312.046
30
1978-82

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

30. évfolyam, 1978—1982

1-3

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1981. — 30. évfolyam 1—3. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, 1900 Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96 162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11 488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 36,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Az 1980. évi Állami Díjjal kitüntetett Gyires Béla munkáinak jegyzéke 1
Az 1980. évi Állami Díjjal kitüntetett Varga Tamás munkáinak jegyzéke 5
Erdős Pál: Néhány szokatlan, nem konvencionális, additív számelméleti problémáról 9
Révész Pál: Véletlen sorozatok stabilitásáról 15
Erdős Pál és Sárközy András: R. R. Hall egy problémájáról 23
Szász Domokos: Véletlen ponteloszlások és alkalmazásaik a megbízhatóságelméletben és a statisztikus fizikában I. 33
Tusnády Gábor: Keverékek felbontása 59
Laczkovich Miklós: Néhány megjegyzés Faber szinguláris függvényéről 69
Csirmaz László: Nem-standard programfutások és a programok helyessége 81
Brindza Béla: Az $r_w(n)$ függvények és Erdős Pál egy sejtése 127
Simányi Nándor: Algebrai invariánsok a formaelméletben 135
Fényes Tamás és Kosik Pál: Az operátortest egy algebrai differenciálegyenlet-rendszeréről .. 155
Háy Borbála: Hermite—Fejér- és Hermite —Fejér-típusú interpoláció a Laguerre-polinomok gyökein 167
Bischoff Dieter: Stabilis és balstabilis komponensű konvolúciók folytathatóságához 181
Horváth Miklós: A végtelen kicsinyek problémája a matematikában, Leibniznél 191
Tóth Gábor: Az Atiyah—Singer-indextételről IV. 211
Kelemen József: Az $ax^{2m}+by^{2n}+cz^2+dt^2=0$ diophantoszi egyenlet megoldása, ha $\sqrt{abcd}$ racionális szám 233
Fazekas Árpád és Gerják István: Schur-típusú irreducibilitási tételekről 237
Jelentés az 1981. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 261
Feladatrovat 275
Könyvismertetés 281
Új könyvek 282

AZ 1980. ÉVI ÁLLAMI DÍJJAL KITÜNTETETT GYIRES BÉLA MUNKÁINAK JEGYZÉKE

I. Tudományos közlemények

1. A korlátolt pontosságú szorzás hibahatárai. *Biztosítástudományi Szemle,* 1941. 28—34.
2. Darstellung symmetrischer regulärer Matrizen als Produkt zueinander transponierten Matrizen. *Hungarica Acta Math.* 1 (1949), 33—25.
3. Funktionensysteme mit vertauschbaren Gramschen Matrizen. *Hungarica Acta Math.* 1 (1949), 28—31.
4. Über die Faktorisation im Restklassenring mod m. *Publ. Math., Debrecen,* 1 (1949), 51—55.
5. Ein Determinantensatz. *Studii şi Cercetări Matematice.* Vol. II., Fasc. II (1951), 1—22.
6. Eine Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes. *Publ. Math., Debrecen,* 4 (1955), 43—48.
7. Anwendung von *p*-Vektoren auf derivierten Matrizen. (Varga Ottóval közös dolgozat.) *Publ. Math. Debrecen,* 2 (1951), 137—145.
8. Über vertauschbare Matrizen. *Acta Sci. Math.* 12 (1950), Pars. A, 143—145.
9. Egy másodrendű differenciálegyenlet megoldásáról. *Alk. Math. Int. Közleményei* 2 (1953), 125—133.
10. Az összegeloszlások határérték-feladata. *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1951), 741—758.
11. Verallgemeinerung eines Determinantensatzes von. J. Hunyady. *Publ. Math., Debrecen,* 2 (1952), 290—291.
12. A Cauchy-féle függvényegyenletnek elegettevő matrixok határértékéről. *Acta Universitatis Debreceniensis de Lajos Kossuth Nominatae* I (1954), 136—144.
13. Über Determinanten, deren Elemente Integrale von Funktionen sind. *Acta Universitatis Debreceniensis de Lajos Kossuth Nominatae,* III/2 (1956), 41—48.
14. Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen. *Publ. Math., Debrecen,* 4 (1956), 171—179.
15. Über die Verallgemeinerung des Smith'schen Determinantensatzes. *Publ. Math., Debrecen,* 5 (1957), 162—171.
16. Valós függvénymatrixokhoz tartozó Toeplitz-féle determinánsokról. *Acta Universitatis Debreceniensis de Lajos Kossuth Nominatae* V (1958), 145—158.
17. Über die Schranken der Eingenwerte von Hypermatrizen. *Publ. Math., Debrecen,* 7 (1960), 374—381.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

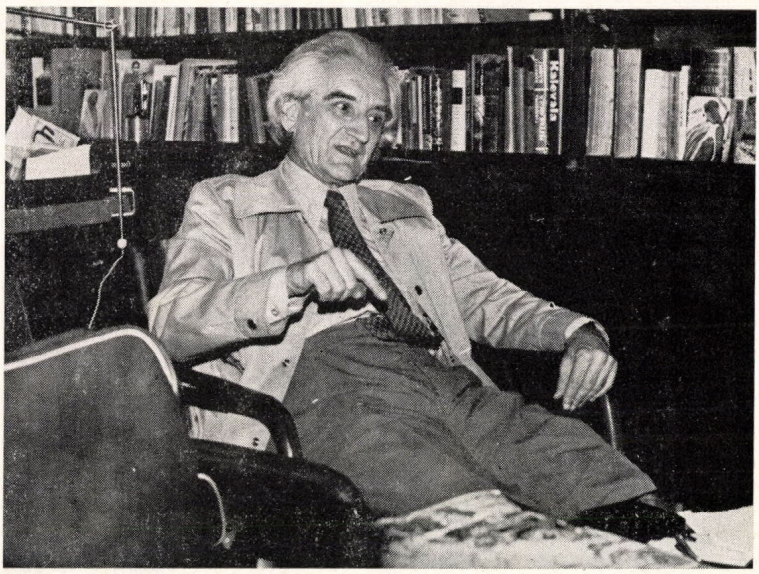
18. Eine Anwendung der verallgemeinerten Toeplitzschen Formen. *Acta Universitatis Debreceniensis de Lajos Kossuth Nominatae* VI/2 (1960), 15—19.
19. On a generalization of Wilson's theorem. *Acta Arithmetica* VI (1960), 185—191.
20. A centrális határleoszlás-tétel lokális alakjának általánosításáról. *MTA III. Oszt. Közleményei* X (1960), 469—479.
21. Über die Spuren verallgemeinerter Toeplitzschen Matrizen. *Publ. Math., Debrecen,* 8 (1961), 93—116.
22. A generalization of a theorem of Szegő. *Publ. Math. Hung. Acad. Sci.* VII (1962), 43—51.
23. Eine Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* XIII (1962), 69—80.
24. Eine extremaleigenschaft positiv-definiter Hermitescher Matrizes. *Publ. Math., Debrecen,* 11 (1964), 175—182.
25. Toeplitz matrizes in quasi Hilbert-algebras. I—II. *Publ. Math., Debrecen,* 14 (1967), 402—413, 15 (1968), 211—215.
26. *Függvénymatrixokkal generált Toeplitz-féle matrixokról.* Doktori értekezés tételei. TMB, Budapest, 1961, 1—11.
27. On the uncertainty of matrix-valued predictions. *Proc. Coll. Information Theory.* Budapest, 1967. 253—268.
28. Mathematische Modellen in der Biologie. *Proc. Coll. Biometrics.* Budapest, 1969, 15—21.
29. Discret distributions and permanents. *Publ. Math., Debrecen,* 20 (1973), 95—106.
30. On the permanent-derivatives of doubly stochastic matrices. *Demonstratio Math.* VI. Part 2 (1973), 657—663.
31. On limit distribution theorem of linear order statistics. *Publ. Math., Debrecen,* 21 (1974), 95—112.
32. A question about the randomized blocks. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 9. Budapest, 1972, 277—288.
33*a*. The construction of linear order statistics by the help of pseudo random numbers. *Publ. Math. Debrecen,* 21 (1974), 225—231.
33*b*. The construction of linear order statistics by the help of pseudo random numbers. *Proc. of Computer Sci. Conference,* Székesfehérvár, 1973, 275—283. SZTAKI.
34. Linear order statistics in the case of sample with non-independent elements. *Publ. Math., Debrecen,* 22 (1975), 47—63.
35. Normális határeloszlású lineáris rendstatisztikákról. *Alk. Mat. Lapok* 1 (1975), 65—72.
36. A characterization of normal distribution. Statistical distributions in scientific work. Vol. 3.: *Characterizations and applications.* Dordrecht — Holland/Boston—USA, 1975. 211—219.
37. Normal limit-distributed linear order statistics in the case of sample with non-independent elements. *Shankya* 39 (1977), Series A, 11—20.
38. On an extension of a theorem of Linnik and Zinger. *Advances in Applied Probability* 7 (1975), 786—800.
39. On a matrix-equation over a commutative Euclidean ring. *Publ. Math., Debrecen,* 23 (1976), 11—13.
40a. Limit distribution of linear order statistics generated by matrixpower residues mod 1. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 13. Budapest, 1976, 59—64.
40b. Limit distribution of linear order statistics generated by matrix-power residues modulo one. *Bull. of International Statistical Institute.* Proc. of 40th Session. Vol. III. Warszaw, 1975, 336—340.
41. Constant regression of quadratic statistics on the sample mean. *Analysis Mathematica* 3 (1977), 51—53.
42a. On the asymptotic behaviour of the generalized multinomial distributions. *Publ. Math., Debrecen,* 34 (1977), 163—171.
42b. On the asymptotic behaviour of the generalized multinomial distributions. *Recent Development of Statistics.* North-Holland Publ. Co., 1977, 461—470.
43. Characterization of normal distribution by constant regression of quadratic statistics on linear statistics. *Periodica Math. Hung.,* Vol. 9 (1978), 109—113.
44. On inequalities of permanents. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai,* 18 (1976), 471—484.
45. On inequalities concerning matrices of permanents. *Linear and Multilinear Algebra,* Vol. 5 (1978), 1—4.
46. On weak convergence of linear rank statistics. Mathematical Statistics. *Banach Center Publications,* Vol. 6, 141—149. Warsaw (1980).
47. On inequalities concerning the permanent of matrices. *Journal of Comb., Inf. and System Sci.,* Vol 2 (1977), 67—73.
48. On a generalization of Stirling's numbers of the first kind. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai,* 21 (1977), 123—136.
49. Constant regression of quadratic statistics on the sample mean. II. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai,* 21 (1977), 137—152.

50. On inequalities concerning the permanents of generalized doubly stochastic matrices. *Linear and Multilinear Algebra,* Vol. 6. Megjelenés alatt.
51. On a characteristic property of the generalized multinomial distributions. *Multivariate Analysis* V. North Holland Publ. Co., 1980, 321—326.
52. On the multinominal distribution functions generated by stochastic matrices and applications. *Statistical Distributions in Scientific Work,* Vol. 4., 1981. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht—Boston —London. 231—242.
53. The common source of several inequalities concerning doubly stochastic matrices. *Publ. Math., Debrecen,* 27 (1980), 291—304.
54. Exetika m'ena theorema toy typoy toy Van der Waerden. *Ellenike Mathematike Etaipeia,* Athena, Dialexis—7. Tomos 2, 12—13.
55. Constant regression of quadratic statistics on the sum of random variables defined on a Markov-chain. *Contribution to Probability.* Academic Press, New York—London—Sidney—San Francisco, 1981. 255—266.
56. Stochastic processes with increments defined on a Markov chain. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai,* 24 (1978), 93—108.
57. On an extension of the theorem of Marcinkiewicz. *Publ. Math.,* Debrecen, 29 (198), megjelenés alatt.
58. Linear forms in random variables defined on a homogeneous Markov chain. *The first Pannonian Symposium on Mathematical Statistics.* Springer Verlag, 1979, 110—121.

II. Megemlékezések, ismertetések

1. Rados Gusztáv. *Műszaki nagyjaink.* 3. kötet. Budapest, 1967. 285—305.
2. Jordan Károly élete és munkássága. *Alk. Mat. Lapok* 1 (1975), 275—298.
3. Dienes Pál. *Matematikai Lapok,* 24 (1973), 211—218.
4. Károly Jordan. Jordan Károly „*Chapter on the classical calculus of probability*" c. könyvéhez előszó. Akad. Kiadó. Budapest, 1972, V—XIII.
5. Alfréd Rényi (1920—1970). *Publ. Math., Debrecen,* 17 (1970, 1—17.)
6. Tudományos munka a KLTE Természettudományi Karán. *Felsőoktatási Szemle* 7 (1958), 400—409.
7. O výzkumech v teorii pravděpodobnosti provedených v Matematickém ustavu University L. Kossutha Debrecině. *Druzba peti bratskych Universit.* Praha, 1966. 112—118.
8. Об исследованиях по теории вероятностей, проведенных в институте математики Дебреценского Университета им. Кошута. *Druzsba bratszkih iniverszityetov.* Kiev, 1966. 21c—227.
9. A matematikai statisztika alkalmazása a vaskohászatban. (Közös cikk Gárdonyi Sándorral.) *Bányászati és Kohászati Lapok,* 102 (1969), 285—291.
10. Kutató és felsőfokú oktató munka a matematika területén az elmúlt 25 év alatt. *Az MSZMP Hajdú-Bihar megyei Bizottsága és Oktatási Igazgatóságának kiadványa a debreceni jubiláris időszakról.* Debrecen, 1970. I. 360—364.
11. Számítástechnikai Központ a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen. *Automatizálás,* VI (1973), 12, p. 15.
12. Szerkesztette a következő könyvet: Analytic function method in probability theory. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 21 (1980). North—Holland Publ. Co.

AZ 1980. ÉVI ÁLLAMI DÍJJAL KITÜNTETETT VARGA TAMÁS MUNKÁINAK JEGYZÉKE



1949

1. *Első könyvünk* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
2. *Második könyvünk* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
3. *Harmadik könyvünk* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
4. *Negyedik könyvünk* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
5. *Számolás és mérés* VII. (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp. 1950.

1950

6. *Számtan* V. (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
7. *Számtan* VI. (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
8. *Számtan* VII. (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp. 1951.

1951

9. *Matematika a tanítóképző intézetek IV. osztálya számára* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.

1952.

10. *Érettségi matematikai összefoglaló*, Tankönyvkiadó Bp. 1953.

1953

11. *Mértan* VII. (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
12. *Használd a matematikát* (társszerzőkkel), Művelt Nép Kiadó Bp.
13. *A mértan tanítása az általános iskolában* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.

1954

14. *Mértan* VIII. (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
15. *Számtan-mértan.* Összefoglaló általános iskolák 8. osztálya számára (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.

16. *Matematika a tanítóképzők I. osztálya számára* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
17. *Algebrai feladatok gyűjteménye* (P. A. Laricsev feladatgyűjteménye alapján), Tankönyvkiadó Bp.
18. *Népszerű algebra,* Művelt Nép Kiadó Bp. 1956.

1956

19. *Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.
20. *Kis geometria,* Művelt Nép Kiadó Bp.
21. *Számtan V. — kísérleti tankönyv* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.
22. *Számtan VI. — kísérleti tankönyv* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.

1958

23. *Számtan és mértan V. — kísérleti tankönyv* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.

1959

24. *Matematika mezőgazdasági technikumok II. osztálya számára* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp. 1960.

1960

25. *Matematikai logika kezdőknek* I., Tankönyvkiadó Bp. (A II. kötet 1966-ban jelent meg) — megjelent szlovák, német, francia, spanyol, olasz, japán fordításban.

1963

26. *A matematika tanítása* (egyetemi jegyzet), Tankönyvkiadó Bp.
27. *A matematika tanítása, szemelvénygyűjtemény* (egyetemi jegyzet), Tankönyvkiadó Bp.

1966

28. *Matematikai logika kezdőknek* II., Tankönyvkiadó Bp.

1968

29. *Matematikai munkalapok kísérleti 1. osztályok számára,* Tankönyvkiadó Bp.

1969

30. *Matematikai munkalapok kísérleti 2. osztályok számára,* Tankönyvkiadó Bp.
31. *Találja ki, milyen számra gondoltam!,* 1 milliméter = 1000 kilométer (megjelent a „Matematikai érdekességek" című kötetben), Gondolat Kiadó Bp.
32. *Osztójáték* (megjelent az „Élő matematika" című kötetben), Tankönyvkiadó Bp.

1970

33. *Matematikai munkalapok kísérleti 3. osztályok számára* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.

1971

34. *Matematikai munkalapok kísérleti 4. osztályok számára* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
35. *Teaching school mathematics* (társszerzővel), Penguin books, UNESCO

1972

36. *A matematika tanításának várható fejlődése* (megjelent „A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése" című kötetben), Tankönyvkiadó Bp.
37. *Korszerű matematikatanítás felé* (megjelent a „Néhány hazai és külföldi kísérlet" című kötetben), Tankönyvkiadó Bp.
38. *Játsszunk matematikát!* 1. (társszerzőkkel), Móra kiadó Bp. (A 2. kötet 1976-ban jelent meg) — megjelent német, orosz fordításban.
39. *Zufall oder Strategie* (társszerzőkkel), Klett Stuttgart — megjelent francia, lengyel fordításban

1973

40. *Combinatoire, statistique et probabilités de 6 á 14 ans* (társszerzővel), O.C.D.L. Paris
41. *Les probabilités á l'école* (társszerzővel) — megjelent orosz, német, olasz, spanyol fordításban.

1974

42. *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 1. osztályos anyagának tanításához* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
43. *Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 1. osztályos anyagának tanulásához* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.

1975

44. *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos anyagának tanításához* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
45. *Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos anyagának tanulásához* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.
46. *Zwischen Unmöglich und Sicher* (társszerzővel), Herder Freiburg, Basel, Wien.

1976

47. *Játsszunk matematikát!* 2. (társszerzőkkel), Móra Kiadó Bp.

1977

48. *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanításához* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
49. *Matematika 1—4. oszt.* (társszerzőkkel) — megjelent „Az általános iskolai nevelés és oktatás terve" 1—2. kötetében, Tankönyvkiadó Bp.
50. *Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.

1978

51. *Matematika 5—8. oszt.* (társszerzőkkel) — megjelent „Az általános iskolai nevelés és oktatás terve" 3. kötetében, Tankönyvkiadó Bp.
52. *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
53. *Matematika munkalapok.* Általános iskola 1. oszt. (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.

1979

54. *Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához* (társszerzőkkel), Tankönyvkiadó Bp.
55. *Matematika-munkalapok.* Általános iskola 2. oszt. (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.
56. *Tantervi útmutató, matematika 6. osztály* (társszerzővel), Tankönyvkiadó Bp.

NÉHÁNY SZOKATLAN, NEM KONVENCIONÁLIS, ADDITÍV SZÁMELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

ERDŐS PÁL

Az olvasó joggal kérdezhetné — miért foglalkozik a szerző nem konvencionális problémákkal, mikor olyan sok az érdekes és megoldatlan konvencionális probléma? Talán a legjobb válasz Siegel egy félig tréfás megjegyzése, melyet egy kb. 40 év előtti beszélgetésben tett: Miért keletkezett az általános topológia? Válasza: A háromdimenziós topológia túl nehéz volt.

MacMahon definiálja a következő sorozatot: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 15 ... rekurzióval: m_n a sorozat n-edik tagja az a legkisebb szám, mely nem bontható fel egymásután következő m_i-ek összegére. E sorozat aszimptotikus viselkedéséről úgyszólván semmit se tudunk, Andrews sejti, hogy

$$m_n = (1+o(1))\frac{n\log n}{\log\log n}. \tag{1}$$

Megjegyzi, hogy (1) bizonyítása nem látszik könnyűnek és hogy a következő jóval gyengébb sejtések se triviálisok:

$$m_n n^{-1} \to \infty, \quad m_n n^{-1+\varepsilon} \to 0 \tag{2}$$

minden $\varepsilon > 0$-ra. Bizonyára igaz a jóval gyengébb

$$m_n n^{-2} \to 0 \tag{3}$$

de nekem még (1) bizonyítása se sikerült, lehet hogy itt egy triviális ötletet elnézek.

Felvethető még a következő probléma: Legyen $u_1 < u_2 < \dots$ egész számok oly végtelen sorozata, melyre egyetlen u_k se bontható fel egymás után következő u-k összegére. Valószínűleg igaz, hogy ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} u_n n^{-1} = \infty \quad \text{sőt} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{u_n < x} \frac{1}{u_n} = 0. \tag{4}$$

Könnyű belátni azonban, hogy $\liminf u_n n^{-1} < \infty$ lehetséges.

Tegyük fel mármost, hogy $v_1 < v_2 < \dots$ olyan sorozat, hogy egyetlen v se összege különböző v-knek (ezeknek itt már nem kell egymás után következőknek lenni). Ekkor bebizonyítottam, hogy $\sum \frac{1}{v_i} < \infty$. [1]

Legyen $u_1 < u_2 < \dots$ végtelen sorozat. Jelölje $f(n)$ az

$$n = \sum_{i=t_1}^{t_2} u_i \tag{5}$$

megoldásainak számát, azaz $f(n)$ adja n előállításainak számát egymás után következő u-k összegére. Régen ismert és könnyű bebizonyítani, hogy ha $u_i=i$, akkor $f(n)$ n páratlan ontóinak száma. Régi problémám, hogy van-e oly $u_1<u_2<\ldots$ sorozat, melyre $f(n)\to\infty$. Sajnos e könnyűnek látszó kérdésre nem tudok válaszolni, sőt még azt se tudom eldönteni, vajon van-e olyan $u_1<\ldots$, melyre $f(n)>1$ véges sok n kivételével.

L. Moser-rel felvetettük a következő kérdést: Legyen $u_i=p_i$ (az i-edik prímszám). Igaz-e, hogy ebben az esetben $\limsup f(n)=\infty$? Igaz-e, hogy azon n számok alsó sűrűsége, melyekre $f(n)>0$ pozitív. Ezen kérdések egyikére se tudunk válaszolni.

Legyen t_n az a legkisebb szám, melyre van oly $1=w_1<\ldots<w_{t_n}\leqq n$, hogy minden $1\leqq m\leqq n$ egymás után következő w_i-k összegére bontható. t_n-re nem tudok jó alsó és felső becslést. $t_n=0(n)$ könnyen belátható, de nem tudtam bebizonyítani, hogy $t_n/n^{1/2}\to\infty$, de valószínűleg elnézek valamit, mert ez nem látszik nehéznek. Ha $w_1<w_2<\ldots$ végtelen sorozat, melyre minden elegendő nagy szám egymás után következő w-k összege, akkor L. Moser egyszerű leszámolással kimutatta, hogy végtelen sok n-re $w_n<2n\log n$ és talán ez a becslés már nem is javítható, de egyelőre azt se látom, hogy van oly sorozat, melyre $w_n/n\to 0$.

Még egy kérdést szeretnék e területről említeni.

Jelöljük az $1<a_1<\ldots<a_k\leqq n$ sorozatot A-val $f(A, n)$ legyen az a legkisebb n-nél nagyobb szám, mely nem írható $a_i+a_{i+1}+\ldots+a_j$ alakban.

Legyen

$$F(n)=\max_A f(A, n).$$

Igaz-e, hogy $F(n)<Cn$, ahol C egy abszolút constans? Talán $F(n)$-et pontosan meg lehet határozni és ez talán nem is lesz nehéz, de egyelőre e kérdéssel semmire se mentem. Jegyezzük meg, hogyha $a_i=i$ és $2^{k-1}\leqq n\leqq 2^k$, akkor $f(A, n)=2^k$.

Benkowski egy számot furcsának (weird) nevez, ha $\sigma(n)>2n$ ($\sigma(n)$ n osztóinak összege), de n nem bontható fel n különböző valódi osztóinak összegére, és megjegyzi, hogy a legkisebb furcsa szám 70, és hogy nem ismeretes, hogy van-e páratlan furcsa szám. Egy közös cikkben [2] Benkowskival vizsgáltuk e furcsa számok tulajdonságait. A legérdekesebb megoldatlan problémánk a következő: Van-e olyan C konstans, hogyha $\sigma(n)/n>C$, akkor n nem lehet furcsa, azaz n felbontható különböző valódi osztóinak összegére.

Legyenek $1=d_1<d_2<\ldots<d_{\tau(m)}=m$, m egymás után következő osztói. $g(n)=m$ az a legkisebb szám, melyre $n=\sum_{i=1}^{t} d_i$ alakban írható. Minthogy $\limsup \frac{\sigma(m)}{m}=\infty$ azonnal következik, hogy $\liminf g(n)/n=0$.

Bizonyára igaz, hogy

$$\limsup \frac{g(n)}{n}=\infty,$$

de ennek bizonyítása egyelőre nem sikerült.

Vázolni fogjuk a következő tétel bizonyítását.

Tétel. *Minden $\eta>0$-hoz van oly $\varepsilon>0$, hogy azon $n<x$ számok száma, melyekre $g(n)<\varepsilon n$ kisebb, mint ηx.*

Lehetséges, hogy a tétel élesíthető. Talán igaz, hogy $g(n)/n$-nek van folytonos eloszlásfüggvénye $h(\alpha)$ $h(0)=0$, $h(\infty)=1$, de ezt egyelőre nem tudom bebizonyítani.

$g(n)$-re nem tudok jó felső becslést. $g(n)<cn^4$ rögtön következik Vinogradov azon tételéből, hogy minden $n>n_0$ felbontható három vagy négy különböző prímszám összegére, csak azt kell még megjegyeznünk, hogy e prímek mind $n^{1/2}$-nél nagyobbnak választhatók. E becslés nyilván nagyon durva és jelenleg még csak plauzibilis sejtésem sincs $\max_{n\leqq x} g(n)$ valódi nagyságrendjére. Talán minden $\varepsilon>0$-ra $g(n)<n^{1+\varepsilon}$, ha $n>n_0(\varepsilon)$, mert $g(\sigma(n))\leqq n$ (de a $\sigma(n)$ alakú számok sűrűsége 0). Biztosra veszem, hogy $g(\sigma(n))=n$ nagyon sok n-re fennáll. Legyen pl. $\sigma(n)>\sigma(m)$ minden $m<n$-re. Ekkor nyilvánvaló, hogy $g(\sigma(n))=n$, így $g(\sigma(n))=n$ fennáll végtelen sok n-re.

Most még néhány, az eddigi kérdésekkel nem összefüggő problémát akarok említeni. Az első két probléma talán kissé mesterkélt, de viszont a megoldás nem reménytelen. Legyen $1\leqq a_1<\ldots<a_k\leqq n$. Keresendő $\max k$, ha még feltesszük, hogy $(a_j-a_i)\nmid a_j$, minden $1\leqq i<j\leqq k$ esetén. Könnyű belátni, hogy $\max k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ugyanis feltételünk teljesül, ha az a_i-k páratlan számok és $a_{i+1}>1+a_i$ minden i-re. Tegyük fel azonban, hogy $(a_j-a_i)\nmid a_j$ csak akkor van feltételezve, ha $a_j-a_i\geqq t>1$. Mi mondható ki ebben az esetben $\max k$-ra? Ha $t=2$, akkor már

$$\max k > \frac{n}{2}+c\log n \tag{6}$$

lehetséges. Legyenek ugyanis az a-k a páratlan számok és 2 páratlan hatványai. Könnyű belátni, hogy ebben az esetben $a_j-a_i\geqq 2$ esetében $(a_j-a_i)\nmid a_j$. Ruzsa Imre viszont igen szellemes bizonyítást adott, hogyha valamilyen t-re $(a_j-a_i)\nmid a_j$, ha $a_j-a_i\geqq t$, akkor

$$\max k < \frac{n}{2}+c_t\frac{n}{\log n}. \tag{7}$$

Kívánatos lenne a maradéktag pontosabb becslése.

Hindmannal vizsgáltuk a következő kérdést:
Legyen $1\leqq a_1<\ldots<a_k\leqq n$. Mekkora k maximuma, ha feltesszük, hogy nincsenek u és v pozitív egész számok, melyekre $u+v$ és uv mindketten $a-k$.

Könnyű belátni, hogy $\max k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Ugyanis a páratlan számok kielégítik feltételünket és ha $a_{i+1}=a_i+1$, akkor $a_i=u$, $v=1$ lehetne. Mekkora k maximuma, ha feltesszük még, hogy u és v mindketten nagyobbak, mint $t-1$? $t=2$ már nem látszik érdektelennek. Freud és Ruzsa megjegyzik, hogy k lehet nagyobb, mint $\frac{n}{2}+c\sqrt{n}$, de egyenlőre jó felső becslés k-ra nincsen.

Most még néhány prímszámokra vonatkozó sejtést említek, melyeknek elintézése a közel- (és távoli) jövőben nem remélhető.

Legyen $p_1<p_2<\ldots$ az egymás után következő számok. Legyen $d_k=p_{k+1}-p_k$.

$$D(X)=\max_{p_k<x} d_k.$$

Cramer egy klasszikus sejtése szerint

$$\limsup_{k\to\infty} d_k/(\log k)^2 = 1. \tag{8}$$

Talán igaz a következő valamivel élesebb sejtés:

$$\lim D(x)/(\log x)^2 = 1. \tag{9}$$

Talán igaz, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \max_{p_k<x} d_k \cdot d_{k+1}/(D(x))^2 = 0? \tag{10}$$

(10) bebizonyítása talán nem annyira reménytelen, mint (8) és (9) eldöntése.

A prímszámtételből következik, hogyha h nem túl kicsi x-hez képest, akkor ($\pi(x)$ a prímszámok száma x-ig).

$$\pi(x+h)-\pi(x) = 1+o(1)h(\log x)^{-1}. \tag{11}$$

Igaz-e (11), ha csak azt tesszük fel, hogy $h/_{D(X)}\to\infty$? A válasz bizonyára tagadó. De azt se tudom bebizonyítani, hogy (11) nem állhat fenn minden $h>(1+c)D(X)$-re, ahol $c>0$ tetszőleges. H. Meier egy levele szerint (11) csak akkor állhat fent ha $h > (\log x)^{1+\varepsilon}$.

Ugyanezen kérdések felvethetők a prímszámok helyett más sorozatokra is, például a négyzetmentes számokra. Azonban ezen kérdésekre se tudok válaszolni. Jelölje $Q(x)$ a négyzetmentes számok számát x-ig. Könnyű belátni, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van oly $h_0=h_0(\varepsilon)$, melyre, ha $h>h_0$, akkor

$$Q(x+h)-Q(x) < h\left(\frac{6}{\pi^2}-\varepsilon\right) \tag{12}$$

(12) azonnal következik az Eratosztenészi szitából. Hardy és Littlewood bebizonyították, hogy

$$\pi(x+h)-\pi(x) < \frac{ch}{\log h} \tag{13}$$

teljesül, alkalmas c constansra. (13) könnyen következik Brun módszeréből. Talán (13) fennáll minden $c>1$-re ha $h>h_0(c)$. Sőt talán elegendő nagy c-re [3]

$$\pi(x+h)-\pi(x) < \frac{h}{\log h}+c\frac{h}{(\log h)^2}. \tag{14}$$

Hensley és Richards kimutatták, hogyha (14) igaz, akkor nem javítható, ugyanis elegendő kis c-re már nem igaz.

Biztosra vehető, hogy

$$\limsup\left(\pi(x+\log x)-\pi(x)\right) \to \infty, \tag{15}$$

de (15) bizonyítása is reménytelennek látszik. Talán igaz, hogy minden $t>(\log x)^{1+\varepsilon}$-ra

$$\pi(x+t)-\pi(x) < \left(1+0(1)\right)\frac{t}{\log x}. \tag{16}$$

(16) bizonyos mértékben (11)-hez analóg, de (16) bizonyítására vagy cáfolására egyelőre nincs kilátás.

Talán a következő kérdések eldöntése nem reménytelen. Legyen

$$1 = a_1 < \ldots < a_{\varphi(n)} = n-1$$

az n-hez relatív prím számok sorozata. Jelölje

$$J(n) = \max (a_{k+1} - a_k).$$

$J(n)$ Jacobstahl után, ki e függvényekkel foglalkozott. Jelölje továbbá $\varphi_n(a, b)$ az (a, b) intervallumba eső n-hez relatív prímszámok számát. Igaz-e, hogyha $(b-a)/_{J(n)} \to \infty ((b-a) > J(n)(1+c)?)$, akkor

$$\varphi_n(a, b) = (1+o(1))(b-a)\frac{\varphi(n)}{n} ? \tag{17}$$

(17) eldöntése talán nem teljesen reménytelen.

Legyen $n_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_k$. Valószínűnek látszik, hogy

$$\max (a_{k+1} - a_k)(a_k - a_{k-1})/_{J(n_k)^2} \to 0, \tag{18}$$

ha $k \to \infty$, (18) talán nem lesz nehéz, bár egyelőre nem látom. [4].

* * *

Most vázoljuk tételünk bizonyítását. Nyilván elég lesz bizonyítanunk, hogy azon $\frac{x}{2} < n < x$ számok száma, melyek

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_t, \quad d_i | m, \quad m < \frac{x}{k}, \quad 1 = d_1 < \ldots < d_{\tau(m)} = m \tag{19}$$

alakban írhatók, kisebb, mint εx, ha $k > k_0(\varepsilon)$ elegendő nagy.

Nyilván, ha $m < \frac{x}{k}$ egyáltalán előállít (19) alakú n-et, akkor $\sigma(m) > \frac{k}{2} m$. Egy régebbi tételem szerint ezen m számok száma kisebb, mint [5]

$$\frac{x}{k} \cdot \exp(-\exp ck). \tag{20}$$

(20)-ból tételünk azonban még nem következik, mert egy ilyen m sok n-et állíthat elő (19) alakban és ezért további okoskodásra van szükség.

Legyen tehát d_{i_m} m legkisebb osztója, melyre

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{i_m} > \frac{x}{2}, \quad m < \frac{x}{k}, \quad \sigma(m) > \frac{x}{2}. \tag{21}$$

Akkor nyilván m legfeljebb

$$\frac{m}{d_{i_m}} = l_m$$

n számot állíthat elő (19) alakban (hiszen m-nek nyilván legfeljebb ennyi d_{i_m}-nél nagyobb osztója van). Tételünk nyilván következne, ha ki tudnánk mutatni, hogy

$$\sum_m{}' l_m < \eta x, \tag{22}$$

ahol $\sum'$-ben az összegezés azon m-ekre van kiterjesztve, melyekre $m < \frac{x}{k}, \sigma(m) > \frac{x}{2}$ fennáll. Az [5]-ben használt módszer segítségével nyerjük a következő

Lemmát. *Azon* $m<y$ *számok száma, melyekre*

$$\sum_{d_i<\frac{m}{t}} d_i > m \tag{23}$$

kisebb, mint $\frac{cy}{t^4}$.

A lemma bizonyítását itt nem részletezzük. Elsősorban is eléggé komplikált és csak az [5]-ben előforduló ötleteket használja. Legyen a (23)-at kielégítő m-ek száma $y \cdot f(t, k)$. Még nem sikerült megtalálnom $f(t, k)$-ra való legjobb felső becslést.

Lemmánkból (20) felhasználásával könnyen következik (22).

Lehet, hogy tételünk igaz marad, ha $g(n)$-et $g_1(n)$-nel helyettesítjük, ahol $g_1(n)=m$ az a legkisebb szám, melyre $n=\sum_{i=t_1}^{t_2} d_i$ alakba írható, de ezt egyelőre nem sikerült bebizonyítani. Biztosra veszem, hogy

$$\liminf g_1(n) g(n)^{-1} = 0, \tag{25}$$

de (25)-öt se sikerült bebizonyítani. Legyen mármost $g_2(n)=m$ az a legkisebb szám, melyre n előállítható, mint m különböző osztóinak összege. Könnyű belátni, hogy $g_2(n)$ az a legkisebb szám, melyre $\sigma(g_2(n)) \geqq n$ és így természetesen $\lim \frac{g_2(n)}{n}=0$.

Jelölje l_m m legkisebb valódi osztóját, melyre

$$\sum_{\substack{d_i \geqq l_m \\ d_i \mid m}} d_i \geqq m.$$

Ha $\sigma(m)<2m$ (azaz m deficiens), akkor $l_m=1$. Jelölje α_k azon m számok sűrűségét, melyekre $l_m=k$. Bebizonyítottam, hogy α_k minden k-ra létezik. Be tudom bizonyítani, hogyha $k>k_0(\varepsilon)$ akkor

$$\exp-(k^{1/(\log\log k)^{1-\varepsilon}}) < \alpha_k < \exp-(k^{1/(\log\log k)^{1+\varepsilon}}) \tag{26}$$

(26) bizonyítása nem egészen egyszerű és itt nem részletezzük.

IRODALOM

[1] Erdős Pál, Számelméleti megjegyzések III, *Mat. Lapok* 13 (1962), 28—38. Élesebb eredmény található: E. Levine and J. O'Sullivan, An upper estimation for the reciprocal sum of a sum-free sequence, *Acta Arithmetica* 34 (1979), 9—24.

[2] S. T. Benkowski and P. Erdős, On weird and pseudoperfect numbers, *Math. of Computation,* 28 (1974), 617—623.

[3] D. Hensley and Ian Richards, Primes in intervals, *Acta Arithmetica,* 25 (1974), 375—391. Továbbá P. Erdős and Ian Richard, *Monatshefte für Math.* 83 (1977), 99—112.

[4] P. Erdős, On the integers relatively prime to n and on a number-theoretic function considered by Jacobstahl *Math. Scandinavica,* 10 (1962), 163—170.

[5] P. Erdős, Some remarks about additive and multiplicative function, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 527—537.

О НЕСКОЛЬКИХ НЕОБЫЧНЫХ, НЕКОНВЕНЦИОНАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМАХ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

П. ЕРДЕШ

ON SOME UNUSUAL, NON-CONVENTIONAL PROBLEMS IN ADDITIVE NUMBER THEORY

P. ERDŐS

VÉLETLEN SOROZATOK STABILITÁSÁRÓL

RÉVÉSZ PÁL

1. Bevezetés

Néhány évvel ezelőtt Erdős Pállal együtt ([1], [2]) megvizsgáltuk azt a kérdést, hogy egy n hosszúságú véletlen fej—írás sorozatban milyen hosszú a leghosszabb, csak fejet tartalmazó blokk. A feladat és az eredmények pontos megfogalmazását elősegíti a következő jelölések bevezetése:

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = 1/2$$

eloszlással, továbbá legyen $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$,

$$I(N, K) = \max_{0 \leqq n \leqq N-K} (S_{n+K} - S_n) \quad (K \leqq N).$$

Végül jelentse Z_N a legnagyobb egész számot, amelyre

$$I(N, Z_n) = Z_n.$$

Itt természetesen $X_i = 1$, ha az i-ik pénzfeldobás eredménye fej, S_k jelenti a fejek számát az első n dobásban és Z_n a leghosszabb tiszta fej blokk hossza.

Erdőssel közös eredményeink így fogalmazhatók.

1. Tétel. *Legyen* ε *tetszőleges pozitív szám. Ekkor* 1 *valószínűséggel véges sok* N *kivételével*

$$Z_N \geqq [\log N - \log\log\log N + \log\log e - 2 - \varepsilon] = \alpha_1(N, \varepsilon) = \alpha_1,$$

ahol a log *kettő alapú logaritmust jelent.*

2. Tétel. *Legyen* ε *tetszőleges pozitív szám. Ekkor* 1 *valószínűséggel végtelen sok* N*-re*

$$Z_N < [\log N - \log\log\log N + \log\log e - 1 + \varepsilon] = \alpha_2(N, \varepsilon) = \alpha_2.$$

3. Tétel. *Legyen* $\alpha_3(N)$ *pozitív számok sorozata, amelyre*

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2^{-\alpha_3(N)} = \infty.$$

Ekkor 1 *valószínűséggel végtelen sok* N*-re*

$$Z_N > \alpha_3(N).$$

4. Tétel. *Legyen* $\alpha_4(N)$ *pozitív számok sorozata, amelyre*

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2^{-\alpha_4(N)} < \infty.$$

Ekkor 1 *valószínűséggel véges sok* N *kivételével*

$$Z_N \leqq \alpha_4(N).$$

Az 1. és 4. tételből azonnal következik, hogy

1. Következmény. 1 *valószínűséggel véges sok* N *kivételével*

$$\alpha_1(N, \varepsilon) \leqq Z_N \leqq a_4(N).$$

Ha kiszámítjuk $\alpha_1(N, 0.1)$ és $\alpha_4(N) = \log N + 1.1 \operatorname{loglog} N$ függvények értékét

$$N = 2^{2^{20}} \approx 10^{315653}$$

esetén azt kapjuk, hogy

$$\alpha_1 = 1\,048\,569, \quad \alpha_4 = 1\,048\,598 \quad \text{és} \quad \alpha_4 - \alpha_1 = 29.$$

Eredményeink tehát azt jelentik, hogyha $2^{2^{20}}$ alkalommal feldobunk egy pénzdarabot, akkor a leghosszabb tiszta fej sorozat hosszának 1 048 569 és 1 048 598 között „kell" lennie. Az (α_1, α_4) intervallum igen rövid volta azt jelenti, hogy a $\{Z_N\}$ sorozat „majdnem determinisztikus". Jelen dolgozatban néhány további közel determinisztikus véletlen sorozatot gyűjtünk össze.

2. A legnagyobb tiszta fej négyzet területe

Legyen $\{X_{ij}\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots;\ j=0, 1, 2, \ldots)$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók végtelen mátrixa,

$$P(X_{ij} = 0) = P(X_{ij} = 1) = 1/2 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ \ j = 0, 1, 2\ldots)$$

eloszlással. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$S(n, m, K) = \sum_{j=m}^{m+K-1} \sum_{i=n}^{n+K-1} X_{ij},$$

$$I(N, K) = \max_{\substack{0 \leqq n \leqq N-K \\ 0 \leqq m \leqq N-K}} S(n, m, K) \quad (K \leqq N).$$

Végül legyen Y_n az a legnagyobb egész szám, amelyre

$$I(N, Y_N) = Y_N^2.$$

Y_N^2 jelenti a $[0, N]\times[0, N]$ négyzet rácspontjaiban véletlenszerűen elhelyezett fejírások által alkotott véletlen mezőben a legnagyobb tiszta fej négyzet területét.

Az $\{Y_N\}$ sorozat tulajdonságainak leírására vezessük be a következő jelöléseket:

$$f(N) = \sqrt{2\log N} - 2,$$

$$a(N) = \sqrt{2\log N} - [\sqrt{2\log N}],$$

$$\beta_1(N, \varepsilon) = \beta_1(N) = \begin{cases} [f(N)], & \text{ha } a(N) \leqq \varepsilon, \\ [f(N)]+1, & \text{ha } a(N) > \varepsilon, \end{cases}$$

$$\beta_2(N, \varepsilon) = \beta_2(N) = \begin{cases} [f(N)]+3, & \text{ha } a(N) \leqq 1-\varepsilon, \\ [f(N)]+4, & \text{ha } a(N) > 1-\varepsilon, \end{cases}$$

ahol $0<\varepsilon<1$.

Ekkor eredményünk a következőképpen fogalmazható:

5. Tétel. 1 *valószínűséggel véges sok* N *kivételével*

$$\beta_1(N) < Y_N < \beta_2(N).$$

Vegyük észre, hogy

$$\beta_2(N) - \beta_1(N) = \begin{cases} 3, & \text{ha } a(N) \leqq \varepsilon, \\ 2, & \text{ha } \varepsilon < a(N) < 1-\varepsilon, \\ 3, & \text{ha } a(N) \geqq 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy 1 valószínűséggel véges sok N kivételével

$$Y_N = \begin{cases} [f(N)]+1, & \text{vagy } [f(N)]+2, & \text{ha } a(N) \leqq \varepsilon, \\ [f(N)]+2, & & \text{ha } \varepsilon < a(N) < 1-\varepsilon, \\ [f(N)]+2, & \text{vagy } [f(N)]+3, & \text{ha } a(N) \geqq 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Érdemes bevezetni a következő definíciókat.

1. Definíció. Azt mondjuk, hogy valószínűségi változóknak egy $\{V_N\}$ sorozata ASZIMPTOTIKUSAN KVÁZI DETERMINISZTIKUS (AKD), ha léteznek olyan $\beta_1(N)<\beta_2(N)$ determinisztikus függvények és olyan $C>0$ állandó, hogy 1 valószínűséggel véges sok N kivételével

$$\beta_1(N) < V_N < \beta_2(N)$$

és

$$\limsup_{N\to\infty} (\beta_2(N) - \beta_1(N)) \leqq C.$$

2. Definíció. Azt mondjuk, hogy valószínűségi változóknak egy $\{V_N\}$ sorozata ASZIMPTOTIKUSAN DETERMINISZTIKUS (AD), ha léteznek olyan $\beta_1(N)<\beta_2(N)$ determinisztikus függvények, hogy 1 valószínűséggel véges sok N kivételével

$$\beta_1(N) < V_N < \beta_2(N)$$

és

$$\lim_{N\to\infty} (\beta_2(N) - \beta_1(N)) = 0.$$

Igen könnyen látható, hogy az $\{Y_N\}$ sorozat nem AD. Az 5. tétel azt állítja, hogy $\{Y_N\}$ AKD.

AD sorozatokra egyetlen jól ismert, de igen meglepő példát adunk.

6. Tétel. *Legyenek* $N_1, N_2, \ldots$ *független* $(0, 1)$ *paraméterű normális eloszlású valószínűségi változók és legyen*

$$T_n = \max(N_1, N_2, \ldots, N_n).$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} (T_n - \sqrt{2\log n}) = 0$$

1 valószínűséggel, azaz $\{T_n\}$ *egy* AD *sorozat.*

Az 5. Tétel bizonyítása. Az $Y_N > \beta_1(N)$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a

$$T_{ij}(N) = [i, i+\beta_1(N)] \times [j, j+\beta_1(N)]$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots, N-\beta_1(N))$$

négyzetek között van legalább egy olyan, amelynek minden rácspontjában fej van. Másként kifejezve azt állítjuk, hogy léteznek olyan $0 \leqq i, j \leqq N+1-\beta_1(N)$ egészek, amelyekre

$$S(i, j, \beta_1(N)+1) = (\beta_1(N)+1)^2.$$

Valójában azt a kicsit erősebb állítást fogjuk bebizonyítani, hogy léteznek olyan $0 \leqq \mu, \nu \leqq l$ egészek, amelyekre

$$S(\mu(\beta_1(N)+1),\ \nu(\beta_1(N)+1),\ \beta_1(N)+1) = (\beta_1(N)+1)^2,$$

ahol l a legnagyobb egész, amelyre $l(\beta_1(N)+1) \leqq N-\beta_1(N)$. Mivel

$$P(S(i, j, \beta_1(N)+1) = (\beta_1(N)+1)^2) = 2^{-(\beta_1(N)+1)^2}$$

és

$$\beta_1(N) \leqq \sqrt{2\log N} - 1 - \varepsilon$$

adódik, hogy

$$P\{S(\mu(\beta_1(N)+1),\ \nu(\beta_1(N)+1),\ \beta_1(N)+1) < (\beta_1(N)+1)^2,$$

$$0 \leqq \mu, \nu \leqq l\} = (1-2^{-(\beta_1(n)+1)^2})^{(l+1)^2} \leqq \exp\{-2^{-(\beta_1(N)+1)^2}(l+1)^2\} \leqq$$

$$\leqq \exp(-2^{-(\sqrt{2\log N}-\varepsilon)^2}(l+1)^2) \leqq \exp(-C(\log N)^{-1} 2^{2\varepsilon\sqrt{2\log N}}) \leqq N^{-2},$$

ha N elég nagy és C egy megfelelően választott pozitív konstans. Tételünk első fele azonnal következik a Borel—Cantelli lemmából.

Az $Y_N < \beta_2(N)$ állítás igazolásához azt kell belátnunk, hogy

$$S(i, j, \beta_2(N)) < (\beta_2(N))^2 \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, N+1-\beta_2(N)).$$

Mivel $\beta_2(N) = \sqrt{2\log N} + \varepsilon$ azt kapjuk, hogy $P_N = P\{S(i, j, \beta_2(N)) = (\beta_2(N))^2$ legalább egy $0 \geqq i, j \leqq N+1-\beta_2(N)$ esetén$\}$

$$\leqq (N+2-\beta_2(N))^2 2^{-(\beta_2(N))^2} \leqq N^2 2^{-(\sqrt{2\log N}+\varepsilon)^2} \leqq 2^{-2\varepsilon\sqrt{2\log N}},$$

ha N elég nagy.

Legyen $N_k = 2^{\sqrt{k}}$, ekkor nyilván $\sum_{k=1}^{\infty} P_{N_k} < \infty$ és így a Borel—Cantelli lemmából következik, hogy 1 valószínűséggel véges sok k kivételével $Y_{N_k} < \beta_2(N_k)$. Most már

állításunk tetszőleges $N_k \leqq N < N_{k+1}$ esetén következik a triviális

$$Y_N \leqq Y_{N_{k+1}} < \beta_2(N_{k+1}, \varepsilon) \leqq \beta_2(N_k, 2\varepsilon) \leqq \beta_2(N, 2\varepsilon)$$

egyenlőtlenségekből.

Megjegyezzük, hogy az 5. tétel nem adja a lehető legélesebb eredményt. Megkísérelhetünk élesebb eredményt kapni oly módon, hogy a Tételben szereplő ε helyébe egy $\{\varepsilon_N\}$ 0-hoz tartó sorozatot írunk. Fenti bizonyításunk gondosabb megvizsgálása azt adja, hogy ha az 5. tételben az ε-t mindenütt ε_N-nel helyettesítjük, ahol

$$\varepsilon_N = C \frac{\log\log N}{\sqrt{2\log N}} \quad (C > 1/2),$$

akkor állításunk változatlanul igaz marad. Valószínűnek látszik, hogy még ez az eredmény sem a lehető legélesebb.

3. A leghosszabb növekvő blokk hosszáról

Legyenek $U_1, U_2, \ldots$ a $\{0, 1\}$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az $U_1, U_2, \ldots, U_N$ sorozatban mi a leghosszabb növekvő blokk hossza. Pontosabban jelentse Q_N azt a legnagyobb egész számot, amelyhez található olyan R_n egész szám, amelyre

$$U_{R_N+1} < U_{R_N+2} < \ldots < U_{R_N+Q_N}$$

és

$$R_N + Q_N \leqq N.$$

Itt nyilván Q_N jelenti a leghosszabb növekvő blokk hosszát. [3] dolgozatomban $\{Q_N\}$ sorozat tulajdonságait a következő módon jellemeztem

7. Tétel. *Legyen*

$$f(n) = \frac{\log n}{b_n} - 1/2 \quad \textit{és} \quad a(n) = f(n) - [f(n)],$$

ahol b_n *a*

$$b_n e^{b_n} = e^{-1} \log n$$

egyenlet megoldását jelenti. Továbbá tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ *esetén legyen*

$$l_n = l_n(\varepsilon) = \begin{cases} [f(n)] - 3, & \text{ha} \quad a(n) \leqq \varepsilon, \\ [f(n)] - 2, & \text{ha} \quad a(n) > \varepsilon, \end{cases}$$

$$u_n = u_n(\varepsilon) = \begin{cases} f(n)] + 2, & \text{ha} \quad a(n) < 1 - \varepsilon, \\ [f(n)] + 3, & \text{ha} \quad a(n) \geqq 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor 1 *valószínűséggel véges sok* N *kivételével*

$$l_N < Q_N < u_N.$$

Itt és a továbbiakban log természetes alapú logaritmust jelent.

Megjegyezzük, hogy

$$b_n = \log\log n - \log\log\log n - 1 + o(1).$$

Tételünk a következő alakban is kimondható:

$$Q_N = \begin{cases} [f(N)]-2, \text{ vagy } [f(N)]-1, \text{ vagy } [f(N)], \text{ vagy } [f(N)]+1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ha } a(N) \leqq \varepsilon, \\ [f(N)-1, \text{ vagy } [f(N)], \text{ vagy } [f(N)]+1, \quad \text{ha } \varepsilon < a(N) < 1-\varepsilon, \\ [f(N)]-1, \text{ vagy } [f(N)], \text{ vagy } [f(N)]+1, \text{ vagy } [f(N)]+2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ha } a(N) \geqq 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Tételünknek ez az alakja mutatja, hogy $\{Q_N\}$ egy AKD sorozat. Természetesen ez esetben is világos, hogy $\{Q_N\}$ nem lehet AD sorozat, azonban lehetséges, hogy a 7. tételben foglaltaknál erősebb állítás nyerhető.

4. A Poisson folyamat sűrűsödési intervallumairól

Legyen $\pi(t)$ $(t \geqq 0)$ egy $\lambda=1$ paraméterű Poisson folyamat. Vizsgáljuk a

$$Q_T = \max_{0 \leqq t \leqq T-1} (\pi(t+1)-\pi(t))$$

folyamat tulajdonságait.

Megjegyezzük, hogy a kiszolgálási (sorbanállási) modellekben általában feltételezik, hogy egy üzletbe a vásárlók érkezése egy λ paraméterű Poisson folyamat, ahol λ jelenti az időegységenként (például óránként) érkező vásárlók számának várható értékét. Ebben a megfogalmazásban Q_T jelenti egy T órán keresztül nyitvatartó üzletbe a legforgalmasabb órában érkező vásárlók számát.

A 7. Tétel bizonyítását közvetve belátható, hogy az ott közölt eredmény az itt bevezetett Q_T folyamatra is igaz. Azaz érvényes a következő

8. Tétel. 1 *valószínűséggel minden elég nagy T-re*

$$l_T < Q_T < u_T,$$

ahol l_T és u_T a 7. Tételben definiált függvények.

Természetesen ez a Q_T folyamat egy AKD folyamat. Érdemes megvizsgálni, hogy eredményünk hogy változik, ha egy tetszőleges λ paraméterű Poisson folyamatot vizsgálunk. Eredményünk azt fogja mutatni, hogy Q_T viselkedése alig függ λ értékétől. Pontosabban Q_T-re tetszőleges λ esetén is érvényes lesz a 8. Tételben szereplő egyenlőtlenség, csak l_T és u_T definíciójában szereplő b_T függvény definícióját kell módosítanunk oly módon, hogy b_T legyen megoldása a

$$b_T e^{b_T} = \frac{\log T}{e\lambda}$$

egyenletnek. Megjegyezzük, hogy ennek az egyenletnek a megoldása

$$b_T = \log\log T - \log\log\log T - \log\lambda - 1 + o(1).$$

Jelen dolgozatban szereplő példák azt mutatják, hogy bizonyos véletlen sorozatok, illetve folyamatok hosszú „idő" eltelte után igen kevéssé lesznek véletlenek. Úgy gondolom, hogy érdemes lenne további nem triviális AKD és AD sorozatokat illetve folyamatokat keresni. (Néhány további példát [4] és [5] dolgozataimban adtam). Természetesen még fontosabbnak látszik annak a kérdésnek általános vizsgálata, hogy egy véletlen sorozat vagy folyamat, mikor lesz AD, illetve AKD.

IRODALOM

[1] P. ERDŐS—P. RÉVÉSZ, On the length of the longest head-run *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* vol. 16. Topics in Information Theory, Keszthely, Hungary, 1975, pp. 219—228.
[2] P. RÉVÉSZ, Strong theorems on coin lossing. *Proc. of the Int. Congress of Mathematicians,* Helsinki, 1978. pp. 749—754.
[3] P. RÉVÉSZ, Three problems on the lengths of increasing runs, *Stochastic Processes and their Applications* **15** (1983) 169—179.
[4] P. RÉVÉSZ, A note to the Chung—Erdős—Sirao theorems, *Asymptotic theory of statistical tests and estimation.* Ed. I. M. Chakravarti, Academic Press, New York 1980.
[5] P. RÉVÉSZ, On the increments of Wiener and related processes. *Ann. Probability* **10** (1982) 613—622.

НАСКОЛЬКО СЛУЧАЙНО ЕСТЬ СЛУЧАЙНО?

П. РЕВЕС

ON STABILITY OF RANDOM SEQUENCES

P. RÉVÉSZ

R. R. HALL EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

ERDŐS PÁL és SÁRKÖZY ANDRÁS

E cikkben az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$c_1, c_2, \ldots, X_0, X_1, \ldots$ pozitív abszolút állandókat jelölnek. Az S véges halmaz elemeinek számát $|S|$-sel jelöljük. e^x helyett $\exp(x)$-et írunk. A k-szor iterált logaritmust $\log_k x$-szel jelöljük, tehát $\log_k x = \log(\log_{k-1} x)$. Az n természetes szám *különböző* prímosztóinak számát $\nu(n)$-nel, az *összes* prímosztók számát $\omega(n)$-nel jelöljük:

$$\nu(n) = \sum_{p/n} 1 \quad \text{és} \quad \omega(n) = \sum_{p^\alpha /\!\!/ n} \alpha.$$

Legyen valamely x rögzített pozitív számra $A \subset (0, x]$ az $a_1 < a_2 < \ldots$ természetes számokból álló sorozat. Legyen

$$N(x) = \sum_{a \in A} 1,$$

$$F(x) = \sum_{a \in A} \frac{1}{a}$$

és

$$B(x) = \sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \frac{1}{[a_1, a_2]}.$$

Nyilvánvalóan tetszőleges A sorozatra $B(x) \ge F^2(x)$. Szerzők egy problémájából kiindulva, R. R. HALL az alábbi tételt bizonyította:

1. Tétel (R. R. HALL, [7]):

Ha az $F(x)$ függvényt

$$F(x) = \exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\} \tag{1}$$

alakban írva,

$$\psi(x) \to +\infty \tag{2}$$

teljesül, akkor szükségképpen

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} \to +\infty. \tag{3}$$

HALL (3)-at az élesebb

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} > \exp(c_1 \psi^2(x)) \tag{4}$$

formában bizonyította. Továbbá igazolta, hogy az 1. tétel nem javítható abban az értelemben, hogy a (2) feltétel nem gyengíthető:

2. Tétel (R. R. HALL, [7]):

Tetszőlegesen nagy ω számhoz találhatók olyan X_0, Ω számok, hogy $x>X_0$ esetén létezik olyan A sorozat, melyre

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} < \Omega$$

teljesül, továbbá $F(x)$-et (1) alakban írva,

$$\psi(x) > \omega.$$

(L. még szerzők [3]—[6] cikkeit.)

E cikkben célunk annak megmutatása — mégpedig egy új, a HALL által alkalmazottól teljesen eltérő módszer alkalmazása révén —, hogy két más irányban viszont javítható az 1. tétel, ill. a (4) becslés:

Egyrészt, a (4) becslés kissé tovább javítható, ha az A sorozat „sűrű", azaz $\psi(x)$ „nagy" $\left(\log \psi(x) \sim \frac{1}{2}\log_3 x\right)$:

3. Tétel:

Ha az $F(x)$ függvényt az (1) alakban írva, (2) teljesül, akkor $x>X_1$ esetén szükségképpen

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} > \exp\left\{c_2\left(\frac{\psi(x)\log_3 x}{1+\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}}\right)^2\right\}. \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy az $A=\{1, 2, 3, \ldots, [x]\}$ sorozat mutatja, hogy ez a becslés ((4)-gyel ellentétben) „sűrű" sorozatokra is *a lehető legjobb, eltekintve a c_2 állandó értékétől;* ugyanis megmutatható, hogy ha c_2 helyére egy elég nagy pozitív számot írunk, akkor erre az A sorozatra — minden elég nagy x-re — az (5) egyenlőtlenség ellenkezője teljesül.

Másrészt, a (2) feltétel, azaz $\psi(x)$ nagy volta lényegében annak felel meg, hogy „sok" olyan $y(\leqq x)$ van, melyre $N(y)=\sum_{a\in A,\, a\leqq y} 1$ „nagy", nevezetesen

$$N(y) \gg \frac{y}{\log y}\exp\{\psi(x)(\log_2 y)^{1/2}\log_3 y\}$$

teljesül (ahol $\psi(x)$ kielégíti (2)-t, és a $\gg$ szimbólum azt jelöli, hogy a bal oldal nagyobb, mint a jobb oldal konstansszorosa). Így az 1. Tétel durván úgy fogalmazható, hogyha $N(y)$ „sok" y-ra nagy, akkor ebből következik, hogy a (3) bal oldalán álló hányados nagy. Meg fogjuk mutatni, hogy az 1. Tétel élesíthető abban az értelemben is, hogy $B(x)$ már akkor is szükségképpen nagy, ha $N(x)$ csupán *egyetlen* x-re nagy; más szóval, $B(x)$-et $F(x)$ helyett $N(x)$ függvényében fogjuk becsülni. Pontosabban, a következő tételt fogjuk igazolni:

4. Tétel:

Legyen $x > X_2$, $A \subset (0, x]$,

$$N(x) > \frac{x}{\log x} \exp\{(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}, \tag{6}$$

és definiáljuk $\psi(x)$*-et az*

$$N(x) = \frac{x}{\log x} \exp\{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\} \tag{7}$$

egyenlőséggel. Ekkor

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 > c_3 \exp\left\{\frac{1}{68} \frac{\psi^2(x) (\log_3 x)^2}{\left(1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}\right)^2}\right\}, \tag{8}$$

tehát $\psi(x) \to +\infty$ *esetén a bal oldal* $+\infty$*-hez tart.*

(Megjegyezzük, hogy például $A \subset (x/2, x]$ esetén (8) bal oldala kisebb, mint $4 \frac{B(x)}{F^2(x)}$, tehát ekkor $\psi(x) \to +\infty$ esetén (8) valóban (3), ill. (4) élesítését adja.)

Minthogy a 3. és 4. Tétel lényegében ugyanúgy bizonyítható, ezért csupán a 4. Tételt fogjuk bizonyítani: a 2. és 3. pont e bizonyítást fogja tartalmazni. A 4. pontban néhány további megjegyzést fogunk fűzni a 3. Tétel bizonyításához, valamint a 4. Tételhez.

2. Ebben a pontban kimondunk és részben bizonyítunk néhány olyan lemmát, melyre szükségünk lesz a 4. Tétel bizonyítása során.

1. Lemma.

Léteznek olyan c_4, X_3 *állandók, hogy* $x > X_3$, $i \leqq \log_2 x$ *esetén*

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \nu(n) = i}} 1 < c_4 \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Ez a lemma valamivel élesebb formában megtalálható G. H. HARDY és S. RAMANUJAN [8] cikkében; l. még [10] és [11].

2. Lemma.

Tetszőlegesen kicsi ε *pozitív számot megadva, léteznek olyan* $c_5 = c_5(\varepsilon)$ *és* $X_4 = X_4(\varepsilon)$ *állandók, hogy* $x > X_4$, $j < (1-\varepsilon) \log_2 x$ *esetén*

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \nu(n) \leqq j}} 1 < c_5 \frac{x}{\log x} \left(\frac{e \log_2 x}{j}\right)^j \frac{\sqrt{j}}{\log_2 x}.$$

Bizonyítás.

$j = 1$ esetén az állítás következik a prímszámtételből. $j > 1$ esetén az előző lem-

mát és a Stirling-formulát alkalmazva, elég nagy x-re kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ \nu(n)\leqq j}} 1 = 1+\sum_{i=1}^{j}\sum_{\substack{n\leqq x\\ \nu(n)=i}} 1 < 1+\sum_{i=1}^{j} c_4 \frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{i-1}}{(i-1)!} =$$

$$= 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{i=1}^{j}\frac{i(i+1)\dots(j-1)}{(\log_2 x)^{j-i}} \leqq$$

$$\leqq 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{j}{\log_2 x}\right)^{j-i} <$$

$$< 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{i=1}^{j}(1-\varepsilon)^{j-i} <$$

$$< 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\varepsilon)^k = 1+\frac{c_4}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!} <$$

$$< \frac{c_5}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{\left(\frac{j-1}{e}\right)^{j-1}\sqrt{j-1}} < \frac{c_6}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\left(\frac{e\log_2 x}{j}\right)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{j}} =$$

$$= \frac{c_7}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\left(\frac{e\log_2 x}{j}\right)^{j}\frac{\sqrt{j}}{\log_2 x}.$$

3. Lemma.
Léteznek olyan $c_8(>0)$ *és* X_5 *állandók, hogy* $x>X_5$ *esetén*

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ \nu(n)>\log_2 x}} 1 > c_8 x.$$

Ez a lemma jól ismert standard valószínűségszámítási módszerekkel igazolható (következik pl. az ún. Erdős—Kac tételből; l. pl. [1] és [9]).

4. Lemma.
Ha $\varepsilon>0$ *és*

$$1 < \frac{j}{\log_2 x} < 2-\varepsilon,$$

akkor $x>X_6(\varepsilon)$ *esetén*

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ j\leqq\omega(n)}} 1 < c_9(\varepsilon)\frac{1}{\frac{j}{\log_2 x}-1}\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Ez a lemma azonos a [2], 242. oldalon szereplő 1. korollárium első felével.
3. Rátérünk a 4. Tétel bizonyítására.

(6)-ból, (7)-ből és $N(x)\leqq x$-ből következik, hogy

$$1 < \psi(x) \leqq \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\log_3 x}. \tag{9}$$

Legyen

$$j = \left[\frac{1}{4} \frac{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right], \tag{10}$$

és jelöljük A_1-gyel A azon n elemeinek a halmazát, melyekre $\nu(n) \leqq j$ teljesül; legyen továbbá $A_2 = A - A_1$.

(9)-re tekintettel (10)-ből következik, hogy

$$j \geqq \frac{1}{5} \frac{(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\log_3 x}} \geqq \frac{1}{5} \frac{(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{\frac{1}{2} \log_3 x} = \frac{2}{5} (\log_2 x)^{1/2} \tag{11}$$

és

$$j \leqq \frac{1}{4} \frac{\log_2 x}{1 + \log 1} = \frac{1}{4} \log_2 x. \tag{12}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség szerint j ilyen választása mellett a 2. lemma alkalmazható $|A_1|$ becslésére. A 2. lemma, (7) és (12) alapján elég nagy x-re

$$\frac{|A_1|}{N(x)} < \frac{c_5 \frac{x}{\log x} \left(\frac{e \log_2 x}{j} \right)^j \frac{\sqrt{j}}{\log_2 x}}{\frac{x}{\log x} \exp \{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}} < \tag{13}$$

$$< \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{e \log_2 x}{j} \right)^j}{\exp \{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}}.$$

Itt (10)-re, (11)-re és a jól ismert

$$1 + x \leqq e^x$$

egyenlőtlenségre tekintettel

$$\frac{\log_2 x}{j} \leqq \frac{\log_2 x}{\frac{1}{5} \frac{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}}} =$$

$$= 5 \left(1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x} \right) \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x} < 5 \left(\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x} \right)^2,$$

és így (13)-ból (9) és (10) alapján

$$\frac{|A_1|}{N(x)} < \frac{1}{2}\exp\left\{j\log\frac{e\log_2 x}{j} - \psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} <$$

$$< \frac{1}{2}\exp\left\{j\left(\log 5e + 2\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}\right) - \psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} <$$

$$< \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{4}\frac{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x}{1+\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}}\left(3+3\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}\right) - \psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{4}\psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} < \frac{1}{2}.$$

Innen következik, hogy

$$|A_2| = |A - A_1| = |A| - |A_1| = N(x) - |A_1| > N(x) - \frac{N(x)}{2} = \frac{N(x)}{2}. \tag{14}$$

Jelöljük S-sel azon n természetes számok halmazát, melyekre $n \leqq x^2$ teljesül, és melyek felírhatók a következő alakban:

$$au = n, \quad \text{ahol} \quad a \in A_2 \quad \text{és} \quad v(u) > \log_2 x. \tag{15}$$

Jelöljük továbbá adott n mellett (15) megoldásszámát $\varphi(n)$-nel. A bizonyítandó egyenlőtlenséget azáltal fogjuk igazolni, hogy a $\sum_{n \leqq x^2} \varphi(n)$ összeget megbecsüljük alulról, ill. felülről, majd pedig a két becslést egybevetjük. Először alsó becslést fogunk adni.

A 3. lemma és (14) alapján

$$\sum_{n \leqq x^2} \varphi(n) = \sum_{a \in A_2} \sum_{\substack{u \leqq x^2/a \\ v(u) > \log_2 x}} 1 \geqq \sum_{a \in A_2} \sum_{\substack{u \leqq x^2/a \\ v(u) > \log_2 x^2/a}} 1 > \sum_{a \in A_2} c_8 \frac{x^2}{a} \geqq \tag{16}$$

$$\geqq c_8 \sum_{a \in A_2} \frac{x^2}{x} = c_8 x \sum_{a \in A_2} 1 = c_8 x |A_2| > c_8 x \frac{N(x)}{2} = c_{10} x N(x).$$

Most felső becslést fogunk adni $\sum_{n \leqq x^2} \varphi(n)$-re. A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{n \leqq x^2} \varphi(n) = \sum_{n \in S} \varphi(n) \leqq |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \in S} \varphi^2(n)\Big)^{1/2} = |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \in S}\Big(\sum_{\substack{a \in A^2 \\ a/n \\ v(n/a) > \log_2 x}} 1\Big)^2\Big)^{1/2} \leqq \tag{17}$$

$$\leqq |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \in S}\Big(\sum_{\substack{a \in A \\ a/n}} 1\Big)^2\Big)^{1/2} = |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \in S}\Big(\sum_{\substack{a_1 \in A \\ a_1/n}} \sum_{\substack{a_2 \in A \\ a_2/n}} 1\Big)\Big)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \leqq x^2} \sum_{\substack{a_1 \in A,\, a_2 \in A \\ [a_1, a_2]/n}} 1\Big)^{1/2} = |S|^{1/2}\Big(\sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \sum_{\substack{n \leqq x^2 \\ [a_1, a_2]/n}} 1\Big)^{1/2} =$$

$$= |S|^{1/2}\left(\sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \left[\frac{x^2}{[a_1, a_2]}\right]\right)^{1/2} \leqq |S|^{1/2}\left(\sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \frac{x^2}{[a_1, a_2]}\right)^{1/2} =$$

$$= |S|^{1/2}\big(x^2 B(x)\big)^{1/2} = x|S|^{1/2}\big(B(x)\big)^{1/2}.$$

Így a vizsgált összeg felső becslése céljából $|S|$-re kell felső becslést adnunk.

Azonban $n \in S$ esetén n a felírható a (15) alakban, ahonnan $a \in A_2$-re és A_2 definíciójára tekintettel

$$\omega(n) = \omega(au) = \omega(a) + \omega(u) \geqq v(a) + v(u) > j + \log_2 x$$

(ahol j (10) által van definiálva). Így

$$|S| \leqq \sum_{\substack{n \leqq x^2 \\ j+\log_2 x < \omega(n)}} 1 \leqq \sum_{\substack{n \leqq x^2 \\ j-1+\log_2 x < \omega(n)}} 1.$$

Innen a 4. Lemma, (11), (12) és a Stirling-formula alapján, valamint felhasználva a

$$\log(1+u) \geqq u - \frac{u^2}{2} \quad (\text{ahol } 0 < u < 1)$$

egyenlőtlenséget, következik, hogy

$$(18) \qquad |S| < c_9 \frac{1}{\frac{[j-1+\log_2 x^2]}{\log_2 x^2} - 1} \frac{x^2}{\log x^2} \frac{(\log_2 x^2)^{[j-2+\log_2 x^2]}}{[j-2+\log_2 x^2]!} <$$

$$< c_{11} \frac{\log_2 x}{j} \frac{x^2}{\log x} \left(\frac{e(\log_2 x + \log 2)}{[j-2+\log_2 x+\log 2]} \right)^{[j-2+\log_2 x+\log 2]} \frac{1}{[j-2+\log_2 x+\log 2]^{1/2}} <$$

$$< c_{12} x^2 \frac{\log_2 x}{j \log x} \left(\frac{e \log_2 x}{j+\log_2 x} \right)^{j+\log_2 x} \frac{1}{(\log_2 x)^{1/2}} =$$

$$= c_{12} x^2 \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{j \log x} e^j \log x \left(\frac{\log_2 x}{j+\log_2 x} \right)^{j+\log_2 x} \leqq$$

$$\leqq c_{13} x^2 e^j \left(\frac{1}{1+\frac{j}{\log_2 x}} \right)^{j+\log_2 x} =$$

$$= c_{13} x^2 \exp\left\{ j - (j+\log_2 x) \log\left(1 + \frac{j}{\log_2 x}\right) \right\} <$$

$$< c_{13} x^2 \exp\left\{ j - (j+\log_2 x) \left(\frac{j}{\log_2 x} - \frac{j^2}{2(\log_2 x)^2} \right) \right\} =$$

$$= c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{j^2}{\log_2 x} \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2 \log_2 x} \right) \right\} < c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{j^2}{\log_2 x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \right\} <$$

$$< c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{1}{4} \frac{j^2}{\log_2 x} \right\} < c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{17} \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right)^2 \right\} =$$

$$= c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{1}{68} \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right)^2 \right\}.$$

(16) és (17) alapján

$$c_{10} x N(x) < \sum_{n \leqq x^2} \varphi(n) \leqq x |S|^{1/2} (B(x))^{1/2},$$

ahonnan (18) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 > c_{10}^2 \frac{x^2}{|S|} > c_{14} \exp\left\{ \frac{1}{68} \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right)^2 \right\},$$

és ezzel a 4. Tétel bizonyítását befejeztük.

4. Mint az 1. pontban már említettük, a fenti bizonyítás gondolatmenete alkalmas a 3. Tétel bizonyítására is. Ehhez lényegében csupán annyi módosításra van szükség, hogy a 2. Lemmában szereplő $\sum_{\substack{n \leqq x \\ \nu(n) \leqq j}} 1$ összegre adott felső becslés helyett

$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \nu(n) \leqq j}} \frac{1}{n}$ becslésére van szükségünk; ez utóbbi azonban a 2. Lemma alapján parciális összegezés (Abel-átrendezés) révén könnyen becsülhető.

Megjegyezzük továbbá, hogy — mint a 2. Tétel mutatja — az 1. Tétel a lehető legjobb abban az értelemben, hogy a (2) feltétel nem gyengíthető, vagyis „ritkább" sorozatokra már nem igaz az állítás. Ugyanakkor a 4. Tétel még valószínűen javítható ebben az értelemben; talán

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 \to +\infty$$

teljesüléséhez (6) helyett elég megkövetelni, hogy a gyengébb

$$\frac{N(x) \log x}{x} \to +\infty \tag{19}$$

feltétel teljesüljön. (Ha ez a sejtés igaz, akkor már tovább nem élesíthető; ugyanis az A sorozatot az $x/2$ és x közti prímszámoknak választva, látható, hogy a (19) feltétel nem gyengíthető tovább.)

IRODALOM

[1] P. Erdős, On the distribution of additive functions, *Ann. Math.*, 47 (1946), 1—20.
[2] P. Erdős and A. Sárközy, On the number of prime factors of integers, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 42 (1980), 237—246.
[3], [4], [5], [6] P. Erdős and A. Sárközy, Some asymptotic formulas on generalized divisor functions, I, II, III, IV, Studies in Pure Mathematics to the Memory of Paul Turán, Akadémiai Kiadó, Budapest; J. Number Theory; Acta Arithemtica; *Studia Sci. Math. Hung.*, valamenynyi sajtó alatt.
[7] R. R. Hall, On a conjecture of Erdős and Sárközi, *Bull. London Math. Soc.*, 12 (1980), 21—24.
[8] G. H. Hardy and S. Ramanujan, The normal number of prime factors of a number n, *Quarterly J. Math.*, 48 (1920), 76—92.

[9] J. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, *Translation of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.* 1964, vol. 11.
[10] L. G. SATHE, On a problem of Hardy, *J. Indian Math. Soc.*, 17 (1953), 63—141 és 18 (1954), 27—81.
[11] A. SELBERG, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.*, 18 (1954), 83—87.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Р. Р. ХАЛЛА

П. ЭРДЕШ—А. ШАРКЕЗИ

ON A PROBLEM OF R. R. HALL

P. ERDŐS—A. SÁRKÖZY

If $A \subset \{1, 2, \ldots, x\}$ then let $N(x) = \sum_{a \in A} 1$, $F(x) = \sum_{a \in A} \frac{1}{a}$ and $B(x) = \sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \frac{1}{[a_1, a_2]}$. R. R. HALL proved in [7] that if $\psi(x)$ is defined bg $F(x) = \exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}$ and $\psi(x) \to \infty$ holds then we have $\frac{B(x)}{F^2(x)} \to +\infty$; in fact, we have $\frac{B(x)}{F^2(x)} > \exp(c_1 \psi^2(x))$. The authors improve on this estimate (applying a different method), by replacing the last inequality by

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} > \exp\left\{c_1 \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}}\right)^2\right\}.$$

Furthermore, they estimate $B(x)$ in terms of $N(x)$. It is shovn that if $\psi(x)$ is defined by $N(x) = \frac{x}{\log x} \exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}$ and $\psi(x) > 1$ then for large x we have

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 > c_3 \exp\left\{\frac{1}{68} \frac{\psi^2(x)(\log_3 x)^2}{\left(1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}\right)^2}\right\}.$$

VÉLETLEN PONTELOSZLÁSOK ÉS ALKALMAZÁSAIK A MEGBÍZHATÓSÁGELMÉLETBEN ÉS A STATISZTIKUS FIZIKÁBAN I.

SZÁSZ DOMOKOS

Előszó

A véletlen ponteloszlások elmélete, hasonlóan a valószínűségelmélet legtöbb fejezetéhez, az alkalmazásokban felvetődött problémák hatására fejlődött ki. 1943-ban Palm (1943)* mélyrehatóan tanulmányozta az egydimenziós véletlen ponteloszlásokat, az ún. pontfolyamatokat mint telefonközpontok forgalmának modelljeit. Tőle származik az elmélet számos alapvető fogalma. Hincsin (1955)* továbbfejlesztette és matematikailag szigorúvá tette Palm elméletét. Míg az egydimenziós véletlen ponteloszlások úgy is tárgyalhatók, mint tiszta-ugró sztochasztikus folyamatok, hasonló megközelítés lehetetlen a több dimenziós esetben. Ezért Doob (1953)* több dimenziós végtelen részecskerendszerekre vonatkozó vizsgálatai fontos továbblépést jelentettek.

A véletlen ponteloszlások klasszikus elmélete, amelyet magyar matematikusok is — elsősorban Prékopa, Rényi és Takács — jelentős eredményekkel gazdagítottak, az 1960-as években élte virágkorát, és ezt lényegében Kerstan—Matthes—Mecke 1974-ben megjelent monográfiája zárta le. (Kerstan et al. (1974)*). A klasszikus elmélet az alapvető véletlen ponteloszlások jellemzésével és a ponteloszlásokon értelmezett fontosabb operációkkal foglalkozott, az operációknál tipikus feltevés volt, hogy azokat a különböző pontokra függetlenül hajtjuk végre, e pontok között nem tételezve kölcsönhatást. Ehhez az elmélethez kapcsolódik a disszertáció I. fejezete.

Az I. fejezet 1. pontja bevezető jellegű: definiáljuk a véletlen ponteloszlás és a véletlen jelzett ponteloszlás fogalmát, továbbá bevezetjük a fontosabb, véletlen ponteloszlásokon értelmezett operációkat: az összegképzést és az elágazást (a ritkítás és az elmozdulás az utóbbinak speciális esetei). Egyszerű feltételeket is adunk, amelyek mellett az operációk végrehajthatók.

A 2. pontban definiáljuk a Poisson ponteloszlást, amely a sztochasztikus folyamatok elméletében fundamentális fontosságú: a Poisson ponteloszlás a Wiener folyamat mellett a sztochasztikus folyamatok alapvető építőköve. A Poisson ponteloszlás definíciójában szereplő követelményekre vonatkozólag egy általam 1965-ben felvetett kérdés vizsgálata során Rényi (1967), valamint Moran (1967), Lee (9168) és Shepp (l. Goldman (1967)) megvilágították e követelmények szerepét. A kérdést tovább finomítva a Szász (1970) dolgozatban a követelmények még pontosabb körülhatárolásához jutottam, és a vizsgálatokat sikerült a több dimenziós esetre is kiterjesztenem. Ennek a problémakörnek és itt elért eredményeimnek az ismertetése a 2. pont fő célja. Megjegyzendő, hogy a kérdésfeltevés a véletlen ponteloszlások általános elméletében is gyümölcsözőnek bizonyult. A 2. pontot két fontos definíció (Poisson jelzett ponteloszlás és összetett Poisson ponteloszlás) és a Poisson ponteloszlásokra alkalmazott

elágazó operáció egy érdekes tulajdonsága zárja, amely Doob (1953)* és Rényi (1956) tételeinek megfordítását is kiadja (l. Szász (1967)).

Az I. fejezet 3. és 4. pontjaiban a véletlen ponteloszlásokra alkalmazott operációkkal foglalkozom. Független véletlen ponteloszlások összegeire Hincsin (1955)* és Grigelionis (1966) kutatásai nyomán ismertek voltak a Poisson ponteloszláshoz való konvergencia szükséges és elégséges feltételei. 1970-ben Gnedenko hívta fel a figyelmemet arra, hogy bizonyos alkalmazásokban fontos lenne hasonló típusú eredményeket nyerni egész-értékű, tiszta-ugró sztochasztikus folyamatok összegeire. A kérdés szorosan kapcsolódik véletlen jelzett ponteloszlások összegeihez. A 3. pontban először definiáljuk az összetett Poisson folyamatokat, majd szükséges és elégséges feltételeket (l. Szász (1972)) fogalmazunk meg független, egész-értékű, tiszta-ugró folyamatok összegeinek összetett Poisson folyamathoz való konvergenciájára. Eredményeink nemcsak általánosítják Grigelionis eredményeit, hanem példával illusztráljuk, milyen új nehézségeket tartalmaz az általunk vizsgált általános eset a véletlen ponteloszlások esetéhez viszonyítva.

A 4. pont Coxnak az elágazó operáció egy speciális esetére, a pontok véletlen elmozdításaira vonatkozó sejtésével foglalkozik. Ő vetette fel, hogy rácsszerű ponteloszlások pontjainak véletlen elmozdításai segítségével bevezetett ponteloszlásokat használjunk abban az esetben, amikor a szórás növekedését kontrollálni akarjuk, s így statisztikai szempontból fontos új véletlen ponteloszlásokat nyerhetünk. Azonban a szórás növekedését nem tudta megadni, és erre vonatkozó sejtése az I. Nemzetközi Sztochasztikus Ponteloszlások Konferencián (1971, New York) kiemelt 8 megoldatlan probléma között szerepelt. Az első eredményt Gács érte el 1972-ben, de feltette, hogy az elmozdítások szórása véges. Más módszert kidolgozva sikerült e feltevést a minimálisra gyengítenem: elegendő az elmozdulások első abszolút momentumának végessége. A problémáról Gáccsal közösen írt (Gács—Szász (1975)) dolgozatunk ismertetése zárja az első fejezetet.

A klasszikus elmélet fő alkalmazási területei a tömegkiszolgálás elmélete és a megbízhatóságelmélet. Az ezeket a rendszereket meghatározó valószínűségi változók általában függetleneknek tételezhetők. Ennek ellenére még egyszerű rendszerek matematikai vizsgálata is nehéz vagy éppen lehetetlen, ha a rendszer nem rendelkezik jól kihasználható Markov, illetve félig-Markov tulajdonsággal vagy nem találunk benne regenerációs pontokat. Ezek a tulajdonságok általában bizonyos változók eloszlásának exponenciális voltából következnek. Például az ún. „két lift probléma"-ban szereplő megbízhatósági rendszert két eloszlás határozza meg, és a rendszer egzakt megoldása is ismert volt, amikor a két eloszlás egyike exponenciális. Az általános esetre csak aszimptotikus eredményben lehetett reménykedni, de sokáig még az aszimptotikus kérdés is megközelíthetetlennek bizonyult. Hosszabb ideig az volt az elképzelésem, hogy a kandidátusi disszertációmban (Szász (1971)) kidolgozott, véletlen tagszámú határeloszlástételek elméletének továbbfejlesztésével megoldható megbízhatósági rendszerek aszimptotikus vizsgálata is. Ebben az irányban 1974-ben határeloszlástételt bizonyítottam félig-Markov folyamatokra; azonban a tétel feltételeinek ellenőrzése konkrét rendszereknél rendkívül bonyolult feladatnak bizonyult. Végül egészen más úton, a véletlen ponteloszlások elméletére alapozva 1975-ben sikrült módszer kidolgoznom a két lift probléma általános esetére, és 1975—76-ban a módszert kiterjesztettem általánosabb rendszerek vizsgálatára is, így a „k out of n" néven ismert rendszerekre (l. Szász (1976)). Az említett eredményeket és magát a módszert ismerteti a jelen dolgozat legfontosabb, II. fejezete. Az 1. pontban megfogalmazzuk a két lift problémát, és bemutatjuk az említett speciális esetekben kapott egzakt megoldásokat. A 2. pontban ismertetjük a Szász (974) dolgozatban nyert, félig-Markov

folyamatokra vonatkozó határeloszlástételt és az ennek az alkalmazásánál felmerülő nehézségeket. A 3. pont tartalmazza a két lift problémára vonatkozó eredményeinket, (Szász (1975 és 1977-A)) és módszerünk heurisztikus hátterét. A módszer kiindulópontja az, hogy a rendszerben találhatók olyan időpontok, amelyekben — egy változó értéket kivéve — a rendszer elfelejtheti teljes múltját (Markovitás kibővített állapottérben!) és a módszer egyik lényeges eleme annak megmutatása, hogy a rendszer jövője ennek a változónak az érékétől csak kevéssé függ. Ennek a gondolatnak a megmegvalósítása a felújítás-elméleti technika finomítását igényelte, ami egy önmagában is érdekes kérdés felvetéséhez és kidolgozásához vezetett, és ez a 4. pont tárgya. Az 5. pont részletesen ismerteti a két lift problémára adott módszerünket.

Végül a két lift problémával kapcsolatos történeti megjegyzéseket és módszerünk általánosítási lehetőségeit tárgyaljuk a 6. pontban. Itt említjük meg, hogy Zubkov (1975, 1976) a korreláció-függvények módszerével tárgyalta a két lift probléma egy szerűbb változatát, amikor azt is feltételezzük, hogy a rendszert a stacionaritást biztosító kezdeti feltételekkel indítjuk. Végül Kozlovnak (1978) is sikerült megoldani a két lift problémát eredeti alakjában. Bizonyítása azon alapul, hogy becsülni tudja egy folytonos állapotterű Markov-lánc egyensúlyhoz való konvergenciájának sebességét, mégpedig — Kolmogorov javaslatára — Bernstein módszerét használva. Ugyancsak más megoldást adott Kuznyecov (1979), és eredményei a „k out of n" rendszerekre is vonatkoznak. Az említett eredményekben simasági és momentumfeltételek szerepelnek, szemben a nálam technikai okokból fellépő, valójában igen gyenge — „öregedési" feltétellel. Módszerem segítségével — annak egy lépését ötletesen megjavítva — legújabban Kaplan (1981) optimálisnak látszó eredményt bizonyított.

A véletlen ponteloszlások modern elmélete a statisztikus fizikai kérdések hatására fejlődik. Itt már a pontok, vagyis a fizikai részecskék között kölcsönhatás van, és a véletlen ponteloszlásokat éppen a kölcsönhatási potenciál segítségével adjuk meg (vö. Ruelle (1969)*). Dolgozatunk III. fejezete a Brown-mozgás témakörével foglalkozik, amely kulcspéldája a fizikában fellépő sztochaszticitás egyik alapvető formájának, ami a szabadság fokok számának redukciója. A Brown-mozgás matematikai, dinamikai elméletét oly módon kísérlik megkapni, hogy végtelen sok ütköző részecske között követik egynek a pályáját, majd a modell diffúziós határértékét veszik, és a követett pálya határértékét tekintik a Brown-mozgás modelljének. Erről a megközelítésről szól az 1. pont. A határátmenet során más fizikai kérdésekre is választ remélhetünk, például Brown—Einstein (1905) által hipotézisként használt — megfigyelésének érvényességi körét is vizsgálhatjuk, amely szerint közeli részecskék pályái függetlenek. A vázolt program egyelőre csak az egydimenziós esetben volt megvalósítható, mert a több dimenziós esetben már a modell létezésének bizonyítása is igen nehéz, és ezidáig csak az egyensúlyi esetre ismeretes. Az egydimenziós modellnek sajátos tulajdonságai vannak, és ezek tárgyalása a fejezet fő célja. Az egyensúlyi esetre Harris (1965) és Spitzer (1969) igazolták, hogy a pálya diffúziós határértéke a Wiener-folyamat. Majorral közös vizsgálataink (l. Major—Szász (1980)) során az általános, nem-egyensúlyi esetben is meghatároztuk a pálya határeloszlását. A modellt és eredményeinket a 2. pont ismerteti, míg a bizonyítások a 3. pontban találhatók. Érdemes megemlíteni, hogy a bizonyításban fontos szerepet játszó első két momentum kezelése során, a szórás számolásánál a Cox sejtés megoldására adott módszerem (1.1.4. pont) alapjául szolgáló átalakítások itt is sikeresen alkalmazhatók.

Közeli részecskék pályája az egydimenziós esetben természetesen nem válik függetlenné, ez csak távoli pontokra lehet igaz. A 4. pontban feltételt adunk, amikor ez valóban így van, továbbá meghatározzuk általában két részecske pályájának együttes határeloszlását, és feltételt adunk arra, hogy ezek függősége ne legyen triviális (vö.

Szász (1980)). Az 5. pont különféle megjegyzéseket, általánosítási lehetőségeket, aktuális problémákat tárgyal.

Dolgozatunkban nem bizonyítunk minden eredményt és nem minden bizonyításunk teljes, viszont mindenütt hivatkozunk arra a dolgozatra, amely tartalmazza a teljes bizonyítást. Ezt a tárgyalási módot azért választottuk, mert így nagyobb terjedelmet szentelhettünk a problémák és az eredmények hátterének bemutatására, és kísérletet tehettünk azon szándékunk megvalósítására, hogy a véletlen ponteloszlások elméletének néhány központi problémáján keresztül vázlatos képet adjunk az elméletnek az elmúlt 15 évben végbement fejlődéséről és átalakulásáról, valamint az alkalmazott módszerek sokrétegűségéről.

A disszertáció végén megadjuk azoknak a monográfiáknak, könyveknek a jegyzékét, amelyekre hivatkoztunk, és itt található a szerző azon dolgozatainak felsorolása is, amelyeknek eredményeit a disszertációban használtuk, illetve ismertettük. Az olvasó az egyes fejezetek végén találja azon egyéb cikkek irodalmi adatait, amelyekre a szóban forgó fejezetben utalás történt.

Köszönetemet fejezem ki Krámli Andrásnak, akinek a dolgozathoz fűzött kritikai megjegyzéseit és javaslatait számos helyen figyelembe vettem.

A DOLGOZATBAN HASZNÁLT FONTOSABB JELÖLÉSEK

$\mathbf{R}^d$	d-dimenziós euklideszi tér a szokásos topológiával ($\mathbf{R}^1 \doteq \mathbf{R}$)
$\mathbf{Z}^d$	d-dimenziós egész rács ($\mathbf{Z}^1 \doteq \mathbf{Z}$)
$\mathbf{Z}_+$	nemnegatív egész számok halmaza
$\mathbf{Z}_{>0}$	természetes számok halmaza
$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$	a valószínűségi mező
$(X, \mathscr{X})$	mérhető tér-alaptér, amelyben a véletlen ponteloszlások realizálódnak
$\mathscr{C}$	$\mathscr{X}$-beli korlátos halmazok családja
$(G, \mathscr{G})$	a ponteloszlások tere
g	G elemei
γ	$\mathscr{G}$ elemei
$\varphi: (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to (G, \mathscr{G})$	mérhető-véletlen ponteloszlás a φ véletlen ponteloszlás *valószínűségeloszlása*
P_0	(mérték $(G, \mathscr{G})$-n)
$(Y, \mathscr{Y})$	mérhető tér — a jeltér
$(Z, \mathscr{Z}) = (X \times Y, \sigma(\mathscr{X} + \mathscr{Y}))$	— a jelzett ponteloszlások alaptere
$(G^Y, \mathscr{G}^Y)$	a jelzett ponteloszlások tere
$C, C(I)$	folytonos függvények Banach-tere a sup normával
$D, D(I)$	másodfajú szakadás nélküli függvények tere a Szkorohod topológiával (l. Billingsley (1986)).
$\mu(\cdot)$	mérték x-en — a véletlen ponteloszlás intenzitása
$\to_d$	az eloszlásban való konvergencia jelölése. (Ha nem egyértelmű, hogy milyen topológia által definiált ez a konvergencia, akkor ezt külön feltüntetjük, pl. $\xrightarrow{C[0,1]}_d$ a $C[0, 1)]$ tér szokásos, sup norma által definiált topológiájára vonatkozik. Általaban, ha a T topologikus térben $\mathscr{T}$ jelöli a Borel σ-algebrát, és $\xi_n: (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to (T, \mathscr{T})$ mérhető leképezések $(n=0, 1, \ldots)$, akkor azt mondjuk, hogy ξ_n eloszlásban tart ξ_0-hoz, jelben $\xi_n \to_d \xi_0$, ha minden $f: T \to \mathbf{R}^1$ korlátos, folytonos függvényre $\int f(\xi_n) d\mathbf{P} \to \int f(\xi_0) d\mathbf{P}$
$\doteq$	az egyik oldalt definiáló egyenlőség
$a^+ \doteq$	$\max(a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$
$a^- \doteq$	$\min(a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$
δ_x	az a valószínűségeloszlás, amely egységnyi tömeget koncentrál az x pontba
$\mathscr{L}(\,)$	a zárójelben álló valószínűségi változó eloszlása

I. FEJEZET

A VÉLETLEN PONTELOSZLÁSOK KLASSZIKUS ELMÉLETÉHEZ

1.1. *A véletlen ponteloszlás fogalma és a fontosabb operációk*

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, amely megszámlálható bázissal rendelkezik. A tpológia által generált σ-algebrát jelölje $\mathscr{X}$, és legyen $\mathscr{C}$ a korlátos (azaz a relatív kompakt) halmazok gyűrűje. Ebben a dolgozatban X általában a d-dimenziós euklideszi tér, $\mathbf{R}^d$ vagy annak részhalmaza, illetve a d-dimenziós egész rács, $\mathbf{Z}^d$ lesz.

X az az alaptér, amelyben a véletlen ponteloszlásokat megadjuk. Tekintsük X-n a lokálisan véges, nemnegatív egész értékű g mértékek G halmazát, vagyis tegyük fel, hogy g mérték és minden $A\in\mathscr{C}$-re $g(A)\in\mathbf{Z}_+=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Végül legyen $\mathscr{G}$ a $g\to g(A)$, $A\in\mathscr{C}$ leképezések által generált σ-algebra G-n, azaz az a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve a mondott leképzések mérhetőek.

1.1. Definíció. *Véletlen ponteloszlásnak nevezzük egy megadott* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező* $(G, \mathscr{G})$*-re való tetszőleges mérhető* φ *leképzését.*

Ily módon minden véletlen ponteloszlás nem más, mint egy G-értékű véletlen elem, s ezért jogos a $\mathbf{P}_0(\gamma)=\mathbf{P}(\gamma^{-1}($, $\gamma\in\mathscr{G}$ összefüggéssel G-n megadott $\mathbf{P}_0$ mértéket a szóban forgó *véletlen ponteloszlás valószínűségeloszlásának* neveznünk. A dolgozatban vizsgált kérdések szempontjából a véletlen ponteloszlások azonosíthatók valószínűségeloszlásaikkal, ezért nem fog félreértést okozni, ha e két objektum között gyakran nem teszünk különbséget.

A véletlen ponteloszlásokat általában véges dimenziós eloszlásaikkal adják meg, azaz γ a $\{g: g(A_1)=k_1, \ldots, g(A_r)=k_r\}$ halmazokon fut végig, ahol $r, k_1, \ldots, k_r\in\mathbf{Z}_+$ tetszőleges, és $A_1, \ldots, A_r$ $\mathscr{C}$-nek egy elég nagy részhalmazából vannak tetszőlegesen választva. Megfelelő konzisztenciafeltételek teljesülése esetén garantálható a megadott véges dimenziós eloszlásokkal rendelkező véletlen ponteloszlás létezése. Mivel a jelen dolgozatban szereplő véletlen ponteloszlások konstruktíve is megadhatók, nekünk ilyen feltételekre nem lesz szükségünk, és a témát illetően utalunk Neveu (1977)* művére.

1.2. Lemma *(Kallenberg (1976)*) A véletlen ponteloszlások halmaza zárt az összeadásra nézve. Véletlen ponteloszlások* $\sum_i \varphi_i$ *összege akkor és csak akkor véletlen ponteloszlás, ha minden* $A\in\mathscr{C}$*-re* $\sum \varphi(A)<\infty$ *1 valószínűséggel.* (Itt a valószínűségelméletben elfogadott szokásnak megfelelően $\varphi_i(\omega)(A)$ helyett írtunk egyszerűen $\varphi_i(A)$-t.)

Az összegképzés mellett, ezt nevezik gyakran szuperpozíciónak is, a legfontosabb, véletlen ponteloszlásokon értelmezett operáció az *elágazás*. Ezt a jelzett ponteloszlás segítségével definiáljuk.

1.3. Definíció. *Képezzük az* $(X, \mathscr{X})$ *alaptérnek egy* $(Y, \mathscr{Y})$ *mérhető térrel, az ún. jeltérrel való* $(Z, \mathscr{Z})$ *szorzatát és jelöljük* G^Y*-nal az* XY *téren értelmezett azon nemnegatív egész értékű mértékek halmazát, amelyek lokális végesek abban az értelemben, hogy természetes projekciójuk az* X *térre lokálisan véges. Legyen* $\mathscr{G}^Y$ *a* $g^Y\to g^YA$,

$A \in \mathscr{C}^Y$ leképezések által generált σ-algebra G^Y-on, ahol $\mathscr{C}^Y$ azon $\mathscr{X}$-beli halmazok családja, amelyek természetes projekciója X-re korlátos. Véletlen jelzett ponteloszlásnak nevezzük bármely $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező $(G^Y, \mathscr{G}^Y)$-ra való tetszőleges, mérhető φ leképezését. Véletlen jelzett ponteloszlás természetes projeckiója az X alaptérre véletlen ponteloszlás, amelyet alap-ponteloszlásnak nevezünk.

Feltevéseink szerint egy véletlen ponteloszlás nem más, mint X megszámlálható sok pontjának véletlen kiválasztása oly módon, hogy azoknak ne legyen torlódási pontjuk, míg véletlen jelzett ponteloszlás esetén ezekhez a pontokhoz egy-egy jelet is megadunk. Azon $X \in X$ pontok, amelyekre $g(\{x\}) \geqq 1$, a *ponteloszlás realizációjának pontjai*, és $g(\{x\})$ az x pont *multiplicitása.*

A dolgozatban általában feltesszük, hogy a véletlen jelek egymástól függetlenek. Pontosabban:

1.4. Definíció. *A véletlen jelek függetlenek, ha tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{X}$, $A_i A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{Y}$ halmazokra, valamint bármely $k \in \mathbf{Z}^+$-ra 1 valószínűséggel*

$$\mathbf{P}^Y(g(A_i \times B_i) = k_i,\ 1 \leqq i \leqq n | \mathscr{G}) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

ahol $\mathscr{G}$ most a $\mathscr{G}$ σ-algebra G^Y-ba való természetes beágyazását is jelöli, és

$$\varepsilon_i = \sum_{\substack{\varphi \subset \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r\} \\ \operatorname{card} \varphi = k_i}} \prod_{\tilde{x}_j \in \varphi} \delta(B_i, \tilde{x}_j) \prod_{\tilde{x}_j \notin \varphi} [1 - \delta(B_i, \tilde{x}_j)]$$

Itt $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r$ a véletlen ponteloszlás A_i-be eső pontjai és $\delta(\cdot, x)$ minden $x \in X$-re valószínűségi mérték Y-n.

Igen fontos speciális eset, amikor $Y = G$, azaz a jelek maguk is ponteloszlások. Ekkor a kiinduló ponteloszlás minden $x_1, x_2, \ldots$ pontjához egy-egy x-en adott $y_1, y_2, \ldots$ ponteloszlást $(y_i \in G, i = 1, 2, \ldots)$ rendelünk, és vesszük az $y_1, y_2, \ldots$ ponteloszlások összegét. Amennyiben ez az összeg 1 valószínűséggel eleme G-nek, akkor a kiinduló véletlen ponteloszlásból egy újabb véletlen ponteloszlást nyerünk, és ezt az operációt nevezzük *elágazásnak.*

Nem célunk minél általánosabb feltételeket kimondani, amelyek biztosítják, hogy a fenti összeg véges, erre vonatkozóan utalunk Kallenberg (1976)*, Kerstan et al (1974)* és Neveu (1977)* műveire. A mi céljainkra elegendő a következő lemma, amely független elágazás esetére ad feltételt.

1.5. Definíció. *Az X-en $\mu(A) = \mathbf{E}\varphi(A)$ reláció által adott mértéket a véletlen ponteloszlás intenzitás mértékének, röviden intenzitásának nevezzük.*

Mivel most $Y = G$, minden $x \in X$-re bevezethetjük az $M(\cdot, x)$ mértéket $\mathscr{X}$-en úgy, hogy $A \in \mathscr{C}$ esetén $M(A, x)$ legyen azon pontok számának várható értéke, amelyek x-ből származnak és A-ba esnek. (M-et az 1.4 Definícióban szereplő $\delta(\cdot, x)$ mérték határozza meg.)

1.6. Lemma. *Ha minden $A \in \mathscr{C}$-re $\int_X M(A, x)\mu(dx) < \infty$, akkor a függetlenségi feltevésnek eleget tevő elágazó operáció értelmes, és az elágazással nyert véletlen ponteloszlás intenzitása éppen $\int_X M(\cdot, x)\mu(dx)$.*

A lemma bizonyítását lásd Szász (1967).

Az elágazó operáció speciális eseteként tartalmazza a pontok elmozdulását, amivel az I. Fejezet 2. és 4. pontjaiban, valamint a III. Fejezetben is fogunk foglalkozni, továbbá a ritkítást, ami az I. Fejezet 2. pontjában és a II. Fejezetben játszik szerepet. A II. és III. Fejezetben éppen annak lesz jelentősége, hogy a függetlenségi feltevésnek eleget nem tevő ritkítás, illetve elmozdulás esetén hogyan lehet mégis a független operációkra kidolgozott gondolatokat alkalmazni.

Befejezésül megjegyezzük, hogy véletlen ponteloszlások sorozatainak eloszlásban való konvergenciájánál a G térben az ún. *zsenge* (vague) *topológiát* szokásos alapul venni, amelyet a következő konvergenciafogalom határoz meg: a $g_n \in G$ elemek sorozata zsengén konvergál $g \in G$-hez ($g_n \xrightarrow{v} g$), ha bármely $f: X \to \mathbf{R}$ kompakt tartójú, folytonos függvényre $\int_X f(x) g_n(dx) \to \int_X f(x) g(dx)$. Ha mármost a φ véletlen ponteloszlásra $\mathscr{C}_\varphi \doteq \{A : A \in \mathscr{C}\}$, $\varphi(\partial A) = 0$ $m.m\}$, akkor Debes et al. (1970) tétele szerint (l. még Kallenberg (1976)*, 4.2. tétel) a $\varphi_n \to_d \varphi$ konvergencia szükséges és elégséges feltétele a következő: ha $\mathscr{S} \subset \mathscr{C}_\varphi$ tetszőleges diszkrét lefedő félgyűrű, akkor minden $I_1, \ldots, I_r \in \mathscr{S}$ rendszerre $(\varphi_n(I_1), \ldots, \varphi_n(I_r)) \to_d (\varphi(I_1), \ldots, \varphi(I_r))$ (eloszlásban $\mathbf{R}^r$-ben).

1.2. *A Poisson ponteloszlás és egy jellemzése*

1.7. Definíció. *A φ véletlen ponteloszlás Poisson típusú, ha X-en megadható egy μ mérték, hogy $\mathscr{P}$. Minden $A \in \mathscr{C}$-re*

$$\mathbf{P}(\varphi(A) = k) = \frac{[\mu(A)]^k}{k!} e^{-\mu(A)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

$\mathscr{I}$. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$ ($A_j \cap A_k = \emptyset$, ha $j \neq k$) esetén a $\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_n)$ valószínűségi változók függetlenek.

A feltételek teljesülése esetén μ a Poisson véletlen ponteloszlás intenzitása és $A \in \mathscr{C}$-re $\mu(A) < \infty$. Könnyű belátni, hogy tetszőleges x-en adott μ mértékhez, amelyre minden $A \in \mathscr{C}$-re $\mu(A) < \infty$, létezik Poisson véletlen ponteloszlás μ intenzitással. $X = \mathbf{R}^d$ esetén a Poisson véletlen ponteloszlást *stacionáriusnak* nevezzük, ha $\mu(dx) = \mu \cdot dx$, ahol dx a Lebesgue-mérték és μ pozitív konstans, amelyet a stacionárius Poisson ponteloszlás *paraméterének* nevezünk.

A Poisson ponteloszlás a Wiener folyamat mellett a sztochasztikus folyamatok alapvető építőköve: a Wiener folyamat a folytonos, a Poisson ponteloszlás a diszkrét építőelem. Ennek a megállapításnak klasszikus illusztrációja a független növekményű és ezzel összefüggően a korlátlanul osztható eloszlások elméletében játszott szerepe vö. Gihman—Szkorohod (1965)*, míg újabb példája a martingálok modern elmélete.

A korlátlanul osztható véletlen ponteloszlások elmélete a Poisson ponteloszlásra épül (Kerstan et al (1974))*, amely a tömegkiszolgálás és a megbízhatóságelméletben is fundamentális fontosságú (ezt mutatja e dolgozat II. Fejezete is). A modern statisztikai fizikai kutatások fényében kiderült, hogy kölcsönhatás nélküli vagy ilyenekre visszavezethető pontrendszerek (ideális gáz, Lorentz-gáz) egyensúlyi, vagyis Gibbs-állapotai ugyancsak Poisson típusú ponteloszlások, s ezzel a Poisson ponteloszlás alkalmazhatósági köre tovább szélesedett.

Mindez messzemenően indokolttá teszi a Poisson véletlen ponteloszlás definíciójában szereplő feltételek szerepének tisztázását, pontosabban a Poisson ponteloszlást meghatározó minimális feltételek keresését. Ezzel kapcsolatban 1965-ben

a következő kérdést vetettem fel (l. Rényi (1967)), amely az $X=\mathbf{R}^1$ és a $\mu(dx)=$ $=\mu\cdot dx$ esetre vonatkozott: az 1.7. Definíció nyilván gyengíthető, hiszen ha $\mathscr{P}$-t a korlátos Borel halmazok gyűrűje helyett csupán a véges intervallumok $\mathscr{S}$ félgyűrűjére fogalmazzuk meg, akkor $\mathscr{I}$ alkalmazásával már adódik $\mathscr{P}$ teljesülése a Borel halmazokra is. A kérdés mármost az volt: szükség van-e egyáltalán $\mathscr{I}$-re, nem elegendő-e $\mathscr{P}$-t feltenni az intervallumok félgyűrűjére. Az egyszerűség kedvéért $\mathscr{P}(\cdot)$-val fogjuk jelölni a $\mathscr{P}$ feltételt a zárójelben megadott halmazosztályra (így az eredeti feltétel $\mathscr{P}(\mathscr{C})$). Kérdésemre két irányból született válasz 1967-ben. Egyrészt Lee (1968), Moran (1967), és Shepp (l. Goldman (1967)) adtak nemleges választ, másrészt Rényi (1967) bizonyította a következő pozitív állítást: ha $\mathscr{R}$ jelöli a véges intervallumok ($\subset\mathbf{R}^1$) véges összegeiből álló gyűrűt, akkor $\mathscr{P}(\mathscr{R})$-ből ($\mu(dx)=\mu\cdot dx$!) következik $\mathscr{I}$, azaz $\mathscr{P}(\mathscr{R})$ elegendő ahhoz, hogy a véletlen ponteloszlás (stacionárius) Poisson legyen.

A fenti válaszok felvetik a kérdést: $\mathscr{P}(\mathscr{S})$ továbbá $\mathscr{I}$ valamilyen gyengítése együttesen nem biztosítják-e, hogy a véletlen ponteloszlás Poisson típusú legyen. Az $\mathscr{I}$ feltétel természetes gyengítése a páronkénti, illetve N-enként való függetlenség, azaz vezessük be a következő feltételt: $\mathscr{I}_N$: Diszjunkt $I_1, \ldots, I_N$ intervallumok esetén a $\varphi(I_1), \ldots, \varphi(I_n)$ valószínűségi változók függetlenek ($n=1, 2, \ldots, N$).

1.8. Tétel. (Szász (1970)) *Minden N természetes számra létezik $\mathbf{R}^1$-en olyan $\mathscr{P}(\mathscr{S})$-nek és $\mathscr{I}_N$-nek eleget tevő véletlen ponteloszlás, amely nem Poisson típusú.*

Bizonyítás. Elegendő a szónban forgó ponteloszlást a [0, 1] intervallumon megszerkesztenünk, hiszen ha a számegyenes fennmaradó részén a megszerkesztett ponteloszlástól független Poisson ponteloszlást vesszük, akkor a két ponteloszlás egyesítése megadja a kívánt példát az egész számegyenesen.

Céljainkra megfelel a keresett ponteloszlás valószínűségeloszlását megkonstruálni, azaz megadni egy $\mathbf{P}_0$ valószínűségi mértéket az $X=[0, 1]$ halmazhoz szerkesztett $(G, \mathscr{G})$ téren. E téren tekintsük a μ paraméterű, stacionárius Poisson ponteloszlás Π_μ valószínűségeloszlását. Legyen mindenekelőtt

$$\mathbf{P}_0(g([0, 1]) = k) = \Pi_\mu(g[0, 1]) = k) \tag{1.1}$$

($k=0, 1, 2, \ldots$) és legyen továbbá

$$\mathbf{P}_0(\cdot\,|g([0, 1]) = k) = \Pi_\mu(\cdot\,|g([0, 1]) = k), \tag{1.2}$$

hacsak $k\neq M=2N+1$. Ismeretes, hogyha a $g([0, 1])=k$ feltétel mellett a Poisson ponteloszlás [0, 1]-be eső pontosan k pontjának véletlen permutációját vesszük, akkor az így nyert k-dimenziós vektor eloszlása megegyezik egy olyan vektor eloszlásával, amelynek komponensei függetlenek és a [0, 1]-en egyenletes eloszlásúak. Ezek szerint a feltételes eloszlásfüggvény ilyen alakú

$$F_k^{(\Pi_\mu)}(U_1, \ldots, U_k) = U_1 \ldots U_k$$

($0\leqq U_1, \ldots, U_k\leqq 1$), ahol a felső index jelzi, hogy melyik mérték szerint számoljuk az eloszlásfüggvényt. (1.2)-ből következik, hogy $k\neq M$ esetén

$$F_k^{(P_0)} = F_k^{(\Pi_\mu)}. \tag{1.3}$$

$k=M$ esetén legyen minden $0\leqq U_1, \ldots, U_M\leqq 1$-re

$$F_M^{(P_0)}(U_1, \ldots, U_M) = U_1 \ldots U_M + \varepsilon U_1 \ldots U_M(1-U_1)\ldots \tag{1.4}$$
$$\ldots(1-U_M)\cdot \prod_{1\leqq i<j\leqq M}(U_j-U_i) F_M^{(\Pi_\mu)}(U_1, \ldots, U_M) + H(U_1, \ldots, U_M).$$

Könnyű látni, hogy elég kis $\varepsilon>0$-ra $\frac{\partial^M}{\partial U_1 \dots \partial U_M} F_M^{(P_0)}(U_1, \dots, U_M)$ valószínűségi sűrűségfüggvény, így $F_M^{(P_0)}$ valóban eloszlásfüggvény. Nyilvánvalóan az (1.1-4) összefüggések egyértelműen meghatározzák a $\mathbf{P}_0$ valószínűségeloszlást és (1.4)-ből az is következik, hogy $\mathbf{P}_0$ nem Poisson típusú.

Meg kell még győződnünk arról, hogy $\mathscr{P}(\mathscr{S})$ és $\mathscr{I}_N$ teljesülnek $\mathbf{P}_0$-ra. Mivel Π_μ-re ezek teljesülnek, ezért elegendő belátnunk, hogy diszjunkt $I_1, \dots, I_N$ intervallumokra.

$$\mathbf{P}_0(g(I_j) = k_j, \quad 1 \leqq j \leqq N) = \Pi_\mu(g(I_j) = k_j, \ 1 \leqq j \leqq N).$$

$\mathbf{P}_0$ definíciója miatt nem kell mást megmutatnunk, mint hogy

$$\mathbf{P}_0(g(I_j) = k_j, \quad 1 \leqq j \leqq N | g([0,1]) = M) = \tag{1.5}$$
$$= \Pi_\mu(g(I_j) = k_j, \quad 1 \leqq j \leqq N | g([0,1]) = M)$$

Mindkét valószínűség kifejezhető egy

$$\sum(\pm F_M^{(\cdot)}(\alpha_1, \dots, \alpha_M))$$

típusú véges összeggel, ahol az α-k lehetséges értékei 0, 1 és az $I_1, \dots, I_N$ intervallumok végpontjai. Ezért (1.5) két oldalának különbsége

$$\sum(\pm H(\alpha_1, \dots, \alpha_M)).$$

Ebben az összegben azonban valamennyi tag eltűnik. Ez nyilvánvaló, ha 0 vagy 1 szerepel az α-k között, míg ellenkező esetben legalább két α érték azonos, így H értéke ismét 0.

Q. e. d.

Érdemes megemlíteni, hogy az 1.8 tételre újabb bizonyítást adott Oakes (1972).

1.9. Következmény. *Az 1.8 Tétel állítása igaz* $\mathbf{R}^d$*-n is.*

Bizonyítás. Legyen az előbb szerkesztett folyamat realizációja $[0, 1]$-en $\{x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}\}$ és legyenek $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, (i=2, 3, \dots, d)$ független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, függetlenek $\{x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}\}$-től is. Ekkor az

$$(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(d)}), \ \dots, \ (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(d)})$$

pontok egy d-dimenziós ponteloszlás realizációját adják az egységkockán. A konstrukció miatt ez a $\mathbf{P}_0$ ponteloszlás nem Poisson típusú. A μ paraméterű Poisson ponteloszlást $[0, 1]^d$-n Π_μ-vel jelölve, azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\mathbf{P}_0(g(I_j) = k_j, \ 1 \leqq j \leqq N | g([0,1]^d) = M) =$$
$$= \Pi_\mu(g(I_j) = k_j, \ 1 \leqq j \leqq N | g([0,1]^d) = M),$$

ahol $I_1, \dots, I_N$ diszjunkt intervallumok ($\subset [0, 1]^d$). A bal oldali valószínűség kifejezhető mint

$$\pi^* \mathbf{P}_0(\pi g(J_1) = l_1, \dots, \pi g(J_s) = l_s, B | g([0,1]^d) = M) \tag{1.6}$$

típusú tagok összege, ahol $\pi g(J) = g(J \times [0,1]^{d-1})$ a g mérték vetülete az első koordinátára és π^* a π vetítés által indukált leképezése a $[0, 1]^d$-n adott véletlen ponteloszlásoknak a $[0, 1]$-en adott ponteloszlásokra ($J \subset [0, 1]$ és J intervallum), $J_1, \dots, J_s$ ($\subset [0, 1]$) olyan intervallumok, amelyek végpontjai csak az $I_1, \dots, I_N$ első komponen-

seinek végpontjai közül kerülhetnek ki, és végül a B esemény csupán a $X_1^{(i)}, \ldots, X_M^{(i)}$ $(i=1, 3, \ldots)$ valószínűségi változóktól függ. Ezért (1.6) így írható

$$\pi^* \mathbf{P}_0(\pi g(J_1) = l_1, \ldots, \pi g(J_s) = l_s | \pi g([0, 1]) = M) \mathbf{P}_0(B),$$

ahol az első tényező ismét egyenlő a

$$\pi^* \Pi_\mu(\pi g(J_1) = l_1, \ldots, \pi g(J_s) = l_s | \pi g([0, 1]) = M)$$

valószínűséggel, míg a második tényezőre nyilván $\mathbf{P}_0(B) = \Pi_\mu(B)$.

Q. e. d.

A fenti következmény speciálisan általánosítja Lee, Moran és Shepp konstrukcióinak tartalmát a több dimenziós esetre. Miles vetette fel, nem lehetne-e a Rényi-féle pozitív válaszhoz hasonló állítást bizonyítani a síkon, ha az intervallumok félgyűrűje helyett tágabb halmazosztályt, például a köröket vennénk. Moran (1976-A) még bővebb osztályra, a konvex halmazok osztályára bizonyította, hogy hiába teljesül ezekre a $\mathscr{P}$ feltétel, az $\mathscr{I}$ feltétel nem feltétlenül teljesül. Ez az eredménye minden dimenzióban érvényes. Ugyanebben az évben Morannak (1976-B) sikerült $\mathbf{R}^2$-n az 1.8. Következménynek megfelelő állítást is kiterjesztenie intervallumok helyett konvex halmazokra.

Az eredeti kérdésfeltevés a Poisson ponteloszlások körén túl általános eredményekhez is vezetett, amelyek közül kiemelem Mönch (1971) eredményét, amelynek kimondásához megfogalmazunk egy definíciót.

1.10. Definíció. *Az X téren adott $\mathbf{P}$ véletlen ponteloszlás egyszerű, ha $\mathbf{P}$ majdnem minden realizáció összes pontjának multiplicitása* 1.

Mönch eredménye így hangzik: ha $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ két véletlen ponteloszlás ugyanazon a téren, $\mathbf{P}_1$ egyszerű és $\mathbf{P}_1(g(A)=k) = \mathbf{P}_1(g(A)=k)$ minden $A \in \mathscr{C}$-re, és $k=0, 1, 2, \ldots$-re, akkor $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$, azaz már a — halmazok elég bő osztályára vett — egydimenziós (!) eloszlások is egyértelműen meghatároznak egy egyszerű ponteloszlást. Természetesen a jelen pontban ismertetett eredmények Mönch általános tételének javíthatósági határát is jelentik.

Befejezésül bevezetünk két, a Poisson ponteloszláshoz szorosan kapcsolódó véletlen ponteloszlást.

1.11. Definíció. *Egy véletlen jelzett ponteloszlást Poisson típusúnak nevezünk, ha alap-ponteloszlása Ppisson típusú és a véletlen jelek függetlenek.*

Az elnevezést indokolja Prékopa szorzattér tétele (l. Prékopa (1958)), amely kimondja, hogyha az X-téren megadunk egy tetszőleges Poisson ponteloszlást μ intenzitásmértékkel és egy $\delta: \mathscr{Y} \times X \to \mathbf{R}$ függvényt, amely teljesíti a következő két tulajdonságot:

1) minden $x \in X$-re $\delta(\cdot, x)$ valószínűségi mérték Y-on;

2) minden $A \in \mathscr{Y}$-ra $\delta(A, \cdot)$ $\mathscr{X}$-mérhető, akkor van egyetlen véletlen jelzett Poisson ponteloszlás, amelynek alap-ponteloszlása μ, amelyre az 1.4. definícióban szereplő δ függvény éppen a megadott és végül ez a ponteloszlás nem más, mint az $X \times Y$ téren $\delta(dy, x)\mu(dx)$ intenzitás-mértékkel megadott Poisson ponteloszlás.

1.12. Definíció. *Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ független Poisson ponteloszlások rendre $\mu_1, \mu_2, \ldots$ intenzitással és tegyük fel, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k$ mérték lokálisan véges.* A $\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi_k$ *ponteloszlást összetett Poisson ponteloszlásnak nevezzük.*

Az 1.2. Lemma alapján $\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi_k$ valóban ponteloszlást definiál. Az olyan összetett Poisson ponteloszlások, amelyeknél a μ_k intenzitások abszolút folytonosak, rendre $m_k(x)$ sűrűségekkel, származtathatók jelzett Poisson ponteloszlások segítségével, ahol az Y jelhalmaz a természetes számok $\mathbf{Z}_{>0}$ halmaza. Valóban, tegyük fel, hogy

a) a jelzett Poisson ponteloszlás alap-ponteloszlásának intenzitása $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$;

b) μ majdnem minden x-re $\delta(\{k\}, x) = m_k(x)\left[\sum_{l=1}^{\infty} m_l(x)\right]^{-1}$ és egyébként $\delta(\{k\}, x) = 0$.

Az így definiált jelzett Poisson ponteloszlás realizációihoz azt a G-beli realizációt rendelve, amelynek ugyanott vannak pontjai, mint a jelzett ponteloszlásnak és a pontok multiplicitását éppen a jel értéke adja meg, megkapjuk a kívánt származtatást.

Az összetett Poisson ponteloszlást nevezzük n-rendűnek, ha minden $k \geqq n$-re μ_k eltűnik.

1.13. Tétel. *Tekintsünk egy μ intenzitású Poisson ponteloszlásra alkalmazott, a függetlenségi feltevésnek eleget tevő elágazó operációt, amelyre teljesül az 1.6. Lemma feltétele is. A kapott véletlen ponteloszlás akkor és csak akkor n-edrendű összetett Poisson, ha μ-majdnem minden x-re $\delta(\{a\ pontok\ száma\ \leqq n\}, x) = 1$.*

Ennek érdekes speciális esete az

1.14. Következmény. *Az előbbi tétel feltételei mellett a kapott véletlen ponteloszlás akkor és csak akkor Poisson típusú, ha μ-majdnem minden x-re $\delta(\{a\ pontok\ száma\ \leqq 1\}, x) = 1$.*

A következményt ebben az általánosságban Kerstan et al. (1974)* fogalmazták meg (5.4.5. Satz), és ezzel általánosították a Szász (1967) dolgozat 6.1. Tételét. Az 1.13. Tétel a Szász (1967) dolgozat 6.3. Tételének általánosítása, és az ott közölt bizonyításból azonnal adódik.

A következmény érdekessége, hogy megfordítása Dobb (1953)* és Rényi (1956) tételeinek, amelyek azt állították, hogy egy ponteloszlás pontjainak független elmozgatásai, illetve ritkítása révén Poisson ponteloszlásból Poisson ponteloszlást kapunk (mindkét állítás közvetlenül következik Prékopa említett szorzattér tételéből.) E tételekről szó lesz még e dolgozat 1.4 és 3.2 pontjaiban is.

1.3. *Általános határeloszlástételek tiszta ugró, egész értékű folyamatok összegeire*

A ponteloszlások elméletének klasszikus típusú alkalmazásaiban: tömegkiszolgálási elmélet (pl. telefonközpontok, az utóbbi években számítógéphálózatok matematikai modelljei stb.), megbízhatóságelmélet, ... igen gyakori az a feltevés, hogy az igények fellépésének folyamata Poisson ponteloszlás. Ezt a hipotézist azzal sikerült alátámasztani, hogy bebizonyították (Hincsin (1955), Oszeszkov (1956)), hogy nagyszámú, egyenletesen kicsi, független ponteloszlás összege bizonyos további természetes feltételek mellett közelítőleg Poisson ponteloszlás. Telefonközpont esetén a tagok az egyes előfizetők hívásainak időpontjaiból álló ponteloszlások. A legáltalánosabb feltételeket Grigelionis (1963 és 1966) adta, akinek sikerült szükséges és elégséges feltételeket találnia. 1970-ben Gnedenko, bizonyos biztosítás-elméleti problémákból kiindulva azt a kérdést vetette fel, hogy milyen konvergenciafeltételek érvényesek egészértékű, tiszta ugró folyamatok összegeire (a biztosításnál a díjak pozitív, a kártalanítások negatív egész számok).

Monoton növekedő folyamatok (ezek tulajdonképpen véletlen ponteloszlások) esetén Kerstan és Matthes (1964) eredményeiből következik, hogy a lehetséges határfolyamatok korlátlanul oszthatóak, míg az általunk vizsgált általánosabb esetben ugyanez az állítás Kellenberg (1973) tételének folyománya. Mindkét dolgozatban az összegek konvergenciájára is találhatók szükséges és elégséges feltételek az n-dimenziós eloszlások terminusaiban. Egyszerű ponteloszlások (l. 1.10. Definíció) esetén különleges szerep jut a Poisson ponteloszlásnak, amely közöttük az egyetlen korlátlanul osztható és független növekményű, míg az egész értékű, tiszta ugró folyamatok analóg osztálya az ún. összetett Poisson folyamatokból áll. E pontban az ezekhez való konvergenciára adunk szemléletes és könnyen ellenőrizhető feltételeket, amelyek egyszersmind egyszerűek. Azoknak a nehézségeknek az érzékeltetésére, amelyek abból származnak, hogy nemcsak Poisson ponteloszlásokat engedünk meg határeloszlásként, mint Grigelionis tette, bemutatunk egy egyszerű példát: tegyük fel, hogy a φ_{nk}, $1 \leqq k \leqq n_k$ független ponteloszlások összege konvergál a φ Poisson ponteloszláshoz; a φ_{nk} ponteloszlások mindegyikére alkalmazzuk ugyanazt a determisztikus elágazási operációt (l. 1.1. pont): először minden x pontból 4—4 pont keletkezik, x-ben egy 2 multiplicitású pont és $(x+\varepsilon_n)$-ben is egy 2 multiplicitású pont, ahol $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$; másodszor — az elágazási operációt negatív multiplicitásokra is általánosítva — minden x ponthoz rendeljünk x-ben egy 2 multiplicitású pontot és $(x+\varepsilon_n)$-ben egy (-2) multiplicitású pontot. Az első esetben az elágazó operációkkal nyert ponteloszlások összege a 4φ összetett Poisson ponteloszláshoz konvergál, míg a második esetben a határérték az a ponteloszlás, amelynek 1 valószínűséggel nincs pontja.

1.15. Definíció. A $\{\xi(t)\colon t \in \mathbf{R}^1\}$ *sztochasztikus folyamatot összetett Poisson folyamatnak nevezzük, ha*

(i) *független növekményű;*
(ii) *minden véges zárt I intervallumra*

$$\mathbf{E}e^{iu\xi(I)} = \exp\left\{\sum_{s\in\mathbf{Z},\, s\neq 0} \mu_s(I)\,(e^{ius}-1)\right\}, \tag{1.7}$$

ahol általában $\alpha(I)=\alpha([a,b])=\alpha(b)-\alpha(a-0)$ és minden $s\neq 0$ egész számra μ_s a $\sum_{s\neq 0} |s|\,\mu_s(I) < \infty$ feltételnek eleget tevő mérték a számegyenesen;

(iii) $\xi(0)$ *egész értékű (az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\xi(0)=0$).*

A folyamatról feltesszük, hogy majdnem minden realizációja jobbról folytonos, ami nem megy az általánosság rovására.

Ha az összetett Poisson folyamat realizációi monoton növekedő függvények, akkor az (1.7) előállításában negatív s-ekre a μ_s mértékek eltűnnek, és akkor

$$\mathbf{E}e^{iw\xi(I)} = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \mu_s(I)\,(e^{iws}-1)\right\}. \tag{1.8}$$

Ez esetben az összetett Poisson folyamat természetes módon származtatható összetett Poisson ponteloszlásból, míg általában kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető két független összetett Poisson ponteloszlás különbségének.

Térjünk rá a probléma pontos megfogalmazására. E pontban $\xi(t)$, $\eta(t)$ és $\zeta(t)$ egész értékű, tiszta ugró folyamatokat fognak jelölni ($t\in\mathbf{R}^1$), amelyeknek véges intervallumban véges sok ugrásuk van és eleget tesznek a $\xi(0)=\eta(0)=\zeta(0)=0$ feltételnek. Tegyük fel, hogy minden n-re a $\xi_{nk}(t)$, $k=1,\ldots,k_n$ folyamatok függetlenek és asszimptotikusan egyenletesen kicsik, azaz minden I intervallumra (e pontban I min-

dig véges lesz)

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq k_n} \mathbf{P}\big(\xi_{n_k}(I) \neq 0\big) = 0.$$

A feladat

$$\eta_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n_k}(t) \tag{1.9}$$

határeloszlásának meghatározása, midőn $n\to\infty$. Mivel az általunk vizsgált folyamatok realizációi azonosíthatók az X téren tekintett, lokálisan véges, $\mathbf{Z}$-értékű előjeles mértékekkel, azért természetes az eloszlásban való konvergenciát definiáló topológiát az 1. pont végén G-ben bevezetett zsenge konvergencia mintájára megadnunk. Valóban a fenti előjeles mértékek $\tilde{G}$ halmazán ugyanúgy értelmezendő a zsenge topológia, mint G-n, és könnyű látni, hogy az ott megfogalmazott Debes et al.-féle kritérium megfelelője most is érvényes marad. Esetünkben $X=\mathbf{R}$ és $\mathscr{S}$-nek választhatjuk a $\mathscr{C}_\varphi$-hez tartozó intervallumokat.

Eredményeink alakja monoton növő folyamatokra egyszerűbb, ezért tárgyalásukat ezzel az esettel kezdjük. Bevezetünk néhány feltételt:

A_1. Tetszőleges diszjunkt I_1, I_2 intervallumokra

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\big(\xi_{nk}(I_1) \neq 0,\ \xi_{nk}(I_2) \neq 0\big) = 0$$

A_2. Tetszőleges I intervallumra igaz az állítás: ha J_{nk} jelöli a legrövidebb intervallumot, amely a ξ_{nk} folyamat összes I-be eső ugrását tartalmazza, akkor minden pozitív ε-ra

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|J_{nk}| > \varepsilon) = 0$$

A_3. Minden I intervallumra és pozitív ε-ra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\max_{1\leq k\leq k_n} |J_{nk}| > \varepsilon\Big) = 0.$$

B. Minden I intervallumra és $s\in\mathbf{Z}_{\neq 0}$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\big(\xi_{nk}(I) = s\big) = \mu_s(I) < \infty.$$

Az A_1 és a B. feltétel már Kerstan—Matthes (1964)-ben is megjelenik, míg az A_2, A_3 és a később megfogalmazandó A_4 feltételek teljesen újak és diszkussziónkban éppen ezek szerepe alapvető.

1.16. Tétel. *Ha a ξ_{nk} folyamatok realizációi 1 valószínűséggel monoton növekedő függvények, akkor a (1.9)-ben definiált η_n folyamatok akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban egy összetett Poisson folyamathoz, ha a B feltétel, továbbá az A_1, A_2, A_3 feltételek bármelyike teljesül. Konvergencia esetén a határfolyamatot (1.8) határozza meg.*

Ha a konvergenciát már tudjuk, még egyszerűbb feltételeket tudunk adni arra, hogy a határfolyamat összetett Poisson legyen.

1.17. Tétel. *Ha a ξ_{nk} folyamatok realizációi 1 valószínűséggel monoton növekedő függvények és a η_n folyamatok eloszlásban konvergálnak egy η folyamathoz, akkor*

annak szükséges és elégséges feltétele, hogy η (1.8) alakú összetett Poisson folyamat legyen az, hogy a B feltétel teljesüljön azzal a kiegészítéssel, hogy a $\mu_s(I)$ intervallum függvények additivak minden $s>0$-ra.

A bizonyítások egy egyszerű lemmát használnak, amely a folklórhoz tartozik, és ugyanúgy bizonyítható, mint a Poisson eloszláshoz való konvergenciára vonatkozó klasszikus tétel (l. Gnedenko—Kolmogorov (1949)*). Tekintsük minden n-re a független

$$\alpha_{nk} = (\alpha_{nk}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nk}^{(r)}) \in \mathbf{R}^r \quad (1 \leqq k \leqq k_n)$$

valószínűségi vektorváltozókat, ahol $\alpha_{nk}^{(i)}$ egész értékeket vesz fel $(1 \leqq k \leqq k_n)$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq k\leqq k_n} \mathbf{P}(\alpha_{nk} \neq 0) = 0$$

és legyen

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_{nk}.$$

1.18. Lemma. *A β_n véletlen vektorok eloszlása $n\to\infty$ esetén akkor és csak akkor konvergál egy $F(u)$ $(u\in\mathbf{R}^r)$ határeloszláshoz, ha*

(i) *minden egész komponensű $s\neq 0$ vektorra*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(\alpha_{nk} = s) = \mu_s$$

és

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s\neq 0} \left| \sum_{k=1}^{k_n} P(\alpha_{nk} = s) - \mu_s \right| = 0.$$

Konvergencia esetén

$$\int e^{i(w,u)}\, dF(u) = \exp\left[\sum_{s\neq 0} \mu_s (e^{i(w,u)} - 1)\right].$$

Jelöljük az i-edik egységvektort $\mathbf{R}^r$-ben e_i-vel $(1\leqq i\leqq r)$ és legyen

$$B_{nk} = \bigcup_{1\leqq i<j\leqq r} \{\alpha_{nk}^{(i)} \neq 0,\ \alpha_{nk}^{(j)} \neq 0\}.$$

1.19. Lemma. *Ahhoz, hogy az a β_n vektorváltozók független komponensű határeloszláshoz konvergáljanak eloszlásban, szükséges, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(B_{nk}) = 0$$

és elegendő, hogy az előbbi feltétel mellett még minden $s_i\neq 0$-ra $(1\leqq i\leqq r)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(\alpha_{nk} = s_i e_i) = \mu_{s_i e_i}$$

teljesüljön.

Ez a lemma közvetlen következménye az előzőnek.

Az 1.16—1.17. Tételek bizonyítása. Jelöljük

$$A_{nk} = \bigcup_{1\leqq i<j\leqq r} \{\xi_{nk}(I_i) \neq 0,\ \xi_{nk}(I_j) \neq 0\},$$

ahol $I_1, \ldots, I_r$ tetszőleges intervallumok. Az A_1 feltétel ekvivalens a következővel:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(A_{nk}) = 0,$$

hacsak $I_1, \ldots, I_r$ egymást páronként kizáró intervallumok. Az, hogy A_1 és B szükséges és elégséges feltétlek, azonnal következik az 1.19. Lemmából. Megmutatjuk, hogy A_1, A_2 és A_3 ekvivalensek.

Legyen I tetszőleges intervallum és $\varepsilon>0$. Osszuk fel I-t páronként diszjunkt $I_1, \ldots, I_r$ intervallumokra, amelyek mindegyike rövidebb, mint $\varepsilon/2$. Akkor

$$\mathbf{P}(|J_{nk}| \geqq \varepsilon) \leqq \mathbf{P}(A_{nk}),$$

így A_2 folyik A_1-ből.

Legyenek $I_1, \ldots, I_r$ páronként diszjunkt, zárt intervallumok, amelyek mindegyike része I-nek. Ha $\varepsilon>0$ kisebb, mint az $I_1, \ldots, I_r$ intervallumok közötti minimális távolság, akkor

$$\mathbf{P}(A_{nk}) \leqq \mathbf{P}(|J_{nk}| \geqq \varepsilon),$$

így A_1 is következik A_2-ből.

A_2 és A_3 ekvivalenciája a következő egyenlőtlenségek következménye:

$$1-\exp \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|J_{nk}| \geqq \varepsilon) \leqq \mathbf{P}\left(\max_{1\leqq k\leqq k_n} |J_{nk}| \geqq \varepsilon\right) \leqq \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|J_{nk}| \geqq \varepsilon).$$

Ezzel az 1.16. Tételt bizonyítottuk. Az 1.17. Tétel plusz-feltételeinek szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség belátásához válasszuk egy tetszőleges I intervallum valamely $\bigcup_{i=1}^{r} I_i$ partícióját. Az 1.18. Lemmából következően az $(\eta_n(I_1), \ldots, \eta_n(I_r))$ vektor határeloszlásának karakterisztikus függvénye

$$\exp\left\{\sum_{\substack{s_1,\ldots,s_r=0\\(s_1,\ldots,s_r)\neq 0}}^{\infty} \mu_{s_1,\ldots,s_r}\left[\exp\left(i\sum_{l=1}^{r} w_l s_l\right)-1\right]\right\}.$$

Könnyen látható, hogy $1\leqq i\leqq r$ és $s>0$ esetén

$$\mu_s(I_i) = \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_{i-1}=0}^{\infty} \sum_{s_{i+1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_r=0}^{\infty} \mu_{s_1,\ldots,s_{i-1},s,s_{i+1},\ldots,s_r}.$$

Az $s=1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $\mu_{s_1,\ldots,s_r}$ mindig eltűnik, ha az $s_1, \ldots, s_r$ számok közül legalább kettő különbözik 0-tól és ezek egyike 1. Hasonlóan az $s=2, 3, \ldots$ helyettesítésekkel adódik, hogy $\mu_{s_1,\ldots,s_r}$ mindig eltűnik, ha az $s_1, \ldots, s_r$ egészek közül legalább kettő különbözik 0-tól. Ez azonban azt jelenti, hogy a $(\eta_k(I_1), \ldots, \eta_k(I_r))$ vektorok határeloszlásának komponensei függetlenek.

Q. e. d.

Rátérünk arra az esetre, amikor a folyamatoktól nem követelünk monotonitást. Bevezetünk egy feltételt: A_4. Minden I intervallumra és $\varepsilon>0$ számra léteznek olyan $\zeta_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$ folyamatok, hogy mindegyikük ugrásai egy legfeljebb ε hosszúságú intervallumba foglalhatók, és ha $\xi_{\varepsilon k}^{(\varepsilon)}(t)=\xi_{nk}(t)-\zeta_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$, akkor I minden J részintervallumára

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(J) \neq 0\right) = 0.$$

1.20. Tétel. *Az 1.9-ben definiált η_n összegek akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban összetett Poisson folyamathoz, ha a B feltétel és az A_1 és A_4 feltételek bármelyike teljesül. Konvergencia esetén a határfolyamatot az (1.7) karakterisztikus függvények határozzák meg.*

Bizonyítás. Ismét csak az A_1 és A_4 feltételek ekvivalenciáját igazoljuk. Osszuk fel az I intervallumot, mint az 1.16. Tétel bizonyításában. Rögzített n és k esetén definiáljuk a következő eseményeket:

$$C_1=\{\xi_{nk}(I_i)=0,\ i=1,2,\ldots,r\},$$

$$C_2=\{\xi_{nk}(I_i)\neq 0 \text{ pontosan egy } i \text{ értékre}\},$$

$$C_3=\{\xi_{nk}(I_i)\neq 0 \text{ egynél több } i \text{ értékre}\}.$$

C_1 és C_3 mellett legyen $\zeta_{nk}^{(\varepsilon)}(t)\equiv 0$. C_2 esetén legyen i az az index, amelyre $\xi_{nk}(I_i)\neq 0$ és definiáljuk $\zeta_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$-t oly módon, hogy $\zeta_{nk}^{(\varepsilon)}(J)=\xi_{nk}(J)$, valahányszor $J\subset I_i$, és ha $J\cap I_i=\emptyset$, akkor $\zeta_{nk}^{(\varepsilon)}(J)=0$ legyen.

Legyen $J\subset I$ és tegyük fel, hogy a J intervallum végpontjai az I_{i_1}, illetve I_{i_2} $(i_1<i_2)$ intervallumhoz tartoznak és ez utóbbiakat az I'_{i_1}, I''_{i_1}, illetve az I'_{i_2}, I''_{i_2} részintervallumokra bontják. (Az $i_1=i_2$ eset analóg.) Nyilván

$$\mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(2)}(J)\neq 0,\ C_1\right)=\sum_{l=1}^{3}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(J)\neq 0,\ C_1\right). \tag{1.10}$$

A jobb oldali összegben

$$\mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(J)\neq 0,\ C_1\right)=\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(J)\neq 0,\ C_1\right)\leqq \tag{1.11}$$

$$\leqq \mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I'_{i_1})\neq 0,\ \xi_{nk}(I''_1)\neq 0\right)+\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I'_2)\neq 0,\ \xi_{nk}(I''_2)\neq 0\right)$$

és

$$\mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(J)\neq 0,\ C_3\right)=\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(J)\neq 0,\ C_3\right)\leqq \mathbf{P}(C_3)\leqq \mathbf{P}(A_{nk}). \tag{1.12}$$

Végül

$$\mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(J)\neq 0,\ C_2\right)\leqq \sum_{i\neq i_1}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I_i)\neq 0,\ \xi_{nk}(I''_{i_1})\neq 0\right)+ \tag{1.13}$$

$$+\sum_{i\neq i_2}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I_i)\neq 0,\ \xi_{nk}(I'_{i_2})\neq 0\right).$$

(1.10—13)-ból következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(J)\neq 0\right)\leqq \sum_{k=1}^{k_n}\left[\sum_{j=1}^{2}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I'_{ij})\neq 0,\ \xi_{nk}(I''_{ij})\neq 0\right)+\right.$$

$$+\mathbf{P}(A_{nk})+\sum_{i\neq i_1}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I_i)\neq 0,\ \xi_{nk}(I''_{i_1})\neq 0\right)+$$

$$\left.+\sum_{i\neq i_2}\mathbf{P}\left(\xi_{nk}(I_i)\neq 0,\ \xi_{nk}(I'_{i_2})\neq 0\right)\right],$$

tehát A_4 valóban folyik A_1-ből.

Legyenek $I_1,\ldots,I_r$ diszjunkt, zárt intervallumok és válasszuk meg ε-t kisebbre, mint közöttük a minimális távolság. Legyen $I\supset\bigcup_{i=1}^{r}I_i$, és definiáljuk a $\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(t)$

folyamatokat A_4-gyel összhangban. Akkor

$$\mathbf{P}(A_{nk}) \leqq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \xi_{nk}^{(\varepsilon)}(I_i) \neq 0\right) \leqq \sum_{i=1}^{r} \mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(I_i) \neq 0\right),$$

és

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(A_{nk}) \leqq \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\left(\xi_{nk}^{(\varepsilon)}(I_i) \neq 0\right),$$

vagyis A_1 folyománya A_4-nek.

Q. e. d.

1.4. *Cox sejtése: mérsékelt szórású ponteloszlások konstrukciója*

Az elágazás operációt J. Neyman (1955) vezette be, a kozmológia sztochasztikus modelljének kidolgozásakor. Modelljében az n-edrendű galaxisok egy Poisson ponteloszlásra n-szer alkalmazott elágazással nyert ponteloszlás pontjaiban helyezkednek el. Ugyanő adott először elégséges feltételeket az elágazás operáció létezésére, tétele a mi 1.6. Lemmánknak speciális esete. Prékopának (1960) sikerült rekurziót adnia a Neyman-modell karakterisztikus függvényeire. Eredményét a Szász (1967) dolgozatban kiterjesztettem arra az esetre is, amikor az egyes pontok nem egységnyi, hanem véletlen idő után ágaznak el, azaz határoznak meg egy-egy véletlen elemet a ponteloszlások G terében. A Poisson ponteloszlásra ismételten alkalmazott elágazással nyert véletlen ponteloszlások később alapvető fontosságúvá váltak a véletlen ponteloszlások — elsősorban a korlátlanul oszthatóvéletlen ponteloszlások — elméletében (Debes et al. (1970), Kerstan et al. (1974)*). Ezek a ponteloszlások, illetve azon általánosításuk, amikor az alapponteloszlás nem Poisson-típusú — a duplán sztochasztikus Poisson ponteloszlások, és újabban a sztochasztikus fizikában alapvető Gibbs ponteloszlások mellett — ma is a véletlen ponteloszlások legfontosabb és leggazdagabb példái. Viszont annak ellenére, hogy pl. Poisson alap-ponteloszlás esetén ismertek a karakterisztikus függvények, e ponteloszlások statisztikai viselkedése, amely az alkalmazások szempontjából igen fontos, még egyszerű esetekben is nehezen nyerhető. Míg a várható értékekre érvényes az 1.6. Lemma, és Poisson ponteloszlásra alkalmazott egyszeri elágazás esetén a szórás explicite megadható (l. Szász (1967), 2.3. tétel), nem Poisson alap-ponteloszlás esetén már a szórásról is nehéz információt szerezni. Cox sejtése, amely az I. Nemzetközi Sztochasztikus Pontfolyamatok Konferencián (1971, New York) kiemelt 8 megoldatlan probléma között szerepelt, az egyik legegyszerűbb — nem Poisson ponteloszlásból egyszeri elágazással nyert — ponteloszlás asszimptotikus szórására vonatkozott. A probléma elnevezése: „Controlled Variability Processes in Two or More Dimensions" és megfogalmazása a következő:

„Tekintsük $\mathbf{R}^2$-n pontok egy reguláris hálózatát, pl. a rácspontok halmazát, vagy a szabályos hatszög-rács csúcsait. Mozgassuk el mindegyik pontot egy véletlen vektorral, különböző pontokat egymástól függetlenül, egyforma eloszlás szerint. Legyen A konvex halmaz, és jelölje $N(A)$ az elmozdított pontok közül az A halmazba esők számát. Igaz-e, hogy ha A átmérője végtelenhez tart, akkor

$$\frac{D^2N(A)}{A \text{ kerülete}}$$

(i) felülről korlátos,
(ii) pozitív alsó korláttal rendelkezik,
(iii) határértékhez tart? Általánosítsuk 2-nél magasabb dimenzióra."

Jelen pont célja Cox kérdéseinek analízise, azonnal az általános, $d \geqq 2$ dimenziós esetben. Az egyszerűség kedvéért a $\mathbf{Z}^d$ kockarácsra korlátozzuk vizsgálatainkat, az eredmények átvitele más rácsok esetére kézenfekvő. Az 1.1. pont nyelvén Cox modelljében az alap-ponteloszlás determisztikus: a realizáció 1 valószínűséggel $\mathbf{Z}^d$ pontjai. A független elágazási operációban az $\delta(\cdot, n)$ $(n \in \mathbf{Z}^d)$ valószínűségi mérték az egy pontból álló ponteloszlásokra van koncentrálva és ezen egy pont eloszlása $Q(\cdot, n)$, ahol Q valószínűségi mérték $\mathbf{R}^d$-n. Másképp mondva: a Cox modellben szereplő $N(A)$ $(A \in \mathscr{C})$ nem más, mint $\varphi(A) = \text{card}\{n \in \mathbf{Z}^d : n + \eta_n \in A\}$ ahol η_n, $n \in \mathbf{Z}^d$ független, Q eloszlású véletlen vektorok $(\in \mathbf{R}^d)$.

Ha a determinisztikus alap-ponteloszlás helyett 1 paraméterű Poisson ponteloszlás szerepelne, akkor minden $A \in \mathscr{C}$-re $\mathbf{D}^2\varphi(A) = \mathbf{E}\varphi(A) = |A|$, ahol $|A|$ az A halmaz Lebesgue-mértéke és $\mathbf{D}^2$ jelöli a szórásnégyzetet. Így a Cox sejtés lényege az, hogy Poisson ponteloszlás helyett determinisztikus alap-ponteloszlásból indulva $\mathbf{D}^2\varphi(cA)$ nagyságrendje $c \to \infty$ esetén lecsökken-e c^d-ről c^{d-1}-re. Az egydimenziós esetben az $\mathbf{E}|\eta_n| < \infty$ feltétel mellett (i) teljesül, de (ii) és (iii) már nem feltétlenül (l. Lewis—Govier (1964); akikről a „mérsékelt szórású" (controlled variability) elnevezés származik, valamint Daley (1971), Corollary 1 és Example 7).

A kérdést először módosítjuk: $\mathbf{D}^2\varphi(A)$ helyett a szimmetrikusabb

$$w(A) = \int_I d\mathbf{D}^2\varphi(A - s)\, ds \tag{1.14}$$

átlagot vizsgáljuk, ahol I^d a d-dimenziós egységkocka. Ezzel eredményeink megfogalmazása elegánsabb lesz, mert A eltolásai hatására $\mathbf{D}^2\varphi(A)$ osztcillálhat. Ezzel kapcsolatos eredmények rövid összefoglalása található Kendall (1948) dolgozatában az $\mathbf{R}^2$ esetre és Kendall—Rankin (1953) dolgozatában az $\mathbf{R}^d$ esetre, ahol az átlagolás hatása van elemezve abban a speciális esetben, amikor a pontokat nem mozdítjuk el, azaz $\eta_n = 0$ $(n \in \mathbf{Z}^d)$ 1 valószínűséggel. Jelöljük

$$\alpha = \eta' - \eta'' \tag{1.15}$$

-vel a független, egyformán Q eloszlású η' és η'' különbségét. $u \in \mathbf{R}^d$, $u \neq 0$ esetén jelölje $m(u) \doteq m_A(u)$ az A halmaznak az u-ra merőleges H^u hipersíkra való A^u vetületének $(d-1)$-dimenziós mértékét. Formára a legegyszerűbb eredményünk a következő tétel, amelynek bizonyítása már tartalmazza módszerünk lényeges elemeit.

1.21. Tétel. *Ha* $\mathbf{E}|\alpha| < \infty$, *és* A *tetszőleges korlátos és zárt, konvex halmaz* $(\subset \mathbf{R}^d)$, *akkor*

$$\lim_{c \to \infty} w(cA)|c^{d-1} = \mathbf{E}|\alpha| m_A(\alpha). \tag{1.16}$$

A tétel bizonyítása az 1.22. Lemma egyenletein alapul, amelyekben $v(A)$ jelöli az A halmazba eső rácspontok számát, η' és η'' ugyanúgy értendő, mint (1.15)-ben, és

$$h(u) \doteq h_A(u) = |A \cap (A^C - u)|. \tag{1.17}$$

1.22. Lemma.

$$\mathbf{D}^2\varphi(A) = \mathbf{E}v\big((A - \eta') \cap (A^C - \eta'')\big), \tag{1.18}$$

$$w(A) = \mathbf{E}h_A(\alpha) = \mathbf{E}|(A - \eta') \cap (A^C - \eta'')|. \tag{1.19}$$

Bizonyítás. Legyen $\xi_n = \chi_n(n + \eta_n)$, ahol χ_A az A halmaz karakterisztikus függvénye, és vegyük észre, hogy a ξ_n, $n \in \mathbf{Z}^d$ valószínűségi változók független Ber-

noulli változók és $\mathbf{E}\xi_n = Q(A-n)$. Így

$$\mathbf{D}^2\varphi(A) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^d} Q(A-n)Q(A^C-n) = \mathbf{E}\sum_{n\in\mathbf{Z}^d} \chi_{A-n}(\eta')\chi_{A^c-n}(\eta'') =$$

$$= \mathbf{E}v((A-\eta')\cap(A-\eta'')),$$

s ezzel (1.18)-t bizonyítottuk. (1.19) abból adódik, hogy

$$\int_{I^d} v(B-s)\,ds = |B|. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Az 1.21. Tétel bizonyításához bizonyítások nélkül előrebocsátunk néhány elemi, geometriai tényt. E pont során a továbbiakban feltesszük, hogy $d\geqq 2$, és A korlátos és zárt, konvex részhalmaza $\mathbf{R}^d$-nek pozitív d dimenziós mértékkel. Jelöljük

$$D \doteq D_A = A-A = \{u-v\colon u,\ v\in A\}.$$

(T1) *D_A konvex, az origóra szimmetrikus halmaz. Ha A maga szimmetrikus az origóra, akkor $D=2A=\{2u\colon u\in A\}$.*

Rögzített $u\in\mathbf{R}^d$, $u\neq 0$ és $c\in\mathbf{R}^1$ esetén legyen

(1.20) $$r(u) \doteq r_A(u) = \sup_{cu\in D} |cu|,$$

(1.21) $$\varrho \doteq \varrho_A = \inf_{u\neq 0} r_A(u),$$

és $e_u = u/|u|$.

(T2) $r_A(u)=r_A(e_u)=\sup\{c\colon A\cap(A-ce_u)\neq\emptyset\}$,

$$\varrho_A = \inf\{|u|\colon A\cap(A-u)=\emptyset\}$$

(T3) *ϱ_A a D_A halmaz belső sugara és egyúttal az A halmaz szélessége (azaz A minimális hosszúságú merőleges vetülete $\mathbf{R}^d$ egyeneseire). D_A szélessége $2\varrho_A$.*

Jelöljük (u, v)-vel az $u, v\in\mathbf{R}^d$ vektorok skaláris szorzatát

(T4) *Létezik olyan $e_a(\in\mathbf{R}^d)$ egységvektor, amelyre $r_A(e_a)=\varrho_A$ és tetszőleges e_u egységvektora $(e_u, e_a)r_A(e_u)\leqq r_A(e_a)$.*

(T5)

(1.22) $$\varrho'_A \doteq \sup_{u\neq 0} r_A(u)$$

az A halmaz átmérője, $2\varrho'_A$ pedig D_A átmérője.

Jelölje $V_i(A)$ az A halmaznak a különböző i-dimenziós koordináta-alterekre való $\binom{d}{i}$ számú vetületének összmértékét (i-dimenziós mértékek!). Davenport (9151) eredménye szerint

(T6)

(1.23) $$\big||A|-v(A)\big| \leqq 1+\sum_{i=1}^{d-1} V_i(A) \doteq T(A).$$

1.21. Tétel bizonyítása. Az (1.17)-ben bevezetett $h(u)$ függvényre az 1.22. Lemmából közvetlenül adódik az

(1.24) $$h(u) \leqq |A|$$

felső korlát, amelyben az egyenlőség áll minden $|u| \geqq r(u)$ esetén. Alsó korlát nyerése végett jelöljük az $A_1 \doteq A \cap (A-u)$ halmaz H^u-ra való vetületét A_1^u-val és legyen $m^1 \doteq m_A^1(u)$ ennek $(d-1)$-dimenziós mértéke. Geometriai megfontolásokból könnyen adódik, hogy

$$|u| m^1(u) \leqq h(u) \leqq |u| m(u). \tag{1.25}$$

Viszont nem nyilvánvaló az

$$m^1(u) \geqq m(u)\left(1-|u|/r(u)\right)^{d-1} \tag{1.26}$$

egyenlőtlenség, amely $|u| \leqq r(u)$ esetén teljesül. Ennek igazolásához rögzítsünk egy $v \in A \cap (A-r(u)e_u)$ vektort (A zárt lévén a metszethalmaz nem üres), és jelöljük H^u-ra való vetületét v^u-val. Legyen

$$A_v^u = v^u + \left(1-|u|/r(u)\right)(A^u - v^u) = \left(|u|/r(u)\right)v^u + \left(1-|u|/r(u)\right)A^u. \tag{1.27}$$

Legyen $t^u \in A_v^u$ a $t = \left(|u|/r(u)\right)v + \left(1-|u|/r(u)\right)s$ pont vetülete, ahol $s \in A$ (a konvexitás miatt $t \in A$). Mármost $v + r(u)e_u \in A$, és t^u a

$$t+u = \left(|u|/r(u)\right)\left(v+r(u)e_u\right) + \left(1-|u|/r(u)\right)s$$

vektor vetülete is, következésképpen $t \in A \cap (A-u)$ és $t^u \in A_1^u$. Így $A_v^u \subset A_1^u$, ami (1.27), valamint az

$$m_{cA}(u) = c^{d-1} m_A(u), \quad r_{cA}(u) = c r_A(u) \quad (c > 0) \tag{1.28}$$

összefüggések felhasználásával kiadja (1.26)-ot. Ha most (1.26)-t (1.25)-be helyettesítjük és (1.24)-t is felhasználjuk, akkor a következő egyenlőtlenséget nyerjük:

$$\mathbf{E}\left[\alpha_D m_A(\alpha)\left(1-|\alpha|/r_A(\alpha)\right)^{d-1}\right] \leqq w(A) \leqq \mathbf{E}|\alpha_D| m_A(\alpha) + |A| \mathbf{P}(\mathbf{R}^d \setminus D), \tag{1.29}$$

ahol tetszőleges $L (\subset \mathbf{R}^d)$ Borel halmazra

$$\alpha_L \doteq \alpha \chi_L(\alpha) \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(L) = \operatorname{Prob}(\alpha \in L).$$

$$\mathbf{E}|\alpha| < \infty \quad \text{esetén} \quad c\mathbf{P}(\mathbf{R}^d \setminus cD) \to 0 \quad \text{ha} \quad c \to \infty,$$

így (1.29)-ben (1.28)-at alkalmazva

$$\mathbf{E}|\alpha| m_A(\alpha) \geqq \limsup_{c \to \infty} w(cA)/c^{d-1} \geqq$$

$$\geqq \liminf_{c \to \infty} \mathbf{E}\alpha_{cD} |m_A(\alpha)\left(1-|\alpha|/c r_A(\alpha)\right)^{d-1} = \mathbf{E}|\alpha| m_A(\alpha). \qquad \text{Q. e. d.}$$

Jelöljük K_A-val az A halmaz F_A felületén vett mértéket ($K_A(F_A) = S(A)$, ahol $S(A)$ az A halmaz felszíne). Minden $v \in F_A$ pontban A-hoz van legalább egy támaszhipersík. Külső normálisát n_u-val jelölve megjegyezzük, hogy az K_A-majdnem minden pontban egyértelműen meghatározott. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy v ehhez a halmazhoz tartozik; legyen R_v a $\{v + cn_v : -\infty < c < \infty\}$ egyenes, L_v a $\{v - cn_v : c \geqq 0\}$ félegyenes, és Q_v a Q mérték vetülete R_v-re, azaz $Q_v(B) = Q\{\eta : n_v) \in B\}$ minden $B \subset \mathbf{R}^1$ Borel halmazra. Vezessük be a $w_v(A) = w(L_v)$ jelölést az egydimenziós R_v térben tekintett Q_v eloszlású elmozdításokra. Az 1.22. Lemma bizonyításából

$$w_v(A) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_v(L_v + s) Q_v(L_v^c + s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} Q\left((\eta, n_v) \leqq s\right) Q\left((\eta, n_v) > s\right) ds.$$

1.23. Következmény. Az 1.21. Tétel feltételei mellett

$$\lim_{c\to\infty} w(cA)/c^{d-1} = \int_{F_A} w_v(A)\,K_A(dv).$$

Bizonyítás. Bármely u egységvektorra

$$m_A(u) = \int_{F_A} (u, n_v)^+ K_A(dv), \quad \text{ezért} \quad \mathbf{E}\,|\alpha|\,m(\alpha) = \int_{F_A} \mathbf{E}(\alpha, n_v)^+ K_A(dv).$$

Másfelől az 1.18. Lemmából

$$\mathbf{E}(\alpha, n_v)^+ = \mathbf{E}(\eta' - \eta'', n_v)^+ = \mathbf{E}h_{L_v}((\eta', n_v) - (\eta'', n_v)) = w_v(A). \quad \text{Q. e. d.}$$

Megjegyezzük, hogy a következményben bizonyított $\mathbf{E}\,|\alpha|\,m(\alpha) = \int_{F_A} w_v(A)\,K_A(dv)$ összefüggés általánosítása a Cauchy-féle felszín formulának (l. Eggleston (1958)*).

Mint látható, a módszer kiindulópontja az átlagolt szórásnégyzetnek az 1.22. Lemmában adott elemi átalakítása. A bizonyítás ezután — bár használ valószínűségi gondolatokat — elsősorban finomabb geometriai megfontolásokat igényel. E megfontolások elményítésével több irányban kimerítő válaszokat adhatunk Cox kérdéseire. Itt megelégszünk az eredmények ismertetésével, a bizonyításokat illetően utalunk az eredeti Gács—Szász (1975) dolgozatra. Az 1.22. Lemmára visszatérve megjegyezzük, hogy analóg átalakításoknak lesz még szerepük a 3. fejezetben, ugyancsak a szórás számolásánál.

Az 1.21. Tételben egy fix konvex halmaz felfújt példányain (cA) keresztül tartottunk a végtelenbe, természetes kérdés, milyen egyenletes becslést tudunk adni. Legyen tetszőleges $L \subset \mathbf{R}^d$, $L \neq \mathbf{R}^d$ Borel-halmaz esetén

$$\vartheta_L = \min\left(1/d, \quad \inf\{|u|/r_A(u) : u \in L^c\}\right.$$

1.24. Tétel. *Tetszőleges $L \subset D$ Borel halmazra*

$$\mathbf{E}\{|\alpha_L|\,(m_A(\alpha_L)/S(A))\,[1-|\alpha|r_A(\alpha)]^{d-1}\} + \{\vartheta_L(1-\vartheta_L)^{d-1}\varrho_A/4(d-1)S_d\,\mathbf{P}(L^c)$$
$$\leqq w(A)/S(A) \leqq \mathbf{E}\,|\alpha_L|\,(m_A(\alpha)/S(A)) + (\varrho_A/2)\,\mathbf{P}(L^c),$$

ahol S_d a d-dimenziós egységgömb felszínének és a $(d-1)$-dimenziós egységgömb térfogatának hányadosa.

1.25. Következmény. *Ha $\mathbf{E}\,|\alpha| < \infty$, akkor megadható olyan $f(d, Q, r)$ függvény, hogy rögzített d és Q esetén $\lim_{r\to\infty} f(d, Q, r) = 0$ és minden korlátos és zárt konvex A halmazra*

$$|w(A) - \mathbf{E}\,|\alpha|\,m_A(\alpha)|/S(A) < f(d, Q, \varrho_A).$$

Az egyenletes becslés lehetővé teszi, hogy az átlagolt szórásnégyzetre vonatkozóan eldöntsük Cox kérdéseit.

1.26. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0 < \mathbf{E}\,|\alpha| < \infty$.* Ekkor *tetszőleges $a_1 > 0$ és $a_2 > 1$ konstansokra és bármely A-ra, amelyre*

$$\varrho_A \geqq a_1, \quad \varrho'_A/\varrho_A \leqq a_2, \tag{1.30}$$

léteznek pozitív b_1 és b_2 állandók, hogy

$$b_1 \leqq w(A)/S(A) \leqq b_2. \tag{1.30a}$$

Az $\mathbf{E}|\alpha|<\infty$ feltétel szükségessége kiviláglik a következő állításból, amely az előbbi tétel bizonyításából közvetlenül adódik: *ha* $\mathbf{E}(\alpha)=\infty$, akkor *tetszőleges* A_k *sorozatra, amelyre* $\varrho_{A_k}\to\infty$ *és (1.30) teljesül,* $w(A_k)/S(A_k)\to\infty$, *ha* $k\to\infty$.

Azt is példák mutatják, hogy ahhoz, hogy Cox (i) és (ii) kérdéseire pozitív választ adhassunk, szükség van az (1.30) vagy hozzá hasonló megszorításokra. Az ilyen típusú megszorítások szokásosak a statisztikus fizikában, ahol halmazsorozatok végtelennez való konvergenciájának többféle fogalmára is szükség van. Azt mondjuk, hogy a B_k korlátos és mérhető *halmazok* ($B_k\subset\mathbf{R}^d$) *sorozata végtelenhez tart Fisher értelmében, ha* $|B_k|\to\infty$, és létezik olyan $\pi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}^1$ függvény, hogy $\lim_{u\to 0}\pi(u)=0$, és elég kis u-ra és minden B_k-ra

$$|B_k^{u\varrho'_{B_k}}|\leqq\pi(u)|B_k|,$$

ahol B^ϱ azon pontok halmaza, amelyek B topológiai határától legfeljebb ϱ távolságra vannak (vö. Ruelle (1969)*). Az előző tételből és a definícióból folyik az

1.27. Követelmény. *Ha* $0<\mathbf{E}|\alpha|<\infty$, *és az* A_k *halmazok sorozata végtelenhez tart Fisher értelmében, akkor alkalmas* b_1 *és* b_2 *pozitív állandókra teljesül (1.30-a).*

A következmény bizonyítása azonnal adódik a következő lemmából:

1.28. Lemma. *Ha korlátos és konvex* A_k *halmazok sorozata Fischer értelmében végtelenhez tart, akkor* $\sup_k \varrho'_{A_k}/\varrho_{A_k}<\infty$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_k \varrho'_{A_k}/\varrho_{A_k}=\infty$, és válasszunk akármilyen kicsi $u>0$ számot. Ha $\varrho'_{A_k}/\varrho_{A_k}\geqq u^{-1}$, akkor

$$\lambda|A_k^{u\varrho'_{A_k}}|\geqq\lambda|A_k^{\varrho_{A_k}}|\geqq|A_k|$$

így Fisher-féle konvergencia nem lehet. Q. e. d.

A lemma állításának megfordítása is igaz, ezt Uhrin Béla bizonyította (szóbeli közlés).

Ami Cox (iii) kérdését illeti, az 1.21. Tétel pozitív választ ad arra az esetre, amikor hasonló halmazokon keresztül konvergálunk a végtelenbe. Az általános esetre vonatkozóan megelégszünk az 1.25. Következmény állításával, amely a kérdés eldöntését arra a geometriai kérdésre redukálja, hogy vajon mely A halmazokra egyforma az $\mathbf{E}|\alpha|m_A(\alpha)/S(A)$ kifejezés értéke.

A nem átlagolt szórásnégyzet vizsgálatára térve igaz a következő

1.29. Tétel. (a) *Ha* $\mathbf{E}|\alpha|<\infty$, *akkor* $\mathbf{D}^2\varphi(A)/S(A)$ *felülről korlátos;*
(b) *Ha* $\varrho'_A/\varrho_A\leqq a_2$, *akkor alkalmas* $c_1=c_1(a_2,d)$ *és* B_d *konstansokra*

$$\mathbf{D}^2\varphi(A)/S(A)\geqq c_1[\mathbf{E}|\alpha_{\varrho_A/2d}|+\varrho\mathbf{P}(|\alpha|>\varrho/2d)-B_d$$

ahol $\alpha_r=\alpha\chi_{\{u:|u|\leqq r\}}(\alpha)$.

A tétel bizonyítása a $w(A)$-ra nyert eredményeken és a $|w(A)-\mathbf{D}^2\varphi(A)|\leqq 2T(A)$ egyenlőtlenségen alapul. Érdemes kimondani még:

1.30. Következmény. *Ha* $\varrho'_A/\varrho_A\leqq a_2$, *akkor alkalmas* $c_2=c_2(a_2,d)>0$ *állandóra teljesül, hogy* $\mathbf{E}|\alpha|>c_2$ *esetén*

$$\lim_{\varrho_A\to\infty}\inf\mathbf{D}^2\varphi(A)/S(A)>0.$$

Megjegyezzük, hogy a feltételek szükségességét ismét példák mutatják, továbbá arra is könnyű példát mutatni, hogy $\mathbf{D}^2\varphi(A)$ esetén Cox (iii) kérdésére általában nem adható pozitív válasz, még az 1.21. Tétel egyszerű szituációjában sem. Ez utóbbi példában $A \subset \mathbf{R}^2$ az origóra szimmetrikus négyzet $(\pm 1, \pm 1)$ csúcsokkal, és $\eta = (\pm 0.1, \pm 0.1)$ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ valószínűséggel. Ekkor $\mathbf{D}^2\varphi(cA) = 2k - 0.25$, valahányszor $|k-c| < 0.1$ valamely k természetes számra, egyébként pedig $\mathbf{D}^2\varphi(cA) = 0$.

Végül megjegyezzük, hogy a Gács—Szász (1975) dolgozatban azt is megmutattuk, hogy az $\mathbf{E}|\alpha| = \infty$ esetben $w(cA)$ növekedése — $c \to \infty$ esetén — c-nek $(d-1)$ és d közé eső tetszőleges hatványával megegyező nagyságrendű lehet.

Cox sejtésére vonatkozóan az első eredményt Gács érte el 1971-ben, bebizonyítva az $\mathbf{E}|\eta|^2 < \infty$ feltétel mellett az 1.23. Következmény állítását. Módszerében mélyen használta az A halmazhoz szerkesztett paralel-tartományok tulajdonságait. Az 1.22. Lemmán alapuló megközelítést jelen munka szerzője 1972-ben találta, s ezzel sikerült a momentum-feltételt a minimálisra csökkentenie (Gács később saját módszerével is bizonyította ugyanezt az eredményt, de a fenti módszer egyszerűbb). A kérdéskörnek 1975-ben megjelent dolgozatunkban adott átfogó vizsgálata közös munka eredménye.

II. FEJEZET

MÓDSZER ÁLTALÁNOS MEGBÍZHATÓSÁGI MODELLEK ASZIMPTOTIKUS VIZSGÁLATÁRA

2.1. *A két lift probléma*

Egy házban két liftet szereltek fel, működésük egymástól független. Mindkét lift üzemelése egy-egy alternáló felújítási folyamattal írható le: egy-egy lift hibátlanul működik valamely véletlen ideig, s ezután javítják — ugyancsak a véletlentől függő ideig. A hibátlan működés időtartamának elosztása legyen F, a javítás időtartamáé J. Az 0 időpontban mindkét liftet újonnan állítják be. A két liftből álló rendszer élettartamát jelölje τ, azaz τ az első olyan időpont, amikor mindkét lift működésképtelen. A kérdés az, mit tudunk τ-ról mondani.

Nyilvánvaló, hogy a fentebb liftekre megfogalmazott feladat igen általános megbízhatóságelméleti szituációt jelképez. A feladatban a kérdés megfogalmazása nyitott. Optimális esetben olyan kifejezést tudunk kapni τ eloszlására, amelyből az érdekes információk, pl. τ momentumai, eloszlásának alakja meghatározhatók. Ez valóban lehetséges azokban a speciális esetekben, amikor a rendszerben Markov-pontok találhatók. Ezek létezésében azonban fel kell tennünk, hogy vagy F, vagy J exponenciális eloszlású. Jelöljük F, J, illetve τ eloszlásának Laplace-transzformáltjait rendre

$\varphi(s), j(s)$ és $t(s)$-sel, így pl. $\varphi(s) = \int e^{-su} F(du)$, $s \in \mathbf{C}$, ahol $\mathbf{C}$ a komplex sík.

Feltételezve, hogy F eloszlás λ paraméterű exponenciális, Gaver, jr. (1963) a következő formulát nyerte:

$$t(s) = \frac{2\lambda^2}{s+2\lambda(1-j(s+\lambda))} \cdot \frac{1-j(s+\lambda)}{s+\lambda}$$

amelyből pl. egyszerű deriválással adódott τ várható értéke

$$E\tau = \frac{3}{2\lambda} \frac{1-\frac{2}{3}j(\lambda)}{1-j(\lambda)}.$$

Ha fordítva, J-ről tesszük fel, hogy exponenciális eloszlású valamilyen μ paraméterrel, akkor a t Laplace transzformált ez esetben is megadható, de már jóval bonyolultabban. Tomkó (1966) bizonyította, hogy $\mathrm{Re}\, s>0$ esetén

$$t(s) = \frac{\tilde{\pi}(s)\,(s+2\mu)^2}{2\mu[1+\tilde{\pi}(s)\,(s+2\mu)]}$$

ahol

$$\tilde{\pi}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \pi(s-\sigma)\,\pi(\sigma)\,d\sigma$$

(c-ről feltesszük, hogy $0<c<\mathrm{Re}\, s$) és

$$\pi(s) = \frac{\mu}{s+\mu} \frac{\varphi(s)}{s+\mu[1-\varphi(s)]}.$$

Ha azonban sem F, sem J eloszlása nem exponenciális, kevés a remény hasonló explicit formulára, tehát igényeinket kell csökkentenünk. Erre két lehetőség kínálkozik: az első, valószínűségszámítási problémafelvetés abból indul ki, hogy a javítások hossza lényegesen rövidebb, mint a hibátlan működés ideje, és τ eloszlását aszimptotikusan vizsgálja, amikor a javítási idő valamilyen értelemben a 0-hoz konvergál. A másik, analízis-irányú megközelítés a rendszert meghatározó eloszlások — nálunk F és J — alakjára tett feltevésekből von le következtetéseket τ eloszlásának alakjára vonatkozólag (ennek az irányzatnak kezdeményezői és fő művelői Barlow, Proschan és iskolájuk, vö. Barlow—Proschan (1973)). Ha a javítási idők ténylegesen kicsik, az első kérdésfeltevéstől pontosabb eredmények remélhetők, és ehhez kapcsolódnak a jelen fejezetben bizonyított tételek.

Tegyük fel tehát, hogy $J=J^\varepsilon$ az $\varepsilon>0$ paramétertől függ, és $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty u J^\varepsilon(du)=0$. Feladatunk $\tau=\tau^\varepsilon$ aszimptotikus eloszlását meghatározni megfelelő normálás mellett. A feladatnak ez a megfogalmazása a tulajdonképpeni „két lift probléma".

Ennek a problémának a megoldásával többféle módszerrel próbálkoztak már azért is, mert nyilvánvaló volt, hogy ha azt a problémát sikerül megoldani, akkor több, hasonló probléma is megközelíthetővé válik. Az egyik lehetséges megközelítés arra az észrevételre épít, hogy τ lényegében független, egyforma eloszlású változók véletlen tagszámú összege, ahol a tagszám függ az összelosztástól. (Ezt a megközelítést javasolta Gnedenko (172) előadása is.) Ennek az észrevételnek az alapján egy egycsatornás modell vizsgálata során jutottam egy félig—Markov folyamatokra vonatkozó határeloszlástételre. Azonban, mint e fejezet 2. pontjában megmutatom, a nyert határeloszlástétel feltételeinek verifikálása még a modell egyszerűsített változatában

is rendkívül nehéznek tűnik, ezért más utat kellett keresni. Megjegyzem, hogy félig-Markov és rokon típusú folyamatokra sokféle határeloszlástételt nyert a kievi iskola perturbációelméleti módszerekkel, de általános eredményeikre ugyancsak vonatkoznak a fentebb mondottak.

IRODALOM AZ I. FEJEZETHEZ

DALEY D. J. (1971). J. Royal Stat. Soc. Ser. B. 33, 406—428.
DAVENPORT H. (1951). J. London Math. Soc. 26, 179—183.
DEBES H.—KERSTAN J.—LIEMANT A.—MATTHES K. (1970). Math. Nachr. 47, 183—244.
GOLDMAN J. R. (1967). Ann. Math. Stat. 38, 771—779.
GRIGELIONIS B. (1963). Tyeorija ver. i. prim. 8, 172—182.
GRIGELIONIS B. (1966). Litov. Math. Szbornyik. 6, 241—244.
KENDALL D. (1948). Quart. J. Math. Oxford. Ser. 4, 178—189.
KERSTAN J.—MATTHES K. (1964). Jahresbericht de DMV 66, 106—118.
LEE P. M. (1968). Studia Sci. Math. Hung. 3, 219—224.
LEWIS T.—GOVIER L. J. (1964). J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 26, 325—337.
MORAN P. A. P. (1967). Studia Sci. Math. Hung. 2, 425—429.
MORAN P. A. P. (1976—A). Bull. London Math. Soc. 8, 69—70.
MORAN P. A. P. (1976—B). Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. 33, 269—272.
MÖNCH G. (1971). Studia Sci. Math. Hung. 6, 81—90.
NEYMAN J. (1955). Ann. Inst. H. Poincaré, 14, 201—244.
OAKES D. (1972). Coll. Math. Soc. J. Bolyai 9, 583—586.
OSZOSZKOV G. A. (1956). Tyeorija ver. i. prim. 1, 248—255.
PRÉKOA A. (1958). Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 1, 153—170.
PRÉKOPA A. (1960). Transactions Second Praque Conf. 521—529.
RÉNYI A. (1956). MTA MAKI Közl. 1, 519—527.
RÉNYI A. (1967). Studia Sci. Math. Hung. 1, 119—123.

СЛУЧАЙНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ДОСТОВЕРНОСТИ И В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ I.

Д. САС

RANDOM POINT DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATIONS IN RELIABILITY THEORY AND IN STATISTICAL PHYSICS I

D. SZÁSZ

KEVERÉKEK FELBONTÁSA

TUSNÁDY GÁBOR

Bevezetés

Ha sok ember különböző jellemző mennyiségét megmérjük, és bizonyos tulajdonságaikat meghatározzuk, a kapott adatok közti összefüggéseket regresszió analízissel, faktor analízissel, vagy kovariancia analízissel szokás vizsgálni. Újabban sokan erre a feladatra is cluster analízist használnak, és a kétféle szemlélet képviselői között kölcsönös egyet nem értés van kialakulóban. Ennek elsősorban módszertani jellegű az oka, a cluster analízisben ugyanis még nem alakultak ki a klasszikus statisztika módszereinek megfelelő eljárások. A dolgozat célja a két tábor közti kapcsolat megteremtése olyan sztochasztikus modell bemutatása révén, amelyik cluster analízisre is és sztochasztikus kapcsolatok vizsgálatára is egyaránt alkalmasnak látszik.

Független eloszlások keveréke

Legyen X m dimenziós valószínűségi változó, legyen $C_1, C_2, \ldots, C_k$ az X-et definiáló valószínűségi mezőn egy teljes eseményrendszer, és legyenek a

$$p(i) = P(C_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{1}$$

a priori valószínűségek ismeretlen paraméterek. Tegyük fel, hogy az X vektor koordinátái a C_i eseményre nézve minden $1 \leqq i \leqq k$ mellett feltételesen függetlenek, és ha $1 \leqq j \leqq d$, akkor az X j-edik koordinátája, X_j az $1, \ldots, x_j$ egészek valamelyike lehet

$$p_j(x|i) = P(X_j = x|C_i), \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, d; \quad x = 1, \ldots, x_j \tag{2}$$

valószínűséggel, ha pedig $d < j \leqq m$ akkor X_j normális eloszlású $\mu_j(i)$ várható értékkel és σ_j szórással, ahol $d (0 \leqq d \leqq m)$ az első típusú (diszkrét) változók száma. A d és az $x_1, \ldots, x_d$ számokat ismerjük, a $p(i)$, $p_j(x|i)$, $\mu_j(i)$, σ_j paraméterek ismeretlenek (a szórás nem függ az i-től).

Az ismeretlen paramétereket az X vektorra vonatkozó n elemű független megfigyelés alapján kívánjuk becsülni a maximum likelihood módszerrel. E módszer szerint mindegyik mintaelemhez hozzárendeljük az

$$L(X) = \log \sum_{i=1}^{k} \left\{ p(i) \prod_{j=1}^{d} p_j(X_j|i) \prod_{j=d+1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left(-\frac{(X_j - \mu_j(i))^2}{2\sigma_j^2} \right) \right\} \tag{3}$$

számot, és azokat a paramétereket keressük, amelyekre e számoknak a teljes mintára vett összege maximális.

Első ránézésre a fenti szélső érték feladat meglehetősen reménytelennek tűnik. Szerencsétlen sorrendben van benne a logaritmus mögött az összegzés és a szorzás, az ismeretlen paraméterek

$$f = (k-1)+k\left[\sum_{j=1}^{d}(x_j-1)+m-d\right]+(m-d)$$

száma pedig a gyakorlati esetekben igen nagy lehet ($k=m=20$ körül már egy-két ezerig is fölnőhet). Ha f nagy, akkor n-nek is nagynak kell lennie, és emiatt már a célfüggvény egyetlen értékének a kiszámolása is tetemes munkát igényelhet. Ugyanakkor a statisztikust elsősorban a $p(i)$ a priori valószínűségek érdeklik, vagy akár csak a komponensek k száma, tehát végső soron egyetlen számot szeretne meghatározni mondjuk 20 enyhén, és 1000 erősen zavaró paraméter jelenléte mellett. Emiatt a statisztikában az optimum helye nem annyira fontos, mint az optimum értéke, és sokszor az optimum értékéből is csupán annak relatív megváltozása fontos: mibe kerül bizonyos paraméter-csoportok értékének mesterséges korlátozása az adott esetben?

Ennek ellenére (vagy talán éppen ezért) lényeges kérdés a paraméterek becslésének a megbízhatósága, és egyáltalán az a mód, ahogy ezt a megbízhatóságot mérjük. Sokan idegenkednek ezen a területen a maximum likelihood módszertől, és az optimum helyének bizonytalan volta miatt egyértelműbb módszereket keresnek a becslések előállítására. Meggondolandó azonban, hogy a becslés numerikus egyértelműsége lényeges előny-e, ha nem társul annak sztochasztikus stabilitásával. Megítélésünk szerint minden becslési eljárás mögött azzal összeegyeztethető konfidencia intervallumoknak kell meghúzódniuk, és ha ezek egy adott esetben szükségszerűen szélesek, akkor nem baj, ha a becslések értéke nem egyértelmű. Nem lehet ugyanis fontos tudnunk azt például, hogy 500, vagy 514-e egy paraméter becslése, ha a megfelelő konfidencia intervallum (200, 1000). Magunkat csapjuk be, ha ilyen széles konfidencia sáv mellett olyan becslési eljárást alkalmazunk, amelyik több tizedesre meghatározza a paraméter értékét.

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy manapság már a maximum likelihood becslés meghatározására igen effektív módszer áll a rendelkezésünkre. A módszer mögött az az észrevétel áll, hogy a feladat lényegesen egyszerűsödne, ha minden X vektorral együtt még egy további számot meg tudnánk határozni, mégpedig azt, hogy ez az X melyik C_i clusterből származik. Jelöljük ezt a számot G-vel, akkor (1) és (2) szerint

$$P(G = i) = p(i),$$

$$P(X_j = x|G = i) = p_j(x|i),$$

az (X, G) mintaelem likelihood függvénye pedig

$$L(X, G) = \log p(G)+\sum_{j=1}^{d}\log p_j(X_j|G)-\sum_{j=d+1}^{m}\left(\log(\sigma_j\sqrt{2\pi})+\frac{X_j-\mu_j(G)}{2\sigma_j^2}\right).$$

Ha ezeket összegezzük a teljes mintára, a kapott likelihood függvény maximuma már

könnyen meghatározható. Így kapjuk a következő becsléseket:

$$q(i) = \frac{1}{n} \sum_{M} I(G = i),$$

$$q_j(x|i) = \frac{\sum_{M} I(G = i,\ X_j = x)}{\sum_{M} I(G = i)},$$

(4)

$$m_j(i) = \frac{\sum_{M} X_j I(G = i)}{\sum_{M} I(G = i)},$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{M} (X_j - m_j(G))^2;$$

ahol q a p, m a μ, és s a σ becslését jelöli, a szumma jelek alá írt M arra utal, hogy a teljes mintára összegezzünk, az $I(A)$ indikátor függvény értéke pedig 1 vagy 0 aszerint, hogy az A esemény bekövetkezik-e vagy sem, végül feltesszük, hogy már mindegyik clusterből került a mintába elem.

Ha tehát meg tudnánk becsülni a G változó aktuális értékeit, gondolhatnánk arra, hogy a fenti formulákat akkor is használjuk, ha G nem megfigyelhető. Ezen a ponton bizonyos körforgás alakul ki az okoskodásunkban: ha ismernénk a paraméterek értékét, akkor alkalmazhatnánk Bayes-tételét a G-re vonatkozó aposteriori valószínűség kiszámolására, ha pedig meg tudnánk becsülni G értékeit, akkor alkalmazni tudnánk a (4) formulákat a paraméterek becslésére. Ez a körforgás az alapja annak az iterációnak, amellyel a maximum likelihood becslés előállítható. Az iteráció kezdetén valamilyen becslést kell adni az $I(G=i)$ clusterba-tartozási értékekre. Már induláskor gondolhatunk arra, hogy ún. fuzzy clusterokkal dolgozunk, ebben az esetben az $I(G=i)$ értékek tetszőleges nem negatív számok lehetnek, csak az összegük 1 legyen. (Az induló értékek meghatározására még visszatérünk.)

Az ituáció második fázisában a paraméterekre kapott becslések és Bayes tétele alapján becsüljük a $P(G=i|X)$ aposteriori valószínűségeket. A jelölések egyszerűsége kedvéért ezeket ugyanúgy jelöljük, mint az eredeti indikátor változókat:

$$I(G = i) = \frac{Q(X|i)}{\sum_{v=1}^{k} Q(X|v)}, \tag{5}$$

ahol

$$Q(X|i) = q(i) \prod_{j=1}^{d} q_j(X_j|i) \exp\left\{ - \sum_{j=d+1}^{m} \frac{(X_j - m_j(i))^2}{2s_j^2} \right\}.$$

A bayesi iteráció a (4), (5) lépések alternáló alkalmazásából áll.

Történelmi áttekintés

Normális eloszlások keverékének a felbontásával először Pearson [46] foglalkozott $m=1$ és $k=2$ mellett. Az öt ismeretlen paraméter (ő a szórások egyenlőségét sem tételezte fel) értékét az első öt momentum mintabeli értékéből becsülte. Diszkrét változók keverékének a felbontása az ötvenes évek elején kezdte érdekelni

a szociológusokat és a pszichométereket ([4], [36], [42]). Mivel akkoriban még nem voltak nagy teljesítményű számológépek, nem találtak megfelelő becslési módszert. A kérdés elméleti kutatását Keifer—Wolfowitz [34] cikke indította el, ebben megtalálható a maximum likelihood becslés konzisztenciájának a bizonyítása. Érthetetlen módon azóta sem vizsgálta senki az efficienciát, ez különösen abban a nem-paraméteres változatban igen lényeges elméleti kérdés, ahogy Kiefer és Wolfowitz az egész keverék-felbontást tárgyalják. (Lásd még [51], [52].)

Elméleti szempontból érdekes kérdés a keverékek felbontásának az egyértelműsége. Ezt vizsgálta például Teicher [57], és ezzel kapcsolatban említhető Medgyesy Pál munkássága. Az általa vizsgált feladat azonban inkább a kémiában használatos tömeg-spektográfiához kapcsolódik. Ott a keverék sűrűségfüggvénye, ha hibákkal terhelten is, de közvetlenül mérhető. Nálunk a keverékből származó minta alapján kell a komponenseket meghatározni. Elképzelhető, hogy a becslések aszimptotikus viselkedésének a vizsgálata kapcsolatba hozza majd a kétféle feladatot, de ez a kapcsolat jelenleg nem látható.

A számológépek elterjedése után a bayesi ituációt gyakorlatilag mindenki alkalmazta, aki csak a kérdéshez nyúlt. Én a [30] dolgozatot találtam a legkorábbinak, ebben arról is beszámol a szerző, hogy az iteráció közben a maximalizálandó likelihood függvény értéke monoton nő. Ez valóban nagyon szerencsés tulajdonsága az eljárásnak, de meglepő módon sokáig nem sikerült bebizonyítani. Bár hasonló eljárás az optimális clusterek kialakítására már a [6] dolgozatban megtalálható, és a két módszer közti kapcsolat már Wolfe [60] leírta, a keverékfelbontás és a clusteranalizis lényegében párhuzamosan fejlődött a hetvenes évek során. Megjelentek a cluster analízisről szóló első könyvek ([2], [27], [32]), a rejtett struktúrák analíziséről még megjelent Lazarsfeld [36] könyve, de a kontingencia táblák vizsgálatára közben Kullback, Goodman [22] és Haberman kidolgozták a log-lineáris modellt (ezt mostanában Leuritzen és munkatársai [37] fejlesztik tovább, ők azokat az eseteket vizsgálják, amikor a likelihood becslésre gráfelméleti módszerekkel explicit előállítás adható), a keverékek felbontását Odell és Basu [44] az ürkutatás során nyert adatok statisztikai kiértékelésére használják (különben a Communications in Statistics című folyóiratnak az egész füzete erről a kérdésről szól, ahol ez a cikk megjelent), a bayesi algoritmus konvergenciájára már Hartley és Hocking [29] adtak bizonyítást, a módszer azonban csak akkor került az érdeklődés középpontjába, amikor a hiányzó információ elvéről Dempster, Laird és Rubin [18] dolgozata megjelent. Ők adtak bizonyítást a monotonitásra is a Jensen egyenlőtlenség alapján, ezt fogalmaztam én át az információelmélet nyelvére Pick Róberttel közös [48] cikkemben. Az átfogalmazás alapján Csiszár Imrével észrevettük az ún. EM algoritmus kapcsolatát más, az információelméletben használatos eljárásokkal és Csiszár Imre a konvergenciára igen egyszerű, szemléletes bizonyítást adott. A vele közösen írt [13] dolgozatban általánosítottam a hiányzó információ elvét. Úgy gondolom, hogy ennek az elvnek az alkalmazása még koránt sincs kiaknázva. Igen hasznos lenne például megtalálni, hogyan lehetne az idősoranalízis becslési feladatainak a megoldására alkalmazni.

Normális eloszlások keveréke

Legyen Y m-dimenziós valószínűségi változó, eloszlásfüggvényét jelöljük F_0-lal, és legyen F_0 ismeretlen. Legyen továbbá Z az Y-tól független m-dimenziós standard normális változó (azaz Z koordinátái legyenek függetlenek normális eloszlású valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással), és legyen

$$X = Y + Z. \tag{6}$$

Kérdés, hogyan lehet az X változóra vonatkozó n elemű független megfigyelés alapján az F_0 eloszlást meghatározni. Ennek a kérdésnek az eddig tárgyalt feladat $d=0$ mellett lesz a speciális esete, ekkor F_0 a $(\mu_1(i), \ldots, \mu_m(i))$ pontokba $p(i)$ tömeget koncentráló diszkrét mérték eloszlásfüggvénye. Jelölje most X_j a j-edik megfigyelést, akkor a likelihood függvény

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \log \left\{ \int_{R_m} \exp\left(-\frac{1}{2} \|X_j - Y\|^2 \right) \right\} F(dY), \tag{7}$$

ahol R_m az m-dimenziós Euklideszi teret jelöli. Joggal vethető fel a kérdés, hogy adott n elemű minta mellett az $L_n(F)$ függvény diszkrét F mellett veszi-e fel a maximumát, és ha igen, mit mondhatunk a komponensek számáról.

1. Tétel. *Tetszőleges $X_1, \ldots, X_n$ m-dimenziós vektorokhoz találhatóak olyan $T_1, \ldots, T_{n+1}$ m-dimenziós vektorok és $p(1), \ldots, p(n+1)$ nem megatív számok, hogy* $\sum_{i=1}^{n+1} p(i) = 1$, *és tetszőleges m-dimenziós eloszlásra*

$$L_n(F) \leqq L_n(F_n), \tag{8}$$

ahol F_n a T_i pontokba $p(i)$ tömeget koncentráló diszkrét mérték eloszlásfüggvényét jelöli.

Bizonyítás. Tekintsük tetszőleges $Y \in R_m$ mellett azt az n-dimenziós vektort, amelynek j-edik koordinátája $\exp\left(-\frac{1}{2}\|X_j - Y\|^2\right)$. Jelöljük H_0-lal azt a halmazt, amit ezek a vektorok befutnak, ha Y befutja R_m-et, és vegyük a vektorok közt még az origót. Ha $\|Y\|$ tart a végtelenbe, a hozzá rendelt vektor ugyanis az origóba tart, így az origóval kiegészített H_0 zárt lesz, hiszen folytonos leképezés értékkészlete. H_0 korlátos is, hiszen elemeinek koordinátái nem lehetnek 1-nél nagyobbak. E miatt korlátos és zárt halmaz H_0 konvex burka is, jelöljük ezt H-val. H elemeinek a koordinátái nem negatívak, és van H-nak olyan eleme, amelynek minden koordinátája pozitív. Így felveszi H-ban a maximumát az a függvény, mely H elemeihez a koordináták szorzatát rendeli, és a maximum helye (vagy azok egyike) előállítható H_0 legfeljebb $(n+1)$ elemének a konvex kombinációjaként. Ezt akartuk bizonyítani.

Az az ember benyomása, hogy a maximum helye 1 valószínűséggel egyértelmű, de ezt még nem tudtam bebizonyítani. Mindenesetre már a tétel alapján is értelme van a maximum likelihood becslésről beszélni ugyanúgy, mint a közönséges empirikus eloszlás-függvény esetében. Nagyon jó lenne tudni, hogy ha a valódi eloszlás k különböző pontban koncentrált diszkrét mérték, akkor várható-e, hogy a maximum likelihood becslés komponenseinek a száma nagy n mellett k közelében marad-e. Általában is jó lenne tudni, hogy milyen gyorsan tart F_n F_0-hoz, például mit mondhatunk a két függvény különbségének a maximumáról. Elképzelhető, hogy magasabb dimenziókban nem ez a megfelelő statisztika, talán jobb az empirikus és a valódi mérték Prohorov—Wasserstein jellegű távolsága. Független, egyforma eloszlású megfigyelésekre ilyen jellegű statisztika aszimptotikus viselkedését vizsgáltuk Ajtai Miklóssal és Komlós Jánossal közös [1] cikkünkben.

Bináris diszkrét változók esete

Én a keverékek felbontásával annak a vizsgálatunk során kezdtem foglalkozni, amelyben Czeizel Endrével és Telegdi Lászlóval a veleszületett rendellenességek hazai adatait dolgoztuk fel. Ebben az esetben $m=d=40$ volt, és X koordinátái csak 1-gyel vagy 2-vel lehettek egyenlőek ($x_j=2$, $1\leqq j\leqq d$). Mivel a rendellenességek ritkák, a koordináták többsége a rendellenesség hiányát jelölő 1-gyel volt egyenlő, és csak néhány (legfeljebb 7) koordináta értéke volt 2. Ez adta az ötletet, hogy X-et azonosítsam az első 40 szám azon részhalmazával, amelynek megfelelő koordináták X-ben 2-vel egyenlőek. Így a teljes minta egy hipergráfot jelentett, és az iteráció kezdeti értékét az élek csoportosításával határoztam meg. A clusterek kialakításához szükségem volt a hipergráf csúcsainak (esetünkben az első negyven szám) több dimenziós beágyazására.

Legyen $H=\{C_1, \ldots, C_m\}$ egy tetszőleges m elemű halmaz, és ε a H feletti hipergráf, vagyis legyen ε a H részhalmazainak adott összessége, $\varepsilon=\{E_1, \ldots, E_n\}$. Legyenek $T_1, \ldots, T_m$ tetszés szerinti pontok a t-dimenziós Euklideszi térben, akkor H tetszőleges E részhalmazához rendeljük hozzá a

$$Q(E)=\sum_{j=1}^{m}\|T_j-T(E)\|^2 I(C_j\in E) \tag{9}$$

összeget, ahol

$$T(E)=\frac{\sum_{j=1}^{m} T_j I(C_j\in E)}{\sum_{j=1}^{m} I(C_j\in E)}$$

az E-beli elemekhez rendelt pontok súlypontja (feltehetjük, hogy az E_i-k nem üresek). Azt mondjuk, hogy $T=(T_1, \ldots, T_m)$ az ε hipergráf csúcsainak t-dimenziós kvadratikus beágyazása, ha

$$\sum_{i=1}^{m} T_i T_i' = mI \tag{10}$$

(ahol T_i' a T_i transzponáltját, I a t-dimenziós egységmátrixot jelöli), és a

$$Q(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n} Q(E_i) \tag{11}$$

összeget a (10) feltétel mellett T minimalizálja.

Jelöljük A-val ε incidencia mátrixát (tehát legyen $a_{ij}=I(T_j\in E_i)$), és D-vel (illetve Δ-val) azt az n-szer n-es (illetve $m\times m$-es) matrixot, amelynek a diagonálisában A sorainak (illetve oszlopainak) az összege áll (a többi elem 0). Könnyen látható, hogy

$$Q(\varepsilon)=trT(\Delta-A'D^{-1}A)T', \tag{12}$$

tehát alkalmazható az általánosított kvadratikus alakok szélső értékére vonatkozó tétel (lásd pl. [59] 2.1. Tétel). Így kapjuk a következő tételt.

2. Tétel. *Az ε hipergráf t-dimenziós kvadratikus beágyazását a*

$$B=\Delta-A'D^{-1}A$$

matrix t legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektorok határozzák meg.

Ennek a tételnek az alapján kereshetjük az ε hipergráf éleinek olyan (esetleg fuzzy) $I(E_i \in C_j)$ clusterozását, amelyre a

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} Q_j(E_i) I(E_i \in C_j)$$

összeg minimális, ahol az összegben a Q indexeként fellépő j arra utal, hogy most k egymástól független példányt készíthetünk a T beágyazásából, és $Q_j(E)$ az E élnek ezek közül a j-edikhez tartozó kvadratikus súlya. Q minimumát remélhetőleg megadja az az iteráció, amelynek egyik fázisában ezeket a beágyazásokat határozzuk meg a 2. Tétel és az $I(E_i \in C_j)$ csoportosítás alapján, a másik fázis pedig épp ezeket az $I(E_i \in C_j)$ csoportba-tartozási súlyokat módosítja a kapott beágyazáshoz tartozó $Q_j(E_i)$ mennyiségek alapján. Ez utóbbi módosítás megfelelő alakját még nem találtam meg, és az eljárás konvergenciájáról semmit sem tudok mondani.

A bayesi iteráció konvergenciája

Térjünk vissza a cikk elején tárgyalt általános esetre. Amint azt a [13] dolgozatban bebizonyítottuk, az algoritmus konvergál, és megadja az abszolút maximumot, ha a megengedett mértékek halmaza konvex. Így van ez, ha a kérdést a normális eloszlások keverékének a leírásánál használt nem-paraméteres formában vetjük fel, vagyis a komponensek számáról és diszkrét voltáról semmit se tételezünk fel. Sajnos nem konvex a megengedett mértékek halmaza, ha korlátozzuk a komponensek számát. Amint azt az 1. Tétel és az azt követő meggondolás mutatja, erre tulajdonképpen nincsen szükség: a likelihood gyök komponenseinek a száma remélhetőleg nem haladja meg lényegesen a valódi komponensek számát.

A megengedett mértékek konvex voltához nem csak a komponensek számát kell szabadon hagyni, de sajnos rögzíteni is kell magukat a komponenseket. Ez azt jelenti, hogy az alternáló algoritmus (4) lépésének csak az első sorát használhatjuk, a $q_j(x|i), m_j(i), s_j$ paramétereket fixen kell hagyni az eljárás során. Elvileg ugyan lehetséges finom ráccsal befedni a tér szóba jöhető részét, a gyakorlati esetekben azonban ettől az eljárás feltehetőleg alkalmazhatatlanná válik. Elképzelhető, hogy ha két nagy fázisra bontjuk a paraméterek kiszámolását, és az első fázisban egy durva rácsból indulunk ki, amelyet bizonyos átértékelés után a második fázis inicializálására használunk, akkor stabil és gyors eljárást kapunk. Ez is azt mutatja, hogy ez a dolog jelen állapotában a becslések numerikus meghatározása elsősorban számológépen alkalmazható ötleteket igényel, és ezeket az ötleteket megfelelően próbafutásokkal kell kipróbálni.

IRODALOM

[1] AJTAI, M., KOMLÓS, J., TUSNÁDY, G., (1982) On optimal matchings. Combinatorica

[2] ANDERBERG, M. R., (1973) *Cluster analysis for applications.* New York, Academic Press.

[3] ANDERSON, T. W. (1958) *An introduction to multi variate statistical analysis.* New York, J. Wiley

[4] ANDERSON, T. W. (1959) Some scaling models and estimation procedures in the latent class model. Probability and Statistics: *the Harold Cramer Volume* (U. Grenander, ed.) Uppsala, Almquist and Wiksell, 9—38.

[5] ANDREWS, D., MALLOWS, C., (1974) Scale mixtures of normal distributions. *J. Royal Statist. Soc.* Ser. B 36, 99—102.

[6] BALL, G. H., HALL, D. J. (1967) A clustering technique for summarizing multivariate data. *Behavioral Sci.* 12, 153—155.

[7] BERAN, R., (1977) Minimal Hellinger distance estimates for parametric models. *The Annals of Statistics* 5, 445—463.
[8] BINDER, D. A. (1978) Bayesian cluster analysis. *Biometrika* 65, 31—38.
[9] BRYANT, P., WILLIANSON, J. A., (1978), Asymptotic behaviour of classification maximum likelihood estimates. *Biometrika* 65, 273—281.
[10] CHEN, T., FIENBERG, S., (1976) The analysis of contingency tables with incompletely classified data. *Biometrics* 32, 133—144.
[11] CHERNOFF, H., (1970) Metric considerations in cluster analysis. *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1,* Los Angeles and Berkeley Univ of California Press. 621—629.
[12] CORMACK, R. M., (1977) A review of classification. *J. R. Statist. Soc.* A 124, 321—367.
[13] CSISZÁR, I., TUSNÁDY, G., (1982) On alternating minimization procedures. *Statistic and Decisions.*
[14] DAVID, F. N., (1949) *Probability theory for statistical methods.* Cambridge, Univ. Pr.
[15] DAY, N. E., (1969) Estimating the components of a mixture of normal distributions. *Biometrika* 56, 463—474.
[16] DAY, N. E., KERIDGE, D. F., (1967) A general maximum likelihood discriminant. *Biometrics* 23, 313—324.
[17] DEELEY, J., KRUSE, R., (1968) Construction of sequences estimating the mixing distribution. *Ann. Math. Statist.* 39, 286—288.
[18] DEMPSTER, A. P., LAIRD, N. M., RUBIN, D. B., (1977) Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. R. Statist. Soc.* B 39, 1—22.
[19] EFRON, B., OLSHEN, R. A., (1978) How broad is the class of normal scale mixtures? *The Annals of Statistics* 6, 1159—1164.
[20] ENGELMAN, L., HARTIGAN, J. A., (1969) Percentage points of a test for clusters. *J. Am. Statist. Assoc.* 64, 1647—1648.
[21] EVERITT, B. S., (1974) *Cluster analysis,* London, Heinemann.
[22] L. A. GOODMAN, (1974) Explanatory latent structure analysis using both identiable and unidentificable model. *Biometrika* 61, 215—231.
[23] FISCHER, R. A., (1936) The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Ann. Eugen,* 7, 179—188.
[24] FLEISS, J. L., ZUBIN, J., (1959) On the methods and theory of clustering. *Multivariate Behavioral Res.* 4, 235—250.
[25] FREDDMAN, D. A., (1963) On the asymptotic behaviour of Bayes estimates in the discrete case. *Ann. Math. Statist.* 34, 1386—1403.
[26] FRIEDMAN, H. P., RUBIN, J., (1967) On some invariant criteria for grouping data. *J. Am. Statist. Assoc.* 62, 1159—1178.
[27] HARTIGAN, J. A., (1975) *Clustering algorithms.* New York, Wiley.
[28] HARTIGAN, J. A., (1978) Asymptotic distribution for clustering criteria. *The Annals of Statist.* 6, 117—131.
[29] HARTLEY, H. O., HOCKING, R. R., (1971) The analysis of incomplete data. *Biometrics* 27, 783—823.
[30] HASSELBLAD, V., (1969) Estimation of finite mixtures of distributions from the exponential family. *J. Amer. Stat. Assoc.* 64, 1459—1471.
[31] JANOWITZ, M. F., (1979) Monotone equivariant cluster methods. *SIAM J. Appl. Math.* 37, 148—165.
[32] JARDINE, N., SIBSON, R., (1973). *Mathematical taxonomy.* New York, Wiely.
[33] KELKER, D., (1971) Infinite divisibility and variance mixtures of the normal distribution. *Ann. Math. Statist.* 42, 802—808.
[34] KIEFER, J., WOLFOWITZ, J., (1956) Consistency of the maximum likelihood estimator in the presence of in finitely many incident parameters. *Ann. Math. Statist.* 27, 887—906.
[35] KRZANOWSKI, W. J., (1980) Mixtures of continuous and categorical variables in discriminant analysis. *Biometrics* 36, 493—499.
[36] LAZARSFELD, P. F., HENRY, N. W., (1968) *Latent structure analysis.* Boston, Houghton Mifflin Co.
[37] LAURITZEN, S. L., SPEED, T. P., DARROCH, J. N., (1980) Markov fields and log-linear invaction models for contingency tables. *The Annals of Statistics* 8, 522—539.
[38] MACQUEEN, J. (1967) Some methods for classification and analysis of multivariate observations. *Proc. of Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab.* 281—297.
[39] MARONNA, R., JACOVKIS, P. M., (1974) Multivariate clustering procedures with variable metrics, *Biometrics* 30, 449—505.
[40] MARRIOTT, F. H. C., (1971) Practical problems in method of cluster analysis. *Biometrics* 27, 501—514.
[41] MARRIOTT, F. H. C., (1975) Separating mixtures of normal distributions. *Biometrics* 31, 767—769.

[42] NEYMAN, J., SCOTT, E. L. (1948) Consistent estimates based on partially consistent observations. with particular reference to structural relations. *Econometrica* 16, 1—32.
[43] O'BRYAN, T., WALTER, G., (1979) Mean square estimation of the a priory distribution. *Sankhya* A 41, 95—108.
[44] ODELL, P. L., BASU, J. P., (1976) Concerning several methods for estimating crop acreages using remote sensing data. *Commun. Statist. Theor. Meth.* A5 (12), 1091—1114.
[45] ORCHARD, T., WOODBURY, M. A. (1972) A missing information principle: theory and applications. *Proc. 6th Berkeley Symposium on Math. Statist. and Prob.* 1, 697—715.
[46] PEARSON, K. (1894) Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 185A, 71—110.
[47] PATERS, B. C., WALKER, H. F., (1978) An iterative procedure for obtaining maximum likelihood estimates of the parameters for a mixture of normal distributions. *SIAM J. Appl. Math.* 35, 362—378.
[48] PICK, R., TUSNÁDY, G., (1980) Decomposition of mixtures. *Studia Sci. Math. Hung.* 15, 31—37.
[49] QUANDT, R. E., RAMSEY, J. B., (1978) Estimating mixtures of normal distributions and regressions. *J. Amer. Statist. Assoc.* 73, 730—741.
[50] RAND, W. H., (1971) Objective criteria for the evaluation of clustering methods. *J. Am. Statist. Assoc.* 60, 846—850.
[51] ROBBINS, H., (1964) The empirical Bayes approach to statistical decision problems. *Ann. Math. Statist.* 35, 1—20.
[52] SCHWARTZ, L., (1965) On Bayes procedures. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 4, 10—26.
[53] SCLOVE, S. L., (1977) Population mixture models and clustering algorithms. *Comm. Stat. Theory and Methods* A6, 417—434.
[54] SCOTT, A. J., SYMONS, M. J., (1971) Clustering methods based on likelihood ratio criteria. *Biometrics* 27, 387—397.
[55] SHAPIRO, C. P., (1977) Classification by maximum posterior probability. *The Annals of Statistics* 5, 185—190.
[56] SUNDBERG, R., (1976) An iterative method for solution of the likelihood equations for incomplete data from exponential families. *Comm. Statist. — Simul. Comput.* B5(1), 55—64.
[57] TEICHER, H., (1963) Identifiability of finite mixtures. *Ann. Math. Statist.* 34, 1265—1269.
[58] TUSNÁDY, G., (1977) Strong invariance principles. Recent developments in statistics. ed. J. R. Barra. 289—300.
[59] TUSNÁDY, G., (1979) Mátrixok szinguláris felbontása. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 5, 375—384.
[60] WOLFE, J. H., (1970) Pattern clustering by multivariate mixture analysis. *Multivariate Behavioral Res.* 5, 329—350.
[61] YAKOWITZ, S. J., and SPRAGINGS, J. D., (1968) On the identifiability of finite mixtures. *Ann. Math. Statist.* 39, 209—214.

Г. ТУШНАДИ

РАЗЛОЖЕНИЕ СМЕСЕЙ

G. TUSNÁDY

DECOMPOSITION OF MIXTURES

The problem of decomposition of mixtures is presented as a possible unification of the methods of multivariate analysis and cluster analysis. It is proven that the maximum likelihood estimator of the apriori distribution is concentrated on discrete points of finite number. A multidimensional embedding of hypergraphs is given for initialling the so-called EM algorithms.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS FABER SZINGULÁRIS FÜGGVÉNYÉRŐL

LACZKOVICH MIKLÓS

Dolgozatunk egy Georg Fabertől származó függvénykonstrukcióhoz kapcsolódik. Faber célja e konstrukcióval az volt, hogy segítségével egyszerű bizonyítást adjon Borel tételére, amely szerint majdnem minden szám normális ([2], 395—400. old.). Később azonban, elsősorban Riesz és Szőkefalvi könyvének hatására a konstrukció úgy vált közismertté, mint az egyik legegyszerűbb példa szinguláris függvényre ([5], 48. oldal). A függvényt többen újra felfedezték, általánosították és számos érdekes tulajdonságát állapították meg ([1]; [3], 278. oldal; [4]; [6]. [7] irodalomjegyzékében további utalások találhatók).

Cikkünk első részében röviden összefoglaljuk a Faber-függvény ismert tulajdonságait. A második részben a Faber-függvénynek egy, a gyengén konvexitás feltételével rokon függvény-egyenlőtlenséggel való kapcsolatát írjuk le. Ha a függvénynek a paramétertől való függését is figyelembe vesszük, akkor egy kétváltozós függvényt kapunk; ennek a tulajdonságaival foglalkozunk a harmadik részben.

1. Definíció; ismert tulajdonságok

Legyenek p és q rögzített pozitív számok, melyekre $p+q=1$ és $p \neq q$. Az $F(x)$ értékeket először diadikusan racionális x-ekre definiáljuk. Ha x egész, akkor legyen $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$. Ha $n>1$ és az $F\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)$ értékeket már definiáltuk minden k egész számra, akkor legyen

$$F\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} pF\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right). \tag{1}$$

Így n szerinti indukcióval $F(x)$-et minden diadikusan racionális x-re értelmeztük. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$F\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = q\left[F\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right)-F\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\right], \tag{2}$$

$$F\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right)-F\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = p\left[F\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right)-F\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\right]$$

teljesül minde k egész és n természetes számra. Ebből egyszerűen következik, hogy

$$0 < F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right) \leqq \max(p, q)^n \to 0, \tag{3}$$

ha $n \to \infty$, tehát F szigorúan monoton növő, és értékkészlete mindenütt sűrű. Ezért F egyértelműen kiterjeszthető a számegyenesre monton függvényként, és az így kapott függvény (melyet szintén F-fel jelölünk) folytonos.

Most megmutatjuk, hogyha F differenciálható egy x pontban, akkor $F'(x)=0$. Ugyanis, ha $F'(x)$ véges, de nullától különböző érték, valamint

$$\frac{k_n}{2^n} \leqq x \leqq \frac{k_n+1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

akkor d_n-nel jelölve az $F\left(\frac{k_n+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k_n}{2^n}\right)$ differenciát,

$$\lim_{n\to\infty} 2^n d_n = F'(x), \quad \text{tehát} \quad \lim_{n\to\infty} d_{n+1}/d_n = \frac{1}{2}.$$

Ez azonban lehetetlen, mert (2) szerint d_{n+1}/d_n p-vel vagy q-val egyenlő minden n-re.

Így $F'(x)=0$ minden olyan pontban, ahol F differenciálható, tehát Lebesgue tétele szerint majdnem mindenütt. Ezzel beláttuk, hogy F szinguláris.

Megjegyezzük, hogy F-et általában töröttvonal-függvények egyenletes limeszeként szokták definiálni; mi egyszerűbbnek látjuk a fenti, kiterjesztéses definíciót.

A Faber-féle függvényre explicit formulát is adhatunk. Ehhez először is megmutatjuk, hogy ha az a_i természetes számokra $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} \leqq a_n$, akkor

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-a_i}\right) = \sum_{i=0}^{n} p^i q^{a_i - i}. \tag{4}$$

Az állítást $m = a_n + n$ szerint indukcióval igazoljuk. Ha $m=1$, akkor $n=0$, $a_0=1$, és így (4) $F\left(\frac{1}{2}\right)=q$-ból azonnal következik. Legyen $m>1$, és tegyük fel, hogy az állítás az m-nél kisebb számokra igaz. Ha $n \geqq 1$ és $a_n = a_{n-1}$, akkor

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{-a_i}\right) = F\left(\sum_{i=0}^{n-2} 2^{-a_i} + 2^{-(a_{n-1}-1)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} p^i q^{a_i - i} + p^{n-1} q^{a_{n-1} - n} = \sum_{i=0}^{n} p^i q^{a_i - i},$$

felhasználva az indukciós feltevést és $p+q=1$-et.

Ha $n=0$, vagy $a_n > a_{n-1}$, akkor

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-a_i}\right) = pF\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-a_i}\right) + qF\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-a_i} + 2^{-(a_n-1)}\right) =$$

$$= p \sum_{0=i}^{n-1} p^i q^{a_i - i} + q\left(\sum_{i=0}^{n-1} p^i q^{a_i - i} + p^n q^{a_n - 1 - n}\right) = \sum_{i=0}^{n} p^i q^{a_i - i},$$

ahol az átalakítások során (1)-et, az indukciós feltevést és $p+q=1$-et alkalmaztuk. Ezzel (4)-et minden esetben igazoltuk.

(4)-ből F folytonossága alapján nyerjük a következő előállítást [7]:

(5) Ha $x = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-a_i}$, ahol $0 < a_0 < a_1 < \ldots$,

akkor $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i q^{a_i - i}$.

A Faber-féle függvény egy további nevezetes tulajdonsága, hogy kielégíti a következő függvényegyenleteket:

(6) $$F\left(\frac{x}{2}\right) = qF(x),$$

$$F\left(\frac{x+1}{2}\right) = pF(x)+q \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Ez azonnal következik az (5) előállításból, de közvetlenül is igazolható: először diadikusan racionális x-re, indukcióval, majd a folytonosság alapján minden [0, 1]-beli x-re. Igen érdekes, hogy ezek az egyenletek jellemzik az F függvényt [4]: ha a [0, 1] intervallumon értelmezett korlátos f függvény kielégíti a (6) alatti egyenleteket minden $x \in [0, 1]$-re, akkor szükségképpen $f \equiv F$. Ez a tény az F függvény számos valószínűségszámítási interpretációját teszi lehetővé. Ha például a $t = 0, a_1 a_2 \ldots$ szám diadikus jegyeit véletlenszerűen és egymástól függetlenül választjuk úgy, hogy $a_n = 1$ valószínűsége p, $a_n = 0$ valószínűsége pedig q legyen, akkor annak valószínűsége, hogy $t \leqq x$, éppen $F(x)$-szel egyenlő] Ugyanis ez a valószínűség könnyen láthatóan kielégíti a (6) egyenleteket [4].

2. *Egy függvényegyenlőtlenség*

A következőkben megmutatjuk, hogy a Faber-féle függvény kielégít egy függvényegyenlőtlenséget is, amelynek ha nem is egyetlen, de kitüntetett (extremális tulajdonságú) megoldása.

1. Tétel. *Legyen* $0 < p < \frac{1}{2}$. *Ekkor minden valós* x *és pozitív valós* h *esetén fennáll a*

(7) $$F(x) \leqq pF(x-h)+qF(x+h)$$

egyenlőtlenség. Ha $\frac{1}{2} < p < 1$, *akkor* (7) *helyett a fordított irányú egyenlőtlenség teljesül minden* x*-re és* $h > 0$*-ra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 < p < \frac{1}{2}$; a másik eset bizonyítása hasonló. F folytonossága alapján elegendő az egyenlőtlenséget diadikusan racionális x-re és h-ra bizonyítani. Legyen

$$x-h = \frac{k}{2^n}, \quad x = \frac{m}{2^n}, \quad x+h = \frac{2m-k}{2^n},$$

ahol n, k, m egészek, $n \geqq 0$ és $k < m$. Állításunkat n szerinti indukcióval igazoljuk. Ha $n=0$, azaz x és h egészek, akkor

$$F(x) = x = p(x-h)+q(x+h)+(p-q)h =$$

$$= pF(x-h)+qF(x+h)+(p-q)h,$$

amiből $p<\frac{1}{2}$-re és $h>0$-ra való tekintettel adódik (7).

Legyen $n>0$, és tegyük fel az állítást $n-1$-re. Ha k és m páros, akkor az indukciós feltétel azonnali alkalmazásával kapjuk (7)-et.

Ha k és m páratlan, $k=2k'+1$, $m=2m'+1$, akkor az indukciós feltevés szerint

$$F\left(\frac{m'}{2^{n-1}}\right) \leqq pF\left(\frac{k'}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'}{2^{n-1}}\right), \tag{8}$$

valamint

$$F\left(\frac{m'+1}{2^{n-1}}\right) \leqq pF\left(\frac{k'+1}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'+1}{2^{n-1}}\right). \tag{9}$$

Szorozzuk be (8)-at p-vel, (9)-et q-val, majd a kapott egyenlőtlenségeket adjuk össze. Ekkor (1) alapján a bal oldalon éppen $F\left(\frac{2m'+1}{2^n}\right)=F\left(\frac{m}{2^n}\right)=F(x)$ fog állni, míg a jobb oldalon megkapjuk $pF(x-h)+qF(x+h)$-t.

Legyen most m páros és k páratlan, $m=2m'$, $k=2k'+1$. Az indukciós feltevés szerint ismét fennáll (8), valamint

$$F\left(\frac{m'}{2^{n-1}}\right) \leqq pF\left(\frac{k'+1}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'-1}{2^{n-1}}\right). \tag{10}$$

(Jegyezzük meg, hogy $k=2k'+1<m=2m'$-ből következően $k'<m'$. Ha $k'+1=m'$, akkor (10) nem az indukciós feltevésből, hanem $p+q=1$-ből következik.)

Ha (8) p-szereséhez hozzáadjuk (10) q-szorosát, akkor a kapott egyenlőtlenség bal oldalán $F\left(\frac{m'}{2^{n-1}}\right)=F\left(\frac{m}{2^n}\right)=F(x)$ fog állni, míg a jobb oldal első tagja (1) szerint $pF\left(\frac{2k'+1}{2^n}\right)=pF\left(\frac{k}{2^n}\right)=pF(x-h)$ lesz.

(1)-et és F monotonitását felhasználva a jobb oldal második tagjára az alábbi becslést nyerjük:

$$q\left[pF\left(\frac{2m'-k'}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'-1}{2^{n-1}}\right)\right] \leqq q\left[pF\left(\frac{2m'-k'-1}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'}{2^{n-1}}\right)\right] =$$

$$= q \cdot F\left(\frac{4m'-2k'-1}{2^n}\right) = qF\left(\frac{2m-k}{2^n}\right) = qF(x+h),$$

tehát (7) ebben az esetben is fennáll.

Legyen végül m páratlan és k páros,

$$m = 2m'+1, \quad k = 2k'.$$

Több esetet kell megkülönböztetnünk.

a) $n=1$. Ekkor $x-h$, $x+h$ és $x\pm\frac{1}{2}$ egészek. Így (1) alapján

$$F(x) = pF\left(x-\frac{1}{2}\right)+qF\left(x+\frac{1}{2}\right) = p\left(x-\frac{1}{2}\right)+q\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= p(x-h)+q(x+h)-\left(h-\frac{1}{2}\right)(q-p) \leqq pF(x-h)+qF(x+h),$$

hiszen $h\geqq\frac{1}{2}$ és $q>p$.

b) $n>1$ és k' páros, $k'=2k''$. Ekkor az indukciós feltevés szerint

$$F\left(\frac{m'}{2^{n-1}}\right)\leqq pF\left(\frac{k'}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'}{2^{n-1}}\right), \tag{11}$$

valamint

$$F\left(\frac{m'+1}{2^{n-1}}\right)\leqq pF\left(\frac{k'}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'+2}{2^{n-1}}\right). \tag{12}$$

(Mivel $k=2k'<m=2m'+1$, így $k'\leqq m'$. Ha $k'=m'$, akkor (11) nem az indukciós feltevésből, hanem $p+q=1$-ből következik.) Ha (11) p-szereséhez hozzáadjuk (12) q-szorosát, akkor a kapott egyenlőtlenség bal oldalán

$$F\left(\frac{2m'+1}{2^n}\right) = F(x)$$

fog állni. A jobb oldalon egyrészt megkapjuk

$$pF\left(\frac{k'}{2^{n-1}}\right) = pF\left(\frac{k}{2^n}\right) = pF(x-h)\text{-t},$$

másrészt

$$q\left[pF\left(\frac{2m'-k'}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'+2}{2^{n-1}}\right)\right]\overset{\text{def}}{=} q\cdot A\text{-t},$$

ahol

$$A = pF\left(\frac{m'-k''}{2^{n-2}}\right)+qF\left(\frac{m'-k''+1}{2^{n-2}}\right) = F\left(\frac{2m'-2k''+1}{2^{n-1}}\right) = F\left(\frac{2m-k}{2^n}\right) =$$

$$= F(x+h),$$

tehát a kapott egyenlőtlenség éppen (7).

c) $n>1$ és k' páratlan, $k'=2k''+1$. Ekkor az indukciós feltevés szerint

$$F\left(\frac{m'}{2^{n-1}}\right)\leqq pF\left(\frac{k'-1}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'+1}{2^{n-1}}\right), \tag{13}$$

valamint

$$F\left(\frac{m'+1}{2^{n-1}}\right)\leqq pF\left(\frac{k'+1}{2^{n-1}}\right)+qF\left(\frac{2m'-k'+1}{2^{n-1}}\right). \tag{14}$$

Ezekből (7)-et ugyanúgy kaphatjuk meg, mint a b) esetben. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A következőkben pontosan leírjuk a (7) függvényegyenlőtlenség megoldásait. Könnyű ellenőrizni, hogy $0<p<\frac{1}{2}$ esetén bármely monoton növő és konvex függvény megoldása (7)-nek. A másik irányban megmutatjuk, hogy $p\neq\frac{1}{2}$ esetén (7)-nek csak monoton megoldásai vannak. Ez érdekes ellentétben áll azzal a ténnyel, hogy a $p=\frac{1}{2}$ esetén kapott

$$f(x)\leqq\frac{1}{2}f(x-h)+\frac{1}{2}f(x+h)\quad(h>0)$$

függvényegyenlőtlenségnek (amely a gyengén konvexitás feltétele) nem mérhető megoldásai is vannak.

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* (a, b) *intervallumban értelmezett* f *függvény kielégíti az*

$$f(x)\leqq pf(x-h)+qf(x+h) \tag{15}$$

egyenlőtlenséget minden olyan (x, h) *párra, amelyre*

$$a<x-h<x+h<b. \tag{16}$$

Ekkor f *monoton és folytonos* (a, b)*-n; nevezetesen monoton növő, ha* $0<p<\frac{1}{2}$, *és csökkenő, ha* $\frac{1}{2}<p<1$.

Az alábbi bizonyítás David Preisstől származik. Tegyük fel először, hogy $0<p<\frac{1}{2}$. Legyen $x\in(a, b)$ tetszőleges és legyen $a<x-h<x+h<b$. (15) többszöri alkalmazásával a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$f\left(x-\frac{h}{2}\right)\leqq pf(x-h)+qf(x)\leqq pf(x-h)+q[pf(x-h)+qf(x+h)]=$$
$$=p(1+q)f(x-h)+q^2f(x+h);$$
$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)\leqq pf(x)+qf(x+h)\leqq p[pf(x-h)+qf(x+h)]+qf(x+h)=$$
$$=p^2f(x-h)+q(1+p)f(x+h);$$

végül

$$f(x)\leqq pf\left(x-\frac{h}{2}\right)+qf\left(x+\frac{h}{2}\right)\leqq p[p(1+q)f(x-h)+q^2f(x+h)]+$$
$$+q[p^2f(x-h)+q(1+p)f(x+h)]=p'f(x-h)+q'f(x+h),$$

ahol $p'=p^2(1+2q)$ és $q'=q^2(1+2p)$. Itt $p'+q'=p^2+q^2+2pq(p+q)=(p+q)^2=1$, valamint $0<p'<p$, mert $p(1+2q)=p+2pq<p+q=1$.

Jelöljük T-vel azon $0\leqq t\leqq p$ számok halmazát, melyekre

$$f(x)\leqq tf(x-h)+(1-t)f(x+h)$$

teljesül minden (16)-ot kielégítő (x, h) párra. A fenti okoskodás szerint T-ben nincs legkisebb pozitív szám. Másrészt T nyilván zárt, ezért $\inf T=0\in T$, és így $f(x)\leqq f(x+h)$, valahányszor (16) fennáll. Ebből következik, hogy f lokálisan nő minden $x\in(a, b)$ pontban, tehát monoton nő (a, b)-ben.

Alkalmazzuk most (15)-öt x helyett $x+\frac{h}{2}$-lel, ekkor az

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)\leqq pf\left(x-\frac{h}{2}\right)+qf\left(x+\frac{3}{2}h\right)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ha $x\in(a, b)$ rögzített, és $h\to+0$, akkor ebből

$$f(x+0)\leqq pf(x-0)+qf(x+0)$$

adódik (mivel f monoton, az $f(x+0)$, és $f(x-0)$ féloldali határértékek léteznek és végesek), ahonnan $pf(x+0)\leqq pf(x-0)$, $f(x+0)\leqq f(x-0)$, tehát f folytonos.

Ha $\frac{1}{2}<p<1$, akkor a $g(x)=f(-x)$ függvényre $g(x)\leqq qg(x-h)+pg(x+h)$ teljesül $(-b, -a)$-ban, tehát a fentiek szerint g itt növő és folytonos. Így f csökkenő és folytonos (a, b)-ben, amivel a tételt bebizonyítottuk.

A Faber-függvény extremális tulajdonságát a következő tétel fejezi ki.

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* [0, 1] *intervallumon értelmezett f függvény kielégíti a* (15) *egyenlőtlenséget minden olyan* (x, h) *párra, amelyre*

$$0\leqq x-h<x+h\leqq 1.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $f(0)=0$ *és* $f(1)=1$. *Ekkor* $f(x)\leqq F(x)$ *minden* $x\in[0, 1]$ *esetén.*

Bizonyítás. Legyen $x=\frac{k}{2^n}\in[0, 1]$; n szerinti indukcióval belátjuk, hogy $f(x)\leqq F(x)$. Ha $n=0$, akkor ez a kezdetiérték-feltételből következik. Ha az állítás n-re igaz, akkor (15), (1) és az indukciós feltétel alkalmazásával

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\leqq pf\left(\frac{k}{2^n}\right)+qf\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\leqq pF\left(\frac{k}{2^n}\right)+qF\left(\frac{k+1}{2^n}\right)=F\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Így $f(x)\leqq F(x)$ teljesül minden diadikusan racionális x-re. A 2. Tétel szerint f folytonos $(0, 1)$-ben, ezért az egyenlőtlenség minden $x\in[0, 1]$-re igaz.

4. Tétel. *Legyen f az* (a, b) *intervallumon értelmezve, és legyen* $0<p<\frac{1}{2}$. *Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *f kielégíti a* (15) *egyenlőtlenséget* (a, b)*-n.*

(ii) *f monoton növő és*

(17) $$f(td+(1-t)c)\leqq F(t)f(d)+(1-F(t))f(c)$$

teljesül minden $a<c<d<b$ *és* $t\in[0, 1]$*-re.*

Bizonyítás. Tegyük fel (i)-t, ekkor a 2. Tétel szerint f monoton növő. Legyen $a<c<d<b$ rögzített. Ha $f(c)=f(d)$, akkor f konstans $[c, d]$-n, és ekkor (17) nyil-

vánvalóan fennáll. Ha $f(c)<f(d)$, akkor értelmezzük a g függvényt a következőképpen:

$$g(t) = \frac{f(td+(1-t)c)-f(c)}{f(d)-f(c)}.$$

Ekkor $g(0)=0$, $g(1)=1$ és könnyű ellenőrizni, hogy g kielégíti (15)-öt $[0, 1]$-en. Így a 3. Tétel szerint $g(t)\leqq F(t)$ minden $t\in[0, 1]$-re, ami éppen (17).

Most tegyük fel, hogy (ii) fennáll, és legyen $a<x-h<x+h<b$. Alkalmazzuk (17)-et a

$$c = x-h, \quad d = x+h, \quad t = \frac{1}{2}$$

választással, ekkor

$$f(x) \leqq qf(x+h)+pf(x-h)$$

adódik, azaz (15) teljesül.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy $0<p<\frac{1}{2}$ esetén (15) megoldásainak halmaza a monoton növő és konvex, valamint a monoton növő és folytonos függvények osztályai között helyezkedik el. A monotonitás melletti pontos feltételt (17) adja meg, ami egy konvexitás-jellegű, de a konvexitásnál gyengébb kikötés.

3. *A kétváltozós Faber-függvény*

Ha a Faber-függvénynek a p paramétertől való függését is figyelembe vesszük, akkor a kétváltozós $F(x, p)$ függvényhez jutunk. $F(x, p)$-t csak $x\in[0, 1]$-re tekintjük értelmezettnek, azonban p értékei közül nem zárjuk ki sem $\frac{1}{2}$-et, sem pedig 0-t vagy 1-et. Mind az első pontban leírt konstrukció, mind pedig az (5) formula az alábbi értelmezéshez vezet:

$$F\left(x, \frac{1}{2}\right) = x \quad (x\in[0, 1]), \tag{18}$$

$$F(x, 0) = 1 \quad (x\in(0, 1]), \tag{19}$$

$$F(x, 1) = 0 \quad (x\in[0, 1)). \tag{20}$$

Ezeken kívül nyilvánvalóan fennállnak még

$$F(0, p) = 0 \quad (p\in[0, 1]), \text{ és} \tag{21}$$

$$F(1, p) = 1 \quad (p\in[0, 1]). \tag{22}$$

Tehát $F(x, p)$ a $[0, 1]\times[0, 1]=S$ egységnégyzeten van értelmezve.

5. Tétel. *Minden* $(x, p)\in S$*-re*

$$F(x, p)+F(1-x, 1-p) = 1. \tag{23}$$

Bizonyítás. Ha $p=0$ vagy $p=1$, akkor (23) a (19)—(22) egyenlőségekből következik. Legyen $0<p<1$ rögzített. Ekkor $x=\frac{k}{2^n}$ esetén (23)-at n szerinti in-

dukcióval igazolhatjuk, felhasználva (1)-et. Mivel $F(x, p)$ x-ben folytonos, azért (23) minden $x\in[0, 1]$-re fennáll.

6. Következmény. *Legyen* $0<p<1$, $q=1-p$, *és legyenek* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *természetes számokból álló, szigorúan növő, diszjunkt sorozatok, amelyek együttesen minden természetes számot tartalmaznak. Ekkor*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(p^i q^{a_i-i}+q^i p^{b_i-i}) = 1.$$

Bizonyítás. Ha $\sum_{i=0}^{\infty}2^{-a_i}=x$, akkor $\sum_{i=0}^{\infty}2^{-b_i}=1-x$, és így az állítás (5)-ből és az 5. Tételből következik.

Adott x és p esetén F_x-szel, illetve F^p-vel jelöljük az

$$F_x(p) = F(x,p) \quad (p\in[0, 1]), \quad \text{illetve}$$

$$F^p(x) = F(x, p) \quad (x\in[0, 1])$$

egyenlőségekkel értelmezett függvényeket.

7. Tétel. *Minden rögzített* $x\in[0, 1]$*-re* F_x *monoton csökkenő, folytonos* $[0, 1]$*-en és analitikus* $(0, 1)$*-ben.*

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy ha $x\in[0, 1]$ diadikusan racionális, $x=\frac{k}{2^n}$, akkor F_x monoton csökkenő. n szerinti indukcióval bizonyítunk; az állítás $n=0$-ra nyilvánvaló (21) és (22) alapján. Elég belátnunk, hogy ha $x_1=\frac{k}{2^n}$, $x_2=\frac{k+1}{2^n}$, $x_3=\frac{2k+1}{2^{n+1}}$, és F_{x_1}, F_{x_2} monoton csökkenőek, akkor F_{x_3} is csökkenő. Legyen $0\leqq p_1\leqq p_2\leqq 1$. Ekkor $F_{x_1}(p_1)\geqq F_{x_1}(p_2)$ és $F_{x_2}(p_1)\geqq F_{x_2}(p_2)$, valamint $F_{x_1}(p_1)$ $F_{x_1}(p_1)\leqq F_{x_2}(p_1)$, hiszen az $F^{p_1}(x)=F(x, p_1)$ függvény monoton növő. Mivel (1) szerint

$$F_{x_3} = pF_{x_1}+(1-p)F_{x_2},$$

azért, felhasználva a fenti egyenlőtlenségeket,

$$F_{x_3}(p_1) = p_1F_{x_1}(p_1)+(1-p_1)F_{x_2}(p_1) = p_1[F_{x_1}(p_1)-F_{x_2}(p_1)]+$$

$$+F_{x_2}(p_1) \geqq p_2[F_{x_1}(p_1)-F_{x_2}(p_1)]+F_{x_2}(p_1) =$$

$$=p_2F_{x_1}(p_1)+(1-p_2)F_{x_2}(p_1) \geqq p_2F_{x_1}(p_2)+(1-p_2)F_{x_2}(p_2) = F_{x_3}(p_2),$$

amivel beláttuk, hogy F_{x_3} csökkenő.

Legyen $x\in(0, 1)$ tetszőleges. Legyen (x_n) diadikusan racionális számoknak egy x-hez tartó sorozata. Ekkor $F_{x_n}\to F_x$, hiszen F^p folytonos x-ben minden rögzített p-re. Mivel F_x monoton csökkenő minden n-re, azért ugyanez áll F_x-re is.

Legyen $x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-a_n}$. A $\sum_{n=0}^{\infty}z^n(1-z)^{a_n-n}$ függvénysor egyenletesen konvergens a $\{z\in\mathbf{C};\ |z|<1,\ |1-z|<1\}$ tartomány kompakt részhalmazain, mert itt $|z^n(1-z)^{a_n-n}|\leqq$ $\leqq|z|^n$. Így a függvénysor $G(z)$ összegfüggvénye itt reguláris. Mivel (5) alapján $G(p)=$ $=F_x(p)$, ha $0<p<1$, azért F_x analitikus $(0, 1)$-ben. A fenti függvénysor a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

szakaszon is egyenletesen konvergens, ezért F_x folytonos 0-ban. Az 5. Tétel szerint

$$\lim_{p\to 1-0} F_x(p) = \lim_{p\to 1-0}\left(1-F_{1-x}(1-p)\right) = 1-\lim_{p\to 1+0} F_{1-x}(p) = 0 = F_x(1),$$

amivel a $p=1$ pontbeli folytonosságot is beláttuk.

8. Következmény. *Az $F(x, p)$ függvény a $(0, 0)$ és $(1, 1)$ pontok kivételével mindenütt folytonos S-en.*

Ugyanis, ha a $T=[a, b]\times[c, d]\subset S$ téglalap nem tartalmazza a $(0, 0)$ és $(1, 1)$ pontokat, akkor F_x folytonos $[c, d]$-n minden $x\in[a, b]$-re, továbbá F^p folytonos és monoton $[a, b]$-n minden $p\in[c, d]$-re. Ebből egyszerűen bizonyítható, hogy F folytonos T-n.

Tegyük fel, hogy a kétváltozós g függvény értelmezve van a $T=[a, b]\times[c, d]$ téglalapon. $\Delta(g, T)$-vel fogjuk jelölni a

$$g(b, d)-g(b, c)-g(a, d)+g(a, c)$$

megváltozást. Azt mondjuk, hogy g monoton növő (csökkenő) T-n, ha $\Delta(g, T')\geqq 0$ $(\Delta(g, T')\leqq 0)$ bármely $T'\subset T$ téglalapra. g sehol sem monoton T-n, ha nincs olyan $T'\subset T$ téglalap, amelyen monoton növő, vagy csökkenő.

9. Tétel. *F sehol sem monoton S-en.*

Bizonyítás. Legyen $T=[a, b]\times[c, d]$ tetszőleges téglalap S-ben, és legyen $x\in(a, b)$, $x=\sum_{i=0}^{n} 2^{-a_i}$ és $p\in(c, d)$ rögzített. Legyen $y=\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-a_i}$, ekkor (4) szerint

$$F(x, p)-F(y, p) = p^n(1-p)^{a_n-n}.$$

Következésképpen, ha $T_1=[y, x]\times[p, p_1]$, ahol $p_1\in(p, d)$, akkor

$$\Delta(F, T_1) = p_1^n(1-p_1)^{a_n-n}-p^n(1-p)^{a_n-n} =$$

$$= [np_2^{n-1}(1-p_2)^{a_n-n}-p_2^n(a_n-n)(1-p_2)^{a_n-n-1}]\cdot(p_1-p)$$

alkalmas $p_2\in(p, p_1)$-re. Így

$$sg\Delta(F, T_1) = sg[n(1-p_2)-p_2(a_n-n)] = sg(n-p_2a_n). \tag{24}$$

Mármost az x, y, p, p_1 számokat megválaszthatjuk úgy, hogy $n-p_2a_n<0$ legyen. Rögzítsük ugyanis $y=\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-a_i}\in(a, b)$-t, és válasszuk a_n-et olyan nagyra, hogy $x=\sum_{i=0}^{n} 2^{-a_i}<b$ és $n-pa_n<0$ teljesüljön. Ekkor bármely $p_1>p$-re $p_2>p$, és így $n-p_2a_n<0$, amiből (24) alapján következik, hogy $\Delta(F, T_1)<0$.

Most válasszunk egy $z=\sum_{i=0}^{m} 2^{-a_i}$ elemet úgy, hogy $a<z<\sum_{i=0}^{m} 2^{-a_i}+2^{-a_m}<b$ teljesüljön. Legyen $a_i=a_m+i$ $(i=m+1, m+2, \ldots, n)$, ahol n olyan nagy, hogy $a_n<\frac{n}{p}$. Ekkor $n-pa_n>0$, tehát, ha p_1-et elég közel választjuk p-hez, akkor $n-p_1a_n>0$ és így $n-p_2a_n>0$ is teljesülni fog. Ekkor tehát a fenti p_1-gyel és az

$x=\sum_{i=0}^{n} 2^{-a_i}$ választással $\Delta(F, T_1)>0$. Ezzel beláttuk, hogy F nem monoton T-ben, amivel a tételt bebizonyítottuk.

A 9. Tétel állítása azért meglepő, mert F mindkét változójában monoton: F^p a definícióból következően, F_x pedig a 7. Tétel szerint folytonos és monoton minden $x, p\in[0, 1]$-re.

IRODALOM

[1] Császár Ákos, Megjegyzés Geőcze Zoárd függvényéhez, *Matematikai Lapok* 8 (1957), 268—271.
[2] G. Faber, Über stetige Funktionen, *Math. Annalen* 69 (1910), 372—443.
[3] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer, New York, 1965.
[4] G. de Rham, Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles, *Rend. Sem. Mat. Torino* 16 (1956—57), 101—113.
[5] F. Riesz et B. Szőkefalvi-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
[6] R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing, *Trans. Amer. Math. Soc.* 53 (1943), 427—439.
[7] L. Takács, An increasing continuous singular function, *Amer. Math. Monthly* 85 (1978), 35—37.

M. ЛАЦКОВИЧ

ЗАМЕЧАНИЯ О СИНГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ ФАБЕРА

M. LACZKOVICH

SOME REMARKS ON FABER'S SINGULAR FUNCTION

NEM-STANDARD PROGRAMFUTÁSOK ÉS A PROGRAMOK HELYESSÉGE

CSIRMAZ LÁSZLÓ

Bevezetés

A programozási gyakorlatban igen fontosak azok a módszerek, melyekkel programokról különböző állításokat lehet igazolni. Ezek segítségével lehet például egy-egy program helyességéről is meggyőződni: a helyett, hogy a programot próbafuttatásokkal tesztelnénk le — ami nem is biztosítja, hogy nem maradtak benne hibák —, inkább valamilyen matematikai módszerrel próbáljuk bizonyítani, hogy úgy működnek, ahogyan elvárjuk tőlük.

Programok helyességének igazolására szolgáló legtermészetesebb módszer az ún. „induktív feltételek módszere", melyet egymástól függetlenül R. W. Floyd [14] és P. Naur [20] fedezett fel, s melyet később C. A. R. Hoare formalizált [17]. Az eljárás ötlete azonban már J. Neumann és A. Turing 50-es években íródott dolgozataiban is fellelhető [25]. Mi a módszert a fenti hosszú elnevezés helyett a rövidebb és elterjedtebb Floyd—Hoare módszernek fogjuk nevezni. Az eljárást a klasszikus elsőrendű logika keretein belül Z. Manna írta le [18], a leírást később többen is pontosították [1, 2, 4, 6, 8, 15].

Hamarosan kiderült, hogy a szokásos értelemben vett teljesség — ha egy program jó, akkor azt a módszerrel bizonyítani is lehet — nem igaz [5], s megindultak a kutatások annak tisztázására, hogy mik lehetnek a nem-teljesség okai, illetve milyen megszorításokkal (illetve bővítésekkel) lehetne a Floyd—Hoare módszerre teljességi tételeket bizonyítani. Ezekben a kutatásokban lényegében két fő irányzat alakult ki. Az egyikben a programfutások szokásos (sztenderd) definícióját megtartva a Floyd—Hoare módszer klasszikus levezetési szabályait bővítik ki új (nem eldönthető, vagy végtelen sok premisszát felhasználó) levezetési szabályokkal. A másik, nem-sztenderd irányzatban a levezetési szabályokat megtartják, s azt vizsgálják, hogy a program futásának milyen más, nem-sztenderd definíciója esetén válik a módszer teljessé. A dolgozatban a nem-sztenderd utat választottuk. Több különböző futásfogalmat — folytonos, kvázi, sztenderd és dinamikus futások — definiálunk, s mindegyikben megvizsgáljuk a teljességet, illetve annak korlátait. Tanulmányozzuk a futások kapcsolatát, s azt is, hogy az ún. „aritmetizálhatósági feltétel" hogyan befolyásolja tulajdonságaikat.

A jelen dolgozat eredményeinek dinamikus logikai alkalmazásai megtalálhatók [4]-ben és [6]-ban.

1. *Programok és futások*

Ennek a fejezetnek célja, hogy intuitív képet adjon a programok szintaktikus, illetve a programfutások szemantikus fogalmáról, definiálja a programhelyességet és bemutassa a Floyd—Hoare-féle induktív feltételek módszerét.

Elsőként egy konkrét programozási nyelv szintaxisát adjuk meg. A leírás formalizálható [18, 16], de nekünk a formalizmusra nem lesz szükségünk. A programozási nyelvünkben tovább nem definiált alapfogalomként szerepelnek (i) címkék (l_1, l_2, l stb.); (ii) változójelek (y_1, y_2 stb.); valamint (iii) egy L logikai nyelv konstans-, reláció- és függvényjelei, lásd pl. [7, 19].

A program címkézett utasítások véges sorozata. A címkék egy ún. címketér elemei, ezekről feltesszük, hogy az L nyelv különböző konstans kifejezései (általában a természetes számok halmaza). Az utasítások háromfélék lehetnek: értékadó, feltételes (elágazó), valamint stop utasítások. Egy értékadó utasítás formája „$y \leftarrow \tau$", ahol y egy változójel, τ pedig az L nyelv (egy esetleg összetett) függvénykifejezése, melyben konstansok, függvény- és változójelek fordulhatnak elő. Egy feltételes utasítás formája „IF χ THEN l", ahol χ egy kvantor-mentes formulája ugyanannak a nyelvnek (χ-ben változójelek, relációjelek és konstansok, valamint a zárójeleken és vesszőkön kívül az $\wedge$ és $\neg$ logikai összekötő jelek lehetnek), l pedig egy címke. A stop utasítás formája egyszerűen „STOP".

Így például, ha az L nyelvben függvényjelként a $+$, a $-$, valamint a $*$ jel szerepel (mindannyian kétváltozósak), konstansjelként a 0 és az 1, relációjeként az egyenlőségjelen kívül a „$\leqq$" jel, akkor éppen a szokásos flow-chart (blokk-diagram) programozási nyelv szintaxisát kapjuk vissza. Ebben a nyelvben a 2, 3 stb. szimbólumokat az $1+1$, $(1+1)+1$ stb. rövidítéseként használjuk. Az alábbi programban az utasításokat külön-külön sorba írtuk, és a címkéket az utasításoktól egy kettőspont választja el:

0: $y_2 \leftarrow 0$

1: IF $y_2 = 0$ THEN 5

2: $y_1 \leftarrow y_1 - 1$

3: $y_2 \leftarrow 1 - y_2$

4: IF $\neg\ (y_1 = 0)$ THEN 2

5: STOP

Csakúgy mint itt, mindig megköveteljük, hogy a programban szereplő összes címke valamely utasítás előtt is szerepeljen, továbbá azért, hogy a program az utolsó utasításról még véletlenül se „csuroghasson ki", azt, hogy az utolsó utasítás egy stop utasítás legyen. Világos, hogy a fenti program az $y_1 \geqq 0$ kezdeti (input) feltétel teljesülése esetén y_1 párosságát adja meg: ha induláskor y_1 páros volt, akkor a program lefutása után y_2 értéke 0, ha y_1 páratlan volt, akkor y_2 értéke 1 lesz.

A következő példaprogram az $y_1 \geqq 0$ bemenő értékre az $E(y_1) = y_1 - [\sqrt{y_1}]^2$ értéket számítja ki:

0: $y_2 \leftarrow 0$

1: IF $y_1 \leqq y_2 + y_2$ THEN 5

2: $y_1 \leftarrow y_1 - y_2 - y_2 - 1$

3: $y_2 \leftarrow y_2+1$

4: IF 0 = 0 THEN 1

5: STOP

A program lefutása után (vagyis amikor az 5 címkéjű utasításnál megállunk), y_1 értéke éppen az előbb definiált érték, y_2-ben pedig y_1 kezdeti értékéből vont négyzetgyök egész része található.

Mindkét példa azért fontos, mert az első esetben csak az eggyel való növelés, illetve csökkentés segítségével olyan programot írtunk, mely a kettővel való osztathatóságot ellenőrzi (azaz a program lefutása után $y_2=0$ akkor és csak akkor, ha y_1 eredeti értéke páros volt), míg a második példában csak összeadással és kivonással a program kiszámította, azaz definiálta az E (excess) függvényt. Ismeretes [24], hogy ezek a felhasznált jelekből elsőrendű logikai eszközökkel nem definiálhatók, így példaprogramjaink intuitív tevékenysége valamilyen értelemben „kilóg" az elsőrendű logikában definiálható fogalmak közül.

Másik példaként tekintsük azt az esetet, amikor az L logikai nyelvben egy Σ nem üres, véges halmaz elemeiből alkotott véges sorozatokra vonatkozó *tail* és *head* egyváltozós, illetve a *conc* kétváltozós függvényjelek vannak, továbbá konstansjelként a Σ elemeiből alkotott egy hosszúságú sorozatok és az ε üres sorozat szerepel. (Megjegyezzük, hogy a *tail* függvényt egy sorozatra alkalmazva azt a sorozatot kapjuk, amely az eredeti sorozatból annak első tagjának elhagyásával keletkezik; a *head* függvény a sorozat első tagjából álló egyelemű sorozatot adja meg; végül a *conc* két sorozatot, megadott sorrendben egymáshoz illeszt.) Ennek a programozási nyelvnek a segítségével minden, a Σ szalagjeleket használó Turing-géphez található egy azt szimuláló program. A programban például három változójel szerepelhet: y_1 tartalmazza a fejtől balra található szalagrész tartalmát, y_2 a gép feje előtt levő Σ-beli jelből álló egyelemű sorozatot, y_3 pedig a fejtől jobbra levő szalagrész tartalmát. A program ugyanúgy szimulálhatja a Turing gépet, mint ahogyan azt egy két veremmel (stack) rendelkező push-down automatával csinálnánk.

Általában egy program szemantikájának definíciója annak formális leírása, hogyan is fut le a program. A program futtatásához mindenekelőtt egy futási környezetre (számológépre) van szükség. Ez először is áll egy olyan struktúrából, melyben az adatok manipulálására szolgáló függvény-, reláció- és konstansjelek értelmezve vannak. (A fenti két példa esetén ez a struktúra lehet az egész számok halmaza a szokásos műveletekkel, illetve a Σ elemből akotott összes véges sorozat.) Magát a struktúrát $\mathfrak{A}$-val, az alaphalmazát (az objektumok halmazát) A-val fogjuk jelölni. Ezenkívül a futtatáshoz szükség van véges sok memória rekeszre, melyek a programban szereplő változójeleknek felelnek meg. Mindegyik memória rekesz az A halmaz tetszőleges elemét képes tárolni. Végül szükség van még egy utasításszámlálóra is, ez mindig annak az utasításnak a címkéjét tartalmazza, amit végre kell hajtani.

Egy program ennek fényében tehát semmi más, mint egy egyértelmű előírás. Amennyiben adott az utasításszámláló, valamint a memória rekeszek tartalma egy adott időpillanatban, a program azt írja elő, hogy mi legyen ezek tartalma a következő időpillanatban. Abban az esetben például, ha az utasításszámláló tartalma az „$y \leftarrow \tau$" értékadó utasítás címkéje, akkor az y változójelnek megfeleltetett rekesz tartalmát felülírjuk a τ kifejezés értékével (amit ismét a memória rekeszek tartalmának segítségével számítunk ki), és ezután az utasításszámlálót kicseréljük a következő utasítás címkéjére. Ha az utasítás „IF χ THEN l", akkor először a χ formulát értékeljük ki a rekeszek tartalmának segítségével. Ha χ igaz, akkor az utasításszámlálóba l-et

írunk, egyébként az utasításszámlálóba ismét a soron következő utasítás címkéje kerül; a rekeszek értékei változatlanok maradnak. Ahhoz, hogy minden esetre rendelkezzünk, megállapodunk abban, hogy ha az utasításszámláló egy stop utasítás címkéjét tartalmazná, vagy egy olyan címkét, mely a program egyetlen utasításának sem címkéje, akkor mind az utasításszámláló, mind a rekeszek tartalma maradjon változatlan.

Mivel a címkék az L nyelv (különböző) konstans kifejezései, azért a címkéket megfeleltethetjük az $\mathfrak{A}$ struktúra A alaphalmazában bizonyos (különböző) elemeknek. Ezzel a megfeleltetéssel azután az utasításszámlálót már ugyanúgy kezelhetjük, mint a többi memória rekeszt.

Tegyük fel, hogy pontosan n rekeszre van szükségünk ezzel a „szimulált" utasításszámlálóval együtt. A rekeszekben tárolt értékek legyenek $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$, közülük r_0 az utasításszámlálóé. Jelölje $r_0', r_1', \ldots, r_{n-1}'$ ugyanezeknek a rekeszeknek a tartalmait a következő időpillanatban. Közöttük a következő (félig formalizált) összefüggést lehet felírni:

„Ha $r_0=l$, ahol az l címkéjű utasítás „$y \leftarrow \tau$", és az y változójelnek megfeleltetett rekesz éppen r_i, akkor $r_0'=j(r_0)$ és $r_k'=r_k$ minden $1 \leqq k<n$, $k \neq i$-re, valamint $r_i'=\tau[r_1, \ldots, r_{n-1}]$;

ha $r_0=l$, ahol az l címkéjű utasítás „IF χ THEN l^*", akkor $r_k'=r_k$ minden $1 \leqq k<n$-re, és $r_0'=l^*$ ha $\chi[r_1, \ldots, r_{n-1}]$ igaz, és $r_0'=j(r_0)$ egyébként; minden más esetben pedig $r_k'=r_k$ minden $0 \leqq k<n$-re."

Itt $j(r_0)$ jelöli a soron következő utasítás címkéjét. Természetesen a j függvényjelnek nem kell szerepelnie az L nyelvben, hiszen csak véges sok alkalmazásról van szó, és azok értékeit egyszerűen felsorolhatjuk. A $\tau[\ldots]$, illetve a $\chi[\ldots]$ jelölés azt jelzi, hogy a kifejezést, illetve a formulát a megadott értékekkel kell kiértékelni.

Így első programpéldánk esetén ez a formula a következőképpen néz ki:

$$(r_0 = 0 \rightarrow [r_1' = r_1 \wedge r_2' = 0 \wedge r_0' = 1]) \wedge$$

$$(r_0 = 1 \rightarrow [r_1' = r_1 \wedge r_2' = r_2 \wedge (r_1 = 0 \rightarrow r_0' = 5) \wedge (r_1 \neq 0 \rightarrow r_0' = 2)]) \wedge$$

$$(r_0 = 2 \rightarrow [r_1' = r_1 - 1 \wedge r_2' = r_2 \wedge r_0' = 3]) \wedge$$

$$(r_0 = 3 \rightarrow [r_1' = r_1 \wedge r_2' = 1 - r_2 \wedge r_0' = 4]) \wedge$$

$$(r_0 = 4 \rightarrow [r_1' = r_1 \wedge r_2' = r_2 \wedge (r_1 \neq 0 \rightarrow r' = 2) \wedge (r_1 = 0 \rightarrow r_0' = 5)]) \wedge$$

$$([r_0 \neq 0 \wedge r_0 \neq 1 \wedge r_0 \neq 2 \wedge r_0 \neq 3 \wedge r_0 \neq 4] \rightarrow [r_1' = r_1 \wedge r_2' = r_2 \wedge r_0' = r_0]).$$

Ezzel az L nyelvnek egy olyan $2n$ szabad változós, kvantormentes φ formuláját írtuk fel, melynek első n változójának helyébe tetszőleges (A-beli), $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ értékeket téve, a második n változó helyébe egyértelműen találhatók olyan $r_0', r_1', \ldots$ $\ldots, r_{n-1}'$ A-beli értékek, melyekkel a φ formula teljesül $\mathfrak{A}$-ban. Továbbá, ha a rekeszek tartalma egy bizonyos időpontban éppen $r_0, \ldots, r_{n-1}$, akkor a program végrehajtása során a következő időpillanatban a rekeszek tartalma $r_0', \ldots, r_{n-1}'$ lesz. A programot tehát egyértelműen meghatározza a φ formula, a programból pedig a formulát egyszerűen elő lehet állítani. Ha tehát a programot olyan előírásnak tekintjük, mely véges sok memória rekesz adott időpillanatbeli tartalmához hozzárendeli a következő időpillanatbeli tartalmat, akkor a következő definíció fedi ezt az intuitív gondolatot:

Az L nyelv egy (nem feltétlenül kvantormentes), $2n$ változós formuláját *programnak* nevezzük, ha $n>0$ és

$$\mathfrak{A} \models \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \exists\, !y_0 \ldots \exists\, !y_{n-1} \varphi(x_0, \ldots, y_{n-1}).$$

A továbbiakban ezt fogadjuk el a program *szintaktikus* definíciójának. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ez a definíció az eredetinél kissé általánosabb, még akkor is, ha kikötjük, hogy φ kvantormentes legyen. Például, ha az L nyelvben az összeadás művelete, + szerepel, de az inverz művelete, a kivonás már nem, akkor a blokk-diagram nyelven nem szerepelhet az „$y \leftarrow y-z$" értékadó utasítás. Ugyanakkor az „$r_i'+r_j=r_i$" részformulának — feltéve, hogy y-nak r_i, z-nek pedig r_j felel meg — ugyanez a hatása, de már legálisan.

A φ program tulajdonképpen egy függvényt definiál, mely az $\mathfrak{A}$ struktúra A alaphalmazának n-eseit, A^n-et A^n-be képezi. Ezt a függvényt p_φ-vel jelöljük, és persze $p_\varphi(\bar{x})=\bar{y}$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{x}, \bar{y})$. A p_φ függvényt a φ program egy másik alakjának tekintjük.

Definíciónkból az is látszik, hogy minden statikus helyfoglalású program (mint amilyen minden FORTRAN nyelvű program) a mi program definíciónknak megfelelően is program, és az azt meghatározó formula a programszövegből egy primitív rekurzív függvénnyel megkapható. Ha azonban a programban dinamikus helyfoglalás vagy rekurzív eljáráshívás is szerepel, akkor az átmenet már nem ennyire egyszerű. Ilyen esetben a formulával megadott program nem értékeken, hanem például értékek véges sorozatát tartalmazó vermeken (stack) operálhat. Ezt a megoldást választottuk például a Turing-gépet utánozó programunkban is. Persze ekkor az L nyelvbe nem csak az elemi objektumokon végzendő műveletek jeleit kell bevenni, hanem azokat is, melyek a sorozatokon operálnak. Elképzelhető, hogy az elemi objektumok már elég gazdagok ahhoz, hogy bennük a véges sorozatok rekurzív módon kódolhatók (mint például az egész számok vagy a VDL esetében), ekkor a sorozatokra nincs szükség.

Térjünk most vissza a program futásának fogalmához. A futási környezetben az $\mathfrak{A}$ modell és a végrehajtandó φ program rögzítve van, azonban a rekeszek (most már megkülönböztetés nélkül) tartalma minden időpillanatban változhat. Így a futás egy időpillanatbeli állása egyértelműen megadható a rekeszek tartalmával, azaz az A halmaz elemeiből alkotott rendezett n-essel. Legyen $\bar{q}_0=\langle q_0^1, \ldots, q_0^n\rangle \in A^n$ a kiindulási állapot (azaz a rekeszek tartalma a futás elindításakor), és ha már definiáltuk $\bar{q}_k$-t valamely $k \geqq 0$-ra, akkor legyen $\bar{q}_{k+1}=\langle q_{k+1}^1, \ldots, q_{k+1}^n\rangle = p_\varphi(\bar{q}_k) \in A^n$, azaz $\bar{q}_{k+1}$ az az egyetlen n-es, amelyre

$$\varphi(q_k^1, \ldots, q_k^n, q_{k+1}^1, \ldots, q_{k+1}^n)$$

teljesül $\mathfrak{A}$-ban. A φ program $\mathfrak{A}$-beli, $\bar{q}_0$-ból induló *sztenderd futása* az $R=\langle \bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots\rangle$ végtelen sorozat. Azt mondjuk, hogy az R futás *megáll,* ha $\bar{q}_k=\bar{q}_{k+1}$ valamilyen k-ra, és ekkor $\bar{q}_k=\bar{q}_l$ minden $l \geqq k$-ra is.

Természetesen az a megkötés, hogy minden lehetséges állapotra legyen rákövetkező állapot, illetve, hogy a futás végét az jelezze, hogy két egymás utáni állapot egyforma, lényegtelen. Megengedhetnénk, hogy bizonyos állapotokra ne legyen rákövetkező állapot — ilyenkor a program futása automatikusan véget érne —, vagy hogy a futás megállását tetszőleges, formulával leírható feltétel szabja meg. Ilyenkor a programot definiáló formula megfelelő megváltoztatásával (és esetleg további változók bevezetésével) a program már az általunk megkövetelt alakba írható.

Végül eljutottunk a program helyességének fogalmához. Legyen φ_{be}, valamint φ_{ki} az L nyelv két, egyenként n szabad változót tartalmazó formulája. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ struktúrában a φ program *parciálisan helyes* a φ_{be} inputfeltétel és a φ_{ki} outputfeltétel mellett, ha valahányszor $\bar{q}_0=\langle q_0^1, \ldots, q_0^n\rangle \in A^n$ kielégíti a φ_{be} inputfeltételt (azaz $\mathfrak{A}$-ban igaz $\varphi_{\text{be}}(\bar{q}_0)$) és a $\bar{q}_0$-ból induló ($\mathfrak{A}$-beli) sztenderd futás megáll, mondjuk a $\bar{q}_k$ állapotban, akkor $\mathfrak{A}$-ban a $\varphi_{\text{ki}}(\bar{q}_k)$ outputfeltétel is fennáll.

A φ program *teljesen helyes* $\mathfrak{A}$-ban a φ_{be} és a φ_{ki} feltételek mellett, ha azon kívül, hogy parciálisan helyes, még az is teljesül, hogy φ-nek az összes, az $\mathfrak{A} \models \varphi_{be}(\bar{q}_0)$ feltételt kielégítő $\bar{q}_0$ kezdő állapotból induló sztenderd futása megáll.

Programok parciális helyességének bizonyítására az egyik legtermészetesebb módszer a következő. Keressünk olyan Φ n-változós formulát, mely az összes megengedett kezdőállapotra igaz; a formula „öröklődő", azaz ha Φ a futás során valamelyik állapotban teljesül, akkor teljesül a (φ program szerinti) rákövetkező állapotban is; végül ha a futás megáll, akkor Φ-ből a φ_{ki} output feltétel következik. Ha ilyen Φ-t találunk, akkor φ biztosan parciálisan helyes. Ez éppen a bevezetőben említett Floyd—Hoare-féle induktív feltételek módszere.

Azt mondjuk, hogy a φ program *Floyd—Hoare levezethető* $\mathfrak{A}$-ban a φ_{be} és φ_{ki} feltételek mellett, ha van olyan Φ formula, melynek n szabad változója van, és melyre a következő állítások minden $\bar{x}=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ és $\bar{y}=\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ mellett igazak $\mathfrak{A}$-ban:

(i) $$\varphi_{be}(\bar{x}) \to \Phi(\bar{x})$$

(ii) $$\Phi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi(\bar{y})$$

(iii) $$\Phi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \to \varphi_{ki}(\bar{x}).$$

Az (ii) és (iii) formulákat a korábban bevezetett p_φ jelöléssel a következő alakban is írhatjuk:

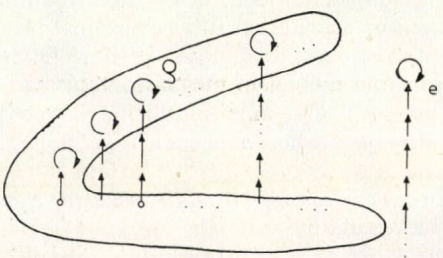
(ii*) $$\Phi(\bar{x}) \to \Phi(p_\varphi(\bar{x}))$$

(iii*) $$\Phi(\bar{x}) \wedge p_\varphi(\bar{x}) = \bar{x} \to \varphi_{ki}(\bar{x}).$$

Az (i) feltétel fejezi ki azt a követelményt, hogy Φ a megengedett kezdő állapotokra teljesüljön; (ii) mondja ki az induktivitást, (iii) pedig azt, hogy a futás megállásakor φ_{ki} teljesülni fog.

Világos, hogy ha a φ program Floyd—Hoare levezethető egy $\mathfrak{A}$ struktúrában bizonyos input és output feltételek mellett, akkor praciálisan helyes is $\mathfrak{A}$-ban ugyanazon feltételek mellett. Az is világos, hogy a Floyd—Hoare levezethetőség általában a teljes helyességet nem bizonyítja.

Sajnos van olyan $\mathfrak{A}$ struktúra és abban olyan parciálisan helyes program, ami nem Floyd—Hoare levezethető $\mathfrak{A}$-ban. Tekintsük ehhez a következő példát. Az L nyelv álljon a ϱ egyváltozós relációjelből, valamint a p egyváltozós függvényjelből. Az $\mathfrak{A}$ struktúrát az 1.1 ábra mutatja. A ϱ jelű felhőbe eső pontok azok, melyekre a $\varrho(x)$ reláció teljesül; a p függvény értékét a pontokból induló nyíl mutatja. Legyen $\varphi(x, y)=$"$y=p(x)$", és legyen $\varphi_{be}(x)=\varphi_{ki}(x)=\varrho(x)$. Világos, hogy a φ formula egy programot határoz meg (persze $p_\varphi=p$), és hogy ez a program teljesen helyes (nem-



1.1. ábra

csak parciálisan helyes) $\mathfrak{A}$-ban a φ_{be} és a φ_{ki} formulákra nézve. Megmutatjuk, hogy a programnak nincs Floyd—Hoare levezetése.

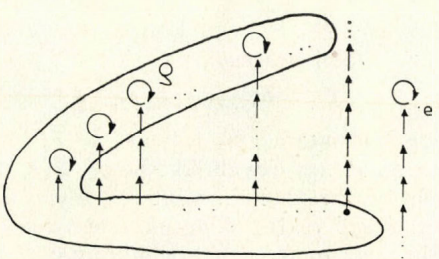
Ha ugyanis a $\Phi(x)$ formula kielégítené a fenti (i)—(iii) feltételeket, akkor azok az elemek, melyekre $\Phi(x)$ nem igaz, pontosan az e jelű pontot tartalmazó lánc elemei volnának. Tekintsük most a struktúrának egy ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ ultrahatványát, ahol U egy tetszőleges nem triviális ultrafilter ω-n, a természetes számok halmazán. Ekkor az ultrahatványnak az az u eleme, melyet a bal oldali szálak középső elemei jelölnek ki, teljesíti a $\Phi(u)$ formulát; arra a v elemre pedig, melyet a jobb oldali lánc egyre mélyebben fekvő elemei jelölnek ki, $\neg\Phi(v)$ igaz az ultraszorzatban. Ez viszont lehetetlen, mivel mind u, mind v az ultrahatványban egy-egy mindkét irányban végtelen lánc eleme, és ezeket a láncokat a struktúra megváltoztatása nélkül felcserélhetjük.

Ezek szerint a Floyd—Hoare levezethetőség fogalma nem esik egybe a „parciálisan helyes program" szemantikus fogalommal. Ez első pillanatban nem látszik tragikusnak, hiszen a parciális helyességet egy konkrét struktúrában értelmeztük. Tudjuk, hogy azokkal az elsőrendű eszközökkel, melyek közé a Floyd—Hoare levezethetőség is tartozik, egymással elemien ekvivalens — azaz ugyanazokat az L-beli zárt, szabad változót nem tartalmazó formulákat kielégítő — struktúrák nem különböztethetők meg. Tehát ha φ nem Floyd—Hoare levezethető, akkor biztosan akad olyan $\mathfrak{A}$-val elemien ekvivalens $\mathfrak{B}$ struktúra, melyben φ nem parciálisan helyes. Ez a reményünk nem sokáig marad meg. Tegyük fel ugyanis, hogy a φ formula program az $\mathfrak{A}$ struktúrában, és $\mathfrak{B}$ elemien ekvivalens $\mathfrak{A}$-val. Ekkor φ nemcsak $\mathfrak{A}$-ban, hanem $\mathfrak{B}$-ben is program. Valóban, ez akkor és csak akkor van így, ha a $\forall\bar{x}\,\exists!\,\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y})$ zárt formula igaz $\mathfrak{B}$-ben, ami az elemi ekvivalencia miatt akkor és csak akkor, ha ugyanez a formula igaz $\mathfrak{A}$-ban. Ez utóbbi állítás pedig már következik abból, hogy φ program $\mathfrak{A}$-ban. Ha φ még parciálisan helyes is $\mathfrak{A}$-ban a φ_{be} és φ_{ki} feltételek mellett, akkor ugyanez igaz $\mathfrak{B}$-ben is. Tegyük fel, hogy nem így volna, és legyen $R=\langle\bar{b}_0,\bar{b}_1,\ldots\rangle$ olyan $\mathfrak{B}$-beli sztenderd futás, ami ezt tanúsítja, vagyis amire $\mathfrak{B}\models\varphi_{be}(\bar{b}_0)$, valamint valamilyen $k\geqq 0$ természetes számra $\bar{b}_k=\bar{b}_{k+1}$, és $\mathfrak{B}\models$ $\models\neg\varphi_{ki}(\bar{b}_k)$. De ekkor $\mathfrak{B}$-ben teljesül a következő, L-beli zárt formula is:

$$\exists\bar{z}_0\exists\bar{z}_1\ldots\exists\bar{z}_k[\varphi_{be}(\bar{z}_0)\wedge\varphi(\bar{z}_0,\bar{z}_1)\wedge\varphi(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\wedge\ldots\wedge\varphi(\bar{z}_{k-1},\bar{z}_k)\wedge\varphi(\bar{z}_k,\bar{z}_k)\vee\neg\varphi_{ki}(\bar{z}_k)].$$

Mivel $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ elemien ekvivalensek, azért ugyanez igaz $\mathfrak{A}$-ban is, azaz találhatók olyan $\bar{a}_0,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_k$ A-beli elemekből álló n-esek is, melyekre az $R'=\langle\bar{a}_0,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_{k-1},\bar{a}_k,\bar{a}_k,\ldots\rangle$ sorozat $\mathfrak{A}$-beli sztenderd futása φ-nek, $\mathfrak{A}\models\varphi_{be}(\bar{a}_0)$, az R' futás megáll az $\bar{a}_k$ állapotban, és $\mathfrak{A}\models\neg\varphi_{ki}(\bar{a}_k)$. Így φ $\mathfrak{A}$-ban sem lehetne parciálisan helyes a φ_{be} és φ_{ki} feltételekre nézve. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

Megjegyezzük, hogy a teljes helyesség már nem feltétlenül őrződik meg, ha $\mathfrak{A}$-ról egy vele elemien ekvivalens struktúrára térünk át. Könnyen ellenőrizhető, hogy az 1.2 ábrán látható $\mathfrak{B}$ struktúra elemien ekvivalens az 1.1 ábra $\mathfrak{A}$ struktúrájával, s



1.2. ábra

benne a $\varphi(x, y)=$„$y=p(x)$" program (bár továbbra is parciálisan helyes) már nem teljesen helyes a $\varphi_{be}(x)=\varphi_{ki}(x)=\varrho(x)$ feltételekre nézve.

Végül is annak a szomorú ténynek az okát, hogy a Floyd—Hoare levezethetőség és a „parciálisan helyes program" fogalmak nem ekvivalensek, máshol kell keresnünk. A parciális helyesség definíciójában — igaz meglehetősen elrejtve — valóban szerepel egy jól meghatározott, végtelen, és így elsőrendű eszközökkel definiálhatatlan struktúra: a természetes számok halmaza indexhalmazként szerepel a sztenderd futás definíciójában. Így elképzelhető, hogy a sztenderd futás fogalmát valamilyen általánosabb fogalommal helyettesítve már a Floyd—Hoare levezethetőség valamilyen szemantikus megfelelőjét kapjuk. Több lehetséges általánosítást vizsgálunk meg, közülük néhánynak egészen szokatlan tulajdonságai is vannak. Vizsgáljuk az új futásfogalmak közti kapcsolatokat, de fő célunk mindig annak eldöntése, hogy mely esetekben lesznek a Floyd—Hoare levezethető programok ugyanazok, amelyek parciálisan helyesek az adott futásfogalomra nézve.

A nemsztenderd futásfogalmakat vizsgálják [1—6], [10—13], [16], [23]. A különböző futásfogalmakat rendszerezi, és az ezekre épülő programbizonyítási módszerek erejét hasonlítja össze a [6] 5. fejezetének végén levő ábra (111. oldal).

2. *Definíciók és jelölések*

A természetes számok halmazát ω-val jelöljük, az egész számokét $\mathbf{Z}$-vel. Legyen t egy hasonlósági típus [7, 19], azaz konstans- reláció- és függvényjelek halmaza a megfelelő aritásokkal. F_t jelöli a t típusú klasszikus elsőrendű formulák halmazát, és $F_t^n \subset F_t$ azon formulák halmaza, melyek szabad változói $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ közül kerülnek ki. A kis és nagy görög betűk, mint φ, ψ, Γ stb. formulákat vagy formulák halmazait jelölik. A $\Gamma \subset F_t^n$ halmazt *teljesnek* nevezzük, ha tetszőleges $\varphi \in F_t^n$-re $\varphi \in \Gamma$ vagy $\neg\varphi \in \Gamma$. A hely kímélése céljából mindenütt vektorjelölést alkalmazunk jelsorozatok helyett. A vektorok dimenziója mindig n, ha csak külön ennek az ellenkezőjét nem mondjuk, vagy ennek ellenkezője nem világos a szövegkörnyezetből. Például $\varphi(\bar{x})$-et írunk $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ helyett.

Struktúrákat gót nagybetűkkel jelölünk (általában $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{I}$), alaphalmazukat a megfelelő latin nagybetű jelöli. Ha A egy halmaz és $n \in \omega$, akkor A^n jelöli az A elemeiből alkotott rendezett n-esek halmazát. Ha $\varphi \in F_t^0$ és $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra, akkor $\mathfrak{A} \models \varphi$ jelöli azt, hogy a φ formula $\mathfrak{A}$-ban teljesül, $\mathfrak{A}$-ban igaz. Ha $\varphi \in F_t^n$, akkor $\mathfrak{A} \models \varphi$ jelentése $\mathfrak{A} \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$. A $\Gamma \subset F_t$ esetén $\mathfrak{A} \models \Gamma$ az „$\mathfrak{A} \models \varphi$ minden $\varphi \in \Gamma$-ra" helyett áll.

Ha $T \subset F_t^0$ és $\varphi \in F_t^n$, akkor $T \vdash \varphi$ jelöli azt, hogy a $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ formula T-ből levezethető a szokásos levezetési szabályokkal. A $T \subset F_t^0$ konzisztens, amit Con (T)-vel jelölünk, ha nincs olyan $\varphi \in F_t^0$, hogy $T \vdash \varphi$ és $T \vdash \neg\varphi$.

2.1. Definíció. Legyen $T \subset F_t^0$ egy konzisztens elmélet, és legyen $\varphi \in F_t^{2n}$ valamely $n > 0$-ra. φ egy T-beli *program,* ha

$$T \vdash \forall \bar{x} \exists\, !\bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y}). \quad \blacksquare$$

Legyen $\varphi \in F_t^{2n}$ egy program, és legyen $\psi \in F_t^{n+m}$ tetszőleges. Ekkor a $\forall \bar{z}[\varphi(\bar{x}, \bar{z}) \to \psi(\bar{z}, \bar{y})]$ formulát úgy rövidítjük, hogy $\psi(p_\varphi(\bar{x}), \bar{y})$, tehát a p_φ jelet szintaktikai szempontból úgy használjuk, mint egy olyan n változós függvényjelet, melynek értéke egy n hosszúságú vektor. A p_φ jelölésben a φ indexet általában elhagyjuk, és ezt azért tehetjük meg, mert egyszerre mindig csak egy programról fogunk beszélni.

A T elmélet minden $\mathfrak{A}$ modelljében (a 2.1. definíció alapján) a φ program egy $\tilde{p}_\varphi: A^n \to A^n$ függvényt definiál: ha $\bar{q} \in A^n$, akkor $\tilde{p}_\varphi(\bar{q})$ az A^n-nek az az egyetlen eleme, melyre $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{q}, \tilde{p}_\varphi(\bar{q}))$. Világos, hogy a fenti p_φ függvényjel az $\mathfrak{A}$ modellben éppen ezt a $\tilde{p}_\varphi$ függvényt jelöli.

Ha $f: X \to X$ tetszőleges függvény, akkor $k \in \omega$-ra az $f^k: X \to X$ függvényt a következőképpen definiáljuk: $f^0(x) = x$, és $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$.

2.2. Definíció. Legyen $T \subset F_t^0$ egy (konzisztens) elmélet, $\varphi \in F_t^{2n}$ egy T-beli program, és legyen φ_{be}, $\varphi_{\text{ki}} \in F_t^n$. A φ program *Floyd—Hoare levezethető* T-ből a φ_{be} és φ_{ki} formulákra nézve, jelben $T \vdash (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$, ha van olyan $\Phi \in F_t^n$ formula, melyre

$$T \vdash \varphi_{\text{be}}(\bar{x}) \to \Phi(\bar{x})$$

$$T \vdash \Phi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi(\bar{y})$$

$$T \vdash \Phi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \to \varphi_{\text{ki}}(\bar{x}). \quad \blacksquare$$

A $\varphi \in F_t^{2n}$ programról a programfutás valamilyen definíciója mellett azt mondjuk, hogy *parciálisan helyes* a φ_{be}, valamint $\varphi_{\text{ki}} \in F_t^n$ feltételek mellett, ha φ összes lehetséges futására, valahányszor a kezdőállapot kielégíti a φ_{be} formulát és a futás megáll, mondjuk a $\bar{q}$ állapotban (más szavakkal a $\bar{q}$ futás *fixpontja*), akkor $\bar{q}$ kielégíti a φ_{ki} formulát. Ezt a futásfogalmak definícióival együtt a következő fejezetekben fogjuk pontosítani.

A dolgozatban a Peano axiómarendszer, illetve annak egy része különösen fontos szerepet tölt be, ezekre és típusaikra külön-külön jeleket vezetünk be.

2.3. Definíció. t_{PA}-val jelöljük az elsőrendű számelmélet szokásos Peano axiómarendszerének a típusát, azaz t_{PA} a $+$ és $\cdot$ kétváltozós függvényjeleket, valamint a 0 és 1 konstansjeleket tartalmazza. A t_{PA} típusra felírt Peano axiómákat PA jelöli.

Az additív számelmélet típusát t^+ jelöli, azaz t^+ csak a $+$, 0 és az 1 jeleket tartalmazza, továbbá $PA^+ = F_{t^+} \cap PA$ az additív számelmélet aximórendszere (Presburger-aritmetika). $\blacksquare$

PA^+ pontosan azokból a Peano axiómákból áll, melyek nem tartalmazzák a $\cdot$ jelet. A Peano axiómarendszer sztenderd modelljét $\mathfrak{N}$-nel jelöljük, így $\mathfrak{N}$ alaphalmaza éppen ω, rajta az összeadás ($+$) és a szorzás ($\cdot$) a szokásos. Használni fogjuk Peano formulák felírásakor az ún. korlátos kvantorokat is, így például $(\forall x < y)\varphi(x)$ azt jelenti, hogy $\forall x(x < y \to \varphi(x))$.

2.4. Definíció. A $\text{SEQ}(u) \in F_{t_{\text{PA}}}^1$ formula, továbbá a $\text{LENGTH}(u)$ és az $\text{ELEM}(u, i)$ olyan Peano-formulával definiálható függvények, melyekre $\text{PA} \vdash \vdash \forall u \exists! n\,(\text{LENGTH}(u) = n)$, illetve $\text{PA} \vdash \forall u(\forall i < \text{LENGTH}(u)) \exists! x(\text{ELEM}(u, i) = x)$; továbbá

$$\text{PA} \vdash \text{SEQ}(0) \wedge \text{LENGTH}(0) = 0;$$

$$\text{PA} \vdash \forall u \forall z \exists v(\text{SEQ}(u) \to$$

$$\to \{\text{SEQ}(v) \wedge \text{LENGTH}(v) = \text{LENGTH}(u) + 1 \wedge$$

$$\wedge (\forall i < \text{LENGTH}(u))\, \text{ELEM}(u, i) = \text{ELEM}(v, i) \wedge$$

$$\wedge \text{ELEM}(v, \text{LENGTH}(u)) = z\}). \quad \blacksquare$$

Azt, hogy ilyenek valóban léteznek, a függelékben bizonyítjuk. Természetesen a definícióban szereplő kikötések a SEQ, LENGTH, illetve ELEM definiáló formuláját

nem határozzák meg egyértelműen. Közülük egyet tetszőlegesen választhatunk, a továbbiakban a SEQ, LENGTH és ELEM mindig ugyanazt jelenti.

Legyen $\mathfrak{A}$ a Peano axiómarendszernek egy tetszőleges modellje. Az $u \in A$-ról azt mondjuk, hogy u egy *sorozat* (illetve, hogy egy sorozat kódja), ha $\mathfrak{A} \models \mathrm{SEQ}(u)$; az u sorozat *hossza* $n \in A$, ha $\mathfrak{A} \models \mathrm{LENGTH}(u) = n$, és $i \in A$, $i < n$ esetén u-nak az i-edik *eleme* éppen $x \in A$, ha $\mathfrak{A} \models \mathrm{ELEM}(u, i) = x$. A 2.4. definícióban szereplő kiemelt állítások azt mondják ki, hogy a 0 egy 0 hosszúságú sorozat (kódja), másrészt bármely sorozathoz egyetlen további elemet mindig hozzá lehet fűzni. Ebből azután teljes indukcióval kaphatjuk például azt az állítást is, hogy minden $n \in A$-re létezik n hosszúságú sorozat.

2.5. Definíció. (Lévy hierarchia.) Egy $\varphi \in F_{t_{\mathrm{PA}}}$ formula $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ formula, ha φ-ben csak korlátos kvantorok vannak. $k \geqq 1$-re indukcióval definiáljuk a Σ_k és Π_k formulákat:

(i) a $\varphi \in F^n_{t_{\mathrm{PA}}}$ egy Σ_k formula, ha van olyan $m \in \omega$ és $\psi \in F^{n+m}_{t_{\mathrm{PA}}}$ Π_{k-1} formula, melyre $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$;

(ii) a $\varphi \in F^n_{t_{\mathrm{PA}}}$ egy Π_k formula, ha van olyan $m \in \omega$ és $\psi \in F^{n+m}_{t_{\mathrm{PA}}}$ Σ_{k-1} formula, melyre $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \forall \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$. ∎

Világos, hogy minden Peano formula a Σ_k, Π_k osztályok valamelyikébe tartozik, továbbá, hogy $\Sigma_k \cup \Pi_k \subset \Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$. Az is megmutatható, hogy $\Sigma_k \cup \Pi_k$ valódi része $\Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$-nek minden $k \in \omega$-ra.

3. Folytonos futások

A folytonos futás a program futásának szokásos (az 1. fejezetben említett) definíciójának közvetlen általánosítása. Benne az „időt" nem (feltétlenül) az ω elemeivel mérjük, hanem tetszőleges diszkréten rendezett struktúrát megengedünk erre a célra.

A folytonos futásokat vizsgálja pl. [2], [10], [4], [13].

3.1. Definíció. Az $\mathfrak{I}$ struktúrát *idő-struktúrának* (röviden időnek) nevezzük, ha hasonlósági típusa a **0** konstansjelből, az **s** egyváltozós függvényjelből (a rákövetkező időpontot megadó függvény), és a $\leqq$ kétváltozós relációjelből áll, továbbá $\mathfrak{I}$ elemi bővítése az $\mathfrak{I}_{st} = \langle \omega, 0, ', \leqq \rangle$ sztenderd időstruktúrának, ahol a felülvessző a szokásos rákövetkező függvényt jelöli. ∎

Az időstruktúra alaphalmazának elemeit általában i, j betűkkel jelöljük. A szokásoknak megfelelően használjuk a $<$, $>$, $\geqq$ jeleket is, például $i < j$-t írunk $i \leqq j \wedge i \neq j$ helyett.

3.2. Állítás. *Az időstruktúrák osztályát a következő formulahalmaz axiomatizálja (kezdőponttal rendelkező diszkrét lineáris rendezés axiómarendszere, lásd pl.* [7]*):*

I1 $\quad x \leqq y \vee y \leqq x$

I2 $\quad x \leqq y \wedge y \leqq x \rightarrow x = y$

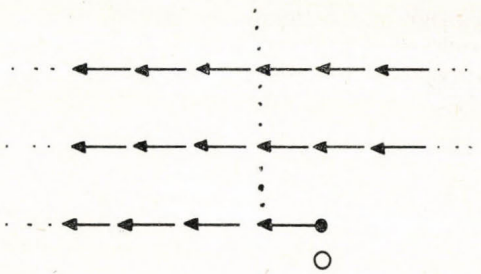
I3 $\quad x \leqq y \wedge y \leqq z \rightarrow x \leqq z$

I4 $\quad x < y \leftrightarrow \mathbf{s}x \leqq y$

I5 $\quad \mathbf{0} \leqq x$

I6 $\quad (x \neq \mathbf{0}) \rightarrow \exists y (x = \mathbf{s}y)$ ∎

Egy $\mathfrak{I}$ időstruktúra szerkezete a következő. Tartalmazza a **0**-ból induló, (rendezés szempontjából) ω-val izomorf szálat, továbbá még akárhány, **Z**-vel izomorf szálat (3.1. ábra). A szálakon egy lineáris rendezés is adott: „kisebb" (=feljebb levő) szálon levő elem a kisebb, azonos szálon található elemek közül a bal oldali a kisebb.



3.1. ábra

3.3. Definíció. Legyen $T \subset F_t^0$ egy (konzisztens) elmélet, $\varphi \in F_t^{2n}$ egy T-beli program, $\mathfrak{A}$ egy modellje T-nek, $\mathfrak{I}$ pedig egy időstruktúra. Az $R: I \to A^n$ függvény a φ programnak *folytonos futása,* ha

(i) minden $i \in I$-re $\mathfrak{A} \models \varphi(R(i), R(\mathbf{s}i))$;
(ii) minden $\Phi \in F_t^{n+m}$ formulára, $\bar{u} \in A^m$ paraméterekre és $i \in I$-re ha $\mathfrak{A} \models \Phi(R(\mathbf{0}), \bar{u}) \wedge \neg \Phi(R(i), \bar{u})$, akkor van olyan $j \in I$, melyre $\mathfrak{A} \models \Phi(R(j), \bar{u}) \wedge \neg \Phi(R(\mathbf{s}j), \bar{u})$.

Az $R: I \to A^n$ függvény a φ programnak *erősen folytonos futása,* ha nemcsak (ii), hanem a többet kívánó (ii*) is fennáll:

(ii*) minden $\Phi \in F_t^{m+n}$-re, $\bar{u} \in A^m$-re és $i_0, i_1 \in I$, $i_0 < i_1$-re, ha $\mathfrak{A} \models \Phi(R(i_0), \bar{u}) \wedge$ $\wedge \neg \Phi(R(i_1), \bar{u})$, akkor van olyan $j \in I$, $i_0 \leqq j < i_1$, melyre $\mathfrak{A} \models \Phi(R(j), \bar{u}) \wedge$ $\wedge \neg \Phi(R(\mathbf{s}j)] \bar{u})$. ∎

3.4. Definíció. A fenti jelölések mellett legyen még $\varphi_{\text{be}}, \varphi_{\text{ki}} \in F_t^n$. A φ program *parciálisan helyes* $\mathfrak{A}$-ban az [erősen] folytonos futásokra nézve a φ_{be} és a φ_{ki} feltételek mellett, jelben $\mathfrak{A} \overset{C}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ [illetve $\mathfrak{A} \overset{CC}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$], ha minden $\mathfrak{I}$ időstruktúrára és a φ programnak minden $R: I \to A^n$ [erősen] folytonos futására, ha $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{be}}(R(\mathbf{0}))$, akkor minden $i \in I$-re $\mathfrak{A} \models R(i) = R(\mathbf{s}i) \to \varphi_{\text{ki}}(Ri)$, azaz az R [erősen] folytonos futások fixpontjaira a φ_{ki} formula igaz.

Ha a T elmélet minden $\mathfrak{A}$ modelljére $\mathfrak{A} \overset{C}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ [illetve $\mathfrak{A} \overset{CC}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$] teljesül, akkor ezt úgy jelöljük, hogy $T \overset{C}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ [illetve $T \overset{CC}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$]. ∎

Az $R: I \to A^n$ (erősen) folytonos futás fixpontjainak halmazát $\operatorname{fix}(R)$ jelöli, vagyis $\operatorname{fix}(R) = \{R(i): R(i) = R(\mathbf{s}i)\}$. Világos, hogy minden $\mathfrak{A}$-beli erősen folytonos futás egyúttal $\mathfrak{A}$-beli folytonos futás is, azaz $\mathfrak{A} \overset{CC}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ következik abból, hogy $\mathfrak{A} \overset{C}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$. Ennek megfordítása már nem igaz.

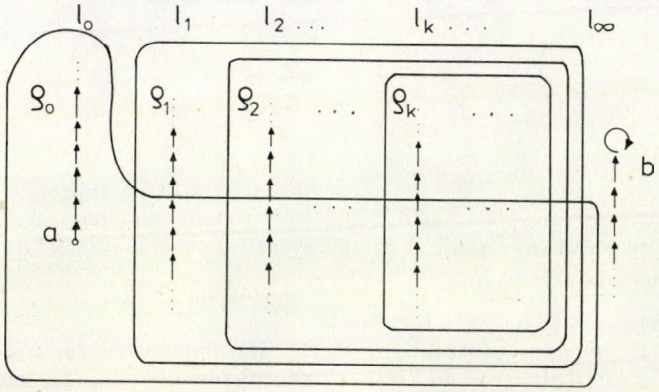
3.5. Tétel. *Van olyan* $(\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ *hármas és olyan* $\mathfrak{A}$ *struktúra, hogy*

$$\mathfrak{A} \overset{C}{\not\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}}), \quad \textit{ugyanakkor} \quad \mathfrak{A} \overset{CC}{\models} (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}}).$$

Bizonyítás. Álljon az $\mathfrak{A}$ struktúra t hasonlósági típusa a p egyváltozós függvényjelből, valamint a ϱ_i $(i\in\omega)$ egyváltozós relációjelekből. A $\varphi_{be}, \varphi_{ki}\in F_t^1$, illetve $\varphi\in F_t^2$ formulák legyenek a következők:

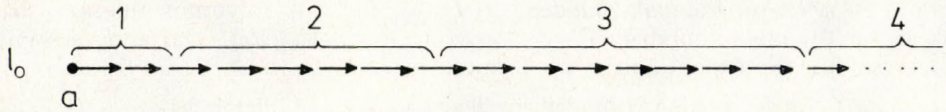
$$\varphi_{be}(x) = \text{„}\forall y(x \neq p(y))\text{”}; \quad \varphi_{ki}(x) = \text{„hamis”}; \quad \varphi(x, y) = \text{„}y = p(x)\text{”}.$$

Világos, hogy φ egy programot definiál (függetlenül a $T\subset F_t^0$ elmélettől). Az $\mathfrak{A}$ struktúra legyen a következő (3.2. ábra). A p függvény adott pontban felvett értékét a pontból kiinduló nyíl végpontja mutatja. Látható, hogy a φ_{be} formulát egyedül az $a\in A$ elem elégíti ki, és a φ programnak egyedül $b\in A$ lehet a fixpontja.



3.2. ábra

A ϱ_0 relációt kielégítő elemek azok, melyek a ϱ_0-lal jelölt felhőben vannak: ezek az a-ból induló l_0 lánc elemei, továbbá az $l_1, l_2, \ldots$ láncok „alsó” fele; a b-t tartalmazó l_∞ lánc elemeire ϱ_0 nem igaz. A ϱ_k reláció $(k\geqq 1)$ igaz az l_k lánc elemeire. Az l_0 lánc a ϱ_k $(k\geqq 1)$ relációk szempontjából egészen eltérő módon viselkedik. Osszuk fel az l_0 láncot blokkokra (3.3. ábra), az első blokk tartalmazzon 3 egymás utáni elemet, a második ötöt stb., általában az s-edik $2s+1$ egymás utáni elemet. Ha s-et 2^{k+1}-gyel osztva a maradék legalább 2^k, akkor az s-edik blokkban levő elemekre a ϱ_k reláció igaz, egyébként pedig nem igaz.



3.3. ábra

Állítjuk elsőként, hogy $\mathfrak{A}\overset{CC}{=}(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$, vagyis hogy egy a-ból induló erősen folytonos futásnak nem lehet fixpontja. Tegyük fel, hogy mégis volna ilyen $R^*: I^*\to A$ futás, és legyen $R^*(\mathbf{0})=a$, $R^*(i)=b$ valamilyen $i\in I^*$-ra. Persze $\mathfrak{A}\models$ $\models\varrho_0(R^*(\mathbf{0}))\wedge\neg\varrho_0(R^*(i))$, ezért kell lennie olyan $j\in I^*$, $\mathbf{0}\leqq j<i$ időpillanatnak, melyre

$$\mathfrak{A}\models\varrho_0(R^*(j))\wedge\neg\varrho_0(R^*(\mathbf{s}j)).$$

Ez azt jelenti, hogy $R^*(j)$ valamelyik l_k láncnak $(k\geqq 1)$ a „középső” eleme, s így többek között a j időpont „nem sztenderd”. Most viszont $\mathfrak{A}\models\varrho_k(R^*(j))\wedge$

$\wedge \neg \varrho_k(R^*(i))$, vagyis kell lennie olyan $j \leqq j' < i$ időpontnak is, melyre

$$\mathfrak{A} \models \varrho_k(R^*(j')) \wedge \neg \varrho_k(R^*(\mathbf{s}j')),$$

ami csak úgy lehet, ha $R^*(j')$ az l_0 lánc egy eleme. Ez viszont lehetetlen, mivel a j' időpillanattól kezdve egyesével visszafelé lépegetve az l_0 láncon egyre lejjebb kerülünk (minden állapot egyértelműen meghatározza a megelőző állapotot). S mivel j' nem sztenderd, egyszer csak eljutunk egy olyan időpillanathoz, mikor az a elem megelőzőjét kellene vennünk, ilyen pedig nincsen.

Az maradt még hátra, hogy megmutassuk: van olyan $\mathfrak{A}$-beli R folytonos futás, melyre $R(\mathbf{0}) = a$ és $\mathrm{fix}(R) \neq \emptyset$; ekkor ugyanis $\mathfrak{A} \overset{C}{\not\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$. Legyen $\mathfrak{I}$ egy időstruktúra, és $R: I \to A$ olyan függvény, melyre $R(\mathbf{0}) = a$, $R(\mathbf{s}i) = p(R(i))$ minden $i \in I$-re, továbbá $\mathrm{Range}(R) = A$. Ilyen R nyilvánvalóan létezik, megmutatjuk, hogy ez egy folytonos futás. Ehhez mindössze azt kell bizonyítanunk, hogy ha $\Phi \in F_t^{1+m}$ és $\bar{u} \in A^m$ olyanok, hogy

$$(1) \qquad \mathfrak{A} \models \Phi(R(\mathbf{0}), \bar{u}) \wedge \bigwedge_{i \in I} [\Phi(R(i), \bar{u}) \to \Phi(R(\mathbf{s}i), \bar{u})],$$

akkor egyszersmind minden $x \in A$-ra $\mathfrak{A} \models \Phi(x, \bar{u})$.

Tegyük fel, hogy nem így van, azaz van olyan $x \in A$, melyre $\mathfrak{A} \models \neg \Phi(x, \bar{u})$. Tekintsük az ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ ultrahatványt, ahol U egy nem triviális ultrafilter ω-n. Az (1) feltétel alapján $\Phi(x, \bar{u})$ igaz az l_0 lánc minden elemére. Ha most az l_k lánc ($k \neq \infty$) egy x elemére $\neg \Phi(x, \bar{u})$ teljesülne, akkor vegyük az ultraszorzatban azt a v elemet, melyet az l_k lánc egyre „mélyebben" fekvő elemei jelölnek ki; valamint azt a w elemet, melyet az l_0 lánc 2^k; $2^k + 2^{k+1}$; $2^k + 2^{k+2}$; ... sorszámú blokkjainak középső elemei jelölnek ki. Mind v, mind w az ultrahatványban olyan, mindkét irányban végtelen láncnak az eleme, melyek egymással felcserélhetők. Így nem lehetséges, hogy w kielégítsen egy formulát (nevezetesen $\Phi(w, [\bar{u}])$ igaz az ultraszorzatban), v pedig ne.

Ezek szerint az az $x \in A$, melyre $\mathfrak{A} \models \neg \Phi(x, \bar{u})$, csak az l_∞ láncon lehet. Az előzőekhez hasonlóan legyen most v az ultraszorzatban az l_∞ láncban egyre mélyebben fekvő elemek osztálya, w pedig az, melyet $k \geqq 1$-re az l_k lánc „felezővonal" feletti k-adik elemei jelölnek ki. Ebben az esetben is felcserélhető v és w, így a kérdéses $x \in A$ az l_∞ láncon sem lehet. ∎

Az erősen folytonos futások valamint a folytonos futások (még ha csak ezek fixponthalmazait nézzük) nem feltétlenül esnek egybe egy-egy konkrét struktúrán. Annál meglepőbb, hogy egy elmélet összes modelljét tekintve, ez a különbség már eltűnik. Így például a fenti $\mathfrak{A}$ struktúrához található olyan vele elemien ekvivalens $\mathfrak{B}$ struktúra (sőt $\mathfrak{A}$-nak olyan $\mathfrak{B}$ elemi bővítése is), melyre már $\mathfrak{B} \overset{CC}{\not\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$. Ez az alábbi, igen fontos tételnek egyszerű következménye.

3.6. Tétel. *(A Floyd—Hoare levezethetőség teljessége.) Legyen $T \subset F_t^0$ tetszőleges elmélet, $\varphi \in F_t^{2n}$ egy T-beli program, valamint $\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi_{\mathrm{ki}} \in F_t^n$. Ekkor az alábbi* (i)—(iii) *feltételek ekvivalensek.*

(i) $\qquad T \vdash (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$

(ii) $\qquad T \overset{C}{\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$

(iii) $\qquad T \overset{CC}{\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$.

Bizonyítás. Az (i)→(ii)→(iii) nyilvánvaló, egyedül (iii)→(i)-t kell bizonyítanunk, azaz feltesszük, hogy a $p=p_\varphi$ program parciálisan helyes az erősen folytonos futásokra nézve, és egy Floyd—Hoare levezetést keresünk. Ehhez előbb egy definícióra van szükségünk.

3.7. Definíció. Álljon $H\subset F_t^n$ mindazokból a $\Phi\in F_t^n$ formulákból, melyekre

$$T\vdash\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{x})\to\Phi(\bar{x})$$

valamint

$$T\vdash\Phi(\bar{x})\to\Phi(p(\bar{x})).\ \blacksquare$$

Vegyük észre, hogy H zárt a konjunkcióra, azaz ha $\Phi_1\in H$ és $\Phi_2\in H$, akkor $\Phi_1\wedge\Phi_2\in H$.

Jelöljön $\bar{c}_0$ és $\bar{d}$ külön-külön n darab új konstans szimbólumot, melyek nem fordulnak elő a t hasonlósági típusban.

1. eset. A $\{T, \varphi_{\mathrm{be}}(\bar{c}_0), H(\bar{d}), \bar{d}=p(\bar{d})\}$ elmélet minden modelljében igaz a $\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{d})$ formula.

Ekkor Gödel teljességi tétele szerint a $\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{d})$ formula az elméletből le is vezethető, azaz már véges sok formula is implikálja. Felhasználva azt a tényt, hogy H zárt a konjunkcióra, kapjuk, hogy van olyan $\Psi\in H$ formula, melyre

$$T\vdash[\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{c}_0)\wedge\Psi(\bar{d})\wedge\bar{d}=p(\bar{d})]\to\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{d}).$$

A $\bar{c}_0$, illetve $\bar{d}$ konstansok nem fordulnak elő T-ben, így ha bevezetjük a $\Phi(x)=\exists\bar{y}\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{y})\wedge\Psi(\bar{x})$ formulát, akkor az előbbi levezetésből azonnal kapjuk, hogy

$$T\vdash\Phi(\bar{x})\wedge\bar{x}=p(\bar{x})\to\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{x}).$$

Ebből és a nyilvánvaló $\Phi\in H$ összefüggésből azonnal következik, hogy $T\vdash\vdash(\varphi_{\mathrm{be}},\varphi,\varphi_{\mathrm{ki}})$.

2. eset. Nem az előző, azaz

$$\mathrm{Con}\,\{T, \varphi_{\mathrm{be}}(\bar{c}_0), H(\bar{d}), \bar{d}=p(\bar{d}), \neg\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{d})\}.$$

Azt állítjuk, hogy ebben az esetben a p program nem parciálisan helyes a $\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi_{\mathrm{ki}}$ formulákra nézve. Így feladatunk az, hogy konstruáljunk egy modellt és abban egy erősen folytonos futást, mely mutatja, hogy a program rossz. Ehhez szükségünk van néhány definícióra és lemmára.

3.8. Definíció. Legyen t_1 és t_2 két hasonlósági típus. A $t_1<t_2$ azt jelöli, hogy t_1-ben és t_2-ben ugyanazok a reláció- és függvényjelek, továbbá ezek aritásai is megegyeznek, és minden t_1-beli konstansjel szerepel t_2-ben is. $\blacksquare$

3.9. Definíció. Legyen t egy hasonlósági típus, $T\subset F_t^0$ egy (konzisztens) elmélet. Az $R=\langle\mathfrak{I}_R, f_R\rangle$ párt egy (t,T)-*prefutásnak* nevezzük, ha

— az $\mathfrak{I}_R$ időstruktúra, $\mathfrak{I}_R$ alaphalmazát I_R jelöli;

— f_R egy függvény, mely minden $i\in I_R$ elemhez egy t-beli konstansjelekből álló n-est rendel úgy, hogy (i) és (ii) fennáll.

Egy kicsit pongyolán, de félre nem érthető módon mindenütt $R(i)$-t vagy egyszerűen Ri-t írunk $f_R(i)$ helyett.

(i) $T\vdash R(\mathbf{s}i)=p(Ri)$ minden $i\in I_R$-re;

(ii) $\mathrm{Con}\,(T\cup\{\Phi(Rj): j\in I_R,\ \Phi\in B_T^t,$ és van olyan $i\in I_R, i\leqq j,$ hogy $T\vdash\Phi(Ri)\})$,

ahol $B_T^t=\{\Phi\in F_t^n:\ T\vdash\Phi(\bar{x})\to\Phi(p(\bar{x}))\}$. $\blacksquare$

Megjegyezzük, hogy a B^t_T formulahalmaz zárt a konjunkcióra, ezt a tényt külön említés nélkül többször fel fogjuk használni.

3.10. Lemma. *Legyen R egy (t, T)-prefutás. Ekkor létezik olyan teljes S elmélet, melyre $T \subset S \subset F^0_t$, és melyre R egy (t, S)-prefutás marad.*

Bizonyítás. Mivel az, hogy R nem prefutás, már az S elmélet egy véges részéből is kiderül, elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $\beta \in F^0_t$-re R prefutás lesz vagy $(t, T \cup \{\beta\})$-ban, vagy $(t, T \cup \{\neg\beta\})$-ban. Tegyük fel, hogy ezek egyike sem áll fenn. Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét esetben a 3.9. definíció (ii) feltétele nem teljesül, azaz van véges sok $i_s, j_s \in I_R$, $i_s \leqq j_s$, valamint $\Phi_s \in B^t_{T \cup \{\beta\}}$ és $\Phi^* \in B^t_{T \cup \{\neg\beta\}}$, melyekre

$$T \cup \{\beta\} \vdash \neg \bigwedge_s \Phi_s(Rj_s) \quad \text{és} \quad T \cup \{\beta\} \vdash \bigwedge_s \Phi_s(Ri_s);$$

$$T \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg \bigwedge_s \Phi^*_s(R_{js}) \quad \text{és} \quad T \cup \{\neg\beta\} \vdash \bigwedge_s \Phi^*_s(Ri_s).$$

Legyen $\Psi_s(\bar{x}) = (\beta \to \Phi_s(\bar{x})) \wedge (\neg\beta \to \Phi^*_s(\bar{x}))$. Ezek alapján

$$T \vdash \neg \bigwedge_s \Psi_s(Rj_s).$$

Másrészt azonnal adódik, hogy $\Psi_s \in B^T_t$, valamint $T \vdash \bigwedge_s \Psi_s(Ri_s)$, azaz mivel R egy (t, T)-prefutás, $\mathrm{Con}\left(T, \bigwedge_s \Psi_s(Rj_s)\right)$, ellentmondás. ∎

3.11. Lemma. *Legyen R egy (t, T)-prefutás, és tegyük fel, hogy T teljes. Ekkor létezik olyan $r > t$ hasonlósági típus, és olyan $S \subset F^0_r$ elmélet, melyre*

(i) *$T \subset S$ és S teljes;*
(ii) *R egy (r, S)-prefutás;*
(iii) *minden, egy szabad változóval rendelkező $\psi \in F^1_t$ formulához, ha $\exists x \psi(x) \in T$, akkor van r-ben olyan c konstansjel, melyre $\psi(c) \in S$; végül*
(iv) *az r típusban az új konstansjelek száma nem haladja meg F_t számosságát, azaz $|F_r| = |F_t|$.*

Bizonyítás. Az előzőhöz hasonlóan csak a következőket kell bizonyítanunk. Tegyük fel, hogy az r hasonlósági típus a t-ben nem szereplő konstansjelek közül csak a c jelet tartalmazza, $\beta \in F^1_t$ és $\mathrm{Con}\left(T, \beta(c)\right)$. Ekkor R egy $\left(r, T \cup \{\beta(c)\}\right)$-prefutás. Ebből (i)—(iv) könnyen következik.

Ha ez utóbbi nem volna igaz, akkor lenne véges sok $\Phi_s(\bar{x}, c) \in B^r_{T \cup \{\beta(c)\}}$ formula és $i_s, j_s \in I_R$, $i_s \leqq j_s$ úgy, hogy

$$T \cup \{\beta(c)\} \vdash \neg \bigwedge_s \Phi_s(Rj_s, c) \tag{1}$$

$$T \cup \{\beta(c)\} \vdash \bigwedge_s \Phi_s(Ri_s, c). \tag{2}$$

A $\Phi_s(\bar{x}, c) \in B^r_{T \cup \{\beta(c)\}}$ feltételből azonnal következik, hogy

$$\Psi_s(\bar{x}) = \forall y \left(\beta(y) \to \Phi_s(\bar{x}, y)\right) \in B^t_T,$$

hiszen a c konstansjel nem fordul elő T-ben. Másrészt (2) alapján $T \vdash \forall y \left(\beta(y) \to \Phi_s(Ri_s, y)\right)$, azaz $T \vdash \bigwedge_s \Psi_s(Ri_s)$. De R prefutás, és T teljes, így $T \vdash \bigwedge_s \Psi_s(Rj_s)$,

ahonnan

$$T \vdash \bigwedge_s [\beta(c) \to \Phi_s(Rj_s, c)] \vdash \beta(c) \to \bigwedge_s \Phi_s(Rj_s, c).$$

Ebből és (1)-ből azt kapjuk, hogy $T \vdash \neg\beta(c)$, ellentétben azzal a feltevéssel, hogy $\mathrm{Con}(T, \beta(c))$. ∎

3.12. Lemma. *Legyen R egy (t, T)-prefutás, és legyen T teljes. Tegyük fel, hogy $i_0, j_0 \in I_R$, $i_0 < j_0$ és $\chi \in F_t^n$ olyan, hogy*

$$T \vdash \chi(Ri_0) \wedge \neg\chi(Rj_0).$$

Ekkor létezik egy $r > t$ hasonlósági típus, egy $T \subset S \subset F_r^0$ elmélet és egy (r, S)-prefutás Q úgy, hogy

(i) *$\mathfrak{I}_Q$ elemi bővítése $\mathfrak{I}_R$-nek, és $Q \supset R$, azaz $Qi = Ri$ minden $i \in I_R \subset I_Q$-ra;*
(ii) *van olyan $i \in I_Q$, $i_0 \leqq i < j_0$, melyre*

$$S \vdash \chi(Qi) \wedge \neg\chi(Q(\mathbf{s}i)).$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \{i \in I_R$: minden $i_0 \leqq j \leqq i$-re $T \vdash \chi(Rj)\}$. Nyilvánvalóan α az $\mathfrak{I}_R$ struktúra egy kezdőszelete és $j_0 \notin \alpha$. Feltehetjük, hogy α-ban nincs legnagyobb elem, egyébként nem volna mit bizonyítani. A szokásoknak megfelelően $i < \alpha$-t, illetve $i > \alpha$-t írunk $i \in \alpha$, illetve $i \notin \alpha$ helyett. Mivel α-ban nincs maximális elem, azért minden $j > \alpha$-hoz van olyan $\alpha < j' < j$, melyre $T \vdash \neg\chi(Rj')$.

Legyen $\{a_l : l \in \mathbf{Z}\}$ megszámlálhatóan sok különböző új szimbólum, és legyen $\{\bar{c}_l : l \in \mathbf{Z}\}$ különböző, új konstansjelekből alkotott n-esek. Az I_Q halmazt az I_R-ből úgy kapjuk, hogy I_R-hez hozzávesszük az $\{a_l : l \in \mathbf{Z}\}$ jeleket, az új elemek helyét a rendezésben a következőképpen definiáljuk:

$$i < a_l < a_{l+1} < j \quad \text{minden} \quad i < \alpha < j, i, j \in I_R \quad \text{és} \quad l \in \mathbf{Z} \quad \text{esetén.}$$

Világos, hogy az így kapott $\mathfrak{I}_Q$ struktúra elemi bővítése $\mathfrak{I}_R$-nek. Az r hasonlósági típus legyen t-nek a $\{\bar{c}_l : l \in \mathbf{Z}\}$ konstansjelekkel való bővítése. A Q függvény a következő: $Q(i) = R(i)$, ha $i \in I_R$, és $Q(a_l) = \bar{c}_l$ egyébként. Végül az $S \subset F_r^0$ elmélet legyen a következő:

$$\begin{aligned} S = T \cup \{\varphi(\bar{c}_i, \bar{c}_{l+1}) : l \in \mathbf{Z}\} \cup \{\chi(\bar{c}_0), \neg\chi(\bar{c}_1)\} \cup \\ \cup \{\Phi(\bar{c}_l) : l \in \mathbf{Z},\ \Phi \in B_T^t \quad \text{és} \quad T \vdash \Phi(Ri) \quad \text{valamilyen} \quad i < \alpha\text{-ra}\} \cup \\ \cup \{\neg\Phi(\bar{c}_l) : l \in \mathbf{Z},\ \Phi \in B_T^t \quad \text{és} \quad T \vdash \neg\Phi(Rj) \quad \text{valamilyen} \quad j > \alpha\text{-ra}\}. \end{aligned}$$

Állítjuk elsőként, hogy S konzisztens. Ehhez elegendő megmutatni, hogy T konzisztens az $S \setminus T$ minden véges részével. Felhasználva, hogy T teljes, B_T^t zárt az „és"-re, és hogy a $\Phi \in B_T^t$ formulák öröklődnek $\mathfrak{I}_R$-ben, ez a

$$\mathrm{Con}(T \cup \{\Phi(\bar{c}_{-l}), \chi(\bar{c}_0), \neg\chi(\bar{c}_1), \neg\Phi^*(\bar{c}_l)\})$$

állításra redukálódik, ahol $\Phi, \Phi^* \in B_T^t$, és $T \vdash \Phi(Ri_1) \wedge \neg\Phi^*(Rj_1)$ valamilyen $i_0 < i_1 < \alpha < j_1 < j_0$-ra, és $l > 1$ valamilyen természetes szám. Ha ez az utóbbi konzisztencia nem állna fenn, akkor szükségképpen

$$T \vdash \Phi(\bar{x}) \wedge \chi(p^l(\bar{x})) \wedge \neg\Phi^*(p^{2l}(\bar{x})) \to \chi(p^{l+1}(\bar{x})). \tag{1}$$

Legyen $\Psi(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) \wedge [\chi(p^l(\bar{x})) \vee \Phi^*(p^{2l-1}(\bar{x}))]$. (1)-ből azonnal következik, hogy $T \vdash \Psi(\bar{x}) \to \Psi(p(\bar{x}))$, azaz $\Psi \in B_T^t$. Másrészt feltételeink alapján $T \vdash \Phi(Ri) \wedge \chi(Ri)$

minden $i_1 \leqq i < \alpha_n$-ra, vagyis $T \vdash \Psi(Ri_1)$. De R egy prefutás és T teljes, azért $T \vdash$ $\vdash \Psi(Rj)$ minden $j \geqq i_1$-re, noha van olyan $\alpha < j < j_1$, melyre

$$T \vdash \neg\chi(R(\mathbf{s}^l j)) \wedge \neg\Phi^*(R(\mathbf{s}^{2l-1} j)).$$

Ez az ellentmondás mutatja, hogy S valóban konzisztens.

A lemma (i) és (ii) állítása nyilvánvalóan teljesül, így csak azt kell ellenőriznünk. hogy Q valóban (r, S)-prefutás-e. A prefutás 3.9. definíciójából (i) azonnal látható. (ii)-t ellenőrizendő, legyen először $i \in I_R$, $\Phi \in F_t^{n+m}$, és legyenek $\bar{e} = \langle e_0, \ldots, e_{m-1} \rangle$ olyan r-beli konstansok, melyek nincsenek t-ben, és melyekre $\Phi(\bar{x}, \bar{e}) \in B_S^r$, azaz

$$S \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{e}) \to \Phi(p\bar{x}, \bar{e}), \tag{2}$$

valamint

$$S \vdash \Phi(Ri, \bar{e}). \tag{3}$$

Állítjuk, hogy ekkor $S \vdash \Phi(Rj, \bar{e})$ minden $j \in I_Q, j \leqq i$-re. Először is feltehetjük, hogy van olyan $\alpha \in F_t^m$, $S \vdash \alpha(\bar{e})$, melyre a bal oldalakon S helyett már $T \cup \{\alpha(\bar{e})\}$-ből is következnek a jobb oldalak. Legyen

$$\Psi(\bar{x}) = \forall \bar{y}(\alpha(\bar{y}) \to \Phi(\bar{x}, \bar{y})).$$

Mivel az $\bar{e}$ konstansok nem fordulnak elő T-ben, azért (2) alapján $\Psi \in B_T^t$, és (3) alapján $T \vdash \Psi(Ri)$. R egy prefutás, és S definíciója alapján $S \vdash \Psi(Rj)$ minden $j \in I_Q$, $j \leqq i$-re. Ebből és $S \vdash \alpha(\bar{e})$-ből már következik, hogy $S \vdash \Phi(Rj, \bar{e})$, ahogyan állítottuk.

Így ha Q nem volna (r, S)-prefutás, akkor volna véges sok $i_s \in I_Q \setminus I_R$, $j_s \in I_R$, $j_s > \alpha$, és $\Phi_s \in F_t^{n+m}$, melyekre $\Phi_s(\bar{x}, \bar{e}) \in B_S^r$ úgy, hogy

$$S \vdash \neg \bigwedge_s \Phi_s(Rj_s, \bar{e}) \tag{4}$$

míg

$$S \vdash \bigwedge_s \Phi_s(Ri_s, \bar{e}). \tag{5}$$

Ismét feltehetjük, hogy $\alpha \in F_t^m$ olyan, hogy $\Phi_s \in B_{T \cup \{\alpha(\bar{e})\}}^r$ és a bal oldalak S helyett már $T \cup \{\alpha(\bar{e})\}$-ből is következnek. Legyen

$$\theta_s(\bar{x}) = \exists \bar{y}(\alpha(\bar{y}) \wedge \Phi_s(\bar{x}, \bar{y})).$$

Csak úgy, mint az előbb, most is kapjuk, hogy $\theta_s \in B_T^t$, valamint (4) szerint $T \vdash$ $\vdash \bigvee_s \neg\theta_s(Rj_s)$. A T elmélet a feltevés szerint teljes, ezért $T \vdash \neg\theta_s(Rj_s)$ valamilyen $j_s > \alpha$-ra, s így S definíciója alapján $S \vdash \neg\theta_s(Ri_s)$, hiszen $i_s \in I_Q \setminus I_R$. Ez viszont ellentmond (5)-nek, amivel a lemma állítását beláttuk. ∎

Most térjünk vissza a 3.6. tétel bizonyításának 2. esetéhez. Definiálni fogjuk hasonlósági típusok, elméletek, valamint prefutások egy transzfinit növekvő sorozatát. Ezt a t_0, T_0 és R_0 definíciójával kezdjük.

Emlékeztetünk rá, hogy a t típus, a $T \subset F_t^0$ elmélet, a $\varphi \in F_t^{2n}$ program és a $\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi_{\mathrm{ki}} \in F_t^n$ formulák olyanok, hogy

$$(*) \qquad \mathrm{Con}\{T, \varphi_{\mathrm{be}}(\bar{c}_0), H(\bar{d}), \bar{d} = p(\bar{d}), \neg\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{d})\}.$$

Legyen $\bar{c}_i$ $(i \in \omega)$, valamint $\bar{d}$ különböző t-ben nem szereplő konstansjelekből alkotott n-es, és legyen $r > t$ az a hasonlósági típus, mely a t-beli jeleken kívül még ezeket a

konstansjeleket is tartalmazza. Az $\mathfrak{I}_R$ időstruktúra legyen a következő: alaphalmaza ω és egy azt követő, $\mathbf{Z}$-vel izomorf szál, rajtuk a rendezés értelemszerűen legyen definiálva. Az R függvény definíciója a következő: $R(i)=\bar{c}_i$, ha $i\in\omega$, és $R(i)=\bar{d}$ egyébként. Végül legyen

$$S = T\cup\{p(\bar{c}_i)=\bar{c}_{i+1}\colon\ i\in\omega\}\cup\{\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{c}_0),\ p(\bar{d})=\bar{d},\ \neg\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{d})\}.$$

3.13. Lemma. *R egy (r, S)-prefutás.*

Bizonyítás. A prefutás 3.9. definíciójából (i) azonnal adódik. Az (ii) feltétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy minden $\Phi\in F_t^{3n}$-re, ha

(1) $$S\vdash\Phi(\bar{x},\bar{c}_0,\bar{d})\to\Phi(p\bar{x},\bar{c}_0,\bar{d})$$

és

(2) $$S\vdash\Phi(\bar{c}_0,\bar{c}_0,\bar{d}),$$

akkor $\mathrm{Con}(S, \Phi(\bar{d}, \bar{c}_0, \bar{d}))$. Az egyszerűség kedvéért legyen $\alpha(\bar{x})=$"$p(\bar{x})=\bar{x}\wedge\wedge\neg\varphi_{\mathrm{ki}}(\bar{x})$", és tegyük fel, hogy ez a konzisztencia nem állna fenn, azaz

(3) $$S\vdash\neg\Phi(\bar{d},\bar{c}_0,\bar{d}).$$

Világos, hogy S helyett mindenütt $T\cup\{\Phi_{\mathrm{be}}(\bar{c}_0), \alpha(\bar{d})\}$ írható, ezért ha

$$\Psi(\bar{x}) = \forall\bar{z}\exists\bar{y}[\alpha(\bar{z})\to\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{y})\wedge\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})]$$

akkor (1) éppen azt állítja, hogy $T\vdash\Psi(\bar{x})\to\Psi(p\bar{x})$, míg (2) alapján $T\vdash\Psi(\bar{c}_0)$. Így tehát $\Psi\in H$. Most ha $\Psi(\bar{x})$-ben $\bar{x}$-et is és $\bar{z}$-t is $\bar{d}$-nek választjuk, akkor a fenti $(*)$ feltétel alapján

$$\mathrm{Con}\{T, \alpha(\bar{d}), \exists\bar{y}[\alpha(\bar{d})\to\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{y})\wedge\Phi(\bar{d},\bar{y},\bar{d})]\}.$$

Másrészt (3) szerint

$$T\vdash\forall\bar{y}[\alpha(\bar{d})\wedge\varphi_{\mathrm{be}}(\bar{y})\to\neg\Phi(\bar{d},\bar{y},\bar{d})]$$

ellentmondás, ami igazolja, hogy R valóban egy (r, S)-prefutás. ∎

Legyen $t_0=r$, $R_0=R$. A 3.10. Lemma szerint van olyan $S\subset T_0\subset F_r^0=F_{t_0}^0$ teljes elmélet, melyre $R_0=R$ egy (t_0, T_0)-prefutás. Így definiáltuk a t_0 hasonlósági típust, a T_0 elméletet és az R_0 prefutást. Ezeknek a következő tulajdonságaik vannak:

$$t\prec t_0,\quad T\subset T_0,\quad \varphi_{\mathrm{be}}(R_0(\mathbf{0}))\in T_0,$$

valamint valamilyen $i\in I_{R_0}$-ra

$$R_0(i) = R_0(\mathbf{s}i)\quad\text{és}\quad\neg\varphi_{\mathrm{ki}}(R_0(i))\in T_0.$$

Legyen $F_{t_0}^0$ számossága $\varkappa$, és legyen $\varkappa^+$ a legkisebb $\varkappa$-nál nagyobb számosság. Legyenek $C=\{c_\xi\colon\ \xi<\varkappa^+\}$ különböző konstans szimbólumok, melyek között a t_0 típus konstansai is előfordulnak, és legyen $J=\{a_\xi\colon\ \xi<\varkappa^+\}$ időpontokat jelölő szimbólumok egy halmaza úgy, hogy $I_{R_0}\subset J$. (Ez megtehető, mivel I_{R_0} megszámlálható.)

Rendezzük el a $J\times J\times F_{t\cup C}^n$ elemeit egy $\varkappa^+$ hosszúságú $\{\langle i_\xi, j_\xi, \Phi_\xi\rangle\colon\ \xi\in\varkappa^+\}$ sorozatba úgy, hogy minden hármas $\varkappa^+$ sokszor szerepeljen. Most már definiálhatjuk a t_ξ, T_ξ, R_ξ sorozatokat $\xi<\varkappa^+$-ra úgy, hogy

(i) t_ξ egy hasonlósági típus;
(ii) $T_\xi\subset F_{t_\xi}^0$ egy teljes elmélet, ezenkívül $|T_\xi|=\varkappa$;
(iii) R egy (t_ξ, T_ξ)-prefutás, $I_{R_\xi}\subset J$, $|I_{R_\xi}|\leqq\varkappa$.

Tegyük fel, hogy t_ξ, T_ξ és R_ξ-t már minden $\xi<\eta$-ra definiáltuk, azok rendelkeznek az (i)–(iii) tulajdonságokkal, és t_η, T_η, R_η-t akarjuk definiálni.

Ha η limesz, akkor legyen $t_\eta=\bigcup\{t_\xi\colon \xi<\eta\}$; $T_\eta=\bigcup\{T_\xi\colon \xi<\eta\}$ és $R_\eta=\bigcup\{R_\xi\colon \xi<\eta\}$. Ebben az esetben (i)—(iii) nyilvánvalóan teljesül.

Ha η rákövetkező, mondjuk $\eta=\xi+1$, akkor csináljuk a következőket. Vegyük a fent definiált sorozat ξ-edik tagját, $\langle i_\xi, j_\xi, \Phi_\xi\rangle$-t. Ha $i_\xi\notin I_{R_\xi}, j_\xi\notin I_{R_\xi}$ vagy $\Phi_\xi\notin F^n_{t_\xi}$; vagy ha ugyan $i_\xi, j_\xi\in I_{R_\xi}$, $\Phi_\xi\in F^n_{t_\xi}$ de $i_\xi>j_\xi$ vagy $T_\xi\nvdash \Phi_\xi(R_\xi i_\xi)\wedge\neg\Phi_\xi(R_\xi j_\xi)$, akkor legyen $t_{\xi+1}=t_\xi$, $T_{\xi+1}=T_\xi$ és $R_{\xi+1}=R_\xi$. Ha viszont $i_\xi, j_\xi\in I_{R_\xi}$, $\Phi_\xi\in F^n_{t_\xi}$, $i_\xi\leqq j_\xi$ és

$$T_\xi\vdash\Phi_\xi(R_\xi i_\xi)\wedge\neg\Phi_\xi(R_\xi j_\xi),$$

akkor a 3.12. Lemma alapján van olyan $r_\xi>t_\xi$ hasonlósági típus, $T_\xi\subset S_\xi\subset F^0_{r_\xi}$ elmélet és $R_{\xi+1}\supset R_\xi$, (r_ξ, S_ξ)-prefutás, melyre $r_\xi\setminus t_\xi$ valamint, $I_{R_{\xi+1}}\setminus I_{R_\xi}$ megszámlálhatók (tehát feltehetjük, hogy $I_{R_{\xi+1}}\subset J$, $|I_{R_{\xi+1}}|\leqq|I_{R_\xi}|+\omega\leqq\varkappa$), továbbá valamely $k\in I_{R_{\xi+1}}$-re $i_\xi\leqq k<j_\xi$ és

$$S_\xi\vdash\Phi_\xi(R_{\xi+1}(k))\wedge\neg\Phi_\xi(R_{\xi+1}(\mathbf{s}k)).$$

A 3.10 Lemma alapján van olyan $S_\xi\subset S'_\xi\subset F^0_{r_\xi}$ teljes elmélet, melyre $R_{\xi+1}$ egy (r_ξ, S'_ξ)-prefutás; végül a 3.11. Lemma alapján $R_{\xi+1}$ egy $(t_{\xi+1}, T_{\xi+1})$-prefutás, ahol $t_{\xi+1}>r_\xi$, $T_{\xi+1}\supset S'_\xi$, $T_{\xi+1}$ teljes; $t_{\xi+1}\setminus t_\xi$ számossága legfeljebb $\varkappa$, és az összes S'_ξ-beli (tehát az össszes T_ξ-beli) egzisztenciális formulához található őt kielégítő $t_{\xi+1}$-beli konstans. Az (i)—(iii) indukciós feltételek igazságát ebben az esetben is könnyű belátni.

Legyen ezek után $t^*=\bigcup\{t_\xi\colon \xi<\varkappa^+\}$; $T^*=\bigcup\{T_\xi\colon \xi<\varkappa^+\}$; és $R^*=\bigcup\{R_\xi\colon \xi<\varkappa^+\}$. A $T^*\subset F^0_{t^*}$ elmélet teljes, hiszen a teljes T_ξ növekvő elméletek uniója, továbbá R^* egy (t^*, T^*)-prefutás. A t^* típusban szereplő konstansokból a T^* elmélet egy modelljét lehet összeállítani, mivel T^* összes egzisztenciális formuláját valamelyik konstans kielégíti; ezt a 3.11. Lemma alkalmazásai biztosítják. (Egészen pontosan szólva a konstansok bizonyos ekvivalencia-osztályai alkotják ezt a modellt, vö. [7]). Legyen a modell $\mathfrak{A}$, alaphalmaza A. Ekkor az R^* prefutás egy leképezést ad I_{R^*}-ból A^n-be, állítjuk, hogy ez, a szintén R^*-gal jelölt leképezés a φ programnak egy erősen folytonos futása. Ha ezt megmutattuk, készen vagyunk: $\mathfrak{A}$ modellje a $T\subset T_0\subset T^*$ elméletnek, tehát $R^*(\mathbf{0})=R_0(\mathbf{0})$ miatt $\mathfrak{A}\models\varphi_{\mathrm{be}}(R^*(\mathbf{0}))$, és valamely $i\in I_{R_0}\subset I_{R^*}$ elemre $\mathfrak{A}\models R^*(i)=R^*(\mathbf{s}i)\wedge\neg\varphi_{\mathrm{ki}}(R^*(i))$, hiszen ezek a formulák már T_0-ban benne voltak. Így a φ program valóban nem parciálisan helyes a φ_{be} és a φ_{ki} formulákra nézve.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy R^* erősen folytonos futás, először megjegyezzük, hogy $\mathfrak{I}_{R^*}$ egy időstruktúra, hiszen egy bővülő elemi lánc uniója. R^* egy (t^*, T^*)-prefutás, ezért az erősen folytonos futás 3.3. definíciójában (i) nyilvánvalóan teljesül. Az (ii*) feltétel ellenőrzéséhez legyen $i, j\in I_{R^*}$, $i\leqq j$; $\Psi\in F^{n+m}_t$ és $\bar u\in A^m$ olyan, hogy

$$\mathfrak{A}\models\Psi(R^*(i), \bar u)\wedge\neg\Psi(R^*(j), \bar u).$$

Az A minden elemét valamely t^*-beli konstanssal meg lehet nevezni, tehát van olyan $\Phi\in F^n_{t^*}$ formula, hogy

$$\mathfrak{A}\models\Psi(\bar x, \bar u)\leftrightarrow\Phi(\bar x).$$

De $\Phi\in F^n_{t\cup C}$, ezért az $\langle i, j, \Phi\rangle$ hármas $\varkappa^+$ sokszor fordul elő az $\{\langle i_\xi, j_\xi, \Phi_\xi\rangle\colon \xi<\varkappa^+\}$ sorozatban. Következésképp van olyan $\xi<\varkappa^+$ index, hogy $i, j\in I_{R_\xi}$, $\Phi\in F^n_{t_\xi}$ és

$i=i_\xi$, $j=j_\xi$, $\Phi=\Phi_\xi$. Ekkor a konstrukció alapján van olyan $k\in I_{R_{\xi+1}}\subset I_{R^*}$, amire

$$T_{\xi+1}\vdash \Phi(R_{\xi+1}(k))\wedge\neg\Phi(R_{\xi+1}(\mathbf{s}k)),$$

következésképp

$$\mathfrak{A}\vdash \Phi(R^*(k))\wedge\neg\Phi(R^*(\mathbf{s}k)),$$

ahogyan kívántuk. Ezzel a 3.6. tételt bizonyítottuk. ∎

4. Kvázifutások

Ebben a fejezetben a program futásának egy olyan definícióját adjuk meg, melyben — a folytonos futásokkal ellentétben — explicite nem szerepel az idő. Ennek ellenére ezek az ún. kvázifutások szoros kapcsolatban állnak a folytonos futásokkal. A fejezetben vizsgáljuk a kvázifutások (és ezzel együtt a folytonos futások) fixpontjainak lehetséges számát. Bizonyos „aritmetizálhatósági" feltétel mellett leírjuk a programok össze folytonos futásait.

4.1. Definíció. Legyen $T\subset F_t^0$ egy elmélet, $\varphi\in F_t^{2n}$ egy T-beli program, $\mathfrak{A}$ pedig a T elmélet egy modellje. A $Q=\langle\bar{q}, X\rangle$ párt, ahol $\bar{q}\in X\subset A^n$, a $p=p_\varphi$ program $\mathfrak{A}$-beli *gyenge kvázifutásának* nevezzük, ha

(i) minden $\bar{x}\in X$-re $p(\bar{x})\in X$;
(ii) minden $\Phi\in F_t^n$-re, ha $\mathfrak{A}\models\Phi(\bar{q})\wedge\bigwedge\limits_{\bar{x}\in X}[\Phi(\bar{x})\to\Phi(p\bar{x})]$, akkor $\mathfrak{A}\models\bigwedge\limits_{\bar{x}\in X}\Phi(\bar{x})$.

A $Q=\langle\bar{q}, X\rangle$ pár a p programnak $\mathfrak{A}$-beli *kvázifutása,* ha nem csak (ii), hanem az erősebb (ii*) is fennáll:

(ii*) minden $\Phi\in F_t^{n+m}$-re és $\bar{u}\in A^m$-re, ha

$$\mathfrak{A}\models\Phi(\bar{q},\bar{u})\wedge\bigwedge_{\bar{x}\in X}[\Phi(\bar{x},\bar{u})\to\Phi(p\bar{x},\bar{u})],\quad\text{akkor}\quad\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\bar{x}\in X}\Phi(\bar{x},\bar{u}).\ \blacksquare$$

Csak úgy, mint az előző fejezetben, a Q (gyenge) kvázifutás fixpontjainak halmazát $\mathrm{fix}(Q)$ jelöli, vagyis, ha $Q=\langle\bar{q}, X\rangle$, akkor $\mathrm{fix}(Q)=\{\bar{x}\in X: p(\bar{x})=\bar{x}\}$.

4.2. Tétel. *Legyen $T\subset F_t^0$ egy (konzisztens) elmélet, $\varphi\in F_t^{2n}$ egy T-beli program, $\mathfrak{A}$ pedig a T elmélet egy modellje. Ekkor a $Q=\langle\bar{q}, X\rangle$ pár akkor és csak akkor ($\mathfrak{A}$-beli) kvázifutása a p_φ programnak, ha van p_φ-nek olyan ($\mathfrak{A}$-beli) R folytonos futása, melyre $\bar{q}=R(\mathbf{0})$ és $X=\mathrm{Range}(R)$.*

Bizonyítás. A tételnek a „csak akkor" része a 4.1. és a 3.3. definíciókból világos. Legyen most $Q=\langle\bar{q}, X\rangle$ egy kvázifutás, és legyen

$$Y=\{p^k(\bar{q}): k\in\omega\}\subset X,\quad U=X\setminus Y,$$

végül legyen

$$U^*=\{p^k(\bar{u}): \bar{u}\in U,\ k\in\omega\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $\bar{u}\in U^*$-hoz van olyan $\bar{v}\in U^*$, melyre $p(\bar{v})=\bar{u}$. Ezt nyilván elegendő U elemeire megmutatni, sőt U definíciója miatt elég azt belátni, hogy tetszőleges $\bar{u}\in X$-re vagy $\bar{u}=\bar{q}$, vagy van olyan $\bar{v}\in X$, melyre $p(\bar{v})=\bar{u}$. Tegyük fel, hogy ez nem így volna, és legyen

$$\Phi(\bar{x},\bar{u})=„\bar{x}\neq\bar{u}".$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Erre $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{q}, \bar{u})$ és a feltétel szerint $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{x}, \bar{u}) \to \Phi(p\bar{x}, \bar{u})$. Így a kvázifutás definíciója szerint $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{x}, \bar{u})$ minden $\bar{x} \in X$-re, azaz $\bar{u} \notin X$, ami ellentmondás.

Legyen most $I = \omega \cup U^* \times \mathbf{Z}$ az $\mathfrak{I}$ időstruktúra alaphalmaza, és $\mathbf{s}$ a szokásos, azaz $\mathbf{s}(\bar{u}, j) = (\bar{u}, j+1)$; U^*-on a rendezés tetszőleges. Legyen végül $R(i) = p^i(\bar{q})$, ha $i \in \omega$ és legyen $R(i) = p^j(\bar{u})$, ha $i = (\bar{u}, j), j \in \mathbf{Z}$ és $j \geqq 0$; ha pedig $j < 0$, akkor legyen $R(\bar{u}, j) \in U^*$ olyan, az előzőek szerint létező elem, melyre $p(R(\bar{u}, j)) = R(\bar{u}, j+1)$. Könnyű ellenőrizni, hogy az így kapott R valóban folytonos futás, és kielégíti a feltételeket. ∎

A 4.1. definíció alapján könnyen igazolható a

4.3. Állítás. *Legyen $Q_\gamma = \langle \bar{q}, X_\gamma \rangle$ minden $\gamma \in \Gamma$-ra ugyanannak a p programnak $\mathfrak{A}$-beli (gyenge) kvázifutása, ahol Γ egy tetszőleges indexhalmaz. Ekkor $Q = \langle \bar{q}, \cup \{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \rangle$ is $\mathfrak{A}$-beli (gyenge) kvázifutása p-nek.* ∎

Ennek alapján azonnal adódik a

4.4. Következmény. Minden $\mathfrak{A}$-beli p programhoz és $\bar{q} \in A^n$-hez létezik egy (tartalmazásra nézve) maximális $Q = \langle \bar{q}, X \rangle$ kvázifutás, és egy maximális $Q^* = \langle \bar{q}, X^* \rangle$ gyenge kvázifutás. Természetesen $X^* \subset X$, de általában $X^* \neq X$. ∎

E következmény és a 4.2. tétel szerint, ha egy p programnak adott $\bar{q} \in A^n$ kezdőponthoz tartozó összes $\mathfrak{A}$-beli folytonos futását tekintjük, és ezeknek a futásoknak nézzük a fixpontjait, akkor van *egyetlen* folytonos futás is, melynél az összes lehetséges fixpont fellép. Ugyanakkor ez az erősen folytonos futásokra már nem igaz.

A következő néhány tételben a gyenge kvázifutásoknál fellépő fixponthalmazok számosságával foglalkozunk, azonban előbb egy definícióra van szükségünk.

4.5. Definíció. Legyen $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra, $\bar{q}, \bar{r} \in A^n$. Azt mondjuk, hogy $\bar{q}$ és $\bar{r}$ *megkülönböztethetetlen* ($\bar{q}$ és $\bar{r}$ ugyanolyan típusú, ugyanazt a típust realizálja, lásd [7]), ha minden $\Phi \in F_t^n$ formulára $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{q}) \leftrightarrow \Phi(\bar{r})$. ∎

A „megkülönböztethetetlen" reláció nyilván ekvivalencia-reláció.

4.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $T \subset F_t^0$ elméletnek van végtelen modellje. Ekkor van olyan p (T-beli) program, hogy minden $\varkappa$ számosságra található T-nek olyan $\mathfrak{A}$-modellje és p-nek olyan $\mathfrak{A}$-beli Q gyenge kvázifutása, melyre $|\mathrm{fix}(Q)| \geqq \varkappa$.*

Bizonyítás. Legyen a p programot definiáló formula $\varphi(x, y) =$ „$x = y$", és legyen $\lambda = |F_t|$. Mivel az F_t különböző részhalmazainak számossága 2^λ, azért a T elmélet tetszőleges modelljében a „megkülönböztethetetlen" reláció legfeljebb 2^λ osztályra vágja szét a modell alaphalmazát. Feltehetjük, hogy $\varkappa > 2^\lambda$ és hogy $\varkappa$ reguláris számosság. T-nek van végtelen modellje, így a felszálló Lövenheim—Skolem tétel szerint van $\varkappa$ számosságú $\mathfrak{A}$ modellje is. Az előbbiek szerint van olyan $\bar{q} \in A^n$, hogy $\bar{q}$ osztálya legalább $\varkappa$ számosságú. Legyen $X = \{\bar{r} \in A^n : \bar{q}$ és $\bar{r}$ megkülönböztethetetlenek$\}$. Világos, hogy $Q = \langle \bar{q}, X \rangle$ egy gyenge kvázifutása p-nek, $\mathrm{fix}(Q) = X$, és $|X| \geqq \varkappa$, ahogyan azt kívántuk. ∎

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha a T elmélet elég gazdag, akkor lényegében az előbbi konstrukcióban használt lehetőség az egyetlen arra, hogy egy gyenge kvázifutásnak egynél több fixpontja legyen.

4.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $t_{\mathrm{PA}} \subset t$, $\mathrm{PA} \subset T \subset F_t^0$ és hogy $\mathfrak{A}$ a T elméletnek egy modellje. Ekkor tetszőleges $\mathfrak{A}$-beli gyenge kvázifutás fixpontjai megkülönböztethetetlenek.*

Bizonyítás. Rögzítsük a $\varphi \in F_t^{2n}$ T-beli programot, és legyen $p = p_\varphi$. A bizonyításhoz szükségünk van a következő, a későbbiekben is használandó definícióra:

4.8. Definíció. *Legyen* $\alpha(\bar{x}, u) \in F_t^{n+1}$ *a következő formula (lásd a 2.4. definíciót):*

„u egy sorozat, melyre $\mathrm{LENGTH}(u) \geqq 1$, *és u minden egyes eleme olyan sorozat, melynek hossza éppen n; továbbá u nulladik elemének elemei éppen* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ *ebben a sorrendben; és ha* $i < \mathrm{LENGTH}(u)$, *és u-nak az* $(i-1)$*-edik eleme* $\bar{y}$ *és az i-edik eleme* $\bar{z}$, *akkor* $p(\bar{y}) = \bar{z}$." ∎

Emlékeztetünk arra, hogy $\mathrm{PA} \subset T$ miatt ez valóban egy t típusú formula. Erre vonatkozik az alábbi két lemma.

4.9. Lemma. $T \vdash [\alpha(\bar{x}, u_1) \wedge \alpha(\bar{x}, u_2) \wedge i < \mathrm{LENGTH}(u_1) \wedge i < \mathrm{LENGTH}(u_2)] \rightarrow$
$\rightarrow \mathrm{ELEM}(u_1, i) = \mathrm{ELEM}(u_2, i)$.

Bizonyítás. Legyen

$$\Psi(x, u_1, u_2) = \text{„}x < \mathrm{LENGTH}(u_1) \wedge x < \mathrm{LENGTH}(u_2) \rightarrow \mathrm{ELEM}(u_1, x) =$$
$$= \mathrm{ELEM}(u_2, x)\text{"}.$$

Ez nyilvánvalóan egy t_{PA} típusú formula. Így PA-ban (és ekkor T-ben is) a következő formula is szerepel:

$$[\Psi(0, u_1, u_2) \wedge \forall x(\Psi(x, u_1, u_2) \rightarrow \Psi(x+1, u_1, u_2))] \rightarrow \forall x \Psi(x, u_1, u_2).$$

Ám ennek az implikációnak az első két tagja T-ből és a lemmában szereplő premisszából levezethető, tehát ezekből $\forall x \Psi(x, u_1, u_2)$ is következik, ami éppen a konklúziót adja. ∎

Hasonlóan igazolható a

4.10. Lemma. $T \vdash [\alpha(\bar{x}, u) \wedge \mathrm{ELEM}(u, i) = \mathrm{ELEM}(u, i+1) \wedge i < j <$
$< \mathrm{LENGTH}(u)] \rightarrow \mathrm{ELEM}(u, i) = \mathrm{ELEM}(u, j)$. ∎

Legyen $\psi \in F_t^n$ tetszőleges. *A* $\beta_\psi \in F_t^n$, valamint a $\gamma_\psi \in F_t^n$ formulákat a következőképpen definiáljuk:

$\beta_\psi(\bar{x})$ = *„minden u sorozatra, ha* $\alpha(\bar{x}, u)$ *és* $\bar{y}$ *egy olyan eleme u-nak, melyre* $p(\bar{y}) = \bar{y}$, *akkor erre az* $\bar{y}$*-ra* $\psi(\bar{y})$ *is igaz";*

$\gamma_\psi(\bar{y})$ = *„van olyan* $\bar{x}$, *ami kielégíti* $\psi(\bar{x})$*-et, és van egy olyan u sorozat, melyre* $\alpha(\bar{x}, u)$ *és* $\bar{y}$ *eleme u-nak".*

4.11. Lemma. *Legyen* $Q = \langle \bar{q}, X \rangle$ a *p programnak egy* $\mathfrak{A}$*-beli gyenge kvázifutása,* $\psi \in F_t^n$ *és tegyük fel, hogy* $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{q})$. *Ekkor minden* $\bar{x} \in X$-re $\mathfrak{A} \models \gamma_\psi(\bar{x})$.

Bizonyítás. Az $\mathfrak{A} \models \gamma_\psi(\bar{q})$ a γ_ψ definíciója alapján triviális. A $\mathrm{PA} \subset T$ feltétel alapján a sorozatkódoló formulákra vonatkozó 2.4. definíció felhasználásával $\mathfrak{A} \models$
$\models \gamma_\psi(\bar{x}) \rightarrow \gamma_\psi(p(\bar{x}))$. Ebből a gyenge kvázifutás 4.1. definíciójának (ii) pontja éppen az állítást adja. ∎

4.12. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\mathfrak{A} \models \beta_\psi(\bar{q})$, *és* $Q = \langle \bar{q}, X \rangle$ a *p-nek egy* $\mathfrak{A}$*-beli gyenge kvázifutása. Ekkor minden* $\bar{x} \in \mathrm{fix}(Q)$*-ra* $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{x})$.

Bizonyítás. A 4.11. Lemma szerint $\mathfrak{A} \models \gamma_{\beta_\psi}(\bar{x})$ minden $\bar{x} \in X$-re, azaz ha még $\bar{x} \in \mathrm{fix}(Q)$ is igaz, akkor van olyan $\bar{r} \in A^n$ és olyan $u \in A$, melyekre

$$\mathfrak{A} \models \beta_\psi(\bar{r}) \wedge \mathrm{SEQ}(u) \wedge \alpha(\bar{r}, u) \wedge p(\bar{x}) = \bar{x} \wedge \text{„}\bar{x} \text{ az } u\text{-nak eleme”},$$

ahonnan β_ψ definíciója szerint $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{x})$. ∎

Térjünk most vissza a 4.7. tétel bizonyítására. A 4.12. Lemma szerint elegendő belátni, hogy minden $\psi \in F_t^n$-re, vagy $\mathfrak{A} \models \beta_\psi(\bar{q})$, vagy $\mathfrak{A} \models \beta_{\neg\psi}(\bar{q})$. (Ha mindkettő fennáll, akkor a 4.12. Lemma szerint Q-nak nincs fixpontja.) Most tegyük fel, hogy ezek egyike sem áll. Ez β_ψ definíciója szerint azt jelenti, hogy vannak olyan u_1 és u_2 sorozatok, és ezeknek a sorozatoknak olyan $\bar{r}_1$ és $\bar{r}_2$ elemei, melyekre

$$\mathfrak{A} \models \alpha(\bar{q}, u_i) \wedge p(\bar{r}_i) = \bar{r}_i \wedge \psi(\bar{r}_1) \wedge \neg\psi(\bar{r}_2)$$

$i = 1, 2$-re. Ekkor viszont a 4.9. Lemma alapján feltehetjük, hogy $u_1 = u_2$ (egyszerűen a hosszabb sorozatot választjuk), de ekkor a 4.10. Lemma szerint $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$, ami lehetetlen. ∎

Ide kívánkozik a következő fejezet 5.6. tételének egy következménye:

4.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $t_{\mathrm{PA}} \subset t$ *és* $\mathrm{PA} \subset T$. *Ekkor a* $Q = \langle \bar{q}, X \rangle$ *kvázifutásnak legfeljebb egy fixpontja lehet.* ∎

A 4.13. tétel, és így a 4.7. tétel feltételei közül nem hagyható el a $\mathrm{PA} \subset T$ kikötés. A 4.15. példa PA^+-ban ad meg egy olyan kvázifutást (és ezzel a 4.2. tétel szerint egyben egy folytonos futást is), melynek két, egymástól formulával megkülönböztethető fixpontja van. A konstrukció kis módosításával olyan kvázifutást is kaphatunk, melynek megszámlálhatóan sok, páronként megkülönböztethető fixpontja van. A példa megadása előtt azonban megmutatjuk, hogy ilyen típusú irregularitás erősen folytonos futásoknál már nem fordulhat elő.

4.14. Tétel. *Egy erősen folytonos futásnak legfeljebb egy fixpontja lehet.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $R: I \to A^n$ egy erősen folytonos futás, i_0, $i_1 \in I$, $i_0 \leqq i_1$ olyanok, melyekre $R(i_0)$, $R(i_1) \in \mathrm{fix}(R)$. Ekkor természetesen minden $i_0 \leqq j \leqq i_1$-re $R(j) = R(i_0)$-ból következik, hogy $R(\mathbf{s}j) = R(i_0)$, hiszen $R(i_0)$ fixpont. Így az erősen folytonos futás 3.3. definíciójának (ii*) pontja alapján *minden* $i_0 \leqq j \leqq i_1$-re $R(j) = R(i_0)$, tehát speciálisan $R(i_0) = R(i_1)$. Ebből a tétel állítása már következik. ∎

4.15. Példa. Legyen a hasonlósági típus, mellyel dolgozni fogunk, éppen t^+, az elmélet $T = \mathrm{PA}^+$, a párokon operáló program pedig a következő:

$$p(x, y) = \begin{cases} (x - 2y - 1, y + 1) & \text{ha } x - 2y - 1 \geqq 0 \\ (x, y) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Világos, hogy PA^+-ban a p függvény formulával definiálható, így valóban program. Legyen most $\mathfrak{A}$ a *teljes* Peano axiómarendszernek egy nem-sztenderd modellje, erre speciálisan $\mathfrak{A} \models \mathrm{PA}^+$ is teljesül. Legyen $a \in A$ olyan, ami minden sztenderd elemmel osztható. (Ilyen elem van, mert például az F.11. következmény szerint a faktoriális függvény definiálható PA-ban, és ha $b \in A$ tetszőleges nem-sztenderd elem, akkor b faktoriális megfelelő lesz.) Legyen $\bar{q} = (a^2, 0)$ és legyen

$$X = \{(2ia + a - i^2,\ a - i) : i \in \omega\} \cup \{(2ia - i^2,\ a - i) : 0 \leqq i \leqq a\}.$$

A következő lemma alapján $Q=\langle \bar{q}, X\rangle$ kvázifutás, másfelől világos, hogy $\mathrm{fix}(Q)=\{(a, a), (0, a)\}$, ahogyan kívántuk.

4.16. Lemma. *A fent definiált* $Q=\langle \bar{q}, X\rangle$ *egy kvázifutás.*

Bizonyítás. A $\bar{q}\in X$, valamint $\bar{x}\in X$ esetén $p(\bar{x})\in X$ nyilvánvalóan teljesül. Így a 4.1. definíció (ii*) pontját elegendő ellenőriznünk, legyen tehát $\Phi\in F^{2+m}_{t+}$ és $\bar{u}\in A^m$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$\mathfrak{A}\models\Phi(\bar{q}, \bar{u})\wedge\bigwedge_{\bar{x}\in X}[\Phi(\bar{x}, \bar{u})\to\Phi(p(\bar{x}),\bar{u})].$$

Mivel $\Phi(\bar{x}, \bar{u})$ speciálisan egy Peano-formula is, továbbá $\mathfrak{A}$ a PA-nak modellje, azért a teljes indukció axiómája miatt

$$\mathfrak{A}\models\Phi(2ia-i^2, a-i, \bar{u}) \tag{1}$$

minden $0\leqq i\leqq a$ értékre. Így ha a 4.1. definíció (ii*) pontja nem teljesülne, az csak úgy lehetséges, ha van olyan $i_0\in\omega$, hogy minden $i\in\omega$, $i\geqq i_0$ esetén $\mathfrak{A}\not\models\Phi(2ia+a-i^2, a-i, \bar{u})$, azaz

$$\mathfrak{A}\models\neg\Phi(2ia+a-i^2, a-i, \bar{u}).$$

Alkalmazzuk most az F.13. tételt a $\neg\Phi\in F^{2+m}_{t+}$ formulára. A kapott $\varphi\in E^{2+m}$ formula véges sok tag diszjunkciója, és φ végtelen sok különböző i-re teljesül. Kell lennie tehát olyan tagnak, mely végtelen sokszor lesz igaz. Ezt a tagot kissé átrendezve

$$\mathfrak{A}\models\psi(2ia+a-i^2)\wedge\bigwedge_{j<j_k}[k_j(2ia+a-i^2)+l_j(a-i)\geqq v_j] \tag{2}$$

teljesül végtelen sok $i\in\omega$-ra. Itt k_j és l_j sztenderd egész (de nem feltétlenül pozitív) szám, v_j tartalmazza a nem változó i-től független, csak $\bar{u}$-tól függő részt. A ψ formulában bizonyos, a maradékokra vonatkozó feltételek vannak. Azt állítjuk, hogy ebben az esetben található olyan $i\in\omega$, melyre

$$\mathfrak{A}\models\psi(2ia-i^2)\wedge\bigwedge_{j<j_k}[k_j(2ia-i^2)+l_j(a-i)\geqq v_j]$$

is teljesül, azaz amelyre $\mathfrak{A}\models\neg\Phi(2ia-i^2, a-i, \bar{u})$, ami ellentmond (1)-nek és ezzel állításunkat igazolja.

Ez utóbbit igazolandó először is megjegyezzük, hogy a ψ-ben szereplő, maradékokra vonatkozó feltételek továbbra is érvényben maradnak, mivel $(2ia+a-i^2)$ és $(2ia-i^2)$ egymástól éppen a-val tér el, ami a választása szerint minden sztenderd számmal osztható. Másodszorra tekintsük a (2)-ben szereplő j-edik tagot:

$$k_j(2ia+a-i^2)+l_j(a-i)\geqq v_j.$$

Jelöljük az egyenlőtlenség bal oldalán álló értéket w_i-vel, és különböztessünk meg három esetet.

1. eset. $k_j>0$. Ekkor w_i (i-ben) szigorúan monoton nő, hiszen a nem-sztenderd, így nagyobb a sztenderd i és l_j szorzatánál is, továbbá ugyanezért

$$w_{i-1}<k_j(2ia-i^2)+l_j(a-i)$$

amivel készen vagyunk.

2. eset. $k_j<0$. Ekkor w_i szigorúan monoton csökken, továbbá $w_i<k_j(2ia-i^2)+l_j(a-i)$, ami ismét az állítást adja. Végül a

3. eset. $k_j=0$, ekkor $k_j(2ia-i^2)+l_j(a-i)=w_i$, így nincs mit bizonyítani. ∎

Minden Peano modellnek a $\langle \mathbf{0}, \mathbf{s}, \leqq \rangle$ típusú reduktuma (azaz a többi konstans-reláció- és függvényjelről egyszerűen elfeledkezünk) nyilvánvalóan egy időstruktúra, s ez áll erre az $\mathfrak{A}$ struktúrára is. Jelöljük az így kapott időstruktúrát $\mathfrak{I}$-vel (ekkor persze $I=A$), és legyen az $R_1: I \to A^2$ valamint az $R_2: I \to A^2$ függvény a következő:

$$R_1(i) = \begin{cases} (a^2-i^2, i) & \text{ha } 0 \leqq i \leqq a \\ (0, a) & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$R_2(i) = \begin{cases} (a^2-i^2, i) & \text{ha } 0 \leqq i \leqq a \text{ és } a-i \text{ nem sztenderd} \\ (a^2+a-i^2, i) & \text{ha } 0 \leqq i \leqq a \text{ és } a-i \text{ sztenderd} \\ (a, a) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A 4.16. Lemma bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy R_1 és R_2 is erősen folytonos futása a p programnak, $R_1(\mathbf{0})=R_2(\mathbf{0})=(a^2, 0)$ fix $(R_1)=\{(0, a)\}$ és fix $(R_2)=\{(a, a)\}$. Ugyanakkor a 4.16. tétel szerint p-nek nincs olyan ($\mathfrak{A}$-beli) erősen folytonos futása, melynek mindkét pár egyszerre fixpontja lenne.

5. Peano-futások struktúrája

Ebben a fejezetben rögzítjük a $t \supset T_{\mathrm{PA}}$ típust, a $T \supset \mathrm{PA}$ elméletet és a p T-beli programot. Legyen továbbá $\mathfrak{A}$ a T elméletnek egy rögzített t típusú modellje, és legyen $\bar{q} \in A^n$ a vizsgálandó futások adott kezdőpontja.

Jelölje $\alpha(\bar{x}, u) \in F_t^{n+1}$ a 4.8. definícióbeli, p-re vonatkozó formulát. A 2.4. definíció közvetlen következménye, hogy a

$$J = \{a \in A: \exists u[\alpha(\bar{q}, u) \wedge \mathrm{LENGTH}(u) > a]\}$$

halmaz A-nak egy végpont nélküli kezdőszelete. Ennek és a 4.9. Lemmának alapján minden $a \in J$-re.

$$T \vdash \exists! y \forall u(\alpha(\bar{q}, u) \wedge \mathrm{LENGTH}(u) > a \to \mathrm{ELEM}(u, a) = y).$$

5.1. Definíció. Az adott $\bar{q} \in A^n$ mellett rögzített $a \in J$-re az előbbiek szerint pontosan egy olyan $y \in A$ létezik, melyre

$$\mathfrak{A} \models \alpha(\bar{q}, u) \wedge \mathrm{LENGTH}(u) > a \to \mathrm{ELEM}(u, a) = y$$

minden $u \in A$ mellett, és van olyan $u \in A$, melyre az implikáció előtagja teljesül. Így y az $\alpha(\bar{q}, u)$ definíciója szerint egy n hosszúságú sorozat, ezt a sorozatot jelöljük $\bar{q}_a$-val. Világos, hogy $\bar{q}_0=\bar{q}$, továbbá, hogy $\bar{q}_{a+1}=p(\bar{q}_a)$ minden $a \in J$-re. ∎

A következő lemmákban a $\langle \bar{q}_a: a \in J \rangle$ sorozat tulajdonságait vizsgáljuk.

5.2. Lemma. *Legyen $\psi \in F_{t_{\mathrm{PA}}}^{1+n+m}$ egy tetszőleges Peano formula, és legyen $\bar{r} \in A^m$ rögzített. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \not\models \psi(a, \bar{q}_a, \bar{r})$ valamilyen $a \in J$-re. Ekkor van egy legkisebb ilyen index, azaz olyan $a \in J$, melyre $\mathfrak{A} \not\models \psi(a, \bar{q}_a, \bar{r})$, de $\mathfrak{A} \models \psi(b, \bar{q}_a, \bar{r})$ minden $b>a$-ra.*

Bizonyítás. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, ebből bizonyítjuk, hogy $\mathfrak{A} \models \psi(a, \bar{q}_a, \bar{r})$ minden $a \in J$-re. Legyen tehát $a \in J$ rögzített. A $\langle \bar{q}_a: a \in J \rangle$ sorozat definíciója szerint létezik olyan $u \in A$, melyre

$$\mathfrak{A} \models \alpha(\bar{q}, u) \wedge \mathrm{LENGTH}(u) > a \wedge \mathrm{ELEM}(u, a) = \bar{q}_a.$$

Jelölje $\Phi(x, u, \bar{r})$ a következő formulát:

$$x > \mathrm{LENGTH}(u) \to \psi(x, \mathrm{ELEM}(u, x), \bar{r}).$$

A feltételünk szerint ez egy Peano formula, azért

$$T \vdash [(\forall x < y)\Phi(x, u, \bar{r}) \to \Phi(y, u, \bar{r})] \to \forall x \Phi(x, u, \bar{r}),$$

tehát ez a formula érvényes $\mathfrak{A}$-ban is. Most a szögletes zárójelben álló implikáció érvényességét éppen az indirekt feltevésünk biztosítja, tehát $\mathfrak{A} \models \Phi(a, u, \bar{r})$ minden $a \in A$-ra, speciálisan az általunk választott a-ra is. Mivel $\mathrm{LENGTH}(u) > a$ volt, azért ez éppen $\mathfrak{A} \models \psi(a, \bar{q}_a, \bar{r})$ érvényességét jelenti, amit igazolni akartunk. ∎

A lemma alapján a $\langle \bar{q}_a : a \in J \rangle$ sorozatra indukció-típusú bizonyításokat adhatunk.

5.3. Lemma. *Legyen* $u, v \in A$, $u \in J$, $u + v \in J$, $v \neq 0$ *tegyük fel, hogy* $\bar{q}_u = \bar{q}_{u+v}$. *Ekkor* $J = A$ és $\bar{q}_{u+x} = \bar{q}_{u+x+v \cdot y}$ *minden* $x, y \in A$*-ra.*

Bizonyítás. Legyen először $y = 1$, és az előző megjegyzésünk alapján használjunk x szerinti indukciót. Ezután rögzítsük x-et és használjunk y szerinti indukciót. ∎

5.4. Lemma. *Van olyan* $E \subset J$, *mely teljesíti az alábbi* (i)–(iii) *feltételeket:*

(i) $E = J$, *vagy van olyan* $e \in A$, *melyre* $E = \{a \in A : a \leqq e\}$;

(ii) *ha* $a, b \in E$, *akkor* $\bar{q}_a \neq \bar{q}_b$;
(iii) *minden* $a \in J$*-re van olyan* $b \in E$, *hogy* $\bar{v}_a = \bar{q}_b$.

Bizonyítás. Ha a $\langle \bar{q}_a : a \in J \rangle$ sorozat minden eleme különböző, akkor $E = J$ kielégíti (i)—(iii)-t. Így feltehetjük, hogy van olyan $\bar{q}_a$, hogy $\bar{q}_a$ legalább kétszer szerepel a sorozatban. Ez egy Peano formulával kifejezhető tulajdonság, így az 5.2. Lemma alapján feltehetjük, hogy $\bar{q}_a$ a minimális indexű, ezzel a tulajdonsággal rendelkező elem. Ez a $\bar{q}_a$ többször is előfordul a $\langle \bar{q}_a : a \in J \rangle$ sorozatban, tehát szintén az 5.2. Lemma alapján van második előfordulása is, azaz olyan $e \geqq a$, hogy $\bar{q}_{e+1} = \bar{q}_a$, de ha $a < b \leqq e$, akkor $\bar{q}_a \neq \bar{q}_b$. Állítjuk, hogy az $E = \{a \in A : a \leqq e\}$ megfelelő. Valóban, (i) az E definíciójából világos. (ii)-t csak az $a < b_1 < b_2 \leqq e$ esetben kell ellenőrizni, hiszen az a-nál kisebb indexű elemek csak egyszer fordulnak elő a sorozatban, és $\bar{q}_{e+1}$ volt $\bar{q}_a$-nak második előfordulása. Tegyük fel indirekte, hogy $\bar{q}_{b_1} = \bar{q}_{b_2}$. Ekkor az 5.3. Lemmában az $x = \mathrm{rem}\,(e + 1 - b_1, b_2 - b_1)$, $u = b_1$, $v = b_2 - b_1$ szerepcsosztással $\bar{q}_{e+1} = \bar{q}_{b_1+x}$. Viszont $a < b_1 + x \leqq b_2 \leqq e$, ezért e definíciója alapján $\bar{q}_{b_1+x} \neq \bar{q}_a = \bar{q}_{e+1}$, ellentmondás. Végül (iii) az 5.3. Lemma egyszerű következménye. ∎

5.5. Tétel. *Legyen* $Q = \langle \bar{q}_0, X \rangle$ a p *programnak egy tetszőleges* $\mathfrak{A}$*-beli,* $\bar{q} = \bar{q}_0$*-ból induló kvázifutása. Ekkor létezik olyan* $S \subset E$ *kezdőszelet, hogy* $X = \{\bar{q}_a : a \in S\}$.

Bizonyítás. Először is állítjuk, hogy minden $\bar{r} \in X$-hez van olyan $a \in J$, hogy $\bar{r} = \bar{q}_a$. Legyen ugyanis a $\Psi(\bar{y}, \bar{x}, m)$ formula a következő:

$$\exists u(\alpha(\bar{x}, u) \wedge \mathrm{LENGTH}(u) = m \wedge \mathrm{ELEM}(u, m) = \bar{y}),$$

legyen továbbá $\Phi(\bar{y}, \bar{x}) = \exists m \Psi(\bar{y}, \bar{x}, m)$. Világos, hogy $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{q}_0, \bar{q}_0)$, továbbá a p egyértelműsége miatt

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{r}, \bar{q}_0) \to \Phi(p(\bar{r}), \bar{q}_0).$$

Ezekből és kávizfutás 4.1. definíciója alapján $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{r}, \bar{q}_0)$ minden $\bar{r} \in X$-re, ami az állításunkat bizonyítja.

Az 5.2. Lemma alapján minden $\bar{r} \in X$-hez létezik egy *legkisebb* olyan $a \in A$, melyre $\bar{r} = \bar{q}_a$, jelöljük ezt az $a \in A$-t $f(\bar{r})$-rel, és legyen $S = \text{Range}(f)$. Világos, hogy $S \subset E$, továbbá, ha $a \in S$, $a \neq e$, akkor $a+1 \in S$. Azt kell csak megmutatnunk, hogy S kezdőszelet. E célból legyen $b \in A$, $b \notin S$, és legyen

$$\chi(\bar{y}, \bar{x}, z) = (\exists m < z)\Psi(\bar{y}, \bar{x}, m).$$

Mivel $\bar{q}_0 \in X$, azért $0 \in S$, így $0 < b$, tehát $\mathfrak{A} \models \chi(\bar{q}_0, \bar{q}_0, b)$. Továbbá S és b definíciója, és $f(p(\bar{r})) \leqq f(\bar{r}) + 1$ alapján

$$\mathfrak{A} \models \chi(\bar{r}, \bar{q}_0, b) \to \chi(p(\bar{r}), \bar{q}_0, b)$$

ha $\bar{r} \in X$. A kvázifutás definíciója miatt $\mathfrak{A} \models \chi(\bar{r}, \bar{q}_0, b)$ minden $\bar{r} \in X$-re, ahonnan $f(\bar{r}) < b$. Így S valóban kezdőszelet. ∎

5.6. Tétel. *Legyen $\mathfrak{I}$ egy időstruktúra, $R: I \to A^n$ a p programnak egy tetszőleges folytonos futása. Ekkor R-nek legfeljebb egy fixpontja lehet, azaz* $|\text{fix}(R)| \leqq 1$.

Bizonyítás. Legyen $R(\mathbf{0}) = \bar{q}_0$, a 4.2. tétel szerint $\langle R(\mathbf{0}), \text{Range}(R)\rangle$ a p programnak egy kvázifutása. Az előző tétel szerint tehát $\text{Range}(R) \subset \{\bar{q}_a : a \in E\}$. Az 5.4. Lemma (ii) állítása szerint azonban az utóbbi halmaz minden eleme különböző, így ha $a \in E$, $a \neq e$, akkor $p(\bar{q}_a) = \bar{q}_{a+1} \neq \bar{q}_a$, ami éppen az állítást bizonyítja. ∎

Az előző két tétel közvetlen folyománya az

5.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $R: I \to A^n$ folytonos futás $R(\mathbf{0}) = \bar{q}_0$-ból indul és R-nek van fixpontja. Ekkor* $\text{Range}(R) = \{\bar{q}_a : a \in E\}$ *és* $\text{fix}(R) = \{\bar{q}_e\}$. ∎

Az 5.5. Tételben lényegében jellemeztük a p program összes, adott kezdőpontból induló kvázifutását. A következőkben p folytonos futásait vizsgáljuk.

5.8. Definíció. Legyen $\mathfrak{I}$ egy időstruktúra, és legyen $R: I \to A^n$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy R *vetülete* $a\langle \bar{q}_a : a \in J\rangle$ sorozatnak, ha van olyan $f: I \to J$ függvény és olyan $S \subset J$ kezdőszelet, hogy

(i) $$\{\bar{q}_a : a \in \text{Range}(f)\} = \{\bar{q}_a : a \in S\}$$

(ii) $$f(\mathbf{0}) = 0, \quad f(\mathbf{s}i) = f(i) + 1$$

(iii) $$R(i) = \bar{q}_{f(i)}.$$ ∎

A T elméletre tett feltevésünk szerint T tartalmazza a Peano axiómarendszert, így T modelljei egyúttal a Peano modelljei is. Speciálisan ez áll az $\mathfrak{A}$ modellre is.

5.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ a Peano axiómarendszernek egy nem-sztenderd modellje, $\mathfrak{I}$ pedig egy tetszőleges időstruktúra. Ekkor a p program minden $R: I \to A^n$, $R(\mathbf{0}) = \bar{q}_0$-ból induló folytonos futása a $\langle \bar{q}_a : a \in J\rangle$ sorozat vetülete.*

Bizonyítás. Csak úgy, mint az 5.6. Tétel bizonyításában, most is abból indulunk ki, hogy $\langle R(\mathbf{0}), \text{Range}(R)\rangle$ a p programnak egy kvázifutása. Az 5.5. Tétel (és bizonyítása) szerint van olyan $S \subset E$ kezdőszelet és olyan $f: I \to S$ függvény, melyre $\text{Range}(f) = S$, $R(i) = \bar{q}_{f(i)}$, és $f(i) \neq e$ esetén $f(\mathbf{s}i) = f(i) + 1$. Most különböztessünk meg két esetet.

1. eset. $E=J$ vagy $E\neq J$, de $e\notin S$. Ez esetben f és S kielégíti az 5.8. definícióban szereplő (i)—(iii) feltételeket.

2. eset. $e\in S\neq J$, azaz $E=S$ és $J=A$. Legyen $a\in E$ az az 5.4. Lemma szerint létező egyetlen index, amire $\bar{q}_a=\bar{q}_{e+1}$. Az 5.3. Lemma alapján, ha $b=a+x\cdot(e+1-a)$, akkor $\bar{q}_b=\bar{q}_a=\bar{q}_{e+1}$. Válasszuk x-nek az A valamely nem sztenderd elemét, és definiáljuk a $g: I\to A$ függvényt a következőképpen. Legyen $i\in I$ adott. Ha van olyan $k\in\omega$, hogy $i=\mathbf{s}^k\mathbf{0}$, akkor legyen $g(i)=k$. Ha nincs ilyen k, de $f(\mathbf{s}^{-k}i)=a-1$ valamilyen $k\in\omega$-ra (minden I-beli elemnek egyértelmű megelőzője van, tehát $\mathbf{s}^{-k}i$ értelmes), akkor legyen $g(i)=a-1+k$. Ha ez az eset sem állna fenn, de $f(\mathbf{s}^j i)=e$ valamely $j\in\mathbf{Z}$-re, legyen $g(i)=e-j$, végül minden más esetben legyen $g(i)=f(i)$. Könnyű ellenőrizni, hogy E, mint kezdőszelet, és g kielégíti az 5.8. definícióban szereplő feltételeket. ∎

Megjegyezzük, hogy az előző tételben a feltételek közül nem hagyható el az, hogy $\mathfrak{A}$ nem sztenderd modell, amint azt a $p(x)=x$, $I=\omega\cup\mathbf{Z}$ és $R(i)=0$ minden $i\in I$-re példa mutatja. Az 5.9. Tétel állítása bizonyos további feltételek teljesülése esetén megfordítható.

5.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy a T elmélet minden $\Phi\in F_t^{1+m}$ formulára tartalmazza a*

$$[\Phi(0,\bar{y})\wedge\forall x(\Phi(x,\bar{y})\to\Phi(x+1,\bar{y}))]\to\forall x\Phi(x,\bar{y})$$

formulát. (Ez a helyzet például, ha $t=t_{\mathrm{PA}}$.) Ekkor a $\langle\bar{q}_a: a\in J\rangle$ sorozat minden vetülete a p program folytonos futása.

Bizonyítás. Legyen $R: I\to A^n$, és tanúsítsa az $S\subset J$ kezdőszelet és az $f: I\to A$ függvény azt, hogy R vetülete $a\langle\bar{q}_a: a\in J\rangle$ sorozatnak. A vetület definíciója és a 4.2. Tétel alapján elég megmutatni, hogy ha $Y=\{\bar{q}_a: a\in S\}$, akkor $\langle\bar{q}_0, Y\rangle$ egy kvázifutás. A $\bar{q}_0\in Y$, illetve az $\bar{r}\in Y$ esetén $p(\bar{r})\in Y$ teljesülése az 5.8. definíció (ii) feltétele alapján világos. Legyen most $\Psi\in F_t^{n+m}$ és $\bar{r}\in A^m$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy

$$\mathfrak{A}\models\Psi(\bar{q}_0,\bar{r})\wedge\bigvee_{a\in S}[\Psi(\bar{q}_a,\bar{r})<\Psi(\bar{q}_{a+1},\bar{r})]. \tag{1}$$

Legyen $\Phi(x,u,\bar{r})$ a következő formula: „$x<\mathrm{LENGTH}(u)\to\Psi(\mathrm{ELEM}(u,x),\bar{r})$" Erre a formulára a feltétel alapján igaz az indukciós axióma, tehát

$$\mathfrak{U}\models[\Phi(0,u,\bar{r})\wedge\forall x(\Phi(x,u,\bar{r})\to\Phi(x+1,u,\bar{r}))]\to\forall x\Phi(x,u,\bar{r}).$$

Legyen most $a\in S$ tetszőleges, és legyen $u\in A$ olyan, melyre $\mathfrak{A}\models\alpha(\bar{q}_0,u)$ és $\mathfrak{A}\models$ $\models\mathrm{LENGTH}(u)=a+1$. A szögletes zárójelben álló implikációt (1) biztosítja, mivel, ha $x<\mathrm{LENGTH}(u)$, akkor $x\in S$. Így $\mathfrak{A}$-ban igaz a konklúzió is, azaz $\mathfrak{A}\models\Phi(\bar{q}_a,\bar{r})$, amit igazolni akartunk. ∎

Az 5.10. tételben szereplő feltétel szükséges is a következő értelemben.

5.11. Állítás. *Van olyan $t\supset t_{\mathrm{PA}}$ típus, $T\supset\mathrm{PA}$ (eldönthető) elmélet és olyan p T-beli program, hogy T-nek minden $\mathfrak{A}$ modelljében tetszőleges $\bar{q}_0$ mellett a $\langle\bar{q}_a: a\in J\rangle$ sorozat valamelyik vetülete nem folytonos futása p-nek.*

Bizonyítás. Legyen $t=t_{\mathrm{PA}}\cup\{\varrho\}$, ahol ϱ egy új egyváltozós relációjel. A következő F_t^0-beli formulát α-val jelöljük:

$$\varrho(0)\wedge\forall x[(\varrho(x)\vee\varrho(x+2))\to\varrho(x+1).$$

Legyen $T=\mathrm{PA}\cup\{\alpha, \neg\forall x\varrho(x)\}$, és legyen p az a program, melyre $p(x)=x+1$. Legyen továbbá $\mathfrak{A}$ tetszőleges modellje a T elméletnek. Ekkor az 5.1. definíció alapján $\bar{q}_0=0$ esetén $\bar{q}_a=a$ minden $a\in A$-ra. Legyen $\mathfrak{I}$ az $\mathfrak{A}$ struktúra $\langle \mathbf{0}, \mathbf{s}, \leqq\rangle$ típusú reduktuma, $\mathfrak{I}$ nyilván egy időstruktúra, és $I=A$. Az $R: A\to A$, $R(a)=a$ függvény vetülete $\langle \bar{q}_a: a\in A\rangle$-nak, ugyanakkor R nem folytonos futás, hiszen

$$\mathfrak{A}\models\varrho(R(\mathbf{0}))\wedge\bigwedge_{i\in I}[\varrho(R(i))\to\varrho(R(\mathbf{s}i))],$$

míg ugyanakkor $\neg\forall x\varrho(x)\in T$ miatt $\mathfrak{A}\models(\exists i\in I)\neg\varrho(R(i))$. Így a folytonos futás 3.3. definíciójának (ii) feltétele nem teljesül.

Eddig láttuk, hogy T minden modelljében van olyan $\langle \bar{q}_a: a\in A\rangle$, melynek valamelyik vetülete nem folytonos futás. Legyen végül

$$T_1 = T\cup\{\forall x\exists y[x\leqq y\wedge(\varrho(x)\leftrightarrow\neg\varrho(y))]\},$$

és legyen $\mathfrak{A}\models T_1$. A fentiekhez hasonlóan könnyű belátni, hogy ebben az esetben minden $\langle \bar{q}_a: a\in A\rangle$ sorozatnak az egyik vetülete nem folytonos futása p-nek. ∎

6. Standard futások

A fejezetben a programfutás intuitív fogalmához legközelebb eső definíciójával, az ún. sztenderd futásokkal foglalkozunk. Mint az várható, erre a futásfogalomra nézve a Floyd—Hoare levezethetőség igen általános feltételek mellett nem teljes, de azért néhány meglepő teljességi tételt is fogunk bizonyítani. A sztenderd futásokra vonatkozó legerősebb nemteljességi tételt eddig [5]-ben bizonyították.

6.1. Definíció. Legyen $T\subset F_t^0$ egy elmélet, $\varphi\in F_t^{2n}$ egy T-beli program, $\mathfrak{A}$ pedig a T elmélet egy modellje. A φ program $\mathfrak{A}$-beli *sztenderd futásai* azok az $R: \omega\to A^n$ függvények, melyekre $\mathfrak{A}\models\varphi(R(i), R(i+1))$ minden $i\in\omega$-ra. ∎

Egy program sztenderd futásai pontosan azok az (erősen) folytonos futások, melyekben az $\mathfrak{I}$ időstruktúra éppen az $\mathfrak{I}_{\mathrm{st}}=\langle\omega, 0, ', \leqq\rangle$ sztenderd időstruktúrával esik egybe.

6.2. Definíció. A fenti jelölések mellett a $\varphi\in F_t^{2n}$ program parciálisan helyes $\mathfrak{A}$-ban a sztenderd futásokra nézve a φ_{be} és $\varphi_{\mathrm{ki}}\in F_t^n$ feltételek mellett, jelben $\mathfrak{A}\overset{S}{\models}(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, ha minden $\mathfrak{A}$-beli R sztenderd futásra, ha $\mathfrak{A}\models\varphi_{\mathrm{be}}(R(\mathbf{0}))$ és $R(i)=R(i+1)$ valamely $i\in\omega$-ra, akkor $\mathfrak{A}\models\varphi_{\mathrm{ki}}(R(i))$ ugyanarra az i-re.

Ha a T elmélet minden $\mathfrak{A}$ modelljére $\mathfrak{A}\overset{S}{\models}(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, akkor ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $T\overset{S}{\models}(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$. ∎

Világos, hogy $T\vdash(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$ esetén $T\overset{S}{\models}(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$ is fennáll. Ennek a megfordítása, sajnos, egyetlen gyakorlati szempontból érdekes esetben sem igaz.

6.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a t hasonlósági típusban szerepel a 0 konstansjel, valamint az f egyváltozós függvényjel; hogy a $T\subset F_t^0$ elmélet rekurzívan felsorolható, és hogy $T\vdash f^k(0)\neq f^l(0)$ minden $k, l\in\omega$, $k\neq l$-re. Ekkor van olyan $\varphi\in F_t^{2n}$ T-beli program, olyan φ_{be} és $\varphi_{\mathrm{ki}}\in F^n$ feltételek, hogy $T\overset{S}{\models}(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, míg ugyanakkor $T\not\vdash(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$.*

Bizonyítás. A bizonyítás módszere a szokásos „átlós" eljárás. Jelöljük a τ objektum Gödel-számát $\ulcorner\tau\urcorner$-val. A t típusra és a T elméletre tett feltevéseink alapján a T tetszőleges modelljében a $\{0, f(0), f(f(0)), \ldots\}$ halmazt azonosíthatjuk a természetes számokkal. Így a $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ halmaz egy (primitív rekurzív függvény által adott) felsorolását felhasználva tudunk olyan T-beli programot írni, melynek minden sztenderd futása felsorolja az összes olyan $\ulcorner(\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})\urcorner$ értéket, melyre $T \vdash (\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$. Ez a program természetesen megírható úgy is, hogy kizárólag a 0 konstans jelet, az f függvényjelet és az $=$ relációjelet használja.

Adott p T-beli programra és $m \in \omega$-ra jelölje $p(m)$ azt a (T-beli) programot, melyet p-ből úgy kapunk, hogy első utasítása elé az „$y_0 \leftarrow f^m(0)$" értékadó utasítást tesszük. A fentiek alapján tehát van olyan $\tilde{p}$ T-beli program is, hogy minden $(\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$ hármasra a $\tilde{p}(\ulcorner(\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})\urcorner)$ program tetszőleges sztenderd futása akkor és csak akkor áll meg a T elmélet bármely $\mathfrak{A}$ modelljében, ha

$$T \vdash (\varphi_{be}, p(\ulcorner(\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})\urcorner), \varphi_{ki}).$$

Legyen $m = \ulcorner(\text{igaz}, \tilde{p}, \text{hamis})\urcorner$. Most $T \overset{S}{\models} (\text{igaz}, \tilde{p}(m), \text{hamis})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\tilde{p}(m)$ egyetlen sztenderd futása sem áll meg; ez pedig $\tilde{p}$ és m definíciója alapján akkor és csak akkor igaz, ha

$$T \nvdash (\text{igaz}, \tilde{p}(\ulcorner(\text{igaz}, \tilde{p}, \text{hamis}), \urcorner)\ \text{hamis}),$$

azaz ha

$$T \nvdash (\text{igaz}, \tilde{p}(m), \text{hamis}).$$

Ha most $T \vdash (\text{igaz}, \tilde{p}(m), \text{hamis})$ állna, akkor egyrészt a sztenderd futás definíciója alapján $T \overset{S}{\models} (\text{igaz}, \tilde{p}(m), \text{hamis})$, másrészt a most kapott ekvivalenciák alapján $T \overset{S}{\not\models} (\text{igaz}, \tilde{p}(m), \text{hamis})$, ellnetmondás. Így az $(\text{igaz}, \tilde{p}(m), \text{hamis})$ hármas eleget tesz a tétel követelményeinek. ∎

Jegyezzük meg, hogy a most kapott $(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ ellenpélda olyan, hogy a benne szereplő mindhárom formula kvantormentes. Felmerülhet az a remény, hogy ha megszorítjuk a bizonyítandó állítások halmazát (pl. megkövetelve, hogy $T \vdash \vdash \exists x_0, \ldots, x_m \varphi_{ki}$ legyen, ha $\varphi_{ki} \in F_t^m$), akkor eltűnik a fenti negatív eredmény. Ezt a reményt eloszlatja [5].

Ha a 6.3. tétel feltételei közül elejtjük azt, hogy T rekurzívan felsorolható legyen, akkor a következmény már nem feltétlenül teljesül. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathfrak{N} = \langle \omega, 0, 1, +, \cdot \rangle$ jelöli a Peano axiómák sztenderd modelljét.

6.4. Tétel. *Legyen $t = t_{PA}$, és álljon $T \subset F_t^0$ pontosan azokból a $\psi \in F_t^0$ formulákból, melyekre $\mathfrak{N} \models \psi$ (azaz T az $\mathfrak{N}$ modell teljes elmélete). Ekkor minden $\varphi \in F_t^{2n}$ T-beli programra és minden $\varphi_{be}, \varphi_{ki} \in F_t^n$ feltételre, $T \overset{S}{\models} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ akkor és csak akkor, ha $T \vdash (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$.*

Bizonyítás. Elegendő az állításnak az „akkor" részét bizonyítani. E célból tegyük fel, hogy $T \nvdash (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$. A 3.6. Tétel alapján ekkor van T-nek olyan $\mathfrak{A}$ modellje és olyan $R : I \to A^n$ folytonos futás, melyre $\mathfrak{A} \models \varphi_{be}(R(\mathbf{0}))$ és valamely $i \in I$-re $R(i) = R(\mathbf{si})$ és $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_{ki}(R(i))$. Persze a Peano axiómák a T elméletnek egy részét alkotják, így alkalmazhatjuk az 5.7. Tételt, ami szerint, ha $R(\mathbf{0}) = \bar{q}_0$, akkor $\text{fix}(R) = \{\bar{q}_e\}$, tehát $\mathfrak{A} \models \exists \bar{q}_0(\varphi_{be}(\bar{q}_0) \wedge \neg\varphi_{ki}(\bar{q}_e))$. Így az 5.1. definíció alapján $\mathfrak{A} \models \exists u \Phi(u)$, ahol $\Phi(u) \in F_t^1$ a következő, félig formalizáltan felírt Peano formula:

„u egy olyan sorozat, melynek elemei n elemű sorozatok; u első elemére a φ_{be} formula igaz; minden $i<\mathrm{LENGTH}(u)$-ra, ha u-nak az $(i-1)$-edik és i-edik eleme $\bar{x}$, illetve $\bar{y}$, akkor rájuk $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ áll; továbbá van u-nak két szomszédos, egymással egyenlő eleme, melyek a $\neg\varphi_{ki}$ formulát kielégítik".

A T elmélet teljes, és mivel a $\exists u\Phi(u)\in F_t^0$ a T-nek egy modelljében teljesül, azért $\exists u\Phi(u)\in T$. Így $\exists u\Phi(u)$ igaz T-nek minden modelljében, speciálisan az $\mathfrak{N}$ sztenderd modellben is. Ez pedig azt jelenti, hogy valamely sztenderd elemekből álló sztenderd $u=\langle\bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots\rangle$ sorozatra $\mathfrak{N}\models\Phi(u)$. Definiáljuk most az $R^*\colon \omega\to\omega^n$ függvényt az $R^*(i)=\bar{q}_i\,(i\in\omega)$ összefüggéssel; $\mathfrak{N}\models\Phi(u)$ alapján R^* sztenderd futása a φ programnak, és R^* tanusítja, hogy a T elmélet $\mathfrak{N}$ modelljében $(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ nem igaz a sztenderd futásokra nézve. Így $T\overset{S}{\not\models}(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$, ahogyan kívántuk. ∎

Amennyiben a φ_{be}, φ és φ_{ki} mindannyian Δ_0 formulák (és a sorozatkódoló formuláknak azokat választjuk, melyeket a függelékben definiálunk), akkor a bizonyításban szereplő $\Phi(u)$ formula is egy Δ_0 formula. Ebben az esetben ahhoz, hogy az $\mathfrak{N}\models\exists u\Phi(u)$ feltételből következtetni tudjunk arra, hogy $\mathfrak{N}\models\exists u\Phi(u)$, elegendő megkövetelnünk, hogy a T elmélet (a Peano axiómákon kívül) az összes $\mathfrak{N}$-ben igaz Π_1 formulát tartalmazza.

6.5. Tétel. *Jelölje $\Pi_1\subset F^0_{t_{PA}}$ azokat a ψ Π_1-formulákat, melyekre $\mathfrak{N}\models\psi$. Ekkor minden $\varphi\in F^{2n}_{t_{PA}}$ és $\varphi_{be}, \varphi_{ki}\in F^n_{t_{PA}}$ Δ_0-formulákra, ha φ egy $\mathrm{PA}\cup\Pi_1$ program, akkor $\mathrm{PA}\cup\Pi_1\overset{S}{\models}(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{PA}\cup\Pi_1\vdash(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$.* ∎

Az a megszorítás, hogy a programunkat egy Δ_0 formula definiálja, nem lényeges, hiszen minden valódi (blokk-diagram) programot egy kvantormentes formula definiál. Az pedig, hogy az input és output feltételeinket is megszorítjuk a Δ_0 formulákra, valamilyen értelemben azt a követelményünket fejezi ki, hogy ezek fennállását egy egyszerű, mechanikus módon el lehessen dönteni. (Hiába jó egy program, ha nem lehet eldönteni, hogy amit kiadott, az tényleg jó.) A 6.3. Tétel bizonyításához fűzött megjegyzésünk értelmében a Π_1 formulahalmaz nem lehet rekurzívan felsorolható, s bár a Floyd—Hoare levezethetőség teljes ezekkel a megszorításokkal a sztenderd futásokra nézve, gyakorlatilag nem használható, hiszen általában nem tudjuk, hogy milyen formulák vannak Π_1-ben.

Megjegyezzük még, hogy a 6.4. Tétel bizonyításának kis módosításával azt is igazolhatjuk, hogy egy $\mathfrak{N}$-beli program akkor és csak akkor teljesen helyes $\mathfrak{N}$-ben, ha ezt a tényt az $\mathfrak{N}$ teljes elméletéből le is tudjuk vezetni. Ennek a Δ_0 formulákra és a $\mathrm{PA}\cup\Pi_1$-re vonatkozó megfelelője már nem igaz. J. Paris és L. Harrington [21] megadott olyan $\psi(x, y)\in F^2_{t_{PA}}$ Δ_0-formulát, hogy $\forall x\exists y\psi(x, y)$ független $\mathrm{PA}\cup\Pi_1$-től (azaz sem ő, sem a tagadása nem vezethető le $\mathrm{PA}\cup\Pi_1$-ből), míg ugyanakkor minden $n\in\omega$ természetes számra $\mathrm{PA}\vdash\exists y\psi(\mathbf{n}, y)$. Legyen p PA-beli program a következő:

$$p(x, y)=\begin{cases}(x, y) & \text{ha } \psi(x, y)\\ (x, y+1) & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Világos, hogy a $p=p_\varphi$ programot definiáló $\varphi\in F^4_{t_{PA}}$ formula Δ_0, és hogy $\mathfrak{N}$-ben a p program teljesen helyes a $\varphi_{be}(x, y)=$„$y=0$" és a $\varphi_{ki}(x, y)=$„igaz" feltételekre nézve (azaz p $\mathfrak{N}$-beli sztenderd futásai minden megengedett kezdőértékre megállnak). Ugyanekkor ezt a tényt $\mathrm{PA}\cup\Pi_1$-ből nem lehet levezetni, mivel ez egyúttal a $\mathrm{PA}\cup\Pi_1\vdash\forall x\exists y\psi(x, y)$ levezethetőséget is adná, amiről tudjuk, hogy nem áll fenn.

A 6.5. tételben az $\mathfrak{N}$ elméletének jelentős részét azzal sikerült lefaragnunk, hogy feltételként csak Δ_0 formulákat engedtünk meg. Ha φ_{be} és φ_{ki} feltételként tetszőleges (Peano) formulát meg szeretnénk engedni, akkor $\mathfrak{N}$ teljes elméletéből nem engedhetünk.

6.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\mathrm{PA} \subset T \subset F^0_{t_{\mathrm{PA}}}$ *(konzisztens) elméletre teljesül a következő állítás. Tetszőleges* $\varphi \in F^{2n}_{t_{\mathrm{PA}}}$ *Peano programra, valamint* $\varphi_{be}, \varphi_{ki} \in F^n_{t_{\mathrm{PA}}}$ *feltételekre, ha* φ *még* Δ_0 *formula is, akkor* $T \overset{S}{\models} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ *és* $T \vdash (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ *ekvivalensek. Ekkor* T *az* $\mathfrak{N}$ *modell teljes elmélete.*

Bizonyítás. Legyen p a következő PA-beli, párokon operáló program:

$$p(x, y) = \begin{cases} (x, y-1) & \text{ha } y \neq 0 \\ (x, y) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Világos, hogy ezt a programot egy Δ_0 (sőt egy kvantormentes) formulával definiálhatjuk, és az is világos, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}$ Peano modellre és $a \in A$-ra

$$Q = \langle (a, a), \{(a, b) \colon b \in A,\ b \leqq a\} \rangle$$

a p programnak egy olyan (a, a)-ból induló kvázifutása, melyre $\mathrm{fix}(Q) = \{(a, 0)\}$. Legyen $\varphi_{be}(x, y) = \text{„}x = y\text{”}$, ekkor a tétel feltételei szerint minden $\varphi_{ki} \in F^2_{t_{\mathrm{PA}}}$ formulára $T \overset{S}{\models} (\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$ akkor és csak akkor, ha $T \vdash (\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$. Állítjuk, hogy már ebből is következik, hogy T az $\mathfrak{N}$ teljes elmélete. E célból m-re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy az alábbi állítás minden $m \in \omega$-ra fennáll, ami nyilvánvalóan elegendő:

(*) *minden* $\varphi \in F^0_{t_{AP}}$ Σ_m *formulára, ha* $\mathfrak{A} \models \varphi$, *akkor* $T \vdash \varphi$;

ha $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, *akkor* $T \vdash \neg\varphi$.

A (*) állítás $m = 0$-ra tiriviális, hiszen $\mathrm{PA} \subset T$ és az $F^0_{t_{\mathrm{PA}}}$-beli $\Sigma_0 = \Delta_0$ formulák egyáltalán nem tartalmaznak változójelet, és így igazságuk már PA-ban eldől.

Tegyük most fel, hogy (*) fennáll valamilyen m-re, és legyen $\exists x \varphi(x) \in F^0_{t_{\mathrm{PA}}}$ egy Σ_{m+1}-formula. Ekkor minden $n \in \omega$-ra $\varphi(\mathbf{n}) \in F^0_{t_{\mathrm{PA}}}$ egy Π_m formula, tehát $\neg\varphi(\mathbf{n})$ egy Σ_m formula. Ha most van olyan $n \in \omega$, hogy $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{n})$, akkor $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x)$, és az indukciós feltevésünk szerint $T \vdash \varphi(\mathbf{n}) \vdash \exists x \varphi(x)$. Így feltehető, hogy nem ez a helyzet, azaz $\mathfrak{N} \models \neg\exists x \varphi(x)$, és ekkor megint az indukciós feltétel folytán $T \vdash \neg\varphi(\mathbf{n})$ minden $n \in \omega$-ra. A fenti $(\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$ hármasban válasszuk a $\varphi_{ki}(x, y)$ formulát éppen $\neg\varphi(x)$-nek. Ekkor $T \overset{S}{\models} (\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$, hiszen T tetszőleges $\mathfrak{A}$ modelljében a p program egy sztenderd futása pontosan akkor áll meg, ha a programfutás kezdeti állapotában szereplő két (a φ_{be} szerint egyenlő) érték egymással egyenlő értékű sztenderd egész; ezekre viszont $T \vdash \neg\varphi(\mathbf{n})$ áll. Így tehát $T \vdash (\varphi_{be}, p, \varphi_{ki})$ is fennáll, ami viszont azt jelenti, hogy nemcsak a sztenderd futások, hanem a kvázifutások is parciálisan helyesek, így T tetszőleges $\mathfrak{A}$ modelljében minden, fenti típusú Q kvázifutás is az. S mivel Q kezdőpontja (a, a) kielégíti a φ_{be} kezdeti feltételt, Q fixpontjára $\neg\varphi(x)$ teljesül, azaz $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(a)$ minden $a \in A$-ra. Ez pedig azt jelenti, mivel $\mathfrak{A}$ tetszőleges volt, hogy $T \vdash \forall x \neg\varphi(x) \vdash \neg\exists x \varphi(x)$. ∎

7. *Dinamikus futások*

A programfutások eddigi definícióiban mindig — ha implicite is — három objektum szerepelt: egy időstruktúra, egy $\mathfrak{A}$ adatstruktúra, és egy $R: I \to A^n$ függvény. Ha most az R függvényt mint egy vektort gondoljuk el, melynek koordinátái R_1, R_2, ..., R_n (mind I-ből A-ba ható függvények), akkor az $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{A}, R \rangle$ hármas egy 2-szortú modell a szokásos értelemben [1, 3, 4, 6, 19, 23]. Az $\mathfrak{M}$ két szortja a ι időszort és a τ adatszort; hasonlósági típusa pedig az alábbi részekből áll:

— a ι szortú $\mathfrak{I}$ időstruktúra $\langle \mathbf{0}, \mathbf{s}, \leqq \rangle$ hasonlósági típusából;
— a τ szortú $\mathfrak{A}$ adatstruktúra t típusából, valamint
— az R_1, ..., R_n függvényjelekből, melyek mind $\langle \iota, \tau \rangle$ szortuak, ami pontosan annyit jelent, hogy mindegyikük I-ből A-ba ható függvény.

Az ilyen típusú 2-szortu formulák definíciója a szokásos klasszikus formulák definíciójától csak abban tér el, hogy külön idő-szortu és külön adat-szortu változójelek vannak, (melyek csak a megfelelő szortu struktúra alaphalmazán futnak végig) s csak a megfelelő függvény-, illetve relációjelek alkalmazhatók rájuk. Ezt a formulahalmazt FF_t-vel jelöljük, természetesen $F_t \subset FF_t$. Egy $\varphi \in FF_t$ 2-szortu formulára $\mathfrak{M} \models \varphi$ azt jelöli, hogy φ igaz $\mathfrak{M}$-ben minden megengedett értékelés mellett, azaz ι szortu változójelek helyében csak I-beli, τ szortu változójelek helyébe csak A-beli elemet tehetünk.

Ezzel a definícióval a folytonos futás 3.3. definíciója például az alábbi formulák teljesülését kívánja meg $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{A}, R \rangle$-ben:

$$\forall i \big[R(\mathbf{s}i) = p(R(i)) \big],$$

$$(*) \qquad \big[\psi(\mathbf{0}, \bar{u}) \wedge \forall i (\psi(i, \bar{u}) \to \psi(\mathbf{s}i, \bar{u})) \big] \to \forall i \psi(i, \bar{u})$$

ahol $\psi(i, \bar{u})$-val jelöltük azt a $\Phi(R(i), \bar{u}) \in FF_t$ formulát, melyben $\Phi \in F_t^{n+m}$ tetszőleges. A formulákban az „i" változójel szortja ι, az $\bar{u}$ szortja pedig τ, a továbbiakban is „i" mindig ι szortu változót fog jelölni.

7.1. Definíció. Legyen $T \subset F_t^0$ egy (konzisztens) t típusú elmélet, $\delta \in F_t^{2n}$ tetszőleges T-beli program. Az $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{A}, R \rangle$ 2-szortu modell a φ programnak egy *dinamikus futása,* ha

$$\mathfrak{M} \models \forall i \, \varphi(R(i), R(\mathbf{s}i)). \quad \blacksquare$$

7.2. Definíció. A fenti jelölések mellett legyen még $\varphi_{be}, \varphi_{ki} \in F_t^n$. A φ program parciálisan helyes $\mathfrak{M}$-ben a φ_{be} és φ_{ki} feltételek mellett, jelben $\mathfrak{M} \models^D (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$, ha abból, hogy $\mathfrak{M}$ a φ program dinamikus futása, következik az, hogy

$$\mathfrak{M} \models \varphi_{be}(R(\mathbf{0})) \to \forall i \big[R(i) = R(\mathbf{s}i) \to \varphi_{ki}(R(i)) \big].$$

Ha $S \subset FF_t$ 2-szortu formulák egy olyan halmaza, hogy S minden modelljében (azaz $\mathfrak{M} \models S$ esetén) $\mathfrak{M} \models^D (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$, akkor ezt úgy jelöljük, hogy

$$S \models^D (\varphi_{be}, \varphi, \varphi). \quad \blacksquare$$

Így például, ha S a 3.2. állításban szereplő I1—I6 (időszortu változókra vonatkozó) formulákból, a $T \subset F_t^0$ elméletből, valamint a fent $(*)$ alatt szereplő formulákból áll, akkor $S \models^D (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ és $T \models^C (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ egymással ekvivalens állítások.

A dinamikus futásokra vonatkozó alapvető tétel Andréka Hajnaltól és Németi Istvántól származik [1, 3, 4, 6].

7.3. Tétel. Tegyük fel, hogy $S \models^{D} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$. Ekkor van S-nek olyan S' véges része is, melyre már $S' \models^{D} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$.

Bizonyítás. Adott $(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$ hármashoz konstruálható (primitív rekurzív leképezéssel) olyan $\Phi \in FF_t$ 2-szortu formula, hogy minden $\mathfrak{M}$-re $\mathfrak{M} \models^{D} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$, akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{M} \models \Phi$. A tétel feltételeinél fogva $S \vdash \Phi$, ahonnan a kompaktsági tétel alapján már $S' \vdash \Phi$ valamely véges $S' \subset S$-re. Ebből a tétel állítása már kiolvasható. ∎

A 7.3. Tétel részletes bizonyítása megtalálható [4]-ben és [6]-ban. A tételnek a fenti (vázlatos) bizonyítása egyúttal azt is adja, hogy ha az S formulahalmaz rekurzívan felsorolható, akkor ugyanez igaz a $\{(\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki}): S \models^{D} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})\}$ halmazra is. Így a dinamikus futások parciális helyességére létezik *teljes* kalkulus. Azonban mi egy konkrét kalkulust, nevezetesen a Floyd—Hoare levezetést vizsgáljuk, s arra vagyunk kíváncsiak, mely esetekben lesz ez teljes. Ehhez szükségünk van még néhány definícióra.

A ι időszortra vonatkozó, a 3.2. állításban már felírt, kezdőponttal rendelkező diszkrét lineáris rendezés (véges és teljes) axiómarendszerét DI-vel jelöljük.

7.4. Definíció. Legyen $\Phi(i, \bar{x}) \in FF_t$ olyan formula, melyben az i változó szortja ι, $\bar{x}$-ben pedig vegyesen lehetnek ι és τ szortu változók. Ekkor $\Phi^{\#}(\bar{x}) \in FF_t$ a következő formulát jelöli:

$$[\Phi(\mathbf{0}, \bar{x}) \wedge \forall i(\Phi(i, \bar{x}) \to \Phi(\mathbf{s}i, \bar{x}))] \to \forall i \Phi(i, \bar{x}).$$

Ezeknek az indukciós formuláknak a halmazát IA-val jelöljük, azaz

$$IA = \{\Phi^{\#}(\bar{x}): \Phi(i, \bar{x}) \in FF_t \text{ és } i \text{ szortja } \iota\};$$

ezenkívül IA-nak egy valódi részére külön jelölést vezetünk be:

$IR = \{\Phi^{\#}(\bar{x}): \Phi(i, \bar{x}) \in FF_t$, i szortja ι, és Φ-ben nincs ι szortu változóra vonatkozó kvantor$\}$. ∎

Látható, hogy a $\Phi^{\#}$ formula az időre vonatkozó induktivitást fejezi ki, az $\bar{x}$-sal jelölt szabad változók az indukció paraméterei.

Elsőként a dinamikus és a folytonos futások közti kapcsolatot vizsgáljuk meg.

7.5. Tétel. *Legyen $T \subset F_t^0$ egy elmélet, és $\varphi \in F_t^{2n}$ egy T-beli program; legyen továbbá $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{A}, R \rangle$ dinamikus futása φ-nek. Az $R: I \to A^n$ függvény akkor és csak akkor erősen folytonos futása φ-nek, ha $\mathfrak{M} \models DI \cup IR \cup T$.*

Bizonyítás. Csak az „akkor" részt bizonyítjuk, az állítás másik fele nyilvánvaló. Mivel $\mathfrak{I}$ időstruktúra, $\mathfrak{A}$ pedig modellje T-nek, azért $\mathfrak{M} = DI \cup T$. Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M} \models IR$ állítást igazoljuk, legyen $\Psi(i, \bar{j}, \bar{u}) \in FF_t$ olyan 2-szortu formula, melyben i és $\bar{j}$ szortja ι, $\bar{u}$ szortja pedig τ, és melyben nem szerepel ι szortu változóra vonatkozó kvantor. Rögzítsük most a $\bar{j} \in I^k$ és $\bar{u} \in A^l$ paramétereket. Mivel Ψ-ben az $\mathbf{s}$ függvényjelet a j_w $(w < k)$ paraméterekre, illetve a $\mathbf{0}$ konstansjelre csak véges sokszor alkalmazhatjuk, azért eleve feltehetjük, hogy az összes így megkapható I-beli elemre a $\bar{j}$ paraméterek között külön jelünk van. Ha pedig az $\mathbf{s}$-et az i változóra

alkalmaznánk, használjuk az $\mathfrak{M}$-ben $\mathfrak{M} \models T$ miatt évrényes $R(\mathbf{s}i) = p(R(i))$ összefüggést. Így feltehetjük, hogy az **s** jel és a **0** konstans nem is fordul elő Ψ-ben. Továbbá azt is feltehetjük, hogy az $\bar{u}$ paraméterek között az összes $R(j_w)$ érték is ezerepel, azaz R-et csak az i változójelre alkalmazzuk.

Mindezek után tegyük fel, hogy R erősen folytonos futása φ-nek. Az eddigi megállapításaink szerint vannak olyan $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k \in F_l^{n+l}$ formulák, hogy

$$\mathfrak{M} \models \Psi(i, \bar{j}, \bar{u}) \leftrightarrow \{[i \leqq j_0 \to \Phi_0(R(i), \bar{u}) \wedge$$

$$\wedge [j_0 < i \leqq j_1 \to \Phi_1(R(i), \bar{u})] \wedge$$

$$\ldots$$

$$\wedge [j_{k-1} < i \to \Phi_k(R(i), \bar{u})]\},$$

ezt például a Ψ bonyolultságára vonatkozó indukcióval láthatjuk be. Tegyük most fel, hogy

$$\mathfrak{M} \models \Psi(\mathbf{0}, \bar{j}, \bar{u}) \wedge \forall i(\Psi(i, \bar{j}, \bar{u}) \to \Psi(\mathbf{s}i, \bar{j}, \bar{u})).$$

Ekkor az erősen folytonos futás 3.3. Definíciójából (ii^*)-ot a $[\mathbf{0}, j_0]$, $[j_0, j_1]$, stb. intervallumokra alkalmazva kapjuk, hogy $\mathfrak{M} \models \forall i \Psi(i, \bar{j}, \bar{u})$, ahogyan kívántuk. ∎

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy $R: I \to A^n$ akkor és csak akkor folytonos futása φ-nek, ha $\mathfrak{M} \models DI \cup IR^* \cup T$, ahol $IR^* \subset IR$ mindazokból az indukciós formulákból áll, melyekben az időszortra vonatkozó $\leqq$ relációjel nem fordul elő.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a dinamikus futásoktól elég csak azt megkövetelnünk, hogy az IR-beli indukciós formulákat elégítsék ki (bár ettől még az időszortjuk bármilyen „csúnya" lehet), már ebből következik a Floyd—Hoare-módszer teljessége. Így valamilyen értelemben az IR formulahalmaz a Floyd—Hoare-módszer szemantikai tartalmát adja meg.

7.6. Tétel. *Minden* $T \subset F_t^0$ *elméletre,* $\varphi \in F_t^{2n}$ *T-beli programra és* $\varphi_{\text{be}}, \varphi_{\text{ki}} \in F_t^n$ *formulára,* $T \vdash (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$, *valamint* $IR \cup T \models^D (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ *ekvivalensek.*

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy a Floyd—Hoare levezethetőségből következik a dinamikus futások parciális helyessége. Ehhez tanúsítsa a $\Phi \in F_t^n$ formula azt, hogy $(\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$ Floyd—Hoare levezethető T-ből, és legyen $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{A}, R \rangle$ olyan dinamikus futása φ-nek, melyre $\mathfrak{M} \models IR \cup T$ és $\mathfrak{M} \models \varphi_{\text{be}}(R(\mathbf{0}))$. Abból, hogy $\mathfrak{M} \models T$ és abból, hogy $T \vdash (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$, azonnal következik, hogy

$$\mathfrak{M} \models \Phi(R(\mathbf{0})) \wedge \forall i(\Phi(R(i)) \to \Phi(R(\mathbf{s}i))).$$

Most $\Phi(R(i)) \in FF_t$ olyan 2-szortu formula, melyben nincs ι szortu változóra vonatkozó kvantor, ezért a

$$[\Phi(R(\mathbf{0})) \wedge \forall i(\Phi(R(i)) \to \Phi(R(\mathbf{s}i)))] \to \forall i \Phi(R(i))$$

formula eleme IR-nek, következésképp $\mathfrak{M} \models \forall i \Phi(Ri)$. Ebből és a Floyd—Hoare levezethetőségből azonnal adódik, hogy $\mathfrak{M} \models \forall i[R(i) = R(\mathbf{s}i) \to \varphi_{\text{ki}}(R(i))]$, azaz $\mathfrak{M} \models^D (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$, ahogyan kívántuk.

Fordítva, ha $IR \cup T \models^D (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$, akkor persze $DI \cup IR \cup T \models^D (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$, ami az előző tétel szerint azt jelenti, hogy φ-nek minden erősen folytonos futása parciálisan helyes. Ebből viszont a 3.6. tétel alapján azt kapjuk, hogy $T \vdash (\varphi_{\text{be}}, \varphi, \varphi_{\text{ki}})$. ∎

A tételben az *IR* részleges indukciósémát az összes indukciós axiómát tartalmazó *IA* halmazra tudjuk cserélni, ha még azt a további feltételt is tesszük, hogy a *T* elmélet tartalmazza a Peano axiómákat.

7.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $t_{\mathrm{PA}} \subset t$ *és a* $T \subset F_t^0$ *elméletre* $\mathrm{PA} \subset T$. *Ekkor minden* $\varphi \in F_t^{2n}$ *T-beli programra és* $\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi_{\mathrm{ki}} \in F_t^n$ *feltételre,* $T \vdash (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, *valamint* $IA \cup T \overset{D}{\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$ *ekvivalensek.*

Bizonyítás. Ha $(\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$ Floyd—Hoare levezethető, akkor az előző tétel alapján azonnal kapjuk, hogy $IA \cup T \overset{D}{\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, hiszen egy ennél erősebb állítás is igaz. Tegyük fel most, hogy $T \nvdash (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, akkor konstruálunk a φ programnak egy olyan $\mathfrak{M}$ dinamikus futását, melyben $\mathfrak{M} \models DI \cup IA \cup T$, míg $\mathfrak{M} \overset{D}{\not\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$. Ezzel 7.7. Tétel állításánál többet is igazolunk.

Feltevéseink szerint $T \not\vdash (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, így a 3.6. Tétel alapján $T \overset{C}{\not\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$, vagyis van a *T* elméletnek olyan $\mathfrak{A}$ modellje és φ-nek olyan $R^*: I \to A^n$ folytonos futása, melyre valamilyen $i \in I$-vel

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathrm{be}}(R^*(\mathbf{0})) \wedge R^*(i) = R^*(\mathbf{s}i) \wedge \neg \varphi_{\mathrm{ki}}(R^*(i)).$$

Legyen $\bar{q}_0 = R^*(\mathbf{0})$ és legyen $\langle \bar{q}_a : a \in A \rangle$ az 5.1. Definícióban szereplő sorozat. Az 5.7. Tétel szerint ekkor az $R: A \to A^n$, $R(a) = \bar{q}_a$ is a φ programnak egy futása, hiszen $\mathrm{Range}(R) = \mathrm{Range}(R^*)$ és $R(\mathbf{0}) = R^*(\mathbf{0})$, továbbá $\mathfrak{A}$ természetes módon felfogható egy $\langle \mathbf{0}, \mathbf{s}, \leqq \rangle$ típusú időstruktúrának $\mathfrak{A} \models \mathrm{PA}$ miatt. Állítjuk, hogy az $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{A}, R \rangle$ 2-szortu modell jó lesz, ahol $\mathfrak{I}$ az $\mathfrak{A}$ struktúra $\langle \mathbf{0}, \mathbf{s}, \leqq \rangle$ típusú reduktuma. Elegendő megmutatnunk, hogy $\mathfrak{M} \models IA$, hiszen $\mathfrak{M} \models DI \cup T$ és $\mathfrak{M} \overset{D}{\not\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$ nyilvánvalóan fennállnak.

Legyen ez utóbbi célból $\Phi(i, \bar{\jmath}, \bar{u}) \in FF_t$ tetszőleges 2-szortu formula, továbbá $\bar{\jmath} \in I^{m_1} = A^{m_1}$ és $\bar{u} \in A^{m_2}$. Jelöljük $\Phi^*(i, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0)$-lal F_t-nek azt a formuláját, melyet úgy kapunk, hogy Φ-ben az összes ι szortu x változóra vonatkozó $\mathbf{s}x$ függvényjelet lecseréljük $(x+1)$-re, az összes $R(x)$ függvényjelet pedig az 5.1. definícióban szereplő, $\bar{q}_0$-ból és x-ből $\bar{q}_x$-et definiáló formulára. Világos, hogy $\mathfrak{M} \models \Phi(i, \bar{\jmath}, \bar{u})$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \models \Phi^*(i, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0)$. Tegyük fel, hogy a 7.4. definíciónak megfelelően

$$\mathfrak{M} \models \Phi(\mathbf{0}, \bar{\jmath}, \bar{u}) \wedge \forall i (\Phi(i, \bar{\jmath}, \bar{u}) \to \Phi(\mathbf{s}i, \bar{\jmath}, \bar{u})).$$

Legyen most $\Psi(\bar{x}, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0) = „\exists a [\bar{x} = \bar{q}_a \wedge (\forall b \leqq a)\, \Phi^*(b, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0)]" \in F_t$. Világos, hogy $\mathfrak{A} \models \Psi(R(\mathbf{0}), \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0)$, és hogy a feltételek szerint

$$\mathfrak{A} \models \Psi(R(i), \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0) \to \Psi(R(\mathbf{s}i), \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0).$$

Kihasználva, hogy *R* folytonos futás a 3.3. definíció értelmében, azt kapjuk, hogy $\mathfrak{A} \models \forall i (\Psi R(i), \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0)$. Ebből az $E \subset A$ halmaz (5.4. Lemma) és a Ψ formula definíciója alapján azt kapjuk, hogy minden $b \in E = \{a \in A : a \leqq e\}$ elemre

$$\mathfrak{A} \models \Phi^*(b, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0).$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy ugyanez a formula fennáll akkor is, ha $b \notin E$. Mivel a Φ^* formula *i*-ről $(i+1)$-re öröklődik, azért minden $k \in \omega$ természetes számra

$$\mathfrak{A} \models \Phi^*(e+k, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0),$$

valamint

$$\mathfrak{A} \models \Phi^*(x, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0) \to \Phi^*(x+k, \bar{\jmath}, \bar{u}, \bar{q}_0).$$

Így ez az állítás következik az alábbi lemmából. ∎

7.8. Lemma. *Legyen* $\Phi(\bar{i}, \bar{j}, \bar{u}) \in FF_t$ *tetszőleges 2-szortu formula. Ekkor* Φ*-hez található olyan* $k \in \omega$*, hogy tetszőlegesen rögzítve a* $\bar{j} \in I^{m_1} = A^{m_1}$ *és az* $\bar{u} \in A^{m_2}$ *paramétereket, továbbá* $\bar{i}_1$ *és* $\bar{i}_2$ *olyan* I^{m_0}*-beli elemek, melyek mindegyike nagyobb* $(e+k)$*-nál, egymástól és mindegyik* $\bar{j}$*-beli elemtől való távolságuk nagyobb* k*-nál, továbbá* $\bar{i}_1$ *és* $\bar{j}$*, illetve* $\bar{i}_2$ *és* $\bar{j}$ *egyformán vannak rendezve, akkor*

$$\mathfrak{M} \models \Phi(\bar{i}_1, \bar{j}, \bar{u}) \leftrightarrow \Phi(\bar{i}_2, \bar{j}, \bar{u}).$$

Bizonyítás. Az állítást a Φ formulában szereplő kvantorok számára, azon belül a formula bonyolultságára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. A prímformulákra ($\varphi(\bar{u})$, ahol $\varphi \in F_t^{m_2}$; $i \leqq j$; illetve $R(i) = u$) az állítás nyilvánvalóan igaz. Ha Φ_1-hez k_1, Φ_2-höz k_2 tartozik, akkor $\neg\Phi_1$-hez, illetve $\exists u_0 \Phi_1$-hez k_1, a $\Phi_1 \wedge \Phi_2$-höz k_1 és k_2 maximuma megfelelő. Így egyedül a $\exists x \Phi(\bar{i}, x, \bar{j}, \bar{u})$ formulát kell vizsgálni, ahol x egy ι szortu változó. Soroljuk először x-et a $\bar{j}$ paraméterek közé, másodszor pedig az $\bar{i}$ változók közé. Az így kapott formulákhoz tartozó, az indukciós feltételünk szerint létező értékek maximumát jelöljük k-val. Most rögzítsük a $\bar{j}$ és $\bar{u}$ paraméterek értékét, valamint az $\bar{i}$-k egymás közti és a $\bar{j}$ paraméterekhez viszonyított rendezését. Legyenek az $\bar{i}$-k olyanok, hogy ennek a rendezésnek megfelelnek, és egymástól és a paraméterektől legalább $2k+2$ távolságban vannak. Most tegyük fel, hogy valamelyik ilyen $\bar{i}$-re található olyan x, hogy $\Phi(\bar{i}, x, \bar{j}, \bar{u})$ teljesül, és ez az x mindegyik $\bar{i}$-től legalább k távolságra van. Ekkor az indukciós feltevésünk szerint feltehető, hogy $x \leqq (e+k+1)$, vagy valamelyik $\bar{j}$ paramétertől, vagy valamelyik $\bar{i}$-től legfeljebb $k+1$ távolságra van, és megint az indukciós feltevés szerint ekkor mindegyik $\bar{i}$-hez található megfelelő x.

Ha ez nem így volna, akkor ($\bar{j}$ és $\bar{u}$ rögzített!), $\exists x \Phi(\bar{i}, x, \bar{j}, \bar{u})$ akkor és csak akkor igaz $\mathfrak{M}$-ben, ha

$$\Phi^*(\bar{i}, \bar{j}, \bar{u}) = \bigvee_{w < m_0} \bigvee_{-k \leqq l \leqq k} \Phi(\bar{i}, \mathbf{s}^l i_w, \bar{j}, \bar{u})$$

igaz $\mathfrak{M}$-ben, ahol $\bar{i} = \langle i_0, i_1, \ldots, i_{m_0-1} \rangle$. Legyen az indukciós feltevés szerint a Φ^*-hoz rendelt szám k^*, ami azt jelenti, hogy ha az $\bar{i}$-k megfelelően vannak rendezve és egymástól és a paraméterektől is k^*-nál messzebb vannak, akkor Φ^* egyszerre igaz vagy nem igaz rájuk. Így $\exists x \Phi$-hez k^* és $2k+2$ maximuma megfelelő, amivel a lemmát igazoltuk. ∎

A 7.7. Tétel feltételei közül a $\mathrm{PA} \subset T$ nem hagyható el, amint azt a következő példa is mutatja. Vegyük észre, hogy az $\mathfrak{I}$ időstruktúrára semmilyen külön feltételt nem teszünk.

A 7.9. Tétel alábbi bizonyítása a [6]-ban levő 9. Tétel (v) $\nRightarrow$ (i) részének olyan igazolása, amely rövidebb, mint a [6]-ban található bizonyítás (l. [6] 59—93. old.). Az alábbi 7.9. Tételnek kicsit élesebb változata [23] és [6] 11/f tétele.

7.9. Tétel. *Van olyan* $T \subset F_t^0$ *elmélet,* $\varphi \in F_t^{2n}$ *T-beli program és* $\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi_{\mathrm{ki}} \in F_t^n$ *feltételek, hogy* $IA \cup T \overset{D}{\models} (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$*, míg* $T \nvdash (\varphi_{\mathrm{be}}, \varphi, \varphi_{\mathrm{ki}})$.

Bizonyítás. Álljon a t hasonlósági típus a $\prec$ kétváltozós relációjelből és a 0 konstansjelből, és legyen $T \subset F_t^0$ a 0 kezdőponttal rendelkező, $\prec$-ra vonatkozó diszkrét lineáris rendezés (teljes) elmélete. Az $x+1$ és az $x-1$ rövidítések az x közvetlen rákövetkezőjét, illetve x közvetlen megelőzőjét jelölik (mivel 0-nak nincs megelőzője, azért legyen $0-1=0$), továbbá $1-x$ jelölje $0+1=1$-et, ha $x=0$, és 0-t egyébként.

A p program négyeseken operál és a következőképpen definiáljuk:

$$p(a,b,c,d)=\begin{cases}(a-1,1-b,c,d) & \text{ha } a\neq 0\\ (a,b,c-1,1-d) & \text{ha } a=0 \text{ és } c\neq 0\\ (a,b,c,d) & \text{egyébként}\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy p egy T-beli formulával definiálható függvény, így valóban egy program. Legyen $\varphi_{\text{be}}(a,b,c,d)=$„$a=c\neq 0\wedge b=d=0$”, valamint $\varphi_{\text{ki}}(a,b,c,d)=$ =„$b=d$”. Világos, hogy a p program kétszer egymás után kiszámítja ugyanannak az $a=c$ értéknek a párosságát, s a φ_{ki} formula azt a természetes elvárásunkat fejezi ki, hogy mind a kétszer ugyanazt az eredményt kapjuk.

Elsőként azt igazoljuk, hogy p-nek az $IA\cup T$ formulákat kielégítő dinamikus futásai csakugyan ilyenek. Legyen tehát $\mathfrak{M}=\langle\mathfrak{I},\mathfrak{A},R\rangle$ a p programnak egy olyan dinamikus futása, melyre $\mathfrak{M}\models IA\cup T$. A jelölések egyszerűsítése érdekében minden $i\in I$-re az $R(i)\in A^4$ négyest (a_i,b_i,c_i,d_i) jelöli, s feltesszük, hogy $\mathfrak{M}\models\varphi_{\text{be}}(R(\mathbf{0}))$, azaz $a_0=c_0\neq 0$ és $b_0=d_0=0$.

A p parciális helyessége pontosan azt jelenti, hogy ezen feltételek mellett a $\forall i(a_i=c_i=0\to b_i=d_i)\in FF_t$ formula igaz $\mathfrak{M}$-ben. Célunk ennek bizonyítása, ezt több lépésben tesszük meg.

7.10. Lemma. $\mathfrak{M}$-ben a következő formulák minden $i\in I$-re igazak:

(1) $i\neq\mathbf{0}\to a_i\prec a_0$ (2) $b_i=0\vee b_i=1$

(3) $d_i=0\vee d_i=1$ (4) $i\neq\mathbf{0}\to\exists j(i=\mathbf{s}j)$

(5) $a_i\neq 0\to(c_i=c_0\wedge d_i=d_0)$ (6) $\forall j(a_j\neq 1)\to a_i\neq 0$.

Bizonyítás. Mind a hat formula $i=\mathbf{0}$-ra nyilvánvalóan teljesül (hiszen $a_0\neq 0$), továbbá, ha valamely $i\in I$-re igazak, akkor $\mathbf{s}i$-re is. Így $\mathfrak{M}\models IA$ miatt minden $i\in I$ mellett is teljesülnek. ∎

A lemma (1) állításából speciálisan az is következik, hogy $\mathbf{0}\neq\mathbf{s}i$ minden $i\in I$-re, hiszen $a_{\mathbf{s}0}\neq a_0$, másrészt ha $i\neq\mathbf{0}$, akkor $a_{\mathbf{s}i}\leqq a_i\prec a_0$.

7.11. Lemma. $\mathfrak{M}\models\forall j(a_i=a_j\neq 0\to b_i=b_j)$.

Bizonyítás. i-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $i=\mathbf{0}$ esetén az előző lemma (1) állítása alapján $a_j=a_0$-ból $j=\mathbf{0}$ következik, ahonnan $b_0=b_j$. Most tegyük fel, hogy az állítást tudjuk i-re, és ebből arra akarunk következtetni, hogy $\mathbf{s}i\neq\mathbf{0}$-ra is igaz. Ekkor $a_{\mathbf{s}i}=a_j\prec a_0$ a 7.10. Lemma alapján, és így $j\neq\mathbf{0}$, tehát van olyan $k\in I$, melyre $\mathbf{s}k=j$. Feltételünk az, hogy $a_{\mathbf{s}i}=a_{\mathbf{s}k}\neq 0$, így $a_i-1=a_{\mathbf{s}i}=a_{\mathbf{s}k}=$ $=a_k-1$, tehát $a_i=a_k$, ahonnan az indukciós feltétel alapján $b_i=b_k$. Végül $b_{\mathbf{s}i}=$ $=1-b_i=1-b_k=b_{\mathbf{s}k}=b_j$, ahogyan kívántuk. ∎

7.12. Lemma. $\mathfrak{M}\models\forall j(a_j=1\wedge a_i=0\to b_i=1-b_j)$.

Bizonyítás. $i=\mathbf{0}$ esetén $a_i\neq 0$, tehát az állítás igaz, tegyük fel, hogy i-re már tudjuk. Ha $a_i\neq 0$ és $a_{\mathbf{s}i}=0$ állna, akkor a p program definíciója alapján $a_i=1$, tehát $a_i=a_j=1$ $(\neq 0)$. A 7.11. Lemma alapján ekkor $b_i=b_j$ és $b_{\mathbf{s}i}=1-b_i=$ $=1-b_j$.

A másik esetben $a_i = a_{si} = 0$, de ekkor $b_{si} = b_i = 1 - b_j$. ∎

7.13. Lemma. $\mathfrak{M} \models \exists j(a_i = 0 \to a_j = c_i \wedge b_j = d_i)$.

Bizonyítás. $i = \mathbf{0}$ esetén $a_i \neq 0$. Tegyük fel, hogy az állítást i-re már tudjuk, és legyen $a_{si} = 0$. Különböztessünk meg két esetet. Ha $a_i \neq 0$, akkor a 7.10. Lemma (5) állítása szerint $c_i = c_{si} = a_0$ és $d_i = d_{si} = b_0$. Ha $a_i = 0$, akkor valamilyen $j \in I$-re $c_i = a_j$ és $d_i = b_j$, ahonnan $c_{si} = a_{sj}$ és $d_{si} = b_{sj}$. ∎

Ezek után bizonyítjuk, hogy $\mathfrak{M} \models \forall i(a_i = c_i = 0 \to b_i = d_i)$. Legyen ehhez $i \in I$ olyan, hogy $a_i = c_i = 0$. A 7.10. Lemma (6) állítása szerint van olyan $j \in I$, melyre $a_j = 1$, és a 7.12. Lemma alapján erre a j-re $b_i = 1 - b_j$. A 7.13. Lemma azt adja, hogy van olyan $k \in I$ is, melyre $a_k = c_i$ $(= 0)$ és $b_k = d_i$; és megint a 7.12. Lemma szerint, ugyanarra a j-re, $b_k = 1 - b_j$. Ebből pedig $b_i = d_i$ adódik.

Eddig bizonyítottuk, hogy $IR \cup T \overset{D}{\models} (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$, és az maradt hátra, hogy megmutassuk, $T \nvdash (\varphi_{be}, \varphi, \varphi_{ki})$. Ehhez (például a 4.2. Tétel alapján) elegendő p-nek egyetlen olyan $Q = \langle \bar{q}, X \rangle$ kvázifutását megadnunk, melyben $\bar{q}$-ra igaz a φ_{be} input feltétel, de fix(Q) valamelyik eleme nem teljesíti φ_{ki}-t. Először a T elméletnek egy $\mathfrak{A}$ modelljét kell megadnunk. A modell A alaphalmaza legyen éppen az $\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k : k \in \omega\}$ halmaz, ahol $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ csupa különböző elemet jelöl. Az A-n a $\prec$ rendezést a következőképpen definiáljuk:

$$\alpha_k \prec \alpha_l \prec \beta_l \prec \beta_k \prec \gamma_k \prec \gamma_l$$

minden $k, l \in \omega$, $k < l$-re; a 0 konstansjel éppen α_0-t, az 1 éppen α_1-et jelöli. Nyilván az $\mathfrak{A}$ struktúra T-nek modellje, az $X \subset A^4$ halmaz a következő négyesekből álljon:

$$(\beta_k, pt(k), \beta_0, 0); \quad (\alpha_k, pt(k), \beta_0, 0);$$

$$(0, 0, \beta_k, pt(k)); \quad (0, 0, \alpha_k, 1 - pt(k))$$

minden $k \in \omega$-ra. Itt $pt(k)$ az $\alpha_0 = 0$-t jelenti, ha k páros, és $\alpha_1 = 1$-et, ha k páratlan. Könnyű ellenőrizni (például a 3.5. Tétel bizonyításában használt „ultraszorzatos" technikával), hogy $Q = \langle (\beta_0, 0, \beta_0, 0), X \rangle$ a p programnak valóban egy $\mathfrak{A}$-beli kvázifutása, és $\mathfrak{A} \models \varphi_{be}(\beta_0, 0, \beta_0, 0)$, ugyanakkor Q egyetlen fixpontja $(0, 0, 0, 1)$, és erre a φ_{ki} formula nem teljesül.

Ezzel a 7.9. Tételt teljes egészében bizonyítottuk. ∎

A dinamikus futásokkal foglalkozik pl. [1], [3], [4], [6], [12], [13], [23]. A dinamikus futások kapcsolatát vizsgálja más futásokkal, pl. folytonos futásokkal [4], [13], [23], [6].

A fenti 7.6. és 7.9. Tétel témájával kapcsolatos további vizsgálatokat tartalmaz [6] 9—11/f tétele, a [6] 5. fejezete végén levő ábra, [23], és [4] Part II 9. Tétele.

Függelék

A függelékben a Peano axiómarendszere, i]letve annak csak az összeadást tartalmazó részére, az ún. Presburger artimetikára vonatkozó néhány tételt bizonyítunk be.

F.1. Definíció. Jelöljük t_{PA}-val a Peano axiómarendszer szokásos típusát, azaz t_{PA} a $+$, $\cdot$, 0 és 1 jeleket tartalmazza. PA jelöli a t_{PA} típusú Peano axiómákat,

azaz a következő végtelen formulahalmazt:

$P1$ $\quad x+1 \neq 0$

$P2$ $\quad x+1 = y+1 \to x = y$

$P3$ $\quad x+0 = x$

$P4$ $\quad x+(y+1) = (x+y)+1$

$P5$ $\quad x \cdot 0 = 0$

$P6$ $\quad x \cdot (y+1) = x \cdot y + x$

$P7$ $\quad$ minden $\varphi \in F_{t_{PA}}^{1+n}$ formulára

$$[\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(x+1, \bar{y}))] \to \forall x \varphi(x, \bar{y}). \blacksquare$$

P7 az indukciós axióma sémája, $\bar{y}$ jelöli a paramétereket. A t_{PA}-ban szereplő jeleken kívül még további függvény- és relációjeleket fogunk használni, melyeket rövidítéseknek tekintünk. Így például $x \leqq y \leftrightarrow \exists z(x+z=y)$, vagy például $x>y$, $x|y$ (x osztja y-t), rem (x, y) (az x-nek y-nal való osztásakor kapott maradék, megállapodás szerint rem $(x, 0)=0$). Ezenkívül használni fogjuk a korlátos kvantorokat is.

F.2. Állítás. PA-ból bizonyíthatók a következő állítások:

a) az összeadás és a szorzás asszociatív és kommutatív;
b) ezek disztributivak;
c) ha $y>0$ akkor rem (x, y) létezik és egyértelmű (x-re vonatkozó indukcióval);
d) a kivonásnak a szokásos tulajdonságai megvannak;
e) a „$\leqq$" reláció diszkrét lineáris rendezés;
f) az indukciós séma következő változata minden $\varphi(x, \bar{z}) \in F_{t_{PA}}^{1+n}$ formulára igaz (P7-ben φ helyébe $(\forall y<x)\varphi(y, \bar{z})$-t téve):

$P8$ $\quad [(\forall y < x)\varphi(y, \bar{z}) \to \varphi(x, \bar{z})] \to \forall x \varphi(x, \bar{z}).$

F.3. Definíció. Jelölje t^+ az additív számelmélet típusát, azaz t^+ a $+, 0$ és 1 jeleket tartalmazza, és legyen $PA^+ = F_{t^+} \cap PA$. ∎

Megjegyezzük, hogy PA-nak minden modelljét természetes módon tekinthetjük a PA^+ modelljének is.

F.4. Definíció. Definiáljuk PA-ban a $\langle x, y \rangle$ rendezett párt, mint az $(x+y) \cdot (x+y)+x$ kifejezés rövidítését. Legyen továbbá $\langle x, y, z \rangle = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$. A PAIR$(z)$ valamint a SEQ(u) formulák a következők:

$$\text{PAIR}(z) = \text{"}\exists x, y(z = \langle x, y \rangle)$$

$$\text{SEQ}(u) = \text{PAIR}(u) \wedge \forall x, y\big(u = \langle x, y \rangle \to \text{PAIR}(y)\big)\text{."}$$

Legyenek továbbá a LENGTH(u), valamint az ELEM(u, i) PA-beli függvények a következők:

$$\text{LENGTH}(u) = \begin{cases} n, \text{ ha SEQ}(u) \text{ és } u = \langle m, b, n \rangle \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

$$\text{ELEM}(u, i) = \begin{cases} \text{rem}\big(m, 1+(i+1) \cdot b\big), \text{ ha SEQ}(u) \text{ és } u = \langle m, n, b \rangle \text{ és } i<n \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases} \blacksquare$$

PA-ból bizonyítható például $\langle x, y\rangle$-ra vonatkozó indukcióval, hogy $\langle x, y\rangle$ valóban rendezett pár, azaz

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x, y, u, v(\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \leftrightarrow x = u \wedge y = v).$$

Ennek és az F.2 alatti állítások felhasználásával adódik, hogy

$$\mathrm{PA} \vdash \forall u \exists! n \ \mathrm{LENGTH}(u) = n,$$

$$\mathrm{PA} \vdash \forall u \forall i \exists! x \ \mathrm{ELEM}(u, i) = x.$$

Az ezekre vonatkozó igen fontos tétel a következő, mely lényegében azt mondja ki, hogy minden sorozatot egy elemmel meg lehet hosszabbítani [9].

F.5. Tétel. $\mathrm{PA} \vdash \forall u \forall z \exists v(\mathrm{SEQ}(u) \rightarrow$

$\{\mathrm{SEQ}(v) \wedge \mathrm{LENGTH}(v) = \mathrm{LENGTH}(u) + 1 \wedge$

$\wedge(\forall i < \mathrm{LENGTH}(u))\ \mathrm{ELEM}(u, i) = \mathrm{ELEM}(v, i) \wedge$

$\wedge \mathrm{ELEM}(v, \mathrm{LENGTH}(u)) = z\}).$

Bizonyítás. A bizonyítás több lemmán keresztül történik. Azt mondjuk, hogy x és y relatív prímek, jelben $(x, y)=1$, ha pozitívak és nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk:

$$(x, y) = 1 \leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \wedge \forall z[(z|x \wedge z|y) \rightarrow z = 1].$$

F.6. Lemma. $\mathrm{PA} \vdash (x, y)=1 \rightarrow \exists u, v(x \cdot u - y \cdot u = 1)$.

Bizonyítás. $(x+y)$-ra vonatkozó, $P8$ típusú indukciót alkalmazunk. Először, ha $x+y \leqq 2$, akkor $(x, y)=1$-ből következik, hogy $x=y=1$ és ebben az esetben $x \cdot 2 - y \cdot 1 = 1$. Ha $x+y>2$, akkor $x=y$ nem lehet, tehát vagy $x>y$, vagy $x<y$ az F.2. állítás szerint. Ha $x>y$, akkor $(x-y, y)=1$ is teljesül, és $(x-y)+y<x+y$, így az indukciós feltevés szerint létezik u és v, melyekre $(x-y) \cdot u - y \cdot v = 1$, azaz $x \cdot u - y \cdot (u+v) = 1$, ismét az F.2. állítás szerint. Az $x<y$ eset hasonlóan intézhető el. ∎

F.7. Lemma. $\mathrm{PA} \vdash (y, x)=1 \wedge (z, x)=1 \rightarrow (y \cdot z, x)=1$.

Bizonyítás. Az előző lemma alapján van olyan u, v, w, t, melyekre

$$y \cdot u = 1 + x \cdot v \quad \text{és} \quad z \cdot w = 1 + x \cdot t.$$

Ezeket az összefüggéseket összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$(y \cdot z) \cdot (u \cdot w) = 1 + x \cdot (v + t + v \cdot t).$$

Ha most $y \cdot z$-nek és x-nek a d közös osztója, akkor e szerint (és az F.2. állítás d) pontja szerint), $d|1$. Könnyű ellenőrizni, hogy ez éppen $d=1$-et jelenti. ∎

F.8. Lemma. $\mathrm{PA} \vdash x>y \wedge (x-y)|z \rightarrow (1+x \cdot z,\ 1+y \cdot z)=1$.

Bizonyítás. Ha d osztója $1+x \cdot z$-nek és $1+y \cdot z$-nek is, akkor d osztója $x \cdot (1+y \cdot z) - y \cdot (1+x \cdot z) = x-y$-nak is, így d osztója z-nek is. Végül $d|(1+x \cdot z) - -x \cdot z = 1$, tehát $d=1$. ∎

F.9. Lemma. $\mathrm{PA} \vdash z>t \wedge (y, z)=1 \rightarrow \forall x \exists u \ \mathrm{rem}(x+u \cdot y, z)=t$.

Bizonyítás. Három esetet különböztetünk meg. Ha $x=t$, akkor az $u=z$ értéket választhatjuk. Ha $x<t$, akkor az F.6. Lemma szerint van olyan u_1 és v_1, melyekre $y\cdot u_1-z\cdot v_1=1$. Legyen $u=u_1\cdot(t-x)$, valamint $v=v_1\cdot(t-x)$, ezekkel $x+u\cdot y=t+v\cdot z$, ahogyan azt kívántuk. Az $x>t$ eset hasonlóan kezelhető. ∎

F.10. Lemma. $\mathrm{PA}\vdash\forall m, b, n, z, x>0\,\exists M, B, C$

(i) $$\{(\forall i<n)(i+1|B)\wedge x|B\wedge$$

(ii) $$(\forall i\leqq n)\big(1+(i+1)\cdot B|C\big)\wedge$$

(iii) $$(\forall i>n)\big[(\forall j<i)(j+1|B)\to\big(1+(i+1)\cdot B, C\big)=1\big]\wedge$$

(iv) $$(\forall i<n)\big[\mathrm{rem}\,\big(m, 1+(i+1)\cdot b\big)=\mathrm{rem}\,\big(M, 1+(i+1)\cdot B\big)\big]\wedge$$

(v) $$\mathrm{rem}\,\big(M, 1+(n+1)\cdot B\big)=z\}.$$

Bizonyítás. Jelöljük ezt a formulát $\varphi(n)$-el, a bizonyítás n-re vonatkozó indukcióval történik. Először is $\varphi(0)$-at kell bizonyítani, azaz adva vannak az m, b, z és $x>0$ értékek, és keressük M-et, B-t és C-t. Legyen

$$M=z,\quad B=x\cdot(z+1),\quad C=1+B.$$

Állítjuk, hogy ez a választás jó lesz. Az (i), (ii), (iv) nyilvánvalóan teljesül. (v) abból következik, hogy $1+B>z$ (mert $x>0$), így $\mathrm{rem}\,(z, 1+B)=z$. Végül (iii) az F.8. Lemmából következik:

$$\mathrm{PA}\vdash i+1>1\wedge i|B\to\big(1+(i+1)\cdot B, 1+B\big)=1.$$

Még igazolnunk kell PA-ból $\varphi(n)\to\varphi(n+1)$-et. Ahelyett, hogy ezt tennénk, PA$\cup$ $\cup\{\varphi(n)\}$-ből bizonyítjuk $\varphi(n+1)$-et, ami a dedukciós tétel miatt elegendő. Azért, hogy ne keverjük össze a két formula változóit, a $\varphi(n)$-ben szereplő változókat csillaggal jelöljük meg. Most ismét az m, b, z és x értékei vannak adva, és keressük az M, B és C értékeket. Elsőként a $\varphi(n)$-et használjuk a következő szereposztással:

$$m^*=m,\quad b^*=b,\quad z^*=\mathrm{rem}\,\big(m, 1+(n+1)\cdot b\big),\quad x^*=x\cdot(n+1)\cdot(z+1).$$

Nyilván $x^*>0$, tehát ezt megtehetjük. A $\varphi(n)$ formula szerint léteznek olyan M^*, B^* és C^* számok, melyek az (i*)–(v*) fetételeket kielégítik, speciálisan (iv*)-ból és (v*)-ból azt kapjuk, hogy

(1) $$(\forall i<n+1)\,\mathrm{rem}\,\big(m, 1+(i+1)\cdot b\big)=\mathrm{rem}\,\big(M^*, 1+(i+1)\cdot B^*\big).$$

Legyen most $B=B^*$, valamint $C=\big(1+(n+2)\cdot B\big)\cdot C^*$. A lemma állításában szereplő formulából (i) az x^* definíciója és (i*) miatt teljesül. Ami (ii)-t illeti, $1+(i+1)\cdot B$ osztója C^*-nak minden $i\leqq n$-re, és $1+(n+2)\cdot B$ osztója C-nek.

Ahhoz, hogy (iii)-t bizonyítsuk, megjegyezzük, hogy ha $i>n+1$ és $(\forall j<i)$ $(j+1|B)$, akkor (iii*) szerint $\big(1+(i+1)\cdot B, C^*\big)=1$. Tudjuk azt is, hogy $(i+1)-(n+2)|B$, tehát az F.8. Lemma alapján

$$\big(1+(i+1)\cdot B,\ 1+(n+2)\cdot B\big)=1.$$

Ezekből az F.7. Lemma alapján adódik (iii).

Az (i)-ből tudjuk, hogy $(\forall j<n+1)(j+1|B)$, azaz (iii*) szerint $\big(1+(n+2)B^*$, $C^*\big)=1$. Másrészt $1+(n+2)\cdot B^*>B^*\geqq x^*>z$, így használhatjuk az F.9. Lemmát, ami szerint van olyan $M=M^*+u\cdot C^*$, amire $\mathrm{rem}\,\big(M, 1+(n+2)\cdot B\big)=z$. Ez azt jelenti, hogy (v) teljesül.

Végül (iv) abból következik, hogy $1+(i+1)\cdot B$ osztója C^*-nak minden $i\leqq n$-re, ahonnan $\operatorname{rem}(M, 1+(i+1)\cdot B)=\operatorname{rem}(M^*, 1+(i+1)\cdot B)=\operatorname{rem}(m, 1+(i+1)\cdot b)$ (1) szerint. ∎

Az F.10. Lemmából azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{PA}\vdash \forall m, b, n, z \exists M, B\{\operatorname{rem}(M, 1+(n+1)\cdot B) = z \wedge$$

$$\wedge(\forall i \prec n)\operatorname{rem}(m, 1+(i+1)\cdot b) = \operatorname{rem}(M, 1+(i+1)\cdot B)\},$$

amit az F.4. definíciókkal összevetve éppen az F.5. tétel állítását kapjuk. ∎

Ebből a tételből azonnal adódik a következő

F.11. Következmény. Minden (parciális) rekurzív függvény PA-definiálható, azaz minden ilyen f-hez létezik olyan $\varphi_f(x, y)\Sigma_1$-formulája PA-nak, melyre

$$\mathrm{PA}\vdash \varphi_f(x, y_1)\wedge\varphi_f(x, y_2) \to y_1 = y_2$$

továbbá $\mathrm{PA}\vdash$ „a $\varphi_f(x, y)$ által definiált függvény kielégíti az f definíciós sémáját". Ha f primitív rekurzív, akkor még azt is tudjuk, hogy $\mathrm{PA}\vdash \forall x \exists! y \varphi_f(x, y)$. ∎

A hátralevő részben azt bizonyítjuk, hogy PA^+ kvantoreliminálható [22], szereplő formulák konkrét alakját a 4. fejezeben felhasználtuk.

F.12. Definíció. Legyen $n\in\omega$, ekkor $\mathbf{n}$ jelöli PA^+-nak a $1+1+\ldots+1$ (n darab egyes) kifejezését. Ha $n, m\in\omega$, akkor $\operatorname{rem}(x, \mathbf{n})=\mathbf{m}$ a PA^+-nak a következő formuláját jelenti:

$$\exists y(x = \mathbf{m}+y+y+\ldots+y) \quad (n \text{ darab } y),$$

$x\leqq y$ pedig $\exists z(y=x+z)$ helyett áll. Legyen végül $E^n\subset F^n_{t+}$ a következő alakú formulák halmaza:

$$\bigvee_{k<l}\Big\{\bigwedge_{j<j_k}(\mathbf{a}_{jk}+\sum_{i<n}\mathbf{b}_{ijk}x_i = \mathbf{a}'_{jk}+\sum_{i<n}\mathbf{b}'_{ijk}x_i)\wedge\bigwedge_{i<n}\operatorname{rem}(x_i, \mathbf{c}_{ik}) = \mathbf{d}_{ik}\Big\}$$

ahol a_{jk}, b_{ijk} stb. mind természetes számokat jelölnek. ∎

F.13. Tétel. *Minden $\psi\in F^n_{t+}$ formulához van olyan $\varphi\in E^n$, hogy*

$$\mathrm{PA}^+\vdash \psi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}).$$

Bizonyítás. A formulák felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Prímformulákra az állítás nyilvánvaló, hiszen $\operatorname{rem}(x, \mathbf{1})=\mathbf{0}$ minden x-re igaz. Ha ψ_1-re és ψ_2-re már tudjuk az állítást, akkor az $\psi_1\vee\psi_2$-re triviálisan teljesül, így elegendő $\varphi\in E^n$-ről $\neg\varphi$-re, illetve $\exists x_0\varphi$-re bizonyítani.

1. eset. Ha $\varphi\in E^n$, akkor $\neg\varphi$-re alkalmazzuk a deMorgan azonosságokat, valamint az $\wedge$-re és $\vee$-ra vonatkozó disztributivitási szabályokat. Tudjuk, hogy

$$\mathrm{PA}^+\vdash \neg(x \leqq y) \leftrightarrow (y+1 \leqq x)$$

továbbá, hogy adott $c_1, d_1, c_2, d_2\in\omega$ számokhoz találhatók olyan c_3, $d_3\in\omega$ számok, melyekre

$$\mathrm{PA}^+\vdash \operatorname{rem}(x, \mathbf{c}_1) = \mathbf{d}_1\wedge\operatorname{rem}(x, \mathbf{c}_2) = \mathbf{d}_2 \leftrightarrow \operatorname{rem}(x, \mathbf{c}_3) = \mathbf{d}_3.$$

Itt c_3-nak a c_1 és c_2 legkisebb közös többszöröse megfelel, ezt a formulát az összes szóba jövő d_1 és d_2 párra egyszerre, szimultán rekurzióval igazolhatjuk. Ezek segítségével $\neg\varphi$-t a kívánt alakba írhatjuk.

2. eset. Ha $\varphi = \bigvee_{k<l} \varphi_k$, akkor $\exists x_0 \varphi \leftrightarrow \bigvee_{k<l} \exists x_0 \varphi_k$, tehát elegendő a φ-ben szereplő diszjunkciós tagok mindegyikével külön-külön foglalkozni. Az ilyen tagban első lépésként átrendezzük az egyenlőtlenségeket úgy, hogy mindegyikben az egyik oldalon x_0 egyedül szerepeljen pozitív együtthatóval, majd az egyenlőtlenségeket egy-egy pozitív számmal végigszorozzuk, ezután a formulánk a következő alakot ölti:

$$\bigwedge_{j<k_1} \left(\mathbf{a}_j + \sum_{0<i<n} \mathbf{b}_{ij} x_i \leqq \mathbf{t} \cdot x_0\right) \wedge \bigwedge_{j<k_2} \left(\mathbf{a}'_j + \sum_{0<i<n} \mathbf{b}'_{ij} x_i \geqq \mathbf{t} \cdot x_0\right) \wedge$$

$$\wedge \operatorname{rem}(x_0, \mathbf{c}_0) = \mathbf{d}_0 \wedge \bigwedge_{0<i<n} \operatorname{rem}(x_i, \mathbf{c}_i) = \mathbf{d}_i.$$

Ahhoz, hogy ezt a formulát kielégítő x_0 létezzen, szükséges és elegendő, hogy az első konjunkcióban szereplő bal oldalak bármelyike kisebb vagy egyenlő legyen a második konjunkcióban szereplő bal oldalak bármelyikénél, továbbá a kétféle érték közé egy $t \in \omega$-val osztható és a $\operatorname{rem}(x_0, \mathbf{c}_0) = \mathbf{d}_0$ feltételt kielégítő számot lehessen tenni. Most különböztessük meg mindazokat az eseteket, melyekben előírjuk, hogy a $t \cdot x_0$-nál kisebb-egyenlő összegek közül melyik a legnagyobb, és a nála nagyobb-egyenlő összegek közül melyik a legkisebb, és x_i a $0<i<n$-re t-vel, illetve c_0-lal osztva milyen maradékot ad. Így meg tudjuk állapítani, hogy a $t \cdot x_0$-at közrefogó két összeg t-vel, illetve c_0-lal osztva milyen maradékot ad, tehát az x_0 létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy e két összeg különbsége egy bizonyos korlátot meghaladjon. Az előző megjegyzéseink értelmében ezek együtt éppen egy E^{n-1}-beli formulát adnak, amit bizonyítani akartunk. ∎

IRODALOM

[1] H. Andréka—L. Csirmaz—I. Németi—I. Sain, More complete logics for reasoning about programs, preprint 1981.

[2] H. Andréka—I. Németi, A characterization of Floyd provable programs, MFCS'81, *Mathematical Foundations of Computer Science Proc. Cooll.* 1981, *Lecture Notes in Computer Science,* Springer Verlag 1981.

[3] H. Andréka—I. Németi—I. Sain, Henkin-type semantics for program schemes' to turn negative results to positive, *Fundamentals of Computation Theory'79* (Proc. Conf. Berlin 1979), Ed.: L. Budach, Akademie Verlag Berlin 1979, Band 2, 18—24.

[4] H. Andréka—I. Németi—I. Sain, A complete logic for reasoning about programs via non-standard model theory Part I, Part II, *Theoretical Computer Science,* vol 17(2) és vol 17(3), (1982).

[5] H. Andréka—I. Németi—I. Sain, Completeness problems in verification of programs and program schemes, MFCS'79, Mathematical Foundations of Computer Science'79 (*Proc. Conf. Olomouc Czechoslovakia* 1979), *Lecture Notes in Computer Science* 74, Springer Verlag 1979, 208—218.

[6] H. Andréka—I. Németi—I. Sain, A complete first order dynamic logic, Preprint MTA Mat. Intézete 1980 dec. Kivonat megtalálható: *Invited papers of Workshop on Logics of Programs held in New York* 1981 May, Ed.: D. Kozen, *Lecture Notes in Computer Science,* Springer Verlag 1981.

[7] C. C. Chang—H. J. Keisler, *Model Theory,* North Holland, 1973.

[8] S. A. Cook, Soundness and completeness of an axiom system for program verification, *SIAM J. Com.,* Vol 7 (1978) 70—90.

[9] L. Csirmaz, On definability in Peano Arithmetic, *Bull. Sec. Logic* Wroclaw Vol 8 (1979) 148—153.

[10] L. Csirmaz, Structure of program runs of non-standard time, *Acta Cyb.* Tom 4 (1980) 325—331.

[11] L. Csirmaz, Programs and program verification in a general setting, *Theoretical Compute Science* (1981).

[12] L. Csirmaz, On the completeness of proving partial correctness, *Acta Cyb.* Tom 5 (1981).

[13] L. Csirmaz, A Survey of Sematics of Floyd—Hoare Derivability, CL&CL — *Comput. Linguist. Comput. Lang.* (Budapest) Vol XIV (1980) 21—42.
[14] R. W. Floyd, Assigning meanings to programs, *Proc. Symp. in Applied Math.* Vol 19 (1967) 19—31.
[15] T. Gergely—M. Szőts, On the incompleteness of proving partial correctness, *Acta Cyb* Tom 3 (1979) 45—57.
[16] T. Gergely—L. Ury, Time models for programming logic, Mathematical Logic in Computer Science (Proc. Confí Salgótarján 1978) Eds.: T. Gergely, B. Dömölki, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai* Vol 26, North-Holland (1981) 561—606.
[17] C. A. Hoare, An axiomatic basis for computer programming, *CACM* Vol 12 (1969) 576
[18] Z. Manna, *Mathematical Theory of Computation,* McGraw-Hill, 1974.
[19] J. D. Monk, *Mathematical logic,* Springer Verlag, 1976.
[20] P. Naur, Proof of algorithms by general snapshots, *BIT* Vol 6 (1966) 310—316.
[21] J. Paris, Some independence results for Peano arithmetic, *Journal of Symb. Logic,* Vol 43 (1978) 725—731.
[22] M. Presburger, Über die Vollstendigkeit eines gewissen Systems, C. R. *1-er Congres des Mathematiciens des Pay Slaves,* Warsaw, 92—101.
[23] I. Sain, First order dynamic logic with decidable proofs and workable model theory, FCT'81 *Fundamentals of Computation Theory*'81 (Proc. Conf. Szeged 1981) Springer Verlag, 1981.
[24] A. Tarski—A. Mostowski—R. Robinson, *Undecidable theories,* North Holland, 1974.
[25] R. J. Waldinger—K. N. Levitt, Reasoning about programs, *Technical Note* 86, Artificial Intelligence Center, 1974.

Л. ЧИРМАЗ

НЕСТАНДАРТНЫЕ ХОДЫ ПРОГРАММ И ИНСТИННОСТЬ ПРОГРАММ

L. CSIRMAZ

NON-STANDARD PROGRAM RUN AND CORRECTNESS OF PROGRAMS

AZ $r_\varkappa(n)$ FÜGGVÉNYEK ÉS ERDŐS PÁL EGY SEJTÉSE

BRINDZA BÉLA

Bevezetés

Van der Waerden igazolta 1926-ban a következőt: tetszőleges módon két osztályra bontva a természetes számok halmazát, legalább az egyik tartalmaz tetszőleges hosszúságú aritmetikai sorozatot, [1].

Később ezt a következő módon fogalmazták át: Legyen $f(n)$ az a legkisebb természetes szám, amelyre teljesül, hogy az $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$ halmazt tetszőleges módon két diszjunkt részre osztva legalább az egyik tartalmaz n-elemű aritmetikai sorozatot! Ekkor $f(n)$ véges. Az $f(n)$ értékét Van der Waerden, Erdős, Radó és W. Schmidt becsülték, az ő eredményeiket javította meg Berlekamp, aki [2]-ben megmutatta, hogy $f(n) > n \cdot 2^n$.

Jóval később Erdős és Turán a következő problémát vetették fel: Határozzuk meg azt az $r_\varkappa(n)$-el jelölt, legnagyobb természetes számot, amelynél létezik olyan $a_1 < a_2 < \ldots a_{r_\varkappa}(n) \leqq n$ természetes számokból álló sorozat, amely sorozatban nincs $\varkappa$ hosszúságú, vagy ennél hosszabb aritmetikai sorozat, [3].

Megmutatták, hogy $r_\varkappa(m+n) \leqq r_\varkappa(m) + r_\varkappa(n)$, azaz létezik a $\lim_{n\to\infty} r_\varkappa(n)/n = c_\varkappa$ határérték.

Sejtésük szerint $c_\varkappa = 0$, minden esetben. Néhány évvel később Behrend megmutatta, hogy vagy $c_\varkappa = 0$, minden $\varkappa$-ra, vagy pedig $\lim_{\varkappa\to\infty} c_\varkappa = 1$ [4].

Erdős és Turán állították fel az $r_\varkappa(n) < n^{1-\varepsilon}$ sejtést is, amelyet azonban Salem és Spencer megcáfolt, megmutatva, hogy

[5] $$r_3(n) > n^{1-c/\log\log n}.$$

Ezt az eredményt Behrend [6]-ban megjavította:

$$r_3(n) > n^{1-c/\sqrt{\log n}}.$$

Mindmáig ez a legjobb becslés $r_3(n)$-re.

L. Moser konstruált először olyan sorozatot, amely nem tartalmaz háromelemű aritmetikai sorozatot, és amely minden n-re eleget tesz a Behrend-egyenlőtlenségnek, [7]. Rankin [8]-ban kiterjesztette a Behrend-egyenlőtlenséget a $\varkappa \geqq 4$ esetre.

$r_3(n)$-re az első elfogadható felső becslést Roth adta, aki [9]-ben megmutatta, hogy $r_3(n) < c \cdot n/\log\log n$. Szemerédi bizonyította 1967-ben az $r_4(n) = o(n)$ egyenlőséget, [10]. Ez a bizonyítás Van der Waerden tételének egy általánosítását használja fel. Roth enélkül általánosabb állítást igazolt, analitikus eszközökkel az ő becslése: $r_4(n) \leqq c \cdot n/\log\log \ldots n^*$, ahol C rögzített szám, [11], [12]. Végül Szemerédi látta be a

(*log...log n l-szer iterált logaritmust jelens, ahol most l konstans.)

következőket: $c_\varkappa = 0$ minden esetben [13]; és minden természetes számokból alkotott pozitív sűrűségű sorozatból kiválasztható tetszőleges hosszúságú aritmetikai sorozat.

Erdős Pál sejtése szerint, ha az $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ természetes számok sorozatára $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i$ divergens, akkor ebből a sorozatból kiválasztható tetszőleges hosszúságú artimetikai sorozat.

Tétel. *Ez a sejtés akkor és csak akkor igaz, ha* $\sum_{n=1}^{\infty} r_\varkappa(2^n)/2^n$ *minden* $\varkappa$*-ra konvergens.*

Eszerint az $r_\varkappa(2^n)$-re elég jó becsléseket nyerve el lehetne dönteni a problémát.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} r_\varkappa(2^n)/2^n < \infty$, minden $\varkappa$-ra és mégis létezik egy $\{a_i\} \subset \mathbf{N}$ sorozat, melyre $\Sigma 1/a_i$ divergens és nem tartalmaz $\varkappa_0$ hosszúságú aritmetikai sorozatot. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ és $I_n = (2^{n-1}, 2^n]$, $(n = 1, 2, \ldots)$ valamint $M_n = \mathrm{A} \cap I_n$.

Jelölje $r_\varkappa(a, b]$ azt a legnagyobb természetes számot, melyre létezik olyan $a < b_1 < b_2 < \ldots < b_{r_\varkappa(a,b]} \leqq b$ természetes számokból álló sorozat, amelyben nincs $\varkappa$ hosszúságú (vagy ennél hosszabb) aritmetikai sorozat. Látható, hogy $r_\varkappa(a, b] = r_\varkappa(b-a)$, hiszen a $(0, b-a]$ intervallumot a-val eltolva adódik az $(a, b]$ intervallum és eltoláskor aritmetikai sorozat ugyanolyan hosszúságú és differenciájú aritmetikai sorozatba megy át. Így $|M_n| \leqq r_{\varkappa_0}(2^{n-1}, 2^n] = r_{\varkappa_0}(2)^{n-1}$. Ebből viszont a következő adódik: (minden n-re) $\alpha_n = \sum_{a_i \in M_n} 1/a_i \leqq r_{\varkappa_0}(2^{n-1})/2^{n-1}$, hiszen $a_i \in M_n$-re $a_i > 2^{n-1}$; $|M_n| \leqq$ $\leqq r_{\varkappa_0}(2^{n-1})$. Mivel $\bigcup_1^{\infty} M_n = A$ és $\sum_{a_i \in A} 1/a_i = \infty$, így $\sum_1^{\infty} \alpha_n = \infty$ és ez ellentmondás $\sum_{n=1}^{\infty} r_{\varkappa_0}(2^{n-1})/2^{n-1} < \infty$ miatt.

Most nézzük visszafelé: (szintén indirekt úton). Tegyük fel, hogy a sejtés igaz és egy $\varkappa_0$-ra $\sum_{n=1}^{\infty} r_{\varkappa_0}(2^n)2^n = \infty$. Csináljuk a következő konstrukciót: $A = \bigcup_1^{\infty} J'_n$, ahol J'_n azt az $r_{\varkappa_0}(2^{2n} + 2^{2n-1}, 2^{2n+1}] = r_{\varkappa_0}(2^{2n-1})$ elemű halmazt jelenti, melyet úgy kapunk a $J_n = (2^{2n} + 2^{2n-1}, 2^{2n+1}] \cap \mathbf{N}$ halmazból, hogy kivesszük azt az $r_{\varkappa_0}(2^{2n+1})$ elemű halmazt, mely nem tartalmaz $\varkappa_0$ hosszúságú (vagy ennél hosszabb) artimetikai sorozatot és ez a kivett halmaz legyen a J'_n. Most belátjuk, hogy az A nem tartalmaz $\varkappa_0$ hosszúságú (vagy ennél hosszabb) aritmetikai sorozatot. A J'_n halmazok azok ilyen tulajdonságúak. Legyen $b_1, \ldots, b_{\varkappa_0}$ egy aritmetikai sorozat $(b_1 < b_2 < \ldots < b_{\varkappa_0})$ és tegyük fel, hogy $\{b_1, \ldots, b_{\varkappa_0}\} \subset A$. (Belátjuk, hogy ez nem lehet.) Legyen $b_1 \in J'_{n_1}$; ha még a b_2 is J'_{n_1}-nek eleme készen vagyunk, mert az azt jelenti, hogy $d = b_2 - b_1 < 2^{2n_1-1}$ ez pedig azt jelenti, hogy a sorozat differenciája kisebb, mint 2^{2n_1-1}, aminél már a J'_{n_1} legnagyobb elemének és a J'_{n_1+1} legkisebb elemének a különbsége is nagyobb, ami ellentmondás, mert nem lehet minden i-re $b_2 \in J'_{n_1}$ $(i = 1, 2, \ldots, \varkappa_0)$.

Nézzük a másik esetet, amikor is $b_2 \in J'_{n_2}$ és $\varkappa_2 > n_1$. Ekkor $b_3 \in J'_{n_2}$ nem lehet, mert ekkor $b_2 - b_1 > b_3 - b_2$, ha viszont $b_3 \notin J'_{n_2}$, akkor $b_3 > 2^{2n_2+1}$, amiből $b_3 > 2b_2 > b_2 + b_2 - b_1$, vagy $b_3 - b_2 > b_2 - b_1$ és ez lehetetlen, mert egyenlőségnek kell teljesülni.

Ezzel beláttuk, hogy A nem tartalmaz $\varkappa_0$ hosszúságú aritmetikai sorozatot.

Most belátjuk, hogy $\sum_{a\in A} 1/a$ divergens. Az biztos, hogy $\sum_{a\in A} 1/a \geqq \frac{r_{\varkappa_0}(2^{2n-1})}{2^{2n+1}}$, hiszen $a\in J'_n$-re $a<2^{2n+1}$. Tehát $\sum_{a\in J'_n} 1/a \geqq 1/4 \frac{r_{\varkappa_0}(2^{2n-1})}{2^{2n-1}}$ és tudjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \times$ $\times r_{\varkappa_0}(2^n)/2^n = \infty$, ami azt jelenti, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\varkappa_0}(2^{2n-1})}{2^{2n-1}}$ és $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{r_{\varkappa_0}(2^{2n})}{2^{n\cdot 2}}$ közül legalább az egyik divergens; ha az első az, akkor máris ellentmondásra jutottunk, hiszen ez azt jelenti, hogy $\sum_{a\in A} 1/a = \infty$ és A nem tartalmaz $\varkappa_0$ hosszúságú aritmetikai sorozatot, ami ellentmond a sejtésnek.

Ha viszont $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\varkappa_0}(2^{2n})}{2^{2n}} = \infty$, akkor mivel $r_{\varkappa_0}(2^{2n}) < r_{\varkappa_0}(2^{2n+1})$ ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\varkappa_0}(2^{2n+1})}{2^{2n}} =$ $= \infty$, vagyis az 1/2-szerese is divergens és ott vagyunk, ahol az előző esetben. Ezek után nézzük meg, hogy milyen kapcsolatban van a sejtés az eddigi eredményekkel. Erdős sejtéséből következne az igen nehéz Szemerédi-tétel, miszerint $c_\varkappa = 0$ minden $\varkappa$-ra ($\varkappa = 3, 4, \ldots$), hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_\varkappa(2^n)}{2^n} < \infty$-ből $r_\varkappa(2^n)/2^n \to 0$ adódik, és ha $2^n < x \leqq 2^{n+1}$, akkor $r_\varkappa(2^n)/2^{n+1} < r_\varkappa(x)/x < r_\varkappa(2^{n+1})/2^{n+1}$, amiből $r_\varkappa(x)/x \to 0$, $(x \to \infty)$.

Tétel. Jelölje u_i a Fibonacci-sorozat i-edik elemét. Ekkor

$$\varkappa > 3\text{-ra } r_\varkappa(2^i) \geqq u_i .$$

(Az ebből adódó alsó becslés gyengébb Behrend eredményénél.)

Bizonyítás. Az u_i rekurzióját figyelembe véve, elég ha megmutatjuk, hogy $\varkappa > 3$-ra $r_\varkappa(2^i) + r_\varkappa(2^{i-1}) \geqq r_\varkappa(2^{i+1})$.

Tekintsük ehhez a $(0, 2\,] \cap \mathbf{N}$-ben azt az A halmazt, mely $r_\varkappa(2^i)$ elemű és nem tartalmaz $\varkappa$ hosszúságú aritmetikai sorozatot, valamint $(2^i + 2^{i-1}, 2^{i+1}] \cap \mathbf{N}$-ben azt a B halmazt, mely $r_\varkappa(2^{i-1})$ elemű, és szintén nem tartalmaz $\varkappa$ elemű aritmetikai sorozatot.

Nyilván $A \cap B = \emptyset$ és így $|A \cup B| = |A| + |B|$, de $A \cup B$ sem tartalmazhat $\varkappa$ hosszúságú aritmetikai sorozatot, mert ha tartalmazna, akkor két eset lehetséges: B-be pontosan egy eleme esik, azaz A-ba pedig $(\varkappa - 1)$, így a differenciálja $2^i/\varkappa - 1$-nél kisebb vagy egyenlő, viszont 2^{i-1}-nél sem lehet kisebb, mert az A legnagyobb és B legkisebb elemének a távolsága is nagyobb 2^{i-1}-nél. Ez $\varkappa > 3$ miatt ellentmondás.

Amennyiben a B-be legalább két elem esne, úgy a differencia kisebb, mint B átmérője, azaz 2^{i-1}-nél is kisebb. Így az előző esethez hasonlóan jutunk ellentmondásra.

Mindkét esetben felhasználtuk, hogy A-ba is és B-be is legalább egy elemnek tartoznia kell, mivel $|A| = r_\varkappa(2^i)$ és $|B| = r_\varkappa(2^{i-1})$. Ezek szerint $r_\varkappa(2^{i+1}) \geqq |A \cap B|$ $= |A| + |B| = r_\varkappa(2^i) + r_\varkappa(2^{i-1})$.

[Az $r_\varkappa(n)$ függvények fontos tulajdonsága a szubadditivitás. Eszerint $\sum_{i=1}^{n} r_\varkappa(2^i) \geqq$ $\geqq r_\varkappa(2^{n+1} - 2) \geqq r_\varkappa(2^{n+1}) - 2$. Ennél a $\varkappa = 3$ esetben több is igazolható:

Tétel. *Ekkor* $\sum_{i=1}^{n} r_\varkappa(2^i) \geqq r_\varkappa(2^{n+1}) + (\log n)^{k_1 \log\log n} - k_2$, *ahol* k_1, k_2 *n-től független pozitív állandók.*

Bizonyítás. Végezzük a következő átalakítást:

$$\sum_{i=1}^{n} r_\varkappa(2^i)-r_\varkappa(2^{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} r_\varkappa(2^i)-r_\varkappa(2^{n+1})(1/2+1/2^2+\ldots+1/2^{n+1})-r_\varkappa(2^{n+1})/2^{n+1} \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{n}\left(r_\varkappa(2^i)-r_\varkappa(2^{n+1})/2^{n+1-i}\right)-2 = \sum_{i=1}^{n} 2^i\left(r_\varkappa(2^i)/2^i-r_\varkappa(2^{n+1})/2^{n+1}\right)-2.$$

Mivel $n+1>i$ így az $r_\varkappa(n)$ szubadditivitása miatt $r_\varkappa(2^i)/2^i-r_\varkappa(2^{n+1})/(2^{n+1})\geqq 0$. Behrend és Roth eredményét felhasználva láthatjuk, hogy $n^{1-c_1/\sqrt{\log n}}<r_3(n)<$ $<c_2 n/\log\log n$. ($c_1, c_2>0$ állandók.) Ebből $r_\varkappa(2^i)/2^i-r_\varkappa(2^{n+1})/2^{n+1}>1/2^{c_1'\sqrt{i}-c_2'}/$ $/\log(n+1)$. ($c_1', c_2'>0$ állandók.) Nézzük meg, hogy melyek azok az $i-k$, melyekre $1/2^{c_1'\sqrt{i}-c_2'}/\log(n+1)\geqq 1/2^{2c_1'\sqrt{i}}(1)$, azaz $\dfrac{2^{c_1'\sqrt{i}}-1}{2^{2c_1'\sqrt{i}}}\geqq c_2'/\log(n+1)$. Mivel létezik, olyan i_0 is, hogy $i<i_0$-ra $2^{c_1'\sqrt{i}}-1\geqq 2^{1/2c_1'\sqrt{i}}$ ezért az $i_0<i<(c_3\log\log n)^2$ feltételt kielégítő i-re teljesül (1), ahol $c_3>0$ állandó.

Tehát

$$\sum_{i=1}^{n} r_\varkappa(2^i)-r_\varkappa(2^{n+1}) \geqq \sum_{i_0<i<(c_3\log\log n)^2} 2^i\cdot 1/2^{2c_1'\sqrt{i}}-2 \geqq \sum_{m<i<(c_3\log\log n)^2} 2^{i/2}-2;$$

$$m=\max\{i_0, i_0'\},$$

ahol i_0 azt a küszöbszámot jelenti, melyre $i>i_0'$-re $2^{i/2}\geqq 2^{2c_1'\sqrt{i}}$. Így

$$\sum_{i=1}^{n} r_\varkappa(2^i)-r_\varkappa(2^{n+1}) \geqq \sum_{i=1}^{(c_3\log\log n)^2}(\sqrt{2})^i-\left(2+\sum_{i+1}^{m}2^{i/2}\right) > (\log n)^{k_1\log\log n}-k_2,$$

ahol k_1, k_2 pozitív konstansok.

Nézzük meg visszafelé: milyen esetben lehet a sejtést igazolni, úgy értve ezt, hogy $\Sigma 1/a_i$ divergenciájáról, illetve annak „gyorsaságáról" teszünk feltételt.

Állítás. *Legyen* $\delta>0$, $\varkappa$ *pozitív egész,* $x>x_0(\varkappa,\delta)$ *és* $a_1<a_2<\ldots<x$, *melyre* $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i>\log\delta x+1$. *Ekkor az* $a_1, \ldots, a_n$ *sorozatból kiválasztható* $\varkappa$ *hosszúságú aritmetikai sorozat.*

Bizonyítás. Mivel $1+1/2+\ldots+1/[\delta x]<\log[\delta x]+1\leqq\log\delta+1$, így $n<\delta x$ nem lehet, mert ebben az esetben $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i$ nem lehetne nagyobb $(\log\delta x+1)$-nél, hiszen $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i\leqq\sum_{i=1}^{n} 1/i$. Tehát $n\geqq\delta x$, viszont pozitív sűrűségű sorozatból kiválasztható tetszőleges hosszúságú aritmetikai sorozat, és ezt átfogalmazhatjuk a következő módon: legyen $\delta>0$, $\varkappa$ pozitív egész, $x\geqq x_0(\delta,\varkappa)$, és $a_1<a_2\ldots a_n\leqq x$, $n\geqq\delta x$. Ekkor kiválasztható $\varkappa$ hosszúságú aritmetikai sorozat $\{a_i\}_1^n$-ből, ami bizonyítja az állítást.

Az $r_\varkappa(n)$-re eddig ismert becslések még ahhoz is gyengék, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{r_\varkappa(2^{n+1})-r_\varkappa(2^n)}{2^n}$ sor konvergenciája bizonyítható lenne. Ez különben az első tétel szerint azt jelentené, hogy elég a $\varkappa=3$ esetet tisztázni.

Ugyancsak az első tételből következik, hogy Erdős és Turán régi $r_\varkappa(n)<n^{1-\varepsilon}$ sejtéséből (Salem és Spencer cáfolták meg) következne, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} r_\varkappa(2^n)/2^n<\infty$, aminek folyománya lenne — az elérhetetlennek tűnő állítás — miszerint a prímek sorozatából kiválasztható tetszőleges hosszúságú aritmetikai sorozat. (Még nem találtak 17-nél hosszabbat.)

Ezzel kapcsolatban a következőt sikerült igazolni.

Állítás. *Legyen* $\varepsilon\in(0,1)$ *és* $x, L\in\mathbf{N}$, $x>1$. *Ekkor létezik olyan* $c(\varepsilon)$ *konstans, hogy az* $(x, L+x)$ *intervallumba eső n-elemű prímekből álló aritmetikai sorozatra* $n\leqq\max\{c(\varepsilon), (\log L/\log 2)^{1/1-\varepsilon}\}$.

Bizonyítás. Legyen d a sorozat differenciálja. Akkor V. Thébault tétele szerint $p_1\cdots p_{\pi(n-1)}/d$, ahol p_i az i-edik prímszám.

Eszerint $d\geqq 2^{\pi(n-1)}>2^{n-1/6\log(n-1)}$, amiből $(n-1)2^{(n-1)/6\log(n-1)}<L$. $n>C(\varepsilon)$-ra $(n-1)/6\log(n-1)>n^{1-\varepsilon}$, azaz $n^{1-\varepsilon}\log 2<\log L$, amiből már adódik az állításban szereplő egyenlőtlenség.

($\prod_{p\leqq x} p<4^x$ miatt nem túl „durva" a becslés.)

Erdős Pál véleménye szerint igaz az $r_\varkappa(n)<cn/(\log n)^t$ is, $(t>1)$ amiből az első tétel szerint adódna az eredeti probléma megoldása is.

Felmerül a kérdés (Erdős Pál), hogy az $r_\varkappa(n)$ függvények között milyen nagyságrendi összefüggés van. Ezzel kapcsolatos a következő tétel.

Tétel. *Létezik olyan* $n_L\in\mathbf{N}, n_1<n_2<\ldots$ *sorozat, melyre*

a) $r_6(2^{n_L})-r_3(2^{n_L})>(c_1\log n_L)^{1-c_2/\sqrt{\log\log n_L}}$ $(c_1, c_2>0)$

b) $r_8(2^{n_L})-r_4(2^{n_L})>(c_3\log_l n_L)^{1-c_4/\sqrt{\log\log_l n_L}}$ $(l, c_3, c_4>0)$

c) *Bármely* $\varkappa>2$*-re létezik* $\varkappa'\in\mathbf{N}$, $\varkappa\leqq\varkappa'\leqq 2\varkappa$, *melyre* $n\to\infty$ *esetén* $r_{\varkappa'+1}(n)-r_{\varkappa'}(n)\to\infty$. *($\log_l n$ l-szer iterált logaritmust jelöl.)*

Bizonyítás. a) Mivel az $r_3(n)$ függvény szubadditív, így az $a_n=r_3(2^n)/2^n$ sorozatról könnyű látni, hogy monoton csökkenő. A Szemerédi-tétel szerint $a_n\to 0$, $n\to\infty$ esetén. Eszerint bármely L természetes számra létezik egy $N(L)$ természetes szám, melyre $r_3(2^{N(L)})/2^{N(L)}<1/L$, de $r_3(2^{N(L)-1})/2^{N(L)-1}\geqq\frac{1}{L}$ Roth becslése szerint $c/\log N(L)\geqq r_3(2^{N(L)-1})/2^{N(L)-1}>\frac{1}{L}$, és ebből $l\geqq c\log N(L)$ adódik.

Most belátjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$r_6(2^{N(L)})-r_3(2^{N(L)})>r_3(L/6). \tag{1}$$

Tekintsük a $T=(0, 2^{N(L)}]\cap\mathbf{N}$ halmazban azt az $r_3(2^{N(L)})$ darab természetes számból álló H-halmazt, mely nem tartalmaz három hosszúságú aritmetikai sorozatot. Ekkor $(0, 2^{N(L)}]$-ben létezik olyan $L/2$ hosszúságú intervallum, mely nem tartalmaz H-beli elemet, mert $|H|<2^{N(L)}/L$.

Most ez az $L/2$ hosszúságú intervallumot osszuk három egyenlő részre és a középső részintervallumba vegyük fel azt az $r_3(L/6)$ darab természetes számot, melyek közül nem lehet kiválasztani három hosszúságú aritmetikai sorozatot. Legyen ez a halmaz H'. Belátjuk, hogy $H\cup H'$ nem tartalmaz 6 hosszúságú aritmetikai soroza-

tot. Az látható, hogy ha tartalmazna, akkor H'-be nem lehetne egynél több eleme, mert ha legalább kettő esik H'-be, akkor a differenciája kisebb, mint $L/6$ (H' átmérője), viszont a H'-től „jobbra" is és „balra" is $L/6$ távolságra nincs H-beli elem.

Viszont az sem lehet, hogy H'-be nem esik elem, mert akkor H-ból lenne kiválasztva egy hatelemű aritmetikai sorozat, ami lehetetlen, mert még három hosszúságút sem lehet kiválasztani.

Tehát az az eset marad, amikor H'-ben pontosan egy elem van a sorozatból. De ekkor ennél is az elemnél vagy legalább három kisebb, vagy legalább három nagyobb eleme van a sorozatnak. Ez viszont lehetetlen, mert ez azt jelentené, hogy H-ból ki lehet választani egy háromelemű aritmetikai sorozatot.

Ezek szerint $r_6(2^{N(L)}) \geqq |H \cup H'| = |H| + |H'| = r_3(2^{N(L)}) + r_3(L/6)$, amiből már adódik az (1). Az $r_3(n)$ monotonitása miatt $r_3(L/6) \geqq r_3(c/6 \log n(L)) = r_3(c_1 \log N(L))$. A Behrend-egyenlőtlenség szerint így

$$r_3(L/6) > (c_1 \log N(L))^{1-c_2/\sqrt{\log\log N(L)}},$$

vagyis az $N(L) = n_L$, $L = 1, 2, \ldots$ sorozatra teljesül a tétel állítása.

b) Ugyanúgy, mint az előbb az $r_\varkappa(n)$ szubadditív, így az $a_n^{(\varkappa)} = r_\varkappa(2^n)/2^n$ sorozat minden $\varkappa$-ra monoton csökkenő és a Szemerédi-tétel szerint $\lim_{n\to\infty} a_n^{(\varkappa)} = 0$. Eszerint bármely L természetes számra létezik egy $N(L)$ természetes szám, melyre $a_{N(L)}^{(4)} < 1/L$, de $a_{N(L)-1}^{(4)} \geqq 1/L$. Roth eredménye szerint: $c/\log_l N(L) > a_{N(L)-1}^{(4)} \geqq 1/L$. (Ő mutatta meg 1972-ben, hogy $r_4(n) = 0(n/\log \ldots \log n)$.) Ebből $L > C' \log_l N(L)$. Innen ugyanazt a gondolatmenetet követve, mint az előbb beláthatjuk, hogy $r_8(2^{N(L)}) - r_4(2^{N(L)}) \geqq r_3(L/6)$. Az r_3 monotonitása szerint: $r_3(L/6) > r_3(c_3 \log_l N(L))$. Behrend egyenlőtlenségét felhasználva: $r_3(L/6) > (c_3 \log_l N(L))^{1-c_4\sqrt{\log\log_l N(L)}}$, az $n_L = N(L)$ helyettesítéssel megkapjuk a tételben szereplő egyenlőtlenséget.

c) Most hasonló meggondolásokkal megmutatjuk, hogy $n \to \infty$ esetén $r_{2\varkappa}(n) - r_\varkappa(n) \to \infty$ ($\varkappa > 4$). $\dfrac{r_\varkappa(N(L))}{N(L)} < \dfrac{1}{L}$ miatt létezik az $\{1, 2, \ldots, N(L)\}$ halmaznak egy $L/2$ hosszúságú intervalluma, melybe nem esik az $r_\varkappa(N(L))$ reprezentáns halmazának egy eleme sem.

Vegyük most is ennek az intervallumnak a három egyenlő részre való osztásából a „középső" $L/6$ hosszúságú intervallumot, és ebben az intervallumban azt az $r_3(L/6)$ elemű H halmazt, mely nem tartalmaz 3-hosszúságú aritmetikai sorozatot.

Vegyük az $r_\varkappa(N(L))$ R reprezentáns halmazának és az előbbi H-nak az egyesítését. Belátjuk, hogy $|R \cup H| < r_{2\varkappa}(N(L))$.

Ehhez elég belátni, hogy $R \cup H$ nem tartalmaz $2\varkappa$ hosszúságú aritmetikai sorozatot. A már egyszer részletezett gondolat szerint, ha mégis tartalmazna, akkor annak a sorozatnak *pontosan* egy eleme eshet a H-ba.

Így a H-tól vagy jobbra, vagy balra legalább $\varkappa$ elemének kellene lenni az illető sorozatnak, de ezek már R-be esnek viszont R nem tartalmaz $\varkappa$ hosszúságú aritmetikai sorozatot. Ez pedig ellentmondás.

Eszerint igaz a következő: Bármely $\varkappa \geqq 3$-ra létezik $\varkappa \leqq \varkappa' \leqq 2\varkappa$, melyre $n \to \infty$ esetén $r_{\varkappa'+1}(n) - r_{\varkappa'}(n) \to \infty$. Ez valószínűleg minden $\varkappa'$-re igaz.

IRODALOM

[1] WAERDEN, B. L. VAN DER, Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw. Arch. Wisk.* (2) 15, (1928), 212, 216.
[2] BERLEKAMP, E. R., A construction for partitions which avaid long arithmetic progressions. *Canadian Math. Bull. Vel.* 11. No. 3. (1968) 409—415.
[3] ERDŐS P. and TURÁN P., On some sequences of integers. *Jurnal of London Math. Soc.* 11. (1931) 261—264.
[4] BEHREND F. A., On sets of integers containing no arithmetic progression. *Casopis Math. Fis.* Praha 67 (1938) 235—239.
[5] SALEM R. and SPENCER C. S., On setr of integers which contain no three terms in an arithmetic progression. *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA 28 (1942) 361—563.
[6] BEHREND F. A., On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA 32 (1946) 331—332.
[7] MOSER L., On non-avering set of integers. *Canadian Jurnal of Math.* 5 (1953) 245—252.
[8] RANKIN R., Sets of integers containing no more Than a given numer terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. Soc. Edinburg.* Sect. A65 (1960/61) 332—344.
[9] ROTH, K. F., On certain sets of integers (V). *Jurnal London Math. Soc.* 29. (1954) 20—26.
[10] SZEMERÉDI, E., On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 20 (1—2) (1969) 89—104.
[11] ROTH, K. F., Irregularites of sequences relative to arithmetic progressions (IV). *Periodica Math. Hungarica* Vol. 2. (1972) 301—326.
[12] ROTH K. F., Irregularites of sequences relative to arithmetic progression (III). *Jurnal of Number Theory 2.* (1970) 125—142.
[13] SZEMERÉDI E., On sets of integers containing no K elements in arithmetic progression. *Acta Arith.* 27 (1975) 199—245.

ФУНКЦИИ $r_\varkappa(n)$ И ЕЁ СВЯЗЬ С ПРОБЛЕМОЙ П. ЭРДЕША

Б. БРИНДЗА

THE FUNCTIONS $r_\varkappa(n)$ AND PROBLEMS OF P. ERDŐS

B. BRINDZA

Suppose $r_\varkappa(n)$ is the maximal number of elements that can be selected from the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ to form a set of integers containing no $\varkappa$ consecutive terms of any arithmetic progression. Theorem 1. Then

$$\sum_{i=1}^{n} r_3(2^n) \geqq r_3(^{n+1}) + (\log)^{k_1 \log\log n} - k_2 \quad (k_1, k_2 > 0)$$

Theorem 2. There exists a sequence $\{n_L\}$ such that

a) $r_6(2^{n_L}) - r_3(2^{n_L}) \geqq (c_1 \log n_L)^{1-c_2/\sqrt{\log\log n_L}} \quad (c_1, c_2 > 0)$

b) $r_8(2^{n_L}) - r_4(2^{n_L}) \geqq (c_3 \log_l n_L)^{1-c_4/\sqrt{\log\log_l n_L}} \quad (l, c_3, c_4 > 0)$

c) $r_{2\varkappa}(n) - r_\varkappa(n) \to \infty$ if $n \to \infty$.

ALGEBRAI INVARIÁNSOK A FORMAELMÉLETBEN

SIMÁNYI NÁNDOR

Bevezetés

A formaelmélet (az angol nyelvű irodalomban "theory of shape") a geometriai topológia egy modern és elég gyorsan fejlődő ága. Tárgya a topologikus terek osztályozása azok bizonyos globális tulajdonságai alapján. Ez az osztályozás hasonló a Hurewicz által már jóval korábban bevezetett homotóp ekvivalencia osztályozásához és meg is egyezik vele a "lokálisan szép" terek (pl. poliéderek, abszolút környezetretraktumok) esetében. A bonyolultabb tulajdonságú tereket is vizsgálva a formaelmélet azonban többet mutat ezek hasonlóságáról vagy különbözőségéről.

Az elmélet 1968-ban K. Borsuk dolgozatával (1) indult fejlődésnek. Kezdetben csupán a kompakt metrizálható terekre vonatkozott, de később általánosították metrizálható, majd tetszőleges topologikus terekre is (pl. Mardesic, Segal (2), (3)). Azonban ezek az általánosítások a dimenzióhoz hasonlóan több, nem ekvivalens definícióhoz vezettek, melyek a kompakt metrizálható terek esetében megegyeznek. Másrészt az általánosított definíciók a terek kompakt részhalmazait használják. Mindezek azt érzékeltetik, hogy az elmélet igazán jól a kompakt metrikus terek esetében működik. A mély tételek java része is a kompakt terekre vonatkozik. Éppen ezért jelen dolgozatban csak a kompakt metrikus terek formáival foglalkozunk. Az elméletet általánosították a tér-párok és a pontozott terek formaelméletévé is. Az utóbbiak pl. a homotópiacsoportok miatt fontosak, ezért ezekkel is foglalkozunk.

A homotópiaelmélet sok tétele átvihető a formaelméletbe, azonban a formaelméletnek külön érdekes következményei vannak a geometriai topológiában. Megemlítjük ezek közül az alábbiakat:

Borsuk tétele (4): ha X és Y síkbeli kontinuumok (azaz összefüggő kompakt halmazok), úgy X és Y formája pontosan akkor egyezik meg (jelölésekkel: $ShX = ShY$), ha X és Y első Betti száma megegyezik, vagyis ha $R^2 \setminus X$ és $R^2 \setminus Y$ ugyanannyi komponensből áll.

Chapman tétele (9): ha A, B a $\mathring{Q}$ kompakt részhalmazai, úgy $ShA = ShB \Leftrightarrow Q \setminus A$ és $Q \setminus B$ homeomorf. (Itt $Q = [0, 1]^{\aleph_0}$ a Hilbert-kocka és $\mathring{Q} = (0, 1)^{\aleph_0}$ ennek altere.)

Következmény. Legyen $A \subset \mathring{Q}$ kompakt. Ha $ShA = Sh1$, akkor Q/A homeomorf Q-val, ahol Q/A a Q-ból keletkezik az A pontjainak összeragasztásával. (1 jelöli az egypontú teret.)

Tekintettel arra, hogy az elmélet irodalma meglehetősen kiterjedt, nem törekszem teljességre, mindössze megpróbálok ízelítőt adni a formaelmélet módszereiből. A hangsúlyt a formaelmélet algebrai invariánsaira helyezem. A dolgozat gerincét K. Kuperberg egy tétele képezi, amely kapcsolatot teremt bizonyos terek homológiacsoportja és fundamentális vagy másképpen formacsoportja között. (Ez utóbbiak

felelnek meg a homotópiacsoportoknak a formaelméletben.) A 2., 3., 4. paragrafus eredményei Borsuktól származnak csakúgy, mint az 1. §-ban ismertetendő segédeszközök nagy része is, amelyek pl. (6)-ban megtalálhatók. A nem Borsuktól származó eredmények szerzőit a szövegben feltüntetem.

1. §. A szükséges segédeszközök

Az egész dolgozat folyamán a „leképezés" vagy „függvény" szó mindig folytonos leképezést vagy függvényt jelent. Az előforduló topologikus terek kizárólag metrizálható terek.

1.0. Tétel (Tietze—Dugundji). Legyen X metrizálható tér, $\emptyset \neq A \subset X$ zárt altér, Y lokálisan konvex T_2 topologikus vektortér, $f: A \to Y$ leképezés. Ekkor van olyan $\bar{f}: X \to Y$ folytonos kiterjesztése f-nek, hogy $\bar{f}$ értékei az $f(A)$ konvex burkából valók.

Bizonyítás. Van olyan $\{G_\mu\}_{\mu \in M}$ nyílt fedése $X \setminus A$-nak, amely $X \setminus A$-ban lokálisan véges és minden $x \in A$, $x \in V$ (V nyílt) esetén van olyan W nyílt halmaz, hogy $x \in W$ és ha $G_\mu \cap W \neq \emptyset$, akkor $G_\mu \subset V$. Ugyanis legyen $y \in X \setminus A$-ra $K_y = S\left(y, \frac{1}{2} \varrho(y, A)\right)$, (ahol $S(y, r)$ jelöli az y körüli r sugarú nyílt gömböt), és legyen a $\{G_\mu\}_{\mu \in M}$ rendszer ennek lokálisan véges nyílt fedés finomítása $X \setminus A$-ban. ($\varrho(y, A)$ az y és A távolsága az X metrikájában.) Ilyen finomítás azért van, mert minden metrizálható tér parakompakt. (l. (13) 5. fej. 35. köv.) Egyszerűen kimutatható, hogy a $\{G_\mu\}$ rendszer jó. Legyenek ezután $x_\mu \in G_\mu$ és $a_\mu \in A$ úgy kiválasztva, hogy $\varrho(x_\mu, a_\mu) < 2\varrho(x_\mu, A) \cdot (\mu \in M)$. Definiáljuk $\mu \in M$-re a $\tau_\mu: X \setminus A \to \mathbf{R}$ folytonos függvényt: $\tau_\mu(p) = \dfrac{\varrho(p, X \setminus G_\mu)}{\sum\limits_{\mu' \in M} \varrho(p, X \setminus G_{\mu'})}$. Legyen továbbá $\bar{f}(x) = f(x)$, ha $x \in A$ és $\bar{f}(x) = \sum\limits_{\mu \in M} \tau_\mu(x) \cdot f(a_\mu)$, ha $x \in X \setminus A$. Az a_μ és x_μ pontokra kirótt feltételekből következik, hogy adott $x \in A$ esetén, ha az $y \in X \setminus A$ „elég közel" van x-hez, akkor az $\bar{f}(y)$ definíciójában szereplő $f(a_\mu)$ pontok $f(x)$-hez közel vannak, és a lokális konvexitás miatt $\bar{f}(y)$ közel van $f(x)$-hez. Ezért $\bar{f}$ folytonos, így az (1.0) tételt beláttuk.

1.1. Tétel (Kuratowski—Wojdyslawski). Minden metrizálható tér zárt altérként beágyazható egy normált tér (Banach-tér) konvex részhalmazába. (Mindegy, hogy normált vagy Banach-teret mondunk, mert egy normált tér valamely részhalmaza pontosan akkor konvex, ha konvex a normált tér teljes burkában.)

Bizonyítás. Legyen ϱ metrika X-en, $\varrho \leqq 1$. Tekintsük az X feletti korlátos folytonos függvények $C^*(X)$ Banach terét a sup normával. $x \in X$ esetén legyen $h(x) \in C^*(X)$ a $h(x)(y) = \varrho(x, y)$ képlettel megadva.

Nyilván $h: X \to C^*(X)$ izometria. Azt kell csak belátnunk, hogy $h(X)$ zárt a saját konvex burkában, $C(h(X))$-ben. Legyen tehát $f \in C(h(X))$ és $f = \lim h(x_n)$. Ekkor léteznek olyan $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nem negatív számok és $a_0, a_1, \ldots, a_k$ X-beli pontok, hogy $\sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ és $f = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i h(a_i)$. Feltehetjük, hogy $\lambda_0 > 0$. Ekkor $\varrho(f, h(x_n)) \geqq |f(x_n)| \geqq \lambda_0 h(a_0)(x_n) = \lambda_0 \varrho(a_0, x_n)$. Tehát $\lim x_n = a_0$ és így $f = h(a_0) \in h(X)$.

1.2. Definíció. Legyen A topologikus tér, B ennek altere. Az $r: A \to B$ leképezést az A B-re történő retrakciójának nevezzük, ha minden $b \in B$-re $r(b)=b$. Ha ilyen r létezik, akkor azt mondjuk, hogy B az A retraktuma.

1.3. Definíció. Az X metrizálható tér abszolút retraktum (jelöléssel $X \in AR$), ha X-et tetszőlegesen beágyazva zárt altérként egy Y metrizálható térbe, X az Y-nak retraktuma lesz.

1.4. Definíció. Az X metrizálható tér abszolút környezetretraktum, ha X-et tetszőlegesen beágyazva zárt altérként egy Y metrizálható térbe, X az Y egy nyílt halmazának a retraktuma lesz. Ezt $X \in ANR$-rel jelöljük.

1.5. Tétel.

a) X pontosan akkor AR-tér, ha homeomorf egy normált tér (Banach-tér) nem üres konvex részhalmazának egy retraktumával.

b) X pontosan akkor ANR-tér, ha homeomorf egy normált tér (Banach-tér) konvex halmaza nyílt alterének egy retraktumával.

Bizonyítás.

a) Ha $X \in AR$, akkor teljesül a második feltétel az (1.1) tétel és az $X \in AR$ definíciója miatt. Ha viszont $r: Q \to X$ retrakció, ahol $\emptyset \neq Q \subset Z$ konvex halmaza a $\mathbf{Z}$ normált térnek és $X \subset Y$ zárt altere az Y metrizálható térnek, akkor az id_x leképezés a (1.0) tétel értelmében kiterjeszthető egy $f: Y \to Q$ leképezéssé. Az $r \circ f: Y \to X$ leképezés nyilván retrakció, így $X \in AR$.

b) Lényegében az a) bizonyítása egészen apró módosítással, tudniillik az f-et meg kell szorítani az X-nek egy Y-beli környezetére úgy, hogy az $r \circ f$ értelmezhető legyen, ugyanis ekkor r nem az egész Q-n, hanem csak az X egy Q-beli környezetén van értelmezve.

1.6. Következmény.

a) AR tér retraktuma is AR tér.

b) ANR tér retraktuma és nyílt altere is ANR tér.

c) Minden metrizálható tér zárt altérként beágyazható egy AR-térbe.

Az állítások evidensek.

1.7. Állítás.

a) Az Y metrikus tér pontosan akkor AR-tér, ha minden X metrizálható térre, $X' \subset X$ zárt altérre és $f: X' \to Y$ leképezésre f kiterjeszthető $X \to Y$ leképezéssé.

b) Az Y metrikus tér pontosan akkor ANR-tér, ha az előbbi feltételek esetén f mindig kiterjeszthető az X' egy X-beli környezetére.

1.8. Tétel. Minden poliéder (azaz kompakt triangulálható tér) ANR tér.

Bizonyítás. Egyszerűen következik az (1.0) és (1.5) tételből.

A tétel bizonyítása kissé hosszadalmas, ezért mellőzzük. Megtalálható pl. (6)-ban. (IV. fej. 6.2 tétel).

1.9. Tétel. (Borsuk homotópia-kiterjesztési tétele). Legyen X' metrizálható, $X \subset X'$ zárt altér, $Y \in ANR$ és $\varphi: X \times [0, 1] \to Y$, $f_0: X' \to Y$ leképezések, ahol minden $x \in X$-re $f_0(x)=\varphi(x, 0)$.

Állítom, hogy van olyan $\varphi': X' \times [0, 1] \to Y$ kiterjesztése φ-nek, hogy minden $x' \in X'$-re $\varphi'(x', 0)=f_0(x')$. Speciálisan az $f_1(x)=\varphi(x, 1)$ képlettel adott $X \to Y$ leképezés kiterjeszthető $X' \to Y$ leképezéssé.

Bizonyítás. Vezessük be a $Z'=X'\times[0,1]$ és $Z=(X'\times\{0\})\cup(X\times[0,1])$ jelöléseket. Ekkor Z zárt Z'-ben. Az (1.7) tétel b) pontja miatt elég belátni, hogy ha $V\supset Z$ nyílt halmaz Z'-ben, akkor van olyan $h: Z'\to V$ leképezés, hogy $h/Z=id_Z$.

Mivel $[0,1]$ kompakt, azért van olyan $U\supset X$, X'-ben nyílt halmaz, hogy $U\times[0,1]\subset V$. Legyen $\alpha: X'\to[0,1]$ olyan leképezés, hogy $\alpha(X'\setminus U)\subset\setminus\{0\}$, $\alpha(X'\setminus U)\subset\{0\}$. A $h(x,t)=(x,\alpha(x)\cdot t)$ leképezés megfelel.

1.10. Tétel. Ha $Y\in ANR$, akkor létezik $G\subset Y\times Y$ nyílt halmaz és λ: $G\times[0,1]\to Y$ leképezés, hogy

a) $G\supset D(Y)$, ahol $D(Y)$ az $Y\times Y$ átlója.

b) $\lambda(x,z,0)=x$ és $\lambda(x,z,1)=z$, ha $(x,z)\in G$

c) $\lambda(x,x,t)=x$, ha $x\in Y$ és $0\leqq t\leqq 1$.

Ha $Y\in AR$, akkor $Y\times Y$ is választható G-nek. A λ neve: transzlációs leképezés.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $Y\subset W\subset A\subset N$, ahol N Banach-tér, A konvex részhalmaza N-nek, W nyílt A-ban és van $r: W\to Y$ retrakció. Minden $y\in Y$-hoz van olyan $V_y\ni y$ konvex nyílt halmaz N-ben, hogy $V_y\cap A\subset W$. Legyen $G=\bigcup_{y\in Y}(V_y\cap Y)\times(V_y\cap Y)$ és $(x,z)\in G$ esetén $\lambda(x,z,t)=r(tz+(1-t)x)$. Ez értelmes, ugyanis $(x,z)\in V_y\times V_y$ valamely $y\in Y$-ra és $V_y\cap A$ konvexitása miatt $tz+(1-t)x\in W$. A λ leképezés nyilván jó lesz. Ha $Y\in AR$ is igaz, akkor választható $W=A$-nak és így nyilván $G=Y\times Y$-nak is.

1.11. Következmény. Ha $Y\in AR$ és X metrizálható tér, továbbá f,g: $X\to Y$ leképezések, akkor $f\cong g$, és ezt olyan homotópia is mutatja, melynél azok a pontok helyben maradnak, ahol f egyenlő g-vel. (A $\cong$ jel a homotópia-relációt jelöli.)

Bizonyítás. Vegyünk $\lambda: Y\times Y\times[0,1]\to Y$ transzlációs leképezést és a $h(x,t)=\lambda(f(x),g(x),t)$ képlettel adjuk meg a megfelelő homotópiát.

2. §. Az elmélet alapvető definíciói és tételei

Legyen $M,N\in AR$, $X\subset M$, $Y\subset N$, ahol X és Y kompakt terek és $f_k: M\to N$ folytonos függvénysorozat. Azt mondjuk, hogy $\{f_k\}$ fundamentális sorozat X-ből Y-ba (M,N)-ben, ha minden $V\supset Y$ környezethez van olyan $U\supset X$ környezet, hogy $f_k/U\cong f_{k+1}/U$ V-ben, ha k elég nagy, azaz majdnem minden k-ra. Ezt a fundamentális sorozatot $f=\{f_k,X,Y\}_{M,N}$ formában is jelöljük.

Definíció. Ha $\mathbf{f}=\{f_k,X,Y\}_{M,N}$ és $\mathbf{g}=\{g_k,X,Y\}_{M,N}$ fundamentális sorozatok, akkor $\mathbf{f}\overset{\text{def}}{\cong}\mathbf{g}$ ($\mathbf{f}$ homotóp $\mathbf{g}$-vel), ha minden $V\supset Y$ környezethez van olyan $U\supset X$ környezet, hogy $f_k/U\cong g_k/U$ V-ben majdnem minden k-ra. Világos, hogy $\cong$ egy ekvivalenciareláció a fundamentális sorozatok között. Az ekvivalenciaosztályokat X-ből Y-ba (M,N)-ben haladó fundamentális osztályoknak nevezzük. Az $\mathbf{f}$-et tartalmazó fundamentális osztály jele: $[\mathbf{f}]$.

Definíció. Az $\mathbf{f}=\{f_k,X,Y\}_{M,N}$ fundamentális sorozatot az $f: X\to Y$ folytonos függvény generálja, ha $f_k(x)=f(x)$ minden $x\in X$-re és $k=1,2,\ldots$ értékre.

Világos, hogy ha adott az $f: X\to Y$, akkor az $N\in AR$ feltétel miatt az (1.7) szerint van $f': M\to N$ kiterjesztése f-nek. Az f_k-t f'-nek véve olyan $\mathbf{f}=\{f_k,X,Y\}_{M,N}$ fundamentális sorozatot kapunk, melyet f generál.

Továbbá, ha $b\in Y$ és $f_k(x)=b$ értéket veszünk minden $x\in M$-re, akkor szintén fundamentális sorozatot kapunk, melyet a konstans b leképezés generál. Ezt a fun-

damentális sorozatot **b**-vel jelöljük és konstans fundamentális sorozatnak nevezzük. Az is magától értetődik, hogy a $g_k = id_M$ sorozat egy $i_{X,M} = \{g_k, X, X\}_{M,M}$ fundamentális sorozatot ad, amelynek a neve identikus fundamentális sorozat. Ezt az id_X generálja.

A homotópia definíciójából azonnal következik, hogy ha $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ fundamentális sorozat és n_k pozitív egészek végtelenhez tartó sorozata, akkor az $\mathbf{f}' = \{f_{n_k}, X, Y\}_{M,N}$ is fundamentális sorozat és $\mathbf{f} \cong \mathbf{f}'$.

Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ és $\mathbf{g} = \{g_k, Y, Z\}_{N,P}$ fundamentális sorozatok, akkor $\{g_k \circ f_k, X, Z\}_{M,P}$ is fundamentális sorozat, melyet **gf**-fel jelölünk. Ha ezenkívül $\mathbf{f}', \mathbf{g}'$ olyan fundamentális sorozatok, hogy $\mathbf{f}' \cong \mathbf{f}$ és $\mathbf{g}' \cong \mathbf{g}$, akkor $\mathbf{g}'\mathbf{f}' \cong \mathbf{gf}$, amit egyszerű számolás mutat. Ezért értelmezhető az X-ből Y-ba (M, N)-ben haladó fundamentális osztályok és az Y-ból Z-be (N, P)-ben haladó fundamentális osztályok kompozíciója a következőképpen: $[\mathbf{g}][\mathbf{f}] \overset{\text{def}}{\cong} [\mathbf{gf}]$. Így egy kategóriát kapunk, ha objektumoknak az (M, X) párokat vesszük, ahol $M \in AR$ és $X \subset M$, X kompakt. Két objektum közötti morfizmusok az egyik objektumból a másikba vezető fundamentális osztályok. Az identikus fundamentális sorozatok fundamentális osztályai lesznek a kategória identitásai. Ezt a kategóriát F-fel jelöljük és fundamentális kategóriának nevezzük.

Definíció. *Az* $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ *és* $\mathbf{g} = \{g_k, X, Y\}_{M,N}$ *fundamentális sorozatok asszociáltak, ha minden* $x \in X$*-re és minden* k*-ra* $f_k(x) = g_k(x)$.

2.1. Tétel. *Ha* **f** *és* **g** *asszociált, akkor* $\mathbf{f} \cong \mathbf{g}$.

Bizonyítás. Legyen $\lambda: N \times N \times [0, 1] \to N$ transzlációs leképezés, amely az (1.10) tétel és $N \in AR$ miatt van. Legyen továbbá V az Y környezete N-ben. Ekkor van olyan $U \supset X$ környezet és k_0 pozitív egész, hogy

$$f_k | U \simeq f_{k+1} | U \quad V\text{-ben} \tag{2.2}$$

és

$$g_k | U \simeq g_{k+1} | U \quad V\text{-ben}, \tag{2.3}$$

ha $k \geqq k_0$.

Jelöljük h_k-val a következő $M \to N \times N$ leképezést:

$$h_k(x) = (f_k(x), \quad g_k(x)) \quad (x \in M).$$

Definiáljuk még a $\varphi_k: M \times [0, 1] \to N$ leképezést a következőképpen: $\varphi_k(x, t) = \lambda(h_k(x), t)$. Mivel a $D(Y)$ kompakt halmazra igaz, hogy $\lambda(D(Y) \times [0, 1]) \subset Y \subset \subset \operatorname{int} V$, azért van olyan $W \supset D(Y)$ környezet $N \times N$-ben, hogy $\lambda(W \times [0, 1]) \subset V$. Minden $y \in Y$-hoz van olyan $W_y \ni y$ N-ben nyílt halmaz, hogy $W_y \times W_y \subset W$. Legyen $W' = \bigcup_{y \in Y} W_y$. Abból, hogy **f** és **g** fundamentális sorozatok, következik, hogy van olyan $k_1 \geqq k_0$ egész, amelyre $f_{k_1}(X) \subset W'$ és így $g_{k_1}(X) \subset W'$. Továbbá minden $x \in X$-hez van olyan $y_x \in Y$, hogy $f_{k_1}(x) = g_{k_1}(x) \in W_{y_x}$. Tehát x-nek van olyan U_x M-beli környezete, hogy minden $z \in U_x$-re $f_{k_1}(z) \in W_{y_x}$ és $g_{k_1}(z) \in W_{y_x}$. Legyen $U' = (\bigcup_{x \in X} U_x) \cap U$. U' az X környezete M-ben és igaz rá (2.2) és (2.3) U helyett U'-vel, valamint $h_{k_1}(U') \subset W$ a konstrukció miatt. Ezért $\varphi_{k_1}(U' \times [0, 1]) \subset V$ és emiatt

$$f_{k_1} | U' \simeq g_{k_1} | U' \quad V\text{-ben}.$$

De ebből és az U'-re fennálló (2.2), (2.3)-ból kapjuk, hogy $f_k | U' \cong g_k | U'$ V-ben, ha $k \geqq k_1$. Ezzel a (2.1) tételt bebizonyítottuk.

2.4. Következmény. Ha $f: X \to Y$ folytonos függvény, akkor az f által generált fundamentális sorozatok egy fundamentális osztályhoz tartoznak, amelyet a f által generált fundamentális osztálynak nevezünk. Világos, hogy az id_X függvény az $[i_{X,M}]$ osztályt generálja és függvények kompozíciója a generált fundamentális osztályok kompozícióját generálja. (A jelölések a korábban bevezetettek.)

2.5. Állítás. *Az előző tétel jelöléseivel, ha $f, g: X \to Y$ leképezések, úgy f és g akkor és csak akkor generálják ugyanazt a fundamentális osztályt, ha „gyengén homotópak" N-ben, azaz minden $V \supset Y$ környezet esetén $f \cong g$ V-ben.*

Bizonyítás. Legyen $f': M \to N$, ill. $g': M \to N$ az f, ill. g kiterjesztése, $f_k = f'$, $g_k = g'$ és $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$, $\mathbf{g} = \{g_k, X, Y\}_{M,N}$ a generált fundamentális sorozatok. Ha $\mathbf{f} \cong \mathbf{g}$, akkor nyilvánvalóan f és g gyengén homotóp N-ben. Tegyük fel megfordítva, hogy f és g gyengén homotóp N-ben. Legyen $V \supset Y$ N-ben nyílt halmaz. Mivel $f \cong g$ V-ben, azért van olyan $\varphi: X \times [0, 1] \to V$ leképezés, hogy $\varphi(x, 0) = f(x)$ és $\varphi(x, 1) = g(x)$ minden $x \in X$-re. Legyen $H \subset M \times [0, 1]$ a következő zárt halmaz:

$$H = (X \times [0, 1]) \cup (M \times \{0, 1\}).$$

Definiáljuk a $\varphi': H \to N$ leképezést a következőképpen:

$$\varphi'(x, t) = \begin{cases} f'(x) & \text{ha} \quad t = 0 \\ g'(x) & \text{ha} \quad t = 1 \\ \varphi(x, t) & \text{ha} \quad x \in X. \end{cases}$$

Így korrekt módon definiáltunk egy $\varphi': H \to N$ folytonos leképezést, amely $N \in AR$ miatt kiterjeszthető $\varphi^*: M \times [0, 1] \to N$ leképezéssé. Mivel $\varphi^*(X \times [0, 1]) \subset V$ és $[0, 1]$ kompakt, azért van X-nek olyan U nyílt környezete M-ben, hogy $\varphi^*(U \times [0, 1]) \subset V$. Ekkor nyilván $f_k | U \cong g_k | U$ V-ben minden k-ra, és így $\mathbf{f} \cong \mathbf{g}$. Így (2.5)-öt bebizonyítottuk. (Megjegyzés: Ha $Y \in ANR$, akkor az Y-beli homotópia ekvivalens a gyenge homotópiával.)

Lemma. *Legyen $N \in AR$ és $Y \subset N$ kompakt, továbbá $r: V_0 \to Y$ retrakció Y-ra, ahol V_0 az Y egy környezete N-ben. Azt állítjuk, hogy ha $V \supset Y$ tetszőleges környezet, akkor van olyan $V' \subset V \cap V_0$ Y-környezet, amelyre*

$$id_{V'} \simeq r|_{V'} \quad V\text{-ben}.$$

Bizonyítás. Legyen (1.10) értelmében $\lambda: N \times N \times [0, 1] \to N$ transzlációs leképezés. Definiáljuk a $h: V_0 \times [0, 1] \to N$ leképezést a következőképpen: $h(x, t) = \lambda(x, r(x), t)$. Mivel V környezete Y-nak és $h(Y \times [0, 1]) \subset Y \subset V$, azért $[0, 1]$, kompaktsága miatt Y-nak van olyan V' környezete V_0-ban és így N-ben, hogy $h(V' \times [0, 1]) \subset V$ (természetesen $V' \subset V$) és így h olyan homotópia, ami mutatja, hogy $id_V \cong r/V'$ V-ben. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

2.6. Tétel. Ha $M, N \in AR$, $X \subset M$, $Y \subset N$, X, Y kompakt és $Y \in ANR$, akkor minden X-ből Y-ba (M, N)-ben haladó $[\mathbf{f}] = [\{f_k, X, Y\}_{M,N}]$ fundamentális osztály generálható egy $f: X \to Y$ leképezéssel.

Bizonyítás. Mivel $Y \in ANR$, azért van V_0 zárt környezete Y-nak N-ben és $r: V_0 \to Y$ retrakció Y-ra. Az $N \in AR$ miatt van $r': N \to N$ leképezés, amely r kiterjesztése. Definíció szerint van $U_0 \supset X$ környezet és k_0 pozitív egész, hogy $k \geqq k_0$ esetén

$$f_k / U_0 \simeq f_{k_0} / U_0 \quad V_0\text{-ban}. \tag{2.7}$$

Legyen $f'(x)=r'(f_{k_0}(x))$ $x\in M$-re és $f'_k=f'$. Így egy $\mathbf{f}'=\{f'_k, X, Y\}_{M,N}$ fundamentális sorozatot kapunk, amelyet az f'/X generál. Elég belátni, hogy $\mathbf{f}\cong\mathbf{f}'$. Legyen tehát $V\subset V_0$ az Y környezete N-ben. Az előző lemma szerint van olyan $V'\subset V$ Y-környezet, hogy

(2.8) $$id_{V'}\simeq r|_{V'}=r'|V' \quad V\text{-ben.}$$

Mivel $\mathbf{f}$ fundamentális sorozat, azért van olyan $U\subset U_0$ X-környezet és $k_1\geqq k_0$ egész, hogy

(2.9) $$f_k(U)\subset V' \quad k\geqq k_1\text{-re.}$$

(2.8) és (2.9) miatt:

(2.10) $$f_k|U\simeq rf_k|U \quad V\text{-ben} \quad k\geqq k_1\text{-re.}$$

De (2.7) miatt

(2.11) $$f_k|U\simeq f_k|U \quad V_0\text{-ban} \quad k\geqq k_0\text{-ra.}$$

A (2.11)-ben szereplő két leképezést r-rel komponálva:

(2.12) $$rf_k|U\simeq rf_{k_0}|U=f'|U \quad Y\text{-ban} \quad k\geqq k_0\text{-ra.}$$

(2.10)-ből és (2-12)-ből következik, hogy
$f_k|U\cong f'|U$ V-ben, ha $k\geqq k_1$, és ez mutatja, hogy $\mathbf{f}\cong\mathbf{f}'$, amivel a (2.6) tételt bebizonyítottuk.

Definíció (Hurewicz). Legyenek X, Y topologikus terek. Azt mondjuk, hogy X és Y homotopikusan ekvivalens, ha van olyan $f: X\to Y$ és $g: Y\to X$ leképezés, hogy $fg\cong id_Y$ és $gf\cong id_X$. Az így adódó ekvivalenciarelációt $X\underset{h}{\cong}Y$-nal jelöljük. Azt mondjuk, hogy X homotopikusan uralja Y-t, ha van olyan $f:X\to Y$ és $g: Y\to X$ leképezés, hogy $fg\cong id_Y$. Jele: $X\underset{h}{\geqq}Y$ vagy $Y\underset{h}{\leqq}X$. $\underset{h}{\leqq}$ nyilván reflexív és tranzitív reláció és $\underset{h}{\cong}$-ból következik $\underset{h}{\leqq}$.

Most nézzük az ezeknek megfelelő fogalmakat a formaelméletben.

Definíció. Legyen $M, N\in AR$, X, Y kompakt, $X\subset M$, $Y\subset N$. Azt mondjuk, hogy X és Y fundamentálisan ekvivalens (M, N)-ben, ha az (M, X) és (N, Y) objektumok izomorfak F-ben, vagyis ha van olyan $\mathbf{f}: X\to Y$ fundamentális sorozat (M, N)-ben (néhol így jelöljük azt, hogy $\mathbf{f}$ X-ből Y-ba (M, N)-ben haladó fundamentális sorozat) és $\mathbf{g}: Y\to X$ fundamentális sorozat (N, M)-ben, hogy $\mathbf{fg}\cong i_{Y,N}$ és $\mathbf{gf}\cong i_{X,M}$. Jele: $X\underset{F}{\cong}Y$ (rel. M, N). $\underset{F}{\cong}$ nyilván ekvivalenciareláció $Ob(F)$-ben.

Hasonlóan azt mondjuk, hogy X fundamentálisan uralja Y-t (M, N)-ben, ha csak az $\mathbf{fg}\cong i_{Y,N}$ feltételt követeljük meg. Ennek a jele: $X\underset{F}{\geqq}Y$ (rel. M, N) vagy $Y\underset{F}{\leqq}X$ (rel. N, M). $\underset{F}{\geqq}$ is reflexív és tranzitív reláció $Ob(F)$-ben és $\underset{F}{\cong}$-ből következik $\underset{F}{\geqq}$.

2.13. Tétel. *Az előbbi jelölésekkel, ha* $X\underset{h}{\geqq}Y$, *akkor* $X\underset{F}{\geqq}Y$ *(rel. M, N) és ha* $X\underset{h}{\cong}Y$, *akkor* $X\underset{h}{\cong}Y$ *(rel. M. N).*

Bizonyítás. Csak az első állítást bizonyítjuk: a második hasonlóan történik. Legyenek $f: X\to Y$ és $g: Y\to X$ olyan leképezések, hogy $fg\cong id_Y$. Legyen az f által (M, N)-ben indukált fundamentális osztály α és a g által (N, M)-ben indukált fundamentális osztály β. Ekkor $\alpha\beta$ az fg által indukált fundamentális osztály és $fg\cong id_Y$, valamint a (2.5) tétel miatt $\alpha\beta=[i_{Y,N}]$ és így $X\underset{F}{\geqq}Y$ (rel. M, N).

2.14. Következmény. Az előző jelölések mellett, ha X és Y homeomorf, akkor $X \underset{F}{\cong} Y$ (rel. M, N) és ha Y homeomorf az X egy retraktumával, akkor $X \underset{F}{\geqq} Y$ (rel. M, N).

Éppen ezért az $X \underset{F}{\cong} Y$ (rel. M, N) és $X \underset{F}{\geqq} F$ (rel. M, N) relációban (1.6. c.)-t is figyelembe véve az M és N lényegtelen, így röviden $X \underset{F}{\cong} Y$-t, ill. $X \underset{F}{\geqq} Y$-t írhatunk. Az $\underset{F}{\cong}$ ekvivalenciareláció osztályait formáknak nevezzük; az X ekvivalencia osztályát ShX-szel jelöljük. Így $ShX = ShY \Leftrightarrow X \underset{F}{\cong} Y$.

Definiálhatunk egy $\leqq$ reflexiv és tranzitív relációt a formák között a következőképpen:

$$ShX \leqq ShY \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X \underset{F}{\leqq} Y$$

Ez a definíció nyilván nem függ az X és Y reprezentánsok megválasztásától.

Mivel $Y \in ANR$ esetén a (2.5) tételben szereplő „gyenge homotópia" ekvivalens az Y-beli homotópiával, azért a (2.6) tétel segítségével bebizonyítható, hogy $X, Y \in ANR$ esetén $ShX = ShY \Leftrightarrow X \underset{h}{\cong} Y$ és $ShX \geqq ShY \Leftrightarrow X \underset{h}{\geqq} Y$.

3. §. A pontozott kompaktumok formaelméletének alapjai

Pontozott kompaktum alatt egy (X, x_0) párt értünk, ahol X kompakt metrizálható tér és $x_0 \in X$. Ezekre is fel lehet építeni egy, a 2. §-ban leírttal analóg elméletet.

Definíció. Legyen $M, N \in AR$, $X \subset M$, $Y \subset N$, X és Y kompakt, $x_0 \in X$ és $y_0 \in Y$, továbbá $f_k : M \to N$ olyan leképezés, hogy $f_k(x_0) = y_0$. Azt mondjuk, hogy az f_k sorozat pontozott fundamentális sorozat (X, x_0)-ból (Y, y_0)-ba (M, N)-ben, ha minden $V \supset Y$ környezethez van olyan $U \supset X$ környezet és k_0 pozitív egész, hogy $f_k | U \underset{0}{\cong} f_{k_0} | U$ (V, y_0)-ban minden $k \geqq k_0$-ra, ahol $\underset{0}{\cong}$ a pontozott homotópiát jelöli, azaz hogy van olyan $\varphi : U \times [0, 1] \to V$ leképezés, hogy $\varphi(x, 0) = f_k(x)$, $\varphi(x, 1) = f_{k_0}(x)$ és $\varphi(x_0, t) = y_0$ minden $x \in U$-ra és $t \in [0, 1]$-re. (Tehát x_0 a deformáció során mindig y_0-ba megy.) Ezt a pontozott fundamentális sorozatot röviden $\mathbf{f} = \{f_k, (X, x_0), (Y, y_0)\}_{M,N}$ jellel jelöljük.

A pontozott fundamentális sorozatok homotópiáját is a rendes fundamentális sorozatok homotópiájának mintájára definiáljuk, csak itt is pontozott homotópiát szerepeltetünk a meghatározásban. Ugyanúgy beszélhetünk pontozott fundamentális osztályokról és az F_0 pontozott fundamentális kategóriáról. Azt is hasonlóan definiálhatjuk, hogy egy $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ pontozott leképezés (amelyre tehát $f(x_0) = y_0$) mikor generál egy pontozott fundamentális sorozatot. Most is minden ilyen f generál legalább egy pontozott fundamentális sorozatot (M, N)-ben. Az egyedüli konstans pontozott fundamentális sorozat az azonosan y_0 sorozat lesz. Az identikus leképezés generálja az identikus pontozott fundamentális sorozatot (amely lényegében az identikus fundamentális sorozat) és pontozott leképezések kompozíciója generálja a generált pontozott fundamentális sorozatok kompozícióját. Az asszociált pontozott fundamentális sorozatok most is homotópok lesznek, így beszélhetünk egy pontozott leképezés által generált pontozott fundamentális osztályról. Most is, ha $f : (X, X_0) \to (Y, y_0)$ és $g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ pontozott leképezés, úgy az általuk generált pontozott fundamentális osztályok akkor és csak akkor egyeznek meg, ha f és g „gyengén pontozottan homotóp", azaz minden $V \supset Y$ környezet esetén $f \underset{0}{\cong} g$ (V, y_0)-ban. Ha

$Y \in ANR$, akkor minden (M, N)-ben haladó $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ pontozott fundamentális osztály generálható pontozott leképezéssel.

Két pontozott kompaktum homotóp ekvivalenciáját és homotóp uralását is a 2. §-ban megadotthoz hasonlóan lehet definiálni pontozott homotópiákkal. Szintén analóg módon definiálható az $(X, x_0) \underset{F}{\cong} (Y, y_0)$ (rel. M, N) és $(X, x_0) \underset{F}{\geqq} (Y, y_0)$ (rel. M, N) reláció, és ezekre is igazak a korábbiaknak megfelelő állítások, például a (2.13) tétel megfelelője is. Így definiálható egyszerűen az $(X, x_0) \underset{F}{\cong} (Y, y_0)$ és $(X, x_0) \underset{F}{\geqq} (Y, y_0)$ reláció és az $Sh(X, x_0)$ pontozott forma fogalma, valamint a $\cong$ reláció a pontozott formák között. Ezen relációknak is meg vannak a 2. §-ban említett tulajdonságai és érvényes a 2. § végén tett megjegyzés is az ANR terekre, természetesen a pontozott esetnek megfelelően átalakítva.

A fundamentális csoportok fogalma

Legyen az (X, x_0) pontozott kompaktum beágyazva az $M \in AR$ térbe, n pozitív egész szám és $a \in S^n$, ahol S^n az n dimenziós szféra, azaz $\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Azt mondjuk, hogy a $\xi_k : (S^n, a) \to (M, x_0)$ pontozott leképezések sorozata approximatív sorozat (S^n, a)-ból (X, x_0)-ba M-ben, ha minden $V \supset X$ környezethez van olyan k_0 pozitív egész, hogy $k \geqq k_0$-ra $\xi_k \underset{0}{\cong} \xi_{k_0}$ (V, x_0)-ban. Ezt az approximatív sorozatot $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ jellel jelöljük. (Néha használjuk a „$\boldsymbol{\xi} : (S^n, a) \to (X, x_0)$ M-ben haladó approximatív sorozat" jelöléssel kombinált kifejezést.) Ha még $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ is approximatív sorozat, akkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{\xi}$ homotóp $\boldsymbol{\eta}$-val (jelben: $\boldsymbol{\xi} \cong \boldsymbol{\eta}$), ha minden $V \supset X$ környezethez van olyan k_0 pozitív egész, hogy $k \geqq k_0$-ra $\xi_k \underset{0}{\cong} \eta_k$ (V, x_0)-ban. A $\cong$ nyilván ekvivalenciareláció; az ekvivalenciaosztályokat approximatív osztályoknak nevezzük. (Pontosabban (S^n, a)-ból (X, x_0)-ba M-ben haladó approximatív osztályoknak.)

Ha mindegyik ξ_k megegyezik egy fix $f : (S^n, a) \to (X, x_0)$ leképezéssel, akkor azt mondjuk, hogy f generálja $\boldsymbol{\xi}$-t. Mivel minden ilyen f pontosan egy $\boldsymbol{\xi}$ approximatív sorozatot generál, azért beszélhetünk az f által generált approximatív osztályról is, mint ennek a $\boldsymbol{\xi}$-nek a $[\boldsymbol{\xi}]$ osztályáról. Ha még $g : (S^n, a) \to (X, x_0)$ is pontozott leképezés, úgy — amint az könnyen látható — f és g pontosan akkor generálják ugyanazt az approximatív osztályt, ha gyengén pontozottan homotópak M-ben. A korábbiakhoz hasonlóan látható be, hogy ha $X \in ANR$, akkor minden $(S^n, a) \to (X, x_0)$ M-ben haladó approximatív osztály generálható $(S^n, a) \to (X, x_0)$ függvénnyel, és két ilyen függvény pontosan akkor generálja ugyanazt az approximatív osztályt, ha pontozottan homotóp.

Tartsuk meg a fenti jelöléseket. Ha ezenkívül még (Y, y_0) is pontozott kompaktum, amely az $N \in AR$ térbe van beágyazva és $\mathbf{f} = \{f_k, (X, x_0), (Y, y_0)_{M,N}\}$ pontozott fundamentális sorozat, akkor — amint az könnyen látható — $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\xi} = \{f_k \xi_k (S^n, a), (Y, y_0)\}_N$ approximatív sorozat. $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\xi}$ neve: az $\mathbf{f}$ és a $\boldsymbol{\xi}$ kompozíciója. Ha még $\mathbf{g} = \{g_k, (Y, y_0), (Z, z_0)\}_{N,P}$ pontozott fundamentális sorozat, akkor $\mathbf{g} \circ (\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{gf}) \circ \boldsymbol{\xi}$ és $i_{(X,x_0),M} \circ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$. Egyszerűen bizonyítható, hogy ha $\mathbf{h} = \{h_k, (X, x_0), (Y, y_0)_{M,N}\}$ $\mathbf{f}$-fel homotóp pontozott fundamentális sorozat, valamint a $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k, (S^n, a), (X, x_0)_M\}$ $\boldsymbol{\xi}$-vel homotóp approximatív sorozat, akkor $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\xi} \cong \mathbf{h} \circ \boldsymbol{\eta}$, tehát beszélhetünk az $[\mathbf{f}]$ fundamentális osztály és a $[\boldsymbol{\xi}]$ approximatív osztály kompozíciójáról.

Jelöljük $\pi_n(X, x_0)_M$-mel az $(S^n, a) \to (X, x_0)$ M-ben haladó approximatív osztályok halmazát. Nevezzük S^n-ben gömbnek egy $\{s \in S^n : \varrho(s_0, s) < \varepsilon\}$ alakú halmazt,

ahol $0<\varepsilon<2$, $s_0 \in S^n$ és ϱ az euklideszi metrika. Legyen B olyan gömb S^n-ben, amelyre $a \notin B$. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ approximatív sorozat a B-re van koncentrálva, ha minden k-ra $\xi_k(S^n - B) = \{x_0\}$ és minden $V \supset X$ környezethez van olyan k_0 pozitív egész, hogy minden $k \geqq k_0$-ra $\xi_k \cong \xi_{k_0}$ (V, x_0)-ban abban az értelemben, hogy a deformáció során az $S^n - B$ pontjai végig x_0-ba mennek. A homotópiacsoportok vizsgálatánál megszokott módon könnyen látható[1], hogy minden $\alpha \in \pi_n(X, x_0)_M$ elemnek van olyan reprezentánsa, amelyik B-re koncentrált. Legyen $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n(X, x_0)_M$ és B_1, B_2 két diszjunkt gömb S^n-ben, melyekre $a \notin B_1 \cup B_2$. Legyenek továbbá $\boldsymbol{\xi}_1 = \{\xi_{1k}, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ és $\boldsymbol{\xi}_2 = \{\xi_{2k}, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ az α_1, ill. α_2 reprezentánsai, melyek B_1-re, ill. B_2-re vannak koncentrálva. Legyen $s \in S^n$-re

$$\xi_k(s) = \begin{cases} \xi_{1k}(s) & \text{ha} \quad s \notin B_2 \\ \xi_{2k}(s) & \text{ha} \quad s \notin B_1. \end{cases}$$

Így egy $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ approximatív sorozatot kapunk. A homotópiacsoportoknál használt módszerrel belátható, hogy $n > 1$ esetén a $[\boldsymbol{\xi}]$ approximatív osztály csak α_1-től és α_2-től függ; B_1-től, B_2-től, $\boldsymbol{\xi}_1$-től és $\boldsymbol{\xi}_2$-től nem. Ez $n=1$ esetén is igaz, ha előzőleg fixáljuk S^1 egy irányítását és kikötjük, hogy B_1, B_2 és az a bázispont ebben az irányításban milyen ciklikus sorrendben kövessék egymást. A kapott $[\boldsymbol{\xi}]$ approximatív osztályt $\alpha_1 + \alpha_2$-vel jelöljük. Szintén a homotópiacsoportoknál használt módszerekkel kimutatható, hogy $\pi_n(X, x_0)_M$ a $+$ művelettel csoport, amely $n > 1$ esetén Abel-féle. A csoport egységeleme az azonosan x_0 függvény által generált approximatív osztály.

Legyen B az S^n egy félgömbje, amelynek határa tartalmazza az a-t, valamint $s \in S^n$ esetén s^- az s-nek a B határán átmenő n dimenziós hipersíkra vonatkozó tükörképe. Ha az $\alpha \in \pi_n(X, x_0)_M$ elemet reprezentáljuk a B-re koncentrált $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ elemmel, akkor a $\xi_k^-(s) = \xi_k(s^-)$ képlettel definiált $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k^-, (S^n, a), (X, x_0)\}_M$ approximatív sorozat $[\boldsymbol{\xi}]$ osztálya lesz az α elem inverze. Az $n=1$ esetben $\pi_n(X, x_0)_M$ algebrai tulajdonságai nem függenek S^1 irányításától, mert az inverzképzés izomorfizmust ad meg a két módon meghatározott csoport között. Jelöljük $\pi_n(X, x_0)$-lal az X n-dimenziós homotópiacsoportját. (l. például (10) 170. o. Néha röviden $\pi_n(X)$-et írunk, mivel ívszerűen összefüggő terek esetében különböző x_0 pontok izomorf $\pi_k(X, x_0)$-t adnak.) Ha $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ és az $f: (S^n, a) \to (X, x_0)$ pontozott függvény reprezentálja α-t, akkor az f által generált $\psi(\alpha)$ approximatív osztályt az α-hoz rendelve, korrekt módon definiálunk egy $\psi: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)_M$ homomorfizmust. Az ANR terekre tett megjegyzések miatt $X \in ANR$ esetén ψ izomorfizmus lesz, tehát lényegében visszakapjuk a homotópiacsoportokat.

Legyen $\mathbf{f} = \{f_k, (X, x_0), (Y, y_0)\}_{M,N}$ pontozott fundamentális sorozat. Minden $\alpha \in \pi_n(X, x_0)_M$ elemhez az $[\mathbf{f}]\alpha$ kompozíciót rendelve adott $[\mathbf{f}]$ esetén kapunk egy

$$[\mathbf{f}]_*: \pi_n(X, x_0)_M \to \pi_n(Y, y_0)_N$$

leképezést, amely könnyen láthatóan homorfizmus. A $*$ hozzárendelés nyilván funktoriális. Ebből azonnal kapjuk, hogy

(3.1) $Sh(X, x_0) = Sh(Y, y_0)$ esetén $\pi_n(X, x_0)_M \cong \pi_n(Y, y_0)_N$

(3.2) $Sh(X, x_0) \geqq Sh(Y, y_0)$ esetén $\pi_n(Y, y_0)_N$ retraktuma

$\pi_n(X, x_0)_M$-nek, azaz van olyan $r: \pi_n(X, x_0)_M \to \pi_n(Y, y_0)_N$ homomorfizmus, melynek van jobb inverze.

---

[1] Lásd pl. (10) 170—174. o.

(3.1)-ből láthatjuk, hogy $\pi_n(X, x_0)_M$ nem függ M-től, sőt lényegében csak $Sh(X, x_0)$-tól függ, tehát formainvariáns. Így beszélhetünk $\pi_n(X, x_0)$-ról, melynek a neve: az (X, x_0) n dimenziós fundamentális csoportja. (Az elnevezés nem egészen szerencsés a $\pi_1(X, x_0)$ csoporttal való összetévesztés lehetősége miatt.) Nyilván nem érdekes, hogy éppen az (S^n, a) párt választottuk kiindulásul; akármilyen vele homeomorf pontozott tér megfelelt volna. Jegyezzük meg, hogy $n>1$ esetén $\pi_k(X, x_0)$ Abel-csoport.

4. §. *A formák és a homológiacsoportok kapcsolata*

Mivel ebben a dolgozatban a Vietoris-féle homológiacsoportokat használjuk — és ezek kevésbé ismertek, mint az egyéb homológiacsoportok — azért röviden áttekintjük a definíciókat. Itt csak kompakt metrizálható terek homológiacsoportjait értelmezzük.

Legyen X kompakt részhalmaza az (M, ϱ) metrikus térnek, $\mathfrak{A}$ egy Abel-csoport (az együtthatócsoport), valamint n egy nem negatív egész. Egy M-ben fekvő n dimenziós irányított szimplexen különböző M-beli pontok $\sigma=(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sorozatát értjük, ahol két szimplexet nem tekintünk különbözőnek, ha egyik a másikból páros permutációval kapható. A $(\sigma)=\{a_0, \ldots, a_n\}$ csúcshalmazt a σ-hoz tartozó irányítatlan szimplexnek — vagy irányítatlan Vietoris-féle szimplexnek — nevezzük. Ha σ_2 a σ_1-ből páratlan permutációval kapható, akkor σ_1-et és σ_2-t egymás ellentettjének tekintjük és azt mondjuk, hogy σ_1 és σ_2 testesíti meg a közös $\{a_0, \ldots, a_n\}$ csúcshalmaz, mint irányítatlan szimplex két lehetséges irányítását. A 0 dimenziós szimplexeknek csak egy irányítást tulajdonítunk. Az n dimenziós irányított szimplexek halmazából $\mathfrak{A}$-ba képező γ függvényt M-beli n dimenziós láncnak (vagy Vietoris-féle láncnak) nevezzük $\mathfrak{A}$ felett, ha γ véges sok hely kivételével eltűnik és $\gamma(-\sigma)=-\gamma(\sigma)$ minden n dimenziós irányított szimplexre, ha $n>0$. Az n dimenziós láncok a természetes összeadási műveletre nézve Abel csoportot alkotnak. Minden n dimenziós γ lánc reprezentálható $\gamma=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sigma_i$[2] alakban, ahol $k\geqq 0$ egész, σ_i n dimenziós irányított szimplex, $\alpha_i\in\mathfrak{A}$, $i\neq j\Rightarrow(\sigma_i)\neq(\sigma_j)$ és $\alpha_i\neq 0$ minden i-re. Ez a felírás csak annyiban nem egyértelmű, hogy bármely σ_i $-\sigma_i$-re változtatható, miközben α_i $-\alpha_i$-re változik. A $(\gamma)=\bigcup_{i=1}^{k}(\sigma_i)$ halmazt a γ testének nevezzük és a σ_i szimplexekről azt mondjuk, hogy előfordulnak γ-ban. A σ irányított szimplex átmérőjén a (σ) halmaz átmérőjét értjük a ϱ metrikában. A γ lánc $d(\gamma)$ átmérője legyen a σ_i átmérőinek maximuma, ha $k\geqq 1$, egyébként 0. Az γ, $\partial\gamma$ határát homomorf módon értelmezzük a $\partial\alpha(a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_n)=\sum_{i=0}^{n}\alpha(-1)^i(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ képlettel. (A 0 dimenziós láncok határa legyen 0.) A γ-t n dimenziós M-beli $\mathfrak{A}$ feletti ciklusnak hívjuk, ha $\partial\gamma=0$. Legyen $i=1, 2, 3, \ldots$ esetén γ_i n dimenziós ciklus. A $\{\gamma_i\}$ sorozatot X n dimenziós valódi ciklusának nevezzük M-ben, ha

(a) $d(\gamma_i)\to 0$

(b) $\gamma_i\to X$, azaz minden $U\supset X$ környezet esetén $(\gamma_i)\subset U$ majdnem minden i-re.

(c) van $n+1$ dimenziós M-beli láncoknak olyan $\varkappa_i$ sorozata, hogy $\partial\varkappa_i=\gamma_i-\gamma_{i+1}$ minden i-re és a $\varkappa_i$ sorozatra teljesül (a) és (b) γ_i helyett $\varkappa_i$-vel.

---

[2] $\alpha\sigma$ jelöli azt a γ láncot, melyre $\gamma(\sigma)=\alpha$, $\gamma(-\sigma)=-\alpha$, egyéb szimplexeken pedig γ a 0 értéket veszi fel.

Az X M-beli n dimenziós valódi ciklusai a sorozatok természetes összeadására nézve Abel-csoportot alkotnak, amelyet $Z_n(X, \mathfrak{A})_M$-mel jelölünk. (Az $M=X$ esetben M-et általában nem írjuk ki.) Megjegyzendő, hogyha $\{\gamma_i\}\in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$, akkor mivel X kompakt és teljesül (b), azért az $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\gamma_i)$ és az $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\varkappa_i)$ halmazok lezárásai kompaktak. Így az (a)—(c) feltételek teljesülnek minden egyéb, az M topológiáját indukáló metrika esetén, mert egy kompakt T_2 tér pontosan egy uniform struktúrával indukálható.[3] Tehát $Z_n(X, \mathfrak{A})_M$ nem függ ϱ-tól, csak a topológiától és hasonlók mondhatók el a további definíciókról is.

Definíció. A $\{\gamma_i\}\in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$ valódi ciklus 0-homológ (jelben: $\{\gamma_i\}\sim 0$), ha vannak olyan δ_i $n+1$ dimenziós láncok, hogy $\partial\delta_i=\gamma_i$ és a δ_i sorozatra teljesül (a) és (b) γ_i helyett δ_i-vel. $Z_n(X, \mathfrak{A})_M$-ben a 0-homológ elemek nyilván egy részcsoportot alkotnak, melyet $B_n(X, \mathfrak{A})_M$-mel jelölünk. A $H_n(X, \mathfrak{A})_M=Z_n(X, \mathfrak{A})_M/B_n(X, \mathfrak{A})_M$ faktorcsoportot az X $\mathfrak{A}$-ra vonatkozó n dimenziós M-beli homológiacsoportjának nevezzük. Ha $\gamma, \gamma'\in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$, akkor $\gamma-\gamma'\in B_n(X, \mathfrak{A})_M$ esetén $\gamma\sim\gamma'$-t írunk és azt mondjuk, hogy γ homológ γ'-vel. Világos, hogyha $\gamma=\{\gamma_i\}\in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$ és n_i pozitív egészek végtelenhez tartó sorozata, akkor $\{\gamma_i\}\sim\{\gamma_{n_i}\}$. (Persze $\{\gamma_{n_i}\}\in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$).

Legyen $\gamma=\{\gamma_i\}\in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$. A prizma eljárással megmutatható,[4] hogyha a (γ_i) pontjait elég kicsi elmozgatással X-be visszük, akkor egy $\gamma'=\{\gamma_i'\}$ valódi n dimenziós ciklust kapunk, amely homológ γ-val és $|\gamma_i'|\subset X$.

Az $n+1$ dimenziós láncok kis elmozgatásával látható, hogyha az X egy X-ben fekvő valódi ciklusa $B_n(X, \mathfrak{A})_M$-ben van, akkor $B_n(X, \mathfrak{A})_X$-ben is benne van. Így tehát $H_n(X, \mathfrak{A})_M$ természetes módon izomorf $H_n(X, \mathfrak{A})_X$-szel, mely csak n, X és $\mathfrak{A}$ függvénye. Ezért az M lényegtelen, és beszélhetünk a $H_n(X, \mathfrak{A})=H_n(X, \mathfrak{A})_X$ csoportról, amelyet az X n dimenziós $\mathfrak{A}$ feletti homológiacsoportjának nevezzük.

Legyen (K, τ) kompakt poliéder a τ triangulációval és γ n dimenziós szimpliciális ciklus. Tekintsük γ-nak a $t(\gamma)=\{\gamma_i\}$ baricentrikus felbontássorozatát,[5] mint Vietoris-féle ciklusok sorozatát. Ismert, hogy

(4.1) $t(\gamma)$ valódi ciklus K-ban és

$t: Z_n(K, \tau, \mathfrak{A})\to Z_n(K, \mathfrak{A})$ homomorfizmus, melyre

$t(B_n(K, \tau, \mathfrak{A}))\subset B_n(K, \mathfrak{A})$ és a t által a $H_n(K, \tau, \mathfrak{A})$,

és $H_n(K, \mathfrak{A})$ között indukált homomorfizmus izomorfizmus lesz.

(4.2) Következmény. Az előbbi jelölésekkel, ha

$i<j$, akkor $\gamma_i-\gamma_j=\partial\varkappa_{i,j}$, ahol

$\varkappa_{i,j}$ $(n+1)$-dimenziós Vietoris-lánc és $d(\varkappa_{i,j})$ elég kicsi, ha i elég nagy.

Vizsgáljuk most azt az esetet, mikor X, Y kompakt metrizálható tér és $f: X\to Y$ folytonos leképezés. Ekkor minden $\gamma=\{\gamma_i\}\in Z_n(X, \mathfrak{A})_X$ valódi ciklus esetén az $f'(\gamma)=\{f(\gamma_i)\}$ n dimenziós valódi ciklusa Y-nak Y-ban, amint az könnyen következik

[3] Azaz a kompakt teret indukáló bármely két metrika esetén a tér identitása egyenletesen folytonos lesz a metrikák között.

[4] Lásd pl. (11) 100—117. o.

[5] Lásd pl. (12) 9. §.

f egyenletes folytonosságából. Megjegyezzük, hogy az $f(\gamma_i)$ láncot úgy értelmezzük, hogyha a γ_i-ben előforduló valamely σ szimplex csúcsai közül legalább kettő egybeesik f-nél, akkor az ennek megfelelő tagot egyszerűen kihagyjuk $f(\gamma_i)$-ből. A kapott $f'\colon Z_n(X, \mathfrak{A}) \to Z_n(Y, \mathfrak{A})$ homomorfizmus, amely 0-homológ valódi ciklusokhoz 0-homológokat rendel, így meghatároz egy $f_*\colon H_n(X, \mathfrak{A}) \to H_n(Y, \mathfrak{A})$ homomorfizmust, amely nyilván funktoriálisan függ az f-től. A prizma eljárással igazolható, hogy $f \cong g$ esetén $f_* = g_*$.

A továbbiakban gyakran fordul elő pozitív egészek $\{n_k\}$ sorozata. Azt mondjuk, hogy egy állítás teljesül minden, „elég gyorsan növő" $\{n_k\}$ sorozatra, ha van olyan $\{m_k\}$ sorozat, hogy minden olyan $\{n_k\}$ sorozatra, melyre minden k esetén $n_k \geqq m_k$ igaz az állítás. Általában csak szigorúan monoton növő sorozatok fognak szerepelni.

4.3. Lemma. *Legyen (A, ϱ) és (B, σ) metrikus tér, $K \subset A$ kompakt részhalmaz és $f\colon A \to B$ folytonos leképezés. Azt állítjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $x, y \in A$, $\varrho(x, y) < \delta_\varepsilon$, $\varrho(x, K) < \delta_\varepsilon$ és $\varrho(y, K) < \delta_\varepsilon$, akkor $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha valamely ε-ra nem lenne δ_ε, akkor lenne A-ban olyan $\{x_k\}$ és $\{y_k\}$ sorozat, hogy

$$\varrho(x_k, y_k) \to 0, \quad \varrho(x_k, K) \to 0, \quad \varrho(y_k, K) \to 0, \quad \text{és} \quad \sigma(f(x_k), f(y_k)) \geqq \varepsilon.$$

A középső két feltétel miatt $\{x_k\}$-ból és $\{y_k\}$-ból kiválasztható konvergens részsorozat, és a közös limeszpont f-képéhez konvergálna az $\{f(x_k)\}$ és $\{f(y_k)\}$ egy-egy részsorozata, amely lehetetlen a $\sigma(f(x_k), f(y_k)) \geqq \varepsilon$ miatt.

4.4. Tétel. *Legyen $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ fundamentális sorozat, $\mathfrak{A}$ egy Abel-csoport és $n \geqq 0$ egész. Azt állítjuk, hogy ha adott egy $\gamma = \{\gamma_k\} \in Z_n(X, \mathfrak{A})_M$ valódi ciklus, akkor minden elég gyorsan növő $\{n_k\}$ sorozatra az $\{f_k(\gamma_{n_k})\}$ sorozat $Z_n(Y, \mathfrak{A})_N$-ben lesz, mégpedig egy homológiaosztályban, amelyet $f'(\gamma)$-val jelölünk. Az így adódó $f'\colon Z_n(X, \mathfrak{A})_M \to H_n(Y, \mathfrak{A})_M$ homomorfizmusra $B_n(X, \mathfrak{A})_M \subset \ker f'$ lesz, és így f' definiál egy $\mathbf{f}_*\colon H_n(X, \mathfrak{A})_M \to H_n(Y, \mathfrak{A})_N$ homomorfizmust, amely funktoriálisan függ az $\mathbf{f}$-től, és ha $\mathbf{g} = \{g_k, X, Y\}_{M,N}$ $\mathbf{f}$-fel homotóp fundamentális sorozat, akkor $\mathbf{f}_* = \mathbf{g}_*$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{f}$ fundamentális sorozat, azért van N-beli nyílt halmazoknak olyan $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ és M-beli nyílt halmazoknak olyan $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ sorozata, hogy $\{V_i\}$ az Y-nak, $\{U_i\}$ az X-nek környezetbázisa és minden k-ra $f_k | U_k \cong f_{k+1} | U_k$ V_k-ban (1.11. miatt ui. az első néhány V_i N-nek választható), és így van olyan $\varphi_k\colon U_k \times [0, 1] \to V_k$ homotópia, amely összeköti f_k-t és f_{k+1}-et. Ha a (4.3) lemmát az $f_k\colon U_k \to V_k$ leképezésre és az X kompakt halmazra alkalmazzuk, akkor azt nyerjük, hogy ha az $\{n_k\}$ sorozat elég gyorsan nő, akkor az $\{f_k(\gamma_{n_k})\}$ sorozatra teljesül a § elején megkövetelt (a) és (b) feltétel. Másrészt ugyanez a gondolat mutatja, hogy ha az $\{n_k\}$ sorozat elég gyorsan nő, akkor $f_k(\gamma_{n_k}) - f_k(\gamma_{n_{k+1}})$ előáll egy V_k-beli elég finom $n+1$ dimenziós lánc határaként. Ha a (4.3) lemmát a $\varphi_k\colon U_k \times [0, 1] \to V_k$ leképezésre és az $X \times [0, 1]$ kompakt halmazra alkalmazzuk[6], akkor a prizma eljárás segítségével azt kapjuk, hogy $f_k(\gamma_{n_{k+1}}) - f_{k+1}(\gamma_{n_{k+1}})$ is előáll egy elég finom V_k-beli $n+1$ dimenziós lánc határaként, ha az $\{n_k\}$ sorozat elég gyorsan nő. A tétel további állításai már csak e két gondolattal analóg megfontolásokat követelnek, így ezeket nem részletezzük.

[6] $U_k \times [0, 1]$-et akármilyen kompatibilis metrikával ellátva.

4.5. Következmény.

1. $ShX = ShY$ esetén $H_n(X, \mathfrak{A}) \cong H_n(Y, \mathfrak{A})$

2. $ShX \geqq ShY$ esetén $H_n(Y, \mathfrak{A})$ a $H_n(X, \mathfrak{A})$

csoport direkt összeadandója.

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint (3.1)-et és (3.2)-t kaptuk az előzményekből] az állítás azonnal következik (4.4)-ből.

5. §. *Hurewicz tétele a formaelméletben*

A már említett algebrai invariánsok és a formák közötti kapcsolat sok érdekes tételben és korollárium ban tükröződik; ezeket részletesen tárgyalja pl. az (5) monográfia. Mi csak Hurewicz egy tételét (l. (8), 522. o.), illetve annak formaelméleti megfelelőjét emeljük ki.

Szükségünk lesz a következő definíciókra: legyen n nemnegatív egész. Azt mondjuk, hogy az X topologikus tér n-szeresen összefüggő, ha minden $f: S^n \to X$ leképezés homotóp X-ben egy konstans leképezéssel. $X \in C^n$-nel jelöljük azt a tényt, hogy X k-szorosan összefüggő minden $0 \leqq k \leqq n$ egészre. Azt mondjuk, hogy X lokálisan n-szeresen összefüggő, ha minden $p \in X$-re és $V \ni p$ környezetre van olyan $U \ni p$ környezet, hogy minden $f: S^n \to U$ leképezés V-ben homotóp egy konstans leképezéssel. Ha minden $0 \leqq k \leqq n$-re X lokálisan k-szorosan összefüggő, akkor $X \in LC^n$-et írunk.

A dolgozat hátralevő részében a homológiacsoportok együtthatócsoportja mindig a $\mathbf{Z}$ csoport lesz. (Az egészek additív csoportja).

Legyen (Y, y_0) pontozott metrizálható tér és $n > 0$ egész. Ekkor beszélhetünk $\pi_n(Y, y_0)$-ról és $H_n(Y) = H_n(Y; Z)$-ről. (Korábban ugyan nem definiáltuk a Vietoris homológiacsoportokat tetszőleges metrizálható terekre, de ez megtehető. Egyébként lehet kompakt Y-ra gondolni.) Tudjuk, hogy $H_n(S^n) \cong Z$. Legyen $\alpha \in H_n(S^n)$ az egyik generátor. Ha $f: (S^n, a) \to (Y, y_0)$ egy pontozott leképezés ($a \in S^n$ egy bázispont), akkor f generál egy $f_*: H_n(S^n) \to H_n(Y)$ homomorfizmust, és tekinthetjük az $f_*(\alpha) \in H_n(Y)$ elemet. Másfelől f reprezentál egy $[f] \in \pi_n(Y, y_0)$ elemet. A homotópiainvariancia miatt rögzített α esetén $f_*(\alpha)$ csak $[f]$-től függ, és így kapunk egy φ_n: $\pi_n(Y, y_0) \to H_n(Y)$ leképezést, amely homomorfizmus, amint ez a π_n-beli összeadás definíciójából könnyen következik. A φ_n neve: Hurewicz-féle homomorfizmus. Ha α helyett $(-\alpha)$-t vettünk volna, akkor φ_n helyett $(-\varphi_n)$-t kaptunk volna, amelynek az algebrai tulajdonságai megegyeznek a φ_n algebrai tulajdonságaival. Hurewicz tétele azt mondja ki, hogy ha $n \geqq 2$, $Y \in C^{n-1}$ és $Y \in LC^{n-1}$, akkor φ_n izomorfizmus Ebből indukcióval könnyen kapjuk, hogy ha $n \geqq 2$, $Y \in LC^{n-1}$, Y összefüggő, $\pi_1(Y, y_0)$ és $H_k(Y)$ 0-csoportok $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$, akkor φ_n izomorfizmus. Speciálisan az $Y = S^n$ esetben Hopf klasszifikációs tételét kapjuk meg. Megjegyezzük, hogy tetszőleges X T_2 térre $X \in C^0 \Leftrightarrow X$ ívszerűen összefüggő, $X \in LC^0 \Leftrightarrow X$ lokálisan ívszerűen összefüggő, és ha X ívszerűen összefüggő, úgy X pontosan akkor k-szorosan összefüggő, ha $\pi_k(X) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Térjünk most át a formák esetére. Legyen az (X, x_0) pontozott kompaktum beágyazva az $M \in AR$ térbe. Azt mondjuk, hogy (X, x_0) approximatíve q-szorosan összefüggő M-ben, ha minden $V \supset X$ környezethez van olyan $U \supset X$ környezet, hogy minden $f: (S^q, a) \to (U, x_0)$ pontozott leképezés pontozottan homotóp (V, x_0)-ban az azonosan x_0 leképezéssel.

5.1. Tétel. *Legyen a fenti jelölésekkel* (X, x_0) *approximative q-szorosan összefüggő M-ben, továbbá legyen az* (Y, y_0) *pontozott kompaktum beágyazva az* $N \in AR$ *térbe és* $Sh(X, x_0) \cong Sh(Y, y_0)$. *Ekkor* (Y, y_0) *approximative q-szorosan összefüggő N-ben.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{f} = \{f_k, (X, x_0), (Y, y_0)\}_{M,N}$ és $\mathbf{g} = \{g_k, (Y, y_0), (X, x_0)\}_{N,M}$ olyan pontozott fundamentális sorozatok, hogy $\mathbf{fg} \underset{\circ}{\cong} i_{(Y, y_0)N}$. Legyen $V \supset Y$ teszőleges N-beli nyílt halmaz. Ekkor van olyan $U \supset X$ M-beli nyílt halmaz és k_0 pozitív egész, hogy $f_k(U) \subset V$ minden $k \geqq k_0$-ra. Az (X, x_0)-ra tett feltevés miatt van olyan $U_1 \subset U$, $U_1 \supset X$ nyílt halmaz, hogy minden $h: (S^q, a) \to (U_1, x_0)$ leképezés pontozottan homotóp U-ban a konstans leképezéssel. Mivel $\mathbf{g}$ is pontozott fundamentális sorozat és $\mathbf{fg} \underset{\circ}{\cong} i_{(Y, y_0), N}$, azért van olyan $V_1 \supset Y$ nyílt halmaz és $k_1 \geqq k_0$ egész, hogy $k \geqq k_1$ esetén $g_k(V_1) \subset U_1$ és $f_k g_k | V_1 \underset{\circ}{\cong} id_{V_1}$ (V, y_0)-ban. Ekkor V_1 jó lesz a V-hez, ugyanis, ha $h': (S^q, a) \to (V_1, y_0)$ pontozott leképezés, akkor $k \geqq k_1$ esetén $g_k h' \underset{\circ}{\cong} x_0 (U, x_0)$-ban és ezt f_k-val komponálva: $f_k g_k h' \underset{\circ}{\cong} y_0$ (V, y_0)-ban. De mivel $f_k g_k / V_1 \underset{\circ}{\cong} id_{V_1}$ (V, y_0)-ban, azért $h' \cong y_0 (V, y_0)$-ban, és ezzel az (5.1) tételt beláttuk.

5.2. Következmény. Az „(X, x_0) approximative q-szorosan összefüggő M-ben" reláció M-től nem függ, csak (X, x_0)-tól, sőt csak $Sh(X, x_0)$-tól. Így beszélhetünk approximative q-szorosan összefüggő pontozott formákról. Ez a tulajdonság a $\leqq$ relációra nézve lefelé öröklődik a formák körében.

Megjegyzés. Az approximatív 0-szoros összefüggőség az X összefüggőségével ekvivalens. Ugyanis ez a feltétel ívszerűen összefüggő halmazokból álló környezetbázist követel X-nek M-ben. És ilyen bázis az $M = [0, 1]^{\aleph_0}$ lokálisan ívszerűen összefüggő tér esetében pontosan akkor van, ha az X kompakt halmaz összefüggő.

Most térjünk át a formaelméletre.

Legyen P egy poliéder és τ ennek egy triangulációja. Jelölje $n \geqq 2$-re P^{n-1} a P $n-1$ dimenziós vázát, vagyis az n-nél kisebb dimenziójú szimplexek unióját. Legyen továbbá $f: (P, P^{n-1}) \to (Y, y_0)$ párok közötti folytonos leképezés, ahol (Y, y_0) pontozott metrizálható tér, ami az $(Y, \{y_0\})$ párnak tekintendő. Tekintsünk egy $\Delta^n \in \tau$ n dimenziós irányított szimplexet. Az irányítás megadása a Δ^n csúcsainak egy felsorolását jelenti, ahol két felsorolás definíció szerint pontosan akkor adja ugyanazt az irányítást, ha egyik a másikból páros permutációval kapható. Reprezentálja Δ^n eme irányítását a csúcsainak az $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ felsorolása. Ezután megadunk egy $t: \Delta^n \to \mathbf{R}^n$ lineáris beágyazást úgy, hogy $t(x^0)$ a csupa -1 koordinátájú vektor, $t(x_k)$ pedig a szokásos k-adik egységvektor legyen. Majd pedig a $t(\Delta^n)$ szimplex belsejét képezzük le homeomorfan $\mathbf{R}^n$-re a v függvénnyel: Legyen $v(0) = 0$, ha pedig $x \neq 0$, $x \in \operatorname{int}(t(\Delta^n))$, akkor vegye fel v az x helyen a $v(x) = \dfrac{1}{1-\alpha} x$ értéket, ahol α olyan pozitív szám, melyre x/α a $t(\Delta^n)$ határán van. Jelölje s az $\mathbf{R}^n$ szokásos sztereografikus vetítését az a „Északi sarkától" megfosztott S^n gömbre, továbbá jelölje. $\tilde{\Delta}^n$ azt az Δ^n-ből kapható faktorteret, amit a Δ^n szimplex határpontjainak azonosításával kaphatunk. A határból származó b ponttal pontozzuk a $\tilde{\Delta}^n$ teret. Ezek után a $(\tilde{\Delta}^n, b)$ pontozott térnek megadjuk egy h homeomorfizmusát (S^n, a)-ra a következőképpen: $h = s \circ v \circ t$ a $\tilde{\Delta}^n \setminus \{b\}$ halmazon és $h(b) = a$. Nyilván az $f \circ h^{-1}$ függvény reprezentálja a $\pi_n(Y, y_0)$ egy $[f/\Delta^n]$-nel jelölt elemét. Be lehet látni, hogy $[f/\Delta^n]$ nem függ a Δ^n csúcsainak az adott irányítással kompatibilis felsorolásától és az irányítás megváltoztatásával $[f/\Delta^n]$ előjelet vált. Ha $\varkappa = \sum_{i=1}^{r} c_i \Delta_i^n \in C_n(\tau)$ τ-beli n dimenziós

lánc **Z** felett, akkor lehet értelmezni a $\pi_n(Y, y_0)$ csoport $\chi_{n,f}(\varkappa)$ elemét:

$$\chi_{n,f}(\varkappa) = \sum_{i=1}^{r} c_i[f/\Delta_i^n].$$

A fent említett, irányítással kapcsolatos megállapítás miatt $\chi_{n,f}$ egyértelműen definiált homomorfizmus a $C_n(\tau)$ Abel csoportból a $\pi_n(Y, y_0)$ Abel-csoportba.

5.3. Lemma. *A fenti jelölésekkel, ha* $\varkappa \sim 0$, *akkor* $\chi_{n,f}(\varkappa) = 0$.

Bizonyítás. Elég az állítást belátni a $\varkappa = \partial \Delta^{n+1}$ esetben, ahol Δ^{n+1} irányított $n+1$ dimenziós szimplex τ-ben. Legyen $\varkappa = \Delta_0^n + \Delta_1^n + \ldots + \Delta_{n+1}^n$, ahol a Δ_i^n-k a Δ^{n+1} megfelelően irányított lapjai, továbbá legyen x_0 a Δ^{n+1} egyik csúcsa. Világos, hogy $f/(\dot{\Delta}^{n+1}, x_0)$ a $\pi_n(Y, y_0)$-ban a 0 elemet reprezentálja, mert Δ^{n+1}-ben x_0-ra húzható a Δ^{n+1} $\dot{\Delta}^{n+1}$ határa úgy, hogy közben x_0 végig fixen marad. (A Δ^{n+1} szimplex $\dot{\Delta}^{n+1}$ határát egy homeomorfizmus segítségével azonosíthatjuk a $\pi_n(Y, y_0)$ definíciójában szereplő S^n gömbbel.) De a $\pi_n(Y, y_0)$-beli összeadás definíciója miatt $f/(\dot{\Delta}^{n+1}, x_0)$ éppen $\chi_{n,f}(\varkappa)$-t vagy $-\chi_{n,f}(\varkappa)$-t reprezentálja, amivel az (5.3) lemmát bebizonyítottuk

5.4. Lemma. *Legyen az* (X, x_0) *pontozott kompaktum a* Q *Hilbert-kockába ágyazva és legyen* (X, x_0) *approximative q-szorosan összefüggő* $q = 0, 1, \ldots n-1$*-re, ahol n pozitív egész. Állítjuk, hogyha* $U \supset X$ *nyílt halmaz* Q*-ban, akkor van olyan* $U_0 \supset X$ *nyílt halmaz, hogy amennyiben* (P, a) *n-nél kisebb dimenziójú pontozott poliéder és* $f: (P, a) \to (U_0, x_0)$ *pontozott leképezés, akkor* $f \cong_{\circ} x_0$ (U, x_0)*-ban.*

Bizonyítás. n-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk be ez állítást. Az $n=1$ esetben az (5.2) utáni megjegyzés miatt X összefüggő, és így van X-nek Q-ban ívszerűen összefüggő nyílt halmazokból álló környezetbázisa, tehát ha U_0 egy ilyen nyílt halmaz, akkor — mivel dim $P=0$ esetén P diszkrét véges — U_0 megfelelő, amennyiben $U_0 \subset U$. Legyen ezután $n>1$, és tegyük fel, hogy az n-nél kisebb $\varkappa$ értékekre igaz az állítás. Mivel (X, x_0) approximative $n-1$-szeresen összefüggő és $U \supset X$ nyílt halmaz, azért van olyan $U_1 \supset X$, $U_1 \subset U$ nyílt halmaz, hogy minden $(S^{n-1}, a) \to (U_1, x_0)$ leképezés pontozottan homotóp (U, x_0)-ban a konstans leképezéssel. Az indukciós feltevés miatt U_1-hez van egy megfelelő $U_0 \supset X$, $U_0 \subset U_1$ nyílt halmaz a $\varkappa = n-1$ esetnek megfelelően. U_0 jó lesz U-hoz a $\varkappa = n$ esetben. Legyen ugyanis (P, a) pontozott poliéder, dim $P < n$ és $f: (P, a) \to (U_0, x_0)$ pontozott leképezés. Feltehető, hogy dim $P = n-1$ és P a τ-vel van triangulálva úgy, hogy a a τ csúcsa. Jelölje P' a P $n-2$ dimenziós vázát. U_0 megválasztása miatt $f/P' \cong_{\circ} x_0$ (U_1, x_0)-ban. Mivel $U_1 \in ANR$, azért Borsuk homotópia-kiterjesztési tétele miatt van egy $\hat{f}$: $(P, a) \to (U_1, x_0)$ leképezés, melyre $\hat{f} \cong_{\circ} f$ (U_1, x_0)-ban és $\hat{f}(P') = \{x_0\}$. Jelöljük P/P'-vel azt a teret, amit P-ből kapunk a P' pontjainak azonosításával. $\hat{f}$ megad egy $f^*: (P/P', P') \to (U_1, x_0)$ pontozott leképezést. P/P' olyan tér, ami véges sok $n-1$ dimenziós szféra 1—1 pontjának 1 pontba ragasztásával kapható. (A kiindulási szférák diszjunktak.) U_1 választása miatt $f^* \cong_{\circ} x_0 (U, x_0)$-ban és ezért $\hat{f} \cong_{\circ} x_0 (U, x_0)$-ban. Így $f \cong_{\circ} x_0$ (U, x_0)-ban, és az (5.4) Lemmát beláttuk.

Jelölje E^∞ a valós Hilbert-teret, azaz azon valós $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozatok halmazát, melyekre $\sum x_i^2 < \infty$. Értelmezzük a szokásos vektorműveleteket, skalárszorzatot és normát. Legyen $Q = \left\{(x_1, x_2, \ldots) \in E^\infty : 0 \leqq x_i \leqq \frac{1}{i}\right\}$. Q konvex és az E^∞-ből örökölt topológiája a koordináták szorzattopológiája, tehát Q Hilbert-kocka, és így $Q \in AR$ Ezentúl Q alatt mindig ezt a Hilbert-kockát értjük. Mivel Q az E^∞-ben van, azért értelmes dolog Q-ban konvex halmazról, konvex burokról beszélni. Ha $\sigma = \sigma(a_0,$

..., a_n) n dimenziós Vietoris-féle irányított szimplex Q-ban, akkor jelöljük $\|\sigma\| = \|(a_0, ..., a_n)\|$ jellel a $\{a_0, ..., a_n\}$ halmaz konvex burkát, ami egy kompakt halmaz. Ha $a_0, a_1, ..., a_n$ lineárisan függetlenek, azaz az általuk kifeszített hipersík n dimenziós, akkor $\|\sigma\|$ nyilván n dimenziós geometriai szimplex és σ megad rajta egy irányítást is. Ezt az irányított geometriai szimplexet $\Delta(a_0, ..., a_n)$-nel jelöljük.

Legyen Δ^{n+1} egy $n+1$ dimenziós geometriai szimplex ($n \geqq 2$), ennek egy csúcsa s_0, és jelöljük S-sel a Δ^{n+1} határát, amely tehát egy n dimenziós szféra. Tekintsünk Q-ban egy (X, x_0) pontozott kompaktumot. Fixáljuk le az S egyik irányítását, ez lényegében az egyik $\alpha \in H_n(S)$ generátor megadását jelenti a $H_n(S)$ csoportban. Ha most $\xi = \{\xi_k, (S, s_0), (X, x_0)\}_Q$ egy approximatív sorozat, akkor ξ indukál egy $\xi_*: H_n(S) \to H_n(X)$ homomorfizmust a (4.4) tétel szerint, amely csak a $[\xi] \in \pi_n(X, x_0)$ elemtől függ. (Itt nem lényeges körülmény, hogy S nem AR tér, mert (4.4) bizonyításához ezt nem használtuk ki.) A $[\xi]$ elemhez a $\xi_*(\alpha)$ elemet rendelve, nyilván egy $\theta_n: \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ leképezést kapunk, ami homomorfizmus, amint az könnyen látható a $\pi_n(X, x_0)$-beli összeadás definíciójából. A θ_n neve: módosított Hurewicz homomorfizmus. Világos, hogy α helyett $(-\alpha)$-t választva θ_n is csak $(-\theta_n)$-re változik. Tudjuk, hogy $X \in ANR$ esetén $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ természetes módon, és értelmeztük Hurewicz tétele előtt a $\varphi_n: \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ homomorfizmust is. A definíciókból könnyen következik, hogy az említett izomorfizmust θ_n-nel komponálva φ_n-hez jutunk. Tehát $X \in ANR$ esetén lényegében visszakaptuk a φ_n homomorfizmust.

Főtételünket, melyet Kuperberg [7]-ben bizonyított, és amelyet módosított Hurewicz-tételnek is nevezhetünk, mármost a következőképpen mondhatjuk ki:

5.5. Tétel. *A fenti jelölésekkel, ha* $n \geqq 2$ *és* (X, x_0) *approximative q-szorosan összefüggő* $q = 0, 1, ..., n-1$*-re, akkor* θ_n *izomorfizmus* $\pi_n(X, x_0)$ *és* $H_n(X)$ *között.*

Bizonyítás. Legyen $\Delta^{n+1} = \Delta(s_0, s_1, ..., s_{n+1})$ a fixált irányításnak megfelelő sorrendben. Jelölje $\mathcal{T}$ az $S = \dot{\Delta}^{n+1}$-nek azt a triangulációját, amit Δ^{n+1} lapokra való felbontásával kapunk S-en, továbbá $\mathcal{T}_k$ a $\mathcal{T}$ k-adik baricentrikus felbontását és τ_k a $\mathcal{T}_k$ n dimenziós szimplexeinek összegét, mindegyik szimplexet az eredetileg fixált S-irányításnak megfelelően irányítva.

Segédtétel. *Legyen* $k = 1, 2, 3, ...$-ra $\xi_k: (S, s_0) \to (Q, x_0)$ *pontozott leképezés, és tegyük fel, hogy létezik a Q-ban nyílt halmazoknak egy olyan* $U_1 \supset U_2 \supset ...$ *sorozata, amely X-nek környezetbázisa és minden k-ra* $\xi_k(S) \subset U_k$. *(Ez a feltétel nyilván azt jelenti, hogy minden* $U \supset X$ *környezetre* $\xi_k(S) \subset U$ *majdnem minden k-ra). Tegyük fel, hogy minden „elég gyorsan növő" $\{n_k\}$ sorozat esetén a* $\{\xi_k(\tau_{n_k})\}$ *0-val homológ valódi X-beli ciklus Q-ban. Azt állítjuk, hogy ekkor a* $\{\xi_k\}$ *sorozat homotóp az azonosan* x_0 *approximatív sorozattal (és így* $\{\xi_k\}$ *is approximatív sorozat), azaz minden* $U \supset X$ *környezetre* $\xi_k \underset{\circ}{\cong} x_0$ *U-ban majdnem minden k-ra.*

Megjegyzés. A segédtétel feltételében a $\{\tau_k\}$ sorozat helyett szerepelhet tetszőleges olyan n dimenziós valódi ciklusa S-nek, amelynek a homológiaosztálya a $H_n(S)$ generátora. Ez a (4.4) tétel bizonyításának a módszerével könnyen megmutatható.

A segédtétel bizonyítása: Legyen $\{n_k\}$ egy olyan gyorsan növő szigorúan monoton sorozat, amire teljesül a segédtétel feltétele és minden k-ra és $\Delta \in \mathcal{T}_{n_k}$-ra a $\xi_k(\Delta)$ halmaz átmérője nem nagyobb $\frac{1}{k}$-nál. Változtassuk meg a ξ_k értékeit a $\mathcal{T}_{n_k}$ csúcsain egy nagyon csekély mértékben úgy, hogy a csúcsok képei lineárisan függetlenek legyenek, ügyelve arra, hogy az s_0 helyen x_0 maradjon az érték, majd tegyük lineárissá

a ξ_k-t a $\mathcal{T}_{n_k}$ szimplexein. Így ξ_n': $(S, s_0) \to (Q, x_0)$ leképezésekhez jutunk, melyekre $\{\xi_k\} \cong \{\xi_k'\}$ a segédtétel kimondásakor megadott értelemben, azaz minden $U \supset X$ környezetre $\xi_k \cong \xi_k'$ U-ban majdnem minden k-ra. Továbbá az is igaz, hogy a $\{\xi_k'(\mathcal{T}_{n_k})\}$ a 0-val homológ valódi ciklusa X-nek. Így $\xi_k'(\mathcal{T}_{n_k}) = \partial \varkappa_k$, ahol $\{\varkappa_k\}$ $n+1$ dimenziós láncok olyan sorozata, melyre teljesül, hogy $d(\varkappa_k) \to 0$ és minden $U \supset X$ környezet esetén $(\varkappa_k) \subset U$ majdnem minden k-ra. A $(\varkappa_k)$-nek $(\partial \varkappa_k)$-be nem eső pontjait kicsivel elmozgatva még az is feltehető, hogy a $(\varkappa_k)$ pontjai lineárisan függetlenek. A $\varkappa_k$ Vietoris-féle szimplexeihez tartozó geometriai szimplexek a lapjaikkal együtt egy P_k poliéder triangulációját alkotják, amelyben $\varkappa_k$ $n+1$ dimenziós szimpliciális láncnak is felfogható. Jelölje P_k' a P_k $n-1$ dimenziós vázát. Világos, hogy a P_k szimplexei egyre kisebb átmérőjűek lesznek, ha nő a k és P_k pontjai egyre közelebb kerülnek X-hez. Emiatt és az (5.4) lemma, valamint 1.11. miatt van Q-ban nyílt halmazoknak olyan $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ sorozata, amely az X-nek környezetbázisa, $P_k \subset V_k$, és P_k' x_0-ra húzható V_k-ban úgy, hogy közben az x_0 fixen marad. Borsuk homotópiakiterjesztési tétele miatt[7] van olyan g_k: $P_k \to V_k$ leképezés, hogy $g_k(P_k') = \{x_0\}$ és $g_k \mathrel{\mathring{\cong}} id_{P_k}$ (V_k, x_0)-ban. Az (5.3) lemma miatt $\chi_{n, g_k}(\partial \varkappa_k)$ a $\pi_n(V_k, x_0)$ csoport 0 eleme és ezért az összeadás definíciója miatt $g_k \xi_k' \mathrel{\mathring{\cong}} x_0$ V_k-ban. Mivel $g_k \mathrel{\mathring{\cong}} id_{P_k}$ (V_k, x_0)-ban, azért $\xi_k' \mathrel{\mathring{\cong}} x_0$ (V_k, x_0)-ban, és ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

Vegyük észre, hogy a segédtételt approximatív $\{\xi_k\}$ sorozatra alkalmazva azonnal kapjuk, hogy θ_n injektív. Már csak azt kell belátni, hogy θ_n szürjektív.

Tekintsük az X egy $\gamma = \{\gamma_k\}$ Q-ban fekvő n dimenziós valódi ciklusát, amely a $[\gamma] \in H_n(X)$ elemet reprezentálja. A (γ_k) pontjainak kis elmozgatásával most is feltehető, hogy (γ_k) pontjai lineárisan függetlenek. Ezzel a $[\gamma]$ elemet nem változtatjuk meg. Ezért a γ_k szimplexei által kifeszített geometriai szimplexek a lapjaikkal együtt egy R_k poliéder $\mathcal{T}_k'$ triangulációját adják. Legyen $a_k \in Q$ olyan pont, amely lineárisan független a (γ_k) pontjaitól. Az (5.4) Lemma értelmében, valamint 1.11. miatt van Q-ban nyílt halmazoknak olyan $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ sorozata, amely X-nek környezetbázisa és az R_k $n-1$ dimenziós váza (amelyet R_k'-vel jelölünk) az x_0 pontra húzható V_k-ban. Ennek belátásához az R_k'-t csak egy új bázisponttal kell bővítenünk, amelyet az x_0-ra képezünk le, míg az eredeti részen az identitást vesszük. Feltehető, hogy $R_k \subset V_k$. Jelöljük $\hat{R}_k$-pal azt a poliédert, amit úgy kapunk, hogy R_k-hoz hozzávesszük az R_k' fölé a_k-ból emelt kúpot. (Ez a kúp legyen $\{a_k\}$, ha $R_k' = \emptyset$.) Mivel az R_k' x_0-ra húzható V_k-ban, azért van olyan f_k: $(\hat{R}_k, a_k) \to (V_k, x_0)$ pontozott leképezés, melyre $f_k(x) = x$ minden $x \in R_k$ pont esetén. Legyen $\gamma_k = c_1 \Delta_1^n + c_2 \Delta_2^n + \ldots + c_m \Delta_m^n$, ahol $c_i > 0$ egész és a Δ_i^n szimplexek az R_k n dimenziós szimplexei megfelelően irányítva. Ha $\Delta_i^n = \Delta(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, akkor legyen $\Delta_i^{n+1} = \Delta(a_k, b_0, \ldots, b_n)$. Legyen $\varphi_i(s_j) = b_{j-1}$ $j = 1, 2, \ldots, n+1$-re, valamint $\varphi_i(s_0) = a_k$ és φ_i lineáris a $\mathcal{T}$ szimplexein. Így nyerünk egy φ_i: $S \to \Delta_i^{n+1}$ szimpliciális izomorfizmust. Nyilván $f_k \varphi_i$: $(S, s_0) \to (V_k, x_0)$ leképezés, amely reprezentál egy $[f_k \varphi_i] \in \pi_n(V_k, x_0)$ elemet. Reprezentálja a ξ_k: $(S, s_0) \to (V_k, x_0)$ leképezés a $\sum_{i=1}^{m} c_i [f_k \varphi_i]$ elemét $\pi_n(V_k, x_0)$-nak! Könnyű kiszámolni, hogy ha n_k elég nagy, akkor $\xi_k(\tau_{n_k}) - (\gamma_k)^{(n_k)} = \partial \varkappa_{n_k}$, ahol $(\gamma_k)^{(n_k)}$ jelöli a γ_k ciklus n_k-adik baricentrikus felbontását, és $\varkappa_{n_k}$ a V_k-ban fekvő $n+1$ dimenziós lánc, melyre $d(\varkappa_{n_k}) \to 0$, ha $n_k \to \infty$. Azt kell felhasználni, hogy $\partial \gamma_k = 0$, $f_k(x) = x$, ha $x \in R_k$ és a (4.4)-ben említett prizma eljárást kell alkalmazni[8]. De mint az közismert $\gamma_n - (\gamma_k)^{(n_k)} = \partial \varrho_k$,

[7] Mivel V_k *ANR* tér.

[8] Azt is fel kell használni, hogy $\xi_k(\tau_{n_k}) - \sum_{i=1}^{m} c_i (f_k \circ \varphi_i(\tau_{n_k})) = \partial \varkappa_n$, $\varkappa_{n_k}$-ra teljesülnek a kirótt feltételek. A $\partial \gamma_k = 0$ és $f_k / R_k = id_{R_k}$-ból következik az, hogy $\sum_{i=1}^{m} c_i (f_k \circ \varphi_i(\tau_{n_k})) = f_k \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(\tau_{n_k}) \right) =$

ahol ϱ_k V_k-ban fekvő $n+1$ dimenziós lánc és $d(\varrho_k) \leqq d(\gamma_k)$. Ezekből már látszik, hogyha az $\{n_k\}$ sorozat elég gyorsan nő, akkor $\{\xi_k(\tau_{n_k})\} \sim \{\gamma_k\}$. Így már csak azt kell belátni, hogy a $\{\xi_k\}$ sorozat approximatív sorozat. Legyen $[\eta_k]=[\xi_k]-[\xi_{k+1}]\pi_n(V_k, x_0)$-ban. A legutolsó mgállapításból és η_k definíciójából könnyen következik, hogy az $\{\eta_k\}$ sorozatra teljesülnek a segédtétel feltételei. Így a segédtétel szerint van a Q-ban nyílt W_i halmazoknak olyan $W_1 \supset W_2 \supset \ldots X$-re zsugorodó sorozata, hogy $W_k \supset \supset V_k$ és $\eta_k \cong_{\circ} x_0$ W_k-ban és így $\xi_k \cong_{\circ} \xi_{k+1}$ W_k-ban. Ezért a $\{\xi_k\}$ approximatív sorozat, és ezzel az (5.5) tételt bebizonyítottuk.

5.6. Következmény. A korábbi jelölésekkel, ha $n \geqq 2$ és $X=S^n$, akkor θ_n izomorfizmus. (Hopf klasszifikációs tétele.)

Bizonyítás. S^n *ANR* tér, így $\pi_n(S^n) \cong \boldsymbol{\pi}_n(S^n)$. Ezenkívül S^n összefüggő, tehát approximatíve 0-szorosan összefüggő egy korábbi megjegyzés szerint. Ha $1 \leqq q \leqq n-1$, akkor $\pi_q(S^n, x_0)=0$-ból következik, hogy S^n approximatíve q-szorosan összefüggő. Ugyanis S^n be van ágyazva a B^{n+1} *AR* térbe, ahol B^{n+1} az $n+1$ dimenziós tömör gömb. Ha $U \supset S^n$ egy gömbhéj környezet és $f: (S^q, a) \to (U, x_0)$ leképezés, akkor f nyilván S^n-be húzható U-ban és onnan x_0-ba a $\pi_q(S^n, x_0)=0$ miatt. Így az (5.5) tételből kapjuk (5.6)-ot. Az (5.6) állítás az $n=1$ esetben közismert.

IRODALOM

[1] Borsuk K., Concerning homotopy properties of compacta, *Fund. Math.* 62 (1968), 223—254. o.
[2] Mardesic and Segal, Shapes of compacta and ANR systems, *Fund. Math.* 72 (1971), 41—59. o.
[3] Mardesic and Segal, Equivalence of the Borsuk and the ANR systems approach to shape, *Fund. Math.* 72 (1971), 61—68.
[4] Borsuk K., *Theory of shape,* Lectures, Fall, 1970. (Orosz nyelven is megjelent.)
[5] Borsuk K., *Theory of shape,* Warszawa 1975.
[6] Borsuk K., *Theory of retracts,* Warszawa 1967. (Orosz nyelven is megjelent.)
[7] Kuperberg K., An isomorphism theorem of Hurewicz type in Borsuk's theory of shape, *Fund. Math.* 77 (1972), 21—32.
[8] Hurewicz W., Beiträge zur Topologie der Deformationen II. *Proc. Ak. Amsterdam* 38 (1935) 521—528. o.
[9] Chapman T. A., On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape, *Fund. Math.* 76 (1972) 181—193.
[10] Lefschetz S., *Introduction to topology,* Princeton Univ. Press 1949.
[11] Seifert H., Threlfall W., *Lehrbuch der Topologie,* Chelsea Publ. Comp. 1945.
[12] L. Sz. Pontrjagin, *Kombinatorikus Topológia,* Akadémiai Kiadó 1955.
[13] Kelley J. L., *General topology,* Van Nostrand, Princeton, 1957. (Orosz nyelven is megjelent.)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ТЕОРИИ ШЕЙНОВ

Н. ШИМАНИ

ALGEBRAIC INVARIANTS IN SHAPE THEORY

N. SIMÁNYI

$=f_k(\gamma_k^{(n_k)})=\gamma_k^{(n_k)}$. A $\varkappa_{n_k}$ képzésnél használjuk a prizma módszert, az utolsó előtti egyenlőség zárójelen belüli átalakításánál pedig a $\partial\gamma_k=0$ feltételt.

AZ OPERÁTORTEST EGY ALGEBRAI DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZERÉRŐL

FÉNYES TAMÁS és KOSIK PÁL

Bevezetés

Tekintsük a Mikusiński-féle M-operátortestben az alábbi algebrai differenciálegyenlet-rendszert

$$Dx_i - q \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \gamma_i \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

ahol D a jól ismert algebrai deriválást jelöli, az x_i operátorok az (1) ismeretlenjei, q és $\gamma_i \in M$ operátorok adottak, az a_{ik} együtthatók adott valós számok. Feltételezzük, hogy az a_{ik} együtthatók mátrixának sajátértékei különbözőek.

Az alábbiakban először (1) megoldási módszerét ismertetjük, majd speciális q és γ_i operátorok esetén (1) operátortestbeli megoldásait explicit alakban előállítjuk. Ez a speciális választás azt jelenti, hogy $q = a + g$ választással élünk, ahol $g \neq 0$ lokálisan integrálható függvény a $0 \leqq t < \infty$ intervallumon, a valós szám és a γ_i operátorok szintén lokálisan integrálható függvények fenti intervallumon. Abban az esetben, ha (1) lokálisan integrálható függvénymegoldásaira szorítkozunk, (1) ekvivalens az alábbi harmadfajú konvolúciótípusú integrálegyenlet-rendszerrel:

$$tx_i(t) + a \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t a_{ik} x_k(\tau) g(t-\tau) d\tau + \gamma_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

Meg fogjuk adni (2) lokálisan integrálható (röviden függvény-megoldásainak) kritériumait is.

A dolgozatban — általában — a Mikusiński [1] által bevezetett jelölésmódot használjuk, melynek ismeretét és az operátorszámítás elemeinek ismeretét feltételezzük.

1. §. Az (1) differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata

Írjuk fel ismét (1)-et

$$Dx_i - q \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \gamma_i \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.1}$$

Ha (1.1) valamely $x_i \in M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ megoldására nézve igaz, hogy az összes x_i operátorok függvények, akkor a megoldást függvénymegoldásnak nevezzük. Ellenkező esetben (1.1) általánosított (operátoros) megoldásáról beszélünk.

Jelöljük az $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ mátrix sajátértékeit λ_j-vel ($j=1, 2, \ldots, n$). Legyen a transzponált mátrix λ_j-hez tartozó sajátvektora

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \vdots \\ \alpha_{jn} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \ldots n$$

Szorozzuk meg (1.1) első egyenletét α_{j1}-gyel, második egyenletét α_{j2}-vel, és így tovább, n-edik egyenletét α_{jn}-nel és a kapott egyenleteket adjuk össze. Kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D x_i - q \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \gamma_i \tag{1.2}$$

vagy a szummák felcserélésével

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D x_i - q \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \alpha_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \gamma_i \tag{1.3}$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \alpha_{ji} = \lambda_j \alpha_{jk},$$

így

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D x_i - q \lambda_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \gamma_i. \tag{1.4}$$

Bevezetve a

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i, \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \gamma_i$$

operátorokat, adódik, hogy

$$D z_j - q \lambda_j z_j = f_j \quad j = 1, 2, \ldots n \tag{1.5}$$

Ily módon (1.1) differenciálegyenlet-rendszert visszavezettük n darab egy ismeretlent tartalmazó differenciálegyenletre. Ha ezeknek ismerjük valamely $z_j \in M$ megoldásait, akkor (1.1) egy megoldását megkapjuk a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = z_j \quad j = 1, 2, \ldots n$$

lineáris egyenletrendszerből

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} z_j \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.6}$$

Érvényes az alábbi

1. Lemma. *(1.1) akkor és csakis akkor oldható meg az M operátortestben, ha (1.5) differenciálegyenletek mindegyike megoldható M-ben.*

Bizonyítás. Valóban, ha (1.1)-nek van egy operátortestbeli megoldása, akkor a $z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i$ operátoroknak eleget kell tenniük az (1.5) differenciálegyenleteknek. Fordítva, ha a z_j operátorok kielégítik az (1.5) differenciálegyenleteket, úgy az (1.6) megadja (1.1) egy megoldását.

Hasonló állítás fogalmazható meg (1.1) függvénymegoldásaira is.

2. Lemma. *(1.1) akkor és csakis akkor oldható meg a lokálisan integrálható függvények L konvolúció-gyűrűjében, ha (1.5) differenciálegyenletek mindegyike megoldható L-ben.*

(1.5) algebrai differenciálegyenleteknek és alkalmazásaiknak széles körű irodalma van (lásd pld. Wloka [2], Schatte [3], Fényes [4], [5], [6], Gesztelyi [7]).

Tekintsük most az (1.1)-hez tartozó homogén differenciálegyenlet-rendszert

$$Dx_i - q \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.7}$$

Ennek megfelelnek (1.5) alapján a

$$Dz_j - q\lambda_j z_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots n \tag{1.8}$$

differenciálegyenletek. Legyen ezek között m_1 számú olyan egyenlet, melyeknek csak a triviális nulla megoldása létezik $(0 \leqq m_1 \leqq n)$. A fennmaradó $n - m_1$ egyenletek mindegyikének van tehát nemtriviális z_j megoldása. Akkor a j-edik egyenlet általános megoldása $C_j z_j$, ahol C_j tetszőleges számoperátor. (1.6)-ból következik, hogy (1.7) általános operátoros megoldása

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} C_j \beta_{ji} z_j \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.9}$$

Érvényes tehát az alábbi

3. Lemma. *Legyen az (1.8) egyenletek között m_1 számú olyan egyenlet, melynek csak a triviális nulla megoldása létezik $(0 \leqq m_1 \leqq n)$, akkor (1.7) homogén egyenletrendszer általános operátoros megoldása*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} C_j \beta_{ji} z_j \quad i = 1, 2, \ldots n$$

alakban írható, ahol a C_j operátorok tetszőleges számok. Az általános megoldás egy $n - m_1$ dimenziós sokaságot képez.

Hasonló állítás fogalmazható meg (1.7) függvénymegoldásaira is, 2 Lemma figyelembevételével.

4. Lemma. *Legyen az (1.8) egyenletek között m_2 számú olyan, melynek nincs nemtriviális függvénymegoldása $(0 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq n)$, akkor (1.7) homogén egyenletrendszer általános függvénymegoldása*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} C_j \beta_{ji} z_j$$

ahol azokat a C_j együtthatókat, melyekhez tartozó z_j operátorok nem függvények, nullának kell választanunk. Az általános függvénymegoldás egy $n - m_2$ dimenziós sokaságot képez.

(1.1) általánosított (operátoros) megoldásának egzisztenciájára nézve kimondható az alábbi

1. Tétel. *Legyen* $m_1=0$. *(1.1) akkor és csakis akkor oldható meg M-ben, ha az*

$$\int \frac{f_j}{z_j} \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

algebrai integrálok mindegyike létezik M-ben.

Bizonyítás. Mivel $m_1=0$, léteznek a $z_j \neq 0$ operátorok. Schatte [3] bebizonyította, hogy ha a homogén $Dz-qz=0$ $q \in M$ egyenletnek létezik nemtriviális $z_0 \in M$ megoldása, akkor az inhomogén

$$Dz-qz=f \qquad q, f \in M$$

egyenlet akkor és csakis akkor oldható meg M-ben, ha az $\int \frac{f}{z_0}$ algebrai integrál létezik M-ben. Ebből és az *1. Lemmából* azonnal következik az 1. Tétel.

A dolgozat további részében feltesszük, hogy a γ_i operátorok lokálisan integrálható függvények $0 \leqq t < \infty$-en és

$$q = a+g$$

ahol a valós szám és $q=\{g(t)\}$ valós értékű (lokálisan integrálható) függvény a $0 \leqq t < \infty$ intervallumon. Ekkor (1.1) az

$$Dx_i-(a+g)\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.10}$$

alakban írható, míg (1.5)-nek a

$$Dz_j-(a+g)\lambda_j z_j = f_j \qquad j = 1, 2, \ldots n \tag{1.11}$$

differenciálegyenletek felelnek meg.
Fényes [4], [5], [6]-ban foglalkozik (1.11) típusú differenciálegyenletekkel, ha λ_j valós és így az f_j függvények valósak. Itt a λ_j sajátértékek komplexek is lehetnek és így az f_j függvények is komplex értékűek lehetnek, így fenti vizsgálatokat ki kell terjesztenünk.

2. §. Az algebrai differenciálegyenlet-rendszer megoldása. A homogén eset

Tekintsük a

$$Dx_i-(a+g)\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{2.1}$$

homogén rendszert. Ennek (1.11) alapján a

$$Dz_j-(a+g)\lambda_j z_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots n \tag{2.2}$$

homogén egyenletek felelnek meg. A $g(t)$ függvényre nézve a lokális integrálhatóságon kívül feltesszük, hogy

$$g(0) = \lim_{t \to +0} g(t) \quad \textit{létezik és a} \quad \varrho(t) = \frac{g(t)-g(0)}{-t}$$

is lokálisan integrálható (lásd Fényes [4], [5], [6]).

Az alábbiakban a j indexet ideiglenesen elhagyva meghatározzuk a

$$Dz-(a+g)\lambda z=0 \quad \lambda \neq 0 \tag{2.3}$$

nemtriviális megoldásának egzisztenciakritériumát és a megoldást explicit alakban előállítjuk.

Keressük (2.3) nemtriviális megoldását

$$z = s^{\lambda g(0)} e^{\lambda \varrho} w, \quad w \in M \tag{2.4}$$

alakban. Mivel elemi operátoros szabályok szerint

$$Dz = \lambda^{g(0)} s^{\lambda g(0)-1} e^{\lambda \varrho} w + s^{\lambda g(0)} \lambda D\varrho e^{\lambda \varrho} w + s^{\lambda g(0)} e^{\lambda \varrho} Dw = \tag{2.5}$$

$$= \lambda g(0) s^{\lambda g(0)-1} e^{\lambda \varrho} w + s^{\lambda g(0)} \lambda \{g(t)-g(0)\} e^{\lambda \varrho} w + s^{\lambda g(0)} e^{\lambda \varrho} Dw.$$

(2.4)-et és (2.5)-öt (2.3)-ba helyettesítve és rendezve a

$$Dw-a\lambda w=0 \tag{2.6}$$

egyenletre jutunk. Schatte [3] bebizonyította, hogy (2.6)-nak akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha $a\lambda$ valós. Ekkor $w=e^{a\lambda s}$, azaz az eltolási operátor és így kapjuk, hogy

$$z = s^{\lambda g(0)} e^{\lambda(\varrho+as)}. \tag{2.7}$$

Érvényes tehát az alábbi

2. Tétel. *(2.3) nemtriviális megoldása akkor és csakis akkor létezik M-ben, ha*

$$a = 0,$$

vagy $a \neq 0$ és λ valós.

Ekkor

$$z = s^{\lambda g(0)} e^{\lambda(\varrho+as)}.$$

A nemtriviális, függvénymegoldás egzisztenciájára nézve fennáll az alábbi

3. Tétel. *Előző kritérium teljesülése esetén (2.7) akkor és csakis akkor állít elő függvényt, ha*

$$g(0)\operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \text{és} \quad a\lambda \leqq 0. \tag{2.8}$$

Bizonyítás. Mivel az operátorszámítás elemei szerint (2.8) teljesülése esetén

$$s^{\lambda g(0)} = \left\{\frac{t^{-\lambda g(0)-1}}{\Gamma[-\lambda g(0)]}\right\} \quad \text{és}$$

$$e^{\lambda \varrho} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \varrho^k}{k!},$$

azaz egy szám és egy függvény összege, az eltolási operátor ismert tulajdonságából azonnal következik az állítás. Fordítva, tegyük fel, hogy $g(0)\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ és $z=\{z(t)\}$ függvény. (2.7)-ből

$$\{z(t)\} s^{-\lambda g(0)} e^{-\lambda \varrho} = e^{\lambda as}$$

és a kapott egyenlőség bal oldalán függvény áll, míg a jobb oldalon az eltolási operátor, mely nem függvény. Ellentmondás. Így z nem lehet függvény.

Tegyük fel, hogy $a\lambda>0$, de $g(0)\,\mathrm{Re}\,\lambda=g(0)\lambda<0$ és $z=\{z(t)\}$ függvény. (2.7)-ből

$$\{z(t)\}e^{-\lambda\varrho}e^{-\lambda as}=s^{\lambda\varrho g(0)}.$$

Ismét az eltolási operátor ismert tulajdonságára hivatkozva adódik, hogy a kapott egyenlőség baloldalán függvény áll, mely az origó valamely jobb oldali környezetében eltűnik. Jobb oldalán a $\dfrac{t^{-\lambda g(0)-1}}{\Gamma[-\lambda g(0)]}$ függvény, mely nem tűnik el az origó semmilyen jobb oldali környezetében sem. Ellentmondás. Így z nem lehet függvény.

Visszatérve (2.1) differenciálegyenlet-rendszerre, 1. Lemma és 2. Tételből adódik az alábbi

Korollárium Ha a $\neq 0$ és az A matrixnak nincs valós sajátértéke, akkor a $g(t)$-re kirótt feltételek mellett a (2.1) homogén rendszernek csak az $x_i=0$ triviális megoldása létezik. Ha $a\neq 0$ és n páratlan, úgy a $g(t)$-re kirótt feltételek mellett, (2.1)-nek létezik nemtriviális megoldása.

1., 2., 3., 4. Lemmákból, továbbá 2. és 3. Tételből következik az alábbi

4. Tétel. *A $g(t)$ függvényre kirótt feltétel mellett (2.1) homogén rendszer általános operátoros megoldása*

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}c_j\beta_{ji}s^{\lambda_j g(0)}e^{\lambda_j(\varrho+as)}\qquad i=1,2,\ldots n \tag{2.9}$$

ahol

$C_j=0$ választandó azon j indexekre, melyekre az $s^{\lambda_j g(0)}e^{\lambda_j(\varrho+as)}$ operátor nem létezik. Ha $a=0$, vagy $a\neq 0$ és a λ_j sajátértékek valósak, akkor a (2.9) egy n dimenziós sokaságot képez. Ha $a\neq 0$ és a λ_j sajátértékek között nincs valós értékű, akkor (2.1)-nek csak a triviális megoldása létezik. (2.9)-ből adódik (2.1) általános függvénymegoldása, ha azokra a j indexekre, melyekre az $s^{\lambda_j g(0)}e^{\lambda_j(\varrho+as)}$ operátor nem állít elő függvényt, a c_j együtthatókat nullának választjuk. Ha $g(0)=0$, akkor (2.1)-nek nincs nemtriviális függvénymegoldása.

Megjegyzés. (2.1) általános függvénymegoldása valós alakban is felírható. Ui., tekintsük (2.9)-ben azokat a j indexeket, melyekhez tartozó $s^{\lambda_j g(0)}e^{\lambda_j(\varrho+as)}$ operátorok függvények. Ha λ_j valós rögzített j mellett, akkor — mivel a β_{ji} számok is valósak — a C_j együtthatót valósnak választva az

$$x_{pi}=c_j\beta_{ji}s^{\lambda_j g(0)}e^{\lambda_j(\varrho+as)}\qquad i=1,2,\ldots n$$

partikuláris függvénymegoldás is valós lesz.

Legyenek most $\lambda_{j_1}=\lambda$ és $\lambda_{j_2}=\bar{\lambda}$ konjugált komplexek. Ekkor a $\beta_{j_1 i}$ és $\beta_{j_2 i}$ számok is konjugált komplexek minden i-re, az

$$s^{\lambda g(0)}e^{\lambda\varrho}=s^{(\mu+i\nu)g(0)}e^{(\mu+i\nu)\varrho}=$$

$$=\left\{\frac{t^{-\mu g(0)-1}(\cos\nu g(0)\log t-i\sin\nu g(0)\log t)}{\Gamma[-g(0)(\mu+i\nu)]}\right\}e^{\mu\varrho}(\cos\nu\varrho+i\sin\nu\varrho)$$

$$s^{\bar{\lambda}g(0)}e^{\bar{\lambda}\varrho}=s^{(\mu-i\nu)g(0)}e^{(\mu-i\nu)\varrho}=$$

$$=\left\{\frac{t^{-\mu g(0)-1}(\cos\nu g(0)\log t+i\sin\nu g(0)\log t)}{\Gamma[-g(0)(\mu-i\nu)]}\right.e^{\mu\varrho}(\cos\nu\varrho-i\sin\nu\varrho)$$

függvények konjugált komplexek. (Itt a félreértés veszélye nélkül i az imaginárius egységet jelöli.) Következésképp, ha a C_{j_1} és C_{j_2} együtthatókat

$$C_{j_1} = \frac{C}{2} \Gamma[-g(0)(\mu + iv)],$$

$$C_{j_2} = \frac{C}{2} \Gamma[-g(0)(\mu - iv)]$$

nek választjuk, ahol C tetszőleges valós, akkor az

$$x_{pi} = \frac{C}{2} \beta_{j_1 i} \Gamma[-\lambda g(0)] s^{\lambda g(0)} e^{\lambda \varrho} + \frac{C}{2} \beta_{j_2 i} \Gamma[-\bar{\lambda} g(0)] s^{\bar{\lambda} g(0)} e^{\bar{\lambda} \varrho} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

partikuláris megoldás valós értékű lesz. Ha

$$\mathrm{Re}[\beta_{j_1 i}] = \delta_i, \quad \mathrm{Im}[\beta_{j_1 i}] = \varepsilon_i,$$

egyszerű számolással adódik, hogy

(2.10) $$x_{pi} = Ce^{\mu \varrho} [\{t^{-\mu g(0)-1} \cos v g(0) \log t\} (\delta_i \cos v\varrho - \varepsilon_i \sin v\varrho) +$$
$$+ \{t^{-\mu g(0)-1} \sin v g(0) \log t\} (\delta_i \sin v\varrho + \varepsilon_i \cos v\varrho)].$$

Ha viszont

$$C_{j_1} = \frac{D}{2i} \Gamma[-g(0)(\mu + iv)],$$

$$C_{j_2} = \frac{D}{2i} \Gamma[-g(0)(\mu - iv)]$$

választással élünk, ahol D tetszőleges valós szám, akkor egy másik valós értékű partikuláris megoldást állít elő az

$$x_{pi} = \frac{D}{2i} \beta_{j_1 i} \Gamma[-\lambda g(0)] s^{\lambda g(0)} e^{\lambda \varrho} - \frac{D}{2i} \beta_{j_2 i} \Gamma[-\bar{\lambda} g(0)] s^{\bar{\lambda} g(0)} e^{\bar{\lambda} \varrho}.$$

Elemi számolással, kapjuk, hogy

(2.11) $$x_{pi} = De^{\mu \varrho} [\{t^{-\mu g(0)-1} \cos v g(0) \log t\} (\delta_i \sin v\varrho + \varepsilon_i \cos v\varrho) +$$
$$+ \{t^{-\mu g(0)-1} \sin v g(0) \log t\} (\varepsilon_i \sin v\varrho - \delta_i \cos v\varrho)]. \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Ily módon, fenti eljárást az összes λ_j sajátértékre elvégezve, előállíthatjuk (2.1) általános függvénymegoldását valós alakban.

3. §. Az inhomogén eset

Az alábbiakban az (1.10) inhomogén rendszer megoldásával foglalkozunk. Ehhez a (1.11)

$$Dz_j - (a + g)\lambda_j z_j = f_j \quad j = 1, 2, \ldots n$$

inhomogén differenciálegyenletek vannak hozzárendelve. A j indexet ideiglenesen elhagyva, határozzuk meg a

(3.1) $$Dz - (a + g)\lambda z = f$$

egy partikuláris operátoros megoldását, feltéve, hogy az létezik. Itt két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a (3.1)-hez tartozó homogén egyenletnek van nemtriviális megoldása, vagy nincs.

I. Ha a homogén egyenletnek létezik z_0 nemtriviális megoldása, akkor Schatte [3] szerint (3.1) akkor és csakis akkor oldható meg M-ben, ha $\int \frac{f}{z_0}$ létezik. Ha létezik úgy, (3.1) egy partikuláris megoldása az állandók variálásának alkalmazásával:

$$z_p = z_0 \int \frac{f}{z_0} \tag{3.2}$$

(2.7) figyelembevételével adódik, hogy

$$\int \frac{f}{z_0} = \int f s^{-\lambda g(0)} e^{-\lambda(\varrho + as)} \tag{3.3}$$

Legyen

$$f e^{-\lambda \varrho} = G$$

így

$$\int \frac{f}{z_0} = \int s^{-\lambda g(0)} G e^{-\lambda as}.$$

A kapott algebrai integrál valós λ értékekre Gesztelyi [7] neves integrál tétele alapján létezik. Idézzük most Gesztelyi tételét a Fényes—Kosik [8]-ben megadott általánosabb alakjában, előbb azonban megállapodunk az alábbi jelölésben:

Tetszőleges $F(t)$ $[0, \infty)$-ben lokálisan integrálható függvény mellett legyen $\int \frac{F(t)dt}{(t-a)^l}$ értéke a $t=0$-ban nulla, ha az $\frac{F(t)}{(t-a)^l}\sqrt{a}$ $t=0$ környezetében integrálható, ahol l tetszőleges valós szám, ha $a \leqq 0$, illetve egész, ha $a > 0$.

Legyen $y = s^k e^{-\alpha s}\{F(t)\}$, ahol $\{F(t)\}$ lokálisan integrálható függvény $[0, \infty)$-ben, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $-\infty < \alpha < \infty$, akkor y algebrailag integrálható és egy integrálja az alábbi alakú

$$\int y = -s^{k+1} e^{-\alpha s}\{H(t)\} \tag{3.4}$$

ahol H szintén lokálisan integrálható $[0, \infty)$-ben és

$$H(t) = (t+\alpha)^k \int \frac{F(t)\,dt}{(t+\alpha)^{k+1}}. \tag{3.5}$$

Ha $\alpha > 0$, úgy (3.4), (3.5) tetszőleges valós k-ra érvényes. Ha $\alpha = 0$, úgy (3.4), (3.5) tetszőleges valós $k \neq -1$ mellett érvényes, továbbá $\alpha > 0$ esetén (3.4), (3.5) helyett az alábbi formulák is írhatók:

$$\int y = -s^k e^{-\alpha s}\{H_1(t)\}, \tag{3.6}$$

$$H_1(t) = \frac{F(t)}{t+\alpha} + k(t+\alpha)^{k-1} \int \frac{F(t)\,dt}{(t+\alpha)^{k+1}}. \tag{3.7}$$

Végül, ha $\frac{F(t)}{t}$ lokálokálisan integrálható, akkor (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) formulák $\alpha = 0$-ra is fennállnak tetszőleges valós k mellett.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az idézett tételben $\alpha < 0$ és k nem természetes szám, akkor az $y = s^k e^{-\alpha s}\{F(t)\}$ operátor elemi meggondolás alapján felírható $y =$

$= s^m e^{-\alpha s}\{F_1(t)\}$ alakban, ahol már m természetes szám és F_1 integrálható függvény és így y integrálható algebrailag (3.4), (3.5) összefüggések alapján. Ebből következik, hogy (3.1) inhomogén egyenletnek valós λ esetén létezik megoldása M-ben.

Komplex λ esetén (amikor a értéke a 2. Tétel szerint zérus) alkalmazható a Gesztelyi integráltétel alábbi általánosítása.

5. Tétel. *Ha* $\alpha=0$, *akkor (3.4), (3.5) és* $\frac{F(t)}{t}$ integrálhatósága esetén (3.6), (3.7) *tetszőleges Im* $[k]\neq 0$ *mellett is érvényesek.*

A bizonyítás a (3.4), (3.6) összefüggések jobb oldalán szereplő operátorok algebrai deriválásával történik.

Kapjuk, hogy (3.1) inhomogén egyenletnek komplex λ esetén is létezik megoldása M-ben, ha $a=0$. Érvényes tehát az alábbi

6. Tétel. *Ha a (3.1)-hez tartozó homogén egyenletnek létezik nemtriviális megoldása M-ben, akkor (3.1) egy partikuláris megoldása M-ben:*

$$z_p = s^{\lambda g(0)} e^{\lambda(\varrho+as)} \int f s^{-\lambda g(0)} e^{-\lambda(\varrho+as)}. \tag{3.8}$$

A kapott partikuláris megoldás általában nem állít elő függvényt.

Igen egyszerű elégséges feltételek mellett (3.8) függvényt állít elő.

7. Tétel. *Ha* $a\lambda>0$, *vagy ha* $\lambda\neq 0$, $a=0$ *és* $\frac{f(t)}{t}$ *lokálisan integrálható, akkor (3.8) operátor függvényt állít elő.*

Bizonyítás. Ha $a\lambda>0$, akkor (3.6), (3.7) formulákat alkalmazva adódik, hogy

$$\int f s^{-\lambda g(0)} e^{-\lambda(\varrho+as)} = \int G s^{-\lambda g(0)} e^{-\lambda as} = \tag{3.9}$$

$$= -s^{-\lambda g(0)} e^{-\lambda as}\left\{\frac{G(t)}{t+\lambda a} - \lambda g(0)(t+\lambda a)^{-\lambda g(0)-1}\int \frac{G(t)\,dt}{(t+\lambda a)^{-\lambda g(0)+1}}\right\}.$$

Ezt (3.8)-ba helyettesítve

$$z_p = \{z_p(t)\} = -e^{\lambda\varrho}\left\{\frac{G(t)}{t+\lambda a} - \lambda g(0)(t+\lambda a)^{-\lambda g(0)-1}\int \frac{G(t)\,dt}{(t+\lambda a)^{-\lambda g(0)+1}}\right\}. \tag{3.10}$$

Legyen $a=0$. Ekkor Gesztelyi tétele szerint $\frac{G(t)}{t}$ integrálhatósága esetén (3.9) és így (3.10) $a=0$ esetben is érvényesek. Azonban, ha $\frac{f(t)}{t}$ integrálható, akkor $\frac{G(t)}{t}$ is az. Ui. Mivel

$$G = fe^{-\lambda\varrho} = f\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i\varrho^i}{i!}\right) = f+f*\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i\varrho^i}{i!},$$

(ahol a konvolúciót $*$-gal jelöljük),

alkalmazva Fényes—Kosik [8] egy megjegyzését, mely szerint, ha $\frac{f_1(t)}{t}$ és

$f_2(t)$ lokálisan integrálhatók $\langle 0, \infty)$-ben, akkor $\frac{1}{t}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ is lokálisan integrálható ugyanott, kapjuk, hogy $\frac{G(t)}{t}$ is lokálisan integrálható.

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Ha $\lambda=0$, akkor (3.8)-ból $z_p=\int f=-s\left\{\int \frac{f(t)}{t}dt\right\}$, mely akkor és csakis akkor képez függvényt, ha $\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}dt$ véges. Ez esetben $z_p=\left\{-\frac{f(t)}{t}\right\}$.

II. Ha a (3.1)-hez tartozó homogén egyenletnek csak a triviális nulla megoldása létezik (ami a 2. Tétel értelmében maga után vonja, hogy $a\neq 0$ és $\mathrm{Im}\,(\lambda)\neq 0$, (3.1) megoldásának meghatározására az állandók variálásának módszere nem alkalmazható.

Azonban (3.10) ebben az esetben is eleget tesz (3.1)-nek, ami egyszerű helyettesítéssel igazolható. A (3.10)-ben szereplő hatványfüggvénynek ki kell választani egy reguláris ágát. Érvényes tehát az alábbi.

8. Tétel. *Ha* $a\neq 0$ és $\mathrm{Im}\,(\lambda)\neq 0$, *akkor (3.1)-nek a* $g(t)$ *függvényre kirótt feltétel teljesülése esetén pontosan egy megoldása létezik M-ben, mely lokálisan integrálható függvényt állít elő.*

Kimondható az alábbi állítás:

(3.1) inhomogén differenciálegyenletnek a $g(t)$ *függvényre kirótt feltétel teljesülése esetén legalább egy megoldása létezik M-ben.*

(3.1) általános operátoros megoldása tehát

$$z = Cs^{\lambda g(0)}e^{\lambda(\varrho+as)}+z_p$$

feltéve, hogy a megfelelő homogén egyenletnek létezik nemtriviális megoldása.

(3.1) függvénymegoldásai számára vonatkozik az alábbi

9. Tétel. *Az alábbi feltételek bármelyikének teljesülése esetén (3.1)-nek pontosan egy lokálisan integrálható függvénymegoldása létezik.*

I. $a\lambda>0$,

II. $\lambda\neq 0$, $a=0$ és $g(0)\,\mathrm{Re}\,(\lambda)\geqq 0$ és $\frac{f(t)}{t}$ *lokálisan integrálható,*

III. $a\neq 0$ és $\mathrm{Im}\,(\lambda)\neq 0$.

Ha II-ben $g(0)\,\mathrm{Re}\,(\lambda)<0$, *akkor (3.1)-nek végtelen sok lokálisan integrálható megoldása létezik.*

A tétel bizonyítása az eddigiekből nyilvánvaló. (1.6) alapján az (1.10) inhomogén rendszer egy partikuláris megoldása

$$x_{pi} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} z_{jp} \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.11}$$

ahol z_{jp} az (1.11) partikuláris megoldásait jelöli. (3.11) a 2. Lemma értelmében akkor és csakis akkor állít elő függvényt, ha a z_{jp} partikuláris megoldások függvények.

Ha ez teljesül, úgy (3.11) felírható valós alakban. Ugyanis, ha rögzített j-re λ_j sajátérték valós, akkor a β_{ji} számok valósak és a z_{pj} partikuláris megoldás is valós. Legyenek λ_{j_1} és λ_{j_2} konjugált komplexek, $\lambda_{j_1}=\lambda$, $\lambda_{j_2}=\bar{\lambda}$.

Ekkor a $\beta_{j_1 i}$ és $\beta_{j_2 i}$ számok is konjugált komplexek minden i-re. Tekintsük a

$$Dz_{j_1}-(a+g)\lambda z_{j_1}=f_{j_1},$$

$$Dz_{j_2}-(a+g)\bar{\lambda} z_{j_2}=f_{j_2},$$

differenciálegyenleteket. Ha az első egyenlet egy függvénymegoldása $z_{j_1 p}$, akkor a második egy függvénymegoldása $\overline{z_{j_1 p}}$. Ugyanis képezve az első egyenlet mindkét oldalának konjugáltját és behelyettesítve $z_{j_1 p}$-t

$$\overline{Dz_{j_1 p}}-\overline{(a+g)\lambda z_{j_1 p}}=\overline{f_{j_1}}=D\overline{z_{j_1 p}}-(a+g)\bar{\lambda}\overline{z_{j_1 p}}=f_{j_2},$$

mivel nyilvánvalóan $\overline{f_{j_1}}=f_{j_2}$. Kapjuk, hogy a

$$\beta_{j_1 i} z_{j_1 p}+\beta_{j_2 i}\overline{z_{j_1 p}} \qquad i=1, 2, \ldots n$$

kifejezések valós értékű függvényeket állítanak elő. Ezt az eljárást az összes komplex λ sajátértékre elvégezve, a (3.11)-ben a konjugált komplex partikuláris megoldásokat választva a (3.11) valós értékű lesz.

Most már felírhatjuk (1.10) differenciálegyenlet-rendszer általános (operátoros) megoldását.
(1.6) és 4. Tétel alapján fennáll az alábbi

10. Tétel. *(1.10) rendszer általános operátoros megoldása a $g(t)$ függvényre kirótt feltétel mellett*

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ji}(C_j s^{\lambda_j g(0)} e^{\lambda_j(a+as)}+z_{jp}) \qquad i=1, 2, \ldots n. \tag{3.12}$$

9. Tétel alkalmazásával a függvénymegoldások létezésének, illetve azok számának elégséges feltételei könnyen megfogalmazhatók.

Megjegyzés. Az $s^{\alpha}e^{\beta s}\{F(t)\}$ alakú operátorok az ún. végesrendű disztribúciókkal indentifikálhatók. Fenti operátorok halmaza nyilvánvalóan az M operátortest egy E^* részgyűrűjét képezik. Vizsgálataink alapján kimondható az alábbi állítás.

A $g(t)$ függvény origóban való viselkedésére kirótt feltétel mellett, a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer minden megoldása E^*-hez tartozik, pontosabban bármely megoldásvektor minden eleme E^* eleme.

IRODALOM

[1] Mikusiński, J., *Operátorszámítás.* Műszaki Könyvkiadó 1961.
[2] Wloka, J., Über lineare s -Differentialgleichungen in der Operatorenrechnung. *Math. Ann.* 166. (1966) 233—256.
[3] Schatte, P., Funktionentheoretische Untersuchungen im Mikusińskischen Operatorenkörper, *Math. Nachrichten.* 35. (1967) 19—56.
[4] Fényes, T., Anwendung der Mikusińskischen Operatorenrechnung zur Lösung von Integralgleichungen dritter Art vom Faltungstypus. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 9 (1965) 365—399.

[5] FÉNYES, T., A note on the solution of integral equations of convolution type of the third kind by application of the operational calculus of Mikusiński. *Studia Sci. Math. Hung.* 2. (1967) 81—89.
[6] FÉNYES, T., On the operational solution of a convolution type integral equation of the third kind. *Studia Sci. Math. Hung.* 12 (1977) 65—75.
[7] GESZTELYI, E., Anwerdung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten. *Publ. Math. Debrecen* 10 (1963), 215—243.
[8] FÉNYES, T. és KOSIK, P., Az operátortest néhány speciális másodrendű differenciálegyenletéről. *Mat. lapok* 27. 3—4. 337—354.

ОБ ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ОПЕРАТОРОВ

Т. ФЕНЕШ—П. КОШИК

ON A SYSTEM OF ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE OPERATOR FIELD

T. FÉNYES—P. KOSIK

HERMITE—FEJÉR- ÉS HERMITE—FEJÉR-TÍPUSÚ INTERPOLÁCIÓ A LAGUERRE- POLINOMOK GYÖKEIN

HÁY BORBÁLA

1. Bevezetés

1.1. Tekintsük az $X=\{x_{kn}\}$, $k=1, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$, alappontrendszert, melyre

$$x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn}. \tag{1.1}$$

Közismert, hogy minden $f: R \to R$ függvényhez és $d=\{d_{kn}\} \subset R$ mátrixhoz egyértelműen definiálható a $H_n(f, d, x)=H_n(f, d, X, x)$ Hermite—Fejér-típusú interpolációs polinom, amely legfeljebb $2n-1$-ed fokú, és

$$H_n(f, d, x_{kn}) = f(x_{kn}), \quad H_n'(f, d, x_{kn}) = d_{kn}. \tag{1.2}$$

Ha f differenciálható, a $H_n(f, f', x)$ azt jelenti, hogy $d_{kn}=f'(x_{kn})$.

Ebben a dolgozatban elsősorban az $L_n^{\langle\alpha\rangle}(x)$ Laguerre polinomok gyökein vett Hermite—Fejér-típusú interpolációval foglalkozunk. A Laguerre polinomokat a következőképpen definiálhatjuk (Szegő [1], (5.1.1), (5.1.7)):

Legyen $\alpha > -1$, ekkor a pontosan n-ed fokú $L_n^{\langle\alpha\rangle}(x)$ polinom a

$$w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad x \in [0, \infty)$$

súlyfüggvényre ortogonális polinomrendszer n eleme az

$$L_n^{\langle\alpha\rangle}(0) = \binom{n+a}{n} \tag{1.3}$$

normalizálással ($n=0, 1, 2, \ldots$). $\alpha=-1$ esetén legyen

$$L_n^{\langle -1\rangle}(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{x}{n} L_{n-1}^{\langle 1\rangle}(x) \quad x \in [0, \infty). \tag{1.4}$$

Az $L_n^{\langle\alpha\rangle}(x)$ gyökeire a következő egyenlőtlenség teljesül ([1], 6.31)

$$0 \leqq x_{1n}^{\langle\alpha\rangle} < x_{2n}^{\langle\alpha\rangle} < \ldots < x_{nn}^{\langle\alpha\rangle}; \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha \geqq -1. \tag{1.5}$$

A továbbiakban sokszor alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, d, x) \overset{\text{def}}{=} H_n(f, d, X^{\langle\alpha\rangle}, x), \tag{1.6}$$

ahol $X^{\langle\alpha\rangle}$ az (1.5) mátrixot jelenti;

$$H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x) \overset{\text{def}}{=} H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, d, x), \quad \text{ha} \quad d_{kn} = 0 \quad \text{minden} \quad n, k\text{-ra}. \tag{1.7}$$

((1.7) az ún. Fejér-féle lépcső parabola; vö. [13].)

Legyen továbbá $\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $s \geqq 0$, rögzített egész.

$$C(s) = \{f: f \text{ folytonos } [0, \infty) \text{ halmazon és } |f(x)| = O(|x|^s) \text{ ha } x \to \infty\}.$$

1.2. A $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x)$ interpolációs eljárás konvergenciájával kapcsolatban Szegő G. ([1], 14.7) bebitonyította, ha $0 < \Omega < +\infty$ és $f \in C(s)$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \|H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x) - f(x)\|_{[0, \Omega]} = 0 \tag{1.8}$$

feltéve, hogy $-1 < \alpha < 0$.

A tétel bizonyos értelemben nem is javítható, mivel tetszőleges $\alpha \geqq 0$ esetén található olyan $f(x) \in C(s)$, hogy (1.8) nem teljesül. Tetszőleges belső zárt részintervallumon azonban az alábbi állítás igaz ([1], 14.7)

$$\lim_{n \to \infty} \|H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x) - f(x)\|_{[\varepsilon, \Omega]} = 0. \tag{1.9}$$

Az (1.9)-ben szereplő különbség nagyságrendi becslésével, az f függvényre tett különböző feltevések mellett, találkozhatunk például Freud G. [15], Vértesi P. [10] és Névai P. [16] dolgozatában. A témával foglalkozó irodalom kimerítő jegyzéke található Névai P. [17] összefoglaló cikkében.

Szegő fent idézett eredményéből látható, ha $\alpha \geqq 0$, $f(x)$ folytonossága általában nem biztosítja a $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x)$ eljárás konvergenciáját a $[0, \Omega]$ intervallumon; azonban bizonyos további feltételek segítségével, tetszőleges $\alpha \geqq 0$ esetén konvergencia tételeket kaphatunk (Szabados J. [2]). Ezekre a feltételekre később még visszatérünk. Ugyanebben a cikkben nagyságrendi becslést találhatunk (1.8)-ra. Eszerint, ha $-1 < \alpha < 0$, és $f \in C(s)$,

$$\|H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x) - f(x)\|_{[0, \Omega]} = \begin{cases} O(1)\omega\left(f, \dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right), & \text{ha} \quad -1 < \alpha \leqq -\dfrac{1}{2}, \\ O(1)\omega(f, n^{\alpha} \log n), & \text{ha} \quad -\dfrac{1}{2} < \alpha < 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

ahol ω a függvény folytonossági modulusa a $[0, \Omega + \delta]$ intervallumon.

Szabados J. [3] cikkében a $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x)$ konvergenciáját súlyozott folytonos normában vizsgálja a végtelen intervallumon. Bebizonyítja, hogy az Hermite—Fejér interpolációs eljárás konvergál egy adott függvényosztályra az e^{-8x} függvénnyel súlyozott folytonos normában, ha a függvény eleget tesz bizonyos folytonossági és integrál-feltételeknek. Valamint belátja, hogy a tétel bizonyos értelemben megfordítható.

1.3. Ebben a dolgozatban megjavítjuk az (1.10) becslést, továbbá *szükséges és elégséges* feltételt adunk (1.8) teljesülésére $\alpha \geqq 0$ esetén. Ezek bizonyításához felhasználjuk a végpontokkal kiegészített Hermite—Fejér interpolációra adódó eredményeinket is.

Analóg tételek adódtak a $[-1, 1]$ intervallumon a Jacobi alappontok vizsgálatakor (Vértesi [4]).

2. *A Hermite—Fejér interpolációra vonatkozó új eredmények*

2.1. Először a $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x)$ és $f(x)$ eltérésére adunk egy, az eddigieknél élesebb becslést. A 4. fejezetben bebizonyítjuk a következő tételt.

2.1. Tétel. *Ha* $\Omega > 0$ *rögzített,* $f \in C(s)$ *és* $\alpha \in [-1, 0)$, *akkor*

$$\|H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x) - f(x)\|_{[0,\Omega]} = O(1) \sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} \omega\left(f, \frac{i}{\sqrt{n}}\right) i^{\gamma}. \tag{2.1}$$

Itt, mint előbb, ω az f folytonossági modulusa a $[0, \Omega+\delta]$ intervallumon, és

$$\gamma = \begin{cases} -2, & \text{ha } \alpha \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ 2\alpha - 1, & \text{ha } \alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Ilyen típusú hibabecsléseket találhatunk például Sztecskinnél [5], továbbá a Jacobi alappontokra vonatkozó Hermite—Fejér interpolációval kapcsolatban Bojanicnál [18] és Vértesinél [19].

A fentiekből könnyen adódik az alábbi következmény:

2.2. Következmény. *A 2.1. Tétel feltételei mellett*

$$\|H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x) - f(x)\|_{[0,\Omega]} = O(1) \begin{cases} \omega\left(f, \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right), & \text{ha } \alpha \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ \omega(f, n^{\alpha}), & \text{ha } \alpha \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. A következő tétel *szükséges és elégséges* feltételt ad a Hermite—Fejér-típusú interpoláció konvergenciájára.

2.3. Tétel. *Legyen* p *pozitív egész szám és* $\alpha \in [p-1, p)$, *valamint* $f \in C(s)$. *Az (1.8) pontosan akkor teljesül, ha*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, 0) = f(0), & \text{valamint } \alpha \geqq 1 \text{ esetén} \\ \dfrac{d^r}{dx^r} H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x)|_{x=0} = o(n^r) \quad r = 1, 2, \ldots, p-1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Megjegyzések:

1. A fenti tételből látható, hogy az *egyenletes konvergencia* biztosításához elegendő csupán *egy pontban* vizsgálni a $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f, x)$ eljárást. Speciálisan, ha $\alpha \in [0, 1)$, az eljárás $x=0$ *pontban* való konvergenciája biztosítja az eljárás *egyenletes konvergenciáját* a $[0, \Omega]$ intervallumon.

2. Következmény. *Tekintsük az* $\alpha = 0$ *speciális esetet.* (1.8) *pontosan akkor teljesül, ha*

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx = f(0).$$

Ugyanis, legyen $Q_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k$ a Gauss—Jacobi mechanikus quadratura, ahol $\lambda_k=x_k^{-1}L_n'^{-2}(x_k)$, ([1], 15.3).
Ekkor

$$H_n^{\langle 0\rangle}(f,0)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)v_k(0)\frac{L_n^{\langle 0\rangle}(0)}{x_k L_n^{\langle 0\rangle'}(x_k)}=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k=Q_n(f)$$

Tekintve, hogy $\lim_{n\to\infty} Q_n(f)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx$ ([20], 3.7), a tétel felhasználásával a kívánt eredményt kapjuk.

Ez az eredmény, amely Szabados [2] cikkében is megtalálható, megfelel Egerváry—Turán [6], az $\alpha=\beta=0$ paraméterű Jacobi alappontokra bizonyított integrálfeltételének.

3. A 2.3. Tétel igaz akkor is, ha $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f,x)$ helyett $H_n^{\langle\alpha\rangle}(f,d,x)$-t tekintjük olyan d-vel, amelyre

$$\max_{1\le k\le n}|d_{kn}|=\begin{cases} o\left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right), & \text{ha} \quad p=1,\\ o(n), & \text{ha} \quad p>1.\end{cases} \tag{2.4}$$

4. Analóg feltételek adódtak a $[-1,1]$ intervallumon a Jacobi alappontok vizsgálatakor Vértesi [4] dolgozatában.

3. Végpontokkal kiegészített Hermite—Fejér-típusú interpoláció

3.1. A végpontokkal kiegészített Hermite—Fejér-típusú interpolációval kapcsolatos eredmények közül először Egerváry és Turán közös [6] cikkét említjük. Ők az $\alpha=\beta=0$ paraméterű Jacobi alappontok esetét vizsgálták. Ezzel a problémakörrel (szintén Jacobi alappontok esetén) Szász Pál [7], Szabados [8], Sánta [9] és Vértesi [10] és még sokan mások foglalkoztak (l. [10] irodalomjegyzéke). Laguerre gyökök esetével Sharma [11] és Joó [13] cikkeiben találkozhatunk. Az eredmények jórészt speciális paraméterű eljárásokra vonatkoztak. Célunk az eddigieknél általánosabb Hermite—Fejér interpoláció vizsgálata. Az eredményekből kiderül, hogyan kapcsolódnak a végpontokkal kiegészített Hermite—Fejér interpolációk a H_n eljáráshoz.

A továbbiakban legyen az $S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,d,e,x)$ legfeljebb $2n+p-1$-ed fokú polinom definiálva az alábbiakkal:

$$\begin{cases} S_{n0}^{\langle\alpha\rangle}(f,d,e,x)\overset{\text{def}}{=}H_n^{\langle\alpha\rangle}(f,d,x); \quad \text{ha} \quad p>0\\ S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,d,e,x_{kn}^{\langle\alpha\rangle})=f(x_{kn}^{\langle\alpha\rangle}), \quad k=1,\ldots,n,\\ \dfrac{d}{dx}S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,d,e,x)|_{x=x_{kn}^{\langle\alpha\rangle}}=d_{knp} \quad k=1,\ldots,n,\\ \dfrac{d^r}{dx^r}S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,d,e,x)|_{x=0}=e_{rnp} \quad r=0,1,\ldots,p-1,\ e_{onp}=f(0),\end{cases} \tag{3.1}$$

ahol $e_{rnp}\in R$ és $d_{knp}\in R$ előre adott értékek és mint előbb, $\alpha\in[p-1,p)$.

Ha valamennyi $d_{kn}=0$ az $S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,0,e,x)$ jelölést alkalmazzuk; ezzel analóg az $S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,d,0,x)$ jelölés; $S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,x)\overset{\text{def}}{=}S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f,0,0,x)$. $p=1$ esetén az úgynevezett quasi

Hermite—Fejér polinomokat kapjuk. Könnyen látható, hogy a fenti polinomok egyértelműen léteznek.

3.2. Az $S_{np}^{\langle\alpha\rangle}$ polinomokat (a felesleges indexek elhagyásával) a következő alakban keressük:

$$S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(f, d, e, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x)h_k^{\langle\alpha\rangle}(x) + \sum_{k=1}^{n} d_k\eta_k^{\langle\alpha\rangle}(x) + \sum_{r=0}^{p} e_r\chi_r^{\langle\alpha\rangle}(x). \tag{3.2}$$

Itt

$$\begin{cases} h_{kp}^{\langle\alpha\rangle}(x) = \left(\dfrac{x}{x_k}\right)^p v_{kp}^{\langle\alpha\rangle}(x)\, l_k^2(x), \\ \eta_{kp}^{\langle\alpha\rangle}(x) = \left(\dfrac{x}{x_k}\right)^p (x-x_k)\, l_k^2(x), \\ \chi_{rp}^{\langle\alpha\rangle}(x) = \left[\dfrac{L_n^{\langle\alpha\rangle}(x)}{L_n^{\langle\alpha\rangle}(0)}\right]^2 \sum_{i=0}^{p-1} B_{ir}\dfrac{x^i}{i!}, \end{cases} \tag{3.3}$$

ahol

$$l_k(x) = \frac{L_n^{\langle\alpha\rangle}(x)}{(x-x_k)L_n^{\langle\alpha\rangle\prime}(x_k)},$$

valamint

$$v_k^{\langle\alpha\rangle}(x) = 1 + c_{kp}^{\langle\alpha\rangle}\cdot(x-x_k),\quad c_{kp}^{\langle\alpha\rangle} = -\frac{x_k-\alpha+p-1}{x_k}.$$

A B_{ir} értékeket a $\chi_r^{(i)}(0)=\delta_{ir}$ egyenletrendszer egyértelműen meghatározza (lásd 4.1. Lemma).

Mivel tetszőleges, legfeljebb $2n+p-1$-ed fokú P polinomra

$$S_{np}^{\langle\alpha\rangle}(P, d, e, x) \equiv P(x), \quad \text{ha} \quad d_k = P'(x_k) \quad \text{és} \quad e_r = P^{(r)}(0)$$

teljesül, nyilván

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) + \chi_0(x) \equiv 1. \tag{3.4}$$

3.3. Az $S_{np}^{\langle\alpha\rangle}$ eljárásra vonatkozólag a következőket fogjuk bizonyítani:

3.1. Tétel. *Legyen* $f\in C(S)$, $\alpha\in[-1, 0)$ *és* p *tetszőleges nem-negatív egész szám. Ekkor*

$$\|S_{np}^{\langle\alpha+p\rangle}(f, x) - f(x)\|_{[0,\,\Omega]} = O(1)\sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} \omega\left(f, \frac{i}{n}\right) i^{\gamma}, \tag{3.5}$$

ahol ω *az* f *folytonossági modulusa a* $[0, \Omega+\delta]$*-n és mint korábban*

$$\gamma = \begin{cases} -2, & \text{ha} \quad \alpha\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right], \\ 2\alpha-1, & \text{ha} \quad \alpha\in\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Megjegyzés. A fenti tétel $p=0$ esetén a 2.1. Tételt adja. A tétel megmutatja, hogy p darab új feltétel megadása esetén az α helyett $\alpha+p$-re adódik ugyanaz a hibabecslés.

3.2. Következmény. *A 3.1. Tétel feltételei mellett*

$$(3.6)\quad \|S_{np}^{\langle\alpha+p\rangle}(f,x)-f(x)\|_{[0,\Omega]} = O(1)\begin{cases}\omega\left(f, \dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right), & \text{ha } \alpha\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right],\\ \omega(f, n^{\alpha}), & \text{ha } \alpha\in\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right).\end{cases}$$

A 3.1. Tételnél valamivel általánosabb az alábbi.

3.3. Tétel. *Ha* $f\in C(S)$, $\alpha\in[-1,0]$ *és* p *tetszőleges nem-negatív egész szám, továbbá*

$$(3.7)\quad \begin{cases}\max\limits_{1\leqq k\leqq n}|d_{kn}| = \begin{cases}o\left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right), & \text{ha } \alpha\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right],\\ o(n^{\alpha}), & \text{ha } \alpha\in\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right),\end{cases}\\ e_{rn} = o(n^{r}), \quad r=1,\ldots,p-1,\end{cases}$$

akkor

$$(3.8)\quad \lim_{n\to\infty}\|S_{np}^{\langle\alpha+p\rangle}(f,d,e,x)-f(x)\|_{[0,\Omega]} = 0.$$

4. Bizonyítások

4.1. A bizonyítások a következő formulákra támaszkodnak (l. [1], (7.6.8), (8.9.11), (15.3.5)).

$$(4.1)\quad L_n^{\langle\alpha\rangle}(x) = \begin{cases}O(1)x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \text{ha } x\in\left[\dfrac{c}{n}, \Omega\right]\\ O(1)n^{\alpha}, & \text{ha } x\in\left[0, \dfrac{c}{n}\right].\end{cases}$$

Az (1.3) normalizálás miatt

$$(4.2)\quad L_n^{\langle\alpha\rangle}(0)\sim n^{\alpha}\quad(\alpha>-1).$$

(A $z_n\sim w_n$ jelölés azt jelenti, hogy léteznek olyan $0<c_1\leqq c_2$ konstansok, hogy $c_1|z_n|\leqq|w_n|\leqq c_2|z_n|$.)

A Laguerre polinomok deriváltjaira a következő összefüggések ismertek:

$$(4.3)\quad L_n^{\langle\alpha\rangle'}(x) = L_{n-1}^{\langle\alpha+1\rangle}(x),$$

$$(4.4)\quad \begin{cases}L_n^{\langle\alpha\rangle'}(x_k)\sim x_k^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} & x_k\in(0,\Omega), \text{ és}\\ L_n^{\langle-1\rangle'}(0)\sim 1,\end{cases}$$

valamint ([1], (14.7.5))

$$(4.5)\quad \sum_{x_k\geqq\Omega} x_k^m[L_n^{\langle\alpha\rangle'}(x_k)]^{-2} = O(n^{-\alpha})\quad \alpha\geqq -1 \text{ és } m \text{ egész.}$$

(Az $\alpha=-1$ esetre az (1.4) képlet felhasználásával kaphatjuk meg a fenti becsléseket.) A gyökök elhelyezkedésére Freud G. [12] 1971-ben írt cikkéből felhasználjuk, hogy

$$(4.6)\quad x_k\sim\frac{k^2}{n},\quad \text{valamint}\quad |x_k-x_{k+1}|\sim\frac{k+1}{n},\quad k=1,\ldots,n,\quad \alpha>-1.$$

Ha x_j-vel jelöljük az x-hez legközelebb eső gyököt, azaz

$$|x-x_j| = \min_{1 \leqq k \leqq n} |x-x_k|, \tag{4.7}$$

akkor a (4.5)-t felhasználva

$$|x-x_k| = \frac{|j-k|(j+k)}{n}, \quad \text{ha} \quad k \neq j. \tag{4.8}$$

4.2. A fenti összefüggések ismeretében hozzákezdhetünk a 3.1. Tétel bizonyításához.

Először bebizonyítjuk a következő lemmákat. (4.2—4.4. bekezdésekben $L_n^{\langle \alpha+p \rangle}(x)$ polinomot $L_n(x)$-szel jelöljük.)

4.1. Lemma. *A* (3.2) *képletben szereplő* B_{ir} *konstansokra a következő összefüggés igaz.*

$$B_{ir} = \begin{cases} \delta_{ir}, & \text{ha} \quad i < r, \\ O(n^{i-r}), & \text{ha} \quad p-1 \geqq i > r. \end{cases} \tag{4.9}$$

A 4.1. Lemma bizonyítása. A (3.2) képletben szereplő χ_r polinomokra a

$$\chi_r^{(i)}(0) = \delta_{ir}$$

összefüggés igaz. A (3.3) és a fenti képlet alapján

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} B_{kr} \cdot \frac{d^{i-k}}{dx^{i-k}} \left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)} \right]^2 \Bigg|_{x=0} = \delta_{ir}. \tag{4.10}$$

Ha $i=0$, (4.10)-ből közvetlenül adódik $B_{0r}=0$. Innen teljes indukcióval belátható, hogy $B_{ir}=0$, ha $i<r$. A fentieket fölhasználva $i=r$ esetén $B_{rr}=\delta_{rr}=1$ adódik. Az $i>r$ eset vizsgálatához szükségünk van a $\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2$ deriváltjainak nagyságrendi becslésére az $x=0$ helyen.

(4.2) és (4.3) felhasználásával

$$\frac{d^l}{dx^l} \left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)} \right]^2 \Bigg|_{x=0} = \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} \frac{L_n^{(k)}(0) L_n^{(l-k)}(0)}{L_n^2(0)} = O(n^l). \tag{4.11}$$

A (4.10) egyenletet a $B_{ir}=0$ $(i<r)$ összefüggés ismeretében a következő alakra hozhatjuk

$$B_{ir} = -\sum_{k=r}^{i-1} \binom{i}{k} B_{kr} \frac{d^{i-k}}{dx^{i-k}} \left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)} \right]^2 \Bigg|_{x=0}, \quad i > r.$$

Innen (4.11) felhasználásával az állítás teljes indukcióval adódik.

A fenti 4.1 Lemmát felhasználhatjuk a χ_r alappolinomok nagyságrendi becslésére.

4.2. Lemma. *A* χ_r *polinomokra a következő igaz*

$$\chi_r(x) = O(n^{-r}) \frac{1}{j}, \quad \text{ha} \quad x \in [0, \Omega]. \tag{4.12}$$

A 4.2. Lemma bizonyítása. Tekintsük először az $x \in \left[0, \frac{c}{n}\right]$ esetet. A (3.3),

(4.1) és (4.2) képletek, valamint a fenti 4.1. Lemma fölhasználásával adódik, hogy

$$\chi_r(x) = \left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2 \sum_{i=1}^{p-1} B_{ir} \frac{x^i}{i!} = O(1) \sum_{i=r}^{p-1} n^{i-r} \left(\frac{1}{n}\right)^i \frac{1}{i!} = O(n^{-r}).$$

Ugyanezekre az összefüggésekre van szükségünk az $x \in \left[\frac{c}{n}, \Omega\right]$ eset vizsgálatánál.

$$\chi_r(x) = O(1) \frac{x^{-\alpha-p-\frac{1}{2}} n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}}{n^{2\alpha+2p}} \sum_{i=r}^{p-1} n^{i-r} x^i.$$

A (4.6) és (4.7) összefüggések alapján

$$\chi_r(x) = O(1) \frac{n^{\alpha+p+\frac{1}{2}} j^{-2\alpha-2p-1} n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}}{n^{2\alpha+2p}} \sum_{i=r}^{p-1} n^{i-r} n^{-i} j^{2i} = O(n^{-r}) \cdot j^{-2\alpha-3}.$$

Ebből $\alpha > -1$ felhasználásával a kívánt összefüggést nyerjük.

4.3. Ezek után az előkészítő lemmák után rátérhetünk a 3.1. Tétel bizonyítására.

Tegyük föl, hogy $-1 \leqq \alpha \leqq -\frac{1}{2}$ (a $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ eset hasonlóan adódik). (3.2) alapján

$$S_{np}^{\langle \alpha+p \rangle}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) h_{kp}(x) + f(0) \chi_0(x).$$

Az $S_{np}^{(\alpha+p)}$ és f eltérését három részletben becsüljük.

(4.13)
$$|S_{np}^{\langle \alpha+p \rangle}(f, x) - f(x)| = O(1) \Big\{ \sum_{x_k \leqq \Omega+\delta} |f(x_k) - f(x)| |h_{kp}(x)| +$$

$$+ \sum_{x_k > \Omega+\delta} |f(x_k) - f(x)| |h_{kp}(x)| + |f(0) - f(x)| |\chi_0(x)| \Big\} = O(1) \{I_1 + I_2 + I_3\}.$$

1. Az I_1 összeg becsléséhez szükségünk van a benne szereplő h_{kp} kifejezések nagyságrendjére.

Legyen először $x \in \left[\frac{c}{n}, \Omega\right]$ és $\alpha + p > -1$.

Ha $k < \frac{j}{2}$, a (3.3) képletben szereplő v_{kp}-ra a következő igaz.

(4.14)
$$v_{kp}(x) = 1 - \frac{x_k - \alpha + p - 1}{x_k} (x - x_k) = O\left(\frac{x}{x_k}\right).$$

A (3.3), (4.1), (4.4), (4.6) és (4.41) képletek fölhasználásával

(4.15)

$$|h_{kp}(x)| = O(1) \left(\frac{x}{x_k}\right)^{p+1} \frac{x^{-\alpha-p-\frac{1}{2}} n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}}{(x - x_k)^2 x_k^{-\alpha-p-\frac{3}{2}} n^{\alpha+p+\frac{1}{2}}} = O(1) \frac{x_k^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(x - x_k)^2 x^{\alpha-\frac{1}{2}} n} =$$

$$= O(1) \frac{k^{2\alpha+1}}{(j-k)^2 (j+k)^2 j^{2\alpha-1}} = O(1) \left(\frac{k}{j}\right)^{2\alpha+2} \frac{j^3}{(k+j)^2 (j-k)^2 k} = O(1) \frac{1}{k \cdot j}.$$

Ha $k \geqq \frac{j}{2}$ és $k \neq j$, (4.14) helyett $v_{kp}(x) = O(1)$ szerepel.

(4.16)

$$|h_{kp}(x)| = O(1)\frac{x_k^{\alpha+\frac{1}{2}}}{x(x-x_k)^2 x^{\alpha+\frac{1}{2}}} = O(1)\frac{k^{2\alpha+3}}{(k-j)^2(k+j)^2 j^{2\alpha+1}} = O(1)\frac{1}{(k-j)^2}.$$

Legyen most $k=j$. Ha $x=x_j$, definíció szerint $h_{jp}(x)=1$. Ha $x \neq x_j$, a Lagrange középértéktétel szerint létezik olyan x^* hely x és x_j között, melyre

$$h_{jp}(x) = O(1)\left(\frac{x}{x_j}\right)^p \left[\frac{L_n'(x^*)}{L_n'(x_j)}\right]^2 = O(1). \tag{4.17}$$

Könnyen látható, hogy az $x \in \left[0, \frac{c}{n}\right]$ eset a $j=1$-nek felel meg. (c választható úgy, hogy $\frac{c}{n} < x_1$.) Így, felhasználva a (4.15), (4.16), (4.17) becsléseket, tetszőleges $x \in [0, \Omega]$-re adódik, hogy

$$I_1 = O(1) \sum_{x_k \leqq \Omega+\delta} \omega(|x_k - x|)|h_{kp}(x)| = O(1)\left\{\sum_{k=1}^{\frac{j}{2}} \omega\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{k \cdot j} + \right.$$

(4.18)

$$\left. + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{i^2} + \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} = O(1)\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{i^2}.$$

2. Az I_2 összeg becsléséhez ismét a h_{kp}-ket kell megbecsülni, ha $x_k > \Omega+\delta$. Ebben az esetben a (3.3) képletben szereplő v_{kp} függvényre

$$v_{kp}(x) = 1 - \frac{x_k - \alpha + p - 1}{x_k}(x - x_k) = O(x_k). \tag{4.19}$$

Így, (3.3) és (4.19) alapján

$$|h_{kp}(x)| = O(1)\left(\frac{x}{x_k}\right)^p x_k \frac{L_n^2(x)}{(x-x_k)^2 L_n'^2(x_k)}.$$

Mivel $|x - x_k| > \delta$ és $\max_{0 \leqq x \leqq \Omega} |x^p L_n^2(x)| = O\left(n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}\right)\left(-1 < \alpha < -\frac{1}{2}\right)$, (lásd (4.1)), adódik, hogy

$$|h_{kp}(x)| = O(1)\frac{1}{L_n'^2(x_k) x_k^{p-1}} \cdot n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}.$$

Felhasználva még, hogy $f \in C(s)$, (4.5) segítségével

$$I_2 = O(1) \sum_{x_k > \Omega+\delta} x_k^s \frac{n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}}{L_n'^2(x_k) x_k^{p-1}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{4.20}$$

adódik.

3. Az utolsó lépés I_3 becslése. Ehhez a 4.2. Lemmát használhatjuk, melynek értelmében

$$I_3 = O(1)\omega(x)|\chi_0(x)| = O(1)\omega\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{j}. \tag{4.21}$$

Összesítve a (4.18), (4.20) és (4.21) becsléseket, a 3.1. Tétel állítását nyerjük, feltéve, hogy $\alpha+p>-1$.

Hátravan még az $\alpha+p=-1$, azaz $\alpha=-1, p=0$, eset vizsgálata. Azonban (1.4) és (3.1) következtében

$$S_{n0}^{\langle -1\rangle}(f,x) = S_{n-1,2}^{\langle -1\rangle}(f,x),$$

amire már beláttuk az állítást. Ezzel befejeztük a 3.1. Tétel bizonyítását.

4.4. A 3.3. Tétel bizonyításához a fenti tétel bizonyítását kell kiegészítenünk. Nevezetesen, be kell látnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}|\eta_{kp}(x)| = \begin{cases} O\left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right), & \text{ha } \alpha\in\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right], \\ O(n^{\alpha}), & \text{ha } \alpha\in\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right). \end{cases} \tag{4.22}$$

Valóban, $S_{np}^{\langle\alpha+p\rangle}(f,d,e,x)$ és $f(x)$ eltérése, (3.2) alapján, a következő alakban írható föl:

$$|S_{np}^{\langle\alpha+p\rangle}(f,d,e,x)-f(x)| \leqq \Big|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x))h_{kp}(x)+(f(0)-f(x))\chi_0(x)\Big| +$$

$$+\Big|\sum_{k=1}^{n} d_k\eta_k(x)\Big|+\Big|\sum_{r=1}^{p-1} e_r\chi_r(x)\Big| \equiv J_1+J_2+J_3.$$

A $J_1=O(1)$ és $J_3=O(1)$ összefüggések a 3.1. Tételből és a 4.2. Lemmából adódnak. A

$$J_2 = \Big|\sum_{k=1}^{n} d_k\eta_k(x)\Big| = O(1)\max_{1\leqq k\leqq n} d_k\cdot\sum_{k=1}^{n}|\eta_k(x)|$$

összefüggésből látható, hogy ha a d_k számok teljesítik a (3.7) feltételt, (4.22) elegendő tételünk bizonyításához. Az egyszerűség kedvéért ismét csak az $\alpha\in\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ esettel foglalkozunk. Nyilván

$$\sum_{k=1}^{n}|\eta_k(x)| = \Big(\sum_{x_k\leqq\Omega+\delta}+\sum_{x>\Omega+\delta}\Big)|\eta_k(x)| = \Sigma_1+\Sigma_2.$$

Itt a Σ_2 összeget (I_2-höz hasonlóan) (4.5) fölhasználásával becsülhetjük, azaz

$$\Sigma_2 = O(1)\sum_{x_k>\Omega+\delta}\left(\frac{x}{x_k}\right)\frac{L_n^2(x)}{(x-x_k)L_n'^2(x_k)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{4.23}$$

Legyen most $x_k \leqq \Omega+\delta$. Ha $k \neq j$, akkor

(4.24)

$$|\eta_k(x)| = 0(1)\left(\frac{x}{x_k}\right)^p \frac{x^{-\alpha-p-\frac{1}{2}} n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}}{|x-x_k| x_k^{-\alpha-\frac{3}{2}} n^{\alpha+p-\frac{1}{2}}} = O(1) \frac{k^{2\alpha+3}}{|k-j|(k+j) j^{2\alpha+1} n}.$$

Legyen $2k \leqq j$. Ekkor (4.24) így írható:

$$|\eta_k(x)| = O(1)\left(\frac{k}{j}\right)^{2\alpha+3} \frac{j^2}{|k-j||k+j|} \cdot \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.25}$$

Ha $2k > j$, $k \neq j$,

$$|\eta_k(x)| = O(1)\left(\frac{k}{j}\right)^{2\alpha+1} \frac{k^2}{|k-j|(k+j) n} = O(1) \frac{1}{|k-j| \sqrt{n}}. \tag{4.26}$$

Így (4.25) és (4.26) alapján

$$\Sigma_1 = O(1) \frac{\log n}{\sqrt{n}}, \tag{4.27}$$

amit (4.23)-mal egybevetve adódik (4.22), azaz a tétel állítása.

4.5. Ez a szakasz a 2.3. *Tétel bizonyítását tartalmazza.* Legyen p egy nemnegatív egész szám és $\alpha \in [p-1, p)$. Tekintsük az $S_{ni}^{\langle\alpha\rangle}(f, 0, e, x)$ eljárásokat olyan $e_{ri} = e_r = o(n^r)$ $(r=1, \ldots, i-1;\ i=0, 1, \ldots)$ értékekkel, melyekről föltesszük, hogy függetlenek a második indextől.

Ekkor — az $S_{ni}(x) = S_{ni}^{(\alpha)}(f, 0, e, x)$, $H_n(x) = S_{n0}(x)$ és az $L_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ jelölésekkel — a (3.1) definíciót figyelembe véve az alábbi igaz.

$$S_{n,i+1}(x) = S_{ni}(x) + \left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2 \frac{x^i}{i!}[e_i - S_{ni}^{(i)}(0)]. \tag{4.28}$$

A (4.28) egyenlőség többszörös alkalmazásával a

$$S_{nt}(x) = H_n(x) + \left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2 \sum_{i=0}^{t-1} \frac{x^i}{i!}[e_i - S_{ni}^{(i)}(0)] \tag{4.29}$$

egyenlőséget nyerhetjük.

Első lépésként bizonyítsuk be a 2.3. Tétel feltételeinek *elégségességét.* A 3.3. Tétel következtében

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{np}(x) - f(x)\|_{[0,\Omega]} = 0, \quad \text{ha} \quad f \in C(S) \quad \text{és} \quad e_r = o(n^r) \quad r = 1, \ldots p-1. \tag{4.30}$$

Legyen először $\alpha \in [0, 1)$, ekkor $p=1$. (4.29) alapján a következő becslés írható föl:

$$\|H_n(x) - f(x)\|_{[0,\Omega]} \leqq \|S_{n1}(x) - f(x)\|_{[0,\Omega]} + O(1)|H_n(0) - f(0)|. \tag{4.31}$$

Látható, hogy (4.30) következtében $H_n(x)$ egyenletes konvergenciájához elegendő $H_n(0) \to f(0)$ $(n \to \infty)$, amely nyilván szükséges föltétel is. A $p=2$ esetben szükségünk van az S_{n1} deriváltjára a nulla helyen, amit (4.29) alapján a következő alakban írhatunk föl:

$$S'_{n1}(0) = H'_n(0) + \frac{d}{dx}\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2\Bigg|_{x=0} [f(0) - H_n(0)].$$

Ha $H_n'(0)=o(n)$ és $H_n(0)\to f(0)$, ami $p=2$ esetén pontosan a 2.3. Tétel feltétele, akkor (4.11) miatt

$$S_{n1}'(0) = o(n).$$

Tehát $\alpha\in[1, 2)$ esetén $e_0=f(0)$ és $e_1=S_{n1}'(0)$ választás mellett, az $S_{n2}(x)$ egyenletesen fog tartani $f(x)$ függvényhez $[0, \Omega]$-n (lásd (4.30)). Ekkor (4.29) alapján

$$\|H_n(x)-f(x)\|_{[0,\Omega]} \leqq \|S_{n,2}(x)\|-f(x)\|_{[0,\Omega]}+\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2 |f(0)-H_n(0)|, \tag{4.32}$$

azaz a 2.3. Tétel feltételei ez esetben is biztosítják a H_n eljárás konvergenciáját. Általában, ha $p>2$, legyen

$$e_0 = f(0), \quad e_i = S_{ni}^{(i)}(0) \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Először belátjuk, hogy $e_i=o(n^i)$ $i=1, 2, \ldots, p-1$. $t=1$-re az előbb bizonyítottuk; tegyük fel, az állítás igaz $t-1$-re, ekkor (4.11) felhasználásával

$$S_{nt}^{(t)}(0) = H_n^{(t)}(0)+\frac{d^t}{dx^t}\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2\Bigg|_{x=0} \cdot |f(0)-H_n(0)| = o(n^t),$$

mivel $H_n^{(t)}(0)=o(n^t)$ és $H_n(0)-f(0)=o(1)$.

Azaz a fenti e_i választással, (4.30) értelmében, $S_{np}(x)$ egyenletesen tart $f(x)$-hez. Így

$$\|H_n(x)-f(x)\|_{[0,\Omega]} \leqq \|S_{np}(x)-f(x)\|_{[0,\Omega]}+\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2 |f(0)-H_n(0)|, \tag{4.33}$$

amiből $\|H_n(x)-f(x)\|_{[0,\Omega]}\to 0$ $(n\to\infty)$ adódik.

Térjünk át a 2.3. Tétel feltételei *szükségességének* bizonyítására. $\alpha\in[0, 1)$ esetén egyetlen feltételünk van $(H_n(0)\to f(0))$, és ez triviálisan szükséges feltétele H_n egyenletes konvergenciájának.

Legyen most $p\geqq 1$.

Definiáljuk a következő kétváltozós segédfüggvényt.

$$g(t, n) \overset{\text{def}}{=} \frac{H_n^{(t)}(0)}{n^t}, \quad t = 1, 2, \ldots, p-1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.34}$$

A 2.3. Tétel feltételeinek szükségessége azt jelenti, hogy ha $f\in C(s)$ és $H_n(x)$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez, akkor

$$\lim_{n\to\infty} g(t, n) = 0 \quad \text{ha} \quad t = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ekkor található oly $q>0$ egész és hozzá az $1<t_1<$ $<t_2<\ldots<t_q\leqq p-1$ indexek, valamint a Q számsorozat, hogy

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\in Q} |g(t_i, n)| > c \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, \ldots, q, \quad \text{de} \\ \lim\limits_{n\in Q} |g(t, n)| = 0 \quad \text{ha} \quad t \neq t_1, t_2, \ldots, t_q. \end{cases} \tag{4.35}$$

Definiáljuk a $T=t_j$ indexet a következőképpen:

$$T = \min_{1\leqq i\leqq q} \left\{t_i: \lim_{n\in Q} \left|\frac{g(t_i, n)}{g(t_k, n)}\right| > 0, \quad i \leqq k \leqq q\right\}. \tag{4.36}$$

T definíciójából adódik, hogy

$$(4.37)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\in Q}\left|\dfrac{g(t_i,n)}{g(T,n)}\right| = 0 & \text{ha } t_i \prec T \text{ és} \\ \lim\limits_{n\in Q}\left|\dfrac{g(t_i,n)}{g(T,n)}\right| = O(1) & \text{ha } t_i \geqq T. \end{cases}$$

Valóban, ha $t_i \geqq T$, az állítás azonnal következik (4.36)-ból. Ugyanakkor T definíciója miatt $\lim\limits_{n\in Q}\left(|g(t_{j-1},n|g(t_i,n)|^{-1}\right)=0$ valamilyen $i\geqq j$-re, ahonnan (4.36) értelmében $\lim\limits_{n\in Q}\left(|g(t_{j-1},n)||g(T,n)|^{-1}\right)=0$. Tekintsük most a t_{j-2} indexet. Ekkor, mint előbb, $\lim\limits_{n\in Q}\left(|g(t_{j-2},n)||g(t_i,n)|^{-1}\right)=0$, ahol $i\geqq j-1$. Ha $i=j-1$, akkor

$$\lim_{n\in Q}\left|\frac{g(t_{j-2},n)}{g(T,n)}\right| = \lim_{n\in Q}\left|\frac{g(t_{j-2},n)}{g(t_{j-1},n)}\right|\lim_{n\in Q}\left|\frac{g(t_{j-1},n)}{g(T,n)}\right| = 0,$$

ha $i\geqq j$, megint (4.36) miatt adódik az összefüggés a t_{j-2} indexre. Hasonló okoskodás érvényes a t_{j-3}, t_{j-4}, ..., t_1 indexekre is. Most belátjuk, hogy ha $n\in Q$ és $e_{it}=0$ $(i=1,2,\ldots,t-1)$ akkor, a (4.29)-ben definiált eljárásra

$$(4.38)\qquad S_{nt}^{(t)}(0) = \begin{cases} o(1)g(T,n)n^t & \text{ha } t \prec T, \\ [1+o(1)]g(T,n)n^T & \text{ha } t = T, \\ O(1)g(T,n)n^t & \text{ha } T \prec t \leqq p-1. \end{cases}$$

Valóban, ha $T>1$ és $t=1$, (4.29) és (4.11) értelmében

$$S'_{n1}(0) = H'_n(0)+\frac{d}{dx}\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2\Bigg|_{x=0}[f(0)-H_n(0)] =$$

$$= ng(1,n)+o(n) = o(1)[g(T,n)+1]n$$

(lásd még (4.35) és (4.36)). Tegyük fel, hogy állítás igaz az $1, 2, \ldots, t-1$ értékekre; most belátjuk a $t<T$ indexre is. Mint előbb

$$S_{nt}^{(t)}(0) = H_n^{(t)}(0)-\sum_{l=0}^{t-1}\binom{t-1}{l}\frac{d^l}{dx^l}\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2\Bigg|_{x=0} S_{n,t-l-1}^{(t-l-1)}(0)+$$

$$+\frac{d^t}{dx^t}\left[\frac{L_n(x)}{L_n(0)}\right]^2\Bigg|_{x=0}[f(0)-H_n(0)] = g(t,n)n^t+$$

$$+o(1)\sum_{l=0}^{t-1} n^l g(T,n)n^{t-l-1}+o(1)n^t = o(1)[g(T,n)+1]n^t,$$

mint állítottuk. Hasonlóan igazolhatók a $t\geqq T$ esetek is. Legyen $M>0$ és $y_n=$ $=\dfrac{1}{nM}<x_{1n}$ (és természetesen $y_n<\Omega$). Alkalmazva a (4.29) összefüggést, $n\in Q$ esetén adódik, hogy

$$S_{np}(y_n)-f(y_n) = [H_n(y_n)-f(y_n)]-\frac{L_n^2(y_n)}{L_n^2(0)}\cdot$$

$$\cdot\left\{o(1)g(T,n)\sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{1}{M}\right)^t\frac{1}{t}+\left(\frac{1}{M}\right)^T\frac{g(T,n)}{T!}\left[1+o(1)+O(1)\sum_{t=T+1}^{p-1}\left(\frac{1}{M}\right)^{t-T}\right]\right\}.$$

Ha M elég nagy, akkor elég nagy n-től kezdve

$$\{\ldots\} = (1+\varepsilon_n)\left(\frac{1}{M}\right)^T \frac{g(T,n)}{T!} \quad \text{ahol} \quad |\varepsilon_n| \leqq 1/2.$$

Mivel $|S_{np}(y_n)-f(y_n)| \to 0$ (3.3. Tétel), az $L_n^2(y_n)L_n^{-2}(0) \to 1$ összefüggést is felhasználva adódik, hogy $|H_n(y_n)-f(y_n)| \not\to 0$ (lásd (4.35)), ami ellentmondás.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] Szegő G., Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc.* XXIII New York, 1974.
[2] Szabados J., On the convergence of Hermite—Fejér interpolation for Laguerre abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 24 (1971), 243—250.
[3] Szabados J., Weighted norm estimates for the Hermite—Fejér interpolation based on the Laguerre abscissas.
[4] Vértesi P., Hermite—Fejér type interpolations IV, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 39 (1982) 83—93.
[5] Sztecskin, Sz. B., Periodikus függvények Fejér-közepekkel való közelítéséről, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 62 (1961) 48—60 (oroszul).
[6] Egerváry E., Turán P., Notes on Interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 9 (1958), 259—267.
[7] Szász, P., On quasi-Hermite—Fejér interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 10 (1959), 413—439.
[8] Szabados J., *Approximációs eljárások konvergenciája és szaturációja*, Doktori Értekezés, 1975.
[9] Sánta J., Convergence theorems of quasi-Hermite—Fejér interpolations, *Publ. Math. Debrecen*, 22 (1975), 23—29.
[10] Vértesi P., Hermite—Fejér type interpolations III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 34 (1979), 67—84.
[11] Sharma, A., Remarks on Quasi-Hermite—Fejér interpolations *Canad. Math. Bull.*, 7 (1969), 101—119.
[12] Freud G., Ortogonális polinomok egy osztályáról. *Mat. Zam.* 9 (1971), 511—520 (oroszul).
[13] Fejér L., Über Interpolation, *Göttinger Nachrichten*, (1916), 66—91.
[14] Joó I., Stable interpolation on an infinite interval, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 25 (1974), 147—154.
[15] Freud G., Lagrange-féle interpolációs eljárások konvergenciája végtelen intervallumon, *Mat. Lapok 18* (1967), 289—292.
[16] Névai P., A Laguerre gyökökön alapuló Lagrange interpoláció konvergenciájáról, *Publ. Math.* 20 (1973), 235—239 (oroszul).
[17] Névai P., Lagrange interpolation at zeros of orthogonal polynomials, *Approx. Theory*, Academic Press (1976), 163—201.
[18] Bojanic, R., A note on the precision on interpolation by Hermite—Fejér polinomials, *Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions* Bp., (1971), 69—76.
[19] Vértesi P., Notes on the Hermite—Fejér interpolation based on the Jacobi abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 24 (1973), 233—239.
[20] Davis, P. J., Rabinowitz, P., *Methods of Numerical Integrations*, Academic Press New York, 1975.

ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЭРМИТА—ФЕЙЕРА ТИПА ЭРМИТА—ФЕЙЕРА НА КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГЕРРА

Б. ХАЙ

HERMITE—FEJÉR AND HERMITE—FEJÉR TYPE INTERPOLATION ON THE ROOTS OF LAGUERRE POLYNOMIALS

B. HÁY

STABILIS ÉS BALSTABILIS KOMPONENSŰ KONVOLÚCIÓK FOLYTATHATÓSÁGÁHOZ

BISCHOFF DIETER

1. Bevezetés

Ez a dolgozat az eloszlásfüggvények (e.f.-ek) nem régen kifejlődött folytatáselméletéhez kapcsolódik, jelenlegi állását kutatóállását [1]-ben foglalták össze. Itt különösen a stabilis és a balstabilis komponensű konvolúciók folytatási tulajdonságaival foglalkozunk.

A tárgyalt vizsgálatokat egy olyan feladat indokolta, amely hozzátartozik a független valószínűségi változók (f.v.v.-k) összegzéselméletéhez. Tekintsünk $X_1, X_2, \ldots$ f.v.v.-kat és feltesszük, hogy az X_k e.f.-e a $V_1, V_2, \ldots, V_h$ (rögzített $h \in \mathbf{N}$ mellett) e.f.-ek egyike. Vezessük be az

$$S_n := B_n^{-1}(X_1+X_2+\ldots+X_n)-A_n; \quad B_n > 0; \quad A_n \in \mathbf{R};$$

összegeket és jelöljük F_n-nel az S_n e.f.-ét $(n=1, 2, \ldots)$. Tegyük fel, hogy egy tetszőlegesen rögzített valós τ-ra az

$$F_n(x) \xrightarrow{w} F_n(x), \; x < \tau, \tag{1.1}$$

úgynevezett „leszűkített konvergencia" teljesül ahol F egy monoton növekedő függvény az $F(-\infty)=0$ és $\operatorname{lext}[F] := \inf\{x \in \mathbf{R}: F(x)>0\} = -\infty$ tulajdonságokkal.

A $h=1$ esetén [8]-ban megmutatták, hogy — kiindulva az (1.1)-ből — az F-nek van olyan egyértelműen meghatározott stabilis folytatása F_α $(0<\alpha\leqq 2)$, hogy fennáll az $F_n \xrightarrow{w} F_\alpha$ gyenge konvergencia.

Az ilyen típusú tételek bizonyításai két lépésből állnak. Nevezetesen, Helly egyik kiválasztási tétele szerint az $\{F_n\}$ sorozatból kiválasztható egy $\{F_{n'}\}$ részsorozat, amely egy $\bar{F}$ monoton növekedő függvényhez konvergál, annak minden folytonossági pontjában, azaz $F_{n'} \xrightarrow{w} \bar{F}$. Az (1.1) feltétel mellett $\bar{F}(x)=F(x)$, $x<\tau$, teljesül.

Első lépésként az $\bar{F}(+\infty)=1$ tulajdonságot kell igazolni. A szériasorozatok elmélete alapján az $\bar{F}$ korlátlanul osztható (k.o.) e.f.

A második lépés annak bizonyításából áll, hogy a $(-\infty, \tau)$ intervallumon adott (lásd (1.1)-et) F függvénynek egyetlen egy folytatása létezik a valós tengelyen.

[2]-ben a „leszűkített konvergenciára" vonatkozó eddigi eredményeket lehet megtalálni. E kutatási területen még számos megoldatlan probléma van. Várható például, hogy [7] jól ismert eredménye (később újból felfedezett [3]-ban) áttranszformálható olyan állításra, amely a „leszűkített konvergencia" feltevését foglalja magába.

Jelen dolgozat szerzője az (1.1) feltétel következményeivel foglalkozik arra az esetre, amikor $h>1$ teljesül. Több mint valószínű, hogy ebben az esetben a lehetséges határeloszlásfüggvények osztálya stabilis komponensű konvolúciókból áll. Így az ezzel kapcsolódó folytatási feladat épp az a probléma, amelyet jelen dolgozatban tárgyalunk.

2. Előrebocsátás

A továbbiakban egy F k.o.e.f.-re az $F=L[a, \sigma^2, M, N]$ jelölést fogjuk használni, ahol az a és $\sigma^2 \geqq 0$ valós konstansok, valamint az $M(x)$; $x<0$, és $N(y)$; $y>0$, spektrálfüggvények egyértelműen megadhatók a Lévy-formula segítségével.

A stabilis e.f.-ek osztálya a k.o.e.f.-ek igen fontos részhalmaza. Közismert tény az, hogy egy F k.o.e.f. pontosan akkor stabilis, amikor vagy a Φ_{a,σ^2} normális e.f.-nyel egyezik meg, vagy a

$$F = L[a, 0, c^{(1)}|x|^{-\alpha}, -c^{(2)}y^{-\alpha}]; \quad c^{(1)} \geqq 0; \quad c^{(2)} \geqq 0; \tag{2.1}$$

$$c^{(1)}+c^{(2)} > 0; \quad 0 < \alpha < 2;$$

formában írható fel.

Azt mondjuk, hogy egy F k.o.e.f. balstabilis, ha a Φ_{a,σ^2} normáils e.f.-nyel egyezik meg, vagy pedig

$$F = L[a, 0, c^{(1)}|x|^{-\alpha}, N(y)]; \quad c^{(1)} \geqq 0; \quad 0 < \alpha < 2, \tag{2.2}$$

alakú. Könnyen látható, hogy minden stabilis e.f. egyben balstabilis is.

Egy F stabilis e.f.-nek f-fel jelölt karakterisztikus függvényére (k.f.-ére) az alábbi reprezentációs formulát alkalmazzuk:

$$f(t) = \exp\left\{iat - b|t|^{\alpha}\left[1+i\beta\frac{t}{|t|}\omega(|t|, \alpha)\right]\right\}, \tag{2.3}$$

ahol az α, β, b valós konstansok kielégítik a $0<\alpha\leqq 2$; $-1\leqq\beta\leqq 1$; $b>0$ egyenlőtlenségeket, és a tetszőleges valós szám, továbbá

$$\omega(|t|, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2} & \text{ha} \quad \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\log|t| & \text{ha} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

A (2.1)—(2.3)-ban használt $0<\alpha<2$ valós paramétert a megfelelő stabilis, illetve balstabilis e.f. karakterisztikus kitevőjének (k.k.-jének) nevezzük. Megállapodás szerint (2.2)-ben csak akkor beszélünk a $0<\alpha<2$ k.k.-ről, amikor $c^{(1)}>0$ teljesül. Az $\alpha=2$ k.k. a normális eloszlás típusát jellemzi; az elfajult e.f.-ek tárgyalását mellőzzük a továbbiakban.

3. Segédtételek

Egy $F(x)$ e.f.-et analitikusnak nevezünk, ha egy $A(z)$; $z=x+iy$; függvény létezik, amely analitikus egy $\{z: |y|<r; r\in\mathbf{R}_+\}$ sávban és amely megegyezik az $F(x)$-szel a valós tengelyen. Ilyen esetben ugyancsak F-fel jelöljük az A függvényt.

Az első részletesebb foglalkozás analitikus e.f.-ekkel [6]-ban található; lásd [1]-et is.

3.1. Lemma *(lásd pl.* [12]*). Jelölje f az F e.f. k.f.-ét. Ha egy bizonyos $b>0$ valós számra az $f(t)=0(e^{-b|t|})$; $|t|\to\infty$, összefüggés fennáll, akkor az F analitikus e.f.*

3.2. Lemma *(lásd* [6]*). Ha $F=L[a, \sigma^2, M, N]$ egy k.o.e.f. a* $\operatorname{lext}[M]>-\infty$ *tulajdonsággal, akkor*

$$F(x)=0(e^{rx}); \quad x\to-\infty, \quad \text{tetszőlegesen rögzített } r>0 \text{ mellett.} \tag{3.1}$$

Azt mondjuk, hogy egy F k.o.e.f. a $\mathcal{G}_\tau$, $\tau \in \mathbf{R}$, osztályhoz tartozik, ha F egyértelműen meghatározott az $F(x)$, $x < \tau$, értékei által.

Használni is fogjuk a következő erős kritériumokat.

3.3. Lemma *(lásd* [4]*). Legyen F egy k.o.e.f., amely rendelkezik a* $\operatorname{lext}[F] = -\infty$ *és* (3.1) *tulajdonságokkal. Ez esetben az F hozzátartozik a $\mathcal{G}_\tau$ osztályhoz, tetszőleges $\tau \in \mathbf{R}$ mellett.*

3.4. Lemma (lásd [1]). *Tekintsük az $F_k = L[a_k, 0, 0, N_j]$ k.o.e.f.-eket, ahol teljesüljön* $\operatorname{lext}[F_k] = 1 < \tau$; $\tau \in \mathbf{R}$; $k = 1, 2$. *Ebben az esetben*

$$F_1(x) = F_2(x); \quad x < \tau, \tag{3.2}$$

ekvivalens a

$$N_1(y) = N_2(y); \quad 0 < y < \tau - 1, \tag{3.3}$$

tulajdonsággal.

4. Főeredmények

Az alábbi eredmények Ibragimov egy ötletére támaszkodnak, amely szerint egy stabilis e.f. k.f.-e folytatható az $\mathbf{R}_+$ pozitív féltengelyről a H_+ felső félsíkra. Kihasználták ezt az ötletet a következő tétel bizonyításában (lásd [8]).

4.1. Tétel. *Két balstabilis e.f.* $F_k = L[a_k, 0, c_k^{(1)}|x|^{-\alpha}, N_k]$; $c_k^{(1)} > 0$; $k = 1, 2$; $0 < \alpha < 1$; *megegyezik, ha teljesül a* (3.2) *feltétel.*

Általánosítani tudjuk a 4.1. tételt balstabilis e.f.-ek konvolúcióira, azaz

$$F_k = L\left[a_k, \sigma_k^2, \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj}^{(1)}|x|^{-\alpha_{kj}}, N_k\right]; \quad m_k \in \mathbf{N}; \quad k = 1, 2; \tag{4.1}$$

alakú konvolúciókra.

4.2. Tétel. *Tekintsük a* (4.1) *alakú konvolúciókat, ahol* $c_{kj}^{(1)} > 0$; $\sigma_k^2 = 0$; $0 < \alpha_{kj} < 1$; $j = 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 1, 2$. *Ez esetben* (3.2)*-ből következik az* $F_1 \equiv F_2$.

Azonban nincs ok arra, hogy korlátozni kelljen az α_{kj} k.k.-ket a (0, 1) intervallumra. Belátható a

4.3. Tétel. *Tekintsük a* (4.1) *alakú konvolúciókat. Ha teljesül a*

$$\operatorname{lext}[F_1] = -\infty \tag{4.2}$$

feltétel, akkor (3.2)*-ből következik az* $F_1 \equiv F_2$.

Megjegyzés. A 4.3. tétel általánosítja a 4.2. tételt, mert a $c_{kj}^{(1)} > 0$ feltevés szerint (4.2) teljesül a 4.2. tételben is (lásd pl. [13] 11.2.2. tételét).

Ha a (4.2) feltételt azáltal helyettesítjük a 4.3. tételben, hogy feltesszük a $-\infty < \operatorname{lext}[F_1] = 1 < \tau$ tulajdonságot, akkor a 3.4. Lemma értelmében csakis a (3.3) következtetésre juthatunk. Viszont stabilis komponensek esetén belátható, hogy a (4.2) feltevés fölöslegessé válik, tehát igaznak bizonyul a

4.4. Tétel. *Legyenek F_k $(k = 1, 2)$ stabilis komponensű konvolúciók, amelyekre a* (3.2) *és* $\operatorname{lext}[F_1] < \tau$ *feltételek teljesülnek. Ez esetben* $F_1 \equiv F_2 =: F$ *következik,*

ahol az F-re igaz az alábbi előállítás:

$$F = \overset{s}{\underset{j=1}{\boxed{*}}} F_{\alpha_j}; \quad 0 < \alpha_j \leqq 2; \quad \alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j); \quad s \in \mathbf{N}.$$

Az F_{α_j} stabilis komponensek egyértelműen meghatározhatók — kivéve az eltolási paramétereit.

Megjegyzés. Ha stabilis e.f.-eket F_k $(k=1, 2)$ veszünk szemügyre, akkor már valamivel jobb folytatási tételeket ismerünk (lásd [5], [9], [10]). Idézzük a legáltalánosabb [5]-ben található eredményt:

4.5. Tétel. *Legyen F egy stabilis e.f. és $x_1, x_2, \ldots$ egy megszámlálható ponthalmaz. Ha az adott $F(x_i)$; $i=1, 2, \ldots$; értékek egyike se* 0, *se* 1, *akkor az F egyértelműen meghatározott.*

Tekintettel erre az eredményre, a következő kérdés vetődik fel. Van-e olyan, az $x<\tau$ féltengelynél szűkebb ponthalmaz, amelyre helyesek maradnak a 4.1.—4.4. tételek állításai? — A 3.1. Lemma segítségével könnyen látható, hogy létezik ilyen ponthalmaz, ha az F_1 és F_2 konvolúciók mindegyikének van egy balstabilis komponense, amelynek k.k-.je az [1, 2] intervallumba esik. Ugyanis ebben az esetben az F_1 és F_2 analitikus e.f.-ek, s így az $x<\tau$ féltengely olyan ponthalmazzal helyettesíthető, amelynek van véges torlódási pontja. Nyilvánvaló, hogy akkor már nem kell megadni valami feltételt a lext $[F_k]$ értékekre (sem a 4.3., sem a 4.4. Tételben), mert feltevéseink szerint lext $[F_k] = -\infty$ $(k=1, 2)$ közvetlenül adódik (lásd pl. [11] XVII. 4.3. Lemmáját).

5. *Főeredmények bizonyításai*

4.2. Tétel bizonyítása. A feltevés szerint $F_k = H_k * G_{\alpha_{k1}} * \ldots * G_{\alpha_{km_k}}$, ahol $H_k = L[a_k, 0, 0, N_k]$, $G_{\alpha_{kj}} = L[0, 0, c_j^{(1)} |x|^{-\alpha_{kj}}, 0]$; $j=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2$. Jelölje $Q(x) := F_1(x) - F_2(x)$, akkor (3.2) szerint lext $[Q] = \tau$ következik. A Q függvény Fourier—Stieltjes-transzformátlja az

$$q(t) = h_1(t) \prod_{j=1}^{m_1} g_{\alpha_{1j}}(t) - h_2(t) \prod_{j=1}^{m_2} g_{\alpha_{2j}}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{5.1}$$

formában írható, ahol a tekintett e.f.-ek k.f.-eit a megfelelő kisbetűkkel jelöltük. Tudvalevő, hogy a q, h_1, h_2 függvények egyértelműen folytathatók $\mathbf{R}$-ről $H_+ := \{z=t+iy: y>0\}$-ra.

(2.3) értelmében $g_{\alpha_{kj}}$ felírható mint

$$g_{\alpha_{kj}}(t) = \exp\{ia_{kj}t + d_{kj}t^{\alpha_{kj}}\}; \quad t > 0; \quad \mathrm{Re}\,[d_{kj}] < 0.$$

Következőleg (5.1) folytatható $\mathbf{R}_+$-ról H_+-ra; az így kapott (5.1)-nek analitikus folytatása az alábbi függvény:

$$q(z) = h_1(z) \sum_{j=1}^{m_1} g_{\alpha_{1j}}(z) - h_2(z) \sum_{j=1}^{m_2} g_{\alpha_{2j}}(z); \quad z \in H_+.$$

Legyen $d_{kj}i^{\alpha_{kj}}=A_{kj}+B_{kj}i$; $j=1, 2, \ldots, m_k$; $k=1, 2$; akkor

$$q(iy) = h_1(iy)\exp\{a^{(1)}(y)+A^{(1)}(y)+B^{(1)}(y)i\}- \tag{5.2}$$
$$-h_2(iy)\exp\{a^{(2)}(y)+A^{(2)}(y)+B^{(2)}(y)i\}$$

teljesül tetszőleges $y>0$-ra, ahol $a^{(k)}(y):=-\sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}y$,

$$A^{(k)}(y) := \sum_{j=1}^{m_k} A_{kj}y^{\alpha_{kj}}, \quad B^{(k)}(y) := \sum_{j=1}^{m_k} B_{kj}y^{\alpha_{kj}}; \quad k = 1, 2.$$

$q(iy)$ és $h_k(iy)$; $y>0$; $k=1, 2$; valós függvények, ezért (5.2)-ből adódik az

$$h_1(iy)e^{a^{(1)}(y)+A^{(1)}(y)}\sin B^{(1)}(y) = h_2(iy)e^{a^{(2)}(y)+A^{(2)}(y)}\sin B^{(2)}(y). \tag{5.3}$$

A h_1 és h_2 k.f.-ek pozitívak a képzetes tengelyen; ezért van olyan pontsorozat $\{y_n\}\subset\mathbf{R}_+$: $y_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$, hogy fennáll

$$\sum_{j=1}^{m_1} B_{1j}y_n^{\alpha_{1j}} = \sum_{j=1}^{m_2} B_{2j}y_n^{\alpha_{2j}}; \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5.4}$$

(2.3) szerint $t>0$-ra $d_{kj}=-b_{kj}\left(1+i\beta_{kj}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_{kj}}{2}\right)$, ahol $b_{kj}>0$,

$$\beta_{kj} = \frac{c_{kj}^{(1)}-0}{c_{kj}^{(1)}+0} = 1; \quad j = 1, 2, \ldots, m_k; \quad k = 1, 2.$$

Ennek következtében

$$B_{kj} = \operatorname{Im}[d_{kj}i^{\alpha_{kj}}] = -2b_{kj}\sin\frac{\pi\alpha_{kj}}{2} < 0; \quad j = 1, 2, \ldots, m_k; \quad k = 1, 2. \tag{5.5}$$

Tegyük fel most először, hogy

$$\alpha_{k1} < \alpha_{k2} < \ldots < \alpha_{km_k}; \quad k = 1, 2; \tag{5.6}$$

továbbá $m_1=m_2=:m$

$\alpha_{1m}>\alpha_{2m}$ esetén (5.4) szerint

$$B_{1m} = \sum_{j=1}^{j} B_{2j}y_n^{\alpha_{2j}-\alpha_{1m}} - \sum_{j=1}^{m-1} B_{1j}y_n^{\alpha_{1j}-\alpha_{1m}}$$

következik, amiből $B_{1m}=0$ adódik $y_n\to+\infty$ mellett. Ez viszont ellentmondásban áll (5.5)-tel. Tehát $\alpha_{1m}=\alpha_{2m}=:\alpha_m$ teljesül, továbbá

$$B_{1m}-B_{2m} = \sum_{j=1}^{m-1}\{B_{2j}y_n^{\alpha_{2j}-\alpha_m}-B_{1j}y_n^{\alpha_{1j}-\alpha_m}\}$$

szerint $B_{1m}=B_{2m}=:B_m<0$ adódik $y_n\to+\infty$-re.

Most már egyszerűsíthető (5.4), azaz felírható a

$$\sum_{j=1}^{m-1} B_{1j}y_n^{\alpha_{1j}} = \sum_{j=1}^{m-1} B_{2j}y_n^{\alpha_2}$$

formában. Ezek után látható, hogy újra alkalmazhatjuk a fenti meggondolásokat, s ily módon $B_{1j}=B_{2j}=:B_j<0$, $\alpha_{1j}=\alpha_{2j}=:\alpha_j\in(0,1)$; $j=1,2,\ldots,m$. Tehát kiderül, hogy tetszőleges $y>0$-ra

$$B^{(1)}(y)=B^{(2)}(y), \tag{5.7}$$

amiből (5.3) szerint

$$h_1(iy)e^{a^{(1)}(y)+A^{(1)}(y)}=h_2(iy)e^{a^{(2)}(y)+A^{(2)}(y)}$$

következik. (5.2) és (5.7) szerint $q(iy)=0$ és ezzel belátható, hogy $q\equiv 0$.

Ha léteznek egyenlő α_{kj} k.k.-k ($k=1$ vagy $k=2$-re), akkor első lépésként a spektrálelőállítás megfelelő tagjait $c_{kj}^{(1)}|x|^{-\alpha_{kj}}$ adjuk össze. Ily módon — egy esetleges indexváltozástól eltekintve — (5.6)-ot kapjuk meg.

Végül utalunk arra, hogy $m_1=m_2$. Ha ugyanis $m_1<m_2$, akkor a fenti módszer alapján $0=\sum_{j=1}^{m_2-m_1} B_{2j}y_n^{\alpha_{2j}}$ adódik, amely ellentmondásban áll a $B_{2j}<0$; $y_n>0$; $\alpha_{2j}\in(0,1)$ feltételek összességéhez. Ez teljessé teszi a bizonyítást.

4.3. Tétel bizonyítása. A (4.1) alakú konvolúciókra a következő eseteket kell diszkutálnunk:

(a) Vannak k.k.-k $1\leqq\alpha_{1i}\leqq 2$ és $1\leqq\alpha_{2j}\leqq 2$; $i,j\in\mathbf{N}$.
(b) $c_{1j}^{(1)}=0$; $j=1,2,\ldots,m_1$.
(c) $0<\alpha_{kj}<1$; $j=1,2,\ldots,m_k$; $k=1,2$.
(d) Van egy k.k. $1\leqq\alpha_{1i}\leqq 2$, de az F_2 konvolúció összes k.k.-ére $0<\alpha_{2j}<1$ teljesül.

Az (a) esetben a 3.1. Lemma értelmében az F_1 és F_2 mindegyike analitikus e.f., így (3.2) miatt $F_1\equiv F_2$.

(b) esetén a 3.2. Lemma alapján (3.1) teljesül az F_1-re. (4.2) miatt a 3.3 Lemma segítségével $F_1\in\mathcal{G}_\tau$ adódik, amiből (3.2) szerint $F_1\equiv F_2$ következik.

A (c) esetben a 4.2. tétel áll rendelkezésünkre.

(d) esetén a feltevés szerint az F_1 egy analitikus e.f. (lásd a 3.1. Lemmát), de nekünk azzal a lehetőséggel kell foglalkoznunk, hogy az F_2 nem analitikus e.f. Az alábbi lehetséges eseteket tárgyaljuk.

(d.1) $0<\alpha_{1j}<2$; $j=1,2,\ldots,m_1$.
(d.2) Vannak k.k.-k $0<\alpha_{1i}<2$ és $\alpha_{1j}=2$; $i,j\in\mathbf{N}$.
(d.3) $\alpha_{1j}=2$; $j=1,2,\ldots,m_1$.

A (d.1) és (d.2) esetekben azokat a bizonyítási meggondolásokat alkalmazzuk, amelyeket e paragrafus első bizonyításában használtunk. Közben ugyanazokkal a jelölésekkel dolgozunk.

(d.1)-et tekintve $\alpha_{1j}\neq 1$-re

$$g_{\alpha\ldots 1j}(t)=\exp\left\{ia_{1j}t-b_{1j}t^{\alpha_{1j}}\left(1+i\beta_{1j}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha_{1j}}{2}\right)\right\};\quad t>0,$$

adódik (2.3) szerint, ahol $\beta_{1j}=\dfrac{c_{1j}^{(1)}-0}{c_{1j}^{(1)}+0}=1$. Így (5.5) értelmében $B_{1j}<0$ teljesül.

$\alpha_{1j}=1$-re további információkat kell keresnünk a (2.3) reprezentációról. Tudvalevő (lásd pl. [13]), hogy $t>0$-ra

$$g_{\alpha\ldots 1j}(t)=\exp\left\{ia_{1j}t-b_{1j}t\left(1+i\beta_{1j}\frac{2}{\pi}\log t\right)\right\},$$

ahol $b_{1j}=(c_{1j}^{(1)}+0)\frac{\pi}{2}$ és $\beta_{1j}=-\frac{c_{1j}^{(1)}-0}{c_{1j}^{(1)}+0}=-1$. Folytatásaként $\mathbf{R}_+$-ról H_+-ra a

$$g_{\alpha_{\dots 1j}}(z)=\exp\left\{ia_{1j}z-c_{1j}^{(1)}\frac{\pi}{2}z+c_{1j}^{(1)}zi[\log|z|+i(\arg z+2\ell\pi)]\right\}$$

előállítást kapjuk tetszőleges $z\in H_+$-ra. Itt a logaritmus azt az ágát használjuk, amelyre

$$\lim_{z\to t} g_{\alpha_{1j}}(z)=g_{\alpha_{1j}}(t);\quad z\in H_+;\quad t>0,$$

teljesül. Következőleg $\ell=0$ és így tetszőleges $y>0$-ra

$$g_{\alpha_{1j}}(iy)=\exp\{-a_{1j}y-c_{1j}^{(1)}y\log y-i\pi c_{1j}^{(1)}y\}.$$

Ezek szerint a $B_{1j}=-\pi c_{1j}^{(1)}<0$ összefüggést kapjuk.

Ily módon fennáll az (5.4) egyenlőség, ahol $B_{kj}<0$; $j=1,2,\dots,m_k$; $k=1,2$. A 4.2. tétel bizonyítási meggondolásai segítségével ellentmondásra jutunk (ez az ellentmondás a legnagyobb α_{1j} k.k.-nél mutatkozik meg).

(d.2) esetén $\alpha_{1j}=2$-re

$$g_{\alpha_{1j}}(t)=\exp\left\{ia_{1j}t-\frac{\sigma_{1j}^2}{2}t^2\right\};\quad \sigma_{1j}^2>0,$$

adódik, s így folytatása után

$$g_{\alpha_{1j}}(iy)=\exp\left\{-a_{1j}y+\frac{\sigma_{1j}^2}{2}y^2\right\};\quad y>0.$$

Látható, hogy ezek szerint $B^{(1)}(y)=\sum_{j=1}^{m_1}B_{1j}y^{\alpha_{1j}}$, ahol $\alpha_{1j}=2$-re $B_{1j}=0$ és (d.1) eredményei alapján $0<\alpha_{1j}<2$-re $B_{1j}<0$ teljesül. Így $F_1\equiv F_2$ következik, ahogy azt a 4.2. tétel bizonyításában levezettük. Ez pedig ellentmondásban áll azzal, hogy (d.2) miatt F_1-nek van egy normális komponense, de F_2-nek nincs (lásd (d)-t).

(d.3) arra vezet, hogy $F_1\equiv\Phi_{a_1,\sigma_{12}}$, és így a 3.2. és 3.3. Lemmák miatt az F_1 hozzátartozik a $\mathscr{G}_\tau$ osztályhoz. (32) értelmében $F_1\equiv F_2$ adódik; (d-)re ΦF_2 nem lehet normális e.f. Ez az ellentmondás kiegészíti a (d) eset tárgyalását és azzal a 4.3. tétel bizonyítását.

4.4. Tétel bizonyítása. Feltéve, hogy $\operatorname{lext}[F_k]=-\infty$; $k=1,2$; teljesül, a 4.3. tétel alapján következik az $F_1\equiv F_2$ eredmény.

Ezért csakis a $-\infty<\operatorname{lext}[F_k]=1<\tau$; $k=1,2$; esetet kell vizsgálnunk, amelyre $F_k=L\left[a_k,0,0,-\sum_{j=1}^{m_k}c_{kj}^{(2)}y^{-\alpha_{kj}}\right]$ adódik $c_{kj}^{(2)}>0$; $j=1,2,\dots,m_k$; $m_k\in\mathbf{N}$; $k=1,2$; mellett. A 3.4. Lemma szerint fennáll a

$$\sum_{j=1}^{m_1}c_{1j}^{(2)}y^{-\alpha_{1j}}=\sum_{j=1}^{m_2}c_{2j}^{(2)}y^{-\alpha_{2j}};\quad 0<y<\tau-1,$$

összefüggés. Hasonlóan a 4.2. Tétel bizonyításához (kihasználva a módszert a legnagyobb α_{kj} k.k.-re és $y\to 0$-ra), bizonyítható, hogy

$$\alpha_{1j}=\alpha_{2j};\quad m_1=m_2;\quad c_{1j}^{(2)}=c_{2j}^{(2)};\quad j=1,2,\dots,m_1.$$

(3.2) miatt $a_1=a_2$, tehát $F_1\equiv F_2$.

Hátramarad az egyértelmű felbontás belátása. Legyen

$$F = \overset{m_1}{\underset{j=1}{\overset{*}{\prod}}} G_{\alpha_{1j}} = \overset{m_2}{\underset{j=1}{\overset{*}{\prod}}} G_{\alpha_{2j}} = L[a, \sigma^2, M, N],$$

ahol (5.6) és $m_k \in \mathbf{N}$; $k=1, 2$; teljesül, továbbá

$$G_{\alpha_{km_k}} = L[a, \sigma^2_{km_k}, M_{km_k}, N_{km_k}]; \quad k = 1, 2;$$

$$G_{\alpha_{kj}} = L[0, \sigma^2_{kj}, M_{kj}, N_{kj}]; \quad j = 1, 2, \ldots, m_k - 1; \quad k = 1, 2.$$

Feltesszük először, hogy $m_1 = m_2 =: m$.

Ha $\sigma^2 > 0$, akkor $\alpha_{1m} = \alpha_{2m} = 2$ és így $G_{\alpha_{1m}} \equiv G_{\alpha_{2m}} \equiv \Phi_{a,\sigma^2}$ következik. A k.o.e.f.-ek egyik jól ismert tulajdonsága szerint

$$\overset{m-1}{\underset{j=1}{\overset{*}{\prod}}} G_{\alpha_{1j}} = \overset{m-1}{\underset{j=1}{\overset{*}{\prod}}} G_{\alpha_{2j}} = L[0, 0, M_1, N_1] \tag{5.8}$$

adódik, ahol $M_1(x) = M(x) = \sum_{j=1}^{m-1} c_{kj}^{(1)} |x|^{-\alpha_{kj}}; \quad x < 0,$

$$N_1(y) = N(y) = -\sum_{j=1}^{m-1} c_{kj}^{(2)} y^{-\alpha_{kj}}; \quad y > 0,$$

$$0 < \alpha_{kj} < 2; \quad c_{kj}^{(1)} + c_{kj}^{(2)} =: c_{kj} > 0;$$

$$c_{kj}^{(i)} \geqq 0; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \ldots, m-1; \quad k = 1, 2.$$

Ily módon tetszőleges $y > 0$-ra

$$M_1(-y) - N_1(y) = \sum_{j=1}^{m-1} c_{1j} y^{-\alpha_{1j}} = \sum_{j=1}^{m-1} c_{2j} y^{-\alpha_{2j}},$$

amely alapján lépésről lépésre (a már többször is alkalmazott módszerrel) arra jutunk, hogy

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} =: \alpha_1, \quad c_{11}^{(1)} = c_{21}^{(1)} =: c_1^{(1)},$$

$$c_{11}^{(2)} = c_{21}^{(2)} =: c_1^{(2)}, \quad c_1^{(1)} + c_1^{(2)} = c_{11} = c_{21} =: c_1 > 0.$$

Ennek következtében $G_{\alpha_{11}} \equiv G_{\alpha_{21}} =: G_{\alpha_1} = L[0, 0, c_1^{(1)} |x|^{-\alpha_1}, -c_1^{(2)} y^{-\alpha_1}]$. A G_{α_1} e.f. k.o., így (5.8) a

$$\overset{m-1}{\underset{j=2}{\overset{*}{\prod}}} G_{\alpha_{1j}} = \overset{m-1}{\underset{j=2}{\overset{*}{\prod}}} G_{\alpha_{2j}} = L[0, 0, M_2, N_2]$$

egyenlőséghez vezet, ami lehetővé teszi a fenti meggondolás újbóli alkalmazását.

Végül bemutatjuk az ellentmondást, ha $m_1 \neq m_2$. Ha ugyanis $m_1 < m_2$, akkor az említett módszerrel

$$M_{m_1-1}(x) \equiv 0 = \sum_{j=m_1-1}^{m_2-1} c_{2j}^{(1)} |x|^{-\alpha_{2j}}; \quad x < 0,$$

$$N_{m_1-1}(y) \equiv 0 = -\sum_{j=m_1-1}^{m_2-1} c_{2j}^{(2)} y^{-\alpha_{2j}}; \quad y > 0,$$

adódik, ahol $c_{2j}^{(1)} + c_{2j}^{(2)} = c_{2j} > 0$; $c_{2j}^{(i)} \geqq 0$; $i = 1, 2$; $j = m_1 - 1, m_1, \ldots, m_2 - 1$. Ebből már következik a kívánt ellentmondás.

6. Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki tanáromnak, Rossberg Hans-Joachim egyetemi tanárnak, számos érdekes beszélgetésért, hasznos utalásokért, valamint a kézirat átolvasásáért. Köszönetet mondok továbbá Jesiak Bernd munkatársamnak egy fontos megjegyzéséért és Mészáros Józsefnek, a magyar fordítás nyeltvani ellenőrzéséért.

IRODALOM

[1] Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G., Continuation of distribution functions, Contributions to probability: *A collection of papers dedicated to E. Lukacs,* Acad. Press, 1981, 29—48.
[2] Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G., A new branch of the theory of sums of independent random variables, *Serdica,* 1981.
[3] Blum J. R., Hanson D. L., Rosenblatt J. F., On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitsth. und Verw. Geb.* 1 (1963), 389—393.
[4] Ибрагимов И. А., Об определении безлранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой, *Теория вероятн. и ее примен.,* XXII, 2 (1977), 393—399.
[5] Jesiak B., An uniqueness theorem for stable laws, *Math. Nachr.* 92 (1979), 243—246.
[6] Jesiak B., On analytic distribution functions and analytic properties of infinitely divisible distribution functions, *Теория вероятн. и ее примен.,* XXIV, 4 (1979), 825—831.
[7] Mogyoródi J., A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 7 (1962), 409—429.
[8] Rossberg H.-J., Limit theorems for identically distributed summands assuming the convergence of the distribution functions on a half axis, *Теория вероятн. и ее прим.,* XXIV, 4 (1979), 692—709.
[9] Rossberg H.-J., Jesiak B., On the unique determination of stable distribution functions, *Math. Nachr.* 82 (1978), 278—300.
[10] Золотарев В. М., Несколько замечаний к статье [9],
[11] Feller W., *An introduction to probability theory and its applic.,* vol. II, N. Y.—London—Sydney, 1966.
[12] Kawata T., *Fourier analysis in probability theory,* N.Y.—London, 1972.
[13] Lukacs E., *Characteristic functions,* 2nd ed., London, 1970.

К ПРОДОЛЖАЕМОСТИ СВЕРТОК УСТОЙЧИВЫХ И УСТОЙЧИВЫХ СЛЕВА КОМПОНЕНТОВ

Д. Б ИШОФ

ON THE EXTENDABILITY OF CONVOLU TIONS OF STABLE AND LEFT STABLE COMPONENTS

D. BISCHOFF

This paper is a contribution to the continuation theory of distribution functions. Using deep criteria on continuation of infinitely divisible distribution functions we treat continuation problems for convolutions $F_k(x)$; $k=1, 2$; of left-stable somponents (see. the definition in section 2.) which coincide on a half axis $x<\tau$. It is also shown, that the assumption $\operatorname{lext}[F_1]=-\infty$ can be replaced by $\operatorname{lext}[F_1]<\tau$, if we consider convolutions of stable factors. In the latter case we give a conclusion on the uniqueness of the decomposition, too. The stimulating problem which led to the present investigations is described in the introduction.

ZUR FORTSETZUNG VON FALTUNGEN MIT STABILEN UND LINKSSTABILEN KOMPONENTEN

D BISCHOFF

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur Fortsetzungstheorie von Verteilungsfunktionen. Unter Ausnatzung tiefgründiger Kriterien zur Fortsetzung unbeschränkt teilbarer Verteilungsfunktionen behandeln wir Fortsetzungsprobleme für Faltungen $F_k(x)$; $k=1, 2$; linksstabiler Komponenten (Definition siehe Abschnitt 2). welche auf einer Halbachse $x<\tau$ übereinstimmen. Es wird darüber hinaus gezeigt, daß die Bedingung $\operatorname{lext}[F_1]=-\infty$ durch $\operatorname{lext}[F_1]<\tau$ ersetzt werden kann, wenn wir Faltungen mit stabilen Komponenten betrachten. Im letzteren Fall formulieren wir außerdem eine Eindeutigkeitsaussage für die Komponentenaufspaltung. Das motivierende Problem, welches zur vorliegenden Arbeit führte, wird in der Einleitung skizziert.

A VÉGTELEN KICSINYEK PROBLÉMÁJA A MATEMATIKÁBAN, LEIBNIZNÉL

HORVÁTH MIKLÓS

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) német matematikus és filozófus volt. Legjelentősebb matematikai teljesítménye az infinitezimális kalkulus (a továbbiakban kalkulus) — a mai differenciál- és integrálszámítás egyik, 17. századi formájának — felfedezése volt. Kalkulusának alapját az a zseniális felismerése képezte, hogy az infinitezimális meggondolásokat igénylő egyedi, helyenként módszertanilag egymástól távol álló problémamegoldások egy egységes számítás alapműveleteiként — a „calculus differentialis" és a „calculus integralis" algoritmusaként — értelmezhetők. Bár Newton korábban — de más úton — hasonló eredményekre jutott, a matematikusok között a Leibniz-féle felfogás — és alkalmasabb jelölésmód — terjedt el, s hosszú időre befolyásolta a matematika fejlődését.

A jelen körvonalazás célja az, hogy kifejtse, mit értett Leibniz a végtelen kicsiny fogalmán a matematikában, és hogyan használta azt. Ezeknek a kérdéseknek a megvizsgálása hozzájárul a leibnizi kalkulus alapjainak — és ezen keresztül a mai matematikai analízis kialakulásának — jobb megértéséhez.

A végtelen kicsinyek problémájáról nincs egy minden részletre kiterjedő, monografikus jellegű munka Leibniz művei között. Álláspontját ezekben a kérdésekben kéziratain, vázlatain, alkalmi vitairatain és leveleiben fejtette ki. A továbbiakban ezekre támaszkodva kíséreljük meg célunk elérését.

2. A 17. század 1670 előtti néhány évtizedének matematikájában két fő irányvonal fejlődött ki az infinitezimális problémák megoldására. Az egyik Cavalieri indivisibilia („oszthatatlanok") módszere (l. [1], II. könyv, 111. o.; [2], I. gyakorlat, VI. és VII. pont, 4—5. o.), a másik pedig az antik exhaustiós („kimerítési") eljárás (l. [3], III. k., XII. könyv, 2. tétel, 371—374. o., és pl. [4], 299. o.) egy tökéletesített változata (l. [5], 344—374. o.). Utóbbira számos példa található Descartes, Roberval, Pascal, Fermat, Barrow és mások műveiben (l. pl. [6], [7]). Pascal — Dettonville álnév alatt megjelent — ciklois-leveleinek [l. (8].=[11], 224—327. o.) tárgyalásmódja is ezt az eljárást követi, de elnevezései még az indivisibiliageometriából származnak (vö. [7], 279. o.).

Leibniznek alkalma volt megismerkednie mindkét módszerrel. Cavalieri [1] alatti művét már 1667-ben megszerezte Nürnbergben, és felületesen átnézte. Ekkor teljesen Cavalieri fogalmainak befolyása alatt állt. Ezt a tényt tükrözte egyik korai műve (l. [9]) is. A másik irányvonalhoz tartozó Pascal [8] alatti levél- és cikkgyűjteményét pedig — Huygens tanácsára (l. [10], 407. o.) — 1673 tavaszán kezdte tanulmányozni. Leibniz sok olyan részletet talált Pascal e művében, amelyben infinitezimális problémák szerepeltek. Az alábbiakban bemutatunk ezekből néhányat.

3. Jellegzetes pl. az „ordináták összegé"-nek alábbi, pascali értelmezése. (Tanulmányunkban az idézeteken belül, zárójelben levő részek saját kiegészítéseink.)

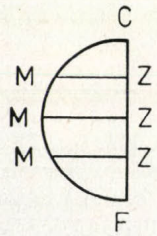
„Egy félkör (*FC*) átmérőjét (lásd 1 ábra) a *Z* pontokkal indefinit (azaz meghatározatlan) számú, egyenlő részre osztom fel. Az (átmérőre merőleges) *ZM* szakaszok az ordináták. Semmiféle nehézséget nem okoz, ha azt a kifejezést használom, hogy az ordináták összege, ... mert ezen a kifejezésen nem értünk mást, mint idenfinit számú téglalap (területének) összegét. Az egyes téglalapok (területét) úgy számítjuk ki, hogy mindegyik ordinátát megszorozzuk az (*FC*) átmérő kis, egyenlő részeinek valamelyikével. Ezeknek a téglalapoknak a (terület)összege egy olyan síkrész (területét) adja, amely csak egy tetszőlegesen adott mennyiségnél kisebb értékkel különbözik a félkör területétől." ([11], 232—233. o.)

A továbbiakban Pascal kiemelte, hogy egy adott szakasz, vagy egy ív „meghatározatlan sok" (egyenlő) részre történő felosztása azt jelenti, hogy a keletkezett részek száma „bármely adott számnál nagyobb" ([11], 245. o.).

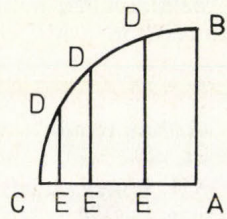
Felhívja a figyelmet arra is, hogy mindig tudnunk kell, melyik az a szakasz, amelynek kis részeivel az ordinátákat szoroznunk kell, mert ettől függően kisebb, vagy nagyobb területet kapunk. Ha az ordináták összegzésekor nem adjuk meg, melyik szakasz kis, egyenlő részről van szó, akkor — Pascal szerint — hallgatólagosan mindig annak a szakasznak — esetünkben FC-nek — a részeit kell vennünk, amelyhez tartozó ordinátákat összegeznünk kell. Ha az 1. ábrán adott félkör *ZM* ordinátáit — folytatta Pascal — egy másik szakasz, pl. az eredeti FC átmérő kétszeresének kis, egyenlő részeivel szorozzuk, akkor a félkör területének dupláját kapjuk (l. [11], 233. o.).

Az idézett gondolatok egy meglepő következménye az, hogy a különböző hosszúságú szakaszok — pascali értelemben vett — indefinit számú beosztásánál keletkező igen kicsi részek hossza különböző, de egy-egy adott szakasz esetében mindig állandó.

Az ordináták összegéhez hasonlóan — téglalapok területének összegével — értelmezte Pascal egy adott *BC* negyedkörív (lásd 2. ábra) esetén az *AC*-re merőleges



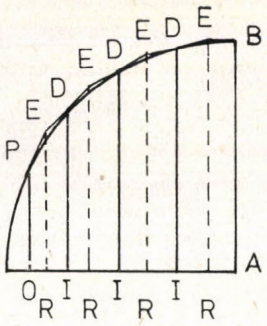
1. ábra



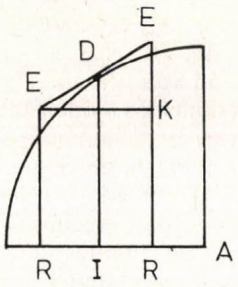
2. ábra

DE sinusok összegét is. A *BC* ívet a *D* pontokkal meghatározatlan számú, egyenlő részre osztotta. A szóban forgó téglalapokat ebben az esetben a *DE* sinusok és a (szakaszoknak tekintett) kis, egyenlő *DD* ívek határozzák meg ([11], 233. o.). Pascal kimutatta, hogy a *BC* negydkörív egy *BP* ívrészéhez (lásd 3. ábra) tartozó *DI* sinusok összege $AO \cdot AB$-vel egyenlő (l. [11], I. Prop., 275. o.). Tételének bizonyításához a — 4. ábra alapján (ahol *EE* a körív *D*-beli érintője) kézenfekvő — $AD:DI=EE:RR$ „lemmát" használta, majd megjegyezte:

„Ne okozzon meglepetést, amikor azt állítom, hogy az *RR* szakaszok összege *AO*-val egyenlő (lásd 3. ábra), és hasonlóan, hogy $EE=DD$, mert ezek az egyenlőségek nyilván tévesek, ha a sinusok száma véges, de igazak, ha meghatározatlan számú sinusról van szó.Ugyanis, ha az *EE* szakaszok összege különbözne a *BP* ívtől, vagyis



3. ábra



4. ábra

a *DD* ívek összegétől, akkor a különbség bármely adott mennyiségnél kisebb lenne. Hasonlóan érvényes ez az *RR* szakaszok összege és az *AO* esetében is." (l. [11], 277. o.)

4. Leibniz munkamódszeréhez tartozott, hogy feljegyzéseket készített az általa tanulmányozott művekről. Külön érzékkel választotta ki azok lényeges elemeit, amelyeket azután új formában, saját gondolataival kiegészítve általánosabb összefüggésekbe helyezett.

Pascal (8) alatti művéről is készített egy terjedelmes vázlatot (l. [13]), amely később — Leibniz 1672—1676 folyamán írt kéziratairól összeállított kritikai katalógusban (l. [12]) — az 544-es számot (a továbbiakban Cc 544) kapta.

Leibniz matematikai fejlődésére nagy hatást gyakorolt mindaz, amit Pascal [8] alatti művéből tanult. Pl. a fent idézett részek különösen megragadták figyelmét. Az ordináták összegzésének pascali módját a Cc 544 kéziratában külön kiemelte, és igen gyakran — szinte változtatás nélkül — alkalmazta azt az ún. korai matematikai kézirataiban, amelyeket 1673—1675 közti időszakban írt. Másrészt a sinusok összegének tételénél szereplő lemma ábrájából (lásd 4. ábra) ismerte meg azt az *EKE* derékszögű háromszöget, amely — egy nagyszerű felfedezése következtében — kalkulusának „karakterisztikus háromszög"-évé vált. Rájött ugyanis arra, hogy a — (leibnizi szóhasználattal) „végtelen kicsiny", azaz a véges szakaszokhoz képest elhanyagolhatóan kicsi (de zérustól különböző) oldalú — karakterisztikus háromszög befogói arányának a vizsgálata általános érvényű tételekre vezet, és az infinitezimális problémák egységes alapelv szerint történő megoldását teszi lehetővé.

Bár a „karakterisztikus háromszög" Leibniz munkássága előtt is szerepelt Pascal, Fermat, Neil, Huygens, Hudde, Heuraet, Wren, Wallis, Gregory, Barrow és Newton műveiben, annak mégis leibnizi alkalmazása járult hozzá döntően a 17. századi differenciál- és integrálszámítás létrehozásának befejezéséhez.

Később Leibniz így emlékezett vissza a kalkulusa terén 1673 tavaszán és nyarán elért első eredményeire, sikereire:

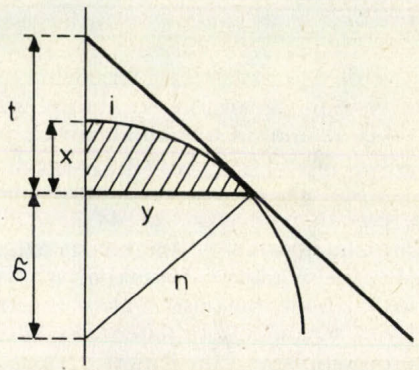
„Huygens rendelkezésemre bocsátotta Dettonville, azaz Pascal leveleit (l. [8]). Megpróbáltam megvizsgálni egy terület meghatározásának bizonyítását (l. a sinusok összegének fenti tételét), s egy nagyszerű dolgot találtam, amit a szerző egyáltalán nem vett észre. ... Tekintettem a koordináta-elemekből és a görbe-elemből alkotott háromszöget (l. 4. ábra, *EKE* háromszög), amit karakterisztikus háromszögnek neveztem, s mintegy szempillantás alatt megtaláltam majdnem valamennyi tételt, amelyeket később Gregorynál és Barrownál észleltem e tárgyban." ([14], 259. o.)

Más alkalommal így írt erről a kérdésről:

„...a karakterisztikus háromszög megnyitotta számomra az utat ahhoz, hogy igen könnyen számos tételt fedezzek fel. Ezekkel rengeteg ívet teleírtam, de később megállapítottam, hogy ezen eredményeim legtöbbjét már Heuraet, Gregory és Barrow is ismerte." ([10], 408. o.)

A 17. század közepén alkalmazott, fent említett infinitezimális módszerek nem a tökéletesített exhaustiós modell által megjelölt irányba fejlődtek tovább, hanem — kb. 1670-től Newton és Leibniz munkássága nyomán — egy pontatlanabb, kevésbé szigorú alapokon nyugvó, de egyszerűbben és könnyebben kezelhető, több lehetőséget magába foglaló módszer — a végtelen sorok, illetve a differenciálási és integrálási algoritmus új, analitikus technikája — irányába. Ebből az is következik, hogy helytelen lenne Pascal infinitezimális matematikájában Leibniz „elődjét" felismerni, illetve speciálisan az említett *EKE* háromszögben karakterisztikus háromszöget látni (vö. [7], 279. o. 37. megjegyzés).

5. Vizsgálataink során szem előtt kell tartani azt a körülményt is, hogy a 17. századi matematikai analízis még nem különült el a geometriától. A tanulmányzás tárgyát a görbére vonatkozó változó geometriai mennyiségek közti kapcsolatok vizsgálata képezte. Ilyen mennyiségek pl. (lásd 5. ábra) az y applikáta (=ordináta), az x abszcissza, az i ívhossz, a t subtangens, a σ subnormális, a vonalkázással jelölt



5. ábra

síkidom területe és egy forgástest térfogata. Két geometriai változó közti kapcsolatot egy egyenlet, vagy egy görbe testesítette meg, anélkül azonban, hogy a szereplő mennyiségek valamelyike a független változó szerepét töltötte volna be. Hiányzott tehát a későbbi leképezés értelmében vett függvény fogalma.

A geometriai változókat — azok térbeli kiterjedtségét jellemző 1, 2, vagy 3 (azaz rendre vonal-, terület- vagy test-) — dimenzióval rendelkező mennyiségeknek tekintették. A belőlük algebrai műveletekkel előállított — közvetlen szemléletes jelentéssel már nem rendelkező — 3-nál több dimenziójú kifejezéseket is változó geometriai mennyiségeknek tekintették, s dimenziójukat a bennük szereplő egydimenziós tényezők számának figyelembevételével állapították meg.

A geometriai változók között végzett algebrai műveletek általában megváltoztatták a dimenziót. Pl. két egydimenziós mennyiség szorzata kétdimenziós. Az egyenletek körében teljesülnie kellett a dimenzionális homogenitás (azonos dimenzió) szabályának: egy egyenlet minden tagjának azonos dimenziójúnak kellett lennie.

A 18. század első felében az analízis elkülönült a geometriától, a figyelem a görbékről a formulákra terelődött, s az azokban szereplő betűkhöz már nem feltétlenül

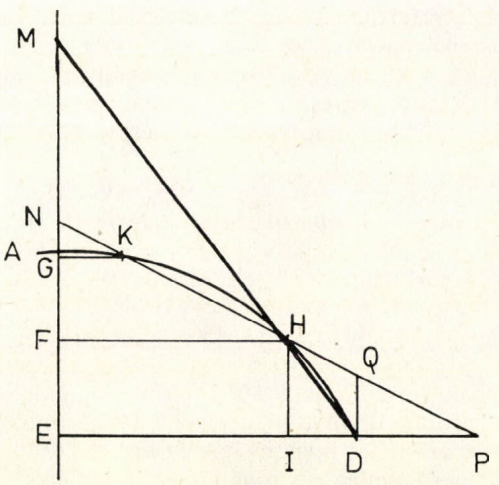
kapcsolódott geometriai interpretáció. A formulák dimenzionálisan homogén voltának problémája így fokozatosan eltűnt (vö. [15], 9. o.). A leibnizi kalkulust azonban nem lehet megérteni anélkül, hogy a fentiekben vázolt geometriai háttérre ne gondolnánk.

6. A nagyrészt ma is publikálatlan korai matematikai Leibniz-kéziratokban még gyakran megmutatkozik az indivisibiliageometria és Pascal munkásságának hatása a végtelen kicsinyek alkalmazásában. Ugyanakkor már ezek a kéziratok is tartalmaznak olyan részleteket, amelyek azt tükrözik, hogy Leibniz előbbre jutott kortársai nézeteinél ezen a téren is.

Leibniz 1673 augusztusában írt, Cc 575 kézirata (l. [16]) különösen jó alkalmat nyújt a végtelen kicsinyek korai (leibnizi) használatának tanulmányozásához, mert Leibniz ebben tett először kísérletet arra, hogy karakterisztikus háromszögének addig — főleg a területszámítás terén (l. [17], 5. fejezet) — oly eredményes alkalmazását tetszőleges görbék érintőjének meghatározására, valamint az ún. fordított érintő probléma megoldására is kiterjessze. Az utóbbi kérdés esetében olyan görbét kell meghatározni, amely valamely adott, általános érintési feltételt elégít ki.

A Cc 575 kézirat elején Leibniz így írt a végtelen kicsinyekről:

„Osszuk fel az *AE* szakaszt (lásd 6. ábra) végtelen sok, egyenlő részre. Ilyen részek



6. ábra

pl. *EF* és *FG*. Ezek a részek végtelen kicsinyek."

Eszerint — folytatta Leibniz —, ha $EF=b$, akkor $AE=b\xi$, ahol ξ az *AE* intervallum *b* részeinek „végtelen számát" jelöli („ξ exprimente numerum infinitum portionnalarum *b*"). A $b\xi=AE$ egyenlőség a végtelen kicsinyek egyik (leibnizi) „műveleti szabályát" fejezi ki: Ha a végtelen kicsiny mennyiséget „végtelen nagy számmal" szorozzuk, akkor véges mennyiséget kapunk.

Leibniz e kéziratában a végtelen kicsiny *b*-t egységnyinek vette, ezért a számításaiban azt nem írta ki, ha osztóként vagy szorzóként szerepelt.

A végtelen kicsiny most látott használata szoros kapcsolatban van a „közvetlen szomszédos" applikáták leibnizi felfogásával. Az *AE* abszcissza-intervallumot (6. ábra) végtelen kicsiny, egyenlő (egységnyi) hosszúságú részekre felosztó *G*, *F*, *E*, ...

pontokhoz tartozó applikátákat Leibniz „legközelebbi", „egymás után következő" applikátáknak nevezte.

A *GK*, *FH*, *ED*, ... szomszédos applikátáknak (6. ábra) a görbén levő *K*, *H*, *D*, ... végpontjai rendre a *KH*, *HD*, ... szakaszokat határozzák meg. Leibniz felfogása szerint az *ADC* görbét végtelen sok, végtelen kicsiny *KH*, *HD*, ... szakaszokból, mint oldalakból álló töröttvonalnak (poligonnak) tekinthetjük. (Lásd még (18), 33. o., [19], 126. o., [20], 223. o.) Ezek a poligon-oldalak azonban nem feltétlenül egyenlőek a végtelen kicsiny *b* egységgel.

A *KH*, *HD*, ... szakaszok és az *ADC* görbe érintői között szoros kapcsolat van. Leibniz felfogása szerint ugyanis mindegyik oldal pontosan egy — e görbéhez húzott — érintő része. (Lásd még [18], 33. o., [20], 223. o.) Eszerint egy adott abszcisszaintervallumhoz tartozó görbeív minden (belső) pontjához pontosan két érintő tartozik. Pl. az *ADC* görbéhez a *H* pontban a — végtelen kicsiny *HK*-t tartalmazó — *HN*, és a — végtelen kicsiny *DH*-t tartalmazó — *DM* érintők húzhatók.

Az eddig említett végtelen kicsinyek — a *b* egység és a poligon oldalai — azonos típusúak — a véges mennyiségekhez viszonyítva elhanyagolhatók —, az elsőrendű végtelen kicsinyek osztályába tartoznak. A véges szakaszok egy másik osztályt alkotnak.

Leibniz e kéziratban az alábbi „dimenzió-szabályt" ajánlotta annak eldöntésére, hogy bizonyos mennyiségek azonos osztályba tartoznak-e, vagy sem:

„Azok a mennyiségek tartoznak ugyanazon osztályba, amelyek azonos osztályba tartozó mennyiségekkel arányosak." (l. [16], 2^v oldal)

E „szabályt" Leibniz a következő példával világította meg. Tudjuk, hogy az *NE*, *NP* és az *EP* szakaszok (6. ábra) végesek, tehát azonos osztályba tartoznak. Ismerjük továbbá azt is, hogy *HI* (elsőrendű) végtelen kicsiny. Ezekből és a — *HIP*, *ENP* háromszögek hasonlósága miatt érvényes — $\frac{HI}{NE}=\frac{HP}{NP}=\frac{IP}{EP}$ egyenlőségből a „dimenzió-szabály" alapján az következik, hogy *HI*, *HP* és *IP* azonos osztályba tartoznak, tehát valamennyien (elsőrendű) végtelen kicsinyek. Hasonlóan „bizonyította" Leibniz a *DHI* háromszög oldalainak (elsőrendű) végtelen kicsinységét is.

Az elmondottakból a végtelen kicsinyek egy másik (leibnizi) „műveleti szabálya" is következik: Ha egy (elsőrendű) végtelen kicsiny mennyiséget szorzunk egy véges mennyiséggel, akkor (elsőrendű) végtelen kicsiny mennyiséget kapunk.

A „dimenzió-szabály" értelmében a *DPQ* háromszög oldalai is azonos osztályba tartoznak, ugyanis a hasonlóság miatt pl. a véges *ENP* háromszög oldalaival arányosak. Annak eldöntésére azonban, hogy melyik ez az osztály — az eddig említett két osztály valamelyike-e, vagy esetleg egy további osztály —, ismernünk kell a *QP*, *DP* és *QD* szakaszok egyikének osztályát. Leibniz a — *DHQ* és *HMN* háromszögek hasonlósága miatt érvényes — $QD:MN=HD:MH$ (ahol *MN* és *HD* elsőrendű végtelen kicsiny, *MH* pedig véges) egyenlőség alapján arra következtetett, hogy *QD*-nek *MN*-höz viszonyítva elhanyagolhatóan kicsinynek — Leibniz szóhasználattával végtelenül kisebbnek — kell lennie, mert csak így állhat fenn a tekintett egyenlőség. Leibniz másodrendű végtelen kicsinyeknek nevezte azokat a (zérustól különböző) mennyiségeket, amelyek egy elsőrendű végtelen kicsinynél végtelenül kisebbek, azaz, amelyek elhanyagolhatók egy elsőrendű végtelen kicsiny mennyiséghez viszonyítva. *QD* tehát másodrendű végtelen kicsiny, s ezért — a fentiek szerint — a *DPQ* háromszög többi oldala is ilyen.

Leibniznél a Cc 575 kéziratában szerepeltek először másodrendű végtelen kicsinyek, de már itt felismerte és megjegyezte, hogy még magasabb rendű végtelen kicsinyek is léteznek. Pl. egy harmadrendű végtelen kicsiny olyan (zérustól különböző)

mennyiséget jelent, amely egy másodrendűhöz viszonyítva elhanyagolható, azaz a mondott sorrendben vett arányuk megegyezik egy elsőrendű végtelen kicsinynek egy véges mennyiséghez való arányával.

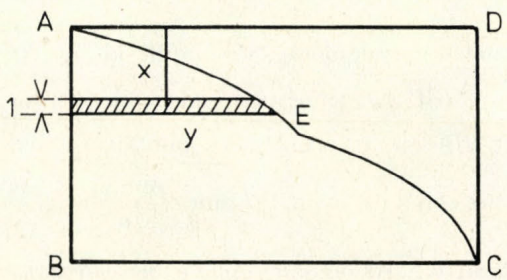
A fent említett „dimenzió-szabály"-ból az is következik, hogy két végtelen kicsiny mennyiség akkor (és csak akkor) azonos rendű, ha arányuk egy (véges) szám.

A Cc 575 kézirat további gazdag tartalma jelenleg is csak részben ismert (l. (21), 43—48, 52—59. o.; [22], 55—56. o.; [23], 280—281. o.). Leibniz ebben a dolgozatában használta először az általa bevezetett — a görbe menetével változó geometriai mennyiségekkel kapcsolatos — függvényfogalomra a (a ma is használt, függvényt jelentő) funkció elnevezést, kitűzte tetszőleges görbék érintőjének meghatározását, felfedezte a Taylor-sor alapgondolatát, rámutatott a fordított érintő problémák, a területszámítási és az ívhosszmeghatározási feladatok egységes tárgyalási lehetőségére, s elkezdte vizsgálni a kvadrálható (integrálható) függvények osztályát. Nagyszerű felismerései megvalósításához szükséges matematikai eszközei azonban 1673—1674 folyamán még fejletlenek voltak.

7. Az infinitezimális problémák leibnizi megoldásában 1675 októberében következett be döntő haladás, amikor Leibniz megírta a kalkulusának alapjait tartalmazó kéziratait (l. [24], [25], [26], [27], [28]). Ezekben a dolgozataiban a „súlypontmódszerrel történő területszámítás" („Analysis Tetragonistica ex Centrobaricis") állt vizsgálódásainak középpontjában, majd a bevezetett új jelöléseit és eredményeit a fordított érintő probléma megoldására alkalmazta. Súlypontmódszerénél egy rögzített tengely körül elfordítható merev test egyensúlyának statikai feltételét — a megfelelő forgatónyomatékok (momentumok) adott tengelyre vonatkozó egyenlőségét — használta. A súlyosnak tekintett görbék ívhosszai és a síkidomok területei jelentették az — ívhosszal, ill. a területtel egyenes arányban állónak vett — súlyokat.

A momentumok egyenlőségének alkalmazása matematikai problémák megoldására ekkor már egyáltalán nem volt új. Leibniz is ismerte Arkhimédész, Fabri és Pascal ilyen irányú munkásságát. Leibniz azonban továbbjutott elődeinél: új szimbólumokat vezetett be, kidolgozta ezek használatának szabályait, s a kapott összefüggéseket általános érvényűeknek tartotta. Módszerének alkalmazásával a geometriai háttér, az ábrák használata egyre inkább nélkülözhetővé vált. Kalkulusában a végtelen kicsinyek alapvető szerepet kaptak, amelyet a következőkben — az említett kéziratokból vett néhány részlettel — szemléltetünk.

Legyen adott az $ABCD$ téglalap (7. ábra) és az AEC tetszőleges görbe. Leibniz egyik összefüggése azt fejezi ki, hogy az $ABCEA$ és az $ADCEA$ síkidomok AD tengelyre vonatkozó momentumainak összege egyenlő az $ABCD$ téglalap (AD-re vonatkozó) momentumával. Ezt az egyenlőséget részletesebben is felírjuk. Legyen az x tengely az AB, a rá merőleges y tengely pedig az AD egyenes. Ha $AB=b$, $AD=c$,



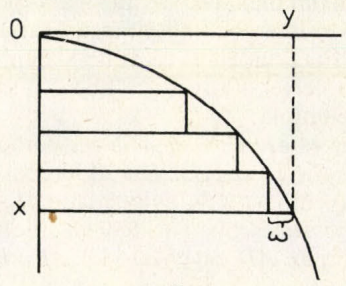
7. ábra

akkor a momentumok iménti egyenlősége — mai jelöléssel $-\int_0^b xy\,dy+\int_0^c \frac{x^2}{2}dy=$ $=\frac{b^2c}{2}$ lesz, vagy a megfelelő leibnizi írásmódban omn. $\overline{yx\,ad\,x}+$ omn. $\overline{x^2/2\,ad\,y}\,\Pi$ $\Pi b^2c/2$ (l. [24], 147. o.). Az utóbbi jelölések leibnizi értelmezése a következő. Az $yx=(1\cdot y)x$ az *ABCED* síkidom végtelen kicsiny, egységnyi szélességű és y hosszúságú — a 7. ábrán vonalkázással szemléltetett — elemének *AD*-re vonatkozó momentuma. Ezen elemi momentumok $(0; b)$ intervallumban vett összegét omn. $\overline{yx\,ad\,x}$ jelöli. Hasonlóan, az omn. $\overline{x^2/2}$ az *ADCEA* síkidom összes (végtelen sok) $x^2/2=$ $=(1\cdot x)x/2$ elemi momentumainak összege a $(0; c)$ intervallumban. Az „omn." (= omnes) rövidítés használata Cavalieri, Mengoli és Fabri hatását mutatja. A „Π" az egyenlőség jele.

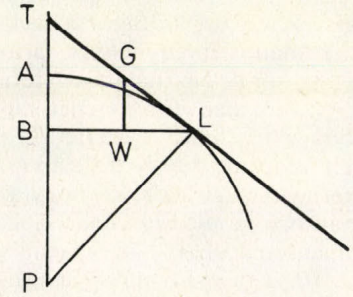
Leibniz hamarosan továbbfejlesztette a [24] alatti kéziratának eredményeit, és — két szomszédos ordináta végtelen kicsiny (8. ábra) különbségének (adott y tengelyre vett) momentumával dolgozva — új, hasznos (határozott) „integrál"-összefüggésekhez jutott (l. [25]). Az „integrálás" felső határát „ult. x"-szel (ultima) jelölte. Egy adott $(0; y)$ intervallumban vett ω értékek y összegének kifejezésére az $y\Pi$ omn. ω egyenlőséget használta, amelynek mai jelölésben az $y=\int_0^y dy$ egyenlőség felel meg.

Leibniz Cc 1092 kézirata (l. [26]) már határozott törekvést mutat új szimbólumok és további összefüggések felkutatására, valamint a fordított érintő probléma megoldására. E kézirat néhány, tárgyunkhoz tartozó jellegzetességét az alábbiakban vázoljuk.

Legyen az *AL* görbe (9. ábra) *L*-pontbeli érintője *TL*, és legyen $PL\perp TL$, ill. $BL\perp BT$. Leibniz a véges *BLP* és a végtelen kicsiny oldalú *GLW*



8. ábra



9. ábra

karakterisztikus háromszög hasonlóságából indult ki. A $BL=y$, $WL=1$ (betű, nem egység!), $BP=p$, $GW=a$ jelöléseket használva felírta a $p=\frac{y}{a}\cdot 1$ egyenlőséget. A már látott $y\Pi$ omn. ω jelentésének mintájára, most $y\Pi$ omn. 1, s ezért $p\Pi\frac{\overline{\text{omn. } 1}}{a}\cdot 1$. Leibniz ebből az omn. $p\Pi$ omn. $\frac{\overline{\text{omn. } 1}}{a}\cdot 1\Pi\frac{\overline{\text{omn. } 1^2}}{a}$ egyenlőségek érvényességére következtetett. Az omn. p — mai jelölésben $\int_0^x p\,dx$ (hol $x=AB$) — és

az $\frac{\overline{\text{omn. } 1^2}}{2}$ — azaz $\frac{y^2}{2}$ — kifejezések egyenlőségét Leibniz már korábban megállapította (l. pl. [29], 359^r: — mai írásmódban — $\int_0^x p\,dx = \int_0^y y\,dy = \frac{y^2}{2}$), és ennek felhasználásával további („integrál") egyenlőségekhez jutott.

Leibniz e Cc 1092 kéziratában vezette be az „omn." rövidítés helyett — az összegzési műveletet jelentő szummáció szóra emlékeztetve — az integrál ma is használt „$\int$" jelét. Az omn. 1 helyett tehát $\int 1$-et írt, az omn. $p\Pi \frac{\text{omn. } 1^2}{2}$ egyenlőség jelölését pedig $\int p\Pi \int \frac{1^2}{2}$-re módosította (l. (26), 154. o.).

Ezekből a mai határozott integrálnak megfelelő jelölésekből kitűnik, hogy Leibniz továbbra is egységnyinek vette a szomszédos ordináták végtelen kicsiny távolságát. Kiemelte (i. h.), ha az „$\int$" jelet végtelen kicsiny mennyiség elé írjuk — pl. $\int 1$ —, akkor az eredmény (azaz y) egy (véges) intervallum, egy egydimenziós mennyiség. Ha egy változó hosszúságú intervallumra alkalmazzuk, akkor egy (kétdimenziós) felülethez jutunk. Ha pedig egy kétdimenziós (geometriai) változó elé írjuk, akkor egy (háromdimenziós) test térfogatát kapjuk. Leibniz úgy összegezte ezeket a megállapításait, hogy a szummáció művelete növeli a dimenziót.

A Cc 1092 kézirat tartalmazza egy geometriai változó esetében a végtelen kicsiny különbségképzés (differenciáció) leibnizi műveletének első jelölésmódját is. Leibniz az $\int 1\Pi ya$ egyenlőségből indult ki (ahol a adott konstans), majd feltette, hogy $1\Pi \frac{ya}{d}$. Az $\frac{ya}{d}$ jelöli tehát az ya változó két szomszédos értékének végtelen kicsiny 1 különbségét. Az $\int \frac{ya}{d} = ya$ egyenlőség jól mutatja — hangsúlyozta Leibniz —, hogy a szummáció és a differenciáció egymás inverz műveletei. Ebből az is következik, hogy — a szummációval szemben — a leibnizi differenciálás (differenciáció) művelete csökkenti a változó dimenzióját (l. [26], 155. o.). Leibniz — tudatosan szem előtt tartva a dimenzionális homogenitás törvényét — éppen erre a tényre akart utalni azzal, hogy a d betűt a (geometriai) változó nevezőjébe írta.

Megjegyezzük, hogy kb. 1680-tól Leibniz már úgy látta, hogy egyik „alapművelete" (differenciáció és szummáció) sem változtatja meg a mennyiségek dimenzióját (l. később, 8. pont).

Leibniz a Cc 1120 kéziratában (l. [28]) a fordított érintő probléma konkrét példáin alkalmazta kalkulusát, tökéletesítette szimbólumrendszerét. Bevezette pl. a „dx" jelölést:

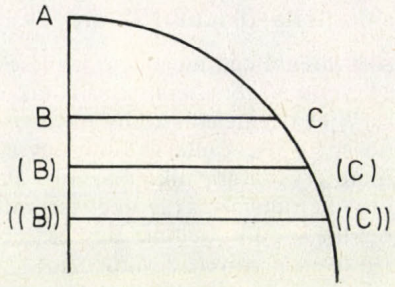
„A dx ugyanazt jelenti, mint $\frac{x}{d}$, azaz két, egymáshoz legközelebb levő x (végtelen kicsiny) különbségét" (l. [28], 163. o.).

Leibniz később többször is hangsúlyozta (l. [30], 231. o., [31], 678. o.), hogy a dx jelölést azért használja szívesen, mert ez a jel a mennyiség x jelének bizonyos módosításával — és nem teljesen más betű alkalmazásával — keletkezik, s ez a tény kalkulusánál igen előnyös.

Az új jelölésekkel bevezetett kalkulus további problémákat vetett fel. Ezek már a Cc 1120 kéziratban is jelentkeztek. Pl. először Leibniz minden különösebb magyarázat nélkül használta a — nem pontosan tisztázott jelentésű — $dy \int y$, $dx \int x$, stb.

kifejezéseket. A momentumok ismételt vizsgálata azonban világosan jelezte számára, hogy a „dy"-t (és a „dx"-et) az „$\int$"-jelen belülre kell írnia. Azt találta ugyanis, hogy a dy ordinátadifferenciák x-tengelyre vonatkozó ydy momentumainak összege egyenlő e differenciák y összegének (x-tengelyre vonatkozó) momentumával, s ez az egyenlőség az $\int y\,dy\Pi\frac{y^2}{2}$ felírására vezette (l. [28], 163. o).

Problémát jelentett azoknak a feladatoknak a megoldása is, amelyekben egyidejűleg dx és dy is szerepelt, mert ezekben az esetekben nem lehetett elkerülni a két differencia még tisztázatlan kapcsolatának vizsgálatát. Ha az AB, $A(B)$, $A((B))$, ...x értékek (10. ábra) számtani sorozatot alkotnak, akkor a $B(B)$, $(B)\,((B))$, ... végtelen



10. ábra

kicsiny (abszcissza)differenciák értéke konstans. (Ezt az esetet láttuk a Cc 575 kézirat fenti vizsgálatánál.) Ekkor azonban az egyes x-ekhez tartozó BC, $(B)(C)$, $((B))\,((C))$, ... ordináták általában nem alkotnak számtani sorozatot, s ezért a szomszédos ordináták differenciájának értelmezése nyitott kérdés marad. Ellenkező esetben, ha a szomszédos ordináták alkotnak számtani sorozatot, akkor a dx marad határozatlan.

Leibniz eddig említett vizsgálataiban a dx egy adott abszcisszaintervallum végtelen kicsiny, állandó hosszúságú egységét jelentette. A fordított érintő feladatok előtérbe állították a keresett görbe, azaz poligon végtelen kicsiny oldalai és a dx egység kapcsolatának behatóbb vizsgálatát. Leibniz ugyanis olyan fordított érintő feladatokkal is találkozott (l. [28], 165. o.), amelyeknél a keresett görbét nem tudta az addigi („integrálási") módszereivel kiszámítani, ezért közelítő eljáráshoz folyamodott. Úgy gondolta, hogy az ismeretlen görbét annál pontosabban határozhatja meg, minél kisebbek a görbét közelítő poligon oldalai. Ezt az egyre jobb megközelítést Leibniz a vizsgált görbeív abszcissza-intervalluma végtelen kicsiny egységének egyre kisebbre választásával érte el (i. h.). Az x geometriai változó ilyen esetekben is egy-egy számtani sorozat elemeit vette fel, de x ezen sorozatainak a differenciái egyre csökkentek.

Leibniz 1676 novemberében állapította meg először azt, hogy azok a meggondolások, amelyekkel kalkulusának különböző eredményeit levezette, általános érvényűek, függetlenek attól, hogy az x változó hogyan változik (l. [32], 230. o.). Ebben az észrevételben kifejezésre jut az a felismerése, hogy a végtelen kicsiny dx-nek nem kell konstansnak, rögzítettnek — és főleg egységnyinek — lennie.

8. Kb. 1680-tól a leibnizi kalkulus egy kiforrottabb, stabilabb állapotba került. Fogalmi alapjait tekintve megszabadult az indivisibiliageometria, valamint — a dx változó jellegének előtérbe kerülésével — Pascal, Descartes, Wallis és más kortársak a végtelen kicsinyekről alkotott nézeteinek gátló hatásától. Ismeretes ugyanis, hogy

„Descartes a végtelen kicsinyt rendkívül kicsiny, de véges mennyiségnek tekinti, Ezért tartja ő lehetetlennek a görbék rektifikációját, ívhosszuk meghatározását. vagy általában a görbe vonallal határolt idomok területének és kerületének kiszámítását. Nemcsak Descartes nem jut el a végtelen kicsiny helyes értelmezéséhez, hanem Pascal és Fermat sem, akik éppen ezért megállnak az infinitezimális számítás küszöbén." (l. [61], 67. o.)

Leibniz számára teljesen világossá vált, ha z egy tetszőleges, „folyamatosan" (azaz inassignabilis, „meg nem jelölhető", tehát végtelen kicsiny intervallumokkal l. [33], 357. o.) változó geometriai mennyiség, akkor a pillanatnyi növekményeivel (l. [18], 33. o.) értelmezett — helyenként differenciálnak nevezett — végtelen kicsiny dz mennyiség, amely z-hez viszonyítva elhanyagolható, szintén geometriai változó, mégpedig ugyanolyan dimenziójú, mint z.

Ha pl. $z=xy$, és x, y véges, egydimenziós változók, tehát z kétdimenziós változó, akkor $dz=d(xy)$ — azaz két közvetlen szomszédos xy közti végtelen kicsiny különbség (l. [18], 36. o.) — szintén kétdimenziós geometriai változó.

Ha z egy adott dimenziójú, (elsőrendű) végtelen kicsiny geometriai változó, akkor $\int z$ egy véges, z-vel azonos dimenziójú geometriai változó. Ha pl. $z=ydx$, ahol y véges, dx pedig (elsőrendű) végtelen kicsiny egydimenziós változó, azaz z kétdimenziós (végtelen kicsiny) változó, akkor $\int z=\int ydx$ egy véges, kétdimenziós változó.

Leibniz differenciálási művelete (differenciáció) a z változóhoz a dz változót, a (határozatlan) integrálási művelete pedig az $\int z$ változót rendeli hozzá.

Az elmondottak azt is alátámasztják, hogy mindkét említett művelet — ellentétben Leibniz korábbi álláspontjával (l. [26], 154—155. o.; 7. pont) — megőrzi a geometriai változók dimenzióját, de megváltoztatja azok „rendjét" (vö. [15], 34. o.). Pl. dz a z-hez viszonyítva végtelen kicsiny, azaz $z(=\int dz)$ a dz-hez viszonyítva végtelen nagy, függetlenül z adott rendjétől.

Leibniz többször kiemelte, hogy a kalkulusában használt differenciálás és integrálás egymás inverz műveletei (l. pl. [18], 36. o.; [30], 231. o.). Ezt a tételt kalkulusa alapjának tekintette. Eszerint pl. az $\int ydx$ folytonos, véges, kétdimenziós változó végtelen sok lehetséges értékei közül vett két közvetlenül szomszédos érték különbsége ydx, azaz $d(\int ydx)=ydx$ (l. pl. [66], 223. o.).

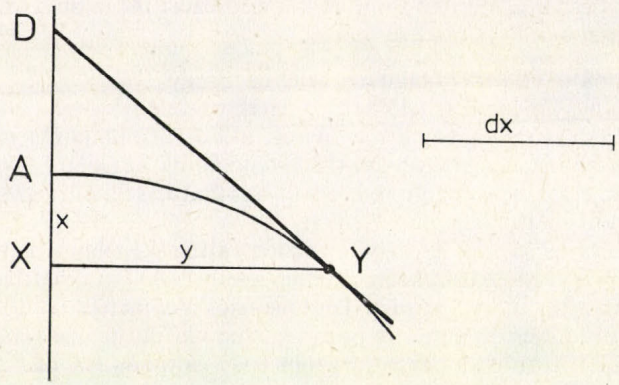
A dx változó és mérhető jellegén alapultak Leibniz azon kijelentései, amelyekben 1680 után több alkalommal (l. [18], 33—34. o.; [30], 233. o.; [34], 597. o.) hangsúlyozta kalkulusának előnyét Cavalieri indivisibilia módszerével szemben. Leibniz szerint az integrálandó kifejezésekben explicit szereplő dx, dy végtelen kicsinyek teszik lehetővé az integráltranszformációt (l. [67]), ezáltal pedig a problémák gyakran egyszerűbbekre vezethetők vissza.

A végtelen kicsinyek mérhetőségéről pedig így írt:

„Az ordináták közti végtelen kicsiny (változó) elemek (szakaszok) kell, hogy mérhetők legyenek, ... s az, hogy a Cavalieri-módszer a végtelen kicsinyeket ilyen tulajdonságúaknak tekintse, meghaladta erejét." (l. [34], 597. o).

9. A leibnizi kalkulus sikereivel párhuzamosan egyre sürgetőbbé vált fogalmi alapjainak tisztázása. Kétségtelen, hogy a kalkulus felfedezését követő évek nem kedveztek a módszer matematikailag szigorúbb megalapozásának. Leibnizet annyira meglepte újonnan talált infinitezimális eljárásának rendkívüli gyakorlati eredményessége, hogy figyelmét és energiáját teljesen lekötötte „elgondolásainak termékenysége" (l. [34], 399. o.). Így arra számíthatunk, hogy kalkulusáról 1684-ben írt első publikációjában (l. [20]) a végtelen kicsinyek egy következetesebb kifejtésével találkozunk.

Ebben a dolgozatában azonban mellőzte a végtelen kicsinyek használatát, számítva arra, hogy gondolatai kortársai értetlenségével találkoznának. A végtelen kicsinyek helyett itt „átmenetileg" kis, véges, állandó hosszúságú különbségeket használt. Felvett egy tetszőleges, de állandó hosszúságú *dx* intervallumot (11. ábra), s a



11. ábra

(véges) *y* ordináta „végtelen kicsiny" *dy* részét differenciának nevezte, és — a *DX* subtangens felhasználásával — a $dy:dx=y:DX$ egyenlőséggel definiálta (l. [20], 220. o.).

10. Leibniz többször hivatkozott (l. [36], 323. o.; [37], 288. o.; [38], 524. o.) arra, hogy a végtelen kicsinyeket elegendő úgy felfogni, ahogyan azt egyik, 1689-ben publikált dolgozatában (l. [39]) fejtette ki. A végtelen kicsinyek itt a körmozgással kapcsolatos magyarázatokban fordultak elő, s helyettük Leibniz az ún. összehasonlíthatatlanul kicsiny mennyiségek használatát javasolta. Ilyennek vette pl. a körív elemét a kör sugarához viszonyítva. Nézeteiről így írt:

„A bizonyítások során felhasználjuk az összehasonlíthatatlanul kicsiny mennyiségeket. Pl. két közönséges (azonos dimenziójú) mennyiség differenciája magukhoz a mennyiségekhez viszonyítva összehasonlíthatatlanul kicsiny. A dolgokat ugyanis így lehet a legvilágosabban kifejteni. Ha nem akarjuk használni a végtelen kicsinyeket, vehetünk (helyettük) olyan kicsinyeket, amilyeneket alkalmasaknak tartunk arra, hogy (bizonyos adott mennyiségekhez viszonyítva) összehasonlíthatatlanok legyenek. Így semmilyen jelentős hibát nem követünk el, legfeljebb egy (tetszőlegesen) adottnál kisebbet. Ez a kérdés hasonló ahhoz, ahogyan a Föld pontnak, a Föld átmérője végtelen kicsinynek vehető igen nagy távolságból." ([39], 150—151. o.)

Arra a kérdésre, hogy tulajdonképpen melyek azok a mennyiségek, amelyeket egy adott mennyiséghez viszonyítva összehasonlíthatatlanul kicsinyeknek tarthatunk, Leibniz később részletesebben is válaszolt. L'Hospitalnak pl. a következőt írta erről a kérdésről:

„Azokat az (azonos dimenziójú) mennyiségeket nevezem összehasonlíthatatlan nagyságoknak, amelyek egyikét bármely véges számmal is szorozzuk, az olyan mennyiséget eredményez, amely nem lépheti túl a másikat, éppen úgy, ahogyan azt Eukleidész értette V. könyvének 5. definíciójában." (l. [37], 288. o.)

Eukleidész itt említett definíciója arra vonatkozik, hogy mikor vannak bizonyos mennyiségek ugyanabban az arányban. Leibniz valószínűleg Eukleidész Elemek c. műve (l. [3]) — Eudoxosznak tulajdonított — V. könyvének alábbi, 4. definíciójára akart hivatkozni:

„Azt mondjuk, hogy azok a mennyiségek állnak arányban egymással, amelyek meghaladhatják egymást, ha azokat (alkalmas természetes számmal) szorozzuk." ([3,] II. k., 114. o., ill. [4], 282. és 304. o.)

Heath véleménye szerint (l. [3], II. k., 120. o.) ugyanis a 4. definíciónak éppen az volt egyik fő célja, hogy kiküszöbölje az azonos dimenziójú mennyiségek arányai közül azokat, amelyekben egy véges és egy végtelen nagy, vagy egy végtelen kicsiny mennyiség lenne arányban. Leibniz az euklideszi értelemben „arányban álló mennyiségeket" nevezte „összehasonlíthatóknak", azokat pedig, amelyek nem állnak (euklideszi értelemben) arányban, összehasonlíthatatlanoknak tartotta.

Egy másik alkalommal így nyilatkozott erről a problémáról:

„Eukleidész V. könyvének 5. definíciója szerint csak azok az egynemű mennyiségek összehasonlíthatók, amelyek egyikének egy véges számmal való szorzata túllépheti a másikat. Azokat a mennyiségeket pedig, amelyek különbsége (magukhoz a mennyiségekhez viszonyítva) nem ilyen mennyiség (azaz összehasonlíthatatlan), azokat egyenlőknek tekintem." ([36], 322. o.)

11. A különböző mennyiségek fenti kapcsolatainak most vázolt problémái a leibnizi kalkulus alapjairól folytatott vitákban merültek fel. Annak ellenére ugyanis, hogy Leibniz igyekezett a kalkulusában használt fogalmakat érthetőbbé tenni, példákkal megvilágítani, többen kifogásolták a megszokottól eltérő matematikai eljárásait, és azok homályosnak vélt fogalmi alapjait.

1695-ben Leibniz így számolt be L'Hospitalnak egy ilyen bírálatról:

„Éppen most kaptam kézhez két könyvet (l. [62], [63]), amelyeket egy holland matematikus, bizonyos Bernard Nieuwentiit úr nyomtatott ki és egyenesen megküldött nekem. Panaszkodik Önre, uram, a Bernoulli urakra és rám, mert vizsgálódásainkban a differenciálszámításra támaszkodtunk anélkül, hogy elveink bizonyítását közöltük volna." ([37], 287. o.)

Nieuwentiit pl. elfogadta, hogy léteznek zérustól különböző, elsőrendű differenciálok. A legalább másodrendűekről azonban azt tartotta, hogy valamennyien zérussal egyenlőek, mert „végtelen nagy számmal" szorozva azokat, nem közönséges, véges mennyiséget adnak, ahogyan az elsőrendű végtelen kicsinyek, hanem zérust eredményeznek.

Leibniz utóbb említett levelében kétféleképpen is megcáfolta ezt az ellenvetést. Utalt egyrészt arra, hogy egy adott magasabb rendű végtelen kicsiny és egy végtelen nagy szám szorzata is adhat közönséges, véges mennyiséget, csak mindig a megfelelő magasabb rendű végtelen nagyot kell tényezőként alkalmazni. Pl., ha a *ddx* másodrendű végtelen kicsiny mennyiséget másodrendű végtelen nagy mennyiséggel (azaz egy elsőrendű végtelen nagynál végtelenszer nagyobbal) szorozzuk, akkor közönséges, véges mennyiséget kapunk.

Másrészt Leibniz e L'Hospitalhoz írt levelében az alábbi módon is alátámasztotta a magasabb rendű differenciálok létezését. Legyen x olyan (egydimenziós geometriai) változó, amelynek a végtelen sok lehetséges értékei mértani sorozatot alkotnak. Ebben az esetben az x, dx, ddx, ... (egydimenziós geometriai) változók is mértani sorozatot alkotnak. Különös lenne azt mondani — folytatta Leibniz —, hogy a sorozat első két tagja még (geometriai) mennyiség, de a harmadik tagja, *ddx* már nem az, nem is beszélve a másodrendű differenciálok hasznos alkalmazásairól.

Nieuwentiit álláspontja a mennyiségek egyenlőségének kérdésében is különbözött Leibniz felfogásától. Nieuwentiit szerint két mennyiség akkor (és csak akkor) egyenlő, ha különbségük nulla. Leibniznek ebben a kérdésben vallott nézetét tanulmányunk 10. pontjában már idéztük (l. [36], 322. o.), de hasonló értelemben nyilatkozott egyik, Huygenshez írt levelében is. Eszerint

„két mennyiség akkor is egyenlő egymással, ha különbségük végtelen kicsiny" ([40], 207. o.)

Nieuwentiit bírálata arra ösztönözte Leibnizet, hogy véleményét az Acta Eruditorum c. folyóirat hasábjain is kifejtse (l. [36], [64]). Itt azokat a fent körvonalazott gondolatait ismertette, amelyekről már L'Hospitalnak ([37]) és Huygensnek (l. [40]) is írt. Egy kissé részletesebb példát közölt azonban a ddx-ek létezésének alátámasztására. Ez a következő:

„Alkosson x mértani, y pedig számtani sorozatot. Ekkor dy állandó. Legyen érvényes a $dx:dy=x:a$ egyenlőség. (Tehát az $x=e^{\frac{y}{a}}$ exponenciális függvényről van szó.) Így $dx=xdy:a$, azaz $ddx=dxdy:a$. Vegyük figyelembe, hogy $dy:a=dx:x$, s ezért $ddx=dxdx:x$, tehát $x:dx=dx:ddx$." ([36], 325. o.)

12. A 17. század végén a végtelen kicsinyek egyre többször fizikai problémák megoldásánál is felmerültek. Egyik levelében Leibniz kifejtette, hogy pl. a keresett maximum nemcsak a teljes görbét tekintve létezik, hanem annak egy kis részében, akár egy „meghatározatlanul kicsiny" részében is (l. [41], 423. o.)

Az ehhez hasonló problémák felvetődése és megoldásának szükségessége mindinkább sürgette az egzaktabb kérdésfeltevéseket és válaszokat. Ilyen körülmények között már nem lehetett elkerülni annak megvizsgálását, hogy a végtelen kicsinyek ténylegesen létező, reális mennyiségek-e, van-e az anyagnak végtelen kicsiny része, s ha igen, milyenek itt az anyag tulajdonságai?

Ezekről a kérdésekről és a velük kapcsolatos problémákról Leibniz kiterjedt levelezést folytatott kortársaival. Különösen Johann Bernoullival történt levélváltása volt eredményes ezen a téren. Nem célunk e témához tartozó több tucat levelük feldolgozása, amely egy további tanulmány feladata lehet, de néhány kérdésben összegezzük véleményüket.

Johann Bernoulli szerint a végtelen kicsinynek van reális, anyagi megfelelője, másrészt van az anyagnak felosztás útján keletkező legkisebb része, s ez a két dolog egybeesik (l. [42], 518. o.).

Leibniz álláspontját az anyag végnélküli oszthatóságáról talán a következő sorai fejezik ki legvilágosabban:

„Megengedem, hogy az anyagnak nincs olyan része, amely ne jönne létre felosztás által, mégsem jutunk el oszthatatlan elemekhez, vagy a legkisebb részekhez, sőt a végtelen kicsinyekhez sem, hanem csak az egyre kisebbekhez és mégis rendesekhez." (l. [38], 524. o.)

Leibniz többször is hangsúlyozta, hogy a végtelen kicsinyek valószínűleg csak a képzeletben léteznek — tehát ideális fogalmak —, de alkalmasak arra, hogy a kalkulusában hasznosan segítségül vegye azokat (l. [38], 524. o.; [43], 499. o.; [44], 516. o.; [45], 92. o.; [46], 110. o.).

Leibniz ezzel tudatosan függetlenítette kalkulusát az infinitezimálisok reális létezéséről folyó ún. „metafizikai viták"-tól (l. [45], 91. o.; [56], 43. o.).

A 18. század elején Leibniz már világosan látta: az, hogy egy fogalom objektíve létezőt fejez-e ki, vagy sem — ami filozófiai probléma —, nem azonos azzal a kérdéssel, hogy jogos-e a fogalom matematikai használata.

13. A leibnizi kalkulus alapjaival kapcsolatos további, akkori bírálatok azt állították, hogy Leibniz infinitezimális számítása nem eléggé biztos, és nagy mértékben eltávolodik a régiek módszerétől.

Leibniz az ellenvetésekre adott válaszában nem használhatta fel a végtelen kicsinyek reális létezését, mert azokat, amint láttuk, ideális fogalmaknak tartotta. Kalkulusának megalapozására tehát más utat kellett választania.

Két ilyen lehetőséget is talált. Az egyikben azt hangsúlyozta, hogy kalkulusa az ókori görög exhaustiós módszer egy alkalmasabb, egyszerűbb kifejezésmódja (l. [37], 288. o.; [38], 524. o.; [40], 207. o.; [50]; továbbá, ahol Arkhimédészre név szerint is hivatkozik: [36], 322. o.; [45], 92. o.; [47], 95—96. o.; [48]; [49], 63. o.; [51], 105. o.; [52], 501. o.), a másikban pedig az ún. „folytonossági elv"-ére alapozott (l. [45], 93. o.; [51], 105. o.; [53], 52. o.; [54]; [55], 128—129. o.; [56], 40. o.; [57]).

Az elsőnek említett elgondolását egyik barátjához, Pinsonhoz írt levelében fejtette ki talán a legvilágosabban. E levélből most idézésre kerülő megfelelő részlet— továbbá ([45], 92. o. és [39], 150—151. o.) — kétséget kizáróan alátámasztja, hogy Leibniz figyelembe vett olyan — szigorú (metafizikai) értelemben vett végtelen nagy és végtelen kicsiny — mennyiségeket is, amelyekről, véleménye szerint, érzékszerveink semmit sem mondanak (l. [59], 516. o.), csak a gondolkodással felfogható(l. [60], 241. o.,) nem-anyagi (szellemi, felsőbbrendű) lényeget tartalmaznak (vö. [61], 34., 59., 72., 96. és 134. o.). A közönséges, összehasonlíthatatlan mennyiségeket ezek helyett ajánlotta használni. Leibniz így írt:

„...ha a felfedezések figyelemre méltók, a módszer újdonsága még inkább emeli annak szépségét. Ami az út biztonságát illeti, annak L'Hospital márki könyve eleget tesz (l. [65]). Hozzáteszem még, amit ez a kiváló matematikus abban mondott: a végtelent nem szükséges számításainkban szigorúan felfogni, hanem úgy, mint az optikában, amikor azt mondjuk, hogy a Nap sugarai a végtelen távoli pontból jönnek és ezért párhuzamosaknak tekinthetők. A végtelen nagynak és a végtelen kicsinynek különböző fokozatai vannak. (Ezt a tényt is elegendő a következő hasonlat mintájára felfogni.) A Föld egy (igen nagy) távolságból, egy kezünkben tartott golyó pedig a Föld sugarának távolságából pontnak tekinthető. Ebben az esetben az a távolság, ahonnan a Föld pontnak tekinthető, másodrendű végtelen nagy („a végtelen végtelenje") a kezünkben tartott golyó átmérőjéhez viszonyítva. A végtelen nagy, vagy a végtelen kicsiny helyett elég nagy vagy elég kicsiny mennyiségeket veszünk ahhoz, hogy az eltérés egy megadott mennyiségnél kisebb legyen. Ilyen módon nem térünk el Arkhimédész stílusától, legfeljebb csak a kifejezésekben, amelyek a mi módszerünkben közvetlenebbek és jobban megfelelnek a felfedezés művészetének." (l. [47])

Leibniz nyomtatásban is közölte szóban forgó levelének most idézett részletét (l. [48]), s ez a cikke újabb bírálatok forrásává vált. A leibnizi kalkulus ellenzői ugyanis úgy értelmezték Leibniz e közlését, hogy a differenciálok véges, állandó mennyiségek. Leibniz egyik barátja kérésére (l. [58], 89. o.) levélben válaszolt bírálói véleményére, és kiemelte saját álláspontjának alábbi lényeges elemeit:

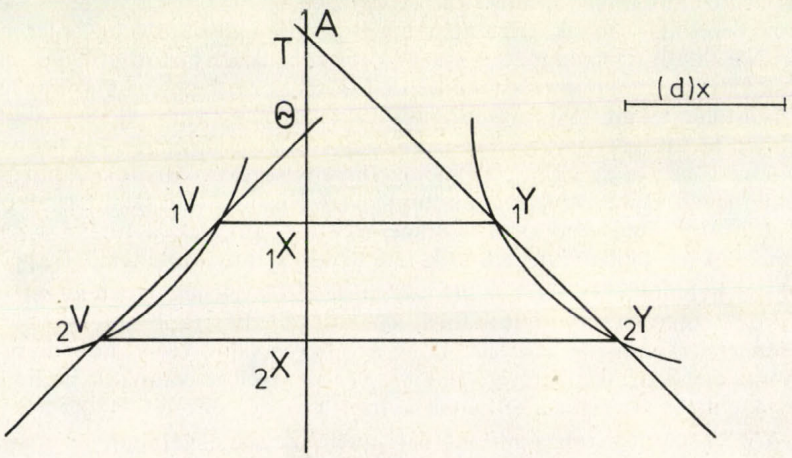
„A közönséges, összehasonlíthatatlan mennyiségek egyáltalán nem állandóak, meghatározottak. A geometriai érveléseinkben tetszőlegesen kicsinyeknek vehetjük azokat, s ezért valójában ugyanazt a szerepet töltik be, mint a szigorú értelemben vett végtelen kicsinyek. Ha valaki kételkedne kijelentésünkben, a kalkulusunk alapján meggyőződhet róla, hogy a hiba bármely megjelölhetőnél kisebb lesz, mert az összehasonlíthatatlanul kicsinyt elég kicsinynek vehetjük. Ugyanis egy mennyiség mindig vehető tetszőleges kicsinyre. Talán ez az, amit a kimeríthetetlenen értenek. Nem kétséges azonban, hogy a kalkulus szigorú bizonyítása ezen alapul. ... ha valaki tehát nem fogadja el a végtelen nagy és a végtelen kicsiny mennyiségeket sem szigorú, metafizikai értelemben létezőknek, sem pedig valóságos dolgoknak, az tekintheti azokat ideális fogalmaknak, amelyek lerövidítik az okoskodást. ... nem tudnánk megalapozni a transzcendens görbékkel kapcsolatos számításainkat, ha nem alkalmaznánk a differenciákat, amelyek zérushoz közeli, pozitív mennyiségek, és ha nem tennénk a helyükbe összehasonlíthatatlan kicsinyeket, hogy mindig megjelölhessünk egy kisebb mennyiséget a végtelenségig." (l. [45], 92. o.)

14. Leibniz a kalkulusának megalapozására tett további kísérleténél használt folytonossági elvet legérthetőbben talán 1701-ben fogalmazta meg:

„Ha valamely folyamat folytonos átmenettel egy bizonyos végállapotba jut, akkor létezik egy általános ok, amely az átmenetre és a végállapotra egyaránt vonatkozik." ([56], 40. o.)

Leibniz az évek során (kb. 1687-től kezdődően) gazdag példaanyagon szemléltette, hogy ez az elve mennyire jól alkalmazható. Elgondolása szerint két egyenes párhuzamossága, a nyugalom és az egyenlőség egy-egy folyamat végállapotai. A párhuzamos egyenesek metszőkből keletkezhettek, a nyugalom mozgásból származhatott, az egyenlőség pedig egyenlőtlenségből. Az egyes végállapotokat azonban nem kell a megfelelő folyamatoktól különállóknak tekintenünk. A párhuzamos egyenesek úgy foghatók fel, mint végtelen kicsiny szöget bezáró, metsző egyenesek — azaz, amelyek metszéspontja a végtelenben van —; a nyugalom végtelen kicsiny sebességű mozgásnak tekinthető; az egyenlőség pedig olyan egyenlőtlenségnek, amelynél a két oldal különbsége végtelen kicsiny. Hasonló az eset a parabolánál, amely olyan ellipszisnek fogható fel, amelynek egyik fókusza a végtelenben van.

Leibniz az [56] alatti művében jelentős kísérletet tett arra, hogy a folytonossági elv alkalmazásával igazolja kalkulusának 1684-ben közzétett (l. [20]) műveleti szabályait. Példaként a $d(xv)=xdv+vdx$ szabály leibnizi bizonyítását mutatjuk be (l. [56], 45—47. o.; az eredeti bal alsó indexezést használva).



12. ábra

Legyen (12. ábra) $A_1X=x$, $A_2X=x+dx$, ${}_1X_1Y=y$, ${}_2X_2Y=y+dy$, ${}_1X_1V=v$, ${}_2X_2V=v+dv$. Tekintsük az ${}_1X$ pontot rögzítettnek, ${}_2X$ pedig mozogjon ${}_1X$ felé (az ${}_1XA$ tengelyen) egészen az ${}_2X={}_1X$ helyzetig. Jelöljön $(d)x$ egy adott, az ${}_1X$ mozgásától függetlenül állandó hosszúságú szakaszt. A $d(y)$ és a $d(v)$ mennyiségeket pedig definiálják a következő egyenlőségek:

$$(d)y:(d)x \overset{(1)}{=} y:{}_1XT \overset{(2)}{=} dy:dx,$$

$$(d)v:(d)x \overset{(3)}{=} v:{}_1X\theta \overset{(4)}{=} dv:dx.$$

Az (1) és (3) egyenlőség mind az ${}_1X\neq{}_2X$, mind az ${}_1X={}_2X$ esetekben érvényes, a bennük szereplő tagok valamennyien végesek. A (2) és a (4) egyenlőség — valamint a

$(d)y:(d)x \overset{(5)}{=} dy:dx$, és a $(d)v:(d)x \overset{(6)}{=} dv:dx$ egyenlőség — csak az ${}_1X \neq {}_2X$ esetben értelmezett, mert ha ${}_1X = {}_2X$, akkor $dx = 0$. A folytonosság elve alapján azonban terjesszük ki a (2), (4), (5) és a (6) egyenlőségek érvényességi körét az ${}_1X = {}_2X$ esetre is. Ebben a „végállapotban" dx és dy szerepeljenek ideális fogalmakként, fikciókként. A dx és dy így az ${}_1X$ helyzetétől függetlenül használható, mert arányuk mindig visszavezethető véges, reális mennyiségek arányára.

Legyen $ay = xv$, és ${}_1X \neq {}_2X$. Így $ay + ady = (x + dx)(v + dv) = xv + xdv + vdx + dxdv$, azaz $ady = xdv + vdx + dxdv$, vagyis $\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v + dv$, ill. $\frac{a(d)y}{d(x)} = \frac{x(d)v}{d(x)} + v + dv$. Legyen most ${}_1X = {}_2X$, ekkor $dv = 0$, s így $\frac{a(d)y}{(d)x} = \frac{x(d)v}{(d)x} + v$. Az (5) és (6) egyenlőségek (kiterjesztett) érvényessége miatt $\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v$, azaz $ady = xdv + vdx$, s így $d(xv) = xdv + vdx$.

15. H. J. M. Bos bebizonyította (l. [15]), hogy Leibniznek az a törekvése, hogy infinitezimális kalkulusát biztosabb alapokra helyezze, a függvény fogalmának a bevezetését eredményezi.

Annak megfelelően, ahogyan a matematikai analízis (a 18. század első felére) elkülönült a geometriától, a végtelen kicsiny fogalma is hasonló fejlődésen ment át: megszabadult a geometriai háttértől és tiszta szimbólummá vált. Leibniz infinitezimális matematikai munkásságával egy tudatos fejlődési folyamat ment végbe a tisztán geometriai nézőponttól egy modernebb, analitikus szemléletig. Ezáltal nagymértékben bővült a tárgyalható és megoldható problémák köre.

Egyetérthetünk Leibniz azon kijelentésével, amit egy történeti visszaemlékezésében tett 1714-ben:

„Matematikai tételeim és eredményeim egy részét véges mennyiségek alkalmazásával kaptam, tehát olyanok felhasználásával, amelyekkel nemcsak Cavalieri, Fermat és Fabri, hanem Saint Vincent, Guldin és Pascal is dolgozott. A másik része valójában a végtelen kicsinyektől függött, s ezek sokkal messzebbre lendítették előre a geometriát." ([35], 400—401. o.)

RÖVIDÍTÉSEK

AHS: *Archive for History of Exact Sciences*

BOD: *Die Leibniz — Handschriften der Königlichen Öffentlichen Bibliothek zu Hannover,* kiadó E. Bodemann, Hildesheim, 1966.

G46: *Historia et Origo calculi differentialis a G. G. Leibnitzio conscripta,* kiadó C. I. Gerhardt, Hannover, 1846.

LBG: *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern,* kiadó C. I. Gerhardt, Georg Olms Hildesheim, 1962.

LMG: *Leibnizens mathematische Schriften,* kiadó C. I. Gerhard, Berlin—Halle, 1849—1863 (7. kötet). Új kiadás: Hildesheim, 1962, 1971.

LPG: *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz,* kiadó C. I. Gerhardt, Berlin—Halle 1875—1890, (7. kötet). Új kiadás: Hildesheim, 1960—61.

IRODALOM

[1] CAVALIERI, B., *Geometria indivisibilibus continuorum nova ...*, Bologna, 1635.

[2] CAVALIERI, B., *Exercitationes Geometricae* Sex, Bologna, 1647.

[3] *The thirteen books of Educlid's Elements,* (3 kötet). Kiadó: T. L. Heath, New York, 1956.

[4] WAERDEN, B. L., VAN DER, *Egy tudomány ébredése,* Gondolat, Bp., 1977.

[5] WHITESIDE, D. T., Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, *AHS* 1 (1961), 179—388. o.
[6] VEKERDI LÁSZLÓ, Descartes infinitezimális módszere a cikloisterület meghatározására, *Matematikai Lapok*, XV. (1964), 1—3. szám, 196—203. o.
[7] VEKERDI LÁSZLÓ, Infinitezimális módszerek Pascal matematikájában, *MTA III. Osztályának Közleményei*, XIII. (1963), 3. szám, 269—285. o.
[8] PASCAL, B., *Lettres de A. Dettonville* ..., Peris, 1659.
[9] LEIBNIZ, G. W., *Hypothesis physica nova*, Mainz, 1671.
[10] Leibniz levele Tschirnhaushoz, 1680 eleje, *LBG*, 406—413. o.
[11] Oeuvres completes de Pascal, *Pléiade*, Paris, 1954.
[12] *Catalogue critique des manuscripts de Leibniz*, Facsimile II, kiadó A. Rivaud, Poitiers, 1914—1924.
[13] LEIBNIZ, G. W., Ex Dettonvillaeo seu Pascalii Geometricis excerpta, 1673 tavasza (Cc 544=BOD: LH 35, XV, 1; f. 18—23), részben kiadva: *Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1891, 1066—1068. o.
[14] Leibniz levele L'Hospitalhoz, 1694. nov. 27., *LMG*, II. k., 255—262. o.
[15] BOS, H. J. M., Differentials, higher-order differentials and derivative in the Leibnizian calculus, *AHS*, 14. k. (1974—75), 1—90. o.
[16] LEIBNIZ, G. W., Methodus tangentium inversa seu de functionibus, 1673. aug. (Cc 575=BOD: LH 35, VIII, 3; f. 1—8), még kiadatlan kézirat.
[17] HOFMANN, J. E., *Leibniz in Paris* 1672—1676, Cambridge University Press, 1974.
[18] LEIBNIZ, G. W., *Elementa calculi novi* ..., kb. 1680.; G46, 32—38. o.
[19] LEIBNIZ, G. W., *Additio ad Schedam de Dimensionibus Figurarum inveniendis*, 1684.; LMG, V. k., 126—127. o.
[20] LEIBNIZ, G. W., Nova methodus pro maximis et minimis ..., 1684. okt., *LMG*, V. k., 220—226. o.
[21] MAHNKE, D., Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis; *Abhandlungen der Preuss. Akad. der Wiss., Phys.-math. Klasse*, 1925. Nr. 1. Berlin (1926), 1—64. o.
[22] GERHARDT, C. I., *Die Entdeckung der höheren Analysis*, Halle, 1855.
[23] BARON, M. E., *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.
[24] LEIBNIZ, G. W., Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis, 1675. okt. 25. (Cc 1089); *LBG*, 147—149. o.
[25] LEIBNIZ, G. W., Alia Analysis Tetragonistica ..., 1675. okt. 26. (Cc 1090); *LBG*, 149—151. o.
[26] LEIBNIZ, G. W., Analyseos Tetragonisticae pars 2 da, 1675. okt. 29. (Cc 1092); *LBG*, 151—156. o.
[27] LEIBNIZ, G. W., Analyseos Tetragonisticae Pars III., 1675. nov. 1. (Cc 1106_1); *LBG*, 157—160. o.
[28] LEIBNIZ, G. W., Methodi tangentium inversae exemple, 1675. nov. 11. (Cc 1120); *LBG*, 161—167. o.
[29] LEIBNIZ, G. W., Triangulum characteristicum. Ellipsis., 1673 tavasza (Cc 548=*BOD:* LH 35, XIII, 1; f. 359—360), még kiadatlan kézirat.
[30] LEIBNIZ, G. W., De geometria recondita ..., 1686.; *LMG*, V. k., 226—233. o.
[31] LEIBNIZ, G. W., Methodus, qua innumerarum linearum constructio ..., 1693. okt.; *LBG*, 676—681. o.
[32] LEIBNIZ, G. W., Calculus Tangentium differentialis, 1676. nov.; *LBG*, 229—231. o.
[33] LEIBNIZ, G. W., Specimen novum analyseos ..., 1702.; *LMG*, V. k., 350—361. o.
[34] LEIBNIZ, G. W., Scientiarum diversos gradus ..., kb. 1694.; *Monatsberichte des Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1875.; 595—599. o.
[35] LEIBNIZ, G. W., Historia et origo calculi differentialis, 1714.; *LMG*, V. k., 392—410. o.
[36] LEIBNIZ, G. W., Responsio ad nonnullas difficultates ..., 1695.; *LMG*, V. k., 320—326. o.
[37] Leibniz levele L'Hospitalhoz, 1695. jún. 24.; LMG, II. k., 287—289. o.
[38] Leibniz levele Johann Bernoullihoz, 1698. júl. 29.; *LMG*, III, 521—527. o.
[39] LEIBNIZ, G. W., Tentamen de Motuum Coelestium causis, 1689; *LMG*, VI. k., 144—161. o.
[40] Leibniz levele Huygenshez, 1695. jún. 21.; *LMG*, II. k. 205—208. o.
[41] Leibniz levele Johann Bernoullihoz, 1697. jún. 15.; *LMG*, III. k., 421—424. o.
[42] Leibniz levele Johann Bernoullihoz, 1698. júl. 23.; *LMG*, III. k., 516—518. o.
[43] Leibniz levele Johann Bernoullihoz, 1698. jún. 7.; *LMG*, III. k., 497—500. o.
[44] Leibniz levele Johann Bernoullihoz, 1698. júl. 22.; *LMG*, III. k., 514—516. o.
[45] Leibniz levele Varignonhoz, 1702. febr. 2., *LMG*, IV. k., 91—95. o.
[46] Leibniz levele Varignonhoz, 1702. jún. 20., *LMG*, IV. k., 106—110. o.
[47] Leibniz levele Pinsonhoz, 1701. aug. 29., *LMG*, IV. k., 95—96. o.
[48] LEIBNIZ, G. W., Memoire de Mr. G. G. Leibniz touchant son sentiment sur le Calcul differentiel, 1701, *LMG*, V. k., 350. o.
[49] Leibniz levele Wallishoz, 1699. márc. 30., *LMG*, IV. k., 62—65. o.
[50] LEIBNIZ, G. W., Defense du calcul des differences, kb. 1700. (*BOD:* LH 35, VI, 22; f. 1—2), még kiadatlan kézirat.

[51] LEIBNIZ, G. W., Justification du Calcul des infinitesimales ..., 1701., *LMG*, IV. k., 104—106. o.
[52] Leibniz levele Dangigourthoz, 1716. szept. 11.; G. G. *Leibnitti Opera Omnia,* kiadó L. Dutens, Genf, 1768. (6. kötet); III. k., 499—502. o.
[53] LEIBNIZ, G. W., Extrait d'une lettre de M. L. sur un Principle Général, ...; 1687. júl.; Nouvelles de la Republique des Lettres, 1687. júl., VIII. cikk, 744—753. o. = *LPG*, III. k., 51—55. o.
[54] Leibniz levele Arnauldhoz, 1687. aug. 1.; *LPG* II. k., 104—105. o.
[55] LEIBNIZ, G. W., Principium quoddam Generale ..., 1687., *LMG*, VI. k., 128—135. o.
[56] LEIBNIZ, G. W., Cum prodiisset ..., 1701.; G46, 39—50. o.
[57] LEIBNIZ, G. W., Responsiones meae, 1702. okt., Difficultates motae a Dno Jenisch circa calculus infinitesimalem c. kéziratban, (*BOD:* LH 35, VII, 17), még kiadatlan kézirat.
[58] Varignon levele Leibnizhez, 1701 nov. 28.; *LMG*, IV. k., 89—90. o.
[59] Leibniz levele Bosseshoz, 1716. máj. 29.; *LPG*, II. k., 515—521. o.
[60] LEIBNIZ, G. W., Specimen dynamicum ..., 1695.; *LMG*, VI. k., 234—246. o.,
[61] SIMONOVITS ISTVÁNNÉ BEKE ANNA, *A dialektika Leibniz filozófiájában,* Akadémiai Kiadó, Bp., 1965.
[62] NIEUWENTIIT, B., *Considerationes circa analyseos ...,* Amsterdam, 1694.
[63] NIEUWENTIIT, B., *Analysis infinitorum,* Amsterdam, 1695.
[64] LEIBNIZ, G. W., Addenda ad schediasma proximo, 1695. aug., *LMG*, V. k., 327—328. o.
[65] L'HOSPITAL, G. F. A. DE, *Analyse des infiniment petits,* Paris, 1696.
[66] LEIBNIZ, G. W., Monitum de characteribus algebraicis, 1710., *LMG*, VII. k., 218—223. o.
[67] Leibniz levele Boden hausenhez, 1969., LMG, VII. k., 387. o.

ПРОБЛЕМА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В МАТЕМАТИКЕ У ЛЕЙБНИЦА

M. XOPBAT

THE PROBLEM OF INFINITELY SMALL IN MATHEMATICS BY LEIBNIZ

M. HORVÁTH

AZ ATIYAH—SINGER-INDEXTÉTELRŐL IV.

TÓTH GÁBOR

GRASSMANN-SOKASÁGOK ÉS KLASSZIFIKÁLÓ PRINCIPÁLIS NYALÁBOK

1. A Leray—Hirsch-tétel és a Künneth-formula

Legyen $\pi: E \to M$ topologikus fibrált nyaláb F fibrumtípussal és $E_0 \subset E$, $F_0 \subset F$ nyílt alterek. Azt mondjuk, hogy $\pi: (E, E_0) \to M$ (F, F_0) *fibrum típusú topologikus fibrált nyaláb,* ha minden M-beli pontnak van $U \subset M$ nyílt környezete és a $\pi: E \to M$ fibrált nyalábnak van $k_U: \pi^{-1}(U) \to U \times F$ lokálisan trivializáló leképezése, amelyre $k_U | \pi^{-1}(U) \cap E_0: \pi^{-1}(U) \cap E_0 \to U \times F_0$ homeomorfizmus. Ekkor $p \in M$ esetén létezik $i_p: F \to \pi^{-1}(p)$ homeomorfizmus, amelyre $i_p(F_0) = \pi^{-1}(p) \cap E_0$. Differenciálható fibrált nyalábokra ez a fogalom a fentivel analóg módon értelmezhető.

1.1. Leray—Hirsch tétel. Legyen $\pi: (E, E_0) \to M$ (F, F_0) fibrum típusú topologikus fibrált nyaláb és legyenek $x_1, \ldots, x_l \in H^*(E, E_0; R)$ homogén elemek úgy hogy $\{i_p^*(x_1), \ldots, i_p^*(x_l)\}$ a $H^*(F, F_0; R)$ R-modulus bázisa. Ekkor $H^*(E, E_0; R)$ szabad $H^*(M; R)$ feletti modulus az $x_1, \ldots, x_l$ báziselemekkel és egy $x \in H^*(E, E_0; R)$ elemet egy $y \in H^*(M; R)$ elemmel úgy szorzunk, hogy $y \cdot x = \pi^*(y) \cup x$.

Bizonyítás. A tételt abban a speciális esetben bizonyítjuk, amikor a $\pi: (E, E_0) \to M$ fibrált nyaláb *finit típusú*, azaz létezik az M bázistérnek $\{U_i | i = 1, \ldots, n\}$ nyílt fedése úgy, hogy $i, i' = 1, \ldots, n$ esetén az $U_i \cap U_{i'}$ altér összefüggő komponensei pontra összehúzhatók, azaz homotopikusan ekvivalensek az egypontú térrel, és létezik $k_{U_i}\left(\pi^{-1}(U_i), \pi^{-1}(U_i) \cap E_0\right) \to (U_i \times F, U_i \times F_0)$ lokálisan trivializáló leképezés. Az általános eset bizonyítása megtalálható [7]-ben. (Megjegyezzük, hogy ha M differenciálható sokaság, akkor, mivel M triangulálható [6], a fenti típusú $\{U_i | i = 1, \ldots, n\}$ fedés egyszerűen konstruálható. Így M felett minden $\pi: (E, E_0) \to M$ fibrált nyaláb finit típusú.) Legyenek $x_1, \ldots, x_l \in H^*(E, E_0; R)$ a tételben szereplő homogén elemek. A tételt n szerinti indukcióval igazoljuk. $n = 1$ esetén az M összefüggő komponensei pontra összehúzhatók. Legyen $p \in M$ és jelölje $c_p: \{\text{pont}\} \to M$ azt a leképezést, amelynek képe $\{p\}$. Ekkor $i_p: F \to E$, $i_p | F_0: F_0 \to E_0$, $c_p: \{\text{pont}\} \to M$ homotopikus ekvivalenciák, azaz $i_p^*: H^*(E, E_0; R) \to H^*(F, F_0; R)$ és $c_p^*: H^*(\{\text{pont}\}; R) \to H^*(M; R)$ izomorfizmusok és az

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i_p} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \{\text{pont}\} & \xrightarrow{c_p} & M \end{array}$$

diagram kommutatív. A tétel igaz a $\pi_0: (F, F_0) \to \{\text{pont}\}$ fibrálásra, hiszen $\{i_p^*(x_1),$

$\ldots, i_p^*(x_l)\} \subset H^*(F, F_0; R)$ bázis R felett. Legyen $x \in H^*(E, E_0; R)$ tetszőleges. Ekkor

$$i_p^*(x) = \sum_{j=1}^{l} \pi_0^*(y_j) \cup i_p^*(x_j)$$

teljesül. Így

$$x = i_p^{*-1}\left(\sum_{j=1}^{l} \pi_0^*(y_j) \cup i_p^*(x_j)\right) = \sum_{j=1}^{l} i_p^{*-1}\pi_0^*(y_j) \cup x_j = \sum_{j=1}^{l} \pi^*\left(c_p^{*-1}(y_j)\right) \cup x_j,$$

azaz $\{x_1, \ldots, x_l\} \subset H^*(E, E_0; R)$ bázis $H^*(M; R)$ felett, amivel az állítást $n=1$ esetére beláttuk.

Tegyük most fel, hogy a tétel igaz minden olyan $\pi: (E, E_0) \to M$ finit típusú fibrált nyalábra, amelyhez található $n-1$ elemű $\{U_i \mid i=1, \ldots, n-1\}$ nyílt fedés a fenti tulajdonságokkal. Legyen $\pi: (E, E_0) \to M$ olyan finit típusú fibrált nyaláb, amelyre létezik $\{U_i \mid i=1, \ldots, n\}$ nyílt fedés és $k_{U_i}: (\pi^{-1}(U_i), \pi^{-1}(U_i) \cap E_0) \to (U_i \times F, U_i \times F_0)$ lokálisan trivializáló leképezések a fenti tulajdonságokkal. Igazoljuk, hogy a $\pi: (E, E_0) \to M$ fibrált nyalábra a tétel fennáll.

Legyenek $x_1, \ldots, x_l \in H^*(E, E_0; R)$ a tételben szereplő homogén elemek, $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$ és $U' = U_n$. Az indukciós hipotézis szerint a tétel igaz a $\pi|\pi^{-1}(U): \pi^{-1}(U) \to U$, $\pi|\pi^{-1}(U'): \pi^{-1}(U') \to U'$ és $\pi|\pi^{-1}(U \cap U'): \pi^{-1}(U \cap U') \to U \cap U'$ fibrált nyalábokra. Legyen d_i az x_i foka és jelöljön t_i d_i-fokú határozatlant. $V \subset M$ nyílt halmaz esetén legyenek

$$K^r(V) = \bigoplus_{i=1}^{l} H^{r-d_i}(V; R) \cup t_i, \quad L^r(V) = H^r\left(\pi^{-1}(V), \pi^{-1}(V) \cap E_0; R\right)$$

és

$$\theta_V: K^r(V) \to L^r(V)$$

az a homomorfizmus, amelyre $\theta_V(y \cup t_i) = \pi^*(y) \cup x_i$, $y \in H^{r-d_i}(V; R)$, $i=1, \ldots, l$. A tétel pontosan akkor igaz a $\pi|\pi^{-1}(V): \pi^{-1}(V) \to V$ fibrált nyalábra, ha θ_V izomorfizmus. Az előbbiek szerint θ_U, $\theta_{U'}$, $\theta_{U \cap U'}$ izomorfizmusok. A K^r és L^r funktorok kohomológia modulusokból épülnek fel, azaz a Mayer—Vietoris-sorozat konstrukciója ezekre végrehajtható. Így kapjuk a

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \leftarrow K^r(U \cap U') & \leftarrow & K^r(U) \oplus K^r(U') & \leftarrow & K^r(U \cup U') & \leftarrow & \\
\downarrow\theta_{U \cap U'} & & \downarrow\theta_U \oplus \theta_{U'} & & \downarrow\theta_{U \cup U'} & & \\
\ldots \leftarrow L^r(U \cap U') & \leftarrow & L^r(U) \oplus L^r(U') & \leftarrow & L^r(U \cup U') & \leftarrow & \\
\leftarrow K^{r-1}(U \cap U') & \leftarrow & K^{r-1}(U) \oplus K^{r-1}(U') & \leftarrow \ldots & & & \\
\downarrow\theta_{U \cap U'} & & \downarrow\theta_U \oplus \theta_{U'} & & & & \\
\leftarrow L^{r-1}(U \cap U') & \leftarrow & L^{r-1}(U) \oplus L^{r-1}(U') & \leftarrow \ldots & & &
\end{array}$$

kommutatív diagramot, amelyben a sorok egzaktak. Az öt-lemma szerint $\theta_{U \cup U'}$ izomorfizmus, amivel az indukciós lépést végrehajtottuk. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A fejezet hátralevő részében azt vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van két tér szorzatának kohomológia modulusa és a tényezők kohomológia modulusai között. Ehhez először egy új műveletet vezetünk be.

Legyenek (M, N) és (M', N') nyílt párok, azaz $N \subset M$ és $N' \subset M'$ nyílt alterek és jelöljék $\pi: (M \times M', N \times M') \to (M, N)$ és $\pi': (M \times M', M \times N') \to (M', N')$

projekciókat. $x\in H^r(M, N; R)$ és $x'\in H^{r'}(M', N'; R)$ esetén az x és x' *kereszt-szorzata*

$$x\times x' = \pi^*(x)\cup\pi'^*(x')\in H^{r+r'}\big(M\times M', (N\times M')\cup(M\times N'); R\big).$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $(M, N)\times(M', N')=\big(M\times M', (N\times M')\cup(M\times N')\big)$.

1.2. Tétel. *Legyenek M és M' topologikus terek és tegyük fel, hogy $H^*(M; R)$ vagy $H^*(M'; R)$ végesen generált szabad R-modulus. Ekkor*

$$\times: \bigoplus_{i+i'=r} H^i(M; R)\underset{R}{\otimes} H^{i'}(M'; R)\to H^r(M\times M'; R)$$

izomorfizmus.

A fenti típusú tételeket, amelyek tehát egy $M\times M'$ szorzat kohomológia modulusa és az M és M' terek kohomológia modulusai között teremtenek kapcsolatot, *Künneth típusú* tételeknek nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $H^*(M'; R)$ végesen generált szabad R-modulus $\{z_1, \ldots, z_l\}$ bázissal és tekintsük a $\pi: M\times M'\to M$ triviális fibrált nyalábot. $p\in M$ esetén legyen $i_p: M'\to M\times M'$, $i_p(p')=(p, p')$, $p'\in M'$. Jelölje $\pi': M\times M'\to M'$ a természetes projekciót és legyen $x_j=\pi'^*(z_j)$, $j=1, \ldots, l$. Ekkor $x_1, \ldots, x_l\in H^*(M\times M'; R)$ homogén elemek és $i_p^*(x_j)=z_j$, $j=1, \ldots, l$. Az általános Leray—Hirsch-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy $H^*(M\times M'; R)$ szabad $H^*(M; R)$-modulus az $x_1, \ldots, x_l$ báziselemekkel és az $y\cdot x=\pi^*(y)\cup x$ szorzással, $y\in H^*(M; R)$, $x\in H^*(M\times M'; R)$. Legyen $x\in H^*(M\times M'; R)$ tetszőleges. Ekkor

$$x=\sum_{j=1}^{l}\pi^*(y_j)\cup x_j=\sum_{j=1}^{l}\pi^*(y_j)\cup\pi'^*(z_j)=\sum_{j=1}^{l}y_j\times z_j,$$

ahol $y_j\in H^*(M; R)$, azaz x ráképezés. Tegyük fel, hogy $\sum_{j=1}^{l}y_j\times z_j=0$, $y_j\in H^*(M; R)$. Ekkor $\sum_{j=1}^{l}\pi^*(y_j)\cup x_j=\sum_{j=1}^{l}y_j\cdot x_j=0$, amiből $y_j=0$, $j=1, \ldots, l$, adódik. Kapjuk, hogy x injektív, azaz izomorfizmus.

Megjegyzések. 1. A tétel M helyett (M, N) nyílt párt véve is érvényben marad.

2. Legyenek $C=\{C^r\}_{r\in\mathbf{Z}}$, $C'=\{C'^r\}_{n\in\mathbf{Z}}$ kolánc-komplexusok. Ekkor a C és C' kolánc komplexusok $C\otimes C'$ tenzorszorzata az a kolánc-komplexus, amelyre $(C\otimes C')^r=\bigoplus_{i+i'=r} C^i\otimes C'^{i'}$ és a kohatár operátor $\delta: C^i\otimes C'^{i'}\to C^{i+1}\otimes C'^{i'}\oplus\oplus C^i\otimes C'^{i'+1}$, $\delta(x\otimes x')=(\delta x)\otimes x'\to(-1)^i x\otimes\delta x'$. Az előbbi tétel pont azt mondja ki, hogy a kereszt-szorzás egy

$$\times: H^*(M; R)\otimes H^*(M'; R)\to H^*(M\times M'; R)$$

izomorfizmus.

2. A Thom-izomorfizmus és az Euler-osztály

Legyen M topologikus tér és ξ az M bázistér feletti, $\pi: E(\xi)\to M$ projekciójú, k-rangú topologikus vektornyaláb. Jelölje $E_0(\xi)\subset E(\xi)$ a nemzérus vektorok nyílt topologikus alterét. Ekkor $\pi: \big(E(\xi), E_0(\xi)\big)\to M$ $(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}_0^k)$ fibrumtípusú topologikus fibrált nyaláb, ahol $\mathbf{R}_0^k=\mathbf{R}^k-\{0\}$. $p\in M$ esetén legyen $i_p: \mathbf{R}^k\to\pi^{-1}(p)\subset E(\xi)$ lineáris izomorfizmus.

2.1. Lemma. *Létezik pontosan egy* $V_\xi \in H^{k-1}(E_0(\xi); \mathbf{Z}_2)$ *kohomológia osztály, amelyre* $i_p^*(V_\xi) \in H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}_2) (\cong \mathbf{Z}_2)$ *generátorelem.*

Bizonyítás. A lemmát ismét csak abban a speciális esetben igazoljuk, amikor ξ finit típusú. Tekintsük a $\pi_0 = \pi | E_0(\xi) : E_0(\xi) \to M$ fibrált nyalábot. Legyen először M pontra összehúzható; ξ triviális, azaz $E_0(\xi) = M \times \mathbf{R}_0^k$. A Künneth tétel szerint $H^0(M; \mathbf{Z}_2) \underset{\mathbf{Z}_2}{\otimes} H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\times} H^{k-1}(E_0(\xi); \mathbf{Z}_2)$ izomorfizmus. Legyen $V_\xi = 1 \times e_0$, ahol $e_0 \in H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}_2)$ a generátorelem. Ekkor $i_p^*(V_\xi) = e_0$, amivel az állítást ebben az esetben beláttuk.

Legyenek U' és U'' nyílt alterek M-ben, $U' \cap U''$ pontra összehúzható; $\pi_0^{-1}(U') = E_0'(\xi)$, $\pi_0^{-1}(U'') = E_0''(\xi)$, $\pi_0^{-1}(U' \cap U'') = E_0^{\cap}(\xi)$ és $\pi_0^{-1}(U' \cup U'') = E_0^{\cup}(\xi)$ és tegyük fel, hogy a $V_\xi' \in H^{k-1}(E_0'(\xi); \mathbf{Z}_2)$ és $V_\xi'' \in H^{k-1}(E_0''(\xi); \mathbf{Z}_2)$ kohomológia osztályokat a fenti tulajdonsággal megkonstruáltuk. A Mayer—Vietoris-sorozat:

$$\dots \to \underbrace{H^{k-2}(E_0^{\cap}(\xi); \mathbf{Z}_2)}_{=0} \xrightarrow{\delta} H^{k-1}(E_0^{\cup}(\xi); \mathbf{Z}_2) \to$$

$$\to H^{k-1}(E_0'(\xi); \mathbf{Z}_2) \oplus H^{k-1}(E_0''(\xi); \mathbf{Z}_2) \to H^{k-1}(E_0^{\cap}(\xi); \mathbf{Z}_2) \to \dots$$

Az egyértelműség miatt $V_\xi' | E_0^{\cap}(\xi) = V_\xi'' | E_0^{\cap}(\xi)$, azaz a (V_ξ', V_ξ'') pár a sorozatban zérusra képződik. Az egzaktság miatt létezik pontosan egy $V_\xi^{\cup} \in H^{k-1}(E_0^{\cup}(\xi); \mathbf{Z}_2)$ elem, amelyre $V_\xi^{\cup} | E_0'(\xi) = V_\xi'$ és $V_\xi^{\cup} | E_0''(\xi) = V_\xi''$. Ezután az állítás a Leray—Hirsch-tétel bizonyításában szereplő indukcióval adódik.

2.2. Lemma. *Létezik pontosan egy* $U_\xi \in H^k(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}_2)$ *kohomológia osztály, amelyre* $i_p^*(U_\xi) \in H^k(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}_2) (\cong \mathbf{Z}_2)$ *generátorelem.*

Az U_ξ *kohomológia osztály a* ξ *topologikus vektornyaláb Thom-osztálya.*

Bizonyítás. Tekintsük az $i_p : (\mathbf{R}^k, \mathbf{R}_0^k) \to (E(\xi), E_0(\xi))$ pár leképezést és a megfelelő párok egzakt kohomológia sorozatait. Így kapjuk a

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to H^{k-1}(E(\xi); \mathbf{Z}_2) & \to & H^{k-1}(E_0(\xi); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^k(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}_2) & \to & H^k(E(\xi); \mathbf{Z}_2) & \to \\
\downarrow i_p^* & & \downarrow i_p^* & & \downarrow i_p^* & & \downarrow i_p^* & \\
\to H^{k-1}(\mathbf{R}^k; \mathbf{Z}_2) & \longrightarrow & H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\cong} & H^k(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}_2) & \to & H^k(\mathbf{R}^k; \mathbf{Z}_2) & \to
\end{array}$$

kommutatív diagramot. Ekkor $U_\xi = \delta V_\xi$ választással az állítás adódik.

2.3. Thom-izomorfizmus tétel. *Legyen* ξ *az* M *bázistér feletti* k*-rangú topologikus vektornyaláb. Ekkor a*

$$\psi : H^r(E(\xi); \mathbf{Z}_2) \to H^{r+k}(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}_2), \quad \psi(x) = x \cup U_\xi, \quad x \in H^r(E(\xi); \mathbf{Z}_2),$$

leképezés izomorfizmus.

Bizonyítás. A $\pi : E(\xi) \to M$ projekció homotopikus ekvivalencia tehát a $\pi^* : H^*(M; \mathbf{Z}_2) \to H^*(E(\xi); \mathbf{Z}_2)$ indukált leképezés izomorfizmus. A Leray—Hirsch tételt a $\pi : (E(\xi), E_0(\xi)) \to M$ fibrált nyalábra alkalmazva kapjuk, hogy $H^*(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}_2)$ szabad $H^*(M; \mathbf{Z}_2)$-modulus az U_ξ Thom-osztállyal, mint egyetlen generátorelemmel, ahol egy $y \in H^*(M; \mathbf{Z}_2)$ elemmel úgy szorzunk, hogy $y \cdot U_\xi = \pi^*(y) \cup U_\xi$. Ebből a tétel következik.

Legyen ξ az M bázistér feletti k-rangú topologikus vektornyaláb. Jelölje $i : E(\xi) \subset (E(\xi), E_0(\xi))$ a tartalmazást. A ξ vektornyaláb $e(\xi) \in H^k(M; \mathbf{Z}_2)$ *Euler-osztálya* az a kohomológia osztály, amelyre $e(\xi) = \pi^{*-1} i^*(U_\xi)$.

2.4. Tétel. *Legyenek M és M' topologikus terek, $f: M \to M'$ folytonos leképezés és ξ az M' bázistér feletti topologikus vektornyaláb. Ekkor* $e(f^*(\xi)) = f^*(e(\xi))$.

Bizonyítás. A Thom-osztály egyértelműsége miatt $U_{f^*(\xi)} = \tilde{f}^*(U_\xi)$, ahol $\tilde{f}: (E(f^*(\xi)), E_0(f^*(\xi))) \to (E(\xi), E_0(\xi))$ az f által indukált leképezés. Ebből az állítás egyszerűen következik.

2.5. Következmény. Ha ξ az M bázistér feletti triviális topologikus vektornyaláb, akkor $e(\xi) = 0$.

2.6. Tétel. *Legyenek ξ, ill. ξ' az M ill. M' bázistér feletti topologikus vektornyalábok. Ekkor* $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ *és* $M = M'$ *esetén* $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$.

Bizonyítás. Elegendő az első egyenlőséget igazolni, hiszen a $\Delta: M \to M \times M$ diagonális leképezés menti visszahúzással, a (2.4) tétel szerint, az első egyenlőségből a másodikat kapjuk.

A Thom osztály egyértelműségéből egyszerű számolással adódik, hogy $U_{\xi \times \xi'} = U_\xi \times U_{\xi'}$ érvényes, amiből az első egyenlőség adódik.

2.7. Következmény. *Ha a ξ M bázistér feletti topologikus vektornyalábnak van seholsem zérus szelése, akkor* $e(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\varphi: M \to E_0(\xi) \subset E(\xi)$ seholsem zérus szelés, azaz $\pi\varphi =$ identitás. Ekkor a

$$H^k(M; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E(\xi); \mathbf{Z}_2) \to H^k(E_0(\xi); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\varphi^*} H^k(M; \mathbf{Z}_2)$$

kompozíció identitás. Ha a ξ vektornyaláb rangja k, akkor az $e(\xi)$ Euler-osztályt az $i^*(U_\xi)$ osztályra képezi, amely a következő leképezéssel az $i^*(U_\xi)|E_0(\xi)$ osztályra képződik. Az $(E(\xi), E_0(\xi))$ pár egzakt kohomológia sorozata szerint a

$$H^k(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^k(E(\xi); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{|E_0(\xi)} H^k(E_0(\xi); \mathbf{Z}_2)$$

kompozíció zérus, azaz $i^*(U_\xi)|E_0(\xi) = 0$, amiből az állítás következik.

Egy ξ k-rangú topologikus vektornyalábot *irányíthatónak* nevezünk, ha struktúracsoportja redukálható az $SO(k)$ Lie-csoportra. A III. rész (5.3) tétele szerint egy M differenciálható sokaság pontosan akkor irányítható, ha $T(M)$ tangensnyalábja irányítható. Ha a redukció adott, akkor ξ-t irányított vektornyalábnak nevezzük.

Legyen ξ az M bázistér feletti k-rangú irányított topologikus vektornyaláb. Ekkor létezik olyan $\pi: P \to M$ $SO(k)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, amelyre ξ izomorf a $\pi_E: P \times_{SO(k)} \mathbf{R}^k \to M$ vektornyalábbal, azaz $E(\xi) = P \times_{SO(k)} \mathbf{R}^k$. Állítsuk elő a $\pi: P \to M$ principális nyalábot az I. rész 3. fejezetében leírt átmenet függvények segítségével. Legyen $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ az M bázistér nyílt fedése és $\alpha \in I$ esetén $h_{U_\alpha} = (\pi, \varkappa_\alpha): \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times SO(k)$ trivializáló leképezés. Ekkor $\alpha, \beta \in I$ esetén a $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to SO(k)$ átmenet függvényt a $\psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) = \varkappa_\beta(u)(\varkappa_\alpha(u))^{-1}$ egyenlőséggel definiáljuk. Legyenek $k_{U_\alpha}: \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbf{R}^k$ és $k_{U_\beta}: \pi_E^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbf{R}^k$ a h_{U_k} és h_{U_β} trivializáló leképezésekből asszociálással származó trivializáló leképezések (I. rész 4. fejezet). Ekkor a $\psi_{\beta\alpha}$ támenet függvényt használva egyszerű számolással adódik, hogy létezik $A_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to SO(k)$ leképezés, amelyre $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ esetén $k_{U_\beta}(k_{U_\alpha}^{-1}(p, \cdot)) = (p, A_{\beta U}(\cdot))$ teljesül.

Legyen $e_0 \in H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z})(\cong \mathbf{Z})$ *rögzített* generátorelem.

2.8. Lemma. *Legyen ξ k-rangú irányított topologikus vektornyaláb. Ekkor egyértelmű módon megadható egy $V_\xi \in H^{k-1}(E_0(\xi); \mathbf{Z})$ kohomológia osztály, amelyre* $e_0 = i_p^*(V_\xi) \in H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z})$ *generátorelem.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\pi_0: E_0(\xi) \to M$ fibrált nyalábot. A (2.1) lemma igazolásával analóg módon csak azt a speciális esetet tekintjük, amikor ξ finit típusú. Ekkor létezik az M térnek $\{U_i | i=1, \ldots, n\}$ nyílt fedése $k_{U_i}: \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{R}^k$ trivializáló leképezésekkel és $A_{i'i}: U_i \cap U_{i'} \to SO(k)$ átmenet mátrixokkal úgy, hogy $U_i \cap U_{i'}$ pontra összehúzható, $i, i' = 1, \ldots, n$. n szerinti indukcióval bizonyítunk. $n=1$ esetén M pontra összehúzható; ξ triviális, azaz a k_M lokális trivializálást végrehajtva, feltehető, hogy $E_0(\xi) = M \times \mathbf{R}_0^k$. A Künneth-tétel szerint

$$H^0(M; \mathbf{Z}) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} H^{k-1}(\mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\times} H^{k-1}\big(E_0(\xi); \mathbf{Z}\big)$$

izomorfizmus. $V_\xi = 1 \times e_0$ választással az indukció első lépése kész.

Az indukció általános lépésében $U' = U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$, $U'' = U_n$;

$$\pi_0^{-1}(U') = E_0'(\xi),\ \pi_0^{-1}(U'') = E_0''(\xi),\ \pi_0^{-1}(U' \cap U'') =$$

$$= E_0^{\cap}(\xi) \text{ és } \pi_0^{-1}(U' \cup U'') = E_0^{\cup}(\xi)$$

és tegyük fel, hogy a $V_\xi' \in H^{k-1}\big(E_0'(\xi); \mathbf{Z}\big)$ és $V_\xi'' \in H^{k-1}\big(E_0''(\xi); \mathbf{Z}\big)$ kohomológia osztályokat megkonstruáltuk úgy, hogy $p' \in U_i \subset U'$, $i=1, \ldots, n-1$, $p'' \in U''$ esetén a $k_{U_i}^*\big(V_\xi' | \pi^{-1}(p)\big)$ és a $k_{U''}^*\big(V_\xi'' | \pi_0^{-1}(p'')\big)$ kohomológia osztályok az e_0 osztálynak felelnek meg. A Mayer—Vietoris-sorozat

$$\ldots \to \underbrace{H^{k-2}\big(E_0^{\cap}(\xi); \mathbf{Z}\big)}_{=0} \xrightarrow{\delta} H^{k-1}\big(E_0^{\cup}(\xi); \mathbf{Z}\big) \to H^{k-1}\big(E_0'(\xi); \mathbf{Z}\big) \oplus H^{k-1}\big(E_0''(\xi); \mathbf{Z}\big) \to$$

$$\to H^{k-1}\big(E_0^{\cap}(\xi); \mathbf{Z}\big) \to \ldots$$

Legyen $p \in U' \cap U''$, azaz $p \in U_i \cap U_n$ valamely $i=1, \ldots, n-1$ esetén. A III. rész (5.2) lemmájának kohomologikus változata és $0\big(A_{ni}(p)\big)=1$ miatt $k_{U_i}^*\big(V_\xi' | \pi_0^{-1}(p)\big) = k_{U''}^*\big(V_\xi'' | \pi_0^{-1}(p)\big)$, azaz $V_\xi' | E_0^{\cap}(\xi) = V_\xi'' | E_0^{\cap}(\xi)$ teljesül. A fenti sorozat egzaktsága miatt létezik pontosan egy $V_\xi^{\cup} \in H^{k-1}\big(E_0^{\cup}(\xi); \mathbf{Z}\big)$ elem, amelyre $V_\xi^{\cup} | E_0'(\xi) = V_\xi'$ és $V_\xi^{\cup} | E_0''(\xi) = V_\xi''$ teljesül. Ezzel az indukciós lépést végrehajtottuk és a bizonyítást befejeztük.

2.9. Lemma. *Legyen ξ k-rangú topologikus vektornyaláb. Ekkor létezik pontosan egy $U_\xi \in H^k\big(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}\big)$ kohomológia osztály, amelyre $i_p^*(U_\xi) \in H^k(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}_0^k; \mathbf{Z})$ generátorelem.*

Az U_ξ kohomológia osztály a ξ irányított vektornyaláb Thom-osztálya.

Bizonyítás. Analóg a (2.2) lemma igazolásával.

(2.10). Thom izomorfizmus tétel. *Legyen ξ az M bázistér feletti k-rangú irányított topologikus vektornyaláb. Ekkor a*

$$\psi: H^r\big(E(\xi); \mathbf{Z}\big) \to H^{r+k}\big(E(\xi), E_0(\xi); \mathbf{Z}\big),\ \psi(x) = x \cup U_\xi,\ x \in H^r\big(E(\xi); \mathbf{Z}\big)$$

leképezés izomorfizmus.

Bizonyítás. A Leray—Hirsch-tétel egyszerű alkalmazása (2.3) mintájára.

Legyen ξ az M bázistér feletti k rangú irányított topologikus vektornyaláb az U_ξ Thom-osztállyal. A ξ vektornyaláb *Euler osztálya* $e(\xi) = \pi^{*-1} i^*(U_\xi) \in H^k(M; \mathbf{Z})$, ahol $i: E(\xi) \subset \big(E(\xi), E_0(\xi)\big)$ a tartalmazás. A (2.4)—(2.7) állítások továbbra is érvényben maradnak, azaz érvényes a következő:

2.11. Tétel

(1) *Legyenek M és M' topologikus terek, $f: M' \to M$ folytonos leképezés és ξ az M bázistér feletti irányított topologikus vektornyaláb, Ekkor* $e(f^*(\xi)) = f^*(e(\xi))$,

(2) *Legyen ξ, ill. ξ' az M, ill. M' bázistér feletti irányított topologikus vektornyaláb. Ekkor* $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ *és* $M = M'$ *esetén* $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$,

(3) *Ha a ξ M bázistér feletti irányított topologikus vektornyalábnak van seholsem zérus szelése, akkor* $e(\xi) = 0$.

2.12. Tétel. *Legyen ξ k rangú irányított topologikus vektornyaláb, ahol k páratlan. Ekkor*

$$e(\xi) + e(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. Jelölje $\pi: E(\xi) \to M$ a projekciót. Ekkor

$$\psi\pi^*(e(\xi)) = \pi^*(e(\xi)) \cup U_\xi = (U_\xi | E_0(\xi)) \cup U_\xi = U_\xi \cup U_\xi.$$

Ha k páratlan, akkor a $\cup$ szorzás antikommutativitása miatt $U_\xi \cup U_\xi = -U_\xi \cup U_\xi$ amiből, figyelembe véve, hogy $\psi\pi^*$ izomorfizmus, az állítás következik.

Legyen M m-dimenziós irányított differenciálható sokaság. Ekkor a III. rész (5.3) tétele szerint a $T(M)$ tangensnyaláb irányított vektornyaláb M felett. Az M sokaság $e(M)$ Euler osztálya az $e(T(M)) \in H^m(M; \mathbf{Z})$ kohomológia osztály. A (2.7) következmény szerint, ha az sokaságon van seholsem eltűnő vektormező, akkor $e(M) = 0$. Speciálisan az I. rész (3.1) (b) példája alapján a páratlan dimenziós gömbök Euler osztálya zérus.

3. Gysin-sorozat és $H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$, ill. $H^*(\mathbf{C}P^m; \mathbf{R})$ kiszámítása

A Thom izomorfizmus segítségével minden ξ topologikus vektornyalábhoz egy egzakt kohomológia sorozatot készíthetünk, amely az M bázistér és az $E_0(\xi)$ tér kohomológiái között teremt kapcsolatot. A továbbiakban megállapodunk abban, hogy a kohomológiáknál, irányított vektornyalábok esetén $\mathbf{Z}$-beli együtthatókat, nem irányított vektornyalábok esetén $\mathbf{Z}_2$-beli együtthatókat használunk anélkül, hogy ezeket külön feltüntetnénk. A $\psi\pi^*: H^r(M) \to H^{r+k}(E(\xi), E_0(\xi))$ izomorfizmust ϱ-val jelöljük.

3.1. Tétel. *Legyen ξ az M bázistér felett egy k rangú topologikus vektornyaláb. Ekkor létezik egy*

$$\ldots \to H^r(M) \xrightarrow{\cup e(\xi)} H^{r+k}(M) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{r+k}(E_0(\xi)) \to H^{r+1}(M) \to \ldots$$

egzakt sorozat, ahol $\pi_0: E_0(\xi) \to M$ a projekció.

A fenti egzakt sorozatot a ξ vektornyaláb *Gysin-sorozatának* nevezzük.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to H^{r+k}(E(\xi), E_0(\xi)) & \xrightarrow{i^*} & H^{r+k}(E(\xi)) & \to & H^{r+k}(E_0(\xi)) & \to & H^{r+k+1}(E(\xi), E_0(\xi)) & \to \\
\uparrow \varrho & & \uparrow \pi^* & & \uparrow \mathrm{id} & & \uparrow \varrho & \\
\to H^r(M) & \longrightarrow & H^{r+k}(M) & \xrightarrow{\pi_0^*} & H^{r+k}(E_0(\xi)) & \longrightarrow & H^{r+1}(M) & \to
\end{array}$$

kommutatív diagramot, amelyben a sorok egzaktak (a felső sor az $(E(\xi), E_0(\xi))$ pár egzakt kohomológia sorozata). A tétel bizonyításához mindössze azt kell megmutatnunk, hogy a $\pi^{*-1} i^* \varrho$ kompozíció az $e(\xi)$ Euler osztállyal való szorzás. Valóban,

$x \in H^r(M)$ esetén

$$\pi^{*-1} i^* \varrho(x) = \pi^{*-1} i^* (\pi^*(x) \cup U_\xi) = \pi^{*-1} (\pi^*(x) \cup i^*(U_\xi)) =$$

$$= x \cup (\pi^{*-1} i^*(U_\xi)) = x \cup e(\xi),$$

amivel az állítást igazoltuk.

A Gysin-sorozat segítségével $H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$ meghatározható.

3.2. Tétel. *A* $H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$ *kohomológia gyűrű izomorf az egyhatározatlanú, legfeljebb m-edfokú,* $\mathbf{Z}_2$*-beli együtthatójú polinomok gyűrűjével, azaz* $H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2[x]/x^{m+1} = 0$, *ahol x foka 1.*

Bizonyítás. Tekintsük az I. rész (3.4) (d) példájában definiált γ_m^1 kanonikus vonalnyalábot, amely egy $\mathbf{R}P^m$ bázisterű 1 rangú differenciálható vektornyaláb. Ekkor a $\pi_0 : E_0(\gamma_m^1) \to \mathbf{R}P^m$ fibrált nyaláb fibrum típusa $\mathbf{R} - 0$, azaz $E_0(\gamma_m^1)$ homotopikusan ekvivalens az $\mathbf{R}P^m$ egy kettős fedőterével, amely nem lehet más, mint S^m. Így a γ_m^1 vektornyaláb Gysin sorozata

$$\to H^r(S^m) \to H^r(\mathbf{R}P^m) \xrightarrow{\cup e(\gamma_m^1)} H^{r+1}(\mathbf{R}P^m) \to H^{r+1}(S^m) \to \ldots$$

$$\ldots \to H^m(S^m) \to H^m(\mathbf{R}P^m) \to 0$$

amelyből egyszerűen következik, hogy $0 < r < m-1$ esetén $\cup e(\gamma_m^1) : H^r(\mathbf{R}P^m) \to H^{r+1}(\mathbf{R}P^m)$ izomorfizmus. Így kapjuk, hogy

$$H^r(\mathbf{R}P^m) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{ha } r = 0, \ldots, m \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$r = 1, \ldots, m$ esetén $H^r(\mathbf{R}P^m)$ generátora $e(\gamma_m^1) \cup \ldots \cup e(\gamma_m^1)$ (r-szer), amiből az $x = e(\gamma_m^1)$ választással az állítás adódik.

Az I. rész (3.4) (e) példájában vett $\mathbf{C}P^m$ feletti γ_m^1 kanonikus vonalnyalábot véve adódik a következő:

3.3. Tétel. $H^*(\mathbf{C}P^m; \mathbf{Z})$ *izomorf az egyhatározatlanú, legfeljebb m-edfokú, komplex változós,* $\mathbf{Z}$*-beli együtthatójú polinomok gyűrűjével, azaz* $H^*(\mathbf{C}P^m; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[z]/z^{m+1} = 0$, *ahol z foka* 2.

Megjegyezzük, hogy γ_m^1 $\mathbf{C}P^m$ felett komplex vonalnyaláb, azaz mint valós vektornyaláb irányítható, és így $\mathbf{Z}$-beli együtthatójú kohomológiát vehetünk.

Az $\mathbf{R}P^0 \subset \mathbf{R}P^1 \subset \ldots \subset \mathbf{R}P^{r-1} \subset \mathbf{R}P^r \subset \ldots$ természetes tartalmazásokat tekintve kapjuk, hogy $\mathbf{R}P^\infty = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbf{R}P^r$ CW-komplexus, amelynek $r = 0, 1, \ldots$ esetén egy r-dimenziós nyílt cellája van. $1 \leqq m < m'$ esetén az $i : \mathbf{R}P^m \subset \mathbf{R}P^{m'}$ tartalmazás egy $i^* : H^*(\mathbf{R}P^{m'}; \mathbf{Z}_2) \to H^*(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$ homomorfizmust indukál. Az $i^*(e(\gamma_{m'}^1)) = e(i^*(\gamma_{m'}^1))$ egyenlőségből, az $(\mathbf{R}P^{m'}, \mathbf{R}P^m)$ pár egzakt kohomológia sorozatából és a III. rész (4.2) következményéből egyszerűen adódik, hogy $r < m$ esetén

$$i^* : H^r(\mathbf{R}P^{m'}; \mathbf{Z}_2) \to H^r(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2)$$

monomorfizmus. Így kapjuk, hogy $H^*(\mathbf{R}P^\infty; \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2[x]$. Hasonlóan a komplex esetben $H^*(\mathbf{C}P^\infty; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[z]$.

4. A Milnor konstrukció

Legyen G Lie-csoport és tekintsük a

$$\langle g, t\rangle = (t_0 g_0, t_1 g_1, \ldots, t_r g_r, \ldots)$$

alakú formális sorozatok halmazát, ahol $g_r \in G$, $0 \leqq t_r \leqq 1$, t_r véges sok kivétellel zérus és $\sum_{r=0}^{\infty} t_r = 1$. $\langle g, t\rangle = \langle g', t'\rangle$, ha $t_r = t_r' > 0$ esetén $g_r = g_r'$. Jelölje P_G az egyenlőség relációjával kapott osztályok halmazát. $r = 0, 1, \ldots$ esetén két természetes leképezés definiálható

$$t_r \colon P_G \to [0, 1], \quad t_r(\langle g, t\rangle) = t_r,$$

és

$$g_r \colon t_r^{-1}(0, 1] \to G, \quad g_r(\langle g, t\rangle) = g_r.$$

Lássuk el a P_G halmazt a legdurvább olyan topológiával, amelyre nézve a t_r és g_r leképezések folytonosak. G szabad jobb oldali transzformációcsoportot definiál P_G-n:

$$(t_0 g_0, t_1 g_1, \ldots) g' = (t_0 g_0 g', t_1 g_1 g', \ldots), \quad \langle g, t\rangle \in P_G, \; g' \in G,$$

amelyre $g_r(\langle g, t\rangle g') = g_r(\langle g, t\rangle) g'$ és $t_r(\langle g, t\rangle g') = t_r(\langle g, t\rangle)$ teljesülnek. Jelölje B_G a P_G pályaterét és $\pi_G \colon P_G \to B_G$ a természetes projekciót.

$m = 0, 1, \ldots$ esetén álljon $P_G(m) \subset P_G$ azon $\langle g, t\rangle$ elemekből, amelyekre $r > m$ esetén $t_r = 0$. Ekkor a

$$P_G(0) \subset P_G(1) \subset \ldots \subset P_G(m-1) \subset P_G(m) \subset \ldots$$

egyesítés P_G. A pályaterekre áttérve kapjuk, hogy B_G a

$$B_G(0) \subset B_G(1) \subset \ldots \subset B_G(m-1) \subset B_G(m) \subset \ldots$$

alterei növekvő sorozatának egyesítése.

4.1. Példa. (a) Legyen $G = 0(1) = \{-1, 1\}$. Ekkor $P_{0(1)}(m)$ azon $(t_0 \varepsilon_0, \ldots, t_m \varepsilon_m)$ véges sorozatok tere, amelyekre $\varepsilon_r = \pm 1$, $0 \leqq t_r \leqq 1$ és $\sum_{r=0}^{m} t_r = 1$ teljesülnek. Feleltessük meg a $(t_0 \varepsilon_0, \ldots, t_m \varepsilon_m) \in P_{0(1)}(m)$ elemnek a

$$\left(\frac{t_0 \varepsilon_0}{\sqrt{\sum_{r=0}^{m} t_r^2}}, \ldots, \frac{t_m \varepsilon_m}{\sqrt{\sum_{r=0}^{m} t_r^2}} \right) \in \mathbf{R}^m$$

vektort. Ez a megfeleltetés egy $P_{0(1)}(m) \to S^{m-1}$ homeomorfizmus. Kapjuk, hogy $P_{0(1)} = S^\infty$, az $0(1)$ csoport az S^∞ téren az id és $-id$ leképezésekkel hat, azaz $B_{0(1)} = \mathbf{R}P^\infty$ és $\pi_{0(1)} \colon S^\infty \to \mathbf{R}P^\infty$ a természetes projekció. Ekkor $\pi_{0(1)} \colon S^\infty \to \mathbf{R}P^\infty$ $0(1)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb.

(b) Legyen $G = U(1) \subset \mathbf{C}$ az egységnyi abszolútértékű komplex számok multiplikatív csoportja. $P_{U(1)}(m)$ egy eleme $(t_0 z_0, \ldots, t_m z_m)$ alakú, ahol $z_r \in \mathbf{C}$, $|z_r| = 1$, $0 \leqq t_r \leqq 1$, $r = 0, \ldots, m$, és $\sum_{r=0}^{m} t_r = 1$ teljesülnek. Feleltessük meg a $(t_0 z_0, \ldots, t_m z_m) \in P_{U(1)}(m)$ elemnek a

$$\left(\frac{t_0 z_0}{\sqrt{\sum_{r=0}^{m} |t_r z_r|^2}}, \ldots, \frac{t_m z_m}{\sqrt{\sum_{r=0}^{m} |t_r z_r|^2}} \right) \in \mathbf{C}^m$$

vektort. Ez a megfeleltetés egy $P_{U(1)}(m) \to S^{2m-1}$ homeomorfizmus, azaz $P_{U(1)} = S^\infty$, $B_{U(1)} = \mathbf{C}P^\infty$ és $\pi_{U(1)}: S^\infty \to \mathbf{C}P^\infty$ a természetes projekció. Ekkor $\pi_{U(1)}: S^\infty \to \mathbf{C}P^\infty$ $U(1)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb.

G és G' Lie-csoportok esetén $B_{G \times G'}$ azonosítható a $B_G \times B_{G'}$ szorzattérrel. Speciálisan, ha $\mathbf{T}^m$ az m-dimenziós tórusz, akkor $B_{\mathbf{T}^m} = \mathbf{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbf{C}P^\infty$ (m-szer).

4.2. Tétel. *Ha G Lie-csoport, akkor $\pi_G: P_G \to B_G$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb.*

Bizonyítás. Legyen $P_G^* = \{(a, a') \in P_G \times P_G \mid \pi_G(a) = \pi_G(a')\}$ és jelölje $\vartheta: P_G^* \to G$ azt a leképezést, amelyre $a\, \vartheta(a, a') = a'$, $(a, a') \in P_G^*$, teljesül. Ekkor $(a, a') \in (t_r^{-1}(0, 1] \times t_r^{-1}(0, 1]) \cap P_G^*$ esetén $\vartheta(a, a') = g_r(a) g_r(a')^{-1}$, azaz a $(t_r^{-1}(0, 1] \times t_r^{-1}(0, 1]) \cap P_G^*$ altéren ϑ folytonos. Az ilyen alakú alterek azonban lefedik P_G^*-ot, azaz $\vartheta: P_G^* \to G$ folytonos leképezés. $g \in G$ és $a \in P_G$ esetén $t_r(ag) = t_r(a)$ áll, amiből következik, hogy létezik olyan $u_r: B_G \to [0, 1]$ leképezés, amelyre $u_r \pi = t_r$ áll P_G-n. Igazoljuk, hogy az $U_r = u_r^{-1}(0, 1] = \pi(t_r^{-1}(0, 1])$ altér felett $\pi_G | \pi_G^{-1}(U_r): \pi_G^{-1}(U_r) \to U_r$ triviális. Ehhez a ϑ folytonossága miatt elegendő belátni, hogy létezik olyan $\varphi_r: U_r \to \pi_G^{-1}(U_r)$ folytonos leképezés, amelyre $\pi_G \varphi_r = \text{identitás}$. Legyen $\varphi_r': t_r^{-1}(0, 1] \to t_r^{-1}(0, 1]$, $\varphi_r'(a) = a g_r(a)^{-1}$, $a \in t_r^{-1}(0, 1]$. Ekkor $a \in t_r^{-1}(0, 1]$ és $g \in G$ esetén $\varphi_r'(ag) = \varphi_r'(a)$ teljesül, azaz létezik egy $\varphi_r: U_r \to t_r^{-1}(0, 1] \subset P_G$ folytonos leképezés, amelyre $\varphi_r' = \varphi_r \pi_G$. Ez a leképezés rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, amivel a tételt igazoltuk.

A III. rész (4.1) lemmája előtti megjegyzés szerint G Lie-csoport egy CW-komplexus tartóhalmaza. Ebből egyszerűen következik, hogy P_G CW-komplexus struktúrával ellátható. Miyazaki egy tétele szerint [5] P_G parakompakt. Így [1] B_G parakompakt topologikus tér.

4.3. Lemma. *Legyen M parakompakt topologikus tér és $\pi_E: E \to M$ topologikus fibrált nyaláb. Ekkor létezik az M bázistérnek olyan $\{U_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ lokálisan véges fedése, amelyre $i \in \mathbf{N}$ esetén $\pi_E | \pi_E^{-1}(U_i): \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i$ triviális, valamint létezik $v_i: M \to \mathbf{R}_+$ folytonos függvény, amelyre $v_i^{-1}(0, 1] \subset U_i$ és $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = 1$ teljesülnek.*

A $\{v_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ függvénycsaládot az $\{U_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ fedéshez tartozó *egységosztás*nak *nevezzük*.

Bizonyítás. Mivel M parakompakt, ezért létezik az M bázistérnek $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ lokálisan véges fedése úgy, hogy $\alpha \in I$ esetén $\pi_E | \pi_E^{-1}(U_\alpha): \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ triviális. Egyszerűen megmutatható [3], hogy létezik $v_\alpha: M \to \mathbf{R}_+$ folytonos függvény, amelyre $v_\alpha^{-1}(0, 1] = U_\alpha$ és $\sum_{\alpha \in I} v_\alpha = 1$ teljesülnek. Megmutatjuk, hogy I megszámlálható halmaznak választható.

$p \in M$ esetén legyen $I(p) = \{\alpha \in I \mid v_\alpha(p) > 0\}$. Az $I(p) \subset I$ halmaz nyilván véges. Ha $I' \subset I$ véges részhalmaz, akkor legyen $U(I') = \{p \in M \mid v_\alpha(p) > v_\beta(p)$, ha $\alpha \in I'$ és $\beta \in I - I'\}$. Ekkor $U(I') \subset M$ nyílt altér. Legyen $v_{I'}: M \to [0, 1]$ az a leképezés, amelyre $v_{I'}(p) = \max(0, \min\{v_\alpha(p) - v_\beta(p) \mid \alpha \in I', \beta \in I - I'\})$. Ekkor $U(I') = v_{I'}^{-1}(0, 1]$. Állítjuk, hogy $I', I'' \subset I$, $|I'| = |I''|$, különböző véges részhalmazok esetén $U(I') \cap U(I'') = \emptyset$. Legyenek $\alpha' \in I' - I''$ és $\alpha'' \in I'' - I'$. Ekkor $p \in U(I')$ esetén $v_{\alpha'}(p) > v_{\alpha''}(p)$ és $p \in U(I'')$ esetén $v_{\alpha''}(p) > v_{\alpha'}(p)$. Ez a két reláció egyidejűleg nem állhat fenn, azaz $U(I')$ és $U(I'')$ diszjunktak. $r = 1, 2, \ldots$ esetén legyenek

$U_r = \bigcup_{|I'|=r} U(I')$ és $v_r = \sum_{|I'|=r} v_{I'}$. Ekkor $v_r^{-1}(0, 1] = U_r$. Ha $\hat{v}_r = \frac{v_r}{\sum_{s=1}^{\infty} v_s}$ akkor $\hat{v}_r^{-1}(0, 1) = U_r$ és $\pi_E|\pi_E^{-1}(U_r)$ triviális nyaláb projekciója, hiszen $\pi_E|\pi_E^{-1}(U(I'))$ is az. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. A fejezet fő eredménye a következő:

4.4. Tétel. *Legyen $\pi: P \to M$ az M parakompakt tér feletti G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ekkor létezik $f: M \to B_G$ folytonos leképezés úgy, hogy a $\pi_G: P_G \to B_G$ principális nyaláb f-menti visszahúzottja izomorf a $\pi: P \to M$ principális nyalábbal. Legyenek $f', f'': M \to B_G$ folytonos leképezések. Ekkor $f' \simeq f''$ akkor és csak akkor, ha a $\pi_G: P_G \to B_G$ principális nyaláb f'- és f''-menti visszahúzottjai izomorfak.*

A $\pi_G: P_G \to B_G$ principális nyalábot, a tételben szereplő tulajdonsága miatt, *klasszifikáló principális nyaláb*nak nevezzük.

A 4.4. Tétel első felének bizonyítása. Legyen $\pi: P \to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, $\{v_r | r \in \mathbf{N}\}$ egységosztás, $U_r = v_r^{-1}(0, 1]$ és $h_r: \pi^{-1}(U_r) \to U_r \times G$ trivializáló leképezés, $r \in \mathbf{N}$. Legyen $\tilde{f}: P \to P_G$ az a leképezés, amelyre $u \in P$ esetén $\tilde{f}(u) = (v_0(\pi(u))(q_0(h_0(u))), \ldots, v_r(\pi(u))(q_r(h_r(u))), \ldots)$, ahol $q_r: U_r \times G \to G$ a természetes projekció. Az $\tilde{f}$ leképezés egy $f: M \to B_G$ leképezést indukál úgy, hogy a

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P_G \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_G} \\ M & \xrightarrow{f} & B_G \end{array}$$

diagram kommutatív. Jelölje $f^*(P_G) \subset M \times P_G$ a $\pi_G: P_G \to B_G$ principális nyaláb f-menti visszahúzottjának totális terét és legyen $\sigma: P \to f^*(P_G)$ az a leképezés, amelyre $\sigma(u) = (\pi(u), \tilde{f}(u))$, $u \in P$. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy σ principális nyalábok egy izomorfizmusát definiálja, amivel a (4.4) tétel első felét beláttuk.

Mielőtt a tétel második felének bizonyításához kezdenénk igazoljuk a következő lemmát:

4.5. Lemma. *Legyen M parakompakt topologikus tér és $\pi: P \to M \times [0, 1]$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ekkor létezik az $M \times [0, 1]$ bázistérnek olyan $\{U_\alpha \times [0, 1] | \alpha \in I\}$ fedése, hogy $\alpha \in I$ esetén $\pi|\pi^{-1}(U_\alpha \times [0, 1]): \pi^{-1}(U_\alpha \times [0, 1]) \to U_\alpha \times [0, 1]$ triviális.*

Bizonyítás. Mivel $M \times [0, 1]$ parakompakt, ezért létezik az $M \times [0, 1]$ térnek olyan $\{U_r' | r \in \mathbf{N}\}$ lokálisan véges fedése, amelyre $\pi|\pi^{-1}(U_r'): \pi^{-1}(U_r') \to U_r'$ triviális és $r \in \mathbf{N}$ esetén létezik $v_r: M \times [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ folytonos függvény, amelyre $v_r^{-1}(0, 1] = U_r'$ és $\sum_{r=1}^{\infty} v_r = 1$ teljesülnek. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ esetén legyen

$$v_\alpha(p) = \prod_{i=1}^{n} \min \left\{ v_{\alpha_i}(p, t) \,\middle|\, \frac{i-1}{n} \leqq t \leqq \frac{i}{n} \right\}, \quad p \in M.$$

Ekkor $v_\alpha: M \to [0, 1]$ folytonos. Emellett $v_\alpha(p) > 0$ akkor és csak akkor, ha

$i=1, \ldots, n$ esetén $\{p\}\times\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\subset v_{\alpha_i}^{-1}(0, 1]$ teljesül. Így $v_{\alpha_i}^{-1}(0, 1]\times\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\subset$ $\subset v_{\alpha_i}^{-1}(0, 1]$ azaz $\pi: P\to M\times[0, 1]$ a $v_\alpha^{-1}(0, 1]\times\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ altérre megszorítva triviális. Ebből következik, hogy a $\pi: P\to M\times[0, 1]$ principális nyaláb a $v_\alpha^{-1}(0, 1]\times$ $\times[0, 1]$ altérre megszorítva is triviális. $I=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{N}^n$, $U_\alpha=v_\alpha^{-1}(0, 1]$, $\alpha\in I$, választással a lemmát igazoltuk.

A 4.4. Tétel második felének bizonyítása. Legyenek M és M' parakompakt topologikus terek, $f', f'': M'\to M$ homotóp folytonos leképezések és $\pi: P\to M$ G struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Megmutatjuk, hogy a $\pi: P\to M$ principális nyaláb $\pi': f'^*(P)\to M'$ és $\pi'': f''^*(P)\to M'$ f'- és f''-menti visszahúzottjai izomorfak. Mivel f' és f'' homotópak, létezik $H: M'\times[0, 1]\to M$ folytonos leképezés, amelyre $H(p, 0)=f'(p)$ és $H(p, 1)=f''(p)$, $p\in M$, teljesül. Tekintsük a $\pi: P\to M$ principális nyaláb $\bar\pi: H^*(P)\to M'\times[0, 1]$ H-menti visszahúzottját. $0\leqq t\leqq 1$ esetén legyen $i_t: M'\to M'\times[0, 1]$, $i_t(p')=(p', t)$ $p'\in M'$. A (4.6) lemmából egyszerűen következik, hogy a $\pi': i_0^*H^*(P)\to M'$ és $\pi'': i_1^*H^*(P)\to M$ principális nyalábok izomorfak. $Hi_0=f'$ és $Hi_1=f''$ miatt az állítást igazoltuk.

Ezzel megmutattuk, hogy ha M parakompakt topologikus tér és $f', f'': M\to B_G$ homotóp folytonos leképezések, akkor a $\pi_G: P_G\to B_G$ principális nyaláb f'- és f''-menti visszahúzottjai izomorfak. Mielőtt a fordított állítást igazolnánk, néhány jelölést vezetünk be.

Legyen $P_G^{\mathrm{od}}\subset P_G$ azon $\langle g, t\rangle$ elemek halmaza, amelyekre $t_{2r+1}=0$, $r=0, 1, \ldots$, és $P_G^{\mathrm{ev}}\subset P_G$ azon $\langle g, t\rangle$ elemek halmaza, amelyekre $t_{2r}=0$, $r=0, 1, \ldots$. Legyenek $\pi_G(P_G^{\mathrm{od}})=B_G^{\mathrm{od}}$, $\pi_G(P_G^{\mathrm{ev}})=B_G^{\mathrm{ev}}$ és $r=0, 1, \ldots$ esetén $\mu_r: \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^r, 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}\right]\to[0, 1]$ az a lineáris függvény, amelyre $\mu_r(s)=2^{r+1}s-2^{r+1}+2$, $s\in\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^r, 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}\right]$. Végül, $0\leqq s\leqq 1$ esetén legyen

$$\tilde H_s^{\mathrm{od}}: P_G\to P_G,$$

$$\tilde H_s^{\mathrm{od}}(\langle g, t\rangle)=(t_0 g_0, \ldots, t_r g_r, (1-\mu_r(s))t_{r+1}g_{r+1}, 0, \mu_r(s)t_{r+1}g_{r+1}, 0, t_{r+2}g_{r+2}, 0, \ldots),$$

ha $1-\left(\frac{1}{2}\right)^r\leqq s\leqq 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}$ és $\tilde H_1^{\mathrm{od}}(\langle g, t\rangle)=\langle g, t\rangle$, $\langle g, t\rangle\in P_G$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $\tilde H^{\mathrm{od}}: P_G\times[0, 1]\to P_G$ folytonos leképezés. Mivel $\tilde H_s^{\mathrm{od}}$, $0\leqq s\leqq 1$, felcserélhető a G Lie csoport elemeivel, ezért $\tilde H_s^{\mathrm{od}}$ egy $H_s^{\mathrm{od}}: B_G\to B_G$ folytonos leképezést definiál, amelyre a

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\tilde H_s^{\mathrm{od}}} & P_G \\ {\scriptstyle\pi_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_G} \\ B_G & \xrightarrow{H_s^{\mathrm{od}}} & B_G \end{array}$$

diagram kommutatív. Ekkor $\tilde H_0^{\mathrm{od}}: P_G\to P_G^{\mathrm{od}}$ és $\tilde H_1^{\mathrm{od}}=$identitás.

A $\tilde H^{\mathrm{ev}}$ és H^{ev} leképezések hasonlóan definiálhatók. Legyenek $f', f'': M\to B_G$ olyan folytonos leképezések, amelyekre a $\pi_G: P_G\to B_G$ principális nyaláb f'- és f''-menti visszahúzottjai izomorfak. Azonosítva ezeket a principális nyalábokat, jelölje $\pi: P\to M$ a $\pi_G: P_G\to B_G$ principális nyaláb f'-, ill. f''-menti visszahúzottját. Ekkor

$f' \simeq H_0^{\mathrm{od}} f'$ és $f'' \simeq H_0^{\mathrm{ev}} f''$, azaz a fentiek szerint feltehető, hogy $f'(M) \subset B_G^{\mathrm{od}}$ és $f''(M) \subset B_G^{\mathrm{ev}}$ teljesülnek. Definiáljuk a $\tilde{H}: P \times \{0, 1\} \to P_G$ leképezését úgy, hogy a

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{H}(\cdot, 0)} & P_G \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_G} \\ M & \xrightarrow{f'} & B_G \end{array}$$

diagram kommutatív legyen és hasonlóan $\tilde{H}(\cdot, 1)$-re és f''-re. Ekkor

$$\tilde{H}(u, 0) = (t_0(u) g_0(u), 0, t_2(u) g_2(u), 0, \ldots)$$

és

$$\tilde{H}(u, 1) = (0, t_1(u) g_1(u), 0, t_3(u) g_3(u), \ldots), \quad u \in P.$$

Terjesszük ki a $\tilde{H}$ leképezést $P \times [0, 1]$-re a

$$\tilde{H}(u, s) = ((1-s) t_0(u) g_0(u), s t_1(u) g_1(u), (1-s) t_2(u) g_2(u), s t_3(u) g_3(u), \ldots),$$

$u \in P$, $0 \leqq s \leqq 1$, megállapodással. Ekkor $\tilde{H}(\cdot, s)$, $0 \leqq s \leqq 1$, felcserélhető a G Lie csoport elemeivel, azaz egy $H: M \times [0, 1] \to B_G$ folytonos leképezést definiál, amely az f' és f'' leképezéseket összekötő homotópia. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. Klasszikus csoportok klasszifikáló principális nyalábjainak meghatározása

A (4.1) (a) példája szerint az $0(1)$ Lie csoport klasszifikáló principális nyalábja a $\pi_{0(1)}: S^\infty \to \mathbf{R}P^\infty$ $0(1)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb, a (b) példa szerint az $U(1)$ Lie-csoport klasszifikáló principális nyalábja a $\pi_{U(1)}: S^\infty \to \mathbf{C}P^\infty$ $U(1)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ebben a fejezetben a $GL(m, \mathbf{R})$, $O(m)$, $SO(m)$, $GL(m, \mathbf{C})$, $U(m)$ Lie csoportok klasszifikáló principális nyalábjait határozzuk meg.

A $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ *Grassmann sokaság* az $\mathbf{R}^{k+n}$ lineáris tér k-dimenziós lineáris altereinek halmaza. Ezen a téren topológia a következőképp adható meg:

Egy k-él $\mathbf{R}^{k+n}$-ben az $\mathbf{R}^{k+n}$ vektortér k darab lineárisan független vektora. Az $\mathbf{R}^{k+n}$-beli k élek halmaza az $\mathbf{R}^{k+n} \times \ldots \times \mathbf{R}^{k+n}$ (k-szor) szorzat egy nyílt alterét határozza meg, amelyet *Stiefel-sokaság*nak nevezünk és $V_k(\mathbf{R}^{k+n})$-nel jelölünk. Legyen $q: V_k(\mathbf{R}^{k+n}) \to G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ az a leképezés, amely egy $\mathbf{R}^{k+n}$-beli k élhez az általa kifeszített k-dimenziós lineáris alteret rendeli. Lássuk el a $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ halmazt azzal a legdurvább topológiával, amelyre nézve a q leképezés folytonos.

Jelölje $V_k^0(\mathbf{R}^{k+n}) \subset V_k(\mathbf{R}^{k+n})$ az *ortonormált k-élek* halmazát. (Az $\mathbf{R}^{k+n}$-en adott természetes skaláris szorzásra nézve). Ekkor a $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ Grassmann sokaság topológiája a $q_0 = q | V_k^0(\mathbf{R}^{k+n})$ leképezésből is származtatható.

5.1. Lemma. *$G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ kompakt (kn)-dimenziós topologikus sokaság. Az a leképezés, amely egy $\mathbf{R}^{k+n}$-beli X k-dimenziós lineáris altérhez az $X^\perp$ ortogonálisát rendeli egy $G_k(\mathbf{R}^{k+n}) \to G_n(\mathbf{R}^{k+n})$ homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ Hausdorff-tér. $w \in \mathbf{R}^{k+n}$ és $X \in G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ esetén jelölje $\varrho_w(X)$ a w pont X altértől való távolságának négyzetét. Ha $(e_1, \ldots, e_k) \subset X$ ortonormált bázis, akkor $\varrho_w(X) = (w, w) - (w, e_1)^2 - \ldots - (w, e_k)^2$ érvényes, ahol $(,)$ az $\mathbf{R}^{k+n}$ skaláris szorzását jelöli. Így a $V_0^k(\mathbf{R}^{k+n}) \xrightarrow{q_0} G_k(\mathbf{R}^{k+n}) \xrightarrow{\varrho_w} \mathbf{R}$ kompozíció folytonos, azaz ϱ_w maga is folytonos. Ha X és Y különböző n-dimenziós lineáris alterei $\mathbf{R}^{k+n}$-nek, akkor $w \in X - Y$ esetén $\varrho_w(X) \neq \varrho_w(Y)$. Így $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$

bármely két különböző pontja folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ Hausdorff-tér.

Igazoljuk most, hogy $X \in G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ esetén létezik az X pontnak olyan U környezete, amely homeomorf $\mathbf{R}^{kn}$-nel. Tekintsük az $\mathbf{R}^{k+n}$ lineáris teret, mint $X \oplus X^\perp$ direkt összeget. Álljon az $U \subset G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ nyílt halmaz olyan $X' \subset \mathbf{R}^{k+n}$ n-dimenziós lineáris alterekből, amelyeket a $\tilde{\pi}: X \oplus X^\perp \to X$ ortogonális projekció X-re képez, azaz $X' \cap X^\perp = \emptyset$. Ekkor minden $X' \in U$ tekinthető egy egyértelműen meghatározott $T(X'): X \to X^\perp$ lineáris leképezés grafikonjának. Megmutatjuk, hogy az így kapott $T: U \to \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \cong \mathbf{R}^{kn}$ leképezés homeomorfizmus.

Legyen $(e_1, \ldots, e_k) \subset X$ rögzített ortonormált bázis. Ekkor minden $X' \in U$ k-dimenziós lineáris térnek van egy egyértelműen meghatározott $(e_1', \ldots, e_k') \subset X'$ bázisa, amelyre $\pi(e_i') = e_i$, $i = 1, \ldots, k$. Egyszerűen megmutatható, hogy az $(e_1', \ldots, e_k')$ k-él folytonosan függ X'-től, továbbá, hogy érvényes az $e_i' = e_i + T(X')e_i$ azonosság. Ezekből következik, hogy a T leképezés homeomorfizmus. Így kapjuk, hogy $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ (kn)-dimenziós topologikus sokaság. $V_k^0(\mathbf{R}^{k+n})$ kompaktsága miatt $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ kompakt.

Igazoljuk, most, hogy a $\perp: G_k(\mathbf{R}^{k+n}) \to G_n(\mathbf{R}^{k+n})$ leképezés folytonos (azaz homeomorfizmus). Legyen $X \in G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ rögzített és $U \subset G_k(\mathbf{C}^{k+n})$ az X fentebb konstruált nyílt környezete. Elegendő megmutatni, hogy a $\perp | U: U \to G_n(\mathbf{R}^{k+n})$ leképezés folytonos, azaz, hogy $X' \in U$ esetén $X'^\perp$ folytonosan függ X'-től. Legyen $(e_1^\perp, \ldots, e_n^\perp) \subset X^\perp$ rögzített bázis és definiáljuk az $f: q^{-1}(U) \to V_n(\mathbf{R}^{k+n})$ leképezést a következő módon:

$(e_1', \ldots, e_k') \in q^{-1}(U)$ esetén alkalmazzuk a Gram—Schmidt-eljárást az $(e_1', \ldots, e_k', e_1^\perp, \ldots, e_n^\perp)$ bázisra. Ezzel egy $(e_1'', \ldots, e_k'', e_{k+1}'', \ldots, e_{k+n}'')$ ortonormált $(k+n)$-élt kapunk. Legyen $f(e_1', \ldots, e_k') = (e_{k+1}'', \ldots, e_{k+n}'')$. Ekkor a

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & V_n(\mathbf{R}^{k+n}) \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ U & \xrightarrow{\perp} & G_n(\mathbf{R}^{k+n}) \end{array}$$

diagram kommutatív. Az f leképezés folytonos, azaz qf is folytonos, amiből a $\perp: U \to G_n(\mathbf{R}^{k+n})$ leképezés folytonossága is következik. Ezzel a lemmát igazoltuk.

$k=1$ esetén $G_1(\mathbf{R}^{1+n}) = \mathbf{R}P^n$. Az I. rész (3.4) (d) példájában megmutattuk, hogy az $\mathbf{R}P^n$ tér, mint bázis felett létezik egy γ_n^1 kanonikus 1-rangú vektornyaláb. Az ott szereplő konstrukciót általánosítandó, definiálni fogunk a $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ tér felett egy γ_n^k k-rangú topologikus vektornyalábot a következőképpen:

Legyen $E(\gamma_n^k) = \{(X, p) \in G_k(\mathbf{R}^{k+n}) \times \mathbf{R}^{k+n} \mid p \in X\} \subset G_k(\mathbf{R}^{k+n}) \times \mathbf{R}^{k+n}$ topologikus altér és legyen $\pi: E(\gamma_n^k) \to G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ az első tényezőre való projekció. Ekkor $t, t' \in \mathbf{R}$ és $(X, p), (X, p') \in E(\gamma_n^k)$ esetén legyen $t(X, p) + t'(X, p') = (X, tp + t'p)$.

5.2. Lemma. *γ_n^k k-rangú topologikus vektornyaláb a $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ Grassmann sokaság felett.*

A γ_n^k vektornyalábot a $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ *kanonikus vektornyalábjának* nevezzük.

Bizonyítás. Csak γ_n^k lokálisan triviális voltát kell igazolnunk. Legyen $X \in G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ és $U \subset G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ az X pontnak az (5.1) lemma bizonyításában szereplő nyílt környezete. Definiáljuk a $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times X$ leképezést a következő módon: $(X', p') \in \pi^{-1}(U)$ esetén legyen $k_U(X', p') = (X', \tilde{\pi}(p'))$, ahol $\tilde{\pi}: \mathbf{R}^{k+n} \to X$ az ortogonális projekció. A h_U leképezés nyilván folytonos. $X' \in U$ és $p \in X$ esetén

$h_U^{-1}(X', p)=(X', T(X')(p)+p)$, amivel a h_U^{-1} leképezés folytonosságát beláttuk. Ebből egyszerűen következik, hogy h_U lokálisan trivializáló leképezés.

Az (5.1) lemmában szereplő konstrukcióból egyszerűen következik, hogy $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ differenciálható sokaság struktúrával ellátható. Emellett γ_n^k differenciálható vektornyaláb $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ felett.

5.3. Tétel. *Legyen M kompakt topologikus tér és ξ k-rangú topologikus vektornyaláb M felett. Ekkor elegendően nagy n esetén létezik egy $\tilde{f}: E(\xi)\to E(\gamma_n^k)$ folytonos nyaláb-leképezés, azaz amely ξ fibrumait izomorf módon γ_k^n fibrumaira képezi.*

Bizonyítás. Az alábbiakban elegendően nagy r esetén, egy

$$\bar{f}: E(\xi)\to \mathbf{R}^r$$

folytonos leképezést definiálunk, amely a ξ fibrumain lineáris és injektív. Az $\bar{f}$ leképezés létezéséből az állítás következik, hiszen az

$$\tilde{f}(a) = (\bar{f}(a\text{-n átmenő fibrum}), \bar{f}(a)), \quad a\in E(\xi),$$

megállapodással az $\tilde{f}$ leképezés kielégíti a tételbeli feltételt.

Legyen $\{U_i | i=1, \ldots, l\}$ az M olyan nyílt fedése, amelyre $\xi | U_i$ triviális. Mivel M normális, az M térnek léteznek $\{U_i' | i=1, \ldots, l\}$ és $\{U_i'' | i=1, \ldots, l\}$ nyílt fedései, amelyekre $\overline{U}_i'' \subset U_i' \subset \overline{U}_i' \subset U_i$, $i=1, \ldots, l$. Legyen $u_i: M\to R$ olyan folytonos függvény, amelyre $u_i|\overline{U}_i''=1$ és u_i zérus az U_i' komplementerén. Mivel $\xi | U_i$ triviális, ezért létezik

$$h_i: \pi^{-1}(U_i)\to \mathbf{R}^k$$

folytonos leképezés, amely $\xi | U_i$ fibrumait izomorf módon $\mathbf{R}^k$-ra képezi. Legyen $h_i': E(\xi)\to\mathbf{R}^k$ az a leképezés, amelyre

$$h_i'(a) = \begin{cases} u_i(\pi(a))h_i(a), & \text{ha} \quad \pi(a)\in U_i \\ 0, & \text{ha} \quad \pi(a)\notin U_i \end{cases}$$

teljesül. Ekkor h_i' folytonos és ξ fibrumain lineáris leképezés. Legyen $\bar{f}: E(\xi)\to\mathbf{R}^{kl}$ az a leképezés, amelyre $\bar{f}(a)=(h_1'(a), \ldots, h_l'(a))\in\mathbf{R}^{kl}$, $a\in E(\xi)$. Ekkor $\bar{f}$ folytonos és ξ fibrumait monomorf módon $\mathbf{R}^r$-be képezi, $r=kl$.

A fenti tételben az n szám a ξ vektornyaláb választásától függ. Ahhoz, hogy minden ξ k-rangú topologikus vektornyalábhoz egyetlen a fenti értelemben „univerzális" γ_∞^k k-rangú vektornyaláb létezzen, a végtelen Grassmann sokaság fogalmát kell bevezetnünk.

Jelölje $\mathbf{R}^\infty$ azon $p=(p_1, p_2, \ldots)$ valós számsorozatok lineáris terét, amelyek tagjai véges sok kivétellel zérusok. Rögzített $r\in\mathbf{N}$ esetén $\mathbf{R}^\infty$ azon altere, amely $p=(p_1, \ldots, p_r, 0, 0, \ldots)$ típusú sorozatokból áll, az $\mathbf{R}^r$ lineáris térrel azonosítható. Így $\mathbf{R}^1\subset\mathbf{R}^2\subset\ldots$ és $\mathbf{R}^\infty=\bigcup_{r=1}^{\infty}\mathbf{R}^r$. A $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ *végtelen Grassmann sokaság* $\mathbf{R}^\infty$ k-dimenziós lineáris altereinek halmaza. Ezen a halmazon a

$$G_k(\mathbf{R}^k)\subset G_k(\mathbf{R}^{k+1})\subset\ldots$$

topologikus terek direkt limesze egy természetes topologiát definiál. Más szavakkal, egy $U\subset G_k(\mathbf{R}^\infty)$ halmaz nyílt, ha $n=0, 1, \ldots$ esetén az $U\cap G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ halmaz a $G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ térben nyílt. Speciálisan $k=1$ esetén a korábban bevezetett $\mathbf{R}P^\infty = G_1(\mathbf{R}^\infty)$ végtelen dimenziós projektív teret kapjuk.

A $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ bázistér feletti γ^k_∞ k-rangú topologikus vektornyaláb a véges dimenziós esethez analóg módon definiálható. Legyen

$$E(\gamma^k_\infty) = \{(X, p) \in G_k(\mathbf{R}^\infty) \times \mathbf{R}^\infty \mid p \in X\} \subset G_k(\mathbf{R}^\infty) \times \mathbf{R}^\infty$$

topologikus altér és legyen $\pi: E(\gamma^k_\infty) \to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ az első tényezőre való projekció. Ekkor $t, t' \in \mathbf{R}$ és $(X, p), (X, p') \in E(\gamma^k_\infty)$ esetén legyen $t(X, p) + t'(X, p') = (X, tp + t'p')$. A $V_k(\mathbf{R}^\infty)$ végtelen Stiefel sokaság és a $q: V_k(\mathbf{R}^\infty) \to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ kanonikus projekció a véges esettel analóg módon definiálhatók.

5.4. lemma. *γ^k_∞ k-rangú topologikus vektornyaláb a $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ végtelen Grassmann sokaság felett.*

A γ^k_∞ vektornyalábot a $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ kanonikus vektornyalábjának nevezzük.

A lemma igazolásához szükségünk van az alábbi állításra:

5.5. Lemma. *Legyenek $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, ill. $M'_1 \subset M'_2 \subset \ldots$ lokálisan kompakt terek sorozatai M, ill. M' direkt limeszekkel. Ekkor az $M \times M'$ szorzattér topológiája azonos az $M_1 \times M'_1 \subset M_2 \times M'_2 \subset \ldots$ direkt limesz topológiával.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

Az 5.4. Lemma bizonyítása. Legyen $X \in G_k(\mathbf{R}^\infty)$ és $U \subset G_k(\mathbf{R}^\infty)$ az a halmaz, amelyre $X' \in U$, ha X' a $\pi: \mathbf{R}^\infty \to X$ ortogonális projekciónál X-re képződik. Ekkor $U_n = U \cap G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ nyílt, $n = 0, 1, \ldots$, azaz U az X nyílt környezete. Konstruáljuk a $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times X$ leképezést az (5.2) lemma bizonyításában szereplő módon. Ekkor $h_U | \pi^{-1}(U_n)$ homeomorfizmus, $n = 0, 1, \ldots$, azaz az (5.5) lemma szerint h_U lokálisan trivializáló leképezés.

5.6. Tétel. *Legyen M parakompakt topologikus tér és ξ k-rangú topologikus vektornyaláb M felett. Ekkor létezik $\tilde{f}: E(\xi) \to E(\gamma^k_\infty)$ nyaláb-leképezés, továbbá bármely két $\tilde{f}, \tilde{f}': E(\xi) \to E(\gamma^k_\infty)$ nyaláb-leképezés nyaláb-homotóp, azaz létezik egy $\tilde{H}: E(\xi) \times [0, 1] \to E(\gamma^k_\infty)$ folytonos leképezés, amelyre $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}$, $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{f}'$ és $\tilde{H}(\cdot, t): E(\xi) \to E(\gamma^k_\infty)$, $0 \leqq t \leqq 1$, nyaláb-leképezés.*

Bizonyítás. Mivel M parakompakt, ezért a (4.3) lemma érvényes ξ-re. Ezek után az $\tilde{f}: E(\xi) \to E(\gamma^k_\infty)$ nyaláb-leképezés a (5.3) tétel bizonyításában leírt módon konstruálható. Mielőtt a tétel második részének igazolására térnénk, megjegyezzük, hogy ha $\tilde{f}: E(\xi) \to E(\gamma^k_\infty)$ nyaláb-leképezés, akkor $\tilde{f}$ egy $\bar{f}: E(\xi) \to \mathbf{R}^\infty$ leképezést indukál, amelynek megszorításai ξ fibrumaira monomorfizmusok. Megfordítva, $\tilde{f}$ az $\bar{f}$-ot egyértelműen meghatározza, hiszen

$$\tilde{f}(a) = \big(\bar{f}(a\text{-n átmenő fibrum}), \bar{f}(a)\big), \quad a \in E(\xi).$$

Legyenek most $\tilde{f}, \tilde{f}': E(\xi) \to E(\gamma^k_\infty)$ nyaláb-leképezések.

Feltehető hogy $\bar{f}(a)$ nem egyenlő $\bar{f}'(a)$ negatív számszorosával $a \in E(\xi)$ és $a \neq 0$ esetén. Ekkor a $\bar{H}_t(a) = (1-t)\bar{f}(a) + t\bar{f}'(a)$, $0 \leqq t \leqq 1$, formula az $\tilde{f}$ és $\tilde{f}'$ leképezések egy $\tilde{H}$ nyaláb-homotópiáját definiálja a

$$\tilde{H}(a, t) = \big(\bar{H}_t(a\text{-n átmenő fibrum}), \bar{H}_t(a)\big), \quad a \in E(\xi), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

megállapodással. A $\tilde{H}$ leképezés folytonosságát igazolandó, elegendő megmutatnunk, hogy a bázistereken indukált

$$H: M \times [0, 1] \to G_k(\mathbf{R}^\infty)$$

leképezés folytonos. Legyen $U \subset M$ nyílt és $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ a $\xi|U$ vektornyaláb minden pontban lineárisan független szelései. Ekkor $H|U\times[0,1]$ a következő leképezések kompozíciója:

(1) Azon $U\times[0,1]\to V_k(\mathbf{R}^\infty)\subset\mathbf{R}^\infty\ldots\times\mathbf{R}^\infty$ (k-szor) leképezés, amelynél (p,t) képe $(\overline{H}_t(\varphi_1(p)),\ldots,\overline{H}_t(\varphi_k(p)))$,

(2) A $q: V_k(\mathbf{R}^\infty)\to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ kanonikus projekció.

Az (5.5) lemmából egyszerűen következik, hogy q folytonos, azaz H is az. Ezzel a tételt igazoltuk.

Homotóp leképezések által visszahúzott vektornyalábok izomorfak ((4.5) tétel második felének bizonyítása) azaz a fenti tételből adódik a következő:

5.7. Tétel. *Legyen ξ egy M parakompakt tér feletti k-rangú topologikus vektornyaláb. Ekkor létezik egy $f: M\to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ folytonos leképezés úgy, hogy $f^*(\gamma_\infty^k)\cong\xi$. Legyenek $f', f'': M\to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ folytonos leképezések. Ekkor $f'\simeq f''$ akkor és csak akkor, ha $f'^*(\gamma_\infty^k)\simeq f''^*(\gamma_\infty^k)$.*

Legyen M parakompakt topologikus tér és $\pi: P\to M$ $GL(k,\mathbf{R})$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ehhez a principális nyalábhoz egy ξ k-rangú topologikus vektornyaláb asszociálható, amelynek projekciója $\pi_E: E\to M$, $E=P\times_{GL(k;\mathbf{R})}\mathbf{R}^k$ (I. rész 4. fejezet). A fenti tétel szerint létezik egy homotópia erejéig egyértelműen meghatározott $f: M\to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ folytonos leképezés, amelyre $\xi\cong f^*(\gamma_\infty^k)$. Jelölje L azt az operációt, amely egy ξ k-rangú vektornyalábhoz az $L(\xi)$ lineáris k-élek nyalábját rendeli (I. rész 4. fejezet). Az egyszerűség kedvéért $L(\xi)$ jelöli a totális teret is. Ekkor $L(\xi)$ $GL(k,\mathbf{R})$ struktúracsoportú principális nyaláb a ξ bázistere felett. Így a fenti $\xi\cong f^*(\gamma_\infty^k)$ izomorfizmus a $GL(k;\mathbf{R})$ struktúracsoportú $L(\xi)$ és $f^*(L(\gamma_\infty^k))$ principális nyalábok izomorfizmusába megy át. Figyelembe véve, hogy $L(\xi)$ izomorf a kiindulásul vett $\pi: P\to M$ principális nyalábbal kapjuk, hogy a $GL(k,\mathbf{R})$ általános lineáris csoport klasszifikáló principális nyalábja

$$\pi_{GL(k,\mathbf{R})}: L(\gamma_\infty^k)\to G_k(\mathbf{R}^\infty)$$

Speciálisan $B_{GL(k,\mathbf{R})}=G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Legyen most $\pi: P\to M$ $0(k)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb. Ehhez a principális nyalábhoz egy ξ k-rangú topologikus vektornyaláb asszociálható, amelynek projekciója $\pi_E: E\to M$, $E=P\times_{0(k)}\mathbf{R}^k$. Az (5.7) tétel szerint létezik egy homotópia erejéig egyértelműen meghatározott $f: M\to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ folytonos leképezés, amelyre $\xi\cong f^*(\gamma_\infty^k)$. Az alábbiakban az I. rész (3.2) példájában szereplő konstrukciót általánosítjuk. Legyen ξ egy M parakompakt tér feletti k-rangú topologikus vektornyaláb. A ξ vektornyalábon egy $(,)$ *metrikát* adunk meg, ha $p\in M$ esetén a ξ p pont feletti fibrumán egy $(,)_p$ szimmetrikus, bilineáris, pozitív definit skaláris szorzást definiálunk úgy, hogy $\varphi,\varphi'\in\Gamma^0(\xi)$ szelések esetén a $(\varphi,\varphi'): M\to\mathbf{R}$, $(\varphi,\varphi')(p)=(\varphi(p),\varphi'(p))_p$, $p\in M$, függvény folytonos. (Differenciálható vektornyalábok metrikája analóg módon értendő. Komplex vektornyalábok esetén a fibrumokon Hermite metrikát adunk meg, azaz olyan konjugált bilineáris skaláris szorzást, amely pozitív definit.) Egyszerűen megmutatható, hogy M parakompaktsága miatt minden ξ M feletti vektornyaláb ellátható metrikával. Jelölje 0 azt az operációt, amely egy ξ k-rangú vektornyalábhoz az $0(\xi)$ ortonormált k-élek nyalábját rendeli. Ekkor $0(\xi)$ totális tere $0(\xi)=\{u\in E(\xi)\times\ldots\times E(\xi)$ (k-szor)$|\,\pi(u_1)=\ldots=\pi(u_k)$ és

$$\{u_1,\ldots,u_k\}\ \text{ortonormált rendszer}\}.$$

Az $0(k)$ ortogonális csoport természetes módon hat $0(\xi)$-n és így $0(\xi)$ $0(k)$ struktúracsoportú principális nyalábbá válik. Ha ξ-n egy másik metrikát választunk, akkor

$0(\xi)$ az előző metrikához tartozó principális nyalábbal izomorf. Visszatérve a $\xi \cong$ $\cong f^*(\gamma_\infty^k)$ izomorfizmusra, egyszerűen következik, hogy az $0(k)$ struktúracsoportú $0(\xi)$ és $f^*(0(\gamma_\infty^k))$ topologikus principális nyalábok izomorfak. Figyelembe véve, hogy $0(\xi)$ izomorf a kiindulásul vett $\pi: P \to M$ principális nyalábbal kapjuk, hogy az $0(k)$ ortogonális csoport klasszifikáló principális nyalábja

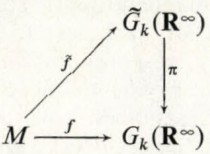
$$\pi_{0(k)}: 0(\gamma_\infty^k) \to G_k(\mathbf{R}^\infty).$$

Speciálisan $B_{0(k)} = G_k(\mathbf{R}^\infty)$. Megjegyezzük, hogy $B_{0(1)} = G_1(\mathbf{R}^\infty) = \mathbf{R}P^\infty$, mint azt már a (4.1) (a) példájában láttuk.

Mielőtt az $SO(k)$ speciális ortogonális csoport klasszifikáló principális nyalábját meghatároznánk, néhány új fogalmat vezetünk be. A $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^{k+n})$ *irányított Grassmann-sokaság* az $\mathbf{R}^{k+n}$ lineáris tér k-dimenziós irányított altereinek halmaza (az irányítás fogalmát illetően lásd II. rész (1.10) lemmája utáni definíciót). Ez a halmaz szintén a $V_k(\mathbf{R}^{k+n})$ Stiefel-sokaság faktortereként topologizálható. Mivel minden vektortéren kétféle irányítás adható meg, ezért a $\pi: \tilde{G}_k(\mathbf{R}^{k+n}) \to G_k(\mathbf{R}^{k+n})$ természetes leképezés kettős fedés. $k \to \infty$ esetén a $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$ *végtelen irányított Grassmann-sokaság*ot és a $\pi: \tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty) \to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ kettős fedést kapjuk. Mivel $G_1(\mathbf{R}^{1+n}) = \mathbf{R}P^n$ és $G_1(\mathbf{R}^\infty) = \mathbf{R}P^\infty$, ezért $\tilde{G}_1(\mathbf{R}^{n+1}) = S^n$ és $\tilde{G}_1(\mathbf{R}^\infty) = S^\infty$. A $\pi^*(\gamma_\infty^k)$ $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$ feletti vektornyaláb irányított, hiszen fibrumain, amelyek $\mathbf{R}^\infty$ irányított k-dimenziós lineáris alterei, a $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$ definíciója szerinti irányítás adott. A $\tilde{\gamma}_\infty^k = \pi^*(\gamma_\infty^k)$ vektornyalábra az 0 operációt alkalmazva az $0(\tilde{\gamma}_\infty^k)$ totális tér két komponensre esik szét, amelyek izomorf $SO(k)$ struktúracsoportú topologikus principális nyalábok M felett. Jelölje $SO(\tilde{\gamma}_\infty^k)$ ezek valamelyikét. Állítjuk, hogy az $SO(k)$ speciális ortogonális csoport klasszifikáló principális nyalábja

$$\pi_{SO(k)}: SO(\tilde{\gamma}_\infty^k) \to \tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty).$$

Legyen $\pi: P \to M$ $SO(k)$ struktúracsoportú topologikus principális nyaláb az M parakompakt tér felett. Ehhez a principális nyalábhoz egy ξ k-rangú irányított topologikus vektornyaláb asszociálható, amelynek projekciója $\pi_E: E \to M$, $E = P \times_{SO(k)} \mathbf{R}^k$ A ξ irányításáról elfeledkezve, az (5.7) tétel szerint létezik egy homotópia erejéig egyértelműen meghatározott $f: M \to G_k(\mathbf{R}^\infty)$ folytonos leképezés, amelyre $\xi \cong f^*(\gamma_\infty^k)$. Mivel ξ irányítható, ezért létezik $\tilde{f}: M \to \tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$ folytonos leképezés, amelyre



kommutatív diagram és a ξ és $\tilde{f}^*(\tilde{\gamma}_\infty^k)$ irányított vektornyalábok irányításartóan izomorfak. Ebből az állítás következik. Speciálisan $B_{SO(k)} = \tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Komplex Lie-csoportok klasszifikáló principális nyalábjaira térve, a $G_k(\mathbf{C}^{k+n})$ és $G_k(\mathbf{C}^\infty)$ *komplex Grassmann sokaságok* a valós esethez analóg módon definiálhatók. Speciálisan, $G_1(\mathbf{C}^{1+n}) = \mathbf{C}P^n$ és $G_1(\mathbf{C}^\infty) = \mathbf{C}P^\infty$. Ekkor γ_n^k, ill. γ_∞^k k-rangú komplex topologikus vektornyalábok $G_k(\mathbf{C}^{k+n})$, ill. $G_k(\mathbf{C}^\infty)$ felett. Egyszerűen megmutatható, hogy $G_k(\mathbf{C}^{k+n})$ komplex sokaság és γ_n^k komplex differenciálható vektornyaláb $G_k(\mathbf{C}^{k+n})$ felett. A fentiekkel analóg módon kapjuk, hogy a $GL(k, \mathbf{C})$ komplex általános lineáris csoport klasszifikáló principális nyalábja

$$\pi_{GL(k,\mathbf{C})}: L(\gamma_\infty^k) \to G_k(\mathbf{C}^\infty),$$

ahol $L(\gamma_\infty^k)$ a γ_∞^k komplex vektornyaláb k éleinek nyalábját jelöli. Az $U(k)$ unitér csoport klasszifikáló principális nyalábja

$$\pi_{U(k)}: U(\gamma_\infty^k) \to G_k(\mathbf{C}^\infty),$$

ahol $U(\gamma_\infty^k)$ a γ_∞^k komplex vektornyaláb unitér k éleinek nyalábját jelöli valamely rögzített Hermite-metrika mellett.

A klasszifikáló principális nyalábok bázisterei a következőkben fontos szerepet fognak játszani s így ezeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

G	$GL(k, \mathbf{R})$	$O(k)$	$SO(k)$	$GL(k, \mathbf{C})$	$U(k)$
B_G	$G_k(\mathbf{R}^\infty)$	$G_k(\mathbf{R}^\infty)$	$\tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$	$G_k(\mathbf{C}^\infty)$	$G_k(\mathbf{C}^\infty)$

6. Grassmann-sokaságok cellastruktúrája

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ végtelen Grassmann-sokaság egy kanonikus CW-komplexus struktúrával látható el (III. rész 4. fejezet) úgy, hogy $G_k(\mathbf{R}^{k+n}) \subset G_k(\mathbf{R}^\infty)$ véges részkomplexus $n=0, 1, \ldots$ esetén. Hasonló konstrukció érvényes a $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^\infty)$ és $G_k(\mathbf{C}^\infty)$ Grassmann-sokaságokra is. Megjegyezzük, hogy $k=1$ esetben a $G_1(\mathbf{R}^\infty)=\mathbf{R}P^\infty$ végtelen projektív tér alább definiált CW-komplexus struktúrája a 3. fejezet végén megadott CW-komplexus struktúrával azonos.

Tekintsük az

$$\mathbf{R}^0 \subset \mathbf{R}^1 \subset \ldots \subset \mathbf{R}^{r-1} \subset \mathbf{R}^r$$

sorozatot, amelyben $\mathbf{R}^0=\{0\}$ és

$$\mathbf{R}^n = \{(p_1, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^r | p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{R}\} 0 \leqq n \leqq 1.$$

Minden $X \subset \mathbf{R}^r$ k-dimenziós lineáris altér egész számoknak egy

$$0 \leqq \dim(X \cap \mathbf{R}^1) \leqq \dim(X \cap \mathbf{R}^2) \leqq \ldots \leqq \dim(X \cap \mathbf{R}^r) = k$$

sorozatát definiálja, amelyben két egymást követő tag legfeljebb eggyel különbözik egymástól. Ez utóbbi kiolvasható a

$$0 \to X \cap \mathbf{R}^{n-1} \to X \cap \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

egzakt sorozatból, amelyben az utolsó nyíl az n-edik koordinátatengelyre való projekció. Így a fenti sorozat pontosan k „ugrást" tartalmaz.

Egészek egy $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ sorozatát *Schubert-szimbólum*nak nevezzük, ha

$$1 \leqq \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k \leqq r.$$

Ha σ Schubert-szimbólum, akkor jelölje $e(\sigma) \subset G_k(\mathbf{R}^r)$ azon $X \subset \mathbf{R}^r$ k-dimenziós alterek halmazát, amelyekre $\dim(X \cap \mathbf{R}^{\sigma_i})=i$ és $\dim(X \cap \mathbf{R}^{\sigma_i - 1})=i-1$ teljesülnek $i=1, \ldots, k$ esetén. Ekkor minden $X \in G_k(\mathbf{R}^r)$ pontosan egy $e(\sigma)$-hoz tartozik. Az alábbiakban meg fogjuk mutatni, hogy $e(\sigma)$ nyílt $d(\sigma)$-cella, ahol $d(\sigma)=(\sigma_1-1)+(\sigma_2-2)+\ldots+(\sigma_k-k)$. (Az $\overline{e(\sigma)} \subset G_k(\mathbf{R}^r)$ alteret *Schubert-varietás*nak nevezzük.) Jelölje $H^n \subset \mathbf{R}^n$ az $\mathbf{R}^n$ azon nyílt félterét, amely $(p_1, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$, $p_n>0$, alakú pontokból áll. Ekkor $X \in e(\sigma)$ pontosan akkor, ha van X-nek olyan $(e_1, \ldots, e_k)$ bázisa, amelyre $e_i \in H^{\sigma_i}$, $i=1, \ldots, k$.

6.1. Lemma. *$X \in e(\sigma)$ esetén az X altérnek van pontosan egy $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset H^{\sigma_1} \times \ldots \times H^{\sigma_k}$ ortonormált bázisa.*

Bizonyítás. k szerinti indukcióval az állítás egyszerűen adódik. Jelölje $e'(\sigma)=V_k^0(\mathbf{R}^r)\cap(H^{\sigma_1}\times\ldots\times H^{\sigma_k})$ azon $(e_1, \ldots, e_k)$ ortonormált k-élek halmazát, amelyekre $e_i\in H^{\sigma_i}$, $i=1, \ldots, k$ (5. fejezet (5.1) lemmája előtti definíció). Hasonlóan, jelölje

$$\bar{e}'(\sigma) = V_k^0(\mathbf{R}^r)\cap(\bar{H}^{\sigma_1}\times\ldots\times\bar{H}^{\sigma_k}).$$

6.2. Lemma. *$\bar{e}'(\sigma)$ zárt $d(\sigma)$-cella, amelynek belseje $e'(\sigma)$. Emellett a $q_0: V_k^0(\mathbf{R}^r)\to G_k(\mathbf{R}^r)$ leképezés $e'(\sigma)$-t homeomorfan $e(\sigma)$-ra képezi.*

Bizonyítás. k szerint indukcióval bizonyítunk. $k=1$ esetén

$$\bar{e}'(\sigma_1) = \{p_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1\sigma_1}, 0, \ldots, 0) \mid \sum_{i=1}^{\sigma_1} p_{1i}^2 = 1 \quad \text{és} \quad p_{1\sigma_1} \geqq 0\}.$$

Így $\bar{e}'(\sigma_1)$ (σ_1-1)-dimenziós zárt félgömb, azaz homeomorf D^{σ_1-1}-gyel.

Ha $u, v\in\mathbf{R}^r$ olyan egységvektorok, amelyekre $u+v\neq 0$, akkor jelölje $T(u, v)$ az $\mathbf{R}^r$ azon forgatását, amely u-t v-be viszi és az u és v vektorok által kifeszített síkra merőleges vektorokat fixen hagyja. Így $T(u, u)=$identitás és $T(u, v)^{-1}=T(v, u)$. A $T(u, v)$ forgatás explicit módon a

$$T(u, v)p = p-\frac{(u+v, p)}{1+(u, v)}(u+v)+2(u, p)v, \quad p\in\mathbf{R}^r$$

formulával adható meg. Ebből következően T mind a három változójában folytonos és $u, v\in\mathbf{R}^n$ esetén $T(u, v)p\equiv p(\mathrm{mod}\,\mathbf{R}^n)$. Legyen $b_i\in H^{\sigma_i}$ az a vektor, amelynek σ_i-edik koordinátája 1 és a többi zérus. Ekkor $(b_1, \ldots, b_k)\in e'(\sigma)$. Ha $(e_1, \ldots, e_k)\in\bar{e}'(\sigma)$, akkor tekintsük a

$$T = T(b_k, e_k)T(b_{k-1}, e_{k-1})\ldots T(b_1, e_1)$$

forgatást, amelyre $T(b_i)=e_i$, $i=1, \ldots, k$, teljesül. Ha $\sigma_{k+1}>\sigma_k$ egész szám, akkor jelölje $D=\{u\in\bar{H}^{\sigma_{k+1}} \mid (b_1, u)=\ldots=(b_k, u)=0\}$. Ekkor D $(\sigma_{k+1}-k-1)$-dimenziós zárt félgömb, azaz egy zárt cella. Definiáljuk az

$$f: \bar{e}'(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)\times D \to \bar{e}'(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1})$$

leképezést az $f((e_1, \ldots, e_k), u)=(e_1, \ldots, e_k, Tu)$, $u\in D$, formulával, amelyben T az $(e_1, \ldots, e_k)$ elemtől a fenti módon függ. Állítjuk, hogy f homeomorfizmus. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy f jól definiált, azaz $(e_1, \ldots, e_k, Tu)\in\bar{e}'(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1})$, hiszen $(e_i, Tu)=(Tb_i, Tu)=(b_i, u)=0$, $i\leqq k$, és $(Tu, Tu)=(u, u)=1$, ahol $Tu\in\bar{H}^{\sigma_{k+1}}$, ui. $Tu\equiv u$ $(\mathrm{mod}\,\mathbf{R}^{\sigma_k})$. f folytonos leképezés és $u=T^{-1}e_{n+1}=T(e_1, b_1)\ldots T(e_n, b_n)e_{n+1}\in D$ miatt f^{-1} definiált és folytonos, azaz f homeomorfizmus. k szerinti indukcióval kapjuk, hogy $\bar{e}'(\sigma)$ zárt $d(\sigma)$ cella. A fenti f leképezés az $e'(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)\times\mathrm{int}\,D$ alteret homeomorf módon $e'(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1})$-re képezi, amiből ismét k szerinti indukcióval adódik, hogy $e'(\sigma)=\mathrm{int}\,\bar{e}'(\sigma)$. Végül megmutatjuk, hogy $q_0|e'(\sigma): e'(\sigma)\to e(\sigma)$ homeomorfizmus. A (6.1) lemma szerint $q_0|e'(\sigma)$ bijekció. Másfelől, $(e_1, \ldots, e_k)\in\bar{e}'(\sigma)-e'(\sigma)$ esetén az $X=q(e_1, \ldots, e_k)$ altér nem tartozik $e(\sigma)$-hoz, hiszen legalább egy e_i a $\bar{H}^{\sigma_i}$ határán van. Így $\dim(X\cap\mathbf{R}^{\sigma_i-1})\geqq i$ és $X\notin e(\sigma)$. Legyen most $A\subset e'(\sigma)$ relatíve zárt altér. Ekkor $\bar{A}\cap e'(\sigma)=A$, ahol $\bar{A}\subset\bar{e}'(\sigma)$ kompakt és így $q(\bar{A})$ zárt. Az előző bekezdés szerint $q(\bar{A})\cap e(\sigma)=q(A)$, azaz $q(A)\subset e(\sigma)$ relatíve zárt, amiből következik, hogy $q_0|e'(\sigma)$ homeomorfizmus.

6.3. Tétel. *Az $\binom{r}{k}$ különböző $e(\sigma)$ cellák a $G_k(\mathbf{R}^r)$ alaptéren egy* CW*-struktúrát*

határoznak meg. $r \to \infty$ esetén direkt limeszt véve ezek a cellák a $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ végtelen Grassmann-sokaság egy CW*-struktúráját definiálják.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $X \in \bar{e}(\sigma) - e(\sigma)$ esetén X egy kisebb dimenziós $e(\tau)$ cellában van. Mivel $\bar{e}'(\sigma)$ kompakt, $q(\bar{e}'(\sigma)) = \bar{e}(\sigma)$. Így az X altérnek van olyan $(e_1, \ldots, e_k)$ bázisa, amely $\bar{e}'(\sigma) - e'(\sigma)$-hoz tartozik. Az $e_1, \ldots, e_k$ vektorok ortonormáltak és $e_i \in \mathbf{R}^{\sigma_i}$. Kapjuk, hogy $\dim(X \cap \mathbf{R}^{\sigma_i}) \geqq i$ és így az X-hez tartozó $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ Schubert-szimbólumra $\tau_i \leqq \sigma_i$, $i = 1, \ldots, k$ teljesül. Azonban legalább egy e_i vektor $\mathbf{R}^{\sigma_i - 1}$-nek eleme, azaz a megfelelő τ_i egész számra $\tau_i < \sigma_i$, amiből $d(\tau) < d(\sigma)$ következik. A (6.2) lemmával együtt ez azt jelenti, hogy $G_k(\mathbf{R}^r)$ véges CW-komplexus.

A direkt limesz topológia definíció szerint $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ topologiája, amivel igazoltuk, hogy $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ is CW-komplexus.

6.4. Következmény. $\mathbf{R}P^\infty = G_1(\mathbf{R}^\infty)$ CW-komplexus és minden m esetén pontosan egy $e(m+1)$ cellát tartalmaz. Emellett $\bar{e}(m+1) = \mathbf{R}P^m \subset \mathbf{R}P^\infty$.

IRODALOM

[1] Császár Á., *Bevezetés az általános topológiába,* Akadémiai Kiadó Budapest, 1970.
[2] D. Husemoller, *Fibre bundles,* McGraw Hill Book Comp. inc. New York, 1966.
[3] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* I. Interscience, New York, 1963.
[4] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes,* Princeton Univ. Press, 1974.
[5] H. Miyazaki, Paracompactness of CW-complexes, *Tôhoku Math. J.* 4 (1952), 309—313.
[6] J. R. Munkres, Elementary differential topology, *Annals of Math. Studies* 54, Princeton Univ. Press, revised ed. 1966.
[7] E. Spanier, *Algebraic topology,* McGraw Hill Book Comp. New York, 1966.

О ТЕОРЕМЕ ОБ ИНДЕКСЕ АТЬЯ—ЗИНГЕРА IV.

Г. ТОТ

ON THE ATIYAH—SINGER INDEX THEOREM IV

G. TÓTH

AZ $ax^{2m}+by^{2n}+cz^2+dt^2=0$ DIOPHANTOSZI EGYENLET MEGOLDÁSA, HA $\sqrt{abcd}$ RACIONÁLIS SZÁM

KELEMEN JÓZSEF

Az irodalomban számos olyan eredmény ismeretes, amely additív típusú diophantoszi egyenletek megoldhatóságát egyszerűbb alakú egyenletek megoldhatóságára redukálja. Itt említhetjük egyebek között L. Tchacaloff és Chr. Karanicoloff [7], T. Vijayaraghavan [8], M. Ward [9], G. Georgiev [1], [2], A. Moessner [4], A. Schnizel [6] és a szerző [3] eredményeit. A jelen dolgozatban az

$$ax^{2m}+by^{2n}+cz^2+dt^2=0 \tag{1}$$

egyenletet redukáljuk egy egyszerűbb egyenletre. (1)-ben x, y, z, t, a, b, c, d zérustól különböző egész számok, a, b, c, d adott, $ax^{2m}+by^{2n}\neq 0$, $\sqrt{abcd}$ racionális, m és n adott természetes számok.

1. Tétel. *Az (1) egyenlet megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele az*

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+dt_0^2=0 \tag{2}$$

egyenlet megoldhatósága, ahol x_0, y_0, z_0, t_0 *zérustól különböző egész számok és* $ax_0^2+by_0^2\neq 0$.

Mivel a (2) egyenlet megoldhatóságának a kritériuma ismert (l. pl. Mordell [5], 49—51. old.), ezért l. tételünk szerint ez egyben az (1) egyenlet megoldhatóságának is kritériuma (a fentebbi feltételek mellett).

Bizonyítás. *A feltétel szükséges.*

Ha az (1) egyenlet megoldható és egyik megoldása x, y, z, t, akkor

$$\begin{cases} x_0 = x^m \\ y_0 = y^n \\ z_0 = z \\ t_0 = t \end{cases} \tag{3}$$

a (2) egyenlet megoldása. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a (3) egyenletek zérustól különböző egész számokat definiálnak, $ax_0^2+by_0^2\neq 0$ és a (2) egyenlet teljesül.

A feltétel elegendő.

Ha a (2) egyenlet megoldható és egyik megoldása x_0, y_0, z_0, t_0, akkor

$$(4)\quad \begin{cases} x = c^n d^n (ax_0^2 + by_0^2)^n u \\ y = c^m d^m (ax_0^2 + by_0^2)^m v \\ z = c^{mn-1} d^{mn} (ax_0^2 + by_0^2)^{mn-1} [cz_0 (ax_0 u^m + by_0 v^n) + \sqrt{abcd}\, t_0 (y_0 u^m - x_0 v^n)] \\ t = c^{mn} d^{mn-1} (ax_0^2 + by_0^2)^{mn-1} [dt_0 (ax_0 u^m + by_0 v^n) - \sqrt{abcd}\, z_0 (y_0 u^m - x_0 v^n)] \end{cases}$$

az (1) egyenlet megoldása, fetéve, hogy u és v zérustól különböző egész számok,

$$(5)\quad \begin{cases} au^{2m} + bv^{2n} \neq 0 \\ cz_0 (ax_0 u^m + by_0 v^n) + \sqrt{abcd}\, t_0 (y_0 u^m - x_0 v^n) \neq 0, \\ dt_0 (ax_0 u^m + by_0 v^n) - \sqrt{abcd}\, z_0 (y_0 u^m - x_0 v^n) \neq 0. \end{cases}$$

A (4) egyenletek ugyanis zérustól különböző egész számokat definiálnak és

$$cz^2 + dt^2 = c^{2mn} d^{2mn} (ax_0^2 + by_0^2)^{2mn-1} (cz_0^2 + dt_0^2)(au^{2m} + bv^{2n}) =$$

$$= -c^{2mn} d^{2mn} (ax_0^2 + by_0^2)^{2mn} (au^{2m} + bv^{2n}) = -ax^{2m} - by^{2n} \neq 0.$$

2. Tétel. *Az (1) egyenlet összes megoldása előállítható*

$$(6)\quad \begin{cases} x = [rcd (ax_0^2 + by_0^2)]^{\frac{k}{m}} u \\ y = [rcd (ax_0^2 + by_0^2)]^{\frac{k}{n}} v \\ z = (rd)^k [c(ax_0^2 + by_0^2)]^{k-1} [cz_0 (ax_0 u^m + by_0 v^n) + \sqrt{abcd}\, t_0 (y_0 u^m - x_0 v^n)] \\ t = (rc)^k [d(ax_0^2 + by_0^2)]^{k-1} [dt_0 (ax_0 u^m + by_0 v^n) - \sqrt{abcd}\, z_0 (y_0 u^m - x_0 v^n)] \end{cases}$$

alakban, ahol k az m és n számok legkisebb közös többszöröse, u és v zérustól különböző egész számok, melyekre teljesülnek az (5) feltételek, r zérustól különböző racionális szám, olyan, hogy a (6) egyenletekkel definiált számok egészek legyenek.

Bizonyítás. (6) zérustól különböző egész számokat definiál, és ezek a számok az (1) egyenlet megoldását adják, amivel

$$cz^2 + dt^2 = r^{2k} c^{2k} d^{2k} (ax_0^2 + by_0^2)^{2k-1} (cz_0^2 + dt_0^2)(au^{2m} + bv^{2n}) =$$

$$= -r^{2k} c^{2k} d^{2k} (ax_0^2 + by_0^2)^{2k} (au^{2m} + bv^{2n}) = -ax^{2m} - by^{2n} \neq 0.$$

Fordítva, az (1) egyenlet bármely megoldásához található olyan u, v, r számhármas és a (2) egyenletnek olyan megoldása, amelyeket a (6) egyenletbe helyettesítve, az (1) egyenlet szóban forgó megoldását kapjuk, mégpedig

$$u = x,$$

$$v = y,$$

$$x_0 = cd(ax^{2m} + by^{2n}) v_1,$$

$$y_0 = cd(ax^{2m} + by^{2n}) v_2,$$

$$z_0 = d[cz(ax^m v_1 + by^n v_2) - \sqrt{abcd}\, t(x^m v_2 - y^n v_1)],$$

$$t_0 = c[dt(ax^m v_1 + by^n v_2) + \sqrt{abcd}\, z(x^m v_2 - y^n v_1)],$$

$$r = \frac{1}{c^3 d^3 (ax^{2m} + by^{2n})^2 (av_1^2 + bv_2^2)},$$

ahol v_1, v_2 zérustól különböző egész számok és

$$av_1^2+bv_2^2 \neq 0,$$

$$cz(ax^m v_1+by^n v_2)-\sqrt{abcd}\,t(x^m v_2-y^n v_1) \neq 0,$$

$$dt(ax^m v_1+by^n v_2)+\sqrt{abcd}\,z(x^m v_2-y^n v_1) \neq 0.$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy az így megadott $u, v, r, x_0, y_0, z_0, t_0$ számok minden előírt feltételnek eleget tesznek.

Megjegyzések

1. Ha $\sqrt{abcd}$ irracionális szám, akkor a (2) egyenlet megoldhatósága az (1) egyenlet megoldhatóságának *nem elegendő* feltétele.

Példa erre az

(7) $$x^6+3y^6-7z^2-7t^2 = 0$$

egyenlet. Itt $\sqrt{abcd}=7\sqrt{3}$ irracionális szám. Az

$$x_0^2+3y_0^2-7z_0^2-7t_0^2 = 0$$

egyenlet megoldható, megoldása például

$$x_0 = 5, \quad y_0 = 15, \quad z_0 = 8, \quad t_0 = 6,$$

a (7) egyenletnek viszont csak az $x=y=z=t=0$ megoldása létezik.
Ez a következőképpen látható be:

Szükséges, hogy a (7) egyenletben x^6+3y^6 osztható legyen 7-tel, vagyis nem lehetséges, hogy x és y közül pontosan az egyik legyen 7-tel osztható. Ha sem x, sem y nem osztható 7-tel, akkor Fermat tétele szerint x^6 is, y^6 is 1 maradékot ad 7-tel osztva, x^6+3y^6 pedig nem osztható 7-tel. Szükséges tehát, hogy x és y osztható legyen 7-tel: $x=7x_1$, $y=7y_1$, ahol x_1 és y_1 egész számok. Ekkor x^6+3y^6 osztható 7^6-nal, z^2+t^2 pedig 7^5-nel. Ha sem z, sem t nem osztható 7-tel, akkor négyzetük 7-tel osztva, 1,2 vagy 4 maradékot ad, s így z^2+t^2 lehetséges maradékai 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6, vagyis z^2+t^2 nem osztható 7-tel. Szükséges tehát, hogy $z=7z_1$, $t=7t_1$ legyen, ahol z_1 és t_1 egész számok. Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy $z_1=7^2z_2$ és $t_1=7^2t_2$, vagyis $z=7^3z_2$, $t=7^3t_2$. Ezeket figyelembe véve és a (7) egyenletet 7^6-nal osztva, az

$$x_1^6+3y_1^6-7z_2^2-7t_2^2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Az eljárás ismétlésével kimutatható, hogy x, y, z és t a 7-nek tetszőleges egész kitevőjű hatványával oszthatók, ami csak akkor lehetséges, ha $x=y=z=t=0$.

2. $\sqrt{abcd}$ racionális volta — a (2) egyenlet megoldhatósága mellett — az (1) egyenlet megoldhatóságának *elegendő, de nem szükséges* feltétele. Példa erre a

$$3x^{2m}+7y^{2n}-z^2-t^2 = 0$$

egyenlet. Ez az egyenlet megoldható, bármilyen természetes számot jelent is m és n, például $x=y=z=1$, $t=3$ megoldás, ugyanakkor $\sqrt{abcd}=\sqrt{21}$ irracionális szám.

3. [3] szerint a (2) egyenlet megoldhatósága az a, b, c, d együtthatóktól függetlenül az (1) egyenlet megoldhatóságának akkor is *szükséges és elegendő feltétele,* ha m és n relatív prím páratlan természetes számok.

IRODALOM

[1] G. GEORGIEV, Résolution de l'équation $\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0$ en nombres rationnels. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* 2, 229—246 (1951).

[2] G. GEORGIEV, On the solution in rational numbers of the indeterminate equation $\sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{m_k} = 0$. *Uspehi Matem. Nauk* 8, no. 1 (53), 127—130 (1953).

[3] KELEMEN J., Megjegyzések az $a_1 x_1^{k_1} = a_2 x_2^{k_2} = \ldots = a_n x_n^{k_n} = 0$ diophantoszi egyenlethez. *Mat. Lapok* 21. évf. (1970), 89—94.

[4] A. MOESSNER, Über die Gleichung $A^{2n} + B^2 = C^{2n} + D^2$. *Glasnik Mat-Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* Ser II. 12 (1957), 21—22.

[5] L. J. MORDELL, *Diophantine equations,* London—New York, 1969.

[6] A. SCHINZEL, On the diophantine equation $\sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{g_k} = 0$. *Prace Mat.* 4 (1960), 45—51.

[7] L. TCHACALOFF ET CHR. KARANICOLOFF, Résolution de l'équation $Ax^m = By^n = z^p$ en nombres rationnales. *C. R. Acad. Sci. Paris* 210, 281—283 (1940).

[8] T. VIJAYARAGHAVAN, The general rational solution ofsome Diophantine equations of the form $\sum_{r=1}^{k+1} A_r x_r^{n_r} = 0$. *Proc. Indian Acad. Sci* Sect. A 12 (1940), 284—289.

[9] M. WARD, A class of soluble Diophantine equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA 37, 113—114 (1951).

РЕШЕНИЕ ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ $ax^{2m} + by^{2n} + cz^2 + dt^2 = 0$ В СЛУЧАЕ КОГДА $\sqrt{abcd}$ — РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Й. КЕЛЕМЕН

SOLUTION OF THE DIOPHANTINE EQUATION $ax^{2m} + by^{2n} + cz^2 + dt^2 = 0$ IN CASE $\sqrt{abcd}$ IS A RATIONAL NUMBER

J. KELEMEN

SCHUR-TÍPUSÚ IRREDUCIBILITÁSI TÉTELEKRŐL

FAZEKAS ÁRPÁD és GERJÁK ISTVÁN

I. Bevezetés

Elöljárójában szeretnénk idézni a Győry Kálmán és Rimán János [15] dolgozatának bevezetőjében elmondottakat:

„Racionálisan egész együtthatós polinomok reducibilitásának a vizsgálata többek között azért is érdekes, mert egy-egy algebrai számtest megadása valamely primitív elemének definiáló polinomja (azaz egy irreducibilis polinom) megadásával történik. A primitív elem definiáló polinomjának esetleges speciális tulajdonságai az algebrai számtest különleges tulajdonságait eredményezhetik. Így az

$$F(x) = c_1(x-a_1)\ldots(x-a_m)+c_0 = g(f(x))$$

alakú irreducibilis polinomok (ahol $g(x)=c_1x+c_0\in Z[x]$ és $f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_m)$ különböző $a_1, \ldots, a_m$ egészekkel), melyek irreducibilitását a [15] dolgozat tárgyát képező Schur-típusú irreducibilitási tételek biztosítják, számok különleges, extrém tulajdonsággal rendelkeznek. Egyik fontos tulajdonságuk, hogy pl. abban az esetben, amikor $\max|a_i-a_j|$ aránylag nagy m-hez és $|c_0|$-hez képest, $F(x)=g(f(x))$ irreducibilis és gyökei mind valósak, tehát totálisan valós algebrai számtestet generálnak (lásd L. Weisner [45]). Általában ilyen alakú polinomokkal szokás totálisan valós algebrai számtesteket megadni a különböző vizsgálatok, alkalmazások során) egy, a diofantikus approximációk elméletében való alkalmazás található pl. J. W. S. Cassselsnél: — lásd [15], Irodalomjegyzék [9]".[1]

Schur [37] problémafelvetése nyomán számos eredmény született, mely $g(f(x))$ irreducibilitását biztosítja. Azon esetekben, amikor $g(x)$ körosztási polinom, ill. gyökei egy körosztási test nem valós egységei, a problémát Seres Iván oldotta meg [38], [39], [41]. Győry Kálmán [10], [11], [13], [14] ún. nem-valós Kronecker-féle felbontási testtel rendelkező $g(x)$-ek mellett abban a korábbiakhoz képest általánosabb formában oldotta meg a $g(f(x))$ alakú polinomok reducibilitásának kérdését, amikor az $f(x)$ polinom gyökei nem szükségképpen egészek, csupán valós számok.

A klasszikus esetben, amikor $g(x)$ lineáris, a probléma elemi (de többnyire meglehetősen bonyolult) módszerekkel kezelhető. Jelen dolgozatunkban, mint az idézet is jelezte, ezzel a klasszikus esettel foglalkozunk.

Ezen klasszikus esetben nyertek szép eredményeket: Pólya Gy. [32] T. Tatuzawa [43], A. Brauer és G. Ehrlich [5], R. J. Levit [19], H. Tverberg [44], H. L. Dorwart és O. Ore [7], L. Weisner [45], E. L. Petterson [25], Seres I. [40], H. Kleiman [18], W. Schulz [35], Győry Kálmán [13], továbbá Győry Kálmán és Rimán János [15]. Az első öt idézett dolgozat eredményei azon esetben biztosítják a $g(f(x))$ irreducibilitását, amikor $|g(0)|$ kisebb, mint egy csupán $m=\deg f$-től függő explicit korlát,

[1] Az érdeklődők Győry K.—Rimán J. [15]-ben még további két alkalmazásra találnak példát.

amelyet $k^2(m)$-mel jelölünk. Győry Kálmán és Rimán János [15] az eredményeket kiterjesztette azokra az f, g polinomokra is, amelyekre $|g(0)| \geqq k^2(m)$, de $f(x)$ gyökei között vannak egymástól távoliak. Eredményeikből még az a következmény is adódik, hogy rögzített $c_0 \neq 0$ racionális egész szám esetén, csak véges sok lineáris $g(x)=c_1x+c_0$ és véges sok páronként nem ekvivalens[2] $f(x)$ létezik (különböző racionális egész gyökökkel), melyekre $g(f(x))$ Q-felett reducibilis és az összes ilyen g, f kivétel meghatározható.

Ezen kivételek meghatározása a számos aleset megkülönböztetése miatt meglehetősen bonyolulut, azonban a bizonyítás egy jól kezelhető algoritmust is ad és így a kivételek „megkeresése" végső soron számítógéppel is elvégezhető.

H. L. Dorwart és O. Ore [7] a $c_0 = \pm 1$ esetén adták meg az összes f, g kivételeket.

Újabban *Gerják István* [9] felhasználva Győry K. és Rimán J. [15] eredményeit, a $c_0 = \pm 2$ és $c_0 = \pm 3$ esetén határozta meg az összes f, g kivételeket.

Abban az esetben, amikor c_0-ra bizonyos megkötéseket teszünk, természetesen egyszerűsödik a reducibilitás kérdése és a kivételek meghatározása is könnyebbé válik.

A $c_0 = \pm p$ (ahol p prím) esetén W. Schulz [35] lényegesen továbbfejlesztette Pólya György [32], valamint A. Brauer—R. Brauer és H. Hopf [4] eredményeit, megmutatva, hogy ha $\deg f = 2n \geqq 8$ és $g(f(x))$ reducibilis, akkor két egyenlő fokszámú irreducibilis tényezője van, valamint ezek f és g ismeretében explicite meghatározhatók (lásd 7. Lemma). továbbá azt is megmutatta, hogy az a sejtés, miszerint a kivételes g, f polinomok, melyekre $g(f(x))$ reducibilis, már p-től függően is explicite meghatározhatók, ekvivalens az ún. Tarry—Escott-féle problémával, amely mind ez ideig megoldatlan.

Dolgozatunkban a klasszikus Schur-tpusú problémánál maradva az (1. Tételben $c_0 = \pm p$ esetén tovább javítjuk W. Schulz [35] eredményét, megmutatva, hogy kisebb fokszám ($\deg f = 6, 3$) esetén és feltételezve, hogy $g(f(x))$ tényezői nem egyenlő fokszámúak, mód van a reducibilis polinomok p-től függő explicit előállítására.

A 2. Tételben, felhasználva W. Schulz [35] XI. tételét a $\deg f = 2n$ esetben egy $D(2n)$ explicit korlátot határozunk meg, amelynél kisebb $|g(0)| = p$ prímekre $g(f(x))$ szükségképpen irreducibilis. Ezzel ebben a speciális esetben (amikor tehát $g(0)$ prím) javítjuk R. J. Levit [19] és H. Tverberg [44] eredményeit.

A két tétel együttesen lényegesen egyszerűsíti a kivételek megkeresésének problémáját, például a $c_0 = \pm 5$ és ± 7 esetekhez tartozó kivételek $\deg f = 6, 3$ esetén egyszerű következményként adódnak. Végül a tételek után Megjegyzésben összefoglaljuk a kivételes f, g polinomokra vonatkozó észrevételeinket.

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Győry Kálmánnak dolgozatunk készítésében nyújtott igen értékes segítségéért.

II. Tételek

Legyen $p > 3$ prím, $m > 2$ természetes szám és $f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_m$ különböző racionális egészek. Továbbá legyen $g(x) = cx \pm p$, ahol $c > 0$ racionális egész.

[2] Az $f(x)$ és $f(x+a) \in Z[z]$ $(a \in Z)$ plinomokat, melyek reducibilitási szempontból azonosan viselkednek, szokás ekvivalenseknek nevezni.

1. Tétel. *Ha* $g(f(x))=cf(x)\pm p$ *reducibilis* Q *felett, azaz* $g(f(x))=f_1(x)\cdot f_2(x)$, *ahol* $f_1, f_2 \in Z[x]$, *valamint* $f_1(x)$ *és* $f_2(x)$ *fokszáma különböző* ($\deg f_1 < \deg f_2$), *akkor vagy*

a) $m=6$, *pontosabban* $\deg f_1=2$, $\deg f_2=4$, *továbbá* $c=1$,

vagy

b) $m=3$, *pontosabban* $\deg f_1=1$, $\deg f_2=2$, *továbbá* $c=1$

vagy $c=8$

és mindkét esetben a reducibilis polinomok p-től függően explicite meghatározottak.

Megjegyzés:

1. $p=\pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13$ esetén Tételeinkben (lásd később 3.—4.—5.—6. Tételeket) konkrétan is meghatározzuk a reducibilis polinomokat.

2. A tétel bizonyításában megmutatjuk azt is, hogy $\deg f_1=\deg f_2$ esetén már az $m>2$ feltétel mellett is igazak W. Schulz [35], 3. bekezdésében elmondottak, (melyeket 7. Lemma 2.—5. állításában később megismétlünk), amivel jelentősen egyszerűsödik a kivételek megkeresése.

2. Tétel. *Legyen* $f(x)=\prod_{i=1}^{2n}(x-a_i)$ *különböző* a_i *racionlis egészekkel,* $n\neq 3$, $g(x)=cx\pm p\in Z[x]$, *ahol* $c\neq 0$ *racionális egész, továbbá legyen* $p>3$ *prím és* $N=\left[\frac{n}{2}\right]$. *Ekkor* $g(f(x))$ Q *feletti irreducibilitásának szükséges feltétele, hogy a*

a) $$p \geqq 4^{1-N}\frac{N(N+1)\ldots(4N-2)}{(2N-1)^{N-1}}(4N+1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]}-1=D(2n)$$

b) $$p \geqq 4^{2-2N}\frac{N(N+1)\ldots(4N-2)}{(N-1)!}(4N+1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]}-1=D(2n)$$

teljesüljön.

Megjegyzések:

1. A 2. Tétel $n=3$ ($m=6$) esetén is érvényes, feltéve, hogy $\deg f_1=\deg f_2=3$ és ekkor a) alapján $D(6)=9$.

2. A vizsgált speciális $g(x)$ esetén a 2. Tétel lényegesen jobb eredményt ad, mint R. J. Levit (5. Lemma) eredménye. [19] Ugyanis a bizonyításban megmutatjuk, hogy $\frac{D(2n)}{k^2(2n)}>2\left(\frac{3}{2}\right)^{N-1}$, sőt páratlan n-ekre még élesebb állítás is igaz. Eredményünk már konkrét megkereséseket is lehetővé tesz, (hiszen $p\leqq 59$ esetén csak $m\leqq 7$-ed fokú polinomokat kell megvizsgálnunk (míg R. J. Levit eredménye inkább elméleti jelentőségű, konkrét alkalmazása nehézkes (sok polinomot kell megvizsgálni).

3. A 2. Tételben azért volt szükség a) és b) eset szétválasztására, mivel $n \leqq 9$-ig a), $n > 9$-től b) ad jobb eredményt.

4. A $D(2n)$ néhány értéke a) alapján: $D(4)=1$, $D(6)=9$, $D(8)=59$, $D(10)=359$

5. A 2. Tétel állítása jobb eredményt ad, mint az 5. Lemma páros m-ekre, ugyanis

$$k^2(2n) = 2^{1-n}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}n+n-1\right)$$

és ha feltesszük, hogy n páros, vagyis $N=\frac{n}{2}$, akkor a) alapján

$$\frac{D(2n)}{k^2(2n)} = \frac{4^{1-N}N(N+1)\ldots(4N-2)}{2^{1-2N}N(N+1)\ldots(3N-1)(2N-1)^{N-1}} = 2\frac{3N(3N+1)\ldots(4N-2)}{(2N-1)^{N-1}} >$$

$$> 2\frac{(3N)^{N-1}}{(2N-1)^{N-1}} > 2\left(\frac{3N}{2N}\right)^{N-1} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{N-1}$$

Ehhez hasonlóan páratlan n esetén $\frac{D(2n)}{k^2(2n)} > 4\left(\frac{3}{2}\right)^{N-1}$ adódik.

III. A kivételes polinomok meghatározása

Mint arról már a Bevezetésben is szó volt, a Schur-típusú irreducibilitási tételek felvetik azon kivételes $g(x)=c_1x\pm c_0$, $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ polinomok konkrét meghatározását (bizonyos c_0 értékek mellett), melyekre $g(f(x))$ reducibilis. A kivételes polinomok megkeresése elősegítheti a Tételek pontosítását. Feltehető, hogy $c_1>0$.

A $c_0=\pm1, \pm2, \pm3$ értékekre már ismertek a kivételek. Az 1., 2. Tételek, valamint a 4., 7. Lemmák (lásd később) alkalmazásával további c_0 értékekre is meghatározzuk ezeket. A teljesség kedvéért tekintsük át az előző eseteket is.

1. Lemma (H. L. Dorwart—O. Ore.) *Ha* $g(x)=cx\pm1\in Z[x]$ $(c\neq0)$ *és* $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ *különböző* a_i *racionális egészekkel, úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases} x+1 \\ 4x+1 \\ x+1 \end{cases} \text{ és } f(x) \text{ ekvivalens az } \begin{cases} x(x-2) \\ x(x-1) \\ x(x-1)(x-2)(x-3) \end{cases}$$

polinomokkal.

Bizonyítás: lásd [7].

A továbbiakban tételezzük fel, hogy $(c_1, c_0)=1$. (Ez az általánosság megszorítása nélkül megtehető, hiszen ellenkező esetben a legnagyobb közös osztót kiemelve az irreducibilitás kérdését visszavezethetjük kisebb c_0-ak esetére. Pl.: $g(x)=$ $=cx\pm 2$; páros c esetén $g(x)=2(c^*x\pm 1)$, és így problémánkat visszavezettük az 1. Lemmára). Megtartva az itt szereplő jelöléseket és kikötéseket, érvényesek a következők:

2. Lemma. *Ha* $g(x)=cx\pm 2$, *úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases}9x+2\\ x+2\\ x-2\end{cases} \quad \textit{és} \quad f(x) \quad \textit{ekvivalens az} \quad \begin{cases}x(x-1)\\ x(x-3)\\ x(x-1)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+2\\ x-2\\ x+2\end{cases} \quad \text{és} \quad f(x) \quad \text{ekvivalens} \quad \text{az} \quad \begin{cases}x(x-1)(x-3)\\ x(x-2)(x-3)\\ x(x-1)(x-3)(x-4)\end{cases}$$

polinommal.

Bizonyítás: Lásd [9].

3. Lemma. *Ha* $g(x)=cx\pm 3$, *úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases}16x+3\\ 4x+3\\ 4x-3\\ x+3\\ x-3\\ 8x+3\\ 8x-3\\ x+3\\ x-3\\ 4x+3\\ x+3\\ x-3\end{cases} \quad \text{és} \quad f(x) \quad \text{ekvivalens az} \quad \begin{cases}x(x-1)\\ x(x-2)\\ x(x-1)\\ x(x-4)\\ x(x-2)\\ x(x-1)(x-2)\\ x(x-1)(x-2)\\ x(x-2)(x-4)\\ x(x-2)(x-4)\\ x(x-1)(x-2)(x-3)\\ x(x-1)(x-4)(x-5)\\ x(x-1)(x-2)(x-3)\end{cases}$$

polinommal.

Bizonyítás: Lásd [9].

Ezután rátérünk eredményeink ismertetésére:

3. Tétel. *Ha* $g(x)=cx\pm 5$, *úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases}36x+5\\16x-5\\9x+5\end{cases}\quad \textit{és}\quad f(x)\quad \textit{ekvivalens az}\quad \begin{cases}x(x-1)\\x(x-1)\\x(x-2)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}4x+5\\4x-5\\x+5\\x-5\\8x+5\\8x-5\\x+5\\x-5\\9x+5\\4x+5\\4x-5\\x+5\\x-5\\x+5\\x-5\end{cases}\quad \text{és}\quad f(x)\quad \text{ekvivalens az}\quad \begin{cases}x(x-3)\\x(x-2)\\x(x-6)\\x(x-4)\\x(x-2)(x-3)\\x(x-1)(x-3)\\x(x-4)(x-6)\\x(x-2)(x-6)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\\x(x-1)(x-3)(x-4)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\\x(x-2)(x-3)(x-5)\\x(x-1)(x-4)(x-5)\\x(x-1)(x-6)(x-7)\\x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\end{cases}$$

polinommal.

4. Tétel. *Ha* $g(x)=cx\pm 7$, *úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases}64x+7\\36x-7\\16x+7\\9x-7\\4x+7\\4x-7\\x+7\\x-7\\8x+7\\8x-7\\x+7\\x-7\\16x+7\\9x-7\end{cases}\quad \text{és}\quad f(x)\quad \text{ekvivalens az}\quad \begin{cases}x(x-1)\\x(x-1)\\x(x-2)\\x(x-2)\\x(x-4)\\x(x-3)\\x(x-8)\\x(x-6)\\x(x-3)(x-4)\\x(x-1)(x-4)\\x(x-6)(x-8)\\x(x-2)(x-8)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}4x+7\\4x-7\\x-7\\x+7\\x-7\\x+7\end{cases}\quad \textit{és}\quad f(x)\quad \textit{ekvivalens az}\quad \begin{cases}x(x-1)(x-4)(x-5)\\x(x-1)(x-3)(x-4)\\x(x-1)(x-6)(x-7)\\x(x-1)(x-8)(x-9)\\x(x-2)(x-3)(x-5)\\x(x-2)(x-4)(x-6)\end{cases}$$

olinommal.

5. Tétel. *Ha* $g(x)=cx\pm 11$, *úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases}144x+11\\100x-11\\36x+11\\25x-11\\16x+11\\9x+11\\4x+11\\4x-11\\x+11\\x-11\\8x+11\\8x-11\\x+11\\x-11\\25x-11\\16x+11\\9x+11\\4x+11\\4x+11\\4x-11\\x-11\\x+11\\x+11\\x+11\\36x+11\end{cases} \text{ és } f(x) \text{ ekvivalens az } \begin{cases}x(x-1)\\x(x-1)\\x(x-2)\\x(x-2)\\x(x-3)\\x(x-4)\\x(x-6)\\x(x-5)\\x(x-12)\\x(x-10)\\x(x-5)(x-6)\\x(x-1)(x-6)\\x(x-10)(x-12)\\x(x-2)(x-12)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\\x(x-1)(x-3)(x-4)\\x(x-1)(x-4)(x-5)\\x(x-1)(x-6)(x-7)\\x(x-2)(x-3)(x-5)\\x(x-1)(x-5)(x-6)\\x(x-1)(x-10)(x-11)\\x(x-1)(x-12)(x-13)\\x(x-2)(x-6)(x-8)\\x(x-3)(x-4)(x-7)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x-11\\x+11\\x-11\end{cases} \text{ és } f(x) \text{ ekvivalens az } \begin{cases}x(x-2)(x-5)(x-7)\\x(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)\\x(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)\end{cases}$$

polinommal.

6. Tétel. *Ha* $g(x)=cx\pm 13$, *úgy* $g(f(x))$ *akkor és csak akkor reducibilis* Q *felett, ha*

$$g(x)=\begin{cases}196x+13\\144x-13\\49x+13\\36x-13\\16x-13\\9x-13\\4x+13\\4x-13\\x+13\\x-13\\8x+13\\8x-13\\x+13\\x-13\\49x+13\\16x-13\\9x-13\\4x-13\\4x-13\\4x+13\\x+13\\x+13\\x-13\\x-13\\x-13\\x-13\\36x-13\end{cases} \text{ és } f(x) \text{ ekvivalens az } \begin{cases}x(x-1)\\x(x-1)\\x(x-2)\\x(x-2)\\x(x-3)\\x(x-4)\\x(x-7)\\x(x-6)\\x(x-14)\\x(x-12)\\x(x-6)(x-7)\\x(x-1)(x-7)\\x(x-12)(x-14)\\x(x-2)(x-14)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\\x(x-1)(x-3)(x-4)\\x(x-1)(x-4)(x-5)\\x(x-2)(x-3)(x-5)\\x(x-1)(x-6)(x-7)\\x(x-1)(x-7)(x-8)\\x(x-2)(x-7)(x-9)\\x(x-1)(x-14)(x-15)\\x(x-3)(x-4)(x-7)\\x(x-2)(x-6)(x-8)\\x(x-1)(x-12)(x-13)\\x(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)\\x(x-1)(x-2)(x-3)\end{cases}$$

polinommal.

Megjegyzések:

1. $g(x)=(n+1)^2x+n$ $f(x)=x(x-1)$ $(n=1, 2, \ldots)$ esetén
   $g(f(x))=[(n+1)x-n][(n+1)x-1]$ reducibilis.

2. $g(x)=x-k$ $f(x)=x(x-2)\left(x-(k+1)\right)$ $(k\neq 0, 1)$ esetén
   $g(f(x))=(x-1)\left(x^2-(k+2)x+k\right)$ reducibilis

3. $g(x)=x-k$ $f(x)=x\left(x-(k-1)\right)$ $(k\neq 0, 1)$ esetén
   $g\left(f(x)\right)=(x-k)(x+1)$ reducibilis.

4. $g(x)=(k-1)^2x-k$ $f(x)=x(x-1)$ $(k\neq 0, 1)$ esetén
   $g(f(x))=[(k-1)x+1][(k-1)x-k]$ reducibilis.

5 $g(x)=x+k$ $f(x)=x(x-1)[x-(k+1)][x-(k+2)]$ $(k\neq 0)$ esetén
   $g(f(x))=\left(x^2-(k+2)x+k\right)\left(x_x^2-(k+2)x+1\right)$ reducibilis.

6. $g(x)=x+k \quad f(x)=x\big(x-(k+1)\big) \quad (k\neq 0)$ esetén
$g\big(f(x)\big)=(x-k)(x-1)$ reducibilis.

7. $g(x)=x+k \quad f(x)=x\big(x-(k-1)\big)\big(x-(k+1)\big) \quad (k\neq 0)$ esetén
$g\big(f(x)\big)=(x-k)(x^2-kx-1)$ reducibilis.

8. $g(x)=x-k \quad f(x)=x(x-1)(x-k)\big(x-(k-1)\big) \quad (k\neq 0, 1, 2)$ esetén
$g\big(f(x)\big)=(x^2-kx-1)(x^2-kx+k)$ reducibilis.

9. $g(x)=4x+k \quad f(x)=x\left(x-\dfrac{k+1}{2}\right) \quad k\geqq 1$ páratlan esetén
$g\big(f(x)\big)=(2x-k)(2x-1)$ reducibilis.

10. $g(x)=4x-k \quad f(x)=x\left(x-\dfrac{k-1}{2}\right) \quad k\geqq 3$ páratlan esetén
$g\big(f(x)\big)=(2x-k)(2x+1)$ reducibilis.

11. $g(x)=16x+k \quad f(x)=x\big(x-(l+1)\big) \quad k=4l+3 \quad l=0, 1, 2, \ldots$ esetén
$g\big(f(x)\big)=(4x-k)(4x-1)$ reducibilis.

12. $g(x)=16x-k \quad f(x)=x\big(x-(l+1)\big) \quad k=4l+5 \quad l=0, 1, 2, \ldots$ esetén
$g\big(f(x)\big)=(4x-k)(4x+1)$ reducibilis.

13. $g(x)=l^2x+k \quad f(x)=x(x-2) \quad l=\dfrac{k+1}{2} \quad k$ páratlan $\geqq 1$
$g\big(f(x)\big)=(lx-1)(lx-k)$ reducibilis.

14. $g(x)=l^2x-k \quad f(x)=x(x-2) \quad l=\dfrac{k-1}{2} \quad k$ páratlan $\geqq 3$
$g\big(f(x)\big)=(lx+1)(lx-k)$ reducibilis.

15. $g(x)=8x+k \quad f(x)=x\big(x-(l-1)\big)(x-l) \quad l=\dfrac{k+1}{2} \quad k$ páratlan $\geqq 3$
$g\big(f(x)\big)=(2x-k)(4x^2-2kx-1)$ reducibilis.

16. $g(x)=8x-k \quad f(x)=x(x-1)(x-l) \quad l=\dfrac{k+1}{2} \quad k$ páratlan $\geqq 3$
$g\big(f(x)\big)=(2x-1)\big(4x^2-2(k+2)x+k\big)$ reducibilis.

17. $g(x)=4x+k \quad f(x)=x(x-1)(x-l)\big(x-(l+1)\big) \quad l=\dfrac{k+1}{2} \quad k\geqq 3$ páratlan
$g\big(f(x)\big)=\big(2x^2-(k+3)x+1\big)\big(2x^2-(k+3)x+k\big)$ reducibilis.

18. $g(x)=4x-k \quad f(x)=x(x-1)(x-l)\big(x-(l+1)\big) \quad l=\dfrac{k-1}{2} \quad k\geqq 5$ páratlan
$g\big(f(x)\big)=\big(2x^2-(k+1)x-1\big)\big(2x^2-(k+1)x+k\big)$ reducibilis.

19. $g(x)=l^2x+k \quad f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3) \quad l=\dfrac{k+1}{2} \quad k\geqq 1$ páratlan
$g\big(f(x)\big)=(lx^2-3lx+1)(lx^2-3lx+k)$ reducibilis.

20. $g(x)=l^2x-k \quad f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3) \quad l=\dfrac{k+1}{2} \quad k\geqq 3$ páratlan
$g\big(f(x)\big)=(lx^2-3lx-1)(lx^2-3lx+k)$ reducibilis.

21. $g(x)=x+k \quad f(x)=x(x-2)(x-l)(x-(l+2)) \quad l=\frac{k+1}{2} \quad k\geqq 5$ páratlan
$gf((x))=(x^2-(l+2)x+1)(x^2-(l+2)x+k)$ reducibilis.

22. $g(x)=x+k \quad f(x)=x(x-1)(x-l)(x-(l+1)) \quad l=\frac{k+4}{2} \quad k\geqq 2$ páros
$g(f(x))=(x^2-(l+1)x+2)(x^2-(l+1)x+(l-2))$ reducibilis.

23. $g(x)=x+k \quad f(x)=x(x-l) \quad l=\frac{k+4}{2} \quad k\geqq 2$ páros
$g(f(x))=(x-2)(x-(l-2))$ reducibilis.

24. $g(x)=x+k \quad f(x)=x(x-1)(x-(l+2)) \quad k=\frac{k}{2} \quad k\geqq 2$ páros
$g(f(x))=(x-2)(x^2-(l+1)x-l)$ reducibilis.

25. $g(x)=x-k \quad f(x)=x(x-(l+1))(x-(l+2)) \quad l=\frac{k}{2} \quad k\geqq 2$ páros
$g(f(x))=(x-l)[x^2-(l+3)x+2]$ reducibilis.

IV. Bizonyítások

A tételek bizonyításához, valamint a kivételek meghatározásához több lemmára lesz szükségünk. Az első állítás megfogalmazása előtt vezessük be a következő jelöléseket:

Legyen $m\geqq 2$ természetes szám, $g(0)\neq 0$ racionális egész szám (a későbbiekben bevezetett $g(x)$ lineáris polinom konstans tagja) és

$$\lambda(g(0),\ m)=\begin{cases}|g(0)|+1, & \text{ha} \quad m=2,3\\ |g(0)|+2, & \text{ha} \quad m=4\\ |g(0)|, & \text{ha} \quad 5\leqq m\leqq 16\\ \frac{2}{3}|g(0)|+\left[8-\frac{m}{2}\right], & \text{ha} \quad 17\leqq m\end{cases}$$

Ekkor igaz a következő:

4. Lemma (Győry K.—Rimán J.). *Ha* $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ *különböző* a_i *racionális egészekkel,* $g(x)=c_1x+c_0$ *zérustól különböző racionális egész együtthatókkal és*

$$|c_1|>2^m g^2(0)+1 \quad \textit{vagy} \quad \max_{i,j}|a_i-a_j|>\lambda(g(0),\ m)$$

úgy $g(f(x))$ Q *felett irreducibilis.*

Bizonyítás: Lásd [15].

Következmény: Adott $c_0\neq 0$ racionális egész szám esetén csak véges sok lineáris $g(x)=c_1x+c_0$ és véges sok páronként nem ekvivalens $f(x)$ létezik különböző racionális egész gyökökkel, melyekre $g(f(x))$ Q felett reducibilis és az összes ilyen g, f kivétel meghatározható.

5. Lemma (R. J. Levit). *Legyen* $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ *alakú polinom, különböző* a_i *racionális egészekkel,* $g(x)=c_1x+c_0\in Z[x]$ *zérustól különböző együtthatókkal és legyen* $N=\left[\frac{m+1}{2}\right]$. *Ha*

$$|g(0)|<2^{1-N}\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}\right]\left(\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}\right]+N-1\right)=k^2(m)$$

úgy $g(f(x))$ *Q felett irreducibilis.*

Bizonyítás. Közvetlenül adódik R. J. Levit [19] 2. tételéből.

Definiáljuk a $P(m)$ számokat ($m=2, 3, 4, \ldots$) a következőképpen (lásd [44]): van olyan m-edfokú reducibilis $F(x)\in Z[x]$ polinom és különböző $a_1, a_2, \ldots, a_m$ racionális egészek, hogy

$$0<|F(a_i)|\leqq P(m)\quad i=1, 2, 3, \ldots, m$$

de nincs olyan $F^*(x)\in Z[x]$ m-edfokú reducibilis polinom, hogy valamilyen különböző $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_m^*$ racionális egészekkel

$$0<|F^*(a_i^*)|<P(m)\quad i=1, 2, 3, \ldots, m$$

6. Lemma (H. Tverberg). *Ha* $N=\left[\frac{m+1}{2}\right]$, *úgy* $P(m)=(\xi+O(1))^N\cdot N!$

ahol ξ *egy effektíve kiszámítható konstans és* $1{,}734<\xi\leqq(4/3)\cdot 3^{1/4}$.

Speciálisan: $P(2)=1$, $P(3)=2$, $P(4)=1$, $P(5)=3$, $P(6)=5$, $P(7)=16$.

Bizonyítás: Lásd [44].

Megjegyzés. A 6. Lemma nagy m-ekre ugyan jobb eredményt ad, mint az 5. Lemma, azonban $k^2(m)$ explicite van megadva és ezért könnyebben használható.

7. Lemma (W. Schulz). *Legyen* $\deg f=2n\geqq 8$ *és* $f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n})\pm p$, *ahol* $A>0$, $0=a_1<a_2<\ldots<a_{2n}$ *racionális egészek, továbbá* $p>0$ *prím. Ha* $f(x)$ *reducibilis, tehát előáll a* $h_1(x), h_2(x)$ *legalább elsőfokú racionális egész együtthatós irreducibilis polinomok szorzataként, akkor*

1. $\deg h_1=\deg h_2$
2. $h_1(x)=A'(x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_n)\pm(-1)^n$
$=A'(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)-(-1)^n p$
$h_2(x)=A'(x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_n)+(-1)^n p$
$=A'(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)\mp(-1)^n$
3. $A'=\sqrt{A}$ *továbbá a* d_μ *és* b_μ *értékek megegyeznek* a_μ*-vel a következők szerint:*
4. $d_{2\varkappa-1}=a_{4\varkappa-3}\quad d_{2\varkappa}=a_{4\varkappa}$
$b_{2\varkappa-1}=a_{4\varkappa-2}\quad b_{2\varkappa}=a_{4\varkappa-1}$

valamint

5. $p=A'b_1b_2\ldots b_n\mp 1=A\prod_{\varkappa}a_{4\varkappa-2}a_{4\varkappa-1}+1$.

Bizonyítás: Lásd [35].

Megjegyzések:

1. A 7. Lemma alapján adott n és adott p mellett a reducibilis polinomok egyszerűen előállíthatók, hiszen 5.-ből $A'b_1b_2 \ldots b_n = p \pm 1$ és így $A', b_1, b_2, \ldots, b_n$ lehetséges értékei meghatározhatók. Ezután $h_1(x), h_2(x)$ 2.-ből kapható, amelyekről helyettesítéssel eldönthető, hogy előállnak-e $A'(x-d_1)\ldots(x-d_n) \pm (-1)^n$, illetve $A'(x-d_1)\ldots(x-d_n)+(-1)^n p$ alakban, ahol a d_i értékek 4.-gyel összhangban vannak.

Az 1. Tétel bizonyítása. Tegyük fel $g(f(x))$ reducibilitását, vagyis azt, hogy léteznek olyan $f_1(x), f_2(x) \in Z[x]$ legalább elsőfokú polinomok, melyekre

$$g(f(x)) = c \prod_{i=1}^{m} (x-a_i) \pm p = f_1(x) f_2(x)$$

Ekkor nyilván $f_1(a_i) f_2(a_i) = \pm p$ minden i-re és így $f_1(a_i) | p$ és $f_2(a_i) | p$, amit gyakran fel fogunk használni.

(1*) Vagy $|f_1(x)|$ vagy $|f_2(x)|$ legalább $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ helyen 1-et vesz fel. Legyen ez $f_1(x)$. Jelöljük d-vel, ill. b-vel azokat az a_i értékeket, ahol $f_1(x)$ 1-et, ill. -1-et vesz fel. (Ha egyáltalán léteznek ilyenek.) Tételezzük fel, hogy léteznek ilyenek és rendezzük őket a következő módon:

(2*) $d_1 < d_2 < \ldots < d_l$, melyekre $f_1(d_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$

$b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, melyekre $f_1(b_i) = -1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

(3*) Nyilván így $\deg f_1, \deg f_2 \geqq \max\{l, k\}$ és $l + k \geqq \left[\frac{m+1}{2}\right]$

(4*) Mivel $d_i - b_j \mid |f_1(d_i) - f_1(b_j)| = 2$, így $d_i - b_j \mid 2$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Ezt a tényt is gyakran felhasználjuk.

(5*) Tegyük fel, hogy $d_l > b_k$.

(Fordított esetben a bizonyítás teljesen hasonlóan megy, hiszen $f_1(x)$ és $f_2(x)$ helyett $-f_1(x)$-et és $-f_2(x)$-et véve teljesül az előbbi feltételezés.)

Még mielőtt a részletes bizonyításra rátérnénk, vizsgáljuk meg a következő két esetet az $l \geqq 1$ feltételezés mellett.

A) Eset. Tegyük fel, hogy $k \geqq 3$. (5*) és (2*) miatt $d_l - b_1 \geqq 3$, ami (4*) miatt ellentmondás.

Tehát a későbbiekben csak a $k \leqq 2$ esettel kell foglalkoznunk.

B) eset. Tegyük fel, hogy $k = 0$, így $f_1(x)$ legalább $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ helyen ugyanazt az értéket veszi fel. Tehát $\deg f_1 \geqq \left[\frac{m+1}{2}\right]$ és $\deg f_2 \geqq \left[\frac{m+1}{2}\right]$, vagyis $\deg f = \deg f_1 f_2 \geqq 2\left[\frac{m+1}{2}\right]$, amiből páros m esetén $\deg f_1 = \deg f_2 = \frac{m}{2}$, páratlan m esetén pedig ellentmondás adódik.

Megjegyzés. Egyszerűen látható az is, hogy a B) esetben a fokszámtól függetlenül, tehát az $m=2n<8$ esetén is igaz a 7. Lemma állítása.

A továbbiakban több, a fokszámtól függő esetet vizsgálunk meg, feltételezve, hogy $l \geqq 1$.

Mielőtt továbbmennénk két fontos tényt szeretnénk közölni:

(i) $k=1$ esetén $l=1, 2, 3, 4$ lehet csak és a d_l-ek úgy helyezkednek el, hogy egyidejűleg legfeljebb csak két d_l lehet b_1 jobb, illetve bal oldalán (azaz $d_1<$ $<d_2<b_1<d_3<d_4$ alakban állhatnak csak, ahol d_l-ekből lehet 4-nél kevesebb is). Ez az állítás könnyen belátható (5*) és (4*, 2*) alapján. (Ellenkező esetben $d_l-b_1 \geqq 3 \nmid |f_1(d_1)-f_1(b_1)|=2$).

(ii) $k=2$ esetén $l=1, 2$ lehet csak, és elhelyezkedésük a következő alakú lehet $d_1<b_1<b_2<d_2$ (ahol valamelyik d_l hiányozhat) és $d_2-b_2=b_2-b_1=b_1-d_1=1$, illetve $b_1<d_1<b_2$. Ez is könnyen belátható (2*) és (4*; 5*) alapján.

I. Aleset. Legyen $m \geqq 8$.

A 7. Lemma értelmében elegendő csupán a páratlan m-ekre szorítkoznunk. Figyelembe véve az A, B $^+$pontokat, a következő eseteket kell megvizsgálnunk:

1. Legyen $k=2$. Ekkor az $m \geqq 9$ miatt (1*) és (3*) alapján $l=3$, de ez (ii) alapján ellentmondásra vezet.

2. Legyen $k=1$. Ekkor az $m \geqq 9$ miatt az $l \geqq 4$ teljesül, de (i) miatt $l=4$ lehetséges csak és $d_4-d_3=d_3-b_1=b_1-d_2=d_2-d_1=1$. Hasonlóképpen $d_4-b_1=$ $=b_1-d_1=2$ és felhasználva, hogy $f_2(d_i)=\pm p$ látható, hogy $f_2(x)$ csak a következő alakú lehet:

$$f_2(x)=f_2^*(x)(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)\pm p=$$

$$=f_2^*(x)[(x+b_1)^2-1][x-b_1)^2-4]\pm p$$

Mivel $f_2(b_1)=\mp p$, így $f_2(b_1)=f_2^*(b_1)(-1)(-4)\pm p=\mp p$, ahonnan $2f_2^*(b_1)=\mp p$, amiből $f_2^*(x) \in Z[x]$ felhasználásával $2|p$, ami ellentmondás.

Ezzel tehát megmutattuk, hogy $m \geqq 8$ esetén reducibilitás csak a $\deg f_1=\deg f_2$ esetben fordulhat elő.

II. Aleset. Legyen $m=7$. Az előzőekhez hasonlóan a következőket kell megvizsgálnunk:

1. Legyen $k=2$. Ekkor az $\left[\frac{m+1}{2}\right]=4$ és (ii) miatt $l=2$ és így $\deg f_1$, $\deg f_2 \geqq 2$. Tegyük fel először, hogy $\deg f_1=5$, $\deg f_2=2$. Ekkor $f_2(x)=c''(x-d_1)\cdot$ $\cdot(x-d_2)\pm p$ és felhasználva, hogy $f_2(b_1)=\mp p$ kapjuk, hogy $c''=\pm p$, ami $c''|c$ és $(c, p)=1$ miatt ellentmondás.

Legyen $\deg f_1=4$, $\deg f_2=3$.

Ekkor $f_2(x)=f_2^*(x)(x-d_1)(x-d_2)\pm p$ és felhasználva, hogy $f_2(b_1)=f_2(b_2)=\mp p$ kapjuk, hogy $f_2^*(b_1)=f_2^*(b_2)=\pm p$, ahonnan $\deg f_2^* \geqq 2$ és így $\deg f_2 \geqq 4$, ami ellentmondás.

Legyen $\deg f_1=3$, $\deg f_2=4$.

Az előző esethez hasonló eredményt kapunk $f_1(x)$-re.

Legyen $\deg f_1=2$, $\deg f_2=5$.

Ekkor $f_1(x)=c'(x-d_1)(x-d_2)+1$, felhasználva, hogy $f_1(b_1)=-1$, $c'=1$-et kapunk, tehát $f_1(x)=(x-d_1)(x-d_2)+1$. $|f_1(x)|$ a $d_2-d_1=3$ miatt csak két helyen vehet föl p-t és mivel $\deg f_1=2$ miatt több helyen 1-et sem vehet fel, így ellentmondásra jutottunk.

2. Legyen $k=1$. Ekkor (i) alapján $l=3$ vagy 4 és így $\deg f_1\geqq 3$, $\deg f_2\geqq 3$. (i)-ből a) $l=4$ esetén $d_4-b_1=2$, $b_1-d_1=2$

b) $l=3$ esetén $d_3-b_1=1$ vagy 2

$\downarrow \quad \downarrow \searrow$

$b_1-d_1=2$ vagy 1. ill. 2

Legyen először $\deg f_1=4$, $\deg f_2=3$.

Ekkor a) esetben $f_2(x)=c''(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)\pm p$. Az $f_2(b_1)=\mp p$ felhasználásával egyszerű számolással $2|p$ adódik, ami ellentmondás. A b) eset hasonlóan ellentmondásra vezet. (Ott $c''=\pm p$, ill. $\mp p$ vagy $2|p$ adja az ellentmondást.)

Legyen $\deg f_1=3$, $\deg f_2=4$.

Ekkor $l=3$, így a b) eset áll fenn. Bevezetve az $y=x-b_1$ helyettesítést:

$$b_1-d_1=1 \quad \text{esetén} \quad f_1(x)=f_1(y+b_1)=c'(y+1)(y-1)(y-2)+1$$

$$b_1-d_1=2 \quad \text{esetén} \quad f_1(x)=f_1(y+b_1)=c'(y+2)(y-1)(y-2)+1$$

Mivel $f_1(b_1)=-1$, így az első esetben $c'=-1$, a másodikban $c'=-\frac{1}{2}$ és ez utóbbi nyilván ellentmondás. Tehát $b_1-d_1=1$; $c'=-1$, vagyis $f_1(x)=f_1(y+b_1)=-y^3+2y^2+y-1$

(iii) A függvényről egyszerűen belátható, hogy x_s-sel jelölt szélsőértékeire teljesül a $-0.3<x_s<1{,}6$ összefüggés.
Tehát $f_1(y)$ a $(-\infty, -1)$ és $(2, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő és mivel a helyettesítési értékei $y=-1$-nél és $y=2$-nél megegyeznek, így az $|f_1(x)|=p$ nem teljesülhet 3 helyen, amivel ellentmondásra jutottunk. $d_3-b_1=1$ vagy 2 esetén hasonlóan jutunk ellentmondásra.

Ezzel megmutattuk, hogy az $m=7$ esetén reducibilitás nem fordulhat elő.

III. Aleset. Legyen $m=6$.
A következő eseteket kell megvizsgálnunk:

1. Legyen $k=2$.

Ekkor $\left[\frac{m+1}{2}\right]=3$ miatt $l\geqq 1$ és $\deg f_1, \deg f_2\geqq 2$, és (ii) alakú a gyökök elhelyezkedése.

Legyen először $\deg f_1=4$, $\deg f_2=2$.

Ekkor II. Aleset 1) mintájára d_1, d_2 helyett b_1, b_2-t véve jutunk ellentmondásra.

Legyen $\deg f_1=3$, $\deg f_2=3$.

Ekkor $f_1(x)=f_1^*(x)(x-b_1)(x-b_2)-1$. Felhasználva, hogy $f_1(d_l)=1$, azt kapjuk, hogy $f_1^*(d_l)=1$ és mivel elsőfokú, így csak a következő alakú lehet $f_1^*(x)=$

$=c'(x-d_l)+1$. Ezt visszahelyettesítve, valamint (iii) mintájára $y=x-b_2$ helyettesítéssel kapjuk: $f_1(x)=c'y^3+y^2-(c'-1)y-1$, mivel c' egész, így $b_2-1<x_3<b_2+1$ (iii) alapján, $b_2-d_1=2$ alapján $c'=0$-t kapunk, ami ellentmondás.

Legyen $\deg f_1=2$, $\deg f_2=4$.

Ekkor $f_1(x)=c'(x-b_1)(x-b_2)-1$ és figyelembe véve, hogy $f_1(d_l)=1$ kapjuk, hogy $c'=1$. (iii) mintájára $y=x-b_2$ helyettesítést bevezetve $f_1(x)=(y+1)y-1=$ $=y^2+y-1=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.

Egyszerűen látható, hogy $|f_1(x)|$ csak két helyen vehet fel p-t, így még egy helyen fel kell vennie 1-et. Számolással ellenőrizhető, hogy $y=-2$-nél, vagyis $x=b_2-2$-nél 1-et vesz fel. Továbbá $f_1(x)$ szimmetrikus az $y=-\frac{1}{2}$ értékekre, így $\pm p$-t csak a $-(k+1), k$ alakú helyeken vehet fel. Így tehát $f(x)$ a következő alakú lehet:

$$f(x)=f(y+b_2)=\big(y+(k+1)\big)(y+2)(y+1)(y-1)(y-k)y,$$

továbbá osztással kapjuk, hogy

$$(c\cdot f(x)\pm p):f_1(x)=c\{y^4+2y^3-(k^2+k)y^2-(k^2+k+1)y\}+$$

$$+\frac{c\{(k^2+k-1)y^2+(k^2+k-1)y\}\pm p}{y^2+y-1}$$

Az utolsó tag csak akkor lehet egész, ha $c(k^2+k-1)=\mp p$. Mivel $k^2+k-1>0$, ha $k\geqq 2$, $(c,p)=1$, így $k^2+k-1=p$, $|c|=1$. A $k^2+k-1=p$ egyenletnek csak a pozitív megoldásait véve figyelembe $k=\frac{\sqrt{5+4p}-1}{2}$.

Könnyen ellenőrizhető például, hogy az első 6 prím közül ez a kifejezés csak a következő esetekben lesz egész:

$p=5$-nél $(k=2)$ és $p=11$-nél $(k=3)$.

2. Legyen $k=1$.

Ekkor $l\geqq 2$ és így $\deg f_1, \deg f_2\geqq 2$, a gyökök pedig (i) szerint helyezkednek el. II. Aleset 2-höz hasonlóan:

Legyen először $\deg f_1=4$, $\deg f_2=2$.

$\deg f_2=2$ miatt az $l>2$ nem teljesülhet, tehát $l=2$. Ekkor II. Aleset 2. mintájára ellentmondásra jutunk.

Legyen $\deg f_1=3$, $\deg f_2=3$.

II. Aleset 2. alapján $f_2(x)$ helyett $f_1(x)$-et vizsgálva (iii) mintájára ellentmondásra jutunk.

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy $\deg f=6$ esetén a reducibilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy $k=\frac{\sqrt{5+4p}-1}{2}$ egész legyen és ekkor $g(x)=x-p$, továbbá $f(x)$ ekvivalens az $\big(x+(k+1)\big)(x+2)(x+1)\,x(x-1)(x-k)$ polinommal.

IV. Aleset. Legyen $m=5$. Itt is a következő eseteket kell megvizsgálnunk:

1. Legyen $k=2$. Ekkor az $\left[\frac{m+1}{2}\right]=3$ miatt $l\geqq 1$ és $\deg f_1, \deg f_2\geqq 2$ valamint (ii) teljesül. Ekkor:

$\deg f_1=3, \deg f_2=2$ esetén III. Aleset 1.-ben szereplő $\deg f_1=4$, $\deg f_2=2$ mintájára kapunk ellentmondást.

$\deg f_1=2, \deg f_2=3$ esetén III. Aleset 1.-ben szereplő $\deg f_1=3, \deg f_2=3$ mintájára kapunk ellentmondást.

2. Legyen $k=1$. Ekkor $\left[\frac{m+1}{2}\right]=3$ és így $l\geqq 2$, valamint $\deg f_1, \deg f_2\geqq 2$. (i) szerint III. Aleset 2. mintájára jutunk ellentmondásra $\deg f_1=3, \deg f_2=2$, illetve $\deg f_1=2, \deg f_2=3$ esetekben.

Tehát $m=5$ esetén nem fordulhat elő reducibilitás.

V. Aleset. Legyen $m=4$.

1. Legyen $k=2$, ekkor $l\geqq 1$ és $\deg f_1, \deg f_2\geqq 2$. Így csak $\deg f_1=\deg f_2=2$ lehetséges. (ii) eset áll fenn. Ekkor $f_2(x)=c''(x-b_1)(x-b_2)\mp p$, felhasználva, hogy $f_2(d_e)=\pm p$ kapjuk, hogy $c''=\pm p$, ami ellentmondás.

2. Legyen $k=1$. Ekkor $l\geqq 1$. Két részre bontva:

a) $l\geqq 2$. Ekkor fenti alapján jutunk ellentmondásra.

b) $l=1$. Ekkor a gyökök $b_1<d_1$.

Legyen $\deg f_1=1, \deg f_2=3$.

Így $|f_1(x)|$-nek két helyen p-t kell felvennie, de mivel $\deg f_1=1$, így nyilván $f_1(x)$ különböző előjellel veszi fel p-t. Legyenek ezek a helyek e_1, e_2. Az $f_1(x)$ szigorú monotonitásából következik, hogy $e_1<b_1<d_1<e_2$ és $f_1(e_1)=-p$. $f_1(e_2)=p$. Mivel $f_1(b_1)=-1$ és $f_1(d_1)=1$ kapjuk, hogy $c'(d_1-b_1)=2$ és $c'(e_2-e_1)=2p$. Itt felhasználva a 4. Lemmát, miszerint esetünkben a reducibilitás szükséges feltétele, hogy $\max|a_i-a_j|=(e_2-e_1)\leqq p+2$ teljesüljön, kapjuk hogy $c'=2$ és $e_2-e_1=p$.

Bevezetve az $y=x-e_1$ helyettesítést, könnyen belátható, hogy $f(x)=f(y+e_1)=$ $=cy\left(y-\frac{p-1}{2}\right)\left(y-\frac{p+1}{2}\right)(y-p)$ és $f_1(x)=f_1(y+e_1)=2y-p$. Mivel azonban $f_1(x)$-nek gyöke az $y=\frac{p}{2}$, így $g(f(x))$-nek is gyöke. Tehát

$$g(f(x)=c\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{2p}{2}\right)\pm p=0$$

ahonnan $cp=-8$, ami $p\geqq 3$ miatt ellentmondás.
Ehhez hasonlóan jutunk ellentmondásra a $\deg f_1=3, \deg f_2=1$ esetén is.

Legyen végül $\deg f_1=2, \deg f_2=2$.

Ekkor nyilván 1/*) $d_1-b_1=2$ vagy 2/*) $d_1-b_1=1$.

Az $|f_1(x)|$-nek még két helyen kell p-t felvennie. Tegyük fel először, hogy $f_1(x)$ ugyanolyan előjellel veszi fel p-t mindkét helyen és így $f_2(x)$ ezeken a helyeken nyilván egyező előjellel vesz fel 1-et vagy -1-et.

Az $1/^*$ esetben ekkor $f_2(x)=f_2'(x)(x-d_1)\pm p$ és felhasználva, hogy $f_2(b_1)=$ $=f_2'(b_1)(b_1-d_1)\pm p=\mp p$, kapjuk, hogy $f_2(x)=\big(c''(x-b_1)\pm p\big)(x-d_1)\pm p$.

Bevezetve az $y=x-b_1$ helyettesítést $f_2(x)=f_2(y+b_1)=(c''y\pm p)(y-2)\pm p$.

Mivel $\deg f_2=2$ és a (b_1, d_1) intervallumon előjelet vált $f_2(x)$, így ezen az intervallumon fel kell 1-et vagy -1-et vennie. Ez a hely nyilván csak az $y=1$ lehet. Egyszerű számolással adódik, figyelembe véve $f_2(x)$ szimmetrikus voltát, hogy $f_2(x)$ csak a következő alakú lehet:

$f_2(x)=f_2(y+b_1)=y^2-(p+2)y+p$ vagy $f_2(x)=f_2(y+b_1)=y^2+(p-2)y-p$ (illetve ezek (-1)-szeresei, amit azonban nem kell külön vizsgálni). Ezekben az esetekben $g\big(f(x)\big)$ a következő alakú lehet:

$$cy(y-1)(y-2)\big(y-(p+1)\big)\pm p, \quad \text{vagy} \quad c\big(y+(p-1)\big)(y)(y-1)(y-2)\pm p.$$

Elvégezve az osztásokat az első esetben

$$g\big(f(x)\big):f_2(x)=cy^2-2cy+c\pm\frac{cp}{y^2-(p+2)y+p}, \quad \text{a másodikban}$$

$$g\big(f(x)\big):f_2(x)=cy^2-2cy+1+\frac{2-2c\pm p}{y^2+(p-2)y-p}, \quad \text{amikről könnyen}$$

látható, hogy a maradék nem lehet nulla, vagyis reducibilitás nem fordulhat elő.

Az előzőekből könnyen adódik, hogy a 2) esetben sem lehet reducibilitás, hiszen $f_2(x)$-nek a (b_1, d_1) intervallumon fel kell vennie 1-et vagy -1-et, de $d_1-b_1=1$ miatt az intervallum egész értéket nem tartalmaz.

Tegyük most fel azt, hogy $f_1(x)$ ellenkező előjellel veszi fel p-t és jelöljük ezeket a helyeket e_1, e_2-vel.

Ekkor $f_2(x)$ ezeken a helyeken különböző előjellel veszi fel az 1-et és így $|e_1-e_2|=1$ vagy 2.

Az előzőekhez hasonlóan $f_1(x)=\big(c'(x-b_1)+1\big)(x-d_1)+1$ és bevezetve az $y=x-b_1$ helyettesítést az $1/^*$ esetben

$$f_1(x)=f_1(y+b_1)=c'y^2-(2c'-1)y-1$$

Az $f_1(x)$ szélső értéke az $y=1-\frac{1}{2c'}$-nél van, tehát a $(0,2)$ intervallumban, gyökei pedig a $(-1,3)$ intervallumban, így ezen fel kell vennie valahol $\pm p$-t. Mivel ez csak egész hely lehet, így csak az $y=1$ jöhet számításba, aminek felhasználásával $c'=\mp p$, ami $(c, p)=1$ miatt ellentmondás. $2/^*$ esetben $f_1(x)=f_1(y+b_1)=c'y^2-(c'-2)y-1$

Az $f_1(x)$ szélső értéke ekkor az $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{c'}$-nél van, tehát a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ intervallumban, gyökei pedig a $(-3,1)$ intervallumban, így ezen fel kell vennie valahol $\pm p$-t. Ez csak egész érték lehet, így csak az $y=-2$ és $y=-1$ jöhet számításba.

Az első esetben $(y=-2)$ tehát $e_2=-2$ és $|e_1-e_2|=2$ esetén könnyen látható, hogy $e_1=-4$, az $|e_1-e_2|=1$ esetén pedig $e_1=-3$. Az $f_1(e_1)+f_1(e_2)=0$ felhasználásával eredményül $c'=\frac{7}{13}$, ill. $c'=\frac{2}{3}$ adódik, ami ellentmondás.

A második esetben $(y=-1)$ tehát $e_2=-1$ és az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $e_1=-3$ vagy $e_1=-2$.

Az $f_1(e_1)+f_1(e_2)=0$ felhasználásával $c'=\frac{10}{14}$, ill. $c'=1$, de ekkor $|f_1(e)|=1$, ami a $p\geqq 3$ miatt ellentmondás.

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy $\deg f=4$ esetén csak $k=0$-nál fordulhat elő reducibilitás.

VI. Aleset. Legyen $m=3$.

Ebben az esetben az előzőektől eltérő gondolatmenetet használunk. Ha $g(f(x))$ reducibilis, akkor az $m=3$ miatt valamelyik tényező elsőfokú. Tegyük fel, hogy ez $f_1(x)$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_1=0$, vagyis azt, hogy $g(f(x))$ a következő alakban áll elő:

$$cx(x-a)(x-b)\pm p=f_1(x)\cdot f_2(x), \quad \text{ahol} \quad f_1(x)=c'x+e,$$

továbbá $cc'>0$ és a, b, e egészek.

Az $m=3$ miatt a következő két esetet kell megvizsgálnunk:

a) $|f_1(x)|$ két helyen vesz fel 1-et, egy helyen p-t,

b) $|f_1(x)|$ két helyen vesz fel p-t, egy helyen 1-et.

Az a) esetben ezeket az értékeket — figyelembe véve, hogy elsőfokú — a következő módokon veheti fel:

a) 1. $f_1(0)=-1 \quad f_1(a)=1 \quad f_1(b)=p$

a) 2. $f_1(0)=-p \quad f_1(a)=-1 \quad f_1(b)=1$

Vizsgáljuk meg részletesen ezeket az eseteket.
a/1. Ekkor $f_1(0)=e=-1$ és $f_1(a)=c'a+e=1$ összefüggésből $c'a=2$. Itt újra két eset van:

1. $c'=1 \quad a=2$
2. $c'=2 \quad a=1$

Az első esetben egyszerűen belátható, hogy $f(x)=x(x-2)[x-(p+1)]$ és $f_1(x)=x-1$. Így

$$(cf(x)\pm p):f_1(x)=\{cx(x-2)[x-(p+1)]\pm p\}:(x-1)=$$

$$=cx^2-(2c+cp)x+cp+\frac{p(1\pm c)}{x-1}$$

ahol az utolsó tag p negatív előjelénél és $c=1$-nél eltűnik, tehát reducibilis polinomhoz jutottunk.

A második esetben azt kapjuk, hogy $f(x)=x(x-1)\left(x-\frac{p+1}{2}\right)$ és $f_1(x)=2x-1$. Így

$$(cf(x)\pm p):f_1(x)=\left[cx(x-1)\left(x-\frac{p+1}{2}\right)\pm p\right]:(2x-1)=$$

$$=\frac{c}{2}x^2-\frac{c}{4}(p+2)x+\frac{cp}{8}+\frac{\frac{cp}{8}\pm p}{2x-1}$$

ahol az utolsó tag p negatív előjelénél és $c=8$-nél eltűnik és ekkor a többi együttható is egésszé válik, tehát reducibilis polinomhoz jutottunk.

a/2. Ekkor $f_1(0)=e=-p$, $f_1(a)=c'a-e=-1$, $f_1(b)=c'b-e=1$ összefüggésekből $c'(b-a)=2$. Itt újra két eset van:

1. $c'=1$ és $b-a=2$ amiből $a=p-1$ és $b=p+1$

2. $c'=2$ és $b-a=1$ amiből $a=\frac{p-1}{2}$ és $b=\frac{p+1}{2}$.

Az első esetben nyilván $f(x)=x(x-(p-1))(x-(p+1))$ és $f_1(x)=x-p$. Így:

$$(cf(x)\pm p):f_1(x)=[cx(x-(p-1))(x-(p+1))\pm p]:(x-p)=$$

$$=cx^2-cpx-c+\frac{\pm p-cp}{x-p}$$

ahol az utolsó tag p pozitív előjelénél és a $c=1$-nél eltűnik, tehát reducibilis polinomhoz jutottunk.

A második esetben $f(x)=x\left(x-\frac{p-1}{2}\right)\left(x-\frac{p+1}{2}\right)\pm p$ és $f_1(x)=2x-p$. Így:

$$(cf(x)\pm p):f_1(x)=\left[cx\left(x-\frac{p-1}{2}\right)\left(x-\frac{p+1}{2}\right)\pm p\right]:(2x-p)=$$

$$=\frac{c}{2}x^2-\frac{cp}{4}x-\frac{c}{8}+\frac{\pm p-\frac{cp}{8}}{2x-p}$$

ahol az utolsó tag p pozitív előjelénél és $c=8$-nál eltűnik és ekkor a többi együttható is egésszé válik, tehát most is reducibilis polinomhoz jutottunk.

A b) eset az előzőekhez teljesen analóg módon vizsgálható, azonban ott a maradékról mindig az bizonyítható, hogy nem lehet nulla, tehát ott reducibilis polinomokat sem kaphatunk.

Az $m=3$ esetben tehát az alábbi négy esetben fordul elő reducibilitás:

$$g(x)=x+p \quad f(x)\approx x(x-(p-1))(x-(p+1))$$

$$x-p \quad x(x-2)(x-(p+1))$$

$$8x+p \quad x\left(x-\frac{p-1}{2}\right)\left(x-\frac{p+1}{2}\right)$$

$$8x-p \quad x(x-1)\left(x-\frac{p+1}{2}\right)$$

Végül térjünk vissza a $k=0$ esethez. Erről már előzőleg bebizonyítottuk, hogy reducibilitás csak a $\deg f_1=\deg f_2=\frac{m}{2}$ esetén lehetséges. Könnyen látható, hogy hasonló eredményre jutunk az $e=0$ esetén is. Tehát reducibilitás esetén $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az $a, a_2, \ldots, a_{2n}$ helyeken csak két értéket vesz föl, mindegyiket $\frac{m}{2}=n$ helyen.

Az előzőektől eltérően jelölje d_i azokat az a_j értékeket, ahol $|f_1(d_i)|=1$ és b_i azokat, ahol $|f_1(b_i)|=p$. Ekkor tehát:

$$f_1(d_1)=f_1(d_2)=\ldots=f_1(d_n)$$

$$f_1(b_1)=f_1(b_2)=\ldots=f_1(b_n)$$

Legyenek a d_i és b_i értékek a következőképpen rendezve:

$$d_1<d_2<\ldots<d_n \quad b_1<b_2<\ldots<b_n$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $d_1<b_1$, hiszen ellenkező esetben $f_2(x)$-et vizsgálva az $|f_2(a_1)|=1$ teljesül.

Ezek után bebizonyítjuk, hogy a 7. Lemma állítása nem csak a $2n\geqq 8$ esetén, hanem általánosabban a $k\cdot l=0$ esetén is igaz. A Lemma 1) pontja az előzőek alapján $k\cdot l=0$ esetén teljesül. Legyen $d\in\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ és $b\in\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ekkor a következő esetek fordulhatnak elő:

$+p$ esetén

1. $f_1(d)=1$ $f_2(d)=p$ $f_1(b)=p$ $f_2(b)=1$

2. $f_1(d)=1$ $f_2(d)=p$ $f_1(b)=-p$ $f_2(b)=-1$

3. $f_1(d)=-1$ $f_2(d)=-p$ $f_1(b)=-p$ $f_2(b)=-1$

4. $f_1(d)=-1$ $f_2(d)=-p$ $f_1(b)=p$ $f_2(b)=1$

$-p$ esetén

5. $f_1(d)=1$ $f_2(d)=-p$ $f_1(b)=p$ $f_2(b)=-1$

6. $f_1(d)=1$ $f_2(d)=-p$ $f_1(b)=-p$ $f_2(b)=1$

7. $f_1(d)=-1$ $f_2(d)=p$ $f_1(b)=-p$ $f_2(b)=1$

8. $f_1(d)=-1$ $f_2(d)=p$ $f_1(b)=p$ $f_2(b)=-1$

Tekintsük a következő függvényeket:

1. $F(x)=p+1-f_1(x)$
2. $F(x)=p-1+f_1(x)$
3. $F(x)=-p-1-f_1(x)$
4. $F(x)=-p+1+f_1(x)$
5. $F(x)=-p-1+f_1(x)$
6. $F(x)=-p+1-f_1(x)$
7. $F(x)=p+1+f_1(x)$
8. $F(x)=p-1-f_1(x)$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az előző eseteknek megfelelő sorrendben $F(a_i)=f_2(a_i)$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, tehát $2n$ helyen azonos értéket vesznek fel és mivel $\deg F=\deg f_2=n$, így azonosan egyenlők. Ebből már következik, hogy f_1 és f_2 főegyüttható (c', c'') abszolút értékben egyenlőek. Figyelembe véve, hogy $c'c''=c>0$, így látható, hogy egyenlőeknek is kell lenniük. Tehát az előbbi esetek közül csak a 2), 4), 5), 7) fordulhat elő, mivel csak ekkor teljesül a $c'c''>0$ feltétel.

Ezzel tehát bebizonyítottuk a Lemma 3. állítását.

Tekintsük a 2), 7) eseteket együttesen. Ekkor $f_1(b)=-p$, tehát

$$f_1(x)=c'(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)-p$$

Felhasználva, hogy $f_1(d_1)=\pm 1$ és, hogy $d_1<b_i$ kapjuk, hogy

$$f_1(d_1) = c'(d_1-b_1)(d_1-b_2)\ldots(d_1-b_n)-p = \pm 1, \text{ amit átalakitva}$$

$$c'(-1)^n(b_1-d_1)(b_2-d_1)\ldots(b_n-d_1) = p\pm 1,$$

amiből $c'(b_1-d_1)(b_2-d_1)\ldots(b_n-d_1)>0$ miatt $(-1)^n=1$, vagyis n páros. A 4), 5) esetekben hasonlóan bizonyítható, hogy n páratlan. Ezeket összevetve adódik a Lemma 2. állítása.

Tehát $f_1(x)$ és $f_2(x)$ előáll a következő alakban:

$$f_1(x) = c' \prod_{i=1}^{n}(x-d_i)\pm(-1)^n \quad f_2(x) = c' \prod_{i=1}^{n}(x-d_i)+(-1)^n p$$

Így $g(f(x))=f_1(x)f_2(x)=c'^2\left(\prod_{i=1}^{n}(x-d_i)\right)^2+c'((-1)^n p\pm(-1)^n)\prod_{i=1}^{n}(x-d_i)\pm p$, amiből, felhasználva, hogy $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-d_i)\prod_{i=1}^{n}(x-b_i)$ kapjuk, hogy

$$c' \prod_{i=1}^{n}(x-b_i) = c' \prod_{i=1}^{n}(x-d_i)+(-1)^n p\pm(-1)^n = c' \prod_{i=1}^{n}(x-d_i)+E$$

Tekintsük az $F(x)=c' \prod_{i=1}^{n}(x-d_i)$ polinomot, aminek a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ gyökei. Az előzőek alapján az $F(x)+E$ polinomnak a $b_1, \ldots, b_n$ zérushelyei. Így tehát $F(b_i)=-E$. Mivel $\deg F=n$, így nyilvánvaló, hogy a b, ill. d értékek csak a következőképpen helyezkedhetnek el:

$$d_1 < b_1 < b_2 < d_2 < d_3 < b_3 < b_4 < \ldots$$

Ebből már egyszerűen következik a Lemma 4. állítása. Vegyük $f_1(x)$ két előállítását:

$$c' \prod_{i=1}^{n}(x-d_i)\pm(-1)^n = c' \prod_{i=1}^{n}(x-b_i)-(-1)^n p$$

Legyen $x=0$. Ekkor

$$c'(-1)^n \prod_{i=1}^{n} d_i\pm(-1)^n = c'(-1)^n \prod_{i=1}^{n} b_i-(-1)^n p$$

Mivel az ekvivalens polinomok reducibilitás szempontjából azonosan viselkednek, ezért feltehetjük, hogy $d_1=0$ és így

$$\pm(-1)^n = c'(-1)^n \prod_{i=1}^{n} b_i-(-1)^n p, \text{ amiből}$$

$$p = c'b_1b_2\ldots b_n\mp 1$$

ami éppen a Lemma 5. állítása.

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy $k\cdot l=0$ esetén teljesül a 7. Lemma minden állítása.

A 2. Tétel bizonyítása. A 7. Lemma, valamint az 1. Tétel és megjegyzése együttesen biztosítják, hogy $m>2$ páros fokszám esetén reducibilitás a $\deg f_1=\deg f_2$ esetben lehetséges, kivéve egy az $m=6$-nál explicite is megadható esetet.

Ezért elegendő a $\deg f_1 = \deg f_2$ esetet vizsgálnunk. Ekkor megtartva az 1. Tétel bizonyításának végén bevezetett jelöléseket és felhasználva a 7. Lemma állítását

$$p = A' b_1 b_2 \dots b_n \mp 1 = A' \prod_{\varkappa} c_{4\varkappa-2} c_{4\varkappa-1} \mp 1.$$

Legyen $N = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Először tegyük fel, hogy n páros, így $N = \frac{n}{2}$.

Mivel $c' > 0$ és $c_1 = 0 < c_2 < \dots < c_{2n}$ egészek, így nyilván $c_i \geqq i-1$ és $c' \geqq 1$. Így

$$p \geqq \prod_{i=1}^{N} (4i-3)(4i-2) - 1 = \frac{(4N-2)!}{\prod_{j=2}^{N} (4j-4)(4j-5)} - 1 =$$

$$\frac{(4N-2)!}{4^{N-1} \prod_{j=2}^{N} (j-1) \prod_{j=2}^{N} (4j-5)} - 1 = \frac{(4N-2)!}{4^{N-1}(N-1)! \prod_{j=2}^{N} (4j-5)}.$$

a) esetben a számtani és mértani közép összefüggésének felhasználásával könnyen igazolható, hogy

$$\frac{1}{\prod_{j=2}^{N} (4j-5)} \geqq \frac{1}{(2N-1)^{N-1}}$$

így azt kapjuk, hogy

$$p \geqq \frac{(4N-2)!}{4^{N-1}(N-1)!(2N-1)^{N-1}} - 1 = 4^{1-N} \cdot \frac{N(N+1)\dots(4N-2)}{(2N-1)^{N-1}} - 1$$

Ezek után már könnyen látható, hogy ha n páratlan, akkor a fenti kifejezés első tagja még szorzódik $(4N+1)$-gyel. Így:

$$p \geqq 4^{(1-N)} \cdot \frac{N(N+1)\dots(4N-2)}{(2N-1)^{N-1}} (4N+1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]} - 1.$$

b) esetben

$$\frac{1}{\prod_{j=2}^{N} (4j-5)} \geqq \frac{1}{\prod_{j=2}^{N} (4j-4)} = \frac{1}{4^{N-1}(N-1)!}$$

felhasználásával:

$$p \geqq 4^{(2-2N)} \cdot \frac{N(N+1)\dots(4N-2)}{(N-1)!} (4N+1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]} - 1.$$

Ezzel a bizonyítás kész!

Mielőtt rátérnénk a 3—6. Tételek bizonyítására, néhány megjegyzést teszünk. Az 1.2. Tételek, valamint a 7. Lemma állításai együttesen lényegesen leegyszerűsítik a kivételes polinomok meghatározását. Ugyanis a 2. Tétel jó korlátot ad a szóba jöhető m fokszámokra. Az 1. Tétel pedig egyrészt p-től függően explicite megadja a kivételeket, másrészt pedig a bizonyításban megmutattuk azt is, hogy az összes többi kivételre már $m > 2$ esetén is érvényes a 7. Lemma 1—5. állítása és így a kivételek egyszerűen előállíthatók. Az $m = 2$ esetben pedig a 4. Lemma alapján kaphatjuk a kivételeket.

Így, mivel a kivételek megkeresése szinte gépiesen végezhető, ezért a bizonyításokat csak vázlatosan közöljük.

3—4. Tételek bizonyítása. Mivel $D(6) = 9$ így az $m \geqq 6$ esetén, az 1. Tétel értelmében az egyetlen lehetséges eset könnyen meghatározható.

Az $m=4$ esetben, mivel ekkor is igaz a Lemma állítása, aminek 5. pontjából a következő összefüggés adódik $p \pm 1 = c' b_1 b_2$, amiből c', b_1, b_2 összes lehetséges értéke meghatározható. Figyelembe véve, hogy $d_1 = 0$ és azt, hogy $\deg f_1 = \deg f_2 = 2$, a szimmetria tulajdonság miatt $d_2 = b_1 + b_2$. Ezek után a reducibilis polinomok meghatározása egyszerű számolással elvégezhető.

Az $m=3$ esetben az összes kivételek az 1. Tétel bizonyításában explicite felsorolt polinomokkal adottak.

Az $m=2$ esetben pedig a Lemma alapján viszonylag kevés számú polinom vizsgálatával jutunk el a reducibilis polinomokhoz.

Az 5—6. Tételek bizonyítása: Az előző tételek bizonyításától csupán annyiban tér el, hogy a $D(6) < 11$, $13 < D(8)$ miatt az $m=6$ esetben a $\deg f_1 = \deg f_2 = 3$-nál is előfordulhat reducibilitás. Ekkor szintén a Lemma 5. pontját használhatjuk fel, $p \pm 1 = c' b_1 b_2 b_3$, amiből c', b_1, b_2, b_3 lehetséges értékei meghatározhatók. Mivel $b_2 < d_2$, $d_3 < b_3$, így d_2, d_3 értékei is megadhatók. Ezek után egyszerű számolással kapjuk a reducibilis polinomokat.

IRODALOM

[1] L. Berwald, Über einige mit dem Sätz von Kakeya verwandte Satze, *Math. Z.*, 37 (1933), 61—76.
[2] A. Brauer, Bemerkungen zu einem Sätze von Herrn G. Pólya, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 43 (1933), 124—129.
[3] A. Brauer—R. Brauer, Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya, *Math. Z.*, 40 (1936), 242—265.
[4] A. Brauer—R. Brauer und H. Hopf, Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 35 (1926), 99—112.
[5] A. Brauer—G. Ehrlich, On the irreducibility of certain polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 844—856.
[6] W. S. Brown—R. L. Graham, An irreducibility criterion for polynomials over the integers, *Amer. Math. Monthly*, 76 (1969), 795—797.
[7] H. L. Dorwart—O. Ore, Criteria for the irreducibility of polynomials, *Annals of Math.*, 34 (1933), 81—94.
[8] W. Flügel, Solution to problem 226, *Archiv. der Math. und Physik*, 15 (1909), 271.
[9] I. Gerják, Schur-típusú irreducubilitási tételekről, Diplomamunka, Debrecen, (1976), 1—36.
[10] K. Győry, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes, I., *Publ. Math. Debrecen*, 18 (1971), 289—307.
[11] K. Győry, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes, II., *Publ. Math. Debrecen*, 19 (1972), 293—326.
[12] K. Győry, On the irreducibility of a class of polynomials, III., Megjelenés alatt.
[13] Győry K., Diofantikus vizsgálatok az irreducibilis polinomok elméletében, Kandidátusi disszertáció, Debrecen 1972, 172 oldal.
[14] K. Győry, Sur les polynômes a cofficients entiers et de discriminant donné, II.,*Publ. Math. Debrecen*, 21 (1974), 125—144.
[15] Győry K.—Rimán J.: Schur-típusú irreducilitási tételekről, Mat. Lapok, 24 (1973), 225—253.
[16] H. Ille, Einige Bemerkungen zu einem von G. Pólya herrührenden Irreduzibilitäskriterium, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 35 (1926) 204—208.
[17] М. В. Яковкин: *Численная теория приводимости многочленов*, Москва (1959).
[18] H. Kleiman, Irreducibility criteria, *J. London Math. Soc.*, 5 (1972), 133—138.
[19] R. J. Levit, Irreducibility of polinomials with low absolute values, *Trans. Amer. Math. Soc* 132 (1968), 297—305.
[20] S. Lipka, Über die Irreduzibilität von polynomen, *Math. Annalen*, 118 (1941/43), 235—245.
[21] M. Mignotte, Critéres d'irréductibilité de polynômes sur un corps de nombres, *L'Enseign. Math.*, 18 (1972), 191—200.

[22] M. MIGNOTTE, Un critére d'irréductibilité des polynômes, *L'Enseign. Math.* 17 (1971), 273—274.
[23] O. ORE, Einige Bemerkungen über Irreduzibilität, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 44 (1934), 147—151.
[24] O. PERRON, Neue Kriterion für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen, *Journ. f. d. Math.*, 132 (1907).
[25] E. L. PETTERSON, Einige aus den Grössenbeziehungen der Wurzeln abgeleitete Irreduzibilitätskriterien, *Math. Annalen*, 114 (1937) 78—83.
[26] E. L. PETTERSON, Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes, *Math. Z.*, 40 (1936), 194—200.
[27] E. L. PETTERSON, Einige Bedingungen für die Anzahl und die Gradzahlen der Faktoren gewisser ganzzahliger Polynome, *Math. Z.*, 41 (1936), 200—212.
[28] E. L. PETTERSON, Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome, *Math. Z.*, 41 (1936), 319—329.
[29] D. PIRGOV—L. STOIČEV, Über eine Klasse von irreduzibelen ganzzahligen Polynomen, *Bul. Inst. Politechn.* Bucurešti, 32 (1970), 25—30.
[30] D. PIRGOV, Über einen Satze für Irreduzibilität der ganzzahligen Polynoms im Körper der rationalen Zahlen von G. Pólya, *Bul. Inst. Politechn.* Bucurešti, 33 (1971) ,17—21.
[31] D. PIRGOV—E. KANTARDŽIEVA: Néhány tétel prímszámhatvány értékeket felvevő egész együtthatós polinomok irreducibilitásáról (bolgárul), *Bull. Inst. de Math.*, 11 (1971), 273—278.
[32] G. PÓLYA, Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 28 (1919), 31—40.
[33] G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II., Berlin, 1925.
[34] L. RÉDEI, *Algebra* I. Budapest, 1967.
[35] W. SCHULZ, Über Reduzibilität bei gewissen Polynomen und das Tarry-Escottsche Problem, *Math. Z.*, 63 (1955/56), 133—144.
[36] I. SCHUR, Problem 226, *Archiv der Math. und Physik.*, 13 (1908).
[37] I. SCHUR, Aufgabe 275 und 259, *Archiv der Math., und Physik*, 15 (1909).
[38] I. SERES, Lösung und Verallgemeinerung eines Schurschen Irreduzibilitätsproblems für Polynome, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 151—157.
[39] I. SERES, Über die Irreduzibilität gewisser Polynome, *Acta Arith.*, 8 (1963), 321—341.
[40] SERES I., Bizonyos polinomok irreducibilitásáról, *Mat. Lapok*, 16 (1965), 1—7.
[41] I. SERES, Irreducibility of polinomials, *J. Algebra*, 2 (1965), 283—286.
[42] SZÁSZ F., Seres Iván élete és matematikai munkássága, *Mat. Lapok*, 18 (1967), 243—250.
[43] T. TATUZAWA, Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome, *Proc. Imp. Acad.* Tokyo, 15 (1939), 253—254.
[44] H. TVERBERG: On the irreducibility of polynomials taking small values, *Math. Scand.*, 32 (1973), 5—21.
[45] L. WEISNER, Irreducbility of polynomials of degree n which assume the same value n times, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 41 (1935), 248—252.
[46] U. WEGNER, Über die Irreduzibilität einer Klasse von ganzen rationalen Funktionen, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 40 (1931), 239—241.
47 J. WESTLUND, On the irreducibility of certain polynomials, *Amer. Math. Monthly*, 16 (1909), 66—67.

О ТЕОРЕМАХ ПНПРИВОДИМОСТИ ТИПА ШУРА

А. ФАЗЕКАШ—И. ГЕРЯК

ON SCHUR TYPE IRREDUCIBILITY THEOREMS

Á. FAZEKAS—I. GERJÁK

JELENTÉS AZ 1981. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1981. november 6. és 16. között rendezte meg az 1981. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, középiskolai tanuló, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1981-ben fejezték be.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Adott egy egyenesekből és kettesekből álló végtelen sorozat a következő tulajdonságokkal:

(1) A sorozat 1-gyel kezdődik;

(2) Nincsen benne sem két egymás utáni kettes, sem három egymás utáni egyes;

(3) Ha a sorozatban mindenütt az egymás mellett levő egyeseket egyetlen kettessel váltjuk fel, az egymagukban álló egyeseket változatlanul hagyjuk és az eredeti sorozat ketteseit pedig elhagyjuk, akkor visszakapjuk az eredeti sorozatot.

Hány kettes van a sorozat első n tagja között?

2. Tekintsük egy G egyszerű gráf kontrakciónak (mint pontpárok halmazainak) a tartalmazásra nézve alkotott L hálóját. Mutassuk meg, hogy ha $n \geqq 1$ egész szám, akkor L-en pontosan akkor teljesül az

$$x \wedge \bigvee_{i=0}^{n} y_i = \bigvee_{j=0}^{n} x \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ j \neq 0}}^{n} y_i$$

azonosság, ha G-nek nincs olyan köre, amely legalább $n+2$ szögpontot tartalmaz.

3. Adjunk meg olyan, nem-megszámlálható alaphalmazú Hausdorff-teret, amelyben minden nem-üres nyílt halmaz lezártjának a komplementere megszámlálható.

4. Legyen G véges csoport, H pedig olyan konjugált osztály G-ben, amely generálja G-t. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) Létezik olyan m pozitív egész szám, hogy G tetszőleges eleme előáll m számú (nem feltétlenül különböző) H-beli elem szorzataként;

(2) G egybeesik kommutátor alcsoportjával.

5. Legyen K konvex kúp az n-dimenziós valós R^n vektortérben, és tekintsük az $A=K \cup (-K)$ és $B=(R^n \setminus A) \cup \{O\}$ halmazokat. Bizonyítsuk be, hogy R^n-nek létezik két olyan altere, amelyek együtt kifeszítik R^n-et, és amelyek egyike A-ban, másika B-ben fekszik.

6. Legyen f az $I=[0, 1]$intervallumot önmagára képező, szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in I$ számpárra tel-

jesül az

$$1-\cos(xy) \leqq \int_0^x f(t)\sin\left(t\cdot f(t)\right)dt+\int^y f^{-1}(t)\sin\left(t\cdot f^{-1}(t)\right)dt$$

egyenlőtlenség.

7. Legyen U olyan valós normált tér, amely minden X valós, végesdimenziós, normált térhez tartalmaz az X térrel izometrikusan izomorf alteret. Bizonyítsuk be, hogy e tulajdonsággal rendelkezik az U-nak minden olyan (nem szükségképpen zárt) V altere is, amelyhez létezik U-nak olyan N véges-dimenziós altere, hogy $V+N=U$.

8. Legyen W az R számegyenes sűrű nyílt részhalmaza. Mutassuk meg, hogy a következő két állítás ekvivalens:

(1) Minden olyan $f: R\to R$ függvény, amely az $R\setminus W$ minden pontjában folytonos, és minden W-ben fekvő nyílt intervallumon nem-csökkenő, az egész R-en is nem-csökkenő;

(2) $R\setminus W$ megszámlálható.

9. Legyen $n\geqq 2$ egész szám, és legyen X olyan összefüggő Hausdorff tér, hogy X minden pontjának van egy az R^n euklideszi térrel homeomorf környezete. Tegyük fel, hogy X bármely (nem szükségképpen zárt) D diszkrét altere befedhető az X páronként diszjunkt nyílt halmazaival úgy, hogy e halmazok mindegyike pontosan egy D-beli pontot tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor X legfeljebb H_1 kompakt alterének egyesítése.

10. Legyen P olyan, a Lebesgue mértékre nézve abszolút folytonos, az origóra szimmetrikus valószínűségeloszlás a számegyenes Borel-halmazain, amelynek $p(x)$ sűrűségfüggvénye a $[-1, 1]$ intervallumon kívül 0, a $[-1, 1]$ intervallumon belül pedig a c, d pozitív valós számok közé esik $(c<d)$. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan eloszlás, amelynek konvolúciónégyzete P-vel egyenlő.

Az 1. feladatot Pálfy Péter Pál, a 2. feladatot Huhn András, a 3. feladatot Hajnal András és Juhász István, a 4. feladatot Dénes József, az 5. feladatot Szűcs József, a 6. feladatot Páles Zsolt, a 7. feladatot Bosznay Ádám, a 8. feladatot Gesztelyi Ernő, a 9. feladatot Balogh Zoltán, a 10. feladatot Móri Tamás és Székely Gábor bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A versenyre 42 versenyző 207 megoldást nyújtott be, amelyek között azonban sok hibás vagy részmegoldás is van. Nehéznek bizonyultak a 3., 5., 7., 9. és 10. feladatok. Így pl. a 3. feladatra csak egy helyes megoldás, a 9. feladatra pedig csak részmegoldások érkeztek. A 2. feladat eredeti szövegében a versenybizottság hibásan adta meg gráfok kontrakciójának a definícióját, ezért azokat a dolgozatokat is teljes megoldásként értékelte, amelyek ellenpéldával rámutattak arra, hogy a feladat állítása a megadott definíció mellett nem igaz. A 3. feladat eredeti szövegében „nyílt halmaz" szerepelt „nem-üres nyílt halmaz" helyett. A versenybizottság úgy foglalt állást, hogy e pontatlanság a feladat megértését nem zavarta. (Megjegyezzük, hogy a versenyezők zöme nem is próbálkozott a pontatlan szövegre hivatkozó „megoldással".)

A bizottság az I. díjat és a velejáró 2100—2100 Ft pénzjutalmat *IVANYOS GÁBORNAK* és *MAGYAR ZOLTÁNNAK*, az ELTE IV. éves matematikus hallgatóinak ítélte oda.

Ivanyos Gábor az 1., 2., 4., 5., 6., 7. és 8. feladatra küldött megoldást. Valamennyi megoldása helyes, a nem könnyű 7. feladatra adott megoldása kiemelkedően szép, a 8. feladatra adott megoldásának megfogalmazása viszont kissé elnagyolt.

Magyar Zoltán az 1., 2., 4., 5., 6., 8. és 10. feladatot oldotta meg. Az 1. feladatban a végeredményt nem a legrövidebb (de azzal nyilvánvalóan egyenértékű) formában

adta meg, a 8. feladatra adott megoldásában pedig kisebb, könnyen javítható hiba van. Értékelhető gondolatokat küldött a 9. feladat megoldásával kapcsolatban is.

A versenybizottság a II. díjat, és a velejáró 1500—1500 Ft pénzjutalmat *CSIKÓS BALÁZSNAK*, az ELTE III. éves matematikus hallgatójának és *SERESS ÁKOSNAK*, az ELTE IV. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

Csikós Balázs az 1., 2., 4., 6., 8. és 10. feladatot oldotta meg. Ezenkívül az 5. feladatra adott megoldása hibás ugyan, de gondolatmenete javítható. *Seress Ákos* az 1., 2., 4., 6., 7. és 8. feladatot oldotta meg, továbbá a 10. feladatra nagyobb, a 3. feladatra kisebb, értékelhető részmegoldást küldött.

A versenybizottság a III. díjat és a velejáró 1000—1000 Ft pénzjutalmat *HAJNAL PÉTERNEK*, a JATE III. éves matematikus hallgatójának, *MIKLÓS DEZSŐNEK*, az ELTE V. éves matematikus hallgatójának és *SZEGEDY MÁRIÓNAK*, az ELTE II. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

Hajnal Péter az 1., 2., 4., 5., 6. és 8. feladatot oldotta meg, bár az 5. feladatra adott megoldása kissé pontatlan. *Miklós Dezső* az 1., 2., 3., 4., 6. és 8. feladatot oldotta meg. A 3. feladatra egyedül ő adott be teljes megoldást. Fogalmazása néhol körülményes. *Szegedy Márió* az 1., 2., 4., 5., 6. és 8. feladatot oldotta meg. A 6. feladatra adott megoldása szép, más feladatokban azonban gondolatmenete, fogalmazása nehézkes, körülményes.

A versenybizottság kiemelt dicséretben és 800 Ft pénzjutalomban részesítette *Moussong Gábort*, az ELTE V. éves matematikus hallgatóját.

Moussong Gágor az 1., 2., 4., 6. és 8. feladatot oldotta meg. A 9. feladatban a feladat állításának ZFC-vel való konzisztenciáját bizonyította be, az 5. feladatra részmegoldást adott. Fogalmazása kiforrott, mintaszerű.

Dicséretben és 500—500 Ft pénzjutalomban részesült *BODÓ ZALÁN*, az ELTE V. éves matematikus hallgatója és *ZEMPLÉNI ANDRÁS*, az ELTE IV. éves matematikus hallgatója.

Bodó Zalán az 1., 2., 4., 6. és 8. feladatot oldotta meg. *Zempléni András* az 1., 2., 4. és 7. feladatokat megoldotta. Lényegében helyes a 6. feladatra adott megoldása is és részmegoldást adott a 8. és 10. feladatra.

A versenybizottság említésre méltónak tartja *Tardos Gábornak*, a Berzsenyi Dániel Gimnázium (Budapest) IV. osztályos tanulójának, és *Szabó Endrének*, a Fazekas Mihály Gimnázium (Budapest)IV. osztályos tanulójának teljesítményét. Mindketten megoldották az 1. és 2. feladatot, valamint értékelhető részeredményt értek el a 8. feladat megoldásában.

Debrecen, 1981. december 3.

A VERSENYBIZOTTSÁG Balogh Zoltán titkár
Búzási Károly
Daróczy Zoltán
Gesztelyi Ernő
Gyires Béla
Győry Kálmán
Járai Antal titkár
Rapcsák András elnök
Szabó Zoltán
Tamássy Lajos
Terdik György

1. Feladat. Mivel a feladat feltételei szerint a sorozat n. tagját az első $n-1$ tag meghatározza, csak egy ilyen sorozat lehet. Könnyen belátható továbbá, hogy az az egyesekből és kettesekből álló végtelen sorozat, amelyben az n. kettes indexe az $(n-1)$-dik kettes indexétől 2-vel ill. 3-mal nagyobb aszerint, hogy a sorozat n. tagja 1, ill. 2, eleget tesz az (1), (2), (3) feltételeknek.

A (3) feltétel ekvivalens a következő (3′) feltétellel:

(3′) A sorozatban az egyeseket az 12, a ketteseket a 112 számcsoporttal helyettesítve, visszakapjuk az eredeti sorozatot.

Jelölje $f(n)$ a sorozat első n tagja közt a kettesek számát. Megmutatjuk, hogy minden n-re:

$$\text{(a)}\quad f(f(n)+2n) = n$$

$$\text{(b)}\quad f(f(n)+2n-1) = n-1 \quad \text{és}$$

$$\text{(c)}\quad f(f(n)+2n+1) = n.$$

Ennek bizonyítása céljából írjuk át a sorozat első n tagját (3′) szerint. Ekkor $3\cdot f(n)+2\cdot(n-f(n))=f(n)+2n$ tagot kapunk, amelyek között pontosan n kettős lesz, és ezzel (a)-t bebizonyítottuk. Mivel a fenti $f(n)+2n$ tagú átírás (3′) szerint 12-re végződik, és (2) szerint egyessel folytatódik, azért (b)-t és (c)-t is bebizonyítottuk.

Nyilvánvalóan teljesül végül

$$\text{(d)}\quad f(1) = 0 \quad \text{és} \quad f(2) = 1.$$

Most azt fogjuk megmutatni, hogy ha $g: N \to N$ olyan függvény, amely (f helyére g-t írva) eleget tesz az (a)—(d) feltételeknek, akkor $g=f$.

$n=1, 2$-re $g(n)=f(n)$ (d)-ből adódik. Tegyük most fel, hogy $n\geqq 3$ és minden $k<n$-re $g(k)=f(k)$-t már bebizonyítottuk. Mivel a $h(k)=f(k)+2k$ függvényre f definíciója szerint $h(k+1)-h(k)\leqq 3$ teljesül, azért van olyan $k<n$ természetes szám, hogy $n=f(k)+2k+\varepsilon_n$ ahol $\varepsilon_n=0, \pm 1$ lehet. Ekkor az (a), (b), (c) feltételek közül a megfelelőt és az indukciós feltevést alkalmazva

$$f(n) = f(f(k)+2k+\varepsilon_n) = \begin{cases} k, & \text{ha } \varepsilon_n = 0, 1 \\ k-1, & \text{ha } \varepsilon_n = -1, \end{cases} \quad \text{valamint}$$

$$g(n) = g(f(k)+2k+\varepsilon_n) = g(g(k)+2k+\varepsilon_n) = \begin{cases} k, & \text{ha } \varepsilon_n = 0, 1 \\ k-1, & \text{ha } \varepsilon_n = -1, \end{cases}$$

és így $f(n)=g(n)$.

Végül megmutatjuk, hogy $g(n)=\left[(\sqrt{2}-1)n+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ kielégíti az (a)—(d) feltételeket, és így az előzőek szerint $f(n)=\left[(\sqrt{2}-1)n+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. $g(1)=0$ és $g(2)=1$ nyilvánvaló. (a) ellenőrzése céljából írjuk $g(n)$-t $g(n)=(\sqrt{2}-1)n+1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon(n)$ alakba, ahol $\varepsilon(n)\in[0, 1]$. (Bár ezt nem fogjuk kihasználni, megjegyezzük, hogy $\varepsilon(n)=0$ nem lehet.) Ekkor

$$g(g(n)+2n) = \left[(\sqrt{2}-1)\left((\sqrt{2}-1)n+1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon(n)+2n\right)+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$=[n+(1-\varepsilon(n)(\sqrt{2}-1)] = n.$$

(b) és (c) ellenőrzése hasonló.
Többek megoldása alapján

Megjegyzés. $f(n)$ első néhány értékének felírása után könnyű megsejteni, hogy $f(n)$ egy lineáris függvény egész része. Az $f(n)=[an+b]$ függvényt (a)-ba és (b)-be behelyettesítve kapjuk, hogy (a) és (b) pontosan a-nak és b-nek a megoldásba szereplő értékeivel teljesül.

Megoldotta: Bodó Zalán, Csikós Balázs, Gröger Hans-Dietmar, Hajnal, Péter, Ivanyos Gábor, Magyar Zoltán, Miklós Dezső, Moussong Gábor, Nagy Csaba, Seress Ákos, Szabó Endre, Szegedy Márió, Szenes András, Tardos Gábor, Zempléni András. Hiányos Friedl Katalin és Umann Gábor dolgozata.

2. Feladat. Belátható, hogy $a, b \in \bigvee_{i=0}^{k} z_i$ pontosan akkor, ha van olyan l természetes szám, és létezik olyan $a=u_0, u_1, \ldots, u_l=b$ út, hogy minden $0 \leqq j < l$ esetén $(u_i, u_{j+1}) \in z_i$ valamely $0 \leqq i \leqq k$-ra. Továbbá $(a, b) \in z_1 \wedge z_2$ pontosan akkor, ha van olyan l természetes szám, és létezik olyan $a=u_0, u_1, \ldots, u_l=b$ út, hogy $(u_i, u_{i+1}) \in z_1$ és $(u_i, u_{i+1}) \in z_2$ minden $0 \leqq i < l$-re.

Mivel az

$$x \wedge \bigvee_{i=0}^{n} y_i = \bigvee_{j=0}^{n} \left[x \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i \right] \tag{1}$$

feltételből $\geqq$ mindig teljesül, így azt kell megmutatni, hogy a $\leqq$ irány ekvivalens azzal, hogy G-nek nincs olyan köre, amely legalább $n+2$ szögpontot tartalmaz. Tegyük fel, hogy $v_0, \ldots, v_k$ egy kör, és $k \geqq n+1$. Ha x a v_0-t és v_k-t ragasztja össze, y_i a v_i-t és v_{i+1}-et ragasztja össze $(0 \leqq i < n)$, y_n a $v_n, v_{n+1}, \ldots, v_k$-t ragasztja össze, akkor a jobb oldal x, a bal oldal pedig nem x, mert v_0 és v_k a bal oldal szerint nincs relációban.

Megfordítva, tegyük fel, hogy nincs legalább $n+2$ szögpontú kör, és legyen $a, b \in x \wedge \bigvee_{i=0}^{n} y_i$. Azt kell igazolni, hogy a, b eleme (1) jobb oldalának is. Létezik $a=v_0, v_1, \ldots, v_k=b$ út, hogy $(v_t, v_{t+1}) \in x$ és $(v_t, v_{t+1}) \in \bigvee_{i=0}^{n} y_i$ $(0 \leqq t < k)$. Rögzítsük t-t. Létezik $v_t=u_0, u_1, \ldots, u_l=v_{t+1}$ út, hogy minden $0 \leqq s < l$ esetén $(u_s, u_{s+1}) \in y_m$ valamely $0 \leqq m \leqq n$-re. Mivel az u-k egy kört alkotnak, $l+1 < n+2$, $l \leqq n$, így az y_m-ek között nem szerepel az összes y. Ezért

$$(v_t, v_{t+1}) \in \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq y}}^{n} y_i$$

valamely j-re, amiből a, b eleme (1) jobb oldalának.

Hajnal Péter megoldása alapján

Megoldotta: Beleznay Ferenc, Blázsik Zoltán, Bodó Zalán, Brindza Béla, Csikós Balázs, Dao Ngoc Thang, Filakovszky Péter, Friedl Katalin, Gaál István, Hajnal Péter, Horváth Miklós, Ivanyos Gábor, Krisztin Tibor, Koltay Károly, Magyar Zoltán, Miklós Dezső, Moussong Gábor, Pyber László, Révész Szilárd, Sali Attila, Seress Ákos, Szabó Endre, Szabó Sándor, Szalkai István, Szegedi Márió, Szenes András, Tardos Gábor, Tran Chinh Truc, Umann Gábor, Varga József, Zádori László, Zempléni András.

3. Feladat. Legyen X tetszőleges nem-megszámlálható alaphalmaz. Könnyű belátni, hogy akkor és csak akkor létezik a kívánt tulajdonságokkal rendelkező topológia X-en, ha van X részhalmazainak olyan $\mathscr{A}$ családja, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) Minden $A\in\mathscr{A}$-ra $|A|=\omega$ vagy $A=\emptyset$;
(2) $\mathscr{A}$ véges metszetre zárt;
(3) Minden $a, b\in X$, $a\neq b$ elempárra létezik $A, B\in\mathscr{A}$ úgy, hogy $a\in A$, $b\in B$ és $A\cap B\neq\emptyset$;
(4) Minden $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}'$ és $A\in\mathscr{A}\setminus\{\emptyset\}$ esetén $(\cup\mathscr{A}')\cap A\neq\emptyset$-ből $|\cup\mathscr{A}'|\leqq\omega$ következik.

Valóban, ha $\mathscr{A}$ rendelkezik az (1)—(4) tulajdonságokkal, akkor X-et az $\mathscr{A}$, mint bázis által generált topológiával ellátva, a kapott tér kielégíti a feladat feltételeit. Megfordítva, ha τ egy, a feladat követelményeit kielégítő topológia X-en, akkor az összes megszámlálható τ-nyílt halmazok $\mathscr{A}$ családjára teljesülnek az (1)—(4) feltételek.

Válasszuk most alaphalmaznak a megszámlálható rendszámok ω_1 halmazát. Sorolja fel $\{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle: \alpha\in\omega_1\}$ az ω_1 összes olyan elempárjait, amelyekre $a_\alpha\neq b_\alpha$. Transzfinite rekurzióval felépítünk egy $\{\mathscr{A}_\alpha: \alpha\in\omega_1\}$ halmazsorozatot úgy, hogy minden $\alpha\in\omega_1$ esetén

(1_α) Minden $A\in\mathscr{A}_\alpha$-ra $|A|=\omega$ vagy $A=\emptyset$;
(2_α) $\cup_{\beta<\alpha}\mathscr{A}_\beta\subset\mathscr{A}_\alpha$;
(3_α) $\mathscr{A}_\alpha$ véges metszetre zárt;
(4_α) $|\mathscr{A}_\alpha|\leqq\omega$
(5_α) Léteznek $A, B\in\mathscr{A}_\alpha$ halmazok úgy, hogy $a_\alpha\in A$, $b_\alpha\in B$ és $A\cap B=\emptyset$;
(6_α) Ha $A\in\mathscr{A}_\alpha\setminus\cup_{\beta<\alpha}\mathscr{A}_\beta$ és $A'\in\cup_{\beta<\alpha}A_\beta$, akkor $|A\cap A'|=\omega$.

Megmutatjuk, hogy ha sikerül egy ilyen $\{\mathscr{A}_\alpha: \alpha\in\omega_1\}$ sorozatot konstruálni, akkor $\mathscr{A}=\cup_{\alpha\in\omega_1}\mathscr{A}_\alpha$ kielégíti az (1)—(4) feltételeket. $\mathscr{A}$ nyilvánvalóan kielégíti (1), (2) és (3)-at. (4) ellenőrzése céljából legyen $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$ és $A\in\mathscr{A}\setminus\{\emptyset\}$ olyan, hogy $(\cup\mathscr{A}')\cap(A=\emptyset$. Legyen $\alpha\in\omega_1$ az a legkisebb rendszám, amelyre $A\in\mathscr{A}_\alpha$. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy $\cup\mathscr{A}'\subset\cup\mathscr{A}_\alpha$. Ehhez elegendő belátni, hogy minden $A'\in\mathscr{A}'$-höz van olyan $B\in\mathscr{A}_\alpha$, hogy $A'\subset B$. Ez utóbbi bizonyítása céljából legyen $A'\in\mathscr{A}'$ tetszőleges, és jelölje $\beta\in\omega_1$ azt a legkisebb rendszámot, amelyre létezik $B\in\mathscr{A}_\beta$ úgy, hogy $B\supset A'$ és $B\cap A=\emptyset$. (Megjegyezzük, hogy mivel van olyan $B\in\mathscr{A}$, amelyre $B\supset A'$ és $B\cap A=\emptyset$ teljesül (pl. $B=A'$ ilyen), azért β definíciója korrekt.) Ekkor $\beta>\alpha$ nem lehet a (6α) indukciós feltevés miatt. Ezért $\beta\leqq\alpha$, azaz $B\in\mathscr{A}_\beta\subset\mathscr{A}_\alpha$.

Az $\{\mathscr{A}_\alpha: \alpha\in\omega_1\}$ sorozat konstruálásához szükségünk van a következő egyszerű állításra:

$(*)$ Ha $|E|=\omega$ és ε az E végtelen részhalmazainak egy nem-üres megszámlálható családja, akkor vannak E-nek olyan B, C részhalmazai, hogy $B\cap C=\emptyset$ és $|B\cap A|=|C\cap A|=\omega$ minden $A\in\varepsilon$-re.

Valóban, legyen $\varepsilon=\{A_n: n\in\omega\}$ (esetleg egy tagot többször is felsorolva) és minden $n\in\omega$-ra tekintsük A_n-nek egy $A_n=\cup_{k\in\omega}A_{nk}$ felbontását páronként diszjunkt végtelen halmazokra. Rendezzük az $A_{nk}(n, k\in\omega)$ halmazokat egy $\{A_n: n\in\omega\}$ sorozatba. Mivel mindegyik A_n' végtelen, azért teljes indukcióval definiálhatunk olyan b_n, c_n $(n\in\omega)$ elemeket, hogy minden $n\in\omega$-ra $b_n, c_n\in A_n'-(\{b_k: k<n\}\cup\{c_k: k<n\})$. Ekkor $B=\{b_n: n\in\omega\}$ és $C=\{c_n: n\in\omega\}$ a kívánt tulajdonságú lesz.

Rátérve ezek után az $\{\mathscr{A}_\alpha: \alpha\in\omega_1\}$ sorozat felépítésére, legyen $B_0, C_0\subset\omega_1$ két tetszőleges olyan megszámlálhatóan végtelen halmaz, amelyekre $b_0\in B_0$, $c_0\in C_0$ és $B_0\cap C_0\neq\emptyset$ teljesül. Ekkor $\mathscr{A}_0=\{B_0, C_0, \emptyset\}$ kielégíti az $(1_0)-(6_0)$ feltételeket. Tegyük fel, hogy valamely $\alpha\in\omega_1$, $\alpha>0$ rendszámra $\{\mathscr{A}_\beta: \beta<\alpha\}$-t már definiáltuk oly módon, hogy az $(1_\beta)-(6_\beta)(\beta<\alpha)$ feltételek teljesülnek. Akkor a $(*)$ állítást $E=\bigcup_{\beta<\alpha}(\bigcup\mathscr{A}_\beta)$, $\varepsilon=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{A}_\beta$ mellett alkalmazva léteznek olyan $B, C\subset\bigcup_{\beta<\alpha}(\bigcup\mathscr{A}_\beta)$ megszámlálhatóan végtelen halmazok, hogy minden $A\in\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{A}_\beta$ esetén $|B\cap A|=|C\cap A|=\omega$. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $\mathscr{A}_\alpha$ az $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{A}_\beta\cup\{B\cup\{b_\alpha\}, C\cup\{c_\alpha\}\}$-beli halmazok véges metszeteiből áll, akkor teljesülnek az (1_α)—(6_α) feltételek.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Miklós Dezső megoldása alapján

2. megoldás. Legyen D a 2^{ω_1} szorzattér egy, a Pondiczery—Marczewski-tétel szerint létező, megszámlálható sűrű részhalmaza és legyen $F=\{f_\alpha: \alpha\in\omega_1\}\subset 2^{\omega_1}\setminus D$ olyan, hogy

$$(*)\qquad \alpha,\beta,\gamma\in\omega_1, \alpha\neq\beta \quad\text{és}\quad f\in D \quad\text{esetén}$$

$$f_\alpha\restriction(\omega_1\setminus\gamma)\neq f_\beta\restriction(\omega_1\setminus\gamma) \quad\text{és}\quad f\restriction(\omega_1\setminus\gamma)\neq f_\alpha\restriction(\omega_1\setminus\gamma).$$

A kívánt X tér alaphalmazául válasszuk $D\cup F$-et, D legyen nyílt halmaz X-ben, és a D altértopológiája legyen azonos a 2^{ω_1}-től örökölt topológiával.

Mostmár csak f_α $(\alpha\in\omega_1)$ báziskörnyezeteinek a definiciója van hátra. E célból legyen $\mathscr{B}=\{B_\alpha: \alpha\in\omega_1\}$ a 2^{ω_1} szorzattér elemi nyílt halmazainak családja, a $\{T_\alpha: \alpha\in\omega_1\}$ véges halmazok a B_α-k tartói, és $\lambda_\alpha=\sup(\bigcup_{\beta<\alpha}T_\beta)+1$. Ezek után f_α környezetei legyenek az összes $\{f_\alpha\}\cup(B\cap D)$ alakú halmazok, ahol B végigfut a $\mathscr{B}$ összes olyan f_α-t tartalmazó elemein, amelyek tartója $\omega_1\setminus\lambda_\alpha$-ban van.

Könnyű ellenőrizni, hogy ily módon egy Hausdorff-topológiát definiáltunk. A konstrukció szerint minden $B_\alpha\in\mathscr{B}$ esetén

$$d_X(B_\alpha\cap D)\supset\{f_\beta: \beta\in\omega_1\setminus(\alpha+1)\}$$

és így valóban X minden nyílt halmazának a lezártja komegszámlálható.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a feladat feltételeit kielégítő terek maximális számossága 2^ω.

Megoldotta: Miklós Dezső. Kisebb részeredményt ért el Seress Ákos.

4. Feladat. Tegyük fel először, hogy (1) teljesül, és tekintsük a $\varphi: G\to G/G'$ természetes leképezést. Mivel tetszőleges $h_1, h_2\in H$ esetén létezik $g\in G$, hogy $h_2=g^{-1}h_1g$ azért $\varphi(h_1^{-1}\cdot h_2)=\varphi(h_1^{-1}g^{-1}h_1g)=\varphi([h_1g])=\bar{1}$. Tehát H része egy G' szerinti $h\cdot G'=\varphi(h)$ mellékosztálynak $(h\in H)$.

Legyen most $g=h_1\cdot\ldots\cdot h_m$ és $g'=h_1'\cdot\ldots\cdot h_m'$ $(h_1,\ldots,h_m,h_1',\ldots,h_m\in H)$ a G tetszőleges két eleme. Ekkor a fentiek szerint

$$\varphi(g)=\varphi(h_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(h_m)=\varphi(h)^m=\varphi(h_1')\cdot\ldots\cdot\varphi(h_m')=\varphi(g').$$

Ezért G/G' egyelemű, azaz $G=G'$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy (2) teljesül, és legyen $n=|G|$. Tekintsük G egy tetszőleges g elemét. Mivel $G=G'$ azért g előáll kommutátorok szorzataként:

$$(*)\qquad g=a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1\cdot\ldots\cdot a_r^{-1}b_r^{-1}a_rb_r=$$

$$=a_1^{n-1}b_1^{n-1}a_1b_1\cdot\ldots\cdot a_r^{n-1}b_r^{n-1}a_rb_r.$$

Mivel H generálja G-t, és H-beli elem inverze helyett ugyanazon elem $(n-1)$-edik hatványát írhatjuk, azért minden a_i, b_i $(i=1, \ldots, r)$ előáll H-beli elemek szorzataként. Ezt az előállítást $(*)$-ba beírva azt kapjuk, hogy létezik olyan k_g természetes szám, hogy g felírható $k_g \cdot n$ H-beli elem szorzataként. Továbbá minden $k \geqq k_g$ természetes számra g előáll $k \cdot n$ H-beli elem szorzataként is, mert a fenti felírás végére tetszőleges számú $h^n = e (h \in H)$ alakú tényezőt írhatunk. Legyen $l = \max \{k_g : g \in G\}$. Ekkor G minden eleme előáll $m = n \cdot l$ H-beli elem szorzataként.

Moussong Gábor megoldása alapján

Megjegyzés. (2)⇒(1) bizonyításában csak annyit használtunk ki, hogy H generátorrendszer.

Megoldotta: Bodó Zalán, Brindza Béla, Csikós Balázs, Dao Ngoc Thang Erdélyi Tamás, Friedl Katalin, Gröger Hans-Dietmar, Hajnal Péter, Horváth Miklós, Ivanyos Gábor, Magyar Zoltán, Márkus László, Miklós Dezső, Moussong Gábor, Pyber László, Sali Attila, Seress Ákos, Szegedy Mário, Tran Chinh Truc, Umann Gábor, Zádori László, Zempléni András.

Részmegoldást adott: Koltay Károly.

5. Feladat. Először belátjuk, hogy ha $x \in \operatorname{int} \overline{K}$, akkor $x \in K$. Vegyünk $\overline{K}$-beli csúcsokkal egy szimplexet, amely belsejében tartalmazza X-et. A csúcsokat kicsit megmozdítva nyilván átvihetők K-ba úgy, hogy X a szimplexben marad és így $X \in K$.

Most megmutatjuk, hogy ha $x \notin \overline{K}$, akkor létezik $U \in R^n$, hogy $(u, x) < 0$, de $(u, y) \geqq 0$ minden $y \in \overline{K}$-ra.

Legyen k a $\overline{K}$ x-hez legközelebbi pontja. A k-t X-szel összekötő szakasz felező hipersíkja elválasztja x-et $\overline{K}$-tól, azaz van olyan $u \in R^n$ és $b \in R$, hogy $(u, y) \geqq b$ minden $y \in \overline{K}$-ra, de $(u, x) < b$. Mivel $-0 \in K$, $b \leqq 0$. Ha $(u, y) = \varepsilon < 0$ lenne valamely $y \in \overline{K}$-ra, akkor alkalmas $\lambda > 0$-ra $(u, \lambda y) = \lambda \varepsilon < b$ teljesülne. Így $(u, y) \geqq 0$ minden $y \in \overline{K}$-ra.

A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk be. $n = 0$-ra az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geqq 1$ és $0 \leqq s < n$ esetén az állítás teljesül. Ha K lineárisan független elemeinek maximális száma s és $s < n$, akkor K része egy $n-1$ dimenziós H altérnek. Legyenek ebben $E_0 \subset K \cup (-K)$ és $F_0 \subset (H \setminus A) \cup \{O\}$ olyan alterek, amelyekre teljesül H-ban az állítás.

E-t E_0-nak, F-et pedig az F_0 és egy $f \in R^n \setminus H$ által generált altérnek választva kapjuk az állítást. Így feltehetjük, hogy K-nak van n lineárisan független eleme, amiből következik, hogy van belső pontja.

Legyen $N = \{u : (u, x) \geqq 0$ minden $x \in \overline{K}$-ra$\}$. Ha $N = \{0\}$, akkor $\overline{K} = R^n$ így $K = R^n$. Feltehetjük tehát, hogy $N \neq \{0\}$. Válasszunk N-ből egy $u_1, \ldots, u_k$ maximális lineárisan független vektorrendszert. Legyen

$$H = \{x : (u_1 + \ldots + u_k, x) = 0\}$$

hipersík. $H \cap K$ kup, $(H \cap K) \cup (-(H \cap K)) = H \cap A$, $(H \setminus (H \cap A)) \cup \{0\} = H \cap B$, tehát $H \cap A$ és $H \cap B$-re alkalmazhatjuk az állítást. Kapunk olyan $E_0 \subset H \cap A$ és $F_0 \setminus H \cap B$ altereket, amelyek kifeszítik H-t. Vegyük észre, hogy

$$E_0 \subset \{x : (u_1, x) = (u_2, x) = \ldots = (u_{k1}\, x) = 0\}.$$

Legyen E_0 bázisa $l_1, \ldots, l_m$, az F_0 bázisa $f_1, \ldots, f_l$. Nyilván feltehetjük, hogy $l_1, \ldots, \ldots, l_m \in K$, továbbá teljesül, hogy $m + l \geqq n - 1$. $(K \setminus H)$-nak van belső pontja, legyen az e és legyen E az E_0 és e által generált altér. Ha megmutatjuk, hogy $E \subset A$, akkor $F = F_0$ választással készen vagyunk.

Először megmutatjuk, hogy $E_0 \subset \overline{K}$. Ha $x \in E_0$ és $u \in N$, akkor $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k$, így

$$(u, x) = \lambda_1 (u_1, x) + \ldots + \lambda_k (u_k, x),$$

amiből $x \in \overline{K}$. Most ha $l_0 \in E_0$, akkor $l_0 \in \overline{K}$, így $l_0 + l \in \overline{K}$, sőt $l_0 + l \in \operatorname{int} \overline{K} \subset K$. Ebből minden $\lambda \in R$-re $\lambda(l_0 + l) \in A$, azaz $E \subset A$.

Hajnal Péter megoldása alapján

Megoldotta. Hajnal Péter, Ivanyos Gábor, Koltay Károly, Magyar Zoltán, Szegedy Mário.

Részmegoldást adott: Csikós Balázs, Krisztin Tibor, Moussong Gábor, Sali Attila, Umann Gábor.

6. Feladat. Legyen

$$T_1 = \{(u, v): 0 \leqq u \leqq x, \quad 0 \leqq v \leqq y\},$$

$$T_2 = \{(u, v): 0 \leqq u \leqq x, \quad 0 \leqq v \leqq f(u)\},$$

$$T_3 = \{(u, v): 0 \leqq v \leqq y, \quad 0 \leqq u < f^{-1}(v)\}.$$

Ekkor $T_1 \subset T_2 \cup T_3$, $T_2 \cap T_3 = \emptyset$ és mindhárom Borel-halmaz, így bármely $[0, 1] \times [0, 1]$-en Lebesgueintegrálható nemnegatív g függvényre

$$\int_0^y \int_0^x g(u,v)\,du\,dv \leqq \int_0^x \int_0^{f(u)} g(u, v)\,dv\,du + \int_0^y \int_0^{f^{-1}(v)} g(u, v)\,du\,dv.$$

Most a

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 (1 - \cos(xy))}{\partial y \partial x} = \sin xy + xy \cos xy \geqq 0$$

választással

$$1 - \cos(xy) \leqq \int_0^x f(u) \sin\left(u \cdot f(u)\right) du + \int_0^y f^{-1}(v) \sin\left(v \cdot f^{-1}(v)\right) dv$$

adódik.

Szegedy Mário megoldása alapján

Megoldotta: Batta László, Csikós Balázs, Erdélyi Tamás, Filakovszky Péter, Gröger Hans-Dietmar, Hajnal Péter, Horváth Miklós, Ivanyos Gábor, Magyar Zoltán, Miklós Dezső, Moussong Gábor, Révész Szilárd, Sali Attila, Seress Ákos, Szegedy Mário, Tossenberger József, Zádori László.

Lényegében megoldotta: Bodó Zalán, Koltay Károly, Krisztin Tibor, Varga József, Zempléni András.

Hiányos Szabó Sándor megoldása.

7. Feladat. Teljes indukciót alkalmazva, feltehetjük, hogy $V1$ kodimenziós. Legyen W véges dimenziós normált tér, és tekintsük $W \oplus W$-t a $\|(w_1, w_2\| = \max\{\|w_1\|, \|w_2\|\}$ normával ellátva. Legyen $W_1 \oplus W_2$ a $W \oplus W$ izometrikusan izomorf képe az U-ban. Elég megmutatnunk, hogy $V \cap (W_1 \oplus W_2)$ tartalmaz W-vel izometrikusan izomorf alteret. Ha $V \cap (W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$, készen vagyunk. Ha $V \cap (W_1 \oplus W_2)$ 1 kodimenziós $W_1 \oplus W_2$-ben, akkor létezik $0 \neq f: W_1 \oplus W_2 \to R$ lineáris függvény, amelynek magja $V \cap (W_1 \oplus W_2)$. Az $f_1(w_1) = f(w_1 \oplus 0)$, $f_2(w_2) = f(0 \oplus w_2)$ jelölésekkel $f_i: W_i \to R$ $(i = 1, 2)$ lineáris függvények és

$$f(w_1 \oplus w_2) = f^1(w_1) + f_2(w_2).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0<\|f_1\| \leqq \|f_2\|$. Tekintsük a

$$\lambda f_1 \to -\lambda \|f_2\|$$

lineáris függvényt. A Hahn—Banach-tétel szerint van olyan $\varphi \in W_1^{**}$, hogy $\|\varphi\| = \frac{\|f_2\|}{\|f_1\|} \leqq 1$ és $\varphi(f_1) = -\|f_2\|$. Ha $\|f_2\| \neq 0$, legyen $B(g) = \varphi(g) \cdot \frac{f_2}{\|f_2\|}$ $(g \in W_1^*)$ és $\|f_2\| = 0$ esetén legyen $B \equiv 0$. Így $B: W_1^* \to W_2^*$ korlátos lineáris leképezés, $\|B\| \leqq 1$. Véges dimenzióról lévén szó, $B = A^*$ valamilyen $A: W_2 \to W_1$ lineáris leképezésre.

$\|A\| = \|A^*\| = \|B\| \leqq 1$, így tekintve a $w_2 \to Aw_2 \oplus w_2$ leképezést, $\|Aw_2\| \leqq \|w_2\|$ miatt ez W_2-nek izometriája $W_1 \oplus W_2$-be. Továbbá e leképezés képtere része $V \cap (W_1 \oplus W_2)$-nek, mivel

$$f_1(Aw_2) + f_2(w_2) = (A^* f_1)(w_2) + f_2(w_2) =$$
$$= -f_2(w_2) + f_2(w_2) = 0$$

Ivanyos Gábor megoldása alapján

Megoldotta: Ivanyos Gábor, Seress Ákos, Varga József, Zempléni András.

8. Feladat. Tegyük fel először, hogy $F = R \setminus W$ nem megszámlálható. Ekkor megadunk egy olyan $F: R \to R$ folytonos függvényt, amely W minden részintervallumán konstans, az egész R-en pedig nem-konstans és csökkenő.

Feltehető, hogy F-nek nincs izolált pontja (különben áttérünk F kondenzációs pontjainak a halmazára). Legyen $W = \bigcup V$, ahol V páronként diszjunkt nyílt intervallumok megszámlálható családja. Tekintsük V-nek az R-től örökölt természetes rendezését. Mivel F seholsem sűrű és perfekt, azért V-nek az előbbi rendezése sűrű (azaz V bármely két eleme között van további eleme V-nek), és így létezik a $[0, 1]$ intervallum diadikusan racionális elemei Q halmazának egy $q \to V_q$ rendezéstartó leképezése V-be. Legyen minden X-re

$$f(x) = 1 - \sup \{q \in Q: (-\infty, x] \cap V_q \neq \emptyset\}.$$

f nyilván konstans V elemein, $x \in V_0$-ra $f(x) = 1$ $x \in V_1$-re $f(x) = 0$ és f monton nem-növekvő. Továbbá f felvesz minden $t \in [0, 1]$ értéket, hiszen $x = \sup \bigcup \{V_q: q \in Q \cap [0, 1-t]\}$-re $f(x) = t$. Ezért f-nek nem lehet elsőfajú szakadása, és így végül f folytonos.

Tegyük fel most, hogy $R \setminus W - \{a_n: n \in N\}$ megszámlálható. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, megmutatjuk, hogy bármely $x, y \in R$, $x < y$ számpárra $f(x) < f(y) + \varepsilon$.

Valóban, mivel f folytonos az $a_n (n \in N)$ pontokban, azért minnen $n \in N$-re van a_n-nek olyan U_n nyilt környezete, hogy minden $u, v \in U_n$ esetén $f(u) - f(v) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Legyen továbbá $W = UV$, ahol V nyilt intervallumok olyan megszámlálható családja, hogy minden $U \in V$-re az f függvény V-re való megszorítása nem-csökkenő. Tekintsük az R számegyenes $\mathcal{U} = \mathcal{V}_u\{U_n: n \in N\}$ nyilt befedésének egy olyan $\mathcal{U}' = \mathcal{V}_u'\{U_n: n \leqq n_0\}$ véges részcsaládját. amelyre $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ és az on y' pontjainak halmaza, amelyekre létezik olyan $x = z_0 < z_1 < \ldots z_k = y'$ véges sorozat, hogy minden $0 \leqq i \leqq k-1$ esetén $[z_{i-1}, z_i] \subset U^{(i)}$ valamely $U^{(i)} \in \mathcal{U}'$-re. Könnyű belátni, hogy L az $[x, y]$ nyílt—zárt részhalmaza, és így $L = [x, y]$. Ezért létezik a fenti tulajdonságú $z_0, \ldots, z_k$ sorozat $y' = y$-hoz is. Ekkor $f(x) - f(y) = \sum_{i=0}^{k-1} (f(z_i) - f(z_{i+1})) < \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon$.

Moussong Gábor megoldása

Megjegyzés. A feladat (2)⇒(1) állítását az $R \setminus W$ izolált pontjain végighaladó transzfinit indukcióval is be lehet bizonyítani. Néhány helytelen megoldással kapcsolatos tapasztalat alapján nem látszik feleslegesnek megjegyezni, hogy a fenti indukció nem szükségképpen fejeződik be az első végtelen rendszámnál.

Megoldotta: Batta László, Beleznay Ferenc, Bodó Zalán, Csikós Balázs, Filakovszky Péter, Gröger Hans-Dietmar, Hajnal Péter, Horváth Miklós, Ivanyos Gábor, Koltay Károly, Krisztin Tibor, Miklós Dezső, Moussong Gábor, Nagy Csaba, Pyber László, Seress Ákos, Simon Károly, Tran Chinh Truc, Varga József.

Lényegében megoldotta: Blázsik Zoltán, Erdélyi Tamás, Friedl Katalin, Magyar Zoltán, Révész Szilárd, Sali Attila, Szalkai István, Szegedy Márió, Szenes András.

9. Feladat. Legyen X a feladat feltételeit kielégítő tér. Ekkor először azt bizonyítjuk be, hogy

($*$) ha F az X tetszőleges altere, akkor van X R^n-nel homeomorf nyílt halmazainak olyan $\mathcal{G}$ családja, hogy $(\cup \mathcal{G}) \cap F$ sűrű az F altérben, és $\mathcal{G}$ σ-diszjunkt, azaz $\mathcal{G}$ felbontható megszámlálható sok, páronként diszjunkt halmazokból álló halmazcsalád uniójára.

Ha $F=\emptyset$, akkor állításunk nyilvánvaló. Ha $F \neq \emptyset$, akkor tekintsük az F altér nemüres, a relatív topológiában nyílt és szeparábilis részhalmazainak egy maximális, páronként diszjunkt halmazokból álló $\mathcal{U}$ családját. (Ilyen a Zorn-féle lemma alapján létezik.) Minden $U \in \mathcal{U}$-hoz jelöljük ki $\mathcal{U}$ egy $S(U)=\{x_n(U): n=0, 1, \ldots\}$ megszámlálható sűrű részhalmazát. Mivel minden n-re $S_n=\{x_n(U): U \in \mathcal{U}\}$ az F altérnek, és így az X térnek is diszkrét altere, azért a feladat feltétele szerint van X páronként diszjunkt nyílt részhalmazainak olyan $\mathcal{G}_n=\{G_n(U): U \in \mathcal{U}\}$ családja, hogy minden $U \in \mathcal{U}$-ra $x_n(U) \in G_n(U)$. Mivel X lokálisan euklideszi, azért feltehetjük, hogy $\mathcal{G}_n$ az R^n-nel homeomorf halmazokból áll. Ekkor $\mathcal{G}=\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$ kielégíti a ($*$)-ban követelteket, hiszen $(\cup \mathcal{G}) \cap F \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ lezártja az F altérben bővebb, mint $\cup \mathcal{U}$ lezártja ugyanott, és $\cup \mathcal{U}$ az $\mathcal{U}$ maximalitása miatt sűrű F-ben.

Transzfinit rekurzióval definiáljunk egy $\{\langle F_\alpha, \mathcal{G}_\alpha \rangle: \alpha \in \omega_1\}$ sorozatot a következőképpen. (Mint szokásos, ω_1-gyel jelöljük az összes megszámlálható rendszámok halmazát.) Legyen $F_0=X$ és $\mathcal{G}_0$ az X R^n-nel homeomorf nyílt részhalmazainak egy maximális, páronként diszjunkt nyílt halmazokból álló családja. Ha $\alpha \in \omega_1$, $\alpha > 0$ és $\{\langle F_\beta, \mathcal{G}_\beta \rangle: \beta < \alpha\}$-t már definiáltuk, akkor legyen $F_\alpha = X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} (\cup \mathcal{G}_\beta)$ és legyen $\mathcal{G}_\alpha$ az X R^n-nel meomorf részhalmazainak egy olyan σ-diszjunkt családja, amelyre $(\cup \mathcal{G}_\alpha) \cap F_\alpha$ sűrű F_α-ban. (Ilyen $\mathcal{G}_\alpha$ létezését a ($*$) segédállítás biztosítja.)

Megmutatjuk, hogy ekkor $X=\bigcup_{\alpha \in \omega_1} (\cup \mathcal{G}_\alpha)$. Indirekt módon tegyük fel ugyanis, hogy létezik egy $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \mathcal{G}_\alpha$ pont, és tekintsük X-nek egy R^n-nel homeomorf V környezetét. Figyelembe véve, hogy minden $\alpha \in \omega_1$-re $(\cup \mathcal{G}_\alpha) \cap F_\alpha$ sűrű $F = X \setminus \bigcap_{\beta<\alpha}$-ban, azt kapjuk, hogy a $V_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} (\cup G_\beta)\right) \cap V (\alpha \in \omega_\perp)$ halmazok egy ω_1 típusú, szigorúan monoton növekvő nyílt halmazsorozatot alkotnak V-ben, ellentétben, hogy V homeomorf R^n-nel.

Ezért $\mathcal{G}^* = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \mathcal{G}_\alpha$ egy olyan nyílt befedése X-nek, R^n-nel homeomorf nyílt halmazokkal, amely legfeljebb H_1 diszjunkt halmazcsalád uniója. Mivel egy R^n-nel homeomorf altér csak megszámlálható sok diszjunkt nyílt halmazt metszhet, azért minden $G \in \mathcal{G}^*$ legfeljebb H_1 $\mathcal{G}^*$-beli halmazt metsz.

Tekintsük végül azt az ekvivalencia osztályozást $\mathcal{G}^*$-on, amely a $G, G' \in \mathcal{G}^*$ halmazokat pontosan akkor sorolja egy osztályba, ha van olyan $G_0, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ véges sorozat, hogy $G_0=G$, $G_n=G'$ és $G_i \cap G_{i+1} \neq \emptyset$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$. Az előző

bekezdés eredménye alapján teljes indukcióval könnyű belátni, hogy minden ekvivalencia osztály legfeljebb H_1 $\mathcal{G}^*$-beli halmazt tartalmaz. Másrészről, ha $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$ egy ekvivalencia osztály, akkor $\cup \mathcal{G}$ nyílt-zárt X-ben, és így X összefüggősége miatt $\mathcal{G}=\mathcal{G}^*$. Ezért $\mathcal{G}^*$ számossága legfeljebb $\mathcal{G}$.

Tehát X előáll legfeljebb H_1 R^n-nel homeomorf nyílt halmaz uniójaképpen, és így legfeljebb H_1 kompakt halmaz uniójaképpen is.

A kitűző megoldása

Megjegyzések:

1. A legismertebb nem-metrizálható differenciálható sokaság, a hosszú egyenes, példa olyan térre, amely kielégíti a feladat feltételeit, de nem áll elő megszámlálható sok kompakt alterének uniójaképpen.

2. Többen lényegében azon feltevés mellett bizonyították be a feladat állítását, hogy X minden szerapábilis altere megszámlálható bázisú. Moussong Gábor megmutatja, hogy van a ZFC-nek olyan modellje, amelyben ez a feltevés igaz. Megjegyezzük azonban, hogy M. E. Rudin és Ph. Zenor egy konstrukciója szerint a ZFC egyes más modelljeiben viszont léteznek a feladat feltételeinek eleget tevő, szeparábilis, de nem megszámlálható bázisú topologikus sokaságok.

3. Moussong Gábor észreveszi, hogy mivel egy összefüggő topologikus sokaság kontinuum számosságú, azért a feladat á]lítása a kontinuum hipotézisből következik.

Részeredményt ért el: Moussong Gábor, Horváth Miklós és Magyar Zoltán.

10. Feladat. Tegyük fel, hogy van a feladat feltételeinek eleget tevő Q valószínűségeloszlás. Nyilván $Q\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)=1$. Mivel Q momentumaira

$$|M_k| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k dQ(x) \right| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = x dQ(x) \right| \leqq 1,$$

azért

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{|M_k|}{k!}} = 0,$$

így φ_Q, a Q-hoz tartozó karakterisztikus függvény analitikus a számegyenesen. Mivel P szimmetrikus, φ_P valós. φ_P folytonossága, és $\varphi_P(0)=1$ miatt elég kicsiny abszolút értékű x-ekre $\varphi_P(x)>0$. Ezekre az x-ekre $\varphi_P(x)=(\varphi_Q(x))^2$ miatt $\varphi_Q(x)$ is valós. Azonban φ_Q analitikus, így mindenütt valós, amiből $\varphi_P \geqq 0$ mindenütt. Ismert tétel szerint (lásd Hewitt és Stromberg, Real and Abstract Analysis, 409. old.) ha egy eloszlás sűrűségfüggvénye korlátos, és karakterisztikus függvénye nemnegatív, akkor a karakterisztikus függvénye integrálható. Ez P-re alkalmazva φ_P integrálható, és így $p(x)$ majdnem mindenütt egyenlő egy folytonos függvénnyel, ellentétben a feladat feltételeivel.

Csikós Balázs és Magyar Zoltán megoldása alapján

Megoldotta: Magyar Zoltán, Csikós Balázs.

Részben megoldotta: Filakovszky Péter, Koltay Gábor, Seress Ákos, Zempléni András.

REPORT ON THE 1982. M. SCHWEITZER COMPETITION

1. Let an infinite sequence consisting of digits 1 and 2 possess properties:
(1) The sequence begins with 1.
(2) There are neither two consecutive 2's nor three consecutive 1's in the sequence.
(3) If one replaces every occurrence of 11 by 2 in the sequence, leaves single 1's unchanged and cancels all of the old occurrences of 2 then the original sequence results.
How many of the first n members of the sequence are 2's.

2. Consider the lattice L of all contractions of a simple graph G, Prove that if $n \geqq 1$ is any integer, then the identity

$$x \wedge \bigvee_{i=0}^{n} y_i = V_{j=0}^{n} \left(x \wedge \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i \right)$$

holds in L iff G has no circuit consisting of at least $n+2$ vertices.

3. Construct an uncountable Hausdorff space such that the closure of every non-void open set of the space is cocountable.

4. Let G be a finite group, H be a conjugate class in G and suppose that H generates G. Prove that the following two conditions are equivalent:
(1) There is a positive integer m such that every element of G is the product of exactly m (not necessarily distinct) elements of G.
(2) G coincides with its commutator subgroup.

5. Let K be a convex cone in the n-dimensional real vector space R^n, and consider the subsets $A = K \cup (-K)$ and $B = (R^n \setminus A) \cup \{O\}$ of R^n. Prove that R^n has a pair of subspaces which together span R^n and one of them lies in A while the other lies in B.

6. Let f be a strictly increasing, continuous function from the unit interval I onto itself. Prove that for any pair $x, y \in I$ the following inequality holds:

$$1 - \cos(xy) \leqq \int_0^x f(t) \sin\left(t \cdot f(t)\right) dt + \int_0^y f^{-1}(t) \sin\left(t \cdot f^{-1}(t)\right) dt.$$

7. Let U be a real normed linear space with the property that for every finite-dimensional real normed space X, U contains a subspace that is isometrically isomorphic to U. Prove that if V is a subspace of U such that $V+N=U$ for some finite-dimensional subspace N, then V also possesses this property.

8. Let W be an open dense subset of R. Prove that the following two peoperties of W are equivalent:
(1) Every function $f: R \to R$ which is continuous at all points of $R \setminus W$ and non-decreasing on every interval lying in W, also is non-decreasing on R.
(2) $R \setminus W$ is countable.

9. Let $n \geqq 2$ be an integer, and let X be a connected Hausdorff space such that every point of X has a neighbourhood homeomorphic to the euclidean space R^n. Suppose that every discrete (not necessarily closed) subspace D of X can be covered by a family of pairwise disjoint open subsets of X such that each member of the family contains exactly one point of D. Prove that X is the union of at most H_1 compact subspaces.

10. Let P be a probability distribution on the Borel sets of the real line which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure and symmetric with respect to the origin. Suppose that the density°function $p(x)$ od P vanishes outside the interval $[-1, 1]$ and takes values between c and d inside $[-1, 1]$, where c and d positive reals with $c < d$. Prove that P is not the convolution square of any distribution.

ОТЧЕТ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНКУРСЕ ПАМЯТИ М. ШВЕЙЦЕРА В 1981-ОМ ГОДУ

REPORT ON THE 1981 M. SCHWEITZER MATHEMATICAL COMPETITION

FELADATROVAT

Kitűzött feladatok

225. Feladat. Legyenek $f, g: [0, 1] \to \mathbf{R}$ különböző, folytonos és pozitív értékű függvények, amelyekre

$$\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx = 1. \tag{1}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és

$$A_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n : \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{g(x_i)} < \varepsilon\right\}. \tag{2}$$

Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_n} \prod_{i=0}^{n-1} g(x_i) dx_1 \ldots dx_n = 1. \tag{3}$$

(VERES SÁNDOR)

226. Feladat. Legyen $\| \cdot \|$ tetszőleges norma $\mathbf{R}^n$-en. Bizonyítandó, hogy létezik olyan $| \cdot |$ euklidészi norma, melyre

$$|x| \leqq \|x\| \leqq \sqrt{n}\, |x| \tag{4}$$

minden $x \in \mathbf{R}^n$-re.

(LOVÁSZ LÁSZLÓ)

227. Feladat. Legyen M^n az $\mathbf{R}^{n+1}$ euklideszi térbe ágyazott, végtelen sokszor differenciálható zárt hiperfelület, és tekintsük ezen a kanonikus hiperfelület-metrikát. Bizonyítandó, hogy M^n nem bontható föl nem-triviálisan két végtelen sokszor differenciálható metrikus sokaság metrikus direkt szorzatára.

(SZABÓ ZOLTÁN)

215. Legyen k és N természetes szám. A és B a következő játékot játssza: A választ egy egész számot, B pedig ezt kiszínezi k adott szín valamelyikével. A további lépésekben A a korábbi számoktól különbözőt választ, a színek azonban ismétlődhetnek. A játék a k-adik lépés után ér véget. B nyer, ha a végén a szomszédos számok egyszínűek, és két egyszínű szám különbsége legfeljebb N. Állapítsuk meg, hogy mikor van A-nak és mikor B-nek nyerő stratégiája.

(BECK JÓZSEF)

NEW PROBLEMS

1. Let f, g: $[0, 1] \to \mathbf{R}$ be distinct continuous positive functions, and assume (1). Let $\varepsilon > 0$ and let A_n be defined by (2). Prove (3).

2. Let $\|\cdot\|$ be an arbitrary norm on $\mathbf{R}^n$. Prove that there exists a euclidean norm $|\cdot|$ form which (4) holds.

3. Let M^n be an infinitely often differentiable closed hypersurface in $\mathbf{R}^{n+1}$, with the canonical induced metric. Prove that M^n cannot be decomposed into the metric direct product of two infinitely often differentiable metric manifolds in any non-trivial way.

A 215. feladat szövege tévesen jelent meg. A helyes szöveg a következő:

Megoldott feladatok

213. Feladat. Legyen X metrikus tér, Y topologikus tér, f: $X \times Y \to R$ olyan függvény, amely rögzített y mellett x-nek, rögzített x mellett y-nak folytonos függvénye. Bizonyítandó, hogy van olyan folytonos f_n: $X \times Y \to R$ függvényekből álló sorozat, amelyre $f_n \to f$.

(CSÁSZÁR ÁKOS)

Megoldás. Adott n természetes számra legyen $\mathfrak{G}_n$ az $\frac{1}{n}$ sugarú nyílt gömbök rendszere X-ben. Mivel X parakompakt T_2-tér (l. Császár Ákos: Bevezetés az általános topológiába, (8.3.16)), azért létezik a $\mathfrak{G}_n$ befedésnek alárendelt egységfelosztás X-ben (i. m. (8.3.15)). Legyen ilyen egységfelosztás $\{f_{ni}: i \in I_n\}$, és $a_{ni} \in X$ olyan pont, amelyre $f_{ni}(a_{ni}) \neq 0$. Az f_n függvényt most így értelmezzük:

$$f_n(x, y) = \sum_i f_{ni}(x) f(a_{ni}, y).$$

Minden $(p, q) \in X \times Y$ pontnak van olyan környezete, amelyben az összeg tagjai véges számú kivétellel eltűnnek (hiszen az első tényezők ezt teszik p alkalmas környezetében), így f_n értelmezése korrekt, és f_n folytonos a szorzattérben.

Adjunk meg egy $(p, q) \in X \times Y$ pontot és egy $\varepsilon > 0$ számot. Válasszuk meg az m természetes számot úgy, hogy

$$|f(x, q) - f(p, q)| < \varepsilon$$

teljesüljön, mihelyt x benne van p-nek $\frac{1}{m}$ sugarú környezetében. Mivel f_{ni} eltűnik egy $\frac{1}{n}$ sugarú gömbön kívül, azért $n > 2m$ esetén az $f_n(p, q)$ értéket definiáló összegnek csak olyan tagjai nem tűnnek el, amelyekre a_{ni} beleesik p-nek $\frac{1}{m}$ sugarú környezetébe, s így

$$|f(a_{ni}, q) - f(p, q)| < \varepsilon.$$

Minthogy továbbá a megfelelő pozitív $f_{ni}(p)$ szorzók összege 1, azért ilyen nagy n-re

$$|f_n(p, q) - f(p, q)| < \varepsilon.$$

BORBÉLY ALBERT

Megjegyzések. 1. A tétel *szeparábilis* metrikus X (és metrikus Y) tér esetén, klasszikus; euklideszi X és Y esetére Baire-től származik.

CSÁSZÁR ÁKOS

2. A fenti bizonyítás kis átfogalmazással érvényes akkor is, ha X parakompakt S_2-tér és van benne teljes befedés-sorozat (i. m. 320. o.). Ebből azonban már következik, hogy X félmetrizálható (i. m. (8.4.5) és (8.3.15)).

CSÁSZÁR ÁKOS

A 213. feladat megoldását beküldte még *Göndőcs Ferenc*.

214. Feladat. Legyen $y(t)$ megoldása az $y'(t)+y(qt)=0$ retardált differenciálegyenletnek az $y(0)=1$ kezdőfeltétellel $(0<q<1)$. Mutassuk meg, hogy a $p=1-q$ jelöléssel $y(t)$-nek van zérushelye az $(1/ep,\ 1/p]$ intervallumban.

ELBERT ÁRPÁD

Megoldás. Azt fogjuk pontosabban megmutatni, hogy $y(t)$-nek legkisebb (pozitív) zérushelye esik a megadott intervallumba.

Először belátjuk, hogy $y(t)$-nek van zérushelye $(0, 1/p]$-ben. Ennek ellenkezőjét feltéve, $0<t\leqq 1/p$ esetén $y(t)>0$, és így $y'(t)=-y(qt)<0$ volna. Ugyanezekre a t-kre még $y''(t)=qy(q^2t)>0$ is állna, úgyhogy y' szigorúan növekvő negatív függvénynek adódnék. Mivel a Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$$y'(t) = -y(qt) = -y(t)+y(t)-y(qt) =$$
$$= -y(t)+(1-q)ty'(s),$$

ahol $qt<s<t$, tekintettel y' növekvő voltára, innen

$$y'(t) < -y(t)+pty'(t),$$

azaz

$$(1-pt)y'(t)+y(t) < 0.$$

Ebből a $t=1/p$ helyen az $y(1/p)<0$ ellentmondás következnék.

Belátjuk másrészt, hogy $y(t)$-nek nincs zérushelye a $(0, 1/ep]$ intervallumban, mivel itt $y(t)>e^{-et}$.

Valóban, legyen $u(t)=y(t)e^{et}$. Ekkor

$$u'(t) = \big(y'(t)+ey(t)\big)e^{et}.$$

Nyilván $u'(0)=-1+e>0$. Tegyük fel, hogy u' eltűnik valahol a $(0, 1/ep]$ intervallumban, és legyen t_0 a legkisebb zérushelye. Ekkor u szigorúan növekvő a $(0, t_0)$ intervallumban. Egyúttal

$$ey(t_0) = -y'(t_0) = y(qt_0),$$

tehát

$$u(qt_0) = y(qt_0)e^{eqt_0} = ey(t_0)e^{eqt_0} = y(t_0)e^{et_0}e^{1-et_0+eqt_0} = u(t_0)e^{1-ept_0}.$$

Mivel $u(qt_0)<u(t_0)$, azért $1-ept_0<0$, azaz $t_0>1/ep$ következnék, feltevésünkkel ellentétben.

Eszerint $(0, 1/ep]$-ben $u'>0$, u szigorúan növekvő, és az $u(0)=1$ feltevésre tekintettel itt $u(t)>1$, azaz $y(t)>e^{-et}$, amint állítottuk.

ELBERT ÁRPÁD

Megjegyzés. A bizonyítás első része G. Morristól származik, a második pedig A. D. Zverkintől (Differencialnije Uravnenija *13* (1977), 1951—1956).

A megadott határok lényegében véve nem javíthatók. Ez a felső határra nézve onnan látszik, hogy a feladatban szereplő retardált differenciálegyenletnek nyilván

megoldása az

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{t^n}{n!}$$

függvény, amely a $q \to 0$ esetben (amikor $p \to 1$) az $y_0(t) = 1 - t$ függvénybe megy át. Az alsó határ pontossága alulírottnak egy előkészületben levő cikkében fog szerepelni.

ELBERT ÁRPÁD

216. Feladat. Legyen X topologikus tér. Tekintsük a következő két állítást:

(a) X-ben van csupa nyílt F_σ-ból álló bázis;
(b) X-ben minden nyílt G-hez van olyan nyílt H, amely F_σ, s amelyre $H \subset G \subset \overline{H}$.

Mutassuk meg, hogy (a)-ból következik (b), de megfordítva nem.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldás. A feladat szövegével ellentétben általában nem következik (a)-ból (b).

Valóban, legyen W^* az ω_1-nél nem nagyobb rendszámok halmaza a rendezéstopológiával ellátva, W pedig ennek ω_1 kihagyása után visszamaradó altere. Ismeretes, hogy W^* kompakt Hausdorff-tér (Császár Ákos: Bevezetés az általános topológiába, 5.3.g.16), s így teljesen reguláris (i. m. (5.3.23)). Az ilyen térben bázist alkotnak a folytonos valós függvények zéróhalmazainak komplementumai (i. m. 6.4.g.8), amelyek nyilván F_σ-halmazok. Ezért teljesül (a).

Viszont W^*-ban a nyílt W halmazhoz nem található olyan H nyílt F_σ, amelyre $H \subset W \subset \overline{H}$. Ugyanis W-nek minden zárt része megszámlálható, tehát az ilyen H is csak megszámlálható lehetne, s vele együtt $\overline{H}$ is, holott W nem megszámlálható.

A következő példa mutatja, hogy (b)-ből sem következik (a). Legyen

$$X = (0, 1] \cup \{2\} \subset R, \quad \text{továbbá} \quad a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{és} \quad B_k = \{a_n : n > k\} \cup \{1\} \cup \{2\}.$$

X-ben a topológia számára alkossanak szubbázist $(0, 1]$-nek a számegyenes euklideszi topológiájából örökölt topológiájára nézve nyílt részhalmazai, továbbá a B_k halmazok. Erre a térre nem teljesül (a), mert 2-nek minden környezete tartalmazza 1-et, azaz minden 1-et tartalmazó zárt halmaz tartalmazza 2-t is, úgyhogy a nyílt $(0, 1]$ halmaz egyáltalán nem állítható elő zárt halmazok egyesítéseként.

Viszont X-re teljesül (b). Valóban, ha $G \neq \emptyset$ nyílt halmaz, legyen $H = G \cap (0, 1)$. A $H \subset G \subset \overline{H}$ tartalmazás azonnal ellenőrizhető, és az is, hogy H nyílt. Ezenfelül H egyesítése egy megszámlálható halmaznak és egy, az euklideszi topológiában nyílt halmaznak, s így megszámlálható sok egyelemű halmaznak és megszámlálható sok zárt intervallumnak, az ilyenek pedig (mivel $(0, 1)$-ben fekszenek) X topológiájában is zártak.

BORBÉLY ALBERT

Megjegyzések. 1. A feladat kitűzésekor olyan X térre kellett volna szorítkozni, amely Szuszlin-tér, azaz amelyben nyílt halmazok tetszőleges páronként diszjunkt rendszere megszámlálható. Ekkor (a)-ból valóban következik (b). Ha ugyanis G nyílt, tekintsünk egy G-ben foglalt nyílt F_σ-kból álló maximális diszjunkt rendszert. Ilyennek létezését a Kuratowski—Zorn-féle lemma biztosítja, hiszen diszjunkt rendszerek tartalmazásra nézve rendezett rendszerének egyesítése is diszjunkt. Legyen H e rendszer elemeinek egyesítése. A Szuszlin-feltétel szerint a rendszer megszámlálható, úgyhogy H nyílt F_σ, evidensen $H \subset G$, és az (a) feltételből s a rendszer maximalitásából következik, hogy $G \subset \overline{H}$.

A (b)⇒(a) implikáció még azzal a feltétellel sem teljesül, hogy X Szuszlin-tér; ezt a fenti megoldásban megadott példa mutatja.

CSÁSZÁR ÁKOS

2. Ha X eleget tesz az (a) feltételnek, akkor benne minden nyílt halmaz zárt halmazok egyesítése, és így X S_1-tér. A fent közölt megoldásban szereplő X térben azonban 1-nek van 2-t nem tartalmazó környezete, 2-nek pedig nincs 1-et nem tartalmazó környezete, tehát nem S_1-tér. A megoldásban voltaképpen ennek alapján következtettünk arra, hogy X nem teljesíti (a)-t.

CSÁSZÁR ÁKOS

3. A következő példában ismét teljesül (b), de nem teljesül (a), s emellett a tér Hausdorff-féle (és Szuszlin-féle).

Legyen X az R^2 sík azzal a topológiával ellátva, amelyben szubbázist alkotnak az euklideszien nyílt halmazok, továbbá az R^2-Q halmaz, ahol Q jelöli az x-tengely racionális koordinátájú pontjainak halmazát. Ez a topológia finomabb a sík euklideszi topológiájánál, úgyhogy X valóban Hausdorff-tér. Minden nemüres nyílt halmaz tartalmazza $X-T$-nek egy euklideszien nyílt részét, s ebből könnyen következik, hogy X Szuszlin-tér; itt T-vel az x-tengelyt jelöltük.

Ha G nyílt X-ben, akkor $H=G-T$ nyílt F_σ az euklideszi topológiában, tehát X-ben is, és evidens, hogy $H\subset G\subset\overline{H}$. Így fennáll (b).

Viszont X-re nem teljesül (a), mert ha $x\in T-Q$, akkor nincs olyan nyílt F_σ, amelynek eleme x s amely része $X-Q$-nak. Valóban, ha G ilyen volna, akkor $G\cap T=U-Q$, ahol $U\neq\emptyset$ a T számegyenes euklideszi topológiájában nyílt halmaz, s mivel T zárt X-ben, azért $G\cap T$-nek is F_σ-nak kellene lennie X-ben. Csakhogy könnyű belátni, hogy $T-Q$-nak X-re nézve zárt részhalmazai az euklideszi topológiára nézve is zártak, úgyhogy $U-Q$ az euklideszi topológiában F_σ-halmaz volna; ez tudvalevőleg ellentmond a Baire-féle kategóriatételnek.

CSÁSZÁR ÁKOS

ЗАДАЧИ

PROBLEMS

KÖNYVISMERTETÉS

WESZELY TIBOR: BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA

Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1981. 382. l.

Mielőtt a marosvásárhelyi Felsőoktatási Intézet tanárának, Weszely Tibornak most megjelent könyvét ismertetném, hasznosságának kellő fölmérése érdekében előre kell néhány adatot bocsátanom.

A két Bolyai életét és matematikai munkásságát részletező írások között mindmáig Paul Stäckel két kötetes tanulmánya („Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai") a *standard* forrásmunka. Ez a könyv 1913-ban németül, 1914-ben (Rados Ignác fordításában) magyarul jelent meg. Előzőleg a magyarul nem tudó Stäckel az értekezések egész sorában tette közzé a két Bolyai életrajzát, valamint a hagyatékukban föllelhető matematikai eredményeket (az iratokat Schmidt Ferenc, Kürschák József, Fejér Lipót és mások fordították németre), nagy hozzáértéssel, odaadó lelkesedéssel dolgozta föl és egészítette ki azokat. A Stäckel-könyv első kötete zömmel életrajzi, elszórtan matematikai adatokat, a második csaknem kizárólag a két Bolyai matematikai műveiből (kézírásos hagyatékából) összeállított fordításokat tartalmaz. A ritkaságszámba menő Stäckel könyv ma már nyilvánvalóan sok helyt kiegészíthető az újabb vizsgálatok eredményeivel, de ezenfelül van egy — ma már szinte korrigálhatatlan — hibája is: a többszörös fordítások (latinról magyarra, majd németre, onnan ismét magyarra stb.) ugyanis helyenként pontatlanságokhoz vezettek, a hiteles szövegek rekonstruálása pedig sok esetben lehetetlen. Az eredeti iratok ugyanis számos kézen mentek át, tekintélyes részük ma már föl nem lelhető, és csak kisebb hányaduk található meg a MTA levéltárában, illetve a marosvásárhelyi Teleki—Bolyai Könyvtárban.

Ezen a ponton kezdjük a Weszely-mű méltatását: tömören fogalmazva a könyv a Marosvásárhelyt őrzött Bolyai-hagyaték ismételt áttanulmányozása révén, és az újabb értekezések segítségével kiegészített „Stäckel" modern változata, gazdagítva a geometriai kérdésekben jártas szerző számos megjegyzésével és észrevételével.

A könyv három részre tagolódik:

1. Az „Egy életmű és jutalma" (7—60. l.) c. fejezet Bolyai János életútját mutatja be, mindenütt kidomborítva annak tragikus buktatóit. A viszonylag szűk terjedelem ellenére a szerző megtalálta annak a lehetőségét, hogy hiteles életrajzot állítson össze, a lényeget domborítsa ki, és állításait számos eredeti, eddig nem ismert idézettel támassza alá. E fejezetben fokozatosan megtisztul az a hamis kép, melyet főként a szépirodalom és a szenzációt kedvelő tanulmányok szerzői a századforduló táján alakítottak ki Bolyai János személyéről, és amely torzításoknak ma is vannak lelkes szószólói. Bizonyos, hogy Weszely könyve nem fogja eloszlatnia a két Bolyai köré font regényes ferdítéseket, de az érdeklődők számára a jövőben az egyik hitelt érdemlő forrásmunka lesz.

2. A „Bolyai János matematikai munkássága" c. második fejezet (61—133. l.) azon tárgykörök történelmi vonatkozásait, valamint az apa és a fiú munkásságának kölcsönhatásait vázolja föl olyan kérdésekre szorítkozva, amelyekben Bolyai János külön is figyelemre méltó eredményeket ért el. Ezek a tárgykörök: a binomiális sorok elmélete, a szögharmadolás általa néhány sorban felvázolt módja (érdemes megemlíteni, hogy följegyzését legelőbb Szőkefalvi-Nagy Gyula dolgozta ki részletesebben. Matematikai Lapok, 4. k. 1953. 84—86. l.), a komplex számok értelmezése és algebrája, a végszerű térfogategyenlőség kérdése, a geometriák ellentmondástalanságának problémája, kísérlet az ötödfokú egyenlet gyökmegoldó formulájának levezetésére. Itt találjuk Bolyai Farkasnak az Appendixhez fűzött, és a Tentamen II. kötetének végén közölt néhány megjegyzését is.

Már ebben a fejezetben is módját találja a szerző, hogy korrigáljon néhány régebbi eredetű elírást, illetve tévedést. Ezeken az oldalakon bőven szerepelnek matematikai formulák: Weszely sok helyütt meghagyta a két Bolyai által alkalmazott hasznos, de ma már szokatlan, olykor nehézkes matematikai szimbólumokat. Dicséret illeti a Kriterion Kiadót, amiért — az eredetiség megőrzése

érdekében — vállalta a nyomdatechnikai szempontból nem könnyű formulák ilyen módon való közlését.

3. „Bolyai János matematikai munkái" a címe a könyv legterjedelmesebb (135—379. l.), és bizonyára legértékesebb fejezetének. Ismeretes, hogy Bolyai Jánostól életében egyetlen értekezés jelent meg, az Appendix, kéziratban, de csaknem nyomdakész állapotban maradt fönn a komplex számokról írott pályamunkája, a Responsio (valamint e munka első két §-át részletesebben is kifejtő későbbi átirata). Kézírásos hagyatékának különböző korokból származó többi tárgykörei pedig a következő címszavak alá sorolhatók: a tetraéder köbtartalmának hiperbolikus geometriai kiszámítása, az abszolút geometria ellentmondástalansága terén végzett vizsgálatai, Bolyai János Lobacsevszkij „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (Berlin, 1840) c. munkájához fűzött megjegyzései (ezeket értekezéssé kerekítve 1902-ben Paul Stäckel és Kürschák József tette közzé), továbbá a könyvnek szánt és az euklideszi geometriát szigorú precizitással tárgyaló „Raumlehre" c. kézirat. Megemlítendő, hogy a Raumlehre anyagához illeszthető Springer István „Bolyai János geometriai axiomatikájának kiegészítése" (Bp. 1927.) c., ma már eléggé nehezen hozzáférhető doktori értekezése.

Weszely Tibor ezeket a tárgyköröket szöveghű magyar fordításokban közli, és ahol erre lehetősége volt, visszanyúlt az eredeti kéziratokhoz is. Az Appendix esetében nyilvánvalóan felhasználta az Akadémiai Kiadó gondozásában Kárteszi Ferenc magyarázataival (1973-ban és máskor) megjelent könyvet, valamint Stäckel magyar nyelvű változatát. Némi módosításokat azonban itt is végrehajtott. Pl. változtatott az Appendix eddigi kiadásainak megszokott rendjén, ugyanis a kommentárokat nem az eredeti szövegtől elkülönítve, hanem abba — a megfelelő helyekre — beépítve, más betűtípussal közli. Ez az eljárás könnyíti az olvasó munkáját, de előnye elsődlegesen nem ebben mutatkozik, hanem abban, hogy a betoldások számos, eddig figyelemre kevéssé méltatott észrevételt is tartalmaznak. Weszely újszerű megjegyzéseinek fölsorolása lehetetlen, példaként csupán egyet említek. Az Appendix utolsó, 43. §-ában, amelyben Bolyai János igazolja, hogy a hiperbolikus geometriában van négyszögesíthető kör a következőt olvassuk: „...vagy érvényes Eukleidész XI. axiómája, vagy pedig lehetséges a kör geometriai kvadraturája". Az idézőjelben levő megállapítás nyilván nem ekvivalens azzal a tétellel, hogy az euklideszi geometriában a körnégyszögesítés nem oldható meg (ezt — mint ismeretes — F. Lindemann igazolta 1882-ben), de mintegy sejtésként benne bújkál ez a gondolat is. Méltán vonja le ennek megfelelően Weszely Tibor azt a következtetést, hogy „aki legelőször belátta, hogy a körnégyszögesítés problémájának megoldása az euklideszi síkban lehetetlen, az Bolyai János volt" (233. l.).

24 kép gazdagítja a kötetet, ezek a két Bolyai személyéhez kapcsolódó történelmi helyeket, kézirati és nyomtavány fakszimiléket, valamint arcképeket mutatnak be.

A gördülékeny, vonzó stílus, a jó pedagógiai érzékre való matematikai fejtegetések a munka olvasmányosságát biztosítják.

A Bolyai-irodalom igen hasznos és jelentős nyeresége ez a könyv, igen örvendetes, hogy magyarországi forgalmazása is megoldódott.

SZÉNÁSSY BARNA

ОБЗОР КНИГ

BOOK REVIEWS

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1981-ben jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai tankönyvek és felsőoktatási jegyzetek nem szerepelnek.

ARATÓ, M.—VARGA, J. (editors): *Mathematical Models in Computer Systems,* Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 370 oldal, 340 Ft.

BAJCSAY PÁL: *Közönséges differenciálegyenletek,* I. rész, (6. kiadás), B. VII. kötet, Budapest, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 33 Ft.

BAKOS TIBOR (szerk.): *Középiskolai matematikai versenyek,* 11—13., 1977—1979, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 283 oldal, 28Ft.

BALÁZSNÉ MÉHES VERA: *Számlépcső,* Matematikai programozott képeskönyv Balázs Béla programozási rendszerének alkalmazásával. Budapest, 1981, Móra Könyvkiadó, 49 oldal, 28 Ft.

BÁRTFAI, P. and TOMKÓ, J. (editors): *Point Processes and Quewing Problems,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 24, Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 426 oldal, 270 Ft.

BEREZNAI GYULA—VARECZA ÁRPÁD: *Tanárképző főiskolák matematikai versenyei,* 2. kötet 1971—1979, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 211 oldal, 21 Ft.

BINÉT ÁGNES: *Gyurka számolni tanul,* (3. kiadás), Budapest, 1981, Móra Könyvkiadó, 73 oldal, 46 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához,* (2. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 424 oldal, 41 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának a tanításához,* Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 392 oldal, 38 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER—HERCZEG JÁNOSNÉ—MÉRŐ LÁSZLÓ—VARGA TAMÁS: *Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához,* (2. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 29 Ft.

CSÁKÁNY, B.—FRIED, E.—SCHMIDT, E. T. (editors): *Universal Algebra,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 29., Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 804 oldal, 500 Ft.

CSÁKÁNY, B.—ROSENBERG, I. (editors): *Finite Algebra and Multiple-valued Logic,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 28., Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 880 oldal 540 Ft.

CSENGERI PINTÉR PÉTER: *Mennyiségek, mértékegységek. Számok, SI.,* Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 384 oldal, 35 Ft.

CSISZÁR IMRE—KÖRNER JÁNOS: *Information Theory, Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems,* Budapest, 1980, Akadémiai Kiadó, 447 oldal, 420 Ft.

CSÖRGŐ, M.—RÉVÉSZ, P.: *Strong Approximations in Probability and Statistics,* Budapest—New York, 1981, Akadémiai Kiadó — Academic Press, 284 oldal, 180 Ft.

DÖMÖLKI, B.—GERGELY, T. (editors): *Mathematical Logic in Computer Science,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 26., Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 758 oldal, 470 Ft.

EIGEN, MANFRED—WINKLER, RUTHILD: *A játék, Természeti törvények irányítják a véletlent,* Budapest, 1981, Gondolat, 425 oldal, 79 Ft.

FARKAS, M. (editor): *Qualitative Theory of Differential Equations I—II.,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 30., Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 1089 oldal, 670 Ft.

FRIED ERVIN: *Általános algebra,* Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 338 oldal, 39 Ft.

FRITZ, J.—LEBOWITZ, J. L.—SZÁSZ, D. (editors): *Random Fields I—II.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 27., Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 1111 oldal, 690 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—PÁLMAY LÓRÁNT—PATAKI JÁNOS—POGÁTS FERENC—REIMAN ISTVÁN—SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (2. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 384 oldal, 29,50 Ft.

GÁLL ÉVA: *Matematikaország határán* (Utazások Matematikaországban 2.), (3. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 63 oldal, 11,50 Ft.

GAVRILOV, G. P—SZAPOZSENKO, A. A.: *Diszkrét matematikai feladatgyűjtemény,* Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 356 oldal, 68 Ft.

HALMOS, P. R.—SIGLER, L. E.: *Elemi halmazelmélet. Halmazelméleti feladatok,* Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 199 oldal, 54 Ft.

IZSÁK JÁNOS—JUHÁSZ—NAGZ PÁL—VARGA ZOLTÁN: *Bevezetés a biomatematikába,* Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 668 oldal, 70 Ft.

KOLMOGOROV, A. N.—FOMIN, SZ. V.: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei,* Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 553 oldal, 132 Ft.

KÓLYA DÁNIEL: *Ábrázoló geometriai példatár,* Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 305 oldal, 62 Ft.

KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika,* Tanári kézikönyv a gimnázium I—II. osztálya számára, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 275 oldal, 31 Ft.

KÓSA ANDRÁS: *Ismerkedés a matematikai analízissel,* Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 811 oldal, 151 Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának a tanításához,* (2. jav. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 366 oldal, 35 Ft.

KÖVES PÁL—PÁRNICZKY GÁBOR: *Általános statisztika,* 1—2 kötet, (3. átdolgozott kiadás), Budapest, 1981, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 362+387 oldal, 184 Ft.

LAKATOS IMRE: *Bizonyítások és cáfolatok,* A matematikai felfedezés logikája, Budapest, 1981, Gondolat, 244 oldal 28 Ft.

LOVÁSZ, L.—SÓS, V. T. (editors): *Algebraic Methods in Graph Theory I—II.,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 25., Budapest and Amsterdam—Oxford—New York, 1981, János Bolyai Mathematical Society and North—Holland Publishing Company, 847 oldal, 520 Ft.

LŐCS GYULA—VIGASSY JÓZSEF: *A FORTRAN programozási nyelv* (5. kiadás), Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 335 oldal, 32 Ft.

MAURER I. GYULA: *Tizedes törtek és lánctörtek*. Kolozsvár—Napoca, 1981, Dacia Könyvkiadó (Magyar—román közös kiadás), 210 oldal, 17,50 Ft.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató a III. osztályos matematika munkatankönyvekhez*. Gimnázium, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 91 oldal, 9,50 Ft.

MESZÉNA GYÖRGY—ZIERMANN MARGIT: *Valószínűségelmélet és matematika statisztikai*, (Korszerű matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára), Budapest, 1981, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 554 oldal, 121 Ft.

MUNDRUCZÓ GYÖRGY: *Alkalmazott regressziószámítás*, Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 258 oldal, 75 Ft.

PÁLVÖLGYI LAJOS: *A modellezés lehetőségeiről a pedagógiában*, Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 104 oldal, 39 Ft.

PERVOZVANSZKIJ, A. A.: *Matematikai modellek a termelésirányításban*, Budapest, 1981, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, — Műszaki Könyvkiadó, 542 oldal, 128 Ft.

PÉTER RÓZSA: *Recursive Functions in Computer Science*, Budapest—Chichester, 1981, Akadémiai Kiadó—Horwood Ltd., 179 oldal, 180 Ft.

PÓLYA GYÖRGY—SZEGŐ GÁBOR: *Feladatok és tételek az analízis köréből* 2. kötet, (Egyetemi segédkönyv), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 491 oldal, 53 Ft.

PONOMAROV, K. K.: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása, Gyakorlati feladatok* (3. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 258 oldal, 21 Ft.

QUITTNER PÁL—KOTSIS DOMOKOS: *Számítástechnika rendszerszervezőknek*, Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 421 oldal, 130 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *Kivi és Apó*, (2. jav. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 122 oldal 13 Ft.

RADÓ FERENC—ORBÁN BÉLA: *A geometria mai szemmel*, Kolozsvár—Napoca, 1981, Dacia Könyvkiadó (Magyar—román közös kiadás), 296 oldal 53 Ft.

RÉNYI ALFRÉD: *Valószínűségszámítás*, (4. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 510 oldal, 57 Ft.

ROHOVSZKY RUDOLF: *Matematika*, Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga, (6. jav. kiadás), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 131 oldal, 10,50 Ft.

RUZSA IMRE: *Modal Logic with Descriptions*, Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 135 oldal

SÜMEGI LÁSZLÓ—SZEKERES JÁNOS: *Matematika—fizika tantárgyi koncentráció az általános iskolában és a középiskolában*, (Új utak a matematika tanításában, 5), Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 402 oldal, 39 Ft.

SZÁSZ FERENC: *Radicals of Rings*, Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 287 oldal, 240 Ft.

SZOBOL, I. M.: *A Monte-Carlo módszerek alapjai*, Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 318 oldal, 52 Ft.

TILLAI ANIKÓ: *Repülőgéppel a galacsinták tartományába*, (Utazások matematikaországban), 2. jav. kiadás, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 76 oldal, 15,50 Ft.

TROSZTNIKOV, V. N.: *Konstruktív módszerek a matematikában*, (Studium könyvek 77.), Budapest, 1981, Gondolat, 342 oldal, 36 Ft.

VARGA LÁSZLÓ: *Programok analízise és szintézise*, Budapest, 1981, Akadémiai Kiadó, 303 oldal, 85 Ft.

VARGA TAMÁS—RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA: *Matematika, 7. osztály*, Az általános iskolai nevelés és oktatás terve, Tantervi útmutató, Budapest, 1981, Tankönyvkiadó, 174 oldal, 17,50 Ft.

ZELDOVICS, JA. B.: *Ismerkedés a felsőbb matematikával és fizikai alkalmazásaival*, Kezdők számára, Budapest—Moszkva, 1981, Gondolat—Mir, 503 oldal, 80 Ft.

ZOHÁR, MANNA: *Programozáselmélet*, Budapest, 1981, Műszaki Könyvkiadó, 479 oldal, 130 Ft.

ZSITOMIRSZKIJ, V. G.: *Pontok, vonalak, idomok*, Játék a mértannal, Budapest, 1981, Minerva, 80 oldal, 44 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR

НОВЫЕ КНИГИ

NEW BOOKS

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1982. VII. 4. — Terjedelem: 24,85 (A/5) ív
Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György
82-3154 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

CONTENTS

List of works of B. Gyires, recipient of the State Prize 1980 1
List of works of T. Vargha, recipient of the State Prize 1980 5
P. Erdős: On some unusual, non-conventional problems in additive number theory 9
P. Révész: On stability of random sequences 15
P. Erdős—A. Sárközy: On a problem of R. R. Hall 23
D. Szász: Random point distributions and their applications in reliability theory and in statistical physics I 33
G. Tusnády: Decomposition of mixtures 59
M. Laczkovich: Some remarks on Faber's singular funtcion 69
L. Csirmaz: Non-standard program runnings and correctness of programs 81
B. Brindza: The functions $r_k(n)$ and problems of P. Erdős 127
N. Simányi: Algebraic invariants in shape theory 135
T. Fényes—P. Kosik: On a system of algebraic differential equations of the operator field 155
B. Háy: Hermite—Fejér and Hermite—Fejér type interpolation on the roots of Laguerre polynomials 167
D. Bischoff: On the extendability of convolutions of stable and left stable components 181
M. Horváth: The problem of infinitely small in mathematics by Leibniz 191
G. Tóth: On the Atiyah—Singer index theorem IV 211
J. Kelemen: Solution of the diophantine equation $ax^{2m}+by^{2n}+cz^2+dt^2=0$ in case $\sqrt{abcd}$ is a rational number 233
Á. Fazekas—I. Gerják: On Schur type irreducibility theorems 237
Report on the 1981 M. Schweitzer Mathematical Competition 261
Problems 275
Book reviews 281
New books 282

СОДЕРЖАНИЕ

Список трудов Белы Диреша, нагрженного Государственной Премией 1980-ого года 1
Список трудов Тамаша Варга, нагрженного Государьвенной Премией 1980-ого года 5
П. Эрдеш: О нескольких необычных, неконвенциональных проблемах аддитивной теории чисел 9
П. Ревес: Насколько случайно есть случайно? 15
П. Эрдеш—А. Шаркези: Об одной проблеме Р. Р. Халла 23
Д. Сас: Случайные точечные распределения и их применения в теории достоверности и в стастистической физике I. 33
Г. Тушнади: Разложение смесей 59
М. Лацкович: Замечания о сингулярной функции Фабера 69
Л. Чирмаз: Нестандартные ходы программ и истинность программ 81
Б. Бриндза: Функции $r_k(n)$ и её сьязь с проблемой П. Эрдеша 127
Н. Шимани: Алгебраические инварианты в теории шеймов 135
Т. Фенеш—П. Кошик: Об одной алгебраической системе дифференциальных уравнений поля операторов 155
Б. Хай: Интерполяции Эрмита—Феера и типа Эрмита—Феера на корнях многочленов Лагерра 167
Д. Бишоф: К продолжаемости сверток устойчивых и устойчивых слева компонентов 181
М. Хорват: Проблема бесконечно малых в математике у Лейбница 191
Г. Тот: О теореме об индексе Атья—Зингера IV. 211
Й. Келемен: Решение диофантова уравнения $ax^{2m}+by^{2n}+cz^2+dt^2=0$ в случае когда $\sqrt{abcd}$ — рациональное число 233
А. Фазекаш—И. Геряк: О теоремах неприводимости типа Шура 237
Отчет о математическом конкурсе памяти М. Швейцера в 1981-ом году 261
Задачи 275
Обзор книг 281
Новые книги 282

Ára: 27,— Ft
Évi előfizetés: 36,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X

512.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

30. évfolyam, 1978—1982

4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1982. — 30. évfolyam 4. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, 1900 Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96 162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11 488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 36,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

JUHÁSZ ISTVÁN, KATONA GYULA és KOMJÁTH PÉTER: Hajnal András 50 éves 285
ERDŐS PÁL: Binomiális együtthatók prímfaktorairól II. 307
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Egy kört eltakaró körökről 317
BEZDEK ANDRÁS és FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Adott sugáreloszlású körök sűrű elhelyezése 321
SZÁSZ DOMOKOS: Véletlen ponteloszlások és alkalmazásaik a megbízhatóságelméletben és a statisztikus fizikában II. 329
Társulati élet 363
Könyvismertetés 383

HAJNAL ANDRÁS 50 ÉVES

JUHÁSZ ISTVÁN, KATONA GYULA ÉS KOMJÁTH PÉTER

Valószínűleg helytelen valakinek az ötvenedik születésnapja alkalmából munkásságát áttekintő cikket írni, hiszen egy ilyen cikknek feltétlenül visszatekintő, részben lezáró jellege lesz. Egy kutató alkotói élete viszont kb. 25 éves korában kezdődik, és — némi optimizmussal — eltart 75 éves koráig. 50 éves korában tehát munkásságának talán csak feléig jutott. Nem lehet szó még összefoglalásról. Az eddig nagynak látszó csúcsok még eltörpülhetnek az ezután felgyűrődők mellett. Mindezen megfontolások ellenére azt a felkérést, hogy Hajnal András eddigi munkásságáról áttekintő cikket írjunk, olyan megtiszteltetésnek éreztük, melyet eszünkbe sem jutott elhárítani.

A fenti gondolatot folytatva, Hajnal András egyéniségéhez sem illik, hogy ilyen megszokott „kerek" évfordulón írjunk róla. Hiszen a „kerekség" mindössze a tízes számrendszer véletlenségén múlik. Talán ezzel magyarázható kétéves késésünk.

*

I. Hajnal András halmazelméleti munkássága

Nehéz feladat akárcsak vázlatosan is számot adni Hajnal András több mint két évtizedes halmazelméleti kutatásairól. A kombinatorikus halmazelméletnek nevezett diszciplina alapjait Erdős Pállal dolgozta ki, manapság szinte lehetetlen e témakörbe vágó cikket találni, amely ne egy Erdős—Hajnal cikk nyomán indulna. N. H. Williams „Combinatorial Set Theory" című monográfiájának hivatkozásaiban Erdős és Hajnal nevét többször találjuk, mint a többi szereplő matematikusét, ehhez főként az járult hozzá, hogy jónéhány terjedelmes dolgozatukban részletesen diszkutáltak egy-egy kombinatorikai halmazelméleti kérdést (pl. ilyen [12], [25], [28], [29], [47], [87], [93] dolgozatuk, részben társszerzőkkel); aki végzett már ilyet, tudja, hogy a teljes diszkusszió milyen keserves feladatok elé állíthat néha. Megoldatlan problémáikat nagysikerű cikkben foglalták össze és rendszerezték [40], majd az ennek nyomán kialakuló gyors fejlődés eredményeit és az újabb problémákat [75]-ös cikkükben foglalták össze. Megjelenés előtt áll Richard Rado-val és Máté Attilával közösen írt, a partíciókalkulusról szóló monográfiájuk.

Az áttekinthetőség kedvéért a cikkek témáit az alábbi témákra bontottuk:

A) Konstruálhatósági axióma,
B) Végtelen gráfok és halmazrendszerek,
C) Halmazleképezések,
D) Partició relációk,

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

E) Általánosított kontinuumhipotézis,
F) Nagy számosságok,
G) Egyéb eredmények.

A továbbiakban használni fogom az axiomatikus halmazelmélet néhány szokásos jelölését és konvencióit, így a rendszámokat (Neumann nyomán) azonosítjuk a náluk kisebb rendszámok halmazával, a számosságokat a legkisebb egyező számosságú rendszámmal, cf a kofinalitást jelenti; ha A halmaz, $\varkappa$ számosság, úgy $[A]^{\varkappa} = \{X \subset A: |X| = \varkappa\}$. Ha $\varkappa$ számosság, $\varkappa^+$ a rákövetkező számosság, tehát $\varkappa = \aleph_\alpha$ esetén $\varkappa^+ = \aleph_{\alpha+1}$. ÁKH az általánosított kontinuumhipotézis, azaz minden végtelen $\varkappa$-ra $2^{\varkappa} = \varkappa^+$.

A) *Konstruálhatósági axióma*

Hajnal első cikkeiben és kandidátusi disszertációjában Gödel konstruálható univerzumával és annak általánosításaival foglalkozik. A Cohen előtti időkben csak ez a módszer állt rendelkezésre az általánosított kontinuumhipotézis vizsgálatára, az így nyert eredmények ma már nem tűnnek olyan mélynek. Mint ismeretes, Gödel bebizonyította, hogy ha a halmazelmélet (Zermelo—Fraenkel-féle) axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor ellentmondástalan akkor is, ha hozzávesszük a $(\forall \varkappa)$ $(2^{\varkappa} = \varkappa^+)$ axiómát. Hajnal eléggé nehezen megfogalmazható tételének egy speciális esete szerint, ha az axiómáknak nem mond ellent például $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, akkor a $(2^{\aleph_0} = \aleph_2 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2)$ állítás sem mond ellent. A szakirodalom ma is gyakran idézi a következő, Hajnaltól eredő tételt: ha $\varkappa^+$ rákövetkező számosság, $x \subset \chi^+$, akkor $L[x]$-ben, az x-ből konstruálható halmazok osztálymodelljében, igaz lesz $2^{\varkappa} = \varkappa^+$. ($L$-lel általában az e folyóirat hasábjain éppen Hajnal által ismertetett konstruálható világot jelölik. $L[x]$ úgy keletkezik, hogy a modell építése közben minden létrehozott a halmazhoz az $a \cap x$ halmazt is létrejöttnek tekintjük, azaz „szabad megkérdezni egy α rendszámról, hogy $\alpha \in x$ igaz-e".)

B) *Végtelen gráfok és halmazrendszerek*

A végtelen gráfok kromatikus számára vonatkozó kérdések, mint majdnem minden végtelen gráfokra vonatkozó kérdés, igen bonyolultak. Egy 1960-as Erdős—Rado-tétel mutatta, hogy minden $\varkappa \geqq \omega$ számosságra van $\varkappa$-kromatikus, háromszög nélküli gráf. A természetesnek tűnő általánosítás, amely szerint minden $\varkappa \geqq \omega$ számosságra és l természetes számra van olyan $\varkappa$-kromatikus gráf, amelynek minden köre legalább l hosszú, sokáig nyitva maradt. Végül is kiderült, hogy ez az állítás nem igaz: minden négyszög (4 hosszú kör) nélküli gráf $\leqq \aleph_0$-kromatikus [27]. Itt a véges eset tehát nem analóg a végtelennel. Az előző állítás általánosítása lenne a következő: minden $\varkappa \geqq \omega$-kromatikus gráf tartalmaz $\varkappa$-kromatikus, háromszög nélküli részgráfot. A $\varkappa = \aleph_0$ esetet V. Rödl nemrég bebizonyította, de $\varkappa \geqq \aleph_1$-re a probléma érintetlen. Megoldatlan a következő sejtés is: minden $\aleph_1$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_1$-összefüggő részgráfot (tehát olyat, amelyik $\aleph_0$ pont elhagyásával nem esik szét). A [14] dolgozatban felvetett egyik probléma a következő volt: igaz-e, hogy ha egy $\aleph_2$ számosságú gráf minden $\aleph_1$-es részgráfja $\aleph_0$-kromatikus, akkor az egész gráf is $\aleph_0$-kromatikus? A választ [32] tartalmazza: van $\aleph_1$-kromatikus ellenpélda. A [27]-beli egyik probléma a következő volt: világos, hogy ha G legalább $\aleph_1$-kromatikus, van benne páratlan kör. Igaz-e, hogy minden elég nagy páratlan n számra van n hosszúságú? A pozitív válasz [71]-ben található.

A [79]-es dolgozat (halmazleképezésekre vonatkozó eredmények mellett) a következő problémával foglalkozik. Legyen G egy olyan gráf, amelynek a szögpont-halmaza ω_1, és minden α rendszám vagy csak véges sok nála kisebbel van összekötve, vagy a nála kisebb, vele összekötött rendszámok egy α-hoz konvergáló ω típusú sorozatot alkotnak. Igaz-e, hogy G kromatikus száma $\aleph_0$? A probléma a Martin-axióma feltételezésével igaz, a konstruálhatósági axiómával ellenpélda adható. A dolgozat kérdését, hogy az „igen" válasz összeférhet-e a kontinuumhipotézissel, S. Shelah igazolta.

A [29]-es dolgozat ismertetése helyett csak egy tipikus, máig megoldatlan sejtést említek: igaz-e, hogy minden teljes négyszöget nem tartalmazó gráf felbomlik $\aleph_0$ háromszöget nem tartalmazó gráfra?

A gráfok általánosításaként adódó k-asokból álló halmazrendszerek kromatikus számára vonatkozó kérdések még bonyolultabbak. A fenti gráftétel analogonja a következő állítás lenne: ha k-asok ($k<\omega$) egy rendszere nem $\varkappa$-kromatikus, van benne $\varkappa^+$ olyan k-as, amelyek közös része $k-1$ elemű. Ez azonban, mint kiderült, nem igaz [67]. A kérdések diszkussziója, bár egy majdnem százoldalas cikk [87] született belőle, nem tekinthető lezártnak.

A végtelen halmazok rendszereivel foglalkozó [14] cikk Miller egy tételét általánosítja és diszkutálja, ami szerint, ha $n<\omega$ és H végtelen halmazok egy olyan rendszere, hogy bármely két halmaz metszete legfeljebb n elemű, akkor van az alaphalmaznak olyan színezése két színnel, ami nem produkál egyszínű, rendszerbeli halmazt. Erdős és Hajnal ennek általánosításaképp az ÁKH felhasználásával bebizonyítják, hogy ha $\varkappa$ számosság, a rendszer tagjai legalább $\varkappa^{++}$ számosságúak és a metszetek $\varkappa$-nál kisebb számosságúak, a kétszínezhetőség továbbra is érvényben marad. Megoldatlan kérdés, hogy igaz marad-e az állítás, ha csak annyit kötünk ki, hogy a halmazok számossága legalább $\varkappa^+$. A másik irányban már Miller megmutatta, hogy van $\varkappa$-soknak nem kettő-kromatikus rendszere úgy, hogy a metszetek számossága kisebb, mint $\varkappa$ (ma az ilyen rendszereket majdnem-diszjunktaknak nevezzük). Hajnal [11]-ben megmutatta, hogy ha $\varkappa$ reguláris és az ÁKH áll, akkor egy $\varkappa^+$ számosságú alaphalmazon olyan $\varkappa$-sokból álló majdnem-diszjunkt rendszer is van, hogy az alaphalmaz minden $\varkappa^+$ számosságú részhalmazának van rendszerbeli részhalmaza (sőt még ennél is lényegesen erősebb tulajdonságai vannak). Az az Erdős—Hajnal probléma, hogy tetszőleges számosságra van (megszámlálható) halmazoknak ennél nagyobb kromatikus számú majdnem-diszjunkt rendszere, hosszú ideig megoldatlan maradt, csak 1973-ban bizonyította Elekes György és Hoffmann György.

C) *Halmazleképezések*

A halmazleképezések elméletét Turán Pál kezdeményezte, amikor a következő problémát vetette fel: tegyük fel, hogy minden valós számhoz hozzárendelünk véges sok másikat. Igaz-e, hogy van végtelen sok pont úgy, hogy kölcsönösen nincsenek benne az egymáshoz rendelt halmazban. A (pozitív) választ nem nehéz megtalálni. A kérdést hamar általánosították a következőképpen: legyen X tetszőleges halmaz, f olyan függvény, mely minden $x\in X$ ponthoz egy $f(x)\subset X$ részhalmazt rendel. Az $Y\subset X$ halmaz független, ha $x, y\in Y$, $x\neq y$ esetén $x\notin f(y)$ áll. Igaz-e, hogy ha minden $f(x)$ „kicsi", van nagy független részhalmaz? A pontos feltételt Ruziewicz találta meg: ha $\varkappa>\lambda$ számosságok, $|X|=\varkappa$ és $|f(x)|<\lambda$ minden $x\in X$-re, van-e $\varkappa$-s független. Ez a sejtés több mint 20 évig megoldatlan volt. Végül Hajnal 1961-ben találta meg a rendkívül eredeti bizonyítást [12]. A nehézséget a szinguláris $\varkappa$ esete okozta, s ennek

nagyságát mutatja, hogy Erdős már 1952-ben publikálta a bizonyítást az általánosított kontinuumhipotézis feltételezésével, tehát az ÁKH eliminálása majdnem tíz évig tartott! A tétel az Erdős—Rado-féle particiótétellel és a stacionárius halmazokra vonatkozó Fodor tétellel együtt a kombinatorikus halmazelmélet legtöbbet idézett tétele.

Sok érdekes kérdés felvethető, ha továbbra is a valós számok halmaza az alaphalmaz, s különböző valós függvénytani feltevést teszünk az $f(x)$ halmazok „kicsiségére". Lényegesen nehezebb a probléma, ha nem ponthoz részhalmazt rendelő, hanem k-elemű részhalmazhoz részhalmazt rendelő függvényt tekintünk. Itt egy $Y \subset X$ részhalmaz független, ha $x_0, x_1, \ldots, x_k \in Y$ különböző pontok esetén $x_0 \notin f(x_1, \ldots, x_k)$. Megoldatlan a következő, Erdőstől és Hajnaltól származó probléma: Tegyük fel az általánosított kontinuumhipotézist. Van-e $|X| = \aleph_{k+1}$ esetén X $k+2$-seihez egyelemű részhalmazokat rendelő halmazleképezés, melyre nincs $\aleph_1$-es független halmaz? Erdős és Hajnal igazolták, hogy ez igaz $k=0$-ra és Hajnal bizonyította, hogy konzisztens $k=1$-re. Ehhez hasonló kérdésekkel foglalkozik még a [79]-es dolgozat.

D) *Partició relációk*

Ramsey jól ismert tételének általánosításaként Erdős P. és R. Rado vezették be a következő jelölést: ha $\varkappa$, λ_ξ $(\xi < \alpha)$ számosságok, $r < \omega$, $\varkappa \to (\lambda_\xi)^r$ jelenti, hogy a következő állítás igaz: ha egy $\varkappa$ számosságú halmaz r-eseit α színnel színezzük, valamelyik $\xi < \alpha$-ra van egy λ_ξ számosságú részhalmaz, úgy, hogy minden r-ese ξ-edik színű. $\varkappa \not\to (\lambda_\xi)^r$ jelenti, hogy a fenti állítás nem igaz; ha $\lambda_\xi = \lambda$ minden $\xi < \alpha$-ra, $\varkappa \to (\lambda)^r_\alpha$-t írunk. A particiókalkulus első igazán nehéz tételei az Erdőstől, Duschniktól és Millertől származó $\varkappa \to (\varkappa, \omega)^2$ és az Erdős—Radotól származó $(2^\varkappa)^+ \to (\varkappa^+)^2$ relációk. Az Erdős és Rado által hosszú ideig folytatott kutatásba Hajnal is bekapcsolódott, közös munkájuk gyümölcse a [25] dolgozat és a bevezetőben említett könyv, melyekben már egy igen nagy elmélet segítségével diszkutálják a partició relációt. A módszer fejlődése lehetővé tette, hogy (néhány technikai eset kivételével) majdnem-teljes diszkussziót adjanak a particiókalkulusra. Igaz, ezek a megoldatlan problémák nagyon nehezeknek tűnnek. Azt lehet mondani, hogy az egyetlen teljesen elintézett eset a $\varkappa \to (\lambda)^2_2$ reláció leírása. Az általános eset elintézésekor igen hasznosak azok a tételek, amelyek valamilyen szituáció r-ről $r+1$-re való „feljebbvitelét" teszik lehetővé. Ilyen az alábbi, Hajnal-féle tétel: ha $r \geqq 2$ természetes szám, $\varkappa \geqq \gamma \geqq 2$ számosságok és λ_ν is számosság $\nu < \gamma$-ra úgy, hogy legalább két λ_ν végtelen, és ezek közül legalább egy reguláris, akkor

$$\varkappa \not\to (\lambda_\gamma)^r_\gamma\text{-ból} \quad 2^\varkappa \not\to (\lambda_\gamma + 1)^{r+1} \text{ következik.}$$

Érdekes kérdések vetődnek fel, ha úgy módosítjuk a particióelmélet alapkérdését, hogy számosságok helyett rendtípusokra térünk át. Tehát, ha φ, ϑ_ξ $(\xi < \alpha)$ rendtípusok, $r < \omega$, $\varphi \to (\vartheta_\xi)^r_{\xi < \alpha}$ jelenti a következő állítást: ha egy φ-típusú rendezett halmaz r elemű részhalmazait α színnel színezzük, valamelyik $\xi < \alpha$-ra igaz, hogy van ϑ_ξ típusú részhalmaz, aminek minden r-ese ξ-edik színű. Régóta ismert volt, hogy reguláris $\varkappa$-ra $\varkappa \to (\varkappa, \omega + 1)^2$. Hajnal egyik legelső kombinatorikus halmazelméleti dolgozatában, [11]-ben bebizonyítja többek között, hogy a kontinuumhipotézis feltételezésével $\omega_1 \not\to (\omega_1, \omega + 2)^2$ igaz, továbbá, hogy $\omega_1 \to (\omega \cdot n, \omega \cdot 2)^2$, $n < \omega$ esetén. Felvetődött, hogy esetleg $\omega_1 \to (\alpha)^2_k$ minden $\alpha < \omega_1$, $k < \omega$ esetén igaz, de ezt csak [61]-ben sikerült bebizonyítani, részeredmények sokasága után. A bizonyítás teljesen

újszerű: a szerzők először kimutatják, hogy az állítás következik a Martin-axiómából. Ha tehát ω_1 és szóban forgó színezése egy M megszámlálható modellben van, egy $M[G]$ „forszolásos" bővítésben van adott $\alpha<\omega_1$-re egyszínű halmaz. Viszont ekkor egy Silvertől eredő okoskodás segítségével belátható, hogy M-ben is van. Így állításunk minden megszámlálható modellben igaz, s így a Löwenheim—Skolem-tétel szerint minden modellben is. De akkor a Gödel-féle teljességi tétel miatt bizonyítható. Így sikerült bebizonyítani, hogy az állítás bizonyítható. Ez természetesen bizonyítás. Mégis, felmerült a „tisztán" kombinatorikai bizonyítás szükségessége, elsősorban a még tisztázatlan problémák miatt. Ezt végül is Fred Galvin adta meg. Bizonyítása többet ad (részben rendezett halmazokat is kezelni tud), de lényegesen bonyolultabb is a forszolásos bizonyításnál. Úgy tűnik, ez nem egyedi jelenség, hadd utaljak a dolgozat más részén diszkutált Silver-féle szinguláris számosság tételre. Megemlítem még Baumgartner szellemes ötletét: ha T Szuszlin-fa, $\alpha<\omega_1$, $n<\omega$, úgy $T\to(\alpha)^2_n$, tehát ha T párjai közül csak az összehasonlíthatókat színezzük, akkor is van α típusú homogén halmaz. A bizonyítás úgy megy, hogy T-vel forszolva, T-ben keletkezik ω_1-típusú részhalmaz. A Baumgartner—Hajnal-tétel szerint van α-típusú homogén halmaz a bővebb modellben, de akkor a Silver-féle abszolútság miatt a szűkebb modellben is. Erre az állításra az ötletes „elemi" bizonyítást csak nemrég találta meg Máté Attila.

Az $\omega_1\to(\omega_1,\alpha)^2$ reláció konzisztenciája $\alpha\geqq\omega+2$-re szintén egy hosszú ideig megoldatlan nevezetes probléma volt, csak nemrég bizonyította be S. Todorčevic az S-tér probléma megoldására konstruált modelljével, hogy minden $\alpha<\omega_1$-re $\omega_1\to(\omega_1,\alpha)^2$ is konzisztens.

Ide vonatkozik még az [55] cikk is, melyben a kontinuumhipotézis feltételezésével az $\omega_1^2\nrightarrow(\omega_1^2,3)^2$ relációt igazolja. A konstruált színezésben nemcsak 1-színű háromszög, de teljes „$[\aleph_0,\aleph_0]$-ás" sincs, tehát nincs olyan $A,B\subset\omega_1^2$ halmaz, hogy $|A|=|B|=\aleph_0$ és minden $x\in A$, $y\in B$-re $\{x,y\}$ színe 1. A bizonyításhoz a szokásos kontinuumhipotézises „leszámoláson" túl egy ügyesen definiált fogalmat, a kettős limeszpontot is bevezeti.

A továbbiakban polarizált partíciórelációkra vonatkozó tételeket ismeretek. Ha $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varkappa,\lambda$ számosságok, $k,l<\omega$, a $\binom{\lambda}{\varkappa}\to\binom{\alpha\ \ \gamma}{\beta\ \ \delta}^{k,l}$ szimbólum a következő állítást jelenti: ha $|A|=\lambda$, $|B|=\varkappa$ és $[A]^k\times[B]^l$ elemeit két színnel színezzük, vagy van az első színben $[C]^k\times[D]^l$ $C\in[A]^\alpha$, $D\in[B]^\beta$-val, vagy van a második színben $[C]^k\times[D]^l$ $C\in[A]^\gamma$, $D\in[B]^\delta$-val. Hasonlóan a

$$\binom{\lambda}{k}\to\binom{\alpha\ \ \gamma\vee\gamma'}{\beta\ \ \delta\vee\delta'}^{k,l}$$

szimbólum azt jelenti, hogy a második színbeli homogén C,D-re $|C|=\gamma$ és $|D|=\delta$ vagy pedig $|C|=\gamma'$ és $|D|=\delta'$ teljesül. A $\binom{\lambda}{\varkappa}\to\binom{\alpha}{\beta}^{k,l}_\gamma$ pedig azt jelenti, hogy $|A|=\lambda$ és $|B|=\varkappa$ mellett $[A]^k\times[B]^l$-et γ színnel színezve van $C\in[A]^\alpha$ és $D\in[B]^\beta$, melyre $[C]^k\times[D]^l$ homogén. Az egyik főeredmény az ÁKH mellett $\binom{\varkappa^+}{\varkappa^+}\to\binom{\varkappa\ \ \varkappa\vee\varkappa^+}{\varkappa\ \ \varkappa^+\vee\varkappa}^{1,1}$ fennállása minden $\varkappa$-ra.

Egy csinos, publikálatlan Hajnal-tétel:

ÁKH mellett $\binom{\aleph_2}{\aleph_2}\to\binom{\aleph_1}{\aleph_1}^{1,1}_3$, de $\binom{\aleph_2}{\aleph_2}\to\binom{\aleph_1}{\aleph_1}^{1,1}_4$ már nem következik az ÁKH-ból.

E) *Az általánosított kontinuumhipotézis*

A halmazelmélet egyik legtöbbet használt és vizsgált feltevése az általánosított kontinuumhipotézis: minden $\varkappa$ számosságra $2^{\varkappa}=\varkappa^{+}$ (itt $\varkappa^{+}$ a $\varkappa$ utáni számosságot jelenti). Hosszú ideig úgy tűnt, hogy a tágabb értelemben vett montonitáson és König tételén: $\mathrm{cf}(2^{\varkappa})>\varkappa$, kívül semmi sem mondható a $\varkappa\mapsto 2^{\varkappa}$ operációról. Ezt alátámasztotta Easton 1964-es eredménye: ha f bizonyos reguláris számosságokhoz számosságot rendelő tágabb értelemben monoton függvény és minden $\varkappa$-ra, ahol f értelmezve van, $\mathrm{cf}(f(\varkappa))>\varkappa$, van olyan forszolásos modell, ahol $2^{\varkappa}=f(\varkappa)$. Szinguláris számosságokra bizonyos triviális példák kizárják, hogy „tetszés szerinti" értéket írjunk elő: pl. ha minden $n<\omega$-ra $2^{\aleph_n}=\aleph_{\omega+1}$, úgy nyilván $2^{\aleph_\omega}=2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_1}\cdot\ldots=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=\aleph_{\omega+1}$. A szinguláris számosság probléma az volt, vajon az ilyen típusú esetek kivételével $2^{\varkappa}$ szinguláris $\varkappa$-kra is tetszés szerint előírható-e. Silver 1974-es felfedezése csattanós választ adott: ha $\omega<\mathrm{cf}(\varkappa)<\varkappa$ és $\varkappa$ alatt igaz az ÁKH, úgy $\varkappa$-ra is: $2^{\varkappa}=\varkappa^{+}$. Silver bizonyítása forszolást és ultrahatványokat használt. Napokkal később Baumgartner és Prikry megcsinálta az elemi bizonyítást is. Szorítkozzunk a $\varkappa=\aleph_{\omega_1}$ esetre. Az $X\subset\omega_{\omega_1}$ részhalmazok mindegyike egy ω_1-en definiált f_X függvényt ad $f_X(\alpha)=X\cap\omega_\alpha$ definícióval, továbbá két ilyen függvény valahonnan kezdve eltér, hiszen ha $X\neq Y$, van $\xi<\omega_{\omega_1}$, amire $\xi\in X-Y$, vagy $Y-X$ így $\xi<\omega_\alpha$-ra $f_X(\alpha)\neq f_Y(\alpha)$. Elég tehát azt belátni, hogy a tett feltevések mellett nem adható meg $\aleph_{\omega_1+2}$ olyan f függvény, hogy minden f-re $f(\alpha)\subset\omega_\alpha$ ha $\alpha<\omega_1$, és két különböző függvény valahonnan kezdve eltér. $P(\omega_\alpha)$ helyett vehetjük a vele azonos számosságú $\omega_{\alpha+1}$ halmazt, így az $f(\alpha)<\omega_{\alpha+1}$ kikötésnek eleget tevő függvényekkel, azaz $\bigtimes\limits_{\alpha<\omega_1}\omega_{\alpha+1}$ elemeivel van dolgunk. Ezeket majdnem-diszjunkt transzverzálisoknak nevezzük, s a tétel lényege az, hogy $\bigtimes\limits_{\alpha<\omega_1}\omega_{\alpha+1}$-en csak $\aleph_{\omega_1+1}$ majdnem diszjunkt transzverzális adható meg, általában $\bigtimes\limits_{\alpha<\omega_1}\omega_{\alpha+\delta}$-án legfeljebb $\aleph_{\omega_1+\delta}$. Az említett tétel $\delta=0$-ra is igaz, sőt különös módon ez szerepel [34]-ben! Tehát a szerzők ismerték a Silver-tétel „kezdőesetét", csak akkor senki sem gondolta, hogy a (majdani) Silver-tétel igaz lehet. Hajnal más módon is kapcsolatba került a szinguláris számosság problémával: Galvinnal közös dolgozatában minden f: $\omega_1\to\{\text{rendszámok}\}$ függvényre definiál egy $\|f\|$ rendszámot a következő tulajdonságokkal: ha $f(\alpha)<g(\alpha)$ α-k egy kofinális, zárt halmazára, akkor $\|f\|<\|g\|$; ha $f(\alpha)=\beta$ (adott $\beta<\omega_1$-re), akkor $\|f\|=\beta$; az $f(\alpha)=\alpha$ identitás függvényre $\|f\|=\omega_1$; $f(\alpha)=\alpha+1$-re $\|f\|=\omega_1+1$; $f(\alpha)=\alpha\cdot 2$-re $\|f\|=\omega_1\cdot 2$; stb. Mármost [88] főeredményében belátják, hogy ha $2^{\aleph_\alpha}<\aleph_{\alpha+f(\alpha)}$ minden $\alpha<\omega_1$-re, úgy $2^{\aleph_{\omega_1}}\leqq\aleph_{\omega_1+\|f\|}$, és ezzel egycsapásra végtelen sok általánosítást kapunk Silver tételére. Ebből adódik, hogy ha $\aleph_{\omega_1}$-ről csak azt tudjuk, hogy erős limesz (tehát $\alpha<\omega_1$-re $2^{\aleph_\alpha}<\aleph_{\omega_1}$), a $2^{\aleph_{\omega_1}}<\aleph_{(2^{\aleph_1})^+}$ becslés adható. A tétel általános formája a következő: ha $\aleph_\alpha(>\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\geqq\aleph_1)$ erős limesz, szinguláris számosság, akkor

$$2^{\aleph_\alpha}<\aleph_{(|\alpha|^{\mathrm{cf}(\alpha)})^+}.$$

A szerzők a következő problémákat vetik fel [88]-ban: igaz-e a fenti formula $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)=\omega$-ra? Mi mondható az $\alpha=\omega_\alpha$ esetre, amikor a képlet semmitmondó? Mindkét kérdésre Saharon Shelah adta meg a választ: $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)=\omega$-ra is igenlő a válasz, továbbá, ha $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_\alpha,\ldots$ az $\omega_\xi=\xi$ egyenlet megoldásai, akkor, ha φ_{ω_1} erős limesz, $2^{\varphi_{\omega_1}}<\varphi_{(2^{2^{\aleph_1}})^+}$. Egy még meglepőbb Shelah tétel: ha $\varkappa_0$ jelöli a legkisebb gyengén elérhetetlen számosságot, $\omega<\mathrm{cf}(\lambda)<\lambda<\varkappa_0$ és λ erős limesz, akkor $2^{\lambda}<\varkappa_0$. Tehát „kis" szinguláris erős limesz számosság hatványa is „kicsi".

F) *Nagy számosságok*

A nagy számosságok elmélete a hatvanas évek elején kezdődött, amikor kiderült, hogy az erősen elérhetetlen számosságok (tehát olyan $\varkappa > \omega$ reguláris számosságok, amelyre $\lambda < \varkappa$-ból $2^\lambda < \varkappa$ következik) és a mérhető számosságok (egy $\varkappa > \omega$ számosság mérhető, ha összes részhalmazain definiálható $\{0, 1\}$-értékű, $\varkappa$-additiv, nem triviális mérték) nem azonosak egymással: ha $\varkappa$ az első mérhető számosság, az erősen elérhetetlen számosságok sorában ő a $\varkappa$-adik. E két fogalom közé esik a „$\varkappa$ gyengén kompakt" tulajdonság, ami pl. a $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$ relációval definiálható, a gyengén kompaktság és mérhetőség közé esik a „$\varkappa$ Ramsey-számosság" tulajdonság, s itt hasonló módon, ha $\varkappa$ Ramsey-számosság, akkor $\varkappa$ a gyengén kompaktak sorában a $\varkappa$-adik. $\varkappa$ akkor Ramsey-számosság, ha $\varkappa \to (\varkappa)^{<\omega}$ teljesül, ahol $\varkappa \to (\lambda)^{<\omega}$ definíció szerint azt jelenti, hogy ha egy $\varkappa$ számosságú halmaz összes véges részhalmazát 2 színnel színezzük, van λ számosságú homogén részhalmaz, vagyis olyan, melynek véges részhalmazain a színezés csak a halmaz elemszámától függ.

A felsorolt tulajdonságok (a Ramsey-tulajdonság kivételével) olyanok voltak, hogy ω rendelkezett ezekkel, plauzibilis volt tehát feltenni, hogy nagyobb számosságokra is ekvivalensek. Különböző kombinatorikus halmazelméleti problémák tárgyalását radikálisan egyszerűsítette az a sejtés, hogy (az ÁKH-hoz hasonlóan) legalább is konzisztensnek tételezzük fel minden erősen elérhetetlen számosság mérhetőségét.

Erdős és Hajnal [5] dolgozatukban bebizonyították, hogy ha minden α számosságra $\varkappa(\alpha)$-val jelöljük a legkisebb olyan $\varkappa$ számosságot, amire $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}$, akkor minden $\varkappa(\alpha)$ erősen elérhetetlen, ezek különbözőek és mérhető $\varkappa$-ra $\varkappa \to (\varkappa)^{<\omega}$. Sajnálatos módon nem vették észre, hogy ebből könnyen következik: ha $\varkappa$ mérhető, úgy $\varkappa$ db erősen elérhetetlen számosság előzi meg. A sejtést végül is Tarski logikai eszközökkel cáfolta, csak ekkor vették Hajnalék észre, hogy dolgozatuk is kiadja az eredményt [16].

A nagy számosságok elméletéhez Hajnal még [21] és [44] dolgozataival járult hozzá, az elsőben igazolta, hogy ha $\varkappa$ nem gyengén kompakt, akkor minden $r \geqq 3$-ra $\varkappa \nrightarrow (\varkappa, r+1)^r$, egyszerű kombinatorikus gondolatmenettel helyettesítve egy logikai bizonyítást. A másik dolgozatban bebizonyította a mérhető $\varkappa$ számosságokra $\gamma < \varkappa$ esetén fennálló $\binom{\varkappa^+}{\varkappa} \to \binom{\varkappa}{\varkappa}^{1, <\omega}_\gamma$ relációt. E bizonyításnak érdekessége, hogy csaknem változatlan formában adja az eredményt gyengén kompakt $\varkappa$-ra is, mégis, csak egészen a legutóbbi időkben vették észre, hogy igaz gyengén kompaktakra.

Talán még itt lehetne megemlíteni egy publikálatlan Hajnal-tételt: ha $\varkappa$ kisebb mint az első mérhető számosság és nem gyengén kompakt, akkor $\varkappa$ db ω-s diszkrét tér szorzata nem $\varkappa$-kompakt [23].

G) *Egyéb eredmények*

A [36] dolgozatban a szerzők ideálok szaturáltságával kapcsolatos tételeket bizonyítanak, ennek segítségével bizonyítják, hogy ha $\varkappa$ nem „túl nagy számosság", akkor igaz a következő állítás: minden $\varkappa$-ban stacionárius halmaz előáll $\varkappa$ db diszjunkt stacionárius halmaz uniójaként. Ezt az állítást később Solovay bizonyította minden $\varkappa$-ra. A [78] dolgozatban már a következő, erősebb, Fodortól származó sejtést vizsgálják ($\varkappa = \aleph_1$-re mondom ki), ha S_α ($\alpha < \omega_1$) stacionárius halmazok ω_1-ben, vannak $A_\alpha \subseteq S_\alpha$ diszjunkt stacionárius részhalmazok. Kimutatják, hogy ez a sejtés igaz a konstruálhatósági axióma feltételezése mellett és egy, Martin-axiómát

kielégítő modellben is. Új, forszolásos bizonyítást adnak Solovay ismertetett tételére. Ma már ismeretes olyan modell, ahol Fodor sejtése nem teljesül.

B. Jónsson vetette fel azt a kérdést, hogy milyen $\varkappa$ számosságokra van olyan $\varkappa$-s algebra (univerzális algebrai értelemben), aminek nincs $\varkappa$-s valódi részalgebrája. Az ilyen algebrákat Jónsson-algebráknak nevezik. Erdős és Hajnal [26]-ban egy particiótétel alkalmazásaképpen belátják, hogy ha $\varkappa=\lambda^+$ alakú és $2^\lambda=\lambda^+$ vagy $\varkappa<\aleph_\omega$, van ilyen algebra. E cikk nyomán virágzó elmélet fejlődött ki, bebizonyították, hogy ha igaz a konstruálhatósági axióma, minden számosságra van Jónsson-algebra. Ma az a megoldatlan kérdés, van-e mindig $\aleph_\omega$ számosságú Jónsson-algebra.

Az [51] dolgozat rendtípusokkal foglalkozik. A szerzők Laver egy eredményére támaszkodva belátják, hogy ha $(S, <)$ egy rendezett halmaz, ami nem tartalmaz a racionális számok rendtípusával izomorf részt, véges sok fixpontot tartalmaz, tehát olyant, amely minden szigorúan monoton $f: S \to S$ függvénynél fixen marad. Van olyan szigorúan monoton $f: S \to S$ függvény, ami minden nem-fixpontot elmozdít. Minden szétszórt rendtípus véges sok összeadásra nézve felbonthatatlan rendtípus összege. Érdemes észrevenni, hogy ezek az eredmények rendszámokra (mint a szétszórt rendtípusok speciális esetére) könnyen igazolhatók, az utoljára említett komponensek éppen az ω^α alakú rendszámok.

II. Hajnal András munkái a halmazelméleti topológia terén

A 60-as évek közepétől — nyilvánvalóan az axiomatikus és kombinatorikus halmazelmélet nagy fellendülésének következtében — ugrásszerű fejlődésnek indult az akkor már hosszabb ideje stagnáló, sőt sokak által halottnak nyilvánított, halmazelméleti topológia. Ennek a fejlődésnek egyik központi alakja Hajnal A. volt, aki ezen a területen nagyszerűen kamatoztatni tudta rendkívüli halmazelméleti tudását és technikáját, ami fejlett topológiai érzékkel is párosult. Eredményei nagy részét Juhász Istvánnal közösen érte el és publikálta. Ezeknek komoly nemzetközi visszhangját mutatja, hogy Hajnal A.-t az 1974-es, Vancouverben megtartott, Nemzetközi Matematikus Kongresszuson előadás megtartására kérték fel ebből a témából.

Követve az I. rész felépítését, ennek a témakörnek ismertetését is néhány főbb motívum köré csoportosítva végezzük el:

A) Számosságfüggvények,
B) S- és L-terek,
C) Gráf-topológiák,
D) Egyebek.

A) *Számosságfüggvények*

Már a halmazelméleti topológia kialakulása idején is fontos szerepet játszottak egyes topologikus terekkel kapcsolatos problémák vizsgálatában bizonyos topologikus terekhez rendelt számosságok, vagy legalábbis ezek megszámlálható esetei. Mivel ezek általában definíciójuknál fogva topológiailag invariánsak voltak (azaz homeomorf terekhez mindig ugyanazt az értéket rendelték), szokás volt ezeket számosság-invariánsoknak is nevezni. Jelenleg inkább szokták őket a fenti címben jelzett módon nevezni.

Lássunk ezekre néhány példát:

Többé-kevésbé „triviális" példák egy X tér esetében annak $|X|$ számossága, vagy X nyílt halmazainak $o(X)$ száma, azaz más szóval X topológiájának számossága. Az X tér struktúrájáról ezeknél több információt nyerhetünk a következők ismeretében:

X súlya: $w(X)=\min\{|B|: B \text{ bázisa } X\text{-nek}\}$;
X sűrűsége: $d(X)=\min\{|S|: S \text{ sűrű } X\text{-ben}\}$;
X cellularitása: $c(X)=\sup\{|\mathscr{G}|: \mathscr{G} \text{ nyílt halmazok diszjunkt rendszere } X\text{-ben}\}$;
X Lindelöf-száma: $L(X)=\min\{\varkappa: X \ \varkappa\text{-Lindelöf}\}$,

ahol X-et akkor nevezzük $\varkappa$-Lindelöf tulajdonságúnak, ha bármely nyílt fedésének van legfeljebb $\varkappa$ számosságú részfedése.

Az utóbbi három számosságfüggvény, $w(X)$-szel ellentétben nem monoton, azaz $Y\subset X$ esetén pl. $d(Y)>d(X)$ állhat. Így ezekből, természetes módon, további függvények származtathatók:

$$z(X) = \sup\{d(Y): Y \subset X\};$$

$$s(X) = \sup\{c(Y): Y \subset X\};$$

$$h(X) = \sup\{L(Y): Y \subset X\}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy ez utóbbi „származtatott" függvényekre közvetlen definíciók is adhatók, pl. könnyű látni, hogy

$$s(X) = \sup\{|D|: D \subset X \text{ diszkrét altere } X\text{-nek}\}.$$

A fenti ún. globális számosságfüggvények mellett fontos szerepet játszanak bizonyos lokális, azaz pontonként definiált függvények. Ezekhez néhány definíció:

Ha $p\in X$, a p pont nyílt környezeteinek $\mathscr{U}$ rendszerét p lokális (ψ-) bázisának nevezzük X-ben, ha minden p-t tartalmazó G nyílt halmazhoz van $U\in\mathscr{U}$, melyre $U\subset G$ (ill., $\cap\mathscr{U}=\{p\}$).

$\chi(p, X)=\min\{|\mathscr{U}|: \mathscr{U} \text{ lokális bázisa } p\text{-nek } X\text{-ben}\}$,

$\psi(p, X)=\min\{|\mathscr{U}|: \mathscr{U} \text{ lokális } \psi\text{-bázisa } p\text{-nek } X\text{-ben}\}$.

E lokális függvényekből természetesen globális verziók nyerhetők:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X): p\in X\};$$

$$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X): p\in X\}.$$

Végül még egy hasonlóan definiált függvény, melyre szükségünk lesz:

$$t(p, X) = \min\{\varkappa: p\in\bar{A} \to \exists B \subset A(|B| \leqq \varkappa \text{ és } p\in\bar{B})\},$$

$$t(X) = \sup\{t(p, X): p\in X\}.$$

A számosságfüggvények elméletének természetes és fontos területe eme (és más) függvények egymás közti kapcsolatának tisztázása, általában egyenlőtlenségek formájában. Ezekre példák a következő egyenlőtlenségek, malyeket Hajnal és Juhász [31]-ben bizonyítottak, s amelyek ma már a tárgykör „klasszikus" eredményei közé tartoznak:

Ha X T_2-tér, akkor

(a) $$|X| \leqq 2^{2^{s(X)}};$$

(b1) $$|X| \leqq 2^{c(X)\cdot\chi(X)} \quad \text{és} \quad \text{(b2)} \quad |X| \leqq 2^{s(X)\cdot\psi(X)};$$

(c) $$z(X) \leqq 2^{s(X)}.$$

Az utóbbi (c) egyenlőtlenséget [63]-ban általánosították, megmutatva, hogy ha az

$$X = \Pi\{X_i : i \in I\}$$

szorzattér T_2, akkor

$$z(X) \leqq |I| \cdot \sup\{2^{s(X_i)} : i \in I\}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy mindezek az eredmények a particiókalkulus eredményeinek, ill. módszereinek felhasználásával születtek.

Érdekes és gyakran igen nehéz az a kérdés, vajon egy szuprémumként definiált számosságfüggvény (pl. $c(X)$ vagy $s(X)$) értékei felvétetnek-e. (Ez persze csak limesz számosság értékekre érdekes.) E problémát az adott számosságfüggvényre vonatkozó sup=max problémának szokás nevezni. Ezzel kapcsolatos [41] fő eredménye, mely szerint ha λ szinguláris és erős limesz számosság, azaz $\mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ és $\varkappa < \lambda$ esetén $2^{\varkappa} < \lambda$, akkor X T_2 és $|X| \geqq \lambda$ esetén X-ben van λ számosságú diszkrét altér, következésképpen, ha $s(X) = \lambda$ egy X T_2-térre, akkor sup=max s-re. [35]-ben megmutatták, hogy ha $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$, akkor a fenti eredményből λ erős limeszségének feltételezése elhagyható, feltéve, hogy X-ről egy a T_2 tulajdonságnál kicsit erősebb, de T_3-nál még mindig jóval gyengébb szétválasztási tulajdonságot kívánunk meg. Roitman mutatta meg, hogy ez $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \omega$ esetén nem lehetséges, míg Kunen és Roitman eredményeiből következik, hogy a fent említett T_2-nél erősebb szétválasztási feltétel nem helyettesíthető T_2-vel. Az olvasó szórakoztatására, s a „minden összefügg mindennel" tétel illusztrálására álljon itt Kunen és Roitman eredménye:

Legyen λ szinguláris számosság, melyre $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:

(i) Ha X T_2 és $s(X) = \lambda$, akkor sup=max s-re.

(ii) Ha X valós számok λ számosságú halmaza, akkor van X-nek λ számosságú első kategóriájú részhalmaza.

Az s-re vonatkozó sup=max-probléma szoros kapcsolatba hozható az $o(X)$ természetére vonatkozó, de Groot által felvetett következő problémával: igaz-e, hogy egy X T_2-térre $o(X)$ mindig $2^{\varkappa}$ alakú? A fenti, [41]-beli $s(X)$-szel kapcsolatos eredménynek közvetlen következménye, hogy T_2 X-re $o(X)$ nem lehet szinguláris erős limesz, s ebből (ÁKH és elérhetetlen számosságok nem-létezésének feltevése esetén) adódik, hogy az igenlő válasz de Groot kérdésére konzisztens. A második, [35]-beli eredmény felhasználásával [81]-ben annyit sikerült kimutatni, hogy — legalábbis $o(X)$-nek kis értékeire, s természetesen a [35]-ben használt szétválasztási feltevés mellett — $o(X)^{\omega} = o(X)$ mindig teljesül. A B) rész bizonyos eredményeiből következik, hogy ennél erősebb állítás ZFC-ben nem is bizonyítható.

Ebbe a részbe sorolhatók még [95] eredményei, ahol Hajnal A. és Gerlits J. azt a kérdést vizsgálták, milyen nagyra nőhet $t(X \times Y)$, ha $t(X)$ és $t(Y)$ mindketten megszámlálhatók. Anélkül, hogy a pontos eredményeket megfogalmaznánk, itt csupán azt az érdekes körülményt emeljük ki, hogy a probléma, miután egy halmazelméleti ideálokra vonatkozó kérdéssé fogalmazható át, bizonyos nagy számosságokkal áll szoros kapcsolatban.

B) *S- és L-terek*

Az X teret öröklődően szeparábilisnak (öröklődően Lindelöfnek) nevezzük, ha minden altere szeparábilis, azaz $z(X)=\omega$ (ill. Lindelöf, azaz $h(X)=\omega$). E két tulajdonság egymáshoz való kapcsolata meglepően sok és sokféle halmazelméleti topológiai probléma kapcsán felmerül, s ez így volt már Hajnal és Juhász korai vizsgálatai során is. [39]-ben példákat mutattak arra, hogy vannak olyan T_2-terek, melyekben egyik közülük teljesül, de a másik nem. Rövid idő múlva kiderült azonban, hogy ha a T_3 tulajdonság fennállását is megköveteljük, nagyságrendekkel nehezebb problémához jutunk. Ez vezetett a következő alapvető definícióhoz: Az X T_3-teret S- (ill. L-) térnek nevezzük, ha öröklődően szeparábilis de nem öröklődően Lindelöf (ill. öröklődően Lindelöf de nem öröklődően szeparábilis). Az ún. Szuszlin-egyenes (olyan X rendezett tér, melyre $c(X)=\omega\neq d(X)$) klasszikus példa L-térre, S-teret azonban a 70-es évek elejéig senki sem konstruált.

[65]-ben a Cohen-féle „forszolás" segítségével sikerült $D(2)^{\omega_1}$-nek, a kétpontú diszkrét tér ω_1-ik hatványának olyan X alterét megadni, amely öröklődően szeparábilis és 2^{ω_1} számosságú. Mivel a kapott modellben $2^{\omega}=\omega_1$ (vagyis a KH) is igaz, s egy öröklődően Lindelöf T_2-tér legfeljebb 2^{ω} számosságú, ez az X automatikusan S-tér is. Persze ez az X nem tartalmazhat ω_1-es diszkrét alteret (azaz $s(X)=\omega$), s mivel $|X|=2^{\omega_1}=2^{2^{\omega}}$, ez egyben az A)-ban ismertetett [31]-beli a) egyenlőtlenség élességét is mutatja. További következményként kapható e térből olyan Y altér (feltéve, hogy még $\omega_2<2^{\omega_1}$ is igaz), melyre $\omega_1=2^{\omega}<o(Y)=\omega_2<2^{\omega_1}$, tehát $o(Y)$ nem $2^{\varkappa}$ alakú.

A [65] cikk legérdekesebb felfedezése azonban talán egy bizonyos tulajdonság, amellyel az $X\subset 2^{\omega_1}$ altér rendelkezik, s melyet HFD-tulajdonságnak szokás nevezni. Ez durván szólva a következő: X bármely végtelen része — megszámlálható sok koordinátától eltekintve — sűrű 2^{ω_1}-ben. Könnyű látni, hogy ha van ω_1-es HFD, akkor van S-tér. [80]-ban megmutatták, hogy a KH esetén van ω_1-es HFD, tehát van S-tér is. [92]-ben pedig ω_1-es HFD részcsoportját konstruálták 2^{ω_1}-nek (pl. KH-val), s ezzel Wilanski egy problémáját oldották meg, szeparábilis, normális de nem Lindelöf topologikus csoportot adván meg.

A HFD fogalomnak (és variánsainak) központi szerepe lett az S- és L-terek további vizsgálatában, pl. J. Roitman ama eredményében, hogy egyetlen Cohen-valós adjungálása megöli MA_{ω_1}-et, Szentmiklóssy MAF-megölhetetlen, s így MA_{ω_1}-gyel konzisztens S-tér konstrukciójában, vagy az S-tér nem-létezésének konzisztenciáját kimutató Baumgartner-féle bizonyításban.

Csak röviden említjük itt meg, hogy [66]-ban a ma HFC-nek hívott, partíciósorozatokra vonatkozó tulajdonságokból, amely a HFD tulajdonságnak bizonyos értelemben vett duálisa, L-tereket konstruáltak, pl. olyan öröklődően Lindelöf 0-dimenziós teret, melynek súlya $2^{\omega_1}=2^{2^{\omega}}$. Ebből ismét nyerhető olyan (igen jó topológiai tulajdonságú) X-tér, melyre $2^{\omega}=\omega_1<o(X)<2^{\omega_1}$, vagy olyan Y, melyre $2^{\omega}=\omega_1<w(Y)$, de Y-nak nincs ω_1 súlyú altere.

A HFD-típusú tulajdonságú S-terek nem lehetnek első megszámlálhatóak, így jogosan merül fel az a kérdés, vajon létezhetnek-e egyáltalán első megszámlálható S-terek? Ezt a kérdést [84]-ben sikerült megválaszolni a következő módon: Először megadták első megszámlálható S-tér létezésének egy tisztán halmazelméleti ekvivalensét, amely ω bizonyos típusú részhalmazrendszereinek létezését mondja ki, majd a KH segítségével konstruáltak ilyen részhalmazrendszert. Ma már az így nyert első megszámlálható S-terek konstrukciójára egyszerűbb, közvetlen módszerek is

vannak, de az átfogalmazás fontos szerepet játszik pl. Avraham és Todorčević egy eredményének bizonyításában, mely szerint még MA_{ω_1} feltevése mellett is konzisztens első megszámlálható S-tér létezése.

C) *Gráf-topológiák*

Ebben a részben egy igen egyszerűnek tűnő, de nagyon hatékonynak bizonyult módszer alkalmazásait ismertetjük. E módszer lényege a következő. Legyen adva az X alaphalmazon egy irányított gráf, melyet egy $f: X^2 \to 2$ leképezéssel adhatunk meg (jelentvén, hogy x-ből y-ba pontosan akkor halad él, ha $f(x, y)=0$). Legyen $i<2$-re és $x \in X$-re

$$A_x^i = \{y \neq x: f(x, y) = i\},$$

s jelöljük τ_f^i-fel azt a topológiát X-en, melyet az $\{A_x^i \cup \{x\}: x \in X\} \cup \{A_x^{1-i}: x \in X\}$ rendszer generál, mint nyílt szubbázis. Az így nyert, nyilvánvalóan 0-dimenziós τ_f^i topológiákat hívjuk gráf-topológiáknak. A fogalom hasznossága abból adódik, hogy az f gráf alkalmas kombinatorikus tulajdonságaiból a τ_f^i topológiák érdekes tulajdonságai kaphatók. Egyszerű, de fontos példa erre a következő: f-et rugalmasnak nevezzük, ha $x, y \in X$ és $x \neq y$ valamint $i, j<2$ esetén mindig van $z \in X$, melyre $f(z, x)=i$ és $f(z, y)=j$. Triviális, hogy ha f rugalmas, akkor τ_f^i T_2-tulajdonságú, tehát T_3, sőt teljesen reguláris is, továbbá, hogy ekkor a

$$\Delta(X) = \{\langle x, x\rangle \in X^2: x \in X\}$$

diagonális zárt diszkrét a $\tau_f^0 \times \tau_f^1$ szorzattopológiában. Megjegyezzük, hogy a Cohen-módszer alkalmazásával nyert ún. generikus gráfok mindig rugalmasak.

Gráf-topológiákat először [100]-ban alkalmaztak annak megmutatására, hogy a következő állítás konzisztens: léteznek olyan Lindelöf-terek, melyek szorzata nem $c=2^\omega$-Lindelöf. Ehhez olyan F generikus gráfot adtak meg ω_2-n, melyre τ_F^0 és τ_F^1 is Lindelöf. Mivel a következő állítás igen egyszerűen igazolható: ha f rugalmas gráf X-en és τ_f^i Lindelöf, akkor $\psi(X, \tau_f^{1-i}) \leqq \omega$ (azaz minden $x \in X$-re $\{x\}$ G_δ-típusú τ_f^{1-i}-ben), a fenti τ_F^i-ek egyben megszámlálható pszeudokarakterűek is, tehát ellenpéldák Archangelszkij egy neves problémájára is. Ilyen ellenpéldát először Shelah adott meg, de ennél bonyolultabb módon. A konstrukció egy másik „melléktermé ke" Gerlits egy problémájának megoldása: konzisztens, hogy van 2^ω-nál nagyobb számosságú diszkrét tér, melynek van Lindelöf-tulajdonságú szubbázisa.

A módszer következő alkalmazása, [99]-ben, Tkacsenko szovjet matematikus problémáit oldja meg. Ennek megértéséhez néhány definíció szükséges. Az X teret gyengén szeparáltnak nevezzük, ha minden $x \in X$-hez kijelölhető annak U_x környezete úgy, hogy $x \neq y$ esetén $x \notin U_y$ vagy $y \notin U_x$ áll. X hálózatának nevezünk egy $\mathcal{N}$ halmazrendszert, ha minden X-ben nyílt halmaz előáll $\mathcal{N}$-beli halmazok uniójaként. Könnyű látni, hogy ha X-nek van megszámlálható hálózata, akkor minden gyengén szeparált altere megszámlálható. A kérdés most ez volt: igaz-e ennek megfordítása T_3-terekre? [99]-ben megmutatták, hogy a véges feltételekkel forszolt generikus gráfból, vagy KH-ból alkalmasan konstruált gráfból származó gráf-topológiák erre ellenpéldát szolgáltatnak.

Ezt a tulajdonságot élesíti az a konstrukció [99]-ben, amely olyan T_2-teret ad alkalmas halmazelméleti feltevések mellett, melyben minden ω_1 számosságú altérnek van megszámlálható hálózata, de az egész térnek nincs. Érdekes ezzel összevetni azt a [101]-ben bizonyított eredményt, hogy ha a hálózatot bázissal (vagyis nyílt halmazokból álló hálózattal) helyettesítjük a fenti állításban, akkor ez már nem lehet igaz,

tetszőleges topologikus terekre sem. Megjegyezzük, hogy Ciesielski lengyel matematikus a gráf-topológiák módszerével nemrég megadott egy fenti típusú T_3 példát is.

A következő alkalmazáshoz ismét egy definíciót kell bevezetnünk. Egy X tér Pixley—Roy-féle hiperterének nevezik azt az $\mathcal{F}[X]$ teret, melynek pontjai X-nek véges részhalmazai, s melynek az $[a, U]$ alakú halmazok bázisát alkotják, ahol $a \in \mathcal{F}[X]$, U nyílt X-ben és

$$[a, U] = \{b \in \mathcal{F}[X] : a \subset b \subset U\}.$$

Hosszabb ideje probléma volt, vajon milyen X-re vonatkozó feltétel esetén lesz $c(\mathcal{F}[X]) = \omega$. [102]-ben sikerült megmutatni egy igen természetes szükséges feltételről, hogy az MA_{ω_1} feltevése esetén elégséges is, azonban alkalmas generikus gráfból származó gráf-topológiák esetén ez már nincs így. Érdekes, hogy itt az első állítás bizonyítása során is fellépnek gráfelméleti meggondolások, persze ott nem gráf-topológiák formájában.

D) *Egyéb eredmények*

Ebben a részben olyan eredményeket ismertetünk, melyeket nem köt össze valamely közös téma vagy módszer.

[74]-ben azokat a — „négyzet-kompakt"-nak nevezett — $\varkappa$ számosságokat vizsgálták, melyekre igaz, hogy egy $\varkappa$-kompakt tér négyzete is $\varkappa$-kompakt. (X-et akkor nevezik $\varkappa$-kompaktnak, ha minden nyílt fedésének van $\varkappa$-nál kisebb számosságú részfedése.) Fő eredményük szerint egy négyzet-kompakt számosság gyengén kompakt is, ahol $\varkappa$ gyengén kompakt, ha legfeljebb $\varkappa$ darab legfeljebb $\varkappa$ számosságú $\varkappa$-kompakt tér szorzata is $\varkappa$-kompakt. Az máig nyitott probléma, hogy igaz-e ennek az állításnak a megfordítása.

[60]-ban MA-nak egy igen érdekes topológiai alkalmazását bizonyítják be. Ennek megfogalmazásához szükséges a következő definíció: Az X-tér π-bázisának nevezik X nem-üres nyílt részhalmazainak $\mathcal{P}$ rendszerét, ha minden G nem-üres X-ben nyílt halmazhoz van $P \in \mathcal{P}$, melyre $P \subset G$. X π-súlya, $\pi(X)$, az X legkisebb számosságú π-bázisának számossága. [60] egyik fő eredménye szerint, ha az X kompakt T_2-tér Szuszlin-tulajdonságú (azaz $c(X) = \omega$) és $\pi(X) < 2^\omega$, akkor — MA feltevése esetén — X szeparábilis. Egy másik eredmény [60]-ból a következő: Ha X Szuszlin-tulajdonságú kompakt T_2-tér, melyre $\chi(X)^+ < 2^\omega$, akkor X szeparábilis. (Speciálisan, ha X első megszámlálható és $MA + 2^\omega > \omega_1$, akkor e feltétel teljesül.) Ennek az eredménynek külön érdekessége, hogy a $\chi(X)$ karakterre tett, tehát lokális jellegű feltevésből von le globális jellegű konklúziót (ti. a szeparabilitást). Ezek az eredmények számos kutató további vizsgálataihoz szolgáltak kiindulási pontként, Sapirovszkij pl. megmutatta, hogy az utóbbi tételben $\chi(X)$ helyett $t(X)$ is vehető. Azt csak nemrég sikerült azonban Bell kanadai matematikusnak megmutatni, hogy $\chi(X)^+ < 2^\omega$ nem helyettesíthető $\chi(X) < 2^\omega$-val.

[83]-ban Ulmer egy tételét élesítve példát mutatnak két olyan Lindelöf térre, melyeknek szorzata nem gyengén Lindelöf. X-et akkor nevezik gyengén Lindelöfnek, ha bármely nyílt fedésének van olyan megszámlálható része, melynek uniója sűrű X-ben.

[86]-ban kompakt terek bizonyos típusú altereivel foglalkoznak. E cikk kiinduló pontja a következő, máig megoldatlan kérdés: Igaz-e — feltéve ÁKH-t —, hogy minden ω_2 számosságú Lindelöf térnek van ω_1-számosságú Lindelöf altere? [86] egyik eredménye szerint bármely nem-megszámlálható kompakt T_2-térnek van, KH feltevése mellett, ω_1 számosságú Lindelöf altere.

A [89]-ben vizsgált probléma megfogalmazásához vezessük be a következő definíciót: $M(\varkappa)$-val jelöljük azt az állítást, mely szerint minden olyan $\varkappa$ számosságú első megszámlálható normális tér metrizálható, melynek minden $\varkappa$-nál kisebb számosságú altere metrizálható.

Hamburger kérdezte, hogy $M(\varkappa)$ milyen $\varkappa$-ra lehet igaz. [89]-ben ezzel kapcsolatban megmutatták, hogy $M(\varkappa)$ igaz minden gyengén kompakt $\varkappa$ számosságra. Továbbá, ha feltesszük Gödel ún. konstruálhatósági axiómáját ($V=L$), akkor $M(\varkappa)$ nem lehet igaz semmilyen $\varkappa$ reguláris számosságra, ha $\varkappa$ nem gyengén kompakt.

III. Hajnal András véges kombinatorikai munkássága

Bár Hajnal Andrást inkább a végtelen és azok között is a nagy számosságú halmazokra vonatkozó kérdések vonzzák, rendszeresen „leereszkedik" az „egyszerű" véges problémákhoz. Cikk- és lapszámban mérve ugyan ilyen irányú tevékenysége kisebb, tudományos súlyuk azonban igen jelentős. Ennek bizonyítására elég talán Berge, Bollobás és Lovász könyveire hivatkozni, akik jelentős teret szentelnek Hajnal kombinatorikai eredményeinek.

Surányi Jánossal közösen írt [4] munkájában tulajdonképpen a perfekt gráfokkal foglalkozott, e fogalom megszületését megelőzve. Egy gráfot perfektnek nevezünk, ha a benne maximálisan kiválasztható üres részgráf szögpontszáma megegyezik a legkisebb olyan számmal, ahány részre felbontható a szögpontok halmaza úgy, hogy minden rész teljes részgráfot feszít ki. Azt bizonyították be, hogy ha egy gráf minden köre felbontható a gráfban levő élekkel háromszögekké, akkor a gráf perfekt. A cikkben természetesen a tétel másképpen van megfogalmazva. Ugyanis éppen ez az eredmény inspirálta Berge-t a perfekt gráf fogalmának bevezetésére (C. Berge, Perfect graphs I. Six[1] papers on graph theory, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1963; C. Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970). A perfekt gráfok irodalma rendkívül széleskörű. A cikk közvetett hatása tehát igen nagynak mondható. Ugyanakkor Gallai (MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei 7 (1962) A 3—36) közvetlenül is élesítette a fenti tételt, bebizonyítva, hogy elegendő a páratlan körökről feltenni, hogy felbonthatók háromszögekké.

Czipszer Jánossal és Erdős Pállal [15] egy, a megszámlálható szögpontú gráfokra vonatkozó extremális problémát vizsgáltak. Legyen a gráf szögponthalmaza a természetes számok halmaza és jelölje $g(n)$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz által kifeszített részgráf éleinek számát. A cikkben felvetett kérdés az, mennyinek kell $g(n)$-nek nagyságrendben lennie ahhoz, hogy a gráfban biztosan legyen k élből álló (szögpontok szerint) növekvő út. Bebizonyították, hogy $k=2$ és $k=3$ esetén igaz, hogy ha

$$g(n) > \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4k} + \varepsilon\right) n^2$$

minden elég nagy n-re, akkor a gráfban van (végtelen sok) k élből álló növekvő út. Bizonyos jelek arra engedtek következtetni, hogy az állítás nagyobb k-ra is igaz. Nemrég mutatta azonban meg Nagy Zsigmond, hogy már $k=4$-re nem teljesül. $k=2$ esetén $g(n)$ kritikus értékét Czipszer, Erdős és Hajnal egész pontosan meghatározták. Két élű növekvő út (éspedig végtelen sok) már akkor is van, ha

$$g(n) > \frac{n^2}{8} + \left(\frac{1}{32} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{\log^2 n} \quad n > n_0.$$

De ennél kevesebb él már nem elég. Meghatározták a végtelen növekvő út létezéséhez szükséges élek számát is.

Több munkájában is foglalkozik a gráfok maximális független szögponthalmazaival. A szögpontok egy halmazát függetlennek nevezzük, ha nincs közöttük él. $\alpha(G)$-vel jelöljük azt a legnagyobb számot, ahány független szögpont kiválasztható. Egy G gráfot α-kritikusnak nevezünk, ha bármely élét elhagyva α-ja csökken. Gallai azt sejtette, hogy egy n-szögpontú, izolált pont nélküli α-kritikus gráf minden pontjának foka (=hozzá csatlakozó élek száma) $\leqq n-2\alpha(G)+1$. Ezt Hajnal Andrásnak [24] sikerült bebizonyítania. Ez a cikk fontos eredmények egy sorának volt kiinduló pontja. Legyen ugyanis $\delta(G)=n-2\alpha(G)$. Ha egy izolált pont nélküli α-kritikus gráfra $\delta(G)=0$, akkor Hajnal tétele szerint minden pont foka 1, azaz G csak diszjunkt élekből állhat. Ha $\delta(G)=1$, akkor a fokok értéke 1 és 2. Ha feltesszük, hogy a gráf összefüggő, akkor ez csak út vagy kör lehet. Könnyen látható, hogy ezek közül csak a páratlan körök α-kritikusak. Andrásfainak (Theory of Graphs, International Symposium, Rome, Dunod, Paris, Gordon and Breach, New York, 1967, 9—19) sikerült azt is belátni, hogy a $\delta(G)=2$ esetben az összes összefüggő α-kritikus gráfok a teljes négyesből nyerhetők az egyes élek páratlan úttal való helyettesítésével. Lovász és Surányi László elintézték a $\delta(G)=3$ esetet is, míg végül Lovász (Combinatorics, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 15) általában is bebizonyította, hogy minden δ esetén található véges sok olyan gráf, amelyekből a fenti operációval nyerhető az összes összefüggő α-kritikus gráf.

[22]-ben társszerzőkkel azt bizonyította be, hogy egy n szögpontú α-kritikus gráf éleinek maximális száma $\binom{n-\alpha+1}{2}$, és ez egyetlen gráfra érhető el, amelyben $n-\alpha+1$ szögponton egy teljes gráf van, a többi izolált pont.

A maximális független pontrendszer kiválasztása mellett érdekes kérdés az is, hogy mikor lehet kiválasztani sok nagy, egymáshoz diszjunkt pontrendszert. Erdős Pál sejtette, hogy ha egy gráfban minden pont foka kisebb mint l, akkor a szögpontok halmaza particionálható $\left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$ és $\left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil$ nagyságú, a gráfban független ponthalmazokká. Hajnal és Szemerédi [46] be is bizonyították ezt. Bizonyításuk húsz oldal, igen komoly szellemi teljesítmény. Természetesen ez a tétel sem volt előzmények nélkül. Speciális eseteket már mások is bizonyítottak korábban (Dirac: $l\geqq 1$, $n/l=2$ Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952) 69—81; Zelinka: $l=2, 3$, $n/l\geqq 1$ egész, On the number of independent complete subgraphs, Publ. Math. Debrecen 13 (1966) 95—97; Grünbaum: $l=4$, $n/l\geqq 1$ egész, A result on graph-coloring, Michigan Math. Journal, 15 (1960) 381—383). Közöttük Hajnal András maga is vizsgálta Corrádi Keresztéllyel együtt [18] az $l\geqq 1$, $n/l=3$ esetet. Fogalmazzuk át ezt az esetet a komplementer gráfra: Egy $3l$ szögpontú gráfban, amelyben minden pont foka legalább $2l$, található l darab diszjunkt teljes hármas. [18]-ban ennél egy erősebb állítás van bizonyítva: Ha a gráf szögpontjainak száma legalább $3l$ és minden pont foka legalább $2l$, akkor a gráfban található l pontdiszjunkt kör. Valóban, ha $n=3l$, akkor a kapott l kör mindegyikének hossza legfeljebb, azaz pontosan 3. Visszakaptuk a fenti állítást.

Az Erdős Pállal közösen írt [37] munka is kapcsolatban van a független ponthalmazokkal. Ugyanis ezek nagyságának a gráf kromatikus számával (egy G gráf kromatikus száma $\varkappa(G)=k$, ha k színnel kiszínezhetők a szögpontjai úgy, hogy összekötött pontok nem azonos színűek, de $k-1$ színnel nem) való összefüggését vizsgálja. Észreveszik, hogy ha a szögpontok bármely halmazában azoknak legalább fele független, akkor a kromatikus szám 2. Egy szellemes geometriai konstrukcióval

viszont megmutatják, hogy ha ezt az 1/2 arányt csökkentjük, a kromatikus szám már nem korlátozható. Azaz, ha $1/2 > c \geqq 0$, akkor minden k természetes számhoz található egy olyan G gráf, melyben bármely m szögpont között található cm független, mégis $\varkappa(G) = k$.

A [24] cikk egy lemmája önálló életre kelt. A lemma így szólt: Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ egy $2n-1$ elemű X halmaz n-elemű részhalmazai, melyekre $\bigcap A_i = \emptyset$. Ekkor X-ben található $n+1$ elem, melyből bármely párt tartalmaz valamilyen A_i. Ezt a lemmát Folkman öt évvel később újra felfedezte (Combinatorial Th. and its Appl. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 4 pp. 437—457), ezért az irodalomban Hajnal—Folkman lemma néven terjedt el. Mint annyi más esetben is, Erdős Pál vetette fel a következő általánosabb kérdést. (Lásd a fenti kötetben Erdős cikkét (311—315).) Legyen $A_1, A_2, \ldots$ egy n elemű halmaz m elemű részhalmazainak olyan rendszere, melyhez nem található X-nek i olyan eleme, hogy minden A_j tartalmazza valamelyiküket. Az általános kérdés az, hogy egy ilyen rendszerhez feltétlenül létezik-e u elemű részhalmaza X-nek, melynek minden r-ese valamelyik A_i-nak része. Ha igen, ezt jelölésben $(n, m, i, r) \to u$-val fejezzük ki. Ellenkező esetben a nyilat áthúzzuk. A Hajnal—Folkman lemma tehát azt mondja ki, hogy $(2n-1, n, 1, 2) \to n+1$. Azóta cikkek serege foglalkozik ezen nyilak létezésének problémájával.

A következő probléma elüt az eddigiektől. Érdekessége, hogy váratlanul pontos válasz adható rá. Egy n elemű X halmaz minden A részhalmazához rendeljen az $f(A)$ függvény egy A-n kívüli elemet. Az F függvényt az $F(B) = \bigcup_{A \subset B} f(A)$ összefüggés definiálja. Érezhető, hogy nagy B halmazokra $F(B) = X$, kérdés, hogy ez honnan kezdődik. Azaz meghatározandó az a legkisebb $H(n)$ szám, melyre minden legalább $H(n)$ elemű B halmazra teljesül $F(B) = X$. A [43] dolgozat egy tétele szerint

$$\log_2 n < H(n) < \log_2 n + (3+\varepsilon) \log_2 n \log n.$$

[68] szintén halmazrendszerekre vonatkozó extremális eredményt tartalmaz. Erdős, Ko és Rado következő ismert eredményét általánosítja: Ha egy n elemű halmaz $k \leqq n/2$ elemű részhalmazainak egy rendszere olyan, hogy bármely két halmaz metszete nemüres, akkor a rendszerben nem lehet több halmaz, mint az egy rögzített pontot tartalmazó összes k-asok rendszere, azaz $\binom{n-1}{k-1}$. Az általános probléma a következő. A legyen ismét egy n elemű halmaz bizonyos k-elemű részhalmazainak egy rendszere, melyből akárhogy választunk ki $r+1$-et, A_1-et, ..., A_{r+1}-et, van köztük kettő, melyre $|A_i \cap A_j| \geqq s$ $(1 \leqq i, j \leqq r+1)$. $(1 \leqq r, 1 \leqq s \leqq k$, rögzített egészek.) Kérdés ismét $|A|$ maximuma. Bebizonyítják, hogy ha n nagyobb mint egy $n(k, r, s)$ küszöbszám, akkor a következő rendszer az extremális. Vegyünk az alaphalmazban r darab diszjunkt s elemű részhalmazt és $\mathcal{A}$ álljon az összes olyan k-asból, amelyik legalább egy ilyen s-eműt tartalmaz. Módszerük nagyon közel áll a később Frankl Péter által kifejlesztett ún. magmódszerhez, amiből nagyon sok érdekes eredmény következett. A cikk végén felvetik az $n(k, r, s)$ küszöb meghatározásának kérdését. Az Erdős—Ko—Rado esetre $n(k, 1, 1)$ értéke $2k$. Azóta Frankl (Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Combinatorics 18, pp. 365—375) meglepetésre meg tudta határozni $n(k, 1, s)$ értékét is teljes pontossággal. Az általános esetről azonban még keveset tudunk.

A [62] és [69] cikkek (társszerzők: Erdős Pál, Eric Milner és Fried Ervin) a tournamentekkel foglalkoznak. Egy tournament olyan irányított gráf, amelyben bármely két különböző pont között pontosan egy irányított él fut (egyik vagy másik irányban). A szögpontok egy K részhalmazát konvexnek nevezzük, ha bármely külső

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

x pontjából vagy minden él x-ből K-ba megy, vagy minden él K-ból x-be. Egy tournamentet egyszerűnek nevezünk, ha az üres halmazon, az egy elemű halmazokon és önmagán kívül nincs benne konvex halmaz. [62]-ben megmutatják, hogy bármely legalább 3 pontú tournament, kiegészíthető két újabb ponttal és megfelelően választott élekkel egyszerű tournamentté. Ugyanott megjegyzik, hogy ez 1 hozzávetett ponttal általában nem érhető el. Ha ugyanis a tournamentet páratlan sok ponton, pl. az $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ szögponthalmazon úgy definiáljuk, hogy i-ből j-be akkor és csak akkor vezet él, ha $i<j$, akkor az utólag hozzávett $2n$ jelű szögpontból bárhogy vesszük az éleket, az új tournamentben lesz egy kételemű konvex halmaz. Hiszen ha i és $i+1$ mindkettője egyformán van összekötve $2n$-nel, akkor $\{i, i+1\}$ konvex. Ha viszont ilyen pár nincs, akkor $\{1, 2n-1\}$ lesz konvex. Moon bebizonyította, hogy több mint 3 elemű, de véges torunamentek esetén a fenti konstrukció az egyetlen kivétel, azaz minden más tournament kiegészíthető egy ponttal egyszerűvé. [69]-ben erre egy új bizonyítást adnak, mely érvényes végtelen tournamentekre is.

Az eddig felsorolt eredmények mellett — amelyek a kombinatorika egy-egy „komoly" irányához tartoznak — feltétlenül meg kell említeni Hajnal András két „könnyű műfajú" eredményét. A matematikus közvéleményen időnként végigviharzanak bizonyos tréfás szövegű problémák, amelyek rendszerint nem illeszkednek semmiféle elmélethez és nincs gyakorlati alkalmazásuk, „csak" érdekesek. Ilyenkor mindenki lázasan gondolkozik rajtuk és megoldójuknak komoly presztizst biztosítanak.

Az egyik ilyen probléma a „pletykás vénasszonyok"-é. Adott n idős hölgy (a női egyenjogúság harcosai szerint férfi, az Idősekért Küzdő Bizottság szerint fiatal), melyek mindegyike tud egy-egy pletykát. Ezeket telefonbeszélgetésekben adják tovább. Egy beszélgetésben a két fél elmondja a másiknak az általa addig megtudott összes pletykát. Legalább hány telefonálásra van szükség ahhoz, hogy mindenki minden pletykát megtudjon? A válasz: $2n-4$. Ezt legelőször Hajnal, Milner és Szemerédi bizonyították az [58] munkában. A bevezető szavakkal némileg ellentétben azóta már cikkek sora, egy egész kis elmélet növekedett a probléma köré.

A másik feladat alaptörténetét a szerzők (Hajnal és Lovász [97]) bizonyos okok miatt kénytelenek voltak megváltoztatni. Itt most egy újabb, módosított megfogalmazást adunk. Adott n sebész és m beteg, akiket gumikesztyűben operálnak. A gumikesztyűk többször is felhasználhatók, kifordíthatók, egymásra húzhatók. Az alapszabályok a következők: 1. egy sebész „megfertőzi" a gumikesztyűnek azt az oldalát, amelyikbe belebújt, 2. a beteg megfertőzi azt az oldalt, amelyikkel hozzáértek, 3. az egymásra húzott kesztyűk összeérő oldalai megfertőzik egymást, 4. fertőzött külsejű kesztyű nem érhet egy másik beteghez, 5. fertőzött belsejű kesztyűbe nem bújik egy másik sebész. (A felhúzás közben a kesztyűhöz senki és semmi nem ér.) A mai takarékos idők kérdése: mennyi a szükséges kesztyűk minimális száma? Kevesebb-e mint a kesztyűk egymásrahúzása nélküli nm? Várható, hogy ezt lehet csökkenteni, hiszen az nm esetben minden alkalommal két kesztyűoldalt piszkolunk be, míg itt pl. elérhető, hogy egy beteget az összes sebész ugyanazon kesztyű külsejével operáljon. Valóban a szerzők megmutatták, hogy $m=n=6k$ esetben $7k+1$ kesztyű elegendő, viszont nincs olyan megoldás, amely ezt a számot $7k$ alá szorítaná. Az általános esetet is megoldották ilyen pontossággal, azonban az eredmény nem ilyen kerek.

*

Bár az ilyen típusú, szakmai tevékenységet méltató cikkekben ez nem szokás, mi mégis úgy véljük, hogy feltétlenül szót kell ejtenünk Hajnal András „életművé-

nek" egy másirányú kiemelkedő értékéről: közösségteremtő és -formáló képességéről. Óriási szakmai tudása mellett főleg ezzel magyarázhatók azok a rendkívül sikeres eredmények, melyeket részben a tudományos utánpótlás nevelésében, részben a tudományos közélet terén ért el. Ezeknek az eredményeknek, s az értük kapott kitüntetéseknek és egyéb elismeréseknek hosszú felsorolását azonban egy későbbi évfordulóra készítendő megemlékezésre hagyjuk.

АНДРАШУ ХАЙНАЛУ 50 ЛЕТ

ИШТВАН ЮХАС, Г. КАТОНА и П. КОМЙАТ

FOR THE 50th BIRTHDAY OF ANDRÁS HAJNAL

I. JUHÁSZ, G. KATONA and P. KOMJÁTH

HAJNAL ANDRÁS TUDOMÁNYOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. Zeitschrift f. Math. Logik u. Grundlagen d. Math. 2 (1956), 131—136.
[2] Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez, I—II. Mat. Lapok I (1956), 26—42, 218—229 (Kalmár Lászlóval közösen).
[3] An elementary combinatorial theorem with an application to axiomatic set theory. Publ. Math. 4 (1955—56), 431—449 (Kalmár Lászlóval közösen).
[4] Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. Annales Universitatis Sci. Budapestiensis 1 (1958), 113—121 (Surányi Jánossal közösen).
[5] On the structure of setmappings. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), 111—130 (Erdős Pállal közösen).
[6] Neumann János axiomatikus halmazelméleti munkásságáról. Mat. Lapok 10 (1959), 5—11.
[7] On the structure of inner set mappings. Acta Sci. Math. 20 (1959), 81—90 (Erdős Pállal és Fodor Gézával közösen).
[8] Some remarks on set theory VIII. Michigan Math. Journal 7 (1960), 187—191 (Erdős Pállal közösen).
[9] Some remarks on set theory VII. Acta Sci. Math. 21 (1960), 154—163 (Erdős Pállal közösen).
[10] On the topological product of discrete λ-compact spaces. General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of Symposium in Prague in September 1961, 148—151 (Erdős Pállal közösen).
[11] Some results and problems in set theory. Acta Math. Sci. Hung. 11 (1960), 277—298.
[12] Proof of a conjecture of S. Ruziewicz. Fundamenta Math. 50 (1961) 123—128.
[13] On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961), 321—376.
[14] On a property of familirs of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961), 87—123 (Erdős Pállal közösen).
[15] Some extremal problems on infinite graphs. Publications of the Math Inst. of the Hungarian Academy of Sciences 7 Ser. A (1962), 441—457 (Czipszer Jánossal és Erdős Pállal közösen).
[16] Some remarks concerning our paper "On the structure of set mappings". Acta Math. Sci. Hung. 13 (1962), 223—226 (Erdős Pállal közösen).
[17] On a classification of denumerable order types and an application to the partition calculus. Fundamenta Math. 51 (1962), 117—129 (Erdős Pállal közösen).
[18] On the maximal number of independent circuits in a graph. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1963), 423—439 (Corrádi Keresztéllyel közösen).
[19] On complete topological subgraphs of certain graphs. Annales Univ. Sci. Budapest. 7 (1964), 143—149 (Erdős Pállal közösen).
[20] Some remarks on set theory IX. Michigan Math. Journal 11 (1964), 107—127 (Erdős Pállal közösen).
[21] Remarks on a theorem of W. P. Hanf. Fundamenta Math. 54 (1964), 109—113.
[22] A problem in graph theory. American Math. Monthly 71 (1964), 1107—1110 (Erdős Pállal és J. W. Moon-nal közösen).
[23] On the topological product of discrete spaces. Notices of the Am. Math. Soc. (1964).
[24] A theorem on k-saturated graphs. Canadian Math. Journal (1964).

[25] Partition relations for cardinal numbers. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965), 93—196 (Erdős Pállal és R. Rado-val közösen).
[26] On a problem of B. Jónsson. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 14 (1966), 19—23 (Erdős Pállal közösen).
[27] On chromatic number of graphs and set-systems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966), 61—99 (Erdős Pállal közösen).
[28] On the complete subgraphs of graphs defined by systems of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966), 159—229 (Erdős Pállal és E. C. Milnerrel közösen).
[29] On decomposition of graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967) (Erdős Pállal közösen).
[30] Some results in set theoretical topology. Doklady Akad. Nauk SSSR (oroszul) 172 (1967), 541—542 és a Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 141—143 (angol ford.) (Juhász Istvánnal közösen).
[31] On discrete subspaces of topological spaces. Indag. Math. 29 (1967), 343—356 (Juhász Istvánnal közösen).
[32] On the chromatic number of infinite graphs. Graph theory Symposium held in Tihany, Hungary 1966, 83—98 (Erdős Pállal közösen).
[33] Remarks on Darboux functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 13—20 (Petruska Györggyel közösen).
[34] On sets of almost disjoint subsets of a set. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19 (1968), 209—218 (Erdős Pállal közösen).
[35] Some remarks on a property of topological cardinal functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 25—37 (Juhász Istvánnal közösen).
[36] On regressive functions and α-complete ideals. Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences XV (1967), 427—432 (Fodor Gézával közösen).
[37] Kromatikus gráfokról, Mat. Lapok 18 (1967), 1—4 (Erdős Pállal közösen).
[38] A kontinuumproblémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról. Mat. Lapok 17 (1966), 253—260.
[39] On hereditarily α-Lindelöf and hereditarily α-separable spaces. Annales Univ. Budapestiensis 11 (1968), 115—124 (Juhász Istvánnal közösen).
[40] Unsolved problems in set theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XIII. Providence, R. I. (1971), 17—48 (Erdős Pállal közösen).
[41] Discrete subspaces of topological spaces II. Indagationes Mathematicae 31 (1969), 18—30 (Juhász Istvánnal közösen).
[42] A problem on well ordered sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 323—329 (Erdős Pállal és E. C. Milnerrel közösen).
[43] Egy kombinatorikus problémáról. Matematikai Lapok 19 (1968), 345—348 (Erdős Pállal közösen).
[44] On some combinatorial problems involving large cardinals. Fundamenta Math. 69 (1970), 39—53).
[45] Ulam-matrices for inaccessible cardinals. Bull. Acad. Pol. des Sci. 17 (1969), 683—688.
[46] Proof of a conjecture of P. Erdős. Combinatorial Theory and its Applications. Balatonfüred (1969) 601—623) (Szemerédi Endrével közösen).
[47] Set mappings and polarized partitions. Combinatorial Theory and its Applications. Balatonfüred (1969), 327—363 (Erdős Pállal közösen).
[48] On a problem of bypartite graphs. Combinatorial Theory and its Applications. Balatonfüred (1969) (T. Sós Verával közösen).
[49] Some results and problems for certain polarized partitions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21 (1970), 369—392 (Erdős Pállal közösen).
[50] Jelentés az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről. Mat. Lapok.
[51] Some theorems on scattered order types. P. M. H. 1 (1971), 55—63 (E. C. Milnerrel közösen).
[52] Polarized partition relations for ordinal numbers. Studies in pure mathematics. Academic Press, 1971, 63—87 (Erdős Pállal és E. C. Milnerrel közösen).
[53] Ordinary partition relations for ordinal numbers. P. M. H. 1 (1971), 171—185 (Erdős Pállal közösen).
[54] Partition relations for η_α and for $\aleph_\alpha$-saturated models. Theory of Sets and Topology, Berlin, 1972, 95—108 (Erdős Pállal és E. C. Milnerrel közösen).
[55] A negative partition relation. Proceedings of the National Academy 68 (1971), 142—144.
[56] Problems and results in finite and infinite combinatorial analysis. Annals of the New York Academy of Sciences 175 (1970), 115—124 (Erdős Pállal közösen).
[57] Discrete subspaces and de Groot's conjecture ebout the number of open subsets. Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications. Belgrad (1969), 179 (Juhász Istvánnal közösen).
[58] A cure for the telephone disease. Can. Math. Bulletin 15 (1972), 447—450 (E. C. Milnerrel és Szemerédi Endrével közösen).

[59] On disjoint representation of ultrafilters. Theory of sets and topology, Berlin (1972), 215—219 (Juhász Istvánnal közösen).
[60] On some consequences of Martin's axiom. Indagationes Math. 33 (1971), 457—463 (Juhász Istvánnal közösen).
[61] A proof (involving Martin's axiom) of a partition relation. Fundamenta Math. 78 (1973), 193—203 (J. Baumgartnerrel közösen).
[62] Some remarks on simple tournaments. Algebra Universalis 2 (1972), 238—245 (Erdős Pállal, Fried Ervinnel és E. C. Milnerrel közösen).
[63] On discrete subspaces of product spaces. General Topology and its Applications 2 (1972), 11—16 (Juhász Istvánnal közösen).
[64] Two consistency results in topology.Bulletion of the A. M. S. 78 (1972), 711 (Juhász Istvánnal közösen).
[65] A consistency result concerning hereditarily α-separable spaces. Indagationes Math. 35 (1973), 301—307 (Juhász Istvánnal közösen).
[66] A consistency result concerning hereditarily α-Lindelöf spaces. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 24 (1973), 307—312 (Juhász Istvánnal közösen).
[67] On chromatic numbers of graphs and set systems. Proceedings of the Cambridge Summer School (1971) (Erdős Pállal és B. Rothchild-dal közösen).
[68] A generalization of the Erdős—Ko—Rado theorem for finite set systems. Journal of Combinatorial Theory 15 (1973), 359—362 (B. Rothchild-dal közösen).
[69] Simple one-point extensions of tournaments. (Erdős Pállal és E. C. Milnerrel közösen).
[70] On Ramsey like theorems, Problems and results. Proceedings of the Oxford Conference (Erdős Pállal közösen).
[71] On some general properties of chromatic numbers. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 8 Topics in Topology, 243—255, Keszthely (Erdős Pállal és S. Shelah-hal közösen).
[72] Chain conditions on set mappings and free sets. Acta Sci. Math. 34 (1973), 69—79 (Erdős Pállal és Máté Attilával közösen).
[73] Some new algebraic equivalents of the axiom of choice. Publicationes Math. 19 (1972), 339—340 (Kertész Andorral közösen).
[74] On square compact cardinals. P. M. H. 3 (1972), 64—70 (Juhász Istvánnal közösen).
[75] Unsolved and solved problems in set theory. Proceedings of the Tarski Symposium (Berkeley, Calif. 1971) Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1974), 269—287 (Erdős Pállal közösen).
[76] Erdős Pál halmazelméleti munkásságáról. Mat. Lapok 22 (1967), 197—208.
[77] Weak partition relations, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973. 817—836.
[78] Weak saturation properties of ideals. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973. 137—158 (J. Baumgartnerrel és Máté Attilával közösen).
[79] Set mappings, partitions and chromatic numbers. Proceedings of Bristol Logic Conference, July 1973, 347—379 (Máté Attilával közösen).
[80] On hereditarily α-Lindelöf and α-separable spaces, II. Fundamenta Math. 81 (1974), 148—158 (Juhász Istvánnal közösen).
[81] On the number of open sets. Ann. Univ. Sci. Budapest. 16 (1973), 99—102 (Juhász Istvánnal közösen).
[82] Some remarks on set theory. XI. Fundamenta Math. 81 (1974), 261—265 (Erdős Pállal közösen).
[83] On the product of weakly Lindelöf spaces. Proceedings of the Amer. Math. Soc. 48 (1975), 454—457 (Juhász Istvánnal közösen).
[84] On first countable non-Lindelöf S-spaces. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973. 837—852 (Jbhász Istvánnal közösen).
[85] Strong embeddings of graphs into colored graphs. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973. 585—595 (Erdős Pállal és Pósa Lajossal közösen).
[86] Remarks on the cardinality of compact spaces. Proceedings of the A. M. S. 59 (1976), 146—148 (Juhász Istvánnal közösen).
[87] On set systems having large chromatic numbers and not containing prescribed subsystems. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973. 425—513 (Erdős Pállal és F. Galvinnal közösen).
[88] Inequalities for cardinal powers. Annals of Math. 101 (1975), 491—498.
[89] On spaces in which every small subspace is metrizable. Bull. Acad. Pol. Sci. 24 (1976), 727—731 (Juhász Istvánnal közösen).
[90] Embedding theorems for graphs establishing negative partition relations. P. M. H. 9 (1978), 205—229 (Erdős Pállal közösen).
[91] Compactnesslike properties of generalized weak products. Proc. of the Memphis Top. Conference, 185—188 (W. Comforttal és Juhász Istvánnal közösen).

[92] A separable normal topological group need not be Lindelöf, General Topology and its Applications 6 (1976), 199—205 (Juhász Istvánnal közösen).
[93] On Set Systems Having Paradoxial Covering Properties. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 31 (1978), 89—124 (Erdős Pállal és E. C. Milnerrel közösen).
[94] On spanned subgraphs of graphs. Graphentheorie und Ihre Arwendungen, Oberchof (1977) (Erdős Pállal közösen).
[95] On the tightness of product spaces. Logic Colloquium 77. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North Holland (1978), 123—134 (Gerlits Jánossal közösen).
[96] Chain conditions in free products of lattices with infinitary operations. Pacific Journal 83 (1979), 107—115 (D. Kelly-vel és G. Grätzerrel közösen).
[97] An algorithm to prevent propagation of certain diseases at minimum cost. Interfaces between computer science and operations research. MC TRACT 99 (1978), 106—108 (LovászLászlóval közösen).
[98] On some partition properties of families of sets, Studia Sci. Math. Hungar. (1978), 151—155 (Elekes Györggyel és Erdős Pállal közösen).
[99] On weakly separated subsets and networks. Logic Colloquium 78. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 97, North Holland, 235—245.
[100] Lindenöf Spaces à la Shelah. Topology. Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 23, Budapest (1978), 555—569 (Juhász Istvánnal közösen).
[101] Having a small weight is determined by small subspaces. Proceedings of the A. M. S. 79 (1980), 657—658 (Juhász Istvánnal közösen).
[102] When is a Pixley-Roy hyperspace c. c. c. Topology and its Applications 13 (1982), 33—41 (Juhász Istvánnal közösen).
[103] On almost bipartite large chromatic groups. Megjelenés alatt (Erdős Pállal és Szemerédi Endrével közösen).
[104] On the cardinality of quasi-hereditarily Lindelöf spaces. Proceedings of the Vth Prague Topology Symposium. Megjelenés alatt.
[105] Ramsey games. Transactions of the A. M. S. Közlésre benyújtva (Nagy Zsigmonddal közösen).
[106] More on Ramsey—Turán type theorems. Combinatorica. Közlésre elfogadva (Erdős Pállal, T. Sós Verával és Szemerédi Endrével közösen).
[107] Complete subgraphs of infinite multipartite graphs and antichains in partially ordered sets. Journal of the London Math. Soc. Közlésre benyújtva (N. Sauerrel közösen).

KÖNYVEK

Gráfelmélet (Matematikai osztályok számára írt tankönyv) Tankönyvkiadó, 1965.
Combinatorial set theory. A „Studies in Logic and the Foundations of Mathematics" és a „Disquisitiones Mathematicae" sorozatban az Akadémiai Kiadó és a North Holland Kiadó közös kiadásában korrektúrában (Erdős Pállal, Máté Attilával és Richard Radoval közösen).

BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK PRÍMFAKTORAIRÓL II.

ERDŐS PÁL

E témával hosszú életem folyamán már sokat foglalkoztam. Egy azonos című dolgozatom (e cikkre mint I fogok hivatkozni) nemrég jelent meg a Matematikai Lapokban. I-ben több megoldatlan problémát vetettem fel és először ezekről akarok beszélni. A második fejezetben rátérek néhány újabb kérdés vizsgálatára. Sajnos mint rendesen, e témában több a megoldatlan kérdés mint az eredmény.

I.

I-ben vizsgáltam a következő felbontást. Legyen

$$\binom{n}{k} = U(n;k)\cdot V(n;k)\cdot W(n;k)$$

$$P(U(n;k)) \leqq k, \quad p(W(n;k)) > n-k, \quad k < p(V(n;k)) \leqq n-k$$

$$P(V(n;k)) \leqq n-k,$$

ahol $P(x)$ x legnagyobb, $p(x)$ x legkisebb prímfaktora.

Legyen $m(n)$ az a legnagyobb szám, melyre

$$V(m(n);k) \leqq V(n;k).$$

Kérdeztem, hogy mi mondható ki $m(n)$-ről? Lehetségesnek tartottam, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} m(n)/n = \infty \tag{1}$$

fennáll minden k-ra. (1) bizonyítása tényleg nem nehéz. Legyen ugyanis n olyan szám, melyre $W(n;k)=1$, azaz nincs oly $p\left|\binom{n}{k}\right.$ melyre $n-k<p\leqq n$, természetesen majdnem minden n-re ez fennáll. Igaz a következő

Lemma 1. Legyenek $1\leqq n_1^{(i)}<\ldots$ azon számok, melyekre $U(n^{(i)};k)=t_i$. $(p(t_i)\leqq k.)$ Legyen ezen számok sűrűsége $\alpha_i^{(k)}$. Akkor $\alpha_i^{(k)}$ létezik és pozitív. Továbbá $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{(k)}=1$.

A lemma bizonyítása könnyen következik Legendre formulájából, és a bizonyítást nem részletezzük. Az érdeklődő olvasó ezt könnyen megcsinálhatja.

A lemmából azonnal következik, hogy minden ε-hoz van oly A_k, hogy azon n számok sűrűsége, melyekre

$$U(n;k) > A_k$$

kisebb mint ε. Most már könnyen belátható, hogy (1) fennáll egy olyan n_i sorozatra, melynek sűrűsége 1. Legyen n olyan szám, melyre

$$U(n; k) \leqq A_k \quad \text{és} \quad W(n; k) = 1. \tag{2}$$

A (2)-t kielégítő számokra (ezeknek sűrűsége, mint már megjegyeztük, $>1-\varepsilon$ ha $A>A_0(\varepsilon)$)

$$V(n; k) \geqq \binom{n}{k} / A_k. \tag{3}$$

Legyen mármost p egy oly prímszám, melyre $Cn<p<2Cn$, ahol C egy „nagy" konstans. Könnyű belátni, hogy

$$V(p; k) < V(n; k). \tag{4}$$

Ha már (4)-t bebizonyítottuk, akkor állításunkat nyilván már igazoltuk. (4) viszont rendkívül egyszerű. Ugyanis

$$V(p, k) \leqq \binom{p}{k} / p \quad \text{és} \quad \binom{p}{k} < C^k \binom{n}{k} \tag{5}$$

(3) és (5)-ből (4) azonnal következik elegendő nagy n-re.

E bizonyítás nyilván azt is adja, hogy végtelen sok n-re

$$m(n) > cn^{1+\frac{1}{k}}$$

másrészt könnyű belátni, hogy

$$m(n) < n^{1+\varepsilon_k},$$

ahol $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$, de ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

Talán nem érdektelen $V(n; k)$-t alulról és felülről lehetőleg pontosan megbecsülni, egyrészt végtelen sok n-re

$$V(n; k) = \binom{n}{k}$$

sőt ezen n-ek sűrűsége pozitív. Legyen e sűrűség ε_k, könnyű belátni, hogy $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$.

Jelölje mármost

$$\varrho(k) = \limsup_{n=+\infty} (\pi(n) - \pi(n-k)).$$

E függvényt Hardy és Littlewood vizsgálták először. Nem ismeretes, hogy $\varrho(k)>1$ de Hensley és Richards [2] klasszikus vizsgálatai szerint bizonyára igaz, hogy $\varrho(k) - \pi(k) \to \infty$, ha $k \to \infty$. Nyilvánvaló, hogy végtelen sok n-re

$$V(n; k) < (1+o(1)) \binom{n}{k} / n^{\varrho(k)}. \tag{6}$$

Mahler egy jól ismert tétele szerint

$$U(n; k) < n^{1+\varepsilon}$$

és ezért

$$V(n; k) > \binom{n}{k} / n^{1+\varrho(k)+\varepsilon}. \tag{7}$$

Valószínűnek tartom, hogy (7) közelebb van az igazsághoz, mint (6) és azt hiszem, hogy végtelen sok n-re

$$V(n; k) < \binom{n}{k} / n^{1+\varrho(k)-\varepsilon}. \tag{8}$$

Nem lehetetlen, hogy (8) igaz marad, ha a $-\varepsilon$-t elhagyjuk a nevezőből, sőt talán végtelen sok n-re

$$V(n; k) = o\left(\binom{n}{k} / n^{1+\varrho(k)}\right). \tag{9}$$

E kérdések csak most írás közben jutottak eszembe, s így még nem tudom, van-e remény eldönteni őket — azt gondolnám, hogy a válasz tagadó.

Idézett cikkem végén felvetem a következő kérdést: Van-e végtelen sok prímszám, melyre minden $1 \leqq k \leqq \frac{p}{2}$-re

$$W(p; k) > U(p; k). \tag{10}$$

Sejtettem, hogy végtelen sok ily prímszám van, és hogy végtelen sok oly prímszám van, melyre (10) nem teljesül.

Próbáltam bebizonyítani, hogy végtelen sok prímszám van, melyre (10) nem teljesül, de sajnos ez eddig nem sikerült. Ha be tudnám bizonyítani, hogy minden C-re van oly k, melyre $p_1 < p_2 < \ldots$ az egymásután következő prímszámok sorozata,

$$C \log p_k < p_k - p_{k-1} < p_{k+1} - p_k, \tag{11}$$

akkor következne, hogy végtelen sok oly p van, melyre (10) nem teljesül.

Régen bebizonyítottam [3], hogy minden c-re van olyan k, melyre

$$\min (p_k - p_{k-1},\ p_{k+1} - p) > C \log p_k,$$

de (11) bizonyítását egyelőre nem látom.

Graham és én [4] könnyen bebizonyítottuk, hogy van oly $k \leqq (2+o(1)) \log n$, melyre $U(n; k) > 1$. (10) eldöntésével kapcsolatban felmerült a legkisebb $k = k(n)$ meghatározása (illetve megbecslése), melyre

$$U(n; k) > n. \tag{12}$$

$k(n)$-re nem sikerült minden n-re érvényes nem triviális felső becslést találnom. Könnyű belátni, hogy végtelen sok n-re $k(n) = 3$. Majdnem minden n-re $k(n) \log n$ rendű, de nem sikerült kizárnom, hogy végtelen sok n-re $k(n)$ ennél lényegesen nagyobb.

Jelölje $f(c; x)$ azon k indexek számát, melyekre

$$p_{k+1} - p_k > C \log x,\ p_k < x. \tag{13}$$

Biztosra veszem, hogy minden C-re van oly ε_C, melyre

$$f(C; x) > \varepsilon_C \frac{x}{\log x}. \tag{14}$$

Úgy látom, hogy (14)-ből is következne, hogy végtelen sok oly prímszám van, melyre (10) nem teljesül. Úgy érzem — és azt hiszem, ezzel majdnem mindenki egyetért majd, hogy (14) önmagában sokkal érdekesebb, mint esetleges alkalmazása (10)-re.

Érdekes, hogy (14)-et egyáltalán nem tudom bebizonyítani. Sőt még azt se tudom bebizonyítani, hogy

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{\log p_k} \tag{15}$$

sorozatnak van mondjuk $\frac{3}{4}$-nél nagyobb (véges) sűrűsödési pontja. Majdnem 30 éve Ricci és én [5] bebizonyítottuk, hogy a (15) sorozat sűrűsödési pontjai pozitív mértékű halmazt alkotnak, de ennek a halmaznak egyetlen végesben levő pontja se ismeretes. Még Wertzynthius bebizonyította 50 éve, hogy $\overline{\lim}\frac{p_{k+1}-p_k}{\log p_k}=\infty$.

Egyelőre reménytelennek látom annak eldöntését, hogy van-e végtelen sok p prímszám, melyre minden $1\leqq k<\frac{r}{2}$ esetén (10) fennáll. Nem lehetetlen, hogy van oly c, melyre ha $(\log p)^c<k<\frac{p}{2}$, akkor

$$W(p;k) > U(p;k). \tag{16}$$

(16) teljesen reménytelennek látszik.

Most még néhány I-ben felvetett problémát fogok diszkutálni. Legyen n_k, illetve m_k az a legkisebb szám, melyre $U(n_k;k)=1$, illetve $W(m_k;k)=1$. N_k az a legkisebb szám, melyre $U(m_k;k)=1$, illetve $W(m_k;k)=1$. N_k az a legkisebb szám, melyre $U(n_k;k)=W(N_k;k)=1$. Heurisztikus okoskodások alapján úgy gondolom, hogy elegendő nagy k-ra $m_k<n_k<N_k$, ennek bizonyítása vagy cáfolása egyelőre alig remélhető. Úgy gondolnám, hogy

$$\exp k^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < m_k < \exp k^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

és

$$\exp c_1 k/\log k < n_k < \exp c_2 k/\log k.$$

Ezen sejtések is elérhetetlennek látszanak.

Megjegyzem még, hogy 29 a legkisebb prímszám, melyre (10) nem teljesül minden k-ra. $U(29;6)=180$, $W(29;6)=29$.

II.

Jelölje $\omega(m)$ m különböző prímfaktorainak számát. Schinzel egy régi sejtése szerint minden k-ra van végtelen sok n, melyre $\omega\left(\binom{n}{k}\right)=k$. Bizonyára végtelen sok n-re $n-i=(k-i)p_i$ $i=0,\ldots,k-1$. Ez esetben $p\left(\binom{n}{k}\right)=\frac{n}{k}$. Selfridge-vel régen sejtjük, hogyha $n\geqq k^2$, akkor $p\left(\binom{n}{k}\right)\leqq\frac{n}{k}$, és így Schinzel sejtéséből következne, hogy Selfridge-vel való sejtésünk nem javítható. Még évekkel ezelőtt Selfridge-vel bebizonyítottuk, hogy van oly $\alpha>0$, melyre minden $n\geqq k^2$ esetén $p\left(\binom{n}{k}\right)<\frac{n}{k^\alpha}$.

Mahler egy jólismert tétele szerint $U(n;k)<n^{1+\varepsilon}$ fennáll minden $\varepsilon>0$-ra, ha $k>k_0(\varepsilon)$. E tételből könnyen következik, hogyha végtelen sok n-re $\omega\left(\binom{n}{k}\right)=k$,

akkor ezen k prímszám között legfeljebb egy lehet, mely nem nagyobb, mint k — sőt az is könnyen látható, hogy $\omega\left(\binom{n}{k}\right)=k$ esetén $\binom{n}{k}$ második legkisebb prímfaktora n-nel együtt végtelenhez tart.

Könnyen lehetséges, hogyha $n_1<n_2<\ldots$ azon n-ek sorozata, melyekre $\omega\left(\binom{n_i}{k}\right)=k$ akkor $p\left(\binom{n_i}{k}\right)\to\infty$ és $\binom{n_i}{k}$ négyzetmentes véges sok i index kivételével.

Selfridge-vel vizsgáltuk a következő kérdést. Legyen

$$\binom{n}{k}=p_{i_1}\ldots p_{i_r},\quad k<p_{i_1}<\ldots<p_{i_r},\quad r<k. \tag{17}$$

Nevezzük $k-r$-et $\binom{n}{k}$ deficienciájának. Könnyű belátni, hogy fix k mellett csak véges sok oly n van, melyre a deficiencia pozitív. Sokkal mélyebb az a kérdés, hogy van-e végtelen sok oly n, k számpár, melyre a deficiencia pozitív? Ha a válasz igenlő, akkor kérdeztük, van-e oly $\{n_i, k_i\}$ sorozat, melyre $\binom{n_i}{k_i}$ deficienciája végtelenhez tart. Nem lehetetlen, hogy (17)-ben $r=o(k)$ is lehetséges, de úgy gondoltuk, hogy ha a deficiencia a végtelenhez tarthatna, akkor is $(k-r)/k\to 0$.

$$\binom{47}{11}=13\cdot 19\cdot 23\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47.$$

Azaz $\binom{47}{11}$ deficienciája 4 és ez a legnagyobb deficiencia, melyet találtunk.

Legyen mármost $n>k^2$ és

$$\binom{n}{k}=U(n;k)V'(n;k)W'(n;k),$$

ahol

$$V'(n;k)=\prod_{\substack{p^\alpha\|\binom{n}{k}\\ k<p<\frac{n}{k}}}p^\alpha,\quad W'(n;k)=\prod_{\substack{p\mid\binom{n}{k}\\ p\geqq\frac{n}{k}}}p.$$

Egyszerű átlagolással belátható, hogy majdnem minden n-re

$$W'(n;k)=1. \tag{18}$$

Könnyű belátni, hogy (q prímszám)

$$\prod_{n=m+1}^{2m}W'(n;k)<\prod_{\frac{m-k}{k}\leqq q\leqq 2m}q^{k\left[\frac{m}{q}\right]+1}<\exp cmk\log k \tag{19}$$

$q\mid W'(n;k)$ ugyanis csak akkor lehetséges, ha q-nak van többszöröse $n-k$ és n között, és ezért (19) első egyenlőtlensége azonnal következik. $\sum_{x<q<2x}\frac{1}{q}<c/\log x$ jól ismert egyenlőtlenségből (19) második egyenlőtlensége is világos.

(19)-ből (18) azonnal következik, ha még megjegyezzük, hogy ha $W(n;k)>1$ akkor már legalább $\frac{1}{k}n$.

Legyen n_k' az a legkisebb n, melyre $W'(n; k)=1$. (19)-ből könnyen következik, hogy $n_k'<k^{ck}$. Egyelőre nincs nem triviális alsó becslésem n_k'-re.

Nem tudtam bebizonyítani, hogy van oly k és hozzá végtelen sok n, melyekre $W'(n; k)$-nak legalább két prímfaktora van. Ehhez természetesen elég lenne bebizonyítani, hogy végtelen sok n-re $W'(n; k)>n$, de ennek bizonyítása egyelőre nem sikerült. Ha tudnók, hogy

$$\liminf (p_{k+1}-p_k) < \infty, \tag{20}$$

akkor természetesen már következne, hogy már $W(n; k)$-nak is egynél több prímfaktora van. Reméltem, hogy ez $W'(n; k)$-ra (20) nélkül is igazolható lesz, de ezt most már nem hiszem.

Schinzel sejtéséből következne, hogy végtelen sok n-re $W'(n; k)=\binom{n}{k}$, de ennek bizonyítása egyelőre nem remélhető. Bizonyára végtelen sok n-re

$$P\left(\binom{n}{k}\right) < (\log n)^{c_k} \tag{21}$$

de (21) bizonyítása is reménytelennek látszik még akkor is, ha (21) jobboldalán $(\log n)^{c_k}$ helyett n^{ε} vagy akár $n^{1-\varepsilon}$ áll, ahol $\varepsilon>0$ nem függ k-tól.

Ennek dacára $\binom{n}{k}$ prímfaktorainak eloszlása nem teljesen szabálytalan. Jelölje

$$f(n; k, \alpha) = \prod_{\substack{p^{\beta} \| \binom{n}{k} \\ p<n^{\alpha}}} p^{\beta}$$

szorzatot. Bizonyára fennáll a következő

Tétel. Legyen $0<\alpha<1$. Minden $\varepsilon>0$ és $n>0$-hoz van oly $k_0=k_0(\varepsilon, \eta)$, melyre ha $k>k_0$, akkor azon n számok sűrűsége, melyekre

$$n^{k\alpha(1-\varepsilon)} < f(n; k, \alpha) < n^{k\alpha(1+\varepsilon)}$$

nagyobb, mint $1-\eta$.

Talán szebb a következő nagyon hasonló tétel:

Legyen $k(n)\to\infty$ tetszőlegesen lassan, akkor azon n számok sűrűsége, melyekre

$$f(n; k(n), \alpha) = n^{k\alpha(1+o(1))}$$

minden $\eta<\alpha<1-\eta$ esetén,

Sajnos e tételeket csak $\alpha\leqq\frac{1}{2}$-re tudom bebizonyítani és ezért a bizonyítást csak vázolni fogom. Elsősorban is jegyezzük meg, hogy minden $0<\alpha<1$ esetén fennáll

$$\sum_{n=2k}^{x} \log f(n; k, \alpha) = (1+o(1))x\alpha k \log x. \tag{22}$$

(22) bizonyítása nagyon hasonlít (19) bizonyításához és ezt nem is részletezzük.

Tételünk azonnal következik Turán módszerével (második momentum módszer), ha sikerül kimutatnunk, hogy

$$\sum_{n=2k}^{x} (\log f(n; k, \alpha))^2 = x(1+\varepsilon_k)\alpha^2 k^2 (\log x)^2, \tag{23}$$

ahol $(\varepsilon_k)\to 0$ ha $k\to\infty$ (és természetesen $x\to\infty$). (23) bizonyítása egyszerű átlagolással

történik, de amint mindjárt látni fogjuk, csak $\alpha<\frac{1}{2}$-re sikerül. Fennáll ugyanis $\alpha\leqq\frac{1}{2}$-re

$$\sum_{n=2k}^{x}(\log f(n;k,l))^2=(1+\varepsilon_k)\sum_{p\leqq m^\alpha}\frac{xk(\log p)^2}{p}= \tag{24}$$

$$=(1+\varepsilon_k)\left(\sum_{p\leqq n^\alpha}\frac{xk(\log p)^2}{p}+\sum_{p,q<n^\alpha}\frac{xk^2\log p\log q}{pq}\right)=(1+\varepsilon_k)\alpha^2k^2x(\log x)^2.$$

Azonban ez az okoskodás azon alapszik, hogy azon $n\leqq x$ számok száma, melyekre $\binom{n}{k}$ többszöröse pq-nak $(1+o(1))\frac{k^2x}{pq}$ és ezt nem tudjuk bizonyítani, ha $pq>n$.

(24)-ből tételünk azonnal következik, de nagyon valószínű, hogy a tétel minden $\alpha<1$-re igaz marad, de ez az egyszerű bizonyítás nem alkalmazható.

Most még vizsgáljuk $\omega\left(\binom{n}{k}\right)$ változását, amint n változik $2k$-tól végtelenig. Könnyű belátni, hogy

$$\min_{2k\leqq n<\infty}\omega\left(\binom{n}{k}\right)=(1+o(1))\frac{k\log 4}{\log k}. \tag{25}$$

Azt is könnyű belátni, hogy n értéke, melyre a minimum (25)-ben eléretik $(1+o(1))2k$, de nem tudjuk, hogy van-e végtelen sok k, melyre a minimum $n=2k$-ra éretik el [4].

Egyszerű átlagolással könnyen belátható, hogy

$$\sum_{2k<n<k^\alpha}\omega\left(\binom{n}{k}\right)=(1+o(1))k\log\alpha\quad(k\to\infty). \tag{26}$$

Valószínűleg azon $n<k^{1+\alpha}$ számok számára, melyekre

$$\omega\left(\binom{n}{k}\right)=(1+o(1))k\frac{\log n}{\log k} \tag{27}$$

nem áll fenn $o(k^\alpha)$. (27) bizonyítása azonban ugyanúgy nem sikerül, mint (23) bizonyítása.

Legyen $f(k)$ k legkisebb értéke, melyre $\omega\left(\binom{f(k)}{k}\right)\geqq k$. Minden bizonnyal fennáll

$$\log(f(k))=(1+o(1))e\log k. \tag{28}$$

(26)-ból tényleg könnyen adódik, hogy $f(k)<k^{e+\varepsilon}$ minden $\varepsilon>0$ és $k>k_0(\varepsilon)$ esetén. $f(k)>k^{e-\varepsilon}$ bebizonyítása azonban egyelőre reménytelennek látszik.

$F(k)$ jelentse k legnagyobb értékét, melyre

$$\omega\left(\binom{F(k)}{k}\right)<k.$$

Nem teljesen világos annak bizonyítása, hogy minden k-ra

$$F(k)>f(k). \tag{29}$$

Nem kétséges azonban, hogy (29) igaz. Sőt bizonyára ha $k \to \infty$, akkor

$$F(k)/f(k) \to \infty.$$

Szemerédivel próbáltunk $F(k)$-ra felső becslést találni, de még $F(k) < \exp((1-\varepsilon)h)$ bizonyítása se sikerült nekünk. Jelentse A_k a k-nál nem kisebb egész számok legkisebb közös többszörösét. Bebizonyítottuk, hogy ha $k > k_0$, akkor

$$F(k) < A_k. \tag{30}$$

Még e nevetségesen gyenge eredmény bizonyítása se teljesen triviális.

Először is bebizonyítjuk, hogy

$$F(k) < A_k + k. \tag{31}$$

(31) tényleg nagyon egyszerű. p-ről akkor mondjuk, hogy $n-i$-hez tartozik $0 \leqq i \leqq k$, ha

$$p^\alpha \| n-i \quad \text{és} \quad p^\alpha > k. \tag{32}$$

Ha p $(n-i)$-hez tartozik, akkor $p \left| \binom{n}{k} \right.$, továbbá nyilván p legfeljebb egy $n-i$-hez tartozhatik. Ha tehát minden i-re $(0 \leqq i < k)$ tartozik $n-i$-hez prímszám, akkor $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k$. Ha viszont $n-i$-hez nem tartozik prímszám, akkor nyilván

$$n-i \leqq \prod_{p^\alpha \leqq k} p^\alpha \quad \text{azaz} \quad n \leqq A_k + i$$

és így (31) be van bizonyítva. Most még (30)-at is be kell bizonyítani. Természetesen csak azt kell bebizonyítani, hogy ha $k > k_0$, akkor $n-k < A_k \leqq n$ esetben $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k$. Legyen $n-i = A_k$. Azonnal belátható, hogy az $n-j$ számokhoz $j \neq i$ tartozik prímszám, és így $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k-1$. Vegyük észre mármost, hogy ha

$$\frac{5k}{12} < p_1 < \frac{k}{2} < p_2 < \frac{7k}{12} \tag{33}$$

(ha $k > k_0$ p_1 és p_2 léteznek), akkor $\binom{n}{k}$ osztható vagy p_1 vagy p_2-vel ti. ha $\frac{5k}{12} < i < \frac{7k}{12}$, akkor $A_k = n-i$ mellett $A_k \pm p_k$ is az $n-k+1 \ldots n$ számok között előfordul, és így $p_1 \left| \binom{n}{k} \right.$.

Ha i nincs $\left(\frac{5k}{12}, \frac{7k}{12}\right)$ intervallumban, akkor viszont p_2-nek van két többszöröse az $n-k+1, \ldots, n$ számok között és így $p_2 \left| \binom{n}{k} \right.$. Legyen tehát

$$p \left| \binom{n}{k} \right., \quad \frac{5k}{12} < p < \frac{7k}{12} \quad \text{és} \quad n-k \leqq A_k + \varepsilon p \leqq n, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

ha p nem tartozik $(A_k + \varepsilon p)$-hez, akkor $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k$, ugyanis $p \left| \binom{n}{k} \right.$, de eddig p-t nem vettük számításba. Tehát ezért végül p $(A_k + \varepsilon p)$-hez tartozik. Nyilván $(A_k, A_k + \varepsilon p) = p$. Ha $A_k + \varepsilon p$-nek van még p-n kívül más, mondjuk q prímfaktora is, akkor

$q>k$ és q nem tartozhat egyetlen $(n-j)$-hez se, és ezért megint $\omega\left(\binom{n}{k}\right)\leqq k$. Tehát végül is feltehetjük, hogy

$$A_k+\varepsilon p = p^t. \tag{34}$$

Tehát

$$\frac{A_k}{p} = p^{t-1}+\varepsilon. \tag{35}$$

(35) azonban lehetetlen, ha $k>k_0$. Ennek bizonyítását most vázoljuk. $x^{t-1}+\varepsilon$ többszöröse $g(x)$ polinomnak, ahol $g(x)$ vagy a $(t-1)$-edik vagy $(2t-2)$-edik primitív körosztási polinom. $t-1$ faktortól eltekintve $g(x)$ minden prímfaktora $\equiv 1 \pmod{t-1}$. (35)-ből azonban következik, hogy $t>ck/\log k$ és amint egyszerű számolás mutatja, hogy ezen prímszámok adaléka A_k-ban kisebb, mint $k^{c(\log k)^2}$. Ugyancsak egyszerű számolás mutatja, hogy $g(p)$ ennél sokkal nagyobb, $(g(p)>\exp(k^{1-\varepsilon})$, $p>\frac{k}{3}$, $\varphi(t-1)>\frac{c_k}{(\log k)^2}$ miatt) és ezzel (30) végül igazolva van.

Célszerű lenne (30)-ra egy egyszerűbb bizonyítást találni, de ez egyelőre nekünk nem sikerült. (30) kissé élesíthető, módszerünkkel minden további nehézség nélkül nyerhető, hogy $F(k)=o(A_k)$, de

$$F(k) < \exp\left((1-c)k\right) \tag{36}$$

egyelőre nem sikerült.

(36) nehézség nélkül nyerhető lenne a következő sejtésekből:

I. Jelölje $H(n; k)$ azon $0\leqq i<k$ számok számát, melyekre $P(n-i)\leqq k$. Igaz-e, hogy

$$\max_{n>2^k} H\left((n; k) = o\left(\frac{k}{\log k}\right)\right)? \tag{37}$$

Mahler tételéből következik, hogy ha $n>k_0$, akkor $H(n; k)\leqq 1$, de minthogy Mahler tételének effektivizálása eddig nem sikerült, (37) bizonyításához nem használható.

II. Jelölje $L(n; k)$ azon $0\leqq i<k$ számok számát, melyekre van

$$p \leqq k, \quad p^\alpha|(n-i), \quad p^\alpha > n^{1/2}.$$

Igaz-e, hogyha $n>2^k$, akkor $L(n; k)=o\left(\frac{k}{\log k}\right)$?

Egy régi sejtésem szerint, ha $n\geqq 2k$, akkor $\binom{n}{k}$ többszöröse valamelyik $(n-i)$-nek, $0\leqq i<k$-ra. Schinzel e sejtésre ellenpéldát talált, és később Schinzellel bebizonyítottuk, hogy végtelen sok k-ra a sejtés hamis [6]. Sőt, most Schinzel sejti, hogy a sejtés hamis minden $n\geqq 34$-re, mely nem p^α alakú, könnyű belátni, hogyha $k=p^\alpha$, akkor a sejtés igaz.

Legyen $f(n; k)\binom{n}{k}$ legnagyobb osztója, mely n-nél nem nagyobb. Sejtettem, hogy van oly c abszolút konstans, melyre $f(n; k)>cn$.

Most úgy gondolom, hogy e sejtés nem igaz. Legyen $n-i=a_ib_i$, ahol $P(a_i)\leqq k$ $p(b_i)>k$. Sejtésem megcáfolásának céljából először is szeretném bebizonyítani, hogy minden c-hez van oly $\binom{n}{k}$ $(n\geqq 2k)$, melyre $p\left(\binom{n}{k}\right)>k$ (azaz $U(n; k)=1$) és

$\min_{0 \leqq i < k} a_i > c$. Ez egyelőre nem sikerült. Lehetséges, hogy elnézek valamit, azonban e kérdés eldöntése talán nem egészen triviális, ha ugyanis az a_i-k nagyok, akkor várható, hogy $U(n; k) > 1$.

Egy régi sejtésem szerint $\min_{0 \leqq i < k} a_i = o(k)$, azaz ha $k > k_0(\varepsilon)$ és $n \geqq 2k$, akkor van oly i, $0 \leqq i < k$, melyre $a_i < \varepsilon k$. Ruzsa nemrég megjegyezte, hogy ha sejtésem igaz, akkor már majdnem nem javítható, ugyanis ha $f(n; k) = \min_{0 \leqq i < k} a_i$, akkor Ruzsa egyszerűen bebizonyította, hogy $f(n; k) > c_1 k/\log k$ lehetséges, és nem lehetetlen, hogy másrészt $f(n; k) < c_2 k/\log k$.

IRODALOM

[1] Erdős Pál, Binomiális együtthatók prímfaktorairól, Mat. Lapok 28 (1977—80) 287—296. E cikkben sok idevonatkozó dolgozatomat citálom.

[2] D. Hensley and I. Richards, Primes in intervals, Acta Arith. 25 (1974), 375—391, lásd még P. Erdős and I. Richards, Density functions for prime and relatively prime numbers, Monatshefte für Math. 83 (1977), 99—112.

[3] P. Erdős, Problems and results on the differences of consecutive primes, Publ. Math. Debrecen, 1 (1949), 33—37.

[4] P. Erdős and R. L. Graham, On the prime factors of $\binom{n}{k}$, Fibonacci Quarterly, 14 (1976), 348—352.

[5] G. Ricci, Recherches sur l'allure de la suite $\frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n}$. Coll. théorie des nombres Bruxelles 1955, 93—96, lásd még Riv. Math. Univ. Parma 5 (1959), 3—54.

[6] A. Schinzel, Sur un problème de P. Erdős, Coll. Math. 5 (1958), 198—204.

О ПРЯМЫХ ФАКТОРАХ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЭНТОВ II.

ПАЛ ЕРДЁШ

ON PRIME FACTORS OF BINOMIAL COEFFICIENTS II.

P. ERDŐS

EGY KÖRT ELTAKARÓ KÖRÖKRŐL

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Azt mondjuk, hogy a $k_1, \ldots, k_n$ kör m-szeresen eltakarja a k kört, ha $k_1, \ldots, k_n$ közül semelyiknek sincs belső pontja k-val, és k középpontjából kiinduló minden félegyenes $k_1, \ldots, k_n$ közül legalább m kört metsz vagy érint. Megmutatjuk, hogy ha az $O_1, \ldots, O_n$ középpontú körök m-szeresen eltakarják az O középpontú egységkört, akkor

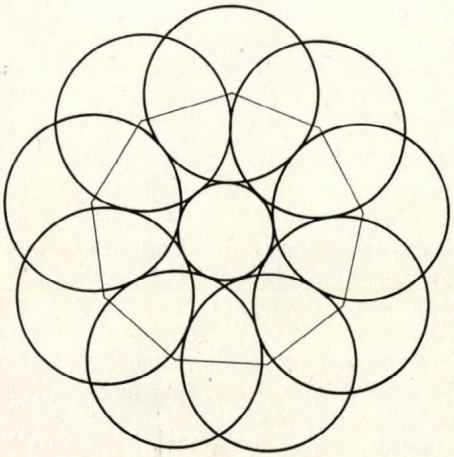
$$\sum_{i=1}^{n} OO_i \geqq \frac{n}{1-\sin\frac{\pi m}{n}}. \tag{1}$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha a takaró körök mind érintik az egységkört, és mindegyiknek O-nál levő látószöge $2\pi m/n$.

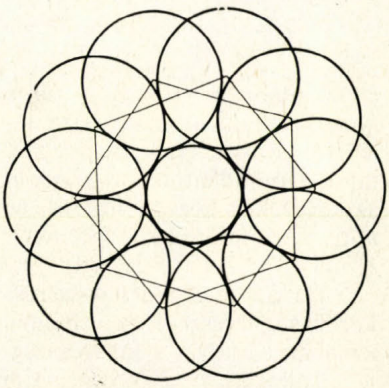
Ha m és n relatív prím, akkor egyenlőség esetén $O_1, \ldots, O_n$ egy szabályos n-szög csúcsaiban helyezkednek el. Ha m és n legnagyobb közös osztója t, akkor $O_1, \ldots, O_n$ t n/t oldalú szabályos sokszög csúcsait alkotják. A t sokszög közül egyesek vagy mind összeeshetnek. Az $n=9$, $m=2$ esetet az 1. ábra, az $n=10$, $m=2$ esetet a 2. ábra szemlélteti.

Ha az O_i középpontú k_i kör sugara r_i, és O-ból vett látószöge $2\alpha_i$, akkor

$$r_i \geqq \frac{\sin\alpha_i}{1-\sin\alpha_i}.$$



1. ábra



2. ábra

Egyenlőség csak akkor áll, ha k_i érinti k-t. Azt állítjuk, hogy

$$y(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$(0, \pi/2)$-ben növekvő, konvex függvény. Valóban

$$(1-\sin\alpha)^2 y'(\alpha) = \cos\alpha > 0, \quad 0 < \alpha < \pi/2$$

$$(1-\sin\alpha)^3 y''(\alpha) = -\sin\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos\alpha > -\sin\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha > 1-\sin\alpha > 0.$$

Összegezve az $r_i \geqq y(\alpha_i)$ egyenlőtlenségeket, alkalmazva a Jensen-féle egyenlőtlenséget és figyelembe véve, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq \pi m$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \geqq ny\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) \geqq ny(\pi m/n).$$

Ezért

$$\sum_{i=1}^{n} OO_i \geqq n\{1+y(\pi m/n)\},$$

ami ekvivalens az (1) alatti egyenlőtlenséggel. Az egyenlőség esete triviális.

Jelöljük (1) jobb oldalát $z(n, m)$-mel, és számítsuk ki $z(n, 1)$ közelítő értékét néhány n-re:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$z(n, 1)$	22.39	13.66	12.13	12.00	12.36	12.96	13.68	14.47	15.31

Mivel $n \geqq 12$-re $\sum_{i=1}^{n} OO_i$ nyilvánvalóan nagyobb mint 12, látjuk, hogy egy egységkört takaró körök középpontjainak az egységkör középpontjától mért távolság-összege legalább 12. Hasonlóképpen látjuk, hogy kétszeres takarás esetén a szóban forgó távolság-összeg legalább $z(11,2) = 23.946\ldots$.

Írjuk $z(n, m)$-et a következő alakban:

$$z(n, m) = \frac{\pi m}{\frac{\pi m}{n}\left(1-\sin\frac{\pi m}{n}\right)},$$

és tekintsük a $w(x) = x(1-\sin x)$ függvény maximumát a $(0, \pi/2)$ intervallumban. A maximum a $w'(x) = 1-\sin x - x\cos x = 0$ egyenlet $(0, \pi/2)$ belsejébe eső gyökénél lép fel. Ennek értéke $x_0 = 0.55597\ldots$ Bevezetve a $c = \pi/w(x_0) = 11.9658237\ldots$ konstanst, kimondhatjuk, hogy egy egységkört m-szeresen takaró körök középpontjainak az egységkör középpontjától mért távolságösszege legalább cm. Ez a becslés nagy m-re aszimptotikusan pontos. Az extremális m-szeres takarás aszimptotikusan $r_0 = y(x_0) = 1.1176\ldots$ sugarú körökkel érhető el.

Ha az egységkört m-szeresen takaró körök száma bármekkora lehet, akkor a körök sugárösszegének infimuma nyilvánvaló módon $2\pi m$. Az analóg térbeli problémában azonban a sugárösszeg infimumának kérdése nehéz.

Takarják el az O középpontú g egységgömböt m-szeresen az $O_1, \ldots, O_n$ középpontú, $r_1, \ldots, r_n$ sugarú $g_1, \ldots, g_n$ gömbök. Ha g_i g-re való centrális vetületének

területe ω_i, akkor $r_i \geqq z(\omega_i)$, ahol

$$z(\omega) = \frac{\sqrt{\omega(4\pi-\omega)}}{2\pi - \sqrt{\omega(4\pi-\omega)}}, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha g_i érinti g-t.

Ha $\omega \to 0$ vagy $\omega \to \pi/2$, akkor $z(\omega)/\omega \to +\infty$. Ezért $z(\omega)/\omega$ $(O, \pi/2)$-ben valamely ω_0 helyen felveszi a minimumát. Könnyen látható, hogy csak egy ilyen hely van, mégpedig az $\omega(4\pi-\omega)^3 = 16\pi^4$ egyenlet $(O, \pi/2)$ belsejébe eső gyöke. Ennek értéke $\omega_0 = 1.009791\ldots$. Mivel $z(\omega) \geqq \frac{z(\omega_0)}{\omega_0}\omega$, és $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \geqq 4\pi m$, azért

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \geqq \sum_{i=1}^{n} z(\omega_i) \geqq \frac{z(\omega_0)}{\omega_0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \geqq 4\pi \frac{z(\omega_0)}{\omega_0} m.$$

Bevezetve az $a = 4\pi \frac{z(\omega_0)}{\omega_0} = 14.8275\ldots$ állandót

$$\sum_{i=1}^{n} r_i > am.$$

Egyszeres takarás esetén kedvezőnek látszik $\sum_{i=1}^{n} r_i$ minimalizálása szempontjából, ha g-t 12 kongruens gömb érinti egy szabályos ikozaéder csúcsaiban, akkorára választva a gömböket, hogy azok g-t éppen eltakarják. Most $\sum_{i=1}^{12} r_i = 18.539\ldots$. A fenti becslés viszont csak annyit ad, hogy $\sum_{i=1}^{n} r_i > 14.827\ldots$. Nagy m-re azonban becslésünk aszimptotikusan pontos. Legyen ugyanis n az a legkisebb egész szám, amelyre $n\omega_0 \geqq 4\pi m$, és rakjunk g-re n ω_0 területű gömbsüveget úgy, hogy középpontjaik lehetőleg egyenletesen oszoljanak el g felületén. Akkor g felületének minden pontját közelítőleg m gömbsüveg borítja, s így g-t a gömbsüvegek középpontjaiban érintő $z(\omega_0) = 0.3522\ldots$ sugarú gömbök közelítőleg m-szeresen takarják. Ez a meggondolás mutatja, hogy az a állandó nem helyettesíthető kisebbel.

A fenti bizonyítás gondolatát alkalmazva a $\sum_{i=1}^{n} OO_i$ összeg becslésére azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} OO_i > bm,$$

ahol $b = 4\pi\{1+z(\bar{\omega})\}/\bar{\omega} = 23.3137\ldots$ és $\bar{\omega} = 1.840\ldots$ az a hely, ahol $\{1+z(\omega)\}/\omega$ minimális. Nagy m-re $\sum_{i=1}^{n} OO_i$ minimuma aszimptotikusan $z(\bar{\omega}) = 1.0887\ldots$ sugarú gömbökkel érhető el.

Bárány Imre egy kérdésére válaszolva Vincze István bebizonyította a következő egyenlőtlenséget. Érintsék az egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú $k_1, \ldots, k_n$ körök

kívülről a k egységkört. Ha k_i érinti k_{i+1}-et ($i=1, \ldots, n$; $k_{n+1}=k_1$), akkor

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \geqq \frac{\sin \pi/n}{1-\sin \pi/n}.$$

Ez közvetlen folyománya az (1) alatti egyenlőtlenségnek. Vincze bizonyítása különbözik a miénktől. A fenti vizsgálatokat Vince István egyenlőtlensége inspirálta.

О КРУГАХ ПОД КРЫВАЮЩИХ ОДИН КРУГ

ЛАСЛО ФЕЙЕШ ТОТ

ON CIRCLES COVERING A GIVEN CIRCLE

L. FEJES TÓTH

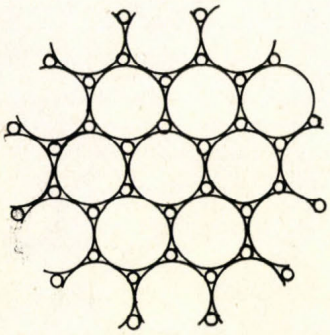
ADOTT SUGÁRELOSZLÁSÚ KÖRÖK SŰRŰ ELHELYEZÉSE

BEZDEK ANDRÁS és FEJES TÓTH LÁSZLÓ

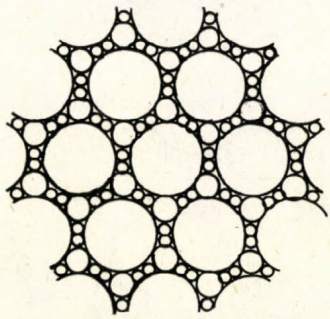
Tekintsünk n kört, amelyek területe $1/n, 2/n, \ldots, n/n$. Hogyan kell ezeket a köröket elhelyezni, úgy hogy egy lehetőleg kis négyzetben (vagy valamilyen más adott alakú tartományban) elférjenek? Azzal a határesettel szeretnénk foglalkozni, amikor n minden határon túl nő. A kérdés tehát más szavakkal az, hogyan kell a (0, 1) intervallumban egyenletesen elosztott területű köröket lehetőleg sűrűn elhelyezni. Gazdaságos elhelyezést fogunk konstruálni abban az esetben, amikor 1. a körök területe, 2. a körök sugara egyenletesen oszlik el a (0, 1) intervallumban. Ezeknek a konstrukcióknak a mintájára sűrű elhelyezéseket nyerhetünk más adott sugáreloszlás esetén is.

Körök valamilyen $\{k\}$ halmazának homogenitását az $\inf |k|/\sup |k|$ hányadossal definiáljuk, ahol $|x|$ az x ponthalmaz területét jelenti. Tekintsük a síkon a h homogenitású körök minden lehetséges elhelyezését. Legyen $d(h)$ az ilyen elhelyezések felső sűrűségének szuprémuma.

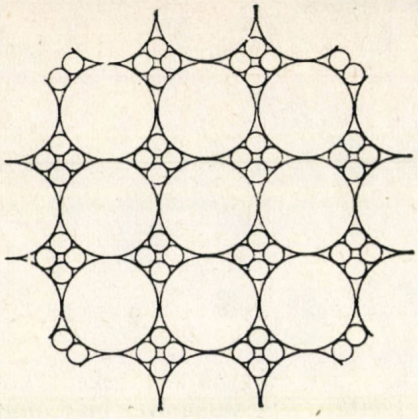
Molnár József speciális konstrukciókkal alsó korlátot adott $d(h)$-ra a $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1, 1\right)$ intervallumban. Ezt a korlátot később bizonyos részintervallumokban Heppes Aladár még javította [1]. A konstrukciók lényegét az 1.—8. ábrákon feltüntetett elhelyezések alkotják. Jelöljük ezeket rendre MH_1-, ..., MH_8-cal. Legyen ezekben az elhelyezésekben szereplő nagyobb körök sugara 1, a kisebbeké $r_1, r_2 < r_2', r_3, \ldots, r_8$, a kis és nagy körök számának a viszonya $v_1, v_2, v_2', v_3, \ldots, v_8$, a körök homogenitása $h_1 = r_1^2, \ldots, h_8 = r_8^2$, és az elhelyezés sűrűsége $d_1, \ldots, d_8$. Ezeket az értékeket, illetőleg azok közelítő értékét a mellékelt táblázat tartalmazza.



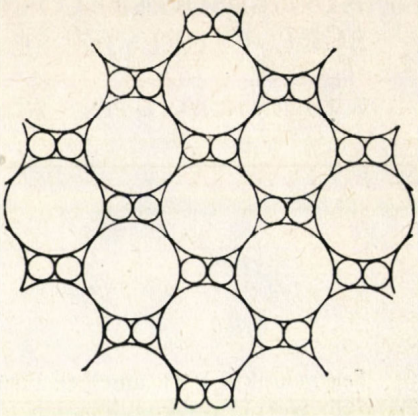
1. ábra



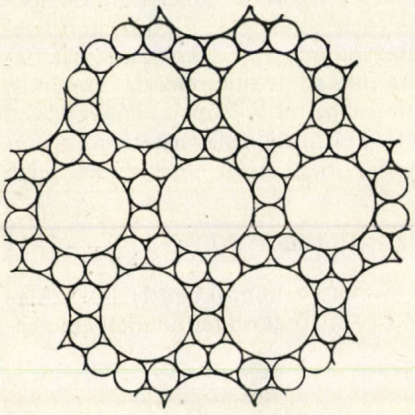
2. ábra



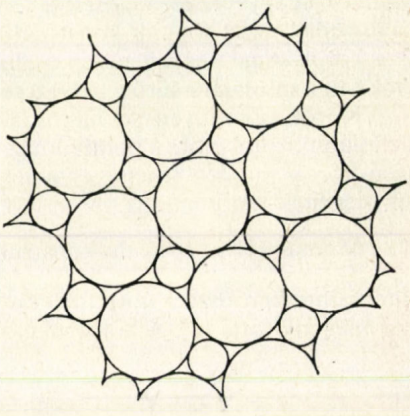
3. ábra



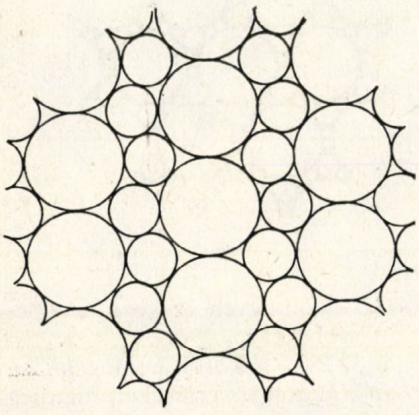
4. ábra



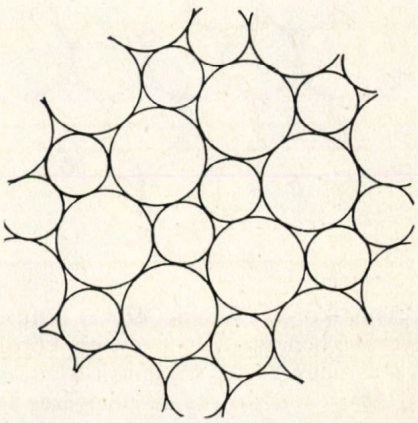
5. ábra



6. ábra



7. ábra



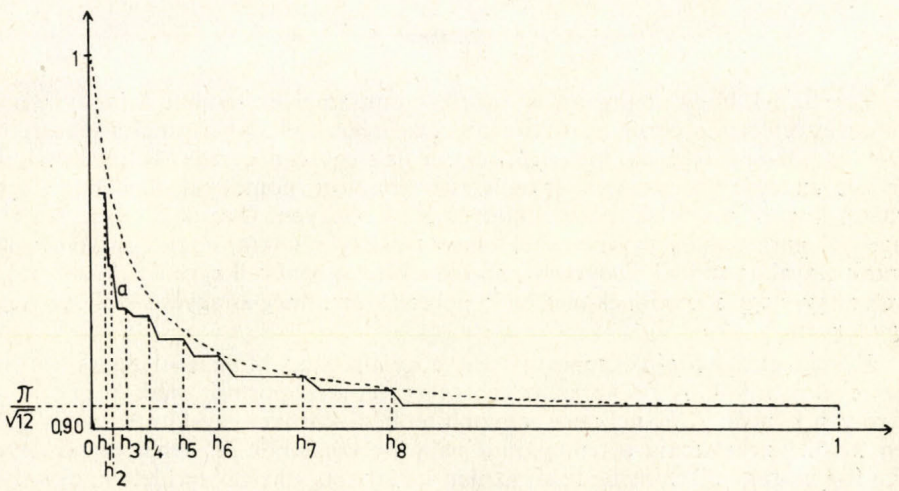
8. ábra

i	r_i		r_i'	v_i	v_i'	h_i	d_i
1	$\frac{2}{\sqrt{3}}-1$	.15470		2		.02393	.95031
2	1/6	.16667	1/3	6	2	.02777	.94469
3	$1+\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{8}}$	.21685		4		.04702	.93312
4	$\frac{\sqrt{17}-3}{4}$	.28078		2		.07884	.93190
5	$\frac{\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}$	.34920		6		.12194	.92465
6	$\sqrt{2}-1$	.41421		1		.17157	.92015
7	$8x^3+3x^2-2x-1=0$ (0, 1)-be eső gyöke	.53330		2		.28440	.91418
8	$x^4-10x^2-8x+9=0$ (0, 1)-be eső gyöke	.63756		1		.40648	.91068

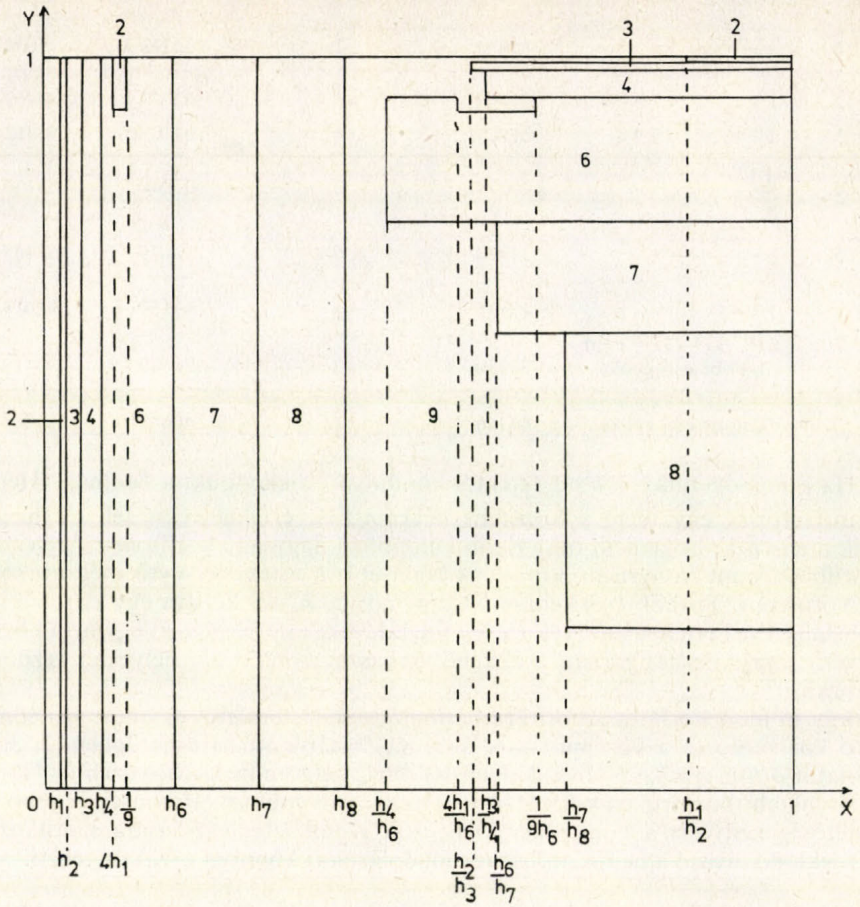
Ha a homogenitást a $h=1$ értéktől kiindulva csökkentjük, a Molnár—Heppes-féle $a(h)$ korlát egy ideig a konstans $d(1)=\pi/\sqrt{12}$ értéket veszi fel. Ez megfelel annak a ténynek, hogy nem túlságosan különböző nagyságú körök nem helyezhetők el sűrűbben mint kongruens körök. A legkisebb h érték, amelyre még $a(h)=d(1)$ 0.41 körül van. Tovább csökkentve h-t $a(h)$ nő, de h_8-tól kezdve egy darabig ismét a konstans $a(h_8)$ értéket veszi fel. Ez így folytatódik, úgy hogy $a(h)$ egy nem növekvő függvény, amelynek szigorúan csökkenő szakaszai a $h_1, \ldots, h_8$ helyeken kezdődnek (9. ábra).

Egy jó felső korlátot ad $d(h)$-ra három h, h és 1 területű, egymást kölcsönösen érintő kör sűrűsége a középpontjaik által meghatározott háromszögben [2, 3]. Ezt a korlátot $a(h)$ a $h=h_6$, h_7 és h_8 helyen 10^{-4} nagyságrendben megközelíti.

Az alábbi konstrukciók az MH_i elhelyezésekre épülnek. Rövidség és jobb áttekinthetőség kedvéért a konstrukcióknak csak szemléletes vázolására szorítkozunk. Az érdeklődő olvasó a heurisztikus meggondolásokat könnyen egzakttá teheti.



9. ábra



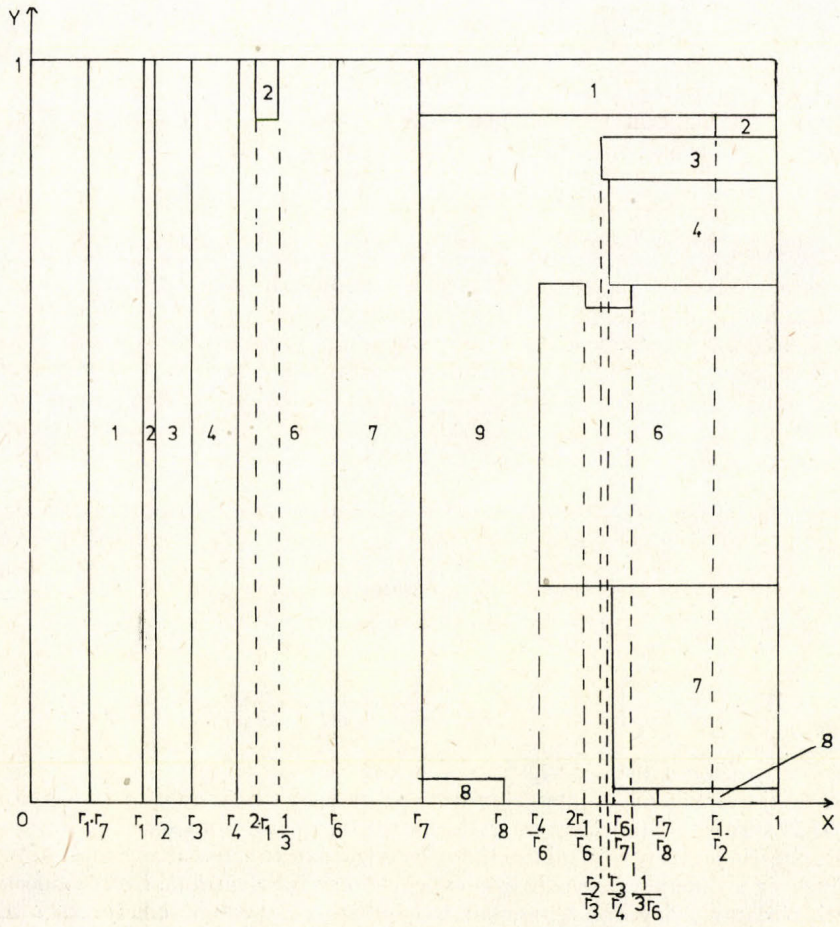
10. ábra

Tegyük fel, hogy „nagyon sok" körünk van, amelyek területe a (0, 1) intervallumban egyenletesen oszlik el. Tekintsük egy derékszögű xy koordináta-rendszerben a $0<x\leqq 1$, $0<y\leqq 1$ egyenlőtlenségekkel definiált egységnégyzetet. Reprezentáljuk a köröket az egységnégyzetben egyenletesen elosztott pontokkal úgy, hogy egy t területű körnek megfelelő pont x koordinátája t legyen. Osszuk a négyzetet az y-tengellyel párhuzamos egyenesekkel olyan keskeny sávokra, hogy egy sávban levő pontok „gyakorlatilag" kongruens köröket képviseljenek. Legyen a körök száma olyan nagy, hogy a köröknek megfelelő pontok száma még az egyes sávokban is igen nagy legyen.

Köreinket úgy fogjuk csoportosítani, hogy alkalmas Molnár—Heppes-féle elhelyezéseket nyerjünk. A 10. ábrán az egységnégyzet a csoportosításnak megfelelő mezőkre van bontva. A h_1-nél nem nagyobb területű köröket egyelőre hagyjuk figyelmen kívül. Ezeket majd a fennmaradt nagyobb körökből álló elhelyezések hézagjaiba fogjuk rakni. Tekintsük tehát azokat a köröket, amelyek területe h_1 és h_2 közé esik. Vegyünk ezekhez a körökhöz harmadannyi 4-szer ilyen területű, és hatodannyi

36-szor ilyen területű kört. Ezeknek a köröknek megfelelő pontok a 2-vel jelölt három mezőben vannak. Bontsuk mind a három mezőt az y-tengellyel párhuzamos egyenesekkel mondjuk 1000 egyenlő területű részmezőre. Legyen k egy 1000-nél nem nagyobb természetes szám, és tekintsük a 2-es számú három mezőben balról a k-adik három részmezőt. Ezekben „gyakorlatilag" kongruens köröknek megfelelő pontok vannak. Mivel továbbá feltevésünk szerint a szóbanforgó körök száma igen nagy, és azok terület- és számaránya megegyezik az MH_2 elhelyezésben szereplő körökével, ezért a köröket elhelyezhetjük az MH_2-nek megfelelő elrendezésben d_2-höz közeli sűrűséggel egyetlen téglalapban, amelyről csak annyit kell kikötnünk, hogy kisebbik oldala is „nagy" legyen. Az így létrejövő 1000 téglalapot egy téglalappá rakhatjuk össze, amelyben a 2-vel jelölt három mezőhöz tartozó körök mind elhelyezhetők d_2-höz közeli sűrűséggel. A d_2 sűrűség tetszés szerinti pontossággal megközelíthető, ha az „1000" szerepét egy elég nagy szám játssza, és ugyanakkor a részmezőkben még mindig nagyon sok kört reprezentáló pont van.

Hasonlóképpen helyezhetjük el az i-vel ($i=3, 4, 6, 7, 8$) jelölt két mezőhöz tartozó köröket egy téglalapban MH_i elrendezésben d_i-hez bármilyen közeli sűrű-



11. ábra

séggel. (Az MH_5-nek mefefelelő csoportosítás később tárgyalandó ok miatt kedvezőtlen.) A 9-cel jelölt mezőhöz tartozó köröket $d_9=\pi/\sqrt{12}$-höz közeli sűrűséggel helyezzük el.

Azokat a köröket, amelyek területe h_1h_8 és h_1 közé esik az MH_1 elhelyezésnek megfelelően csoportosítjuk azokkal a körökkel, amelyeket a 9-es mezőben a $h_8<x\leqq 1$, $0<y\leqq\frac{1}{2}h_1$ téglalapba eső pontok reprezentálnak. A szóban forgó „kis" köröket tehát a „nagy" körök elhelyezésének hézagjaiba rakjuk. Ugyanezt tehetjük a h_1h_8-nál kisebb területű körökkel, mert ehhez a 9-cel jelölt mezőből csak a $h_8<x\leqq 1$, $\frac{1}{2}h_1<y\leqq\frac{1}{2}\frac{h_1}{1-h_8}$ téglalapot kell felhasználnunk.

Jelöljük az i-vel ($i=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$) jelölt mezőhöz (vagy mezőkhöz) tartozó körök összterületét s_i-vel, és az összes kör összterületét s-sel. Állapodjunk meg továbbá abban, hogy $s_5=0$ legyen. Akkor az összes kör elhelyezhető a

$$d=\frac{s}{\sum_{i=2}^{9} s_i/d_i}$$

értékhez tetszés szerinti közeli sűrűséggel. Mivel valamely $0<x_1\leqq x\leqq x_2\leqq 1$, $0<y_1\leqq y\leqq y_2\leqq 1$ téglalapban levő pontok által képviselt körök területösszege arányos $(x_2^2-x_1^2)(y_2-y_1)$-gyel, kiszámíthatjuk az s_i/s hányadosokat:

i	2	3	4	6	7	8	9
s_i/s	.00166	.00909	.02940	.15676	.14190	.29182	.35881

Ezeknek az értékeknek a felhasználásával azt kapjuk, hogy $d>0.9126$.

Ha a fenti konstrukciót úgy akarjuk módosítani, hogy közbeiktatunk megfelelő köröket MH_5 elhelyezésében, akkor el kell vennünk bizonyos köröket, amelyek MH_4 elhelyezést alkotnak. Ez azért kedvezőtlen, mert $v_5=3v_4$, s így az MH_5 elhelyezésben harmadannyi „nagy" kört kell kapcsolni ugyanannyi kis körhöz, mint az MH_4 elhelyezésben. Emiatt növekszik azoknak a köröknek az összterülete, amelyeket csak d_9 sűrűséggel tudunk elhelyezni, s ez lerontja azt a hatást, amit azzal nyerünk, hogy $d_5>d_4$.

Vegyünk el az MH_4-ben szereplő körökből mondjuk t összterületű kis kört, és vegyük el az ezekhez tartozó $t/2h_4$ összterületű nagy kört. Az elvett kis köröket MH_5 elhelyezésben kapcsoljuk $t/6h_5$ összterületű nagy körrel. Ezáltal $\sum_{i=2}^{9} s_i/d_i$ a következő értékkel változik:

$$t\left\{-\left(1+\frac{1}{2h_4}\right)\frac{1}{d_4}+\left(1+\frac{1}{6h_5}\right)\frac{1}{d_5}+\left(\frac{1}{6h_5}-\frac{1}{2h_4}\right)\frac{1}{d_9}\right\}\approx 0.267\,t.$$

Mivel a változás pozitív, a d végsűrűség valóban csökken.

A fenti eljárás a (0, 1) intervallumban egyenletesen elosztott sugarú körök esetén $d\geqq 0.9223$ sűrűségű elhelyezést ad. A csoportosítást a 11. ábra szemlélteti.

Becsléseinket még javítani lehetne $a(h)$ szigorúan fogyó szakaszainak figyelembe vételével. Ez azonban a negyedik tizedes jegyet nem befolyásolná. Ezért gyakorlatilag a fenti korlátok a legjobbak, amiket a Molnár—Heppes-féle elhelyezések alapján nyerhetünk. Másrészt alkalmazva egy inkongruens körök elhelyezésére vonatkozó

általános felső sűrűség korlátot [4] azt kapjuk, hogy a (0, 1) intervallumban egyenletesen elosztott területű, illetőleg sugarú körök sűrűsége kisebb mint 0.9202, illetőleg 0.9376.

Ennek a dolgozatnak az elkészítése után értesültünk L. Danzertól, hogy sikerült konstruálnia egy $\pi/\sqrt{12}$-nél nagyobb sűrűségű elhelyezést olyan körökből, amelyek homogenitása nagyobb, mint az a legkisebb h érték, amelyre $a(h)=\pi/\sqrt{12}$.

IRODALOM

[1] Heppes Aladár, Molnár József, Újabb eredmények a diszkrét geometriában I—II. Mat. Lapok 11 (1960) 330—355, 13 (1962) 39—72.

[2] Fejes Tóth, L., Molnár, J., Unterdeckungen und Überdeckungen der Ebene durch Kreise. Math. Nachr. 18 (1957) 235—243.

[3] Florian, A., Ausfüllung der Ebene durch Kreise. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 9 (1960) 300—312.

[4] Fejes Tóth, L., Packing and covering with convex discs. Studia Sci. Math. Hungar. 15 (1980).

ПЛОТНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ КРУГОВС ДАННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗИУСА

АНДРАШ БЕЗДЕК и ЛАСЛО ФЕЙЕШ ТОТ

DENSE PACKING OF CIRCLES WITH GIVEN RADIUS-DISTRIBUTION

A. BEZDEK and L. FEJES TÓTH

VÉLETLEN PONTELOSZLÁSOK ÉS ALKALMAZÁSAIK A MEGBÍZHATÓSÁGELMÉLETBEN ÉS A STATISZTIKUS FIZIKÁBAN II.

SZÁSZ DOMOKOS

2.2. Sikertelen kísérlet egy egyszerűbb modell tárgyalására: határeloszlástétel félig Markov-folyamatokra

Szolovjov (1970) ötletgazdag analítikus technikával a következő egycsatornás megbízhatósági rendszer aszimptotikus viselkedését vizsgálta: egy gép dolgozik, és rajta kívül $(r-1)$ darab, vele azonos minőségű tartalékunk van. Ha az alap-gép meghibásodik, az l darab javító műhely egyikében javítják, és azonnal az egyik tartalékot állítják a helyére. Ha ez is meghibásodik, egy másik műhelyben kerül javításra, és újabb tartalékot állítanak be. Ha mindegyik javító műhely foglalt, akkor a javításra váró gépek sorbanállnak. Az összes működési és javítási idők független valószínűségi változók, a ξ^ε működési idők eloszlása F^ε, az η^ε javítási időké J^ε. Feltéve, hogy a javítási idő lényegesen rövidebb, mint a működési idő, Szolovjov meghatározta a rendszer élettartamának (azaz az első olyan időpontig eltelő időnek, amikor mindegyik gép rossz vagy éppen javítják), a — megfelelő normálás melletti — asszimptotikus eloszlását.

Elképzelésem az volt, hogy először a félig-Markov folyamat által vezérelt véletlen tagszámú összegre bizonyítok határeloszlástételt, majd ebből az eredményből vezetem le Szolovjov eredményét. Ez azért lett volna előnyös, mert így számos modell egycsapásra kezelhetővé vált volna.

Ha $J=J^\varepsilon$ exponenciális eloszlás, akkor a fenti modell a $\{\zeta(t): t\geqq 0\}$ félig-Markov folyamatot definiálja, amelynek lehetséges állapotai $0, 1, \ldots, r$, és amelyre a beágyazott Markov-lánc $\{\alpha_n: n=0, 1, 2, \ldots\}$. $\zeta(t)$ és α_n így határozható meg: legyen $T_0=0$, és T_n az n-edik működési intervallum végpontja; legyen α_n a hibás gépek száma T_n-ben — ideértve a javítás alatt álló gépeket is, és végül jelölje

$$\zeta(t)=\alpha_n, \quad \text{ha} \quad T_n \leqq t < T_{n+1}.$$

A rendszer τ élettartama az az időpont, amikor $\zeta(t)$ először éri el az r állapotot.

Az előbbi modell vizsgálata végett tekintsük általában a $\{\zeta^\varepsilon(t): t\geqq 0\}$ jobbról folytonos félig-Markov folyamatokat $(\varepsilon>0)$ az $E=\{0, 1, \ldots, r\}$ állapottéren. A beágyazott Markov láncot jelölje α_n^ε $(n=0, 1, 2, \ldots)$, amelynek átmenet-mátrixa $\Pi_1^\varepsilon=(p_{ij}^\varepsilon)_{i,j\in E}$. Az i állapotban eltöltött idő eloszlásfüggvényét (karakterisztikus függvényét) jelölje $F_{ij}^\varepsilon(x)$ $(\psi_{ij}^\varepsilon(x))$ amellett a feltétel mellett, hogy a rendszer i-ből a j állapotba ugrik $(F_{ij}^\varepsilon(+0)<1)$.

Írjuk az átmenetvalószínűségeket az alábbi alakban:

$$p_{i0}^\varepsilon = p_i^\varepsilon \quad (0 \leqq i < r),$$

$$p_{ij}^\varepsilon = \bar{p}_i^\varepsilon a_{ij}^\varepsilon \quad (0 \leqq i < r, \quad 1 \leqq j \leqq r),$$

ahol

$$0 \leqq p_i^\varepsilon \leqq 1, \quad \bar{p}_i^\varepsilon = 1 - p_i, \quad a_{ij}^\varepsilon \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^\varepsilon = 1,$$

és tegyük fel, hogy az r állapot elnyelő, azaz $p_{ri} = \delta_{ri}$ (Kronecker delta!), továbbá, hogy

(A) $$\lim_{\varepsilon \to 0} p_i^\varepsilon = 1 \quad (0 \leqq i < r);$$

(B) $$\mathbf{P}(\alpha_n^\varepsilon = r \quad \text{valamely} \quad n\text{-re} \mid \alpha_0^\varepsilon = 0) = 1.$$

A tartózkodási idők eloszlásáról tegyük fel, hogy

(C) alkalmas pozitív m^ε-okra $(\lim_{\varepsilon \to 0} m^\varepsilon = \infty)$

(2.1) $$m^\varepsilon \left(\psi_{00}^\varepsilon(u) - 1\right) \to \alpha(u)$$

($\alpha(u)$ folytonos), és minden u-ra

(2.2) $$m^\varepsilon \left|\psi_{ij}^\varepsilon(u) - 1\right| \leqq K_u \quad (0 \leqq i < r,\ 0 \leqq j \leqq r,\ ij > 0).$$

$\alpha(u)$ szükségképpen korlátlanul osztható karakterisztikus függvény logaritmusa és (2.2) természetesen teljesül, ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} m^\varepsilon \left(\psi_{ij}^\varepsilon(u) - 1\right) = \alpha_{ij}(u)$$

($\alpha_{ij}(u)$ folytonos).

Legyen $\tau_k^\varepsilon (k \in E)$ a $H_k^\varepsilon = \{\zeta^\varepsilon(0) = k\}$ halmazon értelmezett változó, amely az r állapot első eléréséig eltelő idővel egyenlő. (A)-ból és (B)-ből következik, hogy elég kis ε-ra τ_k^ε majdnem mindenütt véges, így bevezethetők a $\Phi_k^\varepsilon(u) = E\left(\exp\left(iu\tau_k^\varepsilon\right) \mid H_k^\varepsilon\right)$ karakterisztikus függvények (nyilván $\Phi_r^\varepsilon(u) \equiv 1$). Jelölje B^ε a $(p_{ij}^\varepsilon)_{i,j=0,1,\ldots,r-1}$ mátrixot, és általában az M mátrix determinánsát $\|M\|$.

2.1. Tétel. *Ha a* $0, 1, \ldots, r-1$ *állapotok a beágyazott Markov-lánc egy osztályát alkotják minden* $\varepsilon > 0$*-ra, és teljesülnek az (A), (B) és (C) feltételek, akkor (i) ha*

(2.3) $$\lim_{\varepsilon \to 0} m^\varepsilon \|B^\varepsilon - I\|$$

pozitív vagy végtelen, akkor $\tau_k^\varepsilon (0 \leqq k < r)$*-nak van határeloszlása, amely az utóbbi esetben a* 0*-ba* koncentrált eloszlás;

(ii) ha $\alpha(u) \neq 0$*, és* $\tau_k^\varepsilon (0 \leqq k < r)$*-nak van határeloszlása, akkor a 2.3 határérték létezik, és pozitív vagy végtelen.*

A határeloszlás mindkét esetben független k-tól. A (C) feltételben m^ε-ra lehetséges választás

(2.4) $$m^\varepsilon = \left|\|B^\varepsilon - I\|\right|^{-1},$$

amikoris $\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_k^\varepsilon(u) = \left(1 - \alpha(u)\right)^{-1}$ $(0 \leqq k < 1)$.

A tétel bizonyítása nem nehéz és megtalálható a Szász (1974) dolgozatban. Maga az eredmény általánosítja és kiterjeszti Anyiszimov (1971), Guszak—Koroljuk (1971) és Turbin (1971) tételeit. Viszont Anyiszimov (1973) a mienknél általánosabb folyamatokra bizonyított határeloszlástételeket, amelyek *részben* lefedik a mi tételünket is (eredményeink egymástól függetlenül, közel egyszerre születtek). Jelen dolgozatban a 2.1. Tétel alkalmazhatósági korlátai miatt érdekes. Ezekre áttérve, legyen az egyszerűség kedvéért a Szolovjov-féle modellben $r = 2$, $l = 1$ és tegyük fel, hogy

$\zeta(o)=1$, ami lehetővé teszi, hogy elhagyjuk a 0 állapotot. Szolovjovnak a javítási és a működési idők viszonyára vonatkozó megkötése a mi esetünkben $(J^\varepsilon(x)=1-e^{-\mu^\varepsilon x})$

$$\beta^\varepsilon \doteq \mathbf{P}(\eta^\varepsilon > \xi^\varepsilon) = \int_0^\infty \exp(-\mu^\varepsilon x) F^\varepsilon(dx) \to 0, \tag{2.5}$$

ha

$$\varepsilon \to 0.$$

τ_1^ε határeloszlását szeretnénk meghatározni. Az érdekes feltevés (C), mert (A) és (B) azonnal adódnak (2.5)-ből.

(Megjegyezzük, hogy modellünkben az 1 állapot játssza a tételbeli 0 állapot szerepét.) (C)-ben kényelmesebb Laplace-transzformáltakat használni, ezeket most ugyanúgy fogjuk jelölni, mint tételünkben a karakterisztikus függvényeket. Azt állítjuk, hogy (C) teljesül, ha

$$(\beta^\varepsilon)^{-1}(1-\lambda^\varepsilon(s)) \to -\alpha(s),$$

ahol $\alpha(s)$ folytonos $(s\geqq 0)$ és $\lambda^\varepsilon(s)=\int_0^\infty e^{-sx} F^\varepsilon(dx)$. Esetünkben a Π_1^ε átmenet mátrix

$$\begin{vmatrix} 1-\beta^\varepsilon & \beta^\varepsilon \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

míg $F_{11}^\varepsilon(x)=\mathbf{P}(\xi^\varepsilon<x|\eta^\varepsilon<\xi^\varepsilon)$ és $F_{12}^\varepsilon(x)=\mathbf{P}(\xi^\varepsilon<x|\eta^\varepsilon>\xi^\varepsilon)$. Az $F_{12}^\varepsilon(x)\geqq F^\varepsilon(x)$ egyenlőtlenség maga után vonja, hogy

$$1-\psi_{12}^\varepsilon(s) = 1-\int_0^\infty se^{-sx} F_{12}^\varepsilon(x)\,dx \leqq 1-\int_0^\infty se^{-sx} F^\varepsilon(x)\,dx = 1-\lambda^\varepsilon(x).$$

(2.4) szerint $m^\varepsilon=(\beta^\varepsilon)^{-1}$ és így

$$\left|m^\varepsilon(1-\psi_{12}^\varepsilon(s))\right| \leqq \left|(\beta^\varepsilon)^{-1}(1-\lambda^\varepsilon(s))\right| \to \alpha(s),$$

amiből már adódik (2.2) a ψ_{12}^ε függvényre. (2.1) bizonyításához az

$$F_{11}(x) = [\mathbf{P}(\eta^\varepsilon < \xi^\varepsilon)]^{-1}\mathbf{P}(\xi^\varepsilon < x) - [\mathbf{P}(\eta^\varepsilon < \xi^\varepsilon)]^{-1}\mathbf{P}(\eta^\varepsilon > \xi^\varepsilon) F_{12}^\varepsilon(x)$$

egyenlőség Laplace transzformáltját véve

$$m^\varepsilon(1-\psi_{11}^\varepsilon(s)) = (1-\beta^\varepsilon)^{-1} m^\varepsilon(1-\lambda^\varepsilon(s)) - \beta^\varepsilon(1-\beta^\varepsilon)^{-1} m^\varepsilon(1-\psi_{12}^\varepsilon(s)),$$

és itt a jobb oldalon az első tag $-\alpha(s)$-hez tart, ha $\varepsilon\to 0$, míg a második az elsőnél kisebb nagyságrendű. Ezért $m^\varepsilon(1-\psi_{11}^\varepsilon(s))\to -\alpha(s)$, azaz (C) teljesül. A 2.1. Tétel szerint τ_1^ε határeloszlásának Laplace-transzformáltja $(1-\alpha(s))^{-1}$.

A mondottakból látható, hogy ahhoz, hogy a vázolt út járható legyen, a következő lépések megtételére van szükség:

1. A 2.1. Tétel feltételeinek verifikálására kalkulus kidolgozása tetszőleges r és l esetén, mert a fenti módszer r és l nagyobb értékeire igen nehézkessé válik.

2. Ha J^ε nem exponenciális eloszlás, akkor a modellhez rendelhető félig-Markov folyamat állapottere kontinuum számosságú, ezért a 2.1. Tételt általánosítani kell ilyen terekre.

3. Az első lépésben kidolgozott kalkulus általánosítása általános állapotterekre.

Még egycsatornás rendszerek esetén sem világos, hogyan kell a fenti lépéseket megközelíteni (legtöbb remény a megoldásra a második lépésnél van). A többcsatornás rendszerek esete ennél is bonyolultabb, ezért olyan modellnél, mint a két-lift-probléma, más utat kellett keresni.

2.3. A két lift probléma: eredmények és a módszer alapgondolata

A bizonyítások során számos jelölésre lesz szükségünk, ezek áttekinthetősége kedvéért is fogadjuk el a következő konvenciókat: ebben a fejezetben mindvégig $t (t \geqq 0)$ jelöli az időt, i lesz a lift indexe, azaz $i=1$ vagy 2 és ε $(0<\varepsilon \leqq 1)$ a paraméter, amelytől a rendszer függ.

Az $X=[0, \infty)$ félegyenesen adott ponteloszlások pontjait kisbetűvel (latin vagy görög, pl.: $0 \leqq \pi_0 \leqq \pi_1 \ldots \leqq \pi_k \leqq \ldots$), és magát e ponteloszlást — általában a megfelelő — nagybetűvel jelöljük (példánkban Π-vel). Ennek megfelelően $B \in X$-re $\Pi(B) = \mathrm{card}\{k: \pi_k \in B\}$ és $\Pi_t = \Pi([0, t])$. Végül a Π ponteloszlás intenzitásmértékét $\tilde{\Pi}$-mal fogjuk jelölni, azaz $\tilde{\Pi}(B) = \mathbf{E}\Pi(P)$ és $\tilde{\Pi}_t = \mathbf{E}\Pi_t$.

Legyenek $\xi_k(i)$ és $\eta_k^\varepsilon(i)$ független, pozitív valószínűségi változók $(k=1, 2, \ldots)$ olyanok, hogy

$$\mathscr{L}(\xi_k(i)) = F, \quad \mathscr{L}(\eta_k^\varepsilon(i)) = J^\varepsilon; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Jelöljük: $\zeta_k^\varepsilon(i) = \xi_k(i) + \eta_k^\varepsilon(i)$, továbbá legyen

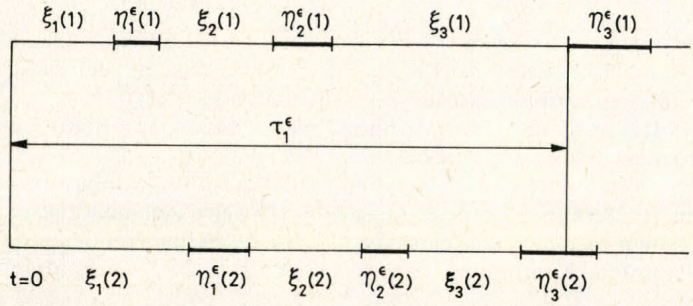
$$\varrho_t^\varepsilon(i) = 1, \quad \text{ha} \quad \sum_{l=1}^{L-1} \zeta_l^\varepsilon(i) + \xi_L^\varepsilon(i) \leqq t < \sum_{l=1}^{L} \zeta_l^\varepsilon(i).$$

valamely $L \geqq 1$-re, $=0$ különben, és végül $\varrho_t^\varepsilon = \varrho_t^\varepsilon(1)\varrho_t^\varepsilon(2)$. A 2.1. pontban megfogalmazott feladatnál általánosabban nemcsak τ^ε eloszlásának, hanem az összes olyan időpont, amelyben a rendszerben meghibásodás, azaz *sokk* lép fel, által határozott folyamatnak az aszimptotikáját fogjuk vizsgálni. Azt mondjuk, hogy a rendszert a τ időpontban sokk éri, ha $\varrho_t^\varepsilon = 1$, de $\lim_{t \to \tau - 0} \varrho_t^\varepsilon = 0$. Azok az intervallumok, amelyekben $\varrho_t^\varepsilon = 1$, a „séta"-periódusok. Jelöljük $T^\varepsilon = \{\tau_1^\varepsilon < \tau_2^\varepsilon < \ldots\}$-nal a sokkok sorozatát, és legyen W^ε a $\{w_1^\varepsilon < w_2^\varepsilon < \ldots\}$ ponteloszlás, ahol $w_k^\varepsilon = \varepsilon \cdot \tau_k^\varepsilon$.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

(i) *valamely $n_0 \geqq 1$ egészre F karakterisztikus függvényének n_0-adik hatványa integrálható,*

(ii) $$-\int \int_{|x-y|<1} \log|x-y| F(dx) F(dy) < \infty;$$



1. ábra

(iii) *valamely* $c_1, c_2>0$ *esetén* $F(x)\leqq c_1 x$, *hacsak* $0\leqq x\leqq c_2$;

(iv) $$\int xF(dx) = \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty;$$

(v) $$\int xJ^{\varepsilon}(dx) = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1,$$

és az $xJ^{\varepsilon}(dx)$ *mértékek halmaza relatív-kompakt a gyenge topológiában;*
(vi) *minden* ε*-ra létezik olyan* $N^{\varepsilon}(x)$ *eloszlásfüggvény, amellyel*

$$\frac{1-J^{\varepsilon}(x+y)}{1-J^{\varepsilon}(y)} \leqq 1-N^{\varepsilon}(x)$$

teljesül, valahányszor $J^{\varepsilon}(y)<1$, *továbbá* $\lim_{\varepsilon\to 0}\int xN^{\varepsilon}(dx)=0$.

A tett megkötések mellett W^{ε} *eloszlásban* $2\lambda^{-2}$ *paraméterű Poisson ponteloszláshoz konvergál, amikor* $\varepsilon\to 0$.

Az 1.1. pontban mondottak alapján a konvergencia a véges dimenziós eloszlások gyenge konvergenciája, amely az adott esetben maga után vonja a $D[0, \infty)$ térben való konvergenciát is. A (vi) feltételben szereplő egyenlőtlenség lényegesen gyengébb, mint a „növekvő meghibásodási ráta" (~increasing faiture rate) néven ismert feltétel, bár ahhoz hasonló jellegű.

A tétel feltételei jóval egyszerűbbek abban a fontos speciális esetben, amikor $\eta^{\varepsilon}=\varepsilon\eta$.

2.3. Következmény. *Ha F eleget tesz a 2.2. Tétel (i)—(iv) feltételeinek és* J^{ε} *kielégíti a következő feltételeket*

(vii) $J^{\varepsilon}(x)=J\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right)$, *ahol J rögzített eloszlás és* $\int xJ(dx)=\mu$;

(viii) $$\frac{1-J(x+y)}{1-J(y)} \leqq 1-N(x),$$

ha $J(y)<1$, *és N véges várható értékű; akkor* W^{ε} *a* $2\mu\lambda^{-2}$ *paraméterű Poisson ponteloszláshoz konvergál eloszlásban.*

Az a tény, hogy eredményeinkben a Poisson ponteloszlás jelenik meg határeloszlásként, összhangban van Rényi (1956) tételével és annak sokféle általánosításaival (pl. Jagers—Lindwall, 1974), amelyek szerint bizonyos feltételek mellett véletlen ponteloszlások pontjainak független, egyre erősebb ritkításai révén határértékként Poisson ponteloszlást nyerünk. Esetünkben a ritkítási mechanizmus nem független és meglehetősen bonyolult.

Azt mondjuk, hogy τ sokk i típusú, ha $\lim_{t\to\tau-0}\varrho_t^{\varepsilon}(i)=0$. Feltevéseinkből folyik, hogy minden sokk pontosan egy típusú 1 valószínűséggel. Az 1 és 2 típusú sokkok sorozatát jelöljük $U^{\varepsilon}=\{u_1^{\varepsilon}<u_2^{\varepsilon}<\ldots\}$ illetve $V^{\varepsilon}=\{v_1^{\varepsilon}<v_2^{\varepsilon}<\ldots\}$-nal. Minthogy $W_t=U^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}+V^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}$, és U^{ε} és V^{ε} egyforma eloszlásúak, nyilván $\tilde{W}_t^{\varepsilon}=2\tilde{U}^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}$. Vezessük be az $R^{\varepsilon}=\{\zeta_1^{\varepsilon}(1)+\ldots+\zeta^{\varepsilon}_{k+1}(1)+\xi_k^{\varepsilon}(1)\colon k\geqq 1\}$ $H^{\varepsilon}=\{\zeta_1^{\varepsilon}(1)+\ldots+\zeta_k^{\varepsilon}(1)\colon k\geqq 1\}$ ponteloszlásokat, és jelöljük $\tilde{\varrho}_t^{\varepsilon}(i)=\mathbf{E}\varrho_t^{\varepsilon}(i)$. Végül definiáljuk a B^{ε} véletlen halmazt: $B^{\varepsilon}=\{x\colon \varrho_x^{\varepsilon}(2)=1\}$ és legyen $B_t^{\varepsilon}=B^{\varepsilon}\cap[0,t]$ és $\tilde{B}_t^{\varepsilon}=\mathbf{E}|B_t^{\varepsilon}|$, ahol rövidség kedvéért $|\ |$ jelöli a zárójelbe tett halmaz Lebesgue-mértékét.

Módszerünk egyik lényeges eleme, hogy a gyenge konvergencia bizonyítását visszavezetjük bizonyos feltétel nélküli és feltételes várható értékek konvergenciájá-

nak igazolására. Például $\tilde{U}^\varepsilon$ könnyen kezelhetővé válik, ha a következőképpen alakítjuk át:

$$\tilde{U}_t^\varepsilon = \mathbf{E}R^\varepsilon(B_t^\varepsilon) = \mathbf{E}\mathbf{E}\big(R^\varepsilon(B_t^\varepsilon)|B_t^\varepsilon\big) = \tag{2.6}$$

$$= \mathbf{E}\tilde{R}^\varepsilon(B_t^\varepsilon) = \mathbf{E}\int_0^t \varrho_x^\varepsilon(2)\tilde{R}^\varepsilon(dx) = \int_0^t \tilde{\varrho}_x^\varepsilon(2)\,\tilde{R}^\varepsilon(dx).$$

Egyszerűen adódik, hogy

$$\tilde{\varrho}_x^\varepsilon(2) = [(1-J^\varepsilon) * F * \tilde{H}^\varepsilon](x), \tag{2.7}$$

és

$$\tilde{R}^\varepsilon = F * \tilde{H}^\varepsilon. \tag{2.8}$$

A felújítási tételt (l. Breiman (1968)*) az $1-\tilde{\varrho}_x^\varepsilon(2)=[(1-F)*\tilde{H}^\varepsilon](x)$ függvényre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{\varrho}_x^\varepsilon(2) = \frac{\mu\varepsilon}{\lambda+\mu\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Most (2.6), (2.7) és (2.8)-ból

$$\tilde{U}_t^\varepsilon = \int_0^t \int_0^{t-u} \tilde{\varrho}_{u-x}^\varepsilon(2)\,F(dx)\,\tilde{H}^\varepsilon(du),$$

és (2.9) segítségével

$$\tilde{U}_t^\varepsilon \sim \frac{\mu\varepsilon t}{(\lambda+\mu\varepsilon)^2},$$

ami megmagyarázza a határ-ponteloszlás intenzitását.

Módszerünk egy másik fontos pontja azon a tényen alapszik, hogy a rendszerben találhatók olyan időpontok, amelyekben — egy változó értékét kivéve — a rendszer elfelejtheti teljes múltját (Markovitás kibővített állapottérben!) és fontos észrevétel az, hogy ezek úgy is megválaszthatók, hogy a rendszer jövője ennek a változónak az értékétől csak kevéssé függ. Gondolatmenetünk sugallja, hogy hasonló eredmény nem egyforma eloszlású liftekre is érvényes lesz. Valóban, ha $\mathbf{E}\xi_k(i)=\lambda_i$ és $\mathbf{E}\eta_k^\varepsilon(i)=\varepsilon\mu_i$, akkor határértékként $(\mu_1+\mu_2)/\lambda_1\lambda_2$ paraméterű Poisson ponteloszlást nyerünk.

A fenti lépések egzakttá tételéhez a Poisson eloszlás integrálegyenlettel való jellemzését használjuk, és szükségünk lesz a felújítási tételhez kapcsolódó Stone-felbontás stabilitásának vizsgálatára. Ez utóbbi segédeszközt ismerteti a 4. pont, míg az említett integrálegyenlet felhasználását és a teljes bizonyítást az 5. pontban tárgyaljuk.

2.4. Felújításelméleti segédeszköz: a Stone felbontás egyenletessége

Stone (1966) az F eloszlásfüggvényhez tartozó felújítási mértéket két mérték összegeként állította elő: az egyik mérték véges, F-fel egyforma farok-viselkedéssel, míg a másik, abszolút folytonos komponens sűrűsége a végtelenben majdnem konstans. Mi ezt a felbontást eloszlások egy családjára egyenletesen bizonyítjuk.

Az A valószínűségeloszlás karakterisztikus függvényét e pontban mindig $\hat{A}$-val jelöljük.

2.4. Tétel. *A 2.2. Tétel (i), (iv) és (v) feltételeinek teljesülése esetén elég kis* ε*-ra* ($\varepsilon\leqq\varepsilon_0$) *valamennyi* $\tilde{H}^\varepsilon$ *mérték felbomlik a* $\tilde{H}^\varepsilon=\tilde{H}_1^\varepsilon+\tilde{H}_2^\varepsilon$ *alakban, ahol*

(α) *a* $\tilde{H}_1^\varepsilon$ *mértékek végesek, és az* $x\tilde{H}_1^\varepsilon(dx)$ *mértékek halmaza* ($\varepsilon \leqq \varepsilon_0$) *relatív kompakt a gyenge topológiában;*

(β) *a* $\tilde{H}_2^\varepsilon$ *mértékek abszolút folytonosak,* h_2^ε *sűrűségeik egyenletesen korlátosak* (azaz $\sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon_0} \sup_x h_2^\varepsilon(x) < \infty$), *és végül*

$$\lim_{\varepsilon' \to 0,\, x' \to \infty} \sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon'} \sup_{x \geqq x'} \left| h_2^\varepsilon(x) - \frac{1}{\lambda} \right| = 0. \tag{2.10}$$

Könnyű belátni, hogy az utolsó állítás így is fogalmazható:

$$\lim_{\varepsilon' \to 0,\, x' \to \infty} \sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon'} \sup_{x \geqq x'} \left| h_2^\varepsilon(x) - \frac{1}{\lambda + \varepsilon} \right| = 0.$$

Bizonyítás. Jelölje $A^{(n)}$ az A eloszlás n-edik konvolúcióhatványát. (i)-ből folyik, hogy $F^{(n_0)}$ az $F^{(n_0)} = pF_1 + qF_2$ alakban írható, ahol $p > 0$, $p+q=1$, és az F_1, F_2 valószínűségeloszlások közül F_1 abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye folytonos és eltűnik egy véges intervallumon kívül. Jelöljük: $F^\varepsilon = F * J^\varepsilon$, és legyen

$$(F^\varepsilon)^{(n_0)} = pF_1 * (J^\varepsilon)^{(n_0)} + qF_2 * (J^\varepsilon)^{(n_0)} = pF_1^\varepsilon + qF_2^\varepsilon.$$

Stone aritmetikáját követve legyen

$$\tilde{H}_1^\varepsilon = [1 + F^\varepsilon + \ldots + (F^\varepsilon)^{(n_0-1)}] * \sum_{k=0}^{\infty} q^k (F_2^\varepsilon)^{(k)}$$

és

$$\tilde{H}_2^\varepsilon = [p\tilde{H}_1 * (J^\varepsilon)^{(n_0)}] * \sum_{k=0}^{\infty} (F^\varepsilon)^{(n_0 k)} * F_1, \tag{2.11}$$

Ekkor $\tilde{H}^\varepsilon = \tilde{H}_1^\varepsilon + \tilde{H}_2^\varepsilon$. Most az (α) állítás azonnal következik, mert $\tilde{H}_1^\varepsilon(\mathbf{R}^1) = n_0 p^{-1}$ és (v) maguk után vonják az $xF^\varepsilon(dx)$ mértékek és nem kevésbé az $xF_2^\varepsilon(dx)$ mértékek osztályának relatív kompaktságát.

(β) bizonyításának kulcsa az alábbi lemma. Jelöljük: $L^\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} (F^\varepsilon)^{(n_0 k)}$.

2.5. Lemma. *Minden véges I intervallumra*

$$\lim_{\varepsilon' \to 0,\, x' \to \infty} \sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon'} \sup_{x \geqq x'} \left| L^\varepsilon(I+x) - \frac{|I|}{n_0 \lambda} \right| = 0.$$

Bizonyítás. A jelölések egyszerűsítése végett tegyük fel a továbbiakban, hogy $n_0 = 1$. Ha $u \geqq 0$ és $\hat{u}$ integrálható függvények, és $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \hat{u}(t)\, dt$, akkor könnyű bizonyítani az

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y) L^\varepsilon(dy + x) = 2\pi \frac{\hat{u}(0)}{\lambda + \varepsilon} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{u}(t) \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \hat{F}^\varepsilon(t)}\, dt$$

inverziós formula érvényességét (l. Breiman (1968)*, 221. oldal). Legyen

$$\begin{aligned} u_{a,\varrho}(y) &= 1, && \text{ha} \quad |y| \leqq a \\ &= \varrho^{-1}(a + \varrho - |y|), && \text{ha} \quad a \leqq |y| \leqq a + \varrho \\ &= 0, && \text{ha} \quad |y| \geqq a + \varrho \end{aligned}$$

$(0<\varrho<a)$. Az $u^-(y)=u_{a-\varrho,\varrho}(y)$ és $u^+(y)=u_{a,\varrho}$ függvényekkel

$$\int u^-(y)L^\varepsilon(dy+x) \leqq L^\varepsilon(x-a, x+a) \leqq \int u^+(y)L^\varepsilon(dy+x). \tag{2.12}$$

Minghogy $\hat{u}_{a,\varrho}(t)=(\pi\varrho t^2)^{-1}(\cos at-\cos(a+\varrho)t)$, az inverziós formula mind u^+-ra, mind u^--ra alkalmazható. Így

$$\int u^+(y)L^\varepsilon(dy+x) = \frac{2a+\varrho}{\lambda+\varepsilon}+2\int \cos(tx)\hat{u}^+(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-\hat{F}^\varepsilon(t)}\,dt,$$

ahol $\hat{u}^+$ integrálható. Ezt az összefüggést kezelhetőbb alakra hozva:

$$\int u^+(y)L^\varepsilon(dy+x)-\frac{2a}{\lambda} = \frac{\varrho\lambda-2\varepsilon a}{\lambda(\lambda+\varepsilon)}+ \tag{2.13}$$

$$+2\int \cos(tx)\hat{u}^+(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-\hat{F}^0(t)}\,dt+2\int \cos(tx)\hat{u}^+(t)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{F}^\varepsilon(t)}-\frac{1}{1-\hat{F}^0(t)}\right)dt.$$

(Nyilván $F^0(t)\doteq F(t)$). A jobboldali első tag tetszőleges kicsi, ha ϱ és ε elég kicsi. Rögzítsünk egy kis ϱ-t. Ekkor a Riemann—Lebesgue lemma következtében a második tag is tetszőleges kicsi, ha x elég nagy. Végül vegyük észre, hogy $\hat{u}^+$ korlátos, s így a harmadik tag kívánt mértékű elhanyagolhatósága adódik a következő lemmából:

2.6. Lemma.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\left|\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{F}^\varepsilon(t)}-\frac{1}{1-\hat{F}(t)}\right)\right|dt = 0.$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan

$$\frac{1}{1-\hat{F}^\varepsilon}-\frac{1}{1-\hat{F}} = \frac{\hat{F}(\hat{J}^\varepsilon-1)}{(1-\hat{F}^\varepsilon)(1-\hat{F})} = K^\varepsilon.$$

A tett feltevések következtében $\lim_{t\to\infty}\hat{F}^\varepsilon(t)=0$ $\varepsilon\geqq 0$-ra egyenletesen. Így nagy $|t|$ esetén $|\mathrm{Re}\,K^\varepsilon|\leqq 4|\hat{F}|$ (mondjuk), és ez — $\hat{F}$ integrálható lévén — adja, hogy alkalmas t_1-re $\int_{|t|\geqq t_1}|\mathrm{Re}\,K^\varepsilon|\leqq\beta$, ahol $\beta>0$ tetszőleges de rögzített. Most belátjuk, hogy alkalmas $t_2>0$ és $\varepsilon_0>0$-ra

$$\int_{|t|\leqq t_2}\left|\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-\hat{F}^\varepsilon(t)}\right|dt < \beta, \tag{2.14}$$

hacsak $\varepsilon\leqq\varepsilon_0$. Ennek igazolásához szükségünk lesz az alábbi lemmára, amelynek bizonyítását későbbre halasztjuk.

2.7. Lemma. *Léteznek* $\varepsilon^*, t^*>0$, *hogy minden* $\varepsilon\leqq\varepsilon^*$, $|t|\leqq t^*$ *esetén*

$$|1-\hat{F}^\varepsilon(t)|^2 \geqq \frac{\lambda^2 t^2}{2}.$$

Tegyük fel, hogy ε^*-ot és t^*-ot megválasztottuk a lemmának megfelelően. Akkor $|t|\leqq t^*$ és $\varepsilon\leqq\varepsilon^*$ esetén

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-\hat{F}^\varepsilon(t)} = \frac{\mathrm{Re}(1-\hat{F}^\varepsilon(t))}{|1-\hat{F}^\varepsilon(t)|^2} \leqq \frac{2}{\lambda^2}\,\frac{\mathrm{Re}(1-\hat{F}^\varepsilon(t))}{t^2},$$

és minden $t_0 \leqq t^*$, $\varepsilon \leqq \varepsilon^*$-re

$$\int\limits_{|t| \leqq t_0} t^{-2} \operatorname{Re}\left(1-\hat{F}^{\varepsilon}(t)\right) dt \leqq \int \int\limits_{|t| \leqq t_0} t^{-2} |e^{ity} - 1 - i \sin ty| \, dt \, F^{\varepsilon}(dy) \leqq$$

$$\leqq \int\limits_{y} \int\limits_{|s| \leqq t_0 y} s^{-2} |e^{is} - 1 - i \sin s| \, ds F^{\varepsilon}(dy).$$

Mint mondottuk, az $yF^{\varepsilon}(dy)$ mértékek családja relatív kompakt, továbbá $\int s^{-2}|e^{is} - -1 - i \sin s| \, ds < \infty$, ezért a Lebesgue tételből kapjuk (2.14)-et.

A 2.6. Lemma bizonyításának befejezéséhez rögzítsük t_1 és t_2-t a fentieknek megfelelően, és vegyük észre, hogy $F(t) \neq 1$, ha $t \neq 0$. Ekkor

$$|1 - \hat{F}^{\varepsilon}| \geqq |1 - \hat{F}| - |\hat{F}| |1 - \hat{J}^{\varepsilon}|,$$

és mivel a jobboldali második tag $|t| \in [t_2, t_1]$ esetén egyenletesen tart 0-hoz, ezért $\hat{F}^{\varepsilon}(t)$ az 1-től egyenletesen el van korlátozva minden $t_2 \leqq |t| \leqq t_1$-re, ha ε elég kicsi. Következésképpen $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} K^{\varepsilon}(t) = 0$ $t_2 \leqq |t| \leqq t_1$-re egyenletesen. Ezzel a 2.6. Lemmát bizonyítottuk.

A 2.7. Lemma bizonyítása. Igaz a következő elemi egyenlőtlenség

$$|\hat{F}^{\varepsilon}(t) - 1 - i(\lambda + \varepsilon)t| \leqq \int |e^{itx} - 1 - itx| \, F^{\varepsilon}(dx) \leqq \tag{2.15}$$

$$\leqq \frac{t^2}{2} \int\limits_{|x| \leqq 2|t|^{-1}} x^2 F^{\varepsilon}(dx) + 2|t| \int\limits_{|x| \geqq 2|t|^{-1}} |x| \, F^{\varepsilon}(dx).$$

Az $xF^{\varepsilon}(dx)$ mértékcsalád relatív kompaktsága miatt elég kis t^*-ra a (2.15) egyenlőtlenség jobb oldalán a második tag kisebb mint $\delta|t|$ minden $|t| \leqq t^*$ és $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ esetén, ugyanis

$$\int\limits_{|x| \geqq 2|t|^{-1}} |x| \, F^{\varepsilon}(dx) \leqq \int\limits_{|x| \geqq 2(t^*)^{-1}} |x| F^{\varepsilon}(dx).$$

Itt δ tetszőlegesen előírt pozitív szám. Az első tagra bármely $0 < c \leqq 2$ esetén

$$\frac{t^2}{2} \int\limits_{|x| \leqq 2|t|^{-1}} x^2 F^{\varepsilon}(dx) \leqq |t| \frac{c}{2} \int\limits_{0}^{\infty} xF^{\varepsilon}(dx) + \frac{|t|}{2} \int\limits_{c|t|^{-1}}^{\infty} xF^{\varepsilon}(dx).$$

Ha c elég kicsi, akkor az itt a jobb oldalon szereplő első tag kisebb mint $\delta|t|$ bármely $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$-ra és ugyanez áll a második tagra, ha c már rögzített és $|t| \leqq t^*$, ahol t^* elegendő kicsi. Tehát a 2.7. Lemma következik, ha vesszük (2.15) négyzetét.

A 2.4. Tétel bizonyításának befejezése. A 2.5. Lemmából és F_1 tulajdonságaiból könnyű látni, hogy $F_1 * L^{\varepsilon}$ abszolút folytonos, és sűrűségére

$$\lim_{\varepsilon' \to 0,\, x' \to \infty} \sup_{\varepsilon \leqq \varepsilon'} \sup_{x \geqq x'} \left| \frac{d}{dx} (F_1 * L^{\varepsilon})(x) - \frac{1}{n_0 \lambda} \right| = 0,$$

amiből (2.10) már adódik, ha megfigyeljük, hogy $\{p\tilde{H}_1 * (J^{\varepsilon})^{(n_0)} \colon \varepsilon \leqq \varepsilon_0\}$ n teljes mértékű mértékek relatív kompakt családja.

Végül a h_2^{ε} függvények egyenletes korlátossága az alábbi tény egyszerű következménye: minden véges I-re $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{x} L^{\varepsilon}(I + x) < \infty$, ami (2.12) és (2.13)-ból látszik.

Q. e. d.

2.5. A módszer megvalósítása

A 2.2. Tételt lemmák sorozatán keresztül bizonyítjuk.

2.8. Lemma. *Legyenek* $\Pi^\varepsilon = \{\pi_0^\varepsilon \leqq \pi_1^\varepsilon \leqq \ldots\}$ *véletlen ponteloszlások* $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$*-en* ($\varepsilon \geqq 0$). *Ekkor* $\Pi^\varepsilon \to_d \Pi^0$ ($\varepsilon \to 0$) *akkor és csak akkor, ha minden* $k \geqq 1$*-re*

$$(\pi_0^\varepsilon, \ldots, \pi_k^\varepsilon) \to_d (\pi_0^0, \ldots, \pi_k^0) \quad \varepsilon \to 0.$$

A lemma triviális.

2.9. Lemma. *Ha* $\Pi^\varepsilon \to_d \Pi^0$ ($\varepsilon \to 0$) *és* Π^0 *egyszerű ponteloszlás, akkor*

$$\Pi_t^\varepsilon \xrightarrow{D[0,\infty)}_d \Pi_t^0.$$

Ezt az eredményt Jagers (1971) bizonyította.

2.10. Lemma. *Ha minden* $t \geqq 0$*-ra* $\sup_\varepsilon \tilde{\Pi}_t^\varepsilon < \infty$, *akkor a* Π^ε *ponteloszlás-család relatív kompakt.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy minden $t \geqq 0$-ra a Π_t^ε valószínűségi változók sorozata feszes (l. Billingsley (1968)*), mert akkor az állítás belátható a Cantor-féle diagonális eljárással. A feszesség viszont a $\mathbf{P}(\Pi_t^\varepsilon \geqq k) \leqq k^{-1} \tilde{\Pi}_t^\varepsilon$ Markov egyenlőtlenségből folyik.

Q. e. d.

2.11. Lemma. *Legyen*

$$\sigma(z) = \int_0^\infty e^{-zx} s(x)\, dx \quad \text{Re } z > 0$$

és

$$\tau(z) = \int_0^\infty e^{-zx} T(dx) \quad \text{Re } z > 0,$$

ahol $s(x)$ *korlátos, folytonos függvény* $[0, \infty)$*-en, és* T *tetszőleges mérték* $[0, \infty)$*-en, amelyre a* $\tau(z)$*-t definiáló integrál létezik minden* Re $z > 0$*-ra. Igaz a*

$$\int_0^\infty e^{-zx} s(x) T(dx) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sigma(w)\tau(z-w)\, dw \tag{2.16}$$

Parseval-formula, valahányszor Re $z > c > 0$ *és a jobboldali integrál létezik.*

Bizonyítás. Legyen

$$q_\alpha(x) = \left[\frac{1}{2\alpha}\left(1 - \frac{|2-x|}{2\alpha}\right)\right]^+$$

és $0 < \alpha < 1$. Ekkor

$$\hat{q}_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \hat{q}_\alpha(x)\, dx = \left(\frac{sh(\alpha z)}{\alpha z}\right)^2 e^{-2z}$$

α-ban ($0 < \alpha < 1$) egyenletesen korlátos, sőt integrálható a Re $z = c$ ($c > 0$) függőleges egyenesen. Így az $s_\alpha(x) = \int q_\alpha(x-y) s(y)\, dy$ és $t_\alpha(x) = \int q_\alpha(x-y)\, T(dy)$ jelölésekkel élve

minden $0<c<\mathrm{Re}\, z$-re

$$(2.17)\qquad \int_0^\infty e^{-zx} s_\alpha(x) t_\beta(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sigma(w)\, \hat{q}_\alpha(w)\, \tau(z-w)\, \hat{q}_\beta(z-w)\, dw$$

a Laplace-transzformáltakra ismeretes inverziós formulából (Feller (1966)*). Az $s_\alpha(x)$ függvények α-ban és x-ben egyenletesen korlátosak és majdnem minden x-re $\lim_{\alpha\to\infty} s_\alpha(x)=s(x)$. (2.17)-ben először az $\alpha\to 0$ határátmenetet véve, majd az s-re tett feltételeket használva végrehajtható a $\beta\to 0$ határátmenet is, s ezzel megkapjuk (2.16)-ot.

Q. e. d.

2.12. Lemma. *Ha a tétel (ii) feltétele teljesül, és* $\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zx} F(dx)$, *akkor minden* $c>0$ *esetén*

$$(2.18)\qquad \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{|\varphi(z)|^2}{|z|}\, dz < \infty.$$

Bizonyítás. A következő integrál abszolút konvergens:

$$(2.19)\qquad \int_{-\omega}^{\omega} (c^2+t^2)^{-1/2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-c(x+y)} e^{-it(x-y)} F(dx)\, F(dy)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-c(x+y)} 2 \int_0^\omega (c^2+t^2)^{-1/2} \cos[t(x-y)]\, dt F(dx)\, F(dy).$$

Most

$$(2.20)\qquad \int_0^\omega (c^2+t^2)^{-1/2} \cos[t(x-y)]\, dt = \int_0^{\omega|x-y|} [c^2(x-y)+u^2]^{-1/2} \cos u\, du.$$

Viszont $a>0$-ra $(a\to 0)$

$$(2.21)\qquad \int_0^{\pi/2} (a^2+u^2)^{-1/2} \cos u\, du \leqq \int_0^{\pi/2} (a^2+u^2)^{-1/2}\, du = \mathbf{0}\left(\log\frac{1}{a}\right),$$

és a Leibniz konvergencia kritériumból

$$(2.22)\qquad \int_{\pi/2}^{\omega} (a^2+u^2)^{-1/2} \cos u\, du = \mathbf{0}(1)$$

$\omega\geqq\pi/2$-re és $0\leqq a<1$-re egyenletesen. Végül $\omega\geqq 0$-ra és $a\geqq 1$-re egyenletesen

$$(2.23)\qquad \int_0^{\omega} (a^2+u^2)^{-1/2} \cos u\, du = \mathbf{0}(1).$$

Ezért, ha $c|x-y|\geqq 1$, akkor (2.20)-re felső korlát (2.23) és ha $c|x-y|<1$ akkor — (2.21) és (2.22) felhasználásával — felső korlát $\mathbf{0}(-\log|x-y|)$, mégpedig ω-ban egyenletesen. Ezeket a tényeket figyelembevéve (2.19)-ben, adódik (2.18).

Q. e. d.

2.13. Lemma. *Minden $t \geqq 0$-ra*

$$\tilde{W}_t^\varepsilon \to 2\lambda^{-2} t, \quad \varepsilon \to 0.$$

Bizonyítás. (2.6)-ból

$$\tilde{U}^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t} = \mathbf{E} \int_{B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t}} \tilde{R}^\varepsilon(dx). \tag{2.24}$$

Mivel $\tilde{R}^\varepsilon = \tilde{H}^\varepsilon * F + F$, ezért $\tilde{R}^\varepsilon$ így is írható: $\tilde{R}^\varepsilon = (\tilde{H}_1^\varepsilon * F + F) + (\tilde{H}_2^\varepsilon * F) = \tilde{R}_1^\varepsilon + \tilde{R}_2^\varepsilon$, ahol $\tilde{H}_1^\varepsilon$ és $\tilde{H}_2^\varepsilon$ a 2.4. Tételben megszerkesztett mértékek. Az említett tételben megfogalmazott tulajdonságok $\tilde{H}_1^\varepsilon$ és $\tilde{H}_2^\varepsilon$ helyett az $\tilde{R}_1^\varepsilon$ és $\tilde{R}_2^\varepsilon$ mértékekre is öröklődnek. Vegyük észre, hogy (2.24)-ben $\varepsilon \to 0$ esetén a $B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t}$ halmaz a végtelenbe távolodik, ahol az $\tilde{R}^\varepsilon$ mérték közel stacionárius. Ez az észrevétel olyan elemi átalakításokat sugall, amelyek a következő egyenlőtlenséghez vezetnek:

$$|\tilde{U}^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t} - \lambda^{-2} t| \leqq \mathbf{E} \int_{B^\varepsilon_\alpha} \tilde{R}^\varepsilon(dx) + \tilde{R}_1^\varepsilon([\alpha, \infty)) + \tag{2.25}$$

$$+ \mathbf{E} \int_{B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t-\alpha}} |r_2^\varepsilon(x) - \lambda^{-1}|\, dx + \lambda^{-1} |\tilde{B}^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t} - \lambda^{-1} t| + \lambda^{-1} \tilde{B}^\varepsilon_\alpha,$$

ahol $\alpha (\leqq \varepsilon^{-1})$ értékét később rögzítjük, és $r_2^\varepsilon(x)$ jelöli a 2.4. tételbeli $h_2^\varepsilon(x)$ megfelelőjét. Be fogjuk látni, hogy tetszőleges fix α-ra

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E} \int_{B^\varepsilon_\alpha} \tilde{R}^\varepsilon(dx) = 0, \tag{2.26}$$

és minden rögzített t-re

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{B}^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t} = \lambda^{-1} t. \tag{2.27}$$

Tegyük fel, hogy már beláttuk. Akkor (2.25) jobb oldalán valamennyi tag tetszőleges kicsivé tehető.

Valóban, ha α elég nagy, akkor a második tag egyenletesen kicsi ($< \gamma$, mondjuk) és a harmadik tagban pedig az integrandus tetszőleges kicsi ($< 2\gamma\lambda^2 t^{-1}$, mondjuk). Rögzítsük most α-t és alkalmazzuk (2.26)-ot az első tag és (2.27)-et a harmadik, a negyedik és az ötödik tag elhanyagolhatóságának bizonyításához.

Igazoljuk először (2.26)-ot (2.6)-ból

$$\mathbf{E} \int_{B^\varepsilon_\alpha} \tilde{R}^\varepsilon(dx) = \int_0^\alpha \tilde{Q}_x^\varepsilon(2)\, \tilde{R}^\varepsilon(dx).$$

Legyen $\gamma^\varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{-zx} J^\varepsilon(dx)$. Könnyű számolással adódik, hogy $\operatorname{Re} z > 0$ esetén

$$\int_0^\infty e^{-zx} \tilde{Q}_x^\varepsilon(2)\, dx = \frac{1}{z} \frac{\varphi(1-\gamma^\varepsilon)}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\bigg|_z \tag{2.28}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-zx} \tilde{R}^\varepsilon(dx) = \frac{\varphi}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\bigg|_z. \tag{2.29}$$

A 2.11. Lemmából $0<c<\operatorname{Re} z$ esetén

$$\int_0^\infty e^{-zx}\tilde{\varrho}_x^\varepsilon(2)\,\tilde{R}^\varepsilon(dx) = \tag{2.30}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{w}\frac{\varphi(1-\gamma^\varepsilon)}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\bigg|_w\frac{\varphi}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\bigg|_{z-w}dw,$$

és itt a jobboldali integrál $c>0$ és $z=2c$ esetén konvergál a 2.12. Lemmából folyólag. (2.26) következni fog, ha megmutatjuk, hogy valamely $z>0$-ra, pl. $z=2c$-re, a (2.30) kifejezés 0-hoz tart, ha $\varepsilon\to 0$. Azonban a jobb oldali integrált felülről becsüli $K|\varphi(z)|^2|z|^{-1}$, ahol K nem függ $z=c+it$-től (c fix) és ε-tól. Ezért a Lebesgue-féle konvergencia tétel alkalmazható, és az integrál 0-hoz tart.

Rátérünk (2.27) igazolására. Nyilván

$$\tilde{B}_t^\varepsilon = \int_0^t \tilde{\varrho}_x^\varepsilon(2)\,dx$$

és (2.28) figyelembevételével

$$\int_0^\infty e^{-zx}\tilde{B}_{\varepsilon^{-1}x}^\varepsilon\,dx = \frac{1}{\varepsilon z^2}\frac{\varphi(1-\gamma^\varepsilon)}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon z}. \tag{2.31}$$

Tegyük fel egy pillanatra, hogy

$$\int_0^\infty x^2 J^\varepsilon(dx) = o(1). \tag{2.32}$$

Ekkor

$$1-\gamma^\varepsilon(\varepsilon z) = \varepsilon^2 z + o(\varepsilon^2)$$

és

$$1-\varphi(\varepsilon z)\gamma^\varepsilon(\varepsilon z) = \lambda\varepsilon z + o(\varepsilon^2).$$

Ezeknek a relációknak a segítségével (2.31)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-zx}\tilde{B}_{\varepsilon^{-1}x}^\varepsilon\,dx = (\lambda z^2)^{-1},$$

és ez ekvivalens (2.27)-tel. Végül (2.32) bizonyítása a (vi) feltételből nyerhető a következő egyenlőtlenség-sorozat felhasználásával:

$$\int_0^\infty x^2 J^\varepsilon(dx) = \int_0^\infty x\big(1-J^\varepsilon(x)\big)\,dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^\infty kh\big[1-J^\varepsilon\big((k-1)h\big)\big]h \leqq h^2 + h^2\big(1-J^\varepsilon(h)\big)\frac{1+N^\varepsilon(h)}{[N^\varepsilon(h)]^2}.$$

Valóban, ha valamely $\varepsilon_n\to 0$ sorozatra és $0<h_0<1$-re

$$\int_0^\infty x^2 J^{\varepsilon_n}(dx) \geqq h_0,$$

akkor az előző egyenlőtlenséget $h=h_0$-ra alkalmazva

$$\int_0^\infty x^2 J^{\varepsilon_n}(dx) \leqq h_0^2 + h_0 \varepsilon_n 2[N^{\varepsilon_n}(h_0)]^{-2} \to h_0^2,$$

ami ellentmondás.

Q. e. d.

2.14. Lemma. *Tetszőleges $t>0$-ra $x\in[0, t]$-ben egyenletesen*

$$\mathbf{E}(W_t^\varepsilon | w_1^\varepsilon = x) \to 1+2\lambda^{-2}(t-x).$$

Megjegyzendő, hogy ez a lemma valamint a következő is úgy értendő, hogy a feltételes várható értékek alkalmas verzióira igazak.

Bizonyítás. A definíciókból, valamint U és V szimmetriájának felhasználásával

$$\mathbf{E}(W_t^\varepsilon | w_1^\varepsilon = x) = \mathbf{E}(W_t^\varepsilon | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon) =$$

$$= \mathbf{E}(U_{\varepsilon^{-1}t}^\varepsilon | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon) + \mathbf{E}(V_{\varepsilon^{-1}t}^\varepsilon | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon).$$

Csak azt bizonyítjuk, hogy

$$\mathbf{E}(U_{\varepsilon^{-1}t}^\varepsilon | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon) \to 1+\lambda^{-2}(t-x), \tag{2.33}$$

hiszen az

$$\mathbf{E}(V_{\varepsilon^{-1}t}^\varepsilon | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon) \to \lambda^{-2}(t-x)$$

reláció hasonlóan igazolható. (2.33) belátásához írjuk:

$$\mathbf{E}(U_{\varepsilon^{-1}t}^\varepsilon | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon) =$$

$$= 1+\mathbf{E}\Big(\int_{B^\varepsilon \cap [\varepsilon^{-1}x,\, \varepsilon^{-1}t]} \tilde{H}^\varepsilon(du-\varepsilon^{-1}x) | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon \Big).$$

Most a jobb oldali várható értékre (2.25)-tel analóg felbontást készíthetünk, következésképp (2.33) adódni fog, ha belátjuk, hogy minden $\alpha>0$-ra

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \mathbf{E}\Big(\int_{B^\varepsilon \cap [\varepsilon^{-1}x,\, \varepsilon^{-1}x+\alpha]} \tilde{H}^\varepsilon(du-\varepsilon^{-1}x) | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon \Big) = 0 \tag{2.34}$$

és minden $t>0$-ra $x\in[0, t]$-ben egyenletesen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}(|B^\varepsilon \cap [\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}t]| \, | u_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}x < v_1^\varepsilon) \to \lambda^{-1}(t-x)| \tag{2.35}$$

(ezek a relációk 2.26-nak és 2.27-nek felelnek meg).

(2.34) bizonyítása hasonló a (2.26)-éhoz, de itt ki kell használnunk a (iii) feltételt. Valóban, a különbség a kezdeti feltételben van, mert itt $\varepsilon^{-1}x$ időpontban az első lift javítása éppen kezdődik, míg a másodikat már javítják K_x^ε ideje és még javítják Ψ_x^ε ideig, s ez utóbbi változó eloszlásfüggvénye valamely $D_x^\varepsilon(y)$. (vi)-ból $D_x^\varepsilon \to_d \delta_0$, ami a 0-ban koncentrált degenerált eloszlás, függetlenül K_x^ε értékétől, s így a konvergencia x-ben egyenletes. Legyen $\vartheta_x^\varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{-zy} D_x^\varepsilon(dy)$. Könnyű látni, hogy most (2.28) helyett a

$$\frac{1-\vartheta_x^\varepsilon(z)}{z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\vartheta_x^\varepsilon \varphi(1-\gamma^\varepsilon)}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\Big|_z$$

és (2.29) helyett a

$$\frac{\varphi(1-\gamma^\varepsilon)}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\Big|_z = (1-\gamma^\varepsilon)|_z + \frac{\varphi^2(1-\gamma^\varepsilon)\gamma^\varepsilon}{1-\varphi\gamma^\varepsilon}\Big|_z$$

függvények lépnek fel. Ismét alkalmazhatjuk Parseval-formulánkat, mint (2.30)-ban, kivéve az első tagok konvergenciáját, mert az nem tartalmazza az integrálható $|\varphi(z)|^2|z|^{-1}$ faktort. Azonban ez a konvolúció valószínűségi úton becsülhető, mert az az alábbi alakú valószínűségnek felel meg

$$\mathbf{P}(\xi+\eta^\varepsilon < \psi_x^\varepsilon) \leqq \mathbf{P}(\xi < \psi_x^\varepsilon) = \int_0^\infty (1-D_x^\varepsilon(y))\,F(dy) \leqq$$

$$\leqq \int_0^\infty (1-N^\varepsilon(y))F(dy) = \int_0^\infty F(y)\,N^\varepsilon(dy).$$

Valóban az (iii) és (vi) feltételek segítségével

$$\int_0^\infty F(y)\,N^\varepsilon(dy) \leqq c_1 \int_0^{c_2} yN^\varepsilon(dy)+1-N^\varepsilon(c_2) = o(1),$$

és ezzel (2.34)-it igazoltuk.

(2.35) bizonyításához először vegyük észre, hogy a (2.27) konvergencia egyenletes tetszőleges véges intervallumban. Ez abból látszik, hogy a $\tilde{B}^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t}$-k nem-csökkenők fix $\varepsilon>0$-ra és határértékük folytonos. Igaz a következő becslés is

$$|B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t+\psi_x^\varepsilon} - B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}x+\psi_x^\varepsilon}| \leqq |B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t} - B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}x}| \leqq |B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t+\psi_x^\varepsilon} - B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}x+\psi_x^\varepsilon}| + \psi_x^\varepsilon.$$

Itt $B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t+\psi_x^\varepsilon} - B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}x+\psi_x^\varepsilon}$ ugyanolyan eloszlású, mint $B^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}(t-x)}$, így mértékének várható értéke $\lambda^{-1}(t-x)$-hoz konvergál $x\in[0, t]$-ben egyenletesen. Végül a (vi) feltételből következik, hogy $\mathbf{E}\psi_x^\varepsilon \to 0$, ha $\varepsilon\to 0$, x-ben egyenletesen, s ezzel mind (2.35), mind a lemma bizonyítása teljes.

Q. e. d.

2.15. Lemma. *Minden $t\geqq 0$-ra $y\in[0, t]$-ben egyenletesen*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}(W_t^\varepsilon - W_y^\varepsilon | w_k^\varepsilon = y) = 2\lambda^{-2}(t-y)$$

és $0\leqq y\leqq x\leqq t$-ben egyenletesen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}(W_t^\varepsilon - W_y^\varepsilon | w_k^\varepsilon = y,\ w_{k+1}^\varepsilon = x) = 1+2\lambda^{-2}(t-x).$$

A lemma bizonyítását elhagyjuk, mert az új gondolatokat nem igényel.

A 2.2. Tétel bizonyítása. A 2.10. és 2.13. Lemmákból következik, hogy a $\{W^\varepsilon\colon \varepsilon>0\}$ ponteloszláscsalád relatív kompakt. Megmutatjuk, hogy ha $W^{\varepsilon_k} \to_d \Pi^0$, midőn $\varepsilon_k\to 0$, akkor Π^0 a $2\lambda^{-2}$ paraméterű Poisson ponteloszlás.

π_1^0 eloszlásának meghatározásához induljunk ki az

$$\mathbf{E}W_t^{\varepsilon_k} = \int_0^t \mathbf{E}(W_t^{\varepsilon_k} | w_1^{\varepsilon_k} = 1)\mathbf{P}(w_{w_1}^{\varepsilon_k} < dx)$$

azonosságból. A 2.13. és a 2.14. Lemmák segítségével vehetjük az azonosság határ-

értékét az $\varepsilon_k \to 0$ esetben. Azt kapjuk, hogy π_1^0 eloszlásának minden folytonossági pontjában

$$2\lambda^{-2}t = \int_0^t (1+2\lambda^{-2}(t-x))\mathbf{P}(\pi_1^0 < dx).$$

A Laplace transzformáltakkal való egyszerű számolás adja, hogy akkor π_1^0 eloszlása valódi, nevezetesen $2\lambda^{-2}$ paraméterű exponenciális eloszlás.

Rögzítsük y-t tetszőlegesen. Ha $t \geqq y$, akkor ismét

$$\mathbf{E}(W_t^{\varepsilon_k} | w_1^{\varepsilon_k} = y) = \int_y^t \mathbf{E}(W_t^{\varepsilon_k} | w_1^{\varepsilon_k} = y, w_2^{\varepsilon_k} = x) \cdot \mathbf{P}(w_2^{\varepsilon_k} < dx | w_1^{\varepsilon_k} = y).$$

Az $\varepsilon_k \to 0$ határátmenetet végrehajtva a 2.15. Lemma alapján

$$2\lambda^2(t-y) = \int_0^t (1+2\lambda^{-2}(t-x))\mathbf{P}(\pi_2^0 < dx | \pi_1^0 = y),$$

ahonnan adódik, hogy $\pi_2^0 - \pi_1^0$ független π_1^0-tól és ugyanolyan eloszlású.

Indukcióval végül is azt kapjuk, hogy az összes $\pi_k^0 - \pi_{k-1}^0$ változók függetlenek és egyforma eloszlásúak: eloszlásuk $2\lambda^{-2}$ paraméterű exponenciális eloszlás. Így $W^\varepsilon \to_d \Pi^0$, a $2\lambda^{-2}$ paraméterű Poisson ponteloszláshoz. Mivel ez a ponteloszlás egyszerű, ezért a 2.10. Lemma miatt $W^\varepsilon \xrightarrow{D[0,\infty)}_d \Pi^0$ is áll.

Q. e. d.

2.6. Megjegyzések

1. A 2.2. Tétel első változatát 1974-ben bizonyítottam. Pontosabban a Szász (1975—A) dolgozatban szereplő tétel a $\mu^\varepsilon = \varepsilon\mu$ (vö. 2.3. Következmény) speciális esetre mondta ki a Poisson ponteloszláshoz való konvergenciát, de a feltételek lényegesen erősebbek voltak: F-ről feltettem, hogy korlátos és folytonos sűrűségfüggvénye van, J-ről pedig, hogy öregendő eloszlás (azaz minden $x, y \geqq 0$-ra $1-J(x+y) \leqq (1-J(x))(1-J(y))$. Szász (1975—B) és Szász (1975—C)-ben már a 2.2. Tétel valamivel gyengébb változata szerepelt: F-ről csak annyit tettem fel, hogy a 2.3. pont (i) feltétele mellett sűrűségfüggvénye véges intervallumon korlátos, míg J^ε-ról még feltettem, hogy $\lim_{\varepsilon \to 0} xd\left[\inf_{\varepsilon' \geqq \varepsilon} J^{\varepsilon'}(x)\right] = 0$. Eredményeimet a jelenlegi alakjukra a Szász (1977—A) dolgozatban sikerült élesítenem.

Zubkov (1975 és 1976) egy másik módszert adott a módosított két lift problémára, amikor azt is feltételezzük, hogy a rendszert a stacionaritást biztosító kezdeti feltételekkel indítjuk. Zubkov a korrelációs függvények módszerét használta, de segédeszközként nála is megjelentek felújítási tételek finomított alakjai. 1978-ban Kozlovnak (1978) is sikerült megoldania a két lift-problémát eredeti alakjában. Bizonyítása azon alapul, hogy becsülni tudja egy folytonos állapotterű Markov-lánc egyensúlyhoz való konvergenciájának sebességét, ahol Kolmogorov javaslatára Bernstein módszerét használja. Mind Zubkov, mind Kozlov megengedi, hogy F is függjön ε-tól, ami azonban nem lényeges általánosítás, eredményeink megfogalmazásánál az egyszerűség kedvéért eltekintettünk ettől. Zubkov a stacionaritás feltételezése mellett megköveteli, hogy F sűrűségfüggvénye korlátos legyen és 0-hoz tartson a végtelenben, továbbá azt, hogy minden $x > 0$-ra $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_x^\infty (1-J^\varepsilon(u)du = 0$. Kozlov

ugyancsak felteszi, hogy F-nek van sűrűségfüggvénye, továbbá, hogy J^ε-nak nincs atomja a 0-ban, $F*J^\varepsilon$-nak létezik $(2+\Delta)$-edik momentuma és végül, hogy elég nagy x-re és elég kis ε-ra $\inf_{\varepsilon'<\varepsilon} \inf_{x'>x} h^\varepsilon(x')>0$, ahol $h^\varepsilon(x)=\frac{d}{dx}(H^\varepsilon(x))$.

Módszerem segítségével — annak egy lépését igen ötletesen finomítva — Kaplan (1981) igen szép eredményt bizonyított: F-től annak folytonosságát, valamint a 2.2. Tétel (i) feltételének teljesítését követeli, míg J^ε-ról felteszi, hogy minden $\delta>0$-ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_{\varepsilon^{-1}\delta}^{\infty} xJ^\varepsilon(dx) = 0.$$

2. Módszerünk számos általánosítási lehetőséget enged meg. Az első lehetőség többcsatornás rendszerek vizsgálata. Nyelvünkön ez az n lift probléma, ahol n lift üzemel egymástól függetlenül; működési idejük eloszlása legyen rendre $F_1, \ldots, F_n$, míg a javítási idők eloszlása: $J_1^\varepsilon, \ldots, J_n^\varepsilon$. Tegyük fel, hogy $\int xF_i(dx)=\lambda_i$ és $\int xJ_i^\varepsilon(dx)=$ $=\mu_i\varepsilon$ $(1\leqq i\leqq n)$. Most a sokk definíciójában is nagyobb a választási lehetőség: a rendszer terhelése nagyobb, és a rendszer akkor nem működik megfelelően, ha legalább $n-k+1$ lift rossz, azaz legalább k lift $(1\leqq k<n)$ működését igényeljük. Ez az ún. „k out of n"-rendszer. Ha a sokkok sorozatát itt is $\tau_1^\varepsilon<\tau_2^\varepsilon<\ldots$ jelöli, és w^ε a $w_i^\varepsilon=\varepsilon^{n-k}\tau_i^\varepsilon$ pontok által meghatározott ponteloszlás, akkor — a 2.2. Tételével analóg feltételek mellett — w^ε stacionárius Poisson ponteloszláshoz konvergál, (l. Szász (1976)), amelynek paramétere

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{\substack{1\leqq l_1<\ldots<l_{n-k}\leqq n \\ l_i\neq j\ (1\leqq i\leqq n-k)}} \prod_{i=1}^{n-k} \frac{\mu_i}{\lambda_i}.$$

Hasonló feltételek mellett, mint Kozlov (1978), Kuznyecov (1979) tárgyalta n-csatornás rendszerek élettartamának aszimptotikus viselkedését.

Egy másik általánosítási lehetőség lenne annak figyelembevétele, hogy ha egy — vagy több — liftet javítanak, akkor a többiekre nagyobb terhelés jut, így hamarabb hibásodnak meg. Ilyen rendszereket tárgyalnak pl. El-Neweihi et. al. (1978) és az ismertetett módszer ezekre is alkalmazható.

3. Ellentétben az általánosításokkal, ahol tágak a lehetőségek, igen nehéznek tűnik a 2.2. Tételben vagy a 2.3. Következményben a konvergencia sebességének becslése, pedig az eredmények alkalmazhatósága szempontjából a becslések igen fontosak lennének.

IRODALOM

[1] Anyiszimov, V. V. (1971) Tyeor. ver i mat. sztat. 4, 18—26.
[2] Anyiszimov, V. V. (1973) Szlucsajnüje processzüi sztat. vüvodü. 3, 22—31.
[3] Barlow, R. E.—Proschan F. (1973) Multivariate Analysis III. 319—335. Academic Press.
[4] El-Neweihi, E.—Proschan, F.—Sethuraman, J. (1978) J. Appl. Prob. 15, 675—688.
[5] Gaver, Jr. D. R. (1963) IEEE Trans. Rel. 12, 30—38.
[6] Gnedenko, B. V. (1972) Proc. Sixth Berkeley Symp. Vol. II. 537—547.
[7] Guszak, D. V.—Koroljuk, V. S. (1971) Tyeor. ver i mat. sztat. 5, 43—50.
[8] Jagers, P. (1971) Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 22, 1—7.
[9] Jagers, P.—Lindwall, T. (1974) Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 28, 89—98.

[10] KAPLAN, N. L. (1981) J. Applied Probability 18, 697—706.
[11] KOZLOV, V. V. (1978) Tyeorija ver. i prim. 23, 190—195.
[12] KUZNYECOV, M. JU. (1979) Dop. Ukr. Akad. A. 328—33.
[13] STONE, C. J. (1966) Ann. Math. Stat. 37, 271—275.
[14] SZOLOVJOV, A. D. (1970) Tyehnyicseszkaja kibernetika. 1, 56—71.
[15] TOMKÓ J. (1966) MTA III. Oszt. Közl. 16, 1—16.
[16] TURBIN, A. F. (1971) Tyeor. ver. i mat. sztat.
[17] ZUBKOV, A. M. (1975) Mat. Szbornyik. 98, 143—156.
[18] ZUBKOV, A. M. (1976) Moszkva. Izd. MGU. 197—202.

III. FEJEZET

RÉSZECSKÉK MOZGÁSA ÜTKÖZÉSEKKEL: DIFFÚZIÓS KÖZELÍTÉS

3.1. A Brown-mozgás dinamikai elméletei

A fizikában a sztochasztikus viselkedésnek alapvetően három megjelenési formája van. Ezek egyike — ez a statisztikus mechanika tárgya és fő módszere — a szabadsági fokok számának redukciója, amelynek egyik legismertebb formája a Brown-mozgás. A Brown-mozgásnál sok részecskéből (az alábbiakban végtelen sokból) álló, tehát magas szabadsági fokszámú rendszerben egyetlen részecske helyzetét kivéve az összes szabadsági fokra átlagolunk, s azoktól így megszabadulva kapunk a redukált leírásban sztochasztikus differenciálegyenletet az eredeti determinisztikus differenciálegyenletrendszer helyett.

A másik két forma a kvantummechanikai véletlen (több kísérlet történt ezt is visszavezetni az első formára, de eddig meggyőző eredmény nem született) és az instabilitás következtében fellépő „káosz" (pl. turbulenciánál).

Részecskék mozgásának sztochasztikus jellegét először Robert Brown, a múlt században élt angol botanikus figyelte meg, amikor stacionárius folyadékban vagy gázban mozgó apró részecskék mozgását tanulmányozta. Később Einstein (1905) a molekuláris hőelmélet alapján — egyúttal annak első mérhető bizonyítékát adván — kidolgozta a Brown-mozgás fizikai elméletét. Két hipotézist elfogadva: 1. különböző részecskék mozgása független egymástól; 2. ugyanazon részecske viselkedése diszjunkt időintervallumokban független, feltéve, hogy az intervallumok nem túl kicsik — Einsteinnek sikerült levezetnie a Brown-mozgás diffúziós egyenletét. Később Wiener (1923) megalkotta az egyenlet megoldásának pontos matematikai modelljét, ez a Wiener-folyamat.

Einstein bizonyítása, akárcsak hipotézisei (matematikailag) nem szigorúak, és önmagában kívánatos a Brown-mozgás szigorú megalapozása. Einstein elmélete nem dinamikai elmélet, abban az értelemben, hogy nem illeszkedik a mechanika Hamilton—Jacobi-féle felépítésébe, axiómái egy szinttel feljebb fogalmazódnak. (A Brown-mozgás dinamikus elméleteiről bővebben l. Nelson (1967)*). Mivel a Brown-mozgás a szabadsági fokok redukciójának is aránylag egyszerű, viszont rendkívül fontos példája, ezért a modern statisztikus mechanika egyik alap-feladata a Brown-mozgás mély megértése. A modern statisztikus mechanika szellemében széles körben elfogadott a következő stratégia:

1. Feltesszük, hogy rendszerünkben a szabadsági fokok száma végtelen, azaz végtelen sok részecske mozog a d-dimenziós euklideszi térben.

2. A részecskék között egy Φ pár-potenciállal adott kölcsönhatás van.

3. A rendszert véletlen kezdeti feltételből indítjuk, s azután a Hamilton-egyenletek szerint mozog.

4. Egy fix, megjelölt részecske pályáját követjük, és a pálya viselkedését tanulmányozzuk megfelelő normálás mellett.

A vázolt alapfeltevések mellett tanulmányozható a Brown-mozgás, de vizsgálat tárgyává tehetők más fizikai jelenségek vagy hipotézisek, példának okáért Einstein hipotéziseinek értelmezése és érvényességi köre.

Megjegyezzük, hogy a stratégia első pontját a szükségesnél kissé erősebben fogalmaztuk: mivel itt azt kell belátnunk, hogy az 1.—3. pontok által meghatározott végtelen differenciálegyenlet-rendszernek létezik egyetlen megoldása, legalábbis kezdeti feltételek egy teljes mértékű halmazán (l. Lanford (1980)), gyakran elég nagy, de véges rendszereket tekintenünk (l. Spohn (1979)*).

A stratégia megfogalmazása azonnal illusztrálja a véletlen ponteloszlások modern elméletének jellegét: épp a statisztikus fizikai kérdésfeltevések hatására *kölcsönhatásban álló pontok* véletlen eloszlásait vizsgálja.

A fenti stratégiát eddig csak az egydimenziós esetben sikerült megvalósítani, és ennek az esetnek a tárgyalása a jelen fejezet egyik fő célja. Annak ellenére, hogy a fizikai valóság 3- vagy 4-dimenziós és vizsgálataink több oldalról is hangsúlyozni fogják azt a különbséget, amely az egy-, illetve a többdimenziós rendszerek között fennáll, a statisztikus fizikai megértést gyakran segíti elő alacsony dimenziós rendszerek vizsgálata, ezért eredményeink nemcsak a valószínűségelmélet szempontjából érdekesek. Nemcsak a Brown-mozgás dinamikai elméletét adjuk, hanem Einstein első hipotézisével is részletesen foglalkozunk: az egydimenziós modell itt is sajátságos. Végül röviden utalunk azokra az aktuális problémákra, amelyek a többdimenziós modellek kutatása során felmerültek.

A stratégia 4. pontjában szereplő normálás igen jelentős szerepet játszik. A Brown-mozgásról lévén szó, természetes a *diffúziós határátmenetet* venni. Ekkor a szabad úthossz 0-hoz tart, a részecske trajektóriája meglehetősen irregulárissá válik. Ez a határátmenet használatos a valószínűségelméletben, amikor a véletlen bolyongás Wiener approximációját bizonyítják. A véletlen bolyongás tulajdonképpen egy megfigyelt részecske pályájára a legegyszerűbb modell, így ez a példa is e fejezet témájához kapcsolódik.

3.2. Általános egydimenziós modell

Legyen $\{(q_i, p_i)\colon i \in \mathbf{Z}\}$ egy véletlen jelzett ponteloszlás realizációja, ahol mind az X alaptér, mind az Y jeltér a valós egyenes, $\mathbf{R}^1$. Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy $q_i \leqq q_{i+1}$ minden i-re. Ezzel megadtunk egy végtelen részecskerendszert, és q_i illetve p_i jelölik az i-edik részecske helyét és impulzusát a 0 időpontban. A részecskékről feltesszük, hogy egységnyi tömegűek és pontszerűek. A részecskék egyenesvonalú egyenletes mozgást írnak le mindaddig, amíg két részecske nem találkozik; ekkor ütköznek, azaz a mechanikai törvények szerint kicserélik impulzusaikat.

Harris (1965) egzisztencia és unicitási tétele szerint a részecskerendszer mozgása egyértelműen meghatározott, ha a kezdeti véletlen ponteloszlásra teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) $\lim_{|n|\to\infty} n^{-1} q_n = \mu$ 1 valószínűséggel, ahol μ pozitív valószínűségi változó;

(ii) a $\{q_i\}_{-\infty}^{\infty}$ és $\{p_i\}_{-\infty}^{\infty}$ sorozatok függetlenek egymástól, továbbá $\{p_i\}_{-\infty}^{\infty}$ független, egyforma eloszlású változók sorozata és $\mathbf{E}p_i = 0$. (A közös eloszlást F-fel fogjuk jelölni.)

Jelölje $y_i(t)$ az i-edik részecske pályáját az így meghatározott dinamikában (megjegyezzük, hogy minden i-re $y_i(t) \leqq y_{i+1}(t)$ és $y_i(o) = q_i$). Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $q_{-1} < 0 \leqq q_0$ és $\mu =$ állandó 1 valószínűséggel. Doobnak az 1.2 pont végén említett tétele szerint a $(\mu dq) \times F(dp)$ intenzitású Poisson pont-

eloszlás $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$-en invariáns mérték a fenti dinamikára, ezért ezt a dinamikát egyensúlyinak nevezzük. Ha a kiinduló mérték nem invariáns, nem-egyensúlyi dinamikáról beszélünk. Az előző pontban részletezett stratégia megvalósításában az első eredmények az egyensúlyi dinamikára vonatkozólag születtek: Harris (1965) és Spitzer (1969) megmutatták, hogy ha a kezdeti ponteloszlás Poisson (l. előbb), akkor

$$A^{-1/2}(y_0(At) - y_0(0)) \xrightarrow{C[0,\infty)}_d \sigma W(t)$$

$(0 \leqq t < \infty)$ ahol σ pozitív állandó. Később Szatzschneider (1975 és 1978) vizsgálta a nem-egyensúlyi dinamika esetét, amikor a részecskék 0-beli helyzete kis véletlen perturbációja egy rácsos elhelyezkedésnek és a Wiener-folyamattól különböző Gauss-folyamatokat nyert határértékként. A Major—Szász (1980) dolgozat a nem-egyensúlyi dinamikát a 0 időpontbeli helyzetek ponteloszlására tett általános feltételek mellett tárgyalta és határfolyamatok széles osztályát nyerte, amely speciális esetként tartalmazza a Wiener-folyamatot és a Szatzschneider által nyert Gauss-folyamatokat.

Jelöljük

$$v(x) = \begin{cases} \text{card } \{i\colon q_i \in (0, x)\}, & \text{ha } x > 0 \\ -\text{card } \{i\colon q_i \in [x, 0]\}, & \text{ha } x \leqq 0, \end{cases}$$

és vezessük be az $S_A(u) = A^{-1/2}(v(Au) - \mu^{-1}Au)$ folyamatokat, ahol $A > 1$, $u \in \mathbf{R}^1$. Tegyük fel, hogy

1. Létezik oly $S(u)$, $u \in \mathbf{R}^1$ folyamat, amelynek trajektóriái $C(-\infty, \infty)$-beliek, hogy $S_A(u)$ konvergál $S(u)$-hoz a $D(-\infty, \infty)$ térben értelmezett gyenge konvergencia szerint;

2. $\sup_u (1+|u|)^{-1}|S_A(u)|$ sztochasztikusan korlátos;

3. Minden pozitív T-re a $\xi_r^T(t) = S(t+r)$, $-T \leqq t \leqq T$ folyamatok r-ben egyenletesen feszesek $(-\infty < r < \infty)$.

(A feltételekben használt fogalmakat illetően l. Billingsley (1968)* és Feller (1966)*).

Megjegyezzük, hogy a 3. feltétel nyilvánvalóan teljesül abban a fontos speciális esetben, amikor $S(u)$ növekményei stacionáriusak.

3.1. Tétel. *Ha teljesülnek az (i)—(ii) és 1.—2. feltételek, és $A \to \infty$, akkor a $\psi_A(t) = A^{-1/2}(y_0(At) - y_0(0))$ folyamatok véges dimenziós eloszlásai konvergálnak a $\beta(t)$ folyamat véges dimenziós eloszlásaihoz, amelyeket a*

$$\mathbf{P}(\beta(t_j) < w_j, 1 \leqq j \leqq N) = \mathbf{E}\Phi_\Sigma(u_1, \ldots, u_n)$$

egyenlet határoz meg. Itt a $\Phi_\Sigma(u)$ $(u \in \mathbf{R}^n)$ N-dimenziós normális eloszlás várható érték vektora 0 és szórásmátrixa $\sum = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$, ahol

$$\sigma_{ij} = \min(t_i, t_j)\mathbf{E}|p_0|\,\mathbf{E}[\min(t_i|p_0|, t_j|p_1|)\chi_{\{p_0 p_1 > 0\}}]$$

és azonkívül $u_j = \int S(-pt_j)F(dp) + w_j$.

Ha még a 3. feltétel is teljesül, akkor az eloszlásban való konvergenciát a $C[0, \infty)$ térben is állíthatjuk.

A tételnek nem-triviális következménye az az eset, amikor a részecskék helyzetének kezdeti eloszlása egy felújítási folyamat pontjai által meghatározott véletlen ponteloszlás. Ez az eset azért is érdekes, mert itt az S határfolyamat maga is Wiener-folyamat, a β határfolyamat struktúrája is egyszerűbb, sőt β mindig Gauss-folyamat. Tegyük fel tehát, hogy a $\{(q_i, p_i)\colon i \in \mathbf{Z}\}$ véletlen ponteloszlásra a jelen pont elején szereplő (ii) feltétel mellett teljesül

(i)* a $\{q_i: i\in\mathbf{Z}\}$ pontok ($q_0=0$) egy felújítási folyamat pontjai, azaz a nem-negatív $q_{i+1}-q_i$, $i\in\mathbf{Z}$ valószínűségi változók független egyforma eloszlásúak valamely K eloszlással, azonkívül

$$\mathbf{E}(q_{i+1}-q_i)=\mu(0<\mu<\infty) \quad \text{és} \quad \mathbf{D}^2(q_{i+1}-q_i)=\sigma^2<\infty.$$

Az (i)* feltevés erősebb (i)-nél, így a dinamika létezik. A már bevezetett jelölésekkel igaz a

3.2. Tétel. *Az (i)* és (ii) feltételek mellett a* $\psi_A(t)=A^{-1/2}y_0(At)$ *folyamatok* $A\to\infty$ *esetén valamely* $\gamma(t)$ *Gauss-folyamathoz konvergálnak eloszlásban a* $C[0,\infty)$ *térben.* γ*-t az* $\mathbf{E}\gamma(s)=0$ *és az*

$$\mathbf{E}\gamma(s)\gamma(t)=\mu^{-1}\mathbf{E}|p_0|\min(s,t)+\mu^{-3}(\sigma^2-\mu^2)\cdot \tag{3.1}$$

$$\cdot\,\mathbf{E}\min(s|p_0|,\,t|p_1|)\chi_{\{p_0p_1>0\}}$$

egyenlőségek határozzák meg.

Tehát rögzített impulzus-eloszlás esetén a határfolyamat két paramétertől: a felújítási közök első két momentumától függ. Timoszyk (1974) eredményéből következik, hogy a γ folyamat akkor és csak akkor lesz Markov-folyamat, ha vagy $\sigma=\mu$ vagy valamely $a\neq 0$-ra $F=1/2(\delta_{-a}+\delta_a)$. Vagyis a határfolyamat kizárólag ebben a két esetben lehet Wiener-folyamat, és könnyű ellenőrizni, hogy ekkor valóban Wiener-folyamat is lesz.

3.3. Általános egydimenziós modell: bizonyítások

Emlékeztetünk arra, hogy a $D(I)$ (vagy $C(I)$) téren — ahol I véges vagy végtelen intervallum, $I\subset\mathbf{R}$ — adott valószínűségi mértékek halmaza akkor és csak akkor konvergens a megfelelő tér topológiája szerint, ha megadható kompakt intervallumok olyan I_n, $n=1,2,\ldots$, $I_n\subset I_{n+1}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_n=I$ sorozata, hogy a mértékeknek $D(I_n)$-re (illetve $C(I_n)$-re) vett vetületei minden n-re konvergálnak (l. Stone (1963)).

Használni fogjuk az (i) feltétel két egyszerű következményét:

$$\sup_y (1+|y|)^{-1}|v(y)|<C_1\mu^{-1}, \tag{3.2}$$

$$\lim_{A\to\infty} A^{-1}v(Ay_A)=y\mu^{-1}, \tag{3.3}$$

ahol C_1 konstans és $\lim_{A\to\infty} y_A=y\neq 0$. $y>0$-ra ezek az összefüggések a $q_{v(y)}<y\leqq q_{v(y)+1}$ egyenlőtlenségből és (i)-ből kaphatók meg.

Bizonyításunk kiindulópontja Harris (1965) fontos észrevétele: az ütközéses modell eloszlásai megkaphatók a szabad — ütközések nélküli — dinamika bizonyos valószínűségeiként. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$B_A(t,w)=\operatorname{card}\{k:\ k\leqq 0,\ q_k+tAp_k\geqq\sqrt{A}w\},$$

$$C_A(t,w)=\operatorname{card}\{k:\ k>0,\ q_k+tAp_k<\sqrt{A}w\},$$

$$z_A(t,w)=A^{-1/2}(B_A(t,w)-C_A(t,w)).$$

Mármost Harris elemi kombinatorikai meggondolással megmutatta, hogy a $\{z_A(t, w)<0\}$ és $\{\psi_A(t)<w\}$ események azonosak. Ezért

$$\mathbf{P}(\psi_A(t_j) < w_j,\ 1 \leqq j \leqq N) = \mathbf{P}(z_A(t_j, w_j) < 0,\ 1 \leqq j \leqq N). \tag{3.4}$$

Jelöljük $\mathcal{Q}$-val a $\{q_i, i \in \mathbf{Z}^1\}$ változók által generált σ-algebrát. Eljárásunk lényeges pontja, hogy a (3.4) jobb oldalán szereplő esemény $\mathcal{Q}$ melletti feltételes valószínűsége aszimptotikusan megkapható (feltételesen) független (!), különböző eloszlású valószínűségi változókra alkalmazott centrális határeloszlástételből. Sőt a megfelelően normált összeg aszimptotikus szórása a feltételtől független, a feltételes várható érték aszimptotikája viszont számolható. (3.4) kiértékelésére térve jelöljük $h_l = (At)^{-1}(A^{1/2}w - q_l)$ és $h_l^j = (At_j)^{-1}(A^{1/2}w_j - q_l)$, és tekintsük tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbf{R}^1$ esetén

$$\mathbf{P}(z_A(t_j, w_j) < \alpha_j,\ 1 \leqq j \leqq N | \mathcal{Q}) = \tag{3.5}$$

$$= \mathbf{P}\left(A^{-1/2}\left[\sum_{l=-\infty}^{0} \chi_{\{p_l \geqq h_l^j\}} - \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{\{p_l < h_l^j\}}\right] < \alpha_j,\quad 1 \leqq j \leqq N\right).$$

A feltételes várható értékre

$$\mathbf{E}(z_A(t, w)|\mathcal{Q}) = A^{-1/2}\left[\sum_{l=-\infty}^{0} (1 - F(h_l)) - \sum_{l=1}^{\infty} F(h_l)\right]. \tag{3.6}$$

Itt

$$\sum_{l=1}^{\infty} F(h_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{q_l + pAt < A^{1/2}w\}} F(dp)\nu(dq) = \int_{-\infty}^{w/A^{1/2}t} \nu(A^{1/2}w - pAt) F(dp);$$

és hasonlóan

$$\sum_{l=-\infty}^{0} (1 - F(h_l)) = -\int_{w/A^{1/2}t}^{\infty} \nu(A^{1/2}w - pAt) F(dp).$$

Következésképpen (3.6)-ból

$$\mathbf{E}(z_A(t, w)|\mathcal{Q}) = -A^{1/2}\int \nu(A^{1/2}w - pAt) F(dp) = \tag{3.7}$$

$$= -\int S_A(-pt + A^{-1/2}w) F(dp) - w.$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathbf{E}p = 0$.

A tételek bizonyításához több lemmára lesz szükségünk. Feltehetjük és fel is tesszük, hogy $\mu = 1$ m.m.

3.3. Lemma. *Az (i) és (ii) feltételekből következik, hogy* 1 *valószínűséggel a*

$$(z_A(t_j, w_j) - \mathbf{E}(z_A(t_j, w_j)|\mathcal{Q}),\quad 1 \leqq j \leqq N) \tag{3.8}$$

valószínűségi vektorváltozó $\mathcal{Q}$-ra vett feltételes eloszlása aszimptotikusan normális eloszlású. E normális eloszlás várható értéke 0 *és kovariancia mátrixa* $\sum = (\sigma_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq N}$, *ahol*

$$\sigma_{ij} = \mathbf{E}|p_0| \min(t_i, t_j) - \mathbf{E}[\min(t_i|p_0|, t_j|p_1|)\chi_{\{p_0 p_1 > 0\}}]. \tag{3.9}$$

A lemma speciálisan azt is állítja, hogy a (3.8) változó aszimptotikus eloszlása független a feltételtől.

A lemma igazolásában alapvető a szórás kezelése, és ez az 1.2 lemma bizonyításának gondolatán alapul.

Bizonyítás. (3.5), (3.6) valamint a p_i-k feltételes függetlensége alapján a többdimenziós centrális határeloszlástétel azt mondja, hogy a (3.8) kifejezés $\mathcal{Q}$ melletti feltételes eloszlása aszimptotikusan normális, 0 várható értékkel és $(\sigma_{ij}^A)_{1\leqq i,\, j\leqq N}$ kovariancia mátrixszal, ahol

$$\sigma_{ij}^A = A^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[F(\min(h_k^i, h_k^j)) - F(h_k^i)\, F(h_k^j)\right].$$

A lemmához mindössze azt kell belátnunk, hogy $\sigma_{ij}^A \to \sigma_{ij}$, midőn $A \to \infty$. Tekintsük például az $A^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} F(h_k^i) F(h_k^j)$ összeget. Ez egyenlő

$$A^{-1} \int_0^{\infty} F(h^i) F(h^j) \nu(dq) =$$

$$= A^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{q+pAt_i < \sqrt{A}\, w_i\}} \chi_{\{q+p'At_j < \sqrt{A}\, w_j\}} F(dp) F(dp') \nu(dq) =$$

$$= \int_{-\infty}^{w_i/\sqrt{A}\, t_i} \int_{-\infty}^{w_j/\sqrt{A}\, t_j} A^{-1} \nu\left(A \min\left(A^{-1/2} w_i - t_i p,\, A^{-1/2} w_j - t_j p'\right)\right) F(dp) F(dp'),$$

ahol felcseréltük az integrálás sorrendjét. (3.3) és a Lebesque konvergencia tétel alapján ez utóbbi integrál határértéke létezik és egyenlő

$$\int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \min(t_i |p|, t_j |p'|) F(dp) F(dp') = \mathbf{E}\left[\min(t_i |p_0|, t_j |p_1|) \chi_{\{p_0,\, p_1 < 0\}}\right].$$

A határátmenet jogos, mert (3.3) miatt az integrandus $\leqq A^{-1} \left|\nu\left(\sqrt{A} w_i - A t_i p\right)\right| \leqq$ $\leqq C_1(t_i |p| + 1)$. A fentiekhez hasonlóan a megfelelő összeg $k \leqq 0$-ra ugyancsak konvergál, határértéke $\mathbf{E}[\min(t_i |p_0|, t_j |p_1|) \chi_{\{p_0,\, p_1 > 0\}}]$. Analóg módon

$$A^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} F(\min(h_k^i, h_k^j)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{A^{-1/2} \min\left(\frac{w_i}{t_i}, \frac{w_j}{t_j}\right)} A^{-1} \nu\left(A \min\left(A^{-1/2} w_i - t_i p,\, A^{-1/2} w_j - t_j p\right)\right) F(dp) \to$$

$$\to \min(t_i, t_j) \mathbf{E} p^-,$$

és ismét a $k \leqq 0$-ra vett megfelelő összeg határértéke $\min(t_i, t_j) \mathbf{E} p^+$.

Q. e. d.

3.4. Lemma. *A 3.1. Tétel feltételei mellett:*

a) *$A\ \theta(t) = \int S(-pt) F(dp)$, $t \in \mathbf{R}^1$ folyamat realizációi 1 valószínűséggel folytonosak;*

b) *Minden w-re a $\theta_A(t) = \int S_A(-pt + A^{-1/2} w) F(dp)$, $t \in \mathbf{R}^1$ folyamatok a $D(-\infty, \infty)$ térben eloszlásban konvergálnak a $\theta(t)$ folyamathoz, midőn $A \to \infty$;*

c) *A $z_A(t_j, w_j)$, $1 \leqq j \leqq N$ változók $\left(\mathbf{E}(z_A(t_j, w_j) | \mathcal{Q}),\ 1 \leqq j \leqq N\right)$ feltételes várható érték vektora eloszlásban a $-u = -(u_1, \ldots, u_N)$ vektorhoz konvergál, ahol $u_j = \int S(-pt_j) F(dp) + w_j$.*

a)-hoz és b)-hez hasonló állítások a $\theta^+(t)=\int_0^\infty S(-pt)F(dp)$ és a $\theta_A^+(t)=$ $=\int_0^\infty S_A(-pt)F(dp)$ folyamatokra illetve a $(-\infty, 0)$-n integrálással nyert $\theta^-(t)$ és $\theta_A^-(t)$ folyamatokra is állnak.

Bizonyítás. a) Elemi átalakítással

$$\theta(t)=\int\left[\frac{S(-pt)}{1+|p|t}\cdot\frac{1+|p|t}{1+|p|}\right](1+|p|)F(dp).$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés 1 valószínűséggel korlátos és t-ben folytonos, így $\mathbf{E}|p|<\infty$ miatt az állítás a Lebesgue-tétel folyománya.

b) A konvergenciát $[-T, T]$-n igazoljuk. Legyen $\varepsilon, \eta>0$. Az előző pontban szereplő 1. feltevésből következik, hogy bármely pozitív ε-hoz választható egy K_ε szám, hogy egy $(1-\varepsilon)$-t meghaladó mértékű H_ε halmazon tetszőleges t-re és A-ra $(1+$ $+|t|)^{-1}|S_A(t)|$ és $(1+|t|)^{-1}|S(t)|<K_\varepsilon$. Így ha $\tilde{p}$ elég nagy, akkor $\mathbf{E}|p|<\infty$ miatt H_ε-n mindenütt

$$\int_{|p|>\tilde{p}} S_A(-pt+A^{-1/2}w)F(dp)<\eta$$

és $\int_{|p|>\tilde{p}} S(-pt)F(dp)<\eta$ teljesülnek minden $|t|\leqq T$-re. Végezetül ugyanezen feltevésből az is adódik, hogy $S_A(t+A^{-1/2}w)$ a $D[-\tilde{p}T-1, \tilde{p}T+1]$ térben gyengén tart $S(t)$-hez, ami maga után vonja, hogy $\int_{|p|\leqq\tilde{p}} S_A(-pt+A^{-1/2}w)F(dp)$ eloszlásban konvergál $\int_{|p|\leqq\tilde{p}} S(-pt)F(dp)$-hez. Valóban a folytonos leképzés tétele (l. Billingsley (1968)*, 5.1. Tétel) alkalmazható, minthogy a $D[-\tilde{p}T-1, \tilde{p}T+1]$-en a $\psi(x)=$ $=\int_{|p|\leqq\tilde{p}} x(-pt)F(dp)$ összefüggéssel értelmezett ψ funkcionál $C[-\tilde{p}T-1, \tilde{p}T+1]$ pontjaiban folytonos.

c) A (3.7) reprezentációt használva az előző bizonyítás analógiájára.

Q. e. d.

A 3.1. Tétel bizonyítása. A véges dimenziós eloszlások konvergenciája a 3.3 és 3.4 Lemmákból könnyen adódik. Elegendő észrevenni, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén elég nagy A-ra

$$\left|\mathbf{P}(z_A(t_j, w_j)<0,\ 1\leqq j\leqq N)-\mathbf{E}\ \ \Phi_\Sigma(-\mathbf{E}(z_A(t_j, w_j)|\mathfrak{Q}),\ 1\leqq j\leqq N)\right|<\varepsilon,$$

ami a 3.3 Lemmából és a normális eloszlás folytonosságából látszik és ugyancsak

$$\left|\mathbf{E}(\Phi_\Sigma(-\mathbf{E}(z_A(t_j, w_j)|\mathfrak{Q}),\ 1\leqq j\leqq N)-\mathbf{E}\ \ \Phi_\Sigma(u_1, \ldots, u_N)\right|<\varepsilon$$

ami viszont a 3.4 Lemma következménye. Mostmár (3.4) a kívánt állítást adja.

A feszesség bizonyítását, amely a folytonossági modulus mélyebb vizsgálatát igényli, itt most elhagyjuk. A bizonyítás megtalálható az eredeti Major—Szász (1970) publikációban.

3.4. Két részecske pályájának vizsgálata

Az előző két pontban vizsgált egydimenziós modellben nyilvánvalóan nem fog teljesülni Einstein első hipotézise, itt közeli pontok mozgása oly erősen összefügg, hogy azok bármilyen gyenge normálás mellett is — aszimptotikusan összeragadnak. Ebben a modellben az az érdekes kérdés, mennyire távolinak kell lennie két pontnak, hogy trajektóriáik ne ragadjanak össze, és ezen túlmenően, mennyire távoli pontok trajektóriái lesznek az általunk tekintett diffúziós határátmenetben függetlenek.

Vizsgáljuk tehát két részecske pályáját a 3.2. pontban leírt modellben. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a 0 időpontban az egyik megfigyelendő részecske a 0 pontban (ennek indexe 0), a másik (indexe valamely $i_1>0$ érték) pedig az $f(A)$ pontban van. Bevezetve a $\varrho_{i,A}(t)=A^{-1/2}(y_i(At)-y_i(0))$ $(i\in\mathbf{Z}^1,\ t\geqq 0)$ jelölést a bennünket érdeklő folyamatok $\psi_A(t)=\varrho_{0,A}(t)$ és $\varphi_A(t)=\varrho_{i_1,A}(t)$.

Mielőtt matematikai állításokat fogalmaznánk meg, kíséreljük meg fizikai meggondolásokkal megsejteni, milyen eredményeket várunk. Tegyük fel, hogy a kezdeti részecske-sűrűség $\delta=\mu^{-1}$ állandó, és jelöljük $M=\mathbf{E}|p_i|$. A modell ε-tól és M-től való függését felső indexekkel jelöljük. Minthogy modellünk sajátossága szerint az impulzusok (nem a részecskék!) egyenletesen mozognak, ezért indokolt azt várnunk, hogy a (δ, M) modellben a 0 és az i_1 indexű részecskék pályáinak függése akkor lesz nem-triviális, ha távolságuk $\sim aM$, vagyis $i_1\sim a\delta M$. Ebben az esetben

$$\left(y_0^{\delta,M}(t),\ y_{a\delta M}^{\delta,M}(t)-y_{a\delta M}^{\delta,M}(0)\right)=(M/\delta)^{1/2}(\delta M)^{-1/2}\left(y^{1,1}(\delta Mt),\ y_{a\delta M}^{1,1}(\delta Mt)-y_{a\delta M}^{(1,1)}(0)\right).$$

Ha $\delta\to\infty$ és $M/\delta\to 1$, akkor azt várhatjuk, hogy akkor kapunk nem triviális aszimptotikát $\psi_A(t)$ és $\varphi_A(t)$ viselkedésére $(A=\delta M!)$, amikor $i_1=aA$.

Vezessük be a 3.2. pont 1. feltétele helyett az erősebb

1* Teljesül az 1. feltétel és $S(u)$ növekményei stacionáriusak;

feltételt, továbbá a

4. S növekményei rendelkeznek a keverő tulajdonsággal, azaz akármilyen (α', β'), (α'', β'') (véges) intervallum-párra

$$\mathbf{P}\left(S(\beta')-S(\alpha')<x',\quad S(\beta''+\tau)-S(\alpha''+\tau)<x''\right)\to$$

$$\to\mathbf{P}\left(S(\beta')-S(\alpha')<x'\right)\quad\mathbf{P}\left(S(\beta'')-S(\alpha'')<x''\right)$$

ha $\tau\to\pm\infty$.

3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az (i), (ii), 1*, 2 és 4 feltételek. Ha* $A^{-1}f(A)\to a$ $(0\leqq a\leqq\infty)$, *amikor* $A\to\infty$, *akkor a* $(\psi_A(\cdot), \varphi_A(\cdot))$ *véletlen elemek a* $C[0,\infty)\times C[0,\infty)$ *térben eloszlásban konvergálnak, valamely* $(\psi(\cdot), \varphi(\cdot))$ *elemhez. Ha* $a=\infty$, *akkor* ψ *és* φ *függetlenek, ha* $a=0$, *akkor* $\mathbf{P}(\psi(t)=\varphi(t),\ t\geqq 0)=1$.

A $0<a<\infty$ esetben ψ és φ együttes eloszlása is megadható, amint azt majd a bizonyításból látni fogjuk. Megjegyezzük, hogy a 4. feltételt csupán az $a=\infty$ esetben állított függetlenség belátásához használjuk.

Bizonyítás. Ismét feltesszük, hogy $\mu=1$. Mivel a bizonyítás a 3.1. tétel bizonyításának módszerével történik, ezért itt röviden vázoljuk és elsősorban azokat a lépéseket fogjuk részletezni, ahol új gondolatokra van szükség. Tekintsük a

$$\mathbf{P}\left(\psi_A(t_l)<w_l,\quad 1\leqq l\leqq N,\quad \varphi_A(s_j)<u_j,\quad 1\leqq j\leqq M\right) \tag{3.10}$$

valószínűségeket, ahol M természetes szám. Jelöljük

$$r_A(s,u)=A^{-1/2}\Big[\sum_{i\leqq i_1}\chi_{\{p_i\geqq(As)^{-1}(\sqrt{A}u+f(A)-q_i)\}}-\sum_{i>i_1}\chi_{\{p_i<(As)^{-1}\sqrt{A}u+f(A)-p_i)\}}\Big].$$

Mivel a $\{\psi_A(t)<w\}$ és a $\{z_A(t,w)<0\}$ események valamint a $\{\varphi_A(s)<u\}$ és az $\{r_A(s,u)<0\}$ események páronként azonosak, ezért a (3.10) valószínűség határértéke ugyanaz, mint a

$$\mathbf{P}\big(z_A(t_l, w_l) < 0,\quad 1 \leqq l \leqq N,\quad r_A(s_j, u_j) < 0,\quad 1 \leqq j \leqq M\big)$$

valószínűség határértéke. Ismét a $\mathcal{Q}$ σ-algebrára vonatkozó feltételes valószínűségekre térve

$$\mathbf{P}\big(\psi_A(t_l) < w_l,\quad 1 \leqq l \leqq N,\quad \varphi_A(s_j) < u_j,\quad 1 \leqq j \leqq M\big) =$$

$$\mathbf{EP}\big(z_A(t_l, w_l) < 0,\quad 1 \leqq l \leqq N,\quad r_A(s_j, u_j) < 0,\quad 1 \leqq j \leqq M|\mathcal{Q}\big) =$$

$$= \mathbf{EP}\big(z_A(t_l, w_l) - \mathbf{E}(z_A(t_l, w_l)|\mathcal{Q}) < -\mathbf{E}(z_A(t_l, w_l)|\mathcal{Q}),\quad 1 \leqq l \leqq N,\tag{3.11}$$

$$r_A(s_j, u_j) - \mathbf{E}(r_A(s_j, u_j)|\mathcal{Q}) < -\mathbf{E}(r_A(s_j, u_j)|\mathcal{Q}),\quad 1 \leqq j \leqq M|\mathcal{Q}\big).$$

A $\{q_n\}$ és $\{p_n\}$ sorozatok függetlensége miatt a

$$\big(z_A(t_l, w_l) - \mathbf{E}(z_A(t_l, w_l)|\mathcal{Q}),\quad 1 \leqq l \leqq N,\tag{3.12}$$

$$r_A(s_j, u_j) - \mathbf{E}(r_A(s_j, u_j)|\mathcal{Q}),\quad 1 \leqq j \leqq M$$

vektorváltozó $\mathcal{Q}$-ra vett feltételes eloszlására alkalmazható a többdimenziós centrális határeloszlástétel, amelyből következik, hogy 1 valószínűséggel a feltételes eloszlás határértéke $(M+N)$-dimenziós normális eloszlás 0 várható értékkel és valamely $\sum$ kovariancia-mátrixszal, amelynek kiszámolását a bizonyítás végére halasztjuk. (3.7)-hez hasonlóan

$$\mathbf{E}\big(r_A(s, u)|\mathcal{Q}\big) = -\int \big[S_A\big(A^{-1}f(A) - ps + A^{-1/2}u\big) - \tag{3.13}$$

$$- S_A\big(A^{-1}f(A)\big)\big] F(dp) - u.$$

Tegyük fel, hogy $a<\infty$. A 3.4. lemma c) állításához hasonlóan belátható, hogy az $\big(\mathbf{E}(z_A(t_l, w_l)|\mathcal{Q}),\ 1 \leqq l \leqq N,\ \mathbf{E}(r_A(s_j, u_j)|\mathcal{Q}),\ 1 \leqq j \leqq M\big)$ feltételes várható érték vektor eloszlásban egy $(g_1, \ldots, g_N, k_1, \ldots, k_M)$ véletlen vektorhoz tart, ahol $g_l = -\int S(-pt_l) F(dp) - w_l$, $1 \leqq l \leqq N$ és $k_j = -\int [S(a - ps_j) - S(a)] F(dp) - u_j$, $1 \leqq j \leqq M$. Ezért (3.11) alapján a (3.10) együttes eloszlás határértéke

$$\mathbf{E}\Phi_\Sigma\Big(\int S(-pt_l) F(dp) + w_l,\quad 1 \leqq l \leqq N;\tag{3.14}$$

$$\int [S(a - ps_j) - S(a)] F(dp) + u_j,\quad 1 \leqq j \leqq M,$$

ahol Φ $(M+N)$-dimenziós normális eloszlás 0 várható értékkel és $\sum$ kovariancia-mátrixszal.

A feszességet itt nem kell bizonyítanunk, az következik a 3.1. tételből.

Ha $a=0$, válasszuk meg az $N=M$, $t_l=s_j$, $1 \leqq l \leqq N$ értékeket tetszőlegesen. Elég megmutatni, hogy $\mathbf{P}\big(\psi(t_l)=\varphi(t_l),\ 1 \leqq l \leqq N\big)=1$. Legyen $\sum = (\sigma_{lj})_{1 \leqq l, j \leqq 2N}$. Tegyük fel, hogy már tudjuk, hogy $\sigma_{lj} = \sigma_{l, j+N} = \sigma_{l+N, j} = \sigma_{l+N, j+N}$, bármely $1 \leqq l, j \leqq N$-re. Akkor a Φ_Σ eloszlású $(\xi_1, \ldots, \xi_N, \eta_1, \ldots, \eta_N)$ vektor $\mathbf{E} \exp\Big[\sum_{l=1}^{N} (\alpha_l \xi_l + \beta_l \eta_l)\Big]$ karakterisztikus függvénye ilyen alakú: $\exp\Big[-1/2 \sum_{l,j=1}^{N} \sigma_{lj}(\alpha_l + \alpha_j)(\beta_l + \beta_j)\Big]$. Ebből a tényből, valamint az eloszlások és a karakterisztikus függvényeik közti megfeleltetés egyértelműségéből kapjuk, hogy $\mathbf{P}\big((\xi_1, \ldots, \xi_N) = (\eta_1, \ldots, \eta_N)\big) = 1$.

3.6. Lemma. *Legyen* $(\xi_1, \ldots, \xi_N, \eta_1, \ldots, \eta_N)=(\xi, \eta)$ $2N$*-dimenziós véletlen vektor. Ekkor* $\mathbf{P}(\xi=\eta)=1$ *akkor és csak akkor, ha minden* $w, u\in\mathbf{R}^N$ *esetén* $\mathbf{R}(\xi<w, \eta<u)=\mathbf{P}(\xi<\min(w, u))$, *ahol a jobb oldalon a minimum komponensekként veendő.*

E lemma bizonyítását is kissé elhalasztva, állításából következik, hogy $\Phi_\Sigma(w, u)$ $(w, u\in\mathbf{R}^N)$ ilyen alakú $\Phi_{\Sigma_0}(\min(w, u))$, ahol $\sum_0=(\sigma_{l,j})_{1\leqq l, j\leqq N}$. Vagyis bevezetve a $\zeta_l=\int S(-pt_l)F(dp)$ és a $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ jelölést, arra a következtetésre jutunk, hogy a (3.14) határeloszlás az alábbi alakú $\mathbf{E}\Phi_{\Sigma_0}(\min(\zeta+w, \zeta+u))=\mathbf{E}\Phi_{\Sigma_0}(\zeta+\min(w, u))$, ami — ismét a 3.6 lemmára hivatkozva — már adja a kívánt állítást.

A 3.6. Lemma bizonyítása. Jelölje D a $\{(w, u)\colon w, u\in\mathbf{R}^N, w=u\}$ diagonálist és legyen $\square=\bigtimes_{l=1}^{N}[a_l, b_l)\bigtimes_{j=1}^{N}[\alpha_j, \beta_j)$. A lemma „akkor" állításának igazolásához megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}(\square)=0$, valahányszor $\square\cap D=\emptyset$. A diszjunktság miatt valamely l-re $[a_l, b_l)\cap[\alpha_l, \beta_l)=\emptyset$, legyen pl. $l=1$ és $a_1\leqq b_1\leqq\alpha_1\leqq\beta_1$. Ismeretes, hogy

$$\mathbf{P}(\square)=\sum_{c_1, \ldots, c_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_N}\varepsilon J(c_1, \ldots, c_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_N),$$

ahol J jelöli (ξ, η) eloszlásfüggvényét, $\varepsilon=\pm 1$ és $c_l=a_l$ vagy b_l és $\gamma_j=\alpha_j$ vagy β_j. Következésképpen

$$\mathbf{P}(\square)=\hat{J}(b_1, \beta_1)-\hat{J}(a_1, \beta_1)-\hat{J}(b_1, \alpha_1)+\hat{J}(a_1, \alpha_1),$$

ahol

$$\hat{J}(c_1, \gamma_1)=\sum_{c_2, \ldots, c_N, \gamma_2, \ldots, \gamma_N}\varepsilon' J(c_1, \ldots, c_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_N),$$

és $\varepsilon'=\pm 1$ csak $c_2, \ldots, c_N, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$-től függ. A lemma feltételét alkalmazva tehát

$$\mathbf{P}(\square)=\hat{J}(b_1, b_1)-\hat{J}(a_1, a_1)-\hat{J}(b_1, b_1)+\hat{J}(a_1, a_1)=0,$$

ami épp a kívánt állítás.

A lemma „csak akkor" állítása nem kíván bizonyítást.

Q. e. d.

A $\sum$ kovariancamátrix kiértékelése

Feladatunk az

$$\mathrm{Cov}\,(z_A(t, w)-\mathbf{E}(z_A(t, w)|\mathcal{Q}),\quad r_A(t, w)-\mathbf{E}(r_A(t, w)|\mathcal{Q})|\mathcal{Q})$$

feltételes kereszt-kovarianca kiértékelése, ahol $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta|\mathcal{Q})=\mathbf{E}(\xi\eta|\mathcal{Q})-\mathbf{E}(\xi|\mathcal{Q})\mathbf{E}(\eta|\mathcal{Q})$. A p_i-k függetlensége adja, hogy ez a kovariancia így írható

$$\begin{aligned}&A^{-1}\sum_{i\leqq 0}\mathrm{Cov}\,(\chi_{\{q_i+p_iAt<w\}}, \chi_{\{q_i+p_iAs>u+f(A)\}}|\mathcal{Q})+\\ &+A^{-1}\sum_{0\leqq i\leqq i_1}\mathrm{Cov}\,(\chi_{\{q_i+p_iAt<w\}}, \chi_{\{q_i+p_iAs>u+f(A)\}}|\mathcal{Q})+\\ &+A^{-1}\sum_{i>i_1}\mathrm{Cov}\,(\chi_{\{q_i+p_iAt<w\}}, \chi_{\{q_i+p_iAs<u+f(A)\}}|\mathcal{Q})\end{aligned}\tag{3.15}$$

(l. az ábrát). Könnyű ellenőrizni, hogy ha a H_1 és H_2 eseményekre $H_1\subset H_2$, akkor

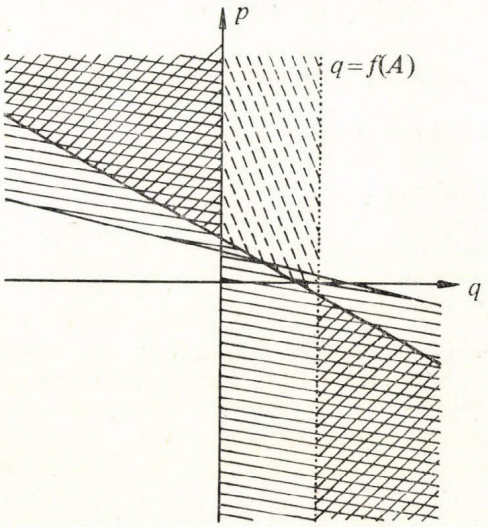
$$\mathrm{Cov}\,(\chi_{H_1^c}, \chi_{H_2^c})=\mathrm{Cov}\,(\chi_{H_1}, \chi_{H_2})=\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(H_2^c),$$

és

$$\operatorname{Cov}(\chi_{H_1^c}, \chi_{H_2}) = \operatorname{Cov}(\chi_{H_1}, \chi_{H_2^c}) = -\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(H_2^c).$$

Következésképpen a (3.15) összeg így írható

(3.16)
$$A^{-1} \sum \operatorname{Cov}(\chi_{\{q_i + p_i At < w\}}, \chi_{\{q_i + p_i As < u + f(A)\}} | \mathcal{Q}) +$$
$$+ 2A^{-1} \sum_{0 < i \leqq i_1} \operatorname{Cov}(\chi_{\{q_i + p_i At < w\}}, \chi_{\{q_i + p_i As < u + f(A)\}} | \mathcal{Q}).$$



2. ábra

Megmutatjuk, hogyan lehet számolni a második összeg határértékét. Kissé átalakítva

$$A^{-1} \sum_{0 < i \leqq i_1} \operatorname{Cov}(\chi_{\{q_i + p_i At < w\}}, \chi_{\{q_i + p_i As < u + f(A)\}} | \mathcal{Q}) =$$
$$= A^{-1} \int_0^{f(A)} [\mathbf{E}\chi_{\{q + p_i At < w\}} \chi_{\{q + p_i As < u + f(A)\}} -$$
$$- \mathbf{E}\chi_{\{q + p_i At < w\}} \mathbf{E}\chi_{\{q + p_i As < u + f(A)\}}] \nu(dq).$$

Itt

$$A^{-1} \int_0^{f(A)} \mathbf{E}\chi_{\{q + p_i At < w\}} \mathbf{E}\chi_{\{q + p_i As < u + f(A)\}} \nu(dq) =$$

$$= A^{-1} \int_0^{f(A)} \iint \chi_{\{q + pAt < w\}} \chi_{\{q + p' As < u + f(A)\}} F(dp) F(dp') \nu(dq) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-A^{1/2}w/t} \int_{-\infty}^{A^{-1/2}(u/s + (f(A)/As))} A^{-1} \nu\big(A \min(A^{-1/2}w - pt,$$

$$A^{-1/2}u + (As)^{-1} f(A) - p's, \quad A^{-1} f(A)\big) F(dp) F(dp').$$

$A \to \infty$ esetén (3.2) és (3.3) miatt e kifejezés határértéke

$$\int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{a/s} \min(-pt, a-p's, a) F(dp) F(dp').$$

Teljesen hasonlóan

$$A^{-1} \int_{0}^{f(A)} \mathbf{E} \chi_{\{q+p_i At<w\}} \chi_{\{q+p_i As<u+f(A)\}} \nu(dq) \to \int_{-\infty}^{0} \min(-pt, a-ps, a) F(dp).$$

A (3.16)-ban szereplő első összeg határértéke a fenti eljárással

$$L = \mathbf{E} \min(|p| t, |a-ps|) \chi_{\{p(ps-a)>0\}} - \mathbf{E} \min(|p_0| t, |a-p_1 s|) \chi_{\{p_0(p_1 s-a)>0\}}$$

adódik. Így (3.16) határértéke

$$L - 2[\mathbf{E} \min(|p| t, a-ps, a) \chi_{\{p>0\}} - \mathbf{E} \min(|p| t, a-p's, a) \chi_{\{p>0, a-p's>0\}}$$

ami itt is független a feltételtől.

A 3.5. tétel bizonyításának befejezése. Csupán az $a=\infty$ esettel maradtunk adósak. A keresztkovarianciák iménti számolásából kitűnik, hogy ebben az esetben ezek eltűnnek. Így 1 valószínűséggel a (3.12) vektorváltozó határeloszlása $(N+M)$-dimenziós normális eloszlás, amelynek első N komponense és a maradék M komponense függetlenek. A normális eloszlás folytonossága miatt (3.11) jobb oldalának és a

$$\Phi_\Sigma(-\mathbf{E}(z_A(t_l, w_l)|2), \ 1 \leqq l \leqq N, \ -\mathbf{E}(r_A(s_j, u_j)|2), \ 1 \leqq j \leqq M \tag{3.17}$$

kifejezésnek a különbsége 1 valószínűséggel 0-hoz tart, ha $A \to \infty$. Itt a Φ_Σ argumentumában álló várható értékek a (3.7), illetve a (3.13) alakban írhatók, amelyből S keverő tulajdonsága (4. feltétel) következtében (3.17) első N komponense függetlenné válik a többi M-től, ha $A \to \infty$. Mostmár a $\sum$-ra vonatkozó kiinduló észrevételünk a kívánt állítást adja.

Q. e. d.

3.5. Megjegyzések

A) Módszerünk különféle egydimenziós általánosítási lehetőséget enged meg. Néhány példa:

1. Ha a sebességek között megengedünk gyenge függést, akkor gyengén függő változók összegeire érvényes centrális határeloszlástételek alkalmazásával ez esetben is könnyen adódik a véges dimenziós eloszlások konvergenciája, míg a feszesség bizonyítása természetszerűleg bonyolultabb. Ha a kezdeti helyzet- és a sebesség-koordináták között is van függés, hasonló eredményt nyerni nehezebb.

2. Amint Harris módszere nem korlátozódott egyenletes mozgásra, úgy a miénk sem. Például, legyen $\mu=1$ és $S(t)=\sigma W(t)$ és az egyes részecskék (szabad, ütközés nélküli) mozgása nem egyenletes, hanem $\beta W(t)$, $t \geqq 0$, ahol σ és β pozitív paraméterek és $W(t)$ a standard Wiener-folyamat. Ekkor a 0 indexű részecske pályáját ismét $y_0(t)$-vel jelölve, most $A^{-1/4}(y_0(At)-y_0(0)) \to \delta(t)$, ha $A \to \infty$, ahol $\delta(t)$ Gauss-folya-

mat, melyre

$$\mathbf{E}\delta(t) \equiv 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{E}\delta(s)\delta(t) = 2\int_0^\infty \mathbf{P}(W(s) > \beta^{-1}x)\,dx +$$

$$+2(\sigma^2-1)\int_0^\infty \mathbf{P}(W(s) > \beta^{-1}x)\mathbf{P}(W(t) > \beta^{-1}x)\,dx.$$

Itt a konvergenciát csak a véges dimenziós eloszlásokra tudjuk állítani, a feszesség bizonyítása elvi nehézségekbe ütközik (vö. Gisselquist (1973)).

3. Ha pontszerű részecskék helyett kemény golyókat, ez esetben egyenlő hosszúságú (és tömegű) intervallumokat tekintünk, és az intervallumok közti távolságok a pont-modell távolságaival egyező eloszlásúak, viszont az egyéb feltevések változatlanok, akkor eltolástól eltekintve bármely részecske pályája ugyanolyan a pont-modellben és az intervallum-modellben. Ebből látszik, hogy a 3.1 és 3.2 tételek ez esetben is érvényesek, míg a 3.5 tételben figyelembe kell venni a véletlentől függő eltolást is.

4. A 3.5. tétel általánosítható két részecske helyett végtelen sok részecske esetére is (l. Szász (1980)).

5. Az a tény, hogy egy elég természetes ütközéses modellben nen-Wiener határfolyamatot kapunk egy részecske pályájára, első pillanatra meglepő. Az ütközéses dinamika azonban $\mathbf{R}^1$-en degenerált, a szokásokon kívül számos megmaradó mennyiség van, például a sorrend is invariáns, és ez a magyarázata a modell sajátosságainak. Érdekes lenne — mint Dobrusin javasolta — az ütközést véletlen ütközésre változtatni oly módon, hogy amikor két részecske találkozik, csak bizonyos π (<1) valószínűséggel ütköznek és $(1-\pi)$ valószínűséggel folytatják pályájukat. Ez esetben már mindig Wiener-folyamatot várunk határeloszlásnak.

B) Többdimenziós esetben jelentős előrelépés, hogy sikerült 1977-ben Alexandernek (1977) az egyensúlyi dinamikát megkonstruálnia rugalmas ütközések esetére. Most már vizsgálható lenne a modell diffúziós határértéke, de ez egyenlőre reménytelenül nehéz probléma.

A legtöbb reményt ergodelméleti módszerekhez lehet fűzni, ezekkel sikerült a modell erős leegyszerűsítésében, az ún. *Lorentz-gázban* egy részecske pályájának diffúziós limeszét vizsgálni. A Lorentz-gáznál kétféle pontszerű részecskénk van: az egyik típusúak tömege végtelen, a másik típusúaké egységnyi, Csak különböző típusú részecskék között van kölcsönhatás: ez valamely $\Phi: \mathbf{R}^d \to (-\infty, +\infty)$ eltolásinvariáns pár-potenciállal adott. Ha Φ a $\Phi(x)=\infty$, ha $|x| \leqq r$ és $=0$, ha $|x|>r$ ($r>0$) alakú, ún. tiszta kemény-mag potenciál, akkor a modell a következő: kezdetben adott r sugarú gömböknek egy determinisztikus vagy véletlen konfigurációja. Ezeket szórótesteknek nevezzük és mozdulatlanok. 0 időpontban ugyancsak adott a könnyű részecskék helyzeteinek és impulzusainak véletlen jelzett ponteloszlása, és ekkor a könnyű részecskék egyenesvonalú, egyenletes mozgással mozognak. A szórótestekkel találkozva rugalmasan ütköznek. (A szórótestek belsejéből „induló" könnyű részecskék nem mozognak.)

Bunyimovics és Szinaj (1981) a következő, igen mély eredményt bizonyították: tegyük fel, hogy $\mathbf{R}^2$-n a szórótestek elhelyezkedése determinisztikus és periodikus valamely Π alapparalelogrammával, továbbá, hogy a sík nem tartalmaz a szórótestek egyikét sem metsző végtelen egyenest. Ha egy könnyű részecske az $x(0)=(q(0), p(0)) \in \Pi' \times S_1$ ($\Pi'=\Pi$) {szórótestek}, S_1-egydimenziós tórusz) véletlen pontból indul valamely, a $dq \times dp$ (=Lebesgue mérték×Haar mérték) mértékre abszolút folytonos mérték szerint, és $x(r)=(q(t), p(t))$ a pályája, akkor $A^{-1/2}(q(At)-q(0)) \to$

$\to_d W(t)$ a $C^2[0, \infty)$ térben. A bizonyítás az ütközési mechanizmus finom analízisére, ún. Markov-felbontás konstrukciójára épül (l. Bunyinovics—Szinaj (1980)). Ahhoz, hogy a valódi dinamikára vonatkozólag eredményt kaphassunk ismerni kellene a részecske felejtési mechanizmusát is. Ennek megértésére ma széles körben vizsgálnak véletlen közegben lezajló folyamatokat, például bolyongásokat. Ezeknek a modelleknek a leírásába itt nem bocsátkozunk, hanem utalunk a Szász—Telcs (1981) kéziratra, és megjegyezzük, hogy ezekben a modellekben a felejtési mechanizmus rosszabbnak tűnik, mint a bennünket érdeklő modellben. Azonban a probléma érzékeltetésére röviden ismertetünk egy modellt (Dao Quang Tuyen—Szász (1974)), amelynek számunkra más mondanivalója is van.

Helyezzünk el egységnyi tömegű pontokat a $\mathbf{Z}^2$ rács fekete pontjaiban (az $(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$ pont fekete, ha $n_1 \equiv n_2 \pmod 2$). A részecskék kezdeti impulzusai független, egyforma eloszlású vektorok, amelyek a $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ értékeket 1/4—1/4 valószínűséggel veszik fel. A részecskék egyenletesen mozognak és rugalmasan ütköznek. Jelölje $y_{0,0}(t)$ az origóból induló részecske pályáját. Könnyű belátni, hogy $y_{0,0}(k)$ $k=0, 1, 2 \ldots$ másodrendű Markov lánc, amiből következett, hogy $A^{-1/2} y_{0,0}(At) \to_d W(t)$ a $C^2[0, \infty)$ térben, ahol $W(t)$ kétdimenziós Wiener-folyamat

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 39/50 & 0 \\ 0 & 39/50 \end{pmatrix}$$

kovariancia mátrixszal.

Ez az eredmény alátámasztja azt a hipotézist, hogy $\mathbf{R}^d$ $(d \geqq 2)$-ben tipikusan Wiener-folyamat lesz egy részecske pályájának diffúziós határértéke, ugyanis az ismertetett modell és eredmény általánosítható $\mathbf{Z}^d$-re is $(d > 2)$. Azt a hipotézist azonban itt nem tudtuk eldönteni, két részecske pályája függetlenné válik-e. Ugyanis az $(y_{0,0}(k), y_{1,1}(k))$ $k=0, 1, 2, \ldots$ folyamat már nem Markov és szükség lenne a felejtési mechanizmus megértésére. Ez azonban eddig ebben az aránylag egyszerű modellben sem sikerült.

IRODALOM

[1] Alexander R. (1976) Comm. Math. Phys. 49, 217—232.
[2] Bunyimovics L. A.—Szinaj Ja. G. (1980) Comm. Math. Phys. 78, 247—283.
[3] Bunyimovics L. A.—Szinaj Ja. G. (1981) Comm. Math. Phys. 77, 479—497.
[4] Einstein A. (1905) Ann. der Physik. 17, 549—558.
[5] Gisselquist R. (1973) Ann. Probability 1, 231—239.
[6] Harris T. E. (1965) J. Appl. Prob. 2, 323—338.
[7] Lanford O. (1980) Springer LNP, 116, 103—3118.
[8] Spitzer F. (1969) J. Math. Mech. 18, 973—989.
[9] Stone C. (1963) Annals Math. Stat. 39, 1391—1402.
[10] Szatzschneider W. (1975) Springer LNM 472, 157—168).
[11] Szatzschneider W. (1978) Studia Math. 63, 171—187.
[12] Timoszyk W. (1974) Coll. Math. 30, 157—167.
[13] Wiener N. (1923) J. Math. Phys. MIT 2, 131—174.

MONOGRÁFIÁK, KÖNYVEK JEGYZÉKE

Billingsley P. (1968)* Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.
Breiman L. (1968)* Probability. Addison-Wesley.
Doob J. (1953)* Stochastic Processes. Wiley, New York.
Eggleston H. G. (1958)* Convexity. Cambridge Univ. Press.
Feller W. (1966)* An Introduction into Probability Theory and its Applications. II. Wiley, New York.

GIHMAN I. I.—SZKOROHOD A. V. (1965)* Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. Műszaki Kiadó. 1975.
GNEDENKO B. V.—KOLMOGOROV A. N. (1949)* Határeloszlástételek független valószínűségi változók összegeire. Akadémiai Kiadó. 1951.
HINCSIN A. JA. (1955)* Matematikai módszerek a sorbanállás elméletében (oroszul) Moszkva.
KALLENBERG, O. (1976)* Random measures. Akademie-Verlag és Academic Press.
KERSTAN J.—MATTHES K.—MECKE J. (1974)* Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Akademie-Verlag.
NELSON E. (1967)* Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton University Press.
NEVEU J. (1977)* Processus Ponctuels. A J. Hoffmann—Jorgensen—T. M. Ligett—J. Neveu: École d'Été de Probabilité de Saint-Flour VI—1976. LNM 598. gyűjteményben. 249—447.
PALM C. (1943)* Intensitätsschwankungen in Fernsprechertechnik. Ericsson Technics 44, 1—189.
RUELLE D. (1969)* Statistical Mechanics. Benjamin, New York.
SPOHN H. (1979)* Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics: the Markovian Limit. Leuven Lecture Notes. 1—175.

A SZERZŐ AZON DOLGOZATAI, AMELYEKRE HIVATKOZTUNK

DAO QUANG-TUYEN—SZÁSZ D. (1974) A collision model on the two-dimensional square lattice. Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie. 31, 75—77.
GÁCS P.—SZÁSZ D. (1975) On a problem of Cox concerning controlled variability processes in $\mathbf{Z}^k$. Annals of Probability. 3, 597—607.
MAJOR P.—SZÁSZ D. (1980) On the effect of collisions on the motion of an atom in $\mathbf{R}^1$. Ann. Probability 8, 1068—1078.
SZÁSZ D. (1967) On the general branching process with continuous time parameter. Studia Sci. Math. Hung. 2, 227—247.
SZÁSZ D. (1970) Once more on the Poisson process. Studia Sci. Math. Hung. 5, 441—444.
SZÁSZ D. (1971) Független valószínűségi változók véletlen tagszámú összegeinek aszimptotikus viselkedése (oroszul). Kandidátusi disszertáció. Moszkva 1—98.
SZÁSZ D. (1972) On the convergence of sums of point processes with integer marks. Stochastic Point Processes. ed. P. A. W. Lewis Wiley. 607—615.
SZÁSZ D. (1974) A limit theorem for semi-Markov processes. J. of Applied Probability 11, 521—528.
SZÁSZ D. (1975—A) Tétel a két liftről (oroszul). Prepring № 3/1975 of Math. Inst. HAS.
SZÁSZ D. (1975—B) Shocks in a two-component reliability system. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 11, 347—349.
SZÁSZ D. (1975—C) On the two lift problem. Preprint № 11/1975 of Math. Inst. HAS.
SZÁSZ D. (1976) Renewal theory and multicomponent reliability systems. Adv. Appl. Prob. 8, 239—240.
SZÁSZ D. (1977—A) A problem of two lifts. Ann. Probability 5, 550—559.
SZÁSZ D. (1977—B) Uniformity in Stone's decomposition of the renewal measure. Ann. Probability 5, 560—564.
SZÁSZ D. (1980) Joint diffusion on the line. J. Stat. Physics. 23, 231—240.
SZÁSZ D.—TELCS A. (1981) Random walk in an inhomogeneous medium with local impurities. J. Stat. Physics. 26, 527—537.

СЛУЧАЙНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ II.

ДОМОКОШ САСС

RANDOM POINT DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATIONS TO RELIABILITY THEORY AND STATISTICAL PHYSICS II.

D. SZÁSZ

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1981. évi odaítéléséről

A Bizottság 1981. november 20-án tartotta ülését, melyen részt vettek:

Prékopa András (elnök)
Recski András (titkár)
Dávid Gábor, Fischer János, Gulyás Ottó, Heppes Aladár, Katona Gyula, Kovács László Béla, Straziczky Beáta, Varga László

A Bizottság a beérkezett 12 javaslat és mellékletei alapján megvitatta a jelöltek alkalmazott matematikai munkásságát. Egy jelölt már megvédte a kandidátusi disszertációját, így az alapszabály értelmében nem díjazható; a többi javaslat formai és szakmai szempontból is megfelelő volt. A Bizottság az alábbi határozatot hozta:

Az alkalmazott matematikai kutatásokban a modellalkotásban, illetve a számítástechnikai módszerek fejlesztésében nyújtott munkásságuk alapján az 1981. évi Farkas Gyula emlékdíjban és egyenként 4500 Ft jutalomban részesítette az alábbiakat:

Juhász Ferenc, az MTA SZTAKI tudományos munkatársa,
Kelle Péter, az MTA SZTAKI tudományos munkatársa,
Tóth János, az MTA SZTAKI tudományos munkatársa,
Terjéki József, a JATE Bolyai Intézet ösztöndíjas gyakornoka.

A kitüntetettek munkásságát és publikációs jegyzékét az alábbiakban részletesen ismertetjük.

Juhász Ferenc 1949-ben született, 1973-ban szerzett diplomát az ELTE TTK matematikus szakán. Azóta az MTA SZTAKI-ban dolgozik, jelenleg tudományos munkatársként az Alkalmazott Matematikai Főosztályon. Kezdetben a differenciálegyenletek iránt érdeklődött. Ezzel kapcsolatban részt vett egy parciális differenciálegyenletek numerikus megoldására szolgáló programcsomag elkészítésében. Ezt követően véges elemekkel foglalkozott, aminek kapcsán az itt felmerült speciális szerkezetű lineáris egyenletrendszerek megoldására használatos ún. frontális technikát adaptálta. Az ELTE Geofizikai Tanszéke részére mérési adatok grafikus megjelenítésében vett részt.

Emellett érdeklődése a statisztika, és ezen belül is elsősorban a klaszterelemzés felé fordult. Egy új klaszterelemző technika elméleti megalapozásánál merült fel egy véletlen mátrixok sajátértékeivel kapcsolatos probléma, amely mint utóbb kiderült, önmagában is érdekes. Segítségével tisztázni lehet a Lovász-féle ϑ-függvény aszimptotikus viselkedését véletlen gráfok esetén.

Ezek után került sor arra, hogy Lengyel Imre vezetésével a vércsoport elemzés matematikai módszereit tanulmányozza. Előadásokat tartott, illetve dolgozatokat írt a fenti témakörökből. Két ízben vett részt a Banach Iskola szemeszterén Varsóban. 1977-ben részt vett a Dundee városban (Skócia) kétévenként megrendezésre kerülő „Numerical Analysis" konferencián, 1980-ban Zágrábban a hatodik „Biological Anthropology" iskolán. Egyes, a fenti témakörökkel kapcsolatos eredményeiért 1979-ben a SZTAKI-ban Ifjúsági díjat kapott.

Juhász Ferenc publikációinak jegyzéke

[1] JUHÁSZ F.—MÁLYUSZ K.: Problems of Cluster Analysis from the Viewpoint of Numerical Analysis; Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 22. Numerical Methods, Keszthely 1977., 405—415.

[2] JUHÁSZ FERENC: On the Spectrum of a Random Graph; Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 25. Algebraic Methods in Graph Theory, Szeged, 1978., 313—316.

[3] LENGYEL I.—JUHÁSZ F.: Palaeoserological Examinations, Colloquium Antropologicum, Vol. 4., Supplement, 1980., 31—37.
[4] JUHÁSZ F.: On the Asymptotic Behaviour of the Spectra of Non-Symmetric Random (0, 1) Matrices, Discrete Mathematics (megjelenés alatt).
[5] JUHÁSZ F.: The Hellinger Distance, Human Genetics (megjelenés alatt).
[6] JUHÁSZ F.—LENGYEL I.: Population Genetical Studies of some Avar Age Cemeteries on the Basis of their ABO Blood Group properties, Proceedings of the 2nd Congress of the European Anthropological Association, Brno (megjelenés alatt).
[7] JUHÁSZ F.: Reguláris operátor együtthatós Sturm—Liouville egyenlet spektrumának diszkrétségéről, SZTAKI Közlemények 16, 1976., 85—88.
[8] JUHÁSZ F.: Szimmetrikus véletlen (0, 1) mátrix spektrumáról. Alk. Mat. Lapok 5, 1979., 289—293.
[9] JUHÁSZ F.: The Analysis of the Distribution of Blood Groups by Means of Clustering Methods, Mitt. Arch. Inst. 8/9, 1978/79., 165—175.
[10] JUHÁSZ F.: Nemszimmetrikus véletlen (0, 1) mátrix spektrumának aszimptotikus viselkedéséről, Alk. Mat. Lapok (megjelenés alatt).
[11] JUHÁSZ F.: A Hellinger távolságról, Alk. Mat. Lapok (megjelenés alatt).
[12] JUHÁSZ F.—TÓTH KÁROLY: Result of Cluster Analysis: Dendrogram, SZTAKI Közlemények 24, 1980., 82—89.
[13] BALLA K.—JUHÁSZ F.—SZEPESVÁRI I.—VICSEK TNÉ: Parciális differenciálegyenletek task-könyvtár, SZTAKI Felhasználói Ismertetők 9, 1975.
[14] JUHÁSZ F.: The Asymptotic Behaviour of Lovász' ϑ function for Random Graphs, SZTAKI Working Paper MN/10.

Kelle Péter 1948-ban született. A Kossuth Lajos Tudományegyetemen 1971-ben kitüntetéses matematikus oklevelet szerzett. Az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályán dolgozik, tudományos munkatárs. Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen doktorált.

Sztochasztikus programozással, ezen belül elsősorban készletmodellekkel foglalkozik. A tárgykör irodalmát összefoglaló tanulmányok elkészítése ([1] és [2] tanulmány) után Prékopa néhány megbízhatósági készletmodellére számítási algoritmust dolgozott ki, melyekben sztochasztikus programozási feladatokat old meg, részben szimulációs technika felhasználásával (a [3], [4] és [6] cikkekben).

Gyakorlati készletezési feladatokra, elsősorban a Dunai Vasmű termelésirányításához kapcsolódva új modelleket fogalmazott meg, elvégezte ezek matematikai vizsgálatát és számítógépes algoritmusokat készített a feladatokra (az [5], [7] és [8] cikkekben).

Sztochasztikus készletmodellekkel kapcsolatos elméleti eredményeit egyetemi doktori dolgozatában ([9] és [13], [16], [17] cikkeiben) írja le. Egy matematikai statisztikai tárgyú tételt bizonyít, melynek felhasználásával a gyakorlatban jól alkalmazható pontos, illetve közelítő megoldást konstruál több modelltípusra, továbbá a korábbi modellek gyakorlati szempontból fontos általánosításait készíti el.

Összefoglalta a megbízhatósági készletmodellekkel kapcsolatos publikációkat, a gyakorlati felhasználás eredményeit és a tapasztalatok alapján egy új készletgazdálkodási programrendszer tervét írja le (a [11] tanulmányban).

Valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modellt konstruált és egy megoldási módszert ad aszfaltkeverő berendezések tárolóinak méretezésére és a tervezési arányok optimalizálására (a [10] és [12] cikkekben). Ez talán a legérdekesebb saját eredménye.

Több vállalat számítógépes készletgazdálkodási rendszerének kidolgozásában szakértőként vett részt. Bekapcsolódott a Dunai Vasmű számítógépes termelésirányítási rendszerének kifejlesztésébe. Elkészítette a Hideghengermű heti ütemezési rendszerét, alkalmazta a gyártásközi készletezésre adott modelljeit.

Az Útépítő Tröszt ásványi anyag ellátásának V. ötéves tervkoncepcióját szállítási feladatok számítógépes megoldásával segítette. Az aszfaltkeverési arány optimalizálására és a keverőberendezések tárolóinak méretezésére kidolgozott eljárását alkalmazták.

Vezetésével készlet-előrejelzési és -gazdálkodási programcsomagot készítettek az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályán, melynek bevezetése a Dunai Vasműben folyamatban van ([14], [15]).

Az ELTE operációkutatási szakirány hallgatóinak „Sorbanállási és készletmodellek" tárgykörben tartott előadásokat, gyakran vállalt szakdolgozati témavezetéseket.

A SZIGMA szerkesztő bizottságának tagja, az „International Abstracts on Operations Research" számára referál. Több nemzetközi konferencia szervezésében tevékenyen részt vállalt.

[1] Készletmodellek, tanulmány a „Szocialista vállalat" című MTA kutatási főirány keretében; MKKE, 1973. 30 old.
[2] Hazánkban elérhető számítógépes készletgazdálkodási rendszerek kritikai elemzése, tanulmány a „Szocialista Vállalat" című MTA kutatási főirány keretében; MKKE, 1975. 96 old. (Prékopa Andrással közös).
[3] A készletgazdálkodás egy szimulációs modellje, a „Számítógépes rendszerszimuláció" c. konferencia kiadványa, MTA Műszaki Tud. Oszt. 1975., 19—33.
[4] Sztochasztikus programozáson alapuló megbízhatósági jellegű készletmodellek, Alk. Mat. Lapok 2, 1976., 1—16 (Prékopa Andrással közös).
[5] Stochastische Mehrprodukt-Modelle für die Sicherheitsbestände bei einer Serienfabrikation, in Stochastische Modellierung und Optimierung betriebswirtschaftlicher Prozesse, Wissenschaftpublizistik, Rostock 1978., II. kötet, 151—163.
[6] Reliability Type Inventory Models Based on Stochastic Programming, Mathematical Programming Study 9, 1978., 43—58 (Prékopa Andrással közös).
[7] Stochastische Optimierungsmodelle für die Produktionslager eines Walzwerkes, Mitteilungen der Math. Ges. der DDR 8, 1978., 31—36.
[8] Optimális gyártásközi készletek kialakítása, a II. Termelésirányítási Ankét c. konferencia kiadványa, MTA Műszaki Tud. Oszt., 1978. I. kötet, 81—90.
[9] Valószínűséggel korlátozott megbízhatósági készletmodellek vizsgálata, egyetemi doktori disszertáció, ELTE 1979.
[10] Chance Constrained Inventory Model for an Asphalt Mixing Problem in P. Kall—A. Prékopa ed. Recent Results in Stochastic Programming, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 179, S1980., 179—191.
[11] Megbízhatósági készletmodellek és alkalmazásuk, MTA SZTAKI Tanulmányok 107, 1980., 78 old.
[12] Az alapanyagok keverési arányának és a tárolók nagyságának optimalizálása aszfaltkeverő berendezésekre, Alk. Mat. Lapok 5, 1979., 249—260.
[13] Eine neue Variante des Prékopa—Ziermann—Lager-haltungsmodells, Mitteilungen der Math. Ges. der DDR, 1980/13, 96—101.
[14] Készletgazdálkodási döntéselőkészítő programrendszer a Dunai Vasműben, Struktúra 1981/4 számban jelenik meg (Gömböcz Lajossal és Sebő Andrással közös).
[15] Chance Constrained Inventory Models and their Application, in Proceedings of the 6. Symposium on Operations Research, Augsburg, 1981. Methods of Operations Research 36. 1981.
[16] Prékopa megbízhatósági készletmodelljének két általánosítása, Alk. Mat. Lapok 7, 1981., (megjelenés alatt).
[17] On the safety stock problem for random delivery process, European Journal of Operational Research, (megjelenés alatt).

Tóth János 1947-ben született Budapesten. 1971-ben végezte el az ELTE TTK matematikus szakát. Ezután a SOTE Orvosi Vegytani Intézetében — részben biokémikusként —, majd a SOTE Számítástechnikai Csoportjánál dolgozott. 1981 óta a SZTAKI Statisztika Osztályának tudományos munkatársa.

Tóth János fő kutatási területe a kémiai rekciókinetika globális sztochasztikus és determinisztikus modelljeinek a vizsgálata. A determinisztikus modell egy polinom-jobboldalú differenciálegyenlet-rendszer; a sztochasztikus modell egy folytonos idejű, diszkrét vektoriális állapotterű sűrűségfüggő tiszta ugró Markov folyamat. Ezen modellek irodalmát [3], a modellekre vonatkozó saját eredményeit [2] foglalja össze. A modellek fizikai hátterével — termodinamikai kapcsolataival — foglalkozik [1, 7, 9]. A [13, 23, 28] dolgozat arra ad választ, hogy egy adott differenciálegyenlet mikor lehet egy kémiai reakció determinisztikus modellje.

A sztochasztikus modellre vonatkozó első általános közelítő szimulációs program leírását és alkalmazásait tartalmazó [6, 17, 18, 27]. A [8, 24, 26] dolgozatból kiderül, hogy pontos mérések esetén a sztochasztikus modellből, (szemben a determinisztikus esettel) kizárólag egyensúlyi mérésekből minden jellemző paraméter meghatározható.

A [4] cikk egy enzimkinetikai alkalmazásról, a [22] és [14] írás pedig egy-egy neurobiológiai alkalmazásról számol be. [16] egy illesztési feladat megoldását tartalmazza egy gyógszerfelszívódási probléma esetén.

Tóth János együttműködési készségét mutatja, hogy többnyire társszerzővel dolgozik. Munkatársaival sokat tett azért, hogy egy fontos alkalmazási terület Magyarországon meghonosodjék.

Folyamatosan részt vesz a leendő alkalmazott matematikusok képzésében, valamint a felhasználók oktatásában.

[1] ÉRDI P.—TÓTH J.: A kémiai reakció termodinamikájának sztochasztikus formulázásáról, A kémia újabb eredményei 31, 1976, 177—298.
[2] TÓTH J.: A formális reakciókinetika globális determinisztikus és sztochasztikus modelljéről és néhány alkalmazásáról, SZTAKI Tanulmányok (megjelenés alatt).
[3] TÓTH J.—ÉRDI P.: A formális reakciókinetika modelljei, problémái és alkalmazásai, A kémia újabb eredményei 41, 1978, 227—350.
[4] ARÁNYI P.—TÓTH J.: A full stochastic description of the Michaelis-Menten reaction for small systems, Acta Biochim. Biophys. Acad. Sci. Hung. 12, 1977, 375—388.
[5] ÉRDI P.—RÉTI P.—TÓTH J.: Some investigations in qualitative reaction kinetics, Proc. Int. Cong. Control and Comp. to the Devel. Chem. Engng. and Ind. Chem., Paris, 7—10 March 1978, 43—74.
[6] ÉRDI P.—SÍPOS T.—TÓTH J.: Összetett kémiai reakciók sztochasztikus szimulálása számítógéppel, Magy. Kém. Foly. 79, 1973, 97—108.
[7] ÉRDI P.—TÓTH J.: Stochastic reaction kinetics — „Non-equilibrium thermodynamics" of the state space?, React. Kinet. Catal. Lett. 4, 1977, 81—85.
[8] ÉRDI P.—TÓTH J.: A kémiai reakciókinetika fluktuáció-disszipáció tételéről II., Gyakorlati megjegyzése, Magy. Kém. Foly. 83, 1977, 50—51.
[9] ÉRDI P.—TÓTH J.: On the theory of reacting mixtures. Proc. 3rd Conf. Appl. Chem, Veszprém 29—31 August, 1977, 1—8.
[10] ÉRDI P.—TÓTH J.: Some comments on Prigogine's theories, React. Kinet. Catal. Lett. 11, 1979, 371—375.
[11] ÉRDI P.—TÓTH J.: Oscillatory phenomena at the synapse: Mathematical and kinetic aspects, Adv. Physiol. Sci. 34 (Math. and Comp. Methods in Physiol. Budapest, 1980.) 34, 1981, 113—121.
[12] ÉRDI P.—TÓTH J.—HÁRS V.: Some kinds of exotic phenomena in chemical systems, Coll. Math. Soc. János Bolyai 30 (Qual. Theory of Diff. Eqs., Szeged 1979) 205—229.
[13] HÁRS V.—TÓTH J.: On the inverse problem of reaction kinetics, Coll. Math. Soc. János Bolyai 30 (Qual. Theory of Diff. Eqs., Szeged 1979), 363—379.
[14] HÁRS V.—TÓTH J.—ÉRDI P.—HÁMORI J.: A formal dynamic model of the development of Purkinje dendritic spines, Adv. Physiol. Sci. 34 (Math. and Comp. Methods in Physiol., Budapest 1980).
[15] KANYÁR B.—TÓTH J.: Lineáris differenciálegyenlet-rendszer illesztése gradiens módszerrel, Alk. Mat. Lapok 2, 1976, 259—268.
[16] RÁCZ I.—GYARMATI I.—TÓTH J.: Hidrofil és lipofil karakterű felületaktív anyagok befolyása a szalicilsav-transzporter kinetikájára háromfolyadékteres rendszer esetén, Acta Pharm. Hung. 47, 1977, 20—1208.
[17] SÍPOS T.—TÓTH J.—ÉRDI P.: Stochastic simulation of complex chemical reactions by digital computer, I. The model, React. Kinet. Catal. Lett. 1, 1974, 113—117.
[18] SÍPOS T.—TÓTH J.—ÉRDI P.: Stochastic simulation of complex chemical reaction by digital computer, II. Applications, React. Kinet. Catal. Lett. 1, 1974, 209—312.
[19] TÓTH J.: Igen sok komponenst tartalmazó elegyek reakciókinetikájának alapfogalmai. in „Érdi P.: Racionális kémiai termodinamika (jegyzet), ELTE TTK Kémiai Kibernetikai Laboratórium, Budapest, 1978", 172—198.
[20] TÓTH J.: What is essential to exotic kinetic behaviour?, React. Kinet. Catal. Lett. 9, 1978, 377—381.
[21] TÓTH J.: Gradient systems are cross-catalytic, React. Kinet. Catal. Lett. 12, 1979, 253—257.
[22] TÓTH J.: Poissonian stationary distribution in the stochastic model of a class of detailed balanced complex chemical reactions, React. Kinet. Catal. Lett. (megjelenés alatt).
[23] TÓTH J.: A kémiai reakciókinetika direkt és inverz feladatairól, Alk. Mat. Lapok (beküldve).
[24] TÓTH J.—ÉRDI P.: A kémiai reakciókinetika fluktuáció-disszipáció tételéről, I. Elméleti megjegyzések, Magy. Kém. Foly. 83, 1977, 47—49.
[25] TÓTH J.—ÉRDI P.: On the theory of pure reaction kinetics, Proc. 3rd Conf. Appl. Chem. Veszprém, 29—31 August, 1977, 71—76.
[26] TÓTH J.—ÉRDI P.: Determination of reaction rate constants of complex chemical reactions from equilibrium fluctuations, Proc. 5th Symp. Comp. Chem. Engng., The High Tatras 5—9 October 1977, 321—324.
[27] TÓTH J.—ÉRDI P.—SÍPOS T.: Stochastic simulation of complex chemical reactions by digital computer. Proc. 2nd Symp. on the Use of Comp. Chem. Engng., Usty nad Labem (CS), Nov. 1973.
[28] TÓTH J.—HÁRS V.: A rekeszrendszerek inverz feladatáról, Alk. Mat. Lapok 5, 1979, 49—61.

[29] Tóth J.—Réti P.—Ropolyi L.—Érdi P.—Valkó P.: Megjegyzések a makroszkopikus fizika jelölésrendszeréről, in: „Érdi P.: Racionális kémiai termodinamika (jegyzet), ELTE TTK Kémiai Kibernetikai Laboratórium, Budapest 1978", 152—171.
[30] Tóth J.—Török T. L.: Poissonian stationary distribution: a degenerate case of stochastic kinetics, React. Kinet, Catal. Lett. 13, 1980, 167—171.
[31] Tóth J.—Török T. L.: Stationary distributions in stochastic kinetics, Adv. Physiol. Sci. 34, (Math. and Comp. Methods in Physiol., Budapest 1980), 1981, 103—111.

Terjéki József 1950-ben született. Egyetemi tanulmányait 1975-ben fejezte be a József Attila Tudományegyetem programtervező matematikus szakán. 1975-ben a Rényi Kató Emlékdíj I. fokozatával tüntették ki. 1976-ban doktori szigorlatot tett „summa cum laude" eredménnyel. 1977 óta a Moszkvai Állami Egyetemen levelező aspiráns.

Eredményei a differenciálegyenletek kvalitatív elméletének két nagyon aktuális, nemzetközileg is központi helyet elfoglaló és aktívan művelt témaköréhez kapcsolódnak:

1. *Funkcionál-differenciálegyenletek.* Razumikhin vette észre 1956-ban, hogy a stabilitás-vizsgálatokban a közönséges differenciálegyenletekben megszokott Ljapunov-függvények alkalmazása eredményesebb, mint a Ljapunov—Krasovskij-funkcionáloké olyan rendszerekre, amelyekben a közönséges rész a funkcionálissal szemben domináns. [2] kiterjeszti ezt a módszert egészen általános egyenletekre, továbbá az aszimptotikus stabilitás vizsgálatára is. [3] egy szükséges és elegendő feltételt ad Ljapunov-függvény segítségével arra, hogy egy funkcionál-differenciálegyenlet minden megoldása exponenciális sebességgel konstanshoz tartson, ha $t \to \infty$.

1977-ben J. R. Haddock és S. R. Bernfeld kitűztek egy problémát egy speciális egyenlet megoldásainak viselkedéséről. Ennek egyik megoldása a [10] dolgozat, amelyben a szerzők a LaSalle-féle invariancia-elv alkalmazásával írják le olyan egyenlettípusok megoldásainak aszimptotikus viselkedését, amelyek járványterjedési modellekben, a populációdinamikában, a reaktorok elméletében fordulnak elő.

2. *Közönséges differenciálegyenletek.* A [4], [7] dolgozatok annak a jelenségnek a feltételeit kutatják, hogy egy differenciálegyenlet minden megoldásában az állapot-határozók egy részének létezzék véges határértéke, ha $t \to \infty$. A mechanikában ez úgy jelentkezik, hogy súrlódási erők hatása alatt álló rendszer aszimptotikusan megáll, vagyis a mozgások során a koordináták konstanshoz, a sebességek 0-hoz tartanak, ha $t \to \infty$. Az eredmények azt mutatják, hogy száraz súrlódás mellett ez nagy potenciális erők esetében is megvalósulhat, viszkózus súrlódás mellett viszont csak „kis" potenciális erők hatása engedhető meg.

[8] és [9] stacionárius mozgások stabilitásának és aszimptotikus stabilitásának feltételeit vizsgálják disszipatív rendszerekben. A problémát egy fiktív mechanikai rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitására vezetik vissza, de abban megjelennek ún. pozíciós erők is, amelyek kizárják az energia-integrál alkalmazását, és új módszerek kidolgozását kívánják meg.

[11] analítikus potenciális energiával bíró disszipatív mechanikai rendszerek egyensúlyi helyzetének stabilitására ad igen éles feltételeket. Bebizonyítja többek között, hogy az 1 és 2 szabadsági fokú rendszerekben a stabilitáshoz szükséges és elegendő, hogy a potenciális energiának az egyensúlyi helyzetben tágabb értelemben minimuma legyen.

Terjéki József publikációinak jegyzéke

[1] On the existence of the solutions of functional differential equations, Coll. Math. Soc. János Bolyai, 15. *Differential Equations,* Keszthely, 1975, 373—377.
[2] On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations, *Ann. Polon. Math.,* 36 (1979), 299—314.
[3] On convergence of the solutions of ordinary and functional differential equations, Coll. Math. Soc. János Bolyai, 30. *Qualitative Theory of Differential Equations,* Szeged, 1979, 1003—1030.
[4] О частичной устойчивости и сходимости движений, *Прикл. мат. мех.,* 45 (1981), 428—435 (Hatvani Lászlóval közösen).
[5] *Funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak stabilitási tulajdonságairól.* Szeged, 1976 (egyetemi doktori értekezés).
[6] О частичной устойчивости решений линейных автономых дифференциально — функциональных уравнений, *Studia Sci. Math. Hungar.* (benyújtva).
[7] Об асимптотической останавливании при наличии вязкого трения, *Прикл. мат. мех.* (megjelenés alatt; Hatvani Lászlóval közösen).
[8] Об устойчивости и неустойчивости неизолированного положения рановесия диссипативныь систем, *Bul. Inst. Politehn. Iasi* (benyújtva).
[9] Об устойчивости стационарных движений механических систем в сопротивляющейся среде, *Вестник МГУ* (benyújtva).

[10] Liapunov—Razumikhin functions and an autonomous principle for functional differential equations, *J. Differential Equations* (megjelenés alatt, J. R. Haddock-kal közösen).
[11] Исследование устойчивости и сходимости решений с помощью функций Ляпунова, SZTAKI Közlemények (megjelenés alatt).

Jelentés az 1981. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítéléséről

A BJMT Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1981. évi Grünwald-díj odaítélésére: Császár Ákos (elnök), Szász Domokos (titkár), Bihari Imre, Fejes Tóth László, Hajnal András, Lovász László, Rapcsák András, Révész Pál, Sárközy András, Schmidt Tamás, Tandori Károly. Fejes Tóth László és Révész Pál külföldi útjuk miatt nem tudtak részt venni a bizottság munkájában.

A bizottság 1981. október 27-én és november 17-én ülésezett. A díjra ez évben 10 javaslat érkezett. A javasoltak többségét a bizottság a díjra érdemesnek tartotta. Figyelembevéve az Alapszabály által előírt korlátot, végül is a javaslatok alapos mérlegelése után a bizottság az alábbi döntést hozta:

Az 1981. évi Grünwald Géza Emlékdíjjal tünteti ki és egyenként 4500 Ft jutalomban részesíti a következő fiatal matematikusokat:

Czédli Gábor, a JATE Analízis tanszékének tanársegédje;
Komornik Vilmos, az ELTE Analízis II. tanszékének tanársegédje;
Lempert László, az ELTE Analízis I. tanszékének adjunktusa;
Móri Tamás, az ELTE Valószínűségszámítási tanszékének tanársegédje.

INDOKLÁS:

Czédli Gábor 1953-ban született; tanulmányait 1977-ben fejezte be a József Attila Tudományegyetemen. Eddig 7 dolgozata jelent meg, és további 10 van közlésre benyújtva. A 70-es évek elejétől intenzív vizsgálatok indultak Bjarni Jónsson javaslatára az ún. kongruenciavarietásokra vonatkozóan. Ebbe a kutatásba Czédli igen eredményesen kapcsolódott be, aminek eredménye többek között a George Hutchinsonnal közösen publikált 40 oldalas dolgozata. Ennek főeredménye annak kimutatása, hogy kontinuum sok kongruenciavarietás van. Ezzel a témakörrel foglalkozik további négy dolgozata. E témán kívül szép eredményeket mondhat magáénak invariáns relációkra és az ún. toleranciákra vonatkozóan is. Közös dolgozatot írt Jonathan Smith-szel a Malcev-polinom egyértelműségére vonatkozóan. Több dolgozata alkalmazási tárgyú; az ún. adatbázisokkal foglalkozik.

Ötletekben gazdag, igen széles látókörű matematikus, aki érzékenyen reagál a legújabb kutatási irányokra.

Czédli Gábor dolgozatainak jegyzéke

[1] A test for identities satisfied in lattices of submodules, Algebra Universalis 8 (1978) 269—309 (G. Hutchinsonnal);
[2] On the lattice of congruence varieties of locally equational classes, Acta Sci. Math., 41 (1979) 39—45;
[3] An application of Mal'cev type conditions to congruence varieties, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 29, Universal Algebra, Esztergom 1977, 169—171;
[4] Which distributive lattices have 2-distributive sublattice lattices? Acta Math. Acad. Sci. Hung., 35 (1980) 455—463;
[5] On the 2-distributivity of sublattice lattices, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 36 (1980) 49—55;
[6] *d*-dependency structures in the relational model of data, Acta Cybernetica 5 (1980, Szeged) 49—57;
[7] On dependencies in the relational model of data, EIK (Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik) 17 (1981) 2/3, 103—112;
[8] Kongruencia-varietások, Szeged, 1979, egyetemi doktori értekezés;
[9] A Mal'cev type condition for the semi-distributivity of congruence lattices, Acta Sci. Math., közlésre elfogadva;
[10] A note on the compactness of the consequence relation for congruence varieteis, Algebra Universalis, közlésre elfogadva:
[11] On the uniqueness of Mal'cev polynomials, Darmstadt Preprint 431 (1978), valamint a Proc. Universal Algebra Colloq. Szeged, 1979 által közlésre elfogadva (Jonathan D. H. Smith-szel);
[12] Függőségek relációs adatbázis modellben, Alkalmazott Mat. Lapok, közlésre elfogadva;
[13] Factor lattices by tolerances, Acta Sci. Math., közlésre elfogadva;

[14] On properties of rings that can be characterized by infinite lattice identities, Studia Sci. Math. Hung., közlésre benyújtva;
[15] On compatible ordering of lattices, Proc. Lattice Theory Colloq. Szeged 1980, közlésre benyújtva (Huhn Andrással és Szabó Lászlóval);
[16] On congruence n-distributivity of ordered algebras, Acta Math. Acad. Sci. Hung., közlésre benyújtva (Lenkehegyi Attilával);
[17] A note on tolerances of idempotent algebras, Glasnik Matematicki (Zagreb), közlésre benyújtva (Klukovits Lajossal).

Komornik Vilmos 1954-ben született; 1972-ben a XIV. Nemzetközi Diákolimpián I. díjat nyert. Doktori szigorlatát „Summa cum laude" tette le és 1981-ben „Sub Auspiciis Rei Publicae Popularis" avatták doktorrá. Jelenleg az ELTE Analízis II. tanszékén dolgozik.

[1]—[4] dolgozatai ill. disszertációja a Korovkin-problémakörrel foglalkozik, vagyis pozitív lineáris operátor-sorozatok konvergenciájának kérdéseivel. Korovkin megmutatta, hogy ha ezek a $C([0, 1)]$-en ill. a $C(S)$-en értelmezett sorozatok az első három hatványfüggvényen a tér identikus leképezéséhez konvergálnak, akkor ugyanezt teszik a tér bármely elemén, tehát a konvergencia eldönthető egy véges próbafüggvényrendszeren. H. Bauer és mások ezt az eredményt általánosították tetszőleges kompakt T_2 terekre, sőt lokálisan kompakt terekre is. Komornik Bauer valósfüggvénytani meggondolásait topológiaiakkal helyettesítve véges próbafüggvényrendszer alkalmazását tette lehetővé nemkompakt terekben is. Bauer egyszerű jellemzést adott a $C(X)/X$ lokálisan kompakt T_2 tér bizonyos — igen speciális — lineáris altereinek ún. Korovkin lezárására. Donner ezt némileg általánosította, de teljes általánosítása — bármely lineáris altérre — csak Komorniknak sikerült.

Egy másik dolgozatában a Neumann-féle minimax-tételt terjesztette ki vektorértékű függvényekre, megadva a feltételeket, melyek mellett kiterjesztés lehetséges. Bizonyítása itt is eredeti, mert a Brouwer-féle fixponttételt nélkülözni tudja.

Hat dolgozata foglalkozik lineáris differenciáloperátorok spektrálelméletével. Nagyon szép eredménye az a pontos alsó és felső becslés, melyet a Schrödinger-operátor egy λ sajátértékhez tartozó tetszőleges sajátfüggvénye $\|u\|_p$ és $\|u_q\|$ $(1 \leq p < q < \infty)$ normái hányadosára ad. Legutóbbi dolgozatában felső becslést ad magasabbrendű operátor esetére. Iljin bázis-tételét — mely meglehetősen sima együtthatókat feltételezett — kiterjeszti arra az esetre, amikor az együtthatók csak integrálhatók, miközben lényegesen új gondolatokra támaszkodik.

Komornik Vilmos dolgozatainak jegyzéke

[1] Korovkin típusú tételek, egyetemi doktori értekezés, 1979;
[2] On the Korovkin closure, Acta Sci. Math., 43 (1981), 41—43;
[3] A Korovkin type theorem for locally compact spaces, Studia Sci. Math. Hung. (megjelenés alatt);
[4] Note on the Korovkin closure (megjelenés alatt az 1980-as Riesz—Fejér konferencia kiadványában);
[5] Minimax theorems for upper semicontinuous functions, Acta Math. Hung. (megjelenés alatt);
[6] Lower estimates for the eigenfunctions of the Schrödinger operator, Acta Sci. Math. (megjelenés alatt);
[7] Точная оценка собственных иприсоединённых функций оператора типа Шредингера, Докторы Академии Наук (megjelenés alatt);
[8] The asymptotic behaviour of the eigenfunctions of the Schrödinger operator, Acta Math. Hung. (közlésre benyújtva);
[9] The asymptotic behaviour of the eigenfunctions of higher order of a linear differential operator, Studia Sci. Math. (közlésre benyújtva);
[10] Upper estimates for the eigenfunctions of a linear differential operator, Ann. Univ. Sci. Budapest de Rol. Eötvös Nom. (közlésre benyújtva);
[11] Upper estimates for the eigenfunctions of higher order of a linear differential operator (közlésre benyújtva).

Lempert László 1952-ben született. Munkásságának területe a többváltozós komplex függvénytan. Már egymagában az is jelentős teljesítmény, hogy ebben a hazánkban hagyományokkal nem rendelkező témakörben sikerült alapos tájékozottságot szereznie; ezen túlmenően azonban lényeges és nemzetközi viszonylatban is figyelmet keltő eredményekkel gazdagította máris e tudományág irodalmát.

Eredményei közül kettőről érdemes kissé részletesebben szólni. Jól ismert klasszikus tétel, hogy egy az egységkörlemezen analitikus és korlátos függvénynek a körvonal majdnem minden pontjában van radiális limesze. Nevanlinnától származik ennek a tételnek általánosítása a meromorf

függvényeknek egy osztályára, az ún. korlátos karakterisztikájú függvényekre. A korlátos analitikus függvényekre vonatkozó állítás megfelelője több komplex változó esetén is igaz, a Nevanlinna tételének általánosítására vonatkozó kísérletek azonban sokáig kudarcot vallottak; ennek okára Rudin mutatott rá, ugyanis Nevanlinna bizonyítása azon alapult, hogy egy egyváltozós korlátos karakterisztikájú függvény két korlátos analitikus függvény hányadosaként írható, ez pedig több komplex változó esetén már nem igaz. Lempertnek viszont — egészen más gondolaton alapuló bizonyítással — sikerült mégis megmutatnia, hogy Nevanlinna tétele átvihető több komplex változóra is. Ezt a cikkét a skandináv Acta Mathematica közölte.

Lempert másik nevezetes eredménye a C^n tér tartományaiban definiált Carathéodory-féle és Kobayashi-féle metrika kapcsolatára vonatkozik. Mindkét metrika sokoldalúan használható a komplex függvénytanban, mivel biholomorf leképezésekre vonatkozóan invariáns. Lempert eredménye azt mondja ki, hogy korlátos konvex tartomány esetén a kétféle metrika egybeesik, aminek azután fontos következményei vannak (így például új bizonyítás Fefferman egy tételére).

Lempert László dolgozatainak jegyzéke

[1] Boundary behaviour of meromorphic functions of several complex variables, Acta Math. 144 (1980), 1—25;
[2] La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, Bull. de la Soc. Math. de France (sajtó alatt);
[3] Recursion for orthogonal polynomials on complex domains, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 19 (1976), 481—494;
[4] A note on mapping polydiscs into balls and vice versa, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 34 (1979), 117—119.

Móri Tamás 1953-ban született. Több középiskolai és egyetemi tanulóversenyen vett részt eredményesen. Eddig 5 dolgozata jelent meg, 4-et fogadtak el közlésre és további 5 dolgozatát nyújtotta be közlésre, illetve van kéziratban. A fentieken kívül egy megjelenés alatt álló könyv társszerzője. Egyetemi doktori dolgozatának megvédésére a közeljövőben kerül sor.

Eredményei a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika több aktuális problémájához csatlakoznak, jelentős tételekkel járulva hozzá a tárgyalt kérdésekhez. Móri Tamás ügyesen kombinálja, alkalmazza és továbbfejleszti a kialakított módszereket, és azokat sok új ötlettel gazdagítja. Kérdésfeltevései jó kritikáról, fantáziáról, valamint gazdag ismeretekről tanúskodnak. Eredményei közül különösen kiemelendő két kérdéskör vizsgálata: az [5] és [6] dolgozat (utóbbit a legrangosabb valószínűségszámítási folyóirat fogadta el) szimmetrikus statisztikák határeloszlástételeivel foglalkozik (a korábbi vizsgálatokhoz képest újat jelent, hogy a szimmetrikus polinomok fokszáma sem rögzített, hanem végtelenhez tart). A [7], [11], [13] és [14] dolgozatok az előnyös sztochasztikus játékok elméletét fejlesztik tovább, teljesen karakterizálva a játékos optimális és közeloptimális stratégiáit.

Móri Tamás dolgozatainak jegyzéke

[1] Megjegyzések a 190. feladat megoldásához. Matematikai Lapok 26, (1975), 319—323;
[2] On the rate of convergence in the martingale central limit theorem, Studia Math. Sci. Hung. 12 (1977), 413—417;
[3] On the asymptotic network delay in a model of packet switching,
a) J. Comp. and Math. with Appl. 7 (1981), 167—172;
b) In: Operációs Rendszerek Elmélete, VI. Visegrádi Téli Isk., MTA SZTAKI Tanulmányok 113/1980, 247—256;
[4] Non-classical central limit theorems for martingales, Annales Univ. Sci. Bud. R. Eötvös Nom., Sectio Math. 24 (1981), 113—121;
[5] On a Hoeffding-type problem, In: The First Pannonian Symp. on Math. Stat., Bad Tatzmannsdorf, Austria, 1979 (Lecture Notes in Statistics, Vol. 8.) Springer, Berlin, 1981;
[6] On the asymptotic behaviour of symmetrical polynomial statistics, (Székely J. Gáborral), közlésre elfogadva: The Annals of Prob.;
[7] Regular strategies in favourable stochastic games, In: ELTE-MGU Közös Szemináriumi Előadásai, ELTE Num. és Gépi Mat. Tszk. Közl. (megjelenés alatt);
[8] A Poisson-eloszlás középiskolai szakköri tárgyalása, közlésre elfogadva: Módszertani Közlemények;
[9] An Erdős—Rényi type generalization of the Borel—Cantelli lemma, (Székely J. Gáborral), benyújtva Studia Sci. Math. Hung.;

[10] A characterization of infinitely divisible Markov Chains with finite state space (Göndöcs F., Michaletzky Gy., Székely J. G. társszerzőkkel), benyújtva: Analysis Mathematica;
[11] How to win if you can? (Székely J. Gáborral), kéziratban;
[12] On the Cramér—Fréchet—Rao inequality in the non-regular case, kéziratban;
[13] On favourable stochastic games, kéziratban;
[14] On the statistical problem of optimizing the gain in favourable stochastic games, kéziratban;
[15] Martingale Problem Book, Ch. VII. Convergence in distribution (Ed.: J. Mogyoródi), Akadémiai Kiadó, megjelenés alatt;
[16] Optimális stratégiák nyereséges sztochasztikus játékokban, Egyetemi doktori disszertáció, ELTE 1981.

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1981. évi odaítéléséről

A Társulat Szele Tibor Emlékérem bizottsága (Hajnal András (elnök), Juhász István (titkár), Császár Ákos, Fried Ervin, Gécseg Ferenc, Králik Dezső, Moór Arthúr, Surányi János, Szabados József, Szenthe János) az 1981. évi Szele Tibor Emlékérmet Csákány Bélának, a matematikai tudományok doktorának ítélte oda. A díj kiosztására 1982. január 15-én került sor.

INDOKLÁS:

Csákány Béla tudományos és oktató-nevelő tevékenysége kettős hagyományt folytat: Rédei László előre mutató univerzális algebrai gondolatainak és szenvedélyes tudományszeretetének éppúgy örököse, mint ahogy hazai átültetője A. S. Kuros páratlanul termékeny algebra-szemléletének és kiválóan eredményes utánpótlás-nevelő módszereinek. Egyike azoknak, akik — Rédei László kezdeti lépései után — megteremtették a magyar univerzális algebrai iskolát, amely az utóbbi években egyre több nemzetközi elismerést arat, nem utolsó sorban Csákány Béla és tanítványainak eredményei nyomán. Átgondolt káderpolitikával és célratörő nevelőmunkával olyan tanszéki együttest alakított ki maga körül, amelyhez foghatót a magyar algebra történetében csak Szele Tibornak sikerült létrehoznia. A tanszék dolgozói egy kivételével mind legalább részben személyes tanítványai: ő indította el Huhn Andrást, aki ugyan nem az ő aspiránsa volt, de tudományos munkáját ő is mindvégig segítette s részben irányította; ugyanez vonatkozik Czédli Gáborra, aki elsősorban Huhn András tanítványa és Szendrei Máriára, teljes egészében Csákány irányításával vált fiatal kutatógárdánk erősségévé Szabó László és Szendrei Ágnes, s az ő nevéltje a tanszéken Lenkehegyi Attila és jobbára Klukovits Lajos is, valamint a más tanszéken dolgozó Ésik Zoltán, végül, de nem utolsósorban, Csákány Béla aspiránsa volt a korai tudományos munkáját teljesen az ő keze alatt végezte Gécseg Ferenc, jelenleg tanszékvezető egyetemi tanár. A mondottakon kívül is pl. a vezetése alatt írott szakdolgozatokban számos, a dolgozat írója képességeinek megfelelő elemi, játékelméleti, geometriai stb. problémát oldatott meg önállóan, melyek diákköri feldolgozásra is kiválóan alkalmasak voltak.

Több egyetemi doktori disszertáció elkészítését irányította (a tanszék dolgozóin kívül pl. Sárkány Béla középiskolai tanárét). Tudományos problémák felvetésén és megbeszélésén kívül figyelme arra is kiterjed, hogy mind saját tanítványait, mind alkalomadtán a többi tehetséges fiatal magyar (sőt, nemcsak magyar) algebristát a nemzetközi matematikai életbe bevezesse, kapcsolatok felvételében és ösztöndíjak elnyerésében segítse, s nem egy esetben a zavartalan munka érdekében nélkülözhetetlen személyi feltételek megteremtésében is segítségükre legyen.

A fiatal tehetségekkel általában nem aspirantúra keretében foglalkozik (egyetlen aspiránsa Gécseg Ferenc volt), de ez az aspirantúrára vonatkozó kissé sajátos nézeteinek következménye, s tanítványaival való foglalkozása sem mennyiségét, sem intenzitását, sem eredményességét tekintve nem marad el a legjobb aspiránsvezetők munkájától. Nevelő munkája részeként említésre érdemes egyetemi „Algebra" jegyzete, kitűnő egyetemi kollégiumai, a diákkörben, a Fiatal Matematikusok Találkozóin és a rádióban tartott előadásai, továbbá népszerűsítő dolgozatait. Végül éppen az újabb magyar algebrai iskolának a világ matematikai életének vérkeringésébe való bekapcsolása terén minden túlzás nélkül elmondhatjuk, hogy ő tette a legtöbbet a szegedi algebrai konferenciák sorozatának létrehívásával.

Csákány Béla publikációi

[1] On the equivalence of certain classes of algebraic systems, Acta Sci. Math., 23 (1962), 46—57. (oroszul).
[2] Primitive classes of algebras which are equivalent to classes of semimodules and modules, Acta Sci. Math., 24 (1963), 157—164. (oroszul).

[3] On abelian properties of primitive classes of universal algebras, Acta Sci. Math., 25 (1964), 202—208. (oroszul).
[4] (Gécseg Ferenccel) On a group of automatic permutations, Cybernetics, 1:5 (1965); 10—13. (oroszul).
[5] Inner automorphisms of universal algebras, Publ. Math., 12 (1965), 331—333.
[6] (Pollák Györggyel) The graph of subgroups of finite groups, Czechoslovak Math. J. 19 (94) (1964), 241—247. (oroszul).
[7] Characterization of regular varieties, Acta Sci. Math., 31 (1970), 187—189.
[8] (Schmidt Tamással) Translations of regular algebras, Acta Sci. Math., 31 (1970), 157—160.
[9] Malcev-típusú tulajdonságok és alkalmazásaik, Doktori értekezés (1974).
[10] Otto J. Smidt csoportelméleti problémája, Középiskolai Matematikai Lapok, 1974. 49. köt., 2. sz. 54—56.
[11] Varieties of modules and affin modules, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 26 (1975), 263—266.
[12] Varieties of affin modules, Acta Sci. Math., 37 (1975), 3—10.
[13] Varieties in which congruences and subalgebras are amicable, Acta Sci. Math., 37 (1976), 25—31.
[14] On affin spaces over prime fields, Acta Sci. Math., 37 (1975), 33—36.
[15] (Megyesi Lászlóval) Varieties of idempotent medial quasigroups, Acta Sci. Math., 37 (1975), 17—23.
[16] Conditions involving universally quantified function variables, Acta Sci. Math., 38 (1976), 7—11.
[17] Varieties where algebras have no idempotent elements, Coll. Math.
[18] Congruences and subalgebras, Annales Univ. Sci. Budapest, 18 (1975), 37—44.
[19] (Megyesi Lászlóval) Coll. Math., (közlésre elfogadva).
[20] Homogeneous algebrae are functionally complete. Algebra universalis (közlésre elfogadva). (A jegyzék nem teljes.)

Jelentés az 1982. évi Beke Manó Emlékdíjak odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1982. évi Beke Manó Emlékdíj odaítélésére az alábbi Beke Manó Emlékdíj Bizottságot küldte ki:

elnök: Surányi János
titkár: Reményi Gusztávné
tagok: Békefi Zsuzsa, Hubert Tibor, Kántor Józsefné, Pálmay Lóránt, Scharnitzky Viktor.

A Bizottság 1982. május 13-án és június 3-án megtárgyalta a beérkezett javaslatokat és egyhangúlag a következő döntést hozta:
Az 1982. évi Emlékdíj

I. fokozatában részesíti:

dr. Nemetz Tibor kandidátust, a Matematikai Kutató Intézet tudományos főmunkatársát,

a díj II. fokozatát kapja:

Bede István Komárom megyei szakfelügyelő, a tatabányai Gépészeti és Közlekedésgépészeti Szakközépiskola tanára
Fábos Lászlóné a budapesti Lisznyai úti általános iskola tanítója
Lajos Józsefné a szigetszentmiklósi 3. sz. általános iskola tanára
dr. Sárkány Ernő a kecskeméti Katona József Gimnázium tanára
és Strohmajer János a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Geometriai Tanszékének adjunktusa.

INDOKLÁS:

Nemetz Tibor a Matematikai Kutató Intézet főmunkatársa.

Matematikai munkássága gráfelméleti és valószínűségszámítási problémák mellett főleg a matematikai statisztika és az információelmélet egymással összefüggő területeire terjed ki.

Már első — Katona Gyulával és Simonovits Miklóssal közösen írt — cikkében Turán Pál gráftételére ad új bizonyítást. A valószínűségszámítás témaköréből pl. a határeloszlástételek kiterjesztésére vonatkozó problémát Rényi vetette fel és oldotta meg egy speciális esetben. Később Rényi, Kolgomorov és Révész általánosításai után Nemetz Tibor találta meg az eredmény természetes érvényességi körét, amelyről Varga Gyulával írt dolgozatában beszámolt.

Több cikkében forráskódolási problémákkal is foglalkozott. Shannon egy tételének lényeges pontosítását adta Katona Gyulával közösen. Foglalkozik statisztikai hipotézis vizsgálattal, s a magyar nyelv statisztikai vizsgálatának néhány kérdésével.

Nemetz Tibor több éve foglalkozik az általános- főképpen pedig a középiskolások oktatásával és oktatási segédanyagok készítésével kifejezetten abból a célból, hogy a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika oktatása mennél szélesebb körben terjedjen el. Hogy ezek megvalósításának problémáiról személyes tapasztalatokat is szerezzen, Csepelen vezetett szakkört általános iskolásoknak a Művelődési Otthonban, tanított és tanít a Berzsenyi Gimnáziumban, az I. István, az Eötvös és a Radnóti Gimnáziumban. Tanításának eredményessége mellett az általa készített segédanyagok nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy a témát eddig nem oktató tanárok figyelmét és érdeklődését felkeltse. Hatására Pesten és vidéken egyaránt sokan kezdték e témát tanítani valamilyen formában.

Részt vett a Bolyai János Matematikai Társulat által támogatott és szervezett oktatási kísérletben, ezekhez számos anyagot készített. A gimnázium fakultatív tantervének B változatához írt tankönyvrészletet, amely igen népszerű az érdeklődő tanárok körében. Érdekes, izgalmas, de néha nem könnyű problémákat tárgyal ebben. A gyerekek élvezettel, érdeklődéssel dolgozzák fel, s így remélhető, hogy helyes valószínűség-fogalom alakul ki bennük.

A középiskolai tanárok között igen népszerű a Bognár Jánosnéval és Tusnády Gáborral közösen írt középiskolai szakköri füzete: Ismerkedés a véletlennel. Több cikke jelent meg a Matematika Tanítása és a Középiskolai Lapokban, (Bakos Tiborral, Bognár Jánosnéval és Tusnády Gáborral) közülük néhány címének megemlítésére szorítkozunk csak:

„Egy számelrendezés szomszédos párjának különbségéről",

„Egy lehetőség a valószínűségszámítási fogalmak bevezető szemléltetéséről",

„Játék és valószínűség".

Előadásokon, szakkörökön, a rádióban népszerűsíti az előbb felsorolt témákat és azoknak a matematika számos ágával való kapcsolatát. Tanítási tapasztalatairól, eredményeiről nemzetközi konferenciákon számolt be nagy érdeklődést és visszhangot keltő előadásokon.

Sokszor nyújtott és nyújt segítséget végzős hallgatóknak, vagy kezdő tanároknak.

A matematikát népszerűsítő és középiskolai oktatását elősegítő áldozatos nagy hatású tevékenységének elismeréseként tünteti ki a Bolyai János Matematikai Társulat Nemetz Tibort a Beke Manó Emlékdíj I. fokozatával.

Bede István

Matematika—ábrázoló geometria szakos középiskolai tanári oklevelének megszerzése után 1963-tól előbb az oroszlányi 312. számú Szakmunkásképző Intézet és Szakközépiskolában tanított, majd 1968-tól a tatabányai Gépészeti és Közlekedésgépészeti Szakközépiskolában dolgozik.

Hivatását szerető, felkészültségét önképzéssel állandóan fokozó, nagyon szorgalmas ember. Tanári munkájának figyelemreméltó vonása, hogy bár nehéz körülmények között dolgozik, nem mond le a szép matematikai gondolatok, a többféle megoldás megismertetéséről. Kedvezően elegyedik munkájában a szakmai igényesség és a tanulók önálló munkáját is biztosító követelés és a tanári segítség. Matematikai nevelő munkája, igényessége, egész személyisége megragadta tanítványait, akik becsületesen helytálltak érettségiken, felvételiken, versenyeken.

Hét év óta a Komárom megyei gimnáziumok, szakközépiskolák és szakmunkásképző iskolák matematikai szakfelügyelője. Hivatali kötelességén túlmenően is fáradhatatlanul tevékenykedik a megye matematika szakos tanárainak továbbképzésén, szemléletformálásán. Az általa szervezett előadásoknak sikere van a tanárok körében, akiknek jó része ma már meggyőződéssel fogadja el azokat a törekvéseket, amelyek a matematikaoktatás korszerűsítését, eredményesebbé tételét szolgálják. Jól ismeri a megye iskoláinak helyzetét és intenzíven támogatja a jó tanárok erkölcsi és anyagi elismerését. Bátran szót emel a matematikaoktatás eredményességét hátráltató nézetek ellen.

A Bolyai János Matematikai Társulat megyei tagozata titkáraként is igen aktív, jó munkát végez. A matematika iránti érdeklődés felkeltését, a tehetség gondozást kívánja elősegíteni azzal is, hogy évente több ifjúsági előadást is szervez. Ezeken főleg középiskolai diákok vesznek részt, de a témától függően — igyekszik bevonni az általános iskolai tanulókat is.

Tanár és szakfelügyelői munkája elismeréseként 1979-ben „Kiváló Munkáért" kitüntetésben részesült.

Fábos Lászlóné a budapesti I. kerületi Lisznyai úti általános iskola tanítója.

Rendkívül tehetséges, széles látókörű, nagy tudású, tanulni kész ember. Igen sokat tett az új matematika tanterv megvalósításáért közvetlen környezetében, de szélesebb körben is.

Tanítási óráin megvalósul a matematika egysége. Sem órái, sem a nagyobb egységek nem töredeznek szét matematikai témakörökre. Ezt a még kevés tanítónál tapasztalt eredményt azáltal érte el, hogy egyrészt alaposan érti a témák összekapcsolódását, másrészt probléma-központú óráin a

tanulás, s fejlesztés központú matematikai nevelő tevékenységet. Szépen valósul meg óráin a matematika és a valóság kapcsolata; olvasmányok, utcán, vonaton, áruházban szerzett élmények adnak jó alkalmat a gyerekeknek gondolkodásra, összefüggések meglátására, problémák felismerésére és megoldására, a munka légkörét a nyugalom és a derű jellemzi. Szuggesztivitás, következetesség és tapintatos irányítás kifejlesztette a gyerekekben a tanulni akarás, az önellenőrzés igényét és képességét.

Bemutató órákon igyekszik átadni tapasztalatait kollegáinak. Szép példáit láthatták a tudatos megfigyeltetésnek, önálló tevékenykedtetésnek, a kutatásra nevelésnek, a munka és szemléltetőeszközök, gépi berendezések értelmes használatának. De meggyőzően hatottak a differenciálásra lehetőséget adó feladatsorozatok alkalmazása, az önálló- és csoportmunka megfelelő arányainak kialakítása is.

1981-ben a miskolci Rátz László Vándorgyűlésen tartott kitűnő előadása után ebben az évben több vidéki városban vett részt és tartott előadásokat továbbképzési alkalmakon.

Kiváló munkája elismeréseként lett kerületi szakmai munkaközösség vezető.

Lajos Józsefné matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelet szerzett.

A kitűnő szakmai felkészültségű, komoly hivatástudattal dolgozó, tanítványaival és kollegáival igen jó kapcsolatot kialakító tanár már korán felhívta magára a figyelmet, s meghívták az újonnan alakult szigetszentmiklósi 3. sz. általános iskola tanárának. Jelenleg is itt dolgozik.

Céltudatos tervezés, lendületes munka, a tanítási óra szinte minden percét kihasználó matematikai tevékenykedés jellemzi. Az önálló munkára való következetes nevelés eredménye, hogy a tanulóknak az önálló-, csoport- és differenciált munkaformák természetes, magától értetődő létformájává vált. Az is, hogy eljárásaikat indokolni kell, pontatlanságaikat, hibáikat pedig javítani. S bár a maguk által választotta úton haladnak, a megbeszéléseken azt is tisztázzák, hogy mi lett volna az egyszerűbb, célszerűbb, a szebb megoldáshoz vezető út. Így válik a gyerek számára élménnyé: érdemes többet tudni, mert lehet hogy így félannyi munkával jutnak eredményre. Figyelemreméltó vonása óráinak, hogy a hibás válaszokat elemezteti, a gyerekek keresik meg a hiba okát, de azt is meg kell fogalmazniok, hogy a hibás válasz milyen kérdésre lenne jó válasz.

Tudatos és gondos tervező munkájának eredménye, hogy sikeresen oldja meg az órán az új tanterv követelményeinek teljesítését, mert differenciált foglalkozások keretében tekintettel van a gyengébbek felzárkóztatására és a tehetségek gondozására is.

Tanítványai közül többen kiváló eredményeket érnek el a járási és megyei versenyeken. A különböző középiskolákban továbbtanulók is jól megállják helyüket.

Változatos, szép, ízléses az iskola matematikai szaktanterve, nívós a faliújság. Jól használható térgeometriai modelleket a gyerekek készítettek irányításával.

Az új matematikai tanterv szerinti munkát szinte az elsők közt kezdte meg. Gondolkodó, kutató, önképzéssel szakmai felkészültségét állandóan fejlesztő ember. Pedagógiai, módszertani kultúrája nemcsak rátermettség, de tudatos fejlesztés eredménye. Az önmagával szemben igényes, nyílt, lendületes pedagógus egyéniség hatása megmutatkozik az iskola falain túl is. Szigetszentmiklós három iskolája matematika szakos tanáraiból alakult munkaközösséget vezeti; órákat látogat és igyekszik átadni jó módszereit. De jól segíti a megyei továbbképzést a számítástechnika témaköreiből tartott továbbképzés vezetésével is.

Az OPI megbízásából az 5. osztály anyagához tanmenetet, felmérő feladatsorozatot állított össze és próbált ki.

Az új tanterv szellemében igen eredményesen dolgozó, hatékony pedagógus egyéniség tevékenységének elismerését fejezi ki a Beke-díj.

Dr. Sárkány Ernő a kiskőrösi Petőfi Sándor Gimnáziumból került 1968-ban a kecskeméti Katona József Gimnáziumba az akkor létesített matematika-fizika szakosított tantervű osztály matematika tanárának.

Kiválóan képzett, áldozatosan, eredményesen dolgozó szaktanár. Óráira való felkészülését a lelkiismeretesség, gondosság jellemzi. Állandó önképzéssel érte el, hogy tájékozott a természettudományok legújabb kutatásaiban és e tárgyak tanításának módszertanát is jól ismeri. Iskolájában — mint igazgatóhelyettes — jól segíti a természettudományos tárgyakat tanító kollegák munkáját. Szaktárgyi, módszertani fejlődésük iránti igényüket felkelti, irányítja, segíti és folyamatosan ellenőrzi.

A Katona József Gimnáziumban kezdettől fogva részt vett a fakultatív oktatási kísérletben a nagy tanítási gyakorlattal rendelkező, józan, megfontolt pedagógus értékes megjegyzéseivel segítette a FAKT jelenlegi rendszerének kikristályosodását. Kezdeményezte és vezette a számítógépes programozás oktatását. S hogy e munkát igényesen végezhesse 1978-ban elvégezte a SZÁMOK programozási tanfolyamát.

Tanítványai és munkatársai elismerik szaktárgyi felkészültségét, s mint szerény, segítőkész munkásembert szeretik.

Munkássága elismeréséül 1971-ben „Kiváló tanár" kitüntetést kapott.

Strohmajer János a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem adjunktusa közel három évtizede végzi áldozatos tevékenységét az oktatásügy számos területén.

Munkahelyén a legkülönbözőbb gyakorlatokat vezette, előadásokat tartott tanárszakos hallgatóknak. Rendszeresen tart speciális előadásokat olyan témákból, amelyek különösen hasznosak voltak a leendő tanárok szakkörvezetői munkájához. E munka során a geometria tudományának szigorú rendje következetessége mellett sikerült megmutatnia annak szépségét is. Precízség, következetesség, sokoldalúság és egyszerűség, szépség és harmónia a rendben. Kemény, kitartó munka együttesen olyan fontos tudnivalók, amelyekre tárgyán keresztül tanította hallgatóit és azok leendő tanítványait. Négy kötetes Geometriai Példatárát nemcsak egyetemi hallgatók, hanem tanárok is használják mindennapi munkájukban. Haszonnal forgatják az egyetemi hallgatók „Differenciálgeometriai példatár"-át és a Hajós György előadásai alapján készült „A geometria alapjai" egyetemi jegyzetet. A levelező hallgatókat segítő Matematikai Példatárat állított össze több szerzővel.

Magas színvonalú egyetemi oktatói munkáját úgy végezte, hogy eközben különös figyelemmel volt a tanárképzésre, az általános és középiskolai matematikaoktatás problémáira. A közoktatás ügyét igyekezett elősegíteni a Fővárosi Pedagógiai Intézetben két tanári továbbképző előadássorozattal.

A Bolyai János Matematikai Társulatban középiskolai délutánokon tartott előadásokat geometriából. 1982-ben az I. László Gimnáziumban szakkör keretében Hajós Györgyről tartott megemlékezést. A Középiskolai Matematikai Lapokban írt cikkében is Hajós Györgyöt, mint az oktatásügyért sokat tevő és tenni akaró embert mutatta be.

Az évfolyamok mellett működő oktatói tanácsban vezetői és csoportpatrónusi feladata egyszerre több is volt. Közmegelégedésre látta el feladatát a Diák-jóléti Albizottságban és a Nevelési Albizottságban. A Tudományos Diákkörben végzett munkájáért miniszteri dícsérő oklevelet kapott. 1967 óta részt vett az egyetemi felvételi bizottságok munkájában is, s tagja az OKTV matematikai bizottságnak.

Több évtizede vizsgabizottsági elnök a Nemzetközi Előkészítő Intézetben. Előadásokat tartott TIT szervezésben Szekszárdon és Győrött.

Társulatunknak aktív, megbecsült tagja, többször volt közgyűlési küldöttje is.

Strohmajer János szerényen, áldozatosan és eredményesen szolgálja sokrétű tevékenységével matematikaoktatásunk ügyét. Ennek elismerése a Beke Manó Emlékdíj II. fokozata.

Jelentés az 1982. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Választmánya az 1982. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére az alábbi bizottságot jelölte ki: Babai László elnök, Totik Vilmos titkár, Győri Kálmán, Lippner György és Pollák György.

A Bizottság 1982. június 2-án megtartott ülésén a beérkezett javaslatok alapján a következő határozatot hozta:

A Rényi Kató díj I. fokozatában és 3000,— Ft pénzjutalomban részesül:
Magyar Zoltán az ELTE IV. éves matematikus hallgatója és
Révész Szilárd György az ELTE V. éves matematikus hallgatója.

A Rényi Kató díj II. fokozatában és 1500,— Ft pénzjutalomban részesül:
Miklós Dezső az ELTE V. éves matematikus hallgatója,
Nguyen Van Loi az ELTE V. éves matematikus hallgatója, valamint
Szabó Kálmán a KLTE V. éves matematikus hallgatója*.

Magyar Zoltán két diákköri dolgozatot írt, három dolgozata megjelenés alatt áll. Sebestyén Zoltánnal közösen megoldott egy 1973. óta nyitott, a C^* algebrák definíciójával kapcsolatos problémát. Másik két dolgozatában feltételeket ad ekvivalens C^*-norma létezésére, ill. élesíti Berkson és Glickfeld egy tételét. Szintén nagyon érdekes és meglepő alábbi eredménye: ha (a, b, c, d) valós számnégyes és $T(a, b, c, d)=(\cup a|-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$, akkor lényegében egyetlen kivételtől eltekintve, minden (a, b, c, d) számnégyesre létezik olyan n, amelyre $T^n(a, b, c, d)=(0, 0, 0, 0)$.

Révész Szilárd György három diákköri dolgozatot írt, ezek közül kettőt közlésre elfogadtak. Az első dolgozatban igen egyszerű új bizonyítást ad arra, hogy ha k és l relatív prímek, akkor a $\{kn+l\}_{n=1}^{\infty}$ számtani sorozat első $e^{ck\log^{11}k}$ eleme között van prímszám. A második dolgozatban Stás és Wiertelok eredményeit messzemenően általánosítva, algebrai számtestek esetére kiterjeszt egy sor klasszikus eredményt a prímszámformula maradéktagja és a zeta-függvény zéróhelyei közötti kapcsolatról. Harmadik diákköri dolgozata approximációelméleti témájú, Turán és Rahman egy problémájához kapcsolódik.

* Nevezettől plagizálás miatt a Társulat a díjat visszavonta.

Miklós Dezső két diákköri dolgozatot írt, egy további dolgozata kéziratban van. Kiterjeszti Katona és Srivastava egy tételét bináris kódokkal kapcsolatban. Megoldja Chvátal egy, leszálló halmazrendszerekre vonatkozó sejtését az extremális esetben, továbbá bebizonyítja Berge ismert tételének alábbi általánosítását: ha L véges disztributív háló, π rajta egy polaritás, D L-nek egy leszálló része, akkor D előáll $\{a, b\}$ alakú párok diszjunkt uniójaként, ahol $(a \neq b$ és $a < \pi b)$ vagy $a = b = \pi a$.

Nguyen Van Loi egy diákköri dolgozatot írt, két dolgozata pedig megjelenés alatt áll. Teljes strukturális leírását adja bizonyos Jenkins értelemben vett féligegyszerű gyűrűknek, ill. a gyengén szubidempotens radikáloknak. Megmutatja, hogy a lényeges (Dorroh) bővítésre zárt radikálosztályok éppen a homomorf zárt féligegyszerű osztályok, ill. hogy az egészek gyűrűjét nem tartalmazó radikálok gyengén szubidempotensek.

Szabó Kálmánnak 3 módszertani és 13 matematikai tárgyú dolgozata van megjelenés alatt, illetve kéziratban. Ezek közül kiemelendők az alábbiak: megold egy Meir, Willett és Wong által felvetett sejtést másodrendű differenciálegyenletekkel kapcsolatban; általánosítja az $E(1/x) \geqq \geqq 1/E(X)$ egyenlőtlenséget szimmetrikus pozitív definit mátrix-értékű valószínűségi változókra; kiterjeszti a klasszikus konfidencia intervallum konstrukcióját egy paramétertől függő többdimenziós esetre; kiszámítja a kétdimenziós Gamma-eloszlás momentumait a karakterisztikus függvény segítségével.

A Bolyai János Matematikai Társulat nagyrendezvényei 1982-ben

a) *GAMM-Tagung* (Budapest, 1982. április 13—16.; résztvevők száma 539 fő, melyből 159 magyar.) A Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) 1982. évi konferenciáját a Bolyai János Matematikai Társulat a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával szervezte. A szervező bizottság elnöke Prékopa András, tagjai Bosznay Ádám, Farkas Miklós, Kaliszky Sándor, Mikolás Miklós, Szabó János, titkárai Bernau Heinz, Gáspár Zsolt, Kotsis Domokosné és Popper György voltak.

A GAMM elsősorban német nyelvterületen működő társaság, közel 2000 főnyi tagsága soraiban azonban sok egyéb ország, köztük hazánk is képviselteti magát.

A konferencia plenáris előadásait délelőttönként a Magyar Tudományos Akadémia dísztermében bonyolítottuk le. Plenáris előadást tartottak: O. M. Belotzerkovszkii (SZU), A. Tondl (Csehszlovákia), R. Klötzler (NDK), L. Collatz, W. Schiehlen, L. Rosenmüller, Th. Lehmann, D. Gross, R. Jeltsch, R. Schassberger (NSZK), valamint Kaliszky Sándor (a GAMM MNB elnöke). W. Wuest (NSZK) tartotta a 25. „Prandtl" emlékelőadást. A GAMM hagyományaihoz híven szerveztünk egy ún. népszerű tudományos előadást is, melyet Farkas Miklós tartott „A matematika és az objektív valóság" címmel.

A fentieken kívül 347 rövid előadás hangzott el 7 szekcióban: Lengéstan és stabilitáselmélet; Rugalmasságtan és képlékenységtan; Áramlástan; Alkalmazott analízis és matematikai fizika; Numerikus analízis; Optimalizálás, sztochasztika és matematikai módszerek a közgazdaságtudományban; Informatika, számítógéptudomány. A konferencia színvonala minden tekintetben igen jónak mondható.

Az előzetes szervezési munkák nagyon jól folytak. A konferencia folyamán több technikai segédszemélyzetre lett volna szükség. Igény merült fel azonnali másolási lehetőségre is.

Összegezve megállapítható, hogy a konferencia mind tudományos, mind szervezési szempontból sikeres volt.

b) *Csillag Pál találkozó* (Balatonlelle, 1982. június 7—11.; résztvevők száma 145 fő). A találkozó szervezői: Füredi Zoltán, Kerékfy Pál, Pálfy Péter Pál. Szállás az előző évekhez hasonlóan a BME Balatonlellei KISZ táborában volt, az étkezést is ott oldottuk meg. A találkozó tudományos programján 24, egyenként húszperces előadás szerepelt:

Balog Antal: Erdős néhány olcsó problémájáról,
Bacsó Gábor: A matematikai alapműveltség hiányosságai (NP teljesség),
Bezdek András: Konvex lemezek fedése, avagy egy takaros takarási feladat,
Bíró Balázs: Többfelhasználós összeadócsatornák,
Bolla Mariann: Egy algoritmus általános valós mátrixok szinguláris felbontására,
Füredi Zoltán: Hegyesszögű háromszögek az n-dimenziós térben,
Gáspár Csaba: Absztrakt Friedrich—Poisson típusú egyenlőtlenségek,
Hujter Mihály: Egy ütemezési probléma,
Komornik Vilmos: Ortonormált sajátfüggvényrendszerek sajátértékeloszlása,
Kovács Péter: Inverz-assembler,
Lugosi Erzsébet: Pearson dinamikus dekompozíciós eljárása és annak diszkrét változata,
Móri Tamás: A laikus is meggazdagodhat, avagy: az empirikus stratégia optimalizálásáról,

O. Nagy István: Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása,
Páles Zsolt:Középérték osztályok és jellemzésük,
Pálfy Péter Pál: Zárt osztályok,
Simányi Nándor: Negatív görbületű billiárd,
Simon Éva: Egy nagy adatfeldolgozó rendszer time sharing környezetben történő karbantartásának tapasztalatai,
Solti György: Iterációs eljárás rúdszerkezetek képlékenységének modellezése,
Somogyi Árpád: Maximálegyenlőtlenségek függő valószínűségi változókra,
Szabó György: Normanégyzetre vezető függvényegyenletek alkalmazásokkal,
Szabó Zsolt: Induktív következtetés,
Szabó Zsolt: Rekurzív függvények,
Székely László: Mérhető kromatikus szám,
Voloncs György: Végeselem analízis a gépiparban.

A találkozó kulturális programja a „Tegnapelőtt" c. film vetítése és búcsúest volt. A konferencia jól sikerült, alkalmat adott arra, hogy a fiatal matematikusok jobban megismerjék egymás munkáját.

c) *Határeloszlástételek* a valószínűségszámításban és a statisztikában (Veszprém, 1982. június 21—26., résztvevők száma 90 fő; ebből 40 tőkés, 15 szocialista és 35 hazai). A konferencia szervező bizottsága a következőkből állt: Révész Pál elnök, Földes Antónia titkár, Arató Mátyás, Békéssy András, Csáki Endre, Csibi Sándor, Csörgő Sándor, Móri Tamás, Székely J. Gábor, Tomkó József, Vincze István.

Az öt munkanapon 74 előadás hangzott el. Az előadások hossza 20 és 45 perc között változott. Általában 2—3 párhuzamos szekció működött, de igyekeztünk, hogy a meghívott előadókkal párhuzamosan ne legyen más szekció. A résztvevők között számos igen neves matematikus volt: M. Csörgő (CDN), J. Durbin (UK), W. Philipp (USA), M. Rosenblatt (USA), K. Urbanik (PL), és sok nagyon érdekes előadás hangzott el. Ennek alapján remélhető, hogy a kollokvium kötete is magas színvonalú lesz.

A veszprémi egyetem által nyújtott technikai feltételek minden szempontból kitűnőek voltak. Az előadótermek mellett kényelmes helyiségek álltak rendelkezésre konzultációk céljaira. Ezzel a résztvevők rendszeresen éltek is.

A kollokvium idején a résztvevők költségén rendezett kirándulás nagyon sikeres volt, nagyban elősegítette a résztvevők közötti barátságok kialakulását.

d) *Rátz László* vándorgyűlés és Felsőoktatási ankét (Kecskemét, 1982. július 5—9., résztvevők száma 400 fő a teljes vándorgyűlésen, 49 fő csak az ankéton). A vándorgyűlés szervezői: Békefi Zsuzsa, C. Neményi Eszter, Pálfalvi Józsefné, Komjáth Péter, Petruska György. A helyi tagozatot Hadi István képviselte.

A vándorgyűlés tartalmával kapcsolatosan sok jól használható visszajelzést kaptunk azokból a kérdőívekből, amelyeket a résztvevőknek közel negyede kitöltött.

Nagy sikerű volt Pósa Lajos: „Matematikai játékok", Kálmán Attila: „Axiomatizálás a középiskolában" c. előadása, az általános és középiskolák közötti átmenet és a felzárkóztatás kérdéseiről rendezett ankét (vitavezető: Urbán János), Márton Klára: „Matematika az óvodában" címmel tartott beszámolója és a szakközépiskolai matematikatanításról szervezett ankét (vitavezető: Herczeg János). Kellemes színfolt volt a nemzetközi matematikai diákolimpián részt vevő delegációk vezetőivel való találkozás; igen szép és hasznos az OOK által felvett bemutató óra vetítése (bemutató tanár: Kovács Csongorné).

Igen hasznos volt beszélni a műszaki főiskolák matematikaoktatásáról.

Vélemény- és tapasztalatcserék iránti igényt jelzi a jól előkészített ankétok sikere mellett az is, hogy igen sokan hiányolták az előadások utáni viták, hozzászólások lehetőségét. Jó hatású kezdeményezés volt, hogy a Művelődési Minisztérium képviselői részt vettek a megbeszéléseinken. Az elhangzott javaslatok, felvetések további sorsáról a következő vándorgyűlésen tájékoztatni kell a résztvevőket.

A következő általánosabb *javaslatok* olvashatók ki a kérdőívekből:

— Mindegyik szekcióban több időt és lehetőséget célszerű biztosítani az előadásokhoz való hozzászólásokra, vitákra, valamint a kötetlenebb kerekasztal-beszélgetésekre.
— Szükséges többet foglalkozni az átmenetek gondjával (alsó és felső tagozat, felső tagozat és középiskolák között).
— Minden szinten gondot okoz a geometria tanítása; célszerű lenne egy következő vándorgyűlésen hangsúlyos szerepet adni ennek a témának.
— Elsősorban matematikai és matematika módszertani témákra van szükség, de emellett továbbra is igény van általános oktatáspolitikai kérdésekkel foglalkozó tájékoztatóra, vitára.

— Jobban oda kell figyelni a felsőoktatási ankétra.
— Szükség lenne a mindenki számára tartott plenáris előadás anyagának kézbe adására.

A vándorgyűlés tapasztalatait az Oktatási Bizottság július 9-i ülésén beszélték meg a jelenlevő bizottsági tagok. A tartalom és a szervezés értékelése mellett három további kérdésről volt szó:

1. Nehezményezzük, hogy a Távirati Irodának leadott teljes anyagot nem továbbította a MTESZ, és így pl. a Beke-díjasok névsora sem jelent meg.

2. Szükségesnek látszik pontosan megfogalmazni, hogy a vándorgyűlés megszervezésében mi a központ feladata és mi a helyi tagozaté.

3. Köszönjük az előadók díjazásának kedvező, megnyugtató módosítását.

e) *A XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát* 1982. július 5. és 15. között Budapesten rendezték meg (a zsüri részben Cegléden ülésezett). A szervezési munkát az MM megbízásából az OPI irányította, az olimpia szakmai részének a lebonyolításához a Társulat nyújtott segítséget. Az Olimpián részt vevő csapatok száma elérte a 30-as csúcsot, a résztvevők: Algéria, Ausztrália, Ausztria, Belgium, Brazília, Bulgária, Csehszlovákia, Finnország, Franciaország, Görögország, Hollandia, Izrael, Jugoszlávia, Kanada, Kolumbia, Kuba, Kuvait, Lengyelország, Magyarország, Mongólia, Anglia, NDK, NSZK, Románia, Svédország, Szovjetunió, USA,Tunézia, Venezuela, Vietnam négytagú csapattal és két vezetővel képviseltették magukat. A magyar csapat tagjai: Csákány Rita, Károlyi Gyula, Szabó Endre (Bp., Fazekas M. Gimn. IV. o. tanulók) és Tardos Gábor (Bp., Berzsenyi D. Gimn. IV. o.), vezetői: Hódi Endre és Reiman István.

A verseny szakmai része (beleértve a feladatok előkészítését, kitűzését, a zsüri munkájának az irányítását, a dolgozatok elbírálását — ami főként a koordinációs munkát jelenti) igen színvonalas volt. A zsüri elnöki tisztét Császár Ákos látta el; a feladatokat összeállító bizottságot Pelikán József vezette, aki egyébként rendkívül értékes munkát végzett a zsüri üléseinek négynyelvű bravúros tolmácsolásával és koordinátorként is; a koordinátorok munkáját Lovász László irányította; működésüknek és a velük együtt lelkesen dolgozó — túlnyomórészt régi olimpikonokból álló — fiatal matematikusoknak köszönhető, hogy a versenyek matematikai színvonala méltó volt a magyar matematikai versenyek hagyományaihoz, és ebben a tekintetben a XXIII. NMD az egyik legsikeresebb Olimpiának tekinthető.

Kár, hogy ez a versenyekhez kapcsolódó szervezési munka egy részéről már nem mondható el, az itt előforduló hibák némi árnyékot vetnek az Olimpia sikerére.

A verseny hat feladatára maximálisan 42 pontot kaphatott egy versenyző. A zsüri a díjak pontjait a következőkben állapította meg: 42—37 I. díj (10 db), 36—30 II. díj (20 db), 29—21 III. díj (31 db). Valamennyi magyar versenyző nyert díjat: Károlyi Gyula (36 pont), Szabó Endre (33 pont) és Tardos Gábor (35 pont) II. díjat, Csákány Rita (21 pont) pedig III. díjat kapott.

A legtöbb pontot elért országok: NSZK (145), SZU (137), USA, NDK (136—136), Vietnam (133), Magyarország (125), Csehszlovákia (115).

A magyar diákok a versenyen a vártnál jobban szerepeltek és megőrizték helyüket a verseny élmezőnyében. Az Olimpia további szervezése pillanatnyilag folyamatosnak látszik, az 1983-as versenyt minden valószínűség szerint Franciaország rendezi.

f) *Diákköri nyári iskola* (Gyöngyös, 1982. július 12—20., résztvevők száma 38 fő). A Nyári iskola témája idén a számelmélet volt, az alábbi előadások hangzottak el:

Szegedi Mária: Karakterek (bevezetés),
Révész Szilárd: Analitikus számelmélet (bevezetés),
Bohus Géza: Dirichlet tétele,
Szalay Mihály: A partícióelméleti Hardy—Ramanujan tétel,
Szalay Mihály: Statisztikus csoportelmélet,
Pintz János: A prímszámtétel,
Pintz János: Az analítikus számelmélet problémái,
Révész Szilárd: A Wiener—Ikehara tétel,
Freud Róbert: Kombinatorikus számelmélet I—II.,
Erdős Pál: Számelméleti problémák I—II.,
Tardos Éva: A Lenstra—Lenstra—Lovász algoritmusokról I—II.,
Magyar Zoltán—Michaletzky György: Szemerédi tételek ergodelméleti bizonyítása I—II—III.,
Balog Antal: A nagy szita és a Bombieri—Vinogradov tétel I—II—III.,
Rúzsa Imre: Számelméleti függvények I—II.,
Halász Gábor: Egyenletes eloszlás,
Sárközy András: A Hardy—Littlewood-módszer I—II.,
Rúzsa Imre: Differenciasorozatok.

A nyolcnapos időtartam miatt sok résztvevő csak részidőre jelent meg, így szervezési nehézségek (szállás, étkezés) merültek fel. A rendezvényt legfeljebb 6 naposra szabad tervezni. Az eddigieknél is gondosabban kell az előadásokat kiválasztani.

g) *Radikálelméleti konferencia* (Eger, 1982. augusztus 1—7., résztvevők száma: 63 fő). Szervező bizottság: Wiegandt Richárd elnök, Márki László titkár, V. A. Andrunakievics, L. Sz. Bokuty, L. A. Szkornjakov (SU), Kiss Emil, Anh Pham Ngor, Steinfeld Ottó, Szász Ferenc, Szendrei János.

A világon most először rendeztek olyan konferenciát, amelynek tárgya a radikálelmélet. Mind az öt kontinensről érkeztek résztvevők (említésre méltó, hogy a Szovjetunióból 14-en jöttek). A résztvevők között a téma olyan klasszikusai is voltak, mint N. Jacobson, S. A. Amitsur és N. Divinsky. A konferencia alkalmat adott arra is, hogy olyan, azonos témán dolgozó kutatók személyesen találkozhassanak, akik eddig csak levelezésből és dolgozatokból ismerték egymást.

A tudományos program kilenc 45 perces előadásból és harmincnégy 15 perces kiselőadásból, valamint egy probléma-ülésből állt. Nem voltak párhuzamos szekciók, mivel a kollokvium témáját eléggé leszűkítettük; inkább rövidebb időt kaptak az előadók. A konferencia programjához csatlakozott egy egri városnéző séta, fogadás a Park Hotelben, valamint egy borkostoló és kirándulás a Bükkbe (az utóbbi kettő a vendégek költségére).

A konferencia után a vendégek egyöntetűen kifejezték megelégedésüket, különösen a tudományos színvonalat illetően.

A konferencia előkészületi munkájában a szervező bizottság elnöke és titkára a Társulattól minden segítséget megkapott, a konferencián azonban (az ismert munkaerőproblémák miatt) csak egy személy tudott részt venni, két és fél napig.

Nagyobb körültekintéssel és tapasztalattal elkerülhettünk volna néhány apróbb kellemetlenséget. A konferenciát a Gép- és Műszeripari Szakközépiskolában és annak Diákotthonában tartottuk. (Néhányan az új Hotel Egerben laktak.) Bár a Szakközépiskola dolgozói igyekeztek legjobb tudásukkal segíteni, nincsenek hozzászokva és felkészülve nemzetközi tudományos konferenciák tartására.

h) *Valósfüggvénytani konferencia* (Esztergom, 1982. augusztus 22—27., résztvevők száma 22 fő). Szervezők: Laczkovich Miklós, Petruska György.

A konferencia a BJMT és a Real Analysis Exchange közös szervezésében zajlott le. A kb. 20 főre tervezett mini-konferencia szervezését 1981. szeptemberében vállalta Társulatunk, miután kiderült, hogy a Lengyel Matematikai Társulat nem tudja megszervezni. A résztvevők az esztergomi Fürdő Szállóban laktak, az előadásoknak a Tanítóképző Főiskola adott helyet. A konferenciára 9 országból érkeztek matematikusok (5 lengyel, 5 amerikai, 1—1 cseh, finn, francia, kanadai, norvég, olasz és 6 magyar). 18 előadás hangzott el, és a résztvevők azonos, vagy közel azonos érdeklődési köre biztosította, hogy az előadásokon túlmenően is gyümölcsöző matematikai megbeszélések folyhattak. A szimpozium felkért előadója D. Preiss (CS) két előadást is tartott. A jó hangulatú és magas színvonalú konferenciát a résztvevők egyöntetűen igen hasznosnak ítélték. Az előadások anyagait és a konferencián született dolgozatokat a Real Analysis Exchange következő száma fogja közölni.

A konferencia ideje alatt egy kirándulás (Dobogókő—Dömös gyalogtúra) és egy közös vacsora is volt. Az utazás és a tartózkodás valamennyi költségét a résztvevők maguk fizették.

i) *Matroidelméleti kollokvium* (Szeged, 1982. augusztus 29—szeptember 4.)

A konferencia tudományos programja augusztus 30. (hétfő) reggeltől szeptember 3. (péntek) estig tartott, ezalatt 37 előadásra került sor. Ebből 13 egyórás összefoglaló előadás, 24 félórás, új eredményeket bejelentő előadás volt. Az összefoglaló előadásokat H. Crapo és J. Edmonds (Kanada), M. Iri (Japán), B. Korte (NSZK), M. Las Vergnas (Franciaország), P. Seymour (USA) és L. Schrijver (Hollandia), J. Nesetril (Csehszlovákia) tartották.

Összesen 33 szerző előadása hangzott el, ebből 4—4 fő Csehszlovákiából, Franciaországból, az NSZK-ból és az USA-ból, 3 fő Kanadából, 2 fő Japánból, 1—1 fő Hollandiából, Jugoszláviából, Lengyelországból, Nagy-Britanniából, az NDK-ból, Portugáliából és Svédországból, továbbá öt magyar szerzőtől.

A résztvevők száma összesen 59 volt, ebből 39 külföldi. A külföldiek közül 14 tengerentúli. 25 európai volt, ez utóbbin belül 9 fő az európai szocialista, 16 fő a tőkés országokból.

Az előadásokat a JATE biológiai épületében tartottuk, végig egyetlen szekcióban, így elvileg a résztvevők minden előadást meghallgathattak. Ez annál is fontosabb volt, mert — mint ezt a 13 egyenként egyórás összefoglaló előadás is mutatja — a konferencia bizonyos mértékig tanfolyamjellegű is volt. Örvendetes, hogy mind a JATE, mind az ELTE számos érdeklődő egyetemi hallgatója is részt vett a konferencián.

A résztvevők nagy része a JATE Herman Ottó kollégiumában szállt meg, az étkezések nagy részét is közösen szerveztük meg, így igen bőséges lehetőség volt kötetlen beszélgetésekre, konzultációkra is. Ehhez járult egy közös kirándulás is Pusztaszerre, vacsorával és táncház-programmal (!).

Figyelemreméltó, hogy az előadások közel 20%-a a matroidelmélet alkalmazásaival foglalkozott (villamos hálózatok elmélete, rúdszerkezetek merevsége, szerves kémia).

j) *XII. Magyar Operációkutatási konferencia,* Kőszeg, 1982. szeptember 6—10.

A konferenciát Társulatunk a Magyar Közgazdaságtudományi Társaság és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási szakosztálya közreműködésével rendezte. Mintegy 250 fő jelentkezett részvételre, és ebből 240 meg is jelent. A 64 előadás 21 szekcióülés keretében hangzott el, a kitűzött programtól eltérés csak egy helyen volt. A két párhuzamos szekció üléseit a hallgatóság szorgalmasan látogatta, a kisebb terem sajnos gyakran zsúfoltságig megtelt. A szervezés ettől eltekintve gördülékeny volt. Technikailag az előadások között, ahogy az a Bolyai Társulat rendezése alkalmával lenni szokott, nagyobb hangsúlyt kaptak a módszertani előadások, de szép számmal akadtak alkalmazási témák is. Különösen örvendetes, hogy több beszámoló foglalkozott megvalósított rendszerek ismertetésével, ami arra utal, hogy az operációkutatási módszerek rendszere használatára lassan a fogadók részéről is megérik a helyzet. Az elméleti témakörből a sztochasztikus programozási módszerek és az integer programozás eredményei, a rendszeresen használt módszerek körében a népgazdasági szintű vizsgálatok és a mezőgazdasági alkalmazások szerepeltek nagyobb súllyal. Úgy gondoljuk, hogy a konferencia az eredményes jelzőt mindenképpen megérdemli.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT RENDEZVÉNYEI
(1981. SZEPTEMBER 1.—1982. NOVEMBER 30.)
BUDAPEST

szeptember 7.	E. S. Lajpin (SU): Félcsoportok ternárisan zárt részhalmazai.
szeptember 14.	S. Schwabik (CS): Generalized Volterra integral equations.
szeptember 21.	J. Rätz (CH): On light cone preserving mappings of the plane.
szeptember 24.	J. F. Watters (GB): Classes of prime rings.
szeptember 24.	Előadás és konzultáció az új általános iskolai 7. osztályos matematika tanterv bevezetéséről (előadássorozat, 1. rész).
szeptember 25.	Hódi Endre: Beszámoló a XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról (Washington, 1981. VII. 8—20.) (az Ifj. Mat. Kör ülése).
október 7—9.	L. Carleson (S): Recent results in H^p-theory, I—II—III.
október 8.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 2. rész.
október 9.	Laczkovich Miklós: Mivel foglalkozik az analízis? Rövid történeti áttekintés (Analízis tanfolyam, FPI-vel közösen).
október 16.	Asztalos D.—Koltai T.—Krekó B.: Egy metainformációs rendszer tervezésének és matematikai megalapozásának kérdései (A mat. alk-i szakosztály előadássorozata keretében).
október 22.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 3. rész.
október 22.	W. Wagner (PL): Testing the assumption of normality of errors in linear model.
október 23.	Csirmaz László: Mennyi vizet kell a Szaharába vinni? (Egy kombinatorikai versenyfeladatról; az Ifjúsági Matematikai Kör ülése).
október 23.	Laczkovich Miklós: Halmazelméleti és ponthalmazelméleti alapfogalmak (Analízis tanfolyam, FPI-vel közösen).
október 24.	Kürschák József matematikai tanulóverseny.
november 5.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 4. rész.
november 6—16.	Schweitzer Miklós emlékverseny.
november 13.	Vincze Endre: A gazdaságosság és termelékenység néhány matematikai problémája (A matematika alkalmazásai szakosztály előadássorozata keretében)
november 14.	Az 1980/81-es tanévben végzett matematika—fizika szakos tanárok összejövetele; a mejelentekkel Urbán János beszélgetett a pályakezdés gondjairól
november 17.	Matematikatanítást segítő vándorszolgálat fővárosi tanítók és felső tagozatos matematikatanárok részére (FPI-vel közösen)
november 19.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 5. rész.
november 20.	Füredi Zoltán: Extremális halmazrendszerek (az IMK ülése).
november 20.	Laczkovich Miklós: A valós szám fogalmáról (FPI-vel közösen).
november 24.	Matematikatanítást segítő vándorszolgálat, 2.
november 27.	Sarkadi Károly: Statisztikai illeszkedésvizsgálat (A mat. alk-i szakosztály előadássorozata keretében).
december 3.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 6. rész.
december 4.	Kürschák József matematikai tanulóverseny eredményhirdetése és díjkiosztása, a feladatokat Surányi János ismertette.
december 4.	Laczkovich Miklós: Valós számsorozatok. Konvergencia, divergencia (FPI-vel közösen).

december 8.	Matematikatanítást segítő vándorszolgálat, 3.
december 11.	P. PETRUSHEV—V. HRISTOV: Az approximációelmélet néhány problémájáról.
december 11.	Az 1981. évi Grünwald Géza és Farkas Gyula emlékdíjak kiosztása, a Schweitzer Miklós emlékverseny és a Matematikatanárok versenye eredményhirdetése.
december 17.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 7. rész.
december 27.	S. G. GINDIKIN: Az Einstein-egyenlet explicit megoldásai, I.
december 29.	S. G. GINDIKIN: Az Einstein-egyenlet explicit megoldásai, II.
december 29—30.	150 éve jelent meg Bolyai János műve, az Appendix (Bolyai Farkas életművéről) — megemlékezés LACZKOVICH MIKLÓS: A racionális és irracionális számokról (Anal. tanf., FPI-vel). Feladatmegoldások. A Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldóinak baráti találkozója. LOVÁSZ LÁSZLÓ: Számítógépek, algoritmus, matematika. Az Ifjúsági Matematikai Kör Téli ankétja.
január 4.	S. G. GINDIKIN: Komplex geometria, tvisztorok.
január 5.	S. G. GINDIKIN: A Cauchy—Riemann egyenletek többváltozós változatairól.
január 12.	Matematikatanítást segítő vándorszolgálat, 4.
január 15.	A Szele Tibor emlékérem átadása; Szendrei Ágnes „A szegedi univerzális algebrai kutatásokról" című előadása.
január 29.	Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése: Az Országos Középiskolai tanulmányi verseny I. fordulója feladatainak megbeszélése.
február 5.	LACZKOVICH MIKLÓS: A függvényfogalom kialakulása, története (Anal. tanf., FPI-vel).
február 11.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 8. rész.
február 12.	LACZKOVICH Miklós: Folytonos függvények (Anal. tanf., FPI-vel).
február 12.	RECSKI ANDRÁS: Gráfelméleti és matroidelméleti módszerek lineáris kalitatív vizsgálatában (A mat. alk-i szakosztály ülése).
február 25.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 9. rész.
február 26.	LACZKOVICH MIKLÓS: Differenciálható függvények, s a differenciálszámítás alkalmazásai (Anal. tanf., FPI-vel).
február 26.	VARGHA DÉNES: A mediterrán ősábécé rekonstrukciójának problémái (A mat. alk-i szakosztály ülése).
február 26.	FREUD RÓBERT: Prímszámok és titkosírás (az IMK ülése).
március 2.	Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulója.
március 9.	„Amerikai verseny".
március 11.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 10. rész.
március 12.	TÓTH JÁNOS: A reakciókinetika determinisztikus modelljéről (A mat. alk-i szakosztály ülése).
március 12.	LACZKOVICH MIKLÓS: A terület és a térfogat fogalma: integrálszámítás (Anal. tanf., FPI-vel)
március 23.	R. GUITART (F): Figurative algebras and sketches, I.
március 25.	R. GUITART (F): Figurative algebras and sketches, II.
március 25.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 11. rész.
március 26.	LACZKOVICH MIKLÓS: Metrikus terek (Anal. tanf., FPI-vel).
március 26.	Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulója feladatainak megbeszélése (IMK ülése).
március 26.	VARGA LÁSZLÓ: Absztrakt adattípusok verifikálásáról (A mat. alk-i szakosztály előadássorozata keretében).
április 6—7.	Ifjúsági Matematikai Kör tavaszi ankétja: PÓSA LAJOS: Gráfelméleti problémák. LEHEL JENŐ: Feladatok a kombinatorikus geometria köréből. Feladatmegoldások.
április 8.	Arany Dániel matematikai tanulóverseny II. fordulója.
április 13—16.	GAMM-Tagung (Budapest).
április 16.	KATONA GYULA: Két, extremális kombinatorikai problémákhoz vezető gyakorlati probléma (A mat. alk-i szakosztály előadássorozata keretében).
április 19.	Tanárképző főiskolák versenye.
április 19—20—21.	R. H. G. HELLEMAN (NL): Chaotic behaviour inherent in nonlinear mechanics, I—II—III.; Feigenbäume, period-doubling to chaos, I—II.
április 22.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 12. rész.
április 23.	LACZKOVICH MIKLÓS: Az analízis néhány alkalmazása a matematikán belül (Anal. tanf., FPI-vel közösen).
április 26.	Arany Dániel matematikai tanulóverseny II. fordulója.

április 27.	A Magyar Hidrológiai Társaság Hidraulikai és Műszaki Hidrológiai Szakosztálya és a Bolyai J. M. Társulat A matematika alkalmazásai szakosztálya közös vitaülése: Hidrológiai folyamatok elmélete (Kis-vízfolyások vízjárásának követése Poisson folyamatokkal).
április 30.	HÓDI ENDRE: Az amerikai verseny eredményei és feladatai (az Ifjúsági Matematikai Kör ülése).
május 6.	Előadás és konzultáció, ált. isk., 7. o., 13. rész.
május 11.	Olimpiai válogatóverseny.
május 13.	KOVÁCS, L. (AUS): Minimális nominálosztók komplementumai véges csoportokban.
május 14.	G. BLIND (D): Der wievielte Teil der Ebene lässt sich durch Kreise einfach überdecken.
május 14.	Végző matematika—fizika szakosok klubdélutánja.
május 20.	Előadás és konzultáció, ált. isk. 7. o., 14. rész.
május 21.	N. P. DOLBILIN (SU): B. N. Delone életéről és munkásságáról.
május 27.	W. EBERL (A): On characterization problems and scaling classes.
június 2.	A. ZILINSKAS (SU): Többextrémumú feladatok megoldási módszereiről.
június 7—11.	Csillag Pál találkozó (Balatonlelle).
június 12.	Arany Dániel matematikai tanulóverseny eredményhirdetése.
június 21—25.	Határeloszlástételek a valószínűségszámításban és a statisztikában (Veszprém).
július 2.	Végző matematikus hallgatók összejövetele; a Rényi Kató Emlékdíjak kiosztása.
július 22.	E. BURATTINI (I): The network design problem: complexity and heuristic approach.
július 29.	R. TIJDEMAN (NL): Multiplicates of binary recurrences.
augusztus 1—7.	Radikálelmélet kollokvium (Eger).
augusztus 9.	E. G. GOODAIRE (CDN): Alternative loop rings.
augusztus 23—27.	Valósfüggvénytan kollokvium (Esztergom).
augusztus 30.	V. HAASE—G. KOCH (D): Analysis of real time systems; System for application oriented requirement specification in process control automation.
augusztus 29—szeptember 3.	Matroidelmélet kollokvium (Szeged).
szeptember 6—10.	XII. Magyar Operációkutatási Konferencia (Kőszeg).
szeptember 7.	W. H. CUNNINGHAM (CDN): Decomposition of submodular functions.

KÖNYVISMERTETÉS

HAJNAL IMRE—DR. NEMETZ TIBOR—DR. PINTÉR LAJOS—DR. URBÁN JÁNOS: MATEMATIKA (FAKULTATÍV B VÁLTOZAT) IV. OSZTÁLY (Tankönyvkiadó, Budapest, 1982., 489 oldal, 23,— Ft, 13431 (B).

Ez a tankönyv a gimnáziumok azon IV. osztályos tanulói számára készült, akik a fakt. B tanterv szerint heti 8 órában tanulják a matematikát. A szerzők a hagyományos témakörök (analízis, geometria) mellett, összhangban a tantervi előírásokkal, több új, a tudományos kutatáshoz közel álló problémakört (számítógéptudományi kérdések, kombinatorikus geometria, színezési problémák, gráfelméleti kérdések) is tárgyalnak. A tankönyvben feldolgozott anyag mennyisége meglehetősen nagy. A feldolgozás módja igényességre vall. Nagy a könyv terjedelme, pedig megfogalmazása tömör, nincsenek benne felesleges részek, rövidíteni csak egyes anyagrészek kihagyásával lehetne.

A tankönyv jellemzője az az igény is, hogy a tanuló tudjon belőle tanulni, új ismereteket elsajátítani. Ezt a célt szolgálják a definíciók, a tételek és bizonyításaik, a kidolgozott példák, a feladatok, a középiskolai feladatgyűjteményekre való utalások és a történeti áttekintések az egyes fejezetekben. A könnyebb tájékozódást, a lényeg kiemelését erőteljesebb nyomdatechnikai eszközökkel célszerű lett volna fokozni.

A tankönyv a következő fejezetekből áll:

I. Az integrál és alkalmazásai.
II. Térgeometriai feladatok.
III. Néhány számítógép-tudományi kérdés.
IV. Kombinatorika.
V. Valószínűségszámítás.
VI. Rendszerező összefoglalás.
VII. A matematika néhány filozófiai kérdése (Olvasmány).

Az I. fejezet a terület- és térfogatszámítással, az integrál fogalmának kialakításával, a reá vonatkozó tételekkel és az integrálszámítás gyakorlati alkalmazásaival foglalkozik. A feldolgozott anyag mennyisége és mélysége (pl. integrálás helyettesítéssel, az integrál közelítő kiszámítása, a különféle fizikai alkalmazások, az improprius integrál, végtelen sorok, hatványsorok) erőteljesen megközelíti az egyetemeken tárgyalt klasszikus analízist, ill. több is, mint amennyit pl. egy átlag műszaki egyetemi hallgató tud.

A tankönyv szerzői a tudományosság igényével írták meg az egyes fejezeteket. A feldolgozás módszereiben sok esetben támaszkodtak a kiváló tudós tanárok tapasztalataira, véleményére, pl. idézik Beke Manónak a hatványsorok tanításával kapcsolatos nézeteit, ill. alkalmazzák a Pólya György által javasolt heurisztikus bizonyítást a felszínszámításnál. Viszont a sokszögekhez tartozó terület, ill. a poliéderekhez rendelt térfogat tárgyalásánál kissé erőltetett a következetes tudományos tárgyalás. A „ha létezik" feszegetését nem biztos, hogy megértik a diákok. Inkább a Cantor axiómára való hivatkozással lehetett volna tudatosítani, hogy a keresett hozzárendelés létezik és egyértelmű.

A II. fejezet egy jó térgeometriai áttekintést ad. Tárgyalja a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és szögét. Foglalkozik a poliéderekkel, Euler tételével és a szabályos testekkel. Feladatanyagát elsősorban az egyetemi felvételik anyagából választották.

A III. fejezet egy fiatal, fejlődő tudományba — a számítógép tudományába — nyújt bepillantást, elsősorban ismeretterjesztő jelleggel. Az információ, annak ábrázolása, tárolása, a véges automaták, a programnyelvek és az algoritmus fogalmának rövid ismertetését tartalmazza.

A IV. fejezetre az útkeresés a jellemző. Elsősorban a kidolgozott példák segítségével mutatja be a matematikának a középiskolai tananyagban eddig még nem szereplő témaköreit. Ezek a kö-

vetkezők: kiválasztási feladatok, kombinatorikus geometriai feladatok, színezési problémák, gráfelméleti feladatok, Hamilton kör, Euler vonal, szabályos poliéderek, Schlegel diagrammjának elemzése, Fleury algoritmus, Dirac tétele és különböző matematikai játékok.

Az V. fejezetben a legfontosabb és legegyszerűbb statisztikai mutatók — középértékek, modus, medián, szórás, valószínűségi változók és jellemzőik — szerepelnek. Kiegészítő anyag a nagy számok törvénye, olvasmány a véletlen számok kiegyenlítődési hajlama.

Ez a fejezet stílusában eltér a többitől. Elsősorban definíciót előkészítő példákat és definíciókat, ill. feladatokat tartalmaz egymásra épülően. A fejezetet csak teljes egészében lehet tanulni és felfogni, mert benne minden mindennel összefügg, a kiragadott részletek megértése nem könnyű. Az értelmes diáknak ez nem okoz nehézséget, viszont a közepesek számára már problémát jelenthet.

A VI. fejezet a gimnázium anyagának új szempontok szerinti rendszerező összefoglalása. A szerzők összegyűjtötték az alapvető definíciókat, tételeket és eljárásokat, amelyeket minden tanulónak ismernie és tudnia kell. Világosan, egyszerűen, logikusan és a diák számára jól követhetően emelik ki a lényeget, egységesítik az eddig tanult ismereteket. A definíciókat példákkal is szemléltetik, az eljárásokat mintapéldák segítségével elemzik, a legfontosabb tételeket bebizonyítják. Felhívják a figyelmet, hogy az ismétlésnél szereplő feladatanyag kevés az érettségire, ill. a felvételire való felkészüléshez. Kiemelten tárgyalják a bizonyítási módszereket.

A tankönyvírók gondoltak a kiváló tanulókra is, kitekintésként olyan kérdéseket is érintenek, amelyek már nem tartoznak a gimnáziumi anyaghoz, pl. a geometriai transzformációknál a csúsztatva tükrözés. Az érdeklődők számára irodalmat is ajánlanak.

A VII. fejezet olvasmány, a matematikai fogalmak fejlődéséről, a matematika fejlődésének külső és belső hajtóerőiről, a matematika alkalmazásairól a matematika módszereiről, a matematika igazság fogalmáról nyújt ismereteket az olvasó számára.

Ezt a tankönyvet minden matematikát szerető és ismereteit bővíteni akaró középiskolai diáknak és a matematika új irányzataival megismerkedni óhajtó felnőtteknek is ajánljuk.

Kántor Sándorné

BUERGER, MARTIN J.: INTRODUCTION TO CRYSTAL GEOMETRY, McGraw-Hill Book company 1971, Reprint: Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York 1978, (204 oldal).

A szerző neves krisztallografus, több monográfia szerzője (itt csak a jelen könyv közvetlen előzményét említem, M. J. Buerger: Elementary crystallography, an introduction to the fundamental geometrical features of crystals, Wiley, New York, 1956, 1963, 528 pages), a Massachusetts Institute of Technology és az University of Connecticut professzora. Könyvét azzal a céllal írta, hogy a geometriai kristálytant alkalmazó tudományok — mint az ásványtan, kémia, fizika, sőt újabban a biológia — szakemberei, különösen az anyagszerkezetet diffrakciós vizsgálatokkal feltárók számára közös nyelvet alakítson ki, az alkalmazásokhoz közelálló szemlélettel ismertesse meg olvasóit a legalapvetőbb kristálytani fogalmakkal.

A természet számára lehetséges 230 tércsoport felfedezése, melyet Fjodorov orosz, Schoenflies német, Barlow angol tudósok immár 100 éve közel egyidőben, egymástól függetlenül vittek végbe, megalapozta a matematikai (geometriai) kristálytan tudományát, mely azóta is szépen fejlődik. A tudomány sajátos „tolvajnyelve", furcsa jelölései a kívülálló számára elriasztó akadályt jelenthet. A tapasztalt szerző, jó didaktikai érzékkel, bőséges ábraanyaggal, táblázatokkal, konkrét kristályalakokkal szemlélteti a legszükségesebbre korlátozott mondanivalóját. A könyv leíró jellegű, semmiféle igényesebb indoklást, bizonyítást nem alkalmaz állításainak alátámasztására, sőt kifejezetten kerüli még a legtermészetesebb matematikai kifejezéseket is. Például a csoport fogalma csak elnevezésekben szerepel. A transzformációcsoportokkal kapcsolatos legegyszerűbb fogalmak is csak alkalmazásigényű helyettesítő kifejezésekkel szerepelnek. Ez némi hiányérzetet kelthet a matematikus olvasóban. A matematikai kristálytan ma már, a diszkrét transzformációcsoportok elméletének részeként, igen fontossá vált a matematika több területén is (számelmélet, algebra, topológia, differenciálgeometria, diszkrét geometria) és nem túl messze kell menni ebben az elméletben ahhoz, hogy bizonyos kristálytani jelenségeket, tényeket jóval világosabban, egyszerűbben magyarázzunk meg. Ezt talán az alkalmazó szakemberek is igényelhetik ma már. No de a szerző más célt követett, s bevezető könyvként, mely akár tankönyv is lehet, igazán szép munkával állunk szemben, melyre biztos alapként épülhet egy későbbi matematikus igényű tárgyalás.

Az előszón és a tárgymutatón kívül a könyv 11 fejezetre tagozódik. A bevezetőt követő 2. fejezet a szabályos mintákkal, a kristályos szerkezet jellemzésével foglalkozik. Az idealizált mintákat önmagába vivő szimmetriaműveleteket „első-fajú operációk"-ra és „másod-fajú operációk"-ra osztja. Az irányítástartó egybevágóságok vagy mozgások és az irányításváltó egybevágóságok megnevezése történik így. A 3. fejezet az eltolási szimmetriával, mint a kristályokra jellemző rácsszerű

szerkezet leírásával foglalkozik. A rácssíkok analítikus megadását geometriailag is szemlélteti (Miller-indexek). A 4. fejezet a szimmetriaműveletek osztályozását és „kombinációit" (összetételét vagy kompozícióját) veszi számba. Itt lehetne gyümölcsözően bevezetni talán a transzformációcsoport, részcsoport, generátorok, stb. matematikai kifejezéseket gyümölcsözően bevezetni. Az 5. fejezet a pontcsoportokat (kristályosztályokat), a 6. fejezet a rácsok szimmetria-osztályozását (az ún. Bravais-rácsokat) és a koordinátarendszer speciális kiválasztását tárgyalja. A 7. fejezet a pontcsoportokat tükröző idealizált kristályalakokat írja le szép ábrák kíséretében. Itt érdekes lett volna a Delonefféle 24 paralleloédertípus megadása. A 8. fejezetben szerepel a csavarmozgások és az eltolástükrözések (glide reflection) geometriai és koordinátás megadása.

A 9. fejezetben most már minden elő van készítve a lehetséges tércsoportok levezetésének gondolatmenetéhez. Az első 24 tércsoport részletesebb bemutatása után mind a 230 kristálycsoport táblázatos felsorolása is szerepel a könyvben. Ismerteti a szerző a Hermann—Mauguin-féle szimbolikus jelölésrendszert. Rámutat a konvenciók változtatásával lehetséges módosítási lehetőségekre (koordinátatengelyek, centrálások cseréje, az origó megváltoztatása). A 10. fejezet az egyes pontcsoportokhoz és tércsoportokhoz tartozó speciális „ponthelyzetek" számbavételének fontosságára irányítja a figyelmet. A transzformációcsoportok elméletének nyelvén azt mondhatnánk, hogy a tércsoport pályáinak (orbitjainak) osztályozása kerül sorra. A nemzetközi táblázatokban ezeket Wyckoff-pozícióknak is nevezik. A 11. fejezet a kristálygeometria fejlődéstörténetét foglalja össze. Itt szerepel a témához szorosabban tartozó irodalom felsorolása.

Mindenképpen ajánlatos, hogy szakkönyvtáraink beszerezzék ezt az igazán szép kiállítású könyvecskét, melyet a geometriai kristálytan alkalmazásaival foglalkozók, egyetemi hallgatók, de az érdeklődő matematikus kollégák is haszonnal forgathatnak.

Molnár Emil

KALMÁR LÁSZLÓ: BEVEZETÉS A MATEMATIKAI ANALÍZISBE I—II.
(Tankönykiadó, Budapest, 442+406 oldal, 141,— Ft)

Az utolsó 30 évben a magyar szerzők és kiadók nem kényeztették el az olvasókat és a tanulni vágyókat a matematikai analízisbe bevezető könyvek sokaságával. Szász Pál Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba című kétkötetes műve, amely hosszú ideig a tankönyv és a kézikönyv szerepét is betöltötte, 1951-ben jelent meg. Azóta — eltekintve egyes könyvek néhány olyan fejezetétől, amelyek ezzel a témával is foglalkoztak — 1981-ig nem jelent meg magyar szerzőtől egy kifejezetten a matematikai analízisbe bevezető, esetleg akár több oktatási intézményben is tankönyvnek használható mű. A matematikai analízist oktató egyetemek, karok, sőt tanszékek is, és megalakulásuk után a főiskolák is, mind-mind (egymástól függetlenül) évtizedeken át jegyzeteket adtak ki ebben a tárgykörben. Úgy látszik, hogy a 80-as évek elején megváltozott a helyzet, mert megindult a matematikai analízisbe bevezető tárgykörű könyvek kiadása. Ezek egyike az a kétkötetes mű, amelyet az 1976-ban elhunyt Kalmár László professzornak a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karán 1944 és 1974 között tartott előadásai alapján állítottak össze volt tanítványai: Csúzi Józsefné, Dúró Lajosné dr., dr. Németh József és dr. Varga Antal.

A csaknem 850 oldalas mű a következő 8 fő fejezetre oszlik:

I. kötet: Valós számok,
Függvények,
A kétoldali megközelítés mint az analízis egyik alapvető módszere,
A határátmenet mint az analízis másik alapvető módszere.

II. kötet: A folytonos függvények elmélete,
Differenciál- és integrálszámítás,
Hatványsorok,
Függvénydiszkusszió.

Egy-egy fő fejezet számos fejezetre oszlik és ezek csoportosítása helyenként eléggé meglepő. Például a Differenciál- és integrálszámítás című fő fejezet három fejezetből áll, és ezek:

1. Összetett függvény differenciálása,
2. Függvény inverzének differenciálása,
3. Az integrálszámítás alkalmazásai.

A könyv felépítése — amint az az Előszóban is olvasható — valóban sajátos, eredeti és gondolatgazdag. Az anyag nem éppen szokásos elrendezésével, egyes részeinek arányaival, egyéni tárgyalásmódjával és bizonyos módszerek kihangsúlyozásával bizonyára lehetne vitatkozni, de sajnos ebben a vitában a szerző már nem tudna részt venni.

A könyv szövege megőrizte Kalmár László előadásainak minden apró részletre is kiterjedő körültekintését, szélesen hömpölygő stílusát és a kimondott vagy a sorok közül kiolvasható módszertani elképzeléseit.

A könyv jelölésrendszere az ötvenes évek számos, több vonatkozásban sem szerencsés jelölését is használja, de ez a gyakorlottabb olvasót nem zavarja túlságosan a könyv értékeinek a felfedezésében.

A könyv tanulmányozása elsősorban azoknak ajánlható, akik az analízis tanításával foglalkoznak vagy foglalkozni fognak, mert alkalmat ad arra, hogy egy viszonylag nagy anyagrész egy sajátos tárgyalási módjait ismerje meg az olvasó.

Nagy kár, hogy a könyv nem tartalmaz tárgymutatót, mert egy-egy definíció, fogalom, tétel utólagos megkeresése a tárgykörök sajátos csoportosítása miatt a részletes tartalomjegyzék ellenére is nagy nehézségekbe ütközik.

Elismerés illeti a Tankönyvkiadót azért, hogy ezt a kultúrtörténeti szempontból is érdekes könyvet megjelentette, de kár, hogy nem húsz évvel ezelőtt.

Scharnitzky Viktor

G. P. GAVRILOV—A. A. SZAPOSENKO: DISZKRÉT MATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981, 356 old., 68,— Ft)

A feladatgyűjtemény a szerzőknek a Moszkvai Állami Egyetem Mechanika—Matematika Karán, valamint Számítástechnika és Kibernetika Karán tartott előadásai és gyakorlatai alapján készült.

A könyv nyolc fejezetből áll (a zárójelben a fejezetben szereplő feladatok száma van):

1. Boole — függvények megadása és alapvető tulajdonságaik (173),
2. Zárt osztályok és teljesség (198),
3. k-értékű logikák (81),
4. Gráfok és hálózatok (271),
5. A kódelmélet elemei (84),
6. Véges automaták (73),
7. Az algoritmuselmélet elemei (77),
8. A kombinatorika elemei (84).

A könyv első két fejezete a kétértékű logikáról szól. Az olvasó alapvető elképzeléseket nyerhet például a diszkrét függvény, a szuperpozíció, a funkcionálisan teljes rendszer fogalmáról, megismerkedhet a diszkrét függvény megadásának különböző módszereivel (pl. az n-dimenziós egységkocka felhasználására épülő geometriai módszerrel), megtanulhat a függvényrendszerek teljességével és zártságával kapcsolatos kutatási módszereket.

A harmadik fejezetet a k-értékű logikáknak szentelték a szerzők. A feladatok során az olvasó megismerkedhet a k-értékű logikai függvények kanonikus felbontásával, a formulák ekvivalens átalakításával, a k-értékű logikai függvények zárt osztályával és azokkal a módszerekkel, amelyekkel teljes és zárt függvényrendszereket lehet keresni.

A negyedik fejezetben gráfelméleti (irányított és irányítatlan), hálózatelméleti, kapcsoláselméleti és leszámlálási feladatok vannak.

Az ötödik fejezetben hibajavító, ábécés és minimális redundanciával rendelkező kódok tulajdonságaival foglalkozó feladatok szerepelnek.

A hatodik fejezetben a diszkrét transzformációk (automaták) leírásának különböző módszereit bemutató feladatok találhatók.

A hetedik fejezet az algoritmuselmélet elemeit, néhány konkrét algoritmus meghatározási módszert (Turing gépet) és rekurzív függvényeket bemutató feladatokat tartalmaz.

A nyolcadik fejezet kisegítő jellegű. Kombinatorikai alapfogalmakkal, a logikai szitaformulával, generátorfüggvényekkel, rekurzív összefüggések tanulmányozásával, továbbá aszimptotikus becslésekkel és egyenlőtlenségekkel kapcsolatos feladatok találhatók benne.

A legtöbb feladathoz rövid megoldás vagy eligazítás tartozik, a nehezebb feladatokat csillag is jelöli. Az egyes fejezetek elején rövid elméleti összefoglaló áll.

A gyűjteményt elsősorban felsőfokú matematikai tanulmányokat folytató hallgatók használhatják eredményesen, de elég sok feladata a középfokú oktatásban, illetve szakköri foglalkozásokon is feldolgozható.

Scharnitzky Viktor

MTA Könyvtára
Periodika 1984/1166 n.
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat a nyomdába érkezett. 1983. ápr. 21. — Terjedelem: 9,10 (A/5) ív
84-1964 — Szegedi Nyomda, Szeged — F. v.: Dobó József igazgató

CONTENTS

I. Juhász, G. Katona and P. Komjáth: For the 50th birthday of András Hajnal 285
P. Erdős: On prime factors of binomial coefficients II. 307
L. Fejes Tóth: On circles covering a given circle 317
A. Bezdek and L. Fejes Tóth: Dense packing of circles with given radius-distribution 321
D. Szász: Random point distributions and their applications to reliability theory and statistical physics II 329
Activity of the Society 363
Book review 383

СОДЕРЖАНИЕ

Иштван Юхас, Г. Катона и П. Комйат: Андрашу Хайналу 50 лет 285
Пал Эрдёш: О прямых факторах биномиальных коэффициентов II 307
Ласло Фейеш Тот: О кругах под крывающих один круг 317
Андраш Бездек и Ласло Фейеш Тот: Плотное расположение круговс данной плотностью распределения радиуса 321
Домокош Сас: Случайные распределения точек и их применения в теории надежности и в статистической физике II 329
Новости из жизни математического общества 363
Новые книги 383

Ára: 9 Ft
Évi előfizetés: 36 Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X