,$$

és a fenti értékek ezt is kielégítik. Az eredeti egyenletrendszert azonban ezek az értékek nem elégítik ki! Hol követtünk el hibát?

Megoldás. Jelöljük az eredeti egyenletek nullára redukált alakjának baloldalát A, B, C-vel. Akkor utóbb kapott egyenleteink így írhatók fel:

$$A - B = 0$$

$$2A + C = 0$$

$$A + B + C = 0$$

Látnivaló, hogy ezek az egyenletek nem függetlenek, hiszen $(A-B) + (A+B+C) = 2A + C$. Az első hibát tehát azzal követtük el, hogy az eredeti egyenletrendszerből nem független egyenletrendszert állítottunk elő. Az ugyan igaz, hogy az eredeti egyenlet gyökei ezt is kielégítik, de ennek a megfordítása már nem biztos, új gyökök is felléphettek.

Elkövettünk azonban egy másik hibát is. Ugyanis $x(1-y) = 0$-ból arra következtettünk, hogy $x = 0$ és $y = 1$; holott ebből az következik, hogy $x = 0$ *vagy* $y = 1$.

Ha helyesen okoskodunk, akkor az *átalakítással kapott* egyenletrendszert így oldjuk meg:

a) $x = 0$ esetén a másik két egyenlet bármelyikéből: $z = 2$; y pedig kiesik, tehát az egyenletrendszert $x = 0$, $z = 2$ mellett y bármely értéke kielégíti;

b) $y=1$ esetén a másik két egyenlet ismét ugyanazt az összefüggést fejezi ki; x és z bármelyike tetszésszerint választható meg bennük, s a másik ezzel kifejezhető, pl. $x=6-3z$.

Végeredményben tehát gyökrendszereknek két egyparaméteres sokaságát kapjuk. Mikor ehelyett $x(1-y)=0$-ból „$x=0$ *és* $y=1$"-re következtettünk, a két egyparaméteres sokaság egyetlen közös eleméhez jutottunk. Mint a helyettesítésből kiderült, ez nem gyöke az *eredeti* egyenletrendszernek. Ez egyúttal azt is mutatja, hogy az átalakításkor csakugyan felléptek új gyökrendszerek; egy közülük ez az $x=0$, $y=1$, $z=2$ gyökrendszer.

Balatoni Ferenc

Megoldotta még: AMBRÓZY GÉZA, ÁDÁM ANDRÁS, BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, CSÍSZÁR IMRE, FRIED VILMOS, HORVÁTH MÁRTON, KOVÁCS LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV és SZEMÉLYI KÁLMÁN.

39. példa. Milyen esetben ekvivalens az

$$f_1(x,y,z)=0,$$
$$f_2(x,y,z)=0,$$
$$f_3(x,y,z)=0$$

egyenletrendszer az

$$a_1f_1(x,y,z)+a_2f_2(x,y,z)+a_3f_3(x,y,z)=0,$$
$$b_1f_1(x,y,z)+b_2f_2(x,y,z)+b_3f_3(x,y,z)=0,$$
$$c_1f_1(x,y,z)+c_2f_2(x,y,z)+c_3f_3(x,y,z)=0$$

egyenletrendszerrel?

Megoldás. Az első egyenletrendszer minden gyöke kielégíti a második rendszert is, így az ekvivalencia vizsgálatához csak azt kell megállapítanunk, hogy az

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z)&=0,\\ f_2(x,y,z)&=0,\\ f_3(x,y,z)&=0 \end{aligned} \qquad (A)$$

rendszer mikor lesz következménye az

$$\begin{aligned} a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3&=0,\\ b_1f_1+b_2f_2+b_3f_3&=0,\\ c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3&=0 \end{aligned} \qquad (B)$$

egyenletrendszernek. Először azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen f_1, f_2, f_3 értékek elégíthetik ki a (B) rendszert (függetlenül attól, hogy ezek az értékek az x, y, z változók függvényei).

1. Ha a

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns különbözik 0-tól akkor a (B) egyenletrendszer a lineáris homogén egyenletrendszerekre vonatkozó közismert tétel alapján csak triviális megoldással rendelkezik, azaz csak akkor teljesül, ha $f_1=f_2=f_3=0$. Ez azt jelenti, hogy ilyen esetben a (B) rendszer kielégülése az (A) rendszer teljesülését is maga után vonja a megfelelő (x, y, z) helyen; tehát

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

esetén a két rendszer mindig ekvivalens.

2. Ha a determináns 0-val egyenlő, a (B) rendszernek nem-triviális megoldásai is vannak f_1-re, f_2-re és f_3-ra nézve, mégpedig 1, 2 vagy 3 paramétertől függő megoldás-sereg létezik aszerint, hogy az

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2, 1, vagy 0. Ha van olyan (x, y, z) rögzített értékhármas, melyen az f_1, f_2, f_3 függvények e nem-triviális megoldások valamelyikét állítják elő, a két rendszer nem ekvivalens, mivel e helyen a (B) rendszer teljesül, az (A) rendszer nem.

Ha az f_1-re, f_2-re, f_3-ra vonatkozó nem-triviális megoldások egyike sem áll elő, mikor az f-eket mint x, y, z függvényeit tekintjük, a két rendszer ekvivalens, ugyanis (B)-nek nincs oly megoldás-rendszere, mely nem teljesíti (A)-t.

Ádám András

Megoldották még: Ambrózy Géza, Balatoni Ferenc, Bukovszky Ferenc, Csíszár Imre, Hammer Endre, Kovács László, Nagy Jenő, Reményi Gusztáv.

1. megjegyzés. A feladat a következőképen általánosítható: Milyen esetekben ekvivalens az

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (A)$$

egyenletrendszer az

$$\begin{aligned} a_{11} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + a_{1m} f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \\ a_{k1} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + a_{km} f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (B)$$

egyenletrendszerrel?

(B) triviális következménye (A)-nak. (A) akkor és csak akkor következménye bármely $f_1, \ldots, f_m$ esetén (B)-nek, ha az $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ ismeretlenekre nincs (B)-nek a triviális (A)-tól különböző megoldása; ennek ismert feltétele pedig az, hogy az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix}$$

mátrix rangja éppen m legyen.

Kovács László

2. megjegyzés. A megoldók legnagyobb része nem vette figyelembe, hogy f_1, f_2, f_3 maguk is függvények, amelyek nem feltétlenül változnak egymástól függetlenül. Az az állítás, hogy a (B) rendszernek akkor és csak akkor következménye az (A) rendszer, ha (B)-ben az f-ek együtthatóiból alkotott determináns nem tűnik el — legalább is nem pontos. Ellenpélda:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv x + y + z, \\ f_2 &\equiv 2x + 2y + 2z, \\ f_3 &\equiv 3x + 3y + 3z, \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

(A determináns zérus, az (A) rendszer mégis ekvivalens a (B) rendszerrel.) Az azonban igaz, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy (A) és (B) *bármely* f_1, f_2, f_3*-ra* ekvivalensek legyenek, az említett determináns eltűnése.

3. megjegyzés. A **38.** példában az egyenletrendszer átalakítása a következő determináns szerint történt:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

A determináns értéke láthatóan 0, az eredeti egyenletek viszont függetlenek: ez a magyarázata annak, hogy az átalakítással kapott egyenletrendszer az eredetinek csupán következménye, de nem ekvivalens vele.

Reményi Gusztáv

40. példa. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyismeretlenes egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk ugyanazt a függvényt (de azonos átalakítást nem végzünk), akkor

a) ha a függvény mindenütt értelmezve van, olyan egyenlethez jutunk, amely az eredeti egyenletnek következménye;

b) ha a függvény amellett szigorúan monoton, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk.

Hogyan enyhíthetnénk a fenti feltételeket?

Megoldás. Legyen az adott egyenlet $f(x)=g(x)$ és a vizsgált függvény F. A feltételek fokozatosan enyhülő láncát adom meg, s a legenyhébb feltétel elegendő és szükséges voltát igazolom. Ebből mindjárt következik a példában megadott feltétel elégséges volta is.

(A_1) F mindenütt értelmezve van.

(B_1) F értelmezve van f és g értékkészletének U unióján[1].

(C_1) F értelmezve van az egyenlet x_k gyökeihez tartozó $f(x_k)=g(x_k)=y_k$ értékek halmazán.

Ha (C_1) teljesül, akkor

$$F(f(x_k))=F(g(x_k)) \quad \text{azaz} \quad F(y_k)=F(y_k)$$

mindig teljesül, s így (C_1) elegendő.

Másrészt, ha F nincs értelmezve egy y_k helyen, akkor $F(y_k)=F(y_k)$ értelmetlen, tehát (C_1) szükséges.

b)

(A_2) F szigorúan monoton.

(B_2) F szigorúan monoton saját értelmezési tartományának és U-nak M metszetén[2].

(B_2') F-nek van egyértékű[3] inverze. [(B_2) és (B_2') (A_2)-nél enyhébbek, de egymásnál nem.]

(C_2) F-nek van inverze az M halmazon.

(D_2) F-nek van inverze az $F(f(x))=F(g(x))$ egyenlet gyökeihez tartozó $f(x)=g(x)$ értékek H halmazán.

Az inverz H feletti létezése ugyanis egyértelmű azzal, hogy $F(f(x_0))=F(g(x_0))$-ból következik $f(x_0)=g(x_0)$. (Nyilvánvaló, hogy H tovább nem szűkithető), (D_2) tehát szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az $F(f(x_0))=F(g(x_0))$ egyenletnek következ-

[1] Más szóval egyesítési halmazán; vagyis azon elemek halmazán, amelyek legalább az egyik halmazhoz hozzátartoznak.

[2] Más szóval közös részén; vagyis azon elemek halmazán, amelyek mindkét (több halmaz esetén: valamennyi) halmazhoz hozzátartoznak.

[3] A továbbiakban ezt külön meg sem említjük; függvényen itt mindig egyértékű függvényt értünk, s így az inverz függvényt is csak akkor tekintjük létezőnek, ha egyértékű.

ménye legyen az $f(x_0)=g(x_0)$ egyenlet, vagyis (C_1) és (D_2) együtt szükséges és elegendő feltételét adják az ekvivalenciának.

Kovács László

Megoldották még: ÁDÁM ANDRÁS, BUKOVSZKY FERENC, CSÍSZÁR IMRE, REMÉNYI GUSZTÁV.

Megjegyzés. Elvileg mindkét csoportban az utolsó kritérium a legjobb, hiszen a legkevesebbet teszi fel, csak azt, ami *szükséges*. A gyakorlatban egyenletmegoldáskor mégis inkább az előbbieket alkalmazzuk. Így pl.

1° az (A_1) és (A_2) feltétel értelmében bármely egyenletből vele ekvivalens egyenletet kapunk, ha mindkét oldalához ugyanazt a c számot adjuk $(F_1 \equiv x+c)$, vagy mindkét oldalát ugyanazzal a $c \neq 0$ számmal szorozzuk $(F_2 \equiv cx)$;

2° az (A_1) feltétel értelmében az egyenlet következményéhez jutunk, ha mindkét oldalát ugyanarra a (természetes szám kitevőjű) hatványra emeljük $(F_3 \equiv x^n)$;

3° páratlan n esetében F_3 alkalmazásakor az (A_1) és (A_2) feltétel értelmében az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk;

4° páros n esetében ez csupán akkor igaz, ha az egyenlet mindkét oldala nemnegatív: ekkor azonban már a (B_1) és (B_2) feltételt kell alkalmaznunk.

TÁRSULATI ÉLET

Konstruktív függvénytani kollokvium beszámolója

A kollokvium 1953. november 26-tól 28-ig ülésezett Egerben a Pedagógiai Főiskola által rendelkezésre bocsátott helyiségben A kollokvium keretét és lényeges tartalmát az előadások adták ezek a következők voltak:

November 26. délután.

Alexits György: Ortogonális sorok szummabilitásáról. Megjelent az Acta Mathematica 1953. IV. 3—4. számában.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Ortogonális sorfejtések approximációs tulajdonságairól.

A Fourier-sorok approximációelméletében rendszerint következő típusú problémákat vizsgálnak. Adva van periodikus $f(x)$ függvényeknek egy bizonyos C osztálya és ezen egy nemnegatív, véges értékű $N(f)$ függvényoperáció, és azt kérdezzük, milyen gyorsan tartanak az f függvény Fourier-sorának s_n részletösszegei (vagy Fejér-féle összegei stb.) f-hez, ha s_n és f egymástól való eltérését az L^p-metrikában mérjük, ahol p valamely $\geqq 1$ szám (az egyenletes megközelítés a $p=\infty$ esetnek felel meg). Pontosabban a

$$\varrho_n = \sup_{f\in C} \frac{\|f-s_n\|_p}{N(f)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

mennyiségek számára keresnek *felülről* való becsléseket, ha $n\to\infty$. A legtöbbször vizsgált függvényosztályok a Lipschitz-osztályok, ill. azoknak a függvényeknek az osztályai, amelyek valamelyik differenciálhányadosa tartozik egy Lipschitz-osztályba stb.; az $N(f)$ operáció értéke ekkor a legkisebb megfelelő Lipschitz-konstans. W. Rudin (Duke Math. J., **19** [1952]) a ϱ_n mennyiségek számára *alulról* nyert becsléseket az L^2-térbeli met-

rika esetében, mégpedig olyan becsléseket, amelyek egyszerre *minden ortogonális sorfejtésre* érvényesek. (Ő az $\alpha=1$ kitevőjű Lipschitz-osztályt és a korlátos változású függvények osztályát vizsgálta, utóbbiban $N(f)$ az f totális variációját jelenti.)
Előadónak sikerült Rudin módszerét úgy finomítania, hogy bármely L^p-metrika esetére alkalmazható legyen. Ennek alkalmazásával olyan tételeket mutatott ki, amelyek röviden úgy fogalmazhatók meg, hogy bármely r és α esetében ($r=0, 1, \ldots; 0<\alpha\leqq 1$) azoknak az $f(x)$ függvényeknek az osztályára, amelyekre $f^{(r)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, a közönséges Fourier-sorral való L^p-megközelítés a lehető legjobb nagyságrendű az összes ortogonális sorfejtések közül.
Egyik általános tétele: van olyan $d_r>0$ konstans, hogy ha C_r jelenti az r-szer folytonosan differenciálható függvények osztályát a $0\leqq x\leqq 1$ szakaszon, akkor

$$\sup_{f\in C_r} \frac{\|f-s_n\|_p}{\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)} \geqq \frac{d_r}{n^r} \qquad (r=0, 1, \ldots),$$

ahol s_n az f függvénynek tetszésszerinti ortogonális rendszer szerinti sorfejtése n-edik részletösszegét jelenti, $\omega(f^{(r)}, \delta)$ pedig az $f^{(r)}$ függvény folytonossági modulusa. [Az $r=0$ esetben $f^{(0)}=f$ értendő.]
[Az eredmények a következő dolgozatban jelentek meg: Béla Sz.-Nagy, Approximation properties of orthonormal expansions, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 31—37.]

November 27. délelőtt.

Tandori Károly: Faggyejev egy tételéről. Előadó a Banach-terek elméletének módszereit felhasználva egy új bizonyítást adott D. K. Faggyejev tételére, amely egy szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy szinguláris integrál minden Lebesgue-integrálható függvényt a Lebesque-pontokban előállítson.
Aczél János: A klasszikus ortogonális polinomok karakterizálása. A Jacobi, Laguerre és Hermite polinomokat és csak ezeket együttesen jellemző tulajdonságok megadása: ortogonalitás, másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet és Rodrigues formula létezése. Pontosabban: E polinomok előállíthatók, mint egy $u_n(x)$ függvény n-dik deriváltjának és a $p(x)$ súlyfüggvénynek hánya-

dosai, $u_n(x)$-nek minden 0-nál nagyobb n-re két közös valós (véges vagy végtelen) gyöke van és eleget tesz egy elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek, melynek első együtthatója legfeljebb másodfokú, második együtthatója legfeljebb elsőfokú polinom. A kérdéskörbe vágó egyéb eredmények is ismertetésre kerültek, továbbá az a sejtés, hogy csak ezek az ortogonális polinomok tesznek eleget másodrendű Sturm—Liouville típusú egyenletnek.

Fenyő István: Többszörös Fourier-transzformációkról. Legyen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_k \geqq 0$ értékekre definiált valós függvény. Ennek definícióját terjesszük ki $-\infty < x_k < 0$-ra a következőképpen:

$$f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n),$$
$$\text{ha } 0 \leqq k \leqq r \leqq n$$

$$f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n),$$
$$\text{ha } 0 \leqq r < k \leqq n,$$

ahol $0 \leqq r \leqq n$ tetszőleges, de rögzített egész.
Az előadásban a következő tételt bizonyítottuk be: Ha $f(x_1, \dots, x_n)$ $x_k \geqq 0$-ra definiált függvényről feltesszük, hogy a

$$\int_{-0}^{+\infty} \overset{(n)}{\dots} \int_{-0}^{+\infty} |f(x_1, \dots, x_n)| \, dx_1 \dots dx_n$$

integrál létezik, akkor a) $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény n-szeres $F(t_1, \dots, t_n)$ Fourier-transzformáltja létezik,
b) $(t_1 \dots t_r)^{-1/2} f(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_n})$ n-szeres Laplace-transzformáltja létezik $\left(\mathfrak{R}(s_k) > \frac{1}{2}\right)$
c) fennáll a következő azonosság

$$(s_1 \dots s_r)^{1/2} (s_{r+1} \dots s_n)^{3/2} L_{\frac{s_1}{2} \dots \frac{s_n}{2}} \{(t_1 \dots t_r)^{-1/2} F(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_n})\} =$$
$$= (i)^{n-r} \cdot L_{\frac{1}{2s_1} \dots \frac{1}{2s_n}} \{(t_1 \dots t_r)^{-1/2} f(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_n})\} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Az

$$L_{s_1, \dots, s_n} \{\cdots\}$$

szimbólummal a szóbanforgó függvény n-szeres Laplace-transzformáltját jelöljük.
Ennek a tételnek a segítségével egyszerű bizonyítását adtuk az n-szeres Fourier-transzformáció megfordítási

képletének; valamint a következő integrálegyenletet oldottuk meg:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{(n)}{\ldots} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Bebizonyítottuk, hogy ennek az integrálegyenletnek akkor és csak akkor van nem azonosan eltűnő, abszolút integrálható megoldása, ha $\lambda = \pm 1$ vagy $\lambda = \pm i$. Eljárást adtunk a megoldás explicit felírására is.

A bebizonyított tétel további alkalmazása az n-szeres Laplace-transzformáció megfordítási képletének bebizonyítása, amelyik az egyváltozós függvények körében ismert Mellin-féle formula n-dimenziós analogonja.

Barna Béla: A valós függvények iterációjával kapcsolatos kérdésekről.

Az előadás oly folytonos függvény iterációjával foglalkozott, amely a [0, 1] szakaszt önmagára képezi le. Legyen ez $f(x)$. Ha van olyan fixpontja e függvénynek, melynek elegendő kis környezetéből kiinduló bármely iterációs sorozat e fixponthoz tart, akkor megadható oly eljárás, mellyel a leghosszabb ily szakasz végpontjai meghatározhatók. — Legyen $f(0) = 0, f(1) = 0$ és legyen az $f(x)$ függvénynek a [0, 1] szakasz belsejében egyetlen maximuma és egyetlen vonzó jellegű fixpontja. Ha azon pontok, amelyekből kiinduló iterációs sorozat divergens, nem alkotnak szakaszt, akkor az $f(x)$-re tett bizonyos további föltevések mellett kimutatható, hogy az ily „divergencia-pontok“ nullmértékű halmazt alkotnak.

November 27. délután.

Turán Pál: A Lagrange-interpoláció divergencia-elméletéhez.

Mint Faber kimutatta, minden oly A-alappontrendszerre, melynek pontjai [—1, +1]-be esnek,

$$\varlimsup_{n \to \infty} \max_{-1 \leq x \leq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x)| = \infty \tag{1}$$

és ennek alapján Lebesgue nyomán oly [—1, +1]-ben folytonos $f(x)$ függvényt szerkesztett, melynek A-hoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai [—1, +1]-ben korlátlanok. Előadó kimutatta, hogy ha (1) helyett valamilyen $1 > \alpha > 0$-al tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-al

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}} \max_{-1\leq x\leq 1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x)| < \infty \tag{2a}$$

és

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} \max_{-1\leq x\leq 1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x)| > 0 \tag{2b}$$

akkor van oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ is, mely itt egyenletesen $\beta < \frac{\alpha}{\alpha+2}$ kitevős Lipschitz-feltételt teljesít és melynek A-hoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomjai $[-1, +1]$-ben korlátlanok.

Freud Géza: Mechanikus kvadratúrák pozitív Cotes-féle számokkal.

Előadó eljárást mutatott be a Gauss—Jacobi-féle mechanikus eljárás alappontjainak és súlyfüggvényének olyan egyidejű transzformációjára, melynél bizonyos általános feltételek mellett a Cotes-féle számok pozitivek maradnak.

November 28. délelőtt.

Frey Tamás: Lokális approximációs tételek.

Az előadó a következő tételt ismertette: Az $f(x) \in C_{2\pi}$ függvény szakaszonként különböző approximációs tulajdonságokkal rendelkezik. Található akkor olyan n-edrendű trigonometrikus polinom, amely az egyes szakaszok bármely belső zárt részintervallumában — konstans faktortól eltekintve — az elérhető legjobb approximációt adja, az $f(x)$ függvényt pedig — ugyancsak konstans faktortól eltekintve — szintén a legjobban approximálja. Egyszersmind konkréten elő is állít egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező polinomot. A tételt átfogalmazza folytonos függvények racionális polinomokkal történő approximációjára is.

Freud Géza: A Hermite-féle interpolációs eljárás konvergenciájáról.

Előadó két tételt ismertetett: Legyen $\{p_n(x)\}$ a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata, és tekintsük a $\{p_n(x)\}$ zérushelyeihez, mint alappontokhoz tartozó Hermite-féle interpolációs sorozatot. A derivált értékekre alkalmasan választott nagyságrendi megkötést teszünk.

I. tétel. Legyen $w(x)$ a $[-1, +1]$ ortogonálitási intervallumban folytonos és pozitív és egy (α, β) belső részintervallumban 1-nél nagyobb kitevős logaritmikus Lipschitz-feltételnek tegyen eleget. Ha az $f(x)$ interpolált függvény $[-1, +1]$-ben korlátos, a $\xi \in (\alpha, \beta)$ helyen, továbbá a -1 és $+1$ helyeken folytonos, akkor az interpoláló polinomok sorozata a ξ helyen tart $f(\xi)$-hez.

II. tétel: Ha $(-1, +1)$-ben $0 < m < w(x) \leq M$, és $f(x)$ (α, β)-ben 1-nél nagyobb kitevős logaritmikus Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a Hermite-féle interpolációs polinomok sorozata (α, β) minden belső részintervallumában egyenletesen tart $f(x)$-hez.

November 28. délután. *Frey Tamás:* Ekvidisztans Lagrange-interpolációkra vonatkozó „lokalizációs tételről".
Az előadó hivatkozik Bernstein híres, az $|x|$ függvény ekvidisztans interpolációs polinomjainak divergenciáját kimutató példájára. Ez a példa azt a benyomást kelti, hogy ekvidisztans interpolációk esetén valamely pontban az interpolációs polinomok konvergenciaviszonyait a a függvény „egész menete" befolyásolja. Kimutatja azonban, hogy ez általában nincs így. A $[-1, +1]$ szakaszt véve pl. alapul valamely x_0 pontban a konvergenciaviszonyokra legfeljebb a

$$[-|x_0|-\varepsilon;\ |x_0|+\varepsilon];\quad (\varepsilon > 0,\ \text{tetszésszerinti})$$

szakaszon felvett függvényértékek vannak befolyással.

Rényi Alfréd: Ortogonális sorfejtés az ortogonalitási intervallum egy részintervallumán.
Előadó többek között a következő problémát vetette fel: Legyen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ egy teljes ortogonális függvény-rendszer az (a, b) intervallumon, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $\varphi_n(x)$ függvények az (a, b) intervallum (α, β) részintervallumán is lineárisan függetlenek. Legyen $f(x)$ egy az (α, β) intervallumon az L^2 függvényosztályhoz tartozó függvény. Az n pozitív egész szám minden értékére határozzuk meg a $c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}$ számok azon értékeit, melyek az

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\, \varphi_k(x) \right)^2 dx$$

integrál értékét minimálissá teszik; legyen

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\, \varphi_k(x).$$

Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - S_n(x))^2 \, dx = 0.$$

Megvizsgálandó, hogy az $f(x)$ függvényre vonatkozó milyen feltevések biztosítják azt, hogy $S_n(x)$ mindenütt, ill. majdnem mindenütt konvergáljon $f(x)$-hez.
Bebizonyította továbbá a Bessel-féle egyenlőtlenség következő általánosítását: Ha

$$c_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi_k(x) \, dx,$$

akkor

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\beta} S_n^2(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k c_{nk} \leq \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx \qquad (*)$$

(*) abból következik, hogy a c_{nk} számok eleget tesznek a

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(x) \varphi_k(x) \, dx \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszernek.

Turán Pál: A Hermite-interpoláció konvergenciaelméletéhez.
Az előadó többek között azon legfeljebb $(2n-2)$-edfokú interpolációs polinomokkal foglalkozott, melyeknél az n-ik Csebisev gyökhelyein a függvényértékek vannak előírva és az első deriváltak egyetlen alaphely kivételével. Rámutat azon figyelemreméltó eltérésekre és új jelenségekre, melyeket e polinomok viselkedése mutat szemben azon Hermite—Fejér interpolációs polinomokkal, melyek legfeljebb $(2n-1)$-edfokúak és az n-ik Csebisev-polinom gyökhelyein függvényértékeik és első deriváltjaik vannak előírva.

Az előadások legtöbbjéhez sok hozzászólás volt, nagy százaléka az előadásoknak tartalmazott megoldandó problémákat is. Ezek ülésenkívüli diszkussziójára nem jutott idő. Bár a valószínűségszámítási kollokviumon okulva az előadások számát alacsonyabban maximáltuk, úgy látszik, e szám még mindig túl magas volt. A részvevők egy része aspiráns volt, az előadók között is volt olyan, kinek ez volt első önálló szárnypróbálgatása. Minden jel arra mutat, hogy az aspiránsok az ilyen kollokvium munkájába minél nagyobb számban bevonandók, mert fejlődésüket a matematikai életbe való bekapcsolódás valószínűleg még akkor is elősegíti, ha az illető rendezvény nem közvetlenül vág az illető aspiráns választott témakörébe. A kollokvium utolsó napján jelen volt E. Marczewski is, a wroclawi egyetem tanára.

A kollokviumon részvevők névsora:

Aczél János, Alexits György, Barna Béla, Balázs János, Császár Ákos, Fenyő István, Frey Tamás, Freud Géza, Hódi Endre, Hosszú Miklós, Kővári Tamás, Králik Dezső, Makai Endre, Rényi Alfréd, Szénássy Barna, Szőkefalvi-Nagy Béla, Szüsz Péter, Tandori Károly, Turán Pál.

A kollokvium lebonyolítását a Bolyai János Matematikai Társulat végezte, külön dícséret illeti Székely Gáborné szervezőtitkár munkáját. Az egri Pedagógiai Főiskola vezetősége a legszívélyesebben támogatta a kollokvium munkáját.

Turán Pál

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Külföldi hírek

1954. szeptember 2—9-ig rendezte meg a Nemzetközi Matematikai Unió Amsterdamban második nemzetközi matematikai kongresszusát. A kongresszuson közel 1600 matematikus vett részt a világ minden tájáról és több száz tudományos előadás hangzott el, részben plenáris üléseken, részben a következő szekciókban:

1. Algebra és számelmélet,
2. Analízis,
3. Geometria és topológia,
4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika,
5. Matematikai fizika és alkalmazott matematika,
6. Matematikai logika és a matematika alapjai,
7. Matematika és filozófia, matematikatörténet, matematikaoktatás.

A kongresszus megnyitó előadását a magyar származású Neumann János tartotta, „Megoldatlan problémák a matematikában“ címen, a záróelőadást pedig A. N. Kolmogorov „Dinamikai rendszerek általános elmélete és a klasszikus mechanika“ címen.

A kongresszus egészében eredményes volt, különösen mivel lehetőséget nyitott a különböző országok matematikusai között személyes tudományos kapcsolatok felvételére, illetve elmélyítésére.

A kongresszuson hazánkat Alexits György akadémikus és Rényi Alfréd lev. tag képviselték, akik a következő előadásokat tartották:

Alexits György: Differenciálható függvények jellemzése Fourier-soruk által.

„ „ Folytonos függvények ortogonális polinomok szerinti sorfejtésének majdnem mindenütt való konvergenciája.

Rényi Alfréd: A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése.

„ „ A rendezett minták elméletéről.

A kongresszuson a Szovjetuniót P. Sz. Alexandrov akadémikus vezetésével öttagú delegáció képviselte. A Lengyel Népköztársaság héttagú delegációját K. Kuratowski vezette, Csehszlovákia öttagú delegációt küldött V. Jarnik vezetésével.

A kongresszussal egyidőben a következő szimpoziumokat rendezték:

a) Sztochasztikus folyamatok,
b) Algebrai geometria,
c) Formális rendszerek matematikai interpretációja.

A kongresszussal egyidőben ülést tartott a Nemzetközi Matematikai Unió is, és új vezetőséget választott. Az Unió új elnöke H. Hopf svájci matematikus lett, aki 1955. január 1-vel veszi át az Unió vezetését. A következő matematikai kongresszus 1958-ban lesz Edinburghban.

*

A Riemann-emlékünnepet (Riemann Tagung) október 11—16. között tartották Berlinben. A Deutsche Akademie der Wissenschaften által felkért előadók 1 órás előadásokban ismertették a geometria különböző ágainak fejlődését. A kongresszuson magyar részről Alexits György akadémikus, Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag és Varga Ottó lev. tag vettek részt, a következő előadásokkal:

Alexits György: „Az általános térfogalom fejlődése",

Sz.-Nagy Béla: „A Hilbert-térből kilépő lineáris transzformációk folytatása",

Varga Ottó: „Szabad mozgathatósággal rendelkező Riemann-féle terekről."

A kongresszuson elhangzott előadások a Deutsche Akademie der Wissenschaften kiadásában könyvalakban is meg fognak jelenni.

*

A berlini Humboldt Tudományegyetem (Német Demokratikus Köztársaság) Matematikai Intézete 1954. október 19—22-ig valószínűségszámítási konferenciát rendezett. A konferencia előkészítésében a berlini matematikusokon kívül igen tevékeny részt vett B. V. Gnyegyenko, a kiváló szovjet matematikus, aki egy év óta mint vendégprofesszor a berlini egyetemen tanít. A konferencián számos külföldi matematikus is résztvett, így a Szovjetunióból A. N. Kolmogorov és J. V. Prohorov, Franciaországból M. Fréchet és R. Fortet, Lengyelországból H. Steinhaus, M. Fisz, Csehszlovákiából J. Novák, A. Spacek és J. Truksa, Bulgáriából N. Obreskov, Romániából M. Mihoc, Finnországból A. G. Elfving. Hazánkból

Rényi Alfréd vett részt a konferencián és ő tartotta a konferencia megnyitó tudományos előadását „A valószínűségszámítás axiomatikus megalapozása“ címen. A konferencia behatóan megvitatta a valószínűségszámítás számos aktuális problémáját és elősegítette a valószínűségszámítással foglalkozó matematikusok szorosabb együttműködésének kiépítését.

*

Ez év májusában nagyszabású emlékünnepségeket tartottak Párizsban Poincaré születésének százéves évfordulóján, az École Polytechnique és a Sorbonne együttes rendezésében. Az ünnepségeken a köztársasági elnök, a kormány tagjai, valamint számos külföldi matematikus vett részt. Magyarországot Riesz Frigyes akadémikus és Alexits György akadémikus képviselték.

*

A Szovjetunióban kiadták orosz nyelven Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla: „Leçons d'analyse fonctionnelle“ c. könyvét, valamint Péter Rózsa: „Rekursive Funktionen“ c. munkáját.

*

L. Infeld, a kiváló lengyel fizikus, a relativitáselmélet világhírű művelője, A. Einstein volt munkatársa, regényes életrajzot írt Evariste Galoisról, a modern algebra zseniális úttörőjéről, aki 20 éves korában egy párbajban tragikus körülmények között halt meg anélkül, hogy korszakalkotó felfedezéseinek a tudományos világ által való elismerését megérhette volna. A halála előtti éjszakán tudományos végrendeletben foglalta össze kutatásainak eredményét az algebrai egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságára vonatkozólag. A kitűnően megírt regény közelhozza az olvasóhoz Galoist, kibontakozik előttünk Galoisnak mint embernek, tudósnak és forradalmárnak arcképe és tragikus élete. Galois ugyanúgy, mint a mi Bolyai Jánosunk, szenvedélyesen és megalkuvás nélkült harcolt a tudományos és a társadalmi igazságért egyaránt, eszméit és nagyságát ugyanúgy csak az utókor értette és becsülte meg, mint Bolyai János esetében. Infeld egykorú okmányokkal teljesen hiteltérdemlően és meggyőzően bizonyítja be, hogy Galois tragikus halálát a reakciós titkosrendőrség cselszövényei okozták, a halálos kimenetelű párbajt ők készítették elő. Reméljük, hogy ez a kitűnő könyv hamarosan magyar nyelven is hozzáférhető lesz; részletes ismertetésére akkor térünk vissza.

*

A Német Demokratikus Köztársaságban új matematikai folyóirat indul „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" címen. A folyóirat szerkesztői K. Schröter és G. Asser (Berlin). A szerkesztőségben Kalmár László lev. tag és Péter Rózsa főisk. tanár is résztvesz.

*

A párisi egyetem Riesz Frigyes akadémikust 1954. XI. 18-án díszdoktorrá választotta.

Hazai hírek

November 7-e alkalmából a Magyar Népköztársaság Elnöki Tanácsa a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége felterjesztésére Hódi Endrét és Surányi Jánost a Bolyai Társulatban végzett kiváló társadalmi munkájukért a „Szocialista munkáért" érdeméremmel tüntette ki. A kitüntetéshez a Társulat minden tagja szívből gratulál és további jó munkát kíván.

*

Doktorok, kandidátusok

Fuchs László: Végtelen Abel-csoportok struktúrájáról c. doktori disszertációjának vitáját március 18-án tartották meg. A disszertáció opponensei Hajós György, Rédei László és Szele Tibor voltak. Május 6-án Császár Ákos védte meg: Valós függvények nívóhalmazainak struktúrájáról c. doktori disszertációját. Opponensek Alexits György, Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla voltak.

Június 19-én volt Fodor Géza kandidátusi disszertációjának vitája. Opponensek Kalmár László és Császár Ákos voltak.

November 12-én tartották Kertész Andor: Operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk c. kandidátusi disszertációjának vitáját. A disszertáció opponensei Rédei László és Fuchs László voltak.

*

1954 őszén matematikus aspiránsok lettek a következők:

Corrádi Keresztély, Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézet, analitikus számelmélet témakörből. Aspiránsvezető: Turán Pál.

Csibi Sándor levelező aspiráns, Távközlési Kutatóintézet, approximációelmélet témakörből. Aspiránsvezető: Freud Géza.

Erdős Jenő, Kossuth Lajos Tudományegyetem, Matematikai Intézet, csoportelméletből. Aspiránsvezető: Szele Tibor.

Farkas Miklós, Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézet, Riemann geometria témakörből. Aspiránsvezető: Hajós György.

Fried Ervin, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet, absztrakt algebra témakörből. Aspiránsvezető: Fuchs László.

Kósa András, Eötvös Loránd Tudományegyetem, variációszámítás témakörből. Aspiránsvezető: Császár Ákos.

Lipták Tamás, Alkalmazott Matematikai Intézet, matematikai statisztika témakörből. Aspiránsvezető: Rényi Alfréd.

Pollák György, Szegedi Tudományegyetem, algebrai számelmélet témakörből. Aspiránsvezető: Rédei László.

Reimann József, levelező aspiráns, Alkalmazott Matematikai Intézet, differenciálegyenletek témakörből. Aspiránsvezető: Vincze István.

Uzsoki Miklós, levelező aspiráns: Alkalmazott Matematikai Intézet, függvénytranszformációk témakörből. Aspiránsvezető: Fenyő István.

*

170 évvel ezelőtt jelent meg az első magyar nyelvű algebra könyv, Dugonics András: „A tudákosság első könyve" c. műve.

*

A közelmúltban a következő matematikai tárgyú könyvek jelentek meg:

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. (112,— Ft) Tankönyvkiadó.

Rédei László: Algebra I. (110,— Ft) Akadémiai Kiadó.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok. (42,50 Ft) Tankönyvkiadó.

Hódi Endre: Fejezetek a térmértanból. (7,— Ft) Szocialista Nevelés Könyvtára.

Népszerű algebra (14,— Ft) Péter Rózsa és Gallai Tibor középiskolai tankönyvét felnőttek számára alkalmazta Varga Tamás. Művelt Nép Könyvkiadó.

B. V. Gnyegyenko — A. J. Hincsin: Bevezetés a valószínűségszámításba (14,50 Ft) Művelt Nép Könyvkiadó.

Faragó László: A számelmélet elemei. (6,— Ft) Tankönyvkiadó.

Könyvismertetés

HANS RADEMACHER und OTTO TOEPLITZ: **Von Zahlen und Figuren.** I. Auflage. Berlin, 1930. Verlag von Julius Springer. VI + 164 Seiten. II. Auflage. Berlin, 1933. Verlag von Julius Springer. VII + 173 Seiten. Magyarul: **Számokról és alakzatokról.** Fordította: SZIVÁS János. Felelős lektor: NYILAS Dezső. Középiskolai Szakköri Füzetek. 2978. sz. Tankönyvkiadó Vállalat. Budapest, 1953. 184. old. Iskolai ára: 6.— Ft. Megjelent 600 példányban.

Ez a könyv a világirodalom egyik legjobban sikerült matematika-népszerűsítő könyve, mégpedig a szó legnemesebb értelmében. Szerzői azt a célt tűzték maguk elé, amint könyvük első kiadásának előszavában olvashatjuk, hogy áttörjék azt a válaszfalat, amely a legtöbb ember képzeletében fennáll a matematika és az azt körülvevő külvilág között: terjeszteni akarják a matematikát nem-matematikusok körében, éspedig úgy, hogy ezt élvezzék az olvasók, mint ahogyan a zenét tudják élvezni olyanok is, akik maguk nem alkotók a zeneművészet terén. A szerzőknek az a meggyőződése, hogy ez azáltal lehetséges, ha a kívülállóknak a leplezetlen matematikai valóságot mutatjuk be, tekintet nélkül esetleges alkalmazásokra vagy egyéb szempontokra, és ha ezenkívül sikerül eloszlatni bennük azt a félénkséget, amelyet sokan ifjúkori élményeik alapján táplálnak mindennel szemben, ami matematika.

A szerzők úgy próbálják felolvasztani ezt a matematikától való idegenkedést, hogy szemelvényeket adnak annak a formában gazdag világnak a dolgaiból, amelyet matematika gyűjtőnévvel foglalunk össze, tehát magából a *matematikából* és magának a *matematikának* a kedvéért: nem arra a (külső) haszonra mutatnak rá, amelyet ez a tudomány valamely műszaki vagy egyéb alkalmazás szempontjából jelent, hanem arra a *belső értékre*, melyet a matematika önmagában képvisel.

A célkitűzés megvalósításának módja is sajátságos: nem az egyes tények állnak az előadás középpontjában, hanem a folyamatok, jelenségek, azután a kérdésfelvetés módja és az a módszer, ahogyan ezeket a kérdéseket meg lehet oldani. A könyv ebben a szellemben tárgyal egy sor, a matematika különböző területeiről kiragadott témát. Ezek önmagukban is teljesen érthetők és értékelhetők, mindegyik kb. egy egyórás előadásnak felel meg, és a későbbi előadások megértéséhez nincs szükség az előzők tartalmának ismeretére. Az sem baj, ha valaki nem emlékszik már a fiatal korában tanult középiskolai matematika-anyagra, hiszen logaritmusokról, trigonometriáról sehol sem esik szó, még kevésbé differenciálszámításról vagy integrálról. Még ha a legegyszerűbb alapvető dolgokra történik is hivatkozás, ezt is többnyire rövid felelevenítés kíséri.

Az nem volt célja a szerzőknek, hogy az egyes előadások témáit úgy válogassák össze, hogy a feldolgozott anyagban a matematika különféle területei mind és arányos terjedelemmel kapjanak helyet; magát a témát csak annyiban vették figyelembe az anyag összeállításakor, hogy amellett, hogy a matematikai gondolkodás valamely jellegzetes mozzanatát mutatja be, előadható-e olyan egyszerű és úgyszólván semmi előismeretet nem kívánó formában, ami megfelel a könyv már előrebocsátott népszerűsítő célkitűzésének.

A könyvnek különösen azok a fejezetei (pl. Görbehálók bejárása, Pontsokaság burkolóköre stb.) mutatnak rá jól nemcsak a matematika lényegére, hanem a matematikai gondolkodás jellegzetes sajátságaira is, amelyeknek elolvasása után az a szinte kissé bosszantó érzésünk támad, hogy „hiszen ez olyan egyszerű, magam is rájöhettem volna". Fontosnak tartjuk, hogy kiemeljük RADEMACHER és TOEPLITZ könyvének ezt a kiváló tulajdonságát, amikor még ma is bőven vannak hivei nálunk a formalista matematika-tanításnak: akiknek számára a matematikában mindennél fontosabb a képlet — a gondolkodásnál is, egy probléma megoldásához vezető értékes gondolatnál is fontosabb. Nos, ha ezek elolvassák a szóbanforgó könyvet, megláthatják, hogy már a középfokú matematika-tanításban előkerülő formakészlet egy töredékével is aránylag milyen messze el lehet jutni ebben a tudományban: egészen egy-egy kis matematikai remekmű megalkotásáig, sőt egyes megoldatlan problémák lényegének megértéséig.

Ezen a ponton néhány kérdést kissé részletesebben meg kell világítanunk. Először is, amikor az előbbi bekezdésben állást foglaltunk a formalista matematika-tanítással szemben, ezzel távolról sem szeretnők azt mondani, hogy a forma a matematikus számára mellékes. Legyen szabad ezzel kapcsolatban PÉTER Rózsát idéznünk, aki ezt írja a „Játék a végtelennel" bevezetésében: „A képlettel a matematika egyik lényeges jegyéről mondok le; hogy a forma a lényeghez tartozik, azt író és matematikus egyaránt tudja. Képzeljük el, hogyan lehetne egy szonett hangulatát kifejezni a szonettforma nélkül." Vagyis végeredményben: a képlet, a forma a matematika *egyik* lényeges jegye, de nem az *egyetlen*, még kevésbé a *leglényegesebb.*

Második megjegyzésünk azoknak a laikusoknak szól, akik a matematika egyszerű alapismeretekkel felfogható, eddig még meg nem oldott problémáival foglalkoznak, főképpen a FERMAT-féle sejtéssel (és állítólagos „megoldásaikkal" állandóan zaklatják a matematikusokat). RADEMACHER és TOEPLITZ könyvéből többek között az is nyilvánvaló, hogy ezeknek a kérdéseknek a megoldása — amivel annyi kiváló matematikus is hiába próbálkozott — nem várható triviális átalakításoktól, melyekkel a laikusok szoktak rendszerint kísérletezni.

Azt nem tartjuk egészen helyesnek, hogy a szóbanforgó könyv szerzői az egyes előadásokban bemutatott „kis matematikai remekművekkel" kapcsolatosan hangsúlyozzák: „. . . ezeket egyes nagy gondolkodók találták ki, ha alkalomadtán kiléptek átfogó elméleteket alkotó világukból. . ." Ez az állítás magából a könyvből többszörösen megcáfolható, hiszen pl. a halmazelmélet elemeiről szóló fejezet *része* egy ugyancsak átfogó elméletnek, de másfelől a könyv is közöl olyan említésre méltóan egyszerű és elegáns megoldást, amelynek szerzőjét (BÜCKNERT) nem számítjuk a különösen neves matematikusok közé, egyébként sem volna nehéz felsorolni több effél példát. Ebben a vonatkozásban úgy véljük, hogy A. N. KOLMOGOROV szovjet akadémikus közelebb jár az igazsághoz, amikor „A matematikusi hivatásról" c. füzetében ezeket írja: „A matematikai felfedezések legnagyobb része valamilyen egyszerű gondolaton alapul: valamilyen teljesen szemmellátható geometriai szerkesztésen, valamilyen új elemi egyenlőtlenségen stb. Csak arra van szükség, hogy megfelelő módon alkalmazzuk ezt az egyszerű gondolatot annak a feladatnak a megoldására, amely első pillantásra elérhetetlennek látszik." A matematika tanítása szempontjából sokkal építőbb hatású ez a felfogás, amely nem riasztja el a matematikát tanuló fiatal embert holmi „kásahegy" vagy „kínai fal" emlegetésével attól, hogy matematikai problémák önálló megoldásával foglalkozzék, hanem ellenkezőleg, fokozza az ehhez amúgy is elengedhetetlenül szükséges önbizalmat. Az önbizalomra viszont az is károsan hat, ha csak azt emeljük ki, hogy a matematikai alkotó munkához „született tehetségre" van szükség (ezt egyébként elismerjük), ugyanakkor azonban nem szólunk arról a komoly lehetőségről, amelyet a helyes matematika-tanítás jelent éppen ennek a tehetségnek a kibontakozásában. Érdekes, hogy bár RADEMACHER és TOEPLITZ könyve egész felépítésében világos és egyértelmű kiállás e mellett a konstruktív pedagógiai felfogás mellett, ugyanakkor a szerzők *szavakban* nem adnak ennek kellő kifejezést. Valószínűleg azért, mert a szerzők szemében a korábbi unalmasan szisztematizáló német középiskolai matematika-oktatás testesítette meg az iskolai oktatás fogalmát, és ebben kevés alapot láttak a matematika megkedveltetéséhez, a szunnyadó matematikai tehetség kibontakoztatásához.

De vajon helyes-e, hogy egy *népszerűsítő* könyvet ennyire az iskolai tanítás pedagógiai elveinek szemszögéből vizsgálunk, amikor a szerzők — mint már említettük — egyenesen arra törekedtek, hogy munkájukban a lehető legkevesebbet támaszkodjanak középiskolai előismeretekre? Úgy véljük, hogy ennek ellenére — igen. Éspedig azért, mert ez a könyv is — mint általában a *jó* népszerű matematikai könyvek — eredeti céljától némileg eltérően, legtöbbször maradandóbb élményt jelent egy matematikus, főként matematika-didaktikus, mint egy kívülálló érdeklődő számára. Ugyanis felületesen nem lehet matematikát olvasni, még a legjobb népszerű könyvet sem: az elkerülhetetlenül szükséges absztrakció mindig megfeszített figyelmet igényel olvasás közben, és a laikusok — tisztelet a kivételnek — ritkán vállalnak ekkora áldozatot, viszont matematikusnak ez nem áldozat, hanem öröm.

Így volt és van ez RADEMACHER és TOEPLITZ könyvével is. Már megjelenésekor szerte a világon igen nagy tetszéssel fogadták. Erre vall az a tankönyvként nem használt matematika könyvvel kapcsolatban ritka jelenség, hogy az első kiadás megjelenése után alig három esztendővel újabb kiadás vált szükségessé; és hogy a II. világháború végéig ezt a könyvet többször már nem adták ki Németországban, abban a hadikészülődések, majd a háborús események mellett főként annak volt nagy szerepe, hogy a szerzőknek a fasizmus hatalomra jutása után emigrálniok kellett. Már az első kiadás bírálói is nagyon elismerőleg nyilatkoztak a könyvről, amelyet hamarosan más nyelvekre is lefordítottak. A könyv hatása így egyre nagyobb lett. Ez a hatás az elmúlt negyedszázad alatt nem hogy csökkent volna, hanem mindinkább növekedett.

Hazánkban szintén csakhamar felismerték RADEMACHER és TOEPLITZ könyvének értékeit, és még a felszabadulás előtt a németül nemtudók számára is hozzáférhetővé akarták tenni. Ám a fordítás engedélyezését kérő levélre a Springer Kiadóvállalat akkori vezetői azt válaszolták, hogy nem látják jónak a magyar kiadás megjelenését, „mert a szerzők nem árják, és jelenleg a birodalom határain kívül tartózkodnak".

A tervezett fordításból így akkor nem lett semmi. Ennek ellenére a RADEMACHER—TOEPLITZ (ahogyan röviden idézni szokták) témái közül egyre több terjedt el, főként a középiskolai tanárság és diákság körében. Ebben nemcsak a könyv alapján tartott előadásoknak volt szerepük, hanem annak a körülménynek is, hogy magyar szerzők egyre többet merítettek népszerű matematika könyvük ill. tankönyvük írásakor a RADEMACHER—TOEPLITZből. Nem kétséges, hogy helyesen tették. Ezek a részek mindig értékes gondolatokkal és módszerekkel gazdagították a matematika könyveket s így matematika-tanításunkat is.

Ismertetésünk során fentebb kiemeltük a könyv néhány, didaktikailag is igen jól felépített fejezetét. A szerzők láthatóan nagy gonddal és szeretettel gyűjtötték össze és dolgozták ki a többi előadás anyagát is, úgyhogy az eredeti könyv egyik kiadásában sem igen lehet kivetni valót találni. Ezt bizonyítja pl. az is, hogy a második kiadás mindössze csekély változást mutat az elsővel szemben: a 8. előadás eredeti témáját (Az egyenes kúp síkmetszetei) a szerzők néhány egyszerűbb, de mégis kevésbé ismert kombinatorikai problémával cserélték ki, továbbá a 6. előadást egy egyszerű, eddig még nem közölt bizonyítással egészítették ki, mely jól ideillett. Mindennek ellenére a könyv egyes fejezetei nem egyformán értékesek. Talán legkevésbé sikerült a 11.: Vajon egy számot csak egyféleképpen lehet törzstényezőkre bontani? Ebben a fejezetben annak szemléltetésére, hogy valamely szám törzstényezős felbontása nem magától értetődően egyértelmű, más tartományokba tartozó számok hasonló felbontásáról is szó van. Ilyen tartomány pl. az $a+b\sqrt{6}$ alakú számoké, ahol a és b bármely két egész számot jelent. Ebben a tartományban vizsgálja a könyv példaképpen a 6 felbontását, és többek között a következő megállapítás teszi: „$6=2\cdot 3$ tehát (ebben a tartományban) nem két, hanem *négy*, tovább már nem bontható tényezőre esik szét, mégpedig:

$$6=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})."$$

Ez a megállapítás csak akkor helytálló — amint erre TOLNAI Jenő volt szíves felhívni figyelmünket — ha eltekintünk az ún. nem-valódi osztóktól, amilyen a természetes számok körében az 1, az egész számok körében az 1 és a -1, a szóbanforgó tartományban pedig az $5+2\sqrt{6}$ és az $5-2\sqrt{6}$, valamint ezek pozitív egész kitevős hatványai. (Könnyű meggyőződni róla, hogy

$$(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=1.)$$

A könyv mentségéül szolgál, hogy e fejezet 2. pontjának végén van egy kevéssé konkrét értelmű mondat, amelybe kellő jóindulattal bele lehet érteni, hogy a kifogásolt állítást a szerzők is a szükséges kiegészítéssel ellátva gondolták, de nem akartak foglalkozni a nem-valódi osztókkal, (amelyeknek száma végtelen sok az $a+b\sqrt{6}$ alakú számok tartományában), hogy az olvasó zavartalanul összpontosíthassa figyelmét az általuk előadottakra. Az általánosságokat tartalmazó mondatokkal kapcsolatban másutt is akad néhány kisebb kifogás, pl. az első kiadás már idézett 8. előadásának végén, miután előzőleg az ellipszis DANDELIN-féle tárgyalásával foglalkozott, ezzel zárja mondanivalóját: „Hiperbola és parabola esetén ugyanez a gondolatmenet alkalmazható minden újabb elvi nehézség nélkül." Parabola esetén ezt nem hisszük, mert a parabola nem középpontos kúpszelet, és az ellipszis DANDELIN-féle tárgyalása a vezérsugaras definícióra épül, ahol ennek a görbének mind a *két* gyújtópontja szerepet játszik.

Mindent összevéve is azonban magának az eredeti műnek kevés gyenge pontja van. Tartalmi kiválóságai mellett kiállítása is gondos, ízléses, csinos; sajtóhiba is alig akad benne. Sajnos, a fordításról sokkal kevesebb jót mondhatunk.

Az előzmények után érthetően nagy érdeklődés várta a RADEMACHER—TOEPLITZ magyar kiadását, amelyet a Tankönyvkiadó Vállalat a Középiskolai Szakköri Füzetek sorozatában 1953-ban jelentetett meg. Az első csalódást az okozta ezzel kapcsolatban, amikor kiderült, hogy ez a könyv is, mint általában a szakköri füzetek, csak 600 példányban kerül kibocsátásra, holott ezt a könyvet feltétlenül kezébe kellene adnunk minden matematika iránt érdeklődő diáknak, hogy a matematika szeretetére neveljük vele őket.

Amint azonban olvasni kezdtük a magyar kiadást, észre kellett vennünk, hogy komolyabb bajok is vannak, mint a példányszám helytelen megállapítása. Ui. a fordítás, bizony, *rosszul* sikerült: az elkövetett, meglehetősen súlyos hibák arra engednek következtetni, hogy a fordító sem a magyar, sem a német nyelv használatában nem áll szilárd talajon, emellett a fordítandó szöveg matematikai tartalmával kapcsolatban is lehettek tisztázatlan problémái. Ha nem törekedtünk arra, hogy magát a könyvet tartalmilag részletesebben ismertessük (ez ui. *röviden* megtalálható a tartalomjegyzékében, *bővebb* ismertetés pedig nyilván túlmenne a rendelkezésünkre álló kereteken), akkor még kevésbé lehet célunk felsorolni a fordítás valamennyi hibáját — ha ez egyáltalán lehetséges. Néhány jellemzőt azonban ideiktatunk igazolásul a fordítás elejéről.

Eredeti szöveg: ...,dass er hier so *weise* Beschränkung übt... A fordítás: ..., hogy itt *ilyen módon* tesz megszorítást... E helyett: ..., hogy itt ilyen *bölcs* mérsékletet tanúsít...

Eredeti szöveg: Allerdings *weder* EUKLID *noch* übrigens auch ein heutiges Buch gibt die hier folgende Lösung,... A fordítás: Mindenesetre EUKLIDESen *kívül még* egy mai könyv *is* a következő megoldást adja, ... E helyett: Mindenesetre EUKLIDES *sem*, de egyébként egyetlen mai könyv *sem* közli az itt következő megoldást,...

Eredeti szöveg: *Hermann* Amandus SCHWARZ. A fordítás: SCHWARZ *Henrik*. Hát először is: az idegen személyneveket általában nem szoktuk lefordítani, de ha a fordító mindenáron erre törekedett, akkor figyelembe kellett volna vennie, hogy a német Hermann-nak megfelelő magyar utónév Herman vagy Ármin; a Henrik utónév a német Heinrich-nek felel meg, esetleg még a Heinz-nek, de Hermann-nak semmiesetre sem.

Eredeti szöveg: Die andere Methode ist die weit einfachere: er lässt den Tanz beginnen; jeder Herr *engagiert* eine Dame, und ganz von selbst zeigt sich, ob Herren übrigbleiben oder Damen. A fordítás: A másik módszer sokkal egyszerűbb: jelt ad a tánc megkezdésére; minden férfi *foglalkoztat* egy nőt, és magától megmutatkozik, vajon férfiak vagy nők maradnak-e fölöslegben. Csak egy rövid megjegyzést: engagieren csakugyan jelent annyit is, mint alkalmazni, foglalkoztatni, de azt is jelenti, hogy (táncra) felkérni. Világos, hogy itt éppen ebben az utóbbi értelemben szerepel.

Eredeti szöveg: HILBERT griff in einer *in kurzer Zeit entstandenen*, berühmten Arbeit den ganzen Fragenkomplex in grösserer Breite an; ... A fordítás: HILBERT egyik híres munkájában — *amelyet rövid idő alatt készített* — széles területen ragadta meg az egész kérdéskomplexumot. A jószándékú magyar olvasó ugyancsak elgondolkozik rajta, hogy miért tarthatták fontosnak a könyv szerzői annak kiemelését, hogy HILBERT rövid idő alatt készítette el szóbanforgó híres munkáját. A szerzők természetesen nem is ezt írták, csak arra akartak utalni, hogy a kérdéses HILBERT-cikk rövidesen követte WIEFERICHnek a szövegben előzőleg említett munkáját. A magyar olvasó annál kevésbé gondolhat erre a kapcsolatra, mivel a fordításból, amely az akkor még Közoktatásügyi Minisztérium Iskolai főosztályának jóváhagyásával készült, teljesen hiányzik a könyv előszava, a végéről az értékes kiegészítések és megjegyzések (az előbbi mondatban említett kapcsolat is világosan kitűnik a könyv e le nem fordított befejező részéből), valamint több filozófiai és pedagógiai jellegű utalás is az egyes fejezetek szövege közben. Az ideológiai hibától való megóvásnak a fordításban megvalósított egyszerű módjánál — hogy ti. a kritikus részeket minden további nélkül kihagyták — sokkal hasznosabbnak tartottuk volna azt a megoldást, ha az eredeti szöveg megcsonkítása nélkül a kifogásolható helyeket megfelelő szerkesztői megjegyzésekkel látták volna el. Ez ellen még bizonyos anyagtakarékossági szempontok sem szólhatnak!

Visszatérve magának az elvégzett fordításnak a jellemzésére, a felsorolt néhány példából is látható, hogy e tekintetben milyen gyenge munka áll előttünk. Mert ismételten hangsúlyozzuk: az összes efféle hibát meg sem kísérelnők felsorolni. Ahogyan az utoljára felemlített konkrét eset kapcsán a fordítást olvasva elgondolkozhattunk azon, vajon mit is akartak ezzel kifejezni a szerzők, erre az egész könyv folyamán igen sokszor rákényszerülünk nemcsak történeti utalások, hanem matematikai okoskodások közben is. A fordítás általában erősen tapad az eredeti szöveghez (ez egyébként érthető, hiszen nyilvánvalóan kezdő fordítónak kezdő lektor által átnézett munkájáról van szó), ezért sokat vét a magyarosság követelménye ellen. A világos, szép szövegezésnek, amely az ilyen műnek nyilvánvalóan lényeges kelléke, és amely egyik komoly erénye az eredetinek, a fordításban kevés nyomát találhatjuk. Ugyancsak az eredeti szöveghez való túlzott ragaszkodásból erednek a matematikai okoskodást tartalmazó részek több helyütt fellelhető pongyola kifejezésmódjai is. A magyar könyv technikai kiállítása a mostanában megjelenő hasonló jellegű kiadványokhoz képest gondos munkát tükröz, bár meg kell jegyeznünk, hogy az eredeti műben ennek ellenére még mindig kevesebb a sajtóhiba, mint a fordításban.

Mindezek után az a véleményünk, hogy RADEMACHER és TOEPLITZ könyve megérdemli, hogy nagy példányszámban kerüljön a magyar olvasóközönség — elsősorban a magyar tanulóifjúság kezébe, de — jó fordításban. SZIVÁS János fordítása nem felel meg ennek a célnak. Azt sem látnók megfelelőnek, ha ezt a fordítást „kijavítanák" vagy „átdolgoznák": itt új fordításra van szükség, és az illetékeseknek jobban kell megválasztaniok a fordító személyét. Ez nem megoldhatatlan feladat, hiszen szerencsére bőven lehet matematikust találni, aki alkalmas matematikai tárgyú könyv németből magyarra fordításának elvégzésére.

Éppen ezért nagyon sajnálatosnak tartjuk, hogy az Oktatásügyi Minisztérium Középiskolai főosztályának utasítására a Tankönyvkiadó Vállalat néhány héttel ezelőtt változatlan lenyomatban kiadta a régi fordítást újabb 3500 példányban, amelyből 2500 ismét Középiskolai Szakköri Füzetként jelent meg változatlanul 6 Ft-os árban, míg 1000 példány, darabonként 10 Ft-os áron, ún. könyvárusi szabad forgalomba került. Az igaz, hogy nyilvános bírálat tudomásunk szerint még nem jelent meg RADEMACHER és TOEPLITZ könyvének magyar fordításáról, de a Tankönyvkiadó illetékesei szóban már értesülhettek arról, hogy a fordítással szemben komoly kifogások merültek fel. A jövőben a kiadók, így a Tankönyvkiadó Vállalat is, remélhetőleg jobban figyelembe veszik majd a szakvéleményeket. A Bolyai János Matematikai Társulat e tekintetben készséggel fog nekik segítséget nyújtani.

Hódi Endre

A kézirat beérkezett: 1954. XI. 29. — Példányszám: 800
Terjedelem $8^1/_4$ (A/5) ív, 11 ábra
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllősy Károly
Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54 6793 Felelős vezető: Vincze György

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Ára 7.— Ft.

Előfizetés évi 20.— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.