312.046
26
1975

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

26. évfolyam, 1975

1-2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1977. június — 25. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János.
Szerkesztőség: Budapest 1061 VI., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1 és *bármely postahivatalban*. Pénzforgalmi jelzőszám: KHI 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010 Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185-680.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

ÁDÁM ANDRÁS: Kalmár László matematikai munkásságáról 1
HORVÁTH JÁNOS: Riesz Marcel matematikai munkássága I. 11
CSÖRGŐ MIKLÓS, CSÖRGŐ SÁNDOR, ROGER FISCHLER és RÉVÉSZ PÁL: Véletlen-indexes határeloszlások erős invariancia-tételek segítségével 39
BÖRÖCZKY KÁROLY: Gömbkitöltés állandó görbületű terekben II.
2. Gömbkitöltés a 3-dimenziós állandó görbületű terekben 67
HORVÁTH JENŐ és S. S. RYSKOV: Az n-dimenziós tér rácsszerű egységgömbkitöltésében elhelyezhető hengerek sugaráról 91
HOFFMANN ANDOR: Megjegyzés a „változók szétválasztása módszerének" általánosításához ... 97
FÖLDES ANTÓNIA: A leghosszabb tiszta „fej" hosszának határeloszlásáról 105
SZILÁRD KÁROLY: Közönséges, normál-alakú elsőrendű differenciálegyenletekről, amelyeknek a jobb oldala a független változó periodikus függvénye 117

KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGÁRÓL

ÁDÁM ANDRÁS

1.

Kalmár László 1905. március 27-én született a Somogy megyében (Kaposvártól kb. 20 km-re északra) fekvő Edde község alsóbogátpusztai részében. A matematika iránti érdeklődése kisgyermekkorában is megnyilatkozott, és nem sokkal azután, hogy a vidéki elemi iskolából Budapestre került gimnáziumba, már komoly matematikai könyvek tanulmányozására volt képes. Egyetemre is a fővárosban járt. Professzorai közül leginkább Fejér Lipót és Kürschák József hatottak rá, ő maga pedig tudományos érdeklődésű diáktársai mesterének számított egyetemi évei során.

Tanulmányai befejezése után 1927-ben munkásságának élethossziglani színhelyére: a szegedi egyetemre került mint Ortvay Rudolf elméleti fizikus professzor tanársegéde. Pályájának ebben a szakaszában döntő indítékokat hozott számára göttingeni tanulmányútja, amelyen — több hírneves tudós között — a kor legnagyobb matematikusával, David Hilberttel is megismerkedhetett. Az elméleti fizikai tanszékről hamarosan átment a szegedi egyetemnek a Bolyaiak nevét viselő matematikai intézetébe, amelyet ekkoriban Riesz Frigyes és Haar Alfréd vezetett. Adjunktussá, később magántanárrá a második világháború előtt emelkedett; egyetemi tanárrá 1947-ben nevezték ki. 1949-től 1961-ig a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, ezután rendes tagja volt. 1950-ben Kossuth-díjat, 1975-ben Állami díjat kapott. A Bolyai János Társulat 1969-ben tiszteletbeli elnökké választotta. Nyugalomba vonulását megelőzően a szegedi József Attila Tudományegyetemen tanszékvezető egyetemi tanári, kutatócsoport-vezetői és kibernetikai laboratórium-vezetői tisztségeket töltött be.

1975-ben történt nyugalmaztatása inkább csak adminisztratív teendőit mérsékelte, tudományos és oktatói tevékenységét élete utolsó órájáig változatlan odaadással folytatta. 1976. augusztus 2-án érte a hirtelen halál az Akadémia mátraházi üdülőjében, amelyet évtizedek óta minden nyáron felkeresett, nem annyira kikapcsolódás, mint inkább zavartalan alkotó munka végett.

2.

Kalmár László érdeklődését a húszas évek végén a matematikai logika és halmazelmélet központi, súlyos problémái vonták magukra. Németországi tapasztalatai és az ekkoriban német egyetemeken működő Neumann János munkássága irányították figyelmét erre a területre, mivel ilyen jellegű vizsgálatok Magyarországon a megelőző másfél évtizedben (König Gyula halála óta) kevéssé folytak. A szóban forgó kérdések kutatása a matematika egészének megalapozása szempontjából döntő jelentőségű, és komoly filozófiai vonatkozásai is vannak.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Kalmár az évtizedek folyamán tartalmas dolgozatok sorát publikálta ezekről a kérdésekről, és a tárgykörnek világviszonylatban is egyik legkiválóbb kutatójává vált. Idevágó munkássága egyaránt tartalmaz eredeti eredményeket, mások által felfedezett tényeknek egyszerűsített, célratörő bizonyításait (ideértve a különböző tételek egymással való kapcsolatának elemzését is), és az ismeretelméleti vonatkozások taglalását.

A matematikai logika eldöntésproblémájának tárgya a következőképpen körvonalazható. Körül lehet határolni matematikai formuláknak egy F összességét abból a célból, hogy bármely olyan jólképzett zárt állítás, amely a matematikának axiómákkal megalapozott valamely ágában felmerülhet, kifejezhető legyen egy F-beli formulával[1].

Az eldöntésproblémával foglalkozó kutatások két fő iránya:

(1) találjunk F-ben minél bővebb G részosztályokat úgy, hogy egységes, algoritmikus eljárást lehessen megadni a G-beli formulák logikai értékének meghatározására,

(2) találjunk F-ben minél szűkebb H részosztályokat úgy, hogy megadható legyen olyan egységes, algoritmikus eljárás, amely minden F-beli f formulához egy H-beli h formulát rendel, és emellett f logikai értéke megegyezik h logikai értékével.

Ismeretes, hogy az eldöntésprobléma teljes megoldása lehetetlen, pontosabban szólva, amennyiben „algoritmikus eljárás"-on (amely intuitív módon használt fogalom) általánosan-rekurzív algoritmust értünk (az utóbbi már egzaktul körülhatárolt matematikai fogalom), úgy *nincsenek olyan G, H részosztályai F-nek, amelyek eleget tennének az* (1)*-ben,* (2)*-ben szereplő feltételeknek és a $G \supseteq H$ tartalmazásnak*[2]. Ha nem volna így (vagyis ha az eldöntésprobléma két fő iránya összetalálkozna azáltal, hogy $G \supseteq H$ elérhető lenne), ez azt jelentené, hogy gépies módszer áll rendelkezésünkre, amely (elvben) újabb ötletek nélkül, mechanikusan képes eldönteni bármely $f(\in F)$ formula igaz vagy hamis voltát. Az eldöntésprobléma algoritmikus megoldhatatlansága tehát azt vonja maga után, hogy szakadatlanul szükséges újabb, az eddigiektől lényegesen különböző bizonyítási módszereket kidolgozni a tudomány fejlődése során adódó újabb és újabb sejtések igazolására vagy cáfolatára. Kalmár egyszerűsített bizonyítást adott (l. [49], [52]) az eldöntésprobléma teljes megoldásának lehetetlenségére, és számos dolgozatban járult hozzá — részben Surányi Jánossal együtt — az eldöntésprobléma második fő irányának vizsgálatához.[3]

A matematikai logikának ezek a (K. Gödeltől, A. Churchtől és másoktól származó) további klasszikus eredményei, amelyeknek tárgykörét Kalmár behatóan művelte, olyan jellegűek, hogy közvetlenül kimondják a matematikában igazolható állítások rendszerének „nyílt", szüntelenül bővíthető voltát. Gödel tétele szerint minden axiomatikusan megalapozott értelmes matematikai elméletben megfogalmazható olyan állítás, amelynek sem igaz volta, sem hamis volta nem bizonyítható a rendszer keretein belül maradva. Church tétele általános érvényű (abban az értelemben, hogy nem egy-egy speciális axiomatikus rendszerre vonatkozik), és olyan

[1] A „jólképzett zárt állítás" fogalmának részletes bevezetésére itt nem akarunk kitérni, csak két fontos dolgot említünk meg:

a matematikában fellépő állítások általában jólképzettek;

bármely j jólképzett zárt állításhoz hozzárendelhető az „igaz" vagy „hamis" logikai értékek (helyesebben: a „van olyan modell, amelyben j igaz" és „j minden modellben hamis" megállapítások) pontosan egyike.

[2] Ez az állítás Church egy tételének — amelyre még utalni fogok — a következménye.

[3] E fő irányról Surányi [D] könyve részletes áttekintést ad.

végtelen probléma-sorozat létezését mutatja meg, hogy egyfelől a probléma-sorozat leírható egységes eljárással, másfelől azonban nem létezik olyan egységes algoritmus, amely a problémák mindegyikének megoldására alkalmas volna. Kalmár a két említett tétel bizonyítását lényegesen egyszerűsítette, igyekezett érvényességi körüket a lehető legszélesebbnek meghatározni, foglalkozott egymással való kapcsolatukkal és filozófiai jelentőségükkel (l. pl. [33], [34]).

Korábban már érintettem azt az ugyancsak Church által bevezetett hipotézist, amely szerint pontosan azok az eljárások végezhetőek el ténylegesen, amelyeket általánosan-rekurzív algoritmusoknak nevezünk[4]. Erre a munkahipotézisre számos matematikus szívesen támaszkodik. Kalmár László ide vágó vizsgálatai (l. [55], [58]) óva intenek minket attól, hogy Church hipotézisét végérvényes igazságként fogjuk fel; megmutatta, hogy ez a szemlélet olyan következményekhez vezet, amelyek elfogadhatatlanok. Kalmár véleménye szerint a ténylegesen kiszámítható függvények, a ténylegesen elvégezhető eljárások köre matematikai eszközeink gazdagodásával egyre bővül, és a fejlődés során olyan függvények is fel fognak lépni, amelyek értékeit (akkori eszközeinkkel) ki tudjuk majd számítani, holott e függvények nem általánosan-rekurzívak.

A matematika és filozófia határterületéhez tartozó Kalmár-munkák hitet tesznek szerzőjük azon meggyőződése mellett, hogy *a matematika sohasem válhat lezárt egésszé* (még csak egyre magasabbra törő, de befejezett alapokon nyugvó épületté sem), *hanem a fejlődés állandóan igényelni fogja lényegesen új matematikai gondolatok megjelenését, és a külső* (gyakorlati-tapasztalati) *forrásokkal való kapcsolatnak elevenen tartását.*

Kalmár tevékenységének eddig érintett ága jórészt pályájának első évtizedeire esik. Az 1955 előtti Kalmár-munkásságról e megemlékezésnél sokrétűbb és alaposabb ismertetést találhat az olvasó abban a méltatásban, amely az ötvenéves Kalmár László köszöntéséül jelent meg a Matematikai Lapokban Péter Rózsa tollából [C].

3.

A matematika alapjainak kutatásába Kalmár László olyan időben kapcsolódott be, amikor a halmazelmélet és a matematikai logika már viszonylag kiforrott, élénk fejlődésben levő tudományágak voltak; bennük olyan eredmények érlelődtek, amelyek bizonyos kutatási irányzatoknak a betetőzését jelentették[5]. Azok a területek viszont, amelyeknek Kalmár élete utolsó két évtizedében ereje javát szentelte — a kibernetikai matematika, és ezen belül főleg a számítástudomány — a kibontakozásnak még eléggé a kezdetén járó tudományágak. Annak körülhatárolása is vita tárgya, hogy mivel foglalkoznak és mire szolgálnak. Alapfogalmaik és azok kapcsolatai még csak kialakulófélben vannak. Kutatási témák bőségesen találhatók bennük; de azt, hogy ezek közül melyiknek mekkora hordereje lesz, és az egyes irányok fejlődése hová fog vezetni, alig láthatjuk előre.

A [62] dolgozatban Kalmár a kibernetika tárgyának körülhatárolására tett javaslatot. Véleménye szerint *a kibernetika főképpen az anyagi rendszerek szervezésé-*

[4] Kissé más térre víve át meggondolásainkat — a lényeg módosítása nélkül —: Church hipotézise szerint az általánosan-rekurzív függvényeknek és csak ezeknek ténylegesen kiszámíthatók az értékei.

[5] Eljutottunk oda, hogy az is időszerű kérdéssé vált (l. [76]), hogy a matematika alapjainak kutatása egyáltalán milyen irányban haladhat azután tovább, hogy jónéhány alapvető kérdést megoldottak, másokról kiderült, hogy elvileg megoldhatatlanok a korábban remélt értelemben.

nek és az ilyen rendszereken belüli információ-feldolgozásnak azon általános törvényszerűségeivel foglalkozik, amelyek függetlenek az anyag speciális mozgásformáitól.

A számítógépek elméletében és azok használatakor különféle jellegű formális nyelvek szerepelnek. Amikor valamely konkrét géppel foglalkozunk, háromféle nyelvre kell tekintettel lennünk. Ezek egyike a gép saját belső nyelve: az a nyelv, amellyel a gép működési módja a legtermészetesebben leírható. A másik a gép programozási nyelve: az a formalizmus, amelyen a géppel adatokat, utasításokat közölhetünk, és amelyen a gép az eredményeket kiadja nekünk. A harmadik a szokásos matematikai formulanyelv, amelyen a matematikus önmaga részére kezeli számításai és következtetései anyagát. Szükség van mindezen nyelvek precíz tanulmányozására, emellett a gépek jó használhatósága érdekében célszerű e nyelveket közelíteni egymáshoz, megvilágítani egymással való rokonságukat. Kalmár behatóan foglalkozott egy olyan számítógép-típus tervezésével, amelynek programozási nyelve a lehető legközelebb áll a matematikai formulanyelvhez; idevágó [60], [61], [63], [97], [101] munkái mellett műszaki terveket is készített egy ilyen géphez, és ötletei felhasználásával a Szovjetunióban meg is építették a gépet. Más dolgozataiban azt mutatta meg, hogyan illeszthető be a számítógépek belső leírása a modern algebra (a matematika egy elméleti ága!) kereteibe (l. [66], [73], [74], [75], [92]). Kiigazította az Algol programozási nyelv egy fogyatékosságát [90], és gráfokkal történő szemléletes áttekintést ajánlott a formális nyelvek kezelésére (l. [88], [91], [95]). [84] munkájában azt a kérdést vetette fel, nem kellene-e a matematikai jelölésrendszert (pl. azt a kitüntetett szerepet, amelyet a formulákban a négy megszokott alapművelet játszik) a gépekre való tekintettel többé-kevésbé módosítani.

Eddig inkább matematikai (átvitt) értelemben vett nyelvekről volt szó. Nyelveken közönségesen a természetes, beszélt nyelveket értjük; Kalmár ezeknek általános elméletéhez is hozzájárult, elsősorban a [79] és a két változatban megjelent [78], [83] munkáiban.

[59] dolgozatában új alapelvet közölt arra, hogy a logikai gépekben milyen módon reprezentáljuk a két logikai értéket („igaz" — „hamis") és a velük végzett műveleteket. A [67] cikkben az olyan gépek — Neumann János által felvetett — elméletébe kapcsolódott be, amelyek elég bonyolultak ahhoz, hogy önmagukat reprodukálni képesek legyenek (feltéve, hogy energiát és megfelelő alkatrészeket kapnak a külvilágból); a Kalmár-féle önreprodukáló géptípusnak a gyakorlati kivitelezése is lehetségesnek látszik. A [64], [80], [82], [86] számú Kalmár-munkák a biológiával határos kérdéseket érintenek.

A rendes taggá választását követő [68] akadémiai székfoglaló előadásában Kalmár László az információelmélet olyan irányú továbbfejlesztésére hívta fel a figyelmet, amely a jelek, jelsorozatok alakjában továbbított információ *mennyiségi* vizsgálatán túllépve az átvitt információ *tartalmi-minőségi* vonatkozásaival foglalkozik. Ez a kvalitatív információelmélet úgy viszonylana a megszokott kvantitatív elmélethez, mint a topológia a hagyományos (*mér*tannak is nevezett) geometriához.

4.

A Kalmár-életmű jóval bővebb, mint az írásban megformált Kalmár-munkák összessége. Egyénisége élesen elütött az olyan matematikusokétól, akik elsősorban a dolgozószoba csendjében gyarapítják tudományukat, és a nyilvános szereplést szükséges, de kellemetlen nyűgnek érzik. Az a hatás, amelyet ő különféle formájú személyes kapcsolatok révén a magyar matematikai (és egyéb tudományos) életre gyakorolt, jelentőségében nem sokkal marad el publikált oeuvre-je mögött.

Lelkes pedagógus volt, és vérbeli közéleti ember. Sem egyetemi óráin, sem tudományos előadásaiban nem szorítkozott arra, hogy tömören közölje a kiforrott, leszűrt eredményeket; hanem éreztette az azokhoz vezető — olykor vargabetűkkel nehezített — előkészítő meggondolásokat is. Arra törekedett, hogy a hallgató is részesévé váljon a felfedezés izgalmának, és az egyetlen kitaposott úton való végighaladás helyett hadd tapasztalja ki a kutatóra leselkedő mellékutak, zsákutcák elkerülésének módját. Az általa oktatott egyetemi tárgyakról (matematikai analízis, halmazelmélet, matematikai logika) írott jegyzeteit újra meg újra átdolgozta, sajátos pedagógiai elgondolásainak egyre következetesebb kifejtését keresve.

Alapos és rendszeres áttekintéssel bírt a matematika számos ágáról. Ezt a (ma már szinte egyedülállóan széles) látókört — sokirányú érdeklődése mellett — az tette elérhetővé, hogy kivételesen gyors volt a felfogása és a gondolkodása. A tudományos konferenciákon, amelyeken résztvett, fáradhatatlan figyelemmel kísérte (és jegyzetelte) az előadásokat. Az ehhez szükséges szellemi frissessége és befogadóképessége mellett azzal a ritka adottsággal is rendelkezett, hogy a vázlatosan előadott gondolatmeneteket hallgatva kicsiből is teljes képet alkotott magának az előadás tárgyáról. Legendás tájékozottságának jelentékeny hányadát nem olvasással, hanem ilyesféle közvetlen kapcsolatokkal szerezte.

Olyan ember volt, akiben erősen él az igény arra, hogy eleven kapcsolatot tartson az eseményekkel, aktívan részt vegyen a napirenden levő problémák megoldásában, az ügyek intézésében, — röviden: hogy benne legyen az élet sűrűjében. Tevékenyen közreműködött a legkülönbözőbb jellegű bizottságok, értekezletek munkájában[6]; rögtönzésszerűen ható, kötetlen felszólalásai a vitatott ügy iránti odaadó érdeklődésről tanúskodtak, és egyaránt kitűntek magvas meglátásaikkal s a szóban forgó tárgyat körüljáró gazdag asszociációikkal.

Közvetlen tanítványaival, fiatal kollégáival elmélyült figyelemmel foglalkozott. Szinte kimeríthetetlenül tudott megismerésre és továbbfejlesztésre érdemes témákat ajánlani. Munkatársainak új eredményeit legszívesebben úgy tekintette át, hogy előadatta azokat heti szemináriumain, amikor is az előadás gyakran csapott át kötetlen vitába[7].

A matematika és más tudományok kapcsolatának ápolását szívügyének tekintette; örömmel vette, ha a matematikai módszerek előrelendíthetik a többi tudományokban folyó vizsgálatokat. Sokoldalúságát mutatja, hogy munkái sorában egyaránt előfordulnak műszaki és filozófiai, biológiai és nyelvészeti vonatkozású dolgozatok. Munkatársai figyelmét is előszeretettel hívta fel határterületi, alkalmazási jellegű kérdésekre.

Kalmár László sok időt, sok energiát fordított a szervező munkára[8]. Írott életműve alighanem még kiterjedtebb lenne, ha egyénisége belterjesebb munka-stílusra ösztönözte volna. Közösségi működésének azonban maradandó, kézzelfogható

[6] Matematikus-körökben elterjedt közmondás-változat: „Nincsen ankét Kalmár nélkül."

[7] Az 1960 körüli években Kalmár osztálya keddenként rendezte a heti szemináriumot. Elvben este 7-től 9-ig tartott volna az összejövetel (Kalmár napirendjéhez hozzátartozott a kiadós délutáni alvás). Hét óra táján professzorunk átjött munkatársainak szobájába, ott egy darabig színes történeteket mesélt, például az egyetem húsz-harminc évvel azelőtti neves embereiről és érdekes eseményeiről, olykor vicceket mondott. Fél nyolc felé ment át a társaság az előadóterembe, ahol beláthatatlanul sokáig eltarthatott volna az érdemi munka, ha az épület esti kapuzárása nem korlátozza időnket. Fél tíz körül hosszú csengőszó jelezte az idő lejártát mindazoknak, akik még az épületben tartózkodtak. Ezután tömörebbre fogtuk a megbeszélést, és 15—20 perccel később kivonultunk a kapun a megkönnyebbülő portás színe előtt.

[8] Itt említjük meg, hogy az „Acta Cybernetica" és „Alkalmazott Matematikai Lapok" folyóiratoknak főszerkesztője, számos szaklapnak szerkesztőbizottsági tagja volt.

eredménye maradt reánk: a magyar számítástechnikai kultúra. Élete utolsó húszhuszonöt évében az hatotta át főcélként a tudományos közéletben való szereplését, hogy a matematikusokat a számítástudomány (és az azzal közeli kapcsolatban álló matematikai területek) művelésére buzdítsa, és irányítsa ilyen irányú tevékenységüket, hogy agitáljon a számítógépek beszerzése és építése mellett, valamint hogy előmozdítsa a gépek alkalmazását a tudomány és a gyakorlat különféle területein. Mindezekben nagyságrendekkel rosszabbul állnánk az ő lankadatlan erőfeszítései nélkül. Valamennyi magyar szakember, akinek működése a számítástudományra és -technikára irányul, Kalmár Lászlóra mint mesterére emlékezik, és túlzás nélkül elmondhatjuk, hogy a számítástudomány elméletének és gyakorlatának az a fejlettsége, amelyet Magyarországon napjainkban elértünk, személyesen az ő tevékenységéből eredt.

KALMÁR LÁSZLÓ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Az interpolációról, *Math. és Phys. Lapok* 33 (1926), 120—149.
[2] Zur Theorie der abstrakten Spiele, *Acta Sci. Math.* 4 (1928), 65—85.
[3] Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen, *Acta Sci. Math.* 4 (1929), 155—181.
[4] Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *Acta Sci. Math.* 4 (1929), 248—252.
[5] A „factorisatio numerorum" problémájáról, *Mat. és Fiz. Lapok* 38 (1931), 1—15.
[6] Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, I., *Acta Sci. Math.* 5 (1931), 95—107.
[7] Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *Acta Sci. Math.* 5 (1932), 222—236.
[8] Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes, *Acta Sci. Math.* 6 (1932), 59—60.
[9] Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses (Zürich, 1932), II.* 337—338.
[10] Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Ann.* 108 (1933), 466—484.
[11] Über einen Löwenheimschen Satz, *Acta Sci. Math.* 7 (1934), 112—121.
[12] Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, *Acta Sci. Math.* 7 (1935), 222—243.
[13] Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen, *Compositio Math.* 4 (1936), 137—144.
[14] A számelmélet alaptételéről, *Mat. és Fiz. Lapok* 43 (1936), 27—45.
[15] Zur Reduktion des Entscheidungsproblems, *Norsk Mat. Tidsskrift* 19 (1937), 121—130.
[16] Jelentés az 1938. évi Kőnig Gyula-jutalomról, *Mat. és Fiz. Lapok* 45 (1938), 1—17.
[17] On the reduction of the decision problem, I.: Ackermann prefix, a single binary predicate, *J. Symbolic Logic* 4 (1939), 1—9.
[18] On the possibility of definition by recursion, *Acta Sci. Math.* 9 (1940), 227—232.
[19] A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei, *Mat. és Fiz. Lapok* 48 (1941), 65—119.
[20] A matematikai exaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig,[9] *A másik ember felé (Exodus)* (1942), 39—58.
[21] Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára, *Mat. és Fiz. Lapok* 50 (1943), 1—23.
[22] Néhány szó a matematikáról azokhoz, akik világéletükben utálták, I—II.
I. rész: *Pro Christo* 8/4 (1943), 7—9.
II. rész: *Pro Christo* 9/3 (1944), 3—5.
[23] „Reménytelen eset vagyok?", *Pro Christo* 8/6 (1943), 7—9.
[24] (& Surányi János) On the reduction of the decision problem, II.: Gödel prefix, a single binary predicate, *J. Symbolic Logic* 12 (1947), 65—73.
[25] A számok hatványainak összegéről, I—III.
I. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 5—10.
II. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48) 39—47.
III. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48) 169—176.
[26] Gyertek, bizonyítsuk be Csebisev tételét! I—III.
I. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 89—90.
II. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 127—128.
III. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 176—182.

[9] A cikk kinyomtatott alakjában tévesen „axiomatikus rendszerig" szerepel.

[27] Matematika és dialektikus materializmus, *Magyar Technika* 3 (1948), 100—102.
[28] On unsolvable mathematical problems, *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948)*, 1949, vol. 1, 534—536.
[29] Une forme du théorème de Gödel sous des hypothèses minimales, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 229 (1949), 963—965.
[30] Quelques formes générales du théorème de Gödel, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 229 (1949), 1047—1049.
[31] Bizonyítsuk be Csebisev tételét, I—III.
I. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 2 (1949—50), 7—13.
II. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 2 (1949—50), 90—91.
III. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 2 (1949—50), 121—124.
[32] (& Surányi János) On the reduction of the decision problem, III.: Pepis prefix, a single binary predicate, *J. Symbolic Logic* 15 (1950), 161—173.
[33] Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen, *Methodos* 2 (1950), 220—226.
[34] Another proof of the Gödel—Rosser incompletability theorem, *Acta Sci. Math.* 12 (1950), 38—43.
[35] Contributions to the reduction theory of the decision problem, I.: Prefix $(x_1)(x_2)(Ex_3)\ldots$ $\ldots(Ex_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1 (1950), 64—73.
[36] Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen, *Publ. Math.* 1 (1950), 150—159.
[37] On Cauchy's convergence test, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1 (1950), 109—112.
[38] Contributions to the reduction theory of the decision problem,[10] III.: Prefix $(x_1)(Ex_2)\ldots(Ex_{n-2})$ $(x_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 2 (1951), 19—38.
[39] Contributions to the reduction theory of the decision problem, IV.: Reduction to the case of a finite set of individuals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 2 (1951), 125—142.
[40] (& Aczél János & J. G. Mikusiński) Sur l'équation de translation, *Studia Math.* 12 (1951), 112—116.
[41] Another proof of the Markov—Post theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 3 (1952), 1—27.
[42] A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 2 (1952), 89—112.
[43] Az eldöntésprobléma visszavezetése logikai formulák véges halmazon való kielégíthetőségének kérdésére, *Az I. Magyar Mat. Kongr. (Budapest, 1950) Közleményei*, 1952, 163—190.
[44] A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria hatása az axiómatikus módszer fejlődésére, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 3 (1953), 235—242.
[45] Az analízis módszerei a középiskolai tanításban, I—IV.
I. rész: *A mat. tanítása* 1 (1953), 22—32.
II. rész: *A mat. tanítása* 1 (1953), 40—50.
III. rész: *A mat. tanítása* 1 (1953), 74—80.
IV. rész: *A mat. tanítása* 1 (1954), 109—112.
[46] L'influence de la géométrie de Bolyai—Lobatchevsky sur le développement de la méthode axiomatique, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 5 (1954), *supplementum*, 117—126.
[47] K. Schröter egy, az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozó problémájának megoldása, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 5 (1955), 103—127.
[48] Über ein Problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemein-rekursiven Funktion, *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.* 1 (1955), 93—96.
[49] Közvetlen bizonyítás az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 6 (1956), 1—25.
[50] (& Hajnal András) Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez, I—II.
I. rész: *Mat. Lapok* 7 (1956), 26—42.
II. rész: *Mat. Lapok* 7 (1956), 218—229.
[51] (& Hajnal András) An elementary combinatorial theorem with an application to axiomatic set theory, *Publ. Math.* 4 (1956), 431—449.
[52] Ein direkter Beweis für die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität, *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.* 2 (1956), 1—14.
[53] Об огной гипотезе, применяемой в исследованиях о так называемых неразрешимых арифметических задачах, *Труды Третьего Всесоюзного Математического Съезда (Москва, 1956)*, 1959, том 4, 227—231.
[54] A matematikai logikáról, *Magyar Tudomány* 1 (1956), 369—391.
[55] Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 7 (1957), 19—38.

[10] A cikksorozat második részét Surányi János írta.

[56] (& Rédei László & Szőkefalvi-Nagy Béla) Frédéric Riesz (1880—1956), *Acta Sci. Math.* 17 (1956), 1—3.
[57] Über arithmetische Funktionen von unendlich vielen Variablen, welche an jeder Stelle bloss von einer endlichen Anzahl von Variablen abhängig sind, *Colloq. Math.* 5 (1957), 1—5.
[58] An argument against the plausibility of Church's thesis, *Constructivity in Mathematics (Proc. Coll. Amsterdam, 1957)*, 1959, 72—80.
[59] A new principle of construction of logical machines, *2-e Congrès Internat. de Cybernétique (Namur, 1958)*, 458—463.
[60] A practical infinitistic computer, *Infinitistic Methods in the Foundations of Mathematics (Proc. Sympos. Warsaw, 1959)*, 1961, 347—362.
[61] On a digital computer which can be programmed in a mathematical formula language, *A II. Magyar Matematikai Kongresszus (Budapest, 1960) előadáskivonatai*, 5. kötet, 3—16.
[62] Einige philosophische Probleme der Kybernetik, *Naturwissenschaft und Philosophie (Internat. Symp., Leipzig, 1960)*, 381—401.
[63] Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht, *Zeitschr. Angew. Math. Mech.* 40 (1960), T, 64—65.
[64] Wissenschaftliche Abstraktion und die Anwendung mathematischer Methoden in Biologie und Medizin, *Arzt und Philosophie*, Berlin 1960, 132—133, 150, 164.
[65] A contribution to the translation of arithmetical operators (assignment statements) into the machine language of the computer M—3. *Shuxue Jinzhan* 6 (1963), 321—338. (Az angolul írt munka kínai nyelven jelent meg.)
[66] Algorithmische Sprachen und Programmierung von Rechenautomaten, *Mathematische und Physikalisch-Technische Probleme der Kybernetik (Vorträge der Konferenz, Berlin, 1962)*, 1963, 147—176.
[67] Über eine Variante des Neumannschen selbstreproduzierenden Automaten, *Mathematische und Physikalisch-Technische Probleme der Kybernetik (Vorträge der Konferenz, Berlin, 1962)*, 1963, 522—528.
[68] A kvalitatív információelmélet problémái, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 12 (1962), 293—301.
[69] Über eine erkenntnistheoretische Wurzel des „Anti-Kybernetismus", *Kybernetik in Wissenschaft*, Berlin, 1962, 53—56.
[70] „Sejts és bizonyítsál!"? *Magyar Tudomány* 8 (1963), 816—823.
[71] Matematikai és nyelvi struktúrák, *Általános nyelvészeti tanulmányok II.*, Budapest, 1964, 11—74, 166—172, 295—304.
[72] On the problem of the foundation of our knowledge, *Foundation of Statements and Decisions*, Warsaw, 1965, 13—19.
[73] Les calculatrices automatiques comme structures algébriques, *Prévisions, Calcul et Réalités*, Paris, 1965, 9—22.
[74] О вложении теории автоматических цифровых вычислительных мащин в алгебраическую теорию автоматов Мура, Мили и Глущкова, *Теория Конечных и Вероятностных Автоматов*, Москва, 1965, 93—99.
[75] Un modèle algébrique de calculatrice automatique, *Troisième Congrès de Calcul et de Traitement de l'Information (Toulouse, 1963)*, Paris, 1965, 381—387.
[76] Foundations of mathematics — whither now? *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1967, 187—207.
[77] A matematikai nyelvészet eredményei a nyelvoktatásban, *Modern Nyelvoktatás* 5 (1967), 25—29.
[78] Meaning, synonymy and translation, *Comput. Linguist.* 6 (1967), 27—39.
[79] Le langage comme structure algébrique, *Cahiers Linguist. Théor. Appl.* 4 (1967), 73—82.
[80] (& Obál Ferenc & Madarász István & Muszka Dániel & Such György) Cybernetical model of the regulation of the homeostasis of the organism, *Abstracts of First Joint Congr. of Hung. Societies of Biochem. Biophys. and Physiol.* (Pécs, 1967), 42.
[81] R. Péter's work in the theory of recursive functions, *Les fonctions recursives et leurs applications (Coll. Internat., Tihany, 1967)*, 1969. 1—11.
[82] Pattern recognition and conditional reflexes (general problems), *5-e Congrès Internat. de Cybernétique (Namur, 1967)*, 1968, 136—140.
[83] Значение, синонимия и перевод, *Разработка Машинных (Автоматических) Систем Перевода с Огного Язика на Другой и их Применение*, Budapest, 1968, 374—390.
[84] On the problem of full utilization of the technical possibilities of computers in devising appropriate approximation methods for the solution of numerical problems, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 12/2 (1968), 75—79.
[85] A programozási nyelvekkel kapcsolatos további teendők, *Információ és Elektronika* 4 (1968), 251—254.

[86] Digitális számítógépek és célgépek alkalmazása az orvosi diagnosztikában, *Orvos és Technika* 7 (1969), 14—18.
[87] Bevezetés a kibernetikába, *A TIT Fiz. Kém. Mat. Szakosztályának Tájékoztatója* 15 (1969), 55—71.
[88] An intuitive representation of context-free languages, *Internat. Conf. Comput. Linguist., Stockholm, 1969*, Preprint 66 (10 oldal).
[89] A kibernetikáról, *Fiz. Szemle* 20 (1970), 129—134.
[90] Ist ALGOL wirklich eine algorithmische Sprache? *Automatentheorie und Formale Sprachen (Tagung, Oberwolfach, 1969)*, 1970, 305—315.
[91] „Fahnendiagramme" — ein anschauliches Hilfsmittel zur Angabe von Programmiersprachen, *Formale Sprachen und Programmiersprachen (Tagung, Oberwolfach, 1971)*.
[92] An algebraic model of systems of digital computers, *Internat. Symp. and Summer School on Math. Foundations of Computer Sci. (Warsaw, 1972)*, 1—12.
[93] A számítástechnikai szakemberképzés problémái a tudományegyetemeken, *Felsőoktatási Szemle* 21 (1972), 548—552.
[94] (riporter: Horányi Özséb) Beszélgetés a matematikáról, *Természet Világa* 103 (1972), 351—356.
[95] On a measure of divergence of a context-free language from finite state languages, *Recueil Linguist. de Bratislava IV., Proc. Symp. Algebraic Linguist. (Smolenice, 1970)*, 1973, 93—106.
[96] Az elektronikus digitális számítógépek eddigi fejlődése és a várható fejlődés fő irányai. (Kalmár szerkesztésében 1972-ben a MTA Természettudományi I. Főosztálya megbízásából készült tanulmány. Munkatársak: Hunya Péter, Kertész Ádám. Quittner Pál, Sára Attila, Székely Sándor.)
[97] Belső gépi nyelvek, beleértve a magasszintű nyelveket.[11] (Kalmár szerkesztésében 1973-ban a MTA Természettudományi I. Főosztálya megbízásából készült tanulmány. Munkatársak: Gyurkovics Éva, Hunya Péter, Komor Tamás, Makay Árpád, Muszka Dániel, Révész György, Sára Attila, Simon Endre, Székely Sándor, Varga Antal, Varga Tibor.)
[98] A számítástechnikai szakemberképzés problémái, *A számítástechnikai oktatás a hazai felsőoktatási intézményekben (Konferencia, Visegrád, 1974)*, 25—30.
[99] Géptől független szemlélet kialakítása a programtervezés oktatásában, *A számítástechnikai oktatás a hazai felsőoktatási intézményekben (Konferencia, Visegrád, 1974)*, 142—146.
[100] (riporter: N. Sándor László) A pedagógus a számítógépek korában, *Köznevelés* 30/20 (1974), 3—5.
[101] An alternative of the stack-like memory of a computer. (Egy Turkuban rendezett konferenciára szánt előadás. E posztumusz munkát Makay Árpád öntötte formába.)
[102] Beszámoló a Béke Hívei II. Világkongresszusáról, *Mat. Lapok* 1 (1950), 317—318.
[103] A tanszékvezetői munka tartalmi kérdései az egyetemen, *Felsőoktatási Szemle* 10 (1961), 573—580.

TOVÁBBI IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[A] Arató M., The work of Academician László Kalmár in the field of computer science, *Acta Cybernet.* 2 (1975), 179—181.
[B] Kardos I. Kalmár László (1970-ben készült TV-riport), *Sokszemközt — tudósokkal*, MRT—Minerva, Budapest, 1974, 197—208.
[C] Péter R., Kalmár László matematikai munkássága, *Mat. Lapok* 6 (1955), 138—150.
[D] Surányi J., *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe*, Budapest, 1959.
[E] Péter R., Kalmár Lászlónkról, *Magyar Tudomány* 21 (1976), 729—732.
[F] Tóth B., Kalmár László, *Tiszatáj* 30/4 (1976), 8—19.
[G] László Kalmár *Acta Sci. Math.* 38 (1976), 221—222.
[H] László Kalmár *Acta Cybernet.* 3 (1976), 1.
[I] László Kalmár *Problems of Control and Information Theory* 6 (1977), 91—92.
[J] Kalmár László *Tiszatáj* 30/9 (1976), 112.
[K] Kalmár László *Információ és Elektronika* 11 (1976), 163.

[11] Külön megemlítjük e munka 3. fejezetét és függelékét. Címük: „Javaslatok a Kalmár-féle formulavezérlésű számítógép korszerű alakjának megtervezésére, különös tekintettel a belső nyelvre", „Az FCCL-4 programozási nyelv szintaxisa".

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОФЕССОРА ЛАСЛО КАЛЬМАР

А. АДАМ

Ласло Кальмар (László Kalmár, 1905—1976) был одним из ведущих лиц математической жизни в Венгрии. Настоящий некролог трактует (1) о главных событиях научной карьеры Кальмара, (2) о деятельности Кальмара в математической логике, (3) о его деятельности в теории вычислительных машин и других разделах кибернетической математики, (4) о его личности как педагога и научного организатора. Прилагается список (претендующий на полноту) публикаций Кальмара.

ON THE MATHEMATICAL WORK OF LÁSZLÓ KALMÁR

A. ÁDÁM

Professor László Kalmár (1905—1976) was a leading personality of the mathematical life in Hungary. The present obituary deals with (1) the main events of Kalmár's scientific career, (2) the activity of Kalmár in mathematical logic, (3) his activity in computer science and other areas of cybernetical mathematics, (4) his personality as teacher and scientific organizer. A list (striving for completeness) of the publications of Kalmár is added.

RIESZ MARCEL MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA I.

HORVÁTH JÁNOS

Riesz Marcel 1886. november 16-án született Győrött. Matematika iránti hajlama korán megnyilvánult, akárcsak hat évvel idősebb bátyjánál, Riesz Frigyesnél. Az idősebb fivérnek azonban még küzdeni kell azért, hogy matematikát tanulhasson. Orvos apjuknak a tanári pálya az akkori polgári élet ranglétráján alacsonyabbnak tűnt mint az orvosi vagy mérnöki, és így Riesz Frigyes előbb két évig mérnökséget tanul a zürichi műszaki egyetemen mielőtt apja beleegyezik abba, hogy beíratkozzék bölcsészhallgatónak a pesti tudományegyetemre.

Riesz Marcel tanulmányait mindjárt mint matematika-fizikaszakos tanárjelölt kezdi a budapesti egyetemen. Az 1904-es Eötvös Loránd matematikai tanuló versenyen első helyezést nyer. Az 1908-as római nemzetközi matematikai kongresszuson még mint diák vesz részt, a résztvevők névsorában olvashatjuk: „Riesz F., Prof., Lőcse — Riesz M., Stud. Math., Budapest". Rómában kerül személyes kapcsolatba Mittag-Lefflerrel, akinek munkásságát már előzőleg tanulmányozta: első publikációja[1] [1] ismertetés Mittag-Leffler módszeréről analitikus függvényeknek csillagtartományba való folytatására {28}. A kongresszus után fenntartja a levélbeli kapcsolatot Mittag-Lefflerrel: a {29} és [8] alatt idézett cikkek kivonatok kettejük levelezéséből.

Az 1910/11-es tanévet Riesz Marcel Párizsban tölti. Abban az időben Párizsnak csak egy egyeteme volt és annak irodalmi és természettudományi szakai alkották a híres Sorbonne-t, amelyik teljes egészében a központi épületben volt elhelyezve: a különálló későbbi intézeteknek, így az Institut Henri Poincaré-nak, természetesen még nyomuk sem volt, hiszen Poincaré maga is élt még akkor (1912-ben halt meg), sőt a két Riesz testvér az utcán sétálva találkozott egyszer vele és Maurice Fréchet, akinek társaságában voltak, be is mutatta őket neki.

Riesz Marcel a Sorbonne könyvtárában dolgozott és az épülettel szemben levő Hôtel des Etrangers-ben lakott, amelyik egy pár éve még létezett. Oda érkezett 1911-ben Mittag-Leffler meghívása három előadás tartására. Riesz elutazott Stockholmba, hogy a meghívásnak eleget tegyen és élete végéig Svédországban maradt. 1911-től 1926-ig a stockholmi főiskolán docenskedett és, hogy sovány fizetését kiegészítse, mint biztosítási matematikus is működött. Kapcsolatait a biztosítással később is megtartotta: 1937-es és 1949-es párizsi látogatásainak eredeti célja az volt, hogy biztosítási kongresszusokon résztvegyen. Az első során tartotta emlékezetes előadását a Riemann—Liouville-integrálról [44], a második alkalmával szá-

[1] A szögletes zárójelben levő számok Riesz Marcel, a kapcsos zárójelben levők egyéb szerzők dolgozatainak a jelen cikk végén található jegyzékére utalnak.

mos előadást tartott Párizsban, Nancy-ban és Grenoble-ban (lásd Annales Inst. Fourier 1. köt., 1950, 27. old.).

1926-ban a lundi egyetemen kap tanszéket, onnan 1952-ben nyugalomba vonul és a következő nyolc évet főleg az Egyesült Államokban tölti. Már az 1947/48-as tanév során vendégtanár a chicagói egyetemen, 1952 és 1955 között Princeton, Stanford, a New York-i Courant intézet és a marylandi egyetem, majd 1956 és 1960 között a marylandi egyetem és az Indiana University között osztja meg idejét. Kisdiák kora óta kiválóan írt és beszélt németül és franciául, de az angol nyelvet csak chicagói látogatása előtt, érett korban kezdte tanulni és jellemző rá, hogy nagyon hamar tökéletes helyességgel és választékossággal bírta ezt a nyelvet is: míg 1955 előtt egyetlen angol nyelvű publikációja sincs (kivéve [17]-et, amelynek szövegét Hardy írta), 1955-től kezdve csak angolul publikál.

1960 nyarán megbetegszik. Két ikerlánya közül az egyik hazaviszi Lundba és ezentúl, kis utaktól eltekintve, életét szép lundi lakásában tölti. A Stockholmban rendezett 1962-es nemzetközi matematikuskongresszuson mint a svéd matematika nesztorát ünneplik és legkiválóbb tanítványát, Lars Hörmandert, jelenlétében tüntetik ki a Fields-díjjal. 1969 szeptember 4-én, türelemmel viselt betegség után meghal.

Riesz Marcel tagja volt a Svéd Tudományos Akadémiának. 1950-ben a koppenhágai egyetem természettudományi fakultása fennállásának századik évfordulója alkalmából tizenkét skandináv kiválóságnak díszdoktori címet adományozott. Egy újságból kivágott képen a tizenkét skandináv díszdoktor frakkban ül az első sorban, köztük Riesz Marcel és Hevesi György, a Nobel-díjas vegyész.

Tanítványai közt szerepel a legkiválóbb svéd matematikusok egész sora: Harald Cramér, Einar Hille, Otto Frostman, G. O. Thorin, Nils Erik Fremberg, Lars Gårding, Harry Malmheden és a már említett Hörmander. Pedagógusi sikereit elsősorban annak köszönhette, hogy bármikor, bárkivel hajlandó volt matematikáról beszélni. Szeretett reggel későn felkelni, hogy aztán hihetetlen energiával, fáradhatatlanul dolgozzék másnap hajnalig, sőt néha reggelig. 1949. júniusában éjjel utaztunk zsúfolt vonaton Párizsból Grenoble-ba, természetesen alvásról szó sem lehetett. Riesz Marcel az ablak előtt állt és nézett ki a sötétbe; Rényi Alfréd megkérdezte, min gondolkodik. „A Dirichlet-féle problémán" volt a válasz. Ugyanazon a nyáron Jacques Deny feljött Strasbourgból Párizsba, hogy Riesz Marcellal találkozzék. Deny akkoriban írta doktori értekezését {10} potenciálelméletről, amelynek jelentős részében Frostman vizsgálatait fejleszti tovább és helyezi új alapokra. Riesz nagy véleménnyel volt Deny disszertációjáról; azt állította róla, hogy ugyanazt a szerepet tölti be a Schwartz-féle disztribúcióelmélettel kapcsolatban, mint Fatou 1906-os disszertációja Lebesgue akkor új integrálfogalmával szemben. Szóval Deny megérkezett Párizsba, déli 12 órakor összejött Riesz Marcellal és megállás nélkül másnap hajnali négy óráig beszéltek potenciálelméletről. A törékeny fizikumú Deny még aznap visszautazott Strasbourgba mondván, hogy mégegy találkozást Riesz Marcellal nem élne túl.

Riesz Marcel érdeklődése a matematikán kívül sok másra is kiterjedt, például élénk figyelemmel követte a napisajtót. Fiatal korában szeretett színházba járni és hihetetlen memóriája folytán hosszú részleteket tudott sok évvel később a színdarabokból elmondani, sőt eljátszani. Memóriájának tudható be talán, hogy noha öt nyelvet beszélt tökéletesen, élete végéig zamatos tisztasággal beszélt magyarul és nyoma sem volt nála a külföldön élő magyarok sajnálatos szokásának, hogy beszédjükbe minduntalan idegen szavakat kevernek. Ha egy bizonyítást egyszer hallott, azt soha többé nem felejtette el és ennek köszönhető például, hogy Fejér

Lipót egy szép becslése (lásd Összegyűjtött Munkái, II. köt., 849. old.) megmenekült a feledéstől.

Az én kapcsolataim a Riesz családdal régi eredetűek: anyai nagyanyám leány korában egy utcában lakott Győrött Riesz doktorékkal és a Riesz fivéreket a bölcsőben ismerte. Mikor 1949 nyarán Párizsban megismerkedtem Riesz Marcellal, azonnal tudta, nemcsak hogy ki a nagyanyám, hanem nagyapámra is emlékezett, akit gyakran látott a Vígszínház színpadán. 1951 késő telén több héten át Párizsban, majd 1957-től 1960-ig a marylandi egyetemen voltam együtt Riesz Marcellal: ez a kapcsolat életem egyik nagy élménye volt és hálámnak csak egy kis részét rovom le azzal, hogy Riesz Marcel munkásságáról ezeken az oldalakon beszámolok.

Az alábbiakban Riesz Marcel tevékenységét tárgykörök szerint csoportosítva ismertetem, de nemcsak hogy nem térek ki mindenegyes cikkre, hanem még egész tárgyköröket is figyelmen kívül hagyok, így például fizikával kapcsolatos munkáit [48, 49, 53, 54, 56, 59]. Ezzel szemben igyekszem képet adni arról, miként befolyásolták Riesz eredményei későbbi szerzők műveit.

1. *Trigonometrikus sorok* [3, 6, 7, 12, 16, 26, 32]. Mint majdnem minden magyar matematikus a huszadik század első felében, Riesz Marcel is Fejér Lipóttól kapja a sugalmazást első eredményéhez. Cantor bebizonyította, hogy ha az

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

trigonometrikus sor egy megszámlálható halmaz kivételével zérushoz konvergál, akkor $a_n=b_n=0$ minden n-re {49, IX. fej., § 3}. Fejér Lipót disszertációja német változatában {14} rámutat arra, hogy ha a konvergenciát aritmetikai közepekkel való szummálással helyettesítjük, akkor ez az állítás már nem érvényes. Így az

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\ldots$$

sor szeleteinek aritmetikai közepei minden olyan helyen, amelyik nem 2π egész számú többszöröse, zérushoz tartanak. Fejér felveti a kérdést, vajon lehet-e az együtthatók eltűnésére következtetni, ha nem engedünk meg kivételes pontokat. Mármost Riesz Marcel a következő tételt állítja fel [3, 7, 12]:

Ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2}<\infty \tag{2}$$

feltétel teljesül és (1) *szeleteinek számtani közepei zérushoz tartanak, akkor* $a_n=b_n=0$ *minden n-re.*

Jegyezzük meg, hogy (2) teljesül, ha valamely $\alpha<1$ kitevőre az $a_n n^{-\alpha}$ és $b_n n^{-\alpha}$ sorozatok korlátosak. Riesz szellemes bizonyítása Fejér egy határérték tételén {14} alapszik, amelyik Riemann ún. első tételének {35, 450. §, II. köt., 145. old.; 49, IX. fej., (2.4)} analogonja: Legyen

$$F(x)=\frac{1}{48}a_0x^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^4} \tag{3}$$

az (1)-ből négyszeres integrálás útján nyert sor. Akkor

$$\frac{\Delta^4 F(x;\,2h)}{16h^4} = \frac{F(x+4h)-4F(x+2h)+6F(x)-4F(x-2h)+F(x-4h)}{16h^4} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

és ha (1) szeleteinek számtani közepei $f(x)$-hez tartanak, akkor a szimmetrikus negyedrendű deriváltra fennáll, hogy

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^4 F(x;\,2h)}{16h^2} = f(x).$$

Riesz bizonyítása még a következő általa felállított tételre {vö. 35, 451. §, II. köt., 146. old.} is támaszkodik: tegyük fel, hogy az F függvény szimmetrikus második deriváltja folytonos az I intervallumban és hogy szimmetrikus negyedik deriváltja — melyet Φ-vel jelölünk — I-ben létezik. Ekkor bármely $x \in I$ pontra és bármely $h>0$ számra a

$$\frac{\Delta^4 F(x;\,h)}{h^4}$$

hányados Φ-nek az $(x-2h,\ x+2h)$ intervallumban felvett alsó és felső határa közé esik.

Ebből a tételből ügyes okoskodással következik H. A. Schwarz egy tételének {35, II. köt., 147. old.} analogonja: Ha F másodrendű szimmetrikus deriváltja folytonos és negyedrendű szimmetrikus deriváltja mindenütt eltűnik, akkor F harmadrendű polinom.

Tegyük fel most már, hogy az (1) szeleteinek számtani közepei zérushoz tartanak. A (2) feltételből következik, hogy a (3) alatti F függvény második deriváltja folytonos és Fejér határértéktételéből az, hogy F negyedrendű szimmetrikus deriváltja azonosan eltűnik. Így az általánosított Schwarz-féle tétel alapján:

$$-\frac{1}{48}a_0x^4 + c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4},$$

ahol a jobboldalon álló sor egyenletesen konvergens. A baloldal nem periódusos részének el kell tűnnie: $a_0=c_0=c_1=c_2=0$, és mivel a jobboldal a baloldal Fourier-sora, $a_n=b_n=0$ minden $n\geqq 1$-re, Qu.e.d.

Riesz bebizonyítja továbbá, hogy ha (2) helyett azt az erősebb kikötést tesszük, hogy az a_n és b_n együtthatók zérushoz tartanak, akkor elég azt feltennünk, hogy (1) szeleteinek számtani közepei egy ún. reducibilis halmaz kivételével tartanak zérushoz. Fennáll Du Bois—Reymond tételének {35, 453. §, II. köt., 149. old.} analogonja is: Ha az (1) trigonometrikus sor együtthatói eleget tesznek a (2) feltételnek és a sor szeleteinek aritmetikai közepei minden x-re egy korlátos f függvénynek az x-ben felvett $f(x)$ értékéhez konvergálnak, akkor (1) az f Fourier-sora.

Riesz eredményeit később magasabbrendű számtani közepekre és Abel-féle közepekre általánosították, azonban a fent vázolt bizonyítási eljárás ezekben az esetekben nem alkalmazható. Rajchman és Zygmund {33} így írnak:

„Bármilyen érdekes is Fejér úrnak, Riesz úr által sikerrel alkalmazott tétele, nem úgy tűnik nekünk, hogy az út amelyet megnyit a követendő út a trigonometrikus

kifejtés unicitásának elméletében. Azt hisszük, hogy a következő körülményekkel kell számot vetni. 1°) A feltétel, amelynek szükségességét Riesz úr helyezte evidenciába, mely szerint az

$$\frac{1}{2}a_0x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2} \tag{4}$$

sor egy folytonos függvényhez konvergál, ahhoz a meggyőződéshez vezet bennünket, hogy a vizsgált esetben kétszeres integrálásnak elégnek kellene lennie. 2°) Bár úgy látszik, hogy Fejér úr tétele általánosítható magasabbrendű Cesàro-féle eljárással szummálható sorokra, a Poisson-féle eljárással szummálható sorok tanulmányozásához semmiféle támadási pontot nem nyújt. 3°) A negyedrendű általánosított szimmetrikus derivált alkalmazása (és fokozottabb mértékben a magasabbrendűeké) eléggé kényelmetlen."

Ezután Rajchman és Zygmund bebizonyítanak egy egyenlőtlenséget, amelyik a másodrendű szimmetrikus deriváltat köti össze az (1) sor Poisson-féle közepeivel, és az azonnal rákövetkező cikkben Zygmund {48} kimutatja, hogy ha (4) egy folytonos függvény Fourier-sora és az (1) sor Poisson-féle közepei a véges, integrálható f függvényhez tartanak, akkor (1) az f Fourier-féle sora. Az elmélet, a Verblunskytól származó későbbi élesítéssel, kényelmesen elolvasható Zygmund könyve {49} IX. fejezetének 7—8. §-ában; a szerző a jegyzetekben hangsúlyozza, hogy az egész kutatási irány Riesz Marceltől indult ki.

A [12] dolgozat végén Riesz megkérdi vajon egyenletesen konvergens-e az (1) sor, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(na_n\cos nx+nb_n\sin nx)$$

konvergens. Erre a kérdésre Neder {31} adott választ.

Fejér Lipót alapvető tétele szerint egy integrálható f függvény Fourier-sora szeleteinek számtani közepei minden pontban, melyben a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} \tag{5}$$

határérték létezik, ehhez a határértékhez tartanak. Ebből azonnal következik, hogy $k\geqq 1$-re a k-adrendű Cesàro-közepek is (5)-höz tartanak. Mármost Riesz Marcel 1909-ben közzétett [6] alatti cikkében bizonyítás nélkül kimondja, hogy az állítás a $0<k<1$ értékekre is igaz. A bizonyítást évekig nem közli, ez nála gyakori jelenség: perfekcionista természete miatt igen lassan és gondosan írta cikkeit, minden egyes szót külön latolgatva, teljes érthetőségre és választékos stílusra törekedett. Közben mások publikáltak bizonyításokat a tételre, míg végül — mint Riesz maga mondja — a Hilb—Riesz enciklopédiacikk [32] írásakor alkalma van az összes szerzők bizonyításait tanulmányozni és meggyőződni arról, hogy az övé még mindig a legegyszerűbb; így végül 1922-ben közzéteszi [26].

Mielőtt Riesz bizonyítását vázolnám, szeretném az olvasó emlékezetébe idézni a Cesàro-féle közepek definícióját, mert arra később úgyis szükségünk lesz. Legyen

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots \tag{6}$$

egy komplex tagú sor és jelölje

$$s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n \qquad n=0,1,\ldots$$

e sor részletösszegeit. Hölder vezette be az (s_n) sorozat magasabb rendű $H_n^{(k)}$ közepeit {20, § 5.2, 94. old.}. A $k=1$ értékre $H_n^{(1)}$ egyszerűen az első $n+1$ szelet

$$(7) \qquad \frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1} = \frac{(n+1)u_0+nu_1+\ldots+u_n}{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)u_j$$

számtani közepe, míg egynél nagyobb egész k számra a Hölder-közepeket a rekurzív

$$H_n^{(k)} = \frac{H_0^{(k-1)}+\ldots+H_n^{(k-1)}}{n+1}$$

definíció szolgáltatja. A Hölder-közepek kezelése azonban nehézkesnek bizonyult és így azokat Cesàro-módosította: míg Hölder úgy jut el a $H_n^{(k)}$ középhez, hogy váltakozva összead és oszt, addig Cesàro előbb k-szor összead és csak a végén oszt egy megfelelő mennyiséggel. Pontosabban szólva legyen

$$S_n^{(1)} = s_0+s_1+\ldots+s_n$$

és $k>1$ egész számra ismét rekurzíve

$$S_n^{(k)} = S_0^{(k-1)}+\ldots+S_n^{(k-1)}.$$

Jelölje $E_n^{(k)}$ az $S_n^{(k)}$ kifejezést abban a speciális esetben, amikor a (6) sorban $u_0=1$ és $u_n=0$ minden $n\geqq 1$ indexre. A (6) sor szeleteinek k-adrendű Cesàro-féle közepeit a

$$(8) \qquad C_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{E_n^{(k)}}$$

képlet definiálja {20, § 5.4, 96. old.}. Az $S_n^{(k)}$ összegeket definiálhatjuk még az

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(k)}x^n$$

identitással és akkor

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(k)}x^n.$$

Mint Knopp, Riesz Marcel, Chapman és mások {46, 53. §, 104. old.} egymástól függetlenül észrevették, ezek a kifejezések, és így a (8) Cesàro-féle közepek minden -1-nél nagyobb valós k számra értelmezve vannak. Explicite

$$E_n^{(k)} = \binom{n+k}{n},$$

$$S_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n}E_{n-j}^{(k)}u_j = \sum_{j=0}^{n}E_{n-j}^{(k-1)}s_j,$$

és egész k esetében

$$(9) \qquad C_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\left(1-\frac{j}{n+2}\right)\ldots\left(1-\frac{j}{n+k}\right)u_j.$$

A $k=0$ értékre $E_n^{(0)}=1$ $(n\geqq 0)$ és $C_n^{(0)}=s_n$. A $k=1$ esetben $E_n^{(1)}=n+1$ és $C_n^{(1)}=H_n^{(1)}$ éppen a (7) alatti kifejezés. Egynél nagyobb egész k számra $C_n^{(k)}$ és $H_n^{(k)}$ különböznek

egymástól, de a Knopp—Schnee-tétel {20, § 5.8, 103. old.; 27, § 6, 43. old.} értelmében $C_n^{(k)}$-nek akkor és csak akkor van határértéke $n \to \infty$-nél, ha $H_n^{(k)}$-nek van, és ez esetben a két határérték megegyezik.

Legyen mármost $0<k<1$ és jelöljük az integrálható f függvény (1) alakú Fourier-sorának megfelelő $S_n^{(k)}$ összegeket $S_n^{(k)}(x)$-szel, azaz legyen

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2} E_n^{(k)} a_0 + \sum_{j=1}^{n} E_{n-j}^{(k)} (a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

Ekkor a Fourier-sor k-adrendű Cesàro-közepeit a

$$C_n^{(k)}(x) = \frac{S_n^{(k)}(x)}{E_n^{(k)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t)\, K_n(t)\, dt$$

kifejezés adja meg, ahol $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)$ és

$$E_n^{(k)}\, K_n(t) = \frac{1}{2} E_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} E_{n-j}^{(k)} \cos jt.$$

Ellentétben a Fejér által vizsgált $k=1$ esettel, a $K_n(t)$ mag itt nem pozitív és a jelváltások száma növekvő n-nel végtelenhez tart. Riesz elemi úton két egyenlőtlenséget [26, (15) és (16), 110. old.], {49, III. fej., (5.5)} bizonyít be

$$|K_n(t)| \leqq An, \tag{10}$$

$$|K_n(t)| \leqq \frac{B}{t^{k+1} n^k}, \tag{11}$$

midőn $0 \leqq t \leqq \pi$, ahol az A és B állandók csak k-tól függnek. Míg (10) azonnal következik abból, hogy $E_n^{(k)} \leqq E_{n+1}^{(k)}$, addig (11) bizonyítása több fortélyos ötleten múlik, amelyeket Fejér Lipót is megemlít és felhasznál {15; 16, bevezetés, 5. pont és § 2, 10. pont}.

A hét egyenlőtlenségből Riesz Marcel tétele könnyen következik. Először is az

$$\int_0^{\pi} |K_n(t)|\, dt$$

integrál korlátos, midőn $n \to \infty$, mert az integrációt a $\left[0, \frac{1}{n}\right)$ és $\left[\frac{1}{n}, \pi\right]$ intervallumokra felbontva (10) és (11)-ből az

$$An \frac{1}{n} + \frac{B}{n^k} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t^{k+1}} = C$$

felső korlátot kapjuk. Ha S-sel jelöljük az (5) alatti határértéket, akkor

$$C_n^{(k)}(x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{\varphi(t) - 2S\}\, K_n(t)\, dt.$$

Adatván $\varepsilon>0$, legyen $\delta>0$ oly kicsiny, hogy $|\varphi(t)-2S| \leqq \varepsilon$, midőn $0 \leqq t \leqq \delta$. Ekkor (11) segítségével nyerjük, hogy

$$|C_n^{(k)}(x) - S| \leqq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\delta} |K_n(t)|\, dt + \frac{B}{\pi \delta^{k+1} n^k} \int_{\delta}^{\pi} |\varphi(t) - 2S|\, dt.$$

Mivel az első integrál $\leqq C$ és a második véges, mert $\varphi(t)-2S$ a feltevés szerint integrálható, a jobboldalt tetszés szerint kicsinnyé tehetjük, ha előbb ε-t elég kicsinek, majd n-et elég nagynak választjuk. Hasonló módon bizonyítható be Lebesgue tételének általánosítása, mely szerint $C_n^{(k)}(x)$ minden ún. Lebesgue-féle pontban, és így majdnem mindenütt, az $f(x)$ értékhez tart, midőn $n \to \infty$.

A már említett Hilb—Riesz-féle enciklopédiacikk [32] könnyen olvasható, érdekes áttekintést nyújt a Fourier-féle sorok elméletében a század első negyede folyamán elért eredményekről.

2. *Hatványsorok* [1, 2, 6, 7, 8, 10, 20, 21]. Fatou már említett doktori értekezésében {12, 389—391. old.} bebizonyította, hogy ha az f függvény a $|z| \leqq 1$ egységkörlemez belsejében reguláris és ha az f-et előállító

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{12}$$

hatványsorra fennáll, hogy $c_n \to 0$ midőn $n \to \infty$, akkor a hatványsor konvergens a $|z|=1$ kör minden pontjában, melyben f reguláris. Természetesen, ha a hatványsor az egységkörnek akárcsak egy pontjában is konvergál, akkor c_n szükségképpen zérushoz tart. Landau kihangsúlyozza könyvében {27, 15. old.}, hogy ez a tétel nagyon figyelemreméltó, mert a hatványsor konvergenciájának vagy divergenciájának a konvergenciakör határán általában semmi köze sincs a függvény regularitásához vagy szingularitásához az illető pontban és így mind a négy eset lehetséges. Példának a következő sorokat hozza fel: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mindenütt divergál az egységkörön, de az $f(z)=(1-z)^{-1}$ függvény, melyet előállít reguláris $z=-1$-ben és szinguláris $z=1$-ben; $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^n$ konvergál és $-\log(1-z)$ reguláris a $z=-1$ pontban, míg $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$ konvergál a $z=1$ pontban, de a Vivanti—Pringsheim-tétel {27, § 17} értelmében a függvény, melyet előállít szinguláris ottan.

Riesz Marcel már korai dolgozataiban [6, 7, 10] nagy érdeklődést mutat Fatou tétele iránt, azt általánosítja, egyszerűbb bizonyítást ad rá és később [20, 21] a bizonyításokat tovább egyszerűsíti. Riesz általánosításai két irányban mennek:

1) Ha f a $|z|=1$ kör zárt ívének minden pontjában reguláris és ha $c_n \to 0$, akkor (12) az illető íven egyenletesen konvergens. Ezt az állítást szokták a Fatou—Riesz tételnek nevezni.

2) Ha egy $k \geqq 0$ számra fennáll, hogy

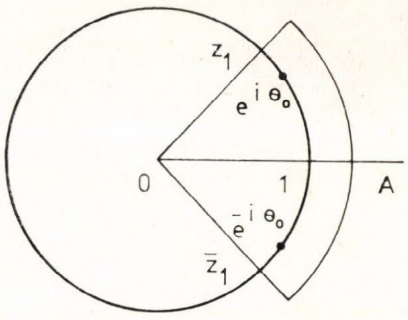
$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{n^k} = 0$$

és f reguláris az egységkör z pontjában, akkor a (12) hatványsor szeleteinek k-adrendű Cesàro-közepei $f(z)$-hez tartanak a z pontban. Itt is fennáll, hogy minden zárt regularitási íven a konvergencia egyenletes.

Mint a következő pontban látni fogjuk, Riesz Marcel kiterjesztette még Fatou tételét hatványsorokról Dirichlet-féle sorokra.

A bizonyítási ötletet, amelyik Rieszné'l más alkalmakkor is felmerül, a következő tétel kapcsán szeretném vázolni, amelyik ennek a kérdéskörnek legegyszerűbb

állítása: *Ha c_n korlátos, akkor a* (12) *hatványsor részletösszegei minden regularitási íven egyenletesen korlátosak.* Ez a tétel is általánosítható Cesàro-közepekre: ha egy $k \geqq 0$ számra az $n^{-k}c_n$ sorozat korlátos, akkor minden regularitási íven a (12) sor szeleteinek k-adrendű Cesàro-közepei egyenletesen korlátosak. A Fatou—Riesz-tétel bizonyítása végett utalok elsősorban Landau könyvére {27, § 18, 73. old.}, míg a Cesàro-közepekkel kapcsolatos állítások miatt Riesz [21] alatti dolgozatára.



1. ábra

Ha (12) konvergenciasugara egynél nagyobb, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az f függvény reguláris a $z=e^{i\theta}$ kör $-\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_0$ ívén és legyen $|c_n| \leqq C$ minden $n \geqq 0$ egész számra. Található egy θ_1, $\theta_0 < \theta_1 < \pi$, és egy $A > 1$ szám úgy, hogy f a $0 \leqq r \leqq A$, $-\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_1$ zárt S körcikk minden $z=re^{i\theta}$ pontjában reguláris. Legyen $z_1 = e^{i\theta_1}$. Riesz alapvető ötlete mármost a

$$g_n(z) = \{f(z) - (c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n)\} \frac{(z-z_1)(z-\bar{z}_1)}{z^{n+1}}$$

segédfüggvények bevezetése. Állítom, hogy az adott feltételek mellett a $g_n(z)$ függvények egyenletesen korlátosak az S körcikkben, azaz

$$|g_n(z)| \leqq M \quad \text{midőn } z \in S, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Ebből a tétel azonnal következik, mert ha B-vel jelöljük $|f(z)|$-nek az S-en felvett maximumát, akkor

$$|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \leqq \frac{M}{|z-z_1| \cdot |z-\bar{z}_1|} + B$$

és a jobboldal korlátos, ha $z=re^{i\theta}$-ra fennáll $-\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_0$.

A maximum-elv alapján elég a (13) egyenlőtlenséget S határán bebizonyítani. Jegyezzük meg először is, hogy midőn $r=|z|<1$, akkor érvényes a

$$|f(z) - (c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n)| \leqq \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu z^\nu \right| \leqq C \frac{r^{n+1}}{1-r} \tag{14}$$

becslés. Tekintsük most S határainak különböző részeit:

1) A $z=0$ pontban $g_n(0) = c_{n+1}|z_1|^2 = c_{n+1}$, tehát $|g_n(0)| \leqq C$.

2) A 0 és a z_1 pontokat összekötő nyílt egyenes szakaszon, azaz amikor $\theta = \theta_1$ és $0 < r < 1$, fennállnak a $|z-z_1| = 1-r$ és $|z-\bar{z}_1| \leqq 2$ becslések és így (14) segítségével

$$|g_n(z)| \leqq C \frac{r^{n+1}}{1-r} \cdot \frac{2(1-r)}{r^{n+1}} = 2C.$$

Szimmetria miatt ugyanez a becslés érvényes a 0 pontot a $\bar{z}_1$ ponttal összekötő egyenes szakaszon.

3) $g_n(z_1) = g_n(\bar{z}_1) = 0$.

Mielőtt továbbmennénk, jegyezzük meg, hogy midőn $1 \leqq r \leqq A$, akkor

$$(15) \quad |f(z)-(c_0+c_1 z+\ldots+c_n z^n)| \leqq B+C|1+z+\ldots+z^n| \leqq B+C\frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

4) Legyen $1<r<A$. Ha $\theta=\theta_1$, akkor $|z-z_1|=r-1$ és $|z-\bar{z}_1|\leqq 2A$, míg ha $\theta=-\theta_1$, akkor $|z-z_1|\leqq 2A$ és $|z-\bar{z}_1|=r-1$. Mindkét esetben (15) segítségével a

$$|g_n(z)| \leqq \left(B+C\frac{r^{n+1}}{r-1}\right)\frac{2A(r-1)}{r^{n+1}} \leqq 2AB+2AC$$

becslést nyerjük.

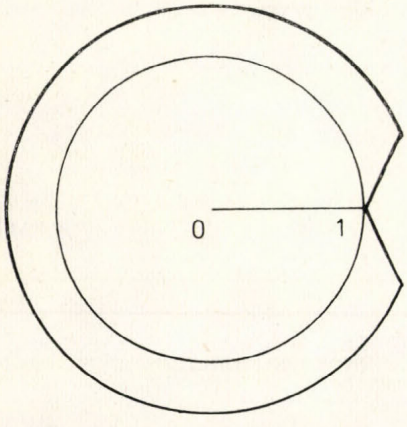
5) Végül is legyen $r=A$ és $-\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_1$. Ekkor $|z-z_1|\leqq 2A$, $|z-\bar{z}_1|\leqq 2A$ és így ismét (15) alapján

$$|g_n(z)| \leqq \left(B+C\frac{A^{n+1}}{A-1}\right)\frac{4A^2}{A^{n+1}} \leqq 4A^2\left(B+\frac{C}{A-1}\right).$$

Világos, hogy ezzel a (13) becslés és vele a tétel teljes bebizonyítást nyert.

Zygmund {47, 91—96. old.; 49, IX. fej., (5.7) és (9.21), 338. és 368. old.} a Fatou-tételnek és Riesz által adott kiterjesztéseinek egész más bizonyításait adta. Ezek a bizonyítások az ún. Riemann-féle lokalizációs elven múlnak, valamint ennek Zygmundtól és Rajchmantól származó élesítésein, amelyek az előző pontban említett vizsgálatokban is lényeges szerepet játszottak. Egy kicsit korábban már Neder {31} közölt hasonló eredményeket a Fatou—Riesz-tétellel kapcsolatban.

A [8] alatti cikk címében szereplő Abel-féle problémát elnagyoltan így lehet megfogalmazni: Legyen f a T tartományban analitikus. Tegyük fel, hogy $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ minden $z \in T$-re és, hogy $f(z)$ az $f(z_0)$ határértékhez tart, midőn z a T-nek z_0 határpontjához konvergál. Vajon igaz-e az $f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_0)$ egyenlőség? Ezzel kapcsolatban Riesz a következő tételt állította fel: Legyen $R>1$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ és S az $|z|\leqq R$, $\alpha \leqq \arc(z-1) \leqq 2\pi-\alpha$ egyenlőtlenségek által értelmezett zárt halmaz. Ha f az S halmazon folytonos és a $z=1$ kivételével az S minden pontjában reguláris, akkor az f-nek a $|z|<1$-ben összetartó (12) hatványsora a $|z|=1$ körön is egyenletesen konvergens és kiváltképpen $f(1)=\sum c_n$. Mittag-Leffler {29} azt hitte, hogy a tétel csak akkor igaz, ha f Lipschitz-feltételnek tesz eleget. Landau könyve {27, § 12} egy Hardynak tulajdonított egyszerű bizonyítást közöl a tételre, amely azt mutatja ki, hogy az adott feltételek mellett nc_n zérushoz tart, midőn n minden határon túl nő. Ebből az állítás az ún. kis Tauber-féle tétel egy könnyű variánsa {27, § 11} alapján folyik.



2. ábra

3. *Dirichlet-sorok és tipikus közepek* [4, 5, 6, 9, 11, 13, 17, 22, 27, 29, 30]. Riesz Marcel első igazán jelentős eredménye, amely egycsapásra ismertté tette nevét és Hardy barátságát szerezte meg számára, szintén

Fejér Lipót egy megjegyzéséhez fűződik. Az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{16}$$

sor a $\mathrm{Re}\, s>1$ értékekre konvergens és összege ott az s komplex változónak analitikus függvénye: ez a $\zeta(s)$-sel jelölt Riemann-féle zéta-függvény. Az így értelmezett függvény analitikusan folytatható az egész számsíkba az $s=1$ pont kivételével, ahol egyszerű pólusa van. Mármost Fejér vette észre, hogy a (16) sor a $\mathrm{Re}\, s=1$ egyenes egyetlen pontjában sem szummálható bármilyen k-adrendű Cesàro-féle eljárással. A feladat tehát az volt, egy olyan eljárást találni, amellyel (16) az említett egyenes bármely $s\neq 1$ pontjában a $\zeta(s)$ értékhez szummálható.

Általánosabban tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s} \tag{17}$$

Dirichlet-féle sort, ahol

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

a valós számoknak egy növekvő sorozata, mely végtelenhez tart; ezt a sorozatot λ-val jelöljük és a (17) sor típusának nevezzük. Így a (16) sor típusa $(\log n)$, míg egy hatványsor a $z=e^{-s}$ helyettesítéssel egy (n) típusú Dirichlet-sorba megy át. Az ilyen sorok szummálására vezette be Riesz a tipikus közepeket.

Legyen

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots \tag{6}$$

egy végtelen sor, $k>0$ és $0<\omega<\infty$ egy valós szám. Alkossuk meg a

$$R(\omega;\lambda,k)=\sum_{\lambda_j\leqq\omega}\left(1-\frac{\lambda_j}{\omega}\right)^k u_j \tag{18}$$

kifejezéseket. Ha (18) egy véges h határértékhez tart midőn $\omega\to\infty$, akkor azt mondjuk, hogy (6) a k-adrendű, $\lambda=(\lambda_n)$ típusú Riesz-féle eljárással h-hoz szummálható. Abban az esetben, amikor $\lambda_j=j$, az $\omega=n+1$ értékre az

$$R_n(k)=R(n+1;(j),k)=\sum_{j=0}^{n}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)^k u_j$$

összeget kapjuk, melynek hasonlósága a $C_n^{(k)}$ Cesàro-féle közép (9) alatti kifejezéséhez nyilvánvaló. Mint azonban látni fogjuk, a Riesz-féle eljárásnál lényeges, hogy az ω paraméter folytonosan és nem diszkréten tart végtelenhez.

A $k=1$ esetben az $\omega=\lambda_n$ értékre

$$R(\lambda_n;\lambda,1)=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_j)u_j}{\lambda_n}=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)s_j}{\lambda_n},$$

ahol, mint eddig, $s_j=u_0+\ldots+u_j$. Ha még $\lambda_j=j$, akkor az

$$R_n(1)=\frac{(n+1)u_0+nu_1+\ldots+u_n}{n+1}=\frac{s_0+\ldots+s_n}{n+1}$$

közepeket kapjuk, azaz $C_n^{(1)}$-t.

Hogy az egytől különböző rendű közepeket is összehasonlíthassuk, vezessük be a

$$T(\omega;\lambda,k)=\sum_{\lambda_j\leqq\omega}(\omega-\lambda_j)^k u_j \tag{19}$$

összegeket. A $k=0$ esetben a $\sum_{\lambda_j\leqq\omega} u_j$ „számláló" függvényt kapjuk, melyet egyszerűen $T_\lambda(\omega)$-val jelölünk. Ennek segítségével (19)-et a

$$T(\omega;\lambda,k)=\int_0^\omega(\omega-\tau)^k\,dT_\lambda(\tau)=k\int_0^\omega(\omega-\tau)^{k-1}T_\lambda(\tau)\,d\tau$$

alakban írhatjuk. Egy konstans faktortól eltekintve, az utolsó integrál éppen a törtrendű integrálást kifejező

$$(I^k f)(\omega)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\omega(\omega-\tau)^{k-1}f(\tau)\,d\tau$$

Riemann—Liouville-integrál: itt lép fel először Riesz Marcelnél ez a fogalom, amelyik későbbi munkásságában központi helyet foglal majd el. Ismeretes és könnyen belátható, hogy $I^k(I^h f)=I^{k+h}f$ és, hogy egész k-ra $I^k f$ az f függvény k-szor iterált integrálja. A $k\Gamma(k)=\Gamma(k+1)$ függvényegyenlet segítségével a

$$T(\omega;\lambda,k)=\Gamma(k+1)(I^k T_\lambda)(\omega)$$

és

$$R(\omega;\lambda,k)=\frac{\Gamma(k+1)}{\omega^k}(I^k T_\lambda)(\omega)$$

kifejezéseket kapjuk. Másrészt a Stirling-formula {35, I. köt., 543. old.} alapján

$$\lim_{n\to\infty}n^{-k}E_n^{(k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)n!\,n^k}=\frac{1}{\Gamma(k+1)}$$

és így a k-adrendű Cesàro-közepeket definiáló (8) formula helyettesíthető a

$$C_n^{(k)}=\frac{\Gamma(k+1)}{n^k}S_n^{(k)}$$

képlettel: a kapott kifejezéseket nagyjából úgy hasonlíthatjuk össze, hogy míg Riesznél a „részletösszeg k-szoros integrálja" szerepel, addig Cesàronál a „részletösszeg k-szoros iteráltja" jön be. Ez arra enged gondolni, hogy a k-adrendű Cesàro-féle szummálási eljárás ekvivalens a k-adrendű és $\lambda=(j)$-típusú Riesz-féle szummálással, azaz (6) akkor szummálható az egyik eljárással, ha szummálható a másikkal és a két szumma ugyanaz. Ez az állítás igaz [9], de bizonyítása eléggé körülményes {vö. 20, § 5.16, 113. old.; 18}.

Legyen (p_j) egy szigorúan pozitív (azaz $p_j>0$) számokból álló sorozat és tegyük fel, hogy a

$$P_n=p_0+p_1+\ldots+p_n$$

jelöléssel fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n}=0. \tag{20}$$

Az

$$N_n(p) = \frac{p_n s_0 + p_{n-1} s_1 + \ldots + s_0 s_n}{P_n} = \frac{P_n u_0 + P_{n-1} u_1 + \ldots + P_0 u_n}{P_n}$$

hányadosokat a (6) sor Voronoi—Nörlund-féle közepeinek nevezzük és az $(N_n(p))$ sorozat határértéket $n \to \infty$-re — amennyiben létezik — a (6) sor (p_j) súlyokkal képezett szummájának; ez esetben egyszerűen azt fogjuk mondani, hogy a (6) sor $N(p)$-szummálható. Példa egy Voronoi—Nörlund-középsorozatra a k-adrendű Cesàro-közepek $C_n^{(k)}$ sorozata, amelynél

$$p_j = \binom{j+k-1}{j}.$$

Ugyancsak példa az $R_n(k)$ sorozat, amelynél $P_n = (n+1)^k$.

Tekintsük az $N_n(p)$ közepeken kívül egy másik, a $q = (q_j)$ súlyok által definiált $N_n(q)$ Voronoi—Nörlund-közepek egy sorozatát. Jegyezzük meg, hogy (20) és a q sorozatra vonatkozó analóg feltevés miatt a $\Sigma p_n x^n$, $\Sigma P_n x^n$, $\Sigma q_n x^n$ és $\Sigma Q_n x^n$ sorok konvergálnak, midőn $|x| < 1$. Definiáljuk a (k_j) és (l_j) sorozatokat a

$$\frac{\Sigma q_j x^j}{\Sigma p_j x^j} = \frac{\Sigma Q_j x^j}{\Sigma P_j x^j} = \Sigma k_j x^j$$

és

$$\frac{\Sigma p_j x^j}{\Sigma q_j x^j} = \frac{\Sigma P_j x^j}{\Sigma Q_j x^j} = \Sigma l_j x^j$$

egyenletek által. Riesz [29] a következő tételt bizonyítja be {20, § 4.3—4.}, amelyik Toeplitz határértéktételének {35, 308. §, I. köt., 549. old.} aránylag egyszerű folyománya:

Ahhoz, hogy minden $N(p)$-szummálható sor $N(q)$-szummálható legyen, szükséges és elégséges egyrészt a

$$\frac{|k_0| P_n + |k_1| P_{n-1} + \ldots + |k_n| P_0}{Q_n}$$

sorozat korlátos volta és másrészt a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k_n}{Q_n} = 0$$

reláció.

Ebből könnyen következik:

Az $N(p)$ és $N(q)$ szummálási eljárások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha $\Sigma |k_n| < \infty$ és $\Sigma |l_n| < \infty$.

Legyen most $k = 2$ és hasonlítsuk össze a $C_n^{(2)}$ és az $R_n(2)$ közepeket. Ekkor $P_j = E_j^{(2)}$, $Q_j = (j+1)^2$ és

$$\Sigma Q_j x^j = \Sigma (j+1)^2 x^j = x \Sigma (j+1) j x^j + \Sigma (j+1) x^j =$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3} = (1+x) \Sigma E_j^{(2)} x^j, \tag{21}$$

azaz $k_0 = k_1 = 1$, $k_j = 0$, ha $j \geqq 2$ és $l_j = (-1)^j$. Így $\Sigma |k_j| < \infty$, de $\Sigma |l_j| = \infty$ és a két metódus nem ekvivalens: ebből kitűnik, hogy a Riesz-féle közepek egész másképpen viselkednek, ha ω az 1, 2, ... értékeken keresztül és nem folytonosan tart végtelenhez.

Pontosabban azt mondhatjuk, hogy minden $C^{(2)}$-szummálható sor $R(2)$-szummálható, de nem megfordítva. Erre konkrét példát kaphatunk az

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 R_n(2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)^2 u_j\right)x^n =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)^2 x^r \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j = \frac{1+x}{(1-x)^3}\sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j = (1+x)\sum_{j=0}^{\infty} S_j^{(2)} x^j$$

összefüggésből, amelyik (21)-be megy át, midőn $u_0=1$, $u_1=u_2=\ldots=0$. Válasszuk most az u_j tagokat úgy, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j = \frac{1-x}{(1+x)^3},$$

azaz $u_j=(-1)^j(j+1)^2$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 R_n(2)x^n = \frac{1}{(1-x^2)^2} = 1+2x^2+3x^4+\ldots$$

és így $R_n(2)\to 0$, midőn $n\to\infty$. De a Σu_j sor nem szummálható a $C^{(2)}$-eljárással, mert ehhez az szükséges, hogy $j^{-2}u_j$ zérushoz tartson {20, 102. old.}.

A (21)-hez hasonlóan kapjuk a $k=3$ esetre, hogy

$$\Sigma(j+1)^3 x^j = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = (1+4x+x^2)\,\Sigma\, E_j^{(3)} x^j.$$

Mivel az $1+4x+x^2$ polinom az egységkörlemez belsejében levő $x=-2+\sqrt{3}$ pontban eltűnik, az ennek az esetnek megfelelő $\Sigma|l_j|$ sor szintén divergál.

Riesz megemlíti még [29], hogy midőn $-1<k\leqq 1$, a $C^{(k)}$ és a diszkrét $R(k)$ eljárások ekvivalensek és, hogy ez az Eneström—Kakeya-tételből {32, III. 22, I. köt., 88. old.} következik.

Riesz Marcel a róla elnevezett eljárást 1909-ben fedezte fel, de részletesebb tárgyalását csak a Hardy-val közösen írt, 1915-ben megjelent könyvben [17] adta. Ekkor már dühöngött az első világháború. Riesz akkor még magyar állampolgár volt, és mint tartalékos tiszt a stockholmi magyar—osztrák követséghez volt beosztva. Így a két szerzőtárs ellenség volt és az erősen pacifista Hardy a könyvet, az örjöngés közepette, a matematikusok — „bárhol is legyenek" — testvériségének ajánlotta.

Riesz a szummálási eljárásának általános elméletéhez még kétszer tért vissza: a már ismertetett [29] Hardyhoz írott levélben és a szegedi Acta első kötetébe írt három dolgozatának egyikében [27]. Ebben a cikkben ismét a Riemann—Liouville-féle

$$\Phi_\alpha(x) = (I^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$$

integrál szerepel, ahol $\alpha>0$ és φ egy az $x\geqq 0$ értékekre definiált mérhető függvény, mely minden véges intervallumban korlátos. A cikk címében szereplő középértéktétel a következő:

Legyen $0<\alpha<1$, $0\leqq\xi<x$ *és*

$$g(x,\xi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt.$$

Ekkor létezik egy τ *érték, melyre* $0\leqq\tau<\xi$ *és* $g(x,\xi)=\Phi_\alpha(\tau)$.

Egy kevésbé erős állítás már Hardy—Riesz könyvében [17, Lemma 7, 28. old.] megtalálható. A bizonyítás a kissé kényes

$$g(x,\xi)=-\int_0^{\xi}\Phi_\alpha(v)M'(v)\,dv$$

identitáson múlik, ahol

$$M(v)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_v^{\xi}(x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{-\alpha}\,dt.$$

Mivel $M(\xi)=0$, az integrálszámítás első középértéktétele alapján létezik $0\leqq\tau_1\leqq\xi$, úgyhogy $g(x,\xi)=\Phi_\alpha(\tau_1)M(0)$ és mivel $0<M(v)<1$, létezik továbbá $0<\tau<\tau_1$ úgyhogy $\Phi_\alpha(\tau_1)M(0)=\Phi_\alpha(\tau)$.

Ebből a középértéktételből sok akkor már ismert, Harald Bohrtól, Hardy—Littlewoodtól és másoktól származó tétel élesítése és sok új eredmény folyt. Az utóbbiakra példának felhozom a következőt:

Legyenek V *és* W *az* $\omega>0$ *értékekre definiált, növekvő függvények. Tegyük fel, hogy*

$$|T_\lambda(\omega)|\leqq V(\omega)\quad\text{és}\quad|T(\omega;\lambda,k)|\leqq W(\omega).$$

Akkor minden $0\leqq j\leqq k$ *számhoz létezik egy* $C>0$, *mely* ω*-tól független és csak* j*-tól és* k*-tól függ és amelyre*

$$|T(\omega;\lambda,j)|\leqq C\big(V(\omega)\big)^{1-\frac{j}{k}}\big(W(\omega)\big)^{\frac{j}{k}}$$

minden pozitív ω*-ra.*

A tétel lényegében azt fejezi ki, hogy $\log T(\omega;\lambda,j)$ konvex függvénye a j változónak és ezért egyes szerzők Riesz Marcel konvexitási tételének nevezik, mint például Irwin és Peyerimhoff, akik általánosították {22}. Általában azonban egy másik, a 9. pont alatt tárgyalandó és lineáris operátorokra vonatkozó tételt szokás konvexitási tételnek nevezni.

Az imént kimondott tétel egyik következménye a következő, Hardy és Littlewood által 1917-ben más úton bebizonyított tétel: Ha a (6) sor valamely rendben szummálható a λ-típusú Riesz-féle eljárással, és egy k-ra a k-adrendű $R(\omega;\lambda,k)$ közepek korlátosak, akkor a sor minden k-nál nagyobb rendben szummálható a λ-típusú eljárással {8, Corollary 1.71, 19. old.}.

Riesz Marcel eredményeiből elsősorban Ananda-Rau {2} vont le érdekes következményeket egy dolgozatban, amelyik 1918-ban Cambridgeben a Smith-díjjal lett kitüntetve, de csak 1932-ben jelent meg. Ezen következmények egyike az, hogy ha $(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{-1}\lambda_n u_n$ korlátos és (6) valamely k-ra $R(\omega;\lambda,k)$-szummálható, akkor a (6) sor konvergens. Ez a $\lambda_n=n$ esetre alkalmazva és figyelembe véve, hogy ez esetben a Riesz és a Cesàro-eljárások ekvivalensek, azonnal adja Fejérnek e pont elején említett megjegyzését.

A Riesz-féle szummálási eljárásra vonatkozó kutatásokat 1951-ig összefoglalja Chandrasekharan és Minakshisundaram könyve {8}; az irodalom 1955-ig igen

teljesen megtalálható Zellernél {46}. Mind a mai napig sok cikk foglalkozik a tárgykörrel, az irodalmi jegyzékben felsoroltam néhányat a legújabbakból {11; 23; 25; 26; 30; 43}. Érdekesek az ún. általánosított Cesàro-féle közepek {6}, melyeket (9) analógiájára egy $\lambda=(\lambda_j)$ típushoz a

$$C(n;\lambda,k)=\sum_{j=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+p}}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+p+1}}\right)^{\delta}u_j$$

képlet definiál, ahol $k=p+\delta$, p egész és $0\leqq\delta<1$. A $C(n;\lambda,k)$ és $R(\omega;\lambda,k)$ metódusok összefüggése még nem egészen tisztázott.

Egy másik érdekes kutatási irány a Boyd és Hyslop által 1951-ben bevezetett erős Riesz-féle szummálás. Legyen $0<p<\infty$, $k>-\frac{1}{p}$ és, mint mindig, $\lambda=(\lambda_n)$; a (6) sor akkor szummálható p-indexszel, k-adrendben és λ-típussal az s számhoz, ha

$$\frac{1}{\omega^{kp+1}}\int_0^{\omega}|T(\omega;\lambda,k)-s\omega^k|^p\,d\omega$$

zérushoz tart, midőn $\omega\to\infty$. Ezt a nemlineáris eljárást Richert alkalmazta számelméletre. Összefoglaló ismertetését megtaláljuk Glatfeld {19} és Warlimont {45} cikkeiben.

Hardy és Riesz [17] könyvének V., VI. és VII. fejezetei a tipikus közepeknek a (17) alakú Dirichlet-féle sorokra való alkalmazásait tárgyalják. Az ilyen sorokra vonatkozó legegyszerűbb tétel [17, Theorem 1, 3. old.] azt mondja ki, hogy ha (17) az $s_0=\tau_0+it_0$ pontban konvergál, akkor bármely $\varepsilon>0$ számra egyenletesen konvergál az $\{s=\sigma+it;\ \sigma>\sigma_0+\varepsilon\}$ félsíkban. Ebből azonnal következik, hogy létezik egy valós szám σ_0, amely azonban $+\infty$ vagy $-\infty$ is lehet, úgy hogy (17) konvergál minden olyan $s=\sigma+it$ pontban, melyre $\sigma>\sigma_0$ és divergál minden olyan $s=\sigma+it$ pontban, melyre $\sigma<\sigma_0$. Eszerint a hatványsorok elméletéből ismert konvergencia körnek itt egy konvergenciafélsík felel meg, amelyik a $\sigma_0=-\infty$ esetben az egész számsík, a $\sigma_0=+\infty$ esetben pedig az üres halmaz. A σ_0 számot a (17) sor konvergenciaabszcisszájának nevezzük.

A hatványsorok és Dirichlet-sorok viselkedése közötti különbséget két megjegyzéssel szeretném megvilágítani. Tudvalevő, hogy egy hatványsor által előállított függvénynek a konvergenciakör peremén legalább egy szinguláris pontja van. Ezzel szemben, ha σ_0 a (17) sor véges konvergenciaabszcisszája és az $f(s)$ analitikus függvény (17) összege $\sigma>\sigma_0$-re, akkor $f(s)$-nek nincs szükségképpen szingularitása a $\sigma=\sigma_0$ egyenesen. Így a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$ sor az $(1-2^{1-s})\zeta(s)$ egész függvényt állítja elő, de konvergenciaabszcisszája $\sigma_0=0$. A másik különbség a hatványsorok és a Dirichlet-sorok viselkedése közt a sorok abszolút konvergenciájában mutatkozik meg. Egy hatványsor a konvergenciakör belsejének minden pontjában abszolút konvergens. Egy Dirichlet-féle sorhoz található egy $\bar{\sigma}$ valós szám (amelyik ismét lehet $+\infty$ vagy $-\infty$) úgy, hogy minden $s=\sigma+it$ pontban, melyre $\sigma>\bar{\sigma}$ a sor abszolút konvergens és minden pontban, melyre $\sigma<\bar{\sigma}$ a sor nem abszolút konvergens [17, Theorem 8, 8. old.]. Világos, hogy $\sigma_0\leqq\bar{\sigma}$, de az is előfordulhat, hogy $\sigma_0<\bar{\sigma}$. Így $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n^{-1/2}(\log n)^{-s}$ a sík minden pontjában konvergens, de egyetlen pontban sem abszolút konvergens.

A konvergenciaabszcisszához analóg módon létezik minden $k>0$ számhoz egy σ_k szám $(-\infty \leqq \sigma_k \leqq \infty)$ úgy, hogy minden $s=\sigma+it$ számra, melyre $\sigma>\sigma_k$ a (17) sor az $R(\omega; \lambda, k)$ eljárással summálható, míg olyan s számra, melyre $\sigma<\sigma_k$ a sor az $R(\omega; \lambda, k)$ eljárással nem szummálható [17, Theorem 26, 43. old.], {8, Theorem 3.33, 56. old.}. A σ_k szám a k-nak fogyó függvénye: ez folyik a Hardy és Riesz által „first theorem of consistency"-nek nevezett tételből, amelyik azt állítja, hogy ha a (6) sor a k-adrendű és λ típusú Riesz-eljárással h-hoz szummálható, akkor minden $k' \geqq k$ számra a sor a k'-edrendű és λ típsú eljárással is h-hoz szummálható [17. Theorem 16, 29. old.], {8, Theorem 1.51, 9. old.}. Az ún. „second theorem of consistency" különböző típusú szummációs eljárásokat hasonlít össze {8., II. fejezet}. A $\lambda_n=\log n$ esetre Hardy és Riesz [17, Theorem 49, 58. old.] kimutatják, hogy ha $k' \geqq k>0$, akkor $\sigma_k \leqq \sigma_{k'}+(k'-k)$, azaz $\sigma_k-(k'-k) \leqq \sigma_{k'} \leqq \sigma_k$. Általános típus esetére és abszolút szummabilitásra analóg eredmények érvényesek {8, 3.4, 63. old.}. Egy fontos tételcsoport összefüggéseket állít fel a szummabilitás rendje és a sor által előállított függvény növekvése között.

A [22] alatt idézett cikkben Riesz Marcel az előző pontban tárgyalt, a Fatou-tétellel kapcsolatos problémakört terjeszti ki Dirichlet-féle sorokra. A cikk fő eredménye a következő:

Legyen $c>0$ és tegyük fel, hogy a (17) *sor eleget tesz a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_0 e^{\lambda_0 c}+d_1 e^{\lambda_1 c}+\ldots+d_n e^{\lambda_n c}}{e^{\lambda_n c}}=0 \tag{22}$$

feltételnek. Ekkor (17) *a $\sigma>0$ félsíkban konvergál és egy ott reguláris $f(s)$ függvényt állít elő. Ha $f(s)$ a képzetes tengely $s=it$ pontjában reguláris, akkor* (17) *ebben a pontban $f(s)$-hez konvergál. Ha $f(s)$ a képzetes tengely egy zárt szakaszának minden pontjában reguláris, akkor* (17) *ezen a szakaszon egyenletesen konvergens.*

Jegyezzük meg, hogy hacsak (17) a $\sigma=0$ egyenesnek egy pontjában konvergál, akkor (22) teljesül. Valóban konvergáljon a $\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-i\lambda_n t}$ sor. Adatván $\varepsilon>0$, létezik egy N egész szám úgy, hogy

$$|d_N e^{-i\lambda_N t}+\ldots+d_n e^{-i\lambda_n t}| \leqq \varepsilon \quad \text{midőn} \quad n \geqq N.$$

Legyen $n \geqq N$,

$$S_1=\sum_{j=0}^{N-1} d_j e^{\lambda_j c} \quad \text{és} \quad S_2=\sum_{j=N}^{n} d_j e^{\lambda_j c}.$$

Mivel λ_n végtelenhez tart, világos, hogy $|S_1|e^{-\lambda_n c} \to 0$, midőn $n \to \infty$. Abel-féle átalakítással {35, 144. §, I. köt., 222. old.} nyerjük, hogy

$$S_2=\sum_{j=N}^{n-1}(d_N e^{-i\lambda_N t}+\ldots+d_j e^{-i\lambda_j t})(e^{\lambda_j(c+it)}-e^{\lambda_{j+1}(c+it)})+$$

$$+(d_N e^{-i\lambda_N t}+\ldots+d_n e^{-i\lambda_n t})e^{\lambda_n(c+it)}.$$

Mármost

$$e^{\lambda_j(c+it)}-e^{\lambda_{j+1}(c+it)}=-\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}(c+it)e^{(c+it)\lambda}\,d\lambda$$

és így [17, Lemma 2., 3. old.]

$$|e^{\lambda_j(c+it)}-e^{\lambda_{j+1}(c+it)}| \leqq |c+it|\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} e^{c\lambda}\,d\lambda=\frac{|c+it|}{c}(e^{\lambda_{j+1}c}-e^{\lambda_j c}).$$

Ennek következtében

$$|S_2| \leqq \varepsilon \frac{|c+it|}{c} (e^{\lambda_n c} - e^{\lambda_N c}) + \varepsilon e^{\lambda_n c}$$

és

$$|S_2| e^{-\lambda_n c} \leqq \left(\frac{|c+it|}{c} + 1 \right) \varepsilon.$$

Magának a tételnek a bizonyítása ugyanazon a módszeren alapszik, amelyet az előző pontban a hatványsorokra vonatkozó Fatou-féle tétellel kapcsolatban vázoltam. A módszert később Agmon alkalmazta a momentumproblémára és súlyozott polinomokkal való megközelítésre {1}.

A $\lambda_n = n$ esetben a $z = e^{-s}$ helyettesítéssel a (17) Dirichlet-sor a (12) hatványsorba, az $R = e^c > 1$ helyettesítéssel a (22) feltétel a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_0 + c_1 R + \ldots + c_n R^n}{R^n} = 0 \tag{23}$$

feltételbe megy át. Ha bebizonyítjuk, hogy (23) a $c_n \to 0$ feltételből következik, akkor a hatványsorokra vonatkozó Fatou-tétel valóban speciális esete lesz a Dirichlet-féle sorokra vonatkozó tételnek. Tegyük fel tehát, hogy $c_n \to 0$ és legyen $R > 1$. Adatván $\varepsilon > 0$, létezik egy olyan N egész szám, hogy $|c_n| \leqq \varepsilon$ hacsak $n \geqq N$. Ekkor $n \geqq N$ esetére kapjuk, hogy

$$\frac{|c_0 + c_1 R + \ldots + c_n R^n|}{R^n} \leqq \frac{|c_0 + \ldots + c_{N-1} R^{N-1}|}{R^n} + \varepsilon \frac{R^N + \ldots + R^n}{R^n} \leqq$$

$$\leqq \frac{|c_0 + \ldots + c_{N-1} R^{N-1}|}{R^n} + \varepsilon \frac{R}{R-1} \leqq \left(1 + \frac{R}{R-1} \right) \varepsilon,$$

hacsak n elég nagy.

A megfordított állítás Dirichlet-sorok esetében is érvényes. Tegyük fel ugyanis, hogy teljesül a (22) feltétel és legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor elég nagy n-re

$$|d_0 e^{(\lambda_0 - \lambda_n)c} + d_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)c} + \ldots + d_n| \leqq \varepsilon$$

és

$$|d_0 e^{(\lambda_0 - \lambda_{n-1})c} + d_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})c} + \ldots + d_{n-1}| \leqq \varepsilon.$$

Mivel $0 < e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)c} < 1$, még inkább igaz, hogy

$$|d_0 e^{(\lambda_0 - \lambda_n)c} + d_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)c} + \ldots + d_{n-1} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)c}| \leqq \varepsilon$$

és így kivonás útján a $|d_n| \leqq 2\varepsilon$ egyenlőtlenséget nyerjük.

A [30] számú dolgozatban Riesz Marcel a Fatou-tétel azon általánosításait terjeszti ki Dirichlet-sorokra, amelyek a hatványsor Cesàro-szummálhatóságával foglalkoznak. Mielőtt az említett dolgozat eredményeit ismertetném, meg akarom jegyezni, hogy a Riesz-féle szummálási eljárás végtelen sorok helyett alkalmazható

$$\int_0^\infty u(t)\, dt \tag{24}$$

típusú integrálokra [17, 23. old.]. Legyen $k \geqq 0$ és λ a $t \geqq 0$ változónak szigorúan növekvő folytonos függvénye, melyre $\lambda(0)=0$ és $\lambda(t) \to \infty$ midőn t a végtelenhez tart. A (24) integrál k-adrendű és λ-típusú Riesz-féle közepeit az

$$R(\omega; \lambda, k) = \frac{1}{\omega^k} \int_{\lambda(t) \leqq \omega} (\omega - \lambda(t))^k u(t)\, dt \tag{25}$$

kifejezések definiálják. Ha bevezetjük a

$$T_\lambda(\omega) = \int_{\lambda(t) \leqq \omega} u(t)\, dt$$

jelölést, akkor a Riesz-féle közepek az

$$R(\omega; \lambda, k) = \frac{1}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega - \tau)^k\, dT_\lambda(\tau) = \frac{k}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega - \tau)^{k-1} T_\lambda(\tau)\, d\tau$$

alakban írhatók, amelyik teljesen megegyezik a sorok esetében kapott kifejezéssel. A $\lambda(t) \equiv t$ esetben a Riesz-közepeket a (24) integrál Cesàro-féle közepeinek is szokták nevezni {20, § 5.14, 110. old.}.

A végtelen sorok és az impropius integrálok közös általánosításaképp tekinthetjük a

$$\int_0^\infty u(t)\, dA(t)$$

Stieltjes-féle integrált és ennek

$$R(\omega; \lambda, k) = \frac{1}{\omega^k} \int_{\lambda(t) \leqq \omega} (\omega - \lambda(t))^k u(t)\, dA(t)$$

alakú Riesz-féle közepeit.

A [30] dolgozat eredményeit Riesz már 1909-ben röviden közzétette a Comptes Rendusben [6]. Időközben Cramér {9}, Walfisz {44} és mások munkáiból kitűnt, hogy ezeknek az eredményeknek számelméleti alkalmazásaik vannak és így Riesz tizenöt évvel később rászánta magát a bizonyítások közlésére. Az alkalmazásokról Bohr és Cramér enciklopédiacikke {5} jó áttekintést nyújt. Újabban Turán Pál alkalmazta a tipikus közepeket a Riemann-féle zéta-függvény lebecslésére az $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, s < 1$ sávban {42}; tételének pontos megfogalmazását és bizonyításának vázlatát tartalmazza Schoenfeld részletes ismertetése a Mathematical Reviews 15. kötetében (402. old.).

Most rátérek a [30] ismertetésére. Ebben a cikkben Riesz Marcel a

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dA(t) \tag{26}$$

alakú Stieltjes-integrálokat és ezeknek k-adrendű $\omega^{-k} A_k(s, \omega)$ közepeit tekinti, ahol

$$A_k(s, \omega) = \int_0^\omega e^{-ts} (\omega - t)^k\, dA(t).$$

Ha $A(t)=d_0+d_1+\ldots+d_n$, midőn $\lambda_n<t\leqq\lambda_{n+1}$ és $A(t)=0$, midőn $0\leqq t\leqq\lambda_0$, akkor (26) a (17) Dirichlet-sorba megy át. Vezessük be az

$$A_k(\omega)=\int_0^{\omega}(\omega-t)^k\,dA(t)$$

jelölést és tegyük fel, hogy valamely $c>0$ számra teljesül az

$$A_k(\omega)=o(e^{\omega c}\,\omega^k)$$

feltétel midőn $\omega\to\infty$. Ekkor (26) a $\mathrm{Re}\,s>c$ félsík minden korlátos tartományában a k-adrendű közepek segítségével egyenletesen szummálható és így egy ebben a félsíkban holomorf $f(s)$ függvényt definiál. Ezenkívül érvényesek a következő állítások:

1) Ha $f(s)$ a $\mathrm{Re}\,s=c$ egyenes egy pontjában reguláris, akkor (26) k-adrendű közepei ebben a pontban is az $f(s)$ értékhez tartanak.

2) Tegyük fel, hogy $k=0$ és hogy $f(s)$ az $\mathrm{Re}\,s=c$ egyenes egy szakaszától jobbra korlátos. Akkor (26) az $f(s)$ értékhez konvergál minden olyan pontban, melyben a szakaszon majdnem mindenütt létező határfüggvény egy Lipschitz-féle feltételnek tesz eleget. A Lipschitz-feltétel helyettesíthető bármely olyan feltétellel, amely a Fourier-sor konvergenciáját vonja maga után.

3) Legyen $k>0$ és $f(s)$ megint korlátos $\mathrm{Re}\,s=c$ egy szakaszától jobbra. Akkor (26) k-adrendű közepei a szakasz majdnem minden pontjában $f(s)$-hez tartanak.

Mindegyik állításnak megfelel egy hasonló állítás, egyenletes konvergenciáról. Így például az 1) esetben a közepek egyenletesen tartanak $f(s)$-hez minden zárt szakaszon, melyen $f(s)$ reguláris.

A bizonyítás a következő segédtételen alapszik, amelyik ismét az előző pontban, a Fatou-tétellel kapcsolatban ismertetett módszerrel látható be:

Legyen b egy a $t\geqq 0$ félegyenesen integrálható függvény, k egy valós szám. Tegyük fel, hogy $b(t)=o(t^k)$ midőn $t\to\infty$, és legyen $F(s)$ az $\mathrm{Re}\,s>0$ félsíkban holomorf függvény, amelyet az ott abszolút konvergens

$$\int_0^{\infty}e^{-ts}\,b(t)\,dt$$

integrál előállít. Ekkor az imaginárius tengely minden ξ pontjában, melyben F reguláris, bármely pozitív egész j számra teljesül az

$$e^{-\omega\xi}\frac{d^j}{d\xi^j}\left(e^{\omega\xi}F(\xi)\right)-\int_0^{\omega}e^{-t\omega}(\omega-t)^j\,b(t)\,dt=o(\omega^k)$$

limeszreláció.

A hatványsorokra vonatkozó analóg segédtételt a $k=j=0$ esetben és o helyett O-val Szegő Gábor alkalmazta {36}.

A [13] alatt idézett, 1910 október 6-i dátummal Győrből Mittag-Lefflerhez írott levélben Riesz nem a saját, hanem Borel szummálási eljárását alkalmazza Dirichlet-féle sorokra. Tegyük fel, hogy a (12) hatványsor az origó egy környezetében konvergens és ott egy holomorf $f(z)$ függvényt definiál. Az $f(z)$ függvény Mittag-Leffler-féle csillaga alatt értjük azon z pontok halmazát, melyekre $f(z)$ a 0-tól z-ig menő egyenes szakasz mentén analitikusan folytatható. Mittag-Leffler és mások több olyan szummációs eljárást határoztak meg, amelyek a (12) sort az egész csillagban az $f(z)$ értékhez szummálják {20, § 4.11, 77. old. és § 8.10, 190. old.}. Riesz a (17) Dirichlet-féle sort tekinti és arra viszi át az említett fogalmakat. Tegyük fel,

hogy (17) valamely $\mathfrak{H}=\{s|\mathrm{Re}\, s>c\}$ félsíkban konvergál és így ott egy holomorf $f(s)$ függvényt állít elő. Az $f(s)$ függvény horizontális csillagának nevezi Riesz azon $s=\sigma+it$ pontok összességét, melyekre fennáll az, hogy $f(s)$ a $\mathfrak{H}$ félsíkból az s pontig a valós tengelyhez párhuzamos egyenes szakasz mentén analitikusan folytatható. Adott t valós számra jelölje σ_t azon σ értékek alsó határát, melyekre $\sigma+it$ az $f(s)$ horizontális csillagához tartozik. Midőn σ_t véges, akkor σ_t+it az $f(s)$ első szingularitása, mellyel a $\mathfrak{H}$ félsíkból az $\mathrm{Im}\, s=t$ egyenes mentén balra haladva találkozunk. A σ_t+it pontokat a csillag csúcsainak nevezik {3, n° 56—59, 184—192. old.; 5, Nr. 13, 759. old.}. Pozitív α számra Riesz bevezeti a (17) sor általánosított Borel—Mittag—Leffler-szummáit:

$$\varphi_\alpha(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n e^{-\lambda_n s}}{\Gamma(1+\alpha\lambda_n)}$$

és az $f(s)$ függvényre az

$$f(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^v}\,\varphi_\alpha(s-\alpha v)\,e^v\,dv$$

integrálelőállítást kapja. Pontosan megvizsgálja, hogy ez az előállítás hol érvényes, és ebből nyeri eredményeit, melyek szerint egyrészt $\varphi_\alpha(s)$ az $f(s)$ értékhez tart a horizontális csillag minden s pontjában, midőn $\alpha\to 0$, másrészt a csillag csúcsának σ_t abszcisszáját a

$$\sigma_t=\lim_{\alpha\to 0}\limsup_{\omega\to\infty}\left(\alpha\log\log^+|\varphi_\alpha(-\omega+it)|-\omega\right)$$

kifejezés adja meg, ahol $\log^+ x=\max(0,\log x)$.

A Riesz-féle szummációs eljárásnak nagy szerepe van a többváltozós Fourier-féle sorok elméletében. Legyen f az n-dimenziós valós $\mathbf{R}^n$ térben értelmezett függvény, amely $v-\frac{1}{2}\leqq x_j\leqq\frac{1}{2}$ által definiált Q_n egységkockában integrálható és periodikus, azaz teljesüljön $f(x+m)=f(x)$, ahol $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}$ és az $m=(m_1,\ldots,m_n)$ vektor „rácspont", vagyis mindegyik m_j komponens egész szám. Az f függvény

$$\sum_m \gamma_m e^{2\pi i m\cdot x} \tag{27}$$

(komplex) Fourier-sorának koefficienseit a

$$\gamma_m=\int_{Q_n} f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}\,dx$$

képlet adja meg, ahol $m\cdot x=m_1x_1+\ldots+m_nx_n$ és a (27) összegben m befutja a rácspontok $\mathbf{Z}^n$ halmazát. A (27) sor k-adrendű Riesz-féle közepei az

$$R(x,\omega;k)=\sum_{|m|\leqq\omega}\left(1-\frac{|m|^2}{\omega^2}\right)^k\gamma_m e^{2\pi i m\cdot x} \tag{28}$$

összegek, ahol $|m|$ az m rácsvektor $(m_1^2+\ldots+m_n^2)^{1/2}$ hossza. Bochner bizonyította be 1936-ban {4}, hogy ha $k>\frac{1}{2}(n-1)$, akkor a (28) kifejezések majdnem minden x pontban az $f(x)$ értékhez tartanak, midőn $\omega\to\infty$. Ez a tétel az oka annak, hogy a (28) összegeket néha Bochner—Riesz közepeknek nevezik; a szférikus közép elnevezés is használatos. Az $n=1$ esetben a tétel az első pont végén említett tétellel ekvivalens.

Meg szeretném itt említeni, hogy a harmonikus analízis mai kifejezésmódjával jól rá lehet világítani az ilyen szummációs tételek mélyebb okaira {34, chap. VII.}. Legyen g egy az egész $\mathbf{R}^n$ térben integrálható függvény és

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}_n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} g(x)\, dx$$

a g Fourier-féle transzformáltja, ahol $\xi \in \mathbf{R}^n$ és $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$. Ha feltesszük, hogy valamely $\alpha > 0$ számra g és $\hat{g}$ eleget tesznek a

$$|g(x)| \leqq C(1+|x|)^{-n-\alpha}, \quad |\hat{g}(\xi)| \leqq C(1+|\xi|)^{-n-\alpha} \tag{29}$$

becsléseknek, akkor fennáll a

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \hat{g}(m) e^{2\pi i m \cdot x} = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} g(x+m) \tag{30}$$

Poisson-féle összegképlet {34, chap. VII., Corol. 2.6., 252. old.}. Tekintsünk most egy φ függvényt, melyre $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$ és jelöljük φ Fourier-féle transzformáltját $\hat{\varphi}$ helyett Φ-vel is. Tegyük fel, hogy φ és Φ eleget tesznek a (29)-cel analóg becsléseknek. Bármely $\varepsilon > 0$ számra legyen $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, ekkor $\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \Phi(\varepsilon\xi)$. Jelöljük másrészt f_0-lal azt a függvényt, amelyik az egységkockában megegyezik az f függvénnyel és azonkívül zérus. Ekkor $\gamma_m = \hat{f}_0(m)$ és ha megjegyezzük, hogy a

$$(\varphi_\varepsilon * f_0)(x) = \int_{Q_n} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

által definiált $\varphi_\varepsilon * f_0$ konvolúcióra fennáll a

$$(\varphi_\varepsilon * f_0)\hat{}\,(\xi) = \Phi(\varepsilon\xi)\hat{f}_0(\xi)$$

„felcserélési képlet", akkor a (30) összegképletbe behelyettesítve a

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \Phi(\varepsilon m) \gamma_m e^{2\pi i m \cdot x} = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (\varphi_\varepsilon * f_0)(x+m) \tag{31}$$

identitást nyerjük. A (29) becslés alapján könnyen belátható, hogy

$$\sum_{m \neq 0} (\varphi_\varepsilon * f_0)(x+m)$$

zérushoz tart, midőn $\varepsilon \to 0$. Másrészt φ_ε az ún. Dirac-féle deltához tart, midőn $\varepsilon \to 0$, azaz $(\varphi_\varepsilon * f_0)(x) \to f_0(x)$ majdnem minden x pontban.

Legyen mármost a Φ a

$$\Phi_k(\xi) = \begin{cases} (1-|\xi|^2)^k, & \text{midőn } |\xi| \leqq 1, \\ 0, & \text{midőn } |\xi| > 1, \end{cases} \tag{32}$$

által meghatározott Riesz-féle Φ_k magfüggvény és legyen $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$; ekkor (31) bal oldala átmegy a (28) alatti Riesz-középbe. Másrészt ekkor $\Phi_k = \hat{\varphi}_k$, ahol

$$\varphi_k(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\pi^{k+1}} \frac{1}{|x|^{n/2+k}} J_{\frac{n}{2}+k}(2\pi|x|)$$

és J_ν a ν-edrendű Bessel-függvényt jelöli. Mivel $|J_\nu(t)| \leqq Ct^{-1/2}$ midőn $t \to \infty$, a (29) becslés fennáll, midőn $\frac{n}{2}+k+\frac{1}{2}>n$, azaz $k>\frac{1}{2}(n-1)$.

Analóg eredmény érvényes egy $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ függvény Fourier-integráljára: ha $k>\frac{1}{2}(n-1)$, akkor a

$$\int_{|\xi| \leqq \omega} \left(1-\frac{|\xi|^2}{\omega^2}\right)^k \hat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \, d\xi$$

közepek majdnem minden $x \in \mathbf{R}^n$ pontban a $g(x)$ értékhez tartanak, midőn $\omega \to \infty$ {34, 170. old.}. Ezzel rokonságban állnak azok a vizsgálatok, amelyeknek célja eldönteni vajon mikor Fourier-multiplikátorok a (32) alatti Riesz-féle magfüggvények. Általában legyen μ egy mérhető, korlátos függvény és definiáljuk az $L^p(\mathbf{R}^n)$ térhez tartozó f függvényre a T operátort a $(Tf)\hat{} = \mu \hat{f}$ összefüggéssel. Ha T az $L^p(\mathbf{R}^n)$ térnek önmagába való folytonos leképezése, akkor azt mondjuk, hogy μ Fourier-multiplikátor a p kitevőre nézve. Arra a kérdésre, hogy mely p és k értékekre lesz Φ_k Fourier-multiplikátor, az eddigi igen mély eredmények is csak részleges választ adnak {13}. A Riesz-magok multiplikátortulajdonságait felhasználva Trebels a Fourier-multiplikátorok új osztályait fedezte fel és ugyanakkor Szőkefalvi-Nagy Béla egy eredményét részben általánosította {37, 39, 40, 41}.

Szerepet játszanak a Riesz-féle közepek az approximációnak, főleg Butzer és iskolája által űzött, absztrakt elméletében. Legyen X egy Banach-tér és $\{P_j\}$ a térnek önmagába való projekcióinak olyan sorozata, melyre $P_j P_k = 0$, ha $j \neq k$. Feltesszük, hogy ha az $f \in X$ vektor minden j indexre eleget tesz a $P_j f = 0$ feltételnek, akkor $f = 0$. A $\sum_j P_j f$ sor az f vektor absztrakt Fourier-sorának tekinthető és a kérdés az, vajon a sor konvergál-e vagy szummálható-e f-hez. A probléma ilyen általánosságban megoldhatatlan és ezért rendesen kikötik, hogy valamely $k>0$ értékre a vektor-tagú sor Riesz-féle szummái eleget tesznek a

$$\left\| \sum_{j \leqq \omega} \left(1-\frac{j}{\omega}\right)^k P_j f \right\| \leqq C \|f\|$$

feltételnek {38, 19. és 42. old.}. Ezen kikötés mellett meg lehet adni olyan feltételeket, amelyek megmondják, vajon multiplikátor-e a $\mu=(\mu_j)$ sorozat, azaz létezik-e egy (szükségképpen egyedüli) $f^\mu \in X$, mely minden j-re eleget tesz a $P_j f^\mu = \mu_j P_j f$ egyenletnek {38}. A szummálási eljárások közt szerepelnek az

$$R(\omega; \Lambda, k) = \sum_{j \leqq \omega} \left(1-\frac{\Lambda(j)}{\Lambda(\omega)}\right)^k P_j f$$

alakú Riesz-féle közepek, ahol Λ a $(0, \infty)$ félegyenesen definiált szigorúan növekvő függvény, mely bizonyos feltételeknek tesz eleget {38, 57. old.}. Ezekre a közepekre Trebels egy a „second theorem of consistency"-nek megfelelő tételt bizonyít be {38, 47. old.}. Hasonló eredmények érvényesek, ha a $\Sigma P_j f$ sort egy projekcióértékű halmazfüggvény szerinti integrállal helyettesítjük {7}.

Végül pedig Hörmander elliptikus differenciáloperátorok spektrálfüggvényeinek aszimptotikus viselkedését tanulmányozta Riesz-féle közepek segítségével {21; vö. MR 40 # 4618}.

RIESZ MARCEL MUNKÁINAK JEGYZÉKE

[1] Megadott hatványsor folytatásának analitikai előállítása. Math. Phys. Lapok, 16 (1907), 1—25; 17 (1908), 96—108.
[2] A hatványsor összegezhetősége az összetartási körön. Math. Term. Értesítő 26 (1908), 221—229.
[3] Sur les séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci. Paris 145 (1907), 583—586.
[4] Sur les séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris 148 (1909), 1658—1660.
[5] Sur la sommation des séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris 149 (1909), 18—21.
[6] Sur les séries de Dirichlet et les séries entières. C. R. Acad. Sci. Paris 149 (1909), 909—912.
[7] Összegezhető trigonometrikus sorok és összegezhető hatványsorok. Math. Phys. Lapok 19 (1910), 1—56.
[8] Sur un problème d'Abel, extrait de deux lettres à M. G. Mittag-Leffler. Rend. Circ. Mat. Palermo 30 (1910), 339—345.
[9] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci. Paris 152 (1911), 1651—1654.
[10] Über einen Satz des Herrn Fatou. J. Reine Angew. Math. 140 (1911), 89—99.
[11] Megadott Dirichlet-sor folytatásának analitikai előállítása. Math. Term. Értesítő 29 (1911), 283—301.
[12] Über summierbare trigonometrische Reihen. Math. Ann. 71 (1912), 54—75.
[13] Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet, lettre à M. Mittag—Leffler. Acta Math. 35 (1912), 253—270.
[14] Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique. C. R. Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1152—1154.
[15] Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 23 (1914), 354—368.
[16] Sammanfattende överblick över teorien för trigonometriska series. Reports 3rd Scandinavian Math. Congress 1913, Kristiana (1915), 107—127.
[17] The general theory of Dirichlet's series, (G. H. Hardyval közösen). Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Cambridge University Press, 1915; új nyomás 1952.
[18] Sur l'hypothèse de Riemann. Acta Math. 40 (1916), 185—190.
[19] Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein, aus zwei Briefen an Herrn G. Mittag-Leffler. Acta Math. 40 (1916), 337—347.
[20] Neuer Beweis des Fatouschen Satzes. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse (1916), 62—65.
[21] Sätze über Potenzreihen. Ark. Mat., Astronom. och Fys. 11 (1916—17), No. 12, 16 oldal.
[22] Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. Acta Math. 40 (1916), 349—361.
[23] Über die Randwerte einer analytischen Funktion (Riesz Frigyessel közösen). Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm 1916. Almquist & Wiksells, Uppsala (1920), 27—44.
[24] Sur le principe de Phragmén—Lindelöf, extrait d'une lettre adressée à M. G. H. Hardy. Proc. Cambridge Philosophical Society 20 (1920/21), 205—207; Note by G.H. Hardy, ugyanott, 208—209; Correction, ugyanott 21 (1922/23), 6.
[25] Sur le problème des moments. Première note. Ark. Mat., Astronom. och Fys. 16 (1921—22), No. 12., 23 oldal. Deuxième note. Ugyanott, No. 19, 21 oldal. Troisième note. Ugyanott 17 (1923), No. 16, 52 oldal.
[26] Sur la sommation des séries de Fourier. Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Fransico-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged), 1 (1922—23), 104—113.
[27] Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Litt. ac. Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged) 1 (1922—23), 114—126.
[28] Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant. Acta Litt. ac. Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged) 1 (1922—23), 209—225.
[29] Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, extrait d'une lettre adressée à M. G. H. Hardy. Proc. London Mathematical Society 2nd Ser., 22 (1922/24), 412—419.
[30] Über die Summierbarkeit durch typische Mittel. Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged) 2 (1924—26), 18—31.
[31] Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier. C. R. Acad. Sci. Paris 178 (1924), 1464—1467.
[32] Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen (E. Hilbbel közösen). Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II., 3 .Teil, 2. Hälfte, C. 10, 1189—1228. B. G. Teubner, Lipcse, 1924.
[33] Sur les séries trigonométriques conjuguées, extracted from a letter to Prof. G. H. Hardy. Proc. London Mathematical Society 2nd Ser., 23 (1925), XXIV—XXVI.
[34] Sur les fonctions conjuguées. Math. Zeitschrift 27 (1927), 218—244.

[35] Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. Acta Math. 49 (1927), 465—497.
[36] Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions avec quelques remarques sur les géométries non-euclidiennes. Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar 1 (1931) 21 oldal.
[37] Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged) 6 (1932—34), 136—142.
[38] Zum Eindeutigkeitssatz der fastperiodischen Funktionen. Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar 3 (1933) No. 10, 9 oldal.
[39] Eine Bemerkung über den Eindeutigkeitssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen. Mat. Tidsskrift B H. 1 (1934) 11—13.
[40] Volumes mixtes et facteurs invariants dans la théorie des modules. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936. A. W. Broggers Boktrykkeri A/S, Oslo (1937), II. kötet, 16.
[41] Modules réciproques. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936. A. W. Brøggers Boktrykkeri A/S, Oslo (1937), II. kötet, 36—37.
[42] Intégrale de Riemann—Liouville et solution invariantive du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936. A. W. Brøggers Boktrykkeri A/S, Oslo (1937), II. kötet, 44—45.
[43] Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936. A. W. Brøggers Boktrykkeri A/S, Oslo (1937), II. kötet, 62—63.
[44] L'intégrale de Riemann—Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Société Mathématique de France, Conférences à la Réunion Internationale des Mathématiciens, Paris, Juillet 1937. Gauthier—Villars, Párizs (1938), 1—18.
[45] Intégrales de Riemann—Liouville et potentiels. Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco—Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged) 9 (1938) 1—42.
[46] Rectification au travail „Intégrales de Riemann—Liouville et potentiels". Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Sect. Sci. Math. (Szeged) 9 (1939) 116—118.
[47] En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien; geometriska strövtåg inom relativitetsteorien. Lunds Universitets Årsskrift N. F. Avd. 2, Bd. 38, No. 9 — Kungl. Fysiografiska Sällskapets Handlingar N. F. Bd. 53, No. 9. C. W. K. G leerup, (Lund) (1943) 76 oldal.
[48] Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste. Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Copenhague 1946. Fr. Bagges, Koppenhága (1947) 123—148. Orosz fordítás: Успехи Мат. наук Н. С. 5, No. 5 (39) (1950) 120—144.
[49] Eléments de probabilité en théorie quantique relativiste. Försäkr. mat. studier till. Filip Lundberg. Stockholm, 1946.
[50] L'intégrale de Riemann—Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math. 81 (1949), 1—223.
[51] Remarque sur les fonctions holomorphes. Acta Sci. Math. (Szeged) 12A (1950) 53—56.
[52] Court exposé des propriétés principales de la mesure de Lebesgue. Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952) 298—308.
[53] Sur le potentiel de Liénard—Wiechert attaché à une ligne d'univers. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) 2159—2161.
[54] Sur le potentiel retardé attaché à un courant continu. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) 2260—2261.
[55] Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadratiques. Math. Scandinavica 1 (1953) 159—169.
[56] L'équation de Dirac en relativité générale. Douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Lund 1953. Håkan Ohlsson, Lund (1954) 241—259.
[57] A short proof of a classical theorem in the theory of Fourier integrals (A. E. Livingstonnal közösen). American Math. Monthly 62 (1955) 434—437.
[58] Problems related to characteristic surfaces. Proceedings of the Conference on Differential Equations, University of Maryland, March 1955, 57—71.
[59] A special characteristic surface — a new relativistic model for the electron? Technical Report No 25, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland, Jan. 1957, 18 oldal.
[60] Clifford numbers and spinors, Chap. I—IV. The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Lecture Series No. 38, University of Maryland, College Park, Maryland, 1957—1958, 193 oldal.
[61] A geometric solution of the wave equation in space-time of even dimension. Communications on Pure and Applied Math. 13 (1960) 329—354.
[62] The analytic continuation of the Riemann—Liouville integral in the hyperbolic case. Canadian J. Math. 13 (1961) 37—47.

{1} S. AGMON: Sur deux théorèmes de M. S. Mandelbrojt. C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949) 1835—1837.
{2} K. ANANDA-RAU: On the convergence and summability of Dirichlet's series. Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1932) 414—440.
{3} V. BERNSTEIN: Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Gauthier—Villars, Párizs, 1933.
{4} S. BOCHNER: Summation of multiple Fourier series by spherical means. Transactions Amer. Math. Soc. 40 (1936) 175—207.
{5} H. BOHR—H. CRAMÉR: Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II, 3. Teil, 2. Hälfte, C. 8. 722—849. B. G. Teubner, Lipcse, 1923.
{6} D. BORWEIN: On Riesz and generalised Cesàro summability. J. London Math. Soc. (2) 2 (1970) 61—66.
{7} P. L. BUTZER—R. J. NESSEL—W. TREBELS: Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation. I. Radial multipliers in connection with Riesz-bounded spectral measures. J. Approximation Theory 8 (1973) 335—356.
{8} K. CHANDRASEKHARAN—S. MINAKSHISUNDARAM: Typical means. Oxford University Press, 1952.
{9} H. CRAMÉR: Über das Teilerproblem von Piltz. Ark. Mat., Astronom. och Fys. 16 (1921—22) No. 21.
{10} J. DENY: Les potentiels d'énergie finite. Acta Math. 82 (1950) 107—183.
{11} G. D. DIKSHIT: On absolute Riesz summability of Fourier series. J. Austral. Math. Soc. 19 (1975) 97—102.
{12} P. FATOU: Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. 30 (1906) 335—400.
{13} C. FEFFERMAN: A note on spherical summation multipliers. Israel J. Math. 15 (1973) 44—52.
{14} FEJÉR LIPÓT: Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Annalen 58 (1904) 51—69; Összegyűjtött munkák, Akadémiai Kiadó, Budapest 1970, I. köt., 142—160. old.
{15} FEJÉR LIPÓT: Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel. Math. Zeitschrift 24 (1925) 267—284; Összegyűjtött munkák, II. köt., 144—161.
{16} FEJÉR LIPÓT: Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome. Math. Zeitschrift 24 (1925) 285—298; Összegyűjtött munkák, II. köt., 161—175. old.
{17} L. GÅRDING: Marcel Riesz in memoriam. Acta Math. 124 (1970) I—XI.
{18} J. J. GERGEN: Summability of double Fourier series. Duke Math. J. 3 (1937), 133—148.
{19} M. GLATFELD: Einführung in die allgemeine Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit. Überblicke Mathematik (1971), Band 4, 93—120. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1972.
{20} G. H. HARDY: Divergent series. Oxford University Press, 1949.
{21} L. HÖRMANDER: On the Riesz means of spectral functions of elliptic differential operators and the corresponding spectral expansions. Some Recent Advances in Basic Sciences, II. köt., 155—202. Belfer Graduate School of Science, New York, 1969.
{22} R. IRWIN—A. PEYERIMHOFF: On the convexity theorem of M. Riesz. Indian J. Math. 9 (1967) 109—121.
{23} A. A. KHAN: Absolute Riesz summability of a series associated with a Fourier series. Indian J. Math. 15 (1973) 1—6.
{24} E. KOGBETLIANTZ: Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques. Mémorial des Sciences Mathématiques, 51. füzet, Gautheir—Villars, Párizs, 1931.
{25} B. KUTTNER: On the "second theorem of consistency" for absolute Riesz summability. Proc. London Math. Soc. (3) 29 (1974) 17—32.
{26} B. KUTTNER: On iterated Riesz transforms of order 1. Proc. London Math. Soc. (3) 29 (1974) 272—288.
{27} E. LANDAU: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Második kiadás. Springer, Berlin, 1929; Chelsea, New York, 1946.
{28} G. MITTAG-LEFFLER: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Première note. Acta Math. 23 (1900) 43—62.
{29} G. MITTAG-LEFFLER: Sur un problème d'Abel, extrait d'une lettre à M. Marcel Riesz. Rend. Circ. Mat. Palermo 30 (1910) 337—338.
{30} V. A. MOLODENKOV: Equisummability in the sense of M. Riesz of expansions in certain systems of exponential functions. Mat. Zametki 15 (1974) 381—386 Math. Notes 15 (1974) 218—221.
{31} L. NEDER: Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Annalen 84 (1921) 117—136.

{32} PÓLYA GYÖRGY és SZEGŐ GÁBOR: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 19—20. kötet, Springer, Berlin, 1925.
{33} A. RAJCHMAN—A. ZYGMUND: Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. Math. Zeitschrift 25 (1926) 261—273.
{34} E. M. STEIN—G. WEISS: Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces. Princeton University Press, 1971.
{35} SZÁSZ PÁL: A differenciál- és integrálszámítás elemei. Második kiadás. Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951.
{36} SZEGŐ GÁBOR: Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen. Math. Annalen 87 (1922) 90—111.
{37} W. TREBELS: On a Fourier $L^1(E^n)$-multiplier criterion. Acta Sci. Math. Szeged 35 (1973) 21—26.
{38} W. TREBELS: Multipliers for (C, α)-bounded Fourier expansions in Banach spaces and approximation theory. Lecture Notes in Mathematics, 329. kötet, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1973.
{39} W. TREBELS: Fourier multipliers on $L^p(R^n)$ in connection with bounded Riesz means. Approximation Theory, 505—519 old., Academic Press, New York—London, 1973.
{40} W. TREBELS: Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner—Riesz kernel. Revue Roumaine de Math. Pures et Appl. 20 (1975) 1173—1185.
{41} W. TREBELS: On Fourier M_q^p multiplier criteria of Marcinkiewicz type. Studia Math. 58 (1976) 7—19.
{42} TURÁN PÁL: On an application of the typical means in the theory of the zeta-function of Riemann. Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] Tome Supplémentaire (1952) 239—251.
{43} J. TZIMBALARIO: Generalized Riesz typical means. J. Indian Math. Soc. (N. S.) 39 (1975) 83—101.
{44} A. WALFISZ: Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen. Disszertáció, Göttingen, 1922.
{45} R. WARLIMONT: Die starke Rieszsche Summierbarkeit von Dirichletreihen. Überblicke Mathematik (1972), Band 5, 87—110. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1972.
{46} K. ZELLER: Theorie der Limitierungsverfahren. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Új sorozat, 15. füzet, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
{47} A. ZYGMUND: Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques. Math. Zeitschrift 24 (1926) 47—104.
{48} A. ZYGMUND: Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. Math. Zeitschrift 25 (1926), 274—290.
{49} A. ZYGMUND: Trigonometric series. Második kiadás. Cambridge University Press, 1959.

МАТЕМАТИЧЕСКВЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ МАРЦЕЛА РУССА I,

ЯНОШ ХОРВАТ

ON THE MATHERMATICAL WORK OF MARCEL RIESZ I.

J. HORVÁTH

MATEMATIЧECKAЯ ДEЯTEЛЬHOCTЬ MAPЦEЛЬA PУCCA I.

ЯHOШ XOPBAT

ON THE MATHEMATICAL WORK OF MARCEL RIESZ I.

J. HORVÁTH

VÉLETLEN-INDEXES HATÁRELOSZLÁSOK ERŐS INVARIANCIA-TÉTELEK SEGÍTSÉGÉVEL

CSÖRGŐ MIKLÓS
Ottawa

CSÖRGŐ SÁNDOR
Szeged

ROGER FISCHLER
Ottawa

RÉVÉSZ PÁL
Budapest

1. *Bevezetés néhány történeti megjegyzéssel*

Az egyik legkorábbi, véletlen tagszámú összegek határeloszlásával foglalkozó dolgozatot ([38]) M. KAC tette közzé 1949-ben. Ebben véletlen mintára épített KOLMOGOROV-típusú empirikus folyamat gyenge kinvergenciáját vizsgálta. Természetesen ekkor még nem exponálhatta úgy a kérdést, ahogyan ma tenné az ember, hiszen éppen 1949 a megjelenési éve J. L. DOOB nevezetes „Heuristic approach..." dolgozatának is ([26]), és a szükség a gyenge konvergencia fogalmának kimunkálására ez utóbbival vált nyilvánvalóvá. Ebben az összefüggésben persze meg kell említeni ERDŐS P. és M. KAC 1946-os dolgozatát ([31]), amely az ún. invariancia elv megszületését kiváltotta és a fő gondolatot adta M. DONSKER [24] dolgozatához (1951). Ez utóbbi pedig már a DOOB-féle heurisztikus gondolatmenet megalapozásához vezette el DONSKER-t (1952, [25]). Az empirikus folyamatot illetően, ahogy ma látjuk, KAC éppen azért dolgozik véletlen mintamérettel, hogy a gyenge konvergencia problémáját megkönnyítse (a poissonizáció ötlete azután később, a tárgyalásra kerülő erős invariancia tételekkel kapcsolatban is igen hasznosnak bizonyult; pl. [68], [16]).

Legyen N_λ Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ várható értékkel és minden $\lambda>0$-ra $N_\lambda, U_1, U_2, \ldots$ teljesen független valószínűségi változók, ahol $i=1, 2, \ldots$-re U_i a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. $t\in[0, 1]$-re $\Phi_t(x)$ legyen 0 vagy 1 annak megfelelően, hogy $x>t$ vagy $x\leqq t$. Az első n darab U változó $E_n(t; U_1, \ldots, U_n)\equiv$ $\equiv E_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényét az

$$E_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi_t(U_j), \quad 0\leqq t\leqq 1, \tag{1}$$

formula értelmezi, az $\{\alpha_n(t), 0\leqq t\leqq 1\}$ KOLMOGOROV-féle empirikus folyamatot pedig a következő

$$\alpha_n(t)=\sqrt{n}\,(E_n(t)-t), \quad 0\leqq t\leqq 1, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{2}$$

KAC $E^*_\lambda(t)$ módosított empirikus eloszlásfüggvényét a

$$E^*_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{N_\lambda}\Phi_t(U_j), \quad 0\leqq t\leqq 1, \tag{3}$$

formulával (ahol, az összeget 0-nak tekintjük, amennyiben $N_\lambda=0$), a $\{K_\lambda(t), 0\leqq t\leqq 1\}$ módosított empirikus folyamatát pedig a

$$K_\lambda(t)=\sqrt{\lambda}\,(E^*_\lambda(t)-t), \quad 0\leqq t\leqq 1, \quad \lambda>0 \tag{4}$$

formulával értelmezi és megjegyzi, hogy minden rögzített λ-ra a $\{K_\lambda(t), 0 \leqq t \leqq 1\}$ folyamat növekvényei függetlenek (ez tulajdonképpen akkor és csak akkor van így, ha N_λ Poisson-eloszlású (lásd [37])), valamint, hogy $EK_\lambda(t)=0$, $EK_\lambda^2(t)=t$. Továbbá, ha $\lambda \to \infty$, akkor minden rögzített t-re $K_\lambda(t)$ eloszlása normális lesz 0 várható értékkel és t szórásnégyzettel. Ezek után a következőket írja: „Így természetes azt várni, hogy a $K_\lambda(t)$ folyamat limesz-tulajdonságai egy $X(t)$ $(X(0)=0)$ független növekményű Gauss-folyamat tulajdonságai lesznek, melyre $EX(t)=0$, $EX^2(t)=t$. Ezek pedig a Wiener-folyamat jellemzői." ([38], pp. 253—254). A gyenge konvergencia ma használatos terminológiájával és jelölésével (vö. BILLINGSLEY [3] könyvével, melynek jelölésrendszerét mindvégig átvesszük. A $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ szimbólum által jelölt gyenge konvergenciát mindig annak megfelelően értjük a C, ill. D téren, hogy a bal oldalon álló folyamatok a C, ill. D tér véletlen elemei-e, más szóval, hogy a baloldali folyamatok egy valószínűséggel folytonosak, ill. csak másodfajú szakadásuk nincs) ez az idézet azt állítja, hogy

$$K_\lambda(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot), \quad \lambda \to \infty. \tag{5}$$

KAC persze az (5) állítást nem bizonyítja, azt viszont igen, hogy

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} |K_\lambda(t)| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X(t)|, \quad \lambda \to \infty, \tag{6}$$

(a $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ jelölés itt speciálisan arra redukálódik, hogy

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left\{\sup_{0 \leqq t \leqq 1} |K_\lambda(t)| < x\right\} = P\left\{\sup_{0 \leqq t \leqq 1} |X(t)| < x\right\}, \quad -\infty < x < \infty)$$

felhasználva, hogy $K_\lambda(t)$ független növekményű. Legyen most $B(t)$ egy Brown-híd (lásd pl. [3]) a [0, 1] intervallumon, vagyis az $X(t)$ standard Brown-mozgással kifejezve $B(t)=X(t)-tX(1)$. Az $\alpha_n(t)$ folyamat esetében az (5)-tel analóg összefüggés a következő:

$$\alpha_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\cdot), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

minthogy DOOB ([26]) heurisztikus gondolatmenete és DONSKER ([25]) megalapozása szerint

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} |\alpha_n(t)| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |B(t)|, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Ezzel rokon reláció, amit viszont KAC bizonyított ugyancsak [38]-ban:

$$\int_0^1 V_0(\alpha_n(t))\, dt \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_0^1 V_0(B(t))\, dt, \tag{9}$$

ahol

$$V_0(x) = 1-\Phi_0(x) \quad \text{és} \quad P\left\{\int_0^1 V_0(B(t))\, dt \leqq \alpha\right\} = \alpha$$

ha $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Persze, ha egyszer (7)-et tudjuk, abból az olyan állítások, mint (8) és (9) már következnek. Ez azonban már csak a gyenge konvergencia általános elméletének keretein belül érthető, melyet YU. V. PROHOROV (50, 1956) és A. V. SZKOROHOD ([57], 1956) dolgoztak ki és amely megtalálható GIHMAN és SZKOROHOD [36] könyvében, vagy részletesebben, további finomításokkal BILLINGSLEY már idézett [3] könyvében.

Most, ha már tudjuk a (7) összefüggés fennállását, akkor könnyen belátható, hogy ebből (5) is következik (ami természetesen maga után vonja (6)-ot is). E célból tekintsük $K_\lambda(t)$ következő felbontását:

$$K_\lambda(t) = \sqrt{\frac{N_\lambda}{\lambda}}\sqrt{N_\lambda}\,(E_{N_\lambda}(t)-t)+\frac{t}{\sqrt{\lambda}}(N_\lambda-\lambda), \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

$K_\lambda(t)$ véletlen eleme a másodfajú szakadással nem bíró függvények $(D, \mathscr{D})$ $(D=D[0, 1])$ Szkorohod-terének ([3], 3. fejezet) és (7)-ből, továbbá abból a tényből, hogy $N_\lambda/\lambda \xrightarrow{P} 1$ ($\xrightarrow{P}$ a sztochasztikus konvergenciát jelöli) következik a felbontás első tagjára, hogy

$$\sqrt{\frac{N_\lambda}{\lambda}}\,\alpha_{N_\lambda}(\cdot) \xrightarrow{\mathscr{D}} B(\cdot), \quad \lambda \to \infty. \tag{10}$$

Másrészt $t(N_\lambda-\lambda)/\sqrt{\lambda} \xrightarrow{\mathscr{D}} tY(1)$, aholis $Y(t)$ újból egy standard Wiener-folyamat, méghozzá $Y(1)$ független a (10)-beli $B(t)$-től, mivel feltételezésünk szerint N_λ független az $\{U_i\}$ sorozattól. Ebből következik, hogy $W(t)=B(t)+tY(1)$ ismét egy standard Wiener-folyamat, és $K_\lambda(\cdot) \xrightarrow{\mathscr{D}} W(\cdot)$, amit (5) állított.

A $K_\lambda(t)$ folyamatról még azt jegyezzük meg kitérőleg, hogy jópár funkcionálja eloszlásának kiszámolása azon észrevétel segítségével történik a [13] dolgozatban, hogy az [51]-beli RÉNYI-féle empirikus folyamat szintén gyengén konvergál a Wiener-folyamathoz. Valójában RÉNYInek az az ötlete, hogy a $g(t)=t$, illetve $1-t$ függvényekkel súlyozza a (2) alatti KOLMOGOROV-féle $\alpha_n(t)$ empirikus folyamatot és a most tárgyalt KAC-féle poissonizáció hasonlóak abban az értelemben, hogy mind a két módosítás független növekményű folyamatot eredményez.

A tárgyalt példa mutatja, hogy a véletlen indexek már az invarianciaelv kialakulásánál el nem hanyagolható hatású szerepet játszottak. Azóta a véletlenül szelektált sorozatoknak igen kiterjedt irodalma alakult ki, melyről SZÁSZ D. és J.-E. KARLSSON egy bibliográfiát ([39]) is összeállított. Másrészt időközben a gyenge konvergencia elméletének továbbfejlődéseként kialakult egy új elmélet, az erős invariancia vagy másképpen erős approximáció elmélete. A jelen dolgozat egyik célja arra irányítani a figyelmet, hogy az új elmélet eredményei alkalmazhatók véletlenül indexezett sorozatok hasonló, erős invariancia-, továbbá gyenge konvergencia-tulajdonságainak vizsgálatára. Ezt a 3. részben valószínűségi változók összegein, a 4. részben pedig empirikus folyamatokon mutatjuk be. A 2. részben véletlenül számozott sorozatoknak egy valószínűséggel (jelölésben: a.s. (=almost sure)), illetve sztochasztikusan való konvergenciájára sorolunk fel néhány állítást, amiket aztán a 3. és 4. részben alkalmazni fogunk. Valószínűségi változók egy sorozatának randomizációját, elemeinek véletlen szelekcióját végrehajtó pozitív egész értékű valószínűségi változók sorozatát mindvégig $\{\nu_n\}$-nel fogjuk jelölni. Az 5. részben a $\{\nu_n/n\}$ sorozat limeszét vizsgáljuk, arra a következtetésre jutva, hogy bizonyos feltételek mellett ez csak konstans lehet. Ennek az eredménynek egy alkalmazását is bemutatjuk ugyanott.

2. *Nagy számok törvényei véletlenül szelektált sorozatokra*

Legyen $\{Z_n\}$ valószínűségi változók egy sorozata, $\{\nu_n\}$ pedig (mindvégig a dolgozatban) pozitív egész értékű valószínűségi változóknak egy sorozata (ami ugyanazon a valószínűségi mezőn van értelmezve). A következő eredmény, legalábbis részben, ismert.

1. TÉTEL. (a) *Legyenek* r *és* s *valós számok,* $r \geqq 1$ *és* $s > r+2$. *Tegyük fel, hogy tetszőleges* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-2} P\{|Z_n| > \varepsilon\} < \infty$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| > \varepsilon\right\} < \infty,$$

ahol ν *pozitív valószínűségi változó, melyre* $P\{a \leqq \nu \leqq b\} = 1$ *valamilyen* $0 < a < b < \infty$ *állandókkal. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|Z_{\nu_n}| > \varepsilon\} < \infty.$$

(b) *Ha* $Z_n \xrightarrow{a.s.} 0$ *és* $\nu_n \xrightarrow{a.s.} \infty$, *akkor* $Z_{\nu_n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

(c) *Ha* $Z_n \xrightarrow{a.s.} 0$ *és* $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$, *akkor* $Z_{\nu_n} \xrightarrow{P} 0$.

(d) *Ha* $Z_n \xrightarrow{P} 0$ *és* $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$, *akkor nem szükségképpen áll fenn az, hogy* $Z_{\nu_n} \xrightarrow{P} 0$.

(e) *Ha* $Z_n \xrightarrow{P} 0$ *és* $\nu_n / f(n) \xrightarrow{P} \nu$, *ahol* ν *tetszőleges pozitív valószínűségi változó, és* $f(n) \nearrow \infty$, *akkor* $Z_{\nu_n} \xrightarrow{P} 0$, *feltéve, hogy* $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$, *ahol* $X_1, X_2, \ldots$, *teljesen független valószínűségi változók.*

BIZONYÍTÁS. A (b) állítás bizonyítása megtalálható [12]-ben a (c)-é pedig [15]-ben, ahol egyúttal (d)-vel is foglalkozunk. Az (e) állítást MOGYORÓDI [46] bizonyította, sőt RÉVÉSZ ([54], Theorem 10.2) úgy bizonyítja (e)-t, hogy a $\nu_n / f(n) \xrightarrow{P} \nu$ feltételt a következő, gyengébb feltétellel helyettesíti: minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $0 < a(\varepsilon) < b(\varepsilon) < \infty$ és $n_0(\varepsilon)$, hogy $P\{a(\varepsilon) f(n) < \nu_n < b(\varepsilon) f(n)\} \geqq 1 - \varepsilon$, amennyiben $n > n_0(\varepsilon)$, aholis $f(n) \nearrow \infty$. Így tehát csak az (a) állítás bizonyításával kell foglalkoznunk, amely durván annyit mond, hogy $\{Z_n\}$ és $\{\nu_n / n - \nu\}$ teljes konvergencája maga után vonja $\{Z_{\nu_n}\}$ teljes konvergenciáját (lásd [29], [30], [40]).

Világos, hogy tetszőleges n-re és pozitív ε-ra a feltételbeli a és b-vel fennáll az, hogy

$$P\{|Z_{\nu_n}| > \varepsilon\} \leqq P\{|Z_{\nu_n}| > \varepsilon, \quad n(a-\varepsilon) \leqq \nu_n \leqq n(b+\varepsilon)\} + P\{|\nu_n/n - \nu| > \varepsilon\} \leqq$$

$$\leqq P\Big\{\sup_{m \geqq n(a-\varepsilon)} |Z_m| > \varepsilon\Big\} + P\{|\nu_n/n - \nu| > \varepsilon\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=[n(a-\varepsilon)]}^{\infty} P\{|Z_m| > \varepsilon\} + P\{|\nu_n/n - \nu| > \varepsilon\}.$$

Feltételünknek megfelelően, amennyiben $r \geqq 1$ és $s > r+2$, úgy $P\{|Z_m| > \varepsilon\} = (1/m)^{s-2} o(1)$. Legyen θ pozitív szám. Ekkor van olyan $m_0 = m_0(\varepsilon, \theta)$ szám, hogy ha $m \geqq m_0$, akkor

$$\sum_{m=[n(a-\varepsilon)]}^{\infty} P\{|Z_m| > \varepsilon\} \leqq \sum_{m=[n(a-\varepsilon)]}^{\infty} \frac{\theta}{m^{s-2}}, \quad s > r+2, r \geqq 1.$$

Következésképpen (a) bizonyításához elegendő a

$$\theta \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{m=[n(a-\varepsilon)]}^{\infty} \frac{1}{m^{s-2}} \leqq \theta \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left\{ \frac{1}{[n(a-\varepsilon)]^{s-3}} + \int_{[n(a-\varepsilon)]}^{\infty} \frac{1}{x^{s-2}}\, dx \right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{\theta}{[a-\varepsilon]^{s-3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{n^{s-3}} \left(1 - \frac{1}{s-3}\right)$$

sor konvergenciáját belátni. Az utóbbi összeg viszont véges minden $r \geqq 1$-re, feltéve, hogy $s > r+2$, ahogyan a feltételekben kikötöttük. Ezzel a tétel (a) részét bebizonyítottuk.

1. PÉLDA. Legyen $\{X_k\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata úgy, hogy $EX_1 = 0$, továbbá legyen $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Tegyük fel, hogy $\{\nu_n\}$ Poisson-eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, mégpedig $E\nu_n = n$ várható értékkel ($n = 1, 2, \ldots$). Ekkor először is, M. L. KATZ [40] tétele szerint, tudjuk azt, hogy $r \geqq 1$ esetén az

(i) $E|X_1|^r < \infty$ és $EX_1 = 0$

és

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|S_n| > n\varepsilon\} < \infty, \quad \varepsilon > 0,$$

állítások ekvivalensek. ((i) és (ii) ekvivalenciáját SPITZER [59] az $r=1$ és ERDŐS [30], [29] az $r=2$ esetekben bizonyították először). Másrészt (a továbbiakban a $Z_1 \overset{\mathcal{D}}{=} Z_2$ jelölés azt jelenti, hogy a Z_1 és Z_2 valószínűségi változók eloszlása megegyezik) nyilvánvaló, hogy ha $Y_1, \ldots, Y_n$ független, azonosan Poisson-eloszlású valószínűségű valószínűségi változók, melyekre $EY_i = 1$, akkor $\nu_n \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Ezért bármilyen $r \geqq 1$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} < \infty.$$

Így aztán, ha az első momentumra vonatkozó feltevésünkön túl, $r \geqq 1$ esetén valamilyen $s > r+2$-vel még az is teljesül, hogy $E|X_1|^s < \infty$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|S_{\nu_n}| > \nu_n \varepsilon\} < \infty.$$

Megjegyezzük, hogy az 1. Tétel (a) részének az $r=2$ speciális esetét D. SZYNAL is bizonyította véletlen méretű minta kvantiliseinek sorozatára [65]-ben. Hasonlóan az $r=2$ esettel foglalkozik ugyanő [64]-ben is. A fenti példa azt mutatja, hogy az 1. Tétel (a) része mindig maga után von egy ERDŐS—SPITZER—KATZ típusú állítást független, azonos eloszlású változók véletlenül szelektált részletösszegeire is, amennyiben az összeadandók legalább $3+\delta$ ($\delta > 0$) rendű momentummal bírnak.

2. PÉLDA. Az 1. Tétel (a) részének bizonyításából következik, hogy (olyan ν-vel, mint ott) ha $P\{|Z_n| > \varepsilon\}$ és $P\{|\nu_n/n - \nu| > \varepsilon\}$ exponenciális gyorsasággal tar-

tanak nullához, akkor ugyanezt teszi $P\{|Z_{\nu_n}|>\varepsilon\}$ is. Tehát ekkor n bármely $g(n)$ polinomja és tetszőleges pozitív ε mellett

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) P\{|Z_{\nu_n}| > \varepsilon\} < \infty.$$

Ez a helyzet például akkor, ha $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\alpha_n(t)|$, ahol $\alpha_n(t)$ a (2) alatti empirikus folyamat. Ekkor ugyanis DVORETZKY, KIEFER és WOLFOWITZ [28] egyenlőtlenségének megfelelően $P\{|Z_n|>\varepsilon\}$ valóban exponenciális gyorsasággal tart nullához és így $P\{|Z_{\nu_n}|>\varepsilon\}$ is exponenciális gyorsasággal tart nullához, amennyiben $P\{|\nu_n/n - \nu|>\varepsilon\}$ is így tart.

3. *(Erős és gyenge) invariancia-tételek véletlenül szelektált részletösszegekre*

Először felsoroljuk azokat az erős approximációs tételeket, amelyek használatra kerülnek. E tételekben szerepelni fog az a feltétel, hogy az „alapul vett valószínűségi mező elég bő". Ez alatt azt értjük, hogy a szóban forgó mezőn értelmezhető teljesen független Wiener-folyamatoknak egy olyan sorozata, amely a tételekben szereplő sorozatoktól is független. A továbbiakban mindenütt $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

A. TÉTEL. (KOMLÓS, MAJOR és TUSNÁDY, 1974 [42]; MAJOR, 1976 [44]). *Ha $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ és valamilyen $2 < k$ számra $E|X_1|^k < \infty$, akkor, feltéve hogy az alapul vett valószínűségi mező elég bő, létezik olyan $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ standard Wiener-folyamat, hogy*

$$|S_n - X(n)| \overset{\text{a.s.}}{=} o(n^{1/k}), \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Sőt, létezik továbbá olyan csak k-tól és X_1 eloszlásától függő C_k pozitív állandó, hogy minden pozitív ε-ra

$$P\Big\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |S_{[nt]} - X(nt)| > \varepsilon \sqrt{n}\Big\} < C_k \frac{o(n)}{\varepsilon^k n^{k/2}}. \tag{12}$$

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény az S_n sorozat legjobb normális approximációját nyújtja, vagyis a közelítés rendje nem javítható (már amennyiben k-nál magasabb rendű momentumok nem léteznek). A teljesség kedvéért említjük meg, hogy amennyiben az összeadandóknak létezik momentum generáló függvénye ($E \exp\{tX_1\} < \infty$) az origó valamely környezetében, akkor KOMLÓS, MAJOR és TUSNÁDY ([42] és [41]) az elvben egyáltalán elképzelhető, $\log n$ nagyságrendben közelítő Wiener-folyamatot is meg tudták konstruálni, vagyis akkor

$$\max_{1 \leq i \leq n} |S_i - X(i)| \overset{\text{a.s.}}{=} O(\log n).$$

A fenti, az A. Tételben összefoglalt eredményt KOMLÓS, MAJOR és TUSNÁDY [42] előbb a $3 < k < \infty$ esetben érték el, majd később MAJOR [44] egyedül a $2 < k \leq 3$ esetben. Megemlítendő még az is, hogy a (11) és (12) alatti összefüggések tulajdonképpen általánosabb állítások speciális eseteiként állnak elő.

Az eddigi eredmények mind független változókra vonatkoztak. PHILIPP és STOUT [49] azonban számos invariancia-tételt tudtak bizonyítani nem független, ún. „gyengén függő" sorozatokra is, úgymint lakunáris trigonometrikus, különböző fajta keverő, normális sorozatokra, továbbá bizonyos Markov láncok funkcionáljaira és aszimptotikus martingál-különbségekre. Hogy eredményeiket röviden összefoglalhassuk egyetlen állításban, nem precíziroztuk a „gyenge függőség" fogalmát: gyengén függőnek itt pontosan azokat a sorozatokat nevezzük, amelyekre PHILIPP és STOUT az alábbi (13) relációt bizonyították.

B. TÉTEL. (PHILIPP és STOUT, 1975 [49]). *Legyen* $X_1, X_2, \ldots$ *gyengén függő valószínűségi változók egy sorozata, úgy hogy minden* i*-re* $EX_i=0$ *és valamilyen pozitív* δ*-val* $E|X_i|^{2+\delta}<\infty$, *továbbá* $\lim_{n\to\infty} n^{-1}ES_n^2=1$, *ahol*

$$S_t=\sum_{i\leqq t} X_i.$$

A gyenge függőség speciális fajtájától függő esetleges további feltételek mellett, ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő, akkor létezik olyan $\{X(t), 0\leqq t<\infty\}$ *standard Wiener-folyamat, hogy*

$$|S_t-X(t)| \overset{\text{a.s.}}{=} O(t^{1/2-\eta}), \tag{13}$$

ahol η csak az $\{X_i\}$ sorozattól függő pozitív szám.

Ezekután, összevetve az 1. Tétel (a) részét az A. Tétellel, adódik a következő

2. TÉTEL. *Legyen* $\{v_n\}$ *olyan, mint az* 1. *Tétel* (a) *részében, vagyis olyan, hogy valamilyen* $r\geqq 1$ *számra, bármilyen pozitív* ε *mellett*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P\left\{\left|\frac{v_n}{n}-v\right|>\varepsilon\right\}<\infty,$$

ahol v *olyan valószínűségi változó, hogy valamilyen* $0<a<b<\infty$ *állandókkal* $P\{a<v<b\}=1$. *Legyen továbbá* $\{X_n\}$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók olyan sorozata, melyre* $EX_1=0$, $EX_1^2=1$. *Tegyük fel ezenkívül, hogy egy olyan* k *valós számra, melyre* $k>2r+4$ ($\geqq 6$) *fennáll, hogy* $E|X_1|^k<\infty$. *Ekkor, amennyiben az* $\{X_n\}$ *és* $\{v_n\}$ *közös értelmezési tartományául szolgáló valószínűségi mező elég bő, létezik olyan* $\{X(t), 0\leqq t<\infty\}$ *standard Wiener-folyamat, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P\left\{\sup_{0\leqq t\leqq 1}|S_{[v_n t]}-X(v_n t)|>\varepsilon\sqrt{v_n}\right\}<\infty, \tag{14}$$

bármilyen pozitív szám legyen is ε.

BIZONYÍTÁS. Mivel $k/2>r+2$, ezért $k/2>s>r+2$ esetén $k/2-1-s+2>1$. Így, $Z_n=\sup_{0\leqq t\leqq 1}|S_{[nt]}-X(nt)|/\sqrt{n}$ jelöléssel és (12) felhasználásával

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-2}P\{|Z_n|>\varepsilon\}<\frac{C_k}{\varepsilon^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{o(n)}{n^{k/2-s+2}}<\infty.$$

Az 1. Tétel (a) részéből tehát valóban következik (14) érvényessége.

Ha a $\{\nu_n\}$ sorozatra vonatkozó tételbeli kikötésünk helyett azt tesszük fel, hogy $\nu_n \xrightarrow{a.s.} \infty$, akkor a (12) helyett a (11) összefüggést, az 1. Tétel (a) része helyett a (b)-t használva adódik (14) helyett, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$\nu_n^{-1/k} \sup_{0 \leq t \leq t} |S_{[\nu_n t]} - X(\nu_n t)| \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{15}$$

Ha pedig csak azt tesszük fel, hogy $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$, akkor ugyancsak (11)-ből és az 1. Tétel (c) részéből azt kapjuk, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$\nu_n^{-1/k} \sup_{0 \leq t \leq 1} |S_{[\nu_n t]} - X(\nu_n t)| \xrightarrow{P} 0. \tag{16}$$

Mivel a (15) és (16) állításokban $k > 2$, ezért ezek természetszerűleg érvényesek a $k = 2$ esetben is ((15) ha $\nu_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ és (16), ha $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$). A következőkben majd azt fogjuk vizsgálni, hogy a (16) típusú állításokból miként következik a (megfelelően normalizált) $\{S_{[\nu_n t]}\}$ részletösszeg-folyamatok gyenge konvergenciája, ezért a $k = 2$ eset ((16)-ban) különösen érdekel bennünket, hiszen gyenge konvergenciánál más normalizáló sorozat nem képzelhető el, csak $\{\nu_n^{-1/2}\}$. Ebben, a $k = 2$ esetben azonban már az sem szükséges, hogy $S_{[nt]}$ független változók részletösszege legyen. A B. Tétel alkalmazásával ugyanis adódik a következő

3. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots$ gyengén függő valószínűségi változók olyan sorozatra, hogy $EX_i = 0$, $E|X_i|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$, minden i-re és $\lim_{n \to \infty} n^{-1} E S_n^2 = 1$. Mint eddig, legyen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ pozitív egész értékű valószínűségi változók egy sorozata. A gyenge függőség speciális fajtájának megfelelő esetleges további feltételek mellett, ha az $\{X_n\}$ és $\{\nu_n\}$ közös értelmezési tartományául szolgáló alapmező elég bő, akkor létezik olyan $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ standard Wiener-folyamat, hogy $\nu_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ esetén*

$$\nu_n^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq 1} |S_{[\nu_n t]} - X(\nu_n t)| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad n \to \infty, \tag{17}$$

$\nu_n \xrightarrow{P} \infty$ esetén pedig

$$\nu_n^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq 1} |S_{[\nu_n t]} - X(\nu_n t)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Bizonyítás. A (13) összefüggésből következik, hogy $\eta > 0$ esetén

$$|S_{nt} - X(nt)| \overset{a.s.}{=} O\big((nt)^{1/2-\eta}\big) = O(n^{1/2-\eta})$$

[0, 1]-beli t-kre egyenletesen fennáll. Ha tehát ismét $Z_n = n^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq 1} |S_{nt} - X(nt)|$, akkor az 1. Tétel (b) részéből következik (17), a (c) részből pedig (18).

Vizsgáljuk tehát azt, hogy eddigi eredményeinkből, pontosabban a legenyhébb kikötéseket kívánó (18) relációból miként következik véletlenül szelektált részletösszeg típusú folyamatok gyenge konvergenciája. Ezt a problémát általában a következőképpen lehet megfogalmazni. Legyen $\{S_k\}$ mint eddig *valamilyen* változók részletösszeg sorozata. Feltéve, hogy $n^{-1/2} S_{[n \cdot]} \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot)$, ahol $X(t)$ Wiener-folyamat a [0, 1] intervallumon, milyen változókra következik ebből, hogy $\nu_n^{-1/2} S_{[\nu_n \cdot]} \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot)$, ahol a $\{\nu_n\}$ pozitív egész értékű valószínűségi változók olyan sorozata, hogy teljesül rá a következő (az 1. Tétel (e) részebeli)

FELTÉTEL

$$\frac{\nu_n}{f(n)} \xrightarrow{P} \nu, \quad P\{\nu > 0\} = 1, \quad f(n) \nearrow \infty. \tag{19}$$

A kérdés ilyen általános megfogalmazását BILLINGSLEY [4] kezdeményezte, a megoldásra pedig a [14], [34] és [56] dolgozatok nyújtanak általános módszert. Az utóbb említett négy dolgozat közös sajátossága, hogy direkten a $\{\nu_n^{-1/2} S_{[\nu_n t]}\}$ sorozattal foglalkozva próbálják ennek gyenge konvergenciáját bizonyítani. A fenti erős invarianciatételek most lehetővé teszik, hogy az egyszerűbb $\{\nu_n^{-1/2} X(\nu_n t)\}$ sorozattal dolgozzunk és a nyert gyenge konvergenciát általuk az előbbi sorozatra vigyük át.

Hogy valóban (19) a legtermészetesebb feltétel, ami mellett randomizált gyenge invariancia-tételt akar az ember bizonyítani, az elég világos. A $\{\nu_n\}$-re tett olyan erős kikötések, mint például a 2. Tételbeli is, csak arra szolgálnak, hogy a konvergencia sebességére is tudjunk valamit mondani. (Ilyen állítás (14) is.) Általában a legkevesebb, amit muszály megkívánni az az, hogy $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$. Ez utóbbi kikötés viszont nem elegendő, ha a $\{\nu_n\}$ sorozatnak az $\{S_n\}$-től való függetlenségéről semmit sem akarunk feltenni (és ezt valóban nem is akarjuk), amit jól magyaráz BILLINGSLEY ([3], 143. lap) egy példája is. Vagyis a ν_n sztochasztikusan végtelenbe tartásának mikéntjére, tehát egy $f(n) \nearrow \infty$ számsorozattal való összehasonlíthatóságára vonatkozó valamilyen feltétellel kell élnünk. Minthogy FREEDMAN ([35], 97. lap) egy példája viszont arra utal, hogy $\nu_n/f(n)$ eloszlásban való konvergenciáját megintcsak kevés kikötni, így tényleg (19) a legáltalánosabb értelmes feltétel.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $\{X_n\}$ *olyan mint a* 3. *Tételben és* $\{\nu_n\}$ *teljesíti a* (19) *feltételt, akkor* ($\{X(t), 0 \leqq t \leqq 1\}$ *továbbra is standard Wiener-folyamatokat jelöl*)

$$\nu_n^{-1/2} X(\nu_n \cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot), \tag{20}$$

következésképpen

$$\nu_n^{-1/2} S_{[\nu_n \cdot]} \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot). \tag{21}$$

Továbbá, ha $h(x(\cdot))$ *olyan homogén és a* $D[0, 1]$*-tér Szkorohod-topológiájában folytonos funkcionál, hogy a* $\{h(X(\nu_n \cdot)/\sqrt{\nu_n}) = \nu_n^{-1/2} h(X(\nu_n \cdot))\}$ *sorozat Rényi-értelemben keverő* (lásd [52], ill. [53], 338. lap) *az* $F(\alpha) = P\{h(X(\cdot)) < \alpha\}$ *eloszlásfüggvénnyel, azaz, ha tetszőleges pozitív valószínűségű A esemény esetén* $F(\alpha)$ *minden folytonossági pontjában érvényes, hogy*

$$\lim_{n \to \infty} P\{h(X(\nu_n \cdot)) < \alpha \sqrt{\nu_n} \mid A\} = F(\alpha) \tag{21a}$$

(ami különben $A = \Omega$ *esetén* (20) *miatt automatikusan teljesül), akkor*

$$\lim_{n \to \infty} P\{h(X(\nu_n \cdot)) < \alpha \sqrt{f(n)}\} = \int_0^\infty F\left(\frac{\alpha}{\sqrt{y}}\right) dP\{\nu < y\}, \tag{21b}$$

ahol α *a jobboldali eloszlásfüggvény tetszőleges folytonossági pontja.*

BIZONYÍTÁS. Ha a (20) állítást bebizonyítjuk, akkor (minthogy (19) maga után vonja, hogy $\nu_n \xrightarrow{P} \infty$) (18)-on keresztül (21) ebből már valóban következik. (20) igazolásához két dolgot kell belátnunk (lásd továbbra is BILLINGSLEY [3] könyvét).

Egyrészt azt, hogy $v_n^{-1/2}X(v_nt)$ véges dimenziós eloszlásai $X(t)$ véges dimenziós eloszlásaihoz tartanak. Ez egyszerűen adódik a [14] dolgozat 1. vagy 2. tételének alkalmazásával. Másrészt azt, hogy a $v_n^{-1/2}X(v_nt)$ folyamatsorozat feszes. Itt megintcsak CSÖRGŐ M. és CSÖRGŐ S. [14] dolgozatára, az ottani Lemmára támaszkodhatunk. Ezt a segédtételt különben a következő, 4. pontban általánosítani fogjuk többparaméteres folyamatokra, így azt is mondhatjuk, hogy most a 4. pontbeli Lemmát alkalmazzuk egy dimenzióban (a $d=1$ speciális esetben). Eszerint tehát, mivel (a $\sqrt{n}$ sorozat lassan oszcilláló volta miatt) az $\{n^{-1/2}X(nt)\}$ sorozat egyrészt valóban a Lemma által kívánt alakú, másrészt nyilván feszes is (aminek direkt belátása is triviális, ugyanakkor következik abból a tényből, hogy $n^{-1/2}X(n\cdot)\xrightarrow{\mathcal{D}}X(\cdot)$), következik, hogy a $v_n^{-1/2}X(v_nt)$ sorozat is feszes.

(21b) bizonyítására ismét a (18) konvergenciához kell visszamennünk. A bal oldali sorozatot $\sqrt{v_n}/\sqrt{f(n)}$-el szorozva és felhasználva a (19) feltételt, adódik, hogy

$$f_{(n)}^{-1/2}\sup_{0\leq t\leq 1}|S_{[v_nt]}-X(v_nt)|\xrightarrow{P}0. \tag{21c}$$

Viszont

$$\frac{h(X(v_n\cdot))}{\sqrt{f(n)}}=\sqrt{\frac{v_n}{f(n)}}\,\frac{h(X(v_n\cdot))}{\sqrt{v_n}},$$

ahol $(v_n/f(n))^{1/2}\xrightarrow{P}\sqrt{v}$, és így (21b) valóban következik (21c)-ből és a (21a) feltételből, felhasználva MOGYORÓDI [47] stabilis sorozatokra vonatkozó fontos tételét (idézve lásd még [20]). A következmény bizonyítását befejezve, megemlítjük még a (21b) állítás egy speciális esetét. Tekintsük a $h(x(\cdot))=x(1)$ funkcionált. Mivel $X(v_n)/\sqrt{v_n}=\sum_{i=1}^{v_n}Y_i/\sqrt{v_n}$, ahol az Y_i-k teljesen független standard normális eloszlású változók (az $X(t)$ Wiener-folyamat egységnyi időhöz tartozó növekményei), ezért (lásd újra [47]) az $X(v_n)/\sqrt{v_n}$ keverő a $\Phi(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{t}\exp\{-u^2/2\}du$ standard normális eloszlásfüggvénnyel. Következésképpen (a Következmény feltételei mellett)

$$\lim_{n\to\infty}P\{S_{v_n}<x\sqrt{f(n)}\}=\int_0^\infty\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)dP\{v<y\},\quad -\infty<x<\infty. \tag{21d}$$

Teljesen független, azonos eloszlású $\{X_i\}$ sorozat esetén, feltéve persze, hogy $EX_1=0$, $EX_1^2=1$ WITTENBERG [69] (ő csak az $f(n)=n$ esetre) és tőle függetlenül MOGYORÓDI [47] bizonyították (21d)-t (majd később FREEDMAN ([35], 94. lap) adott az $f(n)=n$ speciális esetre egy harmadik bizonyítást). Eredményükre az 5. pontban még vissza fogunk térni.

Szeretnénk mégegyszer kihangsúlyozni a jelenlegi módszer egyszerűségét. Ha ugyanis pl. a (21)-et a hagyományos módszerekkel akarnánk bizonyítani, akkor a Lemma alkalmazásával természetesen ugyanígy kapnánk, hogy $\{v_n^{-1/2}S_{[v_nt]}\}$ feszes sorozat. Viszont a tekintett gyengén függő változók minden egyes osztályára külön-külön be kellene bizonyítani a végesdimenziós eloszlások gyenge konvergenciáját (tehát egy sereg többdimenziós randomizált centrális határeloszlás-tételt), ami sok esetben egyáltalán nem könnyű feladat. Ezek a lépések itt egyetlen problémára redukálódnak, és minthogy a Wiener-folyamat a kérdéses szempontból könnyen kezelhető, ez is igen egyszerű.

A 3. Tétel és követelményeivel kapcsolatos egyedüli baj az, hogy alkalmazhatósági körükbe csak olyan véletlen tagszámú összegek által származtatott folyamatok esnek, amelyeknél az összeadandó X_i-k $2+\delta$ rendű momentumai léteznek ($\delta>0$). Ugyanakkor sok fontos, részletösszegek gyenge konvergenciáját állító eredmény csak az összeadandók második momentumának végességét kívánja meg (pl. DONSKER tétele [3]). Azonban a (13)-nak megfelelő állítást még a független, azonos eloszlású esetben sem lehet elérni, (vö. BREIMAN 3. tételével [5]-ben), amennyiben X_i-nek csak a második momentuma véges. (Sőt, újabban MAJOR [45] ezt a kérdést is véglegesen megoldotta, bebizonyítván, hogy STRASSEN [61] $|S_n - X(n)| = o\big((n \log\log n)^{1/2}\big)$ approximációja nem javítható.) Ebből következik, hogy ebben az esetben lehetetlen az 1. Tétel (c) része által bizonyítani a (18) alatti konvergenciát. Így azután a randomizált DONSKER-tétel (BILLINGSLEY [3]), [14] utolsó fejezete, vagy pl. az imént említett WITTENBERG—MOGYORÓDI-féle tétel mind olyan eredmények, amit módszerünk egyáltalán nem érint. Hasonlóképpen, CSÖRGŐ S.-nak a már a bevezetőben is említett ERDŐS—KAC-féle tételek ([31]) randomizált változatairól szóló dolgozata ([20]) szintén nem egyszerűsíthető jelen módszerünkkel, minthogy itt újfent csak a második momentum végességére van szükség.

Ahogyan a következő pontban majd láthatjuk, módszerünk valódi alkalmazási területe a véletlen mintaméretű empirikus folyamatok konvergenciájának vizsgálata. Mielőtt ebbe kezdenénk bemutatjuk, hogy miként lehet mégis a DONSKER-féle tétel *egy* randomizált alakjához jutni egy (18) típusú állítás segítségével. Ehhez először SZKOROHOD (1961, [58]) híres reprezentációs tételének egy kissé általánosabb alakját idézzük (vö. [6]), mely tétel egyébként STRASSEN szintén nevezetes [61] dolgozatát kiváltotta, és ez az utóbbi dolgozat volt az, ami az erős invariancia elméletét elindította.

C. TÉTEL (SZKOROHOD, 1961 [58]). *Ha $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak olyan sorozata, hogy $EX_1=0$, $EX_1^2=1$, akkor létezik olyan valószínűségi mező, hogy rajta értelmezve van egy $\{X(t), 0\leqq t<\infty\}$ standard Wiener-folyamat és nemnegatív valószínűségi változóknak olyan $\{\tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_n^{(n)}\}$ háromszögmátrixa úgy, hogy*

(i) *minden n-re $\tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_n^{(n)}$ függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá $\tau_1^{(n)} \overset{\mathcal{D}}{=} \tau_1^{(1)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ és $E(\tau_1^{(1)})^2=1$,*

(ii) $$\left\{X\big((\tau_1^{(n)}+\ldots+\tau_k^{(n)})/n\big);\ k=1, \ldots, n\right\} \overset{\mathcal{D}}{=} \left\{S_k/\sqrt{n};\ k=1, \ldots, n\right\}$$

minden n-re fennáll.

E tétel egy egyszerű következményét megfogalmazandó (tételbeli feltevések és jelölések mellett) értelmezzük az $\tilde{S}_{[nt]}$ folyamatot az

$$\left\{\tilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n};\ 0\leqq t\leqq 1\right\} = \left\{X\big((\tau_1^{(n)}+\ldots+\tau_{[nt]}^{(n)})/n\big);\ 0\leqq t\leqq 1\right\}$$

egyenlőséggel. Ekkor világos egyrészt, hogy

$$\left\{\tilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n};\ 0\leqq t\leqq 1\right\} \overset{\mathcal{D}}{=} \left\{S_{[nt]}/\sqrt{n};\ 0\leqq t\leqq 1\right\} \tag{22}$$

minden n-re fennáll, másrészt a nagyszámok törvényéből adódó

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1}\left|\frac{\tau_1^{(n)}+\ldots+\tau_{[nt]}^{(n)}}{n}-t\right| \xrightarrow{P} 0 \tag{23}$$

reláció segítségével könnyen adódik, hogy

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1} |\tilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n} - X(t)| \xrightarrow{P} 0. \tag{24}$$

(Megjegyezzük, hogy (24) és (22)-ből már következik, hogy $S_{[n\cdot]}/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot)$, vagyis DONSKER tétele. Bizonyításának ez a gondolata BREIMAN-tól ered. ([6])). Utánozva most az iménti gondolatmenetet, kapjuk a következő eredményt.

4. TÉTEL. *Ha $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók olyan sorozata, hogy $EX_1=0$ és $EX_1^2=1$ és $\{v_n\}$ a (19) feltételt kielégítő sorozat, akkor van olyan valószínűségi mező, egy rajta értelmezett $\{X(t), 0\leqq t\leqq 1\}$ Wiener-folyamattal és sztochasztikus folyamatok $\{\tilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n},\ 0\leqq t\leqq 1\}$ sorozatával, hogy egyrészt $\tilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n}$ kielégíti a (22) relációt, másrészt*

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1} |\tilde{S}_{[v_n t]}/\sqrt{v_n} - X(t)| \xrightarrow{P} 0. \tag{25}$$

BIZONYÍTÁS. Értelmezzük a (25)-beli folyamatot az

$$\{\tilde{S}_{[v_n t]}/\sqrt{v_n};\ 0 \leqq t \leqq 1\} = \{X((\tau_1^{(v_n)} + \ldots + \tau_{[v_n t]}^{(v_n)})/v_n);\ 0 \leqq t \leqq 1\}$$

egyenlőséggel. Ekkor (22) nyilván érvényben van. Ugyanakkor az 1. Tétel (e) részének bizonyításához hasonló módon adódik a (23) relációból, hogy

$$\sup_{0\leqq t\leqq 1} |(\tau_1^{(v_n)} + \ldots + \tau_{[v_n t]}^{(v_n)})/v_n - t| \xrightarrow{P} 0$$

(lásd [54] és [46]). Figyelembe véve a Wiener-folyamat folytonosságát, ebből már adódik (25).

A baj csak az ezzel a tétellel, hogy bár (22) teljesül, mégis $\tilde{S}_{[v_n t]}$ fenti értelmezése nem szükségképpen garantálja azt, hogy

$$\{\tilde{S}_{[v_n t]}/\sqrt{v_n},\ 0 \leqq t \leqq 1\} \overset{\mathcal{D}}{=} \{S_{[v_n t]}/\sqrt{v_n},\ 0 \leqq t \leqq 1\}$$

fennálljon. Így a 4. Tétel azt ugyan maga után vonja, hogy $\tilde{S}_{[nt]}/\sqrt{n}$ randomizált változata gyengén konvergál $X(t)$-hez, vagyis

$$\tilde{S}_{[v_n \cdot]}/\sqrt{v_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot),$$

de nem szükségképpen következik belőle $S_{[v_n t]}/\sqrt{v_n}$ gyenge konvergenciája.

4. *Invariancia-tételek véletlen mintaméretű empirikus folyamatokra*

Felsoroljuk azokat a szeparábilis Gauss-folyamatokat, amelyeket használni fogunk. Ezek ($d\geqq 1$ természetes számot jelöl) a többparaméteres Wiener-folyamat:

$$\{X(\underline{x}) = X(x_1, \ldots, x_d);\ 0 \leqq x_i < \infty,\ i = 1, \ldots, d\},$$

melyre $EX(\underline{x})=0$ és amelynek kovariancia függvénye

$$R(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = EX(\underline{x}_1)X(\underline{x}_2) = EX(x_{11}, \ldots, x_{1d})X(x_{21}, \ldots, x_{2d}) = \prod_{i=1}^{d} \min(x_{1i}, x_{2i});$$

a többparaméteres Brown-híd:

$$\{B(\underline{y}) = B(y_1, \ldots, y_d);\ 0 \leqq y_i \leqq 1,\ i = 1, \ldots, d\} \overset{\mathcal{D}}{=}$$

$$\overset{\mathcal{D}}{=} \{X(y_1, \ldots, y_d) - y_1 \ldots y_d X(1, \ldots, 1);\ 0 \leqq y_i \leqq 1,\ i = 1, \ldots, d\};$$

és a többparaméteres Kiefer-folyamat:

$$\{K(\underline{y}, x) = K(y_1, \ldots, y_d, x);\ 0 \leqq y_i \leqq 1,\ i = 1, \ldots, d,\ 0 \leqq x < \infty\} \overset{\mathcal{D}}{=}$$

$$\overset{\mathcal{D}}{=} \{X(y_1, \ldots, y_d, x) - y_1 \ldots y_d X(1, \ldots, 1, x);\ 0 \leqq y_i \leqq 1,\ i = 1, \ldots, d,\ 0 \leqq x < \infty\}.$$

A már igért, másodfajú szakadás nélküli többparaméteres folyamatok véletlenül szelektált sorozatainak feszességét vizsgáló Lemmának ismertetése után a jelen pont felépítése követni fogja az előzőét. Mivel a többparaméteres folyamatok gyenge konvergenciájának elmélete egyelőre csak (sokszor nehezen elérhető) különböző publikációkban szétszórva található meg, előbb ezt is érintenünk kell röviden. A gyenge konvergencia fogalmával (vagy pl. a feszességgel) kapcsolatos általánosságokat tekintve továbbra is BILLINGSLEY [3]-ra hivatkozhatunk, hiszen ott ezek a dolgok (általános) teljes, szeparábilis metrikus terekre ki vannak dolgozva. Az $I^d = [0, 1]^d$-beli paraméterértékű, legfeljebb elsőfajú szakadással bíró ($\underline{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in I^d$ normáján $\|\underline{y}\| = \max_{1 \leqq i \leqq d} \{y_i\}$-t értve) folyamatok konvergenciáját DUDLEY [27] vizsgálta először. A további fontosabb eredmények WICHURA [66], [67], BICKEL és WICHURA [2] nevéhez fűződnek. Végül NEUHAUS [48] és STRAF [60] az előző dolgozatok eredményeit egységesítve és összefoglalva megadták a $D[0, 1]$ tér Szkorohod—Billingsley-elméletének ([3]) mondhatni direkt általánosítását $D(I^d)$-re (ahol az I^d-n értelmezett folytonos függvények $C(I^d)$ terén (sup norma) való gyenge konvergencia pontosan úgy viszonylik a $D(I^d)$-n valóhoz mint $d = 1$ dimenzióban). Sikerült ugyanis olyan Szkorohod—Billingsley-típusú metrikával ellátni $D(I^d)$-t, hogy az ezzel teljes, szeparábilis metrikus térré válik. Továbbá a tér kompakt halmazait úgy tudják jellemezni, mint BILLINGSLEY [3] egy dimenzióban, ami lehetőséget ad arra (vö. PROHOROV tételével ([50] vagy inkább [3])), hogy a feszességre könnyen kezelhető kritériumot adjanak meg. Olyan folyamatok $\{Z_n(t)\}$ sorozata esetén, amelyek trajektóriái $C(I^d)(\subseteq D(I^d))$-beliek (mint például az e pont elején említett első két folyamat is) a feszesség szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden pozitív ε-ra

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} P\{\omega_{Z_n}(\delta) \geqq \varepsilon\} = 0, \tag{26}$$

ahol (valamilyen $z(t), t \in I^d$ függvényre)

$$\omega_z(\delta) = \sup \{|z(\underline{s}) - z(\underline{t})|:\ \underline{s}, \underline{t} \in I^d,\ \|\underline{s} - \underline{t}\| < \delta\},\quad \delta > 0. \tag{27}$$

$D(I^d)$-beli (tehát nem szükségképpen folytonos) trajektóriájú sorozat esetén a (27) alatti $\omega(\delta)$ szerepét bonyolultabb szerkezetű modulus veszi át (ugyanúgy, mint a $d = 1$ esetben, [3] és így (26) a feszességnek nem szükséges feltétele, de mint a $d = 1$ esetben is ([3]), természetesen elegendő. Sőt itt is (vö. STRAF [60], 5.6. tétel), ha $Z_n(\cdot) \in D(I^d)$ a.s, de $Z_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z(\cdot)$, ahol $Z(\cdot) \in C(I^d)$ a.s., akkor $\{Z_n(\underline{t})\}$-re (26) még mindig automatikusan teljesül.

Rátérve mostmár segédtételünkre feltesszük, hogy az $\{a_n\}$ számsorozat lassan oszcilláló, azaz létezik olyan $L(n)$ számsorozat, hogy $a_n = n^\alpha L(n)$, ahol $\alpha > 0$ és minden pozitív c számra $L([cn])/L(n) \to 1$, ha $n \to \infty$. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi

mező, továbbá tegyük fel, hogy P-majdnem minden $\omega\in\Omega$-ra $Y(\underline{v})=Y(\underline{v},\omega)$ olyan folytonos függvény a $[0,\infty)^d$ halmazon ($\underline{v}=(v_1,\ldots,v_d)$, $0\leqq v_i<\infty$, $i=1,\ldots,d$; $\|\underline{v}\|=\max\limits_{1\leqq i\leqq d}\{v_i\}$), amely minden rögzített $\underline{v}\in[0,\infty)^d$-re $(\Omega,\mathscr{A})$-mérhető. $\underline{t}\in I^d$ esetén értelmezzük az

$$Y_n(\underline{t})=a_n^{-1}Y(n\underline{t}) \tag{28}$$

folyamatot. Legyen továbbá $\{\nu_n\}$ szintén $(\Omega,\mathscr{A},P)$-n értelmezett pozitív egész értékű valószínűségi változók egy sorozata. Világos, hogy $Y_n(\cdot)$ és $Y_{\nu_n}(\cdot)$ is a $C(I^d)$ tér véletlen elemei ($n=1,2,\ldots$).

LEMMA. *Legyen $\{a_n\}$ lassan oszcilláló és monoton nőve a végtelenbe divergáló számsorozat. Ha a (28) alatti $\{Y_n(\cdot)\}$ sorozat feszes és a $\{\nu_n\}$ sorozat teljesíti a (19) feltételt, akkor az $\{Y_{\nu_n}(\cdot)\}$ sorozat is feszes.*

MEGJEGYZÉS. Ha ahelyett, hogy $Y(\underline{v})$ folytonos csak azt tesszük fel, hogy nincs másodfajú szakadása, vagyis, ha a (28) alatti $Y_n(\cdot)$ a $D(I^d)$ véletlen eleme és $\{Y_n(\cdot)\}$ gyengén konvergál egy folytonos folyamathoz, akkor (Straf említett tétele szerint) az alább adandó bizonyítás szó szerint érvényes az ilyen $D(I^d)$-beli trajektóriájú $\{Y_{\nu_n}(\cdot)\}$ sorozat feszessége is. Azonban $\{Y_{\nu_n}(\cdot)\}$ feszességéhez most is elegendő $\{Y_n(\cdot)\}$ feszessége, vagyis, ha $Y(\cdot)$-nak nincs másodfajú szakadása, azaz, ha a (28) alatti $Y_n(\cdot)$ a $D(I^d)$ tér véletlen eleme, akkor a lemma (úgy ahogy le van írva) szó szerint érvényes $D(I^d)$-n is. Ennek bizonyítása hasonló az alábbihoz, a különbség pusztán az, hogy $\omega(\delta)$ helyett a bonyolultabb, de azért hasonlóan kezelhető $D(I^d)$-beli modulust kell szerepeltetni. Ez utóbbi bizonyítást végeztük el a $d=1$ esetben a [14] dolgozatban. A további $\{a_n\}$ sorozatok lehetőségére vonatkozó ottani megjegyzések most is érvényesek.

BIZONYÍTÁS. (26)-ot, vagyis azt kell belátnunk, hogy bármilyen pozitív ε és η-hoz van olyan δ, $0<\delta<1$, és n_0, hogy $n\geqq n_0$ esetén

$$P\{\sup\{|Y(\nu_n\underline{s})-Y(\nu_n\underline{t})|:\ \underline{s},\underline{t}\in I^d,\ \|\underline{s}-\underline{t}\|<\delta\}\geqq\varepsilon a_{\nu_n}\}\leqq\eta. \tag{29}$$

Legyen $\vartheta=\eta/3$ és válasszuk meg az a és b ($0<a<b<\infty$) számokat úgy, hogy $P\{a\leqq\nu<b\}>1-\vartheta$ teljesüljön. Valamilyen $0<\varrho<a$ számhoz vegyünk egy olyan $n_1=n_1(\varrho,\vartheta)$ számot úgy, hogy $n\geqq n_1$ esetén $P\{|\nu_n/f(n)-\nu|>\varrho\}<\vartheta$ teljesüljön. Ekkor tetszőleges $\delta\in(0,1)$ és $n\geqq n_1$ esetén (29) bal oldala nem nagyobb, mint ($b_n=[f(n)(b+\varrho)]$, $c_n=[f(n)(a-\varrho)]$ jelöléssel)

(30)

$$P\{\sup\{|Y(\nu_n\underline{s})-Y(\nu_n\underline{t})|:\ \underline{s},\underline{t}\in I^d,\|\underline{s}-\underline{t}\|<\delta\}>\varepsilon a_{\nu_n},a-\varrho\leqq\frac{\nu_n}{f(n)}<b+\varrho\}+2\vartheta=$$

$$=P\{\sup\{|Y(\underline{u})-Y(\underline{v})|:\ 0\leqq\|\underline{u}\|,\|\underline{v}\|\leqq\nu_n,\|\underline{u}-\underline{v}\|<\delta\nu_n\}>\varepsilon a_{\nu_n},c_n\leqq\nu_n<b_n\}+$$

$$+2\vartheta\leqq\sum_{m=c_n}^{b_n}P\{\sup\{|Y(\underline{u})-Y(\underline{v})|:\ 0\leqq\|\underline{u}\|,\|\underline{v}\|\leqq b_n,\|\underline{u}-\underline{v}\|<\delta b_n\}>\varepsilon a_{c_n},\nu_n=m\}+$$

$$+2\vartheta\leqq P\{\sup\{|Y(\underline{u})-Y(\underline{v})|:\ 0\leqq\|\underline{u}\|,\|\underline{v}\|\leqq b_n,\ \|\underline{u}-\underline{v}\|<\delta b_n\}\geqq\varepsilon a_{c_n}\}+2\vartheta=$$

$$=P\{\sup\{|Y(b_n\underline{s})-Y(b_n\underline{t})|:\ \underline{s},\underline{t}\in I^d,\ \|\underline{s}-\underline{t}\|<\delta\}\geqq\varepsilon a_{c_n}\}+2\vartheta,$$

az $\{a_n\}$ sorozat monoton növő volta miatt. A lassú oszcilláció folytán viszont $a_{c_n}/a_{b_n} \to (a-\varrho)^\alpha/(b+\varrho)^\alpha$, ha $n \to \infty$. Ez utóbbi limesznél kisebb valaminő pozitív τ számot véve, lehet tehát olyan $n_2 (\geqq n_1)$ számot találni, hogy $n \geqq n_2$ esetén a (30) egyenlőtlenség utolsó sorában álló valószínűség nem nagyobb mint

$$P\left\{\sup\{|Y(b_n \underline{s}) - Y(b_n \underline{t})|: \underline{s}, \underline{t} \in I^d, \|\underline{s}-\underline{t}\| < \delta\} \geqq \varepsilon\left(\left(\frac{a-\varrho}{b+\varrho}\right)^\alpha - \tau\right) a_{b_n}\right\} =$$

$$= P\left\{\sup\{|Y_{b_n}(\underline{s}) - Y_{b_n}(\underline{t})|: \underline{s}, \underline{t} \in I^d, \|\underline{s}-\underline{t}\| < \delta\} > \varepsilon\left(\left(\frac{a-\varrho}{b+\varrho}\right)^\alpha - \tau\right)\right\}.$$

Mivel az $\{Y_n(\cdot)\}$ sorozat feszes, így $\varepsilon_1 = \varepsilon\left((a-\varrho)^\alpha/(b+\varrho)^\alpha - \tau\right)$ és ϑ-hoz van olyan $\delta \in (0, 1)$ és n_0, hogy $b_n = [n(b+\varrho)] \geqq n_0$ esetén az utóbbi valószínűség kisebb mint ϑ. Ilyen δ-val és n-nel (29) baloldala kisebb mint $3\vartheta = \eta$, amivel a bizonyítást be is fejeztük.

Felsoroljuk tehát az empirikus (és kvantilis) folyamatokra vonatkozó erős approximációs eredményeket, először is az egyparamétereseket ($d=1$). Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek közös $F(x)$ eloszlásfüggvénye folytonos. Az $X_1, \ldots, X_n$ mintához tartozó rendezett mintát jelölje $X_1^{(n)} \leqq \ldots \leqq X_n^{(n)}$. Értelmezzük az $\{F_n(x), -\infty < x < \infty\}$ empirikus eloszlásfüggvényt és a $\{Q_n(y), 0 \leqq y \leqq 1\}$ kvantilis függvényt a következőképpen:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad X_1^{(n)} > x, \\ \dfrac{k}{n}, & \text{ha} \quad X_k^{(n)} \leqq x < X_{k+1}^{(n)}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{ha} \quad X_n^{(n)} \leqq x, \end{cases}$$

$$Q_n(y) = X_k^{(n)}, \quad \text{ha} \quad (k-1)/n < y \leqq k/n, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

A hozzájuk tartozó $\{\beta_n(x), -\infty < x < \infty\}$ empirikus, ill. $\{q_n(y), 0 \leqq y \leqq 1\}$ kvantilis folyamatok:

$$\beta_n(x) = \sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x)),$$

$$q_n(y) = \sqrt{n}\,(Q_n(y) - F^{-1}(y)).$$

Mint tudjuk, a vizsgálatokban gyakran kitüntetett szerepet játszanak azok az ilyen folyamatok, amelyek az $I=[0, 1]$-intervallumon egyenletes eloszlású mintákra épülnek, vagyis ahol $F(t)=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Megkülönböztetésül ekkor külön jelöléseket fogunk használni, amit a következőképpen foglalhatunk össze:

X_i	helyett	U_i,	$i=1, 2, \ldots,$
$X_k^{(n)}$	helyett	$U_k^{(n)}$,	$k=1, \ldots, n,$
$F_n(x)$	helyett	$E_n(y)$,	$0 \leqq y \leqq 1, \quad -\infty < x < \infty,$
$\beta_n(x)$	helyett	$\alpha_n(y)$,	$0 \leqq y \leqq 1, \quad -\infty < x < \infty,$
$Q_n(y)$	helyett	$U_n(y)$,	$0 \leqq y \leqq 1,$
$q_n(y)$	helyett	$u_n(y)$,	$0 \leqq y \leqq 1.$

Ezeket a jelöléseket többparaméteres esetben is megtartjuk (ahogyan az egyenletes esetre vonatkozó első négy jelölést pontosan ugyanígy használtuk már a bevezető 1. pontban (lásd (1), (2))). Vagyis, ha $X_1, X_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású d-dimenziós valószínűségi vektorváltozók $(\underline{X}_i=(X_{i1}, \ldots, X_{id}), i=1, 2, \ldots)$, amelyek közös folytonos eloszlásfüggvénye $F(\underline{x})=F(x_1, \ldots, x_d)$, akkor (mint egydimenziós esetben) közülük az első n darab $\{F_n(\underline{x}), \underline{x}\in R^d\}$ empirikus eloszlásfüggvénye definíció szerint: $F_n(\underline{x})=$(azon i-k száma az első n természetes szám közül, melyre $\underline{X}_i \leqq \underline{x})/n$. A megfelelő empirikus folyamat

$$\beta_n(\underline{x}) = \sqrt{n}\left(F_n(\underline{x})-F(\underline{x})\right) = \sqrt{n}\left(F_n(x_1, \ldots, x_d)-F(x_1, \ldots, x_d)\right), \quad \underline{x}\in R^d.$$

míg, ha $\underline{U}_1, \ldots, \underline{U}_n$ a d-dimenziós R^d euklideszi tér I^d egységkockájában egyenletes eloszlásúak, akkor

$$\alpha_n(\underline{y}) = \sqrt{n}\left(E_n(\underline{y})-|\underline{y}|\right) = \sqrt{n}\left(E_n(y_1, \ldots, y_d)-y_1 \ldots y_d\right), \quad \underline{y}\in I^d.$$

Az utóbbi folyamat segítségével értelmezhető továbbá az R^d Borel-halmazainak $\mathscr{A}$ összességén az $\alpha_n(A)=\int_A d\alpha_n(\underline{y})$, $A\in\mathscr{A}$, sztochasztikus halmazfüggvény, az ún. empirikus mérték. A jelen pont elején bevezetett folyamatok is kiterjeszthetők hasonló sztochasztikus mértékekké. Csak kettőre lesz szükségünk: $\{B(A), A\in\mathscr{A}\}$ Brown-híd mérték, ha minden $A, C\in\mathscr{A}$-ra $B(A)$ eloszlása $N(0, (\lambda(A)(1-\lambda(A)))^{1/2})$ és $EB(A)B(C)=\lambda(A\cap C)-\lambda(A)\lambda(C)$, ahol λ a Lebesgue-mérték; $\{K(A, x), A\in\mathscr{A}, 0\leqq x<\infty\}$ Kiefer-mérték, ha $A, B\in\mathscr{A}$ és $x_1, x_2>0$ esetén $K(A, x)$ eloszlása $N(0, (x\lambda(A)(1-\lambda(A)))^{1/2})$ és $EK(A, x_1)K(B, x_2)=\min(x_1, x_2)(\lambda(A\cap B)-\lambda(A)\lambda(B))$. Az idevágó eredményekben A csak egy szűkebb $\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$ osztálynak lehet majd eleme, ahol $\mathscr{A}_0$ bizonyos simasági feltételeknek eleget tevő határral bíró halmazok osztálya. A pontos meghatározás végett lásd RÉVÉSZ [55].

Az egyenletes eloszlásból vett mintákra vonatkozó eredményeket a következőképpen lehet összefoglalni.

C. TÉTEL. *Ha valamilyen $d\geqq 1$ természetes számra $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \ldots$ független, I^d-n azonos eloszlású elég bő valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi ($d>1$ esetén: vektor-) változók, akkor létezik Brown-hidak egy $\{B_n(\underline{y}), \underline{y}\in I^d\}$ sorozata, továbbá egy $\{K(\underline{y}, x), \underline{y}\in I^d, 0\leqq x<\infty\}$ Kiefer-folyamat, valamint A, B, C pozitív abszolút konstansok úgy, hogy minden n-re*

(i) (KOMLÓS, MAJOR, TUSNÁDY, 1974 [41]). *A $d=1$ esetben minden valós z-re*

$$P\left\{\sup_{0\leqq y\leqq 1}\sqrt{n}|\alpha_n(y)-B_n(y)| > A\log n+z\right\} < Be^{-Cz},$$

következésképpen

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1}|\alpha_n(y)-B_n(y)| \overset{\text{a.s.}}{=} O(n^{-1/2}\log n);$$

továbbá

$$P\left\{\max_{1\leqq k\leqq n}\sup_{0\leqq y\leqq 1}|\sqrt{k}\alpha_k(y)-K(y, k)| > (A\log n+z)\log n\right\} < Be^{-Cz},$$

következésképpen

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1}|\sqrt{n}\alpha_n(y)-K(y, n)| \overset{\text{a.s.}}{=} O(\log^2 n).$$

(ii) (CSÖRGŐ M., RÉVÉSZ, 1974 [17] és 1975 [18]). *A $d=1$ esetben minden valós z-re*

$$P\Big\{\sup_{0\le y\le 1}\sqrt{n}\,|u_n(y)-B_n(y)| > A\log n+z\Big\} < Be^{-Cz}, \tag{31}$$

következésképpen

$$\sup_{0\le y\le 1}|u_n(y)-B_n(y)| \overset{\text{a.s.}}{=} O(n^{-1/2}\log n); \tag{32}$$

továbbá

$$\sup_{0\le y\le 1}|\sqrt{n}\,u_n(y)-K(y,n)| \overset{\text{a.s.}}{=} O\big((n\log\log n)^{1/4}(\log n)^{1/2}\big). \tag{33}$$

(iii) (CSÖRGŐ M., RÉVÉSZ, 1973 [16]). *Tetszőleges d esetén*

$$P\Big\{\sup_{\underline{y}\in I^d}|\alpha_n(\underline{y})-B_n(\underline{y})| > An^{-\frac{1}{2(d+1)}}(\log n)^{3/2}\Big\} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \tag{34}$$

következésképpen

$$\sup_{\underline{y}\in I^d}|\alpha_n(\underline{y})-B_n(\underline{y})| \overset{\text{a.s.}}{=} O\big(n^{-\frac{1}{2(d+1)}}(\log n)^{3/2}\big); \tag{35}$$

továbbá

$$\sup_{\underline{y}\in I^d}|\sqrt{n}\,\alpha_n(\underline{y})-K(\underline{y},n)| \overset{\text{a.s.}}{=} O\big(n^{\frac{d+1}{2(d+2)}}\log^2 n\big). \tag{36}$$

(iv) (RÉVÉSZ, 1976 [55]). *Tetszőleges d esetén*

$$\sup_{A\in\mathscr{A}_0}|\alpha_n(A)-B_n(A)| \overset{\text{a.s.}}{=} O\Big(n^{-\frac{\varrho}{12(d+1)}}\Big), \tag{37}$$

$$\sup_{A\in\mathscr{A}_0}|\sqrt{n}\,\alpha_n(A)-K(A,n)| \overset{\text{a.s.}}{=} O\Big(n^{\frac{3(d+1)}{6(d+1)+\varrho}}\Big), \tag{38}$$

ahol ϱ az $\mathscr{A}_0$ osztálytól függő szám, $0<\varrho\le 1$.

Ha most $X_1, X_2, \ldots$ független, tetszőleges (közös) folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók, akkor abból a megjegyzésből, hogy az $F(X_1), F(X_2), \ldots$ változók egyenletes eloszlásúak $[0,1]$-en, egyből következik (i) kiterjesztése (a C. Tétel kontextusában):

$$P\Big\{\sup_{-\infty<x<\infty}\sqrt{n}\,|\beta_n(x)-B_n(F(x))| > A\log n+z\Big\} < Be^{-Cz} \tag{39}$$

$$P\Big\{\max_{1\le k\le n}\sup_{-\infty<x<\infty}|\sqrt{k}\,\beta_k(x)-K(F(x),k)| > (A\log n+z)\log n\Big\} < Be^{-Cz}, \tag{40}$$

következésképpen

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\beta_n(x)-B_n(F(x))| \overset{\text{a.s.}}{=} O(n^{-1/2}\log n), \tag{41}$$

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\sqrt{n}\,\beta_n(x)-K(F(x),n)| \overset{\text{a.s.}}{=} O(\log^2 n). \tag{42}$$

A kvantilis folyamat, illetve a magasabb dimenziós empirikus folyamat esetén már korántsem ilyen egyszerű megszabadulni az egyenletes eloszlás feltételezésétől. Ekkor az $F(x)$, ill. $F(\underline{x})$ eloszlásfüggvények folytonosságán túl még más (sokszor csak igen bonyolultan fogalmazható) feltételeket is meg kell kívánni. Ezeket a feltételeket nem fogalmazzuk meg pontosan, az olvasó az eredeti cikkekben megtalálhatja.

D. TÉTEL. (CSÖRGŐ M., RÉVÉSZ 1975 [18]). *Ha $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, elég bő valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, amelyek $F(x)$ eloszlásfüggvénye kétszer differenciálható ($f(x)=F'(x)$ jelöli a sűrűségfüggvényt), valamint teljesülnek ([18]), az eloszlásfüggvény simaságára és farkára tett feltételek, akkor minden n-re létezik olyan $B_n(y)$ Brown-híd, hogy*

$$\sup_{\frac{\log n}{n} \leqq y \leqq 1-\frac{\log n}{n}} \left| f(F^{-1}(y))\, q_n(y) - B_n(y) \right| \overset{\text{a.s.}}{=} O(n^{-1/2} \log n). \tag{43}$$

Ha továbbá X_1 eloszlása egy véges (a, b) intervallumra van koncentrálva, ahol $0<\varepsilon \leqq f(x) \leqq K<\infty$ és $|f'(x)|<K$ $(x \in (a, b))$ (ezek az utóbbi feltételek sokkal erősebbek, mint az imént fel nem soroltak), akkor van olyan $K(y, x)$ Kiefer-folyamat is, hogy

$$\sup_{0 \leqq y \leqq 1} \left| \sqrt{n} f(F^{-1}(y)\, q_n(y) - K(y, n) \right| \overset{\text{a.s.}}{=} O((n \log\log n)^{1/4} (\log n)^{1/2}), \tag{44}$$

és ebben az esetben (43) helyett már teljesül

$$\sup_{0 \leqq y \leqq 1} \left| f(F^{-1}(y)) q_n(y) - B_n(y) \right| \overset{\text{a.s.}}{=} O(n^{-1/2} \log n). \tag{45}$$

$\underline{x}=(x_1, \ldots, x_d) \in R^d$ és $\underline{X}=(X_1, \ldots, X_d)$ vektorváltozó esetén vezessük be a következő jelöléseket:

$$D_{\underline{x}} = \{(z_1, \ldots, z_d): z_i \leqq x_i,\ i = 1, \ldots, d\};$$

$$F_1(x_1) = P\{X_1 < x_1\}, \quad F_i(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1}) = P\{X_i < x_i | X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}\},$$

$i=2, \ldots, d$; T_i pedig jelentse a következő transzformációt:

$$T_i(x_1, \ldots, x_i) = (F_1(x_1), F_2(x_2|x_1), \ldots, F_i(x_i|x_1, \ldots, x_{i-1})), \quad i = 1, \ldots, d.$$

E. TÉTEL. (CSÖRGŐ M., RÉVÉSZ, 1975 [19]). *Legyenek $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, elég bő valószínűségi mezőn értelmezett d-dimenziós valószínűségi vektorváltozók, folytonos $F(\underline{x})$ eloszlásfüggvénnyel. Az F_i feltételes eloszlásfüggvények folytonosságára, monotonitására és parciális differenciálhányadosainak korlátosságára tett bizonyos (lásd* [19]*) feltételek mellett létezik Brown-hidaknak olyan $\{B_n(\underline{y}), \underline{y} \in I^d\}$ sorozata és olyan $\{K(\underline{y}, x), \underline{y} \in I^d, 0 \leqq x < \infty\}$ Kiefer-folyamat, hogy*

$$\sup_{\underline{x} \in R^d} |\beta_n(\underline{x}) - B_n(T_d D_{\underline{x}})| \overset{\text{a.s.}}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2(d+1)}} (\log n)^{3/2}\right), \tag{46}$$

$$\sup_{\underline{x} \in R^d} \left| \sqrt{n}\, \beta_n(\underline{x}) - K(T_d D_{\underline{x}}, n) \right| \overset{\text{a.s.}}{=} O\left(n^{\frac{d+1}{2(d+2)}} \log^2 n\right). \tag{47}$$

Ennyi előkészület után mostmár rátérhetünk az előző pontbeli 2. és 3. tételekkel paralel eredmények megfogalmazására.

5. TÉTEL. *Legyenek* $U_1, U_2, \ldots$ *olyan valószínűségi változók, mint a* C. *tételben,* $X_1, X_2, \ldots$ *pedig, mint a* C. *tétel utáni bekezdésben. Ha* $\{v_n\}$ *pozitív egész értékű valószínűségi változóknak az* $\{U_i\}$, *ill.* $\{X_i\}$ *sorozatokhoz tartozó valószínűségi mezőn értelmezett olyan sorozata, hogy valamilyen* $r \geqq 1$ *számra, bármilyen pozitív* ε *mellett*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\left|\frac{v_n}{n} - v\right| > \varepsilon\right\} < \infty,$$

ahol v *olyan valószínűségi változó, hogy valamely* $0 < a < b < \infty$ *állandókkal* $P\{a < v < b\} = 1$, *akkor létezik olyan* $\{B_n(y)\}$ *Brown-híd sorozat és* $K(y, x)$ *Kiefer-folyamat, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\sup_{0 \leqq y \leqq 1} |u_{v_n}(y) - B_{v_n}(y)| > \varepsilon\right\} < \infty, \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\sup_{-\infty < x < \infty} |\beta_{v_n}(x) - B_{v_n}(F(x))| > \varepsilon\right\} < \infty, \tag{49}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\sup_{-\infty < x < \infty} |\beta_{v_n}(x) - v_n^{-1/2} K(F(x), v_n)| > \varepsilon\right\} < \infty. \tag{50}$$

Speciálisan, (48) *és* (49) $\alpha_{v_n}(y)$*-ra* $(y = F(x)$ *mellett*$)$ *is fennállnak.*

BIZONYÍTÁS. Tetszőleges pozitív ε-ra, $z = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}$ választásával (31)-ből következik, hogy ha n elég nagy, akkor

$$p_n(\varepsilon) = P\left\{\sup_{0 \leqq y \leqq 1} |u_n(y) - B_n(y)| > \varepsilon\right\} < Be^{-C\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}}.$$

Ezért az n bármely $g(n)$ polinomjára

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, p_n(\varepsilon) < \infty.$$

Ebből és a $\{v_n\}$-re tett feltételből az 1. Tétel (a) része segítségével azonnal adódik (48). Pontosan ugyanígy történik (49) bizonyítása, mig (50) belátásánál ezekhez képest az az egyedüli különbség, hogy z-t pl. $\varepsilon\sqrt{n}/2 \log n$-nek választjuk. A bizonyításból világos itt is, hogy amennyiben $P\{|v_n/n - v| > \varepsilon\}$ exponenciális gyorsasággal tart nullához, akkor ugyanezt teszik a (48), (49), (50)-ben szereplő valószínűségek is. (Mint a 2. pontbeli 1. Példánál láttuk, ez a helyzet például, ha v_n n várható értékű Poisson-változó.)

6. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az* $\{U_i\}$ *sorozat olyan mint a* C. *tételben, az* $\{X_i\}$ *sorozat pedig vagy olyan mint a* C. *tétel utáni bekezdésben, vagy olyan, mint az* E., *illetve a* D. *tétel első, illetve második részében, mindig annak megfelelően éppen melyik empirikus — vagy kvantilis — folyamatról van szó az alábbi állításokban. Legyen* $\{v_n\}$ *pozitív egész értékű valószínűségi változók olyan sorozata, amely megfelelően az* $\{U_i\}$, *illetve az* $\{X_i\}$ *sorozatoknál alapul vett valószínűségi mezőn van értelmezve és*

$$v_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Ekkor léteznek a megfelelő Brown-híd sorozatok és Kiefer-folyamatok úgy, hogy

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |\beta_{v_n}(x) - B_{v_n}(F(x))| \xrightarrow{P} 0, \tag{51}$$

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |\beta_{v_n}(x) - v_n^{-1/2} K(F(x), v_n)| \xrightarrow{P} 0,$$

speciálisan

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1} |\alpha_{v_n}(y) - B_{v_n}(y)| \xrightarrow{P} 0, \tag{52}$$

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1} |\alpha_{v_n}(y) - v_n^{-1/2} K(y, v_n)| \xrightarrow{P} 0,$$

Továbbá

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1} |u_{v_n}(y) - B_{v_n}(y)| \xrightarrow{P} 0, \tag{53}$$

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1} |u_{v_n}(y) - v_n^{-1/2} K(y, v_n)| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{\underline{y}\in I^d} |\alpha_{v_n}(\underline{y}) - B_{v_n}(\underline{y})| \xrightarrow{P} 0, \tag{54}$$

$$\sup_{\underline{y}\in I^d} |\alpha_{v_n}(\underline{y}) - v_n^{-1/2} K(\underline{y}, v_n)| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}_0} |\alpha_{v_n}(A) - B_{v_n}(A)| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}_0} |\alpha_{v_n}(A) - v_n^{-1/2} K(A, v_n)| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{\frac{\log v_n}{v_n}\leqq y\leqq 1-\frac{\log v_n}{v_n}} |f(F^{-1}(y))\, q_{v_n}(y) - B_{v_n}(y)| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1} |f(F^{-1}(y))\, q_{v_n}(y) - v_n^{-1/2} K(y, v_n)| \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sup_{0\leqq y\leqq 1} |f(F^{-1}(y))\, q_{v_n}(y) - B_{v_n}(y)| \xrightarrow{P} 0, \tag{55}$$

$$\sup_{\underline{x}\in R^d} |\beta_{v_n}(\underline{x}) - B_{v_n}(T_d D_{\underline{x}})| \xrightarrow{P} 0, \tag{56}$$

$$\sup_{\underline{x}\in R^d} |\beta_{v_n}(x) - v_n^{-1/2} K(T_d D_{\underline{x}}, v_n)| \xrightarrow{P} 0.$$

Ha továbbá $v_n \xrightarrow{P} \infty$ *helyett az teljesül, hogy* $v_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$, *akkor a konvergencia mind a tizenöt sorban egy valószínűséggel (a.s.) valósul meg.*

BIZONYÍTÁS. A (41), (42), (32), (33), (35)—(38), (43)—(47) összefüggések és az 1. tétel (b), (illetve (c) részének összevetésével nyilvánvaló.

KÖVETKEZMÉNYEK. *Ha* $\{\nu_n\}$ *teljesíti a* (19) *feltételt, vagyis*

$$\frac{\nu_n}{f(n)} \xrightarrow{P} \nu, \quad P\{\nu > 0\} = 1, \quad f(n) \nearrow \infty,$$

akkor

$$\beta_{\nu_n}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(F(\cdot)), \tag{57}$$

$$\alpha_{\nu_n}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\cdot), \tag{58}$$

$$u_{\nu_n}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\cdot), \tag{59}$$

a D. *tétel második részebeli erősebb feltételekkel:*

$$f(F^{-1}(\cdot))\, q_{\nu_n}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\cdot). \tag{60}$$

Továbbá

$$\alpha_{\nu_n}(\dot{-}) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\dot{-}), \tag{61}$$

$$\beta_{\nu_n}(\dot{-}) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(T_d D_{\dot{-}}). \tag{62}$$

BIZONYÍTÁS. Elegendő lesz belátni, hogy

$$B_{\nu_n}(\dot{-}) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\dot{-}). \tag{63}$$

Ugyanis (54)-en keresztül ebből már következik (61). De minthogy (63) a $d=1$ esetben a

$$B_{\nu_n}(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\cdot) \tag{64}$$

konvergenciára egyszerűsödik, (52), (53) és (55)-ön keresztül egyúttal (58), (59) és (60) is következik. Bár (58) speciális esete (57)-nek is ((61)-en kívül), forrása mindkettőnek (64). (64)-ből ugyanis következik, hogy

$$B_{\nu_n}(F(\cdot)) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(F(\cdot)),$$

ami (51) segítségével maga után vonja (57)-et. Végül (63)-ból az is következik, hogy

$$B_{\nu_n}(T_d D_{\dot{-}}) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(T_d D_{\dot{-}}),$$

amit (56)-tal ha összevetünk, adódik (62).

(63) ellenőrzéséhez először is vegyük észre, hogy a Brown-híd értelmezéséből egyből adódik a

$$\{B_n(\underline{y}),\ \underline{y} \in I^d\} \overset{\mathcal{D}}{=}$$

$$\overset{\mathcal{D}}{=} \{n^{-1/2}(X(ny_1, \ldots, ny_d) - y_1 \ldots y_d X(n, \ldots, n)),\ (y_1, \ldots, y_d) \in I^d\}$$

egyenlőség, bármilyen legyen is az n természetes szám. Ebből következik, hogy a (34) alatti valószínűségben (C. tétel, (iii) rész) $B_n(\underline{y})$-nak az előző eloszlási egyenlőség jobb oldalát vehetjük, lévén, hogy ott csak a szóban forgó folyamat eloszlása érdekes. Ekkor viszont ((35)-ön keresztül) (54)-, majd (64)-be B_{ν_n} helyére ennek a folyamatnak megfelelően randomizált alakját írhatjuk, vagyis (63) igazolásához elegendő belátni, hogy

$$\nu_n^{-1/2}(X(\nu_n \dot{-} |) - | \dot{-} | X(\underline{\nu_n})) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(\dot{-}) \overset{\mathcal{D}}{=} X(\dot{-}) - | \dot{-} | X(\underline{1}),$$

ahol $\div$ mindenütt ugyanazt a megnnemhatározott vektorparamétert jelöli, $\underline{c}=(c,\ldots,c)$ Ehhez viszont elegendő csak azt bizonyítani, hogy

$$v_n^{-1/2} X(v_n \div) \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\div), \tag{65}$$

hiszen ebből már következik (minden $\underline{y}=(y_1, \ldots, y_d)$ vektorra), hogy $v_n^{-1/2}(\underline{y}) X(\underline{v}_n) = v_n^{-1/2} y_1 \ldots y_d X(v_n, \ldots, v_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} |\underline{y}| X(\underline{1}) = y_1 \ldots y_d X(1, \ldots, 1)$. (65)-tel a $d=1$ esetben már foglalkoztunk (3. pont (20)), most hasonló a helyzet. Mivel az $n^{-1/2} X(ny_1, \ldots, ny_d)$ folyamat a segédtételünkben megkívánt alakú és nyilvánvalóan feszes, ezért a Lemmából következik, hogy a $\{v_n^{-1/2} X(v_n y_1, \ldots, v_n y_d)\}$ folyamat-sorozat is feszes. Hogy végesdimenziós eloszlásai is konvergálnak $X(y_1, \ldots, y_d)$ megfelelő végesdimenziós eloszlásaihoz, az ugyanígy látható be, mint a $d=1$ esetben (vagyis [14] 1. vagy 2. tételének alkalmazásával). STRAF említett 5.6. tétele ([60], vagy NEUHAUS [48]) szerint ezzel (65)-öt és így a 6. tétel következményeit is igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a jelen bizonyítás annyiban hasonlít CSÖRGŐ S.-nak ([21]) az (58) konvergenciára adott bizonyításához, hogy ott is

$$B_{v_n}(x) = v_n^{-1/2}(X(v_n x) - x X(v_n))$$

feszességének belátásán keresztül jutunk α_{v_n} feszességéhez. Persze α_{v_n} végesdimenziós eloszlásainak konvergenciáját ott direkt módon kell belátni, és ez a tény (a részletösszeg-folyamatokhoz hasonlóan) megint jól mutatja a jelen módszer előnyét. Itt ugyanis elegendő volt a $B_{v_n}(\underline{y})$ folyamat végesdimenziós eloszlásainak egyetlen és jóval könnyebb konvergencia-problémáját elintézni ahelyett, hogy ezt a (nem is kézenfekvő megoldású) kérdést külön-külön vizsgáltuk volna az (59)—(62) relációk bal oldalain álló folyamatokra.

Az empirikus eloszlásoktól búcsúzóban még azt jegyezzük meg, hogy BURKE és CSÖRGŐ M. erős approximációs eredményei alapján ([7], [8]) a 6. tétel és következményeinek megfelelő állításokat lehet szószerint ugyanígy bizonyítani *többmintás* kvantilis és többmintás többváltozós empirikus folyamatokra, valamint olyan kvantilis és többváltozós empirikus folyamatokra, amelyekben még az alapul vett eloszlásosztály paraméterei is becsülve vannak.

5. $v_n/f(n)$ *limeszeiről*

Ahogy a bevezetőben említettük, KAC 1949-es [38] dolgozatában v_n Poisson-eloszlású, és így $v_n/n \xrightarrow{P} 1$. Hasonlóképpen ANSCOMBE [1] abban az 1952-es dolgozatában, ami a figyelmet a véletlen-indexes határeloszlás-tételekre irányította, azzal a feltétellel dolgozott, hogy $v_n/n \xrightarrow{P} c$ (ahol c pozitív konstans. CHUNG ([11], 230. lap), ill. RÉNYI ([53], 401. lap) rámutatnak, hogy bizonyítása már DOEBLIN [22], [23] dolgozataiban megtalálható). Az ezután következő dolgozatok sokaságában (lásd az említett [39] bibliográfiát) komoly erőfeszítések történtek abból a célból, hogy a v_n-re tett feltevésnél megengedhető legyen tetszőleges pozitív változó is mint v_n/n (vagy $v_n/f(n)$) sztochasztikus határértéke. A jelen dolgozat is voltaképpen ilyen irányú eredményeket foglalt össze és terjesztett ki az eddigiekben.

Most arról lesz szó, hogy bizonyos speciális körülmények között $v_n/f(n)$ limesze — ha egyáltalán létezik — konstans kell legyen. A gondolat az, hogy ha v_n független változóktól vagy ezek részletösszegeitől függ, és ha az első változók hatása a határátmenetnél nem érvényesül, akkor lim v_n/n az ún. farok σ-algebrára nézve mérhető és ennélfogva konstans. Ilyen eredmény egy lehetséges megfogalmazása a következő

7. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az alapul vett* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező teljes* ([53], 53. lap, vagy [36], 69. lap). (a) *Legyen* $\{X_j\}$ *független változók sorozata és tegyük fel, hogy* v_n *az első n X változó által generált* σ*-algebrára,* $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$*-re vonatkozóan mérhető. Legyen* g_n *az az* R^n*-en értelmezett Borel-mérhető függvény, melyre* $v_n = g_n(X_1, \ldots, X_n)$. *Legyen a a* $\{-\infty\} \cup R \cup \{\infty\}$ *halmaz tetszőleges eleme és minden k-ra,* $k \leqq n$, *legyen*

$$v_n^k = g_n(a, \ldots, a, X_{k+1}, \ldots, X_n).$$

Ha valamilyen $f(n)$ *számsorozatra teljesül, hogy*

$$\frac{v_n^k - v_n}{f(n)} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty), \quad k = 1, 2, \ldots$$

és

$$\frac{v_n}{f(n)} \xrightarrow{P} v,$$

akkor v 1 *valószínűséggel konstans.*

(b) *Az* (a) *rész állítása akkor is érvényes, ha* v_n *a* $\sigma(S_1, \ldots, S_n)$*-algebrára vonatkozóan mérhető, ahol* $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ *és* $X_1, X_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású változók.*

BIZONYÍTÁS. Az (a) esetben a $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$ farok σ-algebra a Kolmogorov-féle null-egy törvény ([53], 349. lap, vagy [6], 40. lap), a (b) esetben pedig a $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma(S_k, S_{k+1}, \ldots)$ farok σ-algebra a Hewitt—Savage-féle null-egy törvény ([6], 64. lap) miatt null-egy tulajdonságú, vagyis a hozzájuk tartozó események valószínűsége nulla vagy egy. Mivel $v_n/f(n) \xrightarrow{P} v$, így van a természetes számoknak olyan $\{n_j\}$ részsorozata, hogy $v_{n_j}/f(n_j) \xrightarrow{\text{a.s.}} v$ $(j \to \infty)$. De akkor a másik feltétel szerint ennek a számsorozatnak valamilyen $\{n_{j_l}\}$ részsorozatára $v_{n_{j_l}}^k / f(n_{j_l}) \xrightarrow{\text{a.s.}} v$ $(l \to \infty)$ tetszőleges $k = 1, 2, \ldots$-re. Viszont minden rögzített k esetén $v_{n_j}^k$ $(n_j \geqq k+1)$ $\mathcal{A}_{k+1} = \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots)$-re vonatkozóan mérhető (a (b) esetben $\mathcal{B}_{k+1} = \sigma(S_{j+1}, S_{k+2}, \ldots)$-re vonatkozóan) és így mérhető v is. Tehát v mérhető $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$ (a (b) esetben $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$)-ra vonatkozóan is, és így bármely x-re $P\{v < x\} = 0$ vagy 1, vagyis v egy valószínűséggel konstans.

Ezt az eredményt most felhasználjuk annak igazolására, hogy egy bizonyos bizonyítás nem létezik. A probléma a következő. Legyen $\{X_j\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$. Mint eddig $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ és legyen $M_n = \max(S_1, \ldots, S_n)$. Ekkor ERDŐS és KAC [31] a bevezetésben is említett nevezetes eredményeinek egyike szerint

$$\lim_{n \to \infty} P\{M_n < x\sqrt{n}\} = C(x) = \max(2\Phi(x) - 1, 0), \quad -\infty < x < \infty, \tag{66}$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Legyen v_n az első olyan j az $1, \ldots, n$ számok közül, melyre $M_n = S_j$. Ezzel

$$M_n/\sqrt{n} = S_{v_n}/\sqrt{n} \tag{67}$$

Mármost (66) egy „bizonyítása" az lenne, hogy belátnánk egy olyan pozitív ν valószínűségi változó létezését, amelyre $\nu_n/n \xrightarrow{P} \nu$, majd az $f(n)=n$ $(n=1, 2, \ldots)$ speciális esetben alkalmaznánk a 3. pontban említett WITTENBERG [69]—MOGYORÓDI [47]-féle eredményt (vö. (21 d)), miszerint

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_{\nu_n} < x\sqrt{f(n)}\} = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP\{\nu < y\}, \tag{68}$$

ha

$$\nu_n/f(n) \xrightarrow{P} \nu, \quad P\{\nu > 0\} = 1, \quad f(n) \nearrow \infty.$$

Kérdés tehát, hogy van-e ilyen ν. A válasz az, hogy nincs, sőt semmilyen más $\{f(n)\}$ normalizáló sorozat esetén nincs. Vagyis igaz a következő

8. TÉTEL. *Legyen $\{S_n\}$ nulla várható értékű, egy szórású független, azonos eloszlású valószínűségi változók részletösszeg-sorozata és legyen ν_n az első olyan j, melyre $S_j=\max(S_1, \ldots, S_n)=M_n$. Ekkor nem létezik olyan $\{f(n)\}$ számsorozat, hogy valamilyen (határozottan) pozitív ν valószínűségi változóval $\nu_n/f(n) \xrightarrow{P} \nu$ teljesülne.*

BIZONYÍTÁS. Először azt mutatjuk meg, hogy amennyiben a tétel állításával ellenkezőleg ilyen $f(n)$ és ν mégis léteznek, akkor egy valószínűséggel $\nu=$konstans lenne. A 7. tétel g_n függvénye most: $g_n(x_1, \ldots, x_n)=j$, ha $x_j=\max(x_1, \ldots, x_n)> >x_1, \ldots, x_{j-1}$. Legyen $a=-\infty$. Ekkor ν_n^k az a $k+1$ és n közötti index, amelyre $S_{\nu_n^k}=\max(-\infty, \ldots, -\infty, S_{k+1}, \ldots, S_n)$. Állítjuk, hogy minden rögzített k esetén

$$\nu_n^k - \nu_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Legyen $A_k=\{\omega: \nu_n^k(\omega)-\nu_n(\omega)\not\to 0\}$. Nyilvánvaló, hogy $A_k=\{S_n \leqq \max(S_1, \ldots, S_k)$ minden $n>k$ esetén$\}=\bigcap_{l=1}^{\infty} A_{k,l}$, ahol

$$A_{k,l} = \{S_n \leqq S_l \quad \text{minden } n > k \text{ esetén}\} = \bigcap_{n=k+1}^{\infty} \{S_n - S_l \leqq 0\} =$$

$$= \bigcap_{n=k+1}^{\infty} \left\{\sum_{j=l+1}^{n} X_j \leqq 0\right\} = \bigcap_{n=k+1}^{\infty} \overline{\left\{\sum_{j=l+1}^{n} X_j > 0\right\}} = \bigcap_{n=k+1}^{\infty} \overline{C_l^{(n)}(0)}.$$

Jónéhány módja van annak, hogy megmutassuk, miszerint $P\{A_{k,l}\}=0$. LINDLEY [43] például kimutatja, hogy ez következik CHUNG, FUCHS és ORNSTEIN-nek ([11], 8.3 fejezet, vagy [6], 3.7 fejezet) a rekurrens bolyongásokra vonatkozó eredményeiből. De megkaphatjuk a RÉNYI-féle keverési elmélet (lásd [52] ill. [53], 338. lap) eredményeinek felhasználásával is. Tekintsük ugyanis a

$$C_l^{(n)}(x\sqrt{n}) = \left\{\sum_{j=l+1}^{n} X_j > x\sqrt{n}\right\}$$

eseményeket $(n=l+1, l+2, \ldots)$. Ez a sorozat keverő, $1-\Phi(x)$ sűrűséggel, vagyis bármely pozitív valószínűségű C esemény esetén $P\{C_l^{(n)}(x\sqrt{n})|C\} \to 1-\Phi(x)$, ha $n\to\infty$, akármilyen valós szám is x. FISCHLER [33] viszont megmutatta, hogy ebben az esetben

$$P\{\limsup_{n\to\infty} C_l^{(n)}(x\sqrt{n})\} = 1,$$

tehát

$$P\{\overline{\limsup_{n\to\infty} C_l^{(n)}(x\sqrt{n})}\} = P\left\{\bigcap_{j=l+1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty} C_l^{(n)}(x\sqrt{n})\right\} = P\left\{\bigcup_{j=l+1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\overline{C_l^{(n)}(x\sqrt{n})}\right\} = 0.$$

Vagyis az $x=0$ esetben

$$P\left\{\bigcup_{j=l+1}^{\infty} A_{j-1,l}\right\} = 0,$$

amiből következik, hogy $P\{A_{k,l}\}=0$, és így $P\{A_k\}=0$. A 8. tétel alkalmazásával tehát, valamilyen $c>0$ konstanssal, valóban $P\{\nu=c\}=1$.

A lehetséges normalizáló sorozatokat most két részre bontva: a) előbb megmutatjuk, hogy az $f(n)=n$ $(n=1, 2, \ldots)$ eset lehetetlen; b) majd erre alapozva azt, hogy semmilyen más $f(n)$ se jó.

a) Ha tehát $\nu_n/n \xrightarrow{P} c$, akkor (66), (67) és (68) miatt minden pozitív x-re

$$2\Phi(x)-1 = \lim_{n\to\infty} P\{M_n < x\sqrt{n}\} = \lim_{n\to\infty} P\{S_{\nu_n} < x\sqrt{n}\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP\{\nu < y\} = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right).$$

Mindkét oldalt differenciálva látható, hogy ilyen c nincs, vagyis ez az eset lehetetlen.

b) Ha viszont valamilyen más $f(n)$ sorozatra $\nu_n/f(n) \xrightarrow{P} C>0$, akkor (mivel $\nu_n \leqq n$) az egyből világos, hogy $f(n)=O(n)$, Ennél viszont jóval többet is tudunk. Ugyanis most (68) szerint

$$P\{S_{\nu_n}/\sqrt{n} < x\sqrt{f(n)/n}\} = P\{S_{\nu_n} < x\sqrt{f(n)}\} \to \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right),$$

ha $n\to\infty$, és $\Phi(x/\sqrt{c})$ folytonos, szigorúan növő eloszlásfüggvény, ugyanakkor, amikor $\{S_{\nu_n}/\sqrt{n}\}$-nek a határeloszlása $G(x)$. Így szükségképpen létezik olyan $c_0>0$ konstans, hogy $\sqrt{f(n)/n}\to\sqrt{c_0}$. Akkor viszont $\nu_n/n \xrightarrow{P} cc_0$, ami az a) eset szerint lehetetlen. (Itt is befejezhettük volna a bizonyítást úgy, hogy $x>0$-ra:

$$2\Phi(\sqrt{c_0}\,x)-1 = \Phi(x/\sqrt{c}),$$

amit differenciálva kapjuk, hogy minden $x>0$-ra $\exp\left\{\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{c}-c_0\right)\right\}=\frac{1}{2}$, ilyen c és c_0 pedig nincsenek.) Ezzel a 8. tétel bizonyítását befejeztük.

A 7. tétel bizonyításánál használtuk azt a tényt, hogy független, azonos eloszlású változók $\{S_n\}$ részletösszeg sorozatának $\mathscr{B}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ farok σ-algebrája 0–1 tulajdonságú. Ezt fel lehet használni az $\{S_n<x\sqrt{n}\}$ eseménysorozat (a 8. tétel bizonyításánál ki is aknázott) keverő voltának RÉNYI [52]-étől eltérő bizonyítására is. SUCHESTON [62] egy eredménye szerint ugyanis $\mathscr{B}$ 0–1 tulajdonsága maga után vonja, hogy bármely $\{C_n\}$ eseménysorozat keverő α sűrűséggel, ha $C_n\in\sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ $(n=1, 2, \ldots)$ és $P\{C_n\}\to\alpha$ $(0<\alpha<1)$. Mivel $\{S_n<x\sqrt{n}\}$ teljesíti ezeket a feltételeket, így valóban keverő. Persze RÉNYI [52] eredeti bizonyítása akkor is működik, ha az összeadandók nem független, azonos eloszlású változók.

A 8. tétel bizonyítási módszere más esetekben is hasznos lehet normalizáló sorozatok létesítésének vizsgálatára. Olyan jellegű eredményekre gondolunk mint például a CHOW és ROBBINS [9]-féle, (akik bebizonyították, hogy ha van olyan R_n számsorozat, hogy végtelen várható értékű, független, azonos eloszlású X_i-k esetén $(X_1+\ldots+X_n)/R_n$ egy valószínűséggel konvergens, akkor a limesz csak nulla lehet), csak persze a konvergencia sztochasztikus lenne. Kifejezetten a CHOW—ROBBINS esetben persze módszerünk nem működhet, minthogy az eredmény nem igaz. Vannak példák ugyanis (a Peterburg-játék például, [32]), ahol az előbbi hányados nem-nulla limeszhez konvergál sztochasztikusan.

A 8. tételhez hasonló eredményt bizonyított TATA [65], nevezetesen azt, hogy független, azonos eloszlású sorozat kiemelkedő elemeinek L_n indexsorozatához sincs olyan $f(n)$ sorozat, hogy $L_n/f(n) \xrightarrow{P} v$ $(P\{v>0\}=1)$ lenne.

Befejezésül még azt jegyezzük meg, hogy eredetileg a 7. tétel állítását pusztán azon feltevés mellett szerettük volna bizonyítani, hogy v_n megállási szabály (pl. [36], 378. lap). A gondolat az lett volna, hogy a Wald-féle azonosság és különböző, a véletlen tagszámú összegek momentumaira tett feltevések (mint pl. [10]-ben) mellett ellentmondásra jussunk. Ilyen bizonyítást nem sikerült tető alá hozni és úgy tűnik, hogy az $\{X_i\}$ sorozatra tett valamilyen kiegészítő feltételek szükségesek ahhoz, hogy $v_n/f(n)$ sztochasztikus limesze valóban konstans legyen. Ez egyúttal arra is utal, hogy mindazok az erőfeszítések, amelyek arra irányultak, hogy a v_n-re tett feltevést úgy gyengítsék, hogy $v_n/f(n)$ konstans helyett tetszőleges pozitív valószínűségi változóhoz konvergálhasson sztochasztikusan, nemhiába történtek.

IRODALOM

[1] F. J. ANSCOMBE (1952), Large-sample theory of sequential estimation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 48, 600—607.

[2] P. J. BICKEL and M. J. WICHURA (1971), Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and applications, *Ann. Math. Stat.* 42, 1656—1670.

[3] P. BILLINGSLEY (1968), *Convergence of probability measures*, Wiley, New York.

[4] P. BILLINGSLEY (1962), Limit theorems for randomly selected partial sums, *Ann. Math. Statist.* 33, 85—92.

[5] L. BREIMAN (1967), On the tail behavior of sums of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 9, 20—25.

[6] L. BREIMAN (1968), *Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[7] M. D. BURKE and M. CSÖRGŐ (1976), Strong approximations of the k-sample quantile and multivariate empirical processes.

[8] M. D. BURKE and M. CSÖRGŐ (1976), Strong approximations of the estimated quantile and multivariate empirical processes.

[9] Y. S. CHOW and H. ROBBINS (1961), On sums of independent random variables with infinite moments and "fair" games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 47, 330—335.

[10] Y. S. CHOW, H. ROBBINS and H. TEICHER (1965), Moments of randomly stopped sums, *Ann. Math. Statist.* 36. 789—796.

[11] K. L. CHUNG (1968), *A course in probability theory*, Harcourt, Brace and World, New York.

[12] M. CSÖRGŐ (1968), On the strong law of large numbers and the central limit theorem for martingales, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131, 259—275.

[13] M. CSÖRGŐ (1972), Distribution results for distance functions based on the modified empirical distribution function of M. Kac, *Ann. Inst. Statist. Math.* 24, 101—110.

[14] M. CSÖRGŐ and S. CSÖRGŐ (1973), On weak convergence of randomly selected partial sums, *Acta Sci. Math.* 34, 53—60.

[15] M. CSÖRGŐ and R. FISCHLER (1970), Departure from indenpendence: the strong law, standard and random-sum central limit theorems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 21, 105—114.

[16] M. CSÖRGŐ and P. RÉVÉSZ (1975), A new method to prove Strassen type laws of invariance principle II, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 31, 261—269.

[17] M. CSÖRGŐ and P. RÉVÉSZ (1975), Some notes on the empirical distribution function and the quantile proces, 11. *Limit theorems of probability theory (Coll. Math. Soc. János Bolyai, Keszthely, Hung. 1974)*, North Holland, Amsterdam.

[18] M. Csörgő and P. Révész (197), Strong approximations of the quantile proces, *Ann. Statist.*
[19] M. Csörgő and P. Révész (197), A strong approximations of the multivariate empirical process, *Studia. Sci. Math. Hung.*
[20] S. Csörgő (1974), On limit distributions of sequences of random variables with random indices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 25, 227—232.
[21] S. Csörgő (1974), On weak convergence of the empirical process with random sample size, *Acta Sci. Math.* 36, 17—25, Correction: 375—376.
[22] W. Doeblin (1938), Sur deux problemes de M. Kolmogoroff concernant le chaines denombrables, *Bull. Soc. Math. France* 66, 210—220.
[23] W. Doeblin (1940), Elements d'une theorie generale des chaines simples constantes de Markov, *Ann. Sci. Ecole, Norm. Sup.* 57, 61—111.
[24] M. Donsker (1951), An invariance principle for certain probability limit theorems, *Four papers on probability, Mem. Amer. Math. Soc.* No. 6.
[25] M. Donsker (1952), Justification and extension of Doob's heuristic upproach to the Kolmogorov—Smirnov theorems, *Ann. Math. Statist.* 23, 277—281.
[26] J. L. Doob (1949), Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems, *Ann. Math. Statist.* 20, 393—404.
[27] R. M. Dudley (1966), Weak convergence of probabilities on non-separable metric spaces and empirical measures on Euclidean spaces, *Illinois J. Math.* 10, 109—126.
[28] A. Dvoretzky, J. Kiefer and J. Wolfowitz (1956), Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator, *Ann. Math. Statist.* 27, 642—669.
[29] P. Erdős (1949), On a theorem of Hsu and Robbins, *Ann. Math. Statist.* 20, 286—291.
[30] P. Erdős (1950), Remark on my paper "On a theorem of Hsu and Robbins, *Ann. Math. Statist.* 21, 138.
[31] P. Erdős and M. Kac (1946), On certain limit theorems in the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52, 292—302.
[32] W. Feller (1950), *An introduction to probability theory and its applications* I, Wiley, New York.
[33] R. Fischler (1968), Decomposition and composition of mixing sequences, *J. Math. Analysis Appl.* 21, 389—395.
[34] R. Fischler (1975), Weak convergence limit theorems with randomized indices, *Can. J. Statist.*
[35] D. Freedman (1971), *Brownian motion and diffusion*, Holden-Day, San Francisco.
[36] I. I. Gihman és A. V. Szkorohod (1975), *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*, Műszaki K. Budapest.
[37] H. Horwitz and M. Kac (1944), Statistical analysis of certain types of random functions, *Ann. Math. Statist.* 15, 173—181.
[38] M. Kac (1949), On deviations between theoretical and empirical distributions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 35, 252—257.
[39] J.-E. Karlsson and D. Szász (1974), Random limit theorems, A bibliography (MTA Mat. Kut. Int.-ben)
[40] M. L. Katz (1963), The probability in the tail of a distribution, *Ann. Math. Statist.* 34, 312—318.
[41] J. Komlós, P. Major and G. Tusnády (1975), An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. I, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 32, 111—131.
[42] J. Komlós, P. Major and G. Tusnády (1976), An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. II. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 34, 33—58.
[44] P. Major (1976), The approximation of partial sums of independent RV's, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 35, 213—220.
[45] P. Major (1976), Approximation of partial sums of i. i. d. r. v. s. when the summands have only two moments, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 35, 221—229.
[46] J. Mogyoródi (1965), On the law of large numbers for the sum of a random number of independent random variables, *Annales Univ. Sci. Budapest de R. Eötvös nom. Sect. Math.* 8, 33—38.
[47] J. Mogyoródi (1966), A remark on stable sequences of random variables and a limit distribution theorem for the sum of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 17, 401—409.
[48] G. Neuhaus (1970), On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameters, *Ann. Math. Statist.* 41, 1582—1595.
[49] W. Philipp and W. F. Stout (1975), Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables, Mem. Amer. Math. Soc. No 161.
[50] Ю. В. Прохоров (1965), Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее прим. 1,177—238.
[51] A. Rényi (1953), On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 191—231.
[52] A. Rényi (1958), On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 9, 215—228.

[53] RÉNYI A. (1968), *Valószínűségszámítás*, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest.
[54] P. RÉVÉSZ (1968), *The laws of large numbers*, Acad. Press. New York.
[55] P. RÉVÉSZ (197), Three theorems on the multivariate empirical process, *Contributions to empirical distributions and multivariate empirical processes*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag.
[56] H. ROOTZÉN (1974), Some propertis of convergence in distribution of sums and maxima of dependent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 29, 295—307.
[57] А. В. Скороход (1965) Пределные теоремы для случайных процессов, Теория вероятностей и ее прим. 1,289—319.
[58] А. В. Скороход (1961) Исследования по теории случайных процессов, Из—во Киев. ун—та.
[59] F. SPITZER (1956), The probability in the tail of a distribution, *Ann. Math. Statist.* 34, 312—318.
[60] M. L. STRAF (1972), Weak convergence of stochastic processes with several parameters, *Proc. Sixth. Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* 2, 187—221.
[61] V. STRASSEN (1964), An invariance principle for the law of the iterated logarithm, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 3, 211—226.
[62] L. SUCHESTON (1963), On mixing and the 0—1 law, *J. Math. Analysis Appl.* 6, 447—456.
[63] D. SZYNAL (1972), On almost complete convergence for the sum of a random number of independent random variables, *Bull. Acad. Sci. Polon. Ser. Math. Astronom. Phys.* 20, 571—574.
[64] D. SZYNAL (1973), On the limit behaviour of a sequence of quantiles of a sample with a random number of items, *Applicationes Mathematicae*, 13, 321—327.
[65] M. N. TATA (1969), On outstanding values in a sequence of random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 12, 9—20.
[66] M. J. WICHURA (1968), On the weak convergence of non-Borel probabilities on a metric space, Thesis, Columbia Univ. New York.
[67] M. J. WICHURA (1969), Inequalities with application to weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters, *Ann. Math. Statist.* 40, 681—687.
[68] M. J. WICHURA (1973), Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments, *Ann. Probability*, 1, 272—296.
[69] H. WITTENBERG (1964), Limit distributions of random sums of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 3, 7—18.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАССПРЕДЕЛЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ИНДЕКСАМИ ПОСРЕДСТВОМ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТОСТИ

МИКЛОЩ ЧЁРГЁ, ШАНДОР ЧЁРГЁ, РОЖЕР ФИШЛЕР И ПАЛ РЕВЕС

RANDOM LIMIT THEOREMS VIA STRONG INVARIANCE PRINCIPLES

M. CSÖRGŐ, S. CSÖRGŐ, R. FISCHLER, P. RÉVÉSZ

One of the aims of this paper is to call attention to the applicability of some recent strong invariance principle — type results to studying similar and weak convergence properties of random limit theorems. This is done in Section 3 for sums of random variables, while in Section 4 for empirical processes. In Section 2 we review some almost sure and in probability convergence statements for randomly numbered sequences, which will then be applied in Section 3 and 4. In Section 5 we study the limits of the randomizing sequence of positive integer valued random variables and conclude that, under specific conditions, the normalized randomizing sequence can only converge in probability to a constant. Applications of this statement are also given there.

GÖMBKITÖLTÉSEK ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ TEREKBEN II.

BÖRÖCZKY KÁROLY

2. *Gömbkitöltés a 3-dimenziós állandó görbületű terekben*

Ebben a részben a 3-dimenziós állandó görbületű terek kongruens és inkongruens gömbökkel való kitöltésének problémáját vizsgáljuk.

Már a bevezetésben említettük, hogy a 3 és ennél magasabb dimenziós euklideszi terek egybevágó gömbökkel való legsűrűbb kitöltésének problémája még megoldatlan, s a legjobb becslés Rogerstől [1958] származik, mi szerint

az n-dimenziós euklideszi tér r sugarú gömbökkel való kitöltésének d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint $n+1$ páronként érintkező r sugarú gömbnek a középpontjai által meghatározott $2r$ élű szimplexben vett d_n kitöltési sűrűsége.

Ennek a d_n szimplexbeli sűrűségnek az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térbeli megfelelőjét $d_n(\varkappa, r)$-rel vagy rövidebben $d_n(r)$-rel jelöljük.

Az állandó görbületű terek r sugarú gömbkitöltései sűrűségére vonatkozó $d \leqq d_n(r)$ sejtés Fejes Tóthtól [1953 d] származik, aki a $d \leqq d_2(r)$ esetet megoldotta.

Fejes Tóthtól függetlenül Coxeter [1954] is rámutatott a $d \leqq d_n(r)$ sejtés néhány érdekes következményére: A 3-dimenziós szférikus térben az $\{5, 3, 3\}$ mozaik 120 dodekaéderből áll. A dodekaéderek 120 beírt gömbje ilyen rögzített gömbsugár mellett a szférikus tér legsűrűbb gömbkitöltését adja.

A 3 és ennél magasabb dimenziós szférikus terekben a nagy sugarú gömbökkel, pontosabban a legalább $\frac{\pi}{4}$ sugarú gömbökkel való kongruens gömbkitöltés problémáját Devenport és Hajós [1951] oldotta meg.

Az n-dimenziós euklideszi térben a kongruens gömbkitöltés d sűrűségére először Blichfeldt [1914] adott sűrűségkorlátot, mely szerint $d \leqq \frac{n+2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. A 3-dimenziós esetben ez $d \leqq 0{,}883\ldots$-nak felel meg. Később Blichfeldt [1929] egy nagyon szellemes bizonyítással $d \leqq 0{,}835\ldots$-re szorította le a sűrűségkorlátot. Rankin [1947] még tovább javított az eredményen, bebizonyítva, hogy $d \leqq 0{,}828\ldots$. Végül Rogers [1958] megmutatta, hogy $d \leqq 0{,}7796\ldots$. Fejes Tóth [1953 a] vázolt egy bizonyítási eljárást, amellyel az úgynevezett dodekaéderes sűrűségkorlátot $d \leqq 0{,}7545\ldots$-t lehetne igazolni. Ezt az utat azonban még nem sikerült végigjárni. A sejtett legsűrűbb elrendezés viszont $0{,}7404\ldots$ sűrűségű.

A gömbelhelyezési problémák vizsgálatában (l. pl. csak az utóbbi időből Bambach [1954 a], Bambach—Davenport [1952], Baranovszkij [1963], [1964], Blachman [1963], Blachman—Few [1963], Bliecher [1962], Böröczky [1964], [1967], Böröczky—Flórián [1964], Coxeter [1954], Coxeter—Few—Rogers [1959], Davenport [1952], Delaunay—Riskov [1963], Erdős—Rogers [1953], Fejes Tóth [1953 d], [1959 a], Fejes Tóth—Heppes [1967], Few [1956], Gametzkij [1962], Gilbert [1964],

Hadwiger [1952], Heppes [1960/61], [1961], [1967 a], Hortobágyi [1971], Horváth [1970], [1971], Horváth—Molnár [1967], Larman [1968], Molnár [1963], Rankin [1955 a], [1955 b], Rogers [1963], Schaer [1966 a], [1966 b], [1966 c], Watson [1956], van der Waerden [1961], Wester [1960]) gyakran alkalmaznak további megszorításokat a gömbelhelyezésre azon kívül, hogy az kitöltést vagy lefedést alkot. Az euklideszi terekben pl. a rácsszerű elhelyezéseket vizsgálták sokan.

Az állandó görbületű terekben viszont kevesebb olyan bizonyos mellékfeltételeknek eleget tevő követelmény adható meg, amely ugyanakkor a gömbelhelyezések elég széles körére teljesül. Ilyen a Molnár által bevezetett tágassági, ill. térigény fogalom. Az n-dimenziós állandó görbületű tér egy gömbrendszerének valamely gömbjére vonatkozó k-tágasságán ($1 \leqq k \leqq n$) a gömb középpontjától mért azon távolságot értjük, amelynél közelebb nem kerülhet e gömb és a gömb-rendszer bármely más k gömbjének a hatványalakzata. A 3-dimenziós esetben az 1-tágasságot laptágasságnak (L-tágasság), a 2-tágasságot éltágasságnak (E-tágasság) és a 3-tágasságot csúcstágasságnak (C-tágasság) is nevezhetjük. Egy gömbrendszer egyszerre több tágassági feltételnek is eleget tehet. Egy n-dimenziós állandó görbületű tér egy gömbrendszerének valamely gömbjére vonatkozó $(r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots, r_n)$-tágasságán azt értjük, hogy e gömb és a gömbrendszer bármely más k gömbjének ($1 \leqq k \leqq n$) a hatványalakzata nem kerülhet az r_k-nál közelebb e gömb középpontjához. Ha minden gömb ugyanannak a tágassági feltételnek tesz eleget, akkor ezt a gömbkitöltés tágasságának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha egy gömb eleget tesz egy r_k értékű k-tágassági feltételnek, akkor $l > k$ esetén eleget tesz $r_l = r_k$ értékű l-tágassági feltételnek is. Általában az l-nél kisebb k értékekhez tartozó k-tágassági feltételekből már következik, hogy a gömb automatikusan eleget tesz valamilyen értékű l-tágassági feltételnek is. Az ilyen értékek maximumát jelöljük $\bar{r}_l$-lel. Az esetek nagy részében $\bar{r}_l > \max_{1 \leqq k \leqq l-1} r_k$. Ha egy r sugarú gömb $(r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots, r_n)$-tágasságára teljesül, hogy $r \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots < r_n$ $\left(\text{a szférikus térben, továbbá } r_n < \frac{\pi}{2}\right)$ és $r_l \geqq \bar{r}_l$ $(2 \leqq l \leqq n)$, akkor az ilyen tágassági feltételt a következőképpen jelöljük: $[r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots, r_n]$-tágasság.

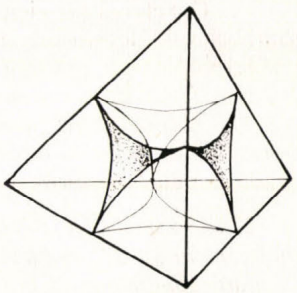
Az n-dimenziós hiperbolikus térben a tágasság fogalmát kiterjeszthetjük paraszférákat tartalmazó gömb kitöltésekre is. Az eltérés mindössze annyi, hogy a paraszféra tágasságának értelmezésénél a megfelelő hatványalakzatoknak a paraszféra felületétől mért távolságukat kell szerepeltetni a gömbközépponttól mért távolságok helyett. Ezeket a paraszféra tágasság értékeket s_k-val jelöljük. Az egységes jelölés használata kedvéért a paraszféráknál is élünk az r_k jelöléssel, s az r_k szimbolikus értékre $r_k = \infty + s_k$.

A továbbiakban fontos szerep jut az ortogonális szimplex fogalmának. Az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben az $A_0 A_1 \ldots A_n$ n-dimenziós szimplexet ortogonálisnak nevezzük, ha az $A_0, \ldots, A_i$ és az $A_i, \ldots, A_n$ $(0 < i < n)$ pontok által kifeszített i, ill. $(n-i+1)$-dimenziós alterek totálisan merőlegesek egymásra. Az A_0, ill. A_n pontokat az ortogonális szimplex végcsúcsainak mondjuk. Egy ortogonális szimplexet normálisnak nevezünk, ha a fenti tulajdonságokon kívül a szférikus térben még $A_0 A_n < \frac{\pi}{2}$ is teljesül.

Tételek:

II.1. TÉTEL: *Ha négy egymásba nem nyúló r sugarú gömb elfér a 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben, akkor a tér r sugarú gömbökkel való kitöltése egy gömbjének a D—V-cellájában vett d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint négy páronként érintkező r sugarú gömbnek a középpontjaik által meghatározott 2r élű tetraéderben vett $d_3(\varkappa, r)$ sűrűsége* (32. ábra).

Ebből a tételből közvetlenül adódik az alábbi két tétel:



32. ábra

II.2. TÉTEL: *Ha négy egymásba nem nyúló r sugarú gömb elfér a 3-dimenziós szférikus térben, akkor a szférikus tér r sugarú gömbökkel való kitöltésének d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint négy páronként érintkező r sugarú gömbnek a középpontjaik által meghatározott 2r élű tetraéderben vett $d_3(r)$ sűrűsége.*

II.3. TÉTEL: (Rogers eredménye). *A 3-dimenziós euklideszi tér r sugarú gömbökkel való kitöltésének d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint négy páronként érintkező r sugarú gömbnek a középpontjaik által meghatározott 2r élű tetraéderben vett d_3 sűrűsége.*

A II.1. tételt még egy, a hiperbolikus térről szóló tétellel egészítjük ki. Az analóg tételben paraszférákból végtelen sugarú gömbökből álló kitöltésről van szó.

II.4. TÉTEL: *A 3-dimenziós hiperbolikus tér paraszférákkal való kitöltése egy paraszférának a D—V-cellájában vett d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint négy páronként érintkező paraszférának a (végtelenben levő) középpontjaik által meghatározott aszimptotikus tetraéderben vett $d_3(\infty)$ sűrűsége.*

Coxeter [1935] megadta $d_3(\infty)$ értékét, amely igen meglepő módon számítható:

$$\lim_{r=\infty} d_3(\varkappa, r) = d_3(\infty) = \left(1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}--++\right)^{-1} = 0{,}853\ldots,$$

ahol a $\varkappa < 0$.

Fejes Tóth vetette fel azt a sejtést, hogy a $d_3(\varkappa, r)$ a $\varkappa$ görbületű hiperbolikus térben r-nek szigorúan monoton növekvő függvénye. Ez azt jelenti a hiperbolikus térben, hogy a véges vagy végtelen sugarú gömbökből álló kongruens gömbkitöltések közül a végtelen sugarú a legsűrűbb abban az értelemben, hogy a gömböknek a D—V-celláikban vett sűrűségük csak a paraszférák esetében éri el a $d_3(\infty)$ értéket. Ezt a sejtést Florián bizonyította be az alábbi tétellel:*

II.5. TÉTEL: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű hiperbolikus térben négy páronként érintkező r sugarú (véges vagy végtelen) gömbnek a középpontjaik által meghatározott 2r élű tetraéderben vett $d_3(\varkappa, r)$ sűrűsége az r-nek szigorúan monoton növekvő függvénye.*

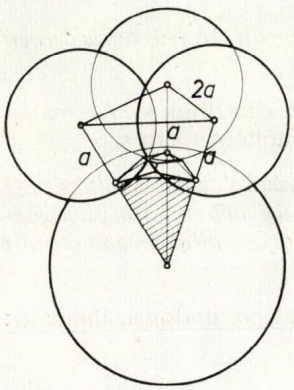
Az első négy tétel akkor ad pontos becslést, ha a tételben szereplő 2r élű szabályos tetraéder olyan, hogy egybevágó példányaival a tér a határpontoktól elte-

* ld. Böröczky—Florian [1964]

kintve egyrétűen kitölthető. Ezek az esetek a $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5\}$ és $\{3, 3, 6\}$ szimbólumokkal megadható szabályos tetraéder mozaikok, ahol a mozaik csúcspontjai a gömbök középpontjait adják meg. Jelöljük az első három mozaikhoz tartozó gömbök sugarait rendre R_1, R_2 és R_3-mal. Az első két eset már régebben ismert volt. Ezek a 4-dimenziós szabályos szimplexnek, ill. kereszt politópnak megfelelő elrendeződések, azaz a 3-dimenziós szférikus tér 5, ill. 8 kongruens gömbbel való legsűrűbb gömbelhelyezését adják meg. A harmadik eset — a már említett, Fejes Tóth és Coxeter által kiemelt eset — a 3-dimenziós szférikus térnek 120 kongruens gömbbel való legsűrűbb gömbelhelyezését adja. A negyedik esetben a tetraéderek a hiperbolikus tér aszimptotikus tetraéderei, s ez azt jelenti, hogy a II.4. tételben a parasszféra kitöltésre adott becslés pontos.

Az alábbiakban inkongruens gömbök alkotta gömbkitöltések sűrűségére mondunk ki néhány tételt, amelyek az előző tételek általánosításai. A szférikus térben mindig feltesszük, hogy a gömbök szűkebb értelemben konvexek.

II.6. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben egy legalább négy gömbből álló gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire $0<a\leqq r$, akkor a gömbkitöltés egy r sugarú gömbjének a D—V-cellájában vett sűrűsége nem lehet nagyobb, mint egy r sugarú és három a sugarú páronként érintkező gömb középpontjai által meghatározott tetraédernek és ezen r sugarú gömbnek a három a sugarú gömbre vonatkozó D—V-cellájának a közös részében vett r sugarú gömb $d_3(r; a)$ sűrűsége* (33. ábra).



33. ábra

A $d_3(r; a)$ korlát abban az esetben ad pontos becslést, ha a tételben szereplő tetraédernek az $a+r$ hosszúságú éléhez tartozó lapszöge 2π-nek egész számú hányada. Ilyen esetek csak a szférikus térben fordulnak elő:

Minden $r\geqq R_3$ értékhez tartozik egy olyan a érték, hogy az r sugarú gömb dodekaéder D—V-cellájában a $d_3(r; a)$ sűrűség lép fel, továbbá

minden $r\geqq R_2$ értékhez tartozik egy olyan a érték, hogy az r sugarú gömb kocka D—V-cellájában a $d_3(r; a)$ sűrűség lép fel, s végül

minden $r\geqq R_1$ értékhez tartozik egy olyan a érték, hogy az r sugarú gömb tetraéder D—V-cellájában a $d_3(r; a)$ sűrűség lép fel.

Ebből a tételből közvetlenül adódik az alábbi két tétel:

II.7. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós szférikus térben egy legalább négy gömbből álló gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire $0<a\leqq r\leqq b$, akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

$$d \leqq \sup_{a\leqq r\leqq b} d_3(r; a).$$

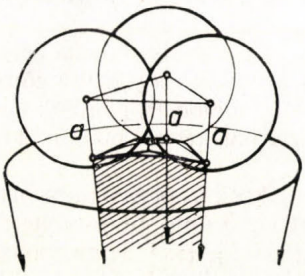
Nagyon valószínűnek látszik, hogy $\sup_{a\leqq r\leqq b} d_3(r; a)=d_3(b; a)$. A tétel $a=b=R_i$ $(i=1, 2, 3)$ esetben ad pontos korlátot.

II.8. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós euklideszi térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire $0<a\leqq r\leqq b$, akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

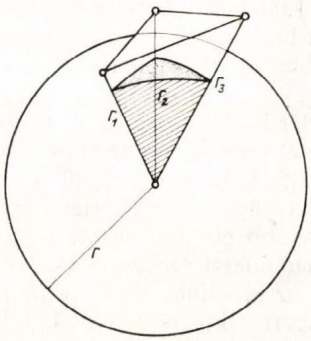
$$d < d_3(b; a).$$

A II.6. tételt is kiegészíthetjük a hiperbolikus térben a II.1. tétel mintájára. Paraszférákat is szerepeltetünk a kitöltésben.

II.9. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós hiperbolikus térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugárértékeire* $0 < a \leqq r \leqq \infty$, *akkor a gömbkitöltés egy r sugarú gömbjének a D—V-cellájában vett sűrűsége nem lehet nagyobb, mint egy r sugarú és három a sugarú páronként érintkező gömb középpontjai által meghatározott* ($r = \infty$ *esetén egy aszimptotikus csúcsú*) *tetraédernek és ezen r sugarú gömbnek a három a sugarú gömbre vonatkozó D—V-cellájának a közös részében vett r sugarú gömb* $d_3(r; a)$ *sűrűsége* (34. ábra).



34. ábra



35. ábra

A tétel pontos $r = \infty$ esetén minden a érték mellett.

A továbbiakban a 3-dimenziós állandó görbületű terekben tágassági feltételeknek eleget tevő gömbkitöltésekre mondunk ki tételeket.

II.10. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós* $\varkappa$ *görbületű térben egy r sugarú gömbökből álló, legalább négy gömböt tartalmazó és az* $[r_1, r_2, r_3]$*-tágassági feltételnek eleget tevő gömbkitöltés van, akkor a gömbkitöltés egy gömbjének a D—V-cellájában vett d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint egy r sugarú gömb* $d_3[r; r_1, r_2, r_3]$ *sűrűsége egy olyan normális ortogonális tetraéderben, amelynek egyik végcsúcsa e gömb középpontja és e végcsúcs távolsága a másik végcsúcstól, ill. az erre illeszkedő éltől és laptól rendre* r_3, r_2 *és* r_1 (35. ábra).

Az előző tételek mintájára a II.10. tétel is kiegészíthető az egész szférikus térről, ill. euklideszi térről szóló tételekkel:

II.11. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós szférikus térben egy r sugarú gömbökből álló, legalább négy gömböt tartalmazó és az* $[r_1, r_2, r_3]$*-tágassági feltételnek eleget tevő gömbkitöltés van, akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

$$d \leqq d_3[r; r_1, r_2, r_3].$$

II.12. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós euklideszi térben egy r sugarú gömbökből álló és az* $[r_1, r_2, r_3]$*-tágassági feltételnek eleget tevő gömbkitöltés van, akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

$$d \leqq d_3[r; r_1, r_2, r_3].$$

Ahhoz, hogy a II.10. tétel pontos becslést szolgáltasson szükséges, hogy az r_1, r_2, r_3 értékek a 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű tér egy szabályos poliédere középpontjának a poliéder egy lapjától, egy élétől, ill. egy csúcsától mért távolságai legyenek. Egy ilyen szabályos poliéder viszont akkor lehet D—V-cella, ha a beírt r_1 sugarú gömb oldallapokra vonatkozó tükörképei nem nyúlnak egymásba. Így bármely szabályos tetraéderben maximális sűrűség lép fel, kivéve a szférikus tér $\{3, 3, 3\}$ mozaik tetraéderénél nagyobb tetraédereit. Hasonló a helyzet a kockáknál, az oktaédereknél és a dodekaédereknél. A szférikus tér $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 4, 3\}$ és $\{5, 3, 3\}$ mozaikjai celláinál nagyobb kockákat, oktaédereket, ill. dodekaédereket kell csak kizárnunk. Ikozaéderekben viszont a maximális sűrűség csak a hiperbolikus térben lép fel a $\{3, 5, 3\}$ mozaik ikozaéderénél nem kisebb ikozaéderekben.

A II.11. és II.12. tételek akkor adnak pontos becslést, ha a II.10. tétel is azt ad, továbbá az előbb említett szabályos poliéderek egyúttal egy szabályos mozaik cellái.

A szférikus térben a $\{3, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$ mozaikok celláiba beírt gömbök a II.1. tétel szerint már az él és csúcs korlátozás nélkül is a legsűrűbb gömbkitöltést adták. A $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5\}$, $\{3, 4, 3\}$ mozaikokok celláiba beírt gömbök viszont csak az alkalmas tágassági feltételek mellett adják a szférikus tér 16, 600, ill. 24 gömbből álló legsűrűbb gömbkitöltését.

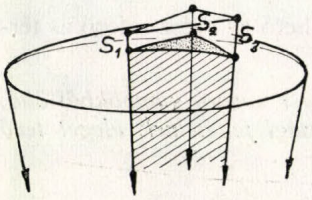
Az euklideszi térben a $\{4, 3, 4\}$ szimbólumú kockarács kockáiba írt gömbök alkotnak az alkalmas tágassági feltételek mellett legsűrűbb gömbkitöltést.

A hiperbolikus térben a $\{4, 3, 5\}$, $\{5, 3, 4\}$, $\{5, 3, 5\}$, $\{3, 5, 3\}$ mozaikok celláiba beírt gömbök adnak az alkalmas tágassági feltétel mellett legjobb gömbkitöltést. Az első esetben kocka, a következő két esetben dodekaéder, s az utolsó esetben ikozaéder egy-egy gömb D—V-cellája.

Ha a hiperbolikus térben az $r_3 = \infty$-t is megengedjük abban az értelemben, hogy a cella csúcsba futó élek párhuzamosak, akkor további esetek lehetségesek: a $\{3,3,6\}$, $\{4, 3, 6\}$, $\{5, 3, 6\}$, $\{3, 4, 4\}$ mozaikok celláiba beírt gömbök adják a legjobb gömbkitöltést a megfelelő tágassági feltételek mellett. A gömbök D—V-cellái rendre aszimptotikus tetraéderek, aszimptotikus kockák, aszimptotikus dodekaéderek és aszimptotikus oktaéderek.

A II.10. tételnek a hiperbolikus tér paraszféra kitöltése esetén az alábbi tétel felel meg:

II.13. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós hiperbolikus térben egy paraszférákból álló kitöltés az $[r_1, r_2, r_3]$-tágassági feltételnek eleget tesz, akkor a kitöltés egy paraszférájának a D—V-cellájában vett d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint egy paraszféra $d_3[r; r_1, r_2, r_3]$ sűrűsége egy olyan ortogonális tetraéderben, amelynek egyik végcsúcsa a paraszféra tengely irányú végtelen távoli pontja (vége) és a másik végcsúcsnak, az erre illeszkedő élnek, ill. lapnak a paraszféra felületétől mért távolságai rendre s_3, s_2, s_1* (36. ábra).



36. ábra

Ez a tétel a következő esetekben pontos: Tekintsük a 3-dimenziós hiperbolikus tér $\{3, 3, 6\}$, $\{4, 3, 6\}$, $\{5, 3, 6\}$ és $\{3, 4, 4\}$ szimbólumú aszimptotikus tetraéderekből, aszimptotikus kockákból, aszimptotikus dodekaéderekből, ill. aszimptotikus oktaéderekből álló szabályos mozaikjait, továbbá ezek duális szabályos mozaikjait a $\{6, 3, 3\}$, $\{6, 3, 4\}$, $\{6, 3, 5\}$ és a $\{4, 4, 3\}$ szimbólumú mozaikokat. Az utóbbi mozaikok cellái egy-egy paraszféra szabályos érintő „poliéderei". Valahányszor

$s_3 - s_1$ és $s_2 - s_1$ megegyezik egy ilyen „poliéder" egy csúcsának, ill. egy élének a beírt paraszféra felületétől mért távolságával a sűrűség korlát pontos.

Az alábbiakban tágassági feltételeknek eleget tevő inkongruens gömb kitöltésekre mondunk ki tételeket.

II.14. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben egy legalább négy gömbből álló gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire $0 < a \leqq r$, továbbá a gömbkitöltés gömbjei valamilyen $[r_1, r_2, r_3]$-tágassági feltételeknek tesznek eleget, akkor a gömbkitöltés egy r sugarú gömbjének a D—V-cellájában vett d sűrűségére*

$$d \leqq d_3[r; r_1, r_2, r_3].$$

A tétel abban az esetben pontos, ha az r_1, r_2, r_3 értékek egy szabályos poliéder középpontjának a poliéder lapjától, élétől, ill. csúcsától mért távolságai és a poliéder D—V-cella.

II.15. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós szférikus térben egy legalább négy gömbből álló gömbkitöltés gömbjeinek r sugárértékeire $0 < a \leqq r \leqq b$, továbbá a gömbkitöltés gömbjei valamilyen $[r_1, r_2, r_3]$-tágassági feltételeknek tesznek eleget, akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

$$d \leqq \sup d_3[r; r_1, r_2, r_3].$$

II.16. TÉTEL: *Ha a 3-dimenziós euklideszi térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugárértékeire $0 < a \leqq r \leqq b$, továbbá a gömbkitöltés gömbjei valamilyen $[r_1, r_2, r_3]$-tágassági feltételeknek tesznek eleget, akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

$$d \leqq \sup d_3[r; r_1, r_2, r_3].$$

Segédtételek

II.1. SEGÉDTÉTEL: *Ha egy n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben egy gömb a felületén egy olyan n-dimenziós szabályos n oldalú gúla csúcsait tartalmazza, amelynek l oldaléle legalább akkora, mint a alapéle, akkor a gömb által tartalmazott minden olyan n-dimenziós szimplex egybevágó a gúlával és a csúcsai ugyancsak a gömb felületén helyezkednek el, amelynek az egyik csúcsából induló élek legalább l hosszúságúak, s a többi éle pedig legalább a hosszúságú.*

Ha a segédtételbeli szabályos gúla egy szabályos szimplex, akkor a segédtétel megadja az $(n-1)$-dimenziós szférikus tér $(n+1)$ kongruens gömbbel való legsűrűbb kitöltését.

A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

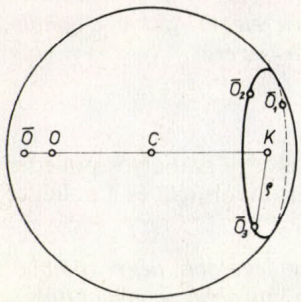
$n=2$-re az állítás könnyen belátható.

Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz a tétel.

Az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben a szabályos n oldalú gúla „csúcsát" $\bar{O}$-sal, a többi csúcsot $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_n$-sal jelöljük. A köré írt n-dimenziós gömb középpontját jelöljük C-vel, a gömböt magát pedig G-vel. A tételben szereplő további n-dimenziós szimplex megfelelő csúcsait jelöljük rendre $O, O_1, \ldots, O_n$-nel.

Mivel nyilvánvalóan l nagyobb a G gömb sugaránál, ezért O nem azonos a C-vel. Így a szabályos gúla elmozgatható úgy, hogy $\bar{O}$ a CO gömbsugár végpontja legyen. Az $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_n$ pontok által meghatározott $(n-1)$-dimenziós szabályos szimplex középpontját jelöljük K-val, a köré írt $(n-1)$-dimenziós gömb sugarát ϱ-val, s az általa kifeszített $(n-1)$-dimenziós hipersíkot S-sel (37. ábra).

Az $\bar{O}$ középpontú l sugarú n-dimenziós gömb tartalmazza a G gömbből az S hipersík által lemetszett nagyobbik gömbszeletet, s így az O középpontú l sugarú n-dimenziós gömb is tartalmazza ezt a gömbszeletet. Tehát az O_i pontok ($1 \leqq i \leqq n$), a G gömbből az S higersík által lemetszett kisebbik gömbszeletben vannak. Ezért e kisebb gömbszeletet tartalmazó K középpontú ϱ sugarú n-dimenziós gömb az O_i pontokat is tartalmazza. Az O_i pontok viszont egy $(n-1)$-dimenziós hipersíkban is benne vannak, így a hipersík és a ϱ sugarú n-dimenziós gömb közös részében, egy legfeljebb ϱ sugarú $(n-1)$-dimenziós gömbben helyezkednek el. Tehát egy ϱ sugarú $(n-1)$-dimenziós gömb mindenképpen tartalmazza az O_i pontokat. A segédtétel feltételei szerint viszont $\bar{O}_i\bar{O}_j = a$ és $O_iO_j \geqq a$, ahol $i \neq j$ és $1 \leqq i, j \leqq n$. Így alkalmazhatjuk az indukciós feltételt az $\bar{O}_i$ pontokra (az általuk kifeszített szabályos gúla egy szabályos szimplex) és az O_i pontokra. Ez azt jelenti, hogy az O_i pontok is egy ϱ sugarú $(n-1)$-dimenziós gömbbe írt szabályos szimplexet alkotnak, és ez a szabályos szimplex egybevágó az $\bar{O}_i$ pontok szabályos szimplexével. Ezért az O_i pontok is a K középpontú ϱ sugarú n-dimenziós gömb felületén helyezkednek el. Ennek a gömbfelületnek a G gömbből lemetszett kisebbik gömbszelettel alkotott közös része viszont az $\bar{O}_i$ pontok köré írt ϱ sugarú $(n-1)$-dimenziós gömb. Így ez tartalmazza az O_i pontokat is. Ebből már következik, hogy az O pont viszont egybeesik az $\bar{O}$ ponttal. Tehát az $O, O_1, \ldots, O_n$ pontok a G gömb felületén helyezkednek el és az általuk kifeszített n-dimenziós szimplex egybevágó az $\bar{O}, \bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_n$ pontok szabályos gúlájával. Ezzel igazoltuk a segédtételt.



37. ábra

Az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben egy r sugarú és n db a sugarú páronként érintkező gömb hatványpontjának és az r sugarú gömb középpontjának a távolságát jelöljük $h_n(\varkappa; r, a)$-val vagy röviden $h_n(r, a)$-val, ahol $n \geqq 2$ és $r \geqq a$. Vezessük be továbbá a $h_n(\varkappa; r, r) = h_n(\varkappa; r)$, ill. $h_n(r, r) = h_n(r)$ jelöléseket.

II.2. SEGÉDTÉTEL: *Az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben $n+1$ egymásba nem nyúló r sugarú gömb hatványpontjának*[1] *a gömbök középpontjaitól mért távolsága legalább $h_n(r)$. Egyenlőség csak páronként érintkező gömbök esetén lép fel.*

II.3. SEGÉDTÉTEL: *Ha az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben olyan $n+1$ gömb van, amelyek egyike r sugarú, a többi n db a sugarú ($r \geqq a$) és a gömbök nem nyúlnak egymásba, akkor az $n+1$ gömb hatványpontjának*[1] *az r sugarú gömb középpontjától mért távolsága legalább $h_n(r, a)$. Egyenlőség csak páronként érintkező gömbök esetén lép fel.*

A II.2. Segédtétel a II.3. Segédtétel speciális esete.

A II.3. Segédtétel bizonyítása.

A hatványpont definíciója szerint a hatványpontból a gömbökhöz egyenlő hosszúságú érintőket húzhatunk. Emiatt, ha ugyanazon gömböknek két elrendezésében az egyik hatványpont közelebb van egy gömbhöz, mint a másik hatványpont, akkor az előbbi hatványpontból rövidebb érintő húzható, s így minden gömbhöz ez a hatványpont van közelebb, továbbá minden gömb ebből a hatványpontból látszik nagyobb szög alatt.

[1] Ha az $n+1$ gömb hatványalakzata több pontból áll, akkor hatványalakzat bármely pontjára fennáll a segédtétel állítása.

Jelöljük az r sugarú gömb középpontját O-val, az n db a sugarú gömb középpontját $O_1, O_2, \ldots, O_n$-nel és a gömbök hatványpontját, ill. a hatványalakzat egy pontját H-val. Hasonlóan ehhez, a páronként érintkező gömbök középpontjait $\bar{O}, \bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_n$-sal és a gömbök hatványpontját $\bar{H}$-sal jelöljük.

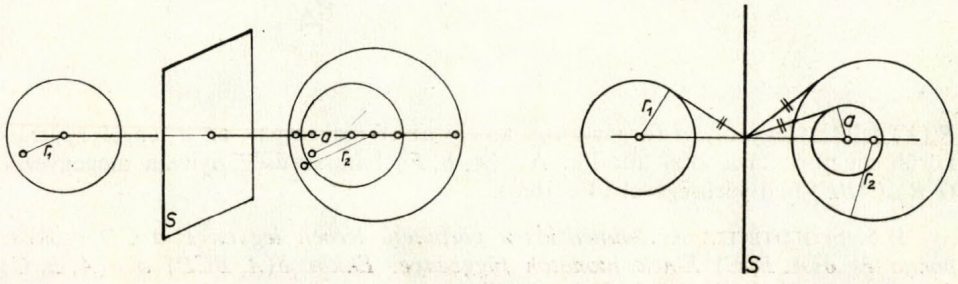
A bizonyítást indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy $OH \leqq \bar{O}\bar{H}$. Vezessük be az $\bar{O}_1\bar{H}\bar{O}_2\sphericalangle = 2\alpha$ és $\bar{O}_1\bar{H}\bar{O}\sphericalangle = \alpha + \beta$ jelöléseket. Mivel $r \geqq a$, ezért $\beta \geqq \alpha$. Nyilvánvaló továbbá, hogy $\frac{\pi}{2} < 2\alpha \leqq \alpha + \beta < \pi$. A $\bar{H}$ pontból az r sugarú és egy a sugarú gömb β, ill. α szög alatt látszik (félnyílásszög!). Így a feltétel szerint a H pontból az r sugarú és egy a sugarú gömb legalább β, ill. α szög alatt látszik. Ezért $\bar{O}_iHO_j\sphericalangle \geqq$ $\geqq 2\alpha$ és $O_iHO\sphericalangle \geqq \alpha + \beta$, ahol $i \neq j$ és $i, j = 1, \ldots, n$.

Mozgassuk el a páronként érintkező gömbök együttesét úgy, hogy a $\bar{H}$ pont egybeessék a H ponttal. Az elmozgatott gömbközéppontok jelölését tartsuk meg. Írjunk a H pont köré valamilyen G n-dimenziós gömböt, és G felületére a H gömbközéppontból vetítsük rá az $\bar{O}$, $\bar{O}_i$, ill. O, O_i pontokat ($1 \leqq i \leqq n$). Jelöljük a vetületi pontokat $\bar{O}'$, $\bar{O}_i'$, ill. O', O_i'-vel. A II.1. Segédtételt alkalmazhatjuk a G gömbre és a vetületi pontokra, hiszen $\widehat{\bar{O}'\bar{O}_i'} = \alpha + \beta$, $\widehat{\bar{O}_i'\bar{O}_j'} = 2\alpha$, $\widehat{O'O_i'} \geqq \alpha + \beta$ és $\widehat{O_i'O_j'} \geqq 2\alpha$ miatt $\bar{O}'\bar{O}_i' = l$, $\bar{O}_i'\bar{O}_j' = a$, $O'O_i' \geqq l$ és $O_i'O_j' \geqq a$ is teljesül, figyelembe véve, hogy hosszabb ívhez hosszabb húr tartozik. Tehát a II.1. Segédtétel szerint $O'O_i' = l$ és $O_i'O_j' = a$. Ebből következik, hogy $OHO_i\sphericalangle = \alpha + \beta$ és $O_iHO_j\sphericalangle = 2\alpha$. Ez azt jelenti, hogy az r és az a sugarú gömbök a H pontból is β, ill. α szög alatt látszanak, a gömbök páronként érintkeznek és $OH = \bar{O}\bar{H}$. Ezzel igazoltuk a II.2. és II.3. segédtételeket.

II.4. Segédtétel. *Ha az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugárértékeire $r \geqq a > 0$, akkor a kitöltés egy r sugarú O középpontú gömbje és a kitöltés k másik gömbje ($2 \leqq k \leqq n$) hatványalakzatának az O ponttól mért távolsága legalább $h_k(r, a)$. Egyenlőség csak páronként érintkező gömbök esetén lép fel.*

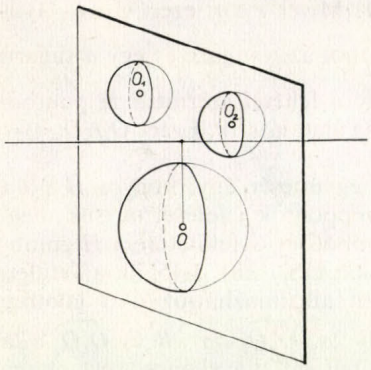
Bizonyítás: Ismert, hogy ha az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben az egymásba nem nyúló r_1 és r_2 sugarú gömbök hatványhipersíkja S, ahol $r_1, r_2 \geqq a$, akkor létezik egy olyan a sugarú gömb, amelyet az r_2 sugarú gömb tartalmaz, és az r_1 sugarú gömbnek és ennek az a sugarú gömbnek a hatványhipersíkja ugyancsak S (38. ábra).

Tekintsük a segédtételbeli gömbkitöltés r sugarú O középpontú G gömbjét és a kitöltés valamely k másik gömbjét. Az előbbiek szerint a k gömb mindegyikében elhelyezhető egy-egy megfelelő a sugarú gömb. Így nyilván ezek sem nyúlnak egymásba. A G gömb és a kitöltés k gömbjének a hatványalakzata a G gömb és egy-egy ilyen gömb hatványhipersíkjának, azaz k db hatványhipersíknak a közös részeként



38. ábra

adódik. Ezért a hatványalakzat nem változik meg, ha a kitöltés k gömbjét a megfelelő k db a sugarú gömbre cseréljük. Jelöljük a k db a sugarú gömböt $G_1, \ldots, G_k$-val, a középpontjaikat $O_1, \ldots, O_k$-val. Szimmetria okok miatt az O pontnak a $G, G_1, \ldots, G_k$ gömbök hatványalakzatától mért távolságát szolgáltató pont, a merőleges vetületi pont benne van egy az $O, O_1, \ldots, O_k$ pontokat tartalmazó k-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben. Vegyük ennek a k-dimenziós altérnek és a $G, G_1, \ldots, G_k$ gömböknek a közös részét. Ezekre alkalmazhatjuk a II.3. segédtételt $n=k$ esetén. Így a szóban forgó hatványalakzatnak az O ponttól mért távolsága legalább $h_k(r, a)$. Az egyenlőség is nyilván a mondott esetben áll fenn (39. ábra).

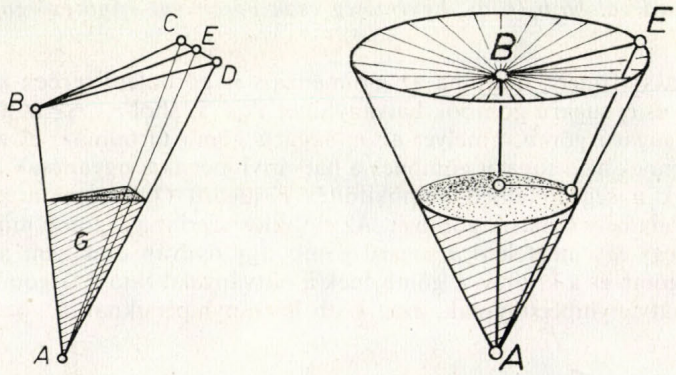


39. ábra

A II.4. segédtételből közvetlenül adódik az alábbi

KÖVETKEZMÉNY: Ha az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben egy gömbkitöltés valamely gömbje r értékű a többi gömbje pedig a értékű 1-tágassági feltételnek tesz eleget, akkor az előbbi gömb automatikusan eleget tesz a $h_k(r, a)$ értékű k-tágassági feltételnek, ahol $2 \leqq k \leqq n$.

A tételek bizonyításában alapvető szerephez jut egy határsűrűség fogalom. A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen $ABCD$ egy tetraéder és G egy A középpontú gömb. Jelöljük G sűrűségét az $ABCD$ tetraéderben $\delta(A, BCD)$-vel. A $\delta(A, BCD)$ sűrűség határértékét nevezzük a $\delta(A, B, E)$ határsűrűségnek, ahol a C és D pontok az AB egyenesen kívül elhelyezkedő E ponthoz tartanak. Vezessük be továbbá az



40. ábra

$R_a(X)$ jelölést egy olyan forgástestre, amely az X alakzatnak az a tengelyegyenes körüli megforgatása által adódik. A $\delta(A, B, E)$ határsűrűség nyilván megegyezik G $R_{AB}(ABE)$-beli sűrűségével (40. ábra).

II.5. SEGÉDTÉTEL: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen E a CD szakasz pontja és $\delta(A, B, E)$ E-nek monoton függvénye. Ekkor $\delta(A, BCD)$ a $\delta(A, B, C)$ és a $\delta(A, B, D)$ határsűrűségek közé esik.*

A $\delta(A, B, E)$ határsűrűséget tekintsük az $ABCE$ tetraéder v térfogata függvényének. Legyen $\delta(A, B, E)=f(v)$. A G gömb $ABCD$-beli sűrűségére

$$\delta(A, BCD) = \frac{1}{V}\int_0^V f(v)\,dv,$$

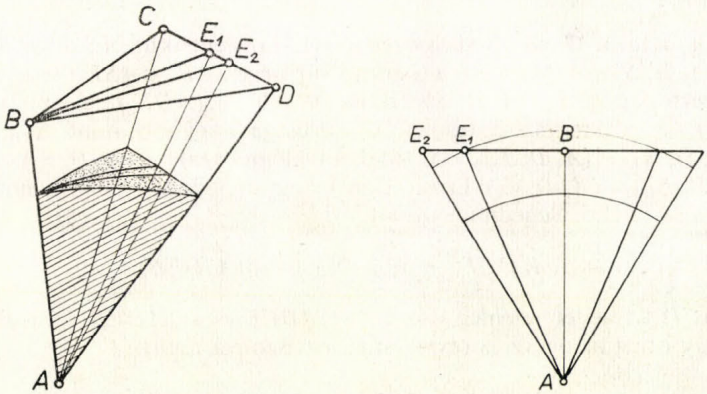
ahol V az $ABCD$ tetraéder térfogata. A segédtételt ezzel igazoltuk, mivel az integrálközép a függvény minimuma és maximuma közé esik.

II.6. SEGÉDTÉTEL: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen $ABCD$ egy normális ortogonális tetraéder és G egy A középpontú gömb, amely a BCD síkba nem metsz bele, akkor a CD szakasz egy tetszőleges E belső pontjára*

$$\delta(A, BCE) > \delta(A, BCD) > \delta(A, BED).$$

Legyen E_1 és E_2 a CD szakasz két olyan belső pontja, amelyekre $CE_1 < CE_2$. Mivel az ortogonális tetraéder normális és $ACD\sphericalangle = \pi/2$, ezért $AE_1 < AE_2$ is teljesül. Az ABE_2 háromszöget AB körül forgassuk bele az ABE_1 síkjába. Jelöljük Δ-val a G gömb sűrűségét a vele koncentrikus AE_1 sugarú gömbben (41. ábra). Nyilván $\delta(A, B, E_1) > \Delta$. Másrészt a G gömb sűrűsége az $R_{AB}(A\,E_1\,E_2)$ testben kisebb mint Δ, ezért kisebb $\delta(A, B, E_1)$-nél is. Mivel $R_{AB}(ABE_2)$ teljesen tartalmazza $R_{AB}(ABE_1)$-et, és a kiegészítő testben G sűrűsége kisebb mint $R_{AB}(ABE_1)$-ben, ezért $\delta(A, B, E_1) > \delta(A, B, E_2)$. Ez azt jelenti, hogy $\delta(A, B, E)$ CE-nek monoton fogyó függvénye, s így a II.5. Segédtétel szerint

$$\delta(A, BCE) > \delta(A, B, E) > \delta(A, BED).$$



41. ábra

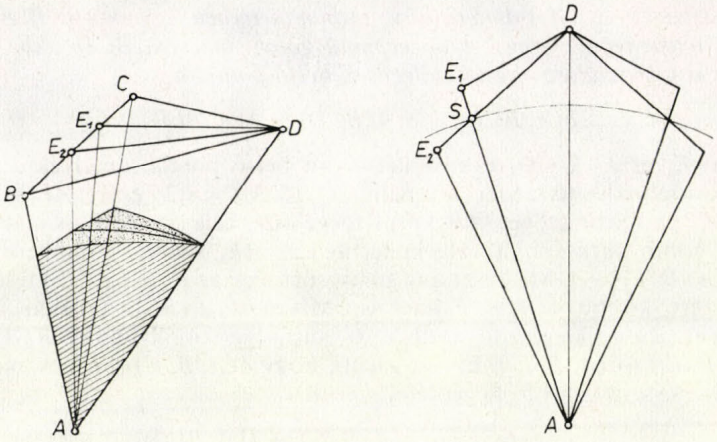
Az $ABCD$ tetraéder viszont az $ABCE$ és az $ABED$ tetraéderekre végható szét, s az egészben vett sűrűség a részekben vett sűrűségek közé esik, azaz

$$\delta(A, BCE) > \delta(A, BCD) > \delta(A, BED).$$

II.7. SEGÉDTÉTEL: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen $ABCD$ egy normális ortogonális tetraéder és G egy A középpontú gömb, amely a BCD síkba nem metsz bele, akkor a BC szakasz egy tetszőleges E belső pontjára*

$$\delta(A, DCE) < \delta(A, DCB) < \delta(A, DEB).$$

Mivel az $AED\sphericalangle$-nek az ED szakaszt tartalmazó BCD síkra vonatkozó merőleges vetülete, $BED\sphericalangle$ tompa szög, az $AED\sphericalangle$ is tompaszög. Legyen E_1 és E_2 a BC szakasz két olyan belső pontja, amelyekre $CE_1 < CE_2$. Így $BDE_1\sphericalangle > BDE_2\sphericalangle$, s mivel AD-nek a BCD síkra vetett merőleges vetülete BD, ezért $ADE_1\sphericalangle > ADE_2\sphericalangle$. Másrészt DA-nak az ABC síkra vetett merőleges vetülete CA és $CAE_2\sphericalangle > CAE_1\sphericalangle$. Ezért $DAE_2\sphericalangle > DAE_1\sphericalangle$. Az ADE_2 háromszöget úgy forgassuk bele AD körül az ADE_1 síkba, hogy az AE_1 és a DE_2 szakaszok messék egymást egy S pontban (42. ábra).



42. ábra

Jelöljük Δ-val a G gömb sűrűségét a vele koncentrikus AS sugarú gömbben. Nyilván $\delta(A, D, S) < \Delta$. Másrészt a G gömb sűrűsége az $R_{AD}(ASE_2)$ testben nagyobb mint Δ, ezért nagyobb $\delta(A, D, S)$-nél is. Mivel $R_{AD}(ADE_2)$ teljesen tartalmazza $R_{AD}(ADS)$-t, és a kiegészítő testben G sűrűsége nagyobb mint $R_{AD}(ADS)$-ben, ezért $\delta(A, D, S) < \delta(A, D, E_2)$. A nyilvánvalóan igaz $\delta(A, D, E_1) < \delta(A, D, S)$ miatt $\delta(A, D, E_1) < \delta(A, D, E_2)$. Ez azt jelenti, hogy $\delta(A, D, E)$ CE-nek monoton növő függvénye, s így a II.5. Segédtétel szerint

$$\delta(A, DCE) < \delta(A, D, E) < \delta(A, DEB).$$

Az $ABCD$ tetraéder jelenleg viszont az $ADCE$ és az $ADEB$ tetraéderekre vágható szét, így ismét az egész és részek sűrűségviszonya miatt

$$\delta(A, DCE) < \delta(A, BCD) < \delta(A, DEB).$$

II.8. Segédtétel: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen AB_1CD és AB_2CD egy-egy normális ortogonális tetraéder és G egy A középpontú gömb, amely nem metsz bele a B_2CD síkba, továbbá legyen $AB_1 > AB_2$, akkor*

$$\delta(A, B_1CD) < \delta(A, B_2CD).$$

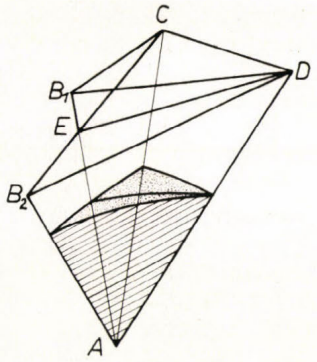
A G gömb nyilván nem metsz bele a B_1CD síkba sem.

Mivel az AB_1C és az AB_2C síkok azonosak, feltehetjük, hogy az AB_1 és a B_2C szakaszok metszik egymást egy E pontban (43. ábra). Nyilván $\delta(A, B_1CD) < \delta(A, ECD)$. A II.7. Segédtétel szerint viszont $\delta(A, ECD) < \delta(A, B_2CD)$.

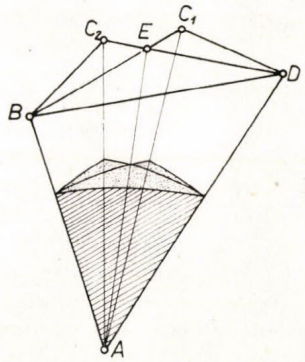
II. 9. SEGÉDTÉTEL: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen ABC_1D és ABC_2D egy-egy normális ortogonális tetraéder és G egy A középpontú gömb, amely nem metsz bele a BC_1D síkba, továbbá legyen $AC_1 > AC_2$, akkor*

$$\delta(A, BC_1D) < \delta(A, BC_2D).$$

Mivel a BC_1D és a BC_2D síkok azonosak, feltehetjük, hogy a BC_1 és a C_2D szakaszok metszik egymást egy E pontban (44. ábra). A II.7. Segédtétel szerint $\delta(A, BC_1D) < \delta(A, BED)$. A II.6. Segédtétel szerint viszont $\delta(A, BED) < \delta(A, BC_2D)$.



43. ábra



44. ábra

Az előző két segédtételből közvetlenül következik a

II.10. SEGÉDTÉTEL: *A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű térben legyen $AB_1C_1D_1$ és $AB_2C_2D_2$ egy-egy normális ortogonális tetraéder és G egy A középpontú gömb, amely nem metsz bele sem a $B_1C_1D_1$, sem a $B_2C_2D_2$ síkba. Legyen továbbá $AB_1 \cong AB_2$, $AC_1 \cong AC_2$ és $AD_1 = AD_2$, akkor*

$$\delta(A, B_1C_1D_1) \leqq \delta(A, B_2C_2D_2)$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor lép fel, ha $AB_1 = AB_2$ és $AC_1 = AC_2$.

Megkezdjük a tételek bizonyítását.

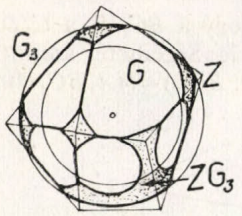
A II.1. tétel bizonyítása:

A 3-dimenziós $\varkappa$ görbületű tér r sugarú kongruens gömbökből álló kitöltése egy gömbje legyen G, és G középpontja legyen O. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy telített gömbkitöltésről van szó. G D—V-cellája, Z így egy konvex poliéder lesz. A II.4. Segédtétel szerint Z csúcsai és élei az O ponttól legalább $h_3(\varkappa; r)$, ill. $h_2(\varkappa; r)$ távolságra vannak.

Tekintsük a G gömbbel koncentrikus $h_3(\varkappa; r)$, ill. $h_2(\varkappa; r)$ sugarú G_3, ill. G_2 gömböket.

A G gömb sűrűsége Z-ben legfeljebb akkora, mint Z és G_3 közös részében, amit jelöljünk ZG_3-mal. A ZG_3 viszont általában már nem poliéder, mert a G_3 gömb felületének bizonyos részei is határolják (45. ábra). A ZG_3 testet tovább csökkentjük úgy, hogy egy olyan konvex $\overline{Z}$ poliédert kapjunk, amelynek csúcsai a G_3 gömb felületén vannak, élei és lapjai viszont nem vágnak bele a G_2, ill. G gömbbe. Mivel

Z egy ilyen feltételeknek eleget tevő poliéder volt, ezért ZG_3 csúcsai, élei, lapjai megfelelnek a követelménynek. $\bar{Z}$ csúcsainak felvételénél úgy kell eljárnunk, hogy ZG_3 éleinek a végpontjait csúcsoknak válasszuk és ha ZG_3 egy lapját körív határolja, akkor ezen a köríven is, és a ZG_3-t határoló G_3 felület darabokon is kellően sűrűn vegyük fel a csúcspontokat. Így az új szakaszok és lapok G_3 felületéhez tetszőlegesen közel maradnak. Viszont G sűrűsége $\bar{Z}$-ben legalább akkora, mint Z-ben.

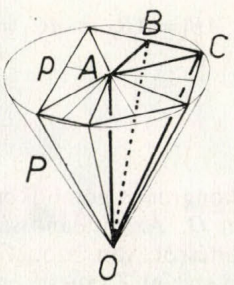


45. ábra

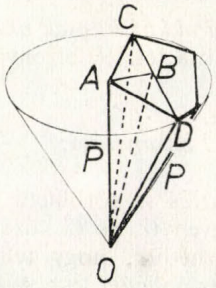
Legyen $\bar{Z}$ egy oldallapja p és a p-re épített O csúcsú gúla P. $\bar{Z}$-t bontsuk fel ilyen gúlákra. Az O pontnak p síkjára vetett merőleges vetületét jelöljük A-val.Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy A-t tartalmazza p vagy sem.

a) Az A pontot tartalmazza p. Az A pont a p köré írt kör középpontja. p-t a csúcsaiba húzott sugarak és az A középpontból az oldalfelező pontokhoz húzott szakaszok derékszögű háromszögekre bontják. Ezzel együtt a P gúlát normális ortogonális tetraéderekre bonthattuk. Egy ilyen tetraédert jelöljünk $OABC$-vel (46. ábra). $\bar{Z}$ tulajdonságai miatt $OA \cong r$, $OB \cong h_2(\varkappa; r)$ és $OC = h_3(\varkappa; r)$. Legyen $O\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ egy olyan normális ortogonális tetraéder, amelyben $O\bar{A} = r$, $O\bar{B} = h_2(\varkappa, r)$ és $O\bar{C} = h_3(\varkappa, r)$. A II.10. Segédtétel szerint $\delta(O, ABC) \leqq \delta(O, \bar{A}\bar{B}\bar{C})$. Mivel ez P minden ortogonális tetraéderére igaz, ezért G sűrűsége P-ben is legfeljebb $\delta(O, \bar{A}\bar{B}\bar{C},)$.

b) Az A pont legyen p-n kívül. Az A pont most is a p köré írt kör középpontja. Így p-nek van egy olyan CD oldala, amely elválasztja p-t A-tól. Legyen B a CD oldal felezőpontja. A P gúlát egészítsük ki az $OACD$ tetraéderrel egy $\bar{P}$ gúlává (47. ábra). A $\bar{P}$ gúla is felbontható normális ortogonális tetraéderekre az előbbi a) szerint. Mivel p-nek a B-től különböző oldalfelező pontjai O-tól messzebb vannak, mint B, ezért a G gömb $\bar{P}$-beli sűrűsége a II.10. Segédtétel szerint kisebb, mint $\delta(O, ABD)$. Ebből következik, hogy a $\bar{P}$ gúlában a sűrűség kisebb mint az $OACD$ tetraéderben, s így a P gúlában még a $\bar{P}$ gúlabeli sűrűségnél is kisebb a sűrűség. Azaz a P gúlabeli sűrűség kisebb $\delta(O, ABD)$-nél, de $\delta(O, ABD) \leqq \delta(O, \bar{A}\bar{B}\bar{C})$.



46. ábra



47. ábra

Ezzel beláttuk, hogy a $\bar{Z}$ poliéder minden P gúlájában s így $\bar{Z}$-ban is és Z-ben is a sűrűség legfeljebb $\delta(O, \bar{A}\bar{B}\bar{C})$. Z-ben a sűrűség nyilván csak akkor lehet $\delta(O, \bar{A}\bar{B}\bar{C})$, ha Z feldarabolható $O\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ortogonális szimplexszel egybevágó részekre, tehát egy alkalmas szabályos poliéder. Mivel a $2r$ élű szabályos tetraéder 24 $O\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ortogonális tetraéderrel egybevágó részre bontható, ezért $\delta(O, \bar{A}\bar{B}\bar{C}) = d_3(\varkappa, r)$, s ezzel a bizonyítást befejeztük.

A II.2. és II.3. tétel a II.1. tétel közvetlen következménye volt.

A II.4. tétel bizonyítása II.1. tételéhez teljesen hasonlóan végezhető, csak a G gömb O középpontjának a szerepét a paraszféra tengelyének végtelen távoli pontja veszi át, s $\overline{Z}$ egy végtelenbe nyúló „1-szeresen aszimptotikus" poliéder lesz.

A II.5 tételt Florian (Böröczky—Florian [1964]) bizonyította be.

Megemlítjük, hogy a $d_3(\varkappa, r)$ sűrűségkorlát számítási módja Fejes Tóthtól származik.

A II.6. tétel bizonyítása is a II.1. tétel bizonyításához teljesen hasonlóan történik, csak a Z és $\overline{Z}$ poliéderek csúcs és élkorlátozásánál a $h_3(\varkappa; r)$, ill. $h_2(\varkappa; r)$ helyett a $h_3(\varkappa; r, a)$, ill. $h_2(\varkappa; r, a)$ távolságok lépnek fel.

A II.7. és a II.8. tételek a II. 6. tételből következtek. A II.9. tétel bizonyítása a II.6. tételétől megint csak abban különbözik, hogy a paraszférák miatt a Z és $\overline{Z}$ végtelenbe nyúló „1-szeresen aszimptotikus" poliéderek.

A tágassági feltételeknek eleget tevő gömbkitöltésekről szóló II.10—II.16. tételek bizonyítása még egyszerűbb az előzőeknél, mert itt eleve teljesülnek az ott bizonyított tágassági feltételek, s a bizonyítás többi része viszont ugyanúgy elvégezhető.

Ezzel az összes eddigi tételt bizonyítottuk.

A fenti tételekkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy ezeket további vizsgálatokban már alkalmazták is. Ui. pl. Molnár [1963] és [1965] eredménye a Segre—Mahler-féle poliéderbeli sűrűségnél, ill. Habicht—van der Waerden-féle sokszög területére adott korlát térbeli átalánosításánál felhasználja a II.1. tételt. Fejes Tóth—Heppes [1967] eredménye egy gömb szomszédos gömbjeinek számára adott becslésnél használja fel a II.2. tételt.

3. Gömbkitöltés az n-dimenziós euklideszi terekben

A 3-dimenziós állandó görbületű terek gömbkitöltései kapcsán már szóltunk az n-dimenziós euklideszi terekben elért eredményekről is, ahol $n \geqq 3$.

Az első két tétel Rogers eredménye:

III.1. TÉTEL: *Az n-dimenziós euklideszi tér r sugarú gönbökkel való kitöltésének d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint $n+1$ páronként érintkező r sugarú gömbnek a középpontjaik által meghatározott $2r$ élű szimplexben vett d_n sűrűsége.*

III.2. TÉTEL: *Az n-dimenziós euklideszi tér r sugarú gömbökkel való kitöltése egy gömbjének a D—V-cellájában vett d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint d_n.*

A III.1. tétel III.2. tétel közvetlen következménye.

A továbbiakban inkongruens gömbök kitöltésének sűrűségére mondunk ki tételeket, amelyek az előző tételek általánosításai.

III.3. TÉTEL: *Ha az n-dimenziós euklideszi térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire $0 < a \leqq r$, akkor a gömbkitöltés egy r sugarú gömbjének a D—V-cellájában vett d sűrűsége nem lehet nagyobb, mint egy r sugarú és n db a sugarú páronként érintkező gömb középpontjai által meghatározott szimplexnek és ezen r sugarú gömbnek az n db a sugarú gömbre vonatkozó D—V-cellájának a közös részében vett r sugarú gömb $d_n(r, a)$ sűrűsége.*

Nyilván $d_n(r, a) = d_n\left(1, \frac{a}{r}\right)$.

III.4. TÉTEL: *Ha az n-dimenziós euklideszi térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire* $0<a\leqq r\leqq b$ *és* $\frac{a}{b}=q$, *akkor a gömbkitöltés d sűrűségére*

$$d < d_n(b, a) = d_n(1, q).$$

Ezek a tételek becslést szolgáltatnak a kitöltések sűrűségére, de sohasem adnak pontos értéket.

A továbbiakban tágassági feltételeknek eleget tevő gömbkitöltések sűrűségére mondunk ki tételeket.

III.5. TÉTEL: *Ha az n-dimenziós euklideszi térben egy r sugarú gömbökből álló és az* $[r_1, \ldots, r_n]$*-tágassági feltételnek eleget tevő gömbkitöltés van, akkor a gömbkitöltés egy gömbjének a D—V-cellájában vett sűrűsége, s így az egész gömbkitöltés sűrűsége nem lehet nagyobb, mint egy r sugarú gömb* $d_n[r; r_1, \ldots, r_n]$ *sűrűsége egy olyan ortogonális tetraéderben, amelynek egyik végcsúcsa e gömb középpontja és e végcsúcs távolsága a másik végcsúcsra illeszkedő k-dimenziós határalterétől* r_{n-k} $(0\leqq k<n)$.

A III.5. tétel akkor ad pontos becslést a *D—V*-cellában fellépő sűrűségre, ha létezik egy olyan szabályos politop, amelynek a középpontjának a *k*-dimenziós határalterétől mért távolsága r_{n-k}, és a beírt gömbnek az $(n-1)$-dimenziós oldallapokra vonatkozó tükörképei nem nyúlnak egymásba. Ez valósul meg az *n*-dimenziós szabályos szimplex, keresztpolitóp és kocka esetén, ill. a 3-dimenzióban ezen kívül a dodekaédernél.

Az egész gömbkitöltésre pontos eredmény csak a $\{4, 3, \ldots, 3, 4\}$ szimbólumú kockarács esetén adódik.

III.6. TÉTEL: *Ha az n-dimenziós euklideszi térben egy gömbkitöltés gömbjeinek r sugár értékeire* $0<a\leqq r$, *továbbá a gömbkitöltés gömbjei valamilyen* $[r_1, \ldots, r_n]$*-tágassági feltételekkel tesznek eleget, akkor a gömbkitöltés egy r sugarú gömbjének a D—V-cellájában vett d sűrűségére*

$$d \leqq d_n[r; r_1, \ldots, r_n].$$

Az említett tételek bizonyításához előbb néhány segédtételt bizonyítunk.

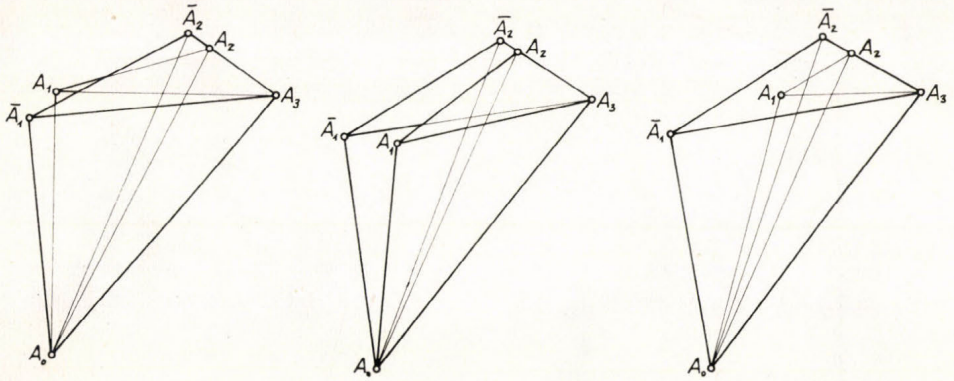
Legyen az *n*-dimenziós euklideszi térben az $A_0A_1 \ldots A_n$ *n*-dimenziós szimplex olyan, hogy az A_i pont legyen $A_i \ldots A_n$ $(n-i)$-dimenziós határszimplexének pontjai közül az A_0 ponthoz legközelebb, ahol $0<i<n$. Az ilyen $A_0A_1 \ldots A_n$ szimplexet nevezzük tompa szimplexnek. (A síkban így a derékszögű és tompaszögű háromszögek a tompák.) Az A_0 pontnak az $A_i \ldots A_n$ $(n-i)$-dimenziós altérre vetett merőleges vetületét jelöljük $\bar{A}_i$-sal. Az $A_0\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{n-1}A_n$ *n*-dimenziós szimplex egy ortogonális szimplex, melyet az $A_0A_1 \ldots A_n$ tompa szimplexhez tartozónak mondunk (48. ábra).

Legyen *G* egy B_0 középpontú gömb és $B_0B_1 \ldots B_n$ egy *n*-dimenziós szimplex. A *G* gömb $B_0B_1 \ldots B_n$ szimplexben vett sűrűségét jelöljük $\delta(B_0, B_1 \ldots B_n)$-nel.

III.1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen az n-dimenziós euklideszi térben G egy* A_0 *középpontú gömb és* $A_0A_1 \ldots A_n$ *és* $A_0B_1 \ldots B_n$ *két olyan n-dimenziós szimplex, amelyeknek az* $A_1 \ldots A_n$, *ill.* $B_1 \ldots B_n$ $(n-1)$*-dimenziós határoló szimplexeikbe a G gömb nem vág bele. Létezzék továbbá az* $A_0A_1 \ldots A_n$ *szimplexet az* $A_0B_1 \ldots B_n$ *szimplexbe átvivő olyan térfogatarántartó leképezés, amely az* $A_0A_1 \ldots A_n$ *szimplex pontjait az* A_0 *ponthoz közelíti, akkor* $\delta(A_0, A_1 \ldots A_n)<\delta(A_0, B_1 \ldots B_n)$ *lesz.*

E segédtétel könnyen belátható, hiszen az említett térfogatarántytartó leképezés G-nek az $A_0B_1 \dots B_n$ szimplexbe eső gömbcikkét az $A_0A_1 \dots A_n$ szimplexbe eső gömbcikk belsejébe viszi át.

A segédtétel állítása nyilván akkor is helyes, ha a leképezés a pontokat csak egy $(n-1)$-dimenziós altér pontjainak kivételével viszi közelebb az A_0 ponthoz.



48. ábra

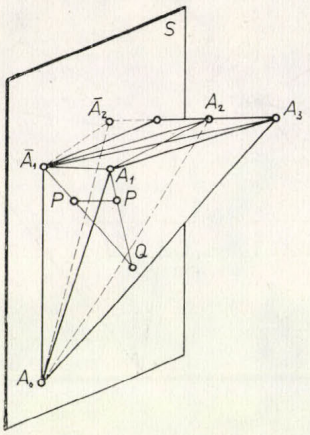
III.2. SEGÉDTÉTEL: *Legyen az n-dimenziós euklideszi térben G egy A_0 középpontú gömb és $A_0A_1 \dots A_n$ olyan n-dimenziós tompa szimplex, amelynek $A_1 \dots A_n$ $(n-1)$-dimenziós határoló alterébe a G gömb nem vág bele. Az $A_0A_1 \dots A_n$ tompa szimplex különbözzék a hozzá tartozó $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1}A_n$ ortogonális szimplextől. Ekkor* $\delta(A_0, A_1 \dots A_n) < \delta(A_0, \bar{A}_1, \dots \bar{A}_{n-1}A_n)$.

A bizonyításhoz a III.1. Segédtétel szerint elég megadnunk térfogatarántytartó leképezések olyan sorozatát, amely végül is az $A_0A_1 \dots A_n$ szimplexet az $A_0\bar{A}_1 \dots$ $\dots \bar{A}_{n-1}A_n$ szimplexbe viszi át, és közben minden egyes leképezés a pontokat egy-egy $(n-1)$-dimenziós altér pontjainak kivételével az A_0 ponthoz közelíti.

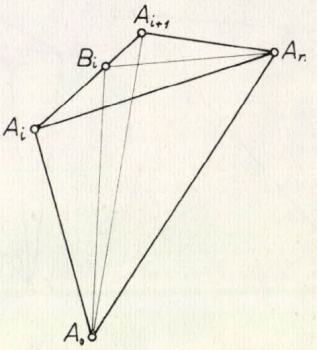
Az i-ik leképezés T_i legyen egy olyan affinitás, amelynek alaphipersíkja, amelynek pontjai helyben maradnak, az $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ $(n-1)$-dimenziós altér, és T_i vigye át az A_i pontot az $\bar{A}_i$ pontba $(0<i<n)$. A T_i leképezés az $A_0\bar{A}_1 \dots$ $\dots \bar{A}_{i-1}A_i \dots A_n$ szimplexet az $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_iA_{i+1} \dots A_n$ szimplexbe viszi át. A leképezés sorozat tehát a kívánt szimplexeket egymásra képezi le. Mivel az $A_i \dots A_n$ és az $\bar{A}_i \dots \bar{A}_{n-1}A_n$ $(n-1)$-dimenziós alterek azonosak, a T_i leképezés alaphipersíkja tulajdonképpen az $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-1}\bar{A}_{i+1} \dots \bar{A}_{n-1}A_n$ altér. Nyilván csak azt kell még igazolnunk, hogy a T_i leképezés az alaphipersík pontjainak kivételével a szimplex pontjait az A_0 ponthoz közelebb viszi, feltéve, hogy az A_i pont nem azonos az $\bar{A}_i$-val. Ha $A_i = \bar{A}_i$, akkor a T_i leképezés a helyben hagyás, s így ezt a leképezést kihagyhatjuk a sorozatból. Mivel a tompa és az ortogonális szimplexek nem azonosak, ezért létezik olyan T_i, amelyek nem a helyben hagyás.

Legyen P az $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-1}A_i \dots A_n$ szimplex egy A_i-től különböző és nem az alaphipersíkon fekvő pontja, és legyen $P' = T_iP$. Az A_iP egyenesnek az $A_0\bar{A}_1 \dots$ $\dots \bar{A}_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ $(n-1)$-dimenziós szimplexszel való metszéspontját jelöljük Q-val. Az $A_i \dots A_n$ szimplex pontjai közül az A_i pont van legközelebb az $\bar{A}_i$ ponthoz is, hiszen ez az A_0 pontnak a vetületi pontja. Ezért $\bar{A}_iA_iA_j \sphericalangle \geqq 90°$ $(i<j \leqq n)$. Az $A_i\bar{A}_i$ szakaszra $\bar{A}_i$-ban emelt merőleges S hipersík az $A_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_i$ pontokat tartalmazza, így az S hipersík által határolt A_i pontot tartalmazó n-dimenziós féltér tartalmazza a teljes $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-1}A_i \dots A_n$ n-dimenziós szimplexet, s ezzel a Q pon-

tot (49. ábra). Az affinitás ismert tulajdonságai miatt P' az $\bar{A}_iQ$ szakaszon helyezkedik el és $P'P$ párhuzamos és egyirányú $\bar{A}_iA_i$-vel. Az előbbi féltér azonban tartalmazza az $\bar{A}_iQ$ szakaszt, s így a P' pontot. A P pont pedig a féltér határára merőlegesen P'-nél beljebb helyezkedik el. Ezért a féltér határán levő A_0 ponttól a P pont messzebb van, mint a P' pont. Ezzel igazoltuk a III.2. Segédtételt.



49. ábra



50. ábra

III.3. SEGÉDTÉTEL: *Legyen az n-dimenziós euklideszi térben G egy A_0 középpontú gömb és $A_0A_1 \dots A_n$ egy n-dimenziós ortogonális szimplex, amelynek $A_1 \dots A_n$ $(n-1)$-dimenziós határoló alterébe a G gömb nem vág bele. Legyen továbbá az A_iA_{i+1} szakasz egy belső pontja B_i $(0<i<n)$, akkor*

$$\delta(A_0, A_1 \dots A_i B_i A_{i+2} \dots A_n) > \delta(A_0, A_1 \dots A_n) >$$

$$> \delta(A_0, A_1 \dots A_{i-1} B_i A_{i+1} \dots A_n).$$

Könnyen belátható, hogy az $A_0A_1 \dots A_{i-1}B_iA_{i+1} \dots A_n$ szimplex egy olyan tompa szimplex, amelyikhez az $A_0A_1 \dots A_n$ ortogonális szimplex tartozik (50. ábra). A III.2. Segédtétel szerint ezért a III.3. Segédtétel második egyenlőtlensége igaz. Ha viszont egy szimplex egyik részében a sűrűség kisebb, mint az egészben, akkor a kiegészítő részben a sűrűség nagyobb mint az egészben, s ezzel igazoltuk a III.3. Segédtételt.

III.4. SEGÉDTÉTEL: *Legyen az n-dimenziós euklideszi térben G egy A_0 középpontú r sugarú gömb és $A_0A_1 \dots A_n$ és $A_0A_1' \dots A_n'$ két n-dimenziós ortogonális szimplex, amelyekre $r \leqq A_0A_1$ és $A_0A_i \leqq A_0A_i'$ $(0<i \leqq n)$, akkor*

$$\delta(A_0, A_1 \dots A_n) \geqq \delta(A_0, A_1' \dots A_n').$$

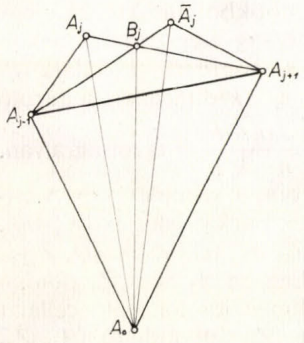
Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $A_0A_i = A_0A_i'$ minden i-re.

Elég azt igazolni, hogy ha egy rögzített j-re $(0<j \leqq n)$ $A_0A_j < A_0A_j'$ és $A_0A_i = A_0A_i'$ $(i \neq j)$, akkor

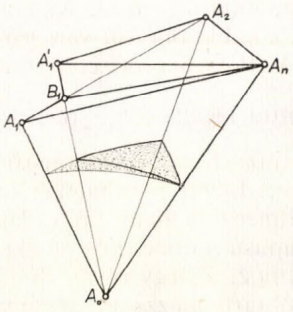
$$\delta(A_0, A_1 \dots A_n) > \delta(A_0, A_1' \dots A_n').$$

Ez utóbbi állításnak a többszöri alkalmazásával már adódik a III.4. *Segédtétel állítása.*

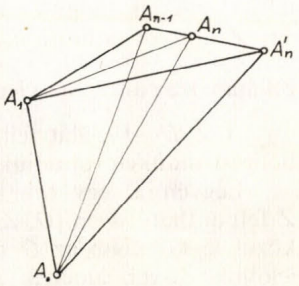
Ui. egy egybevágósággal az $A_0A_1' \dots A_n'$ szimplexet hozzuk olyan helyzetbe, hogy $A_i = A_i'$ legyen minden $i \neq j$-re és az A_j és A_j' pontok a többi pont által kifeszített $(n-1)$-dimenziós hipersíknak ugyanazon félterébe essenek. Az $A_{j-1} \dots A_n$ és $A_{j-1}A_j'A_{j+1} \dots A_n$ $(n-j+1)$-dimenziós alterek azonosak, mert mindkettő az n-dimenziós térben az $A_0 \dots A_{j-1}$ $(j-1)$-dimenziós altér totálisan merőleges kiegészítő altere. Az $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ és $A_{j-1}A_j'A_{j+1}$ 2-dimenziós síkok is azonosak, mert mindkettő az előbbi $(n-j+1)$-dimenziós altérben az $A_{j+1} \dots A_n$ $(n-j-1)$-dimenziós altér totálisan merőleges kiegészítő altere, feltéve, hogy $j<n$. Az $A_0A_j < A_0A_j'$ miatt $A_{j-1}A_j < A_{j-1}A_j'$. Ezért az A_jA_{j+1} és az $A_{j-1}A_j'$ szakaszok metszik egymást, s jelöljük a metszéspontot B_j-vel $(0<j<n)$ (51. ábra).



51. ábra



52. ábra



53. ábra

$0<j<n$-re a III.3. Segédtétel szerint (i-t j-nek választva) $\delta(A_0, A_1 \dots A_n) > \delta(A_0, A_1 \dots A_{j-1}B_jA_{j+1} \dots A_n)$. Ezen kívül $j=1$-re $\delta(A_0, B_1A_2 \dots A_n) > \delta(A_0, A_1'A_2 \dots A_n)$, mert egy rész szimplex a G gömb ugyanazon részét tartalmazza (52. ábra). Így $j=1$-re igazoltuk a segédtételhez szükséges állítást.

$1<j<n$-re pedig ismét a III.3. Segédtételt alkalmazzuk a következő szereposztásban: az ortogonális szimplex az $A_0 \dots A_{j-1}A_j'A_{j+1} \dots A_n$ szimplex, az A_iA_{i+1} szakasz az $A_{j-1}A_j'$ szakasz és a B_i pont a B_j pont lesz. Ezek szerint

$$\delta(A_0, A_1 \dots A_{j-1}B_jA_{j+1} \dots A_n) > \delta(A_0, A_1 \dots A_{j-1}A_j'A_{j+1} \dots A_n).$$

Ezzel $0<j<n$-re igazoltuk a III.4. Segédtételhez szükséges állítást.

$j=n$-re megint a III.3. Segédtételt alkalmazzuk (53. ábra). Az ortogonális szimplex legyen az $A_0 \dots A_{n-1}A_n'$ szimplex, az A_iA_{i+1} szakasz az $A_{n-1}A_n'$ szakasz és a B_i pont az A_n pont. Ekkor

$$\delta(A_0, A_1 \dots A_n) > \delta(A_0, A_1 \dots A_{n-1}A_n').$$

Ezzel igazoltuk a III.4. Segédtételt.

III.5. SEGÉDTÉTEL: *Legyen az n-dimenziós euklideszi térben G egy A_0 középpontú r sugarú gömb és $A_0A_1 \dots A_n$ egy n-dimenziós tompa szimplex, amelyhez az $A_0\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1}A_n$ ortogonális szimplex tartozik és legyen továbbá $A_0A_1' \dots A_n'$ egy olyan ortogonális szimplex, amelyekre $r \leqq A_0A_1'$, és $A_0A_i' \leqq A_0\bar{A}_i$ $(0<i<n)$ és $A_0A_n' \leqq A_0A_n$, akkor*

$$\delta(A_0, A_1 \dots A_n) \leqq \delta(A_0, A_1' \dots A_n').$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a két szimplex egybevágó.

Segédtételünk bizonyításához elég belátni, hogy a III.2. Segédtétel szerint $\delta(A_0, A_1 \dots A_n) \leqq \delta(A_0, \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1} A_n)$, a III.4. Segédtétel szerint pedig

$$\delta(A_0, \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1} A_n) \leqq \delta(A_0, A_1' \dots A_n').$$

Ezzel igazoltuk a III.5. Segédtételt, mivel az egyenlőségek csak egybevágó szimplexeknél állnak fenn.

Megkezdjük a 3. rész tételeinek bizonyítását.

A III.2. tétel bizonyítása:

Az n-dimenziós euklideszi tér r sugarú kongruens gömbökből álló kitöltése egy gömbje legyen G és G középpontja legyen O. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy telített gömbkitöltésről van szó. A G gömb D—V-cellája így egy Z konvex politop lesz. A II.4. Segédtétel szerint Z egy k-dimenziós határoló cellájának az altere az O ponttól legalább $h_{n-k}(O; r) = \sqrt{\frac{2(n-k)}{n-k+1}}\, r$ távolságra van.

A Z D—V-cellát felbontjuk O csúcsú n-dimenziós tompa szimplexekre. A felbontást indukcióval adjuk meg. Egy X ponthalmaz konvex burkát jelöljük $[X]$-szel.

Legyen Z egy $(n-1)$-dimenziós határoló cellája Z_1 és tekintsük $[O, Z_1]$-t. Z felbontható ilyen $[O, Z_1]$ típusú n-dimenziós gúlákra. Legyen A_1 pont Z_1 pontjai közül legközelebb az O ponthoz. Z_1 egy olyan $(n-2)$-dimenziós határoló celláját jelöljük Z_2-vel, amelyik nem tartalmazza az A_1 pontot. Z_1 felbontható $[A_1, Z_2]$ típusú $(n-1)$-dimenziós gúlákra, s ezzel a Z felbontható $[O, A_1, Z_2]$ típusú n-dimenziós gúlákra.

Tegyük fel, hogy Z-t már felbontottuk $[O, A_1, \dots, A_i, Z_{i+1}]$ típusú n-dimenziós gúlákra, ahol a Z_{j+1} Z-nek $(n-j-1)$-dimenziós határoló cellája és Z_{j+1} pontjai közül az A_j pont van az O ponthoz legközelebb, ahol $0 < j \leqq i$. Legyen az A_{i+1} pont Z_{i+1} pontjai közül legközelebb az O ponthoz. Legyen Z_{i+2} Z_{i+1}-nek egy az A_{i+1} pontot nem tartalmazó $(n-i-2)$-dimenziós határoló cellája. Z_{i+1}-t bontsuk fel $[A_{i+1}, Z_{i+2}]$ típusú $(n-i-1)$-dimenziós gúlákra. Ezzel a Z D—V-cellát $[O, A_1, \dots, A_{i+1}, Z_{i+2}]$ típusú n-dimenziós gúlákra bonthattuk.

Végül az $[O, A_1, \dots, A_{n-1}, Z_n]$ típusú n-dimenziós gúla felbontáshoz jutunk, ahol Z_n már a Z D—V-cella egy csúcsa és ezek a gúlák n-dimenziós tompa szimplexek.

A bizonyítás elején tett megállapításunk alapján az $OA_1 \dots A_{n-1} Z_n$ tompa szimplexhez tartozó $O\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1} Z_n$ ortogonális szimplex olyan, hogy $O\bar{A}_i \leqq h_i$ $(O; r)$ $(0 < i < n)$ és $OZ_n \leqq h_n(O; r)$. Legyen $OA_i' \dots A_n'$ egy olyan ortogonális szimplex, amelyre $OA_j' = h_j(O, r)$ $(0 < j \leqq n)$. Ekkor a III.5. Segédtétel szerint

$$\delta(0, A_1, \dots A_{n-1} Z_n) \leqq \delta(0, A_1' \dots A_n').$$

Mivel egy $2r$ élű szabályos szimplex $n!$ számú $OA_1' \dots A_n'$ szimplexszel egybevágó részre darabolható, ezért $\delta(O, A' \dots A_n') = d_n$.

Másrészt a Z D—V-cellát olyan részekre daraboltuk, amelyek mindegyikében a G gömb sűrűsége legfeljebb d_n, ezért G Z-beli d sűrűségére

$$d \leqq d_n.$$

Ezzel igazoltuk a III.2. tételt. Mivel Z nem darabolható fel $OA_1' \dots A_n'$-sal egybevágó részekre, így

$$d < d_n \quad \text{is igaz.}$$

A III.1. tétel mint már említettük a III.2. tétel közvetlen folyománya.

A III.3. tétel bizonyítása hasonlóan megy a III.2. tétel bizonyításához, csak a Z politop k-dimenziós határoló cellájának O ponttól való távolságára a $h_{n-k}(O; r)$ helyett $h_{n-k}(O; r, a)$ szerepel.

A III.4. tétel a III.3. tételből következik, csak arra kell gondolni, hogy a $d_n(r, a)$ sűrűség korlát r-nek nyilvánvalóan monoton növekvő függvénye.

A III.5. és a III.6. tételek tágassági feltételeknek eleget tevő gömbkitöltésekről szólnak, s a bizonyításuk a III.2. és III.3. tételekéhez hasonló. Tulajdonképpen ezeknél is egyszerűbb a bizonyítás, mert itt eleve teljesülnek az ott bizonyított tágassági feltételek.

Megjegyezzük végül, hogy a II. 1—4. és 6—9. tételek magasabb dimenzióbeli megfelelőit a legutóbbi időben sikerült az euklideszi tereken kívül tetszőleges állandó görbületű térben is bebizonyítani. A bizonyításhoz használt módszer viszont több helyen is eltér a disszertációban alkalmazottakétől.

IRODALOM

AGENO, M. [1961], Elementi per una sistematica dei monostrati chiusi I—II, Istituto superiore di sanita 24, 1—19; 28, 1—63.

BAMBAH, R. P. (1954*a*], On lattice coverings by spheres, *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 20, 25—52.

— [1954*b*], Lattice coverings with four-dimensional spheres, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 50, 203—8.

BAMBAH, R. P.—DAVENPORT, H. [1952], The covering of n-dimensional space by spheres, *J. Lond. Math. Soc.* 27, 224—9.

BAMBAH, R. P.—ROGERS, C. A.—ZASSENHAUS, H. [1964], On coverings with convex domains, *Acta Arith.* 9, 191—207.

Барановский, Е. П. [1963], О минимумах плотности решетчатого покрытия пространства равными шарами, *Уч. зап. Ивановск.* гос. пед. ин-т 34, 71—6.

— [1964], О заполнении n-мерных евклидовых пространств равными шарами. I, Изв. высш. учебн. заведений, *Математика* 2, 14—24.

— [1967], Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположение в пространствах постоянной кривизны, *Итоги науки ВИНИТИ АН СССР* 189—225.

BARNES, E. S. [1956], The covering of space by spheres, *Canad. J. Math.* 8, 293—304.

BENDER, C. [1874], Bestimmung der größten Anzahl gleich großer Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen, *Arch. Math. Phys.* 56, 302—6.

BLACHMAN, N. M. [1963], The closest packing of equal spheres in a larger sphere, *Amer. Math. Monthly* 70, 526—9.

BLACHMAN, N. M.—FEW, L. [1963], Multiple packing of spherical caps, *Matematika* 10, 84—8.

BLEICHER, M. N. [1962], Lattice covering of n-space by spheres, *Canad. J. Math.* 14, 632—50.

BLEICHER, M. N.—FEJES TÓTH, L. [1964], Circle-packings and circle-coverings on a cylinder, *Michigan Math. J.* 11, 337—41.

BLICHFELDT, H. F. [1914], A new principle in the Geometry of Numbers, with some applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* 15, 227—35.

— [1925], On the minimum value of positive real quadratic forms in 6 variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* 31, 386.

— [1926], The minimum value of positive quadratic forms in seven variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* 32, 99.

— [1929], The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, *Math. Ann.* 101, 605—8.

— [1934], The minimum value of positive quadratic forms in sexs, seven and eight variables, *Math. Z.* 39, 1—15.

BÖRÖCZKY, K. [1964], Über stabile Kreis- und Kugelsysteme, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 7, 79—82.

— [1967], Über Dunkelwolken, *Proc. Colloqu. on Convexity* (Copenhagen 1965), Köbenhavns Univ. Math. Inst. Copenhagen, 13—7.

BÖRÖCZKY, K.—FLORIAN, A. [1964], Über die dichteste Kugelpackung in hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15, 237—45.

COXETER, H. S. M. [1935], The functions of Schläfli and Lobatschefsky, *Quart. J. Math.* 6, 13—29.

— [1948], *Regular Polytopes*, London.

— [1954], Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 4, 263—74.
— [1956], Regular honeycombs in hyperbolic space, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians*, Amsterdam, 3, 155—69.
— [1958], Close-packing and froth, *Illinois J. Math.* 2, 746—58.
— [1961], Introduction to geometry, New York—London.
— [1963], An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size, *Proc, Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I. 7, 53—71.
Coxeter, H. S. M.—Few, L.—Rogers, C. A. [1959], Covering space with equal spheres, *Mathematika* 6, 147—57.
Danzer, L. [1960], Drei Beispiele zu Lagerungsproblemen, *Arch. Math.* 11, 159—65.
Davenport, H. [1952], The covering of space by spheres, *Rend. Circ. Math. Polermo* 1, 92—107.
— [1964—65], Problems of packing and covering, Univ. e Politec. *Torino Rend. Sem. Mat.* 24, 41—48.
Davenport, H.—Hajós, G. [1951], 35. Feladat, *Matematikai Lapok* 2, 68.
Делоне, Б. Н.—Рышков, С. С. [1963], Решение задачи о намиенее плотном решетчатом покрытии четырехмерного пространства равными шарами, *Докл. АН. СССР.* 152, 523—4.
Erdős, P.—Rogers, C. A. [1953], The covering of *n*-dimensional space by spheres, *J. London Math. Soc.* 28, 287—93.
Fejes Tóth, G. [1969], Kreisüberdeckungen der Sphäre, *Studia Sci. Math. Hung.* 4, 225—47.
Fejes Tóth, L. [1940], Über einen geometrischen Satz, *Math. Zeitschrift* 46, 83—5.
— [1942], A szabályos testek, mint szélsőértékfeladatok megoldásai, *Matematikai és Természettudományi Értesítő* 61, 471—7.
— [1943], Über die dichteste Kugellagerung, *Math. Zeitschrift* 48, 676—84.
— [1944], Extremális pontrendszerek a síkon, a gömbfelületen és a térben, *Acta Sci. Math. Nat.* Kolozsvár 23, 1—54.
— [1950], Some packing and covering theorems, Acta Univ. Szeged, *Acta Sci. Math.* 12/A, 62—7.
— [1953*a*], *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg.
— [1953*b*], Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 103—10.
— [1953*c*], Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 111—4.
— [1953*d*], On close-packings of spheres in spaces of constant curvature, *Publ. Math.* Debrecen 3, 158—67.
— [1954], Über die dichteste Horozyklenlagerung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 5, 41—4.
— [1956*a*], Über die dünnste Horozyklenüberdeckung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 7, 95—8.
— [1956*b*], On the volume of a polyhedron in non-Euklidean spaces, *Publ. Math.* Debrecen 4, 256—61.
— [1959*a*], Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung, *Arch. Math.* 10, 307—13.
— [1959*b*], Verdeckung einer Kugel durch Kugeln, *Publ. Math.* 6, 234—40.
— [1960], Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, *Elemente der Math.* 19, 25—36.
— [1960—61], On the stability of a circle packing, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 3—4, 63—6.
— [1963], Újabb eredmények a diszkrét geometriában, *Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.* 13, 341—54.
— [1964], *Regular Figures*, Oxford—London—New York—Párizs.
— [1965*a*], *Reguläre Figuren*, Budapest.
— [1965*b*], Minkowskian distribution of discs. *Proc. Amer. Math. Soc.* 16, 999—1004.
— [1968], Solid circle-packings and circle-coverings, *Studia Sci. Math. Hungar.* 3, 401—9.
Fejes Tóth, L.—Heppes, A. [1967], A variant of the problem of the thirteen spheres, *Canad. J. Math.* 19, 1092—1100.
Fejes Tóth, L.—Molnár, J. [1958], Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachr.* 18, 235—43.
Few, L. [1953], On the double packing of spheres, *J. London Math. Soc.* 28, 297—304.
— [1956], Covering space by spheres, *Mathematika* 3, 136—9.
— [1964], Multiple packing of spheres, *J. London Math. Soc.* 39, 51—4.
— [1968], Double packing of speres. A new upper bound, *Mathematika* 15, 88—92.
Florian, A. [1963], Dichteste Packung inkongruenter Kreise, *Monatsh. Math.* 67, 229—42.
Гамецкий, А. Ф. [1962], К теории покрытия *n*-мерного эвклидова пространства равными шарами, *Докл. АН СССР* 146, 991—4.
Gauss, C. F. [1831], Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1831 Juli 9, see Werke, Göttingen, 1836, II, 188—96.
Gilbert, E. N. [1964], Randolmy packed and solidly packed spheres, *Canad. J. Math.* 16, 286—98.
Goldberg, M. [1970], The packing of equal circles in a square. *Math. Mag.* 43, 24—30.

GRAN OLSSON, R. [1955], Über Porenvolumen und Porenziffer in der Erdbaumechanik und die verschiedene dichte Packung von Kugeln. *Norske Vid. Selsk. Forh.* Trondheim 28, 96—9; II. [1956], 29, 22—3.
GROEMER, H. [1961], Eine Ungleichung für die Dichte von Lagerungen konvexer Körper, *Arch. Math.* 12, 477—80.
— [1963], Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum, *Math. Z.* 81, 260—78.
GRÜNBAUM, B. [1960], On a problem of L. Fejes Tóth, *Amer. Math. Monthly* 67, 882—4.
HABICHT, W.—VAN DER WAERDEN, B. L. [1951], Lagerung von Punkten auf der Kugel, *Math. Ann.* 123, 223—234.
HADWIGER, H. [1952], Einlagerung kongruenter Kugeln in eine Kugel, *Elemente der Math.* 7, 97—103.
HAJÓS, GY. [1964], Über Kreiswolken, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 7, 55—57.
HEPPES, A. [1955], Über mehrfache Kreislagerungen, *Elem. Math.* 10, 125—7.
— [1959], Mehrfache gitterförmige Kreislagerungen in der Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 10, 141—8.
— [1960—61], Ein Satz über gitterförmige Kugelpackungen, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math.* 3—4, 89—90.
— [1961], Über Kreis- und Kugelwolken, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 12, 209—14.
— [1967*a*], On the number of spheres which can hide a given sphere, *Canad. J. Math*, 19, 413—8.
— [1967*b*], On the densest paking of circles not blocking each other, *Studia Sci. Math. Hungar.* 2, 257—63.
HEPPES, A.—MOLNÁR, J. [1960], I. Újabb eredmények a diszkrét geometriában. *Mat. Lapok* 11, 330—55.
— [1962], Újabb eredmények a diszkrét geometriában II, *Mat. Lapok* 13, 39—72.
— [1965], Újabb eredmények a diszkrét geometriában III, *Mat. Lapok* 16, 19—41.
HLAWKA, E. [1949], Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, *Monatsh. Math. Phys.* 53, 81—131.
— [1964], Überdeckung durch konvexe Scheiben. *Sitzungsber. Berliner math. Ges.* 1961—64. 28—36.
HORTOBÁGYI, I. [1971], Durchleuchtung gitterförmiger Kugelpackung mit Lichtbündeln, *Studia Sci. Math. Hungar.* 6.
HORVÁTH, J. [1970], Über die Durchsichtigkeit gitterförmiger Kugelpackungen, *Studia Sci. Math. Hungar.* 5, 421—6.
— [1971], Egységgömbök elhelyezése gömbhéjakban, *Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.* 20, 291—302.
— [1974], Die Dichte der Kugelpackung in einer Schicht 4-dimensionales euklidischen Raumes, *Per. Math. Hung.* 5 (3), 195—199.
HORVÁTH, J.—MOLNÁR, J. [1967], On the density of non-overlapping unit spheres lying in a strip, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 10, 193—201.
IMRE, M. [1964], Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15, 115—121.
KERSHNER, R. [1939], The number of circles covering a set, *Amer, J. Math.* 61, 665—71.
KORKIN, A. H.—ZOLOTARJEV, E. J. [1872], Sur les formes quadratiques positives quarternaires, *Math. Ann.* 5, 581—3.
— [1877], Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* 11, 242—92.
KRAMMER, G. [1960], Megjegyzés gömbnek körökkel való kitöltéséhez és lefedéséhez, *Mat. Lapok* 11, 120—3.
LAGRANGE, J. L. [1773], Recherches d'arithmétique, Neuveaux *Mémoires de l'Académie royal des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 265—312; Oeuvres, III, 693—758.
LARMAN, D. G. [1968], On packings of unequal spheres in R_n, *Canad, J. Math.* 20, 967—9.
LEECH, J. [1956], The problem of the thirteen spheres. *Math. Gaz.* 40, 22—23.
LEKKERKERKER, C. G. [1951], Kugelpackung, *Math. Centrum* Amszterdam. Rapport ZW, 023, 8.
MAHLER, K. [1946], On lattice points in a cylinder, *Quart. J. Math.* 17, 16—18.
— [1947], On the area and the densest packing of convex domains, *Proc. Acad. Wet.* Amsterdam 50, 109—18.
MALÉ, T. [1973], Sur les empilements des sphères dans les espaces á courbure constante, Bamako (doktori értekezés).
MIŃKOWSKI, H. [1904], Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, *Nachr. Ges. Wiss.* Göttingen, Math-Physik. Kl. 311—55.
MOLNÁR, J. [1959], Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 2, 33—40.
— [1961], Alcune generalizzazioni del teorema de Segre-Mahler, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.* Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 30, 700—5.
— [1962], Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 12, 223—63.

— [1963], Estensione del teorema di Segre-Mahler allo spazio, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.* Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 35, 166—8.
— [1965], Volumenabschätzung eines Polyeders in Räumen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 14, 431—3.
— [1965*b*], Tong quan ve hinh hoc roi rac, *Tap San Toan Ly* 3, 17—21.
— [1966*a*], Aggregati di cerchi di Mińkowski, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 71, 101—8.
— [1966*b*], Collocazioni di cerchi con esigenza di spazio, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 9, 71—86.
— [1967], On the λ-system of circles, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 18, 405—10.
MORDELL, L. J. [1944], Observation on the minimum of a positive quadratic form in eight variables, *J. Lond. Math. Soc.* 19, 3—6.
RANKIN, R. A. [1947], On the closest packing of spheres in n-dimensions, *Ann. Math.* Princeton II. 48, 1062—81.
— [1955*a*], On packing of spheres in Hilbert spaces, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 2, 145—46.
— [1955*b*], The closest packing of spherical caps in n-dimensions. *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 2, 139—144.
ROBINSON, R. M. [1961], Arrangements of 24 points on a sphere, *Math. Ann.* 144, 17—48.
ROGERS, C. A. [1950), A note on coverings and packings, *J. Lond. Math. Soc.* 25, 327—31.
— [1951], The closest packing of convex two-dimensional domains, *Acta Math.* 86, 309—21.
— [1958], The packing of the equal spheres, *Proc. London Math. Soc.* (3) 8, 609—20.
— [1963], Covering a sphere with spheres. *Mathematika* 10, 157—64.
— [1964], *Packing and covering*, Cambridge.
SCHAER, J. [1965], The densest packing of 9 circle in a square, *Canad. Math. Bull.* 8, 273—7.
— [1966*a*], On the densest packing of spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* 9, 265—70.
— [1966*b*], The densest packing of five spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* 9, 271—4.
— [1966*c*], The densest packing of six spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* 9, 275—80.
SCHÜTTE, K.—VAN DER WAERDEN, B. L. [1953], Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* 125, 325—34.
SEGRE, B.—MAHLER, K. [1944], On the densest packing of circles, *Amer. Math. Monthly* 51, 261—70.
TAMMES, R. M. L. [1930], On the origine of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains, *Rec. Trav. Bot. Neerl.* 27, 1—84.
THUE, A. [1892], Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. *Fordhl. Skand. Naturforsk.* 14, 352—3.
— [1910], Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene. *Christiania Vid. Selsk. Skr.* 1, 3—9.
VORONOI, G. F. [1907], Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, *J. reine angew. Math.* 133, 97—178.
— [1908], Nonvelles applications des paraméteres continus á la théorie des formes quadratiques, Deuxiéme Mémoire, Recherches sur les parallélоédres primitifs, *J. reine angew. Math.* 134, 198—287.
VAN DER WAERDEN, B. L. [1961], Pollenkörner, Punkverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie, *Die Naturwissenschaften* 48, 189—92.
WATSON, G. L. [1956], The covering of space by spheres, *R. C. Circ. Mat. Palermo*, (2) 5, 93—100.
WESTER, O. [1960], An infinite packing theorem for spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.* 11, 324—6.
WOODS, A. C. [1965], The densest double lattice packing of four-spheres, *Mathematica* 12, 138—42.
ZALGALLER, V. A. [1969], *Convex polyhedra with regular faces*, New York.
ZEITLER, H. [1965], Eine reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes, *Elem. Math.* 20, 73—9.

ПОПОЛНЕНИЕ СФЕРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

КАРОЙ БЁРЁЦКИ

SPHERE PACKING IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE II.

K. BÖRÖCZKY

AZ n-DIMENZIÓS TÉR RÁCSSZERŰ EGYSÉGGÖMBKITÖLTÉSÉBEN ELHELYEZHETŐ HENGEREK SUGARÁRÓL

HORVÁTH JENŐ ÉS S. S. RYSKOV

1. Az n-dimenziós euklideszi térben egymásba nem nyúló kongruens gömbök, röviden gömbkitöltés, egy adott irányban felhőt képez, ha bármely, az adott iránnyal párhuzamos egyenesnek a gömbkitöltés legalább egy gömbjével van közös pontja.

Jelöljük k_n-nel azon irányok számát, amelyekben a kongruens gömbökből álló kitöltés nem képez felhőt és R_n-nel pedig annak a hengernek a sugarát, amelynek tengelye párhuzamos az adott irányok egyikével és nincs közös belső pontja egyetlen gömbbel sem.

Az n-dimenziós euklideszi tér egységgömbökből álló rácsszerű kitöltésére eddig a következő eredmények ismeretesek:

$n=3$, $k_3 \geqq 3$, $R_3 > 0$ Heppes [2]

$k_3 \geqq 3$, $R_3 \geqq \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1 = 0{,}0606\ldots$ Hortobágyi [3]

$n=4$ $k_4 \geqq 4$, $R_4 \geqq \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = 0{,}1180\ldots$ Horváth [4]

$n=5$ $k_5 \geqq 3$, $R_5 > \sqrt[4]{\frac{64\sqrt{2}}{25\sqrt{5}}} - 1 = 0{,}1280\ldots$ Horváth [8]

$k_5 \geqq 1$, $R_5 > 2\sqrt[8]{\frac{2}{25}} - 1 = 0{,}1927\ldots$ Horváth—Ryskov [9]

$n \to \infty$ $k_n \geqq 1$ $R = \lim_{n\to\infty} R_n \geqq \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142\ldots$ Horváth—Ryskov [9].

Dolgozatunk célja az eddigieknél jobb alsó korlátot adni k_n-re és R_n-re, ha $n \geqq 6$, továbbá javítani az $R = \lim_{n\to\infty} R_n$ aszimptotikus értéket.

2. A továbbiakban a következő jelöléseket vezetjük be:[2]

Γ^n — egy n-dimenziós pontrács,

$V(\Gamma^n)$ — a rács alapparalelotópjának térfogata,

$\overline{m}(\Gamma^n)$ — a Γ^n rács legrövidebb rácsvektora (v. egy azok közül),

$|\bar{a}|$ — az $\bar{a}$ vektor hossza,

$r(\Gamma^n)$ — a Γ^n rács fedési gömbjének sugara,[3]

$\gamma_n = \sup_{\Gamma^n \subset E^n} \frac{|m(\Gamma^n)|^2}{V(\Gamma^n)^{2/n}}$ — Hermite-féle állandó,

[1] L. [1]

[2] V. ö. [10]—[12].

[3] Ha $r(\Gamma^n)$ sugárral a pontrács pontjai körül gömböket írunk, ezek lefedik az E^n teret.

$\varrho_n = \inf_{\Gamma^n \subset E^n} \frac{r(\Gamma^n)}{[V(\Gamma^n)]^{1/n}}$,
Ω_n — az n-dimenziós egységgömb térfogata,
$\delta(n)$ — a legsűrűbb gömbkitöltés sűrűsége,
$\delta_r(n) = \Omega_n \gamma_n^{n/2} 2^{-n}$ — a legsűrűbb rácsszerű gömbkitöltés sűrűsége,
$\theta(n)$ — a legritkább gömbfedés sűrűsége,
$\theta_r(n) = \Omega_n \varrho_n^n$ — a legritkább rácsszerű gömbfedés sűrűsége,
σ_n — Rogers [10] felső korlátja a gömbkitöltés sűrűségére,[4]
$\tau_n = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n/2} \sigma_n$ — Coxeter—Rogers—Few [10] alsó korlátja a gömbfedés sűrűségére,[5]
$R(\Gamma^n)$ — az egységgömbök rácsszerű kitöltésében létező, a gömböket nem metsző hengerek sugara közül a legnagyobb,
$R_n = \inf R(\Gamma^n)$.

3. A következőkben két tételt bizonyítunk be:

1. Tétel. *Legyen* $n \geqq 4$. *Az egységgömbök bármely rácsszerű kitöltésében mindig található legalább 4 különböző irány, amellyel párhuzamos tengelyű és*

$$R_n \geqq 2\varrho_{n-1}\gamma_n^{-\frac{n}{2(n-1)}} - 1 \tag{1}$$

sugarú henger nem metszi a kitöltés gömbjeit. Az eddig ismert ϱ_{n-1} [7], [14], [15] *és* γ_n [5], [6] *értékekből adódik, hogy*

$$R_4 \geqq \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = 0{,}1180\ldots$$

$$R_5 > 2\sqrt[8]{\frac{2}{25}} - 1 = 0{,}1927\ldots \tag{2}$$

$$R_6 > \sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt[10]{\frac{1}{27}} - 1 = 0{,}2283\ldots.$$

Bizonyítás:[6] Tegyük fel, hogy a gömbközéppontok rácsát a Hermite—Minkowski-féle redukcióval adtuk meg [13], azaz a rács $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ bázisvektorait a következőképpen választjuk ki: $\bar{a}_1$ — a legrövidebb rácsvektor, $\bar{a}_2$—$\bar{a}_1$-gyel nem párhuzamos legrövidebb rácsvektor, $\bar{a}_3$—$\bar{a}_1$- és $\bar{a}_2$-től lineárisan független legrövidebb rácsvektor, $\bar{a}_4$ — az $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vektoroktól lineárisan független legrövidebb rácsvektorok közül az, amely a Γ^n rács egy teljes részrácsát adja. (Ismert, hogy az E^2 és E^3 terekben a 2, ill. 3 lineárisan független legrövidebb rácsvektor a rács bázisvektorait adja, az E^4 térben pedig a tércentrált kockarács kivételével szintén a legrövidebb rácsvektor megadja a rács bázisvektorát.) $\bar{a}_5$ — az $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ vektoroktól lineárisan független olyan legrövidebb rácsvektor, amely a kiválasztott 4 vektorral együtt a Γ^n rács egy 5-dimenziós teljes részrácsának bázisvektorait adja, és így tovább.

[4] σ_n szemléletes jelentése: A 2 egységélű szabályos szimplex csúcsai körül írt egységgömbök szimplexbe eső részének és a szimplex térfogatának a hányadosa.

[5] τ_n szemléletes jelentése: a szabályos szimplex csúcsai körül írt, a szimplex súlypontján átmenő gömbök simplexbe eső részének és a szimplex térfogatának a hányadosa.

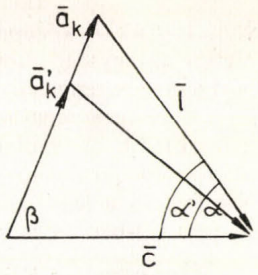
[6] A tétel bizonyítása a legrövidebb rácsvektor irányába megtalálható [9]-ben is.

Legyen $\bar{a}_k$ az $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ lineárisan független legrövidebb rácsvektorok közül az egyik. Megmutatjuk, hogy az egységgömbök rácsszerű kitöltésében mindig található az $\bar{a}_k$ vektorral párhuzamos tengelyű, (1)-ben megadott sugarú henger, amely nem metszi a gömböket.

Tegyük fel, hogy $|\bar{a}_k|>2$. Tekintsük a pontrácsnak azt az affin leképezését, amelynek fősíkját a Hermite—Minkowski-redukcióval megadott bázisvektorrendszer $\bar{a}_k$-tól különböző vektorai határozzák meg, iránya párhuzamos $\bar{a}_k$-val és az $\bar{a}_k$ vektor $\bar{a}_k'$ affin képe 2 egység lesz. Megmutatjuk, hogy az így kapott Γ^n rácsban $\overline{m}(\Gamma^n)=2$.

Legyen $\bar{b}$ az $\bar{a}_k$ vektor végpontját a fősík egy rácspontjával összekötő vektor és $\bar{a}_k+\bar{b}=\bar{c}$ (l. ábra). $\bar{a}_k$ definíciójából következik, hogy az ábrán jelölt szögekre érvényes a

$$\beta \geqq \alpha$$



1. ábra

egyenlőtlenség. Az affin transzformáció után β nem változik, α csökken, így

$$\beta > \alpha'.$$

Ebből következik, hogy

$$|\bar{b}'| > |\bar{a}_k'| = 2.$$

Mivel a fősíkban a vektorok hossza nem változott, így a $\Gamma^{n'}$ rácsban a legrövidebb rácsvektor hossza kétegység. Ebből következik, hogy a $\Gamma^{n'}$ rácspontjai körül írt egységgömbök nem metszik egymást, az így adódó gömbkitöltés sűrűsége pedig nyílván nagyobb az eredeti gömbkitöltés sűrűségénél. Amennyiben megmutatjuk, hogy az utóbbi gömbkitöltésben elhelyezhető, (1)-ben megadott sugarú, $\bar{a}_k$-val párhuzamos tengelyű henger, akkor ez a henger nyilván nem metszi az eredeti gömbkitöltés gömbjeit sem.

Legyen $m(\Gamma^n)=|\bar{a}_k|=2$. definíciójából adódik, hogy

$$V(\Gamma^{n'}) \geqq \left(\frac{4}{\gamma_n}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{3}$$

Vetítsük a $\Gamma^{n'}$ rácsot egy az $\bar{a}_k'$-re merőleges hipersíkra, a vetületi rácsot Γ^{n-1}-gyel jelöljük. Minthogy $V(\Gamma^{n'})=2V(\Gamma^{n-1})$, így (3)-ból

$$V(\Gamma^{n-1}) \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\gamma_n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Az $r(\Gamma^{n-1})$ és a ϱ_{n-1} meghatározásából következik, hogy

$$r(\Gamma^{n-1}) \geqq \varrho_{n-1}\sqrt[n-1]{V(\Gamma^{n-1})} \geqq \varrho_{n-1}\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\gamma_n}\right)^{n/2}} = 2\varrho_{n-1}\gamma_n^{-\frac{n}{2(n-1)}} \tag{4}$$

Tekintsük a Γ^{n-1} rács üresgömbjeit, azaz olyan gömböket, amelyek belsejében nincs rácspont, és a felületén legalább n db olyan rácspont van, melyek nincsenek egy $(n-2)$-dimenziós altérben [13]. Legyen A a legnagyobb sugarú üres gömb középpontja. (4) alapján A-tól minden rácspont legalább $2\varrho_{n-1}\gamma^{-\frac{n}{2(n-1)}}$ távolságra van. Így az A középpontú, $2\varrho_{n-1}\gamma^{-\frac{n}{2(n-1)}}$ sugarú $(n-1)$-dimenziós K gömb nem metszi az egységgömbök vetületeit. Ebből következik, hogy a K alapgömbű, $\bar{a}_k$-val párhuzamos tengelyű henger sem metszi a kitöltés gömbjeit.

A henger sugarára adódó érték csak akkor lehet pontos, ha a gömbkitöltés a legsűrűbb, a vetületi Γ^{n-1} rács pedig a legritkább rácsszerű fedés gömbközéppontjainak megfelelő pontrács. Az eddig ismert legsűrűbb rácsszerű gömbkitöltések ([5], [6]) és a legritkább rácsszerű fedések ([7], [14], [15]) alapján $n=4, 5, 6$ esetén R_n-re a (2)-ben megadott értékek adódnak, melyek közül valószínűleg az R_4 pontos.

MEGJEGYZÉS: Könnyen bizonyítható, hogy $n>6$-ra $R_n \leqq R_6$. Ez abból következik, hogy ha egy k-dimenziós szimplex m-dimenziós lapja köré írt gömb sugara r, akkor a szimplex köré írt gömbjének a sugara is legalább r.

2. TÉTEL. *Az E^n térben az egységgömbök bármely rácsszerű kitöltéséhez megadható legalább négy különböző irány, amely irányokban elhelyezhető, a gömböket nem metsző hengerek R_n sugarára fennáll az*

$$R = \lim_{n-\infty} R_n = 0{,}43136\ldots$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\bar{a}_k$ a Γ^n rács Hermite—Minkowski-féle redukciójában a 4 legrövidebb rácsvektorok egyike. Az előző tételben bebizonyítottuk, hogy feltehető az $|\bar{a}_k| = 2$ egyenlőség.

[16] és [17] alapján

$$(\delta_\Gamma(n))^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\Omega_n}{V(\Gamma^n)}\right)^{\frac{1}{n}} \lesssim c, \tag{6}$$

ahol $c=2^{-0{,}5237\cdots}$. Ebből

$$V(\Gamma^n) \gtrsim \frac{\Omega_n}{c^n}.$$

Vetítsük a középpontok rácsát egy az $\bar{a}_k$-ra merőleges hipersíkra. $|\bar{a}_k|=2$-ből következik, hogy

$$2V(\Gamma^{n-1}) = V(\Gamma^n),$$

ahol Γ^{n-1} a Γ^n rács vetülete a hipersíkon. Ezt (6)-ba helyettesítve

$$V(\Gamma^{n-1}) \gtrsim \frac{1}{2}\frac{\Omega_n}{c^n} \tag{7}$$

Minthogy

$$r(\Gamma^{n-1}) \geqq \varrho_{n-1}(V(\Gamma^{n-1}))^{\frac{1}{n-1}}$$

másrészt

$$\varrho_{n-1} = \left(\frac{\theta_\Gamma(n-1)}{\Omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ezeket (7)-be helyettesítve az

$$r(\Gamma^{n-1}) \gtrsim \left[\frac{\Omega_n}{\Omega_{n-1}} \frac{1}{2c^n} \theta_\Gamma(n-1)\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

egyenlőtlenség adódik.

Felhasználva, hogy

$$\theta_\Gamma(n-1) \cong \tau_n = \left(\frac{2n-2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{n-1},$$

továbbá, hogy

$$\sigma_{n-1} \sim \frac{n-1}{e} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

(l. [10] 7. fejezet) és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{\frac{\Omega_n}{\Omega_{n-1}}} = 1$$

adódik, hogy

$$r(\Gamma^{n-1}) \gtrsim \left[\left(\frac{2n-2}{n}\right)^{n-1} \frac{n-1}{e} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \frac{1}{2c^n}\right]^{\frac{1}{n-1}} \sim \frac{1}{c},$$

azaz a vetületi rácsban a legnagyobb üres gömb sugara aszimptotikusán nem kisebb $\frac{1}{c}$-nél. Ebből

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n \cong \frac{1}{c} - 1 = 0{,}43136\ldots.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Felvetődik a következő kérdés: Létezik-e olyan univerzális R állandó, hogy R-hez minden n-re mindig található egységgömbök olyan rácsszerű kitöltése, amelyben az R sugarú henger már nem helyezhető el.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth, L., Verdeckung einer Kugel durch Kugeln, *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 307—313.

[2] Heppes, A., Ein Satz über gitterförmiger Kugelpackung, *Ann. Univ. Sci. Budapest Sectio Math.*, 3—4 (1960—61), 89—90.

[3] Hortobágyi, I., Durchleutung gitterförmiger Kugelpackung mit Lichtbündeln, *Studia Sci. Math. Hung.*, 6 (1971), 147—150.

[4] Horváth, J., Über Durchsichtigkeit gitterförmiger Kugelpackungen, *Studia Sci. Math. Hung.* 5 (1970), 421—426.

[5] Korkin, A., Zolotareff, G., Sur les formes quadratic des pozitives quaternaires, *Math. Ann.* 5 (1972), 581—583.

[6] Blichfeldt, H. F., The minimum values of pozitive quadratic forms in six, seven and eight variables, *Math. Z.* 39 (1934), 1—15.

[7] Bambah, R. P., Onlattice covering by spheres, *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 20 (1954), 25—52.

[8] Хорват Й., Замечания к теории облака шаров, *Ann. Univ. Sci. Budapest Sectio Math.* 15 (1972) 147—150.

[9] Рышков, С. С.—Хорват, Й., Оценка радиуса цилиндра, вложимого в каждую решетчатую упаковку единичных n-мерных шаров, *Мат. Заметки* 17(1975)№ 1. 123—128.

[10] Роджерс, К., *Укладки и покрытия*, Москва 1968.

[11] Барановский, Е. П., Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны, Итоги науки, Алгебра. Геометрия. Топология. Москва 1969. 189—225.
[12] Делоне Б. Н.—Долбилин Н. П.—Рышков С. С.—Штогрин М. И., Новые построение теории решетчатых покрытий n-мерного пространства равными шарами, *Изв. АН СССР*, Сер. Мат. 34 (1970) №2. 289—298.
[13] Делоне Б. Н., Геометрия положительных квадратичных форм, *Успехи Мат. Наук*, 3 (1937). 16—62, 4 (1938). 102—164.
[14] Делоне Б. Н.—Рышков С. С., Решение задачи о наименее плотном решетчатом покрытии четерехмерного пространства равными шарами, *ДАН СССР* 152 (1963) № 3 523—524.
[15] Барановский Е. П.—Рышков С. С., Решение задачи о наименеее плотном решетчатом покрытии 5-мерного пространства равными шарами, *ДАН СССР* 222 (1975) 39—42.
[16] Сидельников В. М., Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n-мерном евклидовом пространстве, *Мат. Сборник*, 95 (137) № 1 (9) (1975) 148—158.
[17] Левенштейн В. И., О максимальной плотности заполнения n-мерного евклидова пространства равными шарами, *Мат. Заметки*, 18 (1975) № 2 301—311.

О РАЛИУСЕ ЦИЛИНДРОВ, ВЛОЖИМЫХ В КАЖДУЮ РЕШЕТЧАТУЮ УПАКОВКУ ЕДИНИЧНЫХ n-МЕРНЫХ ШАРОВ

Й. ХОРВАТ—С. С. РЫШКОВ

Поскольку заметке [9] наша задача сведена к задачам об упаковках и покрытиях, то каждое каждое продвижение в этих задачах имеет следствием продвижение и в нашей задаче. Таким способом получается два результата:

1. $R_6 > \sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt[10]{\frac{1}{27}} - 1 = 0{,}2283\ldots$ в силу теоремы 1. из [9] и теоремы T_3 из [15].
2. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n > 2^{-0{,}5237} = 0{,}43136\ldots$ в силу теоремы 1. из [9] и оценки из [16] и [17].

Кроме того, здесь показано, что формулы (1), (2), (3), (4) из [9] при любой размерности $n \geqq 4$ имеют место для 4 направлений решетки.

ON THE RADII OF THE CYLINDERS WHICH FIT INTO A LATTICE PACKING OF THE n-DIMENSIONAL SPACE WITH UNIT SPHERES.

J. HORVÁTH and S. S. RYSKOV

MEGJEGYZÉS A „VÁLTOZÓK SZÉTVÁLASZTÁSA MÓDSZERÉNEK" ÁLTALÁNOSÍTÁSÁHOZ

HOFFMANN ANDOR

A lineáris parciális differenciálegyenletek bizonyos egyszerű típusainak megoldásánál jól bevált módszer a „változók szétválasztásának módszere", amelyet Bernoulli—Fourier-, vagy egyszerűen csak Fourier-féle módszernek is neveznek. A legtöbb parciális differenciálegyenletekkel foglalkozó könyv e módszert csupán a legegyszerűbb esetekre alkalmazza, pl. Tyihonov—Szamarszkij [1] először az egydimenziós rezgés differenciálegyenletén mutatja meg (86. o.), de később is csak a legegyszerűbb esetekre alkalmazza (211. o., 331. o.).

I. G. Petrovszkij könyvében [2] egy példán általánosabb módszert alkalmaz (140—141. o.), de ez a példa a fentemlített legegyszerűbb szétválasztással is rögtön megoldható. Egyébként megjegyzi, hogy az általános Fourier-módszer „...csak a másodrendű lineáris egyenletek bizonyos speciális osztályára alkalmazható...".

Kneschke [3] leír egy módszert, amely alkalmas olyan magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek szétválasztására is, amelyekben csak

$$a(x)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \quad b(y)\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \ldots$$

(n nem negatív egész szám) alakú tagok szerepelnek (76—78. o.).

C. R. Chester könyvében [4] a következőket írja (106—107. o.):

„Even in the coefficients are constants, however separation of variables is not always possible. For example, the biharmonic equation $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$ is not separable in rectangular coordonates. It is separable in polar coordinates, however.

The last remark illustrates another fact. Whether or not a PDE is separable depends, in general, on the coordinate system used. The few PDE s which are separable only in a few special coordinate systems."

Aczél János megmutatta [5], hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(y) = 0 \tag{1}$$

alakú egyenlet visszavezethető $n-1$ tagból álló egyenletre, ahol a tagok száma tovább csökkenthető, végül a 2 tagból álló egyenletet már egyszerűen szétválaszthatjuk. Aczél tulajdonképpen a Petrovszkij által leírt módszert alkalmazta olyan egyenletekre, amelyeknél a fentemlített egyszerű szétválasztási módszer nem megy.

A módszert rögtön alkalmazhatjuk a biharmonikus differenciálegyenlet Descartes-féle koordinátarendszerben felírt alakjára és ezzel Chester állításait meg is cáfoltuk, hacsak Chester nem a legegyszerűbb szétválasztási módszerre gondolt.

Egyszerűség kedvéért állítsuk elő a

$$\Delta^2 u = 0 \tag{2}$$

homogén biharmonikus differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldását.

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét, vegyük fel az u függvényt

$$u = X(x)\,Y(y) \tag{3}$$

szorzat alakban. Ekkor a (2) differenciálegyenlet

$$X^{\mathrm{IV}}(x)\,Y(y)+2X''(x)\,Y''(y)+X(x)\,Y^{\mathrm{IV}}(y) = 0 \tag{4}$$

alakú lesz, vagy általánosan felírva:

$$f_1(x)\,g_1(y)+f_2(x)\,g_2(y)+f_3(x)\,g_3(y) = 0. \tag{5}$$

Az (5) egyenlet a szóban forgó tartomány minden x és y értékére érvényes, így

$$f_1(x)\,g_1(y_0)+f_2(x)\,g_2(y_0)+f_3(x)\,g_3(y_0) = 0. \tag{6}$$

Ebből $g_3(y_0)\neq 0$ esetén

$$f_3 = -\frac{g_1(y_0)}{g_3(y_0)}f_1(x)-\frac{g_2(y_0)}{g_3(y_0)}f_2(x) = -\nu f_1(x)-\mu f_2(x). \tag{7}$$

Így az (5) egyenlet

$$f_1(x)[g_1(y)-\nu g_3(y)]+f_2(x)[g_2(y)-\mu g_3(y)] = 0 \tag{8}$$

alakban írható. Most az előző meggondolást megismételve

$$f_1(x)[g_1(y_1)-\nu g_3(y_1)]+f_2(x)[g_2(y_1)-\mu g_3(y_1)] = 0. \tag{9}$$

amiből $g_1(y_1)-\nu g_3(y_1)\neq 0$ esetén

$$f_1(x)+f_2(x)\frac{g_2(y_1)-\mu g_3(y_1)}{g_1(y_1)-\nu g_3(y_1)} = f_1(x)+\omega f_2(x) = 0. \tag{10}$$

A (4) és (5) egyenleteket összehasonlítva

$$f_1(x) = X^{\mathrm{IV}}(x), \quad f_2(x) = 2X''(x), \quad f_3 = X(x)$$

$$g_1(y) = Y(y), \quad g_2(y) = Y''(y), \quad g_3(y) = Y^{\mathrm{IV}}(y).$$

A fentieket a (10) egyenletbe téve X-re az

$$X^{\mathrm{IV}}+2\omega X'' = 0 \quad (\omega > 0) \tag{11}$$

differenciálegyenletet kapjuk.

Ennek általános megoldása

$$X = c_1 \cos\sqrt{2\omega}\,x+c_2 \sin\sqrt{2\omega}\,x+c_3\,x+c_4 \tag{12}$$

Ebből kiválasztva pl. az

$$X_p = \sin\sqrt{\lambda}\,x \quad (\lambda = 2\omega > 0)$$

partikuláris megoldást és azt betéve a (4) egyenletbe, Y-ra az

$$Y^{\mathrm{IV}}-2\lambda Y''+\lambda^2 Y = 0$$

differenciálegyenletet kapjuk, amelynek egy partikuláris megoldása

$$Y_p = e^{-\sqrt{\lambda}y}$$

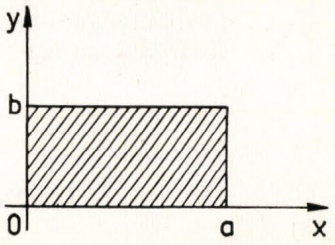
amiből a (2) homogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$u_p = \sin\sqrt{\lambda}x \cdot e^{-\sqrt{\lambda}y}$$

lesz. Hasonlóan választhatunk ki további partikuláris megoldásokat is.

Ezután tekintsük pl. a következő peremértékproblémát. Vizsgáljuk egy téglalap alakú lemez kihajlását adott $p(x, y)$ terhelés mellett.

A differenciálegyenlet



1. ábra

$$(13) \quad \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{N}$$

lesz, ahol N a lemez szilárdsági együtthatója,

$$N = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)},$$

m a Poisson-féle állandó, E a rugalmassági együttható és h a lemez vastagsága.

A w lemezkihajlást a lemez középsíkjára értelmezzük, amely nyugalmi állapotban az x, y síkban van. Ha a lemezt megterheljük egy v. több koncentrikus terheléssel, vagy egy folytonosan elosztott terheléssel, akkor a lemez középsíkja kihajlik és egy görbült felületbe megy át, ez lesz a lemez rugalmas felülete. Ez a felület úgy keletkezik, hogy a középsík (x, y) pontja a z tengely irányában eltolódik, ezt az eltolódást jelöljük $w(x, y)$-nal. Ha ezek az eltolódások a h lemezvastagsághoz képest kicsinyek, akkor érvényes a (13) differenciálegyenlet.

A feladat konkretizálásához vegyük a

$$(14) \quad w|_p = 0$$

$$(15) \quad \Delta w|_p = 0$$

Navier-féle peremfeltételeket. Ez azt jelenti, hogy a perem nem mozdul el és hajlítási nyomaték sem lép fel a peremen.

Ezután keressük meg a (13) differenciálegyenlet (14) és (15) peremfeltételek melletti partikuláris megoldását.

A $p(x, y)$ terhelést reprezentáló függvényt fejtsük kettős Fourier-sorba, azaz

$$p(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y,$$

ahol

$$a_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \, dx \, dy.$$

Így a (13) differenciálegyenlet a

$$(16) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{N}\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y$$

alakot ölti. A megoldást

$$w = \sum_{n,m} w_{nm}$$

kettős sorral állíthatjuk elő és ekkor a (16) differenciálegyenlet a

$$\frac{\partial^4 w_{nm}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_{nm}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{nm}}{\partial y^4} = \frac{a_{nm}}{N} \sin\frac{n\pi}{a} x \sin\frac{m\pi}{b} y \quad (n, m = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

alakú differenciálegyenletekre bomlik szét. Keressük meg a (17) inhomogén differenciálegyenleteknek a (14) és (15) peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldásait a fenti általánosított Fourier-módszerrel.

Vegyük fel a w_{nm} függvényt

$$w_{nm} = X(x)\, Y(y)$$

alakban, ekkor a (17) differenciálegyenlet

$$X^{IV}(x)\, Y(y) + 2X''(x)\, Y''(y) + X(x)\, Y^{IV}(y) = \tag{18}$$

$$= \frac{a_{nm}}{N} \sin\frac{n\pi}{a} x \sin\frac{m\pi}{b} y$$

alakú lesz. A fenti eljárást alkalmazva a tagok száma eggyel csökken, azaz

$$X^{IV}(x)\left[Y(y) - \frac{Y(y_0)}{Y^{IV}(y_0)} Y^{IV}(y)\right] + 2X''(x)\left[Y''(y) - \frac{Y''(y_0)}{Y^{IV}(y_0)} Y^{IV}(y)\right] =$$

$$= -\frac{a_{nm}}{N} \sin\frac{n\pi}{a} x \left[\frac{\sin\frac{m\pi}{b} y_0}{Y^{IV}(y_0)} Y^{IV}(y) - \sin\frac{m\pi}{b} y\right]$$

Ezt véve az értelmezési tartománynak valamely $y = y_1$ helyén, X-re egy egyszerűen kezelhető közönséges inhomogén differenciálegyenletet kapunk, amelyet az

$$Y(y_1) - \frac{Y(y_0)}{Y^{IV}(y_0)} Y^{IV}(y_1) \neq 0$$

esetén az

$$X^{IV} + \alpha X'' = \beta \frac{a_{nm}}{N} \sin\frac{n\pi}{a} x \tag{19}$$

nagyon egyszerű alakra hozhatunk. Ennek egy partikuláris megoldása

$$X = \frac{a_{nm}\beta}{N\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \alpha\right]} \sin\frac{n\pi}{a} x \quad \alpha \neq \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

lesz, amelyet betéve a (18) egyenletbe Y-ra a

$$Y^{IV} - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y'' + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 Y = \frac{1}{\beta}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \alpha\right] \sin\frac{m\pi}{b} y$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

differenciálegyenletet kapjuk. Ennek egy partikuláris megoldása

$$Y = \frac{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \alpha\right]}{\beta\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi}{b}\, y.$$

Így a (17) differenciálegyenletek (14) és (15) peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldásai a

$$w_{nm} = \frac{a_{nm}}{N\pi^4\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{a}\, x \sin\frac{m\pi}{b}\, y$$

függvények lesznek. Ezzel a (16) differenciálegyenletnek a (14) és (15) peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldása

$$w = \frac{1}{N\pi^4} \sum_{n,m} \frac{a_{nm}}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{a}\, x \sin\frac{m\pi}{b}\, y.$$

Mint látható, ez a függvénysor elég gyorsan konvergál és a negyedik parciális deriváltjáig bezárólag konvergens.

Most térjünk vissza az (1) függvényegyenlethez. Ennek tagjai két tényezős szorzatokból álltak. Nézzük a függvényegyenletet tetszőleges m tényezős szorzatok esetén. Ez röviden jelölve a következő lesz:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(x_j) = 0. \tag{20}$$

A (20) egyenlet fennáll minden x_j változóra az értelmezési tartományban, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m-1} f_{ij}(x_j) f_{im}(x_m^1) = 0 \tag{21}$$

is fennáll valamely x_m^1 rögzített érték mellett. A (21) egyenletből

$$\prod_{j=1}^{m-1} f_{nj}(x_j) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{im}(x_m^1)}{f_{nm}(x_m^1)} \prod_{j=1}^{m-1} f_{ij}(x_j) \tag{22}$$

$f_{nm}(x_m^1) \neq 0$ esetén.

A (22) egyenlőséget felhasználjuk a (20) egyenlet szétbontásánál, mégpedig

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(x_j) &= \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(x_j) + \prod_{j=1}^{m} f_{nj}(x_j) = \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(x_j) + f_{nm}(x_m) \prod_{j=1}^{m-1} f_{nj}(x_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{m} f_{ij}(x_j) - f_{nm}(x_m) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{im}(x_m^1)}{f_{nm}(x_m^1)} \prod_{j=1}^{m-1} f_{ij}(x_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{m-1} f_{ij}(x_j) \left[f_{im}(x_m) - \frac{f_{im}(x_m^1)}{f_{nm}(x_m^1)} f_{nm}(x_m)\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{m-1} f_{ij}(x_j)[f_{im}(x_m) - \omega_{im} f_{nm}(x_m)] = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

Így a (20) egyenletbeli tagok számát eggyel csökkentettük. Ezt az eljárást addig ismételhetjük, amíg két tagból álló egyenletet kapunk.

Most áttérve valamely N-edrendű lineáris m független változós, speciális együtthatójú parciális differenciálegyenletre, azt

$$\sum a_{k_1, \dots k_m; 1}(x_1) \dots a_{k_1, \dots k_m; m}(x_m) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} = 0 \tag{24}$$

$$k_1 + \dots + k_m = k \leqq N$$

(N nem negatív egész szám) alakban írhatjuk. Ha feltesszük, hogy

$$u = \prod_{j=1}^{m} u_j(x_j), \tag{25}$$

akkor

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} = \prod_{j=1}^{m} \frac{d^{k_j} u_j}{dx_j^{k_j}},$$

és ezzel a (24) differenciálegyenlet

$$\sum \prod_{j=1}^{m} a_{k_1 \dots k_m; j}(x_j) \frac{d^{k_j} u_j}{dx_j^{k_j}} = 0$$

$$k_1 + \dots + k_m = k \leqq N$$

alakú lesz, amely már alakilag megfelel a (20) egyenletnek.

Látjuk tehát, hogy a változók szétválasztása módszerének alkalmazása független a koordinátarendszer megválasztásától és a parciális differenciálegyenletek sokkal szélesebb osztályára alkalmazható, mint az az [1], [2], [3], [4] irodalomban van.

Bizonyos peremértékproblémák megoldását nagyon egyszerűen felírhatjuk, ha a differenciálegyenlet összes megoldását áttekintjük. Nézzük pl. az

$$f_1(x) g_1(y) + f_2(x) g_2(y) = 0 \tag{26}$$

függvényegyenletet. Ilyen alakra hozhatunk pl. bármely két tagból álló lineáris, homogén és szorzat alakú együtthatóval rendelkező parciális differenciálegyenletet. Az összes megoldást az 1. táblázat mutatja.

	I	II	III	IV	V
f_1	f_1	0	0	f_1	f_1
f_2	f_2	f_2	0	0	af_1
g_1	0	g_1	g_1	0	ag_2
g_2	0	0	g_2	g_2	g_2

1. táblázat

Az első négy oszlopban levő megoldásokat nevezzük majdnem triviális megoldásoknak. A peremértékprobléma megoldásakor érdemes először ezeket végignézni. Ugyanis előfordulhat, hogy ezek közül valamelyik már megadja a keresett partikuláris megoldást.

$$f_1(x) g_1(y) + f_2(x) g_2(y) + f_3(x) g_3(y) = 0$$

alakú egyenlet esetén a majdnem triviális megoldásokat a 2. táblázat mutatja.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	0	0	0	0
f_2	f_2	f_2	0	0	f_2	f_2	0	0
f_3	f_3	0	f_3	0	f_3	0	f_3	0
g_1	0	0	0	0	g_1	g_1	g_1	g_1
g_2	0	0	g_2	g_2	0	0	g_2	g_2
g_3	0	g_3	0	g_3	0	g_3	0	g_3

2. táblázat

$$f_1(x)\,g_1(y)\,h_1(z)+f_2(x)\,g_2(y)\,h_2(z)=0$$

alakú egyenlet esetén a majdnem triviális megoldásokat a 3. táblázat mutatja.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
f_1	f_1	f_1	0	0	0	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_2	f_2	0	f_2	f_2	0	f_2	0	f_2
g_1	g_1	0	g_1	g_1	g_1	0	0	g_1	g_1
g_2	g_2	0	g_2	0	g_2	g_2	g_2	g_2	0
h_1	0	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	0	0
h_2	0	h_2	h_2	h_2	0	h_2	0	h_2	h_2

3. táblázat

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy m tényezős szorzatokból álló n tagú egyenlet esetén a majdnem triviális megoldások száma m^n.

Példaként tekintsük az

(27) $$u_{xx}+u_{yy}=0$$

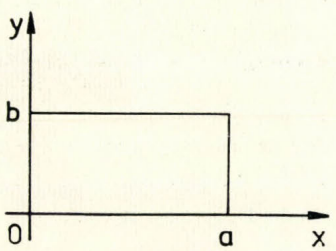
Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-féle feladat megoldását a 2. ábrán megadott téglalap alakú tartományra. A peremfeltételek írjanak elő egymáshoz csatlakoztatott egyenes darabokat, mégpedig

(28)
$$u(o,y)=u(o,o)+\frac{u(o,b)-u(o,o)}{b}\,y$$

$$u(x,o)=u(o,o)+\frac{u(a,o)-u(o,o)}{a}\,x$$

$$u(a,y)=u(a,o)+\frac{u(a,b)-u(a,o)}{b}\,y$$

$$u(x,b)=u(o,b)+\frac{u(a,b)-u(o,b)}{a}\,x$$



2. ábra

Az 1. táblázat II. oszlopa szerint

$$X''(x)=Y''(y)=0$$

és ebből

$$u=(\alpha x+\beta)(\gamma y+\delta)=Axy+Bx+cy+D$$

Az A, B, C, D állandó együtthatók a (28) peremfeltételek segítségével könnyen meghatározhatók, így

$$A=\frac{u(a,b)+u(o,o)-u(a,o)-u(o,b)}{ab}$$

$$B=\frac{u(a,o)-u(o,o)}{a}$$

$$C=\frac{u(o,b)-u(o,o)}{b}$$

$$D=u(o,o).$$

IRODALOM

[1] A. N. Tyihonov—A. A. Szamarszkij: A matematikai fizika differenciálegyenletei. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
[2] I. G. Petrovszkij: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
[3] A. Kneschke: Differentialgleichungen und Randwertprobleme II. VEB V. Berlin, 1960.
[4] C. R. Chester: Techniques in Partial Differential Equations. Mc. Graw-Hill, N. Y.—London 1971.
[5] Aczél János: Megjegyzés a „változók szétválasztásának módszeréhez" és annak általánosítása. Matematikai Lapok XII. Budapest, 1961.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОБОБЩЕНИЮ «МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ»

А. ГОФМАНН

A REMARK ON GENERALIZING THE "METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES'

A. HOFFMANN

The paper applies the generalized Fourier method for the equations

$$\sum_{k_1+\ldots+k_m=k\leqq N} a_{k_1,\ldots k_m;1}(x_1)\ldots a_{k_1,\ldots k_m;m}(x_m)\frac{\partial^k u}{\partial_1^{k_1}\ldots\partial_{x_m}^{k_m}}=0$$

(N nonnegative integer)

With this method author solves the boundary problem of Navier of the biharmonic differential equation in Descartes coordinate system.

Henceforth are shown in some special cases the almost trivial solutions of the differential equation and for example it is solved a Dirichlet problem.

A LEGHOSSZABB TISZTA„ FEJ" HOSSZÁNAK HATÁRELOSZLÁSÁRÓL

FÖLDES ANTÓNIA

Bevezetés. A fej vagy írás játékkal kapcsolatos valószínűségszámítási problémák közül a következővel fogunk foglalkozni. N számú dobást végezve milyen hosszú a leghosszabb tiszta fejből álló sorozat.

Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_N$ független azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, melyre $i=0, 1, 2, \ldots, N$-re $P(X_i=0)=P(X_i=1)=\frac{1}{2}$,* és legyen

$$\eta_i(n) = \prod_{j=i}^{i+n-1} X_j \qquad i = 1, 2 \ldots N-n+1 \tag{1}$$

($\eta_i(n)=1$ akkor és csak akkor, ha $X_j=1$, minden $i \leqq j \leqq i+n-1$, azaz ha az i-edik dobástól kezdődően n-szer egymás után fejet kaptunk.)

Továbbá legyen

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad X_i = 0 \\ 0 & \text{ha} \quad X_i = 1 \end{cases} \tag{2}$$

azaz $\varepsilon_i=1-X_i$, és

$$\tilde{\eta}_i(n) = \varepsilon_{i-1}\eta_i(n) \tag{3}$$

($\tilde{\eta}_i(n)=1$ akkor és csak akkor, ha az i-edik dobással kezdődő legalább n hosszúságú tiszta fej sorozatot közvetlenül megelőző $(i-1)$-edik dobás eredménye írás.)

Definiáljuk az alábbi valószínűségi változókat:

$$\tilde{\xi}(n, N) = \sum_{i=1}^{N-n+1} \tilde{\eta}_i(n) \tag{4}$$

$$\xi(n, N) = \sum_{i=1}^{N-n+1} \eta_i(n) \tag{5}$$

$$\tau(n) = \min \{N, \xi(n, N) > 0\} \tag{6}$$

$$\mu(N) = \max \{n, \xi(n, N) > 0\} \tag{7}$$

Nyilvánvalóan $\tilde{\xi}(n, N)$ az egymásba nem nyúló, legalább n hosszúságú tiszta fej sorozatok száma, míg $\xi(n, N)$ az összes n hosszúságú tiszta fej sorozatok száma (azaz az utóbbi esetben egy $n+l$ hosszúságú tiszta fej sorozatot $l+1$ db n hosszúságú tiszta fej sorozatnak számolunk).

* Az $X_i=1$ kimenetelt fejnek, az $X_i=0$ kimenetelt írásnak fogjuk nevezni.

A $\tau(n)$ valószínűségi változó azon kísérletek minimális számát jelöli, amely ahhoz szükséges, hogy legalább egy n hosszúságú tiszta fej sorozatot kapjunk. Végül a $\mu(N)$ valószínűségi változó az első N kísérletből kapott leghosszabb tiszta fej sorozat hosszát jelöli.

A leghosszabb tiszta fej sorozat hosszának problémáját Erdős és Rényi vetette föl. Ezirányú legfontosabb eredményük a következő tétel:

A. TÉTEL ([1]). *Legyen* $0<c_1<1<c_2<\infty$, *ekkor majdnem minden* $\omega\in\Omega$-*ra (ahol* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a kiindulásul tekintett valószínűségi mező) létezik egy véges* $N_0=N_0(\omega, c_1, c_2)$ *index úgy, hogy*

$$[c_1 \log N] \leqq \mu(N) \leqq [c_2 \log N]$$

ha $N\geqq N_0$.

(A tételben és a továbbiakban a log kettes alapú logaritmust és $[x]$ az x egész részét jelöli.)

A közelmúltban Erdős és Révész élesebb eredményeket ért el. Nevezetesen bebizonyították az alábbi erős törvényt [7]. Ezek kissé gyengébb változata megtalálható [2]-ben.

B. TÉTEL. *Legyen* ε *tetszőleges pozitív szám. Ekkor majdnem minden* $\omega\in\Omega$-*ra létezik egy véges* $N_0=N_0(\omega, \varepsilon)$ *úgy, hogy*

$$\mu(N) \geqq [\log N - \operatorname{loglog}\log N + \log\log e - 2 - \varepsilon]$$

ha $N\geqq N_0$.

C. TÉTEL. *Legyen* ε *egy tetszőleges pozitív szám. Ekkor majdnem minden* $\omega\in\Omega$-*ra létezik egy egész számokból álló végtelen* $N_i=N_i(\omega, \varepsilon)$ *sorozat* $(i=1, 2, \ldots)$ *úgy, hogy*

$$\mu(N_i) < [\log N_i - \operatorname{loglog}\log N_i + \log\log e - 1 + \varepsilon]$$

Erdős és Révész foglalkozott a kérdés következő általánosításával is: Mi mondható a leghosszabb, legfeljebb T írást tartalmazó blokkok hosszáról (ahol T egy rögzített véges egész). Jelölje a $\mu^T(N)$ valószínűségi változó az első N kísérletből kapott leghosszabb, legfeljebb T írást tartalmazó blokk hosszát. A következő két tételre jutottak.

D. TÉTEL. *Legyen* ε *egy tetszőleges pozitív szám. Ekkor majdnem minden* $\omega\in\Omega$-*ra létezik egy véges* $N_0=N_0(\omega, T, \varepsilon)$ *úgy, hogy*

$$\mu^T(N) \geqq [\log N + T\log\log N - \log\log\log N - \log T! + \log\log e - 2 - \varepsilon]$$

ha $N\geqq N_0$.

E. TÉTEL. *Legyen* ε *egy tetszőleges pozitív szám. Ekkor majdnem minden* $\omega\in\Omega$-*ra létezik egész számok egy végtelen* $N_i=N_i(\omega, T, \varepsilon)$ *sorozata úgy, hogy*

$$\mu^T(N) < [\log N_i + T\log\log N_i - \log\log\log N_i - \log T! + \log\log e - 1 + \varepsilon]$$

Az [5] dolgozatban Komlós és Tusnády a következő jóval általánosabb kérdést vizsgálják. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$ független, azonos eloszlású, nemdegenerált

valószínűségi változók egy sorozata, melyek F eloszlásfüggvénye balról folytonos és 0 várható értékű. Rögzített m-re legyen

$$\eta_m(i) = \frac{1}{m} \sum_{j=i}^{i+m-1} \xi_j \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Rögzített $x>0$-ra a

$$\tau_m(x, 1), \quad \tau_m(x, 2) \ldots \tau_m(x, k)$$

folyamat azokból az i indexekből áll, melyre $\eta_m(i) \leqq x$ (növekvő sorrendben). Komlós és Tusnády megmutatják, hogy az egymást követő olyan diszjunkt blokkok τ_m indexeinek különbsége, melyekre $\eta_m(i) \leqq x$, exponenciális eloszláshoz konvergál.

Most megfogalmazzuk a $\tilde{\xi}(n, N)$ $\xi(n, N)$, $\tau(n)$ és $\mu(N)$-re vonatkozó határeloszlástételeket és ezután általánosítjuk tételeinket a legfeljebb T írást tartalmazó blokkokra. A bizonyításokat ez utóbbi esetben fogjuk elvégezni.

Megjegyezzük még, hogy a $\tilde{\xi}(n, N)$-re vonatkozó határeloszlástétel nem új, von Misestől [6] származik, de a bizonyítás módszere más.

Bizonyos értelemben hasonló problémákat vizsgálnak, hasonló módszerrel [4]-ben, ahol tekintenek egy független, azonos eloszlású $\{X_i\}$ valószínűségi változó sorozatot, ahol X_i csak véges sok értéket vehet fel, és a leghosszabb ismétlődő blokk hosszát vizsgálják. Mind [4], mind a jelen dolgozat alapvető segédeszköze a következő paragrafusban szereplő tétel ([3]).

1. §. *Egy segédtétel*

Legyen adott indikátorváltozók egy $Y_i^{(m)}$ $(1 \leqq i \leqq l_m)$ sériasorozata és legyen

$$Z_m = Y_1^{(m)} + Y_2^{(m)} + \ldots + Y_{l_m}^{(m)} \tag{8}$$

azaz $Y_i^{(m)}$ lehetséges értékei 0 és 1. Legyen

$$b_{i_1, i_2, \ldots i_r}^{(m)} = P(Y_{i_1}^{(m)} = Y_{i_2}^{(m)} = \ldots Y_{i_r}^{(m)} = 1), \tag{9}$$

ahol az $i_1, i_2, \ldots, i_r$ indexek páronként különbözőek, és $1 \leqq i_k \leqq l_m$ és $r = 1, 2, \ldots, l_m$. Minden $r = 2, 3, \ldots$ és $m = 1, 2, \ldots$ egészre definiálunk egy ún. *kivételes* $I_r(m)$ halmazt, mely bizonyos $\alpha_r = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ index r-esekből áll, ahol az i_j-k $1 \leqq j \leqq r$-re páronként különbözőek és $1 \leqq i_j \leqq l_m$.

SEGÉDTÉTEL [3]. *Tekintsük a* (8) *által definiált valószínűségi változókat. Ha a* $b_{i_1, \ldots i_r}^{(m)}$ *valószínűségek olyanok, hogy minden m-re*

$$\max_{1 \leqq i \leqq l_m} b_i^{(m)} \to 0 \tag{10}$$

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{l_m} b_i^{(m)} = \lambda > 0 \tag{11}$$

és minden $r = 2, 3, \ldots$ *és* $m = 1, 2, \ldots$*-re létezik egy* $I_r(m)$ *kivételes halmaz úgy, hogy*

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha_r \in I_r(m)} b_{i_1, \ldots, i_r}^{(m)} = 0 \tag{12}$$

és

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha_r \in I_r(m)} b_{i_1}^{(m)} \ldots b_{i_r}^{(m)} = 0 \tag{13}$$

és minden $\alpha_r \notin I_r(m)$*-re*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{b^{(m)}_{i_1 \dots i_r}}{b^{(m)}_{i_1} \dots b^{(m)}_{i_r}} = 1 \tag{14}$$

egyenletesen fennáll, akkor

$$\lim_{m\to\infty} P(Z_m = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{15}$$

2. §. *A tiszta fejekre vonatkozó határeloszlástételek*

2.1. TÉTEL. *Ha* $N\to\infty$ *és* $n\to\infty$ *úgy, hogy*

$$\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0 \tag{16}$$

akkor

$$\lim_{N\to\infty} P(\tilde{\xi}(n, N) = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

MEGJEGYZÉS. Legyen $N=[c2^n]$, ahol c egy tetszőleges rögzített pozitív szám. Ekkor a (16) feltétel teljesül, $\lambda=\frac{c}{2}$ és így

$$\lim_{n\to\infty} P(\tilde{\xi}(n, [c2^n]) = k) = \frac{e^{-\frac{c}{2}}\left(\frac{c}{2}\right)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

2.2. TÉTEL. *Ha* $N\to\infty$ *és* $n\to\infty$ *úgy, hogy* (16) *teljesül, akkor* $\xi(n, N)$ *összetett Poisson-eloszláshoz konvergál, nevezetesen*

$$E(z^{\xi(n,N)}) \to \exp\left(\lambda\left(\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda(z-1)}{1-\frac{z}{2}}\right).$$

2.3. TÉTEL. $0<x<\infty$-re

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tau(n)}{2^{n+1}} \leqq x\right) = 1-e^{-x}. \tag{17}$$

2.4. TÉTEL. *Tetszőleges* k *egészre*

$$P(\mu(N)-[\log N] < k) = \exp\left(-2^{-(k+1-\{\log N\})}\right)+o(1) \tag{18}$$

ahol $[z]$ *a* z *egész részét,* $\{z\}$ *pedig* z *tört részét jelöli, azaz* $\{z\}=z-[z]$.

3. §. *A legfeljebb T írást tartalmazó blokkokra vonatkozó határeloszlástételek*

Ebben a paragrafusban definiáljuk a $\tilde{\xi}(n, N)$, $\xi(n, N)$, $\tau(n)$ és $\mu(N)$ valószínűségi változók megfelelőjét legfeljebb T számú írást tartalmazó blokkok esetére és megfogalmazzuk a megfelelő tételeket.

Éppúgy, mint eddig, legyen $X_0, X_1, \ldots, X_N$ független azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, melyre $P(X_i=0)=P(X_i=1)=\frac{1}{2}$. Minden rögzített $T\geqq 0$ egészre és $i=1,2\ldots$-re legyen

$$(19)\quad \tilde{\eta}_i^T(n)=\begin{cases}1 & \text{ha } X_i, \ldots, X_{i+n-1} \text{ közül pontosan } T \text{ vesz fel 0 értéket, és } X_{i-1}=0,\\ 0 & \text{máskülönben}\end{cases}$$

Nyilván $\tilde{\eta}_i^0(n)=\tilde{\eta}_i(n)$. Továbbá legyen $i=1, 2, \ldots$-re

$$(20)\quad \eta_i^T(n)=\begin{cases}1 & \text{ha } X_i, \ldots X_{i+n-1} \text{ közül legfeljebb } T \text{ vesz fel 0 értéket}\\ 0 & \text{máskülönben.}\end{cases}$$

Ismét nyilvánvaló, hogy $\eta_i^0(n)=\eta_i(n)$. Végül legyen

$$(21)\quad \tilde{\xi}^T(n, N)=\sum_{i=1}^{N-n+1}\tilde{\eta}_i^T(n)$$

$$(22)\quad \xi^T(n, N)=\sum_{i=1}^{N-n+1}\eta_i^T(n)$$

$$(23)\quad \tau^T(n)=\min\{N, \xi^T(n, N)>0\}$$

$$(24)\quad \mu^T(N)=\max\{n, \xi^T(n, N)>0\}$$

Megint világos, hogy a (21)—(24) képletekbe $T=0$-t helyettesítve éppen (4)—(7)-re jutunk.

Most megfogalmazzuk a 2.1.—2.4. tételek megfelelő általánosítását.

3.1. TÉTEL. *Ha $N\to\infty$, és $n\to\infty$ úgy, hogy valamely rögzített $T\geqq 0$ számra*

$$(25)\quad \frac{Nn^T}{2^{n+1}T!}\to\lambda>0$$

akkor

$$\lim_{N\to\infty}P(\tilde{\xi}^T(n, N)=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\qquad k=0, 1, 2, \ldots$$

A (25) feltétel például $N=\left[\frac{c2^n}{n^T}\right]$ választással $\lambda=\frac{c}{2T!}$-sal teljesül.

3.2. TÉTEL. *Ha a* 3.1. Tétel *feltételei teljesülnek, akkor $\xi^T(n, N)$ összetett Poisson-eloszláshoz konvergál, nevezetesen*

$$(26)\quad E(z^{\xi^T(n,N)})\to\exp\left\{\lambda\left(\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)z}{1-\frac{1}{2}z}\right)-1\right\}=\exp\left\{\frac{\lambda(z-1)}{1-\frac{z}{2}}\right\}$$

3.3. TÉTEL. *Minden* $0<x<\infty$*-re és minden rögzített* $T\geqq 0$*-ra*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tau^T(n)n^T}{2^{n+1}T!}\leqq x\right)=1-e^{-x} \tag{27}$$

3.4. TÉTEL. *Bármely* k *egészre és* $T\geqq 0$ *egészre*

$$P\left(\mu^T(N)-[\log N+T\log\log N]<k\right)= \tag{28}$$

$$=\exp\left(-\frac{2^{-(k+1-\{\log N+T\log\log N\})}}{T!}\right)+o(1).$$

Megjegyezzük még, hogy tételeink a $T=0$ esetben pontosan a 2. § tételeit adják, így valóban elég a 3. § tételeit igazolnunk.

4. §. *A tételek bizonyítása*

3.1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Megmutatjuk, hogy az 1. § segédtételének feltételei teljesülnek. Tekintendő tehát a (21)-beli összeg

$$\xi^T(n,N)=\sum_{i=1}^{N-n+1}\tilde{\eta}_i^T(n)$$

A (25) feltételből nyilvánvaló, hogy $n=[\log N+T\log\log N\}+c$ alakú, ahol c tetszőleges rögzített egész.

A (10) feltétel igazolása nem okoz gondot, mivel nyilvánvaló, hogy

$$P\left(\tilde{\eta}_i^T(n)=1\right)=\binom{n}{T}\frac{1}{2^{n+1}}\to 0 \tag{29}$$

Ugyancsak könnyen látható, hogy a (11) feltétel

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N-n+1}P\left(\tilde{\eta}_i^T(n)=1\right)=(N-n+1)\binom{n}{T}\frac{1}{2^{n+1}}\to\lambda>0 \tag{30}$$

ekvivalens a (25) feltevéssel.

Válasszuk most meg a kivételes $I_r(n,N)$ halmazokat minden r-re úgy, hogy legyen $\alpha_r=(i_1,\ldots,i_r)\in I_r(n,N)$ ($i_1,\ldots,i_r$ mind különbözőek és $i_j\leqq N-n+1$ minden j-re), akkor és csak akkor, ha $i_1,\ldots,i_r$ közül van legalább két olyan i_j, i_l index, melyre

$$|i_j-i_l|<n+1. \tag{31}$$

Az $I_r(n,N)$ indexhalmazok ilyen megválasztásával elértük, hogy ha $\alpha_r\notin I_r(n,N)$, akkor a megfelelő $\tilde{\eta}_{i_1}^T(n),\tilde{\eta}_{i_2}^T(n),\ldots,\tilde{\eta}_{i_r}^T(n)$ változók teljesen függetlenek és így (14) automatikusan teljesül.

Nem okoz nehézséget a (13) feltétel belátása sem. Ehhez mindössze azt kell észrevennünk, hogy ahhoz, hogy valamely index r-es $I_r(n,N)$-hez tartozzon, csak $r-1$ index megválasztása lehet tetszőleges, az r-ediket már úgy kell választanunk, hogy (31) teljesüljön. Azaz a jó r-esek száma $I_r(n,N)$-ben nem több, mint

$$\binom{N}{r-1}\cdot 2n(r-1). \tag{32}$$

Innen (25) felhasználásával

$$(33)\qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha_r \in I_r(n,N)} P\left(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n)=1\right)\cdot P\left(\tilde{\eta}_{i_2}^T(n)=1\right)\cdot \ldots \cdot P\left(\tilde{\eta}_{i_r}^T(n)=1\right) \leqq$$

$$\leqq \lim_{N\to\infty} \frac{\binom{N}{r-1} 2n(r-1)\binom{n}{T}^r}{2^{(n+1)r}} = 0.$$

Maradt tehát a (12) feltétel teljesülésének igazolása. A (12) feltétel teljesülése a $T=0$ esetben triviális, hiszen $P\left(\tilde{\eta}_i^0(n)=\tilde{\eta}_j^0(n)=1\right)=0$, valahányszor $|i-j|\leqq n$.

Minden $\alpha_r=(i_1, \ldots, i_r)$-hez rendeljük hozzá a számegyenes

$$(34)\qquad (i_1-1, i_1+n-1), (i_2-1, i_2+n-1), \ldots, (i_r-1, i_r+n-1)$$

intervallumainak egyesítési halmazát. Ha $\alpha_r \in I_r(n, N)$, akkor ez a halmaz legfeljebb $(r-1)$ diszjunkt részből állhat. Ezért könnyű látni, hogy elég azt igazolni, hogy tetszőleges r-re azon $\alpha_r=(i_1, \ldots, i_r)$ indexek $I_r^*(n, N)$ összességét tekintve, melyre a (34) intervallumok által alkotott halmaz összefüggő,

$$(35)\qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha_r \in I_r^*(n,N)} P\left(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n)=\tilde{\eta}_{i_2}^T(n)=\ldots=\tilde{\eta}_{i_r}^T(n)=1\right)=0.$$

Ha r darab különböző, egyenként $(n+1)$ hosszúságú, (34) típusú intervallum összefüggő halmazt alkot, akkor ezen összefüggő intervallum s hosszára nyilván fennáll, hogy

$$(36)\qquad n+r \leqq s \leqq rn+1$$

(35)-t úgy fogjuk igazolni, hogy az $I_r^*(n, N)$ halmazt még további két $I_r^*(1, n, N)$ és $I_r^*(2, n, N)$ részhalmazra bontjuk, a következőképpen. Legyen $\alpha_r \in I_r^*(1, n, N)$, ha $s\leqq 2n+1$, és $\alpha_r \in I_r^*(2, n, N)$, ha $s>2n+1$.

Ekkor, kiindulva abból, hogy az s hosszúságú alapintervallum kezdődik pontja legfeljebb $N-n+1$-féleképpen választható meg, és felhasználva (25)-t, adódik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha_r \in I_r^*(2,n,N)} P\left(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n)=\ldots=\tilde{\eta}_{i_r}^T(n)=1\right) \leqq$$

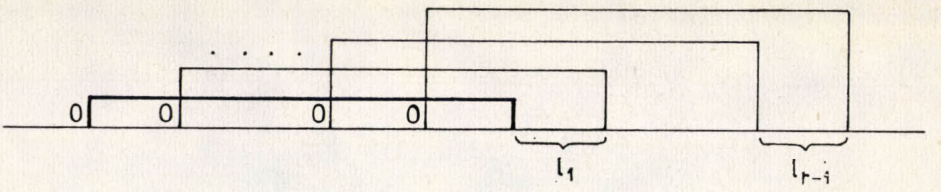
$$\leqq \lim_{N\to\infty} N \sum_{s=2n+2}^{rn+1} \frac{1}{2^s} \sum_{j=1}^{rT} \binom{s}{j} \leqq \lim_{N\to\infty} \frac{C(r,T)Nn^{rT}}{2^{2n}} = 0$$

ahol $C(r, T)$ egy r-től és T-től függő konstans.

Térjünk rá az $s\leqq 2n+1$ eset vizsgálatára. Ha $s\leqq 2n+1$, akkor az r darab (34)-beli intervallum metszete nem üres. Az alábbi ábra ezen intervallumok lehetséges elhelyezkedését szemlélteti. Egy ilyen intervallumrendszer akkor tartozhat $I_r^*(1, n, N)$-hez, ha az egyes intervallumok kezdőpontját megelőző helyen 0 áll és minden intervallumban a nullák száma pontosan T. Ha $r>T+1$, akkor ilyen intervallumrendszer nincs (azaz ha $r>T+1$, akkor

$$\sum_{\alpha_r \in I_r^*(1,n,N)} P\left(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n)=\ldots=\tilde{\eta}_{i_r}^T(n)=1\right)=0$$

ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $r\leqq T+1$).



Az ábrán l_i-vel $(i=1, 2, \ldots, r-1)$ jelöltük, hogy az $(i+1)$-edik intervallum mennyivel nyúlik túl az i-ediken. Vegyük észre, hogy ekkor az első n hosszúságú blokkban csak $T-r+1$ nulla helyzete választható meg tetszőlegesen. Figyelembe véve, hogy az első intervallum kezdőpontja $N-n+1$-féleképpen választható meg,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha_r \in I_r^*(1,n,N)} P(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n) = \ldots = \tilde{\eta}_{i_r}^T(n) = 1) \leqq$$

$$\leqq \lim_{N\to\infty} N \sum_{\substack{1\leqq l_1\leqq n \\ \vdots \\ 1\leqq l_{r-1}\leqq n}} \frac{n^{T-r+1} l_1^T l_2^T \ldots l_{r-1}^T}{2^{n+l_1+l_2+\ldots l_{r-1}}} \leqq \lim_{N\to\infty} \frac{Nn^{T-r+1}}{2^n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{l^T}{2^l}\right)^{r-1}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{l^T}{2^l} \leqq \int_0^\infty \frac{x^T}{2^x}\, dx < \infty$$

adódik a (2.5) feltétel figyelembevételével, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{Nn^{T-r+1}}{2^n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{l^T}{2^l}\right)^{r-1} \leqq \lim_{N\to\infty} \frac{Nn^T}{2^n} \frac{C^*(r,T)}{n^{r-1}} = 0$$

ahol $C^*(r, T)$ egy az r-től és T-től függő konstans. Ezzel a 3.1. Tétel bizonyítását befejeztük.

3.2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Bizonyításunk alapgondolata az, hogy minden legfeljebb T nullát tartalmazó blokkhoz találhatunk egy őt megelőző, pontosan T nullát tartalmazó, alkalmas blokkot, melyek a leszámolást megkönnyítik. Ennek érdekében bevezetünk még egy valószínűségi változót, legyen

$$\eta_i'^T(n) = \begin{cases} \tilde{\eta}_i^T(n) X_{i+n-1} & \text{ha} \quad i > 1 \\ \eta_i^T(n) & \text{ha} \quad i = 1. \end{cases} \tag{39}$$

Tekintsük először az $i>1$ esetet. Vegyük észre, hogy ha $\eta_i^T(n)=1$ és $\eta_i'^T(n)=0$, akkor $\eta_{i-1}^T(n)=1$. Viszont ha $\eta_i^T(n)=1$ és $\eta_i'^T(n)=1$, akkor $\eta_{i-1}^T(n)=0$. Ezért minden olyan i indexhez, melyre $\eta_i^T(n)=1$ létezik egy olyan k egész, hogy $0<k\leqq i$ és $\eta_i^T(n)=$ $=\eta_{i-1}^T(n)=\ldots=\eta_{i-k}^T(n)=1$ és $\eta_{i-k}'^T(n)=1$, vagy $\eta_i^T(n)=\eta_{i-1}^T(n)=\ldots=\eta_1^T(n)=1$.

Legyen

$$\gamma_i^T(n) = \eta_i'^T(n) \min\left\{ \begin{matrix} k > 0, \ \eta_{i+k}^T(n) = 0 \ \text{vagy} \\ i+k+n-1 > N \end{matrix} \right\}. \tag{40}$$

Ezzel a definícióval nyilvánvaló, hogy

$$\xi^T(n, N) = \sum_{i=1}^{N-n+1} \gamma_i^T(n). \tag{41}$$

Definíciónkból az is következik, hogy (41) nem nulla elemeinek $\gamma^T(n)$ száma csak akkor nem egyezik meg $\tilde{\xi}^T(n, N)$-nel, ha vagy $\eta_1^T(n)=1$ és $\tilde{\eta}_i^T(n)=0$ vagy ha van olyan $i>1$ index, melyre $\eta_i'^T(n)\neq\tilde{\eta}_i^T(n)$. Annak valószínűsége, hogy ezen események közül legalább 1 bekövetkezik, kisebb, mint

$$(42)\qquad P(\eta_1^T(n)=1, \tilde{\eta}_1^T(n)=0)+\sum_{i=2}^{N-n+1} P(\eta_i'^T(n)=\tilde{\eta}_i^T(n)) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{T}\binom{n}{j}+\frac{1}{2^{n+1}}N\binom{n-1}{T-1} \leqq \frac{Tn^T}{2^n}+\frac{Nn^{T-1}}{2^{n+1}}.$$

A (25) feltevés szerint ez a valószínűség 0-hoz tart, így

$$(43)\qquad P(\gamma^T(n)=\tilde{\xi}^T(n, N))\to 1$$

Tételünk igazolásához most már elég megmutatnunk, hogy a nem nulla $\gamma_i^T(n)$-ek együttes feltételes eloszlása minden rögzített $\gamma^T(n)$ érték esetén konvergál $\gamma^T(n)$ számú független változó együttes eloszlásához, melyek mindegyikére

$$(44)\qquad P(\gamma_i^T(n)>k_0|\gamma_i^T(n)>0)\to\frac{1}{2^{k_0}}\quad k_0=0, 1, 2, \ldots.$$

A (44) összefüggés belátása igen könnyű. Igen egyszerűen belátható, hogy bármely A_n, B_n, C_n eseménysorozatra, melyre $\lim_{n\to\infty}\frac{P(B_nC_n)}{P(B_n)}\to 1$,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n|B_n)=\lim_{n} P(A_n|B_nC_n)$$

(feltéve, hogy a feltételek valószínűsége nem nulla). Bevezetve az

$$A_n=\{\gamma_i^T(n)>k_0\}$$

$$B_n=\{\gamma_i^T(n)>0\}$$

$$C_n=\left\{\prod_{j=i}^{i+k_0-1} X_j=1\right\}$$

jelöléseket, a $\lim_{n\to\infty}\frac{P(B_nC_n)}{P(B_n)}=1$ feltétel nyilvánvalóan teljesül, és

$$\lim_{n\to\infty} P(\gamma_i^T(n)>k_0|\gamma_i^T(n)>0)=\lim_{n\to\infty} P(A_n|B_n)=\lim_{n\to\infty} P(A_n|B_nC_n)=\frac{1}{2^{k_0}}.$$

Mivel $\gamma_i^T(n)>k_0$ a B_n és C_n feltételek teljesülése esetén csak úgy következhet be, hogy ha $X_{i+n}=1$, $X_{i+n+1}=1$, ..., $X_{i+n+k_0-1}=1$.

Minden $\alpha_r=(i_1 \ldots i_r)$ index r-eshez (melyre $i_j\neq i_l$, ha $j\neq l$) definiáljuk a $C(\alpha_r)$ eseményt a következőképpen

$$(45)\qquad C(\alpha_r)=\{\gamma^T(n)=r,\ \eta_{i_1}'^T(n)=\eta_{i_2}'^T(n)=\ldots=\eta_{i_r}'^T(n)=1\}.$$

Nyilván $C(\alpha_r) \cap C(\alpha_r') = \emptyset$, ha $\alpha_r \neq \alpha_r'$, és

$$\{\gamma^T(n) = r\} = \bigcup_{\alpha_r} C(\alpha_r)$$

azaz

$$P(\gamma^T(n) = r) = \sum_{\alpha_r} P(C(\alpha_r)). \tag{46}$$

Elég azt bizonyítanunk, hogy tetszőleges adott r és $k_1, \ldots, k_r$ természetes számokra

$$\sum_{\alpha_r} P(C_1(\alpha_r, K)) \to \frac{1}{2^{|K|}} P(\gamma^T(n) = r) \tag{47}$$

ahol $C_1(\alpha_r, K) = C(\alpha_r) \cap \{\gamma_{i_1}^T(n) > k_1, \ldots, \gamma_{i_r}^T(n) > k_r\}$ $K = (k_1, \ldots, k_r)$ és $|K| = k_1 + \ldots + k_2 + \ldots k_r$.

Vezessük be ismét az $I_r(n+k, N)$ kivételes halmazokat, ahol legyen $k = \max_{1 \leq i \leq r} k_i$, azaz legyen $\alpha_r \in I_r(n+k, N)$ akkor és csak akkor, ha van olyan i_j, i_l indexpár α_r-ben, melyre $|i_j - i_l| < n+k$.

Először megmutatjuk, hogy

$$\sum_{\alpha_r \in I_r(n+k, N)} P(C(\alpha_r)) \to 0. \tag{48}$$

Nyilván

$$P(C(\alpha_r)) \leqq P(\eta_{i_1}'^T(n) = \eta_{i_2}'^T(n) = \ldots = \eta_{i_r}'^T(n) = 1) \leqq \tag{49}$$

$$\leqq P(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n) = \tilde{\eta}_{i_2}^T(n) = \ldots = \tilde{\eta}_{i_r}^T(n) = 1).$$

Így

$$\sum_{\alpha_r \in I_r(n+k, N)} P(C(\alpha_r)) \leqq \sum_{\alpha_r \in I_r(n, N)} P(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n) = \ldots = \tilde{\eta}_{i_r}^T(n) = 1) +$$

$$+ \frac{|I_r(n+k, N)| \cdot \binom{n}{T}^r}{2^{(n+1)r}}$$

hiszen ha $\alpha_r \notin I_r(n, N)$, akkor $\tilde{\eta}_{i_1}^T(n), \ldots, \tilde{\eta}_{i_r}^T(n)$ függetlenek.

Az előző tétel bizonyítása során igazoltuk, hogy

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{\alpha_r \in I_r(n, N)} P(\tilde{\eta}_{i_1}^T(n) = \ldots = \tilde{\eta}_{i_r}^T(n) = 1) = 0$$

míg

$$\lim_{N \to \infty} |I_r(n+k, N)| \cdot \frac{\binom{n}{T}^r}{2^{(n+1)r}} \leqq \lim_{N \to \infty} \binom{N}{r-1} \frac{2(r-1)(n+k)n^{Tr}}{2^{nr+r}} = 0$$

szintén igaz a (25) feltevés szerint, így (48)-at igazoltuk.

Továbbá (44) és (48) felhasználásával

$$\sum_{\alpha_r} P(C(\alpha_r, K)) = \sum_{\alpha_r \in I_r(n+k,N)} P(C(\alpha_r)) + \sum_{\alpha_r \notin I_r(n+k,N)} P(C(\alpha_r)) \tag{50}$$

$$\sum_{\alpha_r \notin I_r(n+k,N)} P(C_1(\alpha_r, K)) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha_r \notin I_r(n+k,N)} P(\gamma_{i_1}^T(n) > k_1, \ldots, \gamma_{i_r}^T(n) > k_r | \gamma^T(n) = r, \eta_{i_1}'^T(n) = \ldots \eta_{i_r}'^T(n) = 1) \times \tag{51}$$

$$\times P(\gamma^T(n) = r, \eta_{i_1}'^T(n) = \ldots \eta_{i_r}'^T(n) = 1) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha_r \notin I_r(n+k,N)} \left(\frac{1}{2}\right)^{|K|} P(C(\alpha_r)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|K|} \left(\sum_{\alpha_r} P(C(\alpha_r)) - \sum_{\alpha_r \in I_r(n+k,N)} P(C(\alpha_r))\right) =$$

$$= \to \left(\frac{1}{2}\right)^{|K|} \sum_{\alpha_r} P(C(\alpha_r)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|K|} P(\gamma^T(n) = r)$$

(51)-ből következik a tétel állítása.

3.3. Tétel bizonyítása. Vegyük észre, hogy

$$P\left(\frac{\tau^T(n) n^T}{2^{n+1} T!} > x\right) = P(\xi^T(n, N(x)) = 0) \tag{52}$$

ahol

$$N(x) = \left[\frac{x 2^{n+1} T!}{n^T}\right]. \tag{53}$$

Megmutatjuk, hogy a 3.2. Tétel alkalmazható. Minden $x>0$-ra $N(x)\to\infty$ nyilvánvalóan teljesül. Így mindössze azt kell ellenőrizni, hogy (25) teljesül, azaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(x) n^T}{2^{n+1} T!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{x 2^{n+1} T!}{n^T}\right] n^T}{2^{n+1} T!} = x \tag{54}$$

ami szintén nyilvánvaló. Így

$$P\left(\frac{\tau^T(n) n^T}{2^{n+1} T!} > x\right) = P(\xi^T(n, N(x)) = 0) = e^{-x} \tag{55}$$

ami bizonyítja állításunkat.

3.4. Tétel bizonyítása. Nyilván bármely k egész számra

$$P(\mu^T(N) - [\log N + T \log\log N] < k) = P(\xi^T(n(k), N) = 0) \tag{56}$$

ahol $n(k) = [\log N + T \log\log N] + k$. Ismét a 3.2. Tételt alkalmazzuk. Minden rögzített k-ra $n(k)\to\infty$, ha $N\to\infty$. Tekintsünk egy olyan $\{N_j\}$ részsorozatot, melyre $\{\log N_j\}\to\lambda_0\in[0, 1]$.

Erre a részsorozatra teljesül a 3.2. Tétel (25) feltétele, nevezetesen

$$\frac{N_j([\log N_j + T \log\log N_j] + k)^T}{T!\, 2^{[\log N_j + T \log\log N_j] + k + 1}} \to \frac{2^{-(k+1-\lambda_0)}}{T!}. \tag{57}$$

Következésképpen (56) alapján

$$P(\mu^T(N_j)-[\log N_j+T\log\log N_j]<k)\to\exp\left(-\frac{2^{-(k+1-\lambda_0)}}{T!}\right).$$

Könnyen látható, hogy ez a konvergencia minden $\lambda_0\in[0,1]$-re egyenletes, és ezután tételünk állítása már közvetlenül adódik.

IRODALOM

[1] P. Erdős—A. Rényi: On a new law of large numbers. Journ. Analyse Mathématique 22 (1970) 103—111.

[2] Erdős P.—Révész P.: Varga Tamás egy problémájáról. (Mat. Lapok, sajtó alatt)

[3] Б. А. Севастьянов: Предельный закон пуассона в схеме сумм зависимых случайных величи. Теор Вер. том XVII вып. 4. (1972) (733—738).

[4] А. М. Зубков В. Г. Михайлов: Предельные распределения случайных величин связанных с длинными повторениями в последовательностич независимих испытаний Теор. Вер. Том XIX. вып 1. (1974) (173—181)

[5] J. Komlós, G. Tusnády: On sequences of „pure heads". The Annals of Probability 3 (1975).

[6] R. von Mises: Mathematical Theory of Probability and Statistics (1964).

[7] P. Erdős and P. Révész: On the length of the longest head-run. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 16, Topics in Information Theory, Keszthely (Hungary), 1975.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАССПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИН СЕРИЙ, СОСТОЯЩИХСЯ ТОЛЬКО ИЗ «ГЕРБОВ»

АНТОНИЯ ФЁЛДЕШ

ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE LONGEST HEAD RUN

ANTÓNIA FÖLDES

KÖZÖNSÉGES, NORMÁL-ALAKÚ ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRŐL, AMELYEKNEK A JOBB OLDALA A FÜGGETLEN VÁLTOZÓ PERIODIKUS FÜGGVÉNYE

SZILÁRD KÁROLY

Tekintsük az

$$\dot{x} = X(x, t) \tag{1}$$

közönséges elsőrendű differenciálegyenletet, amelynek a jobb oldala a t független változó periodikus függvénye. Az egyszerűség kedvéért legyen a Δt periódus egyenlő 1-gyel: $X(x, t+1)=X(x, t)$. Az $X(x, t)$ függvény legyen minden valós (x, t) értékpárra definiálva és rendelkezzen azokkal az ismert tulajdonságokkal, amelyek megadott (x_0, t) kezdőértékek esetében az $x(t)$ megoldás egyértelmű létezését, t_0-nak egy környezetében biztosítják. Az (1) egyenlet nem szükségképpen lineáris. Foglalkozzunk a következő kérdéssel: Mit tudunk elemi meggondolások felhasználásával az (1) egyenlet megoldásai tulajdonságairól kimondani?

1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy létezik a $-\infty<t<\infty$ számegyenesen az* (1) *egyenletnek valamilyen $x(t)$ megoldása. Tekintsük, kiindulva egy tetszőleges rögzített t_0 értékből, az*

$$\ldots x(t_0-n), \ldots, x(t_0-1), x(t_0), x(t_0+1), \ldots, x(t_0+n), \ldots \tag{2}$$

számsorozatot. Állítjuk, hogy ez a sorozat szigorúan monoton (növekvő, vagy fogyó), vagy pedig a sorozat minden eleme ugyanaz a szám.

Bizonyítás. Tekintsük a tetszőlegesen megadott t_0 értéke. A feltétel szerint az (1) egyenletnek az $x(t)$ megoldása, amely a $t=t_0$ helyen az $x(t_0)$ értéket felveszi, egyértelműen meg van határozva. Az $x(t)$ megoldással együtt az $x_1(t)=x(t+1)$ függvény szintén megoldása az (1) egyenletnek, mert

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t+1) = X[x(t+1), t+1] = X[x(t+1), t] = X(x_1, t).$$

Két eset lehetséges: Vagy $x_1(t_0)=x(t_0)$, vagy pedig $x_1(t_0)\neq x(t_0)$. Az első esetben a megoldás egyértelmű létezésének következtében minden t helyen $x_1(t)=x(t)$, ahonnan

$$x(t_0) = x(t_0+1) = x(t_0+2) = \ldots$$

és ugyanígy $x(t_0)=x(t_0-1)=x(t_0-2)=\ldots$, azaz az $x(t)$ megoldás periodikus a $\Delta t=1$ periódussal és a (2) számsorozat minden eleme ugyanaz.

A második esetben legyen például $x_1(t_0)>x(t_0)$. (Az $x_1(t_0)<x(t_0)$ esetet hasonlóképpen tárgyalhatjuk.) Ekkor $x_1(t_0)>x(t)$ minden t-értékre, mert, ha egy bizonyos t' helyen $x_1(t')\leqq x(t')$ volna, akkor e függvények folytonossága következtében létezne olyan t''-érték $(t_0<t''\leqq t')$, amelyre $x_1(t'')=x(t'')$ állna. Az (1) egyenlet

megoldásainak egyértelműsége miatt ekkor minden t-helyen $x_1(t)=x(t)$ volna, ami ellentmond az $x_1(t_0)>x(t_0)$ feltevésnek. $x_1(t)>x(t)$ azt jelenti, hogy minden t-értékre $x(t+1)>x(t)$, amiből is a (2) sorozat szigorúan monoton növekedése következik. Ugyanígy mutatjuk meg, hogy a (2) sorozat szigorúan monoton fogyó, ha $x_1(t_0)<x(t_0)$. Ezzel az 1. Tétel állítását bebizonyítottuk.

2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy létezik a* $-\infty<t<\infty$ *számegyenesen az* (1) *egyenletnek* $x(t)$ *korlátos megoldása:* $-A<x(t)<A$ (ahol $A>0$ konstans).

Állítjuk a következőt: vagy a) $x(t)$ *periodikus a* $\Delta t=1$ *periódussal, vagy pedig* b) *létezik a* $-\infty<t<\infty$ *számegyenesen definiált két periodikus megoldás a* $\Delta t=1$ *periódussal* $x_a(t)$ *és* $x_b(t)$ *úgy, hogy* $x_a(t)<x(t)<x_b(t)$.

Bizonyítás. Tekintsük ((J. L. Massera egy módszerét alkalmazva, lásd [1]) az $x(t)$ megoldással együtt az $x_1(t)=x(t+1)$, $x_2(t)=x(t+2)$, ..., $x_{-1}(t)=x(t-1)$, $x_2=x(t-2)$... függvényeket (legyen $x(t)=x_0(t)$). Éppen úgy, mint az előző tétel bizonyításánál, beláthatjuk, hogy ezek a függvények valamennyien megoldásai az (1) egyenletnek. Két eset lehetséges: A $t=0$ helyen

a) $x_0(0) = x_1(0)$,

b) $x_0(0) \neq x_1(0)$.

Az a) esetet az első tétel bizonyításával elintézettnek tekinthetjük, ekkor, amint láttuk, az $x(t)$ függvény periodikus a $\Delta t=1$ periódussal.

A b) esetben legyen például $x_0(0)<x_1(0)$. (Az $x_0(0)>x_1(0)$ esetet hasonlóképpen lehet tárgyalni.) Ekkor az 1. Tételből következik, hogy $\ldots<x_0(t-2)<x_0(t-1)<x_0(t)<x_0(t+1)<\ldots$ minden rögzített t helyen. Tekintsük például az

$$x_0(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$$

sorozatot (amely ugyanaz, mint az $x_0(t), x_0(t+1), x_0(t+2), \ldots$ sorozat) bármely t helyen. Minthogy ez a sorozat korlátos és monoton növekvő, azért létezik

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu(t).$$

Jelöljük ezt a határértéket $x_b(t)$-vel. Ez az $x_b(t)$ függvény periodikus a $\Delta t=1$ periódussal, minthogy a $t+1$ helyen az őt meghatározó sorozat elemei ugyanazok, mint a t-helyen, kivéve a sorozat első elemét, amely körülmény a sorozat limesén nem változtat. Most még azt kell belátnunk, hogy az

$$x_b(t) = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu(t)$$

függvény differenciálható és kielégíti az (1) egyenletet. Tekintsünk egy rögzített t_0 pontot a t számegyenesen és a megfelelő $x_b(t_0)$ értéket. A feltételek szerint létezik az (1) egyenletnek egy $x^*(t)$ megoldása, amely a $t=t_0$ helyen az $x_b(t_0)$ értéket veszi fel. Nem nehéz megmutatni, hogy bármely t helyen $x_b(t)=x^*(t)$. Például valamely $t_1\neq t_0$ helyen nem lehet $x^*(t_1)<x_b(t_1)$, mert ha szemügyre veszünk egy $x_n(t)$ megoldást, amelyre érvényesek az $x_n(t_0)<x_b(t_0)=x^*(t_0)$ és $x_n(t_1)>x^*(t_1)$ egyenlőtlenségek (ilyen $x_n(t)$ megoldásnak nyilvánvalóan kell léteznie), akkor e két utóbbi függvény folytonossága miatt kell létezni olyan $t'\neq t_0$ helynek is, amelyen $x^*(t')=x_n(t')$, ami lehetetlen, mert e két függvény minden t helyen különbözik egymástól. Hasonló meggondolással tudjuk megmutatni, hogy $x^*(t_1)>x_b(t_1)$ sem lehetséges. Így azt kaptuk, hogy az $x_b(t)$ függvény periodikus a $\Delta t=1$ periódussal, kielégíti az (1) differenciálegyenletet és

$$x(t) < x_b(t)$$

minden t-értékre.

Most tekintsük az $x_0(t), x_{-1}(t), x_{-2}(t), \ldots$ végtelen függvénysorozatot. Amint láttuk, ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Teljesen ugyanúgy, mint az $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$ sorozat esetében, csak ellenkező értelemben, meg tudjuk mutatni, hogy létezik

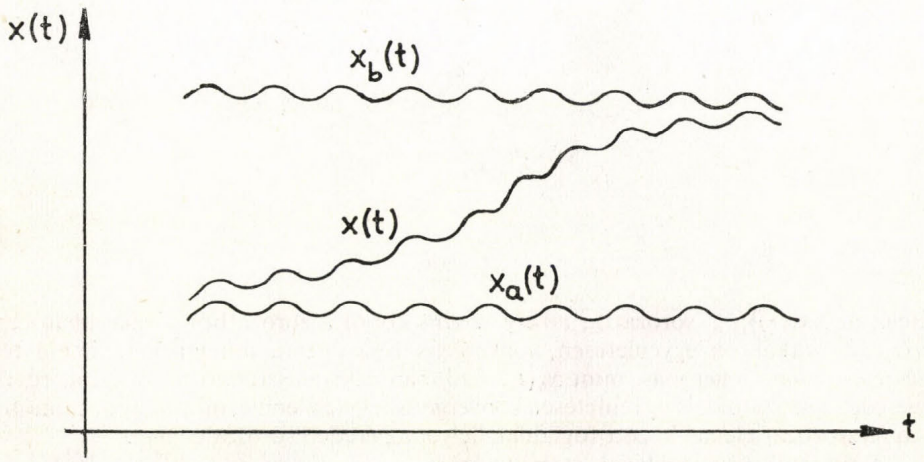
$$\lim_{v \to \infty} x_{-v}(t) = x_a(t)$$

és, hogy $x_a(t)$ periodikus függvény a $\Delta t = 1$ periódussal, kielégíti az (1) egyenletet és

$$x(t) > x_a(t).$$

Ha a b) esetben feltettük volna, hogy $x_0(0) > x_1(0)$, világos, hogy ugyanezt az eredményt kaptuk volna.

Ezzel a 2. Tételt bebizonyítottuk.



1. ábra

Egyszerű következmények a 2. Tételből

a) Ha az (1) egyenletnek csak egy periodikus megoldása van, vagy egyáltalán nincs periodikus megoldása, akkor az összes nemperiodikus megoldások nem korlátosak.

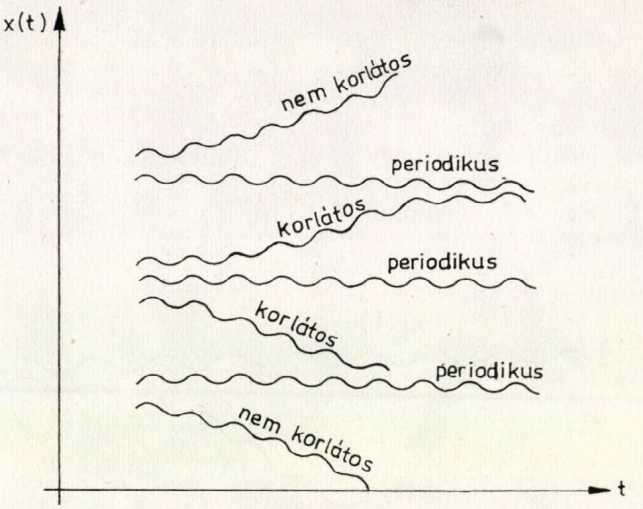
b) Ha az (1) egyenletnek véges számú periodikus megoldása van, akkor a korlátos nemperiodikus megoldásokat ábrázoló görbék a periodikus megoldásokat ábrázoló görbék között helyezkednek el. A többi megoldás nem korlátos. Lásd a 2. ábrát. Ezt így is mondhatjuk: Ha az (1) egyenletnek minden megoldása korlátos, akkor végtelen sok periodikus megoldása van.

c) A $\Delta t = 1$ periódussal együtt Δt egész többszörösei szintén periódusai egy megoldásnak, de nem fordítva. Nem fordulhat elő, hogy egy korlátos megoldásnak Δt egytől különböző egész számú többszöröse periódusa legyen, de $\Delta t = 1$ nem. Ez kitűnik az 1. Tételből.

Megjegyzés. A második tétel bizonyításánál szereplő

$$x_b(t) = \lim_{v \to \infty} x_v(t)$$

egyenletet illetően állítjuk, hogy itt $x_v(t)$ *egyenletesen* tart $x_b(t)$ felé bármely $\langle t_1, t_2\rangle$ szakaszon. Tekintsük az (1) egyenletet a $t_1 \leqq t \leqq t_2$ és $-A \leqq x \leqq A$ egyenlőtlenségekkel jellemzett tartományon az (x, t)-síkban. Minthogy $X(x, t)$ folytonos függvénye az (x, t) pontnak, azért $X(x, t)$ ebben a tartományban korlátos és így $\dot{x}(t)$ is, az $x(t)$ megoldások összességét tekintve, korlátos. Ezért alkalmazhatjuk Arzelà ismert



2. ábra

tételét az $\{x_v(t)\}_{v=0}^{v=\infty}$ sorozatra, amely szerint ebből a sorozatból kiválasztható egy a $\langle t_1, t_2\rangle$ szakaszon egyenletesen konvergens részsorozat, amelynek a limese természetesen nem lehet más, mint $x_b(t)$. Azonban a kiválasztott részsorozattal együtt az eredeti sorozatnak is egyenletesen konvergensnek kell lennie, minthogy az monoton és a részsorozat elemei között foglalnak helyet az eredeti sorozat elemei.

A periodikus megoldások stabilitásáról

Tekintsük azt az esetet, amelyben az (1) egyenletnek van korlátos nemperiodikus megoldása. Meg akarjuk mutatni, hogy ekkor a 2. Tétel szerint létező két periodikus megoldás közül legalább az egyik instabilis. Ugyanis, visszatérve a 2. Tétel bizonyításához, látjuk, hogy ha $t \to \infty$, akkor az $x_b(t)$ függvény eleget tesz a

$$\lim_{t\to\infty} |x_b(t) - x_0(t)| = 0$$

feltételnek. Ez belátható, hogy ha meggondoljuk, hogy megadva egy bármely kis $\varepsilon > 0$ valós számot, akkor egy $\langle t_0, t_0+1\rangle$ szakaszon $|x_v(t) - x_b(t)| < \varepsilon$, hacsak v „elég nagy" és ez ugyanazt jelenti, mint $|x_0(t) - x_b(t)| < \varepsilon$ a $\langle t_0+v, t_0+v+1\rangle$ szakaszon, ha t_0+v és vele együtt t is „elég nagy". Ugyancsak az $|x_b(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tesz bármely $x_n(t)$ függvény „elég nagy" t-értékekre, mert $x_n(t) = x_0(n+t)$, ahol $n = \text{const}$. Ezért, ha egy rögzített $t = t_0$ helyen bármilyen kis $[x_a(t_0), x_a(t_0)+\eta]$ intervallumot jelölünk ki az $x(t_0)$ kezdőértékek számára, mindig találunk egy $x_n(t)$ függvényt, ahol n egész szám (de nem szükségképpen pozitív) úgy, hogy

$$x_a(t_0) < x_n(t_0) < x_a(t_0)+\eta$$

és

$$\lim_{t\to\infty} |x_n(t) - x_b(t)| = 0$$

amiből következik, hogy van olyan t_1 érték, hogy ha $t > t_1$, akkor

$$|x_n(t) - x_a(t)| > \text{Const.}$$

Ezt a konstanst választhatjuk egyenlőnek például

$$\frac{1}{2} \min_t |x_b(t) - x_a(t)|$$

-vel. Ez azt jelenti, hogy az $x_a(t)$ periodikus megoldás nem stabilis. (Ha a 2. Tétel bizonyításánál azt tettük volna fel, hogy $x_1(t_0) < x_0(t_0)$, akkor azt kaptuk volna, hogy az $x_b(t)$ megoldás nem stabilis.) Így bebizonyítottuk a

3. TÉTELT: *Azok közül a periodikus megoldások közül, amelyeknek a létezését a 2. Tétel kimondja, legalább az egyik nem stabilis.*

A lineáris eset

Az (1) egyenletnek fontos speciális esete, amelyben ez az egyenlet lineáris, azaz

$$\dot{x} = a(t) \cdot x + b(t), \tag{4}$$

ahol $$a(t+1) = a(t) \quad \text{és} \quad b(t+1) = b(t).$$

A (4) egyenlet megoldásának ismert általános alakja (a „konstans variációjának módszere" alapján):

$$x(t) = \exp \int_0^t a(\tau)\, d\tau \left[C + \int_0^t b(\tau) \cdot \exp\left(- \int_0^\tau a(\xi) \cdot d\xi \right) d\tau \right]. \tag{5}$$

Itt C tetszőleges konstans. Van-e az (5) alakú megoldások között periodikus a $\Delta t = 1$ periódussal? Az 1. Tételből következik, hogy egy $x(t)$ megoldás periodikus, ha

$$x(1) - x(0) = 0$$

(lásd [2], 65. old.) és nem periodikus, ha

$$x(1) - x(0) \neq 0.$$

$$x(1) - x(0) = \exp \int_0^1 a(\tau)\, d\tau \left[C + \int_0^1 b(\tau) \cdot \exp\left(- \int_0^\tau a(\xi)\, d\xi \right) \cdot d\tau \right] - C =$$

$$= C \left[\exp \int_0^1 a(\tau)\, d\tau - 1 \right] + B.$$

ahol B-vel jelöltük az $\exp \int_0^1 a(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 b(\tau) \exp \int_0^\tau -a(\xi) d\xi \cdot d\tau$ konstans mennyiséget.

Két esetet különböztetünk meg:

a) $\int_0^1 a(\tau)\, d\tau \neq 0$ b) $\int_0^1 a(\tau)\, d\tau = 0$

(mindkét eset előfordulhat).

Az a) esetben

$$\exp \int_0^1 a(\tau)\, d\tau - 1 \neq 0.$$

ahonnan a C konstans egyedüli lehetséges értéke ahhoz, hogy az $x(t)$ megoldás periodikus legyen:

$$C = -\frac{B}{\exp \int_0^1 a(\tau)\, d\tau - 1}.$$

C-nek ezzel az értékével az $x(t)$ megoldás periodikus és C-nek minden más értékével a megoldás nem periodikus. Ez utóbbi esetben, amint az a 2. Tételből következik, $x(t)$ nem korlátos. Így bebizonyítottuk a

4. TÉTELT: *Ha* $\int_0^1 a(\tau)d\tau \neq 0$, *akkor a* (4) *egyenletnek pontosan egy periodikus megoldása van a* $\Delta t = 1$ *periódussal. Az összes többi megoldás nem korlátos.*

Most vizsgáljuk a b) esetet.

Ebben az esetben

$$x(1) - x(0) = C\left[\exp \int_0^1 a(\tau)\, d\tau - 1\right] + B = B.$$

A B konstans vagy egyenlő nullával, vagy különböző nullától (mindkét eset előfordulhat).

Ha $B=0$, akkor C minden értékére a megoldás periodikus a $\Delta t = 1$ periódussal. Ha $B \neq 0$, akkor egyetlenegy megoldás sem periodikus, a megoldások valamennyien nem korlátosak. (Például az $\dot{x} = x \cos t + b$ egyenletnek, ahol $b > 0$, Const. bármely megoldása $x(t) = \exp(\sin t)\left[C + b \int_0^t \exp(-\sin \tau)\, d\tau\right]$ nem periodikus és nem korlátos. Itt az egyenlet jobb oldalának a periódusa $\Delta t = 2\tau$.) Így kimondhatjuk az

5. TÉTELT: *Ha* $\int_0^1 a(\tau)d\tau = 0$, *akkor a* (4) *egyenletnek vagy minden megoldása periodikus, vagy minden megoldása nem korlátos.*

Mit mondhatunk ki a lineáris esetben a periodikus megoldások stabilitásáról, illetőleg instabilitásáról?

Minden esetben a C_1 és C_2 konstansokhoz tartozó két megoldás különbsége: $(C_1 - C_2) \exp \int_0^t a(\tau)\, d\tau$. Tartozzon például C_1-hez a szemügyre vett periodikus megoldás.

Az $\exp \int_0^t a(\tau)\, d\tau < 1$ esetben $\lim_{t \to \infty} \exp \int_0^t a(\tau)\, d\tau = 0$. A periodikus megoldás globálisan aszimptotikusan stabilis.

Az $\exp \int_0^1 a(\tau)\, d\tau > 1$ esetben $\lim_{t \to \infty} \exp \int_0^t a(\tau)\, d\tau = \infty$. A periodikus megoldás instabilis.

Ha pedig $\exp \int_0^1 a(\tau)d\tau = 1$, akkor $\exp \int_0^t a(\tau)d\tau$ periodikus függvénye t-nek és a

$|(C_1 - C_2) \exp \int_0^t a(\tau)d\tau|$ mennyiség tetszőlegesen kicsi, ha

$|C_1 - C_2| = |x_1(0) - x_2(0)|$ elég kicsi,

azaz bármely periodikus megoldás stabilis a Ljapunov-féle értelemben.

IRODALOM

[1] José L. Massera, The existence of periodic solutions of systems of differential equations. Duke Math. Journal Vol. *17*, 1950, 457—475.

[2] Jane Cronin, Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. 1964, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ СТОРОНОЙ

КАРОЙ СИЛАРД

ON ORDINARY FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN NORMAL FORM WITH PERIODIC RIGHT HAND SIDE

K. SZILÁRD

1828—1978

MEGJELENT AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS 150. ÉVÉBEN

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat beérkezett: 1976. VII. 14 — Terjedelem 10,85 (A/5) ív
78-3396 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
MTA Könyvtára
Periodika 19 78/3196 n.

CONTENTS

A. Ádám: The mathematical work of László Kalmár 1
J. Horváth: The mathematical work of Marcel Riesz I. 11
M. Csörgő, S. Csörgő, R. Fischler and P. Révész: Random limit theorems via strong invariance principles 39
K. Böröczky: Sphere packing in spaces of constant curvature II. 67
J. Horváth and S. S. Ryskov: On the radii of the cylinders which fit into a lattice packing of the n-dimensional space with unit spheres 91
A. Hoffmann: A remark on generalizing the "method of separation of variables" 97
Antonia Földes: On the limit distribution of the longest head run 105
K. Szilárd: On ordinary first order differential equations in normal form with periodic right hand side 117

СОДЕРЖАНИЕ

Андраш Адам: Математическая деятельность Ласло Кальмара 1
Янош Хорват: Математическая деятельность Марцела Рисса I. 11
Миклощ Чёргё, Шандор Чёргё, Рожер Фишлер и Пал Ревес: Предельные расспределения со случайными индексами посредством принципа инвариантости 39
Карой Бёрёцки: Пополнение сферами в пространствай постоянной кривизны. II. 2. Пополнение сферами в трёхмерных пространствах постоянной кривицны 67
Енё Хорват и С. С. Рышков: О радиусе щилиндров, вложимых в каждую рещетчатую единичных n-мерных шаров 91
Андор Хоффманн: Замечание относительно обобщения «метода разделения переменных» 97
Антония Фёлдеш: О предельном расспределении длин серий, состоящихся только из «гербов» 105
Карой Силард: Обыкновенные диггеренциальные уравнения первого порядка с периодической правой стороной 117

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025-519X

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

26. évfolyam, 1975 3-4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1977. június — 25. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János.
Szerkesztőség: Budapest 1061 VI., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1 és *bármely postahivatalban*. Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185-680.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

RUZSA IMRE és URBÁN JÁNOS: Péter Rózsa emlékére 125
PINTZ JÁNOS: Turán Pál számelméleti munkásságáról 139
TANDORI KÁROLY: Függvénysorok konvergenciájával kapcsolatos újabb vizsgálatok 155
RÉVÉSZ PÁL: Néhány megjegyzés az 1976. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny valószínűségszámítási feladatához 161
GÉCSEG FERENC és MAGNUS STEINBY: A faautomaták algebrai elmélete. I. 169
LOVÁSZ LÁSZLÓ: A kombinatorika minimax tételeiről 209
HALMOS PÁL: Hogyan írjunk matematikát 265
RÉCSKI ANDRÁS: Matroidok alkalmazása a villamos hálózatok analízisében. II. 287
PACH JÁNOS: Megszámlálható gráfok metrikus tulajdonságairól 305
GYŐRI ERVIN: Végtelen matroidok összehasonlítása 311
Feladatrovat 319
Társulati élet 329
Könyvismertetés 339

PÉTER RÓZSA EMLÉKÉRE

RUZSA IMRE ÉS URBÁN JÁNOS

„Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép. Mert játékos kedvét is belevitte az ember és a legnagyobb játékra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent."

Péter Rózsa
(A „Játék a végtelennel" előszavából.)

1977. február 17-én, hetvenkettedik születésnapján, elhunyt Péter Rózsa professzor, a rekurzív függvények elméletének nemzetközileg elismert kiváló tudósa, a magyar matematikatanítás korszerűsítésének fáradhatatlan harcosa, Társulatunknak tiszteletbeli elnöke és élete végéig aktív tagja.

Életútját az emberek és a szépség szeretetének axiómája határozta meg. A szépség szeretete öltött testet matematikai munkásságában, melynek maradandó emlékei dolgozatai és monográfiái. Az emberek és a szépség szeretete késztette arra, hogy a matematika szépségeiből minél többet tegyen hozzáférhetővé az emberek minél szélesebb köre számára. Így életaxiómájából szükségszerűen következik harca a matematika megszerettetéséért, terjesztéséért, tanításának korszerűsítéséért. E munkáját írott művek és a matematikatanítás megújhodásában elért eredményeink örökítik meg. De ugyancsak életaxiómájából következett mások munkájának segítése, a kezdők felkarolása, a tehetségek kibontakozásának istápolása; ezt a tevékenységét többnyire csak azok ismerik, akik támogatását élvezték; ennek dokumentumai az emberek szívében élnek tovább.

Életútja

Péter Rózsa 1905. február 17-én született Budapesten. Itt végezte elemi iskolai és gimnáziumi tanulmányait is. 1922-ben érettségizett a Mária Terézia leánygimnáziumban. Már 15 éves korától kezdve korrepetálással járul hozzá családja anyagi helyzetének segítéséhez. Bár édesapja ügyvéd volt, mégis ő indította el a természettudományos gondolkodás útján. Érettségi után, apja kívánságának megfelelően, a budapesti tudományegyetem vegyész szakára íratkozott be. Saját bevallása szerint legszívesebben matematika—magyar szakpárosítást választott volna, ha ilyen lett volna. Ez az önvallomás fontos kulcs Péter Rózsa világszemléletének megértéséhez.

Egyetemi évei során csakhamar minden érdeklődését a matematika vette igénybe. Ebben nyilván jelentős szerepet játszott az, hogy olyan kiváló professzoroktól tanulhatott, mint Fejér Lipót és Kürschák József. De életútjára tanárainál is nagyobb hatással volt egyik évfolyamtársa, Kalmár László.

Matematikai kutatómunkája a számelmélet területén kezdődött. Még egyetemi éveihez kapcsolódnak első eredményei a páratlan tökéletes számokról.[1] A hozzá-

[1] Tökéletes számoknak mondjuk azokat a pozitív egész számokat, amelyek *valódi* osztóinak összege magát a számot adja; pl. $28=1+2+4+7+14$. *Páratlan* tökéletes számra nem ismerünk példát, a sejtés az, hogy ilyenek nincsenek. Péter Rózsa egyik eredménye szerint, ha lennének is páratlan tökéletes számok, adott k pozitív egészhez csak véges sok olyan lehetne, melynek k különböző prímosztója van. Vö.: Erdős Pál—Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960, 211—214.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

férhető információk alapján eredményei újaknak tűntek, de később értesült arról, hogy egy részüket már más szerzők fölfedezték és publikálták. Ez a tény átmenetileg megtörte Péter Rózsa érdeklődését a matematika iránt. Elzárkózott eredményeinek publikálásától (annak ellenére, hogy ezek tartalomban és a bizonyítás módjában számos új vonást foglaltak magukban a már publikált eredményekhez viszonyítva), sőt, úgy határozott, hogy nem foglalkozik többé matematikai problémákkal. Mint Kalmár László elbeszéléséből tudjuk, ebben az időszakban matematikai költemények írásával kezdett foglalkozni, s ebben is igen tehetségesnek mutatkozott.

1927-ben, egyetemi tanulmányait befejezve, matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelet nyer. Két évi állástalanság (és néhány havi beteghelyettesítő tanári munka) után ideiglenes polgári iskolai tanári állást kap a fővárosnál. Ezzel veszi kezdetét élete végéig tartó pedagógusi pályafutása, melynek részletes méltatására visszatérünk.

Kalmár László fáradhatatlan erőfeszítései sikeresen felújították Péter Rózsa érdeklődését a matematika iránt. Kedvező mozzanat volt e szempontból egy matematikatörténeti esemény is. Ezekben az években bontakoztak ki erőteljesen *a matematika alapjaival* kapcsolatos kutatások, a David Hilbert kezdeményezte *bizonyításelmélet* vagy *metamatematika* keretében. E kutatások csúcsteljesítményét kétségtelenül Kurt Gödel 1931-ben publikált, a matematikai metodológiáját és filozófiáját érintő, váratlan eredményeket tartalmazó munkája alkotja. Az említett témakörben s Gödel eredményeiben is jelentős szerephez jutott a számelméleti függvények családjának egy speciális része, az ún. *rekurzív függvények* osztálya. Kalmár László hatására Péter Rózsa figyelme a rekurzív függvények felé fordult. Ez a témakör végigkísérte egész kutató matematikusi pályafutását. (Ennek részletes méltatására ugyancsak visszatérünk.) Speciális szakterülete a rekurzív függvények elmélete lett. Az 1932. évi zürichi nemzetközi matematikai kongresszuson számolt be először idevágó kutatási eredményeiről, s a következő években publikálta részletesen (többnyire külföldi matematikai folyóiratokban) egyre gyarapodó eredményeit. E témakörből írta doktori értekezését is, melyet *summa cum laude* minősítéssel védett meg 1935-ben. A harmincas évek második felében már mint a rekurzív függvények elméletének egyik nemzetközileg elismert specialistáját tartja számon a matematikus közvélemény. E tényt jelzi az is, hogy az 1937-ben alapított tekintélyes amerikai szakfolyóirat, a „The Journal of Symbolic Logic", szerkesztőbizottsági tagnak kérte föl. Szerkesztői munkáját még a második világháború alatt is folytatta (svájci közvetítéssel).

Ez a nemzetközi megbecsülés azonban semmilyen kedvező hatással nem volt Péter Rózsa hazai helyzetére. 1939-ben a fasiszta törvények ideiglenes tanári állásától is megfosztották. A háborús esztendők súlyos megpróbáltatást jelentettek számára, de munkakedvét nem törték meg. Ezekben az években írta világhírűvé vált népszerűsítő könyvét „Játék a végtelennel" címen. A könyvet 1943-ban kinyomtatták, de forgalomba hozatalát a fasiszta törvények megakadályozták. A raktáron maradt készlet nagy része a bombázások során megsemmisült, a megmaradt példányokkal 1945-ben, az első szabad könyvnapokon találkozhatott a közönség. A könyv azóta 4 újabb magyar és 14 külföldi kiadást ért meg. (Lásd [I] alatt. A szögletes zárójelek közé írt számok Péter Rózsa munkáinak a cikk végén található jegyzékére utalnak.)

A felszabadulás után kapott végre Péter Rózsa középiskolai tanári kinevezést. A pedagógiai főiskolák megszervezésekor a budapesti főiskola tanára, majd a matematikai tanszék létrehívásakor annak vezetője lett. 1950-ben elnyeri a budapesti tudományegyetemen a magántanári címet a matematika alapjai tárgykörből. A buda-

pesti pedagógiai főiskola megszűntekor (1955-ben) az Eötvös Loránd Tudományegyetem professzora lett. Itt tanított nyugalomba vonulásáig, 1975-ig.

1951-ben jelent meg (német nyelven) a rekurzív függvényekről szóló monográfiája, amely magában foglalja addigi kutatási eredményeit. E könyvéért és addigi munkásságáért 1951-ben Kossuth-díjjal tüntették ki. 1952-ben elnyeri a matematikai tudományok doktora akadémiai fokozatot. Matematikai ismeretterjesztő munkásságáért 1953-ban a Bolyai János Matematikai Társulat a Beke Manó emlékdíjjal jutalmazza. Ugyanebben az évben felkérték az akkor induló NDK-beli szakfolyóirat, a „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" szerkesztőbizottsági tagjául.

A rekurzív függvények elmélete kezdetben kizárólag a bizonyításelméleti kutatások segédeszközeként funkcionált. Alighanem Péter Rózsa volt az első, aki önálló, „önmagukban vett" tanulmányozásukat elkezdte. Talán ez az ősforrástól való elszakítás is szerepet játszhatott abban, hogy felfedezte a rekurzív függvény fogalmának általánosítási lehetőségét, továbbá a matematika más ágaiban való alkalmazás néhány lehetőségét is. 1960 körül kiderült, hogy a rekurzív függvények gyakorlati (nem tiszta matematikai) alkalmazásaira is széles lehetőségek vannak, jelesen a programvezérlésű elektronikus számológépekkel kapcsolatban, a matematikai nyelvészetben és másutt.

Péter Rózsát saját, belső indíttatású kutatásai szinte automatikusan vezették el a gyakorlati jelentőségű témákhoz. 1961 óta megjelent tanulmányainak túlnyomó része a rekurzív függvények elméletének speciális alkalmazási problémáihoz kapcsolódik. 1976-ban (német nyelven) megjelent monográfiája összefoglalja idevágó eredményeit: a rekurzív függvények számítógépes programozásban való alkalmazásának elméleti problémáit.

Péter Rózsa matematikai, pedagógiai és tudományos-közéleti munkásságát szocialista államunk nagyra értékelte. Az elismerés jeleként kapta a Munka Érdemrend arany fokozatát (1967), az Állami Díj I. fokozatát (1970), és a Magyar Népköztársaság Zászlórendje második fokozatát (1975). 1973-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választotta. 1974-ben a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége díjával tüntették ki. Haláláig tiszteletbeli elnöke volt a Bolyai János Matematikai Társulatnak.

1975-ben vonult nyugalomba. Élete hátralevő két esztendejét csaknem teljesen a matematikatanítás reformja ügyének szentelte. Elhatalmasodó betegsége ellenére, életének csaknem utolsó napjaiig dolgozott. Hosszú betegség után, 1977. február 17-én hunyt el.

A kutató matematikus

Péter Rózsa fő kutatási területe — mint jeleztük — a rekurzív függvények elmélete volt. A rekurzív függvények a természetes számok halmazán értelmezett, természetes szám értékeket fölvevő, ún. *számelméleti függvények* speciális részosztályát alkotják. (A természetes számok halmazához a 0-t is hozzáértjük.) Támaszkodva arra a tényre, hogy a 0-ból kiindulva, egyenkénti továbbszámlálással (az 1 ismételt hozzáadásával) bármely természetes szám elérhető (ismétlődés föllépése nélkül), egy számelméleti függvény definiálásának legegyszerűbb módjaként az kínálkozik, hogy megadjuk a függvény értékét a 0 helyen, és megmondjuk, hogy hogyan számítható ki a függvény értéke az $n>0$ helyen, ha az n-et megelőző helyeken fölvett értékeket már ismerjük. A függvénymegadás e módját nevezzük *rekurziónak*, s az ily

módon értelmezhető függvényeket *rekurzív függvényeknek*. A kiszámítási eljárás körülhatárolásától függően a rekurzív függvények különböző osztályai értelmezhetők.

A rekurzió legegyszerűbb típusában, az ún. *primitív rekurzióban* az $n+1$ helyen fölvett függvényérték megadásakor csak az n helyen fölvett függvényértékekre hivatkozunk. Vezessük be az $n'=n+1$ jelölést.[2] Az f függvényt az α konstans és a (már ismertnek feltételezett) kétváltozós β függvény segítségével értelmezzük a következő módon:

$$f(0) = \alpha,$$

$$f(n') = \beta(n, f(n)).$$

Ez *a primitív rekurzió sémája*. A sémát *többváltozós* f függvényekre így általánosítjuk:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(0, a_1, \ldots, a_k) = \alpha(a_1, \ldots, a_k), \\ f(n', a_1, \ldots, a_k) = \beta(n, a_1, \ldots, a_k, f(n, a_1, \ldots, a_k)). \end{cases}$$

Itt f a definiálandó $k+1$ változós függvény; α k-változós, β pedig $k+2$ változós függvény (mindkettő ismertnek feltételezve). Ez magában foglalja az előző sémát is, a $k=0$ speciális esetben. Az általános sémában az $a_1, \ldots, a_k$ változók mint *paraméterek* szerepelnek, melyek értéke a rekurziós sémában nem változik. Megengedjük, hogy az α és a β függvényekben *fiktív* változók is előfordulhassanak, azaz olyan változók, amelyektől a függvény értéke ténylegesen nem függ.

Illusztrációként legyen a definiálandó kétváltozós függvény az „$a+n$" összeadás, amelyet most (a séma kedvéért) „$f(n, a)$"-val jelölünk. A szereposztás:

$$\alpha(a) = a; \qquad \beta(n, a, b) = b'.$$

(Tehát itt β valójában egyváltozós függvény: ténylegesen csak a harmadik változójától függ.) Az $f(n, a)$ függvény primitív rekurzív definiálása α és β segítségével, az (1) séma szerint, a következő:

$$f(0, a) = a,$$

$$f(n', a) = (f(n, a))'.$$

Vagy, $f(n, a)$ helyett „$a+n$"-et írva:

$$a+0 = a,$$

$$a+n' = (a+n)'.$$

A definíció csak az $\alpha(a)=a$ ún. *azonosságfüggvény* és az n' függvény ismeretére épít. De az azonosságfüggvény is definiálható primitív rekurzióval:

$$\alpha(0) = 0,$$

$$\alpha(n') = n'.$$

Ez a definíció csak a 0 konstans és az n' függvény ismeretére támaszkodik. Vegyük észre, hogy minden természetes szám definiálható 0 és n' segítségével: $1=0'$, $2=(0')'=1'$, $3=((0')')'=2'$ stb.

[2] Ez a jelölés azért is célszerű, mert — mint hamarosan látni fogjuk — az összeadás rekurzíve definiálható az eggyel való továbbszámlálás, azaz az $S(n)=n'=n+1$ függvény segítségével.

Primitív rekurzív függvényeknek mondjuk azokat a függvényeket, amelyek a 0 konstansból és az n' függvényből kiindulva, végesszámú helyettesítésekkel és primitív rekurziókkal (azaz az (1) séma szerinti definíciókkal) nyerhetők.[3]

A primitív rekurzív függvények először (még nem ezzel az elnevezéssel) K. Gödelnek az axiómarendszerek eldönthetetlen problémáira vonatkozó vizsgálataiban szerepeltek (1931).[4] Más típusú rekurzív függvények már korábban, D. Hilbert és Th. Skolem munkáiban is előfordultak[5]. Hilbert a rekurzív függvények egy olyan osztályát értelmezte, melyek elemeinek megadásakor primitív rekurziókon kívül ún. *beskatulyázott rekurziók* is megengedettek, mint pl. a következő definíciósémában:

$$f(0, a) = \alpha(a),$$

$$f(n', a) = \beta(n, a, f(n, a), f(n, \gamma(a))).$$

(Itt α, β és γ már definiált függvények.) Lényeges, hogy most $f(n', a)$ kiszámításához nemcsak $f(n, a)$ értékét, hanem $f(n, \gamma(a))$ értékét is kell ismernünk, vagyis föl kell tételeznünk, hogy $f(n, x)$ az x *minden* értékére, s nemcsak az $x=a$ esetben ismert. Péter Rózsa első eredményei közé tartozik annak kimutatása, hogy a beskatulyázott rekurziók kifejezhetők primitív rekurziók (és helyettesítések) segítségével (l. [2]). Ugyancsak kimutatta, hogy az ún. *értékkészlet rekurzió* – amelyben $f(n', a_1, \ldots, a_k)$ kiszámításához az $f(m, a_1, \ldots, a_k)$ függvényértékek ismerete az $m \leqq n$ helyeken (tehát nemcsak az $m=n$ helyen) is szükséges – sem vezet ki a primitív rekurzív függvények osztályából.

Vannak olyan, effektíve kiszámítható számelméleti függvények is, amelyek nem tartoznak a primitív rekurzív függvények körébe. Ilyen függvényre az első példa W. Ackermanntól származik.[6] Ennek definíciójában két változó szerinti, ún. *kétszeres rekurzió* szerepel (éspedig beskatulyázottan). Péter Rózsa [3] dolgozatában lényegesen egyszerűsítette Ackermann tárgyalását. Bevezette a kétváltozós $P(m, n)$ függvényt – melyet a szakirodalom Péter-féle függvény néven tart számon – a következő definícióval:

$$P(0, n) = n', \qquad P(m', 0) = P(m, 1),$$

$$P(m', n') = P(m, P(m', n)).$$

Megmutatta, hogy minden primitív rekurzív f függvényhez van olyan m szám, hogy

$$\text{minden } n\text{-re:} \quad f(n) < P(m, n).$$

Ha tehát P is primitív rekurzív lenne, akkor létezne olyan m, hogy

$$\text{minden } n\text{-re:} \quad P(n, n) < P(m, n)$$

teljesülne, s így (n-et m-mel helyettesítve), $P(m, m) < P(m, m)$ lenne, ami lehetetlen;

[3] Ez a meghatározás Péter Rózsától származik. A szakirodalomban más, de ezzel egyenértékű definíciók is ismertek; ezekben fiktív változók szerepeltetése csak az $\alpha(x_1, \ldots x_n) = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n,\ n \geqq 1)$ sémában megengedett.

[4] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Math. und Phys. 38* (1931), 173—198. old.

[5] D. Hilbert, Über das Unendliche. *Math. Annalen 95* (1926), 161—190. old. — Th. Skolem, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. *Videnskapsselskapets Skrifter*, I. Mat. Naturv. Kl. *6* (1923), 3—38. old.

[6] W. Ackermann: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. *Math. Annalen 99* (1928), 118—133. old.

ennélfogva P nem lehet primitív rekurzív. (A bizonyítás a Cantor-féle diagonális módszer[7] szép alkalmazása.)

A kétszeres rekurzió általánosítása a k-szoros rekurzió ($k \geqq 2$). Ennek részletes vizsgálatával foglalkozik Péter Rózsa [5] dolgozata. Megmutatja, hogy a $k+1$-szeres rekurzió kivezet a legföljebb k-szoros rekurzióval definiálható függvények osztályából. Fő eredménye: megmutatja, hogy minden k-szoros rekurzióval definiált $f(n_1, \ldots, n_k)$ függvény előállítható a következő alakban:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \alpha((\mu x)[\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0]),$$

ahol α egyváltozós, β pedig olyan $k+1$ változós primitív rekurzív függvény, hogy a

$$\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0 \tag{2}$$

egyenlet megoldható x-re a természetes számok körében ($n_1, \ldots, n_k$ bármely rögzített értékeire), és a

$$(\mu x)[\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0]$$

kifejezés a (2) egyenlet legkisebb megoldását jelöli. Ez az eredmény, amelyhez ezidőtájt mások is eljutottak, lényeges szerepet játszik az ún. általános rekurzív függvény fogalmában. *Általános rekurzív függvényeknek* mondjuk azokat a számelméleti függvényeket, amelyek a 0-ból és az n'-ből kiindulva, helyettesítések, primitív rekurziók és a

$$\gamma(n_1, \ldots, n_k) = (\mu x)[\beta(x, n_1, \ldots, n_k) = 0]$$

séma segítségével definiálhatók (kikötve a (2) egyenlet megoldhatóságát x-re, az $n_1, \ldots, n_k$ változók bármely rögzített értékei mellett). Alonzo Church híres hipotézise szerint az általános rekurzív függvények osztálya azonos az *effektíve kiszámítható* számelméleti függvények osztályával. E hipotézisre eddig nem ismeretes cáfoló ellenpélda.

Az 1936. évi oslói matematikai kongresszuson Péter Rózsa az ún. magasabb fokú rekurziókkal foglalkozott (l. [6]). Ezek úgy jönnek létre, hogy függvényváltozóktól is függő függvények definiálását is megengedjük. Későbbi munkáiban (lásd [13], [14], [25]) további fontos eredményeket ért el e témakörben, és rámutatott számos, jelenleg még megoldatlan problémára is.

A nemzetközi matematikai irodalomban Péter Rózsa tollából jelent meg az első átfogó monográfia a rekurzív függvényekről (lásd [12]). A könyv részletesen tárgyalja a különböző rekurzió-fogalmakat, ezek kapcsolatát, a primitív rekurzióra visszavezethető rekurziótípusokat, továbbá foglalkozik az általános és a parciális[8] rekurzív függvényekkel is, megmutatva kapcsolatukat a primitív rekurzív függvényekkel, valamint az effektív kiszámíthatóság szemléletes fogalmának körülhatárolását célzó egyéb fogalmakkal. Jelentős teret szentel a szerző az elmélet matematikai (főleg bizonyításelméleti) alkalmazásainak is. Jellemző, hogy a könyv anyagának túlnyomó része a szerző saját eredménye.

S. C. Kleene, az általános rekurzív függvények elméletének fő kidolgozója, a könyvről írott recenziójában[9] így méltatja a szerzőt: „1932 óta Péter Rózsa egy sor

[7] Lásd pl. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, 5. kiadás, Tankönyvkiadó 1975, 24—26. old.

[8] A parciális rekurzív függvények csak annyiban különböznek az általános rekurzív függvényektől, hogy változóik egyes értékeire esetleg nincsenek értelmezve. Ahol értelmezve vannak, ott éppúgy effektíve kiszámíthatók, mint az általános rekurzív függvények. De nincs kikötve annak effektív eldönthetősége, hogy egy parciális rekurzív függvény adott helyen definiált-e.

[9] Lásd: *Bulletin of the American Math. Soc. 58* (1952), 270—272.

cikket publikált, melyekben a rekurzió különféle speciális formáinak kapcsolatát vizsgálta, megmutatva új függvények definiálhatóságát rekurziók egyre magasabb típusaival; e munkák őt a speciális rekurzív függvények elméletének vezető kimunkálójává avatják." A könyv orosz kiadásának (1954) bevezetőjében pedig N. Kolmogorov szovjet akadémikus e szavakkal mutatja be a szerzőt: „A könyv szerzője, Péter Rózsa, jól ismert magyar matematikus, akinek fontos része volt a rekurzív függvények modern elméletének megalkotásához vezető kezdő lépésekben. 1932—1935 közötti munkái, melyek főleg a primitív rekurzív függvények osztálya tényleges terjedelmének tisztázására irányultak, lényeges mértékben hozzájárultak a ‚rekurzivitás' azon szélesebb eszméjének kikristályosításához, amelyet az általános, ill. a parciális rekurzív függvény fogalma fejez ki."

A könyv orosz, kínai és angol fordításai az egész világon jelentős befolyást gyakoroltak a rekurzív függvényekkel kapcsolatos kutató munkára, kialakítva Péter Rózsa „indirekt" tanítványainak körét. Ebben jelentős szerepe van a monográfia könnyed stílusának és annak a pedagógiai művészetnek, amellyel a szerző a legnehezebb problémát is szemléletes aspektusból képes megközelíteni. E pedagógia egyik stílusjegye, hogy egyetlen téma tárgyalása sem kezdődik előrebocsátott definícióval, hanem az alkalmas definíció a fölvetett probléma elemzésének eredményeként bontakozik ki. Hasonló művészettel különíti el a bizonyításokban a lényeges nehézséget okozó fő részeket a mellékesektől, rendszerint speciális esetekre korlátozva a bizonyítást, amelyből az általános esetre való áttérés már könnyen kiolvasható.

Péter Rózsa nagy szakmai tekintélyét illusztrálja, hogy számos külföldi egyetemre és nemzetközi tanácskozásra hívták meg előadást tartani. 1967-ben az ő tiszteletére rendeztek nemzetközi kollokviumot Tihanyban a rekurzív függvényekről és alkalmazásaikról.

Említettük, hogy a rekurzív függvények elméletének kialakulása a matematika alapjaival kapcsolatos kutatásokhoz fűződik. Péter Rózsa, szűkebb szakterületén túl, a matematika alapjai témakör alapos ismerője és egyetemi előadója volt. E témakörbe vágnak [8], [10], [20] és [34] alatti dolgozatai. Kalmár László az 1948. évi amsterdami filozófiai világkongresszuson számolt be egy idevágó, elvi jelentőségű közös eredményükről.[10]

A matematika filozófiája tekintetében Péter Rózsa nem csatlakozott az ismert irányzatok egyikéhez sem, bár kétségtelenül Hilbert nézetei álltak felfogásához legközelebb. De határozottan elutasította a matematika ún. *formalista* filozófiáját, amely (nem egészen jogosan) Hilbert nézeteire is hivatkozik. Péter Rózsa felfogása szerint a matematikában a fogalmak *jelentése* a domináló, minden más — axiómatizálás, formalizmus — csak segédeszköz. Meggyőződése szerint minden matematikai fogalomnak megvan a maga jelentése, még akkor is, ha ez kezdetben talán homályos és nem egészen egyértelmű, vagy ha éppen problematikus a jelentés szabatos megfogalmazása (mint pl. az effektív kiszámíthatóság esetében). Számára a kontinuumprobléma nem lett értelmetlenné Gödel és P. Cohen idevágó eredményeinek ismerete után sem.[11] Matematikafilozófiája alapján utasítja el Church azon hipozétisét is, amely szerint az effektíve kiszámítható számelméleti függvények osztálya azonos az általános rekurzív függvények osztályával. Nézete szerint az effektív kiszámíthatóság azon fogalmak körébe tartozik, melyek terjedelme a matematika fejlődése során

[10] L. Kalmár: On unsolvable mathematical problems. *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948, Vol. I, 534—536.

[11] E témáról lásd pl. Hajnal András, A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról, *Mat. Lapok 17* (1966), 253—260; továbbá a [34] cikk Utószavát.

növekedő, és sohasem tekinthető teljesen befejezettnek, lezártnak. E nézetét támogatja egy Kalmár Lászlótól származó matematikai eredmény is.[12]

Péter Rózsa kutatásainak új szakaszát jelenti a rekurzív függvény fogalmának általánosítása a természetes számok halmazáról bizonyos általánosabb, „számszerűen fölépíthető" halmazokra. Láttuk, hogy a rekurzív függvények bevezetése azon tényre épül, hogy a természetes számok halmaza egy „kezdő elemből" (a nulla) kiindulva, egyetlen „alapfüggvény" (az n') segítségével teljesen „bejárható". Egynél több kezdőelemet és/vagy egynél több alapfüggvényt (melyek között többváltozós is lehet) föltételezve, nyerjük a „számszerűen felépíthető halmaz", ill., a Péter Rózsától származó kifejezéssel, a *szabad holomorf halmaz* fogalmát. (A pontos definíciót itt elhagyjuk.) Ilyen halmazra egyszerű, de az alkalmazások szempontjából igen fontos példa: egy véges abc betűiből felépíthető „szavak" – azaz: véges hosszúságú jelsorozatok – halmaza. Kezdő elemként (azaz a 0 megfelelőjeként) egyedül az üres szót vesszük (mint az abc betűiből felépíthető egyetlen „nulla tagú" sorozatot). Alapfüggvények (vagyis n' megfelelői) lesznek azok a függvények, amelyek minden szót meghosszabbítanak egy-egy betűvel; így az alapfüggvények száma azonos az abc betűinek számával. Mivel az üres szóból kiindulva bármely szó megkapható egybetűs meghosszabbítások végesszámú sorozatával, világos, hogy a szóhalmaz az alapfüggvények segítségével éppúgy teljesen „bejárható", mint a természetes számok halmaza a 0-ból kiindulva az n' függvény segítségével. (Az általános esetben mind a kezdő elemek, mind az alapfüggvények halmaza lehet végtelen is.)

Ha egy szabad holomorf halmazon bizonyos követelményeket kielégítő parciális rendezés is adott (ekkor *rendezett* szabad holomorf halmazról beszélünk), úgy definiálhatók rajta a különféle rekurziófogalmak megfelelői, és a számelméleti rekurzív függvények elméletének túlnyomó része átvihető az ilyen halmazokra. Az idevágó eredményeket tárgyalja a [23] dolgozat. Míg más szerzők ezidőtájt a szóhalmazokon definiálható rekurzív függvényekre szorítkoztak, addig Péter Rózsa rendkívül általános megközelítésében a szóhalmazokra vonatkozó eredmények speciális esetként adódnak.

A rekurzív függvény fogalmának eme általánosítása széles körű alkalmazások felé tárt kaput. Ezek közül a fontosabbak: a programozási nyelvek elmélete, s ezen keresztül a modern számítástechnika, a matematikai nyelvészet, a formalizált nyelvek közötti fordítás, a logikai optimalizálás. Péter Rózsa 1960 óta publikált munkái túlnyomó részben a rekurzív függvények általánosított elméletének alkalmazási problémáival érintkeznek.

Ezen eredményei nagyobb részét foglalja össze 1976-ban, fél évvel halála előtt megjelent könyve (lásd [52]). A monográfia a rekurzív függvények programozáselméleti alkalmazásaival foglalkozik. Fontosabb eredményei a következők. Bizonyítja, hogy egy pontosan definiált „ideális számítógéppel" (amely a reális komputerek matematikai idealizációja) kiszámítható függvények osztálya azonos a parciális rekurzív függvények osztályával. Igazolja, hogy a fordítóprogramok elméletében fontos szerepet játszó „veremmemória" módszer parciális rekurzív. A gépi programok előkészítésében nagy szerepet játszó blokkdiagramok szabatos matematikai megfelelőjeként bevezeti a gráfsémával való kiszámíthatóság fogalmát, s bebizonyítja, hogy e kiszámíthatóság-fogalom egybeesik a parciális rekurzivitás fogalmával. Kimutatja, hogy az „ALGOL 60" programozási nyelvből a rekurzív eljárások elvileg kiküszöbölhetők, továbbá hogy e nyelv leírására használt metanyelv primitív re-

[12] Lásd erről [52], 147. old.

kurzív. Bizonyítja az „ALGOL 68" nyelv definíciójában alkalmazott kétlépcsős grammatika fogalmainak rekurzivitását is.

A könyv megjelenése óta eltelt rövid idő ellenére máris mutatkoznak a nemzetközi érdeklődés jelei; alig kockázatos azt jósolni, hogy e műnek a szerző első könyvéhez hasonló sikere lesz. Ennek egyik biztosítéka az az előadói művészet, mely e könyvben éppúgy magával ragadja az olvasót, mint a szerző minden korábbi írásában. Mint Péter Rózsa első monográfiája, e kötet is túlnyomórészt a szerző saját eredményeit mutatja be, mintegy lezárva életművét.

A matematika pedagógusa

Péter Rózsa mintegy húsz éven át tanított matematikát középiskolában (rövidebb kényszerű megszakításokkal). Hogy matematikaórái nem voltak tradicionálisak, arról néhány akaratlan beszámolót találhatunk „Játék a végtelennel" c. könyvének számos helyén. Ezekből kiderül, hogy Péter Rózsa már akkor vállalta azt a „kalandot", hogy a matematika *megtanítása* helyett a matematika *közös felfedezésére* (a pedagógus és a tanítványok együttes munkájára) invitálja tanítványait; s örömmel regisztrálhatta, hogy a közös felfedező munka nemcsak a tanítványoknak nyújt maradandó élményt és szilárd ismeretet, hanem a tapasztalt vezetőnek, a pedagógusnak is nemegyszer új, váratlan és meglepő oldaláról mutatja meg a már jólismert tárgyat. Nyilvánvaló, hogy ebben a hosszú tanítási praxisban alakultak ki a matematikai ismeretterjesztésre és tanításra vonatkozó alapeszméi, amelyek kisugárzására a felszabadulás után nyílt lehetősége.

Péter Rózsa számára a matematika integráns része az emberalkotta szépség, a kultúra világának. Ez az esztétikai principium készteti a „két kultúra" elvének elutasítására. A maga részéről egész életében érdeklődött a tradicionális értelemben vett humán kultúra problémái iránt (erről tanúskodnak, egyebek között, rendszeresen publikált filmkritikái). És fontosnak tartotta, hogy a „humánum emberei" megismerjék a matematika szépségeit is. Ez vezette arra, hogy író ismerőséhez, Benedek Marcellhez írott levelekben képet nyújtson a matematikáról. A levelekből keletkezett a már többször említett könyve, a „Játék a végtelennel", amely mesteri példája annak, hogy hogyan lehet „kívülállóknak" bemutatni a matematika szépségeit. A „két kultúra" közötti gát lebontására irányuló törekvés jegyében fogantak még [VII] és [VIII] írásai is.

A felszabadulás utáni években minden erejét a hazai matematikatanítás ügyének fellendítésére fordítja, s a megoldandó sürgős feladatok érdekében átmenetileg még tudományos kutató munkáját is háttérbe szorítja. Aktívan részt vesz az iskolák demokratizálásáért folyó munkában. A Köznevelési Tanács tantervkészítő bizottságában ő készíti a különféle iskolatípusok új szellemű matematikai tantervét. Tankönyvpályázatokat és tanterveket bírál. Az ifjúsági szervezetekben, a fővárosi népművelés keretében és a rádióiskolán szakköröket vezet és előadásokat tart, tanítást vállal a dolgozók gimnáziumában és a tanítók nyári szakosító tanfolyamán, cikkeket ír napi- és hetilapokban. „A tanító matematikakönyve" c. pályázatával (1946) elnyeri a Magyar Tudományos Akadémia első díját. Részt vesz az újszellemű matematika tankönyvek írásában (lásd [IV]). Önkéntes társadalmi munkában bekapcsolódik a budapesti tudományegyetemen a matematika szakos tanárképzés munkájába: a hallgatók gyakorló tanításait látogatja és segíti.

Ekkoriban már az egyetemre is hívják tanítani. És bár elvállalja egyetemi órák tartását is, a matematika tanítása és népszerűsítése marad szívügye, s ezért nem az egyetemen, hanem az 1947-ben létrehozott budapesti pedagógiai főiskolán vállal

végleges állást. Mikor a főiskolán önálló tanszéket kap a matematika, őt bízzák meg a tanszék vezetésével. Itt tanít a főiskola megszűntéig, 1955-ig.

A főiskola megszűnte után az Eötvös Loránd Tudományegyetem professzorának nevezik ki. Nyugdíjba vonulásáig (1975) tanítja itt „a matematika alapjai" c. tárgyat. Egyetemi órái nemcsak szakmailag, hanem didaktikailag is rendkívül értékesek voltak a leendő tanárok számára. Mint az egyetem Tanárképző Tanácsának matematikai szakfelügyelői csoportjának vezetője, aktívan részt vett a tanárjelöltek nevelésében és a gyakorló iskolák színvonalának emelésére irányuló munkában, egyebek között a gyakorló iskolák leendő vezető matematikatanárainak kiválasztásában is. Nem rajta múlt, hogy később e munkát abba kellett hagynia.

Szakmai szemináriumaival (amelyeket Surányi János egyetemi tanárral közösen irányított) leendő matematikusok nemzedékeinek neveléséhez járult hozzá. E szemináriumok bizonyos fajta „posztgraduális" képzést is pótoltak a matematika alapjai témakörből; számos fiatal kutató itt mutathatta be első eredményeit.

Egyetemi oktató munkáját nyugdíjbavonulása napjáig rendkívül komolyan vette, noha korára és betegségére tekintettel lényeges kedvezményeket vehetett volna igénybe. 1974-ben, amikor súlyos műtét előtt állt, ennek időpontját úgy egyeztette orvosával, hogy oktató munkájában ne okozzon fennakadást.

Rendkívüli energiával kapcsolódott be a folyamatban levő oktatási reform munkálataiba. 1973-tól haláláig tagja és aktív résztvevője volt a MTA Elnökségi Közoktatási Bizottsága Matematikai Albizottságának, ill. az ennek utódaként létrehívott MTA—OM Köznevelési Bizottság Matematikai Munkabizottságának. Ugyancsak aktív munkása volt a Bolyai János Matematikai Társulat irányította középiskolai matematikatanítási kísérleteknek, amelyek 1973-ban kezdődtek. E kísérletek elvi-tartalmi irányítása az ő kezében összpontosult. Az elkészült feladatlapokat, munkafüzeteket, könyvrészleteket ténylegesen éjt nappallá tevő munkával lektorálta. Tanácsokat adott a szervezőknek és a tanároknak, harcolt a bürokratikus akadályok elhárításáért, szenvedélyesen érvelt a meggyőződése szerint helyes didaktikai elvekért. Élete utolsó két esztendejében, súlyos betegségével küzdve, ez a munka adott értelmet életének.

Péter Rózsa kiemelkedő munkát végzett Társulatunkban mint tiszteletbeli elnök, és különösen mint az *Emlékőrző Bizottság* elnöke. Túlnyomórészt az ő munkájának köszönhető, hogy világhírű matematikusaink, Fejér Lipót és Riesz Frigyes emlékét utcanevek őrzik fővárosunkban. Iskolai szakköröket mozgósított elhunyt nagyjaink sírjának felkutatására és ápolására. Kezdeményezésére alapította társulatunk a Szele Tibor emlékérmet és a Rényi Kató emlékdíjat. Megvalósulatlan maradt az az álma, hogy a Budapesti Műszaki Egyetemet König Gyuláról, egykori rektoráról, a világhírű matematikusról nevezzék el.

Mint hivatásához méltó matematikust és igaz pedagógust az igazság szenvedélyes szeretete jellemezte. Elutasított mindennemű megalkuvást, képtelen volt bármiféle kompromisszumra, s másoktól éppúgy elvárta az egyenes és egyértelmű magatartást és kiállást, ahogyan saját lényéből fakadt a helyesnek vélt út tántoríthatatlan követése. Megvetette a nagyképűséget, a hamis méltóságot. Kedvelte az okos humort, a szavakkal való művészi játékot, de gyűlölte az adott szóval űzött játékot. Tanítványaiban és munkatársaiban nagyrabecsülte az embert, osztozott személyes gondjaikban, segített problémáikban, bátran és önzetlenül kiállt azokért, akiket támogatására méltónak érzett.

Matematikai és pedagógiai munkásságában továbbra is közöttünk él. Emlékét — munkatársai és barátai körén túl — különös szeretettel és tisztelettel őrzik mindazok, akik tanítványaiként mérhetetlenül sokat köszönhetnek neki.

PÉTER RÓZSA MUNKÁI

1. Tudományos munkák

[1] Rekursive Funktionen. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Zürich, 1932, 2. kötet, 336—337.
[2] Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. *Math. Annalen 110* (1934), 613—632.
[3] Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. *Math. Annalen 111* (1935), 42—60.
[4] A rekurzív függvények elméletéhez. *Mat. és Fiz. Lapok 42* (1935), 25—49.
[5] Über die mehrfache Rekursion. *Math. Annalen 113* (1936), 489—527.
[6] Über rekursive Funktionen der zweiten Stufe. *Comptes rendus du Congres International des Mathématiciens*, Oslo, 1936, 2. kötet, 267.
[7] Contribution to recursive number theory. *Acta Sci. Math. Szeged 9* (1940), 233—238.
[8] Az axiomatikus módszer korlátai. *Mat. és Fiz. Lapok 48* (1941), 120—143.
[9] Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl. *Acta Sci. Math. Szeged 12* (1950), 239—245.
[10] Transzfinit rekurziók (A matematika alapjai és a rekurzív függvények). *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, 1950 (megjelent 1952-ben), 419—428.
[11] Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen. *The Journal of Symbolic Logic 15* (1950), 248—272.
[12] *Rekursive Funktionen.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951. 2. bővített kiadása: 1957.
oroszul: *Rekurszivnüe Funkcii*, Izdat. Inosztrannoj Literaturü, Moszkva, 1954.
kínaiul: Peking, 1958.
angolul: *Recursive Functions*, Third revised edition, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.
[13] Probleme der Hilbertschen Theorie der höheren Stufen von rekursiven Funktionen. *Acta Math. Acad. Hung. 2* (1951), 247—274.
[14] Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variablen Anzahl verwendet werden. *Publ. Math. Debrecen 3* (1953), 33—70.
[15] Rekurzív definíciók, amelyek változó számú korábbi függvényértéket használnak fel. *Mat. Lapok 5* (1954), 7—9.
[16] Újabb bizonyítás arra, hogy a Csillag—Kalmár-féle elemi függvények osztálya szűkebb, mint a primitív-rekurzív függvényeké. *Mat. Lapok 5* (1954), 244—252.
[17] Ein neuer Beweis für die Tatsache, dass die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen umfassender, als die Klasse der elementaren Funktionen ist. *Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math. 1* (1955), 29—36.
[18] Die Beschränkt-rekursiven Funktionen und die Ackermannsche Majorisierungsmethode. *Publ. Math. Debrecen 4* (1956), 362—375.
[19] A Grzegorczyk-féle korlátozottan rekurzív függvények és az Ackermann-féle majorizációs módszer. *Mat. Lapok 8* (1957), 93—99.
[20] Rekursivität und Konstruktivität. *Constructivity in Mathematics*, Amsterdam, 1958, 226—233.
[21] Graphschemata und rekursive Funktionen. *Dialectica 12* (1958), 373—393.
[22] Über die Partiell-Rekursivität der durch Graphschemata definierten zahlentheoretischen Funktionen. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 2* (1959), 41—48.
[23] Über die Verallgemeinerung der Rekursionsbegriffe für abstrakte Mengen als Definitionsbereiche. *Infinitistic Methods* (Proceedings of the Colloquium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 2—9 September 1959), Warszawa, 1961, 329—335.
[24] Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, I—II. *Acta Math. Acad. Hung. 12* (1961), 271—314, *13* (1962), 1—24.
[25] Primitiv-rekursive Wortbeziehungen in der Programmierungssprache „ALGOL 60" *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 6/A* (1961), 137—144.
[26] Zu einem Rekursionsschema von Hu Shih-Hua. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 3—4* (1960—61), 227—232.
[27] A Hu Shih-Hua-féle lánctörtszerű rekurzió és a Hilbert-féle II. osztály. *Mat. Lapok 11* (1961), 275—279.
[28] Über die Rekursivität einiger Übersetzungs-Transformationen, I. Mitteilung. *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 7/A* (1962), 69—78;
II. Mitteilung: Verwendung einer Linearisierungsweise des Kantorowitschschen Ausdrucks-Graphen. *Uo.* 373—384.
[29] Über die „kürzeste" Form von Booleschen Funktionen. *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 7/A* (1962), 79—93.
[30] Über die Rekursivität der Begriffe der mathematischen Grammatiken. *MTA Mat. Kut. Int. Közl. 8/A* (1963), 213—228.

[31] Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln characterisierenden Wortfunktionen. *Acta Math. Acad. Hung. 14* (1963), 149—172.
[32] Programmierung und partiell-rekursive Funktionen. *Acta Math. Acad. Hung. 14* (1963), 373—401.
[33] Über die sequenzielle Berechenbarkeit von rekursiven Wortfunktionen durch Kellerspeicher. *Acta Math. Acad. Hung.* (1965), 231—253.
[34] A halmazelmélet axiómarendszerei. *Mat. Lapok 16* (1965), 185—227.
[35] Zum Beitrag von F. Schwenkel „Rekursive Wortfunktionen über unendlichen Alphabeten". *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math. 11* (1965), 377—378.
[36] Metod linearizacii grafov Kantorovicsa i nyekatorüje jevo primenyenyija. In: *Teorija konyecsnüh i verojatnosztnüh avtomatov.* Izd. Nauka, Moszkva, 1965.
[37] Zur Ausschaltbarkeit der rekursiven und simultanen Proceduren der algorithmischen Sprache ALGOL 60. *Studia Sci. Math. Hung. 1* (1966), 309—314.
[38] Zur zweistufigen Satzstruktur-Grammatik, I. *Studia Sci. Math. Hung. 2* (1967), 455—456.
[39] Zur zweistufigen Satzstruktur-Grammatik, II. *Studia Sci. Math. Hung. 3* (1968), 181—194.
[40] Bemerkung zu den Révészschen terminalen Grammatiken. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. 11* (1968), 109—113.
[41] On the linearisation of expression graphs due to Kantorovitch. *Theory of Graphs.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 259—263.
[42] Über zweistufig definierte Sprachen. *Les fonctions recursives et leurs applications* (Coll. Int. Tihany, Hongrie, 4—7 Septembre 1967). Publié par l'Institut Blaise Pascal et l'Association Mathematique Bolyai János, 1969, 12—23.
[43] Über die Pairschen freien Binoiden als Spezialfälle der angeordneten freien holomorphen Mengen. *Bull. de l'Acad. Polon. Sci. 17* (1969), 181—184.
[44] Automatische Programmierung zur Berechnung der partiell-rekursiven Funktionen. *Studia Sci. Math. Hung. 4* (1969), 447—463.
[45] Die Pairschen freien Binoiden als Spezialfälle der angeordneten freien holomorphen Mengen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21* (1970), 297—313.
[46] Die prinzipielle Ausschaltbarkeit der rekursiven Prozeduren aus der Programmierungssprache ALGOL 60. *Acta Cybernetica 1* (1972), 219—231.
[47] Zur Frage Rekursivität der im „ALGOL 68" verwendeten zweistufigen Grammatik. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. 15* (1972), 89—101.
[48] Veranschaulichung einer sequenziellen Berechnung der rekursiven Funktionen durch „eisenbahnrangierende Graphen". *Periodica Math. Hung. 3* (1973), 183—187.
[49] Mathematische Fassung der sogenannten „Entscheidungs-Tabellen". *Acta Cybernetica 2* (1973), 89—108.
[50] Zur Rekursivität der mathematischen Grammatiken. *Computational Linguistics 9* (1973), 193—216.
[51] Die Rekursivität der Programmierungssprache „LISP 1.5" in Spezialfällen der angeordneten freien holomorphen Mengen. *Acta Cybernetica 3* (1975), 183—201.
[52] *Rekursive Funktionen in der Komputer-Theorie.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.

Továbbá:

számos dolgozat recenziója a *The Journal of Symbolic Logic* c. folyóiratban.

2. Egyéb munkák

[I] *Játék a végtelennel.* Dante Könyvkiadó, Budapest, 1945.
2. kiadás: Bibliotheca, Budapest, 1957.
3. kiadás: Gondolat Kiadó, Budapest, 1963.
4. kiadás: Tankönyvkiadó, 1969.
5. kiadás: Tankönyvkiadó, 1974.
Németül: *Das Spiel mit dem Unendlichen.* G. B. Teubner, Leipzig—Berlin, 1955. 2. és 3. kiadás: 1957.
Angolul: *Playing with Infinity.* G. Bell and Sons Ltd., London, 1961. Ua.: Simon and Schuster, New York, 1962.
Románul: *Jocul cu infinitul.* Editura Stiintifica, Bucuresti, 1959.
Szlovákul: *Hry s nekonečnom.* Osveta Martin, 1958.
Csehül: *Hra s nekonečnem.* Mlada Fronta, Praha, 1973.
Lengyelül: *Gra z Nieskończonoscia.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1962.
Oroszul: két szovjet kiadás: 1967, 1968.

Hollandul: 1966 (Uitgevery Het Spectrum N. V., Utrecht).
Svédül: *Lek med Oändligheten.* Ab Raben and Sjögren, Stockholm, 1964.
Olaszul: *Giocondo con l' infinito.* Feltrinelli, Milano, 1973.
[II] *A számok világa.* (Új Nevelés Könyvtára sorozat.) Budapest, 1948.
[III] Élet a számok világában. *Megváltozott világ,* Budapest, 1948 (függelék).
[IV] *Matematika* a gimnázium I. és II. osztálya számára (két kötet, Gallai Tiborral közösen). Budapest, 1949—50.
[V] Kalmár László matematikai munkássága. *Mat. Lapok 6* (1955), 138—150.
[VI] Die Mathematik ist schön. *Mathematik in der Schule 2* (1964).
[VII] A matematika szép. *Lányok évkönyve,* 1967.
[VIII] Formabontás a „két kultúra" ellen. *Magyar Tudomány,* 1969/4, 196—202.
[IX] A gyakorlati hasznosság ellen is vét, aki háttérbe akarja szorítani a tiszta matematikai kutatásokat. *Magyar Tudomány,* 1973/9, 592—595.
[X] Kalmár Lászlónkról. *Magyar Tudomány,* 1976/11.

Továbbá:

Pedagógiai és tudománynépszerűsítő cikkek napi- és hetilapokban, pedagógiai főiskolai jegyzetek, Csillag Pál egy hátrahagyott dolgozatának sajtó alá rendezése; filmkritikák, stb.

В ПАМЯТЬ РОЖА ПЕТЕРА

ИМРЕ РУЖА—ЯНОШ УРБАН

IN MEMORIAM RÓZSA PÉTER

I. RUZSA AND J. URBÁN

TURÁN PÁL SZÁMELMÉLETI MUNKÁSSÁGÁRÓL

PINTZ JÁNOS

1. Turán Pál igen szerteágazó és nagyjelentőségű matematikai munkásságában a számelmélet központi szerepet töltött be. Időrendben legelső publikációja ilyen témájú, továbbá az 1933—36 években megjelent első 9 dolgozata közül 8 analitikus és elemi számelméleti kérdésekkel foglalkozik. Első jelentős nemzetközi elismerést kiváltó eredménye, doktori disszertációja [3] is ezen témakörbe tartozik. Dolgozatai közül mintegy száz a számelmélet különböző problémáival foglalkozik, de például statisztikus csoportelméleti és particióelméleti munkáinak módszerei is közel állnak analitikus számelméleti módszerekhez. Kétségkívül legjelentősebb tudományos teljesítménye, a hatványösszegmódszer (melyet a szakirodalomban Turán-módszernek neveznek) tulajdonképpen, — megalkotójának véleménye szerint is — a diophantikus approximáció egy új fejezetének tekinthető. Időrendben az első alkalmazásai Turán Pálnak a Riemann-sejtéssel kapcsolatos vizsgálatai voltak; ezek adták az indítékot is a módszer kialakításához. Ez a módszer igen értékes alkalmazást nyert az analízis sok más fejezetében is, de mind számát, mind fontosságát tekintve kiemelkedik az a több mint 40 dolgozat, mely az analitikus számelméleti alkalmazásokat tárgyalja. Hogy azonban ne válasszuk szét a módszert az alkalmazásaitól, jelen ismertetésben Turán Pálnak csak a hatványösszegmódszerrel nem kapcsolatos számelméleti munkásságát tárgyaljuk.

2. Első komoly sikerét Turán Pál doktori disszertációjával [3] aratta, mellyel új fejezetet nyitott az additív számelméleti függvények elméletében. A disszertáció látszólag egy speciális problémával, az $U(n)$ számelméleti függvény vizsgálatával foglalkozik — ahol $U(n)$ jelenti az n szám törzstényezőinek számát —, erre vonatkozóan is egy korábbi tétel új bizonyításával. A dolgozat mégis döntő jelentőségű, mert először nyújtott módot általános additív számelméleti függvények értékeloszlásának tanulmányozására, amelyre a korábbi, jóval speciálisabb és nehézkesebb módszerek teljességgel alkalmatlanok voltak. Továbbá a dolgozat elemi módszerének valószínűségszámítási háttere van, így méltán tekintik Turán Pált, mint a valószínűségszámítás számelméleti alkalmazásának úttörőjét. Érdemeiből semmit sem von le, hogy ő maga érdekes módon korábban nem foglalkozott valószínűségszámítással, s így nem is realizálhatta, hogy módszerének valószínűségszámítási alapja van. Turán bizonyítását több könyv, így pl. Hardy—Wright, Hua Lo-Keng, Kubilius és Posztnyikov könyve is tárgyalja. A disszertáció témájával rokon és annak eredményeit fejleszti tovább [4], [6] és [95] dolgozata.

Az $U(n)$ függvény viselkedésével kapcsolatban egyszerűen belátható, hogy ha n végigfut az $1, 2, \ldots, N$ számokon, akkor $U(n)$ átlagértéke $\log\log N$. Lényegesen mélyebb Hardy és Ramanujan azon tétele, mely szerint az $U(n)$ függvény igen nagy pontossággal közelíti meg az átlagértékét az N-nél kisebb n értékek túlnyomó részére.

Tételük szerint, ha $H(x)$ tetszőleges lassan vegtelenhez tartó függvény, akkor az

$$|U(n) - \log\log N| \leqq H(N)\sqrt{\log\log N} \quad (1 \leqq n \leqq N) \tag{2.1}$$

egyenlőtlenséget kielégítő n-ek számát $A(N)$-nel jelölve

$$\frac{A(N)}{N} \to 0, \quad \text{ha} \quad N \to \infty. \tag{2.2}$$

A tételre 1917-ben Hardy és Ramanujan meglehetősen bonyolult bizonyítást adott.

Ezen tételre Turán egy rendkívül egyszerű elemi és egy szintén érdekes és szép analitikus bizonyítást adott disszertációjában [3], továbbá a tételt két irányban általánosította. Az elemi bizonyítás alapgondolata és véghezvitele is hihetetlenül egyszerű. Az alapgondolat, hogy (2.1) nyilván majdnem minden n-re teljesül, ha bal oldalának átlagértéke, vagy a jobban kezelhető négyzetes közepe kicsiny, azaz célszerű a

$$D(N) = \sum_{n \leqq N} (U(n) - \log\log N)^2 \tag{2.3}$$

kifejezés vizsgálata. Ehhez viszont nem kell mást tenni, mint a már ismert $U(n)$ átlagértékén kívül az ugyanúgy kezelhető $U^2(n)$ átlagértékét meghatározni és így szinte triviális, igen rövid számolás útján adódik a

$$D(N) = 0(N \log\log N) \tag{2.4}$$

becslés, melynek (2.2) közvetlen következménye. A bizonyítás a számelméletből az alaptételen kívül csak a nagyon egyszerű, elemi úton igazolható

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + 0(1) \tag{2.5}$$

relációt használja fel, tehát még a prímszámtétel sem szükséges hozzá.

Észrevehetjük, hogy tulajdonképpen az $U(n)$ függvény várható értékét és szórását számítottuk ki, és a (2.4)→(2.2) következtetés a valószínűségszámításból jól ismert Csebisev-tétel alkalmazását jelenti.

A bizonyításnak komoly előnye, hogy az $U(n)$ függvény speciális tulajdonságait nem használja fel. Így nyerte Turán az első általános tételt [6] additív számelméleti függvények egy széles osztályának értékeloszlására. A tétel olyan nem negatív, erősen additív $\Psi(n)$ számelméleti függvényekre vonatkozik, amelyek esetében a Ψ függvény prímeken felvett értékei korlátos számhalmazt alkotnak. Ezekre igazolja (2.1)–(2.2) analogonját, ahol $U(n)$ helyett $\Psi(n)$ áll, míg $\log\log N$ szerepét a $\Psi(n)$ közelítő átlagértéke, az

$$A(N) = \sum_{p \leqq N} \frac{\Psi(p)}{p} \tag{2.6}$$

mennyiség játssza. Ugyancsak a [6] dolgozatban szerepel a módszernek az $U(F(n))$ számelméleti függvény értékeloszlására vonatkozó alkalmazása, ahol $F(n)$ egész együtthatós polinom.

Másik komoly előnye a bizonyításnak, hogy valószínűségszámítási jellegű alapgondolata utat nyitott a valószínűségszámítási módszerek számelméleti alkalmazásainak, amelyek ma már a számelmélet több területén igen hatékonyaknak bizonyultak, elsősorban additív számelméleti függvények értékeloszlásának tanul-

mányozásában. Habár ezen vizsgálatokban Turán általában nem működött közre, egy igen fontos ilyen jellegű eredményt ért el a Rényi Alfréddal közös [95] dolgozatában, amely Erdős és Kac egy híres tételének élesítését tartalmazza. Erdős és Kac tétele lényegileg úgy fogalmazható, hogy az $U(n)$ $(1 \leqq n \leqq N)$ függvény aszimptotikusan normális eloszlású $\log\log N$ várható értékkel és $\sqrt{\log\log N}$ szórással. Képletben, ha $\Phi(x)$ a normális eloszlás eloszlásfüggvénye és

$$P_N(x) = \frac{1}{N} \# \left\{ n \leqq N;\ \frac{U(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} < x \right\} \tag{2.7}$$

(ahol $\# A$ jelzi az A halmaz elemszámát), akkor

$$P_N(x) = \Phi(x) + o(1) \quad (N \to \infty) \tag{2.8}$$

minden x valós számra. A $o(1)$ hibatag minél jobb explicit megadására több kísérlet történt. LeVeque igazolta, hogy a hibatag abszolút értéke $\leqq \frac{c \log\log\log N}{\sqrt[4]{\log\log N}}$ (c megfelelő abszolút konstans) és sejtésként mondta ki, hogy ez a becslés $\frac{c}{\sqrt{\log\log N}}$-re javítható. LeVeque ezen sejtését igazolta Rényi és Turán a [95] dolgozatban. A bizonyítás Turánnak azon analitikus módszerén alapszik, amelyet a Hardy—Ramanujan-tétel igazolására dolgozott ki. Rényi és Turán tétele tovább már nem élesíthető, mert a (2.8) összefüggés $o\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}\right)$-es hibataggal már nem teljesül.

Meg kell említeni, hogy LeVeque sejtése levezethető Rényi—Turán módszerétől függetlenül Selbergnek egy korábban elért eredményéből, mely nagy pontossággal meghatározza azon $n \leqq N$-ek számát, melyeknek pontosan v prímtényezőjük van.

3. Turán Pál legfontosabb eredményei kétségkívül a prímszámok eloszlásával és az azok vizsgálatára kifejlesztett analitikus függvények, a Riemann-féle ζ-függvény és a Dirichlet-féle L-függvények gyökeivel kapcsolatosak. Első ízben Turán Pálnak (ill. vele egyidejűleg, de tőle függetlenül Linniknek és Siegelnek) sikerült a mod k tekintett L-függvények gyökeire statisztikus, ún. sűrűségi tételt nyernie. A ζ-függvényre Halász Gáborral közösen elért sűrűségi tétele szintén messze felülmúlta a korábbi eredményeket és ma is a legmélyebb ilyen típusú tétel. (Ennek bizonyítása a hatványösszegmódszer segítségével történik, bővebben az azt tárgyaló cikk foglalkozik vele.) Ilyen sűrűségi tételek nélkül a modern prímszámelmélet szinte elképzelhetetlen lenne.

Szintén új lehetőségeket nyitott az additív számelméletben az általa bevezetett ún. függvénytani szita, amelyet Turán a Goldbach- és az ikerprím-probléma tanulmányozására dolgozott ki. Igen értékes a ζ-függvényre adott meglepően egyszerű karakterizációja, valamint a számtani sorok legkisebb prímjére vonatkozó eredménye. Turán Pál eredményei nagyban előre vitték a ζ- és L-függvények gyökei és a prímszámok eloszlása közti titokzatos kapcsolat felderítését és hozzájárultak a jelenségek mélyebb megértéséhez. Az általa feltárt összefüggések új megvilágításba helyezték a prímszámok eloszlásának igen sok problémáját. Ahhoz, hogy ezeket az eredményeket részletesebben ismertethessük, először röviden összefoglaljuk a ζ- és L-függvényekkel kapcsolatos legfontosabb ismereteket.

Dirichlet 1837-ben híres tételének – mely szerint a $kx+l$ számtani sorozat végtelen sok prímszámot tartalmaz, ha k és l relatív prím természetes számok –, bizonyítására vezette be a róla elnevezett L-függvényeket, melyek az

$$L(s, k, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{3.1}$$

sorral vannak értelmezve, ahol $\chi(n)$ a k modulushoz tartozó redukált maradékosztályok multiplikatív csoportján értelmezett csoportkarakter. B. Riemann korszakalkotó elgondolása volt, hogy a $k=1$ esetben ennek megfelelő

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.2}$$

függvényben s értékéül komplex számokat is megengedhetünk, és ezen komplex függvény segítségével már a prímszámeloszlás mélyebb kérdései is megközelíthetők.

Riemann 1859-es akadémiai székfoglaló előadásában egy zseniális utat vázol annak bizonyítására, hogy az x-ig terjedő prímek $\pi(x)$ számára fennáll a

$$\pi(x) \sim \operatorname{li} x \overset{\text{def}}{=} \int_0^x \frac{dt}{\log t} \tag{3.3}$$

aszimptotika. Ennek igazolásához megmutatja, hogy a (3.2)-vel értelmezett függvény, mely $\sigma>1$-re konvergens, az $s=1$-beli elsőrendű pólustól eltekintve az egész komplex síkra analitikusan kiterjeszthető és kielégíti a

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{3.4}$$

függvényegyenletet. Kimutatja továbbá (heurisztikusan), hogy $\pi(x)$-re pontos formula adható, melyben x-en kívül csak a ζ-függvény összes gyöke szerepel.

Ebben az értekezésben mondja ki a híres Riemann-sejtést, mely szerint a ζ-függvény összes, $0 \leqq \sigma \leqq 1$ ún. kritikus sávba eső gyöke, a sáv felezővonalán, a $\operatorname{Re} s = \sigma = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszik. A sejtés döntő számelméleti jelentősége abban áll, hogy fennállásának esetén $\pi(x)$-t a li x függvény lényegileg $\sqrt{x}$ nagyságrendű hibával közelítené meg.

Piltz e sejtést 1884-ben kiterjesztette a (3.1)-gyel definiált Dirichlet-féle L-függvényekre. Ez a Riemann—Piltz-sejtés vagy általánosított Riemann-hipotézis ugyanolyan szerepet játszik és ugyanolyan számelméleti következményekkel bír a számtani sorok prímeloszlására, mint a Riemann-sejtés a prímszámok eloszlására.

4. Turán Pál döntő fontosságú eredményeket ért el a ζ-függvény elméletében. Bár az ezen a területen elért legjelentősebb vizsgálatai – a gyökök eloszlására vonatkozó sűrűségi tételek, a Lindelöf-sejtés következményei, a ζ-gyökök és prímszámok közötti újszerű összefüggések – a hatványösszeg-módszerrel kapcsolatosak (így ezek tárgyalására most nem térünk ki), igen értékesek a klasszikus módszerekkel végzett kutatásai is, amelyeket az alábbiakban ismertetünk.

Turán Pál kezdeményezte a ζ-függvény véges részletösszegeinek, a

$$V_n(s) = \sum_{\nu \leqq n} \frac{1}{\nu^s} \tag{4.1}$$

függvények $\sigma>1$ félsíkbeli gyökeloszlásának vizsgálatát. A kutatást a Riemann-hipotézis motiválta, ugyanis Turánnak [33], [112], [115] és [139] dolgozataiban sikerült olyan tételeket nyernie, melyek szerint, ha a $V_n(s)$ függvényeknek (vagy azok legtöbbjének) a $\sigma>1$ félsík egy részében nincs gyökük, akkor igaz a Riemann-sejtés. Legegyszerűbben megfogalmazható eredménye az az 1948-ban igazolt állítás [33], mely szerint a Riemann-hipotézis igazsága következnék, ha $n>n_0$ esetén $V_n(s)$ nem tűnne el a

$$\sigma > 1+\frac{c}{\sqrt{n}} \tag{4.2}$$

félsíkban. [33]-ban kimutatja, hogy a

$$\sigma > 1+\frac{2\log\log n}{\log n} \tag{4.3}$$

félsíkban valóban nincs gyöke $V_n(s)$-nek, ha $n>n_0$.

Így a $V_n(s)$ függvények gyökeinek vizsgálata új utat látszott nyitni a Riemann-hipotézishez. Ugyanakkor a gyökök létezésének irányában Haselgrove igazolta, hogy végtelen sok olyan n található, melyre $V_n(s)$-nek van gyöke a $\sigma>1$ félsíkban. N. Levinson meghatározta a $V_n(s)$ függvények $s=1$ közelébe eső gyökeinek aszimptotikus eloszlását. Csaknem 30 évvel (4.2)–(4.3) igazolása után H. L. Montgomery azonban (jelenleg sajtó alatt levő cikkében) kimutatta, hogy (4.3) majdnem pontos, nevezetesen

$$0 < c < \frac{4}{\pi}-1, \quad n>n_0(c) \tag{4.4}$$

esetén $V_n(s)$-nek van gyöke a

$$\sigma > 1+\frac{c\log\log n}{\log n} \tag{4.5}$$

félsíkban. Továbbá megemlíti, hogy belátható, hogy (4.4)–(4.5) már teljesen pontos, azaz

$$c > \frac{4}{\pi}-1, \quad n > n_1(c) \tag{4.6}$$

esetén $V_n(s)$ nem tűnik el a

$$\sigma > 1+\frac{c\log\log n}{\log n} \tag{4.7}$$

félsíkban.

Így, bár a Riemann-hipotézishez vezető út csaknem teljesen bezárult, Turán vizsgálatai ráirányították a figyelmet a véges Dirichlet-sorok gyökeivel kapcsolatos érdekes és mély problémák kutatására, melyekben szép eredmények születtek.

A [60] dolgozatban a ζ-függvény kritikus sávbeli értékeloszlását vizsgálva belátja, hogy tetszőleges $\alpha>\frac{1}{2}$ esetén a ζ-függvény a $\sigma>\alpha+\varepsilon$ félsíkban $\left(0<\varepsilon<\frac{1-\alpha}{10}\right)$ tetszőleges „kis" értékeket fölvesz, nevezetesen létezik olyan $s_\nu=\sigma_\nu+it_\nu$ $(t_\nu\to\infty)$ sorozat e sávban, melyre

$$|\zeta(s_\nu)| \leqq \exp\left(-(\log t)^{\frac{1-\alpha-4\varepsilon}{3}}\right). \tag{4.8}$$

Ez érdekes fényt vet a Riemann-hipotézisre. Aki kételkedik igazságában, kételyeit a (4.8) eredmény alátámasztja. Aki „hisz benne", azt meggyőzi a sejtés mélységéről, még ha – ahogy Turán írja [60]-ban – „az nem is győzné meg, hogy a leg-

jobb matematikusok több mint 90 évig nem tudták bebizonyítani" (ill. most már csaknem 120 évig).

A ζ-függvénnyel kapcsolatosan Lindelöf mondott ki egy híres, mindmáig bizonyítatlan sejtést, mely szerint $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $|s-1|>1$ esetén $\zeta(s)$ nem nő túl gyorsan függőleges irányban, pontosan

$$|\zeta(s)| \leqq c(\varepsilon)|t|^{\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Ezen sejtés szintén igen mély, bár a Riemann-hipotézisből következik igazsága. Egy meglepő számelméleti következményét Ingham, majd hatványösszeg-módszere segítségével Turán igazolta egyébként. Titchmarsh híres könyve a Lindelöf-sejtés több ekvivalensét tartalmazza. Ezek a ζ-függvény abszolút értékeinek függőleges szakaszokon vett átlagértékeivel, a $d(n)$ függvény (n osztóinak száma) értékeivel és a gyökök eloszlásával kapcsolatosak. Turán [129] dolgozatában belátja, hogy a

$$\left|\sum_{n \leqq N} \frac{(-1)^n}{n^{it}}\right| \leqq c(\varepsilon)\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|t|^{\varepsilon}\right) \tag{4.10}$$

egyenlőtlenség szintén ekvivalens a Lindelöf-sejtéssel.

Az itt fellépő exponenciális összeg és annak becslése erős hasonlatosságot mutat Turán azon, hatványösszegmódszerrel elért eredményével, mely szerint az ún. kvázi Riemann-hipotézis teljesülése (azaz nem triviális gyökmentes félsík létezése) ekvivalens oly α, β numerikus állandók létezésével, melyekkel

$$c_1 \leqq t^{\alpha} \leqq N \leqq N_1 < N_2 \leqq 2N \tag{4.11}$$

esetén fennáll a

$$\left|\sum_{N_1 \leqq p \leqq N_2} p^{it}\right| < c_2 \frac{N \log^3 N}{t^{\beta}} \tag{4.12}$$

egyenlőtlenség. Így a (4.10) egyenlőtlenségnek az érdekessége, hogy a Lindelöf-sejtésre is adható hasonló ekvivalens. Meg kell említsük, hogy a kvázi Riemann-hipotézis és (4.11)–(4.12) ekvivalenciája jóval mélyebb összefüggés, mint a Lindelöf-sejtés és (4.10) ekvivalenciája.

A Riemann-sejtés bizonyítására irányuló kísérletek vetették fel azt a problémát, hogy vajon mely tulajdonságai karakterizálják a ζ-függvényt. Ha ugyanis egy bizonyítási kísérlet nem használja fel a ζ-függvény összes, őt karakterizáló tulajdonságát, akkor az kevesebb reményt nyújt, hisz így a kísérlet tulajdonképp egy szélesebb függvényosztálybeli Riemann-hipotézis igazolására irányul, amelyre a sejtés esetleg nem is áll fenn, azaz a kísérlet eleve kudarcra van ítélve. Először Hamburger adott ilyen karakterizációt, majd később sok más szerző is. Valamennyinek jellemző sajátossága, hogy tartalmaznak egy, a (3.4)-re emlékeztető függvényegyenletet. Ezen vizsgálatok kapcsán az a vélemény alakult ki, hogy ez valóban szükségszerűen így van, és ennek megfelelően nem láttak reménytkeltőnek olyan módszereket a Riemann-sejtés megközelítésére, melyek a ζ-függvénynek csak egyszerűbb tulajdonságait használják fel.

Ezért tekintették gyengének például a jelenleg ismert legerősebb módszert, amellyel a ζ-függvényre gyökmentes tartomány nyerhető, mivel az sem támaszkodik a függvényegyenletre. Nevezetesen a trigonometrikus összegek módszerének segítségével felső becslés nyerhető a

$$\sum_{N_1 \leqq n \leqq N_2} n^{-it} \tag{4.13}$$

típusú összegek abszolút értékeire, majd ebből parciális szummációval a

$$\sum_{1 \leqq n \leqq N} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \tag{4.14}$$

mennyiségekre kaphatunk felső becslést, ami viszont jól approximálja $\zeta(s)$-t. (Itt $|t|$ nagy, míg σ az 1 bal oldali kicsiny környezetébe esik.) Ezek után felhasználva a ζ-függvény Euler-féle szorzatelőállítását, a már Landau óta ismert módon következtethetünk a megfelelő gyökmentes tartományra.

Turán [112] dolgozatában belátja azt a rendkívül meglepő tényt, hogy a ζ-függvényt már az a két, igen gyengének tűnő tulajdonsága is meghatározza (legalábbis eltolás erejéig), hogy egy félsíkban előállítható az

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{4.15}$$

Dirichlet-sorral, ahol a_n pozitív és monoton sorozat, és érvényes rá az

$$f(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_p}{p^s}} \tag{4.16}$$

Euler-féle szorzatelőállítás. Pontosabban megfogalmazva, (4.15)–(4.16)-ból következik

$$f(s) = \zeta(s-c). \tag{4.17}$$

(Tehát a gyökmentes tartomány igazolásához vezető fent vázolt út valóban kihasználja a ζ-függvény karakterisztikus tulajdonságait – az addigi véleményekkel ellentétben.)

A tétel bizonyítása rendkívül egyszerű, így szép példáját adja annak, hogy sok esetben a tétel felfedezése a döntő esemény, és nem feltétlen az a mély és fontos tétel, melynek a bizonyítása bonyolult. A tétel ugyanis Erdős azon ismert tételének multiplikatív formája, mely szerint monoton additív számelméleti függvény csak $c \log n$ lehet, így a (4.16) szerint multiplikatív a_n sorozat csak $a_n = n^c$ lehet, azaz (4.17) valóban fennáll. (Érdemes megemlíteni, hogy Erdős tételének igazolása is egyszerű.) Hasonló karakterizációját adja [160] dolgozatában a Dirichlet-féle L-függvényeknek. (A feltételekben az egyedüli változtatás, hogy a (4.15)–(4.16) képletekben a_n, ill. ε_p helyett $a_n\chi(n)$ és $\varepsilon_p\chi(p)$ szerepel, ahol χ egy fix karakter, és ezekből adódik (4.17) analogonja, az $f(s) = L(s+c, \chi)$ következmény.)

5. Igen fontosak Turánnak az L-függvényekkel foglalkozó [11], [19], [26] és [212] dolgozataiban foglalt eredményei, melyek a számtani sorok prímeloszlásával, különösen a számtani sorok legkisebb prímjeire vonatkozóan, valamint az L-függvények gyökei eloszlásának kérdésével kapcsolatban jelentenek lényeges előrehaladást. [11]-ben a Riemann—Piltz-sejtés két érdekes számelméleti következményével foglalkozik. S. Chowla jegyezte meg, hogy ezen sejtés fennállása esetén a $kx+l$ számtani sorozat legkisebb prímje (amely $(k, l)=1$ esetén Dirichlet klasszikus tétele szerint létezik)

$$P(k, l) < c(\varepsilon)\varphi^2(k)\log^{4+\varepsilon} k, \tag{5.1}$$

és sejtésként mondta ki, hogy $P(k, l) < k^{1+\varepsilon}$. Figyelembe véve a prímszámtételt (l. (3.3)) triviálisan adódik, hogy

$$P(k, l) > \varphi(k)\log^{1-\varepsilon} k \tag{5.2}$$

majdnem minden l-re $(1 \leqq l \leqq k;\ (l, k)=1)$, azaz $o(\varphi(k))$ maradékosztály kivételével. Turán bebizonyítja, hogy majdnem minden maradékosztályra fennáll a

$$P(k, l) < \varphi(k) \log^{2+\varepsilon} k \tag{5.3}$$

egyenlőtlenség, amely (5.2) szerint igen közel van az optimálishoz. Így a Riemann—Piltz-sejtés feltételezésével lényegileg tisztázható az első prím nagyságrendje fix k mellett majdnem minden maradékosztályban.

A [11]-ben ugyanezen sejtés mellett bizonyított másik tétel Erdős egy problémájára ad választ, igazolván, hogy irracionális α esetén a $p\alpha$ sorozat mod 1 egyenletes eloszlású (p a prímeken fut végig). Ezt később I. M. Vinogradovnak sikerült minden sejtés nélkül igazolnia.

[19]-ben belátja, hogy $P(k, l)$ viszonylag jó felső becsléséhez nem szükséges a Riemann—Piltz-sejtés kihasználása, elég, ha az 1 közelében nincsenek $\mathscr{L}$-gyökök. Azaz, ha az $\mathscr{L}(s, k, \chi)$ függvények egyike sem tűnik el egy tetszőleges kicsiny, de k-tól független

$$1-\delta \leqq \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq \alpha \tag{5.4}$$

téglalapban, akkor $(k, l) = 1$ esetén

$$P(k, l) < k^c \tag{5.5}$$

egy (δ-tól és α-tól függő) c abszolút konstanssal. [26]-ban megjegyzi, hogy elegendő az $\mathscr{L}$-függvények el nem tűnését az

$$1-\frac{c_0 \log\log k}{\log k} < \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq 5, \tag{5.6}$$

k-tól függően egyre kisebb téglalapban megkövetelni. Később Ju. V. Linnik (5.5)-t minden feltevés nélkül (bár igen bonyolult módon) igazolta.

A 40-es évek elejéig a Riemann—Piltz-sejtés igazsága irányába mutató tételek csak bizonyos, a $\sigma=1$ egyenes közelébe eső gyökmentes tartományok létezését igazolták (amelyeken sokat máig sem javítottak), de egyetlen $\mathscr{L}$-függvényre sem sikerült semmilyen $\vartheta<1$-gyel bebizonyítani, hogy akár a $\sigma>\vartheta$ félsík, sőt, akár az (5.4) vagy (5.6) tartomány gyökmentes lenne. Turán Pál 1943-ban írt dolgozata [26] egyidejűleg Linnik és Siegel hasonló jellegű, egymástól függetlenül elért eredményeivel nyitotta meg az ún. „sűrűségi tételek" sorát, melyek szerint a legtöbb mod k tekintett $\mathscr{L}(s, k, \chi)$ függvény nem tűnik el a kritikus sáv egy tartományában. Így [26]-ban Turán igazolta, hogy a legtöbb mod k vett $\mathscr{L}$-függvénynek nincs gyöke az

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{\sqrt{\log\log k}} \leqq \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq 5 \tag{5.7}$$

téglalapban. (Pontosabban a kivételes $\mathscr{L}$-függvények aránya 0-hoz tart, ha $k \to \infty$.) Ha az összes mod k tekintett $\mathscr{L}(s, k, \chi)$ függvény $\alpha \leqq \sigma \leqq 1$, $|t| \leqq T$ tartományba eső gyökeinek számát $N(k, \alpha, t)$-vel jelöljük, akkor Turán tétele szerint

$$N(k, \alpha, 5) < c\, k^{4(1-\alpha^2)} \log^{\frac{11}{2}} k \quad \left(1 \geqq \alpha \geqq \frac{-1+\sqrt{8}}{2}\right) \tag{5.8}$$

és

$$N(k, \alpha, 5) < c\, k^{\frac{1}{2}+2\alpha-\alpha^2} \log k \quad \left(\frac{-1+\sqrt{8}}{2} \geqq \alpha \geqq \frac{1}{2}+\frac{5}{\sqrt{\log\log k}}\right). \tag{5.9}$$

A tétel lényege abban áll, hogy valamennyi szóbajövő α érték esetén k kitevője egynél kisebb, míg az összes mod k tekintett $\mathscr{L}$-függvény száma $\varphi(k) > c\frac{k}{\log\log k}$.

Ilyen típusú sűrűségi tételek játszották a döntő szerepet Linnik már említett híres tételének bizonyításában, melyben az (5.5) összefüggést igazolja.

A Turán Pál által kezdeményezett vizsgálatok folytatásaként sikerült elsősorban Rényi Alfrédnak, majd K. F. Rothnak, E. Bombierinek, A. I. Vinogradovnak és más szerzőknek ilyen típusú tételeket változó modulus esetén találniuk. Igen lényegesek Turán Pálnak Halász Gáborral közösen elért ilyen jellegű eredményei is. Ezen sűrűségi tételek ma a prímszámokkal kapcsolatos kérdések vizsgálatának hihetetlen jelentőségű, és kétségkívül legmélyebb analitikus módszereit alkotják. A tételek bizonyításában több helyütt nagy szerephez jut a Turán-féle hatványösszegmódszer.

Igen fontosak Turán Pálnak az analitikus számelmélet egyik legérdekesebb problémájára, a titokzatos Siegel-gyökökre vonatkozó eredményei.

Furcsa módon az $\mathscr{L}$-függvények $s=1$ közelébe eső gyökeiről ugyanis akkor tudunk a legkevesebbet mondani, ha a $\chi(n)$ karakter csak valós értékeket vesz fel (ekkor $\chi(n)$ értéke 0, $+1$ vagy -1 lehet) és s valós. A máig is legerősebb ilyen irányú tételt Siegel igazolta 1935-ben, mely szerint valós $\mathscr{L}(s, k, \chi)$ függvény nem tűnik el az

$$I = [1 - c(\varepsilon) k^{-\varepsilon}, 1] \tag{5.10}$$

intervallumon. A tétel külön érdekessége (és komoly hátránya), hogy semmilyen módot nem nyújt a $c(\varepsilon)$ konstans effektív megadására, akárcsak egyetlen $\varepsilon < \frac{1}{2}$ esetén. Igen sok számelméleti probléma megoldása szempontjából (így pl. binér kvadratikus alakok osztályszáma, számtani sorok prímeloszlása) döntő jelentőségű lenne annak a kimutatása, hogy a tétel (5.10) helyett igaz az

$$I' = \left[1 - \frac{c}{\log k}, 1\right] \tag{5.11}$$

intervallummal is; másképp, hogy az (5.11)-ben esetlegesen fekvő ún. „Siegel-gyökök" nem léteznek.

Turán [212] dolgozatában kimutatja, hogy (egy az (5.11)-nél némileg szűkebb intervallumon) Siegel gyökök nem léteznének, ha azon $n \leqq x$ számok $A_\alpha(x, k, l)$ számára, melyeknek minden prímtényezője $> x^\alpha$ $\left(\frac{1}{4} \leqq \alpha < \frac{1}{3}\right)$ és $n \equiv l(k)$ bizonyítható lenne az

$$A_\alpha(x, k, l) \leqq (c(\alpha) - \varepsilon)\frac{x}{\varphi(k)\log x} \tag{5.12}$$

becslés tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-val, $x \geqq \exp(\log^3 k)$-ra, ahol $c(\alpha)$ egy konkrét α-tól függő pozitív konstans. A tétel érdekessége, hogy az alig gyengébb

$$A_\alpha(x, k, l) \leqq (c(\alpha) + \varepsilon)\frac{x}{\varphi(k)\log x} \quad (x \geqq \exp(\log^3 k)) \tag{5.13}$$

egyenlőtlenség az analitikus módszerektől teljesen független szita-módszerekkel levezethető.

A tétel hátterében az a régebben ismert állítás áll, hogy Siegel-gyökök nem létezése következnek a

$$\pi(x,k,l) < \frac{2-\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{x}{\log x} \quad (x \geqq \exp(\log^3 k)) \tag{5.14}$$

egyenlőtlenség teljesüléséből. (Itt $\pi(x,k,l)$ szokásos módon azon x-et meg nem haladó p prímek számát jelöli, amelyekre $p \equiv l \pmod k$.) Ezzel szemben a szita módszerekkel elérhető legjobb eredmény csupán

$$\pi(x,k,l) < \frac{2+\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{x}{\log x} \quad (x \geqq \exp(\log^3 k)). \tag{5.15}$$

Tekintve, hogy $\alpha \geqq \frac{1}{2}$ esetben

$$A_\alpha(x,k,l) = \pi(x,k,l), \tag{5.16}$$

a tétel elvi lehetőséget nyújtott, hogy a további $\frac{1}{4} \leqq \alpha < \frac{1}{3}$ intervallumban a szita módszerek segítségével kimutatható legyen Siegel-gyökök nem létezése. Nemrégiben Siebertnek sikerült Turán tételét tetszőleges $0 < \alpha < 1$-re kiterjesztenie, de a szitamódszerrel adódó becslések $A_\alpha(x,k,l)$-re ekkor is egy árnyalattal gyengébb eredményt szolgáltatnak a szükségesnél.

Igaz, hogy (5.15) analitikus módszerekkel is igazolható, de ott explicite figyelembe vesszük az esetleges Siegel-gyököt, így az semmi reményt nem nyújt (5.14) bizonyítására, azaz a Siegel-gyökök eliminálására. Ezzel szemben mindmáig rejtélyes az a tény, hogy az analitikus módszerektől teljesen független szita-módszerek hatásköre ezen a téren pontosan ugyanaddig terjed, mint az analitikus módszereké, és éppen a kritikus ponton (tehát az (5.14), ill. (5.12) egyenlőtlenségek bizonyításánál) áll meg a szitamódszer is, hajszálnyira a Siegel-gyökök kiküszöbölésétől.

6. Az $\mathcal{L}$-függvényekkel, a Goldbach- és ikerprím-problémákkal kapcsolatos vizsgálatoknak igen jelentős és teljesen új fejezetét alkotják Turán Pál eredményei, amelyek meglepő összefüggéseket világítanak meg az $\mathcal{L}$-függvények gyökeloszlása és híres additív számelméleti problémák megoldhatósága között. Turán az általa kifejlesztett új módszernek a függvénytani szita elnevezést adta.

Már Hilbert, az 1900-as párizsi Világkongresszuson elhangzott problémafelvető előadásában az analitikus számelméletnek a Riemann-sejtés melletti 2 fő problémájaként a Goldbach-sejtést — mely szerint minden 2-nél nagyobb páros szám előáll 2 prím összegeként —, és az ikerprímek problémáját — mely szerint végtelen sok p prímre lesz $p+2$ is prím —, említi. Ezen problémák kezelésére Hardy és Littlewood zseniális módszereket dolgozott ki a 20-as évek elején; de az általuk és több kitűnő matematikus által tett hallatlan erőfeszítések ellenére még ma is messze vagyunk ezen problémák megolásától. Mindenesetre az utóbbi évtized egyik legnagyobb számelméleti eredménye azon J. Chen által bizonyított tétel, mely szerint minden elegendően nagy természetes szám előállítható két olyan szám összegeként, melyek egyike prím, másika vagy prím, vagy 2 prímszám szorzata. (Hasonló gyengített formában megoldotta az ikerprím-problémát is.) Chen tételének igazolásában döntő szerepet játszanak a Turán által kezdeményezett sűrűségi tételek legerősebb változatai.

Így a Goldbach-sejtéssel és ikerprím-problémával kapcsolatosan plauzibilis kvantitatív sejtéseknek, feltételes eredményeknek, vagy új típusú összefüggések feltárásának is nagy jelentősége van.

Hardy és Littlewood 1922-ben megjelent korszakalkotó cikkükben (elég bonyolult úton) levezetnek egy heurisztikus formulát a $p'+p''=n$, ill. $p'-p''=2$, $p' \leqq x$ egyenletek megoldásszámára, és kimutatják, hogy a probléma igen szoros kapcsolatban áll az $\mathscr{L}$-függvények gyökeloszlásával. (Habár a problémát nem tudják megoldani még akkor sem, ha feltételezik a Riemann—Piltz-hipotézis helyességét.) Turán eredményei a Hardy és Littlewood által a Goldbach-sejtés és ikerprímprobléma vizsgálatára kidolgozott heurisztikus módszerek folytatása irányában csaknem fél évszázad után az első lényeges továbblépést jelentik.

Turán a [154], [158], [167], [170], [173], [175] dolgozataiban a megoldásszámra olyan formulát ad, melyben a Hardy—Littlewood-féle heurisztikus főtagon kívül az $\mathscr{L}$-függvények gyökeitől viszonylag egyszerű, explicit módon függő melléktagok lépnek fel. A tételek újszerűségét mutatja, hogy a megoldásszámra addig nem volt semmilyen explicit formula, mely a megoldásszámot $\mathscr{L}$-függvények gyökeinek segítségével kifejezte volna. Másrészt érdekes módon a Hardy—Littlewoodnál is fellépő főtagot egészen más és jóval egyszerűbb úton nyeri. A megoldásszámra adott képlet jellegében emlékeztet a Riemann által az x-ig terjedő prímek pontos számára adott explicit formulára. Az analógiát növeli, hogy hasonlóan ahhoz, ahogy a Riemann-féle pontos prímszámformula nem bizonyítja akár maradéktag nélkül sem a prímszámtételt (azaz (3.3)-t), sajnos itt sem adódik a megoldásszám pozitív volta, azaz a Goldbach-sejtés helyessége.

A tételek legnagyobb érdekessége az a meglepő, addig még csak nem is sejtett tény, hogy pl. az ikerprím-probléma megoldása szempontjából csak az „alacsonyan fekvő", $|t| \leqq \frac{7}{4}$ téglalapba eső $\mathscr{L}$-gyökök játszanak szerepet. Érdemes megemlíteni, hogy Dirichlet (már 3.-ban említett) számtani sorok prímjeire vonatkozó klasszikus tételének bizonyításában csupán az a tény játszik szerepet, hogy az $\mathscr{L}$-függvényeknek nincs gyökük az $s=1$ pontban. Sőt, sűrűségi tételek segítségével kimutatható, hogy a probléma megoldhatósága csak az

$$\frac{1}{3} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{4}, \quad |t| \leqq \frac{7}{4} \tag{6.1}$$

téglalapba eső gyökökön múlik.

A Goldbach-sejtés esetében pedig Turán igazolja, hogy az elég nagy n szám Goldbach-előállítása szempontjából csak a nagy modulusú $\mathscr{L}$-függvények $\sigma=\frac{1}{2}$ közelébe eső, alacsonyan fekvő gyökei érdekesek, pontosan azok, melyek az

$$\frac{1}{3} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{4}+\varepsilon, \quad |t| \leqq \log^2 n \tag{6.2}$$

téglalapban feküsznek és amelyek modulusa az

$$\left[n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, n\right] \tag{6.3}$$

intervallumba esik. A megoldásszámra adott formulák tulajdonképp a gyököktől függő bizonyos hatványösszegek. Azonban ezek becslésére a jelenleg ismert hatványösszeg-tételek messzemenően nem elegendőek; így természetesen nyitva áll a kérdés, vajon ezek a módszerek elvezetnek-e, ill. elvezethetnek-e a Goldbach- és ikerprímprobléma megoldásához.

7. Igen fontosak Turánnak Erdős Pállal közösen írt, a polinomok gyökeinek egyenletes eloszlásával kapcsolatos [20], [38] és [45] dolgozatai, melyeket a számelméleti módszerekkel rokon, vagy azokat felhasználó bizonyítási módszereik miatt tárgyalunk itt. A $[-1, 1]$ szakaszon fekvő pontok halmazát egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha az egységkörre felvetítve a vetületi pontok egyenletes eloszlásúak. [20] dolgozatukban azt igazolják, hogy ha egy polinom összes x_i gyöke a $[-1, 1]$ intervallumban fekszik és a polinomnak a $[-1, 1]$ intervallumban felvett maximuma $M_n = \frac{e^{o(n)}}{2^n}$, akkor a gyökök egyenletes eloszlásúak. Pontosan megfogalmazva, ha

$$x_i = \cos \varphi_i \quad (0 \leqq \varphi_i \leqq \pi),$$

akkor

$$\left| \sum_{\alpha \leqq \varphi_\nu \leqq \beta} 1 - \frac{\beta - \alpha}{\pi} n \right| < \frac{8}{\log 3} \sqrt{n \log (2^n M(n))}, \tag{7.1}$$

minden $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ intervallumra. A [45] dolgozatban a komplex együtthatós

$$f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \tag{7.2}$$

polinom gyökei egyenletes eloszlását bizonyítják különböző szögterekben, ha

$$\max_{|z|=1} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} M \tag{7.3}$$

nem túl nagy az a_0 és a_n együtthatókhoz viszonyítva (tehát pl. ha az a_i együtthatók nem túl nagyok a_0-hoz és a_n-hez viszonyítva). Nevezetesen minden $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ esetén fennáll a

$$\left| \sum_{\alpha \leqq \arg z_\nu \leqq \beta} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \right| < 16 \sqrt{n \log \frac{M}{\sqrt{|a_0 a_n|}}} \tag{7.4}$$

egyenlőtlenség. Az egyenletes eloszlás például biztosított, ha az együtthatónak valamennyien az igen tág

$$[e^{-o(n)}, e^{o(n)}] \tag{7.5}$$

intervallumba esnek.

[38]-ban hasonló jellegű tételt nyernek, ha (7.3)-ban egy $|z| = \vartheta$ körön felvett maximumot tekintenek, ahol $0 < \vartheta < 1$. Itt azonban fel kell tételezni, hogy a z_i gyökök közül egyik sem esik az egységkör belsejébe, mert különben, mint kimutatják, nem igaz a tétel. A bizonyítás során H. Weyl klasszikus tételének egy „véges" változatát vezetik le. Weyl tétele szerint ha minden k természetes számra

$$S_k(n) = \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i k x_\nu} = o(n) \quad (0 \leqq x_\nu \leqq 1) \tag{7.6}$$

akkor x_ν mod 1 egyenletes eloszlású. Erdős és Turán tétele szerint fix n-re az

$$|S_k(n)| \leqq \Psi(k) \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{7.7}$$

egyenlőtlenségből következik

$$\left| \sum_{a \leqq x_\nu \leqq b} 1 - (b - a) n \right| < c \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\Psi(k)}{k} \right) \tag{7.8}$$

minden $[a, b] \subset [0,1]$-re.

8. Turán Pál több, igen érdekes eredményt ért el az elemi számelmélet körében is, nagyobbrészt Erdőssel közösen. [7]-ben és [8]-ban Romanov egy tételét élesítik, mely szerint ha $l_a(k)$ az a minimális kitevő, melyre

$$a^{l_a(k)} \equiv 1 \pmod{k}, \quad \text{akkor a} \sum_{\substack{k=1 \\ (a,k)=1}}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a(k)}$$

sor konvergens. Ez az eredmény lényeges szerepet játszik Romanov azon jelentős tételének igazolásában, mely szerint tetszőleges adott b természetes szám esetében a természetes számok pozitív százaléka (tehát N-ig legalább $c(b)\cdot N$ szám) előáll egy prímszám és b valamely hatványának összegeként, azaz $p+b^i$ alakban. Landau is foglalkozott a problémával, és ő a

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (a,k)=1}}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a(k)} < c\,(\log\log a)^2 \tag{8.1}$$

becslést bizonyította. Turán és Erdős Romanov és Landau bizonyításánál egyszerűbb módon igazolta a lényegesen élesebb

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (a,k)=1}}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a^{\varepsilon}(k)} < c(\varepsilon)\log\log a \tag{8.2}$$

egyenlőtlenséget. A bizonyítást rögtön föl is vette Landau „Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie" című, 1937-ben megjelent könyvébe.

[9] dolgozatukban a következő problémával foglalkoznak. Jelölje $r_k(n)$ azon maximális sok elemből álló, n-et meg nem haladó természetes számsorozat elemszámát, mely nem tartalmaz k-tagú számtani sorozatot. A bizonyított $r_3(N)<\left(\frac{4}{9}+\varepsilon\right)N$ egyenlőtlenségnél még érdekesebb azon rendkívül híres sejtés kimondása, mely szerint $r_k(N)=o(N)$. Ez a sejtés Van der Waerden egy nevezetes tételét élesíti, mely szerint ha N elég nagy $(N>f(k,l))$, akkor az első N természetes számot l osztályba sorolva, valamelyik osztály tartalmaz k-tagú számtani sorozatot. Másik érdekes következménye lenne, hogy ha a sejtés az erősebb $r_k(N)<\pi(N)$ $(N>N_0(k))$ formában is fennáll, hogy a prímek között akármilyen hosszúságú számtani sorozat létezik.

Ezen sejtés már a $k=3$ esetben az $r_3(N)=o(N)$ alakban is igen nehéz problémának bizonyult, és csak 20 évvel később sikerült igazolása K. F. Rothnak. Egy évtizeddel később Szemerédi $k=4$-re, majd csaknem 40 évvel az eredeti sejtés kimondása után tetszőleges k-ra igazolta az Erdős—Turán-sejtést. Ez a tétel a kombinatórikus számelmélet legmélyebb tétele. Ugyanakkor az erősebb alakja még mindig megoldatlan; ennek megfelelően nem ismeretes, hogy létezik-e végtelen sok 4-tagú számtani sorozat a prímek körében. (Végtelen sok 3-tagú sorozat létezését S. Chowla igazolta.)

S. Sidon vetette fel a következő problémát. Legyen $a_1<a_2<\ldots$ természetes számok olyan sorozata, melyre az a_i+a_j összegek mind különbözőek. Jelentse egy adott, ilyen tulajdonságú sorozat esetében $\varphi(n)$ a sorozat n-et meg nem haladó elemeinek számát. Legyen $\Phi(n)$ az ilyen $\varphi(n)$-ek maximuma adott n-re. S. Sidon észrevette, hogy $\Phi(n)>c\sqrt[4]{n}$. [25] dolgozatukban Erdős és Turán meghatározták $\Phi(n)$

nagyságrendjét, ami, mint várható, $\sqrt{n}$. Nevezetesen igazolták az

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\Phi(n)}{\sqrt{n}} \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\Phi(n)}{\sqrt{n}} \leqq 1 \tag{8.3}$$

egyenlőtlenséget, és kimondták azt a sejtést, hogy $\Phi(n) \sim c\sqrt{n}$. Egy másik tétel, melyet igazolnak, azt állítja, hogy ha $f(n)$ jelenti az n előállításainak számát $a_i + a_j$ alakban, akkor $f(n)$ nem lehet semmilyen $n \geqq n_0$-ra konstans. Sejtésként szerepel [25] dolgozatukban, hogy ha $f(n) > 0$ $n > n_0$ esetén, akkor $f(n)$ nem korlátos. Másik sejtésük, hogy semmilyen c konstanssal nem teljesülhet a

$$\sum_{m \leqq n} f(m) = cn + 0(1) \tag{8.4}$$

reláció. Míg az előbb említett két probléma több mint 35 év múltán is nyitott, ez utolsót elég erős formában megoldotta Erdős és Fuchs. Tételük szerint a hibatag nemcsak hogy $0(1)$, de még $0(n^{\alpha})$ sem lehet semmilyen $\alpha < \frac{1}{4}$ konstanssal.

Szintén Erdőssel közös [36] dolgozatukban a prímszámok eloszlásának néhány szokatlan és teljesen újszerű problémáját vizsgálják, az egymást követő prímek $d_n = p_{n+1} - p_n$ különbségével kapcsolatosan. Bár egyes kérdések tárgyalása teljesen elemi, és alig használ fel előzetes ismeretet a prímszámeloszlásról, mégis az első, alábbiakban vázolandó típusú eredmények tőlük származnak. Így igazolják, hogy a

$$p_n > \frac{p_{n+1} + p_{n-1}}{2}; \quad p_n < \frac{p_{n+1} + p_{n-1}}{2} \tag{8.5}$$

egyenlőtlenségeknek végtelen sok megoldása van és hasonlóképp a

$$p_n > \sqrt{p_{n+1} p_{n-1}} \quad \text{és} \quad p_n < \sqrt{p_{n+1} p_{n-1}} \tag{8.6}$$

egyenlőtlenségeknek; sőt általánosabban p_n végtelen sokszor kisebb és végtelen sokszor nagyobb lehet p_{n+1} és p_{n-1} t-ik hatványközepénél. Ugyanakkor az a probléma, hogy a (8.5)-nél más irányban általánosabb

$$d_n < d_{n+1} < \ldots < d_{n+k}; \quad d_n > d_{n+1} > \ldots > d_{n+k} \tag{8.7}$$

egyenlőtlenségek valamelyikének is végtelen sok megoldása van akár $k = 2$-re is (ami rendkívül valószínűnek látszik), sejtésként szerepel [36]-ban; megoldása máig sem sikerült.

Az Erdőssel és Szüszszel közös [100] dolgozat a diophantikus approximáció egy érdekes problémáját tárgyalja. Ismeretes, hogy $A > \frac{1}{2}$ esetén minden $0 < \alpha < 1$ számnak van olyan racionális közelítése, melyre

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \leqq \frac{A}{y^2} \tag{8.8}$$

teljesül. Jelölje $S(N, A, c)$ azon $(0, 1)$ közötti α-k halmazának mértékét, melyre (8.8) olyan y-nal is teljesül, amely N és cN közé esik ($c > 1$ pozitív konstans). Fő problémaként felvetik, hogy létezik-e $\lim_{N\to\infty} S(N, A, c) = f(A, c)$ és ha igen, mi az explicit alakja.

A problémát a $0<A<\frac{c}{1+c^2}$ esetben sikerrel megoldják, igazolván, hogy a határérték létezik és az

$$f(A, c) = \frac{12A}{\pi^2} \log c, \tag{8.9}$$

továbbá különböző becsléseket adnak a megfelelő $S(N, A, c)$ függvényre más esetekben is. Később H. Kesten és T. Sós Vera kimutatta, hogy valóban létezik $f(A, c)$ tetszőleges $A>0$, $c>1$ esetén, bár explicit formulát nem sikerült rá adniuk.

Turán az [52] dolgozatban azzal a problémával foglalkozik, vajon lehet-e igazolni, hogy a Fermat-sejtésnek nem lehet túl sok megoldása. Jelöljük 2-nél nagyobb q prímre $R_q(N)$-nel az

$$x^q + y^q = z^q \tag{8.10}$$

egyenlet azon relatív prím megoldásainak számát, melyben x, y és z kisebb N-nél. Kérdés: milyen nem triviális felső becslés adható $R_q(N)$-re? [52]-ben belátja az

$$R_q(N) < c(q) N \log^{\frac{q}{q-1}} N \tag{8.11}$$

egyenlőtlenséget. Dénes Péterrel közös [75] dolgozatukban az ennél lényegesen erősebb

$$R_q(N) < 3q N^{\frac{2}{q}} \tag{8.12}$$

egyenlőtlenséget igazolják elemi úton, amit analitikus módszerek segítségével még egy log N hatvánnyal javítanak.

Ilyen ismertetésekben gyakran sorolják fel, hogy mely szakkönyvek tárgyalják az illető tudós eredményeit. Jelen esetben lényegesen rövidebb lenne azon, utóbbi negyedszázadban megjelent, prímszámelmélettel foglalkozó könyvek felsorolása (ha van egyáltalán ilyen), amely Turán Pál egyetlen eredményét sem említi. Mindenesetre érdemes megemlíteni, hogy két, újabban megjelent ilyen témájú mű, H. L. Montgomery „Topics in multiplicative number theory" (1971) és W. J. Ellison—M. Mendès France „Les nombres premiers" (1975) c. művében egyaránt Turán Pálnak idézik valamennyi szerző közül a legtöbb dolgozatát (szám szerint 14-et, ill. 21-et). Bár ez semmiképpen sem ad valamilyen rangsort, mégis rámutat Turán eredményeinek széles körű nemzetközi elismerésére.

Úgy véljük, hogy ez a számelméleti munkák csak egy részét érintő ismertetés is némi képet ad Turán Pál számelméleti működésének főbb vonásairól: eredményeinek gazdagságáról és jelentőségéről, kérdésfeltevéseinek és bizonyítási módszereinek újszerűségéről, izgalmas sejtéseiről, melyek mind nagy hatással voltak a matematika ezen ágának fejlődésére az utóbbi csaknem fél évszázadban.

ДЕЯМЕЛЬНОСТЬ ПАЛА ТУРАМА В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ЯНОШ ПИНТЦ

THE NUMBER-THEORETICAL WORKS OF P. TURÁN

J. PINTZ:

FÜGGVÉNYSOROK KONVERGENCIÁJÁVAL KAPCSOLATOS ÚJABB VIZSGÁLATOK[1]

TANDORI KÁROLY

1. Előadásomban az ortogonális sorok konvergenciájával kapcsolatos néhány újabb eredményemről kívánok beszámolni. Az eredmények előzményei régebbre nyúlnak vissza.

Bizonyos előzmények után, a húszas évek elején D. E. MENCHOFF [3] és H. RADEMACHER [5] egymástól függetlenül bebizonyították a következő tételt.

A. *Ha az* $\{a_n\}_1^\infty$ *számsorozatra teljesül a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty \tag{1}$$

feltétel, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

sor bármely $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer esetén az ortogonalitási alapintervallumon m. m. konvergál.*

D. E. MENCHOFF idézett dolgozatában azt is kimutatta, hogy az (1) feltétel általában nem finomítható; tétele pontosan a következőképpen szól.

B. *Legyen* $\{w(n)\}_1^\infty$ *pozitív számok monoton növő szorzata, amelyre teljesül a*

$$w(n) = o(\log^2 n) \tag{3}$$

feltétel. Akkor van olyan $\{a_n\}_1^\infty$ *együtthatósorozat és olyan a* $(0, 1)$ *intervallumon ortonormált* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *függvényrendszer, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty \tag{4}$$

fennáll, mégis az (1) *sor a* $(0, 1)$ *intervallumon m. m. divergál.*

Ennek a tételnek bizonyítása direkt konstrukción múlik és a Menchoff-féle bizonyítással adódó $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer nem egyenletesen korlátos.

Természetes módon felmerült a kérdés, ha egyenletesen korlátos ortonormált rendszerekre szorítkozunk, akkor az (1) feltétel nem gyengíthető-e.

A kérdésre maga D. E. MENCHOFF adott negatív választ, amennyiben [4] dolgozatában kimutatta, hogy

[1] Akadémiai székfoglaló előadás; elhangzott 1977. III. 8.-án.

a B *tételben a* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer választható egyenletesen korlátosnak, azaz van olyan* $M(>1)$ *valós szám, hogy a* $\varphi_n(x)$ *függvényekre teljesül a*

$$|\varphi_n(x)| \leqq M \quad (x \in (0,1);\ n = 1, 2, \ldots)$$

feltétel.

D. E. MENCHOFF e további tételének bizonyítása is direkt konstrukcióval adódik és az M korlát 1-nél nagyobb számnak adódik.

Természetes módon felmerült a kérdés, hogy mi a helyzet az $M=1$ esetben. Ha a $\varphi_n(x)$ függvények a (0, 1) intervallumon ortonormált rendszert alkotnak, akkor a $|\varphi_n(x)| \leqq 1$ $(x \in (0,1);\ n=1, 2, \ldots)$ feltétel csak úgy teljesülhet, ha

$$|\varphi_n(x)| = 1 \quad (x \in (0,1);\ n = 1, 2, \ldots)$$

m. m. teljesül. Az ilyen tulajdonságú $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ függvényrendszereket nevezzük *előjeltípusú rendszereknek.*

Az, hogy egy ortonormált rendszer előjeltípusú, már igen nagy megszorítást jelent, így valóban kérdésesnek tűnt, hogy ilyen ortonormált rendszerekre az (1) konvergenciafeltétel nem enyhíthető-e. Számos részeredmény ellenére a kérdésre évtizedekig nem sikerült választ adni, míg 1975-ben B. Sz. KASIN [1] kimutatta, hogy az (1) feltétel általában előjeltípusú ortonormált rendszerekre sem gyengíthető.

Tétele pontosan a következőképpen szól.

C. *Van olyan a* (0, 1) *intervallumon ortonormált, előjeltípusú* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *függvényrendszer, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik. Ha* $\{w(n)\}_1^\infty$ *pozitív számok monoton növő sorozata, amelyre teljesül a* (3) *feltétel, akkor van olyan* $\{a_n\}_1^\infty$ *számsorozat, hogy* (4) *fennáll, mégis a* (2) *sor* (0, 1)*-en pozitív mértékű halmazon divergál.*

A bizonyítás kis módosításával — rutinszerű eszközök alkalmazásával — elérhető, hogy a (2) sor m. m. divergál. Megjegyezzük, hogy B. Sz. KASIN tétele nemcsak abban a tekintetben élesebb D. E. MENCHOFF előző tételénél, hogy abban előjeltípusú ortonormált rendszerről van szó, hanem azért is, mert B. Sz. KASIN tételében a $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ függvényrendszer a $\{w(n)\}_1^\infty$ sorozattól független. (Megemlítjük, hogy D. E. MENCHOFF bizonyításaiból is kiadódik ez az élesebb állítás.)

B. Sz. KASIN tétele szerint tehát az előjeltípusú ortonormált rendszerek konvergenciatulajdonságai sem jobbak mint a tetszőleges ortonormált rendszereké.

Előadásomban ezt az állítást kívánom pontosítani. Új eredmények mellett bizonyos problémákat is említek.

2. Legyen $1 \leqq K \leqq \infty$ rögzített. Jelöljük $\Omega(K)$-val az olyan, a (0, 1) intervallumon ortonormált $\varphi = \{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ függvényrendszernek osztályát, amelyekre

$$|\varphi_n(x)| \leqq K \quad (x \in (0,1);\ n = 1, 2, \ldots)$$

teljesül. ($K=\infty$ esetén $\Omega(\infty)$ az összes, a (0, 1) intervallumon ortonormált függvényrendszerek osztálya, $\Omega(1)$ pedig az előjeltípusú ortonormált rendszerek osztálya.) Nyilvánvaló, hogy

$$\Omega(1) \subseteq \Omega(K_1) \subseteq \Omega(K_2) \subseteq \Omega(\infty) \quad (1 < K_1 < K_2 < \infty). \tag{5}$$

Egy $a=\{a_n\}_1^\infty$ számsorozatra képezzük az alábbi mennyiséget:

$$\|a; K\| = \sup_{\varphi \in \Omega(K)} \sqrt{\int_0^1 \sup_{1 \leqq i \leqq j < \infty} |a_i\varphi_i(x) + \ldots + a_j\varphi_j(x)|^2\, dx} \quad (\leqq \infty).$$

Egy a számsorozat és tetszőleges $N \leqq M$ természetes számok esetén legyenek

$$a(N, M) = \{0, \ldots, 0, a_N, \ldots, a_M, 0, \ldots\},$$

$$a(N, \infty) = \{0, \ldots, 0, a_N, a_{N+1}, \ldots\}.$$

Az $\|a; K\|$ norma definíciójából könnyen következnek az alábbi relációk. Minden a sorozatra és minden N természetes számra

$$\|a(N, M); K\| \nearrow \|a(N, \infty); K\| \quad (M \nearrow \infty),$$

továbbá minden a sorozatra

$$\|a(N, \infty); K\| \geqq \|a(N+1; \infty); K\| \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Továbbá (5)-ből következik, hogy minden a sorozatra

$$\|a; 1\| \leqq \|a; K_1\| \leqq \|a; K_2\| \leqq \|a; \infty\| \quad (1 < K_1 < K_2 < \infty). \tag{6}$$

Ennek a normának a segítségével bebizonyítható a következő tétel.

I. Tétel. *Legyen* $1 \leqq K \leqq \infty$ *rögzített. Ha az* a *sorozatra*

$$\lim_{N \to \infty} \|a(N, \infty); K\| = 0, \tag{7}$$

akkor a (2) *sor bármely* $\varphi \in \Omega(K)$ *rendszer esetén a* (0, 1) *intervallumon m. m. konvergál.*

Ha pedig

$$\lim_{N \to \infty} \|a(N, \infty); K\| \neq 0,$$

akkor van olyan $\varphi \in \Omega(K)$ *rendszer, hogy a* (2) *sor* (0, 1)*-en m. m. divergál.*

A tétel első állítása könnyen igazolható. Tegyük fel ugyanis, hogy az a sorozatra teljesül a (7) feltétel. Ekkor megadható olyan $(0=) n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ indexsorozat, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a(n_k + 1, n_{k+1}); K\| < \infty. \tag{8}$$

Legyen $\varphi \in \Omega(K)$, és a (2) sor n-edik részletösszegét jelöljük $s_n(x)$-nel. (8)-ból, a norma definíciója alapján nyerjük, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x)| dx \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\int_0^1 (s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x))^2 \, dx} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\infty} \|a(n_k + 1, n_{k+1}); K\| < \infty,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{k \to \infty} s_{n_k}(x) = s(x)$$

(0, 1)-en m. m. létezik és véges. Legyen ezek után

$$\delta_k(x) = \max_{n_k < n \leqq n_{k+1}} |s_n(x) - s_{n_k}(x)| \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Ekkor ugyancsak (8)-ból adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \delta_k(x)\,dx \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\int_0^1 \delta_k^2(x)\,dx} \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \|a(n_k+1, n_{k+1}); K\| < \infty,$$

ebből kapjuk, hogy $\lim_{k\to\infty} \delta_k(x)=0$ (0, 1)-en m. m. teljesül, és így (0, 1)-en m. m. $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$.

A tétel második állítását $1<K\leqq\infty$ esetén már korábban bebizonyítottam (l. [8], [9]). A bizonyításhoz $K=1$ esetén még fel kell használni B. Sz. Kasin módszerének egy lényegesebben egyszerűsített változatát is. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, a bizonyítás azon az észrevételen múlik, hogy ha a lépcsős függvényekből álló

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \tag{9}$$

összeg részletösszegeinek felső burkolója „elég nagy" akkor a tagokat szakaszonként sztochasztikusan független, korlátos szórású $h_n(x)$ függvényekkel megváltoztatva, a

$$\sum_{n=1}^{N} (f_n(x)+h_n(x))$$

összeg részletösszegeinek felső burkolója — a Kolmogorov-egyenlőtlenség szerint — „kicsit" különbözik a (9) összegétől.

Bebizonyítható a következő tétel is.

II. Tétel. *Bármely* $1<K<\infty$ *szám és bármely a sorozat esetén a*

$$\lim_{N\to\infty} \|a(N, \infty); K\| = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \|a(N, \infty); 1\| = 0$$

relációk ekvivalensek.

A $\lim_{N\to\infty} \|a(N, \infty); K\| = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \|a(N, \infty); 1\| = 0$ (6)-ból következik. A fordított implikáció ismét a már említett Kasin-féle alapötlet alkalmazásán múlik.

Legyen $1\leqq K\leqq\infty$ rögzített. Jelöljük $M(K)$-val az olyan a együtthatósorozatok osztályát, amelyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a (2) sor bármely $\varphi\in\Omega(K)$ rendszer esetén a (0, 1) intervallumon m. m. konvergál. Nyilvánvaló, hogy

$$M(1) \supseteq M(K_1) \supseteq M(K_2) \supseteq M(\infty) \quad (1 < K_1 < K_2 < \infty).$$

Az I. és II. tételekből következik a

III. Tétel. *Minden* $1<K<\infty$ *számra*

$$M(K) = M(1).$$

Ez a tétel azt jelenti, hogy az egyenletesen korlátos ortonormált rendszerek és az előjeltípusú ortonormált rendszerek konvergencia-tulajdonságai általában ugyanolyanok.

Felhívjuk a figyelmet egy további, még mindig nyitott problémára, ti., hogy

$$M(\infty) = M(1)$$

is fennáll.

3. A következőkben az előző tételek néhány alkalmazását fogom bemutatni. [9] dolgozatomban bebizonyítottam a következő tételt.

D. *Legyen* $1<K<\infty$ *tetszőleges. Ha az* a *sorozatra*

$$|a_1| \geqq \ldots \geqq |a_n| \geqq \ldots, \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty \tag{10}$$

teljesülnek, akkor van olyan $\varphi \in \Omega(K)$ *rendszer, hogy a* (2) *sor* (0, 1)*-en m. m. divergál.*

Tehát (10) esetén $a \notin M(K)$, amiből a II. tétel alapján következik, hogy $a \notin M(1)$, és így az I. tételből következik a

IV. Tétel. (10) *esetén van olyan* $\varphi \in \Omega(1)$ *rendszer, hogy a* (2) *sor a* (0, 1) *intervallumon m. m. divergál.*

Legyen $\{l_n\}_1^\infty$ pozitív számok monoton növő sorozata, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} < \infty .$$

Ekkor az A tételből, a Kronecker-lemma alkalmazásával adódik, hogy bármely φ ortonormált rendszer esetén az ortogonalitási alapintervallumon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)}{l_n} = 0$$

m. m. teljesül. Lehetséges pl. az $l_n = \sqrt{n \log^{3+\varepsilon} n}$ $(\varepsilon>0)$ választás.

A IV. tételből viszont, a (6) dolgozatban alkalmazott módszerrel, következik az

V. Tétel. *Legyen* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *pozitív számok monoton növő sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{\lambda_n^2} = \infty$$

fennáll. Akkor van olyan $\varphi \in \Omega(1)$ *rendszer, hogy a* (0, 1) *intervallumon*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)|}{\lambda_n} = \infty$$

m. m. teljesül.

Lehetséges pl. a $\lambda_n = \sqrt{n \log^3 n}$ választás. Ez az eredmény a [2], [6] dolgozatok egyik tételének élesítése.

Egy a sorozatra legyen

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}} (a_n^*)^2 \log^2 n}, \quad a \in l_2, \quad S = \infty, a \notin l_2,$$

ahol $\{a_n^*\}_1^\infty$ az $\{a_n\}_1^\infty$ sorozatnak egy abszolút értékben monoton csökkenő átrendezése. [7]-ben kimutattam, hogy $S<\infty$ esetén az (1) sor bármely φ ortonormált rendszer esetén az ortogonalitási alapintervallumon m. m. feltétel nélkül konvergál.

A [10] dolgozatban kimutattam a következő tételt.

E. *Legyen* $1<K<\infty$ *rögzített. Ha* $S=\infty$, *akkor van olyan* $\varphi\in\Omega(K)$ *rendszer, hogy a* (2) *sornak van olyan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$$

átrendezése, amely (0, 1)*-en m. m. divergál.*

Tehát $\{a_{n_k}\}_1^\infty \notin M(K)$, és így a II. tétel szerint $\{a_{n_k}\}_1^\infty \notin M(1)$. Ebből pedig az I. tétel alkalmazásával nyerjük az alábbi tételt:

VI. Tétel. *Ha* $S=\infty$, *akkor van olyan* $\varphi\in\Omega(1)$ *rendszer, amelyre a* (2) *sornak van olyan átrendezése, amely* (0, 1)*-en m. m. divergál.*

Az I—VI. tételek részletes bizonyítása a [10] dolgozatban kerül közlésre. A VI. tételt Joó István is bebizonyította ugyancsak a Kasin-féle módszer egyszerűsített formájának alkalmazásával (szóbeli közlés).

IRODALOM

[1] Б. С. Кашин, О множителях Бейла, *Доклады АН СССР*, 222(1975), 1031—1032. (Részletes közlemény: B. S. Kašin, On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series, *Analysis Math.*, 2 (1976), 249—266.)

[2] I. Kátai—K. Tandori, Bemerkung zur Konvergenz der Entwicklungen nach vorzeichensartigen orthonormierten Systemen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 23 (1972), 519—529.

[3] D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales I., *Fundamenta Math.*, 4 (1923), 82—105.

[4] D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil Math. Moscou (Mat. Sbornik)*, 3 (1938), 103—118.

[5] H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112—138.

[6] K. Tanrori, Über die orthogonalen Funktionen. I., *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 57—130.

[7] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, 23 (1962), 185—221.

[8] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen II., *Acta Sci. Math.*, 25 (1964), 219—232.

[9] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III., *Publicationes Math.*, 12 (1965), 127—157.

[10] K. Tandori, Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, 32 (1971), 11—40.

[11] K. Tandori, Über beschränkte orthonormierte Systeme, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 31 (1978), 279—285.

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СХОДИМОСТИ СЕРИИ ФУНКЦИЙ

КАРОЙ ТАНДОРИ

NEW RESULTS CONCERNING TO THE CONVERGENCE OF FUNCTION-SERIES

K. TANDORI

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS AZ 1976. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS EMLÉKVERSENY VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI FELADATÁHOZ

RÉVÉSZ PÁL

Bevezetés

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata

$$P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

eloszlással. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$M^+(n) = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad M^-(n) = -\min_{0 \leq k \leq n} S_k,$$

$$M(n) = \max\left(M^+(n), M^-(n)\right) = \max_{0 \leq k \leq n} |S_k|.$$

Fenti jelölések talán világosabbá válnak, ha arra gondolunk, hogy egy forintos alapon fej vagy írást játszunk. (Például fej dobása esetén nyerünk, írás dobása esetén vesztünk 1 Ft-ot.) Ekkor X_i jelenti a nyereményünket az i-edik játékban. S_n jelenti, hogy n játszma után mennyit nyerünk, míg $M^+(n)$, illetve $M^-(n)$ azt mondja meg, hogy az első n játszma folyamán mennyi volt a maximális nyereségünk, illetve veszteségünk. Végül $M(n)$ az a maximális pénzösszeg, amennyit az első n játszma során vesztettünk, vagy nyertünk (aszerint, hogy a maximális veszteségünk, vagy nyereségünk volt-e a nagyobb). Nyilvánvaló, hogy az $M^+(n)$, $M^-(n)$, $M(n)$ véletlen sorozatok növekvőek.

Az 1976. évi Schweitzer verseny 10. feladata azt kérdezte, hogy az $M^+(n)$ sorozat mennyire nőhet lassan. Pontosabban így szólt:

Bizonyítsuk be, hogy minden $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\log n)^{1+\varepsilon}}{\sqrt{n}} M^+(n) = \infty \quad 1 \textit{ valószínűséggel}$$

és ez az eredmény pontos abban az értelemben, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} M^+(n) = 0 \quad 1 \textit{ valószínűséggel.}$$

Ezen állítás durván azt jelenti, hogy $M^+(n)$ minden elég nagy n-re nagyobb, mint $\sqrt{n}/(\log n)^{1+\varepsilon}$ (tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ esetén), de végtelen sok olyan n egész szám van, amelyre $M^+(n) < \sqrt{n}/\log n$. A fej vagy írás játék nyelvén megfogalmazva, ez az állítás azt jelenti, hogy elég nagy n esetén, az első n játék folyamán biztosan elő-

fordult olyan pillanat, amikor nyereményünk meghaladta az $\sqrt{n}/(\log n)^{1+\varepsilon}$ összeget, de létezik (1 valószínűséggel) olyan $n_1<n_2<\ldots$ (véletlentől függő) sorozat, hogy az első n_k $(k=1, 2, \ldots)$ játszma során nem volt olyan pillanat, amikor nyereményünk a $\sqrt{n_k}/\log n_k$ összeget meghaladta volna.

Természetesen a fenti állítás bizonyítása szimmetria okokból egyszersmind bizonyítja a hasonló állítást $M^-(n)$-re is.

I. HIRSCH ÉS CHUNG TÉTELE

A feladat kitűzésekor a Bizottság nem tudott arról (és úgylátszik, hogy ezt a feladat megoldói sem vették észre), hogy Hirsch (1965) a fentieknél jóval erősebb állítást bizonyított be. Hirsch tétele a következőképpen szól:

1. Tétel. *Legyen A_n monoton növő számsorozat, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nA_n} < \infty,$$

ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} M^+(n) = \infty \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Visszont, ha egy a_n monoton növő számsorozatra a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n} = \infty$$

feltétel teljesül, akkor

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} M^+(n) = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Ez a tétel természetesen tartalmazza az említett Schweitzer-feladatot. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy az $M^+(n)$ sorozatot az $M^-(n)$ sorozattal felcserélve a tétel változatlanul érvényben marad. Így azt mondhatjuk, hogy a Hirsch-tétel pontosan megmondja, hogy az $M^+(n)$, illetve $M^-(n)$ sorozatok mennyire nőhetnek lassan. Nem mond azonban a tétel semmit arról, hogy az $M(n)$ sorozat mennyire nőhet lassan. Ezen utóbbi kérdést vizsgálta Chung (1948) és a következőt bizonyította be:

2. Tétel:

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \frac{\log\log n}{n}}\, M(n) = 1 \qquad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Chung tétele tehát azt állítja, hogy $M(n)$ minden elég nagy n-re nagyobb lesz, mint $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8\log\log n}}$, de végtelen sok olyan n van, amelyre $M(n)$ kisebb, mint $(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8\log\log n}}$ (tetszőleges $0<\varepsilon<1$ esetén).

Az első és második tételeket összehasonlítva azt látjuk, hogy $M^+(n)$ és $M^-(n)$ sokkal kisebbek lehetnek, mint $M(n)$. Másként szólva $M^+(n)$ és $M^-(n)$ egyszerre nem lehetnek nagyon kicsik (mert akkor $M(n)$-nek is nagyon kicsinek kellene lennie),

nevezetesen nem lehetnek mindketten kisebbek, mint $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}$. Pontosabban a 2. tétel azonnal bizonyítja, hogy érvényes a következő

1. Következmény. *Tetszőleges* $0<\varepsilon<1$*-hez* 1 *valószínűséggel található olyan* n_0 *(véletlentől függő) küszöbindex, hogy* $n \geqq n_0$ *esetén, ha*

$$M^-(n) < (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}},$$

akkor

$$M^+(n) > (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}.$$

Természetesen felcserélhető ebben az állításban is $M^-(n)$ és $M^+(n)$, de az egyenlőtlenségek iránya nem felcserélhető. Azaz csak annyit állítunk, hogy ha $M^+(n)$ és $M^-(n)$ közül az egyik kicsi $\left(\text{kisebb, mint } (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}\right)$, akkor a másik már nem lehet kicsi $\left(\text{ez már nagyobb, mint } (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}\right)$, de nem állítjuk, hogy abból, hogy $M^+(n)$ és $M^-(n)$ közül az egyik nagy, következik, hogy a másik kicsi.

A fej vagy írás játék nyelvén megfogalmazva az 1. következmény azt jelenti, hogy ha elég nagy n esetén az első játék folyamán egyszer sem volt olyan pillanat, amikor nyereményünk meghaladta az $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}$ összeget, akkor volt olyan pillanat, amikor veszteségünk haladta meg ezt az összeget.

II. CSÁKI TÉTELE

Csáki Endre (1977) tovább vizsgálta azt a kérdést, hogy $M^+(n)$ és $M^-(n)$ egyikének kicsiny voltából mi következik a másik nagyságára. Eddig annyit láttunk, hogy ha $M^+(n)$ és $M^-(n)$ közül az egyik az $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}$ görbe alá esik, akkor a másik e görbe fölött lesz. Most azt kérdezzük, hogy ha az $M^+(n)$ és $M^-(n)$ görbék közül az egyik jóval az $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}$ görbe alá esik, például a $\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{1+\varepsilon}}$ görbe közelébe (tudjuk, hogy ezen utóbbi alá csak véges sokszor kerülhet), akkor a másik mennyivel fog az $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}$ görbe fölé kerülni. Erre a kérdésre válaszolva Csáki a következőket bizonyította be:

3. Tétel. *Legyenek* $a(n) \leqq b(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *monoton nem-növő pozitív számsorozatok, amelyekre még a következő feltételek is teljesülnek:*

(i) $a(n)\sqrt{n}$ *és* $b(n)\sqrt{n}$ *monoton nőnek,*

(ii) $(\log n)^{-1-\delta} \leqq a(n) \leqq (1+\delta)\pi(8 \log\log n)^{-1/2}$,

(iii) $b(n) \geqq (1-\delta)\pi(8 \log\log n)^{-1/2}$.

Tegyük fel, hogy

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n c^3(n)} e^{-\frac{\pi^2}{2c^2(n)}} = \infty,$$

ahol $c(n)=a(n)+b(n)$. *Ekkor* 1 *valószínűséggel végtelen sok n-re teljesül, hogy*

$$(2) \qquad M^+(n) < a(n)\sqrt{n} \quad \text{és} \quad M^-(n) < b(n)\sqrt{n}.$$

Ellenben, ha

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n c^3(n)} e^{-\frac{\pi^2}{2c^2(n)}} < \infty$$

akkor 1 *valószínűséggel minden elég nagy n-re a* (2) *egyenlőtlenségek közül legfeljebb az egyik teljesül.*

A tétel megértését elő fogja segíteni néhány konkrét példa vizsgálata. Mint láttuk, ha $M^+(n)$ az $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8 \log\log n}}$ görbe alá kerül, akkor (elég nagy n-re) $M^-(n)$ ugyanezen görbe felett kell, hogy tartózkodjék. Most vizsgáljuk meg, hogy mi mondható $M^-(n)$-ről, ha $M^+(n)$ a

$$C\sqrt{\frac{n}{\log\log n}} \quad \left(0 < C < \sqrt{\frac{\pi^2}{8}}\right)$$

illetve a

$$\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha \leqq 1)$$

görbék alá kerül. Ehhez, Csáki tétele szerint, azt kell megvizsgálnunk, hogy ha $a(n)$ helyébe az

$$a_1(n) = \frac{C}{\sqrt{\log\log n}} \quad \left(0 < C < \sqrt{\frac{\pi^2}{8}}\right)$$

illetve az

$$a_2(n) = \frac{1}{(\log n)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha \leqq 1)$$

sorozatok valamelyikét írjuk, akkor hogyan kell a $b(n)$ sorozatot megválasztani ahhoz, hogy az (1) összeg konvergens, illetve divergens legyen. Elemi számolások adják, hogy ha

$$a(n) = a_1(n) \quad \text{és} \quad b(n) = \frac{D}{\sqrt{\log\log n}}, \quad \text{ahol} \quad D < \frac{\pi}{\sqrt{2}} - C,$$

akkor az (1) összeg konvergens, míg

$$a(n) = a_1(n) \quad \text{és} \quad b(n) = \frac{D'}{\sqrt{\log\log n}}, \quad D' \geqq \frac{\pi}{\sqrt{2}} - C$$

esetén (1) divergens lesz. Továbbá

$$a(n) = a_2(n) \quad \text{és} \quad b(n) = \frac{E}{\sqrt{\log\log n}}, \quad E < \frac{\pi}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$$

esetén (1) konvergens, de az

$$a(n) = a_2(n), \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{és} \quad b(n) = \frac{E'}{\sqrt{\log\log n}}, \quad E' \geqq \frac{\pi}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$$

esetben (1) divergens. Végül, ha

$$a(n) = \frac{1}{\log n} \quad \text{és} \quad b(n) = \frac{F}{\sqrt{\log\log\log n}}, \quad \text{ahol} \quad F < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

akkor (1) konvergens, de

$$a(n) = \frac{1}{\log n} \quad \text{és} \quad b(n) = \frac{F'}{\sqrt{\log\log\log n}}, \; F' \geqq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

választással (1) divergens lesz.

Fentiek alapján $M^+(n)$ és $M^-(n)$ viselkedéséről Csáki tétele a következőket mondja:

1 valószínűséggel végtelen sokszor előfordul, hogy

$$M^+(n) < C\sqrt{\frac{n}{\log\log n}} \quad \text{és} \quad M^-(n) < D'\sqrt{\frac{n}{\log\log n}},$$

ha $0 < C < \sqrt{\frac{\pi^2}{8}}$ és $D' \geqq \frac{\pi}{\sqrt{2}} - C$, de 1 valószínűséggel minden elég nagy n-re az

$$M^+(n) < C\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}$$

egyenlőtlenség teljesüléséből következik, hogy

$$M^-(n) \geqq D\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}$$

tetszőleges $D < \frac{\pi}{\sqrt{2}} - C$ esetén.

Hasonlóan 1 valószínűséggel végtelen sokszor előfordul, hogy

$$M^+(n) < \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad \text{és} \quad M^-(n) < E'\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}$$

ahol $E' \geqq \frac{\pi}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$, de a

$$M^+(n) < \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad \text{és} \quad M^-(n) < E\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}$$

egyenlőtlenség-pár $E < \frac{\pi}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$ esetén 1 valószínűséggel csak véges sokszor fordul elő.

Utolsó példánk azt állítja, hogy a

$$M^+(n) < \frac{\sqrt{n}}{\log n} \quad \text{és} \quad M^-(n) < F'\sqrt{\frac{n}{\log\log\log n}}, \quad F' \geqq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenségek egyidejűleg 1 valószínűséggel végtelen sokszor bekövetkeznek, de a

$$M^+(n) < \frac{\sqrt{n}}{\log n} \quad \text{és} \quad M^-(n) < F\sqrt{\frac{n}{\log\log\log n}}, \quad F < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenségek 1 valószínűséggel csak véges sokszor fordulnak elő.

Érdekes még megvizsgálni Csáki tételét a $b(n) \equiv 1$ esetben. Ekkor az (1) sor konvergenciája, illetve divergenciája ekvivalens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n}$ sor konvergenciájával, illetve divergenciájával. Tekintettel arra, hogy itt ugyanarról a sorról van szó, amellyel a Hirsch-tételben már találkoztunk, arra a következtetésre juthatunk, hogy bármilyen erős feltételt is teszünk fel $M^+(n)$ kicsiny voltára (persze olyat, amely a Hirsch-tétel szerint egyáltalán megengedett), az $M^-(n)$-ről nem mondhatjuk még azt sem el, hogy legalább a $\sqrt{n}$-t eléri.

III. AZ ITERÁLT LOGARITMUS TÉTEL

Az eddigiekben azt vizsgáltuk, hogy az $M(n)$, $M^+(n)$, $M^-(n)$ sorozatok mennyire lehetnek kicsinyek, illetve, hogy az $M^+(n)$ és az $M^-(n)$ egyikének kicsiny voltából a másik nagyságára vonatkozóan milyen következtetést lehet levonni. Most ennek a kérdésnek a fordítottját kívánjuk megvizsgálni, nevezetesen azt, hogy az $M(n)$, $M^+(n)$, $M^-(n)$ sorozatok mennyire lehetnek nagyok, illetve az $M^+(n)$ és $M^-(n)$ egyikének nagy voltából a másik kicsinységére milyen következtetéseket lehet levonni. Az 1. és 2. tételeknek a következő analogonja jól ismert.

4. Tétel.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n)}{\sqrt{2n \log\log n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{M^+(n)}{\sqrt{2n \log\log n}} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{M^-(n)}{\sqrt{2n \log\log n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1$$

1 *valószínűséggel.*

Azonnal feltűnik, hogy az $M(n)$, $M^+(n)$, $M^-(n)$, sőt S_n sorozatok egyforma nagyok lehetnek. (Emlékszünk, hogy amikor azt vizsgáltuk, hogy ezen sorozatok mennyire lehetnek kicsinyek, azt tapasztaltuk, hogy $M^+(n)$ és $M^-(n)$ sokkal kisebb lehet, mint $M(n)$. Ennek a különbségnek az okát nyilván mindenki azonnal meg tudja magyarázni.)

Hátra van még annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy abból, hogy $M^+(n)$ és $M^-(n)$ egyike igen nagy, lehet-e olyan következtetésre jutni, hogy a másik kisebb. Ennek a kérdésnek a vizsgálatában Strassen (1964) egy igen fontos tétele nyújt segítséget. A Strassen-tétel megfogalmazásához egy jelölést vezetünk be: Legyen az $S_n(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ véletlen függvény a k/n $(k = 0, 1, 2, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots)$ pontokban az

$$S_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{S_k}{\sqrt{2n \log\log n}}$$

formulával definiálva, a $\frac{k}{n}$ és $\frac{k+1}{n}$ pontok között pedig legyen lineáris, azaz:

$$S_n(t) = S_n\left(\frac{k}{n}\right) + \left(S_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - S_n\left(\frac{k}{n}\right)\right)\left(t - \frac{k}{n}\right)n \quad \left(\frac{k}{n} \leqq t < \frac{k+1}{n}\right).$$

Az $S_n(t)$ véletlen függvények nyilván folytonosak és Strassen tétele azt állítja, hogy nagy n-re bizonyos speciális típusú folytonos függvényekkel jól approximálhatók. Pontosabban

5. Tétel. *Legyen $\mathcal{S}$ a* [0, 1] *intervallumon értelmezett azon abszolút folytonos* $s(x)$ *függvények halmaza, amelyekre* $\int_0^1 (s'(x))^2 dx \leqq 1$. *Ekkor*

(i) *minden* $s(x) \in \varphi$ *függvényhez* 1 *valószínűséggel található olyan* $n_1 < n_2 < \cdots$ *véletlentől függő sorozat, hogy*

$$\sup_x |S_{n_k}(x) - s(x)| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

(ii) *minden adott* $n_1 < n_2 < \ldots$ *sorozatnak* 1 *valószínűséggel megadható olyan (véletlentől függő)* $m_1 < m_2 < \ldots$ *részsorozata, amelyhez van olyan* $s(x) \in \mathcal{S}$, *amelyre*

$$\sup_x |S_{m_k}(x) - s(x)| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Ebből a tételből például könnyen nyerhető az I. részben szereplő 1. következmény következő analogonja.

2. Következmény. *Tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén* 1 *valószínűséggel megadható egy véletlentől függő* $n_1 < n_2 < \ldots$ *sorozat úgy, hogy az*

$$M^+(n_k) \geqq \frac{1-\varepsilon}{3} \sqrt{2n_k \log\log n_k} \quad \text{és} \quad M^-(n_k) \geqq \frac{1-\varepsilon}{3} \sqrt{2n_k \log\log n_k}$$

egyenlőtlenségek mindketteje teljesüljön, de létezik olyan véletlentől függő n_0 *küszöbindex, hogy* $n \geqq n_0$ *esetén, ha*

$$M^+(n) \geqq \frac{1+\varepsilon}{3} \sqrt{2n \log\log n},$$

akkor

$$M^-(n) \leqq \frac{1+\varepsilon}{3} \sqrt{2n \log\log n}.$$

Ezen Következmény érvényessége belátható abból az egyszerű tényből, hogy az

$$s(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}, \\ x - \dfrac{2}{3}, & \text{ha} \quad \dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

függvény nyilván eleme az φ függvényosztálynak. Így Strassen tétele szerint található olyan $\{n_k\}$ sorozat, amelyre $S_{n_k}(x)$ közel van ezen $s(x)$-hez. Ez bizonyítja, hogy ugyanezekre az n_k indexekre Következményünk első állítása teljesül. Második állításunk abból az egyszerű tényből következik, hogy ha egy $s(x) \in \mathcal{S}$ függvény $\frac{1}{3}$-nál nagyobb értéket felvesz, akkor a $-\frac{1}{3}$-t már nem veheti fel.

Hasonló módon látható a

3. Következmény. *Tetszőleges* $\frac{1}{3} < q < 1$ *és* $\varepsilon > 0$ *esetén* 1 *valószínűséggel megadható egy véletlentől függő* $n_1 < n_2 < \ldots$ *sorozat úgy, hogy az*

$$M^+(n_k) \geqq (1-\varepsilon) q \sqrt{2n_k \log\log n_k} \quad \text{és} \quad M^-(n_k) \geqq (1-\varepsilon) \frac{1-q}{2} \sqrt{2n_k \log\log n_k}$$

egyenlőtlenségek mindketteje teljesüljön, de létezik olyan véletlentől függő n_0 küszöbindex, hogy $n \geqq n_0$ esetén, ha

$$M^+(n) \geqq (1+\varepsilon) q \sqrt{2n \log\log n},$$

akkor

$$M^-(n) < (1+\varepsilon) \frac{1-q}{2} \sqrt{2n \log\log n}.$$

IV. EGY TÉTEL A VÉLETLEN BOLYONGÁSRÓL

A Brown mozgás legegyszerűbb matematikai modellje a következő:

Tekintsünk egy a számegyenes origójában elhelyezett véletlen pontot (anyagi részecskét), majd dobjunk fel egy szabályos pénzdarabot és lépjen a pont 1 lépést jobbra fej, és egy lépést balra írás dobása esetén. A kísérletet megismételve az eredetileg az origóban elhelyezett pontnak egy véletlen bolyongásához jutunk.

Az eddigi jelöléseinket alkalmazva azt mondhatjuk, hogy S_n jelenti a pont helyzetét az n-ik lépés után, $M(n)$ azt jelenti, hogy az első n lépés során a pont milyen távol jutott az origótól és $R(n) = M^+(n) + M^-(n)$ jelenti azt, hogy a bolyongó pont mekkora területet járt be az első n lépés során. $R(n)$ viselkedésére vonatkozik a következő

5. Tétel.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\sqrt{2n \lg\lg n}} = 1, \tag{7}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2 \log\log n}{\pi^2 n}}\, R_n = 1. \tag{8}$$

Itt (7) közvetlen következménye az 5. tételnek, de különösen könnyen látható annak 3. következményéből. (8) a 3. tételből nyerhető, de annak a (4), (5), (6) formuláknál megfogalmazott következményeiből látható legkönnyebben.

IRODALOM

CSÁKI, E. (1977) On the lower limits of maxima and minima of Wiener process and partial sums. (Sajtó alatt.)

CHUNG, K. L. (1948) On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, 205—233.

HIRSCH, W. M. (1965) A strong law for the maximum cumulative sum of independent random variables. *Comm. Pure. Appl. Math.* **18**, 109—127.

STRASSEN, V. (1964) An invariance principle for tha law of the iterated logarithm. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Gebiete*, **3**, 211—226.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧУ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ, ПОСТАВЛЕННОМУ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНКУРСЕ ИМЕНИ МИКЛОША ШВЕЙТЦЕРА В 1976 ГОДУ

РАЛ РЕВЕС

REMARKS TO A PROBABILITY THEORETICAL PROBLEM OF THE 1976. M. SCHWEITZER MATHEMATICAL COMPETITION

P. RÉVÉSZ

A FAAUTOMATÁK ALGEBRAI ELMÉLETE. I

GÉCSEG FERENC
(József Attila Tudományegyetem)
és
MAGNUS STEINBY
(University of Turku)

A faautomata fogalmának bevezetéséhez annak a felismerése vezetett, hogy a véges automaták véges unáris algebráknak is tekinthetők, amelyek bemenetei (ebben a felfogásban) unáris polinom-szimbólumok. Ha a véges automaták ilyen értelmezésénél elhagyjuk az unaritás követelményét, akkor a faautomaták fogalmához jutunk. Ennek megfelelően a faautomata egy véges univerzális algebra, bemenetei pedig a megfelelő típusú polinom-szimbólumok. A polinom-szimbólumok tekinthetők cimkézett fáknak.

Így a faautomaták a véges automaták olyan általánosításai, amelyek a bemenő jelek sorozatai helyett fákat képesek feldolgozni. Ezt az általánosítást számosan tanulmányozták. A vizsgálatok során kiderült, hogy a véges automatákra vonatkozó legfontosabb fogalmak és eredmények természetes módon átvihetők faautomatákra.

A faautomatákkal kapcsolatos vizsgálatok egy újabb irányának kialakulása annak a ténynek volt köszönhető, hogy a faautomatákkal felismerhető fahalmazok lényegében megegyeznek a környezetfüggetlen nyelvtanok derivációs fáinak halmazával. Ennek megfelelően a faautomaták a környezetfüggetlen nyelvek felismerésére alkalmas rendszereknek is tekinthetők. Következésképpen a környezetfüggetlen nyelvtanokra és nyelvekre vonatkozó számos eredményre a faautomaták segítségével adható algebrai bizonyítás. Másrészt a faautomaták elméletében megfogalmazható több érdekes probléma ennek a kapcsolatnak köszönheti létét.

A faautomaták elméletének harmadik fontos területét a fatranszformációknak, valamint a hozzájuk szorosan kapcsolódó fordításoknak a tanulmányozása képezi. A fatranszformációk a szekvenciális gépek általánosításainak tekinthetők, ugyanakkor ezek az általánosítások egymástól lényegesen eltérőek. Így az irodalomban a fatranszformációk számos típusát tanulmányozták, de elméletük még nagyon messze van a teljes rendszerezettségtől. Másrészt a terület sokatigérő, a szintaxisvezérelt fordításokkal való szoros kapcsolata pedig a számítástudomány vonatkozásában is fontossá teszi.

A jelen munkával az a szerzők célja, hogy a faautomaták legfontosabb fogalmait és eredményeit egységes tárgyalásmódban ismertessék. Ebben, amennyire lehetséges volt, az univerzális algebrákra támaszkodtak. A cikk három főbb fejezetből és az irodalomból áll. Terjedelme miatt két részben jelenik meg. Az első rész az első fejezetből áll, amely a véges automaták és a reguláris nyelvek általánosított elméletének (faautomaták és fanyelvek) legfontosabb eredményeit teljesen felöleli. A második rész első fejezete a faautomaták és környezetfüggetlen nyelvek kapcsolatát, második fejezete pedig a fatranszformációkat ismerteti. Mindkét részt megjegyzések és irodalmi hivatkozások zárnak. Ezek a hivatkozások csupán azon munkákat ölelik

fel, amelyeket a szerzők a szóban forgó rész megírásához felhasználtak. A szerzők remélik, hogy a munka végén található irodalomjegyzék kárpótolja ezért az olvasót.

A dolgozatban feldolgozott anyag nem teljes, a faautomatákra vonatkozó bizonyos témaköröket egyáltalán nem tárgyalunk. Például nem foglalkozunk a faautomaták elméletének a másodrendű elméletek eldöntési kérdéseire való alkalmazásával. Ezzel kapcsolatban DONER [1965], THATCHER és WRIGHT [1968] és RABIN [1961] munkáira utalunk. Ugyancsak teljes egészében kihagytuk az EILENBERG és WRIGHT [1967] által elindított kategóriaelméleti megközelítést is.

A szerzők e helyen is szeretnék kifejezni köszönetüket a Turkui Egyetem Alapítványának, a Bolyai János Matematikai Társulatnak, a Finn Tudományos Akadémiának és a Magyar Tudományos Akadémiának azért az anyagi támogatásért, amellyel lehetővé tették számukra a dolgozat megírásához szükséges finnországi és magyarországi találkozásokat.

I. FEJEZET. FAAUTOMATÁK ÉS FELISMERHETŐ ERDŐK

1. §. *Fák és erdők*

Ebben a paragrafusban a fákkal és erdőkkel kapcsolatos alapfogalmakat vezetjük be. A faautomatákkal foglalkozó irodalomban a fa fogalmát többféle módon értelmezik. A jelen cikkben szereplő definíciónál az vezette a szerzőket, hogy a tárgyalás módja a lehető legközelebb essen az univerzális algebrák elméletéhez.

1.1. definíció. *Műveleti szimbólumok halmazán* a páronként diszjunkt $F_0, F_1, \ldots$ szimbólumhalmazok $F=F_0 \cup F_1 \cup \ldots$ egyesítését értjük. Az F_m $(m \geqq 0)$ halmazbeli szimbólumokat *m-változós műveleti szimbólumoknak* nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy ezen műveleti szimbólumok *rangja m*, jelben $r(f)=m$ $(f \in F_m)$. A következőkben, ha F véges, akkor *rangolt ábécéről* beszélünk.

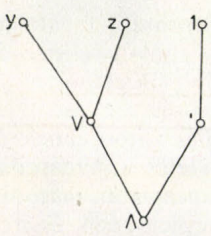
1.2. definíció. Legyen Z olyan halmaz, amely diszjunkt F-fel. A Z *feletti* F-fák $T_F(Z)$ halmazán azt a legszűkebb U halmazt értjük, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

(1) $F_0 \cup Z \subseteq U$,

(2) $f(p_1, \ldots, p_m) \in U$, valahányszor $f \in F_m$ $(m \geqq 1)$ és $p_1, \ldots, p_m \in U$.

1.3. példa. Legyen $F_0=\{0, 1\}$, $F_1=\{'\}$, $F_2=\{\wedge, \vee\}$ és $F_m=\emptyset$, amennyiben $m \geqq 3$. Akkor az 1.2. definíció értelmében pl. 0, 1, $\vee(y, z)$ és $\wedge(\vee(y, z), '(1))$ F-fák a $Z=\{y, z\}$ halmaz felett.

Fákat általában fa alakú gráfokkal szemléltetünk. A példánkban szereplő $\wedge(\vee(y, z), '(1))$ fának megfelelő gráf-reprezentáció az 1.1. ábrán látható.



1.1. ábra

A következőkben X mindig az $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ változóhalmazt jelöli. Feltételezzük, hogy X diszjunkt a vizsgált többi halmazzal. Továbbá jelölje X_n $(n \geqq 0)$ az X halmaz $\{x_1, \ldots, x_n\}$ részhalmazát. Vegyük észre, hogy $X_0=\emptyset$.

1.4. definíció. Az X_n $(n \geqq 0)$ halmaz feletti F-fákat *n-változós F-fáknak* nevezzük. Az összes n-változós F-fa halmazát $T_{F,n}$ jelöli. Továbbá az *F-fák halmazán* a $T_F=T_F(X)$ halmazt értjük. Végül, ha F-et nem specifikáljuk, akkor egyszerűen *fákról* beszélünk.

Világos, hogy az n-változós F-fák nem mások, mint az univerzális algebrák elméletében használt polinom-szimbólumok. Továbbá vegyük észre, hogy $T_{F,m} \subseteq T_{F,n}$, amennyiben $m \leqq n$. Hasonlóan $T_{F,n} \subseteq T_F$ is teljesül tetszőleges n nemnegatív egész számra. Másrészről bármely F-fa egy n-változós F-fa valamely n-re. Végül jegyezzük meg, hogy $T_{F,0}$ akkor és csakis akkor nem-üres, ha $F_0 \neq \emptyset$.

1.5. definíció. Legyen $p(\in T_F(Z))$ tetszőleges F-fa Z felett. A p fa *részfáinak* sub(p) halmazát az alábbi módon értelmezzük:

(1) ha $p \in F_0 \cup Z$, akkor $\text{sub}(p) = \{p\}$,

(2) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $\text{sub}(p) = \{p\} \cup \bigcup (\text{sub}(p_i) \mid i = 1, \ldots, m)$.

1.6. definíció. A $p(\in T_F(Z))$ fa root (p) *gyökerét* a következő két feltétellel adjuk meg:

(1) ha $p \in F_0 \cup Z$, akkor $\text{root}(p) = p$,

(2) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $\text{root}(p) = f$.

1.7. definíció. A $p(\in T_F(Z))$ fa $h(p)$ *magasságát* a következő összefüggésekkel értelmezzük:

(1) ha $p \in F_0 \cup Z$, akkor $h(p) = 0$,

(2) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $h(p) = \max(h(p_i) \mid i = 1, \ldots, m) + 1$.

A p fa 0 magasságú részfáit gyakran p leveleinek nevezik. Világos, hogy $h(p)$ nem más, mint a p-t reprezentáló gráfban a gyökértől a levelekig vezető utak hosszainak maximuma. Vegyük észre azt is, hogy egy részfának több előfordulása is lehet p-ben.

1.8. példa. Az 1.3. példában szereplő $p = \wedge (\vee (y, z), '(1))$ fa esetében $\text{sub}(p) = \{p, \vee (y, z), y, z, '(1), 1\}$, $\text{root}(p) = \wedge$ és $h(p) = 2$.

1.9. definíció. A $T_F(Z)$ halmaz részhalmazait Z *feletti F-erdőknek* hívjuk, a $T_{F,n}$ halmaz részhalmazait pedig *n-változós F-erdőknek* nevezzük. Egy halmazt *F-erdőnek* mondunk, ha n-változós F-erdő valamely $n (\geqq 0)$ mellett. Továbbá egy halmazt egyszerűen *erdőnek* hívunk, ha F-erdő valamely F-re.

Világos, hogy bármely n-változós F-erdő m-változós F-erdő is, amennyiben $m \geqq n$. Megjegyezzük, hogy T_F nem minden részhalmaza erdő.

Legyenek F és G olyan rangolt ábécék, amelyekre tetszőleges m ($\geqq 0$) esetén teljesülnek az $F_m \subseteq G_m$ tartalmazások. Akkor minden egyes (n-változós) F-fa (n-változós) G-fa is. Így az F-erdők egyidejűleg G-erdők is.

A jelen munkában a véges automatáknak egy olyan általánosított elméletét ismertetjük, amelynél a fák a bemenő szavak szerepét játsszák, az erdők pedig a nyelveknek felelnek meg.

2. §. *Faautomaták*

Ebben a paragrafusban értelmezzük a determinisztikus és nemdeterminisztikus faautomata, valamint a determinisztikus és nemdeterminisztikus felszálló faautomata fogalmát, és összehasonlítjuk őket felismerő kapacitásuk szempontjából. Először ismertetjük a tárgyalásunkhoz szükséges univerzális algebrai alapfogalmakat és jelöléseket.

Tekintsünk egy tetszőleges nem-üres A halmazt és egy m nemnegatív egész számot. Akkor minden egyes $f: A^m \to A$ leképezést az A-n értelmezett *m-változós*

műveletnek nevezünk. Legyen $F^{\mathfrak{A}}$ az A-n értelmezett műveletek valamely halmaza. Az $\mathfrak{A}=(A, F^{\mathfrak{A}})$ rendszert *univerzális algebrának* mondjuk.

Jelölje $F_m^{\mathfrak{A}}$ $(m=0, 1, \ldots)$ az összes m-változós $F^{\mathfrak{A}}$-beli művelet halmazát.

2.1. definíció. Legyen F $(=F_0 \cup F_1 \cup \ldots)$ műveleti szimbólumok egy halmaza. Az $\mathfrak{A}=(A, F^{\mathfrak{A}})$ univerzális algebrát *F-algebrának* nevezzük, ha az $F_m^{\mathfrak{A}}=\{f^{\mathfrak{A}} | f \in F_m\}$ összefüggés minden m-re teljesül. Azt mondjuk, hogy $f^{\mathfrak{A}}$ az f műveleti szimbólumnak $\mathfrak{A}$-ban való *realizáltja*. Továbbá A-t az $\mathfrak{A}$ univerzális algebra *alaphalmazának* hívjuk.

Ha nem forog fenn félreértés veszélye, akkor $f^{\mathfrak{A}}$-ból és $F^{\mathfrak{A}}$-ból elhagyjuk az $\mathfrak{A}$ indexet. Továbbá az univerzális algebrákat gót nagybetűkkel, alaphalmazaikat pedig a megfelelő latin nagybetűkkel jelöljük. Végül, ha anélkül tekintünk valamely F-algebrát, hogy F-et specifikálnánk, akkor egyszerűen univerzális algebráról beszélünk.

2.2. definíció. Tekintsünk egy $\mathfrak{A}$ F-algebrát és egy $p(\in T_{F,n})$ fát. A p által $\mathfrak{A}$-ban indukált $p^{\mathfrak{A}}$ *polinomon* az alábbi két feltételnek eleget tevő $p^{\mathfrak{A}}: A^n \to A$ leképezést értjük:

(1) ha $p = x_i$, $(1 \leqq i \leqq n)$, akkor $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$,

(2) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) =$

$$= f^{\mathfrak{A}}(p_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges elemek A-ból.

Ha nem vezet félreértéshez, akkor az $\mathfrak{A}$ indexet elhagyjuk $p^{\mathfrak{A}}$-ból.

Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ F-algebra *véges*, ha F rangolt ábécé és A véges. Másszóval $\mathfrak{A}$ véges, ha mind F, mind A véges.

2.3. definíció. Legyen F egy rangolt ábécé. Az $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ rendszert *n-változós (determinisztikus) F-automatának* nevezzük, ahol

(1) $\mathfrak{A}$ véges F-algebra, amely elemei az *állapotok*,

(2) $\mathbf{a} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$ $(a^{(i)} \in A;\ i = 1, \ldots, n)$ az $\mathbf{A}$ *kezdővektora*,

(3) A' $(\subseteq A)$ a *végállapotok* halmaza.

A következőkben, ha csak mást nem mondunk, az F-automatákat félkövér latin nagybetűkkel jelöljük. A megfelelő gót nagybetűk a hozzájuk tartozó F-algebrákat jelölik. A kezdővektorok jelölésére a megfelelő kövér latin kisbetűt használjuk. Feltételezzük, hogy a kezdővektor mindig n-dimenziós, komponenseit pedig zárójelbe tett felső indexekkel látjuk el. Az indexek az első n természetes szám halmazán futnak végig. Végül F-automatánk végállapotainak halmazát a vesszővel ellátott megfelelő latin nagybetűvel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *faautomata*, ha $\mathbf{A}$ egy n-változós F-automata valamely n természetes szám és F rangolt ábécé mellett.

Most megadjuk, hogy egy faautomata hogyan ismeri fel fák egy halmazát.

2.4. definíció. Legyen $\mathbf{A}$ F-automata. Akkor a

$$T(\mathbf{A}) = \{p | p \in T_{F,n}, p(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \in A'\}$$

halmazt az $\mathbf{A}$ által *felismert* erdőnek nevezzük.

A következőkben többször kényelmesebb lesz első lépésben egy olyan F-automatát megkonstruálnunk, amelyre a fák nem determinisztikus módon hatnak. Majd ennek a nemdeterminisztikus rendszernek a felhasználásával megadjuk a kívánt determinisztikus F-automatát. Ahelyett, hogy ezeket az eljárásokat az egyes bizonyításokban mindig megismételnénk, bevezetjük a nemdeterminisztikus faautomata fogalmát, és megmutatjuk, hogy ezzel nem növekszik a faautomata felismerő kapacitása.

Tekintsünk egy nemüres A halmazt és egy m nemnegatív egész számot. Akkor az $f: A^m \to P(A)$ leképezést az A-n értelmezett *nemdeterminisztikus m-változós műveletnek* nevezzük. Az $\mathfrak{A}=(A, F^{\mathfrak{A}})$ rendszert *nemdeterminisztikus algebrának* mondjuk, ha $F^{\mathfrak{A}}$ az A-n értelmezett bizonyos nemdeterminisztikus műveletek halmaza.

Megjegyezzük, hogy a nemdeterminisztikus algebrák lényegében nem mások, mint relációrendszerek.

Jelölje $F_m^{\mathfrak{A}}$ $(m=0, 1, \ldots)$ az $F^{\mathfrak{A}}$-beli összes m-változós nemdeterminisztikus művelet halmazát.

2.5. definíció. Az $\mathfrak{A}=(A, F^{\mathfrak{A}})$ nemdeterminisztikus algebrát *nemdeterminisztikus F-algebrának* nevezzük, ha tetszőleges m $(=0, 1, \ldots)$ esetén teljesül az $F_m^{\mathfrak{A}}=\{f^{\mathfrak{A}} | f \in F_m\}$ egyenlőség. Továbbá $f^{\mathfrak{A}}$-t f-nek $\mathfrak{A}$-ban való *realizáltjának* hívjuk.

A továbbiakban általában elhagyjuk az $\mathfrak{A}$ indexet $f^{\mathfrak{A}}$-ból és $F^{\mathfrak{A}}$-ból.

Most értelmezzük, hogy egy fát hogyan realizálunk egy nemdeterminisztikus algebrában.

2.6. definíció. A p $(\in T_{F,n})$ fának az $\mathfrak{A}=(A, F)$ nemdeterminisztikus algebrában való $p^{\mathfrak{A}}$ *realizáltján* a következő két feltételt kielégítő $p^{\mathfrak{A}}: P(A)^n \to P(A)$ leképezést értjük:

(1) ha $p = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, akkor $p^{\mathfrak{A}}(A_1, \ldots, A_n) = A_i$,

(2) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $p^{\mathfrak{A}}(A_1, \ldots, A_n) =$

$$= \cup (f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m) | b_i \in p_i^{\mathfrak{A}}(A_1, \ldots, A_n);\ i = 1, \ldots, m),$$

ahol $A_1, \ldots, A_n$ a $P(A)$ halmaz tetszőleges elemei.

Ha nem forog fenn félreértés veszélye, akkor az $\mathfrak{A}$ indexet elhagyjuk $p^{\mathfrak{A}}$-ból.

2.7. definíció. Legyen F rangolt ábécé. Az $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ rendszert *nemdeterminisztikus* (*nd*) *n-változós F-automatának* nevezzük, ahol

(1) $\mathfrak{A} = (A, F)$ nemdeterminisztikus véges F-algebra, amely elemeit *állapotoknak* hívjuk,

(2) $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ $(A^{(i)} \subseteq A;\ i = 1, \ldots, n)$ az $\mathbf{A}$ *kezdővektora*,

(3) $A' \subseteq A$ a *végállapotok* halmaza.

A 2.3. definíció után tett megjegyzéseinket a megfelelő módosításokkal a 2.7. definícióra is érvényesnek tekintjük.

2.8. definíció. Az $\mathbf{A}$ nd F-automatával *felismert* $T(\mathbf{A})$ erdőt a

$$T(\mathbf{A}) = \{p | p \in T_{F,n}, p(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \cap A' \neq \emptyset\}$$

egyenlőséggel értelmezzük.

A következő eredmény azt mutatja, hogy a nemdeterminisztikus faautomaták felismerő kapacitása megegyezik a determinisztikusokéval.

2.9. tétel. *Egy erdő akkor és csakis akkor ismerhető fel nemdeterminisztikus F-automatával, ha felismerhető determinisztikus F-automatával.*

Bizonyítás. Az elegendőség abból következik, hogy a determinisztikus faautomaták nemdeterminisztikusak is, továbbá, hogy a 2.8. definíciót determinisztikus faautomatákra alkalmazva a 2.4. definícióhoz jutunk.

A szükségesség bizonyításához legyen **A** egy nd F-automata. Konstruáljuk meg a **B** F-automatát a következő módon: $B=P(A)$, $\mathbf{b}=\mathbf{a}$, $B'=\{C|C\subseteq A,\ C\cap A'\neq\emptyset\}$, továbbá tetszőleges $f(\in F_m)$ és $B_1, \ldots, B_m (\in B)$ esetén legyen $f^{\mathfrak{B}}(B_1, \ldots, B_m)=f^{\mathfrak{A}}(B_1, \ldots, B_m)$. Nyilvánvaló, hogy **B** *determinisztikus* és $T(\mathbf{B})=T(\mathbf{A})$. □

Jelölje $R(F, n)$ az összes olyan erdő halmazát, amely felismerhető n-változós (determinisztikus) F-automatával. Az 1.1. tétel szerint $R(F, n)$ megyegyezik az n-változós nd F-automaták által felismerhető erdők halmazával. A továbbiakban R jelöli a faautomatákkal felismerhető erdők osztályát. Az R-beli erdőket *felismerhetőknek* fogjuk nevezni.

2.10. tétel. *Legyenek m és n olyan természetes számok, amelyekre teljesül az $m\geqq n$ egyenlőtlenség. Akkor az $R(F, m)\supseteq R(F, n)$ tartalmazás is érvényes.*

Bizonyítás. Legyen $T\in R(F, n)$, **A** pedig olyan n-változós F-automata, amely felismeri T-t, azaz $T=T(\mathbf{A})$. Konstruáljuk meg a következő m-változós **B** F-automatát: $B=A\cup\{*\}$ $(*\notin A)$, $\mathbf{b}=(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, *, \ldots, *)$, $B'=A'$, továbbá tetszőleges $f(\in F_k)$ és $b_1, \ldots, b_k$ esetén legyen

$$f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_k)=\begin{cases} f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k), & \text{ha} \quad b_1, \ldots, b_k\in A, \\ * \quad \text{különben.} \end{cases}$$

Világos, hogy $T(\mathbf{B})=T(\mathbf{A})=T$. □

A faautomatákat olyan rendszereknek tekinthetjük, amelyek egy adott fát annak leveleitől a gyökere felé haladva értékelnek ki. Természetes módon értelmezhetünk olyan felismerő rendszereket, amelyek adott fán a gyökértől a levelek felé, azaz felfelé haladnak. Az ilyen rendszereket felszálló faautomatáknak fogjuk nevezni. Ezek pontos értelmezéséhez szükségünk van a felszálló F-algebra fogalmára.

2.11. definíció. Legyen A tetszőleges nem-üres véges halmaz, F pedig műveleti szimbólumok halmaza. Az $\mathfrak{A}=(A, F^{\mathfrak{A}})$ rendszert *nemdeterminisztikus* (*nd*) *felszálló F-algebrának* nevezzük, ha $F^{\mathfrak{A}}=\{f^{\mathfrak{A}}|f\in F\}$ és bármely m $(\geqq 0)$ egész számra és $f(\in F_m)$-re $f^{\mathfrak{A}}$ az A halmaznak $P(A^m)$-be való leképezése, amennyiben $m>0$, és $f^{\mathfrak{A}}\subseteq A$, ha $m=0$.

Ha a fentiek mellett az is teljesül, hogy $m>0$ esetén $f^{\mathfrak{A}}$ az A halmaznak A^m-be való leképezése, és $f^{\mathfrak{A}}$ az A halmaz egyelemű részhalmaza, ha $m=0$, akkor $\mathfrak{A}$-t *determinisztikus felszálló F-algebrának* mondjuk.

Amennyiben nem vezet félreértéshez, akkor $f^{\mathfrak{A}}$-ban és $F^{\mathfrak{A}}$-ban elhagyjuk az $\mathfrak{A}$ indexet.

Az $\mathfrak{A}=(A, F)$ felszálló F-algebrát *végesnek* nevezzük, ha mind A, mind F véges.

2.12. definíció. Az $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, A', \mathbf{a})$ rendszert *n-változós nemdeterminisztikus* (*nd*) *felszálló F-automatának* nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

(1) $\mathfrak{A}$ véges nemdeterminisztikus felszálló F-algebra, amely elemeit *állapotoknak* hívjuk,

(2) $A'\subseteq A$ a *kezdőállapotok* halmaza,

(3) $\mathbf{a}=(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ $(A^{(i)}\subseteq A;\ i=1, \ldots, n)$ a *végállapot-vektor.*

Ha a 2.10. definícióban $\mathfrak{A}$ determinisztikus és $A'=\{a_0\}$ egyelemű részhalmaz, akkor *n-változós determinisztikus felszálló F-automatáról* beszélünk.

2.13. definíció. Tekintsünk egy **A** n-változós nd felszálló F-automatát. Értelmezzük az $\alpha^{\mathbf{A}}: T_{F,n} \to P(A)$ leképezést a következő módon:

(1) ha $p = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = A^{(i)}$,

(2) ha $p = f \in F_0$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = f^{\mathfrak{A}}$,

(3) ha $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = \{a \mid f(a) \cap \prod(\alpha^{\mathbf{A}}(p_i) \mid i = 1, \ldots, m) \neq \emptyset\}$.

2.14. definíció. Az **A** n-változós nd felszálló F-automatával felismerhető $T(\mathbf{A})$ erdőt a

$$T(\mathbf{A}) = \{p \mid p \in T_{F,n}, \alpha^{\mathbf{A}}(p) \cap A' \neq \emptyset\}$$

egyenlőséggel értelmezzük.

2.15. példa. Legyen $\mathfrak{A}=(A, F)$ azon nd felszálló F-algebra, amelyre $A=\{a, b, c, d, e\}$, $F_1=\{f\}$, $F_2=\{g\}$ és $F_0=F_k=\emptyset$, ha $k>2$. Továbbá teljesülnek az $f(c)=\{d, e\}$ és $g(a)=\{(b, c)\}$ összefüggések (a többi esetben $f(x)$ és $g(x, y)$ értéke legyen $\emptyset$). Akkor azon $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, A', \mathbf{a})$ 2-változós nd felszálló F-automata, amelyre $A'=\{a\}$ és $\mathbf{a}=(b, d)$, a $T(\mathbf{A})=\{g(x_1, f(x_2))\}$ egyelemű erdőt ismeri fel. Valóban az $\alpha^{\mathbf{A}}(p)$ értelmezése folytán $\{b\}=\alpha^{\mathbf{A}}(x_1)$, $\{d\}=\alpha^{\mathbf{A}}(x_2)$, $\{c\}=\alpha^{\mathbf{A}}(f(x_2))$ és $\{a\}=\alpha^{\mathbf{A}}(g(x_1, f(x_2)))$.

2.16. tétel. A nd felszálló automatákkal felismerhető erdők osztálya megegyezik R-rel.

Bizonyítás. Legyen **A** tetszőleges n-változós nd felszálló F-automata. Konstruáljunk meg egy **B** n-változós nd F-automatát a következő módon: $B=A$, $B'=A'$ és $\mathbf{b}=\mathbf{a}$, továbbá tetszőleges $f(\in F_m)$ és $c, c_1, \ldots, c_m (\in B)$ esetén $c \in f^{\mathfrak{B}}(c_1, \ldots, c_m)$ akkor és csakis akkor teljesüljön, ha $(c_1, \ldots, c_m) \in f^{\mathfrak{B}}(c)$, amennyiben $m>0$, és legyen $f^{\mathfrak{B}}=f^{\mathfrak{A}}$, ha $m=0$.

A $T(\mathbf{A})=T(\mathbf{B})$ egyenlőség igazolásához elegendő azt megmutatnunk, hogy tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ fára és a $(\in A=B)$ állapotra fennáll az

$$a \in p^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \Leftrightarrow a \in \alpha^{\mathbf{A}}(p)$$

ekvivalencia.

A bizonyítást $h(p)$ szerinti indukcióval végezzük.

Legyen $h(p)=0$, azaz $p=x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ vagy $p=f(\in F_0)$. Az első esetben a 2.13. definíció (1) feltétele alapján a kívánt $p^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})=A^{(i)}=\alpha^{\mathbf{A}}(p)$ egyenlőséghez jutunk. A második esetben a 2.13. definíció (2) feltételének felhasználásával a $p^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})=f^{\mathfrak{B}}=f^{\mathfrak{A}}=\alpha^{\mathbf{A}}(p)$ egyenlőséget kapjuk.

Most legyen $h(p)>0$ és $p=f(p_1, \ldots, p_m)$. Továbbá tegyük fel, hogy állításunkat minden olyan $q(\in T_{F,n})$ fára igazoltuk, amely eleget tesz a $h(q)<h(p)$ egyenlőtlenségnek. Az $a \in p^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ tartalmazás akkor és csakis akkor teljesül, ha léteznek olyan $a_i \in p_i^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ $(i=1, \ldots, m)$ állapotok, hogy $a \in f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_m)$. A **B** faautomata értelmezése folytán ezen utóbbi tartalmazás ekvivalens az $(a_1, \ldots, a_m) \in f^{\mathfrak{A}}$ (a) összefüggéssel. Továbbá indukciós feltevésünk szerint az $a_i \in p_i^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ $(i=1, \ldots, m)$ tartalmazások ekvivalensek az $a_i \in \alpha^{\mathbf{A}}(p_i)$ tartalmazásokkal, amiből az $\alpha^{\mathbf{A}}$ leképezés értelmezése folytán az adódik, hogy az $a \in$

$\in p^{\mathfrak{B}}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ és $a \in \alpha^{\mathbf{A}}(p)$ összefüggések ekvivalensek. Ezzel nyertük, hogy a nd felszálló automatákkal felismerhető erdők felismerhetők faautomatákkal is.

Fordítva, tekintsünk egy $\mathbf{B}$ n-változós nd F-automatát. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ n-változós nd felszálló F-automatát a következő módon: $A = B$, $A' = B'$ és $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, továbbá tetszőleges $f(\in F_m)$ és $a, a_1, \ldots, a_m (\in A)$ esetén $(a_1, \ldots, a_m) \in f^{\mathfrak{A}}(a)$ akkor és csakis akkor teljesüljön, ha $a \in f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_m)$, amennyiben $m > 0$, és legyen $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}}$, ha $m = 0$. Akkor a kapott $\mathbf{A}$-ra alkalmazva a bizonyítás első részében adott konstrukciót, a $\mathbf{B}$ automatához jutunk. Következésképpen érvényes a $T(\mathbf{B}) = T(\mathbf{A})$ egyenlőség. □

A következő példa azt mutatja, hogy a determinisztikus felszálló faautomatákkal felismerhető erdők osztálya R-nek *valódi* részosztálya.

2.17. példa. Legyen $F = F_2 = \{f\}$, és tekintsük azt az $\mathfrak{A} = (A, F)$ nd F-algebrát, amelyre $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ és $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1) = a_0$ teljesül. Továbbá legyen $\mathbf{A} = (\mathfrak{A}, \mathbf{a}, A')$ azon kétváltozós F-automata, amely kezdővektora az $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vektor, végállapotainak halmaza pedig az $A' = \{a_0\}$ egyelemű halmaz. Erre az A-ra teljesül a $T(\mathbf{A}) = \{f(x_1, x_2), f(x_2, x_1)\}$ egyenlőség. Mármost nyilvánvaló, hogy minden olyan $\mathbf{B}$ kétváltozós determinisztikus felszálló F-automatára, amely felismeri a $T(\mathbf{A})$ erdőt, fennáll a $(b_1, b_2) \in \alpha^{\mathbf{B}}(x_1) \cap \alpha^{\mathbf{B}}(x_2)$ tartalmazás, ahol $(b_1, b_2) = f(b_0)$. Ez viszont maga után vonja, hogy $f(x_1, x_1)$ és $f(x_2, x_2)$ is $T(\mathbf{B})$-ben van.

3. §. *Reguláris fanyelvtanok*

Jól ismert, hogy a véges automatákkal felismerhető nyelvek éppen a reguláris nyelvtanok, azaz a Chomsky-hierarchia 3. típusú nyelvtanai által generált nyelvek. Ebben a paragrafusban a megfelelő eredményt ismertetjük felismerhető erdők esetére.

3.1. definíció. Legyen F rangolt ábécé. A $\Gamma = (Q, F, P, S)$ rendszert *reguláris F-nyelvtannak* nevezzük, ahol Q a *nemterminális szimbólumok* véges nem-üres halmaza, $S (\subseteq Q)$ a *kezdőszimbólumok* halmaza, P pedig olyan *átírási szabályok* véges halmaza, amelyek az alábbi három alak egyikével rendelkeznek:

(1) $a \to x_i \quad (a \in Q, x_i \in X)$,

(2) $a \to f \quad (a \in Q, f \in F_0)$,

(3) $a \to f(a_1, \ldots, a_m) \quad (a, a_1, \ldots, a_m \in Q);\ f \in F_m;\ m \geqq 1)$.

A továbbiakban az $a \to w$ átírási szabályra az (a, w) jelölést is fogjuk használni.

Ha az (1) alakú átírási szabályokban előforduló x_i-k mindegyike X_n-be tartozik, akkor Γ-t az $F \cup X_n$ *terminális ábécével* rendelkező *n-változós reguláris F-nyelvtannak* hívjuk. Amikor nem sepcifikáljuk F-et, akkor *reguláris fanyelvtanról* beszélünk.

A Γ n-változós reguláris F-nyelvtan által generált nyelv értelmezéséhez vezessünk be a $T_F(Q \cup X_n)$ halmazon egy $\Rightarrow_\Gamma$ binér relációt a következő módon: $p \Rightarrow_\Gamma q$ akkor és csakis akkor teljesüljön, ha q a p fából úgy adódik, hogy p-ben valamely P-beli $b \to w$ átírási szabály b bal oldalát annak w jobb oldalával helyettesítjük. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy p *közvetlenül generálja* q-t (Γ-ban). A $\Rightarrow_\Gamma$ reláció reflexív-tranzitív lezártjára a $\Rightarrow_\Gamma^*$ jelölést használjuk. Ha a p és q fákra teljesül a $p \Rightarrow_\Gamma^* q$ reláció, akkor azt mondjuk, hogy p *generálja* q-t (Γ-ban). Világos, hogy a $p \Rightarrow_\Gamma^* q$ generálás akkor és csakis akkor teljesül, ha $p = q$ vagy létezik közvetlen generálásoknak egy

$$p \Rightarrow_\Gamma p_1 \Rightarrow_\Gamma p_2 \Rightarrow_\Gamma \ldots \Rightarrow_\Gamma p_{k-1} \Rightarrow_\Gamma q$$

véges lánca. Ha nem vezet félreértéshez, akkor egyszerűen a $\Rightarrow$ és $\Rightarrow^*$ jelöléseket használjuk a $\Rightarrow_\Gamma$ és $\Rightarrow_\Gamma^*$ relációkra.

3.2. definíció. A Γ nyelvtan által *generált erdőn* a

$$T(\Gamma) = \{p \mid p \in T_F,\ s \Rightarrow^* p,\ s \in S\}$$

halmazt értjük.

Nyilvánvaló, hogy az n-változós F-nyelvtanok n-változós F-erdőket generálnak.

3.3. tétel. *Egy T n-változós F-erdő akkor és csakis akkor felismerhető, ha T generálható n-változós F-nyelvtannal.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T-re teljesül a $T=T(\mathbf{A})$ egyenlőség valamely $\mathbf{A}$ n-változós F-automata mellett. Konstruáljuk meg a következő $\Gamma=(Q, F, P, S)$ n-változós F-nyelvtant. Legyen $Q=A$ és $S=A'$, P pedig álljon az alábbi átírási szabályokból:

(1) $a^{(i)} \to x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$,

(2) $a \to f \quad (f \in F_0 \text{ és } f^{\mathfrak{A}} = a)$,

(3) $a \to f(a_1, \ldots, a_m) \quad (f \in F_m;\ m \geqq 1;\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) = a)$.

A fák magassága szerinti indukcióval igazoljuk, hogy tetszőleges $p\ (\in T_{F,n})$ és $a\ (\in A)$ esetén a $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $a \Rightarrow_\Gamma^* p$. Ez az S halmaz megválasztása folytán maga után vonja a $T(\Gamma)=T$ egyenlőség érvényességét.

(i) Ha $p=x_i (\in X_n)$, akkor $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a^{(i)}$. Másrészt (1) miatt $a^{(i)} \Rightarrow_\Gamma x_i$, és fordítva.

(ii) Ha $p=f (\in F_0)$, akkor $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=f^{\mathfrak{A}}$. Állításunk most (2) miatt teljesül.

(iii) Legyen $p=f(p_1, \ldots, p_m)$, és tegyük fel, hogy állításunk a $h(p)$-nél kisebb magasságú fákra teljesül.

Tételezzük fel, hogy $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a$. Ez azt jelenti, hogy $f^{\mathfrak{A}}(p_1(\mathbf{a}), \ldots, p_m(\mathbf{a}))=a$. Következésképpen (3) alapján P tartalmazza az $a \to f(p_1^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, p_m^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}))$ átírási szabályt. Ebből a $p_i^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \Rightarrow^* p_i$ $(i=1, \ldots, m)$ indukciós feltevés felhasználásával a kívánt

$$a \Rightarrow f(p_1^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, p_m^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})) \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(p_1, \ldots, p_m) = p$$

deriváció hoz jutunk.

Ezen eljárás megfordításával látható be, hogy az $a \Rightarrow^* p$ deriváció érvényessége maga után vonja a $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a$ egyenlőség teljesülését, ami a $T(\Gamma)=T$ összefüggés bizonyításának befejezését jelenti.

Fordítva, tegyük fel, hogy $T=T(\Gamma)$ valamely $\Gamma=(Q, F, P, S)$ n-változós reguláris F-nyelvtanra. Konstruáljuk meg az $\mathbf{A}=(\mathfrak{A}, A', \mathbf{a})$ nd n-változós felszálló F-automatát a következő módon. Legyen $A=Q$ és $A'=S$, $A^{(i)}$ $(i=1, \ldots, n)$ pedig álljon az összes olyan a állapotból, amely előfordul egy P-beli $a \to x_i$ alakú átírási szabály bal oldalán. Továbbá tetszőleges $f (\in F_0)$ esetén $f^{\mathfrak{A}}$ elemei legyenek azok és csakis azok az a állapotok, amelyekhez található P-ben $a \to f$ alakú átírási szabály. Végül, $f (\in F_m,\ m \geqq 1)$-re $(a_1, \ldots, a_m) \in f^{\mathfrak{A}}(a)$ akkor és csakis akkor teljesüljön, ha az $a \to f(a_1, \ldots, a_m)$ szabály P-ben van. A fák magassága szerinti indukcióval ismét könnyen igazolható, hogy tetszőleges $p (\in T_{F,n})$ fára és $a (\in A)$ állapotra az $a \in \alpha^{\mathbf{A}}(p)$ tartalmazás akkor és csakis akkor érvényes, ha $a \Rightarrow^* p$, ami maga után vonja a $T(\mathbf{A})=T$ egyenlőséget. □

Olyan műveleteket vizsgálunk, amelyek alkalmazásával erdőkből újabb erdőkhöz jutunk. Először egy megjegyzést kell tennünk a rangolt ábécékre vonatkozóan. Az első paragrafusban megemlítettük, hogy amennyiben az F és G rangolt ábécékre teljesül az $F_m \subseteq G_m$ tartalmazás tetszőleges $m(\geqq 0)$ mellett, akkor minden egyes n-változós F-erdő egyidejűleg n-változós G-erdő is. Továbbá az is könnyen igazolható, hogy $R(F) \subseteq R(G)$. Ebből azonnal adódik, hogy ha a $T_1 \in R(F^{(1)}), \ldots, T_k \in R(F^{(k)})$ tartalmazások teljesülnek az $F_m^{(i)} \cap F_n^{(j)} = \emptyset$ $(i, j = 1, \ldots, k;\ m \neq n)$ összefüggést kielégítő rangolt ábécék mellett, akkor $T_1, \ldots, T_k$ felismerhető erdők egy közös F ábécé felett. Másrészt a 2.10. tétel alapján az is világos, hogy F-erdők bármely véges rendszerének elemei tekinthetők n-változós F-erdőknek alkalmas n-re. Ezért a következőkben az n-változós F-erdőkre megadott eredmények abban az általánosabb formában is megfogalmazhatók, amikor a vizsgált erdők különböző aritással vagy a fenti feltételeket kielégítő különböző rangolt ábécével rendelkeznek.

4.1. tétel. *Ha* $U, V \in R(F, n)$ *akkor* $U \cup V$, $U \cap V$ *és* $U - V$ *is* $R(F, n)$*-ben van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $U = T(\mathbf{A})$ és $V = T(\mathbf{B})$, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ n-változós F-automaták. A fenti három erdő mindegyikére megkonstruálunk egy őt felismerő n-változós F-automatát.

Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ F-algebrák *direkt szorzatán* azt az

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, F)$$

F-algebrát értjük, amely műveleteit komponensekként értelmezzük. Más szóval, ha $f \in F_m$ és $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m) \in A \times B$, akkor

$$f^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)) = (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m), f^{\mathfrak{B}}(b_1 \ldots, b_m)).$$

A $h(p)$ magasság szerinti indukcióval könnyen igazolható, hogy tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ és $\mathbf{c} = ((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ $(\in A \times B)$ esetén teljesül a $p^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}(\mathbf{c}) = (p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), p^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}))$ egyenlőség, ahol $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ és $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Tételünk bizonyításához az $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ direkt szorzat segítségével megkonstruálunk három automatát, amelyek a közös

$$\mathbf{c} = \left((a^{(1)}, b^{(1)}), \ldots, (a^{(n)}, b^{(n)})\right)$$

kezdővektorral rendelkeznek.

(1) Legyen $\mathbf{C}_1 = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mathbf{c}, C_1')$, ahol $C_1' = A' \times B \cup A \times B'$. Ekkor tetszőleges $p\,(\in T_{F,n})$-re $p^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}(\mathbf{c}) \in C_1'$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in A'$ vagy $p^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}) \in B'$. Így $T(\mathbf{C}_1) = U \cup V$.

(2) Legyen $\mathbf{C}_2 = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mathbf{c}, C_2')$, ahol $C_2' = A' \times B'$. Ekkor tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ esetén akkor és csakis akkor érvényes a $p^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}(\mathbf{c}) \in C_2'$ tartalmazás, ha $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in A'$ és $p^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}) \in B'$. Következésképpen $T(\mathbf{C}_2) = U \cap V$.

(3) Legyen $\mathbf{C}_3 = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mathbf{c}, C_3')$, ahol $C_3' = A' \times (B - B')$. Ebben az esetben tetszőleges $p(\in T_{F,n})$-re akkor és csakis akkor érvényes a $p^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}(\mathbf{c}) \in C_3'$ összefüggés, ha $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in A'$ és $p^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}) \notin B'$. Innen a $T(\mathbf{C}_3) = U - V$ egyenlőséghez jutunk. □

A fenti tételből következik, hogy $R(F, n)$ halmaztest $T_{F,n}$-ben. (Az U felismerhető erdő $T_{F,n} - U$ komplementuma természetesen felismerhető.) Megemlítjük azt is, hogy végtelenül sok felismerhető n-változós F-erdő egyesítése vagy metszete nem szükségképpen felismerhető.

Most a nyelvek szorzatának egy általánosítását adjuk.

4.2. definíció. Legyen $T \subseteq T_{F,n}$ és $T_1, \ldots, T_n \subseteq T_{F,k}$. A $T_1, \ldots, T_n$ erdőknek T-vel való $T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ *fa-konkatenációján* az alábbi módon értelmezett U erdőt értjük.

(1) ha $T = \{x_i\}\,(1 \leqq i \leqq n)$, akkor $U = T_i$,

(2) ha $T = \{f\}\,(f \in f_0)$, akkor $U = \{f\}$,

(3) ha $T = \{f(p_1, \ldots, p_m)\}$, akkor

$$U = f(\{p_1\}(X_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n), \ldots, \{p_m\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)),$$

(4) ha T tetszőleges, akkor

$$U = \bigcup(\{p\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) \mid p \in T).$$

A $T_1, \ldots, T_n$ erdőknek T-vel való fa-konkatenációját tehát úgy kapjuk, hogy T-beli fákban x_1 előfordulásait T_1-beli fákkal, x_2 előfordulásait T_2-beli fákkal és így folytatva végül x_n előfordulásait T_n-beli fákkal helyettesítjük. Természetesen x_i különböző előfordulásai különböző T_i-beli fákkal helyettesíthetők. Világos, hogy $T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) \in T_{F,k}$.

Amikor valamelyik i-re $(1 \leqq i \leqq n)$ $T_i = \{x_i\}$, akkor az $x_i \leftarrow T_i$ helyettesítést nem szükséges feltüntetni a $T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ jelölésben. Élve ezzel a lehetőséggel a $T(x_i \leftarrow U)$ fa-konkatenációt T-nek U-val való x_i-*szorzatának* hívjuk, és rá a $T \cdot_{x_i} U$ jelölést használjuk.

4.3. tétel. *Ha* $T \in R(F, n)$ *és* $T_1, \ldots, T_n \in R(F, k)$, *akkor* $T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) \in R(F, k)$. *Speciálisan tetszőleges* $T, U\,(\in R(F, n))$ *és* $i\,(=1, \ldots, n)$ *esetén teljesül a* $T \cdot_{x_i} U \in R(F, n)$ *tartalmazás.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T = T(\Gamma)$ és $T_i = T(\Gamma_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, ahol $\Gamma = (Q, F, P, S)$ reguláris n-változós F-nyelvtan és $\Gamma_i = (Q_i, F, P_i, S_i)$ reguláris k-változós F-nyelvtan.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $Q, Q_1, \ldots, Q_n$ páronként diszjunkt halmazok. Konstruáljuk meg a $\Gamma' = (Q', F, P', S')$ reguláris k-változós F-nyelvtant a következő módon:

(1) $Q' = Q \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$,

(2) $S' = S$,

(3) $P' = P'' \cup \{a \to w \mid (a, x_i) \in P, (\exists\, b \in S_i)((b, w) \in q_i\} \cup P_1 \cup \ldots \cup P_n$,

ahol P''-t úgy kapjuk, hogy P-ből elhagyjuk az összes $a \to x_i$ alakú átírási szabályt.

A fák magassága szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy tetszőleges $p\,(\in T_{F,k})$ és $a\,(\in Q)$ esetén teljesül a következő állítás:

$$(*) \qquad a \Rightarrow_{\Gamma'}^{*} p \Leftrightarrow (\exists\, q \in T_{F,n})(a \Rightarrow_{\Gamma}^{*} q) \wedge p \in \{q\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n).$$

Ebből következni fog tételünk bizonyítása, minthogy a $p \in T(\Gamma')$ tartalmazás akkor és csakis akkor érvényes, ha az $s \Rightarrow_{\Gamma'}^{*} p$ derivváció fennáll valamely $s\,(\in S')$-re, ami $(*)$ szerint ekvivalens egy olyan $q\,(\in T)$ fa létezésével, hogy $p \in \{q\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$, vagyis a $p \in T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ összefüggés teljesülésével.

(I) Tegyük fel, hogy $p = x_h\,(\in X_k)$.

(Ia) Ha van olyan q, hogy $a \Rightarrow_{\Gamma}^{*} q$ és $p \in \{q\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$, akkor q-nak meg kell egyeznie egy olyan $x_i\,(\in X_n)$ változóval, amely mellett érvényes az $x_h \in T_i$

tartalmazás. Ez (3) szerint azt jelenti, hogy az $a \to x_h$ átírási szabály P'-ben van, azaz fennáll az $a \Rightarrow^*_{\Gamma'} p$ deriváció.

(Ib) Ha érvényes az $a \Rightarrow^*_{\Gamma'} x_h$ deriváció, akkor szükségképpen van egy $a \to x_i$ alakú szabály P-ben és egy $b \to x_h$ $(b \in S_i)$ alakú szabály P_i-ben. Így $x_h \in T_i$. Következésképpen a $q = x_i$ megválasztás mellett teljesülnek a kívánt $a \Rightarrow_\Gamma x_i$ és $x_h \in \{x_i\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ összefüggések.

(II) Tegyük fel, hogy $p = f(\in F_0)$.

(IIa) Ha van olyan q, hogy $a \Rightarrow^*_\Gamma q$ és $p \in \{q\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ teljesül, akkor q-nak meg kell egyeznie egy olyan $x_i (\in X_n)$ változóval, amely mellett érvényes az $f \in T_i$ tartalmazás, vagy pedig $q = f$. A (3) feltétel szerint az $a \to f$ átírási szabály mindkét esetben P-ben van, azaz fennáll az $a \Rightarrow^*_{\Gamma'} p$ deriváció.

(IIb) Ha érvényes az $a \Rightarrow^*_{\Gamma'} f$ deriváció, akkor vagy van egy $a \to x_i$ alakú szabály P-ben és egy $b \to f(b \in S_i)$ alakú szabály P_i-ben, vagy az $a \to f$ szabály P-ben van. Az első esetben a $q = x_i$, a másodikban pedig a $q = f$ megválasztás mellett a kívánt összefüggésekhez jutunk.

(III) Legyen $p = f(p_1, \ldots, p_m)$, és tegyük fel, hogy a $(*)$ állítás érvényes minden olyan fára, amelynek magassága kisebb $h(p)$-nél.

(IIIa) Ha van olyan q, hogy $a \Rightarrow^*_\Gamma q$ és $p \in \{q\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ teljesül, akkor az alábbi két eset különböztethető meg:

(i) $q = x_i$ valamely i $(1 \leqq i \leqq n)$ esetén, a p fa pedig T_i-ben van. Ekkor $(a, x_i) \in P$ és van olyan b $(\in S_i)$, valamint $b_1, \ldots, b_m$ $(\in Q_i)$, hogy érvényesek a $(b, f(b_1, \ldots, b_m)) \in P_i$ és $b_j \Rightarrow^*_{\Gamma_i} p_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ összefüggések. Így $(a, f(b_1, \ldots, b_m)) \in P'$, vagyis fennáll a keresett

$$a \Rightarrow_{\Gamma'} f(b_1, \ldots, b_m) \Rightarrow_{\Gamma'} \ldots \Rightarrow_{\Gamma'} f(p_1, \ldots, p_m) = p$$

deriváció.

(ii) $q = f(q_1, \ldots, q_m)$. Ekkor minden i $(= 1, \ldots, n)$ esetén teljesül a $p_i \in \{q_i\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ tartalmazás, a q fának Γ-beli derivációja pedig

$$a \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(q_1, \ldots, q_m)$$

alakú, ahol $a_j \Rightarrow^*_\Gamma q_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Így az indukciós feltevés szerint az $a_j \Rightarrow^*_{\Gamma'} p_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ deriválciók is érvényesek. Minthogy az $a \to f(a_1, \ldots, a_m)$ átírási szabály P'-ben van, ezért p-nek az

$$a \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(p_1, \ldots, p_m)$$

Γ'-beli derivációjához jutunk.

(IIIb) Ha fennáll az $a \Rightarrow^*_{\Gamma'} p$ deriváció, akkor ismét két esetet különböztethetünk meg:

(i) Van olyan i $(1 \leqq i \leqq n)$ és b $(\in S_i)$, hogy teljesülnek az $(a, x_i) \in P$ és $b \Rightarrow^*_{\Gamma_i} p$ összefüggések. Ekkor a $q = x_i$ megválasztás mellett fennáll a $p \in \{q\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ tartalmazás.

(ii) Az $a \Rightarrow^*_{\Gamma'} p$ deriváció

$$a \Rightarrow_\Gamma f(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_{\Gamma'} \ldots \Rightarrow_{\Gamma'} f(p_1, \ldots, p_m)$$

alakú. Ekkor indukciós feltevésünk alapján minden egyes j $(1 \leqq j \leqq m)$ esetén létezik olyan $q_j (\in T_{F,n})$, hogy érvényes az $a_j \Rightarrow^*_\Gamma q_j$ deriváció és a $p_j \in \{q_j\}(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ tartalmazás. Így q-nak választhatjuk az $f(q_1, \ldots, q_m)$ fát. □

A következő művelet a nyelvekre értelmezett iteráció általánosítása.

4.4. definíció. Legyen $T(\subseteq T_{F,n})$ tetszőleges erdő, i $(1 \leqq i \leqq n)$ pedig természetes szám. Akkor T-nek x_i-*iteráltján* a $T^{*x_i} = \bigcup (T^{j,x_i} | 0 \leqq j < \omega)$ erdőt értjük, ahol $T^{0,x_i} = \{x_i\}$ és minden j $(=0, 1, \ldots)$ esetén érvényes a $T^{j+1,x_i} = T^{j,x_i} \cup T \cdot_{x_i} T^{j,x_i}$ egyenlőség.

4.5. tétel. *Ha $T \in R(F, n)$, akkor tetszőleges i $(=1, \ldots, n)$ esetén érvényes a $T^{*x_i} \in R(F, n)$ tartalmazás is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T = T(\Gamma)$, ahol $\Gamma = (Q, F, P, S)$ reguláris n-változós F-nyelvtan. Konstruáljuk meg azt a $\Gamma' = (Q', F, P', S')$ reguláris n-változós F-nyelvtant, amelyre

$$Q' = Q \cup \{*\}, S' = S \cup \{*\} \quad \text{és}$$

$$P' = P \cup \{* \to x_i\} \cup \{a \to w | (a, x_i) \in P, (\exists s \in S)((s, w) \in P)\}.$$

Az előző tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy a Γ' nyelvtanra teljesül a $T(\Gamma') = T^{*x_i}$ egyenlőség. □

4.6. definíció. Legyenek F és G rangolt ábécék. Tekintsük a $\gamma_0 : F \to G$ rangtartó leképezést. Terjesszük ki γ_0-t T_F-nek T_G-be való γ leképezésévé az alábbi módon:

(1) $\gamma(x_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

(2) $\gamma(f) = \gamma_0(f)$ $(f \in F_0)$,

(3) $\gamma(f(p_1, \ldots, p_m)) = \gamma_0(f)\,(\gamma(p_1), \ldots, \gamma(p_m))$.

Akkor γ-t T_F-nek T_G-be való *projekciójának* nevezzük.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\gamma(T_F) = T_G$.

A $\gamma : T_F \to T_G$ projekció tekinthető olyan műveletnek, amely az F-fák csúcsait átcimkézi G-beli szimbólumokkal.

4.7. tétel. *Legyen $T \in R(F, n)$, $\gamma : T_F \to T_G$ pedig projekció. Ekkor érvényes a $\gamma(T) \in R(G, n)$ tartalmazás.*

Bizonyítás. Legyen $T = T(\mathbf{A})$, ahol $\mathbf{A}$ alkalmas n-változós F-automata. Konstruáljuk meg azt a $\mathbf{B}$ n-változós nd G-automatát, amelyre $\mathfrak{B} = (A, G)$ és tetszőleges m $(\geqq 0)$ nemnegatív egész szám, $g(\in G_m)$ műveleti szimbólum és $a_1, \ldots, a_m (\in A)$ állapot esetén érvényes a

$$g^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_m) = \{f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) | f \in F, \gamma(f) = g\}$$

összefüggés. Továbbá legyen $\mathbf{b} = (\{a^{(1)}\}, \ldots, \{a^{(n)}\})$.

Megmutatjuk, hogy $T(\mathbf{B}) = \gamma(T)$.

A $T(\mathbf{B}) \subseteq \gamma(T)$ tartalmazás igazolásához elegendő azt megmutatnunk, hogy a $q \in T_{G,n}$ és $a \in q^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})$ összefüggések teljesülése esetén létezik olyan p $(\in T_{F,n})$ fa, amelyre fennállnak a $\gamma(p) = q$ és $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = a$ egyenlőségek. A bizonyítást $h(q)$ szerinti indukcióval végezzük.

(i) Ha $q = g(\in G_0)$, akkor $q^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}) = g^{\mathfrak{B}} = \{f^{\mathfrak{A}} | f \in F_0, \gamma(f) = g\}$.

Így létezik olyan p $(= f \in F_0)$, amelyre érvényesek a $\gamma(p) = q$ és $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = a$ egyenlőségek.

(ii) Ha $q = x_i (\in X_n)$, akkor p-nek is x_i-t kell választanunk.

(iii) Legyen $q = g(q_1, \ldots, q_m)$ és tegyük fel, hogy állításunk minden olyan n-változós G fára teljesül, amely magassága kisebb $h(q)$-nál. Minthogy $a \in q^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})$,

ezért léteznek olyan $a_i(\in q_i^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}), i=1, \ldots, m)$ állapotok, amelyek mellett érvényes az $a \in g(a_1, \ldots, a_m)$ tartalmazás. Így található az $a=f(a_1, \ldots, a_m)$ és $\gamma(f)=g$ egyenlőségeket kielégítő $f(\in F_m)$ műveleti szimbólum. Továbbá indukciós feltevésünk szerint minden egyes i $(=1, \ldots, m)$ esetén van olyan $p_i(\in T_{F,n})$, hogy $p_i^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a_i$ és $\gamma(p_i)=q_i$. Következésképpen a $p=f(p_1, \ldots, p_m)$ fa kielégíti a $\gamma(p)=q$ és $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=$ $=f(p_1(\mathbf{a}), \ldots, p_m(\mathbf{a}))=f(a_1, \ldots, a_m)=a$ egyenlőségeket.

A $\gamma(T) \subseteq T(\mathbf{B})$ tartalmazás bizonyításához elegendő azt megmutatnunk, hogy tetszőleges p $(\in T_{F,n})$ fára és a $(\in A)$ állapotra $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a$ maga után vonja az $a \in \gamma(p)^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})$ tartalmazás teljesülését. Ennek igazolása is $h(p)$ szerinti indukcióval történhet. □

Minden egyes $\gamma: T_F \to T_G$ projekcióhoz definiálhatjuk a γ^{-1} *inverz projekciót,* amely tetszőleges U n-változós G-erdőhöz a

$$\gamma^{-1}(U) = \{p \mid p \in T_{F,n}, \gamma(p) \in U\}$$

n-változós F-erdőt rendeli hozzá.

4.8. tétel. *Tetszőleges* $\gamma: T_F \to T_G$ *projekcióra és* $U(\in R(G, n))$ *erdőre teljesül a* $\gamma^{-1}(U) \in R(F, n)$ *tartalmazás; azaz a felismerhető erdők osztálya zárt az inverz projekció képzésére nézve.*

Bizonyítás. Legyen $U=T(\mathbf{A})$, ahol $\mathbf{A}$ n-változós G-automata. Definiáljuk a $\mathbf{B}=(\mathfrak{B}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automatát a következő módon: $\mathfrak{B}=(A, F)$ és

$$f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_m) = \gamma(f)^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)$$

tetszőleges m $(\geqq 0)$, $f(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m$ $(\in A)$ esetén. Könnyen igazolható, hogy $T(\mathbf{B})=\gamma^{-1}(U)$. □

5. §. *Kleene tétele és reguláris kifejezések*

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a véges automaták analízisét és szintézisét leíró Kleene-féle tétel természetes módon általánosítható faautomatákra. Ehhez szükségünk lesz a reguláris kifejezések egy általánosabb alakjára, a reguláris F-kifejezésekre.

5.1. definíció. *A reguláris F-kifejezések* halmazán azt a legszűkebb RE_F halmazt értjük, amely kielégíti a következő hat feltételt:

(1) $\emptyset \in RE_F$,

(2) ha $p \in T_F$, akkor $p \in RE_F$,

(3) ha $\alpha, \beta \in RE_F$, akkor $(\alpha+\beta) \in RE_F$,

(4) ha $\alpha, \beta \in RE_F$, akkor $(\alpha \cdot_i \beta) \in RE_F$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

(5) ha $\alpha \in RE_F$, akkor $(\alpha)^{*i} \in RE_F$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

(6) ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in RE_F$ és $f \in F_m$, akkor $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in RE_F$.

Amennyiben F nem nyer specifikálást, akkor *reguláris kifejezésről* beszélünk.

5.2. definíció. Az x_i $(1 \leqq i < \omega)$ változónak a γ reguláris F-kifejezésben való valamelyik előfordulását *kötöttnek* nevezzük, ha γ-nak $(\alpha \cdot_i \beta)$ alakú részkifejezésében α-ban szerepel. Ellenkező esetben az adott előfordulást *szabadnak* mondjuk

Egy változó *szabad* az α ($\in RE_F$) kifejezésben, ha van legalább egy szabad előfordulása α-ban.

Egy reguláris F-kifejezést *n-reguláris*nak nevezünk, ha összes szabad változója az X_n halmazba esik, ahol n a nemnegatív egész számok halmazán futhat végig.

A következő definícióval minden egyes reguláris F-kifejezésnek megfeleltetünk egy erdőt.

5.3. definíció. Az α reguláris F-kifejezés meghatároz egy $|\alpha|$ erdőt a következő módon:

(1) ha $\alpha = \emptyset$, akkor $|\alpha|$ az üres erdő,

(2) ha $\alpha = p(\in T_F)$, akkor $|\alpha| = \{p\}$,

(3) ha $\alpha = (\beta + \gamma)$, akkor $|\alpha| = |\beta| \cup |\gamma|$,

(4) ha $\alpha = (\beta \cdot_i \gamma)$, akkor $|\alpha| = |\beta| \cdot_{x_i} |\gamma|$,

(5) ha $\alpha = (\beta)^{*i}$, akkor $|\alpha| = |\beta|^{*x_i}$,

(6) ha $\alpha = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, akkor $|\alpha| = f(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|)$,

ahol $f(A_1, \ldots, A_m) = \{a | a = f(a_1, \ldots, a_m),\ a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Vegyük észre, hogy (6) megkapható (4) ismételt alkalmazásával.

Egy erdőt *n-reguláris*nak nevezünk, ha megadható n-reguláris kifejezéssel. Amennyiben n-t nem specifikáljuk, akkor *reguláris* erdőről beszélünk.

A következő eredmény a Kleene-féle tétel természetes általánosítása.

5.4. tétel. *Egy erdő akkor és csakis akkor reguláris, ha felismerhető faautomatával. Pontosabban egy n-változós erdőt felismerő faautomatához effektíve megadható az adott erdőt meghatározó n-reguláris kifejezés, és fordítva.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ tetszőleges n-változós F-automata. Megadunk egy olyan rekurzív eljárást, amely az $|\alpha| = T(\mathbf{A})$ egyenlőséget kielégítő α n-reguláris kifejezést szolgáltatja.

Tekintsük az $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, a_1, \ldots, a_k$ elrendezést, ahol $a_1, \ldots, a_k$ az A halmaz elemeinek egy felsorolása. (Emlékeztetünk arra, hogy $a^{(i)}$ az $\mathbf{a}$ kezdővektor i-ik komponensét jelöli.) Vezessük be az $m = n + k$ jelölést.

Tetszőleges $\mathbf{b} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_l})$ $(j_1 < \ldots < j_l \leqq k)$ vektor, a_i $(1 \leqq i \leqq k)$ elem és L ($\subseteq A$) részhalmaz esetén jelölje $T_{\mathbf{b}, a_i}^{L}$ az összes olyan p ($\in T_m$) fa halmazát, amely eleget tesz az alábbi három feltételnek:

(1) a p fában csak az $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+j_1}, \ldots, x_{n+j_l}\}$ halmazba eső változó fordul elő,

(2) $p(\mathbf{b}) = a_i$,

(3) ha $q \in \mathrm{sub}(p)$, $q \neq p$, $q \notin F_0$ és $q \neq x_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, akkor $q(\mathbf{b}) \in L$.

Továbbá tetszőleges $\mathbf{b} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_l})$ vektor és a_u $(1 \leqq u \leqq k)$ elem esetén legyen $\mathbf{b} \cup \{a_u\}$ az a vektor, amelyre

$$\mathbf{b} \cup \{a_u\} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_i}, a_u, a_{j_{i+1}}, \ldots, a_{j_l})$$

teljesül, ha $j_i < u < j_{i+1}$, és $\mathbf{b} \cup \{a_u\}$ legyen $\mathbf{b}$, amennyiben a_u előfordul az $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$ elemek között.

Megmutatjuk, hogy $T^L_{\mathbf{b},a_i}$ reguláris. Továbbá megadunk a $T^L_{\mathbf{b},a_i}$ erdőt meghatározó olyan α reguláris kifejezést, amelyben legfeljebb az $x_1, \ldots, x_n, x_{n+j_1}, \ldots, x_{n+j_l}$ változók lesznek szabadok. Ebből a $\mathbf{b}=(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$ megválasztással az 5.3. definíció (3) feltétele alapján azt kapjuk, hogy az

$$\cup(T^A_{\mathbf{b},a_i} \mid a_i \in A') = T(\mathbf{A})$$

erdő n-reguláris.

Bizonyításunkat L számossága szerinti indukcióval végezzük.

Ha $L=\emptyset$, akkor $T^L_{\mathbf{b},a_i}$ üres, vagy pedig olyan legfeljebb 1 magasságú fákból áll, amelyek változói az $X_n \cup \{x_{n+j_1}, \ldots, x_{n+j_l}\}$ halmazba eshetnek. Így $T^L_{\mathbf{b},a_i}$ mindkét esetben véges. Következésképpen az 5.3. definíció (1)–(3) lépéseinek felhasználásával megkapunk egy alkalmas reguláris kifejezést.

Most tegyük fel, hogy állításunkat igazoltuk az összes $\mathbf{b}$ és a_i, valamint az összes olyan L esetére, amely számossága nem nagyobb egy rögzített t számnál. Elegendő azt bizonyítanunk, hogy tetszőleges a_u $(u=1, \ldots, k)$ esetén érvényes a

$$(*) \qquad K^{L\cup\{a_u\}}_{\mathbf{b},a_i} = K^L_{\mathbf{b},a_i} \cup K^L_{\mathbf{b}\cup\{a_u\},a_i} \cdot_{x_{n+u}} \left(K^L_{\mathbf{b}\cup\{a_u\},a_u}\right)^{*x_{n+u}} \cdot_{x_{n+u}} K^L_{\mathbf{b},a_u}$$

összefüggés.

Jelölje K a $(*)$ egyenlőség jobb oldalát. Világos, hogy fennáll a $K \subseteq K^{L\cup\{a_u\}}_{\mathbf{b},a_i}$ tartalmazás.

A $K^{L\cup\{a_u\}}_{\mathbf{b},a_i} \subseteq K$ összefüggés igazolásához tekintsünk egy $p\left(\in K^{L\cup\{a_u\}}_{\mathbf{b},a_i}\right)$ fát. Ha bármely olyan $q\left(\in \mathrm{sub}\,(p)\right)$ esetén, amelyre $q \neq p$, $q \notin F_0$ és $q \neq x_j$ $(j=1, \ldots, m)$ teljesül, érvényes a $q(\mathbf{b}) \neq a_u$ egyenlőtlenség, akkor p a $K^L_{\mathbf{b},a_i}$ erdőben van. Ellenkező esetben

$$p \in \{p_1\} \cdot_{x_{n+u}} \{p_{21}, \ldots, p_{2l_2}\} \cdot_{x_{n+u}} \cdots \cdot_{x_{n+u}} \{p_{s-1,1}, \ldots, p_{s-1,l_{s-1}}\} \cdot_{x_{n+u}} \{p_{s1}, \ldots, p_{sl_s}\},$$

ahol $p_1 \in K^L_{\mathbf{b}\cup\{a_u\},a_i}$, $p_{21}, \ldots, p_{s-1l_{s-1}} \in K^L_{\mathbf{b}\cup\{a_u\}}$ és $p_{s1}, \ldots, p_{sl_s} \in K^L_{\mathbf{b},a_u}$. Ezzel az elegendőség bizonyítását befejeztük.

A szükségesség igazolásához az 5.1. és 5.3. definíciók alapján elegendő megmutatnunk a következő három állítás érvényességét.

I. Az üres erdő felismerhető n-változós F-automatával.

II. Tetszőleges $p(\in T_{F,n})$ fához létezik a $\{p\}=T(\mathbf{A})$ egyenlőséget kielégítő $\mathbf{A}$ n-változós F-automata.

III. Ha $T_1, T_2 \in R(F,n)$, akkor tetszőleges $i\,(=1, \ldots, n)$ esetén $T_1 \cup T_2$, $T_1 \cdot_{x_i} T_2$, $T_1^{*x_i} \in R(F,n)$ is teljesül.

Az I. állítás igazolásához elegendő olyan $\mathbf{A}$ n-változós F-automatát venni, amelyre A' az üres halmaz.

A II. állítás bizonyítására konstruáljuk meg az $\mathbf{A}$ n-változós F-automatát a következő módon: $A=X_n \cup \mathrm{sub}\,(p) \cup \{*\}$, továbbá tetszőleges $m(\geqq 0)$, $f(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m$ esetén

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \begin{cases} f(a_1, \ldots, a_m), & \text{ha } f(a_1, \ldots, a_m) \in \mathrm{sub}(p), \\ * \text{ különben.} \end{cases}$$

Végül legyen $\mathbf{a}=(x_1, \ldots, x_n)$ és $A'=\{p\}$. Ekkor nyilvánvalóan teljesül a $T(\mathbf{A})=\{p\}$ egyenlőség.

A III. állítás igazolását a 4. §-ban már elvégeztük. □

6. §. *Az R osztály Medvegyev-típusú jellemzése*

Ebben a paragrafusban a Kleene-féle reguláris nyelvek Medvegyev-típusú jellemzését általánosítjuk reguláris erdőkre.

6.1. definíció. Az

$$\text{nroot}: T_F - (X \cup F_0) \to \cup((F \cup X)^m | m \in r(F))$$

(next-to-root) függvényt az

$$\text{nroot}(f(p_1, \ldots, p_m)) = (\text{root}(p_1), \ldots, \text{root}(p_m))$$

összefüggéssel értelmezzük.

6.2. definíció. *Elemi erdőkön* az alábbi két típusba tartozó erdőket értjük:
(1) $U(F, n, d) = \text{root}^{-1}(d) \cap T_{F,n}$,
(2) $V(F, n, d_1, \ldots, d_m) = \text{nroot}^{-1}(d_1, \ldots, d_m) \cap T_{F,n}$, ahol $n\ (\geqq 0)$, $m\ (>0)$ és $d, d_1, \ldots, d_m\ (\in F \cup X_n)$ tetszőlegesek.

Világos, hogy $U(F, n, d)$ megegyezik az összes olyan n-változós F-fák halmazával, amelyek gyökere d-vel van cimkézve. Továbbá $V(F, n, d_1, \ldots, d_m)$ nem más, mint az olyan legalább egy magasságú n-változós F-fák halmaza, amelyek gyökere fölött közvetlenül rendre a $d_1, \ldots, d_m$ cimkével ellátott csúcsok vannak. Vegyük észre azt is, hogy $U(F, n, d) = f$, ha $d = f\ (\in F_0)$, és $U(F, n, d)$ megegyezik x_i-vel, amennyiben $d = x_i\ (\in X_n)$.

6.3. definíció. Az U erdő *restrikciójának* a $\text{rest}(U) = \{p | p \in U, \text{sub}(p) \subseteq U\}$ erdőt nevezzük.

6.4. definíció. Erdőkkel végzett *elemi műveleteken* az alábbi műveleteket értjük:
(1) (egy és ugyanazon F feletti) két erdő egyesítésének képzése,
(2) (egy és ugyanazon F feletti) két erdő metszetének képzése,
(3) erdő projekciójának képzése,
(4) erdő restrikciójának képzése.

6.5. definíció. Egy erdőt *reprezentálhatónak* nevezünk, ha előállítható elemi erdőkből elemi műveletek véges sokszor való alkalmazásával.

A következő eredmény a reguláris erdők Medvegyev-típusú jellemzését szolgáltatja.

6.6. tétel. *Egy erdő akkor és csakis akkor felismerhető, ha reprezentálható.*

Bizonyítás. Az elegendőség igazolására megmutatjuk, hogy az elemi erdők felismerhetők, továbbá, hogy a felismerhető erdők osztálya zárt az elemi műveletekre nézve.

Tekintsünk tetszőleges $U(F, n, d)$ erdőt. Ha $d \in F_0$ vagy $d \in X_n$, akkor a 6.2. definíció utáni megjegyzésünk szerint $U(F, n, d)$ véges, így felismerhető. Legyen $d \in F_m$ $(m>0)$. Ekkor

$$U(F,n,d) = \{d(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})\} \cdot_{x_{n+1}} T_{F,n} \cdot_{x_{n+2}} T_{F,n} \cdots \cdot_{x_{n+m}} T_{F,n},$$

azaz $U(F, n, d)$ ebben az esetben is felismerhető. Hasonlóan

$$V(F, n, d_1, \ldots, d_m) = \cup(\{f(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})\} \cdot_{x_{n+1}} U(F, n, d_1) \ldots$$
$$\ldots \cdot_{x_{n+m}} U(F, n, d_m) | f \in F_m, m>0)$$

is reguláris, mivel F_m csak véges sok m-re különbözhet az üres halmaztól.

A reguláris erdők osztályának az elemi műveletekre való zártságát a restrikció kivételével már korábban bizonyítottuk. A restrikció képzésére való zártság igazolásához tekintsünk egy $\mathbf{A}$ n-változós F-automatát, és vezessük be a $T=T(\mathbf{A})$ jelölést. Konstruáljuk meg a $\mathfrak{B}=(A\cup\{b_0\}, F)$ $(b_0\notin A)$ F-algebrát a következő módon: tetszőleges $m\,(\geqq 0)$, $f(\in F_m)$ és $b_1, \ldots, b_m\,(\in A\cup\{b_0\})$ esetén legyen

$$f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m) = \begin{cases} f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m), & \text{ha } f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m)\in A', \\ b_0 \text{ különben.} \end{cases}$$

Könnyen igazolható, hogy a $\mathbf{B}=(\mathfrak{B}, \mathbf{a}, A')$ n-változós F-automata a rest (T) erdőt ismeri fel.

Fordítva a szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy a T erdő felismerhető az $\mathbf{A}$ n-változós F-automatával. Tekintsük azt a G rangolt ábécét, amelyre teljesül a $G_m=F_m\times(A\cup X_n)^m$ $(m=1, 2, \ldots)$ és $G_0=F_0\times\{e\}$ egyenlőség. Most definiáljunk két U és V reprezentálható n-változós G-erdőt az alábbi módon. Az U erdő az $a^{(i)}\in A'$ tartalmazást kielégítő $\{x_i\}$ erdők és az $f^{\mathfrak{A}}(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_m)\in A'$ összefüggésnek eleget tevő $U(G, n, (f, c_1, \ldots, c_m))$ erdők egyesítése, ahol $\hat{c}_i=c_i$, ha $c_i\in A$, és $\hat{c}_i=a^{(j)}$, amennyiben $c_i=x_j$. (A $\hat{c}_i$ jelölést a bizonyítás hátralevő részében is használni fogjuk.) A V erdőt az összes olyan

$$V(G, n, u_1, \ldots, u_m)\cap U(G, n, (f, b_1, \ldots, b_m))$$

metszet egyesítéseként értelmezzük, ahol tetszőleges $i\,(=1, \ldots, m)$ esetén az alábbi két feltétel egyike teljesül:

(I) $u_i = x_j$ és $\hat{b}_i = a^{(j)}$ valamely $j\,(=1, \ldots, n)$-re,

(II) $u_i = (g, c_1, \ldots, c_k)\,(\in G_k)$ valamely k-ra és $b_i = g^{\mathfrak{A}}(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k)$.

Definiáljuk a

$$\pi: T_{G,n} \to T_{F,n}$$

projekciót a $\pi((f, b_1, \ldots, b_m))=f((f, b_1, \ldots, b_m)\in G)$ egyenlőséggel. Jelölje W a

$$W = U\cap \mathrm{rest}(V\cup G_0\cup X_n)$$

reprezentálható erdőt. Megmutatjuk, hogy teljesül a $T=\pi(W)$ összefüggés.

Legyen $p\in W$. Ha $p=(f, e)\,(\in G_0)$, akkor $\pi(p)=f$ és $f^{\mathfrak{A}}\in A'$, minthogy $p\in U$. Következésképpen $\pi(p)\in T$. Ha $p=x_i\,(\in X_n)$, akkor $p\in U$ miatt fennáll a $\pi(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=x_i^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=a^{(i)}\in A'$ összefüggés, azaz $\pi(p)\in T$.

A következőkben tételezzük fel, hogy $h(p)\geqq 1$. Először azt igazoljuk, hogy az összes ilyen p-re a $p\in\mathrm{rest}(V\cup G_0\cup X_n)$ tartalmazás maga után vonja a

$$(*) \qquad \pi(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = f^{\mathfrak{A}}(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m)$$

egyenlőség teljesülését, ahol $(f, b_1, \ldots, b_m)=\mathrm{root}\,(p)$. A bizonyítást $h(p)$ szerinti indukcióval végezzük.

(i) Ha $h(p)=1$, akkor a p fa

$$p = (f, b_1, \ldots, b_m)\,(u_1, \ldots, u_m)$$

alakú, ahol $m\geqq 1$ és $u_i\in G_0\cup X_n$ $(i=1, \ldots, m)$. Minthogy $p\in V$, ezért $\pi(u_i)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=\hat{b}_i$ $(i=1, \ldots, m)$. Következésképpen $\pi(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})=f^{\mathfrak{A}}(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m)$, amit igazolnunk kellett.

(ii) Most legyen a

$$p = (f, b_1, \ldots, b_m)\,(p_1, \ldots p_m)$$

fa rest $(V \cup G_0 \cup X_n)$-ben, és tegyük fel, hogy a $(*)$ állítás a $h(p)$-nél kisebb magasságú fákra teljesül. Ekkor

$$\pi(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = f^{\mathfrak{A}}(\pi(p_1)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, \pi(p_m)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})).$$

Annak bizonyítására, hogy p-re teljesül a $(*)$ egyenlőség, elegendő igazolnunk a $\pi(p_i)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = \hat{b}_i$ $(i=1, \ldots, m)$ összefüggések érvényességét. Ehhez az alábbi három esetet különböztetjük meg:

(α) Ha a p_i fa $(g, c_1, \ldots, c_k)(v_1, \ldots, v_k)$ alakú, akkor indukciós feltevésünk miatt fennáll a

$$\pi(p_i)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = g^{\mathfrak{A}}(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k)$$

egyenlőség. Továbbá $g^{\mathfrak{A}}(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k) = b_i = \hat{b}_i$ is teljesül, mivel a p fa V-ben van.

(β) Ha $p_i = x_j$ $(\in X_n)$, akkor $p \in V$ miatt érvényes a $\pi(p_i)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = a^{(j)} = \hat{b}_i$ egyenlőség.

(γ) Ha $p_i = (c, e)$ $(\in G_0)$, akkor $\pi(p_i)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = c^{\mathfrak{A}} = b_i = \hat{b}_i$.

Tekintsünk most W-ből egy olyan

$$p = (f, b_1, \ldots, b_m)(p_1, \ldots, p_m)$$

fát, amely magassága nagyobb 0-nál. Akkor a $(*)$ egyenlőség alapján a $p \in U$ tartalmazás miatt a

$$\pi(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = f^{\mathfrak{A}}(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m) \in A'$$

összefüggéshez jutunk, azaz $\pi(p) \in T$.

Végül igazoljuk, hogy $T \subseteq \pi(W)$. Ehhez a fák magassága szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy a $T_{F,n}$ erdőből vett tetszőleges t fához van rest $(V \cup G_0 \cup X_n)$-ben olyan p fa, hogy fennáll a $\pi(p) = t$ egyenlőség. Valóban

(1) ha $t = x_i$ $(\in X_n)$, akkor legyen $p = x_i$,

(2) ha $t = c$ $(\in F_0)$, akkor legyen $p = (c, e)$,

(3) legyen $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ és tegyük fel, hogy minden egyes t_i-hez $(i=1, \ldots, m)$ van rest $(V \cup G_0 \cup X_n)$-ben a $t_i = \pi(p_i)$ egyenlőséget kielégítő p_i fa. Ekkor legyen

$$p = (f, b_1, \ldots, b_m)(p_1, \ldots, p_m),$$

ahol $b_i = t_i^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$ $(i=1, \ldots, m)$. Erre a p fára teljesül a $\pi(p) = t$ és $p \in \text{rest}(V \cup G_0 \cup X_n)$ összefüggés.

Vegyünk most T-ből tetszőleges t fát és konstruáljuk meg hozzá p-t az előző módon. A $t \in \pi(W)$ tartalmazás igazolásához elegendő megmutatnunk, hogy a p fa U-ban van. Ehhez különböztessük meg a következő három esetet.

(i) Ha $t = x_i$, akkor $a^{(i)} \in A'$. Így U értelmezése folytán a $p = x_i$ fa U-ban van.

(ii) Ha $t = c$ $(\in F_0)$, akkor $c^{\mathfrak{A}} \in A'$. Következésképpen az $U(G, n, (c, e)) \subseteq U$ tartalmazás miatt a (c, e) fa U-ban van.

(iii) Ha $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, akkor $(*)$ felhasználásával az $f^{\mathfrak{A}}(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m) = \pi(p)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = t^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \in A'$ összefüggést kapjuk, azaz $p \in U$. □

7. §. *Nerode-féle kongruencia és minimális faautomaták*

Ebben a részben a reguláris erdőknek a faautomatáktól független jellemzését adjuk; továbbá megmutatjuk, hogy az egy és ugyanazon reguláris erdőt felismerő faautomaták osztályában létezik izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott minimális faautomata. Végül algoritmust adunk faautomaták minimalizálására.

Megjegyezzük, hogy a jelen paragrafusban szereplő faautomaták nem feltétlenül végesek.

7.1. definíció. Legyen F műveleti szimbólumok halmaza, n pedig tetszőleges nemnegatív egész szám. Tekintsük azt az $\mathfrak{A}=(T_{F,n}, F)$ F-algebrát, amelynek műveleteit az $f^{\mathfrak{A}}(p_1, \ldots, p_m)=f(p_1, \ldots, p_m)$ $(m\geqq 0, f\in F_m, p_1, \ldots, p_m\in T_{F,n})$ egyenlőséggel értelmezzük. A kapott $\mathfrak{A}$-t az X_n halmaz által (szabadon) generált *szabad F-algebrának* nevezzük. A továbbiakban erre a szabad F-algebrára a $\mathfrak{T}_{F,n}$ jelölést fogjuk használni.

Vegyük észre, hogy az $n=0$ esetben $\mathfrak{T}_{F,n}$ akkor és csakis akkor létezik, ha $F_0\neq\emptyset$.

7.2. definíció. Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ F-algebrák, $\varphi: A\to B$ pedig tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy φ *homomorfizmus*, ha tetszőleges $m\,(\geqq 0)$, $f\,(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m\,(\in A)$ esetén teljesül a

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_m))=f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$$

egyenlőség.

Ha φ bijektív, akkor *monomorfizmusról* beszélünk. Továbbá azt mondjuk, hogy $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{A}$ algebra *homomorf képe*, ha létezik $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re való homomorf leképezése. Amennyiben ebben az utóbbi esetben φ monomorfizmus is, akkor $\mathfrak{A}$-t $\mathfrak{B}$-vel *izomorfnak* nevezzük (jelölésben: $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$).

A következő eredmény azt mutatja, hogy a szabad F-algebrák bizonyos értelemben univerzálisak az F-algebrák között.

7.3. tétel. *Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges F-algebra, φ pedig X_n-nek A-ba való leképezése. Ekkor φ egyértelműen kiterjeszthető $\mathfrak{T}_{F,n}$-nek $\mathfrak{A}$-ba való homomorfizmusává.* □

7.4. definíció. Tekintsük az $\mathfrak{A}$ F-algebrát és az A halmazon értelmezett ϱ ekvivalencia-relációt. A ϱ relációt az $\mathfrak{A}$ algebra *kongruencia-relációjának* nevezzük, ha tetszőleges $m\,(\geqq 0)$, $f\,(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m\,(\in A)$ esetén $a_i\equiv b_i(\varrho)$ $(i=1, \ldots, m)$ maga után vonja az $f(a_1, \ldots, a_m)\equiv f(b_1, \ldots, b_m)(\varrho)$ kongruencia teljesülését.

Mint az jólismert az $\mathfrak{A}$ algebra A alaphalmazán értelmezett ϱ ekvivalencia-reláció A egy π_ϱ osztályozását indukálja a következő értelemben: két $a, b\,(\in A)$ elem akkor és csakis akkor van π_ϱ egy és ugyanazon osztályában, ha $a\equiv b(\varrho)$. A π_ϱ osztályozás $a(\in A)$-t tartalmazó osztályára az a/ϱ jelölést fogjuk használni. Továbbá legyen $A/\varrho=\{a/\varrho\,|\,a\in A\}$. Végül a π_ϱ osztályozást *kompatibilisnek* nevezzük, ha ϱ az $\mathfrak{A}$ algebra kongruencia-relációja.

Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges F-algebra, ϱ pedig $\mathfrak{A}$ kongruencia-relációja. Értelmezzük az $\mathfrak{A}/\varrho=(A/\varrho, F)$ F-algebrát az $f(a_1/\varrho, \ldots, a_m/\varrho)=f(a_1, \ldots, a_m)/\varrho$ $(m\geqq 0, f\in F_m, a_1, \ldots, a_m\in A)$ egyenlőséggel. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{A}/\varrho$ jóldefiniált. Az $\mathfrak{A}/\varrho$ algebrát a ϱ kongruencia-reláció által indukált *faktor-F-algebrának* nevezzük.

A következő eredmény egy adott algebra homomorf képei és faktor-algebrái közötti szoros kapcsolatot mutatja.

7.5. tétel. *Legyen $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{A}$ algebra homomorf képe. Ekkor $\mathfrak{B}$ izomorf $\mathfrak{A}$ egy faktor-algebrájával. Fordítva $\mathfrak{A}$ minden faktor-algebrája $\mathfrak{A}$-nak homomorf képe.* □

Most értelmezzük a faautomaták homomorfizmusát és izomorfizmusát.

7.6. definíció. Legyenek **A** és **B** tetszőleges F-automaták. Az A halmaznak B-re való φ leképezését az **A** automatának **B**-re való *homomorfizmusának* nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek.

(1) φ az $\mathfrak{A}$ algebrának $\mathfrak{B}$-re való homomorf leképezése,

(2) $\varphi(a^{(i)}) = b^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$,

(3) $\varphi(A') = B'$ és $\varphi^{-1}(B') = A'$.

Ha φ bijektív, akkor *izomorfizmusról* beszélünk, és azt mondjuk, hogy **A** izomorf **B**-vel (jelölésben: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$).

7.7. tétel. *Legyen* **B** *az* **A** *faautomata homomorf képe. Ekkor* $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$.

A bizonyítás rutin-számolással adódik. □

7.8. definíció. Tekintsük az **A** F-automatát és az A halmazon értelmezett ϱ ekvivalencia-relációt. ϱ-t **A** *kongruencia-relációjának* hívjuk, ha kielégíti a következő két feltételt:

(1) ϱ az $\mathfrak{A}$ algebra kongruencia-relációja,

(2) tetszőleges $a, b\ (\in A)$ állapotra az $a \equiv b(\varrho)$ és $a \in A'$ összefüggések egyidejű teljesülése maga után vonja a $b \in A'$ tartalmazást.

A kongruencia-reláció segítségével értelmezni tudjuk a faktor-faautomata fogalmát.

7.9. definíció. Legyen **A** F-automata, ϱ pedig **A** kongruencia-relációja. Akkor az $\mathbf{A}/\varrho = (\mathfrak{A}/\varrho, \mathbf{a}/\varrho, A'/\varrho)$ F-automatát a ϱ kongruencia-reláció által indukált *faktor-faautomatának* nevezzük, ahol $\mathbf{a}/\varrho = (a^{(1)}/\varrho, \ldots, a^{(n)}/\varrho)$ és $A'/\varrho = \{a/\varrho \mid a \in A'\}$.

Az alábbi eredmény a 7.5. tétel faautomatákra vonatkozó megfelelője.

7.10. tétel. Legyen **A** tetszőleges faautomata, **B** pedig **A** homomorf képe. Akkor **B** izomorf **A** valamely faktor-faautomatájával. Fordítva **A** minden egyes faktor-faautomatája **A** homomorf képe.

A bizonyítás egyszerű számolással adódik. □

A 7.10. tételből a 7.7. tétel felhasználásával az alábbi eredmény adódik.

7.11. következmény. *Legyen* **A** *faautomata,* **B** *pedig* **A** *faktor-faautomatája. Ekkor* $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$. □

Most algoritmust adunk egy rögzített reguláris erdőt felismerő minimális faautomaták meghatározására. Ehhez bizonyos előkészületeket kell végeznünk.

Legyen **A** tetszőleges n-változós F-automata. Definiáljuk A-n a $\varrho_{\mathbf{A}}$ relációt a következő módon: két $a, b\ (\in A)$ állapotra akkor és csakis akkor teljesüljön az $a \equiv b(\varrho_{\mathbf{A}})$ reláció, ha tetszőleges $m\ (\geqq 0)$, $p\ (\in T_{F,m})$, $i\ (1 \leqq i \leqq m)$ és $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m\ (\in A)$ esetén fennáll a

$$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in A' \Leftrightarrow p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in A'$$

ekvivalencia.

Világos, hogy $\varrho_{\mathbf{A}}$ olyan ekvivalencia-reláció, amelyre az $a \equiv b(\varrho_{\mathbf{A}})$ és $a \in A'$ összefüggések egyidejű teljesülése maga után vonja a $b \in A'$ tartalmazást.

Vegyük észre, hogy tetszőleges $m\ (\geqq 0)$, $p\ (\in T_{F,m})$ és $a_i \equiv b_i(\varrho_{\mathbf{A}})$ $(i = 1, \ldots, m)$ esetén érvényes a

$$p(a_1, \ldots, a_m) \in A' \Leftrightarrow p(b_1, \ldots, b_m) \in A'$$

ekvivalencia. Valóban, legyen $p(a_1, \ldots, a_m) \in A'$. Akkor $\varrho_{\mathbf{A}}$ értelmezése folytán a

$$p(b_1, a_2, a_3, \ldots, a_m), p(b_1, b_2, a_3, \ldots, a_m), \ldots, p(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m) \in A'$$

tartalmazásoknak is teljesülnie kell.

Két $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ és $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ vektor esetén a $\mathbf{b} \equiv \mathbf{c}(\varrho_{\mathbf{A}})$ jelölést használjuk, ha $b_i \equiv c_i(\varrho_{\mathbf{A}})$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Most megmutatjuk, hogy $\varrho_{\mathbf{A}}$ kongruencia-reláció. Ehhez vegyünk egy $m\ (\geqq 0)$ egész számot, $f\ (\in F_m)$ műveleti szimbólumot és $a_i \equiv a_i'(\varrho_{\mathbf{A}})$ $(i=1, \ldots, m)$ kongruenciákat. Bizonyításunkat indirekt úton végezzük, azaz feltesszük, hogy van olyan $k\ (\geqq 0)$, $p\ (\in T_{F,k})$, $j\ (1 \leqq j \leqq k)$ és $b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_k\ (\in A)$, amelyre érvényesek a

$$p(b_1, \ldots, b_{j-1}, f(a_1, \ldots, a_m), b_{j+1}, \ldots, b_k) \in A'$$

és

$$p(b_1, \ldots, b_{j-1}, f(a_1', \ldots, a_m'), b_{j+1}, \ldots, b_k) \notin A'$$

összefüggések. Tekintsük a $q=p(x_1, \ldots, x_{j-1}, f(x_j, \ldots, x_{j+m-1}), x_{j+m}, \ldots, x_{k+m-1})$ fát, valamint a $\mathbf{c}=(b_1, \ldots, b_{j-1}, a_1, \ldots, a_m, b_{j+1}, \ldots, b_k)$ és $\mathbf{c}'=(b_1, \ldots, b_{j-1}, a_1', \ldots, a_m', b_{j+1}, \ldots, b_k)$ vektorokat. Ekkor $q(\mathbf{c}) \in A'$ és $q(\mathbf{c}') \notin A'$, ami ellentmond a $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'(\varrho_{\mathbf{A}})$ feltevésnek.

Az $\mathbf{A}/\varrho_{\mathbf{A}}$ faktor-faautomatát az $\mathbf{A}$ faautomatához tartozó *redukált F-automatának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *redukált,* ha $\varrho_{\mathbf{A}}$ az egyenlőségi reláció A-n.

7.12. definíció. Az $\mathbf{A}$ F-automatát *összefüggőnek* nevezzük, ha bármely $a\ (\in A)$ előáll $a=p(\mathbf{a})$ alakban alkalmas $p\ (\in T_{F,n})$ mellett, azaz $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$ generálja $\mathfrak{A}$-t.

7.13. tétel. *Legyenek* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *összefüggő F-automaták. Úgy* $T(\mathbf{A})=T(\mathbf{B})$ *akkor és csakis akkor teljesül, ha* $\mathbf{A}/\varrho_{\mathbf{A}} \cong \mathbf{B}/\varrho_{\mathbf{B}}$.

Bizonyítás. Az elegendőség a 7.7. és 7.10. tételek alapján nyilvánvaló.

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy $T(\mathbf{A})=T(\mathbf{B})$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges két $p, q\ (\in T_{F,n})$ fára $p(\mathbf{a}) \equiv q(\mathbf{a})(\varrho_{\mathbf{A}})$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $p(\mathbf{b}) \equiv q(\mathbf{b})(\varrho_{\mathbf{B}})$. Ebből a $\varphi(p(\mathbf{a})/\varrho_{\mathbf{A}})=p(\mathbf{b})/\varrho_{\mathbf{B}}$ megválasztással a kívánt izomorfizmushoz jutunk.

Bizonyításunkat indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy $p(\mathbf{a}) \equiv q(\mathbf{a})(\varrho_{\mathbf{A}})$ és $p(\mathbf{b}) \not\equiv q(\mathbf{b})(\varrho_{\mathbf{B}})$ valamely $p, q\ (\in T_{F,n})$ mellett. Akkor létezik olyan $k\ (\geqq 0)$, $r\ (\in T_{F,k})$, $i\ (1 \leqq i \leqq k)$ és $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k\ (\in T_{F,n})$ amelyre $s=r(r_1, \ldots, r_{i-1}, p, r_{i+1}, \ldots, r_k)$ és $s'=(r_1, \ldots, r_{i-1}, q, r_{i+1}, \ldots, r_k)$ mellett fennáll az $s(\mathbf{b}) \in B' \Leftrightarrow s'(\mathbf{b}) \notin B'$ ekvivalencia. (Ennél a gondolatmenetnél felhasználtuk $\mathbf{B}$ összefüggő voltát, mivel hallgatólagosan feltételeztük, hogy B minden eleme előáll $r_i(\mathbf{b})$ alakban alkalmas $r_i\ (\in T_{F,n})$ mellett.) A fenti ekvivalencia maga után vonja $s(\mathbf{a}) \in A' \Leftrightarrow s'(\mathbf{a}) \notin A'$ teljesülését, ami ellentmond a $p(\mathbf{a}) \equiv q(\mathbf{a})(\varrho_{\mathbf{A}})$ feltételezésünknek. □

A 7.13. tételből az alábbi következményt kapjuk.

7.14. következmény. *Legyen* $T\ (\in R(F, n))$ *tetszőleges reguláris erdő. Jelölje* K_T *a* T *erdőt felismerő összefüggő n-változós F-automaták osztályát. Akkor* K_T*-ben létezik olyan — izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott —* $\mathbf{B}$ *automata, amely bármely* K_T*-beli* $\mathbf{A}$ *automata homomorf képe. Tetszőleges* K_T*-beli redukált automata választható* $\mathbf{B}$*-nek.* □

Vegyünk egy véges $\mathbf{A}$ F-automatát. Konstruáljuk meg a $\mathbf{B}$ F-automatát a következő módon: $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{A}$ algebra $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ elemei által generált részalgebrája, $\mathbf{b}=\mathbf{a}$ és $B'=A' \cap B$. Nyilvánvaló, hogy $T(\mathbf{B})=T(\mathbf{A})$. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ nem összefüggő, akkor $\mathbf{B}$-nek kevesebb állapota van. Így a 7.14. következmény szerint bármely T n-változós reguláris F-erdőhöz van olyan minimális n-változós F-automata, amely T-t ismeri fel. Végül tetszőleges redukált összefüggő faautomata minimális.

Most egy olyan algoritmust adunk, amely segítségével tetszőleges $\mathbf{A}$ véges faautomatához meghatározható $\varrho_{\mathbf{A}}$. Ezzel az előző megjegyzésünk szerint olyan algoritmushoz jutunk, amely alkalmas adott reguláris erdőt felismerő minimális faautomata meghatározására.

Legyen **A** tetszőleges véges n-változós F-automata. Definiáljuk A-n a ϱ_i ($i=0, 1, \ldots$) relációkat a következő módon. Tetszőleges $a, b\ (\in A)$ állapotokra teljesüljenek az alábbi összefüggések:

(1) $a \equiv b(\varrho_0) \Leftrightarrow (a \in A' \Leftrightarrow b \in A')$,

(2) $a \equiv b(\varrho_i)$ ($i>0$) akkor és csakis akkor, ha $a \equiv b(\varrho_{i-1})$ és $f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_m) \equiv f(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_m)(\varrho_{i-1})$, ahol $m\ (\geqq 0)$, $f(\in F_m)$, $j\ (1 \leqq j \leqq m)$ és $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m\ (\in A)$ tetszőlegesek.

Világos, hogy az ilyen módon értelmezett ϱ_i-k ekvivalencia-relációk. Továbbá, ha $i \geqq j$, akkor $\varrho_i \leqq \varrho_j$. Következésképpen létezik olyan k, hogy a $\varrho_k = \varrho_{k+j}$ egyenlőség tetszőleges j ($=0, 1, \ldots$) mellett teljesül. Megmutatjuk, hogy $\varrho_k = \varrho_A$. Könnyen igazolható, hogy tetszőleges $m\ (\geqq 0)$ és $p\ (\in T_{F,m})$ esetén a $h(p)=l$ és $a_i \equiv a_i'(\varrho_{k+l})$ ($i=1, \ldots, m$) összefüggések teljesülése maga után vonja a $p(a_1, \ldots, a_m) \equiv p(a_1', \ldots, a_m') \cdot (\varrho_k)$ kongruencia érvényességét. (Ennek bizonyítása l szerinti indukcióval történhet.)

Tegyük fel, hogy $a \equiv b(\varrho_k)$. Vegyünk tetszőleges $m\ (\geqq 0)$ és $i\ (1 \leqq i \leqq m)$ egész számot, valamint $p\ (\in T_{F,m})$ fát és $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m\ (\in A)$ állapotokat. Akkor $a \equiv b(\varrho_{k+h(p)})$ és $a_j \equiv a_j(\varrho_{k+h(p)})$ ($j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$). Így $p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_m) \equiv p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_m)(\varrho_k)$, vagyis $\varrho_k \leqq \varrho_0$ miatt $p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_m) \equiv p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_m)(\varrho_0)$. Következésképpen $a \equiv b(\varrho_A)$.

Fordítva megmutatjuk, hogy tetszőleges $a, b\ (\in A)$ állapotok és $i\ (=0, 1, \ldots)$ szám esetén, ha $a \not\equiv b(\varrho_i)$, akkor van a $p(a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in A' \Leftrightarrow p(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_m) \notin A'$ ekvivalenciát kielégítő $m\ (\geqq 0)$ és $j\ (1 \leqq j \leqq m)$ egész szám, valamint $p\ (\in T_{F,m})$ fa és $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m\ (\in A)$ állapot. Ennek igazolását i szerinti indukcióval végezzük. Ha $i=0$, akkor a $p=x_j$ megválasztás alkalmas. Tegyük fel, hogy állításunkat bebizonyítottuk valamely rögzített $i\ (\geqq 0)$ indexig, és legyen $a \not\equiv b(\varrho_{i+1})$. Ha $a \not\equiv b(\varrho_i)$ is fennáll, akkor az indukciós feltevés alapján készen vagyunk a bizonyítással. Az ellenkező esetben létezik olyan $l\ (\geqq 0)$, $f\ (\in F_l)$, $1 \leqq u \leqq l$) és $b_1, \ldots, b_{u-1}, b_{u+1}, \ldots, b_l\ (\in A)$, hogy $f(b_1, \ldots, b_{u-1}, a, b_{u+1}, \ldots, b_l) \not\equiv f(b_1, \ldots, b_{u-1}, b, b_{u+1}, \ldots, b_l)(\varrho_i)$. Ekkor ismét az indukciós feltevés miatt található olyan $m\ (\geqq 0)$, $p\ (\in T_{F,m})$, $j\ (1 \leqq j \leqq m)$ és $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m\ (\in A)$, hogy

$$p(a_1, \ldots, a_{j-1}, f(b_1, \ldots, b_{u-1}, a, b_{u+1}, \ldots, b_l), a_{j+1}, \ldots, a_m) \in A' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(a_1, \ldots, a_{j-1}, f(b_1, \ldots, b_{u-1}, b, b_{u+1}, \ldots, b_l), a_{j+1}, \ldots, a_m) \notin A'.$$

Ez azt jelenti, hogy a $q = p(x_1, \ldots, x_{j-1}, f(x_j, \ldots, x_{j+l-1}), x_{j+l}, \ldots, x_{m+l-1})$ fa, valamint a

$$c_v = \begin{cases} a_v, & \text{ha} \quad 1 \leqq v < j, \\ a_{v-l+1}, & \text{ha} \quad j+l \leqq v \leqq m+l-1, \\ b_{v-j+1}, & \text{ha} \quad j \leqq v < j+l \quad \text{és} \quad v \neq j+u-1 \end{cases}$$

összefüggésekkel értelmezett $c_1, \ldots, c_{j+u-2}, c_{j+u}, \ldots, c_{m+l-1}$ sorozat alkalmas bizonyításunk befejezéséhez.

Vegyünk egy $T\ (\subseteq T_{F,n})$ erdőt, és értelmezzük $T_{F,n}$-en a ϱ_T relációt a következő módon: tetszőleges két $q, q'\ (\in T_{F,n})$ fára akkor és csakis akkor teljesüljön a $q \equiv q'(\varrho_T)$ kongruencia, ha bármely $m\ (\geqq 0)$, $p\ (\in T_{F,m})$, $i\ (1 \leqq i \leqq m)$ és $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m\ (\in T_{F,n})$ esetén fennáll a

$$p(p_1, \ldots, p_{i-1}, q, p_{i+1}, \ldots, p_m) \in T \Leftrightarrow p(p_1, \ldots, p_{i-1}, q', p_{i+1}, \ldots, p_m) \in T$$

ekvivalencia.

Tekintsük az (esetek többségében végtelen) $\mathbf{T}_{F,n}=(\mathfrak{T}_{F,n}, \mathbf{t}_{F,n}, T'_{F,n})$ n-változós F-automatát, ahol $\mathbf{t}_{F,n}=(x_1, \ldots, x_n)$ és $T'_{F,n}=T$. (Jegyezzük meg, hogy $T_{F,0}$ csak akkor létezik, ha $F_0 \neq \emptyset$.) Akkor $\varrho_T=\varrho_{\mathbf{T}_{F,n}}$. Következésképpen ϱ_T a $\mathbf{T}_{F,n}$ faautomata kongruencia-relációja. A ϱ_T relációt *Nerode-féle kongruenciának* nevezzük.

7.15. tétel. *A $T(\subseteq T_{F,n})$ erdőre a következő három állítás ekvivalens:*
(1) *T felismerhető,*
(2) *ϱ_T véges indexű,*
(3) *T előáll a $\mathfrak{T}_{F,n}$ algebra valamely véges indexű ϱ kongruencia-relációja bizonyos osztályainak egyesítéseként.*

Bizonyítás. (1)⇒(2). Tekintsük a $T(\mathbf{A})=T$ egyenlőséget kielégítő n-változós összefüggő F-automatát. Akkor a $\mathbf{T}_{F,n}/\varrho_T$ faktor-faautomata $\mathbf{A}$-nak homomorf képe. Következésképpen $\mathbf{T}_{F,n}/\varrho_T$ véges, azaz ϱ_T véges indexű.

(2)⇒(3) nyilvánvaló, mivel a $p \equiv q(\varrho_T)$ és $p \in T$ összefüggések maguk után vonják a $q \in T$ tartalmazást.

(3)⇒(1). A (3) állítás szerint ϱ a $\mathbf{T}_{F,n}$ faautomatának is kongruencia-relációja. Így a 7.11. következmény alapján $\mathbf{T}_{F,n}/\varrho$ a kívánt faautomata lesz. □

8. §. *Egyenletrendszerek $R(F, n)$ felett*

Ebben a paragrafusban a reguláris nyelveknek bizonyos egyenletrendszerek fixpont-megoldásaival való előállításait általánosítjuk reguláris erdőkre.

A következőkben bevezetésre kerülő fogalmak többsége tetszőleges univerzális algebrára értelmezhető. Ez azonban a tárgyalásmódot technikailag nagyon bonyolulttá tenné anélkül, hogy számottevő új eredményhez jutnánk. Ennek megfelelően a jelen részben csupán az X_n halmaz által generált $\mathfrak{T}_{F,n}$ szabad algebrával foglalkozunk.

Tárgyalásainkban szükségünk lesz a teljes háló fogalmára.

8.1. definíció. Az L halmazt *teljes hálónak* nevezzük, ha rajta értelmezve van egy $\leqq$ parciális rendezés, amely mellett L bármely L' részhalmazának létezik legkisebb felső (és legnagyobb alsó) korlátja L-ben. Az L' részhalmaz legkisebb felső korlátját $\bigvee(a|a \in L')$, legnagyobb alsó korlátját pedig $\bigwedge(a|a \in L')$ fogja jelölni. Ha $L'=\{a_1, \ldots, a_k\}$, azaz véges, akkor az $a_1 \vee \ldots \vee a_k$ és $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ jelöléseket is használjuk. Teljes hálónak mindig van legnagyobb és legkisebb elem, ezeket rendre 1-gyel és 0-val jelöljük.

Azt mondjuk, hogy az $f: L \to L$ leképezés *monoton,* ha tetszőleges $a, b\ (\in L)$ elemekre $a \leqq b$ maga után vonja az $f(a) \leqq f(b)$ egyenlőtlenség teljesülését.

Legyen $V=\{v_1, v_2, \ldots\}$ változók olyan halmaza, amely diszjunkt X-szel. Ebben a részben V-beli változóknak, mint fáknak, mindig a -1 magasságot feleltetjük meg, azaz $h(v)=-1$ $(v \in V)$, a $T_F(X_n \cup V_k)$-ból vett többi fa magasságát pedig az 1.7. definícióval adjuk meg.

Tekintsünk egy $p\big(\in T_F(X_n \cup V_k)\big)$ fát, valamint a $p_1, \ldots, p_k\big(\in T_F(X_n \cup V_k)\big)$ fákat. Akkor azt a fát, amelyet p-ből úgy kapunk, hogy benne az összes v_i $(i=1, \ldots, k)$ változó minden egyes előfordulását p_i-vel helyettesítjük, $p_V(p_1, \ldots, p_k)$ fogja jelölni.

Vegyük a $T\big(\subseteq T_F(X_n \cup V_k)\big)$ erdőt. Akkor $\mathfrak{T}_{F,n}T$ a $P(T_{F,n})^k$ halmaznak $P(T_{F,n})$-be való azon leképezése, amelyet a

$$\mathfrak{T}_{F,n}T(A_1, \ldots, A_k) = T(v_1 \leftarrow A_1, \ldots, v_k \leftarrow A_k)$$

egyenlőséggel értelmezünk, ahol $A_1, \ldots, A_k \subseteq T_{F,n}$.

8.2. definíció. Az $\mathscr{E}: v_i = T_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ sorozatot *egyenletrendszernek* nevezzük, ahol $v_i \in V_k$, T_i a $T_F(X_n \cup V_k)$ halmaz véges nem-üres részhalmaza, a $T_1, \ldots, T_k$ rendszer pedig a $T_F(X_n \cup V_k)$ halmaz összes 0 magasságú fáiból álló részhalmazának egy felosztása.

8.3. definíció. Az $\mathscr{E}: v_i = T_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ egyenletrendszernek megfeleltetjük azt a $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E} : P(T_{F,n})^k \to P(T_{F,n})^k$ *rendszerfüggvényt,* amelyet a

$$\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}(A_1, \ldots, A_k) = (B_1, \ldots, B_k) \Leftrightarrow B_i = \mathfrak{T}_{F,n} T_i(A_1, \ldots, A_k)$$

ekvivalenciával értelmezünk, ahol $A_i, B_i \subseteq T_{F,n}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Legyen L az a teljes háló, amely tartóhalmaza a $P(T_{F,n})^k$ halmaz, a rendezést pedig a komponensenkénti halmazelméleti tartalmazás szolgáltatja. (Az L háló 0 eleme az a vektor, amelynek minden egyes komponense az üres halmaz.) Mivel $\mathfrak{T}_{F,n}T$ $(T \subseteq T_F(X_n \cup V_k))$ rendezéstartó, ezért $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}$ az L háló monoton leképezése. Így teljesülnek a $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^j(0) \leqq (\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^{j+1}(0)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ egyenlőtlenségek. Továbbá az is könnyen belátható, hogy fennáll a

$$(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})(\cup((\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^j(0) \mid j = 0, 1, \ldots)) = \cup((\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^j(0) \mid j = 0, 1, \ldots)$$

egyenlőség. A következőkben az $\cup((\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^j(0) \mid j = 0, 1, \ldots)$ egyesítésre a $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ jelölést fogjuk használni. Az előbbi egyenlőség miatt $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ a $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}$ leképezés fixpontja. Minthogy 0 kisebb vagy egyenlő $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}$ bármelyik fixpontjánál és $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}$ monoton, ezért $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ a $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}$ leképezés minimális fixpontja.

8.4. definíció. Az $\mathscr{E}: v_i = T_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ egyenletrendszert *redukáltnak* nevezzük, ha $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ egyetlen komponense sem az üres halmaz.

Most rátérünk paragrafusunk fő eredményének ismertetésére és bizonyítására.

8.5. tétel. *Legyen* $\mathscr{E}: v_i = T_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ *redukált egyenletrendszer. Akkor* $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ *komponenseinek halmaza* $\mathfrak{T}_{F,n}$ *kompatibilis osztályozása. Fordítva* $\mathfrak{T}_{F,n}$ *bármely* $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ *kompatibilis osztályozásához van olyan* $\mathscr{E}: v_i = T_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ *redukált egyenletrendszer, hogy teljesül a* $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega = \pi$ *egyenlőség.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega = (B_1, \ldots, B_k)$. Minthogy $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ a $\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E}$ leképezés fixpontja, ezért a $p \in B_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ tartalmazás akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan p' $(\in T_i)$, hogy $p \in p'_V(B_1, \ldots, B_k)$. Ezt az állítást a következőkben hivatkozás nélkül fogjuk felhasználni.

Most megmutatjuk, hogy $\{B_1, \ldots, B_k\}$ a $\mathfrak{T}_{F,n}$ algebra kompatibilis osztályozása. Az nyilvánvaló, hogy B_i-k $(i = 1, \ldots, k)$ egyike sem üres, mivel $\mathscr{E}$ redukált.

Bebizonyítjuk azt is, hogy fennáll az $\cup(B_i \mid i = 1, \ldots, k) = T_{F,n}$ egyenlőség. Ezt a p $(\in T_{F,n})$ fák $h(p)$ magassága szerinti indukcióval mutatjuk meg. Ha $h(p) = 0$, akkor $p = f$ $(\in F_0)$ vagy $p = x_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$. Mivel a $T_F(X_n \cup V_k)$ halmaz minden egyes 0 magasságú fája benne van valamelyik T_i-ben, ezért van olyan u és v $(1 \leqq u, v \leqq k)$, hogy $f \in T_u$ és $x_j \in T_v$. Következésképpen p benne van a B_u vagy B_v halmaz valamelyikében.

Most tegyük fel, hogy állításunkat mindazon $T_{F,n}$-beli fákra igazoltuk, amelyek magassága nem nagyobb egy rögzített l-nél. Tekintsük az $l+1$ magasságú p fát. Akkor p előáll $p = f(p_1, \ldots, p_m)$ alakban, ahol $f \in F_m$ és $p_1, \ldots, p_m \in T_{F,n}$. Indukciós feltevésünk szerint van olyan $j_1, \ldots, j_m$ $(1 \leqq j_1, \ldots, j_m \leqq k)$, hogy $p_1 \in B_{j_1}, \ldots, p_m \in B_{j_m}$. Másrészt az $\mathscr{E}$ egyenletrendszer definíciója alapján $f(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m})$ benne van valamely T_j-ben $(1 \leqq j \leqq k)$. (Vegyük észre, hogy $f(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m})$ magassága 0, mivel a v_i változók magasságát -1-nek választottuk.) Így teljesül a $p \in B_j$ tartalmazás.

A következőként azt igazoljuk, hogy a B_i $(i=1, \ldots, k)$ halmazok páronként diszjunktak. A bizonyítást ismét a $T_{F,n}$-beli fák magassága szerinti indukcióval végezzük.

Legyen $h(p)=0$. Akkor $p=f(\in F_0)$ vagy $p=x_j$ $(1\leqq j\leqq n)$. Tegyük fel, hogy $p\in B_u\cap B_v$ valamely u, v $(1\leqq u, v\leqq k)$ mellett. Akkor találhatók olyan p' $(\in T_u)$ és p'' $(\in T_v)$ fák, hogy teljesülnek a $p\in p'_V(B_1, \ldots, B_k)$ és $p\in p''_V(B_1, \ldots, B_k)$ tartalmazások. Minthogy $p=f(\in F_0)$ vagy $p=x_j$ $(1\leqq j\leqq n)$, ezért $p\in p'_V(B_1, \ldots, B_k)$ maga után vonja a $p=p'$ egyenlőséget. Hasonlóan látható be, hogy $p=p''$. Ebből pedig az egyenletrendszer definíciója alapján az $u=v$ egyenlőséghez jutunk.

Tegyük fel, hogy egy rögzített l-nél nem nagyobb magasságú $p(\in T_{F,n})$ fákra már bebizonyítottuk, hogy valahányszor $p\in B_u\cap B_v$ teljesül, mindannyiszor $u=v$. Legyen p magassága $l+1$. Találhatók olyan (0 magasságú) p' $(\in T_u)$ és p'' $(\in T_v)$ fák, hogy $p\in p'_V(B_1, \ldots, B_k)$ és $p\in p''_V(B_1, \ldots, B_k)$. Ezen p' és p'' fa rendre $p'=g'(v_{i_1}, \ldots, v_{i_s})$ és $p''=g''(v_{r_1}, \ldots, v_{r_t})$ alakú kell hogy legyen. Minthogy $p\in p'_V(B_1, \ldots, B_k)$, ezért fennáll a $p=g'(p_{i_1}, \ldots, p_{i_s})$ egyenlőség alkalmas $p_{i_1}\in B_{i_1}, \ldots, p_{i_s}\in B_{i_s}$ fák mellett. Hasonlóan teljesül a $p=g''(p_{r_1}, \ldots, p_{r_t})$ $(p_{r_1}\in B_{r_1}, \ldots, p_{r_t}\in B_{r_t})$ egyenlőség is. Ebből pedig a fák egyértelmű előállíthatósága miatt az $s=t$, $g'=g''$ és $p_{i_1}=p_{r_1}, \ldots, p_{i_s}=p_{r_s}$ egyenlőségekhez jutunk. Indukciós feltevésünk alapján fenn kell állnia az $i_1=r_1, \ldots, i_s=r_s$ egyenlőségeknek is, azaz $p'=p''$. Ez pedig az egyenletrendszer definíciója szerint maga után vonja az $u=v$ egyenlőség teljesülését.

Végül megmutatjuk, hogy a $\{B_1, \ldots, B_k\}$ osztályozás kompatibilis. Ehhez legyen m (>0), $f(\in F_m)$ és $B_{j_1}, \ldots, B_{j_m}$ tetszőleges. Tekintsük a $p=f(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m})$ (0 magasságú) fát. Egyenletrendszerünk definíciója szerint van olyan i $(1\leqq i\leqq k)$, hogy $p\in T_i$. Minthogy $f(B_{j_1}, \ldots, B_{j_m})=p_V(B_1, \ldots, B_k)$ és $p_V(B_1, \ldots, B_k)\subseteqq B_i$, ezért fennáll az $f(B_{j_1}, \ldots, B_{j_m})\subseteqq B_i$ tartalmazás is, azaz a $\{B_1, \ldots, B_k\}$ osztályozás kompatibilis.

Fordítva, legyen $\pi=\{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ a $\mathfrak{T}_{F,n}$ algebra kompatibilis osztályozása. Definiáljuk az $\mathscr{E}$: $v_i=T_i$ $(i=1, \ldots, k)$ egyenletrendszert a

$$T_i = \{p \mid p\in T_F(X_n\cup V_k),\ h(p)=0,\ p_V(\pi_1, \ldots, \pi_k)\subseteqq\pi_i\}$$

egyenlőséggel. Világos, hogy $\mathscr{E}$ rendelkezik az egyenletrendszerektől megkövetelt tulajdonságokkal.

Legyen $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^{\omega}=(B_1, \ldots, B_k)$. A fák magassága szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $\pi_i\subseteqq B_i$ $(i=1, \ldots, k)$.

Először tegyük fel, hogy $h(p)=0$ $(p\in T_{F,n})$. Ha $p\in\pi_i$, akkor T_i értelmezése miatt $p\in T_i$; és így $p\in B_i$ is teljesül.

Tegyük fel, hogy állításunkat egy rögzített l-nél nem nagyobb magasságú $T_{F,n}$-beli fákra igazoltuk, és legyen $h(p)=l+1$ $(p\in T_{F,n})$. Írjuk fel p-t részletesen $p=f(p_1, \ldots, p_m)$ $(f\in F_m;\ p_1, \ldots, p_m\in T_{F,n})$ alakban, és legyenek $\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_m}$ a π osztályozás azon egyértelműen meghatározott osztályai, amelyek rendre a $p_1, \ldots, p_m$ fákat tartalmazzák. Továbbá tekintsük a $p'=f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})(\in T_F(X_n\cup V_k))$ fát. Legyen $p\in\pi_i$. Akkor teljesül a $p\in p'_V(\pi_1, \ldots, \pi_k)\cap\pi_i$ tartalmazás is. Ebből a π osztályozás kompatibilis volta miatt a $p'_V(\pi_1, \ldots, \pi_k)\subseteqq\pi_i$ összefüggéshez jutunk, amiből a $h(p')=0$ egyenlőség teljesülése és T_i értelmezése folytán a $p'\in T_i$ tartalmazást kapjuk. De indukciós feltevésünk szerint $p_1\in B_{i_1}, \ldots, p_m\in B_{i_m}$. Így $p\in p'_V\cdot(B_1, \ldots, B_k)\subseteqq B_i$.

Világos, hogy a $\pi_i\subseteqq B_i$ tartalmazásból következik $\mathscr{E}$ redukált volta. Így tételünk már bizonyított első állítása szerint azt kapjuk, hogy $\{B_1, \ldots, B_k\}$ a $\mathfrak{T}_{F,n}$ algebra kompatibilis osztályozása. Másrészt π is kompatibilis osztályozás és $\pi_i\subseteqq B_i$ $(i=1, \ldots, k)$. Következésképpen $\pi_i=B_i$ minden i $(=1, \ldots, k)$ esetén teljesül. □

Tételünkből a 7.15. tétel felhasználásával a következő eredményt kapjuk.

8.6. következmény. *A* $T(\subseteqq T_{F,n})$ *erdőre a következő négy állítás ekvivalens.*

(1) *T felismerhető,*

(2) ϱ_T *véges indexű,*

(3) *T előáll a* $\mathfrak{T}_{F,n}$ *algebra valamely véges indexű kongruencia-relációja bizonyos osztályainak egyesítéseként,*

(4) *T előáll valamely* $\mathscr{E}$: $v_i = T_i\,(T_i \subseteqq T_F(X_n \cup V_k);\ i=1, \ldots, k)$ *redukált egyenletrendszerre a* $(\mathfrak{T}_{F,n}\mathscr{E})^\omega$ *vektor bizonyos komponenseinek egyesítéseként.* □

9. §. *Néhány eldöntési probléma*

Ebben a részben megmutatjuk, hogy az alábbi kérdések tetszőleges **A** és **B** faautomata esetén algoritmikusan eldönthetők:

(1) $T(\mathbf{A}) = \emptyset$?

(2) $|T(\mathbf{A})| < \aleph_0$?

(3) $T(\mathbf{A}) \subseteqq T(\mathbf{B})$?

A (3) kérdés eldönthetősége természetesen maga után vonja az ekvivalenciaprobléma (azaz $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$?) eldönthetőségét. A fenti problémák bizonyítása — a klasszikus automaták megfelelő kérdéseinek bizonyításához hasonlóan — az ún. „pumpáló lemmán" alapul. Ennek megfogalmazásához bizonyos előkészületeket kell végeznünk.

Tetszőleges $p, q\ (\in T_F)$ fára jelölje $p \cdot_i q$ a $\{p\} \cdot_{x_i} \{q\}$ fát. Továbbá legyen $T(n+1)$ az összes olyan $(n+1)$-változós F-erdők halmaza, amely fáiban x_{n+1} pontosan egyszer fordul elő. Világos, hogy ha $p, q, r \in T(n+1)$, akkor $p \cdot_{n+1} q \in T(n+1)$ és $(p \cdot_{n+1} q) \cdot_{n+1} r = p \cdot_{n+1} (q \cdot_{n+1} r)$. (Az egyelemű halmazt ugyanazzal az elemmel is jelöljük, amelyik a szóban forgó halmazt alkotja.) Bármely $k\ (\geqq 0)$ egész szám és $p\,(\in T(n+1))$ fa esetére definiáljuk a p^k hatványt úgy, hogy $p^0 = x_{n+1}$ és $p^{j+1} = p^j \cdot_{n+1} p$ $(j \geqq 0)$. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $p\,(\in T(n+1))$ és $k\ (\geqq 0)$ esetén teljesül a $p^k \in T(n+1)$ tartalmazás.

Megjegyezzük, hogy az előbb bevezetett jelöléseket csupán a következő tétel megfogalmazásában és annak bizonyításában használjuk; továbbá feltételezzük, hogy F jelentése a szövegösszefüggésből nyilvánvaló lesz.

9.1. tétel. *Bármely* $T\,(\in R(F, n))$ *erdőhöz megadható olyan K egész szám, hogy tetszőleges K-nál nagyobb vagy vele egyenlő magasságú* $p\ (\in T_F)$ *fához léteznek az alábbi feltételeket kielégítő* $q, r\,(\in T(n+1))$ *és* $s\ (\in T_{F,n})$ *fák:*

(1) $p = q \cdot_{n+1} r \cdot_{n+1} s$,

(2) $h(r) \geqq 1$,

(3) $q \cdot_{n+1} r^i \cdot_{n+1} s \in T \quad (i = 0, 1, \ldots)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T felismerhető az **A** n-változós F-automatával. Jelölje K az **A** automata állapotainak számát. Legyen $p = f(p_1, \ldots, p_m)$ olyan T-beli fa, amelyre teljesül a $h(p) \geqq K$ egyenlőtlenség. Tekintsünk egy, a $h(p_j) = h(p) - 1$ $(1 \leqq j \leqq m)$ egyenlőséget kielégítő p_j-t. Akkor p felírható

$$p = t_1 \cdot_{n+1} p_j$$

alakban, ahol $t_1=f(p_1, \ldots, p_{j-1}, x_{n+1}, p_{j+1}, \ldots, p_m) (\in T(n+1))$. Ha p_j magassága nagyobb 0-nál, akkor a fenti eljárás alkalmazható p_j-re is: $p_j=t_2 \cdot_{n+1} p_{j_k}$. Minthogy $h(p) \leqq K$, ezért eljárásunk legalább K-szor megismételhető. Ennek eredményeként a

$$p = t_1 \cdot_{n+1} t_2 \cdot_{n+1} \cdots \cdot_{n+1} t_K \cdot_{n+1} u$$

előállításhoz jutunk, ahol $t_1, \ldots, t_K \in T(n+1)$ és $u \in T_{F,n}$. Vezessük be az $u_0=x_{n+1}$, $u_j=t_1 \cdot_{n+1} \cdots \cdot_{n+1} t_j$ és $v_0=p$, $v_j=t_{j+1} \cdot_{n+1} \cdots \cdot_{n+1} t_K \cdot_{n+1} u$ $(j=1, \ldots, K)$ jelöléseket. Ezek segítségével p-nek a következő $K+1$ darab előállítását kapjuk:

$$p = u_j \cdot_{n+1} v_j \quad (j = 0,1, \ldots, K).$$

Tekintsük a

$$v_K^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), v_{K-1}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}), \ldots, v_0^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$$

állapotokat. Minthogy **A** állapotainak száma K, ezért közülük legalább egy ismétlődéssel fordul elő, mondjuk,

$$v_k^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = v_j^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \qquad (0 \leqq j < k \leqq K).$$

Legyen $q=u_j$, $r=t_{j+1} \cdot_{n+1} \cdots \cdot_{n+1} t_k$ és $s=v_K$. Akkor

$$p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = (u_j \cdot_{n+1} v_j)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) = u_j^{\mathfrak{A}}(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, v_j^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})) =$$

$$= u_j^{\mathfrak{A}}(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, v_k^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})) = (q \cdot_{n+1} s)^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}).$$

Így $q \cdot_{n+1} s \in T$. Ehhez hasonlóan i szerinti indukcióval bizonyítható, hogy a $q \cdot_{n+1} r^i \cdot_{n+1} s \in T$ tartalmazás bármely i $(=0, 1, \ldots)$ esetén teljesül. Világos, hogy ezen q, r és s fák mellett tételünk (2) és (3) állításai is érvényesek. □

Fenti tételünkből könnyen adódnak az eldöntési problémákkal kapcsolatos eredmények.

9.2. tétel. *Létezik algoritmus annak eldöntésére, hogy* $T(\mathbf{A})$ *mikor üres, ahol* **A** *tetszőleges faautomata.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az **A** automatának K állapota van. Megmutatjuk, hogy $T(\mathbf{A})$ akkor és csakis akkor nem-üres, ha $T(\mathbf{A})$-ban van K-nál kisebb magasságú fa. Az elegendőség nyilvánvalóan teljesül.

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy $T(\mathbf{A})$-ban van olyan p fa, amelyre fennáll a $h(p) \geqq K$ egyenlőtlenség. Akkor a 9.1. tétel szerint p megadható $p=q \cdot_{n+1} r \cdot_{n+1} s$ alakban. A $q \cdot_{n+1} s$ fa is $T(\mathbf{A})$-ban van, és benne legalább eggyel kevesebb műveleti szimbólum fordul elő, mint p-ben. A fenti eljárást mindaddig folytathatjuk, amíg olyan $T(\mathbf{A})$-beli fához jutunk, amely magassága kisebb K-nál. Így annak eldöntésére, hogy $T(\mathbf{A})$ mikor üres, elegendő kiszámítanunk a $p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a})$ értékeket mindazon p-kre, amelyekre fennáll a $h(p)<K$ egyenlőtlenség. Ezek száma pedig véges. □

A 4.1. tétel szerint tetszőleges **A** és **B** n-változós F-automatához megkonstruálható olyan **C** n-változós F-automata, amely a $T(\mathbf{A})-T(\mathbf{B})$ erdőt ismeri fel. Így az a kérdés, hogy a $T(\mathbf{A}) \subseteq T(\mathbf{B})$ tartalmazás mikor teljesül, visszavezethető annak eldöntésére, hogy $T(\mathbf{C})$ mikor üres. Ezzel a következő eredményt kaptuk:

9.3. tétel. *Létezik algoritmus annak eldöntésére, hogy a* $T(\mathbf{A}) \subseteq T(\mathbf{B})$ *és* $T(\mathbf{A})=T(\mathbf{B})$ *összefüggések teljesülnek-e, ahol* **A** *és* **B** *tetszőleges n-változós F-automaták.* □

A 9.1. tételt ahhoz hasonlóan alkalmazva, ahogyan ezt a 9.2. tétel bizonyításában tettük, megmutatható, hogy $T(\mathbf{A})$ akkor és csakis akkor véges, ha a $T(\mathbf{A})$-beli fák mindegyike kisebb magasságú K-nál, ahol K az $\mathbf{A}$ automata állapotainak száma. Ennek megfelelően $T(\mathbf{A})$ akkor és csakis akkor véges, ha teljesül az

$$U = T(\mathbf{A}) \cap \{p \mid p \in T_{F,n},\ h(p) \geqq K\} = \emptyset$$

egyenlőség. Könnyű belátni, hogy megkonstruálható olyan faautomata, amely U-t ismeri fel. Ezzel a következő eredményt kaptuk:

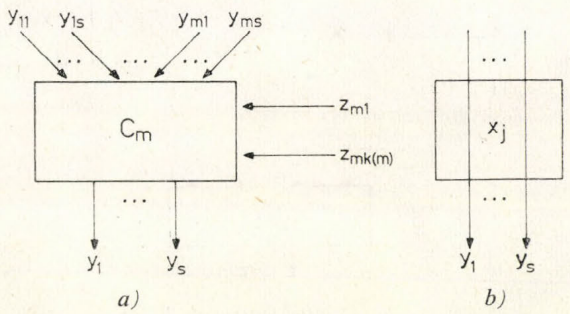
9.4. tétel. *Létezik olyan algoritmus, amellyel tetszőleges* $\mathbf{A}$ *faautomatára eldönthető, hogy* $T(\mathbf{A})$ *mikor véges.* □

10. §. *Faautomaták iteratív realizációja*

A véges automaták strukturális elméletének kialakulását nagyban motiválták az automatáknak szekvenciális áramkör általi realizációival kapcsolatos kérdések. Úgy tűnik, hogy nincs lehetőség a faautomatáknak ilyen áramkörökkel való realizálására. Azonban a faautomaták realizálhatók iteratív rendszerekkel, és a megfelelő alapfogalmak (realizáció, párhuzamos és soros kapcsolás stb.) minden nehézség nélkül átvihetők faautomatákra.

Legyen F tetszőleges rangolt ábécé, és jelölje R mindazon m nemnegatív egész számok halmazát, amelyekre F_m nem üres. R-t az F ábécé *rangtípusának* nevezzük.

Most bevezetjük az iteratív farendszer és iteratív fahálózat fogalmát. Az S *iteratív* R*-rendszer tipikus cellák* $(C_m \mid m \in R)$ családja. Az m típusú C_m cellát a 10.1.a. ábra illusztrálja.



10.1a, b ábra

A C_m cellának $s\,(\geqq 1)$ *intercelláris kimenete* van. Ezeket rendre az $y_1, \ldots, y_s$ *állapotváltozókkal* reprezentáljuk, amelyek megfelelően az $Y_1, \ldots, Y_s$ véges nem-üres halmazokon futnak végig. Az s szám és az $Y_1, \ldots, Y_s$ halmazok függetlenek $m\,(\in R)$-től. Az m típusú cella $m \cdot s$ *intercelláris bemeneti pólussal* bír, ezeknek rendre az $y_{11}, \ldots, y_{1s}, \ldots, y_{m1}, \ldots, y_{ms}$ változók felelnek meg. Ezeken kívül az m típusú cellához tartozik $k(m)\,(\geqq 1)$ *primér bemeneti pólus*, amelyekhez a $z_{m1}, \ldots, z_{mk(m)}$ változókat rendeljük. Minden $i\,(=1, \ldots, s)$-re az $y_{1i}, \ldots, y_{mi}$ változók az Y_i halmazból veszik fel értékeiket, a $z_{mj}\ (j=1, \ldots, k(m))$ változó pedig valamely véges, nem-üres z_{mj} halmazon fut végig. Az állapotváltozók az $y_{11}, \ldots, y_{1s}, \ldots, y_{m1}, \ldots, y_{ms}$ és $z_{m1}, \ldots, z_{mk(m)}$ változók függvényei. Ezt röviden az

$$y_i = y_i^m((y_{1j}), \ldots, (y_{mj}), (z_{mj})) \quad (1 \leqq i \leqq s)$$

egyenlőséggel fejezzük ki. Végül S definíciója magában foglalja az *X-cella* fogalmát, amely az $Y_1 \times \ldots \times Y_s$ halmaz identikus leképezését szolgáltatja (10.1.b. ábra). Az X-cella egyetlen funkciója a változók kijelölése. Amikor R nem nyer specifikálást, akkor S-t egyszerűen *iteratív farendszernek* nevezzük.

Minden egyes $p\,(\in T_{F,n})$ fának megfeleltetünk egy $S(p)$ iteratív *R-hálózatot* a következő módon:

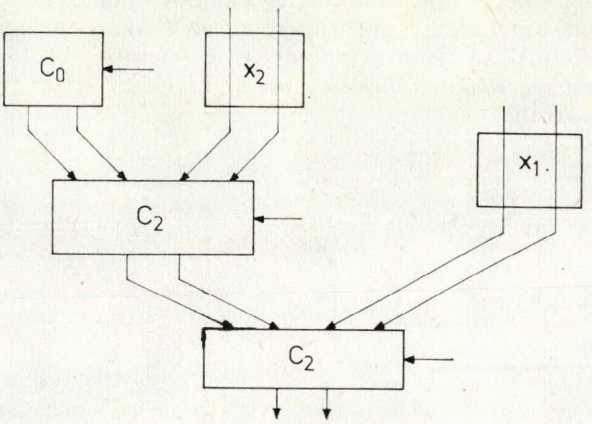
(1) ha $p=x_i\,(\in X_n)$, akkor $S(p)$ az x_i változóval cimkézett X-cella,

(2) ha $p=f(p_1, \ldots, p_m)$ $(f\in F_m; p_1, \ldots, p_m \in T_{F,n})$, akkor $S(p)$-t úgy kapjuk, hogy $S(p_1), \ldots, S(p_m)$ kimeneteit ebben a sorrendben a C_m m-típusú cella bemeneti pólusaihoz kapcsoljuk. A C_m cella kimenetei lesznek $S(p)$ kimenetei.

Megjegyezzük, hogy (2) magában foglalja az $m=0$ esetet. Ekkor $S(p)$ egy 0-típusú cellából áll.

Ha $R=\{1\}$, akkor az iteratív R-rendszer megegyezik a szokásos unilaterális iteratív rendszerrel. Vegyük azt is észre, hogy $S(p)$ csupán p alakjától és a benne szereplő változóktól függ. Így az iteratív R-hálózat az F-re való hivatkozás nélkül is definiálható volna.

10.1. példa. Legyen $R=\{0, 2\}$, $F_0=\{c\}$ és $F_2=\{f, g\}$. Tegyük fel, hogy S olyan iteratív R-rendszer, amelyre $s=2$ és $k(0)=k(2)=1$. Akkor a $p=g(f(c, x_2), x_1)$ fának megfelelő $S(p)$ iteratív R-hálózatot a 10.2. ábra szemlélteti.



10.2 ábra

A következőkben jelölje pr_i az i-ik projekciót (azaz azt a leképezést, amely egy vektorhoz annak i-ik komponensét rendeli hozzá). A szövegből mindig nyilvánvaló lesz annak a vektornak a dimenziószáma, amelyre a pr_i projekciót alkalmazzuk.

10.2. definíció. Azt mondjuk, hogy az S iteratív R-rendszer *realizálja* az $\mathfrak{A}$ F-algebrát, ha létezik olyan

$$\chi: A \to Y_1 \times \ldots \times Y_s$$

injektív leképezés, valamint leképezések olyan

$$\eta_m: F_m \to Z_{m1} \times \ldots \times Z_{mk(m)} \quad (m\in R)$$

családja, amelyre tetszőleges $m\,(\in R), f\,(\in F_m)$, $a_1, \ldots, a_m\,(\in A)$ és $i\ (=1, \ldots, m)$ esetén teljesül az

$$y_i^m(\chi(a_1), \ldots, \chi(a_m), \eta_m(f)) = pr_i(\chi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)))$$

egyenlőség.

Ha S realizálja $\mathfrak{A}$-t, akkor rögzített $\mathbf{a}=(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$ kezdővektor mellett $\mathbf{A}$-ban egy p n-változós F-fát az $S(p)$ iteratív R-hálózat segítségével a következő módon számíthatunk ki. Alkalmazzuk a $\chi(a^{(i)})$ bemenetet az x_i-vel cimkézett X-cellákra, valamint az $\eta_m(f)$ primér bemenetet az f-nek megfelelő minden egyes C_m m-típusú cellára, ahol $f\in F_m$. Indukcióval könnyen igazolható, hogy $S(p)$ kimenete $\chi(p^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}))$ lesz.

Tetszőleges F-automatához található ilyen realizáció. Azonban az iteratív rendszer celláinak komplexitása a χ és η_m leképezések függvénye. Ez az állapot- és bemenet-kódolás egy új problémáját veti fel. Ennek megoldásához egy lehetséges megközelítést jelent azon változók számának csökkentése, amelyektől y_i^m ténylegesen függ.

Most a partició-párok elméletének olyan általánosítását adjuk, amely esetünkben ahhoz hasonló szerepet fog betölteni, mint a klasszikus elmélet a véges automaták esetében.

Tetszőleges A halmazra jelölje $E(A)$ az A halmazon értelmezhető összes ekvivalencia-reláció halmazát. Mint ismeretes, $E(A)$ teljes hálót alkot a halmazelméleti tartalmazásra nézve.

10.3. definíció. Az A halmazon értelmezett *R-ekvivalencia-relációk* $(E_R(A), \leqq)$ hálóján az $E(A)^m$ $(m\in R)$ direkt hatványok direkt szorzatát értjük.

Definíciónknak megfelelően az A halmazon értelmezett R-ekvivalencia-reláció olyan

$$\pi: R \to \cup(E(A)^m \mid m\in R)$$

leképezésnek tekinthető, hogy tetszőleges $m\,(\in R)$ esetén $\pi(m)$ az A-n értelmezett ekvivalencia-reláció-m-es.

Tekintsünk két $\pi_1, \pi_2\,(\in E_R(A))$ R-ekvivalencia-relációt. Ekkor érvényesek az alábbi összefüggések:

(1) $\pi_1 \leqq \pi_2$ akkor és csakis akkor teljesül, ha minden $m\,(\in R)$-re és $i(=1,\ldots,m)$-re fennállnak a $pr_i(\pi_1(m)) \leqq pr_i(\pi_2(m))$ egyenlőtlenségek,

(2) $pr_i((\pi_1 \vee \pi_2)(m)) = pr_i(\pi_1(m)) \vee pr_i(\pi_2(m))$ $\quad (m\in R;\ i = 1, \ldots, m)$,

(3) $pr_i((\pi_1 \wedge \pi_2)(m)) = pr_i(\pi_1(m)) \wedge pr_i(\pi_2(m))$ $\quad (m\in R;\ i = 1, \ldots, m)$.

10.4. definíció. Legyen $\mathbf{A}$ tetszőleges F-automata. A $(\Pi, \pi)\,(\in E_R(A)\times E(A))$ párt az $\mathbf{A}$-hoz tartozó R-párnak nevezzük, ha bármely $m\,(\in R)$, $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$ $(\in A)$ és $f\,(\in F_m)$ esetén az

$$a_i \equiv b_i\,(pr_i(\Pi(m))) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

kongruenciák együttes teljesülése maga után vonja az

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m)\,(\pi)$$

kongruencia érvényességét.

Ennél a pontnál felidézzük a pár-algebra fogalmát. Legyenek K és L véges hálók. A $\Delta\,(\subseteqq K\times L)$ részhalmazt *pár-algebrának* nevezzük a $K\times L$ direkt szorzaton, ha fennállnak a következő összefüggések:

(1) $(a_1 \wedge a_2,\ b_1 \wedge b_2),\ (a_1 \vee a_2,\ b_1 \vee b_2) \in \Delta$, ha $(a_1, b_1),\ (a_2, b_2) \in \Delta$,
(2) $(a, 1),\ (0, b) \in \Delta$ tetszőleges $a (\in K)$ és $b (\in L)$ esetén.

Bármely $\Delta (\subseteq K \times L)$ pár-algebrához hozzárendeljük a következő két $m: K \to L$ és $M: L \to K$ leképezést:

$$m(a) = \wedge (b | (a, b) \in \Delta) \quad \text{és} \quad M(b) = \vee (a | (a, b) \in \Delta).$$

Könnyen belátható, hogy tetszőleges (a, b) $(\in K \times L)$ párra az (i) $(a, b) \in \Delta$, (ii) $m(a) \leqq b$ és (iii) $M(b) \geqq a$ állítások ekvivalensek.

10.5. segédtétel. Az $\mathfrak{A}$ F-algebrához tartozó R-párok $EP_R(\mathfrak{A})$ halmaza pár-algebrát alkot az $E_R(A) \times E(A)$ direkt szorzaton.

Bizonyítás. Világos, hogy tetszőleges $\pi (\in E(A))$ és $\Pi (\in E_R(A))$ esetén $(0, \pi)$ és $(\Pi, 1)$ R-pár.

Tegyük fel, hogy (Π, π), $(T, \tau) \in EP_R(\mathfrak{A})$, és tekintsünk tetszőleges $m (\in R)$-t. Megmutatjuk, hogy érvényes a $(\Pi \vee T, \pi \vee \tau) \in EP_R(\mathfrak{A})$ tartalmazás. Ha $m = 0$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Így feltehetjük, hogy $m > 0$. Az $f (\in F_m)$ műveleti szimbólumra, valamint az $a_1, \ldots, a_m,\ b_1, \ldots, b_m (\in A)$ elemekre tetszőleges i $(= 1, \ldots, m)$ esetén teljesüljön az $a_i \equiv b_i$ $(pr_i((\Pi \vee T)(m)))$ kongruencia. Akkor találhatók olyan

$$a_{i0} = a_i, a_{i1}, \ldots, a_{ik_i} = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

sorozatok, hogy az $a_{ij} \equiv a_{ij+1}$ $(pr_i(\Pi(m)))$ és $a_{ij} \equiv a_{ij+1} (pr_i(T(m)))$ kongruenciák közül minden j $(= 0, \ldots, k_i - 1)$-re legalább az egyik teljesül. Akkor az

$$f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{ij}, a_{i+1}, \ldots, a_m) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{ij+1}, a_{i+1}, \ldots, a_m)(\pi)$$

vagy

$$f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{ij}, a_{i+1}, \ldots, a_m) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_{ij+1}, a_{i+1}, \ldots, a_m)(\tau)$$

összefüggések valamelyikének is fenn kell állnia tetszőleges $i (= 1, \ldots, m)$ és $j = (0, \ldots, k_i - 1)$ mellett. Következésképpen

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m)(\pi \vee \tau).$$

Ebből a $(\Pi \vee T)(m) = \Pi(m) \vee T(m)$ egyenlőség miatt a kívánt $(\Pi \vee T, \pi \vee \tau) \in EP_R(\mathfrak{A})$ összefüggéshez jutunk.

Könnyen belátható az is, hogy a $(\Pi \wedge T, \pi \wedge \tau) \in EP_R(\mathfrak{A})$ tartalmazás is teljesül. □

Az $EP_R(\mathfrak{A})$ pár-algebrára bevezetjük az

$$m: E_R(A) \to E(A) \quad \text{és} \quad M: E(A) \to E_R(A)$$

leképezéseket. Ezek ugyanúgy interpretálhatók, mint a klasszikus automataelméletbeli megfelelőik. Az $\mathfrak{A}$ algebra valamely a állapota esetén az a/π osztály akkor és csakis akkor számítható ki egy F-fa valamely csúcsában, ha a megelőző csúcsokban az állapotok ismertek modulo olyan $\Pi (\in E_R(A))$, amelyre érvényes az $m(\Pi) \leqq \pi$ összefüggés. Hasonlóan $M(\pi)$ reprezentálja azt a maximális információt, amelyre a megelőző csúcsoknál szükségünk van ahhoz, hogy az adott csúcsban egy állapotot modulo Π kiszámíthassunk.

Most bevezetjük a bemenet-állapot párok fogalmát.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

10.6. definíció. Az F rangolt ábécén értelmezett *r-ekvivalencia-relációk* $(E_r(F), \leqq)$ hálóján az $E(F_m)$ $(m \in R)$ hálók direkt szorzatát értjük. A $(\xi, \pi)(\in E_r(F) \times \times E(A))$ párt az $\mathfrak{A}$ F-algebrához tartozó *bemenet-állapot párnak* nevezzük, ha tetszőleges $m\,(\in R)$, $f_1, f_2\,(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m\,(\in A)$ esetén $f_1 \equiv f_2\,(\xi(m))$ maga után vonja az $f_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) \equiv f_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)(\pi)$ kongruencia teljesülését.

Könnyen bizonyítható a következő eredmény.

10.7. segédtétel. Az $\mathfrak{A}$ F-algebrához tartozó bemenet-állapot párok $BA(\mathfrak{A})$ halmaza pár-algebrát alkot az $E_r(F) \times E(A)$ direkt szorzaton.

A $BA(\mathfrak{A})$ hálóhoz tartozó m és M leképezéseket m_B, ill. M_B fogja jelölni.

Most megfogalmazhatjuk a klasszikus automatákra bevezetett „információáramlási egyenlőtlenség" megfelelőjét faautomatákra.

10.8. tétel. *Legyen $\mathfrak{A}$ egy F-algebra, R pedig F rangtípusa. Úgy tetszőleges $\Pi(\in E_R(A))$, $\tau\,(\in E(A))$ és $\xi\,(\in E_r(F))$ esetén az*

$$\Pi \leqq M(\tau) \quad \text{és} \quad \xi \leqq M_B(\tau) \tag{1}$$

egyenlőtlenségek akkor és csakis akkor teljesülnek, ha léteznek olyan

$$d_m \colon \Pi(m) \times \xi(m) \to \tau \quad (m \in R)$$

leképezések, hogy bármely $m\,(\in R)$, $f\,(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m\,(\in A)$ mellett érvényes az

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)/\tau = d_m(a_1/\Pi_1, \ldots, a_m/\Pi_m, f/\xi(m)) \tag{2}$$

egyenlőség, ahol $(\Pi_1, \ldots, \Pi_m) = \Pi(m)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan $(d_m | m \in R)$ leképezés-család, amely kielégíti a (2) összefüggést. Az $m(\in R)$ szám, $f(\in F_m)$ szimbólum és $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m (\in A)$ elem tetszőleges $i (= 1, \ldots, m)$ mellett elégítse ki az $a_i \equiv b_i(\Pi_i)$ kongruenciát, ahol $(\Pi_1, \ldots, \Pi_m) = \Pi(m)$. Akkor

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)/\tau &= d_m(a_1/\Pi_1, \ldots, a_m/\Pi_m, f/\xi(m)) = \\ &= d_m(b_1/\Pi_1, \ldots, b_m/\Pi_m, f/\xi(m)) = \\ &= f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m)/\tau. \end{aligned}$$

Így $(\Pi, \tau) \in EP_R(A)$. Következésképpen $\Pi \leqq M(\tau)$. Ehhez hasonlóan látható be a $\xi \leqq M_B(\tau)$ egyenlőtlenség érvényessége is.

Fordítva, tegyük fel, hogy (1) teljesül. Legyen $m\,(\in R)$, $f_1, f_2\,(\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m\,(\in A)$ olyan, hogy tetszőleges $i\ (= 1, \ldots, m)$ esetén teljesülnek az $f_1 \equiv f_2(\xi(m))$ és $a_i \equiv b_i(pr_i(\Pi(m)))$ kongruenciák. Ebből (1) miatt az

$$f_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) \equiv f_1^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m) \equiv f_2^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m)\,(\tau)$$

összefüggéshez jutunk. Következésképpen az $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)/\tau$ osztályt, és így a d_m leképezést is $f/\xi(m)$ és $(a_1/pr_1(\Pi(m)), \ldots, a_m/pr_m(\Pi(m)))$ teljes mértékben meghatározza. □

A 10.8. tétel alapján a klasszikus automaták esetéhez hasonlóan felhasználhatjuk a pár-algebrák elméletét a faautomaták állapot- és bemenet-kódolásának vizsgálatában.

11. §. *Kompozíció és dekompozíció*

Ebben a részben azokat a módszereket vizsgáljuk, amelyekkel faautomatákat összekapcsolhatunk úgy, hogy eredményként ismét faautomatát kapunk. Előrebocsátjuk, hogy jelen paragrafusban is figyelmen kívül fogjuk hagyni a kezdővektort és a végállapot halmazt.

11.1. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{B}$ F-algebra (izomorf módon) *reprezentálja* az $\mathfrak{A}$ F-algebrát, ha $\mathfrak{A}$ izomorf módon leképezhető $\mathfrak{B}$ valamely részalgebrájára. A reprezentálásra a $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jelölést használjuk.

A faautomaták párhuzamos összekapcsolása matematikailag a direkt szorzattal írható le. Mi csak a véges sok tényező esetével foglalkozunk, mivel a faautomaták vizsgálatánál elsősorban véges algebrákkal találkozunk.

11.2. definíció. Az $\mathfrak{A}_i$ $(i=1, \ldots, k)$ F-algebrák *direkt szorzatán* vagy *párhuzamos kompozícióján* azt az $\mathfrak{A}$ F-algebrát értjük, amely kielégíti a következő feltételeket:

(1) $A = A_1 \times \ldots \times A_k$,

(2) $f^{\mathfrak{A}}((a_{11}, \ldots, a_{1k}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mk})) =$

$= (f^{\mathfrak{A}_1}(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, f^{\mathfrak{A}_k}(a_{1k}, \ldots, a_{mk}))$,

ahol $m\ (\geqq 0)$, $f\ (\in F_m)$ és $(a_{11}, \ldots, a_{1k}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mk})\ (\in A)$ tetszőlegesek.

A 11.2. definícióval megadott F-algebrára az $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ jelölést fogjuk használni.

Az $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ egy $\mathfrak{B}$ részalgebráját az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ algebrák *szubdirekt szorzatának* nevezzük, ha tetszőleges $i\ (=1, \ldots, k)$ esetén kielégíti a $pr_i(B) = A_i$ feltételt.

11.3. definíció. Az $\mathfrak{A}$ F-algebra *párhuzamos dekompozíciójának* az $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, \varphi)$ $(k \geqq 2)$ párt hívjuk, ahol $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ F-algebrák,

$$\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$$

pedig monomorfizmus.

Az $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, \varphi)$ párhuzamos dekompozíciót *valódinak* nevezünk, ha az $|A_i| < |A|$ egyenlőtlenség minden $i\ (=1, \ldots, k)$ esetén teljesül. Amennyiben az $\mathfrak{A}$ F-algebrának nincs valódi párhuzamos dekompozíciója, akkor $\mathfrak{A}$-t *párhuzamosan irreducibilisnek* mondjuk.

Tegyük fel, hogy $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, \varphi)$ az $\mathfrak{A}$ F-algebra párhuzamos dekompozíciója, és legyen $B_i = pr_i(\varphi(A))$ $(i=1, \ldots, k)$. Könnyű belátni, hogy $\mathfrak{B}_i$ az $\mathfrak{A}_i$ algebra részalgebrája. Továbbá $\varphi(\mathfrak{A})$ a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ algebrák egy szubdirekt szorzata. Így az $\mathfrak{A}$ F-algebrának akkor és csakis akkor létezik valódi párhuzamos dekompozíciója, ha $\mathfrak{A}$ rendelkezik valódi szubdirekt dekompozícióval. Másrészt a párhuzamos irreducibilitás ekvivalens az univerzális algebrai szubdirekt irreducibilitással. Így a szubdirekt felbontásra vonatkozó klasszikus Birkhoff-féle tétel közvetlenül alkalmazható a párhuzamos dekompozícióra.

A következő tétel egy jólismert eredménynek véges algebrákra való megfogalmazása.

11.4. tétel. *Az $\mathfrak{A}$ F-algebra akkor és csakis akkor rendelkezik valódi $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, \varphi)$ párhuzamos dekompozícióval, ha $\mathfrak{A}$-nak létezik a*

$$\Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_k = 0$$

egyenlőséget kielégítő $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ valódi kongruencia-relációja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$-nak létezik valódi $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, \varphi)$ párhuzamos dekompozíciója. Definiáljuk A-n a Θ_i $(i=1, \ldots, k)$ relációkat a következő módon: tetszőleges a, b $(\in A)$ esetén $a \equiv b$ (Θ_i) akkor és csakis akkor teljesüljön, ha $pr_i(\varphi(a)) = pr_i(\varphi(b))$. Könnyen megmutatható, hogy $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ az $\mathfrak{A}$ algebra olyan valódi kongruencia-relációi, amelyek kielégítik a $\Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_k = 0$ egyenlőséget.

Fordítva az $\mathfrak{A}$ algebra $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ valódi kongruencia-relációira teljesüljön $\Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_k = 0$. Akkor az $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/\Theta_1, \ldots, \mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}/\Theta_k$ és $\varphi(a) = (a/\Theta_1, \ldots, a/\Theta_k)$ megválasztással $\mathfrak{A}$ kívánt dekompozíciójához jutunk. □

A 11.4. tételből azonnal adódik a

11.5. következmény. *Az $\mathfrak{A}$ F-algebra akkor és csakis akkor párhuzamosan irreducibilis, ha*

$$\wedge(\Theta \mid \Theta \in C(\mathfrak{A}), \Theta > 0) \neq 0,$$

ahol $C(\mathfrak{A})$ jelöli $\mathfrak{A}$ összes kongruencia-relációjának halmazát. □

Fenti következményünk más szavakkal azt jelenti, hogy $\mathfrak{A}$ akkor és csakis akkor párhuzamosan irreducibilis, ha $\mathfrak{A}$-nak pontosan egy minimális nemzéró kongruencia-relációja van.

Az univerzális algebrák elméletéből jól ismert, hogy bármely algebra reprezentálható párhuzamosan irreducibilis algebrák párhuzamos kompozíciójával.

A klasszikus automaták vagy szekvenciális gépek soros kompozíciójánál általában nem kötik ki, hogy a komponens-automaták közös bemenő ábécével rendelkezzenek. Mi sem fogunk élni ezzel a korlátozással, azt azonban megköveteljük, hogy algebráink egy és ugyanazon rangtípussal bírjanak. A következőkben F és G két, közös R rangtípussal rendelkező rangolt ábécét fog jelölni.

11.6. definíció. Tekintsük az $\mathfrak{A} = (A, F)$ F-algebrát és a $\mathfrak{B} = (B, G)$ G-algebrát. Továbbá legyen

$$\omega: \cup(A^m \times F_m \mid m \in R) \to G$$

olyan leképezés, amely tetszőleges m $(\in R)$-re az $A^m \times F_m$ halmazt G_m-be képezi le. Akkor az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ algebráknak az ω leképezésre vonatkozó *soros kompozícióján* azt az

$$\mathfrak{A} \omega \mathfrak{B} = (A \times B, F)$$

algebrát értjük, amely tetszőleges m $(\in R)$, f $(\in F_m)$ és $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ $(\in A \times B)$ mellett kielégíti az

$$f^{\mathfrak{A}\omega\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)) = (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m), g^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m))$$

feltételt, ahol $g = \omega((a_1, \ldots, a_m, f))$.

11.7. definíció. Az $\mathfrak{A}$ F-algebra *soros dekompozícióján* a $(\mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}, \varphi)$ párt értjük, ahol $\mathfrak{B}$ F-algebra, $\mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}$ soros kompozíció, $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}$ pedig monomorfizmus.

A $(\mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}, \varphi)$ soros dekompozíciót *valódinak* mondjuk, ha $|B| < |A|$ és $|C| < |A|$. Az $\mathfrak{A}$ F-algebra *egyszerű*, ha nincs valódi soros dekompozíciója.

A következő tétel azt mutatja, hogy a soros felbonthatóságra vonatkozó klasszikus automataelméleti eredmény változtatás nélkül átvihető faautomatákra.

11.8. tétel. *Az $\mathfrak{A}$ F-algebra akkor és csakis akkor rendelkezik valódi soros dekompozícióval, ha van valódi kongruenciája.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(\mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}, \varphi)$ az $\mathfrak{A}$ algebra valódi soros dekompozíciója. Definiáljuk A-n a Θ relációt a következő módon: tetszőleges két $a, b\ (\in A)$ elemre akkor és csakis akkor teljesüljön az $a \equiv b(\Theta)$ kongruencia, ha $pr_1(\varphi(a)) = pr_1(\varphi(b))$. A klasszikus esethez hasonlóan igazolható, hogy Θ kongruencia-reláció. Továbbá érvényesek az $|A/\Theta| \leqq |B| < |A|$ és $\max\{|a/\Theta| \mid a \in A\} \leqq |C| < |A|$ egyenlőtlenségek, azaz Θ valódi.

Fordítva, legyen Θ az $\mathfrak{A}$ algebra olyan valódi kongruencia-relációja, amely osztályainak száma j, továbbá $\max\{|a/\Theta| \mid a \in A\} = k$. Konstruáljuk meg a $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}, \varphi)$ valódi soros dekompozíciót a következő módon. Legyen $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\Theta$ és C egy k elemű halmaz. Továbbá legyen G a $G_m = (A/\Theta)^m \times F_m$ $(m \in R)$ egyenlőséggel definiált rangolt ábécé, $\varphi: A \to B \times C$ pedig egy $\varphi(a) = (a/\Theta, c)$ $(a \in A, c \in C)$ alakú injektív leképezés. φ-t megválaszthatjuk ilyen módon, mivel $|C| = k$. Most definiáljuk a $\mathfrak{C} = (C, G)$ G-algebrát úgy, hogy tetszőleges $m\ (\in R)$, $g = ((b_1, \ldots, b_m), f)\ (\in G_m)$ és $c_1, \ldots, c_m\ (\in C)$ esetén legyen

$$g^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_m) = pr_2\left(\varphi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)\right)\right),$$

ha vannak a $\varphi(a_1) = (b_1, c_1), \ldots, \varphi(a_m) = (b_m, c_m)$ egyenlőségeket kielégítő $a_1, \ldots, a_m\ (\in A)$ állapotok. Ellenkező esetben legyen $g^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_m)$ tetszőleges elem C-ből. Végül ω legyen a G halmaz identikus leképezése.

Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}, \varphi)$ az $\mathfrak{A}$ algebra valódi soros dekompozíciója. A definícióból világos, hogy $|B|, |C| < |A|$, továbbá, hogy φ az A halmaznak a $B \times C$ szorzatba való injektív leképezése. Így elegendő azt igazolnunk, hogy φ homomorfizmus. Ehhez legyenek $m\ (\in R)$, $f\ (\in F_m)$ és $a_1, \ldots, a_m\ (\in A)$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy $\varphi(a_1) = (b_1, c_1), \ldots, \varphi(a_m) = (b_m, c_m)$, $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) = a$ és $\varphi(a) = (b, c)$, azaz $b_1 = a_1/\Theta, \ldots, b_m = a_m/\Theta$ és $b = a/\Theta = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)/\Theta$. Vezessük be a $g = (b_1, \ldots, b_m, f)$ jelölést. Akkor

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{B}\omega\mathfrak{C}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)) &= f^{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}}((b_1, c_1), \ldots, (b_m, c_m)) = \\ &= (f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m), g^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_m)) = \\ &= (b, c) = \varphi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)), \end{aligned}$$

ami tételünk bizonyításának befejezését jelenti. □

A 11.8. tétel alábbi következménye azt mutatja, hogy a jelen paragrafusban bevezetett egyszerű algebra fogalma összhangban van az univerzális algebrai terminológiával.

11.9. következmény. *Egy F-algebra akkor és csakis akkor egyszerű, ha nincs valódi kongruencia-relációja.* □

Most az automatákra ismert szorzatfogalmat általánosítjuk faautomatákra.

11.10. definíció. Legyenek $F, F^1, \ldots, F^k$ az ugyanazon R rangtípussal rendelkező rangolt ábécék, és tekintsük az $\mathfrak{A}_i = (A_i, F^i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ F^i-algebrákat. Továbbá legyen

$$\psi = (\psi_m: (A_1 \times \ldots \times A_k)^m \times F_m \to F_m^1 \times \ldots \times F_m^k \mid m \in R)$$

leképezések egy családja. Akkor az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ algebráknak ψ-re vonatkozó *szorzatán* azt a

$$\psi(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k, F) = \mathfrak{A} = (A, F)$$

F-algebrát értjük, amelyre $A=A_1\times\ldots\times A_k$ és tetszőleges $m\,(\in R)$, $f\,(\in F_m)$, valamint $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\,(\in A)$ esetén teljesül az

$$f^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m) = \left(f_1^{\mathfrak{A}_1}(pr_1(\mathbf{a}^1), \ldots, pr_1(\mathbf{a}^m)), \ldots, f_k^{\mathfrak{A}_k}(pr_k(\mathbf{a}^1), \ldots, pr_k(\mathbf{a}^m))\right)$$

egyenlőség, ahol $(f_1, \ldots, f_k)=\psi_m(\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m, f)$.

Jelölje $K(R)$ az R rangtípusú véges algebrák osztályát. A $K(R)$ osztály egy K részosztályát *izomorfan teljesnek* nevezzük, ha $K(R)$ tetszőleges algebrája (izomorfan) reprezentálható K-beli algebrák valamely szorzatával.

11.11. tétel. *Legyen R rangtípus. Úgy $K(R)$ egy K részosztálya akkor és csakis akkor izomorfan teljes, ha K-ban található olyan $\mathfrak{C}=(C, F)$ algebra, amelynek van a következő tulajdonsággal rendelkező két különböző c' és c'' eleme: tetszőleges $m\,(\in R)$, $\mathbf{c}\,(\in\{c', c''\}^m)$ és $c\,(\in\{c', c''\})$ esetén megadható az $f^{\mathfrak{C}}(\mathbf{c})=c$ egyenlőséget kielégítő $f\,(\in F_m)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy K izomorfan teljes. Legyen $\mathfrak{B}=(B, F)$ az az F-algebra $K(R)$-ből, amely alaphalmaza a $B=\{0, 1\}$ halmaz, továbbá tetszőleges $m\,(\in R)$, $\mathbf{b}\,(\in B^m)$ és $b\,(\in B)$ esetén található az $f^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})=b$ összefüggést kielégítő $f\,(\in F_m)$ műveleti szimbólum. Feltételezésünk szerint $\mathfrak{B}$ izomorfan reprezentálható K-beli algebrák egy $\psi(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k, F)$ szorzatával valamely $\varphi\colon \mathfrak{B}\to\psi(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k, F)$ monomorfizmus mellett. Ha $\varphi(0)=(a_1', \ldots, a_k')$ és $\varphi(1)=(a_1'', \ldots, a_k'')$, akkor van olyan j $(1\leqq j\leqq k)$, hogy $a_j'\neq a_j''$. Tekintsünk tetszőleges $m\,(\in R)$ számot, $\mathbf{a}\,(\in\{a_j', a_j''\}^m)$ vektort és $a_j\,(\in\{a_j', a_j''\})$ elemet. Akkor található egy $\mathbf{b}=(b_1, \ldots, b_m)\,(\in B^m)$ vektor és egy $b\,(\in B)$ állapot úgy, hogy

$$\left(pr_j(\varphi(b_1)), \ldots, pr_j(\varphi(b_m))\right) = \mathbf{a} \quad \text{és} \quad pr_j(\varphi(b)) = a.$$

Vegyünk F_m-ből az $f^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})=b$ egyenlőséget kielégítő f-et. Ha $\psi_m(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_m), f)=$ $=(f_1, \ldots, f_k)$, akkor

$$f_j^{\mathfrak{A}_j}(\mathbf{a}) = pr_j(\varphi(f^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b}))) = pr_j(\varphi(b)) = a_j,$$

azaz $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}_j$, $c'=a_j'$ és $c''=a_j''$ kielégíti tételünk feltételeit.

Fordítva, tegyük fel, hogy a $\mathfrak{C}$ F-algebra és a $c', c''\,(\in C)$ elemek eleget tesznek tételünk feltételeinek. Tekintsünk tetszőleges $\mathfrak{B}=(B, G)$ G-algebrát $K(R)$-ből. Ha k-t elég nagynak választjuk, akkor megadható egy

$$\varphi\colon B \to \{c', c''\}^k$$

injektív leképezés.

Most valamely $m\,(\in R)$, $g\,(\in G_m)$, $\mathbf{b}=(b_1, \ldots, b_m)\,(\in B^m)$ és $b\,(\in B)$ esetén legyen $g^{\mathfrak{B}}(\mathbf{b})=b$. Továbbá legyen $\varphi(b_i)=(c_{i1}, \ldots, c_{ik})=\mathbf{c}_i$ $(i=1, \ldots, m)$ és $\varphi(b)=(c_1, \ldots, c_k)$. Akkor találhatók olyan $f_1, \ldots, f_k\,(\in F_m)$ műveleti szimbólumok, hogy

$$f_j^{\mathfrak{C}}(c_{1j}, \ldots, c_{mj}) = c_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Az ilyen esetekben legyen $\psi_m(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m, g)=(f_1, \ldots, f_k)$. A többi esetben válasszuk meg ψ_m-t tetszőlegesen. Akkor világos, hogy φ a $\mathfrak{B}$ G-algebrának a $\psi(\mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{C}, G)$ szorzatba való monomorf leképezése, ahol $\psi=(\psi_m | m\in R)$. □

Megjegyzések és hivatkozások

Az irodalomban a fa fogalmát többféle módon értelmezik: megadható speciális gráffal vagy egy „fa értelmezési tartománynak" valamely ábécébe való leképezéseként. Azonban a különböző definíciók közötti eltérések nem lényegesek. Az univerzális algebrai formalizmust többek között MEZEI és WRIGHT [1967], valamint THATCHER

és WRIGHT [1968] használják. A jelen munkában megtalálható változat, amelyet STEINBY [1977a] vezetett be, abban különbözik az általánosan használt fától, hogy a változókat nemcsak segédszimbólumoknak tekintjük, hanem azok a II. részben bevezetésre kerülő határ-ábécé elemei is lehetnek. Ennek megfelelően faautomatánknak iniciális vektorral is kell rendelkeznie. Ennek az az előnye, hogy egy és ugyanazon faautomatát különböző határ-ábécékkel rendelkező erdők felismerésére is lehet alkalmazni.

A polinom-szimbólumokra, valamint egyéb univerzális algebrai fogalmakra és eredményekre vonatkozóan az olvasó bőséges anyagot talál GRÄTZER [1968] könyvében.

BÜCHI-nek és WRIGHT-nak tulajdonítják azt az észrevételt, hogy a véges automaták véges unáris algebráknak is tekinthetők (l. THATCHER [1973]). A faautomatákra való kiterjesztést először DONER [1965] és tőle függetlenül THATCHER és WRIGHT [1965] adta meg. A jelen munkában használt faautomatát néhány szerző (determinisztikus) bottom-up faautomatának (ENGELFRIET [1975]), frontier-to-root faautomatának (THATCHER [1973]) vagy süllyedő (sinking) faautomatának (MAGIDOR és MORAN [1969]) is nevezi. A felszálló faautomata fogalmát RABIN [1969] vezette be, tulajdonságait pedig MAGIDOR és MORAN [1969] tanulmányozták. Ők a felszálló faautomatákat top-down faautomatáknak, root-to-frontier faautomatáknak és felmászó (climbing) faautomatáknak hívják. A determinisztikus felszálló faautomatákkal kapcsolatban nagyon kevés eredmény ismert.

A reguláris fanyelvtanokat először BRAINERD [1969] tanulmányozta a jelen cikkben használtaknál jóval általánosabb átírási szabályok mellett.

Az erdőkön végzett reguláris műveletek, a Kleene-féle tétel általánosítása, valamint az eldöntési kérdések vizsgálata megtalálható már a faautomatákkal foglalkozó első dolgozatokban (DONER [1965], MAGIDOR és MORAN [1969], ARBIB és GIVE'ON [1968]). Ezeket a problémákat tőlük függetlenül PAIR és QUERE [1968] tanulmányozta egy kissé általánosabb formában. ITO és ANDO [1974] az erdők feletti reguláris kifejezések axiomatizálását vizsgálta. A Medvegyev-féle jellemzés egy általánosítását DONER [1966] adta meg, de a jelen munka 6. §-ban ismertetett egyszerűsített változat COSTICH-tól [1972] származik.

A faautomaták minimalizálását BRAINERD [1968] tanulmányozta. (L. még ARBIB és GIVE'ON [1968].)

A reguláris erdők egyenletrendszerekkel való jellemzése MEZEI és WRIGHT [1967] munkájában található.

A 10. § anyagát STEINBY [1977b] cikkéből vettük át. A párhuzamos és soros kompozíció fogalmát RICCI [1973] vezette be, de a tárgykörre vonatkozó néhány megjegyzés már MAGIDOR és MORAN [1969] munkájában is megtalálható. A párhuzamos felbontásra vonatkozó tétel nyilvánvalóan következik a szubdirekt felbontásra vonatkozó jólismert BIRKHOFF-féle tételből is (l. BIRKHOFF [1967] vagy GRÄTZER [1968]). A faautomaták általános szorzata a GLUSKOV [1963], [1964] által bevezetett fogalom általánosítása. A dolgozatunkban szereplő definíció, valamint a 11.1. tétel STEINBY [1977b] munkájában található. A klasszikus automaták strukturális elméletével kapcsolatban bőséges anyagot ölel fel HARTMANIS és STEARNS [1966] könyve. Az iteratív rendszerek egy nagyon jó tárgyalását adja HENNIE [1968].

Végül megemlítünk néhány, a témakörben megjelent ismertető cikket. THATCHER [1973] a faautomatákkal kapcsolatos számos kérdést tárgyal népszerűsítő cikkében. SCHÜTT [1971] munkájában sokkal szigorúbb tárgyalásmódot követ, de elsősorban a jelen munka I. részében feldolgozott anyagra szorítkozik. A terület legátfogóbb, egységes tárgyalása ENGELFRIET [1975] jegyzetében található.

IRODALOM

ARBIB, M. A. és Y. GIVE'ON [1968], Algebra automata I: Parallel programming as a prolegomena to the categorical approach. *Information and Control 12* (1968), 331—345.

BIRKHOFF, G. [1967], *Lattice theory*. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1967).

BRAINERD, W. S. [1968], The minimalization of tree automata, *Information and Control 13* (1968), 484—491.

BRAINERD, W. S. [1969], Tree generating regular systems. *Information and Control 14* (1969), 217—231.

COSTICH, O. L. [1972], A Medvedev characterization of sets recognized by generalized finite automata. *Math. Syst. Theory 6* (1972), 263—267.

DONER, J. E. [1965], Decidability of weak second order theory of two successors. Abstract 65T—468, *Notices Amer. Math. Soc. 12* (1965), 819. Erratum, ibid *13* (1966), 513.

DONER, J. [1970], Tree acceptors and some of their applications. *J. Comp. Syst. Sc.* 4 (1970), 406—451.

EILENBERG, S. és J. B. WRIGHT, [1967], Automata in general algebras. *Information and Control 11* (1967), 452—470.

ENGELFRIET, J. [1975], Tree automata and tree grammars. DAIMI Report FN-10, University of Aarhus, Aarhus, Denmark (1975).

GLUSKOV, V. M. [1963], Az automaták absztrakt elmélete (I). III. *Oszt. Közl. 13* (1963), 287—309.

GLUSKOV, V. M. [1964], Az automaták absztrakt elmélete (II). III. *Oszt. Közl. 14* (1964), 71—110.

GRÄTZER, G. [1968], *Universal algebra*, Van Nostrand, Princeton (1968).

HARTMANIS, J. és R. E. STEARNS, [1966]. *Algebraic structure theory of sequential machines*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, N. J. (1966).

HENNIE, F. C. [1968], *Finite-state models for logical machines*. John Wiley & Sons, New York (1968).

ITO, T. és S. ANDO [1974], A complete axiom system of superregular expressions. *Proc. IFIP Congress* 74 (1974), 661—665.

MAGIDOR, M. és G. MORAN [1969], Finite automata over finite trees. Tech. Report 30, Hebrew University, Dept. Math., Jerusalem (1969).

MEZEI, J. és J. B. WRIGHT [1967], Algebraic automata and context-free sets. *Information and Control 11* (1967), 3—29.

PAIR, C. és A. QUERE [1968], Définition et étude des bilangages réguliers. *Information and Control 13* (1968), 565—593.

RABIN, M. O. [1969], Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Trans. AMS 141* (1969), 1—35.

RICCI, G. [1973], Cascades of tree-automata and computations in universal algebras. *Math. Syst. Theory 7* (1973), 201—218.

SCHÜTT, D. [1971], Baumautomaten. *Bericht 36, Gesellschaft für Math. u. Datenv. mbH Bonn*, Birlinghoven (1971).

STEINBY, M. [1977a], On algebras as tree automata. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 17. Contributions to Universal Algebra* (Csákány, B. and J. Schmidt ed.) North-Holland, Amsterdam (1977).

STEINBY, M. [1977b], On the structure and realizations of tree automata. *Second Coll. sur les Arbres en Algèbre et en Programmation*, Lille (1977).

THATCHER, J. W. [1973], Tree automata: an informal survey. *Currents in the Theory of Computing* (A. V. Aho, ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1973).

THATCHER, J. W. és B. WRIGHT [1965], Generalized finite automata. Abstract 65T—469, *Notices Amer. Math. Soc. 12* (1965), 820.

THATCHER, J. W. és J. B. WRIGHT [1968], Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of secont-order logic, *Math. Syst. Theory 2* (1968), 57—81.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕРЕВО-АВТОМАТОВ I.

ФЕРЕНЦ ГЕЧЕГ И МАГНУС СТЕЙНБЫ

THE ALGEBRAIC THEORY OF TREE AUTOMATA, I.

F. GÉCSEG AND M. STEINBY

A KOMBINATORIKA MINIMAX TÉTELEIRŐL

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Bevezetés

A kombinatorikát ma úgy szokás definiálni, mint véges halmazok és halmazrendszerek vizsgálatát. A véges halmazrendszer (újabban elterjedtebb hipergráf szó) igen általános struktúra, a véges algebráktól kezdve a gráfokon keresztül az egész számok sorozataiig szinte minden diszkrét jellegű fogalom lefordítható a hipergráfok nyelvére. Ugyancsak e nagy általánosság miatt minden hipergráf sok más hipergráfba is transzformálható. Ezek a tények önmagukban természetesen nem jelentik a hipergráfok érdekességét, hiszen más-más matematikai területről származó problémák természetesen más-más hipergráfelméleti problémákhoz vezetnek; az átfogalmazásokat az igazolja, ha az átfogalmazott hipergráfelméleti problémákat közös alakra lehet hozni, és a hipergráfelmélet közös módszereket nyújt megoldásukhoz. Az utóbbi években vált csak világossá — és mint az lényeges új gondolatok esetén gyakori, a matematikai „folklór" részeként —, hogy a matematika igen különböző területeiről származó problémák vezethetők vissza az alábbi két feladatra:

Pakolási feladat: Adott egy hipergráf. Keressünk ki a hozzá tartozó halmazok (élek) közül maximális számú diszjunktat.

Lefogási (fedési) feladat: Adott egy hipergráf. Keressünk minimális számú pontot, melyek minden élt lefognak.

Dolgozatom célja e két feladatnak, egymáshoz való viszonyuknak, alkalmazásaiknak tárgyalása.

Természetes, hogy ilyen általános feladatok esetén igen nehéz problémát jelent, hogy milyen választ várunk: megoldási algoritmust, valamilyen formulát a keresett optimális halmazok mértékére, becsléseket ez utóbbi számra stb. Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy az utóbbi években a kombinatorika alapjai területén két olyan fontos felismerés is született, melyek itt szinte diktálják a kérdéseket. Ezekre részletesebben ki kell térnünk, mert az általunk vizsgált kérdéseknek egyik fő motivációját jelentik. Reméljük, hogy a dolgozatomban bemutatott alkalmazások (és természetesen a mások által adott alkalmazások) igazolják az így inspirált kérdések jogosságát.

Vizsgáljuk meg például a fedési feladatot. Adott tehát egy hipergráf. Lefoghatók-e az élei k ponttal? Ha e kérdésre a válasz *igen,* akkor ezt azonnal be is bizonyíthatjuk, csak meg kell jelölnünk e k darab pontot (más kérdés az, hogy ezeket hogyan lehet megtalálni). Ha azonban a válasz *nem,* ennek közvetlen, egyszerű bizonyítását nem mindig tudjuk megadni. Más szóval arra a kérdésre, hogy „Miért is nem foghatók le a hipergráf élei k ponttal?" általában nem adható „frappáns"

válasz. Különösen érdekesek az olyan esetek, amikor ilyen válasz mégis adható. Például ha hipergráfunk tartalmaz $k+1$ diszjunkt élt, akkor minden lefogó ponthalmaznak ezek mindegyikéről kell pontot tartalmaznia, és ez máris $k+1$ pont. Általában ha ki tudunk jelölni a hipergráf élei közül néhányat úgy, hogy már azokat sem lehet k ponttal lefogni, akkor ezzel a fenti kérdésre is választ adtunk. Persze, ez csak akkor tekinthető „frappáns" válasznak, ha a kijelölt élek k ponttal való lefoghatatlansága könnyen látható, vagyis a kijelölt élek bizonyos értelemben egyszerűbb hipergráfot alkotnak, mint az eredeti. Több irányban is megvizsgálható, mennyire „egyszerű" a kiválasztott hipergráf; az az eset, amikor diszjunkt élekből áll, ideálisnak tekinthető. Kőnig Dénes híres tételéből tudjuk, hogy a páros gráfok esete ilyen.

A fenti gondolatmenetből kiolvasható általános elv a következő. Tekintsük véges struktúráknak egy tulajdonságát. Gyakran — bár nem mindig — ez valamelyik irányban könnyen megfogható, pl. fennállása könnyen bizonyítható. Néha az ellenkező irányban is ugyanez a helyzet, azaz a tulajdonság meg nem léte esetén erre egyszerű bizonyítást lehet adni. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a tulajdonság *jól karakterizált*. Precízebben akkor mondjuk, hogy a tulajdonság jól karakterizált, ha minden véges struktúrához létezik olyan bizonyítás, mely nem hosszabb a struktúra elemszámának egy hatványánál, és mely azt bizonyítja, hogy a tekintett struktúrának a szóban forgó tulajdonsága megvan, ill. nincs meg (attól függően, hogy mi az igazság). Egy-egy tulajdonság jól karakterizált voltát általában olyan tételek biztosítják, melyek a kombinatorika legfontosabb, legalapvetőbb eredményei között vannak számon tartva. König említett tétele mellett ilyen pl. Kuratowskinak gráfok síkbarajzolhatóságára vonatkozó kritériuma: ha egy gráf síkbarajzolható, akkor ezt könnyen bebizonyíthatjuk: egyszerűen lerajzoljuk. Ha nem rajzolható síkba, akkor ezt azzal bizonyíthatjuk, hogy kijelöljük egy részgráfját, mely a teljes ötszöggel vagy a három-ház-három-kút gráffal homeomorf.

A jól karakterizálhatóság szoros összefüggésben van azzal, hogy eldönthető-e a tekintett tulajdonság megléte effektív (vagyis a struktúra méretének egy hatványánál kevesebb lépést igénylő) algoritmussal. Nyitott kérdés azonban, hogy ekvivalens-e a tulajdonságok e két tulajdonsága. A jó karakterizáció fogalmának alapvető voltára J. Edmonds hívta fel a figyelmet (l. pl. [E2, C2]). Későbbi kutatások megmutatták, hogy a tulajdonság ún. nem-determinisztikus számítógéppel való gyors ellenőrizhetősége ill. bizonyos másodrendű logikai formulákkal való kifejezhetősége is ugyanerre a fogalomra vezet (l. [F1]).

Cook [C5], Karp [K1] és Levin [L1] érdekes elméletet dolgoztak ki a jó karakterizálhatósággal kapcsolatban. Véges struktúrák egy tulajdonsága eldöntésének problémáját *kereső feladatnak* nevezik, ha a tulajdonság megléte esetén az könnyen (a struktúra méretének egy hatványánál nem több lépésben) verifikálható. A pakolási és lefogási feladatok könnyen átfogalmazhatók kereső feladatokká: pl. a pakolási feladatnál „maximális számú" helyett „adott számú" diszjunkt élt kell keresnünk. Kiderül, hogy létezik kereső feladatoknak egy osztálya, az ún. univerzális kereső feladatok, melyekre minden más kereső feladat visszavezethető. Mivel valószínűtlen, hogy *minden* kereső feladatnál a megfelelő tulajdonság jól karakterizálható vagy éppen effektív algoritmussal eldönthető volna, éppennyire valószínűtlen, hogy ez az univerzális kereső feladatok *akármelyikére* is fennálljon. Az univerzális kereső feladatok között olyan fontos gráfelméleti problémák vannak, mint Hamilton-kör létezése, k színnel való színezhetőség ($k \geqq 3$), az élek k ponttal való lefoghatósága stb. A fent kereső feladatként megfogalmazott pakolási és lefogási feladatok is univerzálisak, így nem várható, hogy jó karakterizáció vagy effektív algoritmus adható rájuk.

Dolgozatunkban a „jó karakterizáció" csak mint rendező elv szerepel: arra a két kérdésre keresünk választ, hogy „Mitől nem foghatók le adott hipergráf élei k ponttal?" ill. „Mitől nincsen egy adott hipergráfban $k+1$ diszjunkt él?" Cook, Karp és Levin eredményei szerint e két kérdésre teljes általánosságban a fenti értelemben vett válasz nem várható. Ki fogunk jelölni azonban olyan általános hipergráfosztályokat, melyekre jó karakterizáció adható, és melyek a gráfelmélet és kombinatorika több klasszikusnak nevezhető minimax tételét tartalmazzák.

Egy másik fontos általános elv, melyet kihasználunk, a kombinatorika kapcsolatba hozása az egész értékű lineáris programozással. A pakolási és fedési feladat természetes módon úgy fogalmazható, mint egy-egy egész értékű lineáris programozási feladat. Ezeknek valós relaxációi (vagyis a változók egész voltának kikötését elejtve nyert feladatok) éppen egymás duálisai, így ezek optimuma megegyezik. Ezért a fentemlített „ideális" helyzet (amikor is a diszjunkt élek maximális száma megegyezik a lefogó pontok minimális számával) pontosan akkor áll fenn, amikor mindkét valós relaxáció optimális megoldása egész értékű. Ez utóbbi tény néha közvetlenül, aritmetikai eszközökkel igazolható; példa erre Kőnig tételének Hoffman-Kruskal-féle bizonyítása [HK]. Igen sokszor az a helyzet, hogy a két valós relaxáció közül az egyikről igen könnyen bizonyítható, hogy optimális megoldása egész. Ebből önmagában még nem következik, hogy a másiké is az; ám ha az egyik feladat valós relaxációja az eredeti feladatból bizonyos módon leszármaztatott feladatok mindegyikére egész optimummal rendelkezik, akkor már ez a másik feladatra is bizonyítható. Az ilyen „dualitási elvekből" a kombinatorika több ismert minimax tétele levezethető, és néhány olyan eredmény is, melyek első bizonyítása ilyen eszközökkel történt, pl. Berge ún. gyenge perfekt gráf sejtése.

A diszjunkt élek maximális számát, a lefogó pontok minimális számát és a két feladat valós relaxációinak közös optimumát vizsgálva természetesen adódik a kérdés, hogy e számok, ha nem esnek is egybe, mennyire térhetnek el egymástól. Érdekes, hogy az ilyen jellegű kérdésekre adott egyszerű válaszok is sok érdekes alkalmazással szolgálnak a matematika különböző területeiről. Ez is mutatja, hogy a valós relaxáció vizsgálata igen hatékony eszköz.

1. *Alapfogalmak*

1. A szokásos matematikai jelöléseket és fogalmakat használjuk, az alábbi két megjegyzéssel: $A \subseteq B$ jelenti azt, hogy A részhalmaza B-nek, $A \subset B$ pedig azt, hogy A valódi részhalmaz. *Családnak* nevezzük az olyan összességet, melyben ugyanaz az elem többször is előfordulhat. Egy családot ily módon úgy is tekinthetünk, mint az egész világmindenségen értelmezett, természetes szám értékű függvényt, mely véges számú hely kivételével csak 0-t vesz fel. A családnak, mint függvénynek egy elemen felvett értékét az elem *multiplicitásának* nevezzük. A $0-1$ értékű családokat azonosítjuk a halmazokkal. Amikor ez lehetséges, a halmazelméleti jelöléseket kiterjesztjük a családokra; így $x \in \mathcal{F}$ azt jelenti, hogy $\mathcal{F}(x) > 0$, és használjuk az $|\mathcal{F}| = \sum_x \mathcal{F}(x)$ jelölést.

2. *Hipergráfnak* nevezzük a $H = (V(H), E(H))$ párt, ha $V(H)$ egy véges halmaz, és $E(H)$ a $V(H)$ részhalmazainak egy családja. $V(H)$ elemeit *pontoknak*, $E(H)$ elemeit *éleknek* nevezzük. Berge [B1] könyvével ellentétben tehát megengedjük, hogy az üres halmaz is élként szerepeljen, és nem kötjük ki, hogy minden pontot tartalmazzon él. Ez csak ízlés kérdése, mert ezzel a vizsgált hipergráfok köre csak érdektelen esetekkel bővül.

Néhány hipergráfon végzett operációra is szükségünk lesz. Egy E *él elhagyásán* értjük egyszerűen E egy példányának $E(H)$-ból való elhagyását, $V(H)$ változatlan tartása mellett. Az eredményül kapott hipergráfot $H-E$-vel jelöljük. Egy *pont elhagyásán* értjük a pontnak $V(H)$-ból, az őt tartalmazó élek összes példányainak pedig $E(H)$-ból való kihagyását; a kapott hipergráfot $H-x$-nek jelöljük. Egy x pont *levágásán* azt értjük, hogy x-et $V(H)$-ból, valamint H minden x-et tartalmazó éléből kihagyjuk; a kapott hipergráfot $H\setminus x$ fogja jelölni. Ha E a H hipergráf egy éle és k egy természetes szám, akkor E *k-szorozásán* azt értjük, hogy E egy példányát k példánnyal helyettesítjük (más szóval, E multiplicitását $(k-1)$-gyel növeljük). $k=0$ esetben ez E elhagyását jelenti H-ból. Ha x H-nak egy pontja, akkor x *k-szorozásán* a következő operációt értjük: x-et elhagyjuk, helyette k új pontot: $x_1, \ldots, x_k$-t veszünk fel, és H-nak minden olyan E éle fejében, mely x-et tartalmazta, megkonstruáljuk az $E-\{x\}\cup\{x_i\}$ $(i=1, \ldots, k)$ éleket, mindegyiket ugyanakkora multiplicitással, mint amekkora E-é volt. Egy E él *zsugorítása* azt jelenti, hogy E-t elhagyjuk, de egy $E'\subseteq E$ halmazt új élként hozzáveszünk a hipergráfhoz.

Egy H hipergráfból élek és pontok elhagyásával létrejövő hipergráfokat H *részhipergráfjainak*, a csak pontok elhagyásával létrejövő hipergráfokat H *feszített* részhipergráfjainak nevezzük.

Egy hipergráf *r-uniform,* ha minden éle r elemű. A 2-uniform hipergráfokat azonosítjuk a gráfokkal. Ily módon ha gráfról beszélünk, többszörös éleket megengedünk, de hurkokat nem.

A H hipergráf *rangján* éleinek maximális elemszámát értjük. Ezt a számot $R(H)$-val jelöljük. A H hipergráf éleinek minimális elemszámát $r(H)$ jelöli.

Egy x pont *foka* az x-et tartalmazó élek száma (multiplicitással). A H hipergráf minimális, ill. maximális fokát $d(H)$, ill. $D(H)$ jelöli. H *d-edfokú reguláris,* ha minden pontjának a foka d.

A gráfelméletből használt fogalmaink és jelöléseink a szokásosak, ill. a felhasználás helyén lesznek bevezetve.

A bizonyítások végét □ □ □ jelöli. Ha ez a jel közvetlenül az állítás kimondása után van, azt jelenti, hogy az állítás triviális és nem bizonyítjuk.

3. A H hipergráf éleinek egy családját *független élrendszernek* vagy *élpakolásnak* nevezzük, ha bármely kettő diszjunkt. A „család" szó helyett természetesen halmazt is mondhatunk, ha $\emptyset$ nem szerepel az élek között. A független élek maximális számát $\nu(H)$ jelöli. Nyilván $\nu(H)$ akkor és csak akkor végtelen, ha $\emptyset\in E(H)$.

A H hipergráf pontjainak egy halmazát *lefogó halmaznak* nevezzük, ha bármely élt metsz. A H lefogó pontjainak minimális számát $\tau(H)$-val jelöljük. Ha H élei között az üres halmaz is szerepel, akkor nincsen lefogó halmaz. Ebben az esetben definíció szerint legyen $\tau(H)=\infty$. A $\nu(H)$ és $\tau(H)$ mennyiségek jelöléséből a H argumentumot elhagyjuk, ha a kimondott állítás minden hipergráfra vagy pedig félreérthetetlenül egy bizonyos hipergráfra vonatkozik.

Nyilvánvaló, hogy

$$\nu \leqq \tau, \tag{1}$$

mert ahhoz, hogy egy H hipergráf minden élét lefogjuk, a $\nu(H)$ darab független él mindegyikéből legalább egy pontot kell választanunk. Itt általában nem áll az egyenlőség. Célszerű lesz ezért egy további mennyiséget is tekinteni, melyet ν és τ közé tudunk iktatni olyan értelemben is, hogy mindkettővel könnyebb lesz kapcsolatba hozni, mint ν-t és τ-t egymással.

Egy $E(H)$-n értelmezett valós értékű w függvényt *valós élpakolásnak* nevezünk, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} w(E) \geqq 0 & \text{minden } E \text{ élre, és} \\ \sum\limits_{E \ni x} w(E) \leqq 1 & \text{minden } x \text{ pontra.} \end{cases}$$

Bevezetve a

$$|w| = \sum_{E} w(E)$$

jelölést, tekintsük a

$$\text{(3)} \qquad \max |w| = \nu^*(H)$$

mennyiséget, ahol a maximum minden valós élpakolásra kiterjed.

Hasonló módon *valós lefogásnak* nevezzük a $V(H)$-n értelmezett valós értékű t függvényt, ha

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} t(x) \geqq 0 & \text{minden } x \text{ pontra, és} \\ \sum\limits_{x \in E} t(x) \geqq 1 & \text{minden } E \text{ élre.} \end{cases}$$

Képezzük a

$$\text{(5)} \qquad \min |t| = \tau^*(H)$$

mennyiséget, ahol a minimum minden valós lefogásra kiterjed.

4. A (2) egyenlőtlenségek egy lineáris programozási feladatot írnak le, melynek célfüggvénye (3). A (4) egyenlőtlenségek az (5) célfüggvénnyel ennek a feladatnak a duálisát írják le. Mivel $\emptyset \notin E(H)$ esetén mindkét feladat megoldhatósága triviális, a lineáris programozás dualitástétele szerint

$$\text{(6)} \qquad \nu^* = \tau^*.$$

Ha $\emptyset \in E(H)$, akkor úgy tekinthető, hogy $\nu^*(H) = \tau^*(H) = \infty$. Az alapvetően fontos (6) összefüggésre való tekintettel a továbbiakban nem kell használnunk a ν^* jelölést.

Mivel minden élpakolás valós élpakolás is és minden lefogás valós lefogás is, fennáll

$$\text{(7)} \qquad \nu \leqq \tau^* \leqq \tau.$$

Így (1)-ben az egyenlőségnek szükséges és elegendő feltétele, hogy mind a (2)–(3), mind a duális (4)–(5) feladatnak legyen olyan optimális megoldása, melyben a $w(E)$, ill. $t(x)$ értékek egész számok (könnyen látható persze, hogy ekkor szükségképpen 0-k és 1-ek).

A ν, τ és τ^* mennyiségek tehát egy egész értékű lineáris programozási feladatnak, ill. annak valós relaxációjának a megoldásai. Hogy viszonyukat jobban tisztázhassuk, bevezetünk még néhány mennyiséget.

k-élpakolásnak hívunk egy olyan élcsaládot, mely bármely pontot legfeljebb k-szorosan fed le. Így az 1-*élpakolások* azonosak a független élrendszerekkel. A k-élpakolások maximális elemszámát $\nu_k(H)$-val jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $\nu_1(H) = \nu(H)$. Ha egy független élrendszer minden élét k multiplicitással vesszük, egy k-élpakolást kapunk; ha egy k-élpakolás minden élének multiplicitását k-val osztjuk, egy valós élpakolást kapunk. Ezért

$$\text{(8)} \qquad \nu \leqq \frac{\nu_k}{k} \leqq \tau^*.$$

Analóg módon *k-lefogásnak* nevezzük pontoknak egy olyan családját, mely minden élből legalább k pontot tartalmaz. A k-lefogások minimális elemszámát $\tau_k(H)$-val jelöljük. A fentiekhez hasonlóan adódik, hogy $\tau_1=\tau$ és hogy

$$\tau^* \leqq \frac{\tau_k}{k} \leqq \tau. \tag{9}$$

A ν_k és τ_k mennyiségeket különböző k értékre vizsgálva először azt jegyezzük meg, hogy egy k_1-élpakolás és egy k_2-élpakolás összege egy (k_1+k_2)-élpakolás, és ezért

$$\nu_{k_1+k_2} \geqq \nu_{k_1}+\nu_{k_2}. \tag{10}$$

Hasonlóan

$$\tau_{k_1+k_2} \leqq \tau_{k_1}+\tau_{k_2}. \tag{11}$$

Mivel a (2) egyenlőtlenségek együtthatói racionális számok, az általa leírt poliéder csúcsainak koordinátái is racionálisak és ezért a (2)–(3) feladat optimális megoldásai között van olyan, melynek értékei racionálisak. Legyen s egy ilyen megoldásban a $w(E)$ értékek nevezőinek legkisebb közös többszöröse, ekkor ksw egy ks-élpakolás minden k-ra és ezért

$$\frac{\nu_{ks}}{ks} = \tau^* \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Hasonlóan adódik, hogy van olyan s szám, melyre

$$\frac{\tau_{ks}}{ks} = \tau^* \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

A (10) és (12) összefüggésekből adódik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k}{k} = \tau^*, \tag{14}$$

és hasonlóan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tau_k}{k} = \tau^*. \tag{15}$$

5. A pakolásokra és lefogásokra vonatkozó eddigi megjegyzéseink lényegében a lineáris programozás legalapvetőbb összefüggéseinek speciális esetre vonatkozó megfogalmazásai voltak. Most néhány olyan állítást mondunk ki, melyek már kombinatórikusabb jellegűek.

Egy H hipergráf összes élei $D(H)$-élpakolást alkotnak. Ezért (8) alapján

$$\tau^*(H) \geqq \frac{|E(H)|}{D(H)}. \tag{16}$$

Hasonlóan megjegyezhetjük, hogy az összes pontok egy $r(H)$-lefogást adnak, és így

$$\tau^*(H) \leqq \frac{|V(H)|}{r(H)}. \tag{17}$$

Ez a két triviális egyenlőtlenség lehetővé teszi $\tau^*(H)$ pontos kiszámítását egy fontos speciális esetben:

1. állítás: *Ha H D-edfokú reguláris és r-uniform hipergráf, akkor*

$$\tau^*(H) = \frac{|V(H)|}{r} = \frac{|E(H)|}{D}. \qquad \square\square\square$$

Más szimmetriafeltételek mellett is hasonló eredményekhez jutunk:

2. állítás: *Ha a H hipergráf automorfizmuscsoportja tranzitív a pontokon, akkor*

$$\tau^*(H) = \frac{|V(H)|}{r(H)};$$

ha H automorfizmuscsoportja tranzitív az éleken, akkor

$$\tau^*(H) = \frac{|E(H)|}{D(H)}.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy H automorfizmuscsoportja Ω, és ez tranzitív a pontokon. Legyen t egy optimális valós élpakolás és $\omega \in \Omega$, ekkor $t(\omega x)$ is nyilvánvalóan optimális valós élpakolás és így

$$\bar{t}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} t(\omega x)$$

is az. De $\bar{t}(x)$ nyilván konstans $V(H)$-n, és legalább $\frac{1}{r(H)}$, hiszen H legkisebb élébe is legalább egységnyi összsúly kell, hogy jusson. Ebből

$$\tau^*(H) = |\bar{t}| \geqq \frac{|V(H)|}{r(H)}.$$

(17)-tel összevetve az állítás fele következik. A másik fele teljesen hasonlóan igazolható. $\square\square\square$

Megjegyzés: Eddigi állításainkban ν és τ között teljes analógia mutatkozott. A későbbiekben ez már általában nem lesz így, sőt sokszor éppen az a meglepő, hogy hasonló eredményekhez is ν és τ esetében más úton kell eljutnunk. Néha maguk az eredmények is egészen mások (l. pl. 4.7 d).

6. Megvizsgáljuk ν, τ és τ^* értékét néhány fontos speciális esetben.

a) Legyen G páros gráf. Ekkor Kőnig Dénes híres tétele szerint $\nu(G) = \tau(G)$, és természetesen $\tau^*(G)$ is egyenlő velük.

b) Legyen G egy tetszőleges gráf. Ekkor $\nu(G)$, $\tau(G)$ és $\tau^*(G)$ általában különböző számok. Közülük $\nu(G)$ értékére igen jól használható, mély minimax formula (Tutte [T1], Berge [B3]), kiszámítására pedig effektív algoritmus (Edmonds [E1]) ismeretes. A $\tau(G)$ mennyiség meghatározása azonban, mint a bevezetésben említettük, beletartozik a „nehéz" kombinatorikai feladatok osztályába. Végül a $\tau^*(G)$ mennyiség igen jól kezelhető. Kombinatorikus értelmezését az alábbi formula adja meg [Edmonds]:

(18) $$\nu_2(G) = 2\tau^*(G) = \tau_2(G).$$

Megjegyezzük, hogy a $\tau_2(G)$ mennyiségnek az alábbi interpretációja adható: jelölje $X \subseteq V(G)$ esetén $\Gamma(X)$ az X-beli ponttal összekötött pontok halmazát. Ekkor

$$\tau_2(G) = |V(G)| - \max(|\Gamma(X)| - |X|),$$

ahol a max az összes független X részhalmazra kiterjed. Ez a definícióból egyszerű átfogalmazással következik. Speciálisan a $2\tau^*(G) = |V(G)|$ feltételt kétféleképpen átfogalmazva nyerjük Tutte [T2] alábbi tételét: Egy G gráfból akkor és csakis akkor választhatók ki pontidegen körök és élek úgy, hogy ezek minden pontot lefedjenek, ha minden független X ponthalmazra $|\Gamma(X)| \geqq |X|$.

Megjegyezzük, hogy dolgozatunkban Kőnig tételét és a (18) azonosságot nem használjuk fel, sőt ezekre az alapvető összefüggésekre általános tételeink új bizonyításokat is szolgáltatnak.

Végül egy harmadik hipergráf-típus adatait számoljuk ki. Legyen P az a hipergráf, melynek pontjai egy véges projektív sík pontjai, élei pedig e sík egyenesei. Legyen az egyenesek (közös) elemszáma r, ekkor, mint ismeretes, a pontok száma r^2-r+1. Nyilvánvaló, hogy

$$\nu(P) = 1;$$

közismert elemi állítás, hogy

$$\tau(P) = r,$$

és az 1. állításból azonnal adódik, hogy

$$\tau^*(P) = r - 1 + \frac{1}{r}.$$

2. *τ-kritikus hipergráfok*

1. A τ függvény meghatározása általában igen nehéz, már gráfokra is; mint említettük, a probléma univerzális kereső feladat. Általános módszer ilyen esetekben, hogy bizonyos extremális tulajdonságú hipergráfokra szűkítjük le a vizsgálatot. A legegyszerűbb és legkézenfekvőbb ilyen extremális tulajdonság a következő:

Definíció: Egy H hipergráfot τ-kritikusnak nevezünk, ha bármely $E \in E(H)$ éle esetén $\tau(H-E) < \tau(H)$.

E fogalom gráfok esetében igen gyümölcsözőnek bizonyult. Erre később még visszatérünk. Hipergráfokra vonatkozóan Berge [B1] könyve tartalmaz néhány eredményt. Ezek közül kiemeljük a következőt:

A'. tétel: [Bollobás B7; l. még Katona K3, Jaeger—Payan JP]: *Minden τ-kritikus R rangú H hipergráfra*

$$|E(H)| \leqq \binom{\tau+R-1}{R}.$$

Megjegyezzük, hogy ezt a tételt gráfok esetére ($R=2$) Erdős, Hajnal és Moon [EHM] bizonyították először.

Ez a tétel úgy is fogalmazható, hogy

A' tétel: *Ha egy H hipergráf bármely $\binom{t+R}{R}$ éle lefogható t ponttal, akkor a hipergráf összes élei lefoghatók t ponttal.*

Ez a tétel mutatja, hogy kis t-re a t ponttal való lefoghatóság jól karakterizált tulajdonság: annak bizonyításához, hogy egy hipergráf nem fogható le t ponttal, elegendő egy $\binom{t+R}{R}$ élű részhipergráfjára ezt megmutatni. (Rögzített t és R mellett a jól karakterizálhatóság természetesen triviális; az A′. tétel lassan végtelenbe tartó t esetén is biztosítja ezt.) Az A. tétel nyitva hagyja a kérdést, *hogyan* is lehet egy t ponttal le nem fogható hipergráfból egy $\binom{t+R}{R}$ élű, még mindig nem lefogható részhipergráfot kiválasztani; a tétel alábbi általánosítására adandó bizonyítás egyben effektív algoritmust is fog szolgáltatni erre.

E fejezet fő eredményének, a τ-kritikus gráfok klasszifikációs tételének a bizonyításában fontos szerepet fog játszani a τ-kritikusság fogalmának alábbi általánosítása. Egy hipergráfot *geometriai hipergráfnak* nevezünk, ha pontjai egy valós projektív tér pontjai (tekinthetnénk itt más testek fölötti projektív tereket, sőt tetszőleges matroidokat is, de a „hagyományos" eset tárgyalásához ez az általánosság már elegendő lesz). Egy ponthalmaz *rangja* az általa kifeszített projektív altér dimenziója plusz 1. Az X ponthalmaz rangját $r(X)$ jelöli. Geometriai hipergráf esetén a lefogó pontok minimális száma helyett a következő mennyiséget tekinthetjük:

$$\tau_g(H) = \min \{r(T): T \; H\text{-nak lefogó pontrendszere}\}.$$

Ha H pontjai (projektív) függetlenek, vagyis egyikük sincs benne a többi által kifeszített altérben, akkor nyilván $r(X)=|X|$ minden $X \subseteq V(H)$ esetén és ezért $\tau_g(H)=\tau(H)$.

A H hipergráfot τ_g*-kritikusnak* nevezzük, ha bármely E élére

$$\tau_g(H-E) < \tau_g(H).$$

Az A. tétel általánosításaként bebizonyítjuk:

1. tétel. *Legyen H egy τ_g-kritikus R rangú geometriai hipergráf. Ekkor*

$$|E(H)| \leqq \binom{\tau_g+R-1}{R}.$$

Valójában a tételt az alábbi, kissé általánosabb alakban bizonyítjuk:

1′. tétel: *Legyenek $A_1, \ldots, A_N$ t rangú (tehát $t-1$ dimenziós) alterek egy projektív térben, $B_1, \ldots, B_N$ pedig R elemű halmazok ugyanitt. Tegyük fel, hogy*

$$A_i \cap B_j = \emptyset \Leftrightarrow i = j.$$

Ekkor

$$N \leqq \binom{t+R}{R}.$$

Érdemes megemlíteni, hogy az 1′. tételből a „halmaz" és „altér" szerepének megcserélésével az 1. tétel alábbi analogonja is adódik, mely egy Helly-típusú kombinatorikus geometriai eredmény:

1″. tétel. *Ha egy projektív tér t rangú altereinek egy halmazából bármely $\binom{t+R}{R}$ lefogható R ponttal, akkor az összes lefogható R ponttal.*

Megjegyezzük, hogy az állítás ugyanígy bizonyítható pl. az affin tér, sőt bármely kommutatív test fölött koordinátázható matroid altereire.

Az 1′. tétel alább adandó bizonyítása egyben algoritmust is szolgáltat arra, hogy egy geometriai hipergráfból egy $\binom{\tau_g+R-1}{R}$ élű részhipergráfot kiválasszon, melynek τ_g-je még mindig ugyanaz. Ennyiben még abban az esetben is többet ad az A. tételre ismeretes bizonyításoknál, amikor a hipergráf pontjai projektív függetlenek.

Az 1′. tétel bizonyítása: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a projektív tér t dimenziós, tehát $A_1, \ldots, A_N$ hipersíkok; ellenkező esetben ugyanis az egész teret egy általános irányban egy általános helyzetű t dimenziós altérre vetítve, $A_1, \ldots, A_N$ vetületei ebben hipersíkok lesznek, és az irány általános megválasztása miatt B_i pontjainak vetületei nem esnek A_i vetületére. Így elegendő a vetületre igazolni az állítást.

Legyen $B_i=\{b_1^i, \ldots, b_R^i\}$, ahol tehát b_v^i-t egy $t+1$ dimenziós $(b_{v0}^i, \ldots, b_{vt}^i)^T$ oszlopvektornak tekinthetjük. Ekkor legyen

$$\hat{B}_i = \sum_{\pi} b^i_{\pi(1)} \circ b^i_{\pi(2)} \circ \ldots \circ b^i_{\pi(R)},$$

ahol a $\circ$ tenzor-szorzatot jelöl, π pedig $\{1, \ldots, R\}$ permutációin fut végig. Így $\hat{B}_i$ egy R-szeresen kovariáns tenzor, vagy más szóval egy $(t+1)^R$ dimenziós vektor, melynek koordinátái

$$b^i_{k_1, \ldots, k_R} = \sum_{\pi} b^i_{\pi(1)k_1} \ldots b^i_{\pi(R)k_R} \quad (0 \leqq k_v \leqq t).$$

Fennáll továbbá, hogy $\hat{B}_i$ invariáns az indexek permutációival szemben.

Legyen $a_i=(a_i^0, \ldots, a_i^t)$ az A_i hipersíkot kitűző sorvektor, más szóval legyen A_i egyenlete $a_i x=0$. Ekkor

$$\check{A}_i = \underbrace{a_i \circ a_i \circ \ldots \circ a_i}_{R\text{-szer}}$$

egy R-szeresen kontravariáns tenzor, vagyis egy másik $(t+1)^R$ dimenziós vektor, melynek koordinátái

$$a_i^{k_1, \ldots, k_R} = a_i^{k_1} \ldots a_i^{k_R} \quad (0 \leqq k_v \leqq t).$$

Tekintsük mármost az $\check{A}_i \hat{B}_j$ skalárszorzatot. Ezt kiszámítva:

$$\sum_{k_1=0}^{t} \sum_{k_2=0}^{t} \ldots \sum_{k_R=0}^{t} \sum_{\pi} a_i^{k_1} \ldots a_i^{k_R} b^j_{\pi(1)k_1} \ldots b^j_{\pi(R)k_R} =$$

$$= \sum_{\pi} \sum_{k_1=0}^{t} \sum_{k_2=0}^{t} \ldots \sum_{k_R=0}^{t} a_i^{k_1} b^j_{\pi(1)k_1} \ldots a_i^{k_R} b^j_{\pi(R)k_R} =$$

$$= \sum_{\pi} (a_i b^j_{\pi(1)}) \ldots (a_i b^j_{\pi(R)}) = R!\,(a_i b_1^j) \ldots (a_i b_R^j).$$

Ez akkor és csakis akkor 0, ha B_j valamelyik pontja illeszkedik A_i-re, vagyis ha $i \neq j$.

Ebből viszont következik, hogy *a $\hat{B}_j$ vektorok lineárisan függetlenek,* hiszen mindegyikükhöz van olyan hipersík, mely a többit tartalmazza, de őt nem. Közismert (és elemi kombinatorikai meggondolásokból következik), hogy az R-szeresen kovariáns, az indexekben szimmetrikus tenzorok egy $\binom{t+R}{R}$ dimenziós lineáris teret alkotnak. Így a B_j-k száma sem nagyobb, mint $\binom{t+R}{R}$. □□□

Az 1. *tétel bizonyítása.* Feltehetjük, hogy H R-uniform, mert ha az R-nél kevesebb elemű élekhez új, az összes többitől független pontokat fűzünk, H τ_g-kritikus volta nem változik.

Legyenek $B_1, \ldots, B_N$ H élei, A_i pedig olyan $\tau_g - 1$ rangú altér, mely $H - B_i$ minden élét lefogja. Mivel A_i nem foghatja le H minden élét, következik, hogy $A_i \cap B_i = \emptyset$. Így az A_i alterek és a B_j halmazok kielégítik az 1′. tétel feltételét, és az állítás következik. □□□

2. E pontban τ-kritikus gráfokkal és τ_g-kritikus geometriai gráfokkal foglalkozunk. A τ-kritikus gráfok vizsgálata Erdős és Gallai [EG] cikke nyomán indult el, és számos mély eredményhez vezetett. Az említett cikkben Erdős és Gallai bebizonyították, hogy minden izolált pontot nem tartalmazó τ-kritikus gráfra $|V(G)| \leqq 2\tau(G)$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha G független élekből áll. Ezen eredmény alapján Gallai javasolta a τ-kritikus gráfok osztályozását a $\delta(G) = 2\tau(G) - |V(G)|$ mennyiség szerint. Ez a mennyiség a τ-kritikus gráfok számos strukturális tulajdonságával kapcsolatban van. Példaként említjük Hajnal [H] következő tételét:

B. tétel. *Bármely izolált pontot nem tartalmazó τ-kritikus G gráfra fennáll*

$$D(G) \leqq \delta(G) + 1.$$

Ebből azonnal adódik, hogy ha G τ-kritikus gráf és $\delta(G) = 1$, akkor G egy páratlan körből és tőle diszjunkt élekből áll.

Kényelmes lesz csak összefüggő τ-kritikus gráfokat vizsgálni. Ez nem jelent lényeges megszorítást, mert ha egy gráf τ-kritikus, akkor minden komponense is az, és a δ-k összeadódnak. Tehát az összefüggő τ-kritikus gráfok $\delta(G) = 1$ esetén csak a páratlan körök.

Gallai sejtette és Andrásfai [A] igazolta, hogy azok az összefüggő τ-kritikus gráfok, melyekre $\delta(G) = 2$, pontosan azok a gráfok, melyek a teljes négyszögből minden élnek páros számú ponttal való felosztásával állnak elő.

Itt ismét tehetünk egy egyszerűsítő észrevételt. Könnyen igazolható, hogy ha egy τ-kritikus G gráf egy x pontját elhagyjuk, szomszédait két nem-üres osztályba soroljuk, majd e két osztály pontjait egy új 2 hosszúságú út egy-egy végpontjával összekötjük, akkor újabb τ-kritikus G' gráfot kapunk, melyre $\delta(G') = \delta(G)$. Megfordítva, ha G' olyan τ-kritikus gráf, melyben van egy másodfokú y pont, akkor az y-hoz illeszkedő két élt egyetlen x ponttá összevonva a kapott G gráf τ-kritikus és belőle az x pontnak a fent leírt módon való „felhasítása" által a G' visszanyerhető (l. Plummer [P2]). Így ha ismerjük mindazon τ-kritikus gráfokat, melyekben nincsen másodfokú pont, az összes többit pontok sorozatos „felhasítása" révén már könnyen előállíthatjuk. Jegyezzük még meg, hogy összefüggő τ-kritikus gráfban $\delta > 1$ esetén elsőfokú pont nem lehet.

Andrásfai idézett eredménye ezek után úgy fogalmazható, hogy olyan τ-kritikus G gráf, mely összefüggő, minden pontja legalább harmadfokú és melyre $\delta(G) = 2$, csak egy van: a teljes négyszög.

Gallai vetette fel azt a sejtést, hogy minden rögzített δ érték mellett olyan τ-kritikus gráf, mely összefüggő, minden pontja legalább harmadfokú, és melyre $\delta(G) = \delta$, csak véges sok van. Az említett eredmények e sejtést $\delta \leqq 2$ esetén bizonyítják. A $\delta = 3$ esetet Surányi László és a szerző oldották meg egymástól függetlenül (l. Surányi [S2]).

Itt Gallai sejtését teljes általánosságban bebizonyítjuk [L4]:

2. tétel. *Legyen $\delta \geqq 2$. Ekkor olyan összefüggő τ-kritikus gráf, melyben minden pont foka legalább* 3 *és melyre $\delta(G) = \delta$, csak véges sok van.*

A bizonyításból az ilyen gráfok nagyságára 2^{δ^2} nagyságrendű felső korlát adódik. Ez nyilván messze jár a tényleges maximális pontszámtól, különösen, ha tekintetbe vesszük, hogy az ismert legjobb alsó becslés, melyet Surányi [S3] egy nem-triviális konstrukciója szolgáltat, δ^2 nagyságrendű.

A 2. tétel bizonyításában fontos szerepet fog játszani az alábbi eredmény:

3. tétel: *Legyen G izolált pontot nem tartalmazó τ-kritikus gráf és A G-nek egy független ponthalmaza. Ekkor*

$$|E(G-A)| \leqq \binom{\tau(G)-|A|+1}{2}.$$

Mint azt a teljes gráfok példája mutatja, ez a korlát éles.

Megemlítjük még Hajnal [H] következő fontos tételét:

C. tétel. *Legyen A az izolált pontot nem tartalmazó τ-kritikus G gráf pontjainak egy független részhalmaza. Ekkor $|\Gamma(A)| \geqq |A|$.*

Surányi [S2] és a szerző egymástól függetlenül bizonyították be a következő tételt, mely a B. és C. tételek közös általánosítása:

D. tétel. *Legyen A az izolált pontot nem tartalmazó, τ-kritikus G gráf pontjainak egy független halmaza és $a \in A$. Ekkor*

$$d_G(a) \leqq |\Gamma(A)| - |A| + 1.$$

A továbbiakban a τ_g-kritikus gráfok néhány egyszerű tulajdonságát igazoljuk, majd megmutatjuk, hogy ezekből a felsorolt tételek egységes és egyszerű módon levezethetők.

1. segédtétel. *Legyen G egy τ_g-kritikus geometriai gráf és x egy pontja. Tegyük fel, hogy x nincsen benne a többi pont által kifeszített altérben. Ekkor x-et a szomszédai által kifeszített altér egy általános helyzetű*[1] *pontjába eltolva, a kapott G' geometriai gráf is τ_g-kritikus.*

Bizonyítás: Először is megmutatjuk, hogy

$$\tau_g(G') \geqq \tau_g(G). \tag{1}$$

Legyen ugyanis T a G' gráf egy $\tau_g(G')$ rangú lefogó ponthalmaza. Ha $x' \notin T$, akkor T G-nek is lefogó ponthalmaza. Ha $x' \in T$, és $T-x'$ rangja kisebb, mint T rangja, akkor $T-\{x'\}\cup\{x\}$ a G gráfnak lefogó ponthalmaza, és rangja ugyanakkora, mint T rangja. Végül ha x' benne van a $T-x'$ által kifeszített altérben, akkor (x' választása folytán) x' minden szomszédja is benne van ebben az altérben, és így $T-x'$ lesz lefogó halmaza G-nek is. Ez bizonyítja (1)-et.

Másrészről könnyen adódik, hogy G' bármely élére

$$\tau_g(G'-E) \leqq \tau_g(G)-1. \tag{2}$$

Valóban, legyen S a $G-E$ gráfnak egy $\tau_g(G)-1$ rangú lefogó halmaza. Ekkor vagy S, vagy $S-\{x\}\cup\{x'\}$ (aszerint, hogy S tartalmazza-e x-et) lefogó halmaza G'-nek, és rangja legfeljebb akkora, mint S rangja.

[1] Egy p pont az A altér általános helyzetű pontja az S halmazra vonatkozóan, ha az S által kifeszített alterek közül csak olyanok tartalmazzák, melyek az egész A-t tartalmazzák. A későbbiekben mindig a gráf összes pontjára vonatkoztatjuk az általános helyzetet.

Az (1) és (2) relációk összevetéséből adódik, hogy (1)-ben egyenlőség kell, hogy álljon és az is, hogy G' is τ_g-kritikus. □□□

2. segédtétel. *Legyen G egy τ_g-kritikus geometriai gráf és $x \in V(G)$. Tegyük föl, hogy x benne van a szomszédai által kifeszített altérben. Ekkor x-et G-ből elhagyva és a többi pontot x-ből egy (x-en át nem haladó) hipersíkra vetítve a kapott G' gráf is τ_g-kritikus.*

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy

$$\tau_g(G') \geqq \tau_g(G) - 1. \tag{3}$$

Legyen ugyanis T a G' hipergráf egy $\tau_g(G')$ rangú lefogó ponthalmaza. Legyen T' a G-ben T-nek megfelelő halmaz. Ekkor $T' \cup \{x\}$ nyilván lefogja G minden élét. Továbbá $T' \cup \{x\}$ benne van a $T \cup \{x\}$ által kifeszített altérben, és így rangja legfeljebb $\tau_g(G') + 1$.

Másrészről megmutatjuk, hogy minden $E \in E(G)$-re

$$\tau_g(G' - E) \leqq \tau_g(G) - 2. \tag{4}$$

Legyen ugyanis E' a G-ben E-nek megfelelő él, és S a $G - E'$ gráfnak egy minimális rangú lefogó ponthalmaza. Vegyük észre, hogy az S által kifeszített altér tartalmazza x-et; ez nyilvánvaló, ha $x \in S$, ellenkező esetben pedig azért áll, mert ekkor S-nek tartalmaznia kell x minden szomszédját és x már az ezek által kifeszített altérben is benne van. De ekkor S vetületének rangja kisebb, mint S rangja, és mivel S vetülete lefogja $G' - E$ minden élét, ez (4)-et bizonyítja.

(3)-ból és (4)-ből az előzőekhez hasonlóan következik a segédtétel állítása.

□□□

3. segédtétel. *Legyen G egy τ_g-kritikus geometriai gráf és x egy pontja. Ekkor x szomszédai (projektív) függetlenek.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekte, hogy x-nek y szomszédja benne van a többi szomszéd által kifeszített altérben. Hagyjuk el az (x, y) élt, és legyen S a visszamaradó gráf egy $\tau_g(G) - 1$ rangú lefogó ponthalmaza. S nem tartalmazhatja x-et, mert akkor G-nek is lefogó ponthalmaza volna. Ezért S-nek tartalmaznia kell x-nek y-tól különböző szomszédait. De ekkor $S \cup \{y\}$ rangja nem nagyobb, mint S rangja a feltétel miatt, és az a halmaz már lefogja G minden élét, ami ellentmondás. □□□

E három segédtétel alapján a τ-kritikus gráfok említett (ismert és új) tulajdonságai viszonylag egyszerűen levezethetők. Először is tegyünk egy nagyon egyszerű megjegyzést. Legyen G τ-kritikus gráf és x egy másodfokú pontja. Tekintsük G-t olyan geometriai gráfnak, melynek pontjai projektív független pontok egy projektív térben. Az 1. segédtétel felhasználásával mozgassuk x-et a szomszédait összekötő egyenesre, majd a 2. segédtétel felhasználásával hagyjuk el, és vetítsük a többi pontot x-ből egy hipersíkra. Az eredmény egy olyan τ_g-kritikus geometriai gráf, melynek pontjai függetlenek — vagyis egy τ-kritikus gráf. Ez a gráf G-ből x törlésével és szomszédai azonosításával jön létre. Így a másodfokú pontok redukálhatóságát, melyet fentebb említettünk, általánosabb operációk speciális eseteként kapjuk.

Ha 2-nél magasabb fokú pontot hagyunk el az 1. és 2. segédtételek egymásutáni alkalmazásával, akkor a nyert geometriai hipergráfban a pontok már nem lesznek függetlenek, hanem az elhagyott pont szomszédai közül bármelyik a többi által kifeszített altérben lesz (megjegyezzük, hogy másodfokú pont esetén is igaz ez, csak itt a két szomszéd a vetítésnél egybeesik, és ezért a „különböző" pontok függetlenek lesznek).

Legyen A G-nek egy (gráf-értelemben) független ponthalmaza, és $a \in A$. Hagyjuk el $A-\{a\}$ pontjait egymás után, az 1. és 2. segédtétel felhasználásával. Ez megtehető, mert A pontjai egymásnak nem szomszédai, így minden vetítésnél igaz marad az, hogy A pontjai függetlenek a gráf többi pontjától. Minden ilyen redukciónál $\Gamma(A)$ rangja eggyel csökken. Mivel a végül kapott geometriai gráf is τ_g-kritikus, érvényes lesz rá a 3. segédtétel, vagyis a szomszédai projektív függetlenek lesznek. De ezek a pontok mind $\Gamma(A)$-ban vannak, és $\Gamma(A)$ rangja már csak $|\Gamma(A)|-|A-\{a\}|=$ $=|\Gamma(A)|-|A|+1$. Innen következik a D. tétel.

Legyen ismét G egy τ-kritikus gráf és A egy független ponthalmaza. Az előzőekhez hasonlóan hagyjuk el A pontjait egymás után az 1. és 2. segédtétel felhasználásával. A τ_g mennyiség minden lépésben eggyel csökken, így végül $\tau(G)-|A|$ lesz. Ezért a megmaradó élek száma az 1. tétel szerint legfeljebb $\binom{\tau(G)-|A|+1}{2}$ lesz. Ez bizonyítja a 3. tételt.

3. A 2. tétel bizonyításának előkészítéseként egy látszólag távol eső kérdést tárgyalunk, mely páros gráfok 1-faktoraira vonatkozik.

Legyen H egy hipergráf. Tekintsük mindazon páros G gráfok $\mathscr{K}_H$ osztályát, melyekre

(a) $V(G) \supseteq V(H)$,

(b) bármely $E \in E(H)$-ra a $G-E$ gráf tartalmaz 1-faktort. (Nyilvánvaló, hogy ez az osztály csak akkor nem üres, ha H minden éle azonos paritású.)

Ha egy $\mathscr{K}_H$-beli gráfba éleket húzunk be, újabb $\mathscr{K}_H$-beli gráfot kapunk. Ezért a $\mathscr{K}_H$-beli gráfok vizsgálatakor szorítkozhatunk azokra a $\mathscr{K}_H$-beli gráfokra, melyekből bármely élt elhagyva már nem kapunk $\mathscr{K}_H$-beli gráfot. Jelölje ezek osztályát $\mathscr{M}_H$. Következő tételünk azt mondja ki, hogy az $\mathscr{M}_H$ osztály „lényegében" véges, pontosabban, hogy véges sok gráfból megkapható élek felosztásával és diszjunkt élek hozzávételével:

4. tétel. *Legyen H m élű, R rangú hipergráf, és $G \in \mathscr{M}_H$. Ekkor G-nek legalább harmadfokú pontjainak száma legfeljebb* $\binom{m}{3} \cdot R^3$.

Megjegyzés: Sejthető, hogy analóg tétel igaz a nempáros gráfok esetében is. Ennek bizonyítása lényegesen nehezebbnek tűnik. Szerencsére nem lesz rá szükségünk.

Bizonyítás. Legyen $E(H)=\{E_1, \ldots, E_m\}$. G minimalitása miatt minden e éléhez van olyan i index, hogy $(G-e-E_i)$-nek nincs 1-faktora. Rögzítsünk minden egyes e élhez egy ilyen indexet, és nevezzük ezt az e él indexének. Ha e indexe i, akkor $G-E_i$ minden 1-faktora kell, hogy tartalmazza e-t. Ebből az is látszik, hogy az azonos indexű élek függetlenek.

Minden legalább harmadfokú ponthoz válasszunk ki három hozzá illeszkedő élt, és tekintsük ezek indexeit. Ha a tétel állítása nem volna igaz, akkor volna több, mint R^3 olyan pont, melyhez azonos index-hármast rendeltünk; feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy az 1, 2, 3 indexek fordulnak elő több, mint R^3 pontban.

Legyen F_i a $G-E_i$ gráf egy 1-faktora ($i=1, 2, 3$). Tekintsük az $F_i \cup F_j$ gráfot a $V(G)$ ponthalmazon. Ennek összefüggő komponensei a következők lehetnek (1) $E_i \cap E_j$ pontjai, mint izolált pontok; (2) F_i és F_j közös élei, mint kételemű komponensek; (3) a két 1-faktorra nézve alternáló körök; és (4) a két 1-faktorra nézve alternáló, $(E_i \cup E_j)$-ben végződő utak. Az utóbbiak száma nyilván legfeljebb R.

Legyen x olyan pont, melyhez az $\{1, 2, 3\}$ indexhármast rendeltük. Ekkor x beletartozik az $F_i \cup F_j$ gráf egy komponensébe. Ez nem lehet a fenti (1) vagy (2) típusú, mert x-hez illeszkedik F_i-nek is és F_j-nek is éle, és ezek különbözőek. Nem lehet azonban a két 1-faktorra vonatkozólag alternáló kör sem, mert ekkor az F_i 1-faktort úgy módosítva, hogy erre a körre eső éleit a kör többi élével cseréljük ki, olyan F_i' élrendszert kapunk, mely $(G-E_i)$-nek 1-faktora, és nem tartalmazza az x-hez illeszkedő i indexű élt, ami lehetetlen. Tehát x az $(F_i \cup F_j)$-nek egy alternáló útjához tartozik.

Mivel a tekintett x pontok száma nagyobb, mint R^3, van közöttük kettő, mely mindhárom i, j pár esetén ugyanarra az elternáló útra esik. Legyenek ezek x és y.

Minden $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ párra tehát létezik x-et y-nal összekötő, F_i-re és F_j-re nézve alternáló P_{ij} út. Könnyen látható, hogy az indexelés mindig választható úgy, hogy P_{12}-nek F_1-beli, P_{23}-nak F_2-beli éle illeszkedjen x-hez. (P_{13}-ról nem tudunk erre vonatkozóan semmit.)

Induljunk el mármost a P_{12} úton és haladjunk addig, amíg az első x-től különböző P_{23}-beli ponthoz nem érünk. Ez legkésőbb akkor következik be, amikor y-ba érünk. Ezek után menjünk vissza P_{23}-on x-be. Így egy K kört jártunk be, mely a G gráf páros volta miatt páros hosszúságú. Ezért K alternáló kör az F_2 1-faktorra nézve. Így ha — a fentiekhez hasonlóan — F_2-t úgy módosítjuk, hogy K-ra eső éleit K többi élével cseréljük ki, a $G-E_2$ gráfnak olyan 1-faktorát kapjuk, mely nem tartalmazza az x-re illeszkedő 2 indexű élt, ami ellentmondás. □□□

4. *A 2. tétel bizonyítása.* Legyen G összefüggő, τ-kritikus gráf, melyben minden pont foka legalább 3. Legyen $\delta(G)=\delta$. Le fogunk vezetni egy csak δ-tól függő felső becslést G pontszámára; ezzel a tétel bizonyítva lesz.

Jelölje S a G gráf egy minimális lefogó ponthalmazát. Legyen G' az a páros gráf, melyet az S-et $(V(G)-S)$-sel összekötő élek alkotnak, és legyen G_0 az S által feszített részgráf. A 4. tétel szerint G_0 élszáma legfeljebb $\binom{\delta+1}{2}$.

G_0 minden nem csökkenthető Z lefogó halmazához konstruáljunk meg egy E_Z halmazt a következőképpen: Nyilván $\tau(G'-Z) \geqq \tau(G)-|Z|$. Ezért Kőnig tétele szerint $G'-Z$ tartalmaz $\tau(G)-|Z|$ független élt. Jelölje E_Z az ezek által le nem fedett pontok halmazát, és legyen H az E_Z halmazok által alkotott hipergráf. Jegyezzük meg, hogy $E_Z \supseteq Z$. H élszáma nyilván legfeljebb $2^{|E(G_0)|} \leqq 2^{\binom{\delta+1}{2}}$, míg rangját így becsülhetjük:

$$|E_Z| = (2\tau(G)-\delta)-2(\tau(G)-|Z|) = 2(|Z|-\delta) < 2|Z| \leqq 2\binom{\delta+1}{2}.$$

A H hipergráf definíciója folytán $G' \in \mathscr{K}_H$. Megmutatjuk, hogy $G' \in \mathscr{M}_H$. Legyen ugyanis $e \in E(G')$. Mivel G τ-kritikus, $G-e$ élei lefoghatók egy $\tau(G)-1$ elemű T halmazzal. T speciálisan lefogja G_0 éleit is, így tartalmazza G_0-nak egy nem csökkenthető Z lefogó halmazát. Állítjuk, hogy $G'-e-E_Z$ nem tartalmaz 1-faktort. Egy ilyen 1-faktor ugyanis $\tau(G)-|Z|$ független élből állna, és T ezek mindegyikéből kellene, hogy tartalmazzon egy-egy pontot. Z pontjaival együtt azonban ez már $\tau(G)$ pont, ellentmondás.

Alkalmazzuk most G'-re a 4. tételt. Kapjuk, hogy G' harmadfokú pontjainak száma legfeljebb

$$\binom{2\binom{\delta+1}{2}}{3} 8\binom{\delta+1}{2}^3$$

Mivel G minden pontja legalább 3-adfokú, így minden pont vagy G'-ben is legalább harmadfokú, vagy illeszkedik G_0 egy éléhez. Ezért

$$|V(G_0)| < 8\binom{\delta+1}{2}^3 \left[2\binom{\delta+1}{2}\right] + 2\binom{\delta+1}{2}. \qquad \square\square\square$$

5. Végül a τ-kritikus gráfok és hipergráfok τ^*-járól teszünk egy-két megjegyzést. Mivel a C. tételből következően minden izolált pontot nem tartalmazó τ-kritikus gráfban

$$\tau^*(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$$

(lásd az 1. fejezet 6. pontját), a $\tau^*(G)$ mennyiségre fennáll:

$$\delta(G) = 2(\tau(G) - \tau^*(G)).$$

Bár ez az észrevétel a $\delta(G)$ mennyiség fontos szerepét mutató tételek bizonyításában nem játszott szerepet, úgy érzem, e szerep motivációjához hozzátartozik.

A B. tétel mármost úgy is interpretálható, hogy τ és τ^* különbségére ad alsó korlátot a $D(G)$ maximális fokszám segítségével. Tetszőleges hipergráfra is adható ilyen, bár sokkal gyöngébb alsó becslés; lényege leginkább az, hogy $\tau \neq \tau^*$:

5. tétel: *Bármely τ-kritikus H hipergráfra*

$$\tau(H) - \tau^*(H) \geqq \frac{D(H)-1}{D(H)}.$$

A becslés élességét a $D+1$ pont összes D-eséből álló hipergráf mutatja. Nyitott kérdés azonban, hogy javítható-e ez a becslés rögzített rang esetén legalább annyira, hogy — mint a gráfok esetén — a jobb oldal végtelenhez tartson $D(H)$-val.

Bizonyítás: Legyen x maximális fokú pont, és jelölje $E_1, \ldots, E_D$ az x-re illeszkedő éleket. Definíció szerint $\tau(H-E_i) \leqq \tau-1$, így van olyan T_i halmaz, mely E_i kivételével az összes élt lefogja, és melynek legfeljebb $\tau-1$ eleme van. Tekintsük a

$$T = T_1 + \ldots + T_D + \{x\}$$

pontrendszert. Ez minden élt D-szeresen lefog: az E_i élt ugyanis lefogják a T_j $(j \neq i)$ halmazok és még x is, az x-et nem tartalmazó éleket pedig minden egyes T_i. Ezért tehát

$$\tau_D \leqq |T| = \sum_{i=1}^{D} |T_i| + 1 \leqq D(\tau-1)+1,$$

és így

$$\tau^* \leqq \frac{\tau_D}{D} \leqq \tau - 1 + \frac{1}{D}. \qquad \square\square\square$$

3. *v-kritikus és v-stabil hipergráfok*

1. E fejezetben az előző fejezet eredményeinek bizonyos analogonjait vizsgáljuk a pakolási feladatra vonatkozóan. A v-kritikus hipergráf fogalmának és a nagyságára vonatkozó felső becsléseknek a gondolata az volt, hogy minél kisebb olyan részét találjuk a hipergráfnak, mely már kikényszeríti, hogy ne lehessen kevés ponttal lefogni. Analóg módon itt most olyan „kis részét" keressük a hipergráfnak, mely már magában kikényszeríti, hogy ne lehessen sok élt belepakolni. Itt több definíció is kínálkozik, és ezeket meg fogjuk vizsgálni. Megjegyzendő, hogy az előző fejezetben is vizsgálhattunk volna más értelemben τ-kritikus hipergráfokat, de ott a definíciók közül kiemelkedően a legtermészetesebb volt az, amit tekintettünk.

1. definíció. Egy H hipergráfot *v-kritikusnak* nevezünk, ha nincs többszörös éle és bármely élét zsugorítva $v(H)$ növekszik.

Nyilvánvaló, hogy minden hipergráfból nyerhetünk v-kritikusat úgy, hogy addig zsugorítjuk az éleit, míg csak tehetjük $v(H)$ növelése nélkül, és az adódó többszörös élekből csak egy-egy példányt tartunk meg. Ha $v=\tau$, akkor a hipergráfból „zsugorítással" nyert v-kritikus hipergráf v diszjunkt egyelemű élből áll.

Nézzünk néhány példát ilyen hipergráfra.

1. *példa.* Legyen H $rv+r-1$ pont összes r elemű részhalmazából alkotott hipergráf. Nyilvánvaló, hogy ebben nincsen $v+1$ diszjunkt él. Másrészről, ha bármelyik r-est egy valódi részhalmazával helyettesítjük, már található lesz tőle és egymástól disziunkt további v darab él. Tehát H v-kritikus. Jegyezzük még meg, hogy

$$\tau^*(H) = v + \frac{|r-1|}{r} \quad \text{és} \quad \tau(H) = vr.$$

2. *példa.* Álljon H egy $r-1$ rendű véges projektív sík egyeneseiből. Nyilvánvaló, hogy $v(H)=1$, de ha bármelyik egyenesről bármelyik pontot elhagyjuk, akkor már lesz két diszjunkt él. Tehát H v-kritikus. Mint láttuk az 1. fejezetben, $\tau^*(H)=$ $=r-1+\frac{1}{r}$ és $\tau(H)=r$.

3. *példa.* Tekintsünk egy trapéz alakban elrendezett pontokból álló diagramot, mely r sorból áll; első sorában v, a másodikban $v+1$, ..., az r-edikben $v+r-1$ ponttal. H élei legyenek az összes olyan halmazok, melyek valamely $1 \leqq i \leqq r$ esetén az i-edik sorból i, és minden alatta levő sorból pontosan egy pontot tartalmaznak. Nyilvánvaló, hogy H r-uniform hipergráf.

H-ban nincsen $v+1$ diszjunkt él. Tekintsünk ugyanis H-ban tetszőleges diszjunkt éleket és ezek közül azt, mely a „leglaposabb", vagyis mely a lehető legkevesebb sorból tartalmaz pontot. Tegyük fel, hogy ez az i-edik sorból i pontot, az alatta levőkből egy-egyet tartalmaz. Ekkor minden más él a tekintettek közül tartalmaz legalább egy pontot az i-edik sorból. Mivel az i-edik sorban összesen $v+i-1$ pont van, összesen csak v élünk lehet.

Legyen másrészről E egy tetszőleges, az i-edik sorban „kezdődő" él, és $x \in E$. Megmutatjuk, hogy $E-x$ mellé még választható v egymástól és E-től diszjunkt él. Ha x az i-edik sorban van, akkor egyszerűen választhatunk v olyan élt, melyek mindegyike minden sorból egyetlenegy pontot tartalmaz. Ha x a j-edik sorban van, $i<j$, akkor válasszunk egy olyan élt, mely a j-edik sorban, és $v-1$ olyan élt, mely az első sorban „kezdődik". Így beláttuk, hogy H v-kritikus.

Nem nehéz kiszámítani H többi adatát:

$$|E(H)| = \sum_{i=1}^{r} \binom{v+i-1}{i}(v+i)\ldots(v+r-1) \approx v(v+1)\ldots(v+r-1)e;$$

$$|V(H)| = rv + \binom{r}{2},$$

$$\tau(H) = v + r - 1,$$

$$\tau^*(H) = v + \frac{r-1}{2}.$$

4. *példa.* Legyen S egy $2r-2$ elemű halmaz, és rendeljünk hozzá S minden két $r-1$ elemű osztályra való $P=\{P_1, P_2\}$ particiójához egy új x_P pontot. Legyenek a H hipergráf élei S összes r elemű részhalmazai és minden $P=\{P_1, P_2\}$ partícióhoz az $\{x_P\}\cup P_1$ és $\{x_P\}\cup P_2$ halmazok. H tehát r-uniform hipergráf. Könnyen verifikálható, hogy H v-kritikus, és

$$v(H) = 1, \quad \tau^*(H) = 2, \quad \tau(H) = r,$$

$$|V(H)| = 2r - 2 + \frac{1}{2}\binom{2r-2}{r-1}.$$

Megjegyezzük, hogy a 2. és 4. példából is könnyen kaphatunk v-kritikus hipergráfot tetszőleges előírt $v(H)$ értékkel, ha belőlük $v(H)$ darabot diszjunktan egymás mellé írunk.

2. Gráfok körében jól ismerjük a v-kritikusokat. Mivel egy gráf (vagy hipergráf) akkor és csakis akkor v-kritikus, ha minden komponense az, elegendő az összefüggő v-kritikus gráfokat leírni. Az ezekre vonatkozó legfontosabb eredmény Gallai [G1] következő tétele:

A. tétel. *Minden összefüggő v-kritikus gráf faktor-kritikus, vagyis bármely pontját elhagyva a visszamaradó gráfnak már van 1-faktora. Megfordítva, minden faktor-kritikus gráf összefüggő és v-kritikus.*

Úgy is fogalmazható a tétel, hogy összefüggő v-kritikus G gráf pontszáma $2v(G)-1$.

A faktor-kritikus gráfokra ismeretes a következő struktúratétel [L5]. Megjegyzendő, hogy a tétellel ekvivalens állítást W. Pulleyblank és J. Edmonds [PE] is igazoltak, felhasználva az Edmonds-féle párosítási algoritmust.

1. tétel. *Egy G gráf akkor és csakis akkor faktor-kritikus, ha előállítható*

$$G = \{x\} \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$$

alakban, ahol x egy pont és minden $1 \leqq i \leqq k$-ra P_i vagy egy páratlan hosszúságú út, melynek a $G_{i-1} = \{x\} \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{i-1}$ gráffal csak a végpontjai közösek, vagy pedig egy páratlan kör, melynek G_{i-1}-gyel egyetlenegy közös pontja van (P_1 természetesen csak az utóbbi lehet).

A P_i utakat füleknek, a felbontást fülfelbontásnak is fogjuk nevezni.

Gyakran kényelmesebb, ha faktor-kritikus gráfok vizsgálatánál csak a kétszeresen összefüggőekre szorítkozunk. Ezt megtehetjük, mert egy gráf akkor és

csak akkor faktor-kritikus, ha minden blokkja (kétszeresen összefüggő komponense) faktor-kritikus. Ezekre vonatkozik az alábbi tétel:

1′. tétel. *Egy G gráf akkor és csak akkor kétszeresen összefüggő és faktor-kritikus, ha előállítható*

$$G = P_1 \cup \ldots \cup P_k$$

alakban, ahol P_1 egy páratlan kör és minden $2 \leqq i \leqq k$-ra P_i egy olyan páratlan hosszúságú út, melynek a $G_{i-1} = P_1 \cup \ldots \cup P_{i-1}$ gráffal csak a végpontjai közösek.

Érdekes, hogy a paritási feltételt elejtve az 1. tételbeli felbontás létezése a 2-szeresen élösszefüggő, a 2. tételbeli a 2-szeresen (pont) összefüggő gráfokat jellemzi Whitney ismert tétele szerint.

E tételek gráfelméleti alkalmazásaira nem térünk ki, csak egy következményt említünk:

Következmény: *Minden faktor-kritikus G gráfra*

$$\tau^*(G) = \frac{1}{2}|V(G)| = \nu(G) + \frac{1}{2}.$$

Az 1. tétel bizonyítása: Tegyük fel először, hogy G-nek létezik fülfelbontása. k szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy G faktor-kritikus. Ez $k=0$-ra triviális. Feltehetjük tehát, hogy a G_{k-1} gráf faktor-kritikus. Bebizonyítjuk, hogy $G = G_{k-1} \cup P_k$ is az. Legyen $x \in V(G)$. Ha $x \in V(G_{k-1})$, akkor $G_{k-1} - x$ tartalmaz 1-faktort, és ezt kiegészíthetjük P_k minden második élével $G-x$ egy 1-faktorává. Legyen x P_k belső pontja. Ekkor x P_k valamelyik végpontjától, mondjuk y-tól, páros távolságra van. Legyen F a $G_{k-1} - y$ gráfnak egy 1-faktora. Ekkor $(G-x)$-nek F által le nem fedett pontjai P_k-nak két páratlan hosszúságú darabját alkotják, és így F kiegészíthető $G-x$ egy 1-faktorává.

Tegyük fel most, hogy G faktor-kritikus. Legyen x G-nek tetszőleges pontja. Tegyük fel, hogy sikerült már kiválasztanunk a $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ páratlan utakat, ill. köröket úgy, hogy azok a kívánt módon csatlakozzanak, és ezen felül $G - V(G_{i-1})$-nek van 1-faktora (itt $G_{i-1} = \{x\} \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{i-1}$). Megkonstruálunk egy P_i utat, mely hozzávehető a rendszerhez, hacsak $G \neq G_{i-1}$.

Legyen $e=(x, y)$ G-nek olyan éle, mely nem tartozik G_{i-1}-hez, de x végpontja G_{i-1}-ben van (ilyen él van, mert G összefüggő). Ha y is pontja G_{i-1}-nek, akkor e-t, mint 1 hosszúságú utat választhatjuk P_i-nek. Feltehetjük tehát, hogy $y \notin V(G_{i-1})$. Legyen F a $G-y$ gráfnak egy 1-faktora, F_0 pedig a $G - V(G_{i-1})$ gráfé. Tekintsük $F \cup F_0$-t, és ennek y-t tartalmazó komponensét. Mivel y-hoz csak F_0-beli él illeszkedik, ez a komponens egy y-ból kiinduló út, melynek másik végpontja nyilván $V(G_{i-1})$-ben kell, hogy legyen, és belső pontja nem lehet $V(G_{i-1})$-ben, hiszen akkor nem indulhatna ki e belső pontból F_0-beli él. Adjuk még hozzá ehhez az úthoz az e élt, és válasszuk a kapott utat P_i-nek. Ez nyilván a kívánt módon csatlakozik G_{i-1}-hez, és F_0-nak P_i-n kívüli élei a $G - V(G_{i-1} \cup P_i)$ gráfnak egy 1-faktorát alkotják. □□□

Az 1′. tétel bizonyítása. Az, hogy a mondott alakban előállítható gráfok kétszeresen összefüggőek és faktor-kritikusok, triviális. Azt kell csak bizonyítani, hogy ha G kétszeresen összefüggő faktor-kritikus gráf, akkor létezik az 1. tételben megadott fülfelbontása azzal a további megszorítással is, hogy P_1 kivételével a P_i „fülek" mind utak.

Tegyük föl, hogy a $P_1, \ldots, P_{i-1}$ füleket már kiválasztottuk a kívánt módon. Az 1. tétel konstrukciójával e fülsorozatot befejezzük; persze nem tudhatjuk, hogy

P_i megfelelő lesz-e. Legyen $G_\mu = \{x\} \cup P_1 \cup \ldots \cup P_\mu$ $(1 \leqq \mu \leqq k)$. Megmutatjuk, hogy P_i helyett, ha kell, választhatunk egy olyan P_i' fület, mely út.

Legyen j a legutolsó olyan index, melyre G_{i-1} a G_j gráfnak blokkja. Mivel G kétszeresen összefüggő, $j \neq k$, így létezik a P_{j+1} fül. A G_j olyan szerkezetű, hogy G_{i-1} bizonyos pontjait egy-egy faktor-kritikus gráf egy-egy pontjával azonosítjuk; ez abból következik, hogy a $P_i, \ldots, P_j$ fülek mindegyike G_i ugyanazon pontjához csatlakozó „ág" két pontját kell, hogy összekösse, és így az 1. tétel miatt ezek az „ágak" is faktor-kritikusak. A P_{j+1} út ezzel szemben két különböző ágat kell, hogy összekössön, különben G_{i-1} még P_{j+1}-nek is blokkja maradna. Legyen ez a két „ág" H_1 és H_2, és jelölje H_t-nek P_{j+1}-gyel, ill. G_{i-1}-gyel közös pontját x_t, ill. y_t.

A $H_t - x_t$ gráfnak legyen F_t, a $H_t - y_t$ gráfnak F_t' egy 1-faktora. $F_t \cup F_t'$ nyilvánvalóan diszjunkt alternáló körökből, F_t és F_t' közös éleiből és egy x_t-t y_t-vel összekötő Q_t útból áll.

Ekkor a $P_i' = Q_1 \cup P_{j+1} \cup Q_2$ út választható P_i helyett fülnek, ami ellentmond annak, hogy P_i már mindenképpen páratlan kör kellett, hogy legyen. Ehhez csak azt kell belátni, hogy $G - V(G_{i-1} \cup P_i')$ tartalmaz 1-faktort. De $H_t - V(Q_t)$ nyilvánvalóan tartalmaz $(t = 1, 2)$, a többi „ágnak" G_i-n kívüli része is (hiszen az „ágak" faktor-kritikusak), és ehhez még $G - V(G_{j+1})$ egy 1-faktorát hozzávéve, megkapjuk a kívánt 1-faktort. □□□

A következmény bizonyítása: Nyilvánvaló, hogy

$$\tau^*(G) \leqq \frac{1}{2}|V(G)|.$$

Másrészt tekintsük az 1. tételben szereplő felbontásban a P_1 kör éleit 1/2 súllyal, és $G - V(P_1)$ egy 1-faktorának éleit 1 súllyal. Így egy $\frac{1}{2}|V(G)|$ nagyságú valós élpakolást kapunk. □□□

3. Természetes jelenség, hogy hipergráfokra vonatkozóan csak gyöngébb eredményeket sikerült bizonyítani. A 2. fejezet A. tételének itt az alábbi felelhet meg:

2. tétel. *Legyen H R rangú v-kritikus hipergráf. Ekkor*

$$|E(H)| \leqq (vR)^R, \quad |V(H)| \leqq \frac{R}{2}\binom{vR+R-1}{R}.$$

Következik ebből, hogy ha H-ban nincs $v+1$ független él, akkor belőle zsugorítással egy csak v-től és R-től függő korlátnál nem nagyobb élszámú hipergráfot lehet nyerni, melyben még mindig nincs $v+1$ független él (és mely ily módon biztosítja, hogy H-ban ne legyen $v+1$ független él). $v=1$ esetén e tételt lényegében tartalmazza Erdős Pál és a szerző [EL] dolgozata.

Rögzített R és $v \to \infty$ esetén az élszámra adott becslés nagyságrendileg éles, mint azt fenti 1. és 3. példánk mutatja. Nem rossz a becslés rögzített v és $R \to \infty$ esetén sem, mint azt a 3. példa mutatja. A pontszámra adott becslés valószínűleg sokkal rosszabb; példáink azt sugallják, hogy rögzített R mellett talán csak lineáris lehet v-ben a maximális pontszám. Ezt $R=2$ esetén Gallai fent idézett tétele bizonyítja.

Bizonyítás. I. Tegyük fel indirekte, hogy $|E(H)| > (vR)^R$. Teljes indukcióval kiválasztunk olyan $x_1, \ldots, x_R$ pontsorozatot, hogy minden $1 \leqq i \leqq R$ esetén több, mint $(vR)^{R-i}$ olyan él van, mely az $x_1, \ldots, x_i$ pontok mindegyikét tartalmazza. Ez $i=R$-re nyilván ellentmond annak, hogy H-ban nincs többszörös él.

Tegyük fel, hogy az $x_1, \ldots, x_{i-1}$ pontok már ki vannak választva ($1 \leq i \leq R$), és több, mint $(vR)^{R-i+1}$ él tartalmazza őket. Ekkor az $x_1, \ldots, x_{i-1}$ halmaz nyilván nem lehet él, és ezért ha egy őt tartalmazó élt vele helyettesítünk, H kritikussága miatt keletkezik $v+1$ diszjunkt él. Ezek egyike nyilván az új él, és így van v diszjunkt él, melyek egyike sem tartalmazza $x_1, \ldots, x_{i-1}$ egyiket sem. Jelölje T ezen v darab él pontjainak halmazát. Mivel H-ban nincs $v+1$ diszjunkt él, minden élnek, így speciálisan az $x_1, \ldots, x_i$ pontokat tartalmazó élnek is metszenie kell T-t. Van ezért olyan $x \in T$ pont, mely több mint $(vR)^{R-i+1}/|T| \geqq (vR)^{R-i}$ élben van benne. Ezt a pontot választhatjuk x_i-nek.

II. A pontszámra adott korlátot Lubell és Katona [L15, K2] permutációs módszerével igazoljuk. Legyen H-nak n pontja, és tekintsük ezeknek egy $(x_1, \ldots, x_n)$ permutációját. Azt mondjuk, hogy az x pont a permutációnak *kitüntetett pontja,* ha van olyan él, melynek x az utolsó pontja és van v diszjunkt él, melyek únójának x az első pontja. Adott permutációnak legfeljebb egy kitüntetett pontja lehet. Tegyük fel ugyanis indirekte, hogy x_i és x_j is kitüntetett pont, és mondjuk $i<j$. Ekkor van v diszjunkt él, melyek legelső pontja x_j, és van olyan él, melynek utolsó pontja x_i. Ez azonban már $v+1$ diszjunkt él, ellentmondás.

Nézzük meg, hogy egy adott x pont hány permutációnak kitüntetett pontja. Ehhez először is kiválasztunk egy x-et tartalmazó E élt, majd az $E-x$ halmaztól diszjunkt v darab $E_1, \ldots, E_v$ élt, felhasználva, hogy H v-kritikus. Ezek egyike, mondjuk E_1 kell, hogy tartalmazza x-et. Legyen $t=|E_1 \cup \ldots \cup E_v|$, $s=|E|$. Számoljuk meg azokat a permutációkat, melyekben x E-nek utolsó, $E_1 \cup \ldots \cup E_v$-nek pedig első eleme. Ezek száma nyilván

$$\binom{n}{s+t-1}(n-s-t+1)!\,(s-1)!\,(t-1)! = n!\Big/s\binom{s+t-1}{s} \geqq n!\Big/R\binom{Rv+R-1}{R}.$$

E és E_1 szerepét fölcserélve még egyszer ennyi permutációt nyerünk. Minden x-re ezt összeszámolva minden permutációt legfeljebb egyszer kapunk meg, így

$$n! \geqq n \cdot 2 \cdot n!\Big/R\binom{Rv+R-1}{R},$$

vagyis

$$n \leqq \frac{R}{2}\binom{Rv+R-1}{R}. \qquad \square\square\square$$

4. Minden hipergráfból nyerhetünk élzsugorítással olyan v-kritikust, melyben ugyanaz a független élek maximális száma. Az élzsugorítás a hipergráf több fontos tulajdonságát (pl. korlátos rangját vagy fokát) nem változtatja meg, de más tulajdonságait igen. Ezért érdemes olyan redukciókat keresni, melyek kevesebb változtatással redukálják a hipergráfot azonos v-jű, de „kicsi" hipergráfra. Ilyen operáció pontok levágása.

2. definíció. A H hipergráfot *pont-v-kritikusnak* nevezzük, ha bármely pontját levágva v növekszik.

Mivel pontok levágása az élzsugorítás speciális esete, minden v-kritikus hipergráf pont-v-kritikus is. Megfordítva ez nem áll, hiszen pl. ha egy v-kritikus hipergráfhoz új élként tetszőlegesen sok olyan halmazt veszünk hozzá, mely tartalmaz régi élt, változatlanul pont-v-kritikus, de már nem v-kritikus hipergráfot kapunk. Ez azt is mutatja, hogy az élszámra adott felső becslés nem marad érvényben. Másrészt azonban a pontszámra adott igen:

2'. tétel. *Minden pont-ν-kritikus hipergráfra*

$$|V(H)| \leqq \frac{R}{2}\binom{R\nu+R-1}{R}.$$

A pont-ν-kritikus hipergráfok pontszámának korlátosságát $\nu=1$ esetben M. Calczinska—Karlowicz [C1] bizonyította. Ugyanerre az esetre Ehrenfeucht és Mycielski [EM] adtak effektív korlátot. A tételben megadott korlát $\nu=1$ esetén élesebb e korábbi becslésnél, és közel jár a legjobbhoz, mint azt az 1. pont 4. példája mutatja.

Bizonyítás: A 2'. tétel a 2. tételnek egyszerű következménye. Legyen ugyanis H pont-ν-kritikus. H-ból zsugorítással nyerhetünk egy ν-kritikus H' hipergráfot. H pont-ν-kritikussága miatt H-nak minden pontja H'-nek is pontja. Így

$$|V(H)| = |V(H')| \leqq \frac{R}{2}\binom{R\nu+R-1}{R}. \qquad \square\square\square$$

5. Igen egyszerűen redukálható a H hipergráf, ha van olyan x pontja, melyre $\nu(H-x)=\nu(H)-1$. Ebben az esetben ugyanis a „Miért nem lehet $\nu+1$ diszjunkt él?" kérdést elegendő a $H-x$ hipergráfra megválaszolni; H-ban nyilván csak eggyel több diszjunkt él lehet. Ez a meggondolás motiválja a következő fogalmat, mely az 5. fejezetben fog szerepet játszani:

3. definíció: Egy H hipergráfot *ν-stabilnak* nevezünk, ha bármely x pontjára $\nu(H-x)=\nu(H)$. Általánosabban, H-t k-szorosan ν-stabilnak nevezzük, ha bármely k elemű T ponthalmazára $\nu(H-T)=\nu(H)$.

Ha E a hipergráf egy éle, akkor nyilvánvaló, hogy $\nu(H-E)\leqq\nu(H)-1$. Ezért egy hipergráf legfeljebb $(r(H)-1)$-szeresen lehet ν-stabil. Speciálisan, gráfok esetén csak egyszeres ν-stabilitásról beszélhetünk, ami ekvivalens a ν-kritikussággal. Általában már nem ennyire egyszerű a két fogalom viszonya: Ha egy hipergráf ν-kritikus, akkor ν-stabil is, kivéve, ha van olyan komponense, mely egyetlen pontból, és az ebből alkotott egyelemű élből áll. Ha egy r-uniform hipergráf $(r-1)$-szeresen ν-stabil, akkor ν-kritikus is. Mindez a definíciók közvetlen következménye.

A 2. tételből adódik ily módon:

Következmény: *Minden $(r-1)$-szeresen ν-stabil r-uniform hipergráfra*

$$|E(H)| \leqq (r\nu)^r, \quad |V(H)| \leqq \frac{r}{2}\binom{r\nu+r-1}{r}.$$

Megjegyezzük, hogy mind a négy példánk $(r-1)$-szeresen ν-stabil is.

A faktor-kritikus gráfok egy lényeges tulajdonsága, hogy nem lehetnek páros gráfok. E tény lényegében Kőnig tételével ekvivalens (1. tételünknek közvetlen folyománya). Ezt általánosítaná a következő sejtés, melyet későbbi hivatkozás végett fogalmazunk meg. Egy r-uniform hipergráfot *r-osztályúnak* nevezünk, ha meg van adva pontjainak egy olyan $V_1, \ldots, V_r$ particiója, hogy minden él minden egyes V_i osztályból egyetlenegy pontot tartalmaz. Az r-osztályú hipergráfok a páros gráfok természetes általánosításai, és igen sok alkalmazásban (algebrai struktúrák, blokkrendszerek stb.) fellépnek. Sajnos, Kőnig tétele a $\nu=\tau$ alakban nem érvényes már rájuk. Bizonyos értelmű általánosítását jelentené azonban az alábbi sejtés:

Sejtés: *r-osztályú hipergráf nem lehet* $(r-1)$*-szeresen v-stabil.*

v stabil hipergráfok esetében a τ^* függvényre vonatkozóan az alábbi egyszerű eredmény alkalmazásra kerül a későbbiekben:

3. tétel: *Ha H k-szorosan v-stabil hipergráf, akkor*

$$\tau^*(H)-v(H) \geqq \frac{k}{r(H)}.$$

Bizonyítás: Legyen $E \in E(H)$, $|E|=r(H)$. Fusson végig X az E él összes k elemű részhalmazain. Minden X-hez van egy olyan v elemű független w_X élrendszer, mely X-et nem metszi. Tekintsük a

$$w = \frac{1}{\binom{r(H)}{k}} \left(\sum_X w_X\right) + \frac{k}{r(H)} \{E\}$$

valós élpakolást. Ez minden pontot legfeljebb egyszeresen fed le; az E-n kívüli pontokat ugyanis csak a w_X-ek fedik le, és ezek együtthatója éppen számuk reciproka; E-nek egy pontját pedig annyi w_X nem fedi le, ahány e pontot tartalmazó X részhalmaza van E-nek, és így E-t még $\binom{r(H)-1}{k-1}$-szer hozzá lehet venni a rendszerhez $1/\binom{r(H)}{k}$ súllyal. w összsúlya pedig éppen $v+\frac{k}{r(H)}$. □□□

4. *Általános becslések*

1. E fejezetben a v, τ és τ^* mennyiségek közötti általános egyenlőségeket tárgyaljuk. Ezek jelentősége nemcsak abban áll, hogy e három alapvető mennyiségről pontosabb képet festenek, hanem abban is, hogy sok alkalmazásuk adható, mert a τ^* mennyiség általában jól kezelhető, és egyenlőtlenségeink segítségével így a lényegesen komplikáltabb v és τ mennyiségekre is következtethetünk.

Nem jutunk még érdekes problémákhoz, ha csak olyan egyenlőtlenségekre vagyunk kíváncsiak, melyek minden hipergráfra teljesülnek. Nyilvánvaló egyenlőtlenség a már említett

(1) $$1 \leqq v \leqq \tau^* \leqq \tau.$$

Megállapíthatjuk még, hogy ha $v=\tau^*=1$, akkor $\tau=1$. Tudjuk ugyanis, hogy $\tau^* \geqq m/D$. Így ha $\tau^*=1$, akkor $m=D$, vagyis van olyan pont, mely minden élben benne van.

További összefüggés a három mennyiség között már nem áll fenn. Legyen adott ugyanis két természetes szám: v és τ, egy 1-nél nagyobb racionális szám: $\tau^*=\frac{p}{q}$, és tegyük föl, hogy (1) teljesül. Mivel $p \neq q$, a tört bővítésével elérhetjük, hogy $p-q \geqq \tau$ legyen. Konstruáljuk meg először a következő H_0 hipergráfot: legyen $|A|=\tau$, $|B|=p$, és legyenek H_0 élei mindazon halmazok, melyek A-nak egy, B-nek pedig q eleméből állnak.

A lefogja H_0 éleit, így $\tau(H_0) \leqq \tau$. Nem lehet azonban H_0 éleit τ-nál kevesebb ponttal lefogni. Ugyanis ha τ-nál kevesebb pontot elhagyunk, akkor biztosan meg-

marad A-nak legalább egy, B-nek (a $p-q \geqq \tau$ feltétel miatt) legalább q pontja, és ezek már kifeszítik H_0-nak egy élét. Így $\tau(H_0)=\tau$.

B minden pontjába $1/q$ súlyt téve valós lefogó pontrendszert kapunk, így $\tau^*(H_0) \leqq \leqq p/q$. Másrészt

$$\tau^*(H_0) \geqq |E(H_0)|/D(H_0) = \tau\binom{p}{q}\Big/\tau\binom{p-1}{q-1} = p/q.$$

Így tehát $\tau^*(H_0)=p/q$.

Nyilvánvaló, hogy $\nu(H_0)=[p/q]$, így tehát ez az érték még nem szükségképpen a kívánt. Végezzük azonban a következő operációt: Válasszuk ki H_0-nak két diszjunkt élét, és egészítsük ki őket egy közös új ponttal. Ezt az eljárást ismételjük, amíg végül már nem találunk diszjunkt éleket. Az újonnan hozzávett pontok mind másodfokúak, és ebből könnyű látni, hogy az eddigi meggondolások érvényben maradnak, a ν és τ értéke nem változik. Mivel egy-egy lépésben $\nu(H_0)$ értéke legfeljebb eggyel csökken, van közben olyan hipergráf, melyben a kívánt értékkel egyenlő.

Érdekesebb kérdésekhez úgy jutunk, ha bizonyos természetes szűkebb hipergráf-osztályokra érvényes egyenlőtlenségeket keresünk. E disszertációban a talán legtermészetesebb két korlátozásfajtát vizsgáljuk meg: a hipergráf *rangját* és *maximális fokát* korlátozzuk. Ezek közül különösen az utóbbi vizsgálat vezet nem-triviális alkalmazásokhoz.

Természetesen más irányba is leszűkíthető volna a vizsgált hipergráf köre. A gráfok között különös jelentőségük van a páros gráfoknak; egyrészt igen gyakran ilyen gráfok adódnak az alkalmazások során, másrészt az ilyen gráfokra Kőnig tétele a ν, τ, τ^* mennyiségek egyenlőségét, és ezzel könnyű kezelhetőségét biztosítja. Kézenfekvő kérdés ezért, hogy nem lehet-e a hasonlóan definiált R-osztályú hipergráfokra is jobb eredményeket bizonyítani, mint az általánosabb esetben.

Ryser fogalmazta meg a következő sejtést, mely tudtommal máig is eldöntetlen: Minden R-osztályú hipergráfra $\tau(H) \leqq (R-1)\,\nu(H)$. Megjegyezzük, hogy Ryser sejtése következne a 3. fejezetben megfogalmazott sejtésből, mely szerint R-osztályú hipergráf nem lehet $(R-1)$-szeresen ν-stabil.

A sejtést némileg alátámasztja az, hogy R-osztályú hipergráfok τ és τ^* mennyiségeire bizonyítani is tudunk élesebb eredményt, mint az összes R rangú hipergráf esetén. Erre a 4. pontban térünk vissza.

2. Vizsgáljuk meg most, milyen összefüggések állnak fenn a ν, τ és τ^* mennyiségek között R rangú hipergráfok körében. Triviális az alábbi egyenlőtlenség:

$$\tau \leqq R\nu. \tag{2}$$

Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges maximális élpakolást és jelölje T az ez által lefedett pontok halmazát. Az élpakolás maximalitása miatt T lefogó ponthalmaz, és nyilván $|T| \leqq R\nu$.

A (2) egyenlőtlenség éles. Jelölje ugyanis H azt a hipergráfot, mely $(\nu+1)\,R-1$ pont összes R elemű részhalmazaiból, mint élekből áll. Ekkor $\nu(H)=\nu$, $\tau(H)=R\nu$. Megmutatjuk azonban, hogy a (2) egyenlőtlenségben az egyenlőség minden fix R és ν esetén csak véges számú hipergráfra teljesülhet. Ezt $\nu=1$ esetén Erdős Pál és a szerző közös [EL] cikke tartalmazza.

1. tétel. *Ha egy H hipergráfra $\tau(H)=R\nu(H)$, akkor*

$$|E(H)| \leqq (R\nu)^R \quad \text{és} \quad |V(H)| \leqq \frac{R}{2}\binom{R\nu+R-1}{R}.$$

Bizonyítás. A 3. fejezet 2′. tétele szerint elegendő bebizonyítani, hogy H $(R-1)$-szeresen v-stabil. Legyen $S \subsetneq V(H)$, $|S| \leqq R-1$. Ekkor

$$Rv(H) = \tau(H) \leqq |S| + \tau(H-S) \leqq |S| + Rv(H-S) \leqq R-1+Rv(H-S),$$

és innen

$$v(H-S) = v(H). \qquad \square\square\square$$

Az élszámra adott felső becslés „lényegében" éles, legalábbis ami a nagyságrendet illeti. Tekintsük ugyanis ismét a fenti teljes hipergráfot. Ennek élszáma

$$\binom{Rv+R-1}{R} \sim c_R v^R.$$

Megjegyezzük még, hogy $v=1$ esetén a 3. fejezet 3. példája jó itt is, és több élt szolgáltat, ezt azonban nagyobb v-re nem sikerült általánosítani. A pontszámra adott felső becslés élességét illetően éppúgy nem tudunk semmit mondani, mint a 3. fejezetben.

3. A triviális $\tau \leqq Rv$ egyenlőtlenségnek közvetlen következményei a

$$\tau^* \leqq Rv, \quad \tau \leqq R\tau^*$$

egyenlőtlenségek. Ezek azonban már nem élesek. Foglalkozzunk először az utóbbival. Meg fogunk adni egy algoritmust, mely minden hipergráf esetén egy lefogó halmazt és egy valós élpakolást szolgáltat, és melyről heurisztikusan várható, hogy nem ad nagyon rossz eredményt. Az algoritmus elég egyszerű lesz ahhoz, hogy működését analizálni tudjuk. Bár nem állítjuk, hogy az algoritmus gyakorlatban használható, az ilyen analízis általában nehéz és ezért a következményektől eltekintve is van érdekessége, hogy itt elvégezhető. A 7. pontban egy, már gyakorlati szempontból sem érdektelen algoritmus analízise fogja szolgáltatni e fejezet legjobban alkalmazható eredményét.

Legyen H egy hipergráf. Válasszuk ki H éleinek egy $E_1, E_2, \ldots$ sorozatát (melyben ismétlődés megengedett) a következőképpen. E_1 legyen tetszőleges él. Feltéve, hogy $E_1, \ldots, E_i$ már ki vannak választva, határozzuk meg minden ponthoz, hogy hányban van benne közülük; rendezzük a pontokat úgy, hogy ez a szám csökkenjen, és válasszuk ki azt az élt, mely a sorrend szerint legkésőbb kezdődik, ez legyen E_{i+1}.

Érezhető, hogy a kiválasztott élek eléggé egyenletesen vannak eloszolva. Így ha tekintjük a sorozatot addig, amíg még minden pont a sorozatnak legfeljebb k elemében van benne (k adott természetes szám), „elég jó" k-él-pakolást kapunk. Célunk annak a becslése, hogy ez mennyire jó.

Minden lépésben az éppen kiválasztott él kezdőpontja és az azt megelőző pontok H minden élét lefogják (definíció szerint). Legyen ezen halmazok közül a legkisebb t elemű, ekkor

$$\tau(H) \leqq t.$$

Legyen H rangja R. A vizsgálathoz tekintsük egy $t+R-1$ elemű S halmazon az összes R-es alkotta hipergráfot. Legyen az H_0. Futtassuk eljárásunkat a H_0 hipergráfon is; megmutatjuk, hogy a H_0 hipergráfban előbb keletkezik olyan pont, mely $k+1$ kiválasztott élben van benne, mint H-ban (ekkor kell ugyanis leállni, hogy még k-él-pakolást kapjunk).

Valójában egy H és H_0 közötti bonyolultabb összefüggés az, amit teljes indukcióval bizonyítani tudunk. Legyen $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $B=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ egész

számoknak két sorozata. Azt mondjuk, hogy $A \geqq B$, ha minden i-re

$$a_1 + \ldots + a_i \geqq b_1 + \ldots + b_i.$$

Jelölje mármost

$$f_m^1(H) \geqq f_m^2(H) \geqq \ldots \geqq f_m^n(H)$$

azokat a számokat, melyek megmutatják, hogy H egyes pontjai E_m kiválasztása után hány kiválasztott élben szerepelnek. Ugyanígy van definiálva az

$$f_m^1(H_0) \geqq f_m^2(H_0) \geqq \ldots \geqq f_m^n(H_0)$$

sorozat is, azzal a megjegyzéssel, hogy a végére $n-t-R+1$ 0-t írunk, hogy ez is n hosszúságú legyen.

2. tétel. *A fent bevezetett jelölésekkel*

$$(f_m^1(H_0), \ldots, f_m^n(H_0)) \geqq (f_m^1(H), \ldots, f_m^n(H)).$$

1. következmény: *A fenti algoritmus egy t elemű lefogó ponthalmazt és egyben egy*

$$\left[\frac{(t+R-1)k-R+1}{R}\right]^*$$

elemű k-él-pakolást is szolgáltat. Ily módon

$$\nu_k(H) \geqq \frac{(\tau(H)+R-1)k-R+1}{R}.$$

2. következmény. *Ha egy R rangú hipergráfban bármely k élnek van közös pontja, akkor a lefogó pontok minimális száma legfeljebb*

$$\frac{R-1}{k-1}+1.$$

3. következmény: $\tau \leqq R\tau^* - (R-1)$.

A 2. tétel bizonyítása. Teljes indukciót használunk. $m=0$ esetén az állítás triviális, mindkét oldalon 0 áll. Legyen $m>0$, és tegyük föl, hogy

$$(f_{m-1}^1(H_0), \ldots, f_{m-1}^n(H_0)) \geqq (f_{m-1}^1(H), \ldots, f_{m-1}^n(H)).$$

Az m-edik lépés utáni sorozatot mármost úgy kapjuk, hogy a bal oldalon a $t, t+1, \ldots$ $\ldots, (t+r-1)$-edik elemhez 1-et adunk, majd a kapott új sorozatot csökkenően rendezzük. A jobb oldalon is R elemet növelünk meg 1-gyel; ezekről azonban csak annyit tudunk, hogy az első $t-1$ elem nincsen közöttük. Természetesen ezt is csökkenően rendezzük.

Növeljük meg először csak a bal oldalon a t-edik, a jobb oldalon a t_1-edik elemet, ahol t_1 az első, melyet meg kell itt növelnünk. Ezek után átrendezzük a sorozatokat, úgy hogy csökkenjenek. Ez azt jelenti, hogy a megnövelt elemet felcseréljük azokkal az előtte álló elemekkel, melyekkel egyenlő volt. Úgy is mondhatnánk, hogy a t-edik helyett az első vele egyenlő, mondjuk t'-edik, ill. a második oldalon a t_1-edik helyett az első vele egyenlő, mondjuk t_1'-edik elemet növeljük meg eggyel.

Ha $t' \geqq t_1'$, akkor a bizonyítani kívánt

$$\sum_{i=1}^{j} f_m^i(H_0) \geqq \sum_{i=1}^{j} f_m^i(H)$$

egyenlőtlenség triviális: a megfelelő $(m-1)$-es indexű egyenlőtlenséggel $j<t'$ esetén azonos, $t' \leqq j < t_1'$ esetén gyengébb (a bal oldalon jelenik meg $+1$), $t_1' \leqq j$ esetén ismét ekvivalens (mindkét oldal eggyel nagyobb). Feltehetjük tehát, hogy $t' > t_1'$. Ebben az esetben is csak akkor lehet baj, ha van olyan $t_1' \leqq j < t'$ index, melyre

$$\sum_{i=1}^{j} f_{m-1}^{i}(H_0) = \sum_{i=1}^{j} f_{m-1}^{i}(H). \tag{8}$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{j-1} f_{m-1}^{i}(H_0) \geqq \sum_{i=1}^{j-1} f_{m-1}^{i}(H),$$

következik ebből, hogy

$$f_{m-1}^{j}(H_0) \leqq f_{m-1}^{j}(H). \tag{9}$$

Tudjuk azonban, hogy

$$f_{m-1}^{j}(H) = \ldots = f_{m-1}^{t}(H) = \ldots = f_{m-1}^{t_1}(H), \tag{10}$$

míg

$$f_{m-1}^{j}(H_0) \geqq \ldots \geqq f_{m-1}^{t'+1}(H_0) > f_{m-1}^{t'}(H_0) \geqq \ldots \geqq f_{m-1}^{t}(H_0). \tag{11}$$

(8)—(11)-ből azonban következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{t} f_{m-1}^{i}(H_0) < \sum_{i=1}^{t} f_{m-1}^{i}(H),$$

ami ellentétben áll az indukciós feltevéssel. Így tehát beláttuk, hogy mindkét hipergráfban az m-ediknek kiválasztott él első pontjának f értékét eggyel növelve a bizonyítani kívánt egyenlőség érvényben marad. Ugyanígy megnövelhetjük a második, harmadik stb. pontoknak megfelelő f értéket. Csak azt kell megjegyezni, hogy mivel a sorozatok átrendezése mindig csak a változtatott elemek előtti elemeket érinti, a H_0 hipergráf sorozatában előbb van a megnövelt elem, mint a H hipergráfban.

Mivel $|E_m| \leqq R$, a H-beli E_m él pontjai fogynak el előbb. Ekkor tehát még H_0-ban néhány további számot kell megnövelni, ami triviálisan nem változtatja meg az egyenlőtlenséget. □□□

A következmények bizonyítása. Azt, hogy az algoritmus szolgáltat egy t elemű lefogó pontrendszert, már az algoritmus ismertetésekor megjegyeztük. Legyen

$$p = \left[\frac{(t+R-1)k-R+1}{R}\right]^{*}.$$

Belátjuk, hogy

$$f_p^1(H_0) \leqq k. \tag{12}$$

Ebből a 2. tétel szerint az 1. következmény állítás már következik.

(12) bizonyításához csak azt kell észrevennünk, hogy az $(f_m^1(H_0), \ldots, f_m^{t+R-1}(H_0))$ sorozatban csak két különböző, szomszédos egész szám lép fel. Ez azonnal adódik abból, hogy ha a sorozat maximális eleme növekszik, akkor minden nála kisebb is. Vizsgáljuk azt az m indexet, amikor az új él kiválasztása már egy $(k+1)$-es elemet hoz létre. Ekkor legalább t k-as eleme van a sorozatnak és, az előbbiek miatt, a többi $(k-1)$-es. Tehát

$$mR \geqq tk + (R-1)(k-1),$$

átrendezve

$$m \geqq \frac{(t+R-1)k-R+1}{R}, \quad m \geqq p.$$

Innen (12) adódik, és ezzel az 1. következményt bebizonyítottuk.

A 2. következmény az elsőnek folyománya, ha azt $(k-1)$-re alkalmazzuk, és észrevesszük, hogy a feltételből adódóan

$$v_{k-1}(H) = k-1.$$

A 3. következmény is az elsőből adódik a

$$v_k(H) \leqq k \cdot \tau^*(H)$$

egyenlőtlenség felhasználásával.

4. Tovább folytatva τ és τ^* vizsgálatát R rangú hipergráfok körében, tekintsük most az R-osztályú hipergráfokat. Ryser fent említett sejtéséből következne, hogy

$$\tau \leqq (R-1)\tau^*.$$

Valójában ennél több is igaz, és nem is nehéz bizonyítani [L6]:

3. tétel: *Minden R-osztályú H hipergráfra*

$$\tau(H) \leqq \frac{R}{2}\tau^*(H).$$

Az $R=1$ esetben adódó $\nu=\tau$ összefüggés természetesen a Kőnig-tételből is következik.

A tétel következni fog az alábbi, kissé többet mondó állításból:

3′. tétel: *Egy R-osztályú hipergráf minden k-szoros lefogó pontrendszere felbontható* $\left[\frac{2(k-1)}{R}\right]+1$ *darab lefogó pontrendszerre.*

Bizonyítás: A felbontást szolgáltató, lényegét tekintve egyszerű direkt konstrukciót egy lemmába foglaljuk össze:

Lemma: *Minden adott* $R \geqq 2$, $m \geqq 0$ *számpárhoz létezik olyan* $R \times (m+1)$*-es* (a_{ij}) *mátrix, melynek*

(a) *minden sora a* $0, 1, \ldots, m$ *számok egy permutációja;*

(b) *bármely oszlop-összege legfeljebb* $\left[\frac{Rm}{2}\right]^*$.

Feltéve, hogy e mátrixunk megvan $m=\left[\frac{2(k-1)}{R}\right]$ választással, tekintsünk egy H-t k-szorosan lefogó T pontrendszert. Álljon a T_j ponthalmaz mindazon x pontokból, melyek több, mint a_{ij}-szer lépnek fel T-ben, ahol i az x-et tartalmazó osztály indexe.

Állítjuk, hogy a T_j halmazok lefogó halmazok, és összegük részrendszere T-nek. Legyen ugyanis $(v_1, \ldots, v_R) \in E(H)$, $v_i \in V_i$. Ha egyik v_i sem lépne föl T_j-ben, akkor minden egyes v_i legfeljebb a_{ij}-szer lépne föl T-ben, és így T-nek a $(v_i, \ldots, v_R)$ élbe eső

elemeinek száma nem lenne nagyobb, mint

$$\sum_{i=1}^{R} a_{ij} \leqq \left[\frac{Rm}{2}\right]^* = \left[\frac{R\left[\frac{2(k-1)}{R}\right]}{2}\right]^* \leqq k-1,$$

ami ellentmondana annak, hogy T k-szorosan lefogó rendszer. Másrészről tekintsünk egy tetszőleges $v \in V_i$ pontot ($1 \leqq i \leqq R$). Ezt annyi T_j halmaz tartalmazza, ahány j-re $a_{ij} \prec T(x)$. Mivel az a_{ij} számok éppen a $0, 1, \ldots, k$ számok (esetleg más sorrendben), közülük a $T(x)$-nél kisebbek száma legfeljebb $T(x)$. Így a T_j-k összege részrendszere T-nek. □□□

A lemma bizonyítása: Ha megvan a kívánt tulajdonságú $R \times (m+1)$-es mátrixunk, akkor a

$$\begin{matrix} (0 & 1 & \ldots & m) \\ (m & m-1 & \ldots & 0) \end{matrix}$$

sorok hozzáadásával egy $(R+2) \times (m+1)$-eset nyerünk. Így elegendő az $R=2, 3$ esetekkel foglalkozni. $R=2$-re jó mátrix az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m \\ m & m-1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Ha $R=3$ és m páros, akkor megfelel a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \frac{m}{2} & \frac{m}{2}+1 & \ldots & m \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2}+1 & \ldots & m & 0 & \ldots & \frac{m}{2}-1 \\ m & m-2 & \ldots & 0 & m-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

míg páratlan m esetén a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \frac{m-1}{2} & \frac{m+1}{2} & \ldots & m-1 & m \\ \frac{m+1}{2} & \frac{m+3}{2} & \ldots & m & 0 & \ldots & \frac{m-3}{2} & \frac{m-1}{2} \\ m & m-2 & \ldots & 1 & m-1 & \ldots & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix. □□□

A 3. tétel bizonyítása: Az 1. fejezetben elmondottak szerint van végtelen sok olyan k, melyre $\tau_k = k\tau^*$. Egy optimális k-fedést a 3′. tétel szerint felbontva adódik, hogy

$$k\tau^* = \tau_k \geqq \left(1 + \left[\frac{2(k-1)}{R}\right]\right) \geqq \frac{2k-1}{R}\tau,$$

ahonnan a $k \to \infty$ határátmenettel következik az állítás. □□□

5. Megjegyezzük, hogy érdekes kérdésekhez vezet a τ-t és τ^*-ot „összekapcsoló”

$$\frac{\tau_k}{k\tau^*} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

sorozat vizsgálata. Az 1. fejezetben mondottakból következik, hogy ez 1-hez konvergál, mégpedig úgy, hogy végtelen sokszor egyenlő is 1-gyel. Az 1. fejezetben említettük, hogy $R=2$ (gráfok) esetén már $k=2$-re (és minden páros k-ra) 1 az értéke. Ennek a ténynek általánosításaként a 3. tétel bizonyításához hasonló eszközökkel igazolható, hogy ha H R-edrangú, akkor

$$\frac{\tau_2(H)}{2\tau^*(H)} \leqq \frac{R}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\tau_R(H)}{R\tau^*(H)} \leqq 2-\frac{1}{R-1}.$$

Másrészről Graham [G3] egy példája mutatja, hogy $R\geqq 3$ esetén nem adható csak R-től függő felső becslés arra, hogy mikor éri el a sorozat először az 1-et.

6. Vizsgáljuk meg most a $\tau^*\leqq Rv$ egyenlőtlenség élességének kérdését. Első megjegyzésünk az, hogy itt egyenlőség soha nem állhat. Legyen ugyanis $E_1, \ldots, E_k$ tetszőleges nem bővíthető független élrendszer; ekkor $E_1\cup\ldots\cup E_k$ minden élt lefog, sőt $E_1, \ldots, E_k$-t többszörösen is. Így mindjárt $\tau<Rv$ is adódik, kivéve, ha H R-uniform és minden nem bővíthető független élrendszer maximális is. Ez utóbbi esetben tekintsük az összes ilyen módon nyert R elemű lefogó halmazok w átlagát. Ez egy Rv összessúlyú valós lefogás, mely minden élt 1-nél nagyobb súllyal is lefog, hiszen minden él benne van nem bővíthető független élrendszerben. Következésképpen elég kis ε-ra $(1-\varepsilon)w$ lefogás, melynek összsúlya kisebb, mint Rv. Ebből az is következik, hogy van olyan csak R-től és v-től függő (legnagyobb) $c(R, v)>0$ szám, hogy

$$\tau^*(H) \leqq R(H)\, v(H)-c\big(R(H), v(H)\big).$$

Azokra a hipergráfokra ugyanis, melyekre $\tau(H)\leqq R(H)\, v(H)-1$, már $c\big(R(H), v(H)\big)=1$ megtenné; a megmaradó véges sok hipergráfhoz pedig választhatjuk $Rv-\tau^*$ minimumát. A $c(R, v)$ pontos értékének meghatározása reménytelenül nehéz feladatnak tűnik, és csak $v=1$ esetén vannak érdemleges eredmények.

A szerző megmutatta, hogy

$$c(R, 1) \geqq 1-\frac{2}{R+1}.$$

Sejtette, és ezt Füredi Zoltán legújabban be is bizonyította, hogy

$$c(R, 1) \leqq 1-\frac{1}{R},$$

vagyis

A. tétel: *Ha egy R rangú H hipergráfra $v(H)=1$, akkor*

$$\tau^*(H) \leqq R-1+\frac{1}{R}.$$

Ez az eredmény már éles minden olyan R érték mellett, melyre létezik $(R-1)$-edrendű véges projektív sík.

A tételből könnyen nyerhető pozitív válasz Erdős alábbi sejtésére, (melynek élességét szintén a véges projektív síkok mutatják). További alkalmazását adta Frankl [F2].

Következmény: *Ha egy R-uniform hipergráf reguláris, és bármely két éle metszi egymást, akkor pontszáma legfeljebb R^2-R+1.*

7. Vizsgáljuk most meg, hogy milyen összefüggés áll fenn τ és τ^* között, ha a szereplő hipergráfok maximális fokszámát korlátozzuk. Megjegyezzük, hogy a τ^*/v arányra korlát nem adható, mint azt a síkon felvett n általános helyzetű egyenes metszéspontjaiból, mint pontokból, és az egyenesekből, mint élekből álló hipergráf példája mutatja.

Lefogó pontok produkálására az egyik legkézenfekvőbb módszer az ún. „Mohó Algoritmus" (Greedy Algorithm). Ez az igen egyszerű algoritmus a következőkben áll: Egyenként választunk ki pontokat. x_1 legyen a hipergráf egy maximális fokú pontja; általában, ha már $x_1, \ldots, x_i$ ki vannak választva, legyen x_{i+1} egy olyan pont, mely a lehető legtöbb élt fog le a még le nem fogott élek közül. Ha már minden él le van fogva, megállunk.

Várható, hogy a Mohó Algoritmus általában nem szolgáltat optimális lefogó ponthalmazt, de remélhető, hogy nem ad sokkal rosszabbat. Nézzünk először egy példát:

Példa. Legyen τ és D adott. Legyen $|S|=\tau$. Minden $1 \leqq i \leqq D$ számra vegyünk föl $[\tau/i]$ pontot, és kössük össze mindegyiküket S-nek i darab csúcsával, különbözőket különbözőkkel. Legyen T az utóbbi pontok halmaza. Tehát

$$|T| = \tau + \left[\frac{\tau}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{\tau}{D}\right].$$

Könnyen látható, hogy az így kapott G gráfra a Mohó Algoritmus (legalábbis a szabadon választható pontok megfelelő választása esetén) a T lefogó halmazt produkálja, míg $\tau(G)=|S|=\tau$. Ha τ nagy D-hez képest, akkor

$$\frac{|T|}{|S|} \sim 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{D} \sim \log D.$$

Lássuk tehát a Mohó Algoritmus eredményének egy felső becslését [L13, 14]:

5. tétel: *Legyen H egy hipergráf, és H maximális fokszáma D. Ekkor bármely Mohó Algoritmus által szolgáltatott lefogó pontrendszer számossága legfeljebb*

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{D}\right) \max_{H' \subseteq H} \frac{|E(H')|}{D(H')}.$$

Emeljük ki e tételnek néhány következményét:

1. következmény. *Ha a Mohó Algoritmus t lefogó pontot szolgáltat, akkor*

$$\frac{t}{\tau} \leqq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{D}.$$

Példánk mutatja, hogy ez a becslés éles.

2. következmény.

$$\tau(H) \leqq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{D}\right) \max_{H' \subseteq H} \frac{|E(H')|}{D(H')}.$$

Ez az eredmény min $\leqq$ max alakú, tehát a minimax tételek nem-triviális irányába mutató egyenlőtlenség. Az alkalmazások szempontjából azonban az alábbi következménye lesz fontos:

3. következmény:

$$\frac{\tau}{\tau^*} \leqq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{D} < 1+\log D.$$

Ez a becslés is lényegében éles. Legyen ugyanis H az a hipergráf, melynek $2n$ pontja van és élei az összes n elemű részhalmazok. Ekkor nyilván

$$\tau(H) = n+1,$$

és a τ^* definíciója után tett megjegyzések szerint

$$\tau^*(H)=2.$$

Így

$$\frac{\tau(H)}{\tau^*(H)} = \frac{n+1}{2}.$$

Másrészről

$$D(H) = \binom{2n-1}{n-1},$$

és ebből

$$\log D(H) \sim n \log 4.$$

Azt, hogy a 3. következményben a jobb oldal nem javítható-e egy konstans faktorral, nem sikerült eldönteni.

Az 5. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy pontosan t_i-szer választunk olyan pontot, mely i új élt fog le ($i=D, D-1, \ldots, 1$). Jelölje H_i azt a részhipergráfot, mely az akkor még le nem fogott élekből áll, amikor először kényszerülünk olyan pontot választani, mely csak i új élt fog le. Definíció szerint tehát

$$D(H_i) \leqq i. \tag{1}$$

t_i újabb pont kiválasztása után a H_{i-1} hipergráf marad vissza, és ezen t_i pont mindegyike i új élt fogott le. Ezért

$$|E(H_i) - E(H_{i-1})| = it_i. \tag{2}$$

Az algoritmus által kiválasztott pontok száma

$$t = t_1+\ldots+t_D.$$

Ezt úgy becsülhetjük, hogy t_i-t (2)-ből helyettesítjük, majd parciálisan szummálunk:

$$t = \sum_{i=1}^{D} \frac{1}{i}\left(|E(H_i)|-|E(H_{i-1})|\right) = \sum_{i=1}^{D-1} |E(H_i)|\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\frac{|E(H_D)|}{D} =$$

$$= \sum_{i=1}^{D-1} \frac{|E(H_i)|}{i(i+1)}+\frac{|E(H_D)|}{D}.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{|E(H_i)|}{i} \leqq \frac{|E(H_i)|}{D(H_i)} \leqq \max_{H' \subseteq H} \frac{|E(H')|}{D(H')},$$

következik, hogy

$$t \leqq \sum_{i=1}^{D-1} \frac{1}{i+1} \max_{H' \subseteq H} \frac{|E(H')|}{D(H')} + \max_{H' \subseteq H} \frac{|E(H')|}{D(H')} = \max_{H' \subseteq H} \frac{|E(H')|}{D(H')} \left(\sum_{i=1}^{D-1} \frac{1}{i+1} + 1 \right),$$

ami a tételt bizonyítja. □□□

A következmények bizonyítása: Bármely $H' \subseteq H$ esetén az első fejezet megállapításai szerint

$$\frac{|E(H')|}{D(H')} \leqq \tau^*(H') \leqq \tau^*(H) \leqq \tau(H).$$

Innen mindhárom következmény nyilvánvaló.

8. *Alkalmazások.* a) Legyen G egy gráf, és jelölje $\chi(G)$ a G kromatikus számát, $\alpha(G)$ pedig a független pontok maximális számát. Nyilvánvaló, hogy

$$\chi(G) \geqq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)},$$

sőt

$$\chi(G) \geqq \max \frac{|V(G')|}{\alpha(G')}, \tag{3}$$

ahol G' végigfut G feszített részgráfjain. Ennek az egyenlőtlenségnek a megfordítása nem áll: Erdős és Hajnal [EH1] egy példája mutatja, hogy $\alpha(G)$ lehet tetszőlegesen nagy, míg (3) jobb oldala $2+\varepsilon$-nál kisebb, ahol ε tetszőlegesen kicsi pozitív szám. A 6. fejezetben látni fogjuk, hogy az állítás a perfekt gráfok esetén bizonyos fokig megfordítható, és ez a perfekt gráfok egy karakterizációját fogja szolgáltatni. Itt most egy minden gráfra érvényes, és ezért természetesen gyöngébb „fordított" egyenlőtlenséget vezetünk le. Erdős és Hajnal példája azt is mutatja (a számítás részleteit mellőzzük), hogy ez a becslés lényegében éles.

6. tétel: *Bármely G gráfra*

$$\chi(G) \leqq \big(1 + \log \alpha(G)\big) \max \frac{|V(G')|}{\alpha(G')},$$

ahol G' végigfut a G gráf összes feszített részgráfjain.

Bizonyítás: G minden független I ponthalmazához rendeljünk hozzá egy új x_I pontot; G minden v pontjához alkossuk meg azon I független halmazok E_v halmazát, melyek v-t tartalmazzák. Legyen $H(G)$ az a hipergráf, melyet az x_I pontok halmazán az E_v élek alkotnak. A definícióból azonnal adódik, hogy $H(G)$ élgráfja G komplementere.

A $H(G)$ hipergráf számunkra legfontosabb, és a 6. fejezetben ismét felhasználásra kerülő tulajdonsága az, hogy

$$\tau\big(H(G)\big) = \chi(G) \quad \text{és} \quad D\big(H(G)\big) = \alpha(G). \tag{4}$$

Az első egyenlőség azonnal következik, ha meggondoljuk, hogy egy gráf színezése nem más, mint pontjainak lefedése diszjunkt független halmazokkal. Mivel azonban független halmaz részhalmaza is független, minden független halmazokkal való lefedésből csinálhatunk ugyanannyi diszjunkt független halmazzal való lefedést. Így a kromatikus szám egyenlő a pontokat lefedő független halmazok minimális

számával, mely a konstrukció folytán éppen $\tau(H(G))$. A második egyenlőtlenséghez csak azt kell észrevennünk, hogy x_I foka éppen $|I|$.

Jegyezzük még meg, hogy ha G' G-nek egy feszített részgráfja, ennek megfelel H-nak egy H' részhipergráfja, mely hasonló — bár nem azonos — módon származik G'-ből, mint H G-ből. Valójában G' egy I független halmazának H'-ben nem egy, hanem annyi pont felel meg, ahányféleképpen I kiterjeszthető G-nek egy független halmazává $V(G)-V(G')$ pontjaival. Így H' a $H(G')$ hipergráfból úgy jön létre, hogy minden pontot több ponttal helyettesítünk, melyek mind ugyanazokban az élekben vannak benne, mint az eredeti. Ez az operáció $\tau(H(G'))$ és $D(H(G'))$ értékét nyilván nem változtatja meg, és ezért a (4)-nek megfelelő egyenlőségek G'-re is fennállnak:

$$\tau(H') = \chi(G'), \quad D(H') = \alpha(G').$$

Ezen előkészítés után a 2. tétel azonnal következik az 1. tétel 2. következményéből.

b) További alkalmazásaink ismert tételek új bizonyításai. Elsőnek Erdősnek egy valószínűségszámítási módszerrel bizonyított tételét tekintjük. Egy H hipergráfot *2-kromatikusnak* nevezünk, ha pontjai két színnel színezhetők úgy, hogy minden éle legalább két különböző színű pontot tartalmaz.

Jelölje $m(r)$ az r-uniform nem 2-kromatikus hipergráfok minimális élszámát. Erdős és Hajnal EH2, ill. Erdős E3 bebizonyították, hogy

A. tétel: $$2^{r-1} \leqq m(r) \leqq cr^2 2^r.$$

Legújabban Beck J. [B6] az alsó becslést $r^{1/3}2^r$-re javította. Az A. tételt most az 1. tétel 3. következményéből vezetjük le. Megjegyzendő, hogy Erdős is rámutatott, hogy tétele bizonyos „szukcesszív optimális választással" is bizonyítható, mely az 1. tétel bizonyításának specializálása erre az esetre.

Adott r számhoz konstruáljuk meg a következő H_r^N hipergráfot. Legyen S N elemű halmaz (N-et később alkalmasan választjuk), és legyen $V(H_r^N)$ az összes S-ből kiválasztható r-es halmaza. H_r^N-nek tehát $\binom{N}{r}$ pontja van. S-nek minden $P=\{P_1, P_2\}$ két osztályra történő particiójához tekintsük azon r-esek E_P halmazát, melyek vagy P_1-ben vagy P_2-ben fekszenek. Az E_P halmazok legyenek H_r^N élei. H_r^N élszáma ily módon 2^{N-1}.

Tekintsük H_r^N-nek egy T lefogó ponthalmazát. Ez r-eseknek egy rendszere, és ezért úgy is tekinthető, mint az S halmazon értelmezett hipergráf. T lefogó volta azt jelenti, hogy S-nek bármely $P=\{P_1, P_2\}$ particiójához van olyan T-be tartozó r-es, mely vagy P_1-nek, vagy P_2-nek részhalmaza. Más szóval, T mint hipergráf nem 2-kromatikus. Így az S-en értelmezett r-uniform nem-2-kromatikus hipergráfok minimális élszáma éppen $\tau(H_r^N)$. Fennáll tehát

$$m(r) = \min_N \tau(H_r^N).$$

Az 1. tétel 3. következményéből az alábbi becsléseket nyerhetjük:

$$\tau^*(H_r^N) \leqq \tau(H_r^N) < \left(1+\log D(H_r^N)\right)\tau^*(H_r^N).$$

A jobb oldalon szereplő mennyiségek könnyen kiszámíthatók. $D(H_r^N)$ jelenti azon partíciók számát, melyek egy rögzített r-est egyik osztályukban tartalmaznak.

Ez nyilván 2^{N-r}. Másrészt H_r^N automorfizmuscsoportja tranzitív a pontjain, így az 1. fejezet eredményei szerint

$$\tau^*(H_r^N) = \frac{|V(H_r^N)|}{r(H_r^N)} = \frac{\binom{N}{r}}{2\binom{[N/2]}{r}},$$

mivel a minimális számú r-est nyilván az a partició tartalmazza, melynek osztályai egyenlő nagyok. Így

$$\frac{\binom{N}{r}}{2\binom{[N/2]}{r}} \leqq \tau(H_r^N) < (1+(N-r)\log 2)\frac{\binom{N}{r}}{2\binom{[N/2]}{r}}$$

Némi számolással adódik, hogy az alsó korlát mindig nagyobb, mint 2^{r-1}, míg a felső korlátnál N optimális választása $\approx r^2$, és ekkor a jobb oldal $c \cdot r^2 \cdot 2^r$. □□□

c) Az alábbi tétel Lorentz [L2] egy eredményének kisfokú általánosítása:

B. tétel: *Legyen G egy csoport és $A \subseteq G$. Ekkor van olyan B részhalmaza G-nek, melyre $AB=G$ és*

$$|B| \leqq (1+\log|A|)\frac{|G|}{|A|}.$$

Bizonyítás: Konstruáljuk meg a H hipergráfot a következőképpen. Legyen $V(H)=G$, és legyen minden $g \in G$ esetén az $A^{-1}g$ halmaz H-nak egy éle.

Legyen B H-nak egy lefogó halmaza. Ekkor minden $g \in G$-re van olyan $b \in B$, hogy $b \in A^{-1}g$; más szóval, van olyan $b \in B$ és $a \in A$, hogy $b=a^{-1}g$ vagyis $g=ab$. Ez azt jelenti, hogy $AB=G$.

Könnyen adódik, hogy

$$D(H) = |A|, \quad \tau^*(H) = \frac{|G|}{|A|}.$$

Így az 1. tétel 3. következménye azonnal adja, hogy létezik a kívánt méretű B lefogó halmaz. □□□

Hasonló „komplementaritási" tétel több is van a számelméletben. Ezek az 1. tételből hasonló konstrukciók segítségével nyerhetők. Megjegyzendő azonban, hogy a „szukcesszív optimális választás módszere", vagyis a Mohó Algoritmus ezek bizonyítására ismeretes volt.

d) Végezetül egy információelméleti hátterű eredményt tárgyalunk, mely McEliece-től és Posnertől [MP] származik. Itt az információelméleti vonatkozásokra nem térünk ki, mert az eredmény hipergráfelméleti szempontból is érdekes: újfent rámutat a τ és τ^* mennyiségek sokoldalú kapcsolatára. Először is definiáljuk két hipergráf direkt szorzatát:

$$V(H_1 \times H_2) = V(H_1) \times V(H_2),$$

$$E(H_1 \times H_2) = \{E_1 \times E_2 : E_1 \in E(H_1), E_2 \in E(H_2)\}.$$

Vezessük be a rövid

$$H^k = \underbrace{H \times H \times \ldots \times H}_{k\text{-szor}}$$

jelölést.

C. tétel:

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\tau(H^k)} = \tau^*(H).$$

Összehasonlításul megemlítjük még Berge és Simonovits [BS] alábbi tételét:

D. tétel:

$$\tau^*(H) = \min_{H_1} \frac{\tau(H \times H_1)}{\tau(H_1)}.$$

A C. tétel bizonyítása: Legyen T_1 H_1-nek, T_2 H_2-nek egy lefogó ponthalmaza. Ekkor $T_1 \times T_2$ a $H_1 \times H_2$ hipergráfnak lefogó halmaza. Innen

$$\tau(H_1 \times H_2) \leqq \tau(H_1) \times \tau(H_2). \tag{5}$$

Itt, mint a tétel állításából is következni fog, nem mindig áll egyenlőség. Megmutatjuk viszont, hogy

$$\tau^*(H_1 \times H_2) = \tau^*(H_1)\, \tau^*(H_2). \tag{6}$$

Először is legyen w_1 és w_2 a H_1, ill. H_2 hipergráfnak egy-egy optimális valós lefogása. Definiáljuk a

$$w\big((x_1, x_2)\big) = w_1(x_1)\, w_2(x_2)$$

súlyokat $H_1 \times H_2$ pontjain. Ez $H_1 \times H_2$-nek valós lefogása lesz, mert bármely $E_1 \times E_2 \in$ $\in E(H_1 \times H_2)$ esetén

$$\sum_{x \in E_1 \times E_2} w(x) = \sum_{x_1 \in E_1} \sum_{x_2 \in E_2} w_1(x_1)\, w_2(x_2) = \sum_{x_1 \in E_1} w_1(x_1) \sum_{x_2 \in E_2} w_2(x_2) \geqq 1.$$

Hasonló számolással

$$\sum_x w(x) = \sum_{x_1} w_1(x_1) \sum_{x_2} w_2(x_2) = \tau^*(H_1)\, \tau^*(H_2).$$

Ez bizonyítja a $\leqq$ jel érvényességét (6)-ban. A $\geqq$ hasonlóan adódik a dualitási tétel felhasználásával, H_1 és H_2 egy-egy optimális valós élpakolását „összeszorozva".

A (6) formula ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\tau(H^k) \geqq \tau^*(H^k) = \big(\tau^*(H)\big)^k. \tag{7}$$

Felső becslésre az 1. tétel 3. következményét használjuk fel:

$$\tau(H^k) < \big(1 + \log D(H^k)\big)\, \tau^*(H^k). \tag{8}$$

Nyilvánvalóan adódik, hogy

$$D(H^k) = \big(D(H)\big)^k,$$

és így (8)-ból

$$\tau(H^k) < \big(1 + k \cdot \log D(H)\big)\, \big(\tau^*(H)\big)^k.$$

(7)-tel egybevetve látjuk, hogy

$$\tau^*(H) \leqq \sqrt[k]{\tau(H^k)} < \sqrt[k]{1 + k \cdot \log D(H)}\, \tau^*(H).$$

Ebből a tétel állítása következik. □□□

Felvetődik a kérdés, hogy mi mondható, ha $\tau(H)$ helyett $\nu(H)$-ra vonatkozólag teszünk fel hasonló kérdéseket. A Berge—Simonovits-tétel megfelelője (más megfogalmazásban) M. Rosenfeldtől származik [R]:

E. tétel:

$$\tau^*(H) = \max_{H_1} \frac{\nu(H \times H_1)}{\nu(H_1)}.$$

Meglepő módon a McEliece—Posner-tétel megfelelője nem igaz. Annyit könnyű belátni, hogy

$$Q(H) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\nu(H^n)}$$

létezik. Ezt a számot — itt nem tárgyalt információelméleti háttere miatt — *Shannon-féle kapacitásnak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy

$$Q(H) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\nu(H^n)} \leqq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\tau^*(H^n)} = \tau^*(H).$$

A kézenfekvő sejtés, hogy $Q = \tau^*$, nem igaz; pl. ha H egy háromszög, akkor $Q(H) = 1$, de $\tau^*(H) = 3/2$. Ez a példa nyilván azon múlik, hogy H élei páronként metszik egymást, de nincsen közös pontjuk. Kézenfekvő ezért feltenni, hogy H Helly tulajdonságú, vagyis valahányszor élei egy halmazában nincs két diszjunkt, mindannyiszor ezen éleknek van közös pontjuk. Erre az általános eset könnyen visszavezethető. Legújabban azonban sikerült kimutatni [L14], hogy ha H az 5-szöget jelöli, akkor $Q(H) = \sqrt{5}$, míg $\tau^*(H) = 5/2$. Így a $Q = \tau^*$ egyenlőség még Helly tulajdonságú hipergráfokra sem áll mindig. $Q(H)$ meghatározása tetszőleges H hipergráf esetén megoldatlan probléma.

5. *Minimax tételek*

1. Mint azt a bevezetésben is említettük, az igazán szép tulajdonságú hipergráfok azok, melyekben $\nu = \tau$. Ennek teljesülésére számos elégséges feltétel ismeretes. Tulajdonképpen ilyen elégséges feltételt jelent minden olyan tétel, mely bizonyos módon származtatott hipergráfra mondja ki ezt, mint például Menger tétele. E fejezetben azonban olyan tételek érdekelnek bennünket, melyek e reláció fennállását hipergráfelméleti feltételekből vezetik le. Az ilyen általános tételek többé-kevésbé direkt alkalmazásaként sok „klasszikus" minimax-tételt is be fogunk tudni bizonyítani.

Kőnig tételéből tudjuk, hogy ha H egy páros gráf, akkor $\nu(H) = \tau(H)$. Kézenfekvő ezért, hogy a $\nu = \tau$ reláció elégséges feltételeként a páros gráf fogalmát próbáljuk általánosítani. Berge [B4] bizonyította, hogy ha egy hipergráf nem tartalmaz páratlan kört, akkor fennáll $\nu = \tau$; később ezt úgy gyengítette [B4, BL], hogy minden páratlan körben legyen olyan él, mely a körnek legalább három pontját tartalmazza.[1] Ez utóbbi tétel már többet mondó, mint a Kőnig-tétel Hoffman—Kruskal-féle bizonyításából kiolvasható elégséges feltétel, hogy ti. a hipergráf pont-él illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris legyen. Páratlan körök (valamilyen értelemben vett) kizárásával azonban nem kapunk eléggé általános feltételeket ahhoz, hogy a „klaszszikus" minimax-tételeket ezekből levezethessük.

[1] E tétel pontos megfogalmazását 1. alább (B. tétel).

A „klasszikus" minimax tételek hipergráfos átfogalmazásakor úgy járunk el, hogy valamilyen struktúrához (pl. gráfhoz vagy parciálisan rendezett halmazhoz) egy hipergráfot konstruálunk. Ha egy részstruktúrából indulunk ki, a kapott hipergráf az előbbinek (a konstrukciótól függően más-más értelemben vett) „részhipergráfja" lesz. Ez az észrevétel motiválja a következő típusú tételek keresését: „Ha a P tulajdonság teljesül H minden (bizonyos értelemben vett) részhipergráfjára, akkor $\nu(H)=\tau(H)$". Az ilyen tétel alkalmazásánál a P tulajdonság szerencsés esetben könnyebben verifikálható, mint $\nu(H)=\tau(H)$, és az, hogy a „részhipergráfokra" is ellenőrizni kell, nem jelent külön fáradságot, mert ezek ugyanazzal a konstrukcióval állnak elő.

2. A legegyszerűbb, de talán leghasznosabb példát a fenti típusú eredményre az alábbi tétel szolgáltatja [L7]:

1. tétel: *Ha a H hipergráf minden H' részhipergráfjára $\tau^*(H')$ egész szám, akkor $\nu(H)=\tau(H)$.*

Ha (a szélesebb körű alkalmazhatóság végett) csak bizonyos részhipergráfokra követeljük meg $\tau^*(H)$ egész voltát, gyengébb következményeket kapunk:

2. tétel: *Ha H-nak minden feszített H' részhipergráfjára $\tau^*(H')$ egész szám, akkor $\tau(H)=\tau^*(H)$.*

A 2. tétel bizonyítása: Legyen H_0 H-nak egy minimális olyan részhipergráfja, melyre $\tau(H_0)\neq\tau^*(H_0)$. Ekkor $\tau^*(H_0)$ egész volta miatt

$$\tau^*(H_0) \leqq \tau(H_0)-1.$$

Legyen w H_0-nak egy minimális valós lefogása és x tetszőleges olyan pont, melyben $w(x)>0$. Ekkor w-t $V(H)-\{x\}$-re megszorítva a H_0-x hipergráfnak egy valós lefogását kapjuk, ezért

$$\tau^*(H_0-x) < \tau^*(H_0).$$

De ekkor

$$\tau^*(H_0-x) < \tau^*(H_0) \leqq \tau(H_0)-1 \leqq \tau(H_0-x),$$

ami ellentmond H_0 minimális választásának. Ilyen H_0 tehát nem létezik. □□□

Az 1. tétel bizonyítása: Mivel a $\tau(H)=\tau^*(H)$ reláció a 2. tételből következik, elegendő a $\nu(H)=\tau^*(H)$ bizonyítása.

Legyen H_0 a H hipergráf egy minimális olyan részhipergráfja, melyre $\nu(H_0)\neq\tau^*(H_0)$. Mivel $\tau^*(H_0)$ egész szám, $\tau^*(H_0)\geqq\nu(H_0)+1$. Legyen q H_0-nak egy optimális valós élpakolása. Ha minden E élre $q(E)=1$, akkor H_0 diszjunkt élekből kell, hogy álljon, ami lehetetlen, mert akkor $\nu(H_0)=\tau^*(H_0)$ volna. Így van olyan E él, melyre $q(E)<1$. Ha q-t megszorítjuk az E-től különböző élekre, H_0-E-nek egy valós élpakolását kapjuk, és így

$$\tau^*(H_0-E) > \tau^*(H_0)-1.$$

De ekkor

$$\tau^*(H_0-E) > \tau^*(H_0)-1 \geqq \nu(H_0) \geqq \nu(H_0-E),$$

ami ellentmond H_0 választásának. Ilyen H_0 tehát nem létezhet. □□□

Az a feltétel, hogy τ^* egész szám, közvetlenül nemigen ellenőrizhető, hacsak meg nem oldjuk a megfelelő lineáris programot. De biztosíthatja ezt az is, hogy egyenlő vagy τ-val vagy ν-vel. Így nyerjük a fenti tétel két következményét:

1′. tétel: *Ha a H hipergráf minden H' részhipergráfja $\tau^*(H')=\tau(H')$, akkor $\nu(H)=\tau(H)$.*

2′. tétel: *Ha a H hipergráf minden feszített részhipergráfjára $\tau^*(H)=\nu(H)$, akkor $\nu(H)=\tau(H)$.*

Az 1. és 1′. tételekben szereplő hipergráfok azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy minden részhipergráfjuk (magukat is beleértve) kielégíti a $\nu=\tau$ egyenlőséget. Az ilyen hipergráfokat *normálisnak* nevezzük.

A normális hipergráfoknak az előző fejezetekben tárgyaltakkal való kapcsolatát az alábbi két egyszerű észrevétel írja le:

1. állítás: *Egy hipergráf akkor és csak akkor normális, ha semmilyen részhipergráfja nem ν-stabil.*

2. állítás: *Egy hipergráf akkor és csak akkor normális, ha minden τ-kritikus részhipergráfja független élekből áll.*

Bizonyítás: Ha egy H hipergráfra $\nu(H)=\tau(H)$, akkor egy minimális lefogó ponthalmaz bármely pontját elhagyva $\nu(H)$ csökken; egy maximális független élrendszerén kívüli élt elhagyva pedig $\tau(H)$ nem csökken. Ez bizonyítja a feltételek szükségességét az 1. és 2. állításban.

Legyen most H olyan hipergráf, mely nem normális, de minden részhipergráfja már az. Ha megmutatjuk, hogy H egyszerre ν-stabil és τ-kritikus, akkor készen is vagyunk.

Legyen $E\in E(H)$. Ekkor

$$\tau(H-E) = \nu(H-E) \leqq \nu(H) < \tau(H),$$

vagyis H τ-kritikus. Legyen másrészről $x\in V(H)$. Ekkor

$$\nu(H-x) = \tau(H-x) \geqq \tau(H)-1 \geqq \nu(H),$$

vagyis H ν-stabil. □□□

Megjegyezzük, hogy 1′. tétel így a 2. fejezet 5. tételéből azonnal következik. Hasonlóan be lehetne bizonyítani a 2′. tételt a 3. fejezet 3. tételéből.

Az alábbi tétel a perfekt gráfok elméletében lesz fontos [L8]:

3. tétel: *Tegyük fel, hogy a H hipergráf minden részhipergráfjának kromatikus indexe egyenlő maximális fokszámával. Ekkor H normális.*

Lemma. *A 3. tétel feltétele mellett minden H-ból éltöbbszörözéssel létrejövő hipergráf kromatikus indexe és maximális foka egyenlő.*

A lemma bizonyítása: Legyen H' a H-ból éltöbbszörözéssel létrejövő hipergráf. H' élszáma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy élei kiszínezhetők $D(H')$ színnel. Ha H'-t H-ból úgy kapjuk, hogy az éleket 0-szor vagy 1-szer vesszük, akkor H' H-nak részhipergráfja, és így az állítás a tétel feltételei szerint igaz. Így feltehetjük, hogy van H-nak olyan E éle, mely H'-ben két példányban is előfordul; legyenek ezek E' és E''.

Hagyjuk el E'-t H'-ből. A kapott H'' hipergráfra már igaz a lemma állítása. Mármost két esetet különböztetünk meg:

1° $D(H'')<D(H')$. Ekkor H'' élei kiszínezhetők $D(H')-1$ színnel az indukciós feltevés szerint, és E'-t egy újabb színnel színezve nyerjük a kívánt színezést.

2° $D(H'')=D(H')$. Színezzük ki H'' éleit $D(H')$ színnel. Legyen az E'' él színe mondjuk piros. Hagyjuk el H'-ből az összes piros éleket, így egy H_1 hipergráfot kapunk.

Állítjuk, hogy $D(H_1)<D(H')$. Tegyük föl, hogy volna H_1-ben egy $D(H')$ fokú x pont. Nyilvánvaló, hogy $x \notin E'$, mert E' egy példányát elhagytuk H'-ből és x H'-ben is csak legfeljebb $D(H')$ fokú lehetett. De ekkor x foka H''-ben is $D(H')$ volt, és ezért H'' élei közül mindenféle színű kellett, hogy illeszkedjen rá, speciálisan piros is. Ezt a piros élt azonban elhagytuk és ezért x foka is kisebb lett, mint $D(H')$.

Ezek szerint H_1 élei kiszínezhetők $D(H')-1$ színnel. Ehhez az elhagyott éleket egy újabb színnel kiszínezetten hozzávéve, megkapjuk H' keresett színezését.

□□□

A 3. tétel bizonyítása: Elegendő bebizonyítani, hogy $\nu(H)=\tau^*(H)$, mert akkor ez hasonlóan H részhipergráfjaira is áll, és innen a 2. következmény szerint H normális.

Legyen $k \geqq 1$ tetszőleges egész és w H-nak egy k-élpakolása. Vegyük H minden élét annyiszor, ahányszor w-ben fellép, és jelölje H' a kapott hipergráfot. Nyilván $D(H') \leqq k$. Ezért a Lemma szerint H' élei kiszínezhetők k színnel. Egy-egy szín azonban legfeljebb $\nu(H)$-szor fordul elő, és így

$$|E(H')| = |w| \leqq k\nu(H).$$

Ebből következik, hogy

$$\nu_k(H) \leqq k\nu(H),$$

és így

$$\tau^*(H) = \lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k(H)}{k} \leqq \nu(H).$$

Mivel az ellenkező irányú egyenlőtlenség triviális, ez a tételt bizonyítja. □□□

A 3. tétel alábbi megfordítása is igaz:

3′. tétel: *Minden normális H hipergráf élei kiszínezhetők $D(H)$ színnel.*

Ennek bizonyítása végett vezessük be a következő fogalmat: egy H^* hipergráfot a H hipergráf *antiblokkerének* nevezünk, ha éleik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető oly módon, hogy H két éle akkor és csak akkor diszjunkt, ha H^* megfelelő élei metszik egymást. Ez a reláció nyilvánvalóan szimmetrikus. Minden H hipergráfhoz konstruálhatunk antiblokkert úgy, hogy pontokként H független élrendszereit választjuk, és H minden éléhez az őt tartalmazó független élrendszereket H^* egy élének tekintjük. Az így definiált antiblokker Helly tulajdonságú lesz, vagyis ha élei egy halmazában az élek páronként metszik egymást, akkor mind metszik egymást.

Könnyen ellenőrizhető mármost, hogy ha H is és H^* is Helly tulajdonságúak, akkor $\nu(H)=D(H^*)$ és $\tau(H)$ egyenlő H^* kromatikus indexével. Az is világos, hogy ha H_1 H-nak részhipergráfja, akkor H^* megfelelő részhipergráfja H_1-nek antiblokkere lesz. Ily módon a 3′. tétel az alábbi alakot ölti:

3″. tétel: *Legyen H egy normális hipergráf és H^* egy Helly-tulajdonságú antiblokkere. Ekkor H^* is normális.*

Mivel a 3. tétel is ugyanezt mondja ki, csak H és H^* szerepének felcserélésével, ezzel egyben a 3′. tétel is bizonyítást nyert.

A 3. tételben kimondott feltétel tovább gyengíthető, ennek bizonyításához azonban a 3. tételt fel kell használnunk [L9]:

4. tétel: *Egy H hipergráf akkor és csak akkor normális, ha minden H' részhipergráfjára*

$$D(H') \cdot \nu(H') \geqq |E(H')|.$$

E tételből könnyen adódik:

4′. tétel: *Legyen H olyan hipergráf, mely nem normális, de bármely valódi részhipergráfja már normális. Ekkor*

$$D(H) \cdot \nu(H) = |E(H)| - 1.$$

Megjegyezzük, hogy a 4′. tételben szereplő hipergráfok mind gráfelméleti (élgráfjaik ugyanis éppen a minimális nem-perfekt gráfok, vö. 6. fejezet), mind diszkrét programozási szempontból (valós élpakolásaik ugyanis olyan poliédereket alkotnak, melyeknek pontosan egy kivétellel minden csúcsuk rácspont) érdekesek, és sokat vizsgáltak. Feltehető, hogy nincsenek olyan x, y pontok, hogy minden x-et tartalmazó él y-t is tartalmazza, mert az ilyen x pont levágható. Az ilyen redukált minimális nem-normális hipergráfokra vonatkozóan Padberg [P1] a fenti 4′. tételt használva bebizonyította, hogy maximális fokú csúcsaik száma élszámukkal azonos. Mindezek az eredmények következnének Berge híres ún. erős perfekt gráf sejtéséből, melyet a következő fejezetben részletesebben tárgyalunk. Itt csak megemlítjük, hogy Berge sejtése a minimális nem-normális hipergráfok alábbi leírását szolgáltatná:

Sejtés: *Minden redukált minimális nem-normális hipergráf az alábbi típusok valamelyike:*

a) *$k+1$ pont összesen k-asa;*
b) *páratlan kör;*
c) *páratlan kör antiblokkere.*

A 4. tétel bizonyítása: A feltétel szükséges volta nyilvánvaló. Az elégségességhez teljes indukciót használunk $|E(H)|$ szerint. Feltehetjük ily módon, hogy H-nak minden valódi H' részhipergráfja normális. A 3′. tétel alapján következik ebből, hogy H' élei kiszínezhetők $D(H')$ színnel. A 3. tétel bizonyításában felhasznált lemma szerint ugyanez áll minden olyan H' hipergráfra, mely H valamely valódi részhipergráfjából élek többszörösével származik.

A 3. tétel bizonyításával analóg módon először azt igazoljuk, hogy bármely olyan H_0 hipergráfra, mely H-ból élek többszörösével származik, fennáll a

$$D(H_0) \cdot \nu(H_0) \geqq |E(H_0)| \tag{3}$$

összefüggés. Ezt H_0 élszámára vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Feltehetjük, hogy van H-nak olyan E éle, mely több példányban is fellép H_0 éleként, mert különben H_0 H-nak részhipergráfja, és a (3) egyenlőtlenség a feltételben szerepel. Legyenek E-nek H_0-beli példányai $E_1, \ldots, E_k$ $(k \geqq 2)$.

Hagyjuk el H_0-ból az E_1 élt. A visszamaradó hipergráf az indukciós feltevés szerint kielégíti (3)-at, így

$$|E(H_0)| - 1 \leqq D(H_0 - E_1) \cdot \nu(H_0 - E_1) \leqq D(H_0) \cdot \nu(H_0). \tag{4}$$

Hagyjuk el most az $E_1, \ldots, E_k$ élek mindegyikét, és jelölje H_1 a visszamaradó hipergráfot. Mivel H_1 a $H - E$ hipergráfból származtatható éltöbbszörözéssel, élei kiszínezhetők $D(H_0)$ színnel. (4)-ből következik, hogy H_1-nek kevesebb, mint $D(H_0) \cdot \nu(H_0)$ éle van, és ezért éleit $D(H_0)$ színnel színezve, valamelyik szín, mondjuk a piros legfeljebb $(\nu(H_0) - 1)$-szer fordul elő.

Harmadszorra hagyjuk el H_0-ból E_1-et és a fenti piros éleket, és jelölje H_2 a kapott hipergráfot. Állítjuk, hogy

$$D(H_2) < D(H_0). \tag{5}$$

Legyen ugyanis x H_0-nak maximális fokú pontja. Ha $x \in E_1$, akkor E_1 elhagyása miatt x foka kisebb lesz H_2-ben. Ha $x \notin E_1$, akkor x maximális fokú pont volt H_1-ben és ezért az élek színezésekor minden szín, s így a piros is, elő kellett, hogy forduljon a hozzá illeszkedő élek között. Így a piros élek elhagyásakor x foka csökkent. Ezzel (5)-öt beláttuk.

Az indukciós feltevés szerint így

$$|E(H_2)| \leqq D(H_2)\nu(H_2) \leqq (D(H_0)-1)\nu(H_0),$$

és ezért

$$|E(H_0)| \leqq |E(H_2)| + (\nu(H_0)-1)+1 \leqq D(H_0)\nu(H_0).$$

Ezzel (3)-at beláttuk.

A 4. tétel mármost a 3. tételhez hasonló meggondolással adódik. Legyen $k \geqq 1$, és w H-nak egy optimális k-élpakolása. Vegyük H minden élét annyiszor, ahányszor w-ben fellép, és jelölje H_0 az így nyert hipergráfot. (3) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\nu_k(H) = |w| = |E(H_0)| \leqq D(H_0)\nu(H_0) \leqq k\nu(H),$$

amiből

$$\tau^*(H) = \nu(H)$$

következik. □□□

3. Az 1. és 1′. tételek más irányú módosítása az alábbi tételpár:

A. tétel [Berge B5]: *Tegyük fel, hogy a H hipergráf minden H' részhipergráfjára $\tau_2(H') = 2\tau(H')$. Ekkor H normális.*

5. tétel [L1]: *Tegyük föl, hogy minden olyan H' hipergráfra, mely a H hipergráfból pont-többszörözéssel származik, fennáll, hogy $\nu_2(H') = 2\nu(H')$. Ekkor $\nu(H) = \tau(H)$.*

Az A. tétel az 1′. tétel élesítése, míg az 5. tételnél annyiban többet kell feltenni, mint a 2′. tételben, hogy nemcsak a feszített részhipergráfokra kell feltenni az öröklődést. A 4 pont összes 3 elemű részhalmazából álló hipergráf mutatja, hogy csak a feszített részhipergráfokat tekinteni nem volna elegendő. Másrészről a bizonyítás meg fogja mutatni, hogy elegendő volna a pontok 0, 1 és 2-vel való szorzását (vagyis elhagyását, megtartását és megduplázását) megengedni.

Az 5. tétel bizonyítása: Teljes indukciót használunk az élszámra. Legyen x H-nak tetszőleges pontja. Ha $\nu(H-x) < \nu(H)$, akkor az indukciós feltevést használva,

$$\nu(H) \geqq \nu(H-x)+1 = \tau(H-x)+1 \geqq \tau(H),$$

és így a tétel állítása következik. Feltehetjük tehát, hogy minden x pontra $\nu(H-x) = \nu(H)$, vagyis H ν-stabil.

Kettőzzük meg egymás után H pontjait, amíg csak tehetjük anélkül, hogy $\nu(H)$ növekedne. Nyilvánvaló, hogy nem tudunk így minden pontot megkettőzni, sőt még egy él összes pontjait sem. Legyen H_1 az a hipergráf, melynél megakadunk, és x egy olyan pont, mely nincsen megkettőzve. Ekkor

$$\nu(H_1-x) \geqq \nu(H-x) = \nu(H),$$

tehát H_1-ben találunk olyan független F_1 élrendszert, mely $\nu(H)$ élből áll és x-et nem fedi le. Másrészről ha x-et megkettőznénk, a keletkező hipergráfban már lenne $\nu(H)+1$ független él. Ez azt jelenti, hogy H_1-ben van $\nu(H)+1$ olyan él, melyek x-et kétszeresen, minden más pontot azonban legfeljebb egyszeresen fednek le. Legyen ezek halmaza F_2. Tekintsük az F_1+F_2 élrendszert. Ez nyilván 2-élpakolás és $2\nu(H)+1$ élből áll, ami ellentmond annak, hogy $\nu_2(H)=2\nu(H)$. □□□

4. Felvetődik a kérdés, hogy milyen feltételekkel lehet biztosítani, hogy az előző tételpár alkalmazható legyen. Erre vonatkozik az alábbi tétel, melyet később más irányban is felhasználunk. Először is leírunk két hipergráf-típust, melyekre $\tau_2<2\tau$.

Nevezzük *bővített páratlan körnek* az olyan hipergráfot, melynek kételemű élei egy páratlan hosszúságú, minden ponton átmenő kört alkotnak, minden más éle pedig legalább háromelemű. Nevezzük *koronának* az olyan hipergráfot, melynek

(a) kételemű élei egy olyan páros gráfot alkotnak, melynek A, B szín-osztályaira $|A|=|B|+1$, és minden $\emptyset\subset X\subset B$ halmaz A-nak legalább $|X|+2$ elemével össze van kötve;

(b) A is éle;

(c) minden más éle legalább háromelemű.

Ha H bővített páratlan kör, akkor $\tau_2(H)=|V(H)|$ és nyilván $\tau(H)>\frac{1}{2}|V(H)|$.

Hasonló igaz akkor is, ha H korona. Legyen ugyanis T egy korona tetszőleges lefogó halmaza, akkor T tartalmazza $B-T$ minden szomszédját, és így (a) szerint már a gráf-részt tekintve is következik, hogy T több, mint $|B|$ elemű, kivéve, ha $B\subseteq T$. De ez az utóbbi esetben is (b) miatt T kell, hogy tartalmazzon még egy A-beli pontot is, és így ismét több, mint $|B|$ elemet kell, hogy tartalmazzon. (Jegyezzük meg, hogy itt a korona tulajdonságai gyengébb változatban voltak kihasználva: (a) helyett csak az, hogy minden $0\subset X\subset B$ A-nak legalább $|X|+1$ pontjával van összekötve, (b) helyett pedig csak az, hogy A tartalmaz élt.)

6. tétel: *Ha egy H hipergráfból pontok elhagyása és levágása útján sem bővített páratlan kör, sem korona nem állítható elő, akkor $\tau_2(H)=2\tau(H)$ teljesül.*

Állítsuk ezzel párba Berge és Las Vergnas [BL] következő fontos tételét:

B. tétel: *Ha egy H hipergráfból pontok levágása és élek elhagyása útján páratlan kör nem állítható elő, akkor arra $\nu(H)=\tau(H)$ teljesül.*

Az utóbbi tételben szereplő hipergráfokat Berge kiegyensúlyozott (balanced) hipergráfoknak nevezi. A következő fejezetben, ahol a 6. tételt alkalmazzuk újra, példát fogunk látni olyan esetre, amikor a 6. tétel feltételeit kielégítő hipergráfra az állítottnál több (tehát $\tau(H)=\tau^*(H)$ vagy éppen $\tau(H)=\nu(H)$) nem teljesül. A 6. tétel feltételének lényegesen gyöngébb voltát az okozza, hogy ha pontok levágásával üres él keletkezik, akkor ezt további pontok elhagyása már nem változtatja meg és így a feltétel triviálisan teljesül, míg élek elhagyása ezt megváltoztathatja.

A 6. tétel kissé bonyolult feltételének teljesülésére két elégséges feltételt említünk [L10]. Mivel bővített páratlan körből élelhagyással páratlan kör, koronából élelhagyással és pontlevágással háromszög állítható elő, minden kiegyensúlyozott hipergráfra a 6. tétel alkalmazható. Így az (egyszerűen bizonyítható) A. tétel felhasználásával a B. tétel adódik.

1. következmény: *Ha egy H hipergráfból pontelhagyással és pontlevágással az $\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ hipergráffal izomorf hipergráf nem állítható elő, akkor $\tau_2(H)=2\tau(H)$.*

2. következmény: *Legyen H olyan hipergráf, mely bármely három élének szimmetrikus differenciáját élként tartalmazza. Ekkor* $\tau_2(H)=2\tau(H)$.

A 2. következménynek a következő fejezetben több gráfelméleti alkalmazását fogjuk tárgyalni. Megjegyezzük, hogy ha H kielégíti a 2. következmény feltételeit, akkor az a hipergráf is, melyet H-ból úgy kapunk, hogy minden élének $V(H)$-ra vonatkozó komplementerét vesszük.

A 6. tétel bizonyítása: Tekintsünk egy minimális ellenpéldát; erre nyilván

$$\tau_2(H) = 2\tau(H) - 1. \tag{1}$$

Legyen F H-nak egy optimális 2-fedése. Tegyük fel először, hogy van olyan x pont, melyet F két példányban tartalmaz. Ekkor $F-\{x\}-\{x\}$ egy 2-fedése a $H-x$ hipergráfnak, és így

$$\tau_2(H-x) \leqq \tau_2(H)-2 = 2\tau(H)-3 \leqq 2\tau(H-x)-1,$$

ami ellentmond H minimalitásának.

Hasonló gondolatmenettel belátjuk, hogy F H-nak minden pontját tartalmazza. Tegyük fel ugyanis, hogy $y\in V(H)-F$. Vágjuk le y-t H-ról, akkor a kapott $H\setminus y$ hipergráfot F még mindig 2-szeresen lefedi, és így

$$\tau_2(H\setminus y) \leqq \tau_2(H) = 2\tau(H)-1 \leqq 2\tau(H\setminus y)-1.$$

Ez azonban ismét ellentmond H minimalitásának.

Jelölje G azt a gráfot, melyet H kételemű élei alkotnak $F=V(H)$-n. Vegyük észre, hogy G-ben nem lehet páratlan kör, hiszen ha lenne, akkor átlómentes páratlan kör is lenne (pl. a legrövidebb páratlan kör), és az ezen kívül fekvő pontokat H-ból elhagyva egy bővített páratlan kör maradna vissza. Így G páros gráf. Legyenek G egy két színnel való színezésének osztályai A és B, és mondjuk $|A|>|B|$. (Egyenlőség nem állhat, mert $|V(H)|=|F|$ páratlan.) Minden $X\subseteq V(G)$ esetén jelölje $\Gamma(X)$ az X G-beli szomszédainak a halmazát.

Legyen U az A egy minimális nem-üres részhalmaza, melyre $|\Gamma(U)|\leqq|U|$. Ekkor nyilván $|\Gamma(U)|=|U|$ és minden $0\subset X\subset U$ esetén $|\Gamma(X)|>|X|$. Ebből következik az is, hogy bármely $0\subset X\subset\Gamma(U)$ halmaz legalább $|X|+1$ U-beli ponttal van összekötve.

Jelölje F' azt a pontrendszert, mely $\Gamma(U)$ pontjait két-két példányban, $F-U-\Gamma(U)$ pontjait egy-egy példányban tartalmazza. Nyilván $|F'|=|F|$, és ezért F' nem lehet H-nak 2-fedése, hiszen láttuk, hogy F egyértelműen meg van határozva. G éleit azonban F' konstrukciója folytán kétszeresen lefogja; ezért kell, hogy legyen egy olyan legalább háromelemű E él, melyet legfeljebb egyszeresen fog le, vagyis mely U pontjaiból és legfeljebb egy $(F-U-\Gamma(U))$-beli pontból áll. Mivel $|E|\geqq3$, ebből $|U|\geqq2$ következik.

Mármost három eset lehetséges:

1° $E\subseteq U$. Ekkor hagyjuk el $F-U-\Gamma(U)$ pontjait és még $\Gamma(U)$ egy pontját. A visszamaradó H' hipergráfra a tétel kimondása előtt tett megjegyzés szerint $\tau_2<2\tau$ teljesül, ami ellentmondás.

2° $E\setminus U=\{v\}$, és v a $\Gamma(U)$ halmaznak egyetlen pontjával sincs összekötve G-ben. Ekkor hagyjuk el $F-U-\Gamma(U)-\{v\}$ pontjait és $\Gamma(u)$ egy tetszőleges pontját és vágjuk le v-t. Ugyanúgy ellentmondásra jutunk, mint 1°-ben.

3° $E\setminus U=\{v\}$, és v a $\Gamma(U)$ halmaznak legalább egy pontjával össze van kötve G-ben. Ekkor $F-U-\Gamma(U)-\{v\}$ pontjait elhagyva a fentiekhez hasonlóan olyan hipergráfot kapunk, melyre $\tau_2<2\tau$. Ez ellentmondás, kivéve, ha $A=U\cup\{v\}$ és $B=\Gamma(U)$.

Ez utóbbi esetben minden $0 \subset X \subset B$ halmazra $|\Gamma(X)| \geqq |X|+2$. Azt már tudjuk ugyanis, hogy $|\Gamma(X)| \geqq |X|+1$, és ezért $|A-\Gamma(X)| < |U|$. Ha $\Gamma(X)=A$, akkor nincs mit bizonyítani, így feltehetjük, hogy $A-\Gamma(X) \neq \emptyset$, és ezért

$$|A-\Gamma(X)| < |\Gamma(A-\Gamma(X))| \leqq |B-X| = |A|-|X|-1,$$

ebből állításunk következik.

Az is könnyen adódik, hogy $E=A$; ellenkező esetben ugyanis $A-E$ és B egy-egy pontját elhagyva, még mindig olyan hipergráfot kapnánk, melyre $\tau_2 < 2\tau$ állna fenn. De ezzel azt láttuk be, hogy H egy korona, ami ismét ellentmondás. □□□

A következmények bizonyítása: 1. Elegendő azt megmutatni, hogy mind a bővített páratlan körből, mind a koronából az $\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ hipergráffal izomorf hipergráf előállítható. Az előbbi esetben tekintsük a páratlan kör egy (u, v) élét, vágjuk le a körön ezzel szomszédos pontokat, és hagyjuk el a többit. A második esetben legyen (u, v) ismét egy kételemű él, és mondjuk $u \in A$, $v \in B$. Ekkor hagyjuk el B többi pontját, és vágjuk le A többi pontját.

2. Tegyük fel, hogy H tartalmazza bármely három élének szimmetrikus differenciáját. Ekkor könnyen látható, hogy ugyanez igaz minden olyan hipergráfra, melyet H-ból pontok elhagyása és levágása útján nyerhetünk. Mivel az $\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ hipergráfra viszont ez nem teljesül, az 1. következmény alkalmazható. □□□

5. A ν_2 és τ_2 mennyiségekre vonatkozóan másirányú változatait is igazolhatjuk az 1—2. tételeknek [L10]:

7. tétel: *Tegyük fel, hogy a H hipergráf minden H' részhipergráfjára $\tau^*(H')$ $\frac{1}{2}$-nek egészszámú többszöröse. Ekkor $\nu_2(H)=2\tau^*(H)$.*

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy a 2-es számot e tételben egy k egész számmal helyettesítve, az érvényben marad-e. [L6]-ban a szerző bebizonyította, hogy $k=3$ esetén a 7. tétel még érvényben marad. Másrészről Seymour egy újkeletű ellenpéldája mutatja, hogy $k=20$-ra — meglepő módon — a 7. tétel megfelelője nem igaz. Ugyanakkor a τ-ra vonatkozó megfelelő állítást $k=2$-re a szerző [L10], tetszőleges k-ra pedig Schrijver (még publikálatlan) igazolta:

8. tétel: *Tegyük föl, hogy a H hipergráfból pont-többszörözéssel származó H' hipergráfok mindegyikére $\tau^*(H')$ az $1/k$-nak egészszámú többszöröse. Ekkor $\tau_k(H)=k\tau^*(H)$.*

A 7. tétel bizonyítása: Hagyjunk el H-ból éleket mindaddig, míg $\tau^*(H)$ nem változik. Az így nyert H' részhipergráf minden E élére

$$\tau^*(H'-E) < \tau^*(H').$$

Figyelembe véve, hogy $2\tau^*(H')$ és $2\tau^*(H'-E)$ egész számok a feltevés szerint következik, hogy

$$\tau^*(H'-E) \leqq \tau^*(H') - \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Legyen mármost q a H' hipergráf egy optimális valós élpakolása, ekkor $q/H'-\{E\}$ a $H'-\{E\}$ hipergráfnak egy valós élpakolása és így

$$\tau^*(H'-\{E\}) \geqq \tau^*(H') - q(E). \tag{7}$$

(6) és (7) adja, hogy $q(E) \geqq \frac{1}{2}$ minden E élre. Állítjuk, hogy minden $E \in E'(H')$ élre $q(E)=1$ vagy 1/2. Ha E nem metszi a H' hipergráf többi élét, akkor nyilván $q(E)=1$. Ha egy F él metszi E-t egy x pontban, akkor $q(E) \leqq \frac{1}{2}$ és $q(F) \geqq \frac{1}{2}$, másrészről $q(E)+q(F) \leqq 1$, és így $q(E)=q(F)=1$.

Beláttuk ezzel, hogy $2q(E)$ minden E élre egész szám, és így egy 2-élpakolást szolgáltat. Ezért

$$\nu_2(H) \geqq \nu_2(H') \geqq 2\tau^*(H') = 2\tau^*(H),$$

amiből a tétel állítása következik. □□□

A 8. tétel $k=2$ esete hasonló meggondolásokkal igazolható. Az általános esetben Schrijver az egész értékű programozás módszereit használta.

6. *A minimax tételek gráfelméleti alkalmazásai*

1. Az 1. fejezetben gráfok esetére vonatkozóan két fontos összefüggést említettünk: Kőnig tételét és a $\tau_2=\nu_2$ egyenlőséget. Megmutatjuk most, hogy ezek a minimax tételekből hogyan nyerhetők.

Kőnig tétele szinte valamennyi említett minimax tételből levezethető. Így az 1′. tétel és a 4. fejezet 3. tétele együtt adja Kőnig tételét. Az előző fejezet A. tételének feltétele még egyszerűbben verifikálható, az 5. tétel feltétele pedig nyilvánvalóan teljesül, hiszen egy 2-élpakolás egy páros gráfban diszjunkt utakból és páros körökből áll, és így nyilván két független élrendszerre bontható. A B. tételnek a Kőnig-tétel természetesen közvetlenül is speciális esete.

A 4. fejezet 5. pontjában említett eredmények szerint minden gráfra $\tau_2(G)=2\tau^*(G)$; ebből az 5. fejezet 7. tétele szerint következik, hogy $\tau_2(G)=\nu_2(G)$.

2. Az előző fejezetben tárgyalt minimax tételek kidolgozására először azért került sor, hogy Berge ún. perfekt gráf sejtését általuk bizonyítsuk. E sejtés eredete Gallai alábbi két észrevétele:

A. tétel: *Ha egy egyenesen fekvő intervallumok egy rendszerében nincsen $k+1$ diszjunkt, akkor ezen k ponttal lefoghatók.*

A′. tétel: *Ha egy egyenesen fekvő intervallumok egy rendszere az egyenes bármely pontját legfeljebb k-szorosan fedi le, akkor felbontható k rendszerre, melyek mindegyike diszjunkt intervallumokból áll.*

Hajós hívta föl a figyelmet, hogy ha az intervallumokat egy-egy ponttal reprezentáljuk, és két pontot éllel kötünk össze, ha a megfelelő intervallumok metszik egymást, akkor az A′. tétel éppen azt állítja, hogy a nyert gráf $\chi(G)$ kromatikus száma egyenlő a benne található legnagyobb teljes részgráf $\omega(G)$ pontszámával, míg az A. tétel e gráf komplementeréről mondja ki ugyanezt. Hajnal és Surányi [HS] megmutatta, hogy az intervallumgráfok tulajdonságai közül már abból következik ez, hogy minden 3-nál hosszabb körükben van húr.

Más kombinatorikus tételek is hasonló gráfelméleti kérdésekhez vezettek. Erdős és Szekeres [ES] a következő egyszerű tényt vették észre és használták föl:

B. tétel: *Ha egy parciálisan rendezett halmazban nincsen $k+1$ hosszúságú rendezett részhalmaz, akkor az k olyan részhalmazra bontható, melyek mindegyike egymással összehasonlíthatatlan elemekből áll.*

E tétellel Dilworth nevezetes tétele állítható párba:

B′. tétel: *Ha egy parciálisan rendezett halmazban nincs $k+1$ páronként összehasonlíthatatlan elem, akkor az k rendezett részhalmazra bontható.*

Ha minden parciálisan rendezett halmazhoz megkonstruáljuk összehasonlítási gráfját, vagyis azt a gráfot, melynek pontjai a parciálisan rendezett halmaz elemei, és kettőt összekötünk, ha összehasonlíthatók, akkor Erdős és Szekeres tétele azt állítja, hogy e gráfra $\chi=\omega$, és Dilworth tétele a gráf komplementerére mondja ki ugyanezt.

Mindezeknek a példáknak még egy fontos tulajdonsága van: minden feszített részgráfjuk is ugyanolyan típusú gráf, a feltevés szerint. Ez az észrevétel motiválja az alábbi definíciót: Egy G gráfot *perfektnek* nevezünk, ha minden feszített G' részgráfjára (magát G-t is beleértve) $\chi(G')=\omega(G')$ teljesül. A fent megkonstruált gráfok, valamint komplementereik perfektek.

Ha a perfekt gráfokat jellemezni akarjuk, két fontos tulajdonságukat könnyen észrevesszük: nem tartalmaznak 3-nál hosszabb átlómentes páratlan kört (ezt választva G'-nek $\omega(G')=2$, $\chi(G')=3$ állna fenn), sem pedig egy átlómentes páratlan kör komplementerét feszített részgráfként (utóbbira ui. $\omega(G')=\frac{1}{2}(|V(G)|-1)$, $\chi(G')=\frac{1}{2}(|V(G)|+1)$ állna). Berge [B2] vetette fel azt a sejtést 1960-ban, hogy e két szükséges feltétel elegendő is a gráf perfektségéhez. Ez a sejtés máig is eldöntetlen, csak részeredmények vannak (Gallai [G2], Sachs [S1], Padberg [P1], Chvátal [C3, 4], Parthasarathy és Ravindra [PR]).

A Berge-sejtés egy következménye, hogy perfekt gráf komplementere is perfekt: A feltétel ugyanis nyilván egyszerre teljesül a gráfra és komplementerére. Ezt a következményt gyenge perfekt gráf sejtése néven ismerték, és szintén sokat vizsgálták. Berge [B4] hipergráfelméleti átfogalmazását találta, majd több, ezzel az átfogalmazással rokon tételt bizonyított. Fulkerson [F3, F4] lineáris programozásbeli átfogalmazását adta a problémának, majd az általa kidolgozott ún. antiblokker-elméletet használva egy kissé gyöngített változatát be is bizonyította. Tőle függetlenül a szerző (Berge hipergráfelméleti megfogalmazását használva) 1971-ben bebizonyította a sejtést [L8]. Meg kell jegyezni, hogy Fulkerson a szerző eredményéről hallva, de a bizonyítást még nem ismerve, saját bizonyítását is be tudta fejezni (lásd Fulkerson [F5]); továbbá azt is, hogy mint utólagos elemzés mutatta, a két bizonyítás fő vonalaiban hasonlóan haladt.

A hipergráfelméleti módszer a perfekt gráfoknak egy jellemzését is lehetővé teszi (Lovász [L9]):

1. tétel: *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden feszített G' részgráfjára*

$$\omega(G')\,\omega(\overline{G'}) \geqq |V(G')|.$$

Mivel a feltétel egy gráfra és komplementerére egyszerre teljesül, a gyenge perfekt gráf sejtés adódik:

Következmény: *Perfekt gráf komplementere is perfekt.*

Az 1. tételről könnyen látható, hogy ekvivalens az alábbival:

1′. tétel: *Legyen G olyan gráf, mely nem perfekt, de bármely valódi feszített részgráfja már perfekt. Ekkor*

$$\omega(G)\,\omega(\overline{G}) = |V(G)| - 1.$$

Az 1′. tételt felhasználva az ilyen minimális nem-perfekt gráfoknak sok érdekes további tulajdonságát igazolta Padberg [P1]. Az erős perfekt gráf sejtés fennállása esetén persze tudnánk, hogy a minimális nem-perfekt gráfok a páratlan körök és azok komplementerei, így ezek az eredmények (az 1′. tételt is ideértve) azonnal következnének.

Az 1. tétel azonban nem csak abból a szempontból érdekes, hogy a perfektgráf sejtés következik belőle, hanem azért is, mert adalékot szolgáltat a perfekt gráfok karakterizálhatóságának kérdéséhez. Ha egy gráf perfekt, azt gyorsan bebizonyítani nem tudjuk, legalábbis a definíció alapján: ehhez ugyanis valamennyi részgráfját végig kellene nézni. Hasonlóan a nem-perfektséget sem tudjuk egyszerűen bizonyítani; ehhez ugyan elegendő volna egyetlen egy nem-perfekt G' részgráfot felmutatni, de nem látszik, hogy lehetne azonnal megmutatni, hogy $\chi(G') > \omega(G')$. Azonban ha egy *minimális* nem-perfekt G' részgráfját mutatjuk fel, akkor az 1′. tétel felhasználásával erről már könnyen ki tudjuk mutatni, hogy nem-perfekt. Be tudjuk ugyanis bizonyítani, hogy $\omega(G')$ értéke annyi, amennyi: megadjuk minden $x \in V(G')$-re a $G' - x$ gráfnak egy $\omega(G')$-színezését; ezzel máris igazoltuk, hogy $\omega(G')$ az általunk állítottnál nagyobb nem lehet; egy maximális teljes részgráf felmutatásával igazoljuk, hogy $\omega(G')$ értéke éppen az állított. Hasonlóan könnyű igazolni, hogy $\omega(\bar{G}')$ értéke annyi, amennyi. Az 1′. tétel nem-teljesülése mármost könnyen verifikálható, amíg G', és így G nem-perfekt voltát igazolja.

A perfekt gráfok jó karakterizációjához még az kellene, hogy a perfektséget is könnyen tudjuk igazolni. Ehhez olyan struktúratétel kellene, mely minden perfekt gráfot jól felismerhető alakban állít elő. Például ha minden perfekt gráf egy parciálisan rendezett halmaz összehasonlítási gráfja volna (sajnos nem az), máris megvolnánk. A szerző úgy érzi, hogy ilyen struktúratétel megadható, de ezt bizonyos erőfeszítések ellenére nem sikerült megtalálni.

Az 1. tétel bizonyítása: A 4. fejezetben már megkonstruált $H(G)$ hipergráfot tekintjük. Erre ott azt igazoltuk, hogy

$$\tau(H(G)) = \chi(G), \quad \text{és} \quad D(H(G)) = \alpha(G) = \omega(\bar{G}).$$

Megjegyeztük, hogy G minden feszített részgráfjának természetes módon megfelel H egy részhipergráfja és viszont, és ezekre a fentiekhez hasonló összefüggés áll fenn. Azt is könnyen kiolvashatjuk H definíciójából, hogy

$$\nu(H(G)) = \omega(G).$$

Ebből tehát az következik, hogy

G akkor és csak akkor perfekt, ha $H(G)$ normális.

Alkalmazva mármost a normalitásnak az 5. fejezet 4. tételében kimondott kritériumát, a tétel adódik.

3. A következő gráfelméleti alkalmazás, melyet tárgyalunk, Lucchesi és Younger [LY] egy 1973-ban bizonyított tétele. Ezt sejtésként Robertson és Younger vetették föl egymástól függetlenül 1960 körül.

C. tétel: *Bármely irányított gráfban az élidegen irányított vágások maximális száma egyenlő az összes irányított vágást lefogó élek minimális számával.*

(Irányított vágást úgy kapunk, hogy a gráf pontjait A és B osztályokba soroljuk úgy, hogy minden A-t B-vel összekötő él A-tól B felé legyen irányítva, és ez utóbbi

élek halmazát tekintjük. Az összes irányított vágást lefogó élek minimális száma úgy is definiálható, mint azon élek minimális száma, melyek kontrakciója révén a gráf erősen összefüggővé válik.)

Bizonyítás: Legyen G irányított gráf. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy G gyengén összefüggő. Ekkor G minden irányított V vágása egyértelműen meghatározza azt az A_V halmazt, melyre V éppen az A-t $V(G)-A_V$-vel összekötő élekből áll. A-t szemléletesen V bal oldalának fogjuk nevezni.

G irányított vágásai egy $\mathscr{V}(G)$ hipergráfot alkotnak; ennek pontjai G élei. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy

$$\nu(\mathscr{V}(G)) = \tau(\mathscr{V}(G)). \tag{1}$$

Megjegyezzük, hogy $\mathscr{V}(G)$ normalitása általában nem következik, hiszen $\mathscr{V}(G)$ egy tetszőleges részhipergráfja általában nem lesz ugyanilyen konstrukcióval előálló részhipergráf. De $\mathscr{V}(G)$ feszített részhipergráfjai mind ugyanilyen típusúak, hiszen $\mathscr{V}(G)$-ből egy pont elhagyása megfelel G-ben a megfelelő él összehúzásának. Ugyanígy a $\mathscr{V}(G)$-ből ponttöbbszörözéssel előálló hipergráfok is $\mathscr{V}(G')$ alakúak, hiszen ezeket G megfelelő éleinek új pontokkal való felosztásával is nyerhetjük.

E megfigyelést felhasználva elegendő azt bizonyítani, hogy

$$\nu_2(\mathscr{V}(G)) = 2\nu(\mathscr{V}(G)). \tag{2}$$

E reláció ugyanígy következik a $\mathscr{V}(G)$-ből ponttöbbszörözéssel előálló hipergráfokra, és így az 5. fejezet 5. tétele adja (1)-et.

(2)-ben a $\leqq$ irány nem triviális, így most azt bizonyítjuk. Legyen $w=\{V_1,\ldots, V_N\}$ a $\mathscr{V}(G)$ hipergráfnak egy tetszőleges 2-élpakolása (a félreértések elkerülése végett $\mathscr{V}(G)$ élpakolásait a továbbiakban *vágáspakolásnak* fogjuk nevezni). Megmutatjuk, hogy $N\leqq 2\nu(\mathscr{V}(G))$. Rövidség kedvéért legyen $A_i=A_{V_i}$.

A V_i és V_j vágásokat *metszőnek* nevezzük, ha az $A_i\cap A_j$, A_i-A_j, A_j-A_i és $V(G)-A_i-A_j$ halmazok egyike sem üres. Ebben az esetben helyettesítsük e párt azzal a két irányított vágással, melyek bal oldalai az $A_i\cap A_j$ és $A_i\cup A_j$ halmazok. Könnyen látható, hogy a két új irányított vágás minden élt ugyanannyiszorosan tartalmaz, mint V_i és V_j, így e két vágást a két újjal helyettesítve egy másik 2-vágáspakolást nyerünk, mely ugyancsak m irányított vágásból áll. Vegyük még észre, hogy mivel

$$|A_i\cap A_j|^2+|A_i\cup A_j|^2>|A_i|^2+|A_j|^2,$$

a $\sum_{i=1}^{N}|A_i|^2$ összeg e helyettesítéssel nőtt. Ezért ha e helyettesítést mindaddig ismételük, míg csak metsző vágáspárt találunk, előbb-utóbb megakadunk, vagyis olyan rendszerhez jutunk, melyben nincsenek metsző vágáspárok.

Feltehetjük tehát, hogy $\{V_1, \ldots, V_N\}$ olyan 2-vágáspakolás, melyben nincsenek metsző vágáspárok.

Konstruáljunk most egy G_0 gráfot a következőképpen. G_0 pontjai legyenek $x_1, \ldots, x_N$, és x_i-t kössük össze x_j-vel, ha V_i-nek és V_j-nek van közös éle. Állítjuk, hogy G_0 *páros gráf*. Ennek bizonyítása végett tekintsünk két, egymással összekötött pontját, x_i-t és x_j-t. A megfelelő V_i és V_j vágásoknak legyen (a, b) egy közös élük. Ekkor $a\in A_i\cap A_j$, $b\in V(G)-A_i-A_j$. Ha figyelembe vesszük, hogy V_i és V_j nem metszők, látjuk, hogy vagy $A_i\subseteq A_j$ vagy $A_j\subseteq A_i$ fenn kell, hogy álljon. Irányítsuk e két esetnek megfelelően a G_0 gráf (x_i, x_j) élet x_i-ből x_j-be, ill. x_j-ből x_i-be. Ezzel tehát G_0 irányított gráffá vált.

Tegyük fel, hogy G_0-ban van egy páratlan kör. A legrövidebb ilyet tekintjük,

ez átlómentes. Ennek — páratlan hossza miatt — van két éle, melyek csatlakozóan vannak irányítva. Legyen mondjuk $(x_1, \ldots, x_p)$ a kör, és $(x_p x_1)$, (x_1, x_2) így irányított élei. Ekkor $A_p \subseteq A_1 \subseteq A_2$. A V_p és V_2 vágások esetleges közös éle ezért V_1-nek is éle, ami lehetetlen, mert a $V_1, \ldots, V_N$ rendszer 2-vágásélpakolás. Így V_p-nek és V_2-nek nincsen közös éle; következésképpen, $p \neq 3$. Tekintsük a V_3 vágást. Ennek van V_2-vel közös éle, de V_1-gyel közös éle nincs. Felhasználva azt is, hogy V_3 és V_1 nem metszők, következik, hogy V_3 éleinek nem esik A_1-be végpontjuk. Hasonlóan továbbmenve kapjuk, hogy a $V_4, \ldots, V_p$ vágások éleinek sem esik végpontjuk A_1-be, ami ellentmond annak, hogy V_p-nek és V_1-nek van közös éle. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy G_0 páros gráf.

Színezzük ki G_0 pontjait két színnel! Az azonos színű pontok élidegen irányított vágásoknak felelnek meg, és ezért számuk legfeljebb $\nu(\mathscr{V}(G))$. Így G_0 pontszáma, N, legfeljebb $2\nu(\mathscr{V}(G))$. Ezzel (2)-t bebizonyítottuk. □□□

3. Következő problémakörünk úgy is tekinthető, mint az előző pont irányítatlan analogonja. Speciális eseteként Tutte 1-faktor tétele is levezethető [L9].

Legyen G irányított gráf. Ennek vágásait tekintve éleknek, érdekes, de igen nehéz kérdésekhez jutunk, melyek az itt kidolgozott módszerekkel kezelhetetlenek. Az összes vágást lefogó élek minimális száma nyilván $n-1$, ahol n a pontszám, és a minimális lefogó halmazok éppen a feszítő fák. A minimális kétszeresen lefogó élrendszerek viszont akkor állnak n élből, ha a gráfban Hamilton-kör van; így a minimális kétszeresen lefogó élrendszer számosságára jó formulát találni reménytelenül nehéz feladat.

Ki fog tűnni, hogy ha csak azokat a vágásokat tekintjük, melyek G ponthalmazát két páratlan részre osztják (feltesszük, hogy G pontszáma páros), akkor sokkal jobban kezelhető hipergráfot kapunk.

Pontosabban, tekintsük az alábbi hipergráfokat. Adott egy G gráf, és pontjainak egy páros számosságú A részhalmaza. Jelölje $\mathscr{P}(G, A)$ azt a hipergráfot, melynek pontjai G élei, éleit pedig a következő vágások alkotják: minden olyan $S \subset V(G)$ halmazra, melyre $|S \cap A|$ páratlan, az S-et $V(G)-S$-sel összekötő élek halmaza. Ezt a halmazt V_S-sel jelöljük. $\mathscr{P}(G, A)$ éleit *A-páratlan vágásoknak* is hívjuk.

Két speciális esetet emelünk ki. Ha $A = V(G)$, akkor a fent említett, páratlan részekre osztó vágásokat nyerjük. Ha A a páratlan fokú pontok halmaza (ez mindig páros elemszámú), akkor minden S halmazra $|V_S|$ ugyanolyan paritású, mint $|A \cap S|$. Ezért az A-páratlan vágások éppen a páratlan elemszámú vágások.

Még egy előzetes megjegyzés. A

$$V_S + V_T = V_{S \triangle T} = V_S \triangle V_T$$

definícióval a vágások egy elemi 2-csoportot fognak alkotni (precizitás kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy ha itt pl. a V_S vágást $V_{V(G)-S}$ alakba írjuk, a művelet eredménye ugyanaz lesz). Ez a csoport, mely vágáscsoport néven jól ismert a gráfelméletben, 1 vagy 2 indexű részcsoportként tartalmazza az A-páros vágások halmazát; az A-páratlan vágások halmaza tehát, ha nem üres, egy mellékosztály.

Vizsgáljuk $\mathscr{P}(G, A)$ lefogó halmazait. Egy lefogó halmaz egy olyan élrendszernek felel meg, mely minden A-páratlan vágást lefog. Más szóval ez azt jelenti, hogy a lefogó halmazhoz tartozó élek olyan gráfot alkotnak a $V(G)$ ponthalmazon, melynek minden összefüggő komponense páros számú A-beli pontot tartalmaz. Ebből következik, hogy ha egy lefogó halmaz nem csökkenthető, akkor olyan erdő, melynek minden komponense páros számú A-beli pontot tartalmaz, de bármely éle az őt tartalmazó komponenst két olyan részre bontja, melyek már páratlan

számú A-beli pontot tartalmaznak. Legyen $x \in V(G)-A$. Az x-et tartalmazó fa x-ből kiinduló ágai külön-külön páratlan sok A-beli pontot tartalmaznak, ezért x páros a W erdőben. Hasonlóan adódik, hogy A minden pontja páratlan fokú W-ben. Megfordítva, ha egy erdő olyan, hogy A-beli pontjai és csak azok páratlan fokúak, akkor ez az erdő $\mathscr{P}(G, A)$-nak egy nem csökkenthető lefogó halmazát adja.

Vizsgáljunk meg néhány érdekes speciális esetet.

1. Ha $A=\{a, b\}$, akkor az A-páratlan vágások éppen az a-t és b-t elválasztó vágások. A nem csökkenthető lefogó halmazok így az (a, b)-utak, és $\tau(\mathscr{P}(G, A))$ egyenlő a és b távolságával.

2. Ha $A=V(G)$, akkor $\tau(\mathscr{P}(G, A)) \geqq \frac{1}{2}|V(G)|$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha G-nek van 1-faktora.

3. Legyen G_0 harmadfokú reguláris gráf és $e_1, \ldots, e_k$ G_0-nak élei (k páros). Osszuk fel $e_1, \ldots, e_k$ mindegyikét egy-egy új ponttal, és legyen A ezen új pontok halmaza, G pedig az így nyert gráf. A nem-csökkenthető lefogó élrendszerek fenti leírásából látható, hogy ezek G-ben olyan pontidegen utakat alkotnak, melyek A pontjait párosával összekötik. Következik ily módon, hogy G_0-ban megadhatók olyan közös belső pontot nem tartalmazó utak, melyek mindegyike pontosan két e_i élt tartalmaz; $\tau(\mathscr{P}(G, A))$ pedig megadja az ilyen utak minimális összhosszát.

A $\mathscr{P}(G, A)$ hipergráfokra vonatkozó fő eredményünk a következő [L10]:

2. tétel: $$\nu_2(\mathscr{P}(G, A)) = 2\tau(\mathscr{P}(G, A)).$$

Megjegyezzük, hogy a gyengébb $\tau^*=\tau$ összefüggést a szerzőtől függetlenül P. Seymour is bebizonyította.

Bizonyítás: I. Először is megjegyezzük, hogy

$$\tau_2(\mathscr{P}(G, A)) = 2\tau(\mathscr{P}(G, A)).$$

Ez azonnal következik az 5. fejezet 6. tételéből.

II. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy

$$\tau_2(\mathscr{P}(G, A)) = \nu_2(\mathscr{P}(G, A)).$$

Legyen (x, y) G-nek egy éle; vonjuk össze egyetlen z ponttá, és jelölje G' az így nyert gráfot. Álljon továbbá A' az A halmaz x, y-tól különböző pontjaiból és ha A x, y közül pontosan egyet tartalmaz, még a z pontból. Könnyen látható, hogy a $\mathscr{P}(G', A')$ hipergráf úgy áll elő a $\mathscr{P}(G, A)$ hipergráfból, hogy az (x, y) élnek megfelelő pontot elhagyjuk. Másrészt ha (x, y)-t k új ponttal felosztjuk, A-t pedig változatlanul hagyjuk, akkor a kapott G'' gráfra $\mathscr{P}(G'', A)$ úgy áll elő $\mathscr{P}(G, A)$-ból, hogy az (x, y) élnek megfelelő pontot k-szorozzuk. Következik tehát, hogy $\mathscr{P}(G, A)$ alakú hipergráfból ponttöbbszörözéssel és elhagyással ugyanilyen alakú hipergráfot kapunk. Ezért az 5. fejezet 8. tételének felhasználásával adódik, hogy elegendő azt bebizonyítani, hogy

$$\nu_2(\mathscr{P}(G, A)) = 2\tau^*(\mathscr{P}(G, A)),$$

ami nyilván azzal ekvivalens, hogy minden $k>0$ esetén

$$\nu_{2k}(\mathscr{P}(G, A)) = k\nu_2(\mathscr{P}(G, A)).$$

Ennek bizonyításához természetesen elegendő a $\leqq$ megmutatása. Ehhez viszont

elegendő egy olyan optimális $2k$-vágáspakolást megkonstruálni, mely egy 2-vágáspakolás k-szorosa.

Legyen $V(G)=\{v_1, \ldots, v_n\}$; feltehetjük, hogy $v_1 \in A$. Tekintsünk egy w optimális $2k$-vágáspakolást. Nevezzük egy w-beli vágás magjának az azt definiáló partició osztályai közül a v_1-et nem tartalmazót. Legyenek $R_1, \ldots, R_N$ ezek a magok multiplicitással számolva, tehát

$$N = v_{2k}(\mathscr{P}(G, A)).$$

Definíció szerint minden i-re $|R_i \cap A|$ páratlan, és G bármely éléhez legfeljebb $2k$ darab olyan R_i van, mely egyik végpontját tartalmazza, de a másikat nem.

Nevezzük az x pont *mélységének* ez x-et tartalmazó magok számát, és jelöljük ezt $w(x)$-szel. Válasszuk mármost a w vágáspakolást úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i w(v_i) \tag{3}$$

minimális legyen, és ha ez nem határozza meg egyértelműen, akkor

$$\sum_{j=1}^{N} |R_j|^2 \tag{4}$$

maximális legyen.

Először is az A. tétel bizonyításának mintájára itt is könnyen beláthatjuk, hogy a szereplő vágások nem keresztezik egymást, pontosabban, hogy

1. állítás: *Bármely i, j párra vagy $R_i \cap R_j = \emptyset$, vagy $R_i \subseteq R_j$, vagy $R_j \subseteq R_i$.*

Tegyük fel, hogy ez nem állna. Abból, hogy $|R_i \cap A|$ és $|R_j \cap A|$ páratlan, következik, hogy vagy $|(R_i \cap R_j) \cap A|$ és $|(R_i \cup R_j) \cap A|$, vagy $|(R_i \setminus R_j) \cap A|$ és $|(R_j \setminus R_i) \cap A|$ páratlanok. Ennek megfelelően az R_i és R_j által definiált vágásokat helyettesíthetjük vagy az $R_i \cap R_j$ és $R_i \cup R_j$, vagy pedig az $R_i \setminus R_j$ és $R_j \setminus R_i$ által meghatározott vágásokkal. Könnyen látható, hogy így egy 2k-vágáspakolást kapunk (G minden éle legfeljebb annyiszor van használva, mint az eredeti vágáspakolásban), mely ugyancsak N vágásból áll. Ezenfelül az első esetben (3) változatlan maradt de, (4) nőtt, kivéve, ha $R_i \subseteq R_j$ vagy $R_j \subseteq R_i$. A második esetben (3) csökkent, kivéve, ha $R_i \cap R_j = \emptyset$.

Nevezzük *telített éleknek* G azon éleit, melyek a vágásélpakolás $2k$ vágásában lépnek fel. A következő észrevétel fontos szerepet játszik a bizonyításban:

2. állítás: *Bármely mag által feszített telített élek összefüggő gráfot alkotnak.*

Tegyük fel ugyanis, hogy az R_i magot felbontanánk két halmazra, R_i'-re és R_i''-re úgy, hogy ezeket nem kötné össze telített él. Az $R_i' \cap A$ és $R_i'' \cap A$ halmazok közül valamelyik, mondjuk az utóbbi páratlan. Ekkor azonban R_i-t R_i''-vel helyettesítve egy másik $2k$-vágáspakolást kapunk, mely ugyancsak N vágásból áll, és melyre (3) kisebb.

3. állítás: *Ha két pont ugyanabba a magba tartozik, akkor mélységük ugyanazt a maradékot adja $2k$-val osztva.*

Tegyük fel, hogy volna olyan x, y pontpár, melyre ez nem áll, és válasszuk ezt úgy, hogy a lehető legtöbb mag tartalmazza mindkettőt. Legyen R_i a legszűkebb x, y-t tartalmazó mag. Legyenek $R_{j_1}, \ldots, R_{j_p}$ az R_i által valódi részként tartalmazott magok közül a maximálisak. Ekkor nyilván $R_{j_1}, \ldots, R_{j_p}$ diszjunktak. Fennáll továbbá, hogy R_{j_t} pontjainak mélysége ugyanazt a maradékot adja $2k$-val osztva

$(1 \leqq t \leqq p)$. Ekkor van olyan m_t szám, hogy minden olyan él, mely R_{j_t}-be belép, pontosan m_t olyan w-beli vágáshoz tartozik hozzá, melynek magja része R_{j_t}-nek. Nyilván $1 \leqq m_t \leqq 2k$. Ha egy telített él összeköti az R_{j_t} és R_{j_s} halmazokat, akkor $m_t + m_s = 2k$. Ha egy telített él R_{j_t} egy pontját olyan R_i-beli ponttal köti össze, mely semelyik R_{j_s}-nek sem eleme, akkor $m_t = 2k$. Az 1. állítás mármost csak úgy teljesülhet, ha vagy

$$R_{j_1} \cup \ldots \cup R_{j_p} = R_i \tag{1}$$

és minden t-re $m_t \in \{m_1, 2k - m_1\}$, vagy pedig minden t-re $m_t = 2k$. Az első esetben azonban az is következik, hogy $m_1 = k$ és így minden t-re $m_t = k$. Feltéve ugyanis, hogy $m_1 \neq k$, az R_{j_t} halmazok két osztályba sorolhatók aszerint, hogy $m_t = m_1$ vagy $2k - m_1$. Az is következik, hogy p páratlan (ugyanis a páratlan $|R_i \cap A|$ szám p darab páratlan szám: $|R_{j_1} \cap A|, \ldots, |R_{j_p} \cap A|$ összegeként áll elő), és ezért valamelyik fajta R_{j_t}-ből több van, mint a másikból. Ha most az ilyen fajta R_{j_t}-k multiplicitását egy-eggyel növeljük, a többiét és R_i-ét egy-eggyel csökkentjük, olyan 2-vágáspakolást kapunk, mely legalább N vágást tartalmaz, és közben (3) csökkent.

Így tehát vagy minden t-re $m_t = k$ és fennáll (1), vagy minden t-re $m_t = 2k$. Mindkét esetben azonnal látszik, hogy minden R_i-beli pont mélysége ugyanazt a maradékot adja $2k$-val osztva, ami ellentmond R_i választásának.

4. állítás: *Minden pont mélysége k-val osztható szám.*

Legyenek ugyanis $R_{i_1}, \ldots, R_{i_p}$ a különböző maximális magok. Egy-egy R_{i_t} halmazon belül már tudjuk, hogy az összes mag ugyanazt az m_t maradékot adja $2k$-val osztva, ahol mondjuk $1 \leqq m_t \leqq 2k$. Elegendő ezért belátni, hogy minden t-re $m_t = k$ vagy $2k$. Ismét vegyük észre, hogy minden olyan él, mely R_{i_t}-be belép, pontosan m_t olyan w-beli vágáshoz tartozik hozzá, melynek magja R_{i_t}-nek része.

Tegyük fel mármost, hogy van olyan m_t, mely k-val nem osztható, legyen pl. m_1 ilyen. Ha az $m_t = m_1$ és $m_t = 2k - m_1$ egyenlőségek közül pl. az előbbi több halmazra teljesül, mint az utóbbi, akkor mindazon R_{i_t}-k multiplicitását egy-eggyel csökkentve, melyekre $m_t = 2k - m_1$, míg mindazokét, melyekre $m_t = m_1$, egy-eggyel növelve, egy N-nél több vágásból álló $2k$-vágáspakolást kapnánk, ami lehetetlen. Ha $m_t = m_1$ és $m_t = 2k - m_1$ ugyanolyan sok R_{i_t} halmazra teljesül, akkor akár az előbbi transzformációt, akár a megfordítottját végrehajtva, egy N vágásból álló vágáspakolást kapunk, és ezek valamelyikére (3) csökkent, ami ismét lehetetlen. Tehát m_t lehetséges értékei csak k és $2k$.

5. állítás: *Minden vágás multiplicitása w-ben k-val osztható szám.*

Legyen R_i egy legszűkebb olyan halmaz, melyre ez nem áll. A 3. és 4. állítások bizonyításából az is kiolvasható, hogy az R_i-be belépő élek k vagy $2k$ olyan vágáshoz tartoznak hozzá, melynek magja része R_i-nek. De egy ilyen élt tekintve, ezek közül a vágások közül azoknak a száma, melyek magja valódi része R_i-nek, ugyancsak osztható k-val, így R_i multiplicitása is osztható k-val.

Az 5. állítás bizonyítja a tételt.

4. Röviden megjegyezzük az előző részben tárgyalt kérdéskör egy analogonját. Jelölje $\mathcal{K}(G)$ azt a hipergráfot, melynek pontjai a G gráf élei, élei pedig G páratlan körei. Ennek a hipergráfnak is sok érdekes vonatkozása van, pl. Woodall [W] megjegyezte, hogy G akkor és csak akkor színezhető ki 4 színnel, ha $\mathcal{K}(G)$ kiszínezhető két színnel. A 2. tétel analogonja helyett itt csak az alábbi, lényegesen gyengébb állítás érvényes:

3. tétel: $\tau_2(\mathcal{K}(G)) = 2\tau(\mathcal{K}(G))$.

Bizonyítás: Legyen $\overline{\mathcal{K}}(G)$ az a hipergráf, melynek pontjai G élei, élei pedig G mindazon G' részgráfjainak élhalmazai, melyek minden foka páros, de élszámuk páratlan. Mivel $\mathcal{K}(G)$ minden éle $\overline{\mathcal{K}}(G)$-nek is éle, és $\overline{\mathcal{K}}(G)$ minden éle tartalmazza $\mathcal{K}(G)$-nek egy élét, elegendő azt igazolni, hogy

$$\tau_2(\overline{\mathcal{K}}(G)) = 2\tau(\overline{\mathcal{K}}(G)).$$

Ez azonban azonnal adódik az 5. fejezet 6. tételéből.

Ha G teljes n-szög, akkor a $\mathcal{K}(G)$ hipergráf optimális valós fedését úgy kapjuk, hogy minden élt 1/3 súllyal látunk el. Így ebben az esetben $\tau_2(\mathcal{K}(G)) \neq 2\tau^*(\mathcal{K}(G))$, vagyis a 2. tétel megfelelője nem marad érvényben.

Mivel a G gráf összes éleinek halmaza minden páratlan kört legalább háromszorosan lefed, következik, hogy

$$\tau(\mathcal{K}(G)) = \frac{1}{2}\tau_2(\mathcal{K}(G)) < \frac{1}{2}\tau_3(\mathcal{K}(G)) \leqq \frac{|E(G)|}{2},$$

vagyis, hogy minden gráf az élek kevesebb, mint felének elhagyásával párossá tehető. Ez az egyszerű, de fontos észrevétel Erdőstől származik.

IRODALOM

A B. ANDRÁSFAI, On critical graphs, *Théorie des Graphes*, Rome ICC, Dunod (1967) 9—19.

B1 C. BERGE, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland (1973).

B2 C. BERGE, Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin Luther Univ.* Halle-Wittenberg (1961) 114.

B3 C. BERGE, Sur le couplage maximum d'un graphe, *C. R. Acad. Sci.* 247 (1958) 258—259.

B4 C. BERGE, Sur certains hypergraphes generalisant les graphes bipartites, *Comb. Theory and its Appl.*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 4 (1970) 119—133.

B5 C. BERGE, Balanced hypergraphs and some applications to graph theory, *A Survey of Combinatorial Theory*, North-Holland (1973) 15—23.

B6 J. BECK, szóbeli közlés.

B7 B. BOLLOBÁS, On generalized graphs, *Acta Math. Hung.* 16 (1965) 447—452.

BL C. BERGE—M. LAS VERGNAS, Sur un theoreme du type Kőnig pour hypergraphes, *Int. Conf. on Comb. Math.*, New York, 1970, 32—40.

C1 M. CALCZINSKA—KARLOWICZ, Theorem on families of finite sets, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.* 12 (1964) 87—89.

C2 V. Chvátal, Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems, *Discrete Math.* 4 (1973) 305—337.

C3 V. Chvátal, On certain polytopes associated with graphs, *J. Comb. Th.* (B) 18 (1975) 138—154.

C4 V. Chvátal, On the strong perfect graph conjecture *J. Comb. Theory* (B) 20 (1976) 139—141.

C5 S. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, *Cong. Rec. of 3rd ACM Sympos. on Theory of Computing* (1970) 151—158.

E1 J. Edmonds, Paths, Trees and Flowers, *Canad. J. Math.* 17 (1965) 449—467.

E2 J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *J. Res. Nat. Bureau of Standards*, Sect. B. 69 (1965) 67—72.

E3 P. ERDŐS, On a combinatorial problem II, *Acta Math. Hung.* 15 (1969) 445—447.

E4 P. ERDŐS, On some extremal problems in graph theory, *Israel J. of Math.* 3 (1965) 113—116.

EG P. ERDŐS—T. GALLAI, On the minimal number of vertices representing the edges of a graph, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 6 (1961) 181—203.

EH1 ERDŐS P. és HAJNAL A., Kromatikus gráfokról, *Mat. Lapok* 18 (1967) 1—4.

EH2 P. ERDŐS—A. HAJNAL, On a property of families of sets, *Acta Math. Hung.* 12 (1961) 87—123.

EHM P. ERDŐS—A. HAJNAL—J. W. MOON, Mathematical Notes, *Am. Math. Monthly* 71 (1964) 1107—1110.

EL P. ERDŐS—L. LOVÁSZ, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, *Infinite and Finite Sets*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10 (1974) 609—627.

EM A. EHRENFEUCHT—J. MYCIELSKY, Interpolation of functions over a measure space and conjectures about memory, *J. Appr. Theory* 9 (1973) 218—236.

ES P. Erdős—G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* 2 (1935) 463—470.
F1 R. Fagin, Generalised first-order spectra and polynomial-time recognizable sets, *Complexity of Computation* (SIAM-AMS Proc. 7, 1974) 43—73.
F2 P. Frankl, On intersecting families of finite sets (preprint).
F3 D. R. Fulkerson, Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, *Math. Programming* 1 (1971) 168—194.
F4 D. R. Fulkerson, Anti-blocking polyhedra, *J. Comb. Theory* 12 (1972) 50—71.
F5 D. R. Fulkerson, On the perfect graph theorem, *Math. Programming* (Proc. Adv. Sem. Madison, Wisconsin 1972) 69—76.
G1 T. Gallai, Neuer Beweis eines Tutteschen Satzes, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 8 (1963) 135—139.
G2 T. Gallai, Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 7 (1962) 3—36.
G3 R. L. Graham, 3-uniform hypergraphs can have horrible scores (preprint).
H A. Hajnal, A theorem on k-saturated graphs, *Canad. J. Math.* 17 (1965) 720—724.
HK A. J. Hoffman—J. B. Kruskal, Integral boundary points of convex polyhedra, *Ann. Math. Studies* 38 (1956) 223.
HS A. Hajnal—J. Surányi, Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, *Ann. Univ. Sci. Eötvös* 1 (1958) 113—121.
JP F. Jaeger—C. Payan, Détermination du nombre maximum d'arètes d'un hypergraphe τ-critique, *C. R. Acad. Sc. Paris* 273 (1971) 221—223.
K1 R. Karp, Redublcibility among combinatorial proems, *Complexity of Computer Computation*, Plenum Press. (1972) 85—104.
K2 G. O. H. Katona, A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem, *J. Comb. Theory* (A) 13 (1972) 183—184.
K3 G. O. H. Katona, Solution of a problem of A. Ehrenfreucht and J. Mycielsky, *J. Comb. Th.* 17 (1974) 265—266.
L1 L. A. Levin, Universzalnie perebornie zadacsi, *Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR.*
L2 G. Lorentz, On a problem in additive number theory, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954) 838—841.
L3 L. Lovász, Some finite basis theorems in graph theory, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 18 (közlés alatt).
L4 L. Lovász, A note on factor-critical graphs, *Studia Sci. Hung.* 7 (1972) 279—280.
L5 L. Lovász, Certain duality principles in integer programming, *Annals of Discrete Math.* 1.
L6 L. Lovász, Minimax theorems for hypergraphs, *Hypergraph Seminar*, Lecture Notes in Math. 411, Springer (1972) 111—126.
L7 L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 2 (1972) 253—267.
L8 L. Lovász, A characterization of perfect graphs, *J. Comb. Theory* 13 (1972) 95—98.
L9 L. Lovász, 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Math. Hung.* 26 (1975) 433—444.
L10 L. Lovász, On two minimax theorems in graph theory, *J. Comb. Theory* 21 (1976) 96—103.
L11 L. Lovász, Coverings and colorings of hypergraphs, *Proc. 4th SE Conf. on Comb.*, Utilitas Math. (1973) 3—12.
L12 L. Lovász, On the ratio of optimal integral and fractional covers, *Discrete Math.* 14 (1975) 383—390.
L13 L. Lovász, Covers, packings and some heuristic algorithms, *Proc. 5th British Comb. Conf.*, Utilitas Math. (1976) 417—429.
L14 L. Lovász, On the Shannon capacity of graphs, I. E. E. E. Trans. Inf. Th. (közlés alatt).
L15 D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, *J. Comb. Theory* 1 (1966) 299.
LY C. Lucchesi—D. H. Younger, A minimax theorem for directed graphs, (preprint).
MP R. J. McEliece—E. C. Posner, Hide and seek, data storage, and entropy, *Am. Statist.* 42 (1971) 1706—1716.
P1 M. Padberg, Perfect zero-one matrices, *Math. Progr.* 6 (1974) 180—196.
P2 M. D. Plummer, On a family of line-critical graphs, *Monatsh. Math.* 71 (1967) 40—48.
PE W. Pulleyblank—J. Edmonds, Facets of l-matching polyhedra, *Hypergraph Seminar*, Lecture Notes in Math. 411, Springer (1974) 214—242.
PR Parthasarathy—Ravindra, The strong perfect graph conjecture for $K_{1,3}$-free graphs, (preprint). *J. Comb. Theory* (B) 21 (1976) 212—223.
R M. Rosenfeld, On a problem of C. E. Shannon in graph theory, Proc. Amer Math. Soc. 18. (1976) 315—319.

S1 H. Sachs, On the Berge conjecture concerning perfect graphs, *Comb. Str. and Appl.*, Gordon and Breach (1970) 377—384.
S2 L. Surányi, On linecritical graphs, *Infinite and Finite Sets*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10 (1973) 1411—1444.
S3 L. Surányi, On linecritical graphs II, *Studia Sci. Hung.* (közlés alatt).
T1 W. T. Tutte, The factorization of linear graphs, *J. London Math. Soc.* 22 (1947) 107—111.
T2 W. T. Tutte, The l-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4 (1953) 922—931.
W D. R. Woodall, Property B and the four-colour problem, „Combinatorics", *Proc. Conf. Southend-on-Sea* (1972) 322—340.

О МИНИМАКСНЫХ ТЕОРЕМАХ КОМБИНАТОРИКИ

ЛАСЛО ЛОБАС

ON MINIMAX THEOREMS OF COMBINATORICS

L. LOVÁSZ

HOGYAN ÍRJUNK MATEMATIKÁT

HALMOS PÁL

0. *Előszó*

Az esszé, amelyet az Olvasó a kezében tart, szubjektív jellegű, és így pontosabb lenne a „Hogyan írok én..." cím. A dolog úgy kezdődött, hogy rövid ideig tagja voltam az Amerikai Matematikai Társulat egy bizottságának, amely a fenti kérdéssel foglalkozott. Az adott keretek hamarosan túl szűknek bizonyultak: önállósítottam magam, hogy mondanivalómat bővebben fejthessem ki. Bizonyos korlátokra természetesen szükség van, ezért az elkészült írást megmutattam néhány barátomnak, bíráló megjegyzéseket kérve. A bírálatok kitűnőek voltak: élesek, őszinték, konstruktívak — és egymással ellentétesek. „Kevés a konkrét példa" — mondta valaki — „semmi szükség több konkrét példára" — így a másik. Volt, aki túl soknak találta — más kevesellte az elmondottakat. „Van egy hagyományos (és hatékony) módszere a hosszú bizonyítás könnyebben érthetővé tételének: a rövid lemmák sorozatára bontás". Ezzel szemben: „Engem nagyon ingerel az a szokás (amelyet különösen a kezdők szeretnek), hogy egy bizonyítást tökéletesen érdektelen lemmák sorozatára bontanak szét."

Egy valamiben viszont egyetértettek tanácsadóim: erről a kérdésről írni — hálátlan feladat. 1. tanácsadó: „Ha már a matematikus túl van a második dolgozatán, akkor meg van győződve arról, hogy tud írni és mindenféle tanácsot elutasítóan fogad." 2. tanácsadó: „Úgy gondolom, mindegyikünk meg van győződve arról, hogy ha kell, elsőrangúan tud írni. Olyan emberek, akik fölöttébb szerények, ha matematikai eredményeikről esik szó, nagyon zokon vennék, ha valaki azt vonná kétségbe, hogy jól írnak". A legélesebben a 3. tanácsadó fogalmazott. Figyelmeztetett arra, hogy mivel egy technikai kérdésekről szóló írás aligha tartalmaz mélyenszántó gondolatokat, bizonnyal számíthatok néhány önhittebb kolléga gúnyolódására.

Tanácsadóim mindegyike ismert, jónevű matematikus. Semmi szükségük arra, hogy itt dicsérő szavakat szóljak róluk; ugyanakkor könnyen lehet, hogy nem vennék jónéven, hogy tanácsaikat nem fogadtam meg, félremagyaráztam, esetleg homlokegyenest azokkal szemben jártam el. Ezért döntöttem úgy, hogy — bármennyire tudománytalan is — nem nevezem meg az idézetek szerzőit.

Ez nem jelenti azt, hogy ne lennék nekik hálás vagy vonakodnék elismerni, hogy segítségük nélkül írásom rosszabbul sikerült volna. „Itt állok, másképp nem tehetek."

1. *Nincs recept*

Úgy gondolom, el tudom mondani, hogyan kell írni, viszont nem vagyok bizonyos abban, akad-e bárki is, akit ez érdekelne. Az emberrel vele születik az a képessége, hogy gondolatait érthetően tudja közölni társaival, vagy legalábbis olyan korán

kialakul, hogy ha a kérdéssel kapcsolatos bölcsességeimet bárki el tudja olvasni, akkor azok már semmi újat nem jelentenek számára.

Egy gondolatmenet megértése nem olyasmi, amit meg lehet tanulni. Vagy születésétől fogva képes rá valaki, vagy nem. Hasonlóképpen a hatékony magyarázás módját sem igen lehet megtanulni — van, aki képes rá, van, aki nem.

Ugyanígy a jó írásnak sincs receptje.

Akkor viszont mi lehet a célom? Meglehet, hogy az előbb mondottak nem egészen helytállóak, ha azok, akkor viszont a lehetetlent próbálom megvalósítani. Egy másik nyomósabb érv, hogy minden más művészetben vagy mesterségben, amelyekhez veleszületett tehetségre van szükség, még a legtehetségesebbek sem születnek az összes műfogások birtokában. Az efféle írások azoknak szólnak, akiket jó vagy rossz sorsuk a jövő szerzőivé tesz: tükrözik (a szó platói értelmében) azokat a fogásokat, amelyeket a múltbeli szerzők hasznosnak találtak.

Legyen a megírandó mű matematikai vagy biológiai dolgozat, regény, vagy egy harpsichord összeszerelési útmutatója, a feladat mindig ugyanaz: gondolatok közlése. Ehhez először is az szükséges, hogy legyen mondanivalónk, legyen kinek elmondani, rendszerezzük mondanivalónkat és döntsük el, milyen sorrendben fogjuk elmondani, írjuk le, majd többször fontoljuk meg jól az olyan mechanikus részleteket is, mint az előadásmód, jelölésmód, a szöveg tagolása. Ennyi az egész.

2. *Legyen mondanivalónk*

Első pillantásra feleslegesnek tűnik hangsúlyozni, hogy ahhoz, hogy valamit jól mondjunk el, mondanivalóra van szükség. Pedig ez nem tréfa. Sok rossz írás — matematikai is, más is — született már e szabály megsértése miatt. Ugyanúgy, ahogy a sorozat két okból nem konvergálhat (nincs torlódási pontja, vagy túl sok van), egy írásműből is kétféleképpen hiányozhat a gondolat (vagy nincs benne gondolat, vagy túl sok van).

Az első bajt nehezebb tettenérni. Nehéz sokat írni semmiről, különösen a matematika területén, de sikerülhet, és az eredmény szükségképpen nehéz olvasmány. Erre klasszikus példa Carl Theodore Heisel tréfás műve [5]. Helyesen írott szavakból, a nyelvtan szabályai szerint felépített mondatokból áll, de bár már három évtizede, hogy időnként előveszem, és megkísérlem két egymásutáni oldal tartalmát röviden összefoglalni, erőfeszítéseim mindezideig sikertelenek voltak. Véleményem szerint ennek oka egyszerűen az, hogy a könyvnek nincs mondanivalója.

A második baj rendkívül gyakori. Sok könyv szerzője túl sokat akar mondani, és ezért nem mond semmit. Az Egyesült Államokban a matematika tanárok körében elég általános nézet szerint minden „Calculus" és ehhez hasonló című könyv rossz. Ezek a könyvek azért rosszak, mert a matematikának nincs „calculus" nevű ága: azért nincs, mert az elnevezés a matematika több ágát jelöli egyidejűleg. A jelenlegi gyakorlat szerint a „calculus" a következőkből áll: némi logika és halmazelmélet, a teljes értékelt testek elméletének egy része, analitikus geometria és topológia, mégpedig általános topológia (határértékfogalom, folytonos függvények) és algebrai topológia (irányítás), valós függvénytan (differenciálszámítás) — amelyre voltaképpen a „calculus" elnevezés utal; a formális integrálás — ami igazából bizonyos szimbólumokkal végzett kombinatorikai műveleteket jelent, az elemi mértékelmélet néhány bevezető fejezete, némi differenciálgeometria, a trigonometrikus, exponenciális és logaritmikus függvények analízisének néhány eredménye, végül a szerző ízlésétől függően, valami szakácskönyv jellegű ismertetés a differenciál-

egyenletekről és az elemi mechanikáról, és egy kis ízelítő az alkalmazott matematikából. Ezek bármelyikéről jó könyvet írni nehéz feladat — az összesről egyszerre — lehetetlen.

Nelson igen szellemes bizonyítása [7] arra, hogy korlátos harmonikus egész függvény — állandó, illetve Dunford és Schwartz monumentális monográfiája [3] olyan matematikai írások, amelyeknek van mondanivalója. Nelson dolgozata fél oldalt sem tesz ki, Dunford és Schwartz könyve több, mint négyezerszer annyi, mégis mindkét esetben nyilvánvaló, hogy a szerzőknek határozott elképzelésük volt arról, amit mondani akarnak. Írásuk tárgya jól körülhatárolható, megfogható, olyasmi, amit el lehet mondani.

A mondanivaló léte az írás jóságának minden másnál fontosabb feltétele. Ha elég jelentős, akkor a műnek megvan az esélye a halhatatlanságra még akkor is, ha a szerkezete zavaróan rossz és mondatai nehézkesek. Az ergód tétel eredeti, Birkhofftól származó bizonyítása [1] a lehető legzavarosabb, Vanzetti búcsúlevele [9] nehézkes és vontatott, az olvasó mégis mindkét esetben bizonyos abban, hogy maradandó értékű alkotással áll szemben.

Mindenesetre elég ritka, hogy egy mű pusztán mondanivalója révén kiváló, s nem hiszem, hogy van szerző, aki erre törekedne.

3. *Szóljunk valakihez*

A jó írással szemben támasztott második követelmény, hogy szóljon valakihez. Ha már eldöntöttük, hogy írunk, akkor nem árt elgondolkodni azon, hogy ki fogja majd írásunkat elolvasni. Naplót írunk-e, saját használatra, levelet egy barátunknak, valamilyen eredményt óhajtunk közölni a kérdés specialistáival, vagy bevezető jellegű egyetemi tankönyvet állítunk össze? A feladat mindegyik esetben sok szempontból azonos. Az eltérés abban van, hogy mennyi indokolás szükséges, mekkora a közölni kívánt információmennyiség, milyen részletességre van szükség, és hányszor kell elismételnünk ugyanazt a dolgot. A leendő olvasóközönség mindig befolyásolja az írásművet, de ha a közönség adott, akkor a szerző dolga, hogy mondanivalóját legjobb tudása szerint közölje.

A kiadóvállalatok szakemberei jól tudják, hogy huszonöt év — tiszteletreméltó kor egy matematikai tárgyú könyv számára; úgy sejtem, nem járok messze az igazságtól, ha öt évre becsülöm egy tudományos dolgozat elévülési idejét. (Természetesen vannak dolgozatok, amelyek ötven év után is érdekesek és könyvek, amelyek öt év alatt elavulnak.)

Aki matematikát ír, legyen tisztában azzal, hogy írása rövid életű; ha az olvasók dolgát meg akarja könnyíteni, mégis írjon úgy, mintha írását örökérvényűnek szánná.

Mielőtt íráshoz fogok, többnyire nemcsak azt döntöm el, hogy akihez szólok, az — mondjuk topológus, vagy negyedéves egyetemi hallgató. Szívesen képzelek magam elé egy meghatározott személyt — valakit, akivel két évvel ezelőtt beszélgettem erről a kérdésről, vagy egy szándékoltan nehéz felfogású, kedves kollégát. Ezeket a sorokat matematika szakos egyetemi hallgatóknak szánom, akik mostanában kezdik írni szakdolgozatukat. Lelki szemeim pedig egy bizonyos kollégára irányulnak, akit szeretnék jó útra téríteni. Remélem, hogy *a)* törekvésem sikerrel jár, *b)* kollégám nem veszi rossz néven, ha rájön, hogy miatta írok.

Bizonyos előnyei, és bizonyos hátrányai vannak, ha olvasóink körét túlságosan szűkre választjuk. Nagy előny, hogy így könnyen meghatározható, mit mondjunk el. Hátrány, hogy szószátyárkodásra csábít, ennek formái például az ál-viták és a rossz

viccek. Világos, hogy itt mit értek hátrányon és az is, hogy az ilyesmi nem kívánatos. Az előnyökről viszont érdemes több szót ejteni.

A szerzőnek előre kell látnia az olvasó nehézségeit és azoktól lehetőség szerint meg kell kímélnie. Írás közben szüntelenül figyelnie kell arra, hogy mi az, ami a leírottakban félrevezetheti az olvasót, és mi az, ami ettől megóvja.

Később erre is mutatok majd példát, itt csak azt szeretném hangsúlyozni, hogy ebben a vonatkozásban szinte elkerülhetetlen, hogy — mint arról már volt szó — állandóan egy jól meghatározott olvasó lebegjen a szemünk előtt.

Talán felesleges, de rosszat semmi esetre sem teszek vele, ha elmondom, hogy a mű tényleges olvasóközönsége nagymértékben eltérhet a szándékaink szerintitől. Semmi sem biztosítja, hogy a szerző mindig jól határozza meg célját. Még mindig jobb, ha kitűzzük a célt, és valami mást találunk el, mintha a választott cél már eleve túl kicsi vagy túl tág, és így a találatra semmi esélyünk nincsen. A vadász is céloz, tüzel, és reméli, hogy eltalálja a kiválasztott vadat, és még mindig jobb, ha egy másik vadat talál el, mintha semmit sem.

4. *Előbb készítsünk tervet*

A legtöbb, mit egy szerző tehet, hogy jól tervezi meg és építi fel művét. Így érheti el, hogy a lehető legkisebb legyen az ellenállás, amit az olvasónak le kell győznie, a lehető legtöbb ismeretet sajátíthassa el, és a gondolatmenetek követésekor ne kényszerüljön emberfeletti erőfeszítésekre. Mik egy könyv előnyei egy köteg különlenyomattal szemben? Az anyag hatékony és az olvasó számára kellemes elrendezése, a fontos részek fontosságának hangsúlyozása, az összefüggések bemutatása, az elmélet alapjául szolgáló példák és ellenpéldák ismertetése, egyszóval: a tervszerű felépítés.

Az új eredményeket elérő tudós — aki természetesen egyúttal az erről beszámoló írásmű szerzője is lehet — göröngyös, sok felesleges kitérővel teli utat jár be, sokszor szinte véletlenszerűen bolyongva. Ha az eredményt változtatás nélkül, ilyen formában írná meg, akkor minden diáknak végig kellene járni ugyanezt az utat, végigélnie a felfedezést; semmi előnye sem lenne az előző nemzedékek felhalmozott tudásának: nem maradna idő arra, hogy olyan dolgokat fedezzünk fel, amit elődeink nem ismertek.

Ha már eldöntöttük, hogy mit akarunk elmondani, és kinek, a következő lépés a mű vázlatának elkészítése. Tapasztalatom szerint ez az, ami többnyire lehetetlen. A jó vázlat az lenne, amely minden téma bevezetését, minden tételt, lemmát, bizonyítást, megjegyzést — legalábbis rövid utalás formájában tartalmazna, méghozzá logikailag helyes és az olvasó számára a megértést megkönnyítő sorrendben. Egy jó tervben jut hely mindennek, és mindennek megvan a maga helye. Az olvasó figyelme nem lankad, ha mindig idejében megtudja, mire számíthat, de ugyanakkor, ezzel látszólagos ellentétben, újra-meg-újra kellemes meglepetések érik, olyan tényeket ismer meg, amelyek nem egyszerű, száraz követelményei a definícióknak. A részek illeszkednek, és ez az illeszkedés pontos. A lemmák ott vannak, ahol szükség van rájuk, a tételek közötti kapcsolatok világosan láthatók — egyúttal az is látható, hogy mi a tárgyalt anyag egészének a helye.

Hadd szóljak néhány szót a terv és vázlat közötti — kis — különbségről. A tervezés úgy történik, hogy eldöntjük, mik lesznek a fejezetek és ezek részei, melyik mit tartalmaz, és mik közöttük az összefüggések. Ha mindezt rajzon ábrázoljuk, akkor egy gráfhoz jutunk, ami majdnem bizonyosan fa, és szinte biztos, hogy nem lánc. Egy adott anyag alapján sokféleképpen lehet tervezni, s ha kész a terv, sok-

féleképpen lehet sorbarendezni. A tervezés fontosabb, mint a sorbarendezés, de ez utóbbinak sokszor van pszichológiai jelentősége.

Egy kudarcom ébresztett rá arra, hogy egy bizonyos könyv szerzőjének nagy elismeréssel tartozom. Úgy esett, hogy a szóban forgó könyv tartalmát egy előadássorozat keretében ismertettem, meglehetősen kontár módon. A könyv egyik fejezete nem volt ínyemre, és ezért egészen egyszerűen átugrottam. Három fejezettel később szükség lett volna a kihagyott fejezet utolsó részének egy kis darabjára, de könnyű volt más bizonyítást adnom. Ugyanez az eset néhányszor megismétlődött, de némi leleményességgel mindannyiszor boldogultam. A következő fejezetben viszont már nem egyszerűen az elhagyott fejezet egy részletére lett volna szükség, hanem arra a tényre, hogy az ottani eredmények két látszólag teljesen eltérő esetben is alkalmazhatók. Itt már alig találtam megoldást és az előadás hamarosan jóvátehetetlenül zűrzavarossá vált.

Ilyen hát egy jól tervezett könyv: csak olyan dolgokat tartalmaz, amelyekre szükség van, az olvasást és megértést megkönnyítő következetességgel. Ugyanakkor az egészet összetartó szálak nincsenek túlságosan előtérbe állítva, csak akkor válnak láthatóvá, ha valamennyire közel férkőzünk a könyv belső felépítéséhez.

Még a tervezésre legkevésbé hajlandó szerző is készít egy — talán leíratlan — rövid vázlatot, hiszen az írás tárgyának meghatározása egyúttal tömör vázlat is. Ha a tárgy — mondjuk — mértékelmélet, akkor ez a két szó egyúttal már vázlat is. Valamivel jobb vázlat a fejezetek témáinak felsorolása, így valahogy: előbb halmazokról kell írni, majd mértékekről, azután függvényekről és végül integrálokról. Ezen a fokon már bizonyos döntéseket is hozhatunk, amelyeket később esetleg még felülvizsgálunk: a valószínűségszámítás kimarad, a Haar-mértéket viszont felvesszük, és így tovább.

Bizonyos értelemben a vázlat készítése évekig, de legalábbis hosszú hetekig tart. Az elő, kellemes érzésekkel teli pillanattól kezdve, amelyben egy könyv megírására gondolok, rendszerint hosszú idő telik el addig a fájdalmas pillanatig, amelyben ténylegesen hozzá is fogok. Ezalatt végzem szokásos kenyérkereső munkámat, közben gyakran ábrándozom a könyv tervéről, és ha valami jó ötletem támad, felírom egy papírdarabra. A papírdarabokat egy dossziéban gyűjtöm, meglehetős összevisszaságban. Az „ötlet" itt vonatkozhat a matematika egy ágára, amelyre ki akarok térni, de lehet egy jelölésmód, bizonyítás, találó kifejezés, egy szellemesség, amely, remélem nem hat laposan, hanem inkább színesebbé teszi és jobban kiemeli majd mondanivalómat. Mikor az említett fájdalmas pillanat elérkezik, a dosszié hasznos segítőtárs, a cédulákat rakosgatva jóval könnyebben készítem el a vázlatot.

Az egyes részletek megírásakor az, hogy mit hagyjunk el, legalább olyan fontos kérdés, mint az, hogy mit ne: a túl sok részlet mindennél riasztóbb az olvasó számára.

Az utolsó mondat utáni pont nagy elégedettséggel tölti el a szerzőt, aki többé-kevésbé mégiscsak ismeri könyve anyagát és a gyenge diákot — aki sohasem fogja. A komoly olvasó számára viszont az égvilágon semmi jelentősége nincs. A matematika lényege: konkrét feladatok és konkrét problémák. A nagy, általános elméletek többnyire kicsiny, de alapvető észrevételeken alapulnak, ezekhez az észrevételekhez viszont konkrét speciális esetek vizsgálata vezet el. Ezért az a legjobb, ha művünk középpontjába az alapvető példákat és ellenpéldákat állítjuk. Annak észrevételét, hogy egy bizonyítás valójában többet igazol, mint a bizonyítani kívánt állítás, célszerű az olvasóra hagyni. Az olvasónak inkább azzal segítsünk, hogy rámutatunk, mi az, amit a bizonyítás nem bizonyít, mik a megfelelő ellenpéldák és hogy ezek milyen következtetésekre nyújtanak lehetőséget.

5. Gondolatok az abc-ről

Ha már van valamiféle tervünk, egy vázlat, amely, ha nem is a legkiválóbb, de a legjobb, ami csak telik tőlünk, akkor szinte már hozzá is foghatunk az íráshoz. Egyetlen dolgot ajánlok még az írás megkezdése előtt: gondolkozzunk egy-két órát az abc használatáról: ezzel sok későbbi fejfájástól kíméljük meg magunkat.

Érdemes jól megfontolni, hogy milyen betűket használjunk az egyes fogalmak jelölésére. A jó, következetes jelölések óriási segítséget jelentenek, és minden dolgozat, de különösen, minden könyv szerzőjének csak azt tanácsolhatnám, hogy az írás megkezdése előtt tervezze meg, milyen jelöléseket fog használni. Én óriási táblázatokat szoktam készíteni ábécékkel, betűtípusokkal, kis és nagybetűkkel, és megpróbálom számbavenni az összes teret, csoportot, vektort, függvényt, pontot, felületet, mértéket és minden mást, amit előbb vagy utóbb jelölnöm kell majd valamivel. A rosszul választott jelölések elronthatnak egy különben jó írást és még rosszabbá tehetnek egy amúgyis rosszat; az alkotás lázában ad hoc módon választott jelölések majdnem mindig rosszak.

A jó jelöléseket bizonyos alfabetikus harmónia jellemzi, az, hogy nem tartalmaznak össze nem illő elemeket. Például $ax+by$ vagy $a_1x_1+a_2x_2$ jobb, mint ax_1+bx_2. Más példa: ha a Σ jelet egy indexhalmaz jelölésére használjuk, akkor előbb győződjünk meg arról, nem vezet-e majd ilyesféle kifejezésekhez: $\Sigma_{\sigma\in\Sigma}a_\sigma$. A legtöbb olvasónak nem tűnik fel, ha a lap tetején $|Z|<\varepsilon$, a lap alján pedig $Z\varepsilon U$ áll, de az efféle disszonancia azt a gyanút keltheti, hogy valami nincs rendben. Ezen könnyű segíteni: tartsuk magunkat ahhoz az elég általánosan elterjedt szokáshoz, hogy az $\in$ szimbólummal kizárólag a hozzátartozást jelöljük, s az ε-nal bármi mást.

A matematikai jelölések száma elvileg végtelen (például $x, x', x'', x''', \ldots$), de a gyakorlatban az ilyen jeleknek csak nagyon kis része használható. Ennek egyik oka az, hogy az ember sokkal nehezebben különbözteti meg a már ismert szimbólumokat, mint ahogyan újakat megismer. Egy másik ok a betűk rögzítésének rossz szokása. Az analízis régivágású művelői „xyz-térről" beszélnek, amin — azt hiszem — a háromdimenziós euklideszi teret értik, azzal a megállapodással együtt, hogy e tér egy pontját (x, y, z)-vel jelölik. Ez azért rossz, mert egyszer s mindenkorra rögzíti x, y és z jelentését, amelyeket így sehol másutt nem lehet használni, ugyanakkor nem teszi lehetővé, vagy legalábbis sérti a harmónia imént említett követelményét, hogy egy pontot (a, b, c)-vel jelöljünk, ha az (x, y, z) már „foglalt". Ennek a szokásnak vannak modern változatai is, és azok sem jobbak. Például az „L-tulajdonságú mátrix" rögzíti az L betűt, ugyanakkor egyáltalán nem utal egy mátrix valamilyen tulajdonságára.

Ugyanilyen csúfak és a lényegről semmit el nem árulók a „CW-komplexus" és a „CCR-csoport" elnevezések, amelyek ugyancsak példák betűk felesleges használatára. Az efféle példák valószínű netovábbja Lefschetz könyvében [6] található. Itt x_i^p p-dimenziós láncot jelöl (i index), míg x_p^i p-dimenziós ko-láncot (i újra csak index). Kérdés, mit jelent x_3^2?

Az idő múltával mind több és több jel jelentése rögzül. A nevezetes példák e, i és π és természetesen 0, 1, 2, 3, ... (Ki is merne ilyet papírra vetni: „Legyen 6 egy csoport".) Vannak jelek, amelyek már majdnem rögzültek: alighanem sokan rossznéven vennék, ha egy szerző „n"-nel jelölne egy komplex számot, „ε"-nal egy pozitív egész számot és „z"-vel egy topológikus teret. (A matematikus számára lidércnyomás egy n_ε számsorozat, amely 0-hoz tart, amint ε tart a végtelenhez.)

A tanulság: ne szaporítsuk a rögzült jelek számát. Gondolkozzunk az abc-ről. Bár nem kellemes, előbb szánjunk erre egy órát: sok későbbi kellemetlenségnek vesszük így elejét. Azután hozzákezdhetünk az íráshoz.

6. *A spirál módszerről*

A legjobb — sőt talán egyetlen lehetséges — módszer a spirálban való írás. Ez azt jelenti, hogy a fejezeteket az 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ... sorrendben írjuk meg. Ha már elkészült az első fejezet, és hozzáfogunk a másodikhoz, hamarosan kiderül, hogy jobb második fejezetet tudnánk írni, ha másképpen írtuk volna meg az elsőt. Nincs más hátra, mint átírni az első fejezetet, megírni a jobb másodikat, majd hozzáfogni a harmadikhoz, amelynek írása közben látjuk csak igazán, mik a hibái az első és második fejezetnek, és így tovább... . Mint látjuk, a spirál-módszer nagyon egyszerű — és sokszor elkerülhetetlen. Ezt különösen a kezdő szerzők figyelmébe ajánlom — tudják, mire számíthatnak, sőt azt is, hogy ez a jelenség ugyanígy fellép az egyes fejezeteken belüli szakaszok, részszakaszok, sőt az egyes mondatok, szavak leírásakor is.

Az írás-átírás-újra átírás láncolat első eleme az írás. Ha megvan a tárgy, az olvasóközönség, a vázlat (és, el ne feledkezzünk az abc-ről), kezdjünk el írni, feltartóztathatatlanul. Semmi nem ösztönöz úgy egy jó könyv írására, mint egy rossz könyv. Ha nagy keservesen elkészült a kézirat, spirál-módszerrel, egy meghatározott tárgyról, egy meghatározott közönséghez szóló, az előre megtervezett vázlat szerinti, akkor elmondhatjuk, hogy könyvünk több, mint félig kész.

A spirál módszerrel magyarázható a könyv írásakor végzett legtöbb (de nem minden) átírás és újra-átírás. Ajánlom minden szerzőnek, hogy az egyes fejezetek első megírásakor mondjon el mindent, ami a szívét nyomja, sértsen meg minden szabályt, ne leplezze gyűlöletét vagy önérzetességét, legyen zavaros, vicces, homályos, nyelvileg helytelen — csak írjon, írjon.

Az átírásnál — legyen rá szükség akárhányszor is, ne javítgasson, hanem írja meg újból az egészet. Bár csábító dolog piros ceruzával elvégezni a törléseket, beszúrásokat és kijelölni a sorrendcseréket, tapasztalatom szerint ez majdnem mindig katasztrófális tévedések forrása. Egy szál piros ceruza elég silány fegyver az emberi türelmetlenséggel és azzal a részrehajlással szemben, amellyel a saját szavai iránt mindenki viseltetik. Elkészült hát az első kézirat, amelyet a szerzőn kívül bárki más valószínűleg csapnivalónak tartana. Most azután legyen a szerző könyörtelen a változtatásokat illetően, egyes részletek elhagyását is beleértve. Átírni — annyit jelent, mint újra leírni minden egyes szót.

Ha a spirál módszert következetesen alkalmaznánk, akkor egy tíz fejezetből álló könyv első fejezetét tízszer kellene megírnunk. Erről természetesen nincs szó — úgy három-négy átírás általában elegendő. Majdnem bizonyosan újra kell írnunk az első fejezetet, ha elkészültünk a másodikkal, de a következő átírásra várhatólag csak valahol a negyedik fejezet után kerül majd sor. Ha szerencsénk van, akkor a kilencedik fejezetet csak egyszer kell megírnunk.

Ami az átírások számát illeti, az én gyakorlatom a következő. Az első, spirál módszerrel írott változat elkészülte után újraírom az egész könyvet, amelyet ezután kiegészítek a mechanikusan elkészíthető, de az olvasó számára nélkülözhetetlen részekkel (ilyenek: a szükséges előismeretek felsorolása, előszó, tárgy- és névmutató, tartalomjegyzék). Ezután újabb átírás következik, de most már írógépen, vagy legalábbis olyan szép és világos kézírással, hogy ennek alapján már a matematikában járatlan gépírónő számára se okozzon gondot a „végleges" géppel írott változat elkészítése. Ebben a harmadik változatban az átírások mennyisége minimális, néhány szónyi, de legfeljebb egy-egy mondatnyi. Ez a harmadik változat az első olyan, amelyet másnak is megmutatok. Megkérem barátaimat, hogy olvassák el, elolvassa a feleségem, egyes részeket a diákjaim, és ami mindennél többet ér, egy, a témához

értő hallgató, aki illő díjazásban részesül azért, hogy jó munkát végezzen, és akit arra bíztatok, hogy ne legyen udvarias, ha bírálatról van szó. Az így szükségessé váló változtatások szerencsés esetben már piros ceruzával is elvégezhetők; ha nincs szerencsém, akkor az oldalak mintegy harmadát újra kell gépelni. A „végleges" géppel írt változat ezen a javított harmadikon alapul. Ha ez is elkészül, akkor jöhet a lektorálás, újralektorálás, korrektúrázás és újra-korrektúrázás. Körülbelül két év múlva (és itt nem két naptári évet, hanem két, munkával eltöltött évet számítok) a könyvet elküldhetem a kiadónak. Most másfajta szülési fájdalmak következnek, de ezekről itt nem akarok szólni.

Archimedész óta tudjuk, hogy egy kis mennyiséget önmagához elég sokszor hozzávéve nagy mennyiség keletkezik (vagy a közmondás szerint: sok kicsi sokra megy). Úgy vélem, hogy ha a feladat egy hegy elhordása vagy egy könyv megírása, akkor Archimedész tanításának fordítottja is igaz: egy nagy könyvet csak úgy lehet megírni, hogy szünet, pihenőnap, kihagyás nélkül mindennap megírjuk egy kis részletét. Teljesítményünk állandósítására jó módszer, ha minden nap, mielőtt abbahagynánk az írást, „bekészítjük a másnapi tüzelőt". Mivel kezdjük holnap? Mi lesz a következő fejezet tartalma, címe? (Hasznos dolog — lehetőleg rövid — címet adni minden fejezetnek, még akkor is, ha ez eredetileg nem állt szándékunkban. Így ellenőrizhetjük, hogy jó-e a fejezet terve. Ha nem találunk címet, ez annak tünete lehet, hogy a fejezet tárgya nem egységes, nem jól elkülöníthető.) Néha a másnapi első mondatot még aznap leírom; vannak szerzők, akik a napi munkát az előző napi utolsó oldalak ellenőrzésével kezdik. Akár így, akár úgy, az a fontos, hogy a munkát mindig egy hangsúlytalan résznél hagyjuk abba, és töltsük fel tudatalattinkat valami komolyabb tápanyaggal a munkaperiódusok közötti szünetek idejére. Meglepő, de így nagyon jól becsaphatjuk magunkat; a tüzelőbekészítés módszere segít leküzdeni az ember alkotó munkával szembeni eredendő ellenállását.

7. *Ne hagyjuk abba a tervezést*

Akár jó volt az írás megkezdése előtt készített terv, akár nem, az írás kezdete semmi esetre sem jelenti a tervezés végét. A tervezés végigkíséri az írás egész folyamatát, sőt, még annak befejeztével sem ér véget.

A spirál módszer a tervezés tekintetében is majdnem minden matematikai írásnál alkalmazható. Legyen például írásunk fő témája a vektortér. Mondjuk el, mi az, honnan származik, mi a jelentősége, mutassunk példákat, ellenpéldákat és már kész is az első fejezet. Legyen az első fogalom, amellyel foglalkozni akarunk, a lineáris összefüggőség. A második fejezetben megmondjuk, hogy mi az, honnan származik, mi a jelentősége, mutassunk példákat és ellenpéldákat, és most jön egy fontos feladat: a lehető legalaposabban vizsgáljuk felül az első fejezetet a második fejezet szemszögéből. Milyen lineárisan független és lineárisan összefüggő halmazok adhatók meg az első fejezetben példaként bemutatott vektorterekben? (Mellesleg itt egy a spirál módszer hasznosságát bizonyító példa: amíg a második fejezeten dolgozva lineárisan független, illetve összefüggő halmazokra keresünk példát, olyan vektorterekre bukkanhatunk, amelyeket az első fejezet példái között — bár célszerű lett volna — elfelejtettünk megemlíteni.) A harmadik fejezetben újabb fogalmat vezetünk be. Hogy ez mi legyen, az természetesen újra csak gondos tervezést igényel és könnyen lehet, hogy az első két fejezet elkészítése után az ezzel kapcsolatos eredeti tervet megváltoztatjuk — ami ismét csak a spirál módszer mellett szól. Az új fogalom bevezetése a már ismert módon történhet, amit azután az első két fejezet felülvizsgálata követ — az új fogalom szemszögéből.

Úgy megy ez, mint a karikacsapás. Az írás így könnyű, szinte szórakoztató, s az olvasás nem kevésbé.

A szilárd, megbízható terv még akkor is segítségére van az olvasónak, ha az nem sokat töri a fejét az összefüggéseken, azon, hogy mi mire támaszkodik.

A történelmi regények fő cselekményét általában sok melléktörténet kíséri; ennek megvan a matematikai megfelelője, csakúgy, mint annak a krimiírók által alkalmazott módszernek, hogy ügyesen elhelyezett burkolt célzásokkal előre sejtetik a későbbieket.

A metrikus terek elmélete egy az általános topológiát tárgyaló könyv „melléktörténet"-e lehet, egyszerű megjegyzések, zárójeles kiegészítések és szemléltető példák formájában. Ezen az úton az olvasó minden többlet-erőfeszítés nélkül sokkal jobban megalapozott ismeretekre tehet szert, mint amilyenekre egy irgalmatlanul általános leírásból juthatna. Ami a burkolt célzásokat illeti: már több fejezettel az egy fogalom pontos meghatározása előtt elejthetünk egy-egy szót, amelyet később újra és újra megismétlünk, mind több részlettel kiegészítve úgy, hogy mire a tényleges definiálás ideje elérkezik, addigra az olvasó tudat alatt már felkészült annak befogadására. Ez az eljárás nagy segítség az olvasónak és ugyanakkor a szerző formális munkáját is megkönnyíti, igaz, azon az áron, hogy jóval alaposabban meg kell gondolnia, amit leír. Érdemes-e? Feltétlenül. Ha nyolc órás munkánk eredményeképp öt percet megtakarítottunk az olvasó idejéből, akkor ezer olvasót számítva ez több, mint nyolcvan óra. És nevünket áldólag emlegetik majd sok olyan épület folyosóján, amelyekben matematikusok dolgoznak.

Ne feledjük: a melléktörténetek és a burkolt célzások módszere csak akkor alkalmazható, ha a tervezésben a spirál módszert követjük.

A tervezésnél alkalmazott szempontok közül utoljára, de nem utolsó sorban említjük azt a követelményt, hogy a terv tisztán logikailag megfelelő legyen. E téren nem sok újat tanulhat egyik matematikus a másiktól, legfeljebb figyelmeztetheti, hogy egy mű terjedelmével együtt ijesztő mértékben növekszik annak bonyolultsága. Egyik, körülbelül háromszáz oldal terjedelmű könyvem kézirata mintegy ezer számozott oldalt tett ki, és minden oldalon szerepelt valamilyen matematikai jellegű állítás, tétel, lemma, esetleg rövid egy megjegyzés és annak bizonyítása. A feladatom az volt, hogy minden oldalra írjam oda azoknak az oldalaknak a sorszámát, amelyeken logikai sorrend szerint korábbi állítás szerepel, mint az adott oldalon, majd az összes oldalt úgy rendezni sorba, hogy egyetlen oldal se előzzön meg olyan másikat, amelynek sorszáma szerepel rajta. A lehetséges megoldások száma rendkívül nagy; nehézséget csak az okozott, hogy ezek közül megtaláljam a lehető legkellemesebbet, leghatékonyabbat.

8. *Írjunk jó angolsággal*

Mindezideig meglehetős általánosságban beszéltem: itt az ideje, hogy a kisebb részletkérdésekről is essék szó.

Miért írjuk így „continuous" ahelyett, hogy „continous"? Félreértést bizonyosan nem okozna, viszont egy betűt megtakaríthatunk — miért ne tegyük? A válasz, amellyel feltehetően még a leghaladóbb felfogású nyelvész is egyetért, hogy az efféle szabályváltoztatás időveszteséget okoz, sokkal többet, mint amennyit a „megtakarítás" megér. Lehet, hogy ez a kiragadott példa nem elég meggyőző, azzal viszont alighanem legtöbb olvasóm egyetért, hogy egy korszerűsített helyesírású könyv, amelyben például „easy" helyett „izi" áll, aligha lenne hasznos segédeszköz a matematika tanításához. Bármilyen a helyesírás esetleges reformja, egy-egy szokatlan

módon írott szó a könyvek olvasását csak megnehezíti, hátráltatná és zavarná vagy éppenséggel felingerelné az olvasókat. A helyesírásról valójában nem azért szólok itt, mintha e téren a szerzők többségét komolyabb veszélyek fenyegetnék, hanem inkább azért, hogy ezzel egy sokkal fontosabb dologra mutassak rá. Ez pedig nem más, mint hogy egy matematikai tárgyú könyv, újság, levél, előadás íródjék jó angolsággal, ahol a „jó" az általánosan elfogadott mércék szerint értendő (akik franciául, japánul vagy oroszul írnak, kérem, itt az „angolt" helyettesítsék „franciá"-val, „japán"-nal, illetve „orosz"-szal. Nem arról van szó, hogy a stílus pedáns legyen, nehézkes, hivatalos, bürokratikus, virágos vagy akadémikus zsargon. Nem, a stílus szerényen húzódjék meg a háttérben, mint a jó filmzene; a fontos részeket ne a zene felerősödése, ne a stílusváltás jelezze, hanem maga a cselekmény, a tartalom.

A jó angol stílus elemei: a nyelvhelyesség, a kifejezések megfelelő megválasztása, a helyes tagolás és ami talán a legfontosabb, a közérthetőség. A jó szerző tudja, hogy a „that" és „which" nem azonosak, csakúgy, mint a „less" és „fewer".

Az olvasó talán nem is tudja pontosan megfogalmazni a különbséget, de ha a szerző száz oldalon keresztül csereberélgeti ezeket a kifejezéseket, akkor ezzel ugyancsak taszítólag hat olvasóira. Az íróasztalomon a Dunford—Schwartz könyv mellett, a Fowler [4], Roget [8] és Webster [10] áll, úgy gondolom, minden szerző asztalán ott a helyük. Nem hiszem, hogy egy vessző hiánya folytán egy jó bizonyítás elromlik, de sok apró hiba halmozott hatása igen nagy lehet.

Az angol nyelv gyönyörű és hatékony eszköz, amellyel érdekesen, világosan és tökéletesen pontosan közölhetjük mondanivalónkat és meggyőződésem, hogy ez ugyanúgy igaz a franciára, japánra vagy oroszra. A szerzőnek, előadónak, aki ezzel az eszközzel dolgozik, éppen úgy kell azt ismernie, mint a sebésznek a maga műszereit. Lehet rossz kiejtéssel, nyelvtani hibákkal tűzdelt előadást tartani Euklidészről, lehet vakbélműtétet elvégezni rozsdás bicskával, de az áldozat, még ha nincs is tisztában szenvedéseinek okával, különb bánásmódra tart igényt.

Minden matematikus, még a tanulmányai kezdetén álló egyetemi hallgató is tisztában van azzal, hogy a matematikának megvan a maga nyelve (valójában maga a matematika sem más, mint sajátos nyelv) és ezt a matematikai tárgyú művek szerzőinek éppúgy kell ismerniük, mint a köznyelvet. Ezt a nyelvet nem tanítják tanfolyamokon, s így csak egy úton lehet megtanulni: évekig élni abban az országban, ahol beszélik. Az alábbiakban azért nem Fowler, Roget vagy Webster matematikai analogonja következik, mindössze egy-két tucat egy efféle analogon sok ezer címszavából.

9. *A legjobb út az egyenes út*

A matematika nyelvének helyes használata az olvasást megkönnyíti és talán még élvezetessé is teszi. Nem akkor jó a stílus, ha sziporkázó, hanem ha észrevétlenül meghúzódik a háttérben. A fő cél, hogy az olvasó számára megkönnyítsük a nehézségek leküzdését, sőt azokat lehetőség szerint meg is szüntessük. A pedantériánál fontosabb a világosság, az aprólékosságnál az érthetőség.

Az előzőekben mondottak esetleg félreértésre vezetnek — s ezt most igyekszem megelőzni. Igyekezzünk elkerülni a pedantériát és az aprólékosságot — de ne szigorúságot és a pontosságot! Úgy vélem, ezek a célok egymással összeegyeztethetők. Egy ifjú szerző soha ne kövesse el azt a kis, de nagyon-nagyon okos lelkiismeretlenséget, hogy elkerüli a nehézségeket. Előfordul, hogy egy eredmény eléréséhez mindenképpen hosszadalmas számításokra van szükség. Ilyenkor bizony ezek elvégzése

a szerző dolga, s az olvasó iránti együttérzését legfeljebb afféle megjegyzéssel fejezheti ki, mint „sajnálatos módon az egyetlen ismert bizonyításhoz az alábbi hosszadalmas számolásra van szükség".

A nem egyenes útra másik példa a következő. Tegyük fel, hogy miután a p állítást bebizonyítottuk, arra a megjegyzésre érezzük indíttatva magunkat, hogy „megjegyezzük, hogy a p állításból nem következik q", majd mint aki jól végezte dolgát, más tárgyra térünk át. Lehet, hogy indítékaink tökéletesen tisztességesek, az olvasó mégis becsapva érezheti magát. Ha a tárgyról mindent tudna, akkor írásunkat el sem olvasná, ha nem, akkor ez a „nem következik" állítás megalapozatlannak tűnhet. Nyilvánvaló? (Ha az, mondjuk meg!) Később ellenpéldát adunk? (Ha igen, jelentsük be már most!) Bizonyítása közismert, de az adott helyre nem illeszthető be? (Hivatkozzunk!) Esetleg, horribile dictu, megpróbáltuk p-ből kiindulva igazolni q-t, és nem sikerült? (Ismerjük be!) Bárhogy legyen is, fogadjuk bizalmunkba az olvasót!

A gyakran kigúnyolt „nyilvánvaló" és „könnyen látható" önmagában véve még nem szükségképpen rossz, ha bizonyos elemi szabályokra ügyelve használjuk őket. Amikor először leírtuk, hogy egy állítás nyilvánvaló, akkor még bizonyosan az is volt. Olvassuk át a kéziratot egy, két vagy hat hónap múlva! Nyilvánvaló-e még mindig? (Néhány hónapos érlelés mindig javára válik a kéziratnak.) Mondjuk el a szóban forgó állítást egy barátunknak, vagy egy szemináriúm hallgatóinak! Elfogadják-e ők is nyilvánvalónak? (Akadt-e olyan, aki megkérdezte, miért nyilvánvaló, és mikor mi ezt bizonygattuk, maga elé mormogva vette tudomásul a választ? A bizonygatás bizonyítás volt-e vagy megfélemlítés?) Nyilvánvaló, hogy az ezekre a szónoki kérdésekre kapott mely válaszok esetén használhatjuk jogosan a „nyilvánvaló" kifejezést. Van egy ennél fontosabb szabály is, amelyet mindenki ismer és amelynek megsértése a leggyakoribb hibaforrás a matematikában: győződjünk meg arról, hogy igaz-e egyáltalán, amit „nyilvánvaló"-nak mondunk!

Megtehetném, hogy nem szólok arról, nem azért írunk, hogy bizonyos tényeket eltitkoljon az olvasó elöl: ellenkezőleg éppen azért, hogy leleplezzük azokat. Azt tanácsolnám, ha kimondunk egy állítást, ne titkoljuk el sem annak állapotát, sem hozzá való viszonyunkat. Be van-e már bizonyítva vagy nincs, be fogjuk-e bizonyítani vagy sem. Hangsúlyozzuk ki, ami fontos, és minél kevesebb olyat mondjunk el, ami nyilvánvaló. Jó oka van annak, hogy néha nyilvánvaló dolgokat is állítunk: így tanulják meg az avatatlanok, hogy az ismeretek adott szintjén mit kell nyilvánvalónak tekintenünk. Még ha meg is haragszik emiatt az alkalmi olvasó a szerzőre, akkor is jó elmondanunk, hogyan tekintünk mi az anyagra. Ez természetesen nem szigorú előírás. Az olvasó nem kíméletet vár a szerzőtől, hanem hinni szeretne benne. Lehet, hogy a nagyképűség, blöff, titkolódzás nem ismerhető fel nyíltan, de a legtöbb olvasó hamarosan megérzi, hogy valami nincs rendben, és ezért nem az anyagot és nem is saját magát fogja hibáztatni, hanem elég természetes módon, a szerzőt. A fogalmi tisztasághoz — az egyenes út vezet.

10. *Ne írjunk oda nem illő vagy nyilvánvaló dolgokról!*

Előfordul, hogy egyes szerzők tökéletesen nyilvánvaló állításokat olyan köntösbe öltöztetnek, hogy az az olvasót hosszú töprengésre kényszeríti. „Ha R kommutatív egységelemes féligegyszerű gyűrű, x, y két tetszőleges R-beli elem, akkor $x^2-y^2=(x-y)(x-y)$". A figyelmes olvasó töprenghet, mi köze a félig egyszerűségnek és az egységelemnek valamihez, amit ő eddig nyilvánvalónak hitt. Az oda nem illő feltételek, a rossz hangsúlyozás, sőt akár a hangsúlyozás hiánya pusztító hatású lehet.

Nem kevésbé zavaró, és ugyancsak sok elvesztegetett idő forrása lehet, hogy a szerző azzal próbálja megnyerni az olvasó bizalmát, hogy hosszasan szól triviális esetekről, illetve meg sem említi azokat, holott szükség lenne rájuk. Minden komplex szám előállítható egy nemnegatív és egy egységnyi abszolút értékű szám szorzataként. Ez igaz, de ha ezt követően (vagy esetleg később, amikor az állítást egy általánosítás előkészítésekor újra felidézzük) nem szólunk arról, hogy a 0-val (triviális eset) valami nincs rendben, az olvasó becsapva érezheti magát.

Nem arról beszélek, hogy néha hibák forrása lehet, ha a triviális eseteket nem vizsgáljuk meg külön, hiszen akkor azt mondanám „Ne hibázzunk". Arról van szó, hogy ha helytálló, de hiányos állításokkal („Az állítás úgy igaz, ahogy leírtam, mi kell még?") megtévesztjük, félrevezetjük az olvasót. Az ilyen hibák egyúttal matematikai hibák forrásai is lehetnek. Ha a szerző azt a tételt készíti elő, hogy — bizonyos feltételek mellett — minden lineáris transzformáció egy nyújtás és egy forgatás szorzata, és az egydimenziós esetben figyelmen kívül hagyja a 0-t, akkor az olvasó esetleg rosszul fogja majd tudni, mi a helyzet több dimenzióban a szinguláris lineáris transzformációkkal.

Úgy érzem, itt az ideje, hogy a tételek állításairól essék szó: ez az a hely, ahol a nem odaillő dolgok a legtöbb bajt okozhatják.

Az első kérdés, mikor mondjuk ki a tételt. A válaszom: amilyen hamar csak lehet. Semmiképpen se tegyük meg, hogy egy látszólag céltalan gondolatsor végén hirtelen kijelentjük: „ezzel bebizonyítottuk, hogy...". Az olvasó sokkal könnyebben követi a gondolatmenetet, ha tudja, mit bizonyítunk, látja, hol használjuk ki a feltételeket, ha tudja, mik azok. A fordított megközelítés gyakran „függő" tételekre vezet, ami úgy vélem, csúnya. Ilyesmire gondolok: „Ezzel bizonyítást nyert a
2. Tétel...".

Ez az új bekezdés zavarólag töri meg a mondat szerkezetét. Az olvasó hamarosan úgyis rájön, miféle játékot játszottak vele, akkor viszont teljesen felesleges elválasztani a tétel szövegét és megnevezését. Szó sincs arról, hogy egy tétel kimondását ne előzzenek meg bevezető megjegyzések, definíciók. Ezek álljanak legelöl, azután jöhet a tétel állítása, majd a bizonyítás. A tétel állítása lehetőleg egyetlen mondat legyen; egy egyszerű következtetés vagy esetleg, ha a feltételeket már korábban, általánosabb érvénnyel megfogalmaztuk, egyetlen állítás. Ne fecsegjünk: „az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük" és „az 1. Tételből még az is kiolvasható" nem tartozik a tétel állításához.

Az ideális tételkimondás nemcsak hogy egyetlen mondat, hanem ez a mondat még rövid is. Nehéz — a kelleténél nehezebb — felfogni egy olyan tételt, amelynek az állítása több, mint egy oldal; a szerző valószínűleg nem gondolta át mondanivalóját és rosszul tervezett. Nyolc (gondosan megszámozott) feltétel és hat következmény nem tétel, hanem rosszul ismertetett elmélet. Szükség van-e mindegyik következményhez mindegyik feltételre? Ha nem, akkor az állítás nem igaz, ha igen, akkor ezek a feltételek valószínűleg egy általános fogalom jellemzői, amelyet pontosan meg kell határozni, elnevezni és tanulmányozni.

11. *Mit ismételjünk és mit ne*

A jó matematikai stílus fontos ismérve az ismétlések megfelelő alkalmazása. Ismétlésen nem azt értem, hogy ugyanazt a dolgot más szavakkal többször elmondjuk. A matematikai precizitás megköveteli, hogy ha egy vagy több szót, mondatot megismétlünk, akkor az közben a legkisebb mértékben se változzék meg. Az ismétlés

célja éppen az, hogy hangsúlyozzuk a hasonló fogalmak közötti különbségeket. Ha az első fejezetben bizonyítottunk, állítottunk vagy definiáltunk valamit és a másodikban ugyanezt általánosabban akarjuk megtenni, akkor az olvasó számára nagy segítség, ha ugyanazokat a szavakat használjuk, ugyanabban a sorrendben, amíg csak lehet, majd nagy dobpergéssel hívjuk fel figyelmét a különbségre. A dobpergés fontos. Nem elég, ha az első definíció hat jelzője közül a másodikban elhagyjuk az utolsót. Írjuk csak oda: „Megjegyezzük, hogy a p és q definíciójában szereplő első öt feltétel azonos; a különbség abban áll, hogy q esetében nem tesszük fel a hatodikat.

A parallelizálás gyakran csak úgy valósítható meg, ha visszatérünk egy korábbi fejezetre és ott végezzük el az átalakítást — újabb érv a spirál módszer mellett, és egyúttal újabb szempont, amelyet a tervezés során figyelembe kell vennünk.

Láttuk, mikor és hogyan hasznos az ismétlés, lássuk, hogyan lehet rossz, kétféleképpen is.

A közhit szerint „ismétlés a tudás anyja", minél többször mondunk el valamit, ugyanúgy, vagy kissé más szavakkal, annál bizonyosabb, hogy az olvasó megérti. Én ebben nem hiszek. Amint másodszor mondunk el valamit, még a legbizonytalanabb olvasónak is rémleni fog, hogy az már szerepelt és csodálkozni fog, hogy olyasvalamit olvas, amit már korábban meg kellett volna tanulnia. (Segíthet, ha odaírjuk, hogy „itt most pontosan ugyanazt mondjuk, mint a harmadik oldalon".) Az efféle csodálkozás minden fajtája rosszat jelent. Rossz minden, ami feleslegesen okoz ijedelmet, nem megfelelő pillanatban szórakoztat, vagy bármilyen más módon eltereli az olvasó figyelmét. (A szándékolatlan kétértelműségek — egy szerző életének legsúlyosabb csapásai.) A meddő ismételgetés helyett a jó tervezést, és mindenekelőtt, a spirál módszert ajánlom.

A másik rossz ismétlés: a bizonyítások ismétlése. Ha a második tétel bizonyítása túlságosan hasonlít az elsőére, akkor valami nincs rendben. E baj más tünetei: „az előző tétel bizonyításánál alkalmazott eszközökkel (módszerrel, fogással)" vagy, egészen durván: „lásd az előző tétel bizonyítását". Ilyenkor jó eséllyel kereshetünk egy lemmát, amelyet kimondunk, bebizonyítunk és amelyből mind az első, mind a második tétel sokkal egyszerűbben és világosabban következik.

12. *A többesszám első személy előnyei*

Kezdő szerzők gyakran üzennek hadat a fejedelmi többesszám első személynek, zászlajukra az „én"-t vagy a személytelenség jelszavát tűzve. Az efféle kérdésekben nem jó szembehelyezkedni a közfelfogással. Saját gyakorlatomból a következőket mondhatom.

Minthogy az előadói stílus annál jobb, minél kevésbé tolakodó, ezért mostanában inkább a személytelen hozzáállásra törekszem. Ez nem jelenti azt, hogy túl gyakran használom az „one" névmást: az olyan mondatok, mint „one has thus proved that" (ezzel bizonyítást nyert, hogy...) meglehetősen szörnyűek; viszont teljesen elkerülöm a személyes névmás használatát. „Minthogy p, ezért q." „Ebből következik p". „p-t q-ra alkalmazva r már következik". A legtöbb (minden?) matematikai írás tényeket közöl (kellene közölnie); a tényközlésre pedig egyszerű kijelentő mondatok a legalkalmasabbak.

Mondatainkat nemegyszer megrövidíthetjük a felszólító mód használatával. „p meghatározásához szorozzuk meg q-t r-rel". „Adott p esetén legyen q egyenlő r-rel". Két kis megjegyzés az „adott" használatával kapcsolatban: (1) Ne használjuk feleslegesen: „Minden adott p-hez van olyan q". Ne feledkezzünk meg róla, hogy

végülis egy cselekvő igéből származik, és ne hagyjuk a levegőben lógva: „Adott p-hez van olyan q" helytelen, „Adott p-hez keressünk olyan q-t" a helyes.

A helyesen használt többesszám első személy megengedhető. A „mi" mindig a szerzőt és az olvasót (vagy az előadót és a hallgatóságot) jelentse. Nagyon rokonszenvesen hangzik, hogy „a második lemmát felhasználva igazolhatjuk az első tételt" vagy „a harmadik lemma révén olyan eljárás birtokába jutottunk, amelyet felhasználhatunk a negyedik tétel bizonyítására". Helytelen viszont „eredményünket 1969-ben értük el" (hacsak nem két vagy több közös szerző írásáról van szó), az „itt mondunk köszönetet feleségünknek a gondos gépelésért" minden esetben rossz.

Az „én" használatában, különösen ha az túl gyakori, van valami visszatetsző, prédikáció ízű, ezért igyekszem elkerülni, ha lehet. Megengedhető kisterjedelmű közleményekben, személyes jellegű történeti megjegyzésekben és talán az olyan írásokban, mint amit az olvasó a kezében tart.

13. *A szavak helyes használatáról*

A mű — fejezet — szakasz — mondat sorozat következő, kisebb egysége — a szó. Az előbb a névmásokkal foglalkoztunk, amelyek szavak, de meggondolásaink igazából a stílussal voltak kapcsolatosak.

A „használjuk a szavakat helyesen" tanácsra önmagában semmi szükség, hiszen ki nem törekszik erre. Azt szeretném itt hangsúlyozni, hogy jól megfontoltan és gondosan alkalmazzuk a matematika szakkifejezéseit, valamint a köznyelv és a logika olyan szavait, amelyek mondanivalónk értelmezését lényegesen befolyásolhatják a logika olyan szavait, amelyek mondanivalónk értelmezését lényegesen befolyásolhatják.

Meglehetősen általános szabály, hogy a matematika és logika szavait helyesen kell használnunk. Mint már korábban, itt is szeretném hangsúlyozni, hogy nem vagyok a felesleges pedantéria híve; nem lenne jó, ha elszaporodnának a szakkifejezések, amelyek jelentései között esetenként csak hajszálnyi különbségek lennének. Éppen ellenkezőleg, az a jó, ha a helyesség szinte észrevehetetlen erőfeszítések eredménye.

„Mutassuk meg, hogy bármely (any) komplex szám egy nemnegatív szám és egy egységnyi abszolút értékű szám szorzata". Egy diákom erre így okoskodott: „$-4i$ komplex szám, 4-nek, amely nemnegatív, és $-i$-nek, amely egységnyi abszolút értékű, a szorzata. Ezzel az állítást bebizonyítottuk." A bajt az okozta, hogy a mai angol köznyelvben az „any" szó kétféle értelemben is használatos. Egzisztenciális értelemben („have you any wool?", „if anyone can do it, he can") és univerzális értelemben („Any number can play"). Ezért matematikai műveletekben ne használjuk az „any" szót. Írjunk helyette „each"-et vagy „every"-t, vagy pedig fogalmazzuk át az egész mondatot. Az iménti példamondatot úgy fogalmazhatjuk át, hogy megállapodunk: minden „individuális változó" tartozzék a komplex számok halmazához, majd ezt írjuk

$$\forall z \exists p \exists u[(p = |p|) \wedge (|u| = 1) \wedge |z = pu)].$$

Csakhogy én ezt nem ajánlom. A formális logika jelrendszere nélkülözhetetlen eszköze a matematikai logikának, de ha két földi halandó ily módon akarna gondolatokat cserélni, akkor az éppen olyan lenne, mint ha bonyolult titkosírást használnának. A szerzőnek rejtjeleznie kellene gondolatait (nem hiszem, hogy bárki is

$\exists$, $\forall$, $\wedge$ jelekben gondolkodik), az olvasó pedig megfejthetné, amit a szerző írt. Mindkét tevékenység sok időt venne igénybe és az érthetőség rovására menne.

Akár a modern matematikai logika, akár a klasszikus analízis szimbólikus tárgyalásmódja igazán csak gép-szerzők és gép-olvasók számára megfelelő. Ennyit az „any" használatáról.

Vannak más, bűnös szavak is, amelyek vétkei enyhébbek: az „ahol", „ekvivalens" és a „ha..., akkor..., ha..., akkor". Az „ahol" többnyire a lustaság jele, a szerző nem gondolta át kellően mondanivalóját. „Ha n elég nagy, akkor $|a_n|<\varepsilon$, ahol ε előre megadott pozitív szám" — világos, hogy mi a baj, és hogyan segíthetünk rajta. Két tételt ekvivalensnek nevezni tökéletesen értelmetlen. (A „Tétel" — számomra bizonyított matematikai igazság. Lehet, hogy egy értelmesen hangzó állítás nem igaz, de egy tétel szükségképpen csak igaz lehet; a „nem igaz" tétel logikai ellentmondás.) Mi értelme van annak a kijelentésnek, mely szerint L_2 teljessége ekvivalens az L_2-n értelmezett lineáris funkcionálok reprezentációs tételével? Az, hogy mindkét tétel bizonyítása viszonylag nehéz, de ha már az egyiket bebizonyítottuk, akkor a másik bizonyításához sokkal kevesebb munkára van szükség. Ezt a tényt ne a logikailag jól meghatározott jelentésű „ekvivalens" szóval fejezzük ki. A „ha..., akkor, ..., ha..., akkor" a felületes szerzők gyakori stílushibája, amit a lassabb felfogású hallgatók bánnak. „Ha p, akkor ha q, akkor r". Logikailag helyes $(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$, de pszichológiailag akadály, amit jobb elkerülni. Ehhez többnyire csak át kell fogalmaznunk a mondatot, de erre nincs általános recept. Hogy mi a legjobb átfogalmazás, az attól függ, a szóban forgó esetben mi a legfontosabb. Lehet „ha p és q, akkor r", vagy „ha fennáll p, akkor a q feltételből az r következtetésre jutunk", és még sok más.

14. *A szakkifejezések helyes használatáról*

Miután elmondtam néhány gondolatomat a köznyelv szavainak helyes használatáról matematikai szövegekben, a továbbiakban a matematikai szakkifejezések helyes használatáról fogok beszélni. Vegyünk például három szakkifejezést a matematikus mindennapi gyakorlatából: „függvény", „sorozat" és „tartalmaz".

A magam részéről ahhoz az iskolához tartozom, amely szerint a függvény és a függvény értéke közötti különbség nagyobb annál, semhogy figyelmen kívül hagyható lenne. Nincs szükség semmi hűhóra, legalábbis látható, nyilvános hűhóra nem. Egyszerűen ne mondjunk olyat, hogy „a z^2+1 függvény páros". Az „$f(z)=z^2+1$ összefüggéssel értelmezett f függvény páros", vagy a sok szempontból jobb „a $z\to z^2+1$ függvény páros" kissé hosszabb, de ez a fogalmazásmód helyes, amellett, hogy néha komolyabb baklövésektől kíméli meg az olvasót (és a szerzőt) és mindig megkönnyíti az olvasást.

A „sorozat" olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Aki azt írja, hogy „mérhető halmazok sorozatának egyesítése is mérhető", az szükségtelenül tereli el az olvasó figyelmét. Ebben a tételben semmi jelentősége sincsen annak, hogy az első halmaz — első, a második — második; a „sorozat" szó felesleges. Az állítás — helyesen — így hangzik: „mérhető halmazok megszámlálható halmazának egyesítése is mérhető" (vagy, ha máson van a hangsúly: „mérhető halmazok megszámlálhatóan végtelen halmazának egyesítése is mérhető). Helyes viszont a „sorozat" kifejezés használata abban a tételben, amely szerint „mérhető függvények sorozatának limesze is mérhető függvény". Ha a sorozat fogalma az olvasó vérévé vált, akkor a helytelen szóhasználat csak az olvasásban

hátráltatja — ha mégoly kevéssé is —, ha viszont nem, akkor emiatt csak még később fogja azt elsajátítani.

A „tartalmaz" és „magában foglal" csaknem azonos jelentésűek és könnyedén cserélik fel őket egymással olyan oktatók, akik gondosan ügyelnek az $\in$ és $\subset$ jelek közötti különbségre. Én sem tartom valószínűnek, hogy ebből a cserélgetésből baj származna, de azért néhány éve elhatároztam, hogy mind szóban, mind írásban a „tartalmaz"-t az $\in$, a „magában foglal"-t pedig a $\subset$ jelhez társítom. Nem hiszem, hogy ezzel bármit is bebizonyítottam, de beszámolhatok arról, hogy (a) nagyon könnyen meg lehet szokni, (b) nem jár semmi kényelmetlenséggel, (c) nem hiszem, hogy valaki is észrevette volna. Nem tulajdonítok túlzott jelentőséget az egésznek, de gyanítom, hogy az efféle következetesség az olvasók és hallgatók kényelmét szolgálja.

A következetesség igen dicséretes erény, hiánya pedig súlyos vétek. Egyaránt fontos nyelvi szempontból, jelölésekben, hivatkozásoknál, a tipográfiánál — mindenütt. A következetlenség hatása az enyhe zavarkeltéstől a súlyosan hibás ismeretközlésig terjed.

A szavak használatával kapcsolatos tanácsaim röviden a következők. (1) Kerüljük a szakkifejezéseket, különösen pedig az új szakkifejezések létrehozását. (2) Ha mindenképpen új kifejezést kell alkotnunk, nagy gonddal járjunk el. Tanulmányozzuk Roget-t és törekedjünk arra, hogy az új kifejezés a lehető legjobb legyen. (3) A régi szakkifejezéseket használjuk helyesen és következetesen, de a lehető legkevésbé tolakvó pedantériával.

15. *Minél kevesebb jelet használjunk*

Mindaz, amit a szavakról mondtam, megfelelő változtatásokkal a matematikai szövegek még kisebb egységeire, a jelekre is vonatkozik. A legjobb jelölés — ha nincs jelölés; ha csak lehet, kerüljük el bonyolult betűrendszerek használatát. Ügyes dolog azt képzelnünk, hogy írásunk szövegét élőszóval kell elmondanunk, például egy barátunknak, erdei séta közben papír és íróeszköz nélkül; mindjárt kiderül, melyek azok a helyek, amelyeken feltétlenül szükség van a jelölésekre.

A jelölések számát csökkenti, ha ugyanúgy, ahogy nem vezetünk be felesleges feltételeket, nem alkalmazunk felesleges jelöléseket sem. „Kompakt halmazon minden valós folytonos f függvény korlátos". Mi szükség itt az „f" szimbólumra? Vagy: „Ha $0 \leqq \lim_n \alpha_n^{1/n} = \varrho \leqq 1$, akkor $\lim_n \alpha_n = 0$". Mi szükség itt a ϱ-ra? A válasz mindkét esetben ugyanaz (semmi), de hogy miért kerültek oda ezek a felesleges szimbólumok, annak oka különböző. Az első esetben az „f" pusztán rossz beidegzés, a másodikban a ϱ valószínűleg a bizonyításból lopakodott elő. A rossz beidegzésekkel könnyű szakítani. A második eset nehezebb, mert több munkát igényel a szerzőtől. A bizonyítás fél sorral hosszabb lesz, például: Legyen $\varrho = \lim_n \alpha_n^{1/n}$". Érdemes kétszer leírni, hogy „$\lim_n \alpha_n^{1/n}$", mert így az állítás is és a bizonyítás is természetesebb, és könnyebben olvasható.

Ne használjunk feleslegesen betűket, vagy sokkal tetszetősebben; ha egy betűt csak egyszer használunk, akkor azt ne használjuk egyszer sem. A matematikai logika nyelvén: egyetlen változó se maradjon szabad. Az iménti példában „f" — szabad változó. Egy szabad változótól kétféleképpen szabadulhatunk meg: vagy elhagyjuk, vagy lekötjük. Néha az utóbbi az előnyösebb. A lekötést a legtöbb matematikus úgy végezné, hogy „ha f kompakt téren értelmezett valós értékű folytonos függvény, akkor f korlátos".

Szigorúan véve f még itt is szabad változó (csak éppen kétszer fordul elő), és a mondatban egy nyelvtanilag alkalmas helyre még be kellene illeszteni, hogy „bármely f esetén". A legtöbb matematikus számára minden mondatot (hallgatólagosan) univerzális kvantorok előznek meg, amelyek minden különben szabad változót lekötnek.

A „ne maradjon szabad változó" szabályt, csakúgy, mint az itt leírt összes többit is, néha érdemesebb megszegni, mint betartani. A mondat többé-kevésbé önkényesen választható egység. Ha az egyik mondat szabad f-jét egy másik mondatban kötjük le, még ugyanabban a szakaszban, akkor ez igazán nem főbenjáró vétség. A szabály alapjában véve helyes, minthogy vannak esetek, amikor be lehet tartani, ezért érdemes megjegyezni.

Vannak a szimbolikus logikának más szőrszálai is, amelyek a leggondosabb hasogatás ellenére is homályt keltenek, vagy legalábbis időlegesen megzavarják az olvasót. Tegyük fel, hogy a szövegben valahol szerepel az

$$(*) \qquad \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

összefüggés, például egy bizonyos f-re vonatkozó tétel formájában. Később azután áttérünk egy másik, g függvényre, amely hasonló tulajdonságokkal rendelkezik. Álljunk ellen a kísértésnek, és ne is írjuk azt, hogy „g is eleget tesz $(*)$ összefüggésnek". Ez logikai és alfabetikus értelmetlenség. Ehelyett azt írhatjuk, hogy „$(*)$ teljesül, ha f helyébe g-t írunk", vagy ami még jobb, adjunk egy nevet a $(*)$-gal jelzett tulajdonságnak (esetünkben van is egy szokásos elnevezés) és írjuk azt, hogy „g is $L_2(0, 1)$-beli".

Matematikai szövegekben sűrűn szerepelnek olyan kitételek, mint az „$(*)$ egyenlőtlenség", „(7) egyenlet" vagy „(iii) formula". Meg kell-e számozni minden, a szövegből kiemelt képletet? A válaszom: nem. A felesleges feltételekkel és felesleges fogalmakkal együtt hagyjuk el a felesleges sorszámokat is. Az olvasók nagyon kis része törődik a sorszámokkal és közülük is kevesen csodálkoznak el egy feleslegesen sorszámozott képleten. Van, amikor ez a csodálkozás a szerző szándéka szerinti: a későbbiekben mégiscsak szerephez jut majd a pillanatnyilag feleslegesnek tűnő sorszám, ha nem, akkor a csodálkozás hiábavaló.

Bánjunk hát fukarul a sorszámokkal, bár ennek is megvan a határa. Semmi esetre se kövessük Dickson [2] példáját. Itt a 89-ik oldalon azt olvashatjuk, hogy „...ekkor fennáll (1)...". A 89.-ik oldalon — amely egy új fejezet kezdete — nincs képlet. Az egész fejezet egyetlen sorszámozott képletet tartalmaz — (1)-es sorszámmal — a 90.-ik oldal tetején, és soha eszembe nem jutott volna ott keresni. Ez a csel ötpercnyi fejtörést okozott nekem, amelynek végén egyszerre éreztem magam ostobának és becsapottnak, és ezt soha nem bocsátom meg Dicksonnak.

Meglehetősen gyakran fordulnak elő kellemetlen jelölések a teljes indukció alkalmazásánál. Van, amikor ez tényleg elkerülhetetlen, de úgy gondolom, a legtöbb esetben elég elvégezni az első indukciós lépést, 1-ről 2-re, s a továbbiakat elintézni egy könnyed „és így tovább"-bal; ez az eljárás a legtöbb esetben éppoly feddhetetlen, mint a hosszadalmas számítás. Sokszor egy $n \times n$-es mátrixokra vonatkozó állítást jobb egyetlen tipikus esetben (például 3×3-as mátrixokra) igazolni, mint általánosságban, sok a_{ij}-vel, a sorokat, oszlopokat és átlókat jelölő „és így tovább" ponthármasokkal.

Mindannak, amit itt a jelölések mellőzéséről elmondtam, van egy közös magva. Egy buta elektronikus számítógépnek csak egyféleképpen lehet megtanítani a mate-

matikai bizonyítás fogalmát, és ami a gépnek jó, az rossz az embernek. Az ember geometriai szemlélettel rendelkezik, tapasztalata napról napra növekszik és nincs türelme, hogy hosszasan koncentráljon egyhangú, ismétlődő részletekre.

Egy olyan bizonyítást, amely egymástól egyenlőségjelekkel elválasztott kifejezések sorozata, könnyű leírni. A szerző kiindul az első egyenlőségből, elvégzi a megfelelő helyettesítéseket, összegyűjti a tagokat, sorrendet cserél, beilleszt egy alkalmas tényezőt, amellyel rögtön egyszerűsít is, és így tovább, egészen az utolsó egyenlőségig. Szögezzük le mégegyszer: ez a bizonyítás rejtjelezett alakja, és az olvasónak nem csak azt kell megtanulnia, hogyan történik a bizonyítás, hanem előbb meg is kell fejtenie a szövegét. Ez a kétszeres erőfeszítés felesleges. Szánjon csak rá a szerző további tíz percet, írja le a bizonyítást emberi szavakkal, gondosan, s az olvasók egy fél órát és egy sor félreértést takarítottak meg. Írja meg, mi miért történik; ne az olvasónak kelljen azt kitalálnia a puszta tényeket közlő rejtjelezett szövegből. Valahogyan így: „Ennek igazolására először helyettesítsük q-t p-vel, gyűjtsük össze a megfelelő tagokat, cseréljük fel a tényezőket, végül illesszük be az r tényezőt, majd egyszerűsítsünk vele."

Meglehetősen elterjedt rossz fogás egy bizonyítást így kezdeni: „Adott ε-hoz válasszuk δ-t $\left(\frac{\varepsilon}{3M^2+2}\right)^{1/2}$-nek". Jellemző tünete ez a klasszikus analízis fordított bizonyításírási módszerének. Előnye, hogy egy gép számára könnyen *bizonyítható* (ahelyett, hogy egy emberi lény számára könnyen *érthető* lenne). További, kétes értékű előnye, hogy a végén valami kisebb lesz ε-nál, ahelyett, hogy mondjuk $\left(\frac{(3M^2+7)\varepsilon}{24}\right)^{1/3}$-nál lenne kisebb. Világos, mit kell tennünk azért, hogy az emberi lényeknek feladatát megkönnyítsük: írjuk a bizonyítást előrefelé. Válasszunk valamit — ahogy ezt minden szerző teszi — ε-nál kisebbnek, végezzük a bizonyítást, amikor kell, szorozzunk $3M^2+7$-tel, osszunk 24-gyel, és így tovább. Egyik bizonyításmód sem elegáns, de az utóbbi legalább megfogható és megjegyezhető.

16. *Jelölések helyes használatáról*

A betűkön kívüli jelek nem sok bajt okozhatnak, de e téren is jó, ha következetesek vagyunk, és nem követünk el külön-külön észrevétlen, de összességükben bántó hibákat. Például jó, ha egy bizonyos jelölést mindig ugyanúgy fogalmazunk meg szavakkal. Jó, csak valószínűleg lehetetlen, de jobb, ha erre törekszünk, mintha nem törekszünk semmire. Hogyan olvassuk az $\in$ jelet: „-beli" vagy „...eleme..."? Hogyan jobb: „$x \in A$-ra $x \in B$ is teljesül" vagy „ha $x \in A$, akkor $x \in B$". Nekem sokkal jobban tetszik az utóbbi (és az $\in$ jelet „...eleme..."-nek olvasom). Hasonló a helyzet a $\subset$ és a $\leqq$ jelekkel is, csak ezeket hosszabban lehet szavakkal megfogalmazni. Ez a mondat: „Ha egy pozitív szám $\leqq 3$, akkor annak négyzete $\leqq 9$" — csúnya.

Talán meglepő, de még az egészen közönséges, ártalmatlan küllemű írásjelek is félreértések és hibák forrásai lehetnek. Mielőtt ezt példákkal szemléltetném, fogalmazzunk meg két szabályt. Az első: egy egyenlőség, egyenlőtlenség, tartalmazás tartalmilag mellékmondatok, amelyeket éppúgy el kell különítenünk, mint bármely más mellékmondatot. A második: ne vigyük túlzásba a pontok és vesszők használatát. Az olvasó könnyen elnézi ezeket, ami azután felesleges visszatéréseket, zavart, késedelmet okozhat. „Legyen $a \in X$. X tartozzék a C osztályba, ..." — itt a két X közötti pont zavaró, csakúgy mint a következő példabeli: „Tegyük fel, hogy X eltűnik. X tartozzék a C osztályba...". Jó szabály, hogy szimbólummal ne kezdjünk mon-

datot. „X tartozzék a C osztályba" helyett ezt írhatjuk: „Az X halmaz tartozzék a C osztályba".

A felesleges vessző semmivel sem jobb a felesleges pontnál. „Tegyük fel, hogy X, X^* invertálható" helyett jobb a „Tegyük fel, hogy X és annak X^* adjungáltja invertálható". Ugyanúgy nem „mivel $p \neq 0$, $p \in U$", hanem „mivel $p \neq 0$, ezért $p \in U$". Még az egészen köznapi „ha elmégy, megharagszom" is nehezebben emészthető, mint a nehézkesebb „ha elmégy, akkor megharagszom". Matematikai szövegekben „ha" után — hacsak lehet — következzék „akkor" is. Az „akkor" nem okozhat félreértést, a hiánya — igen.

Van valami, ami még a pontnál és vesszőnél is kisebb, pontosabban, láthatatlan; ugyanakkor egy nyomtatott oldalon a leginkább szembetűnő. A szöveg elrendezésére, az egyes oldalak felépítésére gondolok. Akinek már van egy kis szerzői gyakorlata — vagy akár csak nagyon tudatosan, kritikus szemmel olvas, az írás közben valemennyire már érzi, milyen lesz majd a nyomtatott szöveg formája. A tagolás nélküli hosszú bekezdéseknek olyan a hatása, mint egy unalmas prédikációnak, míg a képletekkel, szimbólumokkal sűrűn telehintett oldalak az olvasóban már eleve a bonyolultság érzetét keltik, és ezzel elriasztják. Legjobb az arany középút. Tördeljük a szöveget, de ne túl apróra, írjunk megszakítás nélküli bekezdéseket, de nem túl hosszúakat. Adjunk elég támaszpontot a szemnek, hogy segíthesse az agyat; írjunk jeleket, képleteket, elegendő szöveg között, hogy a gondolkodás ne merüljön el a jelölések mocsarában.

17. *Az írásos és szóbeli közlésről*

Már korábban elmondottam, de most szeretném újra hangsúlyozni, hogy a könyv, cikk, előadás, levél (és a gondolatközlés egyéb formái) között a hasonlóság nagyobb, mint a különbség. Egy tudományos dolgozat írásakor a „papírfecnik" szerepét — amit egy könyv írásának első menetében játszanak — azok a tételek és bizonyítások játsszák, amiket a szerző felfedez — az ezekkel folytatott kirakós játék — ugyanolyan.

Kissé más a helyzet az előadásokkal. Az előkészületek ugyanazok, mint egy ismertető dolgozatnál: a tervezés, majd az írás. Ami a különbséget okozza: a szóbeli közlés nehézségei. Az olvasó elmélázhat a könyv fölött, és később folytathatja az olvasást: semmit sem veszített — a saját idején kívül. Egy előadás hallgatója nem teheti meg ugyanezt.

Az olvasó megpróbálhatja maga elvégezni a bizonyítást, s közben a nyomtatott bizonyítást csak ellenőrzésül használja — egy előadáson erre nincs lehetőség. Az olvasó csak rövid ideig tud koncentrálni; a hallgató még rövidebbig. A számításokat esetleg rá lehet bízni az olvasóra, a hallgatóra — nem. Egy írás jósága félig azon múlik, hogy jól válasszuk meg, amit elhagyunk; egy előadásé — kilenc tizedig. Mint látjuk, ezek a különbségek végülis nem nagyok. Bizonyosak lehetünk abban, hogy egy jó dolgozatból hangosan, szó szerint felolvasva csúf előadás lesz, de bár soha rosszabbat ne hallottam volna.

Az oldalak külső képe helyett egy előadáson a tábla küllemére kell gondot fordítanunk, a szerző képzelt olvasói helyébe az előadás hús-vér hallgatói lépnek; ezek bizony lényeges különbségek. A tábla lehetőséget ad arra, hogy valami a hallgatóság szeme láttára cseperedjék fel, keljen életre — ez egy nyomtatott oldalon elképzelhetetlen. (Nem túlságos bölcs dolog, és a hallgatókkal szemben is udvariatlanság egyes előadóknak az a szokása, hogy a táblát már az előadás kezdete előtt tele-

zsúfolják.) A hús-vér emberek: olyan visszajelző közeg, amelyről minden szerző csak álmodhat.

Az alapvető nehézségek minden közlésformánál azonosak — ezekről beszéltem mostanáig. Egy jó könyv, jó előadás legfontosabb alkotóelemei nem a látványos tálalásban keresendők; tartalom, cél, tervezés, a nyelvtan fontos szabályainak tiszteletben tartása, a jó előadás- és jelölésmód — ezek a lényegesek.

18. *Védelmezzük a stílusunkat*

A gördülékeny, következetes, hatékony közlésnek megvannak az ellenségei. A nevük: technikai szerkesztő, segédszerkesztő.

Egy igazi *szerkesztő* — nagy segítség a szerző számára. Ezt a segítséget a matematikusok rendszerint nem kapják meg, mert egy matematikai könyv szerkesztője csak matematikus lehet — de matematikus-szerkesztő kevés van. Az ideális szerkesztő ismeri a mű tárgyának minden részletét, és hozzásegíti a szerzőt, hogy művét olyan szemszögből lássa, amilyenből a maga erejéből sohasem lenne képes. Az ideális szerkesztő egyesíti magában a barátot, feleséget, tanítványt és a témához értő egyetemi hallgatót, akiknek a szerepéről korábban beszéltem. A könyvsorozatok és folyóiratok matematikus szerkesztői meg sem közelítik ezt az ideált. Szerkesztői tevékenységük csak egy kis része az életüknek, holott ez a munka egész embert kíván. Az ideális szerkesztő nem létezik; majnem-ideális helyettese a barát-feleség-... kombináció.

A technikai szerkesztő munkáját általában főállásban végzi. Az a dolga, hogy fülöncsípje következetlenségeinket, nyelvtani hibáinkat, hibás mondatszerkezeteinket, betűhibáinkat, egyszóval mindazt, amit elronthatunk, kivéve a matematikai tartalmat. A baj az, hogy a technikai szerkesztő nem a szerző kiegészítésének tekinti magát, hanem úgy dolgozik, mint egy gép, amely vakon alkalmaz mechanikus szabályokat.

Egyszer egy írásomban „mértéktartó" transzformációkkal foglalkoztam. (Az egybeírás fontos: két szóból egy egyetlen, minőségileg új szó keletkezik). Néhány fegyelmezetlen transzformáció nem szolgát rá erre a névre; ezt a sajnálatos körülményt a „nem" szóval jeleztem. Félreértett utasításaim hosszú sora végén a nyomtatott szövegben „nemmérték tartó transzformáció" szerepelt. Ez az értelmetlenség — bár szórakoztató — mégiscsak zavart és félreértést okozhat.

Egy matematikus ismerősöm mesélte, hogy könyvében a „p vagy q teljesül, aszerint, hogy x negatív vagy pozitív" mondatot a technikai szerkesztő „p vagy q teljesül, aszerint, hogy x pozitív vagy negatív"-ra változtatta, mondván, hogy így jobban hangzik. Első hallásra ez is jó vicc, de igazából mégiscsak igen súlyos hiba.

Sokan folytattak már meddő vitákat az ellenséggel az idézőjel és a pontok, vesszők egymáshoz viszonyított helyzetéről. Valamiféle nemzetközi tipográfiai elv szerint az idézetet követő pont vagy vessző „csúnya". (Mondanom sem kell, hogy a technikai szerkesztő ennek a mondatnak a végét is szívesebben vette volna úgy, hogy „csúnya.", de én nem engedtem.) A matematikában, de különösen a matematikai logikában járatos olvasó számára ez az elv teljesen értelmetlen; az idézőjel, pont, vessző helyét a mondat logikája határozza meg.

Azt mondta: „A vessző csúnya". Itt a pont az idézethez tartozik; a két szituáció különböző, és semmiféle gépies szabály nem alkalmazható rájuk.

A tanulság: a „Szerkesztői kézikönyv" és hasonló című alkotások — amelyek többnyire tipográfiai konvenciókról szólnak — veszélyes fegyverek a technikai szerkesztők kezében. A leendő szerzők készüljenek fel a harcra: fegyverkezzenek jól fel idejében.

19. *Fejezzük be*

Bár a szerző utolsó feladata a technikai szerkesztővel vívott harc, a legtöbb szerző mégsem ezt tekinti utolsónak. Az utolsó lépés — szubjektíve — a könyv befejezése, az írás abbahagyása. Ez nem könnyű dolog. Mindig van valami, amit még nem végeztünk el, amit másképpen jobban el tudnánk mondani, s megvan az a zavaró érzésünk, hogy csak egy lépésnyire vagyunk a tökéletestől, és ha ezt a lépést nem tesszük meg, örökké bánni fogjuk. Miközben ezeket a sorokat írom, sajnálom, hogy egy-két szakasz erejéig nem tértem ki a jó hangzás és ritmus szerepére — matematikai szövegekben. Csak még egy percet kérek! Nem fejezhetem be, amíg nem beszéltem a fogalmak helyes elnevezéséről (miért jó a „kommutátor" és miért rossz az „első kategóriájú halmaz"), a tételek helyes elnevezéséről (miért jó a „zárt gráf tétel" és miért rossz a „Cauchy—Bunyakovszkij—Schwarz-tétel"). Azután, mi legyen azzal a kis gondolatmenettel, amelyet sehogyan sem sikerült tisztességesen megfogalmaznom, arról, hogyan kövessünk egy modellt? Azt szerettem volna mondani, hogy keressünk valakit, akinek az írásait megértjük, vegyük át a stílusát, módosítsuk tárgyunknak és egyéniségünknek megfelelően — igen, ezt valahogyan el kellett volna mondanom.

Egyetlen megoldás van, a nyilvánvaló. Csak úgy hagyhatjuk abba, ha könyörtelenek vagyunk. El lehet húzni az agóniát, s voltaképpen azt tesszük a korrektúrázással, a számítások ellenőrzésével, hevertetve a kéziratot, majd egyvégtében átírva az egészet, de ha nem hagyjuk abba még ez előtt, akkor sohasem akarjuk majd befejezni.

Az írás befejezése után szánjunk rá egy-két napot, fussuk át gyorsan a kéziratot, ne maradjon benne olyan hiba, amely túlságosan szembeszökő az olvasó számára. Jó-e matematikailag, érdekes-e a tárgyalásmód, világos-e a nyelv, kellemes-e a külalak, könnyű-e olvasni. Ezután jön a részletes hibakeresés, a számítások ellenőrzése, minderről szinte már felesleges szólnom. A „hevertetés" mibenlétét könnyű elmagyarázni, de nehéz azt megtenni: tegyük félre a kéziratot néhány hónapra és próbáljuk meg teljesen elfelejteni. Ezután, lehiggadt szemlélettel, olvassuk át az egészet. Ne várjunk újabb eredményekre, és ne folytassuk a csiszolgatást. Még ha sikerül is elérnünk egy új eredményt, vagy megszüntetnünk egy kellemetlen hiányosságot, hamarosan úgyis újabb délibáb tűnne fel a távolban.

Összefoglalva: kezdjük az elején, folytassuk egészen a végéig, és ha elfogytak az aduink, fejezzük be.

20. *Az utolsó szó*

Elmondtam tanácsaimat a matematika-írásról, annyit, amennyit egy esszébe bele tudtam sűríteni. Ajánlásaim részint azon alapulnak, amit teszek, sokkal inkább azon, amit, sajnos nem, és leginkább azon, amit szeretnék, hogy mások tegyenek. Olvasóim sok okból bírálhatják ezt az írást, de kérem, ne vessék össze múltbeli írásaimat itteni tanácsaimmal. Ne azt kövessék, amit teszek, hanem amit mondok — az a jobb. És majd, egyszer, írjanak egy ilyen esszét, hogy a következő nemzedék még jobban írjon.

IRODALOM

[1] BIRKHOFF, G. D. Proof of the ergodic theorem, Proc. N. A. S., U.S.A. 17 (1931) 656—660.
[2] DICKSON, L. E., Modern algebraic theories, Sanborn, Chicago (1926).
[3] DUNFORD N. AND SCHWARTZ J. T., Linear operators, Interscience, New York (1958, 1963).
[4] Fowler, H. W., Modern English usage (Second edition, revised by Sir Ernest Gowers), Oxford, New York (1965).
[5] HEISEL C. T., The circle squared beyond refutation, Heisel, Cleveland (1934).
[6] LEFSCHETZ, S. A. Algebraic topology, A. M. S., New York (1942).
[7] NELSON E., A proof of Liouville's theorem, Proc. A.M.S. 12 (1961) 995.
[8] Roget's International Thesaurus, Crowel, New York (1946).
[9] THURBER J. and NUGENT E., The male animal, Random House, New York (1940).
[10] Webster's New International Dictionary (Second edition, unabridged), Merriam, Springfield (1951).
Indiana University

КАК ПИСАТЬ МАТЕМАТИКУ

П. Р. ХАЛМОШ

HOW TO WRITE MATHEMATICS

P. HALMOS

MATROIDOK ALKALMAZÁSA A VILLAMOS HÁLÓZATOK ANALÍZISÉBEN, II.

RECSKI ANDRÁS

A cikk első részében [30] ismertettük a lineáris villamos hálózatok elméletének néhány alapfogalmát (a feszültség- és áramgenerátorok, ellenállások stb. fogalmát, az Ohm- és Kirchhoff-törvényeket), a klasszikus hálózatanalízis alapfeladatának a megoldását, az ehhez szükséges gráfelméleti apparátust. A bonyolultabb alkatrészeket is tartalmazó hálózatokra való általánosítás során nehézségekbe ütköztünk, természetes módon jutottunk arra a gondolatra, hogy ezért matroidokkal kell próbálkoznunk gráfok helyett. (Azt is láttuk, hogy a gráfok gyenge izomorfiáját és a síkgráfok dualitását, tehát azt a két gráfelméleti jelenséget, melyeket a villamos hálózatok vizsgálata vetett fel, szintén matroidokkal lehet egyszerűen tárgyalni.)

Megismerkedtünk továbbá a matroidok összegével, és példákon láttuk, hogy ez a művelet vezet az általánosabb hálózatok modellezésére. Végül néhány olyan matroidelméleti eredményről és problémáról szóltunk, melyeket ez a modellalkotás vetett fel — de amelyek tisztán matematikai szempontból is érdekesek lehetnek.

Ebben a cikkben először a műszaki probléma oldaláról közelítünk a modellalkotáshoz, kihangsúlyozva a hálózatanalízis néhány számítógépes módszerének algoritmikus vonatkozását is. Ugyanoda fogunk eljutni, mint [30]-ban, hogy ti. matroidok összegének a képzése a döntő lépés a modellalkotásban — ezúttal azonban már ezzel a lépéssel konkrét, gyakorlatban alkalmazható eredményeket is nyerünk.

A cikk során ismertnek tételezzük fel [30] első öt fejezetét és a lineáris algebra alapfogalmait. Az irodalmi hivatkozások [1]-től [15]-ig a [30]-beli irodalomjegyzékre vonatkoznak, az új hivatkozásokat [16]-tól folyamatosan számozzuk.

Nagyméretű villamos hálózatok analízisét általában számítógéppel végzik. Egy ilyen áramköranalízis-programrendszer tartalmaz egy adattárat, mely az egyes alkatrészek (pl. tranzisztorok, integrált áramkörök stb.) modelljeit tárolja. Ha a felhasználó közli a számítógéppel, hogy milyen hálózat analízisére kíváncsi, vagyis hogy milyen alkatrészeket és milyen módon kíván összekapcsolni, akkor a program az egyes bonyolultabb alkatrészeket az adattárból lehívott ekvivalens (de egyszerűbb alkatrészekből összerakott) részhálózatokkal helyettesíti.

Következésképp azt a hálózatot, amelynek az analízisét a gép végülis elvégzi, tulajdonképpen maga a gép „rakosgatta össze", így lehetséges, hogy fizikailag abszurd rendszerhez jutunk. (A program felhasználójának műszaki tudása és intuíciója sem feltétlenül garancia, hisz elképzelhető, hogy bizonyos alkatrészek össze is kapcsolhatóak, modelljeik is „jók" külön-külön, bizonyos értelemben, de azok összekapcsolása mégis ellentmondásos helyzethez vezetne.)

Indokolt tehát, hogy a hálózat egyértelmű megoldhatóságának az eldöntésével foglalkozzunk elsősorban. (Ha erre igenlő választ kapunk, akkor a hálózat összes egyenletének a felírása (pl. a [30]-ban látott módon) már könnyen elvégezhető, míg

az egyenletrendszer tényleges numerikus megoldására számos kidolgozott módszer van.

Annak érdekében, hogy megismerjük az e kérdés eldöntéséhez szükséges apparátust, a szokásos feltételeket stb., először a klasszikus esetet tekintjük át. Ugyan [30]-ból már tudjuk, hogy ilyenkor a válasz mindig igenlő lesz, de ha most alaposan megnézzük, hogy min múlik ez a kedvező helyzet, akkor könnyebben tudunk áttérni az általános esetre.

I. Újra a klasszikus eset

Szorítkozzunk feszültség- és áramgenerátorokra és közönséges ($R>0$) ellenállásokra. Az ezek által alkotott hálózat G gráfjának E élhalmazára tehát $E=U\cup I\cup R$, ahol U, I és R rendre a fenti háromféle alkatrészek halmazait jelöli. Legyen $\mathbf{B}$ a gráf kör-él illeszkedési mátrixa (tehát $b_{ij}=1$ ha G i-ik köre tartalmazza G j-ik élét, és $b_{ij}=0$ különben), $\mathbf{Q}$ pedig legyen a gráf (hasonlóan definiált) vágás-él illeszkedési mátrixa. [30]-ban láttuk, hogy mennyi a független feszültség-, ill. áramegyenletek maximális száma. Az itteni $\mathbf{B}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat már úgy képzeljük, hogy csak ilyen (független) soraik vannak. Ekkor a Kirchhoff-törvények

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_U \\ \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_R \\ \hdashline \mathbf{i}_U \\ \mathbf{i}_I \\ \mathbf{i}_R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

alakba, az $u_k=R_k i_k$ alakú Ohm-törvények ($k\in R$) pedig formálisan a

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} -1 & & & \mathbf{0} & R_1 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & & & R_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & -1 & \mathbf{0} & & & R_k \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_R \\ \hdashline \mathbf{i}_R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \end{array}\right]$$

alakba írhatóak. Nyilvánvalóan akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen ez a rendszer, ha nem szinguláris az a $\mathbf{W}$ mátrix, amelyet az

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} (\mathbf{u}_U & \mathbf{u}_I & \mathbf{u}_R & \mathbf{i}_R & \mathbf{i}_U & \mathbf{i}_I) \end{array} \\ (1) \qquad \mathbf{N} = & \left[\begin{array}{ccc:ccc} \multicolumn{3}{c:}{\boxed{\mathbf{B}}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \multicolumn{3}{c}{\boxed{\mathbf{Q}}} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{-\mathbf{E}} & \boxed{\mathbf{R}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array}$$

mátrixból kapunk az $\mathbf{u}_U$ és az $\mathbf{i}_I$ oszlopok (vagyis a feszültséggenerátorok feszültségeinek és az áramgenerátorok áramainak megfelelő oszlopok) elhagyása után,

hiszen az eredeti feladat az

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_U\\ \mathbf{u}_I\\ \mathbf{u}_R\\ \mathbf{i}_R\\ \mathbf{i}_U\\ \mathbf{i}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

egyenlet megoldása volt, és az $\mathbf{N}=[\mathbf{N}_U, \mathbf{W}, \mathbf{N}_I]$ blokkokra bontást alkalmazva, nyilván

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_I\\ \mathbf{u}_R\\ \mathbf{i}_R\\ \mathbf{i}_U\end{bmatrix}=-\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{N}_U\,\mathbf{u}_U+\mathbf{N}_I\,\mathbf{i}_I].$$

Ez a szükséges és elégséges feltétel (a $\mathbf{W}^{-1}$ létezése) a hálózat egyértelmű megoldhatóságára gyakorlatilag használhatatlan. Egy több tucat, esetleg több száz alkatrészt tartalmazó hálózathoz már igen nagy mátrixot kellene megvizsgálni, melyben a nemzérus elemek között a ± 1 elemek mellett (korlátozott pontossággal tárolt) valós számok is vannak. (Lefuttatva egy $\mathbf{W}$ determinánsát meghatározó számítógépprogramot nem megyünk sokra, ha azt kapjuk, hogy pl. a determináns értéke 10^{-8}, hisz épp a lényeg marad bizonytalan, hogy ténylegesen szinguláris a mátrix és kerekítési hibák léptek fel, vagy nem.)

Már KIRCHHOFF [4] lényegesen jobb szükséges és elégséges feltételt tudott ennél. Ezt előkészítendő gondoljuk végig, hogy ha U-beli elemek (vagyis feszültséggenerátorok) kört alkotnának a hálózat G gráfjában, akkor a hálózat egyértelmű megoldhatóságával bajba kerülnénk, hisz ezen kör mentén a feszültséggenerátorok feszültségeinek az összege vagy nem lenne zérus, ellentmondásban a Kirchhoff-féle feszültségtörvényekkel, vagy ha véletlenül igen, akkor az ezen körben folyó áram tetszőleges lehetne, ami szintén $\mathbf{W}$ szingularitásában jelentkeznék.

A duális állítást is végiggondolva megállapíthatjuk, hogy a hálózat egyértelmű megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy

(F.1) $\begin{cases}\textit{a feszültséggenerátorok ne tartalmazzanak kört, az áramgenerátorok ne}\\ \textit{tartalmazzanak vágást a hálózat gráfjában.}\end{cases}$

Kirchhoff klasszikus dolgozatában belátta, hogy (F.1) elégséges is. Az ehhez felhasznált leglényegesebb észrevételét részletesebben ismertetjük.

II. A topológiai formulákról

Idézzük fel a [30] elején bemutatott példát! Az 1*a* ábrán látható hálózatot az 1*b* gráfjával szemléltettük, és pl. az i_1 mennyiségre az

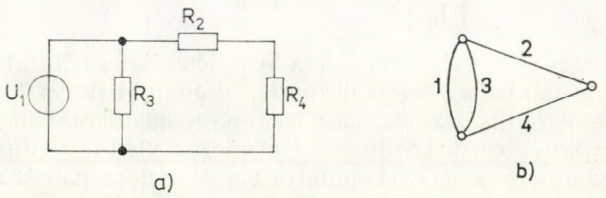
$$i_1=\frac{R_2+R_3+R_4}{R_3(R_2+R_4)}\,U_1$$

értéket kaptuk. Ha az $i_2, i_3, i_4, u_2, u_3, u_4$ mennyiségeket számítanók ki, akkor is $R_3(R_2+R_4)$ lenne a nevező.

Elég is csak a nevezővel foglalkoznunk, hisz ez az előző szakaszban látott det **W**. (Könnyen látszik, hogy (1) ebben az esetben az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & i_2 & i_3 & i_4 & i_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & R_4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

és az első oszlop elhagyása után jutunk a **W** mátrixhoz.)



1. ábra

Példánkban $\det \mathbf{W} = R_2R_3 + R_3R_4$. Mi a közös az 1*b* ábra gráfjában az $\{e_2, e_3\}$ és az $\{e_3, e_4\}$ élhalmazokban? Az, hogy ezek (és csak ezek) komplementerei lesznek e_1-et tartalmazó fák. Általában is igaz a következő szabály [4]:

(T1) Tegyük fel, hogy (F.1) teljesül. Írjuk fel a G gráf összes olyan F fájának az élhalmazát, melyekre $U \subseteq F \subseteq E - I$ teljesül. (Vagyis az összes feszültséggenerátort tartalmazó, viszont egyetlen áramgenerátort sem tartalmazó fákról van szó.) Minden ilyen fához készítsük el a fából kimaradó ellenállások szorzatát. Ezek összege lesz a $\det \mathbf{W}$.

A villamosságtanban szokás (T1)-et topológiai formulának nevezni, arra utalva, hogy a hálózat gráfjából (vagyis a hálózat „topológiai tulajdonságaiból") írható közvetlenül fel a $\det \mathbf{W}$. Jegyezzük meg, hogy (T1) értelmes, ugyanis (F.1) teljesüléséből következik, hogy létezik legalább egy ilyen fa.

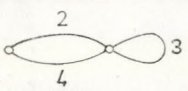
Ezt a

$$\det \mathbf{W} = \sum_{\substack{U \subseteq F \\ I \cap F = \emptyset}} \prod_{\substack{k \notin F \\ k \in R}} R_k$$

formulát az alábbi alakba is írhatjuk:

$$\det \mathbf{W} = \sum_{F \in \mathcal{F}_0} \prod_{k \notin F} R_k \tag{2}$$

ahol $\mathcal{F}_0$ a $G_0 = G \div U - I$ gráf összes fájának halmaza. A $-$ (elhagyás) és a $\div$ (összehúzás) jelek azt jelentik, hogy a gráfból a megfelelő éleket elhagyjuk (végpontjaikat meghagyva), illetve összehúzzuk (vagyis végpontjaikat azonosítjuk, őket, mint keletkező hurokéleket elhagyjuk, de az esetleg keletkező egyéb hurokéleket nem). Így pl. az 1*b* ábra gráfja $\{1\}$ összehúzása után a 2. ábrán látható gráfba megy át.



2. ábra

A szakasz hátralevő részében ehhez a (T1), ill. (2) formulához fűzünk megjegyzéseket.

1. Vegyük észre, hogy a (T1)-ben leírt tulajdonságú fák létezésének (F.1) szükséges és *elégséges* feltétele.

2. A formulának (melynek bizonyítását l. pl. [7, 12]) két lényeges mondanivalója van. Egyrészt az, hogy a det **W** kifejtési tagjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek G_0 fáinak, másrészt az, hogy a formulában szereplő $\prod_{k \notin F} R_k$ szorzatokat egyszerűen össze kell adni ahhoz, hogy a determináns értékét megkapjuk — semmilyen előjelszabályra nincs szükség.

3. Ezek szerint (F.1) a hálózat egyértelmű megoldhatóságának elégséges feltétele is, hisz pozitív mennyiségek összege (a **W** determinánsa) nem lehet zérus.

4. Csak utalunk rá, hogy (2) a forrása számos olyan gráfelméleti tételnek, melyek bizonyos tulajdonságú gráfok fáinak a számával foglalkoznak. Így pl. CAYLEY [18] tételét a teljes gráf fáinak leszámolásáról igen egyszerű úgy bebizonyítani, hogy egy teljes gráf éleire egységnyi ellenállásokat helyezünk, és det **W**-t, mely épp a fák száma lesz, a gráf szabályossága révén elemi algebrai eszközökkel határozzuk meg.

5. Ugyancsak nem foglalkozunk részletesen azzal a kérdéssel, hogy a hálózatanalízis során kiszámítandó mennyiségeknek nemcsak a nevezőjére, hanem a számlálójára is ismeretesek (2)-höz hasonló formulák. Ezekről [7] vagy [12] nyújthat részletes információt.

III. Megjegyzések az algoritmikus hatékonyságról

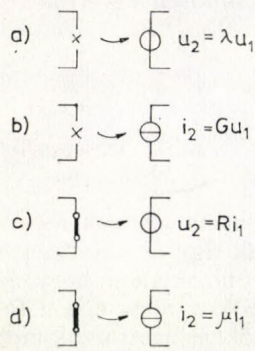
Mint láttuk, az *U*, *I*, *R* elemeket tartalmazó hálózatok egyértelmű megoldhatóságának (F.1) nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is.

Az (F.1) teljesülésének ellenőrzéséhez szükséges algoritmusok lépésszáma nagyságrendben hasonló a **W** determinánsának kiszámításához szükséges algoritmusokhoz, pl. Gauss—Jordan eliminációt alkalmazva, viszont nincs szükség „valós aritmetikára", vagyis csak 0—1 mátrixokon végzett műveletek és így „pontos" eredmények lesznek.

Itt hívjuk fel a figyelmet, hogy a II. szakaszban elmondottak részben történeti érdekességű észrevételek, részben a továbbiakhoz (és a gráfelmélet egyéb kérdéseihez) szükségesek. Jóllehet az ottani **3.** megjegyzésből, tehát lényegileg a (2) formulából vezettük le (F.1) elégségességét, szó sincs arról, mintha (2) — ill. általában a topológiai formulák — lennének a gyakorlatban a hálózatanalízis eszközei. Egy gráf *összes* fájának előállítása általában igen lassan és rossz hatásfokkal valósítható csak meg, így ha esetleg, különleges szituációkban (pl. [16]) alkalmazzák is, általában a topológiai formulák éppúgy elvi (és nem algoritmikus) jelentőségűek a hálózatanalízisben, mint ahogy a Cramer-szabályt sem alkalmazzák lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására.

IV. A topológiai formulák általánosítása

A vezérelt generátorokat is tartalmazó hálózatok analízisében időrendben a legkorábbi eredmény a (2)-szerű formulák általánosítása [19, 27] volt. Ezek pontos kimondásához emlékeztetünk rá, hogy a közönséges (szokásos nevén *független*) feszültség- és áramgenerátorokon kívül találkoztunk [30]-ban a *vezérelt* generátorokkal is.



3. ábra

A [30]-belinél speciálisabban csak a 3. ábrán látható négyféle vezérelt generátorral fogunk foglalkozni. Ezeket rendre feszültségvezérelt feszültség- (*a*), ill. áramgenerátoroknak (*b*), ill. áramvezérelt feszültség- (*c*), ill. áramgenerátoroknak (*d*) nevezzük. Azt is feltesszük, hogy mindig egy szakadás feszültsége (*a* és *b*), ill. egy rövidzár árama (*c* és *d*) vezérel.

(Ez nem jelent korlátozást, csak egy szokásos technikai fogás. Ha ugyanis valaminek a feszültsége (árama) vezérel valamit, mindig „párhuzamosan" köthetünk vele egy szakadást (ill. „sorosan" egy rövidzárt) és azt tekintjük vezérlő elemnek).

Tegyük tehát fel, hogy a hálózat hétféle elemet tartalmaz: független és vezérelt feszültséggenerátorokat, rövidzárakat (az áramvezérlésekhez), ellenállásokat, szakadásokat (a feszültségvezérlésekhez), továbbá vezérelt és független áramgenerátorokat. Jelölje ezek halmazát rendre $U_1, U_2, U_3, R, I_3, I_2, I_1$.

Mármost [19] és [27] fő eredménye a következő:

$$\det \mathbf{W} = \sum_{F \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_u} \left(\pm \prod_{k \notin F} R_k \right) \tag{3}$$

ahol $\mathcal{F}_i$ a $G_i = G - (I_1 \cup I_3) \div (U_1 \cup U_2)$ gráf, $\mathcal{F}_u$ pedig a $G_u = G - (I_1 \cup I_2) \div (U_1 \cup U_3)$ gráf összes fáinak halmaza.

(Vegyük észre, hogy itt a szorzatokat már nem egyszerűen összegezni kell, hanem külön eljárás határozza meg minden egyes F-re az előjelet.) Mind az előjelek meghatározásához, mind (3) bizonyításához (és a többi topológiai formulához, mely a számlálókra vonatkozik) a [7, 12. 19, 27] művekre utalunk. Felhívjuk továbbá a figyelmet a következő szakasz elejére, mely még pontosítja a (3)-ban összefoglalt állítást.

Az (F.1) feltétel analógiájára a vezérelt generátorokat is tartalmazó hálózatokra az egyértelmű megoldhatóság szükséges feltétele, hogy

(F.2) *a hálózat gráfjából előállított G_i és G_u gráfoknak legyen közös fája.*

A különböző előjelek miatt viszont (F.2) nem elégséges, hisz $\mathbf{W}$ úgy is szinguláris lehet, hogy a kifejtési tagjainak csak az összege lesz zérus. (L. még a VI. és a XII. szakasz példáját is.)

V. Az (F.2) feltétel ellenőrizhetősége

Az (F.2) szükséges feltétel már közel 20 éve ismert. Két természetes kérdés vetődik fel:

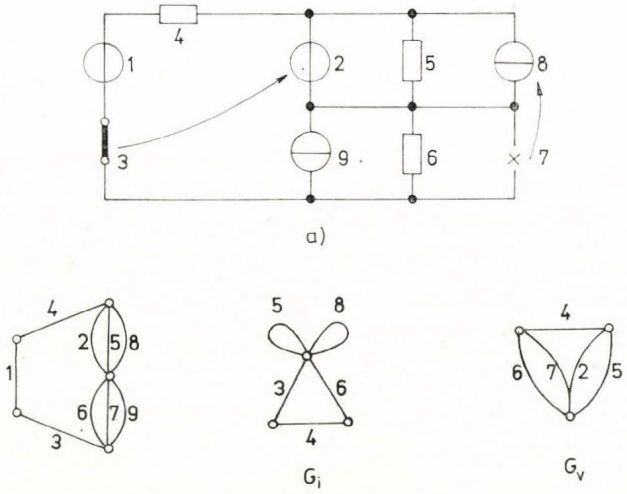
1. Hogyan lehet (F.2) teljesülését ellenőrizni (mert távolról sem olyan egyszerű, mint (F.1) esetén volt)?

2. Hogyan lehet (további feltételezésekkel) elégséges feltételekhez jutni? Ebben a szakaszban csak az 1. kérdéssel foglalkozunk.

Ehhez először pontosítani kell a (3) formulát. Ahhoz ugyanis, hogy a G_i és a G_u gráfok közös fáiról beszéljünk, szükséges, hogy a két gráf élhalmaza vagy azonos legyen, vagy legalábbis az élhalmazok között létesíthető legyen egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Itt az előbbiről nem lehet szó, hisz pl. az I_2-beli élek G_i-ben szerepelnek, G_u-ban nem.

Természetes gondolat azonban, hogy a 3. ábrán látható szakadásokat és rövidzárakat feleltessük meg az általuk vezérelt generátoroknak. Így pl. a 3*a* ábra esetén a szakadás csak a G_u, a vezérelt áramgenerátor csak a G_i gráfban fordul elő.

Hasonlóképpen, a (3)-beli szorzatokban szereplő R_k-k között a λ, G, R és μ vezérlési konstansok is előfordulnak, ha épp egy ilyen él (illetve él-pár) marad ki a közös fából.



4. ábra

Így pl. a 4*a* ábra hálózata tartalmaz egy áramvezérelt feszültséggenerátort ($u_2=R_0 i_3$) és egy feszültségvezérelt áramgenerátort ($i_8=G_0 u_7$). Az előző szakasz jelöléseivel nyilván $U_1=\{1\}$, $U_2=\{2\}$, $U_3=\{3\}$, $R=\{4, 5, 6\}$, $I_3=\{7\}$, $I_2=\{8\}$, $I_1=\{9\}$, és így a hálózat 4*b* ábrán látható gráfjából a 4*c* ábra két gráfjához jutunk. Figyeljük meg, hogy a $\{2, 3\}$, ill. a $\{7, 8\}$ élpárok közül pontosan 1-1 szerepel a G_i és a G_u gráfokban. Azonosításuk után a közös fák $\{3, 4\}$, $\{3, 6\}$ és $\{4, 6\}$; és így a közös nevező $R_5 G_0(R_6+R_4-R_0)$ (ahol persze az előjeleket másképp állapítottuk meg, de ezzel itt most nem foglalkozunk).

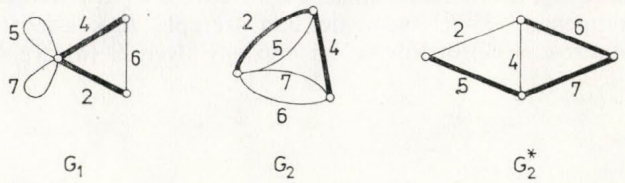
Most már egzaktul megfogalmazhatjuk az 1. kérdést. Adott tehát G_1 és G_2 élhalmaza között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy élhalmazaik azonosak). Van-e G_1-nek és G_2-nek közös fája?

Az 5. ábrán látható példán (mely persze lényegileg azonos a 4. ábráéval) G_2 síkbarajzolható, megrajzoltuk hát egy duálisát is. Ha pl. a $\{2, 4\}$ élhalmaz fa G_2-ben, akkor persze a komplementere, $\{5, 6, 7\}$, fa G_2^*-ban. Ha $\{2, 4\}$ a G_1-nek is fája, akkor a teljes $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ élhalmazt sikerült két részre bontanunk úgy, hogy az egyik rész G_1-ben, a másik rész G_2^*-ban körmentes.

Visszaidézve a [30]-ban megismert definíciókat, G_1 helyett tekinthetjük annak $\mathcal{M}(G_1)$ körmatroidját, és általában is kereshetjük két — azonos halmazon definiált — matroid közös bázisát. Általában is kimondhatjuk, hogy

ha az $(S, \mathcal{M}_1)$ *és az* $(S, \mathcal{M}_2)$ *matroidoknak van közös bázisa, akkor* $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = \mathcal{M}_1^* \vee \mathcal{M}_2 = (S, 2^S)$.

(Ez az állítás egyébként abban az értelemben visszafelé is igaz, hogy ha $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = (S, 2^S)$ és $r_1(S) \geqq r_2(S)$ akkor van $\mathcal{M}_2$-nek olyan bázisa, amely $\mathcal{M}_1$-ben is független.)



5. ábra

Tekintettel arra, hogy általában k darab $(S, \mathcal{M}_1)$, $(S, \mathcal{M}_2)$, ..., $(S, \mathcal{M}_k)$ matroidra is el tudjuk dönteni, hogy teljesül-e az $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_k = (S, 2^S)$ reláció [17, 20, 22—26], az 1. kérdésre kielégítő választ adtunk (vö. a 2. megjegyzéssel).

Megjegyzések: 1. Érdekes, hogy míg a fenti reláció eldöntése nem nehezebb általánosan, mint a $k=2$ speciális esetben, addig annak az eldöntése, hogy létezik-e k darab matroidnak közös bázisa, $k>2$ esetén nagyon nehéz.

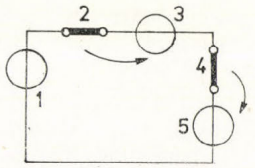
[31]-ben foglalkoztunk olyan hálózatokkal, melyek az eddigi építőelemeken kívül tekercseket és kondenzátorokat is tartalmaznak. Ott az (F.1)-nek vagy akár a későbbi (F.3)-nak megfelelő feltétel ellenőrzése $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 \vee \mathcal{M}_3 = (S, 2^S)$ alakú reláció eldöntéséhez vezet. Bár ebben a cikkben csak memóriamentes hálózatokkal foglalkozunk, megemlítjük, hogy [31] szerint így az általánosabb eset sem vezet algoritmikus szempontból további nehézségekhez.

2. Felvethető persze a kérdés, hogy kielégítő válasz-e a megoldhatóságra, ha azt visszavezetjük annak az eldöntésére, hogy két adott matroid összege az $(S, 2^S)$ matroid-e. Az ilyen „matroid partíciós" algoritmusok hatékonyságát többek között [25] vizsgálja részletesen. Következtetéseinek a lényege az, hogy az algoritmusok lépésszáma az S alaphalmaz n méretének polinomiális függvénye, feltéve, hogy szintén n-ben polinomiális azon szubrutinok hatékonysága, amelyek adott halmazok függetlenségét vizsgálják az adott matroidokban. Tekintettel arra, hogy ez gráfokban a függetlenség-vizsgálatra teljesül, így tényleg van polinomiális algoritmusunk az egyértelmű megoldhatóság eldöntésére.

VI. Elégséges-e az (F.2)?

Térjünk rá az előző szakasz elején felvetett 2. kérdésre. (F.2) nyilván nem elégséges. Erre legegyszerűbb példának a 6. ábra hálózata kínálkozik. Ha az u_3 és u_5 feszültséggenerátorokat a 2., ill. 4. rövidzárak árama vezérli ($u_3 = R_A i_2$, ill. $u_5 = R_B i_4$) akkor (F.2) nyilván teljesül. Ha viszont a vezérlési konstansokat úgy választjuk meg, hogy $R_A + R_B = 0$ teljesüljön, akkor a hálózat nyilván nem oldható meg egyértelműen.

(Tulajdonképp a {2, 3} és a {4, 5} pár egy-egy ellenállás, csak épp ha valamelyik ellenállás értéke negatív, akkor már az (F.1) sem elégséges.)



6. ábra

Durván fogalmazva, a 6. ábrán látható hálózatra (F.2) (tehát egy kombinatorikai feltétel) és $R_A+R_B\neq 0$ (tehát egy numerikus feltétel) együtt biztosítja az egyértelmű megoldhatóságot, és érezhető, hogy nem is remélhető tisztán kombinatorikus szükséges és elégséges feltétel. Mi lehet a kiút (hisz, mint azt már az I. szakaszban láttuk, a valós számok körében „tökéletes pontossággal" eldöntendő feltételeket kerülni szeretnők)?

VII. Az „általános" alkatrészek

A hálózatelmélettel foglalkozók körében gyakran hallhatjuk a következő megfontolást: A 6. ábra hálózata irreális. Az ember a boltban soha nem 100 kΩ-os ellenállást vesz, hanem olyat, melynek az értéke (egy adott, az alkatrészen feltüntetett tűrésen belül) *körülbelül* annyi. Az alkatrész jellemző paraméterei (pl. az ellenállás) különböző technológiai folyamatoktól függnek, és ha a hálózat gráfja alapján előre felírunk egy algebrai összefüggést (pl. $R_A+R_B=0$) akkor azt *pontosan* soha nem teljesítik.

Ennek megfelelően az alkatrészek paramétereit „általános" változóknak tekintik, és így det **W** nem egy szám, hanem ezeknek egy többváltozós polinomja. Akkor tekintik csak a hálózatot szinguláris nak, ha ez a polinom azonosan zérus. Ezzel a feltevéssel persze (F.2) elégséges is. (Így pl. a 6. ábrán látható hálózatban folyó áramra nyerhető $\frac{u_1}{R_A+R_B}$ kifejezés mindig értelmes, ha a nevező soha nem lehet zérus.)

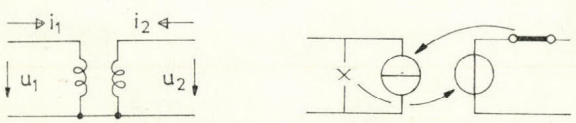
Ez a további feltevés bizonyos mértékig jogos, ezzel dolgozva számos igen jelentős eredmény született a hálózatelméletben. Bizonyos fenntartások azért indokoltak. Jólismert pl., hogy az ideális transzformátor, miközben a feszültséget meg-k-szorozza, az áramot $1/k$-ad részére csökkenti. A 7*a* ábrán látható jelölésekkel tehát

$$u_2 = ku_1$$

(4)

$$i_2 = -\frac{1}{k}\,i_1$$

Mondhatjuk ugyan, hogy a k mennyiség soha nem pontos, de már a két egyenletben szereplő együtthatók szorzata *pontosan* -1, hisz ez a transzformátor definíciója. Tehát nyilván túlzás azt tenni fel, hogy semmilyen algebrai összefüggés sem áll fen a hálózat paraméterei között.



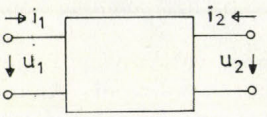
7. ábra

(Közbevethető, hogy (4) is idealizált modell, és a pontos -1 sem teljesül a gyakorlatban, hisz a transzformátorban másodlagos effektusok is fellépnek, pl. veszteség. Azonban ilyen alapon a klasszikus (F.1) szükségességét is kétségbe vonhatnók, hisz a gyakorlatban a feszültségforrás belső ellenállása sem pontosan zérus, csak nagyon kicsi. Más szóval, meg akarjuk engedni az egyes alkatrészek modelljében az idealizálást bizonyos pontig, ti. ameddig valami lényeges tulajdonságot fejez ki.)

Célszerű lenne tehát egy olyan közbülső megoldás, hogy az alkatrészek paramétereinek „általános" voltát csak olyankor használhassuk fel, ha különböző alkatrészeket kapcsolunk össze, megengedünk viszont „pontos" kapcsolatokat egy-egy konkrét alkatrész modellezéséhez felhasznált paraméterek között. A cikk hátralevő részében ebbe az irányba tesszük meg az első lépéseket.

VIII. Mi az *n*-kapu?

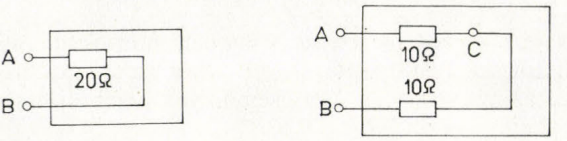
Ellenállásokról beszélve egy olyan alkatrészre gondolunk, melynek árama és feszültsége között egy jólismert összefüggés ($u=Ri$) teljesül — és nem érdekel bennünket, hogy ezt hogyan valósítják meg. Hasonlóképpen a 3*a* ábra feszültségvezérelt feszültséggenerátora helyett is tekinthetnők azt a 8. ábrán látható „fekete dobozt", melyre két összefüggés ($i_1=0$; $u_2=\lambda u_1$) teljesül. Ezt még tovább általánosítva *n-kapunak* nevezünk egy olyan „fekete dobozt", nem törődve a belsejével, amely n darab póluspárou keresztül tart kapcsolatot a külvilággal, és az ezeken a póluspárokon mért áramok és feszültségek között n darab homogén, lineáris egyenlet írható fel, melyek lineárisan függetlenek. (Vö. a **4.** megjegyzéssel.)



8. ábra

Pl. 1-kapu a közönséges (és a negatív) Ohmos ellenálláson kívül a rövidzár ($0.i+1.u=0$) és a szakadás is. Kétkapura a vezérelt generátorok (3. ábra) és az ideális transzformátor szerepelt eddig példaként. (Egyébként ez utóbbi is megvalósítható vezérelt generátorokkal, l. a 7*b* ábrát.)

Megjegyzések: **1.** A „fekete doboz" szóhasználat arra utal, hogy nem törődünk a belső struktúrájával; csak annyi információt tételezünk fel, amennyi a póluspárokon keresztül, áram- és feszültségmérésekkel leolvasható. Például a 9. ábrán látható két részhálózat mint 1-kapu nem különböztethető meg, hisz a megkülönböztetéshez pl. az A és a C pontok között kellene feszültséget mérnünk.



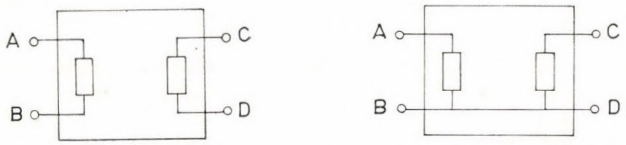
a) b)

9. ábra

2. Az n-kapunak nem $2n$ pólusa, hanem n póluspárja van, vagyis a pólusok párbaállítása is hozzátartozik a definícióhoz. Érdekes megfigyelni, hogy a 10. ábra két 2-kapujának azonos az egyenletrendszere, bár a két 2-kapu megkülönböztethető, a B és a D pontok közötti méréssel. Mint négypólusok, nyilván különbözőek.

3. Az előző megjegyzés példája arra hívja fel a figyelmünket, hogy az n-kapuk összekapcsolásakor keletkező hálózat tulajdonságai általában nem határozhatók meg egyértelműen, ha az összekapcsolás módján kívül csak az n-kapuk egyenletei adottak.

Emiatt további feltételek előírásával szokták korlátozni a szóbajövő n-kapuk körét. Az egyik ilyen lehetséges korlátozás, hogy csak olyan n-kapukat engednek meg, melyek egyben $(n+1)$-pólusok. (Ez azt jelenti a gyakorlatban, hogy ha egy k-pólusú alkatrészt kell modellezni, akkor az egyik pólust kitüntetik, (ez a „referenciapont") és a többi $k-1$ pólus és ezen pólus párbaállításával keletkezett $(k-1)$-kaput tekintik.) Esetünkben ez a korlátozás egyrészt a 10*a* ábrán látható 2-kapu kizárását jelenti, másrészt a 10*b* ábrán látható (megengedett) 2-kapu B és D pontjainak azonosítását.



a) b)

10. ábra

4. Az itt definiált n-kapukat lineáris, homogén, memóriamentes n-kapuknak kellene nevezni. Másfajta n-kapuk is léteznek a hálózatelméletben, hisz az egyenletek nem feltétlenül lineárisak, homogének stb., sőt lehet, hogy nem is az áramokra és a feszültségekre, hanem egyéb mennyiségekre vonatkoznak. Ebben a cikkben azonban csak ezekkel foglalkozunk.

5. A 3. ábrán látható vezérelt generátorok is speciális 2-kapuk. Megfordítva, akár a 7*a—b* ábrák, akár a későbbi 14.—15. ábrák arra mutatnak példát, hogy egyes n-kapuk összerakhatóak vezérelt generátorokból. Anélkül, hogy ezzel a kérdéssel részletesen foglalkoznánk, megemlítjük, hogy az n-kapu-fogalom az általánosabb — nem mindegyik modellezhető vezérelt generátorokkal. Egy ilyen példa az a 2-kapu, melynek egyenletei $u_1=0$, $i_1=0$ (az u_2 és az i_2 pedig tetszőleges).

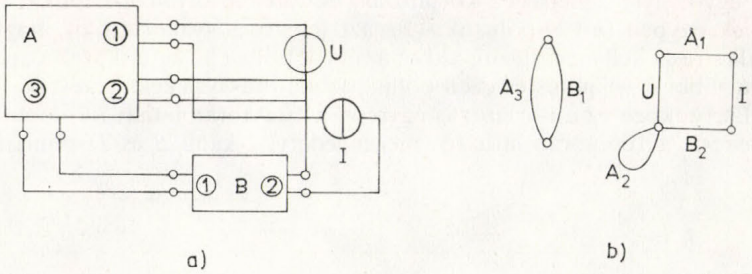
IX. Az egyértelmű megoldhatóság új jellemzése

Erre a (tehát igen általános) hálózatosztályra próbáljuk most meg jellemezni az egyértelmű megoldhatóságot. Az (1) összefüggéssel definiált **N** mátrix analógiájára legyen most

$$(5) \qquad \mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{matrix} (\mathbf{u}_U & \mathbf{u}_I & \mathbf{u}_K & \mathbf{i}_K & \mathbf{i}_U & \mathbf{i}_I) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{B}} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{Q}} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix} \end{array}$$

a hálózat összes egyenletéből képzett rendszer együttható-mátrixa. Az (5)-ben szereplő **B**, **Q** és **A** mátrixokat az alábbi módon definiáljuk:

Mindenekelőtt szemléltetnünk kell gráffal n-kapuk egymással és független generátorokkal való összekapcsolását. Egyszerűen minden n-kapu minden kapuélének gráf élt feleltetünk meg. Így pl. a 11*a* ábrán látható hálózatot a 11*b* ábra gráfjával szemléltethetjük. (Jól látható, hogy természetes módon előfordulhatnak a gráfban hurkok és többszörös élek is.)



a) b)

11. ábra

Az így kapott gráfélhalmaza három csoportra osztható: a feszültséggenerátoroknak, az áramgenerátoroknak és a kapuknak megfelelő élek részhalmazait jelöljük rendre U-val, I-vel, ill. K-val. Ehhez a gráfhoz készítjük el a **B** és a **Q** mátrixokat az I. szakaszban leírt módon.

Ezekután az (5) képlettel definiált mátrix oszlopainak a csoportbeosztása magától értetődő. Végül a hálózat összes n-kapujának az összes egyenlete összefoglalható egyetlen

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{i}_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszerbe, ennek **A** mátrixát szerepeltettük (5)-ben.

Ha most is **W**-vel jelöljük **N**-nek azt a részmátrixát, mely az $\mathbf{u}_U$ és az $\mathbf{i}_I$ mennyiségeknek megfelelő oszlopok elhagyása után keletkezik, akkor az I. szakaszban mondottak analógiájára kimondhatjuk, hogy

(6) $\begin{cases} \text{a hálózat akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen,} \\ \text{ha a most definiált } \mathbf{W} \text{ mátrix nem szinguláris.} \end{cases}$

Természetesen most is érvényesek az I. szakaszban mondottak, vagyis ez a feltétel sem szerencsés a gyakorlatban. Ehelyett próbálunk valami használhatóbbat adni.

X. Ismét a matroidok összege

Jóllehet [30]-ban példákon szemléltettük, hogy a matroidfogalom általánosabb a gráffogalomnál, eddig gyakorlatilag csak a gráfok körmatroidjaival foglalkoztunk. Most mindenekelőtt egy másik nagyon fontos matroidosztályt ismertetünk.

Legyen M egy tetszőleges (pl. valós elemű) mátrix. Az *oszlopainak* a halmazán értelmezhetünk egy $\mathcal{M}$ matroidot úgy, hogy egy részhalmaz akkor és csak akkor független, ha a megfelelő oszlopok (jelen esetben a valós test felett) lineárisan függetlenek.

Ha pl. az alábbi mátrixokat tekintjük

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

akkor az első kettőből nyert matroidokat a 12*a*, ill. *b* ábrán látható gráfok körmatroidjaként szemléltethetjük, míg a harmadiknál ilyen szemléltetés nem lehetséges. ([30]-ban már láttuk, hogy ha a négyelemű halmazban bármely pár független, de egyetlen hármas sem az, akkor ez a matroid nem grafikus, vagyis nem szemléltethető gráf körmatroidjaként.)

Mármost felhasználva az (5)-beli **N** mátrix sorainak függetlenségét és $\mathcal{N}$-nel jelölve az **N**-nek megfelelő matroidot, a (6) feltétel nyilván úgy is mondható, hogy

(6a) $$u_I \cup u_K \cup i_K \cup i_U \in \mathcal{N}$$

vagy helyette úgy is, hogy

(6b) $$u_U \cup i_I \in \mathcal{N}^*$$

(hisz (6a) csak úgy teljesülhet, ha az előbbi halmaz bázis is $\mathcal{N}$-ben, akkor pedig a komplementere bázis a duális matroidban).

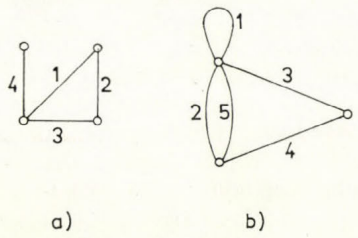
Ez persze csak (6)-nak egy formális átírása, ami nem tartalmaz új matematikai állítást. Vegyük azonban észre, hogy ha az **A** mátrixnak megfelelő matroidot $\mathcal{A}$-val, a

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right]$$

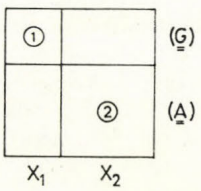
mátrixnak megfelelőt $\mathcal{G}$-vel jelöljük, akkor $X \in \mathcal{N}$-ből

$$X \in \mathcal{G} \vee \mathcal{A}$$

is következik. Csakugyan, ha $|X|=k$, akkor $X \in \mathcal{N}$ egy k-szor k-as négyzetes részmátrix nemszingularitását jelenti. Márpedig ha ennek a determinánsa nem zérus, akkor a determinánsok Laplace-féle kifejtési tételét alkalmazva lesz olyan $X=X_1 \cup X_2$ felbontás, hogy az X_1-oszlopok és a **G**-be eső sorok által alkotott ①-részmátrix is, és az X_2-oszlopok és az **A**-ba eső sorok által alkotott ②-részmátrix is nemszinguláris (l. a 13. ábrát), hisz ilyen determináns-szorzatok összegeként kell előállnia az egész mátrix (zérustól különböző) determinánsának.



12. ábra



13. ábra

Megállapíthatjuk tehát, hogy a (nem túl jól használható) (6) feltételből következik, hogy

(F.3) *teljesül az* $u_U \cup i_I \in (\mathcal{G} \vee \mathcal{A})^*$ *reláció.*

Ez tehát az egyértelmű megoldhatóságnak szükséges feltétele. Ez a feltétel elégséges is, ha a VII. szakaszban bevezetett „általánosságot" feltételezzük, hisz ha (F.3) teljesül, akkor a Laplace-féle kifejtés egyik tagja már nem zérus, és ilyenek összege (vagyis a det **W**) csak akkor lehetne zérus, ha a mennyiségek nem lennének „álta-

lánosak", hanem valamilyen kapcsolat teljesülne rájuk (ti. az, hogy az összegük zérus).

Hasonlóan ahhoz, hogy a det $\mathbf{W} \neq 0$ feltétel helyett a klasszikus esetben az (F.1) feltételt nyertük, ami gyakorlati szempontból kedvezőbb, úgy most az (F.3) feltételt nyertük. Két kérdés vetődhet fel:

1. Mennyivel könnyebb az (F.3)-at ellenőrizni, mint a (6b)-t, vagyis gyakorlatban kedvezőbb-e ez?
2. Mi az (F.2) és az (F.3) feltételek viszonya?

XI. Az (F.3) feltétel ellenőrizhetősége

Mint azt az V. szakaszban már láttuk, annak ellenőrzése, hogy egy halmaz független-e egy (két matroid összegeként előálló) matroidban, attól függően lesz gazdaságos, vagy sem, hogy az egyes matroidokban milyen hatékony a függetlenségvizsgálat.

Nem nehéz megmutatni, hogy az (F.3)-beli $\mathscr{G}$ matroid épp a hálózat G gráfjából készíthető $\mathscr{M}(G)$ körmatroidnak a duálisával vett direkt összege. (Konkrétan, ha $\mathscr{B}$-vel és $\mathscr{Q}$-val jelöljük a **B**, ill. a **Q** mátrixokból a szokásos úton nyerhető matroidokat, akkor $\mathscr{Q}=\mathscr{M}(G)$ és $\mathscr{B}=\mathscr{M}^*(G)$. Ennek belátásához fel kell használni, hogy **B**, ill. **Q** sorai lineárisan függetlenek (ti. csak annyi kört, ill. vágást veszünk figyelembe **B**, ill. **Q** definiálásakor).) Annak eldöntése pedig, hogy egy adott élhalmaz kör- vagy vágásmentes-e egy gráfban, nem okoz problémát.

Az $\mathscr{A}$ matroiddal bonyolultabb a helyzet. Nyilván előáll direkt összegként, hisz az **A** mátrix is az egyes n-kapuknak megfelelő blokkokból állt össze. Tulajdonképpen tehát csak az a kérdés, hogy 1-1 n-kapunak megfelelő „*kis*" *matroidban* (vagyis $\mathscr{A}$ 1-1 direkt összeadandójában) hogyan lehet függetlenséget ellenőrizni.

Mivel az ilyen n-kapumátrixokban valós számok szerepelnek, és a függetlenségellenőrzés lényegileg egy valós elemű mátrix szingularitás-vizsgálata, így látszólag pontosan oda jutottunk, amit el szeretnénk kerülni. Valójában nem ez a helyzet. El akartuk kerülni, hogy egyetlen hatalmas mátrix szingularitásvizsgálata közben belépő pontatlanságok minőségileg hibás eredményre vezessenek — és sikerült tisztán kombinatorikus megfontolásokkal „feldarabolni" a problémát, elérni, hogy csak egész kis mátrixok esetén kelljen „valós aritmetikát" alkalmazni.

Hogy ezt a különbséget még jobban megvilágítsuk, emlékeztetünk a bevezetésben mondottakra. Az egyes n-kapukat tulajdonképpen 1-1 fizikai eszköz modelljeként tároljuk a számítógép adatbankjában, és ezekből rakjuk össze az újabb és újabb hálózatokat, valahányszor egy-egy újabb feladat megoldására használjuk a számítógépprogramot. Mivel az $\mathscr{A}$ matroid egy-egy direkt összeadandója épp egy-egy n-kapura vonatkozik, sikerült elérnünk, hogy valós elemű mátrixok rangvizsgálatára is csak egy-egy alkatrész modelljén belül legyen szükség. Ezt pedig már az alkatrész modellezésekor (az adatbank feltöltésekor) is elvégezhetjük, nagy pontossággal. Az se baj, ha a nagy pontosság növeli a számítógépigényt, hisz ezt csak egyszer kell elvégezni, és a végeredményt kell csak nagyon sokszor felhasználni. Attól viszont „megmenekültünk", hogy minden egyes hálózatanalízis-feladathoz valós mátrixok szingularitását kelljen vizsgálni.

XII. Az (F.2) és az (F.3) feltételek viszonya

Látható tehát, hogy az (F.3) feltétel, mely matroidok összegében igényel függetlenségvizsgálatot, és az (F.2) feltétel, mely két matroidban keres közös fát, egyaránt használható az egyértelmű megoldhatóság eldöntésére. A két matroidos feltétel ellenőrzése között algoritmikus szempontból nincs is nagy különbség az V. szakasz szerint (bár e szakasz végén látni fogjuk, hogy — jóllehet mindkettő polinomiális rendű algoritmushoz vezet — az utóbbi olykor hatékonyabb). Így kézenfekvő lenne azt hinni, hogy (F.2) és (F.3) ekvivalensek, hogy nincs köztük semmi különbség. Ez azonban nem így van.

Ha egy hálózat feszültség- és áramgenerátorokból, valamint a 3. ábrán látható vezérelt generátorokból áll, akkor persze a hálózatra (F.2) és (F.3) egyszerre teljesül vagy nem, és a két feltétel ellenőrzése is kb. egyformán könnyű. Ha viszont (és ez a gyakorlathoz közelebb áll) a hálózatban n-kapuk vannak, akkor (F.2) csak úgy alkalmazható, ha előbb az n-kapukat néhány vezérelt generátorral helyettesítjük (vö. a VIII. szakasz 5. megjegyzésével); míg az (F.3) közvetlenül alkalmazható. Ez a különbség két szempontból is (F.3) javára szól. Ezt a két szempontot egy-egy példán illusztráljuk.

1. Tekintsük a 14. ábrán látható hálózatot, ahol a 2-kapu egyenletei $u_3 = i_3 + 2i_4$; $u_4 = 2i_3 + 4i_4$. Nyilvánvaló, hogy $2u_3 = u_4$ miatt a hálózat ellentmondásos.

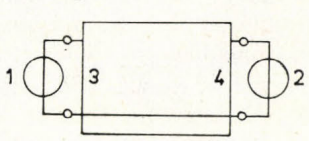
Ha ezt a hálózatot (a 15. ábrán látható módon) vezérelt generátorokkal valósítjuk meg, ahol a vezérlési egyenletek

(i) $u_{3B} = i_{3A}$

(ii) $u_{3D} = 2i_{4B}$

(iii) $u_{4A} = 2i_{3C}$

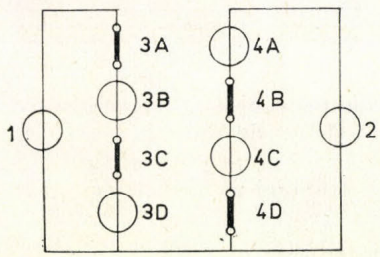
(iv) $u_{4C} = 4i_{4D}$



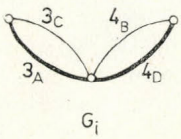
14. ábra

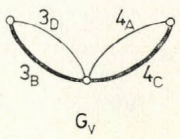
akkor jól látható, hogy a hálózat áram- és feszültséggráfjának van közös fája (l. a 16. ábrán). (A megvastagított éleket az (i), ill. az (iv) relációk feleltetik meg egymásnak.) Megállapíthatjuk tehát, hogy ennek a hálózatnak a szingularitását az (2F.) feltétel ellenőrzésével *nem lehet jelezni*.

Ugyanakkor megmutatjuk, hogy az (F.3) feltétel nem teljesül erre a hálózatra (tehát jelzi annak szingularitását). A 17. ábra *a*) gráfja a

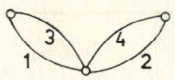


15. ábra

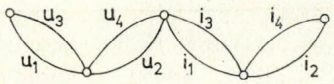




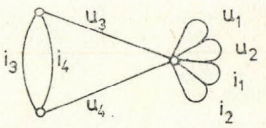
16. ábra



a)



b)



c)

17. ábra

hálózat gráfját mutatja be. A $\mathcal{G}$ és az $\mathcal{A}$ matroidokat a *b*), ill. a *c*) gráfok körmatroidjaival szemléltetjük. (Az előbbi ellenőrzéséhez vegyük észre, hogy (ebben a példában, véletlenül) a hálózat gráfja izomorf önmaga duálisával.

Könnyű ellenőrizni, hogy az $\mathcal{M}=\mathcal{G}\vee\mathcal{A}$ matroid duálisában $\{u_1, u_2\}$ összefüggő. Csakugyan, mivel $\mathcal{G}$-nek és $\mathcal{A}$-nak van diszjunkt bázisa (pl. $\{u_1, u_2, i_1, i_2\}$, ill. $\{u_3, i_4\}$), ha $\{u_1, u_2\}$ független lenne $\mathcal{M}^*$-ban, akkor ott már bázis is lenne. Ekkor a komplementere, vagyis $\{u_3, u_4, i_1, i_2, i_3, i_4\}$ $\mathcal{M}$-beli bázis lenne, de már az $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ halmaz sem független $\mathcal{M}$-ben.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy n-kapukat tartalmazó hálózatokra az (F.3) feltétel *erősebb*, mint az (F.2), vagyis, míg az (F.2) feltétel az „általánosság" többé-kevésbé elfogadható feltételezésével bizonyul szükséges és elégséges feltételnek, addig az (F.3) nem csak azokat a szinguláris hálózatokat fedezi fel, amelyeket az (F.2), hanem még néhány olyat is, amelyekben a szingularitást egy olyan numerikus összefüggés (esetünkben a 2-kapu leírásában szereplő $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ mátrix szingularitása) okozta, mely egyetlen n-kapun belül van.

Más szóval: (F.2) szükséges és elégséges az olyan hálózatok körében, ahol korlátlanul elfogadjuk az „általánosság"-ként említett elvet. (F.3) még abban a *bővebb* hálózatosztályban is szükséges és elégséges, ahol egy-egy alkatrész modelljén belül ezt az elvet már nem kívánjuk elfogadni. (L. még a következő szakaszt is.)

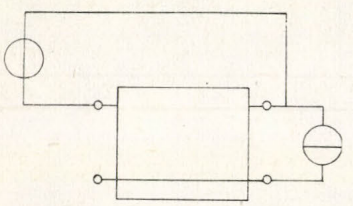
2. Még azoknál a hálózatoknál is előfordulhat, hogy (F.3) ellenőrzése *algoritmikusan hatékonyabb,* amelyekre (F.2) és (F.3) ugyanazt a választ adja. Ezt egy fiktív (és meglehetősen extrém) példán illusztráljuk [33].

Álljon a hálózat egyetlen n-kapuból és a kapuira kapcsolt független generátorokból. Legyen n nagyon nagy ($n\to\infty$) és tegyük fel, hogy az n-kapu egyenleteinek mátrixa nem „ritka", vagyis a nemzérus együtthatók száma n^2 nagyságrendben nő. Ilyenkor az (F.3) feltétel ellenőrzéséhez egy $4n$-elemű halmaz két matroidjának az összegével kell foglalkozni, míg az (F.2) feltételhez szükséges átírás (annak analógiájára, ahogy a 14. ábrából a 15.-höz jutottunk) olyan feszültség- és áramgráfhoz vezet, melyek élszáma n^2-nagyságrendű.

XIII. További megjegyzések

Látható tehát, hogy (F.2)-nél (mely ebben az alakban [28]-nál, más, ekvivalens alakban [21]-nél szerepel először) szerencsésebb az (F.3). (Ez utóbbit l. [31, 32]. Egy lényeges lépés, $\mathcal{G}$ itt közölt definíciója [29]-től származik.) Az algoritmikus előnyön túl (F.3) már bizonyos, az „általánosság" feltevésével ki nem mutatható szingularitások detektálására is alkalmas.

Sajnos, nem mindegyikre. A 18. ábrán látható hálózat egy *girátort* tartalmaz. Ennek az elektronikus alkatrésznek, mint 2-kapunak az egyenletei: $u_1=Ri_2$ és $u_2=-Ri_1$. Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy ez a hálózat szinguláris. Belátható azonban, hogy sem az (F.2), sem az (F.3) feltételt nem sérti meg, vagyis az ilyen típusú ellentmondások kimutatásánál mindkét feltétel csődöt mond.



18. ábra

A balsiker oka a girátor két egyenletében szereplő R azonos volta *és* a különleges kapcsolás

együttes fellépése. (Vagyis az „általánosság" elvét megsértettük, de ez nem magában a 2-kapu mátrixban okozott szingularitást, hanem csak a „nagy" N mátrixban.)

Mivel azonban a 18. ábrán látható, vagy ahhoz hasonló szituációk is előfordulhatnak, az (F.3)-nál is erősebb eszközre is szükség lesz. Ezzel viszont már a cikknek csak egy későbbi, III. részében fogunk foglalkozni.

Segítő megjegyzéseikért, hasznos beszélgetésekért köszönet illeti a [30]-ban említetteket, valamint FRANK NIELSENt, BJØRN PETERSENt és MASAO IRIt.

IRODALOM

[16] ABOS I.—BÁLINT L.—NAGYGYÖRGY E.—SCSAURSZKI P.—SOMOS Á.: Computer methods for designing printed circuit boards taking into account parasitic effects, *Fifth Internat. Coll. on Microwave Comm.*, Budapest, 1974.
[17] M. AIGNER—T. A. DOWLING: Matching theory for combinatorial geometries, *Trans. Amer. Math. Soc.* 158 (1971) 231—245.
[18] A CAYLEY: *Collected papers* (Cambridge, 1897) 13, 26—28.
[19] C. L. COATES: General topological formulas for linear network functions, *IRE Trans.* CT-5 (1958) 42—54.
[20] J. EDMONDS: Matroid partition, Math. of the decision sciences, I., *Lectures in Applied Math.*, II. (1968) 335—345.
[21] M. IRI—N. TOMIZAWA: A unifying approach to fundamental problems in network theory by means of matroids, *Trans. IECEJ*, 58—A (1975) 1. 33—40.
[22] M. IRI—N. TOMIZAWA: An algorithm for finding an optimal „independent assignement", *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 19 (1976) 32—57.
[23] D. E. KNUTH: Matroid partitioning, Report, Stan-CS-73-342 (1973).
[24] S. KROGDAHL: A combinatorial base for some optimal matroid intersection algorithms, Report, Stan-CS-74-468 (1974).
[25] E. L. LAWLER: Matroid intersection algorithms, *Math. Programming*, 9 (1975) 31—56.
[26] E. L. LAWLER: *Combinatorial optimization: networks and matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
[27] W. MAYEDA: Topological formulas for active networks, Interim Techn. Report, US Army DA-11-022-ORD-1983 (1958)
[28] T. OZAWA: Solvability of linear electric networks, *Memoirs of Fac. Eng., Kyōto University*, 37 (1975) 299—315.
[29] B. PETERSEN: Investigating solvability and complexity of linear active networks by means of matroids, megjelenőben.
[30] RECSKI A.: Matroidok alkalmazása a villamos hálózatok analízisében, *Matematikai Lapok* 24 (1973) 311—328.
[31] A. RECSKI: Contributions to the *n*-port interconnection problem by means of matroids, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 18. (1976)
[32] A. RECSKI: Unique solvability and order of complexity of linear networks containing memoryless *n*-ports, *Internat. J. Circuit Theory and Appl.* 6. (1978)
[33] A. RECSKI: Applications of graph theory to network analysis — a survey, Proc. Internat. Coll. *„Graphentheorie und ihre Anwendungen"*, Oberhof, GDR. 1977, 193—200.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРОИД В АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ, II.

АНДРАШ РЕЧКИ

APPLICATIONS OF THE THEORY OF MATROIDS IN THE ANALYSIS OF ELECTRICAL NETWORKS, II.

A. RECSKI

MEGSZÁMLÁLHATÓ GRÁFOK METRIKUS TULAJDONSÁGAIRÓL

PACH JÁNOS

1. §. *Bevezetés*

Legyen G irányítatlan gráf, amely nem tartalmaz párhuzamos és hurokéleket. G gráf csúcsainak halmazát $V(G)$-vel, éleinek halmazát pedig $E(G)$-vel jelöljük. Ha G gráf összefüggő, akkor definiálhatjuk $x, y \in V(G)$ csúcsok G-beli távolságát:

$$d_G(x, y) = i \tag{1}$$

ha az x és y csúcsokat G-ben összekötő legrövidebb út i hosszúságú. Az így értelmezett távolságfogalom nyilván kielégíti a távolságaxiómákat. (Ha G gráf nem összefüggő, akkor különböző komponenshez tartozó pontjait egymástól végtelen távolságra levőknek mondjuk.)

G gráf izomorf módon beágyazható G_0-ba, ha létezik egy olyan $f : V(G) \to V(G_0)$ megfeleltetés, amely különböző $V(G)$-beli pontoknak különböző $V(G_0)$-belieket feleltet meg, és amelyre $\{f(x), f(y)\} \in E(G_0)$ pontosan akkor, ha $\{x, y\} \in E(G)$.

1. definíció: G gráf távolságtartó módon beágyazható G_0-ba, ha létezik egy olyan $f : V(G) \to V(G_0)$ megfeleltetés, hogy

$$d_{G_0}(f(x), f(y)) = d_G(x, y) \tag{2}$$

bármely $x, y \in V(G)$ pontpárra.

Minden távolságtartó beágyazás nyilván egyúttal izomorf beágyazás is.

R. Rado [1] megmutatta, hogy létezik olyan megszámlálható gráf, amelybe minden megszámlálható gráf *izomorf* módon beágyazható. Az élesebb kérdést, hogy vajon létezik-e olyan megszámlálható gráf, amelybe minden megszámlálható gráf *távolságtartó* módon ágyazható be, E. Howorka [2] vetette fel. A választ erre a kérdésre a 2. §-ban adjuk meg.

2. definíció: Legyen G megszámlálható gráf. Egy $H \subset G$ véges részgráfot izometrikus részgráfnak nevezünk, ha

$$d_H(x, y) = d_G(x, y) \tag{3}$$

minden $x, y \in V(H)$ pontpárra.

A 3. §-ban ennek a fogalomnak lesz központi jelentősége.

2. § *Távolságtartó beágyazás*

1. tétel: *Létezik olyan megszámlálható gráf, amelybe bármely megszámlálható gráf távolságtartó módon beágyazható.*

Bizonyítás: Nyilván elég olyan G_0 gráfot konstruálni, amelybe minden *összefüggő,* megszámlálható gráf a kívánt módon beágyazható. (Megszámlálható sok ilyen gráf egyesítése ugyanis eleget tesz a követelményeknek.)

A konstruálandó G_0 gráf pontjai megszámlálható sok osztályt alkotnak majd: 0. osztály, 1. osztály, 2. osztály stb. A 0. osztály egy pontból: az (∅)-val jelölt üres-mátrixból áll. Az *i.* osztály pontjai ($i \geqq 1$) azok az i nagyságú, pozitív egész értékű háromszög-mátrixok lesznek,

$$P = \begin{pmatrix} d_{10} & & \\ d_{20} & d_{21} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ d_{i0} & d_{i1} & \cdots\ d_{i,i-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

melyekre létezik olyan összefüggő, megszámlálható gráf, hogy pontjait 0, 1, 2, ... számokkal jelölve, k és j pontok távolsága a gráfban d_{kj}-vel egyenlő ($0 \leqq j < k \leqq i$). (Megjegyezzük, hogy ilyen gráf létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy (4) mátrix elemei eleget tegyenek a megfelelő háromszög-egyenlőtlenségeknek.)

Most meghatározzuk, hogy mik lesznek G_0 gráf élei. Két, azonos osztályhoz tartozó pont sosem lesz összekötve. Bármely *i.* osztálybeli P ponthoz (l. (4)) meghatározzuk alacsonyabb osztályhoz tartozó pontok egy sorozatát:

$$P^0 = (\emptyset) \qquad P^1 = (d_{10}) \qquad P^2 = \begin{pmatrix} d_{10} & \\ d_{20} & d_{21} \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} d_{10} & & \\ d_{20} & d_{21} & \\ d_{30} & d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} \ldots P^{i-1} = \begin{pmatrix} d_{10} & & & \\ d_{20} & d_{21} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{i-1,0} & d_{i-1,1} & \ldots & d_{i-1,i-2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

G_0 gráfban P össze lesz kötve P^k-val pontosan akkor, ha $d_{ik} = 1$. Ezeken a pontokon kívül P-nek nincs szomszédja az alacsonyabb osztályokban. Ezzel befejeztük G_0 gráf konstrukcióját.

Hátra van még annak az igazolása, hogy G_0 gráfba minden összefüggő megszámlálható gráf távolságtartó módon beágyazható. Legyen G egy 0, 1, 2, ... pontokon értelmezett összefüggő, megszámlálható gráf. Készítsük el G gráf végtelen távolság-mátrixát:

$$\begin{pmatrix} d_{10} & & & \\ d_{20} & d_{21} & & \\ d_{30} & d_{31} & d_{32} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{6}$$

(Itt $d_{kj} = d_G(k, j)$.) G gráf végtelen távolságmátrixa természetesen egyértelműen meghatározza magát a G gráfot: k és j össze van kötve G-ben pontosan akkor, ha $d_{kj} = 1$. Legyen f_G: $\{0, 1, 2, \ldots\} \to V(G_0)$ függvény a következőképp értelmezve:

$$f_G(0) = (\emptyset)$$

$$f_G(i) = \begin{pmatrix} d_{10} & & & \\ d_{20} & d_{21} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{i0} & d_{i1} & \ldots & d_{i,i-1} \end{pmatrix} \quad \text{ha} \quad i \geqq 1 \tag{7}$$

f_G függvény tehát olyan, hogy G gráf i pontjának egy i. osztálybeli pontot feleltet meg G_0-ban. Az is nyilvánvaló, hogy f_G izomorf módon beágyazza G gráfot G_0-ba.

Mielőtt rátérnénk annak igazolására, hogy f_G beágyazás távolságtartó, szeretnénk utalni fenti konstrukciónk heurisztikus tartalmára. Legyen G és H a $0, 1, 2, \ldots$ pontokon értelmezett két összefüggő, megszámlálható gráf. Jelöljük a $0, 1, 2, \ldots, j$ pontok által G-ben (ill. H-ban) feszített részgráfot G_j-vel (ill. H_j-vel). Kézenfekvőnek tűnik, hogy G_0 gráfot és az f_G, f_H beágyazásokat úgy próbáljuk definiálni, hogy $G_j = H_j$ esetben $f_G(i) = f_H(i)$ teljesüljön minden $i \leqq j$-re. Ez azonban megvalósíthatatlan, ugyanis $G_j = H_j$ mellett is könnyen elképzelhető, hogy $d_G(i_1, i_2) \neq d_H(i_1, i_2)$ bizonyos $i_1, i_2 \leqq j$ számokra, ekkor pedig — f_G és f_H távolságtartó volta miatt — $d_{G_0}(f_G(i_1), f_G(i_2)) \neq d_{G_0}(f_H(i_1), f_H(i_2))$ lenne, ami ellentmondana $f_G(i_1) = f_H(i_1)$, $f_G(i_2) = f_H(i_2)$ feltételezésünknek. f_G és f_H beágyazásainktól tehát legfeljebb annyit várhatunk el, hogy amennyiben $G_j = H_j$ és $d_G(i_1\, i_2) = d_H(i_1, i_2)$ minden $i_1, i_2 \leqq j$ számpárra, akkor $f_G(i) = f_H(i)$ legyen minden $i \leqq j$ esetén. Éppen ennek az elvárásnak tesz eleget a fenti konstrukció.

Hátra van tehát még annak az igazolása, hogy a (7) alatt definiált f_G beágyazás távolságtartó. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát létezik olyan G gráf és (k, j) pontpár $(k > j)$, hogy $d_{G_0}(f_G(k), f_G(j)) \neq d_G(k, j)$. Ekkor persze

$$d_{G_0}(f_G(k), f_G(j)) < d_G(k, j), \tag{8}$$

mert f_G G-nek G_0-ba való izomorf beágyazása. Válasszuk G gráfot és (k, j) párt úgy, hogy (8) teljesüljön és $d_{G_0}(f_G(k), f_G(j)) = d$ a lehető legkisebb legyen. Tekintsünk G_0-ban egy $f_G(k)$-t $f_G(j)$-vel összekötő d hosszúságú utat. Jelölje Q ezen az úton $f_G(k)$ szomszédját. $(Q \neq f_G(j).)$ G_0 konstrukciójából következik, hogy létezik olyan $0, 1, 2, \ldots$ pontokon értelmezett, összefüggő H gráf és $i \neq j, k$ szám, hogy

$$f_H(k) = f_G(k), \quad f_H(j) = f_G(j), \quad f_H(i) = Q. \tag{9}$$

Ez azért biztos, mert $f_G(k), f_G(j)$ és Q olyan háromszögmátrixok, amelyek különböző méretűek, és a legnagyobb közülük szeletként tartalmazza a két kisebbet. (9) miatt persze

$$d_{G_0}(f_H(i), f_H(j)) = d_{G_0}(Q, f_G(j)) = d - 1, \tag{10}$$

ami d-nél kisebb szám, tehát d minimális választása folytán

$$d_H(i, j) = d_{G_0}(f_H(i), f_H(j)) = d - 1 \tag{11}$$

kell, hogy teljesüljön. Q-t úgy választottuk, hogy $f_G(k)$-val szomszédos legyen, más szóval — (9) szerint — $f_H(i)$ és $f_H(k)$ pontok G_0-ban össze vannak kötve. Ez azt jelenti, hogy $d_H(k, i) = 1$, hiszen f_H H-nak G_0-ba való izomorf beágyazása. Ebből és (11)-ből

$$d_H(k, j) \leqq d_H(k, i) + d_H(i, j) = d \tag{12}$$

következik. Másrészt — definíció szerint — $f_H(k)$ mátrix (ill. $f_G(k)$ mátrix) k. sorának $j+1$. eleme $d_H(k, j)$-vel (ill. $d_G(k, j)$-vel) egyenlő, és mivel $f_H(k) = f_G(k)$, ezért $d_H(k, j) = d_G(k, j)$ is érvényes. Ezt (12)-be írva

$$d_G(k, j) \leqq d = d_{G_0}(f_G(k), f_G(j)) \tag{13}$$

adódik, ami ellentmond indirekt feltevésünknek, (8)-nak. Ezzel az 1. tételt igazoltuk.

3. §. *Izometrikus felépíthetőség*

Az 1. tétel bizonyításában szereplő konstrukció alapján természetesnek tűnik a kérdés: igaz-e, hogy bármely összefüggő, megszámlálható G gráf csúcsainak létezik olyan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sorba rendezése, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_i$ csúcsok által feszített részgráf minden i-re izometrikus? (l. 2. definíció).

Erre a kérdésre a válasz tagadó. Ellenpélda a következő páros gráf: az első osztály pontjai a természetes számok, a második osztályba az (i, j) természetes számpárok tartoznak $(i \neq j)$. A második osztály egy tetszőleges (i, j) pontja másodfokú: i-vel és j-vel van összekötve. Megjegyezzük, hogy bár ez a gráf nem rendelkezik a fenti kérdésben megfogalmazott tulajdonsággal, mégis bizonyos értelemben sok izometrikus részgráfja van: pl. minden n-re az n-nél kisebb természetes számok és azok az (i, j) párok, melyekre $i, j < n$ gráfunk egy izometrikus részgráfját feszítik. Ez a gráf tehát eleget tesz a következő definíciónak:

3. definíció: Egy összefüggő, megszámlálható G gráfot izometrikus módon felépíthetőnek mondunk, ha létezik (véges) izometrikus részgráfjainak olyan $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots$ bővülő sorozata, hogy minden $x \in V(G)$ benne van valamelyik G_i-ben.

A fenti kérdés most így enyhíthető: igaz-e, hogy bármely összefüggő, megszámlálható gráf izometrikus módon felépíthető? A válasz még erre az enyhébb kérdésre is tagadó, ahogy azt a következő példa mutatja (l. 1. ábra). G gráf csúcsai legyenek a nemnegatív egész számok. Minden $4k+j$ alakú szám legyen összekötve j-vel $(j=0, 1, 2, 3)$, továbbá i legyen összekötve $i+1$-gyel $(i \geqq 3)$. Könnyű látni, hogy G gráfnak nem lehet olyan H izometrikus részgráfja, amely a 0, 1, 2, 3 csúcsok mindegyikét tartalmazza. Ekkor ugyanis $i \in V(H)$-ból $i+1 \in V(H)$ következne, ami ellentmond H részgráf végességének.

Olyan megszámlálható gráfot sem nehéz konstruálni, amely lokálisan véges, de izometrikus módon nem építhető fel. Igaz azonban a következő

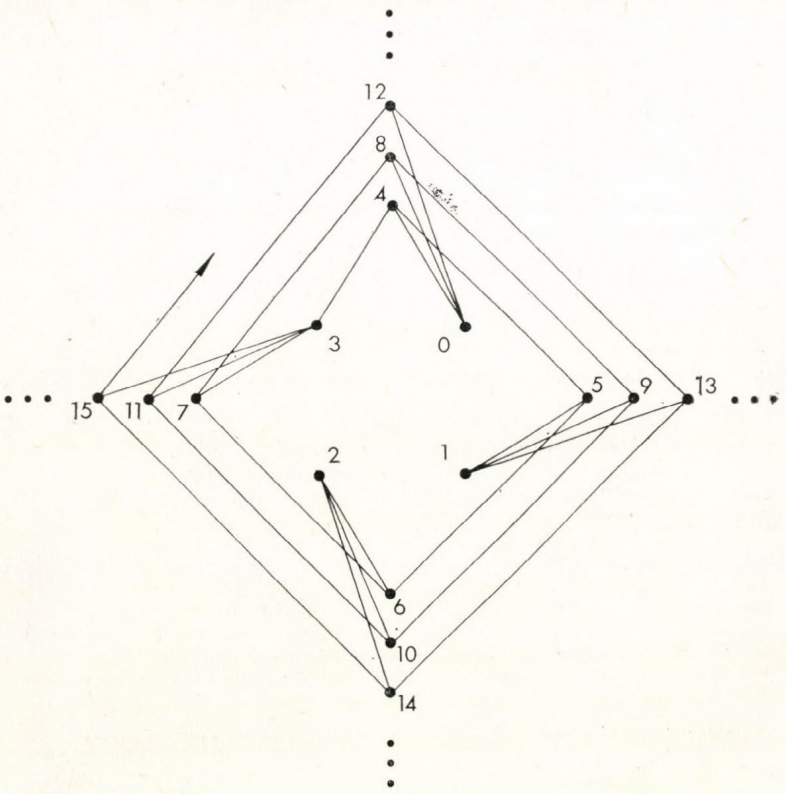
2. tétel: *Minden megszámlálható, síkbarajzolható G gráf izometrikus módon felépíthető.*

Bizonyítás: Itt is, mint az előzőekben, elég azzal az esettel foglalkozni, amikor G összefüggő.

Ahhoz, hogy állításunkat igazoljuk, elég belátni, hogy bármely $P \subset V(G)$ véges ponthalmazhoz létezik olyan $H \subset G$ izometrikus részgráf, amire $P \subset V(H)$. Feltehetjük, hogy a P ponthalmaz által G-ben feszített $G(P)$ részgráf összefüggő (különben P-t alkalmasan bővítjük). $G(P)$ élhalmaza nyilván egyszeresen összefüggő tartományokra bontja a síkot. (Ezek között egy nem lesz korlátos.)

Most definiáljuk ezeknek a tartományoknak a körüljárási számát. Mindnyájan jól tudjuk, hogy egy egyszeresen összefüggő labirintusba zárva úgy győződhetünk meg a legegyszerűbben arról, hogy nincs kivezető út, hogy egyik kezünkkel megérintjük a falat, elindulunk, és mindig követjük a fal irányát, anélkül, hogy kezünk elszakadna tőle. Idővel visszajutunk kiindulási pontunkba. Ha megszámoljuk, hogy körsétánk hány lépést vesz igénybe, megkapjuk a labirintus körüljárási számát. Ha most egy véges sok gráf-él által határolt egyszeresen összefüggő T tartományt járunk be a fenti módon, és azt számoljuk, hogy eközben hány élt érintettünk (multiplicitással), akkor T tartomány $k(T)$ körüljárási számát kapjuk. (Egyes éleket esetleg kétszer érintettünk, mindkét oldalán elsétálva.)

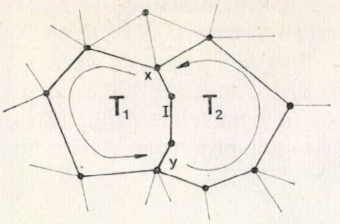
Nézzük most a fent definiált $G(P)$ gráfot. Ha ez G-nek izometrikus részgráfja, akkor készen vagyunk. Ha nem, abban az esetben léteznek olyan $x, y \in P$ pontok, amelyek G gráfban rövidebb úttal is összeköthetőek, mint $G(P)$-ben. Nevezzük az ilyen utakat javító utaknak. Vegyünk egy legrövidebb javító utat, I-t. Jelöljük I út végpontjait x-szel és y-nal. Ezen a két ponton kívül I-nek nem lehet P-hez tartozó pontja, különben I nem lenne minimális javító út. Megállapíthatjuk tehát, hogy



1. ábra

I út teljes egészében benne van a sík $G(P)$ általi felbontásában szereplő egyik tartományban (T-ben). Miután T egyszeresen összefüggő tartomány, ezért I pontosan két egyszeresen összefüggő résztartományra (T_1-re és T_2-re) bontja. Könnyű látni, hogy T_1 és T_2 körüljárási száma határozottan kisebb T körüljárási számánál. T tartomány körüljárása során ugyanis egyszer az (x, y) határszakaszt, majd az (y, x) határszakaszt kell bejárnunk. Mindkét szakasz határozottan hosszabb I-nél, hiszen I javító út. T körüljárási száma tehát (x, y) és (y, x) határszakaszok hosszának összegével egyenlő, és így határozottan nagyobb T_1 (ill. T_2) körüljárási számánál, amely megegyezik I út és az (x, y) határszakasz (ill. az (y, x) határszakasz) hosszának összegével. (l. 2. ábra)

Jelöljük P'-vel azt a ponthalmazt, amely P és I pontjainak egyesítése. A P' által



2. ábra

G-ben feszített $G(P')$ részgráf úgy nyerhető, hogy $G(P)$-hez hozzáillesztjük az I utat, majd egyenként hozzávesszük az esetleges további belső éleket. Minden lépésben egy — az eddigi felbontásban szereplő — tartomány két kisebb körüljárású tartományra esik szét, a többi tartomány pedig változatlan marad.

Vizsgáljuk meg, hogy $G(P')$ részgráf G-nek izometrikus részgráfja-e vajon. Ha igen, készen vagyunk. Ha nem, akkor a fenti eljárást megismételjük $G(P')$-ből kiindulva.

Tételezzük most fel, hogy eljárásunk során az i. lépésben a sík $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tartományokra bomlik. Rendeljük hozzá az i. lépéshez a $K(i)=\sum_{m=1}^{n} 3^{k(T_m)}$ pozitív egész számot, ahol $k(T_m)$ jelöli T_m tartomány körüljárási számát. Miután minden lépésben csak annyi változik, hogy az egyik tartomány két kisebb körüljárású tartományra esik szét, ezért eljárásunk során a $K(i)$ mennyiség minden lépésben határozottan csökken. Így beláttuk, hogy a fenti eljárás véges sok lépésben befejeződik. Az utoljára nyert H gráf G-nek izometrikus részgráfja, melyre $P \subset V(H)$. Ezzel a 2. tételt maradéktalanul igazoltuk.

Befejezésül megjegyezzük, hogy nem nehéz igazolni a következő állítást:

3. tétel: *Minden megszámlálható G gráf távolságtartó módon beágyazható egy izometrikus módon felépíthető, megszámlálható H gráfba.*

Az 1. tétel alapján nyilvánvaló, hogy az itt szereplő H gráf G-től függetlenül választható.

IRODALOM

[1] R. Rado: Universal graphs and universal functions, Acta Arithmetica 9 (1964), 331—340.
[2] E. Howorka: Graphs universal for isometric embeddings. Problems. Proc. of the 8th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph theory and Computing, Baton Rouge, 1977.

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СЧЁТНЫХ ГРАФОВ

ЯНОШ ПАХ

ON METRIC PROPERTIES OF COUNTABLE GRAPHS

J. PACH

R. Rado showed in [1] that there exists a countable graph G such that, for any countable graph H there is a one-to-one mapping $f: V(H) \to V(G)$ for which $\{f(x), f(y)\} \in E(G)$ if and only if $\{x, y\} \in E(H)$. Solving a problem of E. Howorka we prove the following stronger theorem: There is a countable graph G_0 such that, for any countable graph H there is a mapping $f: V(H) \to V(G)$ such that $d_G(f(x), f(y)) = d_H(x, y)$ holds for any $x, y \in V(H)$. (Here $d_H(x, y)$ denotes the distance of x and y in H.)

A subgraph $H \subset G$ is isometric subgraph of G if $d_H(x, y) = d_G(x, y)$ for any $x, y \in V(H)$. A countable graph G is called isometrically constructible if there exists an infinite sequence of finite isometric subgraphs of $G: H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots G$ such that any $x \in V(G)$ is contained in some $V(H_i)$. The following theorem is proved: Every countable planar graph is isometrically constructible. At this point we mention a problem of S.M. Ulam: Does there exist a countable planar graph G such that any countable planar graph can be embedded into G?

VÉGTELEN MATROIDOK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

GYŐRI ERVIN

Bevezetés

Véges matroidoknak nagyon sok ekvivalens axiómarendszere ismert, közülük sok megtalálható [1]-ben és [2]-ben. Ezek között hét olyan független halmazokra vagy körökre épülő axiómarendszer van, amely szó szerint vagy természetes módosítással átvihető végtelen alaphalmazra is. Érdekes, hogy a végtelen esetben ezek közül semelyik kettő sem ekvivalens. A cikkben meghatározzuk ezen axiómarendszerek pontos viszonyát egymáshoz.

Nézzük most az említett hét, végtelen alaphalmazra is átvihető axiómarendszert.

a) Legyen S véges halmaz, $\mathcal{F}$ pedig S részhalmazainak egy rendszere. $\mathcal{F}$ elemeit független halmazoknak, az $M=(S, \mathcal{F})$ párt pedig matroidnak nevezzük, ha fennáll:

(1)
1. $\emptyset\in\mathcal{F}$.
2. $X\in\mathcal{F}$, $Y\subseteq X\Rightarrow Y\in\mathcal{F}$.
3. $X\in\mathcal{F}$, $Y\in\mathcal{F}$, $|X|>|Y|\Rightarrow\exists\, x\in X-Y$: $Y\cup\{x\}\in\mathcal{F}$.

b) Véges matroidban a maximális független halmazokat bázisoknak nevezzük. A bázisok teljesítik a következő tulajdonságokat:

(2)
1. *Minden bázis azonos elemszámú.*
2. *Ha B_1, B_2 bázisok és $x\in B_1$, akkor van olyan $y\in B_2$ hogy $(B_1-\{x\})\cup\{y\}$ bázis.*

Fordítva, ha adott S részhalmazainak egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező rendszere, akkor ez pontosan egy matroid bázisainak a halmaza. Független halmazok a bázisok részhalmazai.

Léteznek bázisokra vonatkozó (2)-vel ekvivalens más axiómarendszerek is:

(3)
1. *Minden bázis azonos elemszámú.*
2. *Ha B_1, B_2 bázisok és $x\in B_1$, akkor van olyan $y\in B_2$, hogy $(B_2-\{y\})\cup\{x\}$ bázis.*

(4)
1. *Minden bázis azonos elemszámú.*
2. *Ha B_1, B_2 bázisok és $x\in B_1$, akkor van olyan $y\in B_2$, hogy $(B_1-\{x\})\cup\{y\}$ és $(B_2-\{y\})\cup\{x\}$ is bázis.*

c) Egy $K\subseteq S$ halmazt körnek nevezünk, ha K nem független, de minden valódi részhalmaza független halmaz. A körök rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

(5)
1. *Az üres halmaz nem kör.*
2. *Egyik kör sem tartalmazza a másikat.*
3. *Ha K_1, K_2 körök és $x\in K_1\cap K_2$, akkor létezik olyan K_3 kör, hogy $K_3\subseteq(K_1\cup K_2)-\{x\}$.*

Létezik egy körökre vonatkozó másik, látszólag erősebb axiómarendszer is:

1. *Az üres halmaz nem kör.*
2. *Egyik kör sem tartalmazza a másikat.*
(6) 3. *Ha* K_1, K_2 *körök,* $x \in K_1 \cap K_2$ *és* $y \in K_1 - K_2$, *akkor* $(K_1 \cup K_2) - \{x\}$ *tartalmaz olyan* K_3 *kört, hogy* y K_3.

Az (5) és (6) esetében is igaz, hogy ha adott S részhalmazainak egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező rendszere, akkor pontosan egy olyan matroid létezik, melynek ezek a körei. Függetlenek a kört nem tartalmazó halmazok.

d) Végül nézzünk még egy — ritkán említett — axiómarendszert: Legyen S véges halmaz, $\mathcal{F}$ S részhalmazainak egy rendszere (független halmazok). Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt matroidnak nevezzük, ha fennáll

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $X \in \mathcal{F}$, $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
(7) 3. *Ha* $X \in \mathcal{F}$, *de* $X \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$, *akkor* $X \cup \{x\}$ *pontosan egy kört tartalmaz. (Kör definíciója mint c)-ben.)*

Ez is ekvivalens az előző axiómarendszerekkel. Az ekvivalenciák bizonyítása megtalálható [1]-ben.

Vegyük észre, hogy az (5), (6), (7) axiómarendszerek szó szerint átvihetők tetszőleges (nem feltétlen véges) halmazokra is.

Brualdi és Scrimger [3]-ban szintén megfogalmaz egy axiómarendszert, amely véges esetben ekvivalens az eddigi axiómarendszerekkel: Legyen S tetszőleges halmaz, $\mathcal{F}$ S részhalmazainak egy rendszere (független halmazok). Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt csererendszernek (exchange system) nevezzük, ha $\mathcal{F}$ kielégíti a következő axiómákat:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $X \in \mathcal{F}$, $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.
(8) 3. *Ha* $T \subseteq S$, $X \subseteq T$, $Y \subseteq T$ *és* X, Y *maximális független halmazok* T*-ben, akkor minden* $x \in X$ *elemhez létezik* $y \in Y$, *hogy* $(X - \{x\}) \cup \{y\}$ *és* $(Y - \{y\}) \cup \{x\}$ *is maximális független halmaz* T*-ben.*

Vegyük észre, hogy ez az axiómarendszer a (4) axiómarendszer független halmazokkal való megfogalmazásának természetes általánosítása végtelen alaphalmazra. Ugyancsak ha (8) 3. axiómáját alkalmasan gyengítjük, akkor (2) és (3) független halmazokkal való megfogalmazásának természetes általánosítását kapjuk.

1. *és 2. ugyanaz, mint* (8)*-ban.*
3. *Ha* $T \subseteq S$, $X \subseteq T$, $Y \subseteq T$ *és* X, Y *maximális független halmazok* T*-ben, akkor*
(9) *minden* $x \in X$*-hez létezik* $y \in Y$, *hogy* $(X - \{rx\}) \cup \{y\}$ *maximális független halmaz* T*-ben.*
1. *és 2. ugyanaz, mint* (8)*-ban.*
3. *Ha* $T \subseteq S$, $X \subseteq T$, $Y \subseteq T$ *és* X, Y *maximális független halmazok* T*-ben, akkor*
(10) *minden* $x \in X$*-hez létezik* $y \in Y$, *hogy* $(Y - \{y\}) \cup \{x\}$ *maximális független halmaz* T*-ben.*

Véges matroidoknak egy természetes, de az (1) axiómarendszerben nem szereplő megkötést is tartalmazó általánosítása a véges karakterű matroid, melynek axiómái a következők:

1. *és* 2. *ugyanaz, mint* (1)*-ben.*

(11) 3. $X, Y \in \mathcal{F}, |Y| < |X| < \infty \Rightarrow \exists\, x \in X - Y: Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

4. *Ha* $X \in \mathcal{F}$ *teljesül egy adott* F *halmaz minden véges* X *részhalmazára, akkor* $F \in \mathcal{F}$.

Ha végtelen S halmazokat is megengedünk, akkor az (5)-nek eleget tevő struktúrákat gyenge körmatroidnak, a (6)-nak eleget tevő struktúrákat erős körmatroidnak, a (7)-nek eleget tevőket IC-matroidnak (Independent-Circuit, független kör), a (9)-nek eleget tevőket bázismatroidnak, a (10)-nek eleget tevőket fordított bázismatroidnak nevezzük. Az utóbbi két elnevezés alapja, hogy (2) 2. axiómáját báziskicserélési tulajdonságnak, (3) 2. axiómáját pedig fordított báziskicserélési tulajdonságnak szokás nevezni.

A különböző axiómarendszerek viszonya

Ebben a pontban az (5), (6), (7), (8), (9), (10) és (11) axiómarendszerek egymáshoz való viszonyát vizsgáljuk meg, ha S tetszőleges halmaz. Ezek mindegyikében a körök vagy a független halmazok tekinthetők alapfogalmaknak, ezekre vonatkoznak az axiómák.

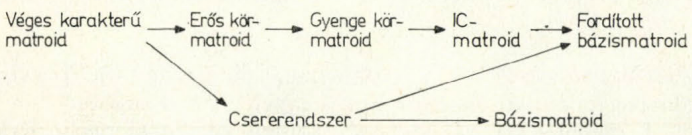
Definíció: Minden struktúrában definiálható a másik fogalom is: kör az olyan halmaz, amely nem független, de minden valódi része független; független az a halmaz, amely nem tartalmaz kört. Azt mondjuk, hogy az (i) axiómarendszer erősebb, mint a (*j*) axiómarendszer, ha

1. Minden (*i*)-nek eleget tevő struktúrában a (*j*)-ben előforduló fogalmak kielégítik (*j*)-t.
2. Ha pedig ezután a (*j*) axiómarendszer alapfogalmából visszaszármaztatjuk az (*i*) axiómarendszer alapfogalmát, az annak megfelelő halmazrendszer azonos lesz a neki eredetileg megfelelő halmazrendszerrel.

Ha (*i*) erősebb, mint (*j*) és (*j*) erősebb, mint (*i*), akkor az (*i*) és (*j*) axiómarendszereket ekvivalensnek nevezzük. Ha (*i*) erősebb, mint (*j*), de (*j*) nem erősebb, mint (*i*), akkor azt mondjuk, hogy (*i*) szigorúan erősebb axiómarendszer, mint (*j*). Ha (*i*) sem erősebb (*j*)-nél és (*j*) sem erősebb (*i*)-nél, akkor az (*i*) és (*j*) axiómarendszereket összemérhetetlennek nevezzük. Vegyük észre, hogy az „erősebb" reláció tranzitív a vizsgált axiómarendszerek halmazán.

A következő tételt fogjuk bebizonyítani:

1. Tétel: *Ha nyíl vagy irányított nyílsorozat jelöli a szigorúan erősebb relációt az axiómarendszerek között, akkor a következő ábra mutatja a kapcsolatot a vizsgált struktúrák között:*



(A nyíl vagy nyílsorozat az erősebb axiómarendszerű struktúrától mutat a gyengébb felé; ha nincs irányított nyílsorozat köztük, akkor nem is erősebb egyik sem.)

A tételt 12 állításra bontva bizonyítjuk, állításunk ezekből és az „erősebb" reláció tranzitivitásából következik.

1. Állítás: *Ha egy S alaphalmazú M struktúra eleget tesz az (i) axiómarendszernek, akkor $T \subseteq S$ esetén az a T alaphalmazú struktúra is eleget tesz (i)-nek, amelynek körei ill. független halmazai M-nek a T által tartalmazott körei ill. független halmazai. Ezt a struktúrát M T-re vonatkozó megszorításának nevezzük.*

Bizonyítás: Triviális.

2. Állítás: *Véges karakterű matroidban minden kör véges és minden összefüggő (nem független) halmaz tartalmaz kört.*

Bizonyítás: Az állítás első része triviális (11) 4. axiómájából. Szintén (11) 4. axiómájából következik, hogy minden összefüggő halmaznak van véges összefüggő részhalmaza, ez pedig nyilván tartalmaz minimális összefüggő halmazt, vagyis kört.

3. Állítás: (11) *erősebb axiómarendszer, mint* (6); (6) *erősebb axiómarendszer, mint* (5); (8) *erősebb axiómarendszer, mint* (9); (8) *erősebb axiómarendszer, mint* (10).

Bizonyítás: Az állítás első része következik az 1. és 2. Állításból valamint az axiómarendszerek véges halmazon való ekvivalenciájából, a többi triviális.

4. Állítás: *Az* (5) *axiómarendszer erősebb, mint* (7).

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy M (5)-t kielégítő struktúra. Ekkor definiálva a független halmazokat (7) 1. és 2. axiómája triviális. Legyen F független halmaz és $F \cup \{x\}$ összefüggő. Ekkor $F \cup \{x\}$ tartalmazza M egy K körét, amely nyilván most is kör lesz. Tegyük fel, hogy $F \cup \{x\}$-ben létezik egy K_1 kör is. Ekkor K_1 nyilván kör M-ben is. De $x \in K_1 \cap K$ és (5) 3. axiómája szerint létezik kör $(K_1 \cup K_2) - \{x\}$-ben, azaz F-ben. Viszont F definíció szerint független, tehát K az egyetlen kör $F \cup \{x\}$-ben.

2. Triviális.

5. Állítás: *Legyen M IC-matroid, Y független, $Y \cup \{x\}$ összefüggő halmaz. $Y \cup \{x\}$-ben legyen K az egyetlen kör és tegyük fel, hogy $K \neq \{x\}$. Ekkor tetszőleges $y \in K - \{x\}$ elemre $(Y - \{y\}) \cup \{x\}$ független halmaz.* (7) *erősebb axiómarendszer erősebb, mint* (10).

Bizonyítás: $Y - \{y\}$ független halmaz (7) 2. axiómája alapján, így $(Y - \{y\}) \cup \{x\}$ nem tartalmazhat kört, mert az K-tól különböző lenne, $Y \cup \{x\}$ is tartalmazná és ez ellentmondana (7) 3. axiómájának. Tehát $(Y - \{y\}) \cup \{x\}$ nem összefüggő, azaz független halmaz. Ha $(Y - \{y\}) \cup \{x\} \cup \{z\}$ független, akkor az állítás első részét alkalmazva $(((Y - \{y\}) \cup \{x\} \cup \{z\}) - \{x\}) \cup \{y\} = Y \cup \{z\}$ is független halmaz, s ebből következik az állítás második része is.

6. Állítás: *Tetszőleges véges karakterű matroid kielégíti* (8)*-t, azaz* (11) *erősebb axiómarendszer, mint* (8).

Bizonyítás: Nyilván csak (8) 3. axiómáját kell bizonyítani. Legyen $T \subseteq S$ és X, Y maximális független halmazok T-ben. Legyen $x \in X$. Feltehető, hogy $x \in X - Y$, ugyanis $x \in X \cap Y$ esetén $y = x$ választással azonnal készen lennénk. Ekkor $Y \cup \{x\}$ összefüggő, így a 2. Állítás miatt tartalmaz egy K_1 véges kört. $K_1 \not\subseteq X$, legyen $K_1 - X = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Ha $n = 1$, akkor legyen $K = K_1$. Tegyük fel, hogy $n > 1$. Ekkor $X \cup \{y_n\}$ tartalmaz egy C_1 véges kört. Ha $x \in C_1$, akkor legyen $K = C_1$. Tegyük fel, hogy $x \notin C_1$. Ekkor a 3. Állítás miatt K_1-re és C_1-re alkalmazható (6) 3. axiómája, létezik tehát egy olyan K_2 kör, hogy $y_n \notin K_2$, $x \in K_2$, $K_2 \subset K_1 \cup C_1$. És $K_2 - X$ elemszáma most

már kisebb, mint n. Ezt folytatva végül kapok egy olyan K kört, amely tartalmazza x-t, $K-X$ egy elemű — legyen ez az elem y —, és $y \in \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$.

Állítás: *Ekkor* $(X-\{x\}) \cup \{y\}$ *maximális független halmaz* T*-ben.*

Bizonyítás: $X-\{x\}$ független halmaz és ha $(X-\{x\}) \cup \{y\}$ összefüggő, akkor $(X-\{x\}) \cup \{y\}$-ben létezik egy y-t tartalmazó K-tól különböző C kör. Ekkor C-re és K-ra alkalmazva (5) 3. axiómáját ((11) erősebb, mint (5)) azt kapjuk, hogy X tartalmaz kört, ellentmondás. Tehát $(X-\{x\}) \cup \{y\}$ független halmaz. Tegyük fel, hogy nem maximális független halmaz, azaz valamilyen $z \in T-((X-\{x\}) \cup \{y\})$ elemre $(X-\{x\}) \cup \{y, z\}$ is független halmaz. De (11) erősebb, mint (7), így $X \cup \{y, z\}$ pontosan egy kört tartalmaz — ez csak K lehet —, de akkor $X \cup \{z\}$ nem tartalmaz kört, tehát a 2. Állítás szerint független, ami ellentmond X maximalitásának T-ben.

Állítás: $(Y-\{y\}) \cup \{x\}$ *is maximális független halmaz* T*-ben.*

Bizonyítás: Felhasználva az 5. Állítást, és hogy (11) erősebb, mint (7) azt kapjuk, hogy $(Y-\{y\}) \cup \{x\}$ független halmaz, a maximalitás pedig ugyanúgy bizonyítható, mint $(X-\{x\}) \cup \{y\}$ esetében.

7. Állítás: *Az* (5) *axiómarendszer nem erősebb, mint* (6).

Bizonyítás: Az állítást a következő struktúra bizonyítja: Legyen S a $\{\ldots, -3, -2, -1, +1, +2, +3, \ldots\}$ számhalmaz. Legyenek körök a következő halmazok: $A=\{\ldots, -3, -2, -1, +1\}$, valamint azok az X_i halmazok, amelyek úgy keletkeznek a $B=\{+1, +2, +3, \ldots\}$ halmazból, hogy belőle k számot elhagyunk és k számot hozzáveszünk a $\{\ldots, -4, -3, -2\}$ halmazból ($k=0, 1, 2, \ldots$). A konstrukcióból triviális, hogy (5) 1. és 2. axiómája teljesül. Nézzük a 3. axiómát: Valamely X_i és A esetén $x \in X_i \cap A$ elemhez tetszőleges $z \in \{\ldots, -4, -3, -2\}-X_i$ elemet véve $(X_i-\{x\}) \cup \{z\}$ kör. Nézzük valamely X_i és X_j kör esetét. Legyen P a pozitív, N a negatív számok halmaza. Vegyük észre, hogy $|(X_i \cup X_j) \cap N| > |P-(X_i \cup X_j)|$, ha $X_i \neq X_j$, így $(X_i \cup X_j)-\{x\}$ még tartalmaz egy X_m kört tetszőleges $x \in X_i \cap X_j$ elemre. Tehát a struktúra kielégíti az (5) axiómarendszert. Ugyanakkor A, B körök, de nem létezik olyan kör, amely a $-1 \in A-B$ elemet tartalmazza, de a $+1 \in A \cap B$ elemet vesz. Tehát a struktúrában a körök nem elégítik ki (6) 3. axiómáját.

8. Állítás: (7) *nem erősebb axiómarendszer, mint* (5).

Bizonyítás: Legyen S tetszőleges végtelen halmaz és S véges részhalmazai legyenek a független halmazok. Ez a struktúra nem tartalmaz kört, így nyilvánvaló, hogy a struktúrában teljesülnek (5) és (7) axiómái. De a körökből visszaszármaztatva a független halmazokat azt kapjuk, hogy S minden részhalmaza független, jóllehet eredetileg csak a végesek voltak azok.

9. Állítás: (8) *nem erősebb axiómarendszer, mint* (7).

Bizonyítás: Legyen $S=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Legyen független az $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmaz és minden részhalmaza, valamint a véges halmazok. Ekkor (8) 1. és 2. axiómája triviális, 3. axiómája pedig semmitmondó, mivel S minden T részhalmazában pontosan egy maximális független halmaz van: ha T véges, akkor önmaga, ha végtelen, akkor a $T-\{0\}$ halmaz. Ugyanakkor nem teljesül (7) 3. axiómája, ugyanis könnyen látható, hogy kör nincs a struktúrában: Tegyük fel, hogy K kör. Ekkor K szükségképpen végtelen halmaz és $0 \in K$. De K-ból tetszőleges 0-tól különböző számot

elhagyva összefüggő halmazt kapok, ellentmondás. Másrészt $\{1, 2, 3, \ldots\}$ független, de $\{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{0\}$ összefüggő halmaz.

10. Állítás: *Sem a* (8), *sem a* (6) *axiómarendszer nem erősebb, mint a* (11) *axiómarendszer.*

Bizonyítás: Legyen S tetszőleges végtelen halmaz. Legyen kör maga az S halmaz, független pedig S minden valódi részhalmaza. Ekkor triviális, hogy a független halmazok és a körök kölcsönösen származtatják egymást, azaz ugyanaz a struktúra definiálható mind a független halmazokkal, mind a körökkel. Triviális, hogy a megfelelő fogalmak kielégítik a (8), ill. (6) axiómarendszert. Ugyanakkor S-re nem teljesül (11) 4. axiómája.

11. Állítás: *A* (6) *axiómarendszer nem erősebb, mint a* (9).

Bizonyítás: Legyen S az egész számok halmaza, körök legyenek az $\{i, -i\}$ halmazok ($i=1, 2, 3, \ldots$), az $A=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ halmaz és azok a halmazok, amelyek úgy keletkeznek A-ból, hogy véges sok szám helyett a megáltját veszem. Ekkor (6) 1. és 2. axiómája triviális, nézzük a 3. axiómáját: Egy két elemű és egy végtelen elemszámú kör metszete mindig egyelemű, és a szimmetrikus differencia mindig kör, így ebben az esetben teljesül (6) 3. axiómája. Ha K_1 és K_2 végtelen körök és $x \in K_1 - K_2$, akkor $-x \in K_2 - K_1$, tehát bárhogy veszek is egy elemet $K_1 \cap K_2$-ből, azt nem tartalmazza az $\{x, -x\}$ kör. Ez igazolja, hogy ebben az esetben is teljesül (6) 3. axiómája. Ugyanakkor $C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ és $B = \{+1, +2, +3, \ldots\}$ maximális független (kört nem tartalmazó) halmazok S-ben. De nyilván nem létezik olyan $x \in B$, hogy $(C - \{0\}) \cup \{x\}$ független legyen. Tehát ebben a struktúrában a független halmazok nem elégítik ki (9) 3. axiómáját.

12. Állítás: *A* (9) *axiómarendszer nem erősebb, mint* (10).

Bizonyítás: Legyen S az egész számok halmaza. Független halmazok legyenek a pozitív számok halmaza, a negatívak halmazának és egy nemnegatív számnak az uniója, azok a halmazok, amelyek úgy keletkeznek az eddigiek valamelyikéből, hogy véges sok szám helyett a negáltját vesszük, feltéve, hogy az még nincs a halmazban, az összes eddigi halmazok részhalmazai és az összes véges halmaz. Legyen $T \subseteq S$ és X, Y maximális független halmazok T-ben, $x \in X$. Vegyük észre, hogy tetszőleges maximális független halmaz belemetsz minden olyan $\{x, -x\}$ párba ($x \neq 0$), melyre $\{x, -x\} \cap T \neq \emptyset$. Tehát ha $x \neq 0$, akkor x vagy $-x$ eleme Y-nak. Ha $x \in Y$, akkor $(X - \{x\}) \cup \{x\}$ maximális független, ha $-x \in Y$, akkor $(X - \{x\}) \cup \{-x\}$ maximális független, kivéve ha $-x \in X$. De ha $\{-x, x\} \subset X$, akkor X a negatívak halmazának és a $\{-x, x\}$ párnak az uniójából úgy keletkezett, hogy véges soknak a negáltját vettük, majd a halmazt megszorítottuk T-re. (Csak akkor lehet benne negált pár.) De akkor tetszőleges $y \in Y - X$-re vagy $y=0$ vagy $(X - \{x\}) \cup \{y\}$-ban pontosan egy negált pár szerepel. Mindkét esetben nyilván $(X - \{x\}) \cup \{y\}$ is maximális független, mivel ez is minden T-t metsző negált párból tartalmaz elemet. Ha $x=0$, akkor hasonló gondolatmenettel tetszőleges $y \in Y - X$-re $(X - \{x\}) \cup \{y\}$ maximális független halmaz. Ugyanakkor (10) 3. axiómája nem teljesül, mivel $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ és $\{+1, +2, +3, \ldots\}$ maximális független halmazok S-ben, de nem létezik olyan pozitív szám, melyet elhagyva $\{+1, +2, +3, \ldots\} \cup \{0\}$-ból független halmazt kapnánk.

Végül megemlítünk két további tételt, amelyek végtelen matroidok előállításáról és kapcsolatáról szól:

2. Tétel: (Brualdi—Scrimger [3]). *Legyen G tetszőleges páros gráf (a pontok száma és foka is lehet végtelen) $V(G)=S\cup T$ ponthalmazzal. Egy $X\subseteq S$ halmazt függetlennek nevezünk, ha létezik ráilleszkedő független élhalmaz.*

Állítás: *A független halmazok kielégítik a csererendszer-axiómákat.*

3. Tétel: (Győri [4]): *Legyen G tetszőleges páros gráf, $V(G)=S\cup T$ a pontok halmaza. Legyen adott S-n egy $M=(S,\mathcal{F})$ véges karakterű matroid. Egy $X\subseteq T$ halmazt függetlennek nevezünk, ha létezik ráilleszkedő független élhalmaz, hogy ezen élek S-beli végpontjai $\mathcal{F}$-beli halmazt alkotnak.*

Állítás: *A T-beli független halmazok kielégítik az IC-matroid-axiómákat.*

IRODALOM

[1] C. P. Bruter, Elements de la théorie des matroides, Springer (*Lecture notes in math.*, 387), 1974.
[2] Lovász László, A matroidelmélet rövid áttekintése, *Matematikai Lapok*, 22 (1971) 249—268.
[3] Brualdi-Scrimger, Exchange systems, matchings and transversals, *J. Comb. Th.* 5 (1968) 244—257.
[4] E. Győri, On the structures induced by bipartite graphs and matroids of finite character (megjelenés alatt a *Discr. Math.*-ban).

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРОИДОВ

ЕРВИН ДЬЁРИ

COMPARISON OF INFINITE MATROIDS

E. GYŐRI

FELADATROVAT

SZERKESZTIK: CSÁSZÁR ÁKOS ÉS LOVÁSZ LÁSZLÓ

1. Egy $n \times n$-es mátrix elemei különböző egész számok. Bizonyítandó, hogy van két szomszédos (oszlopban vagy sorban egymás mellett álló) elem, melyek különbsége legalább n.

FRANK ANDRÁS

2. Egy H síkbeli ponthalmaz azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely $\binom{k+2}{2}$ pontjához van k egyenes, mely ezeket a pontokat mind tartalmazza. Bizonyítandó, hogy van k egyenes, mely a halmaz összes pontját tartalmazza.

LOVÁSZ LÁSZLÓ

3. Adjuk meg az összes olyan grupoidot, melyben minden ekvivalencia-reláció egyben kongruencia-reláció is.

FREUD RÓBERT

Megoldott feladatok

Megjegyzés a 190. *feladat megoldásához.* Ez a feladat a

$$2x^2 - 1 = (2a^2 - 1)(y^2 - 2) \tag{1}$$

diofantikus egyenletre vonatkozott, és annak megmutatását kívánta, hogy az egyenletnek adott $a \neq 0$ egész szám mellett végtelen sok egész számpárokból álló megoldása van.

A közölt megoldás (Mat. Lapok *24* (1973), 434—435) szerint végtelen sok ilyen megoldás nyerhető akár az

$$x_0 = 2a^2 + a - 1, \qquad y_0 = 2a + 1, \tag{2}$$

akár az

$$x_0 = 2a^2 - a - 1, \qquad y_0 = 2a - 1 \tag{3}$$

megoldásból kiindulva az

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2a(2a^2 - 1)y_n + (4a^2 - 1)x_n, \\ y_{n+1} &= (4a^2 - 1)y_n + 4ax_n \end{aligned} \tag{4}$$

rekurzióval. Ezzel kapcsolatban Surányi János azt kérdezi, vajon ezek adják-e az egyenlet összes egész értékű megoldásait.

Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolhassunk, mindenekelőtt célszerű a feladatot új jelölések bevezetésével szimmetrikusabb alakba önteni. Legyen

$$u=2x, \quad v=y, \quad b=2a; \tag{5}$$

így (1) a következőbe megy át:

$$u^2-2=(b^2-2)(v^2-2), \tag{6}$$

s ennek adott páros $b\neq 0$ mellett olyan egész értékű megoldásait kell keresni, amelyekben u is páros. Kissé általánosabban (6) összes egész értékű megoldásait vizsgálni fogjuk nem szükségképpen páros egész $b\neq 0$ mellett, és páros b esetén megengedett megoldásról fogunk beszélni, ha u páros.

Vezessük be a

$$T=\begin{pmatrix} b^2-1 & b(b^2-2) \\ b & b^2-1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

mátrixot. Könnyű számolás mutatja, hogy ha

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{8}$$

akkor

$$(u'^2-2)-(b^2-2)(v'^2-2)=(u^2-2)-(b^2-2)(v^2-2),$$

s innen látszik, hogy ha (u, v) megoldása (6)-nak, akkor ugyanez áll (u', v')-re is, valamint természetesen az

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{9}$$

képlettel értelmezett (u'', v'')-re is; mégpedig egész értékű (u, v) esetén ugyanilyen (u', v') és (u'', v'') is, az utóbbi a könnyen ellenőrizhető

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} b^2-1 & -b(b^2-2) \\ -b & b^2-1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

összefüggésből következik. Ha b páros, akkor (u, v)-vel együtt láthatóan (u', v') és (u'', v'') is megengedett.

Új jelöléseinkkel mármost (2) és (3) az

$$(u_0, v_0)=(b^2+b-2, b+1) \tag{11}$$

illetőleg

$$(u_0, v_0)=(b^2-b-2, b-1) \tag{12}$$

alakot ölti, a (4) rekurzió pedig az

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

képletbe megy át. A kérdés tehát az, hogy páros $b\neq 0$ esetén (6) összes megengedett megoldásait megadja-e (13) a (11), ill. (12) alapmegoldásokból kiindulva.

A kérdésre ebben a formában triviálisan negatív a válasz, hiszen bármely páros $b\geqq 2$ esetén a (11) és (12) alapmegoldások nemnegatív számokból állnak, és ez a tulajdonságuk megmarad a (7) alatti T transzformáció alkalmazásakor is, viszont

(6)-nak nyilván vannak negatív számot is tartalmazó megengedett megoldásai, ugyanis (6) egész értékű (megengedett) megoldásából ugyanilyet kapunk, ha u és v egyikének előjelét ellenkezőre változtatjuk. Negatív számot is tartalmazó megoldásokhoz vezet még (kevésbé triviálisan) a T^{-1} transzformáció ismételt alkalmazása, így pl. (11)-ből a

(14) $$(-b^2+b+2,\ b-1),$$

(12)-ből a

(15) $$(-b^2-b+2,\ b+1)$$

megoldás adódik, amelyek rendre (12)-ből, ill. (11)-ből nyerhetők előjelváltoztatással.

Érdemleges problémához eszerint akkor jutunk, ha azt kérdezzük, megadja-e (13) a (11) és (12) alapmegoldásokból kiindulva az összes nemnegatív számokból álló megengedett megoldásokat, vagy pedig azt, hogy megkaphatók-e az összes megengedett megoldások (11)-ből vagy (12)-ből kiindulva és véges sokszor alkalmazva a T, T^{-1}, M, N mátrixú transzformációkat, ahol az u, ill. v előjelváltoztatását végrehajtó

(16) $$M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

jelöléseket vezettük be.

Megmutatjuk, hogy még ebben a pontosabban körvonalazott formában is mindkét változatban negatív a válasz, mégpedig b-nek végtelen sok páros értékénél. Elég e célból a második változattal foglalkozni, ha ugyanis b-nek egy adott értékénél T ismételt alkalmazása megadna minden nemnegatív megengedett megoldást, akkor ezekből M és N alkalmazásával az összes megengedett megoldások előállnának.

Azt állítjuk mármost, hogy adott páros $b\geqq 2$ esetén a (11)-ből vagy (12)-ből T, T^{-1}, M, N ismételt alkalmazásával keletkező bármely (u, v) megoldásban $|v|\geqq b-1$. Elég ezt T és T^{-1} esetére belátni, ugyanis a könnyen igazolható

(17) $$MT=T^{-1}M,\quad MT^{-1}=TM,\quad NT=T^{-1}N,\quad NT^{-1}=TN$$

összefüggések felhasználásával bármely T, T^{-1}, M, N tényezőket tartalmazó mátrixszorzatban az M és N tényezők a szorzat elejére hozhatók. Ha viszont (u, v) (11) vagy (12) alakú alapmegoldás, akkor benne $u\geqq 0$, $v\geqq b-1$, s rögtön világos, hogy ezek az egyenlőtlenségek érvényben maradnak T alkalmazása után is, tehát ugyanezek érvényesek az alapmegoldásokból T^n alkalmazásával nyerhetőkre, ahol n tetszőleges természetes szám. Másrészt az alapmegoldásokból T^{-1} alkalmazásával keletkező (14) és (15) alakú (u, v) megoldásokban $u\leqq 0$, $v\geqq b-1$, és (10)-ből látszik, hogy ezeket az egyenlőtlenségeket T^{-1} alkalmazása nem rontja el, tehát fennállnak ezek az alapmegoldásokból T^{-n} alkalmazásával nyerhető megoldásokra is. Ezzel az állítást igazoltuk. (Látszik egyébként (14)-ből és (15)-ből, hogy (11) és (12) közül elég lett volna az egyiket felhasználni.)

Most már csak azt kell megmutatni, hogy b-nek végtelen sok páros, pozitív értéke mellett van (6)-nak olyan megengedett megoldása is, amelyben $|v|<b-1$. Belátjuk, hogy ez még akkor is igaz, ha v-nek előírt 1-nél nagyobb páratlan értéket adunk.

Minthogy most b értékét is változtatni fogjuk, írjunk helyette w-t, tehát adjuk (6)-nak az

(18) $$u^2-2=(v^2-2)(w^2-2)$$

alakot. Ennek egész értékű megoldásait fogjuk vizsgálni, közülük megengedettnek nevezve azokat, amelyekben u és w páros. Tudjuk az eddigiekből, hogy ha (u, v, w)

(18)-nak egész értékű (megengedett) megoldása, akkor ugyanez érvényes (u', v', w')-re is, ahol akár

$$w' = w, \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} w^2-1 & w(w^2-2) \\ w & w^2-1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

akár

$$w' = w, \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} w^2-1 & -w(w^2-2) \\ -w & w^2-1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Azonban (18)-nak v-re és w-re vonatkozó szimmetriáját felhasználva ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha

$$v' = v, \quad \begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} v^2-1 & v(v^2-2) \\ v & v^2-1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

vagy pedig

$$v' = v, \quad \begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} v^2-1 & -v(v^2-2) \\ -v & v^2-1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

(Itt u és w páros voltából triviálisan látszik u' és w' párossága.)

Ha most $v \geqq 3$ adott páratlan szám, akkor a (12)-nek megfelelő

$$(w^2-w-2,\ v,\ w) \quad (w=v+1)$$

megengedett megoldásból kiindulva S ismételt alkalmazásával végtelen sok olyan további megengedett megoldást kapunk, amelyben w értéke $(v+1)$-nél nagyobb. Az ilyen w számok valamelyikével egyenlő páros b esetén van tehát (6)-nak olyan megengedett megoldása, amelyben $0<v<b-1$. Surányi János kérdésére tehát még az itt megfogalmazott szorosabb értelemben is negatív a felelet.

Érdekes viszont, hogy a (18) egyenlet összes egész értékű (u, v, w) megoldásait az eddigi észrevételek alapján könnyű áttekinteni. Megmutatjuk ugyanis, hogy (18) minden ilyen megoldása megkapható a

$$(2, 1, 0) \quad \text{és} \quad (2, 0, 1) \tag{23}$$

alapmegoldásokból a (19) és (21) transzformáció, valamint előjel-változtatások véges számú alkalmazásával, s közülük a megengedetteket a (23) alatti első megoldásból kapjuk ugyanilyen lépésekben. Az a fentiek alapján világos, hogy ezen a módon valóban (18)-nak megoldásai adódnak, mégpedig megengedettek vagy nem-megengedettek aszerint, hogy a (23) alatti első vagy második megoldásból indultunk-e ki.

Állításunk igazolására azt mutatjuk meg, hogy ha (18)-nak egy (u, v, w) megoldásában

$$u \geqq 0, \quad 2 \leqq w \leqq v, \tag{24}$$

akkor a (20) alkalmazásával keletkező (u', v', w') megoldásban

$$0 < v' < v. \tag{25}$$

Valóban, ekkor a szimmetria alapján az

$$u \geqq 0, \quad 2 \leqq v \leqq w \tag{26}$$

feltételnek eleget tevő megoldásból (22) alkalmazásával

$$0 < w' < w \tag{27}$$

tulajdonságú megoldás adódik. Ezután csak azt kell észrevenni, hogy (18) bármely

megoldásából először is előjel-változtatásokkal nemnegatív számokból álló megoldás kapható, s ha ez nem a (23) alapmegoldások valamelyike, akkor vagy teljesül rá (24) és (26) egyike, vagy pedig

(28) $$(0, 1, 2), \quad \text{ill.} \quad (0, 2, 1)$$

alakú. Az első esetben, pl. (24) teljesülése esetén, alkalmazzuk a (20) átalakítást, az eredményt előjel-változtatásokkal nemnegatívvá tesszük, s ha az így kapott megoldásra (24) még mindig teljesül, ismételjük ezeket a lépéseket, amíg lehet. Ha végül azért szakad meg az eljárás, mert (26)-ot kielégítő megoldásra jutottunk, akkor hasonlóan megyünk tovább, de (20) helyett (22)-t alkalmazva. Végül is eljutunk egy (23) vagy (28) alakú megoldáshoz, és már csak azt kell észrevenni, hogy a (28) alatti első megoldást a (23) alatti első megoldásból (19), a (28) alatti másodikat pedig a (23) alatti másodikból (21) adja. Így aztán a kiindulásul választott megoldást csakugyan (19) és (21), valamint előjel-változtatások ismételt alkalmazásával kapjuk (23) valamelyik megoldásából.

Tegyük tehát fel, hogy teljesül (24), és alkalmazzuk a (20) transzformációt. Ekkor $v' > 0$ igazolására be kell látnunk, hogy

$$-wu + (w^2 - 1)v > 0, \quad \text{azaz} \quad wu < (w^2 - 1)v,$$

ami az előjelviszonyok figyelembevételével egyenértékű a

$$w^2 u^2 < (w^2 - 1)^2 v^2$$

egyenlőtlenséggel. Felhasználva a (18)-ból adódó

(29) $$u^2 = v^2 w^2 - 2v^2 - 2w^2 + 6$$

egyenlőséget, ez azt jelenti, hogy

$$w^2 (v^2 w^2 - 2v^2 - 2w^2 + 6) < (w^4 - 2w^2 + 1) v^2,$$

vagyis, hogy

$$-2w^2 (w^2 - 3) < v^2,$$

ami nyilván igaz.

Másrészt $v' < v$ akkor áll, ha

$$-wu + (w^2 - 1) v < v,$$

azaz

$$(w^2 - 2) v < wu, \quad (w^2 - 2)^2 v^2 < w^2 u^2,$$

s ismét (29) felhasználásával

$$(w^4 - 4w^2 + 4) v^2 < w^2 (v^2 w^2 - 2v^2 - 2w^2 + 6),$$

vagyis ha

$$2w^2 (w^2 - 3) < v^2 (2w^2 - 4),$$

$$\frac{w^2 - 3}{w^2 - 2} w^2 < v^2,$$

ami pedig (24) következtében teljesül. Ezzel az állítást igazoltuk.

MÓRI TAMÁS

198. feladat. Legyen X topologikus tér. Meghatározza-e egyértelműen X topológiáját, ha ismerjük

(a) az összes konvergens szűrőket (de nem tudjuk, hogy melyiknek mi(k) a limesze(i))?

(b) az összes környezetszűrőket (de nem tudjuk, hogy melyik pontnak melyik a környezetszűrője)?

(CSÁSZÁR ÁKOS)

Megoldás. Az (a) kérdésre a válasz tagadó. Tekintsük pl. a számegyenesen azt a topológiát, amelyre nézve nyílt halmazok a $(-\infty, a)$ alakú intervallumok (ahol $-\infty \leqq a \leqq +\infty$), továbbá azt a (tőle nyilván különböző) másikat, amelyre nézve nyíltak az előbbieken kívül még a $(-\infty, a]$ alakú intervallumok is. A két topológiára nézve ugyanazok a szűrők lesznek konvergensek (ti. azok, amelyekben van felülről korlátos halmaz).

A (b) kérdésre viszont igenlő a válasz.

Valóban, ha $\mathfrak{v}$ X-beli szűrő, vezessük be a

$$K(\mathfrak{v}) = \bigcap \mathfrak{v}$$

jelölést. Ekkor egy $p \in X$ pont környezetszűrője csak olyan $\mathfrak{v}$ szűrő lehet, amelyre $p \in K(\mathfrak{v})$. Ha még az $x \in X$ pont környezetszűrőjét $\mathfrak{v}(x)$-szel jelöljük, akkor $y \in K(\mathfrak{v}(x))$ esetén $\mathfrak{v}(x) \subset \mathfrak{v}(y)$, ugyanis minden $V \in \mathfrak{v}(x)$ halmazhoz van olyan $V_1 \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $z \in V_1$ esetén $V \in \mathfrak{v}(z)$, tehát $y \in V_1$ folytán $V \in \mathfrak{v}(y)$. Ennélfogva $\mathfrak{v}(p)$ a legbővebb azok közül a $\mathfrak{v}(x)$ szűrők közül, amelyekre $p \in K(\mathfrak{v}(x))$, vagyis a környezetszűrők ismeretében a p ponthoz meg lehet találni a $\mathfrak{v}(p)$ környezetszűrőt.

BOGNÁR MÁTYÁS ÉS CSÁSZÁR ÁKOS

Megjegyzések. 1. Az (a) esetre adott előbbi ellenpéldában mindkét topológia eleget tesz a (T_0) szétválasztási axiómának, de egyik sem tesz eleget (T_1)-nek. Egyszerűbb ellenpéldát adhatunk, ha megelégszünk azzal, hogy csak az egyik topológia tegyen eleget (T_0)-nak: legyen egy kételemű halmazon az egyik topológia indiszkrét, a másik pedig az, amelyre nézve a triviális nyílt halmazokon kívül még az egyik pont is nyílt. Mindkét esetben minden szűrő konvergens.

Az, hogy az ellenpéldákban nem szerepel (T_1)-nek eleget tevő topológia, nem véletlen. Igazoljuk mindenekelőtt a következő állítást, amelyben a szerző „Bevezetés az általános topológiába" c. könyvének (Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970) a terminológiáját használjuk:

Legyen X és Y topologikus tér, Y S_1-tér, $f: X \to Y$ pedig olyan leképezés, hogy minden X-ben konvergens $\mathfrak{s}$ szűrő $f(\mathfrak{s})$ képe konvergens Y-ban. Ekkor f folytonos.

Valóban, megmutatjuk, hogy $x \in X$ esetén $f(\mathfrak{v}(x)) \to f(x)$, ami éppen f folytonosságát jelenti. A feltevés szerint $f(\mathfrak{v}(x)) \to y \in Y$, s ha $f(\mathfrak{v}(x))$ nem tartana $f(x)$-hez, akkor $f(x)$-nek volna olyan V nyílt környezete, amely nem tartalmaz egyetlen $f(U)$ halmazt sem, ahol $U \in \mathfrak{v}(x)$. Az ilyen V nem lehet y-nak környezete, tehát nem is tartalmazza y-t, és akkor (S_1) miatt y-nak is volna $f(x)$-et nem tartalmazó W környezete. Ez azonban lehetetlen, hiszen W tartalmaz $f(U)$ alakú részhalmazt, ahol U ismét környezete x-nek, tehát $x \in U$ folytán $f(x) \in f(U) \subset W$.

2. Az előbbi állításból rögtön következik:

Ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ két topológia X-en, $\mathcal{T}_2$ eleget tesz (S_1)-nek, és minden $\mathcal{T}_1$-re nézve konvergens szűrő $\mathcal{T}_2$-re nézve is konvergens, akkor $\mathcal{T}_1$ finomabb $\mathcal{T}_2$-nél.

Ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ S_1-topológia X-en, és mindkettőre nézve ugyanazok a konvergens szűrők, akkor $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

3. A 2. alatti állításból nyerjük, figyelembe véve azt, hogy egy T_1-topológiánál finomabb topológia is ilyen:

Ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ két topológia X-en, $\mathcal{T}_2$ eleget tesz (T_1)-nek, és mindkettőre nézve ugyanazok a konvergens szűrők, akkor $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

4. A 2. és 3. alatt mondottak szerint az (a) kérdésre olyan ellenpélda várható legfeljebb, amelyben az egyik topológia eleget tesz (T_0)-nak, de nem tesz eleget (T_1)-nek, a másik pedig eleget tesz (S_1)-nek, de nem tesz eleget (T_0)-nak. Az alábbi példa mutatja, hogy ilyenkor (S_1) helyett még jóval erősebb (de (T_0)-t nem implikáló) szétválasztási tulajdonság is felléphet.

Tekintsük a síkon azt a topológiát, amelyet a

$$\varrho\left((x, y), (u, v)\right) = |x - u|$$

eltérés határoz meg (ez tehát bőven eleget tesz (S_1)-nek, de (T_0)-nak nem). Másrészt tekintsük azt a topológiát is, amely az előbbiből úgy áll elő, hogy az (x, y) pontot $y \neq 0$ esetén izoláltnak nyilvánítjuk, $y = 0$ esetén pedig környezetszűrőjét változatlanul tartjuk. Az utóbbi nyilván T_0-, de nem T_1-topológia. Most mindkét topológiára nézve azok a szűrők konvergálnak, amelyeknek az x-tengelyre való vetítésével az x-tengely euklideszi topológiájára nézve konvergens szűrő keletkezik.

5. Az 1. állításnak érdekes következménye van az uniform terek elméletében:

Ha X és Y uniform tér, és $f: X \to Y$ olyan leképezés, hogy minden X-beli $\mathfrak{s}$ Cauchy-szűrőnek $f(\mathfrak{s})$ képe Cauchy-rács Y-ban, akkor f folytonos.

Valóban, legyen az Y tér teljes burka Y^*, és tekintsük f-et Y^*-ba vezető leképezésnek. Az utóbbi tér topológiája eleget tesz (S_1)-nek, és az Y-beli Cauchy-rácsok konvergensek Y^*-ban, így f valóban folytonos.

6. Érdemes még megemlíteni, hogy az 5. alatti feltételek mellett f általában nem egyenletesen folytonos, sőt nem is szomszédságtartó. Ezt mutatja, ha X és Y a számegyenes az euklideszi metrikával, az $f(x) = x^3$ képlettel adott f. Most ugyanis X és Y teljessége miatt a Cauchy-rácsok és a konvergens rácsok egybeesnek, és f folytonossága miatt konvergens rács képe konvergens. Egyébként ez az f még bijektív is.

7. Az 5. állításhoz hasonló mondható ki uniform terek helyett szomszédsági terekre, Cauchy-rácsok helyett komprimált rácsokra, a bizonyításban Y kompaktifikációját szerepeltetve.

CSÁSZÁR ÁKOS

199. feladat. Legyen M irányított halmaz (tehát olyan részben rendezett halmaz, amelyben bármely két elemnek van felső korlátja), és $c \in M$. Létezik-e szükségképpen olyan $f: M \to M$ leképezés, amely a következő feltételeket kielégíti:

(a) $f(x) \geqq x$ minden $x \in M$-re,

(b) $f(x) \geqq c$ minden $x \in M$-re,

(c) $x, y \in M$, $x \leqq y$ esetén $f(x) \leqq f(y)$?

(PELIKÁN JÓZSEF ÉS PÓSA LAJOS)

Megoldás. A következő ellenpélda mutatja, hogy a válasz nemleges. Legyen M az A, B és $\{c\}$ diszjunkt halmazok egyesítése, ahol A a megszámlálható rendszámok halmaza, B pedig az A halmaz véges részhalmazainak a halmaza. A parciális rendezést definiáljuk M-ben a következőképpen: legyen érvényes $x \leqq y$, ha

vagy $x, y \in A$ és $x \leqq y$ a rendszámok természetes rendezése szerint,

vagy $x, y \in B$ és $x \subset y$,

vagy $x \in A$, $y \in B$ és $x \leqq z$, ahol z az y halmaz legnagyobb eleme,
vagy $x = y = c$,
vagy $x = c$ és $y \in B$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy így M valóban irányított halmaz lesz.

Ha most feltesszük, hogy f az (a), (b), (c) kikötéseknek eleget tevő leképezés, akkor, tekintettel A teljesen rendezett voltára, $f(A)$ is teljesen rendezett, mégpedig elemei csak B-hez tartozhatnak, azaz A-nak véges részhalmazai. Így azonban $f(A)$ megszámlálható, hiszen $x, y \in B$, $x < y$ esetén x és y elemeinek száma különböző. Mivel A nem megszámlálható, van olyan $y \in B$, hogy $f(x) = y$ nem-megszámlálhatóan sok $x \in A$-ra teljesül. Eszerint y legnagyobb elemét z-vel jelölve mindezekre az x-ekre $x \leqq f(x)$ miatt $x \leqq z$ is állna, csakhogy A-ban z-nél kisebb elem megszámlálható sok van: ellentmondás.

PELIKÁN JÓZSEF ÉS PÓSA LAJOS

200. feladat. Legyen **H** halmazháló, φ pedig **H**-n értelmezett véges értékű halmazfüggvény. Bizonyítandó, hogy φ akkor és csak akkor terjeszthető ki **H**-ról egy **H**-t tartalmazó halmazgyűrűre additív halmazfüggvényként, ha $A, B \in \mathbf{H}$ esetén

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cup B). \tag{1}$$

(CSÁSZÁR ÁKOS)

Megoldás. A diszjunkt tagokra való

$$A = (A \cap B) \cup (A - B), \qquad B = (A \cap B) \cup (B - A), \tag{2}$$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) \tag{3}$$

felbontásokból látszik, hogy ha φ-nek van additív φ' kiterjesztése egy **H**-t tartalmazó gyűrűre, akkor

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi'(A - B), \qquad \varphi(B) = \varphi(A \cap B) + \varphi'(B - A), \tag{4}$$

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A \cap B) + \varphi'(A - B) + \varphi'(B - A), \tag{5}$$

és innen (1) bal és jobb oldalának közös értéke

$$2\varphi(A \cap B) + \varphi'(A - B) + \varphi'(B - A).$$

Így a feltétel mindenesetre szükséges.

Az elégségesség bizonyítására feltehetjük, hogy $\emptyset \in \mathbf{H}$. Ha ugyanis ez nem így volna, akkor **H**-hoz hozzávéve $\emptyset$-t, nyilván megmarad hálónak, s ha még a $\varphi(\emptyset) = 0$ megállapodást tesszük, (1) változatlanul érvényben marad. Ezzel a feltevéssel élve megmutatjuk, hogy φ additívan kiterjeszthető a **H**-t tartalmazó legszűkebb $\mathbf{R}(\mathbf{H})$ gyűrűre.

(a) Az $A - B$ alakú ($A, B \in \mathbf{H}$) halmazok egy **H**-t tartalmazó **P** félgyűrűt alkotnak.

Valóban, $A = A - \emptyset$ mutatja, hogy $\mathbf{H} \subset \mathbf{P}$, továbbá ha vesszővel jelöljük a **H** elemeinek egyesítésére vonatkozó komplementumot, akkor $A, B, C, D \in \mathbf{H}$ esetén

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (C - D) &= A \cap B' \cap C \cap D' = (A \cap C) \cap (B \cup D)' = \\ &= (A \cap C) - (B \cup D) \in \mathbf{P},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A - B) - (C - D) &= A \cap B' \cap (C \cap D')' = A \cap B' \cap (C' \cup D) = \\ &= (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B' \cap D) = \\ &= (A - (B \cup C)) \cup ((A \cap D) - B),\end{aligned}$$

és itt még azt is elérhetjük, hogy a jobb oldal két tagja diszjunkt legyen, csak azt kell ehhez feltennünk, hogy $D \subset C$. Ilyenkor ugyanis az első tag nem metszi C-t, a második pedig része D-nek; a tett feltevés a

$$C - D = C - (C \cap D) \tag{6}$$

azonosság miatt nem jelenti az általánosság megszorítását.

(b) Ezek után világos, hogy a **P**-t tartalmazó legszűkebb **R**(**P**) gyűrű azonos **R**(**H**)-val, hiszen egyrészt **R**(**P**) **H**-t tartalmazó gyűrű, másrészt minden **H**-t tartalmazó gyűrű tartalmazza **P**-t s vele együtt **R**(**P**)-t is.

Minthogy egy félgyűrűn additív véges értékű halmazfüggvény közismerten kiterjeszthető a félgyűrűt tartalmazó legszűkebb gyűrűre (l. pl. Császár Ákos: Valós függvénytan, egyetemi jegyzet (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976), 3.28. tétel) az additivitás megőrzésével, azért elég a továbbiakban belátni, hogy φ a **P** félgyűrűre terjeszthető ki additívan.

(c) Ha $A, B, C, D \in \mathbf{H}$, $B \subset A$, $D \subset C$, és $A - B = C - D$, akkor $\varphi(A) - \varphi(B) = \varphi(C) - \varphi(D)$.

Ennek belátására tegyük fel először még azt is, hogy $B \subset D$. Ekkor feltevéseinkből (2) figyelembevételével

$$A \cap D = B, \quad A \cup D = C$$

következik, tehát (1)-et B helyett D-vel alkalmazva

$$\varphi(A) + \varphi(D) = \varphi(B) + \varphi(C).$$

Ha pedig a $B \subset D$ feltevés nem teljesül, akkor bevezetjük az $E = A \cup C$, $F = B \cup D$ halmazokat, észrevéve, hogy az előbbi kikötések teljesülnek egyrészt az A, B, E, F, másrészt a C, D, E, F halmazokra is (a kiegészítő feltevéssel együtt).

(d) Az előző eredmény szerint **P**-n értelmezhetünk egy φ' halmazfüggvényt úgy, hogy (6)-ra tekintettel **P** tetszőleges elemét $A - B$ alakban írjuk, ahol $A, B \in \mathbf{H}$ és $B \subset A$, és a

$$\varphi'(A - B) = \varphi(A) - \varphi(B) \tag{7}$$

értéket írjuk elő. Világos, hogy ez a φ' **H**-n φ-vel egyezik meg.

Belátjuk, hogy φ' additív **P**-n.

(e) Ha $A, B, C \in \mathbf{H}$, $B \subset A$, akkor

$$\varphi'(A - B) = \varphi'\big((A - B) \cap C\big) + \varphi'\big((A - B) - C\big). \tag{8}$$

Csakugyan, az

$$(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C),$$

$$(A - B) - C = A \cap B' \cap C' = A - (B \cup C)$$

azonosságokra tekintettel az állítás (7) folytán

$$\varphi(A) - \varphi(B) = \varphi(A \cap C) - \varphi(B \cap C) + \varphi(A) - \varphi\big(A \cap (B \cup C)\big)$$

igazolását kívánja, ez pedig (1)-ből nyerhető az $A \cap C$ és B halmazokra való alkalmazással, hiszen

$$(A \cap C) \cap B = B \cap C, \qquad (A \cap C) \cup B = A \cap (B \cup C),$$

tehát

$$\varphi(A \cap C) + \varphi(B) = \varphi(B \cap C) + \varphi\big(A \cap (B \cup C)\big).$$

(f) Legyen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{H}$, $A = \bigcup_1^n A_i$, és jelöljük $P_1, \ldots, P_r$-rel az összes $\bigcap_1^n X_i$ alakú halmazokat, ahol $X_i = A_i$ vagy $X_i = A - A_i$. Ekkor $P_j \in \mathbf{P}$ minden j-re. Megmutatjuk, hogy

$$\varphi(A_i) = \sum_{P_j \subset A_i} \varphi'(P_j) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ezt a szimmetria folytán elég $i=1$ esetére belátni, akkor pedig n szerinti indukciót alkalmazhatunk, felhasználva, hogy a P_j halmazok diszjunktak, közülük az A_i-ben foglaltak egyesítése éppen A_i, és az n-ről $(n+1)$-re való áttéréskor az egyes $\varphi'(P_j)$ tagokra (8) érvényes a $C = A_{n+1}$ választással.

(g) Legyen végül

$$B - C = \bigcup_1^m (B_i - C_i),$$

ahol a jobb oldali tagok diszjunktak, $B, C, B_i, C_i \in \mathbf{H}$, továbbá $C \subset B$, $C_i \subset B_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Készítsük el az (f)-ben szereplő P_j halmazokat, az A_i-k helyett a B, C, B_i, C_i $(i = 1, \ldots, m)$ halmazokat használva. (f)-ből látszik, hogy

$$\varphi'(D) = \sum_{P_j \subset D} \varphi'(P_j),$$

valahányszor D a B, C, B_i, C_i halmazok valamelyikét jelenti, de aztán (7)-re tekintettel akkor is, ha $D = B - C$ vagy $D = B_i - C_i$, ugyanis D ilyenkor is egyenlő az általa tartalmazott P_j-k egyesítésével. Ebből viszont rögtön adódik a keresett

$$\varphi'(B - C) = \sum_1^m \varphi'(B_i - C_i)$$

egyenlőség.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megjegyzés. A feladat lényegében véve azonos a fent idézett jegyzet 3. h. 34. feladatával.

CSÁSZÁR ÁKOS

PROBLEMS

1 The elements of an $n \times n$ matrix are different integers. Prove that there exist two neighbouring elements (i. e. those following each other in a row or in a collumn) the difference of which is at least n.

2 A point set $\mathbf{H}$ in the plane has the property that, given any $\binom{k+2}{2}$ of its points, there exist k straight lines which contain all of them. Prove that there exist k straight lines which contain all the points of $\mathbf{H}$.

3 Describe all those groupoids in which every equivalence relation is a congruence.

TÁRSULATI ÉLET

Beszámoló

a Beke Manó Emlékdíj 27. kiosztásáról.

Az 1977. évi Beke Manó Emlékdíj odaítélésére az Elnökség a következő bizottságot küldte ki: elnök: Surányi János, titkár: Urbán János, tagok: Bertalan Zoltánné, Oravecz Pálné, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Takács József.

A bizottság munkájában szem előtt tartva, hogy a Társulat a díj odaítélésével elsősorban a matematika oktatása és népszerűsítése terén elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni, a következő határozatot hozta:

5000 Ft jutalomban (nagydíj) részesíti *Pálfy Sándor* nyugalmazott főiskolai tanárt.

Egyenként 2500—2500 Ft jutalomban részesíti *Gerencsér Józsefnét*, a diósdi általános iskola nyugdíjas tanítónőjét, Pest megye szakfelügyelőjét; *Halmos Istvánnét*, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete tudományos munkatársát; *Széles Jenő* általános iskolai tanárt, szakfelügyelőt; *Szikszai Józsefet* a miskolci Földes Ferenc gimnázium tanárát; *Tomor Benedeket* a Veszprémi Vegyipari Egyetem Matematika Tanszékének adjunktusát és *Wolkensdorfer Jánost*, a székesfehérvári József Attila gimnázium tanárát.

Indoklás

Pálfy Sándor főiskolai tanár az Országos Pedagógiai Intézetben dolgozott annak megalakulásától kezdve. A matematikaoktatás színvonalának emelése és a matematika népszerűsítése terén végzett kiváló munkájáért 1967-ben a Beke Manó díj II. fokozatában részesült.

Kezdettől fogva részt vett a komplex matematikatanítási kísérletben. Ő dolgozta ki a felsőtagozatos átmeneti tantervet, irányította a tantervi kísérleteket. A tanterv kidolgozása és elfogadása után egyik társszerzője a tantervhez kapcsolódó tankönyvnek és tanári segédkönyvnek. Vezető szerepet vállalt az általános iskolai matematikatanárok továbbképzésének megszervezésében, az új tantervre való felkészítésében. A TV továbbképző műsoraiban állandó előadó. Az ország minden részében szívesen vállalkozik előadások tartására, előadásai népszerűek, sok segítséget adnak a gyakorló tanárok számára.

Évek óta részt vesz az általános iskolások matematika versenyének irányításában. A TIT Kis Matematikus Baráti Körök versenyének irányítását a versenyek megindulása óta nagy szeretettel és lelkesedéssel végzi. Az Iskolarádió „Törd a fejed" c. népszerű műsorát több, mint négy év óta vezeti, állandóan közvetlen kapcsolatot tart a hallgató gyerekekkel.

A Bolyai János Matematikai Társulat dunáninneni titkáraként is kiemelkedő munkát végez. Több cikke jelent meg A Matematika Tanítása c. folyóiratban, a Pedagógiai Szemlében, A Tanítóban. Tanulók és tanárok is jól tudják használni „Törheted a fejed!" c. feladatgyűjteményét. A TIT kiadásában 1976-ban megjelent „Szülőknek matematikáról" c. előadói segédanyaga nagy segítséget jelent az új általános iskolai matematika tanterv célkitűzéseinek, módszereinek népszerűsítésében, elterjesztésében.

Gerencsér Józsefné szakfelügyelő a pécsi tanítóképzőben szerzett tanítónői oklevelet. A diósdi Gárdonyi Géza Általános iskolában tanított. 1969-től kezdve bekapcsolódott a komplex matematikatanítási kísérletbe. Kezdettől fogva lelkes híve volt a korszerű módszereknek, az új tantervi elgondolásoknak és Pest megyében nagyon lelkesen népszerűsítette az új matematikatanítást.

1972-ben négy éves továbbképző tanfolyamot szervezett. A tanfolyam célja az volt, hogy az alsó tagozaton tanító pedagógusokat felkészítse az új matematika tanterv szerinti tanításra. Az elméleti anyag gyakorlati megvalósítását ő maga mutatta meg a tanfolyam hallgatóinak. Nagyrészt neki köszönhető, hogy Pest megyében jól halad az új matematika tanterv bevezetése.

Három év óta az új matematika tanterv szerinti oktatás tapasztalatait ő gyűjti össze a megyében.

Óralátogatásokon, megbeszéléseken szerzett tapasztalatai az új tantervhez készülő segédanyagok megírásához is nagy segítséget jelentettek.

Sokéves tanítói és szakfelügyelői munkáját a tanítványok iránti szeretet és a matematikatanítás ügyének lelkes szolgálata jellemezte.

Halmos Istvánné, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete Didaktikai Csoportjának munkatársa. Ebben a minőségében hivatali kötelességeként, de azon túlmenően is szervezi és irányítja a Matematika II. tagozatos osztályok tanárainak szakmai és módszertani továbbképzését. Ő maga is minden évben tanít egy vagy több Matematika II. tagozatos osztályt.

A komplex matematikatanítási kísérletbe több mint egy évtizeddel ezelőtt kapcsolódott be. Részt vett az 1—4. osztályos Munkalapok kidolgozásában. Az ő közreműködésének, szaktudásának és pedagógiai érzékének is nagy része van abban, hogy Hans Freudenthal, a matematikatanítás korszerűsítésének egyik legnagyobb szaktekintélye és legszigorúbb bírálója ezt a munkalapsorozatot a világon a legjobbnak nyilvánította. Társszerzőként működött közre a „Játsszunk matematikát" című könyv írásában, ezzel a matematika szélesebb körben való népszerűsítéséhez is hozzájárult. A komplex matematikatanítási kísérletre épülő új általános iskolai tanterv 5. osztályos tankönyvére, munkalapjaira és kézikönyvére kiírt pályázaton többekkel együtt I. díjat nyert, és ennek alapján részt vett ezeknek a dokumentumoknak az elkészítésében. Az új általános iskolai tanterv folytatását képező középiskolai tanterv és segédanyagok kidolgozásának egyik irányítója és részese. Már ezt megelőzőleg jelentékeny munkát végzett a Bolyai János Matematikai Társulat gimnáziumi matematikatanítási kísérletének tartalmi előkészítésében és irányításában.

A Bolyai Társulat Oktatási Szakosztályának több év óta titkára. Ennek keretében ő maga közvetlenül is segíti a tanítói és tanári továbbképzést, előad a központi továbbképző tanfolyamokon. A kisiskolákban folyó munkát segítő Nyitnikék rádióadások matematikai adásainak ő az egyik írója és vezetője.

Mindezeken felül nagy mértékben neki köszönhető az, hogy egyre több fiatal kutató matematikus kezd érdeklődni a matematikai didaktika kérdései iránt és kapcsolódik be a matematikatanítás reformjába.

Széles Jenő Győr-Sopron megyei szakfelügyelő. Pedagógiai pályájának kezdete óta mintegy 37 éven át állandóan eredményes iskolai nevelő-oktató tevékenységet fejtett ki a matematika népszerűsítése érdekében. Eredményeinek elismeréseként a matematika-fizika tárgy szakfelügyeletével bízták meg. A felügyeletére bízott nevelők százai bizalommal várják látogatásait és őszinte ragaszkodással kérnek tőle a mindennapi munkájukhoz útmutatást. A matematikatanítás korszerűsítésének élenjáró munkása. Az ideiglenes tanterv tanítására felkészítő tanári tanfolyamok állandó szervezője és eredményes előadója. A pedagógus továbbképzésben a komplex gyakorlati szeminárium első szervezője volt a megyében. Iskolai, tanári, szakfelügyelői és továbbképzési tevékenysége mellett korán bekapcsolódott a társadalmi szervezetek tevékenységébe is. 1960 óta a TIT csornai járási szervezetében a matematika-fizikai-műszaki szakcsoport vezetőjeként nemcsak a községek matematikai előadásaira biztosít előadókat, hanem ő maga is sok matematikát népszerűsítő előadást vállal. A csornai járásban elsőként szervezett Kis Matematikusok Baráti Köre csoportot. Nem lankad abban sem, hogy továbbképezze magát. A Bolyai János Matematikai Társulat Vándorgyűlésein 12 év óta állandóan részt vesz.

Szikszai József középiskolai tanár 1953-ban az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának matematika-fizika-ábrázoló geometria szakán végzett. Kazincbarcikán, majd 1972 óta a miskolci Földes Ferenc Gimnáziumban a matematika II. tagozaton tanít.

Óráit a modern matematikai szemlélet, a sokoldalúság jellemzi, ennek következménye tanítványainak eredményessége és matematika iránti szeretete. Tanítványai közel 100%-os beiskolázást nyernek felsőfokú intézményekbe. Országos matematika versenyen több tanítványa volt az első 10 helyezett között.

A KöMaL számára rendszeresen küld színvonalas feladatokat, a Matematika Tanításában több módszertani cikke jelent meg.

Megjelenés alatt áll a kúpszeletekkel kapcsolatos szakköri kiadványa. Részt vesz a rádió által rendezett matematika ismeretterjesztő műsor szerkesztésében.

Tanári továbbképzéseken többször tartott előadást módszertani kérdésekről. Megbízást kapott olimpiai előkészítő szakkör vezetésére is, Miskolc város és a környék tehetséges tanulóinak számára.

Tomor Benedek egyetemi adjunktus. 1958—61-ig a győri Révai Gimnáziumban tanított, 1961 óta a Veszprémi Vegyipari Egyetemen.

1964-ben doktori szigorlatot tett, disszertációját geometriai témából írta. Hasonló témájú dolgozatai a Matematikai Lapokban jelentek meg.

Jelenleg az operációkutatás területén végez kutatómunkát, oktatását ő vezette be a Vegyipari Egyetemen. Az egyetemi oktatás korszerűsítésére létrehozott tantervi bizottság aktív tagja.

A matematika népszerűsítése érdekében az egyetemi hallgatók körében sokoldalú tevékenységet fejt ki, szakkört vezet, diákköri munkákat irányít.

Középiskolai és általános iskolai tanárok számára rendszeresen tart továbbképző előadásokat. Több éven át eredményesen tanított a Lovassy László Gimnázium matematika II. tagozatán is.

A TIT megyei matematikai szakosztályának és országos Matematikai Választmányának tagja. Kezdettől fogva részt vesz a KMBK mozgalom szervezésében, elnöke a KMBK országos módszertani bizottságának. Ebben a minőségében sok hasznos kezdeményezéssel és tanáccsal támogatta országosan is a körök munkájának magasabb színvonalra emelését. Veszprém megyében a KMBK körök működésének összehangolását, a tapasztalatok kicserélését és a jó módszerek elterjesztését irányítja.

Wolkensdorfer János középiskolai matematika-fizika szakos tanár. 1963 óta tanít, 4 évig a székesfehérvári dolgozók középiskolájának volt a tanára, 1967 óta a József Attila gimnáziumban tanít.

Kiváló felkészültségű tanár, mindkét szaktárgyának lelkes művelője és népszerűsítője. Cikke jelent meg a Fizika Tanításában. Tíz év óta megszakítás nélkül vezet szakkört, lelkesen dolgozó szakköri gárdát nevelt ki. Tanítványai évről évre jó eredménnyel szerepelnek a megyei, megyék közötti versenyeken, az OKTV-n az első tíz helyezett között is volt tanítványa.

Szívesen vesz részt módszertani kísérletekben, kísérletezett a geometriai transzformációk újszerű felépítésével. több alkalommal tartott előadást, feladatmegoldó délutánt tanárok, illetve diákok számára a vektorok, a transzformációk alkalmazásairól, csoportelméleti problémákról.

A Bolyai János Matematikai Társulat megyei verseny bizottságának tagjaként tíz év óta lelkiismeretes, pontos munkát végez a versenyek szervezése, a dolgozatok elbírálása terén.

Jelentés az 1977. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1977. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére az alábbi összetételű bizottságot jelölte ki: T. Sós Vera elnök, Pintz János titkár, Győry Kálmán, Lippner György, Pollák György.

A bizottság 1977. május 19-én megtartott ülésén a beérkezett javaslatok megvizsgálása után a következő határozatot hozta:

A Rényi Kató díj I. fokozatában és az ezzel járó 3000 Ft pénzjutalomban részesül:
Balogh Zoltán, a KLTE V. éves matematikus szakos hallgatója és
Kollár János, az ELTE II. éves matematikus szakos hallgatója.
A Rényi Kató díj II. fokozatában és az ezzel járó 2000 Ft pénzjutalomban részesül:
Pálfy Péter Pál, az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója és
Pham Ngoc Anh, az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója.

Balogh Zoltán igen érdekes és értékes általános topológiai eredményeket ért el. Bevezette az ún. relatív kompaktság fogalmát azonos alaphalmazon adott különböző topológiák körében, s ennek az egyszerű, de igen hatékony eszköznek a segítségével számos különböző ismert eredményt tud egységesen és egyszerűen tárgyalni, s emellett érdekes új tételeket is nyer. Igen mélyek és szellemesek az ún. öröklődően parakompakt p-terekre vonatkozó legújabb eredményei, ezek közül is kiemelkedő az a tétele, hogy minden ilyen tér metrizálható altér egyesítése. 3 dolgozata van sajtó alatt.

Kollár János elsősorban az univerzális algebra területén folytat kutatásokat. Kiemelkedő eredményeket ért el unér algebrák kategóriájának vizsgálatában. Ezenkívül mély eredményeket nyert testek és integritási tartományok kategóriájának vizsgálatában, többek között Fried Ervinnel közösen bebizonyította Noether egy híres sejtésének gyengített változatát, nevezetesen, hogy minden véges csoporthoz létezik a racionális számok testének olyan végesfokú bővítése, amelynek automorfizmuscsoportja éppen az adott csoport. 7 dolgozata van sajtó alatt, illetve kéziratban.

Pálfy Péter Pál elsősorban véges csoportok vizsgálatával foglalkozik. Meghatározta az összes olyan véges csoportot, melyeknek pontosan 2 nem-lineáris irreducibilis karaktere van. Ezenkívül lényeges előrehaladást tett egy Ádám András által felvetett és Babai László által részben megoldott probléma vizsgálatában. A kongruenciakiterjesztési tulajdonsággal kapcsolatban Bíró Balázzsal és Kiss Emillel együtt nyert eredményeket. Kongruenciahálókkal kapcsolatos eredményei külföldön is érdeklődést keltettek. 3 dolgozata van kéziratban.

Pham Ngoc Anh főként lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatával foglalkozik. Fontosabb eredményei: meghatározta a szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusok additív struktúráját; továbbfejlesztette A. Widigernek lineárisan kompakt radikálú lineárisan kompakt gyűrűkre vonatkozó eredményeit; számos jellemzést adott féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűkre, továbbá jellemezte azokat a lineárisan kompakt gyűrűket, melyekben minden egy- vagy kétoldali ideál zárt vagy nyílt. 4 dolgozata van sajtó alatt.

A Bolyai János Matematikai Társulat Nagyrendezvényei 1977-ben

Csillag Pál találkozó (Balatonlelle, május 27—31)

Az 1977. évi találkozó, melynek szervezői Lippner György, Baranyai Zsolt és Pintz János voltak, színhelye a balatonlellei BME KISZ-tábora volt, ahol a résztvevők faházakban laktak, és az előadások megtartására kb. 200 fős előadótermet biztosítottak a helyszínen.

A találkozón kb. 160 fiatal (30 év alatti ill. legkorábban 1970-ben végzett) matematikus vett részt. A résztvevők kb. 35 előadást tartottak részben saját eredményeikről, részben az intézetük, vállalatuk munkájának egy-egy érdekesebb részéről. Az előadások a résztvevők szerteágazó érdeklődési és működési területének megfelelően az elméleti és alkalmazott matematika legkülönfélébb területeit ölelték fel.

A szakmai programot kulturális program egészítette ki: a Balázs Béla studió néhány filmje, Varsányi Anikó (Déryné Színház tagja) előadói estje, a Kaposvári Csiky Gergely Színház előadása, valamint egy fonyódi kirándulás. A találkozó jó alkalmat adott arra, hogy a fiatal matematikusok mind egymást, mind egymás munkáját és eredményeit jobban megismerjék.

UNIVERZÁLIS ALGEBRA KOLLOKVIUM (Esztergom, június 27—július 1)

A Társulat az IMU támogatásával rendezte meg az Univerzális algebra kollokviumot, melynek szervező bizottsága a következő összetételű volt: Schmidt Tamás (elnök), Huhn András, Németi István (titkárok), Fried Ervin, Gécseg Ferenc, Lovász László. A szervező munkába a bizottság bevonta L. A. Szkornyakov (szovjet) és R. Wille (nyugatnémet) matematikusokat is.

A kollokviumra 83 külföldi vendég érkezett, mégpedig országonként a következő megoszlással: Anglia 1; Ausztria 7; Belgium 2; Bulgária 1; Csehszlovákia 19; Egyesült Államok 13; Finnország 1; Görögország 2; Lengyelország 8; NDK 6; NSZK 13; Románia 1; Szovjetunió 9. A 27 magyar résztvevővel együtt tehát 110-en vettek részt és összesen 87 előadás hangzott el.

A kollokvium a tárgykörben megrendezett nemzetközi rendezvények között a legnagyobb volt és egyben a hazai algebrai rendezvények között is a legtöbb résztvevővel büszkélkedhet. Azt, hogy a kollokvium az univerzális algebrák elméletének és a hálóelméletnek egyik legjelentősebb nemzetközi összejövetelévé válhatott, két körülmény mozdította elő. Az egyik, hogy a szakterület legjelentősebb képviselői résztvettek a rendezvényen, így Garett Birkhoff, aki joggal nevezhető az univerzális algebra atyjának, továbbá Bjarni Jonsson, L. A. Skornyakov, A. D. Szmirnov és Rudolf Wille, akik valamennyien nagyhírű iskolát teremtettek maguk körül. A siker másik összetevője az, hogy ez alkalommal kerültek először nemzetközi fórumon ismertetésre az elmúlt évek kimagasló eredményei, mint például a prágai Pudlák és Tůma nevezetes tétele.

Igen örvendetes a szovjet matematikusok magas részvételi aránya, ami annak köszönhető, hogy Szkornyakov professzort kezdettől fogva bevontuk a kollokvium szervezésébe, akinek elsődleges feladata éppen a szovjet matematikusok részvételének megszervezése volt.

Az előadások az esztergomi Tanárképző Főiskolán, illetve a helyi MTESZ székházban zajlottak le. 8 meghívott előadó tartott egy-egy órás előadást, a többi előadás 3 szekcióban folyt. Az egyik szekciót nagyrészt a számítástudományi alkalmazásoknak szenteltük.

DIÁKKÖRI NYÁRI ISKOLA (Törökmező, július 3—9)

A matematikus tudományos diákkörök hagyományos nyári iskoláját az idén is az ELTE diákköre szervezte a Társulat támogatásával. Az iskola a törökmezői turistaházban volt július 3-a és 9-e között. Az előadásokat L. A. Szkornyakov, V. Fleischer, Csákány Béla, Németi István, Andréka Hajnal, Márki László, Komjáth Péter, valamint egyetemi hallgatók tartották. Az iskolán részt vett az ELTE-től mintegy 35, a JATE-ről 8, a KLTE-ről 5 hallgató. Az előadások az univerzális algebra egyes témaköreit tekintették át, általában igen magas színvonalon, ám egyúttal érthetően is. Az iskola nagyon jól sikerült, igen eredményes volt.

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ÉS MŰSZAKI ALKALMAZÁSAIK — NYÁRI ISKOLA (Miskolc, 1977. június 13—18).

A Borsod megyei Tagozat a Matematika alkalmazásai szakosztály kezdeményezésére elsősorban fiatal matematikusok, fizikusok és mérnökök számára rendezte meg a konferencia jellegű tanfolyamot. A nyári iskola szervezői Farkas Miklós és Vincze Endre (társelnökök) voltak. A 22 órás tanfolyamnak 30 fizető és 13 egyetemi hallgató (részvételi díj fizetése nélkül) résztvevője volt. A nyári iskolán az alábbi előadások hangzottak el:

Csáki Frigyes: Differenciálegyenletek néhány alkalmazási lehetősége a szabályozástechnikában. (4 óra)
Bosznay Ádám: Sajátfrekvenciák behatárolásának egy újabb módszere. (2 óra)
Elbert Árpád: Retardált differenciálegyenletek. (3 óra)
Farkas Miklós: Nem-lineáris rezgések (6 óra)
Hatvani László—Pintér Lajos: Közönséges differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedése mechanikai alkalmazásokkal. (4 óra)
Vincze Endre : Lineáris differenciálegyenletek két nevezetes transzformációja. (3 óra)

RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉS (Veszprém, július 6—9)

A szervező bizottság tagjai voltak: elnök: Reményi Gusztávné, titkár: Vincze Márta, tagok: Békefi Zsuzsa, Takács József.

A megnyitón Surányi János emlékezett meg a közelmúltban elhunyt nagy matematikusainkról, Kalmár Lászlóról, Péter Rózsáról, Turán Pálról; majd Urbán János ismertette egy-egy szép elemi matematikai eredményüket.

A vándorgyűlésnek mintegy 380 résztvevője három szekcióban (általános iskolai alsó és felső tagozat, középiskolai) hallgatott előadásokat a bevezetésre kerülő új tantervekről, tankönyvekről, matematika tanítási kísérletekről, megoldhatatlan feladatokról, a négyszínsejtés megoldásáról, egy négyzetrácsproblémáról. Az új tantervek egy-egy fejezetével, feladatsorozatok megoldásával ismerkedtek meg az általános iskolai szekciók résztvevői: függvények, algebra, nyitott mondatok, topológia, valószínűség. Nagy érdeklődés kísérte a „Néhány pszichológiai szempont a 10—14 éves gyerekek tanításához", és a „Magyar matematikusok arcképcsarnoka" című előadásokat, valamint a „Milyen legyen a matematika tankönyv" c. ankétot.

A vándorgyűlés keretében került sor az 1977. évi Beke Manó Emlékdíjak kiosztására.

A MATEMATIKATANÁR-KÉPZÉS PROBLÉMÁI KONFERENCIA
(Pécs, augusztus 23—27)

Az International Commission on Mathematical Instruction és az Oktatási Minisztérium támogatásával rendezett nemzetközi részvételű konferencia szervező bizottsága a következő volt: Császár Ákos (elnök), Surányi János, Szendrey János (társelnökök), Bartal Andrea, Urbán János (titkárok), Duró Lajosné, Göndöcs László, Hetyei Gábor, Kántor Sándorné, Pogáts Ferenc, Reményi Gusztávné, Seress Béla. A konferenciának 150 résztvevője volt, 11 fő szocialista országokból, 46 fő tőkés országokból és 93 fő magyar. Főbb témái a korszerű tanárképzés matematika tananyaga, a szakmódszertan és a pedagógia helye és szerepe a tanárképzésben, a szakmai és pedagógiai képzés összhangjának megteremtésére irányuló nemzetközi törekvések, a tanárképzés szervezeti formái, a tanárképzés lehetőségei. Az egyes témakörökben a konferencia a jelenlegi helyzettel és a reformtörekvésekkel is foglalkozott. Az előbbiekben jelzett témákból összesen 53 előadás hangzott el. Előzetesen kiosztott írásos anyagok alapján két alkalommal tartottak kerekasztal megbeszélést az egyes országok tanárképzési rendszeréről. A konferencián a matematikaoktatás számos nemzetközileg elismert szaktekintélye vett részt, többek között H. Freudenthal (Hollandia), C. Gaulin (Kanada), K. Härtig (NDK), T. Kawaguchi (Japán), A. Z. Krygowska (Lengyelország), H. G. Steiner (NSZK), A. A. Stolyar (Szovjetunió). A konferencia kulturális programján kirándulás és orgonakoncert szerepelt.

KOMPLEXFÜGGVÉNYTANI MÓDSZEREK A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSBAN ÉS A MATEMATIKAI STATISZTIKÁBAN (Debrecen, augusztus 29—szeptember 2.).

A konferencia szervező bizottsága a következő összetételű volt: Gyires Béla (elnök), Bártfai Pál (titkár), Arató Mátyás, Medgyessy Pál, Révész Pál, Tandori Károly, Tar László, Tomkó József, Vincze István. A konferencián 46-an vettek részt; 15 fő tőkés országból, 4 fő szocialista országból, 27 fő hazai. A konferencián, melyet a Kossuth Lajos Tudományegyetemen tartottunk, összesen 31 előadás hangzott el. A kollokvium lényegében teljesítette a következő két célját: összegyűjteni a számottevő szakembereket a karakterizációs tételek témaköréből, képet kapni a komplex függvénytan alkalmazási lehetőségeiről. Kissé szűk témakörének tudható be, hogy résztvevők száma a vártnál kevesebb lett. Számos jelentős külföldi matematikus vett részt a kollokviumon, többek között M. Kac (USA), W. K. Rohatgi (USA), V. M. Zolotarjev (Szovjetunió), H. Bergström (Svédország), D. Dugue (Franciaország), E. Lukács (USA). Örvendetes, hogy előreláthatólag valamennyi előadás meg fog jelenni a kollokvium kötetében.

ELŐADÁSSOROZAT A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÍTÁSI KÍSÉRLETBEN RÉSZTVEVŐK SZÁMÁRA (Budapest, augusztus 31—szeptember 3)

Az előadássorozat témája a valós számok volt. Az országos Pedagógiai Intézetben rendezett sorozatban az alábbi előadások hangzottak el:
Surányi János: Elvi problémák a valós számok körében
Pósa Lajos: A valós számokról
Varga Tamás: A valós számok az általános iskolában
Urbán János: A valós számokról
Reményi Gusztávné: A valós számok tanítási tapasztalatai
Herczeg János: A valós számok tanítási tapasztalatai
Surányi János: Az elvi problémák tisztázása
Gádor Endréné és Pálfalvi Józsefné: A belépő I. osztályosok tanárainak tájékoztatása
Az előadásokat vita követte.

AUTOMATÁK ALGEBRAI ELMÉLETE KONFERENCIA
(Szeged, augusztus 30—szeptember 2)

A Konferencia szervező bizottsága a következő összetételű volt: Gécseg Ferenc (elnök), Virágh János (titkár), Csákány Béla, Dévényi Károly, Ésik Zoltán, Horváth Gyula, Megyesi László, Rácz Éva.

A 61 résztvevőből 9 fő tőkés-, 11 fő szocialista országokból érkezett: a hazaiak örvendetes módon 41 fővel jelentek meg. Öt meghívott előadó szerepelt egyenként egy-egy órás előadással, a többi 24 előadás 30-30 perces volt. Az előadások felölelték az automaták és formális nyelvek elméletének legfontosabb területeit. A nagysikerű konferencia előadásai közül különösen kiemelkedőek S. Ginsburg (USA), J. F. Perrot (Franciaország), M. P. Schützenberg (Franciaország) és R. Vollmar (NSZK) gondolatébresztő előadásai voltak.

NUMERIKUS MÓDSZEREK KONFERENCIA (Keszthely, szeptember 5—9)

A konferencia szervező bizottságának összetétele a következő volt: Rózsa Pál (elnök), Balla Katalin (titkár), Gergely József, Hosszú Miklós, Lee Anna, Veidinger László. A rendezvényen, melynek témája a modern numerikus analízis volt, különös tekintettel a numerikus algebrára és a differenciálegyenletek numerikus megoldási módszereire, összesen 69 előadás hangzott el két szekcióban. A résztvevők száma 117 volt, ebből 60 magyar, 34 szocialista országokbeli és 23 tőkés országból érkezett. A konferencia nem tudományos programján kirándulás és hangverseny szerepelt.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULATBAN MEGTARTOTT ELŐADÁSOK 1977 ELSŐ FÉLÉVÉBEN

Január 12: A. ROSENBERG (USA): Recent progress in the structure theory of Witt rings of quadratic forms
Január 21: Az OKTV I. fordulója feladatainak megbeszélése (IMK ülése)
Január 31: V. PTÁK (Csehszlovákia): The continuity and the perturbation of the spectrum
Február 7: V. MATRIČ (Jugoszlávia): Algebraic equations with coefficients in a group
Február 11: RATKÓ ISTVÁN: A folyamatosság felhasználása geometriai feladatok megoldásában
Február 16: L. M. WAGE (USA): Product spaces
Február 21: K. DRECHSLER (NDK): Homologie auf algebraischen Varietäten
Február 25: LEINDLER LÁSZLÓ: Fourier sorok erős approximációjáról. Az 1976. évi Szele Tibor Emlékérem átadása.
Március 4: VARGA LÁSZLÓ: A VDL, mint programtervezési eszköz
Március 11: LACZKOVICH MIKLÓS: A végtelen sorokról (IMK ülése)
Március 14: CSÖRGŐ MIKLÓS (Kanada): Összetett hipotézisek ellenőrzése paraméterek becslésével és eliminálásával
Március 16: Yu. A. DUBINSZKIJ (Szovjetunió): Soboljev terek és végtelenrendű nem-lineáris egyenletek
Március 18: MAROS ISTVÁN: Adaptív elemek a lineáris programozásban (Alkalmazott szakosztály előadássorozata)

Március 28: E. HOTZEL (NSZK): On semigroups with minimal conditions
Április 5: FRIED ERVIN: Mivel foglalkozik az algebra?
Az OKTV döntőjének feladatai (megbeszélés)
Április 6: ANDRÁSFAI BÉLA: Néhány probléma a gráfelméletből
ADA-WINTER PÉTER: A számítógép működéséről és a programozás alapjairól (IMK Tavaszi ankét)
Április 12: V. STRASSEN: Some results in algebraic complexity theory
Április 15: P. M. GRUBER: (Ausztria): Survey on convexity
H. GAUDI ISTVÁN—KRÁMLI ANDRÁS: Az automatikus osztályozás matematikai-statisztikai módszerei
Április 18: W. STOYE (NDK): Die Anwendung der Vollständigkeit der reellen Zahlen in der Schule
Április 21: LUKÁCS JENŐ (USA): Egy stabilitási tétel, mely a normális és az elfajult eloszlások jellemzéséhez tartozik
Április 22: V. MARDEŠIĆ (Jugoszlávia): Shape fibrations
LACZKOVICH MIKLÓS: Végtelen sorok II. (IMK ülése)
Április 29: FARKAS MIKLÓS: Katasztrófaelmélet (Alkalmazott szakosztály előadássorozata)
Május 2: R. SCHMIDT (NDK): Cohen-Macaulay-Struktur graduierter Moduln und normale Flachheit
N. V. TRUNG (Vietnam): Über Probleme der Determinantenideale
Május 9., 10., 11.: P. PUDLÁK—J. TUMA (Csehszlovákia): Proof of the Whitman conjecture and relatad problems (3 előadás)
Május 11: C. HERRMANN (NSZK): Distributivity and centrality in congruence modular algebras
Május 12: N. V. TRUNG (Vietnam): Über allgemeine Hyperflächenschnitte und Specialisierung
Május 13: FUTÓ PÉTER: Hipergráf elméleten alapuló új cluster definíció és technika
Május 18: A. PULTR: Dimension of graphs
I. I. GICHMAN (Szovjetunió): Matringál differenciák és sztochasztikus parciális differenciál-egyenletek elméletéről
Május 23: J. M. HOWIE (Anglia): Semigroups generated by idempotents
Június 9: V. RÖDL (Csehszlovákia): Some problems in combinatorics
G. AZUMAYA (USA): Radicals of the endomorphism ring of module
Június 10: J. NESETRIL (Csehszlovákia): Selective and ordering properties of graphs and hypergraphs
Június 13: L. STAMMLER (NDK): Körpertheoretische Bedingungen zur Fortsetzbarkeit von Stellen
Június 14: W. NÖBAUER (Ausztria): Lokale Polynomfunktionen auf abelschen Gruppen
Június 20: G. KRAUSE (USA): The Krull intersection theorem for noncommutative noetherian rings
Június 9: Végző matematika-fizika, kémia-fizika szakos hallgatók estje
PÁLMAY LÓRÁNT: Mi várható a következő években a matematikaoktatásban?
SÜKÖSD CSABA: A modern fizika oktatása a középiskolákban (ELFT-tal közösen)
Június 10: KNUTH ELŐD: Konkurrens folyamatok matematikai problémái
Június 11: Az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny eredményhirdetése
Június 24: J. LEHMANN (NDK): Előadás az ALPHA című folyóirat problémáiról Végző matematikus szakos hallgatók estje. Bognár Mátyás előadása. Rényi Kató Emlékdíjak kiosztása.
Június 27: C. T. J. DODSON (Anglia): Modern treatment of connections and curvature on manifolds
Június 28: C. T. J. DODSON (Anglia): Formal tensor geometry of general relativity

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VIDÉKI TAGOZATAINAK RENDEZVÉNYEI 1977 ELSŐ FÉLÉVÉBEN

Bajai Csoport
Március 18: Dániel József: Szélsőértékfeladatok differenciálszámítással, illetve elemi úton történő megoldása
Május 10: Vályi Péter: Budapesti Műszaki Egyetem Főiskolai Kar matematika versenyének zárása. Feladatok megoldásának elemzése, eredményhirdetés, pályadíjak kiadása

BARANYA MEGYEI TAGOZAT

Január 6: Küldöttválasztás a pécsi MTESZ küldöttértekezletre, egybekötve számítógép-bemutatással
Február 17: Vezetőségválasztó ülés

Március 11: Dormány Mihály egy. adj.: „Operációkutatás: műszaki, gazdasági modellek, matematikai módszerek"
Április 7: Forgó Ferenc egy. docens: Mivel foglalkozik a játékelmélet
Április 22: Tornyos Tivadar: matematikai felvételi tájékoztató és előkészítő foglalkozás Baranya megyei IV. osztályos középiskolai tanulók részére
Április 28: Lee Anna: Mátrixok általánosított inverzei
Augusztus 26: Vörös György (Tanárképző Főisk. Pécs) előadása a pécsi Nemzetközi Matematikatanárképzési Konferencia C szekciójában: A matematika tantárgypedagógiájának helyzete, kapcsolata más tudományokkal és ezekből adódó nehézségei.

BORSOD MEGYEI TAGOZAT

Február 26: Kelemen József: A diophantoszi egyenletek elemi megoldásai.
Csirmaz László: Az 1976. évi nemzetközi diákolimpia feladatainak ismertetése.
Március 1: Nikodémusz Antal: Operátor-differenciálegyenletek.
Március 8: Petrik Olivér: A rendszerszervező mérnökképzés célkitűzései és helyzete a BME-en.
Március 15: Daróczy Zoltán: Additív információmértékek.
Március 22: Bleyer András: Az operátorszámítás alkalmazásai parciális differenciálegyenletekre.
Április 8: Vincze Endre: Mit vár el az egyetem a függvénytanban a középiskolától?
Április 19: Szénássy Barna: Néhány új szempont Bolyai János életével és munkásságával kapcsolatban.
Április 22: Révész György: A formális nyelvek szerepe a számítástudományban.
Április 26: Vincze Endre: Komplex számtestek előállítása függvényegyenletek segítségével.
Május 8.: Balogh Viktória: Az új általános iskolai matematikai tanterv. (A Heves megyei Tagozattal közös rendezésben).
Június 2—3. Műszaki Egyetemek Ábrázoló Geometriai tanszékeinek Tanácskozása. (Az NME Ábrázoló Geometriai Tanszékével közös rendezésben).
Petrich Géza: Az óraszámok csökkentésének ellensúlyozása oktatásunkban.
Strommer Gyula: A geometria-oktatás helyzete a BME Gépészmérnöki Karán.
Gunda Mihály: Az ábrázológeometria és a géprajz oktatása a Soproni Erdészeti és Faipari Egyetemen.
Drahos István: Az NME Ábrázoló Geometriai Tanszékének oktatási feladatai.

CSONGRÁD MEGYEI TAGOZAT

Február 21: Csúri Józsefné: Egész távolságú ponthalmazok
Február 23: Kollár János (Bp.): BI-Unáris algebrák kategóriái
Február 25: Krotov (Odessza): Univerzális sorok
Február 28: Lovász László: A topológia egy alkalmazása a kombinatorikában
Március 2: Huhn András: Moduláris hálókról
Március 4: Krotov (Odessza): Univerzális sorok
Március 9: Megyesi László: Félcsoportba független módon beágyazható amalgámok szerkezete
Március 11: Krotov (Odessza): Univerzális sorok
Március 16: Schmidt Tamás (Bp.): Splitting algebrák
Április 1: Erdős Pál (Bp.): Néhány kombinatorikus probléma
Április 13: M. Herrmann (NDK): Remarks on regular sequences
Április 15: Joó István: Laplace-sorok konvergenciájáról
Április 20: Lovász László: A lineáris algebra egy alkalmazása a kombinatorikában.
Május 4: Szász Ferenc: Újabb eredmények a gyűrűk radikálelméletében
Május 5: Babai László: Gráfok automorfizmus csoportjai
Május 11: Christian Herrmann (Darmstadt): Commutators in general algebras
Május 12: Krotov (Odessza): Univerzális sorok
Május 13: Móricz Ferenc: A Mensov-Rademacher tétel általánosítása többszörös sorokra
Május 18: A. Pultr (Prága): On product dimension of graphs
Május 21: J. M. Howie (St. Andrews): Amalgams of semigroups
Május 27: Bodi Béla (Ungvár): Csoportos gyűrű egységeinek csoportjától
Június 7: J. Nesetril (Prága): Gráfelmélet-algebra
Június 24: L. A. Szkornyakov (Moszkva): Poligonok monoidokon.

FEJÉR MEGYEI TAGOZAT

Január 13: Módszertani munkaközösség tanácskozása
Február 28: Hódi Endre: A fakultatív oktatási rendszer (továbbképzés)
Március 7: Fejér megyei középiskolások matematikai versenyének döntője. Fejér-Pest-Veszprém megyei középiskolások matematikai versenye

Március 10: Módszertani munkaközösség tanácskozása
Március 25: Lázár Dezső emlékünnepség a székesfehérvári Teleki Blanka gimnázium centenáriumán.
A Lázár-díjat átadta Erdős Pál.
Fried Evin: A polinomok
Csirmaz László: KöMaL klubdélután
Április 13: Láng Hugó: Elemi egyenlőtlenségek (továbbképzés)
Május 12: Módszertani munkaközösség tanácskozása
Az Ifjú Matematikusok Köre kéthetenként tartja előadásait; a kör vezetője Pálfy Péter Pál.
A kéthetenkénti Diákolimpiai előkészítő szakköri foglalkozások vezetője Láng Hugó.

HAJDÚ-BIHAR MEGYEI TAGOZAT

II. 22.	Farkas Miklós BME Gépészm. Kar	A szimultán tanulás dinamikai elmélete
III. 11.	R. Lapinskas Szovjetunió	Határeloszlástételek végtelen dimenziós terekben
III. 11.	A. Dzsamirzaev Szovjetunió	Véletlen tagszámú összegekre vonatkozó skálareloszlás-tételek konvergencia sebességéről
IV. 22.	Ivan Dimovski Bulgaria	A konvolució módszere az operátorszámításban
III. 15.	A. Szybiak Lengyelország	Contact elements and general Grossman spaces
IV. 26.	Csörgő Miklós Kanada	Erős approximációk a valószínűségszámításban
IV. 29.	Császár Ákos Budapest	Diszkrét Baire-osztályok
III. 28.	Szenthe János BME	Torziómentes természetes connexiók
V. 10.	Hódi Endre OPI	Az új középiskolai tanterv és az abból adódó tanári feladatok az önképzés, továbbképzés területén
V. 10.	Szőkefalvi-Nagy Béla Szeged	Hilbert tér operátorok függvényeiről
V. 17.	Alexits György Budapest	Bizonyos függvénysorok abszolút konvergenciájáról
V. 26.	Kádas Kálmán BME	Ökonometria és a matematikai statisztika
VI. 2.	Lovász László	A lineáris algebra néhány alkalmazása kombinatorikus kérdésekre
VI. 3.	Fejes-Tóth László Budapest	Térkitöltő testek fundamentális mérőszámai
VI. 4.	Moór Arthur Sopron	Weyl-Otsuki terekről
VI. 6.	Erdős Pál Budapest	Számelméleti problémák és eredmények
VI. 6.	T. Sós Vera Budapest	Metszet tulajdonságok struktúrákra
VI. 17.	Strommer Gyula BME	Az abszolút sík szerkesztéselméletéről
VI. 20.	Sebestyén Zoltán	Banach algebrák
VI. 23.	C. T. Dodson Anglia	Differenciálgeometriai problémák

HEVES MEGYEI TAGOZAT

Január 6-án:	Balogh Viktória: A matematikatanítás és a világnézeti nevelőmunka (Eger)
Január 13-án:	Peller József: Függvénytani feladatok középiskolásoknak (Gyöngyös)
Január 20-án:	Snekszer Károly: Számítógépek fejlődéstörténete, főbb részei. (Eger)
Január 27-én:	Osváth Péter: Algoritmikus gondolkodás, folyamatábrák (Eger)
Február 4-én:	Csőke Lajos: Algoritmikus gondolkodás, folyamatábrák (Hatvan)
Február 11-én:	Osváth Péter: Algoritmikus gondolkodás, folyamatábrák (Gyöngyös)
Február 18-án:	Csőke Lajos: Számítógépek programnyelve. Ciklusszervezés (Hatvan)
Február 25-én:	Csőke Lajos: Számítógépek programnyelve. Ciklusszervezés (Eger)
Február 25-én:	Peller József: Függvénytani feladatok középiskolásoknak (Hatvan)
Március 4-én:	Osváth Péter: Algoritmikus gondolkodás, folyamatábrák (Heves)

Március 11-én: Csőke Lajos: Számítógépek programnyelve. Ciklus-szervezés (Gyöngyös)
Március 18-án: Csőke Lajos: Számítógépek programnyelve. Ciklusszervezés (Heves)
Április 27-én: Balogh Viktória: Zártláncú TV alkalmazása a pedagógus továbbképzésben. (Eger)
Május 8-án: Balogh Viktória: Tanárképzésünkben az új matematika tantervekre való felkészítés — miskolci tanároknak (Eger)
Május 18-án: Balogh Viktória: Kerekasztal tanácskozás az új tantervek bevezetéséről (magnetofon felvétellel) (Gyöngyös)
Június 7-én: Erdős Pál: Számelméleti problémákról és eredményekről. (Eger)
Július 15-én: Balogh Viktória: A matematikaoktatás szerepe a tanulók világnézeti nevelésében. (Heves)

KOMÁROM MEGYEI TAGOZAT

Március 31: Molnár Emil: Megemlékezés Bolyai Jánosról
Április 28: Molnár Emil: Tükrözésgeometria

NÓGRÁD MEGYEI TAGOZAT

Január 19. Czene Zoltán: Az új általános iskolai tanterv bevezetésének kérdései, az általános iskolából a gimnáziumba lépő tanulók átállásának problémái
Március 3. Bognár Mihályné: Differenciálszámítás alkalmazása szélsőérték feladatok megoldásában
Ruzsa Imre: A matematika tantárgy szerepe a világnézeti nevelésben

SOPRONI TAGOZAT

Január 27. Szalai István: Fourier sorok trigonometrikus polinomokkal való megközelítése.
Február 1. A tanulmányi versenyek dolgozatainak elbírálása.
Március 17. Gehér László: Egybevágósági transzformációk csoportjának vizsgálatáról.
Április. A megyei tanulmányi verseny ünnepélyes eredményhirdetése. (Győri tagozattal közösen.)
Május 20. Az 1976/77. évi tanulmányi versenyek és felvételi vizsgák feladatainak közös megoldása.

SZABOLCS-SZATMÁR MEGYEI TAGOZAT

Február 14. Darvasi Gyula: Geometriai transzformációk.
Március 14. Prékopa András: Az alkalmazott matematika felhasználásának lehetőségei a középiskolában.
Március 16. Lipa András: A gondolkodás fejlesztése a geometria órákon.
Március 28. Katona Gyula: Extremális halmazrendszerek alkalmazásokkal.
Április 16. Czeglédy István: A függvényfogalom megalapozása az általános iskolában.
Április 21. Erdős Pál: Kerekasztal beszélgetés a nemzetközi matematikai kutatásokról és eredményekről.
Június 9. Hartos Jánosné: Halmazelmélet és matematikai logika az általános iskola 5. osztályában.
Június 9. Sille Zoltán: A számrendszerek tanítása az általános iskola 5. osztályában.

VESZPRÉM MEGYEI TAGOZAT

I. Előadások
Március 28. Pál László: Újabb eredmények a Hermite—Fejér-féle interpolációelméletben.
II. *Továbbképzés:*
Az általános iskola új tantervének bevezetését segítő antenna hálózat működtetése.
III. *Tanulók, hallgatók foglalkoztatása.*
1. Januárban: A Fejér-Veszprém-Pest megyék közti matematikai verseny megyei selejtezője.
2. Februárban: A három megye matematikai versenyén megyénket képviselő tanulóknak évfolyamonként szakköri foglalkozást szerveztünk.
3. Márciusban: A három megye közti verseny megrendezésében közreműködés.
4. A középiskolás verseny I. fordulója dolgozatainak középbizottsági szinten való javítása.
5. Az Arany Dániel középiskolás verseny I. fordulója dolgozatainak középbizottsági szinten való javítása.
6. Az olimpiai szakkör szervezése (Békefi Zs.) és foglalkozásainak megtartása.
IV. *Egyéb.*
A „Rátz László" vándorgyűlés előkészítése és a rendezésben való közreműködés.

KÖNYVISMERTETÉS

G. Sansone, Orthogonal Functions (Robert E. Krieger Publishing Co., Jungtigton, New York 1977, 2nd Edition; 411 oldal)

Az ortogonális függvényekkel, polinomokkal a velük kapcsolatos trigonometrikus sorokkal több jól ismert könyv is foglalkozik, melyek közül a legismertebbek talán G. Szegő, Orthogonal polynomials és A. Zygmund, Trigonometric series című művei. Sansone könyve — melynek első kiadása 1959-ben jelent meg — a fentieknél lényegesen kisebb terjedelmű, tárgyalás módja sem annyira tömör, így természetszerűleg kevesebb anyagot ölel fel. A könyv fogalmazása világos, felépítése logikus, példákkal illusztrált, általában igen alkalmas arra, hogy felkeltse az olvasó érdeklődését a tárgyalt anyag további mélységei iránt.

Sansone könyve 4 részre tagolódik. Az *I. rész* (38 oldal) az ortogonális függvényrendszerekre, Hilbert terekre vonatkozó elemi ismereteket összegzi.

A *II. részben* (130 oldal) a Fourier sorokra vonatkozó alapvető tételeket találunk. Foglalkozik az L_2 térbeli négyzetes konvergenciával, majd különféle pontonkénti konvergencia-kritériumok (C, α) -szummálhatóság, Poisson szummációs módszer következik.

Érdekes a Dirichlet—Jordan tételnek a $(C, 1)$ szummálhatóságból (a Hardy—Landau tétel segítségével) történő levezetése, mely azt jelenti, hogy ez az állítás Tauber-típusú tételként adódik (hasonló gondolat található Zygmund könyvében, de csak mint a fenti tételre vonatkozó második bizonyítás).

Igen szemléletes Fourier általános integrálformuláinak az egyszerű

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

összefüggés messzemenő általánosításaként történő levezetése.

A *III. rész* (126 oldal) a Legendre polinomokkal és Laplace függvényekkel foglalkozik. Itt a szerző igen mélyen és az előzőeknél jóval részletesebben tárgyalja választott témáját. A polinomok Legendre által adott definíciójából az

$$(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n P_n(\cos\gamma)$$

alakból kiindulva vezeti le azok számos ismert és jónéhány kevésbé ismert tulajdonságát. Foglalkozik a polinomsor konvergenciájával, majd hosszas előkészítés után bebizonyítja a Legendre-sor és a megfelelő Fourier-sor ekvikonvergenciájával foglalkozó Hobson-tételt. A Ferrer-függvények bevezetése után a térbeli Laplace egyenlettel és megoldásával foglalkozik. Laplace-sorok különféle szummálhatósága zárja a témakört.

A *IV. rész* (92 oldal) Laguerre- és Hermite-sorokat tárgyal. A Laguerre- és Hermite-polinomok definíciója szintén hatványsor segítségével történik, majd aszimptotikus előállításukat, teljességüket vizsgálja.

Végül valamely $f(x)$ függvény Laguerre illetve Hermite soraira vonatkozó konvergencia tételek következnek, Szegő idézett könyvéhez képest $f(x)$-re vonatkozólag eltérő kikötésekkel.

Összefoglalva: A könyv, főleg I. és II. része, elsősorban bevezető jellegű ismereteket tárgyal meglehetősen szemléletes, ugyanakkor precíz módon. Kiválóan alkalmas arra, hogy gondolatébresztő kézikönyve legyen mindazoknak, akik érdeklődnek az ortogonális függvények elmélete iránt.

VÉRTESI PÉTER

Henry F. De Baggis, Kenneth S. Miller, Foundations of the Calculus, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 227 oldal.

Halmos Pál írja „How to write mathematics" c. esszéjében, hogy elég általános nézet szerint valamennyi „Calculus" és hasonló című könyv rossz. E nézettel ő maga is egyetért, és a jelenség okát abban látja, hogy az Egyesült Államokban „Calculus" néven oktatott studium olyan sok területet foglal magába, hogy egyszerűen képtelenség egyetlen könyvben ezeket bármilyen szinten is kielégítően ismertetni. De Baggis és Miller könyve is magán viseli e betegség tüneteit. Ugyanakkor szemmel látható, hogy a szerzők igyekeztek mindent megtenni a baj elkerülésére, elhagyni, amit csak lehet. Annak bizonyítására, hogy a lehetetlent nem sikerült megvalósítaniuk, felsorolom a könyv fejezetcímeit: valós számok, analitikus geometria, függvények, határérték és folytonosság, differenciálás, határozott integrál, a logaritmus függvény és inverze, módszerek határozatlan integrálok meghatározására.

Az a kevés, amit a könyv egyes témakörökből tartalmaz, példamutató szigorúsággal íródott. Említésre méltó például, hogy a szerzők kiemelik a konstans függvény és annak értéke, illetve az x független változó és az identitás közötti különbséget, így a klasszikus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ határérték-relációt így írják: $\lim_{0}\frac{\sin}{j}=1$ (j az identitás).

Az egyes fejezeteket egyszerű gyakorló feladatok követik. A könyv hasznos segédeszköz lehet az analízis elemeinek megismeréséhez, elsősorban a műszaki egyetemeken, tanárképző főiskolákon és tanári szakokon tanulók számára.

SZÉP ANDRÁS

Peter Pipe, Practical Programming, Robert E. Kriger Publ. Co., Huntington, New York, 1977.

Ez a kis terjedelmű — mindössze 70 oldalas — könyvecske azoknak kíván segítséget nyújtani, akik programozott módszerrel akarnak tanítani, tankönyvet, használati utasítást írni.

A programozott oktatás valójában nem új dolog, hiszen amikor a pedagógus felkészül egy iskolai órára, végiggondolja a szükséges ellenőrző kérdéseket, akkor ez már program. Az újság inkább abban van, hogy ezt a programot leírva szét lehet osztani a tanulók között, és akkor mindenki saját adottságainak megfelelő ütemben sajátíthatja el a tananyagot.

A szerző elmondja, hogyan kell az adott tananyagot előkészíteni, feldarabolni, ellenőrző kérdésekkel kiegészíteni, majd ennek alapján megírni magát a programot. Nem nyújt különösen mély ismereteket, de megtanítja az olvasót arra, hogy önállóan meg tudjon írni egy egyszerű programot.

SZÉP ANDRÁS

1828—1978

MEGJELENT AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS 150. ÉVÉBEN

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat beérkezett: 1978. jan. 11 — Terjedelem: 18,9 (A/5) ív
78-211 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

MTA Könyvtára
Periodika 19[illegible] n.
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

CONTENTS

I. Ruzsa and J. Urbán: In memoriam Rózsa Péter 125
J. Pintz: The number-theoretical works of P. Turán 139
K. Tandori: New results concerning the convergence of function series 155
P. Révész: Remarks to a probability theoretical problem of the 1976 M. Schweitzer Mathematical Competition 161
F. Gécseg and M. Steinby: The algebraic theory of tree automata, I. 169
L. Lovász: On minimax theorems of combinatorics 209
P. Halmos: How to write mathematics 265
A. Récski: Application of matroids to the analysis of electrical networks, II. 287
J. Pach: On metrical properties of countable graphs 305
E. Győri: Comparison of infinite matroids 311
Problems 319
Activity of the Society 329
Book Reviews 339

СОДЕРЖАНИЕ

Имре Ружа—Янош Урбан: В память Рожа Петера 125
Янош Пинтц: Деятельность Пала Турана в теории чисел 139
Карой Тандори: Новые исследования относительсно сходимости серии функций 155
Пал Ревес: Некоторые замечания к задачу из теории вероятности, поставленному на математическом конкурсе имени Миклоша Швейтцера в 1976 году 161
Ференц Гечег и Магнус Стейнби: Алгебраическая теория дерево-автоматов I. 169
Ласло Ловас: О минимаксных теоремах комбинаторики 209
Пал Халмош: Как писать математику 265
Андраш Речки: Применение матроидов в анализе электрических сетей 287
Янош Пах: О метрических свойствах счётных графов 305
Эрвин Дьёри: Сравнение бесконечных матроидов 311
Задачи 319
Из жизни Общества 329
Обзор книг 339

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564
ISSN 0025-519X