312.046
28
1977-80

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

28. évfolyam, 1980

1-3

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1978. december — 27. évfolyam 3—4. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 28, Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Emlékülés Bolyai János születésének 175. évfordulóján 1
Alexits György: Bolyai János világa 1
Emlékülés Alexits György születésének 80. évfordulóján 11
1. Leindler László: Erős approximáció 11
2. Tandori Károly: Függvénysorok konvergenciája 21
3. Králik Dezső: Elemi sorelméleti módszerek az approximációelméletben 27
4. Schipp Ferenc: Szorzatrendszerek szerinti sorfejtések konvergenciája 35
5. Móricz Ferenc és Révész Pál: Multiplikatív rendszerek 43
Horváth János: Riesz Marcel matematikai munkássága II. 65
Szalay Mihály és Urbán János: Surányi János matematikai munkássága 101
Bakos Tibor: Egy bűvös prímnégyzet 119
Erdős Pál és Szemerédi Endre: Megjegyzések az American Mathematical Monthly egy problémájához 121
Erdős Pál, Győry Kálmán és Papp Zoltán: A $\tau(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ és $\nu(n)$ függvények néhány új tulajdonságáról 125
Szénássy Barna: Megjegyzések Gauss nem euklidészi geometriai eredményeihez 133
Nagyné Szilvási Márta: A quarter-szimmetrikus konnexió görbületéről 141
Bézi Magdolna: Egy binomiális együtthatókból álló mátrix invertálhatóságának vizsgálata .. 147
Kollár János: Algebrai görbék 153
Szabó Sándor: Egy szabályos sokszögekre vonatkozó észrevétel 199
H. M. Chung: Megjegyzés a teljesen invariáns kongruenciarelációkról a varietások vizsgálatában 203
W. T. Tutte: Színezési problémák 207
Az 1978. évi Schweitzer Miklós emlékverseny feladatai 215
Jelentés az 1978. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről 219
Feladatrovat 235
Társulati élet 237
Könyvismertetés 247

EMLÉKÜLÉS BOLYAI JÁNOS SZÜLETÉSÉNEK 175. ÉVFORDULÓJÁN

BOLYAI JÁNOS VILÁGA

ALEXITS GYÖRGY

Bolyai János, minden idők egyik legeredetibb gondolkodású matematikusa, tragikus sorsú lángész volt. Ha nagyságát és tragikus életét meg akarjuk érteni, fel kell tárnunk környezetét s azt a világot, amelyben élt. Bolyai Jánost nem lehet kellően megérteni apja, Bolyai Farkas ismerete nélkül.

Bolyai Farkas szintén kiváló matematikus volt, ha alkotása nem is mérhető össze fia lángeszű művével.

A Bolyai család azok közé az erdélyi középnemesek közé tartozott, kiknek fiai már nem folytathatták az ősi birtokos életmódot; értelmiségi pályán kellett boldogulniuk.

Bolyai Farkas tizenkét éves korában a nála négy évvel fiatalabb Kemény Simon báró házitanítója lett. Farkasnak haszna is volt ebből. Elkísérte Kemény Simont külföldre is.

1876 őszén Keménnyel Göttingenbe mentek. Itt megismerkedett az ugyancsak Göttingenben tanuló Gauss-szal, akit később a matematikusok fejedelmének neveztek az egész világon. Ezzel a lángeszű fiatal emberrel kötött bensőséges barátsága adta meg Farkasnak azt a lökést, amelyhez végső fokon Bolyai János világraszóló felfedezése is kapcsolódik. Farkas nagy tehetsége a Gauss-szal való hosszas együttlét alatt erősödött meg.

Bolyai Farkasnak göttingeni tartózkodásán kívül *soha életében nem volt több alkalma jelentős matematikussal érintkezni.*

Göttingenből való hazatérése után Bolyai Farkas nemsokára megházasodott. 1801-ben feleségül vette Benkő Zsuzsannát s 1802. december 15-én megszületett János, a lángeszű fiú.

1804-ben az erdélyi református egyházkerület főkonzisztóriuma meghívta Bolyai Farkast a marosvásárhelyi kollégium matematika-, fizika- és kémiatanárának. A kollégium legfelső két évfolyamán tanított.

Bolyai Farkasnak kiváló elméleti képességei voltak, de magas nézőpontjából nem találhatta meg az akkori képzetlen ifjúsággal a kellő kapcsolatot, ezért tanítása a gyakorlatban szinte eredménytelen maradt.

Rendszeres alkotó munka helyett igyekezett ügyesen forogni a szűk erdélyi társaságban, amelynek kegyeiből kellett megélnie. Igen jó társalgónak és nagyon kedves embernek tartották s a legtragikusabb, hogy ez több becsületet szerzett neki, mint minden egyéb, részben igen jelentős tudományos munkája.

Bolyai Farkas legnagyobb matematikai műve az 1832/33-ban megjelent latin nyelvű „Tentamen" néven ismert kétkötetes könyve.

Ebben már megvan nála a számfogalom modern elméletének néhány gondolata; sőt a lényegesen később keletkezett, úgynevezett ponthalmazelmélet alapkérdéseit

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

is megfogalmazta, ha nem is megfelelő szigorúsággal. A geometriát illetően felismerte az axiomatikus módszer több olyan tulajdonságának a fontosságát, amelyek csupán a 20. század elején, Hilbert alapvető vizsgálataiban érték el a teljes matematikai tisztaságot. A végtelen sorok elméletéről szóló részben pedig felfedezte az úgynevezett logaritmikus konvergenciakritériumokat, ami az ő korában nagy jelentőségű eredmény volt. Ezek együttvéve kétségtelenül kiváló, sokszor zseniális meglátások. Ugyanakkor azonban megáll a problémák végleges megoldásának a kapujában, sőt néha téved is bizonyításaiban. Kétségtelen azonban, hogy a Tentamen abban a korban még nemzetközi viszonylatban is értékes tudományos munka. A hazai viszonyokat tekintve pedig teljesen egyedülálló, kiemelkedő alkotás.

Valósággal megdöbbentő, hogy a Tentamen mennyire ismeretlen maradt. A Tudós Társaság pl. 1844-ben a parallelák problémáját javasolta jutalomkérdésnek, holott a Tentamen és benne az Appendix egy példánya már 12 éve ott feküdt a Társaság könyvtárában! Ebben azonban nem hibáztathatjuk a Tudós Társaság tagjait; hiszen akkor értelmiségünk még azzal küzködött, hogy irodalmi nyelvét teremtse meg.

Mint már említettük, Bolyai János 1802. december 15-én született. Apja — Rousseau Emiljének hatása alatt — nagy fontosságot tulajdonított a testi nevelésnek és helytelenítette a szellemi képességek túl korai fejlesztését. De a fiára büszke apa, úgy látszik, nevelési elvei ellenére is sok mindenről beszélhetett a mindig körülötte forgolódó kis gyermeknek, mert János már négyéves korában ismerte a kör, a sugár és a „sinus" fogalmát. Még nincs egészen 5 éves, amikor már sok csillag nevét ismeri, köztük a Jupiterét is és egyszer falun megpillantva azt az égen, csodálkozva mondta: „Hogyan van az, hogy azt a városbélit innen is látni; nagyon messze lehet." Már a kis János ilyen kivételes logikai készségű volt.

Kamaszodó fiát így jellemzi az apa: „Másokat nem rágalmazó, ha jót nem tud valakiről mondani, semmit sem mond. Nem hazug. Az igazságot nem engedi, amely nem prudentia" (okosság).

Ez a megjegyzése Farkasnak, hogy az igazság mindenkori kitartó hangoztatása *nem okos dolog*, adja meg János egyéniségének kulcsát, apjával és még inkább a környezetével való későbbi összeütközéseinek a forrását.

Jánosnak az igazság hatalmába vetett megdönthetetlen hite bizonyára apjától kapott neveléséből is fakadt, Bolyai Farkas lelke mélyén a francia enciklopédisták haladó eszméit melengette, ezek pedig racionalisták voltak, vagyis azt tanították, hogy az ész igazságai képesek a világ megváltoztatására.

Farkas nem számított arra, hogy János ezeket az eszméket *élő valóságként magáévá teszi* és meggyőződése lesz — elég az igazságot felismerni és kemény akarattal küzdeni érte, hogy minden hibát véglegesen ki lehessen küszöbölni.

Jánost 9 éves korában fogta apja rendszeres tanulásra. Matematikára alig kellett tanítani, mert egy pillanat alatt felfogta az újonnan hallott tételt és azonnal tudta a bizonyítást is.

1817-ben osztálya legjobbjaként tette le a „rigorosumot", ez nagyjából a mai gimnáziumi érettségineknek felelt meg.

Felmerült tehát a kérdés, hol tanuljon János tovább. Bolyai Farkas azt szerette volna, ha Jánost Göttingenbe küldhetné Gausshoz. Meg is írta ezt Gaussnak, de olyan szerencsétlenül naiv kedélyeskedő hangon, amit Gauss akkor sem vett volna jó néven, ha barátságuk a régi tűzzel égett volna. Gauss már akkor 8 év óta nem írt Bolyai Farkasnak.

Hosszas töprengés után apja úgy határozott, hogy fiát a bécsi hadmérnöki akadémiára adja. Bécsbe menni, a felvételi vizsgát letenni és ott tovább tanulni azonban nem volt olyan egyszerű. A négy évi taníttatáshoz mindenféle mellékessel együtt

összesen mintegy 8000 forintra lett volna szükség. Bolyai Farkasnak évi készpénzfizetése 400 forint volt.

Egy év letelte után Farkasnak sikerült, hogy arisztokrata mecénásai a pénzbeli támogatást megadják, mert a Habsburgokhoz hű arisztokrácia szinte kötelességének tartotta, hogy a magyar középnemesi ifajakat hozzásegítse az osztrák katonatiszti pályához.

Nincs adatunk arra, hogy a 15 éves János akkor ellenkezett volna az apai döntéssel, de egy idősebb korából való feljegyzéséből idézve: „Bár ... ne léptem volna Marsnak természetem' s hajlamommal, vonzalmammal ellenkező mezeje vagy pályájára..."

1818 augusztusában János sikerrel letette német nyelven a felvételi vizsgát és ezzel *megkezdődött katonai pályafutása.*

A császári és királyi mérnökakadémián Jánosnak 3 évig kellett matematikát tanulnia, ezenkívül német, latin, francia, cseh nyelvet és műszaki rajzi tárgyakat, vívást, lovaglást. A nyári hónapokban csapatgyakorlatokat és fegyverfogást végeztek. A negyedik évben nem volt matematika, helyébe lépett a taktika, erődítéstan, támadás, védelem és víz-, út- és várépítészet.

Bolyai János az akadémián jó tanulónak számított; osztályában végig másodikként szerepelt, mert rajz és szépírásban nem kapott kitűnő osztályzatot.

János már gyerekkorában feltűnt zenei tehetségével. Ez irányú hajlandóságát az akadémián továbbfejlesztette. Vasárnaponként egy barátjával eljártak Meiselerhez, az akkor sokra tartott bécsi hegedűshöz, akinél vonósnégyesekben játszott.

Ami a legfontosabb János életében, hadmérnöki akadémiai évei alatt is rendszeresen foglalkozott matematikai kutatással. János 1820 tavaszán matematikai próbálkozásait megírta apjának, aki válaszlevelében óva inti a párhuzamosok ősrégi problémáival való foglalkozástól, vagy máskor: „kinek ez sikerülni fog, annak, halandók, örök emléket állítsatok". Az ilyen kijelentések pedig a serdülő ifjút még inkább vonzották a kérdés vizsgálata felé.

Jánost, mint kiválóan végzett növendéket, 1822-ben kinevezték mérnökkari hadapródnak és a hét legjobb között még egy évig az akadémián tartották különleges hadmérnöki tanulmányokra. Ennek befejeztével 1823 szeptemberében alhadnagynak nevezték ki, és beosztották a temesvári erődítési helyi igazgatósághoz.

Alig érkezett meg Temesvárra, már megvilágosodott benne a döntő gondolat és 1823. november 3-án, nem egészen huszonegy éves korában a következő, a matematika történetében világjelentőségű sorokat írta Farkasnak: „A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem ...a parallelákról egy munkát adok ki, ...most többet nem szollhatok, tsak annyit: hogy *semmiből egy ujj más világot teremtettem*; mind az, valamit eddig küldöttem, tsak kártyaház a toronyhoz képest."

Az antik görögök geometriájának a természet vizsgálatára való alkalmazhatósága elsősorban annak köszönhető, hogy állításait *néhány alapigazságból* vezeti le. Ezek az ún. *axiómák* a tapasztalat útján megismerhetők, alkalmazhatók. De a geometria axiómái között, melyeket először Euklidesz alexandriai matematikus állított össze i. e. 300 körül, az ún. *„V. posztulátum"* (vagy Euklidesz könyveinek más kiadása szerint a *XI. axióma*) olyan állítást fejez ki, amelynek igazságáról mindennapos tapasztalataink nem győzhetnek meg. Ez a párhuzamossági axióma a következőket állítja: ha egy síkban húzunk egy egyenest és rajta kívül tekintünk egy pontot, akkor ezen a ponton át csak *egy* egyenest húzhatunk, amely párhuzamos az adott egyenessel. Erre azt lehetne mondani, először is nyilvánvaló, hogy a párhuzamossági axióma állítása igaz; másodszor, ha hamis is, mit változtat ez a világ során?

Csakhogy a dolog nem ilyen egyszerű. Ami az első megállapítást illeti, ha az egyenest a megszokott módon rajzoljuk, akkor a párhuzamossági axióma nyilvánvalóan igazat állít. De ha a papírlap síkján egy ponton át akárhány görbét húzunk, amelyek egy adott egyenest sohasem metszenek, akkor ezek mind „párhuzamosak" vele, hiszen sohasem metszik.

Ilyen módon — a görbéket egyeneseknek tekintve — egy ponton át nemcsak egy, hanem akárhány „párhuzamost" lehet szerkeszteni. Erre természetesen azt lehetne mondani, hogy ezek a „párhuzamosok" nem egyenesek, hanem görbék. Ez igaz. De honnan tudjuk, hogy az, amit a valóságban egyenesnek nevezünk, nem olyan lassan hajló görbe-e, amelynek parányi elgörbülését műszereinkkel lehetetlen észrevenni? Ezt a kérdést mindenesetre eldöntené, ha sikerülne bebizonyítani, hogy a párhuzamossági axióma szükségszerűen igaz. De ha ennek a bebizonyítása nem sikerül, akkor számolni kellene azzal a lehetőséggel, hogy a megszokott euklideszi geometrián kívül egy másik, *nemeuklideszi geometria* is *leírhatja a teret.* Ebben a nemeuklideszi geometriában a párhuzamossági axióma nem lenne igaz, s ennek következtében a térnek egész szokatlan, igen meglepő tulajdonságai volnának.

Ami tehát a második kérdést illeti, ha a párhuzamossági axióma a valóságban nem volna igaz, annak igen különös következményei lennének. Ha valamilyen nem euklideszi geometria ésszerűsége bebizonyosodnék, meg kellene változtatnunk a világ térbeli szerkezetére vonatkozó elképzeléseinket. Érthető tehát, hogy kétezer évig a világ minden számottevő matematikusa a párhuzamossági axiómának bebizonyításán fáradozott.

Bolyai János az „Appendix"-ben kimutatta, hogy minden bebizonyítási kísérlet azért volt sikertelen, mert a párhuzamossági axióma állítása *nem következik a geometria többi tételéből.* A tudósok tévedtek, amikor azt hitték, hogy a világegyetem térbeli viszonyai csak az euklideszi geometria segítségével írhatók le. Bolyai János bebizonyította, hogy az euklideszi geometria mellett ugyanolyan jogosult *egy másik, nemeuklideszi geometria is.*

Rendkívüli jelentősége volt ennek a felfedezésnek. Azt jelentette, hogy a világról alkotott képet meg kell változtatni, tovább kell fejleszteni. Bolyai János felfedezése kimutatta, hogy az euklideszi geometria egyedülvalóságába vetett hit csupán évezredek balhiedelme. Kant, az idealista filozófus ki is mondta: a tér szemlélete velünk született — vagyis isteni eredetű. De Bolyai bebizonyította, hogy többféle tér is lehetséges, Kant állítása tehát már csak azért sem lehet igaz, mert nincs többféle „velünk született" szemléleti lehetőségünk.

„A természetet nem szabad ábrándok szülte agyrémek szerint formálni — írta Bolyai —, hanem akarnunk kell ésszerűen és természetes módon az igazságot, vagy magát a természetet látni."

Amikor már ez a gondolat világossá vált, a göttingeni Riemann 1854-ben felfedezte a nemeuklideszi geometria másik válfaját, amelyben egy adott egyeneshez egyáltalában nem lehet tőle különböző, vele párhuzamos egyenest húzni. A riemanni gondolatok későbbi továbbfejlesztése adta végül Einstein kezébe az általános relativitási elmélet felépítéséhez szükséges matematikai eszközt. A következő száz év alatt a matematikusok megteremtették a tér általános elméletét s ez tette lehetővé, hogy kifejlődhessen az a matematikai apparátus, amelyre szüksége van a modern fizikának, többek közt a modern kvantummechanikának, az atomelmélet e fontos részének is. Bolyai lángeszű felfedezésével tehát végső fokon összefüggenek a matematika és fizika modern elméletének legfényesebb fejezetei.

János mint alhadnagy temesvári hadmérnöki szolgálata alatt is matematikus volt és az is maradt. 1825 elején hazalátogatva Marosvásárhelyre, meg akarta mutatni

már kidolgozott, csodálatos elméletét apjának. Fájdalommal látta, hogy apja sem volt képes behatolni az elmélet lényegébe. Visszatért Temesvárra, német nyelven leírta művét, hogy átadhassa Wolter von Eckwehr századosnak, volt akadémiai matematikatanárának. A kéziratot valószínűleg 1826 elején át is adta Wolter századosnak, aki közvetlen parancsnoka lett Aradra helyezésekor. Ez a kézirat elveszett. Aradi tartózkodása alatt maláriát kapott. Sokat tartózkodott kint a terepen — tudjuk, hogy Nagyváradon és Szegeden volt —, feltehető, hogy ízületi gyulladást is szerzett. Betegeskedése is hozzájárult, hogy Lembergbe helyezték. Út közben még romlott egészsége, mert egy későbbi levele szerint „1831-ben Lembergbe menve Besztercén a cholerát legelőbb kiállottam... gyenge lábon éreztem magamat."

Lembergben Zimmer András volt János parancsnoka: jóindulatú, becsületes törzstiszt, aki igyekezett segíteni. Katonai fürdőházhoz kellett toldalékot terveznie vagy katonakórház új szárnyának építéséről jelentést tennie: beteget jelentett.

Folytonosan visszatérő lázas állapotához járult, hogy napról napra jobban megutálta a katonatiszti pályát.

Vessünk egy pillantást az 1831. évről és az 1832. évről szóló minősítési lapjaira is. Mindkettőben megtaláljuk, hogy takarékos, nem iszik, nem kártyázik, nem csinál adósságot. Ugyanakkor azonban a következőket is olvashatjuk:

1831-ben	1832-ben
Kedélyalkata: csendes és jóindulatú	nagyon ingerlékeny és indulatos
Magatartása:	
polgársággal jó	ismeretlen
a csapattestnél: jó és tisztelettel viseltetik elöljárói iránt	kerül minden érintkezést a tisztekkel
alantasaival: jó	szófukar
Játékos-e: nem	szenvedélyes sakkjátékos és sok időt fordít erre a hajlamára.

Nem feltűnő, hogy egy év alatt a csendes és jóindulatú ember nagyon ingerlékennyé és indulatossá vált? Világos, hogy valami súlyos csapás érte ebben az időben. Tudnunk kell, hogy Bolyai Farkas Tentamen című latin nyelvű könyvének függelékeként közölni akarta fia felfedezését. Bolyai János műve, az Appendix (Függelék) néven ismert korszakalkotó munka, a Tentamen első kötetében 1832-ben megjelent. Az Appendix különlenyomata előbb lett kész, így már 1831. június 20-án elküldhette Gaussnak egy levél kíséretében, melynek végén ezt kéri: „fiam többre becsüli a te ítéletedet, mint egész Európáét — és csakis erre vár. Szívből kérlek, értesíts nemsokára ítéletedről...".

Gauss *1832 márciusában* hosszú levélben válaszol, melyben elismerte ugyan János felfedezésének nagyszerűségét, de óvatosan azt is megjegyezte, hogy ő maga is már sok mindenre rájött az új elméletből, de nem szándékozik azt a nyilvánosság elé hozni, mert „a legtöbb embernek nincs is meg a helyes érzéke aziránt, amin ez a dolog múlik." Zeyk József Göttingenben tanuló ifjú szülőinek írt levelében elbeszéli, hogy mikor Gaussnak átadta János munkáját s Gauss elolvasta azt, így szólt: „Igen kitűnő fej, valóban igen kitűnő..." Még furcsább, hogy 1832. február 14-én Gerling marburgi matematikusnak a következőket írta: „... e napokban Magyarországból egy, a nemeuklideszi geometriát tárgyaló kis művet kaptam. Ebben valamennyi eszmémet és eredményemet nagy eleganciával újra feltalálom... Ezt a fiatal geométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom." Miért Gerlingnek írt Gauss „elsőrangú lángészről" és miért nem Bolyai Farkasnak vagy miért nem tette

közhírré Bolyai János felfedezését a Göttingeni Tudományos Értesítőben? Ezzel meg lett volna alapítva Bolyai János világhíre. Ezt remélte Bolyai János, hogy műve megismertetésével szerez magának olyan tekintélyt, amelynek alapján valahol matematikatanár lehet. Mélyen lesújtotta, hogy Gauss nem akarta tudományos felfedezését nyilvánosan elismerni. Teljesen érthető, hogy a beteges Bolyait matematikai gondolatai teljesen lefoglalták s ebben az időben gyenge szolgálati teljesítményt nyújtott.

Zimmer alezredes 1832. január 29-én Bolyai főhadnagyot mégis előléptetésre terjeszti elő. Végül Zimmer alezredes Habsburg János főhercegnek küldött előterjesztésében (ugyanannak, akinek még az akadémián feltűnt Bolyai rendkívüli képessége) egy igen okos javaslata is volt, amelyből, ha elfogadták volna, a tudomány számára esetleg beláthatatlan értékek származtak volna. Ez az emberséges érzületű tiszt azt javasolta, hogy alkalmazzák Bolyai Jánost Bécsben, felsőbb matematikai feladatok kidolgozására, mert ez a megbízatás Bolyai nyomott szellemeit is felemelné s így teste is erőre kapna.

Bolyai János főhadnagyot 1832. március 14-én előléptették ugyan másodosztályú kapitánnyá, de neki minden vágya az volt, hogy életében először rendszeresen foglalkozhasson elméletével. Habsburg János főherceghez folyamodott, hogy a matematika körébe tartozó fontos, de még ki nem dolgozott vizsgálatait befejezendő Nagyszebenbe kéri helyezését és három évi szolgálatmentességet kér. Mellékelte az Appendix nagy részének német fordítását. Közben Olmützbe helyezték; útközben szekere felborult, János fején megsérült, agyrázkódása is volt. Csak hetek múlva jelentkezett olmützi állomáshelyén. Kérését természetesen elutasították, hiszen azt csupán matematika tartalmú érvekkel támogathatta.

1833. május 28-án Bolyai János másodosztályú mérnökkari százados félrokkantként nyugállományba helyezték évi 280 forint nyugdíjjal.

Ezzel Bolyai János *katonai pályafutása végetért.*

János nyugdíjaztatása után apjához tért vissza Marosvásárhelyre. Nem egészen egy évig lakhatott apjánál; ezalatt — úgy látszik — folyton veszekedtek egymással. Az itt-ott elejtett megjegyzések valahogy arra mutatnak, hogy az öregedő Farkasnak már csak erkölcsi megállapításai emlékeztettek a felvilágosodás forradalmár íróinak egykori lelkes olvasójára. János pedig, amit igaznak vallott, azt meg is akarta valósítani. Sohasem mondott valamit csak azért, hogy egy szép frázissal kápráztassa el az embereket; azt mondta, amit valóban szükségesnek gondolt. Matematikáról is vitatkoztak. Abban a néhány esetben ugyanis, amikor konkrétan tudjuk a vitás matematikai kérdés mibenlétét, Jánosnak mindig igaza volt Farkassal szemben. Civódásaikat talán az is elősegítette, hogy Farkas kora felfogása szerint az apa-fiú viszonyt egy kissé hűbérúr-hűbéres viszonynak fogta fel s fia matematikai ellenvetéseit is a szülői tekintély iránti tiszteletlenségnek tartotta.

Bolyai János tehát 1834-ben elvonult Domáldra, apjának édesanyjától örökölt kis birtokára. Érthető, hogy a domáldi elszigeteltséget egy társsal szerette volna elviselhetőbbé tenni. 1834 augusztusától együtt élt Orbán Rozáliával, egy tanult, s az egyik leírás szerint csinos fiatal leánnyal. János mindenáron feleségül akarta venni, ami azonban nem sikerült, mert a katonatiszteknek házasságkötés esetére kauciót, biztosítékot kellett letétbe helyezniök. Farkas semmi áron nem egyezett bele, hogy kaució fejében lekösse a domáldi birtokot. Jánosnak és Rozáliának két gyermekük született. A 48-as szabadságharc alatt János törvényesítette viszonyukat, mert akkor kaucióra nem volt szükség. A szabadságharc leverése után a császári katonai hatalom nem ismerte el a házasságot. Ekkor János és Rozália különváltak, de János odaadta házát és gondoskodott a gyermekek neveltetéséről.

A marosvásárhelyi pletykafészek számára természetesen csemege volt János „botrányos" viszonya. Ekkor terjedtek el a hírek János párbajhősködéseiről. Maga Bolyai János önéletírásában ír párbajairól és a párbajról általában: „Én magam csakugyan (egy esetet még az akadémiában corps-kadet koromban kivéve...) senkit ki nem hívtam... velem vívott társaim azonban mind az actus előtt, mind azután a legjobb indulatot mutatták mindig hozzám."

Egy másik kéziratában így ír „... a párviadalok egy esetben sem célszerűek, és hogy valóságos maradványai a vadabb s műveletlenebb időknek és hogy valóságos balvélemény s babona beléjük valami nemes tettet helyezni."

János a domáldi remeteségben valósággal hősies küzdelmet folytatott azért, hogy ne süllyedjen le a falusi nemesember nívójára. Egyetlen könyv vagy folyóirat nélkül, csupán az akadémián tanult, viszonylag szerény tárgyi ismeretére támaszkodva, saját elméje erejével kellett pótolnia a szakmai ismeretet. Ezért domáldi munkái töredékesek, bevégezetlenek. Jellemző teljes elszigeteltségére, hogy Lobacsevszkij munkájáról is véletlenül hallott 1844-ben. Ekkor Farkas olvasta a Nemzeti Társalkodó 1844. aug. 30-i számában Mentovich Ferenc cikkét Gaussnál tett látogatásáról. Gauss egy új külsejű könyvet mutatott, ami azért érdekes, mert nézeteiben egyezik a Bolyaiak nézeteivel.

Bolyai János csak 1848. október 17-én jutott Lobacsevszkij könyvéhez és — az ő elszigetelt helyzetét tekintve, érthetően — meg volt döbbenve az Appendix tartalmával való megegyezéstől.

Saját magának — és nem a nyilvánosság számára — készített egy feljegyzést, amely Lobacsevszkij munkájára vonatkozó észrevételeit tartalmazza. Az ő helyzetében ez igen logikus cselekedet volt, hiszen ha csakugyan elorozták volna gondolatait, azt csak úgy lehetne kimutatni, hogy feljegyez minden apró hibát és ezekből igyekszik megállapítani, hogy a szerző az Appendixet nem értette meg, hanem annak eredményeit hibás úton nyerte, következésképp csalárdul eltulajdonította. Ilyen hibát azonban János nem talált. Lobacsevszkij munkájáról a legnagyobb elismerés hangján nyilatkozott. János tehát nem volt „betegesen gyanakvó" csak nagyon szerencsétlen sorsú, mert sohasem jutott hozzá, hogy az élő tudománnyal kapcsolatot találhasson.

Bolyai és Lobacsevszkij egymástól függetlenül, körülbelül ugyanabban az időben alkották meg zseniális elméletüket, ezért mindketten teljesen egyenrangú felfedezői a nemeuklideszi geometriának. Igaza volt Bolyai Farkasnak: „némely dolgoknak úgyszólván megvan a maguk epochája." A tudománytörténeti kritika is ezt az álláspontot fogadta el, ezért is nevezik a nemeuklideszi geometria általuk felfedezett fajtáját Bolyai—Lobacsevszkij-féle vagy Lobacsevszkij—Bolyai-féle geometriának.

Miután zseniális geometriája nem kapta meg a kellő elismerést, sőt utána a Responsiót sem értették meg, János falusi magányában sokat foglalkozott társadalmi kérdésekkel is.

Benkő Samu erdélyi történész áldozatos munkája bizonyítja, — aki rendezte Bolyai János iratait és hozzáférhetővé tette a többezer papírszeletkére, évek során felírt gondolatait Jánosnak —, hogy János élete utolsó éveiben is tiszta fejjel gondolkozott tudományos és erkölcsi problémákon.

Ha nem is találta meg — mint ahogy nem is találhatta meg — a társadalmi fejlődést előmozdító rendszert, kereste a megoldást, tehát a haladást kívánta szolgálni.

Bolyai János a felvilágosodás szellemében kívánta átalakítani a társadalmat. „A főnek kell művelnie a szívet" — ez volt kedvenc jelmondata, vagyis társadalmi kérdésekben is az ész jogait helyezte előtérbe.

Az volt a véleménye, hogy a „társadalom nyomorúsággal, szerencsétlenséggel teljes, de nem szükségképpeni, hogy ilyen legyen. A teljes üdv megtalálható már itt a földön."

Máskor János azt írja a feudális nemesi világról: „...a mások verejtéke után és zsírján... here módra ingyen élni... nagyobb szégyen, gyalázat, vétek: mint koldulni..."

Bolyai Jánost kortársai ateistának tartották, holott nem volt az. Egy észistent képzelt el magának, aki a világnak, mintegy ősoka, de a természetbe nem nyúlt bele és nem tesz csodákat. A személytelen istenben való racionalista hitet *deizmusnak nevezi* a filozófiai szaknyelv. Az akkori deistákat ma is igen haladó gondolkodású emberekként értékeljük, hiszen eszméik a maguk korában nem a jezsuita reakciót, hanem épp ellenkezőleg, a reakcióval szembenálló, haladó világnézetet szolgálták.

Az Erdélyben olyan nagy szerepet játszott nemzeti kérdésben *még ma is haladó álláspontot* foglalt el.

Egy helyen így ír: „Nekem minden ember ember ...s szeretettel viseltetem minden nemzeti különbség nélkül... inkább szeretvén egy jobb érzésű (becsületesb) németet vagy mást, mint egy alacson, gonosz magyart." Vagy máshol így ír: „...nem az érdekesb: hogy a kenyeret „kinyér" vagy „Brod"- vagy „panis"-nak nevezik, „hanem arról előre gondoskodni: hogy szükség esetére ne hiányozzék."

Bolyai János öntudatos magyar volt és az is maradt a bécsi katonai nevelés ellenére is.

Nemzetének sorsa soha hidegen nem hagyta.

Deák Farkas erdélyi történetíró naplója szerint a szabadságharc alatt Bolyai egy szabatos katonai tervvel állot elő „mely... egész Erdély megtisztítását magában foglalá."

Benkő Samu kitűnő könyvében bőségesen kifejti, miért nem hiszi, hogy ez a történet igaz. Ez lehetséges, mert valóban csak ezen az egy helyen szerepel. De tudva azt, hogy Haynau azt a parancsot adta Wohlgemuth altábornagynak, hogy „mindazokat az egyéneket, akik harcoltak és azelőtt a cs. kir. hadseregben szolgáltak, agyon kell lőni", nyilvánvaló, hogyha volt is Bolyainak valamiféle haditerve, *annak a nyomát is el kellett tüntetnie.*

A szabadságharc utáni elnyomatás idején, János valósággal begubózott. Erre az időre esik Orbán Rozáliától való elválása.

János és Farkas viszonya ettől kezdve megjavult. János végül is, minden veszekedésük ellenére nagyon nagyra becsülte apját. „Atyámnak köszönhetem igazi erkölcsi útmutatásai mellett — mit legnagyobbra becsülök — ellenállhatatlan vonzalmamat a szigorú, fényes igazságú tanokhoz; egyszóval úgy szellemileg, mint anyagilag annak köszönhetem egész lényegem alapját." Mikor Bolyai Farkas 1856 novemberében meghalt, János testi és lelki fájdalmaktól gyötört, maláriától megviselt, érzékeny idegzetű ember volt, de a matematikai kutatás örömét akkor sem hagyta abba.

Bolyai János még 1850 körül kezdett foglalkozni a Raumlehre (Tér tudománya) német nyelven tervezett műve kéziratával. Ezt a kéziratát sem fejezte be, de a megmaradt rész is számos érdekes gondolatot tartalmaz a geometria továbbfejlesztése tekintetében.

Ugyancsak igen érdekesek Jánosnak az Euler-féle poliéder tételre vonatkozó megjegyzései. Sajnos nem ismerjük János bizonyítását, de arra lehet következtetnünk, hogy János bizonyos fajtájú, „többszörösen összefüggő" poliéderekre is megtalálta az Euler-tétel megfelelő általánosítását. Akár igaz ez, akár nem, maga az a tény, hogy János felismerte a geometria egy új ágának, az azóta igen nagy jelen-

tőségre szert tett topológiának a jelentőségét, újabb világos bizonyítéka kivételes matematikai lángeszének, amely még idős korában is mély gondolatokra késztette.

1857-től kezdve folyton betegeskedett, 1860. január 27-én meghalt.

A marosvásárhelyi ref. egyház anyakönyvében a megjegyzés rovatban ez áll: „Híres, nagy elméjű mathematikus volt, az elsők között is első. Kár, hogy nagy talentuma használatlanul ásatott el."

Tragédiának nevezhetjük életét, mert nagyszerű felfedezése meg nem értetten kallódott és csak halála után kavarta fel a tudományt.

Sikertelenségének és végső összeomlásának tulajdonképpeni oka, hogy az egzakt matematikai kutatásnak a XIX. század első felében Magyarországon, sőt az egész Habsburg birodalomban nem volt megfelelő társadalmi talaja.

Kiváló tudósok *önmagukban* nem sokat tehetnek, ha alkotásaik nem hathatnak szélesebb rétegekre, ha alkotásaik nem illeszthetők be a nemzeti műveltségbe.

Ezt igazolja Eötvös József levele fiához, Eötvös Lorándhoz, amelyben panaszolja, hogy a római tudósok nézete szerint Bolyai János felfedezése a legnagyobb, mi a matematika körében a század alatt történt. Majd leírja, hogy a bordeaux-i és párisi akadémiák többszöri érdeklődésére sem válaszolt a marosvásárhelyi kollégium, hiszen „... azon ember soha sem volt akadémikus, Erdélyben félbolondnak tartatott ..." Eötvös Loránd pedig emlékbeszédében azt mondta, hogy „csak az az igazi tudomány, amely világra szól; ... ez valósult meg Bolyai (János) alkotásával egyszer; ilyen teljes mértékben talán egyetlenegyszer."

Bolyai János mai közönsége az egész haladó emberiség. De emberi alakját is megújhodva és megtisztulva kell látnunk. Óriás volt ő a tudósok között, ugyanakkor törhetetlen szándékú az igazabb, jobb világot keresők között. Világra szóló felfedező, aki minden erejével kutatta az igazságot, s a magyar nép büszke szeretettel öleli magához az igazságért oly sokat szenvedett lánglelkű fiát.

МИР ЯНОША БОЙАИ

АЛЕКСИЧ ДЬЁРДЬ

THE UNIVERSE OF JÁNOS BOLYAI

G. ALEXITS

EMLÉKÜLÉS ALEXITS GYÖRGY SZÜLETÉSÉNEK 80. ÉVFORDULÓJÁN

1. ERŐS APPROXIMÁCIÓ

LEINDLER LÁSZLÓ*

1. Az erős approximáció azon kérdéskörök egyike, amelyeket Alexits György problémafelvetései indítottak el, s amelyek kidolgozásában eredményesen részt is vett. Itt most csak a klasszikus Fourier-sorokkal kapcsolatos eredményeket érintjük, de hasonló kérdéseket vizsgáltak általános ortogonális sorok esetén is. Egy rövid összefoglaló az ortogonális sorokkal kapcsolatos eredményekről pl. a [23]-as cikkben is található.

Legyen f egy 2π szerint periodikus Lebesgue-integrálható függvény és Fourier-kifejtése

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

E sor n-edik részletösszegét, ill. (C, α)-közepét a szokott módon jelöljék:

$$s_n = s_n(x) = s_n(f; x) \quad \text{és} \quad \sigma_n^\alpha = \sigma_n^\alpha(x) = \sigma_n^\alpha(f, x).$$

BERNSTEIN klasszikus eredménye szerint, ha $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, akkor

$$\|\sigma_n^1 - f\| = 0(n^{-\alpha}), \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

és

$$\|\sigma_n^1 - f\| = 0(n^{-1} \log n), \quad \text{ha} \quad \alpha = 1; \tag{3}$$

a $\|\cdot\|$ normajel a folytonos függvények terében szokásos maximum-normát jelenti.

Mivel az $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha < 1)$ feltételből következik, hogy a konjugált függvény is ugyanebbe az osztályba tartozik, azaz $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, (2)-ből adódik, hogy

$$\|\tilde{\sigma}_n^1 - \tilde{f}\| = 0(n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha < 1). \tag{4}$$

Azonban ha $f \in \mathrm{Lip}\,1$, akkor általában $\tilde{f} \notin \mathrm{Lip}\,1$, mégis ALEXITS [1] (lásd még ZYGMUND [42] és ZAMANSKY [40]) egy nagyon szép eredménye szerint a

$$\|\tilde{\sigma}_n^1 - \tilde{f}\| = 0(n^{-1}) \tag{5}$$

becslés teljesül, sőt ez a feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy f a Lip 1 osztályba tartozzon.

* Az Alexits György akadémikus születésének 80. évfordulója alkalmából rendezett Tudományos Emlékülésen elhangzott előadás némileg bővített változata.

2. Az első erős approximációval kapcsolatos eredmények ezekkel a becslésekkel kapcsolatosak. ALEXITS—KRÁLIK [4] bebizonyították, hogy a (2), (3) és (4) alatt adott approximációs rend erős approximáció esetén is elérhető, azaz akkor, ha a

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(s_\nu(x)-f(x))$$

különbség helyett az

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x)-f(x)|$$

nem-negatív tagú összegeket becsüljük. (Lásd még [2] és [5].)

Az (5) alatti eredménnyel kapcsolatban Alexits professzor azt vetette fel, hogy igaz marad-e a $0(n^{-1})$ becslés, ha itt is az erős approximációt vizsgáljuk. A negatív választ erre a kérdésre ALEXITS—LEINDLER [6] munkájában találjuk, s ez azt mutatja, hogy a Lip 1 osztály az erős approximáció szempontjából másként viselkedik mint a közönséges approximáció esetén. Ennek mélyebb okát tárja fel következő tételünk ([11]):

Ha f r-edik deriváltja létezik és $f^{(r)}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$, akkor bármely pozitív p-re

$$\left\|\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}|s_k-f|^p\right\}^{1/p}\right\|=0(n^{-r-\alpha}),$$

és ha $\beta>(r+\alpha)p$, akkor

$$(6)\qquad h_n=h_n(f,\beta,p):=\left\|\left\{\frac{1}{(n+1)^\beta}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\beta-1}|s_k-f|^p\right\}^{1/p}\right\|=0(n^{-r-\alpha}).$$

Ugyanilyen becsléseket lehet adni a konjugált függvényre is a tétel feltételei mellett.

Összehasonlítva a kapott eredményeket a klasszikus Jackson-féle eredményekkel, úgy is megfogalmazhatjuk eredményünket, hogy a $\beta>(r+\alpha)p$ feltétel mellett az erős approximáció esetén is az elérhető legjobb becsléseket sikerült elérnünk.

Ha csak a $\beta=(r+\alpha)p$ feltétel teljesülését kívánjuk meg, akkor az elérhető legjobb erős approximációs rend $0\left((\log n)^{1/p}n^{-r-\alpha}\right)$; azaz ha $f^{(r)}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, akkor

$$(7)\qquad h_n(f,\beta,p)=0\left((\log n)^{1/p}n^{-r-\alpha}\right)\quad\text{és}\quad h_n(f,\beta,p)=0\left((\log n)^{1/p}n^{-r-\alpha}\right);$$

és e becslések általában nem javíthatók.

Ezen egyenlőtlenséggel kapcsolatban megemlítjük, hogy még az $f^{(r)}\in\mathrm{Lip}\,1$ és $\tilde{f}^{(r)}\in\mathrm{Lip}\,1$ feltételek együtt se biztosítanak jobb approximációs becslést, mint ami (7)-ben szerepel $\alpha=1$ esetén ([18]).

Ezen eredmények világossá teszik, hogy a Lip 1 osztálynak fentebb említett extrém viselkedése az erős approximációval kapcsolatban onnan ered, hogy a vizsgált esetben $\beta=p=1$ és $r=0$ volt, így a $\beta=(r+\alpha)p$ egyenlőség $\alpha=1$-re lép fel. Viszont, ha (6) alatti általánosabb erős approximációs közepeket vizsgálunk, akkor kiderül, hogy bármely Lip α osztály extrém viselkedésű lesz, ha a $\beta=(r+\alpha)p$ egyenlőség bekövetkezik. Tehát a $\beta>(r+\alpha)p$ feltétel a döntő ahhoz, hogy a legjobb approximáció rendjét elérjük.

Még számos, lényegileg a fenti eredményekhez annyiban hasonló eredmény született az erős approximáció terén, hogy ezek a tételek is olyan állításokat mon-

danak ki, hogy bizonyos erős típusú középpel egy egész függvényosztályra az elérhető legjobb approximációs rend milyen nagyságrendű lehet, s legtöbb esetben a kapott becslések élesíthetetlensége is bizonyított.

A már említett dolgozatunkban ([11]) igen általános Toeplitz-mátrixokra vonatkozó eredmények is találhatók a $W^r H^\alpha$ ($f \in W^r H^\alpha$, ha $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$) osztályokkal kapcsolatban. Ezen eredményünk felhasználásával általános erős Riesz-közepekre is kaptunk tételeket ([12]). A következő

$$\left\{\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=n-\lambda_n}^{n}|s_\nu - f|^p\right\}^{1/p}$$

alakú, ún. erős általánosított de la Vallée Poussin-féle közepekre vonatkozó eredmények találhatók a [14] és a [20] számú cikkeimben. R. TABERSKI [34] az erős Abel-approximációt vizsgálta az L^p ($1 \leqq p \leqq \infty$) térben.

G. SUNOUCHI [32] pedig olyan tételeket bizonyított, amelyekben az s_k részletösszegek negatív rendű (C, α)-közepekkel vannak pótolva. Ilyen típusú, a Sunouchi-féle eredményeket élesítő tételek találhatók a [17]-es dolgozatunkban is.

TOTIK VILMOS munkatársam publikálásra elfogadott dolgozataiban [(36], [37]) számos eddig említett eredményt általánosít a $W^r H^\omega$ osztályra ($f \in W^r H^\omega$, ha $\omega(f^{(r)}; \delta) \leqq K\omega(\delta)$), s azt is megmutatja, hogy eredményei pontosak. Ilyen típusú eredményeket korábban W. ŁENSKI [29] lengyel matematikus is bizonyított.

3. A következő részben néhány ún. *inverz típusú* erős approximációval kapcsolatos eredményt említünk. Ha a (7) becslésekkel kapcsolatos eredményeinket pl. $r=0$ és $\alpha=\frac{1}{p}$ ($p \geqq 1$) esetén más alakban fogalmazzuk, akkor azt állíthatjuk, hogy az $f \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{p}$ feltétel általában nem biztosítja, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n(x) - f(x)|^p \tag{8}$$

mindenütt konvergens legyen.

FREUD G. [7] vetette fel azt a kérdést, hogy ha a (8) sor konvergenciáját $p>1$ esetén megköveteljük, pontosabban azt, hogy a (8) sor részletösszegei egyenletesen korlátosak legyenek, egyébként a függvényről csak az integrálhatóságot tételezzük fel, akkor mit állíthatunk az f függvényről. Ö bebizonyította idézett dolgozatában, hogy ekkor $f \in \mathrm{Lip}\,1/p$ és majdnem minden x pontban

$$\lim h^{-1/p}\big(f(x+h) - f(x)\big) = 0. \tag{9}$$

Felvetette azt a problémát is, hogy (9) teljesül-e minden pontban. E kérdésre a negatív választ [15]-ös dolgozatomban adtam meg.

Az analóg kérdést $p=1$ esetén NIKISINnel közös dolgozatunkban [28] tisztáztuk. Ezen eredményt általánosítva [18]-ben többek között megmutattam, hogy a

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} n^r |s_n - f|\right\| < \infty$$

feltétel majdnem minden x pontban biztosítja az

$$f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x) = 0_x(h)$$

becslést, míg az összes pontra csak az

$$|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)| \leqq Kh \log \frac{1}{h}$$

érhető el, s ezek az állítások nem javíthatók.

A fentiekkel kapcsolatban természetszerűleg vetődik fel a sejtés, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n - f|^p \quad \text{és} \quad 0 < p < 1 \tag{10}$$

feltételek implikálják, hogy $f \in \mathrm{Lip}\, 1$. E problémát többször felvetettem, pl. [19]-ben, s csak 1976-ban sikerült bebizonyítani a sejtés helyességét. Ekkor azonban ketten is, egymástól függetlenül, lényegileg azonos élesítettebb formában adták meg az igenlő válasz. K. I. Oszkolkov [31] szovjet matematikus és Szabados József [33] bebizonyították, hogy ha $\Omega(x)$ olyan folytonossági modulus függvény, hogy $\int_0^1 \frac{1}{\Omega(x)}\, dx < \infty$, akkor a

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \Omega(|s_n - f|) \right\| < \infty$$

feltétel biztosítja, hogy f a $\mathrm{Lip}\, 1$ osztályba tartozik. Világos, hogy $\Omega(x)=x^p$ $(0<p<1)$ választás esetén ez az eredmény választ ad a fenti kérdésre. Mindketten azt is megmutatták, hogy bizonyos pótfeltételek mellett (pótfeltételeik különböztek egymástól) az adott feltételek szükségesek is ahhoz, hogy f a $\mathrm{Lip}\, 1$ osztályba tartozzon. Totik V. [35] megmutatta, hogy minden további pótfeltétel nélkül is szükséges e feltételek együttes teljesülése.

Szabados idézett cikkében a (10) feltételből erősebb következtetéseket is levont, pl. hogy az f függvény bizonyos rendben differenciálható és annak folytonossági modulusára adott becsléseket. Szabados ezen eredményeit javítva [22]-ben megmutattam, hogy ha $0<p\leqq 1$ és $\frac{1}{p}=r+\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$, akkor (10)-ből következik, hogy $f^{(r)}$ folytonos, és folytonossági modulusára a következő pontos becslések adhatók:

$$\omega(f^{(r)};\delta) = \begin{cases} 0\left(\delta \log \frac{1}{\delta}\right), & \text{ha} \quad \alpha = 1, \\ 0(\delta), & \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{11}$$

Alexits György születésnapjának 80. évfordulójára írt [26] cikkemben a (10) feltételt úgy általánosítottam tetszés szerinti pozitív p-re, hogy abból is pontosan a (11) alatti becsléseket kapjuk, s a feltétel $0<p<1$ és $\frac{1}{p}=r+\alpha$ esetén redukálódik (10)-re. Ez a feltétel a következő:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} n^{(r+\alpha)p-1} |s_n - f|^p \right\| < \infty. \tag{12}$$

V. G. Krotov-val közös cikkünkben ([10]) monoton $\{\lambda_n\}$ sorozattal képezett

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |s_n - f|^p \right\| < \infty, \quad 0 < p < \infty \tag{13}$$

feltételből dedukáltunk strukturális állításokat. Például azt, hogy ha

$$\sum_{k=1}^{n} (k\lambda_k)^{-1/p} = 0\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

akkor (13)-ból következik $f \in H^{\omega}$. Könnyű látni, hogy ahhoz, hogy (13)-ból következhessen $f \in \mathrm{Lip}\, 1$, elegendő a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k\lambda_k)^{-1/p}$$

sor konvergenciáját megkívánni; s ha $\lambda_k \equiv 1$, akkor ez $0<p<1$ esetén teljesül. Így ebből az eredményből is adódik, hogy (10)-ből következik $f \in \mathrm{Lip}\, 1$.

A $\{\lambda_n\}$ sorozat monotonitását elvetve, de természetszerűleg más, kevésbé szigorú szabályosságot megkövetelve, [16], [26] dolgozataimban a (13) feltételből $\omega(f^{(r)}, \delta)$-ra sikerült tovább nem finomítható becsléseket adni, sőt azt is megmutatni, hogy a modulus becslésére adott $\varrho(\delta)$ függvénnyel majdnem minden x pontban a

$$\lim_{\delta \to 0} \varrho^{-1}(\delta)\left(f^{(r)}(x+\delta) - f^{(r)}(x)\right) = 0 \tag{14}$$

reláció is fennáll.

A [26] dolgozatban azt is sikerült megmutatni, hogy ha (13) helyett a kissé erősebb

$$\left\| \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n |s_n - f|^p \right\| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

feltételt kívánjuk meg, akkor (14) mindenütt teljesül.

Krotov [9] legújabb dolgozatában a még általánosabb

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\lambda_n |s_n - f|) \right\| < \infty$$

feltételből következtet, s ad pl. szükséges és elegendő feltételt arra, hogy $f^{(r)}$ folytonos vagy korlátos legyen, illetve, hogy a szokásos H^{ω} osztályba tartozzon. Ezen eredmények bizonyításánál nélkülözhetetlenek a klasszikus Hardy—Littlewood-egyenlőtlenség azon általánosításai, amelyeket Németh József [30] bizonyított be, általánosítva a [21]-ben bizonyított, ugyancsak gyakran alkalmazott egyenlőtlenségeimet.

A fenti eredmények, vagy azok analogonjai a konjugált függvényekre is ismertek.

Az ismert, hogy a (12) feltétel $\alpha = 1$ esetén általában nem biztosítja, hogy $f^{(r)}$ vagy $\tilde{f}^{(r)}$, r paritásától függően, a Lip 1 osztályba tartozik. Ha azonban ezt a feltételt a következő formában kissé élesítjük ([26]), azaz ha $0<\alpha \leqq 1$, $p>0$ és

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n^{(r+\alpha)p-1} |s_n - f|^p \right\}^{p^*} \right\| < \infty, \quad p^* = \min\left(p, \frac{1}{p}\right), \tag{15}$$

akkor $\alpha = 1$ esetén majdnem minden x pontban

$$|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| + |\tilde{f}^{(r)}(x+h) - \tilde{f}^{(r)}(x)| = O_x(h)$$

teljesül; sőt

$$f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\, 1, \quad \text{ha} \quad r = 2k+1; \quad \text{és} \quad \tilde{f}^{(r)} \in \mathrm{Lip}\, 1, \quad \text{ha} \quad r = 2k.$$

Ha $0<\alpha<1$, akkor (15)-ből a következő állítások adódnak:

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}(f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)) = 0, \quad \text{ha} \quad r = 2k, \tag{16}$$

és

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}(\tilde{f}^{(r)}(x+h)-\tilde{f}^{(r)}(x)) = 0, \quad \text{ha} \quad r = 2k+1, \tag{17}$$

majdnem minden x pontban. Az a kérdés, hogy (15) r paritásától függetlenül implikálja-e a (16) és (17) állításokat, azaz egyidejűleg mindkettőt, egyelőre nyitott probléma.

Az utóbbi időben lassan kikristályosodott, hogy az ún. inverz típusú eredmények bizonyításánál a következő két eredménynek van döntő szerepe, amelyek közül az elsőt [22]-ben, a másodikat [25]-ben bizonyítottuk:

1. *Bármilyen* $0<p\leqq 1$*-re teljesül az*

$$E_n(f)\left(\frac{E_{2n}(f)}{E_n(f)}\right)^{1/p^2} \leqq M^*\left\|\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}|s_k-f|^p\right\}^{1/p}\right\| \quad (M^*\geqq 1)$$

egyenlőtlenség, ahol $E_n(f)$ *a szokásos, C-térbeli legjobb approximációt jelöli.*

2. *Ha valamely pozitív p-re és pozitív tagú* $\{\gamma_n\}$ *számsorozatra* $\gamma_{2^n}\leqq C\gamma_{2^n+i}$ $(C\geqq 1)$ $(n=1, 2, \ldots;\ 1\leqq i\leqq 2^n)$ *és*

$$\left\|\left\{\frac{2}{n}\sum_{k=[n/2]+1}^{n}|s_k-f|^p\right\}^{1/p}\right\| \leqq M\gamma_n$$

teljesül, akkor

$$E_n(f) \leqq M^*MC^{1+1/p^2}\gamma_n.$$

Ezen utóbbi állításból könnyen adódik az is, hogy bármilyen a $(0<)\beta\leqq(r+\alpha)p$ egyenlőtlenségnek eleget tevő paraméterek esetén

$$E_n(f) = O(h_n(f, \beta, p)),$$

ami $0<p<1$ esetén egyáltalán nem magától értetődő állítás.

4. Tekintettel arra, hogy a fenti eredmények pontosak, ezért pl. páros r-re még a (15) feltétel $\alpha=1$ választás mellett sem biztosítja, hogy $f^{(r)}\in$ Lip 1. Ha azonban a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\|\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n^{(r+1)p-1}|s_n-f|^p\right\}^{1/p}\right\| < \infty \quad (p>0) \tag{18}$$

feltétel teljesülését kívánjuk meg, akkor r paritásától függetlenül $f^{(r)}$ a Lip 1 osztályba tartozik ([25]). Ekkor azonban a feltétel jellege eltér a szokásos erős approximációs feltételekétől; hiszen itt blokkonként is képezünk egy maximum-normát. Ha pontosak akarunk lenni, akkor itt pl. ún. „extra erős approximációról" beszélhetnénk, hiszen nemcsak a tagok egy pontban való előjeles kiegyenlítődését zárjuk ki az abszolút érték használatával, hanem az ún. „rossz helyek" közül is blokkonként a legrosszabbat vesszük, s az így keletkezett összeg végességét kívánjuk meg.

Annak mélyebb oka, hogy a (18) feltétel már biztosítja, hogy $f^{(r)}\in$ Lip 1, abban van, hogy a (18) alakú feltételek már ekvivalensek bizonyos, az n-edrendű trigonometrikus polinomokkal való C-térbeli legjobb approximációra, azaz $E_n(f)$-re vonat-

kozó feltételekkel. Ugyanis, [25]-ben, többek között bebizonyítottuk, hogy bármely pozitív p-re és p^*-ra, és olyan monoton $\{\mu_n\}$-re, amelyre $0<k\leqq\mu_{2^{n+1}}/\mu_{2^n}\leqq K<\infty$ teljesül, a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\|\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\mu_n|s_n-f|^p\right\}^{p^*}\right\|<\infty$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mu_n)^{p^*}n^{-1}E_n^{pp^*}<\infty$$

feltételek ekvivalensek.

5. Ebben a pontban az ún. Grünwald—Turán-féle problémakörrel kapcsolatos néhány eredményt említünk. Ismert, hogy ha $f(x)$ folytonos x_0-nál, akkor bármely pozitív p-re

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x_0)-f(x_0)|^p\to 0 \tag{19}$$

(l. ZYGMUND [41]). Ezzel kapcsolatban TURÁN [39] publikálta és oldotta meg negatívan GRÜNWALD GÉZA azon problémáját, hogy $\lambda_n\to\infty$-re nullához konvergál-e az

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x_0)-f(x_0)|^{\lambda_n}$$

közép. Ezzel a negatív eredménnyel kapcsolatban ALEXITS [3] azt a problémát vetette fel, hogy hogyan lehet elegendő feltételt adni arra, hogy a

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x)-f(x)|^{\lambda_n}\right\}^{1/\lambda_n}=0 \tag{20}$$

állítás teljesüljön. Ilyen jellegű elegendő feltételeket KRÁLIK [8] és a szerző [13] adtak.

Publikálás alatt levő dolgozatában Totik [38] igen szép tételt bizonyított ezen problémakörrel kapcsolatban, ugyanis szükséges és elegendő feltételt adott arra, hogy minden H^ω-ba tartozó függvényre a (20) összefüggés teljesüljön.

Megemlítjük még a (19)-es összefüggéssel kapcsolatban, hogy Zygmund idézett dolgozatában azt is megmutatta, hogy integrálható függvény esetén (19) majdnem mindenütt teljesül. Ezt az eredményt úgy élesítettük ([14]), hogy erős $(C, 1)$-középről tetszés szerinti pozitív α-rendű, erős (C, α)-közepekre kiterjesztettük, azaz a következőt bizonyítottuk:

$$\frac{1}{A_n^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(\alpha-1)}|s_\nu(x)-f(x)|^p\to 0,\quad A_n^{(\alpha)}=\binom{n+\alpha}{n},$$

majdnem mindenütt.

6. Végül az erős approximációval kapcsolatos beágyazási eredményeket tekintjük át nagyon röviden. Könnyű látni, hogy az eredmények nagy részét meg lehet fogalmazni bizonyos alkalmasan definiált függvényosztályok egymással kapcsolatos beágyazási viszonyát kifejező formában. Az első ilyen nyelven megfogalmazott eredmény [10]-ben található. Ennek megfogalmazásához definiáljuk az alábbi függvényosztályt adott p és $\lambda=\{\lambda_n\}$ sorozat esetén:

$$S_p(\lambda):=\left\{f:\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n|s_n-f|^p\right\|<\infty\right\}.$$

Eredményünk a következő: *Ha* λ *pozitív, monoton sorozat,* $0<p<\infty$ *és* ω *egy folytonossági modulus, akkor*

$$\sum_{n=1}^{m} (n\lambda_n)^{-1/p} = O\left(m\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right) \tag{21}$$

implikálja, hogy

$$S_p(\lambda) \subset H^{\omega}. \tag{22}$$

Ha van olyan $0 \leqq \beta < 1$, *hogy* $n^{\beta}\lambda_n \uparrow$, *akkor* (22)*-ből következik* (21) *is.*

A [24], [27] dolgozatokban az alábbi függvényosztályok közötti tartalmazási relációkat vizsgáltuk:

$$H(\beta, p, r, \omega) := \left\{f: h_n(f, \beta, p) = O\left(n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\},$$

$$W^r H^{\omega} := \{f: \omega(f^{(r)}, \delta) = O(\omega(\delta))\},$$

$$W^r H^{*} := \{f: f^{(r)} \in \Lambda_{*};\ \Lambda_{*} \text{ a Zygmund-osztály}\},$$

$$W^r E^{\omega} := \left\{f: E_n(f^{(r)}) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\},$$

$$E_r^{\omega} := \left\{f: E_n(f) = O\left(n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}.$$

Természetesen az itteni első függvényosztálynak a többivel való kapcsolata az, ami az erős approximációval kapcsolatos probléma. Mintaként idézzük a következő eredményt:

Ha

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(x)}{x}\, dx = O(\omega(\delta))$$

és létezik olyan μ *természetes szám, hogy*

$$2^{\mu}\omega(2^{-n-\mu}) > 2\omega(2^{-n}) \quad \text{és} \quad 2^{\mu\left(\frac{\beta}{p}-r\right)}\omega(2^{-n-\mu}) > 2^{1/p}\omega(2^{-n})$$

teljesül, akkor

$$H(\beta, p, r, \omega) \equiv W^r H^{\omega}.$$

Krotov [9] dolgozatában a $W^r C$ és $W^r L^{\infty}$ osztályokat is bevonta vizsgálataiba, sőt ezek konjugált osztályaira, $\tilde{W}^r C$-re és $\tilde{W} L^{\infty}$-re is kiterjesztette vizsgálatait, ahol pl. $\tilde{W}^{(r)} C := \{f, \tilde{f} \in W^r C\}$.

E rövid áttekintés is mutatja, hogy ez a témakör, amely egyike azon kutatásoknak, amelyek Alexits György professzor problémafelvetései nyomán bontakoztak ki, milyen méretben szélesedett nemzetközi kutatási témává, mélyítve a magyar klasszikus analízis, szűkebben a Fourier-analízis jó hírét.

IRODALOM

[1] G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier, Mat. Fiz. Lapok 48 (1941), 410—422.

[2] — —, Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynomes, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8 (1963), 329—340.

[3] — —, Problem 3, in: New and unsolved problems. On approximation theory, Birkhauser Verlag, Basel 1964, 179—180.

[4] G. ALEXITS und D. KRÁLIK, Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8 (1963), 317—327.

[5] — —, — —, Über die Approximation im starken Sinne, Acta Sci. Math. 26 (1965), 93—101.

[6] G. ALEXITS und L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16 (1965), 27—32.

[7] G. FREUD, Über die Süttigungsklasse der starken Approximation durch Teilsummen der Fourierschen Reihe, ibid. 20 (1969), 275—279.

[8] D. KRÁLIK, Über ein Problem der starken Summierbarkeit von Fourierreihen, ibid. 17 (1966), 303—312.

[9] V. G. KROTOV, Strong approximation by Fourier series and differentiability properties of functions, Analysis Math., 4 (1978), 199—214.

[10] V. G. KROTOV and L. LEINDLER, On the strong summability of Fourier series and the classes H^{ω}, Acta Sci. Math., 40 (1978), 93—98.

[11] L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16 (1965), 255—262.

[12] — —, Bemerkungen zur Approximation im starken Sinne, ibid. 18 (1967), 273—277.

[13] — —, On a problem of strong summability of Fourier series, ibid. 19 (1968), 87—94.

[14] — —, On summability of Fourier series, Acta Sci. Math. 29 (1968), 147—162.

[15] — —, On strong summability of Fourier series, Abstract spaces and approximation, (Proceeding of Conference in Oberwolfach, 1968), 242—247.

[16] — —, On strong summability of Fourier series, II. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969), 347—355.

[17] — —, On strong approximation of Fourier series, Periodica Math. Hungar. 1 (1971), pp. 157—162.

[18] — —, On strong approximation of Fourier series, Approximation theory, (Proceeding of Conference in Poznan, 1972), 129—140.

[19] — —, Problem 9, in: Linear operators and approximation, II (Proceedings of Conference in Oberwolfach, (1974), 582.

[20] — —, On the strong approximation of Fourier series, Acta Sci. Math. 38 (1976), pp. 317—324.

[21] — —, Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood, Acta Sci. Math. 31 (1970), 279—285.

[22] — —, On structural properties of functions arising from strong approximation of Fourier series, Analysis Math. 3 (1977), 207—212.

[23] — —, On the strong summability and approximation of orthogonal series, (Proceeding of Conference in Kaluga, 1975), 257—260.

[24] — —, Strong approximation and classes of functions, Mitteilungen Math. Seminar Giessen, 132 (1978), 29—38.

[25] — —, Strong and best approximation of Fourier series and the Lipschitz classes, Analysis Math. 4 (1978), 101—116.

[26] — —, Strong approximation of Fourier series and structural properties of functions, Math. Acad. Sci.. Hung. 33 (1979), 105—125.

[27] — —, New sequels of a problem of Alexits, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 33 (1980). (Megjelenés alatt).

[28] L. LEINDLER and E. M. NIKIŠIN, Note on strong approximation by Fourier series, 24 (1973), 223—227.

[29] W. ŁENSKI, Generalizations of two Leindler's theorems, Functiones et Approximatio 3 (1976), 149—155.

[30] J. NÉMETH, Generalization of the Hardy—Littlewood inequality. II, Acta Sci. Math. 35 (1973), 127—134.

[31] K. I. OSKOLKOV, On strong summability of Fourier series and differentiability of functions, Analysis Math. 2 (1976), 41—47.

[32] G. SUNOUCHI, Strong approximation by Fourier series and orthogonal series, Indian J. Math. 9 (1967), 237—246.

[33] J. SZABADOS, On a problem of L. Leindler concerning strong approximation by Fourier series, Analysis Math. 2 (1976), 155—161.
[34] R. TABERSKI, A theorem of the Stečkin and Leindler type connected with Abel summability of Fourier series, Demonstratio Mathematica, 8 (1975), 215—225.
[35] V. TOTIK, On the modulus of continuity in connection with a problem of J. Szabados concerning strong approximation, Analysis Math., 4 (1978), 145—152.
[36] — —, On structural properties of functions arising from strong approximation of Fourier series, Acta Sci. Math. (Közlésre elfogadva.)
[37] — —, On the strong summation of Fourier series, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (Közlésre elfogadva.)
[38] — —, On the strong summation with variable exponents, (Kéziratban.)
[39] P. TURÁN, On the strong summability of Fourier seiers, J. Indian Math. Soc. 12 (1948), 8—12. á
[40] M. ZAMANSKY, Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier, Annales de l'Ecole Normale Supérieure 66 (1949), 19—93.
[41] A. ZYGMUND, On the convergence and summability of power series in the circle of convergence, Proc. London Math. Soc. 47 (1941), 326—350.
[42] — —, On the degree of approximation of functions by their Fejér means, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 274—278.

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

ЛЕИНДЛЕР ЛАСЛО

STRONG APPROXIMATION

L. LEINDLER

2. FÜGGVÉNYSOROK KONVERGENCIÁJA

TANDORI KÁROLY

1. A. Kolmogoroff és G. Seliverstoff [5], [6], ill. A. Plessner [10] a húszas évek közepén közölték a következő tételt:

A. Ha az

$$\frac{a_0}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

trigonometrikus sor együtthatóira teljesül a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\log k<\infty$$

feltétel, akkor az (1) sor m. m. konvergál.

A bizonyítás azon a jól ismert tényen alapul, hogy a trigonometrikus rendszer

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt)\right|dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right|dt$$

Lebesgue-konstansára teljesül a

$$L_n=O(\log n) \tag{2}$$

becslés.

Ezt a tételt néhány év múlva S. Kaczmarz [4] kiterjesztette általános ortogonális sorokra is. Tétele a következőképpen fogalmazható meg.

B. Legyen $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ az (a, b) alapintervallumon ortonormált rendszer és $\lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ pozitív számok monoton nem-csökkenő sorozata. Tegyük fel, hogy a φ rendszer

$$L_n(\varphi;\ x)=\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dt$$

Lebesgue-függvényére teljesül a

$$L_n(\varphi;x)=O(\lambda_n)\quad(x\in(a,b)) \tag{3}$$

becslés. Ha az $a=\{a_k\}_1^\infty$ együttható-sorozat eleget tesz a

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\lambda_k<\infty \tag{4}$$

feltételnek, akkor a

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

ortogonális sor az (a, b) intervallumon m. m. konvergál.

Ezek a tételek évtizedekig a Fourier-sorok elméletében, ill. az ortogonális sorok elméletében központi szerepet játszottak, mind jelentőségük, mind pedig a bizonyításuknál alkalmazott módszer ötletessége alapján.

L. Carleson [3] nevezetes eredménye után, amely szerint már a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

feltétel is maga után vonja az (1) sor m. m. való konvergenciáját, a Kolmogoroff—Plessner—Seliverstoff-tétel jelentősége csökkent, viszont az általános ortogonális sorokra vonatkozó megfelelője továbbra is fontos szerepet játszik, amelyet biztosít pl. az a tény is, hogy a (4) feltétel általában nem enyhíthető. Érvényes ugyanis a következő tétel [12]:

C. Legyen $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ pozitív számok monoton nem-csökkenő, alulról konkáv sorozata, amelyre $\lambda_k = O(\log^2 k)$ teljesül. Ha $a = \{a_k\}_1^\infty$ abszolút értékben monoton nem-növő számsorozat, amelyre

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k = \infty,$$

akkor van olyan, a (0, 1) intervallumon ortonormált $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ függvényrendszer, hogy

$$L_n(\varphi; x) = O(\lambda_n) \quad (x \in (0, 1)),$$

viszont az (5) sor a (0, 1) intervallumon m. m. divergál.

2. A Kolmogoroff—Plessner—Seliverstoff-, ill. Kaczmarz-tételek eredeti bizonyítása döntő mértékben kihasználja, hogy a szóban forgó függvényrendszer ortonormált.

Éppen ezért igen meglepőnek bizonyult az, hogy Alexits György és A. Sharma [2] 1972-ben — felhasználva C. J. Preston [11] egy ötletét — a Kaczmarz-féle tételt nem ortogonális esetre terjesztették ki. Eredményüket a következő formában idézzük:

D. Legyen $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ $L(a, b)$-beli függvények sorozata, amelyekre

$$L_n(\varphi; x) = O(1) \quad (x \in (a, b))$$

teljesül. Ha $a = \{a_k\}_1^\infty \in l^2$, azaz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

akkor az (5) sor az (a, b) intervallumon m. m. konvergál.

E. Legyen $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ pozitív számok monoton nem-csökkenő, végtelenbe divergáló sorozata és $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ $L(a, b)$-beli függvények sorozata, amelyre

$$L_n(\varphi; x) = O(\lambda_n) \quad (x \in (a, b)).$$

Ha $a=\{a_k\}_1^\infty \in l^2(\lambda)$, azaz ha teljesül a (4) feltétel, továbbá minden olyan $\{b_k\}_1^\infty$ sorozata, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 b_k^2 < \infty$ fennáll, a

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \varphi_k(x) \right| dx = O(1) \tag{6}$$

becslés is érvényes, akkor az (5) sor az (a, b) intervallumon m. m. konvergál.

Hangsúlyozni kell, hogy Alexist György és A. Sharma tételei a Kolmogoroff—Plessner—Seliverstoff—Kaczmarz-féle kérdéskört általános sorelméleti kérdéskörré terjesztették ki.

3. A Kaczmarz-féle B. tétel egyaránt igaz a $\lambda_k = O(1)$ (azaz a $L_n(\varphi; x) = O(1)$ $(x \in (a, b))$) és a $\lambda_k \nearrow \infty$ esetben. Ugyanakkor az Alexist—Sharma-féle E. tételben a (6) mellékfeltétel (vagy annál kissé enyhébb más feltétel) szükséges, anélkül ugyanis az állítás nem igaz, amely egyszerű ellenpéldával megmutatható. Tehát a Kaczmarz-féle tétel nem ortonormált esetre az eredeti formájában nem vihető át; a $\lambda_k = O(1)$ és a $\lambda_k \nearrow \infty$ esetek szétválnak.

A Lebesgue-függvényekre tett feltételek szigorítása mellett viszont egységes tárgyalás érhető el. Bebizonyítható ugyanis a következő tétel [15].

I. Tétel. Legyen $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ pozitív számok monoton nemcsökkenő sorozata és $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ $L(a, b)$-beli függvények sorozata, amelyre az

$$L_n\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\right) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \right| dt = O(1) \quad (x \in (a, b)) \tag{7}$$

feltétel teljesül. Ha $a = \{a_k\}_1^\infty \in l^2(\lambda)$, akkor az (5) sor (a, b)-n m. m. konvergál.

E tétellel kapcsolatban néhány megjegyzést teszünk.

a) $\lambda_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetben az I. tétel az Alexits—Sharma-féle D. tételt adja.

b) Egyszerű számolással belátható, hogy $\lambda_k = O(1)$ esetben

$$L_n(\varphi; x) = O(\lambda_n), \quad L_n\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\right) = O(1) \quad (x \in (a, b))$$

ekvivalensek, viszont $\lambda_k \nearrow \infty$ esetén csak a

$$L_n\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\right) = O(1) \Rightarrow L_n(\varphi; x) = O(\lambda_n) \quad (x \in (a, b))$$

implikáció érvényes. Az ellenkező irányú implikáció még ortonormált esetben is ellenpéldával cáfolható. (Csernyák László szóbeli közlése.)

c) Megemlítjük, hogy az $L_n(\varphi, x) = O(\lambda_n)$ feltételnek az $L_n\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\right) = O(1)$ feltétellel való helyettesítése még a trigonometrikus rendszer és $\lambda_k = \log k$ esetén is természetesnek tűnik, hiszen ismert eredmény szerint (l. pl. [17], 110. o.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos kt}{\log k} \right| dt = O(1).$$

4. Könnyen belátható, hogy a Kaczmarz-féle B. tételben az $a \in l^2(\lambda)$ (4) feltétel általában nem szükséges. $\lambda_k \nearrow \infty$ esetén megadható ugyanis olyan a együttható-

sorozat, amelyre (4) nem teljesül, viszont az (5) sor bármely a (3) feltételnek eleget tevő φ ortogonált rendszer esetén az ortogonalitási alapintervallumon m. m. konvergál. A $L_n\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\right) = O(1)$ feltétel előnyét mutatja ilyen szempontból a következő tétel is.

II. Tétel. Legyen $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ pozitív számok monoton nem-csökkenő sorozata. Ha $a \notin l^2(\lambda)$, akkor van $L(a, b)$-beli függvények olyan $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ sorozata, amelyre a (7) feltétel teljesül, mégis az (5) sor (a, b)-n m. m. divergál. A rendszer választható ortogonálisnak.

Az I. és II. tételek szerint a (7) feltételnek eleget tevő függvényekkel képzett sorok pontonkénti konvergenciája szempontjából pontosan az $l^2(\lambda)$-beli együtthatósorozatok a „jók".

5. A (7) feltétel jelentőségére mutat rá a következő tétel

III. Tétel. Legyen λ pozitív számok monoton nem-csökkenő sorozata és φ $L(a, b)$-beli függvények sorozata. Ha teljesül a (7) feltétel, akkor a $\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}$ rendszer majdnem ortonormált, azaz minden pozitív ε-hoz van olyan M_ε pozitív szám, olyan mérhető $F_\varepsilon (\subseteq (a, b))$ halmaz, és olyan az (a, b) intervallumon ortonormált $\{\psi_k(\varepsilon; x)\}_1^\infty$ függvényrendszer, hogy

$$\text{mes } F_\varepsilon \geqq (b-a)-\varepsilon,$$

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = M_\varepsilon \psi_k(\varepsilon; x) \quad (x \in F_\varepsilon;\ k = 1, 2, \ldots)$$

teljesülnek.

E tétel bizonyítása E. M. Nyikisin [9] egy mélyebben fekvő eredményén alapul.

6. Analóg eredmények ismeretesek Cesàro-, sőt tetszőlegesebb Toeplitz-szummációra is. A részletekre nem térünk ki, csupán néhány dolgozatra utalunk: G. Alexits—A. Sharma [2], K. Tandori [13], [15], [16], F. Móricz [8], G. Alexits—I. Joó—K. Tandori [1], W. Kratz—R. Trautner [7].

IRODALOM

[1] Alexits, G.—I. Joó—K. Tandori, On summability of orthogonal series, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 29 (1977), 201—205.

[2] Alexits, G.—Sharma, A., The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series, Acta Sci. Math., Szeged, 33 (1972), 1—10.

[3] Carleson, A., On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 166 (1966), 135—157.

[4] Kaczmarz, S., Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, Studia Math., 1 (1929), 189—192.

[5] Kolmogoroff, A.—Seliverstoff, G., Sur la convergence des séries de Fourier, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 178 (1925), 303—305.

[6] Kolmogoroff, A.—Seliverstoff, G., Sur la convergence des séries de Fourier, Rendiconti R. Acad. Lincei, 3 (1926), 307—310.

[7] Kratz, W.—Trautner, R., On the summability of function series, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 33 (1979), 101—104.

[8] Móricz, F., The order of magnitude of the Lebesgue functions and summability of function series, Acta Sci. Math., Szeged, 34 (1973), 289—296.

[9] Никишин, Е. М., О системах сходимости по мере для l_2, матем. заметки, 13 (1973), 337—340.

[10] PLESSNER, A., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, Journal f. reine u. angew. Math., 155 (1926), 15—25.
[11] PRESTON, C. J., On the convergence of multiplicatively orthogonal series, Proc. Amer. Math. Soc., 28 (1971), 453—455.
[12] TANDORI, K., Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III., Publicationes Math., Debrecen, 12 (1965), 127—157.
[13] TANDORI, K., A remark on a theorem of Alexits and Sharma, Analysis Math., 1 (1975), 223—230.
[14] TANDORI, K., Über die Summierbarkeit von Funktionenreihen, Periodica Mathematica Hungarica, 7 (1976), 161—168.
[15] TANDORI, K., Weitere Bemerkungen über die Konvergenz und Summierbarkeit der Funktionenrehen, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 28 (1976), 119—127.
[16] TANDORI, K., Über modifizierte Lebesguesche Funktionen, Publicationes Math., Debrecen (közlésre elfogadva).
[17] ZYGMUND, A., Trigonometrical series, Warszawa—Lwów, 1935.

СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

ТАНДОРИ КАРОЙ

CONVERGENCE OF SERIES OF FUNCTIONS

K. TANDORI

3. ELEMI SORELMÉLETI MÓDSZEREK AZ APPROXIMÁCIÓELMÉLETBEN

KRÁLIK DEZSŐ

1941-ben, egy magyar nyelvű, függvényapproximációval foglalkozó dolgozatával kapcsolatban vette észre Alexits professzor, hogy numerikus sorok bizonyos elemi tulajdonságai sikeresen alkalmazhatók trigonometrikus approximációs problémák megoldására. A Lip 1 folytonossági tulajdonságú függvények approximációelméleti jellemzését keresve jutott Alexits professzor ehhez a felismeréshez. Míg ugyanis a Lip α $(0<\alpha<1)$ függvényosztályok approximációelméleti (vagy más szóhasználattal: konstruktívfüggvénytani) jellemzését Jackson és Bernstein teljesen elvégezték, addig a Lip 1 függvények ilyen természetű jellemzése hiányzott. Mint ismeretes, a Lip α függvényosztályra jellemző az

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha})$$

összefüggés, ahol $E_n(f)$ a periodikus és folytonos $f(x)$ függvénynek legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomokkal történő legjobb approximációja. Az $\alpha=1$ esetben, mint ismeretes, az $f(x)\in$ Lip 1-ből $E_n(f)=O(n^{-1})$ következik, de ez megfordítva nem igaz, mert az utóbbi egyenlőségből csak az következik, hogy $f(x)$ a Zygmund-osztályba (Z-osztályba) tartozó függvény. Az $E_n(f)=O(n^{-1})$ approximációs reláció nem a Lip 1, hanem a tágabb Z-osztály függvényeit jellemzi. ($f(x)\in Z$, ha fennáll az

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| = O(|h|)$$

reláció.)

Alexits professzornak ezt a sorelméleti észrevételét lépésről lépésre továbbfejlesztették ő maga és munkatársai. Kiderült, hogy ugyanaz a gondolat különböző kérdések megoldására alkalmazható, így például ortogonális sorfejtések konvergencia- és szummálhatósági kérdéseire, a törtrendű integrálokra és függvényosztályok approximációelméleti jellemzésére. Így a numerikus soroknál észrevett egyszerű tulajdonságok alkalmazásaiból a konstruktív függvénytan egy vizsgálati módszerét lehetett kifejleszteni. Nézzük ennek a módszernek néhány konkrét esetét.

1. Legyenek $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ egy B Banach-tér elemei, legyen

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)u_\nu \quad \text{a} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$$

sor u-edik $(C,1)$-közepe,

$$\sigma_n(\nu) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\frac{u_\nu}{\nu} \quad \text{a} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu}{\nu}$$

sor n-edik $(C, 1)$-közepe. Ekkor, ha $\|\sigma_n\| \leqq K$ minden n-re, akkor a $\sigma_n(v)$ közepek a B Banach-tér metrikájában konvergálnak egy $\sigma \in B$ elemhez a

$$\|\sigma - \sigma_n(v)\| \leqq \frac{K'}{n}$$

sebességgel és viszont, azaz:

$$\|\sigma_n\| \leqq K \Leftrightarrow \|\sigma - \sigma_n(v)\| \leqq \frac{K'}{n}, \tag{1}$$

ahol $\|\circ\|$ a B-térbeli normát jelöli. Ez az eredmény könnyen kiterjeszthető a sorok $(C, \alpha > 0)$-közepeire is:

$$\|\sigma_n^\alpha\| \leqq K \Leftrightarrow \|\sigma^\alpha - \sigma_n^\alpha(v)\| \leqq \frac{K'}{n}. \tag{1a}$$

K és K' a B-tér természetétől és α-tól függő állandók.

Ennek a sorelméleti tulajdonságnak a segítségével adta meg Alexits a 2π szerint periodikus, Lip 1 folytonossági tulajdonságú függvények osztályának konstruktív-függvénytani jellemzését. Legyen $f(x)$ egy ilyen függvény, $\tilde{f}(x)$ a konjugáltja,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx) \tag{2}$$

a megfelelő Fourier-sor, illetve

$$\sum_{v=1}^{\infty} (a_v \sin vx - b_v \cos vx) \tag{3}$$

a konjugált sor. E sorok $(C, \alpha > 0)$-közepeit jelöljük $\sigma_n^\alpha(x)$-szel, illetve $\tilde{\sigma}_n^\alpha(x)$-szel. A (2) Fourier-sor differenciált sora a

$$-\sum_{v=1}^{\infty} v(a_v \sin vx - b_v \cos vx) \tag{2a}$$

sor; ha e sor v-edik tagját u_v-vel jelöljük, akkor (előjeltől eltekintve) a (3) konjugált sor a $\sum \frac{u_v}{v}$ sor. Alkalmazhatók tehát a differenciált sorra és a konjugált sorra az (1) és (1a) sorelméleti relációk. Így kapjuk a Lip 1 függvényosztály Alexitstől származó konstruktívfüggvénytani jellemzését: $f(x) \in$ Lip 1 pontosan akkor, ha

$$\operatorname{Max}_x |\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x)| = \|\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x)\|_C \leqq \frac{K'}{n}. \tag{4}$$

Ha ui. $f(x) \in$ Lip 1, akkor $f(x)$ abszolút folytonos, $f'(x)$ majdnem mindenütt létezik és korlátos, ezért $f'(x)$ Fourier-sorának, és így a v-vel szorzott (3) sornak $(C, \alpha > 0)$-közepei összességükben korlátosak. (1a) első egyenlőtlensége fennáll, fennáll tehát a második egyenlőtlenség is, azaz (4).

Ha viszont (4) igaz, akkor (1a) miatt összességükben korlátosak $f(x)$ differenciált sorának $(C, \alpha > 0)$-közepei: $|\sigma_n'^\alpha(x)| \leqq K$. Így nyerjük a differenciálszámítás középértéktétele alapján a

$$\left| \frac{\sigma_n^\alpha(x+h) - \sigma_n^\alpha(x)}{h} \right| = |\sigma_n^{\alpha'}(\xi)| \leqq K$$

összefüggést, ahol ξ alkalmas szám x és $x+h$ között. Rögzített h mellett legyen $n\to\infty$, ekkor Fejér tétele értelmében $\sigma_n^{\alpha}(x)\to f(x)$ egyenletesen minden x-re, tehát az

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqq K$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami éppen $f(x)\in \mathrm{Lip}\ 1$-et jelenti.

Ez a (4) jellemzés a Fourier-sorok $(C, \alpha>0)$-közepeire vonatkozó klasszikus tételek alkalmazásával kiterjeszthető 2π-periodikus függvények $\mathrm{Lip}\,(1, p)$ függvényosztályának $(p\geqq 1)$ konstruktívfüggvénytani jellemzésére is. Egy 2π-periodikus $f(x)$ függvény a $\mathrm{Lip}\,(\beta, p)$-függvényosztályba tartozik, ha

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = O(|h|^{\beta}) \quad (\beta>0).$$

Bernstein-nek a $\mathrm{Lip}\,\beta$ $(0<\beta<1)$ függvényosztályok konstruktívfüggvénytani jellemzését figyelembe véve, Alexits (4) alatti eredményét a következő általánosabb alakban mondhatjuk ki:

$$f(x)\in \mathrm{Lip}\,(\beta, p)$$

pontosan akkor, ha

$$\|\tilde{f}(x)-\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(f; x)\|_{L^p} \leqq \frac{K'}{n^{\beta}} \quad (0<\beta\leqq 1). \tag{5}$$

Megjegyzendő, hogy a $0<\beta<1$ esetben az (5) egyenlőtlenségben magát $f(x)$-et és Fourier-sorának $\sigma_n^{\alpha}(f; x)$-közepeit írhatjuk, minthogy ekkor Privalov tétele szerint $f(x)$ és a konjugált $\tilde{f}(x)$ egyszerre tartoznak a $\mathrm{Lip}\,(\beta, p)$ függvényosztályba.

Nyilvánvaló, hogy ez a módszer alkalmazható a pontonkénti approximáció esetére is. (1), illetőleg (1a) alapján kapjuk mindazon $f(x)$ függvények osztályának a következő jellemzését, amelyeknek $f'(x)$ deriváltja majdnem mindenütt létezik és $L^p[0, 2\pi]$-integrálható $(p>1)$:

$$|f(x)-\sigma_n^{\alpha}(f; x)| \leqq F(x)n^{-1}, \tag{6}$$

ahol

$$F(x)\in L^p[0, 2\pi].$$

2. *Általánosan fogalmazva, az alábbiakban foglalhatjuk össze ennek a sorelméleti módszernek a lényegét:* legyenek $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ egy B Banach-tér elemei és legyen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ pozitív számoknak monoton nemcsökkenő, $+\infty$-hez tartó sorozata. Képezzük a $\sum\mu_{\nu}$ és a $\sum\lambda_{\nu}^{-1}\mu_{\nu}$ soroknak bizonyos

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_{n\nu}\mu_{\nu}, \quad \text{illetve} \quad t_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_{n\nu}\lambda_{\nu}^{-1}\mu_{\nu}$$

Toeplitz-közepeit. A módszer lényege a $\|t_n\|$ és a $\|t-t_n(\lambda)\|$ normák nagyságrendjének összehasonlítása, ahol $t\in B$ a $\{t_n(\lambda)\}$ sorozat limesze, feltéve, hogy ez a limesz létezik.

Az előbbi tételek esetében a t_n, illetve $t_n(\lambda)$-közepek a $(C, \alpha>0)$-közepek és $\lambda_n=n$. A Cesàro-közepek és a $\lambda_n=n$ választás nem lényeges. Ha ugyanis a tetszőleges t_n és $t_n(\lambda)$-közepeknek megvan a

$$\|t_n\| = O(1) \Leftrightarrow \|t-t_n(\lambda)\| = O(\lambda_n^{-1}) \tag{7}$$

tulajdonsága, akkor más függvényosztályok jellemzését kaphatjuk meg teljesen hasonló módon, feltéve, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora ezen közepeinek a Lebesgue-függvényei egyenletesen korlátosak.

Ha a B Banach-tér elemei a $(-\pi, \pi)$ intervallum egy (a, b) részintervallumában definiált valós függvények, akkor lokalizált alakban mondhatunk ki eredményeket. Tekintsük pl. a

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k^r}{(n+1)^r}\right) \mu_k = R_n^{(r)} \quad (r \text{ pozitív egész})$$

r-edrendű Riesz-közepeket. Bizonyítható, hogy ezekre a közepekre a (7) tulajdonságok érvényesek $\lambda_n = n^r$ választással. (A megfelelő bizonyítás hasonló Alexits már említett sorelméleti tételének a bizonyításához, csak a számítások jóval hosszadalmasabbak.) Mindezek alapján igaz a következő tétel: A 2π-periodikus $f(x)$ függvénynek létezzék $[-\pi, \pi]$-ben abszolút folytonos $(r-1)$-edik $f^{(r-1)}(x)$ deriváltja. Ez az $f^{(r-1)}(x)$ egy $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ részintervallumban pontosan akkor tartozik a Lip $(1, p)$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$ függvényosztályba, ha *minden*, teljesen (a, b) belsejében fekvő $[a', b']$ *szubintervallumra* a következő relációk érvényesek:

$$\|R_n^{(r)}(f; x) - f(x)\|_{L^p[a', b']} = O(n^{-r}), \tag{8a}$$

ha r *páros* szám, illetve

$$\|\tilde{R}_n^{(r)}(f; x) - \tilde{f}(x)\|_{L^p[a', b']} = O(n^{-r}), \tag{8b}$$

ha r *páratlan* szám, ahol az O-ban szereplő állandó függ a'-től és b'-től, továbbá $R_n^{(r)}(f; x)$ az $f(x)$ Fourier-sorának előbb említett Riesz-közepe, $\tilde{R}_n^{(r)}(f; x)$ a megfelelő konjugált Riesz-közép.

3. Legyenek $\Lambda(x)$ és $\theta(x)$ $x > 0$-ra értelmezett *nemnövekvő,* pozitív, alulról konvex függvények, amelyekhez léteznek olyan $0 < \gamma < 1$ és $0 < \eta < 1$, $\gamma + \eta < 1$ számok, hogy $\Lambda(x)x^{\gamma}$ és $\theta(x)x^{\eta}$ *nemcsökkenő* függvények. A $(C, 1)$-közepekre érvényes a következő sorelméleti megállapítás:

Ha a $\sum \mu_\nu$ sor $\sigma_n(C, 1)$-közepei a B-térben konvergálnak egy σ elemhez a

$$\|\sigma_n - \sigma\| = O[\Lambda(n)]$$

sebességgel, akkor a $\sum \theta(\nu)\mu_\nu$ sor $\sigma_n(\theta)$ $(C, 1)$-közepei egy $\sigma(\theta) \in B$ elemhez konvergálnak a

$$\|\sigma_n(\theta) - \sigma(\theta)\| = O[\Lambda(n)\theta(n)]$$

sebességgel.

Nyilvánvaló, hogy ez a sorelméleti lemma alkalmas approximációs tételek bizonyítására különböző függvénysorok $(C, 1)$-közepeire vonatkozólag. Egy példát említünk az ortogonális sorfejtések köréből. Legyen $\{\varphi_n(x)\}_n$ egy véges intervallumban definiált ortonormált (ON) függvényrendszer és tekintsük a $\sum c_n \varphi_n(x)$ sort, ahol $\sum c_n^2 < \infty$. A Riesz—Fischer-tétel szerint létezik egyetlen olyan $f(x) \in L^2$ függvény, amelyre $s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) \to f(x)$ az L^2-metrikában.

Ha $\vartheta(x) \uparrow \infty$ pozitív, alulról konkáv függvény és $\sum c_n^2 \vartheta^2(n) < \infty$ biztosítja a $\sum c_n \varphi_n(x)$ sor $(C, 1)$-szummálhatóságát egy $E \subset [a, b]$ halmazon, akkor $\sum c_n^2 \vartheta^2(n)\lambda^2(n) < \infty$-ből következik, hogy

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)$$

az E halmazon, ahol $\sigma_n(x)$ a $\sum c_n\varphi_n(x)$ sor n-edik $(C, 1)$-közepe és $\lambda(x)\uparrow\infty$ pozitív, alulról konkáv függvény és alkalmas $0<\eta<1$ számra $\frac{x^\eta}{\lambda(x)}\uparrow$. Ekkor ui. létezik olyan pozitív, alulról konkáv, *elég lassan* $+\infty$ felé növekedő függvény: $\nu(x)$ [1], amelyre még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \vartheta^2(n)\lambda^2(n)\nu^2(n)$$

sor is konvergens, úgyhogy a

$$\sum c_n\lambda(n)\nu(n)\varphi_n(x)$$

sor $(C, 1)$-közepei az E halmazon konvergálnak, tehát korlátosak, sőt ezek a $(C, 1)$-közepek abszolút értékben $\leqq\psi(x)\in L^2$. Így a sorelméleti lemma szerint a $\sum c_n\varphi_n(x)$ sor $\sigma_n(x)$-közepeire az E halmazon:

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \leqq \frac{\psi(x)}{\lambda(n)\nu(n)} = o_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right).$$

A periodikus és zérus integrálközéppel bíró $f(x)$ függvény $\alpha>0$-rendű, törtrendű integrálja:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt,$$

amelyet még a majdnem mindenütt konvergens alábbi két Fourier-sor összegeként is definiálhatunk:

$$f_\alpha(x) = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^\alpha} + \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n^\alpha},$$

ahol $A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$ az $f(x)$ Fourier-sorának n-edik tagja és

$$B_n(x) = a_n\sin nx - b_n\cos nx$$

a konjugált sor n-edik tagja.

Ha bevezetjük a majdnem mindenütt konvergens Fourier-sorokkal a

$$\Psi_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n^\alpha} + \sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right)$$

függvényt, akkor

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\Psi_\alpha(x-t)\,dt,$$

azaz $f(x)$-nek és $\Psi_\alpha(x)$-nek a konvolúciója. Az α-adrendű integrál fogalmát általánosíthatjuk egy Λ-integrállá a következő módon. Legyen $\Lambda(x)$ a már többször említett függvény, amelytől még az

$$\int_1^{+\infty}\frac{\Lambda(x)}{x}\,dx < +\infty$$

[1] $\nu(x)\uparrow$ oly lassan, hogy $x^\eta\lambda^{-1}(x)\nu^{-1}(x)\uparrow$ szintén. Így $\Lambda(x)\equiv$ kontans, ill. $\Lambda(x)=\psi(x)$, továbbá $\theta(x)=[\lambda(x)\nu(x)]^{-1}$ vehető.

tulajdonságot is megkívánjuk. A $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cos nx$ sor ez utóbbi tulajdonság nélkül is mindenütt konvergál (az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ helyek esetleges kivételével) egy L-integrálható függvényhez, amelynek a Fourier-sora. Ugyanezt a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \sin nx$$

sorról csak akkor állíthatjuk, ha a $\Lambda(x)$ függvény eleget tesz még az előbbi integrálkövetelménynek is. Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező függvénnyel képezett

$$C_1(\Lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cos nx + C_2(\Lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \sin nx$$

sor az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ helyek esetleges kivételével mindenütt konvergál egy L-integrálható $\Psi_\Lambda(x)$ függvényhez, amelynek a Fourier-sora. A $C_1(\Lambda)$ és $C_2(\Lambda)$ számok itt alárendelt szerepet játszanak, de könnyen megválaszthatók úgy, hogy a $\Lambda(x) = x^{-\alpha}$ esetben az α-adrendű integrált visszakapjuk. A konvolúciótétel értelmében m. m. x-re létezik a periodikus és $L[0, 2\pi]$-integrálható

$$f_\Lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \Psi_\Lambda(x-t)\, dt$$

függvény, amelynek Fourier-sora

$$C_1(\Lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) A_n(x) + C_2(\Lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) B_n(x),$$

ahol $A_n(x)$ az eredeti $f(x)$ függvény Fourier-sorának n-edik tagja, $B_n(x)$ a megfelelő konjugált tag. Az $f_\Lambda(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény Λ-integráljának nevezzük. Ha speciálisan $\Lambda(x) = x^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$,

$$C_1(\Lambda) = \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad C_2(\Lambda) = \sin \frac{\pi\alpha}{2},$$

akkor

$$f_\Lambda(x) = f_\alpha(x) \quad \text{és} \quad \Psi_\Lambda(x) = \Psi_\alpha(x).$$

Hardy és Littlewood néhány idevonatkozó tételének általánosításához jutunk a $\Lambda(x)$ és $\theta(x)$ függvényekre vonatkozó elemi sorelméleti lemma alapján, amelyek közül kettőt említünk:

1. Ha $f \in L^p$ $(p > 1)$, akkor $f_\Lambda \in L^p_\Lambda$, ahol L^p_Λ mindazon periodikus függvények osztálya, amelyekre

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p} = O[\Lambda(h^{-1})]$$

érvényes.

2. Ha $f \in L^p_\Lambda$, akkor $f_\theta \in L^p_{\Lambda\theta}$.

(Az 1979. január 4-én a Magyar Tudományos Akadémián Alexits György 80. születésének évfordulóján rendezett ülésen elhangzott előadás.)

IRODALOM

[1] A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approximáció nagyságrendjéről. *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941), 410—422.
[2] Über die Transformierten der arithmetischnen Mittel von Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **2** (1951), 1—9.
[3] Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952), 29—42.
[4] Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955), 41—46.
[5] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.* **16** (1955), 127—129.
[6] Une contibution a la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.* **19** (1958), 149—157.
[7] Über die absolute Summierbarkeit und die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Series A* **7** (1962), 363—371.
[8] Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960), 387—399.
[9] Über die Approximation mit starken de la Vallée-Poussinschen Mitteln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965), 43—49.
[10] Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965), 27—32.

ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ РЯДОВ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

КРАЛИК ДЕЖЁ

ELEMENTARY METHODS OF THE THEORY OF SERIES IN APPROXIMATION THEORY

D. KRÁLIK

4. SZORZATRENDSZEREK SZERINTI SORFEJTÉSEK KONVERGENCIÁJA

SCHIPP FERENC

Számos ortogonális függvényrendszer rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy elemei előállíthatók a rendszer bizonyos elemeinek szorzataként. A komplex trigonometrikus rendszer minden eleme felírható pl. a $\pm 3^n$ ($n=0, 1, \ldots$) indexű elemek szorzataként, minden Walsh-függvény felírható Rademacher-függvények (2^n ($n=0, 1, \ldots$) indexű Walsh-függvények) szorzataként. Kompakt csoportok karakterrendszerei is rendelkeznek az említett tulajdonsággal. A szóban forgó rendszereknek ez a tulajdonsága a függvénysorok elméletének számos kérdésében fontos szerepet játszik.

ALEXITS GYÖRGY — az említett rendszerek e tulajdonságából kiindulva — bevezette a multiplikatív rendszer fogalmának különböző típusait. Ezek a fogalmak és az ezzel kapcsolatos vizsgálatok nemcsak a függvénysorok elméletében, hanem a valószínűségszámításban is igen hasznosnak bizonyultak. A valószínűségszámítás néhány alapvető — korábban független valószínűségi változókra igazolt — tételét átvitték a különböző típusú multiplikatív rendszerekre. A Fourier-sorok elméletének néhány mélyenfekvő eredménye e vizsgálatok nyomán új megvilágításba került.

Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy — a teljesség igénye nélkül — bemutasson néhány olyan területet, ahol az ALEXITS által bevezetett fogalmak és az általa kezdeményezett vizsgálatok megtermékenyítően hatottak a további kutatásokra.

A különböző típusú multiplikatív rendszerekkel kapcsolatos alapvető fogalmak ismertetése után a gyors Fourier-transzformációval foglalkozunk, megmutatva, hogy a (diszkrét) Fourier-transzformált kiszámítására használt ún. gyors módszerek is a trigonometrikus rendszer már említett tulajdonságán alapulnak. Megmutatjuk, hogy számos ortogonális rendszer konvergenciatulajdonságai abból következnek, hogy a szóban forgó rendszerek multiplikatív rendszerek szorzatrendszerei.

1. Multiplikatív rendszerek

Legyen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ egy valószínűségi mértéktér, $F=\{f_n: n\in\mathbf{N}, n<m\}\subset L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ ($\mathbf{N}:=\{0, 1, 2, \ldots\}$, $m\in\mathbf{N}$ vagy $m=\infty$) egy — korlátos, valós vagy komplex függvényekből álló, — (véges vagy végtelen) függvényrendszer. Az F elemeiből alkotott véges szorzatok jelölésére írjuk fel az $n\in\mathbf{N}$ számot ($n<2^m$) diadikus alakban

$$n=\sum_{0\leqq i<m} n_i 2^i \quad (n_i\in\{0, 1\},\ i\in\mathbf{N}),$$

és vezessük be a

$$g_n=\prod_{0\leqq i<m} f_i^{n_i} \tag{1}$$

függvényeket. A $G:=\{g_n: n\in\mathbf{N}\}$ függvényrendszert az F rendszer *szorzatrendszerének* nevezzük. A szorzatrendszernek ez a definíciója ALEXITS-től származik [1], [2]. A fogalom egy általánosításával és annak a Vilenkin-féle multiplikatív rendszerekkel való kapcsolatával [22]-ben foglalkoztunk.

Akkor mondjuk, hogy az F rendszer — ALEXITS-féle értelemben — *erősen multiplikatív,* ha G ortogonális rendszer, és akkor mondjuk, hogy F *multiplikatív,* ha

$$\int_X g_n d\mu = 0 \quad (n\in\mathbf{N}^*:=\mathbf{N}\setminus\{0\}). \tag{2}$$

Ha az F szorzatrendszerére

$$\sum_n \left|\int_X g_n d\mu\right| < \infty \tag{3}$$

teljesül, akkor az F rendszert *gyengén multiplikatív* rendszernek nevezzük (l. [1]—[4]).

Nyilvánvaló, hogy az $R:=\{r_n: n\in\mathbf{N}\}$ Rademacher-rendszer erősen multiplikatív rendszer, amelynek szorzatrendszere a $\Psi:=\{\psi_n: n\in\mathbf{N}\}$ Walsh—Paley-féle ortogonális rendszer. A $\mathbf{T}^*:=\{e_n: n\in\mathbf{N}\}$ $(e_n(x)=\exp(2\pi ixn), x\in[0,1))$ komplex trigonometrikus rendszernek az $\{e_{2^n}: n\in\mathbf{N}\}$ rendszer egy olyan erősen multiplikatív részrendszere, amelynek szorzatrendszere $\mathbf{T}^*$ (l. pl. [1]).

Egyszerűen igazolható, hogy az $\{r_0, r_i r_{i+1}: i\in\mathbf{N}\}$ rendszer is erősen multiplikatív. Ennek a rendszernek a szorzatrendszere — amely a Walsh—Paley-féle rendszer átrendezése — azonos a Walsh által [32] — bonyolult rekurzióval — értelmezett és róla elnevezett Walsh-féle ortogonális rendszerrel.

A Walsh-rendszer egy másik, többek által vizsgált átrendezéséhez a következőképpen juthatunk el: Rögzített $n\in\mathbf{N}$ esetén jelölje $\{w_i^n: 0\leqq i<2^n\}$ az $\{r_{n-1-i}: i=0,1,\ldots,n-1\}$ (véges) rendszer szorzatrendszerét, és legyen $w_0=1$, $w_k=r_n w_l^n$, ha $k=2^n+l$ és $0\leqq l<2^n$ (l. pl. [22]).

A Walsh-rendszer most értelmezett átrendezését Walsh—Kaczmarz-féle rendszernek nevezik az irodalomban. Az R rendszer helyett a $\{e_{2^n}: n\in\mathbf{N}\}$ rendszerből kiindulva analóg módon értelmezhető a $\mathbf{T}^*$ egy átrendezése, amelyet Fourier—Kaczmarz-féle rendszernek nevezünk.

A fenti értelmezés alakján nyilvánvaló, hogy minden erősen multiplikatív rendszer multiplikatív, és minden multiplikatív rendszer gyengén multiplikatív.

Ha valamely

$$\mathscr{A}_0 = \{X, \emptyset\} \subseteq \mathscr{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{A}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{A}$$

σ-algebra-sorozatra nézve

$$\text{i) } f_n\in L^\infty(X, \mathscr{A}_{n+1}, \mu) \quad \text{és} \quad E(f_n|\mathscr{A}_n) = 0 \quad (n<m) \tag{4}$$

— azaz más szóval F *martingál-differenciasorozat* — akkor az F rendszer nyilván multiplikatív.

Ha a (4) i) feltétel mellett a

$$\text{ii) } E(|f_n|^2|\mathscr{A}_n) = 1 \quad (n<m) \tag{4}$$

normálási feltétel is teljesül, akkor F erősen multiplikatív és az F szorzatrendszere ortonormált rendszer. A (4) i) feltételt nyilván minden független, zérus várható értékű valószínűségi változókból álló sorozat kielégíti.

A (4) i) tulajdonságú multiplikatív rendszereket a továbbiakban *MD-típusú multiplikatív rendszerek*nek, a (4) i), ii) tulajdonságúakat pedig *MD-típusú erősen multiplikatív rendszer*nek nevezzük.

Egyszerűen igazolható (l. pl. [5]), hogy *minden egyenletesen korlátos ortonormált rendszernek van gyengén multiplikatív részrendszere,* ugyanakkor *létezik olyan teljes ortonormált rendszer, amelynek nincs multiplikatív részrendszere* [16]. Friess és Trautner [17] megmutatták, hogy — bizonyos értelemben — kevés olyan ortonormált rendszer van, amely végtelen multiplikatív részrendszert tartalmaz.

A [22], [28] dolgozatokban a gyenge multiplikativitás fogalmának következő általánosítása szerepel. Legyen $1 \leqq p \leqq \infty$ és $A_n = \int_X g_n d\mu$ $(n \in \mathbf{N})$. Akkor mondjuk, hogy F *p-gyengén multiplikatív,* ha a $\sum A_n \psi_n$ Walsh—Paley-sor 2^n indexű részletösszegeinek $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$-normájára

$$\sup_n \| \sum_{0 \leqq k < 2^n} A_k \psi_k \|_p < \infty \tag{5}$$

teljesül. Nyilvánvaló, hogy minden gyengén multiplikatív rendszer bármely $1 \leqq p \leqq \infty$ esetén p-gyengén multiplikatív és pontosan akkor 2-gyengén multiplikatív, ha $\sum |A_k|^2 < \infty$.

2. *Gyors Fourier-transzformáció*

Legyen $X_0 = \{0, 1/M, 2/M, \ldots, (M-1)/M\}$ $(M \in \mathbf{N}^*)$, f egy X_0-on értelmezett, komplex-értékű függvény. Az e_n $(n = 0, 1, \ldots, M-1)$ trigonometrikus függvények X_0-ra való leszűkítései az X_0-on ortonormált rendszert alkotnak a $\mu_0(\{x\}) = 1/M$ $(x \in X_0)$ utasítással értelmezett μ_0 mértékre vonatkozóan. Az f függvény

$$\hat{f}(n) = \int_{X_0} f \bar{e}_n d\mu_0 = \frac{1}{M} \sum_{x \in X_0} f(x) \bar{e}_n(x) \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1) \tag{6}$$

diszkrét Fourier-transzformáltjának (az $\{e_n : n = 0, 1, \ldots, M-1\}$ rendszer szerinti Fourier-együtthatóinak) kiszámításához a (6) értelmezés alapján $O(M^2)$ művelet — összeadás és szorzás — szükséges. Az utóbbi években több olyan algoritmust találtak, amelyekkel az $\hat{f}$ függvény értékei $O(M \log M)$ művelettel kiszámíthatók. Ezeket az irodalomban — a megfelelő angol elnevezés, a „Fast Fourier Transform" kezdőbetűit használva — *FFT-algoritmus*oknak nevezik. Az FFT-algoritmusoknak ma már kiterjedt irodalma van (lásd. pl. a [12] könyv ezzel kapcsolatos irodalomjegyzékét és a [15] dolgozatot; ez utóbbi a téma történetéről is jó áttekintést nyújt). A fizikai és geofizikai mérések feldolgozását szolgáló számítógépek többségét ún. FFT-egységgel is felszerelik. Az FFT-algoritmusokhoz hasonló algoritmust dolgoztak ki Walsh—Fourier-együtthatók gyors kiszámítására ([12]).

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az FFT-algoritmushoz hasonló gyors eljárással lehet kiszámítani bármely MD-típusú multiplikatív rendszer szorzatrendszere szerinti Fourier-együtthatókat.

Legyen $F = \{f_n : 0 \leqq n < m\} \subset L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ $(m \in \mathbf{N}^*)$ egy (véges) MD-típusú multiplikatív rendszer és $G = \{g_n : 0 \leqq n < 2^m\}$ az F szorzatrendszere. Valamely $f \in L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ függvénynek a G rendszer szerinti n-edik Fourier-együtthatója — a feltételes várható érték ismert tulajdonsága alapján — a következő alakban írható fel:

$$a_n = \int_X f \bar{g}_n d\mu = E_0(\bar{f}_0^{n_0} E_1(\bar{f}_1^{n_1} \ldots E_{m-1}(\bar{f}_{m-1}^{n_{m-1}} E_m f) \ldots)),$$

ahol $n = \sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k$ $(n_k \in \{0, 1\})$ és E_k jelöli az $\mathscr{A}_k$ σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értéket.

Tetszőleges $h \in L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ függvény esetén az $E_k(h f_k^{n_k})$ $(n_k = 0, 1)$ függvényeket a $h - \{f_k^{n_k} : n_k = 0, 1\}$ rendszerre vonatkozó — $\mathscr{A}_k$ — Fourier-együtthatóinak nevezzük. (Az elnevezést illetően lásd a [22]-t.) Az $\mathscr{A}_k = \{X, \emptyset\}$ speciális esetben a Fourier-együttható szokásos értelmezését kapjuk.

Jelölje α_k az $\mathscr{A}_{k+1}$-mérhető L^2-beli függvények egy $\mathscr{A}_k$-Fourier-együtthatójának kiszámításához szükséges költséget (műveletek számát). Az a_n $(0 \leqq n < 2^m)$ együtthatókat a fenti azonosság alapján a következő algoritmussal számítjuk ki. Először kiszámítjuk az $\mathscr{A}_m$-mérhető $E_m f$ függvény 2 $\mathscr{A}_{m-1}$-Fourier-együtthatóját, az $E_{m-1}(f_{m-1}^{n_{m-1}} E_m f)$ $(n_{m-1} = 0, 1)$ függvényeket, majd ezek mindegyikének $\mathscr{A}_{m-2}$-Fourier-együtthatóit. Az így kapott 2^2 számú $\mathscr{A}_{m-2}$-mérhető függvény mindegyikének kiszámítjuk az $\mathscr{A}_{m-3}$-Fourier-együtthatóit, és ily módon 2^3 számú, $\mathscr{A}_{m-3}$-mérhető függvényt kapunk. Ezt az eljárást folytatva, a végül adódó 2^{m-1} számú $\mathscr{A}_1$-mérhető függvény mindegyikének kiszámítva az $\mathscr{A}_0$-Fourier-együtthatóit, megkapjuk az f G-rendszer szerinti Fourier-együtthatóit. A most ismertetett algoritmus műveletigénye nyilván:

$$2\alpha_{m-1} + 2^2\alpha_{m-2} + 2^3\alpha_{m-3} + \ldots + 2^m\alpha_0.$$

Tekintsük most az alábbi két speciális esetet.

a) Legyen $\mathscr{A}_n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ az $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ Rademacher-függvények által generált σ algebra. Valamely [0, 1) intervallumon értelmezett függvény pontosan akkor $\mathscr{A}_n$-mérhető, ha a $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ $(0 \leqq k < 2^n, k \in \mathbf{N})$ intervallumokon állandó. Egyszerűen belátható, hogy bármely h $\mathscr{A}_{n+1}$-mérhető függvényre

$$(E_n h)(k2^{-n}) = \frac{1}{2}\left(h(k2^{-n}) + h((k+1/2)2^{-n})\right) \quad (0 \leqq k < 2^n).$$

Innen nyilvánvaló, hogy minden $\mathscr{A}_{n+1}$-mérhető függvény egy $\mathscr{A}_n$-Fourier-együtthatójának kiszámításához $\alpha_n = 4 \cdot 2^n$ művelet szükséges, következésképpen az első 2^m Walsh—Fourier-együttható kiszámításának műveletigénye $4m2^m$.

b) Tekintsük az e pont elején bevezetett diszkrét trigonometrikus rendszert az X_0 téren és legyen $M = 2^m$ $(m \in \mathbf{N})$. Tetszőleges $0 \leqq n < m$ természetes számra jelölje $\mathscr{A}_n$ az X_0 2^{n-m} szerint periodikus részhalmazainak σ-algebráját. Egyszerűen igazolható, hogy az $f_n = e_{2^{m-n-1}}$ $(n = 0, 1, \ldots, m-1)$ rendszer a most értelmezett $\mathscr{A}_n$ $(n = 0, \ldots, m-1)$ σ-algebrákra nézve MD-típusú multiplikatív rendszer, továbbá bármely h $\mathscr{A}_{n+1}$-mérhető függvényre

$$(E_n h)(k2^{-m}) = \frac{1}{2}\left(h(k2^{-m}) + h((k+2^n)2^{-m})\right) \quad (0 \leqq k < 2^n, \ k \in \mathbf{N}).$$

Innen következik, hogy az $\mathscr{A}_{n+1}$-mérhető függvények egy $\mathscr{A}_n$-Fourier-együtthatójának kiszámításához $4 \cdot 2^n$ művelet szükséges, következésképpen a diszkrét Fourier-együtthatók a fent vázolt eljárás alapján $4m2^m$ művelettel számíthatók ki. A most ismertetett algoritmus lényegében azonos a Cooley—Tukey-féle FFT-algoritmussal (l. [12], [15]).

Általánosítva a szorzatrendszer fogalmát az $\mathscr{A}_n$ σ-algebrák alkalmas megválasztásával a most vázolt módon eljuthatunk valamennyi ismert FFT-algoritmushoz (l. [27]).

3. Konvergencia-rendszerek

Valamely $F=\{f_n: n\in\mathbf{N}\}\subset L^2:=L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ függvényrendszert akkor nevezzük *konvergencia-rendszernek,* ha minden $(c_n, n\in\mathbf{N})\in l^2$ sorozatra a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n \tag{7}$$

sor μ-m. m. konvergens. A Kolmogorov-féle 3-sor-tétel (l. pl. [21]) alapján minden független, 0 várható értékű és 1 szórású függvényekből álló rendszer konvergencia rendszer. Ha az F rendszer ezen kívül még egyenletesen korlátos, akkor a (7) sor pozitív μ-mértékű halmazon való konvergenciájából

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \tag{8}$$

következik (lásd pl. [21], 42. o.). Ez utóbbi esetben tehát a (7) függvénysor μ-m. m. való konvergenciája a (8) numerikus sor konvergenciájával ekvivalens.

A multiplikatív rendszerekkel kapcsolatos első eredmény a most idézett tételnek egy általánosítása volt (l. [1], [2]). Ebben ALEXITS megmutatta, hogy a szóban forgó tételben a független rendszer helyettesíthető bármely olyan valós, egyenletesen korlátos, erősen multiplikatív rendszerrel, amelynek szorzatrendszere L^2-ben ekvinormált (azaz $\int_X g_n^2\, d\mu = \int_X g_m^2\, d\mu$; $n, m\in\mathbf{N}^*$). Ugyanitt bebizonyította, hogy ha a most említett feltételeknek eleget tevő F erősen multiplikatív rendszerre minden $E\in\mathscr{A}$ halmaz esetén valamely $K>0$ számmal

$$\int_E |f_n|^2 d\mu \leqq K\mu(E) \quad (n\in\mathbf{N})$$

teljesül, akkor a (7) sornak egy pozitív μ-mértékű halmazon való konvergenciájából (8) konvergenciája következik (l. [1]). Ennek a tételnek a feltételeit tovább gyengítette, megmutatva, hogy a szorzatrendszer ekvinormáltságára vonatkozó feltételt elhagyva (l. [3]), az erős multiplikativitást pedig a multiplikativitással (l. [6]), ill. a gyenge multiplikativitással helyettesítve (l. [4]), F konvergencia-rendszer marad.

Ezek az eredmények egy sor vizsgálat kiinduló pontjául szolgáltak és rámutattak arra, hogy a valószínűségszámítás több alapvető tételében — a nagy számok erős törvényében, az iterált logaritmustételben, a centrális határeloszlás-tételekben — a *függetlenség helyettesíthető a multiplikativitással.* Az ezzel kapcsolatos eredményekről Móricz Ferenc és Révész Pál a lapnak e számában megjelent dolgozatai adnak áttekintést.

A továbbiakban részletesebben az F rendszer G szorzatrendszere szerint haladó

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n \tag{9}$$

sorok konvergenciájával foglalkozunk. Minthogy az F a G rendszernek egy — erősen hézagos — részrendszere, ezért ha G konvergencia-rendszer, akkor nyilván F is az. A (9) sor konvergenciájára vonatkozó vizsgálatoknak — a használt módszerek alapján — két esetét célszerű megkülönböztetni.

A) *Valós* rendszer szorzatrendszerére vonatkozik az alábbi, ALEXITSTŐL származó tétel, amely a témakör első eredménye (l. [1], [2]). *Legyen F egy valós, erősen*

multiplikatív rendszer, amelyre

$$|f_n(x)| \leqq 1 \quad (x \in X,\ n \in \mathbf{N}), \tag{10}$$

és tegyük fel, hogy F szorzatrendszere (a G rendszer), ekvinormált. Ekkor bármely $(a_n, n \in \mathbf{N}) \in l^2$ *sorozatra a* (9) *sor* μ-m. m. $(C, \alpha > 0)$*-szummábilis.* Később — ALEXITS GYÖRGY és SZÉP ANDRÁS [9] — megmutatták, hogy a most idézett tétel gyengén multiplikatív rendszerekre is fennáll, ha szorzatrendszerük kielégíti az ún. Schur-féle feltételt, azaz ha az $A=(\alpha_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, $\alpha_{ij}=\int_X g_i g_j d\mu$ $(0 \leqq i, j < \infty)$ végtelen mátrix által generált $A: l^2 \to l^2$ leképezés korlátos.

Ez utóbbi állításban a Schur-féle feltétel elhagyható és a $(C, \alpha > 0)$ szummabilitás konvergenciával helyettesíthető. Igazolható ui. a következő tétel (l. [22], [23]). *Ha az F valós, gyengén, vagy 2-gyengén multiplikatív rendszer eleget tesz a* (10) *feltételnek, akkor szorzatrendszere konvergencia-rendszer.* Ez az állítás egyszerű következménye a — (10) feltételnek eleget tevő — gyengén multiplikatív rendszerekre érvényes

$$\text{(11)} \qquad \text{i)} \quad \|\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k g_k|\|_{L^2(X,\mathscr{A},\mu)} \leqq K_1 \|\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k|\|_{L^2(0,1)}$$

egyenlőtlenségnek és a 2-gyengén multiplikatív rendszerekre — a (10) feltétel mellett — fennálló

$$\text{(11)} \qquad \text{ii)} \quad \|\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k g_k|\|_{L^1(X,\mathscr{A},\mu)} \leqq K_2 \|\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k|\|_{L^2(0,1)}$$

egyenlőtlenségnek (l. [22]). Itt K_1 és K_2 csak az F rendszertől függ. Felhasználva SJÖLIN [30] Walsh-sorokra vonatkozó

$$\|\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k|\|_{L^2(0,1)} \leqq K_3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \quad (K_3 \text{ konstans}) \tag{12}$$

maximáltételét, a fenti egyenlőtlenségek alapján a (9) sor konvergenciájára vonatkozó állítás ismert módon következik, s ezzel a (10) feltételt kielégítő, gyengén (2-gyengén) multiplikatív rendszerek szorzatrendszerei szerint haladó sorok konvergenciájának vizsgálatát Walsh-sorok konvergenciájára vezettük vissza. A (11)-hez hasonló további egyenlőtlenségekkel és az ezekből adódó Marcinkiewicz—Zygmund-típusú egyenlőtlenségekkel és következményeikkel [22]-ben és [28]-ban foglalkoztunk.

A multiplikatív rendszer fogalmának egy további általánosítását vezette be TANDORI KÁROLY [31]. Az $\{f_n: n \in \mathbf{N}\} \subset L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$ rendszert akkor nevezzük *lokálisan 2-gyengén multiplikatívnak,* ha minden $E \in \mathscr{A}$ halmazhoz és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $H \subseteq E$ $\mathscr{A}$-mérhető halmaz, amelyre $\mu(H) > \mu(E) - \varepsilon$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_H g_n d\mu\right)^2 < \infty$ teljesül. Tandori megmutatta, hogy *valamely* (10) *feltételnek eleget tevő F rendszer szorzatrendszere akkor és csak akkor konvergencia-rendszer, ha F lokálisan 2-gyengén multiplikatív.*

B) A valós szorzatrendszerekkel kapcsolatban ismertetett konvergenciatételek lényegében azon múlnak, hogy a Walsh—Paley-rendszer konvergencia-rendszer. Ez utóbbi állítás, amelyet — Carleson módszerét használva — először Billard [11] igazolt, a Fourier-sorok elméletének egyik mélyenfekvő eredménye. Carleson módszerét (l. [41]) egy nevezetes, Luzintól származó sejtés (l. [19]) igazolására dolgozta

ki, bebizonyítva, hogy a trigonometrikus rendszer konvergencia-rendszer. (E tétel bizonyítását — a szükséges előzményekkel kiegészítve — a Matematikai Lapokban is ismertették; l. [20].) A multiplikatív rendszerekkel kapcsolatos vizsgálatok rámutattak arra, hogy a Carleson-féle módszerben az MD-tulajdonság döntő szerepet játszik. Erre utal az alábbi általános tétel is (l. [22], [25]). *Bármely,* a (10) *feltételnek eleget tevő* (komplex) *MD-típusú erősen multiplikatív rendszer szorzatrendszere konvergencia-rendszer.* Ez a tétel szinte valamennyi idevágó eredményt speciális esetként tartalmazza. Többek között innen következik, hogy *a Walsh-,* a *Walsh—Paley-,* a *Walsh—Kaczmarz-, a Fourier—Kaczmarz-féle rendszer, minden korlátos Vilenkin-féle rendszer, továbbá az ún. Jessen-féle ortonormált rendszer* (lásd pl. a [18], 156. és 482. oldalát) *szorzatrendszere konvergencia-rendszer.* Az említett tétel egyik speciális eseteként adódik, hogy *független, 0 várható értékű és 1 abszolút értékű komplex függvényekből álló rendszer szorzatrendszere konvergencia-rendszer.*

BURKHOLDER [13] egy martingáltranszformáltakra vonatkozó eredményét általánosítva igazolható, hogy bármely, a (10) feltételnek eleget tevő MD-típusú erősen multiplikatív rendszer G szorzatrendszerére érvényes a

$$\mu\{x\in X: \sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x)| > y\} \leqq \frac{c}{y^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right)$$

$$(y>0,\ (a_k,\ k\in\mathbf{N})\in l^2)$$

maximál-egyenlőtlenség, ahol c konstans (l. [26]). Ez az egyenlőtlenség Kolmogorov független valószínűségi változókra vonatkozó egyenlőtlenségének (l. pl. [21], 39. o.) általánosítása. A szóban forgó szorzatrendszerre vonatkozó fent idézett tétel ennek az egyenlőtlenségnek egyszerű következménye.

C) Az erősen hézagos trigonometrikus sorok abszolút konvergenciájával kapcsolatos állítások közül több átvihető gyengén multiplikatív rendszerek szerint haladó sorokra. SIDON [29] bebizonyította, hogy ha valamely erősen hézagos trigonometrikus sor egy egyik oldalról korlátos függvény Fourier-sora, akkor a trigonometrikus sor abszolút konvergens. ALEXITS [5] ezt a tételt a következőképpen általánosította. *Legyen F olyan valós, gyengén multiplikatív rendszer, amelyre teljesül a* (10) *feltétel. Ha valamely, egyik oldalról korlátos $f\in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ függvényre $c_n = \int_X f g_n d\mu = 0$, ha $g_n \notin F$, akkor $\sum |c_n| < \infty$.*

A kifejtett függvény korlátossága helyett az erősen hézagos trigonometrikus sor részletösszegeinek egyoldali korlátosságát téve fel valamely intervallumon, hasonló állítás igazolható (l. pl. [33]). Ennek — gyengén multiplikatív rendszerekre vonatkozó — megfelelője a következő állítás [8]. *Legyen F gyengén multiplikatív rendszer, amelyre $\int_X f_n g_m d\mu = 0$ $(m \neq 2^n)$ és a* (10) *feltétel teljesül. Ha a $\sum a_n f_n$ sor részletösszegei egyik oldalról egyenletesen korlátosak, akkor $\sum |a_n| < \infty$.* Ebben a tételben a részletösszegek korlátosságára vonatkozó feltétel már nem lokalizálható.

IRODALOM

[1] ALEXITS, G., Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. Akadémiai Kiadó, Budapest (1960).
[2] — —, Sur la sommabilité des séries orthogonales. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 4 (1953), 181—188.
[3] — —, On the convergence of strongly orthogonal series. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 20 (1969), 245—251.
[4] — —, Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität. Mitteilung aus dem Mathem. Seminar Giessen, 92 (1971), 1—10.

[5] — —, On the convergence of function series. Acta Sci. Math., 34 (1973), 1—9.
[6] ALEXITS, G.—SHARMA, A., On the convergence of multiplicatively orthogonal series. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 22 (1971), 257—266.
[7] — —, — —, The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of functions series. Acta Sci. Math., 33 (1972), 1—10.
[8] ALEXITS, G.—SCHIPP, F., On the absolute convergence of certain function series. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 30 (3—4) (1977), 333—339.
[9] ALEXITS, G.—SZÉP, A., On series of product functions. Periodica Math. Hung., 3 (1973), 37—39.
[10] ALEXITS, G.—TANDORI, K., Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen. Annales Univ. Sci. Budapest, 3—4 (1960/61), 15—18.
[11] BILLARD, P., Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$. Studia Math., 28 (1967), 363—388.
[12] BLOOMFIELD, P., Fourier analysis of time series. An introduction. John Wiley, 1978.
[13] BURKHOLDER, D. L., Martingale transforms. Ann. Math. Statist., 37 (1966), 1494—1504.
[14] CARLESON, L., On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math., 116 (1966), 135—157.
[15] COOLEY, J. W.—LEWIS, P. A. W.—WELCH, P. D., Historical notes on the fast Fourier transform. Proc. IEEE 55 (1967), 1675—1677.
[16] FIEDLER, H.—TRAUTNER, R., Zur Existenz vollständiger Orthogonalsysteme, welche kein multiplikativ orthogonales Teilsystem enthalten. Periodica Math. Hung., 4 (1973), 203—205.
[17] FRIESS, L.—TRAUTNER, R., Zur Häufigkeit multiplikativ orthogonaler Funktionsysteme. Periodica Math. Hung., 4 (1973), 335—342.
[18] Качмаж, С. — Штейнгауз, Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
[19] LUSIN, N., Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier. C. R. Acad. Sci. Paris 156 (1913), 1655—1658.
[20] MÁTÉ, A., Négyzetesen integrálható függvények Fourier-sorának konvergenciája. Mat. Lapok, 18 (1967), 195—243.
[21] RÉVÉSZ, P., The laws of large numbers. Akadémia Kiadó, Budapest, 1967.
[22] SCHIPP, F., Szorzatrendszerek szerinti sorfejtések vizsgálata. Doktori értekezés, Budapest, 1975.
[23] — —, Über die Konvergenz von Reihen nach Produktsystemen. Acta Sci. Math., 35 (1973), 13—16.
[24] — —, On L^p-norm convergence of series with respect to product systems. Analysis Math. 2 (1976), 49—64.
[25] — —, Pontwise convergence of expansion with respect to certain product systems. Analysis Math., 2 (1976), 65—76.
[26] — —, Fourier series and martingale transforms. Linear Spaces and Approximation (Proc. Conference Oberwolfach, 1977), Birkhäuser Verlag (Basel—Stuttgart, 1978), 571—582.
[27] — —, Fast Fourier transform and conditional expectation. Numerikus Módszerek 9/1978 (ELTE TTK Numerikus és Gépi Mat. Tanszék).
[28] SCHIPP, F.—TÜRNPU, H., Über schwach multiplikative Systeme. Annales Univ. Sci. Budapest, 17 (1974), 91—96.
[29] SIDON, S., Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, Math. Ann., 97 (1927), 675—676.
[30] SJÖLIN, P., An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series. Arkiv för Math., 42 (1968), 551—570.
[31] TANDORI, K., Bemerkungen zur Konvergenz der Reihen nach multiplikativen Funktionensystemen. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 33 (1979) 211—215.
[32] WALSH, J., A closed set of orthogonal functions. Amer. J. Math., 55 (1923), 5—24.
[33] ZYGMUND, A., Trigonometric series I. Cambridge Univ. Press. 1959.

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО СИСТЕМАМ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

ШИПП ФЕРЕНЦ

CONVERGENCE OF SERIAL EXPANSIONS USING PRODUCT SYSTEMS

F. SCHIPP

5. MULTIPLIKATÍV RENDSZEREK

MÓRICZ FERENC ÉS RÉVÉSZ PÁL

1. § Bevezetés

A valószínűségszámítás egyik legszebb klasszikus tétele, a Kolmogorov-féle háromsor tétel szükséges és elegendő feltételt ad a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{1.1}$$

alakú sorok majdnem mindenütt (rövidítve: m. m., vagy valószínűségszámítási terminussal: 1 valószínűséggel) való konvergenciájára abban az esetben, amikor $\{\varphi_k\} = \{\varphi_k(x): x \in X\}_{k=1}^{\infty}$ független valószínűségi változók sorozata. Itt és a továbbiakban $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ valós számsorozat, a φ_k valószínűségi változók pedig egy tetszőleges $(X, \mathcal{S}, \mu)$ valószínűségi mezőn vannak értelmezve, kivéve a 2. §-t, ahol $(X, \mathcal{S}, \mu)$ tetszőleges mértéktér lehet (és ennek megfelelően a 2. §-ban a valószínűségi változó terminust a mérhető függvény terminussal cseréljük fel). A háromsor tétel igen egyszerű következménye az alábbi

1.1. Tétel. *Legyenek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *független valószínűségi változók, amelyekre*

$$\int \varphi_k \, d\mu = 0 \quad \text{és} \quad \int \varphi_k^2 \, d\mu = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).^1 \tag{1.2}$$

A jelen dolgozat 1. és 3. §-a tartalmazza lényegében az Alexits György akadémikus születésének 80. évfordulója alkalmából rendezett tudományos emlékülésen a szerzők által „Multiplikatív rendszerek és iterált logaritmus tételek" címmel közösen tartott előadás anyagát. A pontonkénti konvergenciával és a központi határeloszlástétellel kapcsolatban, a multiplikatív rendszerekre elért legfontosabb eredmények az előadás során — elsődlegesen az idő korlátozott volta következtében — éppen csak említést nyertek, viszont ezek részletes tárgyalását a dolgozat 2. és 4. §-ában célszerűnek találtuk.

Akkor az (1.1) *sor m. m. konvergál, ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty. \tag{1.3}$$

A háromsor tétel azt is állítja, hogy az (1.1) sor m. m. konvergenciájához — természetesen a függetlenség és az (1.2) feltétel mellett — az (1.3) feltétel „lényegében" szükséges is. Ennek az állításnak egy gyengébb formája a következő

[1] Ha az integrálás tartománya nincs külön feltüntetve, akkor azon mindig az egész X teret értjük, vi. $\int \varphi \, d\mu = \int_X \varphi(x) \, d\mu(x)$.

1.2. Tétel. *Legyenek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *egyenletesen korlátos független valószínűségi változók, amelyekre az* (1.2) *feltétel teljesül. Ha az* (1.1) *sor az* X *térnek egy pozitív mértékű részhalmazán konvergál, akkor* (1.3) *már fennáll.*

Ortonormált $\{\varphi_k\}$ rendszerek esetében a m. m. való konvergencia kérdése lényegesen bonyolultabb, mint független rendszerek esetében. Ismeretes, hogy ortonormált rendszerekre a Rademacher—Mensov-tétel — amely azt állítja, hogy az (1.1) sor m. m. való konvergenciájának

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 \log^2 k < \infty \ ^2$$

elegendő feltétele — általában nem gyengíthető. A függetlenségi feltétel, amelynek teljesülése esetén az (1.1) sor m. m. való konvergenciájának szükséges és elegendő feltételét a háromsor tétel megadja, a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában természetes feltétel, de az ortogonális sorok elméletében szinte soha nem teljesülő kívánalom. „Durván szólva" azt mondhatjuk, hogy a Rademacher függvényrendszeren kívül az ortogonális sorok elméletében nem fordulnak elő független rendszerek. Így természetes az a kérdés, hogy hogyan lehetne olyan az ortonormáltságnál erősebb, viszont a függetlenségnél gyengébb feltételt találni, amely már az ortogonális sorok elméletében is természetesnek mondható, és teljesülése esetén az (1.1) sor m. m. való konvergenciájához az (1.3) feltétel elegendő.

Ilyen feltételt (pontosabban szólva, feltételeket) vezetett be Alexits György az [1] és [2, 186—187. old.] munkáiban.

Értelmezés. Egy $\{\varphi_k\}$ függvényrendszert *multiplikatív*nak (rövidítve: MR) nevezünk, ha minden r természetes számra és minden páronként különböző természetes számokból álló $k_1, k_2, \ldots, k_r$ rendszerre

$$\int \varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \ldots \varphi_{k_r} d\mu = 0. \tag{1.4}$$

Nyilván feltehető, és a továbbiakban fel is tesszük, hogy $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$. Az (1.4) követelmény az $r=1$ speciális esetben azt jelenti, hogy

$$\int \varphi_k d\mu = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.5}$$

A $\{\varphi_k\}$ függvényrendszert *erősen multiplikatív*nak (rövidítve: EMR) nevezzük, ha minden $r \geqq 1$-re, minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re és minden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ kitevőrendszerre, ahol az α_j kitevők az 1 és 2 értékeket vehetik fel $(j=1, 2, \ldots, r)$, de legalább egyikük 1-gyel egyenlő,

$$\int \varphi_{k_1}^{\alpha_1} \varphi_{k_2}^{\alpha_2} \ldots \varphi_{k_r}^{\alpha_r} d\mu = 0. \tag{1.6}$$

Ha az (1.6) feltétel mellett még az is teljesül, hogy minden $r \geqq 1$-re és minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re

$$\int \varphi_{k_1}^2 \varphi_{k_2}^2 \ldots \varphi_{k_r}^2 d\mu = 1, \tag{1.7}$$

akkor $\{\varphi_k\}$ *normáltan erősen multiplikatív rendszer* (rövidítve: NEMR). Az (1.7) követelmény az $r=1$ esetben speciálisan azt jelenti, hogy

$$\int \varphi_k^2 d\mu = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

[2] Itt és a következőkben a logaritmus a alapszáma közömbös. Határozottság kedvéért legyen $a = 2$, $\log k = \log_2 k$.

Megjegyezzük, hogy az (1.5) és (1.8) tulajdonsággal bíró $\{\varphi_k\}$ függvényrendszerekre az MR, EMR és NEMR fogalma a következőképpen is bevezethető: álljon fenn minden $r \geqq 1$-re és minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re az

$$\int \varphi_{k_1}^{\alpha_1} \varphi_{k_2}^{\alpha_2} \ldots \varphi_{k_r}^{\alpha_r} d\mu = \int \varphi_{k_1}^{\alpha_1} d\mu \int \varphi_{k_2}^{\alpha_2} d\mu \ldots \int \varphi_{k_r}^{\alpha_r} d\mu \tag{1.9}$$

egyenlőség, amely bizonyos értelemben a szorzás és az integrálás műveleteinek felcserélhetőségét követeli meg, minden olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ kitevőrendszerre, ahol mindegyik α_j csak 1 lehet (MR), vagy mindegyik $\alpha_j = 1$ és 2, de legalább egyikük 1-gyel egyenlő (EMR), vagy mindegyik α_j felveheti az 1 és 2 értéket (NEMR).

Nyilvánvaló, hogy ha $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyeknek létezik a γ-adik momentuma:

$$\int |\varphi_k|^\gamma d\mu < \infty \quad (\gamma > 0;\ k = 1, 2, \ldots),$$

akkor (1.9) fennáll minden $r \geqq 1$-re, minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re és minden olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ kitevőrendszerre, amelyre $0 < \alpha_j \leqq \gamma$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Speciálisan, ha $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyekre az (1.2) normálási feltétel teljesül, akkor $\{\varphi_k\}$ egyúttal NEMR is. Ugyanakkor könnyen lehet példát adni olyan NEMR-re, amely nem független valószínűségi változókból áll. Alexits György ilyen példaként a $\{\sqrt{2} \sin 2n_j \pi x\}_{j=1}^{\infty}$ rendszert említi, ahol $X = [0, 1]$, $\mathcal{S}$ a Borel-mérhető halmazok osztálya, μ a Lebesgue-mérték és az $n_{j+1}/n_j \geqq 3$ $(j = 1, 2, \ldots)$ erős lakunaritási feltétel teljesül. Megemlítjük, hogy az $n_{j+1}/n_j \geqq 2$ $(j = 1, 2, \ldots)$ gyengébb lakunaritási feltétel esetében $\{\sqrt{2} \sin 2n_j \pi x\}$ már csak MR.

Az (1.4), (1.6) és (1.7) feltételeknek további ortogonális sorelméleti jelentés is adható. Legyen

$$n = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_j} \quad (0 \leqq l_1 < l_2 < \ldots < l_j)$$

az n természetes szám diadikus előállítása. A $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ rendszerből kiindulva képezzük a $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ún. *szorzatrendszert* a következő módon:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_{l_1+1}(x) \varphi_{l_2+1}(x) \ldots \varphi_{l_j+1}(x) & \text{ha} \quad n \geqq 1, \\ 1 & \text{ha} \quad n = 0 \end{cases} \quad (x \in X).$$

Abban a speciális esetben, amikor $\{\varphi_k\}$ a Rademacher függvényrendszer, a $\{\psi_n\}$ szorzatrendszer az ortogonális sorok elméletéből jól ismert Walsh függvényrendszer.

Egyszerűen beláthatjuk, hogy $\{\varphi_k\}$ pontosan akkor MR, ha

$$\int \psi_n d\mu = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

akkor EMR, ha $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonális rendszer; és akkor NEMR, ha $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormált rendszer.

Megemlítjük, hogy egyes szerzők (pl. [13, 14] esetében) olyan $\{\varphi_k\}$ függvényrendszereket vizsgálnak, amelyekre (1.5) minden $k \geqq 1$-re és (1.9) minden $r \geqq 1$-re, minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re és minden olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ kitevőrendszerre teljesül, ahol mindegyik j-re $\alpha_j = 1$ vagy 2; viszont (1.8) általában már nem teljesül. Ezáltal az erős multiplikativitás fogalmánál erősebb, a normáltan erős multiplikativitás fogalmánál viszont gyengébb fogalomhoz jutunk.

Az első tételt, amely multiplikatív rendszerek konvergenciaviszonyaira vonatkozott és egyben a multiplikativitás fogalmának teljesítőképességét érzékeltette, Alexits György közölte 1953-ban.

1.3. Tétel (ALEXITS [1]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* NEMR, *akkor az* (1.1) *sor m. m. való konvergenciájának* (1.3) *elegendő feltétele.*

Ez az eredmény a valószínűségszámítással foglalkozó matematikusok érdeklődését is felkeltette, akik felvetették azt a kérdést, hogy ha nem is az egész háromsor tételben, de legalább a m. m. konvergenciát állító 1.1. Tételben a függetlenségi feltétel — legalább is egyenletesen korlátos rendszerek esetében — helyettesíthető a normáltan erős multiplikativitási feltétellel, akkor nem remélhető-e, hogy a valószínűségszámítás más klasszikus tételeiben is helyettesíthető a függetlenségi feltétel a multiplikativitás fentebb értelmezett feltételeinek egyikével. Célszerűnek látszott az ilyen irányú vizsgálatokat az iterált logaritmus tétel és a központi határeloszlástétel általánosításával kezdeni.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \quad C_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

A valószínűségszámítás iterált logaritmus tételének Kolmogorov által bizonyított alakja a következő

1.4. Tétel. *Legyenek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *korlátos, független valószínűségi változók, amelyekre az* (1.2) *feltétel teljesül. Ha*

$$C_n \to \infty \quad \text{és} \quad |c_n \varphi_n(x)| \leqq m_n = o\left\{\frac{C_n}{\sqrt{\log\log C_n}}\right\} \quad (x \in X,\ n \to \infty), \tag{1.10}$$

akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{2C_n^2 \log\log C_n}} = 1 \quad m.m. \tag{1.11}$$

Ha $c_1 = c_2 = \ldots = 1$, akkor $C_n = \sqrt{n}$ és az (1.10) feltétel első része triviálisan teljesül. Ebben a speciális esetben az 1.4. Tétel az alábbi korollárium szolgáltatja.

1.5. Korollárium. *Legyenek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *korlátos, független valószínűségi változók, amelyekre az* (1.2) *feltétel teljesül. Ha*

$$|\varphi_n(x)| \leqq m_n = o\left\{\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\right\} \quad (x \in X,\ n \to \infty),$$

akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\right|}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1 \quad m.m.$$

A központi határeloszlástétel Lindebergtől származó alakja a valószínűségi változók korlátosságát nem követeli meg.

1.6. Tétel. *Legyenek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *független valószínűségi változók, amelyekre az* (1.2) *feltétel teljesül. Ha*

$$c_n = o(C_n) \quad (n \to \infty) \tag{1.12}$$

és ε *minden pozitív értékére teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|\varphi_k| \geqq \varepsilon C_n} \varphi_k^2 \, d\mu = 0 \tag{1.13}$$

ún. Lindeberg-féle feltétel, akkor minden valós t-re

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left[x: \frac{s_n(x)}{C_n} < t\right] = \Phi(t), \tag{1.14}$$

ahol $\Phi(t)$ *a standard normális eloszlás*

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\mu^2/2} d\mu \quad (-\infty < t < \infty)$$

eloszlásfüggvénye.

Speciálisan, egyenletesen korlátos valószínűségi változók esetében az (1.13) feltétel automatikusan teljesül, ha $C_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Ha ezen felül még $c_1 = c_2 = \ldots = 1$, akkor (1.12) is fennáll.

1.7. Korollárium. *Legyenek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *egyenletesen korlátos, független valószínűségi változók, amelyekre az* (1.2) *feltétel teljesül. Ekkor minden valós t-re*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left[x: \frac{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)}{\sqrt{n}} < t\right] = \Phi(t).$$

A dolgozat 2. §-ában ismertetjük a normáltan erősen multiplikatív, illetve multiplikatív, sőt a csak gyengén multiplikatív rendszerekre (az utóbbi rendszerek különféle értelmezéseit az egyes §-okban adjuk meg, mivel az irodalomban az egyes problémákkal kapcsolatban a gyenge multiplikativitás fogalmának más és más variánsait vezették be) vonatkozó legfontosabb konvergenciatételeket, a 3. §-ban az iterált logaritmus tételeket, a 4. §-ban pedig a központi határeloszlástételeket. Hangsúlyozni kívánjuk, hogy nem törekszünk teljességre, valamint azt, hogy a meglevő eredmények — különösen a 3. és 4. §-ok esetében — csak kezdeti lépéseknek tekinthetők. Várható és kívánatos a valószínűségszámítás további eredményeinek (mint pl. az arcus sinus tételnek és más fluktuációs tételeknek) kiterjesztése multiplikatív rendszerekre.

Itt kell még szólnunk arról a „példaéhségről" is, amelytől a multiplikatív rendszerek elmélete szenved. A ma ismert példák ilyen rendszerekre szinte kivétel nélkül vagy ortogonális rendszerekből, vagy pedig független rendszerekből jöttek létre csekély módosítás végrehajtásával. Sajnos alig vannak olyan (ellen)példák, amelyek rávilágítanának a multiplikatív rendszerekre vonatkozó újabban elért tételek érvényességi határaira, a feltételek szükségességére. A jövőben ilyen (ellen)példák konstruálása mindenképpen az egyik fő feladat, mert ezek nélkül az elmélet további kiépítése aligha képzelhető el.

A tárgyaláshoz szükséges ortogonális sorelméleti hátteret illetően Alexits György monográfiájára [2], míg a valószínűségszámítási hátteret illetően Rényi Alfréd [40] (különösen a központi határeloszlástétellel kapcsolatban) és Révész Pál [45] (különösen az iterált logaritmus tétellel kapcsolatban) könyveire utalunk. Az ortogonalitás és a függetlenség kapcsolatát elemzik az [5, 41] dolgozatok. A multiplikatív rendszerekre vonatkozó konvergencia- és iterált logaritmus tételeknek egy korábbi, rövidebb összefoglalása [35]-ben található.

Befejezésül megemlítjük, hogy újabban kísérlet történt a multiplikativitás fogalmának $\{\varphi_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}$ véletlen mezőkre való kiterjesztésére és a legfontosabb konvergencia- és iterált logaritmus tételek bizonyítására. Ezek ismertetésére azonban itt nem fogunk kitérni, hanem az olvasó figyelmébe a [37, 38] dolgozatokat ajánljuk.

2. § Konvergenciatételek

Ebben a §-ban az (1.1) sor pontonkénti (m. m. vagy csak pozitív mértékű halmazon való) konvergenciájával összefüggő kérdéseket tárgyaljuk. Az ismertetésre kerülő tételek állítása zömmel a következő két implikáció egyike lesz:

$$\text{(2.1)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \text{konvergál m.m.,}$$

illetve

$$\text{(2.2)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \text{ konvergál pozitív mértékű halmazon} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Ezek közül (2.1) azt fejezi ki, hogy $\{\varphi_k\}$ *konvergenciarendszer l^2-re nézve*, míg (2.1) és (2.2) együttvéve azt fejezik ki, hogy $\{\varphi_k\}$ *szigorú értelemben véve konvergenciarendszer l^2-re nézve.* (Lásd részletesebben pl. [16, 11. old.]-ban.)

Mielőtt a tételek részletes ismertetésébe fognánk, még egy megjegyzést szeretnénk tenni. Ebben a §-ban nem használjuk ki teljes egészében azt, hogy $(X, \mathcal{S}, \mu)$ valószínűségi mező. Ugyanis, az alábbi tételek mindegyike érvényes már azon általánosabb feltevés mellett is, hogy $(X, \mathcal{S}, \mu)$ tetszőleges mértéktér nem-negatív μ mértékkel. Ezt azért kívánjuk hangsúlyozni, mivel a legtöbb konvergenciatételt eredetileg csak valószínűségi mező, vagy legalább is véges mértéktér esetére mondták ki, illetve bizonyították be.

Azt az eredményt, amelyet Alexits György elsőként ért el az általa bevezetett multiplikatív rendszerek konvergenciaviszonyainak vizsgálatában, és amely az egész elmélet elindítója lett, az 1. §-ban 1.3. Tétel néven már idéztük. Az Alexits-tétel a klasszikus Kolmogorov-tételnél lényegesen erősebb lenne, ha feltételei közül az egyenletes korlátosság követelményét el lehetne hagyni. Ezért a további kutatások részben a korlátossági feltétel — részben pedig a multiplikativitási feltétel — gyengítésére irányultak.

Már Alexits György és Tandori Károly foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy milyen módon helyettesíthető a $\{\varphi_k\}$ rendszer egyenletes korlátossága az egyes φ_k függvények korlátosságával.

2.1. Tétel (Alexits—Tandori [11]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ NEMR, *amelynek tagjai különkülön korlátosak:*

$$\text{(2.3)} \qquad |\varphi_k(x)| \leqq M_k \quad (x \in X;\ k = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\text{(2.4)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 M_k^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \textit{konvergál m.m.}$$

A 2.1. Tétel speciális esetként nyilván tartalmazza az 1.3. Tételt. Mindkét tétel bizonyítása az ortogonális sorok elméletében közismert Lebesgue-függvények módszerén alapul. Anélkül, hogy túlzottan a részletekbe mennénk, a bizonyításban a

$$K_n(x, y) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{M_k^2}\right) \quad (x, y \in X)$$

magfüggvény játszik alapvető szerepet, amely (2.3) következtében nemnegatív, és amelynek integrálja (véges mértéktér esetében!) véges:

$$\int K_n(x, y)\, d\mu(y) = \mu(X) < \infty \quad (x \in X;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Ezen módszer finomításával ALEXITS GYÖRGY [3] dolgozatában és A. SHARMAval közösen írt [8, 9] dolgozataiban bebizonyította, hogy mind az 1.3. Tétel, mind a 2.1. Tétel már azon jóval enyhébb feltétel mellett is igaz, amikor $\{\varphi_k\}$ egyenletesen korlátos MR. Ezekre a tételekre C. J. PRESTON [39] még egyszerűbb bizonyítást adott.

Az egyenletes korlátosság feltételének elejtésében és a normáltan erős multiplikativitás feltételének lényeges gyengítésében a döntő előrelépést Révész Pál tette meg.

2.2. Tétel (RÉVÉSZ [43]). *Tegyük fel, hogy a φ_k mérhető függvények negyedik momentuma közös korlát alatt marad:*

$$\int \varphi_k^4 d\mu \leqq M \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

továbbá, hogy a páronként különböző j, k, l, m természetes számok minden értékére

$$\int \varphi_j \varphi_k \varphi_l \varphi_m d\mu = 0, \tag{2.6}$$

$$\int \varphi_k^2 \varphi_l \varphi_m d\mu = 0 \tag{2.7}$$

és

$$\int \varphi_k^2 \varphi_l d\mu = \int \varphi_k \varphi_l \varphi_m d\mu = \int \varphi_k \varphi_l d\mu = \int \varphi_k d\mu = 0. \tag{2.8}$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 L_r^2(k) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \textit{konvergál m.m.}, \tag{2.9}$$

ahol $L_1(t) = \log t$ *ha* $t \geqq 2$ *és* $= 1$ *ha* $0 < t < 2$, *és* $L_r(t) = L_1(L_{r-1}(t))$ *ha* $r \geqq 2$.

A (2.9) implikáció előtagja nagy r-ek esetében alig jelent erősebb feltételt a $\{c_k\}$ együtthatósorozatra, mint amit a (2.1) implikáció előtagja jelent. Ez a tény azt a sejtést valószínűsítette, hogy a 2.2. Tétel feltételeiből már (2.1) is következik. Ez valóban így van, sőt V. F. Gaposkinnak még valamivel élesebb tételt is sikerült bebizonyítania.

2.3. Tétel (GAPOSKIN [17]). *A* (2.5), (2.6) *és* (2.7) *feltételekből már következik* (2.1) *fennállása.*

Végül KOMLÓS JÁNOS és RÉVÉSZ PÁL [23], illetve V. F. GAPOSKIN [20] vették észre egymástól függetlenül, hogy a 2.2. Tételben a (2.7) feltétel is felesleges.

2.4. Tétel (Komlós—Révész—Gaposkin). *A* (2.5) *és* (2.6) *feltételek teljesülése már maga után vonja* (2.1) *érvényességét.*

Más szavakkal kifejezve, a 2.4. Tétel azt állítja, hogy mérhető függvények tetszőleges $\{\varphi_k\}$ rendszere esetén a négyenkénti multiplikativitás (vi. a (2.6) feltétel) a negyedik momentumok egyenletes korlátosságával együtt már elegendő feltétele annak, hogy $\{\varphi_k\}$ konvergenciarendszer legyen.

Viszont a hármankénti multiplikativitás (vi. a második feltétel (2.8)-ban) még az egyenletes korlátossággal együtt sem elegendő általában ahhoz, hogy a szóban forgó rendszer konvergenciarendszer legyen. A következő példa Révész Páltól származik. Legyen $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ olyan egyenletesen korlátos ortonormált rendszer a [0, 1] intervallumon, amely nem konvergenciarendszer. Ilyen rendszert először

D. E. MENSOV [27] konstruált. Értelmezzük a $\varphi_k(x)$ függvényeket ugyancsak a [0, 1] intervallumon a következőképpen:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \psi_k(2x) & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -\psi_k(2x-1) & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\{\varphi_k\}$ is egyenletesen korlátos ortonormált rendszer és ráadásul még

$$\int \varphi_k \, d\mu = \int \varphi_k \varphi_l \varphi_m \, d\mu = 0,$$

ahol k, l és m tetszés szerinti, páronként különböző természetes számok. Ennek ellenére $\{\varphi_k\}$ nyilván nem konvergenciarendszer.

KOMLÓS JÁNOS [21] és V. F. GAPOSKIN [20], ugyancsak egymástól függetlenül, általánosította a 2.4. Tételt $r=4$-ről tetszőleges páros r-re, $r \geqq 4$.

2.5. Tétel (Komlós—Gaposkin). *Legyen r páros szám, $r \geqq 4$. Ha*

$$\int \varphi_k^r \, d\mu \leqq M \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

és minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ egész számra

$$\int \varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \ldots \varphi_{k_r} \, d\mu = 0, \tag{2.11}$$

akkor (2.1) *fennáll.*

Más szavakkal, az r-enkénti multiplikativitás az r-edik momentumok egyenletes korlátosságával együtt szintén elegendő feltétele annak, hogy a szóban forgó rendszer konvergenciarendszer legyen, ahol r lehet 4, 6, 8, ...

Megjegyezzük, hogy a 2.5. Tételt először R. J. SERFLING [55] mondta ki, de bizonyítása hiányos volt.

Egyszerűen belátható, hogy ha az r-edik momentumok közös korlát alatt maradásának feltételét elejtjük és helyette csak az r-edik momentumok létezését követeljük meg:

$$\int \varphi_k^r \, d\mu = M_k^r \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.12}$$

akkor (2.11) és (2.12) együttesen (2.4)-et implikálják.

Bár a 2.5. Tétel bizonyos szempontból lezárja a MR-ek m. m. való konvergenciájának kérdését, mégsem tekinthető végleges, tovább már nem élesíthető eredménynek. Elsősorban V. F. Gaposkin vizsgálatai derítették ki, hogy mind a (2.10) momentumfeltétel, mind a (2.11) multiplikativitási feltétel még tovább enyhíthető anélkül, hogy a 2.5. Tétel érvényét veszítené. Foglalkozzunk először a (2.10) feltétel enyhítésének kérdésével.

2.6. Tétel (GAPOSKIN [20]). *Legyen r páros szám, $r \geqq 4$, és p valós szám, $2 < p \leqq r$. Ha a mérhető függvényekből álló $\{\varphi_k\}$ rendszer eleget tesz* (2.11)*-nek, a $p \neq r$ esetben $\{\varphi_k\}$ ortogonális is, és ezeken kívül*

$$\int |\varphi_k|^p \, d\mu \leqq M \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.13}$$

akkor (2.1) *fennáll.*

A (2.13) momentumfeltétel tovább már nem gyengíthető, amint ezt a következő példa mutatja. Ismeretes, hogy a [0, 1] intervallumon értelmezett $\{\chi_n^{(m)}(x)$:

$m=n=0$; $m=1, 2, \ldots, 2^n$; $n=0, 1, 2, \ldots\}=\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ (az $m=n=0$ esetben $k=1$, míg a többi esetben $k=2^n+m$) Haar-rendszer MR, vi. teljesíti (2.11)-et minden r természetes számra. Nyilvánvaló, hogy ez a multiplikatív tulajdonság akkor is megmarad, ha a Haar-rendszert tetszőleges módon átrendezzük. Viszont P. L. ULJANOV [59] és MÓRICZ FERENC [28] egymástól függetlenül olyan $\{\chi_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ átrendezések létezését bizonyították, amelyek végrehajtása után a Haar-rendszer elveszti konvergenciarendszer tulajdonságát. Az ilyen módon átrendezett $\{\chi_{\nu_k}\}$ rendszerekre a (2.6) tétel tehát nem érvényes, habár a 2.6. Tétel feltételei közül csak (2.13) nem teljesül: nevezetesen, minden $p>2$-re

$$\int_0^1 |\chi_n^{(m)}(x)|^p dx = \frac{\sqrt{2^{np}}}{2^n} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Térjünk most át az r-enkénti multiplikativitást kifejező (2.11) feltétel gyengíthetőségének kérdésére. RÉVÉSZ PÁL [46] mutatott rá elsőként arra, hogy a 2.2. Tétel (2.9) állítása akkor is érvényben marad, ha bizonyos (1.6) és (1.7) típusú integrálok csak közelítőleg egyenlők 0-val, illetve 1-gyel. Később V. F. Gaposkin pontosította ezt a 2.5. Tétellel kapcsolatban.

2.7. Tétel (GAPOSKIN [20]). *Legyen r páros szám, $r\geqq 4$. Tegyük fel, hogy* (2.10) *fennáll, és hogy létezik olyan nemnegatív $f(n)$ függvény $(n=1, 2, \ldots)$, amellyel*

$$\left|\int \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}d\mu\right| \leqq f\{\max(k_2-k_1, k_4-k_3, \ldots, k_r-k_{r-1})\} \tag{2.14}$$

minden $1\leqq k_1<k_2<\ldots<k_r$ egész számra és

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{(r-2)/2} f(n) < \infty. \tag{2.15}$$

Ekkor (2.1) *fennáll.*

Megemlítjük, hogy az $r=4$ esetben a 2.7. Tételt KOMLÓS JÁNOS és RÉVÉSZ PÁL is kimondták [23]-ban. Egyébként az $r=4$ esetben (2.15) biztosan teljesül, ha például

$$f(n) = O\{n^{-2}(\log n)^{-1-\varepsilon}\} \quad (\varepsilon > 0).$$

Igen nehéz problémának látszik alulról nagyságrendi becslést adni azon $f(n)$ függvényekre, $f(n)\downarrow 0$ $(n\to\infty)$, amikor a (2.10) és (2.14) feltételekből már nem következik (2.1) fennállása.

A (2.14) és (2.15) feltételek felfoghatók úgy, mint amelyek egy gyenge multiplikativitási fogalmat értelmeznek. A gyenge multiplikativitásnak egy másik, bizonyos értelemben szűkebb fogalmát vezette be Móricz Ferenc.

2.8. Tétel (MÓRICZ [32]). *Legyen r páros szám, $r\geqq 4$, p valós szám, $1<p\leqq 2$, és legyen q a konjugált kitevő, $1/p+1/q=1$. Ha a mérhető függvényekből álló $\{\varphi_k\}$ rendszer kielégíti* (2.10)*-et, és a*

$$\|B_r\|_q = \left\{\sum_{1\leqq k_1<k_2<\ldots<k_r} \left|\int \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}d\mu\right|^q\right\}^{1/q} < \infty \tag{2.16}$$

feltételt, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \quad \textit{konvergál m.m.}$$

A (2.16)-ban szereplő $\|B_r\|_q$ tehát a

$$B_r = \{b_{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \int \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}d\mu\colon\ 1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r\}$$

végtelen komponensű vektor l^q normáját jelöli.

Érdekes megjegyezni, hogy a p-re kirótt $1<p\leqq 2$ feltétel lényeges. Más szavakkal kifejezve, hiába követelnénk meg (2.16) fennállását valamely $p>2$-nek megfelelő q-ra, $1<q<2$, ez az erősebb feltétel mégsem vonná maga után általában az (1.1) sor m. m. való konvergenciáját egyetlen $\{c_k\}\in l^p\setminus l^2$ együtthatósorozatra sem. Ennek az az oka — mint a későbbiekben látni fogjuk —, hogy meglehetősen általános feltételek mellett egy (2.2) típusú állítás is igaz.

Nyilvánvaló, hogy (2.16) általában erősebb megszorítást jelent egy $\{\varphi_k\}$ rendszerre vonatkozólag, mint (2.14) és (2.15). Viszont, ha (2.14) baloldala „csak ritkán elég nagy" és egyébként eltűnik, akkor (2.16) fennállhat olyan esetekben is, amikor (2.14) és (2.15) együtt már nem állhatnak fenn.

A (2.14)—(2.15) típusú feltételek a valószínűségszámításban gyakran előfordulnak valószínűségi változók stacionárius sorozataival foglalkozó munkákban. További ilyen jellegű feltételeket vezettek be M. Longnecker és R. J. Serfling [25], amelyek mindegyike a gyenge multiplikativitás egy-egy válfaját értelmezi. A (2.16) típusú feltételekkel elsősorban az 1. §-ban bevezetett szorzatrendszerek konvergenciaviszonyainak tanulmányozásával kapcsolatos dolgozatokban találkozunk. A számos ilyen témájú dolgozat közül szeretnénk az olvasó figyelmét felhívni Alexits György [6], Alexits György és Szép András [10], Schipp Ferenc [52], Schipp Ferenc és H. Türnpu [53, 54] és Tandori Károly [58] dolgozataira. Az ezekben bizonyított tételek szemléltetésére hadd álljon itt Tandori Károly egyik tétele, amely szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy $\{\varphi_k\}$ rendszer által generált $\{\psi_n\}$ szorzatrendszer konvergenciarendszer legyen l^2-re nézve. E célból vezessük be a következő jelölést: tetszőleges véges mértékű E halmazra legyen

$$\|B_\psi(E)\|_2 = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_E \psi_n d\mu\right)^2\right\}^{1/2} = \left\{\mu^2(E) + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{1\leqq k_1<k_2<\ldots<k_r}\left(\int_E \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}d\mu\right)^2\right\}^{1/2}.$$

2.9. Tétel (Tandori [58]). *Tegyük fel, hogy a mérhető φ_k függvényekre*

$$|\varphi_k(x)| \leqq 1 \quad (x\in X;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor a $\{\varphi_k\}$ által generált $\{\psi_n\}$ szorzatrendszer akkor és csak akkor konvergenciarendszer l^2-re nézve, ha minden véges mértékű E halmazhoz és minden $\varepsilon>0$-hoz megadható olyan $E_\varepsilon(\subseteq E)$ részhalmaz, amelyre

$$\mu(E_\varepsilon) \geqq \mu(E)-\varepsilon \quad \text{és} \quad \|B_\psi(E_\varepsilon)\|_2 < \infty.$$

A 2.1. és a 2.9. Tételt leszámítva, e § eddigi tételeinek bizonyításában a szerzők általában azt az utat követik, hogy először megmutatják, hogy a szóban forgó $\{\varphi_k\}$ rendszer ún. *S_r-rendszer*, vi. hogy létezik olyan K_r állandó, amellyel minden n természetes számra és minden $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós együtthatósorozatra

$$\int |s_n(x)|^r d\mu(x) \leqq K_r C_n^r. \tag{2.17}$$

Ezután a részletösszegek felső burkolójára a nevezetes Erdős—Sztecskin maximálegyenlőtlenség segítségével következtetnek, amely szerint az $r>2$ esetben (2.17)-ből

$$\int \left(\max_{1\leqq k\leqq n} |s_k(x)|\right)^r d\mu(x) \leqq K_r^* C_n^r \tag{2.18}$$

következik egy másik K_r^* állandóval. A (2.17)⇒(2.18) állítást $r=4$-re ERDŐS PÁL [15] bizonyította (valójában lakunáris trigonometrikus rendszerekre, de bizonyítása minden további nélkül átvihető tetszőleges függvényrendszerekre), míg az $r>2$ általános eset bizonyítását V. F. GAPOSKIN [16, 28—31. old.] dolgozta k) Sz. B. Sztecskin szóbeli közlése alapján. A fenti két bizonyítás azonban lényegesen kihasználja, hogy a szóban forgó $(X, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér véges. Tetszőleges mértékterekre MÓRICZ FERENC [34] adott bizonyítást.

Ezek után áttérünk azon tételek ismertetésére, amelyek állítása a (2.2) implikáció. Hasonló módon, mint ahogyan az 1.2. Tétel bizonyos értelemben megfordítása az 1.1. Tételnek, megadható például az 1.3., 2.4. és 2.8. Tételek megfordítása is. Ezekben a megfordításokban azzal a további természetes feltétellel kell élnünk, hogy minden pozitív mértékű E halmazra

$$\liminf_{k\to\infty} \int_E \varphi_k^2 \, d\mu > 0. \tag{2.19}$$

Ugyanis, ha (2.19) egy pozitív mértékű E halmazra nem teljesül, akkor kiválasztható olyan $\{\varphi_{k_l}\}$ részsorozat, amelyre

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int_E |\varphi_{k_l}| \, d\mu < \infty,$$

ahonnan Beppo Levi tétele alapján az (1.1) sor m. m. való konvergenciája következik a $\{c_k\}=\{c_k=1$ ha valamely l-re $k=k_l$, és $c_k=0$ egyébként$\} \notin l^2$ együtthatósorozatra.

Az első eredményt ebben az irányban is Alexits György érte el.

2.10. Tétel (ALEXITS [2, 194. old.])[3]. *Tegyük fel, hogy a mérhető függvényekből álló* $\{\varphi_k\}$ *rendszer kielégíti a* (2.6), (2.7) *és* (2.19) *feltételeket, továbbá, hogy minden különböző* k *és* l *természetes számra*

$$\int \varphi_k^2 \varphi_l^2 \, d\mu = 1. \tag{2.20}$$

Ekkor (2.2) *fennáll.*

Később ALEXITS GYÖRGY és A. SHARMA [8] bizonyították, hogy a 2.10. Tétel érvényes marad, ha a (2.20) feltételt (2.5)-tel helyettesítjük. MÓRICZ FERENC [31] pedig azt bizonyította, hogy az (1.8), (2.5) és (2.20) feltételekből már következik (2.19).

Komlós János vette észre, hogy a 2.10. Tételben még a (2.7) feltétel is felesleges.

2.11. Tétel (KOMLÓS [21]). *Ha a mérhető függvényekből álló* $\{\varphi_k\}$ *rendszer eleget tesz a* (2.5), (2.6) *és* (2.19) *feltételeknek, akkor* (2.2) *fennáll.*

A gyenge multiplikativitás esetét Móricz Ferenc vizsgálta és többek között az alábbi tételt nyerte.

[3] A 2.10. Tételben és a hozzáfűzött megjegyzésekben az eredményeket abban — az eredeti kimondásuknál élesebb — alakban fogalmaztuk meg, amely bizonyításukból közvetlenül következik.

2.12. Tétel (MÓRICZ [32]). *Ha a mérhető függvényekből álló* $\{\varphi_k\}$ *rendszer eleget tesz a* (2.5), (2.19) *és*

$$\|B_4\|_2^2 = \sum_{1 \leqq j<k<l<m} \left(\int \varphi_j \varphi_k \varphi_l \varphi_m d\mu\right)^2 < \infty \tag{2.21}$$

feltételeknek, akkor (2.2) *fennáll.*

A fenti tételekkel kapcsolatban két megjegyzést teszünk. Egyrészt, ha azokban a (2.19) feltétel teljesülését nem követeljük meg minden pozitív mértékű E halmazra, akkor az (1.8) és (2.5) feltételekből csak az következik, hogy (2.19) minden olyan E halmazra áll fenn, amelynek mértéke „alig kisebb" 1-nél. Ez pedig csupán a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \text{konvergál m.m.} \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

implikáció bizonyítását teszi lehetővé.

Másrészt szeretnénk kiemelni, hogy a 2.10—2.12. Tételek érvényesek maradnak akkor is, ha a (2.2) implikáció előtagjában a pozitív mértékű halmazon való konvergenciát tetszőleges reguláris mátrixszal generált Toeplitz-szummálhatósággal (lásd például [60, 74—75. old.]-ban) pótoljuk, sőt már az is elegendő, ha a szummációs közepek pozitív mértékű halmazon korlátosak. Általában megállapítható, hogy a lakunáris trigonometrikus rendszerekre bizonyított ilyen típusú eredmények (lásd [60, 202—205. old.]) mindegyike igaz lesz a 2.12. Tétel feltételei mellett is (lásd részletesebben [32]-ben).

A szóban forgó tételek bizonyításának gyökere egy Bessel-típusú egyenlőtlenségben rejlik: a (2.5) momentumfeltétel és a (2.6) multiplikativitási vagy a (2.21) gyenge multiplikativitási feltételek maguk után vonják, hogy minden $f \in L^2(X, \mathcal{S}, \mu)$ függvényre fennáll a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(\int f \varphi_k \varphi_l d\mu\right)^2 \leqq K \int f^2 d\mu$$

egyenlőtlenség, ahol K állandó.

Befejezésül megemlítjük, hogy az (1.1) sor abszolút konvergenciájának kérdésével foglalkozik ALEXITS GYÖRGY és SCHIPP FERENC [7] és MÓRICZ FERENC [31] dolgozata.

3. § Iterált logaritmus tételek

A következőkben ismertetésre kerülő tételek konklúziója vagy a speciálisabb

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right|}{\sqrt{\varkappa n \log\log n}} \leqq 1 \quad \text{m.m.}, \tag{3.1}$$

vagy az általánosabb

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{\varkappa C_n^2 \log\log C_n}} \leqq 1 \quad \text{m.m.} \tag{3.2}$$

állítás lesz, ahol $\varkappa$ állandó. Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a multiplikatív rendszerekre vonatkozó kutatások — kevés kivételtől eltekintve — az iterált logaritmus tételnek csak a „$\leqq$" részét biztosító feltételek keresésére irányultak.

Az első tételt ebben az irányban Révész Pál közölte 1965-ben.

3.1. Tétel (RÉVÉSZ [42]). Ha $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* NEMR, *akkor* (3.1) *fennáll* $\varkappa=36$*-tal.*

A következő tétel a $\varkappa$ állandó értékét a független valószínűségi változókra érvényes iterált logaritmus tételben szereplő $\varkappa=2$ értékre (lásd az 1.4. Tételt) szállítja le, ráadásul az általánosabb (3.2) alakban.

3.2. Tétel (GAPOSKIN [18]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* NEMR, *a* $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra pedig*

$$C_n \to \infty \quad \text{és} \quad c_n = o\left\{\frac{C_n}{\sqrt{\log\log C_n}}\right\} \quad (n \to \infty), \tag{3.3}$$

akkor (3.2) *fennáll* $\varkappa=2$*-vel.*

Vegyük észre, hogy egyenletes korlátosság esetében az 1.4. Tételben szereplő (1.10) feltétel azonos (3.3)-mal.

Megjegyezzük, hogy a 3.2. Tétel bizonyítása már korábban előfordul MÓRICZ FERENCnél [29] azon hipotézis felhasználásával, hogy ha egy $\{\varphi_k\}$ függvényrendszer olyan tulajdonságú, hogy valamely $r>2$ mellett minden n természetes számra és minden $c_1, c_2, \ldots, c_n$ együtthatósorozatra az

$$\int |s_n(x)|^r \, d\mu(x) \leqq K_r C_n^r$$

egyenlőtlenség fennáll, akkor

$$\int \left(\max_{1\leqq k\leqq n} |s_k(x)|\right)^r d\mu(x) \leqq K_r^* C_n^r$$

is fennáll, ahol K_r és K_r^* állandók. Ez viszont éppen a 2. §-ban említett Erdős—Sztecskin egyenlőtlenség, amely azonban akkor elkerülte a szerző figyelmét.

Egyenletesen korlátos NEMR-ekre a (3.1) állítást $\varkappa=2$-vel V. F. Gaposkinnal egyidejűleg R. J. SERFLING [55] is bebizonyította. További (3.1) típusú állítást bizonyított ALEXITS GYÖRGY [4] is.

Az ilyen irányú kutatásokban S. Takahashi tett lényeges előrelépést, akinek sikerült a NEMR feltevést a sokkal gyengébb MR feltevésre cserélnie.

3.3. Tétel (TAKAHASHI [57]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* MR:

$$|\varphi_k(x)| \leqq M \quad (x\in X;\ k=1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

akkor (3.1) *fennáll* $\varkappa=2M^2$*-tel.*

Itt a $\varkappa=2M^2$ állandó nem a bizonyítás technikai fogyatékosságából ered, hanem éppen ellenkezőleg a probléma lényegéhez tartozik, amit általában nem is lehet javítani. Ezt RÉVÉSZ PÁL [48] következő példája tanúsítja. Legyen $\{r_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ a közismert Rademacher-rendszer a [0, 1] intervallumon. Adott $M>1$-re értelmezzük a $\{\varphi_k\}$ rendszert a következőképpen:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} M r_k(2M^2 x) & \text{ha} \quad x\in\left[0, \dfrac{1}{2M^2}\right], \\ \dfrac{M}{\sqrt{2M^2-1}}\, r_k\left(\dfrac{2M^2x-1}{2M^2-1}\right) & \text{ha} \quad x\in\left(\dfrac{1}{2M^2}, 1\right]. \end{cases}$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy az így konstruált $\{\varphi_k\}$ rendszer multiplikatív, (1.2) és (3.4) fennáll, viszont a független függvényekből álló Rademacher-rendszerre

érvényes az 1.5. Korollárium és emiatt

$$\mu\left[x: \limsup_{n\to\infty} \frac{|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)|}{\sqrt{2M^2 n \log\log n}} = 1\right] = \frac{1}{2M^2}.$$

Később Révész Pál a 3.2. és 3.3. Tételeknek az alábbi közös általánosítását találta.

3.4. Tétel (RÉVÉSZ [49]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* MR, $\{c_k\}$ *olyan együtthatósorozat, amelyre* (3.3) *fennáll, és legyen*

$$T_n(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \varphi_k^2(x)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Értelmezzük tetszőleges $\theta > 1$*-re az* $\{n_k = n_k(\theta)\}$ *sorozatot a*

$$C_{n_k-1}^2 < \theta^k \leqq C_{n_k}^2$$

egyenlőtlenségpárral és tegyük fel, hogy

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{T_{n_k}(x)}{C_{n_k}} > 0 \quad m.m. \tag{3.5}$$

Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{2T_n^2(x)\log\log C_n}} \leqq 1 \quad m.m. \tag{3.6}$$

Sőt Révész Pál ezen eredményét még tovább általánosította, amelyben a multiplikativitást egy gyengébb feltétellel sikerült pótolnia.

3.5. Tétel (RÉVÉSZ [50]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *valószínűségi változók egyenletesen korlátos rendszere, amelyre valamely* K *állandóval az*

$$\left|\int \prod_{k=1}^{n} (1 + \gamma_k \varphi_k(x))\, d\mu(x)\right| \leqq K \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenség minden olyan $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *együtthatósorozatra fennáll, amelyre*

$$|\gamma_k| \leqq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ha a $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra* (3.3) *fennáll és* (3.5) *is érvényes, akkor* (3.6) *fennáll*

A gyenge multiplikativitásra egy másik feltételt Móricz Ferenc talált.

3.6. Tétel (MÓRICZ [33, 36]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *valószínűségi változók egyenletesen korlátos rendszere az* M *korláttal* (lásd (3.4)-et). *Ha minden* r *természetes számra*

$$\|B_r\|_2 = \left\{\sum_{1\leqq k_1<k_2<\ldots<k_r} \left(\int \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}\, d\mu\right)^2\right\}^{1/2} < \infty \tag{3.7}$$

és

$$\limsup_{r\to\infty} \|B_r\|_2^{1/r} = B \tag{3.8}$$

véges, továbbá ha a $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra*

$$C_n \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{3.9}$$

akkor (3.2) *fennáll* $\varkappa = 2(B^2 + M^2)$*-tel.*

A fenti tételek bizonyítása úgy történik, hogy lényegében K. AZUMA [12] gondolatmenetének felhasználásával először egy exponenciális típusú

$$\mu[x:\ |s_n(x)| \geqq t] \leqq K \exp\left(-\frac{t^2}{\varkappa C_n^2}\right) \quad (t>0;\ n=1,2,\ldots)$$

becslést vezetünk le. Innen már minden további feltétel nélkül következtethetünk a részletösszegek burkolófüggvényének eloszlására:

$$\mu[x:\ \max_{1\leqq k\leqq n} |s_k(x)| \geqq t] \leqq \max(K, 81) \exp\left(-\frac{t^2}{5\varkappa C_n^2}\right),$$

amint ezt MÓRICZ FERENC [36]-ban megmutatta.

A fenti exponenciális típusú egyenlőtlenségek lehetővé teszik azt is, hogy jellemezzük a (3.2)-beli konvergencia sebességét. A független esetre megállapított összefüggéseknek szinte kivétel nélkül mindegyike átvihető a (gyenge) multiplikatív esetre is. Példaképpen csak egy eredményt idézünk.

3.7. Tétel (MÓRICZ [33, 36]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *valószínűségi változók tetszőleges rendszere, amely eleget tesz a* (3.4), (3.7) *és* (3.8) *feltételeknek. Ha a* $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra*

$$C_n \to \infty \quad \text{és} \quad c_n = o(C_n) \quad (n \to \infty), \tag{3.10}$$

akkor minden $\theta > 2(B^2+M^2)$*-hez megadható olyan* $\varepsilon=\varepsilon(\theta)>0$ *állandó, hogy*

$$\mu\left[x:\ \sup_{k\geqq n} \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{\theta C_n^2 \log\log C_n}} \geqq 1\right] = O\left\{\frac{1}{(\log C_n)^{\varepsilon}}\right\} \quad (n\to\infty). \tag{3.11}$$

Nyilvánvaló, hogy (3.11)-ből következik (3.2) fennállása $\varkappa=2(B^2+M^2)$-tel, igaz, hogy csak a kicsit erősebb (3.10) feltétel mellett (szemben a 3.6. Tétel (3.9) feltételével). Egyébként (3.11)-et gyakran a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{c_n^2}{C_n^2 \log C_n} \mu\left[x:\ \sup_{k\geqq n} \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{\theta C_n^2 \log\log C_n}} \geqq 1\right] < \infty$$

alakban fogalmazzák meg, ahol $n\geqq n_0$-ra már $C_n \geqq 4$.

A (3.1)-beli konvergencia sebességének becslésére MR-ek esetében R. J. SERFLINGnél [56] találunk először eredményeket.

A 3.5. és a 3.6. Tételekkel kapcsolatban a következő alapvető probléma vethető fel. Tegyük fel, hogy valószínűségi változók egy $\{\varphi_k\}$ rendszerére fennáll (3.4), továbbá minden r természetes számra és minden $1\leqq k_1<k_2<\ldots<k_r$ egész számokból álló rendszerre

$$\int \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}\,d\mu = 0 \tag{3.12}$$

ha r páratlan, míg

$$\left|\int \varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\ldots\varphi_{k_r}\,d\mu\right| \leqq f\{\max(k_2-k_1, k_4-k_3, \ldots, k_r-k_{r-1})\} \tag{3.13}$$

ha r páros, ahol $f(n)$ olyan nemnegatív függvény, amelyre $f(n)\downarrow 0$ $(n\to\infty)$. Kérdés: milyen nagyságrendben kell $f(n)$-nek 0-hoz tartania ahhoz, hogy (3.1) érvényes legyen valamilyen $\varkappa$ állandóval, illetve milyen nagyságrend esetén lehet már konstruálni olyan $\{\varphi_k\}$ rendszert, amely a fentebb felsorolt tulajdonságok mindegyikével rendelkezik és amelyre (3.1) már semmilyen $\varkappa$ állandóval nem áll fenn? A 3.3. Tétel alapján csupán annyit állíthatunk, hogy ha $f(n)\equiv 0$, akkor (3.1) fennáll $\varkappa=2M^2$-tel.

Megemlítjük, hogy EMR-ekre CSÖRGŐ MIKLÓS és D. L. MCLEISH [13, 14, 26] speciálisabb valószínűségszámítási fogalmakat (mint például a feltételes medián fogalma) és módszereket felhasználva bizonyítottak iterált logaritmus tételeket, pontosabban szólva, azoknak a „$\leqq$" részét. Eredményeiknek külön értéket ad, hogy nincs szükség a szóban forgó $\{\varphi_k\}$ rendszerek egyenletes korlátosságára, viszont a bennük szereplő feltételek egy részének teljesülése konkrét esetben nehezen ellenőrizhető.

Befejezésül egy olyan eredményt kívánunk bemutatni, amely az iterált logaritmus tétel „$\geqq$" részét általánosítja a független esetről a multiplikatív esetre.

3.8. Tétel (RÉVÉSZ [47]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* MR, *és ha minden* $r \geqq 1$*-re és minden* $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$*-re*

$$\int \varphi_{k_1}^2 \varphi_{k_2}^2 \ldots \varphi_{k_r}^2 \, d\mu = 1, \tag{3.14}$$

akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\right|}{\sqrt{2n \log\log n}} \geqq 1 \quad m.m.$$

Természetesen igen érdekes lenne itt is a (3.14), illetve az (1.4) feltétel gyengíthetőségét kivizsgálni. A bizonyítás, amely egy Berry—Esseen típusú egyenlőtlenség kétváltozós általánosítására támaszkodik, lényegesen kihasználja mindkét feltételt. Sajnos, további ilyen típusú tételt nem ismerünk.

4. § Központi határeloszlástételek

Az itt ismertetésre kerülő tételek konklúziója az lesz, hogy a $\{\varphi_k\}$ rendszerre kirótt bizonyos feltételek teljesülése esetén minden valós t-re vagy a speciálisabb

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left[x: \frac{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)}{\sqrt{n}} < t\right] = \Phi(t), \tag{4.1}$$

vagy — még a $\{c_k\}$ együtthatósorozatra is kirótt további feltételek mellett — az általánosabb

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left[x: \frac{s_n(x)}{C_n} < t\right] = \Phi(t) \tag{4.2}$$

határérték reláció érvényes, ahol

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du \quad (-\infty < t < \infty)$$

a 0 várható értékű és 1 szórású normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Az első központi határeloszlástételt multiplikatív rendszerekre szintén Révész Pál közölte 1965-ben.

4.1. Tétel (RÉVÉSZ [42]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* NEMR, *akkor* (4.1) *fennáll.*

Általános $\{c_k\}$ együtthatósorozat esetére ezt a tételt Móricz Ferenc terjesztette ki.

4.2. Tétel (Móricz [29]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* NEMR, *a* $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra pedig*

$$C_n \to \infty \quad \text{és} \quad c_n = o(C_n) \quad (n \to \infty), \tag{4.3}$$

akkor (4.2) *fennáll.*

A további kutatások egyrészt az egyenletes korlátosság feltevésének kiküszöbölésére irányultak. Ez először V. F. Gaposkinnak sikerült, aki ráadásul szükséges és elegendő feltétellel tudta jellemezni a központi határeloszlástétel érvényességét NEMR-ekre.

4.3. Tétel (Gaposkin [19]). *Ha* $\{\varphi_k\}$ NEMR, *a* $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra pedig* (4.3) *fennáll, akkor* (4.2) *érvényességének az a szükséges és elegendő feltétele, hogy* $\{\varphi_k^2\}$ *az* $L(X, \mathcal{S}, \mu)$*-beli gyenge konvergencia értelmében tartson* 1*-hez.*

Megjegyezzük, hogy V. F. Gaposkin (4.2)-nél általánosabban azt mutatta meg, hogy minden pozitív mértékű E halmazra

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left[x \in E: \frac{s_n(x)}{C_n} < t\right] = \mu(E)\Phi(t) \quad (-\infty < t < \infty),$$

majd a 4.3. Tételből az alábbi következményt vezette le, amely speciális esetként a 4.2. Tételt is tartalmazza.

4.4. Korollárium. *Legyen* $\{\varphi_k\}$ NEMR, *a* $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra pedig álljon fenn* (4.3). *Ha valamely* $p>2$*-re*

$$\int |\varphi_k|^p \, d\mu \leqq M \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

vagy $p=\infty$*-re*

$$|\varphi_k(x)| \leqq M \quad (x \in X;\ k = 1, 2, \ldots),$$

akkor (4.2) *fennáll.*

A kutatások másrészt a normáltan erős multiplikativitás feltevésének gyengítésére irányultak.

4.5. Tétel (Révész [44]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* MR, *amelyre*

$$\int \varphi_k^2 \varphi_l^2 \, d\mu = \int \varphi_k^2 \, d\mu = 1 \quad (k \neq l;\ k, l = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Ha

$$C_n \to \infty \quad (n \to \infty) \quad \text{és} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n^4}{C_n^4} \log^2 n < \infty,$$

akkor (4.2) *fennáll.*

Ezt általánosítja a következő

4.6. Tétel (Móricz [30]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *egyenletesen korlátos* MR, *amely eleget tesz* (4.4)*-nek. Ha a* $\{c_k\}$ *együtthatósorozatra* (4.3) *fennáll, akkor* (4.2) *is fennáll.*

Az alábbi tétel egyidejűleg gyengíti mind az egyenletes korlátosság, mind a NEMR feltételét, és a Lindeberg-féle feltétel segítségével ad elegendő feltételt a központi határeloszlástétel fennállására.

4.7. Tétel (KOMLÓS [22])[4]. *Legyen* $\{\varphi_k\}$ MR, *amelyre*

$$\int \varphi_k^2 \varphi_l^2 \, d\mu = \int \varphi_k^2 \, d\mu \int \varphi_l^2 \, d\mu \quad (k \neq l;\ k, l = 1, 2, \ldots), \tag{4.5}$$

továbbá minden $r \geqq 1$*-re és minden* $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$*-re*

$$\int \varphi_{k_1}^2 \varphi_{k_2}^2 \ldots \varphi_{k_r}^2 \, d\mu \leqq K^r \int \varphi_{k_1}^2 \, d\mu \int \varphi_{k_2}^2 \, d\mu \ldots \int \varphi_{k_r}^2 \, d\mu, \tag{4.6}$$

ahol K *állandó. Ha az* (1.13) *Lindeberg-féle feltétel teljesül a* $c_1 = c_2 = \ldots = 1$ *esetben, akkor* (4.1) *fennáll.*

A 4.7. Tétel azt mutatja, hogy a korlátossági feltétel multiplikatív rendszerek esetében lényegében ugyanolyan mértékig gyengíthető, mint független rendszerek esetében.

A fenti tételek mindegyikének bizonyítása a karakterisztikus függvények (vi. az eloszlásfüggvények Fourier-transzformáltjainak) elméletét használja fel. Komlós János egy külön tételben össze is foglalta a bizonyítás lényeges lépéseit.

4.8. Tétel (KOMLÓS [22])[5]. *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *valószínűségi változók tetszőleges rendszere és* $\{c_k\}$ *egy* (4.3) *tulajdonságú együtthatósorozat. Ha*

$$\frac{T_n^2(x)}{C_n^2} = \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \varphi_k^2(x) \to 1 \quad \textit{mértékben} \quad (n \to \infty), \tag{4.7}$$

minden valós t*-re*

$$\lim_{n \to \infty} \int \prod_{k=1}^{n} \left(1 - it \frac{c_k}{C_n} \varphi_k(x)\right) d\mu(x) = 1 \quad (i = \sqrt{-1}), \tag{4.8}$$

és minden valós t*-re létezik olyan* $K(t)$ *állandó, amellyel*

$$\int \left| \prod_{k=1}^{n} \left(1 - it \frac{c_k}{C_n} \varphi_k(x)\right) \right| d\mu \leqq K(t) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.9}$$

akkor (4.2) *fennáll.*

Egyrészt, a Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával egyszerűen megmutatható, hogy (4.9) tetszőleges $\{c_k\}$-ra fennáll, ha létezik olyan M állandó, hogy minden $r \geqq 1$-re és minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re

$$\int \varphi_{k_1}^2 \varphi_{k_2}^2 \ldots \varphi_{k_r}^2 \, d\mu \leqq M^{2r}, \tag{4.10}$$

speciálisan ha $\{\varphi_k\}$ egyenletesen korlátos rendszer az M korláttal (lásd [24]-ben).

Másrészt, ha $\{\varphi_k\}$ rendelkezik a (4.4) tulajdonsággal és

$$\int \varphi_k^4 \, d\mu \leqq M \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$\{c_k\}$-ra pedig (4.3) fennáll, akkor (4.7) is fennáll (lásd [30]-ban).

Azt, hogy a (4.4), illetve (4.5) feltétel nem teljesen hagyható el a központi határeloszlástétel bizonyításában, W. KRATZ és R. TRAUTNER [24] következő példája mutatja. Legyen $\{\psi_k(x)\}$ tetszőleges egyenletesen korlátos MR a [0, 1] intervallumon,

[4] Az eredeti megfogalmazásban $\{\varphi_{n,k}\colon k = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ valószínűségi szériа szerepel. Mi itt az egyöntetűség kedvéért mondjuk ki a tételt $\{\varphi_k\}$ sorozatra.

[5] Valójában a 4.8. Tétel csak a $c_1 = c_2 = \ldots = 1$ esetre van kimondva [22]-ben. Az általános esetre vonatkozólag lásd [24]-et.

amely még az (1.2) és (4.4) feltételeknek is eleget tesz. Ekkor $\{\psi_k\}$-ra a 4.6. Tétel szerint (4.1) fennáll. Értelmezzük a $\{\varphi_k\}$ rendszert a következőképpen:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\psi_k(2x) & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\{\varphi_k\}$ szintén egyenletesen korlátos MR, amely kielégíti (1.2)-t, viszont (4.4)-et már nem. Nyilvánvaló, hogy $\{\varphi_k\}$-ra a központi határeloszlástétel nem lehet igaz.

Harmadrészt, a (4.8) feltétel bizonyítása a multiplikativitás kihasználásával történik. W. Kratz és R. Trautner bizonyítottak először központi határeloszlástételeket gyengén multiplikatív rendszerekre. Legélesebb eredményük a következő

4.9. Tétel (KRATZ—TRAUTNER [24]). *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *valószínűségi változók tetszőleges rendszere, amely kielégíti* (1.2)*-t,* (4.10)*-et és* (4.7)*-et egy olyan* $\{c_k\}$ *együtthatósorozattal, amelyre* (4.3) *fennáll. Ha minden* $r \geqq 1$*-re*

$$\|B_r\|_2^2 = \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r} \left(\int \varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \ldots \varphi_{k_r} d\mu\right)^2 < \infty$$

és

$$\|B_r\|_2^{1/r} = o\left(\sqrt{r}\right) \quad (r \to \infty),$$

akkor (4.2) *is fennáll.*

Itt szintén felvethető az a probléma, amit az iterált logaritmus tétel kiterjeszthetőségével kapcsolatban az előző §-ban már felvetettünk. Nevezetesen, legyen $\{\varphi_k\}$ valószínűségi változók tetszőleges rendszere, amelyre (1.2), (4.10) (vagy esetleg (4.6)) és a $c_1 = c_2 = \ldots = 1$ speciális esetben (4.7), továbbá, minden $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$-re páratlan r esetén (3.12), páros r esetén pedig (3.13) fennáll, ahol $f(n)$ olyan nemnegatív függvény, amelyre $f(n) \downarrow 0$ $(n \to \infty)$. Kérdés: milyen nagyságrendben kell $f(n)$-nek 0-hoz tartania ahhoz, hogy (4.1) fennálljon, illetve mekkora nagyságrend esetén lehet már konstruálni olyan $\{\varphi_k\}$ rendszert, amely az összes fentebb felsorolt tulajdonsággal rendelkezik és amelyre (4.1) már nem áll fenn? A 4.9 Tétel alapján csak az állítható, hogy ha $f(n) \equiv 0$, akkor (4.1) fennáll.

Befejezésül megemlítjük, hogy az utóbbi időben már egy olyan dolgozat [51] is megjelent, amely a központi határeloszlástételben a konvergencia sebességére nyújt felvilágosítást, de a nyert nagyságrend a $c_1 = c_2 = \ldots = 1$ speciális esetben lényegesen rosszabb, mint a független esetre érvényes $O\left(1/\sqrt{n}\right)$ nagyságrend. A normális eloszlástól való eltérés $\sup_t |\mu[x: s_n(x)/C_n < t] - \Phi(t)|$ nagyságrendjének kivizsgálása még a jövő feladatát képezi.

IRODALOM

[1] G. ALEXITS, Sur la sommabilité des séries orthogonales, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, *4* (1953), 181—188.

[2] G. ALEXITS, *Convergence of orthogonal series,* Pergamon Press — Akadémiai Kiadó (Budapest, 1961).

[3] G. ALEXITS, On the convergence of strongly multiplicative orthogonal series, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, *20* (1969), 245—251.

[4] G. ALEXITS, Remark on the law of the iterated logarithm, *Studia Sci. Math. Hungar.*, *5* (1970), 137—139.

[5] G. Alexits, Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität, *Mitt. Math. Giessen, 92* (1971), 1—10.
[6] G. Alexits, On the convergence of function series, *Acta Sci. Math., 34* (1973), 1—9.
[7] G. Alexits and F. Schipp, On the absolute convergence of certain function series, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 30* (1977), 333—339.
[8] G. Alexits and A. Sharma, On the convergence of multiplicatively orthogonal series, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 22* (1971), 257—266.
[9] G. Alexits and A. Sharma, The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series, *Acta Sci. Math., 33* (1972), 1—10.
[10] G. Alexits and A. Szép, On series of product functions, *Periodica Math. Hungar., 3* (1973), 37—39.
[11] G. Alexits and K. Tandori, Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen, *Annales Univ. Sci. Budapest, 3—4* (1960/61), 15—18.
[12] K. Azuma, Weighted sums of certain dependent random variables, *Tôhoku Math. J., 19* (1967), 357—367.
[13] M. Csörgő, On a law of iterated logarithm for strongly multiplicative systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 21* (1970), 315—321.
[14] M. Csörgő and D. L. McLeish, On conditional medians and a law of the iterated logarithm for strongly multiplicative systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 29* (1977), 309—311.
[15] P. Erdős, On the convergence of trigonometric series, *J. Math. and Phys.* (Massachusetts Institute of Technology), *22* (1943), 37—39.
[16] В. Ф. Гапошкин, Лакунарные ряды и независимые функции, *Успехи матем. наук, 21* (6) (166), 3—82.
[17] В. Ф. Гапошкин, Замечание к одной работе П. Ревеса о мультипликативных системах функций, *Матем. заметки, 1* (1967), 653—656.
[18] В. Ф. Гапошкин, К закону повторного логарифма для сильно мультипликативных систем, *Теория вероятностей и ее применем., 14* (1969), 511—516.
[19] В. Ф. Гапошкин, Центральная предельная теорема для сильно мультипликативных систем функций, *Матем. заметки, 6* (1969), 443—450.
[20] В. Ф. Гапошкин, О сходимости рядов по слабо мультипликативным системам функций, *Матем. сб., 89* (1972), 355—365.
[21] J. Komlós, On the series $\sum c_k \varphi_k$, *Studia Sci. Math. Hungar., 7* (1972), 451—458.
[22] J. Komlós, A central limit theorem for multiplicative systems, *Canad. Math. Bull., 16* (1973), 67—73.
[23] J. Komlós and P. Révész, Remark to a paper of Gapoškin, *Acta Sci. Math., 33* (1972), 237—241.
[24] W. Kratz and R. Trautner, Zum Gültigkeitsbereich des zentralen Grenzwertsatzes und des Gesetzes der grossen Zahlen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 29* (1977), 55—66.
[25] M. Longnecker and R. J. Serfling, Moment inequalities for S_n under general dependence restrictions with applications, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 43* (1978), 1—21.
[26] D. L. McLeish, An invariance principle for strongly multiplicative sequences, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 26* (1975), 81—85.
[27] D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil Math. Moscou* (Math. Sbornik), *3* (1938), 103—118.
[28] Ф. Мориц, О безусловной сходимости рядов по системе Хаара, *Изв. АН СССР*, серия матем., *27* (1963), 1229—1238.
[29] F. Móricz, Inequalities and theorems concerning strongly multiplicative systems, *Acta Sci. Math., 29* (1968), 115—136.
[30] F. Móricz, The central limit theorem for multiplicative systems, *Acta Sci. Math., 31* (1970), 43—51.
[31] F. Móricz, On divergence and absolute convergence of series arising from strongly multiplicative orthogonal functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 22* (1971), 15—21.
[32] F. Móricz, On the convergence properties of weakly multiplicative systems, *Acta Sci. Math., 38* (1976), 127—144.
[33] F. Móricz, The law of the iterated logarithm and related results for weakly multiplicative systems, *Analysis Math., 2* (1976), 211—229.
[34] F. Móricz, Moment inequalities and the strong laws of large numbers, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 35* (1976), 299—314.
[35] Ф. Мориц, Асимптотическое поведение рядов по слабо мультипликативным системам, *Труды Международной конференции по теории приближения функций* (Калуга, 1975); 261—266, Наука (Москва, 1977).
[36] F. Móricz, Exponential estimates for the maximum of partial sums. I (Sequences of rv's), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 33* (1979), 159—167.

[37] F. MÓRICZ, Exponential estimates for the maximum of partial sums. II (Random fields), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (megjelenés alatt).
[38] F. MÓRICZ, Multiparameter strong laws of large numbers. II (Higher order moment restrictions), *Acta Sci. Math.* (megjelenés alatt).
[39] C. J. PRESTON, On the convergence of multiplicatively orthogonal series, *Proc. Amer. Math. Soc., 28* (1971), 453—455.
[40] RÉNYI ALFRÉD, *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1966).
[41] RÉVÉSZ PÁL, Ortogonalitás és függetlenség, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., 15* (1965), 411—425.
[42] P. RÉVÉSZ, Some remarks on strongly multiplicative systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16* (1965), 441—446.
[43] P. RÉVÉSZ, A convergence theorem of orthogonal series, *Acta Sci. Math., 27* (1966), 253—260.
[44] RÉVÉSZ PÁL, *Doktori értekezés* (Budapest, 1967).
[45] P. RÉVÉSZ, *The laws of large numbers,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1967).
[46] P. RÉVÉSZ, M-mixing systems. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 20* (1969), 431—442.
[47] P. RÉVÉSZ, The law of the iterated logarithm for multiplicative systems, *Indiana Univ. Math. J., 21* (1972), 557—564.
[48] P. RÉVÉSZ, A note to a paper of S. Takahashi, *Studia Sci. Math. Hungar., 7* (1972), 25—26.
[49] P. RÉVÉSZ, A new law of the iterated logarithm for multiplicative systems, *Acta Sci. Math., 34* (1973), 349—358.
[50] P. RÉVÉSZ, A law of the iterated logarithm for weakly multiplicative systems and its applications, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 25* (1974), 425—433.
[51] Ш. Шарахметов, Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для сильно мультипликативной системы функций, *Вероятностн. процессы и мат. стат.* (Ташкент, 1978), 178—182.
[52] F. SCHIPP, Über die Konvergenz von Reihen nach Produktsysteme, *Acta Sci. Math., 35* (1973), 13—16.
[53] F. SCHIPP und H. TÜRNPU, Über schwach multiplikative Systeme, *Annales Univ. Sci. Budapest, 17* (1974), 91—96.
[54] Ф. Шипп и Х. Тюрнпу, Сходимость почти всюду функциональных рядов по системам произведения, *Acta et Comment. Univ. Tartuensis, 14* (1974), 189—192.
[55] R. J. SERFLING, Probability inequalities and convergence properties for sums of multiplicative random variables, Florida State University, *Statistics Report* M 151 (1969).
[56] R. J. SERFLING, Convergence properties of S_n under moment restrictions, *Ann. Math. Statist., 41* (1970), 1235—1248.
[57] S. TAKAHASHI, Notes on the law of the iterated logarithm, *Studia Sci. Math. Hungar., 7* (1972), 21—24.
[58] K. TANDORI, Bemerkungen zur Konvergenz der Reihen nach multiplikativen Funktionsystemen, *Acta Sci. Math., 38* (1976), 167—170.
[59] П. Л. Ульянов, О множителях Вейля для безусловной сходимости, *Матем. сб., 60* (1963), 39—62.
[60] A. ZYGMUND, *Trigonometric series.* I (Cambridge, 1959).

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

МОРИЦ ФЕРЕНЦ и РЕВЕС ПАЛ

MULTIPLICATIVE SYSTEMS

F. MÓRICZ and P. RÉVÉSZ

RIESZ MARCEL MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA II.[1]

HORVÁTH JÁNOS

4. *A Bernstein-féle egyenlőtlenségek* [14, 15, 19]. Legyen

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta)$$

egy n-edrendű, valós együtthatós trigonometrikus polinom és $M = \max_{\theta} |T_n(\theta)|$. S. N. Bernstein híres egyenlőtlensége {56, 26. old.; 57} azt mondja ki, hogy

$$|T_n'(\theta)| \leqq nM \tag{33}$$

és, hogy itt a $<$ jel érvényes hacsak $T_n(\theta)$ nem $M \sin n(\theta - \theta^*)$ alakú.

Bernstein egyenlőtlenségének az ún. legjobb approximáció elméletében jut szerep. Ha f egy 2π szerint periodikus, folytonos függvény a valós számegyenesen, akkor legyen $E_n(f)$ a $\max_{\theta} |f(\theta) - T_n(\theta)|$ kifejezések legnagyobb alsó korlátja midőn T_n befutja az n-edrendű trigonometrikus polinomok halmazát. Legyen másrészt $0 < \alpha < 1$; azt mondjuk, hogy f egy α kitevőjű Lipschitz feltételnek tesz eleget és azt írjuk, hogy $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, ha létezik egy $A > 0$ szám úgy, hogy

$$|f(\theta) - f(\theta')| \leqq A\,|\theta - \theta'|^{\alpha}$$

minden valós θ, θ' számra. D. Jackson 1911-es göttingai disszertációjában bebizonyította, hogy az $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ feltételből következik, hogy $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ midőn $n \to \infty$ {52, 89. §}. Mármost Bernstein azt mutatta ki {56; 57; 52, 91. §}, hogy megfordítva, ha $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, akkor $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ és ennek a tételnek bizonyításában szerepel a (33) egyenlőtlenség.

A Bernstein-féle egyenlőtlenséget Fejér Lipót hozta be a magyar matematikai köztudatba a konjugált trigonometrikus sorokra vonatkozó vizsgálatai kapcsán {78; 81}. Ezekre a vizsgálatokra alább még visszatérek.

Riesz Marcel a [14] és [15] alatt idézett dolgozataiban több bizonyítást ad a Bernstein-féle egyenlőtlenségre. Ezeknek egyrésze a $T_n(\theta)$ trigonometrikus polinom-

[1] Az első közlemény megjelent a Matematikai Lapok 26. évfolyamában, 11—37 old. A szögletes zárójelben levő számok Riesz Marcel dolgozatainak az első közlemény végén található jegyzékére utalnak, míg a kapcsos zárójelekben levő számok egyéb szerzők műveire, melyeknek jegyzéke részben (1—49) az első közlemény végén, részben (50—143) a jelen közlemény végén található.

ra vonatkozó következő interpolációs formulán alapszik. Osszuk fel a $[0, 2\pi]$ intervallumot $2n$ egyenlő részre és legyenek $\theta_1, \ldots, \theta_{2n}$ ezen részintervallumok középpontjai, azaz legyen

$$\theta_\nu = (2\nu-1)\frac{\pi}{2n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Ekkor fennáll a

$$T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta_\nu)(-1)^\nu \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} \tag{34}$$

összefüggés. Erre az interpolációs formulára Riesz két bizonyítást is ad [15]. Az elsőt közülük, amelyet Riesz csak vázol, akarom itt részletezni. Először is

$$(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} = (-1)^\nu \cos n(\theta-\theta_\nu+\theta_\nu) \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} =$$

$$= (-1)^\nu [\cos n(\theta-\theta_\nu)\cos n\theta_\nu - \sin n(\theta-\theta_\nu)\sin n\theta_\nu] \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2}.$$

Mivel $\cos n\theta_\nu = 0$, $\sin n\theta_\nu = (-1)^{\nu-1}$, azt kapjuk, hogy

$$(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} = \sin n(\theta-\theta_\nu) \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2}$$

$$= \sin n(\theta-\theta_\nu)\frac{\cos\dfrac{\theta-\theta_\nu}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\theta_\nu}{2}}$$

(35)

$$= \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\theta-\theta_\nu)}{\sin\dfrac{\theta-\theta_\nu}{2}} - \cos n(\theta-\theta_\nu)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos(\theta-\theta_\nu) + \ldots + \cos n(\theta-\theta_\nu)\right) - \cos n(\theta-\theta_\nu),$$

ahol felhasználtuk a Dirichlet-féle integrálhoz vezető identitást {35, 184. § (1**), I. köt., 311 old.}. Másrészt a

$$T_n(\theta_\nu) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos j\theta_\nu + b_j \sin j\theta_\nu)$$

értékeket felhasználva látjuk, hogy (34) jobboldala a következő kifejezéssel azonos:

$$a_n \cos n\theta + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{2n} (a_j \cos j\theta_\nu + b_j \sin j\theta_\nu)(-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2}. \tag{36}$$

Ha k egy egész szám, $0 \leqq k \leqq n$, akkor

$$\cos j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \frac{1}{4}(e^{ij\theta_\nu}+e^{-ij\theta_\nu})(e^{ik(\theta-\theta_\nu)}+e^{-ik(\theta-\theta_\nu)}) =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{i(j-k)\theta_\nu+ik\theta}+e^{-i(j+k)\theta_\nu+ik\theta}+e^{i(j+k)\theta_\nu-ik\theta}+e^{-i(j-k)\theta_\nu-ik\theta})$$

és így az $1 \leqq j \leqq n-1$ esetben

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq j, \\ \frac{1}{4}2n(e^{ij\theta}+e^{-ij\theta}) = n\cos j\theta & \text{ha} \quad k = j, \end{cases}$$

ha $j=n$, akkor $\cos j\theta_\nu = \cos n\theta_\nu = 0$ minden ν értékre és így

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos n\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = 0, \quad 0 \leqq k \leqq n,$$

míg a $j=0$ esetben

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq 0, \\ 2n & \text{ha} \quad k = 0. \end{cases}$$

Ebből és a (35) képletből folyik, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \cos j\theta_\nu (-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} = \begin{cases} 2n\cos j\theta & \text{ha} \quad 0 \leqq j < n, \\ 0 & \text{ha} \quad j = n. \end{cases} \tag{37}$$

Hasonlóképpen

$$\sin j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \frac{1}{4i}(e^{ij\theta_\nu}-e^{-ij\theta_\nu})(e^{ik(\theta-\theta_\nu)}+e^{-ik(\theta-\theta_\nu)}) =$$

$$= \frac{1}{4i}(e^{i(j-k)\theta_\nu+ik\theta}-e^{-i(j+k)\theta_\nu+ik\theta}+e^{i(j+k)\theta_\nu-ik\theta}-e^{-i(j-k)\theta_\nu-ik\theta})$$

és így a $0 \leqq j \leqq n-1$ esetben

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \sin j\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq j, \\ \frac{1}{4i}2n(e^{ij\theta}-e^{-ij\theta}) = n\sin j\theta & \text{ha} \quad k = j, \end{cases}$$

míg a $j=n$ esetben

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \sin n\theta_\nu \cos k(\theta-\theta_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq n, \\ 2n\sin n\theta & \text{ha} \quad k = n. \end{cases}$$

Ebből ismét (35) segítségével folyik, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \sin j\theta_\nu (-1)^\nu \cos n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_\nu}{2} = 2n\sin j\theta. \tag{38}$$

A (37) és (38) azonosságokat a (36) képletbe behelyettesítve látjuk, hogy (34) jobboldala tényleg $T_n(\theta)$-val egyenlő.

A (34) interpolációs formulából deriválás útján nyerjük, hogy

$$T_n'(0) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} \tag{39}$$

és ebből egy eltolás segítségével

$$T_n'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta+\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}}. \tag{40}$$

A (39) formulát a $T_n(\theta)=\sin n\theta$ polinomra alkalmazva és tekintetbe véve, hogy $\sin n\theta_\nu=(-1)^{\nu-1}$ látjuk, hogy

$$\frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} = n.$$

Ebből S. N. Bernstein (33) alatti egyenlőtlensége azonnal következik, ugyanis

$$|T_n'(\theta)| \leqq \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} |T_n(\theta+\theta_\nu)| \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}} \leqq nM.$$

Továbbá ha $T_n'(\theta^*)=nM$ valamely θ^* pontban, akkor szükségképpen $T_n(\theta^*+\theta_\nu)=(-1)^{\nu-1}M$ a $\nu=1, 2, \ldots, 2n$ értékekre. Eszerint az n-edrendű

$$U(\theta) = M \sin n(\theta-\theta^*) - T_n(\theta)$$

trigonometrikus polinom eltűnik a $\theta^*+\theta_\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots, 2n$) pontokban. Mivel azonban mind a $\sin n(\theta-\theta^*)$, mind a $T_n(\theta)$ polinomnak extremuma van ezekben a pontokban, a zérushelyek mind másodrendűek, amiből azonnal folyik {35, 427. §, II. köt., 82. old.}, hogy U azonosan eltűnik. Hasonló a bizonyítás, ha $T_n'(\theta^*)=-nM$ valamely θ^* pontban.

Jegyezzük meg, hogy a (39) alatti képlet közvetlenül, azaz nem a (34)-es interpolációs formulán keresztül, is belátható. Riesz két ilyen bizonyítást is ad [14], amelyek közül az egyik megtalálható Szász Pál tankönyvében {35, 433. §, II. köt., 95. old.}.

Alkalmazzuk a (34) interpolációs formulát az

$$S_n(\theta) = b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots + b_n \sin n\theta$$

n-edrendű sinus-polinomra. Figyelembe véve, hogy $\theta_\nu+\theta_{2n-\nu+1}=2\pi$ és ennek folytán

$$(-1)^\nu S_n(\theta_\nu) = (-1)^{2n-\nu+1} S_n(\theta_{2n-\nu+1})$$

valamint

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta-\theta_\nu}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta-\theta_{2n-\nu+1}}{2} = \frac{-\sin\theta}{\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos\theta_\nu)},$$

az

$$S_n(\theta) = \frac{\sin\theta \cos n\theta}{n} \sum_{\nu=1}^{n} S_n(\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{\cos\theta-\cos\theta_\nu} \tag{41}$$

kifejezéshez jutunk, amelyik a Lagrange-féle interpolációs formula {35, 387. §, II. köt., 3. old.} alapján is azonnal belátható. Ebből folyik a következő állítás:

Legyen $M=\max_{\nu}|S_n(\theta_\nu)|\leqq\max_{\theta}|S_n(\theta)|$. *Ekkor a* $-\frac{\pi}{2n}<\theta<\frac{\pi}{2n}$ *és* $\pi-\frac{\pi}{2n}<\theta<\pi+\frac{\pi}{2n}$ *intervallumokban fennáll az*

$$\left|\frac{S_n(\theta)}{\sin\theta}\right|\leqq M\left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right|$$

egyenlőtlenség és itt a $<$ *jel érvényes, hacsak nem* $S_n(\theta)=\pm M\sin n\theta$.

Valóban, a (41) formulát az $S_n(\theta)=\sin n\theta$ polinomra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos n\theta}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta-\cos\theta_\nu}$$

és így figyelembe véve, hogy a jelzett intervallumokban a $\cos\theta-\cos\theta_\nu$ kifejezéseknek ugyanaz az előjelük,

$$\left|\frac{S_n(\theta)}{\sin\theta}\right|\leqq\frac{|\cos n\theta|}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|S_n(\theta_\nu)|\frac{1}{|\cos\theta-\cos\theta_\nu|}\leqq$$

$$\leqq\frac{|\cos n\theta|}{n}M\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta-\cos\theta_\nu}\right|=M\left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right|.$$

Amennyiben

$$\frac{S_n(\theta^*)}{\sin\theta^*}=\pm M\left|\frac{\sin n\theta^*}{\sin\theta^*}\right|$$

a jelzett intervallumok valamely θ^* pontjában, úgy $S_n(\theta_\nu)=\pm(-1)^{\nu-1}M$ és így a $\pm M\sin n\theta-S_n(\theta)$ sinus-polinomnak $2n$ zérushelye van a $(0, 2\pi)$ nyílt intervallumban. Mivel a polinom a $\theta=0$ helyen is eltűnik, következik, hogy azonosan zérus.

A most bebizonyított állítás érdekessége az, hogy segítségével könnyen belátható A. A. Markov egyenlőtlensége {35, 434. §, II. köt., 97. old.}:

Legyen

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

egy valós együtthatós, n-edfokú racionális polinom és $M=\max_{-1\leqq x\leqq 1}|P_n(x)|$. *Akkor a* $-1\leqq x\leqq 1$ *zárt szakaszon*

$$|P_n'(x)|\leqq n^2M$$

és itt a $<$ *jel érvényes hacsak nem* $x=\pm1$ *és* $P_n(x)$ *egyenlő* $\pm M\cos n\theta$*-val, ahol* $x=\cos\theta$.

Bizonyítás. Az $x=\cos\theta$ helyettesítés a θ változó $[0, \pi]$ intervallumát átviszi az x változó $[-1, 1]$ intervallumába és $T_n(\theta)=P_n(\cos\theta)$ egy n-edrendű cosinus-polinom, tehát a Bernstein-féle egyenlőtlenség alapján $|T_n'(\theta)|\leqq nM$. Továbbá

$$P_n'(x)=-\frac{T_n'(\theta)}{\sin\theta}.$$

1. Tekintsük előbb a $\frac{\pi}{2n} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ intervallumot. Itten

$$|P_n'(x)| \leqq \frac{nM}{\sin\theta} \leqq \frac{nM}{\sin\frac{\pi}{2n}} < n^2 M$$

mivel $\sin\theta > \frac{\pi}{2}\theta$ midőn $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ és így $\sin\frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}$.

2. A $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2n}$ intervallumban az előző tétel alapján, figyelembe véve, hogy $T_n'(\theta)$ sinuspolinom,

$$|P_n'(x)| = \left|\frac{T_n'(\theta)}{\sin\theta}\right| \leqq nM\left|\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right| \leqq n^2 M,$$

mivel $\sin n\theta < n\sin\theta$ ha $0 < \theta < \frac{\pi}{2n}$. Itt egyenlőség csak akkor állhat, ha $\theta = 0$ és $T_n'(\theta) = \pm nM\sin n\theta$, azaz $T_n(\theta) = \pm M\cos n\theta + C$. Mivel azonban $|T_n(\theta)| \leqq M$, a C konstans csak nulla lehet.

Hasonló a bizonyítás a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumban.

Ahijezer könyvében {52, 74. §} a (40) formulának és a Bernstein-féle egyenlőtlenségnek egy lényeges általánosítása szerepel. Legyen $\sigma > 0$. A $\mathbf{C}$ komplex számsíkon definiált $f(z)$ egész függvényről azt mondjuk, hogy exponenciális típusú és hogy típusa vagy kitevője legfeljebb σ, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található egy $A(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy az

$$|f(z)| \leqq A(\varepsilon)\, e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

egyenlőtlenség minden $z \in \mathbf{C}$ értékre fennáll. Ha ezenkívül f még korlátos a valós tengelyen, akkor bármely valós α számra érvényes a

$$(42) \qquad \sin\alpha \cdot f'(x) - \sigma\cos\alpha \cdot f(x) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} f\left(x + \frac{k\pi - \alpha}{\sigma}\right) \frac{\sin^2\alpha}{(\alpha - k\pi)^2}$$

interpolációs formula. Ebből a formulából következik, hogy amennyiben $M = \sup_x |f(x)|$, úgy

$$|\sin\alpha \cdot f'(x) - \sigma\cos\alpha \cdot f(x)| \leqq \sigma M.$$

Ha meggondoljuk, hogy egy n-edrendű trigonometrikus polinom egy 2π periódusú, n kitevőjű exponenciális típusú egész függvény és figyelembe vesszük a

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(l \cdot 2\pi n + (2\nu - 1)\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{4n^2 \sin^2 (2\nu - 1)\frac{\pi}{4n}}$$

identitást {35, 628. § (10*), II. köt., 547. old.}, akkor látjuk, hogy ilyen trigonometrikus polinomra az $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = n$ választás mellett (42) átmegy a (40) képletbe.

A [15] dolgozat 4. §-ában Riesz egy egészen más, gyökleszámoláson alapuló bizonyítást is ad a Bernstein-féle egyenlőtlenségre. Legyen $\max_{\theta} |T_n'(\theta)| = nL$ és tegyük fel, hogy $L \leqq M$. A $[0, 2\pi)$ félig zárt intervallum valamely θ^* pontjában $|T_n'(\theta^*)| = nL$, például legyen $T_n'(\theta^*) = nL$. Az

$$U(\theta) = L \sin n(\theta - \theta^*) - T_n(\theta)$$

n-edrendű trigonometrikus polinom a

$$\theta^* + \theta_\nu = \theta^* + (2\nu - 1)\frac{\pi}{2n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

pontokban rendre:

$$U(\theta^* + \theta_1) \geqq 0,\ U(\theta^* + \theta_2) \leqq 0, \ldots, U(\theta^* + \theta_{2n}) \leqq 0.$$

Tegyük most fel, hogy U nem azonosan zérus. Ekkor léteznek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ pontok úgy, hogy

$$\theta^* + \theta_\nu < \xi_\nu < \theta^* + \theta_{\nu+1} \quad (\nu = 1, \ldots, 2n-1), \quad \theta^* + \theta_{2n} < \xi_{2n} < \theta^* + \theta_1 + 2\pi$$

valamint

$$U'(\xi_1) < 0,\ U'(\xi_2) > 0, \ldots, U'(\xi_{2n}) > 0.$$

Eszerint az n-edrendű $U'(\theta)$ trigonometrikus polinomnak $2n$ különböző gyökhelye van a $[0, 2\pi)$ intervallumban. De $U'(\theta^*) = 0$ és mivel mind az $nL\cos(\theta - \theta^*)$, mind a $T_n'(\theta)$ függvénynek maximuma van a θ^* pontban, még $U''(\theta^*) = 0$. Így az $U'(\theta)$ trigonometrikus polinomnak, multiplicitással számolva, legalább $2n+1$ gyöke van $[0, 2\pi)$-ben, ami lehetetlen. Tehát $U(\theta) \equiv 0$ és $M = L$.

Hangsúlyozni kívánom, hogy a [15] cikkben Riesz Marcel az eddig ismertetett módszerekkel még több más tételt is bebizonyít, de ezek legtöbbjének kimondására nem térek ki. A cikk utolsó paragrafusában Fejér egy tétele lesz a (40) alatti képlet segítségével lokalizálva. Fejér a már említett {78} dolgozatban többek közt azt mutatja ki, hogy ha a (12) hatványsor a $|z| < 1$ körlemezben $f(z)$-hez konvergál, ha $f(z)$ a $|z| \leqq 1$ zárt körlemezen folytonos és ha (12) valós része egyenletesen konvergens a $|z| = 1$ körön, akkor (12) képzetes része is egyenletesen konvergens ezen a körön. Riesz mármost a következő állítást bizonyítja be: Legyen $f(z)$ a (12) hatványsor összege a $|z| < 1$ körlemezen és tegyük fel, hogy $f(z)$ folytonos a $0 \leqq r \leqq 1$, $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ zárt körcikkben, ahol $z = re^{i\theta}$. Ha (12) valós része a $|z| = 1$ kör $\theta_1 < \theta < \theta_2$ íve minden zárt alívén egyenletesen konvergens, akkor ugyanez érvényes (12) képzetes részére is. Zygmund {47, 95. old.} más úton bizonyítja be ezt a tételt és egy lényeges általánosítása Kuttnertól származik {49, XIII. fej., (5.1)}.

A (40) képlet egy másik következménye az, hogy ha a $P_n(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom a $|z| \leqq 1$ körlemezen eleget tesz az $|P_n(z)| \leqq 1$ egyenlőtlenségnek, akkor ugyancsak a $|z| \leqq 1$ körlemezen a deriváltjára fennáll, hogy $|P_n'(z)| \leqq n$. Erre az állításra Szász Ottó {132} olyan egyszerű bizonyítást adott, hogy azt Fejér Lipót jelentésében {80}, melyet abból az alkalomból írt, hogy a König Gyula jutalmat Szász Ottónak ítélték oda, teljes egészében leközli. Szegő Gábor továbbmenve azt bizonyította be, hogy már, ha $P_n(z)$ valós része tesz eleget a $|\mathrm{Re}\, P_n(z)| \leqq 1$ egyenlőtlenségnek $|z| \leqq 1$-ban, akkor is igaz, hogy $|P_n'(z)| \leqq n$ ugyanott. Arra a gyengébb állításra, amelynél a Bernstein- vagy Szegő-féle egyenlőtlenségben n helyett $2n$ áll a jobboldalon, Fejér Lipót {79} adott nagyon egyszerű bizonyítást, amely azon alapszik, hogy a Fourier-sor Fejér-féle összegei a kifejtett függvény maximuma és minimuma közt vannak.

Turán Pál {140} a Markov- és Riesz-féle egyenlőtlenségek ellenlábasait állította fel, amennyiben kimutatta, hogy ha $P_n(x)$ összes gyöke a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban van, akkor

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |P_n'(x)| \geqq \frac{n}{2} \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |P_n(x)|,$$

míg ha $P_n(z)$ összes gyöke a $|z| \leqq 1$ körlemezen van, akkor

$$\max_{|z| \leqq 1} |P_n'(z)| \geqq \frac{\sqrt{n}}{6} \max_{|z| \leqq 1} |P_n(z)|.$$

Riesz Marcel egyik eredményének következménye az, hogy ha az n-edrendű $T_n(\theta)$ trigonometrikus polinomnak a $\theta = \theta_0$ pontban abszolút maximuma van, akkor $T_n(\theta)$ bármely gyökének θ_0-tól való távolsága legalább $\frac{\pi}{2n}$. Ezt a tényt Erdős és Turán ismételten felhasználják, például egy az egyenletes eloszlásra vonatkozó mély tételük bizonyításában {74}. Turán {141} Rieszéhez hasonló módszerrel bebizonyítja, hogy ha az n-edfokú $P_n(z)$ polinom abszolút értéke a $z = 1$ pontban éri el a $|z| \leqq 1$ körlemezen felvett maximumát, akkor $P_n(e^{i\theta}) \neq 0$ midőn $-\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n}$, és ez az eredmény pontos amint azt a $P_n(z) = 1 + z^n$ példa mutatja. Ha $P_n(x)$ a ± 1 pontokban eltűnik, de seholsem zérus a $-1 < x < 1$ nyílt intervallumban, akkor Turán {141} pontos határokat kap arra, milyen közel lehetnek a ± 1 pontok azokhoz a pontokhoz, amelyekben $|P_n(x)|$ eléri a maximumát.

A [15] cikk végén Riesz Marcel megkérdi, hogy ha a (34) jobboldalán a $T_n(\theta_\nu)$ értékeket egy folytonos f függvény által felvett $f(\theta_\nu)$ értékekkel helyettesítjük, vajon konvergál-e az interpolációs eljárás, midőn $n \to \infty$. Erre a kérdésre Kryloff {110} adott igenlő választ.

A [19] alatt felsorolt cikkben, amelyik ismét két Mittag-Lefflerhez intézett levél kivonata, Riesz Marcel egy másik, ugyancsak S. N. Bernsteintől származó {58} egyenlőtlenségre ad két bizonyítást. Legyen $z = x + iy$ a komplex számsík egy pontja és

(43) $$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi \quad (0 \leqq \psi < 2\pi)$$

a z ponton áthaladó azon ellipszis egyenlete, amelyiknek gyújtópontjai az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pontok, azaz $a^2 - b^2 = 1$. Vezessük be a $\varrho = a + b$ paramétert, akkor

$$a = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho^{-1}), \quad b = \frac{1}{2}(\varrho - \varrho^{-1}).$$

Tekintsünk egy komplex együtthatós, n-edfokú racionális P_n polinomot és legyen $M = \max_{-1 \leqq x \leqq 1} P_n(x)$. Bernstein egyenlőtlensége azt állítja, hogy

$$|P_n(z)| \leqq M \varrho^n.$$

Ez az egyenlőtlenség analitikus függvények polinomapproximációjánál játszik szerepet.

Riesz egyik bizonyítása ma általában használatos {32, III. 270. feladat, 137. és 320. old.} és tőle függetlenül Montel {114, 155—157. old.} is felfedezte. Ez a bi-

zonyítás a maximumelven alapszik, valamint azon a hidrodinamikából ismert tényen, hogy a

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \qquad w = \varrho e^{i\psi}$$

által definiált függvény mind a $|w|<1$ körlemezt, mind annak $|w|>1$ külsejét a $[-1, 1]$ szakasz mentén felhasított z-síkra képezi le konformisan és a $|w|=\varrho$ és $|w|=\varrho^{-1}$ köröket a (43) ellipszisbe viszi át.

A másik bizonyítás Lagrange-féle interpoláción alapul és egyik érdekessége az, hogy itt lép fel talán először egy Landautól származó fogás {32, II. köt., 31—32. old.}. Riesz ugyanis először csak azt bizonyítja, hogy

$$|P_n(z)| \leqq M \frac{\varrho^{n+1}}{\delta},$$

ahol δ a z pontnak a $[-1, 1]$ szakasztól való távolsága. Ha ezt az egyenlőtlenséget a $[P_n(z)]^m$ mn-edfokú polinomra alkalmazzuk, mindkét oldalon m-edik gyököt vonunk és m-mel végtelenhez tartunk, akkor megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

5. *A Riemann-féle sejtés* [18]. Ebben a rövid közleményben Riesz Marcel először is a Riemann-féle zéta-függvényre a következő előállítást találja:

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\zeta(s)} = \int_0^\infty F(x)\, x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)}\, dx,$$

ahol

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{(k-1)!\,\zeta(2k)}.$$

Utána megjegyzi, hogy érvényes az $F(x)=o\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ becslés és végül bebizonyítja, hogy az $F(x)=o\left(x^{\frac{1}{4}+\delta}\right)$ becslés minden $\delta>0$ számra akkor és csak akkor érvényes, ha igaz a híres és máig bebizonyítatlan Riemann-féle sejtés, mely szerint a zéta-függvény gyökei (az ún. triviális $s=-2, -4, \ldots$ gyököktől eltekintve) mind a $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$ egyenesen fekszenek. Ezen eredmény befolyása alatt Hardy és Littlewood egy hasonló szükséges és elégséges feltételt adnak meg {93, 123. és 161. old.; 138, 14.32, 328. old.}. Titchmarsh a következőt jegyzi meg: „Ezeknek a feltételeknek van bizonyos felszínes vonzerejük, mivel explicite csak $\zeta(s)$-nek a $\sigma>1$ félsíkban fekvő pontokban felvett értékeitől függenek; hasznukat azonban még soha senki nem vette".

6. *Riesz Frigyes és Riesz Marcel tétele* [23]. Riesz Marcelnek egyetlen olyan dolgozata, amelyet bátyjával közösen írt, a mezsgyéjén fekszik a komplex változó analitikus függvényei klasszikus elméletének és a valós változójú függvények 1916-ban még új elméletének. A dolgozat főeredményét az 1960-as évek táján nagymértékben általánosították és az ún. absztrakt Riesz F. és M. tétel, Szegő Gábor egy tételének általánosításával együtt, a függvényalgebrák elméletének egyik alaptétele lett. A [23] dolgozat, Riesz Frigyes és Szegő Gábor hamar rákövetkező dolgozataival {122; 133; 123} együtt, a Hardy-féle függvényosztályok elméletének rakta le alapjait.

Riesz Frigyes és Marcel cikkének kiindulópontja ismét Fatou már többször említett doktori disszertációja {12}, amelyiknek egyik klasszikussá vált főeredménye a következő:

Legyen w a $|z|<1$ nyílt egységkörlemezben korlátos és analitikus függvény. Akkor a $|z|=1$ kör majdnem minden $e^{i\theta}$ pontjában létezik az $f(e^{i\theta})=\lim_{r\uparrow 1} w(re^{i\theta})$ *határérték*, azaz azon $e^{i\theta}$ pontok, melyekben a határérték nem létezik, egy Lebesgue-féle értelemben nullmértékű halmazt alkotnak a körön.

Ismeretes, hogy ha egy analitikus függvény egy a regularitási halmaz belsejében levő görbeív mentén eltűnik, akkor a függvény identikusan zérus. Kissé általánosabban, ha $w(z)$ egy tartomány belsejében reguláris és egy a tartomány határán fekvő görbeíven eltűnik, úgy hogy $w(z)$ a tartomány és a görbeív egyesített halmazán folytonos, akkor is igaz az, hogy $w(z)$ azonosan zérus. Fatou mármost azt is bebizonyítja, hogy ha a tételben szereplő $w(z)$ függvény nem azonosan zérus, akkor a $|z|=1$ kör bármelyik ívén azon $e^{i\theta}$ pontok, melyekben $f(e^{i\theta})\neq 0$, egy pozitív mértékű halmazt alkotnak. Sejtésként a következőt mondja ki:

Ha $w(z)$ nem azonosan zérus, akkor $f(e^{i\theta})$ csak egy nullamértékű halmazon tűnhet el.

A Riesz fivérek dolgozatának első eredménye eme sejtés Fatou saját módszereinek továbbfejlesztésével való szép bebizonyítása.

Mielőtt folytatnám Riesz Frigyes és Marcel cikkének ismertetését, szeretném Fatounak a határérték létezésére vonatkozó tételét egy kicsit megvilágítani és ennek kapcsán néhány olyan fogalmat és jelölést bevezetni, amelyekre még szükségünk lesz. Fatou tétele tulajdonképpen nem analitikus, hanem harmonikus függvényekre vonatkozik. Jelölje **D** a nyílt $|z|<1$ körlemezt és **T** a körlemez határát képező $|z|=1$ kört. Ha $1\leqq p<\infty$ és $u(z)$ egy a **D**-ben harmonikus függvény, akkor az

$$\mathfrak{M}_p(r;\, u) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p}$$

kifejezés az r sugár növekvő függvénye {73, 10. old.} és így vagy korlátos marad, vagy $+\infty$-hez tart. Jelölje $h^p(\mathbf{D})$ azon $u(x, y)=u(z)$ függvények halmazát, melyek **D**-ben harmonikusak és melyekre $\mathfrak{M}_p(r;\, u)$ korlátos. A

$$\|u\|_p = \lim_{r\uparrow 1} \mathfrak{M}_p(r;\, u) = \sup_{0\leqq r<1} \mathfrak{M}_p(r;\, u)$$

kifejezés a $h^p(\mathbf{D})$ vektortéren egy normát definiál. Hasonlóképpen $h^\infty(\mathbf{D})$ jelöli azon a **D**-ben harmonikus u függvények terét, melyekre

$$\mathfrak{M}_\infty(r;\, u) = \max_{0\leqq\theta<2\pi} u(re^{i\theta})$$

korlátos, és az esetben

$$\|u\|_\infty = \lim_{r\uparrow 1} \mathfrak{M}_\infty(r;\, u) = \sup_{|z|<1} |u(z)|.$$

Tegyük fel, hogy $1<p\leqq\infty$ és legyen $u\in h^p(\mathbf{D})$. Midőn r a $0\leqq r<1$ intervallumban változik, az $e^{i\theta}\in\mathbf{T}$ pont $u(re^{i\theta})$ függvényei az $L^p(\mathbf{T})$ függvénytér egy korlátos halmazát alkotják. A $p>1$ kikötésből folyik, hogy az ilyen halmazok gyengén relatív kompaktak és így létezik egy $f(e^{i\theta})\in L^p(\mathbf{T})$ függvény, amelyik az $(u(re^{i\theta}))_{0\leqq r<1}$ függvénycsalád gyenge torlódási pontja. Másrészt az u harmonikus függvény kifejthető az

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \tag{44}$$

harmonikus polinomok szerint haladó sorba, ahol

$$r^{|n|}c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Ha r egy alkalmasan választott sorozaton át 1-hez tart, azt kapjuk, hogy

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta, \tag{45}$$

azaz a c_n állandók az $f(e^{i\theta})$ függvény komplex Fourier-koefficiensei. Az $f(e^{i\theta})$ függvény komplex

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \tag{46}$$

Fourier-sorának Abel-féle összegeit éppen a (44) sor definiálja, ahonnan az

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})f(e^{i\psi})\,d\psi \tag{47}$$

előállítást nyerjük, ahol

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}$$

a Poisson-féle mag. Ezenkívül fennáll még a

$$\lim_{r\uparrow 1}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})-f(e^{i\theta})|^p\,d\theta = 0$$

erős konvergencia {102, 32—33. old.; 49, IV. fej., (6.17), 150. old.}.

A helyzet lényegesen megváltozik midőn $p=1$, azaz u a $h^1(\mathbf{D})$ függvénytérbe tartozik, mivel az $L^1(\mathbf{T})$ tér korlátos halmazai nem szükségképpen gyengén relatív kompaktak. Ebben az esetben azt használjuk ki, hogy minden integrálható f függvény egy folytonos lineáris alakot (operációt) definiál a folytonos függvények $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ terén: valóban legyen

$$L_f(\varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta, \quad \varphi\in\mathscr{C}(\mathbf{T}),$$

akkor

$$|L_f(\varphi)| \leqq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta \cdot \max_{0\leqq\theta<2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|.$$

Riesz Frigyes alapvető értelmében, minden a $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ téren értelmezett folytonos lineáris alaknak megfelel egy korlátos változású $F(e^{i\theta})$ függvény {135, VI. 1.3, 188. old.}. Az $F(e^{i\theta})$ függvény két növekvő függvény különbsége: $F(e^{i\theta})=F_1(e^{i\theta})-F_2(e^{i\theta})$, így ha a μ_1, μ_2 mértékeket a

$$\mu_j(\{e^{i\theta};\ \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2\}) = \lim_{\theta\downarrow\theta_2} F_j(e^{i\theta}) - \lim_{\theta\uparrow\theta_1} F_j(e^{i\theta})$$

képlettel ($j=1, 2$) értelmezzük és $\mu=\mu_1-\mu_2$-t írunk, akkor egy lényegében bijektív megfelelkezést kapunk az $F(e^{i\theta})$ függvények és a $\mathbf{T}$-n definiált Radon-mértékek közt. Más szóval, a $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ duálisa azonosítható a Radon-féle mértékek $\mathscr{M}(\mathbf{T})$ terével.

Az $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ térben a korlátos halmazok már gyengén relatív kompaktak és így a fenti okoskodásból az folyik, hogy minden $u \in h^1(\mathbf{D})$ függvényhez létezik egy μ mérték, melynek segítségével u az

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})\, d\mu(\psi) \tag{48}$$

alakban állítható elő {73, Theorem 1.1, 2. old.}. Hogy μ nem mindig abszolút folytonos, azaz nem $\mu(\theta)=f(e^{i\theta})d\theta$ alakú, azt a $P(re^{i\theta})$ mag példája mutatja, melyre μ az 1 pontba helyezett egységnyi tömeg.

Lebesgue egy tétele, amelyre Riesz Frigyes adott egyszerű bizonyítást {135, III. 1.3, 86. old.}, azt mondja ki, hogy az $F(e^{i\theta})$ korlátos változású függvénynek $f(e^{i\theta})$ deriváltja majdnem mindenütt létezik, azaz az $F(e^{i\theta})$-nek megfelelő mérték a $\mu(\theta)=f(e^{i\theta})d\theta+\sigma(\theta)$ alakban írható, ahol σ egy ún. szinguláris mérték. Könnyen belátható {102, 34—36. old.}, hogy minden olyan $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$ pontban, amelyben az $f(e^{i\theta})$ derivált létezik, a (48) által előállított harmonikus függvényre fennáll a $\lim_{r\uparrow 1} u(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})$ összefüggés. Eszerint a jelen pont elején kimondott Fatou-féle tétel két irányban mondható ki általánosabban:

1) elég feltenni, hogy a függvény a **D** körlemezben harmonikus, ahelyett, hogy analitikus lenne;

2) elég feltenni, hogy a függvény a **D** körlemezben a $h^1(\mathbf{D})$ osztályhoz tartozik, ahelyett, hogy a $h^\infty(\mathbf{D})$ osztályhoz tartozzék.

Ezzel szemben a Fatou által sejtett és a Riesz testvérek által bebizonyított fentebbi tétel már csak analitikus függvényekre igaz. Általában egy harmonikus függvény vígan eltűnhet egy görbeíven, anélkül, hogy ezért azonosan el kelljen tűnnie, példa erre az $u(x, y)=x$ függvény. Hasonlóképpen $\lim_{r\uparrow 1} P(re^{i\theta})=0$ minden $\theta \neq 0$ értékre, noha $P(z) \in h^1(\mathbf{D})$ és $P(z)$ sehol sem zérus **D**-ben. Az u harmonikus függvény konjugáltjának nevezünk egy olyan v harmonikus függvényt, melyre $w=u+iv$ analitikus, azaz v eleget tesz a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Cauchy—Riemann-féle differenciálegyenleteknek. Ha az u függvény egy túl nagy halmazon eltűnik, akkor azalatt v őrt áll, hogy w csak egy diszkrét halmazon tűnhessék el.

Vezessük be a $h^p(\mathbf{D})$-hez analóg azon tereket, amelyeknek elemei nem harmonikus, hanem analitikus függvények. Ha $w(z)$ egy a **D**-ben analitikus függvény, akkor a maximum-elv alapján

$$\mathfrak{M}_\infty(r;\, w) = \max_{0 \leqq \theta < 2\pi} |w(re^{i\theta})|$$

az r növekvő függvénye és az Hadamard-féle háromkörtétel értelmében $\log \mathfrak{M}_\infty(r;\, w)$ a $\log r$ konvex függvénye. Hardy 1915-ben bebizonyította, hogy hasonló állítások érvényesek az

$$\mathfrak{M}_p(r;\, w) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p}$$

kifejezésre, ahol $0<p<\infty$ {73, Theorem 1.5, 9. old.}. Hardy tiszteletére, Riesz Frigyest {123} követve, $H^p(\mathbf{D})$-vel, vagy röviden H^p-vel, jelölik azon, a **D**-ben

analitikus $w(z)$ függvények terét, melyekre $\mathfrak{M}_p(r;\ w)$ korlátos $(0<p\leqq\infty)$. A

$$\|w\|_p = \lim_{r\uparrow 1} \mathfrak{M}_p(r;\ w) = \sup_{0\leqq r<1} \mathfrak{M}_p(r;\ w)$$

által értelmezett mennyiség az $1\leqq p\leqq\infty$ esetben norma a $H^p(\mathbf{D})$ vektortéren, míg a $0<p<1$ esetben csak ún. kvázinorma, azaz a háromszögegyenlőtlenség helyett a

$$\|w_1+w_2\|_p \leqq 2^{(1-p)/p}(\|w_1\|_p+\|w_2\|_p)$$

egyenlőtlenségnek tesz eleget. Ugyancsak Riesz Frigyes {123} mutatott rá annak a függvényosztálynak a jelentőségére, amelyik azon a **D**-ben analitikus $w(z)$ függvényekből áll, melyekre

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\theta})|\, d\theta$$

egy r-től független korlát alatt marad, ahol $\log^+ t=\max(0, \log t)$. Ezt az osztályt $N(\mathbf{D})$-vel jelölik a Nevanlinna fivérek tiszteletére, akik azt bizonyították be, hogy egy analitikus függvény akkor és csak akkor tartozik $N(\mathbf{D})$-be, ha két korlátos, analitikus függvény hányadosa {73, Theorem 2.1, 16. old.}. Világos, hogy $H^\infty(\mathbf{D})\subset$ $\subset H^p(\mathbf{D})$ valamint az, hogy $H^p(\mathbf{D})\subset H^q(\mathbf{D})$ hacsak $p>q$. A $p\log^+ t\leqq t^p$ $(t\geqq 0)$ egyenlőtlenségből következik, hogy $H^p(\mathbf{D})\subset N(\mathbf{D})$. Egy a **D**-ben analitikus függvény akkor és csak akkor tartozik $H^2(\mathbf{D})$-be, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{12}$$

hatványsorkifejtésre fennáll, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2<\infty$.

Eme jelölések bevezetése után térjünk vissza a [23] cikkhez. A következő lépés a kerületi értékek létezéséről szóló Fatou-féle tételnek és kiegészítésének átvitele körlemezről általános tartományra. E célból a Riesz fivérek egy Riemann-féle felületen egy a végesben fekvő, egyszeresen összefüggő Ω tartományt tekintenek, melynek Γ határa rektifikálható zárt görbe. Létesítsen F egy konformis leképezést **D**-ről Ω-ra, akkor Carathéodory egy tétele {49, VII. fej., (10.9), 290. old.} szerint F kiterjeszthető a **D** nyílt körlemez $\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{D}\cup\mathbf{T}$ lezárására és az így kiterjesztett függvény $\overline{\mathbf{D}}$-nek az $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ halmazra való homeomorf leképezése. A Γ határ rektifikálhatósága azt jelenti, hogy az $F(e^{i\theta})$ függvény korlátos változású **T**-*n*.

Evvel teljesen ekvivalens egy olyan, a **D**-ben analitikus és korlátos $F(z)$ függvény megadása, melyre a majdnem mindenütt létező $F(e^{i\theta})=\lim_{r\uparrow 1} F(re^{i\theta})$ határfüggvény korlátos változású. Ekkor $\lim_{r\uparrow 1} F(re^{i\theta})$ mindenütt létezik, mert $F(z)$-re érvényes az

$$F(z) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)})\, F(e^{i\psi})\, d\psi$$

előállítás és a Poisson-féle integrálnak határértéke $r\uparrow 1$-re minden olyan pontban létezik, melyben $F(e^{i\theta})$-nak legfeljebb elsőfajú szakadása van, ami a feltevés szerint **T** minden pontjában fennáll. Sőt, Pringsheim egy tétele szerint, melyet több magyar matematikus — köztük Fejér Lipót {77} és Lukács Ferenc {49, II. fej., (8.13), 60. old.} — általánosított, $F(e^{i\theta})$ még folytonos is.

Ezen feltételek mellett Rieszék a következő két állítást bizonyítják be:

1) Az $F(e^{i\theta})$ függvény a **T** kör nullmértékű halmazait a Γ rektifikálható görbe nullmértékű halmazaiba viszi át.

2) Ha **T** egy halmazának képe nullmértékű, akkor maga a halmaz is nullmértékű.

Az 1) állítás azt jelenti, hogy $F(e^{i\theta})$ abszolút folytonos; bizonyításában főszerepet játszik egy olyan, a **D**-ben analitikus és $\overline{\mathbf{D}}$-ben folytonos $w(z)$ segédfüggvény konstrukciója, amelyikre a **T** megadott, zárt, nullmértékű E halmazának valamennyi $e^{i\theta}$ pontjában $w(e^{i\theta})=1$, míg az E halmaz $\overline{\mathbf{D}}$-beni komplementerhalmazán $|w(z)|<1$. A 2) állítás könnyen folyik 1)-ből.

Manapság a legtöbb szerző az 1) állítást nevezi Riesz Frigyes és Marcel tételének. Ezt sok ekvivalens megfogalmazásban lehet még kimondani, soroljunk fel ezek közül mindjárt kettőt, továbbiak pl. Zygmund könyvében {49, VII. fej., (8.2) és (8.3), 285. old.} találhatók:

Ha az u harmonikus függvény és annak v konjugáltja mindketten $h^1(\mathbf{D})$-be tartoznak, akkor u előállítható az

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(re^{i(\theta-\psi)}) f(e^{i\psi})\, d\psi$$

alakban, ahol $f(e^{i\theta}) \in L^1(\mathbf{T})$.

Ha a $\mu \in \mathcal{M}(T)$ mérték az $n=1, 2, 3, \ldots$ értékekre eleget tesz az

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 0 \tag{49}$$

egyenletnek, akkor μ abszolút folytonos.

Ez utóbbi megvilágításához jegyezzük meg, hogy ha $F(z) \in H^1(\mathbf{D})$, akkor Cauchy tétele alapján

$$r^n \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, dF(re^{i\theta}) = \int_{|z|=r} z^n\, dF(z) = -n \int_{|z|=r} z^{n-1} F(z)\, dz = 0.$$

Egy Bochnertől származó egyszerű bizonyítás megtalálható Sarason előadási jegyzeteiben {125, 13. old.}. Rudin egy cikkében, amelyik főleg a Sidon Simon után elnevezett „ritka" halmazokat vizsgálja, azt mutatja ki {124, 5.7, 226. old.}, hogy nem is szükséges az, hogy a (49) minden pozitív egész n számra teljesüljön.

Mint már céloztam rá, Riesz F. és M. tételének első következménye így hangzik:

Legyen Ω egy rektifikálható görbék által határolt tartomány egy Riemann-féle felületen és $w(z)$ egy Ω-ban definiált analitikus és korlátos függvény. Ekkor $w(z)$ kerületi értékei majdnem mindenütt léteznek és függetlenek az úttól, amelyen a határponthoz közeledünk, amennyiben az nem érintőleges a határhoz. Ha még $w(z)$ nem azonosan zérus, akkor a kerületi értékek majdnem mindenütt különböznek zérustól.

Talán fontosabbak a $H^p(\mathbf{D})$ terek tulajdonságai: *Ha $w(z)$ az $N(\mathbf{D})$ térbe tartozik, akkor $\lim_{r\uparrow 1} w(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ majdnem mindenütt létezik. Ha $w(z) \in H^p(\mathbf{D})$ és $0<p\leqq\infty$, akkor $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbf{D})$* {73, Theorem 2.2, 17. old.} *és*

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p\, d\theta = 0$$

{73, Theorem 2.6, 21. old.}. A $p>1$ esetben az állítás azonnal folyik a $h^p(\mathbf{D})$ osztályra vonatkozó analóg állításból. A $p=1$ esetben azonban, mint láttuk, az analóg állítások nem érvényesek $h^1(\mathbf{D})$-re, és a $H^1(\mathbf{D})$ tér tulajdonságai Riesz Frigyes és Marcel tételéből következnek, sőt ekvivalensek vele, úgy hogy egyes szerzők ezeket a tulajdonságokat nevezik a Riesz fivérek tételének.

Ha $p\geqq 1$, akkor a $w(z)\mapsto f(e^{i\theta})$ leképezés izometrikus a $H^p(\mathbf{D})$ térből az $L^p(\mathbf{T})$ térbe és $f(e^{i\theta})\in L^p(\mathbf{T})$ akkor és csak akkor képe egy $w(z)$ elemnek, ha $f(e^{i\theta})$ komplex (46) Fourier sorában minden $n<0$-re $c_n=0$ {73, Theorem 3.4, 38. old.}.

A Riesz fivérek első eredménye teljes általánosságban így mondható ki: *ha* $w(z)\in N(\mathbf{D})$ *és* $w(z)$ *nem azonosan zérus, akkor a* $\log|f(e^{i\theta})|$ *függvény integrálható* {73, Theorem 2.2, 17. old.} és ennek következtében $f(e^{i\theta})$ legfeljebb egy nullmértékű halmazon tűnhet el. Riesz Frigyes és Marcel mutatták meg, hogy ha $w(z)\in H^1(\mathbf{D})$ nem identikusan zérus, akkor $f(e^{i\theta})$ majdnem mindenütt zérustól különböző, Szegő Gábor {122, 133} azt bizonyította be, hogy ha $w(z)\in H^2(\mathbf{D})$, akkor $\log|f(e^{i\theta})|$ integrálható, míg az általános állítás Riesz Frigyestől származik {123}.

Mielőtt rátérnék a különböző általánosítások ismertetésére, ki akarom mondani Riesz Frigyes és Marcel tételét még egy ekvivalens alakban. Legyen $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ a $\mathbf{T}$ körön folytonos, komplex-értékű függvények algebrája, amelyen a normát

$$\|f\| = \max_{0\leqq\theta<2\pi} |f(e^{i\theta})|$$

által értelmezzük. Legyen $A(\mathbf{D})$ azon $w(z)$ függvények algebrája, amelyek $\mathbf{D}$-ben analitikusak és $\overline{\mathbf{D}}$-ben folytonosak, és ahol a norma

$$\|w\| = \max_{|z|\leqq 1} |w(z)| = \max_{|z|=1} |w(z)|.$$

A maximum-elv alapján a $w(z)\mapsto w(e^{i\theta})$ megfelelkezés $A(\mathbf{D})$-nek izometrikus leképezése $\mathscr{C}(\mathbf{T})$-nek egy zárt részalgebrájára, melyet $A(\mathbf{T})$-vel jelölünk. Jelölje még $A_0(\mathbf{T})$ azon $A(\mathbf{D})$-beli függvények képeinek halmazát, melyekre $w(0)=0$, azaz

$$\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\,d\theta = 0.$$

Ha c_n jelöli megint $f(e^{i\theta})\in\mathscr{C}(\mathbf{T})$ komplex, (45) által definiált Fourier-együtthatóit, akkor

$$A(\mathbf{T}) = \{f(e^{i\theta})\in\mathscr{C}(\mathbf{T});\ c_n = 0,\quad \text{ha}\quad n<0\}$$

és

$$A_0(\mathbf{T}) = \{f(e^{i\theta})\in\mathscr{C}(\mathbf{T});\ c_n = 0,\quad \text{ha}\quad n\leqq 0\}.$$

Világos, hogy $A_0(\mathbf{T})$ az $A(\mathbf{T})$ algebra ideálja. A $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ duális $\mathscr{M}(\mathbf{T})$ terének egy μ eleme akkor és csak akkor ortogonális az $A_0(\mathbf{T})$ altérre, azaz akkor és csak akkor áll fenn

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\mu(\theta) = 0$$

minden $f(e^{i\theta})\in A_0(\mathbf{T})$ függvényre, ha (49) teljesül $n=1, 2, \ldots$-re. A Riesz fivérek tétele mármost úgy mondható ki, hogy *ha* μ *ortogonális* $A_0(\mathbf{T})$*-ra, akkor* μ *abszolút folytonos.*

A Riesz fivérek tételeinek aránylag eléggé kézen fekvő átvitele a körlemezről a felső félsíkra Hille és Tamarkin {101} valamint Esseen {75, 19—21. old.} műve.

Így például, ha μ egy az egész **R** számegyenesen értelmezett véges (azaz $|\mu|(\mathbf{R})<\infty$) Radon-féle mérték és annak

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_R e^{-2\pi i\xi x} d\mu(x)$$

által definiált $\mathcal{F}\mu=\hat{\mu}$ Fourier-féle transzformáltja $\xi\leqq 0$-re eltűnik, akkor μ abszolút folytonos. Forelli {85} azt mutatja ki, hogy a konklúzió már akkor is érvényes, ha $\hat{\mu}$-től nem követeljük meg, hogy az egész $\xi\leqq 0$ félegyenesen eltűnjék. Legyen α és β két valós szám, amelyek az egész számok gyűrűje felett lineárisan függetlenek egymástól. Ha $\hat{\mu}$ minden $m\alpha+n\beta$ pontban eltűnik, ahol m és n negatív egész számok, akkor μ abszolút folytonos.

A Riesz fivérek tételének egy korai alkalmazása John Wermer ún. maximalitási tétele {91, 1.1, 1. old.}, amelyik azt mondja ki, hogy $A(\mathbf{T})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ algebrának maximális zárt részalgebrája. Mikor Wermer tételét általánosítja {142}, átviszi a Riesz fivérek tételét a **D** körlemezről egy Riemann-féle felület tartományára, melynek határa egyszerű, zárt, analitikus görbe. Bizonyítása közelről követi Rieszékét, még a jelölések is ugyanazok, csak a Poisson-féle mag helyett az ún. harmonikus mértéket használja.

Bishop {60, 61} Riesz Frigyes és Marcel tételét a $\overline{\mathbf{D}}$ zárt körlemezről a komplex számsík olyan kompakt K részhalmazára terjeszti ki, amelyiknek komplementer halmaza összefüggő. Alkalmazásként Mergeljan approximáció-tételére nyer egyszerű bizonyítást. Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha K a komplex számsík olyan kompakt részhalmaza, melynek komplementerhalmaza összefüggő, akkor minden olyan függvény, amelyik a K halmazon folytonos és annak belsejében analitikus, egyenletesen megközelíthető polinomokkal {86, II. 9.1, 48. old.}. Megjegyzendő, hogy közvetlenül nem világos, vajon miként kell Bishop általánosítását kimondani, mivel nem teszi fel, hogy K határa rektifikálható görbe. A pontos megfogalmazás végett utalok Bishop {61} cikkén kívül a Mathematical Reviews 22. kötetében megjelent ismertetésre (# 9621).

Cullen {70} már nem köti ki általánosításában, hogy a tartomány komplementerhalmaza összefüggő, sőt még azt is megengedi, hogy a tartomány összefügésszáma végtelen legyen, de felteszi, hogy a tartomány határa nem szükségképpen rektifikálható Jordan görbék egy sorozatából áll.

Privalov 1918-ban a szaratovi egyetemhez benyújtott disszertációjában a Riesz fivérektől függetlenül újból felfedezte eredményeiket. Privalov nem tudhatott Rieszék eredményeiről, nemcsak azért mert dolgozatuk csak 1920-ban jelent meg és az akkori mozgalmas idők a kapcsolatokat megnehezítették, hanem azért is, mert a dolgozat nehezen volt hozzáférhető. A kiadó ugyanis tévedésből csak ötven példányt nyomatott a kötetből, melyben a Riesz fivérek dolgozata megjelent, ezért mondja Bieberbach róla, hogy az újkor egyik legritkább kiadványa. Privalov 1925-ben Luzinnal közösen írott munkájában visszatér az analitikus függvények kerületi értékeinek vizsgálatához és többek közt a következő tételt bizonyítja be, amelyik a Riesz testvéreknek a Fatou-féle sejtésre adott válaszát lényegesen általánosítja {120, IV. fej., 2.5}: *Ha a w függvény a $|z|<1$ nyílt körlemezben meromorf és a $\lim_{r\uparrow 1} w(re^{i\theta})$ határérték a $|z|=1$ kör $e^{i\theta}$ pontjainak egy pozitív mértékű halmazán létezik és zérussal egyenlő, akkor w azonosan eltűnik.* Figyeljük meg, hogy a tétel a w függvény növekedésére nézve semmiféle megszorítást sem tartalmaz és így a határérték létezését ki kell kötnie. Privalov, Luzin és tanítványaik eredményeit, köztük a Riesz fivérek tételének lokális változatát {120, III. fej., § 11}, részletesen tárgyalja Privalov könyvének Markusevics gondozásában megjelent második ki-

adása {120}, ahol a H^p és N osztályokra vonatkozó, fentebb idézett eredmények ismertetése is megtalálható.

A nullmértékű halmazok azok, amelyek mértékelméleti szempontból kicsinyek. Topológiai szempontból kicsinyek az ún. sovány halmazok. A **T** kör (vagy általánosabban egy topologikus tér) egy részhalmazát *ritkának* nevezzük, ha lezárásának nincsen belső pontja. Egy halmaz akkor *sovány*, ha előállítható mint ritka halmazok egy megszámlálható sorozatának egyesített halmaza. A Fatou-féle sejtés nem igaz, ha benne a nullmértékű halmaz fogalmát a sovány halmazéval helyettesítjük, mert egyrészt létezik nem sovány nullmértékű halmaz, másrészt, adatván egy nullmértékű E halmaz a **T** körön, létezik egy nem identikusan eltűnő függvény, amelyik **D**-ben analitikus, $\overline{\mathbf{D}}$-n folytonos és az E halmazon zérus {12, 393. old.; 120, IV. fej., § 3}; ennek az eredménynek erősítése a később tárgyalandó Rudin—Carleson-féle tétel. Ha viszont korlátos analitikus függvények helyett ún. belső függvényeket tekintünk, akkor a helyzet megváltozik. Beurlingot {59} követve, belsőnek nevezünk minden olyan w függvényt, amelyik a **D** körlemezben analitikus és amelyre a **T** kör majdnem minden $e^{i\theta}$ pontjában fennáll a $\lim_{r\uparrow 1} |w(re^{i\theta})|=1$ összefüggés. Belső függvények a Blaschkeről elnevezett, de tulajdonképpen már Carathéodory és Fejér {76} által bevezetett szorzatok, de léteznek másfajta belső függvények is {73, 2.4, 24. old.}. Cargo {67} mármost azt bizonyítja be, hogy ha w_1 és w_2 két belső függvény és $\lim_{r\uparrow 1} w_1(re^{i\theta})=\lim_{r\uparrow 1} w_2(re^{i\theta})$ egy nem sovány halmaz valamennyi $e^{i\theta}$ pontjában, akkor $w_1=w_2$.

Valamivel korábban Barth és Schneider {55}, majd általánosabban Tse {139} azt mutatták ki, hogy nem sovány halmazt akkor is használhatunk, ha a függvény eltűnésének nagyságrendjére teszünk kikötést. Pontosabban: Legyen $m(r)$ egy a $[0, 1)$ intervallumban fogyó függvény, melyre $\lim_{r\uparrow 1} m(r)=0$ és legyen E a **T** körnek nem sovány részhalmaza. Ha w a **D** körlemezben meromorf függvény és minden $e^{i\theta}\in E$ pontban érvényes, hogy

$$\lim_{r\uparrow 1} \frac{w(re^{i\theta})}{m(r)} = 0,$$

akkor $w(z)\equiv 0$.

Bochner {63} a **D** egységkörlemezt és annak **T** határát n darab körlemez $\mathbf{D}^n$ szorzatával és a $\mathbf{T}^n$ torussal helyettesíti. Hangsúlyozni kell, hogy az $n\geqq 2$ esetben

$$\mathbf{T}^n = \{z=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbf{C}^n;\ |z_j| = 1,\quad 1\leqq j\leqq n\}$$

a

$$\mathbf{D}^n = \{z\in\mathbf{C}^n;\ |z_j| < 1,\quad 1\leqq j\leqq n\}$$

halmaznak nem határa, hanem a határnak csak egy részhalmazát, az ún. Silov-féle határt {131, 7.10, 43. old.} képezi. Bochner általánosításai közül egyesekre még visszatérünk.

Henry Helson volt az, aki előbb 1955-ben {97}, majd egy híres, 1958-ban megjelent és a fiatalon elhunyt David Lowdenslagerral együtt írott cikkben {98} Riesz Frigyes és Marcel tételét és annak Bochner-féle általánosításait tüzetesebb vizsgálat alá vetette és ezzel megteremtette a későbbi általánosítások alapjait. A jelölés leegyszerűsítése végett tekintsük csak az $n=2$ esetet és jelölje $\mathbf{Z}^2$ a sík rácspontjainak halmazát, azaz azon (m, n) számpárokat, ahol mind m, mind n egész szám. Egy a $\mathbf{T}^2$ toruson definiált μ mérték trigonometrikus momentumai, vagy röviden együtthatói, a

$$c_{mn} = \iint_{\mathbf{T}^2} e^{-i(mx+ny)}\, d\mu(x, y) \tag{50}$$

számok, ahol $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$. Ha c_{mn}-t elosztjuk $(2\pi)^2$-tel, úgy μ-nek (m, n)-indexű ún. Fourier—Stieltjes együtthatóját kapjuk.

Abból, hogy $c_{mn}=0$ minden olyan $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ számpárra, melyre $m \leqq 0$, nem következik, hogy μ abszolút folytonos. Példának Helson és Lowdenslager a $\mu(x, y)= = e^{ix} dx dv(y)$ mértéket tekintik, ahol v szinguláris mérték **T**-n, tehát μ is szinguláris, de

$$\iint_{\mathbf{T}^2} e^{-i(mx+ny)} d\mu(x, y) = \int_0^{2\pi} e^{-i(m-1)x} dx \cdot \int_0^{2\pi} e^{-iny} dv(y) = 0$$

valahányszor $m \neq 1$.

Egy igaz állítás megszövegezése céljából a szerzők egy $S \subset \mathbf{Z}^2$ halmazt akkor neveznek *félsík*nak, ha teljesíti a következő feltételeket:

1. A (0, 0) pont nem tartozik S-hez.

2. Ha $(m, n) \neq (0, 0)$, akkor az (m, n) és $(-m, -n)$ pontok közül pontosan egy tartozik S-hez.

3. Ha $(m, n) \in S$ és $(m', n') \in S$, akkor $(m+m', n+n') \in S$.

Riesz Frigyes és Marcel tételének Helson és Lowdenslagertól származó általánosítását mármost a következő két tétel fejezi ki:

I. Legyen μ egy szinguláris Radon-féle mérték a $\mathbf{T}^2$ toruson és S egy félsík $\mathbf{Z}^2$-ben. Ha az (50) együtthatók minden az S-hez tartozó (m, n) számpárra eltűnnek, akkor $c_{00}=0$.

II. Legyen $S \subset \mathbf{Z}^2$ egy félsík, μ egy Radon-féle mérték a $\mathbf{T}^2$ toruson és $\mu=\mu_a+\mu_s$ a Lebesgue-féle felbontás egy abszolút folytonos μ_a és egy szinguláris μ_s mérték összegére. Ha a μ mérték (50) alatti c_{mn} együtthatói minden $(m, n) \in S$ számpárra eltűnnek, akkor a μ_a és μ_s mértékek együtthatói külön-külön is eltűnnek minden $(m, n) \in S$-re.

Egy változó esetében az I. tételhez analóg állításból folyik, hogy ha μ egy szinguláris mérték a **T** körön, amelyre

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(\theta) \tag{51}$$

eltűnik, hacsak $n<0$, akkor $\mu=0$. Valóban az I. tétel szerint $c_0=0$. Az I. tételt rendre az $e^{-i\theta}\mu$, $e^{-2i\theta}\mu$, $e^{-3i\theta}\mu$, ... mértékekre alkalmazva azt kapjuk, hogy $c_1=c_2= =c_3=\ldots=0$. Így minden $T(\theta)$ trigonometrikus polinomra fennáll, hogy

$$\int_0^{2\pi} T(\theta) d\mu(\theta) = 0,$$

amiből Weierstrass második approximáció-tétele {35, 431. §, II. köt., 91. old.} alapján következik, hogy $\mu=0$. Világos, hogy egynél több változó esetében ilyen redukció lehetetlen. Legyen most $\mu=\mu_a+\mu_s$ egy mérték **T**-n, melyre az (51) koefficiensek minden $n<0$ indexre eltűnnek. Akkor a II. tétellel analóg állítás következtében fennáll az is, hogy

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu_s(\theta) = 0$$

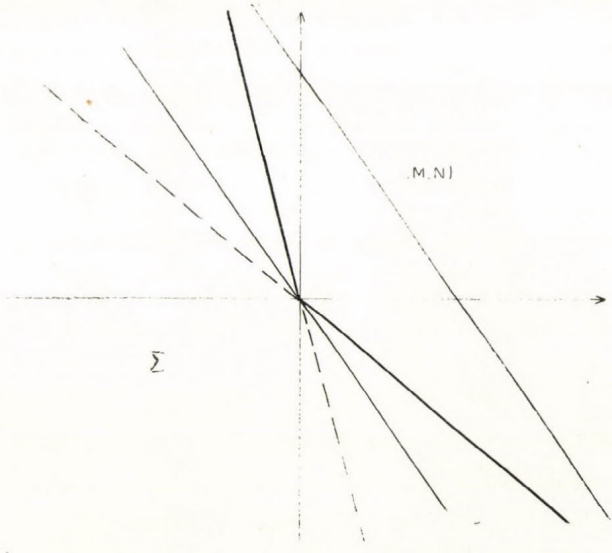
minden $n<0$-re és így az éppen elmondottak értelmében $\mu_s=0$, vagyis $\mu=\mu_a$ abszolút folytonos. Látjuk tehát, hogy az I. és II. állítások tényleg Riesz Frigyes és Marcel tétele általánosításának tekinthetők.

Helson és Lowdenslager tételeiből Bochner következő tétele is könnyen folyik:

Legyen

$$\sum = \{re^{i\theta};\ r > 0, \quad \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2\}$$

a sík egy szektora, melynek $\theta_2 - \theta_1$ *nyílása nagyobb mint* π. *Legyen* μ *egy mérték a* $\mathbf{T}^2$ *toruson, melyre* $c_{mn} = 0$ *minden olyan* (m, n) *számpára, amelyik a* $\sum$ *szektorba esik. Akkor* μ *abszolút folytonos.*



1. ábra

Bizonyítás. A feltevés szerint $\sum$ két különböző, a Helson—Lowdenslager-féle értelemben vett S és S' félsíkot tartalmaz. Legyen μ_s a μ mérték szinguláris része. A II. tétel szerint a μ_s mérték $c_{mn}^{(s)}$ együtthatói is eltűnnek ha $(m, n) \in S \cup S'$. Tegyük fel, hogy nem mindegyik $c_{mn}^{(s)}$ zérus. Legyen L egy a (0, 0) ponton áthaladó egyenes, melynek iránytangense irracionális és amelyik az S és S' félsíkokat határoló két egyenes közt fekszik, tehát az általa határolt két félsík egyike $\sum$-ba esik. Toljuk el L-t önmagával párhuzamosan addig, amíg nem találkozik az első olyan $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ ponttal, melyre $c_{mn}^{(s)} \neq 0$. Mivel L iránytangense irracionális, ez az első pont egyértelműen meg van határozva, jelöljük (M, N)-nel. Ekkor az $e^{-i(Mx+Ny)}\mu_s$ szinguláris mérték összes együtthatói, melyekre (m, n) az L által határolt, $\sum$-ba eső félsíkba esifl, zérusak, de a (0, 0) indexű együtthatója nem zérus. Ez azonban ellentmond az I. tételnek. Így $c_{mn}^{(s)}$ minden (m, n) számpárra nulla, ebből folyik, hogy $\mu_s = 0$, azaz μ abszolút folytonos. Ezzel Bochner tételét bebizonyítottuk.

Hasonló tételt bizonyítottak be legújabban Dahlberg és Benedicks, akik a $\sum$ szektort egy konvex függvény görbéje feletti tartománnyal helyettesítették.

Helson és Lowdenslager visszatérnek bizonyításaikban Szegő Gábor módszeréhez {133}, amennyiben az $L^2(\mu)$ Hilbert-féle térben dolgoznak és abban ortogonális projekciókat használnak. A módszer illusztrálására idézni fogom Helson {99, 4. old.} bizonyítását a Riesz fivérek első tételének egy kis általánosítására, de a történelmi háttér megértéséhez szükséges megjegyezni, hogy 1949-ben Arne Beurling {59} a Riesz fivérek tételeinek igen fontos alkalmazását adta. Jelölje $H^2(\mathbf{T})$ a $H^2(\mathbf{D})$

tér képét az $L^2(\mathbf{T})$ térben a már említett leképezés alatt, amely minden $w(z)\in H^2(\mathbf{D})$ függvényhez annak majdnem mindenütt létező $f(e^{i\theta})=\lim_{r\uparrow 1} w(re^{i\theta})$ kerületi értékét rendeli hozzá. Beurling a $H^2(\mathbf{T})$ tér azon altereit jellemzi, amelyek az $f(e^{i\theta})\mapsto$ $\mapsto e^{i\theta}f(e^{i\theta})$ leképezés alatt önmagukba mennek át és ennek kapcsán vezeti be a belső és külső függvények fogalmát, amelyek azóta is fontos szerepet játszanak {59; 99, II. fej.; 100, 1.2; 73, 24. old.}. Halmos Pál {92} ezt írja Helson bizonyításáról: „... miután Beurling dolgozata megjelent, világossá vált, hogy az ellenkező irányban is lehet haladni és a Riesz-féle eredményt Beurlingéből levezetni. Helson könyve 1. tételének bizonyítása ennek a felismerésnek végső lepárolása. Az állítás a Riesz tételnek kvalitatív megfogalmazása és a bizonyítás maximálisan egyszerű és elegáns. A bizonyítás nem használja fel Beurling tételét; mindaz amit felhasznál egy egyszerű ötlet, amelyik a tétel geometrikus beállításánál felmerül. Ma azt lehet mondani, a szokott utólagos előrelátással, hogy a Riesz F. és M.-féle tétel egy geometriai trivialitás és, hogy legalábbis ami a kvalitatív változatot illeti, Riesz F. és M. kemény analízise teljesen felesleges."

Azt kívánjuk bebizonyítani, hogy *ha* $f(e^{i\theta})\in H^2(\mathbf{T})$ *nem egyenlő majdnem mindenütt nullával, akkor legfeljebb egy nullmértékű halmazon tűnhet el.* Emlékeztessünk arra, hogy $f(e^{i\theta})$-nek (45) által értelmezett c_n Fourier-féle együtthatói eltűnnek $n<0$-re. Ha $f(e^{i\theta})$ nem a $H^2(\mathbf{T})$ tér zérus eleme, akkor feltehetjük, hogy

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta\neq 0,$$

mert szükség esetén oszthatunk $e^{i\theta}$ alkalmas hatványával. Tekintsük most az összes

$$f(e^{i\theta})(1+b_1e^{i\theta}+\ldots+b_ne^{in\theta})$$

alakú függvények K halmazát, ahol $b_1,\ldots,b_n$ tetszés szerinti komplex számok és az $n\geqq 1$ egész szám is változik. A K halmaz, és így annak $\overline{K}$ lezárása is, a $H^2(\mathbf{T})$ tér konvex halmaza és $\overline{K}$ minden eleme Fourier-sorának állandó tagja ugyanaz a $c_0\neq 0$. Riesz Frigyes egy alapvető lemmája {134, I. 3, 7. old.} alapján létezik a $\overline{K}$ halmazban egy és csak egy olyan $g(e^{i\theta})$ elem, melynek távolsága a nullaelemtől minimális. Lássuk most be, hogy a $|g(e^{i\theta})|$ abszolút érték majdnem mindenütt állandó. Valóban bármely $n\geqq 1$ egész számra és λ komplex számra $g(e^{i\theta})+$ $+\lambda e^{in\theta}g(e^{i\theta})$ is $\overline{K}$-hoz tartozik és

$$\|g+\lambda e^{in\theta}g\|^2=\|g\|^2(1+|\lambda|^2)+2\,\mathrm{Re}\,\lambda\int_0^{2\pi}|g|^2e^{in\theta}\,d\theta.$$

A $g(e^{i\theta})$ függvény minimumtulajdonsága alapján ez a kifejezés legkisebb értékét a $\lambda=0$ választás mellett éri el. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha

$$\int_0^{2\pi}|g|^2e^{in\theta}\,d\theta \tag{52}$$

eltűnik minden $n\geqq 1$ egész számra. Az (52) konjugált komplex értékét tekintve folyik, hogy az minden $n\leqq -1$ egész számra is eltűnik. Így $|g|^2$ mindegyik Fourier-együtthatója, a nulla-indexű kivételével, zérus, ahonnan folyik, hogy $|g|^2$ és vele együtt $|g|$ is majdnem mindenütt egyenlő egy állandóval.

Mármost a $\overline{K}$ halmazba tartozó függvények, mint a K-ba tartozó függvények limeszei, eltűnnek majdnem mindenütt, ahol $f(e^{i\theta})$ eltűnik. De mivel $|g|$ majdnem

mindenütt egyenlő egy állandóval, amelyik $c_0 \neq 0$ miatt nem lehet nulla, $g(e^{i\theta})$-nek majdnem mindenütt nullától különbözőnek kell lennie és így $f(e^{i\theta})$ legfeljebb egy nullmértékű halmazon tűnhet el. Ezzel az állítást teljesen bebizonyítottuk.

Helson és Lowdenslager {98, II.} a $\mathbf{T}^n$ torus helyett általánosabban olyan kompakt, kommutatív csoportokat is tekintenek, melyeknek diszkrét karaktercsoportja (vö. lejjebb) lineárisan rendezett. Bochner {64, 65} az $\mathbf{R}^n$ tér additív csoportjának $b\mathbf{R}^n$ Bohr-féle kompaktifikációján tekint μ mértékeket. Ha $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\in\mathbf{R}^n$ és $x=(x_1, \ldots, x_n)\in b\mathbf{R}^n$, akkor legyen $\lambda \cdot x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$. Bochner felteszi, hogy a μ mérték „majdnem periodikus", azaz hogy a

$$c(\lambda)=\int_{b\mathbf{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\, d\mu(x)$$

kifejezés (amelyik lényegében μ Fourier-transzformáltja) csak egy megszámlálható $(\lambda^{(k)})$ sorozathoz tartozó λ értékekre különbözik zérustól, de nem követeli meg, hogy a $\lambda^{(k)}\in\mathbf{R}^n$ vektorok rácspontok legyenek. Ha létezik egy egységnyi hosszúságú $v\in\mathbf{R}^n$ vektor úgy, hogy minden $\varrho\in\mathbf{R}$ számra fennáll, hogy

$$\sum_{\lambda\cdot v\leqq\varrho} |c(\lambda)| < \infty, \tag{53}$$

akkor μ abszolút folytonos. Ebből Bochner fentebb bebizonyított tétele könnyen következik, ha megjegyezzük, hogy amennyiben $c(\lambda)=0$ minden olyan λ vektorra, amelyik $\sum$-ba esik és v a $\sum$ határát képező két félsugár által alkotott szög $\sum$ komplementerhalmazába eső felezőjén fekszik, akkor (53) minden ϱ-ra csak véges sok zérustól különböző tagot tartalmaz. Bochner előadásában a Riesz F. és M. tétel több más általánosítása is található {65, Theorem 7.3 és 7.6}. A bizonyítások egy absztrakt tételen alapulnak, amelyik König és Seever {107} egy későbbi általánosításának előfutára.

Mind Helson és Lowdenslager, mind Bochner általánosításaiban eltűnt az a tény, hogy **T** a komplex **D** tartomány határa. A tételek már nem a komplex változó analitikus függvényeinek kerületi értékeire vonatkoznak, hanem egy kompakt csoporton végzett harmonikus analízis tárgykörébe tartoznak. Másirányú vizsgálatokat folytattak Stein és Weiss {129; 34, VI. fej., 4. pont, 228. old.; 130, VII. fej., 3. pont, 217. old.}, akik a H^p osztályok elméletét terjesztették ki az $\mathbf{R}^{n+1}$ tér felső félterére és akiknél az általánosított Riesz Frigyes és Marcel-féle tétel {129, Theorem E, 53. old.; 130, VII. fej., 3.2, Corol. 1 of Theorem 6, 221. old.} szorosan összefügg a H^1 osztályba tartozó függvények kerületi értékeivel. Ezeket a vizsgálatokat később, a törtrendű potenciálokkal kapcsolatban fogom ismertetni. Itt csak azt akarom megemlíteni, hogy Stein és Weiss vizsgálatait, köztük a Riesz Frigyes és Marcel-féle tétel általánosítását, Coifman és Weiss {69} átvitték kompakt Lie-féle csoportokra, míg Chao és Taibleson {136, VII. fej., § 3., 258—259. old.; 137, 550. old.} bizonyos nem archimédeszileg értékelt testek feletti vektorterekre.

Bochner mutatott rá arra, hogy Helson és Lowdenslager módszerei sokkal nagyobb általánosságban is célravezetőek. Az állítások megszövegezéséhez egy sereg jelölést és fogalmat kell bevezetnünk. Legyen X egy kompakt (Hausdorff-féle) topologikus tér és $\mathscr{C}(X)$ az X-en értelmezett, komplex értékű folytonos függvények algebrája. Definiáljuk a normát az

$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$$

egyenlettel, akkor $\mathscr{C}(X)$ egy teljes normált algebra, azaz egy ún. Banach-algebra lesz. Legyen most A a $\mathscr{C}(X)$ Banach-algebrának egy zárt részalgebrája, amelyik

tartalmazza a konstans függvényeket és amelyik elválasztja X pontjait, azaz adatván $x, y \in X, x \neq y$, létezik olyan $f \in A$, hogy $f(x) \neq f(y)$. Az ilyen A algebrákat nevezik *függvényalgebrák*nak. Ha a $\mathscr{C}(X)$-en értelmezett normát megszorítjuk A-ra, akkor A maga is egy Banach-algebra. Az A algebra *karaktere* az A algebrának a komplex számok $\mathbf{C}$ testébe való zérustól különböző homomorfizmusa, azaz egy olyan nem azonosan zérus, lineáris $\chi: A \to \mathbf{C}$ leképezés, melyre $\chi(fg) = \chi(f) \cdot \chi(g)$ minden $f, g \in A$ elemre. Az A algebra összes karakterei alkotják annak $\sum = \sum(A)$ *spektrum*át. A $\sum(A)$ halmazon egy topológiát szokás bevezetni, amelyben egy $\chi_0 \in \sum$ pont környezetbázisát a

$$\{\chi \in \sum;\ |\chi(f_j) - \chi_0(f_j)| \leqq \varepsilon,\quad 1 \leqq j \leqq n\}$$

halmazok alkotják, ahol $\varepsilon > 0$ és $f_1, \ldots, f_n$ az A algebra tetszés szerinti véges sok eleme. Evvel a topológiával $\sum$ kompakt (Hausdorff-féle) térré válik. Az X tér mindegyik x pontja egy δ_x karaktert definiál a $\delta_x(f) = f(x)$ egyenlőség segítségével. Az $x \mapsto \delta_x$ leképezés injektív mivel feltettük, hogy A elválasztja X pontjait. Világos az is, hogy ez a leképezés X-et és annak képét $\sum$-ban mindkét irányban folytonosan felelteti meg egymásnak és így, ha kívánjuk, az X teret a $\sum$ tér zárt részterének tekinthetjük. Egy $f \in A$ függvény $\mathscr{G}f$ *Gelfand-transzformált*ja a $\sum$ téren folytonos, a $\mathscr{G}f(\chi) = \chi(f)$ egyenlőség által értelmezett függvény. Mivel $\mathscr{G}f(\delta_x) = \delta_x(f) = f(x)$, a $\mathscr{G}: A \to \mathscr{C}(\sum)$ lineáris leképezés injektív. Egy $\chi \in \sum(A)$ karakter *reprezentatív mérték*ének nevezünk bármely olyan pozitív m mértéket X-en, amelyre fennáll a

$$\chi(f) = \int_X f(x)\,dm(x)$$

egyenlőség minden $f \in A$ függvényre. A χ karakterhez tartozó *Jensen-féle mérték*nek nevezünk egy olyan pozitív m mértéket, melyre

$$\log|\chi(f)| \leqq \int_X \log|f(x)|\,dm(x),\quad f \in A.$$

Minden χ-hez tartozik legalább egy Jensen-féle mérték {108, 585. old.} és minden χ-hez tartozó Jensen-féle mérték reprezentálja χ-t {86, 33. old.}. A χ karakterhez tartozó reprezentatív mértékek halmazát $M(\chi)$-vel jelöljük és ha $m \in M(\chi)$, akkor A_m jelöli azon $f \in A$ függvények halmazát, melyekre $\chi(f) = \int f dm = 0$. Világos, hogy A_m maximális ideál A-ban. Az A algebra multiplikatív csoportját, azaz azon f elemek halmazát, melyekre f^{-1} is A-hoz tartozik, $A^\times$-tel jelöljük. Ha az $f \in A$ függvények $\mathrm{Re}\, f$ valós részei a valós-értékű folytonos függvények $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ terében sűrű halmazt alkotnak, akkor A egy *Dirichlet-féle* algebra. Ha a

$$\log|A^\times| = \{\log|f|;\ f \in A^\times\}$$

halmaz sűrű $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$-ben, akkor az A algebra *logmoduláris*. Az $\mathrm{Re}\, f = \log|e^f|$ egyenlőségből következik, hogy $\mathrm{Re}\, A \subset \log|A^\times|$ és így minden Dirichlet-féle algebra logmoduláris, de például a $H^\infty(\mathbf{D})$ algebra logmoduláris anélkül, hogy Dirichlet-féle lenne.

A legfontosabb példában X-nek a $\mathbf{T}$ kört vesszük és A a már fentebb bevezetett $A(\mathbf{T})$ algebra, azaz azon f függvények összessége, melyek a $\overline{\mathbf{D}}$ zárt körlemezen folytonos és $\mathbf{D}$-ben analitikus w függvények megszorításai $\mathbf{T}$-re. Az $A(\mathbf{T})$ algebra karakterei a $\chi_z: f \mapsto w(z)$ leképezések, ahol $z \in \overline{\mathbf{D}}$, így $\sum(A(\mathbf{T}))$ azonosítható $\overline{\mathbf{D}}$-vel

és w az f függvénynek Gelfand-transzformáltja. Mivel a Cauchy-féle képlet alapján

$$w(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{w(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta,$$

a χ_0 karakter reprezentatív mértéke $\frac{1}{2\pi}\, d\theta$. Általánosabban, ha $z \in \mathbf{D}$, akkor χ_z reprezentatív mértéke

$$\frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}\, d\theta.$$

A reprezentatív mértékek ezek szerint két osztályba esnek: azok amelyek a **D** nyílt körlemez pontjainak felelnek meg mind abszolút folytonosak egymásra és $d\theta$-ra nézve, míg azok amelyek **T** pontjainak felelnek meg, azaz a δ_z $(z = e^{i\theta} \in \mathbf{T})$ tömegpontok, mind szingulárisak egymásra és $d\theta$-ra nézve. A χ_0 karaktert reprezentáló $m = \frac{1}{2\pi}\, d\theta$ mértékhez tartozó A_m a már definiált $A_0(\mathbf{T})$ maximális ideál. Az $A(\mathbf{T})$ algebra Dirichlet-féle, mert egyrészt a valós trigonometrikus polinomok sűrűek a $\mathscr{C}(\mathbf{T}; \mathbf{R})$ térben {35, 431. §, II. köt., 91. old.}, másrészt pedig

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{in\theta} + \bar{c}_n e^{-in\theta}) = c_0 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\theta},$$

ahol c_0 valós és $c_{-n} = \bar{c}_n$ $(n \geqq 1)$.

Második példának tekintsük a $\mathscr{C}(\overline{\mathbf{D}})$ algebra szintén már említett $A(\mathbf{D})$ zárt részalgebráját, amelyik a $\overline{\mathbf{D}}$-n folytonos és **D**-ben analitikus w függvényekből áll. Ezen az algebrán minden karakter δ_z: $w \mapsto w(z)$ alakú, azaz $A(\mathbf{D})$ spektruma megint $\overline{\mathbf{D}}$, ami abból is nyilvánvaló, hogy — mint már láttuk — $A(\mathbf{T})$ és $A(\mathbf{D})$ izomorf Banach algebrák. Itt azonban egy karakternek végtelen sok reprezentatív mértéke lehet, mert például

$$\delta_0(w) = w(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{w(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})\, d\theta,$$

ahol $0 < r \leqq 1$.

Legyen most X egy kompakt topologikus tér, $A \subset \mathscr{C}(X)$ egy függvényalgebra, $\chi \in \sum(A)$ az algebra egy karaktere és $m \in M(\chi)$ a χ egy reprezentatív mértéke. Azt mondjuk, hogy az *m mértékre igaz Riesz Frigyes és Marcel tétele,* ha teljesül a következő állítás:

Legyen μ egy az X téren értelmezett komplex Radon-mérték és $\mu = \mu_a + \mu_s$, ahol μ_a abszolút folytonos és μ_s szinguláris m-re nézve. Ha μ ortogonális A_m-re, azaz

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = 0$$

minden $f \in A_m$ függvényre, akkor μ_a és μ_s külön-külön ortogonálisak A_m-re, sőt μ_s az egész A algebrára ortogonális.

Hoffman {102}, Bochner sugalmazását követve, megmutatta, hogy Helson és Lowdenslager bizonyításából kiadódik az is, hogy Riesz Frigyes és Marcel tétele minden reprezentatív mértékre igaz, hacsak A Dirichlet-algebra. Egy kicsit később {103} ugyanezt mutatta meg arra az esetre, ha A logmoduláris, míg Ahern és Sarason {51} ún. hipo-Dirichlet algebrák esetére.

Lumer {111} szerint az, hogy Helson és Lowdenslager bizonyítása logmoduláris algebrákra is alkalmazható, ezeknek az algebráknak két tulajdonságán múlik:

1. Minden karakterhez csak egy reprezentatív mérték tartozik {103, Theorem 4.2, 284. old.}. Jegyezzük meg, hogy Dirichlet-féle algebrákra triviális, hogy minden karaktert legfeljebb egy pozitív mérték reprezentál.

2. Legyen m egy reprezentatív mérték, $L^2(m)$ az m-mérték szerint négyzetesen integrálható függvények Hilbert-féle tere, $H^2(m)$ az A algebra lezárása $L^2(m)$-ben, $H_m^2(m)$ az A_m ideál lezárása $L^2(m)$-ben és $\overline{H}_m^2(m)$ a $H_m^2(m)$ tér konjugált komplex elemeiből álló tér. Ekkor $L^2(m)$ a $H^2(m)$ és $\overline{H}_m^2(m)$ alterek ortogonális direkt összege {103, Theorem 5.4, 293. old.}. Például ha $A=A(\mathbf{T}), m=\frac{1}{2\pi}d\theta$, akkor $L^2(m)=$ $=L^2(\mathbf{T})$, a $H^2(m)$ tér azon $f\in L^2(\mathbf{T})$ függvényekből áll, melyekre $c_n=0$ ha $n<0$ és $\overline{H}_m^2(m)$ azokból, melyekre $c_n=0$ ha $n\geqq 0$.

Mármost Lumer potenciálelméleti meggondolásokkal azt bizonyítja be, hogy 2. — és vele együtt Hoffman dolgozatának {103} eredményei — már az 1. tulajdonságból következnek. Riesz Frigyes és Marcel tétele igaz tehát minden reprezentatív mértékre, ha az A függvényalgebra minden χ karakterére az $M(\chi)$ halmaz egyetlen elemből áll. Felmerül a kérdés, vajon ez a feltétel szükséges-e, és másrészt olyan kritériumokat találni, melyek adott reprezentatív mértékre mondják meg igaz-e Riesz F. és M. tétele, anélkül, hogy ez minden reprezentatív mértékre igaz lenne.

Időközben Forelli {82} a Helson és Lowdenslager által eredetileg vizsgált esetre adott egy mértékelméleti lemmán alapuló új bizonyítást, mikor a μ mérték a $\mathbf{T}^n$ csoporton van definiálva, vagy általánosabban olyan kompakt, kommutatív csoporton, melynek karaktercsoportja lineárisan rendezett. Ez a bizonyítás segítette Ahernt {50} ahhoz, hogy az imént megfogalmazott két kérdésre választ adjon. Legyen $A\subset\mathscr{C}(X)$ egy az X kompakt téren definiált folytonos függvényekből álló függvényalgebra, χ az A egy karaktere és $m\in M(\chi)$. Tegyük fel, hogy Riesz Frigyes és Marcel tétele igaz m-re, legyen $n\in M(\chi)$ egy másik reprezentatív mérték és $n=n_a+n_s$, ahol n_a abszolút folytonos és n_s szinguláris m-re nézve. Ekkor a $\mu=n-m=n_a-m+n_s$ mérték ortogonális A_m-ra mivel $\int f d\mu=\chi(f)-\chi(f)=0$ és így n_s ortogonális A-ra, tehát $\int dn_s=0$. Mivel azonban $n_s\geqq 0$, azt kapjuk, hogy $n_s=0$. Látjuk tehát, hogy ha Riesz Frigyes és Marcel tétele igaz az $m\in M(\chi)$ reprezentatív mértékre, akkor minden más $n\in M(\chi)$ reprezentatív mérték abszolút folytonos m-re nézve. Ahern mármost azt mutatja ki, hogy ez a szükséges feltétel elégséges is, azaz *ha $m\in M(\chi)$ olyan, hogy ránézve minden $n\in M(\chi)$ abszolút folytonos, akkor m-re igaz Riesz Frigyes és Marcel tétele.*

Annak ellenére, hogy az Ahern-féle feltétel szükséges és elégséges, Glicksbergnek {89} sikerült Riesz Frigyes és Marcel tételét egy még általánosabb alakban bebizonyítani. Legyen M egy a kompakt X téren definiált pozitív m mértékekből álló halmaz, amelyekre $m(X)=1$. Az $F\subset X$ halmazt *M-nullahalmaz*nak nevezzük, ha $m(F)=0$ minden M-hez tartozó m-re. Ha μ egy Radon-féle mérték X-en és F az X egy μ-re nézve mérhető részhalmaza, akkor a μ_F mértéket a $\mu_F(E)=\mu(E\cap F)$ egyenlőséggel értelmezzük. A μ mérték *abszolút folytonos M-re nézve,* ha $\mu_F=0$ minden olyan F halmazra, amelyik M-nullahalmaz; evvel ekvivalens az, hogy $\mu(F)=0$ minden F M-nullahalmazra. Másrészt μ *szinguláris M-re nézve,* ha létezik egy M-nullahalmaz F, úgy hogy $\mu=\mu_F$. Minden μ mértékre érvényes egy egyértelmű, Lebesgue-szerű $\mu=\mu_F+\mu_F'$ felbontás, ahol F egy M-nullahalmaz, tehát μ_F szinguláris M-re nézve és μ_F' abszolút folytonos M-re nézve. Annak belátására, hogy ilyen felbontás létezik, tekintsük az M-nullahalmazok közt azon F halmazt, melyre

a μ_F mérték $\|\mu_F\|$ totális variációja maximális. Ha most E egy M-nullahalmaz, akkor $E \cup F$ is az, és így

$$\|\mu_{E\cup F}\| = \|\mu_F\| + \|(\mu_{\complement F})_E\| \leqq \|\mu_F\|,$$

amiből következik, hogy $(\mu_{\complement F})_E = 0$, azaz $\mu'_F = \mu_{\complement F}$ abszolút folytonos M-re nézve. Glicksberg tétele most így mondható ki:

Legyen $A \subset \mathscr{C}(X)$ egy függvényalgebra a kompakt X téren és χ az A egy karaktere. Ha a μ mérték ortogonális A-ra és $\mu = \mu_F + \mu'_F$ az $M(\chi)$-re vonatkozó Lebesgue-féle felbontás, akkor μ_F és μ'_F külön-külön ortogonálisak A-ra.

Jegyezzük meg, hogy Glicksberg tétele tényleg általánosítja Ahernét. Legyen ugyanis $m \in M(\chi)$ olyan, hogy χ minden más reprezentatív mértékre abszolút folytonos m-re nézve és legyen μ ortogonális A_m-re. Ekkor az m-re vonatkozó $\mu = \mu_a + \mu_s$ felbontás $M(\chi)$-re nézve is az. A $\mu - \int d\mu \cdot m$ mérték ortogonális A-ra, így Glicksberg tétele és a

$$\mu - \int d\mu \cdot m = (\mu_a - \int d\mu \cdot m) + \mu_s$$

felbontás alapján μ_s és $\mu_a - \int d\mu \cdot m$ ortogonálisak A-ra, tehát μ_a ortogonális A_m-re.

Most szeretném Glicksberg tételét részletesen bebizonyítani {89, 91}, ezzel az eddig felsorolt, egymást követő általánosítások mind egy csapással be lesznek bizonyítva. Kiindulópontul a következő, rendezett vektorterekre vonatkozó, Hahn—Banach típusú tétel szolgál, amelyet csak idézek {66, II. fej., § 3, No. 1, Prop. 1; 127, xiii old.}:

Legyen E egy rendezett vektortér és V az E térnek egy olyan altere, hogy minden $a \in E$ elemhez létezik egy $v \in V$ elem, melyre $a \leqq v$. Adatván egy pozitív lineáris $L: V \to \mathbf{R}$ leképezés, azon $H: E \to \mathbf{R}$ pozitív lineáris leképezések $\mathscr{K}(L)$ halmaza, melyek a V altéren L-lel megegyeznek, nem üres. Továbbá, ha $a \in E$, akkor a $\{H(a);\ H \in \mathscr{K}(L)\}$ halmaz megegyezik a $[c, d]$ zárt intervalummal, ahol

$$c = \sup\{L(v);\ v \in V,\ v \leqq a\}, \quad d = \inf\{L(v);\ v \in V,\ v \geqq a\}.$$

Innen folyik a tulajdonképpeni bizonyítás első láncszeme, amelyik Neumann János minimax tételének változata.

Ha $u \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ valós értékű folytonos függvény a kompakt X téren, akkor

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\chi(f);\ f \in A,\ \mathrm{Re}\,f \leqq u\} = \inf\left\{\int u dm;\ m \in M(\chi)\right\}. \tag{54}$$

Valóban ha $m \in M(\chi)$ és $f \in A$ olyan, hogy $\mathrm{Re}\,f \leqq u$, akkor

$$\mathrm{Re}\,\chi(f) = \int \mathrm{Re} f dm \leqq \int u dm.$$

Ebből következik, hogy bármely m-re (54) baloldala $\leqq \int u dm$ és így (54) baloldala legfeljebb akkora mint a jobb. Hogy az egyenlőséget is bebizonyítsuk, válasszuk a Hahn—Banach típusú tételben E-nek a $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ teret és legyen V a $\mathrm{Re}\,f$ függvények által alkotott tér, ahol f befutja az A függvényalgebrát. A tételben szereplő feltétel teljesül, mert $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ elemei korlátos függvények és A tartalmazza a konstansokat. Az $L: \mathrm{Re}\,f \mapsto \mathrm{Re}\,\chi(f)$ leképezésnek $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$-re való kiterjesztései közül válasszuk azt, amelyik az $u \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ elemen a

$$c = \sup\{\mathrm{Re}\,\chi(f);\ f \in A,\ \mathrm{Re}\,f \leqq u\}$$

értékét veszi fel. Riesz Frigyes tétele értelmében ez a kiterjesztés megfelel egy pozitív $m \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})'$ mértéknek, melyre

$$\operatorname{Re} \chi(f) = \int \operatorname{Re} f dm$$

és az $f = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Re}(if)$ összefüggés folytán $m \in M(\chi)$. Másrészt $\int u dm = c$, tehát (54)-ben tényleg az egyenlőség érvényes.

A következő lépés az

Általánosított Forelli-féle lemma. Legyen K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *az* X *tér kompakt* $M(\chi)$*-nullahalmazainak egy növekvő sorozata és legyen* $F = \bigcup_n K_n$. *Ekkor létezik egy* (g_n) *függvénysorozat az* A *függvényalgebrában, melyre*

$$\|g_n\| = \max_{x \in X} |g_n(x)| \leqq 1,$$

$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ *az* F *halmazon és minden az* $M(\chi)$*-hez tartozó* m*-re* $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 1$ *majdnem mindenütt* m*-re nézve.*

Bizonyítás. Rögzítsük az $n \geqq 1$ egész számot, legyen I_n a K_n halmaz karakterisztikus függvénye és

$$\mathscr{U} = \{u \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R});\ u \leqq -nI_n\}.$$

Az $\mathscr{U}$ függvénycsalád növekvően irányított, azaz ha $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$, akkor $\max(u_1, u_2) \in \mathscr{U}$. Így bármely $m \in M(\chi)$ mértékre az $\int u dm$ számok $\mathscr{U}$-szerinti limesze értelmezve van és mivel $m(K_n) = 0$

$$\lim_{\mathscr{U}} \int u dm = \int (-nI_n) dm = 0.$$

Rendeljük hozzá most minden $u \in \mathscr{U}$ elemhez a Φ_u: $M(\chi) \to \mathbf{R}$ leképezést, mely az m mértéknek az $\int u dm$ integrált feleltei meg. Az imént bebizonyított állítás úgy is kimondható, hogy minden $m \in M(\chi)$ pontban $\lim_{\mathscr{U}} \Phi_u(m) = 0$. Mármost a (Φ_u) függvénycsalád növekvő, azaz $\Phi_{u_1}(m) \leqq \Phi_{u_2}(m)$ bármely $m \in M(\chi)$-re ha $u_1 \leqq u_2$. Az $M(\chi) \subset \mathscr{M}(X)$ halmaz kompakt a gyenge topológiában és így Dini tétele {135, II. 2.2, 57. old.} értelmében Φ_u egyenletesen tart zérushoz az $M(\chi)$ halmazon.

Létezik tehát egy $u \in \mathscr{U}$ függvény, úgy hogy

$$\int u dm > -\frac{1}{n^4}$$

minden az $M(\chi)$-hez tartozó m mértékre. Az (54) minimax elv alapján létezik egy $f_n \in A$, melyre

$$\operatorname{Re} f_n \leqq -nI_n \quad \text{és} \quad \operatorname{Re} \chi(f_n) > -\frac{1}{n^4}.$$

Legyen

$$g_n = e^{f_n} \cdot e^{-i \operatorname{Im} \chi(f_n)}.$$

Ekkor

$$|g_n(x)| = e^{\operatorname{Re} f_n(x)} \leqq 1$$

mivel f_n mindenütt legfeljebb zérus. Ha $x \in K_n$, akkor $|g_n(x)| \leqq e^{-n}$ és mivel $K_n \subset K_{n+1}$, ebből azonnal következik, hogy (g_n) zérushoz tart az F halmazon.

Végül pedig

$$\chi(g_n) = e^{\chi(f_n) - i \operatorname{Im} \chi(f_n)} = e^{\operatorname{Re} \chi(f_n)}$$

és

$$1 \geqq \chi(g_n) = e^{\operatorname{Re} \chi(f_n)} \geqq e^{-\frac{1}{n^4}} \geqq 1 - \frac{1}{n^4}.$$

Legyen m egy tetszés szerinti $M(\chi)$-hez tartozó mérték. Akkor

$$(55) \quad \int |g_n - 1|^2 dm = \int (|g_n|^2 + 1 - 2 \operatorname{Re} g_n) dm \leqq 2 - 2 \operatorname{Re} \chi(g_n) = 2(1 - \chi(g_n)) \leqq \frac{2}{n^4}.$$

A Cauchy—Schwarz és a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |g_n - g_{n+1}| dm \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int |g_n - g_{n+1}|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Így a $g_n = g_1 \dotplus \sum_{j=1}^{n-1} (g_{j+1} - g_j)$ sorozat m-re nézve majdnem mindenütt konvergál és (55) következtében a límesz majdnem mindenütt eggyel egyenlő. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Vezessük le Glicksberg tételét Forelli lemmájából. Legyen F a tételben szereplő $M(\chi)$-nullahalmaz, amelyről feltehetjük, hogy kompakt $M(\chi)$-nullahalmazok növekvő sorozatának egyesített halmaza. Legyen továbbá (g_n) a lemmában szereplő sorozat. Az

$$\{x \in X, \quad \lim_{n \to \infty} g_n(x) \neq 1\}$$

halmaz nullmértékű minden $m \in M(\chi)$ mértékre és így $|\mu_F'|$-re is, mivel μ_F' abszolút folytonos $M(\chi)$-re nézve. Így $\lim_{n \to \infty} g(x) = 1$ majdnem mindenütt $|\mu_F'|$-re nézve. Legyen f az A algebra tetszés szerinti eleme, akkor fg_n is A-hoz tartozik és így $\int fg_n \, d\mu = 0$ a feltevés szerint. Mivel $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ az F halmazon és $\|g_n\| \leqq 1$, Lebesgue konvergenciatétele alapján

$$\int f d\mu_F' = \lim_{n \to \infty} \int f g_n d\mu_F' = \lim_{n \to \infty} \int_{C_F} f g_n d\mu + \lim_{n \to \infty} \int_F f g_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f g_n d\mu = 0.$$

Ezek szerint μ_F' ortogonális A-ra és így természetesen $\mu_F = \mu - \mu_F'$ is az.

Az általánosítást egy fokkal továbbvitték König és Seever {107; 54, II. fej., 3. pont, 31. old.}, akik egy topologikus tér helyett egy X halmazt tekintenek, amelyiken egy $\mathfrak{T}$ halmaztörzs (σ-algebra) van megadva. Emlékeztessünk arra, hogy az X halmaz részeinek egy $\mathfrak{T}$ halmaza akkor alkot törzset, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) $X \in \mathfrak{T}$,

b) ha (A_n) a $\mathfrak{T}$-be tartozó halmazok egy sorozata, akkor $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{T}$,

c) ha $A \in \mathfrak{T}$, akkor $\complement_X A \in \mathfrak{T}$.

A $\mathfrak{T}$ halmaztörzsön értelmezett $\mu: \mathfrak{T} \to \mathbf{C}$ függvényt akkor nevezzük megszámlálhatóan additívnak, vagy mértéknek, ha minden (A_n) sorozatra, melynél $A_n \in \mathfrak{T}$ és $A_k \cap A_n = \emptyset$ midőn $k \neq n$, fennáll, hogy $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. Jelölje $\mathcal{M}(X, \mathfrak{T})$ a $\mathfrak{T}$ halmaztörzsön értelmezett megszámlálhatóan additív halmazfüggvények összességét. Jelölje továbbá $\mathcal{B}(X, \mathfrak{T})$ az X halmazon értelmezett azon korlátos, komplex-

értékű f függvények algebráját, melyek $\mathfrak{T}$-re nézve mérhetőek, azaz a komplex számsík minden nyílt U halmazára az $f^{-1}(U)=\{x\in X;\ f(x)\in U\}$ halmaz $\mathfrak{T}$-hez tartozik.

Rögzítsük most a $\mathscr{B}(X,\mathfrak{T})$ algebrának egy A részalgebráját, amelyik tartalmazza az állandó függvényeket. A folytonos esethez analóg módon $\sum(A)$-val jelöljük azon nem identikusan eltűnő $\chi\colon A\to\mathbf{C}$ algebra-homomorfizmusok halmazát, melyekhez található egy $m\in\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$, úgy hogy

$$\chi(f)=\int_X f(x)\,dm(x) \tag{56}$$

minden $f\in A$ függvényre. Minden $\chi\in\sum(A)$ karakterhez tartozik egy $M(A,\chi)=M(\chi)$ halmaz, amelyik azon *pozitív* m mértékekből áll, melyek (56)-nak eleget tesznek minden $f\in A$ függvényre. Ha $m\in M(\chi)$, akkor $m(X)=1$ és belátható, hogy $M(\chi)$ nem üres {54, II. 1.6, 26. old.}. Jelölje még $A^{\perp}$ azon ν mértékek halmazát, amelyek ortogonálisak A-ra, azaz $\int f d\nu=0$ minden $f\in A$ függvényre.

Az $\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ tér egy nem üres P részhalmazát *elősáv*nak (preband) nevezzük, ha bármely a P-hez tartozó (μ_n) sorozatnak megfelel egy $\mu\in P$ mérték, úgy hogy mindegyik μ_n abszolút folytonos μ-re nézve. Fontos példák elősávokra az imént bevezetett $M(\chi)$ halmazok {54, II. 2.2. iii), 28. old.}. Ha $P\subset\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ elősáv, akkor minden $\nu\in\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ mérték egyértelműen felbontható a $\nu=\nu_P^{\vee}+\nu_P^{\wedge}$ alakban, ahol $\nu_P^{\vee}$ abszolút folytonos valamelyik $\mu\in P$ mértékre nézve és $\nu_P^{\wedge}$ szinguláris minden $\mu\in P$ mértékre. Az $\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ tér egy B lineáris alterét akkor nevezzük *sáv*nak, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

a) ha $\nu\in B$ és μ abszolút folytonos ν-re nézve, akkor $\mu\in B$,

b) ha a B-be tartozó pozitív μ_n mértékek növekvő sorozata a μ mértékhez tart, akkor μ is eleme B-nek.

Ha Q az $\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ tér tetszés szerinti részhalmaza, jelölje $Q^{\wedge}$ mindazon mértékekből álló alteret, amelyek valamennyi Q-ba tartozó mértékre nézve szingulárisak. Ekkor $Q^{\wedge}$ sáv és $Q^{\wedge\wedge}$ a legkisebb sáv, amely Q-t tartalmazza. Ha P elősáv, akkor $P^{\vee}$-vel jelöljük azon mértékek lineáris terét, amelyek valamely P-be tartozó mértékre nézve abszolút folytonosak. Ekkor $P^{\vee}=P^{\wedge\wedge}$ és a fenti $\nu=\nu_P^{\vee}+\nu_P^{\wedge}$ felbontásból következik, hogy $\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ mint a $P^{\vee}\oplus P^{\wedge}$ direkt összeg állítható elő. Ha B már maga is sáv, akkor természetesen $B=B^{\vee}=B^{\wedge\wedge}$ és ebben az esetben a Riesz Frigyes-féle $\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})=B\oplus B^{\wedge}$ felbontást nyerjük. Ha B a μ mérték által generált sáv, akkor $\nu=\nu_B^{\vee}+\nu_B^{\wedge}$ éppen a Lebesgue-féle felbontás {54, II. fej., 2. pont, 26—29. old.}.

König és Seever mármost Riesz Frigyes és Marcel tételének következő általánosítását bizonyítják be:

Legyen $\chi\in\sum(A)$ és legyen $B\subset\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$ olyan sáv, melyre $B\cap M(\chi)\neq\emptyset$. Ha $\mu\in A^{\perp}\cap B$, akkor $\mu_{B\cap M(\chi)}^{\vee}\in A^{\perp}$.

A legfontosabb speciális esetben, amidőn $B=\mathscr{M}(X,\mathfrak{T})$, a tétel azt mondja ki, hogy ha $\mu\in A^{\perp}$, akkor $\mu_{M(\chi)}^{\vee}\in A^{\perp}$. A szerzők egy B sávot redukálónak neveznek, ha $\mu\in A^{\perp}$-ból folyik, hogy $\mu_B^{\vee}\in A^{\perp}$. Ezek szerint a Riesz-féle tétel általánosítása úgy is kimondható, hogy a $M(\chi)^{\vee}$ sáv redukáló. Ha B redukáló sáv, akkor vagy $M(\chi)\subset B$ vagy $M(\chi)\subset B^{\wedge}$. Ebből azonnal következik, hogy két $\chi_1,\chi_2\in\sum(A)$ karakterre fennáll, hogy vagy $M(\chi_1)^{\vee}=M(\chi_2)^{\vee}$ vagy $M(\chi_1)^{\vee}\cap M(\chi_2)^{\vee}=\{0\}$. Nevezzük a χ_1 és χ_2 karaktereket ekvivalenseknek ha $M(\chi_1)^{\vee}=M(\chi_2)^{\vee}$. Ez az ekvivalenciareláció felbontja a $\sum(A)$ halmazt ekvivalenciaosztályokra, amelyeket Gleason-féle részeknek neveznek {54, II. fej., 4. pont, 35. old.; 86, VI. fej.; 131, § 16}. Jelölje $\Gamma(A)$

a Gleason-féle részek halmazát. Mindegyik $P \in \Gamma(A)$ részhez hozzárendeljük a $B(P) = M(\chi)^{\vee}$ sávot, ahol χ a P ekvivalenciaosztály tetszés szerinti eleme. Ekkor érvényes a következő direkt összeg felbontás:

$$\mathcal{M}(X, \mathfrak{T}) = \left(\bigoplus_{P \in \Gamma(A)} B(P) \right) \oplus M(A)^{\wedge},$$

ahol $M(A)$ az $M(\chi)$ halmazok egyesített halmazát jelöli, midőn χ befutja a $\sum(A)$ halmazt. Eszerint minden $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{T})$ egyértelműen előállítható a

$$\mu = \sum_{P \in \Gamma(A)} \mu_P^{\vee} + \mu_{M(A)}^{\wedge}$$

alakban, ahol $\mu_P^{\wedge}$ abszolút folytonos valamely $m \in M(\chi)$ mértékre nézve ($\chi \in P$) és $\mu_{M(A)}^{\wedge}$ szinguláris minden olyan mértékre nézve, amely valamelyik $M(\chi)$ halmazhoz tartozik {54, Theorem II. 4.4, 35. old.}. Hasonló felbontást már Glicksberg és Wermer {88, Theorem 1} is bebizonyítottak, akik Mergeljan már említett approximációs tételének bizonyítására használják fel, lásd még {89, Corollary 1.3, 111—112. old.; 87; 86, II. 7.11, 45. old.}.

Felmerül a kérdés, hogy abban az esetben, amikor X kompakt topologikus tér, $\mathfrak{T}$ az X tér Borel-féle részhalmazainak összessége és A a folytonos függvények $\mathcal{C}(X)$ algebrájának részalgebrája, vajon a Glicksberg-féle $\mu_F' + \mu_F$ felbontás megegyezik-e a König—Seever-féle $\mu_{M(\chi)}^{\vee} + \mu_{M(\chi)}^{\wedge}$ felbontással. Világos, hogy μ_F mindegyik $m \in M(\chi)$ mértékre nézve szinguláris. Hogy a μ_F és $\mu_{M(\chi)}^{\wedge}$ mértékek megegyeznek, az folyik a következő állításból, amelyet a John Rainwater név alatt működő matematikuscsoport bizonyított be: Ha a ν mérték szinguláris mindegyik $m \in M(\chi)$ mértékre nézve, akkor létezik egy Baire-féle halmaz $F \subset X$, amelyik $M(\chi)$-nullahalmaz és amelyre $\nu = \nu_F$.

A König—Seever tétel eredeti bizonyítása visszatér Helson és Lowdenslager ötletéhez és Szegő Gábor módszerét követi {107; 54, II. fej., 3. pont}, míg Rainwater tételének eredeti bizonyítása a minimax tételen alapult {121; 86, II. 7.4, 43. old.}. Kicsit később König a Hahn—Banach tételnek egy olyan általánosítását találta, amelyből mindkét eredmény folyik {108; 131, 23.4, 256. old.; 54, III. fej., 2. pont}.

Már említettük, hogy Beurling alkalmazta Riesz Frigyes és Marcel tételét, valamint, hogy a tétel felhasználható Mergeljan approximációtételének és Wermer maximalitási tételének bizonyítására. Ugyancsak alkalmazható a tétel Wermer következő eredményének[1] kimutatására {143}: Legyen Γ egy egyszerű zárt görbe a komplex számsíkban, amelyik az origót belsejében tartalmazza. Ha Γ nem rektifikálható, akkor az 1 konstans a Γ görbén egyenletesen megközelíthető $\sum_{n=-N}^{N} c_n z^n$ alakú függvényekkel, melyeknél $c_0 = 0$.

A Riesz Frigyes és Marcel-féle tétel lesz felhasználva az ún. Rudin—Carleson tétel bizonyításánál. Ez utóbbi tétel a következőt állítja: Legyen E a $\mathbf{T}$ körnek olyan zárt részhalmaza, melynek Lebesgue-féle mértéke zérus. Ekkor minden az E halmazon folytonos g függvényhez létezik egy az $A(\mathbf{D})$ algebrához tartozó f függvény, melynek E-re való megszorítása megegyezik g-vel és melyre $\max_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in E} |g(z)|$ {86, II. 12.6, 58. old.}. Megfordítva, Riesz Frigyes és Marcel tétele könnyen következik a Rudin—Carleson tételből {131, 20.5, 206. old.; 118, 11. old.}. Bishop a következő általános tételt bizonyította be, amelyik mutatja, hogy a Rudin—Carleson tétel valóban a Riesz fivérek tételének közvetlen következménye {62; 86, II. 12.5, 58. old.}:

[1] Erre az alkalmazásra Larry Zalcman kollegám hívta fel a figyelmemet.

Legyen $\mathscr{C}(X)$ az X kompakt topologikus téren értelmezett komplexértékű folytonos függvények algebrája és A a $\mathscr{C}(X)$ algebra zárt altere. Legyen E az X tér olyan zárt részhalmaza, melyre $\mu(E)=0$ minden az A-ra ortogonális μ mértékre. Ha g az E halmazon értelmezett folytonos függvény és p az X téren értelmezett olyan függvény, melyre $p(x)>0$ $(x\in X)$ és minden $x\in E$ pontban fennáll az $|g(x)|\leqq p(x)$ egyenlőtlenség, akkor létezik egy $f\in A$ függvény, amelynek E-re való megszorítása megegyezik g-vel és melyre $|f(x)|\leqq p(x)$ minden $x\in X$ pontban.

Az $X=\mathbf{T}$, $A=A(\mathbf{T})$ speciális esetben, ha E a $\mathbf{T}$ kör olyan részhalmaza, amelynek Lebesgue-féle mértéke zérus, akkor $\mu(E)=0$ minden $\mu\in A^{\perp}$ mértékre, mert Riesz Frigyes és Marcel tétele értelmében μ abszolút folytonos a Lebesgue-féle mértékre nézve.

A Rudin—Carleson tétel egy erősítését adta újabban Oberlin {117}, aki azt bizonyította be, hogy ha $E\subset\mathbf{T}$ Lebesgue-féle mértéke zérus, akkor minden az E-n folytonos g függvényhez található egy $f\in A(\mathbf{T})$, melynek Fourier-sora egyenletesen konvergens, és melynek E-re való megszorítása g-vel egyenlő. Bizonyítása felhasználja Bishop tételét és a Riesz Frigyes és Marcel-féle tétel következő változatát:

Jelölje $s_n(f)$ az $f\in A(\mathbf{T})$ Fourier-sorának n-edik szeletét. Legyen $\mu_j\in\mathscr{M}(\mathbf{T})$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$ olyan sorozat, hogy $\sum_{j=0}^{\infty}\|\mu_j\|$ konvergál és hogy

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\mu_0(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} s_n(f)(\theta)\,d\mu_n(\theta)$$

minden $f\in A(\mathbf{T})$ függvényre, melynek Fourier-sora egyenletesen konvergens. Akkor μ_0 abszolút folytonos a Lebesgue-féle mértékre nézve.

Srinivasan és Wang {128} bebizonyítják, hogy ha I az $A(\mathbf{T})$ algebra zárt ideálja, akkor létezik egy q belső függvény és egy, a q függvénnyel bizonyos összefüggésben álló, nullmértékű $E\subset\mathbf{T}$ halmaz, úgy hogy $I=q\cdot Z(E)$, ahol $Z(E)$ azon $f\in A(\mathbf{T})$ függvények halmazát jelöli, amelyek E-n eltűnnek. A szerzők hangsúlyozzák, hogy bizonyításuk nagyrészben a Riesz fivérek tételén múlik és hogy általánosabb helyzetekben is érvényes, amelyekben igaz a Riesz-féle tétel. Glicksberg {89, Theorem 3.2, 120. old.} a Riesz tétel tőle származó általánosítását arra használja, hogy a $\mathscr{C}(X)$ algebra zárt A részalgebráinak ideáljait leírja. Mind ebben a dolgozatban, mind a rákövetkezőben {87}, amelyik Garnettal közösen íródott, még számos más alkalmazás található, amelyeknek javarésze a $\mathscr{C}(X)$ algebra részalgebráinak kölcsönös helyzetére vonatkozik {vö. 91, Theorem 3.6 és 3.7, 19. old.}.

Egy érdekes kutatási irány kiinduló pontja lett Piranian, Shields és Wells dolgozata {119}, amelyben A. E. Taylor következő sejtését bizonyítják be: Legyen (a_n) a komplex számoknak egy sorozata és tegyük fel, hogy minden a $H^{\infty}(\mathbf{D})$ térbe tartozó $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ függvényre a

$$\lim_{r\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^n$$

határérték létezik és véges. Ekkor létezik egy $\varphi\in L^1(\mathbf{T})$ függvény, melyre

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)e^{in\theta}\,d\theta \quad n\geqq 0.$$

A dolgozat végén a következő sejtést mondják ki a szerzők: Legyen (φ_n) az $L^1(\mathbf{T})$ térbe tartozó függvényeknek olyan sorozata, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi_n(\theta)\,d\theta$$

minden a $H^\infty(\mathbf{T})$ térbe tartozó f függvényre létezik. Akkor található egy $\varphi\in L^1(\mathbf{T})$ függvény, úgy hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta \tag{57}$$

minden $f\in H^\infty(\mathbf{T})$ függvényre.

Kahane {104} bebizonyította, hogy olyan $\varphi\in L^1(\mathbf{T})$ valóban található, melyre (57) minden az $A(\mathbf{T})$ algebrába tartozó f függvényre igaz, míg Mooney {115} és Havin {94} az egész sejtést bizonyították be. Mooney bizonyítását Amar {53} egyszerűsítette, míg Cnop és Delbaen {68} általánosították egy $\mathscr{C}(X)$ algebra bizonyos részalgebráira {vö. 54, VIII. 3.3, 179. old.; 118, § 8, 50—54. old.}.

Tételeik bebizonyítása céljából mind Piranian, Shield és Wells, mind Kahane megjegyzik, hogy a Hahn—Banach tétel és Riesz Frigyes tétele alapján létezik egy μ mérték, amelyikre

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\mu(\theta)$$

minden $f\in A(\mathbf{T})$ függvényre: belátandó, hogy μ abszolút folytonos. Ha μ nem abszolút folytonos, akkor létezik egy zárt $E\subset\mathbf{T}$ halmaz, melynek Lebesgue-féle mértéke zérus, de amelyre $\mu(E)\neq 0$. Kahane most felhasználja azt a már említett tényt, hogy létezik egy $w\in A(\mathbf{D})$ függvény, melyre $w(z)=1$ az E halmazon és $|w(z)|<1$ az E halmazon kívül [23, 36. old.] és ebből vezet le egy ügyes konstrukció segítségével ellentmondást. Amar bizonyítása hasonló, csak az imént említett tényt a $\overline{\mathbf{D}}=\sum(A(\mathbf{T}))$ körlemez helyett a $H^\infty(\mathbf{T})$ algebra spektrumán használja fel. Megfordítva, a Riesz fivérek tétele következik Kahane okoskodásából: ha μ olyan mérték a $\mathbf{T}$ körön, amelynek az (51) alatti c_n koefficiensei az $n<0$ indexekre eltűnnek, akkor a μ mérték $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ Fourier-sorának $S_n(\theta)$ Fejér-féle közepei $H^\infty(\mathbf{T})$-be tartoznak, és így egyrészt a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)S_n(\theta)\,d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \int_0^{2\pi} S_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \int_0^{2\pi} d\mu(\theta)$$

határérték minden $f\in H^\infty(\mathbf{T})$ függvényre létezik, mivel a Lebesgue-féle mérték ezen a téren multiplikatív, másrészt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\theta)S_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\mu(\theta)$$

minden $f\in A(\mathbf{T})$ függvényre {102, 20. old.}, így Kahane fenti megjegyzése alapján μ abszolút folytonos.

Emiatt az ekvivalencia miatt nevezi Kahane tételét „szekvenciális Riesz Frigyes és Marcel tételnek" Elizabeth Ann Heard {95}, aki általánosabban kimutatja, hogy ha a $\mathscr{C}(X)$ algebra egy zárt alterére nézve igaz Riesz Frigyes és Marcel tétele, akkor

egy Kahane tételéhez analóg állítás érvényes. Bizonyítása a Rudin—Carleson tétel fentebb idézett Bishop-féle általánosításán múlik.

Riesz Frigyes és Marcel tételének a fentebbiektől eltérő általánosításai De Leeuw és Glicksberg egy dolgozatára {71} nyúlnak vissza. Legyen μ egy mérték a $\mathbf{T}$ körön, amelyre a (49) feltétel $n=1, 2, 3, \ldots$-ra teljesül. A Riesz fivérek eredményei a következő két állításban foglalhatók össze:

A. μ abszolút folytonos a Lebesgue-féle mértékre nézve.

B. Ha μ egy pozitív Lebesgue-mértékű E halmazon azonosan eltűnik (azaz $\mu(F)=0$ az E halmaz minden Borel-féle F részhalmazára), akkor μ zérus.

De Leeuw és Glicksberg megjegyzik, hogy A. és B. együtt a következővel ekvivalens:

A $\mathbf{T}$ *kör azon Borel-féle részhalmazainak összessége, amelyeken* μ *azonosan eltűnik, invariáns rotációval szemben.*

Ezt az állítást viszik át a szerzők kompakt, kommutatív csoportokra. Egy ilyen G csoport *karakterén* egy $\gamma: G\to\mathbf{T}$ folytonos homomorfizmust értünk, azaz olyan folytonos leképezést melynél, $\gamma(g_1+g_2)=\gamma(g_1)\gamma(g_2)$ minden $g_1, g_2\in G$ elemre. A karakterek közti szorzást a $\gamma_1\gamma_2(g)=\gamma_1(g)\gamma_2(g)$ képlettel definiálva, ezek a G csoport ún. karakter- vagy duálcsoportját alkotják, melyet Γ-val jelölünk. Legyen most ψ egy rögzített, nem azonosan zérus homomorfizmus Γ-ból a valós számok additív csoportjába: ezt a $\psi: \Gamma\to\mathbf{R}$ homomorfizmust a Γ csoport „rendezésének" tekinthetjük. Megfelel neki egy „duális" $\varphi: \mathbf{R}\to G$ homomorfizmus úgy, hogy

$$\gamma(\varphi(t)) = e^{i\psi(\gamma)t}$$

minden $\gamma\in\Gamma$ és $t\in\mathbf{R}$ elemre. Egy a G csoporton definiált véges, reguláris, Borel-féle μ mértéket φ-vel szemben *kvázi-invariáns*nak nevezünk, ha azon $E\subset G$ Borel-féle halmazok összessége, melyeken μ azonosan eltűnik, invariáns a $\varphi(t)$ $(t\in\mathbf{R})$ alakú elemekkel való eltolással szemben, azaz, ha μ azonosan eltűnik E-n, akkor minden $t\in\mathbf{R}$ értékre azonosan eltűnik az

$$E+\varphi(t) = \{g+\varphi(t);\ g\in E\}$$

halmazon is. A μ mérték $\hat{\mu}$ Fourier-transzformáltja a Γ csoporton a

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(g)\,dm(g)$$

képlet által értelmezett függvény, ahol m a G csoporton definiált, Haar Alfréd után elnevezett invariáns mérték, amelyikre még kikötjük, hogy $m(G)=1$. A μ mérték φ*-analitikus,* ha $\hat{\mu}$ a Γ csoport „negatív" felében eltűnik, azaz $\hat{\mu}(\gamma)=0$ minden olyan γ-ra, melyre $\psi(\gamma)<0$ {vö. 100, 1.1, 3. old.}. De Leeuw és Glicksberg főtétele így mondható ki {vö. 86, VII. 5.1, 172. old.}:

Ha a μ *mérték* φ*-analitikus, akkor kvázi-invariáns* φ*-vel szemben.*

A tételre Mandrekar és Nadkarni {113} a Hilbert tér unitér transzformációcsoportjainak spektrálelőállításán {134, XI. 1, 69 old.} alapuló egyszerű bizonyítást adtak. De Leeuw és Glicksberg főtételükből az A. és B. állításokat általánosító tételeket vezetnek le, melyeknek kimondásához további definíciók szükségesek. A G csoport Borel-féle E részhalmazáról azt mondjuk, hogy *nulla* φ *irányában,* ha minden $g\in E$ elemre azon $t\in\mathbf{R}$ pontok halmaza, melyekre $g+\varphi(t)\in E$, nullmértékű a számegyenesen; ha minden $g\in E$ elemre ennek a halmaznak a mértéke szigorúan pozitív (azaz >0), akkor E *vastag* φ *irányában.* A G csoporton értelmezett μ mérték *ab-*

szolút folytonos φ irányában, ha $\mu(E)=0$ minden E Borel-halmazra, amelyik nulla φ irányában; míg μ *nem-eltűnő φ irányában,* ha $|\mu|(E)>0$ minden E Borel-halmazra, amelyik vastag φ irányában és melyre $|\mu|(E+\varphi(\mathbf{R}))>0$. Belátható {71, Proposition 2.3, 183—184. old.}, hogy μ akkor és csak akkor kváziinvariáns φ-vel szemben, ha μ abszolút folytonos és nem-eltűnő φ irányában. Ebből és a főtételből közvetlenül adódnak az A. és B. állítások általánosításai: Ha a μ mérték φ-analitikus, akkor abszolút folytonos és nem-eltűnő φ irányában. Az első állítás Glicksberg fentebb részletesen bebizonyított általános Riesz Frigyes és Marcel-féle tételéből is folyik {90, 126. old.}. A főtétel további következménye a Rudin—Carleson tétel egy általánosítása {71, Theorem 3.3, 186. old.}, a fentebb bebizonyított Bochner-féle tétel általánosítása {71, Theorem 3.4, 187. old.} és kiterjesztése a végtelen dimenziós torusra {71, 191. old.}.

Forelli {83} a De Leeuw—Glicksberg-féle keretet kitágította, amennyiben egy kompakt, kommutatív csoport egyparaméteres alcsoportja helyett egy lokálisan kompakt (Hausdorff-féle) topologikus S teret tekint és egy $t\mapsto T_t$ homomorfizmust $\mathbf{R}$-ből az S tér önmagára való homeomorf leképezéseinek csoportjába. Felteszi, hogy a $(t, s)\mapsto T_t s$ leképezés $\mathbf{R}\times S$-ből S-be folytonos, bevezeti az analitikus és kvázi-invariáns mérték fogalmát és bebizonyítja, De Leeuw és Glicksberg főtételét általánosítva, hogy minden analitikus mérték kvázi-invariáns. Forelli tételéből Muhly {116} a Bochner-féle tételnek az imént említetten jóval túlmenő, összefüggő Lie csoportok homogén tereire vonatkozó általánosítását vezette le. Maga Forelli egy Riesz Frigyes és Marcel típusú tételt vezet le körszerű tartományokra {84}, míg Kolaski {105} ugyanezt teszi az N-dimenziós $\mathbf{C}^N$ komplex számtérnek a $|z_1|^2+\ldots$ $\ldots+|z_N|^2<1$ egyenlőtlenséggel megadott egységgömbjére. A Riesz Frigyes és Marcel-féle tételnek a komplex egységgömbre való, Henkintől származó kiterjesztése végett utalok Pelczynski könyvecskéjére {118, § 11, 72. old.}.

De Leeuw {72} a $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ lineáris operátoraira terjeszti ki Riesz Frigyes és Marcel tételét. Jelölje $\mathscr{L}$ a $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ téren értelmezett lineáris operátorainak, azaz $\mathscr{C}(\mathbf{T})$ önmagára való lineáris, folytonos leképezéseinek terét. Ha $\theta\in\mathbf{T}$, akkor az R_θ eltolásoperátort az $(R_\theta f)(\psi)=f(\psi-\theta)$ összefüggés definiálja. Jelölje $\mathscr{L}_\#$ azon $T\in\mathscr{L}$ operátorok halmazát, melyekre

$$\lim_{\theta\to 0}\|TR_\theta-R_\theta T\|=0.$$

Mint fentebb, legyen $A(\mathbf{T})$ azon $f\in\mathscr{C}(\mathbf{T})$ függvények tere, melyekre a (45) alatti c_n Fourier-együttható eltűnik az $n=-1, -2, -3, \ldots$ értékekre és jelölje $A(\mathbf{T})^\sim$ azon függvények terét, melyekre $c_n=0$ midőn $n=1, 2, 3, \ldots$. De Leeuw tétele mármost azt mondja ki, hogy *ha $T\in\mathscr{L}_\#$ olyan, hogy $T(A(\mathbf{T}))\subset A(\mathbf{T})^\sim$, akkor T kompakt operátor.* Ha a $\mu\in\mathscr{M}(\mathbf{T})$ mértékkel való konvolúció C_μ operátorát a

$$(C_\mu f)(\psi)=\int_0^{2\pi} f(\psi-\theta)\,d\mu(\theta)$$

képlettel értelmezzük, akkor a $C_\mu(A(\mathbf{T}))\subset A(\mathbf{T})^\sim$ feltétel azzal egyenértékű, hogy a (49) együtthatók az $n=1, 2, 3, \ldots$ értékekre eltűnnek. Másrészt C_μ akkor és csak akkor kompakt, ha μ abszolút folytonos. Így De Leeuw tétele valóban általánosítja a Riesz testvérek tételét, de bizonyításában felhasználja ezt.

Befejezésül jegyezzük meg, hogy korántsem soroltuk fel a Riesz fivérek tételének összes alkalmazását. A tételt a komplex változós analitikus függvényekről szóló munkák állandóan idézik, például Heins egy újabbkeletű, az anguláris deriválttal foglalkozó dolgozata {96, 247. és 251. old.}.

[50] P. R. AHERN: On the generalized F. and M. Riesz theorem. Pacific J. Math. 15 (1965) 373—376.
[51] P. R. AHERN—D. SARASON: The H^p spaces of a class of function algebras. Acta Math. 117 (1967) 123—163.
[52] N. I. AHIJEZER: Előadások az approximáció elméletéről. Gosztehizdat, Moszkva—Leningrád, 1947) magyar fordítás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951. Második kiadás, Nauka, Moszkva, 1965.
[53] E. AMAR: Sur un théorème de Mooney relatif aux fonctions analytiques bornées. Pacific J. Math. 49 (1973) 311—314.
[54] K. BARBEY—H. KÖNIG: Abstract analytic function theory and Hardy algebras. Lecture Notes in Mathematics 593, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1977.
[55] K. F. BARTH—W. J. SCHNEIDER: An asymptotic analog of the F. and M. Riesz radial uniqueness theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969) 53—54.
[56] С. Н. Бернштеин: О наилучшем приближении непрерывниых функций посредством многочленов данной степени. Сообщ. Харьк. матем. об-ва Сер. 2, 13 (1912) 49—194; Összegyűjtött munkák, I. köt., 11—104 old., Akad. Nauk SzSzSzK, Moszkva 1952.
[57] S. N. BERNSTEIN: Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. Mémoires publiés par la classe des sciences Acad. de Belgique (2) 4 (1912) 1—103.
[58] S. N. BERNSTEIN: Sur une propriété des polynômes. Сообщ. Харьк. матем. об-ва Сер. 2, 14 (1913) 1—6; Összegyűjtött munkák, I. köt., 146—150 old.
[59] A. BEURLING: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math. 81 (1949) 239—255.
[60] E. BISHOP: The structure of certain measures. Duke Math. J. 25 (1958) 283—289.
[61] E. BISHOP: Boundary measures of analytic differentials. Duke Math. J. 27 (1960) 331—340.
[62] E. BISHOP: A general Rudin-Carleson theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 140—143.
[63] S. BOCHNER: Boundary values of analytic functions in several variables and almost periodic functions. Annals of Math. 45 (1944), 708—722.
[64] S. BOCHNER: Function rings and analytic measures. J. Math. Pures Appl. (9) 42 (1963) 209—221.
[65] S. BOCHNER: Analytic measures on compact Bohr groups. Scripta Math. 27 (1964) 5—26.
[66] N. BOURBAKI: Éléments de mathématique, Fascicule XV, Espaces vectoriels topologiques, Chaps. 1—2. Második kiadás. Hermann, Párizs, 1966.
[67] G. CARGO: Some topological analogues of the F. and. M. Riesz uniqueness theorem. J. London Math. Soc. (2) 12 (1975/76) 67—74.
[68] I. CNOP—F. DELBAEN: A Dunford-Pettis theorem for $L^1/H^{\infty\perp}$. J. Functional Analysis 24 (1977) 364—378.
[69] R. R. COIFMAN—G. WEISS: Invariant systems of conjugate harmonic functions associated with compact Lie groups. Studia Math. 44 (1972) 301—308.
[70] M. R. CULLEN: An F. and M. Riesz theorem for a class of infinitely connected regions. Portugal. Math. 32 (1973) 91—100.
[71] K. DE LEEUW—I. GLICKSBERG: Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups. Acta Math. 109 (1963) 179—205.
[72] K. DE LEEUW: Fourier series of operators and an extension of the F. and M. Riesz theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 342—344.
[73] P. L. DUREN: Theory of H^p spaces. Academic Press, New York és London, 1970.
[74] ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL: On the uniformly-dense distribution of certain sequences of points. Annals of Math. 41 (1940) 162—173.
[75] C. G. ESSEEN: Fourier analysis of distribution functions, a mathematical study of the Laplace—Gaussian law. Acta Math. 77 (1945) 1—125.
[76] FEJÉR LIPÓT—C. CARATHÉODORY: Remarques sur le théorème de M. Jensen. C. R. Acad. Sci. Paris 145 (1907) 163—165; Összegyűjtött munkák, I. köt., 300—302.
[77] FEJÉR LIPÓT: A függvény szakadásának meghatározása Fourier-féle sorából. Math. Term. Értesítő 31 (1913) 385—415; J. Reine Angew. Math. 142 (1913) 165—188; Összegyűjtött munkák, I. köt., 744—770, 718—742.
[78] FEJÉR LIPÓT: Konjugált trigonometrikus sorokról. Math. Term. Értesítő 32 (1914) 85—93; J. Reine Angew. Math. 144 (1914) 48—56; Összegyűjtött munkák, I. köt., 806—813, 776—783.
[79] FEJÉR LIPÓT: Über einen S. Bernsteinschen Satz über die Derivierte eines trigonometrischen Polynoms und über die Szegősche Verschärfung desselben. Bull. Calcutta Math. Soc. 20 (1930) 49—54; Összegyűjtött munkák, II. köt., 281—285.
[80] FEJÉR LIPÓT: Jelentés az 1930. évi König Gyula jutalomról. Mat. Fiz. Lapok 37 (1930) 63—90; Összegyűjtött munkák, II. köt., 318—360.

[81] FEKETE MIHÁLY: Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. J. Reine Angew. Math. 146 (1916) 88—94.
[82] F. FORELLI: Analytic measures. Pacific J. Math. 13 (1963) 571—578.
[83] F. FORELLI: Analytic and quasi-invariant measures. Acta Math. 118 (1967) 33—59.
[84] F. FORELLI: The theorems of F. and M. Riesz for circular sets. Math. Scandinavica 33 (1973) 145—152.
[85] F. FORELLI: The F. and M. Riesz theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975) 431.
[86] T. W. GAMELIN: Uniform algebras. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
[87] J. GARNETT—I. GLICKSBERG: Algebras with the same multiplicative measures. J. Functional Analysis 1 (1967) 331—341.
[88] I. GLICKSBERG—J. WERMER: Measures orthogonal to a Dirichlet algebra. Duke Math. J. 30 (1963) 661—666. Errata: ugyanott 31 (1964) 717.
[89] I. GLICKSBERG: The abstract F. and M. Riesz theorem. J. Functional Analysis 1 (1967) 109—122.
[90] I. GLICKSBERG: Extensions of the F. and M. Riesz theorem. J. Functional Analysis 5 (1970) 125—136.
[91] I. GLICKSBERG: Recent results on function algebras. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 11. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1972.
[92] HALMOS PÁL: Henry Helson „Lectures on invariant subspaces" c. könyvének referátuma. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 490—494.
[93] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. Acta Math. 41 (1918) 119—196.
[94] В. П. Хавин: Слабая полнота пространства L^1/H_0^1 Вестн. Ленингр. ун-та №. 13 (1973) 77—81, 172.
[95] E. A. HEARD: A sequential F. and M. Riesz theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 832—835.
[96] M. HEINS: On the finite angular derivatives of an analytic function mapping the open unit disk into itself. J. London Math. Soc. (2) 15 (1977) 239—254.
[97] H. HELSON: On a theorem of F. and M. Riesz. Colloquium Math. 3 (1955) 113—117.
[98] H. HELSON—D. LOWDENSLAGER: Prediction theory and Fourier series in several variables, I.—II. Acta Math. 99 (1958) 165—202; 106 (1961) 175—213.
[99] H. HELSON: Lectures on invariant subspaces. Academic Press, New York—London, 1964.
[100] H. HELSON: Analyticity on compact abelian groups. Algebras in analysis (Proc. Instructional Conf. and Advanced Study Inst., Birmingham, 1973), Academic Press, London, 1975, 1—62 old.
[101] E. HILLE—J. D. TAMARKIN: On the absolute integrability of Fourier transforms. Fundamenta Math. 25 (1935) 329—352.
[102] K. HOFFMAN: Banach spaces of analytic functions. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1962.
[103] K. HOFFMAN: Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math. 108 (1962) 271—317.
[104] J. P. KAHANE: Another theorem on bounded analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 827—831.
[105] C. KOLASKI: An F. and M. Riesz type theorem for the unit ball in complex N-space. Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976) 19—25.
[106] H. KÖNIG: Zur abstrakten Theorie der analytischen Functionen. I. Math. Zeitschrift 88 (1965) 136—165. II. Math. Annalen 163 (1966) 9—17. III. Arch. Math. (Basel) 18 (1967) 273—284.
[107] H. KÖNIG—G. L. SEEVER: The abstract F. and M. Riesz theorem. Duke Math. J. 36 (1969) 791—797.
[108] H. KÖNIG: On certain applications of the Hahn—Banach and minimax theorems. Arch. Math. (Basel) 21 (1970) 583—591.
[109] H. KÖNIG: Abstract Hardy algebra theory. Functional Analysis: Surveys and Recent Results, Proceedings of the Paderborn Conference on Functional Analysis, 227—246. North-Holland Mathematical Studies 27, Amsterdam, 1977.
[110] N. KRYLOFF: Sur quelques recherches dans le domaine de la théorie de l'interpolation et des quadratures, dites mécaniques. Proc. International Mathematical Congress, Toronto 1924, I. kötet, 651—656.
[111] G. LUMER: Analytic functions and Dirichlet problem. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 98—104.
[112] G. LUMER: Algèbres de fonctions et espaces de Hardy. Lecture Notes in Mathematics 75, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1968.

[113] V. MANDREKAR—M. NADKARNI: Quasi-invariance of analytic measures on compact groups. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 915—920.
[114] P. MONTEL: Sur les polynomes d'approximation. Bull. Soc. Math. de France 46 (1918) 151—192.
[115] M. C. MOONEY: A theorem on bounded analytic functions. Pacific J. Math. 43 (1972) 457—463.
[116] P. S. MUHLY: A note on analytic measures. Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974) 330—331.
[117] D. OBERLIN: Uniformly convergent Taylor series and sets of measure zero. Michigan Math. J.
[118] A. PELCZYNSKI: Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 30. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1977.
[119] G. PIRANIAN—A. L. SHIELDS—J. H. WELLS: Bounded analytic functions and absolutely continuous measures. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 818—826.
[120] И. И. Привалов: Граничные свойства аналитических функций. Második kiadás. Gos. Izdat. Tech.-Teoret. Lit., Moszkva, 1950; német fordítás: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
[121] J. RAINWATER: A note on the preceding paper. Duke Math. J. 36 (1969) 799—800.
[122] RIESZ FRIGYES és SZEGŐ GÁBOR: Analytikus függvény kerületi értékeiről. Math. Term. Értesítő 38 (1921) 113—127; Riesz Frigyes összegyűjtött munkái, Akadémiai Kiadó, Budapest 1960, I. köt., 610—624.
[123] RIESZ FRIGYES: Über die Randwerte einer analytischen Function. Math. Zeitschrift 18 (1923) 87—95; Összegyűjtött munkák, I. köt., 645—653.
[124] W. RUDIN: Trigonometric series with gaps. J. Math. Mech. 9 (1960) 203—227.
[125] D. SARASON: Function theory on the unit circle. Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Va., 1978.
[126] G. L. SEEVER: Algebras of continuous functions on hyperstonian spaces. Arch. Math. (Basel) 24 (1973) 648—660.
[127] J. A. SHOHAT—J. D. TAMARKIN: The problem of moments. Mathematical Surveys No. 1. Második kiadás. American Mathematical Society, New York, 1950.
[128] T. P. SRINIVASAN—J. K. WANG: On closed ideals of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) 49—52.
[129] E. M. STEIN—G. WEISS: On the theory of harmonic functions of several variables. Acta Math. 103 (1960) 26—62.
[130] E. M. STEIN: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 1970.
[131] E. L. STOUT: The theory of uniform algebras. Bogden & Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.
[132] SZÁSZ OTTÓ: Korlátos hatványsorokról. Math. Term. Értesítő 43 (1926) 504—520.
[133] SZEGŐ GÁBOR: Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Math. Annalen 84 (1921) 234—244.
[134] SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Springer, Berlin, 1942.
[135] SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Valós függvények és függvénysorok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[136] M. H. TAIBLESON: Fourier analysis on local fields. Mathematical Notes 15. Princeton University Press, 1975.
[137] M. H. TAIBLESON: The existence of natural field structures for finite dimensional vector spaces over local fields. Pacific J. Math. 63 (1976) 545—551.
[138] E. C. TITCHMARSH: The theory of the Riemann zeta-function. Oxford University Press, 1951.
[139] K. F. TSE: An analog of the Lusin-Privaloff radial uniqueness theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970) 310—312.
[140] TURÁN PÁL: Über die Ableitungen von Polynomen. Compositio Math. 7 (1939) 89—95.
[141] TURÁN PÁL: On rational polynomials. Acta Univ. Szeged, Sect. Sci. Math. 11 (1946) 106—113.
[142] J. WERMER: Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle. Amer. J. Math. 78 (1954) 225—242.
[143] J. WERMER: Advanced Problem No. 4687. Amer. Math. Monthly 64 (1957) 372.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДЕЯТАЛЬНОСТЬ МАРЦЕЛЯ РУССА II.

ЯНОШ ХОРВАТ

THE MATHEMATICAL WORK OF MARCEL RIESZ II.

J. HORVÁTH

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

SURÁNYI JÁNOS MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGÁRÓL
(Hatvanadik születésnapja alkalmából)

SZALAY MIHÁLY és URBÁN JÁNOS

SURÁNYI JÁNOS, a matematikai tudományok doktora, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszékének tanszékvezető professzora 1978. május 29-én volt 60 éves. Ez alkalomból áttekintést szeretnénk adni a matematika több területét érintő, eredményekben gazdag matematikai munkásságáról.

Részletesen fogjuk ismertetni SURÁNYI JÁNOS matematikai dolgozatait, de munkássága korántsem szűkíthető le ezekre. A teljesség igénye nélkül szólni szeretnénk módszertani dolgozatairól is, a publikációs jegyzékben az Olvasó találhat egy válogatást továbbképző és ismeretterjesztő munkáiból, s matematikai-közéleti tevékenységének fő vonásait is szeretnénk felvázolni. Ha azt mondjuk, hogy ez utóbbi a „szorosnál" is erősebben kapcsolódik a Bolyai János Matematikai Társulathoz és a matematika tanításához, népszerűsítéséhez, akkor többek között a következőkre gondolunk. Például arra, hogy szegedi tanársegédként közreműködött az 1946—47-ben megjelent Szegedi Matematikai Példaívek kiadásában, melyek kisméretű stencilezett papírlapok voltak, feladatokkal, majd megoldásokkal is, de az V. szám 1947 májusában már a felszabadulás utáni első matematikai tanulóversenyt is bejelentette. SURÁNYI JÁNOS 1947 őszén SOÓS PAULA szegedi gimnáziumi tanárnővel együtt elindította az új, felszabadulás utáni Középiskolai Matematikai Lapokat, mely jelenleg a Bolyai János Matematikai Társulat kiadásában jelenik meg. SURÁNYI JÁNOS évekig látta el a lap gondozásával járó teendőket, s „főszerkesztő", „főmunkatárs" ill. „a szerkesztő bizottság vezetője" volt 1971-ig. Nagy részt vállalt a korábbi Mathematikai és Physikai Társaság egyik utódjának, a Bolyai János Matematikai Társulatnak a felszabadulás utáni, Szegeden történt megszervezéséből. SURÁNYI JÁNOS 1953-tól 1963-ig a Társulat főtitkára volt, később alelnöke, 1978. június 27. óta pedig a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke. Részt vett több matematikai verseny szervezésében, elnökként irányította hosszú ideig a TIT Budapesti Szervezete Matematikai Szakosztályát is, s tagja volt a Művelődésügyi Minisztérium által a matematikatanítás korszerűsítésének tanulmányozására létrehozott bizottságnak és elnöke annak az albizottságnak, amelyet a bizottság irányelvei kidolgozására küldtek ki. A Magyar Tudományos Akadémia Elnöki Közoktatási Bizottsága Matematikai Albizottságának tagjaként ill. az MTA OM Köznevelési Bizottság Matematikai Munkabizottsága titkáraként is több tanulmányt készített. Egyik periódusban egyik alelnöke volt az International Comission for Mathematical Instruction-nak, tagja pedig a Zentralblatt der Didaktik der Mathematik szakmai tanácsadó bizottságának és az UNESCO New Trends in Mathematics Teaching szerkesztő bizottságának. Vezette a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének didaktikai csoportját, ennek átszervezése óta az ESzK Matematikaoktatási Csoportját irányítja.

*Surányi János*ról írva feltétlenül beszélnünk kell arról a fontos szerepről is, amelyet már hosszú idők óta a magyar matematikatanítás korszerűsítéséért, jobbításáért vívott küzdelemben betölt. Anélkül, hogy teljességre törekednénk meg kell említenünk a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőjeként és gyakori szerzőjeként végzett sokoldalú, szemléletformáló munkásságát. A felszabadulás utáni matematika tankönyvek új hangjában, a bennük képviselt szemléletmód érvényesítésében komoly szerepe volt.

Az Ő tevékenységéhez fűződik a speciális matematika II. tagozatos osztályok megindítása, első tanterveinek kidolgozása. Az itt folyó munka szellemének irányítása, a szabad véleményalkotás, kísérletezés, a módszertani munka korszerűsége, mind-mind az Ő keze nyomát viseli. Jelentős szerepe volt az új általános iskolai tantervhez, ennek elfogadásához vezető hosszú, göröngyös út megépítésében is. Irányítója annak a kísérletnek, amely az új általános iskolai matematika tantervre épülő középiskolai tanterv tartalmi és módszertani kidolgozását hivatott előkészíteni.

*

Surányi János matematikai dolgozatai témakörük szerint a következőképpen csoportosíthatók:

A) *Matematikai logika:* Ide tartoznak az [1], [2], [3], [4], [5], [6], [14], [16], [31] alatti dolgozatok, valamint az [I] monográfia.

B) *Számelmélet:* Ide sorolhatók a [10], [17], [19], [20], [21], [22], [24], [25], [26], [27], [29], [30], [32], [34], [35], [37] dolgozatok, valamint a [II] monográfia.

C) *Algebra:* Ide sorolhatók a [9], [11], [23], [36] dolgozatok.

D) *Kombinatorika és gráfelmélet:* Ide a [7], [8], [12], [13], [18], [33] dolgozatok sorolhatók.

E) *Approximációelmélet:* Ide a [15] dolgozat tartozik.

(Megjegyezzük, hogy néhány dolgozatot több témakörbe is besorolhattunk volna.)

A) *Matematikai logika*

Az elsőrendű logika eldöntésproblémája a logika egyik központi kérdése volt. Ennek lényegét a következőképpen lehet összefoglalni.

A matematika valamely jól körülhatárolt, axiómákkal megalapozott ágában kifejezhető állításokat rendszerint egy alkalmasan választott logikai nyelv (elsőrendű nyelv) zárt (szabad változókat nem tartalmazó) formuláival írhatjuk le. A lényeges probléma ezzel kapcsolatban a következő: keressünk olyan „algoritmikus eljárást", amelynek segítségével tetszőleges formuláról eldönthetjük — következménye-e az axiómáknak, vagy nem. Ezt a kérdést vissza lehet vezetni arra a problémára, hogy a nyelv egy alkalmas zárt formulája — feltehetjük azt, hogy a formula nem tartalmaz függvényjeleket — azonosan igaz-e vagy nem. Egy zárt formula akkor *azonosan igaz,* ha tetszőleges, a nyelvnek megfelelő struktúrán a formula értéke igaz lesz. Egy zárt formuláról akkor mondjuk, hogy *kielégíthető,* ha van olyan, a nyelvnek megfelelő struktúra, amelyen a formula igaz. Az azonosan igaz formula tagadása nem kielégíthető és fordítva, a kielégíthető formula tagadása nem azonosan igaz. Így tehát az a probléma, hogy egy formula azonosan igaz-e vagy nem visszavezethető arra a kérdésre, hogy egy formula kielégíthető-e, vagy nem. Végeredményben tehát az a lényeges probléma, hogy egy axiómarendszerben egy formula következménye-e az axiómáknak, vagy nem, visszavezethető arra a kérdésre, hogy egy formula ki-

elégíthető-e vagy nem. Ezt az utóbbi problémát szokás eldöntésproblémának nevezni. *A. Church* 1936-ban mutatta meg, hogy az eldöntésprobléma nem oldható meg algoritmikus eszközökkel.

Ez — mai fogalmazásban — lényegében azt jelenti, hogy korlátlan memóriakapacitású számítógépet feltételezve sem adható meg olyan program, amely tetszőleges zárt formuláról véges sok lépésben eldöntené, hogy kielégíthető-e, vagy nem. Röviden ezt úgy szokták kifejezni, hogy az eldöntésprobléma rekurzive nem oldható meg.

Church eredménye után két irányban folytak a kutatások. Az egyik irányban azt vizsgálták, hogy az adott nyelv feletti formulák valódi részhalmazai közül melyekre oldható meg az eldöntésprobléma. E téren nyilván minél bővebb részhalmaz keresése volt a cél. Egyik legismertebb eredmény ezen a területen az, hogy a csak egyváltozós relációjeleket tartalmazó formulák osztályára az eldöntésprobléma megoldható.

A másik irányban azt vizsgálták, hogy a formulák mely valódi részhalmazaira igaz az, hogy tetszőleges formulához a részhalmazból megadható (méghozzá effektív, algoritmussal) olyan formula, hogy a két formula kielégíthetőség szempontjából ekvivalens. Ez a probléma az eldöntésprobléma redukciójához vezet el, az előző módon kapott formulahalmazt redukciós típusnak szokták nevezni. Például könnyen igazolható, hogy redukciós típust alkotnak azok a formulák, amelyekben a kvantorok csak a formula elején állnak, az egész formulára vonatkoznak. Ezek a formulák az úgynevezett prenex formulák, az elöl álló kvantorsorozat a formula prefixuma, a kvantorok után álló rész a formula magja. A redukciós típusok keresése terén lehetőleg minél szűkebb formulahalmaz megadása a cél.

Surányi János logikai téren elért eredményei az eldöntésprobléma redukciójának témaköréhez tartoznak. [1] alatti dolgozatában két ismert redukciós tételnek adja meg élesítését. *Gödel* igazolta, hogy redukciós típust alkotnak az olyan prenex formulák, amelyben csak legfeljebb kétváltozós relációjelek szerepelnek és a prefixumban elöl három univerzális kvantor áll, ezután következnek az egzisztenciális kvantorok. *Pepis* eredménye szerint azok a formulák is redukciós típust alkotnak, ahol a formula prefixumában elöl állnak az egzisztenciális kvantorok és ezek után csak egy univerzális kvantor áll, illetve azok is, ahol először két univerzális kvantor áll, ezután egy egzisztenciális, majd csupa univerzális kvantor áll. *Surányi János* azt mutatja meg, hogy a

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \varphi$$

illetve

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \varphi$$

alakú formulák redukciós típust alkotnak, ahol a φ magformulában csak legfeljebb kétváltozós relációjelek szerepelnek.

A bizonyításhoz több igen egyszerű eszközöket alkalmazó, de jelentős ötleteket igénylő konstrukcióval jut el a Szerző.

Ugyancsak az [1] alatti dolgozat jelentős további eredménye, hogy a

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} \varphi$$

alakú formulák is redukciós típust alkotnak, ahol a φ magban csak egyetlen kétváltozós relációjel szerepel. Ezeket az eredményeket pontosítják a [3] és [5] munkák és a *Kalmár László*val közösen írt [2] és [4] dolgozatok.

A [6] alatti dolgozat lényeges eredménye a következő: redukciós típust alkotnak azok a formulák, amelyek

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 \varphi$$

alakúak, ahol a φ magban egyváltozós relációjelek mellett legfeljebb négy kétváltozós relációjel szerepel, továbbá ugyancsak redukciós típust alkotnak a

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \forall x_6 \varphi$$

alakú formulák, ahol egyváltozós relációjelek mellett legfeljebb 4 kétváltozós relációjel és az egyenlőségjel szerepel a φ magban.

A [14] alatti dolgozat az eldöntésprobléma és redukciója témakörének igen világos, tömör, áttekinthető kifejtését tartalmazza a nem specialisták számára. Ebből a dolgozatból is képet kaphatunk azokról a jelentős kombinatorikai, számelméleti jellegű fogásokról, ötletekről, amelyekkel a Szerző eredményeit elérte.

A [31] alatti dolgozatában a Szerző az eldöntésprobléma redukciójának témakörébe vágó újabb kutatásokhoz kapcsolódva a következő eredményt igazolja: redukciós típust alkotnak

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \varphi$$

ahol a φ magban egyváltozós relációjelek mellett, egy kétváltozós szimmetrikus reláció jele szerepel. A bizonyításhoz a Szerző által korábban kidolgozott eszközök további finomítására van szükség.

A Szerző [I] alatti monográfiája a témakör első és mindmáig egyetlen összefoglaló munkája, ma is a témakör kutatásának egyik fő kiindulópontja.

A könyv a nem specialista számára is jól érthető bevezetésével, világos szerkezetével is kitűnik. A bizonyítások alapgondolatát a Szerző világosan megfogalmazza, több példával illusztrálja, így a hosszú, bonyolultnak tűnő bizonyítások is követhetővé válnak.

A Szerző sok tételt élesít, bizonyításokat egyszerűsít és fontos új eredményeket is közöl. A módszerek itt is aritmetikaiak, a rekurzív függvények alkalmazására épülnek. A könyv a nyitott problémák bemutatásával zárul.

B) *Számelmélet*

1. A számelméleti munkák közül az időrendben első [10] dolgozat lineáris diofantoszi egyenletek megoldásával és lánctörtekkel való kapcsolatukkal foglalkozik. Itt a dolgozat fő célját emelnénk ki, éspedig a lánctörteknek a diofantoszi egyenleteken át történő természetes bevezetését. Részletesebben ismertetjük a [17] dolgozat eredményeit a valós számok többszöröseinek mod 1 eloszlásáról.

Adott $\alpha \in (0, 1)$ valós szám legfeljebb n nevezőjű racionális számokkal való közelítéséhez egy egységnyi kerületű kör P_0 pontjából kiindulva mérjük fel a körívre az α, 2α, ..., $n\alpha$ hosszúságokat (pozitív irányban), s legyenek a kapott végpontok P_1, ..., P_n. Az említett közelítéssel szoros kapcsolatban áll a P_i pontok közötti minimális ívhossz. H. STEINHAUS egy észrevétele szerint, melyet először N. SWIECZKOWSKI, majd ERDŐS PÁL, SZÜSZ PÉTER, HAJÓS GYÖRGY és T. SÓS VERA bizonyított be, a köríven egymás után következő pontok között legfeljebb három különböző ívhosszúság léphet fel, éspedig a P_0-t egy-egy szomszédjával (mindkét irányban) összekötő ívek hossza, valamint ezek összege. T. SÓS VERA meghatározta a pontok sorrendjét is, feltéve, hogy a P_0 említett szomszédjainak ismert az indexe, s megadta az eredménynek több alkalmazását is. SURÁNYI JÁNOS a [17] dolgozatban az n-edrendű Farey sorozat (az 1 és n közötti nevezőjű, tovább nem egyszerűsíthető törtek — most [0, 1]-ből — nagyság szerint rendezve) segítségével explicite megadja a P_i-k elhelyezkedését. Feltéve, hogy α nem szerepel az n-edrendű Farey sorozatban (ez

csak triviális eseteket zár ki), először tetszőleges P_m és $P_{m'}$ elhelyezkedését jellemzi a P_0-hoz viszonyítva, majd a következő tételt bizonyítja be.

Ha az n-edrendű Farey sorozat $\frac{l}{k}<\frac{l'}{k'}$ szomszédos elemei $((l, k)=(l', k')=1)$ fogják közre α-t, akkor a P_m szomszédja pozitív irányban:

$$P_{m+k}, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq m \leqq n-k,$$

$$P_{m+k-k'}, \quad \text{ha} \quad n-k < m < k',$$

$$P_{m-k'}, \quad \text{ha} \quad k' \leqq m \leqq n.$$

A tétel láthatóan tartalmazza T. Sós Vera eredményét a sorrendről, s azonnal következik belőle Steinhaus észrevétele is, sőt még azok az esetek is meghatározhatók, amikor csak két különböző ívhossz lép fel.

Farey sorozatok és lánctörtek kapcsolatával foglalkozik Surányi János a [27] alatti dolgozatban, melyben részletes történeti áttekintés után a lánctörtelmélet egy újabb felépítését adja.

2. Surányi János [19] alatti, Erdős Pállal közös dolgozata Gallai Tibor egy problémájához kapcsolódik. Közismert, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számok szorzatával bármely n egymás utáni egész szám szorzata osztható. Gallai Tibortól származik az a kérdés, hogy adott n természetes szám esetén milyen $k=k(n)$ természetes számra igaz az az állítás, hogy tetszőleges

(2.1) $$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$$

pozitív egészekhez és

(2.2) $$m+1, m+2, m+3, \ldots, m+a_n$$

(tehát a_n db.) konzekutív természetes számhoz létezik az utóbbiak között k db. olyan, amelyek szorzata osztható $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$-nel.

A $k(n)=n$ választás vizsgálata $n=2$ és $n=3$ esetére az 1954. évi Schweitzer-verseny 6. feladata volt, s könnyen látható, hogy a $k(n)=n$ választás $n=2$-re megfelelő, de $n=3$-ra már nem, mivel pl. az

(2.3) $$a_1 = 7 \cdot 11, \quad a_2 = 7 \cdot 13, \quad a_3 = 11 \cdot 13$$

(2.4) $$m = 5934 (= 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 72)$$

választás ellenpéldát szolgáltat.

A [19] dolgozatban a Szerzők először áttekintést nyernek az összes ellenpéldáról $k(n)=n$, $n=3$, $(a_1, a_2, a_3)=1$ esetén (lényegében a (2.3)-hoz hasonló választások adnak ellenpéldákat), majd megmutatják, hogy a $k(n)=n$ választás $n>3$-ra sem felel meg, s vizsgálják a $k(n)=n+1$ választást. Bebizonyítják, hogy $n=3$-ra ez már megfelelő (tetszőleges a_i-kre, ha $a_3 \geqq 4$), általában azonban még messze nem jó, mert megadhatók olyan példák (nagy n-re), ahol csaknem $2n$ db. szám kiválasztására van szükség.

Természetes kérdés, hogy a (2.2)-beli a_n hosszúságú intervallum helyett λa_n hosszúságú intervallum konzekutív egészeire milyen $\lambda > 1$ esetén felel meg a $k(n)=n$ választás. Kiderül, hogy $n=3$ esetén $\lambda=\sqrt{2}$ a minimális szorzó. Ezzel rokon az a probléma, amikor minimális $f(n)$ egészet keresünk, amelyre tetszőleges $a_1<a_2<\ldots<a_n$ természetes számok esetén bármely $f(n)a_n$ db. konzekutív természetes szám közül kiválasztható n db. úgy, hogy köztük minden a_i-nek szerepeljen

többszöröse és különböző a_i-khez választott többszörösök különbözők legyenek. A Szerzők a

$$c_1 \cdot \log^{\alpha} n \leqq f(n) \leqq c_2 \sqrt{n} \tag{2.5}$$

becslést igazolják alkalmas c_1, c_2, α pozitív konstansokkal.

A [20] alatti, ERDŐS PÁLlal közös dolgozatban egy igen érdekes additív számelméleti eredmény szerepel. Ez a Waring-féle problémakörrel és a vegyes előjelű hatványösszegekkel való előállításra vonatkozó analóg problémával kapcsolatos kérdést világít meg elég általános alakban, nevezetesen, hogy mikor állítható elő biztosan minden természetes szám egy adott, pozitív egészekből álló $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ sorozat elemeiből

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \quad (j = 1, \ldots, r)$$

alakban, tehát a_r-ig *minden* a_j-t felhasználva. A [20] dolgozatban a Szerzők bebizonyítják a következő tételt. Legyen $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ pozitív egész számok olyan sorozata,

a) amelyben végtelen sok páratlan szám van,
b) amelyre igaz, hogy bizonyos véges számú $m_1, \ldots, m_s$ szám kivételével minden természetes szám felbontható csupa különböző a_j-k *összegére*, és
c) amelyre alkalmas k_0-lal, minden $k > k_0$-ra teljesül, hogy

$$a_{k+1} < 2a_k - m_s.$$

Ekkor minden n természetes szám előállítható

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.6}$$

alakban.

Itt az a) és b) feltételek eléggé természetesek, még ha b) teljesülésének eldöntése általában meglehetősen nehéz is, bár számos sorozatra ismert b) teljesülése, pl. a prímszámok sorozatára, a négyzetszámok sorozatára stb. (Az említett két példában a), b), c) mindegyike teljesül.)

Érdekes még az is, hogy a [20] dolgozat nemcsak egyetlen r értéket garantál az adott n-hez, hanem szinte minden egyáltalán szóba jövő szám játszhatja r szerepét. Pontosabban, adott a), b), c)-t kielégítő sorozathoz megadható olyan c konstans, hogy

$$n \leqq \sum_{j=1}^{r_n} a_j$$

esetén a (2.6) szerinti előállításban r felvehet minden olyan r_n-nél és c-nél nagyobb értéket, amelyre $a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ és n azonos paritású.

3. A geometriai számelmélet témaköréhez tartoznak a [24], [25], [30] és [32] alatti dolgozatok. A [24] alatti dolgozat B. N. DELONE következő tételéhez kapcsolódik.

Legyen adott a síkon egy paralelogrammarács és egy derékszögű koordinátarendszer úgy, hogy a koordinátatengelyek egyikén se legyen rácspont. Ekkor létezik olyan ún. osztott paralelogramma, amelynek csúcsai különböző (nyílt) síknegyedekben levő rácspontok, s amely a csúcsain kívül más rácspontot nem tartalmaz még

a határán sem. (Ez magasabb dimenzióban általában nem teljesül, amint azt B. N. DELONE és B. J. BIRCH megjegyezték.)

DELONE fenti 1947-es tételére több bizonyítás ismeretes és az osztott paralelogrammáknak több alkalmazását adta meg B. N. DELONE, E. S. BARNES és H. P. F. SWINNERTON—DYER. DELONE tételére igen egyszerű bizonyítást adott 1955-ben R. P. BAMBAH, 1959-ben RÉDEI LÁSZLÓ.

A [24] alatti dolgozatban SURÁNYI JÁNOS rendkívül egyszerű bizonyítást ad DELONE tételére kissé általánosabb alakban (a féltengelyeket alkalmasan síknegyedekhez csatolva, a rácspontmentesség feltevése nélkül) és alkalmazásként újabb, geometriai bizonyítást ad a következő tételekre.

Legyenek $x=a_1u+b_1v+c_1$, $y=a_2u+b_2v+c_2$ kétváltozós, valós együtthatós lineáris formák, továbbá $\Delta=|a_1b_2-a_2b_1|>0$. Ekkor

a) (H. MINKOWSKI): u-nak és v-nek létezik olyan egész értéke, amelyekre $|xy|\leqq \leqq\Delta/4$.

b) (H. DAVENPORT—H. HEILBRONN): u-nak és v-nek létezik olyan egész értéke, amelyekre $x>0$, $y>0$ és $xy\leqq\Delta$.

c) (A. KORKINE—G. ZOLOTAREFF): $c_1=c_2=0$ esetén u-nak és v-nek létezik olyan $u=v=0$-tól különböző egész értéke, amelyekre $|xy|\leqq\Delta/\sqrt{5}$.

A bizonyításokból azok az esetek is kiderülnek, amikor az egyenlőségjel nem hagyható el.

A [25] és [32] dolgozatok L. J. MORDELL egy problémájával foglalkoznak. Legyen adott n db. valós együtthatós, homogén lineáris forma:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

úgy, hogy

$$\Delta = \left||a_{ik}|\right| > 0. \tag{3.2}$$

Legyenek $h_1, \ldots, h_n$ pozitív valós számok, amelyekre

$$h_1h_2 \cdot \ldots \cdot h_n \geqq \Delta. \tag{3.3}$$

Ekkor H. MINKOWSKI ismert tétele szerint léteznek olyan u_j egészek, amelyekre

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2 \neq 0 \tag{3.4}$$

és

$$|x_i| \leqq h_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.5}$$

Ez pontos is abban az értelemben, hogy tetszőleges $\varkappa<1$-hez *megadható* olyan (3.1)—(3.2) forma n-es, továbbá pozitív h_i-k, amelyekre

$$h_1h_2 \cdot \ldots \cdot h_n \geqq \varkappa\Delta, \tag{3.6}$$

de (3.5) csupán a triviális $u_1=\ldots=u_n=0$ választással teljesül.

Várhatóan jóval kisebb $\varkappa$ kellene ahhoz, hogy *minden* forma n-eshez létezzen $h_1, \ldots, h_n$ (3.6)-tal, s legalább $|x_i|<h_i$ $(i=1, \ldots, n)$ csak triviálisan teljesüljön. Ezt a problémát L. J. MORDELL vetette fel 1937-ben. Keresendő tehát olyan *pozitív* $\varkappa$, hogy rögzített n-re minden (3.1)—(3.2) forma n-eshez létezzen pozitív $h_1, h_2, \ldots, h_n$ a következő tulajdonságokkal:

$$h_1h_2 \cdot \ldots \cdot h_n \geqq \varkappa\Delta, \tag{3.7}$$

és

$$|x_i| < h_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

csak a triviális $u_1=u_2=\ldots=u_n=0$ választással teljesül. Továbbá, ha létezik ilyen *pozitív* $\varkappa$, akkor keresendő ezek k_n szuprémuma.

Itt csak a teljesen tisztázott $n=2$ esetre szorítkozunk. L. J. MORDELL megmutatta, hogy $n=2$-re a $\varkappa=1/2$ választás megfelelő, tehát $k_2 \geqq 1/2$. CHAO KO egy példáját is felhasználva, SZEKERES GYÖRGY meghatározta a pontos értéket:

$$k_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right). \tag{3.9}$$

SZEKERES GYÖRGY tételére egyszerűbb bizonyítást adott SZÜSZ PÉTER, azzal a kiegészítéssel, hogy viszonylag „kevés" forma-pár okozza a nagy csökkenést. Pontosabban, *tetszőleges* $\varkappa<1$ választás is megfelelő, ha eltekintünk bizonyos forma-pároktól, amelyekre az $\{(a_{11}/a_{12}, a_{21}/a_{22})\}$ halmaz kétdimenziós mértéke 0. (3.9) mindkét bizonyítása lánctörtekre épült.

A [25] alatti dolgozatban SURÁNYI JÁNOS egyszerű elemi geometriai bizonyítást ad SZEKERES tételére. Bebizonyítja a SZÜSZ-féle kiegészítést is, valamint azt is, hogy k_2 nemcsak szuprémuma, hanem maximális értéke is a $\varkappa$ értékeknek. Áttekintést ad még az extrémumot adó forma-párokról s következményként nyeri KORKINE és ZOLOTAREFF már említett tételét is. (Az extrémumot ugyanazok a forma-párok adják a két problémában.) Megfordítva, KORKINE és ZOLOTAREFF tételéből is levezethető SZEKERES tétele, amint ezt később P. GRUBER megmutatta. Vele együttműködve sikerült egy jól használható identitást nyerni, s ennek segítségével a [32] dolgozatban SURÁNYI JÁNOS nemcsak egy egyszerűbb bizonyítást ad SZEKERES tételére a SZÜSZ-féle kiegészítéssel és extremális forma-párok meghatározásával, hanem a k_2' ún. második maximum pontos értékét is meghatározza (amikor eltekintünk a k_2 extrémumot adó forma-pároktól):

$$k_2' = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{3.10}$$

Ráadásul, áttekintést ad a második maximumot adó forma-párokról s rámutat még néhány érdekes összefüggésre lineáris formák szorzatával, lánctörtekkel és diofantoszi approximációval kapcsolatban.

4. Több dolgozatában foglalkozik SURÁNYI JÁNOS a számelmélet alaptételével (ill. általánosításaival). A [21], [22], [37] alatti dolgozataiban részletes áttekintést ad az alaptétel történetéről, különböző bizonyításairól, többek között a ZERMELO-féle teljes indukciós bizonyítás változatairól. Az irodalomban az alaptétel közvetlen, teljes indukciós bizonyításainak egy része kissé mesterkéltnek tűnik, más részük viszont elvileg bonyolultabb. Mindkét nehézséget elkerüli SURÁNYI JÁNOS bizonyítása a [21] (ill. [22]) dolgozatban, s ezért nagyon hasznos az egyetemi oktatásban is. A [37] dolgozat a számelmélet alaptételében az egyértelműség különböző bizonyításaival foglalkozik. Szerepel többek között egy bizonyítás a legkisebb közös többszörösön keresztül, egy másik pedig KALMÁR LÁSZLÓ négyszámtételén keresztül, melyre geometriai bizonyítást láthatunk, továbbá Farey sorozatok segítségével — meglepő úton — a törtek tulajdonságaiból is eljut az egyértelműséghez.

A [29] dolgozat polinomok faktorizációjával foglalkozik. Legyen R egyértelmű prímfaktorizációs egységelemes integritási tartomány. Az említett ZERMELO-féle bizonyítás általánosításaként GYARMATI EDIT adott egy indukciós bizonyítást az irreducibilis faktorokra történő egyértelmű felbontásra $R[x]$-ben. Ezt egyszerűsíti a [29] dolgozat bizonyítása, s szerepel még [29]-ben egy szimultán indukciós bizo-

nyítás arra is, hogy $R[x]$-ben az irreducibilis polinomok rendelkeznek a prímtulajdonsággal.

A [34] és [35] alatti, K. HÄRTIGgel közös dolgozatban a Szerzők FERMAT és WILSON kongruenciatételeinek kapcsolatát vizsgálják a felbonthatatlan ill. prímtulajdonsággal, s szerepel többek között egy geometriai bizonyítás KALMÁR LÁSZLÓ négyszámtételére is. Itt említjük meg a [26] dolgozatot is, amelyben SURÁNYI JÁNOS a WILSON tételt frappáns módon Vandermonde determináns segítségével bizonyítja.

5. 1960-ban jelent meg a Tankönyvkiadónál a [II] alatti, ERDŐS PÁLlal közösen írott monográfia „Válogatott fejezetek a számelméletből" címmel, melyet oly nagy haszonnal forgathat minden olvasója, számelmélettel ismerkedő éppúgy, mint az, aki behatóbban kíván foglalkozni a számelmélet elemi úton tárgyalható kérdéseivel. Mélyebb bepillantást is nyújtva a matematikába, élvezetes stílusban foglalkoznak a Szerzők diofantoszi problémákkal, geometriai számelméleti módszerekkel, prímszámokkal, egész számok különböző sorozataival és számelméleti függvényekkel, történeti megjegyzések mellett bőséges feladatanyag egészíti ki a tárgyalást, s csak hangsúlyozni tudjuk egy újabb kiadás szükségességét.

C) *Algebra*

1. Az algebrai dolgozatok közül a [9] és [11] alattiak lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságával foglalkoznak. A cél — TURÁN PÁL javaslatára — olyan megoldhatósági kritérium megadása volt, amelynek teljesülése tisztán az együttható-mátrixból leolvasható.

Tekintsük a következő, valós együtthatós, homogén ill. inhomogén lineáris egyenlőtlenségrendszereket:

$$l_i(x) \equiv a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.1}$$

illetve

$$L_i(x) \equiv a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + b_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1.2}$$

A $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valós szám n-es megoldása (1.2)-nek, ha $L_i(\xi) \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Az (1.1) homogén rendszer esetében azonban egy ξ megoldástól $l_i(\xi) \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ mellett természetes okokból azt is megköveteljük, hogy legalább egy j-re $l_i(\xi) > 0$ legyen.

A homogén esetre 1952-ben L. M. BLUMENTHAL megadott egy „mátrixos" kritériumot, azonban nem közvetlenül a rendszer eredeti mátrixával, hanem az

$$\alpha_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

elemekből képzett szimmetrikus mátrixszal, módszerét illetően pedig hangsúlyozta annak metrikus jellegét.

A [9] és [11] alatti dolgozatokban SURÁNYI JÁNOS több kritériumot is megad *az eredeti mátrixszal* (inhomogén esetre is), s tisztán a lineáris függetlenségre épülő bizonyítást ad BLUMENTHAL tételére is. Ez utóbbihoz segédtételként a következő, önmagában is érdekes állítást bizonyítja be H. MINKOWSKI egy tétele alapján: (1.1) akkor és csak akkor oldható meg, ha az $l_i(x)$-ekből kiválasztható olyan maximális független részrendszer, hogy a többi forma ezek *nemnegatív* együtthatós lineáris kombinációja legyen. [11] szerint ebből is el lehet jutni a következő kritériumhoz, amely már a [9] dolgozatban szerepelt (r az (1.1) együttható-mátrixának rangja):

(1.1) akkor és csak akkor oldható meg, ha van olyan $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, k_1, k_2, \ldots, k_r$, hogy a

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{r-1} k_1} & \ldots & a_{i_{r-1} k_r} \\ a_{j k_1} & \ldots & a_{j k_r} \end{vmatrix} \quad (j = 1, \ldots, m)$$

determinánsok vagy mind nemnegatívak, vagy mind nempozitívak, de nem mind 0. (Egy referátumból kiderül, hogy ehhez hasonló tételt bizonyított disszertációjában TH. MOTZKIN 1936-ban.) Ez az állítás azonban következménye a [9] dolgozat következő tételének, amelyet SURÁNYI JÁNOS 1952-ben talált (Tőle függetlenül — más úton — SZ. N. CSERNYIKOV is felfedezte a tételt s 1953-ban publikálta): (1.2) akkor és csak akkor oldható meg, ha van olyan $i_1, i_2, \ldots, i_r, k_1, k_2, \ldots, k_r$, hogy

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix} \neq 0,$$

továbbá $j=1, 2, \ldots, m$-re

$$\frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_r} & b_{i_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} & b_{i_r} \\ a_{j k_1} & \ldots & a_{j k_r} & b_j \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Ennek bizonyítása [9]-ben az

$$l_i(x) > 0 \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$l_j(x) \geqq 0 \quad (j = m_1+1, \ldots, m)$$

rendszer megoldhatóságára talált kritériumon és MINKOWSKI egy tételén alapul, és [11]-ben szerepel rá egy egyszerűsített bizonyítás, valamint egy másik, indukciós bizonyítás is.

2. Egy polinomokra vonatkozó számelméleti tétel újabb bizonyítása szerepel a [23] alatti, FRIED ERVINnel közös dolgozatban. CH. BRISSE és R. JENTSCH egymástól függetlenül találta a következő tételt, amelyre több bizonyítás ismeretes:

Ha egy komplex együtthatós polinom minden egész helyen vett értéke egy-egy egész szám k-adik hatványa, ahol k adott természetes szám, akkor a polinom egy racionális együtthatós polinomnak a k-adik hatványa.

A [23] dolgozatban a Szerzők erre a tételre adnak újabb, algebrai jellegű bizonyítást.

Megemlíthetjük a fenti tétel következő általánosítását, amelyet ERDŐS PÁL sejtett és W. H. J. FUCHS bizonyított be. Ha egy $f(x)$ polinomhoz van olyan egész együtthatós $g(x)$ polinom és minden m egész számhoz olyan u_m egész szám, hogy $f(m)=g(u_m)$, akkor van olyan $h(x)$ polinom, melyre $f(x)=g(h(x))$.

3. Az 1949. évi Schweitzer-verseny 3. feladata (ill. PÓLYA—SZEGŐ, II., 245. feladata) a következő volt: Legyen p páratlan prímszám, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ és $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_p$ az $1, 2, \ldots, p$ számok tetszőleges permutációi. Bizonyítandó, hogy az $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots, a_p b_p$ számokat modulo p redukálva sohasem kapjuk az $1, 2, \ldots, p$ számok egy permutációját. Itt nyilván elég redukált maradékrendszert vizsgálni. TURÁN PÁL jegyezte meg, hogy összetett modulusra ebben a formában nem mindig igaz az

állítás (pl. 1, 3, 5, 7 és 1, 7, 3, 5 ad egy ellenpéldát mod 8), és felvetette a következő problémát: Milyen m modulusra létezik egy redukált maradékrendszernek két olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_{\varphi(m)}$ permutációja, amelyekre $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{\varphi(m)}b_{\varphi(m)}$ is redukált maradékrendszer; illetve még általánosabban, melyek azok a csoportok, amelyek elemeinek létezik két olyan permutációja, hogy ezekben a megfelelő elemeket páronként összeszorozva újra megkapunk minden elemet pontosan egyszer?

A [36] alatti dolgozatban SURÁNYI JÁNOS véges Abel-csoportokra válaszolja meg a kérdést. Az még nyilvánvaló, hogy olyan véges Abel-csoport, amelyben pontosan egy másodrendű elem van, biztosan nem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. A [36] dolgozat tétele szerint azonban a többi véges Abel-csoportnak az elemeit elő lehet állítani a kívánt módon. Más módon jellemezve, a véges Abel-csoportok közül pontosan azok alkotnak kivételt, amelyek ciklikus csoportok direkt szorzatára bonthatók úgy, hogy köztük pontosan egy páros rendű faktor legyen.

D) *Kombinatorika és gráfelmélet*

1. Halmazok MARCZEWSKI féle függetlenségével kapcsolatos extrémumproblémák szerepelnek a [7] alatti, RÉNYI ALFRÉDdal és RÉNYI KATÓval közös dolgozatban.

Legyenek $E_1, \ldots, E_n$ egy E halmaz részhalmazai, k egész, $0 \leqq k \leqq n$. Az $1, 2, \ldots, n$ számok közül válasszunk ki k db. különbözőt: $r_1, \ldots, r_k$; a többi legyen: $s_1, s_2, \ldots, s_{n-k}$. Az $\bar{E}_s = E - E_s$ jelöléssel, legyen

$$E(r_1, \ldots, r_k;\ s_1, \ldots, s_{n-k}) = E_{r_1} \cap \ldots \cap E_{r_k} \cap \bar{E}_{s_1} \cap \ldots \cap \bar{E}_{s_{n-k}}. \tag{1.1}$$

Azt mondjuk, hogy az $E_1, \ldots, E_n$ halmazok függetlenek, ha a k és az r_μ-k minden lehetséges választására

$$E(r_1, \ldots, r_k;\ s_1, \ldots, s_{n-k}) \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

(Ekkor tehát E előállítható 2^n db. (1.1) típusú nem üres halmaz diszjunkt uniójaként.)

A [7] dolgozat egyik tétele szerint, tetszőleges $n \geqq 1$-re, $\mathbf{R}^n$-ben a független nyílt intervallumok (tengelypárhuzamos téglák) maximális száma $2n$. A [7] dolgozat további eredményei független $\mathbf{R}^n$-beli gömbök illetve bizonyos síkbeli sokszögtartományok maximális számára vonatkoznak, kiegészítve néhány nyitott problémával.

Nevezzünk azonos szerkezetűnek két (az E véges sok nem üres, valódi részhalmazából álló) osztályt, ha halmazaik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy ennél a megfeleltetésnél az egymásnak megfelelő (1.1) típusú halmazok (atomok) egyszerre üresek vagy nem üresek. Így pl. két osztály, amely ugyanannyi független halmazból áll, azonos szerkezetű. A [8] alatti dolgozatában SURÁNYI JÁNOS meghatározza a legfeljebb n halmazból álló osztályok között a páronként különböző szerkezetűek maximális számának aszimptotikus értékét $(2^{2^n}/n!)$. A nehézséget itt az jelenti, hogy a nem üres atomok előírásával néha egy-, máskor többféleképpen is megadható ugyanaz a szerkezet, s ez egy ekvivalens algebrai probléma segítségével vált áttekinthetővé.

2. A [12] és [13] alatti dolgozatok CSU SI-CSIE XIII. századi kínai matematikus egy eredményéhez kapcsolódnak, mely szerint (mai jelöléssel)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2, \tag{2.1}$$

s CSU SI-CSIE hozzá vezető útjáról valamely egyszerű bizonyítás adhatna felvilágosítást. A (2.1) LI ZSEN-SU 1867-ben megjelent könyvében bizonyítás nélkül szerepel. TURÁN PÁL és SZEKERES GYÖRGY adtak rá egy-egy bizonyítást, ami azonban egyszerűnek nem mondható. Egyszerű bizonyítást adott rá HUA LOO-KENG s a Matematikai Lapok 1955-ös évfolyamában (a dolgozatok sorrendjében): TAKÁCS LAJOS, SURÁNYI JÁNOS [12], HUSZÁR GÉZA és L. CARLITZ.

SURÁNYI JÁNOS [12] alatti dolgozatában (2.1)-nek a következő általánosítását adja:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{n+k+l-i}{k+l} = \binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}, \tag{2.2}$$

s először HUA LOO-KENG említett bizonyításán mutatja be, hogy erre más bizonyítások is átvihetők, majd egy tisztán kombinatorikus bizonyítást ad (2.2)-re.

3. Gráfelméleti témákkal foglalkozik SURÁNYI JÁNOS a [18] alatti, HAJNAL ANDRÁSSAL közös dolgozatban, valamint a [33] alatti dolgozatában.

A [18] alatti dolgozat kiindulópontja GALLAI TIBOR két gráfelméleti jellegű tétele, (melyekből egyébként C. BERGE ún. perfekt gráf sejtése ered), s amelyek egyike így szól:

Legyen k pozitív egész. Ha egy egyenesen fekvő intervallumok egy véges rendszerében nincs $k+1$ páronként diszjunkt, akkor létezik legfeljebb k pont úgy, hogy minden intervallum legalább egyiküket tartalmazza.

Ennek gráfelméleti megfelelője kapható, ha az intervallumokat egy gráf szögpontjainak tekintjük és két különböző szögpontot egy éllel kötünk össze, ha a megfelelő intervallumoknak van közös pontjuk. A kérdés az volt, hogy *általában* hasonló következtetéshez milyen gráfelméleti feltétellel lehetne pótolni azt, hogy bizonyos „intervallumgráf"-ról volt szó.

Tekintsünk hurokélt és többszörös élt nem tartalmazó véges gráfokat, amelyekben izolált pontok megengedettek. Jelölje $\varphi(G)$ a G gráfban a független szögpontok (: semelyik kettő sincs éllel összekötve) maximális számát; $\tau(G)$ pedig legyen a legkisebb természetes szám, amelyre teljesül, hogy G-ben megadható $\tau(G)$ páronként diszjunkt teljes részgráf, melyek szögponthalmazai együtt kiadják G szögponthalmazát. Nyilvánvaló, hogy mindig teljesül $\tau(G) \geqq \varphi(G)$. Könnyen látható, hogy GALLAI idézett tétele (az ottani intervallumgráfra) $\tau(G) \leqq \varphi(G)$-vel ekvivalens. Ez esetben tehát $\tau(G) = \varphi(G)$. (Az első ilyen jellegű tétel KŐNIG DÉNESTŐL származik (páros gráfra).) Általában azonban nem teljesül az egyenlőség, sőt $\tau(G)$ tetszőleges nagy lehet még $\varphi(G) = 2$ mellett is (J. MYCIELSKI, W. T. TUTTE, A. A. ZYKOV).

SURÁNYI JÁNOS [18] alatti, HAJNAL ANDRÁSSAL közös dolgozatának egyik tétele szerint azonban

(3.1) *ha tetszőleges* $n > 3$*-ra a* G *minden* n *hosszúságú köre tartalmaz húrt (átlót)* G*-ben, akkor* $\tau(G) = \varphi(G)$.

[18] szerint ez a tétel végtelen gráfra is érvényes, ha pl. $\varphi(G)$ véges. Kiderül [18]-ból az is, hogy már a független szögponthalmazok végességéből következik — természetesen a húrfeltétel mellett — $\varphi(G)$ végessége. Továbbá, következményként adódnak GALLAI tételei, az említett tétel pl. egy egyenesen fekvő végtelen sok zárt intervallumra is.

Könnyű látni azonban, hogy (3.1)-ben a húrfeltétel az egyenlőséghez csak elégséges, de nem szükséges. Várható volna, hogy elég a húrfeltételt 3-nál hosszabb páratlan körökre megkövetelni, de könnyen látható, hogy ez már nem elégséges.

Az eredeti húrfeltétel azonban ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $n>3$-ra, G minden n hosszúságú körének van G-ben $n-3$ olyan húrja, amelyek egymást páronként nem „keresztezik". Az egyenlőséghez ezt a feltételt már elegendő páratlan körökre megkövetelni. Ezt az általánosítást GALLAI TIBOR bizonyította 1961-ben, majd egyszerűbb bizonyítást adott rá SURÁNYI LÁSZLÓ 1967-ben.

A [33] alatti dolgozatában SURÁNYI JÁNOS m-es-gráfokkal kapcsolatos extrémumproblémákat old meg. Az m-es-gráfok fogalmát TURÁN PÁL már 1941-ben felvetette. Így nevezünk egy rendszert, amely elemek — ún. szögpontok — egy véges halmazából és ezekből kiválasztott m-esek (m elemű részhalmazok) egy halmazából áll (másképp: többszörös élt nem tartalmazó m-uniform hipergráf, nem kötve ki, hogy minden pontot tartalmazzon él). Egy m-es-gráf szögpontjainak egy részhalmazát függetlennek nevezzük, ha az adott m-es-gráf egyetlen m-esének sem tartalmazza mind az m elemét.

Ha $m \leqq l \leqq n$, jelentse $M_l^m(n)$ azt az r számot, amire készíthető n szögpontú és r darab m-est tartalmazó m-es-gráf, amelyben nincs l szögpontú független részhalmaz, de r-nél kevesebb m-essel ilyen m-es-gráf nem létezik. Az $m=2$ esetet TURÁN PÁL teljesen tisztázta 1941-ben, meghatározva $M_l^2(n)$ explicit alakját s az (egyetlen) extremális gráfot. Az $m>2$ esetre KATONA GYULA, NEMETZ TIBOR és SIMONOVITS MIKLÓS 1964-ben adtak meg becsléseket, megmutatva többek között, hogy

$$M_l^m(n) \cdot \binom{n}{l}^{-1}$$

az n-ben monoton növő.

Az $m=3$ eset, tehát $M_l^3(n)$ szerepet játszik háromszögekre értelmezett függvények értékeloszlásának vizsgálatában. Vizsgáljunk általános elhelyezkedésű síkbeli ponthalmazokat, azaz olyanokat, amelyekben nincs három egy egyenesen levő pont. Ha f egy háromszögekre értelmezett valós értékű függvény, azt mondjuk, hogy a $P_1, \ldots, P_n$ általános ponthalmaz f-re normált, ha $f(P_i, P_j, P_k) \leqq 1$, valahányszor i, j, k különböző.

ERDŐS PÁL, A. MÉIR, T. SÓS VERA és TURÁN PÁL 1971-ben bebizonyították a következő tételt: Legyen f és g két háromszögekre értelmezett függvény, D_l pedig olyan számérték, amelyre teljesül, hogy ha $P_1, \ldots, P_l$ egy f-re normált pontrendszer, akkor mindig van olyan i, j, k különböző számokból álló indexhármas, amelyre $g(P_i, P_j, P_k) \leqq D_l$. Ekkor, ha $3 \leqq l \leqq r \leqq n$, akkor minden f-re normált n pontból álló pontrendszerben legalább

$$M_l^3(r) \cdot \binom{r}{3}^{-1} \cdot \binom{n}{3}$$

olyan ponthármas van, amelyre g értéke legfeljebb D_l. Megmutatták továbbá, hogy ha f is, g is a terület, akkor D_5 minimuma $(\sqrt{5}-1)/2$ (itt az $l=3$ és $l=4$ még triviális esetek), másrészt, hogy $M_5^3(7)=5$. Ezekből következik, hogy legalább hét pontból álló, területre normált pontrendszer összes hármasainak legalább a hetedrésze legfeljebb $(\sqrt{5}-1)/2$ területű háromszöget határoz meg.

A [33] alatti dolgozatában SURÁNYI JÁNOS egyrészt megmutatja, hogy ha f is, g is a terület, akkor D_6 minimuma $1/3$, s meghatározza az extrémumot adó pontrendszereket is, másrészt bebizonyítja, hogy

$$M_5^3(6) = 2, \quad M_5^3(7) = 5, \quad M_5^3(8) = 8, \quad M_5^3(9) = 12;$$

$$M_6^3(7) = 2, \quad M_6^3(8) = 4, \quad M_6^3(9) = 7, \quad M_6^3(10) = 10;$$

meghatározva a fentiekhez tartozó *összes* extremális hármas-gráfot is (a probléma nehézségére utal, hogy ilyen általában *több* van, a felsorolt esetekben rendre 1, 4, 3, 1; 1, 1, 4, 2). Így D_6 minimumából és $M_6^3(9)$ értékéből a következő adódik. Legalább kilenc pontból álló, területre normált pontrendszer összes hármasainak legalább az 1/12 része legfeljebb 1/3 területű háromszöget határoz meg. Az $M_6^3(9)$ értéke ezen alkalmazáshoz kellett, a többiek közül a legérdekesebb az $M_5^3(9)=12$, mert ez *kisebb* a várt 14-nél, ami TURÁN PÁL egy sejtéséből adódna.

E) *Approximációelmélet*

Ebbe a témakörbe SURÁNYI JÁNOS [15] alatti, TURÁN PÁLlal közös dolgozata tartozik, amely TURÁN PÁL „Notes on interpolation" című, SURÁNYI JÁNOSsal, BALÁZS JÁNOSsal és EGERVÁRY JENŐvel közösen írott, főleg az ún. *hézagos* interpolációval foglalkozó cikksorozatának első dolgozata.

Közismert, hogy az Hermite-interpoláció alapfeladata úgy is fogalmazható, hogy adott $x_1, \ldots, x_n$ különböző helyekhez és $m_1, \ldots, m_n$ pozitív egészekhez olyan legfeljebb $(m_1+\ldots+m_n-1)$-edfokú $\pi(x)$ polinomot keresünk, amelyre

$$\pi^{(k)}(x_j) \quad (k=0, 1, \ldots, m_j-1;\ j=1, \ldots, n)$$

előre adottak, tehát az x_j helyen m_j db. *konzekutív* derivált értéke van előírva $\pi(x_j)$-vel kezdve $(j=1, \ldots, n)$. Itt az egzisztencia és az unicitás *egyszerre* biztosítva van. Merőben más a helyzet az ún. *hézagos* interpolációnál, amikor a konzekutivitás követelményét elejtjük, tehát az x_j helyen *bizonyos* m_j db. derivált értéke van előírva $(j=1, \ldots, n)$, s legfeljebb $(m_1+\ldots+m_n-1)$-edfokú polinomot keresünk. [15] szerint itt már az egyszerűbbnek tűnő ún. (0, 2)-interpolációnál (amikor az $x_1, \ldots, x_n$ helyeken a $\pi(x_j)$ és $\pi''(x_j)$ értékek adottak) olyan meglepő jelenség léphet fel n paritásától és az alaprendszertől is függően, hogy esetleg nincs (0, 2)-interpolációs polinom vagy éppen végtelen sok van. Pontosabban, [15] egyik tétele szerint $n=2k+1$ esetén

$$1 \geqq x_1 > x_2 > \ldots > x_k > x_{k+1} = 0 > x_{k+2} > \ldots > x_{2k+1} \geqq -1,$$

$$x_j = -x_{2k+2-j} \quad (j=k+2, \ldots, 2k+1)$$

választással adott $y_1, \ldots, y_n, y_1^*, \ldots, y_n^*$-hoz általában nem létezik olyan legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $\pi(x)$ polinom, melyre

$$\pi(x_j)=y_j, \quad \pi''(x_j)=y_j^* \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

teljesül; amikor pedig létezik, akkor végtelen sok is van.

A hézagos interpoláció beható vizsgálata lényegében a [15] alatti dolgozattal kezdődött, bár először G. D. BIRKHOFF foglalkozott az általános esettel 1906-ban (a hangsúlyt az alkalmazásokra fektetve), de BIRKHOFF eleve az egzisztencia és az unicitás feltételezése mellett dolgozott, míg az $n=2$ esettel foglalkozott PÓLYA GYÖRGY 1931-ben. A [15] dolgozat előtt (0, 2)-interpolációs polinomok létezését és egyértelműségét biztosító konkrét alappont-mátrix sem volt ismert.

A [15] alatti dolgozatban szerepel többek között azon eset vizsgálata, amikor az alappontok az $(1-x^2)P'_{n-1}(x)$ polinom gyökei ($P_{n-1}(x)$ az $(n-1)$-edik Legendre-polinom). Ebben az esetben páratlan n-re az esetleges végtelen sok megoldás általános alakja derül ki [15]-ből, másrészt az, hogy *páros* n-re ez az alappontválasztás

biztosítja (0, 2)-interpolációs polinom *létezését* és *egyértelműségét*. A cikksorozat folytatásában explicit formula is szerepel, s bizonyos megszorításokkal konvergenciatétel is.

A [15] dolgozat eddig említett eredményeinek megfelelőit bizonyította később R. B. SAXENA arra az esetre, amikor még a harmadik derivált is elő van írva, de csak a ± 1 helyeken (ekkor a fokszámkorlátozásban a $2n-1$ helyettesítendő $(2n+1)$-gyel).

Szerepel még a [15] alatti dolgozatban annak az esetnek a részletes vizsgálata is, amikor az alappontokat az ultraszférikus Jacobi-polinomok gyökei alkotják. Kiderült, hogy egyértelműség csak páros n-re lehetséges, de akkor sem mindig. A „Notes on interpolation" cikksorozat nyomán a hézagos interpolációt ma már messzemenő általánosságban vizsgálják.

*

Természetesen nem ismertethettük minden részletében SURÁNYI JÁNOS eredményeit, s csak röviden szóltunk módszertani dolgozatairól és ismeretterjesztő munkáiról. Mindenesetre igyekeztünk érzékeltetni, milyen változatos témákkal foglalkozik SURÁNYI JÁNOS, valamint hogy számos, társszerzővel írott munkája mutatja együttműködési készségét.

Befejezésül kifejezzük azt a reményünket, hogy eljövendő „kerek" dátumok számos újabb eredmény ismertetésére adnak majd alkalmat. Mindezek eléréséhez kívánunk SURÁNYI JÁNOSnak erőt és jó egészséget.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО ЯНОША ШУРАНИ

САЛАИ МИХАЙ и УРБАН ЯНОШ

THE MATHEMATICAL WORK OF J. SURÁNYI

M. SZALAY and J. URBÁN

SURÁNYI JÁNOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE

Könyvek

Monográfiák

[I] *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems in Prädikatenkalkül der ersten Stufe,* Akad. Kiadó, Budapest, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959. 216. old.

[II] *Válogatott fejezetek a számelméletből* (Erdős Pállal), Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 250 old.

[III] *Polinomok, egyenletek az iskolában* (tanulmánygyűjtemény), Fővárosi Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977. 221. old.

Továbbképző és ismeretterjesztő munkák

Hasonlóság és szerkesztés, „Tanulj jobban!" füzetek, Orsz. Neveléstud. Int., Budapest, 1949., 56 old.

Matematika gimn. II. o. számára, tankönyvrészlet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

Matematikai versenytételek I. (Kürschák József, Hajós György és Neukomm Gyulával), Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó Budapest, 1955, 139. old.
Hungarian problem book I—II., az előbbi átdolgozott angol nyelvű kiadása, Random House, New York, the L. W. Singer Company, Syracuse, 1963. VII+111, VII+120 old.
Ennek első kötete megjelent japán fordításban is.
Matematikai versenytételek II. (Hajós Györggyel és Neukomm Gyulával) Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó Budapest, 1957., 126 old.
Az első és második kötet új átdolgozott és kibővített kiadása, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 135., 163. old.
Probleme de matematică pentru concurs, Bucureşti, 1972 (Az I. kötet román fordítása.)
1976. 544 old. (Kibővített orosz nyelvű kiadás 1974-ig bezárólag.)

Dolgozatok

Matematikai dolgozatok

[1] A logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájának redukciójáról, *Matematikai és Fizikai Lapok,* 50 (1943), 51—74. old.
[2] On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *The Journal of Symbolic Logic,* 12 (1947), 65—73. old. (Kalmár Lászlóval közösen)
[3] Reduction of the decision problem to formulas containing a bounded number of quantifiers only, *Proceedings of the X-th International Congress of philosophy, Amsterdam,* 1948, II. 769—772. old.
[4] On the reduction of the decision problem, third paper, Pepis prefix, a single binary predicate, *The Journal of Symbolic Logic,* 15 (1950), 161—173. old. (Kalmár Lászlóval közösen)
[5] Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper, three universal, one existential quantifiers, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 1 (1950), 261-271. old.
[6] Contributions to the reduction theory of the decision problem, fifth paper, Ackermann prefix with only five quantifiers and a bounded number of binary predicates, *U. o.,* (1951) 325—335. old.
[7] Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace Euclidien à *n*-dimensions, *Colloquium Mathematicum,* 2 (1951) 130—135. old. (Rényi Alfréddal és Rényi Katóval közösen)
[8] Halmazok véges osztályainak szerkezetéről, *Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Budapest, 1950* (1952) 401—407. old.
[9] Egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról, *Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának Évkönyve, 1952-53.* (1954) 19—25. old.
[10] Elsőfokú határozatlan egyenletek egész megoldásai és lánctörtek, *Matematikai Lapok* 5 (1954), 79—100. old.
[11] On the solvability of systems of lienar inequalities, *Acta Scientiarum Mathematicarum Universitatis Szegediensis,* 16 (1955) 92—102. old.
[12] Megjegyzések a kínai matematika történetének egy problémájához, *Matematikai Lapok,* 6 (1955) 30—35. old.
[13] On a problem of old Chinese Mathematics, *Publicationes Mathematicae* 4 (1956), 195—197. old.
[14] A matematikai logika eldöntésproblémájáról, *Matematikai Lapok,* 6 (1955), 180—197. old.
[15] Notes on interpolation I, (On some interpolatorical properties of the ultraspherical polynomials), *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 6 (1955), 67—80. old. (Turán Pállal közösen)
[16] A matematikai logika eldöntésproblémájának redukciójáról, Akad. doktori értekezés, Budapest, 1956. III+94 old. kézirat (Megvédve 1957. IV. 11.)
[17] Über die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1, *Annales Univ. Sci. Bp. Eötvös Loránd, Sectio Math.,* 1 (1958), 107—111. old.
[18] Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, *Annales Univ. Sci. Bp. Eötvös L., Sectio Math.* 1 (1958), 113—121. old. (Hajnal Andrással közösen)
[19] Megjegyzések egy versenyfeladathoz, *Matematikai Lapok* 10 (1959), 39—48. old. (Erdős Pállal közösen)
[20] Egy additív számelméleti probléma, *Matematikai Lapok* 10 (1959), 284—290. old. (Erdős Pállal közösen)
[21] Megjegyzések a számelmélet alaptételéhez, *Matematikai Lapok* 11 (1960), 41—45. old.
[22] On the proofs of the fundamental theorem of number theory, *Studies in mathematical analysis and related topics, Essays in honor of George Pólya,* Stanford University Press, Standford, Calif. 1962. 388—391. old.

[23] Egy polinomokra vonatkozó számelméleti tételről, *Matematikai Lapok* 11 (1960), 75—84. old. (Fried Ervinnel közösen)
[24] Über zerteilte Parallelogramme, *Acta Sci. Math. Szeged* 22 (1961) 85—90. old.
[25] Über einen Satz von G. Szekeres in der Geometrie der Zahlen, *Annales Univ. Bp. Eötvös L., Sectio Math.* 3—4 (1960—61), 319—326. old.
[26] Ein Beweis des Wilsonschen Satzes, *Elemente der Mathematik,* 20 (1965), 31. old.
[27] Farey sorozatok és lánctörtek, *Matematikai Lapok* 16 (1965), 228—240.
[28] Péter Rózsa munkássága, *Matematikai Lapok* 16 (1965), 171—184. old. (Dömölki Bálinttal, Makkai Mihállyal és Ruzsa Imrével)
[29] An extension of Zermelo's method for proving unique factorization to polynomial rings. Note on the preceding paper of Mrs. E. Lánczi, *Annales Univ. Bp. Eötvös L., Sectio Math.* VIII (1965), 125—128. old.
[30] Neki rezultati i problemi u geometriji brojeva, *Izabrana Poglavlja iz Mat.* III., Mat. Bibl. 42 (1969) 81—85. old.
[31] Reduction of the decision problem of the first order predicate calculus to reflective and symmetrical binary predicates, *Periodica Math. Hung.* 1 (1971) 97—106. old.
[32] Lattice point free rectangles, *Zahlentheorie* Ber. a. d. Math. Forsch.-Inst. Oberwolfach Bd. 5. 1971. 195—202. old.
[33] Kombinatorikus geometriai problémák, *Matematikai Lapok* 22 (1971) 215—230. old.
[34] Kombinatorikai és geometriai meggondolások a számelméletben, (K. Härtiggel) *Matematikai Lapok* 23 (1972), 25—29. old.
[35] Angolul *Periodica Math. Hung.* 6 (1975) 235—240. old.
[36] Véges Abel-csoportok egy előállításmódjáról, *Matematikai Lapok* 23 (1972) 257—259. old.
[37] Néhány bizonyítás az egész számok törzstényezős felbontásának egyértelműségére, *Matematikai Lapok* 27 (1976—1979), 213—226.

Módszertani dolgozatok

Egy kísérlet értékeléséhez, *Köznevelés* 5 (1949), 15. old.
Szempontok az új középiskola matematikatanításához, I. Megtanítható-e a matematika? II. Tudomány és gyakorlat egysége. *Köznevelés* 5 (1949), 443—444., 469—470. old.
Matematikai feladatok megoldásáról, *A középiskolai matematikatanítás kérdései,* (tanulmánygyűjtemény), Közokt. Kiadó, Budapest, 1950. 29—54. old.
Csekő Árpád és Koczkás Gyula: A fizika csodavilága (könyvbírálat és tanulmány), *Köznevelés* 5 (1949), 213—214. old.
Algebrai egyenletek megoldásáról, *Előadások az iskolai matematika köréből* (tanulmánykötet, szerk. Gádor Endréné), Tankönyvkiadó, Budapest, 1956., 18—69. old.
Egy megjegyzés a kúpszeletek egyenleteinek tanításához, *A mat. tanítása,* 6 (1959) 97-99. old.
Az analízis elemei és a középiskola, Sokszorosításban megjelent a *II. Magyar Matematikai Kongresszusra,* Budapest, 1960. aug. 24—31. 36 old.
Német kivonata a Kongresszus előadásainak kivonata II. köt. VII. r. 27—29. old.
Megjegyzések a másodfokú egyenlet tanításához, *A mat. tanítása* 10 (1963), 2—5. old.
Válasz egy segítségkérő levélre (a hatványfogalom általánosítása), *A mat. tanítása* 10 (1963), 65—68. old.
Remarques sur les tâches de l'enseignement des mathématiques et ses obstacles. *Modernisation de l'enseignement mathématique dans les pays Européens,* Coll. internat. UNESCO, Bucarest, 23. IX — 2. X. 1968. (Szerk. N. Teodorescu) 104—109. old.
A számkör felépítése, *Élő matematika,* tanulmányok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. 179—224. old.
A középponti és kerületi szögek, *A mat. tanítása,* XVI. (1969) 40—41. old.
A kerületi szögekről, *A mat. tanítása,* XVI. (1969) 115—117. old.
A matematikaoktatás korszerűsítésének néhány alapelve, *Néhány hazai és külföldi kísérlet* (tanulmánygyűjtemény) Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. 7—93. old.
Célok és lehetőségek az iskolai matematikai nevelésben (Gádor Endrénével) *Magyar Tudomány* Új folyam XIX (LXXXI) (1974) 570—576. old.
Matematikai nevelés (Szendrei Jánossal) *Magyar Tudomány* Új folyam XX (LXXXII) (1975) 137—142. old.
„I have lost the thread completely..." *Educational Studies in Mathematics* 8 (1977) 35—39. old.

Ismerkedjünk a komplex számokkal I—III. *Középisk. Mat. Lapok*, Új sorozat, 1 (1947—48), 65—71., 94—101., 131—144. old.
Mire való a betűszám? *Március tizenötödike*, 2 (1948), 23. szám
A számok összegéről, *Uo.* 26. szám
Komplex számok trigonometriai alkalmazása, *Uo.* 33. sz.
Mi is a teljes indukció? *Középisk. mat. lapok*, Új sorozat, 2 (1950), 22—38. old.
Aczél Jánossal: Egyenlőtlenségek I—IV, *Középisk. mat. lapok*, Új sorozat, 3 (1950-51) 12—19., 62—71, 113—127., 198—220. old.
Egy geometriai transzformáció, *Középisk. mat. lapok*, Új s., 5 (1952), 135—136. old.
Elsőfokú egyenletek egész megoldása (Diofantoszi egyenletek), *Középisk. mat. lapok*, Új s., 7 (1953) 65—81. old.
Az algebra alaptétele (Varga Tamással), *A mat. tanítása* 2 (1955), 109—116. old.
A szögharmadolás kérdéséről 1—2., *Középisk. mat. lapok*, Új s., 14 (1957) 97—107., 129—134. old.
Polinomok azonossága, *Középisk. mat. lapok*, Új s., 23 (1961), 103—105. old.
Számoljunk ügyesen, *Középisk. mat. lapok*, Új s., 25 (1962), 10—13. old.
A lineáris programozásról (Scharnitzky Viktorral), *Középisk. mat. lapok*, Új s., 25 (1962), 97—104. old.
Megjegyzések a 1434. feladathoz, Racionális együtthatós egyenletek gyökjelekkel felírt megoldásairól, *Középisk. mat. lapok*, Új s., 33 (1966) 105—107. old.
Tud-e Ön fejben ötödik gyököt vonni? *Matematikai érdekességek*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1969. 45—61. old.
Érdekes számok, *Uo.* 163—178. old.
Német fordítása: *Mathematisches Mosaik*, Urania, Verlag Leipzig-Jena-Berlin, 1977. 50—68., 179—196. old.
Polinomok és végtelen polinomok I—III. *Középisk. mat. lapok*, Új s., 45 (1972), 109—117., 193—203., old. 46 (1973) 8—15. old.
Megjelent ezen kívül mintegy 30 versenybeszámoló és számos kisebb írás.

EGY BŰVÖS PRÍMNÉGYZET

BAKOS TIBOR

Surányi János 60. születésnapjára

A következő táblázat egy 12×12-es bűvös prímnégyzet, azaz különböző *prímszámokból* álló bűvös négyzet, állandója 24 300 (minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban az elemek összege ugyanaz: 24 300):

3299	4673	937	2311	11	1607	613	2389	839	2753	2137	2731
2281	967	4643	3329	2383	619	1601	17	2707	2161	2729	863
4733	3359	2251	877	1619	23	2377	601	2801	887	2683	2089
907	2221	3389	4703	607	2371	29	1613	2113	2659	911	2777
107	1409	241	3583	311	6827	103	859	2843	7211	79	727
3541	283	1367	149	823	139	6791	347	709	97	7193	2861
1493	191	3499	157	6899	383	787	31	7247	2879	691	43
199	3457	233	1451	67	751	419	6863	61	673	2897	7229
1487	1889	421	3943	251	4007	1873	5449	47	599	1171	3163
3931	433	1877	1499	5443	1879	4001	257	3121	1213	557	89
1913	1511	3919	397	4019	263	5437	1861	683	131	3079	1087
409	3907	1523	1901	1867	5431	269	4013	1129	3037	173	641

Továbbmenve, a fenti táblázat ún. 3×4 rendszámú bűvös prímnégyzet abban az értelemben, hogy a kilenc 4×4-es mező önmagában is bűvös prímnégyzet, állandóik az alábbi segédnégyzetből olvashatók le:

11 220	4 620	8 460
5 340	8 100	10 860
7 740	11 580	4 980

(Ez a segédnégyzet is bűvös négyzet, állandója 24 300.) Végül még az is teljesül, hogy a kilenc 4×4-es mezőben található négy-négy 2×2-es mező elemeinek összege az illető 4×4-es mező állandója.

Az $1, 2, \ldots, n^2$ számokból képezett $n \times n$-es bűvös négyzetek konstrukciójára ismeretesek eljárások, s nagy n-re elég sok $n \times n$-es bűvös négyzetet lehet konstruálni, ezért szokás további megszorításokat tenni. Egy ritkábban vizsgált eset, amikor (lemondva arról, hogy egymás utáni természetes számokat helyezzünk el) azt kívánjuk, hogy a négyzet különböző (pozitív) prímszámokból álljon. Ennek

nyilván semmi jelentősége nincs a „bűvösség"-gel kapcsolatban, csupán megszorításról van szó, ami viszont a konstrukciót jelentősen megnehezíti. Az irodalomban csupán négy-öt helyen láttam bűvös *prím*négyzetet, és szerzőik — úgy látszik — csak az eredmény bemutatására kaptak helyet, de az eredményhez vezető gondolataik, útjuk leírására már nem.

Az ismert példákat vizsgálva úgy találtam, hogy a konstrukció nem is nehéz, sőt még összetettebb bűvös prímnégyzetek konstrukciójára is lehetőséget láttam a „szorzási elv" szerint (egy bűvös segédnégyzetnek megfelelő állandójú bűvös prímnégyzetek összetételével). Így készítettem el a bemutatott 3×4 rendszámú bűvös prímnégyzetet, s a következőkben vázolom a hozzá vezető utat.

A kilenc 4×4-es bűvös prímnégyzet mindegyikében négy db, prímszámokból álló, azonos differenciájú (rendre: 30, 6, 24, 42, 36, 18, 12, 6, 42), négytagú számtani sorozat elemei vannak alkalmasan elrendezve. Érdemes pl. az első 4×4-es mezőt a következő alakban írni (az egyes sorozatok számtani közepeitől való eltérést feltüntetve):

$3344-45$	$4688-15$	$922+15$	$2266+45$
$2266+15$	$922+45$	$4688-45$	$3344-15$
$4688+45$	$3344+15$	$2266-15$	$922-45$
$922-15$	$2266-45$	$3344+45$	$4688+15$

Ebből jól láthatók az említett „bűvös" tulajdonságok, s a többi 4×4-es bűvös prímnégyzet is hasonló szerkezetű. Tekintsünk ugyanis négy db, prímszámokból álló, azonos differenciájú, négytagú számtani sorozatot:

A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4; C_1, C_2, C_3, C_4; D_1, D_2, D_3, D_4. Ekkor az

A_1	C_2	B_3	D_4
D_3	B_4	C_1	A_2
C_4	A_3	D_2	B_1
B_2	D_1	A_4	C_3

táblázat megadja a kilenc 4×4-es négyzet közös szerkezetét. Tömören: külön-külön véve a betűk, ill. az indexek elrendezéseit, ún. *latin négyzetek* állnak előttünk — az átlók tekintetében is — és a két négyzet *ortogonális* egymásra. (Így a sorozatok cseréjével újabb megfelelő elrendezéseket kaphatnánk.)

Az igazi nehézség megfelelő sorozat*négyes*ek összekeresése, sőt kilenc négyesé — vigyázva arra is, hogy egy prímszám se szerepeljen többször —, elvégre *egyes* négytagú sorozatokat könnyű gyűjteni. Régóta ismert még tíztagú is ($199+210k$, $k=0, 1, \ldots, 9$), sőt $k=-1$ is prímet ad), de találtak már hosszabbakat is. A négytagú számtani sorozatokat külön-külön kerestem a $6k-1$ ill. $6k+1$ alakú prímek között, 4×4-esenként 2-2 ilyen szerepel.

Ellenkező végletként gondolok olyan konstrukcióra, hogy csak „osztókban gazdag", de relatív prímszámok szerepeljenek a bűvös négyzetben.

МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ ИЗ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ
БАКОШ ТИБОР

A MAGIC SQUARE OF PRIMES
T. BAKOS

MEGJEGYZÉSEK AZ AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY EGY PROBLÉMÁJÁHOZ

ERDŐS PÁL ÉS SZEMERÉDI ENDRE

Erdős Pál néhány éve a következő feladatot tűzte ki.

Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots$ egész számok végtelen sorozata. E sorozatot A-val jelöljük. Legyen

$$f(A, k, i) = [a_k, \ldots, a_{k+i-1}]$$

és $F(A, x, i)$ azon k számok száma, melyre

$$f(A, k, i) \leqq X.$$

Bebizonyítandó, hogy

$$F(A, x, i) < C_i X^{1/i},$$

ahol C_i csak i-től függő a konstans.

$i=2$-re a bizonyítás nagyon egyszerű. E cikkben először is $i=2$-re a következő élesebb tételt bizonyítjuk be:

I. Tétel

$$\limsup F(A, X, 2)/X^{1/2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2} - (k-1)^{1/2}}{k}. \tag{1}$$

Továbbá, ha A olyan, hogy (1)-ben egyenlőség áll fenn, akkor

$$\liminf F(A, X, 2)/X^{1/2} = 0.$$

II. Tétel. Minden A-ra

$$\liminf F(A, X, 2)/X^{1/2} \leqq 1.$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

III. Tétel. Legyen $i>4$. Van olyan $\alpha_i>0$, melyre minden elég nagy x-re és alkalmas A-ra

$$F(A, X, i) > X^{1/i+\alpha} i.$$

Tehát a feladat állítása teljesen hamis — a hiba oka nyilván az volt, hogy Erdős csak $i=2$-re bizonyította be és felületesen feltételezte, hogy $i>2$-re is minden igaz marad.

Biztosra vesszük, hogy $i>3$-ra is igaz a tétel. $i=4$-re igaz lesz, hogy

$$F(A, X, 4) > X^{1/4+\alpha} 4.$$

Tudjuk, hogy minden A-ra

$$F(A, X, 3) < c_0 X^{1/3} \log X,$$

és igaz, hogy alkalmas A-ra, végtelen sok X-re

$$F(A, X, 3) > c_1 X^{1/3} \log X.$$

Lehetséges, hogy van olyan A, melyre minden X-re

$$F(A, X, 3) > c_2 X^{1/3} \log X,$$

de ebben egyáltalán nem vagyunk biztosak.

Felvethetjük a következő érdekesnek és nehéznek látszó kérdést: igaz-e, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan k, hogyha $a_1<\ldots$ tetszőleges sorozat, akkor

$$F(A, X, k) < X^{\varepsilon}?$$

Konstruálunk egy sorozatot, melyre $F(A, X, k)$ nagy. Legyen — egyszerűség kedvéért $k=\binom{2l}{l}$. Tekintsük a $\{2tl+1 \ldots (2t+2)l\}$ számokat $t=1, 2, \ldots$-re, s ezen számokból alkotott összes l-es szorzatát. Ezeket nagyság szerint rendezve kapjuk az a-kat. Ezen $\binom{2l}{l}$ szám legkisebb közös többszöröse $\prod_{i=1}^{2l}(2t+i)<X$ ha $t<\frac{X^{1/2l}}{2l}-1$ így $k=\binom{2l}{l}$-re $\varepsilon \geqq \frac{1}{2l}$. Ebből könnyen következik a III. tétel.

Problémáinkat felfoghatjuk mint egy extrém problémát. Jelölje $f_k(X)$ illetve $F_k(X)$ azt a maximális l értéket, melyre van $1 \leqq a_1<\ldots<a_l$ úgy, hogy $[a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}] \leqq X$ minden $1 \leqq i \leqq l$-re, illetve melyre van oly $a_1<\ldots<X$, hogy l db a_i-re $[a_i, \ldots, a_{i+k-1}] \leqq X$). Nyilván $F_k(X) \geqq f_k(X)$. Elsősorban kellene tudni, hogy van-e egyenlőség fix k és végtelen sok X-re.

Tegyük fel, hogy $k=2$. Érdekes lenne $f_2(X)$ és $F_2(X)$-et pontosan meghatározni és az extrem sorozatokat leírni végtelen sok X-re, de talán egy-két nagy X-re is érdekes lehetne.

Az I. Tétel és II. Tétel bizonyításánál felhasználjuk az alábbi egyszerű megjegyzést:

(1) megjegyzés: Ha $\sqrt{(k-1)x}<y, z<\sqrt{kx}$ és $[y, z] \leqq x$ akkor $z-y \geqq k$. Állításunk következik abból, hogy $[z, y]=\frac{zy}{(z, y)}>\frac{(k-1)x}{z-y}$ az (1) megjegyzésből következik az alábbi:

(2) megjegyzés: Ha az A sorozat elemeinek száma $a[\sqrt{(k-1)x}, \sqrt{kx}]$ intervallumban $B(\sqrt{kx}-\sqrt{(k-1)x})$, akkor legfeljebb $\frac{1-B}{k-1}(\sqrt{kx}-\sqrt{(k-1)x})$ olyan $y, z \in A$ pár van, melyre $[y, z] \leqq x$. Elég észrevennünk, hogy ha $[y, z] \leqq x$, akkor az (1) megjegyzés szerint $z-y \geqq k$ és ezért $y+1, \ldots y+k-1$ nem elemei a sorozatnak, tehát ha l pár van, akkor legalább $l(k-1)$ egész van, melyek nem elemei A-nak, és innen $l \leqq \frac{1-B}{k-1}(\sqrt{kx}-\sqrt{(k-1)x})$. Az (1) megjegyzés miatt a $[\sqrt{(k-x)}, \sqrt{kx}]$ intervallumban a jó y, z párok száma legfeljebb $\frac{(\sqrt{kx}-\sqrt{(k-1)x})}{k}$ és ezért

$$\limsup F(A, X, 2)/X^{1/2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}-(k-1)^{1/2}}{k}.$$

Most bebizonyítjuk, hogy ha az A sorozatra

$$\limsup F(A, X, 2)/X^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}-(k-1)^{1/2}}{k}$$

akkor

$$\liminf F(A, X, 2)/X^{1/2} = 0,$$

és ezzel az I. Tétel bizonyítása teljes lesz.

Legyen k_1 elég nagy és X olyan egész, melyre

$$F(A, X, 2)/X^{1/2} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2}-(k-1)^{1/2}}{k} - \frac{1}{k_1 4}.$$

Ekkor a $[k_1\sqrt{x}, k_1^2\sqrt{x}]$ intervallumban az A elemeinek száma legfeljebb $2k_1\sqrt{x}$ mert ellenkező esetben volna olyan l, $(k_1<l<k_1^2)$, hogy az $[\sqrt{(l-1)x}, \sqrt{lx}]$ intervallumban az A elemeinek száma legalább $\frac{2}{k_1}(\sqrt{lx}-\sqrt{(l-1)x})$, és így a (2) megjegyzés értelmében a jó y, z párok száma legfeljebb $\left(1-\frac{2}{k_1}\right)\frac{1}{l-1}(\sqrt{lx}-\sqrt{(l-1)x})$ lenne, ami kisebb mint $\left(\frac{1}{l-1}(\sqrt{l}-\sqrt{l-1})-\frac{1}{k_1 4}\right)X^{1/2}$. Ez nem lehetséges X választása miatt.

Mármost nyilván $F(A, k_1^3 x, 2)<3k_1x^{1/2}+k_1^{3/2}x^{1/2}\sum_{k_1^{1/2}}^{\infty}\frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-1}}{l}<k_1^{3/2}x^{1/2}k_1^{-1/4}$ ami éppen a bizonyítandó állítást adja, hiszen k_1 tetszőlegesen nagy lehet.

Most rátérünk a II. Tétel bizonyítására.

Jelölje $A(x)$ A elemeinek számát x-ig.

Legyen $\liminf\frac{A(x)}{x}=\alpha$ és l elég nagy egész szám. Tehát ha $x>x_0(l)$, akkor $\frac{A(x)}{x}>\alpha-\frac{1}{l^2}$. Definiáljuk az $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots$ sorozatot a következőképpen: legyen $\frac{A(x_i)}{x_i}<\alpha+\frac{1}{l^2}$. Mármost az x_i definíciójából következik, hogy az A-nak az $[x_i, \sqrt{j}x_i]$ intervallumban legalább

$$\left(\alpha-\frac{2\sqrt{j}}{l^2}\right)(\sqrt{j}-1)x_i (j \leqq l) \text{ eleme van.}$$

Ezért a (2) megjegyzés segítségével könnyen adódik, hogy

$$F(A, x_i^2, 2) \leqq \left(\alpha+\frac{1}{l^2}\right)x_i+(1-\alpha)x_i\sum_{j=2}^{l}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1}+$$

$$+\frac{1}{l}x_i\left(\sum_{j=2}^{l}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1}+x_i\sum_{j=l}^{\infty}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1}\right.$$

Mivel

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j-1}}{j-1}=\gamma<1$$

$$F(A, x_i^2, 2) \leqq \alpha x_i+(1-\alpha)x_i\gamma+\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l^\gamma}+\frac{1}{l^{1/2}}\right)x_i,$$

ami a bizonyítandó állítást adja.

Most belátjuk, hogy $F(A, x, 3) \leqq x^{1/3} \log x$. Legyen z, y, w olyan hármas, melyre

$$[z, y, w] \leqq x \quad \text{és} \quad 2^i x^{1/3} \leqq z, \leqq 2^{i+1} x^{1/3}.$$

Az ilyen hármast jó hármasnak nevezzük. Minthogy

$$[z, y, w] \geqq \frac{zyw}{(z, y)(z, w)(y, w)} \geqq \frac{zyw}{(w-z)^3}$$

kapjuk, hogy $(w-z) > 2^i$. Tehát a $[2^i x^{1/3}, 2^{i+1} x^{1/3}]$ intervallumban legfeljebb $x^{1/3}$ jó hármas van és ezért $F(A, x, 3) \leqq x^{1/3} \log x$, mivel az intervallumok száma kisebb mint $\log x$. Végül konstruálunk egy olyan $A = \{a_1, a_2, \ldots a_l\}$ $(a_l \leqq x, x$ elég nagy) sorozatot, melyre $F(A, X, 3) \geqq \frac{1}{10^5} x^{1/3} \log x$. Rögzített j-re $(x^{1/20} < 2^j < x^{1/10})$, legyen

$$(m_1, m_3) = 1, \quad 2^j < m_1, \quad m_3 < 2^{j+1}.$$

Nyilván van olyan c és d, melyekre $m_1 c - m_3 d = -1$, $c < 2m_3$, $d < 2m_1$.

Tekintsük az

$$a_{t, m_1, m_3} = m_1(m_1 + m_3)c + tm_1(m_1 + m_3)m_3$$

$$b_{t, m_1 m_3} = m_1 m_3(d + c) + tm_1(m_1 + m_3)m_3$$

$$c_{t, m_1, m_3} = (m_1 + m_3)m_3 d + tm_1(m_1 + m_3)m_3$$

számhármasokat, ahol $2^j x^{1/3} < a_{t, m_1, m_3}, b_{t, m_1, m_3}, c_{t, m_1, m_3} < 2^{j+1} x^{1/3}$. A hármasaink száma legalább $\frac{1}{20} \frac{x^{1/3}}{2^{2j}}$. Könnyen belátható, hogy tetszőleges $(m_1, m_2) \neq (m_1^*, m_3^*)^2$ párra, legfeljebb $\frac{x^{1/3}}{4^{2j}} t^*$ egész szám van úgy, hogy valamely t-re

$$|a_{t, m_1, m_3} - a_{t^*, m_1^*, m_3^*}| < 2^{j+1}.$$

Ha $\frac{1}{10^2} 2^{2j}$ $\{m_1, m_3\}$ párt tekintünk, akkor minden $\{m_1, m_3\}$ párra legalább $\frac{1}{40} \frac{x^{1/3}}{2^{2j}}$ olyan t van, melyre

$$|a_{t, m_1, m_3} - a_{t^*, m_1^*, m_3^*}| > 2^{j+2}$$

minden t^*, m_1^*, m_3^* választással.

Tekintsük az $\{m_1, m_3\}$ párra azokat az $a_{t, m_1, m_3}, b_{t, m_1, m_3}, c_{t, m_1, m_3}$ hármasokat, melyekhez nincs t^*, m_1^*, m_3^* úgy, hogy

$$|a_{t, m_1, m_3} - a_{t^*, m_1^*, m_3^*}| < 2^{j+2}$$

és legyenek ezek a hármasok az A sorozat három egymásutáni tagjai:

Nyilván $[a_{t, m_1, m_3}, b_{t, m_1, m_3}, c_{t, m_1, m_3}] \leqq x$ és a hármasaink száma legalább $\frac{1}{10^3} x^{1/3}$.

Minthogy legalább $\frac{1}{10^2} \log x$ j egészünk van a kívánt A sorozatot megkonstruáltuk.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ИЗ ЖУРНАЛА

ЭРДЁШ ПАЛ и СЕМЕРЕДИ ЕНДРЕ

REMARKS ON A PROBLEM OF THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY

P. ERDŐS and E. SZEMERÉDI

A $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ és $\nu(n)$ FÜGGVÉNYEK NÉHÁNY ÚJ TULAJDONSÁGÁRÓL

ERDŐS PÁL, GYŐRY KÁLMÁN ÉS PAPP ZOLTÁN

Legyenek $f_1(n), \ldots, f_k(n)$ számelméleti függvények. Nevezzük őket függetlennek, ha akárhogy is írjuk elő az $1, 2, \ldots, r$ számoknak k permutációját $\{i_1^{(j)}, \ldots, i_r^{(j)}\}$ $j=1, \ldots, k$, akkor mindig van végtelen sok n, melyre

$$f_j(n+i_1^{(j)}) > f_j(n+i_2^{(j)}) > \ldots > f_j(n+i_r^{(j)}), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

A független elnevezés talán nem a legszerencsésebb, mert a valószínűségszámításban ez egy elfogadott terminológia és sokkal többet mond, mint a mi feltételünk.

Nehéznek látszik már $k=2$-re is szükséges és elégséges feltételt találni, hogy mikor független k függvény — még akkor is, ha feltesszük, hogy az f_j függvények additívak vagy multiplikatívak. Így e cikkben csak speciális függvényeket, a $d(n)$, $\nu(n)$, $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ függvényeket vizsgáljuk. $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ $r=4$-re még függetlenek, de $r=5$-re már nem. $d(n)$ és $\nu(n)$ viszont függetlenek minden r-re és $d(n)$, $\nu(n)$ és $\sigma(n)$, valamint $d(n)$, $\nu(n)$ és $\varphi(n)$ is függetlenek.

1. Tétel. Legyen $\{i_1^{(j)}, \ldots, i_r^{(j)}\}$, $j=1, 2$, az $1, \ldots, r$ számok két tetszés szerinti permutációja. Akkor végtelen sok n-re

$$d(n+i_1^{(1)}) > \ldots > d(n+i_r^{(1)}); \quad \nu(n+i_1^{(2)}) > \ldots > \nu(n+i_r^{(2)}). \tag{2}$$

Az 1. Tétel bizonyítása az elemi analitikus számelmélet módszereit használja. A bizonyítás alapjában véve egyszerű, de az analitikus számelméletben járatlan olvasónak talán némi nehézséget fog okozni. Hogy a formalizmust egyszerűsítsük, (2) helyett csak azt fogjuk bizonyítani, hogy végtelen sok n-re fennáll

$$d(n+1) > \ldots > d(n+r); \quad \nu(n+r) > \ldots > \nu(n+1). \tag{2'}$$

A bizonyításból látható lesz, hogy ez nem megy az általánosság rovására. Először néhány jelölést vezetünk be. Legyen x elegendően nagy,

$$u = [(\log\log x)^3], \quad v = [(\log\log x)^2].$$

$r<q_1<q_2<\ldots$ legyenek az r-nél nagyobb egymásután következő prímszámok, továbbá $(j=1, \ldots, r)$

$$A_j = \prod_i q_i, \quad (j-1)u+1 \leqq i \leqq ju-(j-1)v$$

azaz

$$\nu(A_j) = u-(j-1)v. \tag{3}$$

Elégítse ki mármost n a következő kongruenciarendszert:

$$n+j \equiv A_{r+1-j}^{r+1} \pmod{A_{r+1-j}^{r+1}}, \quad (j = 1, \ldots, r), \tag{4}$$

(4) miatt n mod B egyértelműen van meghatározva, ahol $B = \prod_{j=1}^{r} A_j^{r+1}$ és

$$n+j = A_{r+1-j}^{r+1} l_j + tB = A_{r+1-j}^{r+1}\left(l_j + t\frac{B}{A_{r+1-j}^{r+1}}\right) \tag{5}$$

alakba írható, ahol $(B, l_j)=1$, $A_{r+1-j}^{r+1} l_j < B$. (3)-ból azonnal következik, hogy

$$d(A_r^r) > d(A_{r-1}^{r-1}) > \ldots > d(A_1); \quad v(A_1) > \ldots > v(A_r). \tag{6}$$

Tekintsük mármost a (4) kongruenciarendszer megoldásait az $(1, x)$ intervallumban, ekkor (5)-ben $0 \leqq t < \frac{x}{B}$. Egy egyszerű átlagolással most bebizonyítjuk, hogy majdnem minden t-re (azaz $o\left(\frac{x}{B}\right)$ t érték kivételével) fennáll (2').

Könnyű belátni, hogy

$$\sum_{0<t<\frac{x}{B}} d\left(l_j + t\frac{B}{A_{r+1-j}^{r+1}}\right) \leqq 2 \sum_{1 \leqq s \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{Bs} + 1\right) < \frac{2x \log x}{B} \tag{7}$$

(7) azonnal következik, ha meggondoljuk, hogy egy m szám osztóinak száma legfeljebb kétszerese m azon osztói számának, melyek $m^{1/2}$-nél nem nagyobbak.

(7)-ből rögtön következik, hogy ha $o\left(\frac{x}{B}\right)$ t értéktől eltekintünk, akkor $d\left(l_j + t\frac{B}{A_{r+1-j}^{r+1}}\right) < (\log x)^2$, azaz $o\left(\frac{x}{B}\right)$ t értéktől eltekintve

$$d(A_{r+1-j}^{r+1}) = (r+2-j)^{u-(r-j)v} \leqq d(n+j) < (r+2-j)^{u-(r-j)v} (\log x)^2. \tag{8}$$

(8)-ból egyszerű számolással azonnal belátható, hogy a $(\log x)^2$ szorzó a (6) egyenlőtlenséget nem tudja megváltoztatni, ugyanis

$$(r+2-j)^{u-(r-j)v} > (\log x)^2 (r+2-j-1)^{u-(r-j-1)v} \tag{9}$$

bőségesen teljesül (u és v definíciója miatt). (2') v-re vonatkozó egyenlőtlenségét még könnyebb bebizonyítani. Ezzel az 1. Tétel bizonyítását befejeztük.

Ezenkívül bebizonyítható, hogy ha $P_1 = \{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}$ és $P_2 = \{i_1^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}\}$ az $1, \ldots, r$ számok két permutációja, akkor azon n számok $d_r(P_1, P_2)$ sűrűsége, melyekre (2) teljesül, létezik. Továbbá $\max d_r(P_1, P_2) = d_r(P_1, P_1)$. $d_r(P_1, P_1)$ természetesen nem függ P_1-től. Bizonyára $d_r(P_1, P_2)$ minimuma akkor éretik el, ha $P_1 = \{1, \ldots, r\}$ és $P_2 = \{r, \ldots, 1\}$, de a bizonyítást nem gondoltuk át pontosan. Végül könnyű belátni, hogy dacára annak, hogy $d_r(P_1, P_1)$ maximális, mégis $\lim_{r \to \infty} r! d_r(P_1, P_1) = 0$.

Erdős Pál egy régebbi cikkében [1] bebizonyította, hogy ha $r_n = c (\log n)^{1/2} / \log \log n$, valamint $\{i_1, i_2, \ldots i_{r_n}\}$ az $1, 2, \ldots, r_n$ számok egy tetszés szerinti permutációja, akkor, a $d(m+i_1) > d(m+i_2) > \ldots > d(m+i_{r_n})$ egyenlőtlenségeknek van n-nél kisebb megoldása. Hasonló módon élesíthetnénk az 1. Tételt, de itt se gondoltuk végig a részleteket.

$d(n)$, $v(n)$ és $\varphi(n)$, illetve $d(n)$, $v(n)$ és $\sigma(n)$ függetlensége ugyanúgy bizonyítható be, mint az 1. Tétel, de a bizonyítás kissé komplikáltabb.

A $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ függvényekre hasonló állítás nem igaz. Nevezetesen bebizonyítható a következő

2. Tétel. Nem létezik olyan n természetes szám, melyre

$$\varphi(n+1) \geqq \varphi(n+2) \geqq \varphi(n+3) \geqq \varphi(n+4) \geqq \varphi(n+5) \tag{10}$$

és

$$\sigma(n+1) \geqq \sigma(n+2) \geqq \sigma(n+3) \geqq \sigma(n+4) \geqq \sigma(n+5) \tag{11}$$

egyszerre teljesül.

Bizonyítás. Legyen $h(n)=\varphi(n)\sigma(n)$. Ekkor (10)-ből és (11)-ből

$$h(n+1) \geqq h(n+2) \geqq h(n+3) \geqq h(n+4) \geqq h(n+5). \tag{12}$$

Tegyük fel, hogy (12) n-re teljesül. Ha $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ egy m szám prímtényezős alakja, akkor

$$h(m) = m^2\left(1-\frac{1}{p_1^{\alpha_1+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r^{\alpha_r+1}}\right).$$

Ha $2\nmid m$, úgy $\frac{h(m)}{m^2} \geqq \left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right) \geqq \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right) > \frac{3}{4}$.

Ha pedig $2\|m$ $(p_1=2)$, úgy $\frac{h(m)}{m^2}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r^{\alpha_r+1}}\right) \leqq \frac{3}{4}$. Mivel van olyan i $(1 \leqq i \leqq 4)$, hogy $n+i \equiv 2 \pmod 4$, ezért egyrészt $h(n+i) \leqq \frac{3}{4}(n+i)^2$, másrészt $h(n+i+1) > \frac{3}{4}(n+i+1)^2$, ami ellentmond (12)-nek.

Megjegyzés. A 2. Tételben nem $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)=(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)=(1, 2, 3, 4, 5)$ az egyetlen olyan permutáció, melyre (10) és (11) nem teljesülhet. Ugyanezt lehet bizonyítani akkor is, ha például $i_4=j_4=4$, $i_5=j_5=5$ és $i_1=j_1$, $i_2=j_2$, $i_3=j_3$ az 1, 2, 3 számok tetszőleges permutációja.

$r=4$ esetén az 1. Tétel $f_1=\varphi(n)$-re és $f_2=\sigma(n)$-re is érvényben marad. Ez közvetlenül is bizonyítható. Azonban a következő állítás (melyből ezt majd levezetjük) önmagában is érdekesnek látszik.

3. Tétel. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k$ pozitív számok. Akkor és csak akkor létezik olyan természetes számokból álló végtelen n_l $(l=1, 2, \ldots)$ sorozat, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\varphi(n_l+i)}{\varphi(n_l+i+1)} = \xi_i, \tag{13}$$

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\sigma(n_l+i)}{\sigma(n_l+i+1)} = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{14}$$

ha van olyan (nem szükségképpen különböző) természetes számokból álló n_l' ($l=1, 2, \ldots$) sorozat, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l'+i)}{h^*(n_l'+i+1)} = \xi_i\eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{15}$$

ahol $h^*(n)=\varphi(n)\sigma(n)/n^2$.

Ez a tétel A. Schinzel egy tételének [2] általánosítását jelenti.

Bizonyítás. A tételnek a „csak akkor" része triviális.

A fordított állításhoz elegendő belátni olyan n_l ($l=1, 2, \ldots$) sorozat létezését, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\varphi^*(n_l+i)}{\varphi^*(n_l+i+1)} = \xi_i \tag{16}$$

és

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l+i)}{h^*(n_l+i+1)} = \xi_i\eta_i = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{17}$$

ha valamely n_l' ($l=1, 2, \ldots$) sorozatra

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l'+i)}{h^*(n_l'+i+1)} = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{18}$$

ahol $\varphi^*(n)=\varphi(n)/n$.

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges és $\varepsilon>\varepsilon'>0$. Ekkor van olyan n' természetes szám, melyre

$$\left|\frac{h^*(n'+i)}{h^*(n'+i+1)} - \zeta_i\right| < \varepsilon' \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{19}$$

Jelölje $p_1, p_2, \ldots$ az egymást követő prímszámok sorozatát. Legyen $m_0=(p_1 \ldots p_{s_0})^T$, míg $i=1, 2, \ldots, k+1$ esetén $m_i=p_{s_{i-1}+1} \ldots p_{s_i}$ ($s_0<s_1<\ldots<s_k$).

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x &\equiv n' \pmod{m_0^2} \\ x &\equiv m_i - i \pmod{m_i^2} \quad (i = 1, \ldots, k+1) \end{aligned} \tag{20}$$

kongruenciarendszert. Könnyen belátható, hogy ez megoldható és van olyan megoldása, amelyre $-k-1 \leqq x < (m_0 \ldots m_{k+1})^2 - k - 1$ teljesül. Legyen n egy ilyen megoldás. Akkor $0<n$ és $n+i<(m_0 \ldots m_{k+1})^2$ ($i=1, \ldots, k+1$). Megmutatjuk, hogy $T, s_0, s_1, \ldots, s_{k+1}$ értékeinek alkalmas megválasztása mellett

$$\left|\frac{h^*(n+i)}{h^*(n+i+1)} - \zeta_i\right| < \varepsilon \tag{21}$$

és

$$\left|\frac{\varphi^*(n+i)}{\varphi^*(n+i+1)} - \xi_i\right| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{22}$$

teljesül, ebből pedig a bizonyítandó állítás már következik.

Ha s_0-t és T-t elég nagyra választjuk, akkor m_0 osztható $n'+i$-vel $(i=1, \ldots, k+1)$. Ezért $n+i=(n'+i)u_i$ írható, ahol már $(u_i, n'+i)=1$, sőt, az is könnyen belátható, hogy u_i minden prímosztója nagyobb p_{s_0}-nál $(i=1, \ldots, k+1)$. Ezek alapján

$$h^*(n'+i) \geqq h^*(n+i) = h^*(n'+i)h^*(u_i) > h^*(n'+i)\left(1-\frac{1}{p_{s_0}}\right) \quad (i = 1, \ldots, k+1).$$

Tehát, ha s_0 elég nagy, akkor $s_1, \ldots, s_{k+1}$-től függetlenül $h^*(n+i)/h^*(n+i+1)$ tetszőlegesen közel kerül $h^*(n'+i)/h^*(n'+i+1)$-hez, így (19) figyelembevételével (21) adódik. A továbbiakban s_0-t és T-t rögzítettnek tekintjük, méghozzá úgy, hogy (21) teljesüljön.

Mivel $n+i=(n'+i)u_i$ osztható m_i-vel és $(m_i, n'+i)=1$, ezért $u_i=m_i v_i$, és (20) miatt $(v_i, m_i)=1$ $(i=1, \ldots, k+1)$. Továbbá $(v_i, m_j)=(n+i, m_j)=$ $=(n+i-(n+j), m_j)=1$ ha $i \neq j$; $i, j=1, \ldots, k+1$. Ezenkívül $(v_i, m_0)=1$ is teljesül $(i=1, \ldots, k+1)$. Ha tehát v_i prímtényezős felbontása $v_i=q_{i1}^{\alpha_{i1}} \ldots q_{it_i}^{\alpha_{it_i}}$ $(i=1, \ldots, k+1)$ alakú, akkor $q_{ij} > p_{s_{k+1}}$ $(j=1, \ldots, t_i;\ i=1, \ldots, k+1)$ és

$$p_{s_{k+1}}^{t_i} < v_i < n+i < (m_0 \ldots m_{k+1})^2 < p_{s_{k+1}}^{2(s_{k+1}+(T-1)s_0)}.$$

Ezért $s_{k+1} > (T-1)s_0$ esetén $t_i < 4s_{k+1}$ $(i=1, \ldots, k+1)$, s így

$$1 > \varphi^*(v_i) = \left(1-\frac{1}{q_{i1}}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{q_{it_i}}\right) \geqq \left(1-\frac{1}{p_{s_{k+1}}+1}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{p_{s_{k+1}}+4s_{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{p_{s_{k+1}}}{p_{s_{k+1}}+4s_{k+1}},$$

ami 1-hez tetszőlegesen közel van, ha s_{k+1} elegendően nagy. Ha tehát

$$\left|\frac{\varphi^*((n'+i)m_i)}{\varphi^*((n'+i+1)m_{i+1})} - \xi_i\right| < \varepsilon/2 \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{23}$$

teljesül és s_1 (aminek következtében s_{k+1} is) elég nagy, akkor (22) is teljesül.

Azonban nem nehéz megmutatni, hogy $s_1, \ldots, s_{k+1}$ megválasztható úgy, hogy s_1 tetszőlegesen nagy legyen és $\varphi^*(m_i)/\varphi^*(m_{i+1})$ tetszőlegesen közel kerüljön egy bármilyen előre megadott pozitív értékhez, esetünkben $\xi_i \varphi^*(n'+i+1)/\varphi^*(n'+i)$-hez $(i=1, \ldots, k)$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4. Tétel. Legyen i_1, i_2, i_3, i_4 és j_1, j_2, j_3, j_4 az 1, 2, 3, 4 számok két tetszőleges permutációja. Létezik végtelen sok olyan n természetes szám, melyekre

$$\varphi(n+i_1) > \varphi(n+i_2) > \varphi(n+i_3) > \varphi(n+i_4) \tag{24}$$

és

$$\sigma(n+j_1) > \sigma(n+j_2) > \sigma(n+j_3) > \sigma(n+j_4) \tag{25}$$

egyszerre teljesül.

Bizonyítás. A 3. Tétel (és bizonyítása) jelöléseit megtartva, legyen a az 1, 2, 3, 4 számok egy tetszőleges permutációja és

$$\xi_i \eta_i = \zeta_i = \frac{h^*(p_{2a^{-1}(i)-1})}{h^*(p_{2a^{-1}(i+1)-1})} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ahol p_t a t-edik prímszám és ξ_i, η_i később meghatározott pozitív konstansok (természetesen a fenti feltétel mellett).

Megmutatjuk, hogy van olyan n_l' sorozat, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l'+i)}{h^*(n_l'+i+1)} = \zeta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Legyen $l>9$ rögzített egész szám és $c_i = p_{2a^{-1}(i)-1} e_i f_i$ $(i=1, \ldots, 4)$, ahol

$$e_i = \begin{cases} 2^l & \text{ha } |i-a(1)| = 2 \\ 1 & \text{különben} \end{cases} \qquad f_i = \begin{cases} (p_2 p_4 p_6 p_8)^l (p_9 p_{10} \ldots p_l)^l & \text{ha } i = 2 \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az

$$x+i \equiv c_i \pmod{c_i^2} \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

kongruenciarendszer megoldható, egy megoldását jelölje $n'=n_l'$. Ekkor $n'+i=c_i d_i$ írható, ahol $(c_i, d_i)=1$ $(i=1, \ldots, 4)$, sőt, könnyű belátni, hogy d_i nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal. Továbbá

$$(c_j, d_i) \leqq (n'+j, d_i) = \big((n'+j)-(n'+i), d_i\big) = 1 \quad (i \neq j; \quad i, j = 1, \ldots, 4).$$

Tehát d_i minden prímtényezője nagyobb p_l-nél, ezért

$$1 \geqq h^*(d_i) > 1 - \frac{1}{p_l},$$

azaz

$$\lim_{l\to\infty} h^*(d_i) = 1 \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

Hasonlóan

$$1 \geqq h^*(e_i) \geqq 1 - 1/2^{l+1}$$

és

$$1 \geqq h^*(f_i) \geqq (1-1/3^{l+1})^l > 1 - l/3^{l+1} \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

miatt

$$\lim_{l\to\infty} h^*(e_i) = \lim_{l\to\infty} h^*(f_i) = 1 \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

Tehát valóban

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l'+i)}{h^*(n_l'+i+1)} =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \frac{h^*(p_{2a^{-1}(i)-1})}{h^*(p_{2a^{-1}(i+1)-1})} \frac{h^*(e_i)}{h^*(e_{i+1})} \frac{h^*(f_i)}{h^*(f_{i+1})} \frac{h^*(d_i)}{h^*(d_{i+1})} = \zeta_i.$$

Ekkor pedig a 3. Tétel szerint van olyan n_l természetes számokból álló sorozat, hogy

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\varphi(n_l+i)}{\varphi(n_l+i+1)} = \xi_i, \quad \lim_{l\to\infty} \frac{\sigma(n_l+i)}{\sigma(n_l+i+1)} = \eta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Most válasszuk meg a ξ_i, η_i értékeket. Legyen $a(k)=i_k$, $b(k)=j_k$ $(k=1, 2, 3, 4)$ és $\eta_i = 2^{(b^{-1}(i)-b^{-1}(i+1))\delta/4}$ $(i=1, 2, 3)$, $(\delta>0)$. Ekkor, ha l elegendően nagy, a $\sigma(n+i)$-k nagyság szerinti sorrendje ugyanaz lesz, mint a $b^{-1}(i)$-k sorrendje, azaz $n=n_l$-re teljesül (25). Másrészt $2^{-\delta}<\eta_i<2^{\delta}$ miatt δ-t elegendően kicsire választva

$\xi_i=\zeta_i/\eta_i$ értéke tetszőlegesen megközelíti ζ_i értékét. Ha tehát δ-t megfelelő kicsire, l-et nagyra választjuk, akkor a $\varphi(n_l+i)$ számok nagyság szerinti sorrendje megegyezik a $h^*(p_{2a^{-1}(i)-1})$ számok sorrendjével, ami pedig ugyanaz, mint az $a^{-1}(i)$-k sorrendje. Vagyis $n=n_l$-re fennáll (24). Ezzel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] ERDŐS PÁL, Megjegyzések a Matematikai Lapok két problémájához, Mat. Lapok 11 (1960), 26—31.

[2] A. SCHINZEL, On functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 3 (1955), 415—419.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$, $\nu(n)$

ЕРДЁШ ПАЛ, ДЬЁРИ КАЛМАН и ПАПП ЗОЛТАН

ON SOME NEW PROPERTIES OF FUNCTIONS $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ AND $\nu(n)$

P. ERDŐS, K. GYŐRY, Z. PAPP

Let $i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r$ be two permutations of 1, 2, ..., r. The authors prove that the inequalities

$$d(n+i_1)>\ldots>d(n+i_r); \quad \nu(n+j_1)>\ldots>\nu(n+j_r)$$

have always infinitely many solutions.

If $d(n)$ and $\nu(n)$ are replaced by $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$ the same result holds for $r=4$ but fails for $r\geqq 5$. Several related problems are discussed.

MEGJEGYZÉSEK GAUSS NEM-EUKLIDESZI GEOMETRIAI EREDMÉNYEIHEZ

SZÉNÁSSY BARNA

1977. április 30-án ünnepelte a tudós világ Carl Friedrich Gauss születésének 200. évfordulóját. Ez alkalommal a tanulmányok egész sora, valamint több kongresszus áldozott a matematika egyik legnagyobb, a geodézia, a fizika és az asztronómia kiemelkedő hatású alakja emlékének — bővítve ezzel az egyébként is szinte áttekinthetetlenül gazdag irodalmat. Az idetartozó művek közül — a részletek iránt érdeklődők munkájának megkönnyítése céljából — néhányat írásom végén feltüntetek.

A következőkben csupán néhány olyan adatnál időzöm kissé hosszabban, amelyek gyakran említett tartozékaivá váltak a Gaussról szóló írásoknak, anélkül, hogy hitelességüket fölülbírálták, vagy értéküket mérlegelték volna. Egyik-másik megjegyzésem inkább csak a lényeget nem érintő kuriozitás, de olyan is van, amely lényeges, és Bolyai János révén közelebbről is érdekelheti a hazai tudománytörténetet. Nem ringatom magam a tévedhetetlenség illúziójában, további részletező vizsgálatok módosíthatják az általam mondottakat.

*

Az első nemeuklideszi geometriák viszonylag késői megalkotásának indokául főleg két dolgot szokott hangsúlyozni a szakirodalom: az euklideszi geometriának a gyakorlattal való jó megegyezését, továbbá a Kant-féle filozófiát, amely azt hirdette, hogy a Newton által definiált „abszolút" tér euklideszi szerkezete gondolati szükségszerűség, velünk született „a priori" kategória.

A 19. század elején azonban már több matematikus tette túl magát a Kant-féle filozófia által felállított korláton, és vallotta azt, hogy a tér szerkezetének kérdésében a végleges választ a mind pontosabb gyakorlati mérések adhatják meg. Ilyen álláspontot foglalt el — többek között — F. K. Schweikart, aki rövid följegyzésében egy nemeuklideszi geometria („asztrál-geometria") lehetőségét vázolta, Bolyai Farkas, aki a tér milyensége kérdésében kifejezte a csillagászati mérések jelentőségét, Lobacsevszkij, aki ilyen mérésekhez egy „gondolat-kísérlet"-et le is írt. Gauss is haladó fölfogást vallott, hagyatékában több helyen találjuk azt a megjegyzést, hogy a tér nem „a priori" kategória. Talán a legmesszebbre Bolyai János tekintett, midőn egyik följegyzésén így fogalmazott: „... a nehézkedés törvénye is szoros összve köttetésben, foljtatásban tetszik (mutatkozik) az űr termetével, valójával (alkatával) miljenségével". Ezt a — talán inkább intuitive megérzett — sejtést, vagyis a gravitáció és a tér közötti összefüggést kvantitative ő nem adhatta meg (ez 1916-ban Einsteinnek sikerült), hisz ehhez a múlt században még hiányzott a szükséges matematikai és fizikai apparátus.

Arról tehát tudunk, hogy Gauss nem fogadta el fenntartás nélkül a Kant-féle térfogalmat. Ezt első életrajzírója, Sartorius von Waltershausen 1856-ban olyan formában említette, hogy számos vitapartnere közül Bolyai Farkas volt az egyetlen, aki megértette a térről vallott metafizikai nézeteit. A Gauss és Bolyai Farkas közötti beszélgetések képezhették a hátterét Bolyai Farkas 1804-ben tartott tanári székfoglalója következő mondatának: „Más határba tartoznak azon esmeretek, a mellyek valamely feltettekből (= axiómákból, Sz. B.) az itéllet törvényei szerint tökéletesen folynak, mint a spatium megadatik a Geometriának (a nélkül, hogy kérdené, van-é a repraesentation kívül)."

Ennek a nehézkes fogalmazású mondatnak is az a lényege, hogy a tér szerkezete, milyensége, fogalma nem velünk született „a priori", hanem többféleként is interpretálható „a posteriori" kategória.

Az e kérdéssel foglalkozó irodalomban azonban még sem látom kellőleg tisztázottnak Gaussnak a szerepét. A különböző tanulmányok ugyanis — egyöntetűen — azt állítják, hogy Gauss méréseket is végzett *kifejezetten* annak a kérdésnek az eldöntése céljából, hogy „nagyban" is érvényesek-e az euklideszi geometria képletei, vagy sem. A válaszadáshoz köztudottan elegendő lenne annak mérésekkel történő igazolása, hogy a síkháromszög szögeinek összege „nagyban" is 180°, vagy pedig mutatkozik-e ettől való eltérés. A kérdés ilyen fölvetését azonban nem találtam Gauss geodéziai méréseket tartalmazó írásaiban.

Megjegyzésem kissé részletezőbb magyarázatot igényel. Ismeretes, hogy katonai okokból, továbbá megbízható adózási alap megteremtése érdekében 1816-ban Gauss a hannoveri kormánytól az ország pontos föltérképezését kapta feladatául, és ő ezt a munkát — kisebb megszakításokkal — 1841-ig el is végezte. A mérések pontosságát mutatja, hogy szögeknél a másodpercek ezredrészeit is figyelembe vette. A trianguláció kiindulását három hegycsúcs, a Hohenhagen, a Brocken és az Inselsberg által meghatározott háromszög képezte (az oldalhosszak hozzávetőleges mérete 107, 85 és 69 km), majd ezt a háromszöget bővítették fokozatosan ő és munkatársai az egész királyság területére. A mérések előrehaladásáról jól tájékoztatnak azok a térképvázlatok, amelyek például a Gauss—Gerling levelezésben találhatók (pl. *1.* 207., 231., 558.). Innen és más följegyzésekből tudjuk, hogy a szögek mért értékeit Gauss módosította is a legkisebb négyzetek módszerével, az euklideszi geometriát véve alapul. (E módszer kérdésében még prioritási összeütközése is támadt Legendre-val.).

A Gauss-féle mérési sorozatnak tehát nem az volt a célja, hogy eldöntse, vajon a tér euklideszi, vagy nem. Ellenkezőleg: éppen geodéziai megbízatása miatt nem láthatta szükségét annak, hogy a nemeuklideszi geometriát kidolgozza és népszerűsítse. Ebben a fölfogásában még csak megerősíthették fiatalkori asztronómiai kutatásai, amelyek sok sikert hoztak számára. Ismeretesek például a két aszteroidával, a Ceres-szel és a Pallas-szal kapcsolatos pályaszámításai, amelyeket a csillagászati észlelések hamarosan kellőképp igazoltak. Ezek, ha algebrai módszereket igényeltek is, valamiként minden esetben kapcsolódtak az euklideszi geometriához.

*

Több, Gauss által írott levélben olvassuk azt a megjegyzést, hogy a nemeuklideszi geometria kidolgozásától és közzétételétől az tartja vissza, mert fél a „böociaiak" támadásától, a „darazsak fullánkjától". Tudjuk, hogy az athéniek a böociaiakat élvhajhász, buta embereknek tekintették. Schumacherhez írott egyik levelében arról is panaszkodott Gauss, hogy a térről vallott nézetei miatt

„sárral dobálták meg". Vajon kiktől félt és kik támadták? Ezekre a kérdésekre még a rendkívül tárgyilagos és a Gauss geometriai hagyatékát alaposan ismerő Stäckel sem tudott meggyőző választ adni (*2.* 14—15.). A kommentár-irodalom Gauss talányos szavait a korabeli tudósokra, közelebbről a matematikusokra és a filozófusokra vonatkoztatja. Vajon tényleg rájuk gondolt-e? A kérdés föltevése azért jogos, mert több számottevő matematikussal folytatott levelezésében eléggé nyíltan írt a nemeuklideszi geometria lehetőségéről. Néhány középszerű kísérletezővel (pl. M. Metternich, J. Ch. Schwab) az euklideszi párhuzamossági axiómával foglalkozó hibás értekezéseikre írott recenziókért támadt ugyan nézeteltérése, de őmiattuk bizonyára nem hátrált volna meg a nemeuklideszi geometria kidolgozásától, ha azt célszerűnek minősítette volna. A Kant-féle filozófia korlátain pedig — mint említettük — már fiatalon túltette magát. Vajon az allegorikus célozgatás nem egyszerűen a hannoveri királyság vezetőire vonatkozott, akiktől tisztes jövedelmet és számos kitüntetést kapott, főként a geodéziai munkálatokért, ami pedig elsőrendűen az euklideszi geometriát igényelte. Ez a talán kissé merésznek tűnő feltételezés jól beillik a Gauss egész élete folyamán megfigyelhető, kenyerét féltő, óvatoskodó, minden kockázatot kerülő magatartásába.

Ilyen megvilágítás esetén nagyon is találónak tűnik Bolyai János 1832-ben Johann Habsburghoz írott folyamodványának néhány sora. Ezeket már Gaussnak az Appendixre adott kétes értékű dicsérő sorai ismeretében vetette papírra: „Mi más egyébről van szó a tudományokban, mint éppen arról, hogy *a homályos dolgokat tisztázzuk, és azt, ami hiányzik, előteremtsük?* Ha Gauss nem volna erről éppúgy meggyőződve és áthatva, mint alulírott, és e kérdésre való válasza kétkedőbb volna, akkor hasonló okból még számosat kellett volna elrejtenie többi kiváló munkái közül. Hisz maga úgy nyilatkozott egyik munkájáról (a *Disquisitiones arithmeticae*-ről), hogy azt egész Európában akkor csak hat mathematikus értette meg".

*

Az első nemeuklideszi geometriát jó ideig Lobacsevszkijről nevezte a tudós világ, és csupán a múlt század kilencvenes éveiben kapcsolták az elnevezéshez (magyar matematikusok szorgalmazására) Bolyai János nevét. E késedelmeskedésnek számos oka közül talán a két legdöntőbb: amíg Lobacsevszkij német és orosz nyelven írott *több* értekezésben és könnyen érthető módon fejtette ki új geometriai rendszerét, addig Bolyai *egyetlen* értekezést írt, az Appendixet, és az nehezen követhető, igen tömör; emellett az orosz matematikusok hamarabb kezdtek gondot fordítani kiváló tudósuk elismertetésére, mi évtizedeken át hallgattunk Bolyai Jánosról.

A helyzet Gauss hagyatékának a folyamatos közzététele során olyan értelemben módosult, hogy — bár a „Lobacsevszkij—Bolyai-geometria" elnevezés maradt — a súly kezdett áttolódni Gauss személyére, és egyesek még ma is őt tekintik az első nemeuklideszi geometria kezdeményezőjének. Ennek a fölfogásnak a legsúlyosabb szavú képviselője Felix Klein volt, aki a göttingeni egyetemen az 1889—90. tanévben tartott előadásaiban fejtette ki ez irányú — kétségtelenül elfogult — nézeteit, Gauss szerepét megalapozatlan indokok alapján az első helyre állítva. (Ez az előadás 1893-ban nyomtatásban is megjelent.) És bár idők folyamán Klein némileg változtatott Gauss-centrikus fölfogásán, téves értékelése sokhelyt ma is él. Ilyen módon Felix Klein szerepe, bár jelentős volt az első nemeuklideszi geometriák elismertetése terén, ugyanakkor zavaró a történelmi vonatkozások megítélésében.

*

Az euklideszi párhuzamossági axiómát indirekt úton bizonyítani iparkodó vizsgálatok terén a legmélyebb eredményeket Lambert (1728—1777) érte el 1766 táján. Az általa „harmadik"-nak, ma „hegyesszög" hipotézisnek (az a föltételezés, hogy a síkháromszög szögeinek összege kisebb 180°-nál) nevezett premisszából az alábbi eredményeket igazolta:

1. Létezik nem önkényesen választott abszolút hossz-, terület- és térfogat egység („... wenn die dritte Hypothese statt hätte, wir ein absolutes Maass der Länge jeder Linien, des Inhalts jeder Flächenräume und jeder körperlichen Räume haben würden (*3.* 199.).

2. Ha két síkháromszög közül az első területe nagyobb, mint a másodiké, akkor az első szögeinek összege kisebb, mint a másodiké.

Nevezzük — mai szokás szerint — „szöghiány"-nak (defektusnak) a 180° és a háromszög szögeinek összege közti különbséget, akkor a Lambert-féle 2. következmény úgy is fogalmazható, hogy a hegyesszög-hipotézis esetén a síkháromszög területe egyenesen arányos a szöghiánnyal.

Ezt az eredményt Lambert úgy nyerte, hogy egy háromszöget kisebbekre darabolt, majd elemi geometriai úton bebizonyította azt, hogy az eredeti háromszög defektusa egyenlő a rész-háromszögek defektusainak összegével. Hasonlattal élve: egy család adóssága megegyezik a családtagok adósságainak összegével.

A 2. következmény alapján Lambert azt az analógiát is észrevette (de képletileg nem írta le), amely fennáll a valós r sugarú gömb gömbháromszögének

$$r^2(a+b+c-\pi) = r^2\varepsilon \tag{I}$$

(a, b, c a gömbháromszög belső szögei ívmértékben) területképlete, valamint a $\sqrt{-1}\cdot r=k$ „képzetes sugarú gömb" ebből egyszerű behelyettesítéssel nyerhető

$$k^2(\pi-a-b-c) = k^2\delta \tag{II}$$

területképlete között.

Lambert azonban ezen a ponton megállt: a hegyesszög-hipotézis említett következményeit ugyanis annyira elfogadhatatlanoknak vélte, hogy azok alapján indirekt úton bebizonyítottnak gondolta az euklideszi párhuzamossági axiómát. Előtte tehát föl sem merült a nemeuklideszi geometria gondolata, valamint az, hogy (II)-ből levonja a maximális határháromszög területének korlátosságára vonatkozó következményt. Ez kétségtelenül Gauss meditációinak az eredménye, amint azt a tőle származó (és később említendő) helyettesítő axióma, valamint a háromszög területének legkisebb felső korlátját megadó képlet igazolja.

Anticipálva ugyanis a hiperbolikus geometria lehetőségét, továbbá azt, hogy ebben értelme van a maximális határháromszögnek, vagyis az olyannak, amelyben a három belső szög összege zérus (tehát, amelynek szomszédos oldalai párhuzamosak), akkor (II)-ből következik, hogy ennek területe

$$k^2\pi. \tag{III}$$

Lambert tanulmánya posztumusz munkaként 1786-ban jelent meg „Theorie der Parallellinien" c. könyvében, de viszonylag észrevétlen maradt. Bizton állítható, hogy a két Bolyai nem tudott róla, így Bolyai János sem meríthetett semmiféle ötletet belőle. Ezt azért is tudjuk, mert Bolyai János egyik írásában (*4.* 221—223.) név szerint is felsorolta azokat a matematikusokat, akiknek a párhuzamosakról szóló értekezését ismerte — Lambert nem szerepel a nevek között. Gauss biztosan olvasta Lambert könyvét, ezt tanítványainak (Bessel—Encke, 1821.; Encke—Bessel, 1821.; Bessel—Gauss, 1829.) levelei tanusítják. Arról azonban nincs adatunk, hogy

mikor került a kezébe, ezt a kérdést Stäckel is fölvetette. Ő valószínűnek vélte, hogy Gauss még göttingeni tanulmányai idején szerzett tudomást róla (1795—1798), hisz a göttingeni könyvtárakban megvan e munka (*2.* 24—25.). Stäckel föltételezését megerősíti az, hogy Gauss minden későbbi keltezésű nemeuklideszi geometriai megjegyzése valamiként kapcsolódik a Lambert által talált eredményekhez.

Tekintettel arra, hogy a Lambert-féle hegyesszög-hipotézis ugyanolyan konzekvenciákkal jár, mint a párhuzamosság Bolyai János által adott értelmezése, várható, hogy a Lambert-tételek az ő geometriai rendszerében is föllépnek. Valóban az 1. az Appendix 30. §-ában levő egyik tételből könnyen következik, a (II) és a (III) pedig a 43. §-ban képletszerűleg is szerepel. Bolyai János módszere azonban különbözik mind a Lambertétól, mind a Gaussétól.

*

Gauss rendkívül gazdag hagyatékában 25—26 olyan helyet találunk, amelyek valamiként kapcsolódnak a geometria alapjaihoz, illetve a nemeuklideszi geometria gondolatához. Itt a hagyaték szó levélrészleteket, vázlatos följegyzéseket és néhány nyomtatásban is megjelent recenziót foglal magába. Számszerűleg tehát eléggé sok helyen érinti Gauss a paralelák problémakörét, mindazáltal ilyen tárgyú írásai alig töltenének ki 10—12 oldalt. Érdemes is lenne — könnyebb áttekintés céljából — ezeket az írásokat összegyűjtve kiadni. Magyarázatként el kell fogadnunk Sartorius von Waltershausen azon megállapítását, mely szerint Gausst különösebben nem is érdekelte egy nemeuklideszi rendszer kidolgozásának a kérdése. Felix Klein kissé enyhébben úgy fogalmazott, hogy Gauss legkedveltebb kutatási területe a matematikában a három „A", az *aritmetika,* az *analízis* és az *algebra* volt. Ehhez kiegészítésként hozzátehetjük, hogy legjelentősebb geometriai vizsgálatai is az analízishez kapcsolódtak és idetartozó eredményeit az 1827-ben megjelent „Disquisitiones birca superficies curvas" c. hatalmas *differenciálgeometriai* értekezése tartalmazza.

*

Az időrendiség kérdésében nem mindig igazít el megbízhatóan a Gauss hagyatékában föllelhető anyag. Csupán valószínűsíthető például az olyan megjegyzések keltezése, amelyeket feljegyzései, vagy a Lobacsevszkij tanulmányához írott glosszái őriznek. A dátum kérdésében csak levelezése, továbbá fiatal korában szorgalmasan vezetett „Napló"-ja ad pontos útbaigazítást. Naplójában 1796. március 30-tól 1814. július 9-ig címszavakban, esetleg az eredmények néhány soros megjelölésével tüntette föl matematikai fölfedezéseit. A 146 följegyzés közül csak egy, a 99-edik kapcsolódik a geometria alapjaihoz, és ez a följegyzés így hangzik: „A geometria alapjaiban kitűnő előrehaladást értünk el. Braunschweig, Sept. (1799)". Kétségtelen, hogy a mondat arra utal, amit Gauss Bolyai Farkashoz 1799. december 16-án írott levelében így fogalmazott: „... ha be lehetne bizonyítani, hogy létezik olyan egyenesvonalú háromszög, amelynek területe nagyobb bármily megadott területnél, akkor abban a helyzetben lennék, hogy az egész geometriát teljes szigorúsággal bebizonyítsam. Ezt valószínűleg a legtöbben axiómának tekintenék; én nem; jól elképzelhető az is, hogy a Δ három csúcspontjának egymástól való távolságát bármilyennek is tételezzük föl, a területe még mindig egy megadott határ alatt (infra) van." (*5.* 36—37.).

Ez az idézet némi kételyt tartalmaz ugyan az euklideszi geometria egyedül lehetséges volta kérdésében, a lényege mégis inkább az euklideszi párhuzamossági

axiómát helyettesítő azon axiómába tömöríthető, amit úgy szokott az irodalom idézni, hogy bármely adott területnél van nagyobb területű háromszög.

Nagyon is valószínű, hogy e Gauss-féle helyettesítő axiómát Lambert eredményei indukálták.

De a Lambert-féle vizsgálatokból eredeztethetők a Gauss által említett következő tételek is: 1819. március 16-án a Gerlinghez írott levelében Gauss képletileg megadta a hiperbolikus geometria maximális határháromszögének területét (*1.* 195—196.).

1824. november 8-án Taurinushoz küldött levelében olvassuk: „Az a feltevés, hogy a három szög összege (a háromszögben) 180°-nál kisebb, egy sajátságos, a mi (euklideszi) geometriánktól tökéletesen különböző, de teljesen logikus geometriához vezet; ezt a geometriát teljesen kielégítően kifejlesztettem (...die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe...), s így abban a helyzetben vagyok, hogy bizonyos állandó meghatározásának kivételével, amelyet „a priori" megállapítani lehetetlen, bármely feladatot meg tudok oldani... Egy háromszög három szögét bármilyen kicsivé tehetjük, ha elég nagynak vesszük az oldalait, emellett a háromszög területe, bármilyen nagyok legyenek is az oldalai, nem haladhat túl, sőt el sem érhet bizonyos meghatározott határértéket".

E mondatok egynémely állítása megkérdőjelezhető. Főként a „teljesen kielégítően" kifejezés támaszt kételyeket, mert Gauss idetartozó, még jóval későbbi följegyzései is inkább a nemeuklideszi geometriára vonatkozó általános kijelentéseket tartalmaznak, matematikai formulázás nélkül.

1831. július 12-én Schumacherhez írott levelében Gauss képletileg megadta a kör kerületének hiperbolikus geometriai formuláját.

Ennek a képletnek az eredetét Stäckel (*3.* 146.) a gömbi kör kerületének a formulájában látta: ha ugyanis abba a gömb valós r sugara helyébe a képzetes $\sqrt{-1} \cdot r$ sugarat írjuk, akkor a Gauss által közölt formulát nyerjük. Gauss tehát itt is a valós és a képzetes sugarú gömb közötti — Lambert által észrevett — analógiára támaszkodott.

1832. február 14-én Gaussnak Bolyai Farkashoz írott levelében találjuk annak a hiperbolikus geometriai tételnek a vázlatos bizonyítását, amely szerint a síkháromszög területe arányos a szöghiánnyal.

Ez a kétoldalnyi levezetés a legterjedelmesebb nemeuklideszi geometriára vonatkozó írás Gauss hagyatékában (*5.* 110—111.).

E bizonyítás hiányos, mert Gauss eleve föltételezi, hogy a maximális határháromszög területe véges. A gondolatmenet egyébként némileg hasonló ahhoz, amit Lambert közölt a 2. igazolásában: mindketten a háromszög földarabolásával operálnak. Gauss azonban — Lamberttől eltérőleg — a maximális határháromszögből indul ki, és azt darabolja fel háromra, egy belső pontjából kiinduló három félsugár révén. Ezután a Cauchy-függvényegyenlet folytonos megoldása adja a $k^2\pi$ és a $k^2\delta$ képletet.

1840—1846 között Gauss megjegyzéseket fűzött Lobacsevszkij „Geometrische Untersuchungen" c. könyvéhez. Kagan ezeket tekinti Gauss legértékesebb nemeuklideszi geometriai gondolatainak. Itt azt a kérdést vetette fel, hogy érvényesnek tételezve föl azt, hogy végtelen kicsinyben igaz az euklideszi trigonometria, vajon miként alakul a tér metrikája. A válaszadásban Gauss olyan összefüggéseket vett alapul, amelyeket az Appendixből kölcsönzött. Glosszái azért jelentősek, mert látensül magukba foglalják az euklideszi, a hiperbolikus, és a későbbi eredetű Riemann-féle elliptikus geometria gondolatát is.

*

A Gauss által írott levelek között legalább hat olyan van, amelyekben dátumszerűleg is említi a geometria alapjaival, illetve egy nemeuklideszi geometria lehetőségével kapcsolatos gondolatai keletkezésének időpontját. Ezek:

1824. november 8-án Taurinust arról tájékoztatta, hogy több, mint 30 éve foglalkoztatja a „párhuzamosak elméletének" kérdése.
1831. május 17-én Schumacherrel közli, hogy megkezdte a párhuzamosak kérdésével kapcsolatos, mintegy 40 éve folytatott meditációinak leírását.
1832. február 14-én Gerlinget értesítette Bolyai János Appendixének a megjelenéséről, azzal a megjegyzéssel, hogy 1798-ban sokat beszélgetett e kérdésekről Bolyai Farkassal, bár akkor kidolgozás és érettség szempontjából az ő eszméi még távol voltak attól, amit Bolyai János elért.
1832. március 6-án Bolyai Farkashoz — az Appendix vétele után — intézett válaszlevelében úgy fogalmazott, hogy Bolyai János eredményei „majdnem végig megegyeznek, részben már 30—35 éve folytatott" elmélkedéseivel.
1846. október 2-án Gerlinghez írott levele szerint már 1794-ben tudta, hogy (a párhuzamossági axióma tagadása esetén) a síkháromszög területe arányos a defektussal.
1846. november 28-án Schumacherhez írott tájékoztatása szerint már 1792-ben (tehát 15 éves korában!) felismerte, hogy az euklideszi geometria tagadása esetén is létezik teljesen konzekvens másfajta geometria.

Gauss tehát következetesen az 1790-es évekre helyezi a párhuzamosak kérdésével és a nemeuklideszi geometriával kapcsolatos eszméinek az eredetét. Vajon menynyire adhatunk hitelt a szavainak, főként a nemeuklideszi geometria tekintetében? A tudománytörténet csak azt fogadhatja el ténynek, ami megbízhatóan dokumentálható. Márpedig a jóval későbbi keltezésű levelek szűkszavú közlésein kívül egyetlen olyan adatról sem tudunk, amely alátámasztaná Gauss állítását. Miért nincs ilyen tárgyú fiatalkori gondolatainak nyoma például az általa szorgalmasan vezetett „Napló"-ban?

*

Gauss Bolyai János Appendixét *három* magánlevélben említette. A harmadik, időrendben az utolsó (*1.* 666.) teljesen érdektelen, mert abban — Gerling kérésére — csupán az Appendix pontos címét közölte 1844. február 4-én.

Elgondolkoztató viszont a Gerlinghez 1832. február 14-én, valamint a Bolyai Farkashoz három héttel később, 1832. március 6-án írott levelének néhány mondata. Elegendő, ha csak e mondatokat idézzük.

A Gerlinghez intézett levélből való:

„...e napokban Magyarországról egy, a nemeuklideszi geometriát tárgyaló kis művet kaptam... Szerzője, aki *nagyon* fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak, akivel 1798-ban gyakran beszélgettem erről a dologról..." (*1.* 387.).

A Bolyai Farkashoz írott levélben ezt olvassuk:

„...a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30—35 év óta folytatott elmélkedéseimmel. Valóban a dolog rendkívül meglepett" (*5.* 109.).

A Bolyai Farkashoz küldött levélben tehát Gauss nem célzott arra, hogy hajdani beszélgetéseik a nemeuklideszi geometriára is kiterjedtek, holott ilyen utalást ezúttal is igen természetesnek vennénk. Ma úgy tudjuk, hogy kettejük egykori beszélgetései kizárólag a tér filozófiai problémái körül forogtak, és csaknem bizonyos, hogy akkor valamilyen nemeuklideszi geometria kidolgozásának a gondolata föl sem merült bennük.

Ma már nem dönthető el, hogy a két levél szövege közti eltérés a véletlen játéka-e, vagy pedig céltudatos megfontoltság eredménye. Tény, hogy a Gerlinghez írott mondatoknak ma is él az a következménye, amely szerint a nemeuklideszi geometria gondolatát Gauss vetette föl személyes beszélgetéseik alkalmával Bolyai Farkasnak, és ötletét az apa közvetítette Jánoshoz. Ilyen magyarázat Lobacsevszkijjel kapcsolatban is olvasható: ez esetben sokan Bartelset, Gauss egykori tanárát (ki később Kazányban volt professzor) vélik Gauss eszméi továbbítójának. Ezt az állítást a szovjet matematikusok pontos adatokra támaszkodva már régebben megcáfolták, azzal a megjegyzéssel, hogy Lobacsevszkijre legföljebb Legendre „Éléments de géométrie" (Paris, 1794) c. műve hatott.

A két Bolyai hagyatékának a feldolgozása minket is hozzásegített annak igazolásához, hogy Bolyai János másoktól függetlenül, önállóan fedezte föl geometriai rendszerét. Az újabb idők kutatásai tehát cáfolják Felix Klein sokhelyt idézett következő állítását: „Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass Gauss durch seinen Einfluss die Untersuchungen von Lobatschewsky und Bolyai angeregt hat."

Sajnálatos, hogy Gaussnak Gerlinghez írott levele megalapozatlanul befolyásolta az utókor véleményét Bolyai János kárára.

*

Levonva a konzekvenciákat: az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyítását célzó sok eredménytelen kísérlet hatására 1816-tól Gaussban egyre inkább megérlelődött a nemeuklideszi geometria lehetőségének a gondolata. A hiperbolikus geometria körébe tartozó, ezután papírra vetett eredményei erősen támaszkodnak Lambert vizsgálataira, valamint a „képzetes sugarú gömb" hipotézisére. Ez utóbbiból kitűnik, hogy fölismerte a hiperbolikus geometria egyes formuláinak alaki megegyezését a képzetes sugarú gömb geometriájának a képleteivel. Azonban a hiperbolikus geometriát nem dolgozta ki tervszerűen, a matematikai szigor által megkívánt módszerességgel. Ilyen módon a nemeuklideszi geometriák történetében nem illeti meg ugyanaz a hely, mint Bolyai Jánost és Lobacsevszkijt.

IRODALOM

[1] Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling. Berlin, 1927.
[2] PAUL STÄCKEL: Gauss als Geometer. Göttingen, 1917.
[3] F. ENGEL—P. STÄCKEL: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig, 1895. Ebben Lambert tanulmánya, 137—207. o. Hivakozásaink ennek a könyvnek az oldalszámaira vonatkoznak.
[4] PAUL STÄCKEL: Wolfgang und Johann Bolyai geometrische Untersuchungen. I. k. Leipzig—Berlin, 1913.
[5] Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Leipzig, 1899.

ЗАМЕЧАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ Ф. ГАУССА ПО НЕ—ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

СЕНАШИ БАРНА

REMARKS CONCERNING THE RESULTS OF GAUSS IN NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

B. SZÉNÁSSY

A QUARTER-SZIMMETRIKUS KONNEXIÓ GÖRBÜLETÉRŐL

NAGYNÉ SZILVÁSI MÁRTA

Legyen M egy C^∞-osztályú n-dimenziós Riemann-sokaság, amelynek mértéktenzora g. Ha ∇ az M sokaságon adott lineáris konnexió, akkor ennek T torzió tenzorát a

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{1}$$

kifejezés értelmezi, ahol $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ az M sokaságon értelmezett két tetszőleges vektormező. T (1, 2)-típusú tenzor [1]. A továbbiakban feltesszük, hogy $\nabla g = 0$, vagyis az adott lineáris konnexió metrikus.

A ∇ konnexiót quarter-szimmetrikus konnexiónak nevezzük, ha torzió tenzora

$$T(X, Y) = \omega(Y)\Lambda(X) - \omega(X)\Lambda(Y) \tag{2}$$

alakban állítható elő, ahol $\Lambda \in \mathcal{T}_1^1(M)$ és $\omega \in \mathcal{T}_0^1(M)$ [2]. A g metrikához tartozó zérus torziójú metrikus konnexiót a $\dot{\nabla}$ szimbólummal jelöljük. Célunk az, hogy összefüggést találjunk a ∇ quarter-szimmetrikus és a $\dot{\nabla}$ Levi—Civita-féle metrikus konnexió között. E két lineáris konnexióra

$$\nabla_X Y = \dot{\nabla}_X Y + U(X, Y) \tag{3}$$

teljesül, ahol $U \in \mathcal{T}_2^1(M)$ ([1] 146. old.). Mivel a feltétel szerint $\nabla g = \dot{\nabla} g = 0$ és $\dot{\nabla}$ torziója zérus, azért (1) és (3) felhasználásával

$$T(X, Y) = U(X, Y) - U(Y, X), \tag{4}$$

továbbá

$$g(T(X, Y), Z) + g(T(Z, X), Y) + g(T(Z, Y), X) = 2g(U(X, Y), Z)$$

adódik [3]. (2) behelyettesítésével a

$$\begin{aligned} &g(\omega(Y)\Lambda(X) - \omega(X)\Lambda(Y), Z) + \\ &+ g(\omega(X)\Lambda(Z) - \omega(Z)\Lambda(X), Y) + \\ &+ g(\omega(Y)\Lambda(Z) - \omega(Z)\Lambda(Y), X) = 2g(U(X, Y), Z) \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan

$$\begin{aligned} &g(\omega(Y)\Lambda(X) - \omega(X)\Lambda(Y), Z) + \\ &+ \omega(X) g(\Lambda(Z), Y) - \omega(Z) g(\Lambda(X), Y) + \\ &+ \omega(Y) g(\Lambda(Z), X) - \omega(Z) g(\Lambda(Y), X) = 2g(U(X, Y), Z). \end{aligned} \tag{5}$$

Értelmezzük az adott ω 1-formához tartozó $P \in \mathcal{T}_0^1(M)$ vektormezőt a

$$g(X, P) = \omega(X) \tag{6}$$

összefüggéssel, ahol X tetszőleges M feletti vektormező [3]. P megadható $P = G_* \omega$ alakban is, ahol a G_* (2, 0)-típusú tenzort a $g(G_* \omega, X) = \omega(X)$ kapcsolat határozza meg tetszőleges X vektormező esetén. Ha még bevezetjük a

$$g\big(Y, \varphi(X)\big) = g\big(\Lambda(Y), X\big) \tag{7}$$

összefüggéssel definiált $\varphi \in \mathcal{T}_1^1(M)$ tenzort, (Λ adott (1, 1)-típusú tenzor, X és Y pedig tetszőleges vektormező), akkor (6) és (7) felhasználásával az (5) egyenlőséget

$$\begin{aligned} &g\big(\omega(Y)\Lambda(X) - \omega(X)\Lambda(Y), Z\big) + \\ &+ \omega(X) g\big(Z, \varphi(Y)\big) - g(Z, P) g\big(\Lambda(X), Y\big) + \\ &+ \omega(Y) g\big(Z, \varphi(X)\big) - g(Z, P) g\big(\Lambda(Y), X\big) = 2g\big(U(X, Y), Z\big) \end{aligned}$$

módon alakíthatjuk át. Innen

$$\begin{aligned} &g\big(\omega(Y)\Lambda(X) - \omega(X)\Lambda(Y), Z\big) + \\ &+ g\big(\omega(X)\varphi(Y), Z\big) - g\big(g(\Lambda(X), Y)P, Z\big) + \\ &+ g\big(\omega(Y)\varphi(X), Z\big) - g\big(g(\Lambda(Y), X)P, Z\big) = 2g\big(U(X, Y), Z\big) \end{aligned}$$

adódik és ebből

$$U(X, Y) = \frac{1}{2}\big\{\omega(Y)\big(\Lambda(X) + \varphi(X)\big) - \omega(X)\big(\Lambda(Y) - \varphi(Y)\big) - g\big(X, (\Lambda(Y) + \varphi(Y))\big)P\big\}. \tag{8}$$

Az

$$L = \frac{1}{2}(\Lambda + \varphi) \quad \text{és} \quad L^* = \frac{1}{2}(\Lambda - \varphi) \tag{9}$$

jelölések bevezetése után a (3) összefüggést a

$$\nabla_X Y = \dot{\nabla}_X Y + \omega(Y) L(X) - \omega(X) L^*(Y) - g\big(X, L(Y)\big) P \tag{10}$$

alakban írhatjuk. Könnyen belátható, hogy az így kapott $\nabla_X Y$ konnexió eleget tesz a

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \\ \nabla_X(fY) &= (Xf)Y + f\nabla_X Y \\ \nabla_{X_1 + X_2} Y &= \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \\ \nabla_{fX} Y &= f\nabla_X Y \end{aligned}$$

azonosságoknak, ahol $f \in \mathcal{T}_0^0(M)$. Ezután a kovariáns deriválási szabályok és (10) felhasználásával kiszámítható, hogy

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X\big(g(Y, Z)\big) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

tehát igaz a következő tétel:

1. Tétel. A g mértéktenzorral ellátott M Riemann-sokaságon létezik az $\omega \in \mathcal{T}_1^0(M)$ és $\Lambda \in \mathcal{T}_1^1(M)$ formák által egyértelműen meghatározott quarter-szimmetrikus metrikus konnexió.

Megjegyzés. (1) Ha $A=0$ vagy $\omega=0$, akkor $\nabla=\dot{\nabla}$. (2) Ha $A\in\mathcal{T}_1^1(M)$ az egységtenzor, akkor ∇ a [3] dolgozatban definiált szemi-szimmetrikus konnexióra redukálódik.

Ha az M sokaság egy lokális (x^i) koordinátarendszerében a $\dot{\nabla}$ és ∇ konnexiók paraméterei $\dot{\Gamma}_{ki}^j$, illetve Γ_{ki}^j, az X és Y vektormezők komponensei pedig X^k, illetve Y^k $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$, akkor a

$$\nabla_X Y = X^k\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}+\Gamma_{ki}^j Y^i\right)$$

és (10) képletek felhasználásával a

$$\Gamma_{ki}^j = \dot{\Gamma}_{ki}^j + L_k^j\omega_i - L_i^{*j}\omega_k - g_{sk}L_i^s P^j \tag{11}$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$P^j = g^{ij}\omega_i,$$

$$L_k^j = \frac{1}{2}(A_k^j+\varphi_k^j) = \frac{1}{2}(A_k^j+g^{rj}g_{sk}A_r^s),$$

$$L_k^{*j} = \frac{1}{2}(A_k^j-\varphi_k^j).$$

Adjuk meg quarter-szimmetrikus metrikus konnexió görbületi tenzorát az ismert módon ([1]) az

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z, \tag{12}$$

a Levi—Civita-féle konnexió görbületi tenzorát pedig az

$$\dot{R}(X, Y)Z = \dot{\nabla}_X\dot{\nabla}_Y Z-\dot{\nabla}_Y\dot{\nabla}_X Z-\dot{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

kifejezéssel. Ekkor a (10) összefüggés felhasználásával (12) a következőképpen írható:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X\{\dot{\nabla}_Y Z+\omega(Z)L(Y)-\omega(Y)L^*(Z)-g(Y, L(Z))P\}-\\
&-\nabla_Y\{\dot{\nabla}_X Z+\omega(Z)L(X)-\omega(X)L^*(Z)-g(X, L(Z))P\}-\\
&-\{\dot{\nabla}_{[X,Y]}Z+\omega(Z)L([X, Y])-\omega([X, Y])L^*(Z)-g([X, Y], L(Z))P\} =\\
&=\dot{\nabla}_X\{\dot{\nabla}_Y Z+\omega(Z)L(Y)-\omega(Y)L^*(Z)-g(Y, L(Z))P\}+\\
&+\omega(\dot{\nabla}_Y Z+\omega(Z)L(Y)-\omega(Y)L^*(Z)-g(Y, L(Z))P)L(X)-\\
&-\omega(X)L^*(\dot{\nabla}_Y Z+\omega(Z)L(Y)-\omega(Y)L^*(Z)-g(Y, L(Z))P)-\\
&-\dot{\nabla}_Y\{\dot{\nabla}_X Z+\omega(Z)L(X)-\omega(X)L^*(Z)-g(X, L(Z))P\}-\\
&-\omega(\dot{\nabla}_X Z+\omega(Z)L(X)-\omega(X)L^*(Z)-g(X, L(Z))P)L(Y)+\\
&+\omega(Y)L^*(\dot{\nabla}_X Z+\omega(Z)L(X)-\omega(X)L^*(Z)-g(X, L(Z))P)-\\
&-g(X, L(\dot{\nabla}_Y Z+\omega(Z)L(Y)-\omega(Y)L^*(Z)-g(Y, L(Z))P))P+\\
&+g(Y, L(\dot{\nabla}_X Z+\omega(Z)L(X)-\omega(X)L^*(Z)-g(X, L(Z))P))P-\\
&-\{\dot{\nabla}_{[X,Y]}Z+\omega(Z)L([X, Y])-\omega([X, Y])L^*(Z)-g([X, Y], L(Z))P\}.
\end{aligned}$$

Ha a kijelölt deriválásokat elvégezzük, figyelembe vesszük, hogy

$$g(X, L(Y)) = g(Y, L(X))$$

nyilvánvalóan teljesül, továbbá felhasználjuk a tenzorok kovariáns deriválására vonatkozó

$$(\nabla_X K)(X_1, \ldots, X_s) = \nabla_X(K(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_s)$$

$$K \in \mathcal{T}_s^r(M), \quad X, X_i \in \mathcal{T}_0^1(M)$$

összefüggést ([1], 123. old.), akkor az

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z = {} & \dot{R}(X, Y)Z + \\
& + (\dot{\nabla}_X \omega)(Z) L(Y) + \omega(Z)(\dot{\nabla}_X L)(Y) - (\dot{\nabla}_X \omega)(Y) L^*(Z) - \omega(Y)(\dot{\nabla}_X L^*)(Z) - \\
& - (\dot{\nabla}_Y \omega)(Z) L(X) - \omega(Z)(\dot{\nabla}_Y L)(X) + (\dot{\nabla}_Y \omega)(X) L^*(Z) + \omega(X)(\dot{\nabla}_Y L^*)(Z) - \\
& - g(Y, (\dot{\nabla}_X L)(Z)) P - g(Y, L(Z)) \dot{\nabla}_X P + g(X, (\dot{\nabla}_Y L(Z)) P + g(X, L(Z)) \dot{\nabla}_Y P) + \\
& + \omega(Z)\{\omega(L(Y)) L(X) - \omega(X) L^*(L(Y)) - \omega(L(X)) L(Y) + \omega(Y) L^*(L(X))\} - \\
& - \omega(Y)\omega(L^*(Z)) L(X) + \omega(X)\omega(L^*(Z)) L(Y) + \\
& + \omega(Y) g(X, (L^*(Z))) P - \omega(X) g(Y, (L^*(Z))) P + \\
& + g(X, L(Z))[\omega(P) L(Y) - \omega(Y) L^*(P) - \omega(X) P] - \\
& - g(Y, L(Z))[\omega(P) L(X) - \omega(X) L^*(P) - \omega(Y) P]
\end{aligned}$$

összefüggést nyerjük. Az áttekinthetőség kedvéért bevezetünk néhány jelölést. Legyen

$$\begin{aligned}
N(X, Y) &= \omega(Y) L(X) - \omega(X) L(Y), \\
N^*(X, Y) &= \omega(Y) L(X) - \omega(X) L^*(Y).
\end{aligned} \tag{13}$$

Nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
N(X, Y) + N(Y, X) &= 0, \\
N^*(X, Y) - N^*(Y, X) &= T(X, Y).
\end{aligned}$$

Ezek felhasználásával a quarter-szimmetrikus konnexió görbületi tenzorát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z = {} & \dot{R}(X, Y)Z + (\dot{\nabla}_X N^*)(Y, Z) - (\dot{\nabla}_Y N^*)(X, Z) - \\
& - g(Y, (\dot{\nabla}_X L)(Z)) P - g(Y, L(Z)) \dot{\nabla}_X P + \\
& + g(X, (\dot{\nabla}_Y L)(Z)) P + g(X, L(Z)) \dot{\nabla}_Y P + \\
& + \omega(Z)[N^*(X, L(Y)) - N^*(Y, L(X))] + \omega(L^*(Z)) N(Y, X) - \\
& - g(Y, L(Z)) N^*(X, P) + g(X, L(Z)) N^*(Y, P) + \\
& + g(\omega(L(X)) Y - \omega(L(Y)) X, L(Z)) P + g(N(X, Y), L^*(Z)) P.
\end{aligned} \tag{14}$$

Az R görbületi tenzorhoz a

$$K(V, Z, X, Y) = g\big(R(X, Y)Z, V\big) \tag{15}$$

összefüggéssel hozzárendelt Riemann-féle görbületi tenzor ([1], 201. old.) pedig

$$\begin{aligned} K(V, Z, X, Y) = \dot{K}(V, Z, X, Y) &+ g\big((\dot{\nabla}_X N^*)(Y, Z) - (\dot{\nabla}_Y N^*)(X, Z), V\big) - \\ &- g\big(Y, (\dot{\nabla}_X L)(Z)\big)\omega(V) - g\big(Y, L(Z)\big)g(\dot{\nabla}_X P, V) + \\ &+ g\big(X, (\dot{\nabla}_Y L)(Z)\big)\omega(V) + g\big(X, L(Z)\big)g(\dot{\nabla}_Y P, V) + \\ &+ \omega(Z)g\big(N^*(X, L(Y)) - N^*(Y, L(X)), V\big) + \\ &+ \omega\big(L^*(Z)\big)g\big(N(Y, X), V\big) - \\ &- g\big(Y, L(Z)\big)g\big(N^*(X, P), V\big) + g\big(X, L(Z)\big)g\big(N^*(Y, P), V\big) + \\ &+ g\big(\omega(L(X)) - \omega(L(Y))X, L(Z)\big)\omega(V) + g\big(N(X, Y), L^*(Z)\big)\omega(V) \end{aligned} \tag{16}$$

alakú lesz, ahol $\dot{K}(V, Z, X, Y) = g\big(\dot{R}(X, Y)Z, V\big)$ a $\dot{\nabla}$ Levi—Civita-féle konnexióhoz tartozó Riemann tenzor.

2. Tétel. A g metrikával ellátott M Riemann-sokaságon a ∇ quarter-szimmetrikus konnexióhoz tartozó, (14) alatti Riemann-féle görbületi tenzorra teljesülnek az alábbi összefüggések:

(I)
$$\underset{XYZ}{\sigma} K(V, Z, X, Y) =$$

$$= g\left(V, \underset{XYZ}{\sigma} \left[(\dot{\nabla}_X T)(Y, Z) + g\big(N(X, Y), L^*(Z)\big)P - \omega\big(\Lambda(X)\big)N(Y, Z)\right]\right),$$

ahol $\underset{XYZ}{\sigma}$ az X, Y, Z ciklikus permutációira vonatkozó összegezést jelöli;

(II)
$$K(V, Z, X, Y) + K(V, Z, Y, X) = 0;$$

(III)
$$K(V, Z, X, Y) + K(Z, V, X, Y) = 0;$$

(IV)
$$K(V, Z, X, Y) - K(X, Y, V, Z) =$$

$$= g\big(H(Y, Z, V), X\big) + g\big(H(X, V, Z), Y\big) + g\big(H(V, Y, X), Z\big) + g\big(H(Z, X, Y), V\big),$$

ahol

$$\begin{aligned} H(Y, Z, V) = (\dot{\nabla}_Y N)(Z, V) - L^*(Y)(\dot{\nabla}_Z \omega)(V) + \omega(Z)(\dot{\nabla}_V L^*)(Y) - \\ - \omega\big(\Lambda(Y)\big)N(Z, V) + \omega(Y)\omega(V)(LL^* + L^*L)(Z). \end{aligned}$$

A tétel a (9), (13) és (16) összefüggések felhasználásával igazolható.

3. Tétel Az M Riemann-sokaságon adott g metrikához tartozó quarter-szimmetrikus konnexió görbületi és torzió tenzorára

$$\underset{XYZ}{\sigma} R(X. Y)Z = \underset{XYZ}{\sigma} (\nabla_Z T)(X, Y)$$

teljesül.

A tétel a 2. tételben felírt (I) és a (10) képlet felhasználásával igazolható.

Megjegyzés. A 3. tételnek és Bianchi első azonosságának ([1], 135. old.) összehasonlításából

$$\underset{XYZ}{\sigma}\, T(T(X, Y)Z) = 0$$

következik.

IRODALOM

[1] Kobayashi, S., K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, I. Interscience Publishers, New York, 1963.

[2] Gołąb, S., On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. Tensor 29 (1975), 249—254.

[3] Yano, K., On semi-symmetric metric connection. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 15 (1970), 1579—1586.

КВАРТЕР-СИММЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ И ЕЁ КРИВИЗНА

НАДЬ—СИЛВАШИ МАРТА

Линейная связность ∇ на Римановом многообразии называется квартер-симметрической, если тензор кручения имеет вид (2). Для связности ∇ и связности Леви-Чивита $\dot{\nabla}$ справедливо равенство (10). Утв. 1. На Римановом многообразии с метрикой g существует единственная линейная квартер-симметрическая Риманова связность определена тензорами

$$\omega \in \mathcal{T}_1^0(M) \quad \text{и} \quad A \in \mathcal{T}_1^1(M).$$

Утв. 2. Тензор Римановой кривизны удовлетворяет соотношениям 1—4.

ON THE CURVATURE OF QUARTER-SYMMETRIC CONNEXION

MÁRTA NAGYNÉ-SZILVÁSI

EGY BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓKBÓL ÁLLÓ MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGÁNAK VIZSGÁLATA

BÉZI MAGDOLNA

1. §. Az $AX+XB^*=C$ mátrixegyenlet megoldhatóságának vizsgálatára Kučera [1] és Vitova [2] az

$$\mathscr{L}\colon X \to AX+XB^*$$

lineáris transzformáció spektrális vizsgálatát ajánlja. A feladat mindig redukálható a speciális $A=N_p$, $B=N_q$ eset vizsgálatára, ahol N_p p-edrendű kvadratikus mátrix és

$$(N_p)_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad k = i+1 \\ 0, & \text{ha} \quad k \neq i+1. \end{cases}$$

Az

$$\mathscr{L}\colon X \to N_pX+XN_q^T$$

lineáris leképezés vizsgálatának fontos mozzanata megmutatni az

$$R = [r_{ik}] = \left[\binom{r}{m+k-i}\right], \quad i, k = 0, \ldots, s \tag{1.1}$$

mátrixról, hogy *nemszinguláris*. E mátrix elemei olyan binomiális együtthatók, ahol r és m tetszőleges nemnegatív egészek az $r \geqq m$ kikötés mellett, és definíció szerint

$$\binom{r}{m+k-i} = 0, \quad \text{ha} \quad r < m+k-i \quad \text{vagy} \quad m+k-i < 0.$$

Annak megfelelően, hogy $m<s$ ill. $r-m<s$, az (1.1) mátrix bal alsó ill. jobb felső diagonálisaiban zérus elemek állnak, — tehát mindkét feltétel teljesülése esetén (1.1) szalagmátrix —, az $m \geqq s$, $r-m \geqq s$ esetben pedig egyetlen eleme sem zérus.

E dolgozatban megmutatjuk, hogy az (1.1) mátrix nemszinguláris. Ezt az eredményt a következő paragrafusban bizonyításra kerülő lemma és tétel egyszerű következményeként kapjuk.

2. §. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$T_{s-v} = \left[\begin{array}{c|c} E_{s-v}+N_{s-v}^T & 0 \\ \hline 0 & E_{v+1} \end{array}\right],$$

azaz

$$(T_{s-v})_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = k \\ 1, & \text{ha} \quad i = k+1 \quad \text{és} \quad i \leqq s-v \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad i, k = 0, \ldots, s,$$

és legyen

$$T = T_s T_{s-1} \dots T_1.$$

Jelölje D és Δ a következő diagonálmátrixokat:

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{(m+s-i)!}\right), \quad \Delta = \operatorname{diag}((r+s-k)!), \quad i, k = 0, \dots, s,$$

végül pedig M az

$$M = [m_{ik}] = \left[\frac{1}{(r-m+i-k)!}\right] \quad i, k = 0, \dots, s \tag{2.1}$$

mátrixot.

Lemma. $RT = DM\Delta$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az (1.1) mátrixot jobbról T_s-sel szorozva a $0., 1., \dots s-1.$ oszlophoz hozzáadódik a rákövetkező, így az RT_s mátrix elemei:

$$(RT_s)_{ik} = \begin{cases} \binom{r}{m+k-i} + \binom{r}{m+k-i+1} = \binom{r+1}{m+k-i+1} & k < s, \\ \binom{r}{m+s-i} & k = s. \end{cases}$$

Általában T_{s-v}-vel szorozva a $0,. 1,. \dots, s-v-1.$ oszlophoz adódik hozzá a rákövetkező, ezért

$$(RT_s T_{s-1} \dots T_{s-v})_{ik} = \begin{cases} \binom{r+v+1}{m+(k+v+1)-i} & k < s-v \\ \binom{r+s-k}{m+s-i} & k \geqq s-v. \end{cases}$$

Végeredményben az

$$RT_s T_{s-1} \dots T_1 = RT$$

mátrix ik indexű elemére a következő adódik:

$$(RT)_{ik} = \binom{r+s-k}{m+s-i} = \frac{(r+s-k)!}{(m+s-i)!\,(r-m+i-k)!} \quad i, k = 0, 1, \dots, s.$$

Az $\dfrac{1}{(m+s-i)!}$ tényezőt a sorokból, az $(r+s-k)!$ tényezőt az oszlopokból kiemelve az

$$RT = DM\Delta$$

felbontást kapjuk s ezzel állításunkat bizonyítottuk.

A továbbiakban használni fogjuk a következő jelöléseket:

$$V_i^k = \frac{i!}{(i-k)!}$$

jelöli i elem k-adosztályú variációját, tehát

$$V_i^k = 0, \quad \text{ha} \quad i < k \quad \text{vagy} \quad k < 0,$$

és a V_{n+i}^k variáció i-edik differenciáját a

$$d^i(V_{n+i}^k) = d^{i-1}(V_{n+i}^k) - d^{i-1}(V_{n+i-1}^k) = \sum_{v=0}^{i} (-1)^v \binom{i}{v} V_{n+i-v}^k,$$

ahol definíció szerint:

$$d^0(V_n^k) = V_n^k.$$

A (2.1) alatti M mátrix elemeit az $r-m=n$ jelöléssel az

$$m_{ik} = \frac{1}{(n+i-k)!} \quad (n \geqq 0) \tag{2.2}$$

alakba írjuk.

Tétel. *Az* $M=\left[\frac{1}{(n+i-k)!}\right]$ *mátrix a következőképpen faktorizálható:*

$$M = AF,$$

ahol

$$A = [a_{ik}] = \left[\frac{V_i^k}{(n+i)!}\right]$$

alsó háromszögmátrix, az

$$F = [f_{ik}] = \left[\frac{d^i(V_{n+i}^k)}{i!}\right]$$

pedig felső háromszögmátrix.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy A és F valóban háromszögmátrix. Az A-ra vonatkozó állítás triviálisan teljesül, mert $V_i^k=0$, ha $i<k$. Az F mátrix vizsgálatához végezzük a következő átalakítást:

$$V_{n+i}^k = (n+i)V_{n+i-1}^{k-1} = (n+i)(n+i-1)V_{n+i-2}^{k-2} = \ldots = V_{n+i}^i \cdot V_n^{k-i},$$

így

$$d^i(V_{n+i}^k) = \sum_{v=0}^{i} (-1)^v \binom{i}{v} V_{n+i-v}^k = \sum_{v=0}^{t} (-1)^v \binom{i}{v} V_{n+i-v}^i \cdot V_{n-v}^{k-i}.$$

Ha $k-i<0$, akkor $V_{n-v}^{k-i}=0$ minden v indexre, ezért

$$f_{ik} = 0, \quad \text{ha} \quad i > k.$$

Most megmutatjuk, hogy ha $i=k$, akkor $f_{ik}=1$.
A binomiális együtthatók kielégítik a következő összefüggést (l. pl. [3]):

$$\binom{n}{k} = \sum_{v=0}^{\mu} (-1)^v \binom{\mu}{v} \binom{n+\mu-v}{k+\mu}.$$

Alkalmazzuk ezt speciálisan a $k=0$, $\mu=i$ esetre:

$$\binom{n}{0} = \sum_{v=0}^{i} (-1)^v \binom{i}{v} \binom{n+i-v}{i}.$$

Így az F mátrix fődiagonálisának elemeire a következőt kapjuk:

$$f_{ii} = \frac{d^i(V_{n+i}^i)}{i!} = \frac{1}{i!} \sum_{v=0}^{i} (-1)^v \binom{i}{v} V_{n+i-v}^i = \sum_{v=0}^{i} (-1)^v \binom{i}{v} \binom{n+i-v}{i} = \binom{n}{0} = 1.$$

A továbbiakban igazolnunk kell, hogy

$$\sum_{j=0}^{s} a_{ij} f_{jk} = m_{ik},$$

$$\frac{1}{(n+i)!} \sum_{j=0}^{s} \frac{V_i^j d^j(V_{n+j}^k)}{j!} = \frac{1}{(n+i-k)!},$$

azaz

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{V_i^j d^j(V_{n+j}^k)}{j!} = V_{n+i}^k \quad i, k = 0, \ldots, s. \tag{2.3}$$

Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $i=0$, (2.3) bármely k-ra igaz:

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{V_0^j d^j(V_{n+j}^k)}{j!} = \frac{V_0^0 d^0(V_{n+0}^k)}{0!} + \sum_{j=1}^{s} \frac{V_0^j d^j(V_{n+j}^k)}{j!} = V_n^k.$$

$$(V_t^0 = 1, \quad V_0^t = 0 \ (t \neq 0), \quad d^0(V_{n+0}^k) = V_n^k).$$

Most — feltéve, hogy rögzített k esetén (2.3) teljesül — vizsgáljuk az $i+1$-re vonatkozó állítást $i<s$ kikötés mellett.

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{V_{i+1}^j d^j(V_{n+j}^k)}{j!} = \sum_{j=0}^{s} \binom{i+1}{j} d^j(V_{n+j}^k) = \binom{i+1}{0} V_n^k + \sum_{j=1}^{s} \left[\binom{i}{j-1} + \binom{i}{j} \right] d^j(V_{n+j}^k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \binom{i}{j} d^j(V_{n+j}^k) + \sum_{j=0}^{s-1} \binom{i}{j} d^{j+1}(V_{n+j+1}^k).$$

Az első összeg feltevésünk értelmében V_{n+i}^k-val egyenlő. A másodikban alkalmazzuk a

$$d^{j+1}(V_{n+j+1}^k) = d^j(V_{n+j+1}^k) - d^j(V_{n+j}^k)$$

átalakítást, így a következő adódik:

$$V_{n+i}^k + \sum_{j=0}^{s-1} \binom{i}{j} d^{j+1}(V_{n+j+1}^k) = V_{n+i}^k + \sum_{j=0}^{s-1} \binom{i}{j} d^j(V_{n+j+1}^k) - \sum_{j=0}^{s-1} \binom{i}{j} d^j(V_{n+j}^k) =$$

$$= V_{n+i}^k + \sum_{j=0}^{s} \binom{i}{j} d^j(V_{n+1+j}^k) - \sum_{j=0}^{s} \binom{i}{j} d^j(V_{n+j}^k) + \binom{i}{s} d^s(V_{n+s}^k) - \binom{i}{s} d^s(V_{n+1+s}^k) =$$

$$= V_{n+i}^k + V_{n+1+i}^k - V_{n+i}^k + \binom{i}{s} [d^s(V_{n+s}^k) - d^s(V_{n+1+s}^k)] = V_{n+i+1}^k,$$

mert $i<s$ miatt $\binom{i}{s}=0$.

Ezzel az állítást igazoltuk.

Következmény. A bizonyított lemma és tétel alapján az (1.1) mátrix a következő szorzat alakjában írható:

$$R = DAF\Delta T^{-1},$$

ahol nyilvánvalóan egyik tényező sem szinguláris, ezért az R mátrix sem szinguláris.

IRODALOM

[1] V. KUČERA, The matrix equation $AX+XB=C^*$. *SIAM J. Appl. Math.* 26. (1974), 15—25.
[2] L. Z. VITOVA, Szobsztvennüe i priszoedinennüe matricü odnogo linejnogo operatora dejsztvujuscsego v vektornom prosztransztve matric. *Szbornik Szovrem. Alg.* vüp. 4. 1., (1976), 48—56.
[3] E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*. Leipzig, 1901. 252. old.

ИЗУЧЕНИЕ ОБРАТИМОСТИ ОДНОЙ МАТРИЦЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

М. БЕЗИ

Элементы матрицы $R=[r_{ik}]$ — биномиальные коэффициенты $r_{ik}=\binom{r}{m+k-i}$ $(i,k=0,\dots s)$, где r и m являются произвольными неотрицательными целыми $(r\geqq m)$, и по определению $\binom{r}{m+k-i}=0$, если $r<m+k-i$ или $m+k-i<0$. В работе доказывается, что матрица R *неособенная.*

INVERTIERBARKEIT EINER BINOMINALKOEFFIZIENTENMATRIX

MAGDOLNA BÉZI

Die Elemente der Matrix $R=[r_{ik}]$ seien die Binominalkoeffizienten $r_{ik}=\binom{r}{m+k-i}$ $(i,k=0\dots s)$, wo r und m beliebige nichtnegative Ganze sind $(r\geqq m)$, und nach der Definition:

$$\binom{r}{m+k-i}=0, \quad \text{wenn} \quad r<m+k-1 \quad \text{oder} \quad m+k-i<0.$$

In der Arbeit wird gezeigt, dass die Matrix R *nichtsingulär* ist.

INVERTIBILITY OF A MATRIX OF BINOMIALS

MAGDOLNA BÉZI

Let matrix $R=[r_{ik}]$ be defined by the binomials $r_{ik}=\binom{r}{m+k-i}$ $i,k=0,1,\dots,s$, where r and m are integers such that $r\geqq m\geqq 0$ and $\binom{r}{m+k-i}=0$ if $r<m+k-i$ or $m+k-i<0$. In the present paper the nonsingularity of R is shown.

ALGEBRAI GÖRBÉK

KOLLÁR JÁNOS

I. Bevezetés

Az algebrai görbék elmélete az algebrai geometria egy ága. Ez utóbbi polinomokkal definiálható alakzatokkal foglalkozik. Ha ez az alakzat egydimenziós, akkor algebrai görbének nevezzük. Az analízis szemszögéből az algebrai görbe egy kompakt Riemann felület, a számelmélet számára egy kéthatározatlanú diofantoszi egyenlet. Ebből a sokoldalúságból folyik az elmélet széles körű alkalmazhatósága és nagy fejlettsége.

Mivel az elmélet hazánkban elég kevéssé ismert, ezért úgy vélem, mindenképpen hasznos egy rövid történeti áttekintést adni az algebrai geometriáról, mert így érthetőbbé válik az elmélet problémafelvetése.

Az algebrai görbe egy $f(x, y)=0$ polinommal definiált síkgörbe. Ezek vizsgálata a XVII. században kezdődött. Ekkor azonban még nem beszélhetünk az elmélet kialakulásáról. Az első komoly eredményeket a XIX. század hozta, az analízisből indulva. Algebrai függvényeket szerettek volna integrálni. A többértékűséget kiküszöbölendő a függvényt a komplex sík helyett a függvény Riemann felületén értelmezték, ami egy algebrai görbe volt. Így Abel, Jacobi, Riemann és Weierstrass az analitikus elmélet megalapozói. A század vége felé a geometria került előtérbe, a nagy geométerek Clebsch, Brill, Max Noether működése nyomán, akik a síkgörbék geometriai elméletét lényegében lezárt fejezetté tették.

Századunk elején a felületek vizsgálata folyt a legintenzívebben. Itt elsősorban a nagy olasz geométerek Castelnuovo, Enriques és Severi nevét kell megemlíteni.

A tárgykör átalakítását, nagyon nagy mennyiségű kommutatív algebra alkalmazásával Zariski és Weil végezték el a negyvenes években. Ezzel egyrészt precíz bizonyításokkal helyettesítették elődeik geometriai heurisztikáját, másrészt nagyon komoly új eredményeket értek el. A fogalmak még messzebb menő általánosítása, és számos új technikai eszköz bevezetése fűződik Grothendieck nevéhez. Azóta ezen fegyvertár alkalmazásaira helyezik a fő hangsúlyt, és számos régi problémát sikerült megoldani. A témakör jelenlegi legkiválóbb művelői közül talán Kodaira, Serre, Hironaka, Mumford, Bombieri és Deligne nevét érdemes leginkább megemlíteni.

A jelen cikk megírásának célja és oka kettős. Egyrészt az algebrai görbékről, és általában az algebrai geometriáról szinte semmilyen magyar nyelvű ismertetés nincs (a [18] könyv első fejezete megjelent magyar fordításban, de ez inkább előkészítő jellegű fejezet lévén, eléggé keveset mutat a tárgykör problematikájából). Az algebrai görbéket külföldi szerzők általában az általános elmélet részeként tárgyalják, így egyrészt a speciális kérdések jelentős része kimarad, másrészt sok fölösleges nehézséggel kell megküzdenie annak az olvasónak, aki az általános elméletben nem akar elmélyedni. A másik ok az, hogy az elmélet nagyon szép példákat

mutat arra, hogy hogyan lehet mély algebrai, komplex függvénytani és egyéb módszereket kombinálni a legkülönfélébb állítások bizonyítására.

Az algebrai geometriát általában tetszőleges algebrailag zárt test (sőt tetszőleges gyűrű) felett szokták tárgyalni. Mi a komplex testre szorítkozunk, mert így számos esetben egyszerűsödnek a bizonyítások. Általában azok a tételek melyekben nem szerepelnek a komplex testhez kötött fogalmak (pl. analitikus függvény) igazak tetszőleges algebrailag zárt testre, csak prím karakterisztika esetén a bizonyítások néha bonyolultabbak. Az általános eset főként számelméleti alkalmazások miatt fontos.

A cikk második fejezete azokat az alapvető algebrai geometriai fogalmakat és tételeket tárgyalja melyek az elmélet felépítéséhez elengedhetetlenek. Az algebrai jelleg miatt aránylag jelentős mennyiségű kommutatív algebrai előismeretre van szükség. Mivel a magyar nyelvű algebra könyvekből a kommutatív algebra szinte teljesen hiányzik, ezért a szükséges ismereteket a függelékben külön tárgyalom (a függelék első 11 tételében).

A harmadik fejezet a síkgörbék geometriáját tárgyalja. Elég nagy mértékben független a második fejezettől és a későbbiek jelentős része is megérthető nélküle. Második része, a harmadfokú síkgörbék geometriája, a klasszikus analitikus geometria egyik legszebb fejezete.

A negyedik fejezet a szingularitásokkal foglalkozik. A későbbiekben ebből csak a 4.5 Tételre lesz szükség. A fejezet legszebb eredménye a 4.9. Tétel, amelyet sajnos nem tudunk bizonyítani.

Az elmélet centrális eredménye a Riemann—Roch tétel. Ezt bizonyítjuk az ötödik fejezetben. Minden, ami ez után történik ezen a tételen fog alapulni. A fejezet végén a görbék legfontosabb invariánsának, a nemnek a kiszámolásával foglalkozunk. A függelék hátralevő, értékelésekről szóló része itt kerül felhasználásra.

A hatodik részben a görbéket topológiailag jellemezzük. A hetedik az analitikus elmélet alapjait tartalmazza. Megoldjuk a Mittag—Leffler problémát és foglalkozunk a Weierstrass pontokkal. Vázoljuk az analitikus osztályozás elméletét, és ezzel kapcsolatban a Riemann-féle exisztencia tétel egy bizonyítását is.

A nyolcadik rész az Abel integrálokat tárgyalja. Itt általában nem bizonyítjuk az állításainkat. Külön vizsgáljuk az elliptikus görbék esetét, bizonyításokkal. Végül bizonyítjuk az elliptikus integrálok híres addiciós tételét (8.8. Tétel).

Ezután az algebrai görbék osztályozásával foglalkozunk. Itt a centrális eredmény a 9.1. Tétel, amit nem bizonyítunk. Ezután a $g \leqq 3$ esetekre részletesen tárgyaljuk az osztályozást. Külön foglalkozunk a hiperelliptikus görbékkel is.

Végezetül számelméleti alkalmazásokkal foglalkozunk. Az alaptételeket (10. 2, 4, 5) itt sem tudjuk bizonyítani, ezért inkább csak egyszerű megjegyzésekre szorítkozunk.

A téma iránt érdeklődő olvasó számára ajánlanék végül néhány könyvet. Az algebrai görbék elméletének alapjait tartalmazza Walker, Algebraic Curves (oroszul is) és Fulton; Algebraic Curves könyve. Mindkettő teljes mértékben érthető egy első éves hallgató számára is. A Riemann—Roch tételt és az Abel-integrálokat tárgyalja Lang; Introduction to algebraic and abelian functions című könyve (oroszul is). Másodéves egyetemi hallgató már elegendő ismerettel rendelkezik az elolvasásához. Az általános algebrai geometria könyvek közül talán legkönnyebben Safarevics, Osznovü algebraicseszkoj geometrii c. könyve érhető el. Nagyon alapos és jól megírt munka, főképpen azoknak lehet ajánlani, akik a témával alaposabban is meg akarnak ismerkedni. A IX. fejezet az analitikus osztályozást tárgyalja, és lényegében független a könyv megelőző részeitől. A legjobb bevezető jellegű munka

Mumford, Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties c. könyve. Az előzőeknél némivel nagyobb előismeretet kíván, de kárpótlásul rendkívül hamar jut el érdekes és szép eredményekhez. A nagy kommutatív algebrai tudással rendelkező olvasó számára Hartshorne, Algebraic Geometry c. könyve az elmélet modern technikájába és annak alkalmazásaiba nyújt bevezetést. A szükséges kommutatív algebrai ismereteket tartalmazzák például Zariski—Samuel, Commutative Algebra I—II, és Atiyah—MacDonald, Introduction to Commutative Algebra (oroszul is). Az elmélet differenciál geometriai felépítését tartalmazza Griffiths—Harris, Principles of Algebraic Geometry c. nagyon alapos munkája.

II. Alapvető algebrai geometria

Definíció. Legyenek $p_1, \ldots, p_k \in C[x_1, \ldots, x_n]$ polinomok. Ekkor a $V(p_1, \ldots, p_k) = \{x \in C^n: p_i(x) = 0$ minden i-re$\}$ halmazokat *affin algebrai halmazoknak* nevezzük. Ez a halmaz nyilván csak a p_i-k generálta ideáltól függ. Ha B egy tetszőleges ideál $C[x_1, \ldots, x_n]$-ben, akkor $V(B)$ legyen $\{x \in C^n: f(x) = 0$ minden $f \in B$-re$\}$. Mivel $C[x_1, \ldots, x_n]$-ben minden ideál végesen generált (Hilbert bázis tétele) (ld. [5]) ezért ezek azonosak az előző módon definiált halmazokkal.

Fordítva, ha F egy affin algebrai halmaz C^n-ben, akkor legyen $I(F) = \{p \in C[x_1, \ldots, x_n]: p|V \equiv 0\}$. Így nyilván egy ideált definiáltunk a polinomgyűrűnkben. Az így definiált V és I operációkra nyilván teljesülnek a következő összefüggések.

(1) $$V\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_\alpha V(A_\alpha)$$

(2) $$V\left(\bigcap_1^n A_i\right) = \bigcup_1^n V(A_i) \quad I\left(\bigcup_1^n F_i\right) = \bigcap_1^n I(F_i)$$

(3) $$V(I(F)) = F.$$

A lista legfőbb hiányossága az, hogy az $I(V(A)) = A$ hiányzik belőle. Ez nem is igaz, amit a következő egyszerű észrevétel is mutat. Az $I(F)$ alakú ideáloknak nyilván megvan az a tulajdonságuk, hogy ha $f^n \in I(F)$ valamely f polinomra és n természetes számra, akkor $f \in I(F)$. Ez indokolja a következő definíciót.

Legyen A egy ideál. Ekkor a $\sqrt{A} = \{f: \exists n\, f^n \in A\}$ halmaz egy ideált alkot. Ezt nevezzük az A *radikáljának*. Hogy pontosan erre volt szükségünk azt mutatja a következő alapvető

2.1. Tétel (Hilbert zérushelytétele). $I(V(A)) = \sqrt{A}$.

Ez a tétel az előző megjegyzésekkel együtt azt bizonyítja, hogy az I és V operációk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek az algebrai halmazok és azon ideálok között, melyek megegyeznek a saját radikáljukkal. A tétel bizonyítását ld. F. 3.

Egy affin algebrai halmazt *irreducibilisnek* nevezünk, ha nem áll elő két valódi affin algebrai részének egyesítéseként. Az irreducibilis halmazokat *sokaságoknak* vagy *varietásoknak* is fogjuk hívni. Könnyen látható, hogy E pontosan akkor irreducibilis, ha $I(E)$ prímideál, ugyanis a prímideálok pontosan azok az ideálok, melyekre $\sqrt{P} = P$ és nem állnak elő valódi módon két ideál metszeteként.

2.2 Tétel. Minden affin algebrai halmaz egyértelműen áll elő sokaságok nem rövidíthető uniójaként.

Bizonyítás. Az F. 4 tétel szerint $I(F)$ egyértelműen áll elő prímideálok metszeteként. Ezután a (2) formulákat kell alkalmazni.

Legyen E egy affin algebrai halmaz. A $H \subset E$ halmazt az E affin algebrai részhalmazának nevezzük, ha létezik olyan F affin algebrai halmaz, melyre $F \cap E = H$.

Legyen E egy affin algebrai halmaz. Az E összes algebrai részhalmazaiból álló rendszert tekintsük egy topológia zárt halmazai rendszerének. Könnyen ellenőrizhető, hogy így egy T_1 topologikus teret definiáltunk E-n. Ezt a topológiát fogjuk az *E Zariski topológiájának* hívni. Ha bármilyen topológiai fogalom fog szerepelni, akkor azt mindig a Zariski topológiára vonatkoztatjuk, kivéve ha kifejezetten más topológiára hivatkozunk.

A Zariski topológiával ellátva E egy *Noether tér* lesz, azaz nyílt halmazok monoton növő lánca véges. Ez ekvivalens azzal, hogy minden altér kompakt. E pontosan akkor varietás, ha mint topologikus tér *irreducibilis* (azaz nem áll elő két valódi zárt részének uniójaként.) Ekkor nem üres nyílt halmazok véges metszete sem üres. Egy az E pontjaira vonatkozó állításra azt fogjuk mondani, hogy *majdnem mindenütt* teljesül, ha egy nem üres nyílt halmazon teljesül.

Legyen E egy affin algebrai halmaz. Az *E koordináta gyűrűjének* nevezzük és R_E-vel jelöljük a $C[x_1, \ldots, x_n]/I(E)$ faktorgyűrűt. Ez pontosan akkor integritási tartomány, ha E irreducibilis. A 2.1 Tételből könnyen levezethető, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn az E algebrai részhalmazai és az R_E azon ideáljai között, melyek a radikáljukkal egyenlőek.

Ezzel a vizsgálandó objektumainkat már definiáltuk. Szükségünk van még a megfelelő leképezések definiálására is. Kényelmi okokból irreducibilis sokaságokra fogjuk definiálni a leképezéseinket. Ha később reducibilis sokaságokról is beszélünk, akkor ott mindig komponensenként fogjuk érteni a dolgokat.

Definíció. Legyen $E \subset C^n$ irreducibilis, $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k \in C[x_1, \ldots, x_n]$. Definiáljuk ekkor a $\varphi: E \to C^k$ leképezést a

$$\varphi(x) = \left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \ldots, \frac{p_k(x)}{q_k(x)}\right)$$

formulával. Természetesen megtörténhet, hogy φ nincsen értelmezve az E minden pontjában de mindig feltesszük, hogy legalább egy pontban értelmes és ekkor azonnal egy egész nyílt halmazon is. Legyen φ és ψ két ilyen leképezés és tegyük fel, hogy megegyeznek ott, ahol mindketten értelmesek. Ekkor $\varphi - \psi$ nulla az E egy nyílt részén, így ha két leképezést ekvivalensnek nevezünk, akkor ha majdnem mindenütt megegyeznek, akkor ez ekvivalenciareláció a leképezéseken. Egy ekvivalenciaosztályt *racionális leképezésnek,* illetve $k=1$ esetén *racionális függvénynek* nevezünk. Azt mondjuk, hogy egy racionális leképezés *reguláris* egy $P \in E$ pontban, ha létezik olyan reprezentánsa, mely értelmezett abban a pontban. Ekkor az itt felvett függvényérték nyilván egyértelmű. Ezt az értéket nevezzük a racionális leképezés értékének a P pontban.

Egy racionális leképezést *regulárisnak* nevezünk, ha minden pontban reguláris.

Ha $\varphi: E \to C^k$ egy racionális leképezés és $\varphi(E) \subset F$, ahol F a C^k valamely affin algebrai halmaza, akkor azt is mondjuk, hogy a φ E-nek F-be való racionális leképezése.

A későbbiekben általában sohasem fogok különbséget tenni egy racionális leképezés és a reprezentánsai között, de ez nem fog félreértést okozni.

Az E-n értelmezett racionális függvények nyilván egy testet alkotnak. Ezt E racionális függvénytestének nevezzük és C_E-vel jelöljük. A racionális függvény definíciója szerint ez az R_E hányadosteste.

2.3. Tétel. Ha $\varphi \in C_E$ reguláris, akkor $\varphi \in R_E$.

Bizonyítás. $\varphi = \{p_i q_i^{-1}\}$ és minden $p_i \cdot q_i^{-1}$ egy nyílt halmazon reguláris. Így létezik közülük véges sok, $1 \leqq i \leqq n$ hogy az E minden pontjában ezek egyike már reguláris, hiszen E kompakt. Ez azt jelenti, hogy egyetlen pontban sem tűnik el a $(q_1, \ldots, q_n, I(E))$ ideál összes eleme, így a zérushelytétel miatt léteznek $b_1, \ldots, b_n$ polinomok, hogy $1 - \sum b_i q_i \in I(E)$. De ekkor a $p_i q_i^{-1}$ közös értelmezési tartományán $\varphi \ni p_1 q_1^{-1} 1 = p_1 q_1^{-1} \sum b_i q_i = \sum b_i p_1 q_1^{-1} q_i = \sum b_i p_i q_i^{-1} q_i = \sum b_i p_i$, tehát a φ-nek van polinom reprezentánsa, azaz $\varphi \in R_E$.

Egy $\varphi: E \to F$ racionális leképezést *biracionális izomorfizmusnak* nevezünk, ha létezik olyan $\psi: F \to E$ racionális leképezés, hogy $id_E \in \psi \circ \varphi$ és $id_F \in \varphi \circ \psi$. Ekkor az E és F sokaságokat *biracionálisan izomorfaknak* nevezzük. Ha ezen leképezések mindegyike reguláris, akkor a leképezéseket *izomorfizmusoknak*, és a megfelelő sokaságokat *izomorfaknak* nevezzük.

E két izomorfia fogalom közül a második lesz az „azonosnak tekinteni" megfelelője. Izomorf sokaságok belső tulajdonságai ugyanolyanok, csak másképpen vannak beágyazva az őket tartalmazó C^n-be. A biracionális izomorfia lényegesen érdekesebb és megértése nagyon fontos. Úgy célszerű elképzelni, hogy biracionálisan izomorf sokaságok „globális tulajdonságai" ugyanolyanok, és a „lokálisak" is, de csak majdnem mindenütt.

2.4. Tétel. E és F pontosan akkor izomorfak, ha $R_E \cong R_F$, és pontosan akkor biracionálisan izomorfak, ha $C_E \cong C_F$.

Bizonyítás. A $\varphi: E \to F$ leképezést *sűrűnek* nevezzük, ha $\varphi(E)$ sűrű F-ben. Ekkor a φ definiál egy $\varphi^*: C_F \to C_E$ homomorfizmust és ha φ reguláris, akkor egy $\varphi^*: R_F \to R_E$ homomorfizmust is. Mivel a biracionális izomorfizmus nyilván sűrű, és az E sokaság identitása a koordináta gyűrű illetve a racionális függvénytest identikus leképezését indukálja, ezért a csak akkor részt bizonyítottuk.

Fordítva, legyen $E \subset C^k$, $F \subset C^n$ és $\varphi^*: C_E \to C_F$ egy izomorfizmus. Az $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k \in R_{C^k}$ projekciókat megszorítjuk E-re és definiáljuk a $\varphi: F \to C^k$ leképezést a $\varphi(y) = (\overline{\varphi}(x_1)(y), \ldots, \overline{\varphi}(x_k)(y))$ formulával, ahol $\overline{\varphi}(x_i)$ a $\varphi^*(x_i)$ egy C_{C^n}-beli reprezentánsát jelöli. Így nyilván egy racionális leképezést definiáltunk, és ha $f \in I(E)$ akkor $f(\varphi(y)) = 0$ ahol értelmes. Tehát φ egy $F \to E$ leképezés. Hasonlóan definiálható φ^{-1} és könnyen ellenőrizhető, hogy így egy biracionális izomorfizmust definiáltunk, Az izomorfia rész bizonyítása analóg.

Példák. 1. Irreducibilis másodfokú síkgörbe biracionálisan izomorf az egyenessel. Ugyanis parabola esetén a vezéregyenesre való merőleges vetítés még izomorfizmus is, ellipszis és hiperbola (e kettő a komplex test felett ugyanaz!) esetén a görbe egy pontjából tetszőleges e ponton át nem menő egyenesre való vetítés biracionális izomorfizmus. A vetítő pontnak nincsen képe.

2. E: $y = 0$, F: $y^2 = x^3$. E két sokaság biracionálisan izomorf, mint ezt a $\varphi(x, y) = (x^3, x^2)$ és $\varphi^{-1}(x, y) = (yx^{-1}, 0)$ leképezések bizonyítják, de nem izomorfak: $R_E \cong C[x]$, R_F-ben x és y is irreducibilesek és $y^2 = x^3$ tehát itt nem érvényes az egyértelmű irreducibilis faktorizáció.

3. $y^3=x^3-2x^2+x$ biracionálisan izomorf az egyenessel. Az $(1, 0)$ pontból kell vetíteni az $x=0$ egyenesre. Vegyük észre, hogy a jobboldalnak az $x=1$ kétszeres gyöke.

4. $y^3=x^3+1$ nem biracionálisan izomorf az egyenessel. Ugyanis ha az lenne, akkor léteznének olyan $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ racionális törtfüggvények, hogy $\varphi^3=\psi^3+1$. A nevezőkkel átszorozva a $p^3+q^3+r^3=0$ Fermat egyenletnek adódna egy megoldása a polinomok körében. Ezt lederiválva $p'p^2+q'q^2+r'r^2=0$ adódik. Tehát a

$$px+qy+rz=0$$

$$p'x+q'y+r'z=0$$

lineáris egyenletrendszernek a (p^2, q^2, r^2) rendszer megoldása. Ugyanakkor ha ezt az egyenletrendszert a szokásos módon oldjuk meg, akkor az adódik, hogy minden megoldás arányos $(qr'-rq', pr'-rp', qp'-pq')$-vel. De a (p, q, r)-ekről eleve feltehető, hogy relatív prímek, tehát az előbb felírt megoldás ennek polinomszorosa. De ha például p foka a maximális, akkor $(qr'-rq')$ foka kisebb mint p^2-é, így csak akkor lehet polinomszoros, ha nulla. Innen adódik, hogy az általános megoldás minden komponense nulla, ami nem lehet.

Tehát azt az erősebb állítást nyertük, hogy minden φ: $V(x)\to V(y^3-x^3-1)$ racionális leképezés konstans.

Definíció. Egy irreducibilis sokaság *dimenziójának* nevezzük a függvénytestjének transzcendencia fokát C felett. Reducibilis sokaság dimenziója a komponensek dimenziójának legnagyobbika, az üres halmaz dimenziója -1. Ekkor mindenesetre C^n dimenziója n lesz. Egy affin algebrai halmazt *görbének* nevezünk, ha a dimenziója 1, *felületnek* ha 2. Később látni fogjuk hogy ez tényleg megfelel az intuitív dimenzió fogalmunknak, most azonban csak a következőt bizonyítjuk.

2.5. Tétel. Ha E irreducibilis és F valódi algebrai részhalmaza E-nek, akkor $\dim F<\dim E$.

Bizonyítás. Elég arra az esetre látni, amikor F is irreducibilis. Ekkor $R_F=R_E/I(F)$ és az állítás következik az F. 5. tételből.

Most pedig a sokaságok lokális vizsgálatának fogunk neki. Végső célunk a „jó" és „rossz" pontok fogalmának meghatározása és ezek vizsgálata. Ehhez először is elkészítjük a reguláris függvények gyűrűjének lokális változatát. A függelékben levő definíciókat hivatkozás nélkül fogjuk használni.

Legyen E egy sokaság és P egy pontja. O_P^E-vel jelöljük és a P pont *lokális gyűrűjének* nevezzük C_E-nek azt a részgyűrűjét, mely a P-ben reguláris függvényekből áll. A definíció nyilván izomorfia invariáns. Ha világos, hogy milyen sokaságról van szó, akkor a felső indexet elhagyjuk. Ez nyilván *lokális gyűrű* és a maximális ideálja a P-ben eltűnő függvényekből áll. Az általános definícióval nem foglalkozunk. Egy speciális esetre azonban szükségünk lesz, mégpedig arra, amikor az E összes komponense tartalmazza P-t. Ekkor lokális gyűrűn értsük ugyan ezt: azon E-n értelmezett racionális függvények gyűrűjét, melyek regulárisak P-ben. Ha erről is beszélünk, akkor erre külön felhívjuk a figyelmet.

2.6. Tétel. Ha $P\in E$, akkor $\dim E=\dim O_P^E$.

Bizonyítás, csak $\dim E=1$-re: A $(0)<M$ lánc hossza 1. Ha lenne egy $P_0<P_1<P_2$ lánc, akkor könnyen láthatóan ez egy $P_0\cap R_E<P_1\cap R_E<P_2\cap R_E$

láncot adna. Így egy $E_0 \supset E_1 \supset E_2$ csökkenő varietássorozatot kapnánk, de ez ellene mondana a 2.5 Tételnek, hiszen $\dim E_0 = 1$.

Definíció. Legyen $E = V(A) \subset C^n$ és $P \in E$, $P = (p_i)$. Azon $T = (t_i) \in C^n$ vektorok halmazát, melyekre $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_i) \cdot (t_i - p_i) = 0 \; \forall f \in A$-ra az E sokaság P pont-beli tangensterének nevezzük, és $T_P(E)$-vel jelöljük. Ez nyilván a C^n egy alkalmas lineáris alterének az eltoltja, így ezt C-vektortérnek fogjuk tekinteni az így adódó természetes struktúrával.

Egy $d: R_E \to C$ lineáris leképezésről azt mondjuk, hogy a P pontra koncentrált derivváció, ha $d(fg) = f(P)d(g) + d(f)g(P)$. A P-re koncentrált deriválciók nyilván egy C-vektorteret alkotnak, amit $\mathrm{Der}_P(E)$-vel jelölünk.

2.7. Tétel. A $T_P(E)$, M/M^2 és a $\mathrm{Der}_P(E)$ vektorterek izomorfak, ahol M a P pont O_P^E lokális gyűrűjének maximális ideálja. Speciálisan $\dim O_P^E \leqq \mathrm{emdim}\, O_P^E = \dim T_P(E) = \dim \mathrm{Der}_P(E)$. A tangenstér dimenziója izomorfia invariáns.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy P a nulla pont. Legyen $T = (t_i)$ egy tangensvektor. Ha $f \in R_E$, akkor válasszunk egy $g \in R_{C^n}$-et, melyre $g|E = f$ és definiáljunk egy $dT: f \to \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) t_i$ leképezést. Ez nem függ a g választásától és könnyű utána számolni, hogy egy P-re koncentrált derivváció. Továbbá ha $T \neq 0$, akkor $dT(x_i|E) = t_i$ miatt $dT \neq 0$ így ez a $d: T_P(E) \to \mathrm{Der}_P(E)$ leképezés injektív.

Fordítva, ha d egy derivváció, akkor legyen $T(d)_i = d(x_i|E)$. Ha $f \in I(E)$, akkor $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) d(x_i|E) = d(f|E) = d(0|E) = 0$ így a T egy $\mathrm{Der}_P(E) \to T_P(E)$ lineáris leképezést definiál, ami szintén injektív, tehát $T_P(E)$ és $\mathrm{Der}_P(E)$ izomorfak.

Másrészt ha d egy P-re koncentrált derivváció, akkor az a hányados deriválási formulával egyértelműen terjeszthető ki O_P^E-re, és a definícióból világos, hogy M^2-en minden derivváció nulla. Így minden derivváció egy $\bar{d}: M/M^2 \to C$ lineáris leképezést ad. Ha $e: M/M^2 \to C$ lineáris, akkor az $e'(f) = e(f - f(0) + M^2)$ egy P-re koncentrált derivváció. Így $\mathrm{Der}_P(E)$ izomorf M/M^2 duális terével, de ekkor magával M/M^2-tel is.

Ezzel a mondott izomorfiákat bizonyítottuk. Az egyenlőségek ezekből következnek, az egyenlőtlenség az F.10 tételből.

A következő definíció alapvető. Egy $P \in E$ pontra azt mondjuk, hogy *sima* vagy hogy *nem szinguláris* ha a lokális gyűrűje reguláris. A 2.6, 2.7 és F.10 Tételek miatt ez pontosan akkor áll fenn ha, $\dim E = \dim O_P^E = \mathrm{emdim}\, O_P^E = \dim T_P(E)$. Ha ez nem teljesül, akkor P-t *szinguláris*nak nevezzük.

Egy $P \in E$ pontot *faktorizációs*nak nevezünk, ha O_P^E-ben érvényes az egyértelmű irreducibilis prímfaktorizáció, és *normális*nak ha O_P^E egészzárt integritási tartomány. Ezek közül az utóbbi az igazán fontos fogalom. Egy pont milyensége is csak a sokaságtól magától függ, és a beágyazástól nem.

2.8. Tétel. Legyen $\dim E = 1$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) P sima

(ii) P faktorizációs

(iii) P normális.

Bizonyítás. F.7 Tétellel ekvivalens.

A sima pontok lesznek a jó pontok. Kérdéses azonban, hogy van-e egyáltalán sima pontja minden sokaságnak. Erre ad választ a következő

2.9. Tétel. Egy sokaság sima pontjai nem üres nyílt halmazt alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $E=V(f_1, \ldots, f_n)$ az adott sokaság $f_i \in C[x_1, \ldots, x_k]$. Nézzük a következő egyenlőség láncot:

R_E transzcendencia foka = dim ($R_E \to C_E$ deriválások, melyek megölik C-t), (az F. 11. Tétel miatt) = dim ($C[x_1, \ldots, x_k] \to C_E$ deriválások melyek megölik C-t és $(f_1, \ldots, f_n)$-et) = dim (azon $a_1, \ldots, a_k \in C_E$ k-asok vektortere melyekre $\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i = 0$ $1 \leqq j \leqq n$-re) = k-rang $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ képe C_E-ben$\right)$.

Másrészt a P pontra koncentrált deriválások vektorterének dimenziója hasonló gondolatmenetből adódóan k-rang $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)\right)$. Így tehát a 2.7. Tétel miatt P pontosan akkor sima, ha rang $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right.$ képe C_E-ben$\left.\right) = \text{rang}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)\right)$.

Ha a baloldali mátrix rangja m, akkor van benne egy nem zérus determinánsú $m \times m$-es minor. De ekkor ennek determinánsa sem nulla egy Zariski nyílt halmazon, így egy Zariski nyílt halmazon a jobboldal rangja legalább akkora mint a baloldalé. De több nyilván nem lehet, így itt egyenlőség áll. Tehát a sima pontok halmaza a lehetséges véges sok minorhoz tartozó nyílt halmazok egyesítése, azaz egy nem üres nyílt halmaz.

Nagyon érdekes azt vizsgálni, hogy milyenek az algebrai sokaságok a C^n-től örökölt *Euklideszi topológiában*. Mi most egy finomabb struktúrát, az analitikus sokaság struktúrát fogjuk nézni.

Definíció. Legyen adott egy K megszámlálható bázisú Hausdorff topologikus tér, ennek egy $\{A_i\}$ nyílt fedése, és minden A_i fedőelemnek egy h_i homeomorfizmusa a C^n egy nyílt részhalmazával. Ekkor a $(K, \{A_i\}, \{h_i\})$ hármast n-dimenziós *komplex analitikus sokaságnak* nevezzük, ha a $h_j h_i^{-1}$: $C^n \to C^n$ leképezések analitikusak ott, ahol értelmesek. Ha ezen kívül $K \subset C^k$ akkor $(K, \{A_i\}, \{h_i\})$-t a C^k *analitikus részsokaságának* nevezzük, ha az eddigieken kívül az is teljesül, hogy a h_i^{-1}-ek analitikusak, és Jacobi mátrixuk rangja n.

2.10. Tétel. Egy algebrai sokaság sima pontjainak halmaza analitikus részsokasága a megfelelő C^n-nek.

Bizonyítás, csak egy dimenzióban: A koordináta rendszer alkalmas választásával feltehető, hogy az origót vizsgáljuk és hogy $T_0(E)=\{(x, 0, \ldots, 0)\}$. A tangenstér definíciója miatt léteznek $f_1, \ldots, f_{n-1} \in I(E)$ polinomok, hogy a $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ Jacobi mátrix rangja $n-1$. Nézzük az F: $C^n \to C^{n-1}$ $(x) \to (f(x))$ leképezést a nulla egy környezetében. Ez analitikus és teljesülnek az implicit függvény feltételei a $T_0(E)$-re nézve, így léteznek olyan $g_2, \ldots, g_n$: $C \to C$ analitikus függvények, hogy $F(x_1, \ldots, x_n)=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(x_1, \ldots, x_n)=(x_1, g_2(x)_1, \ldots, g_n(x_1))$.

Mivel $F|E \equiv 0$ ezért elég azt belátni, hogy az origó körül E és $F^{-1}(0)$ egybeesnek. Jelölje G a $V(f_1, \ldots, f_{n-1})$ origót tartalmazó kómponenseinek unióját. Dim $T_0(G) \leqq 1$, és dim $G \geqq 1$ hiszen E a G egy komponense. Nézzük az O_P^G lokális gyűrűt. Könnyű meggondolni hogy a 2.7. Tételből az emdim $O_P^G \leqq$ dim $\text{Der}_P(G)$ összefüggés itt is igaz marad. Így a jelen esetben $1 \leqq \dim O_p^G \leqq \text{emdim } O_P^G \leqq$ $\leqq \dim \text{Der}_P(G) \leqq 1$ azaz O_P^G reguláris. Így az F. 6 Tétel miatt nullosztómentes, tehát R_G is nullosztómentes. De ez azt jelenti, hogy G egyetlen komponensből

áll, tehát O egy környezetében E és $F^{-1}(O)$ egybeesik, tehát a sima pontok halmaza valóban analitikus sokaságot alkot.

Ez a tétel némiképp indokolja, hogy miért pont ezeket a pontokat nevezzük simának. A tétel megfordítása is igaz: ha egy algebrai sokaságnak egy P pontja olyan, hogy P egy környezetében E analitikus részsokasága C^n-nek, akkor P algebrailag is sima. Ennek bizonyítását mellőzzük, mivel komolyabb analitikus geometriai ismereteket igényel.

Az affin sokaságok nagyon könnyen kezelhetőek és hasznosak, de érezhető, hogy több szempontból célszerű lenne a végtelen távoli pontok hozzávétele. Így jutunk majd el a projektív sokaságok fogalmához, mely az algebrai geometriai vizsgálatok alapvető objektuma.

A projektív sokaságokat általában nehezebb kezelni mint az affinokat, ezért a vizsgálati módszerünk mindig az lesz, hogy a kérdést megpróbáljuk valahogyan visszajátszani affin részekre, ott megoldani aztán valahogy a részekből összerakni a megoldást. Így az affin sokaságokról szerzett információink nem fognak kárba veszni.

Most pedig térjünk rá a definícióra.

Jelölje P^n az *n-dimenziós komplex projektív teret.* Ennek pontjai az $(x_0, \ldots, x_n)$ komplex szám $(n+1)$-esek, kivéve az azonosan nulla sorozatot, és két sorozatot azonosnak tekintünk, ha csak konstans szorzóban különböznek. A $H_i=\{x_i=0\}$ hipersíkok A_i komplementumai a természetes módon feleltethetők meg C^n-nek.

Ha $h\in C[x_0, \ldots, x_n]$ egy polinom, akkor általában nincsen értelme beszélni a h gyökeinek halmazáról P^n-ben, csak akkor ha h homogén. Ez indokolja, hogy itt az algebrai halmazokat a következőképpen definiáljuk.

Legyen B egy *homogén* polinomok generálta ideál. Ekkor a

$$V(B)=\{x\in P^n\colon\ h(x)=0 \text{ minden homogén } h\in B\text{-re}\}$$

halmazt *projektív algebrai halmaznak* nevezzük. Ha $E\subset P^n$ egy projektív algebrai halmaz akkor $I(E)$ jelölje az E-n eltűnő homogén polinomok generálta ideált.

A fejezet elején felsorolt definíciók és tételek (a Zariski topológiáról mondottakig) érvényben maradnak projektív algebrai halmazokra is, ha ideál helyett mindig homogén polinomok generálta ideált mondunk. Az egyetlen eltérés az, hogy az egész gyűrűt nem tekintjük homogén ideálnak, mert már $V(x_0, \ldots, x_n)=\emptyset$.

Ha $T\not\subset H_i$ egy projektív sokaság, akkor $T\cap A_i$ affin algebrai sokaság. Így egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk C^n affin részsokaságai és P^n azon projektív részsokaságai között, melyek nem részei H_i-nek.

A $P\cap A_i$ $(i=0, \ldots, n)$ halmazok a P projektív sokaság egy affin lefedését adják. E lefedés segítségével definiálható a pont lokális gyűrűje, tangenstér, dimenzió, sima és szinguláris pontok, racionális és reguláris leképezések. Definiálható a racionális függvénytest is. Később látni fogjuk, hogy projektív sokaságon reguláris függvények csak a konstansok. Az izomorfia 2.4. Tétel-beli elegáns jellemzése így itt sajnos hiányzik.

A sokaságok még egy fajtáját definiáljuk. Erre csak a kilencedik fejezetben lesz szükség, de ott is csak a fogalomra.

Projektív sokaság Zariski nyílt részét *kváziprojektív sokaságnak* nevezzük. Tehát speciálisan az affin és a projektív sokaságok is kváziprojektívek. Egy dimenzióban minden kváziprojektív sokaság vagy projektív vagy affin (ez következik a Riemann—Roch tételből). Általában azonban nincsen így, pl. $P^2-(0, 0, 1)$ vagy $C^2-(0, 0)$ se nem affin, se nem projektív.

III. Síkgörbék geometriája

Történetileg az algebrai geometria ezzel a fejezettel kezdődött, természetesen még a valós test felett. Mi mindent a komplex test felett fogunk vizsgálni, mert csak itt kaphatók természetes és szép eredmények. x, y, z fogják a homogén síkkoordinátákat jelölni. F, G, H egyformán fognak homogén polinomokat és a nekik megfelelő görbéket jelölni. Általában megengedjük, hogy reducibilisek legyenek, vagy hogy többszörös komponensük legyen. A görbe fokán ($\deg F$) az illető polinom fokát értjük.

A fejezet első célja a következő klasszikus tétel bizonyítása.

3.1. Tétel (Bézout). Egy n-ed fokú és egy m-ed fokú görbe nm pontban metszik egymást.

Ez a tétel jellegzetes példája lesz annak az algebrai geometriai jelenségnek, hogy egy állítás bizonyítása eléggé könnyű „általános helyzetű" alakzatokra, de nagyon komoly nehézségekkel kell megküzdeni akkor, ha a „multiplicitással számolva" általános esetet akarjuk bizonyítani. Ebben az esetben is az a helyzet, hogy a természetesen adódó geometriai invariánsok nem elegek a multiplicitás megfelelő leszámolására. A metszési multiplicitás általunk adott definíciója nagyon algebrai lesz. A fő nehézség annak a bizonyítása lesz, hogy ez geometriai tartalommal is bír.

A Bezout-tétel végleges geometriai alakját csak a 4.7. Tételben fogjuk megadni, de az ott szereplő geometriai multiplicitás fogalom se túlságosan szemléletes.

Definíció. Legyen adott egy $f(x, y)$ affin görbe. $f(x, y)=f_m(x, y)+f_{m+1}(x, y)+\ldots$ a homogén felbontása, azaz f_i homogén i-ed fokú polinom. m-et az $O=(0, 0)$ pont *multiplicitásának* nevezzük az f-en. Legyen továbbá $f_m(x, y)=\prod_1^m (a_i x+b_i y)$. Az $a_i x+b_i y=0$ egyeneseket az f origóbeli *érintőinek* nevezzük, az f-beli multiplicitást az *érintő multiplicitásának*. E fogalmak ugyanígy definiálhatóak tetszőleges pontra. A $P\in f$ pont pontosan akkor sima, ha $m_P=1$.

Többször szükségünk lesz a következő technikai lemmára, melynek bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

3.2. Lemma. Tegyük fel, hogy az $F<C[x, y]$ ideálra $V(F)=\{P_1, \ldots, P_n\}$. Ekkor $C[x, y]/F\cong\prod_1^n O_{P_i}^{C^2}/FO_{P_i}^{C^2}$.

3.3. Tétel. Ha M az O_P^f maximális ideálja akkor $n\geqq m_P$-re $\dim (M^n/M^{n+1})=m_P$.

Bizonyítás. Nyilván elég az O/M^n dimenzióját kiszámolni. Mivel $M^n=(x, y)^n O_P^f=((x, y)^n, f)O_P^{C^2}/(f)$, így $O_P/M^n\cong(O_P^{C^2}/(f))/M^n\cong O_P^{C^2}/((x, y)^n, f)$ $O_P^{C^2}\cong\cong C[x, y]/((x, y)^n, f)$ a lemma miatt.

Könnyen igazolható, hogy a

$$o\to C[x, y]/(x, y)^{n-m_P}\xrightarrow{\psi} C[x, y]/(x, y)^n\xrightarrow{\varphi} C[x, y]/((x, y), f)\to o$$

sorozat ekzakt, ahol φ a természetes homomorfizmus és $\psi(g)=fg$. Mivel e sorozat ismert tagjainak a dimenzióját könnyű kiszámolni (a legfeljebb k-ad fokú polinomok vektorteréről van szó $k=n$ és $k=n-m_P$ esetben), ezért a részletes számolást az olvasóra hagyjuk.

A $P\in F\cap G$ metszéspontot *közönségesnek* nevezzük, ha ott az F érintői különböznek a G érintőitől.

Definíció. Legyen f és g két affin görbe. A P pont-beli *metszési multiplicitásukat* definiáljuk $\dim O_P^{C^2}/(f, g)$, és jelöljük $I(P, f\cap g)$-vel. Projektív görbék metszési multiplicitását mint a P egy környezetében értelmezett affin részük multiplicitását értelmezzük.

3.4. Tétel. A metszési multiplicitásnak a következő tulajdonságai vannak.

(i) $I(P, f\cap g)<\infty$ ha f és g-nek nincsen közös komponense

(ii) $I(P, f\cap g)=0$ pontosan akkor, ha $P\notin f\cap g$

(iii) $I(P, f\cap g_1 g_2)=I(P, f\cap g_1)+I(P, f\cap g_2)$

(iv) $I(P, f\cap g)=I(P, f\cap g+hf)$

(v) $I(P, f\cap g)\geqq m_P f\cdot m_P g$ és egyenlőség pontosan akkor áll, ha P közönséges.

Bizonyítás. (i), (ii), és (iv) könnyűek. (iii)-hez nézzük a következő sorozatot

$$0\to (O/(f, g_1)\xrightarrow{\psi} O/(f, g_1 g_2)\xrightarrow{\varphi} O/(f, g_2)\to 0$$

ahol φ a természetes homomorfizmus és ψ a g_2-vel való szorzás. Könnyen láthatóan ez vektorterek egy exakt sorozata, innen adódik az állítás.

A legnehezebb (v) bizonyítása. Tekintsük a következő diagrammot

$$\begin{array}{ccccccc} C[x, y]/(x, y)^n\times C[x, y]/(x, y)^m & \xrightarrow{\psi} & C[x, y]/(x, y)^{n+m} & \xrightarrow{\varphi} & C[x, y]/(x, y)^{n+m}, f, g) & \to & 0 \\ & & & & \downarrow\alpha & & \\ & & & & O_P/(f, g) & \xrightarrow{\pi} & O_P/((x, y)^{n+m}, f, g)\to 0 \end{array}$$

ahol α, φ és π a természetes homomorfizmusok és $\psi(\bar a, \bar b)=\overline{af+bg}$.

Nyilvánvaló, hogy φ és π szürjektívek és a 3.2. Lemma miatt α izomorfizmus. Könnyű számolás adja, hogy az egész felső sor exakt, így

$$I(P, f\cap g)=\dim O_P/(f, g)\geqq \dim O_P/((x, y)^{n+m}, f, g)\geqq$$

$$\geqq \dim C[x, y]/(x, y)^{n+m}-\dim C[x, y]/(x, y)^n-\dim C[x, y]/(x, y)^m$$

és ez utóbbiról egyszerűen adódik, hogy pont *nm*. Így az egyenlőtlenséget már bizonyítottuk. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha π izomorfizmus és ψ injektív.

Először lássuk be azt, hogy ha P közönséges, akkor $(x, y)^t\subset(f, g)O_P$ minden $t\geqq n+m-1$-re. Ezt $t=n+m$-re alkalmazva adódik, hogy π izomorfizmus.

Legyenek $M_1, \ldots, M_m$ az f és $N_1, \ldots, N_n$ a g érintői. Legyen $A_{ij}=M_1\ldots M_i N_1, \ldots, N_j$, ahol az m ill. n-nél nagyobb indexekre az M_m ill. N_n tényezők szerepelnek ismételten. Könnyű kiszámolni, hogy az A_{ij}: $i+j=t$ polinomok lineárisan függetlenek, így a t-ed fokú homogén polinomok terének egy bázisát alkotják. Nekünk tehát azt kell belátnunk, hogy $A_{ij}\in(f, g)O_P$ ha $i+j\geqq n+m-1$. De ekkor $i\geqq m$ vagy $j\geqq n$, például az első. Így $A_{ij}=A_{m0}B$, ahol $\deg B=i+j-m$. De $A_{m0}=f_m$ így elég azt belátni, hogy $(f-f_m)B\in(f, g)O_P$. De itt már minden tag foka legalább $i+j+1$, tehát elég azt belátni, hogy alkalmas nagy t-re $(x, y)^t\subset(f, g)O_P$ teljesül. Ez következik a zérushely tételből, ugyanis legyen h egy olyan polinom, mely P-ben nem nulla, de eltűnik az f és g összes többi metszéspontjában. Ekkor $(hx)^N, (hy)^N\in(f, g)\subset C[x, y]$ a zérushelytétel miatt alkalmas N-re. Mivel h invertálható O_P-ben, ezért $x^N, y^N\in(f, g)O_P$ így $(x, y)^{2N}\subset(f, g)O_P$, amivel az állítást bizonyítottuk.

Most pedig nézzük a ψ injektivitását. Tegyük fel, hogy $\psi(\bar a, \bar b)=\overline{af+bg}=0$, azaz $af+bg$-ben minden tag foka legalább $n+m$. Legyen $a=a_r+\ldots$ és $b=b_s+\ldots$ a homogén felbontás, így $af+bg=a_r f_m+b_s g_n+\ldots$ és $r+m=s+n$ kell, hogy tel-

jesüljön. Így $a_r f_m = -b_s g_n$. A feltétel miatt f_m és g_n relatív prímek tehát $s \geqq m$ és $r \geqq n$ adódik, azaz $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$.

Másrészt ha a P nem közönséges metszéspont, akkor legyen L egy közös érintő, $f_m = Lf'$ és $g_n = Lg'$ felírással $\psi(\bar{g}', -\bar{f}') = \bar{0}$ így ekkor ψ nem injektív, ezzel azt is beláttuk, hogy a közönségesség szükséges feltétel is.

Most pedig lássunk neki a Bezout tétel bizonyításának. Azt fogjuk belátni, hogy $\sum I(P, F \cap G) = \deg G \cdot \deg F$, ahol F és G közös komponens nélküli projektív görbék. Remélem az eddigi fejtegetéseink meggyőzték az olvasót arról, hogy ez az állítás a 3.1. Tétel-beli szemléletes kijelentés pontos megfelelője.

Válasszuk úgy a projektív koordináta rendszert, hogy a $z=0$ egyenesre ne essen metszéspont. Jelölje f és g az F ill. G affin megfelelőjét. Ekkor

$$\sum I(P, F \cap G) = \sum I(P, f \cap g) = \dim C[x, y]/(f, g),$$

ez utóbbi a 3.2. Lemma miatt. Legyen $K = C[x, y, z]/(F, G)$; $R = C[x, y, z]$ $k = C[x, y]/(f, g)$ és K_d ill. R_d a K ill. R homogén d-ed fokú része. Azt fogjok belátni, hogy $\dim k = \dim K_d = nm$ elég nagy d-re ($n = \deg G$, $m = \deg F$).

Nézzük a

$$0 \to R \xrightarrow{\psi} R \times R \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\pi} K \to 0$$

sorozatot, ahol $\psi(C) = (GC, -FC)$, $\varphi(A, B) = AF + BG$ és π a természetes homomorfizmus. Könnyű látni, hogy ez exakt. Felírva ennek a különböző fokokra való felbontását a

$$0 \to R_{d-n-m} \to R_{d-m} \times R_{d-n} \to R_d \to K_d \to 0$$

exakt sorozat adódik, ahonnan a K_d dimenziója már könnyen számolható. Ebből adódik a $\dim K_d = nm$ összefüggés $d \geqq n+m$ esetén.

A másik egyenlőség bizonyításához szükségünk lesz arra a segédállításra, hogy a z-vel való szorzás a K-nak injektív leképezése. Ugyanis legyen $zH = AF + BG$. Itt $z=0$-t helyettesítve az $A_0 F_0 = -B_0 G_0$ összefüggés adódik. F_0 és G_0 relatív prímek, mert esetleges közös gyökük egy a $z=0$ egyenesen levő metszéspontot adna. Így $B_0 = F_0 C$ és $A_0 = -G_0 C$ alkalmas C-vel. Ezután $A_1 = A + CG$ és $B_1 = B - CF$-el, $A_1 = zA'$ és $B_1 = zB'$ alkalmas A' és B' polinomokkal, és $H = A'F + B'G$, azaz ha zH képe nulla a K-ban, akkor már H képe is nulla, tehát a z-vel való szorzás injektív.

Legyen most $d \geqq n+m$, $A_1, \ldots, A_{nm} \in R_d$ olyan, hogy a K beli képeik a K_d egy bázisát alkotják. Az előzőek miatt ekkor a $z^r A_i - k$ képei a K_{d+r} egy bázisát alkotják. Az A_i $C[x, y]$ beli megfelelőjének k-beli képét jelölje a_i. Azt állítom hogy az a_i elemek a k egy bázisát alkotják.

Valóban, ha $h \in k$, akkor nézzük ennek egy ősképét $C[x, y]$-ban, majd ennek egy alkalmas homogénizáltját, legyen ez H. Ekkor $H = \sum \lambda_i z^r A_i + BF + CG$ alkalmas $\lambda_i \in C$; $B, C \in R$ elemekkel, így $h = \sum \lambda_i a_i$, tehát az $a_i - k$ genegátor redszert adnak. Másrészt ha $\sum \lambda_i a_i = 0$, akkor $\sum \lambda_i z^r A_i = BF + CG$ összefüggés teljesülne alkalmas r, B, C elemekkel, ami ellene mondana annak, hogy a $z^r A_i - k$ képei is bázist alkotnak K_{d+r}-ben. Tehát $\dim k = \dim K_d$, ha d elég nagy, ami a Bezout tételt bizonyítja.

Bezout tétele önmagában is rendkívül érdekes de ezen kívül számos alkalmazása is van, csak a teljesség kedvéért felírjuk geometriai alakban is.

3.5. Következmény. $\sum m_P(F) m_P(G) \leqq \deg F \cdot \deg G$ és egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden metszéspont közönséges.

Először egy síkgörbe szinguláris pontjainak számára szeretnénk becslést adni.

3.6. Tétel. Legyen F egy n-ed fokú irreducibilis síkgörbe. Ekkor $\sum m_P(m_P-1) \leqq (n-1)(n-2)$.

Bizonyítás. Legyen $F'(a)=\sum a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a_i)$. Nyilván $m_P(F') \geqq m_P(F)-1$ így a 3.5. Következmény miatt $\sum m_P(m_P-1) \leqq n(n-1)$. Ezt szeretnénk még javítani. Vegyünk egy legfeljebb $(n-1)$-ed fokú görbét, mely a következőket tudja. F-nek minden szinguláris pontja neki is m_P-1-szeres pontja, és átmegy F-nek további $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{m_P(m_P-1)}{2}$ sima pontján. Ilyen G görbe van, ugyanis G-nek $\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1$ együtthatóját lehet szabadon megválasztani. A kielégítendő feltételek az együtthatókra nézve homogén lineáris egyenleteket jelentenek. A sima pontokon való átmenetel pontonként egy lineáris feltételt, az $(m-1)$-szeres multiplicitású pont pedig $\frac{m(m-1)}{2}$ lineáris feltételt, az $(m-1)$-szeres deriváltak eltűnését. Így pontosan eggyel kevesebb az egyenletünk, mint ahány ismeretlenünk van, tehát létezik nem triviális megoldás. Erre a G-re és F-re alkalmazva a 3.5. Következményt, adódik az állítás.

3.7. Tétel. Ha két n-ed fokú görbe metszéspontjai közül az irreducibilis m-ed fokú G görbe nm különbözőt tartalmaz, akkor a fennmaradó $n(n-m)$ darab metszéspont egy $(n-m)$-ed fokú görbén van rajta.

Bizonyítás. Legyen A és B a két görbe. Legyen P a G-nek egy a kérdéses metszéspontoktól különböző pontja. Ekkor $P \in aA+bB$ alkalmas $a, b \in C$ elemekkel. Így G és $aA+bB$ $nm+1$ pontban metszik egymást. Ez Bezout tétele miatt csak akkor lehet, ha van közös komponensük. De G irreducibilis, így ő a közös komponens, azaz $aA+bB=GH$ egy alkalmas H görbére, és ez a H az, amit kerestünk.

3.8. Következmény (Pascal). Kúpszeletbe beírt hatszög szemközti oldalegyenesei egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás. Legyenek $L_1, \ldots, L_6$ az oldalegyenesek sorrendben. Az $L_1L_3L_5$ és az $L_2L_4L_6$ harmadfokú görbék hat metszéspontja rajta van a kúpszeleten, így a fennmaradó három egy elsőfokú görbén, azaz egy egyenesen van az előző tétel miatt.

Azt mondjuk, hogy az L egyenes a P sima pontban k-szoros érintője F-nek, ha $I(P, F \cap L)=k+1$.

3.9. Tétel (Plücker). Tegyük fel, hogy az F n-ed fokú síkgörbének csak közönséges szingularitásai vannak, és legyen P egy olyan pont, mely nincsen rajta a görbén és egyetlen szinguláris pontbeli érintőn sem. Ekkor P-ből $n(n-1)-\sum m(m-1)$ darab érintőt lehet húzni F-hez.

Bizonyítás. A Q sima pontban vont érintő egyenlete könnyen láthatóan $\sum x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(Q)$. Ez akkor megy át a $P=(p_i)$ ponton, ha $\sum p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(Q)=0$ teljesül. Azaz, a P pontból vont érintők metszéspontjait az F és a $\sum p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}=0$ görbe

F-en sima metszéspontjai adják. Az F szinguláris pontjaiban ez utóbbi görbe multiplicitása $m-1$, ahol m az F multiplicitása és feltételünk miatt itt a két görbe közönségesen metszi egymást. Így a sima metszéspontok száma multiplicitással $n(n-1)-\sum m(m-1)$.

A $P \in F$ sima pontot *inflexiós pontnak* nevezzük, ha ott az érintő metszési multiplicitása legalább három.

3.10. Tétel (Hess). Az F inflexiós pontjai pontosan azok a sima pontok, melyek rajta vannak a $H(x)=\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right|=0$ Hess-féle görbén.

Bizonyítás. A deriváltakat alsó indexszel jelöljük. A B pontbeli érintő L: $\sum F_i(B)x_i=0$. Nézzük a Q: $\sum F_{ij}(B)x_i x_j=0$ kúpszeletet. Könnyű kiszámolni, hogy B pontosan akkor inflexiós, ha L a Q komponense. Így ekkor Q elfajuló, tehát a determinánsa azaz $H(B)$ nulla. Fordítva, ha $H(B)=0$, akkor Q elfajuló, így két egyenes szorzata. $B \in Q$, mert $\sum F_{ij}(B)b_i b_j=n(n-1)F(B)=0$ és L érinti Q-t, mert a Q érintője $\sum F_{ij}(B)b_i x_j$ de ez a pont $(n-1)L$. Q elfajuló volta miatt tartalmazza az érintőit, így Q tényleg inflexiós.

3.11. Következmény. Ha F sima és $\deg F \geqq 3$, akkor F-nek van inflexiós pontja, és ezek száma véges.

Most pedig rátérünk a síkgörbék geometriájának részletesebb elemzésére. Az elsőfokúak az egyenesek, ezekről nem sok érdekeset lehet mondani. A másodfokú vagy két egyenes szorzata vagy kúpszelet. A komplex projektív síkon a kúpszeletek sokat veszítenek érdekességükből, mert csak egy fajta kúpszelet lesz a három helyett. A kúpszeletek biracionálisan izomorfak az egyenessel, így algebrailag se túl érdekesek. Egy harmadfokú görbe vagy reducibilis, és ekkor három egyenes vagy egy egyenes és egy kúpszelet, vagy irreducibilis. Ez utóbbi esetben ha van szinguláris pontja, akkor abból vetítve adódik, hogy biracionálisan izomorf az egyenessel. Maradnak a sima harmadfokú görbék. Ezekkel részletesen foglalkozunk. A továbbiakban C mindig sima harmadfokú síkgörbét fog jelölni.

3.12. Tétel. Alkalmas koordináta rendszerben C egyenlete $y^2=x^3+ax+b$, ahol a jobboldalnak nincsen többszörös gyöke.

Bizonyítás. Legyen az egyik inflexiós pont a $(0, 1, 0)$ és $z=0$ az itteni érintő. Ekkor C egyenlete $x^3=g(x, y)$, ahol $\deg g \leqq 2$. g tartalmaz y^2-es tagot, mert különben a $(0, 1, 0)$ pont szinguláris lenne. Ezután könnyen adódik a keresett alak. Mivel a jobboldal többszörös gyöke a C szinguláris pontja lenne, az állítást bizonyítottuk.

3.13. Tétel (Steiner). C-nek kilenc inflexiós pontja van. Bármely két inflexiós pont összekötő egyenese C-t egy harmadik inflexiós pontban metszi.

Bizonyítás. Az $y^2=x^3+ax+b$ alakból kiszámolva a Hess-féle görbét H: $(y^2+bx)(3x+a)-(ax+b)^2=0$ adódik. Kiküszöbölve y-t a $3x^4+4ax^3+6bx^2-b^2=0$ egyenletet kapjuk. Ennek négy különböző gyöke van, minden gyökhöz két y-érték tartozik, ez nyolc inflexiós pont. A kilencedik a végtelenben a $(0, 1, 0)$.

Legyen most P és Q két inflexiós pont. A P-t vehetjük a $(0, 1, 0)$ pontnak, így Q egyenlete $(c, d, 1)$ és ekkor R: $(c, -d, 1)$ is inflexiós és rajta van a PQ egyenesen.

Megjegyzés. Az inflexiós pontok kapott konfigurációja több szempontból is érdekes. Először is azért, mert valós projektív térben megvalósíthatatlan, ld. [3] 189. old. Másrészt így egy $2-(9, 3, 1)$ blokkrendszert kaptunk, azaz egy kilenc

elemű halmaznak adtuk meg három elemű részhalmazait úgy, hogy bármely két elemet pontosan egy kiválasztott részhalmaz tartalmaz. Ezen példa nyomán a $2-(n, 3, 1)$ blokkrendszereket *Steiner-rendszereknek* nevezik, és eléggé intenzív vizsgálat tárgyai. ld. [17]

Most pedig csoportot fogunk definiálni a C pontjain. Természetesen ezt csak akkor érdemes megtenni, ha valami kapcsolat lesz a C geometriai struktúrája és a csoportstruktúra között. A definíció eredményeképpen C kompakt komplex Lie-csoport lesz, sőt algebrai csoport is, ami azt jelenti, hogy az invertálás mint $C \to C$ és a szorzás mint $C \times C \to C$ leképezés reguláris (Sokaságok szorzatának definíciója a negyedik fejezetben található). Ezekre a megjegyzésekre nem lesz szükségünk, csak a teljesség kedvéért tettük őket. Most pedig nézzük a definíciót.

Fixáljunk C-n egyszer és mindenkorra egy inflexiós pontot, legyen ez 0. Ez lesz a csoport nulleleme (a csoportműveletet additive írjuk.) Hogy inflexiós pontot vettünk, az csak annyiban lényeges, hogy így szebb lesz a geometriai és a csoportstruktúra kapcsolata. Legyen ezután $P, Q \in C$. Jelölje $z(P, Q)$ a P és Q összekötő egyenesének harmadik metszéspontját C-vel. Végül a P és Q összegét definiáljuk a következőképpen $P+Q=z(0, z(P, Q))$.

3.14. Tétel. Ezen a módon egy Abel-csoportot definiáltunk a C pontjain. Az invertálás és a csoportelemekkel való szorzások a C reguláris leképezései.

Bizonyítás. Az első rész bizonyításában csak az asszociativitás okoz nehézséget. Nyilván elég azt bizonyítani, hogy $z(A+B, D)=z(A, B+D)$ teljesül.

Jelölje Q_1 az $(A, B+D)(A+B, 0, z(A, B))(B, D, z(B, D))$ és Q_2 az $(A+B, D)(B+D, 0, z(B, D))(A, B, z(A, B))$ egyenesek szorzata által definiált harmadfokú görbét. A $C \cap Q_1$ és $C \cap Q_2$ pontok közül nyolc azonos és azt szeretnénk látni, hogy ekkor a kilencedik is az.

Ha ez nem teljesülne, akkor az F: $aC+b_1Q_1+b_2Q_2$ görbe át tudna menni két előre megadott ponton az $a, b_1, b_2 \in \mathbf{C}$ számok alkalmas választása mellett. Legyen $R \in (A, B, z(A, B))=L$ a felsoroltaktól különböző pont. Ha F átmegy R-en, akkor Bezout tétele miatt L komponense lesz F-nek, így $F=LH$, ahol H egy kúpszelet. H tartalmaz három kollineáris pontot, $B, D, z(B, D)$ így két egyenes szorzata, és a másik egyenes csak az $(A+B, C)$ egyenes lehet. Így F nem tud átmenni egy ezen egyenesek egyikére sem illeszkedő ponton, pedig még egy pontot szabadon választhatnánk. Ezzel az asszociativitást bizonyítottuk.

A második állításhoz elég azt belátni, hogy $z(P, Q)$ a P illetve a Q reguláris függvénye. A PQ egyenes harmadik metszéspontjának koordinátáit kell kiszámolni. A metszéspontok koordinátáira harmadfokú egyenleteket kapunk, melyeknek azonban két gyöke (a P és Q megfelelő koordinátái) már ismertek. Így ezekből a harmadik gyök már regulárisan kapható (pl. a másodfokú tag együtthatójához hozzáadjuk a két ismert gyököt és ennek ellentettjét vesszük.)

Most pedig lássuk, mennyire szerencsés a szorzásunk definíciója. A következő állítás világos a definícióból.

3.15. Tétel. $A+B+D=0$ pontosan akkor, ha egy egyenesen vannak.

Igaz ennek általánosítása is, hogy $A_1+\ldots+A_{3n}=0$ pontosan akkor, ha ezt a pontrendszert egy n-ed fokú görbe metszi ki a C-ből, de ezt nem bizonyítjuk.

3.16. Tétel. Legyenek a C és egy adott egyenes metszéspontjai P, Q, R. Az ezen pontokban húzott érintők harmadik metszéspontjai P', Q', R'. Ekkor a P', Q', R' pontok egy egyenesen vannak.

Bizonyítás. A feltétel szerint $P+Q+R=0$, továbbá $P'=-2P$, $Q'=-2Q$, $R'=-2R$ így $P'+Q'+R'=0$.

Most pedig rátérünk a harmadfokú síkgörbék geometriájának legszebb eredményére.

3.17. Tétel (Salmon). Legyen F egy sima harmadfokú síkgörbe és $P\in F$. Ekkor P-ből négy érintő húzható az F-hez (a P-beli kettőt nem számoljuk). Ezen négy érintő kettősviszonya nem függ a P ponttól. Ha az F és F' görbékre e két kettősviszony megegyezik, akkor ezen görbék projektíven ekvivalensek.

Négy egyenes hat kettős viszonyt ad. A tétel állítása tehát úgy értendő, hogy alkalmas sorrendben nézzük az érintőket, illetve egyszerűbb azt mondani, hogy a két érintőnégyes projektíven ekvivalens.

Bizonyítás. Legyen A és B két adott pont F-en, és C olyan, hogy $2C=A+B$. Legyen a egy A-an átmenő egyenes, az F-fel vett további metszéspontjai A_1, A_2. Legyen továbbá $B_i=-A_i-C$. Ekkor $B+B_1+B_2=B-(A_1+A_2)-2C=B+A-2C=0$, tehát létezik a b: BB_1B_2 egyenes. Így egy megfeleltetést kapunk az A és B tartójú sugársorok között, mely érintőt ($A_1=A_2$) érintőbe ($B_1=B_2$) visz. Azt kell csak igazolni, hogy ez a megfeleltetés projektivitás. Legyen a', b' további két megfelelő egyenes az A_1', A_2' ill. B_1', B_2' metszéspontokkal. A CA_1B_1, CA_2B_2, $CA_1'B_1'$, $CA_2'B_2'$ egyeneseket jelöljük rendre c_1, c_2, c_1', c_2'-vel.

Az $abc_1'c_2'$ és az $a'b'c_1c_2$ negyedfokú görbék az $A, B, A_1, A_2, A_1', A_2', B_1, B_2, B_1', B_2', 2C$ pontokban metszik F-et. Egy alkalmas lineáris kombinációjuk át tud menni az F egy további pontján, így akkor ennek F komponense lesz a Bezout tétel miatt, azaz $\mu abc_1'c_2'+\nu a'b'c_1c_2=F\cdot L$, ahol L egy egyenes.

Mivel mindkét negyedfokú görbe átmegy az a, a' illetve a b, b' egyenesek X ill. Y metszéspontjain, és kétszer a C-n, ezért az $F\cdot L$ is megteszi ugyanezt, tehát L átmegy az X, Y, C pontokon. De ez definíció szerint azt jelenti, hogy az általunk definiált megfeleltetés C centrumú perspektivitás, speciálisan projektivitás. Ezzel a kérdéses invarianciát beláttuk.

Legyen most F és F'-en ugyanaz a kettősviszony. Feltehető, hogy mindketten a 3.12. Tétel-beli normál alakban vannak. Legyenek A_1, A_2, A_3 ill. A_1', A_2', A_3' a görbék x tengelyen levő pontjai. A végtelenbeli $(0, 1, 0)$ pontból húzott érintők az ideális egyenes valamint a felsorolt pontokban húzott érintők. Nyilván az érintők projektív ekvivalenciája a görbék projektív ekvivalenciáját indukálja.

IV. Szingularitások

Ebben a fejezetben először a szingularitások megszüntethetőségével, majd az osztályozásukkal foglalkozunk. Csak síkgörbékkel fogunk foglalkozni, de ez nem jelent lényeges megszorítást, ugyanis igaz a következő.

4.1. Lemma. Minden görbe biracionálisan izomorf egy síkgörbével.

Bizonyítás. Legyen F a racionális függvénytest, $x\in F$ nem konstans. Ekkor $F/C(x)$ szeparábilis algebrai bővítés, így egy elemmel generálható. Legyen ez y. Ha $f(x, y)$ jelöli y minimálpolinomját $C(x)$ felett, akkor az $f(x, y)=0$ affin síkgörbe, vagy ennek projektív lezártja megfelel.

Definíció. Legyen P_x^2 és P_y^2 két projektív sík az (x_0, x_1, x_2) illetve az (y_0, y_1, y_2) projektív koordinátákkal. Az $(y_i=x_{i-1}x_{i-2})$ egyenlettel adott T racionális le-

képezést *kvadratikus* vagy *standard Cremona* transzformációnak nevezzük. A P_x^2-beli (0, 0, 1) (0, 1, 0) (1, 0, 0) pontokat *alappontoknak,* az $x_i=0$ egyeneseket pedig *alapegyeneseknek* nevezzük. Az alapegyenesek képei a másik sík alappontjai. Ha S jelöli a $P_y^2 \to P_x^2$ kvadratikus transzformációt, akkor T és S egymás inverzei, így mindketten biracionális izomorfizmusok, és az alapegyeneseken kívüli pontokban regulárisak.

Ha $F(x_0, x_1, x_2)$ egy algebrai görbe, akkor a $G(y)=F(y_1y_2, y_2y_0, y_0y_1)$ görbét az F *algebrai transzformáltjának* nevezzük. Ha most ebből kiemeljük az összes lehetséges y_0, y_1 vagy y_2-es tagokat, $G(y)=y_0^{a_0} \cdot y_1^{a_1} \cdot y_2^{a_2} \cdot F'(y)$, akkor F'-t az F *geometriai transzformáltjának* nevezzük. Ez nem más, mint az F görbe T képének a lezártja. Nyilván $(F')'=F$. Most pedig azt vizsgáljuk, hogy hogyan viselkednek a szingularitások kvadratikus transzformációkkal szemben.

4.2. Lemma. Legyen $\deg F=n$, az $x_i=x_j=0$ alappont legyen F-nek r_k-szoros pontja. $(k=i+j)$, és tegyük fel, hogy az alappontokban egyik alapegyenes sem érintője F-nek. Ekkor

(i) $\deg F'=2n-\sum r_i$

(ii) $r_i \geqq \sum r_{i,m}$ ahol $r_{i,m}$ az $F' \cap (y_i=0)$ nem alappontok multiplicitása.

(iii) F'-nek az $y_i=y_j=0$ pontban $n-r_i-r_j$-szeres pontja van, és a különböző érintők száma ebben e pontban megegyezik az $F \cap (x_k=0)$ pontok számával.

Bizonyítás. Az F' egyenletének felírásából minden állítás egyszerűen következik. A részleteket az olvasóra hagyjuk.

Most pedig bizonyítjuk az első alapvető tételt.

4.3. Tétel (Max Noether). Kvadratikus transzformációk egymásutáni alkalmazásával minden síkgörbe átvihető egy olyanba, melynek csak közönséges szingularitásai vannak.

Bizonyítás. Legyen $\sum (m_P-1)$, ahol az összegzés csak a nem közönséges szingularitásokra történik, a görbe indexe. Azt kell csak látni, hogy kvadratikus transzformációval az index csökkenthető.

Legyen P egy r-szeres, nem közönséges pont. Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy $P(1, 0, 0)$, az $x_1=0$ és az $x_2=0$ egyenes is $n-r+1$ különböző pontban metszi F-et, és az $x_0=0$ $n+2$ különböző pontban metszi x_1x_2F-et. Végezzük el a kvadratikus transzformációt és nézzük az F' indexét.

A 4.2. Lemma szerint $\deg F=2n-r$, három új közönséges szingularitás van $n, n-r, n-r$ multiplicitásokkal, és vannak a P képei $r_1, \ldots, r_m$ multiplicitásokkal. Mivel $r \geqq \sum r_i$, ezért az F' indexe kisebb mint az F-é, ha P-nek legalább két képe van. Így ha az index nem csökken, akkor P-nek egy képe van és $r=r_1$. Számoljuk ki ekkor a $(\deg F'-1)(\deg F'-2)-\sum m_P(m_P-1)$-et. Csak be kell írni a fenti adatokat és azt kapjuk, hogy ez $r(r-1)$-gyel kisebb mint a hasonló mennyiség F-re felírva. De a 3.6. Tétel miatt ez nem negatív, így ismételve a kvadratikus transzformációt egy idő után P-nek több képe kell hogy legyen, azaz az index csökken.

Be lehet látni, hogy minden görbe biracionálisan izomorf egy olyan projektív síkgörbével, amelynek csak közönséges dupla pontjai vannak. Ennek bizonyításához azonban a térgörbék vetítéseinek vizsgálata szükséges.

A szingularitások teljes megszüntetéséhez szükségünk lesz a sokaságok szorzatának definiálására. Affin sokaságok esetén ez nem okoz problémát, hiszen természetesen adódik a $C^n \times C^m = C^{n+m}$, projektív sokaságok esetén azonban nem ilyen egyszerű, hiszen P^2 alaphalmaza nem azonos a P^1 alaphalmazának direkt négyzetével. Nyilván elég $P^n \times P^m$-et definiálni, ebből a többi sokaság szorzata már

adódni fog. A definíció megkonstruálásában az vezet minket, hogy a kategória elméleti szorzat definíciónak eleget tegyen.

Legyen adott P^n és P^m az $(x_0, \ldots, x_n)$ ill. $(y_0, \ldots, y_m)$, homogén koordinátákkal. Jelöljünk P^{nm+n+m}-ben a homogén koordinátákat valamilyen sorrendben $(z_{ij}: 0 \leqq i \leqq n, 0 \leqq j \leqq m)$. A $P^n \times P^m$ legyen ezen P^{nm+n+m}-nek a $z_{ij}z_{kl} = z_{kj}z_{il}$ egyenletekkel definiált részsokaságát.

A $p_1: (z_{ij}) \to (z_{00}, z_{10}, \ldots, z_{n0})$ adja a P^n-re való projekciót, hasonlóan adódik a P^m-re való is. Mivel $z_{kl} = z_{k0}z_{0l}z_{00}^{-1}$ ezért ha $Q, R \in P^n \times P^m$-re $p_i(Q) = p_i(R)$ $(i = 1, 2)$ akkor $Q = R$. Fordítva, ha $X = (x_i)$ és $Y = (y_j)$ adottak, akkor a $Z = (z_{ij} = x_i y_j)$ pont eleme $P^n \times P^m$-nek és $p_1(Z) = X, p_2(Z) = Y$.

Könnyű belátni, hogy $P^n \times P^m$ sima és dimenziója $n+m$.

A következő eljárás alapvetően fontos a biracionális leképezések vizsgálatában. Legyen $K \subset P^n$ projektív sokaság. Vegyük $P^n \times P^{n-1}$-et, a szorzat által adódó bihomogén koordinátázással $(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{n-1})$. Legyen $P = (0, \ldots, 0, 1) \in K$. Vegyük a szorzatnak azt a részsokaságát, mely az $x_i y_j = x_j y_i$ $0 \leqq i, j \leqq n-1$ egyenletekkel van definiálva. Ha p jelöli e sokaság P^n-re vett projekcióját, akkor $p^{-1}(X)$ mindig egyelemű, kivéve ha $X = P$, akkor $p^{-1}(P) \cong P^{n-1}$. A $p^{-1}(K-P)$ projektív lezártját nevezik a K *felfújtjának*, P-t a felfújás *közepének*. A felfújtat jelöljük $B_P(K)$-val, a p megszorítását is p fogja jelölni. Ekkor a p reguláris biracionális izomorfizmus, az inverze is reguláris a P pont kivételével mindenütt.

4.4. Tétel. Legyen K egy síkgörbe, és P egy közönséges szinguláris pontja. $B_P(K)$-n a $p^{-1}(P)$-beli pontok simák.

Bizonyítás. Írjuk át a felfújást affin koordinátákra. Legyen $P = (0, 0)$ $K = f_m(x, y) + \ldots$ $f_m(x, y) = \prod_1^m (a_i x + b_i y)$; $a_i b_i \neq 0$. Fújjuk most fel a P pontot. A $P^2 \times P^1$-nek az $x_2 \neq 0, y_1 \neq 0$ által adott része izomorf C^3-bel, így itt is lehet affin koordinátákat használni, legyenek ezek x, y, z, $x = x_0 x_2^{-1}$, $y = x_1 x_2^{-1}$, $z = y_0 y_1^{-1}$. Ekkor a felfújt egyenlete a $K(x, y) = 0$ és $x = yz$. Ezt beírva K-ba $y^m \cdot [f_m(1, z) + y f_{m+1}(1, z) + \ldots]$ adódik. Mivel $B_P(K)$-nak nincsen $y = 0$-beli komponense, ezért az y^m-mel le lehet osztani, tehát a $p^{-1}(P)$-beli pontok az $f_m(1, z)$ gyökei, azaz a $z_i = a_i b_i^{-1}$, $x_i = y_i = 0$ koordinátájú pontok. Ezek száma összesen m, és csak azt kell belátni, hogy simák. Ha Q egy ilyen pont és T egy Q-beli tangensvektor, akkor $x = yz$ miatt $t_x - q_x = 0$, és az $f_m(1, z) + \ldots$ ad egy nemtriviális lineáris összefüggést a t_y és t_z között. Azaz a Q-beli tangenstér egy dimenziós, tehát Q sima. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

Az előző tétellel egy közönséges szingularitást meg tudunk szüntetni. Ha ezt több szingularitásra egyszerre lehetne csinálni, akkor a 3. Tétel miatt készen lennénk a deszingularizációval. Ennél egy kicsit többet bizonyítunk.

4.5. Tétel. Legyen F egy projektív görbe. Ekkor létezik egy $\bar{F}$ sima projektív görbe, mely biracionálisan izomorf F-fel. Az $\bar{F}$ izomorfia erejéig egyértelmű, és minden $p: \bar{F} \to F$ racionális leképezés reguláris.

Bizonyítás. Használva a 4.1. Lemmát és a 4.3. Tételt az F biracionálisan izomorf egy G síkgörbével, melynek csak közönséges szingularitásai vannak. Legyenek ezek a szingularitások $P_i = (a_{i0}, a_{i1}, 1)$. A $P^2 \times P^1 \times \ldots \times P^1$-ben nézzük az $(x_0, x_1, x_2, y_{i0}, y_{i1}: 0 \leqq i \leqq k)$ multihomogén koordinátákat. Jelölje B az $_1(x_1 - a_{i1}x_2) - y_{i0}(x_0 - a_{i0}x_2) = 0: 0 \leqq i \leqq k$ egyenletekkel definiált sokaságot, p ennek a P^2-re való projekcióját. Legyen végül $\bar{F}$ a $p^{-1}(G - \{P_1, \ldots, P_k\})$ projektív lezártja.

Amit csináltunk az nem más, mint hogy egyszerre fújtunk fel különböző pontokat. Az előző tételhez hasonló számolások mutatják, hogy $\bar{F}$ ténylegesen egy F-fel biracionálisan izomorf sima projektív görbe.

Az egyértelműség és a leképezések regularitása következni fog egy általánosabb lemmából.

4.6. Lemma. Legyen F egy görbe, T egy projektív sokaság és $p: F \to T$ egy racionális leképezés. Ekkor p reguláris az F minden sima pontjában.

Bizonyítás. Legyen $T \subset P^n$, és $p(x) = \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$. Ha $X \in F$ sima, akkor a lokális gyűrűje egyértelmű prifaktorizációs és egyetlen prímelem van a 2.8. és F.7. Tételek miatt. Legyen ez a prímelem $t(x)$ a $p'(x) = \frac{t^k f_i(x)}{t^k g_i(x)}$ leképezésben a k választható úgy, hogy minden hányados reguláris legyen az X-ben, és legalább az egyik ne legyen nulla. Ekkor p' reguláris X-ben, és ezt akartuk belátni.

Megjegyzések. Külön ki kell emelni azt a rendkívül fontos tényt, hogy egy görbe sima modellje egyértelmű. Magasabb dimenzióban ez nincsen így, és sok bajt is okoz. Pl. P^2 és $P \times P$ biracionálisan izomorfak, simák, de nem izomorfak.

A deszingularizációhoz két eljárást használtunk. A kvadratikus transzformációt és a felfújást. Fontos látni, hogy ezek lényegében ugyanazok. Fújjuk fel az (x, y) affin síkot a $(0, 0)$ pontban, és aztán vetítsük az (y, z) síkra. Ekkor egy $(x, y) \to (y, yx^{-1})$ leképezést kapunk. Írjuk ezt fel homogén koordinátákban, ekkor $(s_0, s_1, s_2) \to (s_1, s_1 s_2 s_0^{-1}, s_2) = (s_1 s_0, s_1 s_2, s_0 s_2)$ leképezés adódik, ami pontosan egy kvadratikus transzformáció. Így persze a deszingularizációhoz elég csak a felfújások használata, de ekkor térbeli szingularitásokat kellene vizsgálni.

Megemlítjük még azt a tételt, mely szerint minden sima görbe izomorfan beágyazható P^3-be. Később fogunk a P^2-be való beágyazhatóságra egy szükséges feltételt találni, amely azonban távol áll az elégségestől.

Mielőtt rátérnénk a szingularitások osztályozására, az eddig szerzett ismereteinket felhasználjuk arra, hogy Bezout tételét végleges geometriai alakba öntsük.

Legyen adott az F és G görbe. Végezzünk el egy kvadratikus transzformációt, melynek közepe az F és G egy metszéspontja. Az F és G képe F' ill. G' ezen pont képeiben esetleg metszik egymást. Ezeket nevezzük a kérdéses pont első környezetében levő metszéspontoknak. Ezt folytatjuk addig, amíg F és G-nek csak közönséges metszéspontjai lesznek. Ennek elérhetősége a 4.3. Tételhez hasonlóan látható be. Ezután igaz a következő.

4.7. Tétel. $\sum m_P(F) \cdot m_P(G) = \deg F \cdot \deg G$, ahol az összegzés a végtelen közeli metszéspontokra terjed ki.

Bizonyítás. Jelölje d a két oldal különbségét. Könnyen látható, hogy kvadratikus transzformációnál a d változatlanul marad. Ha két görbének csak közönséges metszéspontjaik vannak, akkor rájuk a d nulla a 3.5. Következmény miatt. A Tétel előtti megjegyzéssel együtt ez az állítást bizonyítja.

Most pedig rátérünk a szingularitások vizsgálatára. Szeretnénk numerikus invariánsok segítségével a szingularitások bonyolultságát mérni. Várhatóan eléggé használható a bonyolultság mérésére az, hogy mennyire nehéz megszüntetni a szingularitást. Itt csak az a baj, hogy a kvadratikus transzformációt sokféleképpen végezhetjük el. Ez azonban mindegy, ugyanis legyen $(0, 0, 1)$ a centrum. T és S két kvadratikus transzformáció. A T koordináta rendszere az (x, y, z) akkor a T

koordinátáival felírva az S koordinátarendszerét $(ax+by, cx+dy, ex+fy+gz)$ adódik. Azaz az S koordinátái a T koordináták reguláris függvényei, és fordítva, tehát a kvadratikus transzformáltak izomorfak.

Ezek után a következő definíció már egyértelmű. Legyen P egy görbe adott pontja. Végezzünk el egy P centrumú kvadratikus transzformációt. Legyenek a P képei $P_1, \ldots, P_k$. Ezeket nevezzük a P *első végtelen közeli környezetében* levő pontoknak. Induktíven definiálhatóak a P n-edik végtelen közeli környezetei. Ezen környezetek egyikében bent levő pontokat nevezzük a P-hez *végtelen közeli pontoknak*.

Ha minden a P-hez végtelen közeli pontot és az ő első környezetében levő pontokat éllel kötjük össze, akkor egy fát kapunk. Ezt a fát nevezik a végtelen közeli pontok fájának. Ha minden csúcsba csak az illető pont multiplicitását írjuk, és minden ág mentén az első egy multiplicitású pont utáni részt lehagyjuk (ez után úgyis csak csupa egy multiplicitású pont jön és elágazás sincsen), akkor egy véges fát kapunk, melynek pontjaiban természetes számok állnak. A fát úgy értjük, hogy a csúcsa megkülönböztethető a többi pontjától.

Két szinguláris pontot *algebrailag ekvivalensnek* neveznek, ha a redukált fájuk ugyanaz.

Példák. Ha P multiplicitása n és közönséges, akkor P redukált fája $n\left\langle \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} n$ darab.

Vegyük az $x^4+x^2y^2-y^2-2a^2x^2+a^4=0$ görbét, ahol a egy paraméter. $a\neq 0$-ra ennek $(0, \pm a)$-ban közönséges dupla pontja van $2\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ redukált fákkal. $a=0$-ra ez a kettő „egybeesik" és a $(0, 0)$ pont redukált fája $2-2\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ lesz.

$x^2+y^k=0$ redukált fája $2-\ldots-2-1$ $\left(\frac{k-1}{2}\right.$ darab kettes$\left.\right)$ ha $2\times k$, és $2-\ldots-2\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\left(\frac{k}{2}\right.$ darab kettes$\left.\right)$ ha $2|k$.

Mivel a szingularitás lokális fogalom, ezért természetesen kínálkozik a topológiai osztályozás lehetősége.

4.8. Tétel. Legyen P egy síkgörbe szingularitás, és nézzük P-nek egy alkalmas euklideszi környezetét a görbén. Ekkor ez a környezet homeomorf azzal a topologikus térrel, amit úgy kapunk, hogy n darab körlapot összeragasztunk a középpontjuknál, ahol n a redukált fa ágainak a száma. Ez tehát az egyetlen lokális topologikus invariáns.

Bizonyítás. A deszingularizációs eljárásra kicsit visszagondolva láthatjuk, hogy a P pont sima modell-beli ősképeinek a száma pontosan a redukált fa ágainak számával egyenlő. De egy sima pont körül egy görbe a körlappal homeomorf, és P n darab körlap középpontjának a képe. Mivel a P-n kívül a P egy környezetében a leképezés bijektív adódik a tétel állítása.

Ez azt mutatja, hogy ez a topologikus osztályozás még egy sima pontot sem tud megkülönböztetni egy nem simától. Ezért ennek egy finomítását próbáljuk adni.

Nevezzük a $P \in F$ és $Q \in G$ síkgörbe szingularitásokat *topologikusan ekvivalenseknek*, ha léteznek P ill. Q körül olyan kicsi S_P ill. S_Q nyílt gömbök P^2-ben, és egy $\varphi\colon S_P \to S_Q$ homeomorfizmus, hogy $\varphi(P)=Q$, $\varphi(F \cap S_P)=G \cap S_Q$ teljesülnek. Ez nyilván finomabb osztályozás, mint ezt a következő tétel is mutatja.

4.9. Tétel (Brauner—Zariski). Az algebrai ekvivalencia és a topologikus ekvivalencia fogalmak megegyeznek.

A bizonyítás alapgondolata a következő. Rajzoljunk a P körül egy kis gömböt. Ennek felszíne S^3 és a görbénk ide eső része egy csomót ad S^3-ban. A kapott csomó aránylag egyszerű, az ekvivalencia kérdés könnyen eldönthető. Két szingularitás pedig nyilván akkor topologikusan ekvivalens, ha a két csomó ekvivalens. A részletes számolást mellőznünk kell, ld. [11].

V. A Riemann—Roch tétel

Ebben a fejezetben az algebrai görbék elméletének alapvető eredményét bizonyítjuk, a Riemann—Roch tételt. A tételnek már a megfogalmazása is sok definíciót igényel, és a jelenlegi egyszerű (kevés előismeretet feltételező) bizonyítások egyike sem mutat rá a tétel lényegére.

Mi egy André Weil-től származó bizonyítást ismertetünk, ami viszonylag még a legvilágosabb alapgondolatú, és melléktermékként számos hasznos és fontos eredményt kiad.

Legyen P az F sima projektív görbe egy pontja és K a racionális függvénytest. Ekkor a $v_P(f)=\mathrm{ord}_P(f)\colon K\to Z$ leképezés a K testnek egy értékelését adja. Később be fogjuk látni, hogy K minden diszkrét értékelése előáll ebben az alakban, ezért most egy ideig csak a függvénytesttel foglalkozunk.

A K függvénytest diszkrét értékelései generálta szabad Abel csoportot a K *divizor csoportjának* nevezzük és Div K-val jelöljük. Ha a $\sum m_P P$ egy divizor, akkor $\deg(a)=\sum m_P$ a divizor foka. Azt mondjuk, hogy $a\geqq b$ ha $a-b$-ben minden együttható pozitív. Ha $a\geqq 0$, akkor a-t effektívnek nevezzük.

Ha $f\in K$, akkor nézzük az $(f)=\sum \mathrm{ord}_P(f)P$ formális összeget. Ez egy divizor az 5.1. Lemma miatt, ezt nevezzük az *f függvénydivizorának*.

Alapvető a következő definíció. Legyen a egy divizor. Az $L(a)=\{f\colon (f)\geqq -a\}\cup\{0\}$ egy vektortér. Ennek dimenziója legyen $l(a)$.

A Riemann—Roch tétel célja ennek az $l(a)$ függvénynek a kiszámolása. Ez lényegében a következőek miatt fontos. Legyen $a=\sum m_P P$. Ha $f\in L(a)$ és $m_P\geqq 0$ akkor f-nek P-ben legfeljebb m_P-szeres pólusa van, és ha $m_P<0$, akkor legalább m_P-szeres gyöke. Az $l(a)$ pedig az ilyen tulajdonságú lineárisan független függvények száma, így kiszámolása a Mittag—Leffler probléma szempontjából érdekes.

Két divizort *lineárisan ekvivalensnek* nevezünk, ha a különbségük függvénydivizor. Lineárisan ekvivalens divizorokra az l ugyanaz.

5.1. Lemma. Ha $f\in K$, akkor f pólus és gyökdivizora is $|K\colon C(f)|$-ed fokú. Függvénydivizor foka nulla, lineárisan ekvivalens divizorok foka egyenlő.

Bizonyítás. Legyen v a $C(f)$-en a végtelen pontbeli értékelés, $v_1, \ldots, v_k$ ennek folytatásai, $e_1, \ldots, e_k$ elágazási indexekkel. Legyen továbbá $g_1, \ldots, g_n$ a $K/C(f)$ egy bázisa. $C(f)$ elemeivel megfelelően szorozva feltehető, hogy minden g_i-nek csak a v feletti értékelésekben van pólusa. Ekkor $g_1, \ldots, g_n\in L(k_0 v)$ egy alkalmas k_0-ra, így $g_i f^{-j}\in L(kv)$, ha $0\leqq j\leqq k-k_0$. Innen adódik, hogy $l(kv)\geqq(k-k_0)n$.

Másrészt tudjuk, hogy $v=\sum e_i v_i$. Ha be tudnánk látni, hogy minden a effektív divizorra $l(a)\leqq\deg a+1$, akkor $l(kv)\leqq k\sum e_i+1$, de az F.15. Tétel miatt $\sum e_i\leqq n$, így adódna hogy, $(k-k_0)n\leqq k\sum e_i+1\leqq kn+1$. Ebből következik, hogy $\sum e_i=n$, és ez azt jelenti, hogy f pólus divizora n-ed fokú. A többi állítás innen következik.

5.2. Lemma. Ha $a \geqq 0$, akkor $l(a) \leqq \deg a + 1$.

Bizonyítás. $a = \sum m_P P$-re legyen z_P lokális paraméter a P pontban. Nézzük a $z_P^{-m_P}, \ldots, z_P^{-1}$ függvények generálta vektorteret. Az $L(a)$-nak minden ilyen vektortérre van egy természetes homomorfizmusa. Ha $f, g \in L(a)$ és minden ilyen homomorf képük azonos, akkor a különbségüknek sehol sincsen pólusa, tehát konstans. Így $l(a)$ kisebb, mint ezen vektorterek dimenziójának összege plusz egy.

Most pedig lássunk neki az $l(a)$ pontosabb leszámolásának. A Weil-féle ötlet a következő. Egy adott pontban a lokális paraméterből alkotott formális hatványsorral tetszőleges függvényt legyárthatunk. Két baj lesz csak, az egyik az, hogy ezt esetleg nem lehet az egész sokaságon értelmezni, a másik az, hogy a különböző pontokban legyártott függvényeket nem tudjuk összeilleszteni. Próbáljuk ki, hogy először nem törődünk ezekkel a problémákkal, tehát olyan objektumokat nézünk, melynek minden pontban a többitől függetlenül írjuk elő a hatványsorfejtését. Ezt a heurisztikát pontosítja a következő definíció.

A K test minden értékeléséhez fixáljunk egyszer s mindenkorra egy lokális paramétert. A P értékelésre legyen a z. Ekkor a K minden eleme z szerinti hatványsorba fejthető, ez a K-nak a $C((z))$ formális hatványsortestbe való beágyazását indukálja. A P értékelés a természetes módon kiterjed e hatványsortestre.

Vegyük ezen hatványsortestek direkt szorzatát, és ennek azt az A részgyűrűjét, mely azokból az $y = (y_P)$ elemekből áll, melyekre y_P-nek csak véges sok P-re van pólusa. Ezt a gyűrűt a K *adélei* gyűrűjének nevezzük, elemeit *adél*-eknek. Ezek lesznek a vizsgálandó formális függvények.

Tetszőleges a divizorra legyen $\Lambda(a) = \{y \in A\colon \operatorname{ord}_P(y_P) \geqq -m_P\} \cup \{0\}$, ahol $a = \sum m_P P$. Ez is egy vektortér és $\Lambda(a) \cap K = L(a)$. A $\Lambda(a)$-kat *parallelotópoknak* nevezzük. A következő lemma triviális.

5.3. Lemma. Ha $a \geqq b$, akkor $\dim \Lambda(a)/\Lambda(b) = \deg a - \deg b$ és $\Lambda(a)/\Lambda(b) \cong$ $\cong [\Lambda(a) + K/\Lambda(b) + K] \oplus [L(a)/L(b)]$.

5.4. Lemma. A $\delta(a) = \dim A/\Lambda(a) + K$ mindig véges.

Bizonyítás. Az előző lemma miatt elég egyetlen egy a esetén belátni, hogy véges. Az 5.1. Lemma-beli v-re az előző lemmát használva $\dim \Lambda(kv) + K/\Lambda(0) + K =$ $= \deg kv - l(kv) + 1 \leqq k_0 n + 1$, tehát ez egy k-tól független korlát alatt marad.

Legyen most $y \in A$ tetszőleges. A K egy alkalmas elemével szorozva yg minden pólusa v-beli lesz, így $yg \in \Lambda(ka)$ alkalmas k-ra, így $y \in \Lambda(ka) + K$. Tehát $\bigcup_k \Lambda(ka) +$ $+ K = A$, és a dimenziók korlátozottak, így tehát $\dim A/\Lambda(0) + K \leqq k_0 n + 1$.

5.4. Lemma. Az $l(a) - \deg(a) - \delta(a)$ nem függ a-tól.

Bizonyítás. Az 5.3. Lemmából adódik, hogy összehasonlítható divizorokra ez ugyanaz. De így minden divizorra ugyanaz. Az előző lemmából adódik, hogy ez véges is.

Definíció. A $g = \delta(0)$ nemnegatív természetes számot a K *nemének* nevezzük.

5.5. Tétel (Riemann). $l(a) = \deg(a) + 1 - g + \delta(a)$, ahol $\delta(a) \geqq 0$.

Bizonyítás. Mivel $l(0) = 1$ és $\deg(0) = 0$, ezért adódik az 5.4. Lemmából.

Ez az 5.2. Lemmával együtt már elég jó információt ad az l függvény viselkedéséről. Ennek pontosításához a $\delta(a)$-ról szeretnénk pontosabbat mondani.

Definíció. Egy $\delta: A \to C$ lineáris leképezést *Weil-differenciálnak* nevezünk, ha eltűnik a K-n és valamely parallelotópon. Vegyük észre, hogy a $\Lambda(a)$-n eltűnő Weil-differenciálok vektorterének dimenziója C felett pontosan $\delta(a)$. Ezért vizsgáljuk ezeket.

5.6. Lemma. A Weil-differenciálok egydimenziós K-vektorteret alkotnak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy s és t függetlenek a K felett. Legyen a olyan, hogy mindketten eltűnnek $\Lambda(a)$-n. Ha $f_1, \ldots, f_n \in L(b)$ függetlenek C felett, akkor sf_i, tf_j $(1 \leqq s, t \leqq n)$ is függetlenek C felett, és eltűnnek $\Lambda(a-b)$-n, tehát az adódik, hogy $2l(b) \leqq \delta(a-b)$, azaz $l(a-b) - \deg(a-b) - 1 + g \geqq 2l(b) \geqq 2 \deg b + 2 - 2g + 2\delta(b)$. Ha $\deg b$ elég nagy, akkor ez nyilván nem teljesülhet. Az ellentmondás bizonyítja az állításunkat.

5.7. Lemma. Minden nem nulla differenciálhoz van egy maximális parallelotóp, melyen eltűnik.

Bizonyítás. Ha s eltűnik $\Lambda(a)$-n és $\Lambda(b)$-n, akkor $\Lambda(\max a, b)$ is. Így elég azt belátni, hogy s nem tűnhet el akármilyen nagy fokú parallelotópon. Az előző lemma gondolatmenetéből adódik, hogy ha s eltűnik $\Lambda(a)$-n, akkor $l(b) \leqq \delta(a-b)$. De ekkor $l(a-b) + \deg(b) - \deg(a) - 1 + g \geqq \deg(b) + 1 - g + \delta(b)$, azaz $\deg(a) \leqq 2g - 2 + l(a-b) - \delta(b)$, így ha b elég nagy, akkor $\deg(a) \leqq 2g-2$ adódik.

Ha az s_i differenciál a $\Lambda(c_i)$ maximális parallelotópon tűnik el, akkor ha $s_1 = fs_2$ $f \in K$, akkor nyilván $c_1 - c_2 = (f)$. Így az összes $c_i - k$ lineárisan ekvivalensek. Az általuk generált (tulajdonképpen már ők maguk kiadják) ekvivalencia osztályt *kanonikus osztálynak* nevezzük, elemeit *kanonikus divizoroknak*.

Most már megfogalmazhatjuk a fejezet fő eredményét.

5.8. Tétel (Riemann—Roch). $l(a) = \deg a + 1 - g + l(c-a)$, ahol g a függvénytest neme és c egy kanonikus divizor.

Bizonyítás. Legyen c egy kanonikus divizor, s eltűnik c-n. Ha $f_1, \ldots, f_n \in L(c-a)$ függetlenek, akkor $f_1 s, \ldots, f_n s$ differenciálok függetlenek a C felett, és eltűnnek $\Lambda(a)$-n. Fordítva, minden $\Lambda(a)$-n eltűnő differenciál előáll ilyen alakban, tehát $\delta(a) = l(c-a)$. Ezt a helyett $(c-a)$-ra felírva adódik a tétel állítása.

A Riemann—Roch tétel első ránézésre nem túl szép. A fő hiba az, hogy $l(c-a)$ kiszámolása semmivel sem tűnik könnyebbnek, mint $l(a)$-é. A másik probléma az, hogy g és c meghatározása szükséges az alkalmazásához, és ezeknek az általunk adott definíciója nem néz ki használhatónak ebből a szempontból. Az első aggodalom indokolatlan, a másikkal részletesen fogunk foglalkozni.

5.9. Következmény. $l(c) = g$, $\deg(c) = 2g-2$.

Bizonyítás. Először $a = 0$-t, majd $a = c$-t helyettesítve adódik az állítás.

5.10. Következmény. Ha $\deg(a) \geqq 2g-1$, akkor $l(a) = \deg(a) + 1 - g$.

Bizonyítás. A feltételünk mellett $\deg(c-a) < 0$, és így $l(c-a) = 0$, hiszen egy függvénynek nem lehet több gyöke, mint pólusa.

Ez mutatja, hogy a Riemann—Roch tétel általában teljesen pontos információt ad $l(a)$-ról, és a kanonikus osztály pontos ismerete sem szükséges, elég a nemet tudni.

Most pedig visszatérünk a függvénytestről a görbére, és megnézzük, hogy mit jelentenek rá az eddigi eredményeink. Ezentúl görbén mindig sima projektív algebrai görbét értünk.

5.11. Tétel. A függvénytest minden értékelése a görbe egy pontjából származik.

Bizonyítás. Legyen v egy értékelés, és tegyük fel, hogy nem görbe pontból származik. Mivel $l((g+1)v) \geqq 2$, ezért van olyan nem konstans függvény a görbén, melynek egyetlen pontban sincsen pólusa (hiszen v nem görbe pontból származik). De a 2.10. Tétel miatt a görbénk analitikus sokaság, és mivel a kompakt P^n zárt része ezért maga is kompakt. Az algebrai függvények meromorfak is, és a maximum elv miatt nem vehetik fel sehol sem a maximumukat, így ha nem konstans egy függvény, akkor van pólusa. Ez bizonyítja az állítást.

5.12. Tétel. Legyen K és L két algebrai görbe és $\varphi\colon K \to L$ nem konstans racionális leképezés. Ekkor φ epimorfizmus.

Bizonyítás. A φ indukálja az L függvénytestjének a K-éba való beágyazását. Legyen $P \in L$. Ennek megfelel egy v értékelés, ami kiterjeszthető a K függvénytestjére. A kiterjesztéseknek megfelelő pontok a P-re fognak képződni.

Vizsgáljuk meg a szituációt egy kicsit részletesebben is. Mit jelent az, hogy egy értékelés elágazási indexe k? Legyen $\varphi(R) = P$ és a megfelelő értékelések elágazási indexe k. A P pontban a z lokális paraméter, az R-ben u. Ez azt jelenti, hogy ha z-t azonosítjuk a K függvénytestjében levő képével, akkor $z = u^k v$, ahol v az O_R egysége. Mivel z és u is a P, ill. R egy euklideszi környezetét bijektíven képezi a komplex sík egy nulla körüli részére, ezért a $z = u^k v$ összefüggés a következőt jelenti. Legyen $Q \in L$ elég közel a P-hez. Ekkor $z(Q)$ egyértelműen meghatározza Q-t. A K-ban k darab különböző olyan Q_i pont van az R-hez közel, melyekre az $u(Q_i)^k v(Q_i) = z(Q)$ összefüggés fennáll, tehát amelyekre $\varphi(Q_i) = Q$.

Tehát az elágazási index azt méri, hogy egy pontban a leképezés lokálisan hányrétű. Ha az elágazási index egy, akkor lokális homeomorfizmustól van szó, ha $k > 1$, akkor a leképezés éppen úgy néz ki, mint a $t \to t^k$ komplex analitikus függvény a nulla körül. Azt hiszem, hogy ez a szemléletes kép nagyon jól indokolja az elágazási index elnevezést.

Most pedig térjünk vissza a problémánkra. Nézzük a K függvénytest $\dfrac{\partial}{\partial u}$ differenciálásait ($u \in K$). A láncszabály miatt két ilyen differenciálás csak egy K-beli szorzóban térhet el, így a differenciálások generálta K vektor tér egydimenziós. Ennek duális terét, ami szintén egydimenziós, nevezzük a *K differenciálformák vektorterének*, elemeit pedig *differenciálformáknak*. Az udz differenciálformán $u, z \in K$ azt a differenciálformát értjük, mely a $\dfrac{\partial}{\partial v}$ differenciáláson az $udz\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\right) = u\dfrac{\partial z}{\partial v}$ szabály szerint hat. Így $udz = u'dz'$ pontosan akkor teljesül, ha $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{\partial z'}{\partial z}$ teljesül.

Megjegyzés. A most definiált differenciálformák megegyeznek a differenciál geometriából megszokott differenciálformákkal, csak kis eltérések vannak. Az általunk differenciálásnak nevezett dolgok nem mások, mint *vektormezők* a K sokaságon, és ezek az összes analitikus vektormezők. Ha a $\dfrac{\partial}{\partial u}$ differenciálásnak megfeleltetjük a $\dfrac{\partial}{\partial u}(P)\colon K \to C \cup \{\infty\}$ leképezést, ahol P egy pont a görbén, akkor egy P-re koncentrált deriválációt kapunk, ami a 2.7. Tétel miatt megfelel egy tangensvektornak. A differenciálgeometriában a differenciálformákat úgy kapjuk, hogy a vektormezőket *lokálisan* dualizáljuk és ebből rakjuk össze a globális differenciál-

formát. Analitikus esetben a lokális mindig meghatározza a globálisat, így elég azonnal *globálisan* dualizálni, és ez az a mód, ahogy mi definiáltuk a differenciálformákat.

Legyen most w egy differenciálforma, $P \in K$ és z lokális paraméter a P-ben. Ekkor $w = udz$ egy alkalmas u-val. Azt mondjuk, hogy w reguláris a P-ben, ha u reguláris. Definíció szerint legyen $\mathrm{ord}_P(w) = \mathrm{ord}_P(u)$. Ezek a definíciók könnyen láthatóan nem függenek a z választásától. A $w = \sum \mathrm{ord}_P(w) P$ formális összeg egy divizort definiál. Ezt nevezzük a differenciálforma *divizorának*. A differenciálformák divizorai nyilván mind lineárisan ekvivalensek egymással.

Ha az u-t Laurent sorba fejtjük P körül a z szerint, akkor a z^{-1} együtthatóját a w *P-beli reziduumának* nevezzük és $\mathrm{Res}_P(w)$-vel jelöljük. Közvetlen célunk annak belátása, hogy ez nem függ a z választásától.

Legyen adott a w differenciálforma és egy $G \subset K$ analitikus Jordan ív. Ekkor a szokott módon értelmezhető az $\int_G w$ *Stieltjes integrál*, ha w reguláris a G mentén: $P \in G$-re vesszük a $w = udz$ felírást, így egy $\int udz$ integrált kapunk, ami már egy a komplex síkon értelmezett integrálba megy át, ha felírjuk az u Laurent sorfejtését. Így az integrál szakaszonként értelmezhető. Minden fajta egyértelműséget könnyű belátni.

Ezután vegyük észre, hogy ha G egy a P körüli kicsi zárt görbe, mely egyszer kerüli meg pozitív irányban a P-t, akkor a reziduum tétel miatt $\mathrm{Res}_P(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_G w$ tehát a reziduum tényleg nem függ a lokális paramétertől.

5.13. Tétel. $\sum \mathrm{Res}_P(w) = 0$.

Bizonyítás. Felhasználjuk a 6.16. Tétel azon eredményét, mely szerint a görbénk irányítható. Ez azt jelenti, hogy készíthető olyan trianguláció, hogy csak a háromszögek belsejében van olyan pont, melyre a reziduum nem nulla, és minden háromszög belsejében legfeljebb egy, és ez a trianguláció irányítható, azaz a háromszögek mindegyikében kijelölhető egy pozitívnak nevezett körüljárás, úgy hogy minden él mentén az adódó két irány ellentétes.

Integráljuk ezután a w differenciálformát a háromszögek határain. Háromszögenként integrálva ez pont a reziduumok összege, és mivel minden él mentén kétszer integrálunk ellentétes irányba, ezért a kérdéses összeg nulla.

5.14. Tétel. Ha w egy differenciálforma, akkor az s_w: $y_P \mapsto \sum \mathrm{Res}_P(y_P w)$ egy Weil differenciálforma. A maximális parallelotóp, melyen eltűnik pontosan $\wedge((w))$. Ez a $w \mapsto s_w$ megfeleltetés izomorfizmus a K vektorterek között.

Bizonyítás. Először is a $\mathrm{Res}_P(y_P w)$-t úgy értelmezzük, hogy a fixált z lokális paraméter szerinti udz felírásból nézzük az u-t, $y_P u$-t formális hatványsorba fejtjük és ebben vesszük a z^{-1} együtthatóját. A tétel állításai közül csak az nem világos, hogy s_w eltűnik K-n, de ezt pont az előző tételünk garantálja.

5.15. Következmény. A kanonikus divizorok pontosan a differenciálformák divizorai. A reguláris differenciálformák vektorterének C feletti dimenziója pontosan g.

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvaló. A reguláris differenciálformák pontosan a $\wedge(0)$-on eltűnő differenciáloknak felelnek meg, ez adja a második állítást.

Ezzel a nemnek és a kanonikus divizoroknak világos geometriai (legalább is differenciálgeometriai) jelentést sikerült adni. Ezen fontos eredményen kívül ez a forma nagyon jól használható a nem kiszámítására.

5.16. Tétel (Hurwitz). Legyen $f\colon K\to L$ reguláris nem konstans leképezés. Ekkor

$$2g_K-2=\deg f\cdot(2g_L-2)+\sum_{Q\in K}(e_Q-1).$$

speciálisan $g_K\geqq g_L$.

Bizonyítás. Legyen w egy differenciál forma L-en. Ekkor $\deg_L(w)=2g_L-2$. w úgy is tekinthető, mint egy K-n értelmezett differenciál forma és ekkor $\deg_K(w)=$ $=2g_K-2$. Számoljuk ezt ki másképpen is.

$P\in L$-re legyen $w=z^k u dz$, ahol u egység O_P-ben. Legyen $f(Q)=P$ és x lokális paraméter Q-ban. $z=x^{e_Q}v$, ahol v egység, így $w=x^{ke_Q}v^k u d(x^{e_Q}v)=$ $=x^{ke_Q+e_Q-1}u'dx$, ahol u' egység. Így $\sum_{Q\to P}\operatorname{ord}_Q(w)=\operatorname{ord}_P(w)\sum_{Q\to P}e_Q+\sum_{Q\to P}e_Q-1$. Ha most ezt minden $P\in L$-re összegezzük, akkor adódik az állítás.

Ennek segítségével sok formula levezethető, csak egy adott görbe nemét kell ismerni.

5.17. Lemma. $C(x)$ illetve P neme nulla.

Bizonyítás. Nézzük a dx differenciál formát. A végesben ez mindenütt reguláris a végtelenbeli értékelésre $dx=-x^2dx^{-1}$, azaz $\deg(dx)=-2=2g-2$, így $g=0$.

5.18. Tétel. Legyen F egy n-ed fokú projektív síkgörbe. Ekkor

$$g_F=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum\frac{m_P(m_P-1)}{2}$$

ahol az összegzés az F végtelen közeli szinguláris pontjaira történik. Speciálisan ha F-nek csak közönséges szingularitásai vannak, akkor csak az F valódi pontjaira kell összegezni.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kérdéses formula jobboldala kvadratikus transzformációval szemben invariáns, így elég azt az esetet nézni, mikor F-nek csak közönséges szingularitásai vannak.

Legyen ezután $(0,0,1)\notin F$ olyan, hogy rajta nem megy át se szinguláris, se inflexiós pontban húzott érintő. Jelölje $p\colon F\to P$ az ebből a pontból történő vetítést. $h\colon \bar{F}\to F$ a deszingularizáció, és $f=p\cdot h\colon \bar{F}\to P$. Erre szeretnénk a Hurwitz formulát alkalmazni.

Először is világos, hogy $\sum_{Q\in K}(e_Q-1)=\sum_{P\in L}[n-(P$ ősképeinek száma)], ahol n a leképezés foka, tehát az ősképszámdefektust kell kiszámolni.

A $(0,0,1)$-ből húzott egyenes n pontban metszi a görbét, kivéve, ha érintő vagy ha szinguláris ponton megy át. Az érintőknél a 3.9. Tétel miatt $n(n-1)-$ $-\sum m(m-1)$ darab ősképet vesztünk, a szingularitásoknál $\sum(m-1)$-et. A h-nál minden pontnak egy ősképe van, kivéve a szingularitásokat, melyeknek m darab. Így itt visszanyerjük a $\sum(m-1)$ darab ősképet, tehát végül is az adódik, hogy $\sum(e_Q-1)=n(n-1)-\sum m(m-1)$. Ezt a Hurwitz formulába beírva adódik a tétel állítása.

Ez a tétel a síkgörbék nemének meghatározását elméletileg teljesen tisztázza. Ha tetszőleges algebrai egyenletet meg tudunk oldani valahogyan, akkor tetszőleges síkgörbe nemét is ki tudjuk számolni. Bár ez a feltétel nem teljesül, de sok esetben valahogy ki lehet számolni a szingularitásokból adódó tagot, és így a görbe nemét.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ezen tétel szerint a sima síkgörbék neme háromszögszám. Ez egy nagyon erős szükséges feltétel az illető sima görbe síkba ágyazhatóságára.

Most pedig egy speciális görbeosztályt vizsgálunk, mely elméletileg is rendkívül érdekes és számos példát fog szolgáltatni.

Definíció. Az $y^2=f(x)$ görbét, ahol f többszörös gyök nélküli n-ed fokú polinom *elliptikusnak* nevezzük, ha $n=3$ vagy 4 és *hiperelliptikusnak*, ha n legalább 5. Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy az elliptikus görbe nem hiperelliptikus. Ez a külön kezelés indokolt, mint azt később látni fogjuk.

5.21. Lemma. $y^2=f(x)$, $\deg f=2n+2$ biracionálisan izomorf egy $y^2=g(x)$-szel, ahol $\deg g=2n+1$.

Bizonyítás. $y^2=c\prod(x-a_i)$. Végezzük el az $y'=y(x-a_{2n+2})^{-(n+1)}$ és $x'=(x-a_{2n+2})^{-1}$ helyettesítést.

5.22. Tétel. Ha $\deg f=2n+1$ és f-nek nincsen többszörös gyöke, akkor $y^2=f(x)$ neme n.

Bizonyítás. Vetítsük a görbét az x tengelyre. A görbe végesben levő pontjai simák, a végtelenben csak egy pontja van. A végesben csak az f gyökeiben ágazik el a leképezésünk, így a Hurwitz formula $2g-2=2(0-2)+(2n+1)(2-1)+\sum_{Q\to\infty}(e_Q-1)$. Mivel a végtelen pontnak legfeljebb két ősképe van, ezért az ismeretlen rész vagy nulla vagy egy. De a formula mod 2 meghatározott, így a végtelen is elágazási pont és adódik az állítás.

A nemmel kapcsolatban még egy fogalmat kell megemlíteni, a Hilbert függvényt.

Definíció. Legyen $G\subset P^n$ projektív görbe, $I(G)\subset C[x_0,\ldots,x_n]$. Jelölje F_d a d-ed fokú homogén polinomok vektorterét, L_d ennek képét $C[x_0,\ldots,x_n]/I(G)$-ben. A $P_G(d)=\dim L_d$ függvényt a G görbe *Hilbert függvényének* nevezzük.

5.23. Tétel. Léteznek olyan a, b egész számok, hogy elég nagy k-ra $P_G(k)=ak+b$. Az a-t nevezzük a görbe fokának. Egy általános helyzetű hipersík ennyi pontban metszi a görbét. $(1-b)$-t a görbe aritmetikai nemének nevezzük. Ez izomorfia invariáns és ha G sima, akkor megegyezik a nemmel.

Például $n=2$-re a

$$0\to F_{k-m}\xrightarrow{\varphi}F_k\to L_k\to 0$$

exakt sorozatból $(m=\deg G,\ \varphi(F)=FG)$ adódik, hogy $P_G(k)=mk+\left(1-\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right)$, amire az állítások nyilván teljesülnek.

A bizonyítást sajnos mellőznünk kell.

VI. Görbék topológiája

6.1. Tétel. Egy görbe pontosan akkor kompakt az euklideszi topológiában, ha projektív.

Bizonyítás. Ha projektív, akkor a kompakt P^n zárt része, így maga is kompakt. Fordítva, legyen G kompakt, és jelölje $\overline{G}$ a Zariski-topológiában vett lezártját. Mivel $\overline{G}$ egy topologikus sokaságnak (a deszingularizáltjának) folytonos képe, és minden pontnak csak véges sok ősképe van, ezért $\overline{G}$ nem tartalmaz izolált pontot. Mivel $\overline{G}-G$ véges ponthalmaz, ezért G sűrű $\overline{G}$-ban, de mivel kompakt, ezért egyenlő a lezártjával, tehát projektív.

6.2. Tétel. Legyen az F sima görbe neme g. Ekkor az euklideszi topológiával ellátva F irányítható, kompakt, összefüggő kétdimenziós topologikus sokaság. A homotópia csoportja az $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g: a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 \ldots a_g^{-1}b_g^{-1}a_gb_g=1)$ definiáló relációval megadott csoporttal izomorf. A homológia csoportok: $H_0(F)\cong Z$, $H_1(F)\cong Z^{2g}$, $H_2(F)\cong Z$. F Euler—Poincare karakterisztikája $2-2g$, neme g. Így F egyetlen topologikus invariánsa a nem.

Bizonyítás. Ha nem lenne összefüggő, akkor létezne rajta olyan analitikus függvény, mely az egyik komponensen nulla, a többin egy, ez azonban a 7.1. Tétel miatt nem lehet.

Legyen most f: $F\to P$ reguláris, az elágazási pontok $A_1, \ldots, A_n$. Mivel P topológiailag a gömb, ezért elkészíthető egy olyan triangulációja, melynek a csúcsai között szerepelnek az A_i-k, és a háromszögek kompatibilisen irányítottak. Erre a triangulációra teljesül az Euler formula: $L+C=E+2$, ahol L a lapok, C a csúcsok, E az élek száma. A pontok és élek f-ősképei az F egy triangulációját adják, itt L', C', E' jelöli a hasonló adatokat. Legyen $\deg f=k$. Ekkor $L'=kL$, $E'=kE$, $C'=kC-2g+2-2k$, ez utóbbi a Hurwitz formula felhasználásával. Így $L'+C'-E'=2-2g$, ami az Euler karakterisztikára vonatkozó állítást adja. Ezen kívül az F triangulációja örökli a P triangulációjától a kompatibilis irányítást, így F is irányítható. A többi állítás ezután a felületek topológiájának eredményeiből következik, bizonyításukkal itt nem foglalkozunk. (ld. pl. [21]).

Így a g nemű görbéket topológiailag úgy lehet leképzelni, mint egy gömböt, amire g darab fogantyút ragasztottunk. $g=0$-ra ez a gömb, $g=1$-re a tórusz.

Nagyon természetes dolog egy görbét a valós test felett vizsgálni. Ha F egy valós együtthatós polinomokkal definiált sima görbe, akkor a valós pontjainak halmaza a körrel homeomorf komponensekre esik szét. Ezek számára ad becslést a következő

6.3. Tétel (Harnack). Egy g nemű sima görbe valós komponenseinek száma legfeljebb $g+1$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy több, és válasszuk a $P_1, \ldots, P_{g+2}$ pontokat különböző komponensekből. Legyen Q egy nem valós pont, $\overline{Q}$ a konjugáltja. A Riemann—Roch tétel szerint létezik $f\in L((g+1)(Q+\overline{Q})-(P_1+\ldots+P_{g+2}))$. Ekkor a $h(Z)=f(Z)+\overline{f(\overline{Z})}$ vagy a $\sqrt{-1}\cdot f(z)$ függvény is ezen vektortér nem nulla eleme, és valós pontokban valós értéket vesz fel. A h eltűnik az F-nek $g+2$ darab komponensén, így mindegyiken legalább kétszer eltűnik (multiplicitással) tehát legalább

$2g+4$ gyöke van. Pólusa azonban legfeljebb $2g+2$, ami nem lehet. Az ellentmondás állításunkat bizonyítja.

Megjegyzés. Tulajdonképpen elég azt feltenni, hogy a valós pontok simák. A határ el is érhető, például az $y^2=(x-1)\ldots(x-(2n+1))$ hiperelliptikus görbével, illetve ennek alkalmas deszingularizáltjával.

VII. Analitikus elmélet

A 2.10. Tételben beláttuk, hogy egy sima algebrai sokaságon természetesen adódik egy analitikus sokaság struktúra is. Erre a struktúrára nézve az algebrai függvények meromorfak. Igaz ennek a megfordítása is:

7.1. Tétel. Algebrai görbén minden meromorf függvény algebrai.

Bizonyítás. Jelölje K az algebrai függvénytestet, M a meromorf függvénytestet. Ha ezek különbözőek, akkor $\dim_C M/K=\infty$. Másrészt a Riemann—Roch tétel bizonyításában használt jelölésekkel $M/K\cong[\Lambda(0)+M/\Lambda(0)+K]\oplus \oplus[\Lambda(0)\cap M/\Lambda(0)\cap K]$.

Ebből az első tag véges dimenziós, mert már $A/\Lambda(0)+K$ dimenziója is véges. Másrészt $\Lambda(0)\cap M$ a pólus nélküli meromorf függvények vektortere, de a görbe kompakt, így ezek csak a konstansok, tehát M/K dimenziója véges. Ezen ellentmondás bizonyítja az állítást.

Ez a tétel jogosít fel minket arra, hogy ne tegyünk különbséget egy algebrai görbe mint algebrai sokaság, és mint analitikus sokaság között. Felmerül a kérdés, hogy minden analitikus sokaság előáll-e így. Erre ad választ a következő

7.2. Tétel (Riemann-féle egzisztencia tétel). Minden egydimenziós kompakt komplex analitikus sokaság izomorf egy algebrai görbével.

A fejezet végén vázolni fogunk egy bizonyítást erre az alapvető tételre, most azonban lássuk ennek egy következményét.

7.3. Tétel. A sima projektív algebrai görbék és a kompakt Riemann felületek (egydimenziós komplex sokaságok) kategóriája a természetes módon izomorf. Továbbá ezek kontravariánsan izomorfak a C feletti függvénytestek kategóriájával, ha a konstans leképezésektől eltekintünk.

Azaz tulajdonképpen mindegy, hogy algebrai görbékről, kompakt Riemann felületekről vagy függvénytestekről beszélünk, az eredmény ugyanaz, csak le kell fordítani.

Most pedig a meromorf függvények pólusainak és gyökeinek eloszlásáról szeretnénk valamit mondani. Az 5.12. Tétel utáni fejtegetéseinkből következik, hogy ha egy függvénynek (illetve az általa létesített leképezésnek) az elágazási indexe egy pontban k, akkor ott a függvény k-szoros multiplicitású értéket vesz fel. Ha most a Hurwitz formulát felírjuk, akkor adódik

7.4. Tétel. $\sum(e_Q-1)=2(g+n-1)$, azaz egy függvény többszörös értékeinek a száma csak a felület nemétől és a függvény fokától függ.

Megjegyezzük még, hogy az 5.1. Lemma szerint egy függvény minden értéket annyiszor vesz fel, mint amennyi a foka.

Most pedig megoldjuk a Mittag—Leffler problémát. Adjuk meg a $P_1, \ldots, P_n$ pontokban az f_i főrészeket, és legyen ord $f_i\geqq -n_i$. Ha létezik ennek a problémának

megoldása, akkor $f \in L(\sum n_i P_i)$ minden f megoldásra. Tegyük most fel, hogy $\sum n_i \geqq 2g-1$. Ekkor $l(\sum n_i P_i) = \sum n_i + 1 - g$. Ha az n_i-k rögzítése mellett minden f_i rendszerre lenne megoldás, akkor ez egy $\sum n_i + 1$ dimenziós függvénysereget adna ($+1$ azért jön be, mert a konstansokat mindig hozzá lehet adni a megoldásokhoz). Ha tehát az f_i főrészrendszerekre g darab lineárisan független feltételt tudnánk találni, akkor pontosan azokra a főrészekre lenne megoldható a Mittag—Leffler probléma, melyek kielégítik e feltételeket.

Legyen w egy reguláris differenciál forma. Ha f megoldása a Mittag—Leffler problémának, akkor nézzük a $\sum \mathrm{Res}_Q(fw) = 0$ összefüggést. Mivel fw-nek csak ott lehet reziduuma, ahol az f-nek pólusa, ezért ez azt jelenti, hogy $\sum \mathrm{Res}_{P_i} f_i w = 0$. Itt explicite fel lehet írni a reziduumokat és azt kapjuk, hogy ez tényleg egy lineáris feltételt ad. Nekünk összesen g lineárisan független reguláris differenciálformánk van, és ezek nyilván lineárisan független feltételeket adnak, ha $\sum n_i$ eléggé nagy. De az n_i-ket akármilyen nagynak választhatjuk, így minden f_i főrészrendszerre adódik a következő

7.5. Tétel. Az $\{f_i\}$ főrészrendszerrel a Mittag—Leffler problémának pontosan akkor van megoldása, ha $\sum \mathrm{Res}_{P_i}(f_i w) = 0$ teljesül minden w reguláris differenciálforma esetén.

Ez teljesen megoldja a Mittag—Leffler problémát, hiszen a reguláris differenciálformák csak a felülettől függenek. Gyakorlatilag eléggé nehéz azonban kiszámolni ezeket, így érdekesek lehetnek olyan tételek is, melyek kevesebbet követelnek meg egy f függvénytől, de az eredmény áttekinthetőbb.

Egy ilyen kérdés például a következő. Egy adott P ponthoz és n természetes számhoz keresendő olyan f függvény, melynek csak a P-ben van pólusa, és ott a multiplicitása n. Ha egy adott n-hez ilyen függvény nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy n a P ponthoz tartozó *Weierstrass hézag*.

7.6. Tétel. Minden pontban pontosan g darab Weierstrass hézag van, és a legnagyobb közülük legfeljebb $2g-1$.

Bizonyítás. Nyilván n pontosan akkor hézag, ha $l((n-1)P) = l(nP)$ $n \geqq 2g$-re ez nem lehet a Riemann—Roch tétel miatt, és $l((2g-1)\cdot P) = g$ miatt ez előtte pontosan g-szer kell, hogy megtörténjen (az $l(nP) \leqq l((n-1)P)+1$ nyilván teljesül).

A P pontot *Weierstrass pontnak* nevezzük, ha a hézag sorozat különbözik az $1, \ldots, g$ sorozattól. Jelöljük egy P pontban az i-edik hézagot $n_i(P)$-vel.

7.7. Tétel (Weierstrass). $\sum (n_i(P) - i) = (g-1)g(g+1)$. Tehát minden görbének legfeljebb véges sok Weierstrass pontja van, és ha a nem legalább egy, akkor mindig van Weierstrass pont.

Bizonyítás. Fixáljunk egy nem konstans z függvényt. $f_1, \ldots, f_g$-re jelölje $W(f_1, \ldots, f_g)$ a $\det(f_j^{(i)})$ Wronski determinánst, ahol $f^{(i)}$ a z szerinti i-edik deriváltat jelöli. Ha most $f_i dz$ a reguláris differenciálformák vektorterének egy bázisa, akkor legyen $h = W(f_1, \ldots, f_n)$. Ez nyilvánvalóan csak egy konstans szorzó erejéig függ a bázistól.

Nézzük a Riemann—Roch tétel $l(a) = \deg(a) + 1 - g + \delta(a)$ alakját. Az 5.14. Tétel miatt $\delta(a)$ pontosan azon differenciálformák vektorterének a dimenziója, melyeknek a divizora nagyobb vagy egyenlő az a divizornál. Így ha $l((n-1)P) = l(nP)$, akkor ez azt jelenti, hogy van olyan reguláris differenciálforma, melynek P-ben pontosan $(n-1)$-szeres gyöke van.

Legyen most a P pontban a hézagsorozat n_i. Legyen $\operatorname{ord}(w_i)=n_i-1$ reguláris differenciálforma minden i-re. Ekkor ez egy bázist ad, f_i a megfelelő függvények. Ha $\operatorname{ord}_P(dz)=r$, akkor $\operatorname{ord}_P(f_i)=n-r-1$. Írjuk fel a Wronski determinánst, de minden helyen csak a legalacsonyabb fokú tagot. Mivel $\frac{dt^k}{dt^{r+1}}=\frac{k}{(r+1)}t^{k-r-1}$, ezért a Wronski determinánsban $a_{ij}=c_{ij}t^{n_i-jr-j}$ lesz minden helyen a kezdőtag, ahol t egy P-beli lokális paraméter. Ezt az a_{ij} determinánst kifejtve egy $\sum(n_i-i)-\frac{g(g+1)}{2}\operatorname{ord}_P(dz)$ fokú homogén polinomot kapunk. Ez nem lehet nulla, mert akkor a Wronski determinánsok egy alapvető tulajdonsága miatt (ld. pl. [14]) a t^{n_i-r-1} függvények lineárisan összefüggenének, ami nem teljesül.

Ha most az itt adódott formulát a felület pontjaira összegezzük, akkor adódik az állítás.

Külön felhívjuk a figyelmet arra a következményre, hogy a kompakt Riemann felület pontjai nem ugyanolyanok, ha a nem legalább kettő. Precízen megfogalmazva ez azt jelenti, hogy a sokaság automorfizmus csoportja nem tranzitív, mert Weierstrass pontot csak Weierstrass pontba vihet. Ez azért meglepő, mert ha mint valós differenciálható sokaságot nézzük, akkor az automorfizmus csoport tranzitív és nagyon nagy. Itt még véges is ld. [7].

A Weierstrass pontok újabban egyre nagyobb szerepet kapnak az algebrai görbék elméletében, mert lehetővé teszik, hogy egy algebrai görbén valamilyen kanonikus módon válasszunk ki néhány pontot. Most pedig lássunk néhány példát Weierstrass pontok meghatározására.

7.8. Tétel. Legyen $y^2=f(x)$ $\deg f=2n+1$, hiperelliptikus görbe. A Weierstrass pontok az x tengelyre való vetítés elágazási pontjai. Ezek mindegyikében a hézagsorozat $1, 3, \ldots, 2n-1$.

Bizonyítás. Legyen $f=c\Pi(x-a_i)$. A $P=(a_i, 0)$ pontban az $(x-a_i)$-nek kétszeres gyöke van a görbén, és másutt nincsen gyöke. Így a páros számok nem lehetnek hézagok, tehát a páratlanok azok. Ezeknek a pontoknak és a végtelennek az adaléka a 7.7. Tétel bal oldalához $(n+1)n(n-1)$, de 5.22. miatt ez pont a jobboldal, tehát más Weierstrass pont nem lehet.

Ennek a tételnek nagyon fontos következménye lesz a hiperelliptikus görbék osztályozása a IX. fejezetben.

Most pedig rátérünk a görbék analitikus osztályozására. Mivel itt jelentős ismeretekre van szükség a Riemann felületek elméletéből és klasszikus komplex függvénytanból, ezért az eredményeket csak vázlatosan ismertetjük.

Definíció. Legyen S egy topologikus tér. Egy $p: T\to S$ folytonos leképezést az *S fedő sokaságának* nevezünk, ha p lokális homeomorfizmus. Azt mondjuk, hogy $q: \bar{S}\to S$ *univerzális fedő sokasága* S-nek, ha $\bar{S}$ összefüggő és S minden fedő sokaságának fedő sokasága. Ha S *ívszerűen összefüggő, lokálisan összefüggő* és *lokálisan egyszeresen összefüggő,* akkor van univerzális fedő sokasága, mely már egyszeresen összefüggő. Továbbá $\bar{S}$ azon φ automorfizmusainak csoportja, melyekre $q\varphi=\varphi$ teljesül, az S fundamentális csoportjával izomorf. Ha ezen kívül S analitikus sokaság, akkor ez a struktúra visszahúzható $\bar{S}$-ra is, így $\bar{S}$ is analitikus sokasággá tehető és ekkor q analitikus lesz. Az állítások bizonyítását ld. pl. [15].

7.9. Tétel. Egyszeresen összefüggő egydimenziós komplex analitikus sokaság mindössze három van, P, C és $E=\{z\in C: |z|<1\}$.

A bizonyítást ld. pl. [21].

Ez egyszerű lehetőséget ad a Riemann felületek osztályozására. Egy Riemann felületet *elliptikusnak, parabolikusnak* illetve *hiperbolikusnak* nevezünk aszerint, hogy univerzális fedő sokasága P, C ill. E.

Legyen K egy analitikus sokaság, $G \subset \operatorname{Aut} K$. Azt mondjuk, hogy G *szabadon* és *diszkréten* hat K-n, ha minden pontnak van olyan U környezete, hogy $1 \neq g$ G-re $gU \cap U = \emptyset$, és ha $gP \neq Q$, akkor léteznek olyan $P \in U$, $Q \in V$ környezetek, hogy $gU \cap V = \emptyset$. Ekkor természetes módon értelmezhető a K/G faktorsokaság, melynek a K egy fedő sokasága. Ha K egyszeresen összefüggő, akkor K az univerzális fedő sokasága K/G-nek, és minden olyan sokaság előáll így, melynek K egy fedő sokasága.

Ha G_1 és G_2 két diszkréten és szabadon ható részcsoportja Aut K-nak, akkor K/G_1 és K/G_2 pontosan akkor izomorfak, ha G_1 és G_2 konjugáltak.

Tehát a Riemann felületek osztályozásához nem kell mást tenni, mint meghatározni P, C ill. E diszkréten és szabadon ható részcsoportjait.

7.10. Lemma.
$$\operatorname{Aut} P = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : \; ad-bc = 1 \right\}$$
$$\operatorname{Aut} C = \{az+b\}$$
$$\operatorname{Aut} E = \left\{ e^{ix} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} : \; x \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen $f\colon C \to P$ injektív analitikus leképezés. A Casorati–Weierstrass tételből látható, hogy nem lehet lényeges szingularitása P-n, így meromorf P-n. De minden értéket csak egyszer vesz fel, így csak egy gyöke és egy pólusa lehet, innen az első két állítás következik.

A harmadik állítás a jól ismert Schwartz lemma.

Ezután térjünk rá az osztályozásra.

Elliptikus sokaságok: Aut P minden elemének van fixpontja, így P maga az egyetlen.

Parabolikus sokaságok: $az+b$-nek pontosan akkor nincsen fixpontja, ha $a=1$. Így a keresett részcsoportot egy vagy két eltolás generálja. Nekünk kompakt faktor kell, így két, R felett független eltolásunk van. Legyen $z+b$ és $z+c$ a két generáló eltolás. Így a C/G faktoron értelmezett meromorf függvények pontosan a b és c periódussal rendelkező periodikus függvények. Ezeket (b, c) periódusú *elliptikus függvényeknek* hívják.

Ilyenek mindig léteznek. Az alapvető a Weierstrass-féle függvény, melyet a
$$p(z) = z^2 + \sum_{n,m \neq 0} [(z-nb-mc)^{-2} - (nb+mc)^{-2}]$$
formula definiál. Nyilván a deriváltja is elliptikus és be lehet látni, hogy kielégíti a $(p'(z))^2 = 4(p(z))^3 - g_2 p(z) - g_3$ összefüggést, ahol $g_2 = 60 \sum_{n,m \neq 0} (nb+mc)^{-4}$ és $g_3 = 140 \sum_{n,m \neq 0} (nb+mc)^{-6}$. Így a $z \mapsto (p(z), p'(z))$ megfeleltetés egy elliptikus görbére képezi az adott parabolikus sokaságunkat. Ez injektív analitikus leképezés, így analitikus izomorfizmus. Minden elliptikus görbe megkapható ezen a módon, így a parabolikus sokaságok pontosan az elliptikus görbék.

Hiperbolikus sokaságok: Először is az E automorfizmusait szeretnénk jobban megérteni. Nézzük E-n a hiperbolikus geometria Poincare modelljét. Ennek izometrikus automorfizmusai pontosan az E analitikus automorfizmusai. Ha a G csoport

szerinti faktor sokaság kompakt, és topologikus neme g, akkor G izomorf az $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$ relációval definiált csoporttal.

Aut E ezen részcsoportjai Poincare egy tétele szerint a következőképpen kaphatóak. Veszünk az E hiperbolikus síkon egy $4g$-szöget, melynek szögösszege 2π, és oldalai $\{a_1, b_1, -a_1, -b_1, \ldots, a_g, b_g, -a_g, -b_g\}$ ebben a sorrendben, ahol az azonos betűk azonos hosszokat, a mínusz előjel pedig ellentétes irányítást jelöl. Jelölje a_i azt a síkautomorfizmust, mely az a_i oldalt átviszi a $(-a_i)$ oldalba, az irányításnak megfelelő módon. Hasonlóan definiáltatik a b_i automorfizmus. Ekkor ezen automorfizmusok egy általunk keresett csoportot generálnak, és minden csoport előáll ilyen módon.

A választott $4g$-szög képeivel a csoport kiparkettázza a hiperbolikus síkot, így a kapott analitikus sokaság topológiailag úgy kapható, hogy a sokszög megfelelő oldalait azonosítjuk egymással.

Szeretnénk most a kapott E/G sokaságot valahogyan beágyazni P^n-be. Ehhez szükséges a következő fogalom.

Ha $g \in G$, akkor g egyben egy analitikus függvény E-n. Legyen $j_g = \dfrac{\partial g}{\partial z}$. Egy f, E-n értelmezett analitikus függvényt G-re vonatkozó k súlyú *automorf formának* nevezünk, ha $f(g(z)) = f(z) j_g(z)^k$ teljesül minden $g \in G$ esetén. Az azonos súlyú automorf formák nyilván vektorteret alkotnak.

Ezek a következőre használhatóak. Legyenek adva $f_1, \ldots, f_n$ azonos súlyú automorf formák. Nézzük ekkor a $\varphi\colon E/G \to (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ leképezést. Minden f_i végtelen sokértékű, de együtt mindig ugyanúgy változik az értékük, így a kapott kép, mit a projektív tér egy pontja már egyértelmű! φ analitikus leképezése az E/G Riemann felületnek egy projektív térbe. Ha a k, azaz a súly eléggé nagy, és $f_1, \ldots, f_n$ a k súlyú formák vektorterének egy bázisa, akkor ez a leképezés analitikus beágyazás.

Ehhez csak elég sok automorf formát kell legyártani. Ez nem nehéz, ha $k \geqq 2$ és h egy az E-n korlátos analitikus függvény, akkor a $\sum h(g(z)) \cdot j_g(z)^k$ *Poincare sor* konvergál E-n, és a limesze egy k súlyú automorf forma.

Azt kell még csak belátni, hogy a kép a beágyazásnál algebrai görbe. Ez például a következőképpen történhet.

Az E-n értelmezett G-invariáns meromorf függvényeket *automorf függvényeknek* nevezzük. Be lehet látni, hogy bármely két automorf függvény között algebrai összefüggés áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a beágyazás után az $\dfrac{x_i}{x_j}$ koordinátafüggvények közül bármely kettő algebrailag összefügg, tehát a kép projektív lezártja egy algebrai görbe. De egy algebrai görbe összefüggő és így egyetlen zárt analitikus részsokasága önmaga, tehát maga a beágyazott kép már a teljes algebrai görbe, azaz E/G izomorf egy algebrai görbével.

Az itt vázolt anyag részletes kifejtése megtalálható például [18]-ban.

VIII. Abel integrálok

Történeti szempontból ez az algebrai geometria másik forrása a geometrián kívül. Alapvetően a következőről van szó. Legyen adott egy f algebrai függvény a komplex síkon, és azt kérdezzük, hogy az $\int f\,dz$ elemi függvénye-e, illetve mit lehet mondani róla, ha nem az. Mivel eléggé kényelmetlen, hogy f nem egyértékű, ezért nézzük az f Riemann felületét. Ezen már egyértékű a függvényünk, és köny-

nyebben lehet integrálni. Ezen kívül vegyük észre, hogy amit integrálunk, az nem az f függvény, hanem az $f \cdot dz$ differenciál forma. Ugyanis ha a függvényt integráljuk, akkor a koordináta transzformációnál az integrálok transzformációs formuláját kell használni, míg ha differenciálformát integrálunk, akkor akármilyen koordináta transzformáció esetén az integrálandó differenciálforma változatlanul marad. Tehát ezentúl differenciálformákról lesz szó.

Definíció. Legyen G egy algebrai görbe, $f\,dz$ egy differenciálforma. Az $\int f\,dz$ kifejezést *elsőfajú Abel integrálnak* nevezzük, ha $f\,dz$ reguláris, *másodfajúnak*, ha $f\,dz$ minden reziduuma nulla és *harmadfajúnak* egyébként.

Ezentúl az $\int f\,dz$ kifejezést a differenciálforma határozatlan integráljának tekintjük. Ez végtelenül sok értékű függvény lehet a felületen. Az első és másodfajú integrálok azért viselkednek jól, mert ott az integrál legalább lokálisan független az úttól.

Az 5.15. Következmény átfogalmazva a következőt adja.

8.1. Tétel (Abel). Léteznek olyan $w_1, \ldots, w_g$ reguláris differenciálformák, hogy az $E_i = \int w_i$ jelöléssel minden elsőfajú Abel integrál felírható $\sum a_i E_i$ alakban alkalmas $a_i \in C$ konstansokkal.

Ennek általánosítása a következő

8.2. Tétel (Abel). Léteznek olyan $J_1, \ldots, J_g$ másodfajú Abel integrálok, hogy minden másodfajú Abel integrál $\sum a_i E_i + \sum b_i J_i + f$ alakban írható, ahol $a_i, b_i \in C$ és f egy racionális függvény a kérdéses felületen.

Az állítást nem bizonyítjuk.

Részletesebben foglalkozunk az elsőfajú integrálokkal, mert itt számos rendkívül érdekes kérdés vetődik fel. Legyen $W = (w_1, \ldots, w_g)$, ahol a w_i-k a reguláris differenciál formák vektorterének egy bázisát adják. Nézzük az $\int W$ vektorintegrált. Ha C egy zárt görbe a felületen és $\int_C W \neq 0$, akkor ezt a W egy periódusának nevezzük. Stokes tételéből könnyen adódik, hogy az első homológia csoport $2g$ darab generátorához tartozó periódusok generálják az összes periódusok csoportját.

8.3. Tétel. A homológia csoport generátoraihoz tartozó periódusok R felett lineárisan független vektorai C^g-nek. Így C^g/(periódusok) egy g dimenziós kompakt komplex tórusz, egy komplex Lie csoport.

Ezt nevezik a G görbe *Jacobi csoportjának*, vagy *Jacobi sokaságának* és J_G-vel jelölik. Ha fixálunk a felületen egy 0 pontot, akkor a $\overline{\psi} = \int_0^P W\colon G \to J_G$ leképezés már egyértékű. Terjesszük ki ezt a divizorok csoportjára, majd szorítsuk meg a nulladfokú divizorok $\mathrm{Div}^0 G$ csoportjára. A kapott $\psi\colon \mathrm{Div}^0 G \to J_G$ leképezés könnyen láthatóan nem függ az O választásától.

8.4. Tétel (Abel). ψ magja pontosan a függvénydivizorokból áll.

8.5. Tétel (Jacobi). ψ epimorfizmus.

A divizor csoportnak a lineáris ekvivalencia szerinti faktor csoportját *Picard csoportnak* nevezik, és $\mathrm{Pic}\, G$-vel jelölik. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint az algebrai számelméletben fontos szerepet játszó *osztály csoport* pontos megfelelője. Az előző eredményekből adódik a

8.6. Tétel. $\mathrm{Pic}\,(G) \cong Z \oplus (R/Z)^{2g}$.

Eddig a Jacobi csoportot csak mint komplex analitikus sokaságot adtuk meg. Az algebrai geometria szempontjából érdekes és fontos az a kérdés, hogy izomorf-e ez egy algebrai sokasággal. A kérdés már csak azért is izgalmas, mert aránylag kevés komplex tórusz izomorf egy algebrai sokasággal.

8.7. Tétel. Minden G-hez létezik, és izomorfia erejéig egyetlen olyan projektív algebrai sokaság, mely mint komplex analitikus sokaság izomorf J_G-vel. Erre nézve a $\overline{\psi}\colon G \to J_G$ leképezés reguláris.

Most pedig illusztrációként és fontossága miatt külön megnézzük a $g=1$ esetet. A $G\colon y^2 = x^3 + ax + b$ elliptikus görbén az $y^{-1}dx$ differenciálforma reguláris, ezt ki lehet számolni. Nézzük a $\overline{\psi}(P) = \int_0^P y^{-1}\,dx$ leképezést. Ez egyértelmű, moduló a periódusok, melyek C-ben egy $Z \times Z$-vel izomorf L részcsoportot generálnak. Azt állítjuk, hogy a generátorok lineárisan függetlenek R felett. Ha ez nem lenne igaz, akkor létezne $0 \neq c \in C$, hogy $cL \subset R$, így $\mathrm{Re}\,(c\overline{\psi})$ egy $G \to C$ egyértékű harmonikus függvény lenne, ami kompakt sokaságon csak a konstans lehet. De akkor $y^{-1}\,dx$ nulla lenne, ami nem igaz.

Így C/L komplex tórusz, és $\overline{\psi}$ lokális analitikus izomorfizmus, mert $d\psi = y^{-1}\,dx$ sehol sem nulla. Így $\overline{\psi}\colon G \to C/L$ egy el nem ágazó fedés, tehát létezik olyan $L' \subset L$, hogy $G \cong C/L'$, és $\overline{\psi}$ megegyezik a természetes $C/L' \to C/L$ leképezéssel. De a periódusoknak benne kell lenniük L'-ben, így $L = L'$ tehát $\overline{\psi}$ izomorfizmus G és C/L között.

A G-n a 3.14. Tételben definiáltunk egy csoport struktúrát, a C/L pedig a C-től örököl egyet. Szeretnénk belátni, hogy a $\overline{\psi}$ ezen csoportok között is kapcsolatot létesít.

Tegyük fel, hogy G-n az egységelemet a végtelenben választottuk és a $\overline{\psi}$ definiálásánál is 0 a végtelenben levő pont. Ekkor $\overline{\psi}$ izomorfizmus lesz a két csoport között.

Ehhez némi előkészületre lesz szükségünk. Legyen adott egy w differenciálforma G-n, és $g \in G$. Ekkor definiálható a $t_g\colon x \to gx$ leképezés, ahol gx a G-n definiált szorzás. Ez ad egy leképezést a lokális gyűrűk között $\overline{t_g}\colon O_{gx} \to O_x$. Ez indukálja a deriválások egy $dt_g\colon \mathrm{Der}_x \to \mathrm{Der}_{gx}$ leképezését, és ennek a duális leképezése dt_g^*. Így definiálhatunk egy $t_g^* w$ differenciálformát a $(t_g^* w)(x) = dt_g^*(w(gx))$. Ez nyilván szintén egy reguláris differenciálforma. Mivel G-n a reguláris differenciálformák vektortere egy dimenziós, ezért a w és $t_g^* w$ csak konstans szorzóban térnek el egymástól. Egyszerűen ki lehet számolni, hogy valójában egyenlőek. (Például elég azt belátni, hogy a $\overline{w}(y) = dt_y^{*-1}(w(0))$ differenciálforma reguláris, mert ez nyilván invariáns az eltolásokra nézve). Tehát speciálisan az $y^{-1}\,dx$ forma is invariáns.

Legyen most $P \oplus Q = R$ a G csoporton és nézzük a $\overline{\psi}$ leképezést. $\int_0^P y^{-1}\,dx +$

$+ \int_0^Q y^{-1}\,dx = \int_0^P y^{-1}\,dx + \int_P^R t_P^{*-1}(y^{-1}\,dx)$ de az invariancia miatt a második integrálban le lehet hagyni a t_P^{*-1}-et, így a két integrál összevonható és az adódik, hogy $\overline{\psi}(P) + \overline{\psi}(Q) = \overline{\psi}(R)$, tehát $\overline{\psi}$ tényleg csoport izomorfizmus. Ezt az eredményt kicsit másképpen fogalmazva adódik az elliptikus integrálok híres addiciós tétele.

8.8. Tétel (Euler). Létezik olyan $f(\alpha, \beta)$ racionális függvény, hogy

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}} + \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}} = \int_0^{f(\alpha,\beta)} \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}}.$$

Most pedig térjünk rá az Abel—Jacobi tételek speciális esetére.

8.9. Tétel. Legyen f racionális függvény a G elliptikus görbén és legyen $Q \in P$. Nézzük az $f^{-1}(Q)$ pontokat, multiplicitással. Képezzük ezek összegét, és jelöljük ezt $h(Q)$-val. Ekkor $h(Q)$ nem függ a Q ponttól.

Bizonyítás. A h nyilván egy analitikus leképezése P-nek G-be, így a 7.3. Tétel miatt algebrai. De ekkor az 5.17. Tétel második fele miatt konstans.

Számunkra ez azt jelenti, hogy ha $Q_1, \ldots, Q_n$ az összes ősképei Q-nak, akkor $\overline{\psi}(Q_1)+\ldots+\overline{\psi}(Q_n)$ nem függ a Q-tól. Jelöljük ezt az értéket $\psi(Q)$-val. Ekkor az f függvénydivizor képe a ψ-nél úgy adódik, hogy egyszer kell venni a $\psi(Q)$-t a gyökök miatt, és ebből le kell vonni a pólusok miatt, tehát a függvénydivizorok a ψ magjában vannak benne.

Legyen ezután a egy nem függvénydivizor a ψ magjából. Legyen 0 a végtelen pont G-n és nézzük $L(a+0)$-t. A Riemann—Roch tétel miatt ez egydimenziós, legyen f egy eleme. Ha f-nek nem lenne pólusa 0-ban, akkor f függvény divizora pontosan az a lenne, ami nem lehet. Tehát $a+(f)=P-0$, ahol P egy 0-tól különböző pont. A feltételek miatt $P-0$ is benne van a ψ magjában, de $\overline{\psi}$ izomorfizmus a G-n, így ez nem lehet, ami bizonyítja Abel tételét.

A Jacobi-tétel itt egyszerű, ugyanis a $P-0$ divizor képe pontosan $\overline{\psi}(P)$ és $\overline{\psi}$-ről láttuk, hogy izomorfizmus G és J_G között.

A 8.2. Tételhez kapcsolódva megjegyezzük, hogy itt $J_1=\int x^2 y^{-1}\,dx$ egy megfelelő másodfajú Abel integrál és itt a harmadfajúak is kifejezhetőek az $\int(1+cx^2)^{-1}y^{-1}\,dx$ harmadfajú integrálok segítségével.

IX. Algebrai görbék osztályozása

Az algebrai görbék elméletének nagyon fontos feladata az algebrai görbék osztályozása. Mi itt a biracionális osztályozással foglalkozunk. A 4.5. Tétel miatt minden biracionális ekvivalenciaosztály pontosan egy sima görbét tartalmaz, így mi csak a sima görbék osztályozásával fogunk foglalkozni. Hogy egy sima görbéből hogyan lehet megkapni az összes vele biracionálisan izomorf görbét, nem foglalkozunk.

Láttuk, hogy a görbének nagyon fontos invariánsa a nem. A célunk az, hogy a nem fixálása mellett áttekintsük a g-nemű görbéket, például azt, hogy hányan vannak.

Definíció. Legyenek S, T sima kváziprojektív sokaságok, $\varphi: S \to T$ reguláris leképezés. Az (S, T, φ) hármast görbék *algebrai családjának* nevezzük, ha minden $P \in T$-re $\varphi^{-1}(P)$ egy algebrai görbe.

Definíció. Az M_g kváziprojektív sokaságot a g-nemű görbék *durva modulus terének* nevezzük, ha adva van az M_g pontjainak egy ψ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése a g-nemű sima projektív görbék halmazával, úgy hogy ha $\varphi: S \to T$ g-nemű görbék egy algebrai családja, akkor létezik egy $\sigma: T \to M_g$ reguláris leképezés, melyre $\varphi^{-1}\sigma^{-1}P$ izomorf $\psi^{-1}P$-vel minden $P \in \sigma T$-re.

Sokkal természetesebb lenne egy $\varphi: N_g \to M_g$ algebrai családot keresni, melyből minden család indukálható, de ilyen *finom modulus térnek* nevezett család általában nem létezik. Ennek oka elsősorban az, hogy egy algebrai görbének lehetnek automorfizmusai.

Az osztályozási probléma alapvető eredménye a következő

9.1. Tétel (Mumford). Minden g-re létezik M_g, mely irreducibilis és kvázi-projektív. M_g dimenziója $3g-3$, ha $g \geqq 2$ és g, ha $g \leqq 1$.

A tétel bizonyítása rendkívül nehéz és hosszú. A [13] könyv lényegében egyetlen célja ezen állítás bizonyítása. A tétel első heurisztikus bizonyítása Riemanntól származik.

Ő a tétel állítását úgy fejezte ki, hogy a g-nemű sokaságok $3g-3$ folytonos paramétertől függenek. A $3g-3$-nál nem sokkal több elemű teljes invariáns rendszer megadására irányuló kísérletek mind ez ideig eredménytelenek maradtak.

Most pedig $g \leqq 3$-ra végezzük el az osztályozást.

$g=0$. Ha $P \in K$, akkor $l(P)=2$, így létezik olyan függvény K-n, aminek csak egy pólusa van. Így ez bijektíven képezi le K-t P-re, így P az egyetlen nulla-nemű sima görbe.

$g=1$. Ha $P \in K$, akkor $l(2P)=2$, így van olyan f függvény, aminek két pólusa van. Így egy $f: K \to P$ kétszeres fedést kapunk, tehát K elliptikus vagy hiperelliptikus. Az 5.22. Tétel miatt K elliptikus, és izomorf egy $y^2=x^3+ax+b$ síkgörbével.

Nézzük az izomorfia-problémát. Legyen a K izomorf a $K'=y^2=x^3+cx+d$ elliptikus görbével, és legyen φ egy izomorfizmus. Mivel az elliptikus görbék automorfizmus csoportja tranzitív (a bal szorzások mind automorfizmusok), ezért feltehető, hogy az izomorfizmus a végtelen pontot a végtelen pontba viszi. Könnyű kiszámolni, hogy $L(2 \cdot \infty)=(1, x)$ és $L(3 \cdot \infty)=(1, x, y)$, így ha φ^* jelöli a függvénytesteken indukált leképezést, akkor $\varphi(x')=\alpha+\beta x$, $\varphi(y')=\gamma+\delta x+\varepsilon y$. Ezt behelyettesítve a K' egyenletébe $\alpha=\gamma=\delta=0$ és $\beta=\varepsilon \neq 0$ adódik, így K és K' pontosan akkor izomorfak, ha $a^3:b^2=c^3:d^2$ teljesül. Kényelmi okokból a $j(x^3+ax+b)= =a^3(a^3-27b^2)^{-1}$ invariánst választjuk, mert így az elliptikus görbék pontosan a C elemeinek felelnek meg. Tehát $M_1 \cong C$, ez tényleg egydimenziós.

$g=2$. Legyen $P+Q$ egy kanonikus divizor. Ekkor $l(P+Q)=2$, így K hiperelliptikus és biracionálisan izomorf egy $y^2=f(x)$ görbével, ahol $\deg(f)=5$. A hiperelliptikus esettel később általánosan fogunk foglalkozni.

$g=3$. Ha K hiperelliptikus, akkor egy $y^2=f(x)$, $\deg(f)=7$ görbével biracionálisan izomorf.

Ha K nem hiperelliptikus, akkor legyen $P_1+P_2+P_3+P_4=p$ egy kanonikus divizor. $l(p)=3$, legyen f_1, f_2, f_3 egy bázisa $L(p)$-nek. Nézzük a $\varphi(Q)= =(f_1(Q), f_2(Q), f_3(Q))$ $K \to P$ leképezést. Azt állítjuk, hogy φ injektív.

Ugyanis ha $\varphi(Q)=\varphi(R)$, akkor alkalmas bázis választásával feltehető, hogy $\varphi(Q)=(1, 0, 0)$ és $\varphi(R)=(c, 0, 0)$. De ez azt jelentené, hogy $l(Q+R)=l(p-Q-R)$ de ez utóbbi két dimenziós, hiszen f_2 és f_3 is eleme. Ekkor $L(P+Q)$-ban létezne egy nem konstans függvény legfeljebb két pólussal, tehát a K hiperelliptikus lenne, de feltettük, hogy nem az.

Legyen ezután $L: ax+by+cz=0$ egy egyenes P^2-ben. Az $L \cap \varphi(K)$ pontok az $af_1+bf_2+cf_3=0$ pontok képei, így legfeljebb négyelemű halmaz (multiplicitással). Ez azt jelenti, hogy $\deg(\varphi K)=4$, és a nem formulából adódik, hogy φK sima. Tehát a 3-nemű nem hiperelliptikus görbék pontosan a negyed fokú sima síkgörbék.

Az izomorfia kérdés a következőképpen oldható meg. Azt állítom, hogy két negyed fokú sima síkgörbe pontosan akkor izomorf, ha a sík egy projektív transz-

formációja létesít közöttük izomorfizmust. Tegyük fel, hogy ezt már beláttuk. Egy negyed fokú síkgörbe definiáló egyenletében 15 együttható van. Mivel csak konstans szorzó erejéig érdekes a dolog, ezért e negyed fokú síkgörbék természetes módon megfeleltethetőek a P^{14} projektív tér pontjainak. A simák ebben egy Zariski nyílt halmazt alkotnak. Ezt a nyílt halmazt kell faktorizálni a projektív síkautomorfizmusok nyolc dimenziós $PSL(3, C)$ csoportja szerint. Ezen faktortér elemei felelnek meg a 3-nemű nem hiperelliptikus sima görbéknek, és ez várhatóan egy 6 dimenziós sokaság lesz.

Most pedig térjünk vissza az állításunk bizonyítására. Először egy lemmát bizonyítunk.

9.2. Lemma. Legyen $\deg K=n$ sima síkgörbe, és $\deg G=n-3$. Ekkor $\sum I(P, K\cap G)\cdot P$ a K egy kanonikus divizora.

Bizonyítás. Feltehető, hogy az összes metszéspont a végesben van. Legyen $H(x, y)=K(x, y, 1)$ és nézzük a

$$w_x = G(x, y, 1)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1} dy \quad \text{és} \quad w_y = G(x, y, 1)\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{-1} dx$$

differenciál formákat a H affin görbén. $w_x=w_y$, ahol mindkettő értelmes, és ha w jelöli az együttesen definiált differenciálformát a H-n, akkor $(w)=\sum I(P, H\cap K)\cdot P$ Rutinszámolás mutatja, hogy w-nek a végtelenben se gyöke, se pólusa nincsen (itt kell a $\deg G=n-3$ feltétel), így az állítást bizonyítottuk.

Talán ez a lemma adja a legegyszerűbb lehetőséget sima síkgörbék nemének kiszámolására.

Vegyük most észre, hogy ha $L(p)$-ben egy másik bázist választunk, vagy p helyett egy másik kanonikus divizorból indulunk ki, akkor a kapott beágyazások csak a P^2 egy projektív automorfizmusában térnek el egymástól. Ha tehát be tudjuk látni, hogy minden sima negyedfokú síkgörbe előáll, mint önmagának a képe egy alkalmas kanonikus divizor és bázis választásával, akkor készen leszünk.

De ha a $z=0$ egyenessel kimetszett kanonikus divizorhoz az $(xz^{-1}, yz^{-1}, 1)$ bázist választjuk, akkor a kapott leképezés pontosan az identitás, ezzel az izomorfia feltétel bizonyítását befejeztük.

Most pedig nézzük a hiperelliptikus görbéket. A 7.8. Tétel miatt a bizonyítás nagyon egyszerű lesz. Ha $y^2=f(x)$ egy hiperelliptikus görbe és $K\to P$ az x-tengelyre való vetítés, akkor jelölje $E(K)$ az elágazási pontokat. Ekkor igaz a következő

9.3. Tétel. A K és K' hiperelliptikus görbék pontosan akkor izomorfak, ha $E(K)$ és $E(K')$ a P egy alkalmas automorfizmusával egymásba vihetőek.

Bizonyítás. Legyen Q az egyik elágazási pont ősképe a K-n, és $(x-a)$ a megfelelő gyöktényező. Mivel K és K' izomorfak, ezen izomorfiánál Q képe Weierstrass pont, tehát a 7.8. Tétel miatt szintén egy elágazási pont ősképe, és itt $(x'-b)$ a megfelelő gyöktényező. Az izomorfia után $x'-b$ benne van a konstansok és $x-a$ generálta $L(2Q)$ vektortérben, így x' lineáris transzformációval kapható x-ből, ami a P automorfizmusa.

Most pedig készítsük el a hiperelliptikus görbék modulus terét. Eredményünk szerint csak a P $2g+2$ elemű részhalmazait kell osztályozni automorfizmus erejéig. P automorfizmusait a 7.10. Lemma írja le, ez egy háromszorosan tranzitív csoport. Így minden $2g+2$ elemű halmaz lenormálható úgy, hogy tartalmazza a $0, 1, \infty$ pontokat.

Az ilyen rendezett $2g-1$-esek terét úgy kapjuk meg, hogy P-t $2g-1$ példányban összeszorozzuk, és ebből kihagyjuk azokat a $2g-1$-eseket, melyeknek koordinátái közt szerepel két azonos, vagy a 0, 1, ∞ egyike. Így egy sima analitikus sokaságot kapunk.

Minket nem a rendezett $2g+2$-esek érdekelnek, hanem a rendezetlenek, ezért még faktorizálni kell az S_{2g+2} szimmetrikus csoport hatása szerint. Véges csoport szerint mindig lehet faktorizálni, így a modulus tér egy $2g-1$ dimenziós analitikus sokaság lesz, szingularitásokkal.

Vizsgáljuk meg ezeket a szingularitásokat. Egy ilyen akkor keletkezik, ha az S_{2g+2} egy elemének van fixpontja. Legyen K egy ilyen pont, és nézzük a stabilizátorát, legyen ez G. A K egy alkalmas kis gömbi környezetének a határa az S^{4g-3} gömb, és ezen hat a G csoport, és az S^{4g-3}/G faktor sokaság várhatóan nem lesz egyszeresen összefüggő, így K képe szinguláris lesz.

Nézzük meg, melyek ezek a K görbék. Nézzük a K automorfizmusait. Ezek között van egy triviális, az $(x, y)\mapsto(x, -y)$. Ez a centrumban van, és ami igazán érdekes, az a szerinte vett faktor. A 9.3. Tétel szerint ez a faktor az előzőekben szereplő G-vel lesz izomorf. Tehát várhatólag a modulus térnek pontosan azokban a görbékben lesz szingularitása, amelyeknek van nem triviális automorfizmusa, és ez tényleg igaz. Tehát a modulus tér egészen váratlan módon tükrözi a görbék néhány tulajdonságát.

X. Számelméleti alkalmazások

10.1. Tétel. Legyen A egy a $C[x]$ felett algebrai, végesen generált integritási tartomány. Ekkor A-ban pontosan akkor érvényes az egyértelmű prímfaktorizáció, ha A egész zárt és hányadosteste tisztán transzcendens a C felett.

Bizonyítás. Az egészzártság nyilván szükséges, mint az F.7. Tételben. Továbbá könnyen látható, hogy az egyértelmű prímfaktorizáció azt jelenti, hogy minden minimális ideál prím.

Nézzünk egy F affin görbét, melynek koordináta gyűrűje az A. Ilyen van, hiszen A végesen generált. A 2.8. és F.8. Tételek miatt F sima. Legyen $\bar{F}$ a sima projektív lezártja. F minden pontjának megfelel egy minimális prímideál. Ha ez főideál, akkor van olyan $f\in A$, melynek F-en egyetlen gyöke a kérdéses pont. Számossági okokból van két különböző ponthoz tartozó ilyen f_1 és f_2 függvény, melyek az $\bar{F}-F$ minden pontjában ugyanolyan multiplicitásúak. Ekkor $f_1 f_2^{-1}$-nek csak egyetlen gyöke van az egész $\bar{F}$-on, azaz $\bar{F}$ neme nulla, tehát A hányadosteste tisztán transzcendens.

A feltétel elégségessége nyilvánvaló, mert P minden affin részén meg lehet adni olyan reguláris függvényt, aminek csak egy adott pontban van gyöke.

Ez az eredmény eléggé meglepő, ha azt nézzük, hogy $C[x]$ helyett Z-re semmi hasonló nem ismeretes.

A függvénytestek számelmélete szempontjából a Hurwitz tétel rendkívül fontos. Például segítségével nagyon egyszerűen következik, hogy $C(x)$ minden bővítése elágazik.

Most pedig a legfontosabb alkalmazási területre térünk rá, a diofantoszi egyenletek elméletére. A témakör első rendkívül nevezetes és erős eredménye a következő.

10.1. Tétel (Siegel). Legyen $f(x, y)$ neme legalább egy és legyen K egy a Z felett végesen generált integritási tartomány. Ekkor f-nek csak véges sok gyöke van K-ban.

A bizonyítástól annak hossza és nehézsége miatt el kell tekintenünk. Hogy a tétel erejét és alkalmazhatóságát megmutassuk, levezetjük segítségével a következő állítást.

10.3. Tétel. Legyen $f \in Z(x)$ és tegyük fel, hogy az $y^n = f(x)$ egyenletnek végtelen sok gyöke van Z-ben. Ekkor a következő három eset egyike teljesül:

(i) $$f(x) = (g(x))^n$$

(ii) $$f(x) = (g(x))^n (ax+b)^k$$

(iii) $$f(x) = (g(x))^n (ax^2+bc+c)^{\frac{n}{2}}.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) = c \prod (x-a_i)^{k_i}$. Nyilván feltehető előre, hogy $0 < k_i < n$, és hogy n és a k_i-k együttesen relatív prímek. Vetítsük ezután az $y^n = f(x)$ projektív lezártját az x egyenesre, és Hurwitz tétele segítségével számoljuk ki a nemet. Az $y^n = f(x)$ sima modelljét képezve P-re minden pontnak n ősképe lesz, kivéve az a_i-ket és esetleg a végtelent. Az $(a_i, 0)$ pont környékén a görbénk analitikusan izomorf $y^n = x^{k_i}$-vel, így itt az ágak száma (n, k_i). Így ha felírjuk a Hurwitz formulát

$$-2 = -2n + \sum [n - (P \text{ ősképeinek a száma})].$$

Mivel a fentiek szerint P ősképeinek a száma osztja n-et, ezért az összegben minden tag legalább $n/2$, így az összeg legfeljebb 3 tagú lehet. Ha az összeg két tagú és az egyik elágazási pont a végesben van, akkor a másik a végtelenben; ez adja az (ii) esetet. Ha mindkét elágazási pont a végesben van, akkor $f(x) = c(g(x))^n (x-a_1)^k (x-a_2)^{n-k}$, mert ekkor a végtelenben nem lehet elágazási pont. Ezzel az esettel még foglalkozunk.

Ha most pontosan három elágazási pont lenne, akkor nézzük a $2n-2 = \sum (n-d_i)$, $d_i | n$ megoldásait, ahol a relatív prímségi feltétel miatt a d_i-k legkisebb közös többese legalább n. Ezután könnyű számolás mutatja, hogy ezek a feltételek együtt már nem elégíthetőek ki.

A hátramaradt eset tehát $y^n = a(cx+d)^k (ex+f)^{n-k}$, ahol a szereplő számok egészek, mert $(n, k) = 1$. $cf - ed \neq 0$, mert a két tényező relatív prím.

Ha $g | cx+d$ és $g | ex+f$, akkor $g | cf$-ed így $cx+d$ és $ex+f$ legnagyobb közös osztója végtelen sok megoldásra ugyanaz. Ekkor

$$\left(\frac{y}{g}\right)^n = \left[a_1 \left(\frac{cx+d}{g}\right)^k\right] \left[a_2 \left(\frac{ex+f}{g}\right)^{n-k}\right],$$

ahol $a_1 a_2 = a$ és a jobboldalon a szögletes zárójelben levő tagok külön-külön n-edik hatványok. Az $a_1 a_2 = a$ felbontás végtelen sok megoldásra ugyanaz, rögzítsünk egy ilyet. $a_i = p_i^n / r_i^k$ felírással $\left(\frac{cx+d}{g r_1}\right)^k = \left(\frac{s}{p_1}\right)^n$ és $\left(\frac{ex+f}{g r_2}\right)^k = \left(\frac{t}{p_2}\right)^n$ alkalmas t és s-re végtelen sokszor teljesül. Így az egyenlőségek bal oldalain a zárójelekben levő számok végtelen sokszor n-edik hatványok egyszerre. Kiküszöbölve az x-et adódik, hogy egy $z_1 s'^n - z_2 t'^n = z_3$ egyenletnek végtelen sok gyöke van, ahol $z_3 \neq 0$. De erről már láttuk, hogy ekkor $n = 2$, azaz az (iii) eset adódott.

Ha f-nek a neme nulla, akkor racionálisan paraméterezhető, így végtelen sok racionális megoldás van. Felvetődik a kérdés, nem igaz-e az is, hogy ha f neme legalább egy, akkor $f(x, y) = 0$-nak csak véges sok racionális megoldása van. Ez nem igaz, de igaz a következő.

10.4. Tétel (Mordell). Legyen f egy elliptikus görbe, K végesen generált testbővítése Q-nak. Ekkor az $f(x, y)=0$ K-beli megoldásainak a csoportja végesen generált.

Ez úgy értendő, hogy ha $f \in K[x, y]$ és az elliptikus görbén egy K^2-beli elemet választunk nullának, akkor a 3.14. Tételben definiált szorzás olyan tulajdonságú, hogy K-beli elemek szorzata is K-beli. Azaz van értelme beszélni a K-beli elemek csoportjáról.

Például az $y^2+y=x^3-x$ racionális pontjai a $(0, 0)$ pont generálta szabad Abel csoportot alkotják. (az egységelem a végtelenben).

Végezetül megemlítjük a véges testekre vonatkozó alábbi alapvető eredményt.

10.5. Tétel (Weil). Legyen $f(x, y) \in Z[x, y]$ f neme g és jelölje $N(p)$ az $f(x, y) \equiv 0(p)$ megoldásainak a számát. Ekkor $|N(p)-p-1| \leqq 2g\sqrt{p}$, tehát elég nagy p-re mindig van megoldás.

A bizonyítás alapötlete a következő: Jelölje G a p elemű véges test algebrai lezártját és nézzük f-et mint G feletti görbét. Jelölje P^2 a G feletti projektív síkot, $f \subset P^2$.

A $P^2 \to P^2$ Frobenius leképezésen az $(x, y, z) \to (x^p, y^p, z^p)$ leképezést értjük. Ez f-et önmagába viszi és fixpontjai pontosan a prímtestbeli elemek.

Nézzük most az $f \times f$ felületet, ezen a D diagonálist és a Frobenius leképezés E gráfját. Az $E \cap D$ pontok adják a kongruenciánk megoldásait. Így, ha ezen felületre is kidolgozunk egy a Bezout tételhez hasonló metszéspont leszámlálási eljárást, akkor meg lehet határozni $N(p)$-t. Ez a leszámlálás azonban nehéz és ez adja a tétel lényegét.

FÜGGELÉK: KOMMUTATÍV ALGEBRA

Gyűrű mindig kommutatív egységelemes gyűrűt fog jelenteni. A nem definiált fogalmak megtalálhatóak például [16]-ban.

Legyen K egy test, $R \subset K$ egy gyűrű. Az $a \in K$ elem *egész* az R felett, ha létezik olyan $f \in R[x]$ egy főegyütthatójú polinom, melyre $f(a)=0$. Ez ekvivalens azzal, hogy az $R[a]$ gyűrű végesen generált R-modulus, feltéve, hogy R maga Noether-féle.

Az R felett egész elemek K-ban könnyen láthatóan gyűrűt alkotnak, melyet az R *egész-lezártjának* nevezünk. R-et *egész-zártnak* nevezzük, ha egybeesik a saját egész-lezártjával a hányados testében. Egyszerűen bizonyítható, hogy az egész lezárt már egész-zárt.

F.1. Tétel (Noether-féle normalizáció lemma). Ha R egy F test felett végesen generált integritási tartomány, akkor léteznek $x_1, \ldots, x_k \in R$ algebrailag független elemek, hogy R egész $F[x_1, \ldots, x_k]$ felett.

Bizonyítás (Nagata). Legyen $R=F[y_1, \ldots, y_n]$. Az állítás nyilvánvaló, ha az y_i-k algebrailag függetlenek. Ellenkező esetben legyen $f(y_1, \ldots, y_n)=0$. A $z_1=y_1$, $z_i=y_i-y_1^{k_i}$ helyettesítéssel $f(z_1, z_2+z_1^{k_1}, \ldots, z_n+z_1^{k_n})=0$. Ha a $k_2, \ldots, k_n$ sorozat eléggé gyorsan nő, akkor e polinomot z_1 szerint kifejtve a főegyüttható F eleme lesz, azaz z_1 egész lesz $F[z_2, \ldots, z_n]$ felett. Az eljárást folytatva adódik a tétel állítása.

F.2. Tétel (Gyenge zérushelytétel). A $C[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrű minden maximális ideálja $(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$ $(a_i \in C)$ alakú.

Bizonyítás. Legyen $R=C[x_1, \ldots, x_n]$, M egy maximális ideál. Az R/M test és a C felett végesen generált integritási tartomány. Az előző tétel szerint R/M egész $C[z_1, \ldots, z_k]$ felett. Ha $f \in C[z_1, \ldots, z_k]$, akkor f^{-1} kielégít egy $f^{-m}+ +b_{m-1}f^{-m+1}+\ldots=0$ $C[z_1, \ldots, z_k]$ feletti polinomot. Ezt f^{m-1}-gyel szorozva adódik, hogy $f^{-1} \in C[z_1, \ldots, z_k]$. De ez csak akkor lehet, ha $k=0$, azaz R/M egész C felett. De C algebrailag zárt test, így $R/M=C$. Legyen az x_i képe a_i, ekkor $x_i-a_i \in M$ adódik. De már az x_i-a_i elemek egy maximális ideált generálnak, így $M=(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$.

F.3. Tétel (Hilbert zérushelytétele). Legyenek $g, f_1, \ldots, f_k \in C[x_1, \ldots, x_n]$ és tegyük fel, hogy g eltűnik az f_i-k minden C^n-beli közös gyökén. Ekkor $g^m \in (f_1, \ldots, f_k)$ egy alkalmas m-re.

Bizonyítás. Nézzük az $f_1, \ldots, f_k, 1-x_{n+1}g \in C[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ polinomokat és jelölje I az általuk generált ideált. Ha ez valódi, akkor beágyazható egy M maximális ideálba, ami (x_i-a_i) alakú az előző tétel miatt. Mivel ekkor $f_i(a_1, \ldots, a_n)=0$, ezért $g(a_1, \ldots, a_n)=0$ azaz $1-a_{n+1}g(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, ami ellentmondás. I tehát nem valódi, így $h(1-x_{n+1}g)+\sum h_i f_i=1$ alkalmas $h, h_i \in C[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ polinomokkal. Itt $x_{n+1}=g^{-1}$-et helyettesítve, és g alkalmas nagy hatványával átszorozva adódik a kívánt összefüggés.

Megjegyzés. Az F.2. és F.3. tételek bizonyításai tetszőleges algebrailag zárt testre jók. Az F.3. tétel modellelméleti úton is egyszerűen bizonyítható.

F.4. Tétel (Lasker—Noether, gyenge forma). Legyen R Noether gyűrű, A egy ideál R-ben, mely egyenlő a radikáljával. Ekkor A előáll prímideálok metszeteként és a nem rövidíthető felbontás egyértelmű.

Bizonyítás. Legyen A egy legnagyobb olyan ideál, melyre az egzisztenciarész nem igaz. Ekkor A maga nem lehet prím, így könnyen láthatóan előáll két nála nagyobb ideál metszeteként, $A=B \cap C$. De $\sqrt{B} \cap \sqrt{C}=\sqrt{A}=A$, így a B és C egy megfelelő felbontásából az A egy megfelelő felbontása kapható.

Legyen ezután $A=\cap P_i=\cap Q_j$ két már nem rövidíthető felbontás. Legyen $b_i \in P_i-Q_1$. Ekkor $\prod b_i \in A \subset Q_1$, ami nem lehet. Így $Q_1 \supset P_k$ egy alkalmas k-ra. Hasonlóan $P_k \supset Q_n$, azaz $Q_1 \supset Q_n$. De a $\cap Q_i$ felbontás már nem rövidíthető, így $1=n$ és $Q_1=P_k$. Ezt ismételten alkalmazva adódik a tétel állítása.

F.5. Tétel (Krull). Legyen R integritási tartomány és I egy valódi prímideál R-ben. Ekkor R/I transzcendencia foka kisebb mint R-é, vagy végtelen.

Bizonyítás. Legyen $z_1, \ldots, z_n$ maximális algebrailag független rendszer R/I-ben és $x_1, \ldots, x_n$ tetszőleges ősképek. Elég látni, hogy ez utóbbi nem lehet maximális független rendszer. Ha az, akkor $0 \neq y \in I$-re legyen $f(y, x_1, \ldots, x_n)=0$, f irreducibilis. Így $f(0, z_1, \ldots, z_n)=0$ és nem azonosan nulla polinom, ami ellentmond annak, hogy a $z_1, \ldots, z_n$ algebrailag függetlenek.

Definíció. Egy R Noether gyűrűt *lokálisnak* nevezünk, ha csak egyetlen maximális ideálja van. Ha lokális gyűrűről beszélünk, akkor M mindig a maximális ideált fogja jelölni.

Az R dimenziója n, ha létezik $P_0 < \ldots < P_n$ szigorúan növő prímideállánc, de hosszabb nem (R nem prímideál, de a 0 esetleg igen). R-et regulárisnak nevezzük, ha a maximális ideál generálható annyi elemmel, amennyi a dimenzió. Be lehet

látni, hogy ennél kevesebbel nem generálható, de mi ezt csak egy dimenzióban használjuk, ahol triviális.

F.6. Tétel. Lokális gyűrűben $\cap M^n=0$. Reguláris lokális gyűrű nullosztómentes.

Bizonyítás. Csak dim $R=1$, $0=\sqrt{0}$ esetén. F.4. miatt minden ideál tartalmazza nála nem kisebb prímideálok alkalmas szorzatát. Legyen $0=\cap P_i$ minimális felbontás. R/P_i-ben M az egyetlen nem triviális prímideál, így M^n tetszőlegesen kicsi lehet, tehát $\cap M^n \subseteq P_i$, de ez minden i-re így $\cap M^n=0$.

Ha R reguláris és t az M egy generátora, akkor ez azt jelenti, hogy minden elem előáll et^n alakban, ahol e egység. De ekkor nullosztó csak úgy lehet, ha $t^m=0$ alkalmas m-re, de feltettük, hogy ez nem lehet. Speciálisan tehát a 0 prímideál.

F.7. Tétel. Legyen R egydimenziós lokális integritási tartomány. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) R reguláris

(ii) R-ben teljesül az egyértelmű prímfaktorizáció

(iii) R egész-zárt.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii). Az előző tétel bizonyításában szereplő et^n felírás nyilván egyértelmű, így adódik az állítás.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Legyenek $p, q \in R$ relatív prímek, pq^{-1} egész. Ekkor $p^n q^{-n}+\ldots=0$. q^n-nel átszorozva minden tag osztható lesz q-val, kivéve p^n-et, ellentmondás, így q egység és $pq^{-1} \in R$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Legyen K az R hányadosteste. $M^{-1}=\{x \in K: xM \subseteq R\}$. Azt állítjuk, hogy $M^{-1}M=R$. Ha nem, akkor $M^{-1}M \subseteq M$, így indukcióval adódik, hogy $M^{-n}M \subseteq M$, azaz $M^{-n} \subseteq M^{-1}$, tehát M^{-1} részgyűrűje lenne K-nak. Ha $m \in M$, akkor $M^{-1} \subseteq m^{-1}R$, de R Noether-féle, így M^{-1} is végesen generált R modulus. Így M^{-1} egész R felett, tehát $M^{-1}=R$.

De ha $0 \neq r \in M^2$, akkor $M^k \subseteq rR$ egy legkisebb k-ra, így létezik $b \in M^{k-1}-rR$, hogy $bM \subseteq rR$, azaz $br^{-1}M \subseteq R$, de $br^{-1} \notin R$. Tehát $M^{-1} \neq R$, azaz csak $M^{-1}M=R$ lehet.

Most ha $t \in M-M^2$, akkor $tM^{-1}=R$, mert különben $tR \subseteq tM^{-1}M \subseteq M^2$ lenne, ami nem lehet. Tehát $tR=tM^{-1}M=RM=M$, azaz R reguláris.

Megjegyzés. Magasabb dimenzióban csak (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) teljesül. A második implikációt bizonyítottuk, az első azonban nehéz.

F.8. Tétel. Legyen F egy Noether integritási tartomány, K a hányadosteste és M egy maximális ideálja. Ekkor az F és $(F-M)^{-1}$ által generált O_M gyűrű lokális. Ha F egész-zárt, akkor ez a lokális gyűrű is az. Ha F-nek a C feletti transzcendencia foka egy, akkor dim $O_P=1$.

A bizonyítást könnyű gyakorlatként az olvasóra hagyjuk. A dim $O_P=1$ állítás az F.5. Tételből adódik.

Legyen R egy lokális gyűrű. Ekkor M/M^2 vektortér az R/M felett. Ennek dimenzióját nevezzük R *beágyazási dimenziójának*, és emdim R-rel jelöljük. Szükségünk lesz a következő sok szempontból is hasznos segédtételre.

F.9. Tétel (Nakayama lemma). Legyen A az R lokális gyűrű felett végesen generált modulus. Ha $MA=A$, akkor $A=0$.

Bizonyítás. Legyen $a_1, \ldots, a_n$ egy minimális generátor rendszer. A feltétel szerint léteznek $m_1, \ldots, m_n \in M$ elemek, hogy $a_1 = m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n$, azaz $a_1(1-m_1) = m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n$. De $1-m_1$ invertálható, így a_1 előáll a többiek lineáris kombinációjaként, ami ellentmondás.

F.10. Tétel. Az M generátorainak minimális száma emdim R. Tehát emdim $R \geqq \dim R$ és R pontosan akkor reguláris, ha egyenlőség áll.

Bizonyítás. Legyenek $m_1, \ldots, m_k \in M$ olyanok, hogy képeik bázist alkotnak M/M^2-ben. Legyen az általuk generált ideál N. Azt kell látni, hogy $N = M$. A feltétel szerint $M = N + M^2$, így M/N kielégíti a Nakayama lemma feltételét, tehát $N = M$.

Definíció. Legyen R egy C feletti integritási tartomány és F egy őt tartalmazó test. Egy $D: R \to F$ leképezést *deriválciónak* nevezünk, ha C-lineáris és a $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ Leibnitz szabály teljesül. A hányados deriválási formulájával D egyértelműen terjeszthető ki a hányadostestre. Világos továbbá az is, hogy az R deriválciói F vektorteret alkotnak.

F.11. Tétel. Az R deriválciói vektorterének a dimenziója pontosan az R transzcendencia foka.

Bizonyítás. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ az R egy transzcendencia bázisa. Ezeken az elemeken a deriváció tetszőlegesen előírható és ezután kiterjeszthető $C(x_1, \ldots, x_n)$-re. Elég tehát azt belátni, hogy szeparábilis algebrai bővítésre minden deriváció egyértelműen kiterjeszthető, nulla karakterisztikában nimden bővítés szeparábilis.

Legyen az y elem minimálpolinomja $f \in C(x_1, \ldots, x_n)[y]$. Jelölje f^D azt a polinomot, amit úgy kapunk, hogy az f együtthatóit lederiváljuk D szerint, f' pedig az y szerinti formális deriváltat. Ha a Dy értelmezhető, akkor a $0 = f(y)$-t deriválva $0 = f^D(y) + f'(y) \cdot Dy$ adódik. Mivel $f'(y) \neq 0$, ezért innen Dy kifejezhető, és ez adja meg az y generálta testre való kiterjesztést.

Most pedig az értékeléselmélet azon eredményeit ismertetjük, melyekre az ötödik fejezetben lesz szükségünk. Mivel értékeléselméletről van magyar nyelvű irodalom [16], ezért az ott bizonyított eredményekre mi csak hivatkozunk.

Definíció. Legyen F egy test, $v: F - \{0\} \to Z$ egy leképezés a következő tulajdonságokkal.

i $v(fg) = v(f) + v(g)$

ii $v(f+g) \geqq \min(v(f), v(g))$

iii v epimorfizmus.

Ekkor v-t az F *diszkrét normálásának* vagy *diszkrét értékelésének* nevezik. ([16]-ban a diszkrét kitevő értékelés elnevezés szerepel). Ha v azonosan nulla az F egy E résztestjén, akkor azt mondjuk, hogy v *megöli E-t*. Ha F egy G algebrai görbe C_G függvénytestje, akkor mi diszkrét értékelésen csak a C-t megölő értékeléseket fogjuk érteni.

Például, ha P a G görbe egy sima pontja, akkor C_G egy értékelése a következő, $v_P(f) = \mathrm{ord}_P(f)$, azaz $v_P(f) = n$, ha f-nek n-szeres gyöke van P-ben és $-n$, ha n-szeres pólusa.

F.12. Tétel. $C(x)$ tetszőleges diszkrét értékelése a P pontjaiból származó v_P értékelések egyike.

Bizonyítás. [16] 322. Tétel.

Legyen F/E egy testbővítés, v az E és w az F egy értékelése. Azt mondjuk, hogy w a v értékelés folytatása és az elágazási indexe e, ha $w(f)=e\cdot v(f)$ minden $f\in E$-re teljesül. Az elágazási index egy természetes szám.

F.13. Tétel. Legyen F/E végesfokú testbővítés, és v egy diszkrét értékelése E-nek. Ekkor v folytatható az F egy értékelésévé.

Bizonyítás. [16] 321. Tétel.

Nekünk arra az eredményre lesz szükségünk, hogy ha F/E foka n, és $e_1, \ldots, e_k$ F/E foka n, és $e_1, \ldots, e_k$ jelöli a v értékelés különböző folytatásaihoz tartozó elágazási indexeket, akkor $\sum e_i \leqq n$. Ehhez előbb be kell látni a következő, önmagában is rendkívül érdekes úgynevezett *approximáció tételt.*

F.14. Tétel (Artin—Whaples). Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy test különböző diszkrét értékelései, $k_1, \ldots, k_n$ természetes számok, és $a_1, \ldots, a_n$ az adott test tetszőleges elemei. Ekkor létezik a testnek olyan a eleme, melyre $v_i(a-a_i) \geqq k_i$ teljesül minden $1 \leqq i \leqq n$ esetén.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy létezik olyan y, melynek gyöke van v_1-ben és pólusa a többi értékelésben. Mint az ismeretes [16] 310. Tétel léteznek olyan b, c elemek, hogy b-nek gyöke van v_1-ben, de nincsen v_2-ben és c-re fordítva. Ekkor $y_2=bc^{-1}$ jó az $n=2$ esetre.

Legyen y_k jó $n=k$-ig, és legyen z olyan, melynek gyöke van v_1-ben és pólusa v_{k+1}-ben. Ekkor elég nagy r esetén $y_{k+1}=y_k+z^r$ jó lesz $n=k+1$-ig. Ezzel az állítást bizonyítottuk. Ezután az $(1+y^m)^{-1}$ elem olyan, hogy nagy gyöke van a $v_2, \ldots, v_n$ értékelések mindegyikében és $z-1$-nek sokszoros gyöke van v_1-ben.

Ezután jelöljön z_i egy olyan elemet, aminek legalább N-szeres gyöke van a v_i-től különböző a tételben szereplő értékelések mindegyikében, és $z-1$-nek N-szeres gyöke van v_i-ben. Ekkor, ha N elég nagy az $a=z_1a_1+\ldots+z_na_n$ elem eleget tesz a tétel feltételeinek.

Ezután már könnyen levezethető a kívánt formula. Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ a v összes folytatásai. Legyen y_i olyan, hogy $v_i(y_i)=1$ teljesül és legyen x_{ik} olyan elem, mely magas rendben approximálja a $(0, \ldots, 0, y_i^k, 0, \ldots, 0)$ sorozatot. Nyilván elég belátni, hogy az $\{x_{ik}: 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq k \leqq e_i\}$ lineárisan függetlenek az E felett. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz teljesül egy $\sum_{i,k} c_{ik}x_{ik}=0$ nemtriviális összefüggés, ahol $c_{ik}\in E$. Legyen ezután c_{jm} olyan, melyre $v(c_{ik})$ minimális. Ekkor ezzel leosztva $c_{jm}=1$ és $v(c_{ik}) \geqq 0$ adódik minden c_{ik}-ra. Nézzük a v_j értékelést. A $v_j(c_{j1}x_{j1}), \ldots$ $\ldots, v_j(c_{je_j}x_{je_j})$ értékek mind különbözőek, így mint az könnyen látható, teljesül a $v_j\left(\sum_k c_{jk}x_{jk}\right)=\min_k\left(v_j(c_{jk}x_{jk})\right) \leqq e_j$ összefüggés.

Másrészt a fenti $\sum c_{ik}x_{ik}$ összeg többi tagjának a v_j értéke nagy, így az összegük v_j értéke is nagy. De az egész összeg nulla, ami nem lehet, ha egyik részének v_j értékelése nagy, a másik részéé meg kicsi (legfeljebb e_j). Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat:

F.15. Tétel. Legyen F/E egy n-ed fokú testbővítés, v az E egy értékelése és e_i a folytatásainak elágazási indexei. Ekkor $\sum e_i \leqq n$.

IRODALOM

[1] AHLFORS, L. V., The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, in Analytic functions, Princeton Univ. Press. N. J. 1960.
[2] ATIYAH, M. F.—MACDONALD, I. G., Introduction to commutative algebra, Addison—Wesley, Reading, Mass. 1969.
[3] COXETER, H. S. M., A geometriák alapjai, Műszaki Kiadó, 1973
[4] DUNCAN, J. Bevezetés a komplex függvénytanba, Műszaki Kiadó, 1974.
[5] FUCHS, L., Algebra, egyetemi jegyzet, 1972.
[6] FULTON, W., Algebraic curves, Benjamin, New York, 1969.
[7] HARTSHORNE, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.
[8] LANG, S., Introduction to algebraic and abelian functions, Addison—Wesley, Reading, Mass. 1972.
[9] LANG, S., Elliptic functions, Springer, 1978.
[10] LANG, S., Diophantine geometry, Interscience,
[11] MILNOR, J., Singular points of algebraic hypersurfaces, Annales of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press. 1968.
[12] MUMFORD, D., Algebraic geometry I, Springer, 1976.
[13] MUMFORD, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.
[14] PÓLYA, G.—SZEGŐ, G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II. Springer, 1964.
[15] PONTRJAGIN, L. S., Neprerivnüje gruppü, Gosztehizdat, 1954.
[16] RÉDEI, L., Algebra I., Akadémiai Kiadó, 1954.
[17] RÉNYI, A., Véges geometriák kombinatorikai alkalmazásai, Matematikai Lapok, 17 (1966), 33—76.
[18] SAFAREVICS, I. R., Osznovü algebraicseszkoj geometrii, Nauka, Moszkva, 1972.
[19] SCHMIDT, E. T., Algebra, Egyetemi jegyzet, 1977.
[20] SEVERI, F., Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Teubner, Leipzig, 1921.
[21] SPRINGER, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison—Wesley, Reading, Mass. 1957.
[22] SZŐKEFALVI-NAGY, B., Komplex függvénytan, Egyetemi jegyzet, 1974.
[23] WAERDEN, B. L. v. d., Algebra I—II. Springer
[23] WAERDEN, B. L. v. d., Algebraische Geometrie, Springer,
[25] WALKER, R. J., Algebraic Curves, Princeton Univ. Press, 1950.
[26] WEIL, A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Publ. 1964.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

КОЛЛАР ЯНОШ

ALGEBRAIC CURVES

J. KOLLÁR

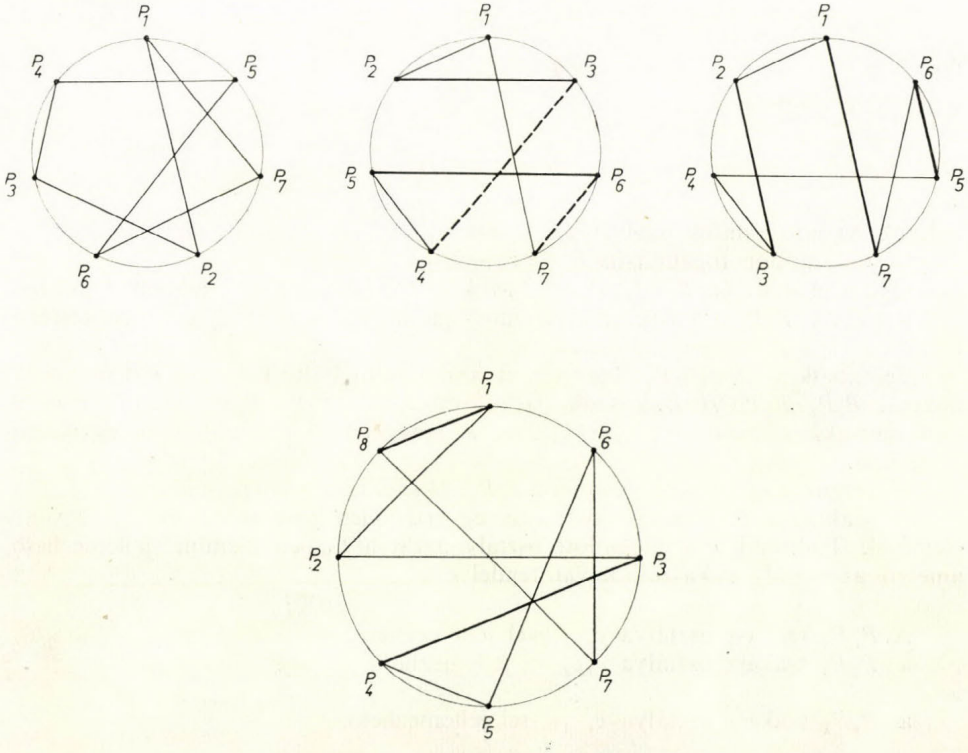
EGY SZABÁLYOS SOKSZÖGEKRE VONATKOZÓ ÉSZREVÉTEL

SZABÓ SÁNDOR

Már régebben megfigyeltem, hogy egy páros csúcsszámú szabályos sokszög csúcspontjait összekötő közönséges töröttvonal mindig tartalmaz párhuzamos oldalakat.

Ezen egyszerű észrevétel közlése azzal indokolható, hogy a szabályos sokszögek kombinatorikus-geometriai struktúrája nem eléggé ismert. Pedig ez a struktúra igen érdekes is lehet. Jól illusztrálja ezt a tényt a véges ciklikus síkok KÁRTESZI FERENC professzortól származó szabályos sokszög modellje. ([2], [3].)

Tétel. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_s$ egy körvonalat egyenlő hosszúságú ívekre bontó pontok. Ha s páros szám, akkor a $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{s-1}P_s, P_sP_1$ szakaszok között van párhuzamos.



Bizonyítás. A $\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ ponthalmazt önmagára leképező egybevágósági transzformációk csoportja tartalmazza az s-rendű forgáscsoportot C_s-t. ([1].)

Világos, hogy léteznek $c_1, c_2, \ldots, c_{s-1} \in C_s$ úgy, hogy

$$(1) \qquad \begin{cases} P_1 = (P_1)e \\ P_2 = (P_1)c_1 \\ P_3 = (P_1)c_2 \\ \quad \vdots \\ P_s = (P_1)c_{s-1} \end{cases}$$

Itt e jelöli C_s egységelemét; bevezetjük még a $c_0 = c_s = e$ jelölést is.

Ha $0 \leqq i < j \leqq s-1$, akkor $c_i \neq c_j$. Ugyanis $c_i = c_j$-ből $(P_1)c_i = (P_1)c_j$ következik, ami $P_{i+1} = P_{j+1}$-gyel egyenértékű. Vagyis $c_i = c_j$-ből $i = j$ következik. Tehát

$$(2) \qquad \{e = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}\} = C_s.$$

Ha P_i, P_k, P_r, P_j egy körvonal páronként különböző pontjai ebben a sorrendben és $\overset{\frown}{P_iP_k} = \overset{\frown}{P_rP_j}$, akkor a P_iP_j és a P_kP_r egyenesek párhuzamosak.

Megfordítva: ha a P_i, P_j, P_k, P_r pontok egy körvonal pontjai és a P_iP_j, P_kP_r különböző egyenesek párhuzamosak, akkor a pontok sorrendje csak P_i, P_k, P_r, P_j vagy P_i, P_r, P_k, P_j lehet. Az első esetben

$$(3) \qquad \overset{\frown}{P_iP_k} = \overset{\frown}{P_rP_j},$$

a második esetben

$$(4) \qquad \overset{\frown}{P_iP_r} = \overset{\frown}{P_kP_j}$$

teljesül. Az elforgatások nyelvén (3) és (4) $c_{i-1}^{-1}c_{k-1} = c_{r-1}^{-1}c_{j-1}$, illetve $c_{i-1}^{-1}c_{r-1} = c_{k-1}^{-1}c_{j-1}$ módon fogalmazható.

Összefoglalva: ha P_i, P_j, P_k, P_r egy körvonal páronként különböző pontjai, akkor a P_iP_j, P_kP_r egyenesek párhuzamossága és $c_{i-1}c_{j-1} = c_{k-1}c_{r-1}$ egyenértékű. Ez indokolja a következő definíciót.

Tekintsük a $H = \{P_iP_j : 1 \leqq i < j \leqq s\}$ szakaszokból álló halmazt. Azt mondjuk, hogy a $P_iP_j, P_kP_r \in H$ szakaszok párhuzamosak és $P_iP_j \parallel P_kP_r$ módon jelöljük pontosan akkor, ha $c_{i-1}c_{j-1} = c_{k-1}c_{r-1}$. A bevezetett reláció láthatóan ekvivalenciareláció.

Nevezzük a $c_{i-1}c_{j-1} \in C_s$ elemet a $P_iP_j \in H$ szakaszhoz tartozónak.

A szakaszok ekvivalenciaosztályai egyértelműen jellemezhetők C_s egy-egy elemével. Tudniillik egy megadott osztály azzal a C_s-beli elemmel jellemezhető, amelyik az osztály szakaszaihoz van rendelve.

A P_1P_2 szakasz osztálya c_0c_1-gyel jellemezhető,
a P_2P_3 szakasz osztálya c_1c_2-vel jellemezhető,
$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$
a P_sP_1 szakasz osztálya $c_{s-1}c_s$-sel jellemezhető.

Tegyük fel most állításunkkal ellentétben, hogy a $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{s-1}P_s, P_sP_1$ szakaszok között nincs párhuzamos. Ez azt jelenti, hogy a $c_{i-1}c_i \in C_s$, $i=1, 2, \ldots, s$ elemek páronként különbözők. Így tehát

$$\{c_0c_1, c_1c_2, \ldots, c_{s-1}c_s\} = C_s. \tag{5}$$

Másrészt (2) és (5) alapján:

$$c_0c_1c_2 \ldots c_s = c_0c_1c_1c_2 \ldots c_{s-1}c_s, \tag{6}$$

vagyis

$$e = c_1c_2 \ldots c_{s-1}. \tag{7}$$

C_s egy páros rendű ciklikus csoport, így pontosan egy darab másodrendű eleme van. Jelölje ezt c. Ez utóbbi megállapítás és (2) összevetéséből látható, hogy $c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}$ közül a c-től különbözők párokba állíthatók az inverzükkel. Tehát (7)-ből $e=c$ adódik, ami nyilván lehetetlen.

Tétel. Ha $P_1, P_2, \ldots, P_s$ egy körvonalat egyenlő hosszúságú ívekre bontó pontok és s páratlan szám, akkor a $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{s-1}P_s, P_sP_1$ szakaszok között pontosan kettő párhuzamos nem lehet.

Bizonyítás. Használjuk az előző bizonyítás jelöléseit.

A pontosan két párhuzamos létezése egyenértékű azzal, hogy a

$$c_0c_1, c_1c_2, \ldots, c_{s-1}c_s \tag{8}$$

elemek C_s-nek $s-1$ darab páronként különböző elemét adják. Így az elemek között a C_s egyik eleme nem szerepel. Jelölje ezt c_{i_v}. A (8) elemek között levő két egyenlő elemet jelölje c_{i_u}, a többi elemet pedig $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_{v-1}}, c_{i_{v+1}}, \ldots, c_{i_u}, \ldots, c_{i_s}$. Vagyis

$$\{c_{i_t}: 1 \leqq t \leqq s\} = \{c_1, \ldots, c_s\} = C_s. \tag{9}$$

Legyen $x \in C_s$ az $x^2 = c_{i_u}^{-1}$ feltételt kielégítő. Ilyen x elem létezik, mert

$$\{c_1^2, c_2^2, \ldots, c_s^2\} = \{c_1, \ldots, c_s\} = C_s \tag{10}$$

és

$$c_{i_u}^{-1} \in C_s.$$

A (10) egyenlőség igazolása: $c_i^2 = c_j^2$-ből $(c_ic_j^{-1})^2 = e$, majd ebből $c_ic_j^{-1} = e$ következik, mert s páratlan és így a Lagrange tétel szerint C_s-nek nincs másodrendű eleme.

Jelölje $b_0 = c_0x, b_1 = c_1x, \ldots, b_{s-1} = c_{s-1}x$. Nyilván

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}\} = C_s. \tag{11}$$

Hasonlóan ha $c_0c_1, \ldots, c_{s-1}c_s$ a C_s-nek $s-1$ darab különböző eleme, akkor

$$b_0b_1, \ldots, b_{s-1}b_s \tag{12}$$

is $s-1$ darab különböző eleme C_s-nek.

A (12) elemek között tehát C_s-nek egyik eleme nem fordul elő. Ez éppen $b_{i_v} = c_{i_v}x^2$. A (12) elemek között C_s egy eleme kétszer is szerepel, ez $b_{i_u} = c_{i_u}x^2 = e$. Tehát a (12) alatti elemek

$$b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{v-1}}, b_{i_{v+1}}, \ldots, b_{i_u}, \ldots, b_{i_s}.$$

(9)-nek megfelelően

$$\{b_{i_t}\colon\ 1 \leqq t \leqq s\} = C_s. \tag{13}$$

Vizsgáljuk most is a (12) alatti elemek szorzatát.

$$b_0 b_1 b_1 b_2 \ldots b_{s-1} b_s = (b_1 b_2 \ldots b_{s-1})^2 = e. \tag{14}$$

Hiszen $b_0 = b_s = e$ és mivel C_s páratlan rendű, ezért az e-től különböző elemei párosíthatók az inverzükkel.

Másrészt

$$b_0 b_1 b_1 b_2 \ldots b_{s-1} b_s = b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_{v-1}} b_{i_{v+1}} \ldots b_{i_u}^2 \ldots b_{i_s} = b_{i_v}^{-1}. \tag{15}$$

Ugyanis $b_{i_u}^2 = e$ és így a

$$b_{i_1}, \ldots, b_{i_{v-1}}, b_{i_{v+1}}, \ldots, b_{i_{u-1}}, b_{i_{u+1}}, \ldots, b_{i_s}$$

elemek $b_{i_v}^{-1}$ kivételével párosíthatók az inverzükkel.

(14) és (15) összevetéséből $e = b_{i_v}^{-1}$, de ez lehetetlen, hiszen a $b_{i_1}, \ldots, b_{i_{v-1}}, b_{i_{v+1}}, \ldots, b_{i_u} = e, \ldots, b_{i_s}$ elemek páronként különböznek.

Megjegyzés. Legyen $Q = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_s\}$ és ϱ a $\{Q_i Q_j\colon 1 \leqq i < j \leqq s\}$ halmaz elemei közötti reláció, továbbá $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ egy körvonalat egyenlő ívekre bontó pontok halmaza. Ha létezik $f\colon Q \mapsto P$ bijekció, amelyre $Q_i Q_j \varrho Q_k Q_r$ pontosan akkor, ha $(Q_i)f(Q_j)f \parallel (Q_k)f(Q_r)f$ abban az esetben a $Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots, Q_{s-1}Q_s, Q_sQ_1$ között van kettő ϱ relációban álló, illetve nincs pontosan kettő ϱ relációban álló az s páros, illetve az s páratlan eseteknek megfelelően.

Még ez a megfogalmazás sem túl általános.

1. Vegyük az abszolút geometria $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ csúcspontú szabályos sokszögét. Legyen $Q_i Q_j \varrho Q_k Q_r$ pontosan akkor, ha a $Q_i Q_j$ és $Q_k Q_r$ egyeneseknek van közös merőlegese.

2. Jelölje $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ egy affin szabályos sokszög csúcspontjait és legyen ϱ a párhuzamosság.

3. A páratlan rendű véges affin Galois-síkon is van alkalmas ponthalmaz. [5] szerint az ellipszis $Q_1, \ldots, Q_s$ pontjai megfelelnek. (Ebben az esetben s csak páros lehet.) ϱ szerepét itt is a párhuzamosság veszi át.

IRODALOM

[1] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[2] Kárteszi Ferenc: Bevezetés a véges geometriákba, Akadémia Kiadó, Budapest, 1972.

[3] Kárteszi Ferenc és Reiman István: Véges projektív síkok illeszkedés tábláiról, Mat. Lap. 19. 3—4. (1968) 239—253.

[4] Nguyen Mong Hy: A kilencedrendű affin Galois-sík szabályos sokszögeiről, Mat. Lap. 22. 3—4. (1971), 323—329.

[5] Nguyen Mong Hy: Páratlan rendű affin Galois-síkok ellipszise mint affin szabályos sokszög, Mat. Lap. 23. 3—4. (1972) 303—312.

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

САБО ШАНДОР

A REMARK ON REGULAR POLYGONS

S. SZABÓ

MEGJEGYZÉS A TELJESEN INVARIÁNS KONGRUENCIARELÁCIÓKRÓL A VARIETÁSOK VIZSGÁLATÁBAN

H. M. CHUONG

1. Bevezetés

A varietásokra vonatkozó fogalmak, jelölések [2]-ben és [5]-ben megtalálhatók; ismeretes például, hogy $V(K)$ ($K \subseteq K(\Delta)$: az összes Δ-típusú struktúrák osztálya) a K osztály által generált varietás egyik szokásos jelölése, és K osztály akkor és csakis akkor varietás, ha K részstruktúrára, homomorfizmusra és direkt szorzatra zárt, azaz $V(K) = HSP(K)$. Az azonos Δ-típusú varietások hálót alkotnak (a háló-elméleti fogalmak [6]-ban megtalálhatók). Egy A struktúra θ kongruenciarelációját teljesen invariánsnak nevezzük, ha A bármely f endomorfizmusára $x \equiv y(\theta)$-ból $f(x) \equiv f(y)(\theta)$ következik. E G. Birkhoff által bevezetett fogalom fontos szerepet játszik a varietások vizsgálatában. Az erre vonatkozó fontos eredmények a következők:

1.1. Tétel. ([2], Theorem 24.6)
Legyen $F(X, K)$ az $X = \{x_i | i \in I\}$ szabad generátorrendszer által generált K-szabad struktúra, θ $F(X, K)$ egy kongruenciarelációja. A $\{[x_i]\theta | i \in I\}$ szabad generátorrendszer által generált $F(X, K)/\theta$ akkor és csakis akkor $V(F(X, K)/\theta)$-szabad, ha θ teljesen invariáns.
A Tételben vett $F(X, K)/\theta$-t $F(X, K)$ kanonikus képének, a θ által generált természetes f_θ homomorfizmust pedig kanonikus homomorfizmusnak nevezzük.

1.2. Tétel. ([2], Corollaries 26.1. and 26.2.).
Legyenek K_1, K_2 varietások. Akkor $K_1 = K_2$ illetve $K_1 \subset K_2$ akkor és csakis akkor, ha $F(X, K_1) \cong F(X, K_2)$ illetve $F(X, K_1)$ $F(X, K_2)$ valódi homomorf képe, ahol $|X| = \mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_0$ megszámlálhatóan végtelen számosságot jelöli.
A fenti tételekből azt látjuk, hogy teljesen invariáns kongruenciarelációk jellemzik a varietásokat, amiből azt következtetjük, hogy ha megismernénk az $F(X, K)$ teljesen invariáns kongruenciarelációi hálójának a szerkezetét, megoldanánk a varietások problémáit. Sajnos, eddig keveset tudunk ezekről. De amit csak tudunk, hasznosnak tűnik. A célunk tehát erre vonatkozóan néhány érdekes tételt bebizonyítani amelyek Ralph Mckenzie [4] 2-es problémájából származnak.

2. Eredmények

2.1. Tétel. Legyen $F(X, K)$ az X szabad generátorrendszer által generált K-szabad struktúra (feltehető, hogy K varietás), θ $F(X, K)$ egy kongruenciarelációja, amely atom (azaz $\theta \succ E$, ahol E egységreláció). Akkor a következők egyike teljesüljön:

(i) $$V(F(X, K)) = V(F(X, K)/\theta).$$

(ii) θ teljesen invariáns, így $F(X, K)/\theta$ $V(F(X, K)/\theta)$-szabad, és

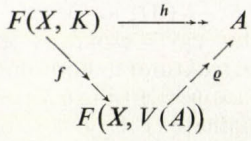
$$V(F(X, K)) \supseteq V(F(X, K)/\theta);$$ ezenkívül, ha $|X| \geqq \aleph_0$, akkor

$$V(F(X, K)) > V(F(X, K)/\theta)$$ a varietások hálójában.

Bizonyítás. Először két lemmát igazolunk:

2.1. Lemma. Legyen $F(X, K)$ K-szabad struktúra, $h: F(X, K) \twoheadrightarrow A$ szürjektív homomorfizmus. Akkor létezik egy $g: F(X, V(A)) \twoheadrightarrow A$ szürjektív homomorfizmus, úgyhogy $gf = h$, ahol f az $F(X, K)$-nak $F(X, V(A))$-ra való kanonikus homomorfizmusa.

2.1. Lemma bizonyítása. Triviális, ha definiáljuk a következőt: $g(f(x_i)) = h(x_i)$.



Ugyanis, mivel $F(X, V(A))$ szabad, így az előbbi definíció szerint g kiterjeszthető szürjektív homomorfizmussá. És mivel $gf(x_i) = h(x_i)$, úgy $gf = h$.

2.2. Lemma. Ha A struktúra $F(X, V(A))$ homomorf képe, akkor $V(A) = V(F(X, V(A)))$.

2.2. Lemma bizonyítása. Világos egyrészt, hogy $F(X, V(A)) \in V(A)$, úgy $V(F(X, V(A))) \subseteq V(A)$. Másrészt, $A \in H(F(X, V(A))) \subseteq HSP(F(X, V(A))) = V(F(X, V(A)))$, úgy $V(A) \subseteq V(F(X, V(A)))$, amivel a lemma bizonyítását befejeztük. Most rátérünk a 2.1. Tétel bizonyítására. A 2.1. Lemma $A = F(X, K)/\theta$, $h = f_\theta$ szereplésével azt kapjuk, hogy $gf = f_\theta$, ahol

f_θ: $F(X, K) \twoheadrightarrow F(X, K)/\theta$ szürjektív homomorfizmus,
f: $F(X, K) \twoheadrightarrow F(X, V(F(X, K)/\theta))$ kanonikus homomorfizmus,
g: $F(X, V(F(X, K)/\theta)) \twoheadrightarrow F(X, K)/\theta$ szürjektív homomorfizmus, amiből az következik, hogy $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f_\theta$, azaz $\operatorname{Ker} f \subseteq \theta$. De mivel $E \prec \theta$, így

vagy $\operatorname{Ker} f = E$, úgy $F(X, K)$ izomorf $F(X, V(F(X, K)/\theta))$-val, ebből a 2.2. lemma miatt $V(F(X, K)) = V(F(X, V(F(X, K)/\theta))) = V(F(X, K)/\theta)$, ami (i)-t jelenti:

vagy $\operatorname{Ker} f = \theta$, ekkor mivel f kanonikus, úgy az 1.1. Tétel miatt $\theta = \operatorname{Ker} f$ teljesen invariáns, úgy $F(X, K)/\theta$ szabad. A további állítás triviális az $E \prec \theta$ és az 1.2. Tétel miatt.

Ezzel a 2.1. Tétel bizonyítását befejeztük.

A fenti tétel bizonyítása során észrevesszük, hogy hasonló módon igazolhatjuk a következő általános tételt:

2.2. Tétel. Legyen $F(X, K)$ az X-szabad generátorrendszer által generált K-szabad struktúra, φ és θ $F(X, K)$ kongruenciarelációi, ahol $\varphi \prec \theta$ és φ teljesen invariáns. Akkor a következők egyike teljesüljön:

(i) $V(F(X, K)/\varphi) = V(F(X, K)/\theta)$,

(ii) θ teljesen ivariáns, így $F(X, K)/\theta$ $V(F(X, K)/\theta)$-szabad, és $V(F(X, K)/\varphi) \supsetneq$ $\supsetneq V(F(X, K)/\theta)$; ezenkívül, ha $|X| \geqq \mathcal{N}_0$, akkor $V(F(X, K)/\varphi) \succ V(F(X, K)/\theta)$ a varietások hálójában.

Megjegyzés. Ha φ és θ $F(X, K)$ kongruenciarelációi, ahol $\varphi \prec \theta$ és θ teljesen invariáns, akkor mindig igaz a következő: $V(F(X, K)/\varphi) \supsetneq V(F(X, K)/\theta)$ a varietások hálójában.

A 2.1. Tétel a hálókra vonatkozóan, például, a következőképpen megfogalmazható:

2.3. Tétel. Legyen **M** az összes moduláris hálók varietása, $F(X, \mathbf{M})$ **M**-szabad háló, $p|q$ $F(X, \mathbf{M})$ egy prím intervalluma, azaz $p \succ q$ $F(X, \mathbf{M})$-ben. Akkor a következők egyike teljesüljön:

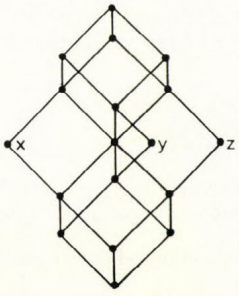
(i) $V(F(X, \mathbf{M})) = V(F(X, \mathbf{M})/_{\theta(p, q)})$,

(ii) $\theta(p, q)$ teljesen invariáns, és $V(F(X, \mathbf{M})) \supsetneq V(F(X, \mathbf{M})/_{\theta(p, q)})$ a hálóvarietások hálójában.

Bizonyítás. Triviális, mert például [1]-ben tudjuk, hogy a tetszőleges L moduláris háló minden $p|q$ prímintervalluma által generált kongruenciareláció, $\theta(p, q)$, mindig atom.

Megjegyzés. Ismeretes [1]-ben, hogy tetszőleges L háló θ kongruenciarelációja akkor és csakis akkor atom, ha $\theta = \theta(a, b)$, ahol $a|b$ primitív intervallum. Így tetszőleges K hálóvarietásra és K-szabad háló bármely $a|b$ primitív intervallumára igaz a 2.3. Tétel állítása.

Nézzük meg most a fenti tételeknek, konkrétan a 2.3. Tételnek egy alkalmazását. [3]-ban ismeretes, hogy a háromelemű szabad generátorrendszer által generált szabad moduláris háló a következőképpen ábrázolható.

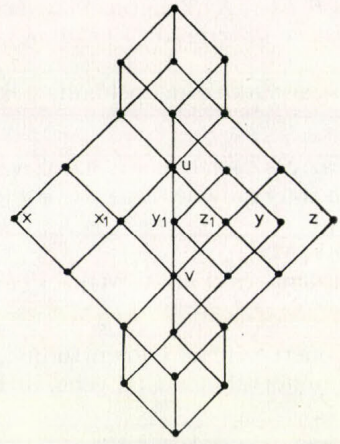


$F(3, \mathbf{M})$

Vizsgáljuk most meg ezt az $F(3, \mathbf{M})$ hálót. Könnyen látjuk, hogy kételemű hálókat kivéve $F(3, \mathbf{M})$ homomorf képeinek legfeljebb egy szubdirekt irreducibilis (éspedig ötelemű moduláris, nem disztributív) részhálója van. Azonkívül, $\theta(p, q)$-k ($p|q$-k prímintervallumok) meghatározzák az $F(3, \mathbf{M})$ kongruenciahálóját, tehát Con $F(3, \mathbf{M})$-t. A 2.3. Tétel szerint $F(3, \mathbf{M})/\theta$ feltétlenül szabad disztributív háló olyan θ-ra a fenti $\theta(p, q)$-k közül, amelytől a háló esik össze. És azt is látjuk, hogy Con $F(3, \mathbf{M})$-nek csak egyetlen egy ilyen θ kongruenciarelációja van, éspedig $\theta(x_1, v)$. Tehát a 2.3. Tétel szerint az egyelemű hálók varietása (jelben **1**)

és $V(F(3, \mathbf{M}))$ varietás között csak az egyetlen disztributív hálóvarietás van. Összefoglalva, a 2.3. Tétel következményeként $F(3, \mathbf{M})$-ből a következőket tudjuk olvasni:

1. $F(3, \mathbf{M})/\theta(x_1, v)$, ami $F(3, \mathbf{M})$-ből könnyen írható:



$F(3, \mathbf{D})$

feltétlenül a háromelemű generátorrendszer által generált szabad disztributív háló minden további bizonyítás nélkül.

2. $\mathbf{1} \prec \mathbf{D} \prec V(F(3, \mathbf{M})) = V\left(\cdot\diamond\cdot\right)$ a hálóvarietások hálójában, ahol $\mathbf{D}$ a disztributív hálók varietását jelöli.

A fentiek alapján felvetődik az a gondolat, hogy a $F(X, K)$ kongruenciahálója és teljesen invariáns kongruenciahálója közötti kapcsolatot közelebbről vizsgáljuk meg, mert minden arra utal, hogy erre szükségünk lesz a varietások jövőbeli vizsgálatában.

IRODALOM

[1] P. Crawley—R. P. Dilwoth, Algebraic theory of lattices, 1973.
[2] G. Grätzer, Universal Algebra, 1968.
[3] G. Grätzer, Lattice Theory, 1971.
[4] R. Mckenzie, Equational bases and nonmodular lattice varieties, Trans of Amer. Math. Soc. 174 (1972), 1—43.
[5] E. T. Schmidt, Algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
[6] G. Szász, Bevezetés a hálóelméletbe, 1959.

О ВПОЛНЕИНВАРИАНТНЫХ ОТНОШЕНИЯХ КОНГРУЭНТНОСТИ В ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ

ЧУОНГ, Х. М.

A NOTE ON COMPLETELY INVARIANT CONGRUENCE RELATIONS IN VARIETIES

H. M. CHUONG

SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁK*

W. T. TUTTE

A négyszínproblémát K. Appel, W. Haken és J. Koch megoldotta ([1], [2], [3], [10], [14]). De mi lesz azokkal a matematikusokkal, akik e problémán dolgoztak? Elképzelem, amint egyikük-másikuk kétségbeesett „Most mit tegyek?" kiáltással fakad ki. Erre ez a helyes válasz: „Ne csüggedj el. Folytathatod ugyanazt a kutatási irányt. Tanulmányozhatod Hajós és Hadwiger sejtéseit. Ostromolhatod az 5-áramok problémáját, és tevékenykedhetsz a tangenciális 2-blokkok rendszerezésében."

A négyszíntétel ugyanis csupán egyik tagja — egy speciális esete — egy széles együttesnek. A matematikusok azért szemelték ki támadási pontul, mert úgy vélték, ez a leggyengébb láncszem. Most eljött az ideje, hogy a család többi tagjával is szembenézzünk.

Idézzük fel, mit állít a négyszíntétel. Képzeljük el, hogy a gömbfelület tartományokra van felosztva. Mindegyik tartomány összefüggő darabot képez. Egy térkép-készítő úgy akar színeket hozzárendelni a tartományokhoz, hogy két tartomány sohase kapjon közös színt, ha van határvonaluk egymással. Megengedi azonban, hogy két tartomány színe közös legyen, ha csak egy vagy csak két, általában csak véges számú pontban érnek össze. A tétel arról biztosítja őt, hogy térképét mindig elkészítheti legfeljebb négy különböző színt használva.

A térképről beszélve említeni fogunk „csúcsokat", azaz olyan pontokat, amelyekben három vagy több tartomány érintkezik, és „éleket", azaz olyan határvonalakat, amelyek valamely csúcstól egy másikig húzódnak, harmadik csúcs érintése nélkül. Amikor a térképet matematikai struktúrának tekintjük, úgy vesszük, hogy a csúcsok és az élek éppolyan fontosak, mint a tartományok.

Szokás bizonyos egyszerűsítő feltevésekkel élni. Így feltesszük, hogy minden tartománynak legalább két szomszéddal van határvonala. Az ilyen kikötések azért jogosak, mert belátható, hogy ha a négyszíntétel igaz az őket teljesítő összes térképekre, akkor könnyen kiterjeszthető a többire is.

Egy térkép csúcsai és élei a „gráf" néven ismert struktúrára adnak példát. A gráfnak vannak „csúcs" nevű elemei, amelyeket rendszerint geometriai pontoknak veszünk és rajzolt pettyként ábrázolunk. Vannak még olyan objektumok is a gráfban, amelyeket „éleknek" hívunk; minden élhez tartozik két csúcs, ezeket az él „végpontjainak" mondjuk. Egy élt a két végpontját összekötő ívként szokás ábrázolni. Valahányszor egy gráfot „lerajzolunk" egy felületre vagy „rárajzolunk" valamely más gráfra, feltesszük, hogy nincsenek keresztezések. Ez azt jelenti, hogy

* Colouring problems, *The Mathematical Intelligencer* **1** (1978), 72—75.

valamely él nem mehet másként át egy csúcson, mint úgy, hogy a csúcs végpontja az élnek, és két él nem futhat össze másképpen, mint egy közös végpontjukban. Rendszerint legcélszerűbb azt gondolni, hogy a háromdimenziós térben rajzoljuk meg a gráfokat, amikor is a keresztezéseket könnyű elkerülni. Azokat a gráfokat, amelyek keresztezés nélkül gömbfelületre rajzolhatók — így a térképek gráfjait is —, „planárisaknak" nevezzük.

A legáltalánosabban használt gráf-definíció megengedi azt, hogy egy él két végpontja egybeessen, vagyis hogy valamely él egy csúcsot önmagával kössön össze. A színezések elméletében azonban ki szokás zárni az ilyen hurkokat.

Egy gráf valamely csúcsának annyi a „foka", ahány élnek végpontja ez a csúcs. Általánosságban egy gráfban 0, 1 vagy 2 fokú csúcsok is találhatóak, de mi azt várhatjuk, hogy a politikai térképeken nincsenek ilyenek.

A színezési problémák némelyike (hurokmentes) gráfokkal kapcsolatos. A G gráfnak egy n-színezését úgy értelmezzük, hogy n vagy kevesebb különböző színnel kell megjelölnünk a csúcsait, és ugyanolyan színű csúcs-párat sohasem köthet össze él. Érdekes sejtések vannak annak feltételeiről, hogy egy adott gráfnak létezik n-színezése.

Az M térkép színezései egy gráf színezéseként is felfoghatóak. Jelöljünk ki ugyanis egy-egy pontot minden tartományban, és hívjuk azt a tartomány „fővárosának". Rajzoljunk minden élhez egy „vasútvonalat", amely metszi ezt az élt és az él két oldalán levő tartományok fővárosait köti össze. A fővárosok és a vasútvonalak egy planáris G gráf csúcsai illetve élei lesznek, mivel a vasutakat könnyű keresztezésmentesen elrendezni. Világos, hogy G csúcsainak akkor és csak akkor van 4-színezése, ha M tartományainak is van 4-színezésük. G-t az M térkép „duális gráfjának" hívjuk.

A duális gráfok felhasználásával megmutatható, hogy a négyszíntétel ekvivalens azzal az állítással, hogy minden hurokmentes planáris gráf csúcsainak van 4-színezése. Ez az az alak, ahogy a négyszíntételt rendszerint kimondják. A tartományokra vonatkozó megfogalmazás az 1940-es években adta át helyét a csúcsokra vonatkozónak.

Azt ajánlhatjuk az elkeseredett négyszínezőnknek, hogy fordítsa figyelmét a gömbre írt térképek helyett az általános gráfokra. Elöljáróul Brooks tételét [5] említjük meg.

Brooks tétele azt állítja, hogy amennyiben a k egész szám legalább 3 és G olyan összefüggő gráf, amelyben a pontok fokszámainak egyike sem lépi túl k-t, akkor vagy van G-nek k-színezése vagy G a $k+1$ csúcsú teljes gráf.

Az n csúcsú teljes gráfon azt a gráfot értjük, amelynek éppen n számú csúcsa van, s ezek közül bármely kettő össze van kötve egy éllel. A $k+1$ csúcsú teljes gráfban a pontok mindegyikének k a fokszáma, de nincs k-színezés.

A Brooks-féle bizonyítás döntő mozzanatára akkor kerül sor, amikor egy kivétellel az összes csúcsot szabályosan kiszínezzük k színnel. A kimaradó csúcs külön színt kap, nevezzük ezt pirosnak. Brooks továbbviszi a piros színt a gráfon egy-egy csúcsról valamely szomszédos csúcsra lépve, minden lépésben visszaállítva az eredeti színezést. Végül olyan csúcsba kerül a piros szín, amelynek szomszédai legfeljebb $k-1$ eredeti színnel vannak színezve. Ekkor helyettesíteni lehet a pirosat a k darab szín egyikével.

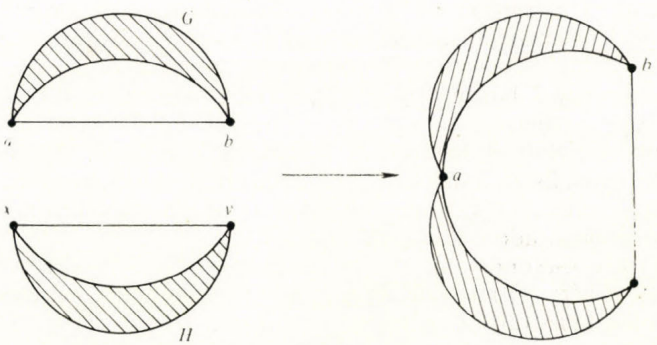
Brooks tétele kapcsolatban áll egy lebilincselő bizonyítatlan állítással, amely Hajós sejtéseként ismert. E sejtés szerint, ha egy G gráf nem színezhető ki k színnel, akkor G-be berajzolható egy $k+1$ csúcsú K teljes gráf. Ezúttal nem korlátozzuk a fokszámokat [17].

Amikor azt mondjuk, hogy K berajzolható G-be, úgy értjük ezt, hogy kiszemelhetjük G-nek $k+1$ darab csúcsát K csúcsai gyanánt, továbbá K élei megrajzolhatók a kiszemelt csúcsok között G élei mentén, áthaladva esetleg G egyéb csúcsain is. Így K minden egyes éle egy egy vagy több élből álló útként jelenik meg G-ben. Keresztezések természetesen nincsenek.

A négyszíntétel nem több, mint része Hajós sejtése azon speciális esetének, amelynél $k=4$. Ha ugyanis egy G planáris gráfot nem lehet 4-színezni, akkor a Hajós-sejtés szerint belerajzolhatunk egy 5 csúcsú teljes gráfot. Ez azonban lehetetlen; jól ismert, hogy az 5 csúcsú teljes gráf nem planáris.

Törekedhetünk arra, hogy a sejtést a Brooks-tétel bizonyításának továbbfejlesztésével igazoljuk. A szerző azonban nem ajánlja ezt. Ha a kiküszöbölendő színt végigvisszük egy általános gráf csúcsain, valószínűleg egy olyan kiúttalan helyzetbe jutunk, amely emlékeztet Kgovjni főparancsnokának helyzetére [6].*

Hajós egy más támadásmódot javasolt [13], amely a Hajós tételeként ismert állításon alapszik. Ez azt mondja ki, hogy minden gráfban, amely nem k-színezhető, van olyan részgráf, amely két egyszerű konstrukció ismételt alkalmazásával építhető fel $k+1$ csúcsú teljes gráfokból. E konstrukciók egyike abban áll, hogy azonosítjuk egymással egy nem k-színezhető gráf két csúcsát, amelyeket nem köt össze él. A másodikat az 1. ábrán szemléltetjük. Két egymástól idegen nem k-színezhető



1. ábra

gráfot veszünk, G-t és H-t. G-ben törlünk egy ab élt, H-ban egy xy élt. Ezután a-t azonosítjuk x-szel, és élt húzunk a b, y pontok között. Minden olyan gráf, amely $k+1$ csúcsú teljes gráfokból áll elő ezekkel a konstrukciókkal, nyilvánvalóan nem k-színezhető; Hajós bebizonyította ennek a ténynek a megfordítását is.

Hadwiger sejtése eléggé hasonló a Hajós-sejtéshez, de — úgy látszik — kevesebbet állít. Azt mondja ki, hogy ha egy G általános gráfot nem lehet k színnel színezni, akkor van benne olyan $k+1$ egymástól idegen összefüggő részgráf, hogy

* Carroll elbeszélésében a főparancsnok azt az utasítást kapja Ő Fényességétől, hogy helyezzen el körben körüljárható négy ólban 24 malacot, éspedig a teljes körüljárás során mindegyik ólban a malacok számának 10-hez közelebbi számnak kell lennie, mint az előző ólban volt. A főparancsnok nem tud megoldást találni, az alábbi szójátékkal azonban „megoldás" adható: legyen a négy ólban sorra nyolc, tíz, semennyi, hat malac; 10 közelebb van tízhez mint 8, *nothing is nearer ten than 10*, 6 közelebb van tízhez mint semmi, 8 közelebb van tízhez mint 6. (A „nothing is nearer ten than 10" mondatnak két jelentése van: semmi sincs közelebb tízhez, mint 10, — a semennyi közelebb van a tízhez mint 10.) (A fordító.)

ezek közül bármely kettőt összeköt valamely G-beli él. Kimutatták, hogy a Hadwiger-sejtés $k=4$ esete éppen ekvivalens a négyszíntétellel: bármelyikük levezethető a másikból ([17], [22], [23]).

Érdekes volna a Hajós és Hadwiger sejtései közötti kapcsolaton töprengeni. Könnyen kimutatható, hogy az utóbbi következik az elsőből. De lehetséges volna-e az elsőt vezetni le a másodikból anélkül, hogy valójában bebizonyítanánk őket? Még ennek a logikai kapcsolatnak a felderítése is határozott haladásnak ígérkezik a gráfszínezések elméletében.

Térjünk vissza a négyszínproblémához, és vizsgáljuk a gömbre írt térképek közül azokat, amelyeket háromszögeléseknek hívnak. Ezekben minden tartomány háromszög, vagyis olyan, hogy három él és három csúcs határolja.

Háromszögelés esetén a tartományok színezésének kérdése egyszerű probléma; csupán a duális gráfra kell alkalmaznunk Brooks tételét. Az egymással páronként szomszédos négy háromszög-tartomány esetét kivéve azt kapjuk, hogy három szín elegendő.

A négyszíntétel a közismert modern alakjában azt mondja ki, hogy bármely háromszögelési gráf csúcsai kiszínezhetőek négy színnel. Régóta ismeretes továbbá, hogy ha a tétel minden háromszögelésre érvényes, akkor igaz az összes hurokmentes planáris gráfra is; mivel bármely ilyen gráf — ha gömbre rajzoljuk — átalakítható háromszögeléssé további élek és esetleg további csúcsok hozzávételével. Ennek megfelelően a legtöbb cikk, amely napjainkban a négyszíntételről szól — ideértve az újkeletű bizonyítást leíró munkákat is —, csak háromszögelésekkel foglalkozik.

Ha adva van egy T háromszögelés csúcsainak 4-színezése, akkor ebből levezethető az élek egy 3-színezése az α, β és γ színekkel, úgy hogy minden tartományt három különböző színű él határol. A szabály a következő. A csúcsok négyféle színét jelöljük 1-gyel, 2-vel, 3-mal és 4-gyel. Színezzünk egy élt α-val, ha a végpontjainak színe 1 és 2, vagy 3 és 4. Színezzük β-val az élt, ha végpontjainak színe 1 és 3, vagy 2 és 4. A fennmaradó éleket γ-val színezzük.

Célszerű itt a 4-csoportonként ismert egyszerű algebrai struktúrát használni. Ennek pontosan négy eleme van: 0, α, β és γ; kommutatív és asszociatív összeadást definiálunk közöttük. A szabályok: minden x elemre $0+x=x$ és $x+x=0$; a zérustól különböző elemek (α, β és γ) közül bármely kettőnek a harmadik az összege. Ha a háromszögelésünk csúcsainak négyféle színét 0-val, α-val, β-val és γ-val jelöljük, akkor értelmezhetjük úgy egy él színét, mint végpontjai színeinek összegét. Ezzel T éleinek a három nem-zérus színnel való színezéséhez jutottunk.

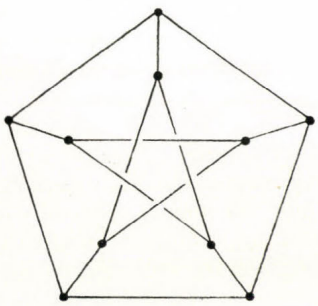
Vigyünk át egy ilyen élszínezést T duális gráfjára, G-re. A G gráf összefüggő, hurokmentes és planáris. Emellett 3-reguláris is, vagyis csúcsainak mindegyikébe pontosan három él fut össze. Meg lehet mutatni, hogy G-ben nincs „híd", vagyis olyan él, amelynek törlése szétszakítaná a gráfot.

Egy 3-reguláris gráf „Tait-féle színezése" olyan élszínezés az α, β, γ színekkel, hogy minden pontba mindegyik színű élből befut egy-egy. A néha „Tait sejtésének", néha „Tait tételének" nevezett állítás azt mondja ki, hogy bármely összefüggő planáris 3-reguláris hídmentes gráfnak van Tait-féle színezése. Az ilyen gráfok nem mások, mint a háromszögelések duálisai, és Tait-színezéseik megfelelnek a háromszögelések élszínezéseinek. Ezek szerint Tait tétele levezethető a négyszíntételből; sőt, a két tétel ekvivalens egymással.

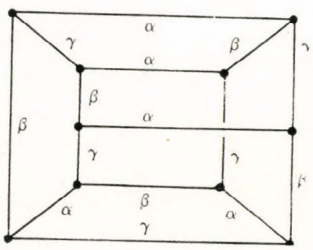
Létezik egy elmélet, amely a nem feltétlenül planáris 3-reguláris gráfok Tait-színezéseivel foglalkozik. Az említett ekvivalencia értelmében ez kapcsolatban áll a négyszínprobléma egy más általánosításával.

Ebben az elméletben rendszerint figyelmen kívül hagyjuk a hidat tartalmazó 3-reguláris gráfokat. Ezekről elég azt kimondani, hogy nincs Tait-féle színezésük; ennek bizonyítása igen egyszerű. Az olyan 3-reguláris gráfokkal sem kell sokat törődnünk, amelyek 2 vagy 3 él törlése révén felbonthatóak két kisebb gráfra, amelyekben van egy-egy kör. A még megmaradó 3-reguláris gráfokat „ciklikusan 4-összefüggőknek" hívjuk.

A kutatások jelenleg főként a Tait-színezés nélküli ciklikusan 4-összefüggő 3-reguláris gráfok vizsgálatával foglalkoznak. Az ilyen gráfokat újabban „mímiceknek" hívják a Scientific American matematikai játékoknak szentelt rovatában*. A legegyszerűbb és legismertebb mímic a 2. ábrán látható Petersen-gráf. A 3. ábrán egy ciklikusan 4-összefüggő olyan gráfot látunk Tait-féle színezéssel ellátva, amely nem mímic.



2. ábra



3. ábra

Néhány, a Petersen-féle gráftól különböző mímicet talált D. Blanuša [4], B. Descartes [9] és Szekeres György [18]. De a mímic-vadászat csak R. Isaacs [15] cikkének megjelenésével vált igazán eredményessé. Ebben eljárásokat találunk arra, hogy végtelenjével fogjunk mímiceket.

Reménykedhetünk a mímicek teljes rendszerezésében, amely minden típusukat leírja. Ha kevésbé vagyunk nagyratörőek, pályázhatunk csupán annak a — Hajóséhoz és Hadwigeréhez közel álló — sejtésnek a bizonyítására is, hogy minden mímicbe berajzolható egy Petersen-gráf. Ebből a sejtésből következik a négyszíntétel, minthogy a Petersen-féle gráf nem planáris. A tételnek valódi általánosításáról van tehát szó, amely kihívást jelent minden újdonsült négyszínezőnek.

A térképszínezések és a Tait-féle színezések meglepő módon kapcsolatban állnak a gráfokban tekintett „n-áramokkal" a szerző bizonyos tételei révén [19]. Képzeljünk el egy folyadékot, amely úgy kering egy G gráfban, hogy áramolhat G élei mentén. Az áramló mennyiség az élek mindegyikében egész szám. Természetesen a befutó áramok összege minden csúcsban egyenlő a kifutó áramok összegével. Egy ilyen áramlást G-beli n-áramnak nevezünk, ha két feltétel teljesül: egyrészt minden élre az áramerősség kisebb tartozik lenni, mint n; másrészt egy élnél sem lehet nulla az áramerősség.

* Az eredeti szövegben szereplő „snark" és „boojum" szavak magyarul való visszaadására nem találtam igazán jó megoldást. Ezeket a fantázia-neveket ugyanis a szerző Lewis Carroll egy olyan munkájából [7] vette, amelynek nem ismeretes magyar fordítása. A helyettük használt „mímic" és „bromboló" szavakat egy más Carroll-mű, a „Through the looking-glass" (Az ablaküvegen át, vö. [11]) egy versrészletének Weöres Sándor-féle fordításából (Szajkóhukky) kölcsönöztem. — A jelen fordítás már nyomdában volt, amikor Carroll e könyve megjelent Révbíró Tamás és Tótfalusi István magyarításában „Alice Törökországban" címmel. (A fordító.)

Az említett tételek azt mutatják, hogy 3-reguláris gráfokban a 4-áramok és a Tait-színezések átjátszhatóak egymásba. A mímiceket tehát definiálhatjuk a 4-áram nélküli, ciklikusan 4-összefüggő 3-reguláris gráfokként is. Érdekes volna tudni, vajon vannak-e 5-áram nélküli mímicek. Az a mímic-vadász, aki ekkora vadat kerít be, kétségtelenül úgy találná, hogy kedvenc sejtéseinek egyike csendesen és hirtelen elillant. Nem nevezhetjük hát az ilyen mímicet brombolónak? [7]

Azt találták, hogy ha egy síkra vagy gömbre írt térkép tartományai 4-színezhetőek, akkor a hozzá tartozó gráfban van 4-áram. Hasonlóképpen, ha 5-színezhetők a tartományok, akkor a gráfnak 5-árama van, és így tovább. Egy algebrai topológus, aki modulo 5 vett egészszámú együtthatókkal dolgozik, az 5-színezést 2-láncnak és az 5-áramot a lánc határának gondolhatja. Egy meglehetősen jól ismert bizonyítatlan állítás azt mondja ki, hogy bármely hídmentes gráfban van 5-áram. Ez a sejtés speciálisan arról biztosítana minket, hogy brombolók nem léteznek.

Figyeljünk fel rá, hogy az 5-áramok sejtése nem a riasztó négyszíntételt, hanem a régen kimutatott és kényelmesen tárgyalható ötszíntételt általánosítja. Hogy mutatkozhat mégis olyan nehéznek? A 6- és 7-áramokról is vannak hasonló bizonyítatlan sejtések; F. Jaeger viszont megmutatta, hogy 8-áram minden hídmentes gráfban létezik [16].

Befejezésül a négyszíntétel geometriai megközelítéséről teszünk néhány megjegyzést. Ezt O. Veblen tárta fel 1912-ben [21]. Véges projektív geometriákat tekintünk, amelyekben a pontok szerepét a modulo 2 vett maradékosztály-test fölötti vektorok játsszák. Bizonyos célokra egy G gráf felfogható úgy, mint egy ilyen térben vett S ponthalmaz. Az S-beli pontok G éleinek felelnek meg. Általában úgy rendezzük el a dolgokat, hogy S egy részhalmaza akkor és csak akkor legyen lineárisan függő, ha van G-nek olyan köre, amelynek minden élét tartalmazza a részhalmaz. Ha a projektív tér n-dimenziós, akkor az nyerhető, hogy G 4-színezéseit az olyan $(n-2)$-dimenziós alterek reprezentálják, amelyekben nincs S-beli pont.

Legyen P az n-dimenziós tér, és legyen Q egy olyan $(n-2)$-dimenziós altere, amely nem metszi S-t. Ekkor P-t Q-ból egy vonalra, egy egydimenziós térre vetíthetjük. E vonal pontjai a GF (2) fölötti (1, 0), (0, 1) és (1, 1) vektorok, s ezek azonosíthatóak a 4-csoport α, β, γ nem-zérus elemeivel. Mindegyik élt e három „szín" egyikére vetítjük. A lineáris függés közös szabálya folytán minden kört olyan élek alkotnak, amelyek színeinek összege nulla. Ebből a tényből levezethetjük G egy olyan 4-színezésének létezését, hogy bármely él vetítési színe az az eleme a 4-csoportnak, amely az él végpontjai színeinek összegével egyenlő.

Miután kapcsolatba hoztuk G 4-színezéseit P altereivel, a négyszínproblémának egy messzemenő általánosítását mondhatjuk ki. Az új probléma abban áll, hogy osztályozzuk azokat a ponthalmazokat P-ben, amelyek minden P-beli $(n-2)$-teret metszenek. A probléma egy gyengített formája egy újabb Hajós-stílusú sejtésre vezet minket.

Nevezzük P-nek bármely olyan S ponthalmazát, amely minden $(n-2)$-teret metsz, „2-blokknak" (akár gráfot reprezentál S, akár nem). Legyen Z egy ilyen S 2-blokk valamely részhalmaza. Legyen T olyan $(n-2)$-tér P-ben, amely Z összes pontjait tartalmazza; így S minden pontja lineárisan függ Z-től. Ha T nem tartalmaz más S-beli pontot, akkor T-t Z egy „érintőjének" (tangensének) hívjuk. Az S 2-blokkot „tangenciálisnak" mondjuk, ha S bármely nem-nulla valódi Z részhalmazának van érintője. Jelenleg az ilyen jellegű geometriai vizsgálatokban a fő érdeklődés a tangenciális 2-blokkok keresésére irányul.

A tangenciális 2-blokkokat az teszi fontosakká, hogy minden más 2-blokkot ezekből származtathatunk. Tekintsünk ugyanis egy S 2-blokkot, amelyre valamely

nem-nulla valódi Z részhalmaznak nincs érintője. Meg lehet mutatni, hogy P-nek Z-ből egy alacsonyabb dimenziójú alkalmas térre való vetítésével S-et e tér egy 2-blokkjába vihetjük át. Ezen eljárás ismétlésének végül is egy tangenciális 2-blokkhoz kell vezetnie, amelyből az eredeti 2-blokk bizonyos értelemben származtatható.

Eddig csupán három tangenciális 2-blokkot találtak. Ilyen a Fano-blokk, azaz a 7 pontú véges projektív sík. Ilyen a Desargues-blokk, amelyet a 3-dimenziós Desargues-konfiguráció 10 pontja ad meg; vehetjük úgy, hogy ez a teljes 5-gráfot képviseli. Van végül az 5-dimenziós Petersen-blokk, amely a Petersen-gráfot reprezentálja a dualitás értelmében: úgy, hogy a körök helyett szétvágó halmazok állnak a lineáris függés definíciójában.

A korábban említett sejtés azt mondja ki, hogy nincs más tangenciális 2-blokk, mint a Fano-, a Desargues- és a Petersen-féle. Ez a sejtés speciális esetként maga után vonja a négyszíntételt is, és azt az állítást is, hogy a Petersen-féle gráf minden mímicbe beírható.

A szerző kimutatta, hogy 5 dimenzióig nincs több tangenciális 2-blokk [20]. B. T. Datta kiterjesztette a kutatást a 6 és 7 dimenzió-számokra; azt nyerte, hogy ezekben a geometriákban sincs újabb tangenciális 2-blokk [8].

Amit elmondtam, az — remélem — eléggé tanusítja, hogy Appel, Haken és Koch munkáját kezdetnek és nem lezárásnak kell tekintenünk. A négyszíntétel a jéghegy csúcsa, az ék hegye, a tavasz első kakukkszava. És még egy szót tehozzád, elkedvetlenedett térképszínező, aki félresikerült bizonyításaidon merengsz: „Ki nem fürkészett dolgok! Ez az én mondanivalóm!" [11].

Fordította: ÁDÁM ANDRÁS

IRODALOM

[1] APPEL, K., HAKEN, W., Every planar map is four colorable, Part I: Discharging, *Illinois J. Math.* 21 (1977), 429—490.

[2] APPEL, K., HAKEN, W., KOCH, J., Every planar map is four colorable, Part II: Reducibility, *Illinois J. Math.* 21 (1977), 491—567.

[3] BERNHART, F., A digest of the Four Colour Theorem, *J. Graph Theory* 1 (1977), 207—225.

[4] BLANUŠA, D., Problem cetiriju boja (A négyszínprobléma), *Hrvatsko Prirodoslovno Društvo, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr., Ser. II.*, 1 (1946), 31—42.

[5] BROOKS, R. L., On colouring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 37 (1941), 194—197.

[6] CARROLL, LEWIS, *A tangled tale*, Knot VIII.

[7] CARROLL, LEWIS, *The hunting of the Snark*, Fit the Eighth.

[8] DATTA, B. T., Non-existence of six-dimensional tangential blocks, *J. Combinat. Theory* B21 (1976), 171—193.

[9] DESCARTES, BLANCHE, Network colourings, *Math. Gazette* 32 (1948), 67—69.

[10] DESCARTES, BLANCHE, On some recent progress in combinatorics, *J. Graph Theory* 1 (1977), 192.

[11] DUMPTY, H. amint erről LEWIS CARROLL beszámolt: *Through the looking-glass*, Chapter 6.

[12] HADWIGER, H., Ungelöste Probleme, *Elemente der Math.* 13 (1958), 127—128.

[13] HAJÓS GY., Über eine Konstruktion nicht n-färbbarer Graphen, *Wiss Zeitschr. M.-Luther-Univ. Halle—Wittenberg* A10 (1961), 116—117.

[14] HAKEN, W., An attempt to understand the Four Colour Problem, *J. Graph Theory* 1 (1977), 193—206.

[15] ISAACS, R., Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait colorable, *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), 221—239.

[16] JAEGER, F., On nowhere-zero flows in multigraphs, *Proc. Fifth British Combinat. Conf.* (Utilitas Math., Winnipeg, 1976), 373—378.

[17] ORE, O., *The Four Color Problem*, Academic Press, New York, 1967.

[18] SZEKERES GY., Polyhedral decompositions of cubic graphs, *Bull. Austral. Math. Soc.* 8 (1973), 367—387.

[19] TUTTE, W. T., On the imbedding of linear graphs in surfaces, *Proc. London Math. Soc., Ser. 2*, 51 (1949), 474—483.

[20] TUTTE, W. T., On the algebraic theory of graph colorings, *J. Combinat. Theory* 1 (1966), 15—50.
[21] VEBLEN, O., An application of modular equations in Analysis Situs, *Ann. of Math.* 14 (1912), 86—94.
[22] WAGNER, K., Bemerkung zu Hadwigers Vermutung, *Math. Ann.* 141 (1960), 433—451.
[23] WAGNER, K., Beweis einer Abschwächung der Hadwiger–Vermutung, *Math. Ann.* 153 (1964), 139—141.

ПРОБЛЕМЫ РАСКРАСКИ

В. Т. ТАТТ

Перевод статьи публикованной оригинально в журнале The Mathematical Intelligencer.

COLOURING PROBLEMS

W. T. TUTTE

Translation of a paper published in The Mathematical Intelligencer originally.

AZ 1978. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENY FELADATAI

1. Legyen adva egy X végtelen halmaz véges részhalmazainak egy $\mathscr{H}$ rendszere. Tegyük föl, hogy X bármely véges részhalmaza előáll két $\mathscr{H}$-beli diszjunkt uniójaként. Bizonyítsuk be, hogy akkor tetszőleges k természetes számhoz létezik X-nek olyan részhalmaza, ami legalább k-féleképp állítható elő két $\mathscr{H}$-beli diszjunkt unió-jaként!

(ERDŐS PÁL)

2. Egy L disztributív hálóra vonatkozó alábbi két állítás közül melyikből következik a másik?
(A) L bármely ideálja legalább két különböző homomorfizmus magja;
(B) L-ben nincs maximális ideál.
(L bármely φ homomorfizmusa indukál L-n egy ekvivalenciarelációt: $a \sim b$, ha $\varphi(a)=\varphi(b)$. Két homomorfizmust nem tekintünk különbözőnek, ha ugyanazt a relációt indukálják.)

(J. VARLET és FRIED ERVIN)

3. Legyenek $1<a_1<a_2<\ldots<a_n<x$ olyan természetes számok, hogy $\sum_1^n (1/a_i) \leqq 1$. Jelölje y azon x-nél kisebb természetes számok számát, melyek egyetlen a_i-vel sem oszthatók. Bizonyítandó, hogy

$$y > cx/\log x$$

valamely c x-től és a_i-től független pozitív konstanssal.

(RUZSA IMRE)

4. Az f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ függvény ($\mathbf{Q}$ a racionális, $\mathbf{R}$ a valós számok halmaza) rendelkezzék az alábbi tulajdonsággal. Tetszőleges $h \in \mathbf{Q}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ esetén

$$f(x+h)-f(x) \to 0$$

ha $x \in \mathbf{Q}$ tart x_0-hoz. Következik-e ebből, hogy f korlátos valamilyen intervallumon?

(LACZKOVICH MIKLÓS)

5. Tegyük föl, hogy a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ sor konvergens a komplex sík $\{z: |z|=1\}$ egységkörvonalának egy környezetében, és itt egy $R(z)=P(z)/Q(z)$ racionális tört-

függvényt állít elő, ahol P és Q legfeljebb k-adfokú polinomok. Bizonyítandó, hogy akkor valamely k-tól független c konstanssal

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \leqq ck^2 \max_{|z|=1} |R(z)|.$$

(H. S. SHAPIRO, SOMORJAI GÁBOR)

6. Tegyük föl, hogy a $g\colon (0, 1) \to \mathbf{R}$ függvényt egyenletesen lehet approximálni nemnegatív együtthatójú polinomokkal. Bizonyítsuk be, hogy akkor g analitikus. Igaz marad-e az állítás $(0, 1)$ helyett $(-1, 0)$-t téve?

(J. KALINA, LEMPERT LÁSZLÓ)

7. Legyen T a hiperbolikus síknak egy olyan transzformációja, aminek az értékkészlete az egész sík, és ami bármely három egy egyenesen levő pontot egy egyenesen levő pontokba visz. Mutassuk meg, hogy ekkor T szükségképpen egybevágóság.

(BOGNÁR MÁTYÁS)

8. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ $n>1$ pont az egységnégyzetben. Legyen r_i az X_i távolsága a hozzá legközelebb eső ponttól. Bizonyítandó, hogy $r_1^2+\ldots+r_n^2 \leqq 4$.

(FEJES-TÓTH LÁSZLÓ, SZEMERÉDI ENDRE)

9. Tegyük fel, hogy egy topologikus tér minden, legfeljebb $\aleph_1$ számosságú altere megszámlálható bázisú. Bizonyítsuk be, hogy akkor az egész tér is megszámlálható bázisú.

(HAJNAL ANDRÁS, JUHÁSZ ISTVÁN)

10. Legyen $0<p<1$, Y_n n-edrendű p-paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy a H természetes számokból álló halmaznak van sűrűsége, és ez a sűrűség d. Bizonyítandó:

a) $P(Y_n \in H) \to d$ $(n \to \infty)$,

ha H egy számtani sorozat;

b) Tetszőleges H-ra nem igaz a fentebbi limeszreláció;

c) Ha H olyan, hogy $P(Y_n \in H)$ konvergens, akkor a limesz csak d lehet.

(PÓSA LAJOS)

VERSENYBIZOTTSÁG

PROBLEMS OF THE ANNUAL MATHEMATICAL COMPETITION IN MEMORIAM MIKLÓS SCHWEITZER, 1978.

1. We are given a family $\mathscr{H}$ of finite subsets of an infinite set X. $\mathscr{H}$ is known to have the property that any finite subset of X can be represented as the union of two disjoint sets from $\mathscr{H}$. Prove that for any positive integer k there is a subset of X which can be represented in at least k different ways as the union of two disjoint sets from $\mathscr{H}$.

2. Of the following two properties of a distributive lattice L which does imply the other?
(A) Any ideal of L is the kernel of at least two different homomorphisms;
(B) L has no maximal ideal.
(Remark. Any homomorphism φ of L induces an equivalence relation in L: $a \sim b$ if $\varphi(a)=\varphi(b)$. Two homomorphisms are not considered different if the induced equivalence relations are identical.)

3. Let $1<a_1<\ldots<a_n<x$ be positive integers such that $\sum_1^n (1/a) \leqq 1$. Denote by y the number of those positive integers inferior to x which are not divisible by any of the a_j's. Prove that

$$y > cx/\log x$$

with some positive c independent of x and the numbers a_j.

4. The function f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{Q}$ is the set of rational, $\mathbf{R}$ the set of real numbers) posesses the following property. For any $h \in \mathbf{Q}$, $x_0 \in \mathbf{R}$,

$$f(x+h)-f(x) \to 0$$

as $x \in \mathbf{Q}$ goes to x_0. Is then f necessarily bounded on some intervall?

5. Suppose that the series $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ is convergent in a neighbourhood of the circumference $\{z: |z|=1\}$ in the complex plane. Suppose furthermore that its sum is a rational function $R(z)=P(z)/Q(z)$, where P, Q are polynomials of degree less than k. Prove that there exists an absolute constant c such that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \leqq ck^2 \max_{|z|=1} |R(z)|.$$

6. Suppose that the function g: $(0, 1) \to \mathbf{R}$ can be approximated uniformly by polynomials with nonnegative coefficients. Prove that g is then analytic. Does this statement hold true with $(0, 1)$ replaced by $(-1, 0)$?

7. Let T be a superjective mapping of the hyperbolic plane onto itself such that the image of collinear points is again collinear. Prove that T must be an isometry.

8. Let $X_1, \ldots, X_n$ be $n>1$ points in the unit square. Denote by r_i the distance of X_i to the nearest of the rest. Prove that $r_1^2+\ldots+r_n^2 \leqq 4$.

9. We are given a topological space. Suppose that its subspaces of cardinality at most $\aleph_1$ have countable bases. Prove that then also the whole space has a countable basis.

10. Let $0<p<1$, Y_n be a binomially distributed random variable with parameters (n, p). Suppose that we are given a set H of positive integers and H has density d. Prove that

a) $P(Y_n \in H) \to d$ $(n \to \infty)$,

if H is an arithmetic progression;

b) the above limit relation does not hold for an arbitrary H;

c) if H is such that $P(Y_n \in H)$ is convergent, then its limit must be d.

JELENTÉS AZ 1978. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENYRŐL

Az 1978. évi Schweitzer Miklós Emlékversenyre a Bolyai Társulat az alábbi bizottságot jelölte ki: Császár Ákos (elnök), Fejes-Tóth László, Hajnal András, Halász Gábor, Lempert László (titkár), Révész Pál, T. Sós Vera. Részt vett még a bizottság munkájában Komlós János.

A verseny 1978. nov. 3-a és 13-a között folyt le, a feladatok az alábbiak voltak: (A feladatok után zárójelben közöljük a feladatok szerzőit.)

A feladatokat ld. a csatolt papíron.

Dec. 8-i ülésén a bizottság az alábbi határozatot hozta.

I. díjban és 4000 Ft jutalomban részesíti Totik Vilmost, aki a szegedi József Attila Tudományegyetem matematika szakán 1978-ban végzett. Totik Vilmos valamennyi feladatra nyújtott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 2., 3., 4., 6., 8. és 10. feladatot, hiányosan a 7.-et, és részeredményt ért el a (sajnálatos módon hibásan kitűzött) 9. feladatban. Az 5. feladattal a versenyzők közül csak ő foglalkozott; a feltételeket erősítve, a kívánt állításnál valamivel kevesebbet bizonyított.

II. díjban és 2000—2000 Ft jutalomban részesíti a bizottság

Füredi Zoltánt, aki a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakán 1978-ban végzett;

Kollár Jánost, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakának negyedéves hallgatóját; valamint

Simányi Nándort, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakának ugyancsak negyedéves hallgatóját.

Füredi Zoltán az 1., 3., 4., 6., 7., 8. és 10. feladatra nyújtott be megoldást; a 7.-re adott megoldása kissé hiányos, a többi helyes.

Kollár János a 2., 3., 4., 6., 7., 8. és 10. feladatra nyújtott be megoldást; a 8.-ra adott megoldása kissé hiányos, a többi helyes.

Simányi Nándor az 1., 2., 4., 6., 7., 8., 9. és 10. feladatra nyújtott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 2., 4., 6., 8. és 10. feladatot. A 7. megoldása hiányos, a 9.-ben részeredményt ért el.

III. díjban és 1000—1000 Ft jutalomban részesíti a bizottság

Kiss Emilt, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakának ötödéves hallgatóját, és

Pálfy Péter Pált, aki a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakán 1978-ban végzett.

Kiss Emil az 1., 2., 4., 6., 7., 8., 9. és 10. feladatra nyújtott be megoldást. Helyesen oldotta meg az 1., 2., 4. és 6. feladatot, hiányosan a 7.-et és a 8.-at, felerészben a 10.-et, és részeredményt ért el a 9.-ben. Ez utóbbi, (az 5. mellett) legnehezebbnek bizonyult feladatban ő érte el a legértékesebb eredményeket.

Pálfy Péter Pál a 2., 3., 4., 6., 8. és 10. feladatra nyújtott be megoldást. Valamennyi megoldása helyes.

A bizottság dicséretben részesíti Krisztin Tibort, a szegedi József Attila Tudományegyetem harmadéves hallgatóját. Krisztin Tibor megoldást nyújtott be az 1., 2., 3., 4., 6., 7., 8. és 10. feladatra. Az 1., 3., 4. és 8. feladatra adott megoldása helyes, a 6. és 10. feladatot felerészben, a 7.-et hiányosan, a 2.-at részben oldotta meg.

Meg kell még említeni Magyar Zoltánt, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem elsőéves hallgatóját, a verseny egyik legfiatalabb résztvevőjét. Helyesen oldotta meg a 4., 6. és 10. feladatot. Ez utóbbi feladattal kapcsolatban ő érte el a legteljesebb eredményt.

A megoldások ismertetése

1. Feladat. Érkezett 10 megoldás. Helyes Füredi Z., Kincses J., Kiss E., Krisztin T., Pröhle P., Simányi N., Szabó Z., Totik V. és Tuza Zs. megoldása.

Valamennyi megoldás Ramsey alábbi tételén alapszik: Legyen adva egy Y végtelen halmaz és egy n természetes szám. Osszuk be Y n-elemű részhalmazait két osztályba. Akkor létezik egy $Y' \subset Y$ végtelen halmaz, melynek valamennyi n-elemű részhalmaza ugyanabban az osztályban van.

A legtöbb megoldó a következőképpen bizonyított:

Jelöljük $[A]^n$-nel az A halmaz n-elemű részhalmazainak halmazát. Adott k mellett megmutatjuk, hogy létezik egy $m \geqq k$ természetes szám és egy $Z \subset X$ végtelen halmaz, hogy $[Z]^m \subset \mathscr{H}$. Ebből már következik a feladat állítása, hiszen akkor Z bármely $2m$-elemű részhalmaza legalább $\binom{2m}{m} \geqq k$ különböző módon állítható elő két $\mathscr{H}$-beli diszjunkt uniójaként.

A fentebbi tulajdonságú Z pedig így található: Osszuk két osztályba $[X]^2$ elemeit aszerint, hogy $\mathscr{H}$-ba tartoznak vagy sem. Ramsey tétele szerint létezik egy $X_2 \subset X$ végtelen halmaz úgy, hogy

$$[X_2]^2 \subset \mathscr{H} \quad \text{vagy} \quad [X_2]^2 \cap \mathscr{H} = \emptyset.$$

Ezek után X_2 3-elemű részhalmazait osztályozzuk aszerint, hogy $\mathscr{H}$-ba tartoznak vagy sem. Megint létezik egy $X_3 \subset X_2$ végtelen halmaz, hogy

$$[X_3]^3 \subset \mathscr{H} \quad \text{vagy} \quad [X_3]^3 \cap \mathscr{H} = \emptyset.$$

Az eljárást folytatva elkészítjük X végtelen részhalmazainak egy $X \supset X_2 \supset \ldots \ldots \supset X_{2k}$ sorozatát, melynek tagjai rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: $2 \leqq m \leqq 2k$ esetén

$$[X_m]^m \subset \mathscr{H} \quad \text{vagy} \quad [X_m]^m \cap \mathscr{H} = \emptyset.$$

Természetesen akkor ilyen m esetén

$$[X_{2k}]^m \subset \mathscr{H} \quad \text{vagy} \quad [X_{2k}]^m \cap \mathscr{H} = \emptyset \tag{1}$$

is teljesül. $Z = X_{2k}$ választható volna, ha megmutatnánk, hogy valamely $m \geqq k$-val a második alternatíva nem teljesülhet. Ez valóban így van; válasszuk ki ugyanis X_{2k}-nak egy $2k$-elemű A részhalmazát. A feladat feltétele szerint (melyet kizárólag most használunk föl), $A = B \cup C$, ahol $B, C \in \mathscr{H}$. B és C közül az egyik, mondjuk B, legalább k-elemű. Ekkor $m = |B|$-t téve, $B \in [X_{2k}]^m \cap \mathscr{H}$; következésképpen (1)-

ben az első lehetőség teljesül, és így az előrebocsájtott megjegyzés szerint készen vagyunk.

Megjegyzések. 1. Nem használtuk ki a feladat feltételei közül, hogy X véges részhalmazai két $\mathscr{H}$-beli *diszjunkt* uniójaként állnak elő. Tehát ez a feltétel elhagyható. Erre egyébként több versenyző is felhívta a figyelmet. Pröhle Péter tovább gyengítette a feltételt: elég ugyanis kikötni, hogy X véges részhalmazai előállnak c-nél kevesebb $\mathscr{H}$-beli uniójaként, ahol c tetszőleges rögzített szám.

2. Halmazok helyett természetes számokat, unió helyett összeget mondva, az alábbi analóg problémára jutunk: Legyen adva egy H természetes számokból álló halmaz. Tegyük fel, hogy tetszőleges természetes szám előáll két H-beli összegeként. Következik-e ebből, hogy tetszőleges k-hoz van olyan szám, ami legalább k-féleképp állítható elő két H-beli összegeként?

Ez a probléma Sidon Simontól származik; máig megoldatlan. Ellenben a kérdés multiplikatív változatára — mikor is a fentebbiekben „összeg" helyett mindkétszer „szorzatot" mondunk — a válasz igenlő, és következik a versenyfeladatból. Legyen ugyanis X a prímszámok halmaza, és minden H-beli számhoz rendeljük hozzá prímosztóinak halmazát. Ily módon kapunk egy $\mathscr{H}$ halmazt. Erre teljesülnek a feladat feltételei, ezért van egy $A \subset X$ halmaz, amit legalább k-féleképp lehet két $\mathscr{H}$-beli diszjunkt uniójaként előállítani. Ekkor az A-beli prímek szorzata szintén legalább k-féleképp állítható elő két H-beli szám szorzataként.

2. Feladat. Érkezett 14 megoldás. Helyes Bara T., Kiss E., Kollár J., Pálfy P. P., Pröhle P., Rónyai L., Simányi N., Totik V. megoldása.

a) (A)-ból következik (B). Ezt indirekte fogjuk belátni. Tegyük föl, hogy L-ben van maximális ideál, jelöljük ezt M-mel. Legyen φ olyan homomorfizmus, aminek magja M. Megmutatjuk, hogy akkor $L \setminus M$ képe φ-nél egy pont, vagyis a φ által indukált ekvivalenciarelációban M elemei ekvivalensek egymással, $L \setminus M$ elemei ekvivalensek egymással, és M elemei nem ekvivalensek $L \setminus M$ elemeivel. Ebből következik, hogy lényegében egyetlen olyan homomorfizmus van, aminek magja M.

Tekintsük tehát $L \setminus M$ két elemét, a-t és b-t. Ismeretes, hogy az M és a által generált ideál,

$$\langle M, a\rangle = \{x \in L: \ \exists m \in M \ x \leqq a \vee m\}.$$

M maximalitása folytán $\langle M, a\rangle = L$. Tehát valamely $m \in M$ elemmel $b \leqq a \vee m$, s így $\varphi(b) \leqq \varphi(a) \vee \varphi(m) = \varphi(a)$. Hasonlóan $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$, tehát $\varphi(a) = \varphi(b)$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

b) Viszont (B)-ből nem következik (A). Az itt következő ellenpéldát Rónyai Lajos találta.

Legyen

$$L = \{V: V \subset \mathbf{R} \text{ véges}\} \cup \{(-\infty, x] \cup V: x \in \mathbf{R}, V \subset \mathbf{R} \text{ véges}\}.$$

A műveletek legyenek a halmazelméleti unió és metszet. Így L $\mathbf{R}$ részhalmazhálójának részhálója, következésképp disztributív. Megmutatjuk, hogy nincs benne maximális ideál, és ugyanakkor a $\{\emptyset\}$ ideál csak egy homomorfizmus magja.

Legyen ugyanis J valódi ideál L-ben. J-ben nem szerepelhet valamennyi $(-\infty, x]$ alakú félegyenes, ellenkező esetben ugyanis valamennyi véges halmaz is J-ben lenne, s ezért $J = L$ volna. Van tehát egy olyan $x \in \mathbf{R}$, hogy $(-\infty, x] \notin J$, s akkor persze $y \geqq x$ esetén is $(-\infty, y] \notin J$. Ezért

$$J^* = \{(-\infty, z] \cup V: z \leqq x, V \subset \mathbf{R} \text{ véges}\} \cup \{V: V \subset \mathbf{R} \text{ véges}\}$$

J-t tartalmazó valódi ideál; következésképpen J nem lehet maximális ideál.

Másfelől legyen φ olyan homomorfizmus, aminek a magja $\{\emptyset\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor φ monomorfizmus, vagyis az általa indukált ekvivalenciareláció szerint minden elem csak önmagával ekvivalens (tehát (A) nem teljesül). Valóban, tételezzük föl, hogy $a, b \in L$, $a \neq b$, de $\varphi(a) = \varphi(b)$. a és b szimmetrikus differenciája nemüres, ezért létezik egy $p \in \mathbf{R}$, hogy mondjuk $p \in a$, de $p \notin b$. Ekkor

$$\varphi(\{p\}) = \varphi(\{p\} \wedge a) = \varphi(\{p\}) \wedge \varphi(a) = \varphi(\{p\}) \wedge \varphi(b) = \varphi(\{p\} \wedge b) = \varphi(0) = 0$$

ellentmondásban $\operatorname{Ker} \varphi = \{\emptyset\}$-val. Az ellentmondás bizonyítja φ monomorfizmus voltát.

3. Feladat. Érkezett 6 megoldás. Helyes Füredi Z., Kollár J., Krisztin T., Pálfy P. P. és Totik V. megoldása.

A feladat annak bizonyítását kívánja, hogy a valamely a_j-vel osztható számok száma x-ig nem túl nagy. Kézenfekvő volna ezt a következőképp bizonyítani. Rögzített j-re az a_j-vel osztható számok száma $[x/a_j]$. Ezért a valamely a_j-vel osztható x-nél kisebb számok z számára

$$z \leqq \sum \left[\frac{x}{a_j}\right] \leqq \sum \frac{x}{a_j} \leqq x$$

adódik, ami természetesen használhatatlan becslés.

A helyes megoldás alapötlete az, hogy két esetet különböztetünk meg. Először feltesszük, hogy az a_j számok között sok $x/2$-nél nagyobb van; ekkor az $x/2$-nél kisebb a_j-k reciprokösszege 1-nél sokkal kisebb lesz, és alkalmazható lesz $x/2$-ig a fenti szitaformula. Ha pedig kevés $x/2$-nél nagyobb a_j van, akkor más módon becsüljük meg alulról y-t.

Még mielőtt pontosan megmondanánk, hogy mit értünk sokon és kevésen, jegyezzük meg, hogy elég a feladat állítását valamely x_0-nál nagyobb x-ekre bebizonyítani — ugyanis y mindig legalább 1. x_0-t pedig válasszuk meg úgy, hogy $x > x_0$ esetén $x/2$ és x között legalább $x/(3 \log x)$ prím legyen. A nagy prímszámtétel következményeképpen ilyen x_0 létezik.

A továbbiakban az alábbi két esetet fogjuk megkülönböztetni:

I. Az $x/2$-nél nagyobb a_j-k száma $x/(6 \log x)$-nél kisebb;

II. Legalább $x/(6 \log x)$ darab $x/2$-nél nagyobb a_j van.

Az I. esetben legalább $x/(6 \log x)$ darab x-nél kisebb prímszám *nem* szerepel az a_j-k közt; ezek a prímek természetesen egyetlenegy a_j-vel sem oszthatók, tehát ekkor $y \geqq x/6 \log x$.

A II. esetben pedig

$$\sum_{a_j \leqq \frac{x}{2}} \frac{1}{a_j} \leqq 1 - \sum_{a_j > \frac{x}{2}} \frac{1}{a_j} \leqq 1 - \frac{x}{6 \log x} \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{6 \log x},$$

és ezért az $x/2$-nél kisebb, valamilyen a_j-vel osztható számok w számára

$$w \leqq \sum_{a_j \leqq \frac{x}{2}} \left[\frac{x/2}{a_j}\right] \leqq \frac{x}{2} - \frac{x}{12 \log x}$$

adódik, ahonnan megintcsak

$$y \geqq \frac{x}{2} - w \geqq \frac{x}{12 \log x}.$$

4. Feladat. Érkezett 18 megoldás. Helyes Bara T., Binzberger G., Füredi Z., Horváth E., Kincses J., Kiss E., Kollár J., Komornik V., Krisztin T., Magyar Z., Pálfy P. P., Rónyai L., Sebő A., Seress Á., Simányi N., Szabó Z., Totik V. megoldása.

Nem következik. Tekintsük ugyanis az alábbi függvényt:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \log\log 2q,$$

ahol p/q tovább nem egyszerűsíthető alakban felírt, pozitív nevezőjű tört. Ez természetesen semmilyen intervallumon nem korlátos. Másfelől, ha $x=p/q$ és $h=k/m$, akkor $x+h=(pm+qk)/qm$; ez utóbbi felírás esetleg még egyszerűsíthető, annyi azonban biztos, hogy $f(x+h)\leqq\log\log 2qm$. Hasonlóan adódik $f(x+h)\geqq$ $\geqq\log\log(2q/m)$, s így

$$\log\frac{\log 2q-\log m}{\log 2q} \leqq f(x+h)-f(x) \leqq \log\frac{\log 2q+\log m}{\log 2q}.$$

Ha most $x\to x_0$, akkor $q\to\infty$, következésképpen

$$f(x+h)-f(x)\to 0.$$

Vagyis a fenti f ellenpélda a kérdéses következtetésre.

5. Feladat. Érkezett 1 megoldás.

Jelölje D a komplex sík egységkörét: $D=\{z\colon |z|<1\}$, ∂D pedig legyen a határa.

Föltehetjük, hogy $|R(z)|$ az egységkör kerületén végig kisebb egynél, és akkor $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<ck^2$-t kell bizonyítani. Elég lesz persze például a

$$\sum_{-\infty}^{-1}|a_n| < ck^2 \tag{2}$$

becslést igazolni, ugyanis aztán a már bizonyítottakat alkalmazhatjuk $R(z)$ helyett a $\dfrac{R(1/z)}{z}$ függvényre, és akkor $\sum_{0}^{\infty}|a_n|<ck^2$ is adódik.

Az együtthatókra vonatkozó képlet szerint

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{R(z)}{z^{n+1}}\,dz, \tag{3}$$

ahol az integrálást végezhetjük ∂D mentén, vagy általában tetszőleges olyan Γ görbe mentén, hogy a ∂D és Γ által határolt tartományban $R(z)$-nek nincs pólusa. A továbbiakban $\Gamma\subset D$-t fogjuk ügyesen megválasztani.

A fentiekből

$$\sum_{-\infty}^{-1}|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma |R(z)|(1+|z|+\ldots+|z|^l+\ldots)\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma |R(z)|\cdot\frac{|dz|}{1-|z|}.$$

Olyan Γ-t keresünk, ami mentén a jobboldali integrálban az integrandus nem túl nagy. Az $1/(1-|z|)$ szorzó miatt igyekszünk Γ-t eltávolítani az egységkörvonaltól. A baj csak az, hogy az egységkörvonaltól messze $R(z)$-ről nem tudunk semmit. Ezért első lépésként megbecsüljük $R(z)$-t $z\in\bar{D}$ esetén.

Jelöljük R egységkörbe eső pólusait $q_1, \ldots, q_h$-val, többszörös pólusok többször forduljanak elő a sorozatban. Természetesen $h \leqq k$. Tekintsük a

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{h} \frac{z-q_\nu}{1-\bar{q}_\nu z}$$

Blaschke-szorzatot. B holomorf $\bar{D}$-ban, eltűnik a q_ν pontokban, és az egységkörvonalon levő $e^{i\vartheta}$ pontokban $|B(e^{i\vartheta})| \leqq 1$. Ezért $S(z) = R(z)B(z)$ holomorf lesz D-ben, és ∂D-n legfeljebb 1 abszolútértékű. A maximumelv miatt tehát $|S(z)| \leqq 1$ $z \in \bar{D}$-re, vagyis

$$|R(z)| \leqq \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{h} \left| \frac{z-q_\nu}{1-\bar{q}_\nu z} \right|} \quad (|z| \leqq 1). \tag{4}$$

Ez a keresett becslés.

Legyen most

$$\Gamma = \partial \left\{ z \in D : \left| \frac{z-q_\nu}{1-\bar{q}_\nu z} \right| \geqq 1 - \frac{1}{k+1}, \quad 1 \leqq \nu \leqq h \right\} \setminus \{z : |z| = 1\}.$$

Ha $z \in \Gamma$, akkor (4) szerint

$$|R(z)| \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e. \tag{5}$$

A fent definiált görbe nem okvetlen Jordan-görbe; általában több (véges sok) zárt Jordan-görbéből fog állni. Ettől függetlenül az általa és a ∂D által határolt tartományban $R(z)$ holomorf, és így a (3) képlet és összes következménye igaz lesz.

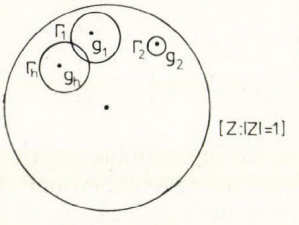
Γ nyilván a

$$\Gamma_\nu = \left\{ z : \left| \frac{z-q_\nu}{1-\bar{q}_\nu z} \right| = \frac{k}{k+1} \right\}$$

görbék bizonyos részíveiből fog állni. Hogy is néznek ki a Γ_ν görbék? Ha $q_\nu = 0$, akkor Γ_ν körvonal. De körvonal lesz $q_\nu \neq 0$ esetén is, ugyanis a $|w| = \frac{k}{k+1}$ körvonalból kapható a

$$w = \frac{z-q_\nu}{1-\bar{q}_\nu z} \tag{6}$$

tört-lineáris transzformációval; az ilyen transzformációk pedig kört körbe visznek. (Γ_ν-nek persze nem q_ν lesz a középpontja! Ellenben, ha D-re mint a hiperbolikus geometria Poincaré-modelljére tekintünk, akkor ebben a modellben a (6) transzformáció a hiperbolikus sík egybevágósága, és ezért Γ_ν nemeuklideszi középpontja q_ν lesz. Egyébként Γ_ν nemeuklideszi sugara körülbelül $\log k$.)



1. ábra

Mivel $\Gamma \subset \bigcup_{1}^{h} \Gamma_\nu$, azért (5)-öt is fölhasználva

$$\sum_{-\infty}^{-1} |a_n| \leqq \frac{e}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{|dz|}{1-|z|} \leqq \frac{e}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{h} \oint_{\Gamma_\nu} \frac{|dz|}{1-|z|}.$$

Ez utóbbi szumma egy tagja pedig a (6) helyettesítéssel és némi számolással így becsülhető meg

$$\oint_{\Gamma_\nu} \frac{|dz|}{1-|z|} \leqq 2 \oint_{\Gamma_\nu} \frac{|dz|}{1-|z|^2} = 2 \oint_{|w|=\frac{k}{k+1}} \frac{|dw|}{1-|w|^2} \leqq \frac{2}{1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^2} \cdot 2\pi < 8\pi k.$$

(„Némi számolás"-ra az itt szereplő egyenlőség bizonyításánál van szükség. Az egyenlőség egyébként azt mutatja, hogy a $\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ ívelem a hiperbolikus sík egybevágóságaival szemben invariáns; neve „hiperbolikus ívelem".)

Ezzel készen is vagyunk:

$$\sum_{-\infty}^{-1} |a_n| < 4ek^2,$$

és akkor, mint azt megjegyeztük

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < 8ek^2.$$

Megjegyzés: A feladatbeli egyenlőtlenség nem éles. A Γ görbe még jobb megválasztásával Somorjai Gábor megmutatta, hogy

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < ck \log k.$$

6. Feladat. Érkezett 14 megoldás. Helyes Füredi Z., Kiss E., Kollár J., Komornik V., Magyar Z., Pálfy P. P., Rónyai L., Simányi N., Totik V. megoldása. Kissé hiányos Seress Á. dolgozata.

a) A feladat első részére közlendő megoldás Bara Tamástól, Kollár Jánostól és Seress Ákostól származik. Lényegében ugyanezt a megoldást találta Rónyai Lajos is.

Legyenek $p_1, p_2, \ldots$ nemnegatív együtthatójú polinomok, $\lim_{n\to\infty} p_n(x)=g(x)$, $0<x<1$. Azt, hogy itt a limesz egyenletes, nem fogjuk kihasználni.

Azt állítjuk, hogy a p_n polinomok a komplex sík $\{z: |z|\leqq\varrho\}$ körén egyenletesen korlátosak, ha $\varrho<1$. Valóban, legyen $p_n(z)=\sum a_k z^k$, akkor $|z|\leqq\varrho$ esetén

$$|p_n(z)| \leqq \sum a_k |z|^k \leqq \sum a_k \varrho^k = p_n(\varrho) < K = K(\varrho),$$

hiszen a $p_n(\varrho)$ sorozat konvergens, így korlátos.

Mivel még p_n konvergens az egységkörlap egy ívén, azért a Vitali-tétel miatt p_n konvergens az egész egységkörlapon, mégpedig egyenletesen minden részkompaktumon. Következésképpen $G(z)=\lim_{n\to\infty} p_n(z)$ analitikus az egységkörben, és így megszorítása a (0, 1) intervallumra, vagyis g is az.

b) A $(-1, 0)$ intervallumon azonban nem igaz az állítás. Ez következik Kiss Emil, Komornik Vilmos és Simányi Nándor alábbi eredményéből: Egy, a $[-1, 0]$ intervallumon folytonos g függvény akkor és csak akkor közelíthető egyenletesen nemnegatív együtthatójú polinomokkal, ha $g(0)\geqq 0$. A következő bizonyítás Komornik Vilmostól származik.

Jelöljük G-vel azon $[-1, 0]$ szakaszon folytonos függvények osztályát, melyek nemnegatív együtthatójú polinomok egyenletes limeszeként állnak elő. Világos,

hogy G zárt az összeadásra, a szorzásra és az egyenletes limeszképzésre nézve, továbbá maguk a nemnegatív együtthatójú polinomok G-ben vannak.

Először is megmutatjuk, hogy a $-x$ függvény is G-ben van. Tekintsük ugyanis a $q_n(x)=x(1+x)^n-x$ nemnegatív együtthatójú polinomok sorozatát. Mivel $|x(1+x)^n|<\frac{1}{n}$, ha $-1\leqq x\leqq 0$ (ez differenciálással könnyen igazolható), azért $q_n(x)$ egyenletesen tart a $-x$ függvényhez, mely tehát G-ben van.

Ebből az is következik, hogy a $-x^n=(-x)\cdot x^{n-1}$ függvény is G-ben van, ha $n\geqq 1$. Akkor pedig minden olyan polinom G-ben van, aminek konstans tagja nemnegatív.

Legyen most már g $[-1, 0]$-n folytonos, és $g(0)\geqq 0$. A Weierstrass-féle approximációs tétel szerint létezik egy hozzá egyenletesen konvergáló p_n polinomsorozat. Ekkor a

$$P_n(x) = p_n(x)-p_n(0)+g(0)$$

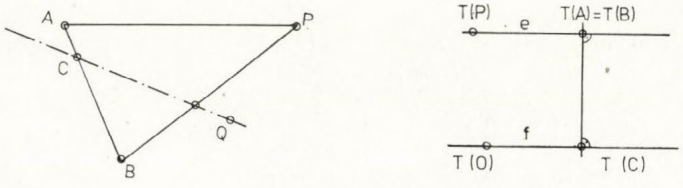
sorozat szintén egyenletesen tart g-hez, és tagjai G-ből valók; tehát $g\in G$.

Beláttuk tehát, hogy tetszőleges, a $[-1, 0]$ szakaszon folytonos, 0-ban nemnegatív értéket fölvevő függvény egyenletesen approximálható nemnegatív együtthatójú polinomokkal. Az állítás megfordítása — vagyis, hogy a nemnegatív együtthatójú polinomokkal közelíthető g függvények folytonosak $[-1, 0]$-n és $g(0)\geqq 0$ — triviális lévén, a bizonyítást befejeztük.

7. Feladat. Érkezett 13 megoldás. Helyes Kollár J. megoldása, kissé hiányos Füredi Z. és Komornik V. dolgozata.

A) Először belátjuk, hogy T injektív. Ennek igazolása Simányi Nándor ötletén alapul, és három lépésből áll.

1. Azt állítjuk, hogy tetszőleges pont ősképe konvex. Ehhez azt kell belátni, hogy $T(A)=T(B)$ esetén az AB szakasz bármely C pontja is $T(A)$-ba képződik. Tegyük fel, hogy ez nincs így, $T(C)\neq T(A)$. Állítsunk merőlegest a $T(A)T(C)$ egyenesre a $T(A)$ és a $T(C)$ pontban, legyenek ezek e és f. Válasszuk meg a P és Q pontokat úgy, hogy képük az e ill. f egyenesre essen és $T(A)$-tól, $T(C)$-től különbözzék (ld. 2. ábra).



2. ábra

Az A, B, P, Q pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Ez világos akkor, ha a három pont között P és Q is szerepel, ugyanis akkor a három pontnak a képe nem kollineáris. Ha viszont a három pont közül kettő A ill. B, akkor a harmadik nem eshet az AB, azaz AC egyenesre, hiszen A, C és P (ill. A, C és Q) képe megintcsak nem kollineáris.

Ezek szerint az ABP háromszög AB oldalát egy belső pontban metszi a CQ egyenes. Ezért ez az egyenes a háromszögnek még egy oldalát kell, hogy messe; ennek a metszéspontnak a képe azonban mind az e, mind az f egyenesen is rajta volna, ami ellentmondás, hiszen e és f nem metszették egymást.

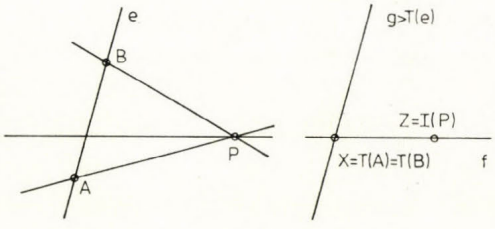
2. Most megmutatjuk, hogy semelyik X pont ősképe nem tartalmazhat belső pontot. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és $T^{-1}(X)$ belseje nem üres. Húzzunk X-en át egy f egyenest. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{int}(T^{-1}(f \setminus \{X\})) \neq \emptyset$.

Vegyünk fel ugyanis az f egyenesen egy X-től különböző Z pontot. Ennek egyik ősképét jelöljük P-vel (ld. 3. ábra). Akkor a P-n átmenő, $T^{-1}(X)$-et metsző egyenesek képe része lesz f-nek. Más szóval $T^{-1}(f)$ tartalmaz egy P csúcsú csúcsszögtartományt. Mivel $T^{-1}(X)$ ennek a tartománynak egyik szögében teljes egészében benne foglaltatik, azért a másiktól diszjunkt, tehát valóban $\operatorname{int}(T^{-1}(f \setminus \{X\})) \neq \emptyset$.

3. ábra

Forgassuk most f-et X körül, és tekintsük az így keletkező $T^{-1}(f \setminus \{X\})$ halmazokat. Ily módon megszámlálhatónál több, diszjunkt, belső ponttal rendelkező részhalmazát kapjuk a hiperbolikus síknak, ami ellentmondás.

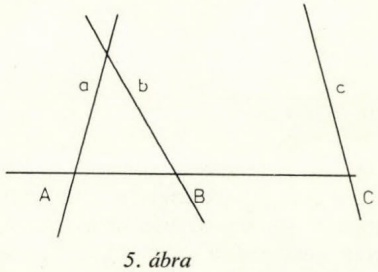
3. Most már rátérhetünk annak bizonyítására, hogy minden X-re $T^{-1}(X)$ egy pontból áll. Megint tételezzük fel az ellenkezőjét. Az előbbiek szerint $T^{-1}(X)$ vagy szakasz, vagy félegyenes, vagy egyenes; mindenképpen része egy egyenesnek, amit a továbbiakban e-vel fogunk jelölni. Legyen A és B az e egyenes két olyan pontja, melyek képe X (ld. 4. ábra).



4. ábra

Könnyen láthatóan $T(e)$ része lesz egy g egyenesnek. Húzzunk X-en át egy g-től különböző f egyenest. Mint fentebb, most is belátható, hogy $T^{-1}(f \setminus \{X\})$ belseje nem üres, és akkor f-et X körül forgatva megint ellentmondásra jutunk.

B) A bizonyítás nehezén ezzel túljutottunk. Következő lépésként megmutatjuk, hogy nem kollineáris pontok képe nem kollineáris. Ha ugyanis a P, Q, R nem egy egyenesen levő pontok az e egyenesbe képződnének le, akkor a PQ, QR és RP egyenesek képe is része lenne e-nek. Ennek következtében minden olyan egyenes is e-be képződne, ami a PQR háromszögvonalat két pontban metszi. Ilyen egyenes azonban a sík minden pontján át húzható, amiért is az egész sík képe e-ben volna, ellentmondásban T szuperjektív voltával.



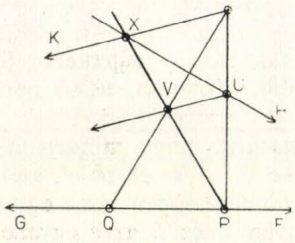
5. ábra

C) Ebből következik, hogy T^{-1} is egy egyenesen levő pontokat egy egyenesen levőkbe visz; hogy egyenes képe (T-nél) egyenes, metsző egyenesek képe metsző, nem metsző egyenesek képe nem metsző.

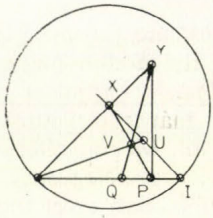
D) T az egyeneseken rendezéstartó. Legyen ugyanis A, B, C egy e egyenes három különböző pontja. Ismeretes, hogy C pontosan akkor nem választja el A-t és B-t, ha A-n, B-n és C-n keresztül húzható olyan a, b ill. c egyenes, hogy a és b metszik egymást, de c se a-t, se b-t nem metszi (ld. 5. ábra). C) szerint T ez utóbbi tulajdonságot megtartja, tehát rendezéstartó.

E) Ezért félsík-, félegyenes-, és szakasztartó is. Továbbá sugársoron is rendezéstartó, következésképpen elpattanó félegyenesek képe is elpattanó.

F) Most megmutatjuk, hogy létezik egy olyan d hossz, hogy d hosszúságú szakaszokat T d hosszúságúakba visz. Legyen ugyanis egy e egyenesen adva egy P pont. Végezzük el az alábbi szerkesztést: (ld. 6a. ábra).



6a. ábra



6b. ábra

Az e egyenes P által meghatározott két félegyenesét jelöljük f-fel és g-vel. Vegyünk fel e-n kívül egy X pontot, és húzzunk ezen keresztül egy f-fel és egy g-vel elpattanó félegyenest, h-t és k-t. k X-en túli meghosszabbításán vegyünk fel egy Y pontot; az YP szakasz messe h-t U-ban. Húzzunk U-n át elpattanó félegyenest g-vel, messe ez az XP szakaszt V-ben. Jelöljük XV és g metszéspontját Q-val *A Q pont nem függ X és Y választásától.*

Ezt a legkönnyebben a hiperbolikus geometria Cayley—Klein modelljén lehet igazolni (és elég is itt igazolni; ismeretes ugyanis, hogy ha egy állítás minden Cayley—Klein modellen teljesül, akkor az a hiperbolikus geometriának egy igaz állítása). A modellben azonban (ld. 6b. ábra) a fentebbi szerkesztés egy teljes négyszög szerkesztése; következésképpen I, J-vel jelölve f ill. g horizontpontját, J, P és I, Q harmonikus pontnégyest alkot, aminek három pontja, P, J és I meghatározza a negyediket, Q-t.

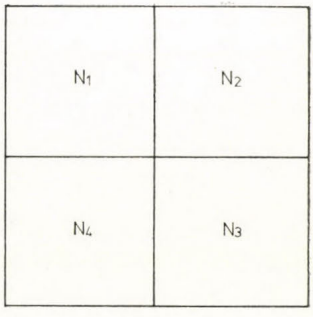
Világos, hogy a PQ szakasz hossza, d, P helyétől sem fog függeni. Mivel T a 6a. ábrát egy hasonló jellegű ábrába viszi, azért d hosszúságú szakaszt valóban d hosszúságúba visz.

G) Akkor persze nd hosszúságú szakaszok is invariánsak T-vel szemben, és ezért az nd oldalú szabályos háromszögek szögei is invariánsak. Ha n tart a végtelenhez, akkor ezek a szögek 0-hoz tartanak. Tehát akármilyen kis invariáns szög létezik. Mivel invariáns szögek összege is invariáns, azért szögek egy sűrű halmaza lesz invariáns T-vel szemben. Figyelembe véve, hogy T rendezéstartó, ebből következik, hogy minden szöget megtart. A hiperbolikus geometriában azonban egy háromszöget a szögei meghatároznak, így T háromszögeket az eredetivel egybevágó háromszögekbe visz — vagyis T egybevágóság.

8. Feladat. Érkezett 14 megoldás. Helyes Brindza B., Füredi Z., Kincses J., Krisztin T., Komornik V., Pálfy P. P., Simányi N., Totik V. és Tuza Zs. megoldása. Kissé hiányos Kollár J. megoldása.

Teljes indukcióval fogunk bizonyítani. $n=2$ esetén az állítás nyilvánvaló. Legyen $n>2$ és tegyük fel, hogy n-nél kevesebb pontból álló pontrendszerre az állítás igaz. Az indukciós feltevés egyúttal azt is jelenti, hogy ha $Y_1, \ldots, Y_k$ egy a oldalú négyzetben vannak benne, és q_j jelenti Y_j távolságát a maradék pontoktól, akkor $1<k<n$ esetén $\sum_1^k q_j^2 \leqq 4a^2$.

Osszuk fel az egységnégyzetet a két középvonalával négy kisebb egybevágó négyzetre. Jelöljük a kisebb négyzeteket $N_1, \ldots, N_4$-gyel (ld. 7. ábra). Több esetet fogunk szétválasztani és külön megvizsgálni aszerint, hogy az egyes kis négyzetekbe hány X_i pont esik. Ha egy X_i pont két négyzet közös határára esik, akkor döntsük el, hogy melyikhez tartozik — hogy hogyan, az teljesen mindegy.



7. ábra

A) Semelyik kisebb négyzetbe nem esik pontosan egy pont. Ezen belül két aleset van: Vagy valamennyi pont egy kis négyzetbe esik, vagy a pontok több négyzetben oszlanak el. Az első esetben az indukciós feltevést alkalmazva az $X_1, \ldots, X_{n-1}$ pontokra nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \leqq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

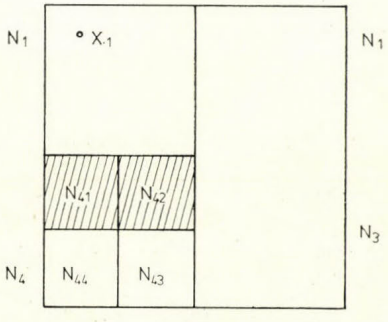
Mivel $r_n^2 \leqq 2$, azért ekkor valóban teljesül a feladat állítása.

A másik alesetben viszont minden kis négyzetben n-nél kevesebb pont van (de, ha egyáltalán van pont, akkor egynél biztosan több). Tehát ekkor az indukciós feltevés miatt $1 \leqq \nu \leqq 4$ esetén

$$\sum_{X_i \in N_\nu} r_i^2 \leqq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1, \tag{7}$$

ahonnan következik a feladat egyenlőtlensége.

B) Pontosan egy kis négyzetben, mondjuk N_1-ben, egy a pontok száma. Legyen pl. $X_1 \in N_1$. (7) most is igaz, ha $\nu=2, 3, 4$. Ha tehát $r_1^2 \leqq 1$, készen vagyunk. Föltehetjük ezért, hogy $r_1>1$. Persze $r_1^2 \leqq 2$ ez utóbbi becslés is elég lenne, ha valamelyik kis négyzetbe egyáltalán nem esne pont. A továbbiakban ezért föltesszük, hogy egyik kis négyzet sem üres; ebből következik, hogy $r_1^2 \leqq \frac{5}{4}$, az N_4-be eső pont miatt.



8. ábra

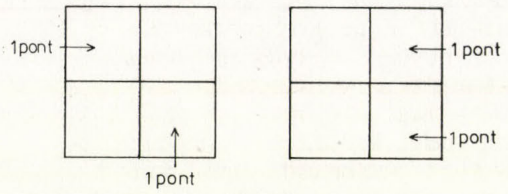
Osszuk tovább N_4-et két középvonalával négy kisebb négyzetre, legyenek ezek $N_{41}, N_{42}, N_{43}, N_{44}$ (ld. 8. ábra)! $r_1>1$ miatt a satírozott részbe nem eshet pont. Megmutatjuk, hogy

$$\sum_{X_i \in N_{4j}} r_i^2 \leqq \frac{5}{16} \quad (j = 3, 4). \tag{8}$$

Ez következik az indukciós feltevésből — alkalmazva N_{4j}-re —, ha N_{4j}-ben a pontok száma nem pontosan egy. Ha viszont N_{4j}-be pontosan egy pont esett, akkor őneki a távolsága egy másik N_4-be esőtől legfeljebb $\frac{\sqrt{5}}{4}$, vagyis (8) mindenképp fennáll. Akkor pedig

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = r_1^2 + \sum_{X_i \in N_2} r_i^2 + \sum_{X_i \in N_3} r_i^2 + \sum_{X_i \in N_4} r_i^2 \leqq \frac{5}{4} + 1 + 1 + 2 \cdot \frac{5}{16} < 4.$$

C) Pontosan két kis négyzetben egy a pontok száma. Ekkor a kis négyzetek párokba állíthatók úgy, hogy egy páron belül szomszédos négyzetek legyenek, és a pár egyik tagjában egy pont van, a másikban nem egy pont (ld. 9. ábra). Legyen



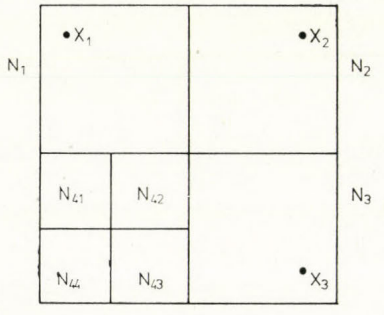
9. ábra

például N_1 és N_4 egy párban, úgy, hogy N_1-be csak X_1 esik, N_4-ben viszont nem pont egy pont van. Nyilván elég lesz megmutatni, hogy

$$\sum_{X_i \in N_1 \cup N_4} r_i^2 \leqq 2.$$

Ez pedig pontosan úgy mutatható meg, mint a B) esetben.

D) Pontosan három négyzetben, mondjuk N_1-ben, N_2-ben és N_3-ban van egy-egy pont; legyenek ezek a pontok rendre X_1, X_2 és X_3. Osszuk föl megint N_4-et kisebb négyzetekre a 10. ábrán látható módon. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $r_2^2 \leqq \frac{5}{4}$.



10. ábra

Ezek után három alesetet különböztetünk meg. Először tegyük fel, hogy az $N_{41} \cup N_{42}$ téglalapban is, meg az $N_{43} \cup N_{42}$ téglalapban is van pont. Akkor

$$r_1^2, r_3^2 \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}.$$

Következésképpen

$$\sum_{1}^{n} r_i^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \sum_{X_i \in N_4} r_i^2 \leqq \frac{13}{16} + \frac{5}{4} + \frac{13}{16} + 1 < 4.$$

Másodszor tegyük fel, hogy, mondjuk $N_{41} \cup N_{42}$-ben nincs pont, de N_{43}-ban és N_{44}-ben van. Akkor $r_3^2 \leqq \frac{13}{16}$, $r_1^2 \leqq 1 + \frac{1}{16}$, továbbá (8) most is érvényes. Ezért

$$\sum_{1}^{n} r_i^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \sum_{X_i \in N_4} r_i^2 \leqq \frac{17}{16} + \frac{5}{4} + \frac{13}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} < 4.$$

Harmadszorra az az eset maradt, amikor se N_{41}-ben, se N_{42}-ben nincs pont, és N_{43} és N_{44} közül az egyik szintén üres. A másikra alkalmazva az indukciós feltevést, kapjuk, hogy

$$\sum_1^n r_i^2 = r_1^2+r_2^2+r_3^2+\sum_{X_i\in N_4} r_i^2 \leqq \frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{1}{4} = 4.$$

E) Utoljára maradt az az eset, amikor valamennyi kis négyzet egy pontot tartalmaz. Legyen $X_i\in N_i$. Bebizonyítjuk, hogy

$$d(X_1, X_2)^2+d(X_2, X_3)^2+d(X_3, X_4)^2+d(X_4, X_1)^2 \leqq 4. \tag{9}$$

($d(P, Q)$ jelöli a P és Q pontok távolságát.) Ebből már következik a feladatbeli egyenlőtlenség.

Tekintsünk (9) baloldalára, mint egy, a $\bigtimes_{\nu=1}^{4} N_\nu \subset \mathbf{R}^8$ halmazon értelmezett szigorúan konvex függvényre. Egy ilyen függvény a maximumát csak az értelmezési tartomány extremális pontjaiban veheti fel. Egy extremális pont az X_i-k olyan konfigurációjának felel meg, amikor valamennyi X_i a megfelelő N_i négyzet egy csúcspontjában van. Mivel ilyen esetben (9) könnyen ellenőrizhetően teljesül, azért (9) mindig igaz.

Megjegyzés: Brindza Béla, Komornik Vilmos, Pálfy Péter Pál, Totik Vilmos és Tuza Zsolt azt is meghatározta, hogy milyen pontelhelyezkedés mellett lesz a feladatbeli négyzetösszeg éppen 4. Azt találták, hogy ez lényegében két esetben történhet meg: ha $n=2$ és a pontok szemköztes csúcsokban vannak, továbbá, ha $n=4$ és a pontok a négyzet négy csúcsában helyekednek el.

9. Feladat. Sajnos, a versenyre kitűzött feladat szövegéből kimaradt a „legfeljebb" szó. Abban a változatban az állítás nem igaz; példa erre a természetes számok halmaza azzal a topológiával, melyben a nyílt halmazok az 1 sűrűségű sorozatok. Ez nem M_2 tér, de az eredeti feltétel teljesül rá (mert üres). A megoldók általában észrevették ezt a hiányosságot, és a helyesre módosított feladattal foglalkoztak.

Érkezett 7 megoldás. A legértékesebb eredményeket Kiss Emil érte el. Többek közt bebizonyította az állítást, ha a topologikus tér T_3 tér, és egyéb bizonyításaiban megtalálhatók azok a gondolatok, amikkel a feladat állítása bizonyítható. Simányi Nándor a kontinuum-hipotézist és a tér regularitását feltéve bizonyította be az állítást, Totik Vilmos pedig azzal a feltétellel, hogy minden pontnak van $\aleph_1$ számosságú környezetbázisa. Szabó Zoltán ennél kicsit többet tett fel, mégpedig azt, hogy minden pontnak van megszámlálható bázisa.

Bizonyításunk indirekt lesz. Tegyük fel, hogy X nem megszámlálható bázisú topologikus tér, de minden legfeljebb $\aleph_1$ számosságú altere az. Készítsünk egy $Y\subset X$ legföljebb $\aleph_1$ számosságú alteret, aminek M_2-ségéből ellentmondás fog következni.

Y-t transzfinit rekurzióval definiálandó Y_α ($\alpha<\omega_1$) alterek uniójaként fogjuk megkapni. Az Y_α-kal együtt nyílt halmazok egy-egy $\mathcal{G}_\alpha$ rendszerét is definiálni fogjuk úgy, hogy $\mathcal{G}_\alpha|Y_\alpha$ bázisa legyen Y_α-nak. (Ha $\mathcal{H}$ egy X-beli halmazrendszer és $Z\subset X$, akkor $\mathcal{H}|Z$ jelöli $\mathcal{H}$ megszorítását Z-re.) A rekurzió a következő lesz: $Y_0=\mathcal{G}_0=\emptyset$. Ha a *megszámlálható* Y_ξ és $\mathcal{G}_\xi$ már megvan $\xi<\alpha<\omega_1$ esetén, akkor Y_α-t és $\mathcal{G}_\alpha$-t így kapjuk meg. $\bigcup \mathcal{G}_\xi$ megszámlálható lévén, nem bázisa X-nek, tehát

van egy olyan $p \in X$ és p-nek egy V környezete, hogy $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi$ tetszőleges, p-t tartalmazó G elemére $G \not\subset V$. Válasszunk ki minden ilyen G-re egy $p_G \in G \setminus V$ pontot, és legyen

$$Y_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} Y_\xi \cup \{p\} \cup \{p_G : p \in G \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi\}.$$

Világos, hogy Y_α is megszámlálható lesz, a feltételek szerint tehát megszámlálható bázisú. Legyen $\mathscr{G}_\alpha$ X-beli nyíltak olyan megszámlálható halmaza, hogy $\mathscr{G}_\alpha | Y_\alpha$ bázisa Y_α-nak.

Tekintsük az $Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$ teret. Ez nyilván legfeljebb $\aleph_1$ számosságú, tehát megszámlálható bázisú. A döntő észrevétel az, hogy *Y-nak $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha | Y$ bázisa lesz*, és így Alekszandrov egy — egyébként könnyen igazolható — tétele szerint $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha | Y$-ból is kiválasztható Y-nak egy megszámlálható bázisa. Fogadjuk el egyelőre igaznak a dőlt betűs állítást, és lássuk, hogyan lehet befejezni a bizonyítást.

Tudjuk tehát, hogy $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha | Y$-ból ki lehet választani egy megszámlálható bázist. Ezek szerint $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi | Y$ bázisa Y-nak, ha α elég nagy; és akkor evvel az α-val $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi | Y_\alpha$ bázisa Y_α-nak. Ez azonban ellentmondás, ugyanis az Y_α konstrukciójában szereplő p pontnak Y_α-beli környezetbázisát nem tartalmazza $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi | Y_\alpha$.

Hátra van a dőlt betűs állítás igazolása. Az állítás következik az alábbi lemmából:

Lemma. Legyen Y egy megszámlálható bázisú topologikus tér, $Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$, ahol $\alpha<\beta$ esetén $Y_\alpha \subset Y_\beta$. Legyen minden α-ra $\mathscr{G}_\alpha$ Y-beli nyíltak olyan halmaza, hogy $\mathscr{G}_\alpha | Y_\alpha$ bázisa Y-nak. Akkor $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha$ bázisa Y-nak.

Bizonyításunk megint indirekt lesz. Tegyük fel, hogy $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha$ nem bázisa Y-nak. Konstruálunk akkor nyílt halmazok egy $\{V_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ sorozatát azzal a tulajdonsággal, hogy $V_\beta \setminus \bigcup_{\alpha>\beta} V_\alpha \neq \emptyset$ $(\beta<\omega_1)$; márpedig ilyen sorozat M_2 térben nem létezhet. A V_α halmazokat természetesen megint transzfinit rekurzióval definiáljuk; a V_α-kal együtt egyébként még egy $r_\alpha \in V_\alpha$ sorozatot is készítünk, a következőképp:

Mivel $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha$ nem bázisa Y-nak, azért van egy $q \in Y$ pontnak egy olyan U környezete, hogy tetszőleges, q-t tartalmazó $G \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{G}_\alpha$-ra $G \not\subset U$. Legyen $r_0 = q$, $V_0 = Y$. Ha Y_ξ és r_ξ már definiálva van $\xi<\alpha<\omega_1$ esetén, akkor először is válasszunk egy ϱ-t úgy, hogy $Y_\varrho \supset \{r_\xi : \xi<\alpha\}$. Mivel $\mathscr{G}_\varrho | Y_\varrho$ bázisa Y_ϱ-nak, azért létezik egy $V_\alpha \in \mathscr{G}_\varrho$ halmaz, hogy $q \in Y_\varrho \cap V_\alpha \subset U$. Másfelől $V_\alpha \not\subset U$; kiválaszthatunk ezért egy $r_\alpha \in V_\alpha \setminus U$ pontot. Ezzel a $\{V_\alpha\}$, $\{r_\alpha\}$ sorozatokat definiáltuk.

Vegyük észre, hogy $\beta<\alpha$ esetén $r_\beta \notin V_\alpha$. Valóban, $r_\beta \in Y_\varrho \setminus U$, míg $V_\alpha \cap Y_\varrho \subset U$. Ezért $r_\beta \in V_\beta \setminus \bigcup_{\alpha>\beta} V_\alpha$ $(\beta<\omega_1)$. Ez azonban ellentmondásban van azzal, hogy Y-nak létezik egy megszámlálható bázisa: $\{B_1, B_2, \ldots\}$. Válasszunk ugyanis minden α-ra egy olyan B_{n_α} halmazt, hogy $r_\alpha \in B_{n_\alpha} \subset V$. Mivel B_n-ből csak megszámlálható sok van, azért létezik $\alpha>\beta$, hogy $n_\alpha = n_\beta = n$. Ekkor azonban $r_\beta \in B_n$ és $r_\beta \notin V_\alpha \supset B_n$, ami lehetetlenség, qu. e. d.

10. Feladat. Érkezett 13 megoldás. Helyes Füredi Z., Kollár J., Magyar Z., Pálfy P. P., Simányi N. és Totik V. megoldása.

a) A feltételek szerint

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p.$$

Látszik, hogy rögzített k-ra $\mathbf{P}(Y_n=k)\to 0$ $(n\to\infty)$, következésképpen H-t véges sok elemmel módosítva $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n\in H)$ nem változik. Ezért föltehető, hogy H valamely D modulusra vett teljes maradékosztály: $H=\{k: k\equiv a \bmod D\}$. Ekkor

$$\mathbf{P}(Y_n\in H) = \sum_{k\equiv a(D)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{10}$$

Jelöljön ε egy D-edik primitív egységgyököt. Ismeretes, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{D-1} \varepsilon^{(k-a)\nu} = \begin{cases} D, & \text{ha} \quad k \equiv a(D) \\ 0, & \text{ha} \quad k \not\equiv a(D). \end{cases}$$

Ezért (10) így írható:

$$\mathbf{P}(Y_n\in H) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{D-1} \frac{1}{D} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \varepsilon^{(k-a)\nu} = \frac{1}{D} \sum_{\nu=0}^{D-1} \varepsilon^{-a\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (p\varepsilon^{\nu})^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{\nu=0}^{D-1} \varepsilon^{-a\nu} (q+\varepsilon^{\nu} p)^n \to \frac{1}{D} = d,$$

hiszen az utolsó szummában a $\nu>0$ indexeknek megfelelő tagok egynél kisebb abszolút értékűek, és így $n\to\infty$ esetén tartanak 0-hoz.

b) Most megadunk egy 0-sűrűségű H sorozatot, amire $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n\in H)=1$. Ehhez megjegyezzük, hogy Y_n várható értéke np és szórása $\sqrt{2npq}$, tehát a Csebisev egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}\left(|Y_n-np| \geqq \lambda\sqrt{2npq}\right) \leqq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ezért, ha λ_n egy végtelenhez tartó sorozatot jelöl,

$$\mathbf{P}\left(|Y_n-np| < \lambda_n\sqrt{n}\right) \to 1 \quad (n\to\infty).$$

Legyen most n_k természetes számok egy tetszőleges növekvő sorozata és

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} (n_k-[n_k^{3/4}], \quad n_k+[n_k^{3/4}]).$$

Az előbbiek szerint $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(Y_{n_k}\in H)=1$, tehát $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n\in H)=1$. Másrészt könnyű ellenőrizni, hogy ha n_k elég gyorsan nő, mondjuk $n_k=10^k$, akkor H 0-sűrűségű lesz.

c) A versenyzők többsége ennél a pontnál azt látta be, hogy ha H-nak van sűrűsége, akkor $\mathbf{P}(Y_n\in H)\to d$ Cesaro értelemben, azaz

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{P}(Y_\nu\in H)}{n} \to d \quad (n\to\infty).$$

Ebből a feladatbeli állítás adódik, hiszen, ha egy sorozatnak van közönséges limesze, akkor Cesaro-limesze ezzel megegyezik. Simányi Nándor azt is megmutatta, hogy H sűrűségének létezését nem szükséges előre föltenni; ha $\mathbf{P}(Y_n \in H)$ konvergens, akkor H-nak automatikusan van sűrűsége, és ez a sűrűség $= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n \in H)$. Ez következik Magyar Zoltán még általánosabb eredményéből, mely a következőt mondja:

Tetszőleges H természetes számhalmazra legyen $h(x)=|\{n\in H: n<x\}|$; akkor

$$\frac{S_n}{n} - \frac{h(np)}{np} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Innen látszik, hogy H-nak pontosan akkor van sűrűsége, ha $\mathbf{P}(Y_n \in H)$ Cesaro értelemben konvergens.

Az itt következő bizonyítás Totik Vilmosé. Azt fogjuk belátni, hogy ha H-nak d a sűrűsége, akkor $p_n=\mathbf{P}(Y_n\in H)\to d$ Abel értelemben, azaz $\sum_{n=0}^{\infty}(p_n-p_{n-1})=d$ Abel értelemben, azaz $\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(p_n-p_{n-1})x^n=d$. Ha ez megvan, akkor készen is leszünk, ugyanis $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(Y_n\in H)=c$-ből következik, hogy $\mathbf{P}(Y_n\in H)\to c$ Abel értelemben is, tehát $c=d$.

Mármost $|x|<1$ esetén

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(p_n-p_{n-1})x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in H}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}x^n =$$

$$= (1-x)\sum_{k\in H}(px)^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}(qx)^{n-k} =$$

$$= (1-x)\sum_{k\in H}(px)^k\cdot\frac{1}{(1-qx)^{k+1}} = \frac{1-x}{1-qx}\cdot\sum_{k\in H}\left(\frac{px}{1-qx}\right)^k.$$

Helyettesítsünk $z=\frac{px}{1-qx}$-t, akkor $x\to 1-0$ esetén $z\to 1-0$. Sőt, könnyen ellenőrizhető, hogy $\frac{1-x}{1-qx}\sim 1-z$ $(x\to 1-0)$. Ezért

$$\lim_{x\to 1-0} G(x) = \lim_{z\to 1-0}(1-z)\sum_{k\in H} z^k, \tag{11}$$

(ha ez utóbbi limesz létezik).

Legyen a_n a H halmaz indikátorsorozata, azaz $a_n=1$ vagy 0 aszerint, hogy $n\in H$ vagy $n\notin H$. Az a_n sorozat Cesaro értelemben vett limesze a H sűrűsége, vagyis d. Frobenius egy tétele szerint tehát az a_n sorozat Abel értelemben vett limesze is létezik és $=d$. Ez az Abel-limesz azonban nem más, mint (11) jobboldala; következésképpen $\lim_{x\to 1-0} G(x)=d$, amit bizonyítani akartunk.

(Lempert László)

FELADATROVAT

SZERKESZTIK: CSÁSZÁR ÁKOS ÉS LOVÁSZ LÁSZLÓ

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Anker köz 1—3, 1061. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

216. Legyen X topologikus tér. Tekintsük a következő két állítást:
(a) X-ben van csupa nyílt F_σ-ból álló bázis;
(b) X-ben minden nyílt G-hez van olyan nyílt H, amely F_σ, s amelyre $H \subset G \subset \overline{H}$.
Mutassuk meg, hogy (a)-ból következik (b), de megfordítva nem.

CSÁSZÁR ÁKOS

217. Legyen $\varphi \neq \emptyset$ egy X halmazon értelmezett valós függvények olyan rendszere, hogy $c \in \mathbf{R}$, $f, g \in \varphi$ esetén cf, $f+c$, $\max(f, g)$, $\min(f, g) \in \varphi$, továbbá $f \in \varphi$, $f>0$ esetén $\frac{1}{f} \in \varphi$, végül $f_n \in \varphi$ esetén $f \in \varphi$, ha $f_n \to f$ egyenletesen. Mutassuk meg, hogy ha még $f, g \in \varphi$ esetén $f+g \in \varphi$ is teljesül, akkor $f, g \in \varphi$, $f \geqq 0$, $g \geqq 0$ esetén $fg \in \varphi$, ez az állítás azonban nem fordítható meg.

CSÁSZÁR ÁKOS

218. Egy X metrikus térben egy (a_n) pontsorozat hiperkonvergál az $A \subset X$ halmazhoz, ha $A \neq \emptyset$, és minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan n, hogy $R_n \subset S(A, \varepsilon)$, és minden n-re $A \subset S(R_n, \varepsilon)$, ahol $R_n = \{a_k : k \geqq n\}$ és $S(A, \varepsilon)$ az A halmaz ε sugarú környezetét jelöli. (a_n) kvázi-Cauchy-sorozat, ha van Cauchy-féle részsorozata. Mutassuk meg, hogy X pontosan akkor teljes (kompakt), ha minden Cauchy- (kvázi-Cauchy-) sorozat hiperkonvergens.

CSÁSZÁR ÁKOS

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Farkas Gyula Emlékdíj 1978. évi odaítéléséről

A Farkas Gyula Emlékdíj bizottság a beérkezett 10 javaslat mérlegelése után az alábbi határozatot hozta:

A Farkas Gyula díj *I. fokozatában* és 4000—4000 Ft pénzjutalomban részesíti

HEGEDŰS CSABÁT, az MTA Központi Fizikai Kutató Intézetének tudományos munkatársát,

RAPCSÁK TAMÁST, az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének tudományos munkatársát és

TELEGDI LÁSZLÓT, az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének tudományos munkatársát.

A Farkas Gyula díj *II. fokozatában* és 3000—3000 Ft pénzjutalomban részesíti

ASZTALOS DOMONKOST, az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjának osztályvezető helyettesét és

GLEVITZKY BÉLÁT, a Kossuth Lajos Tudományegyetem adjunktusát.

INDOKLÁS

HEGEDŰS CSABA 1969-ben került a KFKI Számítástechnikai Osztályára, ahol feladata az elméleti és kísérleti fizikával kapcsolatos számítási módszerek kutatása és alkalmazása lett. Ennek nyomán az alkalmazott matematika több területével is foglalkozott.

1974-ben „Mátrixelmélet" c. jegyzetet írt Rózsa Pál előadásai nyomán a Matematikai Kutatóintézet „A számítástechnika matematikai alapjai" című sorozatában.

Elsőnek adott meg általános számítási módszert függvénymátrixok inverzének Laurent együtthatóira. Ez a probléma a fizikában vetődött fel, de mint később kiderült, a vezérlési problémák transfer mátrixainak vizsgálataiban is nagy jelentőségű.

A feltétel nélküli optimumkeresés hierarchikus kivitelezésével foglalkozik a [11] munkája. Általánosan megmutatja, minden szinten a Hesse mátrix hogyan számítható, és bizonyítja a hierarchizáció alkalmazásának elvi helyességét. Ez a munka lehetőséget nyújt 0-konvergens módszerek származtatására és a gyakorlati tapasztalatok alapján bizonyos patologikus esetekben az elv kitűnően alkalmazható a konvergencia stabilizációjára.

Optimális választási szabályokat adott meg poliedrikus kúp adott ponthoz legközelebbi pontjának megkeresésére [8]. Ennek a problémának az alkalmazási köre nagyon sokrétű; a pozitív lineáris approximáció, a spektrum dekomponálás, a lineáris programozás problémája mind erre a problémára vezethető vissza. Kapcsolódik a közismert *Farkas lemmához,* amennyiben választ nyújt arra a kérdésre, hogy egy adott vektorhoz hogyan adható meg euklideszi normában az a legközelebbi vektor, amely egy adott vektorsereg pozitív lineáris kombinációjaként áll elő. Az erre kidolgozott algoritmus publikációját jelenleg készíti.

Az elmúlt években munkássága nagy mértékben kapcsolódott a KFKI mágneses buborékkamra-programjához. A kanadai McMaster Egyetemmel együttműködve, programot fejlesztett ki a mágneses buborékmemóriákban kialakuló mágnesezettség meghatározására.

HEGEDŰS CSABA PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] HEGEDŰS CSABA: Mágneses buboréktárolók vizsgálata a logikai műveletvégzés szempontjából. KFKI—1973—21 (1973)

[2] HEGEDŰS CSABA: Matematikai és kísérleti vizsgálatok a mágneses buborékok logikai alkalmazása terén. KFKI—SZh—1973—29 (1973).

[3] RÓZSA PÁL—HEGEDŰS CSABA: Mátrixelmélet. (dr. Rózsa Pál egy. tanár előadásai nyomán) MTA Matematikai Kutató Intézet „A számítástechnika alapjai" c. tanfolyam jegyzete, 265 old.. Budapest, 1974.

[4] C. J. HEGEDŰS: Fitting with ortogonal functions. (in Collection of Scientific Papers in Collaboration of Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, USSR and Central Research Institute for Physics, Budapest) KFKI—1974—34. pp. 205—230.

[5] Cs. HEGEDŰS: Laurent expansion of the inverse of a function matrix. Periodica Mathematica Hungarica 6. 75—86 (1975) előadva: Colloquium on Numerical Methods, Keszthely, 1973. szept. 2—4.

[6] C. J. HEGEDŰS: A method for calculating the reciprocal coefficients of function matrices. Computing 16. 29—37 (1976).

[7] E. DELLA TORRE—C. HEGEDŰS—G. KÁDÁR: Wall structure of cilindrically symmetric magnetic domains. AIP Conf. Proceedings, No. 29., p. 89 (1976). Előadva: 21st Annual Conf. on Magnetism and Magnetic Materials, Philadelphia, 1975. XII. 9—12.

[8] C. J. HEGEDŰS: On finding the closest ray of a polyhedral cone to a given vector. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 57. T330—T331 (1977) Előadva: GAMM Tagung, Graz, 1976. IV. 4—9.

[9] C. J. HEGEDŰS—G. KÁDÁR—E. DELLA TORRE: Demagnetization tensors for cylindrical bodies. Faculty of Engineering, McMaster Univ., Hamilton Canada, Report SDC—141, 1976.

[10] C. J. HEGEDŰS—G. KÁDÁR—E. DELLA TORRE: Cylindrical demagnetization tensor. Faculty of Engineering, McMaster Univ., Hamilton, Canada, Report SOC—156, Jan 1977.

[11] C. J. HEGEDŰS: Hierarchy in optimization methods and solution of equations. KFKI—1977—12, pp. 171—182.
(in Collection of Scientific papers in collaboration with JINR, DUBNA, USSR and Central Res. Inst. for Phys. Budapest).
Előadva: Canadian Mathematical Congress, Hamilton, Canada, June 1977.

[12] C. J. HEGEDŰS—E. DELLA TORRE: Efficient calculation of bubble functions. Faculty of Engineering, McMaster Univ. Hamilton, Canada, Report SOC—171, June 1977.

[13] C. J. HEGEDŰS—E. DELLA TORRE: On the efficient calculation of magnetic bubble functions. J. Appl. Phys. 49. (2) 942—943 (1978).

[14] G. KÁDÁR—C. J. HEGEDŰS—E. DELLA TORRE: Cylindrical Demagnetization Matrix. IEEE Trans. Mag. MAG—14, No. 4. 276—277 (1978).

[15] C. J. HEGEDŰS: Complete Elliptic Integrals. Hewlett—Packard User's Library, Program No. 2377 D.

[16] C. J. HEGEDŰS—G. KÁDÁR—E. DELLA TORRE: Demagnetization matrices for cylindrecal bodies. Közlésre benyújtva a J. Inst. Math. and Appl-hoz.

RAPCSÁK TAMÁS

1947-ben született Debrecenben. 1970-ben matematikusi oklevelet szerzett a Kossuth Lajos Tudományegyetemen, majd a SZTAKI Operációkutatási Osztályán kapott beosztást előbb tudományos segémunkatársi, majd tudományos munkatársi minőségben.

Rapcsák Tamás fő érdeklődési területe a nemlineáris programozás és alkalmazásai. Tudományos eredményeit három csoportba sorolhatjuk: nemlineáris programozási eredmények, vízügyi feladatokkal kapcsolatos eredmények és szerkezetekkel kapcsolatos eredmények.

A nemlineáris programozással kapcsolatos eredményei közül kiemelendő a Kuhn—Tucker tételhez kapcsolódó másodrendű feltételek megfogalmazása, melyeket a SUMT algoritmus végrehajtása során ellenőrizni lehet és az optimalitás szükséges és elegendő feltételeit adják. Figyelemre méltó, hogy Rapcsák Tamás e dolgozatában a nemlineáris programozásban eddig kevéssé alkalmazott differenciálgeometriai módszerekkel dolgozik. További két dolgozatában (a 9. és 10. alattiról van szó) a SUMT módszer alkalmazásának előnyeit illetve lehetőségét fejti ki logaritmikusan konkáv feltételi függvények és nem konvex feladatok esetén.

Ami a vízügyi feladatokkal kapcsolatos eredményeit illeti, részt vett a Prékopa András által megfogalmazott egyik tározórendszer tervezési modell első hazai alkalmazásában, mely a délmagyarországi Kígyós-patak tározóinak optimális méretezésében állt. A munka során végzett számítás-

technikai feladatok megoldása alkotta egyetemi doktori disszertációját. Az idevágó eredményeket tartalmazzák a 6. és a 11. dolgozatok.

Rapcsák Tamás legfontosabb tudományos eredményei a szerkezetek optimális méretezésével kapcsolatosak. Az 5. és a 7., 8. dolgozatokban statikailag határozatlan, síkbeli szerkezetek minimális súlyra való méretezésének feladatát fogalmazza és oldja meg Halmos Endrével közösen. A megfogalmazott modell érdekes és a numerikus megoldás szempontjából fontos matematikai tulajdonságait mélyrehatóan elemzi. A feladat numerikus megoldását is elvégzi Huard módszerével. A 12. és a 13. dolgozatok további hasonló eredményekről számolnak be. Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy Farkas Gyula legfontosabb tudományos eredményei a mechanikai egyensúly meghatározására vonatkoznak. Rapcsák Tamás munkáinak egy része tehát közvetlenül kapcsolódik a díj névadójának eredményeihez.

RAPCSÁK TAMÁS PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] Rapcsák T., Egy tározási modell számítástechnikai megoldása. Egyetemi doktori disszertáció, 1974.

[2] Rapcsák T.: Megjegyzés a logaritmikusan konkáv függvények elméletéhez, MTA SZTAKI Közlemények, 14 (1975) 25—29.

[3] Rapcsák T.: Egy külső pont eljárás konvex nemlineáris programozási feladatok megoldására. Alk. Mat. Lapok 1 (1975) 357—364.

[4] Rapcsák T., Halmos F.: Gépjármű vázszerkezetelemek legkisebb súlyra történő méretezésének néhány szempontja, KTMF Tudományos Közlemények, 1977, 1.

[5] Rapcsák T., Halmos F.: Statikailag határozatlan könnyűszerkezetek méretezése súlyminimum alapján, Járművek, Mezőgazdasági Gépek, 24. évf. 1977. okt.

[6] A. Prékopa, T. Rapcsák, I. Zsuffa, Serially Linked Reservoir System Design Using Stochastic Programming, Water Resources Research, 14 (1978) augusztus.

[7] T. Rapcsák, F. Halmos, Minimum Weight Design of the Statically Indeterminate Trusses, Mathematical Programming Study 9 (1978) 109—119.

[8] T. Rapcsák, F. Halmos, Design of the Statically Indeterminate Optimal Trusses. Proceedings of IX. Int. Symp. on Math. Progr. (közlésre elf.)

[9] Rapcsák T.: A SUMT módszer alkalmazása logaritmikusan konkáv függvények esetén, MTA SzTAKI Közlemények, 19 (1978) 17—29.

[10] Rapcsák T.: A SUMT módszer alkalmazása nem konvex programozási feladatok esetén, Alk. Mat. Lapok 2 (1976) 427—437.

[11] Prékopa A., Rapcsák T., Zsuffa I.: Egy új módszer sorbakapcsolt tározórendszerek tervezésére, Alk. Mat. Lapok 2 (1976) 189—201.

[12] Rapcsák T., Bernau H., Halmos F.: Rúdszerkezetek méretezése kvadratikus programozási algoritmus felhasználásával, Járművek (sajtó alatt).

[13] Rapcsák T., Halmos F.: Statikailag határozatlan rácsos tartók minimális súlyra történő méretezése, Alk. Mat. Lapok (sajtó alatt).

TANULMÁNYOK

[1] Mátrixok általánosított inverze (50 old.) ELTE részére, 1975.

[2] Az aszfalt gazdaságos szállítása (100 old). ÚTTRÖSZT részére, 1975.

[3] Gépjárművek erőátviteli rendszerének optimális méretezése (70 old.) IKARUSZ részére 1976.

[4] Esettanulmány a gépjárművek erőátviteli rendszerének optimális méretezéséhez (8 old.) IKARUSZ részére, 1977.

TELEGDI LÁSZLÓ

1947-ben született Budapesten, 1970-ben kitüntetéses diplomával végezte el az ELTE matematikus szakát. Ezután az MTA SZTAKI Biomatematikai Csoportjára került, ahol jelenleg tudományos munkatárs.

Telegdi László fő kutatási témája évek óta a sztochasztikus modellek a populációgenetikában. A téma három részterületet ölel fel:

1. Veleszületett rendellenességek (VR) öröklődésének vizsgálata. Munkatársaival Telegdi László eljárást dolgozott ki és programozott be gyakori VR-ek örökölhetőségi együtthatójának (h) pont- és intervallumbecslésére, valamint különböző h^2-pontbecslések összehasonlítására. Az iroda-

lomban leírtaknál gyorsabb, ill. megbízhatóbb, kétváltozós normális eloszlásfüggvényt számoló eljárást dolgoztak ki és programoztak be; ennek egyenletes konvergenciáját bizonyították. A kapott h^2 értékek közvetlen alkalmazásra kerültek a magyarországi genetikai tanácsadásban. (13, 14. előadás az Európai Statisztikus Találkozón.) — Az ún. GAMT (Gauss Additive Multifactorial Threshold) modellt továbbfejlesztve dolgoznak a többszörös VR-ek matematikai-számítógépes leírásán. Jelentős eredményük az az eljárás, amelynek segítségével a korszerű eszközökkel számítógépre vitt anyagból ismeretlen szindrómák detektálhatók, ezzel is segítve az orvosi megelőzést. (9, 11, 16. előadás az International Clearinghouse munkaülésén.)

2. Elágazó folyamatok. Itt Telegdi László az alkalmazási lehetőségeket vizsgálta mutáns gének túlélésére és genetikai diftre. Bevezetett egy „majdnem" elágazó folyamat-modellt, amire kezdeti eredmények születtek. Melléktermékként az életkortól függő elágazó folyamatokra általánosította Vinogradov egy tételét és helyesbítette Szevasztyjanov egy téves bizonyítását. (3, 17. szakdolgozat, előadás a kassai Biometriai-Genetikai Nyári Iskolán és az EUCARPIA Biometriai Szekciójának konferenciáján.)

3. Növekedési folyamatok parametrizálása. Munkatársaival Telegdi László megvizsgálta, hogy milyen időintervallumban milyen függvény írja le juhok ill. szarvasmarhák súlyának növekedését (eközben a logisztikus függvény egy új általánosítását vezették be és értelmezték), mikor végezhető el a görbeillesztés a legkisebb négyzetek módszerével és mikor nem (ez utóbbi esetre egy új, ad hoc eljárást dolgoztak ki), továbbá hogyan írható le a növekedési görbék paramétereinek öröklődése. (2, 4, 12. előadás a Nemzetközi Biometriai Konferencián és a Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpóziumon.)

1978. januárja óta Telegdi László az MTA SZTAKI munkatársaiból, valamint biológus és hidrológus szakemberekből álló ún. BEM (BALATON Eutrofizálódását Modellező) munkacsoporton belül a „Tápanyagterhelés a vízgyűjtőről" résztéma felelőse. A felkészülési szakaszt lényegében lezárva elvégezték egy foszforterhelési modellnek a Tetves-patak vízgyűjtőjére történő specifikálását és számítógépes megvalósítását. Kiindulásuk a nem-pontszerű mezőgazdasági terhelés véletlen csapadékeseményeken alapuló modellje volt. (15—18).

TELEGDI LÁSZLÓ PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] A komplex elemi Gauss-folyamat csillapodási paramétere becslésének asszimptotikus eloszlásáról. Kézirat. 1970.
[2] Biometriai és számítástechnikai lehetőségek a juhtenyésztésben. Tanulmány, 1971 (társszerzővel).
[3] Elágazó folyamatok mint a populációméret változásának modelljei. Biológia, 22 (1974), 77—86.
[4] A növekedési görbéken alapuló sztochasztikus predikció egy új módszere. Mérés és Automatika, 22 (1974), 212—215 (társszerzővel).
[5] A leukémia és a rosszindulatú daganatos betegségek gyakorisága különböző betegcsoportok rokonságában. Anthropológiai Közlemények, 18 (1974), 167—173 (társszerzővel).
[6] Stochastic Population Theories. Könyvismertetés, Biológia, 23 (1975), 227—228.
[7] Matematikai modellek a biológiában. Biológia, 24 (1976), 44—48.
[8] Variable Structure Systems. Könyvismertetés, Biológia, 25 (1977), 163.
[9] Statistical investigation of multiple congenital malformations. Transactions of the Eighth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes (1978), Volume B, 301—308 (társszerzővel).
[10] Biomatematikai alkalmazások. Fejezetek a matematikai statisztika alkalmazásaiból II (1978), 11/1—25 (társszerzővel).
[11] Statistical Study on the Multiple Congenital Malformations in Hungary 1970—1975. Preprint No. 23 (1978). MTA Matematikai Kutató Intézete, 1—51 (társszerzővel).
[12] Fitting and genetic analysis of growth curves for young bulls. Acta Agronomica, közlés alatt (társszerzővel).
[13] Gyakori veleszületett rendellenességek öröklődésmenetének vizsgálata. Alkalmazott Matematikai Lapok (társszerzővel). Közlés alatt.
[14] ML-fitting of multifactorial threshold models. Periodica Mathematica, lektorálás alatt (társszerzővel).
[15] A balatoni vízgyűjtő és üledék eutrofizálódásra gyakorolt hatásának modellezése. Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában. Lektorálás alatt (társszerzővel).
[16] Többszörös veleszületett rendellenességek statisztikai vizsgálata Ld. mint 15.
[17] Elágazó populációs folyamatok. Kézirat.
[18] Összefoglaló áttekintés a Balaton Eutrofizálódását Modellező (BEM) Tanulmány, 1978. (társszerzővel).

ASZTALOS DOMONKOS

1946. december 28-án született Budapesten. Egyetemi tanulmányait a Moszkvai Állami Egyetemen (Lomonoszov) Numerikus Tanszékén folytatta 1965 és 1970 között. Egyetemi évei során elsősorban a formális nyelvek matematikai elméletével foglalkozott és ebben a tárgyban publikált egy cikket [6].

Az egyetem elvégzése után az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjánál helyezkedett el, amely jelenleg is a munkahelye és a Software Osztály helyettes vezetője.

Operációs rendszerek hatékonyságának vizsgálatával foglalkozik. A téma kutatásának első fázisában kidolgozott egy software monitort, amely egy különleges státuszú program, és lehetővé teszi a rendszeren belül lezajló események megfigyelését [1]. Ennek megvalósítása azért jelentős eredmény, mert csak a mérési eredmények alapján igazolhatók a különböző rendszermódosítások eredményessége, és a felállított szimulációs és analitikus modellek érvényessége. A software monitor segítségével több mérési sorozatot hajtott végre, amelyek eredményeit publikálta [2], [3], [5], és azokról előadásokat tartott nemzetközi konferenciákon külföldön és belföldön.

A mérések alapján olyan módosításokat hajtott végre az ICL Multijob operációs rendszerének központi egység idő felhasználásában 5—10%-os megtakarítást jelent a terhelés függvényében. A kutatási téma második fázisában egy jelentős modellt dolgozott ki egy kötegelt feldolgozású üzemeltetési környezetre. A modell felállításánál a legújabb eredmények kerültek felhasználásra és a modell sok újszerű elemet tartalmaz. A modellépítéshez szimulációs és matematikai eszközöket alkalmazott. Ez utóbbiak közé tartoznak a tömegkiszolgálás elmélete és a matematikai statisztika. Az eddigi modellezési eredményeket a [7, 8]-ben publikálja. Időközben (1973-ban) részt vett az OTSZK-ban egy jelentős alkalmazási rendszer, az Általános Tervezési Programrendszer (ÁTPR) kidolgozásában.

Asztalos Domonkos 1976. szeptember 1-i kezdettel felvételt nyert levelező aspirantúrára „Operációs rendszerek kiértékelése statisztikai módszerek felhasználásával" témában.

Kutatásai során mindig szem előtt tartja a gyakorlati alkalmazás szempontjait, így részt vett az OTSZK számlázási rendszerének kidolgozásában, amelynek egyik fontos összetevője az egyes programok által lekötött, ill. felhasznált erőforrások mennyiségének meghatározása [4].

ASZTALOS DOMONKOS PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] Az operációs rendszer hatékonyságának vizsgálata OTSZK Közlemények 2, 1974.

[2] Performance Evaluation of the Multijob Supervisor. Proc. of 3rd International Symposium on Modelling and Performance Evaluation of Computer Systems, H. Beilner and E. Gelenbe (eds.) North-Holland, 1977. 19—27.

[3] Measurement of Disc Activity in the Multijob Time-Sharing System. Proc. of International Seminar on Experiences of Interactive System Use, Wydawnictwo Politechniki Wroclaw, 1977, 9—15.

[4] Költségek számlázása korszerű számítógépeknél. Információ és Elektronika, XIII. évf. 4. sz. 1978, 229—235 (Tóth Imrével közösen).

[5] Az ICL System 4/70. „Multijob Supervisor" hatékonysági értékelése. Alkalmazott Matematikai Lapok 2 (1976) 295—306.

[6] A Note on Van Wijngaorden Syntax Casopis pro pestováni matematiky, voc. 99 (1974) 347—351.

[7] A Hybrid Simulation, Analytical Model of a Batch Computer System. (Proc. of 4th International Symposium on Modelling and Performance Evaluation of Computer Systems, Wien).

[8] Evaluation of Scheduling Algorithms by Simulation Experiments. Annals Universitas (megjelenés alatt).

GLEVITZKY BÉLA

1946. február 11-én született Nyírbátorban. Egyetemi tanulmányait a KLTE-n végezte, 1969-ben szerzett matematikusi diplomát. Az egyetem elvégzése után a KLTE Valószínűségszámítási és Alkalmazott Matematikai tanszékén kezd oktatni tanársegédként. 1977-ben adjunktussá nevezik ki.

Oktatási feladata elsősorban a matematikai programozás, az operációkutatás oktatása. Már évek óta a tantárgyak előadója mind a statisztikai, mind a kibernetikusi szakágazat részére. Több nívós diplomadolgozat vezetője volt e tárgykörben. Jelentős munkát végez e tárgykörök tematikájának fejlesztésében, s igyekszik e munkában az országos tapasztalatokat figyelembe venni.

Glevitzky Béla kutatási érdeklődése kezdetben a matematikai statisztika felé irányult. Bekapcsolódott Dr. Gyires Béla egyetemi tanár irányítása mellett az empirikus közép- és az empirikus

szórásnégyzet függetlenségi viszonyára épülő karakterizációs tételek vizsgálatába s azok általánosításaiba. E téren elért eredményei alapján 1975-ben megvédte egyetemi doktori értekezését.

Glevitzky Béla a matematika alkalmazásainak más területein is otthonos. Részt vett a matematikai statisztikának az egészségügy területén való alkalmazásában, jól tájékozott az információelmélet és a numerikus matematika kérdéskörében is. Érdeklődik számítástechnikai kérdések iránt, részt vesz az R—30-as gép tudományos programcsomagjának fejlesztésében, elsősorban a matematikai programozási algoritmusok vizsgálatában.

GLEVITZKY BÉLA PUBLIKÁCIÓINAK JEGYZÉKE

[1] On polynomial regression of polynomial and linear statistics (Pub lications Mathematicae, 24 kötet, 1977, 151—161).
[2] Characterizations of the normal distribution (Publ. Math. megjelenés alatt).
[3] Glevitzky B.—Dr. Károlyi György: A rendszertervező tevékenysége a MESZTICS megalakításának előkészítésében. (Egészségügyi Szervezők Tudományos Egyesületének Nemzetközi Kongresszusa Kongresszusi Kiadványa, 1972. V. kötet, 182—186).
[4] A normális eloszlás karakterizációs problémái (Egyetemi doktori disszertáció, 1975).

JEGYZETEK

[1] Matematika-biológia-kémia szakosok részére (házi jegyzet 1971).
[2] Lineáris programozás matematikus hallgatók részére I—II. kötet (házi jegyzetek, 1973).
[3] Matematikai programozás (házi jegyzet, 1977).

TANULMÁNY

Lineáris regresszió (Országos Tervhivatal részére, 1970).

KONFERENCIAI ELŐADÁSOK

[1] Dr. Szegedi Gusztáv—Glevitzky Béla: Ernyőfénykép-kivizsgálási modell meghatározása Hajdú-Bihar megyei tapasztalatok alapján. (Előadás az Északkelet Magyarországi Egészségügyi Szervezők XI. Tudományos Ülésén, Kazincbarcika, 1970. október 29.)
[2] Glevitzky Béla—Dr. Károlyi György: A rendszertervező tevékenysége a MESZTICS megalakításának előkészítésében. (Előadás az Egészségügyi Szervezők Tudományos Egyesületének Nemzetközi Kongresszusán, Pécs, 1972. augusztus 31—szeptember 2.)

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPESTI RENDEZVÉNYEI
1978. november 15.—1979. június 15.

November 17.	A. B. Sidlovszkij (Szovjetunió): A transzcendencia és az algebrai függetlenség mennyiségi jellemzése
November 17.	K. Glazek (Lengyelország): Independence in universal algebras
November 21.	A. Baker (Anglia): Applications of transcendence, I.
November 23.	H. I. Besenfelder: Valószínűségszámítás tanítása halmazok nélkül
November 24.	Kollár János: A déloszi problémáról (az Ifjúsági Matematikai Kör ülése)
November 24.	A. Baker (Anglia): Applications of transcendence, II.
November 27.	I. Gelfand (Szovjetunió): Coding for broadcast channels with one deterministic component
November 28.	I. Gelfand (Szovjetunió): Coding channels with randomly varying parameters
November 30.	J. D. Monk (USA): Cardial functions on Boolean algebras
December 4.	I. Gelfand (Szovjetunió): Algebraic vector bundles on projective spaces and problems of linear algebra, I.
December 5.	Algebraic vector bundles on projective spaces and problems of linear algebra, II.
December 8.	G. Kowol (Ausztria): Verallgemeinert-relativ-pseudopomplementäre Verbände

December 15.	Prékopa András: Az optimalizálás-elmélet kialakulásának korai történetéről (Farkas Gyula Emlékdíj kiosztása)
December 15.	M. Fiedler (Csehszlovákia): Spectral properties of special matrices
December 15.	A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny díjkiosztása; a feladatokat Surányi János ismertette
December 22.	A Schweitzer Miklós Emlékverseny eredményhirdetése; a feladatokat Lempert László ismertette; Grünwald Géza emlékdíj kiosztása
December 27—28.	Az Ifjúsági Matematikai Kör téli ankétja; az alábbi előadások hangzottak el: Pósa Lajos: Matematikai-logikai kérdések Surányi János: Húr- és érintőnégyszögek Prékopa András: Lineáris programozás
Január 4.	MTA-val közösen: tudományos emlékülés Alexits György születésének 80. évfordulója alkalmából Megnyitó (Szőkefalvi-Nagy Béla) Függvénysorok konvergenciája (Tandori Károly) Erős approximáció (Leindler László) Multiplikatív rendszerek és iterált logaritmus tételek (Móricz Ferenc és Révész Pál) Szorzatrendszerek szerinti sorfejtések konvergenciája (Schipp Ferenc) Elemi sorelméleti módszerek az approximáció elméletében (Králik Dezső)
Január 19.	H. Mendes-France (Franciaország): Deterministic sequences and automata theory
Január 26.	Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny feladatainak megvitatása (az Ifjúsági Matematikai Kör ülése)
Január 29.	V. Trnková (Csehszlovákia): Categories of bialgebras
Február 13.	J. Roitman (USA): Doubly separated spaces
Február 16.	Molnár Emil: A szimmetria-csoportokról (az Ifjúsági Matematikai Kör ülése)
Február 23.	S. K. Zaremba (Anglia): Equidistribution and numerical integration
Március 8.	W. Wilczynski (Lengyelország): Convergence of measurable functions
Március 9.	Molnár Emil: A kristályok konvergenciájáról (az Ifjúsági Matematikai Kör ülése)
Március 16.	Farkas Ernő: Programozási nyelvek formális leírásai, I. (Néhány módszer statisztikus szemantika leírására) — „A Matematika alkalmazásai" Szakosztály rendezésében
Március 26.	Csörgő Miklós (Kanada): Összetett statisztikai hipotézis vizsgálatokról
Március 28.	S. A. Prigalov (Szovjetunió): Path integral for lattice quantum systems
Március 30.	S. A. Prigalov (Szovjetunió): Phase transitions in lattice quantum systems
Március 30.	R. L. Merris (USA): Manifestation of Polya's counting theorem
Március 30.	Farkas Ernő: Programozási nyelvek formális leírásai, II. — „A matematika alkalmazásai" Szakosztály rendezésében
Április 5—6.	Az Ifjúsági Matematikai Kör tavaszi ankétja; az alábbi előadások hangzottak el: Pósa Lajos: Az axiómarendszerekről Hódi Endre: Részvételünk az 1979. évi Amerikai Középiskolai Matematikai Versenyen
Április 26.	Buzási Károly: Csoportreprezentációk alkalmazása kódelméletben
Április 27.	Reiman István: Geometriai egyenlőtlenségek (az Ifjúsági Matematikai Kör ülése)
Május 4.	J. Böhm (NDK): Polyederbaukästen in r-dimensionalen Räumen Konstanter Krümmung
Május 11.	R. Pöschel (NDK): Concrete characterization of algebraic structures- in particular, characterization of certain s-algebraic monoids
Május 14.	W. Philipp (USA): Almost sure approximation theorems for multivariate empirical processes
Május 17.	W. H. Fuchs (USA): Chebyshev approximation on sets with several comonents
Június 1.	Szűcs József: Operátorok Jordan normálformája; az 1978. és 1979. évi Szele Tibor emlékérem átadása
Június 1.	Surányi János: Matematika és nevelés, Sas Elemér: Gondolatok a fizikatanításról; végzős matematika-fizika szakos tanárjelöltek klubdélutánja (ELFT-tal közösen)
Június 5.	Ankét a matematikatanár-képzés problémáiról
Június 6.	Ankét a matematika egyetemi és főiskolai oktatásáról

Június 11.	J. Jaworowski (USA): Extension properties of *G*-maps
Június 13.	H. Solomon (USA): On numerical taxonomy in multivariate data analysis
Június 15.	Yu. Suhov (Szovjetunió): Time evolution of Gibbs states for infinite particle systems

„FEJEZETEK A MATEMATIKAI STATISZTIKA ALKALMAZÁSAIBÓL" CÍMŰ TANFOLYAMUNKON AZ ALÁBBI ELŐADÁSOK HANGZOTTAK EL:

Nov. 17.	Bognár Jánosné: Regressziós módszerek
	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
Nov. 22.	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései
Nov. 24.	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései
Nov. 29.	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései
Dec. 1.	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései
Dec. 8	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései
Dec. 13.	Révész Pál: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései
Dec. 15.	Gulyás Ottó: Statisztikus alakfelismerés
	Keviczky László: Automatizálás statisztikus kérdései.

DÁTUM	ELŐADÁS	ELŐADÓ
Jan. 17.	Raktározási és sorbanállási problémák	Tomkó J.
Jan. 24.	Rakt. probl.	Tomkó J.
Jan. 31.	Rakt. probl.	Tomkó J.
Febr. 7.	Számítógépes módszerek és programcsomagok	Tomkó J.
	Biometriai alkalmazások	Fischer J.—Telegdi L.
Febr. 14.	Számítógépes módsz.	Horváth—Gaudi I.
	Biom. alk.	Fischer J.—Telegdi L.
Febr. 21.	Számítógépes módsz.	Horváth—Gaudi I.
	Biom. alk.	Fischer J.—Telegdi L.
Febr. 28.	Számítógépes módsz.	Horváth—Gaudi I.
	Biom. alk.	Fischer J.—Telegdi L.
Márc. 7.	Megbízhatóságelmélet	Balogh A.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Márc. 14.	Megbízhatóságelmélet	Balogh A.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Márc. 21.	Megbízhatóságelmélet	Balogh A.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Márc. 28.	Megbízhatóságelmélet	Balogh A.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Ápr. 11.	Idősorok analízise	Pröhle T.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Ápr. 18.	Idősorok analízise	Pröhle T.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Ápr. 25.	Idősorok analízise	Pröhle T.
	Monte Carlo módszerek	Szántai T.
Máj. 2.	Idősorok analízise	Pröhle T.
	Monte Carlo módsz.	Szántai T.
Máj. 9.	Idősorok analízise	Pröhle T.
	Monte Carlo módsz.	Szántai T.
Máj. 16.	Idősorok analízise	Pröhle T.
	Monte Carlo módsz.	Szántai T.

DÁTUM	ELŐADÁS	ELŐADÓ
Jan. 26.	Rakt. probl.	Tomkó J.
Febr. 2.	Rakt. probl.	Tomkó J.
Febr. 9.	Biometriai alkalmazások	Fischer J.—Telegdi L.
	Megbízhatóságelmélet	Balogh A.
Febr. 16.	Biom. alk.	Fischer J.—Telegdi L.
	Megbízhatóságelm.	Balogh A.
Febr. 23.	Biom. alk.	Fischer J.—Telegdi L.
	Megbízhatóságelm.	Balogh A.
Márc. 2.	Biom. alk.	Fischer J.—Telegdi L.
	Megbízhatóságelm.	Balogh A.
Márc. 9.	Számítógépes módszerek és programcsomagok	Horváth—Gaudi I.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Márc. 16.	Számítógépes módsz.	Horváth—Gaudi I.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Márc. 23.	Számítógépes módsz.	Horváth—Gaudi I.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Márc. 30.	Számítógépes módsz.	Horváth—Gaudi I.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Ápr. 13.	Idősorok analízise	Arató M.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Ápr. 20.	Idősorok analízise	Arató M.
	Kísérlettervezés	Csáki E.—Sarkadi K.
Ápr. 27.	Idősorok analízise	Arató M.
	Monte Carlo módszerek	Szántai T.
Máj. 4.	Idősorok analízise	Arató M.
	Monte Carlo módsz.	Szántai T.
Máj. 11.	Idősorok analízise	Arató M.
	Monte Carlo módsz.	Szántai T.
Máj. 18.	Idősorok analízise	Arató M.
	Monte Carlo módsz.	Szántai T.

A FELSŐ TAGOZATOS TANÁROK RÉSZÉRE RENDEZETT, AZ ÁLTALÁNOS ISKOLAI ÚJ TANTERV BEVEZETÉSÉT SEGÍTŐ TANFOLYAM

A tanfolyam előadói voltak: Sztrókay Kálmánné, Varga Tamás.

A tanfolyamon az előadók ismertették az új tantervet, az elkészült és készülőben levő dokumentumokat és az új tanterv megvalósítását segítő tapasztalatokat.

Az előadások az alábbi napokon kerültek megrendezésre:
november 22, november 29., január 17., január 24., február 14., február 21., március 14., március 21., április 18., május 9., május 16.

KÖNYVISMERTETÉS

D. O. SKLJARSZKIJ—N. N. CSENCOV—I. M. JAGLOM: VÁLOGATOTT FELADATOK ÉS TÉTELEK AZ ELEMI MATEMATIKA KÖRÉBŐL I. RÉSZ ARITMETIKA ÉS ALGEBRA

Negyedik kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979

Újabban igen népszerűek a matematikai feladatgyűjtemények, mind azok, amelyek feladatsorozat formájában dolgoznak fel egy témát (példa erre Pólya—Szegő Analízis példatára), mind azok, amelyek „csak" érdekes példákat tartalmaznak (ezek között talán a legszínvonalasabb a Kürschák-verseny feladatainak gyűjteménye). Ez a könyv tulajdonképpen mindkét csoportba sorolható; jónéhány egyedi, szellemes (és tegyük hozzá, gyakran nehéz) feladat mellett olyan feladatcsoportokat közöl, amelyek szisztematikusan vezetnek be egy témába, illetve bizonyítási technikába (becslési eljárások, többváltozós polinomok, összegek és sorozatok pontos meghatározása, prímszámok, egyenlőtlenségek). Mindenesetre ezt magyarázza az a tény, hogy a könyv tulajdonképpen az 1935—52 között megrendezett moszkvai matematikai versenyek feladatainak alaposan kibővített, szerkesztett gyűjteménye. Ezért a könyv egyaránt ajánlható mind a matematikával ismerkedő, illetve versenyre edző gimnazistáknak, mind az alsóbb éves matematikus hallgatóknak, mind a matematikát tanítóknak.

Az első fejezet különböző logikai feladatokat tartalmaz, címe „Bemelegítő feladatok". Valóban, néhány közülük alaposan megizzasztja az olvasót. Egy példa közülük: Milyen napra esik gyakrabban újév: szombatra vagy vasárnapra?

A következő három fejezet a legkülönbözőbb számelméleti feladatokat tartalmazza. Vannak számjegyekkel kapcsolatos, oszthatósági, törtszámokkal kapcsolatos példák. Ezekről a példákról és tulajdonképpen a könyv egészéről elmondhatjuk, hogy nagy részük nem „sztenderd": váratlan, újszerű kérdésfeltevésével gondolkodásra késztet, nem pedig (vagy nem csak) a megszokott eljárások alkalmazására.

Az ötödik fejezet diofantoszi egyenletek megoldhatóságával foglalkozik.

A hatodik fejezet összegek és szorzatok zárt alakban való meghatározásával és különböző becslésekkel foglalkozik (elsősorban az e-vel és a Stirling-formulával kapcsolatos egyenlőtlenségekről van szó).

A következő két fejezet polinomokkal és polinomok gyökeivel foglalkozik.

A kilencedik fejezet a komplex számok segítségével megoldható feladatokat tartalmaz, többnyire trigonometriai azonosságokat.

A tizedik fejezet néhány nehéz, nevezetes számelméleti tételt tartalmaz, itt megtalálható az Euler—Fermat-tétel, Wilson tétele, a Lagrange-féle négy-négyzetszám tétel és a Dirichlet-tétel néhány esete.

A tizenegyedik fejezetben a legkülönbözőbb egyenlőtlenségek szerepelnek (számtani-mértani-harmonikus, Cauchy—Bunyakovszkij, Csebisev, Hölder, Minkowski).

A tizenkettedik fejezet sorozatok különbségi sorozataival illetve annak megfordításával, az összeg sorozatokkal foglalkozik.

A fordítás pontos, csiszolt; bár több helyen túlzottan „hűséges": magyarul aritmetika helyett inkább számelméletet kellene mondani, a magyar szakirodalom inkább az $\binom{n}{k}$ jelölést használja C_n^k helyett a binomiális együtthatókra. A sajtóhibák száma az első kiadásban rendkívül nagy, ezek jelentős részét azóta korrigálták.

A 194. feladatban az állítás ellenkezője olvasandó. Több helyen a képletek egy része „elcsúszott".

A mostani kiadás, csakúgy, mint a tizennégy évvel ezelőtt megjelent első, az előkészületben levő orosz kiadásra hivatkozik.

Végül, az érdekesség kedvéért megjegyzem, hogy két feladat, a 134/c és 315 sorszámú, teljesen megegyezik.

KOMJÁTH PÉTER

SCHARNITZKY VIKTOR: EGYETEMI FELVÉTELI FELADATOK MATEMATIKÁBÓL, IV. KÖTET

Tankönyvkiadó

Scharnitzky Viktor Egyetemi felvételi feladatok matematikából című sorozatának negyedik kötete — hasonlóan a korábbiakhoz — az utóbbi években a felvételi és érettségi vizsgákra kitűzött különböző feladatsorozatokat tartalmazza. 1974-től kezdve azok az érettségizők, akiknek matematikából felvételizni is kell, csak egy dolgozatot — mégpedig közös érettségi és felvételi dolgozatot — írnak matematikából. Szerepelnek a könyvben azok a feladatsorozatok, amelyeket a különböző típusú egyetemekre, főiskolákra pályázóknak közös érettségi-felvételi dolgozatként kellett írniuk. Megtaláljuk a könyvben a matematikából nem felvételiző gimnáziumi és szakközépiskolai tanulók érettségi feladatsorozatait, a pótfelvételik feladatait, valamint különböző felmérő feladatsorokat: például a TIT-tanfolyamok ellenőrző dolgozatait, a 75-ben érettségizők felmérő dolgozatait.

A szerző mindegyik feladathoz részletes megoldást közöl, sok feladathoz többfélét is. A könyv végén a feladatoknak témakörök szerinti csoportosítását is megtaláljuk.

A feladatgyűjteményt jól használhatják a középiskolai tanárok, és alkalmas arra is, hogy az érettségire, felvételire készülő diákok önállóan dolgozzanak belőle.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA

DR. PERGE IMRE: A SZÁMÍTÁSTECHNIKA ALAPJAI, KÖZÉPISKOLAI SZAKKÖRI FÜZETEK

Tankönyvkiadó, Budapest, 1978

Ha valaki egy számítógépen dolgozni akar, akkor meg kell tanulnia annak a gépnek a programozási sajátosságait és ismernie kell magát a gépet is. Ha valaki most akar megismerkedni a számítógép-tudománnyal, akkor egy „gépfüggetlen", bevezető jellegű könyv áttanulmányozása szükséges. Hogyan kell egy ilyen könyvet megírni? Írhatunk pl. egy sokszáz oldalas könyvet, melyben a számítógépekről és a programozási nyelvekről jó, de távolról sem teljes képet adunk. Ezt azonban a kezdő nem szívesen veszi majd kézbe, mert mindenekelőtt a dolog egészét illetően szeretne tájékozódni, lehetőleg gyorsan. Szükséges tehát, hogy lényegre törő, rövid, bevezető művek is születsenek. Ebbe a kategóriába tartozik Perge Imre nemrég megjelent könyve. Kétszáznál kevesebb oldalon, világos, élvezetes stílusban összefoglalja azokat az ismereteket, amelyeket középiskolai szakkörön ismertetni lehet és célszerű. A könyv jelentősége azonban — néhány egyéb szakköri füzethez hasonlóan — több ennél. Ajánlható mindenkinek, akinek a számítógép-tudomány alapjainak ismeretére szüksége van, legyen az diák vagy felnőtt, közgazdász vagy matematikus stb. Még azt az állítást is megkockáztatom, hogy előrelépés volna, ha egytemeinken és főiskoláinkon a végző hallgatók (egyes számítástechnika igényes szakoktól eltekintve, ahol többre van szükség) birtokában volnának a könyvben foglalt ismereteknek.

A könyv 6 fejezetre oszlik. Az első fejezetben, 32 oldalon az információval, annak rögzítési, tárolási módjaival és a tárolás eszközeivel foglalkozik. Ismerteti a lyukkártyát, a lyukszalagot, a mágnesszalagot, a mágnesdobot, a mágneslemezt, a számok ábrázolási módjait és az operatív tár legfontosabb tudnivalóit. A második fejezet a számítógép hardware ismereteket foglalja össze nagyon tömören, néhány oldalon. A harmadik fejezet az algoritmusokkal foglalkozik. A cél elsősorban a folyamatábra megismertetése és néhány egyszerű példa bemutatása, ez közel húsz oldalon történik meg. A negyedik fejezet néhány oldalas vázlatos ismertetést ad az alapsoftwareről. Szó esik at assemblerről, az autokódról, továbbá a magasabb szintű nyelvek közül említésre kerül a FORTRAN, az ALGOL, a COBOL és a PL/1. Rövid szakaszok foglalkoznak a fordítóprogram és az operációs rendszer mibenlétével. A leghosszabb fejezet az ötödik, melyben kb. 60 oldalon az olvasót bevezeti a FORTRAN programozási nyelvbe. Ismeretes, hogy ennek a nyelvnek (akárcsak a többinek) a teljes ismertetése ma már legalább féléves kurzusokon történik. Ha azonban csak egyszerű feladatok megoldásáról van szó, akkor az alapok elegendők, ezt nyújtja ez a fejezet. Tárgyalja a programlapot, az alapjeleket, a konstansokat, a változókat, a kifejezéseket, a függvé-

nyeket, a műveleteket, az utasításokat, a szubrutionokat, a függvényeljárásokat és bemutat néhány egyszerű programot.

A hatodik fejezet a szerzett programozási ismereteket gyakoroltatja matematikai feladatok megoldásán. Ennek terjedelme kb. megegyezik az ötödik fejezetével. A feladatok csoportjai a következők: számelméleti feladatok, egyenletek és egyenletrendszerek, kombinatórikai feladatok, komplex aritmetika, logikai műveletek, geometriai feladatok, a matematikai analízis és a statisztika körébe tartozó feladatok. Végül egy, sportverseny kiértékelésére alkalmas programmal ismerkedik meg az olvasó. Az első, a harmadik és az ötödik fejezethez gyakorló feladatok is tartoznak. Az egyetlen, amit a könyvben kifogásolunk, hogy a feladatok megoldásait nem adja meg a szerző a könyv végén.

A könyv megjelenése fontos eseménye a hazai számítástechnikai irodalomnak. A fentebb már megfogalmazott dicséreteken kívül hadd dicsérjem meg a szerző kitűnő didaktikai érzékét (kevés szerző sajátja, sajnos ebben a szakmában). Az olvasó valóban könnyedén, élvezettel jut a számítógép-tudomány alapismeretei birtokába Perge Imre könyvének elolvasásával.

PRÉKOPA ANDRÁS

T. W. ANDERSON, S. D. GUPTA, G. P. H. STYAN:
A BIBLIOGRAPHY OF MULTIVARIATE STATISTICAL ANALYSIS

Robert E. Kneger Publishing Company Huntington, New York, 1977.

A könyvet ugyanez a kiadó adta ki 1972-ben először, a mostani kiadás (sajnos) változatlan utánnyomás. A könyv öt fejezetből áll; ezek közül az első a könyveket, a második a folyóiratokat ismerteti. A harmadik (és legterjedelmesebb) fejezet a témához tartozó dolgozatokat sorolja fel, szerzőjük szerinti ábécében. Van a könyvnek egy saját témafelosztása (amit az V. fejezetben találhatunk), ennek a kódszámai is ott vannak az egyes cikkek mellett, és a Math.Reviews-beli ismertetés helye is. Végül minden cikk kapott még egy sorszámot is a könyvben, aminek azt hiszem semmi haszna, hiszen minden hivatkozás a szerzők neve szerint történik. Így a negyedik fejezet a szerzők nevét sorolja fel, hogy az egyes témákban milyen dolgozatokat írtak, innen kiindulva találhatjuk meg a harmadik fejezetben, amit valójában kerestünk. Végül néhány számot közölnek a szerzők az egyes témák népszerűségéről, ezek közül álljon itt csak egy: a könyvben 6093 dolgozat szerepel.

TUSNÁDY G.

G. W. MACKEY:
LECTURES ON THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

Robert E. Krieger Publishing Company, Huttington, New York 1977. 266 oldal.

Ez a komplex függvénytani bevezető könyv a szerző Harvardon tartott két féléves előadásából készült jegyzet. A kezdet kezdetétől indul el: valós és komplex számok axiomatikus bevezetése, folytonosság, valós függvények differenciálása és integrálása, metrikus terek — s csak ezután, a IV. fejezetben (57. oldal) tér rá a komplex differenciálásra. Ily módon — mint a szerző írja a Bevezetésben — a könyv minden matematikai előismeret nélkül is olvasható és megérthető, *legalábbis elvben.* Gyakorlatban azonban nyilván senki se ajánlana komplex függvénytani tankönyvet egy „minden matematikai előismeretet" nélkülöző olvasónak, úgyhogy nem egészen világos, mi a szerző célja az első három fejezettel.

Az V. fejezet a Cauchy-féle integrálformulát és következményeit tárgyalja. A Cauchy-formulát a lehető legáltalánosabban bizonyítja; a felmerülő síktopológiai nehézségeket a körülfordulási szám bevezetésével hidalja át.

A könyv második része, azaz a második félév anyaga, témájában is, tárgyalásmódjában is sokkal jobban tetszett. A VI. fejezet az „Egész és meromorf függvények" címet viseli. Az általános tudnivalók (Mittag—Leffler tétel, szorzatelőállítás, függvények rendje és gyökei közti kapcsolat) mellett az elliptikus függvények elméletébe is elvezeti az olvasót. A VII. fejezet a konform leképezések alaptételéé. A VIII. fejezetben megismerkedünk a Riemann-felületekkel; az absztrakt definíció mellett sok példát és szemléletes konstrukciót látunk. A magyarázatok nagyon részletesek és világosak.

Az utolsó fejezet — „Algebrai függvények és integráljaik" — sajnos csak vázlat maradt; a tanév befejeződött, mielőtt erre a témára sor került volna. Így aztán az olvasónak is meg kell elégednie a tételek (Riemann—Roch-, Abel-) kimondásával és a hozzájuk fűzött magyarázatokkal, és a bizonyításokat másutt kell megkeresnie. Arra bizonyosan alkalmas a két utolsó fejezet, hogy e szép és híres eredmények felvillantásával felkeltse az olvasó érdeklődését és a témában való elmélyedésre serkentse — a referensre mindenesetre ilyen hatást tett.

LEMPERT LÁSZLÓ

V. S. HUZURBAZAR:
SUFFICIENT STATISTICS

(1976) Marcel Dekker, New York and Basel

Ez az 1976-ban megjelent három részből álló könyv olyan — mindig elégséges statisztikákra vonatkozó — tételeket és állításokat tartalmaz, amelyeket a szerző 1959 és 1964 között dolgozott ki.

Az első fejezetben Jeffreysnek a kétértékű logika kiterjesztésére vonatkozó elgondolását igyekszik biztosabb alapokra helyezni. Jeffreys elméletében az állításokhoz nemcsak igaz ill. hamis értékeket lehet hozzárendelni, hanem adott előzetes információk, mért értékek alapján egy állítás elfogadhatóságának mértékéről is értelmes beszélni. — Paraméterbecslés esetén a következtetések két sarokköve a Bayes-formula és a választott apriori eloszlás. Huzurbazar független, valós-értékű megfigyelések esetén, feltételezve, hogy létezik elégséges statisztika, a paramétertér és a megfigyelt adatok terének nemszinguláris transzformációival szemben invariáns mennyiségeket határoz meg, hogy ezek segítségével definiáljon apriori eloszlásokat. A második fejezetben először egyetlen valós paramétertől függő, független, valós értékű megfigyelések esetét vizsgálja — feltételezve, hogy a sűrűségfüggvények terjedelme függ a paramétertől is. Megmutatja, hogy ha a Θ paramétertartomány véges vagy végtelen intervallum, a terjedelmet meghatározó $[a(\delta), b(\delta)]$ intervallum a, ill. b függvényei monotonok és folytonosan deriválhatóak, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzék egyetlen elégséges statisztika tetszőleges $n \geqq 2$ megfigyelés esetén az, hogy (i) a és b ellenkező értelemben legyenek monotonok (ii) az $f(x, \delta)$ sűrűségfüggvény alakja pedig $f(x, \delta) = g(x)h(\delta)$. Ekkor az elégséges statisztika értékét a rendezett minta legkisebb ill. legnagyobb eleme határozza meg. A szerző a továbbiakban általánosítja ezt a tételt először vektorértékű elégséges statisztika esetére, majd több paraméterre.

A harmadik fejezetben olyan jól ismert vagy kevésbé ismert egydimenziós eloszláscsaládokat karakterizál, amelyek skála- és (vagy) elhelyezkedési-paramétertől függenek, feltételezve, hogy létezik valós- (vagy vektor-) értékű elégséges statisztika. A karakterizált eloszlások között van a normális, az exponenciális, az iterált-exponenciális, és az egyenletes eloszlás is.

TUSNÁDY GÁBOR

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat beérkezett: 1979 VIII. 30 — Terjedelem: 22,05 (A/5) ív
79-4294 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József

CONTENTS

Memorial Session on the 175th anniversary of the birth of János Bolyai 1
G. Alexits: The universe of János Bolyai 1
Memorial Session on the 80th anniversary of the birth of G. Alexits 11
1. L. Leindler: Strong approximation 11
2. K. Tandori: Convergence of series of functions 21
3. D. Králik: Elementary methods of the theory of series in approximation theory 27
4. F. Schipp: Convergence of serial expansions using product systems..... 35
5. F. Móricz and P. Révész: Multiplicative systems 43
J. Horváth: The mathematical work of M. Reisz II. 65
M. Szalay and J. Urbán: The mathematical work of J. Surányi 101
T. Bakos: A magic square of primes 119
P. Erdős and E. Szemerédi: Remarks on a problem of the American Mathematical Monthly.. 121
P. Erdős, K. Győry and Z. Papp: On some new properties of the functions $\tau(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ and $\nu(n)$ 125
B. Szénássy: Remarks concerning the results of Gauss in non-Euclidean geometry 133
Márta Nagyné-Szilvási: On the curvature of quatrer-symmetric connexion 141
Magdolna Bézi: Invertibility of a matrix of binomials 147
J. Kollár: Algebraic curves 153
S. Szabó: A remark on regular polygons 199
H. M. Chung: A note on completely invariant congruence relations in varieties..... 203
W. T. Tutte: Colouring problems 207
Problems of the 1978. M. Schweitzer Mathematical competition 215
Report on the 1978 M. Schweitzer Memorial Competition 219
Problems 235
Society life 237
Book review 247

СОДЕРЖАНИЕ

Юбилейное заседание в связи с 175-летней годовщиной со дня рождения Яноша Бойаи 1
Алексич Дьёрдь: Мир Яноша Бойаи 1
Мемориальное заседание в связи с 80-летней годовщиной со дня рождения Дьёрдя Алексича 11
1. Леиндлер Ласло: Сильная аппроксимация 11
2. Тандори Карой: Сходимость функциональных рядов 21
3. Кралик Дежё: Применения элементарных ов теории рядов в теории приближений 27
4. Шипп Ференц: Сходимость рядов по системам произведений системам 35
5. Мориц Ференц и Ревес Пал: Мультипликативные системы 43
Хорват Янош: Математическое творчество Марцеля Рисса II. 65
Салаи Михай и Урбан Янош: Математическое творчество Яноша Шурани 101
Бакош Тибор: Магический квадрат из простых чисел..... 119
Эрдёш Пал и Семереди Ендре: Замечания к одной проблеме из журнала "American Mathematical Monthly" 121
Эрдёш Пал, Дьёри Калман и Папп Золтан: О некоторых новых свойствах функций $\tau(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ и $\nu(n)$ 125
Сенаши Барна: Замечания к результатам Ф. Гаусса по не-евклидовой геометрии 133
Надь-Силваши Марта: О кривизне I/4-симметричной связности..... 141
Бези Магдолна: Изучение обратимости одной матрицы, состоящей из биномиальных коэффициентов 147
Коллар Янош: Алгебраические кривые 153
Сабо Шандор: Замечание о правильных многоугольниках 199
Чунг, Х. М.: О вполне инвариантных отношениях конгруэнтности в теории многообразий 203
Тутте, В. Т.: Задачи раскрашивания 207
Задачи состязания в память им М. Швейцера 1978. г. 215
Подведение итогов математического конкурса им. М. Швейцера 1978 г 219
Задачи 235
В математическом обществе 237
Новые книги 247

Ára: 14,— Ft
Évi előfizetés: 28,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

28. évfolyam, 1977—1980

4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évente négyszer.
Budapest, 1977—1980. július — 28. évfolyam 4. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 28,— Ft.

A megadott két évszám közül az első a kötet esedékességének, a második a tényleges megjelenésnek évét jelöli.

TARTALOMJEGYZÉK

Weszely Tibor: Vályi Gyula (Születésének 125. évfordulójára) 251
Szénássy Barna: Henri Poincaré (Nancy, 1854. ápr. 29. — Párizs, 1912. júl. 17.) 263
Bognár Mátyás és Szenthe János: Henri Poincaré matematikai munkásságáról és hatásáról 269
Erdős Pál: Binomiális együtthatók prímfaktorairól 287
Bezdek Károly: Mozaikok, amelyekben minden lapnak ugyanannyi szomszédja van 297
Szabó Sándor: Véges Abel-csoportok és n-dimenziós mozaikok 305
Petz Dénes: A kompakt terek osztálya 319
Uhrin Béla: Egy megjegyzés a Minkowski-féle konvex-test tételhez 323
Sövegjártó András: Egy megjegyzés univerzális elemekről 327
Jelentés az 1979. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 329
Feladatrovat 355
Társulati élet 361
Könyvismertetés 383
Új könyvek 392

VÁLYI GYULA

125 ÉVVEL EZELŐTT SZÜLETETT

WESZELY TIBOR

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A fennállása 425. évfordulóját közeljövőben ünneplő marosvásárhelyi kollégium ősi falai szerény, de az akkori erdélyi viszonyokhoz képest eléggé számottevő hajlékot biztosítottak a természettudományok művelőinek is. Bolyai Farkas tevékenységével az itt folyó oktatás már a fejlett európai szintre emelkedett. Nem túlzunk, amikor azt állítjuk, hogy a XIX. századbeli erdélyi iskolák egyikében sem nevelkedtek olyan jelentős és nagy tehetségű matematikusok, mint a marosvásárhelyi kollégiumban. Elegendő, ha csak Bolyai Jánosra, vagy Vályi Gyulára gondolunk.

Vályi Gyula, a múlt századvégi magyar matematikusok egyik kiemelkedő alakja, 1855. január 25-én a Bolyaiak városában, Marosvásárhelyen született. Édesapja, a szintén marosvásárhelyi születésű Vályi Károly (1809—1891), a város egyik köztiszteletben álló polgára volt. Iskolai tanulmányait szülővárosában végezte, mely idő alatt Bolyai Farkasnak is tanítványa volt. A nagy professzornak egyik igen megbecsült diákja lehetett, mivel annak ellenére, hogy a *Tentamen* előfizetőinek névsorában ott találjuk a „T[ekintetes] Vállyi Károly Posta Mester... 1 példány" bejegyzést, Farkas egy külön tiszteletpéldánnyal is megajándékozta őt. Ennek első oldalán a következő dedikáció olvasható: „Tekintetes Vállyi Károly úrnak, barátságos szeretettel". Idővel, az ügyvédi vizsgát letéve, mint ítélő bíró működött. Hosszú időn át volt a marosvásárhelyi egyházközség kurátora, valamint a városi iskolaszék elnöke. 1837. június 21-én feleségül vette Dózsa Rákhelt, aki egyenes leszármazottja az 1514-es parasztlázadás nagy vezérének, Dózsa Györgynek. Az e házasságból született gyermekek közül hárman érték meg a magasabb életkort: Gábor (1844—1926), Róza (1851—1900), valamint Gyula. A művelt és széles látókörű szülők mindent megtettek, hogy gyermekeiket a legjobb nevelésben részesítsék.

Sajnos, már négyéves korában baleset érte. Egy esés következtében eltörte a lábát, és a hibás orvosi kezelés miatt élete végéig sétapálcára támaszkodva bicegett.

1861 őszén szülei beíratták a marosvásárhelyi kollégiumba. A sovány, vézna kisfiú tehetsége és szorgalma hamar feltűnt. A kollégium legjobb tanulói között emlegették. Gimnazista kori éveire nyúlik vissza egy másik testi fogyatékosságának kezdete, amely egész életén át kínozta: ekkor kezdtek jelentkezni súlyos szembajának jelei. Ettől kezdve naponta legfeljebb csak néhány órát tanulhatott, betegsége berlini tanulmány évei alatt oly súlyossá vált, hogy hetekre be kellett szüntetnie minden író-olvasó tevékenységét. Hogy mit jelent ez egy tanuló diáknak, vagy egy olyan foglalkozású embernek, akinek nap mint nap szükséges az önképzés és az állandóan felgyülemlő új információk elsajátítása, úgy véljük nem kell részleteznünk. Szemgyengeségét gyors felfogóképességével és kitűnő emlékezőtehetségével próbálta pótolni. 1871-ben „subscribált", s még kijárta a kollégium kétéves időtartamú „felső tanoda bölcselmi osztályait".

Az apának Bolyai Farkasról elhangzott áradozó nyilatkozatai nagyban befolyásolták Vályi Gyula pályaválasztását. Így 1873-ban beíratkozott az azelőtti évben alapított kolozsvári egyetem matematika-fizika szakára. Egyetemi tanulmányainak elvégzése után, két ottani jeles tanára, Réthy Mór és Martin Lajos, kieszközölték számára a berlini egyetemre szóló kétéves ösztöndíjat. Az akkori idők „matematikai centrumában" bővítette és egészítette ki ismereteit, s onnan hazatérve Kolozsváron telepedett le végérvényesen, mint a város egyetemének professzora. Ezt a mély megtisztelő állást doktori tézisének megvédése után nyerte el. Ugyanis Berlinből visszatérve, Réthy Mór ösztönzésére azonnal bekapcsolódott a Martin Lajos által tanulmányozott kutatási témába, melynek célja az akkoriban igen élénken tárgyalt technikai problémának, a repüléshez szükséges legjobb hatásfokú légcsavarnak az előállítása volt. A légcsavar felületi alakjának a tanulmányozása végül is Vályit egy igen komoly és jelentős matematikai probléma elé állította, mely a parciális differen-

ciálegyenletek elméletének bővítését és továbbfejlesztését tette szükségessé. Rövid idő alatt megírt doktori értekezése később nemzetközi visszhangot keltett.

Doktori tézisének, valamint a parciális differenciálegyenletek tárgyköréhez tartozó más dolgozatainak bemutatásával többen is foglalkoztak (Réthy Mór [1], Obláth Richárd [2], Szénássy Barna [3]). Így ezek témáját most egyáltalán nem érintjük, mint ahogyan nem fogjuk említeni azokat a szintén már tárgyalt érdekes matematikai feladatokat sem, melyeket Vályi a Mathematikai és Physikai Lapok kezdeti számaiban közölt. További leszűkítés végett, Vályi Gyulának csupán a projektív geometria továbbfejlesztésére vonatkozó dolgozataival foglalkozom, tehát többirányú kutatásainak csak az egyik oldalát igyekszem bemutatni. Meg kell azonban jegyeznem, hogy dolgozatai közül a legtöbb éppen az említett témakörre vonatkozik.

Nem egy tudományos közleménye foglalkozik a többszörösen perspektív helyzetű háromszögek tanulmányozásával. Desargues tétele szerint, ha két háromszög megfelelő csúcspontjait összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesen vannak, és fordítva. Ilyen esetben a két háromszöget *perspektív*nek mondjuk. Már Vályi előtt ismert volt az a tétel, miszerint, ha két háromszög, az ABC és az $A'B'C'$ perspektív helyzetű, akkor mindig található egy olyan kúpszelet, amelyre vonatkozóan a két háromszög polárreciprok; vagyis: az A, B, C csúcsok polárisai a $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ oldalak, az A', B', C' csúcsok polárisai pedig a BC, CA, AB oldalak. Vályi első projektív geometriai tárgyú közleményében [4] e tétel általánosítását tűzte ki maga elé, melyben tanulmányozás alá vette azt az esetet, amikor a két háromszög r-szeresen perspektív ($r=2, 3, 4, 6$), és megvizsgálta a mindegyik perspektivitásnak megfelelő r kúpszelet egymáshoz való viszonyát. Maga az ötlet felvetése Rosanes és Schröter érdeme, de a problémakör analitikus úton való teljes kidolgozását Vályi Gyula adta meg. A projektív koordinátarendszert, amelyben dolgozik, nagyon jó érzékkel, jelöléseit pedig rendkívül ügyesen választja meg. Így egyszerű, gyors és elegáns úton jut el a kapott eredményekhez. Ennek érzékeltetésére közöljük röviden Vályi gondolatmenetét.

Legyen ABC és 123 két perspektív háromszög, ahol A és 1, B és 2, valamint C és 3 a megfelelő csúcspontok. Ezt a perspektivitást így jelöli: $(A_1B_2C_3)$. A projektív koordinátarendszert pedig úgy választja meg, hogy a két háromszög oldalainak egyenletei a következők lehessenek:

$$\begin{aligned} BC\colon\ & x=0; \qquad 23\colon\ \lambda x+ y+ z=0;\\ CA\colon\ & y=0; \qquad 31\colon\ x+\mu y+ z=0;\\ AB\colon\ & z=0; \qquad 12\colon\ x+ y+\nu z=0. \end{aligned}$$

Ekkor, a kúpszelet egyenlete, amelyre a polárreciprocitás fennáll:

$$k_1 \equiv \lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2yz+2zx+2xy=0.$$

A többszörös perspektivitási lehetőségek tanulmányozása céljából a megfelelő csúcsokat másképpen is összekapcsolja, amely esetek az $1, 2, 3$-nak az A, B, C-hez viszonyított permutációi által érhetők el.

I. Ha $\mu=\nu$, akkor a $(A_1B_2C_3)$ perspektivitás mellett a $(A_1B_3C_2)$ perspektivitás is fennáll. Ezen utóbbihoz tartozó kúpszelet:

$$k_2 \equiv \lambda x^2+y^2+z^2+2\mu yz+2zx+2xy=0.$$

Tehát:

$$k_1 - k_2 \equiv (\mu - 1)(y - z)^2,$$

melyből következik Vályi egyik tétele:

Ha két háromszög kétszeresen perspektív, akkor a perspektivitásnak megfelelő két kúpszelet kétszeresen érinti egymást; az érintési húr az A1 egyenes.

Igazolja továbbá, hogy ez a szükséges feltétel elégséges is.

II. Ha $\lambda = \mu = \nu$, akkor a perspektivitás négyszeres. A négy perspektivitás és a nekik megfelelő kúpszeletek a következők:

$$(A_1B_2C_3): \quad k_1 \equiv \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0,$$

$$(A_1B_3C_2): \quad k_2 \equiv \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2zx + 2xy = 0,$$

$$(A_3B_2C_1): \quad k_3 \equiv x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2yz + 2\lambda zx + 2xy = 0,$$

$$(A_2B_1C_3): \quad k_4 \equiv x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2\lambda xy = 0.$$

Tehát:

$$k_1 - k_2 \equiv (\lambda - 1)(y - z)^2; \quad k_3 - k_4 \equiv (\lambda - 1)(y - z)(-2x + y + z);$$

$$k_1 - k_3 \equiv (\lambda - 1)(z - x)^2; \quad k_4 - k_2 \equiv (\lambda - 1)(z - x)(x - 2y + z);$$

$$k_1 - k_4 \equiv (\lambda - 1)(x - y)^2; \quad k_2 - k_3 \equiv (\lambda - 1)(x - y)(x + y - 2z).$$

Ebből látható, hogy a k_2, k_3, k_4 *kúpszeletek külön-külön, kétszeresen érintik a* k_1 *kúpszeletet, és az érintési húrok az A1, B2, illetve C3 egyenesek.*

III. Ha $\lambda\mu\nu = 1$, akkor a háromszoros perspektivitás is lehetséges, és ezek (a megfelelő kúpszeletek feltüntetésével is) a következők:

$$(A_1B_2C_3): \quad k_1 \equiv \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0,$$

$$(A_2B_3C_1): \quad k_2 \equiv x^2 + \mu y^2 + \mu\nu z^2 + 2\mu\nu yz + 2zx + 2\mu xy = 0,$$

$$(A_3B_1C_2): \quad k_3 \equiv x^2 + \mu\nu y^2 + \nu z^2 + 2\mu\nu yz + 2\nu zx + 2xy = 0.$$

Erről Vályi kijelenti: *ez esetben a kúpszeletek általában nem érintik egymást.*

Vizsgálataiból azt a konklúziót vonja le, hogy két valós háromszög többszörös perspektivitása csak kétszeres, háromszoros és négyszeres lehet. Hatszoros perspektivitás esetén már a két háromszög mindig képzetes, a hat kúpszelet közül pedig legfeljebb négy valós.

Előbbi vizsgálatait a térre is kiterjeszti. *Többszörösen perspektív tetraéderek* c. dolgozatában [5] — amint már e cím is érzékelteti — két tetraéder többszörös perspektivitásának lehetőségeit és eseteit tanulmányozza.

Két tetraéderről akkor mondjuk, hogy perspektív helyzetben vannak, ha a megfelelő csúcspontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást. Ez a pont a *perspektivitás középpontja (centruma)*. Ekkor a megfelelő élek tudvalevőleg metszik egymást és ezek a metszéspontok egy síkban fekszenek, mely síkot a *perspektivitás síkjának* nevezzük. Ebből adódó következmény, hogy a megfelelő lapok metszéséből kapott egyenesek szintén egy síkban, a perspektivitás síkjában fekszenek.

A két tetraéder analitikus úton történő többszörös perspektivitásának vizsgálatában a projektív tér koordináta-alapalakzatát Vályi ugyanazzal az ötletességgel választja meg, mint az előbb tárgyalt projektív síkbeli esetben. Az *ABCD* és *1234* tetraéderek perspektivitási viszonyát, ha *A* és *1*, *B* és *2*, *C* és *3*, *D* és *4* a megfelelő csúcsok, így jelöli: $(A_1B_2C_3D_4)$.

A célszerűen megválasztott projektív-koordinátarendszerben az $ABCD$ és 1234 perspektív tetraéderek lapjainak egyenletei a következők lesznek:

$$\begin{aligned} BCD&: \ x=0; \qquad 234: \ \lambda x+y+z+t=0;\\ ACD&: \ y=0; \qquad 134: \ x+\mu y+z+t=0;\\ ABD&: \ z=0; \qquad 124: \ x+y+\nu z+t=0;\\ ABC&: \ t=0; \qquad 123: \ x+y+z+\varrho t=0. \end{aligned}$$

Ebben az esetben kimutatja, hogy a perspektivitás síkjának egyenlete:

$$x+y+z+t=0,$$

a perspektivitás centrumának koordinátái pedig: $\frac{1}{\lambda-1}, \frac{1}{\mu-1}, \frac{1}{\nu-1}, \frac{1}{\varrho-1}$.

Más elképzelhető perspektív helyzetek jelképei az $(A_1B_2C_3D_4)$ perspektivitásból az $1, 2, 3, 4$-nek az A, B, C, D-hez viszonyított permutációjával kaphatók. Vályi kijelentése alapján, a minőségileg különböző esetek a következő négyféle permutációval érhetők el:

I. (1)(2)(3, 4); II. (1)(2, 3, 4); III. (1, 2, 3, 4); IV. (1, 2)(3, 4).

Tehát, az I. permutációnak megfelelő perspektivitás: $(A_1B_2C_4D_3)$; a II.-nek: $(A_1B_3C_4D_2)$; III.-nak: $(A_2B_3C_4D_1)$. Vályi ezekről sorra kimutatja, hogy „valóságos tetraédereknél" mindhárom eset lehetetlen.

A IV. esetben kapott vizsgálandó perspektivitási lehetőség: $(A_2B_1C_4D_3)$. Ebben az esetben AC és 24, AD és 23, BC és 14, BD és 13 kell, hogy messék egymást. Ez a $\lambda\nu=1$, $\lambda\varrho=1$, $\mu\nu=1$, $\mu\varrho=1$ feltételeket vonja maga után, mely egyenlőségek közül az egyik a másik három következménye. Tehát

$$\lambda=\mu=\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\varrho},$$

s ekkor a perspektivitás kétszeres.

Ha emellett ugyanakkor feltesszük, hogy a két tetraéder egyszersmind $A_3B_4C_1D_2)$ módon is perspektív, akkor még a következő feltételek adódnak:

$$\lambda=\frac{1}{\mu}=\nu=\frac{1}{\varrho},$$

melyek az előbbiekkel csak akkor következhetnek be, ha

$$\lambda=\mu=\nu=\varrho=-1.$$

De ekkor a $(A_4B_3C_2D_1)$ perspektivitás is fennáll — tehát a *perspektivitás négyszeres*. Összefoglalva:

a) Ha $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ közül kettő-kettő egyenlő és a nem egyenlők egymásnak reciprokai, akkor a perspektivitás *kétszeres*.

b) Ha $\lambda=\mu=\nu=\varrho=-1$ a perspektivitás *négyszeres*. Ez utóbbi esetben a két tetraéder oldallapjainak egyenletei:

$$\begin{aligned} BCD&: \ x=0; \qquad 234: \ -x+y+z+t=0;\\ ACD&: \ y=0; \qquad 134: \ x+y+z+t=0;\\ ABD&: \ z=0; \qquad 124: \ x+y-z+t=0;\\ ABC&: \ t=0; \qquad 123: \ x+y+z-t=0, \end{aligned}$$

a négy perspektivitásnak megfelelő perspektivitás síkok egyenletei pedig:

$$(A_1 B_2 C_3 D_4): \quad x+y+z+t=0,$$
$$(A_2 B_1 C_4 D_3): \quad x+y-z-t=0,$$
$$(A_3 B_1 C_4 D_2): \quad x-y+z-t=0,$$
$$(A_4 B_3 C_2 D_1): \quad x-y-z+t=0.$$

Egyszersmind könnyű meggyőződni, hogy a négy perspektivitás centrumai ezen négy utolsó sík alkotta tetraéder csúcspontjai. Erről, a most kapott harmadik tetraéderről kimutatja, hogy mindkét előbbi tetraéderrel négyszeresen perspektív. Tehát eljutottunk Vályi Gyula egyik igen szép tételéhez:

Két tetraéder négyszeres perspektivitása esetén a négy perspektivitásnak megfelelő négy sík egy harmadik tetraédert származtat, amely az előbbi két tetraéderrel olyan rendszert alkot, hogy ezek közül bármelyik kettő négyszeresen perspektív, és a perspektivitás centrumai a harmadik tetraéder csúcspontjai, lapjai pedig a perspektivitás síkjai. (Mindegyik csúcspont a szemben fekvő laphoz, mint perspektivitási síkhoz tartozó centrum.)

A perspektív tetraéderek tanához c. közleményében [6], a következő problémát tárgyalja: tudott dolog, hogyha a két tetraéder megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egy pontban találkoznak (perspektív tetraéderek), akkor a megfelelő élek metszik egymást, és e metszéspontok egy síkban fekszenek. Kőnig Gyulával folytatott levelezésében Vályi felveti a kérdést, melyet aztán közösen tisztáznak: vajon megfordítva, vagyis, ha két tetraéder megfelelő élei metszik egymást, s e pontok egy síkban vannak, akkor a perspektív helyzet szükségszerűleg következik-e? Vizsgálataik eredménye az, hogy annak az egy esetnek a kivételével, amikor a két tetraédernek csak egy-egy megfelelő lapsíkja és ezzel szembenfekvő csúcsa közös, a perspektív helyzet szükségképpen következik.

Az említett kivételes esetben csak akkor áll fenn szükségszerűen a perspektív helyzet, ha a közös síkban fekvő háromszögek perspektívek.

Néhány évvel később, a perspektív tetraéderek — Desargues tételének eme térbeli megfelelőjének — gondolatát általánosítva [9], érdekes és eredetien új eredményeket közöl. Rövid bevezetőként — Vályi közleményei alapján — megemlítjük a térbeli egyenesekre vonatkozó *lineáris sugársor* fogalmát. Legyenek p_{ik} $(i, k=1,2,3,4;$ $p_{ik}+p_{ki}=0)$ a projektív térbeli p egyenes vonalkoordinátái (*Plücker*-féle koordinátái). Ezeket — hogy egy egyenes vonalkoordinátái lehessenek — a

$$[p] = p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23} = 0$$

összefüggés köti össze.

A p és q térbeli egyenesek csak akkor metszik egymást, ha

$$[p, q] = p_{12}q_{34}+p_{13}q_{42}+p_{14}q_{23}+p_{23}q_{14}+p_{24}q_{31}+p_{34}q_{12} = 0.$$

Legyen p, q, r a projektív tér három tetszőleges egyenese. Tekintsük mindazon s egyenesek összességét, amelyeknek vonalkoordinátái:

$$(L) \quad s_{ik} = \lambda p_{ik}+\mu q_{ik}+\nu r_{ik}.$$

Ezek természetesen csak úgy lehetnek vonalkoordinátái egy s egyenesnek, ha

$$[s] = \mu\nu[q, r]+\nu\lambda[r, p]+\lambda\mu[p, q] = 0,$$

mely a λ, μ, ν változó paraméterekre szab ki feltételt.

Az (L) összefüggések alapján azonnal belátható, hogy négy egyenes csak akkor tartozhat egy lineáris sugársorhoz, ha vonalkoordinátáikból képzett négysoros és hatoszlopos mátrix rangja kisebb, mint négy.

Vályi ezután a lineáris sugársor típusait sorolja fel:

A) p, q, r *alapegyenesek kettőnként nem metszik egymást* (tehát páronként kitérők). Érvényes azonban az a tulajdonság, miszerint bármely m egyenes, mely a p, q, r alapegyeneseket metszi, metszeni fogja a lineáris sugársor összes többi egyeneseit is. Erről a tulajdonságról a fennálló

$$[s, m] = \lambda[p, m] + \mu[q, m] + \nu[r, m]$$

összefüggés alapján azonnal meggyőződhetünk. Tehát a lineáris sugársor egyenesei egy hiperbolikus típusú (egyköpenyű hiperboloid, vagy hiperbolikus paraboloid) másodrendű felületen helyezkednek el. A kapott egyenessereg egyenesei — melyeknek p, q, r is tagjai — az illető felület alkotói. Ebben az esetben egy *hiperbolikus lineáris sugársor*ral van dolgunk.

B) I. eset: *p és q metszi egymást, de p és r, valamint q és r nem.*

II. eset: *p és q, valamint q és r metszik egymást, de p és r nem.*

Itt mindkét esetben ugyanazt a típust kapjuk: két síkbeli sugársort, külön középponttal és síkkal, de egy közös egyenessel (sugárral). Vályi ezt *kétszöges lineáris sugársor*nak nevezi.

C) p, q, r *egyenesek páronként metszik egymást,* mely esetben vagy van egy közös pontjuk (tulajdonképpeni sugársor), vagy csak egyszerűen egy síkban fekszenek (síkbeli lineáris sugársor). Ha p, q, r egy síkban fekvő és egy közös ponttal rendelkező egyenesek, akkor a közismert síkbeli sugársort kapjuk.

E bevezető után Vályi Gyula kimutatja, hogyha a két tetraéder megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egy lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei egy ugyanolyan típusú sugársor tagjai, és fordítva. Ezt követően — a lineáris sugársor típus alapján — a következő három természetszerűleg adódó esetet tárgyalja:

1. A megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek, és — ebből kifolyólag — a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei *hiperbolikus* sugarak *(Hiperbolikus viszony).*

2. Mind a megfelelő csúcspontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei *kétszöges* sugarak *(Kétszöges viszony).*

3. A megfelelő csúcspontokat összekötő egyenesek pontbeli, a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei síkbeli sugarak *(Perspektív viszony).*

Vályi Gyula ilyen irányú vizsgálataiig a perspektív viszonyt vették figyelembe. Tehát a Desargues-tétel térbeli megfelelőjének egy igen figyelemreméltó általánosítását adta. A három típuslehetőséget most már közösen tárgyalja, és a vizsgálati rendszerességet mindig szem előtt tartó matematikus a két tetraéder lineáris kapcsolatát a következő három eset alapján vizsgálja:

α) A meglevő viszonyok között van perspektív is. Alapviszonynak akkor ilyent választ. Minden esetben részletesen feltárja, hogy az előállható egy-, két-, három- és négyszeres perspektivitások esetében még hány kétszöges és hány hiperbolikus viszony lehetséges. A lineáris viszony esetenként kapott sokszorossági számai: 2, 4, 6, 10, 16.

β) A meglevő viszonyok között nincs perspektív, de van kétszöges viszony. Akkor ezt választja alapviszonynak. Ebben az esetben előfordulható kétszöges és hiperbolikus viszonyok sokszorossági számai a következők lehetnek: 2, 3, 6, 8, 10.

γ) A meglevő viszonyok mind hiperbolikusak. A hiperbolikus viszonyok sokszorossági számai ez esetben lehetnek: 2, 3, 4, 6.

M. Chasles egyik tétele szerint, minden tetraéder bármely másodrendű felületre vonatkozó polárreciprokával lineáris viszonyban van. Vályi *A polárreciprok tetraéderekről* írott dolgozatában [11] azt tanulmányozza, hogy ez a lineáris viszony hiperbolikus-, kétszöges-, vagy perspektív-e? Vizsgálataiból kitűnik, hogy a tetraéder és a másodrendű felület egymáshoz való viszonyától függően mindhárom eset előfordulhat.

Az eddig említett gondolatok alapján foglalkozik azzal az esettel is, amikor a perspektív háromszögek ugyanabba a harmadrendű síkgörbébe vannak írva. *A harmadrendű görbék elméletéhez* c. első dolgozatában [7] például, a következő kérdést veti fel: vannak-e a görbén többszörösen perspektív háromszögek?

Előbb definíció alapján meghatározza, hogy mit értünk a harmadrendű görbébe írt perspektív háromszögeken. A görbe P pontjából annak A pontját vetíteni annyit jelent, mint megkeresni a PA egyenesnek a görbével való harmadik A' metszéspontját. Egy görbén levő pont önmagából való vetületén az e pontban a görbéhez húzott érintőnek a görbével való harmadik metszéspontját értjük — amely pontot az adott pont *tangenciális pont*jának is szokás nevezni. Az $ABC\ldots$ sokszög (speciális esetben háromszög) perspektív az $A'B'C'\ldots$ sokszöggel, ha egyik a másiknak a görbe valamely pontjából (mint perspektivitási középpontból) való vetülete.

Ha az ABC háromszög perspektív $A'B'C'$-vel, akkor e viszonyt így jelöli:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}.$$

Vályi kimutatja, hogy ha $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ fennáll, akkor a $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & C' & B' \end{pmatrix}$ viszony lehetetlen. Ellenben, ha $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ fennáll, akkor bizonyos esetekben a $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B' & C' & A' \end{pmatrix}$ fennállhat. De ezen kétszeres perspektivitás teljesülése esetén következik a $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C' & A' & B' \end{pmatrix}$ is, tehát a perspektivitás háromszoros, s e perspektivitásoknak megfelelő és a görbére illeszkedő A'', B'', illetve C'' középpontok egy olyan harmadik háromszög csúcspontjai, amely mindkét előbbi háromszöggel háromszorosan perspektív. Ez a *Vályi-tétel* tehát — amely sokban emlékeztet a már említett négyszeresen perspektív tetraéderekre megállapított tulajdonságra —, a következő:

Ha egy harmadrendű görbébe írt ABC és $A'B'C'$ háromszögek háromszorosan perspektívek, és a megfelelő perspektivitási középpontok A'', B'', C'', akkor az ABC, $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögek egy olyan rendszert alkotnak, hogy bármelyik kettő háromszorosan perspektív, s az illető perspektivitási centrumok a harmadik háromszög csúcspontjai.

Az olyan ABC háromszöget, amelyre fennállhat a háromszoros perspektivitás, *triász*nak nevezi.

E témához fűződő második dolgozatában kimutatja, hogy a síkbeli harmadrendű görbén vannak r-szeresen perspektív r-szögek (r tetszés szerinti pozitív egész szám). Tehát az itt bizonyított tétel speciális esetként ($r=3$) tartalmazza az első dolgozatban igazolt tulajdonságot.

A síkbeli harmadrendű görbékre — akárcsak később a negyedrendű térbeli görbékre — vonatkozó további vizsgálatában felhasználja a Weierstrass-féle $p(u)$

függvény néhány tulajdonságát. E függvény bevonására a következő ügyes észrevétele szolgáltatott lehetőséget. A projektív koordináták célszerű megválasztásával egy síkbeli harmadrendű görbe egyenlete a következő alakra hozható:

$$y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3.$$

Ha ezt az egyenletet összehasonlítjuk a $p(u)$ függvény differenciálegyenletével, mely szerint:

$$(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

látható, hogy a görbét leíró pont x, y, z homogén koordinátái az u paraméter függvényeként így fejezhetők ki:

$$\frac{x}{p(u)} = \frac{y}{p'(u)} = \frac{z}{1}.$$

Ha az egyenlet jobboldalán álló harmadfokú kifejezés diszkriminánsa nem nulla, akkor a görbe hatodosztályú, a $p(u)$ pedig másodrendű elliptikus függvény. A görbének ezen paraméteres előállítása azért nagy jelentőségű, mert az illető görbének egy n-edrendű görbével való $3n$ számú metszéspontját az az egyszerű viszony köti össze, hogy paramétereik összege az elliptikus függvény periódusa. Például, ha $n=1$, — tehát a harmadrendű síkgörbét egy egyenessel metsszük —, akkor az A, B, C pontok a, b, c paramétereinek összegére érvényes az

$$a+b+c \equiv 0$$

kongruencia. Itt $a \equiv b$ azt jelenti, hogy $a = b + 2v\omega + 2v'\omega'$, ahol v és $v' \in Z$, 2ω és $2\omega'$ pedig a kétszeresen periodikus $p(u)$ függvény egy pár primitív periódusa. Ez a szimpla összefüggés teszi lehetővé Vályi számára, hogy e görbén így kapott pontcsoportok tulajdonságainak tanulmányozását számelméleti kongruenciák vizsgálatára vezethesse vissza, miáltal a néha nehézkesebb geometriai eljárásokat jóval egyszerűbb számításokkal helyettesíti.

Tegyük fel, hogy az $A_0A_1 \dots A_{r-2}A_{r-1}$ r-szög perspektív egyfelől a $B_0B_1 \dots$ $\dots B_{r-2}B_{r-1}$, másfelől a $B_1B_2 \dots B_{r-1}B_0$ r-szöggel. E viszonyokat így jelöli: $\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}$, illetve $\begin{pmatrix} A_k \\ B_{k+1} \end{pmatrix}$. A kongruenciákkal történő bizonyítás alapján kimutatja, hogyha az $\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} A_k \\ B_{k+1} \end{pmatrix}$ perspektivitások fennállnak, akkor az $\begin{pmatrix} A_k \\ B_{k+h} \end{pmatrix}$, $h=2, 3, \dots, r-1$ perspektivitások is fennállhatnak. Ha a perspektivitási középpontok C_h $(h=0, 1, \dots, r-1)$, akkor az A_k, B_k, C_k r-szögek közül bármelyik kettő r-szeresen perspektív, a harmadik r-szög csúcsai pedig a perspektivitási középpontok. E tulajdonság igazolása egyik szép általánosítása az első közleménybeli — a háromszorosan perspektív háromszögekre igazolt — tételnek.

Az r-szeresen perspektív r-szögek létezésének bizonyítására elég kimutatni azt, hogy létezik r olyan inkongruens a_k $(k=0, 1, \dots, r-1)$ szám, amelyekre nézve az $a_{k+1}-a_k$ különbségek kongruensek. Az ilyen r-szöget r-ásznak (triász, tetrász, pentász stb.) nevezi.

Az ugyanilyen tárgyú harmadik dolgozatában azokkal a síkbeli harmadrendű görbébe írt sokszögekkel foglalkozik, amelyeknek mindegyik csúcspontja a megelőzőnek tangenciális pontja. Az ilyen sokszöget Steiner-féle sokszögnek nevezzük. Ebben a közleményében előbb kimutatja a Steiner-féle sokszögek létezését, meghatározza számukat, majd felkutatja azokat a Steiner-féle sokszögeket, amelyek egyszersmind

r-ászok. Végül részletesen foglalkozik a Steiner-féle háromszögekkel és triászokkal. Igazolja például, hogy Steiner-féle hétszögek nem léteznek; vagy azon tulajdonságot, miszerint: minden Steiner-féle r-ász önmagával perspektív, s a perspektivitási centrumok maguk a sokszög csúcspontjai.

A $p(u)$ függvény, valamint az ebből fakadó kongruenciákkal való számolás előnyeit használta ki Vályi *A negyedrendű és elsőfajú térbeli görbékről* szóló közleményében is [8]. Kimutatja, hogy a negyedrendű és elsőfajú térgörbék paraméteres előállítása a következő alakban lehetséges:

$$\frac{x}{p^2(u)} = \frac{y}{p'(u)} = \frac{z}{p(u)} = \frac{t}{1},$$

ahol x, y, z, t a mozgó pont térbeli homogén koordinátái. Ennek előnye — mint a síkbeli harmadrendű görbék esetében is — az, hogy a térgörbének egy algebrai felülettel való metszéspontjait meghatározó paraméterek összege a szóban forgó elliptikus függvény periódusa.

Azon egyenesek összességét, amelyek az

$$u+v \equiv c$$

feltételt kielégítő paraméter értékeknek megfelelő (görbére illeszkedő) pontpárok határoznak meg, *húrrendszer*nek nevezi; továbbá: ha $2c$ nem $\equiv 0$, akkor a c és $-c$ paraméterű húrrendszerek egymás *konjugáltjai*. Igazolja, hogy ugyanazon húrrendszerhez tartozó két egyenesnek nincs közös pontja, ellenben a két konjugált húrrendszerhez tartozó húrok metszik egymást. A konjugált húrrendszerek tehát egy másodosztályú felület egyenesseregének két alkotó rendszerét képezik. A c más-más értékeihez tartozó másodrendű felületek közül mindegyik az adott görbén halad át. Tehát ezek a felületek a c paramétertől függő felületsort alkotnak. A felületsorhoz négy kúp is tartozik, amelyek a $2c \equiv 0$ megoldásainak felelnek meg. A négy gyök: $0, \omega, \omega'$ és $\omega+\omega'$. Ezeket *kúpos húrrendszerek*nek nevezi. A kúpos húrrendszerek — többek között — azzal a sajátos tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a konjugált húrrendszereikkel azonosak. Vályi itt is több érdekes tételt igazol, mint például:

— *Minden húrrendszerhez a görbe négy érintője tartozik. Ezeknek az érintési pontjai csakis a kúpos húrrendszereknél fekszenek egy síkban.*

— *A görbén átmenő négy másodrendű kúp csúcsaiból alkotott tetraéder síkjai vágják ki a görbéből azt a 16 pontot, amelyekben a görbe és e pontjához tartozó simuló síkjának érintkezése harmadrendű.*

Az eddig kapott eredményekből fakad egy másik tudományos közleménye, melynek címe: *Többszörösen lineáris tetraéderek a negyedrendű és elsőfajú térbeli görbén* [10]. Ebben Vályi csak azokat a lineáris viszonyokat veszi számításba, amelyeknél a tetraéder csúcspontjai a görbén vannak, és a megfelelő csúcspontokat összekötő egyenesek ugyanazon húrrendszerhez tartoznak. Az ilyen viszonyt — a két tetraéder között esetleg fellépő más lineáris viszonyoktól való megkülönböztetésül — *húros viszony*nak nevezi. Ha a két tetraéder csúcspontjainak megfelelő paraméterértékek u_1, u_2, u_3, u_4, illetve v_1, v_2, v_3, v_4, akkor a $\begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 u_4 \\ v_1 v_2 v_3 v_4 \end{pmatrix}$ húros viszony feltételei:

$$u_1+v_1 \equiv u_2+v_2 \equiv u_3+v_3 \equiv u_4+v_4 \equiv c.$$

Ha $2c$ nem $\equiv 0$, akkor a viszony hiperbolikus, a $2c \equiv 0$ esetén pedig a viszony perspektív. A $2c \equiv 0$ kongruencia bármelyik gyökének megfelelő perspektivitás

centruma nem más, mint a görbén átmenő másodrendű felületsorból az illető gyökértéknek megfelelő kúp csúcspontja.

A tárgyalt témakörhöz tartozik még a *Többszörös involutio*ról [12] szóló három tudományos dolgozata. Az elsőben az egy dimenziós-, a másodikban a két dimenziós-, a harmadikban — amely a legterjedelmesebb — a három dimenziós térbeli véges számú pontrendszerek involúcióit keresi meg és teszi mélyenható vizsgálatainak tárgyává.

Végül meg kell említenünk a *Többszörös poláris reciprocitás a síkban* c. dolgozatát [13], amelyben az olyan $A_k\,(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$ pont- és $a_k\,(k=0, 1, 2, \ldots, r-1)$ egyenesrendszereket igyekszik felkutatni, amelyek között az $\begin{pmatrix} A_k \\ a_k \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} A_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$ szimbólumokkal jelzett két poláris reciprocitás egyszerre érvényes. Egyik sajátos esetként kapott tétel például a következő:

— *Egy szabályos r-szög és vagy vele közös középponttal bíró szabályos r-oldal között r-szeres poláris reciprocitás áll fenn, amelyek alapjait közös középponttal bíró és kongruens egyenlő oldalú hiperbolák alkotják.*

Az eddigiekben tehát Vályi Gyula eredeti és gazdag tudományos munkásságának csak az egyik ágazatát próbáltuk megvilágítani, melyből talán sikerült vajmi csekély ízelítőt adnunk matematikatörténetünk eme kiemelkedő egyéniségének tevékenységéről.

Az a nagyon kevés megemlékező, aki eddig Vályi Gyulával foglalkozott, a való igazságra tapint akkor, amikor azt állítja, hogy publikációi matematikai tevékenységének csak egy részét teszik ki, mivel munkásságának zöme egyetemi előadásaira esik. Korszerű, sziporkázóan ötletes előadásai nemcsak a felolvasói által közölt legújabb eredményeket, hanem saját kutatásainak nem publikált részeit is tartalmazzák. A már hagyományos régebbi ismeretekbe mesteri ügyességgel tudta új gondolatait beépíteni. Nemzeti kultúránk fejlődése és ápolása szempontjából páratlan jelentőségűek az *Appendix*ről tartott kollégiumai. Az ő buzgó munkásságának köszönhető, hogy Brassai Sámuel minden gáncsoskodása ellenére Bolyai János felfedezése ismertté vált a kolozsvári egyetem diáksága előtt. Tanítványai közül többen a Bolyaiak életének és munkásságának lelkes hirdetőivé váltak. Didaktikai tevékenységének komoly jelentősége semmivel sem kisebb nagyszerű kutatási eredményeinél. A tanár- és tudósképzés terén a kolozsvári egyetem egyik legnagyobb hatású professzora volt. Megkapó látvány a kolozsvári egyetem könyvtárában most is őrzött, kézírásos szövegek után sokszorosított, számos jegyzet, melyek a tanuló ifjúság magas szakmai képzettségét segítették elő. E jegyzetek akkori modern szakszerűségét mi sem bizonyítja jobban, mint az a tény, hogy jelen pillanatban is bármelyik hallgató eredményesen használhatja. Ezeket, a közel száz évvel ezelőtt írt, kézírásos kurzusokat átnézve az volt az érzésem, hogy olyan jegyzeteket olvasok újra, amelyekből az ötvenes évek végén a bukaresti egyetemen kiírt évfolyamvizsgákra készültem.

Vályi Gyula 1911-ig volt a kolozsvári egyetem tanára, munkahelyét más, előnyösebb és hízelgőbb ajánlatok, vagy meghívások hatására sem cserélte fel. Saját kérése alapján nyugdíjazták. Ezután nemsokára — 1913. október 13-án meghalt. A kolozsvári Házsongrádi temetőben helyezték örök nyugalomba. Lépéseket tettem annak érdekében, hogy a sírját műemlékké nyílvánítsák és ezáltal az utókor számára ezt megmentsük. A ház, amelyben Kolozsváron annak idején lakott, a volt *Majális*, jelenleg *Republicii* (Köztársaság) út elején állott (a mostani egyetemi diákház közvetlen közelében). Ma már új emeletes épülettömb emelkedik a magasba a lebontott régi ház helyén.

Befejezésül, elevenítsük fel Réthy Mór akadémikus *Vályi Gyula levelezőtag emlékezete* című beszédének szép zárósorait, amelyek a nagy matematikus elhalálozása alkalmából a Magyar Tudományos Akadémia 1915. november 29-én tartott emlékgyűlésén hangzottak el:

„Kedves Vályi Gyula! Abban a városban születtél, ahol hazánk két legnagyobb matematikusa élete javarészét élte; Bolyai János születése helyén írtad a te halhatatlan műveidet, és buzdítottad a magyar ifjúságot mély és igazi tudományosságú előadásaiddal tettekre; a Bolyai-szellem volt a te vezércsillagod! Gyönge testben erős lélekkel mindig és mindenben az igazság útján törtél előre; az igazért lelkesedtél, mindig az igazán jót szeretted és tetted. A Vályiak és Dózsák méltó utódául, a magyar Genius tudós nemes képviselője voltál teljes életedben s a halhatatlanok sorában az vagy és maradsz örökké. Lelkem előtt lebegsz, úgy ahogy annyiszor láttalak; előttem van szellemes, igaz s kedves székely arcod, melynek mása hivatva lesz ez emlékbeszéd élét emelni; és bízom benne, olajfestményed díszíteni fogja majdan ez Akadémia csarnokait. Felejthetetlen kedves barátom, Isten veled!"

Weszely Tibor

(a marosvásárhelyi Felsőoktatási Intézet tanára, a matematikai tudományok doktora)

IRODALOM

[1] Réthy Mór: Vályi Gyula levelezőtag emlékezete. Az MTA elhunyt tagjai fölött tartott emlékbeszédek. 17. k., 1915. 5. sz.
[2] Obláth Richárd: Vályi Gyula. *Matematikai Lapok*. 7. k., 1956. 61—70.
[3] Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története*. Akadémiai Kiadó. Budapest 1970. 276—285.
[4] Vályi Gyula: Többszörösen kollineár háromszögek kúpszeleteknél. *Math. Termtud. Ért.* 2. k. 1883/4. 170—174.
[5] Többszörösen perspektív tetraéderek. *Math. Termtud. Ért.* 4. k. 1885/6. 6—8.
[6] A perspektív tetraéderek tanához. *Math. Termtud. Ért.* 4. k. 1885/6. 55—56.
[7] A harmadrendű görbék elméletéhez. Math. Termtud. Ért.; Első dolgozat: 8. k. 1889/90. 23—28.; Második: 9. k. 1890/1. 18—25. Harmadik: 10. k. 1891/2. 2—13.
[8] A negyedrendű és elsőfajú térbeli görbékről. *Math. Termtud. Ért.* 10. k. 1891/2. 244—251.
[9] Desargues tételének térbeli analogonjáról. *Math. Termtud. Ért.* 11. k. 1892/3. 30—44.
[10] Többszörösen lineáris tetraéderek a negyedrendű és elsőfajú térbeli görbén. *Math. Termtud. Ért.* 11. k. 1892/3. 322—326.
[11] A polárreciprok tetraéderekről. *Math. Termtud. Ért.* 12. k. 1893/4. 93—95.
[12] Többszörös involutio. *Math. Termtud. Ért.*; Első dolgozat: 12. k. 1893/4. 394—407. Második: 13. k. 1895. 408—417. Harmadik: 14. k. 1896. 381—401.
[13] Többszörös poláris reciprocitás a síkban. *Math. Termtud. Ért.* 16. k. 1898. 399—406.

ДГАЛА ВАЙИ

ТИБОР ВЕСЕЛИ

GY. VÁLYI

T. WESZELY

HENRI POINCARÉ

(Nancy, 1854. ápr. 29.—Páris, 1912. júl. 17.

SZÉNÁSSY BARNA

Ennek a kis írásnak a közzé tételét két nevezetes évforduló egymáshoz közeleső volta teszi időszerűvé: *Poincaré* születésének 125. és *Fejér* Lipót (Pécs, 1880. február 9.—Budapest, 1959. október 15.) születésének 100. évfordulója. Az alábbiak pedig magyarázatát adják, hogy miért kívánkozik a rájuk vonatkozó néhány — kevéssé ismert — adat egyetlen közleménybe.

Nem célunk, hogy Poincaré matematikai, asztronómiai, geofizikai, geodéziai és filozófiai munkásságát, valamint ennek további hatását részletezzük. Ennek a problémakörnek óriási az irodalma, a „Bibliography and Research Manuel of the History of Mathematics" (Toronto, 1973) hozzávetőlegesen száz terjedelmes olyan tanulmány és könyv adatait közli, amely Poincaré életével és tudományos tevékenységével foglalkozik. Az érdeklődőnek tehát gazdag és többségében könnyen hozzáférhető irodalom áll rendelkezésére.

Hazánkban már a századforduló táján többen fölismerték Poincaré kutatásainak alapvető jelentőségét, ezt a következő tények bizonyítják: 1903-ban a kolozsvári egyetem tiszteletbeli doktorává fogadta a jeles francia tudóst, 1905. március 23-án pedig (Hilberttel egyszerre) a Magyar Tudományos Akadémia „külső tag"-ja lett. Ugyanezen év végén (először) neki ítélték oda a „Bolyai-díj"-at. E díj létesítésének a kezdeményezője Kőnig Gyula, Rados Gusztáv, Kürschák József, Farkas Gyula és Schlesinger Lajos volt, szabályait 1902-ben rögzítették, lényegében azzal a határozattal, hogy minden ötödik évben „bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb" matematikai vizsgálat szerzője 10 ezer Koronával (támpontként: egy akkori átlagkeresetű gyári munkás 14 évi fizetése!), és 600 Korona értékű aranyéremmel jutalmazandó. A díj alapításának az éve Bolyai János születésének a centenáriuma volt, de túl ezen az aktualitáson a Magyar Tudományos Akadémia döntésében az a törekvés is szerepet játszhatott, hogy tekintélyes nemzetközi díjjal pótolják az előbb létesített Nobel-díj hiányosságát. Ismeretes ugyanis, hogy matematikai Nobel-díj nincs.

Troost-nak, a francia akadémia akkori elnökének következő szavai igazolják, hogy milyen jelentősnek tekintették Poincaré kitüntetését:

„...Kellemes kötelességnek kell eleget tennem, midőn azon nagy sikerről beszámolok, melyet egy társunk most ért el. A budapesti Akadémia egy 10.000 koronás nemzetközi díjat alapított a nagy magyar mathematikus, Bolyai János emlékére. E díj öt évenként ítélendő oda az ezen idő alatt megjelent legjelentékenyebb mathematikai munkának. Első kiadása 1905 deczemberében történt.... A jury, mint maga a díj is, nemzetközi; két magyar és két külföldi tagja van. A jury magyar tagjai Kőnig Gyula és Rados Gusztáv budapesti műegyetemi tanárok voltak; a két külföldi pedig Felix Klein göttingai egyetemi tanár és Gaston Darboux, a párisi

Académie des Sciences örökös titkára. Darboux választatott meg a jury elnökének. Mélyreható vita után, melynek sok-sok kitűnő munka közül ki kellett választania azokat, melyek legnagyobb hatással voltak a mathematikai kutatás fejlődésére, a bizottság egyhangúlag hozott ítéletben állapodott meg. A Bolyai-díjat kitűnő munkatársunknak, Henri Poincaré úrnak ítélte oda. Megragadjuk ezen alkalmat, hogy üdvözöljük testvérünket, a magyar Akadémiát, azon szolgálatért, melyet a tudományos kutatásnak tett oly férfiú emlékére alapított díj által, kinek művei az emberiség díszére válnak és örvendünk, hogy az egész Institut de France szerencsekívánatait tolmácsolhatjuk a Bolyai-díj első elnyerőjének s üdvözölhetjük őt azon dicsőségért, melyet az emberi gondolkodás ezen nemzetközi versenyén a franczia tudománynak szerzett." (Ak. Ért. 17. kötet, 1906. 131. o.)

Ide illik még az a köszönő levél, amelyet Poincaré Akadémiánk akkori elnökéhez, Berzeviczy Alberthez intézett:

„Tisztelt Elnök úr! Van szerencsém tudatni, hogy megkaptam nagybecsű közlését a Magyar Akadémia rám nézve oly nagyon hízelgő határozatáról, valamint a küldött chequet is. Fogadja, kérem, hálám nyilvánítását és legyen szíves ezt azon tudós társaságnak is tolmácsolni, melynek Ön az elnöke. Alig tudom kifejezni, mennyire megtiszteltnek érzem magamat, annyival is inkább, mert e megtiszteltetés Bolyai dicső nevével van kapcsolatban és oly nemzettől jön, mely iránt mindig nagy rokonszenvet éreztem 1877-ben Magyarországon tett utazásom óta, mely felejthetetlen emlékeket hagyott bennem hátra.

Maradtam, Elnök úr, kiváló tiszteletem nyilvánítása mellett híve, Poincaré." (Ak. Ért. 17. kötet, 1906. 125. o.)

1910-ben a díjról döntő „Bolyai-bizottság" két külföldi tagja Poincaré és Mittag-Leffler volt, ekkor néhány napot mindketten Budapesten töltöttek (másodszor — és egyben utoljára — Hilbert részesült a kitüntetésben). Akkori újsághíradásokból tudjuk, hogy Poincaré ittlétekor melegen érdeklődött a távollevő Fejér Lipót felől: a Comptes Rendusben megjelent értekezései alapján Fejér Lipót nagy tekintélynek örvendett a francia matematikusok — többek között Picard és Poincaré — előtt. De Fejér Lipót is jól ismerte Poincaré eredményeit, érdeklődési körük az analízis (főleg a komplex függvénytan) területén közel állott. Amikor pedig Fejér 1902 nyarán hosszabb időt töltött az ógyallai csillagvizsgálóban, behatóan tanulmányozta Poincarénak az égi mechanikáról írott alapvető könyvét.

* * *

Engedtessék meg ezután egy kis kitérő. Fejér Lipót mindig komolyan érdeklődött — szaktudományán kívül — az irodalom, a különféle képzőművészetek és a zene iránt is. A róla szóló megemlékezések erre célzó néhány soros megjegyzését egy szekrényt megtöltő hagyatéka segítségével a következőkben némileg bővítem.

Egy 1904. június 18-i keltezésű megsárgult tagsági igazolvány bizonyítja, hogy fiatalon tagja lett az „Aurora Irodalmi és Művészeti Kör"-nek. Sziporkázóan szellemes, sokat anekdotázó, színes alakja föl-föltűnik Karinthy Frigyes, Hunyady Sándor és mások írásaiban. Baráti kapcsolatot tartott fönn számos jelesünkkel, a kávéházi találkozók, az irodalmi és zenei esték egyik legkedveltebb résztvevője volt. A levelek egész sora tanúskodik ilyen kapcsolatairól, cáfolva azt a köztudatban eléggé elterjedt véleményt, hogy a kutató matematikus többnyire zárkózott, száraz, magának élő ember. Dokumentumaink vannak arról, hogy mennyire kedvelte őt Ady Endre és Babits Mihály. De a „Nyugat" c. folyóirat első nemzedékének több

tagjához is baráti szálak fűzték. Korántsem teljes névsor: a költő és esztéta Balázs Béla; a kiváló író, Bodor Aladár; a politikai életben is jelentős szerepet játszó publicista, Jászi Oszkár; a költő és természettudós Komjáthy Aladár; a drámaíró (a „Csodálatos mandarin" szövegírója), Lengyel Menyhért; a baloldali írónő G. Mollináry Gizella; a gordonkavirtuóz Popper Dávid; a jeles irodalomtörténész Rubinyi Mózes; Kisfaludi Strobl Zsigmond, a világhírű szobrász; Vészi József, a jeles publicista, Ady egyik első méltatója stb. Vacsorákkal összekötött zenei esték arra is alkalmat adtak, hogy közelebbi kapcsolatba kerüljön Bartók Bélával és Kodály Zoltánnal.

Visszakanyarodva közleményünk céljához, a fenti névsort ki kell egészítenünk Ignotusnak (Veigelsberg Hugó, 1869—1949), az ismert írónak, a „Nyugat" egyik megalapítójának a nevével. A Fejér-hagyatékban néhány meleghangú levél, üdvözlő lap — és egy dátumnélküli távirat őrzi barátságuk emlékét. A táviratban — nyilván a baráti kapcsolatok ürügyén — Ignotus egy Poincarét méltató cikket kért Fejér Lipóttól. Némi nyomozás volt szükséges annak kiderítéséhez, hogy vajon Fejér e cikket megírta-e, és ha igen, az napvilágot látott-e? Ilyen tárgyú írást a Fejér Lipót irodalmi munkásságát felsoroló bibliográfiák nem említenek. A nyomozáshoz némi támpontot nyújtott Poincaré elhalálozásának az időpontja. Valóban a „Nyugat" 5. évfolyamának (1912) 223—224. oldalán található a Poincaré emlékének szánt, Fejér által írott nekrológ. Az írás stílusából és tartalmából kivehető, hogy Fejér Lipót szigorúan figyelembe vette a Nyugat elsősorban humán beállítottságú olvasóinak az igényeit, és ezért nem mélyedt el a matematikai fejtegetésekben. A cikk végén szerepel az ismert francia költő és filozófus, Sully-Prudhomme (1839—1907) neve: 1901-ben elsőként ő kapott irodalmi Nobel-díjat.

Kegyeletes megemlékezésünket a Fejér Lipóttól származó cikk szöveghű közlésével zárjuk.

Néhány szó Henri Poincaré-ról

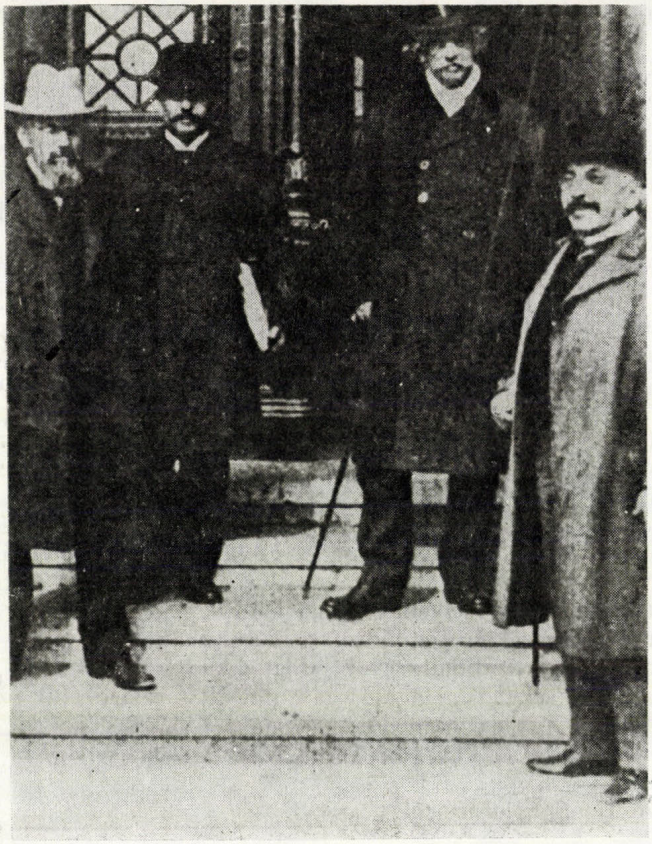
Fejér Lipót egyetemi tanár, maga is nagynevű matematikus barátunk kértünkre a következő sorokban emlékszik meg a minap elhunyt nagy Henri Poincaréról:

A napokban, július 17-én halt meg Párisban, 58 éves korában, Henri Poincaré, kinek működése a matematikai tudományokban korszakot jelent.

Az 1878—1887. években számos értekezést bocsátott nyilvánosságra. Egy matematikai lángelme nagyszerű kitörései ezek, gyors egymásutánban. Megint egyszer jött valaki, ki özönével adta az új, fényes és mindig jelentékeny eredményeket s aki egyben bőséges és hálás munkát adott a tevékenységre szomjas kortársaknak és utódoknak. Érdeklődést keltett ő — elemi erővel — a föld összes matematikusai között. Tételei, problémái gondolkodásra serkentettek mindenütt, és nagyon jelentékeny eredménnyel. A matematikai folyóiratok hangoznak és visszhangoznak a nevétől. Kortársak kiadott levelezéseiben olvashatjuk, hogy a matematika mesterei megilletődve szemlélték e csodás tehetség műveit.

1887-ben, közvetlenül, hogy az Académie des Sciences (section de géomètrie) tagja lett, francia szokás szerint egy notice-ban az akadémia elé tárta addigi munkáit, rövid vázlatokban. Itt, legfőbb vonásaiban, már magunk előtt látjuk Poincaré Oeuvre-jét.

A kutatás lázában töltötte egész életét. Úgyszólván nincs fejezete a tiszta mathematikának, geometriának, a mathematikai physikának, astronomiának, geophysikának, geodäsiának, mely neki fényes fölfedezést vagy nagyértékű földolgozást ne köszön-



A Bolyai-bizottság az Akadémia előtt 1910-ben
Balról jobbra: Poincaré, Rados Gusztáv, Mittag-Leffler, Kőnig Gyula

hetne. Utóbbi években közölt philosophiai munkái tudományos körökben nagy feltűnést keltettek, s élénk megvitatásban részesültek. *Science et hypothèse, La valeur de la science* etc. könyveit szélesebb körökben is olvassák. Azt hiszem azonban, hogy az exakt tudományokban kevésbé jártas és tapasztalt olvasó sokszor csalódik, mikor Poincaré igazi gondolatát jól megérteni véli.

Nagy hírnevét és tekintélyét egy a tiszta mathematikába vágó fölfedezéssel alapította és szilárdította meg: az ún. „automorph függvények" megalkotásával s a velök összefüggő „csoportok" fölállításával. Egy évszázados függvénytani elmélet (mely, egész röviden kifejezve, a körfüggvények fokozatos általánosítását célozta) nyert ezáltal egy bizonyos irányban fényes betetőzést. Megemlítem, hogy e vizsgálatainál lényeges szerepet játszik a mi Bolyai Jánosunk síkbeli geometriája.

Poincaré működése mély nyomkat hagyott az utolsó három évtized mathematikájának fejlődésében, és beláthatatlan, hogy mi fog még teremni, ami végső visszavezetésben Poincaré-féle impulzusnak köszönheti létét.

Mondottam, hogy nagy fölfedezésekkel vitte előre a mathematikai tudományokat. De érdekes megfigyelni, hogy egyes mezőknek puszta megérintése az ő keze által — minő termékenységet eredményezett. Egy pár oldalt kitevő, a transcendens

egész függvényekre vonatkozó cikke nélkül talán még ma sem volna bebizonyítva az analytikai számelmélet híres „törzsszámtétele". A Stirling-féle sorra vonatkozó cikke készítette közvetlenül elő a talajt a divergens sorok modern elméletére és alkalmazására etc.

Számtalan tudományos testület és szervezet tüntette ki Poincarét, illetőleg igyekezett őt elnökének, vezetőjének vagy munkatársának megnyerni. A mi akadémiánk külső tagul választotta. 1905-ben adta ki először akadémiánk a Bolyai emlékére alapított fényes nemzetközi Bolyai-díjat. A választás egyhangúan Poincaréra esett. 1910-ben Poincaré Budapesten járt, mint a Bolyai-jutalom odaítélésére megbízott nemzetközi bizottság külföldről meghívott tagja. Az akadémia e bizottságának jelentését, mely magyar és francia nyelven adatott ki, Poincaré szerkesztette. 1907-ben is időzött Budapesten: a geodäták és geophysikusok nálunk tartott nemzetközi kongresszusán. Végül megemlítem, hogy a kolozsvári egyetem 1903-ban tartott nagyszabású Bolyai-emlékünnepe kapcsán Poincarét tiszteletbeli doktorává avatta.

A franciák benne egyik legfőbb büszkeségüket szerették és dédelgették.

Az Académie Française-ban a Sully Prudhomme helyén ült.

X. ПУЙНКАРЕ

БАРНА СЕНАШШИ

HENRI POINCARÉ

B. SZÉNÁSSY

HENRI POINCARÉ MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGÁRÓL ÉS HATÁSÁRÓL

BOGNÁR MÁTYÁS és SZENTHE JÁNOS

Henri Poincaré egyike azoknak, akiknek lényeges része volt századunk matematikájának fejlődésében. Eredményei fontosságát világszerte korán felismerték és a kitüntető elismerések között ott volt a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-díja is. Ő maga viszont élénk figyelemmel kísérte a korabeli magyar matematikát. „Nagyrabecsüljük Magyarország kitűnő tudósait — olvashatjuk a tudósító kérdésére adott válaszát az „Az Újság" c. napilap 1910. október 18-i számában*. Fölösleges mondanom ugye, hogy Kőnig és Rados Európaszerte ismertek. Személyesen ismerem Fejér Lipót magántanárt. Hallgatóm volt. Kiváló tudományos eredményeit én elő is adom a párisi egyetemen. Dienes matematikust is ismerem és Kőnig Dénes doktorról, munkái után ítélve, a legnagyobb véleménnyel vagyok."

Születésének 125. évfordulóján matematikai munkásságának és hatásának ismertetésével emlékezünk meg a nagy tudósról. Ismertetésünkben a teljesség igényéről eleve lemondunk. Matematikai munkássága főirányainak igen rövid felsorolása után csak néhány ma is igen aktuális felfedezésével és azok hatásával foglalkozunk részletesen.

1. Henri Poincaré matematikai munkásságának főbb irányai

A századunk matematikájának fejlődését lényegesen befolyásoló matematikusok között H. Poincarét talán leginkább az jellemzi, hogy a döntő problémák felismerésén túl megteremtette azokat az eszközöket is, amelyek e problémák megoldásához elvezetnek.

Munkásságának egy jelentős része az automorf függvények elméletével kapcsolatos. Automorf függvényen olyan $u=f(z)$, $z\in D$ meromorf függvényt értenek, amely invariáns egy, a függvény D értelmezési tartományán ható, G homografikus transzformációcsoporttal szemben, ahol G diszkontinuus abban az értelemben, hogy orbitjai nem rendelkeznek torlódási ponttal a D tartományban. Ilyen automorf függvények az elliptikus és moduláris függvények, melyek ismeretében Poincaré először azt próbálta bizonyítani, hogy ezeken kívül más automorf függvények nincsenek. Sikertelen próbálkozások után talált eljárást újabb automorf függvények konstrukciójára, melyeket Fuchs-féle és Klein-féle függvényeknek nevezett. A Fuchs-féle függvényeknél D egy komplex félsík, vagy annak egy

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

* A szóban forgó interjúra Szénássy Barna volt szíves figyelmünket felhívni.

homografikus transzformációnál keletkező képe, a Klein-féle függvényeknél viszont a D határa lehet olyan görbe is, melynek sehol sincs érintője. A Fuchs-féle függvények egyszerűbb esetére szorítkozva, tehát G az $\mathrm{Im}\, z>0$ komplex félsík valós homografikus transzformációinak egy diszkontinuus csoportja, amit Poincaré Fuchs-féle csoportnak nevez. Vizsgálja az ilyen csoportok fundamentális tartományait, vagyis a D tartománynak a D/G orbittérrel bijektív részhalmazait. Kimutatja, hogy léteznek „poligonális" fundamentális tartományok, ami az $\mathrm{Im}\, z>0$ félsíknak a hiperbolikus síkkal történő azonosítása alapján hiperbolikus értelemben értendő. Így jut el a Bolyai—Lobacsevszkij-geometriával kapcsolatos vizsgálataihoz. A hiperbolikus területelem segítségével ezután előállítja a Fuchs-féle függvényeket. Az automorf függvények elméletének igen mély kérdéseinek megoldására vezeti be „méthode de continuité" néven azt az igen erős topológiai eszközt, amit ő intuitív alapon használt, de a topológia fejlődésével e kérdések megoldásának szabatos eszköze lett.

Munkásságának egy másik jelentős része a differenciálegyenletek elméletével kapcsolatos. Egyik korai eredménye kvalitatív vizsgálata a

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}$$

elsőrendű differenciálegyenlet megoldásainak a gömbön. Osztályozza a kritikus pontokat és vizsgálja a maximális megoldásokat. Kimutatja, hogy egy maximális megoldás vagy kritikus pontban végződik, vagy ciklus, azaz zárt görbe, vagy aszimptotikus egy ciklushoz. Később az analóg problémát általában egy felületen vizsgálva a kritikus pontok és a felület topológiája között kapcsolatot teremtve ezzel az eszközzel további vizsgálatok számára nyit utat. A parciális differenciálegyenletek elméletében a „méthode du balayage" néven bevezetett módszere a potenciálelméleti modern vizsgálatokban fontos szerepű. Az elliptikus operátorok saját értékeire vonatkozó vizsgálatok kezdeményezésével pedig az önadjungált operátorok spektrál felbontásához vezető kutatásokat indította el.

A geometria, topológia, differenciálgeometria és a mechanika területére eső egyes eredményeiről az alábbiakban részletesebben lesz szó. Megemlítjük, hogy tudományos munkássága a matematikán kívül az elméleti fizika és a filózófia egyes kérdéseit is érintette.

2. Geometria és topológia

Ami a geometriát illeti, itt azokat a gondolatait emelnénk ki, amelyek a Bolyai—Lobacsevszkij-geometriához kötődnek. Ez a téma függvénytani vizsgálatai közben bukkan fel. Felismerte, hogy az automorf függvények egyik osztályának leírásánál igen jó szolgálatot tesz a hiperbolikus sík egy modellje.

Poincaré ezt a modellt kezdetben pszeudogeometriának hívta. Sur les groupes kleinéens című Comptes Rendus cikkben [9] úgynevezett pszeudogeometriát konstruált, ahol a pszeudogeometrikus síkok azok a gömbök lesznek, amelyek középpontjai az xy síkban fekszenek. Pszeudogeometrikus egyenesen két pszeudogeometrikus sík metszésvonalát érti, metsző pszeudogeometrikus egyenesek szöge pedig a metszéspontban fellépő közönséges szög. Két A és B pont távolságát úgy értelmezi, mint egy $ABPQ$ kettősviszony 1/2 alapú logaritmusát, ahol P és Q az A-n és B-n átmenő pszeudogeometrikus egyenesnek az xy síkkal alkotott közös

pontjai. A modell egybevágósági transzformációi az önmagára történő izometrikus bijekciók. Ez a pszeudogeometria tulajdonképpen hiperbolikus geometria.

Poincaré az általa szerkesztett térmodellt a Tudomány és hipotézis (La science et l'hypothèse) című könyvében — amelyet Szilárd Béla fordított magyarra [8] — is szerepelteti. Ott így ír róla:

„Vegyünk fel egy bizonyos síkot és nevezzük alapsíknak; szerkesszünk azután egyfajta szótárt a fogalmakat két oszlopba írva fel, ahol az egy sorban levő fogalmak felelnek meg egymásnak, éppen úgy, ahogy a szótárban egyenlő jelentésű, de más más nyelvű szavak vannak egymás mellé felírva:

Tér	A térnek az alapsík felett elterülő része.
Sík	Gömb, amely az alapsíkot derékszög alatt metszi.
Egyenes	Kör, amely az alapsíkot derékszög alatt metszi.
Gömb	Gömb.
Kör	Kör.
Szög	Szög.
Két pont közötti távolság	Logaritmusa annak a kettősviszonynak, amelyet a két pont másik két ponttal képez, ha az utóbbiak az alapsíknak metszéspontjai oly körrel, mely e két ponton áthalad és az alapsíkot derékszög alatt metszi.
Stb., stb.	

Vegyük ezután Lobacsevszkij-tételeit és készítsük el fordításukat a magunk szerkesztette szótárral, mint ahogy lefordítunk egy német szöveget német-francia szótárunk segítségével. Ezen az úton a közönséges geometria tételeihez jutunk."

Poincaré ugyanebben a könyvében két további modellt is megad. Az egyik az úgynevezett hőmodell. Itt a világ egy R sugarú gömbbe van bezárva, amelyben a hőmérséklet nem egyenletes, az abszolút hőmérséklet R^2-r^2-tel arányos, ahol r a felvett pont távolsága az R sugarú gömb középpontjától. Felteszi, hogy „ebben a világban valamennyi testnek ugyanazon tágulási együtthatója van oly módon, hogy bármely anyagból való rúd hossza arányos saját abszolút hőmérsékletével." Felteszi továbbá azt is, „hogy ha valamely tárgyat egyik pontból egy másik, de más hőmérsékletű pontba viszünk át, akkor e test az új környezetével azonnal tökéletes hőegyensúlyba lép." Ebben a térben a geometria „azoknak a törvényeknek a tana lenne, amelyek szerint a leírt hőmérsékletkülönbségek folytán eltorzult szilárd testek mozognak."

A másik modell azon a feltevésen alapszik, „hogy a fény különböző törő képességű közegeken hatol át és hogy a törésmutató az R^2-r^2 kifejezéssel fordítva arányos. Könnyű belátni, hogy ily körülmények között a fénysugarak nem egyenesek, hanem köralakúak."

Topológiai munkásságára áttérve, szólnunk kell Poincaré dimenziófogalmáról, márcsak azért is, mert Hurewicz és Wallman dimenzióelméleti könyvük bevezetését Poincaré gondolatainak ismertetésével indítják el. Az említett könyv ugyan Poincarénak egy filozófiai folyóiratban 1912-ben megjelent cikkére hivatkozik, de ugyanezek a gondolatok kifejtésre kerültek az 1902-es kiadású Tudomány és hipotézis-ben is.

„Ha egy C fizikai kontinuumot — írja Poincaré — feldarabolhatunk olyan metszettel, amely véges számú egymástól jól megkülönböztethető elemből áll (és következésképpen sem egy, sem több kontinuumot nem alkot), akkor azt mondjuk, hogy C egydimenziós kontinuum. Ha ellenben C csak olyan metszetekkel darabolható fel, amelyek magukban véve is kontinuumok, akkor azt mondjuk, hogy C többdimenziós. Ha elegendő olyan metszet, amely maga egydimenziós kontinuum,

akkor C kétdimenziós, ha elég a kétdimenziós metszet, akkor C-t háromdimenziósnak fogjuk nevezni, és így tovább."

Poincaré itt a dimenzió intuitív megfogalmazását adta meg, de azzal, hogy a dimenzió fogalmát a feldarabolásra alapozta előkészítette annak szabatos matematikai definícióját, amelyet először éppen az ő hatására Brouwer fogalmazott meg 1913-ban [2].

Poincaré dimenziófogalmát több bírálat érte. Riesz Frigyes „A térfogalom genezise" c. cikkében így ír: „Ha azonban megkísérelnők, hogy a térfogalom további elemzését a Poincaré féle dimenziófogalomra alapítsuk, mint ahogy ezt Poincaré lehetőnek tartja, nemsokára nagy akadályokba ütköznénk. Mert egyrészt már Poincaré a fogalom bevezetésénél nem számol olyan jegyekkel, melyek már a legnaívabb dimenziófogalomnak is sajátjai: így például azzal, ha egy bizonyos dimenziójú rendszer egy részének dimenziója a rendszer dimenziójánál nem lehet nagyobb: valamely kettős kúpnak mint fizikai kontinuumnak a dimenziója Poincaré definíciója értelmében 1. Ezen a hibán azonban könnyen lehet segíteni." [19.]

Brouwer hét évvel később ugyancsak megemlíti a kettős kúpot, amelynek Poincaré féle dimenziószáma 1, de ugyanakkor felveti azt a kérdést, mit is érthetett Poincaré continuumon. Valószínűtlennek tartja, hogy Poincaré csupán sokaságokra gondolt volna.

Ezt azonban nem lehet teljes határozottsággal eldönteni. Ha abból indulunk ki, hogy Poincaré csak sokaságokra gondolt, úgy az általa adott definíció matematikailag teljesen szabatos.

Most hadd szóljunk Poincaré életművének egyik legkiemelkedőbb fejezetéről, az algebrai topológia megalkotásáról. Ő maga ezt a diszciplinát Analysis Situs-nak nevezte és a geometria részének tekintette. Jelentőségét saját maga is jól látta. A IV. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson Rómában (1908. április 6—10.) a matematika jövőjéről szóló előadásában, amelyet Kelemen Ignác fordított magyarra, így ír:

„Az Analysis Situs fontossága rendkívüli és ezt nem tudom elég nyomatékkal említeni: elég volna ennek a bizonyítására az, hogy milyen hasznot húzott belőle Riemann, legkiválóbb megteremtőinek egyike. Kell, hogy ezt tökéletesen meg lehessen majd szerkeszteni a magasabbrendű terekben; oly eszközünk lesz akkor, amellyel valósággal a térfölötti dolgokba láthatunk és amely helyettesítheti érzékeinket" [16].

Az Analysis Situs egyik forrása valóban Riemann felületelméleti vizsgálataiban ismerhető fel. Riemann doktori disszertációjában a felületek összefüggési számára konkrét meghatározást adott. Ezt azután módosította és általánosította többdimenziós sokaságokra a következő módon:

Legyen $a_1, \ldots, a_m$ egy M sokaság n-dimenziós nem határolt részsokaságainak olyan rendszere, hogy közülük akárhogyan is szemeljünk ki $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ $1 \leqq k \leqq m$ elemeket, ezek ne alkossanak határoló rendszert, vagyis együttesen ne határoljanak valamely M-beli $(n+1)$-dimenziós sokaságot. Mármost, ha bármely M-beli n-dimenziós nem határolt sokaság bizonyos a_i-kkel együtt határoló rendszert alkot, akkor az M sokaság az n dimenzióban $(m+1)$-szeresen összefüggő [18].

Riemannal azonos módon értelmezte a sokaságok többdimenziós összefüggési számait Betti is [1]. Az irodalomban ezeket a számokat Poincaré után Betti-féle számoknak hívjuk. Riemannal szemben új vonás Bettinél az, hogy ő már matematikailag valamivel pontosabban körvonalazta, mit ért többdimenziós sokaságon. Az n-dimenziós E^n euklideszi térben fekvő $(n-m)$-dimenziós sokaságot m darab

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

egyenlettel adja meg, ezekre vonatkozólag azonban semmilyen további feltevéssel nem él. Megemlíti, hogy az $n-1$ dimenziós sokaság n darab $(n-1)$-változós

$$z_j = z_j(u_1, \ldots, u_{n-1}) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

függvénnyel is megadható.

Poincaré „Analysis Situs" c. művében (1895) [12], illetve a már korábban megjelent Sur l'Analysis Situs c. C. R. cikkben [10], abból a problémából indul ki, hogy a Betti-féle számok jellemzik-e vajon folytonos átalakítás erejéig, vagyis topologikus szempontból a többdimenziós zárt sokaságokat. A válasz nemleges, Poincaré bevezet egy új topologikus invariánst, a fundamentális csoportot, és példát mutat olyan háromdimenziós zárt sokaságokra, amelyek azonos Betti-számokkal, de nem izomorf fundamentális csoporttal rendelkeznek.

Magát a Betti-szám fogalmát is újra értelmezi Poincaré. Először is tisztázza, mit is értünk többdimenziós sokaságon. Erre több definíciót is ad. Az első a következőképpen szól:

Legyenek adottak az

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

egyenlőségek, ahol $p<n$, az F_i függvények folytonosan differenciálhatók és Jacobi-féle mátrixuk rangja p. Legyenek adottak ezenkívül a

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

egyenlőtlenségek, ahol a φ_j függvények is folytonosan differenciálhatók. Az E^n tér azon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontjainak összessége, melyek ezeknek az egyenlőségeknek és egyenlőtlenségeknek eleget tesznek $(n-p)$-dimenziós V sokaságot alkot.

Mármost a Betti-számok meghatározásához bevezeti Poincaré az ellentétes sokaság és a homológia fogalmát.

Ha egy

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad j = 1, \ldots, q$$

egyenlőségekkel, ill. egyenlőtlenségekkel meghatározott $(n-p)$-dimenziós V sokaságnál az F_i függvények közül kettőnek az indexét megcseréljük, akkor jutunk a V-vel ellentétes sokasághoz. Ha a $\varphi_j>0$ egyenlőtlenségek egyikét $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)=0$ egyenlőségre változtatjuk, és ezt az $F_i=0$ egyenlőségek után írjuk, akkor az így nyert $(n-p-1)$-dimenziós sokaság a V sokaság határának egy darabja lesz. V teljes határát ezeknek a daraboknak az összessége alkotja. V nem határolt, ha egyetlen $n-p-1$ dimenziós sokaság sem fekszik a határán; zárt, ha nem határolt korlátos és összefüggő.

Legyenek $v_1, \ldots, v_s$ a V sokaság m dimenziós részsokaságai. Azt mondjuk, hogy egész együtthatós homológia áll fenn közöttük — $k_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_sv_s \sim 0$ —, ha van k_1 darab v_1-hez közeli, k_2 darab v_2-höz közeli stb. k_s darab v_s-hez közeli sokaság úgy, hogy ezek együtt egy V-beli $(m+1)$-dimenziós sokaság teljes határát alkossák. A k_i egészek közül egyesek, vagy mind lehetnek negatívak is, de ekkor a megfelelő v_i sokaságot annak ellentettjével kell helyettesítenünk. A k_i-k közül egyesek, de nem mind el is tűnhetnek ($k_i=0$), ekkor természetesen a megfelelő v_i-t el kell hagynunk.

A V-ben fekvő $v_1, \ldots, v_s$ m-dimenziós sokaságok lineárisan függetlenek, ha nincsen közöttük egész együtthatós homológia.

Ha a V sokaságban $(P_m - 1)$ darab lineárisan független zárt m-dimenziós sokaság még van, de P_m darab már nincs, akkor azt mondjuk, hogy a V sokaság m-dimenziós összefüggési, vagy Betti-féle száma P_m.

Poincaré a továbbiakban az n-dimenziós sokaságok egy és kétoldalúságát is értelmezte, és kimutatta, hogy zárt kétoldalú n-dimenziós sokaságnál a Betti-féle számok között fennáll a

$$P_m = P_{n-m}$$

összefüggés. (Poincaré dualitási tétele.)

Ez az első olyan összefüggés, ami a Betti-féle számokról szól. Magának a tételnek igen nagy a hordereje. Ez részint önmagában rejlik, részint abban a tényben, hogy mintául szolgált további fontos és alapvető ún. dualitási tételek kimondásához. Így pl. az Alexander—Pontrjagin-féle dualitási tételhez, és annak számos általánosításához.

Az Analysis Situs cikk utolsó fejezetei Euler tételének többdimenziós általánosításával foglalkoznak. Erről a témáról van egyébként Poincaré-nak egy korábban megjelent C. R. cikke is [11], de részletes kifejtést az Analysis Situs c. dolgozat tartalmaz először. Ha az irányítható zárt p-dimenziós V sokaságot egyszerű határolt sokaságokra bontjuk, és az így nyert poliédernél $i=0, \ldots, p$-re α_i-vel jelöljük az i dimenziós lapok számát, akkor az $N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \ldots \pm \alpha_0$ szám kifejezhető a V sokaság Betti-féle számaival.

A következő eredményt kapta:

$$N = P_{p-1} - P_{p-2} + \ldots - P_1$$

ha p páratlan és

$$N = 3 - P_1 + P_2 - \ldots - P_{p-1}$$

ha p páros.

Így a dualitási tétel következtében páratlan p-nél $N=0$.

A Poincaré-féle poliédertétel a másik igen jól használható Betti-féle számokon alapuló összefüggés. Egyik közvetlen következménye, hogy az

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \ldots \pm \alpha_0$$

szám nem függ attól, hogyan bontottuk fel a sokaságot egyszerű határolt részekre.

A tételt később igen messzemenően általánosították.

Poincaré dualitási tételének igaz voltát Heegard kétségbe vonta [3]. Úgy vélte, hogy ellenpéldát is talált. Heegard azonban nem vette figyelembe, hogy a Betti-féle számoknak Poincarénál már más a jelentésük, mint ami eredetileg Bettinél volt. A bizonyítás egyes részleteinek homályos volta mégis arra ösztönözte Poincarét, hogy új bizonyítást adjon. 1899-ben megjelent dolgozatában [13] a homológiát a cellákra történő felbontás módszerével tárgyalja. A cellák maguk is sokaságok. A következőképpen jár el:

Egy q dimenziós a_i^q és egy $(q-1)$ dimenziós b_j^{q-1} cellához hozzárendel egy $s_{i,j}^q$ incidenciaegyüttható, ami $+1$, ha b_j^{q-1} az a_i^q határán van, -1, ha b_j^{q-1} ellentettje van a_i^q határán, vagy ami ugyanaz, ha b_j^{q-1} van a_i^q ellentettjének a határán, egyébként pedig 0. Minden a q-dimenziós cellákból képzett egész együtthatós $x^q = \sum_i \lambda_i a_i^q$ lineáris formához hozzárendeli az $x^{q-1} = \sum_{i,j} \lambda_i s_{i,j}^q b_j^{q-1}$ lineáris formát. Napjainkban használt jelöléssel élve $\partial_q x^q = x^{q-1}$. Az x^q lineáris forma zárt, ha

$\partial_q x^q = 0$, x^q homológ 0-val — $x^q \sim 0$ —, ha van olyan ($q+1$-dimenziós x^{q+1} lineáris forma, amelynél $\partial_{q+1} x^{q+1} = x^q$.

Az $x_1^q, \ldots, x_s^q$ lineáris formák lineárisan függetlenek, ha nem találhatók olyan $k_1, \ldots, k_s$ racionális egész számok (kivéve a $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ esetet), amelynél

$$k_1 x_1^q + \ldots + k_s x_s^q \sim 0.$$

A cellákra bontott V sokaság q dimenziós redukált Betti-féle száma P'_q, ha $P'_q - 1$ darab lineárisan független q dimenziós zárt lineáris forma még létezik V-ben, de P'_q darab már nem. Ha a cellák egyszeresen összefüggőek, úgy $P'_q = P_q$.

Valójában ezzel a dolgozattal kezdődik a topológia kombinatorikus korszaka. A kombinatorikus metódus Poincaré hatására virágzik ki, és válik alkalmassá a sokaságoknál messze általánosabb alakzatok tanulmányozásánál is.

Maga Poincaré még több dolgozatban foglalkozik kombinatorikus topológiával. Egy 1900-ban megjelent cikkében kombinatorikus eszközökkel leírható új invariánsokat nyer, az úgynevezett torzióegyütthatókat [14]. Megjegyezzük itt, hogy a húszas évek végén megjelennek a homológiacsoportok, vagy más néven Betti-féle csoportok (Vietoris, 1927 [21]), amelyek egyszerre kifejezik mind a Betti-féle számokat, mind a torzióegyütthatókat.

A torzióegyütthatók megjelenése után Poincarénak az Analysis Situs c. cikkben felvetett kérdése finomítható volt úgy, hogy vajon a Betti-számok és a torzióegyütthatók együttesen meghatározzák-e homeomorfia erejéig a zárt háromdimenziós sokaságokat. A válasz ismét nemleges. Egy 1904-ben közzétett dolgozatában [15] Poincaré egy olyan zárt háromdimenziós sokaságot szerkeszt, amelynek mind a Betti-számai, mind a torzióegyütthatói a háromdimenziós gömbfelületével azonosak anélkül, hogy fundamentális csoportja a triviális csoport lenne, miként az a gömbnél.

Itt veti fel azután azt a híres, máig megoldatlan kérdést: Van-e olyan zárt háromdimenziós sokaság, amely nem homeomorf a háromdimenziós gömbfelülettel és a fundamentális csoportja mégis triviális?

A problémát W. Hurewicz 1935-ben általánosította [4]. Az ő megfogalmazásában a Poincaré-sejtés szerint az n-dimenziós zárt sokaságok között az n-dimenziós gömbfelület azzal karakterizálható, hogy a fundamentális csoportja, valamint a homológiacsoportjai az n-edik dimenzióig eltűnnek.

Ezt az általánosított sejtést E. H. Connell amerikai matematikus 1966-ban $n \geqq 5$-re bebizonyította. A bizonyítást M. H. A. Newman ismertette egyik dolgozatában [7]. A triangulálható sokaságok körében ugyancsak $n \geqq 5$ esetén már 1961-ben bizonyította a sejtést S. Smale [20], de a triangulálhatóság feltevése lényeges korlátozást jelent. R. C. Kirby és L. C. Siebenmann ugyanis 1969-ben megmutatták azt, hogy ha $n \geqq 5$, akkor létezik „szigorú értelemben" nem triangulálható n-dimenziós zárt sokaság [5], $n = 2$ és 3 esetén egyébként minden zárt n-dimenziós sokaság triangulálható. Ezt $n = 2$-re T. Radó bizonyította 1924-ben [17], $n = 3$-ra pedig E. E. Moise 1952-ben [6]. $n = 4$-re azonban, sőt teljes általánosságban $n \geqq 4$-re a triangulálhatóság problémája máig is megoldatlan.

A Poincaré által megalkotott Analysis Situs valóban rendkívül termékenynek bizonyult. E módszerrel a többdimenziós euklideszi terek, sokaságok és poliéderek fontos topológiai sajátosságainak egész sora vált hozzáférhetővé. Hogy csak egy-két példát említsünk, ilyen a nyílt halmazok Brouwer-féle invarianciatétele, az Alexandrov-féle felbontási tétel, a Lefschetz-féle fixponttétel vagy Borsuk antipodális tétele. De ami még ennél is fontosabb: segítségével rendkívül áttekinthetővé, rendszerezetté válik a térben mindaz, ami nélküle nagyon nehezen vagy sehogysem ragadható meg.

IRODALOM

Rövidítések:
C.R. = Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris.
s. = sorozat; k. = kötet; o. = oldal.
Kerek zárójelbe tesszük a megjelenés évét.

[1] E. Betti: Sopra gli spazi di un numero quelcunque di dimensioni. Annali di Matematica 2. s. 4. k. 140—158. o. (1870—71).
[2] L. E. J. Brouwer: Über den natürlichen Dimensionsbegriff. Journal für die reine und angewandte Mathematik 142. k. 146—152. o. (1913).
[3] P. Heegard: Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhang. Copenhague det Nordiske Forlag Ernst Bojesen (1898).
[4] W. Hurewicz: Beiträge zur Topologie der Deformationen (II. Homotopie und Homologiegruppen.) Proceedings. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Amsterdam 38. k. 521—528. o. (1935).
[5] R. C. Kirby—L. C. Siebenmann: For manifolds the Hauptvermutung and the triangulation conjecture are false. Notices of the American Mathematical Society 16. k. 695. o. (1969).
[6] E. E. Moise: Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. Annals of Mathematics 56. k. 96—114. o. (1952).
[7] M. H. A. Newman: The engulfing theorem for topological manifolds. Annals of Mathematics 84. k. 555—571. o. (1966).
[8] Poincaré H. Tudomány és föltevés. Természettudományi Könyvkiadó Vállalat. Budapest (1908).
[9] H. Poincaré: Sur les groupes kleinéens. C. R. 93. k. 44—46. o. (1881).
[10] H. Poincaré: Sur l'Analysis Situs. C. R. 115. k. 663—636. o. (1892).
[11] H. Poincaré: Sur la généralisation d'un théoreme d'Euler relatif aux polyedres. C. R. 117. k. 144—145. o. (1893).
[12] H. Poincaré: Analysis Situs. Journal en l'École Polytechnique 1. k. 1—121. o. (1895).
[13] H. Poincaré: Complément a l'Analysis Situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 13. k. 285—343. o. (1899).
[14] H. Poincaré: Second complément à l'Analysis Situs. Proceedings of the London Mathematical Society 32. k. 277—308. o. (1900).
[15] H. Poincaré: Cinquiéme complément à l'Analysis Situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 18. k. 45—110. o. (1904).
[16] Poincaré Henri: A matematika jövője. (Felolvasták az 1908. április 6—10. tartott IV. Matematikai Kongresszuson Rómában.) Mathematikai és Physikai Lapok 19. k. 424—443. o. (1910).
[17] T. Radó: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Litterarum Scientiarum Mathematicarum. Szeged 2. k. 101—126. o. (1924—26).
[18] B. Riemann: Fragment aus der Analysis Situs. B. Riemanns gesammelte mathematische Werke, Leipzig (1892).
[19] Riesz Frigyes: A térfogalom genezise. (Első közlemény.) Mathematikai és Physikai Lapok 15. k. 87—122. o. (1906).
[20] Smale Stephen: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. Annals of Mathematics 2. s. 74. k. 391—406. (1961).
[21] L. Vietoris: Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Mathematische Annalen 97. k. 454—472. o. (1927).

3. Az integrál invariánsok

Az integrál invariánsok egyike azoknak a differenciálgeometriai fogalmaknak, melyek a mechanikának és a matematikai fizikának nélkülözhetetlen eszközei. Bár speciális integrál invariánsokat már J. Liouville és L. Boltzmann is alkalmazott, az integrál invariáns fogalma H. Poincaré egy nevezetes dolgozatában [6] került bevezetésre. E dolgozatában Poincaré a Jacobi által elért eredményeket [4] a dinamikai egyenletek megoldásainak globális vizsgálatára alkalmazva vezette be az integrál invariáns fogalmát. Itt általános eredményeinek egy konkrét alkalmazását is bemutatta, amely a Naprendszer stabilitásának problémájával kapcsolatos. Az integrál invariáns fogalmának felhasználásával, bizonyos megszorítások mellett,

sikerült kimutatni a rendszer Poisson-féle értelemben vett stabilitását. E nevezetes eredményt követően az integrál invariánsok több további mechanikai alkalmazását is megadta, majd általános elméletüket is kidolgozta [7]. Poincaré munkássága nyomán az integrál invariánsok matematikai elméletét É. Cartan [1] fejlesztette tovább, majd Th. de Donder adta meg az eredmények egy átfogó összefoglalását [2]. Az integrál invariánsok alkalmazásával kapcsolatosan Poincaré munkássága nyomán keletkezett eredmények olyan szerteágazóak, hogy azok átfogó összefoglalására eddig nem akadt vállalkozó, hiszen akkor a mechanika mellett az ergodikus elmélet, a statisztikus mechanika, a kinetikus gázelmélet, az atomfizika, a hidrodinamika, az elektrodinamika területére eső alkalmazások összefoglalását kellene megadni. A következőkben az integrál invariánsok matematikai elméletének rövid ismertetését adjuk: Először az integrál invariáns fogalmának korszerű definícióját és néhány egyszerűbb alaptulajdonságát ismertetjük, majd néhány, elsősorban mechanikai példát adunk az integrálinvariánsokra C. Godbillon nyomán [3]; végül utalunk e fogalom egy újabb általánosítására.[1]

Legyen M egy differenciálható sokaság és $\Lambda(M)$ a rajta értelmezett differenciális formák algebrája. Ha X egy vektormező az M sokaságon, egy $\alpha\in\Lambda(M)$ differenciális formáról akkor mondják, hogy *invariáns* az X vektormezővel szemben, ha a rá vonatkozó Lie-deriváltja eltűnik, vagyis $L_X\alpha=0$ érvényes a sokaságon.

Ha speciálisan $\alpha\in\Lambda(M)$ egy differenciális 0-forma, vagyis az M sokaságon értelmezett függvények $\mathscr{D}(M)=\Lambda^0(M)$ vektorterének egy f elemével azonos, akkor az $\alpha=f$ forma akkor és csak akkor invariáns egy X vektormezővel szemben, ha annak egy első integrálja, tekintettel az $L_Xf=Xf$ azonosságra.

Egy X vektormezővel szemben invariáns differenciális formák az $\Lambda(M)$ egy olyan részalgebráját alkotják, amely a külső differenciálás

$$d\colon \Lambda(M)\to\Lambda(M)$$

operátorával szemben zárt; az állítás belátására elég a következő azonosságokra utalni:

$$\begin{aligned} L_X(\alpha+\beta) &= L_X\alpha+L_X\beta,\\ L_X(\alpha\wedge\beta) &= (L_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(L_X\beta),\\ L_X(d\alpha) &= d(L_X\alpha), \end{aligned}$$

ahol $\alpha,\beta\in\Lambda(M)$ tetszőleges differenciális formák a sokaságon.

A fenti fogalom geometriai tartalmának megvilágítására tekintsünk egy n-dimenziós kompakt orientált általános, vagyis esetleg határral rendelkező, N differenciálható sokaságot és egy $\psi\colon N\to M$ differenciálható leképezést. Mivel $\psi(N)\subset M$ kompakt részhalmaz, létezik az M diffeomorfizmusainak egy az X vektormező által generált $\varphi_\tau\colon M\to M$, $\tau\in I$ lokális 1-paraméteres csoportja, amely a

$$\psi(N)\times\{0\}\subset M\times\mathbf{R}$$

halmaznak egy $U\times I$ környezetén van értelmezve. Ekkor a leképezések

$$\varphi_\tau\circ\psi\colon N\to M,\quad \tau\in I$$

[1] Az itt következőkben ismertnek tételezzük fel a differenciálható sokaságok elméletének néhány alapfogalmát és alapvető tételét; ezek magyar nyelvű ismertetését és az itt szereplő egyes eredmények részletesebb tárgyalását adja [10], [11].

1-paraméteres seregét a ψ *leképezés* X *vektormező által indukált deformációjának* nevezzük. A következő állítás az invariancia fenti fogalmának geometriai tartalmát világítja meg:

1. ÁLLÍTÁS. *Legyen* M *egy* m*-dimenziós differenciálható sokaság,* X *vektormező és* $\alpha \in \Lambda^n(M)$ *egy differenciális* n*-forma az* M *sokaságon. Az* α *forma akkor és csak akkor invariáns az* X *vektormezővel szemben, ha tetszőleges* n*-dimenziós kompakt orientált* N *általános differenciálható sokaság bármely* $\psi: N \to M$ *differenciálható leképezésének minden az* X *által indukált* $\varphi_\tau \circ \psi: N \to M$, $\tau \in I$ *deformációjánál az*

$$F(\tau) = \int_N T(\varphi_\tau \circ \psi)^* \alpha, \quad \tau \in I$$

függvény konstans, ahol $T(\varphi_\tau \circ \psi)^* \alpha$ *az* α *differenciális forma reciprok képe.*

Az állítás egy standard bizonyítását adja számos más forrás mellett [11].

Ha egy vektormezőhöz tartozik invariáns térfogati forma, akkor a vektormező, mint látni fogjuk, fontos tulajdonságokkal rendelkezik. Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság egy $\alpha \in \Lambda^m(M)$ differenciális m-formáról azt mondják, hogy *térfogati forma* az M sokaságon, ha azon seholsem tűnik el.

Legyen M egy kompakt differenciálható sokaság. X vektormező az M sokaságon és

$$\varphi_\tau: M \to M, \quad \tau \in \mathbf{R}$$

az M diffeomorfizmusainak X által generált 1-paraméteres csoportja. Akkor mondják, hogy az X vektormező *rekurrens,* ha bármely $U \subset M$ nyílt halmazhoz és τ_0 nem negatív számhoz létezik olyan $\tau \geqq \tau_0$ szám, hogy az $U \cap \varphi_\tau(U)$ halmaz nem üres.

A következő tételt *Poincaré-féle visszatérési tétel*nek hívják, egy szokásos egyszerű bizonyítását adja [11].

1. TÉTEL. *Legyen* M *egy kompakt differenciálható sokaság és* X *olyan rajta értelemezett vektormező, melyhez tartozik invariáns térfogati forma. Ekkor az* M *majdnem minden pontja Poisson-féle értelemben stabil az* X *vektormezőre nézve.*

A térfogati forma létezéséből következik, hogy a „majdnem minden pont" fogalom használata jogos, hiszen az M sokaságon ekkor létezik megfelelő tulajdonságokkal bíró mérték.

Legyen M egy differenciálható sokaság és X egy azon értelmezett vektormező. Egy $\alpha \in \Lambda(M)$ differenciális formáról akkor mondják, hogy az X vektormező *abszolút integrált invariánsa,* ha $\iota_X \alpha = \iota_X d\alpha = 0$ érvényes az M sokaságon.

Egy α differenciális forma akkor és csak akkor abszolút integrál invariánsa egy X vektormezőnek, ha invariáns a vektormezőre nézve és $\iota_X \alpha = 0$ is érvényes a sokaságon; az állítás belátására elegendő az

$$L_X \alpha = \iota_X \circ d\alpha + d \circ \iota_X \alpha$$

azonosságra utalni. Így adódik, hogy ha egy differenciális forma abszolút integrál invariánsa egy vektormezőnek, akkor szükségszerűen invariáns a vektormezőre nézve.

Egy X vektormező abszolút integrál invariánsai a $\Lambda(M)$ algebrának egy olyan részalgebráját alkotják, amely zárt a külső differenciálás $d: \Lambda(M) \to \Lambda(M)$

operátorával szemben, amint ez az

$$\begin{aligned} \iota_X(\alpha+\beta) &= \iota_X\alpha+\iota_X\beta, \\ \iota_X(\alpha\wedge\beta) &= (\iota_X\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(\iota_X\beta), \\ d(\alpha+\beta) &= d\alpha+d\beta, \\ d(\alpha\wedge\beta) &= (d\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(d\beta) \end{aligned}$$

azonosságokból, ahol $\alpha\in\Lambda^p(M)$ tetszőleges differenciális p-forma, és $\beta\in\Lambda^q(M)$ tetszőleges differenciális q-forma, közvetlenül adódik.

A fenti fogalom geometriai tartalmának megvilágítására tekintsünk egy m-dimenziós M differenciálható sokaságot, egy rajta értelmezett X vektormezőt és egy n-dimenziós kompakt orientált N differenciálható sokaságot. Legyen mostmár

$$\psi\colon \mathbf{R}\times N \to M$$

olyan differenciálható leképezés, melyhez létezik olyan $f\in\mathcal{D}(\mathbf{R}\times M)$ differenciálható függvény, melyre érvényes lesz a következő egyenlőség:

$$f(\tau, z)X(\psi(\tau, z)) = T_{(\tau,z)}\psi\,\frac{\partial}{\partial\tau},$$

ahol $(\tau, z)\in\mathbf{R}\times N$. Ekkor a leképezések $\psi_\tau\colon N\to M$, $\tau\in\mathbf{R}$ 1-paraméteres seregét, amit a

$$\psi_\tau(z) = \psi(\tau, z), \quad (\tau, z)\in\mathbf{R}\times N$$

definíció értelmez a ψ_0 *leképezés X vektormező menti deformációjának* nevezik. A következő állítás az abszolút integrál invariáns fogalmának geometriai tartalmát világítja meg.

2. Állítás. *Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság, X egy vektormező és $\alpha\in\Lambda^n(M)$ egy differenciális n-forma az M sokaságon. Az α forma akkor és csak akkor abszolút integrál invariánsa az X vektormezőnek, ha tetszőleges kompakt orientált n-dimenziós N differenciálható sokaság bármely $\psi_0\colon N\to M$ differenciálható leképezésének minden X menti $\psi_\tau\colon N\to M$, $\tau\in\mathbf{R}$ deformációjánál a megfelelő*

$$I(\tau) = \int_N (T\psi_\tau)^*\alpha, \quad \tau\in\mathbf{R}$$

függvény konstans.

A fenti állítás egy standard bizonyítását szintén a [11] tartalmazza.

Legyen M egy differenciálható sokaság és X egy rajta értelmezett vektormező. Egy $\alpha\in\Lambda(M)$ differenciális formáról akkor mondják, hogy az X *relatív integrál invariánsa,* ha $\iota_x d\alpha=0$ érvényes.

Nyilvánvaló, hogy egy α differenciális forma akkor és csak akkor relatív integrál invariánsa egy X vektormezőnek, ha a $d\alpha$ differenciális forma annak abszolút integrál invariánsa.

A következő állítás a relatív integrál invariáns fogalmának geometriai tartalmát világítja meg:

3. Állítás. *Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság, X egy vektormező és $\alpha\in\Lambda^{n-1}(M)$ egy differenciális $(n-1)$-forma az M sokaságon. Az*

α forma akkor és csak akkor relatív integrál invariánsa az X vektormezőnek, ha bármely olyan n-dimenziós kompakt orientált általános N differenciálható sokaságnál, melynek ∂N határa nem üres, tetszőleges $\psi_0: N \to M$ differenciálható leképezés minden X menti $\psi_\tau: N \to M$, $\tau \in \mathbf{R}$ deformációjánál a megfelelő

$$I(\tau) = \int_{\partial N} (T\tilde{\psi}_\tau)^* \alpha, \quad \tau \in \mathbf{R}$$

függvény konstans, ahol $\tilde{\psi}_\tau$ a ψ_τ leképezésnek a ∂N határra történő megszorítása.

Az állítás a Stokes-tétel alapján következik az abszolút integrál invariánsokra vonatkozó megfelelő állításból.

A vektormezők geometriai vizsgálatánál H. Poincaré és G. Birkhoff igen eredményesen alkalmazta a vektormező transzverzálisának fogalmát. Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság és X egy rajta értelmezett vektormező. Egy $(m-1)$-dimenziós $N \subset M$ részsokaságról, amely határral is rendelkezhet, akkor mondják, hogy az X vektormező *transzverzálisa*, ha bármely $z \in N$ pontban az $X(z)$ vektor nem eleme a $T_z M$ érintőtér $T_z N$ alterének.

A következő tétel G. Reeb egy eredménye [8]:

3. TÉTEL. *Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság és X egy rajta értelmezett vektormező Ha létezik egy $\alpha \in \Lambda^{m-2}(M)$ differenciális $(m-2)$-forma, amely az X relatív integrál invariánsa és melynek $d\alpha$ differenciálja sehol sem tűnik el, akkor az X vektormezőnek nincs olyan kompakt transzverzálisa, melynek a határa üres.*

Legyen M egy $(2m+1)$-dimenziós differenciálható sokaság és α egy *kontakt forma* az M sokaságon, vagyis egy olyan Pfaff-féle forma, melynél az $\alpha \wedge (d\alpha)^m$ egy térfogati forma. Ekkor G. Reeb egy eredménye [8] szerint létezik az M sokaságon egy és csak egy olyan X vektormező, melyre $\alpha(X) = 1$ és $\iota_X(d\alpha) = 0$ érvényes; ezt az X vektormezőt az α *kontakt formához asszociált vektormező*nek nevezik.

Az előbbi tételnek egyszerű folyománya az alábbi

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen M egy $(2m+1)$-dimenziós differenciálható sokaság, α egy kontakt forma az M sokaságon és X a hozzá asszociált vektormező. Az X vektormezőnek nincs olyan kompakt transzverzálisa, melynek határa üres.*

Az alábbiakban több olyan példa fog szerepelni, ahol e következmény alkalmazható.

Az integrál invariáns fogalmához közvetlenül kapcsolódik a következő fogalom, melynek szerepe A. Lichnerowicz eredményei [5] nyomán tisztázódott. Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság és X egy rajta értelmezett vektormező. Egy $\alpha \in \Lambda^n(M)$ differenciális n-formáról akkor mondják, hogy az X vektormezőre vonatkozó *invariancia integrál relációja*, ha $\iota_X \alpha = 0$ érvényes rá.

A következőkben néhány, elsősorban a mechanikai alkalmazások szempontjából érdekes, egyszerű példát ismertetünk az integrál invariánsokra.

HAMILTON-RENDSZEREK. Legyen (M, ω) egy *szimplektikus sokaság*, vagyis M egy $2m$-dimenziós differenciálható sokaság és ω egy *szimplektikus forma* az M sokaságon, tehát ω egy olyan zárt differenciális 2-forma, hogy ω^m egy térfogati forma. Legyen az M sokaságon értelmezett X vektormező *Hamilton-féle*, vagyis olyan, hogy az $\alpha = \iota_X \omega$ Pfaff-féle forma zárt, ekkor azt mondják, hogy (M, ω, X)

egy *Hamilton-rendszer*. Nyilvánvaló, hogy ω az X relatív integrál invariánsa és az

$$L_X\omega = \iota_X \circ d\omega + d \circ \iota_X \omega$$

egyenlőségből következik, hogy ω invariáns az X vektormezővel szemben. Az is nyilvánvaló, hogy α az X abszolút integrál invariánsa. Ha speciálisan az α forma exakt egy olyan $H \in \mathcal{D}(M)$ differenciálható függvényt, melyre $\alpha = dH$ áll, az (M, ω, X) rendszer *Hamilton-függvényének nevezik*. Nyilvánvaló, hogy egy H Hamilton-függvény az X abszolút integrál invariánsa.

Legyen N egy $(2m-1)$-dimenziós differenciálható sokaság és $\psi: N \to M$ egy olyan immerzió, amely az α által generált Pfaff-féle rendszer egy integrál részsokaságát szolgálja, vagyis $(T\psi)^*\alpha = 0$ érvényes. Ekkor az X vektormező a $\psi(N)$ érintő mezője, tehát egyértelműen létezik egy Y vektormező az N sokaságon, melyre $X = T_\psi Y$ érvényes. Legyen $U = \{z | \alpha(z) \neq 0, z \in M\}$, ekkor az U halmazon létezik egy differenciális $(2m-1)$-forma β, melyre ott $\omega^m = \alpha \wedge \beta$ áll. A $(T\psi)^*\beta$ forma egy térfogati forma az N sokaságon, amely invariáns az Y vektormezővel szemben és $(T\psi)^*\omega$ az Y abszolút integrál invariánsa.

A fenti összefüggések úgynevezett „időtől függő eset"-re való kiterjesztése céljából tekintsük most az $M \times \mathbf{R}$ differenciálható sokaságot és egy ezen értelmezett $\tilde{H}$ differenciálható függvényt, továbbá annak az $M \times \{\tau\} \subset M \times \mathbf{R}$ részsokaságra való H_τ megszorítását tetszőleges $\tau \in \mathbf{R}$ esetén. Az M és $M \times \{\tau\}$ sokaságok kanonikus azonosításával ω egy szimplektikus forma az $M \times \{\tau\}$ sokaságon, így a H_τ függvényhez egyértelműen tartozik olyan X_τ Hamilton-féle vektormező, melyhez H_τ tartozik Hamilton-függvényként. Ekkor tekintettel a

$$T_{(x,\tau)}(M \times \mathbf{R}) = T_x M \oplus T_\tau \mathbf{R}$$

kanonikus vektortér direktösszeg dekompozícióra, az $M \times \mathbf{R}$ sokaságon egy Y vektormezőt értelmez a következő definíció:

$$Y(x, \tau) = X_\tau(x) + \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Legyen $\pi: M \times \mathbf{R} \to M$ a kanonikus projekció, ekkor $\iota_Y((T\pi)^*\omega - dH \wedge d\tau) = 0$ érvényes. Az Y vektormezőt egyértelműen meghatározza az, hogy abszolút integrál invariánsa a $(T\pi)^*\omega - dH \wedge d\tau$ forma, sőt az is, hogy e forma Y vektormezőre vonatkozóan az invariancia integrál relációja.

KONTAKT SOKASÁGOK. Legyen (M, α) egy *kontakt sokaság*, vagyis M egy $(2m+1)$-dimenziós differenciálható sokaság és α egy kontakt forma az M sokaságon. Tekintsük az α kontakt formához asszociált X vektormezőt az M sokaságon egy fentebb már ismertetett definíció szerint. Ekkor $d\alpha$ abszolút integrál invariánsa az X vektormezőnek.

FINSLER-STRUKTÚRÁK. Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság, $T^*(M)$ ennek kotangens sokasága és $\pi: T^*(M) \to M$ a kanonikus projekció. Legyen $x \in M$ és $\alpha \in T_x^*(M)$ lineáris forma a $T_x(M)$ érintőtéren ekkor $T_\alpha \pi$ a $T_\alpha(T^*(M))$ érintőteret a $T_x(M)$ érintőtérre képezi, így az

$$u \mapsto \langle T_\alpha \pi u, \alpha \rangle = \langle u, (T_\alpha \pi)^* \alpha \rangle, \quad u \in T_\alpha(T^*(M))$$

hozzárendelés egy $\lambda = (T_\alpha \pi)^* \alpha$ lineáris formát definiál, amit a $T^*(M)$ kotangens sokaság *Liouville-formájának* neveznek. Mivel $d\lambda$ zárt és $(d\lambda)^m$ térfogati forma, ezért $(T^*(M), d\lambda)$ egy szimplektikus sokaság. Legyen mostmár $H \in \mathcal{D}(T^*(M))$

differenciálható függvény az M kotangens sokaságán, akkor mondják, hogy H egy *Finsler-struktúrája* az M sokaságnak, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. A H függvény p-edfokú pozitív homogén, ahol $p>0$;
2. A $H^{-1}(0)\subset T^*(M)$ halmaz a $\pi: T^*(M)\to M$ vektornyaláb nulla-metszetének képével azonos;
3. Minden $\varepsilon>0$ pozitív szám a H függvény reguláris értéke.

Legyen X az a vektormező a $T^*(M)$ sokaságon, amely mint Hamilton-féle vektormező a H-függvényhez, mint Hamilton-függvényhez asszociált a $(T^*(M), d\lambda)$ szimplektikus sokaságon, ekkor az X vektormezőt a Finsler-struktúra *geodetikus mezőjé*nek nevezik.

Legyen mostmár $\varepsilon>0$ esetén $N\subset T^*(M)$ a $H=\varepsilon$ által definiált $(2m-1)$-dimenziós részsokaság. Ekkor a λ Liouville-formának az N részsokaságra történő megszorítása egy kontakt forma e részsokaságon, melyhez az $\frac{X}{p\cdot\varepsilon}$ vektormező asszociált. Az N részsokaságon a λ Liouville-forma az X geodetikus mező relatív integrál invariánsa.

KLASSZIKUS HAMILTON-STRUKTÚRÁK. Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság, T egy Riemann-metrika a $T^*(M)$ kotangens sokaságon, vagyis $x\in M$ esetén T a $T_x^*(M)$ vektortéren egy T_x pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma, amely az x ponttól differenciálhatóan függ. Legyen $U\in\mathscr{D}(M)$ differenciálható függvény az M sokaságon és $\pi: T^*(M)\to M$ a kanonikus projekció. Ekkor

$$H = T - U\circ\pi$$

egy differenciálható függvény a $T^*(M)$ kotangens sokaságon. Legyen ε a H függvény olyan reguláris értéke, hogy a $H=\varepsilon$ által definiált N részsokaság nem üres, vagyis egy $(2m-1)$-dimenziós részsokaság. Legyen $\tilde{N}$ az N részsokaságban az N és a $T^*(M)$ nulla-metszete közös részének komplementuma. Ekkor az $\tilde{N}$ részsokaságon a λ Liouville forma egy kontakt struktúrát indukál, melyhez az $\frac{X}{2T}$ vektormező asszociált, ahol X a H függvényhez mint Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-féle vektormező a $(T^*(M), d\lambda)$ szimplektikus sokaságon.

Végül megemlítjük az abszolút integrál invariáns fogalmának egy olyan újabb általánosítását, amelynek fontos mechanikai alkalmazásai vannak. Legyen M egy m-dimenziós differenciálható sokaság és $\mathscr{F}=\{\mathscr{L}_\alpha|\alpha\in A\}$ ennek egy olyan p-dimenziós foliációja, amely minden $x\in M$ pontban *metszhető,* vagyis az x pontban létezik egy részsokaság, amely az $\mathscr{F}$ foliációhoz transzverzális és minden egyes $\mathscr{L}_\alpha$ fóliát legfeljebb egy pontban metsz. Belátható, hogy ekkor az $\mathscr{F}$ foliáció elemei egy $(m-p)$-dimenziós M' differenciálható sokaságot alkotnak, amit az M sokaság $\mathscr{F}$ *foliációra vonatkozó hányadossokaságá*nak neveznek. Legyen

$$\pi: M\to M'$$

a kanonikus projekció, ami az $x\in M$ ponthoz e ponton áthaladó $\mathscr{L}_\alpha$ fóliát mint az M' elemét rendeli. Egy $\alpha\in\Lambda^n(M)$ differenciális formát az $\mathscr{F}$ *foliáció általánosított abszolút integrál invariáns*ának nevezik, ha létezik egy olyan $\alpha'\in\Lambda^n(M')$ differenciális forma, melyre

$$\alpha = (T\pi)^*\alpha'$$

áll, vagyis α reciprok képe az M' egy differenciális formájának a π kanonikus projekciónál [9]. E fogalommal kapcsolatos néhány alapvető kérdés vizsgálatát adja [12].

IRODALOM

[1] É. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris 1922.
[2] TH. DE DONDER, *Théorie des invariants intégraux*, Paris 1927.
[3] C. GODBILLON, *Géometrie différentielle et mécanique analytique*, Paris, 1969.
[4] C. G. JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, Berlin, 1866.
[5] A. LICHNEROWICZ, Les relations intégrales d'invariance et leurs applications à la dynamique, *Bull. Soc. Math. France* **70** (1946), 82—95.
[6] H. POINCARÉ, Sur le probleme de trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.* **13** (1890), 1—270.
[7] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* Paris, 1899.
[8] G. REEB, Sur certains propriétés topologiques des trajectoires des systemes dynamiques. *Aaad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem.* 27 (1952)
[9] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Paris 1970.
[10] SZENTHE J., *A mechanika újabb matematikai eszközei, matematikai megalapozás: a differenciálható sokaságok elmélete*, BME Továbbképző Intézete, 1976.
[11] SZENTHE J., *A mechanika újabb matematikai eszközei, az analitikus mechanika korszerű megalapozása és felépítése*, BME Továbbképző Intézete, 1978.
[12] J. SZENTHE, On generalized integral invariants, *Előkészületben.*

4. A minimális pontok

A globális, vagyis nagybani differenciálgeometriai vizsgálatok eredményei egy jelentős részben a minimális pontok tulajdonságainak tanulmányozásából adódtak. A minimális pont fogalmát H. Poincaré vezette be egy nevezetes dolgozatában, ahol a konvex felületek geodetikusainak globális viselkedését tanulmányozta [11]. E vizsgálataihoz a háromtest probléma periodikus és aszimptotikus megoldásainak globális viselkedésével foglalkozó korábbi munkái [9], [10] után fogott. Ott ugyanis, az elsődleges elvi problémát másodlagos technikai problémák kísérték, melyek a vizsgálatokat elbonyolították. Így indokoltnak látta a legegyszerűbb speciális esettel foglalkozni, ami geometriai megfogalmazásban a konvex felületek geodetikusainak globális vizsgálatát jelenti. Hasonló jellegű vizsgálatokat J. Hadamard végzett előtte, aki a negatív görbületű felületek geodetikusainak globális viselkedésével foglalkozott [5]. A minimális pont fogalmát később J. H. C. Whitehead kiterjesztette a lehető legáltalánosabb esetre a Finsler sokaságokéra és legfontosabb általános alaptulajdonságait is megállapította [13]. Az alábbiakban először is a minimális pont fogalmának definícióját adjuk meg Riemann-sokaságok esetére, majd néhány nevezetes tételt ismertetünk e fogalom tulajdonságaival kapcsolatban. Megemlítünk néhány fontos eredményt a Riemann-sokaságok globális elméletéből, amelyek a minimális pont tulajdonságain alapulnak. Végül ismertetjük a minimális pont fogalmának egy hasznos általánosítását is.

Legyen M egy teljes Riemann-sokaság és $\gamma: \mathbf{R} \to M$ ennek egy $p = \gamma(0)$ pontból kiinduló geodetikusa. Az exponenciális leképezés alaptulajdonságaiból ([6], I. kötet, 162—172) következik, hogy elég kis pozitív ξ esetén a $[0, \xi]$ zárt intervallumra megszorított γ geodetikus a p pontot az $x = \gamma(\xi)$ ponttal összekötő minimális geodetikus ív. Legyen σ az ilyen ξ értékek szuprémuma; ha a σ véges, a $q = \gamma(\sigma)$ pontot a p ponthoz a γ geodetikuson tarzozó *minimális pont*nak nevezik.

A minimális pont e definícióját lényegében variációszámítási meggondolások motiválják. Kapcsolatba hozható viszont a minimális pont fogalma az exponenciális leképezés viselkedésével és így e fogalom egy másik oldalról világítható meg. Tekintsük ezért egy teljes M Riemann-sokaság egy $\gamma: \mathbf{R} \to M$ geodetikusának $p = \gamma(0)$ pontbeli $v = \dot{\gamma}(0) \in T_p M$ érintővektorát. Mint ismeretes, az M Riemann-sokaság

exp: $TM \to M$ exponenciális leképezésére $\gamma(\tau) = \exp(\tau v)$, $\tau \in \mathbf{R}$ érvényes ([6], I. kötet 146—151). Ha az exponenciális leképezés a $w = \xi v \in T_p M$ pontban szinguláris, vagyis a

$$T_w \exp: T_w T_p M \to T_{\exp(w)} M$$

lineáris érintőleképezés nem injektív, akkor az $r = \exp(w) = \gamma(\xi)$ pontot a p ponthoz a γ geodetikuson *konjugált pont*nak nevezik. Az exponenciális leképezés alaptulajdonságaiból következik, hogy a γ geodetikuson a p ponthoz konjugált pontok között van egy első. A minimális pontok és az ilyen első konjugált pontok között szoros kapcsolat van, amint a következő állításból is látható, amely a minimális pontok és az exponenciális leképezés bizonyos tulajdonságainak kapcsolatát világítja meg ([6], II. kötet 96—102):

ÁLLÍTÁS. *Legyen M teljes Riemann-sokaság, $\gamma: \mathbf{R} \to M$ egy geodetikusa és q a $p = \gamma(0)$ ponthoz tartozó minimális pont a γ geodetikuson. Ekkor a következő két állításból legalább az egyik igaz:*

1. *A q pont a γ geodetikuson a p ponthoz első konjugált pont.*
2. *Az $\exp: T_p M \to M$ leképezés abban a $w \in T_p M$ pontban, melyre $q = \exp(w)$ áll, nem injektív; vagyis van olyan $w' \in T_p M$, melyre $w' \neq w$ és $q = \exp(w')$ érvényesek.*

A minimális pontok és konjugált pontok kapcsolatára vonatkozóan további összefüggések találhatók S. Kobayashi egy ismertető jellegű dolgozatában [7].

A minimális pontok igen fontos tulajdonságaihoz lehet eljutni, ha az egy ponthoz tartozó minimális pontok halmazát tekintjük. Legyen M egy teljes Riemann-sokaság és $p \in M$, ekkor a p pontból kiinduló geodetikusokon a p ponthoz tartozó minimális pontok $M(p)$ halmazát a p ponthoz tartozó *minimális hely*nek nevezik.

A minimális hely általános alaptulajdonságait J. H. C. Whitehead vizsgálta az előzőekben már említett dolgozatában [13], melynek a minimális helyre vonatkozó főeredményeit, a Riemann-sokaságok esetére szorítkozva, a következő tételben lehet összefoglalni.

TÉTEL. *Legyen M egy teljes analitikus m-dimenziós Riemann-sokaság, p egy pontja és $M(p)$ a hozzá tartozó minimális hely, továbbá $E(p)$ az a halmaz, amely a p pontból és a p pontot az $M(p)$ pontjaival összekötő minimális geodetikusok belső pontjaiból áll. Ekkor $E(p)$ egy m-cella, az $E(p)$ és $M(p)$ halmazok diszjunktak az M ezek uniója és $M(p)$ az $E(p)$ halmaz határa az M sokaságban.*

Speciális esetekben lényegesen többet lehet mondani a minimális helyekről. H. Poincaré a már említett dolgozatában [11] azokat a Riemann-sokaságokat vizsgálta, melyeket a 3-dimenziós euklideszi tér analitikus zárt konvex felületeinek belső metrikái állítanak elő, vagyis a 2-dimenziós kompakt egyszeresen összefüggő pozitív görbületű analitikus Riemann-sokaságokat. Dolgozatának a minimális helyekre vonatkozó főeredményét a következő tételben lehet összefoglalni.

TÉTEL. *Legyen M egy 2-dimenziós kompakt egyszeresen összefüggő pozitív görbületű analitikus Riemann-sokaság, ekkor egy p pont $M(p)$ minimális helyére a következők érvényesek:*

1. *Az $M(p)$ nem tartalmazhat egyszerű zárt görbét.*
2. *Az $M(p)$ végpontjai a p ponthoz konjugáltak és a p ponthoz tartozó első konjugált pontok által alkotott analitikus görbének a p pont felé forduló csúcsai.*

3. *Ha az $M(p)$ egy q pontját a p ponttal n-számú minimális geodetikus köti össze, akkor a q pontból az $M(p)$ halmazhoz tartozó n-számú ív indul ki, melyek a szóban forgó geodetikusok szögeit felezik.*

H. Poincaré e szép eredményét S. B. Myers általánosította 2-dimenziós analitikus kompakt és nem kompakt, de teljes Riemann-sokaságok esetére [8]. Főeredményei a következő tételben foglalhatók össze.

TÉTEL. *Legyen M egy 2-dimenziós teljes analitikus Riemann-sokaság, ekkor egy $p \in M$ pont $M(p)$ minimális helyére a következők érvényesek:*

1. *Az $M(p)$ halmaz topológiailag egy véges összefüggő 1-dimenziós komplexus, vagyis egy gráf. Ha M kompakt és egyszeresen összefüggő, akkor $M(p)$ egy fa végesszámú ággal. Ha M nem kompakt és egyszeresen összefüggő, akkor $M(p)$ vagy üres, vagy végtelenbe nyúló ágú fák egyesítése.*

2. *Ha M egyszeresen összefüggő, akkor az $M(p)$ végpontjai a p ponthoz konjugáltak és a p ponthoz tartozó első konjugált pontok által alkotott görbe csúcsai.*

3. *Ha M kompakt, akkor az $M(p)$ minimális hely 1-dimenziós Betti-száma és az M sokaság 1-dimenziós Betti-száma azonos paritásúak.*

Történetileg érdekes, hogy Myers nem tudott Poincaré eredményeiről, amikor e vizsgálatait elkezdte és csak utólag Whitehead révén értesült róluk, tehát újból felfedezte a minimális hely fogalmát. A minimális hely, vagyis „minimal locus" elnevezést is Myers vezette be, maga Poincaré a „ligne de partage" elnevezést használta, míg Whitehead a „cut locus" terminust alkalmazta. Így adódott a terminológia máig tartó kettőssége.

Myers megvizsgálta a fenti tételben szereplő differenciálhatósági feltevések gyengíthetőségének kérdését is. Megállapította, hogy ha az M Riemann-sokaság analitikus volta helyett csak azt tesszük fel, hogy C^4-osztályú, akkor egy $p \in M$ pont $M(p)$ minimális helye általában csak egy folytonos görbe lesz. A minimális hely triangulálhatóságának kérdése azóta is vizsgálat tárgya [4].

A minimális hely tulajdonságain alapuló fontosabb eredményekből itt csak kettőt említünk meg illusztráció céljából. Az egyik a kompakt pozitív-görbületű Riemann-sokaságok topológiai szerkezetének leírása bizonyos, a görbületre kirótt, korlátozás, „pinching" esetén. Ez az eredmény elsősorban M. Berger, W. Klingenberg, H. Rauch és V. A. Toponogov nevéhez fűződik és a minimális hely e sokaságokban jelentkező tulajdonságaival kapcsolatos [3]. A másik eredmény a Riemann-sokaság topológiai szerkezetét e sokaságok geodetikusainak globális viselkedésével hozza kapcsolatba a Blaschke-sokaságok jellemzésével, ahol a minimális helynek ismét lényeges szerepe van [1].

Végül megemlítjük a minimális hely fogalmának egy fontos általánosítását, melynek a részsokaságok nagybani vizsgálatánál van lényeges szerepe.

Legyen M egy teljes Riemann-sokaság és $\varrho: M \times M \to \mathbf{R}$ a távolságfüggvénye. Ha L az M egy kompakt részsokasága, akkor minden $x \in M$ ponthoz tartozik olyan $x' \in L$ pont, melyre

$$\varrho(x, x') = \inf \{\varrho(x, z) | z \in L\} = \varrho(x, L)$$

érvényes és az ilyen x' pontot, amely az x pont L részsokaságtól mért $\varrho(x, L)$ távolságát előállítja, az x pont L részsokaságon levő talppontjának nevezik. E fogalmakkal kapcsolatban ismertek a következő alapvető szerepű tények ([2] 151—152; [14] 485—506):

1. Az x' pontot az x ponttal összekötő bármely minimális geodetikus az L részsokaságra merőleges az x' pontban.

2. Ha az x pontnak az L részsokaságtól mért $\varrho(x, L)$ távolsága elég kicsi, akkor az x pontnak egyetlen x' talppontja van az L részsokaságon és az x' pontot egyetlen minimális geodetikus köti össze az x ponttal.

Az elmondottakon alapul a következő definíció. Legyen M egy teljes Riemann-sokaság, $L \subset M$ egy kompakt részsokasága és $\gamma: \mathbf{R} \to M$ olyan geodetikus, amely az L részsokaságot annak $\gamma(0)=z$ pontjában merőlegesen metszi. Ekkor elég kis ξ pozitív érték esetén az $x=\gamma(\xi)$ pontnak az L részsokaságon egyetlen talppontja van és az a z pont, továbbá, a γ geodetikusnak a $[0, \xi]$ szakaszra való megszorítása az egyetlen minimális geodetikus az x és z pontok között. Legyen σ az ilyen ξ értékek szuprémuma; ha ez véges, akkor a $q=\gamma(\sigma)$ pontot az L részsokasághoz a γ geodetikuson tartozó *minimális pont*nak nevezik. Az L részsokaságot merőlegesen metsző geodetikusokon az L részsokasághoz tartozó minimális pontok $M(L)$ halmazát az L részsokasághoz tartozó *minimális hely*nek nevezik. Ha az L részsokaság speciálisan egyetlen pontból áll, akkor ez a fogalom nyilván az előzőre redukálódik. Az általánosabb fogalom esetére általánosítható az alapösszefüggések egy jó része [2], [14].

Egy Riemann-sokaság kompakt izometriacsoportjának orbitjai kompakt részsokaságok. Így a részsokaságok minimális helyének fogalma esetünkben alkalmazható és felhasználható az orbitok osztályozásánál is [12].

IRODALOM

[1] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed,* Berlin, 1978.
[2] R. L. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of manifolds,* New York, 1964.
[3] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry,* Amsterdam, 1975.
[4] H. Gluck, D. Singer, Geodesic fields and construction of nontriangulable cut loci, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976) 571—574, 599—602.
[5] J. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. Math. Pures Appl.* **4** (1898), 27—73.
[6] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* I, II New York, 1963, 1969.
[7] S. Kobayashi, On conjugate and cut loci, *Studies in Global Geometry and Analysis,* Math. Soc. Amer. 1967, 96—122.
[8] S. B. Myers, Connection between differential geometry and topology 1, 2, *Duke Math. J.* **1** (1935) 376—391; ibid. **2** (1936), 95—102.
[9] H. Poincaré, Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.* **13** (1890) 1—270.
[10] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Paris, 1899.
[11] H. Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **5** (1905) 237—274.
[12] J. Szenthe, On the cut locus of a principal orbit in a Riemannian manifold of non-positive sectional curvature, *Előkészületben.*
[13] J. H. C. Whitehead, On the covering of a complete space by the geodesies through a point, *Ann. of Math.* **36** (1935) 679—704.
[14] М. М. Постников, *Введение в Теорию Морса,* Москва, 1971.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛНОСТИ И БЛИЯИИ Х. ПУАНКАРЕ

МАТЯШ БОГНАР И ЯНОШ СЕНТЕ

H. POINCARÉ'S MATHEMATICAL WORK AND ITS EFFECT

M. BOGNÁR AND J. SZENTHE

BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK PRÍMFAKTORAIRÓL

ERDŐS PÁL

Tchebicheff egy ismert tétele szerint minden $k>1$-re k és $2k$ között mindig van prímszám. Sylvester és tőle függetlenül Schur bebizonyították, hogy ha $n \geqq 2k$, akkor $P\left(\binom{n}{k}\right)>k$, ahol $P(m)$ m legnagyobb prímfaktorát jelöli. E tétel Tchebicheff tételének messzemenő általánosítása.

Egy nemrég megjelent cikkben Ecklund, Eggleton, Selfridge és a szerző [1] e tétel következő élesítését bizonyították be. Jelölje $p(m)$ az m legkisebb prímfaktorát. Legyen $(n \geqq 2k)$

$$\binom{n}{k} = uv, \quad \text{ahol} \quad P(u) < k, \; p(v) \geqq k. \tag{1}$$

Az (1) alatti előállítás természetesen egyértelmű. Fennáll $v>u$, kivéve a következő 12 esetet:

(2)

$$\binom{8}{3}, \binom{9}{4}, \binom{10}{5}, \binom{12}{5}, \binom{21}{7}, \binom{21}{8}, \binom{30}{7}, \binom{33}{13}, \binom{33}{14}, \binom{36}{13}, \binom{36}{17}, \binom{56}{13}.$$

Azaz, más szóval ezen kivételektől eltekintve $\binom{n}{k}$ „nagy" prímfaktorainak adaléka nagyobb, mint a kis prímfaktorok adaléka. (1)-ben u és v helyett tulajdonképpen $u(n;k)$ és $v(n;k)$ lett volna a pontosabb jelölés, de ahol félreértés veszélye nincs, ott u és v-nél maradunk.

Legyen mármost

$$\binom{n}{k} = UV, \quad \text{ahol} \quad P(U) \leqq k, \; p(V) > k. \tag{1'}$$

Bebizonyítottuk, hogy $V>U$, véges sok kivételtől eltekintve. Precízebben: ha $k \neq 3$, 5 vagy 7, akkor $V>U$ kivéve a (2) alatti eseteket, ha $k=3$, 5 vagy 7 is lehet, még a következő kivételeket találtuk.

$$\binom{9}{3}, \binom{10}{3}, \binom{18}{3}, \binom{28}{5}, \binom{54}{3}, \binom{82}{3}, \binom{162}{3}. \tag{2'}$$

Biztosra vesszük, hogy több kivétel nincs, de ezt nem tudtuk bebizonyítani, mert Mahler egy alapvető tételének nem ismeretes effektív formája.

Mahler [1] tétele szerint minden $\varepsilon>0$ és k-hoz van oly $n_0=n_0(k,\varepsilon)$, melyre minden $n>n_0$ esetén az (1) és (1′) előállításban

$$u < n^{1+\varepsilon},\quad U < n^{1+\varepsilon}. \tag{3}$$

A tétel nem effektív, mert n_0 függését ε és k-tól nem tudjuk a tudomány mai állása mellett megadni. (3)-mal kapcsolatos problémákra még visszatérünk.

[1]-beli tételeink bizonyítása igen komplikált; a nehézség fő oka az volt, hogy ragaszkodtunk az összes kivételes esetek felsorolásához, minden sokkal egyszerűbb lett volna, ha megelégszünk avval, hogy $v>u$, illetve $V>U$ véges sok kivételtől eltekintve.

Legyen mármost

$$\binom{n}{k} = U\cdot V\cdot W, \quad \text{ahol} \quad P(U)\leqq k,\ p(V)>k, \quad \text{de} \quad P(V)\leqq n-k \tag{4}$$

$$W = \prod_{n-k<p\leqq n} p.$$

[2]-ben bebizonyítottam, hogy ha C elegendő nagy abszolút konstans és $n>Ck$, $k\geqq 4$, akkor $V>\max(U,W)$. A bizonyítás sokkal könnyebb, mint [1]-ben, mert C kis értékeit figyelmen kívül hagytuk. E cikkben először is bebizonyítjuk a következő tételt.

I. Tétel. *Legyen* $\max(U,V,W)=M$. *Ha* $k>3$, *akkor véges sok* n, k *számpároktól eltekintve* $M\neq U$.

A tétel bizonyítása nem lesz nehéz, mert a kivételes esetek felsorolását meg se kíséreljük (ennek nemcsak a szerző öregsége, lustasága és butasága, továbbá számológépek hiánya az oka [ez utóbbin könnyű lenne segíteni], hanem, amint már említettük, Mahler tételének ineffektivitása az oka).

Most rátérünk az I. tétel bizonyítására. Először is megjegyezzük, hogy $k=3$ esetén valószínűleg végtelen sok n-re $M=U$. Igen valószínű ugyanis, hogy végtelen sok Mersenne-féle prímszám van — azaz végtelen sok oly p prímszám van, melyre 2^p-1 is prímszám. Előadásaimban félig tréfásan, félig komolyan szoktam mondani: ez talán a legnehezebb (bár nem a legsürgősebb) megoldatlan probléma, mellyel az emberiség szembenéz. Jelen pillanatban a legnagyobb ismert prímszám $2^{44497}-1$. Világos mármost, hogy ha 2^p-1 egy Mersenne-féle prímszám, akkor ha $n=2^p$, $k=3$, akkor $U\geqq 2^p$, $W=2^p-1$ és $V\leqq(2^p-2)/6$, s így $U=M$. Valószínűleg $k=3$ esetén még végtelen sok más eset is van, hol $U=M$, de ily esetek csak akkor lehetségesek, ha végtelen sok $2^\alpha 3^\beta\pm 1$ alakú prímszám van, s ennek eldöntése szintén reménytelennek látszik.

Ezúttal valóban rátérünk az I. tétel bizonyítására. Először is néhány egyenlőtlenségre lesz szükségünk. Jól ismert [3] és Legendre formulájából azonnal következik, hogy $(p^\alpha \| m$ azt jelenti, hogy $p^\alpha | m$, de $p^{\alpha+1}\nmid m)$

$$p^{\alpha_p}\leqq n, \quad \text{ahol} \quad p^{\alpha_p}\Big\|\binom{n}{k}. \tag{5}$$

(5)-ből azonnal következik, hogy minden n, k számpárra

$$U\leqq n^{\pi(k)}. \tag{6}$$

Mahler tétele szerint viszont minden ε és k-hoz van oly $n_0 = n_0(\varepsilon, k)$, melyre, ha $n > n_0$, akkor

$$U < n^{1+\varepsilon}. \tag{7}$$

Egyszerű számolással nyerjük, hogy ha $n > n_0$ és $n \geqq 2k$, $k > 3$, akkor

$$\binom{n}{k} > \frac{n^4}{30}. \tag{8}$$

(7) és (8)-ból azonnal adódik, hogy minden fix $k > 3$ esetén csak véges sok n-re lehet $U = M$, de ezen kivételes értékek felsorolása egyelőre nem lehetséges. Így tehát feltehetjük, hogy $k > k_0$, ahol k_0 tetszőlegesen nagy. Bebizonyítjuk, hogy ha $n > e^5 k$ és $k > k_0$, akkor $M \neq U$. A bizonyításból világos lesz, hogy itt k_0 értékét könnyen meg lehetne határozni. Ha $n > e^5 k$, akkor $n > k^{1+5/\log k}$ és ezért

$$\binom{n}{k} > \frac{n^k}{k^k} > n^{4k/\log k} \tag{9}$$

minthogy $k > k_0$-ra $\pi(k) < \frac{4k}{3 \log k}$. Ez azonnal következik a prímszámtételből, de enélkül is könnyen bizonyítható.

(6) és (9)-ből azonnal nyerjük, hogy ezen esetekben $M \neq U$. Ezek után tehát feltételezhetjük, hogy $k > k_0$ és $2k \leqq n \leqq e^5 k$. Kimutatjuk, hogy ezekre az n, k számpárokra

$$W > U. \tag{10}$$

(10)-ből tételünk azonnal következik. A prímszámtételből egyszerű számolással nyerjük, hogy ezekre a k, n számpárokra

$$W = \prod_{n-k < p \leqq n} p > e^{k(1-\varepsilon)} \tag{11}$$

ha $k > k_0(\varepsilon)$. (11) Rosser és Schönfeld eredményeinek segítségével könnyen effektivizálható volna. (5)-ből viszont nyerjük, hogy minden k és n számpárra ($\pi(m)$ a prímszámok száma m-ig)

$$U \leqq n^{\pi(n^{1/2})} \prod_{p \leqq k} p < n^{\pi(n^{1/2})} e^{k(1+\varepsilon)}. \tag{12}$$

$n < Ck$ esetén (12) könnyen élesíthető, ugyanis ebben az esetben könnyen találunk egy αk ($\alpha = \alpha(C)$ hosszúságú részintervallumát $(1, k)$-nak, melyben $p \nmid \binom{n}{k}$. Legyen ugyanis r az a legkisebb szám, melyre $\frac{n}{r} < k$. Nyilván ha

$$\frac{n}{r} < p \leqq k, \tag{13}$$

akkor $p \nmid \binom{n}{k}$, ugyanis $(r-2)\,k < n-k, r$ definíciója miatt, s így $\binom{n}{k}$ számlálója és nevezője p-nek pontosan első hatványával osztható. Ha $\frac{n}{r} \geqq p > \frac{n-k}{r-1}$, akkor

viszont $p \mid \binom{n}{k}$. Ha azonban

$$\frac{n-k}{r-1} \geqq p > \frac{n}{r+1} \tag{14}$$

akkor megint $p \nmid \binom{n}{k}$. A (13) és (14) intervallumoknak legalább egyike nagyobb, mint $\frac{k}{r^2-1}$. Ez triviális és így látható be: (13) hossza $\frac{rk-n}{r}$, (14) hossza $\frac{2n-(r+1)k}{r^2-1}$. A két számláló összege $n-k \geqq k$, s ezért legalább az egyik intervallum nagyobb, mint $k/(r^2-1)$. Minthogy $C < e^5 k$, intervallumunk hossza nagyobb, mint ke^{-10}. Mondanunk se kell, hogy e becslések nagyon durvák és messzemenően élesíthetők, de céljainknak a gyenge becslés is megfelel.

A prímszámtétel miatt egy ke^{-10} hosszúságú I intervallum, mely k alatt van, $(1+o(1))\, ke^{-10}(\log k)^{-1}$ prímszámot tartalmaz és így (12)-ből egyszerű számolással nyerjük, hogy ($\exp z = e^z$)

$$U = n^{\pi(n^{1/2})} \exp\left(k(1-e^{-10})+2\varepsilon\right) < \exp\left(k(1-e^{-10})+3\varepsilon\right). \tag{15}$$

(11) és (15)-ből $k > k_0$ esetén (10) azonnal következik, s ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

II. Tétel. *Legyen $\delta > 0$ tetszőleges pozitív szám. Ha $k > k_0(\delta)$ és $n < \left(\frac{14}{3} - \delta\right) k$,* akkor a (4) előállításban $M = W$, ha viszont $n > \left(\frac{14}{3} + \delta\right) k$, akkor $M = V$.

Legyen először $n > 10^4 k$. Montgomery és Vaughan egy ismert tétele szerint

$$\pi(n) - \pi(n-k) < \frac{2k}{\log k}. \tag{16}$$

(16) és (6) miatt tehát

$$UW < n^{\pi(k)+2k/\log k} < n^{4k/\log k}.$$

$n > 10000k$ esetén azonban egyszerű számolással adódik, hogy

$$\binom{n}{k} > \frac{n^k}{k^k}$$

és így, ha $n > 10000k$, akkor $V > UW$, azaz $M = V$.

Ha $n \leqq 10000k$ és $k > k_0$, akkor a prímszámtételből egyszerű számolással adódik, hogy

$$W < \exp k(1+o(1)). \tag{17}$$

Ha $n > \left(\frac{14}{3} + \delta\right) k$, akkor

$$V \geqq \Pi_1 p \cdot \Pi_2 p \cdot \Pi_3 p,$$

ahol Π_1-ben $\frac{n}{2} \geqq p > \frac{n-k}{2}$, Π_2-ben $\frac{n}{3} \geqq p > \frac{n-k}{3}$ és Π_3-ben $\frac{n}{4} \geqq p > \frac{n}{4} - \left(\frac{1}{6} + \frac{\delta}{4}\right)k$, s így a prímszámtétel miatt

$$V > \exp\left(k\left(1 + \frac{\delta}{4} + o(1)\right)\right). \tag{18}$$

Azaz (17) és (18) miatt $M=V$. Ugyanígy adódik, hogy $n<\left(\frac{14}{3}-\delta\right)k$ esetén $M=W$, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

V „hatalomátvétele" $n=\frac{14k}{3}$ közelében valószínűleg nem megy teljesen simán, valószínűleg amint n növekszik, többször $M=V$ és azután megint $M=W$. Ezeket az eseményeket nem próbáltam követni, de bizonyára hiába is próbálnám, mert elkerülhetetlenül belejönnének a prímszámok lokális eloszlására vonatkozó problémák.

III. Tétel. *Ha* $k>10$, *vagy* $k=6, k=8$ *és* $n>n_0(k)$, *akkor* $M=V$.

A III. tétel bizonyítása nagyon egyszerű. Könnyen belátni, hogy ha $k\geqq 10$, akkor $\pi(n)-\pi(n-k)\leqq\frac{k}{2}-1$, és ezért

$$W < n^{\frac{k}{2}-1}. \tag{19}$$

Tehát

$$U < n^{1+\varepsilon} \quad \text{és} \quad \binom{n}{k} > \frac{n^k}{k^k}$$

miatt azonnal adódik, hogy $V>n^{\frac{k}{2}-2\varepsilon}$. Ha $k=6$, akkor $\pi(n)-\pi(n-6)\leqq 2$ miatt $V>n^{3-2\varepsilon}$, és ha $k=8$, akkor $\pi(n)-\pi(n-3)\leqq 3$ miatt $V>n^{4-2\varepsilon}$, és ezért (19) miatt a III. tétel be van bizonyítva.

Vizsgáljuk most a kimaradt eseteket. Ha $k=1$, akkor $U=1$, ha $n=p$, $W=M$, ha $n\neq p$, $V=M$, ez az eset természetesen triviális.

Ha $k=2$ és $n=p$ vagy $n=p+1$, akkor $M=W$. Minden más esetben $M=V$.

Ha $k=3$, akkor már láttuk, hogy valószínűleg végtelen sokszor $M=W$ lehetséges. Ha végtelen sok ikerprímszám van, akkor $k=3$ vagy $k=4$ esetén végtelen sok n-re $M=W$. Nyilván $k=3$ vagy $k=4$ esetekben majdnem minden n-re $M=V$.

Még sejteni se lehet, hogy ha $k=5$, akkor van-e végtelen sok n, melyre $M=W$. Ha végtelen sok n-re az $n, n-1, n-2, n-3, n-4$ számok között két prímszám van és ugyanakkor $U>cn^{1/2}$, akkor ezen n-ekre $M=W$; úgy gondolom, hogy végtelen sok ily n van, de e kérdés eldöntésére belátható időn belül semmi remény sincs.

$k=7$ és $k=9$-re ugyanilyen a helyzet.

Érdekes és nem triviális problémákra jutunk, ha U-t V-vel hasonlítjuk össze. Fix k mellett majdnem minden n-re $W=1$. Jelenlegi tudásunk alapján nem bizonyítható, hogy van oly k, melyre végtelen sok n-re $W>n$, ebből ugyanis következne, hogy $\liminf(p_{n+1}-p_n)<\infty$ (p_n az n-edik prímszám).

Könnyű belátni, hogy azon n-ek sűrűsége, melyekre (fix k mellett) $U=1$ pozitív, de k-val együtt 0-hoz tart, s így végtelen sok n-re $U=W=1$. Legyen n_k, illetve m_k az a legkisebb szám, melyre $U=1$, illetve $W=1$, N_k az a legkisebb szám, melyre $U=W=1$. Nem világos, hogy n_k és m_k közül melyik a nagyobb, és az se világos, hogy van-e végtelen sok k, melyre $n_k=m_k=N_k$. Lehet, hogy a válasz itt nem lesz nehéz.

A prímszámtétel Hoheisel-féle formájából könnyen következik, hogy n_k és m_k mindketten nagyobbak, mint k^{1+c}, de biztosra vehető, hogy gyorsabban tartanak a végtelenhez, mint k minden fix hatványa. $n_k^{1/k}\to 1$, $m_k^{1/k}\to 1$ fennállnak

és valószínűleg $N_k^{1/k} \to 1$ is igaz. Ezen állításokkal itt nem foglalkozunk. Nem lehetetlen, hogy $k > k_0$ esetén $m_k > n_k$, de ez is egyelőre reménytelennek látszik.

Legyen $n_0(k)$ az a legkisebb szám, melyre

$$W(n_0(k); k) < U(n_0(k); k).$$

A Hoheisel-féle prímszámtételből könnyen következik, hogy $n_0(k) > k^{1+c}$, de nagyon valószínű, hogy $n_0(k)$ is gyorsabban tart a végtelenhez, mint k minden hatványa. Sejtem azonban

$$n_0(k) < \min(n_k, m_k). \tag{20}$$

Az olvasó aligha lesz meglepve, hogy (20) bizonyítására jelenleg nem látok járható utat.

A Hoheisel-féle prímszámtétel azt állítja, hogy ha $c > 0$ elegendő kicsi, akkor

$$\pi(n + n^{1-c}) - \pi(n) = (1 + o(1)) \frac{n^{1-c}}{\log n}.$$

Erre vonatkozólag lásd Prachar ismert könyvét: Primzahlverteilung, Springer Verlag.

Világos, hogy azon n-ek sűrűsége, melyekre $U_k > W_k$ $1 - \varepsilon_k$, ahol $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$ (ui. ha $U_k > 1$, akkor majdnem mindig $U_k > W_k = 1$). Könnyű belátni, hogy ha $W_k > 1$, akkor $o(\pi(x))$ $n < x$ érték kivételével $W_k > U_k$. Valószínűnek látszik, hogy minden $k > 3$-ra végtelen sok oly n van, melyre

$$U_k > W_k > 1 \tag{21}$$

de (20) bizonyítása nem látszik könnyűnek. Azonnal nyerhető viszont, hogy ha $W_k > n$, akkor (20)-nak n-ben csak véges sok megoldása van. Ha ugyanis $W_k > n$, akkor nyilván $\pi(n) - \pi(n-k) \geqq 2$ és így ez esetben már $W_k > (n-k)^2$. Mahler már idézett tétele miatt viszont $U_k < n^{1+\varepsilon}$, ha $n > n_0(k, \varepsilon)$, és ebből már állításunk következik.

Első pillanatban nem láttam, hogy kellene bizonyítani azt az állítást, hogy végtelen sok oly n, k számpár van, melyre

$$U(n; k) > W(n; k) > 1. \tag{22}$$

Világos volt, hogy (22) sokkal könnyebb, mint (21). Általánosabban remélhető, hogy minden r-re van végtelen sok n, k számpár, melyre

$$U(n; k) > W(n; k) > n^r. \tag{23}$$

((23) esetén $\pi(n) - \pi(n-k) > r$). (22)-t és (23)-at megírtam E. Strausnak, mint nyitott problémát. (22)-t, még mielőtt a válasz megjött volna, egy átlagolással bebizonyítottam és elég mély segédeszközöket használtam, de (23)-at nem tudtam bebizonyítani. Straus levele viszont (22)-re a következő, rendkívül egyszerű bizonyítást adta: Legyen $n = 2^u$ és $p^{(u)}$ a legnagyobb prímszám, mely 2^u-nál kisebb. Továbbá $k = 2^u - p^{(u)} + 2$. k páratlan és ezért $\binom{n}{k} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ s így $U(n; k) \geqq n = 2^u$, $W(n; k) = p^{(u)} < n$, és ezzel (22) be is van bizonyítva. Ezzel bizonyításom persze feleslegessé vált, de úgy éreztem, hogy valami ötlet azért volt benne és nem akartam mindent feladni. Néhány sikertelen kísérlet után tényleg sikerült (23) bizonyítása.

IV. Tétel. *Minden r-hez van végtelen sok n, k számpár, melyekre* (23) *fennáll.*

A IV. tétel bizonyításához elsősorban is szükségünk van egy talán önmagában is érdekes lemmára.

LEMMA. *Létezik egy* C *abszolút constans, melyre*

$$\prod_{i=1}^{k} U(n+i;k) > \exp(Ck^2). \tag{24}$$

Lemmánk bizonyítása egy egyszerű átlagolással történik. Legyen $\frac{k}{2}<p<\frac{2k}{3}$. Könnyű belátni, hogy azon $1\leqq i\leqq k$ indexek száma, melyekre $p|U(n+i;k)$ nagyobb, mint ck. $\binom{n+i}{k}$ nevezője ugyanis p-nek pontosan első hatványával osztható, viszont a számláló legalább p^2-tel osztható, ha az $(n+i-k+1,\ n+i)$ intervallumban p-nek két többszöröse fordul elő. Ezen i indexek száma $(1\leqq i\leqq k)$ nyilván nagyobb, mint c_1k. Így mármost

$$\prod_{i=1}^{k} U(n+i;k) > \Big(\prod_{\frac{k}{2}<p<\frac{2k}{3}} p\Big)^{c_1k} > \exp(Ck^2),$$

s ezzel lemmánk be van bizonyítva.

Lemmánkból azonnal következik, hogy van oly i_0, $1\leqq i_0\leqq k$, melyre

$$U(n+i_0;k) > \exp(Ck). \tag{25}$$

(25)-ből a IV. tétel könnyen levezethető. Legyen

$$t_x = \max_{p_{r+1}\leqq x} (p_{r+1}-p_r).$$

Rankin egy ismert tétele alapján

$$t_x > c\log x\log\log x\log\log\log\log x(\log\log\log x)^{-2}. \tag{26}$$

A IV. tétel bizonyításához elég lenne $t_x/\log x\to\infty$, melyet már Westzynthius is ismert. Tekintsük a

$$(p_{r+1}-2^{s+1}t_x,\ p_{r+1}-2^st_x),\quad s=0,1,\ldots \tag{27}$$

intervallumokat. Legyen $s=s_r$ az a legkisebb szám, melyre (27) legalább $r+1$ prímszámot tartalmaz.

Nyilván t_x maximumtulajdonsága miatt $s_r\leqq\frac{\log r}{\log 2}+1$. Legyen Z az a legkisebb szám, melyre a $(Z, p_{r+1}-2^st_x)$ intervallum pontosan $r+1$ prímszámot tartalmaz. $s=s_r$ minimumtulajdonsága és $s_r\leqq\frac{\log r}{\log 2}+1<r\ (r>r_0)$ miatt a (Z, p_{r+1}) intervallumban legfeljebb $(r+1)^2$ prímszám van.

Most alkalmazzuk (25)-öt $k=\frac{p_{r+1}-Z}{2}>\frac{t_x}{2}$, $n=\frac{p_{r+1}+Z}{2}$ esetén. Minthogy $n+i_0\leqq p_{r+1}$, és a (Z, p_{r+1}) időintervallumban legfeljebb $(r+1)^2$ prímszám van, azonnal nyerjük, hogy

$$W(n+i_0;\ k) < (n+i_0)^{(r+1)^2} \leqq p_{r+1}^{(r+1)^2}. \tag{28}$$

Másrészt azonban (25) és (26) miatt $(k > t_x/2, p_{r+1} \leqq x)$

$$U(n+i_0; k) > (\exp ct_x/2) > p_{r+1}^{(r+1)^2}.$$

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

Nem lenne érdektelen meghatározni (de legalább is jó becslést találni) $n = n_r$ legkisebb értékére, melyhez van oly $k = k_r$, hogy (23) teljesül, pl. $\binom{127}{18}$ mutatja, hogy $n_1 \leqq 127$ ($n_1 = 127$ valószínűleg igaz, n_1 pontos értékét egyszerű próbálgatással könnyű lenne meghatározni).

Még néhány kérdés: A Hoheisel-féle prímszámtételből könnyen következik, hogy ha $c > 0$ elegendő kicsi és $2k \leqq n < k^{1+c}$, akkor ha $k \to \infty$, akkor n-ben egyenletesen fennáll

$$W(n; k)^{1/k} \to e.$$

Legyen $n_1(\varepsilon, k)$, illetve $n_2(\varepsilon, k)$ legkisebb értéke, melyre

$$W(n_1(\varepsilon, k); k) > (e+\varepsilon)^k, \quad \text{illetve} \quad W(n_2(\varepsilon, k); k) < (e-\varepsilon)^k.$$

Valószínűleg $n_1(\varepsilon, k)$ és $n_2(\varepsilon, k)$ mindketten gyorsabban tartanak a végtelenhez, mint k minden fix hatványa. Egyáltalán nem világos, hogy $n_1(\varepsilon, k)$ és $n_2(\varepsilon, k)$ közül melyik a nagyobb — lehet, hogy ez ε-tól is függ. Talán e kérdés reménytelen, de még nem volt időm (s ötletem se), hogy gondosan átgondoljam. $U(n; k)$ és $W(n; k)$ nagyon szabálytalanul változnak fix k és $n \to \infty$ mellett. Mindkettő végtelen sokszor 1 és felső korlátjuk végtelen. Ezzel szemben könnyű belátni, hogy minden $k > 3$-ra $V(n; k) \to \infty$. Talán ez már $k = 3$-ra is igaz. Ha $k = 3$ $V(n; k)$, akkor és csak akkor lehetne korlátos, ha van olyan t, melyre $t\, 2^\alpha 3^\beta \pm 1$ α és β végtelen sok értékére mindkettő prímszám és ennek eldöntése véges időn belül aligha remélhető. Legyen $m(n)$ az a legnagyobb szám, melyre

$$V(m(n); k) \leqq V(n; k).$$

Mi mondható ki $m(n)$-ről? Igaz-e, hogy $m(n)/n \to 1$? Nem lehetetlen viszont hogy $\limsup_{n\to\infty} m(n)/n = \infty$.

Sokan foglalkoztak a Sylvester—Schur-tétel egy más irányú általánosításával. Legyen $f(k)$ az a legkisebb szám, melyre minden $n \geqq k$-ra

$$P\left(\prod_{i=1}^{f(k)} (n+i)\right) > k.$$

Sylvester—Schur-tétel szerint $f(k) \leqq k$. Bebizonyítottam [4], hogy $f(k) < ck/\log k$. A jelenlegi rekord Shoreytől való [6], aki bebizonyította, hogy

$$f(k) < c \frac{k}{\log k} \frac{\log\log\log k}{\log\log k}.$$

Sejthető, hogy $f(k) < C(\log k)^2$, ez azonban mai eszközeinkkel nem támadható. Az olvasó gondolhatná, hogy e problémák mind reménytelenek. Szerencsére ez azért nem teljesen van így, s az utóbbi években két százéves kérdés egymásután következő számokról nyert elintézést. Catalan a 19-edik század végén sejtette, hogy 8 és 9 az

egyetlen két egymásután következő hatványszám. Nagyon könnyű belátni, hogy négy egymásután következő szám nem lehet mindegyik hatványszám, ugyanis az egyik csak 2 első hatványával osztható. Lényegesen nehezebb bebizonyítani, hogy három egymásután következő szám se lehet sohasem hatványszám. Ezt kb. 20 éve Cassels és Makowski bebizonyították. Végül nemrég Tijdemann [7] bebizonyította, hogy van explicit módon kiszámítható c constans úgy, hogy nincs c-nél nagyobb két egymásután következő hatványszám. Tijdeman Baker mély eredményeit használja. Biztosra vehető, hogy rövidesen Catalan eredeti sejtése be lesz bizonyítva.

Legyenek $x_1<x_2<\ldots$ a nagyság szerint rendezett hatványszámok sorozata. Biztosra vehető, hogy létezik oly c, amelyre minden i-re

$$x_{i+1}-x_i > x_i^c. \tag{27}$$

(27) bizonyítása a ma rendelkezésünkre álló eszközökkel nem remélhető. Choodnovskynek talán sikerült bebizonyítani, hogy $x_{i+1}-x_i \to \infty$. Kérdezhető, hogy egy k hosszúságú intervallumba maximálisan hány x_i eshetik? Valószínűnek látszik, hogy $k>k_0$ esetén $0<n\leqq k$ az az intervallum, mely a legtöbb hatványszámot tartalmazza. Valószínűleg e kérdés elintézése nem lesz könnyű.

A múlt század elejére vagy közepére megy vissza az a sejtés, hogy egymásután következő számok szorzata sohasem lehet hatványszám. Néhány éve e sejtést Selfridgevel bebizonyítottuk. Bizonyításunk elemi, de eléggé komplikált [5].

Legyen $A(n;k)=\prod_{i=1}^{k}(n+i)$ és $B(n;k)$ az $n+1, \ldots, n+k$ számok legkisebb közös többszöröse. Selfridgevel sejtettük, hogy ha $k>3$, akkor $A(n;k)$-nak mindig van oly $p>k$ prímfaktora, melyre $p^2 | A(n;k)$. Egyelőre e sejtés is megtámadhatatlannak látszik. Néhány év óta sejtem, hogy ha $m\geqq n+k$, akkor $B(n;k)\neq B(m;k)$. E sejtés se látszik könnyűnek.

Igaz-e, hogy van végtelen sok oly p prímszám, melyre minden $1\leqq k\leqq p/2$ esetén

$$W(p;k) > U(p;k). \tag{29}$$

Azt sejteném, hogy van végtelen sok p, melyre (29) fennáll. Biztosra vehető, hogy végtelen sok oly p van, melyre (29) nem teljesül minden k-ra; ha p a legkisebb 2^u-nál nagyobb prímszám, akkor biztosra vehető, hogy (29) $u>u_0$-ra nem áll fenn — ezt talán nem lesz nehéz bebizonyítani.

IRODALOM

[1] E. F. Ecklund, Jr. R. B. Eggleston, P. Erdős and J. L. Selfridge, On the prime factorisation of binomial coefficients. *J. Austral Math. Soc.* (Ser. A) **26** (1978), 257—269. E cikk részletes irodalmi összeállítást is tartalmaz.

[2] P. Erdős, Some unconventional problems in number theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **33** (1979), 71—80.

[3] P. Erdős, Beweis eines Satzes vonTscebyschef, *Acta Szeged* **5** (1932), 194—198.

[4] P. Erdős, On consecutive integers, *Niemv Arch. Wisk.* (3) **3** (1955), 124—128.

[5] P. Erdős and J. L. Selfridge, The product of consecutive integers is never a power, Ill. *J. Math.* **19** (1975), 292—301. E cikk is részletes irodalmi összeállítást is tartalmaz.

[6] T. N. Shorey, On gaps between numbers with a large prime factor. II. *Acta Arithmetica,* **25** (1974), 365—373.

[7] R. Tijdeman, On the equation of Catalan, *Acta Arithmetica,* **29** (1976), 197—209.

Talán most még felsorolom hasonló témával foglalkozó cikkeim jegyzékét:

P. Erdős, Über die Änzahl der Primfaktoren von $\binom{n}{k}$, *Archiv der Math.* **24** (1973), 53—56.

P. Erdős, Problems and results on consecutive integers, *Publ. Math.* Debrecen, **23** (1976), 271—282.

P. Erdős, H. Gupta and S. P. Khare, On the number of distinct prime factors of $\binom{n}{k}$.

P. Erdős and J. Selfridge, Some problems on the prime factors of consecutive integers, *Illinois J. Math.* **11** (1967), 428—430.

P. Erdős and R. L. Graham, On the prime factors of $\binom{n}{k}$, *Fibonacci Quarterly* **14** (1976), 348—352.

P. Erdős and A. Sárközy, On the prime factors of $\binom{n}{k}$ and of consecutive integers, will soon appear in *Utilitas Math.*

О ПРИМАРНЫХ ФАКТОРАХ БИНОМИНАЛЬНЫХ КОЭФФИУМЕНТВ

ПАЛ ЭРДЁШ

ON PRIME FACTORS OF BINOMIAL COEFFICIENTS

P. ERDŐS

MOZAIKOK, AMELYEKBEN MINDEN LAPNAK UGYANANNYI SZOMSZÉDJA VAN

BEZDEK KÁROLY

Tekintsük konvex sokszögeknek egy halmazát, amelyek a síkot egymás átfedése nélkül hézagmentesen kitöltik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a sokszögek mozaikot alkotnak. A sokszögeket a mozaik lapjainak nevezzük. Legyen l a mozaik egy lapja, s tekintsük l szomszédait, vagyis azokat a lapokat, amelyeknek l-lel közös határpontjuk van. Ha minden lapnak ugyanannyi, mondjuk N, szomszédja van, akkor N-szomszédos mozaikról beszélünk.

A három szabályos mozaik példát ad egybevágó lapokból álló 6-, 8- és 12-szomszédos mozaikra. Ezen mozaikok lapjainak részsokszögekre való alkalmas bontásával példát nyerünk egybevágó konvex lapokból álló 7-, 9-, 10-, 14-, 16- és 21-szomszédos mozaikokra. Fejes Tóth László [1] felvetette azt a kérdést, hogy létezik-e a felsorolt szomszédsági számoktól különböző N-re kongruens konvex lapokból álló N-szomszédos mozaik. Az alábbiakban ezt a kérdést azzal a feltétellel vizsgáljuk, hogy a lapok teljes oldalak mentén csatlakoznak.

1. TÉTEL. *Teljes oldalak mentén csatlakozó, egybevágó konvex lapokból álló N-szomszédos mozaik N-nek csak az alábbi értékeire létezik:*

$$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 21.$$

Bizonyítás: Ismert tény, hogy egybevágó konvex lapokból álló mozaik csak háromszög, négyszög, ötszög vagy hatszög lapot tartalmazhat. Rövidség kedvéért a vizsgálat tárgyát képező teljes oldalak mentén csatlakozó, egybevágó konvex n-szögekből álló N-szomszédos mozaikokat nevezzük N_n típusúaknak ($n \leqq 6$). Egy ilyen mozaik csúcspontjaihoz — vagyis a lapok csúcspontjaihoz — rendeljük hozzá azokat a pozitív egészeket, amelyek megmutatják, hogy az illető csúcspontban hány konvex lap találkozik. Ezeket a 3-nál nem kisebb egész számokat a megfelelő csúcspont fokának nevezzük. Ha most egy adott N_n típusú mozaik minden egyes lapjához hozzárendeljük az illető lap csúcspontjainak fokaiból alkotott szám n-est, akkor — lévén, hogy az adott mozaik egy fix szomszédsági számmal (N) rendelkezik — e szám n-esek között csak véges sok különböző van. (Számunkra érdektelen a szám n-esen belül az egészek sorrendje.) A továbbiak előtt egy segédállítást ismertetünk.

[1] L. FEJES TÓTH, Tessellation of the plane with convex polygons having a constant number of neighbours. Amer. Math. Monthly 82 (1975) 273—276.

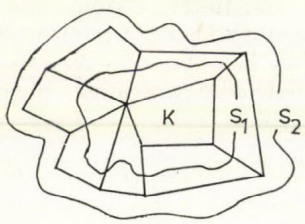
LEMMA: *Nincsen olyan* N_n *típusú mozaik, melyben az egyes lapokhoz rendelt, az illető lap csúcspontjainak fokaiból alkotott reciprokösszegek* (jel. $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_m$) *olyan tulajdonságúak, hogy*

vagy $\forall i$*-re* $1 \leqq i \leqq m$ *esetén* $\sum_i < \frac{n}{2} - 1$,

vagy $\forall i$*-re* $1 \leqq i \leqq m$ *esetén* $\sum_i > \frac{n}{2} - 1$.

Megjegyzés. Ha egy lap csúcspontjainak fokai $a_1, \ldots, a_n$, akkor az illető laphoz rendelt reciprokösszeg alatt, természetesen az $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ összeget kell érteni.

A lemma bizonyítása (indirekt): Tegyük fel, hogy létezik egy ilyen N_n típusú mozaik. Szemeljük ki e mozaik egy tetszőleges K lapját (1. ábra).
Most definiálni fogunk $S_0, S_1, S_2, \ldots$ szimbólumokkal jelölt, a mozaik bizonyos lapjaiból álló úgynevezett gyűrűsorozatot. Ez a következőképp történik. S_0 álljon egyedül a K lapból. S_1-be először is tartozzanak bele azok a konvex n szögek, melyek szomszédosak K-val. Ezután vizsgáljuk meg, hogy az eddig felsorolt lapok egyesítési halmazának komplementuma — mely nyílt halmaz — hány komponensre esik szét. (A komponensekre való bontás alapja az összefüggőség.) Vegyük az összes korlátos komponenst és töltsük ki ezeket a mozaik megfelelő lapjaival, melyeket egyben hozzászámítunk S_1-hez. Általában most már könnyen definiálható a $(k+1)$-edik (S_k-val jelölt) gyűrű: ebbe tartozzanak bele a mozaik azon lapjai, melyek szomszédosak S_{k-1} valamelyik elemével, de nem tartoznak hozzá az $S_{k-1}, S_{k-2}, \ldots, S_0$ gyűrűk egyikéhez sem. Lehet, hogy még néhány lapot S_k-hoz fogunk csatolni. Ennek megállapítása a következőképp történik: vegyük az előbb említett lapok, valamint az $S_{k-1}, \ldots, S_0$ gyűrűkbe tartozó lapok egyesítési halmazának komplementumát. Ez a síkon nyílt halmaz, mely esetleg több komponensből áll. Ekkor csatoljuk még S_k-hoz a mozaik mindazon lapjait, melyek valamely korlátos komponensbe esnek. Jelölje $U_k = \bigcup_{i=0}^{k} S_i$.



1. ábra

Ha K átmérője d, akkor U_k befoglalható a K tetszőleges belső pontja körül írt $(k+1) \cdot d$ sugarú körbe.

Jelölje U_k lapjainak számát l_k, míg e lapok határaiból álló gráf csúcsainak, ill. éleinek számát c_k, ill. e_k. Ekkor, lévén a gömbfelület Euler-féle karakterisztikája 2, adódik:

$$c_k - e_k + l_k + 1 = 2,$$

azaz

$$\frac{c_k}{l_k} - \frac{e_k}{l_k} + 1 + \frac{1}{l_k} = \frac{2}{l_k},$$

vagyis

$$(*) \qquad \frac{c_k}{l_k} = \frac{e_k}{l_k} - 1 + \frac{1}{l_k}.$$

Nyilvánvalóan igazak a következő egyenlőségek.

(1) $2e_k = n \cdot l_k + O_{1,k}$, ahol $O_{1,k}$ olyan korrekciós tag, melyre: $0 < O_{1,k} \leqq n \cdot l(S_k)$, illetve

$$c_k = n_{1,k} \sum_1 + n_{2,k} \sum_2 + \ldots + n_{m,k} \sum_m + O_{2,k}, \tag{2}$$

ahol

$$n_{1,k} + n_{2,k} + \ldots + n_{m,k} = l_k \quad \text{és} \quad 0 < O_{2,k} \leqq n \cdot l(S_k).$$

Itt $l(S_k)$ jelöli az S_k-ba tartozó lapok számát, míg $n_{1,k}, n_{2,k} \ldots n_{m,k}$ az U_k azon lapjainak számát jelöli, melyekhez a $\sum_1$, ill. $\sum_2$, ill. $\ldots \sum_m$ reciprokösszegek tartoznak.

Állítás. $\inf \dfrac{l(S_k)}{l_k} = 0.$

Bizonyítás. Tegyük fel ennek ellenkezőjét. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall k = 1, 2, \ldots$ esetén $\dfrac{l(S_k)}{l_k} \geqq \varepsilon > 0.$

De

$$l(S_k) = l_k - l_{k-1},$$

így

$$l_k - l_{k-1} \geqq \varepsilon \cdot l_k > \varepsilon \cdot l_{k-1} \Rightarrow l_k > (1+\varepsilon) \cdot l_{k-1} \Rightarrow l_k > (1+\varepsilon)^k \cdot l_0 = (1+\varepsilon)^k.$$

Ha most a mozaik egybevágó lapjainak területét T jelöli, akkor tetszőleges k-ra $T \leqq \dfrac{(k+1)^2 \cdot d^2 \cdot \pi}{(1+\varepsilon)^k}$. De $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{(k+1)^2 \cdot d^2 \cdot \pi}{(1+\varepsilon)^k} = 0$ és így $T = 0$ adódna, ami ellentmondás. □

Tehát $\exists k_j$ $j = 1, 2, 3, \ldots$, hogy $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{l(S_{k_j})}{l_{k_j}} = 0$. A $(*)$ alapján: $\dfrac{c_{k_j}}{l_{k_j}} = \dfrac{e_{k_j}}{l_{k_j}} - 1 + \dfrac{1}{l_{k_j}}$

Használjuk az (1) és (2) összefüggéseket:

$$(**) \quad \frac{n_{1,k_j} \cdot \sum_1 + n_{2,k_j} \cdot \sum_2 + \ldots + n_{m,k_j} \sum_m}{n_{1,k_j} + \ldots + n_{m,k_j}} + \frac{O_{2,k_j}}{l_{k_j}} = \frac{n}{2} + \frac{O_{1,k_j}}{2 \cdot l_{k_j}} - 1 + \frac{1}{l_{k_j}},$$

de

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{l_{k_j}} = 0 \quad \text{és} \quad 0 < \frac{O_{2,k_j}}{l_{k_j}} \leqq \frac{n \cdot l(S_{k_j})}{l_{k_j}};$$

$$0 < \frac{O_{1,k_j}}{2 \cdot l_{k_j}} \leqq \frac{n \cdot l(S_{k_j})}{2 \cdot l_{k_j}}$$

így $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{l(S_{k_j})}{l_{k_j}} = 0$ miatt $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{O_{2,k_j}}{l_{k_j}} = 0$; $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{O_{1,k_j}}{2 \cdot l_{k_j}} = 0$ így felhasználva: vagy $\forall i$-re $1 \leqq i \leqq m$ esetén $\sum_i < \dfrac{n}{2} - 1$ vagy $\forall i$-re $1 \leqq i \leqq m$ esetén $\sum_i > \dfrac{n}{2} - 1$ az adódna $(**)$-ból: $\dfrac{n}{2} - 1 < \dfrac{n}{2} - 1$, ill. $\dfrac{n}{2} - 1 > \dfrac{n}{2} - 1$, s ez ellentmondás.

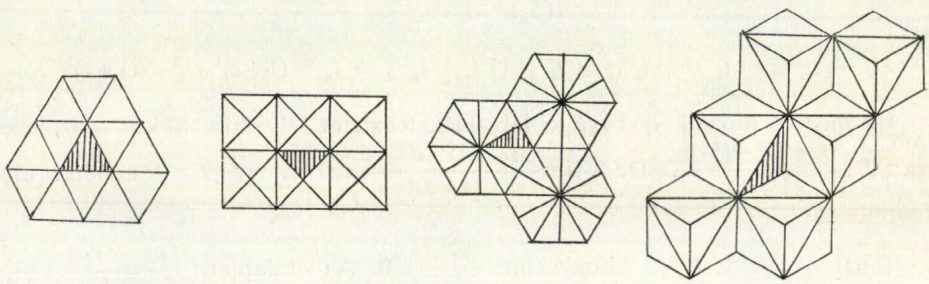
Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. □ □

Térjünk rá N lehetséges értékeinek meghatározására. Vegyünk egy tetszőleges N_3 típusú mozaikot. Szemeljük ki a mozaik valamely lapját. A kiszemelt háromszög csúcspontjainak fokait jelölje x, y, z. Bármely más lapját vesszük is a mozaiknak, az illető lap csúcspontjaihoz tartozó fokok x, y, z. Így a lemma alapján

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

De $x+y+z=N+6$. Hogy N lehetséges értékeit megkapjuk, keressük meg a (3) egyenlet összes $x\geqq 3$, $y\geqq 3$, $z\geqq 3$ pozitív egész megoldását. Sorrendre való tekintet nélkül ezek a következők: (6, 6, 6); (5, 5, 10); (4, 5, 20); (4, 6, 12); (4, 8, 8); (3, 7, 42); (3, 8, 24); (3, 9, 18); (3, 10, 15); (3, 12, 12). Ezek közül, az alábbi észrevétellel azonban a nem megfelelő számhármasokat könnyen kizárhatjuk.

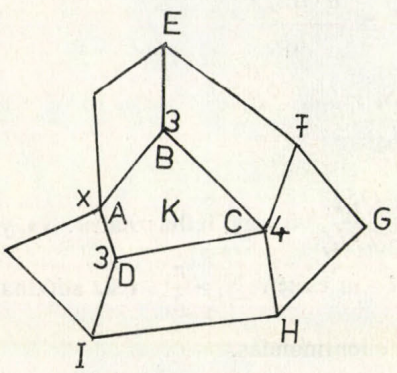
Ha ugyanis egy N_3 típusú mozaik valamely lapjához rendelt — az illető Δ-lap csúcspontjainak fokaiból álló — számhármas x, y, z, akkor $x<y<z$ esetén az x, y, z számok párosak, míg $x=y\neq z$ esetén $x=y$ párossága adódik. A megmaradt számhármasok tehát: (6, 6, 6); (4, 6, 12); (4, 8, 8); (3, 12, 12), az ezekhez tartozó lehetséges N értékek pedig rendre ($N=x+y+z-6$ alapján) 12; 16; 14; 21. A 2. ábra mindezt megfelelő N_3 típusú mozaikokkal szemlélteti.



2. ábra

A következőkben be fogjuk bizonyítani, hogy az N_4 típushoz csak a 8, 9, 10 szomszédsági értékek tartoznak. Először az N_4 típusú mozaikok néhány egyszerű tulajdonságáról szólunk.

Ha $x\geqq 6$, akkor nincs olyan N_4 típusú mozaik, amelynek található olyan konvex négyszöglapja, hogy e lap csúcsainak fokaiból alkotott számnégyes $(x, 4, 3, 3)$. Ugyanis tegyük fel, hogy létezik ilyen mozaik, melynek K lapja kívánt tulajdonságú. Először tegyük fel hogy ha K csúcsait körüljárjuk valamilyen irányban, akkor a 3 fokszámmal rendelkező két csúcs nem szomszédos (3. ábra).



3. ábra

A K konvex négyszög csúcsait jelölje A, B, C, D melyek fokai rendre $x, 3, 4, 3$. A BC, ill. CD oldalhoz csatlakozó másik négyszög további 2 csúcsát jelölje E, F, ill. H, I. A C csúcsban csatlakozó $CFGH$ négyszög a CF oldal, ill. a HC oldal mentén a $BEFC$, ill. a $CHID$ négyszöghöz csatlako-

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

zik. Mivel az E és I csúcsok fokai csak 4 vagy 3 lehetnek (használtuk, hogy B-ben, ill. D-ben 3 négyszög találkozik és A foka x), ezért az F, ill. H csúcsok fokai x vagy $x-1$. Ekkor pedig a $CFGH$ konvex négyszög csúcsaihoz tartozó fokok összege legalább $3+4+2(x-1)$, ami nagyobb, mint $3+3+4+x$, hiszen $x \geqq 6$. Ez pedig ellentmondás. Tartozunk még annak az esetnek a megvizsgálásával, amikor a K konvex négyszög 2 db 3 fokszámú csúcsa szomszédos. Az előzőek ismeretében azonban ezt most már könnyen megtehetjük.

Ha egy N_4 típusú mozaik valamely lapjához tartozó, az illető lap csúcspontjainak fokaiból álló számnégyes $(x, 3, 3, 3)$, ahol $x \geqq 3$, akkor e mozaik valamennyi lapjához ugyanez a számnégyes tartozik (rekurzíve látható).

Most pedig induljunk ki abból, hogy létezik olyan N_4 típusú mozaik, melyben minden konvex négyszögnek N szomszédja van, ahol $N \geqq 11$. Vegyük e mozaik egy tetszőleges lapját, valamint e lap csúcsainak fokaiból álló (x, y, z, v) számnégyest. Nyilván $x+y+z+v=N+8$, ahol $x \geqq 3$, $y \geqq 3$, $z \geqq 3$, $v \geqq 3$ pozitív egészek. A szóban forgó egyenlet megoldásai között ugyan szerepel az $(N-2, 4, 3, 3)$ számnégyes, azonban ez itt az N_4 típusú mozaikok első, említett tulajdonsága miatt szóba sem jöhet. Másrészt, ha a mozaiklaphoz az $(N-1, 3, 3, 3)$ számnégyes tartozik, akkor egyben bármelyik laphoz is ez van hozzárendelve, de $\frac{1}{N-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}>$ >1, vagyis ellentmondásba kerültünk a lemmával.

A fenti egyenlet minden más megoldása — melyek közé kell, hogy tartozzon az (x, y, z, v) számnégyes — viszont olyan tulajdonságú, hogy a 4 szám reciprokösszege 1-nél kisebb (durva becslésekkel is egyszerűen adódik). Ezzel pedig megint ellentmondásba jutottunk a lemmával.

Ha N egy N_4 típusú mozaik szomszédsági száma, akkor nyilván $N \geqq 4$. Megmutatjuk, hogy $8 \leqq N$ is igaz.

Ha ugyanis feltesszük, hogy létezik olyan N_4 típusú mozaik, melynek szomszédsági értéke

N	akkor a mozaik lapjaihoz tartozó — az illető lap csúcspontjainak fokaiból álló — számnégyesek a következők lehetnek:		
4			3 3 3 3
5			4 3 3 3
6		5 3 3 3	4 4 3 3
7	6 3 3 3	5 4 3 3	4 4 4 3

Véve a táblázat tetszőleges számnégyesében levő 4 pozitív egész szám reciprokainak összegét, ez mindig 1-nél nagyobbnak adódik, ami ellentmond a lemmának.

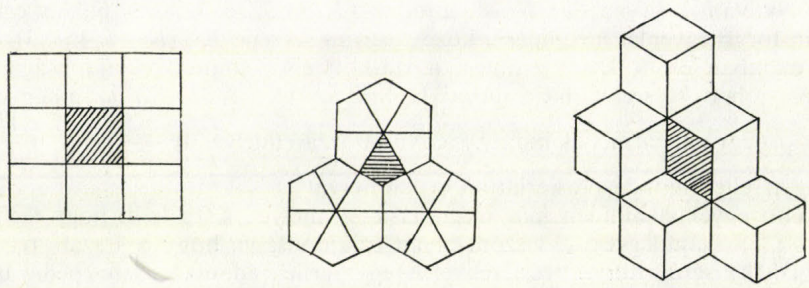
Tehát arra jutottunk, hogy egy N_4 típusú mozaik szomszédsági értéke csak a 8, 9, 10 számok valamelyike lehet. A 4. ábra azt mutatja, hogy a 8, 9, 10 számok mindegyike szomszédsági értéke valamely N_4 típusú mozaiknak.

Ha most N az N_5 típushoz tartozó szomszédsági érték, akkor $N \leqq 8$. Ez egyszerű következménye a lemmának, valamint annak a ténynek, hogy $N \geqq 9$ esetén az $x+y+z+u+v=N+10$ egyenlet $x \geqq 3$, $y \geqq 3$, $z \geqq 3$, $u \geqq 3$, $v \geqq 3$ feltételt kielégítő (x, y, z, u, v) egészekből álló számötösére $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}<\frac{3}{2}$. Természetesen $5 \leqq N$, sőt a lemma segítségével a $7 \leqq N$ is könnyen adódik. Ugyanakkor az 5. ábra bizonyítja, hogy léteznek olyan N_5 típusú mozaikok, melyek szomszédsági értékei rendre 7, ill. 8.

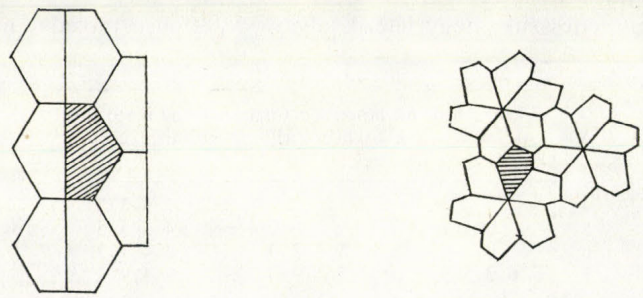
Végül a lemma alapján, valamint annak a ténynek az ismeretében, hogy az $a+b+c+d+e+f=N+12$ egyenlőséget az $N\geqq 7$; $a\geqq 3$; $b\geqq 3$; $c\geqq 3$; $d\geqq 3$; $e\geqq 3$; $f\geqq 3$ feltételek mellett kielégítő egészekből álló (a, b, c, d, e, f) számhatosra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}<2$ is áll, következik, hogy bármely N_6 típusú mozaik szomszédsági száma 6. A 6. ábrán egy megfelelő mozaik látható. Ezzel az 1. tétel bizonyítását befejeztük. □ □ □

A most közölt bizonyítási módszerrel közvetlenül nyerjük:

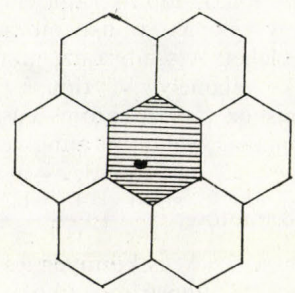
2. TÉTEL. *Konvex sokszöglapokból álló N-szomszédos mozaik, ahol a sokszöglapok átmérőinek van véges felső korlátja, ill. a sokszöglapok beírt köreihez tartozó sugaraknak van pozitív alsó korlátja, továbbá, ahol a mozaik bármely konvex lapjának*



4. ábra



5. ábra



6. ábra

határára eső mozaikcsúcspontok száma egy rögzített értékkel egyenlő, N-nek csak az 1. *tételben szereplő értékeire létezik.*

Befejezésül szeretnénk utalni még egy általánosítási lehetőségre. Lényegében az 1. tétel bizonyításában használt módszerekkel, csak kissé hosszadalmasabban igazolható: *teljes oldalak mentén csatlakozó, egybevágó sokszögekből álló N-szomszédos mozaik, ahol bármely sokszög bármely csúcspontjában legalább 3 lap találkozik, N-nek csak az 1. tételben szereplő értékeire létezik.*

МОЗАИКИ, БСЯКАЯ ГРАНЬ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ОДНО И ТО ЖЕ ЧИСЛО СОСЕДОВ

КАРОЙ ЬЕЗДЕК

MOSAICS WITH EACH FACE HAVING THE SAME NUMBER OF NEIGHBOURS

K. BEZDEK

VÉGES ABEL-CSOPORTOK ÉS n-DIMENZIÓS MOZAIKOK

SZABÓ SÁNDOR

Bevezetés

Tükrözzünk egy n-dimenziós kockát minden lapjára! Az így keletkezett $2n+1$ darab kocka egyesítését n-dimenziós keresztnek nevezzük. KÁRTESZI FERENC professzortól ([3]) származik az a kérdés, hogy kitölthető-e az egész n-dimenziós tér keresztekkel.

A probléma történetét itt nem részletezzük. Dolgozatunk szempontjából MOLNÁR EMIL alábbi eredménye ([5]) a legfontosabb. Ha feltesszük, hogy

1. a mozaik keresztjei teljes kockalapok mentén csatlakoznak egymáshoz,
2. a keresztek középpontjai egy rácsot alkotnak, akkor a páronként nem egybevágó n-dimenziós mozaikok és a páronként nem izomorf $2n+1$ rendű Abel-csoportok kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak.

A dolgozatban ezt a tételt fogjuk általánosítani. Az n-dimenziós keresztnél általánosabb alakzatokból felépített mozaikokat vizsgálunk. Egyrészt szeretnénk a párosrendű Abel-csoportokat is kapcsolatba hozni mozaikokkal, másrészt a páronként nem egybevágó mozaikok számát meghatározni.

I. Jelölések és előkészületek

Jelölje $\mathscr{E}^n$ az n-dimenziós euklideszi teret. Az $\mathscr{E}^n$ tér rendezett pontpárjai és a valós számtest feletti $\boldsymbol{E}^n$ vektortér elemei közötti kapcsolat ismert. Az értekezésben erre a kapcsolatra építünk. A szereplő objektumoknak ezért lesz geometriai és algebrai jellege is.

Legyen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ az $\boldsymbol{E}^n$ tér egy rögzített, ortonormált bázisa. Az egész számok halmazát $\mathfrak{Z}$ fogja jelölni. Tekintsük az

$$\mathbf{X} := \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n; \ x^1, \ldots, x^n \in \mathfrak{Z}\} \subseteq \mathbf{E}^n$$

vektorhalmazt. A rács fogalmát a következő formában használjuk. Rácsnak nevezzük a már bevezetett $\mathbf{X}$ halmazt, továbbá $\mathbf{X}$ minden $\mathbf{L}$ részcsoportját. (Az $\mathbf{X}$ halmaz a vektorösszeadás műveletére nézve csoport.) Legyen

$$\mathbf{C} := \left\{\mathbf{c} = c^1\mathbf{e}_1 + \ldots + c^n\mathbf{e}_n: \ -\frac{1}{2} \leqq c^1 \leqq \frac{1}{2}, \ \ldots, \ -\frac{1}{2} \leqq c^n \leqq \frac{1}{2}\right\} \subseteq \mathbf{E}^n$$

és O az $\mathscr{E}^n$ tér egy rögzített pontja. A

$$\mathscr{C}_0 := \{C: \ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}, \ \mathbf{c} \in \mathbf{C}\} \subseteq \mathscr{E}^n$$

ponthalmazt O középpontú egységkockának nevezzük. Alapkockarácsnak fogjuk hívni a

$$(\mathscr{C}_0, \mathbf{X}) := \{\mathscr{C}_P : \overrightarrow{OP} \in \mathbf{X}\}$$

halmazt.

Olyan alakzatokról lesz szó, amelyek mindegyike az alapkockarács véges sok kockájából van összeállítva. Ha a $(\mathscr{C}_0, \mathbf{X})$ alapkockarács adott, akkor az alapkockarács kockáiból álló testet jellemezhetjük a benne szereplő kockák középpontjai segítségével is. Legyen

$$\{P_1, \ldots, P_r\} \subseteq \mathscr{E}^n$$

a kockák középpontjainak a halmaza. Ezt a halmazt nyilván megadhatjuk a P_1 pont és a

$$\mathbf{T} := \{\mathbf{0} = \overrightarrow{P_1P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\} \subseteq \mathbf{E}^n$$

vektorhalmaz segítségével is.

A $\mathbf{T}$ halmazról feltesszük, hogy tartalmaz n darab lineárisan független vektort. A $\mathbf{T}$ vektorhalmazt előállíthatjuk a

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{t} : \mathbf{t} = a^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a^n\mathbf{e}_n;\ (a^1, \ldots, a^n) \in \mathfrak{Z}\} \subseteq \mathbf{E}^n$$

alakban is. Vizsgálatunkban szerephez fog jutni az itt szereplő $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{Z}^n$ halmaz is. Az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ortonormált bázis rögzítése után $\mathbf{T}$ és $\mathfrak{T}$ kölcsönösen meghatározzák egymást. A kockákból összerakott $\mathscr{T}_0$ testet a

$$\mathscr{T}_0 := \bigcup_{\overrightarrow{OP} \in \mathbf{T}} \mathscr{C}_P \subseteq \mathscr{E}^n$$

formulával adhatjuk meg. Legyen $\mathbf{L}$ egy rács, a $\mathscr{T}_P$ testek

$$(\mathscr{T}_0, \mathbf{L}) := \{\mathscr{T}_P : \overrightarrow{OP} \in \mathbf{L}\}$$

halmazát alapkockarácsba ágyazott rácsszerű mozaiknak nevezzük, ha a $(\mathscr{C}_0, \mathbf{X})$ alapkockarács minden kockája szerepel a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ rendszernek pontosan egy $\mathscr{T}_P$ testjében.

Céljaink:

1. Ha adott a $\mathscr{T}_0$ test, akkor határozzuk meg azokat az $\mathbf{L}$ rácsokat, amelyekre a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ rendszer mozaik.
2. Tekintsük át a különböző nem egybevágó mozaikokat.

A $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ és $(\mathscr{T}_0, \hat{\mathbf{L}})$ mozaikokat egybevágónak nevezzük, ha létezik olyan

$$\alpha : \mathscr{E}^n \to \mathscr{E}^n$$

egybevágósági transzformáció, amellyel

$$(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})\alpha = (\mathscr{T}_0, \hat{\mathbf{L}}).$$

Az $\alpha : \mathscr{E}^n \to \mathscr{E}^n$ által indukált $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}$ bijektív ortogonális transzformáció segítségével ez úgy is fogalmazható, hogy $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$ és $\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{L}}$, ha P_1 fixpontja a $\mathscr{T}_0$ halmazt önmagába átvivő egybevágósági transzformációknak.

Minden $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ mozaik esetében tekinthetjük az $\mathbf{X}/\mathbf{L}$ faktorcsoportot, amelynek elemei az $\mathbf{X}$ csoportnak az $\mathbf{L}$ részcsoport szerinti mellékosztályai. Az $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ vektort tartalmazó osztályt $\langle\mathbf{x}\rangle$-el jelöljük. Az ismert definíciók szerint

$$\langle\mathbf{x}\rangle = \langle\mathbf{y}\rangle \Leftrightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{y})\in\mathbf{L}$$

$\langle\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{y}\rangle:=\langle\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbf{X}$ esetén.

Speciálisan, ha $u\in\mathfrak{Z}$ és $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$, akkor $u\langle\mathbf{x}\rangle:=\langle u\mathbf{x}\rangle$. Az $\mathbf{X}/\mathbf{L}$ faktorcsoport neutrális eleme a $\langle\mathbf{O}\rangle=\mathbf{L}$ osztály. Az $\langle\mathbf{x}\rangle$ osztály inverze a $-\langle\mathbf{x}\rangle:=\langle-\mathbf{x}\rangle$ osztály.

Látni fogjuk, hogy az $\mathbf{X}/\mathbf{L}$ csoport lényeges szerepet játszik a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ mozaikok vizsgálatában.

II. Mozaikok és Abel-csoportok

Legyen G egy additív módon írt Abel-csoport, o a G neutrális eleme, $\mathfrak{T}\subseteqq\mathfrak{Z}^n$ és $g_1, \ldots, g_n\in G\setminus\{o\}$. A $g_1, \ldots, g_n$ elemeket a G csoport $\mathfrak{T}$ halmazra vonatkozó bázisának nevezzük, ha minden $g\in G$ egyértelműen áll elő

$$g = a^1 g_1+\ldots+a^n g_n, \quad (a^1, \ldots, a^n)\in\mathfrak{T}$$

alakban.

1. Segédtétel: *Akkor és csakis akkor létezik* $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ *típusú mozaik, ha létezik olyan* G *Abel-csoport, amelynek van a* $\mathscr{T}_0$*-hoz tartozó* $\mathfrak{T}$ *halmazra vonatkozó* $g_1, \ldots, g_n$ *bázisa.*

Bizonyítás: A $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ rendszer pontosan akkor mozaik, ha az alapkockarács tetszőleges $\mathscr{C}_P$ $(\overrightarrow{OP}=\mathbf{x}\in\mathbf{X})$ kockája megegyezik a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ rendszer egyik $\mathscr{T}_L$ $(\overrightarrow{OL}=\mathbf{l}\in\mathbf{L})$ testjének valamelyik kockájával. Tehát a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ rendszer pontosan akkor mozaik, ha minden $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ vektor egyértelműen írható

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}+a^1\mathbf{e}_1+\ldots+a^n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{l}\in\mathbf{L}, \ (a^1, \ldots, a^n)\in\mathfrak{T} \tag{II.1}$$

alakban.

a) Ha a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ rendszer mozaik, vagyis ha tetszőleges $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ egyértelműen állítható elő (II. 1.) alakban, akkor $\langle\mathbf{x}\rangle$ egyértelműen írható

$$\langle\mathbf{x}\rangle = a^1\langle\mathbf{e}_1\rangle+\ldots+a^n\langle\mathbf{e}_n\rangle, \quad (a^1, \ldots, a^n)\in\mathfrak{T}$$

alakban. Tehát $\mathbf{X}/\mathbf{L}$-nek $\langle\mathbf{e}_1\rangle, \ldots, \langle\mathbf{e}_n\rangle$ egy $\mathfrak{T}$-re vonatkozó bázisa, vagyis $\mathbf{X}/\mathbf{L}$ játszhatja G szerepét.

b) Tegyük fel, hogy $g_1, \ldots, g_n$ a G Abel-csoportnak a $\mathfrak{T}$ halmazra vonatkozó bázisa. Értelmezzük a $\psi: \mathbf{X}\to G$ leképezést a következő módon. Ha $\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n$, akkor legyen $\mathbf{x}\psi=x^1 g_1+\ldots+x^n g_n$. Ellenőrizhető, hogy ψ homomorfizmus. A homomorfizizmus tétel szerint a homomorfizizmus magja a

$$\operatorname{Ker}\psi := o\psi^{-1} := \{\mathbf{l}\in\mathbf{X}: \ \mathbf{l}\psi = o\} =: \mathbf{L}$$

egy részcsoportja $\mathbf{X}$-nek. Az $\mathbf{e}_1\psi, \ldots, \mathbf{e}_n\psi$ egy $\mathfrak{T}$-re vonatkozó bázisa G-nek, ezért tetszőleges $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ egyértelműen állítható elő (II. 1.) alakban, vagyis $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ egy mozaik. □

Ha a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ és $(\mathscr{T}_0, \hat{\mathbf{L}})$ rendszerek mozaikok, akkor létezik G, $\hat{G}$ Abel-csoport, amelyeknek van a $\mathbf{T}$ halmazra vonatkozó $g_1, \ldots, g_n$, illetve $\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_n$

bázisa, valamint a

$$\psi\colon \mathbf{X} \to G$$

$$\hat{\psi}\colon \mathbf{X} \to \hat{G}$$

homomorfizmus az

$$(x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n)\psi = x^1 g_1 + \ldots + x^n g_n$$

$$(x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n)\hat{\psi} = x^1 \hat{g}_1 + \ldots + x^n \hat{g}_n$$

formulákkal értelmezve.

2. SEGÉDTÉTEL: *A* $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ *és* $(\mathscr{T}_0, \hat{\mathbf{L}})$ *mozaik pontosan akkor egybevágó, ha létezik olyan* $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *bijektív ortogonális transzformáció, hogy* $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$ *és a* $\psi^{-1}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi}$ *leképezés egy izomorfizmus.* (A ψ függvény nem invertálható, így ψ^{-1} az inverz leképezést jelöli, amely nem függvény.)

Bizonyítás: a) Tegyük fel, hogy a $(\mathscr{T}_0, \mathbf{L})$ és $(\mathscr{T}_0, \hat{\mathbf{L}})$ mozaikok egybevágóak. A definíció szerint létezik tehát egy $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ bijektív ortogonális transzformáció, hogy $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$ és $\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{L}}$. Ha $\boldsymbol{\alpha}$ egy bijektív ortogonális transzformáció, akkor $\boldsymbol{\alpha}$ egy bijektív lineáris transzformáció is. Más szavakkal $\boldsymbol{\alpha}$ egy izomorfizmus. Tehát $\psi^{-1}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi}$ egy izomorfizmus.

b) Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ olyan bijektív ortogonális transzformáció, amelyre $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$ és $\psi^{-1}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi}$ egy izomorfizmus. Mivel $\psi^{-1}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi}$ izomorfizmus, $o\psi^{-1}\boldsymbol{\alpha}\hat{\psi} = o$. Másképpen $o\psi^{-1}\boldsymbol{\alpha} = o\hat{\psi}^{-1}$, vagyis $\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{L}}$. A $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$ és $\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{L}}$ összefüggések szerint a két mozaik egybevágó. □

III. Csonkakereszt mozaikok

Az egész értekezésben a szorosan összefüggő T, $\mathfrak{T}$, $\mathscr{T}_0$ halmazok szerepét az alábbi specializált halmazok fogják játszani. Feltesszük, hogy $n \geqq k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ és $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\mathbf{K}^{n,k} := \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\},$$

tehát

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{K}^{n,k} := \{ & (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) \\
& \left.\begin{array}{l} (1, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \end{array}\right\} n-k \\
& \left.\begin{array}{l} (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0) \\ \vdots \\ (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 1) \end{array}\right\} k \\
& \left.\begin{array}{l} (-1, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ (\underbrace{0, \ldots, -1}_{n-k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k})\} \end{array}\right\} n-k
\end{array}$$

$$\mathscr{K}_0^{n,k} := \bigcup_{\overrightarrow{OP} \in \mathbf{K}^{n,k}} \mathscr{C}_P$$

Nevezzük a $\mathscr{K}_0^{n,k}$ testet (n-dimenziós k-szor csonkított) csonkakeresztnek.

3. SEGÉDTÉTEL: *A G Abel-csoportnak akkor és csakis akkor létezik a $\mathfrak{N}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisa, ha $|G| = 2n+1-k$ és G másodrendű elemeinek száma nem nagyobb k-nál.*

Bizonyítás: Ha a G Abel-csoportnak van a $\mathfrak{N}^{n,k}$ halmazra vonatkozó $g_1, g_2, \ldots, g_n$ bázisa, akkor a bázis definíciója szerint a páronként különböző

$$o, g_1, \ldots, g_{n-k}, \quad g_{n-k+1}, \ldots, g_n, \quad -g_1, \ldots, -g_{n-k}$$

elemek éppen G összes elemét adják. Tehát G rendje $2n+1-k$. Felhasználva, hogy

$$g_i + (-g_i) = o \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

a bázisra vonatkozó követelményből azt kapjuk, hogy G másodrendű elemei (amikoris $g = -g$) feltétlenül

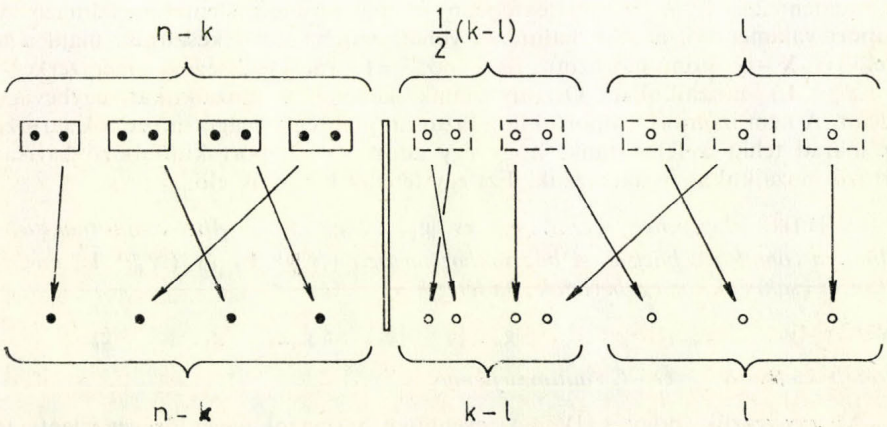
$$g_{n-k+1}, \ldots, g_n$$

között szerepelnek. Így G másodrendű elemeinek száma legfeljebb k lehet. Jól látható az is, hogy a

$$g_1, \ldots, g_{n-k}$$

elemek inverzei nem szerepelhetnek a bázisban.

a) Tegyük fel, hogy a G Abel-csoport rendje $2n+1-k$, másodrendű elemeinek a száma ι és $\iota \leqq k$. Megmutatjuk, hogy G-nek van a $\mathfrak{N}^{n,k}$ halmazra vonatkozó $g_1, \ldots, g_n$ bázisa. $G \setminus \{o\}$-ból kivesszük az ι darab másodrendű elemet. A maradékot $\frac{1}{2}(2n-k-\iota) = n - \frac{1}{2}(k+\iota)$ számú elem-inverz párba állítjuk. A párok közül $n-k$ darabot feketére színezünk, a megmaradó $\frac{1}{2}(k-\iota)$ párt pedig fehérre színezzük. A fekete párok mindegyikéből válasszuk ki a pár egyik elemét. Ez az $n-k$ darab elem fogja adni valamilyen sorrendben a bázis első $n-k$ darab elemét. Az $\frac{1}{2}(k-\iota)$ darab fehér pár és a félretett ι darab másodrendű elem alkotja valamilyen sorrendben a bázis következő $2\frac{k-\iota}{2} + \iota = k$ darab elemét. Világos, hogy



1. ábra

a G csoport $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisához jutottunk, hiszen hozzávéve a megadott elemekhez az első $n-k$ inverzét, éppen $G\setminus\{o\}$ összes eleméhez jutottunk. □

Megjegyezzük, hogy eljárásunkkal a G csoportnak

$$\binom{n-\frac{1}{2}(k+1)}{n-k} 2^{n-k}(n-k)!\,k!$$

darab $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisához juthatunk el. Valóban, a párok színezési lehetőségeinek a száma

$$\binom{n-\frac{1}{2}(k+1)}{n-k}.$$

Egy tetszőleges fekete párból kétféle elemet vehetünk ki, ebből adódik a 2^{n-k} tényező. Az utolsó két tényezőt az elemek sorrendje indokolja. Az is világos, hogy a G csoportnak a $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisait ezek kimerítik.

1. Tétel: *Bármely n természetes számhoz és k egész számhoz, $n\geqq k\geqq 0$ esetén, létezik az alapkockarácsba ágyazott, rácsszerű $(\mathcal{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ csonkakereszt mozaik.*

Bizonyítás: Az 1. és 3. segédtétel szerint elég azt megmutatni, hogy az $n=1,2,\ldots$ és $k=0,1,2,\ldots,n\geqq k$ számok esetén létezik $2n+1-k$ rendű, legfeljebb k darab másodrendű elemet tartalmazó Abel-csoport. A $2n+1-k$ rendű ciklikus csoport kielégíti a feltételeket, ugyanis, ha $k=0$, akkor a csoport rendje páratlan és így másodrendű eleme nincs is; ha pedig a csoport rendje páros, akkor $k\geqq 1$ és ilyenkor csak egyetlen másodrendű elem van. □

IV. A nem egybevágó $(\mathcal{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ mozaikok számáról

Megadott n és k $(n\geqq k\geqq 0)$ esetén az összes $(\mathcal{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ mozaikhoz eljutunk, ha minden $2n+1-k$ rendű, legfeljebb k másodrendű elemet tartalmazó Abel-csoport valamennyi, a $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisát elkészítjük, majd a megfelelő $\psi: \mathbf{X}\to G$ homomorfizmussal a $o\psi^{-1}=\mathbf{L}$ rács segítségével megszerkesztjük a $(\mathcal{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ mozaikokat. Osztályoznunk kellene a mozaikokat egybevágóság szerint. A nem izomorf csoportokhoz biztosan nem egybevágó mozaikok tartoznak. Az marad tehát a feladatunk, hogy egy adott G csoport különböző bázisaihoz tartozó mozaikokat osztályozzuk. Ezt egy tétellel készítjük elő.

2. Tétel: *Legyenek $g_1,\ldots,g_n$ és $\hat{g}_1,\ldots,\hat{g}_n$ a G Abel-csoportnak a $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisai. A bázisokhoz tartozó $(\mathcal{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ és $(\mathcal{K}_0^{n,k}, \hat{\mathbf{L}})$ mozaikok akkor és csakis akkor egybevágók, ha létezik a*

(IV.1.) $$\{g_1,\ldots,g_{n-k},-g_1,\ldots,-g_{n-k}\}\gamma=\{\hat{g}_1,\ldots,\hat{g}_{n-k},-\hat{g}_1,\ldots,-\hat{g}_{n-k}\}$$

feltételt kielégítő $\gamma: G\to G$ automorfizmus.

Megjegyezzük, hogy a (IV. 1.) egyenlőség halmazok egyenlőségét jelenti, tehát $g_i\gamma=\hat{g}_i$ nincs feltéve.

Bizonyítás: Legyen $\alpha: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ bijektív lineáris transzformáció. Vegyük észre, hogy a

$$\text{(IV.2.)} \quad \begin{cases} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\}\alpha = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\} \\ \{\mathbf{e}_{n-k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}\alpha = \{\mathbf{e}_{n-k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\} \end{cases}$$

(ha $n=k$, akkor az első sor nem szerepel,
ha $k=0$, akkor a második sor nem szerepel)

feltétel egyenértékű azzal, hogy α ortogonális és, hogy $\mathbf{K}^{n,k}\alpha = \mathbf{K}^{n,k}$.

a) Tegyük fel, hogy a $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ és $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \hat{\mathbf{L}})$ mozaikok egybevágók. A 2. segédtétel szerint létezik tehát egy $\alpha: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ bijektív ortogonális transzformáció, amelyre $\mathbf{K}^{n,k}\alpha = \mathbf{K}^{n,k}$ és $\psi^{-1}\alpha\hat{\psi}$ egy izomorfizmus. Legyen $\gamma: \psi^{-1}\alpha\hat{\psi}$.

Megmutatjuk, hogy ez a γ eleget tesz a (IV. 1.) feltételnek. Valóban

$$\begin{aligned} &\{g_1, \ldots, g_{n-k}, -g_1, \ldots, -g_{n-k}\}\psi^{-1}\alpha\hat{\psi} = \\ &= (\mathbf{L} + \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\})\alpha\hat{\psi} = \\ &= \mathbf{L}\alpha\hat{\psi} + \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\}\alpha\hat{\psi} = \\ &= \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\}\hat{\psi} = \\ &= \{\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{n-k}, -\hat{g}_1, \ldots, -\hat{g}_{n-k}\}. \end{aligned}$$

A 3. lépésben felhasználtuk, hogy $\mathbf{L}\alpha = \hat{\mathbf{L}}$ miatt $\mathbf{L}\alpha\hat{\psi} = o$ és a (IV. 2.) összefüggést.

b) Tegyük fel, hogy létezik egy $\gamma: G \to G$ automorfizmus, amely kielégíti a (IV. 1.) feltételt. Legyen az $\alpha: \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ bijektív lineáris transzformáció az

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\alpha &= \mathbf{e}_1\psi\gamma(\hat{\psi}_{|\mathbf{K}^{n,k}})^{-1} \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n\alpha &= \mathbf{e}_n\psi\gamma(\hat{\psi}_{|\mathbf{K}^{n,k}})^{-1} \end{aligned}$$

összefüggésekkel definiálva. Megmutatjuk, hogy α kielégíti a (IV. 2.) feltételt. Ebből fog adódni, hogy α ortogonális, és hogy $\mathbf{K}^{n,k}\alpha = \mathbf{K}^{n,k}$. Mivel α izomorfia, ezért $\psi^{-1}\alpha\hat{\psi}$ is izomorfia. A 2. segédtétel szerint a két mozaik így egybevágó. Az α kielégíti a (IV. 2.) összefüggést, mert

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\}\alpha = \\ &= \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}\}\psi\gamma(\hat{\psi}_{|\mathbf{K}^{n,k}})^{-1} \cup (-1)\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}\}\psi\gamma(\hat{\psi}_{|\mathbf{K}^{n,k}})^{-1} = \\ &= \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}, -\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_{n-k}\} \end{aligned}$$

és hasonló módon

$$\{\mathbf{e}_{n-k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}\alpha = \{\mathbf{e}_{n-k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}\psi\gamma(\hat{\psi}_{|\mathbf{K}^{n,k}})^{-1} = \{\mathbf{e}_{n-k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}. \quad \square$$

Tegyük fel, hogy $g_1, \ldots, g_n$ és $\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_n$ a G Abel-csoportnak a $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisai, továbbá, hogy a két bázis az elem-inverz pároknak ugyanabból a színezéséből keletkezett. Világos, hogy ekkor

$$\{g_1, \ldots, g_{n-k}, -g_1, \ldots, -g_{n-k}\} = \{\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{n-k}, -\hat{g}_1, \ldots, -\hat{g}_{n-k}\}.$$

Tehát most az $I: G \to G$ identitás játszhatja a 2. tételben levő γ szerepét, vagyis a két bázishoz tartozó $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ és $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \hat{\mathbf{L}})$ mozaikok egybevágók. A nem

egybevágó mozaikok vizsgálatához így csak azokat a bázisokat kell tekinteni, amelyek az elem-inverz párok különböző színezéséből keletkeztek. A különböző módon színezett elem-inverz párokból álló rendszerek száma

$$\binom{n-\frac{1}{2}(k+\iota)}{n-k}.$$

Ez a formula az $\iota=k$ és $n=k$ esetekben az 1 értéket veszi fel. Így a $2n+1-k$ rendű G Abel-csoport $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisai egymással egybevágó mozaikokat eredményeznek, ha $n=k$ vagy G másodrendű elemeinek száma $\iota=k$. Kimondhatjuk a következő tételeket.

3. TÉTEL: *A páronként nem izomorf $N=2n+1-k$ rendű k darab másodrendű elemet tartalmazó Abel-csoportok és a páronként nem egybevágó, az alapkockarácsba ágyazott $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ mozaikok kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak.*

A $k=0$ esetben ez MOLNÁR E. tétele.

4. TÉTEL: *A páronként nem izomorf $N=n+1$ rendű Abel-csoportok és a páronként nem egybevágó, az alapkockarácsba ágyazott $(\mathscr{K}_0^{n,n}, \mathbf{L})$ mozaikok kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak.*

Megvizsgáljuk még a nem egybevágó $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ mozaikok számát abban a speciális esetben, ha $|G|=2n+1-k$ egy p páratlan prímszám. Elemi tény, hogy ilyenkor G ciklikus csoport. Tehát

$$G = \{o, 2t, t, \ldots, (p-1)t\}.$$

Jelölje $G\setminus\{o\}$ elem-inverz párjait

$$x, 2x, \ldots, \frac{p-1}{2}x, \quad \text{ahol} \quad x = \{t, (p-1)t\}.$$

A G csoport egy $\mathfrak{R}^{n,k}$ halmazra vonatkozó bázisának megadása egyenértékű egy olyan

$$\beta_i: \left\{x, 2x, \ldots, \frac{p-1}{2}x\right\} \to \{0, 1\}$$

függvénnyel, amelyik összesen $k/2$ darab fehér eleminverz párhoz rendeli az 1-et, az $n-k$ darab feketéhez a 0-t. Az összes β_i függvények halmazát jelölje B.

Szükségünk van G automorfizmusaira. A G csoport automorfizmus csoportja Aut G a

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} t, & 2t, \ldots, & (p-1)t \\ it, & i2t, \ldots, & i(p-1)t \end{pmatrix}$$

$i=1, 2, \ldots, p-1$ leképezésekkel is jellemezhető, ha megállapodunk abban, hogy a $o\sigma_i=o$ feltételt mindig hozzágondoljuk. Mivel modulo p szerinti primitív gyök létezik, ezért Aut G egy $p-1$ rendű ciklikus csoport.

A σ_{p-1} automorfizmus G elemeit felcseréli az inverzükkel, ezért a 2. tétel szellemében számunkra a

$$H := \text{Aut } G/\{\sigma_1, \sigma_{p-1}\}.$$

csoport lesz lényeges. Természetes módon H is ciklikus csoport és

$$H = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{\frac{p-1}{2}}\}, \quad \chi_i = \{\sigma_i, \sigma_i\sigma_{p-1}\}$$

A χ_i és β_i leképezések értelemszerűen végrehajthatók ebben a sorrendben egymás után.

5. TÉTEL: *Ha n, k egész számok, $n \geqq k \geqq 0$ és $2n+1-k$ páratlan prímszám, akkor a páronként nem egybevágó $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ mozaikok száma*

$$\text{(IV.3.)} \qquad \frac{2}{2n-k} \sum_{c \mid \left(n, \frac{k}{2}\right)} \varphi(c) \binom{\frac{2n-k}{2c}}{\frac{k}{2c}}.$$

Itt $\left(n, \frac{k}{2}\right)$ az n és $\frac{k}{2}$ legnagyobb közös osztóját jelenti és φ az Euler-féle függvény.

Bizonyítás: Értelmezzük a következő relációt. Legyen $\beta_i \sim \beta_j$ pontosan akkor, ha létezik $\chi_r \in H$, hogy $\chi_r \beta_i = \beta_j$. Világos, hogy ekvivalencia relációt értelmeztünk. A 2. tételből tudjuk, hogy a β_i és β_j-ből mint bázisokból akkor és csak akkor keletkeznek egybevágó $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \mathbf{L})$ és $(\mathscr{K}_0^{n,k}, \hat{\mathbf{L}})$ mozaikok, ha $\beta_i \sim \beta_j$. Az ekvivalencia osztályok számát kell tehát meghatároznunk. Jelölje az ekvivalencia osztályok számát $h(n, k)$. Tekintsük a

$$\{(\chi, \beta): \chi \in H, \beta \in B, \chi\beta = \beta\}$$

halmazt, amely az „összetartozó" χ, β párokból áll. Ennek a halmaznak az elemszámát fogjuk kétféle módon meghatározni. Először a β-k szerint, másodszor a χ-k szerint „számolunk". (Lényegében PÓLYA GY. egy ismert tételének bizonyítását ismételjük meg.)

a) Legyen először $\beta \in B$ egy rögzített elem, továbbá

$$H_\beta = \{\chi: \chi\beta = \beta, \quad \chi \in H, \beta \in B\}.$$

Ellenőrizhető, hogy H_β egy részcsoportja H-nak. A

$$\{\chi: \chi\beta = \beta_i, \chi \in H, \beta_i, \beta \in B\}$$

halmazról azonnal belátható, hogy a H csoportnak a H_β részcsoport szerinti bal oldali mellékosztálya, ha β_i egy rögzített elem. Egy rögzített β tehát annyi vele ekvivalens β_i elembe mehet át, amennyi H_β szerinti mellékosztálya van H-nak. Az összetartozó (χ, β) párok száma

$$h(n, k) \cdot |H|.$$

Mert rögzített β mellett χ $|H_\beta|$ féleképpen választható. Ha β végigfutja az ekvivalencia osztályának elemeit, akkor a párok száma $|H|$. Ismételjük ezt meg a további ekvivalencia osztályokra is, így $h(n, k)|H|$ fog adódni.

b) A H permutáció csoport elemeit ciklusokra is bonthatjuk. A $\chi\beta = \beta$ egyenlőség szükséges és elégséges feltétele, hogy χ minden ciklusa β szerint egyszínű párokból álljon. (Ne felejtsük el, hogy β az elem-inverz párok egy színezését definiálja.) Jelölje $f_w(\chi)$ azt a számot, amennyi módon χ ciklusokra bontott alakjában

w darab párt fehérre lehet színezni úgy, hogy a teljes ciklusok mindig egyszínűek legyenek. Tudjuk, hogy számunkra a $w=\frac{k}{2}$ jön szóba. Ezzel az összetartozó (χ, β) párok száma

$$\sum_{\chi \in H} f_{\frac{k}{2}}(\chi).$$

Összefoglalva: $h(n, k) \cdot |H| = \sum_{\chi \in H} f_{\frac{k}{2}}(\chi)$.

Felhasználva, hogy H egy $n-\frac{k}{2}$ rendű ciklikus csoport, a fenti formula még jelentősen átalakítható. Később igazoljuk, hogy $\chi \in H$ esetén χ minden ciklusának hossza egyenlő. Ez a ciklushossz nyilván az $n-\frac{k}{2}$ szám egy osztója.

Álljon χ c hosszúságú ciklusokból, ekkor a $k/2$ darab fehér pár kiválasztásainak száma

$$f_{\frac{k}{2}}(\chi) = \begin{cases} \left(\dfrac{n-\frac{k}{2}}{c}\right) \\ \left(\dfrac{k}{2c}\right) \end{cases}, \quad \text{ha} \quad c \Big| \frac{k}{2}, \; n-\frac{k}{2}$$

$$0 \quad , \quad \text{ha} \quad c \nmid \frac{k}{2} \quad \text{vagy} \quad c \nmid \left(n-\frac{k}{2}\right)$$

Tehát a (IV. 3.) összegben csak azok a χ elemek lényegesek, amelyekre $c \Big| \left(n-\frac{k}{2}\right)$ és $c \Big| \frac{k}{2}$, vagyis amelyekre $c \Big| \left(n, \frac{k}{2}\right)$. Ha χ c hosszúságú ciklusokból áll, akkor és csakis akkor a rendje is c. Egy ciklikus csoportnak pedig éppen $\varphi(c)$ számú c rendű eleme van. Ezzel a (IV. 3.) formulát megindokoltuk.

Hátra van még annak igazolása, hogy $\chi \in H$ esetén χ minden ciklusának hossza azonos. Ehhez először megmutatjuk, hogy ha $\sigma_i \in \mathrm{Aut}\, G$, akkor

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} t, & 2t, & \ldots, & (p-1)t \\ it, & i2t, & \ldots, & i(p-1)t \end{pmatrix}$$

ciklusainak a hossza egyenlő. Tekintsük a

(IV.4.) $$(rt, rit, ri^2t, \ldots, ri^{c-1}t)$$

ciklust. Nyilvánvaló, hogy

$$ri^c t = rt, \quad \text{de}$$

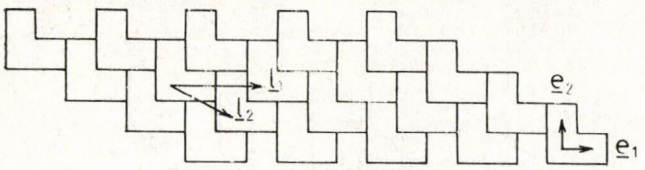
$$ri^{c'} t \neq rt, \quad \text{ha} \quad 0 < c' < c.$$

Ez utóbbiak egyenértékűen

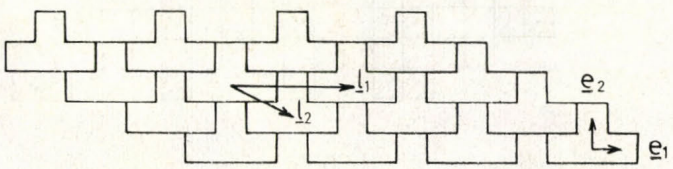
$$ri^c \equiv r \pmod p, \quad \text{de}$$

$$ri^{c'} \not\equiv r \pmod p, \quad \text{ha} \quad 0 < c' < c$$

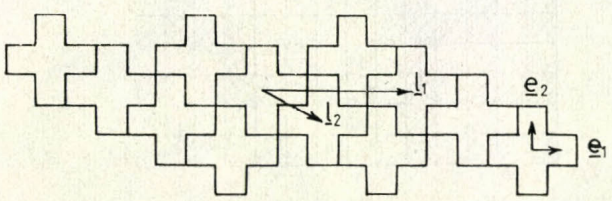
formában is fogalmazhatók. Mivel r relatív prím a p-hez, r-rel a fenti kongruenciákban oszthatunk, ezért a ciklusok hossza r-től függetlenül mindig c. Mint láttuk, az Aut $G/\{\sigma_1, \sigma_{p-1}\} = H$ faktorizációnál $G \setminus \{0\}$ elemei párokba állnak össze és H a párok halmazán ható permutációcsoport. Egy adott σ_i permutáció ciklusaival a következő esetek fordulhatnak elő. Ha egy ciklus tartalmazza valamennyi elemének az inverzét, akkor a ciklus hossza megfeleződik. Ha a ciklus nem tartalmazza



	$\underline{l}_1$	$\underline{l}_2$
$\underline{e}_1$	3	2
$\underline{e}_2$	0	-1



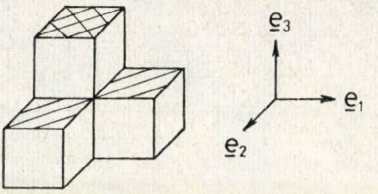
	$\underline{l}_1$	$\underline{l}_2$
$\underline{e}_1$	4	2
$\underline{e}_2$	0	-1

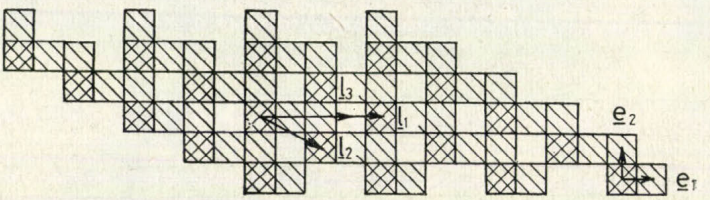


	$\underline{l}_1$	$\underline{l}_2$
$\underline{e}_1$	5	2
$\underline{e}_2$	0	-1

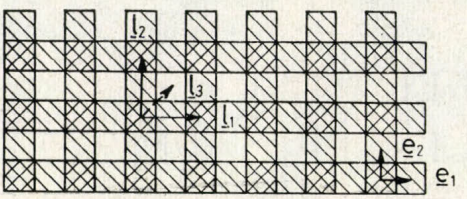
2. ábra

egyetlen elemének az inverzét sem, akkor a ciklus az inverzekből álló ciklussal olvad össze. Könnyű belátni (IV.4.) alapján, hogy ha egy ciklus valamely elemének az inverzét tartalmazza, akkor valamennyi elemének az inverzét is tartalmazza. A (IV.4.) előállításból az is jól látszik, hogy σ_i ciklusai egységesen viselkednek a $H = \mathrm{Aut}\, G/\{\sigma_1, \sigma_{p-1}\}$ faktorcsoportra való áttérésnél, vagy minden ciklus hossza feleződik, vagy páronként összeolvadnak, hiszen ez csak i-től függ. Végülis bármely $\chi \in H$ esetén χ egyenlő hosszúságú ciklusokból áll. □



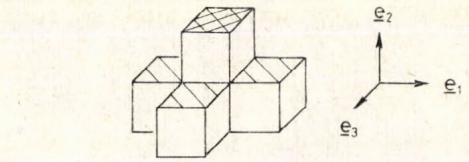


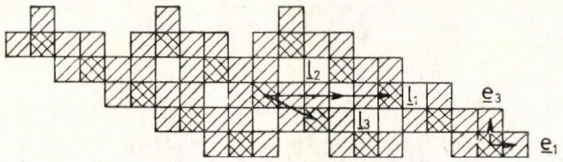
	l_1	l_2	l_3
e_1	4	2	3
e_2	0	-1	0
e_3	0	0	-1



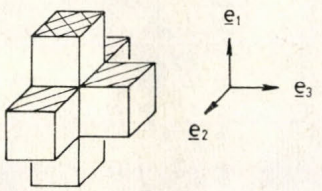
	l_1	l_2	l_3
e_1	2	0	1
e_2	0	2	1
e_3	0	0	-1

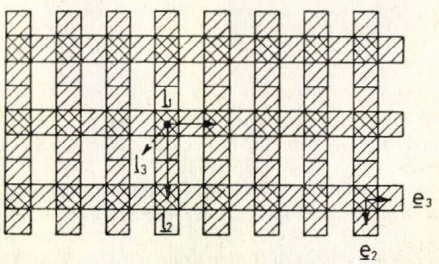
3. ábra





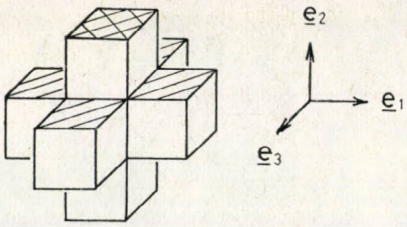
	l_1	l_2	l_3
e_1	5	3	2
e_2	0	-1	0
e_3	0	0	-1

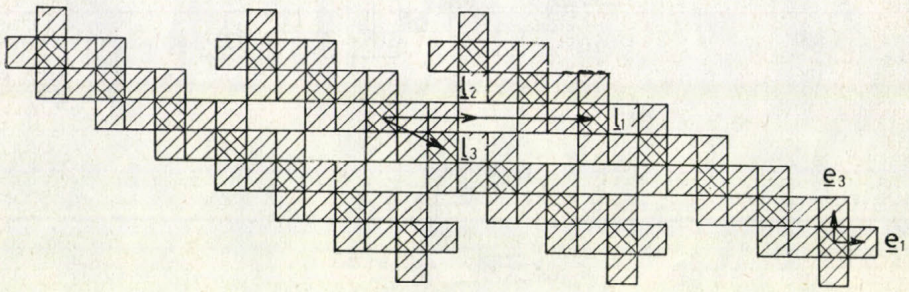




	l_1	l_2	l_3
e_1	0	0	1
e_2	0	3	1
e_3	2	0	-1

4. ábra





	l_1	l_2	l_3
e_1	7	3	2
e_2	0	-1	0
e_3	0	0	-1

5. ábra

IRODALOM

[1] HAJÓS GY.: Többméretű terek befedése kockaráccsal. *Mat. Fiz. Lapok* 45 (1938), 171—190.
[2] HAJÓS G.: Über einfache und mehrfache Bedeckung des *n*-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. *Math. Ztschr.* 47 (1941), 427—467.
[3] KÁRTESZI F.: *Szemléletes geometria.* Gondolat, Budapest, 1966.
[4] KORCHMÁROS G.: Az *n*-dimenziós euklideszi tér keresztekkel való egyrétű kitöltése. Diákköri dolgozat (1970).
[5] MOLNÁR E.: Sui mosaici dello spazio di dimensione *n*. *Atti della Accademia Nazionale dei lincei,* Rend. Sc. fis. mat. e nat.-Vol. LI-Ferie (1971) 177—185.
[6] S. K. STEIN: Algebraic Tiling. *Amer. Math. Monthly* 81, (1974) 445—462.
[7] R. M. ROBINSON: Multiple Tilings of *n*-dimensional Space by Unit Cubes *Math. Ztschr.* 166 (1979) 225—264.

КОНЕЧНЫЕ КОММУТЕТИБНЫЕ ГРУППЫ И *N*-МЕРНЫЕ МОЗАИКИ

ШАНДОР САБО

FINITE ABELIAN GROUPS AND *N*-DIMENSIONAL MOSAICS

S. SZABÓ

A KOMPAKT TEREK OSZTÁLYA

PETZ DÉNES

A kompaktság az általános topológia egyik központi fogalma, de a kompakt halmazok tulajdonságai a matematika több más területén is lényeges szerepet kapnak. Elég például a Stone—Weierstrass-féle approximációs tételre, vagy az olyan széles körben alkalmazott Kakutani-féle fixponttételre gondolni. Legjobban a metrizálható kompakt terek tulajdonságai ismertek. Ilyen terekben minden sorozatnak van konvergens részsorozata, minden végtelen halmaznak van torlódási pontja, és nem üres zárt halmazok szűkülő sorozatának metszete nem üres. Valójában ezek a tulajdonságok külön-külön egyenértékűek a metrizálható tér kompaktságával, és tetszőleges terekre vonatkozó kompaktsági kritériumok egyszerű speciális esetei. A továbbiak szempontjából a kompaktságnak Alekszandrovtól és Uriszontól származó következő ekvivalense lesz lényeges:

Nem üres zárt halmazok bármely csökkenő láncának metszete nem üres.

H-zárt terek

A kompaktság sokféle általánosításának egyike a *H*-zárt tér fogalma. Egy Hausdorff-féle topologikus teret *H*-zártnak neveznek, ha csak zárt altérként ágyazható be bármilyen Hausdorff-térbe, tehát nincs valódi Hausdorff-féle bővítése.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban Hausdorff-féle topologikus tér helyett csak topologikus teret mondunk.

Mivel kompakt alterek mindig zártak, így minden kompakt tér egyben *H*-zárt. Mielőtt példát mutatnánk *H*-zárt nem kompakt térre, bizonyítunk egy tételt, amely jól mutatja a kompakt és *H*-zárt terek tulajdonságai közötti analógiát.

TÉTEL. *Az X tér pontosan akkor H-zárt, ha minden $\{G_i: i\in I\}$ nyílt fedéséből kiválasztható olyan véges $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$ rendszer $(i_k\in I)$, hogy $X=\bigcup_{k=1}^{n} \overline{G}_{i_k}$.*

Bizonyítás. Ha X nem *H*-zárt, akkor van olyan Y tér, hogy $X\subsetneqq Y$ és X nem zárt Y-ban. Legyen $p\in\overline{X}\setminus X$ és $\{G_i: i\in I\}=\{X\setminus\overline{H}: H$ nyílt környezete p-nek$\}$ (Y-beli lezárás). Mivel Y Hausdorff-tér, $\{G_i: i\in I\}$ nyílt fedése X-nek. Ha $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}\}$ véges részhalmaza $\{G_i: i\in I\}$-nek és $G_{i_k}=X\setminus\overline{H}_k$, akkor $X\cap\overline{G}_{i_k}\subset$ $\subset X\setminus H_k$, tehát $X\cap\bigcup_{k=1}^{n}\overline{G}_{i_k}\subset\bigcup_{k=1}^{n}(X\setminus H_k)=X\setminus\bigcap_{k=1}^{n}H_k$. $\bigcap_{k=1}^{n}(H_k\cap X)\neq\emptyset$, mert $p\in\overline{X}$ és $\bigcap_{k=1}^{n}H_k$ környezete p-nek. X $\{G_i: i\in I\}$ nyílt fedéséből tehát nem választható ki véges rendszer, amely rendelkezik a fent mondott tulajdonsággal.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\{G_i: i\in I\}$ olyan nyílt fedése X-nek, hogy minden $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$ véges részrendszerre $\bigcup_{k=1}^{n} \overline{G}_{i_k} \not\subseteq X$ (X-beli lezárás). Legyen $Y = X \cup \{p\}$ ($p \notin X$). A p pont környezetbázisát alkossák a $\{p\} \cup \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus \overline{G}_{i_k})$ halmazok, ahol $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}\}$ végigfut $\{G_i: i\in I\}$ véges részhalmazain. Másrészt legyen X nyílt Y-ban. Így egy topológiát értelmeztünk Y-on, amely eleget tesz a T_2 szétválasztási axiómának. Valóban, ha $x\in X$, akkor van olyan $i_0\in I$, hogy $X\in G_{i_0}$. $\{p\} \cup (X \setminus \overline{G}_{i_0})$ G_{i_0}-tól diszjunkt környezete p-nek. Mivel X nyílt, két X-beli pont Y-ban is szétválasztható nyílt halmazokkal. Y tehát valóban Hausdorff-tér, és így X nem H-zárt.

PÉLDA. Legyen $Y = [-1, 1]\times \mathbf{N}$ és $X = Y \cup \{a_{+1}, a_{-1}\}$,

$$H_k^\varepsilon = a_\varepsilon \cup \{(t, n)\in Y: n > k, |\varepsilon - t| < 1\} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

a_ε környezetbázisa Y-ban legyen $H_k^\varepsilon: k\in\mathbf{N}\}$, és legyen Y nyílt részhalmaza X-nek. Belátjuk, hogy X H-zárt.

Legyen G nyílt fedése X-nek. Ekkor van olyan $G_\varepsilon\in G$, hogy $a_\varepsilon\in G_\varepsilon$. Alkalmas $k\in\mathbf{N}$-re $H_k^\varepsilon \subset G_\varepsilon$. Mivel

$$\overline{H_k^\varepsilon} = a_\varepsilon \cup \{(t, n)\in Y: n > k, |\varepsilon - t| \leqq 1\},$$

az adódik, hogy

$$X \setminus (\overline{G}_{+1} \cup \overline{G}_{-1}) \subset [-1, 1]\times\{1, \ldots, k\} = Z_k.$$

Z_k kompakt altere X-nek, így található olyan $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}\}\subset G$, hogy $\bigcup_{l=1}^{n} G_{i_l} \supset Z$. Tehát $\bigcup_{l=1}^{n} \overline{G}_{i_l} \cup \overline{G}_{+1} \cup \overline{G}_{-1} = X$. A tétel alapján X valóban H-zárt.

Másrészt $\{(0, k): k\in\mathbf{N}\}$ diszkrét zárt altere X-nek, amely így nem lehet kompakt. A példa azt is mutatja, hogy egy H-zárt tér zárt altere nem feltétlenül H-zárt.

A következő tétel Katětovtól, a közölt bizonyítás pedig Mioduszewskitől származik.

TÉTEL. *Nem üres H-zárt alterek láncának metszete nem üres.*

LEMMA. *Legyen F H-zárt altere X-nek és $p\in X \setminus F$. Ekkor van olyan G nyílt halmaz X-ben, hogy $p\notin \overline{G}$ és $G\cap F$ sűrű F-ben.*

Bizonyítás. Minden $q\in F$-re van olyan G_q nyílt környezete q-nak, hogy $p\notin \overline{G}_q$. $\{G_q: q\in F\}$ nyílt fedése F-nek, így alkalmas $\{G_{q_1}, \ldots, G_{q_n}\}$ véges részhalmaz $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{G}_{q_k}$. $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_{q_k}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

A tétel bizonyítása. Legyen L Y nem üres H-zárt altereinek lánca és $X\in L$. $F\subset X$ és $F\in L$ esetén legyen $G(F)$ X összes olyan G nyílt halmazainak a családja, amelyekre $G\cap F$ sűrű F-ben. A lemma szerint $G(F)\neq\emptyset$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{S} = \bigcup \{G(F): F\in L, F\subset X\}$ centrált rendszer.

Legyen $G_1\in G(F_1), \ldots, G_n\in G(F_n)$ és $X\supset F_1\supset F_2\supset \ldots \supset F_n$ a lánc elemei. Ekkor $G_n\cap F_{n-1}\supset G_n\cap F_n\neq\emptyset$ és $G_n\cap F_{n-1}$ nem üres nyílt részhalmaza F_{n-1}-nek. Mivel $G_{n-1}\cap F_{n-1}$ sűrű F_{n-1}-ben, így $G_n\cap F_{n-1}\cap G_{n-1}\neq\emptyset$. Következésképpen $G_n\cap G_{n-1}\cap F_{n-2}\neq\emptyset$ és nyílt részhalmaza F_{n-2}-nek. $G_{n-2}\in G(F_{n-2})$ miatt $G_n\cap$ $\cap G_{n-1}\cap F_{n-2}\cap G_{n-2}\neq\emptyset$ és így tovább. Végül azt kapjuk, hogy $G_n\cap G_{n-1}\cap \ldots$ $\ldots\cap F_1\cap G_1\neq\emptyset$ és $G_n\cap G_{n-1}\cap \ldots \cap G_1\neq\emptyset$.

LEMMA. *H-zárt térben nyílt halmazokból álló centrált rendszernek van torlódási pontja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{S}$ nyílt halmazokból álló centrált rendszer X-ben. Ha $\mathfrak{S}$-nek nincs torlódási pontja, akkor $G=\{X\setminus\bar{S}: S\in\mathfrak{S}\}$ nyílt fedése X-nek. Ha X H-zárt, akkor $X=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{X-\bar{S}_i}=\bigcup_{i=1}^{n}(X\setminus S_i)=X\setminus\bigcap_{i=1}^{n}S_i$ alkalmas $\{S_i: i\leqq n\}\subset\mathfrak{S}$-re. Mivel $\bigcap_{i=1}^{n}S_i\neq\emptyset$, ez ellentmondás.

Most visszatérünk a tétel bizonyításához. A lemma szerint $\bigcap\{\bar{S}: S\in\mathfrak{S}\}\neq\emptyset$. Legyen $q\in\bigcap\{\bar{S}: S\in\mathfrak{S}\}$ és $F\in L$. Ha $q\notin F$, akkor van olyan $G\in G(F)\subset\mathfrak{S}$, hogy $q\notin\bar{G}$. Így $q\in F$ minden $F\in L$-re.

Katětov tételéből és a kompaktság Alekszandrov—Uriszon-féle kritériumából nyomban következik Stone tétele:

TÉTEL. *Ha az X Hausdorff-tér minden zárt altere H-zárt, akkor X kompakt.*

Természetesen a megfordítás is igaz, hiszen kompakt tér zárt altere kompakt, és így H-zárt.

A kompakt terek osztálya

Akár az Alekszandrov—Uriszon-kritérium, akár a Stone-tétel állítása arra ad feltételt, hogy egy adott topologikus tér mikor kompakt. Lehetne-e azonban a kompakt topologikus tér fogalma helyett a kompakt terek osztályát megragadni? Vagyis meg lehet-e adni olyan feltételeket, amelyek terek osztályaira vonatkoznak, és amelyeknek csak a kompakt terek osztálya tesz eleget. Ilyen feltételeket fogunk keresni ebben a részben.

Az alább felsorolt tulajdonságokban C mindig Hausdorff-tereknek egy osztályát jelöli.

(A_1) Ha $X_i\in C$ $(i\in I)$, akkor $\Pi\{X_i: i\in I\}\in C$.
(A) Ha $X\in C$ és $\varkappa$ egy számosság, akkor $X^{\varkappa}\in C$.
(B_1) Ha $X\in C$ és $f: X\to Y$ folytonos ráképzés, akkor $Y\in C$.
(B) Ha $X\in C$ és $f: X\to Y$ hányados-leképezés, akkor $Y\in C$.
(C_1) Ha $X\in C$ és X sűrű altere Y-nak, akkor $X=Y$.
(C) Ha $X\in C$ és X sűrű altere Y-nak, akkor $Y\in C$.
(D) Ha $X\in C$ és Y zárt altere X-nek, akkor $Y\in C$.

Könnyű végiggondolni, hogy a kompakt terek osztálya valamennyi tulajdonsággal rendelkezik, éppen úgy, mint az egypontú terek, valamint az összes terek osztálya. Az is látható, hogy T gyengébb tulajdonság, mint T_1, ha $T=A, B, C$.

TÉTEL. *Legyen C Hausdorff-terek olyan osztálya, amely rendelkezik az* (A), (B), (C) *és* (D) *tulajdonságokkal, továbbá tartalmaz nem egypontú teret és nem valamennyi Hausdorff-térből áll. Ekkor C a kompakt (Hausdorff-) terek osztálya.*

Mivel C tartalmaz egy legalább két pontú teret, a (D) tulajdonság miatt tartalmazza annak egy két pontú diszkrét zárt alterét. Legyen ez $\{0, 1\}$. Értelmezzünk egy $f: \{0, 1\}^{\omega}\to[0, 1]$ függvényt az $f(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{2^k}$ formulával, ahol $p=(p_1, p_2, \ldots)\in$ $\in\{0, 1\}^{\omega}$. f folytonos ráképzés, és mivel $\{0, 1\}^{\omega}$ kompakt, azért hányados-leképezés is. (A) és (B) alapján $[0, 1]\in C$.

LEMMA. *Minden kompakt Hausdorff-tér* $[0, 1]$ *valamely hatványának egy zárt alterével homeomorf.*

Legyen X kompakt. $p, q \in X$ és $p \neq q$ esetén az Uriszon-lemma alkalmazásával adódik olyan $f_{p,q}: X \to [0, 1] = Y_{p,q}$ folytonos függvény, hogy $f_{p,q}(p) = 0$ és $f_{p,q}(q) = 1$. $\langle f_{p,q} \rangle: X \to \Pi \{Y_{p,q}: p \neq q, p, q \in X\}$ folytonos 1-1 leképezés [0, 1] egy hatványába. X kompaktsága miatt ez zárt beágyazás.

A lemmából az (A), (B) és (D) tulajdonságot használva azt kapjuk, hogy minden kompakt tér C-ben van.

Most tételezzük fel, hogy C tartalmaz egy nem kompakt X teret. Először be fogjuk látni, hogy ebben az esetben minden diszkrét tér C-ben van.

Stone tétele szerint van X-nek egy nem H-zárt X_0 zárt altere. (D) alapján $X_0 \in C$. Legyen $Y = X_0 \cup \{p\}$ egypontú bővítése X_0-nak és k egy számosság. $Y^k \setminus \{(p)\}$ bővítése X_0^k-nak, következésképpen $Y^k \setminus \{(p)\} \in C$. Legyen $q \in X_0$ és

$$Z_k = \{y \in Y^k: y\text{-nak az egyik koordinátája } q \text{ és a többi } p\}$$

Z_k k számosságú diszkrét zárt altere $Y^k \setminus \{(p)\}$-nek. Így $Z_k \in C$ minden k számosságra.

Végül legyen Y tetszőleges Hausdorff-tér. $p \in Y$-ra Y_p alaphalmaza legyen Y, a p-től különböző pontok Y_p-ben izoláltak, és p környezetei legyenek ugyanazok a halmazok, mint Y-ban. Így Y_p Hausdorff-tér, és legfeljebb egy nem izolált pontja van. X az Y_p $(p \in Y)$ terek topologikus összege. X az izolált pontokból álló alterének bővítése, tehát (D) miatt $X \in C$. Másrészt a természetes $X \to Y$ leképezés, amely Y_p-t identikusan képezi Y-ra, könnyen ellenőrizhető módon hányadosleképezés. A (B) tulajdonság alapján $Y \in C$.

Ha tehát C tartalmaz egy nem kompakt teret, akkor minden Hausdorff-tér C-hez tartozik.

Az (A), (B), (C) és (D) feltételek bármelyikét elhagyva a tétel állítása már nem teljesül.

A véges diszkrét terek rendelkeznek a (B), (C) és (D) tulajdonsággal, de az (A)-val nem. A 0-dimenziós kompakt terek eleget tesznek az (A), (C) és (D) feltételeknek. Azok a terek, amelyekben minden megszámlálható altér lezárása kompakt, kielégítik (A)-t, (B)-t és (D)-t. Az összefüggő terek osztálya pedig rendelkezik az (A), (B) és (C) tulajdonságokkal.

IRODALOM

P. Sz. Alekszandrov: *Bevezetés a halmazok és a függvények általános elméletébe*, Budapest, 1952.

P. S. Alexandroff et P. S. Urysohn: Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. K. Akademie* Amsterdam, Deel XIV. (1929), 1—96.

Császár Á.: *Bevezetés az általános topológiába*, Budapest, 1970.

J. Fried: Remark on the characterization of the class of compact Hausdorff spaces, kézirat.

M. Katětov: Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume, *Časopis matem. fys.* 69 (1940), 36—49.

J. Mioduszewski: Another proof that a chain of non-empty H-closed subspaces has a non-empty intersection, *Colloquium Mathematicum*, XXIII. (1971), 43—44.

D. Petz: A characterization of the class of compact Hausdorff spaces, *Studia Sci. Mat. Hung.*, megjelenés alatt.

L. A. Steen and J. A. Seebach, Jr.: *Counterexamples in topology*, New York, 1970.

M. H. Stone: Application of Boolean algebra to topology, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 375—481.

СЛАСС КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАСТВ

ДЕНЕШ ПЕТЗ

THE CLASS OF COMPACT SPACES

D. PETZ

EGY MEGJEGYZÉS A MINKOWSKI-FÉLE KONVEX-TEST TÉTELHEZ

UHRIN BÉLA

1. Jelöljük Λ-val az R^n-ben levő egész koordinátájú pontok (rácspontok) összességét, és P-vel Λ egységcelláját azaz, $P \triangleq \{x \in R^n : 0 \leqq x_i < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Legyen $K \subset R^n$ egy nem-üres, korlátos, az origóra szimmetrikus és konvex halmaz, $\chi_K(x)$ a K halmaz karakterisztikus függvénye és $V(K) \triangleq \int_{R^n} \chi_K(x)\, dx$ a K halmaz térfogata (Lebesgue mértéke). Jelölje $\theta \in \Lambda$ az R^n origóját. A geometriai számelmélet egyik klasszikus eredménye a következő

1. TÉTEL (H. Minkowski [1]). *Ha* $V(K) > 2^n$ *akkor a* K*-ban van legalább egy* $u \neq \theta$ *rácspont.* □

Ennek a tételnek több rövid és szép bizonyítása ismeretes (lásd pl. [2], [3]). Talán egyike a legszebbeknek az alábbi, amely Hajós Györgytől származik.

1. *Bizonyítás* (Hajós Gy. [4]): Jelöljük $K_u \triangleq \left((P+u) \cap \frac{1}{2} K\right) - u, u \in \Lambda$. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy igaz az alábbi egyenlőség:

$$V\left(\frac{1}{2} K\right) = \sum_{u \in \Lambda} V(K_u). \tag{1}$$

(K korlátossága miatt az utóbbi összeg csak véges sok nem-nulla tagot tartalmaz.) A $V(K) > 2^n$ feltevésből, a $V(K) = 2^n V\left(\frac{1}{2} K\right)$ nyilvánvaló egyenlőségből és (1)-ből, következik

$$\sum_{u \in \Lambda} V(K_u) > 1 = V(P). \tag{2}$$

A K_u halmaz része P-nek, $K_u \subseteq P$, és emiatt (2)-ből adódik: létezik $u, v \in \Lambda$, $u \neq v$, hogy

$$K_u \cap K_v \neq \emptyset \tag{3}$$

azaz, létezik $x, y \in K$, hogy

$$\frac{1}{2} x - u = \frac{1}{2} y - v. \tag{4}$$

K szimmetrikus és konvex, tehát $-y \in K$ és $\frac{x-y}{2} = u - v \in K$, amit bizonyítani akartunk. □

2. E dolgozatban egy új elemi bizonyítást adunk, amely alkalmasan továbbfejlesztve Minkowski tételénél mind általánosabb mind élesebb tételek bizonyítására is alkalmas (erről bővebben lásd a 3. szakaszt). A bizonyítás két nyilvánvaló összefüggésen alapszik. Mivelhogy ezek a legáltalánosabb alakjukban is nyilvánvalóak, alább e két összefüggés általános formáját idézzük.

Legyen $f(x)$ az R^n-en értelmezett valós, Lebesgue-integrálható függvény, amely egy korlátos halmazon kívül identikusan nulla. Erre a függvényre nyilván igaz az alábbi egyenlőség:

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = \int_P \Big(\sum_{u\in\Lambda} f(u+x)\Big)\,dx = \sum_{u\in\Lambda}\int_P f(u+x)\,dx, \tag{5}$$

ahol az integrálás Lebesgue-értelemben értendő.

Legyen $A, B \subset R^n$ két nem-üres véges számosságú halmaz, amelyek számossága $|A|=r$, $|B|=m$. Jelölje $A+B \triangleq \{x\in R^n: x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$ a két halmaz ún. Minkowski (v. algebrai) összegét. Ezen összeg $|A+B|$ számosságára igaz a következő alsó becslés:

$$|A+B| \geqq |A|+|B|-1. \tag{6}$$

Valóban, írjuk fel A, ill. B elemeit ún. lexikografikusan növekvő sorrendben, mondjuk, $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_r$, $b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_m$. Akkor az $a_1+b_1 \prec a_1+b_2 \prec \ldots \prec a_1+b_m \prec a_2+b_m \prec a_3+b_m \prec \ldots \prec a_r+b_m$ vektorok mind különbözőek.

Meglepő, hogy az (5), (6) két triviális összefüggésből — amelyek látszólag távol állnak Minkowski tételétől — a tétel egyszerű módon következik.

2. *Bizonyítás:* A K halmaz szimmetrikus és konvex, tehát $\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}K=K$, azaz, tetszőleges $x\in R^n$-re

$$\left(\frac{1}{2}K-x\right)-\left(\frac{1}{2}K-x\right) = K. \tag{7}$$

Jelöljük $K(x) \triangleq \left(\frac{1}{2}K-x\right)\cap\Lambda$ és $P'=\{x\in P: K(x)\neq\emptyset\}$. Rögzített $x\in R^n$-re nyilván

$$|K(x)| = \sum_{u\in\Lambda} \chi_K(2(u+x)) \tag{8}$$

és ebből, alkalmazva (5)-öt a $\chi_K(2x)$ függvényre, nyerjük

$$\frac{V(K)}{2^n} = \int_{P'} |K(x)|\,dx. \tag{9}$$

Ebből rögtön leolvasható, hogy $0 < V(P') \leqq 1$, azaz $P'\neq\emptyset$. Legyen $x\in P'$. Felhasználva a (7)-et írhatjuk

$$K\cap\Lambda = \left(\left(\frac{1}{2}K-x\right)-\left(\frac{1}{2}K-x\right)\right)\cap\Lambda \supseteq K(x)-K(x), \tag{10}$$

amiből, alkalmazva (6)-ot a $K(x)$, $-K(x)$ halmazokra, következik

$$|K\cap\Lambda| \geqq |K(x)-K(x)| \geqq 2|K(x)|-1. \tag{11}$$

Integrálva (11) mindkét oldalát a P'-n, (9) alapján nyerjük

$$\frac{1}{2}(1+|K\cap\Lambda|) \geqq \frac{V(K)}{V(P')\cdot 2^n} \geqq \frac{V(K)}{2^n}. \tag{12}$$

Ez implikálja a tétel állítását. □

A (12)-ből valóban rögtön leolvasható az alábbi

2. TÉTEL. *Ha* $V(K)>V(P')m\cdot 2^n>0$ *(ahol* m *egész), akkor a* K *tartalmaz legalább* m *olyan* $\pm u_i\neq\theta$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *rácspontpárt, amelyekre az* $\{u_i, -u_i\}_{i=1}^m$ *halmaz egymástól különböző elemekből áll.* □

Ha eltekintünk a $0<V(P')\leqq 1$ szorzófaktortól (azaz a tétel feltétele $V(K)>m\cdot 2^n$ lesz), akkor ez a tétel Minkowski tételének a közismert általánosabb változata. Tételünk a $V(P')$ faktorral élesebb Minkowski tételénél. A következő példa mutatja, hogy van olyan eset, amikor $0<V(P')<1$. Legyen $\Lambda\subset R^2$, $x_0\triangleq(1,-1)\in R^2$ és $K\triangleq\left\{x\in R^2: \|x-tx_0\|\leqq\frac{\varepsilon}{2},\ -2\leqq t\leqq 2\right\}$, ahol $0<\varepsilon<1/2\sqrt{2}$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $0<V(P')=1-2\sqrt{2}\varepsilon<1$.

A bizonyításból látszik, hogy a (6) egyenlőtlenségnek csak egy speciális esetét használtuk: $A\subset\Lambda\subset R^n$ és $B\triangleq -A$. Az is látszik, hogy (6) bármely élesítése, amelyet erre a speciális esetre be tudnánk látni, természetes módon a Minkowski-féle tételnek egy élesítését eredményezi. Ebből a szempontból érdekes lehet annak a vizsgálata, milyen struktúrája van egy $H\subset\Lambda\subset R^n$, $0<|H|<\infty$ halmaznak, amelyre

$$|H-H| = s\cdot|H|-1+k \quad (s\geqq 2,\ k\geqq 0). \tag{13}$$

Könnyű belátni, hogy ha (13) teljesül és $s=2$, $k=0$, akkor H csak egy számtani sor lehet, azaz H elemei: $h<h+d<h+2d<\ldots<h+(m-1)d$, ahol $h, d\in R^n$, $|H|=m$. Nagyobb s, ill. k-ra ez bonyolultabb kérdés.

A bizonyításban az (5)-nek is csak egy nagyon speciális esetét használtuk: $f(x)\equiv\chi_K(2x)$. Ez lényegében ekvivalens az (1)-el.

3. Bizonyításunk alapgondolata alkalmasnak bizonyult Minkowski tételénél általánosabb tételek bizonyítására is. Ehhez változatlanul az (5) azonosságot használtuk, azonban a (6) egyenlőtlenség helyett annak egy messzemenő általánosítását kellett bizonyítanunk. Így sikerült mind általánosítanunk, mind élesítenünk R. Rado, ill. J. W. S. Cassels hasonló eredményeit (lásd [2], [3] vagy az eredeti cikkeket [5], ill. [6]). Idevágó eredményeinka [7]-ben megtalálhatók.

IRODALOM

[1] H. Minkowski, Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen, „*Gesammelte Abhandlungen*“ I., 243—260.

[2] J. W. S. Cassels, *"An introduction to the geometry of numbers"*, *Grundl. Math. Wiss.* 99, Berlin, Springer, 1959.

[3.] C. G Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, North-Holland, Amsterdam, 1969.

[4] G. Hajós, Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski, *Acta Litt. Sci.* (Szeged), **6** (1934), 224—225.

[5] R. Rado, A theorem on the geometry of numbers, *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 34—47.

[6] J. W. S. Cassels, On a theorem of Rado in the geometry of numbers, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 196—200.

[7] B. Uhrin, Some useful estimations in the geometry of numbers, Periodica Math. Hungarica, *11.* (2) (1980), 95—103.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ МИНКОВСКОВО О ВЬШУКЛЫХ ТЕЛАХ

БЕЛА УХРИН

REMARK TO MINKOWSKI'S THEOREM ON CONVEX BODIES

B. UHRIN

EGY MEGJEGYZÉS UNIVERZÁLIS ELEMEKRŐL

SÖVEGJÁRTÓ ANDRÁS

Joó István [2] általánosította Talaljan nevezetes tételét univerzális sorokról, bizonyítva, hogy tetszőleges $\{\varphi_n\} \subset L^2(0, 1)$ teljes ortonormált rendszer esetén azon C_0-beli $\{a_n\}$ együtthatósorozatok, amelyekre a $\sum a_n \varphi_n$ sor részletösszegei nem alkotnak sűrű halmazt $S(0, 1)$-ben,[1] első kategóriájú halmazt alkotnak a C_0 Banach-térben (C_0 a nullához tartó valós sorozatok összessége a maximum normával).

Az univerzális sor létezésének funkcionál-analízisbeli mélyebb okai után kutatva, Joó István felvetette a következő kérdést: ha $L_n: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos lineáris operátorsorozat egy szeparábilis $\mathscr{H}$ Hilbert-téren, amelyre $\{h: L_n(h)$ konvergál a $\mathscr{H}$ tér normájában$\} \subsetneq \mathscr{H}$ sűrű, akkor van-e mindig olyan h_0 elem $\mathscr{H}$-ban, amelyre az $\{L_n(h_0)\}_1^\infty$ halmaz sűrű $\mathscr{H}$-ban normában (ill. gyengén). Az ilyen tulajdonságú h_0 elemeket az $\{L_n\}$ sorozat *univerzális elemeinek* nevezzük. Jelen dolgozatban negatív választ adunk erre a kérdésre, ellenpélda megadásával.

Legyen $\mathscr{H} = L^2(0, 1)$ és $L_n(h)(t) = \min\left(\frac{1}{t}, n\right) h(t)$ és

$$\mathscr{D}_L \overset{\text{def}}{=} \left\{h \in L^2(0, 1): \int_0^1 \frac{|h(t)|^2}{t^2}\, dt < \infty\right\}.$$

$h \neq 0$ esetén $\int_0^1 (L_n(h)(t))^2 dt$ növekszik n-nel. Könnyen belátható, hogy $\mathscr{D}_L \subsetneq L^2(0, 1)$ sűrű halmaz. Igazoljuk, hogy semmilyen elem nem lehet az $\{L_n(g)\}$ sorozat gyenge torlódási pontja, ha g olyan elem, amelyre az $\{L_n(g)\}$ sorozat nem konvergál. Mivel az univerzális elemek csak ilyenek között lehetnek, ez egyúttal azt mutatja, hogy jelen esetben nincs univerzális elem még a gyenge konvergenciára nézve sem. Tegyük fel ugyanis, hogy g_0 az $\{L_n(g)\}_1^\infty$ sorozat gyenge torlódási pontja, azaz van olyan $\{n_k\}$ részsorozat és olyan $g_0 \in L^2(0, 1)$, amelyre

$$\int_0^1 L_{n_k}(g)(t) \cdot h(t)\, dt - \int_0^1 g_0(t) h(t)\, dt \to 0, \quad k \to \infty$$

akkor a Banach—Steinhaus-tétel alapján ebből

$$\int_0^1 (L_{n_k}(g)(t))^2\, dt \leqq C \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

következik.

[1] $S(0, 1)$ jelöli a (0, 1)-en mérhető majdnem mindenütt véges függvények összességét a mértékben való konvergenciával. Jól ismert, hogy $S(0, 1)$ teljes metrikus topologikus vektortér.

A Beppo—Levi-tétel alapján, felhasználva az L_n operátorok definícióját, ebből

$$\int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{t^2}\,dt < \infty$$

adódik, azaz $g \in \mathscr{D}_L$.

Most igazoljuk, hogy $\mathscr{D}_L$ azon elemekből áll, amelyekre az $\{L_n(g)\}$ sorozat normában (gyengén) konvergál (most e két halmaz egybeesik, ez is kijön).

Már eddig igazoltuk: $g \notin \mathscr{D}_L$ esetén az $\{L_n(g)\}$ sorozat még gyengén sem konvergál. Most megmutatjuk: $g \in \mathscr{D}_L$ esetén az $\{L_n(g)\}$ sorozat normában konvergál.

A Riesz—Fisher-tétel alapján elég igazolni, hogy az $\{L_n(g)\}$ sorozat Cauchy-féle. Ez azonban rögtön adódik az

$$\int_0^1 h(t)^2 \left(\min\left(\frac{1}{t}, n\right) - \min\left(\frac{1}{t}, m\right)\right)^2 dt \leqq \int_0^{1/n} h(t)^2 \frac{1}{t^2}\,dt < \varepsilon$$

$$(n \geqq n_0(\varepsilon),\ n < m)$$

egyenlőtlenségből.

Nyitva maradt azonban a kérdés: létezik-e egy $\mathscr{H}$ Hilbert-téren olyan folytonos lineáris $\{L_n\}$ operátorsorozat, amelyre azon $h \in \mathscr{H}$ elemek halmazának komplementere, amelyekre az $\{L_n(h)\}$ sorozat sűrű (gyengén sűrű), első kategóriájú halmazt alkot.

A szerzőnek erre a problémájára Petruska György adott pozitív választ alkalmas operátorsorozat megkonstruálásával (szóbeli közlés). A konstrukció komplikált, ezért itt nem közöljük.

Megválaszolatlan azonban Joó István kérdése: Legyen $\lambda_n \searrow 0$ tetszőleges rögzített valós számsorozat és tekintsük a következő folytonos lineáris operátorsorozatot:

$$\{L_n(f)\} = \left\{\frac{f(x+\lambda_n)-f(x)}{\lambda_n}\right\}_1^\infty : L^2(0,1) \to L^2(0,1).$$

Igaz-e, hogy azon $f \in L^2(0,1)$ függvények halmazának komplementere, amelyekre az $\{L_n(f)\}$ sorozat sűrű normában (ill. gyengén sűrű) első kategóriájú halmazt alkot $L^2(0,1)$-ben?

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УНИВЕРСАЛОНЫЕ ЭЛЕМЕНТАХ

АНДРАШ ШЁВЕГЯРТО

A NOTE ON UNIVERSAL ELEMENTS

A. SÖVEGJÁRTÓ

In the paper is constructed a sequence of continuous linear operators $L_n: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ such that there exists an $f_0 \in L^2(0,1)$ for which the sequence $\{L_n(f_0)\}$ does not converges in $L^2(0,1)$, the set of those elements $f \in L^2(0,1)$ for which the sequence $\{L_n(f)\}$ converges in $L^2(0,1)$ is dense in $L^2(0,1)$ further there is no univerzal element with respect to the sequence $\{L_n\}$ of operators, i.e. there is no element $f \in L^2(0,1)$ for which the sequence $\{L_n(f)\}$ is weakly dense in $L^2(0,1)$.

IRODALOM

[1] G. ALEXITS, *Convergence Problems of Orthogonal Series*, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1961).
[2] I. Joó, Note to a theorem of Talaljan on universal series and to a problem of Nikisin, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* **19**. Fourier analysis and approximation theory, Budapest (Hungary), 1976, p. 451—458.

JELENTÉS AZ 1979. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1979. november 2. és 12. között rendezte meg az 1979. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1979-ben fejezték be.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Nevezzük az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon értelmezett k-változós műveletet az ugyanott értelmezett ϱ kétváltozós relációval barátságosnak, ha $f(a_1, \ldots, a_k)\, \varrho\, f(b_1, \ldots, b_k)$-ból következik $a_i \varrho b_i$ legalább egy i-re $(1 \leqq i \leqq k)$. Mutassuk meg, hogy ha f barátságos az „egyenlő" és a „kisebb" relációval, akkor minden kétváltozós relációval barátságos.

2. Legyen V monoidok egy olyan varietása, amelynek nem minden eleme csoport. Igazoljuk, hogy ha $A \in V$ és B részmonoidja A-nak, akkor léteznek olyan $S \in V$ és C monoidok és $\varphi: S \to A, \varphi_1: S \to C$ epimorfizmusok, amelyekre $\varphi(\varphi_1^{-1}(e)) = B$ (e a C egységeleme).

3. Jelölje $g(n, k)$ $(n \geqq 2,\ n \leqq k \leqq n^2 - n)$ azon irányított gráfok számát, amelyek az $1, \ldots, n$ pontokon vannak értelmezve, k élük van, erősen összefüggőek, hurokélük nincs, és bármely két pontot adott irányban legfeljebb egy élük köt össze. Bizonyítandó, hogy

$$\sum_{k=n}^{n^2-n} (-1)^k g(n, k) = (n-1)!.$$

4. Milyen n-re létezik az n dimenziós térbeli egy determinánsú ortogonális transzformációk csoportjának ($SO(n)$-nek) zárt, reguláris részcsoportja? ($G \subseteq SO(n)$ reguláris, ha az egységgömb bármely x, y elemeire pontosan egy $\varphi \in G$ létezik, amelyre $\varphi(x) = y$).

5. Adjunk meg a térben különböző, nem egysíkban levő $P_1, \ldots, P_5, Q_1, \ldots, Q_5$ pontokat úgy, hogy ha minden P_i-t minden Q_j-vel merev rúddal összekötünk, az így kapott rendszer merev lesz.

6. Az E^3 euklideszi tér z-tengelytől különböző pontjaiban értelmezzünk egy Riemann-metrikát a

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

metrikus alaptenzorral ((x, y, z) derékszögű koordinátarendszer E^3-ban). Bizonyítandó, hogy e Riemann-tér geodetikus vonalainak merőleges vetületei az (x, y) síkra egyenesek, vagy origó fókuszpontú kúpszeletek.

7. Legyen T az n-dimenziós gömbfelület egy triangulációja, és legyen T minden csúcsához a V lineáris tér egy-egy 0-tól különböző vektora rendelve. Bizonyítandó, hogy ha van olyan n-dimenziós szimplexe T-nek, amelynek csúcsaihoz lineárisan független vektorok vannak rendelve, akkor van még egy ilyen szimplex is.

8. Legyenek K_n $(n=1, 2, \ldots)$ 2π szerint periodikus folytonos függvények. Igazoljuk, hogy ha $k_n(f; x)=\int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\,dt$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens

I. $\int_0^{2\pi} |k_n(f; x)-f(x)|\,dx \to 0$ $(n\to\infty)$ minden $f\in L_1[0, 2\pi]$-re,

II. $k_n(f; 0)\to f(0)$ minden 2π-periodikus folytonos f-re.

9. Tegyük fel, hogy a holomorf függvényekből álló $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ sor abszolút konvergens minden $z\in\mathbf{C}$-re. Legyen $H\subseteq\mathbf{C}$ azon pontok halmaza, amelyekben az összegfüggvény nem reguláris. Igazoljuk, hogy H sehol sem sűrű, de nem feltétlenül megszámlálható.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha a_i $(i=1, \ldots, 4)$ pozitív állandók, $a_2-a_4>2$ és $a_1a_3-a_2>2$, akkor az

$$\dot{x} = a_1-a_2x+a_3xy$$

$$\dot{y} = a_1x-y-a_3xy \quad (x, y\in R)$$

differenciálegyenletrendszer $x(0)=0$, $y(0)\geqq a_1$ feltételeknek eleget tevő $(x(t), y(t))$ megoldásából az $x(t)$ függvénynek pontosan egy szigorú helyi maximuma van a $[0, \infty)$ intervallumon.

11. Legyen $\{\xi_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ valószínűségi változók kettős sorozata, amelyre

$$E(\xi_{ij}\xi_{kl}) = O\big((\log(2|i-k|+2)\log(2|j-l|+2))^{-2}\big)$$

$(i, j, k, l=1, 2, \ldots)$. Bizonyítsuk be, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\xi_{kl}\to 0, \quad \text{ha} \quad \max(m, n)\to\infty.$$

Az alábbiakban felsoroljuk, hogy az egyes feladatokat kik bocsátották a bizottság rendelkezésére.

1. feladat Csákány Béla,
2. feladat Márki László,
3. feladat A. A. Schrijver (Hollandia),
4. feladat Szabó Zoltán,
5. feladat Lovász László,
6. feladat Nagy Péter,
7. feladat Lovász László,
8. feladat Totik Vilmos,
9. feladat Kérchy László,
10. feladat Pintér Lajos és Hatvani László,
11. feladat Móricz Ferenc.

A verseny szabályainak megsértésére vonatkozó észrevételt a versenybizottság sem a verseny ideje alatt, sem azután nem kapott.

A versenyre 34 versenyző 155 megoldást nyújtott be, amiből 84 bizonyult teljesnek. A legtöbb helyes megoldás az 1. és az 5. feladatra (20-20 db), a legkevesebb a 4., 9. és 11. feladatra (1-1 db) érkezett.

A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság döntése alapján

I. díjat (és 4500 Ft-os pénzjutalmat) nyert
KOLLÁR JÁNOS (ELTE, V. éves matematikus hallgató).

II. díjat a versenybizottság nem ad ki.

III. díjat (és 1500-1500 Ft-os pénzjutalmat) nyert
GERÉB MIHÁLY (ELTE, 1979-ben végzett matematikus hallgató),
IVANYOS GÁBOR (ELTE, II. éves matematikus hallgató) és
SERESS ÁKOS (ELTE, II. éves matematikus hallgató).

Dicséretben (és 750-750 Ft-os pénzjutalomban) részesültek
KISS EMIL (ELTE, 1979-ben végzett matematikus),
KRISZTIN TIBOR (JATE IV. éves matematikus hallgató),
PÁLES ZSOLT (ELTE, V. éves matematikus hallgató) és
SIMÁNYI NÁNDOR (ELTE, V. éves matematikus hallgató).

KOLLÁR JÁNOS a 9. feladat második része kivételével minden feladatra nyújtott be megoldást. Kiemelkedő az 1., hiányos a 2. feladatra adott megoldása. A 7. feladatot csak valós lineáris tér esetén vizsgálja. Rendkívül tömören fogalmaz, a 4. és 11. feladatot egyedül ő oldja meg helyesen.

GERÉB MIHÁLY megoldja az 1., 2., 3., 5., 7. és részben a 9. és 10. feladatot. Kiemelkedőek a 2. és 3. feladatra adott megoldásai, az 1. feladatra adott megoldása kissé hiányos. A 7. feladatot általánosítja.

IVANYOS GÁBOR az 1., 2., 3., 4., 5., 7., 9. és 11. feladatra küldött be megoldást. Kiemelkedően oldja meg a 2., kissé hiányosan a 7. és hibásan a 4. feladatot. A 11. feladatban csak sztochasztikus konvergenciát bizonyít.

SERESS ÁKOS az 1., 2., 3., 5., 7., 9. és 11. feladatra nyújtott be megoldást. Kiemelkedő az 1., hibás a 9. feladatra adott megoldása. A 11. feladatban csak sztochasztikus konvergenciát bizonyít.

KISS EMIL a 6., 10. és 11. feladatra nem küldött megoldást, azonban a 4., 8. és 9. feladatra adott megoldása hibás. Megoldásai — kivéve az 1. feladatot — kissé bonyolultak.

KRISZTIN TIBOR az 1., 5., 6., 7., 9. feladatra és a 8. feladat második részére nyújtott be megoldást. Hibás a 7., kiemelkedő az 1., 6. és 9. feladatra adott megoldása. Ez utóbbit egyedül ő oldja meg helyesen.

PÁLES ZSOLT megoldja az 1., 5., 6., 7. és 8. feladatot. Kiemelkedő az 1. és 8., hiányos a 7. és hibás a 4. feladatra adott megoldása. A 11. feladatban csak sztochasztikus konvergenciát bizonyít.

SIMÁNYI NÁNDOR megoldja az 1., 2., 8., 10. és kissé hiányosan a 9. feladat első részét. A 7. feladatot csak valós lineáris térre vizsgálja. Kiemelkedő az 1. feladatra adott megoldása.

A versenybizottság:

Totik Vilmos (titkár)	Szőkefalvi-Nagy Béla (elnök)
Csákány Béla	Csörgő Sándor
Gehér László	Gécseg Ferenc
Hatvani László	Huhn András
Leindler László	Lovász László
Megyesi László	Móricz Ferenc
Nagy Péter	Pintér Lajos
Pollák György	Szalay István
	Tandori Károly

A FELADATOK MEGOLDÁSAI

1. Feladat

Mivel f barátságos és az „egyenlő" és a „kisebb" relációval, fennáll

$$f(1, \ldots, 1) < f(2, \ldots, 2) < \ldots < f(n, \ldots, n).$$

Innen $f(i, \ldots, i) = i$ minden i-re. Most megállapíthatjuk, hogy $(*)$ ha $f(a_1, \ldots, a_k) = a$, akkor van olyan i, hogy $a_i = a$ (mert $f(a_1, \ldots, a_k) = a = f(a, \ldots, a)$ és f barátságos az „egyenlő" relációval).

Elegendő belátnunk, hogy ha $f(a_1, \ldots, a_k) = a$ és $f(b_1, \ldots, b_k) = b$, akkor van olyan i, hogy $a_i = a$ és $b_i = b$. Legyen $I = \{i | a_i = a\}$, $J = \{j | b_i = b\}$. A $(*)$ tulajdonságból $I, J \neq \emptyset$. Azt kell megmutatnunk, hogy $I \cap J \neq \emptyset$. Ez világos, ha $n = 1$. Legyen $n \geqq 2$, és tegyük fel, hogy $I \cap J = \emptyset$. Két esetet vizsgálunk:

1. $a \neq b$. Legyen $c_i = b$, ha $i \in I$, és $c_i = a$ különben; továbbá $d_i = a$, ha $i \in J$, és $d_i = b$ különben. Ekkor $f(c_1, \ldots, c_k) \neq f(a_1, \ldots, a_k) = a$ (hiszen $c_i = b \neq a = a_i$ ha $i \in I$, és $c_i = a \neq a_i$, ha $i \notin I$), és hasonlóan $f(d_1, \ldots, d_k) \neq f(b_1, \ldots, b_k) = b$. A $(*)$ tulajdonság miatt $f(c_1, \ldots, c_k)$ és $f(d_1, \ldots, d_k)$ értéke csak a és b lehet; így $f(c_1, \ldots, c_k) = b$, $f(d_1, \ldots, d_k) = a$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető $a < b$, azaz $f(d_1, \ldots, d_k) < f(c_1, \ldots, c_k)$. Mivel f barátságos a „kisebb" relációval, van olyan i, hogy $d_i < c_i$; ha azonban $i \in I$ vagy $i \in J$, akkor $c_i = d_i$, különben pedig $c_i = a < b = d_i$. Ellentmondásra jutottunk.

2. $a = b$. Legyen $c_i = c (\neq a)$, ha $i \in I$, és $c_i = a$ különben; $d_i = c$, ha $i \in J$, és $d_i = a$ különben; végül $e_i = a$, ha $i \in J$, és $e_i = c$ különben. Mint az előzőekben, nyerjük: $f(c_1, \ldots, c_k) \neq f(a_1, \ldots, a_k) = a$, $f(d_1, \ldots, d_k) \neq f(b_1, \ldots, b_k) = b = a$ és $f(e_1, \ldots, e_k) \neq f(d_1, \ldots, d_k)$. De $f(c_1, \ldots, c_k)$, $f(d_1, \ldots, d_k)$ és $f(e_1, \ldots, e_k)$ mindegyike csak az a vagy c értéket veheti fel. Így $f(c_1, \ldots, c_k) = f(d_1, \ldots, d_k) = c$ és innen $f(e_1, \ldots, e_k) = a$. Most is elegendő az $a < c$ esetet néznünk; ekkor $f(e_1, \ldots, e_k) < f(c_1, \ldots, c_k)$. Létezik tehát olyan i, hogy $e_i < c_i$; de ha $i \in I$, akkor $c_i = e_i = c$; ha $i \in J$, akkor $c_i = e_i = a$; máskülönben pedig $c_i = a < c = e_i$. A kapott ellentmondással a bizonyítás kész.

HAJNAL PÉTER

Megjegyzés.

Néhány versenyző észrevette a feladat kapcsolatát a KML 1969. évi 4. számában megjelent p. 10. sz. feladattal. Az 1. feladat kapcsolódik még egy Greenwell—Lovász, meg egy Bodnarcsuk—Kaluzsnyin—Kotov—Romov cikkhez is; ezeket a versenyzők egyike sem használta fel.

CSÁKÁNY BÉLA

Megoldották: Bíró Balázs, Borbély Albert, Brindza Béla, Csikós Balázs, Hajnal Péter, Horváth Erzsébet, Horváth Miklós, Ivanyos Gábor, Kiss Emil, Kollár János, Krisztin Tibor, Miklós Dezső, Páles Zsolt, Pyber László, Sali Attila, Seress Ákos, Simányi Nándor, Soukup Lajos, Varga József, Veres Sándor.

Hiányos: Blázsik Zoltán, Geréb Mihály, Kertész Gábor, Laczkó Mátyás, Prőhle Péter, Révész Szilárd György, Szalkai István, Székely Zoltán, Szigeti Antal, Zádori László megoldása.

2. feladat

Legyen $\mathcal{D} \in V$, $\mathcal{D}$ nem csoport. Ekkor létezik egy $x \in \mathcal{D}$, amelyik nem invertálható. x pozitív kitevős hatványai és az egységelem egy részmonoidja $\mathcal{D}$-nek, és ezzel a felosztással meg is adtunk egy kongruenciát ezen a részmonoidon. Tekintsük a természetes homomorfizmust, ami által egy V-beli $E=\{f, g\}$ $(f \neq g)$ monoid adódik, amelyben $f \cdot f = f$, $f \cdot g = g \cdot f = g$, $g \cdot g = g$.

Legyen

$$S = \{(a, g) | a \in A\} \cup \{(b, f) | b \in B\}.$$

Az $A \times E$-n vett szorzással

$$(a_1, g)(a_2, g) = (a_1 a_2, g), \quad (b_1, f)(b_2, f) = (b_1 b_2, f), \quad (a_1, g)(b_1, f) = (a_1 b_1, g)$$
$$(a_i \in A, \ b_i \in B),$$

így S részmonoidja $A \times E$-nek, tehát $S \in V$. Az is adódik, hogy az S-et előállító két halmaz egy kongruenciát definiál S-en. Legyen φ_1 az eszerinti természetes homomorfizmus. Legyen S képe C. Nyilvánvalóan a $\{(b, f) | b \in B\}$ halmaz képződik le C egységelemére. Ha mármost φ az első tényezőre való projekció, akkor $\varphi: S \to A$ epimorfizmus és $\{(b, f) | b \in B\}\varphi = B$, amit el akartunk érni.

IVANYOS GÁBOR

Megoldották: Bíró Balázs, Borbély Albert, Fábián Csaba, Geréb Mihály, Horváth Erzsébet, Ivanyos Gábor, Kiss Emil, Miklós Dezső, Phan Hong, Prőhle Péter, Pyber László, Révész Szilárd György, Seress Ákos, Simányi Nándor, Soukup Lajos.

Hiányos Kollár János megoldása.

3. feladat. I. megoldás

n szerinti indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n=2$-re ez nyilvánvalóan igaz. A baloldalt ilyen alakba írjuk:

$$\sum_{G} (-1)^{|E(G)|} \tag{1}$$

ahol G a feladatban leírt gráfokon fut végig. Csoportosítjuk (1) tagjait aszerint, hogy mely éleket tartalmazzák az n-re illeszkedők közül.

I. Ha G-nek csak két éle illeszkedik n-re, és ezeknek a másik végpontja ugyanaz a P pont, akkor $G \setminus \{n\}$ is erősen összefüggő, és

$$(-1)^{|E(G \setminus \{n\})|} = (-1)^{|E(G)|},$$

így rögzített p-re az ilyen tagok összege az indukciós feltevés szerint $(n-2)!$, és ezt $p=1, \ldots, (n-1)$-re összegezve $(n-1)!$-t kapunk.

II. Ha G-nek több mint két éle illeszkedik n-hez, vagy két, n-re illeszkedő élének másik végpontja különböző, akkor van olyan $p \neq q$, $1 \leqq p$, $q \leqq n-1$, hogy $(p, n) \in E(G)$ és $(n, q) \in E(G)$. Ebben az esetben a (p, q) él behúzása és elhagyása nem befolyásolja G erősen összefüggő voltát, így az ilyen G-ket párosíthatjuk: minden (p, q)-t élként nem tartalmazó G-vel párba állítjuk $G+(p, q)$-t. Minden G-nek jut pár, és az (1)-beli összeg egy ilyen párra 0, azaz a II-ben szereplő gráfokra az (1) összeg 0.

I-et figyelembevéve kapjuk, hogy az állítás n-re is igaz.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

3. feladat. II. megoldás

Ha g a feladat feltételeit kielégítő gráfokból álló halmaz, legyen

$$\mu(g) = \sum_{G \in g} (-1)^{|E(G)|}.$$

Tetszőleges G-hez hozzárendeljük a szögpontok egy $\{a_1 = 1, a_2, \ldots, a_n\}$ permutációját a következőképpen. Ha a_k-t már kiválasztottuk, legyen a_{k+1} a legkisebb szám, amelyikbe az $\{a_1, a_k\}$ halmazból vezet él (ilyen a_{k+1} G erősen összefüggő volta miatt van).

Egy π permutációhoz tartozó gráfok halmazát jelölje g_π. Mivel

$$\sum_G (-1)^{|E(G)|} = \sum_{\pi \in S_{n-1}} \mu(g_\pi),$$

és mivel a $\{2, \ldots, n\}$ halmaz permutációinak száma $|S_{n-1}| = (n-1)!$, elegendő megmutatni, hogy $\mu(g_\pi) = 1$ minden π-re.

Legyenek a gráf éleiből kékek amik a permutáció irányába mutatnak, piros a többi (tehát kékek az a_i, a_j) $(i<j)$ élek). Világos, hogy $(*)$ kék él minden 1-től különböző pontba érkezik, másrészt a_l-be nem érkezhet kék él a_k-ból, ha egy $k<j<l$-re $a_l<a_j$.

Mármost

$$\mu(g_\pi) = \sum_{g_\alpha \subseteq g_\pi} \mu(g_\alpha),$$

ahol g_α egy rögzített α kék élrendszerhez tartozó gráfok halmaza.

Vizsgáljuk meg $\mu(g_\alpha)$-át! Ha a piros élek közül létezik olyan (a_i, a_j), amelyre $i-j>1$, akkor válasszuk ezek közül azt, amelyikre j a legkisebb, és ha több ilyen van, akkor azt, amelyikre i a lehető legnagyobb. Legyen $g_\alpha^{i,j}$ g_α-nak az a részhalmaza, amelyikben a kiválasztott él (a_i, a_j), és legyen $G \in g_\alpha^{i,j}$. j választásából következik, hogy $(a_i, a_j), (a_j, a_{j-1}), \ldots, (a_2, a_1)$ mind élei G-nek, továbbá $a_1 = 1$-ből π konstrukciója miatt eljuthatunk csupa kék éleken a_{i-1}-be. Tehát az (a_i, a_{i-1}) él behúzása vagy elhagyása nem változtat G erősen összefüggő voltán, így $g_\alpha^{i,j}$ gráfjai párosíthatók: az egy párban levők csak az (a_i, a_{i-1}) élben különböznek. Egy pár 0-val járul az összeghez, így $\mu(g_\alpha^{i,j}) = 0$, amiből $\sum_{i,j} \mu(g_\alpha^{i,j}) = 0$.

Egyetlen olyan piros élrendszer van, amelyik nem tartalmaz kiválasztható élt, mégpedig az $\{(a_i, a_{i-1}) \mid i = 2, \ldots, n\}$, így

$$\mu(g_\alpha) = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{n-1} = (-1)^{|\alpha|-(n-1)}.$$

Egyszerűen belátható, hogy bármely, a $(*)$ feltételt kielégítő és a permutáció irányába mutató élrendszer választható kék élrendszernek, azaz α-nak. Ezért, ha p_k a k-adik szögpontba befutó kék élek maximális száma, akkor

$$\mu(g_\pi) = \sum_{g_\alpha \subseteq g_\pi} (-1)^{|\alpha|-(n-1)} = \sum_{l_2=1}^{p_2} \sum_{l_3=1}^{p_3} \dots \sum_{l_n=1}^{p_n} \binom{p_j}{l_j} (-1)^{l_j-1} = \prod_{j=2}^{n} \sum_{l_j=1}^{p_j} (-1)^{l_j-1} \binom{p_j}{l_j},$$

és mivel

$$\sum_{l_j=1}^{p_j} (-1)^{l_j-1} \binom{p_j}{l_j} = (-1)\left(\sum_{l_j=0}^{p_j} (-1)^{l_j} \binom{p_j}{l_j} - \binom{p_j}{0} \right) = (-1)(0-1) = 1,$$

kapjuk, hogy $\mu(g_\pi)=1$, amivel a feladatot igazoltuk.

GERÉB MIHÁLY

Megoldották: Borbély Albert, Csikós Balázs, Fábián Csaba, Geréb Mihály, Ivanyos Gábor, Kertész Gábor, Kiss Emil, Kollár János, Seress Ákos, Veres Sándor.

4. feladat

Ilyen G részcsoport az $n=2$ és $n=4$ esetben létezik, mégpedig az $n=2$ esetben az $SO(2)$ csoport, $n=4$ esetben pedig az egységnyi abszolút értékű kvaterniókkal történő szorzásból nyert, ún. $Sp(1)$ szimplektikus csoport.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a feladatnak ezektől különböző megoldása nincs.

Ha n páratlan, akkor $SO(n)$ biztosan nem tartalmaz reguláris részcsoportot, mivel ekkor minden $\varphi \in SO(n)$ transzformációnak van fix vektora.

Tegyük fel tehát, hogy n páros, és $n=2m$ alakú. Ekkor bármely $\varphi \in G$ elemre az R^{2m} alaptér páronként merőleges, a φ transzformációra nézve invariáns, 2-dimenziós alterek direkt összegére bomlik: $R^{2m}=h_1+h_2+\dots+h_m$. Világos, hogy a φ minden h_i altérben egy φ_i-vel jelölt α_i-szögű forgatást indukál.

1. LEMMA: Minden $\varphi \in G$-hez van olyan $R^{2m}=h_1+\dots+h_m$ Jordan-felbontás, amelyre $\alpha_1=\dots=\alpha_m$ teljesül.

Bizonyítás: Létezik G-nek olyan Φ egydimenziós részcsoportja, amelyre $\varphi \in \Phi$ (ez ismert). Az is ismert, hogy van olyan $g \in \Phi$ elem, amelynek hatványai sűrűn helyezkednek el Φ-ben. Legyen az $R^{2m}=h_1+\dots+h_m$ egy a g-re vett Jordan-felbontás és legyen g_i a g h_i-re való megszorítottja. Ekkor g_i a h_i-n egy β_i szögű forgatás. Legalább egy β_i irracionális (mivel Φ egydimenziós), és ekkor bármely másik β_j is irracionális (ellenkező esetben valamilyen k-ra $g^k \neq id$ fixen hagyna egy h_j-beli elemet). Ebből kapjuk, hogy a Φ h_i-re vett Φ_i megszorítottja az $SO(2)$ csoport minden i-re. Tekintsük azt a $\lambda: \Phi_i \to \Phi_j$ csoport-homomorfizmust, amelyik egy $g_i^* \in \Phi_i$ ($g^* \in \Phi$) elemhez a $g_j^* \in \Phi_j$ elemet rendeli. Ez a λ a regularitás és G kompaktsága miatt folytonos, továbbá kölcsönösen egyértelmű, amivel az $SO(2)$ topologikus csoportnak egy automorfizmusa adódik. Ez azonban csak kettő van: az identitás és ($SO(2)$-t $\mathbf{C}$ egységkörének véve) a konjugálás. Ezek α szögű forgatáshoz α szögű forgatást rendelnek, amiből $\lambda(\varphi_i)=\varphi_j$ miatt $\alpha_i=\alpha_j$ adódik. Ezzel az állítást igazoltuk.

Az előző lemmából azonnal következik a

2. LEMMA. Ha egy $\varphi \in G$ elem valamely x egységvektort rá merőleges vektorba viszi át, akkor $\varphi^2 = -id$, továbbá bármely más y vektort is rá merőleges vektorba visz, és az $y, \varphi(y)$ vektorok a φ-re nézve invariáns síkot feszítenek ki.

Bizonyítás: Legyen $R^{2m} = h_1 + \ldots + h_m$ az 1. Lemma által biztosított felbontás. Tegyük fel, hogy x merőleges a $\varphi(x)$ vektorra, legyen $x = x_1 + \ldots + x_m$, $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_m)$ a φ-re vett Jordan-felbontás, és tekintsük az $(x, \varphi(x)) = \sum_{i=1}^{m} (x_i, \varphi(x_i)) = 0$ belső szorzatot. Az 1. Lemma miatt minden tagra vagy $(x_i, \varphi(x_i)) \geqq 0$ vagy $(x_i, \varphi(x_i)) \leqq 0$ teljesül, így $(x_i, \varphi(x_i)) = 0$ minden tagra. Az 1. Lemma szerint tehát φ minden h_i altérben $\pi/2$ szöggel forgat, és ebből a lemma állításai azonnal következnek.

Mármost a feladat kérdésére válaszol a következő

Állítás: Ha az $SO(2m)$ $(2m \geqq 4)$ csoportnak létezik G zárt, reguláris részcsoportja, akkor $2m = 4$ (és még az is igaz, hogy G az $SO(3)$ univerzális fedőcsoportja, azaz $Sp(1)$).

Bizonyítás: Legyenek az e_0, e_1 egységvektorok egymásra merőlegesek, egyébként tetszőlegesek, továbbá legyen $\varphi_1 \in G$ az a csoportelem, amelyre $\varphi_1(e_0) = \varphi_1$. Legyen e_2 olyan egységvektor, amelyik merőleges az e_0, e_1 vektorok által meghatározott síkra, és $e_3 \overset{\text{def}}{=} \varphi_1(e_2)$. A 2. Lemma alapján az e_0, e_1, e_2, e_3 vektorok páronként merőlegesek (vegyük figyelembe, hogy invariáns altérre merőleges altér is invariáns), és ha $\varphi_i \in G$ azt a csoportelemet jelöli, amelyre $\varphi_i(e_0) = e_i$, akkor triviálisan igazak a következő formulák:

$$\varphi_1^2 = -id, \quad \varphi_2^2 = -id, \quad \varphi_3^2 = -id,$$

$$\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3, \quad \varphi_1\varphi_3 = -\varphi_3\varphi_1 = -\varphi_2, \quad \varphi_2\varphi_3 = -\varphi_3\varphi_2 = \varphi_1.$$

Az utolsó sor $\varphi_i\varphi_j = -\varphi_j\varphi_i$ felcserélési formulái azonnal következnek a $(\varphi_i\varphi_j)^2 = -id$ összefüggésből. Ha $2m = 4$, készen vagyunk.

Még meg kell mutatni, hogy a $2m > 4$ eset nem léphet fel. Valóban, tegyük fel, hogy $2m > 4$, és legyen K az e_0, e_1, e_2, e_3 vektorok által kifeszített altér, valamint legyen e_4 egy a K-ra merőleges egységvektor. Ekkor ha $e_5 \overset{\text{def}}{=} \varphi_1(e_4)$, $e_6 \overset{\text{def}}{=} \varphi_2(e_4)$, $e_7 \overset{\text{def}}{=} \varphi_3(e_4)$, akkor az e_4, e_5, e_6, e_7 vektorok páronként merőlegesek, és egy, a K-ra

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
φ_0	id	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
φ_1	φ_1	$-id$	φ_3	$-\varphi_2$	φ_5	$-\varphi_4$	φ_7	$-\varphi_6$
φ_2	φ_2	$-\varphi_3$	$-id$	φ_1	φ_6	$-\varphi_7$	$-\varphi_4$	φ_5
φ_3	φ_3	φ_2	$-\varphi_1$	$-id$	φ_7	φ_6	$-\varphi_5$	$-\varphi_4$
φ_4	φ_4	$-\varphi_5$	$-\varphi_6$	$-\varphi_7$	$-id$	φ_1	φ_2	φ_3
φ_5	φ_5	φ_4	φ_7	$-\varphi_6$	$-\varphi_1$	$-id$	φ_3	$-\varphi_2$
φ_6	φ_6	$-\varphi_7$	φ_4	φ_5	$-\varphi_2$	$-\varphi_3$	$-id$	φ_1
φ_7	φ_7	φ_6	$-\varphi_5$	φ_4	$-\varphi_3$	φ_2	$-\varphi_1$	$-id$

merőleges K^* alteret feszítenek ki, azaz az $e_0, e_1, \ldots, e_7$ vektorrendszer ortonormált rendszer. Ha $\varphi_i \in G$ az a csoportelem, amelyre $\varphi_i(e_0)=e_i$, $i=0, 1, \ldots, 7$, akkor a φ_i transzformációk szorzótáblájából (l. az ábrát) a következő olvasható ki:

$$(\varphi_4\varphi_5)\varphi_6 = (\varphi_4\varphi_1\varphi_4)\varphi_6 = (-\varphi_4\varphi_4\varphi_1)\varphi_6 =$$

$$= \varphi_1\varphi_6 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_4) = (\varphi_1\varphi_2)\varphi_4 = \varphi_3\varphi_4 = \varphi_7$$

$$\varphi_4(\varphi_5\varphi_6) = \varphi_4(\varphi_1\varphi_4\varphi_2\varphi_4) = \varphi_4(-\varphi_1\varphi_2\varphi_4\varphi_4) =$$

$$= \varphi_4(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_4\varphi_3 = -\varphi_3\varphi_4 = -\varphi_7,$$

ami ellentmond az asszociativitásnak, így $2m>4$ nem teljesülhet.

SZABÓ ZOLTÁN

Megoldotta: Kollár János.

5. feladat

Először leírunk két konstrukciót.

I. Legyen g merev struktúra. Vegyünk fel egy új P pontot és kössük össze g három olyan Q_1, Q_2, Q_3 pontjával, amelyekre P, Q_1, Q_2, Q_3 nem egysíkúak. Ekkor az így kapott rendszer is merev.

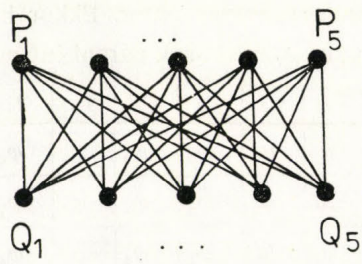
II. Legyen g merev rendszer, PQ egy rúdja. Vegyünk fel ezen egy új T osztáspontot, és kössük össze T-t g két további R, S pontjával, amelyekre $PQRS$ nem egysíkúak. Ekkor az így kapott rendszer is merev lesz.

Visszafelé fogalmazva, ez a két állítás azt jelenti, hogy egy g gráf merev realizálhatóságához elegendő, ha

(a) realizálni tudjuk azt a gráfot, mely g-ből egy 3-adfokú pont elhagyásával áll elő;

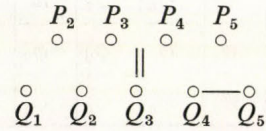
(b) realizálni tudjuk azt a gráfot, mely g-ből egy negyedfokú pont elhagyásával, és két szomszédjának egy új éllel való összekötésével adódik.

Esetünkben a realizálandó gráf

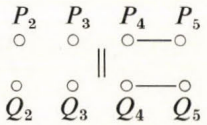


1. ábra

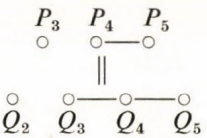
A P_1Q_1 élt eleve elhagyjuk. A P-k és Q-k közti éleket nem rajzolva, elegendő realizálni a következő gráfokat: (b) szerint



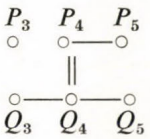
ismét (b) szerint



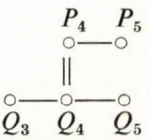
ismét (b) szerint



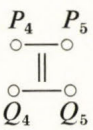
(a) szerint



(a) szerint



(a) szerint



Ez egy tetraéder, ami triviálisan merev.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megoldották: Bíró Balázs, Borbély Albert, Csikós Balázs, Fábián Csaba, Geréb Mihály, Ivanyos Gábor, Kertész Gábor, Kiss Emil, Kollár János, Krisztin Tibor, Mészáros András, Miklós Dezső, Páles Zsolt, Phan Hong, Pyber László, Révész Szilárd György, Seress Ákos, Soukup Lajos, Veres Sándor, Varga József.

Hiányos Horváth Miklós megoldása.

6. feladat. I. megoldás

Bizonyítás.

Jelölje α, β, γ az 1, 2 indexeket és (x^1, x^2, x^3) az (x, y, z) koordinátákat. Kiszámítjuk a geodetikusok differenciálegyenletét. A metrikus alaptenzor és az inverz mátrixa (g^{ik})

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta},$$

$$g_{\alpha 3} = 0, \qquad g^{\alpha 3} = 0,$$

$$g_{33} = -\sqrt{x^2+y^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

alakban írható!

A Khristoffel-együtthatókra a

$$\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{3} g^{ih} \left\{ \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right\}$$

formulák alapján az alábbi értékek adódnak:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{3} = 0; \quad \Gamma_{3\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha 3}^{\gamma} = 0;$$

$$\Gamma_{33}^{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{x^{\gamma}}{\sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}};$$

$$\Gamma_{\alpha 3}^{3} = \frac{1}{2} \frac{x^{\alpha}}{x^{1^2} + x^{2^2}}; \quad \Gamma_{3\beta}^{3} = \frac{1}{2} \frac{x^{\beta}}{x^{1^2} + x^{2^2}};$$

$$\Gamma_{33}^{3} = 0.$$

Ezek alapján a geodetikusok differenciálegyenlete

$$x^{i''} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^{i} x^{j'} x^{k'} = 0$$

felírható

(1) $$x'' + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} z'^2 = 0$$

(2) $$y'' + \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} z'^2 = 0;$$

(3) $$z'' + \frac{x}{x^2 + y^2} x'z' + \frac{y}{x^2 + y^2} y'z' = 0$$

alakban.

Ezt az egyenletrendszert kielégítik a

$$z = c, \quad x = as + b, \quad y = \bar{a}s + \bar{b}$$

görbék, amelyeknek vetületei az (x, y) síkban az egyenesek. Továbbá azt is leolvashatjuk, hogy ha egy megoldás görbe kezdeti pontjában $z' = 0$ teljesül, akkor $z' \equiv 0$ azonosan a görbén.

Tegyük fel, hogy $z' \neq 0$. Ekkor a harmadik egyenlet

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \ln (x^2 + y^2)$$

alakban írható, tehát

$$\ln z' = \ln \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z' = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (c \text{ tetszőleges pozitív konstans}),$$

amit behelyettesítve az (1) és (2) egyenletekbe, azt kapjuk, hogy

$$x'' + \frac{c^2}{2} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0,$$

$$y'' + \frac{c^2}{2} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Ez az egyenletrendszer nem más, mint a Kepler-feladat ismert

$$x'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); \quad y'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

egyenletrendszere, aminek a megoldásai az origó fókuszpontú kúpszeletek.

KRISZTIN TIBOR

6. feladat. II. megoldás

Az adott tér geodetikusainak meghatározása a

$$\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2-\sqrt{x^2+y^2}\dot{z}^2}\, dt$$

integrálra vonatkozó variációszámítási feladat stacionárius görbéinek megkeresését jelenti. Mivel a variációs függvény az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ változóban elsőfokú pozitív homogén, jól ismert, hogy az

$$(*) \qquad \dot{x}^2+\dot{y}^2-\sqrt{x^2+y^2}\dot{z}^2 = 1$$

feltételnek eleget tevő stacionárius görbék az

$$\int (\dot{x}^2+\dot{y}^2-\sqrt{x^2+y^2}\dot{z}^2)\, dt$$

integrálra vonatkozó stacionárius görbékkel egyeznek meg. Áttérve az $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, z koordináta transzformációval az (r, φ, z) koordináta rendszerre az

$$\int (\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r\dot{z}^2)\, dt$$

variációs feladathoz jutunk.

Az integrandus függvény független φ-től és z-től, tehát a

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}$$

Euler—Lagrange-egyenletekből következően

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} = A, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = B \quad (A, B \text{ konstansok}),$$

azaz kapjuk a

$$2r^2\dot{\varphi} = A, \quad -2r\dot{z} = B$$

első integrálokat.

Bevezetjük az $u(\varphi)=\frac{1}{r(\varphi)}$ új ismeretlen függvényt. Erre érvényes

$$\dot{r}=-\frac{1}{u^2}\dot{u}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{A}{2r^2}\right)=-\frac{A}{2}\frac{du}{d\varphi},$$

tehát a $(*)$ összefüggés miatt

$$1=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2-r\dot{z}^2=\frac{A^2}{4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{u^2}\left(\frac{A^2}{4}u^4\right)-\frac{1}{u}\left(\frac{B^2}{4}u^2\right)=$$

$$=\frac{A^2}{4}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]-\frac{B^2}{4}u.$$

Deriváljuk φ szerint:

$$\left\{\frac{A^2}{2}\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right]-\frac{B^2}{4}\right\}\frac{du}{d\varphi}=0.$$

A $\frac{du}{d\varphi}=0$ egyenlet jellemzi az origó körüli köröket. Elosztva $\frac{du}{d\varphi}$-vel az

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{B^2}{2A^2}$$

egyenlethez jutunk, amelynek általános megoldása

$$u(\varphi)=\frac{B^2}{2A^2}(1+e\cos(\varphi+\omega))$$

alakban írható, azaz

$$r(\varphi)=\frac{p}{1+e\cos(\varphi+\omega)}\quad\left(p=\frac{2A^2}{B^2}\right)$$

ami az origó fókuszú kúpszelet fokális egyenlete.

KARSAI JÁNOS

Megjegyzés: Analóg módon látható, hogy egy konzervatív erőtérben mozgó tömegpont pályája tárgyalható úgy, mint a négydimenziós tér-idő sokaságon alkalmasan definiált Riemann-metrika geodetikusainak térszerű vetülete.

NAGY PÉTER

Megoldották: Karsai János, Krisztin Tibor, Kollár János, Páles Zsolt, Szigeti Antal.

7. feladat. I. megoldás

Legyen $A=(a_0, \ldots, a_n)$ olyan T-beli szimplex, melynek csúcsaihoz rendelt $v(a_0), \ldots, v(a_n)$ vektorok lineárisan függetlenek. Egy T-beli $(n-1)$-dimenziós szimplexet pirosnak nevezünk, ha minden $0\leqq i\leqq n-1$ indexre az

$$X_i=\langle v(a_0), \ldots, v(a_i)\rangle\setminus\langle v(a_0), \ldots, v(a_{i-1})\rangle$$

halmazból egyetlenegy vektor van a csúcsaihoz rendelve. (Itt $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ a $v_1, \ldots, v_k$ által generált alteret jelöli.) Nyilvánvaló, hogy $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ piros.

Sedégtétel: Ha a T-beli n-dimenziós S szimplex csúcsaihoz rendelt vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor piros lapjainak száma 0 vagy 2.

Ugyanis ha $v(S)$ az $X_0, \ldots, X_{n-1}$ halmazok valamelyikéből nem tartalmaz vektort, akkor nyilvánvalóan nincsen piros lapja. Ha $v(S)$ tartalmaz minden $X_0, \ldots, X_{n-1}$ halmazból vektort, és még $X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$-en kívüli vektort is, akkor az S-hez rendelt vektorok lineárisan függetlenek, amit pedig kizártunk. Így feltehető, hogy $v(S)$ az $X_0, \ldots, X_{n-1}$ halmazok mindegyikéből tartalmaz vektort, és mondjuk X_i-ből pontosan kettőt, a többiből pontosan egyet. Ekkor S-nek két piros lapja van, melyeket úgy kapunk, hogy S-nek X_i-beli csúcsai közül egyet elhagyunk. Ezzel a segédtételt beláttuk.

Mármost tekintsük azt a gráfot, melynek csúcsai T n-dimenziós szimplexei, és kettőt akkor kötünk össze, ha van egy közös piros lapjuk. Ebben a gráfban az A szimplex foka 1. Ezért kell, hogy még egy páratlan fokú pont legyen. A segédtétel szerint ennek csúcsaihoz lineárisan független vektorok vannak rendelve, amit bizonyítani akartunk.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

7. feladat. II. megoldás

A következő, valamivel általánosabb állítást igazoljuk: ha K tetszőleges n-dimenziós komplexus, melynek határa 0 (azaz K mod 2 ciklus), és ha K 0-dimenziós szimplexeihez (azaz K csúcsaihoz) rendelünk a V lineáris térből egy-egy nem 0 vektort, akkor K azon n-dimenziós szimplexeinek száma, amelyek csúcsaihoz rendelt vektorok lineárisan függetlenek, nem lehet 1.

Indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n=1$-re ez nyilvánvalóan igaz. Legyen $n \geqq 2$. Tegyük fel, hogy $A \in K$-ra $\dim v(A)=n+1$. Azt kell megmutatnunk, hogy van még egy ilyen tulajdonságú szimplex K-ban. Legyen B egy $(n-1)$-dimenziós lapja A-nak. Ha $C \neq A$ olyan szimplex, amelynek B lapja, akkor $v(C) \nsubseteq v(B)$ esetén $\dim v(C) > \dim v(B) = n$, azaz C megfelelő. Feltehetjük tehát, hogy ha $C \neq A$ és B lapja C-nek, akkor $v(C) \subseteq v(B)$.

Legyen $K_0 = \{S \in K | v(S) \subseteq v(B)\}$, és legyen $K_1 = \partial K_0$, ahol ∂ a határt jelöli. $\partial K_1 = \partial\partial K_0 = 0$ világos, és az előzőek szerint — mivel $A \notin K_0$ és $\partial K = 0$ — B páratlan sok K_0-beli szimplexnek lapja, azaz $B \in K_1$. Az indukciós feltevés szerint létezik egy B-től különböző B_1 szimplexe K_1-nek, amelyre $\dim v(B_1) = \dim v(B)$, és így $v(B_1) = v(B)$. Mivel $B_1 \in \partial K_0$ de $B_1 \notin \partial K$, van egy olyan A_1 szimplex K-ban, amelynek B_1 lapja, de $v(A_1) \nsubseteq v(B)$, azaz $v(A_1) \nsubseteq v(B_1)$, és így $\dim v(A_1) > \dim v(B_1) = n$, tehát A_1 csúcsaihoz lineárisan független vektorok vannak rendelve. A bizonyításhoz már csak azt kell megjegyezni, hogy nem lehet $A = A_1$, mert akkor A-nak lenne két különböző lapja B és B_1, amelyekre $v(B) = v(B_1)$, amiből $\dim v(A) = \dim v(B) = n$ adódna.

GERÉB MIHÁLY megoldása alapján

Megoldották: Bíró Balázs, Geréb Mihály, Kiss Emil, Seress Ákos.

Csak valós vektortérre jó Csikós Balázs, Kollár János, Páles Zsolt és Soukup Lajos megoldása.

Hiányos Fábián Csaba, Ivanyos Gábor és Miklós Dezső megoldása.

8. feladat. I. megoldás

I⇒II. Minden előforduló függvényt 2π szerint periodikusnak tekintünk. Legyen $C[0; 2\pi]$ a folytonos függvények tere a szuprémum normával. Tekintsük a $k_n(\cdot\,;\cdot): L_1 \to L_1$ operátorsorozatot!

$$(1)\quad \|k_n(\cdot\,;\cdot)\| = \sup_{\|f\|_{L_1}\leqq 1} \|k_n(f;\cdot)\|_{L_1} \leqq \sup_{\|f\|_{L_1}\leqq 1} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt \int_0^{2\pi} |K_n(x-t)|\,dt \leqq$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt,$$

másrészt az

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta} & \text{ha } x\in[0;\delta] \\ 0 & \text{ha } x\in(\delta, 2\pi) \end{cases}$$

függvényekre $K_n(t)$ folytonosságából könnyen kapható, hogy

$$\|k_n(f_\delta;\cdot)\|_{L_1} \to \int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt \quad (\delta\to 0), \quad \text{és így} \quad \|k_n(\cdot\,;\cdot\| = \int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt.$$

A Banach—Steinhaus-tételt a $\{k_n(\cdot\,;\cdot)\}$ sorozatra alkalmazva adódik, hogy $\int_0^{2\pi} |K_n(t)|dt \leqq C$ egy n-től független C konstanssal.

Ha f folytonos, akkor

$$|k_n(f;x)-k_n(f;x+h)| = \left|\int_0^{2\pi} (f(t)-f(t-h))K_n(x-t)\,dt\right| \leqq C \sup_t |f(t)-f(t-h)|,$$

azaz a $k_n(f;x)$ függvények egyenlő mértékben folytonosak.

Ezek után tegyük fel, hogy II. nem igaz. Ekkor egy folytonos f-re egy $\varepsilon>0$-ra és valamilyen $\{\nu_n\}$ sorozatra például $k_{\nu_n}(f;0)>f(0)+\varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$. A $\{k_{\nu_n}(f;x)\}$ egyenletes folytonossága alapján kapjuk, hogy valamilyen n-től független δ-val $k_{\nu_n}(f;x)>f(x)+\dfrac{\varepsilon}{2}$, ha $0\leqq x\leqq\delta$ $(n=1, 2, \ldots)$, és így

$$\int_0^{2\pi} |k_{\nu_n}(f;x)-f(x)|\,dx \geqq \int_0^{\delta} (k_{\nu_n}(f;x)-f(x))\,dx \geqq \delta\frac{\varepsilon}{2} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

ez azonban ellentmond a feltételezett I. állításnak.

II.⇒I. Jól ismert, hogy a $k_n(\cdot\,;0): C[0;2\pi]\to\mathbf{R}$ lineáris funkcionál normája $\int_0^{2\pi} |K_n(t)|dt$, így a Banach—Steinhaus-tételből $\int_0^{2\pi} |K_n(t)|dt\leqq C$ $(n=1, 2, \ldots)$ adódik valamilyen C konstanssal. Mivel

$$k_n(f, x_0) = \int_0^{2\pi} f(t)k_n(x_0-t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x_0+t)K_n(-t)\,dt = k_n(f(x_0+t);0),$$

folytonos f-re $k_n(f; x) \to f(x)$ teljesül mindenütt. De $k_n(f; x) \leqq C \sup(f)$, ezért Lebesgue tétele szerint

$$\int_0^{2\pi} |k_n(f; x) - f(x)|\, dx \to 0 \quad (n \to \infty,\ f \in C[0; 2\pi]).$$

Legyen $f \in L_1[0; 2\pi]$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszuk a g folytonos függvényt úgy, hogy $\|g - f\|_{L_1} < \varepsilon$ teljesüljön. Ekkor (1)-et használva kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} |k_n(f; x) - f(x)|\, dx \leqq \int_0^{2\pi} |k_n(f; x) - k_n(g; x)|\, dx + \int_0^{2\pi} |k_n(g; x) - g(x)|\, dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} |g(x) - f(x)|\, dx \leqq C\|g - f\|_{L_1} + \int_0^{2\pi} |k_n(g; x) - g(x)|\, dx + \|g - f\|_{L_1}.$$

Itt a középső tag az előzőek szerint tart 0-hoz, ha $n \to \infty$, így $\int_0^{2\pi} |k_n(f; x) - f(x)|\, dx$ tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy, amivel igazoltuk az állítást.

KOLLÁR JÁNOS

8. feladat. II. megoldás

A Banach—Steinhaus-tétel következő változatát használjuk: legyenek X, Y Banach-terek, $A, A_n: X \to Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ korlátos lineáris operátorok. Ahhoz, hogy az $\{A_n\}$ sorozat pontonként konvergáljon A-hoz (azaz $A_n x \to Ax$ legyen minden $x \in X$-re), szükséges és elegendő, hogy létezzen olyan C konstans és $S \subseteq X$ zárt rendszer, amelyekre

$$(1) \quad \|A_n\| \leqq C \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$(2) \quad A_n x \to Ax \quad (n \to \infty)$$

bármely $x \in S$ esetén. (Az $S \subseteq X$ halmazt zárt rendszernek nevezzük, ha S lineáris burka sűrű X-ben.)

Legyen $A_n^1: L_1 \to L_1$ a $k_n(\cdot\,; \cdot)$ operátor, A^1 az identitás L_1-en, $A_n^2: C[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ a $k_n(\cdot\,; 0)$ funkcionál és $A^2: C[0; 2\pi] \to \mathbf{R}$ az $f \to f(0)$ leképezés. Az előző megoldásban láttuk, hogy $\|A_n^1\| = \|A_n^2\| = \int_0^{2\pi} |K_n(t)|dt$, így (1) egyszerre teljesül $\{A_n^1\}$-re és $\{A_n^2\}$-re.

Legyen $S = \{e_m = e^{imx}\}_{m=1}^{\infty}$. S zárt mind L_1-ben, mind $C[0; 2\pi]$-ben, és

$$(A_n^1 e_m)(x) = \int_0^{2\pi} e^{imt} K_n(x - t)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{im(x+t)} K_n(-t)\, dt = e^{imx} \int_0^{2\pi} e^{imt} K_n(-t) = e_m(x) A_n^2 e_m,$$

amiből

$$\|A_n^1 e_m - A^1 e_m\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |e_m(x) A_n^2 e_m - e_m(x)|\, dx = |A_n^2 e_m - A^2 e_m| \int_0^{2\pi} |e_m(x)|\, dx =$$

$$= 2\pi \|A_n^2 e_m - A^2 e_m\|_{\mathbf{R}}$$

adódik, azaz (2) is egyszerre áll fenn $\{A_n^1\}$-re és A^1-re, valamint $\{A_n^2\}$-re és A^2-re, amivel az $A_n^1 \to A^1$ és $A_n^2 \to A^2$ (pontonkénti) konvergenciák ekvivalenciáját igazoltuk.

PÁLES ZSOLT

Megoldották: Kertész Gábor, Kollár János, Páles Zsolt, Simányi Nándor, Veres Sándor.

Az I⇒II, illetve II⇒I implikációt igazolta: Soukup Lajos, illetve Krisztin Tibor és Phan Hong.

9. feladat

Legyen $g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ és $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$. Ekkor $g_n(z)$ holomorf és $g_n(z) \to g(z)$ minden $z \in \mathbf{C}$-re. Az első állítás igazolásához azt kell megmutatni, hogy $\mathbf{C}$ minden K körében létezik olyan k kör, amelyben $g(z)$ holomorf. Legyen $\varphi(z) = \sup_n |g_n(z)|$, ez a konvergencia miatt létezik és véges minden $z \in \mathbf{C}$-re. Legyen $A_k = \{z \in K \mid k-1 \leqq \leqq \varphi(z) < k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. A Baire-tételt alkalmazva, létezik olyan N, hogy A_N sűrű valamely $k \subseteq K$ kör belsejében. Ekkor $\varphi(z) \leqq N$, ha $z \in k$, ugyanis ha valamely $z_0 \in k$-ra $\varphi(z_0) > N$ lenne, akkor $|g_n(z_0)| > N$ valamilyen n-re és $g_n(z)$ folytonossága miatt z_0 egy környezetében is $\varphi(z) > N$, ami ellentmond annak, hogy A_N sűrű k-ban. Tehát $|g_n(z)| \leqq N$, ha $z \in k$. A Vitali—Montel-féle kiválasztási tétel szerint létezik $\{g_n(z)\}$-nek olyan részsorozata, amely k belsejében egyenletesen konvergens. Mivel ez a részsorozat $g(z)$-hez konvergál (mert $\{g_n(z)\}$ konvergens), Weierstrass tétele szerint a $g(z)$ függvény holomorf k belsejében, amit bizonyítani akarunk.

Megjegyzés: A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sor abszolút konvergens.

A feladat 2. részének bizonyításához a következő eredményt használjuk:

Mergelyan-tétele: Ha K kompakt halmaz C-n, amelynek komplementere összefüggő és f olyan folytonos komplex függvény K-n, amely holomorf K belsejében, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan P polinom, hogy $|f(z) - P(z)| < \varepsilon$ minden $z \in K$-ra. (L. pl. Rudin: Real and Complex Analysis).

Legyen $A = \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, $B = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $C = \{z \mid z \text{ valós}\}$. Létezik olyan $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ és $\{C_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ kompakt halmazokból álló sorozatok, hogy $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$, $C_n \subseteq C_{n+1}$ $\mathbf{C} \setminus (A_n \cup B_n \cup C_n)$ összefüggő $(n = 1, 2, \ldots)$ és

$$\bigcup_1^{\infty} A_n = A, \quad \bigcup_1^{\infty} B_n = B, \quad \bigcup_1^{\infty} C_n = C.$$

A Mergelyan-tétel szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz és n-hez létezik $P_{\varepsilon,n}$ polinom, amelyre

$$|1 - P_{\varepsilon,n}| < \varepsilon, \text{ ha } z \in A_n \cup B_n \text{ és } |P_{\varepsilon,n}(z)| < \varepsilon, \text{ ha } z \in C_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

mert $A_n \cup B_n \cup C_n$ kompakt, komplementere összefüggő, és az

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } z \in A_n \cup B_n \\ 0 & \text{ha } z \in C_n \end{cases}$$

függvény folytonos $A_n \cup B_n \cup C_n$-en és holomorf a belsejében.

Vegyük a $\{Q_n(z)=P_{\frac{1}{2^n},n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ polinomsorozatot. Legyen

$$f_1(z)=Q_1(z),\ f_2(z)=Q_2(z)-Q_1(z),\ \ldots,f_k(z)=Q_k(z)-Q_{k-1}(z),\ \ldots .$$

Ekkor $\sum_{k=1}^{n} f_k(z)=Q_n(z)$, és így

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)=\begin{cases}1 & \text{ha } z \text{ nem valós}\\ 0 & \text{ha } z \text{ valós.}\end{cases}$$

Itt H a valós egyenes, tehát nem megszámlálható. Másrészt minden $z\in\mathbf{C}$-re létezik olyan N, hogy $z\in A_n\cup B_n\cup C_n$ ha, $n\geqq N$, ezért ebben a z pontban

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{N+k}(z)|=\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{N+k}(z)-Q_{N+k-1}(z)|\leqq\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{1}{2^{N+k-1}}<\infty,$$

tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ sor abszolút konvergens z-ben.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

KRISZTIN TIBOR

Megjegyzés: A feladat állításánál több is igaz, H pozitív mértékű is lehet.

Legyen ugyanis R valós, I a képzetes tengely. Elég megmutatni, hogy az I-n vett tetszőleges sehol sem sűrű S halmaz esetén létezik holomorf függvényeknek a feltételt kielégítő $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata, hogy az e sorozathoz tartozó H halmaz tartalmazza $\hat{S}=R\times S$-et.

Legyen tehát S sehol sem sűrű I-n. Ekkor $I\setminus S^-$ sűrű nyílt halmazra I-n, így megszámlálható sok diszjunkt intervallum egyesítésére bomlik; legyenek ezek $i_k=(a_k, b_k)$ $(k=1, 2, \ldots)$. (Feltehető, hogy a_k és b_k végesek.) Tetszőleges k esetén legyen $\{r_l^{(k)}\}_{l=1}^{\infty}$ szigorúan csökkenő, $\{s_l^{(k)}\}_{l=1}^{\infty}$ szigorúan növő sorozat, melyekre $r_1^{(k)}<s_1^{(k)}$ és $r_l^{(k)}\to a_k$, $s_l^{(k)}\to b_k (l\to\infty)$.

Legyen $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ természetes számokból álló olyan sorozat, amelyben minden természetes szám végtelen sokszor szerepel.

Legyen n tetszőleges. Legyen $\alpha_n=k$ és $\operatorname{card}\{m|m\leqq n,\ \alpha_m=k\}=l$, és

$$K_n=\{z|r_{2l-1}^{(k)}<\operatorname{Im} z\leqq s_{2l-1}^{(k)},\quad |\operatorname{Re} z|\leqq n\},$$

$$A_n=\{z|\operatorname{Im} z=r_{2l}^{(k)},\quad |\operatorname{Re} z|\leqq n\},$$

$$B_n=\{z|\operatorname{Im} z=s_{2l}^{(k)},\quad |\operatorname{Re} z|\leqq n\},$$

$$L_n=\{z|r_{2l+1}^{(k)}\geqq\operatorname{Im} z\geqq\min(a_k-n,\ -n),\quad |\operatorname{Re} z|\leqq n\},$$

$$M_n=\{z|s_{2l+1}^{(k)}\leqq\operatorname{Im} z\leqq\max(b_k+n,\ n),\ |\operatorname{Re} z|\leqq n\}.$$

A $P_n=K_n\cup A_n\cup B_n\cup L_n\cup M_n$ halmaz kompakt és komplementere $\mathbf{C}^-$-on összefüggő. Így Runge tételéből adódik, hogy létezik olyan f_n polinom, melyre teljesül:

$$|f_n(z)|<\frac{1}{2^n},\quad \text{ha}\quad z\in K_n\cup L_n\cup M_n$$

és

$$|f_n(z)-n|<\frac{1}{2^n},\quad \text{ha}\quad z\in A_n\cup B_n.$$

(i) Az f_n függvények polinomok, így holomorfak $\mathbf{C}$-n.

(ii) Tetszőleges $z \in \mathbf{C}$ esetén létezik olyan N_0, hogy minden $n > n_0$-ra $z \in K_n \cup L_n \cup M_n$. Így $n > N_0$ esetén $|f_n(z)| < \frac{1}{2^n}$, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| < \infty$.

(iii) Legyen $z_0 \in \hat{S}$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon > 0$, és $U_\varepsilon = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$. Létezik olyan k_0 index, hogy $U_{\varepsilon/2} \cap (R \times i_{k_0}) \neq \emptyset$, s így $U_\varepsilon \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = a_{k_0}\} \neq \emptyset$ vagy

$$U_\varepsilon \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = b_{k_0}\} \neq \emptyset.$$

Tegyük fel, hogy $U_\varepsilon \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = a_{k_0}\} \neq \emptyset$, és $z_1 \in U_\varepsilon \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = a_{k_0}\}$. (A másik eset hasonlóan tárgyalható.)

Legyen $n_0 \geqq \max(|\operatorname{Re} z_0| + \varepsilon, |\operatorname{Im} z_0| + \varepsilon)$ olyan, hogy ha $n \geqq n_0$ és $\alpha_n = k_0$, akkor $K_n \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$. Legyen $g_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} g_n$. g_{n_0} folytonos z_1-ben, így létezik olyan $0 < \delta < \varepsilon$, hogy minden $z \in V_\delta = \{z \mid |z - z_1| < \delta\}$-ra $|g_{n_0}(z) - g_{n_0}(z_1)| < 1$. Legyen $n_1 > n_0$ olyan, hogy $\alpha_{n_1} = k_0$, $n_1 > 5 + 2|g_{n_0}(z_1)|$, és $K_{n_1} \cap V_\delta \neq \emptyset$. Legyen $\lambda_1 \in A_{n_1} \cap U_\delta$ és $\lambda_2 \in \partial K_{n_1} \cap U_\delta$, ahol ∂K_{n_1} a K_{n_1} határát jelöli.

$n > n_0$ és $n \neq n_1$ esetén $|f_n(\lambda_1)| < \frac{1}{2^n}$, míg $|f_{n_1}(\lambda_1) - n_1| < \frac{1}{2^{n_1}}$. Így

Így

$$|f(\lambda_1) - g_n(z_1) - n_1| \leqq |g_{n_0}(\lambda_1) - g_{n_0}(z_1) + |f_{n_1}(\lambda_1) - n_1| +$$

$$+ \sum_{n > n_0,\, n \neq n_1} f_n(\lambda_1) \leqq 1 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqq 2.$$

Másrészt $n \geqq n_0$ esetén $|f_n(\lambda_2)| \leqq \frac{1}{2^n}$, és így

$$|f(\lambda_2) - g_{n_0}(z_1)| \leqq |g_{n_0}(\lambda_2) - g_n(z_1)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |f_n(\lambda_2)| \leqq 2.$$

Innen adódnak:

$$|f(\lambda_1)| \geqq |g_{n_0}(z_1) + n_1| - |f(\lambda_1) - g_{n_0}(z_1) - n_1| \geqq n_1 - |g_{n_0}(z_1)| - 2,$$

$$|f(\lambda_2)| \leqq |f(\lambda_2) - g_{n_0}(z_1)| + |g_{n_0}(z_1)| \leqq 2 + |g_{n_0}(z_1)|.$$

Így

$$|f(\lambda_1)| - |f(\lambda_2)| \geqq n_1 - 4 - 2g_{n_0}(z_1) > 1$$

n_1 választásának megfelelően. Tehát $|f|$ oszcillációja U_ε-ban 1-nél nagyobb. $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így $|f|$ nem folytonos z_0-ban. Tehát $|f|$ nem folytonos $\hat{S}$ pontjaiban. Azaz az $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ függvény sorozat kielégíti a feltételeket, s a hozzá tartozó H halmaz tartalmazza $\hat{S}$-at. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

KÉRCHY LÁSZLÓ

Megoldotta: Krisztin Tibor.

A feladat első részét megoldotta Borbély Albert, Ivanyos Gábor, Kollár János, Kertész Gábor és Veres Sándor.

Az első rész megoldása hiányos Geréb Mihálynál és Simányi Nándornál.

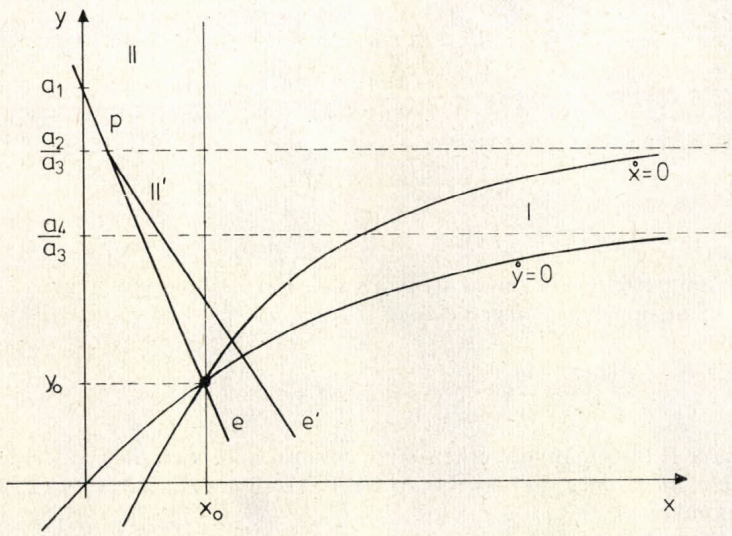
10. feladat

Az x függvény a $t=0$ egy környezetében szigorúan növekvő, így elegendő megmutatni, hogy $\dot{x}$ pontosan egyszer vált előjelet.

Rajzoljuk fel az (x, y) fázissíkban az $\dot{x}=0$ és $\dot{y}=0$ hiperbóláknak az első síknegyedbe eső darabjait:

$$\dot{x}=0: \quad a_3 x\left(y-\frac{a_2}{a_3}\right)+a_1=0$$

$$\dot{y}=0: \quad -a_3\left(x+\frac{1}{a_3}\right)\left(y-\frac{a_4}{a_3}\right)-\frac{a_4}{a_3}=0.$$



Ezek metszéspontját jelölje (x_0, y_0). A megoldás trajektóriája t növekedésekor nem hagyhatja el az $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ $(y>y_0)$ görbék által határolt I tartományt. Ezért elegendő bebizonyítani, hogy $y(t)>y_0$ $(t\geqq 0)$, és a trajektória átmetszi az $\dot{x}=0$ görbét. Ha a trajektória az $x=0$, $x=x_0$, $e=(a_4-a_2)x-y+a_1=0$ egyenesek által határolt II tartományból az $x=x_0$, $y>y_0$ félegyenest átmetszve kilépett, akkor átmetszi az $\dot{x}=0$ görbét. Ellenkező esetben ugyanis

$$y(t)\downarrow z_1, \quad x(t)+y(t)\downarrow \text{konst.} > 0, \quad \text{és így} \quad x(t)\nearrow x_1 \quad (t\to\infty).$$

Mivel az (x_1, y_1) pontnak rajta kell lennie az $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ görbéken, $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, ami ellentmondás, hiszen elég nagy t-re $x(t)>x_0$. Most megmutatjuk, hogy a trajektória átmetszi az $x=x_0$, $y>y_0$ félegyenest.

Állítsuk elő az $\dot{y}/\dot{x}$ függvényt az

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-a_3xy+a_4x-y}{a_3xy-a_2x+a_1}=-1+\frac{(a_4-a_2)x-y+a_1}{a_3xy-a_2x+a_1}$$

alakban. Ebből látszik, hogy $\dot{y}/\dot{x}|(x, y)\in e=-1>a_4-a_2$, tehát a trajektória az e egyenest nem metszheti. Látszik továbbá az is, hogy $\dot{y}/\dot{x}$ a $\mathrm{II}'=\{(x, y)\in \mathrm{II}:$

$y<a_2/a_3\}$ tartományban az $(a_4-a_2)x-y+C=0$ ($a_1<C=$állandó) egyenesek mentén x-nek csökkenő függvénye. Mivel

$$\left.\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{x=x} = \frac{-a_3x_0y+a_4x_0-y}{a_3x_0y-a_2x_0+a_1} = \frac{-a_3x_0(y-y_0)-(y-y_0)}{a_3x_0(y-y_0)} = -\left(1+\frac{1}{a_3x_0}\right),$$

ebből következik, hogy

$$\left.\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{(x,y)\in \mathrm{II}'} \geqq -\left(1+\frac{1}{a_3x_0}\right).$$

Most megmutatjuk, hogy

$$1+\frac{1}{a_3x_0} < a_2-a_4.$$

Egyszerű számolással adódik az

$$X_0 = \frac{(a_1a_3-a_2)+\sqrt{(a_1a_3-a_2)^2+4a_1a_3(a_2-a_4)}}{2a_3(a_2-a_4)}$$

képlet, amelynek egyszerű következménye az $a_3x_0 \geqq (a_1a_2-a_2)/(a_2-a_4)$ becslés. Így a kívánt egyenlőtlenséghez elegendő

$$a_1a_3-a_2 > \frac{1}{1-\dfrac{1}{a_2-a_4}}$$

telhesülése, ami a feltételek miatt nyilvánvaló. Fektessünk most egy e' egyenest a P ponton át, amelynek meredeksége $-(a_2-a_4)$ és $-(1+1/a_3x_0)$ között van. Mivel

$$\left.\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{(x,y)\in e'\cap \mathrm{II}'} \geqq -\left(1+\frac{1}{a_3x_0}\right),$$

a trajektória a II tartományból érkezve e'-t felülről nem metszheti át. Ha az $x=x_0$ egyenest sem metszené, akkor $\big(x(t), y(t)\big)\to(x_1, y_1)\neq(x_0, y_0)$ $(t\to\infty)$ állna elő, ami ellentmondás.

Ezzel a bizonyítás kész.

PINTÉR LAJOS és HATVANI LÁSZLÓ

Megoldotta: Kollár János és Simányi Nándor.

Hogy legfeljebb egy maximum létezik, Csikós Balázs, Geréb Mihály és Pyber László igazolta.

11. feladat

Legyen $S(b, c;\ m, n)=\sum_{k=b+1}^{b+m}\sum_{l=c+1}^{c+n}\xi_{kl}$, ahol $b, c\geqq 0$ és $m, n\geqq 1$. Az

$$ES^2(b, c;\ m, n) = \sum_{k=b+c}^{b+m}\sum_{l=c+1}^{c+n} E\xi_{kl}^2 +$$

$$+2\left\{\sum_{k=b+1}^{b+m}\sum_{l=c+1}^{c+n-1}\sum_{j=1}^{c+n-l} E(\xi_{kl}\xi_{k,l+j}) + \sum_{l=c+1}^{c+n}\sum_{k=b+1}^{b+m}\sum_{i=1}^{b+m-k} E(\xi_{kl}\xi_{k+i,l})\right\} +$$

$$+2\sum_{k=b+1}^{b+m-1}\sum_{l=c+1}^{c+n-1}\sum_{i=1}^{b+m-k}\sum_{j=1}^{c+n-l}\{E(\xi_{kl}\xi_{k+i,l+j})+E(\xi_{k,l+j}\xi_{k+i,l})\}$$

azonosság és (1) alapján belátható, hogy

$$(2) \qquad ES^2(b, c; m, n) = O\left\{mn \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\{\log(1+2i)\log(1+2j)\}^2}\right\} =$$

$$= O\left\{mn \frac{mn}{(\log 2m)^2(\log 2n)^2}\right\} \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Legyen

$$M(b, c; m, n) = \max_{1 \leq k \leq m} \max_{1 \leq l \leq n} |S(b, c; k, l)|.$$

Alkalmazzuk az Acta Sci. Math. 39 (1977), 353—366, 4. Tételét:

Tegyük fel, hogy a nemnegatív $f(b, c; m, n)$ $(b, c, m, n \in N)$ *függvény teljesíti az*

$$f(b, c; h, n) + f(b+h, c; m-h, n) \leqq f(b, c; m, n),$$

$$f(b, c; m, i) + f(b, c+i; m, n-i) \leqq f(b, c; m, n)$$

$$(b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ 1 \leqq h < m,\ 1 \leqq i < n)$$

feltételeket. Legyen $K(m)$ *és* $\lambda(n)$ *két nemcsökkenő sorozat, és legyen*

$$K(1) = \varkappa(1), \quad \Lambda(1) = \lambda(1)$$

továbbá $m \geqq 2$, $n \geqq 2$*-re*

$$K(m) = \varkappa(h) + K(h-1), \quad h = \left[\frac{1}{2}(m+2)\right]$$

$$\Lambda(n) = \lambda(i) + \Lambda(i-1), \qquad i = \left[\frac{1}{2}(n+2)\right]$$

($[.]$ *itt az egész részt jelöli).*

Ha

$$E|S(b, c; m, n)|^\gamma \leqq K^\gamma(m)\lambda^\gamma(n) \quad f(b, c; m, n)$$

egy $\gamma \geqq 1$*-re és minden* $b, c \geqq 0$ *és* $m, n \geqq 1$*-re, akkor*

$$EM^\gamma(b, c; m, n) \leqq K^\gamma(m)\Lambda^\gamma(n) \quad f(b, c; m, n)$$

is igaz minden $b, c \geqq 0$*-ra és* $m, n \geqq 1$*-re.*

Most $f(b, c; m, n) = mn$ és $\varkappa(m) = \frac{\sqrt{m}}{\log 2m}$, $\lambda(n) = \frac{\sqrt{n}}{\log 2n}$ $\gamma = 2$. Az $f(b, c; m, n)$-et a $[b+1, b+m] \times [c+1, c+n]$ téglalap függvényének tekintve, nyilván additív halmazfüggvény. Továbbá, $2^p \leqq m < 2^{p+1}$-re

$$K(m) \leqq K(2^{p+1}-1) = \sum_{k=0}^{p} \varkappa(2^p) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k/2}}{k+1} = O\left(\frac{2^{p/2}}{p+1}\right) = O\left(\frac{\sqrt{m}}{\log 2m}\right).$$

Következésképpen

$$(3) \qquad EM^2(b, c; m, n) = O\left\{mn \frac{mn}{(\log 2m)^2(\log 2n)^2}\right\}.$$

A $b=c=0$ esetben legyen $S(0,0;m,n)=S(m,n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\xi_{kl}$ a közönséges téglányösszeg. (2) szerint

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}2^{2l}}ES^2(2^k,2^l)=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}2^l}\frac{2^{2k}2^{2l}}{(k+1)^2(l+1)^2}<\infty.$$

B. Levi tétele szerint 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{2^k2^l}S(2^k,2^l)\to 0, \quad \text{ha} \quad \max(k,l)\to\infty. \tag{4}$$

Azt kell még belátnunk, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{2^k2^l}\max_{2^k<m\leqq 2^{k+1}}\max_{2^l<n\leqq 2^{l+1}}|S(m,n)-S(2^k,2^l)|\to 0, \tag{5}$$

ha $\max(k,l)\to\infty$. Tekintsük az

$$S(m,n)=S(2^k,2^l)+S(2^k,0;m-2^k,2^l)+S(0,2^l;2^k,n-2^l)+S(2^k,2^l;m-2^k,n-2^l)$$

felbontást. Innen következik, hogy (5) bal oldala nem nagyobb mint

$$\frac{1}{2^k2^l}\{M(2^k,0;2^k,2^l)+M(0,2^l;2^k,2^l)+M(2^k,2^l;2^k,2^l)\}.$$

Figyelembe véve (3)-at,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}2^{2l}}EM^2(2^k,2^l;2^k,2^l)<\infty,$$

így B. Levi tétele biztosítja ismét, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{2^k2^l}M(2^k,2^l;2^k,2^l)\to 0, \quad \text{ha} \quad \max(k,l)\to\infty. \tag{6}$$

Mivel

$$M(2^k,0;2^k,2^l)\leqq\sum_{q=-1}^{l-1}M(2^k,2^q;2^k,2^q)$$

(megállapodva abban, hogy $M(2^k,2^{-1};2^k,2^{-1})=M(2^k,0;2^k,1)$), (6) és egy Toeplitz-lemma alapján egyszerűen nyerhető, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{2^k2^l}M(2^k,0;2^k,2^l)\leqq\sum_{q=-1}^{l-1}\frac{1}{2^{l-q}}\frac{1}{2^k2^q}M(2^k,2^q;2^k,2^q)\to 0, \quad \text{ha} \quad \max(k,l)\to\infty.$$

Hasonlóképpen adódik, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{1}{2^k2^l}M(0,2^l;2^k,2^l)\to 0, \quad \text{ha} \quad \max(k,l)\to\infty.$$

Összefoglalva (4)-et és (5)-öt, a bizonyítás kész.

MÓRICZ FERENC

Megoldotta: Kollár János.

Csak sztochasztikus konvergenciát bizonyít: Ivanyos Gábor, Páles Zsolt, Pyber László és Séress Ákos.

1. Let us call a k-ary function f and a binary relation ϱ on the set $\{1, \ldots, n\}$ amicable if $f(a_1, \ldots, a_k)\,\varrho f(b_1, \ldots, b_k)$ implies that $a_i\,\varrho\, b_i$ holds for at least one i $(1 \leqq i \leqq k)$. Prove that if f is amicable with the relations "equal" and "less than" then it is amicable with every binary relation.

2. Let V be a monoid variety not all elements of which are groups. Prove that if $A \in V$ and B is a submonoid of A then there are monoids $S \in V$ and C and epimorphisms $\varphi: S \to A$, $\varphi_1: S \to C$ such that $\varphi(\varphi_1^{-1}(e)) = B$ (e is the unit of C).

3. Let $g(n, k)$ $(n \geqq 2, n \leqq k \leqq n^2 - n)$ be the number of strongly connected digraphs with vertices $1, \ldots, n$ which have k edges, no loops or parallel edges. Prove the formula

$$\sum_{k=n}^{n^2-n} (-1)^k g(n, k) = (n-1)!.$$

4. Determine those natural numbers n for which $SO(n)$ (the group of n-dimensional orthogonal transformations with determinant 1) has a closed, simply transitive subgroup. ($G \subseteqq SO(n)$ is said tobe simply transitive if for any two points x, y of the unit sphere there exists exactly one $\varphi \in G$ with $\varphi(x) = y$).

5. Construct non-coplanar points $P_1, \ldots, P_5, Q_1, \ldots, Q_5$ in the 3-space such that if we connect each P_i with each Q_j by a rigid bar the structure obtained will be rigid.

6. Define a Riemannian metric in E^3 outside the z-axis by the metric tensor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

((x, y, z) is the rectangular coordinate system in E^3). Prove that the orthogonal projections of the geodesics of this Riemann space onto the (x, y) plane are straight lines or conic sections with focus in the origin.

7. Let T be a triangulation of the n-dimensional spere and assign to each vertex of T a nonzero vector of a linear space. Prove that if T has an n-dimensional simplex A such that the vectors assigned to the vertices of A are linearly independent, then T has another simplex with these properties.

8. Let $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of 2π periodic continuous functions. Prove that for $k_n(f; x) = \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t)\,dt$ the following statements are equivalent

I. $\int_0^{2\pi} |k_n(f; x) - f(x)|\,dx \to 0$ $(n \to \infty)$ for every $f \in L_1[0; 2\pi]$,

II. $k_n(f; 0) \to f(0)$ $(n \to \infty)$ for every 2π-periodic continuous f.

9. Let us suppose that the series $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ of holomorphic functions is absolutely convergent for $z \in \mathbf{C}$. Let H be the set of non-regularity points of the sum function. Show that H is nowhere dense but not necessarily countable.

10. Prove that if a_i $(i=1, \ldots, 4)$ are positive constants with $a_2-a_4>2$ and $a_1a_3-a_2>2$, and $(x(t), y(t))$ is a solution of the system of differential equations

$$\dot{x} = a_1-a_2x+a_3xy$$

$$\dot{y} = a_4x-y-a_3xy \quad (x, y\in\mathbf{R})$$

with initial conditions $x(0)=0$, $y(0)\geqq a_1$, then $x(t)$ has exactly one local maximum on the interval $[0; \infty)$.

11. Let $\{\xi_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ be a double sequence of random variable for which

$$E(\xi_{ij}\xi_{kl}) = O\big((\log(2|i-k|+2)\log(2|j-l|+2))^{-2}\big)$$

$(i, j, k, l=1, 2, \ldots)$. Prove that, with probability 1,

$$\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\xi_{kl} \to 0 \quad \text{as} \quad \max(m, n) \to \infty.$$

FELADATROVAT

Helyesbítés.

A 215. feladat szövege tévesen jelent meg. A helyes szöveg a következő:

215. Legyen k és N természetes szám. A és B a következő játékot játssza: A választ egy egész számot, B pedig ezt kiszínezi k adott szín valamelyikével. A további lépésekben A a korábbi számoktól különbözőt választ, a színek azonban ismétlődhetnek. A játék a k-adik lépés után ér véget. B nyer, ha a végén a szomszédos számok egyszínűek, és két egyszínű szám különbsége legfeljebb N. Állapítsuk meg, hogy mikor van A-nak és mikor B-nek nyerő stratégiája.

BECK JÓZSEF

Kitűzött feladatok

219. Számítsuk ki $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ értékét 10 tizedesjegyre úgy, hogy legföljebb zsebszámológépet használunk.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

220. Egy $GF(p)$ fölötti $f(x, y)$ polinomnak és mindkét parciális deriváltjának az értéke 0 minden $(x, y)\neq(0, 0)$, $x, y\in GF(p)$ elempárra, de $f(0, 0)\neq 0$. Bizonyítandó, hogy $\deg f\geqq 3p-3$.

ALEXANDER SCHRIJVER és LOVÁSZ LÁSZLÓ

221. Egy n dimenziós kockát olyan hipersíkkal metszünk, mely átmegy a kocka középpontján, de nem megy át egyetlen csúcsán sem. Bizonyítandó, hogy a metszet csúcsainak száma legalább 2^{n-1}.

BÁRÁNY IMRE

Megoldások

207. feladat. Egy $n\times n$-es mátrix elemei különböző egész számok. Bizonyítandó, hogy van két szomszédos (oszlopban vagy sorban egymás mellett álló) elem, melyek különbsége legalább n.

FRANK ANDRÁS

Megoldás. Azt bizonyítjuk, hogy létezik olyan $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ diszjunkt, szomszédos mátrixelemekből álló pár, hogy $\max_{1\leqq j\leqq n} a_j < \min_{1\leqq j\leqq n} b_j$. Ekkor azon t indexre, melyre b_j maximális, fennáll

$$b_t = \max_{1\leqq j\leqq n} b_j \geqq n-1+\min_{1\leqq j\leqq n} b_j \geqq n+\max_{1\leqq j\leqq n} a_j \geqq n+a_t,$$

és ezért (a_t, b_t) a kívánt tulajdonságú szomszédos elempár.

Jelölje α a mátrix sormaximumainak minimumát. Tegyük fel, hogy ez a v-edik sorban vétetik fel.

1. *eset.* Minden sorban van α-nál kisebb elem. Ekkor α definíciója szerint minden sorban van α-nál nem kisebb elem is, így minden sorból kiválasztható olyan szomszédos elempár, melynek egyik tagja α-nál kisebb, a másik nem kisebb. Az így kiválasztott n pár megfelel a követelményeknek.

2. *eset.* Van olyan sor, mondjuk a μ-edik, hogy minden eleme legalább α; α definíciója miatt $\mu \neq v$ és ezért a mátrixelemek különböző volta miatt a μ-edik sor minden eleme nagyobb, mint α. Ekkor tehát minden oszlopban van α-nál nagyobb és α-nál nem nagyobb elem egyaránt. Innen az állítás ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. esetben.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

208. feladat. Egy H síkbeli ponthalmaz azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely $\binom{k+2}{2}$ pontjához van k egyenes, mely ezeket a pontokat mind tartalmazza. Bizonyítandó, hogy van k egyenes, mely a halmaz összes pontját tartalmazza.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Megoldás. Legyen $H=\{P_i: i \in I\}$, és $P_i=(a_i, b_i)$. Rendeljük hozzá P_i-hez a $3k$ változós

$$p_i(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k) = \prod_{j=1}^{k} (a_i u_j + b_i v_j + w_j)$$

polinomot. E polinom számunkra fontos tulajdonsága az, hogy ha

$$u_j x + v_j y + w_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, k)$$

k darab egyenes, akkor $p_i(u_1, \ldots, w_k)=0$ akkor és csak akkor, ha P_i illeszkedik ezen k egyenes valamelyikére.

Legyen $p_1, \ldots, p_m$ a p_i polinomok közül kiválasztható maximális részrendszer, mely lineárisan független a valós test fölött. Minden p_i polinom felírható az

$$f_{\mu,v} = \sum u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(\mu)} v_{\pi(\mu+1)} \cdots v_{\pi(v)} w_{\pi(v+1)} \cdots w_{\pi(n)}$$

polinomok lineáris kombinációjaként, ahol $0 \leqq \mu \leqq v \leqq n$ és az összegezés az $\{1, \ldots k\}$ halmaz összes π permutációjára kiterjed (ez azonnal látható, ha p_i definíciójában felbontjuk a zárójeleket). Az $f_{\mu,v}$ polinomok száma $\binom{k+2}{2}$, ezért

$$m \leqq \binom{k+2}{2}$$

Ezért a feladat feltétele szerint létezik k egyenes, mely a $P_1, \ldots, P_m$ pontok mindegyikét tartalmazza. Legyenek ezek az egyenesek

$$\bar{u}_j x + \bar{v}_j y + \bar{w}_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Állítjuk, hogy ezek az egyenesek az összes többi P_i pontot is tartalmazzák. A $p_1, \ldots, p_m$ polinomok kiválasztása szerint ugyanis minden $i \in I$-hez vannak olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ valós számok, hogy

$$p_i = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_m p_m.$$

Helyettesítsünk itt $u_j=\bar{u}_j$, $v_j=\bar{v}_j$, $w_j=\bar{w}_j$-t. Mivel a tekintett k egyenes a $P_1, \ldots, P_m$ pontokat tartalmazza, itt a jobboldal 0. De akkor a baloldal is 0, és így az egyenesek a P_i pontot is tartalmazzák.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

209. feladat. Adjuk meg az összes olyan grupoidot, melyben minden ekvivalencia-reláció egyben kongruencia-reláció is.

FREUD RÓBERT

Megoldás.

Jelöljük a grupoidot G-vel. Ha $|G|\leqq 2$, akkor nyilván kielégíti a feltételeket, továbbá $|G|\geqq 3$ esetén a következő típusok megfelelnek.

I. $\forall a, b \in G: ab=b$,

II. $\forall a, b \in G: ab=a$,

III. $\forall a, b \in G: ab=x_0$, fix x_0-lal (bármely szorzat értéke ugyanaz).

Belátjuk, hogy ezek adják az összes megfelelő G-t. Tegyük fel, hogy G eleget tesz a feltételnek és $|G|\geqq 3$.

A) Legyen tetszőleges $a\neq b$-re $\Theta_{a,b}$ az az ekvivalenciareláció, amelynél a és b egy kételemű osztályt alkot, az összes többi osztály pedig egyelemű. A feltétel szerint $\Theta_{a,b}$ kongruenciareláció. Így bármely c-re

$$ca \equiv cb(\Theta_{a,b}) \quad \text{és} \quad ac \equiv bc(\Theta_{a,b})$$

azaz

(1) $\quad ca=cb$ vagy (2) $ca=a, cb=b$ vagy (3) $ca=b, cb=a$

és

(1′) $\quad ac=bc$ vagy (2′) $ac=a, bc=b$ vagy (3′) $ac=b, bc=a$.

B) Először megmutatjuk, hogy (3), és ugyanúgy (3′) sohasem fordulhat elő. Ha ugyanis valamely c-re $ca=b$ és $cb=a$ lenne, akkor

$$b=ca \equiv c^2(\Theta_{ac}) \quad \text{tehát} \quad b=c^2$$

és

$$a=cb \equiv c^2(\Theta_{bc}) \quad \text{tehát} \quad a=c^2,$$

ami $a\neq b$ miatt lehetetlen ($c=a$, ill. $c=b$ esetén Θ_{ac}-re, ill. Θ_{bc}-re nincs is szükség).

C) Ha G nem a III. típusú, akkor létezik olyan a, b, c, d, hogy $ca\neq db$. Ekkor $ca\neq cb$ és $cb\neq db$ közül is legalább az egyik teljesül. Megmutatjuk, hogy az első esetben az I., a második esetben pedig a II. grupoidhoz jutunk. Ha $ca\neq cb$, akkor (2)-nek kell fennállnia. Ekkor tetszőleges r-rel is $cr=r$ igaz, hiszen különben $cr=cb$ és $cr=ca$ lenne érvényes, de ez lehetetlen.

D) Tegyük fel, hogy valamely u, v-re $uv\neq v$. Mivel $cv=v$, így (1′) megfelelője nem teljesül, tehát (2′) megfelelője szerint $uv=u$ és $cv=c$ érvényes. Innen rögtön adódik, hogy $v\neq c$ esetén szükségképpen $uv=v$. Ha végül $uc\neq c$ lenne, akkor (2) megfelelője nem teljesül, tehát $uc=uv$ bármely $v\neq c$-re. Legyenek v_1, v_2 egymástól és c-től különbözők, akkor

$$v_1 = uv_1 = uc = uv_2 = v_2,$$

ami ellentmondás. Vagyis az I. grupoidhoz jutottunk.

A $cb\neq db$ esetben teljesen hasonlóan adódik a II. grupoid.

FREUD RÓBERT

Megjegyzés

A feladat grupoidok helyett tetszőleges típusú algebrákra is megfogalmazható, s a megoldás sem lényegesen nehezebb, mint grupoidok esetén. Mivel kételemű halmazon nincs a két triviális ekvivalencián kívül más ekvivalencia reláció, minden kételemű algebra (grupoid) eleget tesz a feladat követelményeinek. A továbbiakban legalább háromelemű algebrákkal foglalkozunk. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy ha egy legalább háromelemű algebrán minden ekvivalencia kongruencia, akkor az algebra minden alapművelete vagy konstans, vagy pedig valamely változóra történő vetítés. (Grupoidokra ez azt jelenti, hogy a grupoid vagy zéró-, vagy balzéró-, vagy pedig jobbzéró-félcsoport.)

Tekintsünk először egy A halmazt, $|A| \geqq 3$ és legyen g olyan egyváltozós művelet A-n, hogy az $(A; g)$ algebrán minden ekvivalencia kongruencia. Megmutatjuk, hogy g vagy konstans, vagy pedig az identikus leképezés. Ha ugyanis g ezektől különböző volna, akkor lennének olyan $a_1, a_2 \in A$ elemek, hogy $g(a_1) \neq a_1$ és $g(a_2) \neq g(a_1)$ $(a_1 \neq a_2)$. Ekkor viszont — mivel a $\Theta_{a_1 a_2}$ ekvivalencia kongruencia — szükségképpen $\{g(a_1), g(a_2)\} = \{a_1, a_2\}$, s így $g(a_1) = a_2$, $g(a_2 = a_1$. Legyen $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $g(a_3)$ a $g(a_1)$, $g(a_2)$ elemek közül például $g(a_1)$-től különböző. Akkor $g(a_1) \neq g(a_3)$ és $\{g(a_1), g(a_3)\} \nsubseteq \{a_1, a_3\}$, s így a Θ_{a_1, a_3} ekvivalencia nem kongruencia, ami ellentmond a feltevésnek.

Legyen mostmár $(A; F)$, $|A| \geqq 3$ tetszőleges olyan algebra, amelyen minden ekvivalencia kongruencia, és legyen $f \in F$ egy tetszőleges alapművelet. Akkor a fenti észrevétel alkalmazható minden olyan $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ egyváltozós műveletre, ahol $1 \leqq i \leqq n$ és $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$. Tegyük fel, hogy f nem konstans. Akkor van olyan j $(1 \leqq j \leqq n)$ és olyan $b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots$ $\ldots, b_n \in A$, hogy az $f(b_1, \ldots, b_{j-1}, x, b_{j+1}, \ldots, b_n)$ művelet nem konstans. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $j = 1$, tehát $f(x, b_2, \ldots, b_n)$ az identikus leképezés. Akkor bármely $b_2' \in A$ elemre $f(x, b_2', b_3, \ldots, b_n)$ is az identikus leképezés; ha ugyanis konstans lenne, s értéke például $c (\in A)$, akkor bármely $b \in A - \{b_2, c\}$ elemre

$$f(b, b_2, b_3, \ldots, b_n) = b,$$

$$f(b, b_2', b_3, \ldots, b_n) = c$$

teljesülne, s így az $f(b, x, b_3, \ldots, b_n)$ egyváltozós művelet nem lenne sem konstans, sem pedig az identikus leképezés. Hasonló gondolatmenet alkalmazható az f művelet további argumentumaira is. Az adódik végül, hogy tetszőleges $b_2', \ldots, b_n' \in A$ elemekre $f(x, b_2', \ldots, b_n')$ az identikus leképezés, tehát f nem más, mint az első változóra való vetítés.

SZABÓ LÁSZLÓ és SZENDREI ÁGNES

Problems

1. Determine the value of $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ to 10 decimals, using at most a calculator.

2. Let $f(x, y)$ be a polynomial over $GF(p)$ such that the value of f and of both of its partial derivatives is 0 at every $(x, y)\neq(0, 0)$, but $f(0, 0)\neq 0$. Prove that $\deg f\geqq 3p-3$.

3. We intersect an n-dimensional cube by a hyperplane which passes through the centre but not through any vertex. Prove that the intersection has at least 2^{n-1} vertices.

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, Anker köz 1—3. 1061. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1978—79. évi odaítéléséről

A Társulat Szele Tibor Emlékérem bizottsága: (T. Sós Vera elnök, Révész Pál titkár, Császár Ákos, Juhász István, Móricz Ferenc, Pollák György, Rapcsák András, Surányi János, Wiegandt Richárd) az 1978., illetve 1979. évi Szele Tibor Emlékérmet SZŐKEFALVI-NAGY Béla akadémikusnak és FRIED Ervinnek a matematikai tudományok doktorának ítélte oda.

A díjak kiosztására 1979. június 1-én került sor.

Indoklás:

Szőkefalvi-Nagy Béla a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, a Szovjet, a Finn és az Ír Tudományos Akadémiák tiszteletbeli tagja, a József Attila Tudományegyetem tanszékvezető egyetemi tanára. Egyike a legértékesebb eredményeket elért, hazánkban és külföldön egyaránt legtekintélyesebb, legismertebb matematikusainknak.

Szőkefalvi-Nagy Béla több mint 30 éves egyetemi oktató munkája során igen jelentős tevékenységet fejtett ki a fiatal matematikus oktatók-kutatók nevelésében. A funkcionálanalízis fiatalabb hazai művelői csaknem kivétel nélkül tőle kaptak indíttatást és támogatást. Aspiránsai voltak Fodor Géza, Pukánszky Lajos, Pintér Lajos, Kovács István és Sebestyén Zoltán. Tanítványainak tekinthetik magukat Korányi Ádám, Szűcs József és Durszt Endre. Számos fiatal külföldi matematikus pályájára is döntő hatással volt. Nemcsak a funkcionálanalízis kutatói, hanem a sorelmélet és általában a klasszikus analízis művelői közül is számosan kaptak tőle segítséget indulásuknál. A Bolyai Intézetben rendszeresen tartott Funkcionálanalízis szemináriumát nemcsak országos viszonylatban, de nemzetközi szinten is jelentős matematikai műhelyként tartják számon, amelyben való szereplés igen sok fiatal hazai és külföldi matematikusnak hasznos, serkentő és kitüntető lehetőség.

Szőkefalvi-Nagy Bélának az egyetemi hallgatóság körében végzett szakmai nevelő tevékenysége is széles körű. Különösen a magas színvonalú egyetemi előadásait, speciálkollégiumait emeljük ki. Tankönyvei, monográfiái szintén igen magas színvonalúak, azokat számos idegen nyelvre lefordították. Szakmai igényessége, precizitása nagy hatással volt és van a fiatalok fejlődésére, publikációik színvonalára, amelyeket folyóirat szerkesztői tevékenységével is segít.

Összegezve, mind közvetlen mind közvetett nevelő szerepe olyan jelentős Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikusnak, hogy méltán kapta az 1978. évi Szele Tibor Emlékérmet.

Fried Ervin, a matematikai tudományok doktora, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Algebra és számelmélet tanszékén egyetemi tanár. Fried Ervin az algebra számos területén magas színvonalú, nemzetközileg elismert kutatómunkát végez.

Közel két évtizede folytat értékes oktatói és nevelői munkát az ELTE Algebra és számelmélet tanszékén. Előadásai igen magas színvonalúak, sok hallgató érdeklődését keltik fel az algebra iránt. Fried Ervinnek jelentős szerepe volt Babai László, Pelikán József, Andréka Hajnal, Freud Róbert és Márki László szakmai munkájának irányításában. A nevezettek közül többen a matematikai tudományok kandidátusai és valamennyien számos jelentős eredményt értek el az algebrában.

Két éve indította el Fried Ervin „problémafelvető" algebrai szemináriumát, amely igen hatásos módszernek bizonyult fiatal, tehetséges, széles látókörű algebristák tudományos érdeklődésének felkeltésében. Ez a szeminárium több hallgatót segített értékes algebrai eredmények eléréséhez. Név szerint említjük ezek közül Kollár Jánost, Kiss Emilt és Pálfy Pérer Pált, akik valamennyien Rényi Kató-díjat kaptak, továbbá Antjy vietnámi hallgatót és Bíró Balázst.

Tudományos, oktatói és nevelői tevékenységét külföldön is elismerik, amit többéves vendégprofesszori tevékenysége, valamint számos fiatalabb külföldi algebristával együtt publikált eredményei is alátámasztanak.

Végezetül, de nem utolsó sorban, megemlítendők azok a könyvei, amelyekben az algebra népszerűsítése terén igen jelentős eredményeket ért el.

Jelentés az 1978. évi Grünwald Géza emlékdíj odaítéléséről

A BJMT elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1978. évi Grünwald-díj odaítélésére: Császár Ákos elnök, Fejes Tóth László, Hajnal András, Makai Endre, Rapcsák András, Révész Pál, Sárközy András, Schmidt Tamás, T. Sós Vera, Szász Domokos titkár, Tandori Károly.

A javaslatok alapos mérlegelése után a bizottság a következő döntést hozta:

Posztumusz Grünwald-díjban részesíti

SOMORJAI GÁBORT, az MTA MKI volt munkatársát.

Az 1978. évi Grünwald-díjjal tünteti ki és egyenként 4500 Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

BALOGH ZOLTÁN, ösztöndíjas gyakornok, KLTE,

FRANK ANDRÁS, tudományos munkatárs, TÁKI (jelenleg aspiráns a JATE-n),

KROÓ ANDRÁS, tudományos segédmunkatárs, MTA MKI,

SZABÓ LÁSZLÓ, tanársegéd, JATE.

Indoklás:

SOMORJAI GÁBOR három, az approximációelmélethez, komplex függvénytanhoz és ezek határterületéhez tartozó témakörben ért el értékes és szép eredményeket.

Az analízis területén nem gyakran fordul elő, hogy valaki egész fiatalon már olyan széles körre vonatkozó tájékozottsággal, lényeget meglelő képességgel és bizonyító erővel rendelkezzen, mint Somorjai Gábor.

Első dolgozatában [1] egy D. Newman által felvetett, racionális törtfüggvényekkel való approximációra vonatkozó Müntz típusú problémára ad meglepő választ. Ehhez kapcsolódik [2] dolgozata is. Müntz—Jackson típusú problémával foglalkozik a Márki L. és Szabados J.-vel írott [3] dolgozatban. Komplex függvénytani eredményei közül kiemelendő a Denjoy—Carleman—Ahlfas egy aszimptotikus értékekre vonatkozó tételének konstans értékek helyett „függvényértékekre" vonatkozó általánosítása [6]. Lényegesen általánosítva megoldotta Kővári T. egy régen felvetett problémáját az egységkör belsejében analitikus és a lezártján folytonos függvények polinomokkal való közelíthetőségéről. [4]. Utolsó, posztumusz dolgozatában [7] egy Balázs J. és Szabados J. által vizsgált pozitív lineáris operátorokra vonatkozó szaturációs problémát old meg.

Somorjai Gáborban a magyar matematikai élet egyik sokat igérő reménységét veszítette el.

SOMORJAI GÁBOR DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] A Müntz-type problem for rational approximation Acta Math. Hung. 27 (1976) 197—199.

[2] On the density of quotients of lacunary polynomials Acta Math. Hung. 30 (1977) 149—154.

[3] Müntz—Jackson type theorems via interpolation (L. Márki—J. Szabados-sal). Acta Math. Hung. 29 (1977) 185—191.

[4] On discrete linear operators in the function space A Proceedings of the Conference on Constonctive Function Theory held in Blogoevgrad, 1977 (Sofia, 1980), 489—496,

[5] On the coefficients of rational functions (megjelenés alatt).

[6] On asymptotic functions (megjelenés alatt).

[7] On a saturation problem Acta Math. Hung. 32 (1978).

BALOGH ZOLTÁNnak öt idegen nyelvű dolgozata jelent meg, illetőleg van sajtó alatt. További két dolgozata van közlésre benyújtva. Ezekben kiemelkedő eredményeket bizonyított az általános topológia területén. Több neves matematikus által felvetett kérdés megoldása mellett e dolgozatok szerzőjük problémafelvető készségét és széles körű tájékozottságát is tanúsítják. Bevezette többek között topológiák egymáshoz viszonyított (relatív) kompaktságának fogalmát. Ennek segítségével sikerült J. Nagata egy metrizációs tételét kiterjesztenie.

Egyik legérdekesebb eredménye azt mondja, hogy minden olyan tér, amelynek minden altere parakompakt p-tér (ezek az F_{pp} terek) $\aleph_1$ metrizálható alterének uniója. Ennek következménye, hogy egy F_{pp} tér súlya megegyezik Szuszlén számával. Ez A. V. Arhangelszkij egy sejtését igazolja. Bebizonyította továbbá Arhangelszkij azon sejtését is, hogy minden F_{pp} térnek van sűrű metrizálható altere. Egy további kiemelkedő eredménye azt mondja: A metrizálható terek pontosan a tökéletesen normális F_{pp} terek.

Megmutatta továbbá, hogy első megszámlálható nem metrizálható F_{pp} tér létezése független a halmazelmélet szokásos ZFC axiómarendszerétől.

BALOGH ZOLTÁN DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Relative compactness and recent common generalizations of metric and locally compact spaces, *Proc. Fourth* Prague Top. Symp., 1976. part B, 37—44.
[2] Relative compactness and recent common generalizations of metric and locally compact spaces, Fund. Math. 100 (1978), 165—177.
[3] Metriztation theorems concerning relative compactness, *Gen. Topology and Appl.* (közlésre elfogadva).
[4] On the structure of spaces which are paracompact p-spaces hereditarily, *Acta Math. Hung.* (megjelent: 1979. június).
[5] On the structure of spaces which are paracompact p-spaces hereditarily, *Proc. Belgrad. Top. Symp.*, 1977 (megjelent: 1978).
[6] On the metrizability of spaces which are paracompact p-spaces hereditarily, *Period. Math. Hungar.* (közlésre benyújtva).
[7] On the metrizability of F_{pp}-spaces and its relation to the normal Moore space conjecture, *Fund. Math.* (közlésre benyújtva).
[8] Vizsgálatok kompakt és metrizálható terek közös általánosításainak köréből. Kandidátusi értekezés Debrecen, 1978.

FRANK ANDRÁS kutatási témája a gráfelmélet és operációkutatás határterülete. Kutatásait a kombinatorika modern és más fejezeteiben végzi. Eredményei közül kiemelkedik a gráfok irányíthatóságára vonatkozó dolgozata, amelyben bizonyos feltevések mellett megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy gráf irányítható legyen oly módon, hogy minden ponthalmazból előre megadott számnál nem kevesebb él lépjen ki [5], [3]. Ennek az eredménynek számos alkalmazása van, így többek között rámutat Edmonds-nak és Tutte-nak irányított, ill. irányítatlan fákra való bontásra vonatkozó tételeinek kapcsolatára és új bizonyítástszolgál tat Nash—Williams egy nevezetes tételére. Kiemelkedő még az irányított gráfokra [6] vonatkozó általános minimax-tétel [7], [9]. Ennek számos alkalmazása közül különösen érdekes Edmonds—Giles egy sejtésének speciális esetre vonatkozó bizonyítása, továbbá Nash—Williams egy tételének irányított gráfokra vonatkozó analogonja.

FRANK ANDRÁS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Some polynomial algorithms for certain graphs and hypergraphs, *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference,* 1975, Aberdeen.
[2] On a class of balanced hypergraphs, *Discrete Math.* 20 (1977) 11—20.
[3] How to orient the edges of a graph? (Gyárfás Andrással), *Proceedings of the Fifth Hungarian Combinatorial Colloquium*, 1976, Keszthely.
[4] Directed graphs and computer programs (Gyárfás Andrással), *Problemes combinatoires et theorie des graphes*, ORSAY, 1976.
[5] On the orientation of graphs, *Journal of Combinatorial Theory* B.
[6] Kernel systems of directed graphs, *Acta Mathematicarum Scientiarum.*
[7] Covering Branchings, *Acta Scientiarum Mathematicarum.*
[8] On chain and antichain families of a partially ordered set, *Journal of Combinatorial Theory* B.
[9] On disjoint trees and arborescences, benyújtva az *Algebrai módszerek a gráfelméletben* c. konferencia (Szeged, 1978) kiadványába.

KROÓ ANDRÁS Kárpát-Ukrajnában született, s mint szovjet állampolgár, egyetemi tanulmányait a moszkvai Lomonoszov Egyetemen végezte. 1976-ban kapott matematikus diplomát, de már hallgató korában alkotó módon bekapcsolódott Sz. B. Sztecskin professzor szemináriumába. Témája

az approximációelméletnek nálunk talán kevésbé kutatott ága, az egyenletes polinom-approximáció operátorának folytonossága. A magyar kutatásokhoz ez annyiban kapcsolódik, hogy Freud Géza 1958-ban közölte azt az azóta sokat idézett eredményét, mely szerint az említett operátor Lip 1 tulajdonságú. Kroó András hallgató korában írt [1] dolgozatában e kérdést a trigonometrikus approximációval kapcsolatban a véges sokszor differenciálható függvényekre vizsgálja.

[3]-ban a legjobban közelítő operátor differenciálhatóságát vizsgálja. E kérdés természetesen merül fel, hiszen a Freud-tétel szerint az operátor Lip 1-es, s így várható, hogy valamilyen értelemben és bizonyos feltételek mellett differenciálható. Kroó azt az igen érdekes eredményt találja, hogy az n-edrendű operátor akkor és csak akkor differenciálható, ha a Csebisev-alternáció pontjainak száma pontosan $n+2$, s ez utóbbi esetben a derivált explicite megadható. Ez az eredmény alkalmazható volt a legjobb megközelítés operátora Lipschitz-konstansának vizsgálatánál is [7].

[5]-ben összehasonlítja a diszkrét véges halmazokon és az intervallumon vett legjobb megközelítéseket. Korábbi eredményeket javítva, pontos becsléseket ad a diszkrét megközelítés konvergenciájának nagyságrendjére, a halmaz sűrűségének függvényében. Ez az eredmény az alkalmazások szempontjából is érdekes lehet.

Munkáiban igen sok érdekes, eredeti ötletet alkalmaz, és ezzel jelentősen gazdagítja a magyar approximációelméleti kutatásokat.

Eredményeinek többsége olyan, hogy más szerzők által felvetett, vagy nyitva hagyott kérdést válaszol meg, de ezen túlmenően önálló problémafelvetésre is képes.

KROÓ ANDRÁS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Zadacsa korrektnosztyi nailucssih priblizsenij trigonometricseszkimi polinomami, *Mat. Zametki*, **22** (1977), 85—101.
[2] The continuity of best approximations, *Acta Math. Hung.*, **30** (1977), 175—188.
[3] Differential properties of the operator of best approximation. *Acta Math. Hung.*, **30** (1977), 319—331.
[4] On the continuity of best approximations in the space of integrable functions, *Acta Math. Hung.*, **32** (1978).
[5] A comparison of uniform and discrete polynomial approximation, *Analysis Math.*
[6] On the uniform modulus of continuity of the operator of best approximation in the space of periodic functions, *Acta Math. Hung.*
[7] The Lipschitz constant of the operator of best approximation, *Acta Math. Hung.*

Szabó László, a József Attila Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszékének tanársegédje. Eddig négy dolgozata jelent meg és egy dolgozata, melynek társszerzője Szendrei Ágnes, van megjelenés alatt. 1974-ben egyetemi doktorátust szerzett „Univerzális algebrák kísérő struktúráiról" című értekezésével. Dolgozataiban is elsősorban ugyanezzel a témával foglalkozik. Egyik dolgozatában egy olyan általános érvényű tételt bizonyít, amelyből Jürgen Schmidt, Bjarni Jónsson és Henri Werner jelentős eredményei korollárium ként adódnak. Ennek a tételének egy további következményeként Grätzer univerzális algebrai könyvének egy problémáját oldja meg.

Szabó László figyelemre méltó bizonyító erővel rendelkezik, eredményeinek egy része máris jelentős nemzetközi érdeklődést váltott ki.

SZABÓ LÁSZLÓ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Tessellation transformations, *Acta Cybernetica* 2 (1975), 249—260.
[2] Characterization of some related semigroups of universal algebras, *Acta Sci. Math.* 37 (1975), 143—147.
[3] Endomorphism monoids and clones, *Acta Math. Hung.*, 26 (1975) 279—280.
[4] Concrete representation of related structures of universal algebras I., *Acta Sci. Math.*, 40 (1978), 175—184.
[5] Almost all algebras with triply transitive automorphism are functionally complete (Szendrei Ágnessel) Acta Sci. Math. (benyújtva).

Jelentés az 1979. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Választmánya az 1979. évi Grünwald Géza Emlékdíjak odaítélésére az alábbi bizottságot küldte ki: Császár Ákos elnök, Szász Domokos titkár, Fejes Tóth László, Hajnal András, Makai Endre, Rapcsák András, Révész Pál, Sárközy András, Schmidt Tamás, Tandori Károly és T. Sós Vera. A Bizottság 1979. november 4-én és 20-án tartott ülést, melyen az alábbi határozatot hozta:

az 1979. évi Grünwald Géza Emlékdíjban és 4500—4500 Ft jutalomban részesíti a következőket:

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA tanársegéd, JATE Bolyai Intézete, Szeged,

JÁRAI ANTAL tudományos munkatárs KLTE Analízis Tanszék, Debrecen,

PETHŐ ATTILA tudományos munkatárs, KLTE Algebra és Számelmélet Tanszék, Debrecen,

TOTIK VILMOS, ösztöndíjas gyakornok JATE Bolyai Intézete, Szeged.

Indokolás:

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA jelentős tudományos eredményeket ért el a félcsoportelméletben. Munkásságának kedvező külföldi visszhangja van.

Megjelent dolgozatainak száma 5. További két dolgozatát közlésre elfogadták, és négy dolgozatot küldött be különböző folyóiratokhoz.

Az első cikkétől eltekintve, ami a Bruck-féle bővítés egy általánosítását tárgyalja, és a szegedi Acta-ban jelent meg, reguláris félcsoportokkal foglalkozott. Még hallgató korában kezdte vizsgálni az ortodox félcsoportok struktúráját, aminek akkor már elég széles irodalma volt. Az addig megjelent struktúratételek közös vonásait felismerve, vezette be az (erős) részkötegparcelláló kongruencia fogalmát, aminek egyik fontos speciális esete az (erős) részköteg-szeparálókongruencia. A szegedi kollokvium kiadványában megjelent két cikkében ezen kongruenciák néhány tulajdonságát bizonyította, ill. leírta a $0-D$-egyszerű ortodox félcsoportok erős részköteg-szeparáló bővítéseit. Ezeknek az eredményeknek felhasználásával kapott néhány struktúratételt, amit bizonyítások nélkül a Semigroup Forumban, bizonyításokkal együtt a J. Algebra-ban publikált. Később tetszőleges ortodox félcsoport erős részköteg-szeparáló bővítéseit is jellemezte, erről szóló cikke az Acta Mathematicaban jelenik meg. Ezen vizsgálatokat tovább folytatta és több szép eredménye van előkészületben. Az akadémiai Actánál megjelenő eredmény felhasználásával bizonyította bizonyos pull-back létezését, ami lehetővé tette, hogy Yamada egy problémájára válaszoljon, ill. általánosítsa McAlister egy tételét. Ez a Semigroup Forumban fog megjelenni. Ortodox félcsoportokra vonatkozó cikke, a Hall-féle reprezentációtételt általánosítja. Ezt a cikket elfogadta a J. Austral. Math. Soc.

A Colloq. Math. Soc. J. B-hoz adta be azt a kéziratot, ami szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy klónháló teljesen rendezett legyen valamely teljesen reguláris félcsoport esetén, feltéve, hogy az nem köteg, továbbá leírja a jobb-, ill. balinverz teljesen reguláris félcsoportok klónhálóját. A kötegek esetével külön foglalkozott egy overwolfachi kollokvium kiadványában megjelenő cikkében.

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On an extension of semigroups, Acta Sci. Math. 39 (1977), 367—389.
[2] On the structure of orthodox semigroups, Semigroup Forum 13 (1976/77), 271—280.
[3] On subband-parcelling congruences of orthodox semigroups, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 20. Algebraic Theory of Semigroups, Szeged 1976, 613—627.
[4] On the strong subband-separating extensions by $0-D$-simple orthodox semigroups, uo. 629—646.
[5] On the structure of orthodox semigroups, J. Algebra 56 (1979), 71—90.
[6] A generalization of the Hall semigroup of a band, J. Austral. Math. Soc. (közlésre elfogadva).
[7] Strong subband-separating extensions of orthodox semigroups, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. (közlésre elfogadva).
[8] Strong subband-parcelling extensions of orthodox semigroups (kézirat).
[9] On a pull-back diagram for orthodox semigroups, (Semigroup Forumnak közlésre benyújtva).
[10] Completely regular semigroups whose idempotent reducts form a chain (Colloq. Math. közlésre benyújtva).
[11] On closed sets of term functions on bands, (megjelenik az oberwolfachi kiadványban).

JÁRAI ANTALnak két dolgozata jelent meg és további három van sajtó alatt. Tudományos munkájának témája mértékelmélet és függvényegyenletek. Járai nagyon általános alakú függvényegyenletek mérhető megoldásairól tudja a korlátosságot, illetve folytonosságot igazolni. Eredményei

— melyek a függvényegyenletek mérhető megoldásának meghatározására szolgáló legáltalánosabb módszert adják — lehetővé tették több, korábban szinte reménytelenül nehéznek tűnő függvényegyenlet mérhető megoldásainak meghatározását.

Ilyen például a (2, 2) - additív, összeg tulajdonságú, mérhető generálfüggvénnyel rendelkező entrópiákra vonatkozó függvényegyenlet.

Ismeretes, hogy a valós változós valós értékű függvényekre vonatkozó Cauchy-féle függvényegyenlet pozitív mértékű halmazon mérhető megoldásai folytonosak. Járai Antal sokkal általánosabb egyenlettípusra bizonyította be a pozitív mértékű halmazon mérhető megoldások folytonosságát, megoldva ezzel egy W. Sander által felvetett problémát.

Kakutani és Oxtoby 1950-ben megmutatták, hogy a komplex egységkörön a Haar-mérték kiterjeszthető egy olyan eltolásinvariáns mértékké, amelyre a megfelelő L^2 tér dimenziója 2^c. Járai legújabb dolgozata ezt az eredményt általánosítja tetszőleges nemdiszkrét lokálisan kompakt topologikus csoportokra.

JÁRAI ANTAL DOLDOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On measurable solutions of functional equations. Publ. Math. 26 (1979), 17—35.
[2] On the measurable solutions of a functional equation arising in the information theory. Acta Math. Acad. Hung. 34 (1979), 105—116 (Daróczy Zoltánnal közös cikk).
[3] A remark to a problem of W. Sander. Aeq. Math. közlésre elfogadva.
[4] Regularity properties of functional equations (20 gépelt oldal). Aeq. Math. közlésre elfogadva.
[5] Invariant extension of Haar measure (39 gépelt oldal). Coll. Math. közlésre beküldve.

Pethő Attila 29 éves, a KLTE Algebra és Számelmélet Tanszékének tudományos munkatársa. Eddig 14 dolgozatot írt, s 1979-ben benyújtotta a kandidátusi értekezését. Dolgozatainak többségében normaforma egyenletek egész megoldásainak eloszlásával, valamint ezzel szoros kapcsolatban algebrai egész számok eloszlásával foglalkozik. Különösen érdekesek, jelentősek és mélyek a [7], [8], [10] és [11]-ben nyert eredményei. [7]-ben W. Schmidt igen mély approximációs tételeit felhasználva, teljes általánosságban nyer aszimptotikus formulát $a \leqq N$ magasságú egész megoldások számára, amikor $N \to \infty$.

[8]-ban teljes normaforma egyenletek esetén az aszimptotikus formulában szereplő konstansokat explicit alakban is megadja.

Ebből több fontos és általános következtetést nyer algebrai számtestek adott normájú és korlátos méretű egészeinek eloszlásával kapcsolatban. [10] és [11]-ben mindezeket az eredményeket általánosítja a p-adikus esetre (felhasználva Schmidt eredményének p-adikus általánosítását). [11] és [12]-ben érdekes és hasznos eredményeket nyer S-rendekről és S-egységekről.

Pethő Attila munkáiban a diofantikus approximációk elmélete és az algebrai számelmélet mély eszközeit használja fel.

Eredményeinek visszhangja igen pozitív.

PETHŐ ATTILA DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Racionális számok előállítása normaforma egyenletekkel, OTDK pályázat, 1972.
[2] Teljes normaforma egyenletek megoldásainak eloszlásáról, OTDK pályázat, 1973.
[3] Über die Darstellung der rationalen Zahlen durch Normformen, Publ. Math. 21 (1974), 31—38.
[4] Normaforma egyenletek megoldásainak eloszlásáról, OTDK pályázat, 1975.
[5] Normaforma egyenletek megoldásainak eloszlásáról, Egyetemi doktori disszertáció, Debrecen, 1975.
[6] Sur la distribution des solutions des équations du type „normeforme", Acta Math. Acad. Sci. Hung. 26 (1975), 135—142. (Győry Kálmánnal közösen.)
[7] Über die Verteilung der Lösungen von Normformen Gleichingen, II., Acta Arith. 32 (1977), 349—363. (Győry Kálmánnal közösen.)
[8] Über die Verteilung der Lösungen von Normformen Gleichungen, III. Acta Arith. 37 (1979), megjelenés alatt (Győry Kálmánnal közösen).
[9] Diophantische Approximationen mit natürlichen Zahlen, Publ. Math., megjelenés alatt.
[10] Über die Verteilung der Lösungen von S-Normformen Gleichungen, Publ. Math. (megjelenés alatt).
[11] Normaforma egyenletek megoldásainak és bizonyos tulajdonságú algebrai számoknak az eloszlásáról, Kandidátusi értekezés, Derecen, 1979.

[12] Beiträge zur Theorie der S-Ordnungen, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (megjelenés alatt)
[13] Über die nichtlineare diophantische Approximation von quadratischen algebraischen Zahlen, J. Number Theory, (megjelenés alatt).
[14] Simple continued fractions for Fredholm numbers, J. Number Theory, (megjelenés alatt).

TOTIK VILMOS tudományos kutatómunkáját már egyetemi hallgatóként elkezdte, s azóta rendkívüli eredményességgel végzi. Első tudományos közleménye még egyetemi hallgató korában, 1978-ban megjelent. Ebben a dolgozatában, amelyet az Analysis Mathematica közölt, Szabados József egy nehéznek tűnő problémájára adott szellemes megoldást. Második, nagyterjedelmű 25 old. publikációja az Acta Sci. Math.-ban ez év nyarán jelent meg. Ebben Fourier-sorok erős approximáció ával foglalkozik. Számos ismert eredményt általánosít, s megmutatja, hogy eredményei bizonyos értelemben a lehető legjobbak.

További 10 dolgozata van megjelenés alatt. Ez is mutatja, hogy, Totik Vilmos, rendkívül termékeny kutató egyéniség aki nagy szorgalommal és ritka intuícióval dolgozik. Minden dolgozatában található néhány eredeti új ötlet, az ismert módszereket pedig nagy biztonsággal és eredményességgel kombinálja, ill. használja.

Az egyetemi doktori címet 1979 tavaszán szerezte meg „summa cum laude" minősítéssel.

Egyetemi hallgatóként is szinte minden évben a helyi, ill. országos diákköri konferenciákon első, ill. kiemelt díjat kapott. A Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyeken is rendkívüli eredményességgel vett részt (1975-ben második helyezést, 1976-ban első dicséret, 1977 és 1978-ban első helyezést ért el). Ez is mutatja, hogy Totik Vilmos nemcsak egy területen rendelkezik mély ismeretekkel, henem ismeretei rendkívül széleskörűek és mélyek. 1976-ban a Rényi Kató díj II. fokozatában, 1978-ban I. fokozatában részesült.

TOTIK VILMOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On the modulus of continuity in connection with a problem of J. Szabados concerning strong approximation, Analysis Math., 4 (1978), 145—152.
[2] On structural properties of functions arising from strong approximation, Acta Sci. Math., 41 (1979), 227—251.
[3] On the strong approximation of Fourier series, Acta Sci. Math. Hung. (megjelenés alatt).
[4] On the strong summability by the (C, α)-means of Fourier series, Periodica Math. Hung. (megjelenés alatt).
[5] On the strong approximation by the (C, α)-means of Fourier series I, II, Analysis Math. (megjelenés alatt).
[6] On the strong approximation with variable exponents, Analysis Math. (megjelenés alatt).
[7] On the very strong and mixed approximation, Acta Sci. Math. (meg elenés alatt).
[8] On the divergence of Fourier series, Publicationes Mathematical (megjelenés alatt).
[9] On the continuity of functions in connection with a problem of V. G. Krotov, Analysis Math. (megjelenés alatt).
[10] On a possible generalization of strong approximation results, Proceedings of the conference in Gdansk, 1979 (megjelenés alatt).

Jelentés a Farkas Gyula emlékdíj 1979. évi kiosztásáról

A Farkas Gyula Emlékdíj Bizottság 1979. november 23-án tartotta ülését, melyen részt vettek:

PRÉKOPA ANDRÁS (elnök), VINCZE ENDRE (alelnök), KELLE PÉTER (titkár), DÁVID GÁBOR, FARKAS MIKLÓS, FISCHER JÁNOS, GULYÁS OTTÓ, HEPPES ALADÁR, KIS OTTÓ, LÁSZLÓ ZOLTÁN, NÁRAY MIKLÓS.

Az alkalmazott matematikai kutatásokban, a modellalkotásban, illetve a számítástechnikai módszerek fejlesztésében nyújtott munkásságuk alapján az 1979. évi Farkas Gyula emlékdíj I. fokozatában és egyenként 4000 Ft jutalomban részesül:

STRAZICKY BEÁTA,
BALOGH KÁLMÁN,
MAYER JÁNOS.

A Farkas Gyula emlékdíj II. fokozatában és egyenként 3000 Ft jutalomban részesül:
VICSEK TAMÁSNÉ,
FARAGÓ ISTVÁN.

Indokolás:

STRAZICKY BEÁTA 1970 óta dolgozik az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályán, ahová közvetlenül az egyetem elvégzése után került. Néhány évvel később készítette el dolgozatát [1], melyben új algoritmust ad a kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma megoldására. Többi, felsorolt dolgozata ennek kiterjesztéseiről és a vele kapcsolatos gépi tapasztalatokról számol be. Strazicky algoritmusa az adott feladatra a nemzetközi irodalomban fellelhető algoritmusok közül a *leghatékonyabb* és így egyben a *legismertebb*.

A nemzetközi szakirodalomban többen hivatkoznak erre az algoritmusra, melyet Strazicky-eljárásnak neveznek.

Strazicky Beáta másik jelentős munkája a „Magyar villamosenergia-ipar napi menetrendje" című munkában való részvétel. Itt másfél éven át a témavezető szerepét is betöltötte. Vezetésével alakították ki az adatbázist, továbbá jelentős szerepe volt a feladat megoldó algoritmusának a létrehozásában is.

Eredményeiről 1979 áprilisában Amsterdamban számolt be az EURO III. kongresszuson. A magyar és angol nyelvű (folyóirat) publikáció folyamatban van.

Strazicky Beáta több éven át szervezte a nagysikerű mátrafüredi nemzetközi matematikai programozási konferenciákat. Rendszeresen résztvesz az ELTE matematikus szakán az operációkutatás szakosok oktatásában. Másfél éven át technikai szerkesztője volt az Alkalmazott Matematikai Lapoknak. Jelenleg aspiráns, disszertációját kb. 1980 tavaszára készíti el.

STRAZICKY BEÁTA PUBLIKÁCIÓI

[1] A kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma egy megoldási módjáról. Intézeti Közlemények, 1973/11.

[2] An Algorithm for the Solution of the Two-Stage Stochastic Programming Problem, Operations Research Verfahren XIX. pp. 142—156, (1974).

[3] Some results concerning an Algorithm for the Solution of the Two-Stage Stochastic Programming Problem. (Leadva: Proceedings of the International Conference on Stochastic Programming, Oxford 1974, Ed: M. Dempster.)

[4] A kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma megoldási módjairól, egyetemi doktori disszertáció (1976).

[5] Deák István, Hoffer János, Mayer János, Németh Ágoston, Prékopa András, Strazicky Beáta: A magyar villamosenergia-termelés napi optimális menetrendjének meghatározásáról 1979. (Publikálás alatt.)

BALOGH KÁLMÁN 1972-ben szerzett matematikus diplomát Budapesten az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Kapcsolatba került a NIM IGÜSZI Software-fejlesztési osztályával és részt vett a LORD assembly nyelv specifikálásában.

A NIM IGÜSZI Software-fejlesztési osztályán dolgozik. Kezdettől fogva a programhelyesség bizonyítás problémái érdekelték. Kutatásaihoz eredményesen használta fel az osztályon kidolgozott programfejlesztő eszközöket (CDL és PROLOG nyelv).

Először Lábadi Katalinnal közösen verifikáló rendszert készített az ALGOL 60 egy strukturált rész-nyelvéhez. Ezt a rendszert több változatban továbbfejlesztették. Később a PROLOG nyelvű programokhoz készített interaktív ellenőrző programot. Részt vett a LORD nyelv fordítóprogramjának megírásában, és témavezetőként a PROLOG első implementálásában. Ezzel az utóbbi munkával az implementálók Nívó Díjat nyertek.

Sikeresen szerepelt különböző pályázatokon. 1975-ben „A számítógépek alkalmazásának gazdaságossága" című országos pályázaton az osztály néhány tagjával együtt II. helyezést ért el. 1975-ben pedig díjat nyert az Alkotó Ifjúság pályázaton azzal a dolgozatával, amelyet a „slash" beépített eljárást is alkalmazó PROLOG programok verifikálásáról írt.

1980 eleje óta a hazai nagyüzemi software-gyártás megteremtését célzó központi finanszirozású témakörben dolgozik témavezetőként. Ezen a téren is jelentős eredményeket ért el egy olyan nyelv kidolgozásában való részvételével, amely nagyméretű rendszerek tervezését teszi lehetővé.

1979-ben doktori disszertációt készített. Aktívan vesz részt a NJSZT munkájában is, ahol ő a Rendszerprogramozási Szakcsoport egyik vezetője.

BALOGH KÁLMÁN PUBLIKÁCIÓI

Dolgozatok: programverifikálással kapcsolatosak. Egy logikai módszer programok szemantikus tulajdonságainak bizonyítására. Egyet. dokt. dolgozat 1979.

On an interactive program verifier for PROLOG programs. A BJMT által Salgótarjánban 1978 szeptemberében tartott „Logic in Programming" c. kollokvium kiadványában (megjelenés alatt, North Holland Publ. Comp.).

Futó Iván, Lábadi Katalin, Szeredi Péter, Balogh Kálmán: A PROLOG nyelv megvalósítási módszereiről és elméleti alapjairól. Softtechn, 1979. július.

Balogh, Futó Iván, Lábadi Katalin: PROLOG programellenőrző rendszer dokumentációja. NIM IGÜSZI, 1977. november.

Balogh: A NIM IGÜSZI interaktív programellenőrző rendszere. A Számok 1978 márciusi, programbizonyítással foglalkozó tanfolyamának kiadványa.

Determinisztikus soros programok ellenőrzése. A III. Visegrádon tartott „Operációs rendszerek elmélete" Téli Iskola egyik bevezető előadása, a KFKI 1978/18 kiadványban.

On an implemented program verifier (to verify a structured subset of ALGOL 60, implemented in CDL), a 2. Magyar Számítástud. Konf. kiadványában, 1977.

Balogh, Lábadi Katalin: A matematikai logika software-alkalmazásai. A szegedi „Programozási rendszerek '75" kiadványában.

Balogh K.: Szemantikus programellenőrző rendszer specifikációja (Az ALGOL résznyelv ellenőrzésére), NIM IGÜSZI, 1975. július.

Andréka Hajnal, Balogh Kálmán, Emődy Zoltán, Lábadi Katalin: Automatikus programíró és programhelyesség bizonyító programok. 1973. július. NIM IGÜSZI.

Programozási módszertan-technológia

Balogh, Sántáné Tóth Edit, Szeredi Péter: Programtervezés logikai alapokon. Készült az I. Neumann Kongresszus kiadványába, 1979. december.

Szeredi Péter, Sántáné Tóth Edit, Balogh Kálmán: Logikai alapú tervező nyelv előzetes specifikációja. Készült az MSZR-ESZR TKM-3 szerződések keretében, Softtechn D33. 1979. június.

Balogh Kálmán, Szeredi Péter: A PROLOG nyelv alkalmazása software és hardware objektumok tervezésére (Esettanulmányok, VI. kötet). Tervezés meta-nyelven. Softtech D27, 1978. aug.

Balogh K., Visnyovszky József: A PROLOG nyelv alkalmazása software és hardware objektumok tervezésére (Esettanulmányok, I. kötet). PROLOG-ban elkészült specifikáció CDL2 alakra hozása. Softtech D2, 1978. augusztus.

Balogh, Sántáné Tóth Edit, Szeredi Péter: Software tervező rendszerrel kapcsolatos feladatok összefoglalása. Softtech D29, 1978. november.

Egyéb

Balogh, Bendl Judit, Kósa Márton, Varga Kálmán: Moduláris PROLOG interpreterének specifikációja (Nagyvonalú rsz-terv). Softtech D20, 1978. május.

Szeredi Péter, Balogh K.: LORD (assembly-nyelv) specifikáció. 1973. március. Készült az EMG részére.

Szeredi Péter, Balogh K.: Az ALGOL 68 megvalósításának problémái. NIM IGÜSZI, 1972. december.

MAYER JÁNOS 1945-ben született és még nem szerezte meg a kandidátusi fokozatot. Az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályának tudományos munkatársa. Kiválóan képzett és igen tehetséges fiatal alkalmazott matematikus. Mind a matematikai, mind pedig számítástechnikai és alkalmazási tevékenysége jelentős. Mint vezető is tevékenykedett, néhány éven át vezette a Nemlineáris Programozási Csoportot. Ez a tevékenysége csak az aspirantúra miatt szünetel jelenleg.

Az [1] dolgozat az általánosított redukált gradiens módszerrel kapcsolatos számítógépes tapasztalatait foglalja össze az irodalomban közölt teszt-feladatok alapján. A módszert adaptálta a STABIL modell megoldására.

A [2] dolgozat konjugált irányos és kvázi-Newton módszerek, valamint speciálisan nemlineáris függvények négyzetösszegének minimalizálásra szolgáló algoritmusok összefoglalása, az egyetemi oktatáshoz megkívánt részletességgel.

A [3] dolgozat az [1] dolgozathoz viszonyítva, újabb számítógépes tapasztalatokat közöl az általánosított redukált gradiens módszernek a STABIL modell megoldására szolgáló alkalmazásával kapcsolatban. A redukált gradiens módszer iránykereső feladatának módosítása Zoutendijk ún. P1 módszere iránykereső feladatával való kombináció révén. A STABIL modell megoldására ily módon adódó új algoritmus konvergenciájának bizonyítása. Számítógépes experimentációs eredmények az új algoritmussal kapcsolatban, a negyedik ötéves terv villamosenergiaipari ágazatára vonatkozó modell egy változatának megoldása.

Doktori értekezése [4] az [1] és a [3] dolgozatok eredményeinek összefoglalása.

Az [5] dolgozatban új algoritmust közöl a címben megjelölt feladat megoldására az iránykereső feladatra koncentrálva. A cikk részletes számítógépes experimentációt is tartalmaz.

A [6] dolgozatban a redukált gradiens módszert alkalmazza a nemlineáris célfüggvényű minimálköltséges hálózati folyamprobléma megoldására. Lexikografikus változatot is megfogalmaz a hálózatos algoritmusra vonatkozóan.

Alkalmazási munkái közül az alábbiak említendők.

Számítógépes gyártásellenőrzési rendszert készített az Útépítő Tröszt aszfaltkeverő telepei részére. A rendszer telexen érkező adatokra épült, a beindításhoz 3 évig üzemeltette.

Résztvett a Csepeli Szerszámgépgyár IGYR—630 automatikus gépipari egységével kapcsolatos termelésirányítási rendszer munkáiban és több programot készített.

Résztvett a villamosenergia-termelés optimális napi menetrendjét meghatározó programrendszer elkészítésének munkáiban. Feladata a feszültséges feltételek előállítása volt. Ez nagyméretű nemlineáris egyenletrendszer megoldását jelentette.

1970 óta folyamatosan résztvesz az ELTE matematikus hallgatóinak oktatásában. Ennek keretein belül a C szakosok számára nemlineáris programozást, a programozó szakosoknak általában operációkutatást adott elő. Több ízben volt szakdolgozati témavezető.

MAYER JÁNOS PUBLIKÁCIÓI

[1] Computational experiences with the reduced gradient method, Progress in Operations Research, ed.: A. Prékopa, North Holland (1974) 613—624.

[2] A feltételek nélküli minimalizálás konjugált irányos és kvázi-Newton módszerei, tanulmány az ELTE TTK Valószínűségszámítási Tanszéke számára (1975).

[3] A STABIL sztochasztikus programozási modellről, Alk. Mat. Lapok, 2 (1976) 171—187.

[4] Új algoritmus a STABIL sztochasztikus programozási modell megoldására, egyetemi doktori disszertáció, ELTE TTK (1976).

[5] A nonlinear programming method for the solution of a stochastic programming model of A. Prékopa, Studies in Applied Stochastic Programming, ed.: A. Prékopa, MTA SZTAKI Tanulmányok, 80 (1978) 31—48.

[6] Kas Péterrel közösen: A reduced gradient approach to the nonlinear network flow problem, MTA SZTAKI preprint sorozat, MO/1 (1979).

[7] A nonlinear programming method for the solution of a stochastic programming model of A. Prékopa, a IX International Symposium on Mathematical Programming közleményében, megjelenés alatt.

[8] Kas Péterrel közösen: Algoritmus a nemlineáris folyamprobléma megoldására, Alk. Mat. Lapok, megjelenés alatt.

Dr. Vicsek Tamásné Streho Mária 1969-ben végzett a Moszkvai Állami Lomonoszov Egyetem matematika fakultásának számítástechnikai szakirányán. [1] dolgozatában a Tyihonov-féle regularizálhatóság és a Ritz-módszer kapcsolatával foglalkozik. 1969 óta az MTA SZTAKI Numerikus Módszerek Osztályán dolgozik, differenciálegyenletek numerikus megoldásának témakörében. Számos programot dolgozott ki a CDC 3300-as gép programkönyvtára részére és résztvett egy parciális differenciálegyenleteket megoldó programcsomag készítésében [2]. 1973-tól ún. stiff-típusú differenciálegyenletek közelítő megoldásait vizsgálja. Több fontos gyakorlati problémát oldott meg vegyészek számára. [3], [4], és ő készítette a témakör első magyar nyelvű összefoglaló tanulmányát is [5], amelyben számos fontos számítógépes tapasztalatot is közöl.

Több közös dolgozatot írt Galántai Auréllal a stiff-típusú problémák közelítő megoldásáról, amelyek hatékony programcsomagot és optimális lépéshossz és rend változtatási stratégiák és hibabecslések kidolgozásával kapcsolatosak. A [9] dolgozatban a stiff-probléma eddigieknél jóval pontosabb jellemzését adták meg.

Vicsek Tamásné sikeres témavezetői munkát végzett a számítástechnikai TDK mozgalomban is, amiért a KISZ KB, Emlékplakettjét is megkapta.

Kiemelkedő nagyfokú együttműködési készsége és az, hogy egy fontos alkalmazási terület hatékony megoldási módszereit és ezek vizsgálatát lényegében ő honosította meg Magyarországon.

VICSEK TAMÁSNÉ PUBLIKÁCIÓI

[1] Исследование возможности регуляризации метода Ритца на примере полиномиальных приближений, Математические заметки, Москва T. 7 1970. (Bahvalovval közösen.)
[2] Parciális differenciálegyenletek TASK-könyvtár (Balla Katalinnal közös) CDC 3300 Felhasználói Ismertetők 9 (1975).
[3] Kinetikai törvényszerűségek tanulmányozása szénhidrogének folyadékfázisú oxidációjában nagy konverziók esetén (Vidoczi Tamással közös) Magyar Kémiai Folyóirat 81. évfolyam 1975.
[4] Egy inhibeált oxidációs folyamat számítógépes modellezése (Vidóczi Tamással közös) Magyar Kémiai Folyóirat 82. évfolyam 1976.
[5] Stiff-típusú közönséges differenciálegyenletek megoldásáról MTA SZTAKI Tanulmányok 48/1976.
[6] Stiff-problémák I. Lineáris *k*-lépéses módszerek (Galántai Auréllal közös). ELTE Numerikus módszerek 1/1976.
[7] Stiff-problémák II. (Galántai Auréllal közös) ELTE Numerikus módszerek (8) 1976.
[8] Komplex kinetikai problémák hatékony számítógépes megoldása. Tanulmány az OMFB részére 1977.
[9] On the concept of the stiffness (Galántai Auréllal közös). Berlin, Humboldt Egyetem Seminarberichte 1978.

FARAGÓ ISTVÁN 1950-ben született. Egyetemi tanulmányait a Szovjetunióban, a Kijevi Állami Tudományegyetem Kibernetikai Karának numerikus matematika szakán végezte s 1974-ben fejezte be kiváló eredménnyel. A Munkaügyi Minisztérium Számítástechnikai Intézetében dolgozik.

Alapvetően a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának módszereivel s számítógépes realizációjával foglalkozik. Fő területe a direkt variációs módszerek témaköre, ezen belül is a véges elemek módszere. E témában készítette egyetemi doktori disszertációját 1977-ben, melyet „summa cum laude" minősítéssel védett meg.

Disszertációjában [3] a módszer alkalmazhatóságán és modell-jellegű elliptikus típusú parciális differenciálegyenletek és közönséges differenciálegyenletek peremérték-feladatokra való alkalmazásán túl kimutatta a módszer helyét a direkt variációs módszerek családjában, ami a módszer konvergenciája és stabilitása szempontjából egyaránt eredmény. A [7] közlemény a módszer parabolikus típusú parciális differenciálegyenletekre történő formális alkalmazása során nyert közelítő eredmény matematikai tartalmát írja le.

A fenti eredmények számítógépes alkalmazása több, elsősorban műszaki jellegű feladat megoldásában is megvalósul. Egyetemi szakdolgozatában [1] egy háromdimenziós stacionárium hőeloszlási feladatot oldott meg a véges elemek módszerével.

Munkahelyén, a MÜM SZÁMTI-ban került kifejlesztésre az a véges elemes programcsomag, mely az 1976-ban lefolytatott nemzetközi approbációt követően az ESZR alkalmazói programcsomagok körében a közös software alap része lett s az OSZV-OSAK forgalmazza. Faragó István a kidolgozás aktív részese volt, munkájának összegzését [4] és [5] tartalmazza.

A műszaki alkalmazások közül említést érdemel egy hengerszimmetrikus áramlási feladat véges elemes megoldása és annak számítógépes realizációja [6], [9], valamint egy parabolikus típusú parciális differenciálegyenlettel leírt folyam-szennyeződési diffúziós modell numerikus megoldása. Aktívan részt vesz továbbá a kémiai reaktorok matematikai modellezésének munkáiban.

Ezen túlmenően foglalkozik a numerikus módszerek számítógépes alkalmazhatóságához szükséges „járulékos" problémákkal, elsősorban speciális tulajdonságú nagyméretű lineáris egyenletrendszerek kérdéseivel, illetve a programcsomagok felépítését és általános szervezését érintő kérdésekkel.

FARAGÓ ISTVÁN PUBLIKÁCIÓI

[1] Решение методом конечных элементов трёхмерной задачи Туассона Дипломная работа, Киев, 1974.
[2] Véges elemek módszerének, mint speciális bázisfüggvényekkel rendelkező Ritz-módszernek a vizsgálata. MÜM SZÁMTI Intézeti Tájékoztató 1. 1977.
[3] Véges elemek módszere és alkalmazása peremérték-feladatok megoldására. Doktori értekezés, ELTE, 1977.
[4] Parciális differenciálegyenletek megoldása véges elemek módszerével. Társszerző: Smrcz Ervin. Információ—Elektronika, 1978.
[5] A parciális differenciálegyenleteket véges elemek módszerével megoldó programcsomagról. MÜM SZÁMTI Intézeti Tájékoztató, 1978.

[6] Egy hengerszimmetrikus áramlási feladat számítógépes megoldása véges elemek módszerével. Társszerzők: Gáspár Csaba, Vasvári Péter Pál „Véges elemek módszerének elméleti, gyakorlati és számítógépes problémái c. 1. szeminárium előadásai" c. kiadvány, 1978.
[7] Parciális differenciálegyenletek megoldása véges elemek módszerével. MÜM SZÁMTI Intézeti Tájékoztató 3. 1979.
[8] Kémiai reaktorok matematikája (egyetemi jegyzet). ELTE TTK Kémiai Kib. Labor. 1979. (Megjelenés alatt.)
[9] About the Computer Program for Solving a Symmetrical Flowing Problem with the Finite Element Method. Társszerzők: Gáspár Csaba, Vasvári Péter Pál. (Megjelenés alatt.)

Jelentés a Beke Manó Emlékdíj 1979. évi kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi Beke Manó Emlékdíj Bizottságot küldte ki az 1979. évi díjak odaítélésére: Surányi János (elnök), Gábos Adél (titkár), C. Neményi Eszter, Ill Mártonné, Pálfy Sándor, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Tomor Benedek. A Bizottság az 1979. évi emlékdíjban az alábbiakat részesítette:

Boroska Miklós, Meződy Jánosné, Némethy Katalin, Pogáts Ferenc, Salamon Éva, Schmidt Eleonóra, Vidéki Gusztávné.

Indoklás:

Boroska Miklós a Nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola 2. sz. Gyakorló Iskolájának munkaközösségvezető matematika szakvezető tanára. 23 éve tanít matematikát eredményesen. Tanítványai közül többen nyernek városi, megyei országos versenyeken jó helyezéseket, a középiskolákban továbbtanulók nagyon jól megállják a helyüket. Az iskolában megszervezte a Kis Matematikusok Baráti Körét és évenként megrendezésre kerülő feladatmegoldó versenyeket.

Elsőként kapcsolódott be a korszerűsítési kísérletekbe. A szülőket is bevonta a korszerű matematika-oktatás megismerésébe: a TIT keretében megszervezte a Szülők Matematikai Szabadegyetemét, amelynek sikerét a sajtó, rádió is méltatta.

1969-ben matematikai feladatgyűjteményt állított össze, amelyet a tanárok eredménnyel használnak. Több megyében nyomtatásban megjelent az ideiglenes tantervű matematika tanmenete, amely a tanároknak nagy segítséget jelentett oktató, nevelő munkájukban. Megbízást kapott egy országos kiadvány — matematikai feladatgyűjtemény — megírására. Tanári továbbképzéseken előadásokat tartott matematika tanároknak. Jelentős tevékenységet fejtett ki a matematikai kabinetek létrehozásában.

Vezetőtanári munkája mellett a főiskolán módszertani szemináriumokat, feladatmegoldó gyakorlatokat tart. Jó kapcsolatot épített ki a főiskolák gyakorló iskoláinak matematika munkaközösségeivel és néhány szocialista országbeli kollégájával.

Meződy Jánosné nyugdíjas tanítóképző intézeti tanár. A kaposvári középfokú tanítóképző — majd Tanítóképző Intézet matematika tanáraként évtizedeken át eredményes oktató-nevelő munkát végzett. 1968-ban kapcsolódott be a komplex matematika tanítási kísérletbe. Közvetlen irányítója volt az Intézet gyakorló iskolájában kialakult műhelynek. Komoly szerepet vállalt az új általános iskolai matematika tanterv kialakításában, terjesztésében. Kezdettől, 1971-től részt vett a megyei kiterjesztésben matematikai, módszertani előadások tartásával, konzultációk vezetésével. Ezt a munkát 1975 óta nyugdíjasként is lelkiismeretesen ellátja. Fáradhatatlan tevékenységének jelentős része van abban, hogy Somogy megye mintegy 1000 alsótagozatos tanítójának, napközis nevelőjének tantervi felkészítését nagyrészt az új iskolai dokumentumok általános bevezetését megelőzően elvégezték.

Némethy Katalin középiskolai tanár. 1955-ben végezte el az ELTE matematika-fizika szakát. 1959-től a budapesti Móricz Zsigmond gimnáziumban tanít. Közben 15 éven át az ELTE Geometria tanszékén félállásos tanársegéd, majd adjunktus volt.

Középiskolai tanítványai évről évre jól szerepelnek az országos versenyeken, kiválóan helytállnak a felvételiken, 1978-ban például három matematika I. tagozatos tanulója került az OKTV első tíz helyezettje közé. Tanítási módszerével azt is eléri, hogy a matematika iránt kevésbé érdeklődők is megszeretik a matematikát és igyekeznek eredményesen dolgozni.

A rádióban két szakkört vezetett középiskolásoknak, kerületében általános iskolai tanulóknak is vezetett szakköröket. 1964 és 1968 között az akkori tanterv első kísérletezői közé tartozott, sokat

segített a tankönyvíróknak, majd lektorálta is a tankönyvsorozatot, tanításához segédanyagokat is készített. Azóta is részt vesz a matematika oktatás korszerűsítéséért folyó munkában. Segítette egy középiskolai valószínűségszámítási anyag kipróbálását és a KFKI számítógépes oktató kísérletét. A Kisszámítógépes Oktatórendszerek sorozatban Trigonometria címen készített számítógépes programot.

Többek között lektorálta a matematika II. tagozatos tankönyv sorozat egy részletét és Pogáts Ferenc Vektorgeometria című könyvét. Tanári továbbképzéseken sok értékes előadást tartott. Munkájának elismeréseként 1971-ben Kiváló Tanár kitüntetést kapott, 1975-ben miniszteri dicséretet.

Pogáts Ferenc a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola budapesti tagozatának adjunktusa. 1962-ben végezte az egyetemet. Ettől kezdve 1974 őszéig az ELTE Geometria tanszékén dolgozott Szakmailag igen magas színvonalú előadásokat tart.

A középiskolai oktató munka iránt is érdeklődik. Négy éven át tanított a Berzsenyi Dániel gimnáziumban egy matematika II. tagozatos osztályt. Tanítványai komoly sikereket értek el. Itt próbálta ki néhány anyagrész újszerű középiskolai felépítését. Két könyvét, a Vektorgeometriát és a Trigonometriát középiskolai tanárok, diákok, egyetemisták jól használják. Egyik szerzője a készülő érettségi feladatgyűjteménynek. Több könyvet éles szemmel lektorált. Egyéb bizottságok mellett hasznos tagja az MTA—OM Köznevelési Bizottság matematikai munkabizottságának, több versenybizottságnak. A Tanárképző Főiskolán verseny előkészítő szakkört tart.

Érdekes előadásokat tartott a Bolyai János Matematikai Társulat vándorgyűlésein, vidéki rendezvényeken, a TIT szabadegyetemén és a KMBK nyári előadói konferenciáin.

Salamon Éva általános iskolai tanár. 1960 óta tanít matematikát és fizikát. Jelenleg Mosonmagyaróváron a Széchenyi István általános iskolában tanít.

Óráinak hatékonysága érdekében megismerkedett a célravezető, új módszerekkel. Ez is segítette abban, hogy a tanítványaival megszerettesse a matematikát és a fizikát. Tanulmányi versenyeken rendszeresen résztvettek a tanítványai, az országos döntőbe is bekerültek.

1964 óta vezet TIT matematika szakköröket. 3 éve a Győr-Sopron megyei TIT matematika szakosztályának vezetőségi tagja. Elsőként kezdett Mosonmagyaróvár városban és járásban az ideiglenes matematika tanterv szerint tanítani. Tapasztalatait az új tantervre való felkészítés során a járás nevelőinek átadja, előadások, bemutató tanítások, gyakorlatok vezetésével segíti a zökkenőmentes átmenetet. 10 előadásból álló sorozatban ismertette a szülőkkel az új matematika tanterv célját, feladatát. Megismertette a szülőkkel a hagyományos tantervben nem szereplő fogalmakat, eljárásokat és ízelítőt adott az új tanterv megvalósítását elősegítő módszerekből.

Schmidt Eleonóra középiskolai tanár. 1940-ben végezte el a tanítóképzőt. 1944-ben a Polgári Iskolai Tanárképző Főiskolán polgári iskolai tanári oklevelet szerzett. 1944-től 1948-ig polgári iskolában, majd a felszabadulás után általános iskolában dolgozott mint kollégiumi nevelő, tanár, igazgató. 1952-től 1957-ig Komárom megyében szakfelügyelő volt. 1955-ben szerzett középiskolai tanári oklevelet az ELTE-n. 1959-től a Kulich Gyula Ruházati és Cipőipari Technikumban — most Kulich Gyula Ruhaipari Szakközépiskola — tanít. Kezdettől fogva jelentős szerepet tölt be az iskola nevelőtestületében.

Tanítványai jól alkalmazzák a matematikát a szakmai és műszaki tárgyakban. Sokakban kelti fel az igényt a továbbtanuláshoz. Tanítványai szép eredményeket érnek el az érettségi és felvételi vizsgákon és az Országos Szakmai Tanulmányi Versenyeken (ahol a matematika is fontos szerepet játszik). Mindez alaposan átgondolt oktató-nevelő munkájának köszönhető. Gondot fordít a problémafelvető képesség, és más gondolkodási képességek fejlesztésére és a tanulók önálló munkájának a megszervezésére.

1961-ben és 1963-ban — kiemelkedő munkájáért — miniszteri dicséretet kapott, 1969-ben az Oktatásügy Kiváló dolgozója lett, 1973-ban Kiváló tanár kitüntetésben részesült.

Vidéki Gusztávné középiskolai tanár. 1958-tól tanít a Budai Nagy Antal gimnáziumban, Budapesten. 1963-tól az iskola matematikai munkaközösségének a vezetője. Kiváló felkészültségű szaktanár, magasszintű pedagógiai és szakmai kulturáltsággal bír. Elsők között kapcsolódott be a Bolyai János Matematikai Társulat által kezdeményezett középiskolai kísérletbe. Kísérleti munkájával jelentősen hozzájárul az általános iskolai komplex matematikatanítási kísérletben jól bevált felfedeztető módszer középiskolai megvalósításához. Óráin a tanulók önálló munkájára, egyéni felismeréseire épít, diák és tanár alkotó együttműködésével. 1974 óta óráit rendszeresen látogatják egyetemi hallgatók. Tanároknak több bemutató órát, továbbképző előadást tartott. Előadásai és bemutató órái segítettek meggyőzni hallgatóságát arról, hogy a kísérlet törekvései reálisak, megvalósíthatók. A kísérlet tantervi anyagának összeállítói, tankönyvírók sok segítséget kaptak gyakor-

lati tapasztalatain keresztül. A kísérlet tapasztalataira építő, most megjelenő, munkatankönyvet lektorálta. Maga is írt tanításban közvetlenül felhasználásra kerülő segédanyagokat, például társszerzője volt a gimnáziumi felmérő feladatsorozatnak.

Munkája elismeréseként 1973-ban az Oktatásügy Kiváló Dolgozója lett, 1977-ben Kiváló tanár kitüntetést kapott.

A Bolyai János Matematikai Társulat nagyrendezvényei 1979-ben

a) *„Sztochasztikus mezők: egzakt eredmények a statisztikus fizikában és a kvantum-mező-elméletben"*
(Esztergom, 1979. június 25—30.)

A kollokvium szervezőbizottsága a következő volt: Fritz József, Szász Domokos (elnökök), Lippner György, Vetier András (titkárok), Krámli András, Major Péter.

A résztvevők száma 127 (18 országból), a kísérők száma 30 volt. 35-en vettek részt szocialista országokból (köztük 17 magyar) és 92-en nyugati országokból (köztük 19 NSZK, 18 olasz, 16 USA, 14 francia). A plenáris üléseken 10 egyórás meghívott előadás hangzott el, továbbá két szekcióban 69 húszperces kiselőadás. A résztvevők szakmai rangja és színvonala rendkívül magas volt; itt volt a téma vezető kutatóinak nagy része, köztük számos világhírű matematikus.

Ebben az eléggé új, igen élénken fejlődő témában, amely lényegében a sztochasztikus folyamatok elméletéhez és annak fizikai alkalmazásaihoz kapcsolódik, és eddig főleg a nagyobb matematikai fizikai konferenciákon szerepelt, ez volt a világon az első önálló kollokvium. A konferencia iránt megnyilvánult nagy érdeklődés és a kollokvium átütő szakmai sikere bebizonyította a téma önállóságát, jövőben nyilván érdemes rendszeresen kollokviumokat rendezni a témában. A megnyilvánult érdeklődés részben elismerése is azoknak a tudományos eredményeknek, amelyeket a hazánkban néhány éve kialakult csoport a témában elért.

A konferenciát „sponsor"-álta a Bernoulli Society. A IUPAP devizatámogatást is adott volna, de azt a feltételét, hogy előre vállaljuk, hogy biztosítjuk minden „bona fide" résztvenni szándékozó tudós beutazását, nem tudtuk teljesíteni. A szervezéssel, a szakmai és nem-szakmai programok lebonyolításával a résztvevők elégedettek voltak, a feladattal a gyakorlott társulati szervezők akadályoztatása ellenére az adminisztráció sikerrel birkózott meg. Jelentős segítséget kaptunk Gárdai Zoltántól, az esztergomi Tanítóképző Főiskola tanszékvezetőjétől, és általában a helyi intézmények mind készségesen álltak segítségünkre.

Esztergom igen alkalmasnak és olcsónak bizonyult a konferencia megrendezésére. Ha a jövőben a Társulat ismét itt rendez konferenciát, egyedül arra kell vigyázni, hogy a Fürdő Szállóban jóelőre le kell foglalni az udvari (!) szobákat. A Colloquia M.S.J.B. sorozatban megjelenő kötetbe több mint 50, igen magas átlagszínvonalú dolgozatot nyújtottak be a résztvevők. A kötet gyors megjelenése rendkívül fontos lenne, mert — figyelembe véve a témában vezető folyóiratok féléves átfutási idejét — esetleg újabb kollokviumnál csak akkor számíthatunk ismét színvonalas dolgozatokra, ha legfeljebb egyéves átfutást biztosítani tudunk.

b) *„A matematika mindenkié" c. kollokvium*
(Veszprém, 1979 VIII. 13—20.)

A Matematika Tanításának Tanulmányozásával és Jobbá Tételével Foglalkozó Nemzetközi Bizottság (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, CIEAEM) XXXI. nemzetközi találkozóját Veszprémben rendezte meg a Bolyai János Matematikai Társulat tevékeny közreműködésével. A találkozón 23 országból mintegy 170 fő vett részt, közöttük a matematikatanítás számos kiemelkedő személyisége. A Bizottság hagyományai szerint az évi találkozók témáját a rendező ország javasolja. Ez alkalommal ez a következő volt: A matematika mindenkié.

Az előadások, megbeszélések négy fő kérdés köré csoportosultak:

A) Mik az alapvető ismeretek és képességek?
B) Hogyan vehetjük figyelembe a gyerekek sokféleségét?
C) Hogyan lehet hajlékonnyá tenni a tanterveket?
D) Matematikára vagy matematikán keresztül neveljünk?

Kevés számú plenáris ülés mellett több szekcióban folyt a vita a fő kérdésekről. Rövid előzetes kivonat könnyítette meg a szekcióválasztást. A magyar résztvevők előadásai, kiselőadásai azt a célt tűzték ki, hogy a résztvevők minél jobban megismerkedhessenek azzal, milyen törekvések vannak Magyarországon azért, hogy a matematika valóban mindenkié legyen. A záróülésen a Bizottság

elnöke kiemelte a kollokviumnak ezt az erényét és a további találkozók egyik célkitűzéseként általában is a rendező ország matematikatanításának megismertetését jelölte ki.

A találkozó jó hangulata nagymértékben köszönhető a veszprémi szervező bizottság eredményes munkájának.

c) *IX. Operációkutatási konferencia*
(Győr, 1979. VIII. 22—25.)

A Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztálya 1979. augusztus 22—25. között rendezte a Neumann János Számítógéptudományi Társaság és a Magyar Közgazdasági Társaság közreműködésével a IX. Operációkutatási Konferenciát. A színhely a győri Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola volt. A konferencia 220 hazai szakember részvételével bonyolódott le, amelyen két párhuzamos szekcióban 44 előadás hangzott el.

A megnyitó előadást Prékopa András akadémikus tartotta. Az előadások egy része már bevált, sikeres alkalmazásról adott számot, míg mások a gazdasági életben felmerülő feladatok korszerű megoldásának elméleti és gyakorlati problémáit tárgyalták, felhasználva a közgazdaságtan, matematika és számítástechnika legújabb eredményeit. Az előadásokon a hallgatóság részvétele aktív volt, majd minden előadást érdekes vita követett.

Külön érdekessége volt a programnak a harmadik nap délutánja. Ekkor ugyanis meghívott előadók (dr. Horváth Iván, OVK főo. vez., Simon Pál IKARUS szervezési ov. és dr. Ziermann Margit OT TGI főmunkatársa) tartottak vitaindító előadásokat az operációkutatási módszerek iparvállalati alkalmazásának problémáiról, illetve új utak kereséséről az ökonometriában. Mindegyik előadást élénk vita követe, melynek során a hozzászólók a vizsgált problémakör sok lényeges oldalára rávilágítottak, ezzel is teljesebbé téve a képet. A résztvevők átérezték az új gazdasági helyzetben az operációkutatás előtt álló megnövekedett feladatokat, de az is világosan kirajzolódott, hogy a sikeres alkalmazásokhoz az eddigiekhez képest sokkal jobb fogadókészségre van szükség az operációkutatás eredményeinek felhasználói részéről.

d) *Differenciálegyenletek kvalitatív elmélete kollokvium*
(Szeged, 1979. VIII. 27—31.)

A kollokvium tiszteletbeli elnöke Szőkefalvi-Nagy Béla volt, szervező bizottsága pedig a következő: Farkas Miklós (elnök), Hatvani László és Moson Péter (titkárok), Elbert Árpád, Pintér Lajos és Vincze Endre (tagok).

A résztvevők száma 109, a kísérők száma 13 volt, országonkénti megoszlásban a következő képpen: Algéria 1, Ausztria 3, Belgium 1, Bulgária 12, Kanada 4, Csehszlovákia 7, NSZK 3, NDK 5, Magyarország 44, Irán 1, Olaszország 2, Japán 3, Lengyelország 6, Szovjetunió 11, Egyesült Államok 1, Vietnam 1, Jugoszlávia 4. 11 egyórás meghívott előadás hangzott el és 72 15 perces kiselőadás.

A kollokvium tudományos szempontból a résztvevők egybehangzó véleménye szerint rendkívül hasznos, magas színvonalú és gyümölcsöző volt. Számos előadással kapcsolatban hangzottak el kérdések, észrevételek. A résztvevők sok kötetlen beszélgetést folytattak egymással, és többen az egy területen működők közül itt találkoztak személyesen először. Megállapíthatjuk, hogy a témakör világviszonylatban kiemelkedő és elismert művelői közül ilyen sokan, egyszerre még nem tartózkodtak hazánkban. A meghívott előadók váratlanul nagy számban fogadták el meghívásunkat. A nemzetközileg ismert résztvevők között volt pl. Mitropolszkij, Conti, Loud, Kurzweil, Mahwin, Salvadori, Kiguradze stb. A megnyitó előadást Szőkefalvi-Nagy Béla tartotta. Örvendetes, hogy 17 magyar kiselőadás hangzott el, és ezeknek az előadóknak nagy része fiatal kutató, aki most első ízben tartott előadást nemzetközi kollokviumon.

A kollokvium szervezése zökkenőmentes volt. A résztvevők egy közös vacsorán és egy autóbuszkiránduláson vettek részt. Meg kell állapítanunk, hogy az Express Utazási Iroda, amely a kirándulást szervezte, igen rossz munkát végzett. Jogos kifogások merültek fel az előfizetéses étkeztetéssel kapcsolatban is. A résztvevők elszállásolása és a Budapest—Szeged, ill. a Szeged—Budapest vonalon való utaztatása azonban simán és problémamentesen történt meg, amelyben nagy szerepe volt a Társulat adminisztrációjának, a szervező bizottság két titkárának és több magyar résztvevőjének, akik saját gépkocsijukkal segédkeztek a külföldiek szállításában.

e) *„Véges algebrák és többértékű logikák" kollokvium*
(Szeged, VIII. 27—31.)

A kollokvium 1979. augusztus 27-től 31-ig zajlott le Szegeden, a Technika Házában (MTESZ székház), 14 országból 106 matematikus résztvevővel (közülük 33 magyar, 48 más szocialista országból, 25 tőkés országból jött; a kísérők száma 11 volt). A kollokviumon 55 előadás hangzott el. A Szovjetunióból 14 résztvevő jött, köztük Sz. V. Jablonszkij akadémikus, aki a szervezőbizottság

tagjaként az előkészítésben is közreműködött. Rajta kívül a kollokvium témájának számos neves külföldi művelője jelent meg, így pl. Bajramov, Burosch, Csimev, Dassow, Froemke, Grätzer, Harnau, Henno, Janov, Knoebel, Krasner, Krnic, Malcev, Martin, Miyakawa, Nozaki, Pixley, Pöschel, Quackenbusch, Strazdins és Werner.

A kollokvium programját a hagyományos füvészkerti szabadtéri problémafelvető ülés, bankett, valamint orgonabemutatóval egybekötött városnézés egészítette ki.

A gyakorlati szervezőmunkát a „helyi szervezőbizottság" végezte (tagjai: Czédli Gábor, Demetrovics János, Gécseg Ferenc, Kenyeres Zsuzsa, Klukovits Lajos, Lenkehegyi Attila, Megyesi László, Pollák György, Szabó László, Szendrei Ágnes, Varga Antal, Csákány Béla).

f) *Differenciálgeometriai kollokvium*
(Budapest, 1979. IX. 3—7.)

A Bolyai János Matematikai Társulat támogatásával differenciálgeometriai kollokviumot rendeztünk Budapesten, 1979. szept. 3-tól szept. 7-ig, a Nemzetközi Számítástechnikai Oktatási és Tájékoztatási Központ (SZÁMOK) épületében (XI., Szakasits Árpád u. 68). A kollokvium szervezőbizottsága az alábbi személyekből tevődött össze: Soós Gyula elnök, Rapcsák András társelnök, Moór Arthur, Szenthe János és Tamássy Lajos tagok, valamint Merza József titkár.

A kollokviumon 19 ország 98 szakembere vett részt, ezenkívül kísérőként érkezett még 15 személy. A résztvevők között volt a differenciálgeometria több, nemzetközileg is kiemelkedő művelője, mint pl. Herbert Busemann (USA), Marcel Berger, Paulette Libermann, Albert Crumeyrolle (Franciaország), Peter Dombrowski (NSZK), V. A. Efremovic és A. M. Vasilev (Szovjetunió). Sajnálattal kellett nélkülöznünk A. D. Alekszandrov noviszibirszki professzor jelenlétét, akinek plenáris előadását programba iktattuk. Ugyanakkor örültünk annak, hogy a hazai, geometriai tárgyú kollokviumok történetében először, a Szovjetunió jelentős, kilenc főből álló, delegációval képviseltette magát.

Három plenáris előadás szerepelt a programban, ezek közül az egyik kétórás, a másik kettő egy-egy órás volt. A többi 70 előadás — diszkusszióval együtt — 25 perces volt. Ezenkívül a szerzők távollétében bemutatásra került még 4 dolgozat. Az előadások témáját nem kötöttük meg, így a differenciálgeometria különböző területeiről hangzottak el ismertetések. A főbb témakörök a következők voltak: fibrációk és konnexiók, Riemann-terek, Finsler-terek, egyéb klasszikus terek, G-struktúrák, Lie-csoportok és algebrák, elméleti fizikai alkalmazások. E kérdéskörök a mai kutatások tárgyát képezik, ezért a kollokvium igen hasznos volt valamennyi résztvevő számára. Az első napon rendezett fogadás, valamint a negyedik nap délutánján megszervezett kirándulás is biztosította az összejövetel baráti légkörét.

A kollokviumon elhangzott előadások színvonaluk és számosságuk tekintetében alkalmasak arra, hogy a Bolyai Társulat kollokviumi kiadványainak sorozatába felvegyük őket. Ilyen irányú előterjesztésünk kedvező visszhangra talált a résztvevők körében, s többen bocsátottak rendelkezésünkre nyomdakész kéziratot.

A SZÁMOK jó szállás- és étkezési lehetőséget biztosított a résztvevőknek. Az előadótermek technikai felszerelése is jó volt, bár időnkint egyes dolgoknak (írótoll az írásvetítőhöz, fólia, kréta) utána kellett járni. A körlevelünkben is megígért pénzváltási lehetőség a legszükségesebb időben nem állt a vendégek rendelkezésére, mivel a szállodai recepció pénze elfogyott.

A résztvevők egyöntetű véleményét fogalmazta meg Busemann és Vasilev professzor, amikor megállapította, hogy a kollokvium sikeres volt, színvonalas szakmai munkát biztosított, jó kollegiális légkörbe folyt le és hozzájárult a differenciálgeometriával foglalkozó hazai szakamberek nemzetközi megbecsültségének megőrzéséhez.

g) *Diákköri Nyári Iskola*
(Pécs, 1979. július 9—16.)

A matematikus diákkör sok éves tapasztalata szerint a nyári iskola eredményessége alapvetően függ a résztvevők számára biztosított körülményektől. A Társulat személyes összeköttetései révén a diákkör számára szállást és teljes ellátást szerzett *július* 9—16 időszakra a *Pécsi Tanárképző Főiskolán*. A rendezvény további, részletekre menő megszervezését a Társulat titkársága dolgozóinak rendszeres segítsége tette gördülékennyé, és így a nyári iskolára jelentkezőket szokatlanul idejében és pontosan lehetett tájékoztatni a helyről és időről. Részint ez okból, másrészt a választott *téma* miatt: *Halmaz- és modellelmélet*, elég sok, 50 *résztvevő* volt.

h) *Fiatal matematikusok Csillag Pál szimpóziuma*
(Balatonlelle, 1979. szeptember 10—14.)

A találkozót idén is (immár negyedik alkalommal) a BME KISZ balatonlellei táborában tartottuk, az időpont azonban a szokásos május végi helyett most szept. 10—14 lett. Ez a terminus sokaknak nem felelt meg (pl. az egyetemi oktatás már megkezdődött ezen a héten), így a jelentkezők közül jó néhányan lemondták a részvételt. Végül is a várt — és az elmúlt évekre jellemző — kb. 130 helyett csak 91-en voltunk.

A találkozón 21 előadás hangzott el az algebra, differenciálegyenletek, funkcionálanalízis, kombinatorika, logika, statisztika, számítástechnika, topológia és valószínűségszámítás területéről. Az előadók és előadásaik címei: Ablonczy Péter: A Turán-tétel általánosításairól, Bíró Balázs: Egy univerzális algebrai probléma, Csupor László: Gépi rajzolás, Füredi Zoltán: Lineáris programozás a kombinatorikában, Gáspár Csaba: Szivárgási problémák numerikus kezelése, Győry György: Petri-hálók és tranzicióhálók, Hablicsek László: Történeti idősorok spektrálanalízise, Harangi László: Általánosított inverz alkalmazása statisztikai becsléseknél, Horváth Márta—Légrády Gábor: Növények érésmenetének vizsgálata, Horváth Ildikó: A Korányi kórházban végzett TBC és pulmonológiai vizsgálat adatainak számítógépes feldolgozása, Kerékfy Pál: Hogyan írjunk könnyen, gyorsan programot, Nagy István: Becslési eljárásokról, Petz Dénes: Neumann-algebrákról, Szeredi János: Programozás matematikai logika segítségével, Szigeti Gábor: A geofizika matematikai feladatairól, és az általánosított Poincaré egyenlőtlenség, Tasnádi Ágnes: Erősen függő valószínűségi változók, Tóth Gábor: Sokaságok kicsomagolása, Tutsek Endre: Cluster-analízis alkalmazása a környezetvédelem problémáiban, Tuza Zsolt: Háromszögek gráfokban, Ury László: Programozás és időlogikák, Zachar Zoltán: Fatranszformátorok ekvivalenciája. Az előadásokat általában kérdések és hozzászólások, időnként élénk vita követte.

13-án hajókirándulást tettünk Badacsonyba, ahol a Hableány étteremben búcsúvacsoráztunk.

A szimpózium elérte célját: a különböző területeken dolgozó fiatal matematikusok megismerkedtek kollégáik munkájával, problémáival; a közeli területeken dolgozók pedig gyakran értékes, munkájukban felhasználható ötleteket kaptak egymástól.

A Bolyai János Matematikai társulat rendezvényei (1979. június 15-től 1980. április 30-ig)

Budapest

Június 18.	Beke Manó Emlékdíj bizottság ülése.
Június 18.	Yu. Suhov (Szovjetunió): Approach to equilibrium in certain models of classical statistical mechanics.
Június 19.	Yu. Suhov (Szovjetunió): Asymptotical results for communication networks.
Június 20.	Statisztikus fizika kollokvium; szervező bizottsági megbeszélés.
Június 20.	L. Devroye (Belgium): Distributionfree consistency results in nonparametric regression function estimation.
Június 21.	Te Sun Han (Japán): Polymatroidal aspect of coding for a network of independent channels.
Június 22.	Választmányi ülés.
Június 24—30.	Statisztikus fizika kollokvium (Esztergom).
Július 2.	A. Jaffe (USA): Constructive field theory for mathematicians.
Július 2.	B. E. Cain (NSZK): A non-technical survey of inertia theory.
Július 2.	V. Pless (USA): The classification of selfdual codes.
Július 3—7.	Rátz László Vándorgyűlés (Nyíregyháza).
Július 9—16.	Diákköri Nyári Iskola (Pécs).
Augusztus 3.	Differenciálegyenletek kollokvium; szervező bizottság ülése.
Augusztus 6.	A matematika mindenkié konferencia; bizottsági ülés.
Augusztus 9.	Megbeszélés az 1980. évi költségvetésről.
Augusztus 12—20.	A matematika mindenkié konferencia (Veszprém).
Augusztus 15.	Állami-díj bizottság ülése.
Augusztus 21.	H. Werner (NSZK): Affin complete algebras.
Augusztus 21.	G. Grätzer (Kanada): Kongruencia-sémák.
Augusztus 24.	G. Grätzer (Kanada): Közös finomítási tulajdonságok hálók amalgamált szorzataira.
Augusztus 26—31.	Differenciálegyenletek kvalitatív elmélete kollokvium (Szeged).
Augusztus 26—31.	Véges algebrák és többértékű logikák kollokvium (Szeged).

Szeptember 3.	D. M. SMIRNOV (Szovjetunió): Algebrák varietásai és kvázivarietásai.
Szeptember 3—7.	Differenciálgeometria kollokvium (Budapest).
Szeptember 7.	D. M. SMIRNOV (Szovjetunió): Matematikaoktatás a Novoszibirszki Egyetem matematika-fizika szakirányú középiskolájában.
Szeptember 7.	E. JUCOVIČ (Csehszlovákia): On weights of edges of 3-polytopes.
Szeptember 10—14.	Csillag Pál Találkozó (Balatonlelle).
Szeptember 12.	Függvények, sorok, operátorok konferencia szervező bizottságának ülése.
Szeptember 13.	SZIGYÁRTÓ ZOLTÁN: Folyamatos eloszlásból származó kis elemszámú munkák illeszkedés-vizsgálata.
Szeptember 20.	D. KARIUS (NSZK): A contribution to forced periodic oscillations with piecewise constant and linear damping.
Szeptember 21.	Kürschák József verseny; bizottsági ülés.
Szeptember 27.	Elnökségi ülés.
Szeptember 28.	Beszámoló a XII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról (az Ifjúsági Mat. Kör ülése).
Szeptember 28.	H. SACHS (NDK): On some results in the theory of graph spectra.
Október 8.	H. DIKRANIAN (Bulgária): Topologikus gyűrűk.
Október 8.	Függvények, sorok, operátorok konferencia szervező bizottságának ülése.
Október 8.	L. ELSNER (NSZK): On some algebraic problems in connection with eigenvalue algorithms.
Október 9.	Kürschák József verseny; bizottsági megbeszélés.
Október 11.	L. ELSNER (NSZK): Recent results for eigenvalue algorithms.
Október 11.	Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága megbeszélése.
Október 16.	Függvények, sorok, operátorok konferencia; bizottsági ülés.
Október 19.	FRANK ANDRÁS: Algoritmusok a kombinatorikában (IMK ülése).
Október 29.	M. CSÖRGŐ (Kanada): Függetlenség vizsgálatok.
November 6.	Grünwald Géza emlékdíj bizottság ülése.
November 6.	GYŐRI ISTVÁN—ELLER JÓZSEF: Retardált argumentumú differenciálegyenletek alkalmazása csöves rendszerek modellezésére.
November 9.	FRANK ANDRÁS: Algoritmusok a kombinatorikában, II. (IMK ülése).
November 10.	Kürschák József Matematikai Tanulóverseny.
November 19.	Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága ülése
November 20.	Grünwald Géza emlékdíj; bizottsági megbeszélés.
November 21.	Jutalmazási bizottság ülése.
November 22.	BUZÁSI KÁROLY: Csoportreprezentációk alkalmazása.
November 22.	A Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákra felkészítő szakkörök vezetőinek megbeszélése.
November 23.	A matematika alkalmazásai szakosztály megbeszélése.
November 23.	H. VAN MAAREN (Hollandia): Decision methods for linear-operator algebras.
November 23.	H. VAN MAAREN (Hollandia): Convexity in non-real vector spaces.
November 28.	Kürschák József verseny; bizottsági ülés.
November 29.	R. LIEDL (Ausztria): A differential geometric method for the solution of the translation equation.
November 30.	HEPPES ALADÁR: A bűvös kocka matematikájáról (IMK ülése).
December 4.	Matematikatanárok versenye; bizottsági ülés.
December 4.	Felsőoktatási bizottság ülése.
December 6.	Y. HIGUCHI (Japán): The abscence of nontranslation invariant Gibbs states in the two-dim. Ising model.
December 7.	Választmányi ülés.
December 10.	W. VOGEL (NDK): Konstruktive Methoden zur mengentheoretischen Darstellung projektiver Varietäten.
December 14.	A Kürschák József Matematikai Emlékverseny eredményhirdetése.
December 14.	1979. évi Grünwald Géza, Farkas Gyula emlékdíjak kiosztása, a Schweitzer Miklós emlékverseny eredményhirdetése.
December 15.	W. VOGEL (NDK): Ein neuer Beweis des Bezantschen Satzes.
December 20.	Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága ülése.
December 20.	Függvények, sorok, operátorok konferencia szervező bizottsági ülése.
December 21.	Matematikatanárok versenye; eredményhirdetés. FEJES TÓTH GÁBOR: Kombinatorikus geometria.
December 29.	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny; bizottsági ülés.

1980

Január 3—4.	IMK téli ankét: SIMONOVITS MIKLÓS: Kombinatorikus problémák. Feladatmegoldások. FREUD RÓBERT: Additív számelméleti problémák. KöMmL feladatmegoldóinak klubdélutánja. KÉRY GERZSON: Hogyan forgassuk a bűvös kockát?
Január 9.	Hírharang szerkesztő bizottságának ülése.
Január 9.	Arany Dániel matematikai tanulóverseny; bizottsági ülés.
Január 10.	Felsőoktatási bizottság ülése.
Január 14.	Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny I. fordulója; dolgozatok megírása.
Január 18.	J. ADÀMEK (Csehszlovákia): Universal realization of behaviours.
Január 16.	Nemparaméteres módszerek a matematikai statisztikában kollokvium; szervező bizottsági ülés.
Január 25.	Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny I. fordulója feladatainak megbeszélése (IMK ülése).
Január 30.	Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága ülése.
Január 30.	Emléktábla avatás Riesz Frigyes születésének 100. évfordulója alkalmából; Emléktábla koszorúzás Fejér Lipót születése 100. évfordulója alkalmából.
Február 1.	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny.
Február 1.	Hírharang szerkesztő bizottságának ülése.
Február 8.	Emlékest Fejér Lipót és Riesz Frigyes születésének 100. évfordulója alkalmából; Előadást tartott: CSÁSZÁR ÁKOS.
Február 11.	G. A. GRÄTZER (Kanada): Products of varieties.
Február 15.	HOFFMANN GYÖRGY: Rácsgeometriai problémák (IMK ülése).
Február 19.	H. SPOHN (NSZK): Long time tail of the velocity autocorrelation function in stochastic model.
Február 20.	H. SPOHN (NSZK): Fluctuations in the low density (Boltzmann—Grad) limit.
Február 29.	Könyvbizottság ülése.
Március 6.	Elnökségi ülés.
Március 6.	Hírharang szerkesztő bizottsága ülése.
Március 7.	Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága ülése.
Március 7.	VINCZE ISTVÁN: Valószínűségszámítás, matematikai statisztika és alkalmazások (IMK ülése).
Március 12.	VI. Magyar Kombinatorika Kollokvium; szervező bizottsági ülés.
Március 26.	Emlékülés Péter Rózsa és Kalmár László születésének 75. évfordulója alkalmából.
Március 28.	Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntője feladatainak megbeszélése (IMK ülése).
Március 31.	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny; bizottsági ülés.
Március 31—április 2.	Emlékülés Rényi Alfréd halálának 10. évfordulója alkalmából. ERDŐS PÁL: Rényivel való együttműködésem és emlékeim. ALPÁR LÁSZLÓ: Rényi, mint tudományos vezető. VINCZE ISTVÁN: Emlékezés Rényi Alfrédra. Részletek a dialógusokból. TANDORI KÁROLY: Korrelálatlan valószínűségi változókra vonatkozó maximál-egyenlőtlenségek. GYIRES BÉLA: Marcinkiewicz tételének általánosításáról és ennek alkalmazásáról. MOGYORÓDI JÓZSEF: Rényi Alfréd; keverés, stabilitás. RÉVÉSZ PÁL előadása. SZÁSZ DOMOKOS: Megjegyzések a Poisson-folyamatról. R. AHLSWEDE (NSZK): előadása. CSISZÁR IMRE: Kombinatorikus módszerek az információelméletben. KOMLÓS JÁNOS—SZEMERÉDI ENDRE: Véletlen gráfokról. KATONA GYULA: Kombinatorikus keresési problémák. PRÉKOPA ANDRÁS: Statisztika és sztochasztikus programozás. HALÁSZ GÁBOR: A ξ és L-függvények gyökeloszlásáról.
Április 1.	D. EISENBUD (NSZK): Zeroes of polynomials.
Április 3.	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny Bizottsága ülése.
Április 8.	Oktatási Bizottság ülése.
Április 10.	Csillag Pál Találkozó szervező bizottságának ülése.
Április 11.	E. COHORS-FRESENBORG (NSZK): Automaták és algoritmusok tanítása 10—18 éves korig.
Április 14-15-17.	F. K. ROTH (Anglia): Irregularities of distribution and related questions, I—II—III.

Április 15.	Olimpiai előkészítő: „Amerikai verseny".
Április 19.	Beke Manó emlékkövének avatása.
Április 22.	Tudományos Szakosztály Operatív Bizottságának ülése.
Április 23.	Számelméleti konferencia; szervező bizottsági ülés.
Április 24.	Felsőoktatási bizottsági ülés.
Április 25.	Az „Amerikai verseny" feladatainak megbeszélése (IMK ülése).
Április 25.	NÉMETHY ISTVÁN: Algebrai szemantikai kutatásokról egy északamerikai tanulmányút kapcsán.
Április 25.	Nemzetközi Kapcsolatok Bizottsága ülése.
Április 25.	RECSI ANDRÁS: Egy év a Felkelő Nap Országában egy matematikus szemével.
Április 25.	Könyvbizottság ülése.
Április 29.	Függvények, sorok, operátorok konferencia; bizottsági ülés.

A Bolyai János Matematikai Társulat vidéki tagozatainak rendezvényei 1978. november 15-ig

Baranya megyei Tagozat

Február 23.	FRAUNHOLCZ MIHÁLY: Tájékoztatás a szakközépiskolai 1. osztályos matematikai tantervvel kapcsolatban.
Március 16.	PÁLMAY LÓRÁNT: A matematikatanítás időszerű problémái.
Március 30.	REIMAN ISTVÁN: A felvételi vizsgák tapasztalatai.
Április 18.	CSÁSZÁR ÁKOS: A Baire-féle kategóriatétel.
Április 21.	TORNYOS TIVADAR: Írásbeli felvételi vizsgát előkészítő foglalkozás.
Augusztus 28.	KONCZ ISTVÁNNÉ: Tanévelőkészítő szakmai tanácskozás.
Augusztus 30.	FRAUNHOLCZ MIHÁLY: Tanéveleji matematikai szakmai tanácskozás, tájékoztatás az érettségi és felvételi rendszer várható változásáról.
Október 31.	HETYEI GÁBOR—SELÉNYI GÉZA: A szovjet matematikaoktatás hat évtizede (előadás főiskolai hallgatók részére). FRAUNHOLCZ MIHÁLY: A szakközépiskolák 2. osztályos matematikai tanterve (továbbképzés).

Bács-Kiskun megyei Tagozat

Január 27.	Beszámoló a lengyelországi tanulmányútról (Hadi István, GAMF).
Február 24.	Az 1977—78. tanévi Bács-Kiskun megyei matematikai versenyről (Kalmár Sándor, GAMF).
Március 31.	A középiskolai előkészítő tanfolyamokról (Balázs Mátyásné, BJG).
Október 6.	A megyei matematika verseny előkészítéséről (Hadi István, GAMF).

Csongrád megyei Tagozat

Január 13.	SONNEVEND GYÖRGY Bp.: Optimális adaptív approximációkról.
Január 17.	BÁRÁNY IMRE Bp.: Borsuk tételéről.
Január 17.	LEE SIN-MIN (Singapur): Simple extensions of groupoids.
Február 1.	CZÉDLI GÁBOR: Lokális kongruencia-varietások.
Február 2.	KLINCSIK MIHÁLY: Instabilitási tételek végtelen dimenziós terekben felírt differenciálegyenletekre.
Február 3.	GEHÉR LÁSZLÓ: A Weyl-féle felcserélési relációról.
Február 8.	CSÁKÁNY BÉLA: Homogén algebrák.
Február 10.	DURSZT ENDRE: Megjegyzések a dilatációelmélethez, Mlak néhány eredménye.
Február 15.	SZENDREI ÁGNES: Erősen felcserélhető műveletrendszerek.
Február 16.	TERJÉKI JÓZSEF: Funkcionáldifferenciálegyenletek megoldásai limeszének létezéséről.
Február 17.	SZŰCS JÓZSEF: Joshiro próbálkozásai az invariáns altér-problémával.
Február 22.	SLEZÁK BERNÁT (Veszprém): Algebrai *Ga*-nyalábok és indukált reprezentációk.
Február 22.	RECSKI ANDRÁS Bp.: Elektromos hálózatok optimalizálása.
Február 24.	KÉRCHY LÁSZLÓ: Herrero egy cikkéről (Kvázi hasonlóság nem őrzi meg a hiperinvariáns alterek hálóját).

Március 3. NÉMETH JÓZSEF: Beágyazási tételekről.
Március 8. FRIED ERVIN Bp.: Absztrakt relációs struktúrák I.
Március 8. WIEGANDT RICHÁRD Bp.: Absztrakt relációs struktúrák II.
Március 10. SZŐKEVALVI-NAGY BÉLA: Pozitív definit függvények csillag félcsoportokon.
Március 10. TOTIK VILMOS: Erős approximáció.
Március 17. MÓRICZ FERENC: Uljanov eredményei Haar-sorok abszolút konvergenciájára.
Március 17. DURSZT ENDRE: A. T. Dash „Compact restrictions of severe operators" c. kéziratának ismertetése.
Március 27. HATVANI LÁSZLÓ: Differenciálegyenletek megoldásainak folytathatóságáról Ljapunov második módszerével.
Április 13. KLINCSIK MIHÁLY: Stabilitási vizsgálatok a második generális mutatóval.
Április 21. NAGY BÉLA Bp.: S-spektrális operátorok.
Április 28. SZŰCS JÓZSEF: A Radon—Nikodym-tétel Neumann-algebrákban.
Május 3. GEHÉR LÁSZLÓ: Poliéderek átdarabolása.
Május 5. SEBESTYÉN ZOLTÁN Bp.: Pozitív definitség C-algebrákban.
Május 5. TOTIK VILMOS: Erős approximáció III.
Május 11. GYŐRI ISTVÁN (SZOTE): Svec egy tételének általánosítása.
Május 26. MATOLCSI TAMÁS Bp.: Projekció-hálókról.
Május 31. HATVANI LÁSZLÓ: Stabilitási tételek két Ljapunov-függvények.
Június 1. G. MATTHIESSEN (Bremen): Heterogeneous algebras.
Június 2. SZŰCS JÓZSEF: Integráloperátorokról.
Június 3. V. KOLJADA (Odessza): Integrálható függvények lényeges folytonosságai.
Június 3. TURÁN GYÖRGY: Véletlen algoritmusok.
Június 7. KIYOSHI ISÉKI (Kobe): BCK-algebras.
Június 9. SZŰCS JÓZSEF: Sourour egy cikkéről.
Június 14. POLLÁK GYÖRGY: Fedések varietás hálókban.
Június 21. ALAN DAY (Thunder Bay): On a theorem of C. Pitzer.
Június 28. CZÉDLI GÁBOR: Gyűrűk hálóazonosságokkal jellemezhető tulajdonságai.
Július 6. H. KAISER (Bécs): Pattern functions and interpolation.
Július 28. R. FREESE (Honolulu): Amoduláris hálók varietásáról.
Szeptember 13. L. N. SEVRIN (Szovjetunió): Periodikus félcsoportokról.
Szeptember 14. R. WILLE (NSZK): Hálóelmélet.
Szeptember 14. A. T. LEONTYEV (Moszkva): Általánosított egyenletmegoldási problémák.
Szeptember 14. K. I. OSKOLKOV (Moszkva): Majdnem mindenütt való approximáció.
Szeptember 14. Sz. A. TELJAKOVSZKIJ (Moszkva): Lakunáris trigonometrikus sorok integrálhatósága.
Szeptember 22. SZŰCS JÓZSEF: A Banach-féle kontrakciós tétel általánosítása.
Szeptember 27. G. EIGENTHALER (Bécs): On polynomial permutations.
On direct products of algebras of polynomial functions.
Szeptember 29. BARA TAMÁS: Az eltolás és adjungáltjának invariáns altereiről.
Szeptember 29. NAGY PÉTER: Kombinatorikai feladatok dinamikus programozási megoldásai.
Október 6. SZ. B. SZTECKIN (Moszkva): Approximációelméleti kérdésekről.
Október 6. KROÓ ANDRÁS (Budapest): A legjobb megközelítés operátorának folytonossága.
Október 6. DURSZT ENDRE: Operátor-egyenlőtlenségek.
Október 10. PHAM NGOC ANH (Vietnam): Lineárisan kompakt gyűrűk.
Október 11. KURT NEUMANN (Halle): Semilattice-congruences of universal algebras.
Október 13. JOÓ ISTVÁN (Budapest): Az egydimenziós Schrödinger-operátorra vonatkozó spektrális vizsgálatok V. A. Iljin módszerével.
Október 18. SZABÓ LÁSZLÓ—SZENDREI ÁGNES: Háromszorosan tranzitív automorfizmuscsoportú algebrák.
Október 20. DURSZT ENDRE: Operátoros egyenlőtlenségek.
Október 25. SZENDREI MÁRIA: Csoportok unióinak idempotens reduktjai.
Október 26. T. I. OKHOBADZE (Tbiliszi): Some classes of functions and trigonometric Fourier series.
Október 27. DURSZT ENDRE: Operátorok monoton függvényei.
November 1. TERJÉKI JÓZSEF: Hadock és Bernfeld egy sejtésének igazolása.
November 3. DR. STRATILA—DR. VOICULESCU (Bukarest): 1. $U(\infty)$ csoport előállításai, 2. Nyomosztály-operátorok perturbációi.
November 8. SZABÓ LÁSZLÓ: A bicentrálisan zárt klónok hálójáról.
November 15. K. GLAZEK (Wroclaw): Independence in universal algebra.
November 17. DURSZT ENDRE: Löwner tétele monoton operátor függvényekről.

Fejér megyei Tagozat

Február 8. KORÁNYI ERZSÉBET: Ismétlés a gimnázium IV. osztályában (a Módszertani csoport ülése).
Február 27. CZAPÁRY ENDRE—DR. KORÁNYI ERZSÉBET: Új tantervek és új tankönyvek a középiskolában (továbbképzés tanárok számára).
Március 1. Fejér, Pest és Veszprém megyei középiskolások matematikai versenye.
Március 1. A Fejér megyei középiskolások matematikai versenyének döntője.
Március 17. CSIRMAZ LÁSZLÓ: Axiómarendszerek és bizonyítási problémák.
Május 10. PELLER JÓZSEF: Tapasztalatok összegzése (A Módszertani csoport ülése).
Augusztus 31. SZÉNÁSY MIHÁLY: Eredményeink és feladataink.
Október 9. PELLER JÓZSEF: A halmazok tanítása (A Módszertani csoport ülése).
Október 25. PÁLMAY LÓRÁNT: A geometriai transzformációk (továbbképzési nap).
LASZTÓCZI GYULA: A függvényfogalom (továbbképzési nap).
November 4. PELLER JÓZSEF: A függvények tanítása (A Módszertani csoport ülése).
November 29. REDLING ELEMÉR: A geometriai transzformációk tanítása (A Módszertani csoport ülése).
December 13. Fejér megyei középiskolások matematikai versenyének első fordulója.
Ifjú matematikusok Köre foglalkozásai:
PÁLFY PÉTER PÁL: jan. 10., jan. 24., febr. 7., febr. 21., márc. 7., márc. 21., ápr. 18., máj. 2., máj. 30.
HÚSVÉTI TAMÁS: okt. 3., okt. 17., okt. 31., nov. 14., tervbe véve: nov. 28., dec. 12.
Olimpiai előkészítő foglalkozások:
LÁNG HUGÓ: I. 3., I. 17., I. 31., II. 14., II. 28., III. 14., III. 28., IV. 11., IV. 25., V. 9., V. 23., VI. 6., IX. 12., IX. 26., X. 10., X. 24., tervbe véve: XI. 21., XII. 5., XII. 19.

Nógrád megyei Tagozat

Január 19. A sík és térgeometria párhuzamos tanításának módszerei. Előadó: SZABÓ LAJOS.
Január 19. A szakközépiskolai új tanterv. Előadó: ANTAL GÁBOR.
Az új szakközépiskolai tankönyv, feladatlapok. Előadó: CZAPÁRI ENDRE.
Március 3. Egyenlőtlenségek algebrai és grafikus megoldása. Előadó: KOVALCSIK ANDRÁS.
Március 3. Tanulók felkészítése felsőfokú továbbtanulásra. (Bemutató foglalkozás, tanári konzultáció.) Előadó: SCHARNITZKY VIKTOR.
Október 5. Középiskolai feladatmegoldó délután. Előadó: CSIRMAZ LÁSZLÓ.
Október 5. Gráfok algebrai szemmel. Előadó: FRIED ERVIN.
Október 5. Egyetemi felvételi írásbeli tapasztalatairól. Előadó: PETRUSKA GYÖRGY.

Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat

Február 17. FILEP LÁSZLÓ: Farkas Gyula élete és munkássága.
Március 14. JÉKEL PÁL: A számítógépek nem mat. alkalmazásai.
Április 6. HAJDÚ SÁNDOR: Feleletválasztásos feladatok.
Április 20. TAMÁSSY LAJOS: A diff. geom. egyes kérdései.
Május 18. GYIRES BÉLA: A kombinatórika alkalmazása a mat. statisztikában.
Június 15. PELLER JÓZSEF: Véleménycsere a mat. oktatás fejlesztéséről.
Szeptember 29. ERDŐS PÁL: A kombinatorika szerepe az elemi geometriában.
Október 24. CZEGLÉDY ISTVÁN: Eredményközpontúság a mat. tanításában.
November 8. BEREZNAI GYULA: A binomiális tétel.

KÖNYVISMERTETÉS

LOVÁSZ LÁSZLÓ: COMBINATORIAL PROBLEMS AND EXCERCISES, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979, (551 oldal).

Ismertetőm Lovász könyvéről harmadik a magyar lapokban: Pach János nem matematikusoknak írt egy rövidebb ismertetőt a Magyar Tudomány 4/1980 számában, T. Sós Vera pedig matematikusoknak az Acta Sci. Math., Szeged (19..)-ben.

A könyv kitűnő, érdemi értékelését azonban formai ismertetőm utánra halasztom. Éppen mivel a könyv kitűnő, döntöttem úgy, hogy az átlagos terjedelmet jóval meghaladó ismertetőt írok róla.

Mielőtt a könyv ismertetésébe kezdenék, érdemes néhány szót szólnom magáról a kombinatorikáról és gráfelméletről. A matematika azon ága, melyet „kombinatorika és gráfelméletnek" nevezünk, bár vannak régebbi gyökerei is, valójában a legutóbbi évtizedekben fejlődött ki, esett át egy viharos fejlődésen. Ennek eredményeképpen egyes régebbi izolált tételek és problémák köré egész elméletek varázslódtak, teljesen új típusú kérdések bukkantak fel és váltak ugyancsak gazdag elméletek forrásává. Egyebek között a klasszikus valószínűségszámítás is egyik őse a leszámlálásoknak, mégis ma már lényegesen kiszélesedett az a téma, amit leszámlálások elméletének mondhatunk. Ugyanekkor ma már beszélünk általában véletlen struktúrákról, speciálisan véletlen gráfokról, véletlen kódokról, véletlen csoportokról stb. és ezek elmélete mind szoros kapcsolatban van a leszámlálásokkal. Ugyancsak „öreg" probléma a négyszín-sejtés és részben ezzel kapcsolatban alakult ki a véges és végtelen gráfok és hipergráfok színezésének elmélete, de ma már messze túlnőtt rajta. Magába foglalja például a Ramsey neves tételéből kifejlődött Ramsey elméletet. A H. Whitney 1936-ból származó eredményei nyomán alakult ki a ma már igen jelentős matroidelmélet. Turán 1940-ből származó gráftétele nyomán alakult ki az extremális gráfok elmélete. A statisztikában oly fontos blokkrendszerek egyik alapproblémája Eulertől származik, maga az elmélet az utolsó két évtizedben indult rohamos fejlődésnek. Ugyanez áll a hipergráfok elméletére is. A kombinatorika nemegy ágára igen termékenyítően hatottak a számítógépekkel kapcsolatban felmerülő problémák, Részben ezért hódított teret az algoritmus-centrikus szemlélet is. Ennek kapcsán alakult ki a „gyors és lassú algoritmusok" (NPC) elmélete is. Fejlődésben levő ág a hálózati folyamatok elmélete is, bár ennek felfutása egy korábbi periódusra tehető. Fontos megemlíteni az egységes elméletek kialakulását kombinatorikán belül (szemben a korábbi elszigetelt tételekkel), továbbá azt, hogy számos más tudományággal való kapcsolat világosodott meg (határterületek fejlődtek ki), és végül azt, hogy nemcsak más matematikai tudományágak (algebra, ezen belül mátrixelmélet, csoportelmélet stb., analízis, valószínűségszámítás, geometria (véges geometria) módszerei nyertek alkalmazást a kombinatorikában, de ugyanakkor a kombinatorikus módszerek és szemlélet is növekvő szerephez jutott számos más tudományágban. A kombinatorika ma tehát egy igen elevenen fejlődő tudományág.

Az utóbbi években egyre több és több könyv jelenik meg kombinatorikából. Ezek között számos igen jó akad. Lovász könyve abban különbözik azonban az eddig megjelent monográfiáktól, hogy, mint analízisben például a világhírű Pólya—Szegő könyv, középiskolás matematikából például a Jaglom—Skljárszkij—Csencov sorozat, az anyag elsajátítását feladatsorok végigoldásán keresztül teszi lehetővé. Az utóbbi években persze egyre több olyan monográfia jelent meg, melyek minden fejezet végén egy feladatsorozatot is közölnek. A magyar olvasók számára talán Rényi valószínűségszámítási tankönyvét, vagy Halmos mértékelméleti könyvét említeném meg. Lovász (vagy akár Pólya—Szegő, ...) könyve azonban minőségileg különbözik ezektől: a hangsúly egyértelműen a feladatmegoldásra tevődik át.

A könyv céljáról Lovász a következőket írja: (fordítás tőlem): „A könyv fő célja: segíteni a meglevő kombinatorikai bizonyítástechnikák elsajátításában. Erre a legjobb (bár elismerten igen időigényes) jólválasztott gyakorlat- és feladatsorok ‚sorba-megoldása'. Könyvemben a ‚tananyag' teljesen problémákra, illetve problémasorokra van bontva. Kivétel a minden fejezet elején megtalálható bevezető szöveg (általában megjegyzések). Remélem, hogy a könyv hasznos lesz

mindazon hallgatók számára, akik a gráfelmélet, kombinatorika, és ezek alkalmazási területén szeretnének kutatásba kezdeni, és azok számára is, akik úgy érzik, hogy a kombinatorikai technikák ismerete segítheti munkájukat a matematika más ágaiban, szervezéstudományban, elektromos hálózatok analízisében stb. A könyv használatához csak a lineáris algebra, csoportelmélet, valószínűségszámítás és analízis elemei szükségesek."

A könyv ismertetését formai oldalról kezdem. A tárgyalt anyagrész 15 fejezetre van felbontva, mindegyik fejezet előtt egy körülbelül féloldalas bevezetővel, mely a tekintett problémakör fő kérdéseit és a kombinatorikában való helyét világítja meg igen tömören. Rövidségük ellenére is ezek a kommentárok a könyv igen értékes részét alkotják.

A fejezetek témakörök szerint kisebb egységekre vannak bontva, és ezen túlmenően az egész könyv három „keresztbemenő" részre van szétvágva: a könyv első 80 oldalán találjuk a feladatokat, a következő körülbelül 50 oldal hosszabb-rövidebb útmutatók jegyzéke. Illusztrációnak megemlítünk négy ilyen félsoros útmutatót:

„Alkalmazzuk az előző feladat eredményét".

„Használjunk a 6.25 feladat megoldásához hasonló okoskodást".

„A lényeg az, hogy K_4 maximális foka 3."

„Alkalmazzunk indukciót x elhagyásával."

Ha valaki tehát nem tudja megoldani az adott (némelykor igen nehéz) feladatot, nem kell teljesen feladnia: fellapozhatja az ilyen típusú „alapötlet"-jegyzéket, és még mindig igen sokat tanulhat a feladat ennek alapján való megoldásával.

A maradék majnem 400 oldal tartalmazza a megoldásokat és az irodalmat. Lévén, hogy a könyv legtöbb feladata vagy feladatsora komoly szerzők komoly eredményeit dolgozza fel, az irodalom megadása elengedhetetlen. Az eredeti cikkre hivatkozás helyett Lovász gyakran azt a helyet idézi, ahonnan a dolgok jelenlegi állása a legjobban megtudható. Ahol senkit sem idéz, az többnyire Lovász eredmény, mely nemegyszer itt lát először napvilágot. Ennyit a könyv formai ismertetésére, és most rátérek a tartalmára. Ennek semmi esetre sem a legszellemesebb és legeredetibb, de talán a leginformatívabb módja az, ha a tartalomjegyzék alapján megyek végig a könyvön.

Az első négy fejezet alkotja az első nagyobb tartalmi egységet: a *leszámolással* foglalkozik. Az első fejezetben, melynek címe *alapvető leszámolások*, találhatóak a halmazok és számok partíciója, rekurziók, generátor függvények, kombinatorikai azonosságok. Illusztrálásként megemlítem a 9. feladatot, mely a Bell-számokra, azaz egy n-elemű halmaz partícióinak számára ad egy pontos formulát végtelen sor alakjában és egy áttekinthető alakú aszimptotikát. Egy másik feladat: hányféleképp mehetünk fel egy n hosszúságú lépcsőn, ha mindig egy vagy két lépcsőt lépünk? Határozzuk meg a generátorfüggvényt.

A 2. fejezetben találjuk a *szitákat*. Ezek jelentőségét jól ismerjük számelméletből. Ezek fontossága számelméletben közismert, a prímszámok elméletében alapvető szerepet játszanak a különböző szitabecslések. Lovász L. egy, a Mat. Lapokban megjelent cikkében (23. (972), 1—2 sz. 53—69), igen szerteágazó egyéb alkalmazásokat is leírt, közöttük több kombinatorikai jellegűt is. Részletezve: itt vannak a szitaformulákra vonatkozó alapvető tudnivalók, közöttük a Brun és Selberg szita, a Lovász-szita (melynek újabb időkben több kombinatorikai alkalmazását is láttuk). A Rényi-féle „redukciós elv", több feladat a Möbius-függvényre, és inverziós formulára, melynek fontosságát számelméletben mindenki ismeri, és mely a kombinatorikában egy általánosabb alakban hálókon, vagy általános részben rendezett halmazokon bukkan fel. Kiemelném ezt a fejezetet az első részből. Az első rész két utolsó fejezete: Permutációk, ill. Két klasszikus leszámolási probléma. Az utóbbi két probléma: fák leszámolása különböző esetekben, továbbá l-faktorok leszámolása és az Ising probléma. (Az Ising probléma egy érdekes alkalmazása a kombinatorikának statisztikus fizikában.)

Az 5. fejezet „egymáshoz lazán kapcsolódó olyan problémák gyűjteménye, melyekben paritási vagy dualitási meggondolások a döntőek". A paritásra igen jó példa az Euler-út problémája, vagy akár a topológiában igen fontos Sperner-lemma.

Az első négy fejezet összefogásához hasonlóan természetes összefogni a következő két fejezetet is: az összefüggőséget, illetve a gráfok faktorai című fejezetet. Ezek külön külön is igen fontos és központi helyet foglalnak el a gráfelméletben és egymással is szoros kapcsolatban vannak. A szoros kapcsolatot illusztrálja például, hogy a König-tétel egyrészt az egyik legfontosabb összefüggőségi tétel, a Menger-tétel speciális esete és kulcspontja, másrészt egy tipikus l-faktor tétel.

Ebben az alegységben, azaz az összefüggőséggel és a faktorizációval foglalkozó fejezetekben megtalálhatóak az idevágó alaptételek, feladatok, ill. feladatsorok formájában feldolgozva. A 6. fejezetben kiemelném természetesen a Menger-tételt, különböző alakjaiban, a Ford—Fulkerson-tételt, annak algoritmizált formáját sebesség-becsléssel, és a még korábban szereplő Kruskál-algoritmust. Ezenfelül számtalan önmagában is érdekes feladat található még a 6. fejezetben, melyek a témakörben használatos technikák és az árnyaltabb szemlélet elsajátítására kiválóan alkalmasak. A 7. fejezetből először a Lovász által megjelölt legfontosabb témákat, a König-tételt, Tutte tételét (mely tetszőleges gráfra ad egyszerű szükséges és elégséges feltételt l-faktor létezésére), továbbá a faktorok szerkezetére, illetve a fokszámsorozatok leírására vonatkozó eredményeket

emelném ki. Emellett feltétlenül kiemelendő a gyakorlati alkalmazásban is fontos Magyar Módszer, a kerek és szép Petersen-tétel, és a Tutte tételéhez kapcsolódó elméleti szempontból fontos Edmonds-algoritmus.

A 8. fejezet címe: Független pontok. Egy gráf független pontjai maximális számára vonatkozó tételek igen fontosak, az idevonatkozó gyors algoritmus keresése, illetve annak lehetetlenségét bizonyítani ma elsőrendű kutatási feladat a kombinatorikusok egy jelentős csapata számára. Ehhez kapcsolódik a τ-kritikus gráfok strukturális jellemzésének problémája is. Egy gráfot akkor nevezünk τ-kritikusnak, ha a független pontok maximális száma bármely él elhagyására megnő. A fejezet egyik fő célja az ilyen gráfok leírása.

A következő, 9. fejezet a kromatikus szám címet viseli. Aki csak egy kicsit is foglalkozott gráfelmélettel, tudja, hogy az egyik legfontosabb jellemzője egy G gráfnak éppen a kromatikus száma. Sokak (közöttük Lovász) szerint is ennek egyik oka a 4-szín-sejtés „izgalmassága". Ezzel én vitába szállnék: elképzelhetőnek tartom, hogy történetileg a kromatikus szám centrumba kerülésében döntő szerepet játszott a kutatók jelentős részét vonzó vagy bosszantó négyszín-sejtés, de véleményem szerint a kromatikus szám igen hamar kezdett önálló életbe, és ma egy cseppet sem kevésbé érdekes számomra, mint korábban, mikor a négyszín-sejtés még megoldatlan volt.

Természetesen, abban ahogy a fenti fejezetekből egy-egy tételt kiemeltem, szerepet játszott egyrészt szubjektív véleményem (ízlésem), másrészt az is, hogy be akartam mutatni, hogy az alaptételek legtöbbje megtalálható a könyvben. Az alábbi két fejezetben még valószínűbb, hogy szubjektív leszek. Kiemelném a 8. feladatot, anélkül, hogy megfogalmaznám, Brooks-tételét, a de Bruijn—Erdős-tételt (eredeti, kompaktsági és az elemibb, Pósa-féle bizonyítással), a 17. feladatbeli Dirac- és Toft-féle konstrukciót cn^2 élű kromatikus-kritikus gráfokra, a perfekt gráfokra vonatkozó eredményeket, a kromatikus polinomokra vonatkozó feladatokat. Kár, hogy a magas kromatikus számú, alacsony derékbőségű (=girth) gráfok tárgyalása kimaradt, feltehetőleg részben azért, mert a véletlen struktúrák kimaradtak, részben, mert az idevágó híres Lovász-konstrukció túl bonyolult lett volna tárgyalásra. Talán az utóbbi időkben született Nesetril—Rödl-konstrukció egy későbbi kiadásban helyet kaphatna. A 27. feladat kapcsán szívesen látnám egy későbbi kiadásban a Knésergráfot, pontosabban, a rá vonatkozó sejtés megoldását.

A 10. fejezet címe: Extrém gráf problémák. A témakör abban is eltér a többi itt szereplőtől, hogy igen sok magyar eredmény született benne. A fejezet durván a következő részekre bontható. Topologikus vagy topologikus-szerű részgráfok biztosítása él és fokszámfeltételekkel. r-reguláris adott derékbőségű minimális gráfok és az ehhez kapcsolódó Erdős—Pósa típusú tételek (kevés független körű gráfokra), Erdős—Gallai-út típusú, Dirac—Pósa-féle Hamilton-kör típusú extrém tételek. Turán típusú extrém tételek és az idevágó általános elmélet. Túltelített gráfok. Tournamentek.

A 11. és 12. fejezet a gráfok két alapvető algebrai tulajdonságát vizsgálja: a 12. fejezet az automorfizmus csoportot, a 11. fejezet a gráfok spektrumát.

A gráfok spektrumának kiszámítása egy természetes ötlet, ha a gráfra valamilyen erős regularitási feltételünk van, amelyből az incidenciamátrixára egy egyenletet írhatunk fel, majd ebből a spektrumra következtethetünk. Ilyenek voltak a kezdeti spektrumos tételek, alkalmazások. A következő periódusra jellemző, hogy már tetszőleges gráfok spektrumát vizsgálja, vagy legalábbis, a legkülönbözőbb gráfosztályok egyedei spektrumát, és abból próbál következtetni a gráf struktúrájára. Ahogy Lovász megfogalmazza: ahhoz, hogy a spektrumot gráfelméletileg hasznosíthassuk, két nehézséget kell leküzdenünk: (a) ki kell tudnunk számítani bő gráfosztályok elemeire a spektrumot, (b) következtetni kell tudnunk belőlük a gráfok tulajdonságaira. Véleményem szerint most ezen második periódus elején vagyunk, és a fő problémát az jelenti, hogy a gráfok spektrumából a szerkezetükre következtessünk. A fejezet (a) és (b) típusú feladatot is bőven tartalmaz, itt megemlítenék a (b) típusúakból néhányat: (11) Ha 0 nem sajátértéke a páros gráfnak, akkor van benne l-faktor. (23) Egy összefüggő gráf különböző sajátértékeinek száma nagyobb a gráf átmérőjénél.

Kiemelném még a 6. feladatot is: Keresendő végtelen sok nemizomorf kospektrális fa-pár: olyan T_1 és T_2 nem izomorf fa, melyek spektruma ugyanaz.

A feladat márcsak azért is megérdemli a kiemelést, mert ellenpélda egy neves sejtésre: fákat a spektrumuk izomorfia erejéig meghatározza.

A 12. fejezet, mint már említettem, elsősorban gráfok automorfizmus csoportjaival foglalkozik, (másodsorban endomorfizmus csoportokkal is). A témakör kezdőtételeként Frucht tételét említeném, (5. feladat), mely szerint minden A csoporthoz van olyan G gráf, melynek automorfizmus csoportja éppen ez az A. Ehhez kapcsolódik Babai egy igen szép tétele (6. feladat), mely szerint ez a gráf választható olyan (egyszerű) gráfnak is, melynek pontszáma legfeljebb a csoport rendjének kétszerese. Ugyancsak szépsége miatt kiemelném Babai egy másik tételét is (pontosabban, annak az itt szereplő speciális esetét! 11. feladat,) mely szerint két előre megagott csoporthoz, A_1-hez és A_2-höz mindig van olyan G gráf és e éle, hogy G-nek A_1, $G-e$-nek viszont A_2 az automorfizmus-csoportja. A fejezet második részében egy sor olyan feladatot találtunk, ahol az automorfizmus csoport csoportelméleti tulajdonságaiból, például abból, hogy tranzitívan hat a pontokon, vagy

az éleken, következtetünk a gráf gráfelméleti tulajdonságaira, például összefüggőségi számaira. Végül endomorfizmus problémák következnek.

A 13. fejezet címe: Hipergráfok. Ebbe a címbe igen sok minden belefér. Találkozunk itt a transzverzális elmélettel foglalkozó feladatokkal, közöttük például a Hall-tétellel, melyet más formában már a faktoros problémák között is megtaláltuk. Megtaláljuk a halmazrendszeres problémák talán két legalapvetőbbjét: az Erdős—Ko—Radó-tételt, és a Sperner-tételt, a statisztikus Fischer által felfedezett híres egyenlőtlenséget (halmazrendszerekre, és még sok más hasonló, ezekhez kapcsolódó eredményt. Szép Dilworthnak az a tétele, (22. feladat), mely szerint egy tetszőleges parciálisan rendezett halmaz tartalmaz olyan maximális (elemszámú) antiláncot is, mely a PRH automorfizmusaira invariáns. A fejezet ezután következő részéből számtalan Lovász eredményt emelnék ki. A rövidség kedvéért csak a 30. feladatot említem, mely a lefogó pontrendszer és a törtlefogó rendszer minimális mérete között állapít meg egy érdekes összefüggést, a 32. feladat 2. felét, mely a τ-kritikus r-uniform gráfok maximális élszámát adja meg, (itt az első rész is egy érdekes Bollobás—Katona-eredmény), és végül, sokkal-sokkal későbbről, sok érdekes feladatot átugorva Lovász egyik leghíresebb tételét, a Perfekt gráf sejtés bizonyítását. (57. feladat.)

A 14. fejezet a Ramsey-elmélettel foglalkozik. Megtalálható benne az Erdős—Szekeres-becslés, a hipergráfokra vonatkozó Ramsey-tétel, a Hamilton-utakra vonatkozó (pszeudo-) Ramsey-tétel (4. feladat), a neves Gerencsér—Gyárfás-tétel egyenlő hosszúságú utakra (5. feladat), mely a Ramsey-elmélet egy jelentős ágának indító tétele, tételek az ún. euklideszi Ramsey-elméletből, ahol például az n dimenziós euklideszi teret k színnel színezzük és bizonyos monokromatikus alakzatokat keresünk, számelméleti alkalmazások, melyek közül a van der Waerden-tételt említem, továbbá néhány geometriai alkalmazást.

Az utolsó, 15. fejezet gráfok rekonstrukciójával foglalkozik. Itt található például az élgráf és a gráf közötti determináltságra vonatkozó tétel, az Erdős—Goodman—Pósa-tétel, a híres Ulam-sejtés bizonyos gyengítései, de persze, éppen, mert a gráfok rekonstrukciójára vonatkozó legfontosabb állítás: Ulam sejtése, mely szerint minden gráf rekonstruálható, ha ismerjük azokat a részgráfokat, melyeket 1-1 pontja elhagyása után kapunk, mai napig is megoldatlan, sőt, nagyon messze vagyunk (?) a megoldásától, az olvasó sem kaphat egy igazán befejezett képet a témakörről. Kiemelném az utolsó három feladatot, melyek Lovász híres megoldását tartalmazzák a struktúrák szorzatára vonatkozó, több mint 30 évig megoldatlan sejtésről.

Rátérek a könyv rövid méltatására. Az utóbbi időben számos jó kombinatorika könyv jelent meg, a komoly kutató vagy kutatójelölt számára, vagy akár az elég jó érdeklődő diák számára is azonban ezt a könyvet ajánlanám végigoldogatásra, mint a legjobb módszert egy hatalmas anyag elsajátítására és emellett egy komoly technika megszerzésére. Itt nemcsak kombinatorikai technikára gondolok: a matematika számos más fejezetének kombinatorikában, illetve a kombinatorikai módszerek másutt való alkalmazása közben az olvasó-feladatmegoldó tudása a matematika sok más ágában is igen kiszélesedik.

A könyvben összeválogatott anyag a kombinatorika és gráfelmélet legfontosabb területeihez lett válogatva, a kombinatorika és gráfelmélet egy igen széles részét fedi le. Ezek között nemegy területnek Lovász egyik legelismertebb kutatója is, a feladatsorok gyakran Lovász-eredmények, sok közülük először itt lett publikálva. Megintcsak az illusztrációs szintre, azaz a felületre szorítkozva, megemlítem a Lovász-szitát, melynek azóta számtalan alkalmazása született, a gráfok faktoraira vonatkozó Lovász-eredményeket, a hipergráfokra vonatkozó Lovász-tételeket, a perfekt gráf sejtés bizonyítását és az utolsó fejezetből a struktúrákkal való egyszerűsíthetőségi tételeket.

Terjedelmi okokból Lovász nem törekedhetett arra, hogy a kombinatorika minden jelentősebb területéhez szerkesszen egy feladatsort. A kihagyott fontosabb területek között említi Lovász a véletlen struktúrák, az egészértékű programozás, a matroidok elméletét, melyekre talán egy későbbi kötetben tér vissza.

Feltételezhetően a könyv több nyelven és többször fog megjelenni, és talán alapkönyvvé is válik, mint a Pólya—Szegő könyv. A további kiadásokban vagy az esetleges folytatásban én igen szívesen látnék egy fejezetet a véletlen struktúrákról, elsősorban a véletlen gráfokról, főleg most, újabb virágzásuk alkalmával. Talán érdemes lenne a féloldalas bevezetőket hosszabbakra nyújtani, több kommentárt beiktatni a bevezető részbe. Néhol egyes feladatokat apróbb feladatokra lehetne szétvágni. Az évek múlásával szívesen látnék bizonyos újabb eredményeket is feladatsorozatokban feldolgozva, a már meglevő fejezetkörökből. Gondolok itt arra, hogy a geometriai gráfok alkalmazása, és például Shannon-sejtés megoldása idevágó eredmények, téma szerint is, és azért is, mert Lovász tételei.

Természetesen az egész kombinatorikát egy ilyen könyvben feldolgozni egy ember számára halatmas feladat, szinte lehetetlen. Így mindenki egyéni ízlése szerint előállhatna egy fenti típusú kívánságlistával. Én mégis azzal zárom ismertetésemet, amivel kezdtem: a könyv kitűnő és a kombinatorikusok igen nagy örömmel fogadták. Feladatsorainak végigoldogatása igen időigényes („a matematikához nem vezet királyi út"), én mégis, mint jó és hasznos szórakozást ajánlom mindazoknak, akiknek idejük engedi és a témakör iránt érdeklődnek.

SIMONOVITS MIKLÓS

HAJÓS GYÖRGY: BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA
(Tankönyvkiadó, Budapest 1979; 594 oldal)

Hajós György egyetemi tankönyve 1979-ben érte meg hatodik kiadását. A könyv két részből áll: elemi és analitikus geometria. Mindkét részben a szerző a sík és tér geometriáját is tárgyalja, az előbbiét nagyobb terjedelemben.

Az első részben ismerteti a geometriának egy axiómarendszerét, bevezeti a hosszúság és szög fogalmát, tárgyalja az egybevágóságot és szimmetriát. Részletesen taglalja a háromszög geometriáját, vizsgálja a párhuzamossági axiómát és következményeit, speciális négyszögekkel foglalkozik. Szerepel a kör geometriája, tárgyalja a hasonlóságot. Definiálja és vizsgálja konvex síkidomok kerületét, területét, foglalkozik szerkesztési feladatokkal. A térben vizsgálja síkok, egyenesek elhelyezkedését, ezek és pontok távolságát. Bizonyítja az Euler-féle poliéder tételt, vizsgál speciális poliédereket, köztük a szabályosakat. Definiálja és vizsgálja konvex testek térfogatát, felszínét. Szerepel a henger, kúp, gömb geometriája.

Az analitikus geometriával foglalkozó második rész a vektoralgebrával kezdődik, majd a szögfüggvények, a háromszög trigonometriája, a skaláris és vektorális szorzat vizsgálata, a gömbháromszögek geometriája és trigonometriája következik. Bevezeti a derékszögű és polárkoordinátákat. Vizsgálja a súlypontot, baricentrikus koordinátákat, osztóviszonyt, szerepel a terület és térfogat analitikus tárgyalása. A síkban analitikusan tárgyalja az egyeneseket, sugársorokat, köröket. Vizsgálja az inverziót, pontnak körre vonatkozó hatványát, körsorokat. Részletesen vizsgálja a kúpszeletek elemi és analitikus tulajdonságait. Bevezeti és vizsgálja az ideális pont, egyenes, sík fogalmát, a homogén koordinátákat és a kettősviszonyt. Másodrendű görbékre vizsgál polaritást, majd ezen görbék teljes osztályozását adja, bebizonyítja a főtengelytételt. A térben analitikusan tárgyalja a síkokat, egyeneseket, másodrendű felületeket. Vizsgál affinitást, mátrixokat, a térbeli sajátértékproblémát és a főtengelytranszformációt. Megadja a másodrendű felületek teljes osztályozását, másodfokú alakokat vizsgál. A könyv megértését több, mint 500 ábra segíti elő, a végén két oldal terjedelmű betűrendes mutató található.

IFJ. MAKAI ENDRE

MIKOLÁS MIKLÓS: VALÓS FÜGGVÉNYTAN ÉS ORTOGONÁLIS SOROK
c. könyvéről (Tankönyvkiadó, Budapest, 1978)

Világviszonylatban jól ismertek a matematikai analízist tárgyaló monográfiákkal, ill. tankönyvekkel kapcsolatos problémák. A nehézségek oka jórészt abban keresendő, hogy az analízis a felsőbb matematikának egyik legrégibb ága lévén, ma már olyan óriási területet ölel fel, hogy teljességgel lehetetlennek tűnik a klasszikus és modern analízis egészének egyetlen, akár több kötetes, de egységes koncepciójú műben való feldolgozása, amely egyúttal minden tekintetben figyelembe venné a gyakorlati felhasználhatóság szempontjait is. Ennek megfelelően világszerte megszokottá vált, hogy külön jelennek meg kisebb-nagyobb részletességgel megírt bevezető jellegű analízis-könyvek, amelyek az elmélet klasszikus részével foglalkoznak, s ugyanakkor külön publikálnak olyan munkákat, amelyeknek tárgya a múlt század vége, ill. a jelen század eleje óta kifejlődött modern analízis. Az utóbbiak — az említett terjedelmi okok miatt — témaválasztásukban szintén többnyire specializálódnak és a modern analízisnek csupán egyes (ma már külön diszciplinának számító) részeit tárgyalják, nevezetesen a mérték- és integrálelméletet, a funkcionálanalízis különböző területeit, az ortogonális sorok modern elméletét stb. Mindezekkel szemben komoly problémát jelent az a körülmény, hogy a modern analízis eredményeinek fontossága napjainkban már szinte valamennyi természettudományban, sőt közvetve más tudományágakban is érzékelhető lévén, egyre több szakember kívánja ismereteit ilyen irányban bővíteni, mégpedig lehetőleg átfogó tematikájú művek segítségével s viszonylag rövid idő alatt.

A képet tovább bonyolítja, hogy a fent említett analízisbeli irodalmi tradíciók újabban már nemcsak a továbbképzésben, hanem az analízis egyetemi oktatásában is nehézséget jelentettek több olyan szakon, ahol elengedhetetlen a modern analízis bizonyos fejezeteinek ismertetése (gondolok például a matematika-fizika szakos tanárjelöltekre, fizikus, kémikus, mérnökmatematikus, villamosmérnök hallgatókra); ugyanakkor a meglevő analízis óraszámkeret nem ad lehetőséget az analízis olyan részletes tárgyalására, mint amilyen a tudományegyetemek matematikus szakán jelenleg folyik. Így azután gyakran megtörtént, hogy az imént felsorolt szakoknak még aránylag jó matematikai előképzettségű hallgatói sem tudták kellőképpen használni a rendelkezésre álló modern analízis tárgyú — matematikusoknak szánt — könyveket, jóllehet olyan világsikert aratott, bel- és külföldön számos kiadást megért művekről van szó, mint *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* akadémikusok funkcionálanalízise (1. kiadás: 1952), *Szőkefalvi-Nagy Béla* Valós függvények és függvénysorok c. tankönyve (1. kiadás: 1954) vagy *Alexits György* akadémikusnak az ortogonális sorokról írt monográfiája (1. kiadás: 1960). Kétségtelen az is, hogy a modern tárgyalási módra

törekvő, az analízis legújabb ágait tárgyaló előadások, valamint a bevezető jellegű analízis-előadások között az utolsó évtizedekben bizonyos „szakadék" keletkezett, amely a fejlődés felgyorsulásával egyre mélyül. Égetően szükségessé vált tehát egy olyan magyar nyelvű, aránylag korlátozott terjedelmű, nem-matematikusok továbbképzésére is alkalmas egyetemi tankönyv megjelentetése, amely áthidalná az érintett nehézségeket; annál is inkább, mivel külföldön sem létezik hasonló céllal megírt, megfelelő keretek között maradó modern analízis-könyv.

Mikolás Miklós egyetemi tanár kb. 400 oldalas könyve éppen ez utóbbi igényeket elégíti ki, azaz hézagpótló jellegű. Szóban forgó könyvében ugyanis a szerző 1) a modern analízis létrejöttében alapvető szerepet játszó mérték- és integrálelmélet, valamint a valós függvénytan egész fogalmi rendszerének kialakulásáról is átfogó képet ad s az összes eredményeket a történeti fejlődés tükrében mutatja be; 2) az egyes témakörök tárgyalása során fokozatosan vezeti el olvasóját az azokból kinőtt egyre modernebb és elvontabb elméletekig, úgyhogy az olvasó semmi stiláris törést nem érez a klasszikus analízisben megszokott tárgyalásmódhoz képest; 3) jó érzékkel választja ki azokat a területeket, amelyekkel kapcsolatban mélyebben ki tudja fejteni nemcsak a szoros belső kapcsolatot, hanem a minőségi, szemléletbeli eltérést is a klasszikus és a modern analízis módszerei között; 4) az adott kereteken belül részletesen tárgyalja a funkcionálanalízis alapjait és az ortogonális sorok elméletét, mint olyan területeket, amelyekben gyümölcsözően alkalmazhatók a modern mérték- és integrálelméletnek, ill. valós függvénytannak a könyvben foglalt eredményei; 5) ugyancsak minden lehetőséget felhasznál arra, hogy a modern analízis fogalmainak és módszereinek a fizikában, a valószínűségszámításban és egyéb alkalmazási területeken való hatékonyságát bemutassa; 6) a legtöbb fejezetben a részletesen tárgyalt anyag, a bebizonyított tételek mellett áttekintést ad a témakör legfrissebb, legmodernebb eredményeiről is, ennek során azonban — helyes érzékkel — már megelégszik az összefüggésekre vonatkozó rövid utalásokkal és a bizonyítások alapgondolatának ismertetésével, mindig gondosan ügyelve a fogalmak definíciójának pontos megadására.

A könyv két (közel azonos terjedelmű) részre, tizennégy fejezetre tagolódik; a koncepciót részletesen kifejtő előszón kívül tömör történeti áttekintéssel, jól használható irodalomjegyzékkel, tárgy- és névmutatóval, valamint három idegen nyelvű rezümével egészül ki. Az első rész (I.—VIII. fejezet) a valós függvénytani bevezetést tartalmazza, míg a második rész (VIII.—XIX. fejezet) a függvényterek és az ortogonális sorfejtések elméletével foglalkozik. E rövid recenzió keretében — a fenti szempontok illusztrálására — legyen szabad mindkét részből csak néhány jellemző tárgyalási részletet kiemelnem.

Az integrálelmélet keretében az ötödik fejezet a ponthalmazok Jordan-féle mértékét és az ezzel szorosan összefüggő Riemann-integrált tárgyalja igen részletesen. E témakörnek ilyen beható tárgyalása sehol sem található, a külföldi szakirodalomban sem. A tárgyalási módból világosan kitűnik, hogy milyen határok között tudunk dolgozni a Riemann-féle integrállal, mik a gyengéi, és így milyen hiányosságai késztették a matematikusokat általánosabb s ugyanakkor jobban kezelhető mérték- és integrálfogalom megalkotására. Ugyancsak ebben a fejezetben található a Riemann—Stieltjes-integrál részletes diszkussziója, különös tekintettel a fizikai háttérre, az egzisztenciakérdésekre s a tényleges kiszámítás különböző módjaira. Végül a fejezet természetes lezárásaként a Radon- és a Burkill-féle integrál ismertetésére kerül sor. A hatodik fejezet tárgyalja a Lebesgue-féle mérték- és integrálelméletet. A Riemann-féle integrállal való többoldalú egybevetés jól mutatja, hogy az alapvető különbség a külső mérték Jordan-féle és Lebesgue-féle értelmezése között van. Ennek megfelelően a szerző a Lebesgue-integrált a klasszikus Lebesgue-féle értelmezés mellett a Young-féle módon is ismerteti. Külön kitér a Lebesgue-elméletnek Riesz Frigyes-féle (lépcsős függvényekből kiinduló) megalapozására, amelynek funkcionálanalízisbeli jelentősége a lineáris operációk kanonikus előállításával kapcsolatban közismert. Az így megadott ekvivalens bevezetések azután könnyűvé és természetessé teszik a későbbi fejezetekben vizsgált általánosabb integrálfogalmak értelmezését. Az első részt lezáró XIV. fejezetben a szerző előbb a halmaztesteken értelmezett mértékek, majd az absztrakt Lebesgue-integrál, ill. a Lebesgue—Stieltjes-féle integrál elméletét tárgyalja.

A könyv második része a Hilbert-féle sorozattér és függvénytér elméletének részletes kifejtésével indul; a szerző azonban — a didaktikai szempontokra való tekintettel — csak számos fontos konkrét ortogonális rendszer és sor (mindenekelőtt a Sturm—Liouville-féle differenciálegyenletekből eredő rendszerek és sorok) vizsgálata után tér rá az L^2 tér geometriájának bemutatására. Emellett megtalálható a XII.—XIII. fejezetben a speciális Fourier-sorok (főleg a trigonometrikus Fourier-sorok, ortogonális polinomsorok, Haar-sorok) klasszikus konvergencia- és szummációelmélete is, kiegészítve a Fourier-integrálokra vonatkozó főbb tételekkel. Az utolsó fejezet az elmélet kiépítését további absztrakt terek (L^p terek, H tér, Banach-tér) vizsgálatával, valamint a differenciál- és integrálegyenletekkel kapcsolatos főbb alkalmazások áttekintésével zárja le. Ennek során a szerző — kellő mértéket tartva — a funkcionálanalízis azon eredményeinek ismertetésére szorítkozik, amelyek a modern fizika, ill. természettudományok terén nagy jelentőségűek. Kiemelendő pl. a kvantummechanika szigorú matematikai megalapozása a Riesz—Fischer-tétel segítségével, valamint a széles körben felhasznált Banach-féle fixpont-tétel.

A szerző a könyv mindkét részében sok általa kidolgozott, egyszerűsített vagy általánosított bizonyítást közöl; továbbá számos helyen saját kutatási eredményeinek a témakörhöz szorosan hozzáillő részeit az anyagba beágyazza, mint pl. a XIII. fejezetben a Fourier-sorokra vonatkozólag általa bevezetett (D)-szummációs eljárást, amely hatékonyabb az összes klasszikus összegezési módszereknél.

Összefoglalásként megállapítható: Mikolás professzor könyve a tárgykör hazai szakirodalmában több szempontból hézagpótló, kiemelkedő munka. Így érthető, hogy a könyv a múlt évben nívódíjban részesült, s új kiadásának előkészítése máris folyamatban van; megemlítendő továbbá, hogy az ELTE matematikai szakbizottsága, valamint a BME Gépészmérnöki és Villamosmérnöki Karának érintett szakcsoportjai oktatási segédletként javasolták. Tekintettel arra, hogy a szerző mindenütt modern módszereket alkalmaz és idevágó saját eredményeit is közli, a könyv túlnő a tankönyvjellegen s egyúttal tudományos monográfiának minősül; ezért érdemes lenne idegen nyelven is megjelentetni az Akadémiai Kiadó gondozásában.

A könyv átlagon felüli, szép kiállítása a Tankönyvkiadó Vállalat és a Szegedi Nyomda gondos munkáját dicséri.

PÁL LÁSZLÓ GYÖRGY

DÁVID LAJOS: A KÉT BOLYAI ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA (Gondolat, 1979.)

A tetszetős külsejű kiadvány a szerző 1923-ban megjelent ugyanilyen tárgyú könyvének — hogy Bolyai Farkas egyik műve címéből kölcsönözzünk — „részint rövidített, részint bővített, általán jobbított, s tisztáltabb" posztumusz kiadása. Dávid Lajos (Kolozsvár, 1881—1962, Budapest), a debreceni, majd rövid ideig a kolozsvári tudománygyetem egykori matematika professzora kétségtelenül egyik legérdemesebb kutatónk volt, aki egész életén át szorgalommal gyűjtögette, rostálta, kiegészítette a két Bolyaira vonatkozó adatokat. Talán az utolsó képviselője annak a korosztálynak, amelyik részben a szülőhely, részben a kolozsvári egyetemen uralkodó légkör (főleg Schlesinger Lajos és Vályi Gyula előadásai), nem utolsósorban a személyes ismeretségek révén sok hitelt érdemlő forráshoz jutott. Ezáltal váltak Dávid Lajos tényszerű adatai is megbízhatókká, vonzó, helyenként szinte lírikus hangvételű írása pedig ezért lesz bizonyára a jövő években az érdeklődők egyik legtöbbet forgatott Bolyai tanulmánya. Csak sajnálhatjuk, hogy a szerzőt a halál megakadályozta a végső simítások elvégzésében, valamint a legújabban feltárt adatok felhasználásában.

A könyv első kiadása inkább népszerűsítő jellegű volt, megbízható adatokkal, kevés matematikával, a mostani bővebben tájékoztat az apa, de főleg a fiú matematikai tevékenységéről. Ezáltal a tanulmány színvonalasabbá, és még a szakemberek számára is hasznos olvasmánnyá vált. Matematikai szempontból szűkszavúbbnak látjuk a Bolyai Farkasról írottakat: itt még meg lehetett volna említeni a róla elnevezett gyökközelítő eljárást, valamint bővebben kellett volna szólni legismertebb azon eredményeiről, amelyeket a „végszerű területegyenlőség" terén ért el. Kissé anakronisztikusnak tűnik az a megállapítás, hogy Paul Stäckel (a tízes évek táján) „félreértette" (220. o.) Bolyai Farkas bizonyos definícióit, amikor nem sorolta be azokat a halmazelméletből kiágazó, és E. Foradori által 1932-től kidolgozott „részelmélet"-be (Teiltheorie).

Könnyen követhetők a párhuzamossági axióma történetével és a Bolyai János geometriai rendszerével foglalkozó fejtegetések. A 194. o. alján közölt képletek azonban hibásak.

Dávid helyenként a ma megszokott matematikai kifejezések helyett régieseket alkalmaz: „sokaság", „sokaságelmélet" ma „halmaz", „halmazelmélet", a geometriai rendszer „logikus", „nem-logikus" szavak helyett ma „ellentmondástalan" és „ellentmondásos" rendszert különböztetünk meg, a „hozzátartozás" és a „közbetartozás" axiómacsoportjai helyett a mai szakirodalom az „illeszkedés" és a „rendezés" axiómáiról beszél.

Dávid azonban nem is annyira a matematikai részek pontos kidolgozását tűzte ki célul, hanem a két Bolyai életének, egyéniségének a bemutatását.

Észrevételezhető részek azonban itt is találhatók. Dávid több helyen — esetleg kiemelten is — mond ki olyan állításokat, amelyek további vizsgálatokat igényeltek volna. E sorok írója pl. nem tudja elfogadni azt (65. o.), hogy Bolyai Farkas volt az első a világon, akinek írásaiban a matematika „modern" (Herbart által a múlt század végén kidolgozott) tanításának főelvei megtalálhatók. Ő valóban egyike volt az ilyen tankönyvíróknak, de csak *egyike*, mert előtte is találunk kül- és belföldi olyan matematikusokat (hazai vonatkozásban pl. Segner János Andrást, vagy Kerekgedei Makó Pált), akik fölismerték a célszerű matematika-tanítás főismérveit, és több-kevesebb hangsúllyal könyveiket ezeknek megfelelően építették föl. Bolyai Farkas tankönyvírói érdemét inkább abban kereshetjük, amit Felix Klein óta úgy szoktunk jellemezni, hogy „elemi matematika magasabb szempontból". Bolyai esetében azt jelenti ez, hogy még a legelemibb részek tárgyalása során is iparkodott minden matematikai fogalomnak, állításnak kifejteni a végső gyökereit, pótolni az addigi tárgyalások hiányosságait.

Ugyancsak megkérdőjelezhető Dávid azon (kurzív betűkkel kihangsúlyozott) állítása, hogy Bolyai Farkas 1821-ben keletkezett egyik kézirata (amely csak 1911-ben vált ismertté Kintses József publikációja révén) „...az első magyar nyelvű erdészeti munka". Merész ezt mondani, mert biztosan voltak már előtte is magyar nyelvű erdészeti feljegyzések, amelyek talán sohasem láttak napvilágot, éppen azért, mert nem Bolyai Farkassal mérhető egyénektől származtak.

Kár, hogy Dávid helyt ad (145. o.) Bolyai János kétségtelenül koholt párbajai közlésének. Annál kevésbé érthető ez, mivel egy későbbi helyen (205. o.) enyhíti mondatait, a jegyzetek között (326. o.) pedig kifejezetten helyesbíti az idetartozó és ma is gyakorta felvetődő regényesítő ferdítéseket.

Az alábbi, Bolyai Jánosra vonatkozó mondatok fogalmazása nagyon kemény: „Beteg és tépelődő fiatal lángelme volt..." (163. o.); „...beteges önimádással pótolta az epedve várt hírnevet és dicsőséget" (232. o.); „...János az ő nagyravágyó fiatalságával még életében elismert úttörő, megbecsült alkotó vágyott lenni" (162—163. o.); „torzult ember" (257. o.); „patalogikus" (277. o.); „talán tudathasadása volt" (277. o.); idősebb korában „...anyatejjel is élt" (281. o.). Nagyon erősek ezek a kifejezések, és hitelüket az újabb kutatások cáfolják, vagy csak kis töredékükben támasztják alá.

Ugyancsak kifogásolható az a megállapítás, hogy Bolyai János Gausst „gyűlölte" (e szó háromszor is szerepel a 242. oldalon); sőt, Dávid *izzóan gyűlölt* „Göttingai Kolosszusróli' is beszél (247. o.). Az Értelmező Szótár szerint: gyűlöl = ellenséges indulatot, heves ellenszenvet érez valaki iránt. Ilyen érzést nem olvashatunk ki Bolyai János hátramaradt irataiból, a tárgyilagosan értékelő tudománytörténet pedig föltevésekre nem támaszkodhat. E sorok írója inkább hajlik ebben a kérdésben Benkő Samu árnyaltan fogalmazott véleménye felé (Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968. 49—64. o.).

Nem fogadható el az az állítás (181. o.), hogy Saccheri 1733-ban és Lambert 1777-ben „...a nemeuklideszi geometriát... kifejtették többé-kevésbé teljesen". Annyi igaz, hogy e két tudós valóban igen éles elméjű vizsgálatokat folytatott az euklideszi 5. posztulátum indirekt bizonyítása terén, de a kapott meglepő eredmények hatására nem gondoltak valamiféle anti-euklideszi geometriára, ellenkezőleg: az euklideszi geometria megerősítését olvasták ki belőlük.

Mindezeket azért véltük szükségesnek elmondani, mert a közvélemény, a népszerűsítő- és a szépirodalom szívesen hajlik az érdekeket tálaló epizódok felé, főként, ha olyan munkában látnak napvilágot, mint Dávid Lajos műve.

Mert Dávid könyve az előbbi megjegyzések ellenére is jó munka, különösen hasznos lehet a további kutatásokhoz a „Jegyzetek" tekintélyes fejezete (287—325. o.). E részből csupán egyetlen tévedést korrigálunk (292. o.): az Appendixnek valóban van japán kiadása, de nem japán nyelven, mert a Halsted-féle *angol* fordítás jelent meg 1894-ben Tokióban.

Négy függelék zárja a könyvet.

„A két Bolyai — az idő sodrában" (359—380. o.) c. rész szerzője, *Sarlóska* Ernő az MTA Bolyai-hagyatékából válogat össze jellemzőbb adatokat, továbbá tollhegyre tűz a „költői szabadság" ürügyén írott néhány bántóan torzító művet. Ifj. *Gazda* István két függeléket is írt. Az egyikben az 1953 és 1967 között megjelent Bolyaiakra vonatkozó jelentősebb műveket sorolja fel kellő körültekintéssel és alapossággal (381—390. o.). A másikban (407—411. o.) David Lajosnak a hazai matematikatörténeti kutatásokban betöltött szerepét méltatja. Ez utóbbihoz egy kis korrekciós adalék: már Dávid Lajos előtt is tartottak hazánkban matematika-történeti kurzusokat, pl. König Gyula az 1876/77. tanév mindkét félévében heti két órában a budapesti műegyetemen („A mathematika és az azon alapuló természettudományok története"), továbbá Brassai Sámuel a kolozsvári tudományegyetemen heti egy órában az 1880/81. tanév első félévében („Mathesis történelme").

Dávid Lajos életútját — megbocsáthatóan fiúi szubjektivitással — *Dávid Péter* ismerteti (391—406. o.), helyenként mellőzhető adatokat is említve. A 392—393. oldalon néhány évszám téves. Elhamarkodott az az állítás, hogy Dávid 1944-ben kiadott, és ma ritkaságszámba menő „Bolyai-geometria az Appendix alapján" c. igen sikerült könyve „...bizonyos értelemben ma is egyedülálló" (401. o.). Ugyanis az Appendixet magyarázó munkák ez előtt és ez után is szép számmal jelentek meg. Csak néhányat említünk. F. Frischauf: „Absolute Geometrie nach Johann Bolyai" (Leipzig, 1872); ugyancsak tőle a részletezőbb „Elemente der absoluten Geometrie" (Leipzig, 1876); „A tér absolut igaz tudománya" (Budapest, 1897), Suták József magyarázataival; idetartozik Vályi Gyula litografáltan kiadott „Bolyai János Appendixéről" c. egyetemi kurzusának (amelyet elmondása szerint Dávid Lajos többször is meghallgatott) az anyaga. Újabban pedig három kiadásban is megjelent (1952, 1973, 1977) az Appendix, Kárteszi Ferenc kitűnő magyarázataival és kiegészítéseivel.

SZÉNÁSSY BARNA

UTAZÁSOK MATEMATIKAORSZÁGBAN

GÁLL ÉVA: MATEMATIKAORSZÁG HATÁRÁN (második kiadás)
RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA: KIVI ÉS APÓ

A Tankönyvkiadó az ideiglenes tanterv országos bevezetésével egyidőben indítja útjára, mintegy segédeszközként ez új sorozatát. Mindkét könyv játékos, meseszerű elemeivel, laza szerkezetével alkalmas arra, hogy ne csak iskolában, óvodában vagy egyéb szervezett foglalkozáson használják, hanem kötetlenül, családi vagy más környezetben. Komoly érdeme ez a könyveknek, hiszen ismeretes a szülők idegenkedése az „új matek"-kal szemben. A szerzők célja, hogy könnyed, mulatságos formában bővítsék a tapasztalati anyagot, mintegy további hátteret adjanak a majdani matematikai fogalmaknak. Módszertanilag éppen a sok és sokirányú élményszerzés forradalmi a matematika mai oktatásában. Így a szerzők fantáziáját nem kötötték még jó hagyományok sem. Különösen ritkaság számba megy, az óvodásokhoz, első osztályosokhoz írott könyv, a „Matematikaország határán". A szakdidaktika rendesen csak említést tesz a kicsik matematika tanulásáról, miközben ma már a matematika az óvodákban is tantervi anyaggá lépett elő, ezért mindenképp — hibái ellenére is — dicséretes vállakozás az 5-7 éveseknek összeállított munkafüzet.

Többet tudunk a nagyobbacskák — 8—10 évesek — matematikai fogékonyságáról, arról, hogy mit lehet és mit nem, és talán ez az egyik titka éppen a szórakoztató és tanulságos „Kivi és Apó"-nak.

Gáll Éva „Matematikaország határán" egyszerű és ugyanakkor manuális feladatokkal vezeti be ifjú „olvasóit" (az idézőjeles olvasó már egyben jelzi is, hogy sok buktatója van e határátlépésnek). Nem vállalkozom itt a kerettörténet kritikájára, a gyerekirodalom hatáskörébe utalom. El tudom képzelni ugyanis, hogy a gyerekeknek tetszik, de nekem nemigen. Mégegyszer hangsúlyozom azonban, ez más műfaj. Egy mókus testvérpár becsöppen a mackó óvodai foglalkozásokra és lelkes tolmácsolóivá válik az ott történteknek; később természetesen folytatják tanulmányaikat a mackó iskolában is. Az óvodában az azonosok fölismerésével, területek egységgel való lefedésével, megszámozott (!) pontok kirajzolásával, a kapott alakzat részeivel való lefedésével és tükrözésekkel foglalkoznak, többnyire úgy, hogy a melléklet megfelelő részleteit kivágják. Megjegyzem itt, hogy felnőtt okoskodásaim ellenőrzéséül némileg utána érdeklődtem: barátom kisfia lelkesen csinálta a feladatokat (még az első kiadás idején), de érintetlenül hagyta épp azokat, amelyekkel szemben aggályaim voltak. A számok megfelelő összekötését megrajzolja ugyanis az ügyeletes felnőtt, de akkor minek a feladat, minek magyarázgatni, hogy a piros szó p hangjának „p" betű a jele és eszerint ahol „p"-t látsz ott pirossal színezd ki stb. Egyébként a kisfiú ügyesen leegyszerűsítette a feladatok megoldását avval, hogy az azonosakat azonos jellel látta el és nem a külön kirajzolt négyzetbe jelölte be. Ugyanakkor — mivel úgyis segít valaki az olvasásban — érdemes volna legalább néhány kérdéssel kiaknázni a feladatok adta lehetőséget.

Példaként kiragadok egyet: a szöveges utasítás a következő: A számozott pontokat kössék össze, a rajzot vágják ki, ragasszák át és színezzék ki, azután egy kis kockaépítményt kapnak. A valóságban ugyan összedőlne, de akár ennek megállapítása is tanulságos lehet. Nem beszélve arról, hogy egy térbeli építmény síkbeli rajzáról sok-sok kérdést lehet föltenni, ami elsősorban — munkafüzet esetén — a szerző és nem az olvasó felnőtt dolga.

A mackó iskoláról szóló részben szinte természetesen küszöbölődnek ki a fenti módszertani hiányosságok, megint csak alátámasztva, hogy az óvodáskornak matematikával való megbarátkoztatása milyen fehér területe a pedagógiának. Az iskolai feladatok az előbbiek nehezebb változatain kívül 3 elem sorba és körbe rakásainak számát, négyzethálóra való kicsinyítést és nagyítást, végül a koordináta rendszer pozitív részében alakzat koordinátákkal való megadásait tartalmazzák.

Összegezve az eddigieket Gáll Éva könyve hiánypótló, úttörő vállalkozás. Fontos volna az apróságok matematikában való első lépéseire az eddiginél nagyobb figyelmet fordítani.

Radnainé „Kivi és Apó"-jában nagyapa és unoka nyári beszélgetéseinek, társasjátékainak vagyunk tanúi. Az az örvendetes, hogy a könyv stílusa mentes mindenfajta iskolásságtól, didaktizálástól, azzal együtt, hogy nemcsak ismerteti a feladatokat és játékokat, hanem részletesen kifejti azokat, kérdez rájuk, mintegy kézbe adja a kidolgozás fonalát. Ezzel lehetővé teszi, hogy ne csak pedagógus vagy a matematikai játékokban jártas felnőtt, vagy esetleg a különlegesen érdeklődő gyerek számára legyen élő a könyv, hanem egy közönséges szülő közönséges gyerekével is bátran végigolvashatja, játszhatja úgy, hogy még a tanulságok sem sikkadnak el.

A témakörök főleg a halmazok és logika területei. A sokszínű megközelítés reprezentálására néhány fejezetet emelek ki:

„Őszibarackosztályozás", amelyben Kivi nemcsak őszibarackot osztályozni, hanem folyamatábrát készíteni is megtanul;

„Emlékszem-játék", amelyben Kivi egy új kártya készlet segítségével a vonalakkal ismerkedik. Sőt a lyukkártyák használatát is megtanulja; „Barchoba", „Rajzoljunk naptárt", amelyben naptárlapok rajzolása közben Kivi a prímszámokról tanul;

„Rajzolgassunk", amelyben Kivi átlókat számol meg;
„Másold át!", amelyben ábrák egyesített vonalait és legnagyobb közös részét figyeli meg Kivi. És így tovább.

Az ismert játékok és rejtvények a matematikai átfogalmazás során nem veszítenek érdekességükből, inkább csak nyernek; újabb gondolatokra adnak lehetőséget, mint a nagyon jól sikerült „Emlékszem-játék" fejezetben.

Néhány apróbb módosítani, illetve javítani valót találtam: a „Fejtörők" c. III. fejezetben a második példa helyére bizonyára akadt volna érdekesebb is. A „Csiga-teknős verseny" játék nincs egészen pontosan leírva, és a rajz és megoldás között ellentmondás van; az „Útelágazás" című fejezetben pedig a rajzok, főleg a közlekedést oly kitűnően ismerő gyerekek számára — nem szerencsések. Ezektől eltekintve egy igazán jó: matematikailag és pedagógiailag egyaránt jó könyvet vehet kezébe a „Kivi és Apó"-val az olvasó.

Votisky Zsuzsa

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1976-ban jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyzek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Introductory graph theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976, 320 oldal, 160 Ft.

BAJCSAY PÁL: *Egyváltozós függvények differenciálszámítása*, (5. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, A. 3., Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 139 oldal, 13,50 Ft.

BÍRÓ IMRE—BÍRÓ LÓRÁNT: *Felvételi kalauz matematikából. Feladatgyűjtemény egyetemi és főiskolai felvételi vizsgákra készülőknek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 556 old. 46 Ft.

BOLTYANSZKIJ, V. G.—GOHBERG, I. C.: *Alakzatok felbontása kisebb részekre*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 93 oldal, 7,50 Ft.

BOLTYANSZKIJ, V. G.—JEFREMOVICS, V. A.: *Szemléletes topológia*, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 155 oldal, 10,50 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv 1. osztályos anyagának tanításához*, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 575 oldal, 43 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER—MERŐ LÁSZLÓ—VARGA TAMÁS: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos anyagának tanításához*, 1. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 392. oldal.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER—MERŐ LÁSZLÓ—VARGA TAMÁS: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 2. osztályos anyagának tanításához*, 2. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 99 oldal 17,50 Ft.

COLIN, A. J. T.: *Bevezetés az operációs rendszerek tanulmányozásába*, Statisztikai Kiadó, Budapest, 1976, 139 oldal, 30 Ft.

CSER ANDOR—IMRECZE ZOLTÁNNÉ—PÁLFY SÁNDOR: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 279 oldal, 21 Ft.

DENKINGER GÉZA—GYURKÓ LAJOS: *Matematikai analízis. Feladatgyűjtemény*, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 295 oldal, 29 Ft.

ERDÉSZ EDÉNÉ—KOVÁCS VENDELNÉ—SZÁLKA GYÖRGYNÉ: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanításához*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 136 oldal, 10 Ft.

FARKAS IRÉN—FARKAS MIKLÓS: *Introduction to linear algebra*, Akadémiai Kiadó — Adam Hilger Ltd., Budapest — Bristol, 1975, 205 oldal, 130 Ft.

FODOR JÁNOS—HORVÁTH ATTILA—RÁBAI IMRE—SZÉKELY JENŐ: *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgákra készülők számára*, 1. kötet, (4. kiadás), Tankönykiadó, Budapest, 1976, 304 oldal, 22 Ft.

FODOR JÁNOS—HORVÁTH ATTILA—RÁBAI IMRE—SZÉKELY JENŐ: *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgákra készülők számára*, 2. kötet, (3. kiadás), Tankönyvkiadó Budapest, 1976, 396 oldal, 28,50 Ft.

FORSYTE, G. E.—MOLER, C. B.: *Lineáris algebrai problémák megoldása számítógéppel*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1976, 131 oldal, 30 Ft.

FREY TAMÁS: *Taylor-sorok, Műszaki Matematikai Gyakorlatok*, A. VIII., (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 186 oldal, 17,50 Ft.

FUKSZ, B. A.—SABAT, B. V.: *Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk*, (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 263 oldal, 26 Ft.

HUHN, A. P.—SCHMIDT, E. T. (editors): *Lattice theory, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 14, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—Oxford—New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1976, 462 oldal, 270 Ft.

HORVAI KATALIN—REIMAN ISTVÁN: *Geometriai feladatok gyűjteménye*, 1. kötet, (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 407 oldal, 19 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ: *Nem nehéz a matematika*, RTV—Minerva, Budapest, 1976, 178 oldal, 33 Ft.

JÁSZ ALAJOSNÉ (szerk.): *Úton a matematikatanítás reformja felé*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 272 oldal, 26 Ft.

KÁRTESZI FERENC: *Introduction to finite geometries*, Disquisitiones Mathematicae, 7., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976, 266 oldal, 150 Ft.

KOMLÓSSY LÁSZLÓNÉ: *Csupaszám országban, Nyitnikék, Kisiskolások könyve*, RTV—Minerva kiadása, Budapest, 1976, 63 oldal, 21 Ft.

Közgazdasági operációkutatási alkalmazások, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1976, 399 oldal, 77 Ft.

KREKÓ BÉLA: *Lineáris algebra*, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1976, 573 oldal, 120 Ft,

LÁNCZOS KORNÉL: *A geometriai térfogalom fejlődése*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1976, 323 oldal, 49 Ft.

LEHMANN, JOHANNES: *Furfangos matematika*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1976, 112 oldal, 15 Ft.

LIGETI BÉLA—MOSONI GYÖRGY: *Törd a fejed, érdemes! Matematikai feladatgyűjtemény*, (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 143 oldal, 10 Ft.

LOVASS—NAGY VIKTOR: *Mátrixszámítás, Műszaki Matematikai Gyakorlatok*, C. IV., (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 242 oldal, 23 Ft.

LŐRINC PÁL—PETRICH GÉZA: *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 323 oldal, 89 Ft.

MARCSUK, G. I.: *A gépi matematika numerikus módszerei. Parciális differenciálegyenletek*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1976, 312 oldal, 70 Ft.

MARTIN, H. C.—CAREY, G. F.: *Bevezetés a végeselem analízisbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976, 362 oldal, 77 Ft.

MAURER I. GYULA—VIRÁG IMRE: *Bevezetés a struktúrák elméletébe*, Dacia, Kolozsvár—Napoca, 1976, 315 oldal, 26 Ft (magyar-román közös kiadás).

MAYEDA, WATARU: *Alkalmazott gráfelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976, 523 oldal, 100 Ft

MÁTÉ LÁSZLÓ: *Funkcionálanalízis műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976, 32 oldal 30 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *A játék matematikája, Általános iskolai szakköri füzet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 112 oldal, 8 Ft.

RÁBAI IMRE: *Elemi matematikai példatár*, 3. kötet, Sorozatok, sorok, válogatott feladatok, Gondolat Kiadó, Budapest, 1976, 242 oldal, 17 Ft.

RÉNYI ALFRÉD: *Selected papers*, I—III., (A Magyar Tudományos Akadémia megbízásából sajtó alá rendezte és jegyzetekkel ellátta Turán Pál), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976, 627 oldal, 1100 Ft.

RÉNYI ALFRÉD: *Napló az információelméletről*, Gondolat, Budapest, 1976, 187 oldal, 19 Ft.

ROHOVSZKY RUDOLF: *Matematika, Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga*, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 131 oldal, 8 Ft.

RÓZSA PÁL: *Lineáris algebra és alkalmazása* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976, 685 oldal, 110 Ft.

SÁRKÖZI ANDRÁS: *Számelmélet. Példatár*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976, 391 oldal, 32 Ft.

SKLJARSZKIJ, D. O.—CSENCOV, N. N.—JAGLOM, I. M.: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*, 1. I. kötet, Aritmetika és algebra, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 399 oldal, 45 Ft.

SZADOVSZKIJ, V. N.: *Az általános rendszerelmélet alapjai, A korszerű informatika könyvtára*, 6., Statisztikai Kiadó Vállalat, Budapest, 1976, 265 oldal, 60 Ft.

TURÁN PÁL (editor): *Topics in number theory, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 13, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—Oxford—New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1976, 456 oldal, 270 Ft.

URBÁN JÁNOS: *Határértékszámítás, Példatár*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976, 451 oldal, 33 Ft.

VARGA TAMÁS: *Játsszunk matematikát!* 1. kötet, (3. kiadás), Móra Kiadó, Budapest, 1976, 91 oldal, 19 Ft.

VARGA TAMÁS: *Játsszunk matematikát!* 2. kötet, (3. kiadás), Móra Kiadó, Budapest, 1976, 119 oldal, 21 Ft.

VÁGÓ ISTVÁN: *A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1976, 272 oldal, 58 Ft.

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1977-ben jelentek meg. A jegyzékben nem szerepelnek az általános és középiskolai *tankönyvek*, valamint a felsőoktatási *jegyzetek*.

ADORJÁN BENCE: *Számítástechnika tegnap, ma, holnap*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 265 oldal, 40 Ft.

ALEXITS GYÖRGY: *Bolyai János világa*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977, 167 oldal, 30 Ft.

ARTIGA, L.—DAVIS, L. D.: *Algoritmusok és FORTRAN programjaik,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 282 oldal, 53 Ft.

BAHVALOV, N. SZ.: *A gépi matematika numerikus módszerei. Analízis, algebra, optimalizálás, közönséges differenciálegyenletek,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 551 oldal, 105 Ft.

BAKOS TIBOR (szerk.): *Középiskolai matematikai versenyek,* 7—8. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 224 oldal, 16,50 Ft.

BÁN ISTVÁN: *Biomatematika és alkalmazása a növénytermelésben,* Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1977, 267 oldal, 24 Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Differenciálszámítás, Példatár,* (4. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 280 oldal, 20,50 Ft.

BENKŐ SAMU: *Apa és fiú. Bolyai tanulmányok,* Magvető Kiadó, Budapest, 1977, 393 oldal, 38 Ft.

BOLTYANSZKIJ, V. G.—JEFREMOVICS, V. A.: *Szemléletes topológia,* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 155 oldal, 10,50 Ft.

BOLYAI JÁNOS: *Appendix. A tér tudománya,* (szerk. Kárteszi Ferenc), (változatlan utánnyomás), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977, 210 oldal, 48 Ft.

BORLI KÁROLY—SIPOS BÉLA: *Iparvállalati prognóziskészítés matematikai-statisztikai módszerekkel,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1977, 253 oldal, 28,50 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanításához,* (2. kötet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 239 oldal, 18 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv az ideiglenes matematika tanterv 4. osztályos anyagának tanításához,* (2. kötet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 216 oldal, 24,50 Ft.

COXETER, H. S. M.—GREITZER, S. L.: *Az újra felfedezett geometria,* Gondolat, Budapest, 1977, 287 oldal, 22 Ft.

CSÁKÁNY, B. and SCHMIDT, J. (editors): *Contributions to universal algebra,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 17, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—Oxford—New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1977, 607 oldal, 350 Ft.

CSÁKI CSABA—MÉSZÁROS SÁNDOR: *Számítógépek a mezőgazdasági vállalatok irányításában,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1977, 248 oldal, 26,50 Ft.

CSER ANDOR (szerk.): *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése,* (2. jav. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 343 oldal, 31 Ft.

CSER ANDOR—PÁLFY SÁNDOR: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához,* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 259 oldal, 19,50 Ft.

CSER ANDOR—PÁLFY SÁNDOR: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához,* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 301 oldal, 24 Ft.

CSER ANDOR—IMRECZE ZOLTÁNNÉ—PÁLFY SÁNDOR: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 317 oldal, 24 Ft.

CSISZÁR, I. and ELIAS, P. (editors): *Topics in information theory,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 16, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—Oxford—New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1977, 592 oldal, 350 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Korszerű matematikai alapismeretek,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1977, 630 oldal, 121 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítási gyakorlatok,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 340 oldal, 37 Ft.

FARKAS, M. (editor): *Differential equations,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 15, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—Oxford—New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1977, 418 oldal, 240 Ft.

FAZEKAS FERENC: *Határozatlan integrál,* Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. 4, (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 206 oldal, 19,50 Ft.

FRIED ERVIN: *Klasszikus és lineáris algebra,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 275 oldal, 27 Ft.

FREY TAMÁS: *Egyváltozós elemi függvények,* (4. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, A. 2, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 225 oldal, 21 Ft.

GÁLL ÉVA: *Matematikaország határán,* (Utazások Matematikaországban, 2. kötet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 63 oldal, 8 Ft.

GÁSPÁR GYULA (szerk.): *Műszaki Matematika,* 2. kötet, (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 426 oldal, 46 Ft.

GÁSPÁR GYULA (szerk.): *Műszaki matematika,* 3. kötet, (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 328 oldal, 41 Ft.

HALMOS ISTVÁNNÉ—ILL MÁRTONNÉ—TISZAI ZOLTÁNNÉ: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 303 oldal, 23 Ft.

JÁNOSSY LAJOS—JÁNOSSY ISTVÁN: *Szemléletes integrálszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 154 oldal, 12,50 Ft.

KAFAROV, V. V.—PEROV, V. L.—MESALKIN, V. P.: *Vegyipari rendszerek matematikai modellezése,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 311 oldal, 70 Ft.

KINDLER JÓZSEF—PAPP OTTÓ: *Komplex rendszerek vizsgálata,* Összemérési módszerek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 362 oldal, 54 Ft.

MACSKÁSSY GYULA—VÁRNAI GYÖRGY: *Kettő meg kettő az négy,* (2. kiadás), Móra Kiadó, Budapest, 1977, 40 oldal, 18 Ft.

MOROZENKO, V. V.—HEGEDŰS JÓZSEF: *Angol-orosz-magyar statisztikai és számítástechnikai szótár,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1977, 526 oldal, 79 Ft.

MOSONYI KÁLMÁN: *Matematikai játékok,* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 143 oldal, 8 Ft.

NIEVERGELT, J.—FARRAR, J. C.—REINGOLD, E. M.: *Matematikai problémák megoldásának számítógépes módszerei,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 264 oldal, 41 Ft.

OBÁDOVICS J. GYULA: *Numerikus módszerek és programozásuk,* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 303 oldal, 29,50 Ft.

ORE, OYSTEIN: *Bevezetés a számelmélet világába,* Gondolat Kiadó, Budapest, 1977, 142 oldal, 13 Ft.

PISKALO, A. M.: *Geometria az 1—4. osztályban,* (A geometriai képzetalkotás problémái az alsó tagozatos tanulóknál), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 287 oldal, 27 Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája,* (5. kiadás), Gondolat Kiadó, Budapest, 1977, 269 oldal, 24,50 Ft.

SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC,* Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához, (2. jav. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 253 oldal, 28 Ft.

SURÁNYI JÁNOS: *Polinomok, egyenletek az iskolában,* Fővárosi Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977, 221 oldal.

Számítástechnikai évkönyv, Statisztikai Kiadó, Budapest, 1977, 121 oldal, 67 Ft.

SZEDERKÉNYI ANTAL: *Topológia,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 222 oldal, 12 Ft.

SZELE TIBOR: *Bevezetés az algebrába,* (8. kiadás), Tankönyvkiadó, Bidapest, 1977, 275 oldal, 27 Ft.

SZERÉNYI TIBOR: *Analízis,* Tanárképző főiskolai tankönyvek, (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 578 oldal, 59 Ft.

SZIKSZAI JÓZSEF: *Háromszöggel kapcsolatos feladatok koordinátageometriai megoldása,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 131 oldal, 7,50 Ft.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Valós függvények és függvénysorok,* (6. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 370 oldal, 35 Ft.

VARGA JÓZSEF: *Matematikai programozás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 234 oldal, 27,50 Ft.

VARGHA BALÁZS—DIMÉNY JUDIT—LOPARITS ÉVA: *Nyelv — zene — matematika,* RTV—Minerva, Budapest, 1977, 217 oldal, 65 Ft.

VEKERDI LÁSZLÓ: *Így élt Newton,* Móra Kiadó, Budapest, 1977, 267 oldal, 19 Ft.

WAERDEN, B. L. VAN DER: *Egy tudomány ébredése,* Egyiptomi, babiloniai és görög matematika, Gondolat, Budapest, 1977, 478 oldal, 58 Ft.

YAOHAN, CHU: *Digitális számítógépek szervezése és mikroprogramozás,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 495 oldal, 66 Ft.

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1978-ban jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyvek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

ALEXITS, G. and TURÁN, P. (ed.): *Fourier Analysis and Approximation Theory, Vol. I—II.,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 19, North-Holland Publishing Company, Amsterdam—Oxford—New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1978, 926 oldal, 820 Ft.

BALÁZS MÁRTON—KOLUMBÁN JÓZSEF: *Matematikai analízis,* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár—Napoca, 1978, 535 oldal, 76 Ft. (közös magyar—román kiadás).

BARANYAI ZSOLT—LIPPNER GYÖRGY: *Egyenlőtlenségek* (3. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 151 oldal, 8,50 Ft.

BÁLINT ELEMÉR: *Numerikus és grafikus közelítő módszerek,* Műszaki Matematikai Gyakorlatok, B. V. kötet (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 217 oldal, 21 Ft.

BECK TAMÁSNÉ—HÓDI ENDRE—LUKÁCS OTTÓ—OLÁH GYULÁNÉ—SAIN MÁRTON—SÓLYOM MIHÁLY—SZEPESSY BÁLINT: *Kamatszámítástól a Bolyai geometriáig* (Élő matematika 5. kötet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 271 oldal, 21,50 Ft.

BEREZNAI GYULA—VARECZA ÁRPÁD: *Tanárképző főiskolák országos matematikai versenyei,* 1. kötet, 1952—1970, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 207 oldal, 16,50 Ft.

BUVÁRI ANIKÓ: *Repülőgépekkel a galacsinták tartományába,* (Utazások matematikaországba 3.), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 76 oldal, 10 Ft.

CSÁSZÁR ÁKOS: *General Tipology,* (Disquisitiones Mathematicae Hungaricae, Tom. 8.), Akadémiai Kiadó — Adam Hilger Ltd., Budapest—Bristol, 1978, 487 oldal, 600 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 284 oldal, 32 Ft.

FELLER, W.: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978, 472 oldal, 86 Ft.

FORGÓ FERENC: *Nemkonvex és diszkrét programozás* (Korszerű matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára), Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1978, 436 oldal, 94 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ: *Mátrixaritmetikai gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 442 oldal 47 Ft.

HAJNAL, A.—VERA, T. SÓS (ed.: *Combinatorics*, Vol. I—II. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 18, North-Holland Publishing Company, Amsterdam—Oxford, New York and János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1978, 1220 oldal, 1100 Ft.

HÁMORI MIKLÓS: *Halmazok, matematikai logika az általános és középiskolai tanulók számára*, (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 159 oldal, 9 Ft.

KEMENY, J. G.: *Az ember és a számítógép*, Gondolat, Budapest, 1978, 176 oldal, 16 Ft.

KÓLYA DÁNIEL: *Gyakorlati ábrázoló geometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978, 371 oldal, 64 Ft.

KOMLÓSSY LÁSZLÓNÉ: *Csupaszám országban*, (4. kiadás), RTV—Minerva, Budapest, 1978, 63 oldal, 21 Ft.

KUROS, A. G.: *Felsőbb algebra*, (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 475 oldal, 53 Ft.

LATKA, FRANTISEK: *Matematikai képletgyűjtemény*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978, 134 oldal, 8 Ft.

LOVÁSZ LÁSZLÓ—GÁCS PÉTER: *Algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978, 179 oldal, 18 Ft.

LŐCS GYULA: *Az ALGOL 60 programozási nyelv* (6. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978, 254 oldal, 19,50 Ft.

MIKOLÁS MIKLÓS: *Valós függvénytan és ortogonális sorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 393 oldal, 59 Ft.

NIVEN, J.—ZUCKERMAN, H.: *Bevezetés a számelméletbe*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978, 245 oldal, 59 Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Matematika*, (10. átdolgozott kiadás), Műszaki Kiadó, Budapest, 1978, 807 oldal, 82 Ft.

PERGE IMRE: *A számítástechnika alapjai* (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 191 oldal, 10,50 Ft.

PÉTER RÓZSA: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak*, (6. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 266 oldal, 31 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *A játék matematikája*, (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 136 oldal, 8 Ft.

RÁKOSI MIKLÓS: *A PL/1 programozási nyelv* (2. kiadás), Műszaki Kiadó, Budapest, 1978, 502 oldal, 48 Ft.

RUDIN WALTER: *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978, 355 oldal, 75 Ft.

SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC*, Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 253 oldal, 28 Ft.

SALÁNKI JÓZSEF: *A számítástechnika alapjai*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 253 oldal, 25 Ft.

SÁRKÖZI ANDRÁS: *Számelmélet és alkalmazásai*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978, 187 oldal, 21 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából* I. kötet, 1966—1969 (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 138 oldal, 11,50 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából* IV. kötet, 1974—1976, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 228 oldal, 18,50 Ft.

STAHL JÁNOS: *Lineáris programozási dekompoziciós eljárások*, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1978, 136 oldal, 31 Ft.

STEINFELD OTTÓ: *Quasi-ideals in Rings and Semigroups*, (Disquisitiones Mathematicae Hungaricae, Tom. 10), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978, 154 oldal, 270 Ft.

SZABÓ ÁRPÁD: *The Beginnings of Greek Mathematics*, Akadémiai Kiadó—Reidel Publishing Co., Budapest, Dordrecht, 1978, 358+8 oldal, 580 Ft.

SZABÓ ÁRPÁD: *A görög matematika kibontakozása*, Magvető, Budapest, 1978, 250 oldal, 9 Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Hálóelmélet*, (2. kiadás), Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 142 oldal, 8 Ft.

SZENDREI JÁNOS: *Algebra és számelmélet* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978, 475 oldal, 49 Ft.

SZÉNÁSSY BARNA: *Bolyai János* (A múlt magyar tudósai, 8), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978, 196 oldal, .. Ft.

TOMESCU IOAN: *Kombinatorika és alkalmazásai*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978, 270 oldal, 35 Ft.

TRAHTENBROT, B. A.: *Algoritmusok és absztrakt automaták*, Műszaki Kiadó—Mir Kiadó, Budapest—Moszkva, 1978, 207 oldal, 16 Ft.

VARGA LÁSZLÓ: *Rendszerprogramok elmélete és gyakorlata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978, 566 oldal, 124 Ft.

ZELDOVICS, JA. B.—MISKISZ, A. D.: *Az alkalmazott matematika elemei*, Gondolat, Budapest, 1978, 629 oldal, 87 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR

MTA Könyvtára
Periodika 19.../1650 n.
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat nyomdába érkezett: 1980. július 11. — Terjedelem: 12,95 (A5 ív)
80-3044 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

СОДЕРЖАНИЕ

Тибор Весели: Дюла Вайи (На 125-ую годовщину со дня его рождения) 251
Барна Сенаши: Г. Пуэнкаре (Нанси, 29 апреля 1854 г. — Париж, 17 июля 1912 г.) 263
Матяш Богнар и Янош Сенте: О математической деятелности и влиянии Г. Пуенкаре 269
Пал Эрдёш: О примарных факторах биномиальных коэффициентов 287
Карой Бездек: Мозаики, всякая грань которых имеет одно и то же число соседов 297
Шандор Сабо: Конечные коммутативные группы и n-мерные мозаики..... 305
Денеш Петз: Класс компактных пространств 319
Бела Ухрин: Замечание к теореме Минковского о выпуклых телах..... 323
Андраш Шёвегярто: Замечание об универсальных элементах 327
Отчёт о математическом конкурсе памяти Миклоша Швейтцера в 1979-ом году 329
Задачи 355
Из жизни общества 361
Обзор книг 383
Новые книги 392

CONTENTS

T. Weszely: Gy. Vályi (To the 125th anniversary of his birth) 251
B. Szénássy: Henri Poincaré (Nancy, 29 April 1854 — Paris, 17 July 1912) 263
M. Bognár and J. Szenthe: H. Poincaré's mathematical work and its effect 269
P. Erdős: On prime factors of binomial coefficients 287
K. Bezdek: Mosaics with each face having the same number of neighbours 297
S. Szabó: Finite Abelian groups and n-dimensional mosaics 305
D. Petz: The class of compact spaces 319
B. Uhrin: Remark to Minkowski's theorem on convex bodies 323
A. Sövegjártó: A note on universal elements 327
Report on the 1979 M. Schweitzer Mathematical Competition 329
Problems 355
Activity of the Society 361
Book review 383
New books 392

Ára: 14,— Ft
Évi előfizetés: 28,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025—519X