312.046

III.

Matematikai Lapok

25
1974

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

25. évfolyam, 1974

1-2

2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1977. június — 25. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Császár Ákos, Fejes Tóth László, Kalmár László, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest 1061 VI., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1 és *bármely postahivatalban*. Pénzforgalmi jelzőszám: KHI. 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010 Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

MERZA JÓZSEF: Rapcsák András 60 éves 1
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Megjegyzések Tarski sávproblémájának egy duálisához 13
TURÁN PÁL: Az approximációelmélet egyes nyitott problémáiról 21
Y. R. SHOENFIELD: Martin axiómája 77
TANDORI KÁROLY: Helyzetelemző tanulmány a hazai analíziskutatások témakörében 87
SZILÁRD KÁROLY: Nemnegatív egész helyeken értelmezett függvények deriváltjai és differenciálegyenletei 105
SZABADOS JÓZSEF: Ortogonális polinomok aszimptotikus viselkedéséről 115
TREN QUÝ TIÊN és Lee Anna: Reguláris gyűrűk egy osztályáról 119
DOBÓ ANDOR—SZAJCZ KÁROLY: Vizsgalapok értékelésével kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról 129
NAGYNÉ SZILVÁSI MÁRTA: Metrikák és konnexiók az érintő vektorok fibrált terén 137
KISS PÉTER: Egy számelméleti probléma általánosítása 145
VARECZA LÁSZLÓ: Mégegyszer egy iskolásoknak szánt algebrakönyv ürügyén 151
SCHMIDT E. TAMÁS: Megjegyzések Varecza válaszához 159
Jelentés az 1975. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 161
Feladatrovat 181
Társulati élet 187
Könyvismertetés 207

RAPCSÁK ANDRÁS 60 ÉVES

MERZA JÓZSEF

Meglepetésként ért a Matematikai Lapok szerkesztő bizottságának az a megtisztelő kérése, hogy a Lapok hasábjain köszöntsem a hatvanéves Rapcsák Andrást, mivel még egészen közelinek tűnt az az őszi nap, amikor először láthattam őt. Pedig már huszonöt éve annak, hogy 1951 szeptemberében mint elsőéves tanárjelölt hallgattam analízis előadásait, amelyeket — helyszűke miatt — az egyetem aulájában tartott. A megnövekedett létszámú hallgatóság számára nem volt elegendő tanterem, ezért az órákat, gyakorlatokat, szemináriumokat tanszéki könyvtárakban, laboratóriumokban, rektori tanácsteremben, s más, rendelkezésre álló helyen tartották. Így történt, hogy Rapcsák András azokon a bizonyos őszi napokon 70—80 matematika—fizika szakos és körülbelül feleannyi fizika—matematika szakos hallgatót vezetett be az aula napfényben úszó hatalmas termében a differenciál- és integrálszámítás elemeibe.

A harmincas éveinek közepén járó Rapcsák András azon a nyáron, 1951 júniusában lett végérvényesen a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem oktatója. Előtte, 1949 szeptemberétől, közel két évig az egri Pedagógiai Főiskola tanára volt, s Egerből járt át Debrecenbe, hogy az Analízis I és Analízis II előadásokat megtartsa. Debrecenbe való visszajutásával a háború és egy súlyos betegség által megnehezített életútja nyugvópontra jutott. Melyek voltak ennek az útnak a fontosabb állomásai?

Rapcsák András 1914. december 12-én született Hódmezővásárhelyen. A tehetséges diák a helybeli gimnázium elvégzése után, 1933-ban kezdte meg tanulmányait a szegedi tudományegyetemen. Az egyetemi évek, sajnos, nem voltak zavartalanok. 19 éves korában első ízben jelentkeztek nála egy súlyos betegség tünetei. Az akkor még kevéssé ismert csontbetegség gyógyítási módjáról senki sem tudott, s az orvosok azt tanácsolták: ha életben akar maradni, amputáltassa fél lábát. A makacs fiatalember szervezete három évig birkózott a betegséggel, míg — operáció nélkül — stabil egyensúlyi helyzet alakult ki, amely lehetővé tette, hogy Rapcsák András folytathassa egyetemi tanulmányait. E kényszerű megszakítás miatt csak 1941-ben kaphatta meg tanári diplomáját. A második világháború bizonytalan éveiben, 1942-ben, a rozsnyói polgári iskola lett a pályakezdő tanár első munkahelye. Innen került át az év végén a debreceni református gimnáziumba. A debreceni egyetemen 1944 decemberében kezdett el oktatni külső előadóként. Ilyen körülmények között érte őt az egri meghívás. Ennek szívesen tett eleget, bár a főiskola csak 1950 szeptemberében tudott főiskolai tanári státust biztosítani számára. Debrecenbe visszatérve most már teljes erővel az oktatásnak és a kutatásnak szentelhette az idejét. A hallgatók hamar megszerették előadásait, mivel azokban kitűnő didaktikai érzékkel építette fel a tárgyalt anyagot anélkül, hogy bármit is feláldozott volna a matematikai

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

pontosságból. A későbbi években az analízisen kívül a matematika több más fejezetéből tartott sikeres tantervi vagy ajánlott előadásokat. Kutatási területét, a differenciálgeometriát nem számítva, elsősorban a variációszámítás és a differenciálegyenletek elmélete köréből tartott előadásait említem meg.

Rapcsák András sokoldalú matematikai érdeklődése nem véletlen műve. Mint egyetemista, Haar Alfréd, Kalmár László, Kerékjártó Béla, Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Gyula előadásait hallgathatta. E kiváló tudósok a kor színvonalán álló matematikát adták elő, s maguk is úttörői lévén a tudományos kutatásnak, hallgatóikat is önálló munkára nevelték. Így vált már egyetemista korában Rapcsák András is önálló, kutató matematikussá. Nem kevéssé segítette ezt az a tény is, hogy egész egyetemi pályafutása alatt tagja volt az Eötvös Loránd kollégiumnak, amelynek alkotó légköre tudományos önállóságra serkentette a hallgatókat. Kutatói fejlődése töretlenül ívelt egyetemi doktori értekezésétől későbbi tudományos témái felé, a még viszonylag klasszikusnak mondható Minkowski-térbeli vizsgálatoktól a pályaterek elméletében végzett alapvető kutatásaiig. Nem célom, hogy az olvasót a téma műveléséhez nélkülözhetetlen analitikus apparátus felvonultatásával fárasszam, ezért a technikai részletek mellőzésével vázolom Rapcsák András munkásságának egyes fejezeteit.

Az euklideszi geometriában a mértékegység minden pontban és minden irányban ugyanakkora. Ha a méterrúd egyik végét rögzítjük, akkor a szabadon mozgó másik vége egy egységsugarú gömbfelület pontjait súrolja. Ezt a gömböt tekinthetjük a tér illető pontjához tartozó „mértékfelületnek". Ha a tér minden pontjában ott lenne ez a mértékfelület, akkor föld körüli vagy világűrbeli utazás alkalmával nem kellene magunkkal vinni méterrudat, hiszen minden pillanatban kéznél lenne az az etalon, amihez a szakaszokat arányíthatnánk.

Az euklideszi geometriára az jellemző, hogy a térbeli pontokhoz tartozó mértékfelületek egymással egybevágó, egységsugarú gömbök. H. Minkowski ezt a geometriát úgy általánosította, hogy — az egybevágóság megtartásával — a térbeli pontokhoz mértékfelületként nem gömböt, hanem valamilyen meghatározott konvex felületet (oválist) rendelt.[1] Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az euklideszi geometria mértékfelületét jelentő gömböket azonos módon deformálta, s ezáltal a mérés is „deformációt szenvedett": különböző irányokban mások és mások a hosszúságegységek.

Ebben az ún. Minkowski-féle térben a szakaszok hossza nem változik, ha párhuzamosan mozgatjuk őket, de ha forgatni kezdünk egy szakaszt, mérőszáma azonnal más lesz. (Általánosabb Minkowski-geometriát kaphatunk akkor, ha a mértékfelületek konvexitását a jóval gyengébb „csillagszerűség" követelményével helyettesítjük, vagyis azt kívánjuk meg, hogy legyen a felület belsejében egy olyan pont, amelyből a felület minden pontja látható.[2]) Ha tehát egy képzeletbeli vándorútra kelve azt találnánk, hogy a mértékfelület a tér minden pontjában általános ellipszoid, akkor megállapíthatnánk, hogy Minkowski-féle világban utazunk.

Még érdekesebb s egyben bonyolultabb geometriát kapunk akkor, ha lemondunk arról, hogy mértékfelületünk minden pontban ugyanaz a felület legyen. A szemléletesség kedvéért tekintsünk egy olyan háromdimenziós Minkowski-teret, amelynek pontjaiban egy meghatározott ellipszoid a mértékfelület. Legyen F e Minkowski-tér felülete, vagyis egy kétdimenziós világ. Milyen lesz F geometriája, hogyan kell méréseket végezni azoknak a kétdimenziós lényeknek, akik F-ben élnek? A kérdésre

[1] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig—Berlin, 1910.

[2] Ha a mértékfelület nem konvex, akkor gyakran pszeudominkowski geometriáról beszélünk. Lásd például: S. Gołąb—H. Härlen, Minkowskische Geometrie I, II, *Mh. Math. Physik* **38** (1938), 387—398.

akkor tudnánk válaszolni, ha megmondjuk: miféle mértékgörbe tartozik a kétdimenziós F világ egyes pontjaihoz. Álljunk meg ezért a felület P pontjában. Az itt álló ember „horizontja" az F felület P pontbeli érintősíkjába esik, e sík az ő lokális világa. Messük el ezzel az érintősíkkal a P ponthoz, mint a Minkowski-tér pontjához tartozó mértékellipszoidot, s tegyük meg a metszetként kapott ellipszist P pontbeli mértékgörbének. Ezzel az eljárással az F sokaság minden pontjához hozzárendelhetünk egy-egy ellipszist, s ezek az ellipszisek pontról pontra változnak. Olyan kétdimenziós görbült világot kaptunk, amelyben a mérés a ponttól is, az iránytól is függ. Az ilyen geometriát Finsler-geometriának nevezzük.

Legalább ennyit előre kellett bocsátanom ahhoz, hogy az olvasónak képe lehessen arról, milyen különleges és bonyolult terek képezték Rapcsák András első vizsgálatainak tárgyát. A Finsler-féle geometria, illetve az azt hordozó Finsler-féle tér fogalmát 1918-ban alapozta meg P. Finsler, aki variációszámítással kapcsolatos vizsgálatai révén jutott el a — később róla elnevezett — terekhez.[3] Hét évet kellett várni arra, hogy a matematikusok észrevegyék: a variációs probléma alapfüggvényéből oly metrikus alaptenzor vezethető le, amely a Riemann-geometria metrikus alaptenzorának általánosítását jelenti, s amely a Finsler-térben a mérés alapja.[4] Ezután már megnyílott az a felépítési út, amelyet az előzőekben vázoltam, s amelynek következtében bizonyos Finsler-geometriákat valamely Minkowski-tér hiperfelületén indukált geometriaként lehetett felfogni. A harmincas évektől kezdve ezért rendkívül megnövekedett a Minkowski- és Finsler-féle geometriák iránti érdeklődés. Az is hozzájárult ehhez, hogy bár a Riemann-geometria, mint a négydimenziós téridő kontinuum geometriája, az általános relativitáselmélet révén döntő szerephez jutott a fizikai jelenségek leírásánál, mégis, a fizikusok, s elsőként maga Einstein is, olyan általánosabb geometriákat kerestek, amelyek alkalmasak lennének nemcsak a gravitációs, hanem az elektromágneses jelenségek leírására is.[5] Bár az egységes térelmélet megalkotása szempontjából a Finsler-féle geometria eddig még nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket, mindazonáltal mind a matematika, mind a fizika számára sok hasznos eredmény született e kutatásokból.

Rapcsák András [1] egyetemi doktori disszertációjával azoknak a kutatóknak a sorába lépett, akik célul tűzték ki a Minkowski- és Finsler-féle geometria kapcsolatának minél alaposabb felderítését. Mivel a Minkowski-tér hiperfelületein indukált metrika Finsler-féle, ezért teljes részletességgel foglalkozott a Minkowski-tér felületelméletével és sok eredményt ért el. E kutatásoknak azért van még ma is nagy jelentősége, mert nem tudjuk, hogy egy tetszőlegesen megadott Finsler-geometriához (sokaság + ponttól és iránytól függő és néhány ésszerű függvénytani feltétellel szabályozott metrika) meg lehet-e szerkeszteni egy alkalmas Minkowski-teret és abban egy felületet úgy, hogy a tér Minkowski-geometriája által a felületen indukált geometria az előre megadott Finsler-geometria legyen. Ezért aktuális minden olyan vizsgálat, amely tételeket mond ki a Minkowski-tér felületeire, mert így remélhetjük, hogy egyszer elégséges feltételek rendszerét tudjuk az előző kérdésre adott válaszként felírni.

[3] P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.* Dissertation, Göttingen, 1918; új kiadása könyvalakban: Birkhäuser-Verlag, Basel, 1951.

[4] Az első ilyen irányú eredmények a következő dolgozatokban találhatók: L. Berwald, Über Parallelübertragungen in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, *Jber. D. M. V.* **34** (1926), 213—220; J. L. Synge, A generalization of the Riemannian line-element, *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), 61—67; J. H. Taylor, A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas, disszertáció, Chicago, 1924, illetve *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), 246—264.

[5] Lásd például: Lánczos Kornél, *A geometriai térfogalom fejlődése,* Gondolat, Budapest, 1976, 252—253.

Általánosabb esettel állunk szemben, ha a felületet beágyazó tér nem Minkowski-tér, hanem Finsler-tér. Rapcsák András [3] dolgozatában a számos felvethető kérdés közül a Finsler-tér hiperfelületein fekvő görbék jellemzését tűzte ki célul. E görbékhez, mint a beágyazó tér görbéihez $n-1$ számú invariáns (görbület) tartozik, ha viszont a görbéket a felület, vagyis egy $n-1$ dimenziós Finsler-tér részsokaságának tekintjük, akkor szintén tartozik hozzájuk $n-2$ invariáns. A két invariánsrendszer nyilván nem független egymástól, hiszen egyazon görbéhez tartoznak. Abból a célból, hogy az invariánsrendszerek közti kapcsolatot kiderítse, Rapcsák András alkalmas felületi kísérő n-élt szerkesztett a görbékhez. Megállapította e kísérő n-élnek ahhoz az n-élhez való viszonyát, amely a görbéhez, mint a beágyazó tér részsokaságához tartozik. Ily módon messzemenően sikerült általánosítania a közönséges térben levő felületeken mozgó triéderekre vonatkozó Darboux-féle tételt, s a kapott összefüggésekből számos geometriai következtetést tudott levonni.[6]

A differenciálgeometriai számítások egyik nehézsége az, hogy az általános terekben a képletek nagyon bonyolultakká válnak. Egyes tértípusok esetében lényeges egyszerűsítést érhetünk el akkor, ha tanulmányozásukra olyan, speciális koordinátarendszert választunk, amely mintegy illeszkedik szerkezetükhöz. Sokszor azonban nincs előzetes képünk a térről, s ezért arra törekszünk, hogy legalább abban a környezetben, amelyben vizsgálatainkat végezzük, olyan koordinátarendszerünk legyen, amelyben a kérdések áttekinthetőbb alakban fogalmazhatók meg. A tenzoregyenleteknek ugyanis megvan az a jó tulajdonságuk, hogy ha érvényességüket egy speciális koordinátarendszerben igazoljuk, akkor bármely koordinátarendszerben teljesülnek, vagyis általános érvényűek. A Riemann-terek elméletében már jó ideje bevezettek különféle speciális koordinátafajtákat.[7] Ezek egyikét, az ún. normál koordinátákat a következőképpen írhatjuk le. A tér P pontján át fektessünk minden irányban geodetikus vonalakat. Hajtsuk ezután végre a megadott (x^i) koordinátarendszer egy olyan analitikus koordinátatranszformációját, amely olyan (z^i) koordinátákhoz vezet, amelyekben a P ponton áthaladó geodetikus vonalak egyenlete lineáris függvénykapcsolattal írható fel. Riemann-térben nincs akadálya e koordináták bevezetésének, a Finsler-térben azonban különféle nehézségek merültek fel. Nem is lehet a normálkoordináták fogalmát teljesen analóg módon átvinni a Finsler-terekre. A Varga Ottó által bevezetett normálkoordinátáknak[8] is sok előnyös tulajdonságuk volt, azonban a bevezetésükhöz szükséges görbesereg nem geodetikusokból állt és így bizonyos analógiák elvesztek. Felvetődött a kérdés: van-e a normálkoordinátáknak olyan jellegzetes tulajdonsága, amely egyaránt érvényes mind Riemann-, mind Finsler-térben. A kérdésre adott pozitív válasz Rapcsák Andrásnak köszönhető, aki [4] dolgozatában kimutatta, hogy a normálkoordinátáknak H. S. Ruse által 1931-ben megadott jellemzési módja[9] érvényes a Varga Ottó által bevezetett normálkoordinátákra is. Innen már csak egy lépés volt a vektorok, illetve tenzorok invariáns

[6] Riemann-térbe ágyazott felületeken haladó görbék esetében a kétféle triéder kapcsolatát megtalálhatjuk E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Gauthier—Villars, Paris, 1951) című művében a 98. oldalon.

[7] Jó leírásuk megtalálható a következő művekben: L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1926, 18 §; A. Duschek—W. Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Teubner, Leipzig—Berlin, 1930, 1. köt. VI. fej. 4. § és 2. köt. V. fej. 11. §; S. Kobayashi—K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York—London, 1963, 1. köt. 3. fej. 8. pont.

[8] Normálkoordináták általános differenciálgeometriai terekben és ezek alkalmazása a differenciálinvariánsok teljes rendszerének meghatározására, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952, 131—146.

[9] Taylor's theorem in the tensor calculus , *Proc. London Math. Soc.* (2) **32** (1931), 87—92.

Taylor-sorfejtésének megszerkesztése. Ezt [5] dolgozatában végezte el, hasznos eszközt adva minden olyan geométer kezébe, akinek lokális vizsgálataiban e geometriai objektumok approximációjára van szüksége.

A normálkoordináták geometriai jellemzése után Rapcsák András e koordináták alkalmazási lehetőségeinek felderítésére törekedett. Más szerzők korábbi vizsgálataiból ismeretes volt, hogy e koordináták bevezetése módot nyújt egy tér alapvető invariánsainak felkutatására.[10] Kandidátusi disszertációjában [6] tehát azt a kérdést vetette fel: melyek egy reguláris Cartan-féle tér alapinvariánsai? A szakember számára nem váratlan az új tértípus, a Cartan-féle tér megjelenése. Nem sokkal a Finsler-geometria tenzorkalkulusra épülő kidolgozása után E. Cartan észrevette azt, hogy a Finsler-féléhez sokban hasonló geometriát kaphatunk akkor, ha a mérést pont és irány helyett pontra és hiperfelületelemre értelmezzük.[11] A Finsler-geometriát, ahol a mérték minden pontban, illetve minden irányban más és más, ún. vonalelemek (pont+irány) $2n-1$ dimenziós sokasága feletti geometriának tekinthetjük. A Cartan-geometriában hiperfelületelemek (pont+hipersíkállás) halmaza felett vezetünk be mérést. Bizonyos analógiákra alapozva meghatározzuk e geometria alaptenzorát, összefüggési együtthatóit stb. A térnek természetesen számos invariáns mennyisége van és a geométer számára fontos ezek felkutatása. Mégsem szükséges az összes invariánst megkeresni, hanem elég csupán egy olyan ún. „teljes invariánsrendszernek" a meghatározása, amelynek a tér minden más invariánsa már függvénye. Rapcsák András ezt a teljes invariánsrendszert adta meg Cartan-térben, pontosan leírva azokat a tenzorokat, illetve vektort, amelyeknek, illetve amelyek kovariáns deriváltjainak függvényeként minden más tenzori differenciálinvariáns előállítható.

A normálkoordinátákkal kapcsolatos vizsgálatokban állandóan szerepet játszottak a térbeli geodetikus, illetve kvázigeodetikus vonalak és ezek tanulmányozása új eredmények egész sorához vezetett. Ezek áttekintéséhez mindenekelőtt azt kell tudnunk, hogy teljesen geodetikus vagy totálgeodetikus felületen olyan felületet értünk, amely minden őt érintő geodetikus vonalat teljes egészében tartalmaz.[12] Az általános görbült terekben a totálgeodetikus felületek veszik át az euklideszi tér síkjainak szerepét, hiszen az euklideszi tér síkjaira jellemző az a tulajdonság, hogy minden őket érintő egyenest (az euklideszi tér geodetikusát) teljes egészében tartalmaznak. Az euklideszi térben korlátlanul fektethetünk síkokat, Riemann-terekben viszont nem tehetjük meg ezt minden korlátozás nélkül. Jól ismert eredmény,[13] hogy az állandó görbületű Riemann-terekben és csakis azokban lehet minden ponton át minden irányban síkot (pontosabban: totálgeodetikus felületet) fektetni. E nagyfontosságú tétel köré vizsgálatok egész sora csoportosult és a kutatók a tétel Finsler-térre való általánosításával is kezdtek foglalkozni. Az eredmények attól függtek, hogyan definiálják a sík fogalmát Finsler-térben. Rapcsák András három természetes értelmezési módot is talált s ennek megfelelően [9] dolgozatában számos érdekes eredmény mellett három főtételt bizonyított be. Az első tételben azt igazolta, hogy ha minden vonalelemhez fektethető a rá merőleges irányban elsőfajú

[10] Lásd a 8. jegyzetet.

[11] E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire,* Actualités scientifiques et industrielles, Exposés de Géométrie I, Hermann, Paris, 1933.

[12] Lásd pl. Eisenhart, *Riemannian Geometry* c. művének 54. §-át, vagy Kobayashi—Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* 1. kötete IV. fejezetének 5. pontját.

[13] F. Schur, Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen, *Math. Ann.* 27 (1886), 537—567. Lásd: Eisenhart, *Riemannian Geometry,* 26. §; Kobayashi—Nomizu, 1. köt. 202. old.; különösen: Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann,* 114—126 és 218—219.

sík (totálgeodetikus felület), akkor a tér projektív-sík tér, s ezenfelül skalár görbületű is.[14] Az első fogalom azt jelenti, hogy a tér geodetikusai egyenesek, vagyis van olyan koordinátarendszer, amelyben a geodetikusok $n-1$ lineáris egyenlettel írhatók le. A tér görbületének skalár volta pedig azt jelenti, hogy a Finsler-geometria három görbületi tenzora közül az elsővel, a Riemann-geometria metszetgörbülete mintájára képezett mennyiség a síkállástól független skaláris függvény. Ha ez a függvény állandó, akkor a teret állandó görbületű Finsler-térnek nevezzük.

A másodfajú síkok a normálkoordináták bevezetésénél használt kvázigeodetikus görbékre épülő ún. totálkvázigeodetikus felületek. Ezek korlátlan létezése esetén a térnek ismét skalár görbületű projektív-sík térnek kell lenni, azonban még egy analitikus feltételt is ki kell elégítenie, amely a tér egy fontos tenzorát korlátozza. Ha viszont a Rapcsák-féle harmadfajú síkok léteznek korlátlan mennyiségben, akkor a térnek szükségképpen állandó görbületű Riemann-térre kell redukálódnia.

Ezekben a vizsgálatokban Rapcsák András a síkot az azt érintő vonalelemek mértani helyeként fogta fel, tehát vonalelemekből alkotott sokaságnak tekintette. M. Wegenert követve azonban a Finsler-tér síkjait ponthalmazként is definiálhatjuk.[15] Az E transzverzális hiperfelületet akkor mondhatjuk síknak, ha a hozzá tartozó merőleges vonalelemek a tér metrikája szerint párhuzamosak (euklideszi esetben egy párhuzamos egyenesekből álló seregre merőleges síkról lenne szó). Az így értelmezett — mondhatnánk negyedfajú — síkok is szépen felhasználhatók bizonyos Finsler-terek jellemzésére. Rapcsák András [10] dolgozatában a L. Berwald által bevezetett nulla projektív görbületű Finsler-tereket tette vizsgálat tárgyává. E terek jóval szélesebb osztályt alkotnak, mint az — ugyancsak Berwald által bevezetett — skaláris illetve állandó görbületű Finsler-terek.[16] Rapcsáknak egyebek között azt sikerült kimutatnia, hogy a nulla projektív görbületű Finsler-terek akkor és csak akkor válnak állandó görbületű terekké, ha azokban minden vonalelemhez mint normálvektorhoz, létezik transzverzális hipersík. Vizsgálataiból az is kitűnik, hogy e hipersíkon indukált Riemann-metrika mikor lesz állandó, illetve zérus görbületű. Hasonló kérdésekkel foglalkozott [11] munkájában is.

Ha csak utóbbi három dolgozatát ismernénk, akkor is sejthetnénk Rapcsák András további kutatásainak irányát. E cikkekben projektív-sík terekről, geodetikusokról, görbületekről volt szó. Önként kínálkozik az a gondolat, hogy a tér metrikus jellegéről lemondva, foglalkozzunk a pályák általánosabb elméletével. Ez pontterek esetében eléggé felderített terület volt,[17] viszont sok volt még a tisztázatlan kérdés a vonalelemterek pályáinak elméletében. Pár évvel korábban azonban Rapcsák András egy dolgozatában már foglalkozott ilyen kérdésekkel (lásd [8]) mintegy előkészítve további — legszélesebb területet átfogó, s egyben legkiemelkedőbb kutatásait. Arra törekedett ugyanis, hogy megtalálja azt a módot, amivel a korábban J. Douglas által pontterek pályáira kidolgozott elméletet általánosítani lehet vonalelemterekre. De mik is tulajdonképpen a pályák, amelyekről már annyiszor tettünk említést?

[14] E fogalmak eredetét illetően lásd: L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. of Math.* (2) **48** (1947), 755—781.

[15] J. M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Mh. Math. Phys.* **44** (1936), 115—130.

[16] Lásd a 14. jegyzetet.

[17] A téma első összefoglalása (jó irodalomjegyzékkel) L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry* című könyve (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. VIII, New York, 1927), újabb cikkek és könyvek jegyzéke megtalálható [14]-ben.

A Riemann-térben a geodetikus vonalaknak (azaz a tér egyeneseinek) két tulajdonsága van. A metrikus tulajdonság alapján a geodetikusok két pont legrövidebb összekötő vonalai. Van azonban a közönséges egyenesnek egy olyan, nem-metrikus tulajdonsága is, amely jellemző rá, s amely érvényes a Riemann-geometria geodetikus vonalaira is: érintői párhuzamosak egymással. Ez az utóbbi tulajdonság olyan, hogy teljesedése minden olyan térben megvizsgálható, amelyben ún. kovariáns derivváció, vagy egy azzal kapcsolatban álló „összefüggés" (különböző pontbeli érintő vektorterek összehasonlítására szolgáló eljárás) adva van. Nincs szükség tehát metrikára ahhoz, hogy olyan vonalakról beszélhessünk, amelyeknek érintővektorai (a térben fennálló összefüggés szerint) párhuzamosak. Az ilyen vonalakat autoparallel görbéknek vagy pályáknak nevezzük, ezzel is kifejezve azt, hogy a metrika hiánya miatt nem mondhatjuk azt, hogy e vonalak minimális ívhosszú görbék. Aki Riemann-térben autoparallel görbét mond, az geodetikus vonalat is mond és fordítva, mivel ott a két tulajdonság egybeesik. Általánosabb terekben azonban megtörténhet e fogalmak szétválása. Rapcsák András tudta, hogy ha a Finsler-féle metrikus térből általánosabb, affin összefüggéssel ellátott térbe akar átlépni, akkor meg kell találnia azokat a differenciálegyenleteket, amelyek ennek az általános térnek a pályáit jellemzik. Törekvése sikerrel járt, mert a normálkoordinátáknál már megismert kvázigeodetikus vonalakból kiindulva olyan differenciálegyenletrendszert tudott konstruálni, amelyből könnyen következtek a vektorok párhuzamos eltolására szolgáló egyenletek. Ezután teljes részletességgel kidolgozta az így kapott affinösszefüggő vonalelemtér görbület- és torzióelméletét, s az ekvivalenciaelméletet tárgyalva megszerkesztette a tér differenciálinvariánsainak teljes rendszerét.

Rapcsák András legszebb eredményeit a [15—18] dolgozatok tartalmazzák. Egyetlen hatalmas kérdéskomplexum többoldalú megközelítéséről, illetve megoldásáról van itt szó. A központi szerepet a pályák játsszák, s a tételek új és új oldalról világítják meg tulajdonságaikat. A [15] dolgozatban affinösszefüggő vonalelemterek pályatartó leképezéseiről olvashatunk. A P_n térnek a $\bar{P}_n$ térre való leképezését akkor nevezzük pályatartónak, ha a leképezés P_n pályáit $\bar{P}_n$ pályáiba viszi át. A sokasághoz tartozó Weyl-, illetve Douglas-féle tenzorok[18], valamint ezek kovariáns deriváltjainak felhasználásával Rapcsák Andrásnak sikerült kritériumot adni egy leképezés pályatartó voltára, s megmutatni, hogy e tenzorok a pályatartó leképezés teljes invariánsrendszerét adják.

Ha a tér nem ennyire általános, hanem Finsler-féle metrikus tér, akkor szintén megvizsgálhatók e terek pályatartó, azaz jelen esetben, mivel metrika van, geodetikus leképezései. A [15] dolgozat eredményei persze ezekre a terekre is érvényesek, de mivel a Finsler-térben metrikus alapfüggvény is létezik, azért olyan jellegű tételek felkutatása kívánatos, amelyekben a tér alapfüggvénye is szerepel. Ebben az irányban haladva Rapcsák Andrásnak sikerült differenciálegyenletrendszerrel jellemezni azoknak az $\bar{F}_n$ tereknek alapfüggvényeit, amelyek geodetikusan leképezhetők F_n-re. Ez a [16] dolgozata még két szükséges és elégséges feltételt tartalmaz két Finsler-tér geodetikus megfeleltethetőségére vonatkozóan.

A most ismertetett két dolgozatban azonos jellegű terek egymásra való leképezéséről volt szó. Rendkívül érdekes eredményeket kapunk azonban akkor, ha a következő probléma megoldását tűzzük ki célul: adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a P_n affinösszefüggő pályatér geodetikusan leképezhető legyen egy F_n Finsler-térre. Ebben az esetben ugyanis arról van szó, hogy a leképezés révén a P_n affinösszefüggő tér reguláris Finsler-metrikát kap úgy, hogy P_n pályái a metrikus

[18] Lásd pl. [14], 352. old.

alapfüggvény extremálisainak seregévé, azaz geodetikus vonalakká válnak. Talán itt látszik legjobban a differenciálgeometria és a variációszámítás kapcsolata, hiszen a felvetett kérdés inverz variációs problémát jelent: megadott görbesereghez kell olyan függvényt konstruálni, amelynek extremálisai a kiindulási görbesereggel azonosak. Technikailag arról van szó, hogy a pályákon olyan paramétert kell bevezetni, amelyre áttérve a pályák egy $2n$ változós, utolsó n változójában elsőfokú pozitív homogén konvex függvény geodetikusaivá válnak úgy, hogy az új paraméter a geodetikusok ívhosszát méri. Rapcsák András [17] dolgozatában két alaptételt bizonyított be. Mindkettő kritériumot ad a P_n affinösszefüggő pályatér metrizálhatóságára. Az elsőből még az is következik, hogy P_n mikor látható el Riemann-metrikával.

A projektív-sík terek olyan affin pályaterek, amelyeknek pályái egyenesek. Ha most azt kérdezzük: melyek azok a Finsler-terek, amelyek projektív-sík térre pályatartóan leképezhetők, akkor Hilbert következő problémáját fogalmaztuk meg: melyek azok az alapfüggvények, amelyeknek extremális serege egyenesekből áll[19]. A [17] dolgozat első alaptétele itt is alkalmazható, s ezáltal eljuthatunk egy φ skaláris függvényhez, amelyet két differenciálegyenletrendszer határoz meg. Ennek a φ függvénynek a segítségével a keresett alapfüggvény explicit alakban írható fel ([18]).

Rapcsák Andrásnak ezek a rendkívül szép eredményei nagy érdeklődést keltettek és széles körben ismertté váltak. Korábbi dolgozataira a Finsler-terek elméletét elsőnek feldolgozó monográfia[20] is hivatkozik. Újabb munkái olyannyira megszilárdították tudományos tekintélyét a differenciálgeométerek körében, hogy az elmúlt évben a debreceni egyetem immár másodszor rendezhetett sikeres nemzetközi differenciálgeometriai kollokviumot Rapcsák András elnöklete alatt. Bár az utóbbi években az egyetem vezetése és sokoldalú társadalmi tevékenysége rendkívül igénybe vette munkabírását, mégsem szűnt meg gondolkodni és alkotni abban a témakörben, amelyet az olvasó e cikkből megismerhetett. Sok eredménye van kéziratban, publikálás előtt. Jelenlegi tudományos célja a Finsler-terek olyan osztályozása, amelynél az egyes osztályokat az egymásra geodetikusan leképezhető terek alkotnák. Ezzel nyilvánvalóan még közelebb jutnánk a pályaterek metrizálhatóságának teljes megoldásához, s ezzel is támogatnánk a valóságos tér szerkezetének megismerésére irányuló kutatásokat.

Ismertetésemben azt a módszeres, következetes kutatói munkát, gondolati fejlődést akartam bemutatni, amellyel Rapcsák András lépésről lépésre, töretlen vonalvezetéssel jutott el kezdeti, Minkowski-geometriai vizsgálataitól a matematika egyik legszebb problémájának megoldásáig. Ezért sok, önmagában is érdekes részeredményt nem említettem, s ha most még a lokális metrikus differenciálgeometria megalapozásáról írott [12] dolgozatát kiemelem, csak azért teszem, mert benne jól tükröződik axiomatikus gondolkodásra való hajlama is. Olvasásakor azonnal észrevesszük, hogy Rapcsák András hasonló alapozást dolgozott ki a lokális metrikus differenciálgeometriai terekre, mint amit Veblen és Whitehead adott az addig ismert pontterekre klasszikussá vált munkájuk[21] VI. fejezetében.

[19] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Gött. Nachrichten, 1900, 253—297 (negyedik probléma); könyv alakjában, kommentárokkal ellátva, P. Sz. Alekszandrov szerkesztésében: *Problemü Gil'berta*, Nauka, Moszkva, 1969, 29—31.

[20] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 101, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959.

[21] O. Veblen—J. H. C. Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. No. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

Már említettem, hogy igen jó előadó. Ő is azok közé az egyetemi tanárok közé tartozik, akik középiskolai tanár korukban megtanulták, hogy aki jól oktat, az biztosítja a tudomány fejlődését is. Nem kell bizonyítanom, hányan kaptunk kedvet a matematika hivatásszerű művelésére elsősorban azért, mert diák korunkban jó matematika tanárunk volt. De áll ez az egyetemre is. A jó egyetemi oktató tudja, hogy világosan, didaktikai gondossággal, színvonalasan előadni: napról napra megvalósítandó feladat. A tudományának jövőjét biztosítani akaró tudós felelősségteljes feladata. Rapcsák Andrásnak mindig szívügye volt a jó oktatás megvalósítása. Mindig voltak javaslatai, tervei, kísérletei (pl. az integrálszámítás előadása a Moore—Smith-féle limeszfogalom alapján, 1952-ben[22]). Egyformán érdekelte a középiskolai és az egyetemi oktatás. S hogy nemcsak terveket tud szőni, hanem azok megvalósítására is vállalkozik, megmutatja az a három tankönyv, amelyet társszerzőkkel együtt az ipari technikumok számára írt ([20—22]). Szinte ugyanakkor, amikor kandidátusi disszertációján dolgozott. Egyidejűleg tudta támogatni a középfokú oktatást, s ugyanakkor a tudományos kutatás első vonalában munkálkodni. Ha még hozzátesszük ehhez azt a számos előadást, amit a geometria népszerűsítése érdekében minden szinten tartott, s amelyekben a geometriával, illetve a térrel kapcsolatos filozófiai kérdések fejtegetéséig is eljutott, akkor azt mondhatjuk, hogy Rapcsák András mindenkivel meg akarta ismertetni azt a látásmódot, amelyre megbízható természettudományos világkép építhető fel. Ez már több, mint szakmai ismeretek közlése, ez világnézeti nevelés. Annak a tudósnak a nevelő tevékenysége, akinek a szaktudomány és a filozófia sohasem jelentett két idegen területet, akit mindig vonzottak a marxista filozófia tudományelméleti vonatkozásai. Kutatni, tanítani és nevelni: ez töltötte be életét, s ha erről volt szó, sohasem tudott hűvös, vagy közömbös maradni. Amit tudott, azt elemi erővel, szenvedélyesen akarta és tudta is átadni. Aki hallhatta egyetemi előadásait vagy láthatta őt egy megtartott előadás után fáradtan egy székre roskadni, az tudja, mennyi energiát pazarolt el egy-két óra alatt ezért a célért.

Akinek életeleme a kutatás és a nevelő munka, az nem zárkózik be tanszékének falai közé, hanem azon túl is keres munkaterületet. Rapcsák András sohasem tudta kiszakítani magát a közösség életéből, s mint régi párttag, mindig ennek érdekeit tartotta szem előtt. Amennyire erejéből tellett, dolgozott a nagyobb közösségért, az egyetemért. Tisztségek egész sorát töltötte be. Egy évig volt dékánhelyettes, ugyanannyi ideig dékán, majd hat évig rektorhelyettes és hét évig rektor. Rektorsága idején épült fel az egyetem új kollégiuma és az építészetileg is sikerült kémiai épület. Mint rektor hatékonyabbá tette az egyetem és a debreceni Városi Tanács együttműködését. Sokat tett azért, hogy az egyetemnek jó nemzetközi kapcsolatai legyenek. Kiev, Iaşi, Lublin és Rostock egyetemeivel kötött egyezményeket, és arra törekedett, hogy a kapcsolatok erősödjenek, egyre tartalmasabbak legyenek. Tudományszervezői munkájáért a kievi egyetem díszdoktorává avatta. Amikor azonban nemzetközi méretekben gondolkodott, meg tudta érteni munkatársai mindennapi gondjait is. Nem kevés azoknak az oktatóknak a száma, akik az ő segítségével jutottak lakáshoz.

1960 óta tevékenyen részt vesz a Matematikai Bizottság, valamint más akadémiai és társulati testületek munkájában. A Publicationes Mathematicae, az Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, a Periodica Mathematica Hungarica és a Matematikai Lapok szerkesztő bizottságának tagja. A Magyar Tudományos Akadémia 1967-ben választotta levelező tagjai közé. Államunk Rapcsák András

[22] Lásd: [2].

munkájának megbecsülését a Munka Érdemrend ezüst, majd arany fokozatának, a Sport Érdemérem arany fokozatának és a Népköztársasági Érdemérem ezüst fokozatának adományozásával is kifejezte. E kitüntetések mellett elnyerte az Oktatásügy Kiváló Dolgozója címet is.

Nehéz letenni a tollat, amikor sok emlék, hétköznapi történet merül fel a múltból. Ez a cikk azonban szakfolyóirat számára készült, s az emberről elsősorban mint szakemberről kellett szólnom. Ezt, ha vázlatosan is, megtettem. Mi marad még hátra? Az, amit már e sorok elején is elmondhattam volna: minden tanítványa, munkatársa és barátja tisztelettel köszönti hatvanadik születésnapján és további tudományos tevékenységéhez erőt, egészséget kíván neki.

RAPCSÁK ANDRÁS MUNKÁINAK JEGYZÉKE

[1] Felületelmélet a Minkowski-térben. Egyetemi doktori értekezés, Debrecen, 1947.
[2] A Moore—Smith limesfogalom és alkalmazása a Lebesgue-integrálra. Kézirat, Debrecen, 1952.
[3] Kurven auf Hyperflächen im Finslerschen Raume, *Hungarica Acta Math.* **1** (1949), no. 4, 21—27.
[4] A normálkoordináták egy újabb értelmezése a Finsler-térben, *Acta Univ. Debrecen* **1** (1954), 109—116; additamentum ad **1** (1955), 17.
[5] Invariante Taylorsche Reihe in einem Finslerschen Raum, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955—1956), 49—60.
[6] A differenciálinvariánsok teljes rendszere a reguláris Cartan-térben. Kandidátusi értekezés, Debrecen, 1955.
[7] Über das vollständige System von Differentialinvarianten im regulären Cartanschen Raum, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955—1956), 276—293.
[8] Theorie der Bahnen in Linienelementmannigfaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihrer affinen Theorie, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **16** (1955), 251—265.
[9] Eine neue Charakterisierung Finslersche Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv-ebene Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 1—18.
[10] Metrische Charakterisierung der Finslerschen Räume mit verschwindender projektiver Krümmung, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **18** (1957), 192—204.
[11] Hipersíkok a Finsler térben, *Acta Univ. Debrecen* **4** (1959), 85—87.
[12] Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 382—393.
[13] Metrikus és affinösszefüggő pályaterek pályatartó leképezései. Doktori értekezés, Debrecen.
[14] Metrikus és affinösszefüggő pályaterek pályatartó leképezései, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **11** (1961), 339—369.
[15] Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 225—230.
[16] Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 285—290.
[17] Über die Metrisierbarkeit affinzusammenhängender Bahnräume, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **57** (1962), 233—238.
[18] Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 164—167.

TANKÖNYVEK, JEGYZETEK

[19] Differenciál- és integrálszámítás. Egyetemi jegyzet, Debrecen, 1947.
[20] Matematika az ipari technikumok I. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1952, 295 l. (Csánk Istvánnal és Gyarmathi Lászlóval)
[21] Matematika az ipari technikumok 2. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1953, 291 l. (Gyarmathi Lászlóval és Török Sándorral)
[22] Matematika az ipari technikumok 3. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 211 l. (Gyarmathi Lászlóval)
[23] Komplex számok. Kiegészítés a villamosipari technikumok 2. osztályának matematika anyagához, Tankönyvkiadó, Budapest, 1953, 35 l.

[24] Differenciálgeometria, I. rész. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966, 152 l. (Tamássy Lajossal)
[25] Differenciálgeometria, II. rész. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970, 65 l. (Tamássy Lajossal)

DIDAKTIKAI ÉS EGYÉB MUNKÁK

[26] A geometria axiomatikus tanítása a gimnáziumokban, *Protestáns Tanügyi Szemle* **17** (1943), 181—186.
[27] A matematikaoktatás tapasztalatai a Debreceni Tudományegyetem Természettudományi Karán, *Felsőoktatási Szemle* **1** (1952), 285—287. (Gyarmathi Lászlóval)
[28] A differenciálinvariánsok teljes rendszere a reguláris Cartan térben. Kandidátusi értekezés tézisei. Tudományos Minősítő Bizottság, Budapest, 1955, 5 l.
[29] Metrikus és affinösszefüggő pályaterek pályatartó leképezései. Doktori értekezés tézisei. Tudományos Minősítő Bizottság, Budapest, 1959, 5 l.
[30] VARGA OTTÓ (1909—1969), *Mat. Lapok* **21** (1970), 19—30.
[31] A matematikai tudományok fejlődése hazánkban az elmúlt 25 esztendő alatt, *1941—1969*, Az MSZMP Hajdú-Bihar megyei bizottsága és oktatási igazgatóságának kiadványa a decemberi jubileumi tudományos ülésszakról, 1. kötet, Debrecen, 1970, 349—359.

АНДРАШ РАПЧАК 60 ЛЕМ

ЙОЖЕФ МЕРЗА

THE MATHEMATICAL WORK OF A. RAPCSÁK

J. MERZA

MEGJEGYZÉSEK TARSKI SÁVPROBLÉMÁJÁNAK EGY DUÁLISÁHOZ

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

... akkor majd az emberek azon lesznek, hogy kisebb eredményeiket is közöljék ... és hozzáteszik: „Többet nem tudok".

Evariste Galois
(L. Infeld, Whom the Gods Love)

A. Tarski 1932-ben a következő problémát vetette fel: Fedjünk le egy konvex tartományt véges sok sávval, amelyek össz-szélessége s. Igaz-e, hogy a tartomány lefedhető egyetlen s szélességű sávval? (Egy s szélességű sávon két párhuzamos s távolságú egyenes által határolt összefüggő síkrészt értünk.) Tarski megjegyezte (l. [2]), hogy kör esetén a válasz pozitív. A bizonyítás H. Moese egy ötletén alapszik:

Feltehetjük, hogy az r sugarú körlapot lefedő $s_1, \ldots, s_n$ szélességű sávokat határoló minden egyenes metszi vagy érinti a kört. Írjunk a körlap köré r sugarú gömböt, és vetítsük a sávokat, pontosabban azoknak a fedésben résztvevő részeit, a kör síkjára merőleges egyenesekkel a gömbre. A vetületek gömbövek vagy gömbsüvegek lesznek. Ezek magassága megegyezik a megfelelő sávok szélességével, s így felszínük $2\pi r s_1, \ldots, 2\pi r s_n$. Mivel a sávok lefedik a körlapot, vetületeik lefedik a gömböt, s ezért felszínösszegük nem lehet kisebb a gömb felszínénél: $2\pi r s_1 + \ldots + 2\pi r s_n \geqq 4\pi r^2$, azaz $s_1 + \ldots + s_n \geqq 2r$.

A sávprobléma nagy érdeklődést váltott ki. Meglepetést okozott, hogy egy első pillanatra nyilvánvalónak tűnő, egyszerű tény bizonyítása komoly problémát okozott. A kérdést Th. Bang [1, 2] intézte el 1950-ben pozitív válasszal. Később Bang tételét más-más módon többen is bebizonyították [3, ..., 9].

A sávprobléma a következőképpen is fogalmazható:

E probléma. Helyezzünk el egy konvex T tartomány síkjában n egyenest úgy, hogy T valamely pontjának a legközelebbi egyenestől mért távolságának a maximuna minimális legyen.

A sávprobléma megoldásából következik az E probléma megoldása: Bontsuk a T-t tartalmazó legkeskenyebb sávot n egybevágó részsávra; az egyeneseket ezek középvonalába kell helyezni. Ha tehát a T-t tartalmazó legkeskenyebb sáv szélessége (T vastagsága) v, akkor az E problémában keresett minimum $v/2n$. Ha ugyanis el lehetne helyezni n egyenest úgy, hogy T minden pontja valamilyen $v/2n$-nél kisebb t távolságnál kisebb távolságra volna valamelyik egyenestől, akkor az egyenesek t távolságú parallel tartományait alkotó $2t < v/n$ szélességű n sáv lefedné T-t. Ez azonban Bang tétele alapján lehetetlen.

Most megmutatjuk, hogy viszont az E probléma megoldásából következik a sávprobléma megoldása. Tegyük fel Bang tételével ellentétben, hogy T-t lefedi véges sok v-nél kisebb össz-szélességű sáv. Akkor T lefedhető kevéssel nagyobb, de v-nél még mindig kisebb össz-szélességű olyan sávokkal is, amelyek szélességei kommenzurábilisak. Ezért T lefedhető v-nél kisebb össz-szélességű kongruens sávokkal is. Ez azonban ellenkezik az E probléma fentemlített megoldásával.

Az E problémával egyidejűleg önként felmerül annak „duálisa", vagyis az a probléma, amely a pont és egyenes szerepének a felcserélésével adódik:

P probléma. Helyezzünk el egy konvex T tartomány síkjában n pontot úgy, hogy a T-t metsző valamely egyenesnek a legközelebbi ponttól mért távolságának maximuma minimális legyen.

(A zárt T tartományt metsző egyenesen olyan egyenest értünk, amelynek közös pontja van T-vel.)

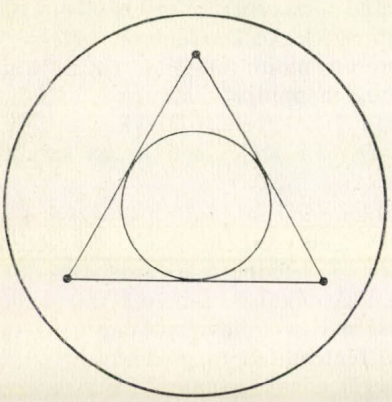
Nevezzük a T-t metsző valamely egyenesnek egy pontrendszer legközelebbi pontjától mért távolságának maximumát a pontrendszer (T-re vonatkozó) kritikus távolságának.

Vizsgáljuk először a problémát n néhány kis értékére abban az esetben, ha T kör. Legyen a kör sugara egységnyi, s jelöljük a különböző pont-n-esek kritikus távolságának infimumát r_n-nel. r_n tehát az a maximális távolság, amelyre igaz a következő állítás: Bárhogy helyezünk el n pontot a K egységkör síkjában, mindig van olyan K-t metsző egyenes, amelynek valamennyi ponttól mért távolsága legalább r_n. Más szavakkal: r_n olyan n egyenlő nagyságú kör sugarának az infimuma, amelyek elrendezhetők úgy, hogy a K-t metsző bármely egyenes legalább egy kört is messen.

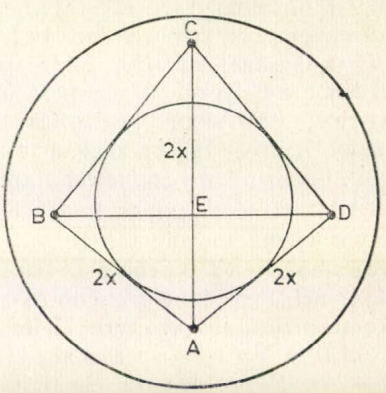
Nyilvánvaló, hogy $r_1=r_2=1$. Megmutatjuk, hogy $r_3=3/5$. Az extremális ponthármas egy K-val koncentrikus 2/5 sugarú kör köré írt szabályos háromszög csúcsaiból áll (1. ábra). Itt hat olyan K-t metsző egyenes van, amelyeknek a legközelebbi ponttól mért távolsága maximális, mégpedig K-nak a háromszög oldalaival párhuzamos egy-egy érintője és a háromszög magasságvonalainak felező merőlegesei. Három pontnak ez a helyezte mutatja, hogy $r_3 \leqq 3/5$. Be kell még látnunk, hogy $r_3 \geqq 3/5$.

Elég olyan ponthármasokkal foglalkoznunk, amelyek által meghatározott háromszögek tartalmazzák a K-val koncentrikus 2/5 sugarú kört, mert különben K-nak az az érintője, amely a háromszög K középpontjához legközelebb haladó oldalegyenesének, illetőleg a háromszöget K középpontjától elválasztó oldalegyenesének kifelé való eltolásával keletkezik, mind a három ponttól 3/5-nél nagyobb távolságra volna. A 2/5 sugarú kört tartalmazó valamely háromszög egyik magassága azonban legalább $3 \cdot 2/5$, vagyis annyi mint a kör köré írt szabályos háromszögé. Ennek a magasságvonalnak a felező merőlegese legalább 3/5 távolságra van mind a három csúcstól, s így valóban $r_3 \geqq 3/5$.

r_n értékét $n>3$-ra nem ismerjük. Igyekszünk azonban 4, 5 és 6 pont kedvező elrendezésével r_4-, r_5-, és r_6-ra jó felső korlátot találni.



1. ábra



2. ábra

Egy K-val koncentrikus 1/2 sugarú kör köré írt négyzet csúcsainak kritikus távolsága 1/2. Egy ugyanilyen „jó" elrendezést adnak egy K-ba írt szabályos háromszög csúcsai és középpontja. De ezek az elrendezések javíthatók. Legyen $ABCD$ egy K-val koncentrikus r sugarú kör köré írt négyszög, amelyre $ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 90°$ és $AE < EC = AB = AD = 2x$, ahol E a négyszög átlóinak metszéspontja (2. ábra). Egy elemi számolás szerint

$$\frac{2x}{r} = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1{,}786....$$

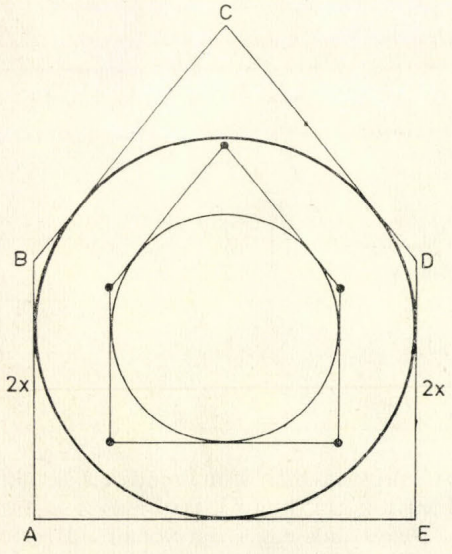
Ha r-t úgy választjuk, hogy $x = 1 - r$ legyen, akkor az $ABCD$ pontnégyes kritikus távolsága x, s így $r_4 \leqq x = 1{,}786.../3{,}786... = 0{,}471....$

Tekintsünk egy K-val koncentrikus r sugarú kör köré írt szabályos ötszöget. Válasszuk r-t úgy, hogy az ötszög négy csúcsától egyenlő távolságban haladó egyeneseknek ezektől a csúcsoktól mért távolsága egyenlő legyen $1-r$-rel. Nyilvánvalóan ez a távolság lesz az öt csúcs kritikus távolsága, s könnyen kiszámítható, hogy ez a távolság

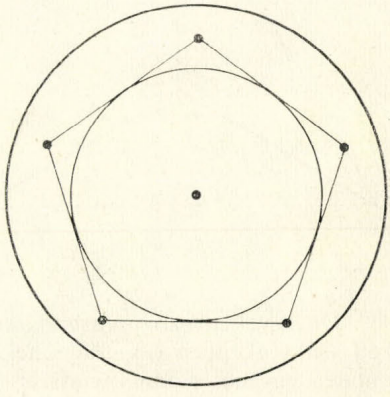
$$\frac{2\sin^2 36°}{1+2\sin^2 36°} = 0{,}408....$$

(Egy egészen más típusú alig rosszabb pontötöst alkotnak egy K-val koncentrikus $4-\sqrt{8}$ oldalú négyzet csúcsai és középpontja. Itt a kritikus távolság $\sqrt{2}-1 = 0{,}41... .$)

Most szerkesztünk a szabályos ötszögesnél jobb elrendezést. Tekintsük azt az ötszöget, amelynek csúcsai $A(-1, -1)$, $B(-1, b)$, $C(0, c)$, $D(1, b)$ és $E(1, -1)$, ahol b az $(1+b)^3 = 4(1-b)$ egyenlet gyöke és $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$. Itt c-t úgy választottuk, hogy a BC és CD egyenes érintse az origó köré írt egységkört (3. ábra). Az ötszög tehát az egységkör köré van írva. A b-re vonatkozó feltétel viszont



3. ábra



4. ábra

azt fejezi ki, hogy D távolsága AC-től, s egyben B távolsága CE-től, $AB=DE=1+b$. Mivel $c-b=1{,}19\ldots<1+b=1{,}36\ldots$, azért az ötszöget metsző valamely egyenesnek a legközelebbi csúcstól mért távolságának maximuma $\frac{1+b}{2}=x$. Ha r-t úgy választjuk, hogy $xr=1-r$ legyen, akkor az r sugarú kör köré írt hasonló ötszög csúcsainak az egységkörre vonatkozó kritikus távolsága $x/(1+x)$, s így $r_5 \leqq x/(1+x)=0{,}406\ldots$.

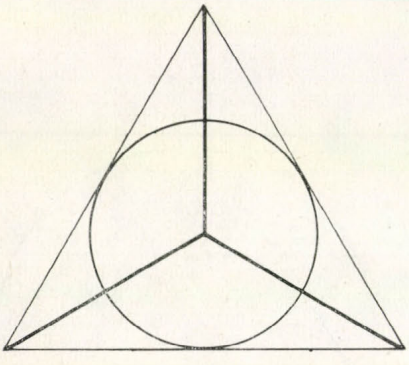
Írjunk egy K-val koncentrikus 2/3 sugarú kör köré egy szabályos ötszöget (4. ábra). Az ötszög csúcsaiból és középpontjából álló ponthatos mutatja, hogy $r_6 \leqq 1/3$. Ugyanilyen jó elrendezést ad az előbbi kör köré írt bármely ötszög is, ha mindegyik csúcsnak a szomszédos csúcsokon átmenő egyenestől mért távolsága legfeljebb 2/3.

Az extremális pont-n-es meghatározása tetszés szerinti n-re reménytelennek tűnik. De még r_n aszimptotikus értékének vizsgálata is igen nehéznek látszik. Felírhatjuk az alábbi becsléseket:

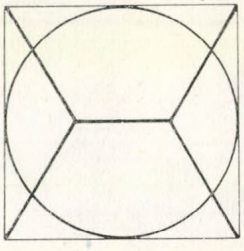
$$1 \leqq \underline{\lim}\, nr_n \leqq \overline{\lim}\, nr_n \leqq \pi.$$

A baloldali egyenlőtlenség belátásához elég a K-t metsző összes egyenes helyett csupán párhuzamos egyeneseket figyelembe vennünk. A jobboldali egyenlőtleség rögtön adódik, ha a pontokat egy K-ba írt szabályos n-szög csúcsaiba rakjuk. Könnyen szerkeszthetünk azonban a szabályosnál lényegesen jobb pontrendszereket.

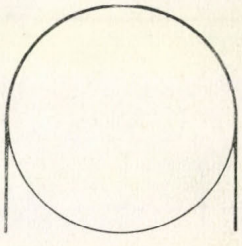
Tekintsünk egy egyenes szakaszokból vagy görbe ívekből álló összefüggő vonalrendszert, amelynek konvex burka tartalmazza K-t. Az 5., 6. és 7. ábrán vastagon húzott vonalak ilyen vonalrendszereket mutatnak be. Ezek hossza $6,2+\sqrt{12}$ és $2+\pi$, tehát valamennyi rövidebb K kerületénél, s így bármelyik mentén osztva el egyenletesen a pontokat jobb pontrendszert nyerünk, mint ha a kerületre helyeznők a pontokat.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

De egy kedvező pontrendszer szerkesztéséhez használt vonalrendszernek nem kell szükségképpen összefüggőnek lennie. Elég kikötni, hogy a tartományt metsző minden egyenes a vonalrendszert is messe. Nevezzünk egy ilyen vonalrendszert a tartomány vázának. Ifj. Makai Endre konstruált a K egységkörhöz különféle tí-

pusú $2+\pi$-nél is rövidebb vázakat. A legegyszerűbbet a 8. ábra szemlélteti. A váz három szakaszának K-n kívül eső végpontja egy K körül írt szabályos hatszög három csúcsa. A váz hossza $\pi+\sqrt{3}$ s így

$$\overline{\lim}\, nr_n \leqq \frac{1}{2}(\pi+\sqrt{3}).$$

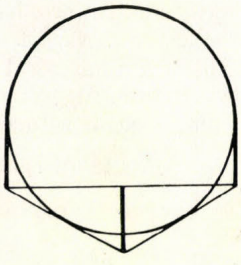
Önmagában is érdekes volna meghatározni egy tartomány legrövidebb vázát, vagy ha ilyen nincs, a vázhosszak infimumát. Ez azonban még abban az esetben sem oldaná meg az extremális pontrendszer aszimptotikus viselkedésének a kérdését, ha igaz volna az, hogy az extremális pontrendszerek a pontszám növekedésével a tartomány egy vázán torlódnak. Az olyan pontrendszerek között ugyanis, amelyek egy vázon fekszenek, általában nem az a legjobb, amelyben a pontok egyenletesen oszlanak el. Ha ti. a váz egy részén a vázat merőlegesen metsző egyenes a váz más részét is metszik, akkor ezen a részen csak ferdén áthaladó egyeneseket kell figyelembe vennünk, s ezért itt a pontokat ritkábban rakhatjuk mint a váz más részén. Egy váz jósága tehát nem csak a hosszán múlik, hanem egy további nem könnyű problémán: a pontoknak a vázon való optimális eloszlásának problémáján.

Biztatóbbnak látszik kör helyett néhány más speciális tartomány vizsgálata.

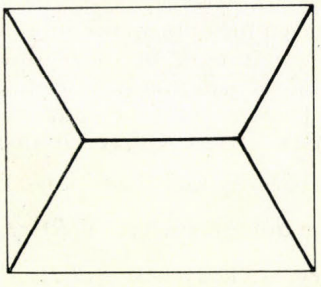
a) Legyen T egy félkörlapnál nem nagyobb körszelet. Sejthető, hogy T legrövidebb váza a körszelethez tartozó körív.

b) Legyen T egy háromszög. Tekintsük azt a P pontot, amelynek a csúcsoktól mért távolságösszege minimális. (Ismeretes, hogy ha T minden szöge $<120°$, akkor P-ből T minden oldala 120°-os szögben látszik; ha pedig T egy szöge $\geqq 120°$, akkor P egybe esik T tompa szögű csúcsával.) Sejthető, hogy T váza a csúcsokat P-vel összekötő szakaszokból áll.

c) Legyen T egy téglalap, amelyben a hosszabb és rövidebb oldal aránya $\geqq 2/\sqrt{3}$. Sejthető, hogy T legrövidebb váza a csúcsokat összekötő legrövidebb összefüggő vonalrendszer (9. ábra).



8. ábra



9. ábra

A tekintett vázak bármelyikét valamely pontban merőlegesen metsző egyenes vagy nem metszi másodszor a vázat, vagy pedig egy végpontjában metszi azt. Egy ilyen vázon a pontokat állandó sűrűséggel kell elhelyezni. Ha tehát megtartjuk az r_n jelölést egy pont-n-esnek egy tetszés szerinti tartományra vonatkozó kritikus távolságának infimumára, akkor további sejtésként kimondhatjuk, hogy az a, b és c alatt tekintett tartományokra $\lim nr_n = h/2$, ahol h az illető váz hossza.

Az E problémát úgy is fogalmazhatjuk, hogy a T tartomány síkjában fekvő egyenesek helyett csak T-t metsző egyeneseket tekintünk, hisz az egyeneseknek auto-

matikusan metszeniök kell T-t. Ezért az E probléma egy másik duálisát nyerjük, ha a P problémában T síkjában fekvő pontok helyett T-ben fekvő pontokat tekintünk. Érdekes volna ennek a problémának kör esetén való behatóbb vizsgálata.

Figyelmet érdemel az E és P problémának az a határesete is, amelyben a T tartomány az egész síkba megy át: Helyezzünk el a síkon lehetőleg ritkán egyeneseket (pontokat) úgy, hogy bármely pontnak (egyenesnek) valamely egyenestől (ponttól) mért távolsága legfeljebb 1 legyen.

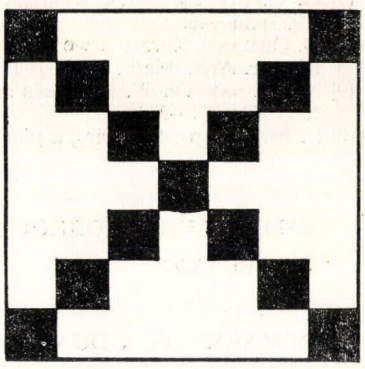
Az egyenesek elhelyezésének problémája könnyü, ha a „lehetőleg ritkán" kifejezést úgy értelmezzük, hogy az egyeneseket minimális sűrűséggel helyezzük el. Szórjunk szét a síkban megszámlálható sok egyenest. Válasszunk a síkon egy O pontot, s jelöljük a O körül R sugárral írt kört metsző egyenesek számát $N(R)$-rel. Az egyenesek sűrűségét a $\lim_{R\to\infty} N(R)/2\pi R$ határértékkel definiáljuk. Ha ez nem létezik, akkor a limes superiort vagy limes inferiort tekintjük, és felső, illetőleg alsó sűrűségről beszélünk. Könnyen megmutatható, hogy ezek a határértékek függetlenek az O pont választásától. A sávproblémának körre adott megoldásából azonnal következik, hogy az egyeneseket egymással párhuzamosan, két egységnyi közökkel kell elhelyezni.

Nem ilyen egyszerű a pontok elhelyezésére vonatkozó probléma. A pontsűrűséget a $\lim_{R\to\infty} N(R)/\pi R^2$ határértékkel szokás értelmezni, ahol $N(R)$ az O középpontú, R sugarú körbe eső pontok száma. Tekintsük egy derékszögű xy koordináta rendszerben a $(2k, 0)$, $(0,2k)$ pontokat $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Ennek a pontrendszernek kritikus távolsága 1, de sűrűsége nulla. Ezért a „lehetőleg ritkán" való elhelyezés itt úgy értendő, hogy $N(R)$ nagyságrendje mennél kisebb legyen. A fenti példában $N(R)\sim 2R$. De az y-tengelyen fekvő pontokat eltolhatjuk az x-tengellyel párhuzamosan például úgy, hogy azok az $y=x^{1/3}$ egyenletű görbére kerüljenek. Ezáltal a pontrendszer kritikus távolsága változatlanul marad, de az új pontrendszerre $N(R)\sim R$. Van-e olyan egységnyi kritikus távolsággal bíró pontrendszer, amelyre $N(R)$ nagyságrendje minimális, s ha igen, mi az a minimális nagyságrend?

Könnyen megmutatható, hogy ilyen minimális nagyságrend nincs, ha az összes egyenes helyett csak racionális irányú egyeneseket tekintünk, vagyis olyanokat, amelyek egy rögzített egyenessel fokmértékben racionális számmal adott szöget alkotnak. Legyen $f(x)$ $x>0$-ra értelmezett tetszés szerinti függvény, amelyre $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Szerkesztünk egy olyan pontrendszert, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy bármely racionális irányú egyenes legfeljebb egységnyi távolságra van valamelyik ponttól, és amelyre $N(R)<f(R)$. Legyen $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ egy pozitív tagú sor, amelynek összege 1. Legyenek $l_1, l_2, \ldots$ olyan egyenesek, amelyek képviselik az összes racionális irányt. Legyen P_i olyan pontoknak egy halmaza, amelyeknek l_i-re való merőleges vetületei l_i-t 2 hosszúságú szakaszokra bontják. Válasszuk P_i-t úgy, hogy P_i-nek az O középpontú, R sugarú körbe eső pontjainak a száma kisebb legyen, mint $c_i f(R)$. A $P_1, P_2, \ldots$ halmazokban foglalt pontok egyesítése nyilván kielégíti a kívánt feltételeket.

A P probléma körre vonatkozó speciális esetének egy más irányú általánosítása ez: Keressük meg egy konvex T tartomány n olyan egybevágó legkisebb homotetikus példányát, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy a T-t metsző bármely egyenes T-nek legalább egy ilyen példányát is metszi. Ha T parallelogramma és $n\equiv 1 \pmod 4$, akkor T kicsinyített példányait sejthetőleg T átlói mentén kell elhelyezni (10. ábra).

Ugyancsak érdekesek az E és P probléma szférikus analogonjai. Ha a vizsgált tartomány a teljes gömb, akkor az E és P problémának megfelelő két probléma ekvivalens egymással [10].



10. ábra

További problémák adódnak a magasabb dimenziós terekben. Az $r_3 = 2/5$ egyenlőség általánosításaként kimondhatjuk a következő tételt:

Tekintsünk az n-dimenziós térben egy egységgömböt és $n+1$ pontot. Tekintsük továbbá a gömböt metsző valamely síknak ($n-1$-dimenziós altérnek) a legközelebbi ponttól mért távolságának maximumát. Ennek a maximumnak a minimuma az $n+1$ pont minden lehetséges helyzetében $\frac{n+1}{n+3}$.

A bizonyítás hasonlóan történik mint a síkban, felhasználva a következő lemmát: Egy egységgömböt tartalmazó szimplex legalább egyik magassága $\geqq n+1$.

Legyenek a szimplex celláinak térfogatai $f_1, \ldots, f_{n+1}$, a cellákhoz tartozó magasságok pedig $m_1, \ldots, m_{n+1}$. Legyen továbbá a szimplex térfogata v és felszíne (celláinak térfogatösszege) f. Mivel a szimplex tartalmazza az egységgömböt, ezért $v \geqq \frac{1}{n} f$. Mivel továbbá

$$v = \frac{1}{n} f_i m_i, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

azért

$$(n+1)v = \frac{1}{n}(f_1 m_1 + \ldots + f_{n+1} m_{n+1}) \leqq \frac{1}{n}(f_1 + \ldots + f_{n+1}) m =$$

$$= \frac{1}{n} f m \leqq v m, \quad m = \max m_i,$$

vagyis valóban $m \geqq n+1$.

Természetesen tekinthetünk $n-1$-dimenziós alterek helyett alacsonyabb dimenziós altereket is. Kérdezhetjük például: Hogyan kell a háromdimenziós térben négy pontot úgy elhelyezni, hogy egy adott gömböt metsző egyenesnek a legközelebbi ponttól mért távolságának maximuma minimális legyen? Ilyen irányban még tág tere nyílik a kutatásoknak.

IRODALOM

[1] Th. Bang, On covering by parallel-strips. Mat. Tidsskr. B (1950) 49—53.
[2] Th. Bang, A solution of the "plank problem". Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 990—993.
[3] W. Fenchel, On Th. Bang's solution of the plank problem. Mat. Tidsskr. B (1951) 49—51.
[4] D. Ohmann, Eine Abschätzung für die Dicke bei Überdeckung durch konvexe Körper. J. Reine Angew. Math. 190 (1952) 125—128.
[5] Th. Bang, Some remarks on the union of convex bodies. Tolfte Skand. Mat-Kong. Lund, 1953 (1954) 5—11.
[6] T.-Y. Lee, J.-S. Lin, K.-C. Tong, M.-Y. Zhang, A solution of Bang's "Plank problem". J. Chinese Math. Soc. (1953) 139—143.

[7] H. G. EGGLESTON, On triangles circumscribing plane convex sets. J. London Math. Soc. (1953) 36—46.
[8] D. OHMANN, Kurzer Beweis einer Abschätzung für die Breite bei Überdeckung durch konvexe Körper. Arch. Math. 8 (1957) 150—152.
[9] N. BOGNÁR, On W. Fenchel's solution of the plank problem. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961) 269—270.
[10] L. FEJES TÓTH, Exploring a planet, Amer. Math. Monthly 80 (1973) 1043—1044.

ЗАМЕЛЧАНИЯ К ОДНОЙ ДУАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЕ ПОЛОС ТАРСКОГО

Л. ФЕЙЕШ ТОТ

REMARKS ON A DUAL OF TARSKI'S PLANK PROBLEM

L. FEJES TÓTH

Tarski's plank problem is equivalent with the following problem: In the plane of a convex domain D distribute n straight lines so as to minimize the maximal distance between a point of D and the line nearest to it. Here the following problem is considered: In the plane of a convex domain D distribute n points so as to minimize the maximal distance between a line intersecting D and the point nearest to it.

AZ APPROXIMÁCIÓELMÉLET EGYES NYITOTT PROBLÉMÁIRÓL

TURÁN PÁL

"In re mathematica ars proponendi questionem pluris facienda est, quam solvendi."

G. Cantor

1. Jelen dolgozat azon előadások egy részét tartalmazza, amelyeket 1975 nyarán a montreali francia egyetemen tartottam.* Új eredmények e cikkekben nem lesznek**; elsősorban olyan nyitott kérdések valamelyest rendezett formájú expozíciójáról lesz itt szó, amelyekhez az elmélettel huzamosabb ideig foglalkozván jutottam. A feladatok különböző nehézségűek és nem nehézségük szerint vannak rendezve. Amennyiben nem tőlem származó problémát említek, azt külön fogom jelezni. Ezek közt főleg Erdős Pál fog szerepelni, aki egyáltalán a „problémacikk" műfajt kezdeményezte és akivel az approximációelmélet területén sokat dolgoztunk együtt. Ha a felsorakoztatott feladatok, vagy egy részük nem is elégíti ki Cantor fenti mottóját, mégis — úgy hiszem — többségükben az elmélet érdemleges kérdései.

2. Talán az elmélet gyökereihez visszanyúlni és későbbi történeti szerepét kissé érzékeltetni sem érdektelen. Newton, üstökösök pályájának bizonyos (equidistans) időközökben megfigyelt helyeiről akarván helyükre tetszőleges közbülső időpontokban következtetni, jutott ahhoz a feladathoz, hogy keresendő oly „geometriai görbe", mely tetszőleges sok adott ponton átmegy. Ezt a róla elnevezett interpolációs polinommal oldotta meg. Hogy ezt Newton milyen becsben tartotta, mutatja 1676-ban Oldenburghoz írott levele, melyben erről azt írja, hogy ez a legszebbek közé tartozik, amit csak csinálni kívánt.*** Newton formuláját arra is felhasználta, hogy — mai fogalmazással — $\int_a^b f(x)dx$ értékét f-nek az $x_\nu = a + \nu\frac{b-a}{n}$, $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ helyeken felvett értékeivel *pontosan* megadja, ha $f(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom (legalábbis n kis értékeire). Tanítványa, Cotes, e kvadratúraformulát „pulcherrima et utilissima regula"-nak nevezte és alakját $n \leqq 10$-ig meghatározta. Ez Newton formulájával dolgozva igen nehézkes munka lehetett; a Lagrange-féle interpolációs formulával ez jóval egyszerűbb lett volna, de az először 1795-ben lett közölve. Gauss az ő kvadratúraformulájához az indítékot szintén csillagászatból, a Pallas kisbolygó pályavizsgálatából kapta. Hogy ő erre mekkora súlyt helyezett, mutatja az is, hogy idevágó eredményeit nem a naplója számára dolgozta ki, mint annyi mást, hanem 1814-ben publikálta, sőt erről előzetes közleményt is jelentetett meg. Lényeges újítása Newton—Cotes-al szemben az volt, hogy az ekvidistans alappontok helyett

*Némi utólagos bővítésekkel; pl. G. G. Lorentznek a *30.* pontban diszkutált referátuma csak ez év novemberben vagy decemberben került kezeimhez.

**Talán a 73. pont kivételével.

***A korai történetre vonatkozólag forrásom főleg Arnold Kowalewski könyve „Newton, Cotes, Gauss, Jacobi" 1917-ből, melyben ezek egy-egy alapvető idevágó értekezését közli és kommentálja.

„mérési helyek" gyanánt az n-dik Legendre-polinom gyökeit ajánlotta. Tárgyalását azután Jacobi lényegesen egyszerűsítette. Mindez mutatja, hogy az interpoláció és a mechanikus kvadratúra tulajdonképpen a csupán véges sok mérésből ismert függvények elméletének két fejezete.

3. Az akkori függvényfogalom mellett mindnyájan hitték, hogy mind a Newton—Cotes-féle, mind a Gauss-féle kvadratúraformula növekvő n mellett mindig „egyre közelebb" jut $f(x)$ integráljához. Csak a múlt század végefelé vette észre Borel és Runge, hogy $[a, b]$ gyanánt $[-1, +1]$-et véve (ami nem rontja az általánosságot), az equidistans alappontokon vett interpolációs polinomok sorozata $[-1, +1]$-ben még olyan egyszerű függvényre is lehet „rossz", mint az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény. Ami azt illeti, hogy a Newton—Cotes eljárás még a $[-1, +1]$-et jócskán magába foglaló tartományban analitikus függvényre is lehet divergens, Pólya csak 1933-ban mutatta ki!

4. Hogy a Gauss-féle kvadratúraformula valóban a függvény integráljához tart $n \to \infty$-re, már Csebisevet is foglalkoztatta, aki a lényeges lépést sejtésképp 1874-ben már kimondotta. Ennek bizonyítása csak 10 évvel később sikerült egymástól függetlenül Stieltjesnek és A. Markovnak, akik azután azon, az előzmények után akkor biztosan igen meglepő tételt találták, hogy a Gauss—Jacobi-féle kvadratúraformula $n \to \infty$-re tart a függvény integráljához, hacsak $f(x)$ az adott körben korlátos és R-integrálható. Ezután természetszerűleg vetődött fel a kérdés, hogy vajon az ekvidistans abscissák helyett az n-ik Legendre-polinom gyökeit véve alappontokul vagy esetleg más nemekvidistans alappontokkal maguknak a Lagrange-interpolációs polinomok konvergenciaviselkedése nem javul-e. De a kérdés elintézésével is kellett várni 30 évet. A Stieltjes—Markov-tétel, valamint Weierstrass tétele után az volt a várakozás, hogy van oly (nemekvidistans) alappontrendszer is, melyen képzett Lagrange-interpolációs polinomok a $[-1, +1]$-ben folytonos függvények $C[-1, +1]$ osztályára itt egyenletesen konvergálnak. Ezen álomból a világot Faber [17] gyógyította ki 1914-ben, megmutatván, hogy ilyen alappontrendszer nincs. A később is használt jelölések egy részét már itt lerögzítve, az interpoláció n-ik alappontjait

$$1 \geqq x_{1n} > x_{2n} > \ldots > x_{nn} \geqq -1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

jelölve ezek egy végtelen A háromszögmatrixot alkotnak; az $f(x)$ függvényhez tartozó n-ik Lagrange-interpolációt $L_n(x, f; A)$-val (vagy olykor csak $L_n(f; A)$ vagy $L_n(f)$-el jelölve)

$$L_n(x, f; A) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) l_{\nu n}(x; A) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) l_\nu(x; A) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) l_\nu(x), \tag{4.2}$$

ahol az $l_{\nu n}(x; A)$ polinomok a Lagrange-interpoláció n-ik alapfüggvényei,

$$l_{\nu n}(x; A) = \frac{\omega_n(x; A)}{\omega_n'(x_{\nu n}; A)(x - x_{\nu n})} = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x - x_\nu)} \tag{4.3}$$

által vannak adva, ahol

$$\omega_n(x; A) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_{\nu n}) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu). \tag{4.4}$$

Mármost Faber 1914-ben — tehát jóval Banach—Steinhaus előtt, de már Lebesgue és Haar ortogonális sorokra vonatkozó analóg konstrukciói után — megmutatta

először is, hogy a kívánt tényálláshoz szükséges lenne, hogy egy fix A-ra $n \to \infty$-re

$$M_n(A) = \max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x;A)| \leqq C \tag{4.5}$$

legyen, ahol C nem függ n-től, azután pedig, hogy van oly, A és n-től független C_1 állandó, hogy minden A-ra

$$M_n(A) > C_1 \log n, \tag{4.6}$$

tehát, hogy (4.5) semmilyen A-ra nem teljesül.

5. Mielőtt továbbmennénk, megemlítünk egy különösen fontos osztályát az A-mátrixoknak.

Legyen

$$p(x) \geqq 0 \quad [-1, +1]\text{-ben} \quad \text{és} \quad p(x) \in L[-1, +1]. \tag{5.0}$$

Mint jól ismert, ehhez tartozik, konstans szorzóktól eltekintve egyértelműen meghatározott

$$q_0(x), q_1(x), \ldots, q_n(x), \ldots, \quad (q_n(x) = q_n(x; p)) \tag{5.1}$$

polinomsorozat, melyre fennáll az

$$\int_{-1}^{1} q_\mu(x)\, q_\nu(x)\, p(x)\, dx = 0 \tag{5.2}$$

reláció, hacsak $\mu \neq \nu$. Ugyancsak jól ismert, hogy ezek gyökei egyszeresek és $[-1, +1]$-be esnek. A szóban forgó speciális mátrixosztályt mármost azon mátrixok alkotják, melyek n-ik sorát $q_n(x)$ n db gyöke alkotja. Az ilyen mátrixokat P-vel fogjuk jelölni. Különös fontossággal bír azon eset, mikor

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1. \tag{5.3}$$

Ez esetben a $q_n(x)$ polinomok az (α, β) paraméter értékekhez tartozó $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ún. Jacobi-polinomok. Fontosságukat motiválja röviden azon tény, hogy a $(0, 0)$-hoz tartozó Jacobi-polinom épp a *2.*-ben már említett n-ik Legendre-polinom, valamint, hogy a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$-hez tartozó Jacobi-polinom azon n-edfokú $T_n(x)$ (Csebisev-féle) polinom, melyre

$$T_n(\cos \vartheta) = c \cos n\vartheta, \quad c \text{ állandó} \tag{5.4}$$

(ami direkt is könnyen verifikálható). Az (5.3) Jacobi-súlyfüggvényekhez tartozó P mátrixokat

$$P(\alpha, \beta)\text{-} \tag{5.5}$$

val fogjuk jelölni.

Fontos szerepet játszanak az $L_n^*(t)$ ill. $K_n(t)$ Laguerre-, ill. Hermite-polinomok, melyekre

$$\int_{0}^{\infty} L_n^*(t) t^\nu e^{-t}\, dt = 0 \tag{5.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t) t^\nu e^{-t^2}\, dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

6. Hogy az első problémát motiváljuk, a következő kérdésből indulunk ki. A csupán a

$$b \geqq x_1 > x_2 > \ldots > x_n \geqq a \tag{6.1}$$

időpontokban való mérésekből ismert $f(x)$ függvényt az $[a, b]$-köz tetszőleges belső helyén a

$$L_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \tag{6.2}$$

kifejezésből akarjuk számítani, viszont a mérésekbeli hibák hatását szeretnénk csökkenteni. Ha $f(x_\nu)$ „valódi" értékei $f^*(x_\nu)$-k és

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} |f(x_\nu) - f^*(x_\nu)| = \delta, \tag{6.3}$$

úgy a mérési hibák okozta hibáról az egész $[-1, +1]$-ben a legtöbb, amit ki lehet mondani, az az, hogy ez nem haladhatja meg a

$$\delta \max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| \tag{6.4}$$

mennyiséget. De itt a mérési időpontok tetszőlegesek voltak; ha ezeket úgy tudjuk megválasztani, hogy

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| = \text{minimális}$$

legyen, akkor a „mérési hibákra legkevésbé érzékeny" Lagrange interpoláció, vagy rövidebben, „a legstabilisabb" Lagrange interpoláció problémáját oldottuk meg n észlelés esetére. A *4.*-ben használt jelöléssel tehát így hangzik a (régóta ismert)

I. probléma. Mely A-mátrixokra lesz

$$M_n(A) = \max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x; A)| \tag{6.5}$$

minimális?

A kérdés csak $n \leqq 4$-ig van *pontosan* kivizsgálva. Egyik utolsó cikk, mely ezzel foglalkozik, F. Schurer-től való és Studia Scient. Math. 1974. évfolyamában található. Sokáig azt sejtették, hogy az extremális A-mátrix a $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ Csebisev-mátrix; alacsony n-ekre ez kifejezetten nem igaz. Az viszont igaz és ismert, hogy, ha a sokszor előforduló $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ Csebisev-mátrixot röviden

$$T\text{-vel} \tag{6.6}$$

jelöljük, úgy alkalmas c_2 állandóval

$$\left| M_n(T) - \frac{2}{\pi} \log n \right| \leqq c_2. \tag{6.7}$$

7. (4.6) és (6.7) együtt azt mutatják, hogy Faber tétele „lényegileg" nem javítható. De a stabilitás szempontjából még a konstans szorzó is lényeges. Így tehát

érdemes volt Erdőssel megvizsgálnunk, $M_n(A)$ minimuma *legalább aszimptotikusan* mekkora. Kimutattuk [15], hogy alkalmas numerikus c_3 állandóval minden A-ra

$$M_n(A) > \frac{2}{\pi} \log n - c_3 \log\log n, \tag{7.1}$$

majd Erdős egy nehezebb bizonyítással, hogy alkalmas numerikus c_4-el

$$M_n(A) > \frac{2}{\pi} \log n - c_4. \tag{7.2}$$

Tehát ezekből, (6.7) és (6.5)-ből legalább annyi következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\log n} \min_A M_n(A) \right) = \frac{2}{\pi}, \tag{7.3}$$

sőt, hogy $n \geqq 2$-re

$$\left| \min_A M_n(A) - \frac{2}{\pi} \log n \right| < c_5 \tag{7.4}$$

alkalmas numerikus c_5-tel.

8. De (6.7)-nek más jelentősége is van és *ebben* a $2/\pi$ szorzó nem lényeges. Ebből ui. könnyen nyerhető, ha $f(x)$ kielégíti az

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{o(1)}{\log \frac{1}{|x_1 - x_2|}} \quad (\text{ha } x_1 \to x_2) \tag{8.1}$$

egyenlőtlenséget alkalmas állandó c_6-tal, hacsak

$$1 \geqq x_1 > x_2 \geqq -1$$

úgy

$$L_n(f; T) \to f(x), \tag{8.2}$$

$[-1, +1]$-ben egyenletesen. Ugyanígy, ha egy A-mátrixra tudjuk, hogy

$$M_n(A) < c_7 \log n \tag{8.3}$$

ill.

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A)| < c_8(\delta) \log n \tag{8.4}$$

és $f(x)$ kielégíti (8.1)-et, úgy a

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f; A) = f(x)$$

reláció egyenletesen fennáll $[-1, +1]$ ill. $[-1+\delta, 1-\delta]$-ben. Szegő „Orthogonal polynomials" c. könyvében [56] megmutatta, hogy (8.4) teljesül minden $P(\alpha, \beta)$-mátrixra (l. (5.5)). Igen nehéznek tűnik azonban a

II. probléma. A (8.4) egyenlőtlenség teljesül-e minden P-mátrixra (l. 5.), ha $c_8(\delta)$ helyett $c_8(\delta, p)$ áll és $[-1, +1]$-ben

$$p(x) \geqq c > 0?$$

Egy részeredmény ezirányban található Freud Géza [23] cikkében $p(x)$-re vonatkozó, nem könnyen kontrollálható feltétel mellett. Azt viszont, hogy a

$$p(x) \geqq \frac{c_9}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.5}$$

feltétel mellett

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum |l_{vn}(x; P)| < c_{10} \sqrt{n},$$

Grünwald Gézával még 1938-ban bebizonyítottuk [30].

9. Faber tétele csak azt adja meg, hogy minden A-matrixhoz megadható oly $[-1, +1]$-ben folytonos $f_0(x)$ függvény, hogy az $L_n(f_0, A)$ polinomok sorozata nem konvergál egyenletesen $f_0(x)$-hez $[-1, +1]$-ben. Ettől persze még igaz lehetne azon állítás, hogy alkalmas A-matrixhoz tartozó Lagrange interpolációs polinomok minden folytonos $f(x)$-re konvergálnak az egész $[-1, +1]$-ben, csak nem mindig egyenletesen. Hogy ez nincs így, azt S. Bernstein [5] csak 1931-ben mutatta ki, megmutatván, hogy minden A-mátrixra van egy $f_1(x) \in C[-1, +1]$ és e közben oly $x = \xi$ pont, hogy itt az $L_n(f_1; A)$ polinomok abszolút értékei korlátlanok, ha n minden határon túl nő. Ez könnyen nyerhető Faber tételének (4.6) részét úgy szigorítva, hogy minden A-matrixra és $[-1, +1]$-nek $[a, b]$ tetszőleges kis részintervallumára

$$\max_{a \leqq x \leqq b} \sum_{v=1}^{n} |l_{vn}(x, A)| > c(a, b) \log n \tag{9.1}$$

(elég lenne

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \max_{a \leqq x \leqq b} \sum_{v=1}^{n} |l_{vn}(x; A)| = \infty.) \tag{9.2}$$

Ennél erősebb divergenciajelenséget fedeztek fel Grünwald Géza és tőle függetlenül Marcinkiewicz [37] 1935-ben a „legjobb"-nak tekinthető T-matrix esetén.* Éspedig megmutatták, hogy alkalmas $f_2(x) \in C[-1, +1]$-re az $L_n(f_2; T)$ polinomok abszolút értéke *mindenütt* $[-1, +1]$-ben korlátlan. Ehhez kellett sok szellemes meggondolás mellett az a könnyű is, hogy

$$\sum_{v=1}^{n} |l_{vn}(x; T)|$$

minden $-1 \leqq x_0 \leqq +1$-re korlátlan, ha $n \to \infty$. Erdős [14] 1958-ban bebizonyította, hogy minden A-mátrixra és egy nullhalmaz híján minden $-1 \leqq x \leqq +1$-re fennáll a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{v=1}^{n} |l_{vn}(x; A)| = \infty. \tag{9.3}$$

* Grünwald Géza előbb a majdnem mindenütt divergenciát [28], majd később a mindenütt való divergenciát [29] bizonyította.

De e mellett mégis nyitott kérdés a

*III. probléma (Erdős).** Minden A-hoz van oly $f_3(x) \in C[-1, +1]$, hogy itt egy nullhalmaz híján mindenütt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |L_n(f_3; A)| = \infty \tag{9.4}$$

Hogy itt *minden* x-re (9.4) általában nem állítható, azt az

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_1, x_2 \\ x_1, x_2, x_3 \\ \vdots \end{matrix}$$

alakú speciális alakú mátrixok mutatják.

Grünwald—Marcinkiewicz tétele még egy szempontból igen érdekes. Könnyen verifikálható, hogy $L_n(f; T)_{x=\cos\vartheta}$ felírható

$$a_0 + \sum_{r=1}^{1-n} a_r \cos r\vartheta$$

alakban, ahol

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

és $r \geqq 1$-re

$$a_r = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right) \cos r \frac{2k-1}{2n}\pi$$

ami formailag igen hasonló az $f(\cos\vartheta)$ függvény Fourier-cosinussorának $(n-1)$-ik részletösszegével. Tételünk azt engedte sejteni, hogy egy 2π szerint periodikus és mindenütt folytonos függvény Fourier-sora lehet mindenütt divergens, ami viszont Carleson tétele szerint nem igaz.

10. Arra vonatkozólag, hogy egy A-matrixhoz tartozó $L_n(f: A)$ Lagrange-parabolák, ahol $f(x) \in C[-1, +1]$, konvergálhatnak-e egy $x = x_0$ helyen máshoz, mint $f(x_0)$-hoz, Erdőssel írott [9] dolgozatunk előszavában igen óvatosan nyilatkozunk. A dolgozat végén azonban, a korrektúránál, három megjegyzést tettünk. Először azt, hogy Marcinkiewicz megmutatta, hogy — az (5.5) jelöléssel — A gyanánt a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$-matrixot véve, a megfelelő Lagrange-interpolációs polinomok nem konvergálhatnak máshoz, mint a függvényértékhez. Másodszor azt, hogy a

* Ha már a cikk egy Cantor-idézettel kezdődött, talán nem irreleváns a következő történeti megjegyzés. Interpolációelméleti első próbálkozásaim közben, Fejér idevágó dolgozatain kívül más irodalmat nem ismerve megmutattam azt a sokkal gyengébb tételt, hogy, ha (9.3) $[-1, +1]$-ben minden x-re áll, úgy van oly $f_0 \in C[-1, +1]$, hogy $L_n(f_0, A)$ korlátlan egy megszámlálható halmazon. Ennek ügyetlen bizonyításában később halasztottam azon, evidensnek tűnő tény bizonyítását, hogy, ha $[-1, +1]$-ben minden x_0 ponthoz hozzá van rendelve véges sok, tőle különböző pont $[-1, +1]$-ben (x_0 „konjugáltjai"), akkor van $[-1, +1]$-ben olyan megszámlálható X-halmaz, hogy egyik elem se konjugáltja egy másiknak X-ben (X „független" halmaz). Elmondva Erdősnek az egészet, ő ezt az állítást König Gyula egy tételével bebizonyította. x_0-nak magasabb számosságú konjugáltat megengedve a kérdés teljesen a halmazelmélet régióiba jutott, ahol Erdős, Lázár, Sierpinski, Ruzewicz, Fodor Géza és mások munkái után Hajnal zárta le a kérdést.

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)=T$ mátrix esetén ugyanez igaz, ha

$$x_0 \neq \cos\frac{l\pi}{k}, \quad (l, k) = 1, \; l \text{ és } k \text{ páratlanok.} \tag{10.1}$$

Harmadszor, hogy Erdős megmutatta, hogy egy alkalmas

$$f_0 \in C[-1, +1]\text{-re az } L_n(f_0; T)$$

polinomok az $x=\cos\frac{\pi}{3}$ helyen *konvergálhatnak* akármilyen előírt értékhez, akár ∞-hez. Ezzel kapcsolatban két kérdés vetődik fel természetesen.

IV. probléma. A (10.1) alatti helyek milyen tulajdonságú részhalmazain tud egy alkalmas $f_1(x) \in C[-1, +1]$-re az $L_n(f_1; T)$ polinomok sorozata máshoz *konvergálni*, mint az illető helyen vett függvényértékhez?

V. Probléma. A $[-1, +1]$ „milyen nagy" részhalmazán tud alkalmas $f_2(x) \in C[-1, +1]$-re és adott A-mátrixra az $L_n(f_2; A)$ polinomok sorozata máshoz *konvergálni*, mint az illető helyhez tartozó függvényértékhez?

11. Erdős (9.3) tétele mellett azon erősebb állítást is teszi [14], hogy ha ε tetszőleges kis pozitív szám, elég kis $\eta=\eta(\varepsilon)$-ra a

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A)| > \eta \log n \tag{11.1}$$

egyenlőtlenség teljesül $-1 \leqq x \leqq +1$-re egy legfeljebb ε mértékű x-halmaz híján. Ennek bizonyítására azonban csak azt jegyzi meg, hogy (9.3)-éval analóg, de komplikáltabb. Így előáll a

VI. probléma. (Erdős). Kidolgozandó (11.1) bizonyítása.

Ha (11.1) be van bizonyítva, úgy ebből következik, hogy minden A-matrixra

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A)| \right) dx > \frac{\eta}{2} \log n. \tag{11.2}$$

(11.2) helyett valószínűleg direkt megoldható a következő extremumprobléma.

VII. probléma. Milyen A-kra (ill. milyen $x_{\nu n}$-ekre) lesz

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A)| \right) dx \quad \text{minimális?}$$

12. Visszakanyarodva a mechanikus kvadratúrára már említettük *4.*-ben, hogy ott a helyzet nem olyan rossz. Itt tehát adott A-matrix mellett a

$$Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) \int_{-1}^{1} l_{\nu n}(x; A)\, dx \tag{12.1}$$

sorozat viselkedéséről van szó, ahol $f(x)$-et a $[-1, +1]$-ben definiált függvények különböző osztályaira korlátozhatjuk. Ha az

$$\int_{-1}^{1} l_{\nu n}(x; A)\, dx = \lambda_{\nu n}(A) = \lambda_{\nu n} \tag{12.2}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

„Cotes-számokat" bevezetjük és $f(x)$-et $C[-1, +1]$-re korlátozzuk, úgy annak szükséges és elégséges feltételét, hogy

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \tag{12.3}$$

legyen, H. Hahn [32] adta meg 1918-ban, tehát ismét Banach—Steinhaus előtt (sőt, saját 1922-es 85 oldalas cikke előtt a Monatshefte für Math. und Phys.-ben, melyben már e kérdéseket absztrakt formában tárgyalta), éspedig azáltal, hogy

$$\Lambda_n(A) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_{\nu n}| < C \tag{12.4}$$

legyen, ahol C nem függ n-től. Bár — mint mondottuk — az első ilyen konvergenciatételt még a múlt században bizonyították be (az $A=P(0, 0)$ „Legendre-matrix" esetére), az első *általános* tételt csak 1934-ben találtuk Erdőssel [9]*. E tétel szerint *minden* P-matrixra

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (f(x)-L_n(f; P))^2 p(x)\,dx = 0 \tag{12.5}$$

hacsak $f(x)$ $[-1, +1]$-ben korlátos és R-integrálható. Ebből pl. rögtön következik a fontos

$$p(x) \geqq c > 0 \tag{12.6}$$

esetben, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (f-L_n(f; P))^2\,dx = 0 \tag{12.7}$$

vagy a (12.6)-nál gyengébb

$$\frac{1}{p(x)} \in L[-1, +1] \tag{12.8}$$

feltétel mellett

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f-L_n(f; P)|\,dx = 0, \tag{12.9}$$

ami még a Markov—Stieltjes-féle $P=P(0, 0)$-esetben is új volt. A következő probléma arra vonatkozik, hogy a (12.5) alatti tételben a 2-kitevő általában nem javítható. Pontosabban a következő a

VIII. probléma. Van-e olyan $P=P_0$ matrix, amelyhez van oly $f_0(x)\in C[-1, +1]$, hogy minden $\lambda>2$-re

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-1}^{1} |f_0-L_n(f_0, P_0)|^\lambda p_0(x)\,dx = \infty?$$

(Itt persze a P_0-mátrix a $p_0(x)$ súlyfüggvényhez tartozó mátrix.)
Kissé gyengített formája volna a kérdésnek a

IX. probléma. Van-e oly $P=P_1$ mátrix, hogy minden $\lambda>2$-hez van $f_2(x)\in$ $\in C[-1, +1]$ úgy, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-1}^{1} |f_\lambda-L_n(f_\lambda, P_1)|^\lambda p_1(x)\,dx = \infty?$$

* A dolgozatunk, az előbb említett Annals-cikk, 1937-ben jelent meg.

Orientációképp megjegyzem, hogy R. Askey [1] 1972-ben az Acta Math. Hung.-ban megjelent cikkében megmutatta, hogy minden $\lambda>2$-hez van olyan ($p_2(x)$ súlyfüggvény és) P_2-matrix, hogy alkalmas

$$f_\lambda^*(x)\in C[-1, +1]\text{-re}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-1}^{1} |f_\lambda^* - L_n(f_\lambda^*; P_\lambda)|^\lambda p_\lambda(x)\, dx = \infty.$$

13. Speciálisabb $p(x)$-re persze várható (12.5)-nél erősebb tétel. Valóban 1936-ban Erdős és Feldheim [8] azt találták, hogy a $P=T$ matrixra tetszőleges nagy egész k mellett

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (f-L_n(f,T))^{2k} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \tag{13.1}$$

hacsak $f\in C[-1, +1]$. Innen datálódik a

X. probléma. (Erdős—Feldheim). Igaz-e, hogy tetszőlegesen nagy pozitív egész k-ra

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (f-L_n(f;P))^{2k}\, dx = 0 \tag{13.2}$$

ha $f(x)\in C[-1, +1]$ és a P-t determináló $p(x)$ súlyfüggvényre

$$p(x) \geqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,? \tag{13.3}$$

Hogy az

$$\int_{-1}^{1} \left\{ f(x) - L_n\left(f, P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right\}^4 dx$$

alkalmas $f=f_1\in C[-1, +1]$-re lehet korlátlan, azt Feldheim vette észre 1938-ban; az

$$\int_{-1}^{1} \{f-L_n(f; P(\alpha, \beta))\}^{2k}\, dx$$

tárgyalása általános $\alpha, \beta>-1$ mellett R. Askey "Mean-convergence of orthogonal series and Lagrange interpolation" c. cikkében van tárgyalva [1].

14. (12.3) úgy írható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \{L_n(f; A)-f\}\, dx = 0, \tag{14.1}$$

hacsak $f(x)\in C[-1, +1]$ és ennek szükséges és elégséges feltételeül adódott (12.4). Természetes kérdés, hogy mi a szükséges és elégséges feltétel A-ra fix $\lambda\geqq 1$ mellett, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |L_n(f; A)-f|^\lambda\, dx = 0 \tag{14.2}$$

legyen, hacsak $f \in C[-1, +1]$. $\lambda = 1$-re belátható, hogy szükséges és elégséges az, hogy — a (12.2) jelöléssel —, ha (12.4) mellett még

$$\sum_{x_{vn} \in I} |\lambda_{vn}| \leqq \varepsilon \tag{14.3}$$

is teljesül minden olyan, véges sok diszjunkt intervallumból álló I-re, melyre a hosszak összege

$$\leqq \delta = \delta(\varepsilon). \tag{14.4}$$

$\lambda = 2$-re triviális *elégséges* feltétel, hogy $n \to \infty$-re

$$\sum_{v=1}^{n} \int_{-1}^{1} l_{vn}(x; A)^2 \, dx + \sum_{1 \leqq v < \mu \leqq n} \left| \int_{-1}^{1} l_{\mu n}(x; A) \, l_{vn}(x; A) \, dx \right| < \infty; \tag{14.5}$$

mint Erdőssel való 1937-es Annals-cikkünkben [9] megjegyeztük, *szükséges* feltétel, hogy

$$\sum_{v=1}^{n} \int_{-1}^{1} l_{vn}(x; A)^2 \, dx = O(1). \tag{14.6}$$

Így áll elő a

XI. probléma. Adott $\lambda > 1$-re mi A-ra vonatkozólag szükséges és elégséges feltétele annak, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} |f - L_n(f; A)|^{\lambda} \, dx = 0$$

hacsak $f \in C[-1, +1]$?

További érdekes kérdésekhez jutunk, ha f-et más függvényosztályokra szorítjuk; ezeket nem részletezem.

15. A következő probléma kissé hosszabb előkészítést igényel. Az előzőkben többször céloztunk a Banach—Steinhaus-tétel approximációelméleti előzményeire; viszont az eredmények olyanok voltak, mintha az egész interpolációelmélet lényegileg a

$$\sum_{v=1}^{n} |l_{vn}(x; A)|$$

nagyságán múlna. Erdőssel írott [13] cikkünkben éppen azt vizsgáltuk, hogy ez mennyire igaz. Kiderült, hogy kicsit is a puszta folytonosságon túlmegyünk, ez már nem igaz. Konkrétabban szólva azt néztük meg, hogy, ha egy rögzített $0 < \beta < 1$-gyel A olyan, hogy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-ra (l. (6.5))

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{M_n(A)}{n^{\beta + \varepsilon}} < \infty \tag{15.1}$$

és

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{M_n(A)}{n^{\beta - \varepsilon}} > 0, \tag{15.2}$$

mi mondható ki $L_n(f; A)$-re, ha*

$$f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[-1, +1], \; 0 < \alpha < 1? \tag{15.3}$$

* $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[-1, +1]$, ha van oly $c = c(f)$, hogy $-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq +1$-re

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq c |x_1 - x_2|^{\alpha}.$$

Nem volt nehéz megmutatni, hogy, ha

$$0 < \alpha < \frac{\beta}{\beta+2}, \tag{15.4}$$

úgy van oly $f_0(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha [-1, +1]$, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{-1\leqq x\leqq +1} |L_n(f_0; A)| = \infty,$$

azaz röviden, az ilyen A-mátrix „rossz" a (15.4) alatti Lipschitz-osztályokra. Triviális viszont, hogy

ha

$$\beta < \alpha < 1, \tag{15.5}$$

úgy $f \in \mathrm{Lip}\ [-1, +1]$-ből következik, hogy

$$L_n(f; A) \to f(x)$$

egyenletesen $[-1, +1]$-ben, azaz röviden, az ilyen A-mátrix „jó" a (15.5) alatti Lipschitz-osztályokra. A megmaradt

$$\frac{\beta}{\beta+2} < \alpha < \beta \tag{15.6}$$

-nak megfelelő Lipschitz-osztályokban minden lehetséges; ha α a (15.6) közbe esik, úgy lehet (15.1)—(15.2)-t kielégítő A_1-matrixot találni, ami fenti értelemben „rossz" *és* oly A_2-t is, ami fenti értelemben „jó". Tehát a (15.6)-ot kielégítő α-khoz tartozó Lipschitz-osztályok Lagrange-interpolációs konvergencia-divergenciaelmélete „finom", nincs eldöntve a $M_n(A)$ „Lebesgue-konstansok" viselkedésével, szemben a (15.4), ill. (15.5) alatti α-khoz tartozó Lipschitz-osztályokkal. Röviden szólva fentiek *pontosan* meghatározzák (könnyen elintézhető határesetektől eltekintve) a Lagrange-interpoláció „finom" elméletének kereteit. Mármost természetes kérdés az analóg kérdés $C[-1, +1]$ feletti bármilyen lineáris operációra; itt csak a mechanikus kvadratúrára fogalmazzuk meg, mint

XII. problémát. Rögzítsünk egy $0<\beta<1$-et és tekintsünk oly A mátrixokat, melyekre tetszőleges kis $\varepsilon>0$ mellett (12.4) jelöléssel

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{D_n(A)}{n^{\beta+\varepsilon}} < \infty \tag{15.7}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{D_n(A)}{n^{\beta-\varepsilon}} > 0. \tag{15.8}$$

Meghatározandó azon „legnagyobb"

$$\psi_1(\beta) < \alpha < \psi_2(\beta) \tag{15.9}$$

köz, melyben a mechanikus kvadratúra elmélete „finom", azaz amely α-kra a (15.7)—(15.8) alatti matrixosztály tartalmaz a kvadratúrára „jó" A_3- *és* „rossz" A_4-matrixokat.

Hogy a (15.9) köz *létezik*, meg van mutatva Szabados [48] cikkében.

16. Új típusú nehézségek léptek fel akkor, mikor (12.5) alatti átlagkonvergencia tételünket véges intrevallumról végtelenre kellett kiterjeszteni. E kérdéshez Balázs Jánossal 1961-ben jutottunk egy fizikai problémával kapcsolatban. Maga, az előbb *közvetlenül* felvetődő matematikai kérdés — a legegyszerűbb alakra szorítkozva — az volt, hogy, ha $x \geqq 0$-ra egy $f(x)$ folytonos függvény csak véges sok helyen ismert (mérésekből), mit lehet kimondani Fourier-transzformáltjára? Mivel a fizikában $f(x)$-et exponenciálisan esőnek szokták feltenni, a kérdés úgy is fogalmazható, hogy keresendő

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty \varphi(t) e^{-t} \cos xt \, dt \tag{16.1}$$

közelítő értéke $x \geqq 0$-ra, ha a $\varphi(t)$ függvény folytonos $t \geqq 0$-ra és értékeit *direkt*, csupán alkalmas $(0 <) t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ helyeken ismerjük. Az $F_n(x)$ közelítő függvényre azon két követelményt állítva, hogy

a) ha $\varphi(t)$ t-nek k-adfokú polinomja, úgy $n > k$-ra legyen

$$F_n(x) \equiv F(x) \tag{16.2}$$

b) ha $n \to \infty$, úgy

$$F_n(x) \to F(x) \tag{16.3}$$

egyenletesen az $x \geqq 0$ tengelyen, a feladatot azáltal oldottuk meg, hogy észlelési helyekül az (5.6) által definiált $L_n^*(t)$ n-ik Laguerre-polinom gyökeit választottuk (melyek pozitívak és egyszeresek) és $\varphi(t)$-t helyettesítettük e gyökhelyekhez tartozó Lagrange-interpolációs polinommal.* Ezáltal az *a)* követelmény nyilván teljesül. Ha az $L_n^*(x) = 0$ gyökei $(n = 1, 2, \ldots)$ által alkotott matrixot L^*-al jelöljük, úgy a *b)* követelmény nyilván teljesül, ha $\varphi(t) \in C[0, \infty)$ mellett sikerül igazolni, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty (\varphi(t) - L_n(\varphi, L^*))^2 e^{-t} \, dt = 0 \tag{16.4}$$

azon természetes megszorítás mellett, hogy

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) e^{-at} = 0 \tag{16.5}$$

valamilyen $0 < a < \frac{1}{2}$-re. Az ezt tartalmazó első, a súlyfüggvények egy *általános* osztályára vonatkozó átlagkonvergenciatételt Balázzsal írott dolgozatunk tartalmazza [3]. Ha $\varphi(t)$-ről (16.5) mellett csupán a folytonosságot kötjük ki, nyilván (16.3)-ban a puszta konvergencia mellett hibabecslés nem várható. Így adódik a

XIII. probléma. Ha $\varphi(t)$-re (16.5)-ön felül még folytonossági modulusát is ismerjük, ez hogyan hat ki

$$|F_n(x) - F(x)|$$

becslésére?

17. Mint Balázzsal írott, szóban forgó cikkünkből látható,

$$F_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_{\nu n}) \psi_{\nu n}(x), \tag{17.1}$$

* *4.*-ben szereplő jelölések a $(0, \infty)$ ill. $(-\infty, +\infty)$ közre mutatis mutandis értendők.

ahol

$$\psi_{vn}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty l_{vn}(t; L^*) e^{-t} \cos xt \, dt. \tag{17.2}$$

Könnyen látható, hogy ez x-nek racionális függvénye, ami explicite megadható. Ha azonban n nagy, úgy ennek direkt számítása körülményes. Ezért érdemleges feladat a

XIV. probléma. Megadandó az (univerzális) $\psi_{vn}(x)$ függvények aszimptotikus alakja $n \to \infty$-re, v és x-ben egyenletesen.

A lényeges ténynek $F_n(x)$ jelen alakjánál azt tartom, hogy $\varphi(t)$-knek egy „sűrű" halmazán $F(x)$ *pontos* értékét adja. Az itteni kérdésekkel kapcsolatos további kérdésekre még visszatérünk.*

18. Megint más típusú kérdések vetődnek fel Fejér azon szellemes észrevételével kapcsolatban, hogy az alapfüggvényekre, Cotes-számokra vagy más „interpolációs alakzatokra" téve kikötést ezekből olykor az A-matrixra vonhatunk le következtetést. Így pl. abból az egy sorban igazolható tényből, hogy a Legendre-alappontokhoz tartozó Cotes-számok nemnegatívak, nyerte rögtön a tényt, hogy a $P_n^{(0,0)}(x)$ Legendre-polinomok konzekutív gyökeinek távolsága egyenletesen tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. Hogy ilyen irányban jóval erősebb tételek nyerhetők, azt Erdőssel 1938-ban és 1940-ben az Annals of Math.-ban megjelent dolgozatainkban [10], [11] megmutattuk; pl. a Legendre-esetre a helyes $\frac{1}{n}$-nagyságrend is kiadódik általános tételeinkből. Lényegesebben nehezebbnek látszik azonban azon kérdés eldöntése, hogy (a (12.2) jelöléssel) a

$$\lambda_{vn} \geqq 0 \quad v = 1, 2, \ldots, n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{18.1}$$

premissa vajon nem ad-e már meg mindegyik x_{vn}-alappontra egy-egy nemtriviális, v és n-el meghatározott intervallumot. Így áll elő a

XV. probléma. Adott $1 \leqq v \leqq n$, $n = 1, 2, \ldots$ mellett meghatározandó a (18.1) premissza mellett az x_{vn}-alappont *pontos* variabilitási tartománya.

19. Faber tétele után természetszerűen vetődött fel azon kérdés, hogy van-e talán a Lagrange-félétől különböző interpolációs eljárás, mely „effektív" az egész $C[-1, +1]$ osztályra. Fejér azt találta, rögtön Faber után, hogy a helyzet megváltozik, ha a Lagrange-interpolációról Hermite-interpolációra térünk, annak is azon legegyszerűbb $H_n(x, f; A) = H_n(f; A)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomokra, melyek a

$$H_n(x_{vn}, f; A) = f(x_{vn}) \quad (v = 1, \ldots, n) \tag{19.1}$$

$$\frac{dH_n(x, f; A)}{dx} = y'_{vn} = \text{adott}$$

feltételekkel egyértelműen meg vannak határozva. Ezen interpolációs polinomok előállíthatók

$$H_n(f; A) = \sum_{v=1}^{n} f(x_{vn}) h_{vn}(x; A) + \sum_{v=1}^{n} y'_{vn} g_{vn}(x; A) \tag{19.2}$$

* Nem fogalmazzuk meg külön problémaként az analóg kérdések vizsgálatát más transzformációkra, pl. az ún. Hankel-transzformációra.

alakban, ahol a (4.3)—(4.4) jelöléssel a $h_{vn}(x; A)$ és $g_{vn}(x; A)$ „első-, ill. másodfajú alapfüggvényeket" Fejér a szóban forgó kérdésekre különösen jól használható

$$h_{vn}(x; A) = \left\{1 - \frac{\omega_n''(x_{vn})}{\omega_n'(x_{vn})}(x - x_{vn})\right\} l_{vn}(x; A)^2 \tag{19.3}$$

$$g_{vn}(x; A) = (x - x_{vn}) l_{vn}(x; A)^2$$

alakban állította elő. 1916-ban megmutatta [18], hogy (a (6.6) jelöléssel) $[-1, +1]$-ben egyenletesen

$$H_n(f, T) \to f(x) \tag{19.4}$$

hacsak $f \in C[-1, +1]$ és

$$y'_{vn} = 0 \tag{19.5}$$

$$v = 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Ezt 1930-ban [20] igen elegánsan kiterjesztette azon esetre is, mikor csak

$$|y'_{vn}| = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \tag{19.6}$$

v-ben egyenletesen.* 1932-ben Szegő [54] analóg tételt talált a $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ intervallumban, ahol ε tetszőlegesen kis pozitív szám, (19.5) helyett az

$$y'_{vn} = O(1) \tag{19.7}$$

feltétellel, de a T-matrix helyett tetszőleges $P(\alpha, \beta)$ Jacobi-matrixot véve (l. (5.5)). Az általános (12.5) alatti tételünk után az volna várható, hogy analóg konvergenciatétel áll fenn általános $p(x)$ súlyfüggvényhez tartozó $A = P$ matrix esetére is, legalábbis abban az esetben, mikor $[-1, +1]$-ben

$$p(x) \geqq c > 0. \tag{19.8}$$

Érdekes módon ez irányban semmilyen „igazán érdekes" tétel nem ismeretes. Mint 1954-ben megjegyeztem, ilyen konvergenciatétel fennáll, ha

$$p(\cos \vartheta) \sin \vartheta \tag{19.9}$$

$0 \leqq \vartheta \leqq \pi$-ben folytonos és kielégíti a (8.1) alatti „logaritmikus Lipschitz-feltételt". Ennek valódi oka azonban az, hogy a (19.9) feltétel mellett az (5.1) alatti $q_n(x)$ ortogonális polinomokra fennáll az S. Bernstein-aszimptotikus formula. Ezt Freud Géza [24] 1954-ben javította, így (8.1)-et elég csak egy (a, b)-részintervallumra feltenni; ekkor a konvergencia persze csak (a, b) belsejében garantálható. A bizonyítás már jóval nehezebb. Így tehát előáll a

XVI. probléma. A $p(x)$ súlyfüggvények milyen nagyobb osztályaira állítható, hogy a hozzájuk tartozó P-matrixokra

$$H_n(f; P) \to f(x) \tag{19.10}$$

egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban, ha $f(x) \in C[-1, +1]$ és fennáll (19.5)? Elég-e feltenni ehhez (19.8)-at?

* És ez nem javítható.

Továbbá a

XVII. probléma. Elég-e a (19.8) megkötés ahhoz az előbbi körülmények mellett a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (f - H_n(f; P))^2 \, dx = 0 \tag{19.11}$$

reláció fennálljon?

20. Intuitive várható, hogy ahhoz, hogy egy A-ra a (19.2)—(19.5) alatti $H_n^*(f; A)$ „Hermite—Fejér lépcsőparabolákra"

$$H_n^*(f; A) \to f(x) \tag{20.1}$$

legyen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ben, hacsak $f \in C[-1, +1]$, az A n-ik alappontjainak „igen szabályosan" kell elhelyezkedniök $[-1, +1]$-ben. Ilyen jellegű tételre tulajdonképpen már céloztunk *18.*-ban. Egy régebbi ilyen jellegű tételhez vezetett azon kérdés, hogy ha adva van a komplex z-síkon egy l zárt Jordan-görbe, az A matrix pontjai l-en vannak, és $f(z)$ befutja a l *zárt* belsejében reguláris függvények U osztályát, úgy milyennek kell lennie A-nak, hogy

$$L_n(f; A) \to f(z) \tag{20.2}$$

legyen az l minden belső zárt résztartományában. Mint Fejér [19] 1918-ban és Kalmár [33] 1926-ban megmutatták, ennek elégséges, ill. szükséges feltétele a következő. Legyen

$$\omega = \Phi(z) \quad \text{ill.} \quad z = \Phi^{-1}(\omega) \tag{20.3}$$

azon függvény, mely l nyílt külsejét $|w|>1$-re konformisan leképezi; ismert, hogy e leképezés l zárt külsején folytonossá tehető. Így az A n-ik sorában álló elemeknek megfelel n pont az $|w|=1$ körvonalon. Ekkor Fejér—Kalmár tétele szerint (20.2)-hez *szükséges és elégséges*, hogy ezen n pont $|w|=1$-en $n\to\infty$-re Weyl-értelemben egyenletesen legyen eloszolva.* Ha speciálisan l a kétszeresen befutott $[-1, +1]$-szakasz, hogy

$$\Phi^{-1}(w) = \frac{w + \frac{1}{w}}{2} \tag{20.4}$$

azaz A n-ik sorának elemeit $x_{\nu n}$-el jelölve és $|w|=1$-en levő képpontjait

$$e^{\pm i\vartheta_{\nu n}} \quad (0 \leqq \vartheta_{\nu n} \leqq \pi) \tag{20.5}$$

-vel, az

$$x_{\nu n} = \cos \vartheta_{\nu n} \tag{20.6}$$

által meghatározott $\vartheta_{\nu n}$-számoknak $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ kell egyenletesen eloszlaniok $(0, \pi)$-ben. Ezt geometriailag úgy lehet interpretálni, hogy az $x_{\nu n}$-pontokat a $[-1, +1]$, mint átmérő fölé emelt félkörre kell felvetíteni és ezeknek kell a félkörön egyenletesen eloszolniok $n\to\infty$-re ahhoz, hogy (20.2) teljesüljön minden oly $f(x)$-re,

* Az $\{w_{1n}, w_{2n}, \ldots, w_{nn}\}$ sorozat $(n=1, 2, \ldots)$ az $|w|=1$ körvonalon H. Weyl-értelemben egyenletesen van eloszolva, ha bárhogyan is jelölünk ki a körvonalon egy h-hosszú ívet, az n-ik $w_{\nu n}$-ek közül erre esők száma n-nel osztva $\to h/2\pi$-hez.

mely $[-1, +1]$-ben analitikus. Nézzük meg most, hogy adott $0<\alpha<1$ mellett milyen *szükséges* feltételt lehet kimondani A n-ik sorára, ha

$$L_n(f; A) \to f(x) \tag{20.7}$$

teljesül egyenletesen $[-1, +1]$ minden

$$f \in \mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1] \tag{20.8}$$

-re. De ekkor (15.4)—(15.1)-ből következik, hogy $[-1, +1]$-ben tetszőleges kis $\varepsilon>0$-ra

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A)| < c(\varepsilon) n^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+\varepsilon}$$

ill.

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A)| < c n^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

azaz alkalmas pozitív konstans c-vel $\nu=1, 2, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$-re $[-1, +1]$-ben

$$|l_{\nu n}(x; A)| < c n^{\gamma} \tag{20.9}$$

$\gamma=\gamma(\alpha)$ fix. Viszont ekkor Erdőssel írott 1940-es Annals-cikkünk [11] XV. tételéből tetszőleges kis $\varepsilon>0$-ra alkalmas $c(\alpha, \varepsilon)$-ra minden $0 \leqq b<a<\pi$ mellett

$$\left| \sum_{b \leqq \vartheta_{\nu n} \leqq a}{}' 1 - \frac{a-b}{\pi} n \right| < c(\alpha, \varepsilon) n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{20.10}$$

ami azt jelenti, hogy (20.7)—(20.8)-ból következik, hogy a $\vartheta_{\nu n}$-ek a $[0, \pi]$-nek már minden

$$\frac{n^{2\varepsilon}}{\sqrt{n}}$$

hosszú részintervallumán is egyenletesen kell eloszolniuk! A következő probléma szempontjából még meglepőbb előbb említett cikkünk XIV. tétele. Eszerint, ha $[-1, +1]$-ben

$$|l_{\nu n}(x; A)| \leqq T = \text{állandó}, \tag{20.11}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

úgy $0 \leqq b<a \leqq \pi$ mellett fennáll tetszőleges kis pozitív ε mellett a

$$\left| \sum_{a \leqq \vartheta_{\nu n} \leqq b}{}' 1 - \frac{a-b}{\pi} n \right| \leqq c(T, \varepsilon)\{(a-b)n\}^{\varepsilon} \tag{20.12}$$

egyenlőtlenség. Ez viszont azt adja, hogy a (20.11) premissza mellett A n-ik sorának elemei már minden $\frac{\Omega(n)}{n}$ hosszú közben egyenletesen kell, hogy eloszolva legyenek, ha $\Omega(x)$ tetszőlegesen lassan tart ∞-hez. Ha viszont a (20.1) alatti $H_n^*(f; A)$ Hermite—Fejér lépcsőparabolákra

$$H_n^*(f; A) \to f(x)$$

egyenletesen $[-1, +1]$-ben, úgy ehhez nyilván *szükséges*, hogy

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} \max_{-1\leqq x\leqq +1} |h_{\nu n}(x; A)| \leqq T, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{20.13}$$

Világos tehát a következő probléma súlya.

XVIII. probléma. A (20.6) által definiált $\vartheta_{\nu n}$-ekre $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ milyen erős egyenletes eloszlást jelent a (20.13) megkötés?

Minden bizonnyal legalább oly erőset, mint (20.12).

21. A *15.* fejtegetései után a következő probléma rögtön kimondható.

XIX. probléma. Van-e az Hermite—Fejér lépcsőparaboláknak „finom" konvergenciaelmélete?

Érdemes e kérdés második felét külön problémaképp megfogalmazni.

XX. probléma. Ha egy A-matrixra $[-1, +1]$-ben

$$\sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x; A)| \leqq Cn^{\beta} \quad (0 < \beta < 1 \text{ és fix}) \tag{21.1}$$

(C n-től független), úgy mi azon α-k lim. inf.-ja, melyekre (20.1) fennáll egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban, hacsak

$$f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[-1, +1]?$$

A *16.* ad érdekességet a következő problémának.

XXI. probléma. Ha $H_n^*(f; L^*)$ az $f(x)$ n-ik Hermite—Fejér lépcsőparabolája az L^* Laguerre mátrixon, igaz marad-e, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (f(t) - H_n^*(f, L^*))^2 e^{-t}\, dt = 0$$

hacsak $f \in C[0, \infty]$ és (16.5) fennáll (φ helyett f-el)?

Szegő „Orthogonal polynomials" c. könyvében [56] szereplő 14.7. tétel valószínűvé teszi, hogy erre a felelet pozitív.

22. Fejér és Szegő eredményei az Hermite—Fejér lépcsőparabolák konvergenciájáról azt a benyomást kelthetik, hogy utóbbiak konvergenciaviselkedése „mindig jobb", mint az ugyanazon A-matrixhoz tartozó Lagrange-paraboláké.

Ezzel kapcsolatos a következő

XXII. probléma. Előírt $0 < \alpha < 1$-hez megadandó oly A^*-matrix, hogy

$$L_n(f; A^*) \to f \tag{22.1}$$

$[-1, +1]$-ben egyenletesen, ha $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[-1, +1]$, de ezen osztály alkalmas $f^*(x)$ függvényére

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{-1\leqq x\leqq +1} |H_n^*(f^*, A^*)| = \infty.$$

E probléma pozitív megoldása azt fejezné ki, hogy a Lagrange-parabolák lehetnek „jók" egy „nagy" függvényosztályon, míg az ehhez tartozó lépcsőparabolák már nem. Lehetnek-e viszont az ugyanazon A-hoz tartozó lépcsőparabolák „sokkal rosszabbak", mint a Lagrange-parabolák? Így áll elő pl. a

XXIII. probléma. Igaz-e, hogy, ha egy A^*-matrixra egy $0 < \alpha < 1$ mellett $L_n(f, A^*) \to f$-hez egyenletesen $[-1, +1]$-ben minden $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[-1, +1]$-re, akkor

van oly pozitív egész r, hogy

$$H_n^*(g, A^*) \to g$$

egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban, valahányszor $g(x)$ r-szer folytonosan deriválható $[-1, +1]$-ben?

Egy pozitív válasznak némi plauzibilitást ad azon tény, hogy, mint *20.*-ban, a premisszából pl.

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(x; A^*)| < cn^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \tag{22.2}$$

következik $[-1, +1]$-ben.

23. Az első tétel, mely *általánosan* következtet a $H_n^*(f; A)$ polinomok viselkedéséről az $L_n(f; A)$ polinomokéra, Fejértől származik. Ő szigorúan normálisnak nevezett egy A mátrixot, ha minden $\nu = 1, 2, \ldots$ és $n = 1, 2, \ldots$-re

$$1 - \frac{\omega_n''(x_{\nu n})}{\omega_n'(x_{\nu n})}(x - x_{\nu n}) \geqq \varrho > 0 \quad -1 \leqq x \leqq +1, \tag{23.1}$$

ahol ϱ nem függ se ν-től, se n-től. Ez esetben megmutatta, hogy

$$L_n(f; A) \to f$$

egyenletesen $[-1, +1]$-ben, ha $f \in \mathrm{Lip}_{(1/2)+\delta}[-1, +1]$. Grünwald Géza [31] posthumus Acta Math.-cikkében bebizonyította, hogy ilyen pontrendszerekre

$$H_n^*(f; A) \to f \tag{23.2}$$

egyenletesen $[-1, +1]$-ben, ha $f \in C[-1, +1]$. Valószínű, hogy már (23.2) teljesülése egyedül maga után vonja, hogy ugyanazon mátrixhoz tartozó Lagrange-interpolációs polinomok nem viselkedhetnek „túl rosszul". Ennek egy első formája lehet a

XXIV. probléma. Igaz-e, hogy ha (23.2) teljesül egy A^* mátrixra, úgy az $L_n(f; A^*)$ parabolák egyenletesen konvergálnak f-hez, hacsak f $[-1, +1]$-ben folytonosan deriválható?

24. Természetes kérdezni, mi az „igazi" oka Fejér (19.4)—(19.5) alatti tételének. A geometriai képre törekvő azt gondolhatná, hogy a deriváltakat 0-nak előírva ezzel megakadályoztuk, hogy két alappont között az interpolációs polinom „felugorhasson". Ha ez így volna, akkor egyetlen alappontban *nem* írva elő az első deriváltat egyáltalán, csakis a függvényértéket, az volna várható, hogy a helyzet nem nagyon fog változni. Persze ekkor ezen

$$H_n^{**}(f; T) \tag{24.1}$$

interpolációs polinom foka $\leqq 2n-2$. Nevezzük azon $x_{\nu(n),n} = x_{\nu(n)}$ alappontot, melyben az első deriváltat nem írjuk elő, „kivételes" alappontnak. Feldheim Ervin barátomnak vetettem fel a harmincas évek vége felé azt a kérdést, hogyan viselkednek ezen interpolációs polinomok a $[-1, +1]$ közben, ha az $x_{\nu(n)}$ kivételes alappontok $n \to \infty$-re egy belső $x = \xi$ helyhez konvergálnak. Feldheim valóban azt találta, hogy kizárva $x = \xi$ körül egy tetszőlegesen kis intervallumot a $[-1, +1]$-ből, a megmaradt két intrevallumon a konvergencia egyenletes, ha $f \in C[-1, +1]$. Megvizsgálva a kritikus intervallumot, különös tényállást írhattam le egy, Fejér em-

lékének dedikált dolgozatban [60]. A polinomok egyenletesen korlátosak $[-1, +1]$-ben, de alkalmas $f_0(x) \in C[-1, +1]$-re elérhető, hogy $\xi = \cos\frac{\pi}{5}$-el a

$$H_n^{**}(f_0, T)_{x=\cos\frac{\pi}{5}}$$

sorozat $n \to \infty$-re nem tart határértékhez. Ez a szokatlan viselkedés még megtetőzhető lehet a következő probléma pozitív megoldása esetén.

XXV. probléma. Lehet-e az $x_{\nu(n)}$ kivételes alappontokat úgy futtatni $[-1, +1]$-ben, hogy alkalmas $f_1(x) \in C[-1, +1]$-re a (24.1) polinomok, bár egyenletesen korlátosak, *sehol* $[-1, +1]$-ben ne tartsanak határértékhez?

A $H_n^{**}(f; T)$ polinomok további szeszélyeiről nem szólok, mivel az ezekkel kapcsolatban felvetődött problémákat Vértesi Péter [63], A. Meir, J. Tzimbalario és A. Sharma [38] megoldották.

25. A következő probléma diszkusszióját Gaussnak azon, *1.*-ben érintett tételével kell kezdenem, mely szerint, ha az $A = P^*$ matrix n-ik sorát az n-ik Legendre-polinom $x_{\nu n}^*$-gyökei adják (azaz az (5.5) jelöléssel $P^* = P(0, 0)$), úgy az

$$\int_{-1}^{1} \pi(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \pi(x_{\nu n}^*) \int_{-1}^{1} l_{\nu n}(x; P^*)\,dx \tag{25.1}$$

formula nemcsak minden legfeljebb $(n-1)$-edfokú, hanem minden legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $\pi(x)$-polinomra *pontosan* fennáll. Második előkészületként az általános Hermite-interpolációt kell megemlítenem, mely szerint, ha $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tetszőleges pozitív egészek, úgy a (4.1) helyekhez egyetlen, legfeljebb

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1 \overset{\text{def}}{=} N \tag{25.2}$$

-edfokú $G(x)$ polinom található, melyre

$$G^{(j)}(x_{\nu n}) = a_{\nu n j} \quad \text{előírott} \quad j = 0, 1, \ldots, (m_\nu - 1), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{25.3}$$

Abban a, minket jelenleg érdeklő esetben, mikor

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m, \tag{25.4}$$

$G(x)$ egyértelműen előállítható

$$G(x) = \sum_{\nu=1}^{n} G(x_{\nu n}) l_{\nu n 0}(x; A) + \sum_{\nu=1}^{n} G'(x_{\nu n}) l_{\nu n 1}(x; A) + \ldots \tag{25.5}$$

$$\ldots + \sum_{\nu=1}^{n} G^{(m-1)}(x_{\nu n}) l_{\nu n, m-1}(x; A)$$

ahol az $l_{\nu n j}(x; A)$ legfeljebb N-edfokú polinomok, az Hermite-interpoláció alapfüggvényei. Ebből adódik, hogy az

$$\int_{-1}^{1} G(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} G(x_{\nu n}) \int_{-1}^{1} l_{\nu n 0}(x; A)\,dx + \tag{25.6}$$

$$+ \ldots + \sum_{\nu=1}^{n} G^{(m-1)}(x_{\nu n}) \int_{-1}^{1} l_{\nu n, m-1}(x; A)\,dx$$

kvadratúraformula $G(x)$ integrálját a (25.3) alatti adatokkal *pontosan* állítja elő, ha $G(x)$ foka legfeljebb $(mn-1)$ és a (4.1) helyek tetszőlegesek. Az

$$\int_{-1}^{1} l_{vnj}(x; A)\, dx \overset{\text{def}}{=} \lambda_{vnj} \quad j = 0, 1, \ldots, (m-1), \quad v = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{25.7}$$

számokat nevezhetjük magasabb rendű Cotes-számoknak.

26. Mármost természetes kérdés Gauss tétele után azt kérdezni, hogy az alappontok nem választhatók meg *(4.1)-nek megfelelően* úgy, hogy a (25.6) alatti kvadratúraformula *pontos* legyen minden legfeljebb $\{(m+1)n-1\}$-edfokú $G(x)$-re. Mint 1950-es szegedi Acta-cikkemben [59] megjegyeztem, $m=2$-re a felelet negatív, de érdekes módon $m=3$-ra pozitív, éspedig az, hogy az egyetlen megfelelő A-matrix n-ik sorát azon n-edfokú $\pi_n^*(x)$ polinom gyökei adják, mely a

$$\pi_n(x) = x^n + \ldots \tag{26.1}$$

alakú n-edfokú polinomok közül az

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(x)^4\, dx \tag{26.2}$$

integrált minimizálja. Általánosabban páros m-re a felelet negatív és páratlan m-re az egyetlen megfelelő A-matrix n-ik sorát az

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(x)^{m+1}\, dx \tag{26.3}$$

integrált a (26.1) osztályban minimizáló n-edfokú polinom gyökei adják. Ezek — mint ismert és direkt is belátható — $[-1, +1]$-be esnek és egyszeresek. Gauss tétele ebből $m=1$-re az n-ik Legendre-polinom ismert extremumtulajdonsága miatt következik.

A (26.3) alatti extrémpolinomokról az $m \geqq 3$ esetben keveset tudunk; erre még visszatérünk. Emiatt érdekes volt (25.6) helyett egy *5.*-beli $p(x)$-el az

$$\int_{-1}^{1} G(x)p(x)\, dx = \sum_{v=1}^{n} G(x_{vn}) \int_{-1}^{1} l_{vn0}(x; A)p\, dx + \ldots \tag{26.4}$$

$$\ldots + \sum_{v=1}^{n} G^{(m-1)}(x_{vn}) \int_{-1}^{1} l_{vn,m-1}(x; A)\, p\, dx$$

analóg vizsgálata; ekkor a (26.3) integrál szerepét az

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(x)^{m+1} p(x)\, dx \tag{26.5}$$

integrál veszi át. Különösen érdekes a

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{26.6}$$

esete; ekkor ugyanis S. Bernstein ismert tétele alapján a minimizáló polinom *minden* páratlan egész m mellett az n-ik Csebisev-polinom. Az így előálló

$$\int_{-1}^{1} \frac{G(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} G\left(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right) \int_{-1}^{1} \frac{l_{\nu n0}(x;T)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \ldots \tag{26.7}$$

$$\ldots + \sum_{\nu=1}^{n} G^{(m-1)}\left(\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right) \int_{-1}^{1} \frac{l_{\nu n,\,m-1}(x;T)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

kvadratúraformula pontos minden legfeljebb $\{(m+1)n-1\}$-edfokú $G(x)$ polinomra*, ha m páratlan. Mivel, úgy emlékszem, az irodalomban a (26.7) formulát felhasználták Runge—Kutta-típusú módszereknél, érdemlegesnek látszik a

XXVI. probléma. Meghatározandók a (26.7) formulában szereplő

$$\int_{-1}^{1} \frac{l_{\nu nj}(x;T)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

együtthatók legegyszerűbb explicit alakjai és aszimptotikus viselkedésük $n\to\infty$-re.

27. Fejér a *19.*-ben említett konvergenciatétele előtt a lépcsőparabolák viselkedését a „legklasszikusabb" esetben vizsgálta meg, mikor is az alappontok a Legendre-alappontok. Ez esetben azt találta, hogy a konvergencia ez esetben csak $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban egyenletes, az $x=\pm 1$ pontokban a lépcsőparabolák

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

-hez tartanak. Egerváryval írott "Notes on interpolation V." c. dolgozatunkban [7] észrevettük, hogy ha a lépcsőparabolákat azon legfeljebb $(2n+1)$-edfokú polinomokkal helyettesítjük, melyeknél az n-ik Legendre-gyökökön a függvényérték és első derivált van előírva, és ezeken kívül a ± 1 helyeken a függvényérték is, úgy a konvergencia $[-1, +1]$-ben egyenletessé lesz. E dolgozat összes fejleményeitől itt eltekintve a konvergenciatételt Szász Pál [53] 1959-ben és D. L. Berman [6] 1973-ban erősen továbbfejlesztették (bár minden $P(\alpha, \beta)$ Jacobi-matrixra sincs a kérdés teljesen eldöntve). Általános súlyfüggvényhez tartozó P-matrixokra azonban semmi sem ismert. Így áll elő a következő két probléma.

XXVII. probléma. Keresendő a $p(x)$ súlyfüggvények egy általános osztálya és az *5.* szerint hozzárendelt P-mátrix a következő tulajdonsággal. Jelentse** $E_{2n+1}(f; A)$ általában azon legfeljebb $(2n+1)$-edfokú polinomot, melyre

$$E_{2n+1}(f; P) = f(x_{\nu n})$$

$$\frac{dE_{2n+1}(f; P)}{dx} = 0, \quad x = x_{\nu n} \tag{27.1}$$

$$E_{2n+1}(f; P)_{x=\pm 1} = f(\pm 1).$$

* A (26.7) formula az említett dolgozatom 36. oldalán egy súlyos és egy kevésbé súlyos sajtóhibával szerepel.

** Itt (4.1) úgy értendő, hogy az egyenlőség jele mindenütt elmarad.

Mikor állítható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} E_{2n+1}(f; P) = f(x)$$

egyenletesen $[-1, +1]$-ben, hacsak $f \in C[-1, +1]$?

XXVIII. probléma. A P-mátrixok milyen általános osztályára igaz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (f - E_{2n+1}(f; P))^2 p(x)\, dx = 0$$

hacsak $f \in C[-1, +1]$?

28. Az Hermite-interpoláció alapfeladata azon (minimális fokú) $\pi(x)$ polinom meghatározása, melyre

(28.1) $$\pi^{(k)}(x_j) = \text{adott}, \quad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

tehát *konsekutív* derivált értékek vannak előírva az egyes helyeken. G. D. Birkhoff foglalkozott először 1906-ban azon teljesen általános esettel, mikor a konzekutivitás követelményét is elejtjük. Míg a (28.1) alatti követelményeket kielégítő polinom mindig létezik, addig a Birkhoff-féle általános esetben ilyen általában nincs. Itt tehát az alapkérdések

(28.2)
a) egzisztencia
b) unicitás
c) lehetőleg explicit reprezentálás
d) konvergencia
e) alkalmazások.

Birkhoff a) és b) feltételezése mellett dolgozott, a hangsúlyt e)-re fektette, pl. a mechanikus kvadratura hibatagjára. A harmincas évek közepetájt Fejérrel beszélgetve interpolációról említettem neki, hogy érdekes lenne a T-matrixon azon legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinomok sorozatát vizsgálni, ahol az alappontokon a függvényérték és második derivált van előírva. Ő mint egyetlen ilyen irányú munkáról, Pólya egy 1931-es cikkéről tudott, Birkhofféról nem (pedig abban Birkhoff idézve volt). Megnézve Birkhoff cikkét láttam, hogy abban konvergenciatétel egyáltalán nincs, és a kérdés vizsgálatát félretettem, amíg egyéb, folyamatban levő próbálkozásaimat dűlőre tudom vinni. Ebbe egyebek közt a világtörténelem is beleszólt, úgyhogy vizsgálatukra csak 1955-ben került sor. Nem lévén akkor egyetlen *konkrét* matrix sem, melyen ezen „0−2 interpolációs" polinomok létezése és egyértelműsége ismert volt, Surányi Jánossal [47] kielemeztük e szempontból azon fontos esetet, mikor az alappontokat a

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$$

ultrasferikus polinom gyökei alkotják.* Kiderült, hogy egyértelműség csak az

(28.3) $$n = 2k$$

esetben lehetséges (akkor se mindig). Ezen (nem nagyon lényeges) megszorítás eliminálhatósága ad érdemlegességet a következő kérdésnek.

XXIX. probléma. Meghatározandók az összes olyan

$$P(\alpha, \beta), \quad \alpha \neq \beta$$

Jacobi-matrixok, melyekre a (0, 2) interpoláció egyértelműen megoldható.

* Beleértve a fontos $\alpha = \beta = -1$ határesetet is.

29. Általában, ha az A mátrix k-ik sorában n alappont van, az A-mátrixot nevezzük „nagyon jó"-nak, ha tetszőleges y''_{vn} számok előírása mellett egyetlen olyan $D_n(f; A)=D_n(f)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom van, melyre

$$D_n(f; A)_{x=x_{vn}} = y_{vn} = f(x_{vn})$$

$$\left(\frac{d^2 D_n(f; A)}{dx^2}\right)_{x=x_{vn}} = y''_{vn}, \quad v = 1, 2, \ldots, n. \tag{29.1}$$

Ez esetben $D_n(f; A)$ egyértelműen írható

$$D_n(f; A) = \sum_{v=1}^{n} f(x_{vn}) r_{vn}(x; A) + \sum_{v=1}^{n} y''_{vn} \varrho_{vn}(x; A) \tag{29.2}$$

alakban, ahol

$$r_{vn}(x_{jn}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j \neq v \\ 1, & \text{ha} \quad j = v \end{cases} \tag{29.3}$$

$$r''_{vn}(x_{jn}) = 0, \quad \text{ha} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

és

$$\varrho_{vn}(x_{jn}) = 0, \quad \text{ha} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\varrho''_{vn}(x_{jn}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j \neq v \\ 1, & \text{ha} \quad j = v. \end{cases} \tag{29.4}$$

$r_{vn}(x; A)$, $\varrho_{vn}(x; A)$ az interpoláció első ill. másodfajú alapfüggvényei.

30. A vizsgálat során kiderült, hogy nem a T-matrix, hanem a Π-matrix a „legjobban kezelhető" mátrix a probléma szempontjából (még, ha (28.3) megszorítás persze ez esetben is kell); itt a matrix k-ik sorát tehát a

$$\Pi_{2k}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{x} P_{2k-1}(t)\, dt \tag{30.1}$$

polinom gyökei adják,

$$x_{1,2k} = 1, \quad x_{2k,2k} = -1$$

és $P_{2k-1}(t)$ a $(2k-1)$-ik Legendre-polinom. Az első ez irányú konvergenciatételt Balázs Jánossal 1958-ban közöltük [2]. Ezt itt nem részletezem; csupán azt említem meg, hogy az y''_{vn} számokra itt is van bizonyos tetszőlegesség, amennyiben rájuk elég $n \to \infty$-re az

$$y''_{vn} = o(n) \quad v = 1, \ldots, n \tag{30.2}$$

kikötést tenni, és ez már tovább nem gyengíthető.

31. Mielőtt továbbmennénk, néhány általános megjegyzést szeretnénk tenni a hézagos interpoláció elméletére. G. G. Lorentz 1975-ben megjelent "Birkhoff interpolation problem" című referátumában (Center for Numerical Analysis, University of Texas at Austin) igen szépen foglalja össze és egészíti ki sokhelyütt a kérdés majdnem egész eddigi irodalmát. Szívéhez szemmelláthatólag legközelebb a regularitási kérdések állanak, azaz karakterizálni próbálni fix n mellett azon

$$0 \leqq k_{1j} < k_{2j} < \ldots < k_{l_j, j} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{31.1}$$

sorozatait az egészeknek, melyek mellett az

$$(1 \geqq)\, \xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_n (\geqq -1) \tag{31.2}$$

számok *bármely* választása mellett a

$$\pi^{(k_{vj})}(\xi_j) = y_{jv} \tag{31.3}$$

$$v = 1, 2, \ldots, l_j$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

feltételeket kielégítő legfeljebb

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n - 1$$

-ed fokú $\pi(x)$ polinom egyértelműen meg van határozva, bárhogy is adjuk meg (31.3)-ban az y-számokat. Itt nem az $n \to \infty$-re való viselkedés a lényeges; a kérdés $n=2$-re is érdekes (ha emlékeim nem csalnak, Pólyának is ez az eset kellett). Mint a referátum 79. oldalán megjegyzi, e (Schoenbergtől származó) szép kérdés *teljes* megoldását reménytelen feladatnak tartja; mint a 13. oldalon írja (és Birkhoff cikke is világosan mutatja), Birkhoffot a regularitás kérdései nem érdekelték, ha eredményeiből utólag bizonyos *elégséges* feltételek a regularitásra nyerhetők is voltak. A konvergenciaelméletről szólva Balázzsal való 1958-as cikkünk eredményeit ismerteti csupán, mint első eredményt; a sok csatlakozó eredményről csak úgy szól, hogy "They all depend upon a very special selection of knots, for which explicit formulas are possible". Ez arra mutat, hogy figyelmét elkerülte az az ok, mely miatt 1955-ben a szóban forgó kérdéskomplexumhoz visszatértem (ami pedig Balázzsal való első, 1958-as [2] cikkünkben, amit idéz, röviden bár, de jelezve volt). Ha a klasszikus

$$y''(x) - \varphi(x) y(x) = 0 \tag{31.4}$$

differenciálegyenlet *globális* megoldásait akarjuk vizsgálni a pozitív tengelyen, úgy, ha $n=1, 2, \ldots$-ra

$$0 < \eta_{1n} < \eta_{2n} < \ldots < \eta_{nn} \tag{31.5}$$

és az ehhez tartozó matrix A_1, úgy egyelőre határozatlan y_{vn}-ekkel és $y''_{vn} = \varphi(x_{vn}) y_{vn}$-el a

$$D_n(y; A_1) = \sum_{v=1}^{n} y_{vn} r_{vn}(x; A_1) + \sum_{v=1}^{n} \varphi(x_{vn}) y_{vn} \varrho_{vn}(x; A_1) =$$

$$= \sum_{v=1}^{n} y_{vn} \{r_{vn}(x; A_1) + \varphi(x_{vn}) \varrho_{vn}(x; A_1)\}$$

polinom a (31.4) egyenletet az η_{vn}-helyeken kielégíti *bármilyen* y_{vn}-választás mellett. Ekkor, ha

$$D''_v(x) - \varphi(x) D_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{v=1}^{n} y_{vn} g_{vn}(x; A_1) \tag{31.6}$$

és a kezdeti feltételek pl.

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{31.7}$$

úgy ezek két lineáris relációt adnak az y_{vn}-ekre és ezek mellett minimizálandó alkalmas $\psi(x) > 0$ súlyfüggvény mellett az

$$\int_0^{\infty} \{D''_n - \varphi D_n\}^2 \psi(x)\, dx \tag{31.8}$$

kvadratikus alak. Ekkor remélhető, hogy $n \to \infty$-re a D_n interpolációs polinomok az egész pozitív tengelyen tartanak a (31.4) megoldásához (31.7) mellett. (A vázolt eljárás sokféle módon módosítható és a (31.7) kezdeti feltétel helyett bármilyen más kezdeti feltétel mellett is tárgyalható.) Hogy azonban a (31.8) alatti kvadratikus alak „jól kezelhető" legyen, az A_1 mátrix úgy volna megválasztandó, hogy az

$$\int_0^\infty g_{\nu_1 n}(x; A_1) g_{\nu_2 n}(x; A_1) \psi(x)\, dx \tag{31.9}$$

integrálok „jól kezelhetők" legyenek, ami viszont akkor várható, ha maguk a $g_{\nu n}(x; A_1)$-ek, azaz az $r_{\nu n}(x; A_1)$ és $\varrho_{\nu n}(x; A_1)$ alapfüggvények „jól kezelhetők". A "very special knots" tehát olyan *explicit* alapmatrix keresését jelenti, melynél az alapfüggvények *lehetőleg egyszerű* alakúak; az ilyen vizsgálatok érdemleges tapasztalatokat adtak még akkor is, ha a nyert explicit formák nem lettek az általunk megadottnál egyszerűbbek végső soron.

Egy további idevágó megjegyzést *38.*-ban teszünk.

32. A $\Pi_{2k-1}(x) = 0$ gyökeit* véve alappontokul ($k = 1, 2, \ldots$) a különféle interpolációs processzusok konvergenciaelméletében szokatlan eset áll elő. Ekkor $n = 2k-1$-el végtelen sok legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom van a kívánt függvényértékekkel és második deriváltakkal. Így áll elő a

XXX. probléma. Tanulmányozandó az ily módon előálló („háromszorosan") végtelen sok interpolációs processzus konvergenciaviselkedése, ha

$$f \in C[-1, +1].$$

Tulajdonképp Fejér (19.4)—(19.6) tételével — az $|y'_{\nu n}|$ számokra csak korlátozások vannak — szintén („egyszeresen") végtelen sok interpolációs processzus konvergenciaviselkedését derítette fel.

33. A *28.*-ban definiáltuk a „nagyon jó" A-matrixokat. Legyen most az A-matrix „jó", ha minden $\nu = 1, 2, \ldots, n$-re és $n = 1, 2, \ldots$-ra van *legalább egy* $r_{\nu n}(x; A)$ és $\varrho_{\nu n}(x; A)$ a (29.3), ill. (29.4) tulajdonságokkal. Ekkor a „legstabilisabb (0, 2)-interpoláció" problémája a következő

XXXI. probléma. Ha A egy „jó mátrix", úgy milyen A-ra lesz

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |r_{\nu n}(x; A)| = \text{minimum?} \tag{33.1}$$

A (30.1)-beli mátrixot Π_1-el jelölve Balázzsal [2] megmutattuk 1958-as cikkünkben, hogy

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |r_{\nu n}(x; \Pi_1)| \leqq c_1 n \quad (c_1 \text{ numerikus explicit állandó}) \tag{33.2}$$

és ez nem javítható, mert

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |r_{\nu n}(x; \Pi_1)| > c_2 n. \tag{33.3}$$

* L. *30.*

Azt hiszem, hogy minden „jó" A-ra

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |r_{\nu n}(x; A)| > c_3 n. \tag{33.4}$$

Ha ez igaz, akkor a Π_1-matrix „nincs messze az optimális A-tól".*

34. Fejérnek a *19.*-ben említett tétele nagy szabadságot ad meg az $y'_{\nu n}$-számokra, anélkül, hogy a konvergenciaviselkedést „elrontaná". (19.6) rögtön következik Fejér azon tételéből, mely szerint

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |f_{\nu n}(x; T)| = (1+o(1))\frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n}. \tag{34.1}$$

Rögtön felvetődő kérdés, hogy az $y'_{\nu n}$-k (19.6) alatti szabad választhatósága a legjobb-e, azaz van-e oly A-mátrix, melyen képzett Hermite—Fejér interpolációs polinomok konvergenciaviselkedése ugyanaz, mint a T-mátrix esetén, de az $y'_{\nu n}$-k választási lehetősége a (19.6) alattinál nagyobb. A kérdés, a „legszabadabb (0, 1)-interpoláció" problémája, equivalens azzal, hogy milyen A-ra lesz

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |f_{\nu n}(x; A)| \quad \text{minimális.} \tag{34.2}$$

E kérdést — legalább aszimptotikusan — megoldottuk Erdőssel írott, *7.*-ben említett cikkünkben, megmutatván, hogy minden A-mátrixra

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |f_{\nu n}(x; A)| > \frac{2}{\pi n}(\log n - c \log\log n), \tag{34.3}$$

azaz a T-matrix legalább aszimptotikusan adja a „legszabadabb (0, 1)-interpolációt". A megfelelő kérdés a (0, 2)-interpolációra a

XXXII. probléma. Melyik „jó" A-mátrixra lesz

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_{\nu n}(x; A)| = \text{minimum?}$$

Mint Rahman és Schmeisser-rel megmutattuk [42], minden jó A-ra egy numerikus c-vel

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_{\nu n}(x; A)| > \frac{c}{n^2}. \tag{34.4}$$

Mint (30.2) mutatja, a (*30.*-ban definiált) Π-mátrixra numerikus c_1, c_2-vel

$$\frac{c_1}{n} \leqq \max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_{\nu n}(x; \Pi)| \leqq \frac{c_2}{n}, \tag{34.5}$$

azaz (34.4)-ben $\frac{c}{n^2}$ biztosan nem helyettesíthető $2c_2 \cdot \frac{1}{n}$-el. A plauzibilis (és nehéznek látszó) sejtés az, hogy minden „jó" A-mátrixra numerikus c_3-al

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |\varrho_{\nu n}(x; A)| > \frac{c_3}{n} \tag{34.6}$$

és ez már lényegileg nem javítható.

* P. L. J. van Rooij, F. Schurer és C. R. van Walt von Praag 1975 végén Eindhovenben összeállították az Hermite—Birkhoff interpoláció addigi bibliográfiáját.

35. Legyen az A-mátrix „nagyon jó" a *28.*-ban használt értelemben. Ekkor nyilván minden legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $\pi_{2n-1}(x)$ polinomra

$$\pi_{2n-1}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-1}(x_{\nu n}) r_{\nu n}(x; A) + \sum_{\nu=1}^{n} \pi''_{2n-1}(x_{\nu n}) \varrho_{\nu n}(x; A)$$

azaz fennáll ezekre az

$$\int_{-1}^{1} \pi_{2n-1}(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-1}(x_{\nu n}) \int_{-1}^{1} r_{\nu n}(x; A)\, dx +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \pi''_{2n-1}(x_{\nu n}) \int_{-1}^{1} \varrho_{\nu n}(x; A)\, dx \tag{35.1}$$

kvardaturaformula. Ez áll minden „nagyon jó" A-ra; Gauss tétele és annak *25.*-ben említett kiterjesztése után érdekes kérdés, hogy A alkalmas választásával vajon nem terjeszthető-e ki (34.1) érvényessége $(2n-1)$-nél magasabbfokú polinomokra is. A kérdés legegyszerűbb formája a

XXXIII. probléma. Meghatározandók mindama A-mátrixok, melyek n-ik sorával képezve a (34.1) kvadraturaformulát, az érvényes minden legfeljebb $2n$-edfokú polinomra (ha ilyen A egyáltalán létezik).

36. A Lagrange-interpolációnak, mint *15.*-ben láttuk, *van* durva *és* finom konvergenciaelmélete (beleértve persze a divergencia eseteket is). A $H_n^*(f; A)$ Hermite—Fejér interpolációs polinomoknál a (21.1) megkötés mellett, ha még

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}} \max_x \sum_{\nu=1}^{n} |h_{\nu n}(x; A)| > 0 \tag{36.1}$$

úgy belátható, hogy az eljárás „rossz" a $\mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$ osztályra, ha

$$0 < \alpha < \frac{\beta}{\beta+2} \tag{36.2}$$

azaz ezen α-khoz tartozó függvényosztályok a „durva" elméletbe esnek. A XX. probléma — kis általánosítással — épp azt a lehetőséget pendíti meg, hogy a (36.1) alatti osztályok alkotják az Hermite—Fejér interpoláció *teljes* „durva"-elméletét. A (0, 2)-interpolációra vonatkozólag az analóg kérdések a (33.4)-sejtés miatt komplikáltabbaknak látszanak. E sejtés ad plauzibilitást annak, hogy a következő problémában feltett kérdésre a válasz igenlő.

XXXIV. probléma. Tetszőleges „nagyon jó" A-mátrixhoz és tetszőlegesen kis $\delta > 0$-hoz van oly

$$f_0(x) \in \mathrm{Lip}_{1-\delta}[-1, +1] \tag{36.3}$$

hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{-1 \leqq x \leqq +1} \left| \sum_{\nu=1}^{n} f_0(x_{\nu n}) r_{\nu n}(x; A) \right| = \infty. \tag{36.4}$$

Még, ha igaz is a (33.4) sejtés, akkor is csak $\frac{2}{3} < \delta < 1$-re látható be (36.4) a (15.4) bizonyításában követett úton.

37. Amennyiben a *XXXIV.* probléma megoldása pozitív, a (0, 2)-interpoláció konvergenciaelméletében a (15.3) függvényosztályok szerepét azon osztályok veszik át, melyek $f(x)$ elemei folytonosan deriválhatók $[-1, +1]$-ben és

$$f'(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]. \tag{37.1}$$

A XX. probléma megfelelője itt a

XXXV. probléma. Ha egy „nagyon jó" A-mátrixra egy $1<\beta<2$-vel $n>n_0$-ra

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |r_{\nu n}(x; A)| < n^\beta, \tag{37.2}$$

úgy milyen (37.1) alatti függvényosztályokra áll fenn, hogy f-elemeire

$$D_n^*(f; A) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) r_{\nu n}(x; A) \to f(x) \tag{37.3}$$

egyenletesen $[-1, +1]$-ben?

Igen valószínű, hogy — *33.* utolsó megjegyzésétől eltekintve — a (0, 2)-interpolációnak *nincs* „durva" konvergenciaelmélete.

38. Mint említettük *28.*-ban, Birkhoff dolgozatában általános formulát nyert a mechanikus kvadratúra hibatagjára, ha a matrix „nagyon jó". Ezek már azzal, hogy *posztulálják* a létezést és egyértelműséget, nem effektívek. Egyéb nemeffektivitásokról nem is szólva a hibatagban, mint az interpolációelmélet többi általános hibatagjában, a függvény $2n$-edik deriváltja szerepel. Ezzel szemben a *30.*-ban említett tételünk Balázzsal a Π-mátrix esetére triviálisan kvadratúrakonvergenciát eredményez, ha f deriválható, és ez tetszőleges kis kitevős Lipschitz-feltételt teljesít. Ezzel kapcsolatban természetes kérdés a

XXXVI. probléma. Mi a „legjobb" függvényosztály, melyre a

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n}) r_{\nu n}(x; \Pi) \quad n \text{ páros}$$

polinomok integrálja $n \to \infty$-re tart $\int_{-1}^{1} f(x)dx$-hez?

39. Az előbbi pont fejtegetéseit negatív irányban egészítené ki a következő kérdés igenlő megválaszolása.

XXXVII. probléma. Minden „jó" A mátrixhoz van oly $f_0(x) \in C[-1, +1]$, hogy a (37.3) alatti jelöléssel

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{-1}^{1} D_n^*(f_0; A)\, dx \right| = \infty. \tag{39.1}$$

Esetleg ilyen $f_0(x)$ létezése még egy $\mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$ osztályban is garantálható.

Stekloff [46] és Fejér [21] egy klasszikus tétele azt mondja ki, hogy ha egy A-mátrix olyan, hogy

$$\int_{-1}^{1} l_{\nu n}(x; A)\, dx \equiv 0, \tag{39.2}$$

úgy minden korlátos és R-integrálható f-re

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} L_n(f; A)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx. \tag{39.3}$$

Analógia alapján azt várná az ember, hogy előnyös lehetne a (0, 2)-interpolációhoz tartozó mechanikus kvadratúrát oly A-mátrixon venni, melyen

$$\int_{-1}^{1} r_{vn}(x; A)\,dx \geqq 0 \quad v = 1, 2, \ldots, n, \quad n > n_0. \tag{39.4}$$

Erre vonatkozik a

XXXVIII. probléma. Nincs olyan „jó" A-mátrix, melyre (39.4) teljesülne.

Megjegyzem, legalábbis „nagyon jó" A-mátrix esetén, a XXXVII. probléma pozitív megoldásából következik a XXXVIII. probléma pozitív megoldása. Ui. ilyen A-kra

$$\sum_{v=1}^{n} r_{vn}(x; A) \equiv 1,$$

tehát, ha $|f| \leqq 1$, úgy

$$\left| \int_{-1}^{1} D_n^*(f; A)\,dx \right| \leqq \sum_{v=1}^{n} \left| \int_{-1}^{1} r_{vn}(x; A)\,dx \right| = \left| \sum_{v=1}^{n} \int_{-1}^{1} r_{vn}(x; A)\,dx \right| = 2,$$

ellentétben (39.1)-el.

Viszont bizonyára kitüntetett szerepet játszanak azon „jó" A-mátrixok, melyek a következő extremumtulajdonsággal rendelkeznek.

XXXIX. probléma. Meghatározandók azon „jó" mátrixok, melyekre

$$\sum_{v=1}^{n} \left| \int_{-1}^{1} r_{vn}(x; A)\,dx \right| = \text{minimum}.$$

Az általános vizsgálatokat „jó" A-mátrixok esetén nagyon megkönnyítené, ha pozitív megoldású volna a

XL. probléma. Igaz-e, hogy minden „jó" A-mátrixra fennáll a

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} \sum\limits_{v=1}^{n} |\varrho_{vn}(x; A)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} \sum\limits_{v=1}^{n} |r_{vn}(x; A)|} < \frac{c}{n^2} \tag{39.5}$$

egyenlőtlenség?

Ha ez igaz, úgy a Π-mátrix mutatja, hogy (39.5) lényegileg nem javítható.

Valamivel gyengébb, de hasznosnak látszó feladat a

XLI. probléma. Igaz-e, hogy minden „nagyon jó" A-mátrixra pozitív numerikus c-vel fennáll a

$$\max_{v=1,\ldots,n} \frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |\varrho_{vn}(x; A)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |r_{vn}(x; A)|} < \frac{c}{n^2}$$

egyenlőtlenség?

40. Eddig az interpoláció alappontjai a $[-1, +1]$ közben voltak. Most legyenek a komplex z-sík egy l Jordan-ívén. Fejér és Kalmár *20.*-ban adott tételei megadják a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy, ha $f(z)$ *reguláris* l-en, milyen l-re telepített A-mátrix mellett lesz l-en

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f; A) = f(z).$$

Más kérdés azonban, hogy mi történik, ha $f(z)$ csupán folytonos l-en és az l-görbe „nem nagyon sima". (A kérdést az *általános approximációelmélet* esetére D. J. Newman említette nekem arra az esetre, mikor egy két részből álló törtvonal). Ha

$$w = \varphi(z) \tag{40.1}$$

az l külsejét $|w|>1$-re konformisan leképezi, úgy fentemlíttet tételek miatt kézenfekvő az n-ik alappontokat, z_{vn}-eket a

$$\varphi(z_{vn}) = e^{\frac{(2v-1)\pi i}{2n}} \qquad v = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{40.2}$$

által megadni. Az igazi nehézségek és eltérések a $[-1, +1]$ szakasz elméletétől, azt hiszem, inkább jönnek ki, ha a Newman által proponált eset helyett azon

$$l_1 \overset{\text{def}}{=} K_1 \cup K_2 \tag{40.3}$$

görbét vesszük, melynél

$$\begin{aligned} K_1&: \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z \leqq 0 \\ K_2&: \left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z \leqq 0. \end{aligned} \tag{40.4}$$

Ez esetben, mint könnyen verifikálható,

$$\varphi(z) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4z},$$

azaz az n-ik alappontok

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4z_{vn}} = e^{\frac{(2v-1)\pi i}{2n}} \qquad v = 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{40.5}$$

által vannak adva. Úgy érzem, az így kapott mátrix a T-mátrix megfelelője; a (4.6) alatti Faber-tétel ill. (7.1)—(7.2) megfelelőjét a következő probléma pozitív megoldása adná.

XLII. probléma. Ha az A-mátrix elemei a (40.3)—(40.4) alatti l_1 görbén vannak, úgy

$$\max_{z\in l_1} \sum_{v=1}^{n} |l_{vn}(z; A)| \tag{40.6}$$

változó A-melletti infimumát aszimptotikusan a (40.5) mátrixra éri el. Mi ennek értéke?

A kérdés igazi érdekességét az l_1 görbe speciális választása adja, pontosabban az a kérdés, hogy a *görbe* szingularitásai hogyan befolyásolják a görbéhez tartozó polinomapproximációelméletet.* Ugyanezen ok teszi kérdésessé, hogy a „helyes" folytonossági modulus ezen elméletben — rektifikálható l-görbe esetén —

$$\omega_1(\delta, f) = \max |f(x') - f(x'')|, \tag{40.7}$$

ahol x' és x'' l-en vannak és *l-en mért* távolságuk $\leqq \delta$ vagy

$$\omega_2(\delta, f) = \max_{\substack{x', x'' \in l \\ |x'-x''| \leqq \delta}} |f(x') - f(x'')|. \tag{40.8}$$

Nagyon valószínű, hogy $\omega_1(\delta, f)$ a „helyes", de, ha így volna, akkor felmerül a kérdés, hogyan alakul a polinomapproximáció elmélete nemrektifikálható-görbe esetén? E kérdéseket foglalja össze a

XLIII. probléma. A folytonossági modulus Jackson, S. Bernstein és Müntz—Szász tételeinek analogonjai szingularitásokkal bíró l-görbe esetén.**

Nagyon valószínű, hogy, ha az l görbe folytonosan differenciálható, vagy esetleg még erősebb „regularitási" követelményt rovunk ki rá, akkor az egész klasszikus approximációelmélet értelemszerű változtatásokkal átmegy erre az esetre is. Nagyon valószínű az is, hogy ilyen vizsgálatok valamilyen formában szerepeltek már az irodalomban, úgy e kérdést nem fogalmazom meg nyitott problémaként.

41. A zárt l görbe esete, különösen, mikor l az egységkör, sok vizsgálat tárgya volt. Itt a $C[-1, +1]$ osztály szerepét azon $C[|z| \leqq 1]$ osztály játssza, melynek $f(z)$ elemei regulárisak

$$|z| < 1- \tag{41.1}$$

ben és folytonosak $|z| \leqq 1$-ben; az A-mátrix elemei az egységkörvonalra esnek. Hogy a Lagrange-interpoláció itt sem segít, az világos; itt azonban még van lehetőség arra, hogy az I. problémának megfelelő kérdésnek elegáns megoldása legyen.

XLIV. probléma. (Erdős sejtése.) Ha A elemei $|z| = 1$-en vannak, úgy

$$\min_A \max_{|z|=1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu n}(z; A)| \tag{41.1}$$

akkor éretik el, ha A n-ik sora a szabályos n-szög csúcsaiból áll (A_0-mátrix).

A $[-1, +1]$ köz esetében a Lagrange-interpoláció helyett az Hermite—Fejér interpoláció segített. Az egységkör esetén ez nem segít; mint Kővári megjegyezte, a használt interpolációs eljárások egyike sem. Így előáll a

XLV. probléma. (Kővári.) Van-e oly interpolációs eljárás, mely a $C[|z| \leqq 1]$ osztály minden elemére konvergál $f(z)$-hez, egyenletesen $|z| \leqq 1$-ben.***

* „Polinom" itt a z komplex változó polinomja mindenütt.

** Mivel Freud—Vértesi [26] és Kis—Vértesi [35] megmutatták, hogyan lehet a $[-1, +1]$ intervallum esetén Jackson tételét interpolatorius úton bizonyítani, a (40.5) alappontokon képzett megfelelő interpolációs polinomok adhatnak lehetőséget a (40.3) alatti l_1-hez tartozó Jackson-tétel bizonyítására. Ez az út lehet az általános esetben is járható. Mint a Notices of the Amer. Math. Soc. 1975. novemberi számának A 734. oldalán F. David Lesley bizonyítás nélküli előadáskivonatából látom, Newman a Jackson-tételt valóban bebizonyította $C^{1+\alpha}$-típusú Jordan ívekre, ő viszont példán megmutatta, C-típusúakra általában nem igaz a Jackson-tétel természetes analogonja.

*** Egy ilyenirányú eredmény kiolvasható Szabados „Egy, a komplex sík egységkörére vonatkozó interpolációs problémáról" c. cikkéből [52].

Azt lehetne hinni, az $|z|\leqq 1$ esete mindig „rosszabb" a $[-1, +1]$-nél. Ez azonban nincs mindig így. Pl. a (33.4) sejtéssel szemben, melyet (33.2)—(33.3) bizonyos mértékig alátámaszt, Kis Ottó megmutatta [34], hogy ha A a XLIV. problémában szereplő „szabályos" A_0-mátrix, úgy a (0, 2) interpoláció $r_{vn}(z; A_0)$ elsőfajú alapfüggvényeire

$$\max_{|z|=1} \sum_{v=1}^{n} |r_{vn}(z; A_0)| < c \log n, \tag{41.2}$$

ami (33.3)-nál lényegesen jobb! Valószínűleg egyszerű a válasz arra, hogy milyen *alsó becslés* adható (41.2) bal oldalán álló kifejezésre.

Nem nehéznek, de érdemlegesnek látszik a következő kérdés vizsgálata.

XLVI. probléma. Igaz-e, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{v=1}^{n} f(e^{\frac{2\pi i v}{n}}) r_{vn}(z; A) \right|^2 |dz| \to 0$$

ha $f \in C[|z|\leqq 1]$?

42. Egy különálló, de nem érdektelen kérdés vonatkozik arra, hogy — a legegyszerűbb esetben — e^x nem approximálható az egész pozitív tengelyen polinommal. Erre vonatkozik a

XLVII. probléma. Melyik az a legkisebb $a=a(n)$, hogy tetszőleges n-edfokú $\pi_n(x)$ polinomra

$$\max_{-a(n)\leqq x\leqq a(n)} |e^x - \pi_n(x)| \geqq 1.$$

Révész György [43] megmutatta, hogy ha c_0 jelenti az

$$e^{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$$

egyenlet pozitív gyökét (azaz $0{,}66 < c_0 < 0{,}67$),
úgy $n > n_0(\varepsilon)$-ra

$$a(n) = c_0 n - \frac{2c_0}{n^{1-\varepsilon}}$$

túl kicsi, de

$$a(n) = c_0 n + \left(\frac{c_0}{2} + \varepsilon\right) \log n$$

túl nagy.

43. Az *5.*-ben szóltunk már az ortogonális polinomokról és utána láttuk, milyen lényeges szerepet játszanak az interpolációelméletben. Az általános polinomapproximáció elméletében való jelentőségét elég azzal illusztrálni, hogy adott $p(x)$ súlyfüggvény mellett

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2 p(x)\, dx$$

létezése esetén az

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - \pi_n(x))^2 p(x)\, dx$$

integrált minimizáló n-edfokú $\pi_n(x)$ polinom $f(x)$-nek az (5.1) alatti $q_\nu(x)$ polinomok szerinti kifejtésében az n-ik szelet. Mint *19.*-ben említettük, *S.* Bernstein (globálisan és előzőleg Szegő lokálisan) adtak aszimptotikus előállításokat $q_n(x)$-re a súlyfüggvényre vonatkozó globális ill. lokális feltételek mellett. E gyönyörű formulák igen sok célra „túlerősek"; gyengébb konklúzió is elég volna, ha az a súlyfüggvényre kirótt követelmény jelentős gyengítése mellett is áll. Így első helyen említem itt Stekloff egy 50 éves sejtését.

XLVIII. probléma. (Stekloff.) Igaz-e, hogy (12.6) esetén $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban a *normált*-ortogonális $q_n(x)$-ekre

$$|q_n(x)| \leqq c(p, \varepsilon) \tag{43.1}$$

n-től függetlenül?

Ezzel kapcsolatban említem a következőt.

XLIX. probléma. Igaz-e, hogy, ha

$$p(x) \geqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{43.2}$$

úgy $[-1, +1]$-ben a *normált*-ortogonális $q_n(x)$-ekre

$$|q_n(x)| \leqq c(p) \tag{43.3}$$

n-től függetlenül?

A XLIX. probléma érdekességét emeli a következő tény. *8.*-ban említettem, hogy Freud bebizonyította (8.4)-et bizonyos P-mátrixokra $p(x)$-re vonatkozó, nem könnyen kontrollálható feltétel mellett. Ez a feltétel épp (43.3); a XLIX. feladat pozitív megoldása tehát azt adná, hogy (43.2) mellett fennáll (8.4).

44. Szegő és S. Bernstein említett aszimptotikus formulái rögzített $\varepsilon \leqq \vartheta_0 \leqq \pi - \varepsilon$ mellett $n \to \infty$-re

$$q_n(\cos \vartheta_0) = (1+o(1)) \frac{\cos(n\vartheta_0 + \psi(\vartheta_0))}{\sqrt{p(\cos \vartheta_0)}} \tag{44.1}$$

alakúak, ahol $\psi(\vartheta)$ $p(x)$-el meg van határozva, hacsak a

$$p(\cos \vartheta)|\sin \vartheta| \overset{\text{def}}{=} p_1(\vartheta) \tag{44.2}$$

függvényre

$$|p_1(\vartheta+h) - p_1(\vartheta)| < c \log^{-1-\delta} \frac{1}{|h|}. \tag{44.3}$$

E feltétel (44.1)-hez *elégséges* feltétel; hogy ez javítható-e, legjobb tudomásom szerint nincs eldöntve. Eziránba mutat az

L. probléma. Van-e $p(x)$ súly, melyre

$$p(x)\sqrt{1-x^2} \in C[-1, +1], \quad p(x)\sqrt{1-x^2} \geqq m > 0, \tag{44.4}$$

és melyre alkalmas $0 < \vartheta_0 < \pi$-vel $q_n(\cos \vartheta_0)$-ra nincs (44.1)-típusú aszimptotikus formula?

Hogy jelezzem a kérdés nehézségét, említem, hogy Erdőssel *20.*-ban említett dolgozatunkban megmutattuk, hogy (44.3) mellett a (20.6) jelöléssel

$$\varepsilon \leqq \vartheta_{vn} < \vartheta_{v+1,n} \leqq \pi - \varepsilon\text{-ban a}$$

$$\lim_{n\to\infty} n(\vartheta_{v+1,n} - \vartheta_{vn}) = \pi$$

reláció igaz.

45. Az 1938-as Annals-cikkünkben Erdőssel megmutattuk, hogy, ha $p(x)$-ről csak azt tesszük fel, hogy $p(x) \geqq 0$ és az

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx \quad \text{és} \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{p(x)} \tag{45.1}$$

integrálok léteznek, úgy a $p(x)$-re n-ik ortogonális polinom gyökeit $\cos \vartheta_{vn}$ alakba írva fennáll a

$$(0 <)\,\vartheta_{v+1,n} - \vartheta_{vn} \leqq c(p)\frac{\log(n+1)}{n} \tag{45.2}$$

egyenlőtlenség. Így áll elő a

LI. probléma. Javítható-e felülről a (45.2) egyenlőtlenség?

A szóbanforgó dolgozatban a (45.2) egyenlőtlenség egy általánosabb tétel korolláriumaképp adódott, melyről példával mutattuk meg, hogy nem javítható. Ez azonban nem volt egy ortogonális polinom gyökrendszere.

46. Tekintsük a $p(x)$ súlyfüggvényhez tartozó $q_n(x)$ ortogonális polinomokat, most a

$$\text{coeffs. } x^n \text{ in } q_n(x) = 1 \tag{46.1}$$

normálással. Ezekre jólismert a

$$xq_n(x) = q_{n+1}(x) + B_n q_n(x) + C_n q_{n-1}(x) \tag{46.2}$$

rekurziós formula, ahol

$$C_n < 0. \tag{46.3}$$

Favard fedezte fel azon fontos tényt, hogy fordítva, minden (46.1)—(46.2)-nek elegettevő polinomsorozat ortogonális valamely $d\alpha(x)$ súlyra. Erről a súlyról azonban igen keveset tudunk; csupán Tsikara egyes eredményeiről tudok, melyek a B_n és C_n együtthatók viselkedéséből vontak le következtetéseket a súlyfüggvény bizonyos tulajdonságaira. Sok évvel ezelőtt Schweitzer-verseny feladatnak javasoltam a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n K_n\left(\frac{n}{2z}\right) = e^{-z^2} \tag{46.4}$$

formula igazolását, ahol $K_n(t)$ az (5.6) alatt definiált n-ik Hermite polinom az

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)^2 e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,2^n n! \tag{46.5}$$

normálással; a (46.4) formula érdekessége nyilván az, hogy a polinomokból *egyszerű módon* adja vissza valós z-re a súlyfüggvényt. Kívánatos lenne a súlyfüggvények minél tágabb osztályára (46.4)-el analóg módon visszanyerhetni a súlyfüggvényt. Erre vonatkozik a

LII. probléma. Van-e a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi-polinomokra (46.4)-el analóg formula? Általánosítható-e (46.4), vagy a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n q_n\left(\frac{n}{2x}\right)=p(x) \tag{46.6}$$

relációból következik, hogy

$$p(x)=e^{-x^2}?$$

47. De a (46.4) formulának más érdekessége is van. Ha $0<a<b$ fixek, úgy e formula aszimptotikus formulát ad $K_n(z)$-re az

$$an\leqq|z|\leqq bn \tag{47.1}$$

körgyűrűkben, mégpedig $n\to\infty$-re

$$K_n(z)=(1+o(1))(2z)^n e^{-\frac{n^2}{4z^2}}. \tag{47.2}$$

A $K_n(z)$ Hermite-polinomok aszimptotikus viselkedése nagyon részletesen van tárgyalva Szegő „Orthogonal polynomials" c. könyvében. Gyökeit

$$x_{1n}>x_{2n}>\ldots>x_{nn}- \tag{47.3}$$

el jelölve $n\to\infty$-re

$$x_{1n}=(1+o(1))\sqrt{2n}. \tag{47.4}$$

Az aszimptotikus formulák két nagy csoportra oszlanak:

a) „külső" aszimptotikus formulák, melyek a valós tengelyen kívül érvényesek,

b) „belső" aszimptotikus formulák, melyek a valós tengelyen érvényesek.

Mivel az összes gyökök valósak, nyilván az utóbbiak a mélyebbek. Ezeken belül kétfajta aszimptotikus előállítás ismeretes; egyik az $|z|\leqq R$ megfelelő részében érvényes, ahol R nem függ n-től, a másik az

$$|z|\leqq c\sqrt{n} \tag{47.5}$$

körlemez megfelelő részeiben, ahol c tetszőleges pozitív állandó. (Tehát a (47.1) tartományban egyik sem.) (47.4) alapján a második típusúak az igazán érdekesek, mert felvilágosítást adnak a polinomok oscillatorius természetéről.

48. Az Hermite-polinomok az irodalomban sokirányú figyelemben részesültek. Ezek *egyike* csupán az, hogy ezekről nyert információkon át (nomeg az (5.6) alatt definiált $L_n^*(x)$ Laguerre-polinomokon át) gondoltak eljutni a *végtelen* közös ortogonális polinomok megfelelő aszimptotikus formuláihoz. Ebből a reményből eddig igen kevés realizálódott. Első feladat volna tudni, hogy mi a „finom" tartomány, ami jelentené a következő probléma megoldását.

LIII. probléma. Ha a valós tengelyen

$$p(x)>0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|x|^n p(x)\,dx \quad \text{létezik} \tag{48.1}$$

$$p(x)\in L(-\infty,+\infty) \quad n=0,1,\ldots\text{-ra},$$

úgy a (46.1) konvencióval milyen aszimptotikus kifejezés adható meg $n\to\infty$-re

$$\text{a) } x_{1n}=\xi(n,p) \quad \text{b) } x_{nn}=\eta(n,p)\text{-re?} \tag{48.2}$$

A kérdés a súlyfüggvények elég tágas alosztályaira is érdekes.

Azt, hogy

$$\max_{\nu} |x_{\nu n}|$$

n-el együtt minden határon túl nő, könnyű belátni. 1960-ban azt hittem, hogy tudok oly $p(x)$-et megadni, mely (48.1)-et kielégíti és melyre (48.2) jelölésével

$$\xi(n, p) \to \infty, \quad \eta(n, p) > -c, \tag{48.3}$$

azaz a gyökök *egyoldalról* lehetnek korlátosak. Szűkös akkori feljegyzésemből azonban most sehogyse tudok egy érvényes konstrukciót megadni. Így fennáll az

LIV. probléma. Van-e oly $p(x)$, mely a (48.1) osztályhoz tartozik és (48.3)-at kielégíti?

49. A *47.* pontban az Hermite-polinomokkal kapcsolatban említett aszimptotikus formulák azért arra iránymutatók, hogy milyen *jellegű* aszimptotikus formulák várhatók a (48.1) osztályba (vagy annak fontos alosztályaiba) tartozó $p(x)$-ekhez tartozó $q_n(x)$-ekre. A külső aszimptotikára vonatkozólag — először a $[-1, +1]$ köz esetére — két eredményt említünk meg. Az első ilyen, Szegőnek ezirányú tétele, olyan $p(x)$-ekre vonatkozik, melyekre

$$p(x) \geqq 0, \quad p(x) \in L[-1, +1], \quad \log^* \frac{1}{p(x)} \in L[-1, +1]. \tag{49.1}$$

Tételének pontos formája megtalálható "Orthogonal polynomials" c. könyve 296—297. oldalán.* Viszont a *20.* pontban említett cikkünkben a $p(x)$-re csak azt kötjük ki, hogy

$$p(x) \geqq 0, \; p(x) \in L[-1, +1] \tag{49.2}$$

és, hogy

(49.3) $p(x)$ nullhelyei $[-1, +1]$-ben egy nullhalmazt alkotnak.

Ez esetben viszont nem $q_n(x)$-re adtunk aszimptotikus formulát, hanem csak $q_n(x)^{1/n}$-re, éspedig

$$q_n(x)^{\frac{1}{n}} = (1 + o(1)) \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2}, \tag{49.4}$$

mely formula egyenletesen áll a $[-1, +1]$ mentén felmetszett x-sík belsejében levő minden korlátos tartományban; itt $q_n(x)$ úgy van normálva, hogy

$$\text{coeffs. } x^n \text{ in } q_n(x) = 1, \tag{49.5}$$

és a gyök értékének választása nyilvánvaló. Ezután kézenfekvő kérdés az

LV. probléma. Van-e végtelen intervallumban pozitív és L-integrálható $p(x)$-hez tartozó ortogonális polinomokra (pl. (49.5) normálás mellett) legalább (49.4)-típusú aszimptotikus előállítás?

*Ez orto*normált* polinomokra vonatkozik, azaz, mikor

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)^2 p(x)\, dx = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Persze emellett alapprobléma marad az

LVI. probléma. A (48.1)-et kielégítő súlyfüggvények milyen általános osztályára lehet az ortonormált $q_n(x)$-polinomokra aszimptotikus formulát megadni az

$$\operatorname{Im} x > 0$$

belsejében fekvő korlátos zárt tartományokra ?

Ilyen előállítás talán nyerhető Szegőnek a $[-1, +1]$-re vonatkozó megfelelő tételéből alkalmas határátmenettel.

50. Mint jeleztük a *47.* pontban, az igazán mély kérdések a „belső" aszimptotikára vonatkoznak és főleg azok lennének, melyek a (48.2)-jelöléssel pl. az

$$2\eta(n, p) \leqq x \leqq 2\xi(n, p) \tag{50.1}$$

közben érvényesek. Mivel az LIII. problémára nincs jelenleg általános tétel, az (50.1)-nek megfelelő kérdést számozott problémaképp nem is fogalmazzuk meg. Így marad az

LVII. probléma. Megadható-e a (48.1) osztály $p(x)$ súlyfüggvényeinek egy részosztálya úgy, hogy az ezekhez tartozó ortonormált $q_n(x)$-ekre $-a \leqq x \leqq a$-ban aszimptotikus előállítás megadható? (a itt tetszőleges nagy fix pozitív állandó).

Valamivel könnyebb kérdésekhez jutunk, ha a (48.1) feltételt kielégítő súlyfüggvények mellett az $(\eta(n, p), \xi(n, p))$ közben a gyökök eloszlását vizsgáljuk. Az egyetlen ismert eredmény ezirányban Erdőstől származik, és az 1969-es budapesti approximációelméleti kollokvium kötetében jelent meg [16]. Qualitative ez azt mondja ki, hogy, ha a súlyfüggvény „nagyon erősen" esik le $x \to \pm\infty$-re, úgy az $[x_{nn}, x_{1n}]$ közt a $[-1, +1]$-re transzformálva lineárisan, a gyökök a *20.* pontban használt értelemben egyenletesen vannak eloszolva a $[-1, +1]$ fölé emelt félkörön. Az Hermite-polinomok esetében ez nem teljesül. Így áll elő az

LVIII. probléma. A (48.1) alatti súlyfüggvények milyen, az Erdősénél nagyobb, osztályaira határozható meg explicite a gyökök eloszlása a fent definiált félkörön?

51. Egy könnyebbnek látszó idevágó kérdés vonatkozik a

$$\lambda_{vn}(p) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} l_{vn}(x) p(x)\, dx \quad v = 1, \ldots, n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{51.1}$$

Cotes-számokra. A $[-1, +1]$ köz esetén a *20.* pontban említett cikkünkben Erdőssel megmutattuk, hogy (44.4) mellett minden olyan v-re, melyre

$$-\left(1 - \frac{\log n}{n^2}\right) \leqq x_{vn} \leqq 1 - \frac{\log n}{n^2}, \tag{51.2}$$

fennáll v-ben egyenletesen a

$$\lambda_{vn}(p) = (1 + o(1)) \frac{\pi}{n} p(x_{vn}) \sqrt{1 - x_{vn}^2} \tag{51.3}$$

reláció. Így áll elő az

LIX. probléma. Keresendő (48.1) alatti súlyfüggvényeknek olyan alosztálya, melyre (51.3) jellegű aszimptotikus formula áll fenn.

Az említett dolgozatunkban használt módszer jó kiindulópontot adhat e fontos kérdés megoldására.

52. Az aszimptotika kérdése igen jól kezelhető olyan súlyfüggvények esetén, melyekhez tartozó ortogonális polinomok egy differenciálegyenletet elégítenek ki, vagy valamilyen generátorfüggvényük jól kezelhető alakú. Az (5.6) alatti $K_n(x)$ Hermite-polinomok rekurzív formulája $n \geqq 2$-re

$$K_n(x) = 2xK_{n-1}(x) - 2(n-1)K_{n-2}(x). \tag{52.1}$$

Ha ehelyett $n \geqq 2$-re pl. a

$$q_n^*(x) = (ax+b)q_{n-1}^*(x) - (cn^2+dn+e)q_{n-2}^*(x) \tag{52.2}$$

rekurzió által adott polinomsorozatot tekintjük, ahol a, b, c, d, e numerikus állandók úgy, hogy

$$a>0, \quad cx^2+dx+e \geqq 0, \quad \text{ha} \quad x \geqq 2 \tag{52.3}$$

akkor Favard tétele szerint ez egy $d\alpha(x)$-re ortogonális polinomsorozat. Ha x-et paraméternek tekintve

$$F(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^*(x)e^{-nz}, \tag{52.4}$$

úgy ez eleget tesz egy másodrendű lineáris differenciálegyenletnek z-ben, ami lehetőséget ad $F(z; x)$ függvénytani viselkedésének tanulmányozására és ezen keresztül a $q_n^*(x)$ polinomokéra. Folytonossági meggondolásokból várható, hogy a, b, c, d, e alkalmas megválasztásával az így kapott súlyfüggvények pozitívak az egész valós tengelyen, lényegesen növelve az *ilyen* súlyfüggvények körében azok számát, melyekhez tartozó belső aszimptotika meghatározható. De ugyanez áll, ha (52.2)-ben a és b-t n-nek alkalmas másodfokú polinomjaival helyettesítjük. Így áll elő az

LX. probléma. Vizsgálandó az (52.1) rekurzió fentebb leírt általánosításához tartozó ortogonális polinomok belső aszimptotikája.

Még általánosabb rekurziók analóg tanulmányozása is lehetségesnek látszik.

53. Szegő, majd Carleman általánosabb értelemben ortogonális polinomokat vezettek be (l. Szegő könyvének 364—366. oldalait). Nem a legáltalánosabb esetre szorítkozva legyen l egy zárt Jordan-görbe. Ha ez rektifikálható, úgy ezen egy $p(\xi) \geqq 0$ súlyfüggvényt előírva, a Szegő értelemben normált ortogonális $\varphi_n(z) = \varphi_n(z; l, p)$ polinomok az

$$\int_{(l)} \varphi_n(\xi)(\bar{\xi})^\nu p(\xi)|d\xi| = 0, \quad \text{ha} \quad \nu < n \tag{53.1}$$

$$\frac{1}{|l|}\int_{(l)} |\varphi_n(\xi)|^2 p(\xi)|d\xi| = 1$$

által vannak értelmezve. Carleman a reiktifikálhatóság által adott specializálást azzal enyhítette, hogy vonalintegrál helyett l belsejére vonatkozó területi integrált vett (53.1)-ben.* E polinomok márcsak azért is fontosak, mert intim kapcsolatban állanak az l külsejét $|w|>1$-re konformisan leképező $\psi(z)$ függvénnyel, éspedig l külsején

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = \Phi(z).$$

*Persze akkor a súlyfüggvény l belsejében van előírva. (53.1)-ben $|l|$ az l ívhossza és $\varphi_n(z)$-ben z^n együtthatója pozitív.

Szegő az ő polinomjaira adott külső és belső aszimptotikát; utóbbit az l-re vonatkozó elég erős feltételek mellett. Ennek javítása kézenfekvő feladat; erre vonatkozó — valószínűleg tovább javítható — eredményeket találunk D. Gaier »Konstruktive Methoden der konformen Abbildung« c. könyve 136. oldalán (Springer 1964) úgy, hogy e kérdésekről nem fogalmazok meg *explicite* nyitott problémát. Így csak három kérdést említek.

LXI. probléma. Ha l rektifikálható Jordan-görbe, van-e elegáns *direkt* kapcsolat a hozzátartozó Szegő- ill. Carleman ortogonális polinomok között, esetleg alkalmas súlyfüggvényekkel?

LXII. probléma. Fenti körülmények között van-e elegáns *egyenlőtlenségi* kapcsolat a kétfajta ortogonális polinom között?

LXIII. probléma. Variálva a tartományt mi a Carleman-ortogonális polinomok variációja?

54. Idevágó, de némileg más jellegű a *LXIV. probléma* (Szegő és Walsh). Milyennek kell lennie az $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ Jordan-görbéknek a síkon, hogy a $\{\varphi_n(z)\}$ polinomsorozat ortogonális legyen mindegyik l_j-görbén alkalmas nemnegatív és L-integrálható $p_j(z)$ súlyfüggvényre?

A kérdés eddigi irodalmára l. G. M. Merriman [39], valamint Szegő ezt egyszerűsítő dolgozatát [55].

55. Az a tény, hogy $|z|=1$-en a $p(z)\equiv 1$-re ortogonális polinomsorozat a z^n-sorozat, egyszersmind egy további különbségre hívja fel a figyelmet a szakaszon ill. körvonalon ortogonális polinomok között. Míg a szakaszon egy nemnegatív és L-integrálható súlyra ortogonális polinomok gyökei egyszeresek, addig $|z|=1$-en a $p(\vartheta)\equiv 1$ súlyra ortogonális polinomok gyökei tetszőleges magas multiplicitásúak lehetnek. Ezzel kapcsolatos a

LXV. probléma. Karakterizálandók azon Jordan-ívek vagy zárt Jordan-görbék, melyeken bármilyen nemnegatív és L-integrálható súlyfüggvényre ortogonális polinomoknak csak egyszeres gyökei vannak.

Nem lehetetlen, hogy egy ilyen Jordan ív csak egy egyenesszakasz vagy félegyenes vagy teljes egyenes lehet. Az ilyen görbékhez tartozó ortogonális polinomok gyökein képzett Lagrange-interpolációs polinomok képezhetősége eleve evidens.

Nem látszik könnyűnek a

LXVI. probléma. Ismert tétel, hogy fenti típusú súlyfüggvényre ortogonális n-ik ortogonális polinom gyökei szétválasztják az $(n+1)$-ik gyökeit. Mi felelne meg e tételnek pl. a körvonalon ortogonális polinomoknál?

Az $|z|=1$-en egy súlyra ortogonális polinomok gyökei különböző jellegűek lehetnek. Ha $z=e^{i\vartheta}$-ra $p(\vartheta)\equiv 1$, úgy az ortogonális polinomok gyökei mind $z=0$-ba esnek. Ha viszont pl.

$$p(\vartheta) = |1+e^{i\vartheta}|^2 \frac{1}{4} = \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \tag{55.1}$$

úgy könnyen verifikálható, hogy

$$q_n(z) = 1+2z+\ldots+(n+1)z^n, \tag{55.2}$$

és ennek gyökei egyszeresek, mind $|z|<1$-ben vannak, egyenletesen közelednek $|z|=1$-hez és „nagyon egyenletesen" vannak az $\alpha \leqq \arg z \leqq \beta$ szögterekben eloszolva. Ezeket első- ill. másodtípusúaknak nevezve valószínűleg van $|z|=1$-en oly $p(\vartheta)$

súlyfüggvény is, melyhez tartozó ortogonális polinomok gyökei $|z|<1$-et mindenütt sűrűn töltik be. Ilyen súlyfüggvényeket, ha vannak, harmadtípusúnak nevezve adódik a

LXVII. probléma. Van-e $|z|=1$-n harmadtípusú súlyfüggvény a fenti értelemben?

Az általános kérdést zárt Jordan görbe helyett elég lesz körvonalra megfogalmazni. Így adódik a

LXVIII. probléma. Az $|z|=1$-en értelmezett $p(\vartheta)$ súlyfüggvények mely osztályához tartozó $q_n(z;p)$ ortogonális polinomokra igaz az, hogy $|z|<1$-ben megadva tetszőleges Jordan-mérhető zárt D-tartományt, a $q_1(z), q_2(z), \ldots, q_n(z)$ polinomok D-be eső gyökeinek együttes száma $N\to\infty$-re aszimptotikusan meghatározható?

56. A következő probléma jóval könnyebb, de bizonyos értelemben mégis igen érdekes. A komplex interpoláció elméletében, amennyire tudom, az alappontok mindig a tartományt határoló l Jordan-görbén voltak és a függvényosztály viselkedése, melynek elemeit approximálni akartuk, l zárt belsejében volt előírva. Más helyzet áll elő, ha pl. $f(z)$ a $\mathrm{Lip}_\alpha(|z|\leqq 1)$ osztályhoz tartozik* és a Lagrange-interpolációs polinomokat a (55.1)—(55.2) polinom gyökein képezzük. Így adódik — legegyszerűbb alakban — a

LXIX. probléma. A most definiált Lagrange-interpolációs polinomok milyen $\mathrm{Lip}_\alpha(|z|\leqq 1)$ osztályok függvényeire konvergálnak egyenletesen $|z|\leqq 1$-ben?

Az általánosabb kérdés az analóg kérdés, ha a (55.1)—(55.2) polinom gyökei helyett egy tetszőleges másodtípusú $p(\vartheta)$-hoz tartozó ortogonális polinom gyökeit vesszük az interpoláció alappontjaiul. Ezt nem fogjuk önálló problémának megfogalmazni.

57. Az Hermite polinomoknak más szempontból is van jelentősége. Ha egy n-edfokú egyenletet

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0 \tag{57.1}$$

alakban állítunk elő, akkor az együtthatókból a gyökökre vonatkozólag *kör*tartományok nyerhetők. Sok kérdésben azonban fontosabb, hogy a valós tengely körül *sávokat* nyerjünk, melyek a gyököket, vagy legalább egy gyököt tartalmaznak. Mint jeleztem, «Sur l'algèbre fonctionnelle» c. előadásban az első magyar matem. kongresszuson, ilyen célokra célszerű a polinomot

$$b_0K_0(z)+\ldots+b_nK_n(z) \tag{57.2}$$

alakban előállítani ($K_\nu(z)$ a ν-ik Hermite-polinom (46.5) normálással). Az ezirányú eredmények közül csak egyet említek itt; továbbiak, egyes fejleményekkel tárgyalva vannak Specht enciklopédia clkkében [45]. A szóban forgó tételt Makaival [36] találtuk 1963-ban, és ez azt mondja ki, hogy minden

$$K_0(z)+K_1(z)+bK_n(z)=0 \tag{57.3}$$

*A $\mathrm{Lip}_\alpha(|z|\leqq 1)$ osztály elemei regulárisak $|z|<1$-ben és $|z_1|\leqq 1$, $|z_2|\leqq 1$ mellett fennáll az

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqq M|z_1-z_2|^\alpha$$

egyenlőtlenség.

„trinom" egyenletnek ($n \geqq 2$, b tetszőleges komplex szám) van legalább egy gyöke az

$$|\mathrm{Im}\, z| \leqq c \tag{57.4}$$

sávban, ahol c abszolút állandó; mint később Schmeisser megmutatta,

$$c = \frac{1}{2}$$

a c *pontos* értéke (melynél egyenlőség (57.4)-ben elérhető). Mármost a további ezirányú nyitott kérdések legegyszerűbbike a

LXX. probléma. Igaz-e, hogy van oly c_1 abszolút állandó, hogy a

$$K_0(z) + K_1(z) + b_1 K_{n_1}(z) + b_2 K_{n_2}(z) = 0 \tag{57.5}$$

egyenletnek, ahol $2 \leqq n_1 < n_2$, b_1 és b_2 tetszőleges komplex számok, van legalább egy gyöke az

$$|\mathrm{Im}\, z| \leqq c_1 \tag{57.6}$$

sávban?

58. Térjünk vissza a $[-1, +1]$ köz esetére és $q_n(x)$ legyen a $p(x)$ súlyfüggvényhez tartozó *normált* n-ik ortogonális polinom. Mint az Analysis Mathematicaban megjelenendő cikkemben megmutattam,* minden

$$-1 \leqq b-\delta < b+\delta \leqq +1 \tag{58.1}$$

mellett

$$\lim_{n\to\infty} \int_{b-\delta}^{b+\delta} q_n(x)^2 p(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{58.2}$$

$p(x)$-től függetlenül, hacsak

$$p(x) \geqq 0 \text{ és } L\text{-integrálható } [-1, +1]\text{-ben és}$$

$$\log^+ \frac{1}{p(x)} \in L[-1, +1]. \tag{58.3}$$

Ebből könnyen nyerhető, hogy $n > n_0(\delta, p)$-re

$$\int_{b-\delta}^{b+\delta} q_n(x)^2 p(x)\, dx > \frac{1}{2\pi} \int_{b-\delta}^{b+\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{\delta}{\pi}. \tag{58.4}$$

Ezen $n_0(\delta, p)$ azonban ineffektív, explicite (58.2)-ből nem adható meg. A következő pontban megvilágítandó okból kellene egy ilyen *explicit* $n_0(\delta, p)$. Tehát előáll a

LXXI. probléma. Meghatározható *explicite* egy $n_0(\delta, p)$, hogy (58.3) fennállása esetén $n > n_0$-ra fennálljon a (58.4) egyenlőtlenség.

59. Előbbi probléma közvetlen háttere N. Wiener következő tétele (Ingham

* Azóta megjelent e folyóirat 1. kötetének 4. füzetében, l. [62].

által szigorított formában). Ha $0<\varepsilon<1$, $0<\delta<1$ és az

$$f(t)=\sum_{j=1}^{N} a_j \cos \nu_j t \tag{59.1}$$

($0<\nu_1<\ldots<\nu_N$) egészek, az a_j-k tetszőleges komplex számok) trigonometrikus polinom kielégíti a

$$\nu_{j+1}-\nu_j \geqq \frac{\pi+\varepsilon}{\delta} \tag{59.2}$$

hézagfeltételt, úgy egy *effektív* $c(\varepsilon)$-nal fennáll az

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt \leqq \frac{c(\varepsilon)}{2\delta} \int_{b-\delta}^{b+\delta} |f(t)|^2\,dt \tag{59.3}$$

egyenlőtlenség, függetlenül az a_j-któl, N-től és b-től. $\cos t=x$ helyettesítéssel ez rögtön átmegy egy

$$\int_{-1}^{1} \frac{|g(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \leqq c(\varepsilon,\delta) \int_{b-\delta}^{b+\delta} \frac{|g(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{59.4}$$

típusú egyenlőtlenségbe, ahol ((5.4) jelöléssel, és $c=1$-el)

$$g(x)=\sum_{j=1}^{N} a_j T_{\nu_j}(x)$$

és a (59.2) hézagfeltétel fennáll. Kézenfekvő kérdés önmagában is, lehet-e (59.4)-et az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvény helyett a súlyfüggvények egy általános osztályára kiterjeszteni, azaz, ha

$$G(x)=\sum_{j=1}^{N} b_j q_{\nu_j}(x) \quad (0 \leqq \nu_1 <\ldots< \nu_N), \tag{59.5}$$

úgy fennálljon az

$$\int_{-1}^{1} |G(x)|^2 p(x)\,dx \leqq c_1(\delta,p) \int_{b-\delta}^{b+\delta} |G(x)|^2 p(x)\,dx \tag{59.6}$$

egyenlőtlenség, függetlenül a b_j-ktől, N-től és b-től, hacsak

$$-1 \leqq b-\delta < b+\delta \leqq 1 \tag{59.7}$$

és fennáll egy

$$\nu_1 \geqq B(\delta,p),\ \nu_{j+1}-\nu_j \geqq B(\delta,p),\quad j=1,2,\ldots,N-1 \tag{59.8}$$

típusú hézagfeltétel alkalmas $B(\delta,p)$-vel. Az *58.* pontban említett cikkben kimutattam, hogy ez a súlyfüggvények meglepően nagy, a (58.3) alatt megadott osztályára tényleg lehetséges és ennek bizonyításában (58.4)-nek döntő szerepe van; az a tény azonban, hogy az ottani $n_0(p,\delta)$ nem explicit, abban manifesztálódott, hogy az (59.8) alatti $B(\delta,p)$-nek csupán a létezése van igazolva. Hogy ez *explicitté* legyen tehető, kellene a LXXI. probléma megoldása.

60. Viszont a (59.6)—(59.7)—(59.8) egyenlőtlenségnek érdekes háttere van az általános polinomapproximáció elméletében. A XLIII. problémában említett

Müntz—O. Szász tétel azt mondja ki, hogy, ha

$$0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots \tag{60.1}$$

olyan egészek, melyekre

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} = \infty, \tag{60.2}$$

úgy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-ra és $f(x) \in C[0, 1]$-re alkalmas b_j együtthatókkal fennáll az

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{N} b_j x^{m_j} \right| \leqq \varepsilon \tag{60.3}$$

egyenlőtlenség. Tehát Weierstrass tételéhez [0, 1]-ben nem kell x *minden* egész kitevős hatványát mozgósítani, elég ezeknek egy (60.1)—(60.2)-t kielégítő részhalmazát venni. Ez megengedi tehát, hogy a felhasznált kitevők között tetszőleges nagy hézagok legyenek, sőt akár, hogy

$$m_{j+1} - m_j \to \infty, \tag{60.4}$$

mint azt az

$$m_j = [j \log j] \tag{60.5}$$

választás mutatja. Ha az $\{x^\nu\}$ rendszer helyett egy $p(x)$-súlyra ortogonális $\{q_n(x)\}$ polinomok sorozatára térünk (ami sok célra célszerűbb) és [0, 1] helyett a $[-1, +1]$ ortogonalitási intervallumra úgy, mint ismert, erre Müntz—Szász-típusú tétel olyannyira nincs, hogy a $q_\nu(x)$-ek sorozatából egyetlen egy sem hagyható el. Ha viszont pl. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $f(x) \in C[0, 1]$ úgy [0, 1]-ben $f(x)$ egyenletesen approximálható már a $T_{2\nu}(x)$-ek alkalmas lineárkombinációjával. Az általános, igen nehéznek tűnő kérdés ezek után nyilván a következő.

LXXII. probléma. Ha $\{q_\nu(x)\}$ a $[-1, +1]$-ben adott (58.3) feltételt kielégítő $p(x)$ súlyra ortogonális polinomok sorozata és $[a, b]$ a $[-1, +1]$ egy valódi részintervalluma, úgy hogyan karakterizálhatók a nemnegatív egészek azon k_ν-részsorozatai, amelyekre a $\{q_{k_\nu}(x)\}$ részsorozat zárt $C[a, b]$-ben?

Még ennek alábbi gyengített változata is igen érdekesnek (és nehéznek) tűnik.

LXXIII. probléma. Ha $p(x)$ kielégíti a (58.3) követelményt, úgy igaz-e, hogy minden $[a, b]$ valódi részintervallumhoz van oly

$$0 < D(p, a, b) < 1$$

szám, hogy a $\{q_{k_\nu}(x)\}$ részsorozat biztosan zárt $C[a, b]$-ben, ha a $\{k_\nu\}$-sorozat alsó sűrűsége $> D$?

61. A *26.* pontban jutottunk azon kérdéshez, az $m = 3$ esetre szorítkozva itt, adott $p(x) \geqq 0$ súlyfüggvény mellett vizsgálni a (26.1) alatti polinomok körében azokat, melyekre

$$\int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^4 p(x)\, dx \tag{61.1}$$

minimális. Ezekre vonatkozik a következő két probléma.

LXXIV. probléma. Megoldandó a minimizáló polinom explicit analitikus előállítása *egy* $p(x) \not\equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ mellett.

Valamivel enyhébben

LXXV. probléma. Megadandó a (61.1)-et minimizáló polinom aszimptotikus előállítása a $[-1, +1]$ szakaszon, legalábbis egy olyan $p(x)$ mellett, mely $\not\equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Az ortogonális polinomokéval analóg eredményeket tartalmaz Erdőssel írott [12] valamint M. Frenkel—Fertig [22] cikke.

62. Amikor polinomokkal approximálunk, ezek *egy lineáris* sokaságot alkotnak. Kézenfekvő kérdés, vajon hogyan alakulnak az alapkérdések egy *nemlineáris* approximációelméletben? Mint legegyszerűbb ilyen, a $C[-1, +1]$ függvényosztály elemeinek legfeljebb n-edfokú racionális függvényekkel való egyenletes approximálhatósága kínálkozik a $[-1, +1]$-ben. Ezek tehát az

$$R_n(x) = \frac{\pi_n^*(x)}{\pi_n^{**}(x)} \tag{62.1}$$

függvények, ahol számláló és nevező *változó*, legfeljebb n-edfokú polinomok. Már Csebisev foglalkozott a legjobb polinom approximáció problémája mellett a legjobb racionális approximáció problémájával. Feltűnő, hogy mégis, a polinomapproximáció nagy irodalma mellett 1908-tól a racionális approximáció kérdései az utolsó 15 évig mondhatni semmi figyelemben nem részesültek. Ennek oka valószínűleg az, hogy kiderült, hogy a $\mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$ osztályokra, melyek a polinomapproximáció elméletében majd minden jelenség vizsgálatában „mintaosztály" gyanánt szerepeltek, a (62.1) alakú approximáció nem vezet „lényegesen jobb" eredményhez. Pontosabban szólva, S. Bernstein egy régebbi példáját kissé módosítva tetszőleges $0<\alpha<1$-re könnyen kimutatható*, hogy az

$$f_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!^\alpha} T_{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{62.2}$$

sor által adott függvény $\mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$-be tartozik és *minden* $R_n(x)$-re

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |f_0(x) - R_n(x)| > \frac{1}{n^\alpha \log^3 n}, \tag{62.3}$$

szemben Jackson tételével, mely $c(\alpha)n^{-\alpha}$ alakú approximációt ad alkalmas n-edfokú polinomra. Ez hosszú időre elvett minden reményt arra nézve, hogy a racionális approximáció „többet tudhat", mint a polinomiális; hátha már akkor ismert lett volna Szabados azon tétele [49], hogy alkalmas $f_1 \in \mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$-re minden $R_n(x)$-re

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |f_1(x) - R_n(x)| > c(\alpha) n^{-\alpha}$$

is igaz, ha $0<\alpha<1$.

63. Nagy meglepetés volt 1964-ben D. J. Newman tétele [40], melyben megmutatta, hogy alkalmas $R_n^*(x)$-re $[-1, +1]$-ben

$$\left||x| - R_n^*(x)\right| \leqq e^{-c_1\sqrt{n}} \tag{63.1}$$

* E példa talán igen régi; én D. J. Newman írásos közléséből ismerem.

és minden $R_n(x)$-re

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \big||x|-R_n(x)\big| > e^{-c_2\sqrt{n}} \tag{63.2}$$

ahol $c_1, c_2, \ldots$ pozitív numerikus állandók. Ez meglepő és nagy várakozásokat ébresztő volt. Meglepő volt, mert, mint S. Bernstein 1912-es híres dolgozatában [4] megmutatta, n-edfokú polinomokra a megfelelő egyenlőtlenségek

$$\big||x|-\pi_n^*(x)\big| < \frac{c_3}{n} \tag{63.3}$$

és minden $\pi_n(x)$-re

$$\max_{-1\leqq x\leqq +1} \big||x|-\pi_n(x)\big| > \frac{c_4}{n}. \tag{63.4}$$

Várakozásokat ébresztő volt, ha arra gondoltunk, hogy a polinomapproximáció elméletében az $|x|$ függvény milyen szerepet játszott (pl. belőle a Jackson-tétel könnyen nyerhető). De e remény hamar lelohadt megfigyelvén, hogy, ha $|x|$ szerepe a racionális approximáció elméletében ugyanolyan lenne, mint a polinomiálisban, akkor ez a $\mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$ osztályokra oly erős approximálhatóságot adna, ami (63.3)-nak ellentmond. Valóban, kicsit utánagondolva, a dolog végső soron azon múlik, hogy két n-edfokú polinom összege n-edfokú, míg két n-edfokú törtfüggvényé általában magasabb. Hogy a remények mennyire összezsugorodtak, mutatja a következő (máig nyitott) probléma, melyet Newman 1964-ben az Intern. Series of Numer. Math. 5. kötetében vetett fel (189. old.).

LXXVI. probléma. (D. J. Newman). Míg minden $f(x)\in \mathrm{Lip}_1[-1, +1]$ függvény itt egyenletesen approximálható n-edfokú polinommal $O\left(\frac{1}{n}\right)$-nyire, igaz-e, hogy e függvényosztály elemei n-edfokú törtfüggvénnyel $o\left(\frac{1}{n}\right)$-nyire approximálhatók egyenletesen $[-1, +1]$-ben?

Így úgy látszott, hogy Newman tétele egy gyönyörű izolált tétel, egy speciális $f(x)$-re.

64. Newman (63.1) alatti egyenlőtlensége mégis alapvető fontosságú lett, mikor a kérdést Szüsz Péterrel úgy tettük fel, hogy vajon léteznek-e egyáltalán (a $\mathrm{Lip}_\alpha[-1, +1]$-től különböző, de mégis) „nagy" függvényosztályok, melyek elemei n-edfokú törtfüggvénnyel „lényegesen jobban" approximálhatók, mint n-edfokú polinommal. A kapott osztályaink közül csak egyet emelnék itt ki, melynél ez a kontraszt különösen erős. Ez az osztály a $[-1, +1]$-ben folytonos és szakaszonként analitikus függvények Z-osztálya; ezen osztály az analitikus függvények osztálya mellett történetileg talán a „legklasszikusabb" függvényosztály. Mint pl. (63.4) mutatja, ennek elemeire $\frac{1}{n}$-nél jobb polinomapproximálhatóság nem áll fenn általában; ezzel szemben, ha $f\in Z$, úgy alkalmas $R_n^*(x)$ n-edfokú törtfüggvénnyel $[-1, +1]$-ben egyenletesen fennáll az

$$|f(x)-R_n^*(x)| < c_1(f)\, e^{-c_2(f)\sqrt{n}} \tag{64.1}$$

egyenlőtlenség, ahol c_1 és c_2 f-től függenek, de n-től nem. E tételnek egy, az eredetinél jóval egyszerűbb bizonyítását mondtam el a jereváni nemzetközi komplex

függvénytani kollokviumon 1965 szept.-ben [61]; ebből kitűnt, hogy, ha $f(x)$ analitikus az

$$1 = a_0 \geqq x \geqq a_1, \quad a_1 \geqq x \geqq a_2, \ldots, \quad a_{k-1} \geqq x \geqq a_k = -1$$

szakaszokon, úgy $c_1(f)$ csak $\max_{|x| \leqq 1} |f(x)|$-től, $c_2(f)$ pedig csak az $[a_n, a_{n+1}]$-szakaszokhoz tartozó regularitásellipszisek minimális féltengelyösszegétől függ. Mint (63.4) és (64.1) mutatják, a racionális approximálhatóság egészen lényegesen jobb a polinomapproximálhatóságnál. Egy kérdés azonban fennmarad. Mint Newman (63.2) egyenlőtlensége mutatja, a (64.1) alatti tételben a $e^{-c\sqrt{n}}$ a „helyes" nagyságrend n-ben. Ha viszont $f(x)$ analitikus $[-1, +1]$-ben, akkor már az approximálhatóság rendje (akár n-edfokú polinommal) $e^{-c_3(f)n}$. A kérdés tehát a

LXXVII. probléma. Mi a „valódi" oka annak, hogy (64.1) jobb oldalán a kitevőbe $\sqrt{n}$ kerül és pl. nem $n^{2/3}$?

65. Az első osztály, amit Szüszszel találtunk (és ami egyáltalán az első ilyen tulajdonságú osztály volt) a $[-1, +1]$-ben konvex függvények Z_1 osztálya volt. Mint (63.4) mutatja, a polinomapproximálhatóság rendje $\frac{1}{n}$-nél jobb nem lehet; mint Szüszszel megmutattuk, [57] tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-hoz és $f \in Z_1$-hez van olyan n-edfokú $R_n^*(x)$, hogy $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban

$$|f(x) - R_n^*(x)| \leqq c_5(f, \varepsilon) \frac{\log^4 n}{n^2}. \tag{65.1}$$

Ezen egyenlőtlenséget Freud [25] hamarosan javította, a $\log^4 n$-et $\log^2 n$-el helyettesítve; teljesen fantasztikus azonban V. A. Popov [41] azon javítása, mely szerint tetszőleges pozitív egész k, tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ és $f \in Z_1$-re van oly $R_n^*(x)$ is, hogy $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban

$$|f(x) - R_n^*(x)| < c_6(f, \varepsilon, k) \frac{\log_k n}{n^2} \tag{65.2}$$

ahol $\log_k$ k-szor iterált logaritmust jelent.

Ezekután kézenfekvő a

LXXVIII. probléma. Ha $f \in Z$, és ε tetszőleges kis pozitív szám, úgy $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban alkalmas $R_n^*(x)$-el

$$|f(x) - R_n^*(x)| < \frac{c(f, \varepsilon)}{n^2}. \tag{65.3}$$

A kérdés érdekességét talán fokozza Freud azon megjegyzése [27], hogy egy (65.3)-hoz hasonló egyenlőtlenség fennállásából a LXXVI. probléma pozitív megoldása következne.

66. Az említett jereváni előadásban elemezni próbáltam, milyen tulajdonságok okozzák azt, hogy bizonyos függvényosztályok elemeire „a racionális approximálhatóság jobb, mint a polinomiális". Mint az $|x|$ példája mutatja, a polinomiális approximálhatóságot egyetlen pontban való „rosszabb" viselkedés teljesen lerontható. A racionális approximálhatóságot, úgy látszik, véges sok pontban való „rosszabb" viselkedés, általánosabban „kis halmazon való rosszabb viselkedés" jóval kevésbé érinti. E tényállás kvantitatívabb kielemzésére célszerű azon $f(x)$ függvények $Z_2 = Z_2(\alpha, \beta)$ osztályát vizsgálni, melyek a következőképp vannak definiálva. Legyen

$$0 < \alpha < \beta < 1 \tag{66.1}$$

és $-1 \leqq x' < x'' \leqq +1$-re

(66.2) $$|f(x') - f(x'')| \leqq |x' - x''|^{\alpha}.$$

Továbbá legyenek

(66.3) $$1 = a_0 > a_1 > \ldots > a_{k-1} > a_k = -1$$

úgy, hogy egy

(66.4) $$0 < \varepsilon < \min_{\mu} \frac{a_\mu - a_{\mu+1}}{4}$$

mellett mindegyik

(66.5) $$1 \leqq \mu \leqq k$$

-ra fennálljon

(66.6) $$a_{\mu+1} + \varepsilon \leqq \xi' < \xi'' \leqq a_\mu - \varepsilon$$

mellett egy

(66.7) $$|f(\xi') - f(\xi'')| \leqq \psi_\mu(\varepsilon)(\xi'' - \xi')^{\alpha}$$

egyenlőtlenség. Ez, kissé pongyolán szólva, a $\mathrm{Lip}_{\alpha}[-1, +1]$ osztály azon részét jelenti, mely „véges sok pont kivételével az egyes, kissé zsugorított részintervallumokban Lip_{β}-hoz tartozik, de egyre rosszabb Lipschitz-konstanssal". Az, hogy $f(x)$ alkalmas $R_n^*(x)$-el (sőt $\pi_n^*(x)$) polinommal) $n^{-\alpha}$-nyira approximálható egyenletesen $[-1, +1]$-ben, persze triviális. Egy előadásban, melyet 1965 márc.-ban tartottam Szüszszel közösen talált eredményeinkről az Akadémián (l. [58]) egy pontosan végig nem gondolt bizonyítás alapján azt állítottam, hogy, ha $f \in Z_2(\alpha, \beta)$, akkor, függetlenül a $\psi_\mu(\varepsilon)$-ok növekvési erősségétől, ha $\varepsilon \to 0$, alkalmas $R_n^*(x)$-re fennáll $[-1, +1]$-ben egyenletesen az

(66.8) $$|f(x) - R_n^*(x)| \leqq c(f) n^{-\beta}$$

egyenlőtlenség. Nem tudván rekonstruálni eredeti gondolatmenetünket, a kérdést említettem Szabadosnak, aki az állítást legalább arra az esetre bebizonyította, mikor $\psi_\mu(\varepsilon) = \log^{\gamma} \frac{1}{\varepsilon}$ (γ poz. állandó), hacsak (66.8)-at

(66.9) $$|f(x) - R_n^*(x)| < c(f) \frac{\log^{\gamma} n}{n^{\beta}}$$

val helyettesítjük [50]. Az azonban tudomásom szerint nyitott kérdés, hogy ez javítható-e. Így adódik a

LXXIX. probléma. Fix α, β és $d = \min_{\mu} (a_\mu - a_{\mu+1})$ mellett mi a legerősebb növekedése a $\psi_\mu(\varepsilon)$-oknak, hogy $f \in Z_2(\alpha, \beta)$-ból következzék, hogy alkalmas $R_n^*(x)$-re $[-1, +1]$-ben egyenletesen fennálljon egy

(66.10) $$|f(x) - R_n^*(x)| \leqq c(\alpha, \beta, d) n^{-\beta} \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |f|$$

alakú egyenlőtlenség.

67. Hogy a kérdést általánosabban megfogalmazhassam, legyen adva $C[-1, +1]$-nek egy J alosztálya és jelentse $P_n(J)$ a „legjobb polinomapproximálhatóságot", azaz

(67.1) $$P_n(J) = \sup_{f \in J} \min_{\pi_n} \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |f - \pi_n|$$

és $E_n(J)$ a „legjobb racionális approximálhatóságot", azaz az

$$E_n(J) = \sup_{f \in J} \min_{R_n} \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |f - R_n| \tag{67.2}$$

mennyiséget. Ekkor — kissé enyhítve — előáll a

LXXX. probléma. Megadandók elégséges feltételek olyan J-osztályokra, melyekre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E_n(J)}{P_n(J)} = 0.$$

68. Mint Freud Géza beszélgetés közben megjegyezte, konvex $f(x)$ függvény $\frac{1}{n^2}$-nyire approximálható L_1-metrikában $[-1, +1]$-ben. A *65.* pontban mondottakkal ezt összekapcsolva felvetődik a

LXXXI. probléma. Megadandók elégséges feltételek olyan J-osztályokra, melyekre az

$$\frac{E_n(J)}{P_n^{(1)}(J)}$$

hányados két pozitív konstans között marad, ha $n \to \infty$; itt

$$P_n^{(1)}(J) = \sup_{f \in J} \min_{\pi_n} \int_{-1}^{1} |f - \pi_n| \, dx.$$

69. Az n-edfokú törtfüggvénnyel való interpoláció problémája már Cauchynál szerepel, de konvergenciaelmélete tulajdonképp még meg sem indult. Ennek oka talán a következő.

Legyen (62.1)-nél általánosabban

$$R_{\mu\nu}(x) = \frac{\pi_\mu(x)}{\pi_\nu(x)}, \quad \mu, \nu \geqq 1 \tag{69.1}$$

és $R_{\mu\nu}$ az $R_{\mu\nu}(x)$-ek összessége; emlékeztetek arra, hogy $\pi_k(x)$ *legfeljebb* k-adfokú polinomot jelent. Ennek értékei „általában" előírhatók $(\mu+\nu+1)$ különböző helyen („általában", de nem „általánosan"). Ezek egy konvergenciaelméletének egyetlen „egészen természetes" módja az volna — ha pl. a T-mátrix elemeit vesszük interpolációs alappontokul — azon $R_{\mu\nu}(x; T)$ kettőssorozatot vizsgálni, melynél $R_{\mu\nu}(x; T)$ megegyezne a $(C[-1, +1])$-beli $f(x)$-el a $T_{\mu+\nu+1}(x)=0$ gyökein. De ezen $R_{\mu\nu}(x; T)$-k nem biztos, hogy minden (μ, ν) párra léteznek. Emiatt egy ilyen interpolációelmélet lehetséges alapjai tisztázásának igényével több probléma vetődik fel, melyek közül csak egyet említünk.

LXXXII. probléma. Rögzített $\mu, \nu \geqq 1$ mellett, de $(\mu+\nu+1)$ db változó $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+\nu+1}$ interpolációs alappont mellett mi azon maximális $M = M(\mu, \nu)$, hogy $R_{\mu\nu}$-ben van oly $R^*_{\mu\nu}(x)$, hogy az

$$R^*_{\mu\nu}(x_j) = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu+\nu+1) \tag{69.2}$$

feltételek közül legalább M számú teljesül az y_j-k és a (különböző) x_j-k bármely választása mellett.

Triviális csak az

(69.3) $$M \leqq \mu$$

egyenlőtlenség, mert az

(69.4) $$y_1 = y_2 = \ldots = y_{\mu+\nu+1} = 0$$

választás mellett μ-nél több a (69.2) feltételek közül nem teljesülhet. (69.4)-ben persze 0 helyett akármilyen a-érték is volna vehető.

70. A *60.* pontban láttuk Müntz—Szász O. tételét a polinomapproximációra vonatkozólag. Az analóg kérdés, melyet Newman vetett fel, az volt, hogy vajon milyen feltételt kell (60.2) helyett kirónunk a $\{m_j\}$ exponenssorozatra, hogy minden $C[0, 1]$-beli $f(x)$ itt egyenletesen approximálható legyen tetszőleges pontossággal oly törtfüggvénnyel, melynek számlálójában és nevezőjében x-nek csak $\{m_j\}$-ből vett hatványai szerepelnek. Szemben (60.2)-vel (mely nem enyhíthető), Somorjai azon meglepő tételt találta [44], hogy már az

(70.1) $$m_j \to \infty$$

feltétel ezt garantálja, bármilyen gyors is a végtelenhez tartás. Nyitott viszont még ez irányban a következő kérdés.

LXXXIII. probléma. (D. H. Newman.) Milyennek kell lennie az $\{m_j'\}$ és $\{m_j''\}$ rögzített sorozatoknak, hogy minden $C[0, 1]$-beli $f(x)$ itt egyenletesen approximálható legyen oly törtfüggvénnyel, melynek számlálójában x-nek csak $\{m_j'\}$-beli, nevezőjében pedig x-nek csak $\{m_j''\}$-beli kitevői lépnek fel?

71. Müntz—Szász tételét $x = e^s$ helyettesítéssel úgy is lehet fogalmazni, hogy, ha $C_0[-\infty, 0]$ jelenti a $(-\infty, 0]$-ban folytonos $f(s)$ függvények osztályát, melyekre

(71.1) $$\lim_{s \to -\infty} f(s) = 0,$$

úgy a (60.2) feltétel garantálja, hogy az $\{e^{m_j s}\}$ sorozat minden $C_0[-\infty, 0]$-beli $f(s)$-et itt egyenletesen approximál. Ha a $[-\infty, 0]$ félsugár helyett a kérdést $C_0(\gamma)$-ra tesszük fel, ahol γ olyan folytonos görbe, mely 0-ból $-\infty$ felé fut úgy, hogy bármely húrja a valós tengellyel legfeljebb $\theta < \frac{\pi}{2}$ szöget zár be, akkor Korevaar 1973-ban megmutatta, hogy a Müntz—Szász tétel igaz marad (l. Proc. of an Intern. Symp. conducted by the Univ. of Texas and Nat. Sc. Found. at Austin). Ehhez kapcsolódik a

LXXXIV. probléma. Igaz marad-e Somorjai tétele, ha a $[-\infty, 0]$ közt a fenti γ-görbékkel helyettesítjük?

72. Az $|z| < 1$-ben reguláris és $|z| \leqq 1$-ben folytonos $f(z)$ függvények $C[|z| \leqq 1]$ osztályának n-edfokú törtfüggvényekkel való approximálhatósága Walsh és iskolája sok vizsgálatának tárgya volt. Közös volt ezen eredményekben, hogy az approximáló törtfüggvények pólusait „távoltartották" $|z| \leqq 1$-től és a nyert nagyságrend az approximálhatóságra nem volt „lényegesen jobb" az illető osztály polinomapproximálhatóságáénál. Jereváni előadásomban hangsúlyoztam azon, paradoxnak hangzó tényt, hogy épp a pólusok „közelengedése" az, ami végső soron előidézi a talált új jelenségeket és felvetettem a kérdést, hogy vajon az $|z| \leqq 1$ esetén is előállhat-e ez a jelenség. Az első ilyen alosztályát $C[|z| \leqq 1]$-nek Szabados találta 1968-ban [51]. Eszerint, ha $f(z)$ reguláris $|z| < 1$-ben és egy $0 < \delta < 1/20$-al az $|z + \delta| \leqq 1 + \delta$ körlemezben is a $z = 1$ hely kivételével — továbbá egy karakterisztikus

esetre korlátozva — $f(z)$ $|z| \leqq 1$-ben α-kitevős Lipschitz-feltételt teljesít $0 < \alpha < 1$-el, úgy alkalmas $R_n^*(z)$-vel $|z| \leqq 1$-ben

$$|f(z) - R_n^*(z)| \leqq c(f) \left(\frac{\log n}{n} \right)^{2\alpha} \tag{72.1}$$

egyenlőtlenség áll fenn. Összehasonlításul ezen $f(z)$-k polinomapproximálhatóságának nagyságrendje csak $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ és, mint Newman megjegyezte, (72.1)-ben az approximálhatóság rendje általában $O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ alá nem is szorítható. Ezzel kapcsolatos a

LXXXV. probléma. (Leindler László.) Javítható-e a (72.1) alatti egyenlőtlenség jobb oldala általánosan

$$c(f) n^{-2\alpha}$$

ra?

A Szabados-féle függvényosztály minden egyes elemének analiticitási tartománya „határozottan kinyúlik" az $|z| \leqq 1$ körlemezből. Legyen S az $|z| < 1$-ben reguláris függvények azon alosztálya, melynek elemei folytonosak $|z| \leqq 1$-ben, de melyekhez külön-külön sincs olyan, az $|z| \leqq 1$ körlemezt magában tartalmazó, eleve megadható nagyobb tartomány, melyben ő reguláris volna. Speciálisabban legyen S^* az S azon részhalmaza, melynek elemei az egységkörön túl nem folytathatók analitikusan. Ezekre vonatkozik a

LXXXVI. probléma. Igaz-e, hogy, ha $f \in S^*$ és $f(z)$ folytonossági modulusa $|z| \leqq 1$-ben $\omega(f, \delta)$, úgy alkalmas $R_n^*(z)$-vel itt egyenletesen fennáll az

$$|f(z) - R_n^*(z)| = o(1)\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

egyenlőtlenség?

Ha ez igaz, valószínűleg erősebb egyenlőtlenség általában nem állítható.

Természetes további kérdés, hogy olyan jelenség, melyet az $|x|$-függvény $[-1, +1]$-ben mutat az egyenletes polinom- ill. racionális approximálhatóságra vonatkozólag, fennállhat-e alkalmas S-beli $f(z)$-ekre. Erre vonatkozik a

LXXXVII. probléma. Igaz-e, hogy nincs oly $f_0(z) \in S$, hogy alkalmas c_1 és c_2 pozitív állandókkal minden elég nagy n-re $f_0(z)$ egyenletes polinomapproximálhatósága $|z| \leqq 1$-ben

$$> \frac{c_1}{n},$$

de egyenletes racionális approximálhatósága itt

$$e^{-c_2\sqrt{n}}?$$

73. Mindezen kérdések *egy* valós vagy komplex változóra vonatkoztak. Két valós változó esetére az irodalmat nem nagyon ismerem. Számos kézenfekvő fontos kérdés vetődik fel, melyek megoldása bizonyára ismert (pl. ha a $\pi_{\mu\nu}(x, y)$ polinom x ill. y-ban legfeljebb μ ill. ν-edfokú és az (x, y)-sík egy D-tartományában abszolúte $\leqq 1$, úgy mi $\max_D \left|\frac{\partial \pi_{\mu\nu}}{\partial x}\right|$ és $\max_D \left|\frac{\partial \pi_{\mu\nu}}{\partial y}\right|$ pontos értéke?), és épp ezért nem fogalmazom meg őket explicite nyitott problémaképp. Viszont említem, némi

kommentárral, a következő, gyakorlatilag is érdekes kérdést. Legyen adva az (x, y) síkon egy korlátos síma zárt D tartomány és ebben egy $f(x, y)$, melynek pl. második parciálisai léteznek D-ben és folytonosak, értékeit mérésekből ismerjük

$$N = (\mu+1)(\nu+1)-1 \tag{73.1}$$

számú különböző $P_j = P_j(x_j, y_j) \in D$ pontban. Keresünk oly

$$\pi_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{l_1=0}^{\mu} \sum_{l_2=0}^{\nu} c_{l_1 l_2} x^{l_1} y^{l_2} \tag{73.2}$$

polinomot, melyre

$$\pi_{\mu\nu}(x_j, y_j)\,(= \pi_{\mu\nu}(P_j)) = f(P_j). \tag{73.3}$$

A P_j pontokat D-ben válasszuk meg úgy, hogy a rendszer $\Delta(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ determinánsára

$$\Delta(P_1, \ldots, P_N) = \max_{Q_1, \ldots, Q_N \in D} |\Delta(Q_1, \ldots, Q_N)| \tag{73.4}$$

álljon fenn (ahol $Q_1, \ldots, Q_N$ függetelnül befutják D-t). Könnyen láthatólag $\Delta(Q_1, \ldots, Q_N) \not\equiv 0$, azaz a jobboldali maximum pozitív, vagyis a P_j-k ilyen választása mellett a (73.2)—(73.3) polinom egyértelműen van meghatározva. Ez az $(x, y) = P$ jelöléssel felírható

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu}(P) &= \sum_{j=1}^{N} f(P_j) \frac{\Delta(P_1, \ldots, P_{j-1}, P, P_{j+1}, \ldots, P_N)}{\Delta(P_1, \ldots, P_N)} = \\ &\overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, l_j(P; P_1, \ldots, P_N) \end{aligned} \tag{73.5}$$

alakban. Jelentse $\pi^*_{\mu\nu}(P, f, D)$ az $f(P)$-nek D-re vonatkozó egy μ, ν-edfokú legjobban approximáló polinomját; mivel nyilván

$$\sum_{j=1}^{N} \pi^*_{\mu\nu}(P_j)\, l_j(P; P, \ldots, P_N) \equiv \pi^*_{\mu\nu}(P), \tag{73.6}$$

tehát

$$\pi_{\mu\nu}(P) - \pi^*_{\mu\nu}(P, f, D) = \sum_{j=1}^{N} \left(f(P_j) - \pi^*_{\mu\nu}(P_j)\right) l_j(P; P_1, \ldots, P_N). \tag{73.7}$$

Ha

$$\max_{P \in D} |f(P) - \pi^*_{\mu\nu}(P)| \overset{\text{def}}{=} d_{\mu\nu}(f, D), \tag{73.8}$$

úgy D-ben

$$\begin{aligned} |\pi_{\mu\nu}(P) - f(P)| &\leqq |\pi_{\mu\nu}(P) - \pi^*_{\mu\nu}(P)| + |\pi^*_{\mu\nu}(P) - f(P)| \leqq \\ &\leqq d_{\mu\nu}(f, D)\left(1 + \sum_{j=1}^{N} |l_j(P; P_1, \ldots, P_N)|\right). \end{aligned} \tag{7.39}$$

De az l_j-k (73.5) alatti alakjából D-ben

$$|l_j(P; P_1, \ldots, P_N)| \leqq 1 \quad j = 1, \ldots, N \tag{73.10}$$

azaz (73.9)-ből adódik D-ben az

$$|f(P) - \pi_{\mu\nu}(P)| \leqq (N+1)\, d_{\mu\nu}(f, D) \tag{73.11}$$

becslés.

A numerikus analízis módszerei módot adnak a $P_1, P_2, \ldots, P_N$ numerikus közelítő meghatározására, ha μ, ν nem nagyok. Viszont érdemleges kérdés a

LXXXVIII. probléma. Mit lehet kimondani a (73.4) alatti extremumtulajdonsággal értelmezett $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$-pontrendszer eloszlására, ha μ és $\nu \to \infty$?

Végül egy probléma, melyhez nem kell kommentár az előzők után.

LXXXIX. probléma. (T. Sós Vera.) Vannak-e pl. az egységnégyzetben olyan függvényosztályok, melyek a sup. normában

$$\frac{\pi_{\mu_1 \nu_1}(x, y)}{\pi_{\mu_2 \nu_2}(x, y)}$$

alakú törtfüggvényekkel „lényegesen jobban" approximálhatók, mint

$$\pi_{kl}(x, y)$$

alakú polinomokkal, hacsak

$$\frac{3}{4} \leqq \frac{(k+1)(l+1)}{(\mu_1+1)(\nu_1+1)+(\mu_2+1)(\nu_2+1)} \leqq 1?$$

IRODALOM

[1] R. Askey, Mean convergence of orthogonal series and Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **23** (1972), 71—85.

[2] J. Balázs—P. Turán, Notes on interpolation. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **9** (1958). 195—214.

[3] J. Balázs—P. Turán, Notes on interpolation. XI, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 215—220.

[4] S. Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, *Mémoires Acad. de Belgique*, (2) **4** (1912), 1—103.

[5] S. Bernstein, Sur la limitation des valeurs d'un polynôme, *Bull. Acad. Sci. de l'URSS*, **8** (1931), 1025—1050.

[6] D. L. Berman, A ± 1 pontokkal kiegészített Jacobi-gyökökön vett interpolációs eljárások konvergenciájáról, *Izv. vüszs. uc. zaved.*, **10** (**137**) (1973), 14—22 (oroszul).

[7] E. Egerváry—P. Turán, Notes on interpolation. V, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **9** (1958), 259—267.

[8] P. Erdős—E. Feldheim, Sur le mode de convergence pour l'interpolation de Lagrange, *Comptes Rendus*, **203** (1936), 913—915.

[9] P. Erdős—P. Turán, On interpolation. I, *Annals of Math.*, **38** (1937), 142—155.

[10] P. Erdős—P. Turán, On interpolation. II, *Annals of Math.*, **39** (1938), 702—724.

[11] P. Erdős—P. Turán, On interpolation. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), 510—553.

[12] P. Erdős—P. Turán, On uniformly dense distribution of certain sequences of points, *Annals of Math.*, **41** (1940), 162—173.

[13] P. Erdős—P. Turán, On the role of the Lebesgue-functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6** (1955), 47—66.

[14] P. Erdős, Problems and results on the theory of interpolation. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **9** (1958), 381—388.

[15] P. Erdős—P. Turán, An extremal problem in the theory of interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12** (1961), 221—234.

[16] P. Erdős, On the distribution of the roots of orthogonal polynomials, Proceedings of the Conference on Approximation Theory in Budapest, 1969 (Akadémiai Kiadó, 1972).

[17] G. Faber, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, *Jahresber. der Deutschen Math. Ver.*,**23** (1914), 190—210.

[18] L. Fejér, Über Interpolation, *Göttinger Nachrichten*, (1916), 1—16.

[19] L. Fejér, Interpolation und konforme Abbildung, *Göttinger Nachrichten*, (1918), 319—331.

[20] L. Fejér, Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenz Hermitescher Interpolationsreihen, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 426—457.

[21] L. Fejér, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschrift*, **37** (1933), 287—309.
[22] M. Frenkel-Fertig, Sur une classe de polynômes généralisant des polynômes de Legendre, *Acta, Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), 457—459.
[23] G. Freud, Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953), 132—147.
[24] G. Freud, Über die Konvergenz des Hermite—Fejérschen Interpolationsverfahrens, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5** (1954), 109—127.
[25] G. Freud, Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), 313—324.
[26] G. Freud—P. Vértesi, A new proof of A. F. Timan's approximation theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **2** (1967), 403—414.
[27] G. Freud, On rational approximation of absolutely continuous functions, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **3** (1968), 383—386.
[28] G. Grünwald, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome, *Acta Litter. ac. Scientiarum*, **7** (1935), 207—221.
[29] G. Grünwald, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen, *Annals of Math.*, **37** (1936), 908—918.
[30] G. Grünwald—P. Turán, Über Interpolation, *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa*, (1938), 137—146.
[31] G. Grünwald, On the theory of interpolation, *Acta Math.*, **75** (1942), 219—245.
[32] H. Hahn, Über das Interpolationsproblem, *Math. Zeitschrift*, **1** (1918), 115—142.
[33] L. Kalmár, Az interpolátióról, *Mat. és Fiz. Lapok*, (1927), 120—149.
[34] O. Kis, A trigonometrikus (0, 2) interpolációról, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 255—276 (oroszul).
[35] O. Kis—P. Vértesi, Egy új interpolációs eljárásról, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **10** (1967), 117—128 (oroszul).
[36] E. Makai—P. Turán, Hermite-expansion and distribution of zeros of polynomials, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **A/8** (1963), 157—164.
[37] I. Marcinkiewicz, Sur la divergence des polynômes d'interpolation, *Acta Sci. Math. Szeged.* **8** (1937), 131—135.
[38] A. Meir—A. Sharma—J. Tzimbalario, Hermite-Fejér type interpolation processes, *Analysis Math.*, **1** (1975), 121—129.
[39] G. M. Merriman, Concerning sets of polynomials orthogonal simultaneously on several circles, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 57—69.
[40] D. J. Newman, Rational approximation to $|x|$, *Mich. Math. Journ.*, **11** (1964), 11—14.
[41] V A Popov, On the rational approximation of functions of the class V_r, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **25** (1974), 61—65.
[42] Q. I. Rahman—S. Schmeisser—P. Turán, On a phenomenon concerning (0, 2) interpolation, *Periodica Math. Hungar.* (megj. alatt).
[43] Gy. Révész, Az e^x-függvény polinomapproximációjáról, *Mat. Lapok*, **12** (1960), 222—231.
[44] G. Somorjai, A Müntz-type problem for rational approximation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **27** (1976), 197—199.
[45] W. Specht, Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten, *Enzyklopädie der Math. Wissensch.*, **1 (3)** (Teubner, 1958).
[46] V. A. Steklov, Határozott integrálok közelítő kiszámítása mechanikus kvadratura segítségével, *Izv. AN*, **(6) 10** (1916), 169—186 (oroszul).
[47] J. Surányi—P. Turán, Notes on interpolation. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6** (1955), 67—80.
[48] J. Szabados, On the convergence of the interpolatory quadrature procedures in certain classes of functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18** (1967), 97—111.
[49] J. Szabados, Negative results in the theory of rational approximation, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **2** (1967), 385—390.
[50] J. Szabados, Rational approximation in certain classes of functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19** (1968), 81—85.
[51] J. Szabados, Rational approximation in the complex unit circle, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **11** (1968), 105—108.
[52] J. Szabados, Egy, a komplex sík egységkörére vonatkozó interpolációs problémáról, *Mat. Lapok.*, **23** (1972), 297—300.
[53] P. Szász, On quasi-Hermite—Fejér interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10** (1959), 413—439.
[54] G. Szegő, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, *Math. Zeitschrift*, **35** (1932), 573—602.

[55] G. SZEGŐ, Concerning sets of polynomials orthogonal simultaneously on several circles, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 129—132.
[56] G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. XXIII (Providence, Rhode Island, 1938).
[57] P. SZÜSZ—P. TURÁN, On the constructive theory of functions. I, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **A/9** (1964), 495—502.
[58] P. SZÜSZ—P. TURÁN, A konstruktív függvénytan egy újabb irányáról, *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **16** (**1**) (1966), 33—46.
[59] P. TURÁN, On the theory of mechanical quadrature, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12** (1950), 30—37.
[60] P. TURÁN, A remark on Hermite—Fejér interpolation, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **3—4** (1960—61), 369—377.
[61] P. TURÁN, On the approximation of piecewise analytic functions by rational functions, *Sovremennie problemi teorii analiticeskih funkcii* (Erevan, 1965), 296—299.
[62] P. TURÁN, On orthogonal polynomials, *Analysis Math.*, **1** (1975), 297—312.
[63] P. VÉRTESI, On a problem of P. Turán, *Canad. Math. Bull.*, **18** (1975), 283—288.

О НЕКОТОРЫХ ОТКРЫТЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ПАЛ ТУРАН

SOME OPEN PROBLEMS OF APPROXIMATION THEORY

P. TURÁN

MARTIN AXIÓMÁJA*

J. R. SHOENFIELD

Bevezetés. Az elmúlt tíz év folyamán számos új axióma jelent meg a halmazelméletben. Ezek fő célja az, hogy olyan fontos tételek igazságát döntsék el, melyeket nem lehet új axiómák nélkül bizonyítani. Gödel és Cohen például megmutatták, hogy a kontinuum-hipotézis eldönthetetlen a jelenleg elfogadott axiómák mellett, így magától értetődő olyan ésszerű axiómákat keresni, melyek eldöntik azt.

Új axiómák bevezetésének egy másik, gyakorlatiasabb célja az, hogy segítségükkel függetlenségi eredményeket bizonyítsunk. Hogy lássuk, miként is történik ez, szükségünk van néhány definícióra.

Jelölje *ZFC* a halmazelmélet szokásos axiómarendszerét, beleértve a kiválasztási axiómát[1]. Az olvasónak nem feltétlenül szükséges ismernie ezeket az axiómákat, elég, ha csak elfogadja ilyen axiómák létezését, valamint azt, hogy ezekből a halmazelmélet szokásos tételei következnek. Feltesszük, hogy *ZFC* konzisztens, azaz hogy *ZFC* axiómáiból nem lehet ellentmondást levezetni[2].

Az általunk vizsgált függetlenségi állítások mind „*B* nem bizonyítható *ZFC*-ből" alakúak (ahol *B* a halmazelmélet valamely állítása). Megmutatjuk, hogy ezeket mind konzisztencia-állításokká lehet átfogalmazni.

1. LEMMA. *A B állítás akkor és csak akkor nem bizonyítható ZFC-ből, ha* (*ZFC* + **nem-***B*) *konzisztens.*

Bizonyítás. Ha *B* bizonyítható *ZFC*-ből, akkor *B* és nem-*B* mindketten bizonyíthatók (*ZFC* + nem-*B*)-ből, így (*ZFC* + nem-*B*) nem konzisztens. Tegyük fel most, hogy (*ZFC* + nem-*B*) nem konzisztens. Ekkor *B*-t kell bizonyítanunk *ZFC* axiómáiból. Ezt indirekt módon bizonyítjuk: feltesszük (nem-*B*)-t és ellentmondást vezetünk le. Hogy (nem-*B*)-ből le tudunk vezetni ilyen ellentmondást, az (*ZFC* + nem-*B*) nem konzisztens voltából következik. Q. E. D.

Ebből adódik, hogy a minket érdeklő állítások „*ZFC* + *B* konzisztens" alakban írhatók fel. Tegyük fel, hogy több ilyen állítást kívánunk bizonyítani, mondjuk azt, hogy „*ZFC* + B_i konzisztens" $i = 1, 2, \ldots, k$-ra. Ezt megtehetjük úgy, hogy kiötlünk egy *B* axiómát, megmutatjuk, hogy (*ZFC* + *B*) konzisztens és bizonyítjuk *ZFC*-ben, hogy minden $i = 1, \ldots, k$-ra B_i következménye *B*-nek. Ezzel az összes

* Megjelent az American Mathematical Monthly 82 (1975) 6. számában

[1] Lásd például Péter Rózsa: A halmazelmélet axiómarendszerei. Matematikai Lapok, (1965) XVI, 185—227. Itt szó esik a halmazelmélet többi axiómarendszeréről is, azonban a Zermelo—Fraenkel-féle axiómarendszert általánosan (innen az elnevezése is: ZF; a C betű a kiválasztási axiómára utal) használják.

[2] Erre a feltevésre azért van szükségünk, mert Gödel nevezetes eredménye szerint *ZFC* konzisztenciáját magában *ZFC*-ben nem lehet bizonyítani.

$(ZFC+B_i)$ konzisztenciájánál többet bizonyítunk, nevezetesen $(ZFC+B_1+\ldots+B_k)$ konzisztenciáját.

Ezek alapján természetesnek látszik olyan B axiómák keresése, melyekre

(a) be tudjuk bizonyítani, hogy $ZFC+B$ konzisztens;

(b) több érdekes C állításra be tudjuk bizonyítani (ZFC-ben) hogy $B\to C$ (B-ből következik C).

Az egyáltalán nem baj, ha B önmagában nem látszik túl érdekesnek. Jó példa erre Gödel $V=L$ axiómája[3]. A jelen cikk célja az, hogy egy másik ilyen példát tanulmányozzon.

1. Az axióma megfogalmazása. Axiómánkat a részben rendezett halmazok fogalmaival fogjuk felírni. A P részben rendezett halmazt **rács**nak nevezzük, ha P minden p és q eleméhez van P-nek olyan r eleme, hogy $p\leqq r$ és $q\leqq r$. Egy P részben rendezett halmazban **részrács** P-nek olyan része, ami rács az öröklött rendezésben.

A P részben rendezett halmaz D részhalmaza **sűrű** P-ben, ha minden $p\in P$-re van olyan $q\in D$, hogy $p\leqq q$. (Ez a valódi sűrűség a topológiai értelemben, ha P-n azt a topológiát tekintjük, amelyben a $\{p: p\geqq q\}$ $(q\in P)$ alakú halmazok bázist alkotnak). Minket P-nek azok a részrácsai érdekelnek, amelyek P sok sűrű részhalmazát metszik.

1. TÉTEL. *Legyen P nem üres részben rendezett halmaz, és legyen $\{D_n\}$ a P sűrű részeinek egy sorozata. Ekkor van P-nek olyan részrácsa, ami mindegyik D_n-t metszi.*

Bizonyítás. Válasszuk p_n-t indukcióval úgy, hogy $p_{n+1}\geqq p_n$ és $p_{n+1}\in D_n$ teljesüljön. Ez megtehető, hiszen D_n sűrű. Mivel $n\leqq m$-ből $p_n\leqq p_m$ következik, a p_n-ek egy részrácsot alkotnak. Q. E. D.

A továbbiakban $\varkappa$ és λ végtelen számosságokat, α és β pedig rendszámokat jelölnek. A halmazelmélet mai gyakorlatával összhangban $\varkappa$-t azonosítjuk az első $\varkappa$ számosságú rendszámmal. Így például $\aleph_0$-t azonosítjuk ω-val és $\aleph_1$-t az első nem megszámlálható rendszámmal.

Az 1. tétel nem lesz igaz, ha benne $\{D_n\}$-t sűrű halmazok egy $\aleph_1$ számosságú $\{D_\alpha:\alpha<\aleph_1\}$ rendszerével helyettesítjük. Hogy ezt belássuk, legyen A egy $\aleph_0$ számosságú és B egy $\aleph_1$ számosságú halmaz, továbbá jelölje P az A véges részeiből B-be ható leképezések halmazát. Ha $p, q\in P$, jelentse $p\leqq q$ azt, hogy q kiterjesztése p-nek. Minden egyes $b\in B$-re a $D_b=\{p: b$ eleme p értékkészletének$\}$ halmazok sűrűek P-ben. Ha most Q tetszőleges részrácsa P-nek, akkor van olyan A-ból B-be ható f leképezés, mely Q minden tagjának kiterjesztése. Mivel f nem lehet ráképezés, azért van olyan $b\in B$, ami nincs f értékkészletében, azaz Q nem metszi a D_b halmazt.

Tekintettel erre a példára, megszorítást kell tennünk P-re. Azt mondjuk, hogy P-nek p és q elemei **inkompatibilisek,** ha nincs P-nek olyan r eleme, amelyre

[3] Lásd például Hajnal András: A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról, Matematikai Lapok (1966) XVII. 253—260. A $V=L$, másképpen konstruálhatósági axióma azt mondja ki, hogy minden halmaz bizonyos egyszerű halmazépítési műveletek kellő számú alkalmazásával megkapható (konstruálható). Gödel tulajdonképpen azt mutatta meg, hogy ha a ZF axiómarendszer (a kiválasztási axióma nélkül!) konzisztens, akkor konzisztens marad akkor is, ha a $V=L$ axiómát hozzávesszük. Ebből az axiómából következik többek között a kiválasztási axióma, az általánosított kontinuumhipotézis, valamint a Szuszlin-fa létezése is (5. pont).

$p \leqq r$ és $q \leqq r$ teljesülne; továbbá P kielégíti a **megszámlálható láncfeltételt**, ha P minden, páronként inkompatibilis elemekből álló részhalmaza megszámlálható.

Minden $\varkappa$ számosságra tekintsük a következő állítást:

($A\varkappa$) Ha P nem üres részben rendezett halmaz, amely kielégíti a megszámlálható láncfeltételt és $\{D_i : i \in I\}$ a P sűrű részhalmazainak legfeljebb $\varkappa$ számosságú családja, akkor van P-ben olyan Q részrács, amelyik valamennyi D_i-t metszi.

Az 1. tétel pontosan azt mondja ki, hogy ($A\aleph_0$) igaz, míg a következő részben látni fogjuk, hogy ($A\varkappa$) hamis minden $\varkappa \geqq 2^{\aleph_0}$ számosságra. Így ($A\varkappa$) csak $\aleph_1 \leqq \varkappa < 2^{\aleph_0}$ esetén érdekes.

Martin axiómája az az állítás, hogy ($A\varkappa$) igaz minden $\aleph_0 \leqq \varkappa < 2^{\aleph_0}$ számosságra. Világos, hogy a kontinuum-hipotézisből Martin axiómája triviálisan következik. Másrészről igen érdekes tény az, hogy a kontinuum-hipotézis számos következménye, megfelelően kimondva már Martin axiómájából is bizonyítható. Ez a (**4**) dolgozat fő mondanivalója. A mi szempontunkból legjobb lesz ($A\varkappa$)-t $\aleph_0$-tól különböző $\varkappa$-kra, speciálisan $\varkappa = \aleph_1$-re tekinteni. Ehhez meg kellene mutatnunk $ZFC + (A\aleph_1)$ konzisztenciáját, azután pedig ($A\aleph_1$) érdekes következményeit levezetni.

2. TÉTEL (**6**) *A $ZFC + (A\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ axiómarendszer konzisztens.*

Sajnos a 2. tétel bizonyítása annyira bonyolult, hogy itt még vázolni sem tudjuk, Cohen módszerének[4] jelentős továbbfejlesztése szükséges hozzá. Így a dolgozat további részét az ($A\varkappa$) állítások következményeinek fogjuk szentelni.

2. Mértékelméleti alkalmazások. Tudjuk, hogy ($A\aleph_0$) bizonyítható ZFC-ben. Ez azt sugallja, hogy ($A\varkappa$)-nak következményei lesznek olyan $\varkappa$-nál nem nagyobb számosságú halmazokra vonatkozó állítások, melyekről tudjuk, hogy megszámlálható halmazokra igazak. Gyakran (bár nem mindig) valóban ez a helyzet.

3. TÉTEL (**4**) *Ha ($A\varkappa$) igaz, akkor nulla (Lebesgue) mértékű valós számhalmazok legfeljebb $\varkappa$ számosságú rendszerének uniója is null-mértékű.*

Bizonyítás. Legyen $\{E_i : i \in I\}$ null-mértékű halmazok legfeljebb $\varkappa$ számosságú rendszere, $E = \bigcup \{E_i : i \in I\}$. Legyen $\varepsilon > 0$. Megmutatjuk, hogy található olyan E-t tartalmzó nyílt halmaz, melynek mértéke legfeljebb ε.

Legyen P az ε-nál kisebb mértékű nyílt halmazok családja és $p, q \in P$-re legyen $p \leqq q$ ha $p \subseteq q$. Először megmutatjuk, hogy P kielégíti a megszámlálható láncfeltételt. Álljon Q ugyanis P páronként inkompatibilis elemeiből. Legyen $Q_n = \{p \in Q : m(p) \leqq (1 - 2^{-n})\varepsilon\}$ (ahol $m(p)$ jelöli p Lebesgue mértékét). Elegendő megmutatnunk, hogy minden n-re Q_n megszámlálható.

Minden $p \in Q_n$-re legyen $\bar{p} \subseteq p$ olyan, hogy $\bar{p}$ racionális végpontú nyílt intervallumok véges uniója és $m(p - \bar{p}) < 2^{-n}\varepsilon$. Mivel csak megszámlálható sok ilyen véges unió van, elegendő megmutatnunk, hogy ha p és q a Q_n halmaz különböző elemei, akkor $\bar{p} \neq \bar{q}$. Tegyük fel, hogy $\bar{p} = \bar{q}$. Ekkor $p \cup q \subseteq (p - \bar{p}) \cup q$, s így $m(p \cup q) < 2^{-n}\varepsilon + (1 - 2^{-n})\varepsilon = \varepsilon$. Ebből az következne, hogy p és q kompatibilis, ellentmondásban azzal, hogy $p, q \in Q$.

[4] Cohen 1963-ban adott egy módszert függetlenségi állítások igazolására (lásd Hajnal András fenti cikkét). A módszer azóta jelentősen továbbfejlődött és leegyszerűsödött, elsősorban Solovay amerikai matematikus munkái nyomán. Cohen eredményei szerint ZFC-ben nem bizonyítható a $V = L$ axióma, a kontinuumhipotézis, ZF-ből pedig a kiválasztási axióma.

Minden $i \in I$-re legyen $D_i = \{p \in P : E_i \subset p\}$. Felhasználva $m(E_i) = 0$-t, könnyen belátható, hogy D_i sűrű P-ben. Ekkor $(A\varkappa)$ szerint van P-nek olyan Q részrácsa, ami minden D_i-t metsz. Legyen Q elemeinek uniója G. Ekkor G nyílt, s $D_i \cap Q \neq \neq \emptyset$-ból kapjuk, hogy $E_i \subseteq G$ és így $E \subseteq G$.

Elegendő lesz tehát megmutatni, hogy $m(G) > \varepsilon$ ellentmondásra vezet. Lindelöf tétele szerint G megszámlálható sok Q-beli elem uniója. Ebből kapjuk, hogy van véges sok Q-beli halmaz, melyeknek G_1 uniójára $m(G_1) \geqq \varepsilon$. De mivel Q rács, Q valamelyik eleme tartalmazza G_1-t és így mértéke legalább ε. Ez ellentmondás. Q. E. D.

Lássuk, milyen függetlenlenségi eredmény kapható ebből a tételből. A 3. és a 2. tétel szerint a következő axiómarendszer konzisztens: $ZFC + \aleph_1$ null-mértékű halmaz uniója is null-mértékű". Az 1. lemma szerint tehát nem bizonyítható ZFC-ben a következő állítás: „van $\aleph_1$ darab null-mértékű halmaz, melyek uniója nem null-mértékű". A további eredményeink ilyen átfogalmazását az olvasóra bízzuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $(A\varkappa)$ *igaz, akkor legfeljebb* $\varkappa$ *darab mérhető halmaz uniója is mérhető.*

Bizonyítás. Legyenek $\{E_i : i \in I\}$ a mérhető halmazok, $|I| \leqq \varkappa$ és $E = \cup \{E_i : i \in I\}$. Ekkor E-nek van egy mérhető magja, azaz olyan F mérhető része, hogy $E - F$ minden mérhető része null-mértékű. Speciálisan $m(E_i - F) = 0$ ha $i \in I$, így a 3. tétel szerint $E - F = \cup \{E_i - F : i \in I\}$ null-mértékű. Ezek szerint $E = F \cup (E - F)$ mérhető. Q. E. D.

Mivel a [0, 1] intervallum $2^{\aleph_0}$ darab egypontú, és így null-mértékű halmaz uniója, a 3. tételből láthatjuk (ahogyan azt már említettük), hogy $\varkappa \geqq 2^{\aleph_0}$ esetén $(A\varkappa)$ nem igaz.

Ezek szerint $(A\varkappa)$ csak az $\aleph_0 < \varkappa < 2^{\aleph_0}$ esetben érdekes. Mivel ilyen számosságok nem túl gyakran fordulnak elő a matematikában, egyesek azt gondolhatják, hogy $(A\varkappa)$ következményei kizárólag a halmazelméleszeket érdeklik. Egy példával mutatjuk meg, hogy ez nincs így.

Ha **X** valós számhalmazok egy rendszere, akkor $C\mathbf{X}$ jelöli az **X**-ben található halmazok komplementereinek rendszerét és $P\mathbf{X}$ az **X**-beli halmazok folytonos képeinek rendszerét. Legyen **A** a Borel-halmazok folytonos képeinek rendszere. Az **A**, $C\mathbf{A}$, $PC\mathbf{A}$, $CPC\mathbf{A}$, $PCPC\mathbf{A}$, ... rendszerek valamelyikében levő halmazokat **projektív halmaz**oknak nevezik, és ezeket a topológusok sokat vizsgálták (lásd **(3)**). Luzin bizonyította, hogy az **A**-ban illetve $C\mathbf{A}$-ban található minden halmaz mérhető. Gödel megmutatta, ZFC-vel konzisztens az, hogy $PC\mathbf{A}$-ban van nem mérhető halmaz.[5] Egy meglehetősen mély eredmény szerint $PC\mathbf{A}$ minden halmaza $\aleph_1$ darab Borel-halmaz uniója. Így $(A\aleph_1)$-ből következik, hogy $PC\mathbf{A}$ minden halmaza mérhető (a 3. tétel fenti következménye szerint).

Ezt még tovább lehet vinni. Martin megmutatta, hogy amennyiben létezik mérhető számosság[6], akkor $PCPC\mathbf{A}$ minden halmaza $\aleph_2$ Borel-halmaz uniója. Így ha van mérhető számosság és $(A\aleph_2)$ igaz, akkor $PCPC\mathbf{A}$ minden halmaza is mérhető.

3. Kombinatorikus következmények. Legyen ω a természetes számok halmaza, s legyen **A** és **B** az ω részhalmazainak egy-egy rendszere. (**A**, **B**)-halmaznak

[5] Ez is a $V = L$ axiómából következik (D. Scott amerikai matematikus egy tétele alapján).

[6] Egy K számosságot mérhetőnek nevezünk, ha egy K számosságú halmaz összes részhalmazán definiálható olyan σ-additív 0 – 1-mérték, melyre az egyelemű halmazok null-mértékűek, és az egész halmaz pedig 1-mértékű. Mérhető számosság létezése ZFC-ből nem bizonyítható, sőt, $V = L$-ből következik, hogy nincs mérhető számosság.

nevezzük ω-nak minden olyan C részhalmazát, melyre $A \cap C$ véges minden $A \in \mathbf{A}$-ra, s ugyanakkor $B \cap C$ és $B - C$ végtelen minden $B \in \mathbf{B}$-re.

Egy D halmazt **A-kicsi**nek nevezünk, ha van **A**-nak véges sok eleme, $A_1, \ldots, A_n$, melyekre $D - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ véges. Ha létezik (**A**, **B**)-halmaz, akkor világos, hogy **B** egyetlen halmaza sem **A**-kicsi.

4. TÉTEL. *Tegyük fel* $(A\varkappa)$*-t. Legyenek* **A** *és* **B** *az* ω *részhalmazainak legfeljebb* $\varkappa$ *számosságú rendszerei. Ha* **B** *egyetlen eleme sem* **A***-kicsi, akkor létezik* (**A**, **B**)*-halmaz.*

Bizonyítás. Álljon P az ω-nak **A**-kicsi részhalmazait $\{0, 1\}$-be képező olyan f függvényekből, melyekre $\{i : f(i) = 1\}$ véges. P-ből részbenrendezett halmazt készítünk, ha $f \leqq g$-t akkor tekintjük igaznak, ha g kiterjesztése f-nek.

Először megmutatjuk, hogy P kielégíti a megszámlálható láncfeltételt. Ha f és g elemei P-nek, és van közös kiterjesztésük, akkor a legkisebb közös kiterjesztésük P-ben van. Így ha f és g inkompatibilis, akkor van olyan i, melyre $f(i)$ és $g(i)$ egyike 0, másika 1. Ezek szerint $\{i : f(i) = 1\} \neq \{i : g(i) = 1\}$. Mivel ω-nak csak megszámlálható sok véges részhalmaza van, P minden, páronként inkompatibilis elemekből álló részének is megszámlálhatónak kell lennie.

Minden $A \in \mathbf{A}$-ra legyen D_A ama P-beli függvények halmaza, melyek értelmezési tartománya tartalmazza A-t. Világos, hogy D_A sűrű P-ben.

Minden $B \in \mathbf{B}$-re legyen $D_{B,n}$ ama $f \in P$ függvények halmaza, melyekre mind $B \cap \{i : f(i) = 0\}$, mind $B \cap \{i : f(i) = 1\}$ számossága legalább n. Megmutatjuk, hogy $D_{B,n}$ sűrű P-ben. Legyen ugyanis $f \in P$. Mivel B nem **A**-kicsi, tudunk találni $2n$ természetes számot, mondjuk $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n$-t, melyek B-ben vannak, de nincsenek f értelmezési tartományában. Legyen $\bar{f}$ olyan kiterjesztése f-nek, melyre $\bar{f}(i_k) = 1$ és $\bar{f}(j_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ekkor $\bar{f} \in D_{B,n}$ és $f \leqq \bar{f}$.

$(A\varkappa)$ szerint van P-nek olyan Q részrácsa, amely metszi az összes D_A valamint $D_{B,n}$ halmazokat. Mivel Q rács, van olyan g leképezés ω-ból $\{0, 1\}$-be, amely Q minden elemének kiterjesztése. Legyen $C = \{x : g(x) = 1\}$. Minden $A \in \mathbf{A}$-ra g valamely $f \in D_A$ kiterjesztése, ezért $A \cap C = \{x \in A : f(x) = 1\}$ s így $A \cap C$ véges. Ha $B \in \mathbf{B}$ és $n \in \omega$ akkor g a $D_{B,n}$ halmaz valamelyik elemének kiterjesztése, így $B \cap C$ és $B - C$ is legalább n elemű. Ez minden n-re igaz, tehát $B \cap C$ és $B - C$ végtelen. Q. E. D.

Azt mondjuk, hogy az **A** halmazrendszer **rendes**, ha ω nem **A**-kicsi és minden $A \in \mathbf{A}$ nem $(\mathbf{A} - \{A\})$-kicsi.

2. LEMMA. *Tegyük fel* $(A\varkappa)$*-t. Legyen* **A** *rendes és legfeljebb* $\varkappa$ *számosságú. Legyenek* $\mathbf{A}_1$ *illetve* $\mathbf{A}_2$ *diszjunkt részhalmazai* **A***-nak. Ekkor van olyan* C $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$*-halmaz, amelyre* $\mathbf{A} \cup \{C\}$ *rendes.*

Bizonyítás. Álljon **B** az összes $D - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ alakú halmazokból, ahol $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}$ és D vagy ω, vagy $\mathbf{A} - \mathbf{A}_1$-nek valamely $A_1, \ldots, A_n$-től különböző eleme. Mivel **A** rendes, azért $\mathbf{A}_2 \cup \mathbf{B}$ egyetlen halmaza sem $\mathbf{A}_1$-kicsi. Mivel **B** nyilván legfeljebb $\varkappa$ számosságú, azért a 4. tétel szerint van C $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{B})$-halmaz. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{A} \cup \{C\}$ rendes.

Legyen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}$. Mivel $\omega - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ eleme **B**-nek, azért $C - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ és $\omega - (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup C)$ is végtelen. Ez mutatja, hogy C nem **A**-kicsi és hogy ω nem $\mathbf{A} \cup \{C\}$-kicsi. Már csak azt kell belátni, hogy ha $A \in \mathbf{A}$, akkor A nem $(\mathbf{A} \cup \{C\} - \{A\})$-kicsi. Legyen $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A} - \{A\}$. Ha $A \notin \mathbf{A}_1$, akkor az $A - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ halmaz **B**-ben van, tehát $A - (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup C)$ vég-

telen. Ha $A \in \mathbf{A}_1$, akkor $A \cap C$ véges és $A-(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ végtelen, így most is $A-(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup C)$ végtelen. Q. E. D.

5. TÉTEL (**4**) *Ha* $(A\varkappa)$ *igaz, akkor* $2^{\varkappa}=2^{\aleph_0}$.

Bizonyítás. A 2. lemmát használva transzfinit indukcióval definiálhatunk $\alpha<\varkappa$-ra egy A_α sorozatot úgy, hogy $\{A_\alpha:\alpha<\varkappa\}$ rendes legyen. A 4. tétel alapján minden $I \subseteq \{\alpha:\alpha<\varkappa\}$-hoz választhatunk egy C_I-t, ami $(\{A_\alpha:\alpha\in I\}, \{A_\alpha:\alpha \notin I\})$-halmaz. Mivel $\alpha\in I$ pontosan akkor igaz, ha $C_I \cap A_\alpha$ véges, az I-hez C_I-t rendelő leképezés kölcsönösen egyértelmű. Mivel $2^{\varkappa}$ lehetséges I van és ω-nak $2^{\aleph_0}$ részhalmaza, kapjuk, hogy $2^{\varkappa} \leqq 2^{\aleph_0}$, azaz $2^{\varkappa}=2^{\aleph_0}$. Q. E. D.

Most egy olyan probléma tárgyalására térünk rá, mely a MONTHLY-ban jelent meg (Advanced Problem 5845). Legyen $O_\varkappa=\{\alpha:\alpha<\varkappa\}$ és $\mathbf{s}_\varkappa$ az $O_\varkappa \times O_\varkappa$-ban az a σ-gyűrű, amit a téglalapok (azaz az $A \times B$ alakú halmazok) generálnak. Jelöljük $(R\varkappa)$-val azt az állítást, hogy $O_\varkappa \times O_\varkappa$ minden részhalmaza $\mathbf{s}_\varkappa$-ba esik. Mely nem megszámlálható $\varkappa$-kra igaz $(R\varkappa)$? Ismeretes, hogy $(R\aleph_1)$ igaz és $(R\varkappa)$ hamis minden $\varkappa>2^{\aleph_0}$-ra. Ez azonban nem teljes megoldása a problémának, hacsak fel nem tesszük a kontinuum-hipotézist.

6. TÉTEL (**2**) *Ha* $(A\lambda)$ *igaz minden* $\lambda<\varkappa$*-ra, akkor* $(R\varkappa)$ *is igaz.*

Bizonyítás. Legyen $W \subseteq O_\varkappa \times O_\varkappa$. Transzfinit indukcióval kiválasztjuk ω-nak olyan A_α és B_α részhalmazait $\alpha<\varkappa$-ra, hogy $A_\alpha \cap B_\beta$ pontosan akkor lesz végtelen, ha $(\alpha, \beta)\in W$. Tegyük fel, hogy A_α-t és B_α-t már $\alpha<\gamma$-ra kiválasztottuk, és tegyük fel (indukciós hipotézisként), hogy $\{A_\alpha:\alpha<\gamma\} \cup \{B_\alpha:\alpha<\gamma\}$ rendes. A 2. lemma alapján először választunk olyan A_γ-t, melyre $A_\gamma \cap B_\alpha$ pontosan akkor végtelen, ha $(\gamma, \alpha)\in W$, és $\{A_\alpha:\alpha\leqq\gamma\} \cup \{B_\alpha:\alpha<\gamma\}$ rendes; azután pedig olyan B_γ-t, hogy $A_\alpha \cap B_\gamma (\alpha \leqq \gamma$-ra) pontosan akkor végtelen, ha $(\alpha, \gamma)\in W$ és $\{A_\alpha:\alpha\leqq\gamma\} \cup \cup \{B_\alpha:\alpha\leqq\gamma\}$ rendes.

Legyen $X_n=\{\alpha:n\in A_\alpha\}$ és $Y_n=\{\alpha:n\in B_\alpha\}$. Ekkor $(\alpha, \beta)\in X_n \times Y_n$ pontosan akkor igaz, ha $n\in A_\alpha \cap B_\beta$. Így $(\alpha, \beta)\in W$ pontosan akkor teljesül, ha $(\alpha, \beta)\in X_n \times Y_n$ végtelen sok n-re. Innen

$$W = \bigcap_m \bigcup_{n>m} (X_n \times Y_n),$$

azaz $W\in\mathbf{s}_\varkappa$. Q. E. D.

Vegyük észre, hogy a 6. tételben $(R\aleph_1)$-t is bizonyítottuk. Kunen (**2**) megmutatta azt, hogy $(R\aleph_2)$ nem bizonyítható ZFC-ben $2^{\aleph_0}\leqq\aleph_2$-ből.

4. Topológiai következmények. Legyen X egy topologikus tér. X-nek egy A része **sehol sem sűrű,** ha minden, nem üres nyílt halmaz tartalmaz A-tól diszjunkt nem üres nyílt halmazt. Egy halmaz **első kategóriájú** (sovány), ha megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniója. Egy A halmaz **Baire-tulajdonságú,** ha van olyan B nyílt halmaz, hogy $A-B$ és $B-A$ is első kategóriájú. Bizonyos analógia áll fenn az első kategóriájú halmazok és a null-mértékű halmazok között, csakúgy, mint a Baire-tulajdonságú és mérhető halmazok között. A 3. tétel megfelelőjét fogjuk most bizonyítani.

7. TÉTEL (**4**) *Tegyük fel* $(A\varkappa)$*-t. Ha* X *megszámlálható bázisú topologikus tér, akkor* X*-ben legfeljebb* $\varkappa$ *darab első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú.*

Bizonyítás. Nyilván elég bizonyítani, hogy ha $\{E_i:i\in I\}$ $(|I|\leqq\varkappa)$ sehol sem sűrű halmazok egy rendszere, akkor E uniójuk is első kategóriájú. Legyen $\{G_n:$

$:n\in\omega\}$ olyan sorozat, melyben X egy rögzített megszámlálható bázisának minden nem üres eleme végtelen sokszor előfordul (és más halmaz nem). Legyen $i\in I$-re $A_i=\{n:E_i\cap G_n\neq\emptyset\}$ és $n\in\omega$-ra $B_n=\{m:G_m\subseteqq G_n\}$. Végül legyen $\mathbf{A}=\{A_i:i\in I\}$ és $\mathbf{B}=\{B_n:n\in\omega\}$.

Megmutatjuk, hogy egyetlen B_n sem **A**-kicsi. Ha I_0 véges része I-nek, akkor $E_{I_0}=\cup\{E_i:i\in I_0\}$ sehol sem sűrű, tehát van végtelen sok olyan m, amire $G_m\subseteqq G_n$ és $G_m\cap E_{I_0}=\emptyset$. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok olyan m van B_n-ben, melyek egyetlen $i\in I_0$-ra sincsenek A_i-ben.

A 4. tétel szerint ekkor van (**A**, **B**)-halmaz, legyen C ilyen. Ama G_m halmazok H_k uniója, melyekre $m\geqq k$ és $m\in C$, nyilván nyílt. Megmutatjuk, hogy H_k komplementuma sehol sem sűrű. Elegendő ehhez megmutatnunk, hogy minden n-re valamelyik G_m része $H_k\cap G_n$-nek, azaz van olyan $m>k$, amire $m\in C$ és $m\in B_n$. Ez azonban azért van így, mert $C\cap B_n$ végtelen.

Még azt kell megmutatnunk, hogy $E\subseteqq\cup\{X-H_k:k\in\omega\}$. Ehhez elég látnunk, hogy minden i-hez van olyan k, amire $E_i\cap H_k=\emptyset$. Mivel $A_i\cap C$ véges, k-t választhatjuk $A_i\cap C$ minden tagjánál nagyobbnak. Ha $m\geqq k$ és $m\in C$, akkor $m\notin A_i$; így $E_i\cap G_m=\emptyset$. Innen pedig következik, hogy $E_i\cap H_k=\emptyset$. Q. E. D.

KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel* $(A\varkappa)$*-t. Ekkor minden megszámlálható bázisú topologikus térben igaz az, hogy legfeljebb* $\varkappa$ *darab Baire-tulajdonságú halmaz uniója is Baire-tulajdonságú.*

A 7. tétel e következményének hasonló további következményei vannak, mint a 3. tétel következményének (a valósak terére vonatkozólag).

Tegyük fel, hogy az X topologikus térben x torlódási pontja az $\{x_n\}$ sorozatnak. Ekkor x nem szükségképpen limesze $\{x_n\}$ valamelyik részsorozatának, míg ez a helyzet áll elő, ha x-nek van megszámlálható környezetbázisa.

8. TÉTEL. *Tegyük fel* $(A\varkappa)$*-t és legyen* x *az* $\{x_n\}$ *sorozat torlódási pontja az* X *topologikus térben. Tegyük fel továbbá, hogy* x*-nek van legfeljebb* $\varkappa$ *számosságú környezetbázisa. Ekkor kiválasztható* $\{x_n\}$*-ből* x*-hez konvergáló részsorozat.*

Bizonyítás. Legyen $\{G_i:i\in I\}$ $(|I|\leqq\varkappa)$ az x pont egy környezetbázisa. Legyen $A_i=\{n:x_n\in G_i\}$, $\mathbf{A}=\{A_i:i\in I\}$. Megmutatjuk, hogy ω nem **A**-kicsi. Legyen ugyanis I_0 véges része I-nek, $G=\cap\{G_i:i\in I_0\}$. Ekkor G az x egy környezete, így $x_n\in G$ végtelen sok n-re, és mindegyik ilyen n eleme A_i komplementerének, ha $i\in I_0$.

A 4. tétel szerint van olyan végtelen C halmaz, hogy $C\cap A_i$ minden i-re véges. Világos, hogy az $\{x_n:n\in C\}$ részsorozat konvergál x-hez. Q. E. D.

Egy X topologikus teret **sorozatkompakt**nak nevezünk, ha minden X-beli sorozatnak van konvergens részsorozata. Jól ismert, hogy megszámlálható sok sorozatkompakt tér topologikus szorzata ismét sorozatkompakt. Másrészről könnyű megmutatni, hogy $2^{\aleph_0}$ kételemű diszkrét tér szorzata már nem sorozatkompakt.

KÖVETKEZMÉNY *Ha* $(A\varkappa)$ *igaz, akkor legfeljebb* $\varkappa$ *kompakt metrikus tér szorzata sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\{X_i:i\in I\}$ $(|I|\leqq\varkappa)$ a terek rendszere, X pedig a szorzatuk. Mivel X kompakt, minden X-beli sorozatnak van torlódási pontja. A 8. tétel alapján tehát elég megmutatnunk, hogy minden X-beli pontnak van legfeljebb $\varkappa$ számosságú környezetbázisa. Ez pedig egyszerű gyakorlat a számosság-aritmetikában (megjegyezzük, hogy mindegyik X_i-nek van megszámlálható bázisa). Q. E. D.

Ez a következmény Booth egy tételének általánosítása. Booth (**1**) felhasználta Martin axiómáját dimenzióelméleti kérdések vizsgálatára is.

Bizonyítás nélkül kimondjuk Silver egy még nem publikált tételét, amely egy nevezetes topológiai problémáról szól:

9. TÉTEL *(Silver) Ha* $(A\aleph_1)$ *igaz, akkor létezik szeparábilis, normális, nem metrizálható Moore-tér.*

5. Szuszlin problémája. Röviden bemutatjuk ezt a problémát, amely eredetileg a 2. tételt motiválta. Szuszlin e problémáját eredetileg a valós számok rendezésére vonatkozó axiómák segítségével fogalmazta meg. Ehelyett mi egy részben rendezett halmazokra vonatkozó problémát ismertetünk, melynek ekvivalenciáját Szuszlin problémájával Miller (**5**) bizonyította be.

Egy P részben rendezett halmaz **lánc (antilánc)**, ha P tetszőleges két eleme összehasonlítható (nem összehasonlítható). **Fának** nevezünk egy olyan P részben rendezett halmazt, melyben minden $x \in P$-re $\{y : y \leqq x\}$ lánc. Egy **Szuszlin-fa** olyan nem megszámlálható fa, amelyben minden lánc és minden antilánc megszámlálható. Jelöljük (SH)-val azt az állítást, hogy nem létezik Szuszlin-fa.

A Cohen-módszer felfedezése után nem sokkal Tennenbaum és Jech (egymástól függetlenül) megmutatták, hogy (SH) nem bizonyítható ZFC-ben. A következő tétel, a 2. tétellel együtt azt mutatja, hogy nem-(SH) sem bizonyítható ZFC-ben.

3. LEMMA. *Ha létezik egy* P *Szuszlin-fa, akkor van olyan* $\aleph_1$ *számosságú* Q *Szuszlin-fa is, melynek minden* x *elemére* $\{y \in Q : y \geqq x\}$ *nem megszámlálható.*

Bizonyítás. Mivel egy Szuszlin-fa minden nem megszámlálható része is Szuszlin-fa, feltehetjük, hogy a P Szuszlin-fa számossága $\aleph_1$. Legyen Q ama $x \in P$-k halmaza, melyekre $\{y \in P : y \geqq x\}$ nem megszámlálható.

A Zorn-lemmát használva válasszunk ki egy maximális Z antiláncot $P - Q$-ból. Mivel P Szuszlin-fa, azért Z megszámlálható. Ha $z \in Z$, akkor $\{y \in P : y \geqq z\}$ megszámlálható, másrészt $\{y \in P : y \leqq z\}$ lánc, és ezért megszámlálható. Így csak megszámlálható sok y eshet Z-be. De Z választása szerint ezek $P - Q$ összes elemét tartalmazzák, így $P - Q$ megszámlálható. Tehát Q számossága $\aleph_1$, s ezért Szuszlin-fa. Ha $x \in Q$, akkor $\{y \in Q : y \geqq x\}$ tartalmazza $\{y \in P : y \geqq x\}$ összes Q-beli elemét, így $\{y \in Q : y \geqq x\}$ nem megszámlálható. Q. E. D.

10. TÉTEL (**6**) *Ha* $(A\aleph_1)$ *igaz, akkor* (SH) *is igaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét. Legyen Q ugyanaz, mint a 3. lemmában, $Q = \{x_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ és $Q_\beta = \{x_\alpha : \beta \leqq \alpha \leqq \aleph_1\}$. Q_β választása miatt mindegyik Q_β sűrű Q-ban. Mivel Q páronként inkompatibilis elemekből álló része antilánc, azért Q kielégíti a megszámlálható láncfeltételt. Ezért $(A\aleph_1)$ szerint van Q-ban egy N részrács, ami mindegyik Q_β-t metszi. Mivel Q fa, az N részrács egy lánc. Másrészt világos, hogy N nem megszámlálható, így ellentmondásra jutottunk. Q. E. D.

Minthogy $(A\aleph_1)$-ből következik, hogy a kontinuum-hipotézis hamis, a 10. tétel nyitva hagyja azt a kérdést, vajon nem-(SH) bizonyítható-e ZFC-ben a kontinuum-hipotézisből. Nemrégiben Jensen megmutatta, hogy a válasz nemleges; bizonyítása a 2. tétel bizonyításában használt módszerek jelentős továbbfejlesztését igényli.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] D. Booth: Generic covers and dimension, Duke Math. J. 38 (1971) 667—670.
[2] K. Kunen: Inaccessibility properties of cardinals, Dissertation, Stanford University, 1968.
[3] C. Kuratowski, Topológie, Varsó, 1948.
[4] D. A. Martin és R. M. Solovay: Internal Cohen extensions, Ann. Math. Logic, 2 (1970) 143—178.
[5] E. W. Miller: A note on Souslin's problem Amer. J. Math, 65 (1943) 673—678.
[6] R. M. Solovay és S. Tennenbaum: Cohen extension and Souslin's problem, Ann. Math, 94 (1971) 201—245.

Fordította: Csirmaz László

АКСИОМА МАРТИНА

Й. Р ШЕНФИЛЬД

MARTIN'S AXIOM

J. R. SHOENFIELD

HELYZETELEMZŐ TANULMÁNY A HAZAI ANALÍZIS KUTATÁSOK TÉMAKÖREBEN*

TANDORI KÁROLY

A matematikai analízis a matematika egyik legfontosabb területe, amely a különböző alkalmazások szempontjából is döntő jelentőségű.

A hazai analízis kutatásoknak nagy hagyományai vannak; Fejér Lipót, Haar Alfréd és Riesz Frigyes munkássága a matematikai analízis fejlődésében meghatározó szerepet játszott.

Elsősorban magas szintű tevékenységüknek köszönhető, hogy a hazai analízis kutatások — legalább is egyes területeken — jelenleg is igen széles körben, viszonylag sok matematikus közreműködésével, a nemzetközi élvonal szintjén folynak. A nemzetközi elismerést mutatja az új magyar—szovjet matematikai folyóirat, az Analysis Mathematica létrejötte is.

A jelenlegi magas szint továbbiakban való fenntartása természetesen további erőfeszítést igényel. Az ezekkel kapcsolatos javaslatokról az egyes fejezetek végén teszünk említést.

A tanulmány a tárgyalt anyagot a következő tárgykörökre való bontásban tárgyalja:

Egyenlőtlenségek,
Valós függvénytan,
Komplex függvénytan,
Differenciálegyenletek,
Függvényegyenletek,
Approximációelmélet,
Ortogonális függvénysorok,
Funkcionálanalízis.

A matematikai analízis döntő fontosságú alkalmazásokra talál a matematika egyéb területein és a különböző más tudományokban is. Ennek következtében a matematikai analízis tárgykörét csaknem lehetetlen pontosan elhatárolni. Ezért e tanulmány nem tér ki részletesebben pl. a topológia vagy a numerikus analízis témakörökre; e témakörök további felmérések tárgyát képezhetik. Másrészt a tanulmány csak olyan szakemberek eredményeivel foglalkozik, akiket elsősorban matematikusként tartanak számon.

A tanulmány összeállítása során elsősorban a felszabadulás óta elért eredményeket vettük figyelembe.

* E tanulmány az MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának felkérésére készült, azt az Osztály Matematikai Bizottsága, valamint az Osztály is megvitatta. A tanulmány összeállításában részt vettek Császár Ákos lev. tag, Daróczy Zoltán, Hosszu Miklós, Makai Endre, Szabados József doktorok, Szücs József kandidátus és Turán Pál akadémikus.

A számtani és mértani közép között fennálló és az ehhez hasonló klasszikus egyenlőtlenségek vizsgálata három különböző irányú problémakör között létesít kapcsolatot. A vizsgálat ugyanis irányulhat középértékek összehasonlítására, a középértékeket egymásba transzformáló függvény konvexitási viszonyainak tisztázására, végül az egyenlőtlenség határesetében adódó egyenlőség által kifejezett szélsőérték tulajdonságok elvi kérdéseinek eldöntésére és különböző alkalmazásaira. Más szempontból a vizsgálatok két fő csoportba sorolhatók: adott középértékek, vagy általánosabban többváltozós függvények és közöttük izomorfizmust létesítő adott transzformáló függvények esetén különböző típusú egyenlőtlenségeket állapíthatunk meg, másrészt kereshetjük mindazokat a középértékeket ill. transzformáló függvényeket, amelyek egy adott egyenlőtlenséget kielégítenek, azaz függvényegyenlet megoldási problémákat általánosítunk egyenlőtlenségekre. Ez utóbbi problémakörnek fontos alkalmazásai vannak a különféle gazdasági, információelméleti mérőszámok értelmezésével kapcsolatban, továbbá a függvények konvexitási, kvázikonvexitási és más hasonló tulajdonságainak axiomatikus, függvénytani elemzésében.

A vázolt témakörben magyar kutatók jelentős eredményeket értek el.

A rendezett algebrai struktúrákon definiálható középértékek topologikus vizsgálatára és hasonló kérdésekre kidolgozott módszer alapvetően meghatározta a nemzetközi kutatások irányvonalát a binér műveletek, kvázicsoportok és topologikus kvázicsoportok elméletében. A súlyfüggvénnyel súlyozott kváziaritmetikai középértékeket tartalmazó egyenletek és egyenlőtlenségek szisztematikus vizsgálatában számos eredmény született. Ennek kapcsán érdekes kapcsolatra derült fény a differenciálegyenlőtlenségek elméletével. A kváziaritmetikai és súlyfüggvénnyel súlyozott kváziaritmetikai középértékek közös általánosításaként értelmezhető eltérés — középértékek vizsgálata magyar kezdeményezésre született. Ennek alapján sikerült egységes keretbe foglalni a klasszikus egyenlőtlenségtípusok vizsgálatát, és kiterjeszteni azokat az eltérés-középértékekre. A homogén eltérés-középértékekre vonatkozó eredmények speciális esetként számos korábban vizsgált egyenlőtlenséget tartalmaznak.

Az általánosítások másik irányvonala az egyenlőtlenségben szereplő független változók számának növelése volt, amely elvezet az integrál-egyenlőtlenségekhez. Ezen a területen különösen fontos szerepet vitt egy $f(x)g(t-x)$ alakú görbesereg burkolója alatti terület alsó becslése a Hölder-féle egyenlőtlenségben szereplő kifejezéssel, ahol t a sereg paramétere. A matematikai programozás elméleti megalapozásában felmerülő ezen egyenlőtlenséget sikerült több irányban is általánosítani, és több szerző is csatlakozott e témához. Számos további eredmény adódott a számsorokra vonatkozó Hardy—Littlewood-egyenlőtlenség különböző általánosításaira vonatkozóan is.

A beszámoló nem térhet ki e helyen a polinomok, komplex függvények más típusú egyenlőtlenségeinek bemutatására, ugyanis az ott felhasznált különleges sorelméleti, ill. komplex függvénytani módszerek miatt ezek már inkább oda tartoznak.

A kutatóbázis legnagyobbrészt a függvényegyenlet iskola munkatársaiból kerül ki, de sorelmélettel, a valós függvény axiomatikus, topológiai vizsgálataival foglalkozók is szívesen térnek ki ilyen kérdésekre, az alkalmazások szempontjaival pedig a matematikai programozással és információelmélettel határos területek kutatói foglalkoznak.

A témakörben eredményt elért kutatók nem teljes névsora: Aczél János (külföldön), Császár Ákos lev. tag (Budapest), Daróczy Zoltán kandidátus (Debrecen), Deák Ervin kandidátus (Budapest), Fenyő István doktor (Budapest), Fuchs László (külföldön), Krekó Béla (Budapest), Leindler László lev. tag (Szeged), Losonczi László kandidátus (Debrecen), Martos Béla (Budapest), Németh József (Szeged), Prékopa András doktor (Budapest), Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus (Szeged), Uhrin Béla (Budapest).

Valós függvénytan

A felszabadulás óta eltelt időszakban magyar kutatók elsősorban a valós függvénytan következő témaköreiben értek el eredményeket: *a)* a deriváltfogalom különféle általánosításai, *b)* egyenlőtlenségekkel definiált függvényosztályok, *c)* Darboux-féle függvények, *d)* a deriváltfüggvények szerkezetének vizsgálata, *e)* a Stone—Weierstrass-tétel általánosításai. Bár elsősorban nem eredményeiben, hanem módszereiben új, és zömmel a háború előtt kidolgozott anyagot tartalmaz, de feltétlenül megemlítendő Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla: »Leçons d'analyse fonctionnelle« c. monográfiájának első három fejezete, valamint Szőkefalvi-Nagy Béla: „Valós függvények és függvénysorok" c. egyetemi tankönyvének idevágó része; mindkét mű páratlanul elegáns és méltán nemzetközi elismerést aratott tárgyalásban mutatja be a valós függvénytannak elsősorban azokat a fejezeteit, amelyek a funkcionálanalízisben felhasználásra kerülnek.

A fenti *a)* témakörben főként a Denjoy—Young—Saks-féle tétel sokoldalú általánosítása s ennek alkalmazása volt a vizsgálat tárgya (magasabbrendű közönséges és erős deriváltakra, magasabbrendű approximatív deriváltakra, Lipschitz-féle deriváltszámokra, általánosított Lipschitz-féle deriváltszámokra, ezeknek approximatív változataira, egy- és kétváltozós függvények lokális növekedésére, a monotonitás lokális jellemzésére, többdimenziós intervallumfüggvényekre). A *b)* témakörben a többváltozós konvex függvények, s főként az ún. intern függvények s ezek különféle általánosításai játszottak a vizsgálatokban középponti szerepet. A *c)* témakörben a Darboux-tulajdonságú függvényeket s ezek bizonyos általánosításait lokális feltételekkel sikerült jellemezni, majd pedig globális jellegű karakterizációs tételeket igazolni. A Darboux-függvények burkolói speciális tulajdonságúak, és minden ilyen tulajdonságú függvénypárhoz konstruálható Darboux-függvény, amelynek az előírt függvények a burkolói. A *d)* témakörben számos új eredmény született a deriváltak jellemzésével kapcsolatban. A deriváltak osztálya a nívóhalmazok módszerével nem jellemezhető. Kiderült, hogy igen informatív a deriváltakat és a Baire-1-függvények részhalmazokon vett megszorításait összehasonlítani. Ezt tükrözik a különféle kiterjesztési és approximációs tételek. Egy adott halmazra megszorított bármely Baire-1-függvényt akkor és csak akkor lehet deriváltként, ill. approximatíve folytonos függvényként kiterjeszteni, ha az adott halmaz nulla mértékű. Alkalmazásként igazolható, hogy egy perfekt halmazon értelmezett differenciálható függvény mindig kiterjeszthető mindenütt differenciálható függvénnyé. Részletes vizsgálat tárgya volt egyes függvényosztályok ún. szeparációs viselkedése, azaz, hogy lehet két adott halmazt az osztály egy elemével szétválasztani. Teljes megoldást sikerült találni a deriváltak, a Darboux—Baire-1-függvények és az approximative folytonos függvények esetében, és részleges megoldást a korlátos deriváltak esetében. Újabban sikerült leírni azokat a függvényeket, amelyeket egy tetszőleges deriválttal beszorozva az eredmény ismét derivált. Az *e)* témakörben az ismert Stone—Weierstrass-féle approximációtétel magvát sikerült egy olyan általános approximációtétel

formájába önteni, amely számos speciális approximációtételt szolgáltat speciális esetként; alkalmazásképpen különféle topológiai eredmények adódtak.

A felsorolt témakörökön kívül egy-egy érdekes eredmény foglalkozik a feltételes valószínűségi mezők elmélete által felvetett mértékelméleti problémákkal, a normális valószínűségeloszlás jellemzésével, lineáris funkcionálok integrálelőállításával, egy a totális variációt integrál alakban megadó Banach-féle tétel többdimenziós általánosításával. Más vizsgálatok az egyenletesen folytonos és Lipschitz-feltételt kielégítő leképezések kiterjesztését, továbbá az egyenletesen folytonos leképezések Lipschitz-feltételt kielégítő leképezésekkel való egyenletes approximációját illetően hoztak eredményeket.

A vizsgálatokban részt vett kutatók (nem teljes) névsora: Császár Ákos lev. tag (Budapest), Czipszer János (meghalt), Deák Ervin kandidátus (Budapest), Gehér István (Budapest), Gehér László (Szeged), Hajnal András doktor (Budapest), Petruska György kandidátus (Budapest).

Komplex függvénytan

A komplex függvénytani kutatásnak hazánkban 100 éves múltja van. 1876-ban publikálta König Gyula a Math. Annalenben azon korát messze megelőző tételét, amely szerint, ha $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ reguláris az egységkör belsejében, valós együtthatós, és szingularitásai az egységkör kerületén csak két pólus, éspedig $z=e^{\pm i\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$, akkor az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozat jelváltásai számát v_n-nel jelölve, $\lim_{n\to\infty} v_n/n=\alpha/\pi$ teljesül. Ezzel jó 10 évvel előzte meg Hadamard ezirányú vizsgálatait.

A XX. század első 30 évében a komplex függvénytani vizsgálatok centrális szerepet játszottak a matematikában világszerte. Ennek fő oka talán az a bűvölet volt a múlt század végén, amit az a felismerés keltett, hogy itt egy elméletről van szó, amelynek hatóereje az inkompresszibilis folyadékok áramlástanától a számelmélet legmélyebbnek tartott kérdéseiig terjed. (Abel a prímszámtételt — akkor sejtést — az egész matematika legmélyebb kérdésének nevezte.) A komplex függvénytani kutatásban ezen időszakban magyar kutatók lényeges adalékokkal vettek részt, akkor is, ha külföldreszakadt kiváló magyar matematikusoknak (Fekete Mihály, Pólya György, Szász Ottó, Szegő Gábor) még hazai tartózkodásuk alatt elért eredményeit sem vesszük itt most tekintetbe. A fő zászlóvivők Fejér Lipót és Riesz Frigyes voltak. Eredményeik sorozatát a végesrendű egészfüggvények Hadamard-féle alaptételének bizonyítását végletekig lerövidítő Carathéodory—Fejér dolgozat nyitotta meg. Folytatódott ez Carathéodory—Fejér, ill. Riesz ama, a Picard—Landau kérdéskörből fakadó dolgozataival, amelyek adott kezdőegyütthatókkal bíró hatványsorokra vonatkozó extrenumfeladatokat tárgyaltak. Jelentős eredmények ezen időszakból Riesz Frigyesnek az egységkörben reguláris függvények fontos osztályaira vonatkozó integrálelőállításai, a szubharmonikus függvények tőle származó elmélete, valamint a konform leképezés alaptételének Fejér—Riesz féle bizonyítása. Ezen időszakban lényeges adalékokkal járultak hozzá az egységkör belsejében reguláris függvények kerületi viselkedésének elméletéhez. De itt említendő meg Runge polinomapproximációs tételének a Hilbert—Montel-félénél jóval egyszerűbb interpolációs bizonyítása, valamint ennek Kalmár Lászlótól származó megfordítása is. Ezen időszakban alakult ki a polinomok Landau—Fejér—Montel-féle analitikus elmélete is, amelyről Dieudonné a harmincas évek közepén már terjedelmes Mémorial-füzetet írhatott, és amely csírájában tartalmazza az általános elméletet. A héza-

gos hatványsorok Hadamard által kezdeményezett elméletében is akadt Fejér Lipótnak folytatást provokáló eredménye.

A harmincas évek közepétől a komplex függvénytan, általában az analízis, mellé egyenrangú társként több matematikai diszciplina került világszerte. Erős centrumok maradtak a klasszikus komplex függvénytan területén Angliában, ugyanez a kvázikonform leképezések elméletével színezve Finnországban, más kutatási irányokkal vegyítve (pl. approximációelmélettel) a Szovjetunióban, (pl. automorf függvények elméletével) az USA-ban és (több komplex változó elméletével vegyítve) Németországban, majd később az NSZK-ban, Franciaországban és Japánban. Így általánosan szólva az analízis már idehaza sem tölt be oly egyeduralkodó szerepet, mint előzőleg, és ez áll a komplex függvénytanra is. Itthon talán — előbbiekkel analógiában — a komplex függvénytani munkához mint specifikum, az analitikai számelmélettel való vegyítés adható hozzá. Ez utóbbi területen — több hazai kutató munkájának eredményeképpen — nemzetközileg meglehetősen számontartott fejlődés indult meg az utolsó 25 évben. Ezen időközre szorítkozva azonban magában a komplex függvénytanban az eredmények — összehasonlítva a század első 25 évével — szerényebbeknek mondhatók.

Az áttekintést talán az analízis azon átfogó jellegű új módszerével kezdhetjük, amely a diophantikus approximációk aritmetikai elméletének általánosításaként tekinthető, és alapgondolatában H. Bohr-ra megy vissza, aki ezen elmélet klasszikus tételeit elsőnek alkalmazta sikeresen a Dirichlet-sorok elméletében. Az általánosítás azonban egészen más módszerekkel volt csak keresztülvihető, és alkalmazásainak köre is egész lényegesen kitágult. A komplex függvénytani alkalmazásoknak csak négy nagyobb csoportját említjük itt. Ezek első csoportja a hézagos hatványsorok elméletére vonatkozik. Ezek egyrészt a klasszikus „hézagtételek" új bizonyítását adták, másrészt a hézagos hatványsorú egészfüggvények értékeloszlására vitték lényegesen tovább a Fejér és Pólya által kezdeményezett elméletet. Ebben — főleg Juliatípusú értékeloszlási tételek felfedezésében — a londoni iskola járt elől, a módszer ún. első főtételét szisztematikusan alkalmazva. Érdemleges eredmény e területen (egészen más módszerrel) Pólya—Gelfond azon régebbi sejtésének igazolása, hogy egy egészfüggvény két különböző pont körüli hatványsorfejtései nem lehetnek mindketten Fabry-hézagosak. Visszatérve a szóbanforgó általános módszer alkalmazásainak második csoportjára, ezek S. Bernstein—Mandelbrojt értelemben kvázianalitikus függvényosztályokat adnak meg lényegileg nem javítható együttható feltételekkel. A harmadik csoport eredményei egy lineáris differenciálegyenletet kielégítő egészfüggvények értékeloszlására vonatkoznak. Ezen klasszikus vizsgálati körben elért új eredmények — különösen R. Tijdeman itt írott disszertációja után — a transzcendens számok elméletében (mégpedig speciális alakú számok algebrai függetlenségére vonatkozólag) jutottak váratlan alkalmazásokhoz. A negyedik csoport a Dirichlet-sorok elméletére vonatkozik, amelyben több kutató ért el figyelemkeltő eredményeket, részint más módszerekkel. Ezek egyike azt mondja ki röviden, hogy az együtthatók multiplikatív volta szerepelhet Tauber-feltételként.

Az egyrétű függvények klasszikus elméletében is volt érdemleges hazai eredmény a szóbanforgó időszakban. Ezek csupán egyikére szorítkozva, Fejér Lipót szellemesen egyszerű észrevétele volt, amely szerint az egységkör belsejében való korlátosság és egyrétűség együtt Tauber-feltétel gyanánt tud működni, azaz ilyen függvények hatványsorai, ahol Abel-szummálhatók, ott konvergensek is. 1967 előtt nem volt világos, hogy a tényállás megmarad-e valamilyen formában a korlátosság követelményét elejtve, (ill. a nyilván szükséges $a_n \to 0$ feltétellel helyettesítve). Hazai származású az ezirányú első eredmény, amely szerint ha konvergencia nem

is, de (C, α)-szummálhatóság $\alpha > 2$ esetében igaz ez esetben is, és a konvergencia is azon némileg speciálisabb esetben, mikor az egyrétűség az origóra vonatkozólag csillagszerűséggel van helyettesítve. Érdekes eredményeket találtak továbbá a torzítási tétellel kapcsolatos extremumfeladatokra vonatkozólag (pl. enyhítve az egyrétűség követelményét). Születtek eredmények a Bloch-tétel ideaköréből is, valamint a Bieberbach sejtésre vonatkozólag.

Elég széles nemzetközi hatást váltott ki azon hazai eredmény, amely röviden azt mondja ki, hogy a lokális kerületi konvergencia nem konform invariáns. Érdekes tényállások derültek ki a lokális kerületi szummabilitással, az abszolút és egyenletes konvergenciával kapcsolatban is.

A hazai komplex függvénytani kutatás szoros kapcsolatban áll a matematika több más ágával, így a funkcionálanalízissel, valószínűségszámítással, sőt a gráfelmélettel is. Az elsőre példa a Pick—Nevanlinna tételre nyert új bizonyítás. A másodikra Rényi Alfréd bizonyítása Haymannak a 0-nemű nemnegatív együtthatós transzcendens egészfüggvény együtthatóinak eloszlására vonatkozó tétele, ha a gyökök a bal félsíkban vannak. A harmadik röviden úgy világítható meg, hogy a komplex függvénytan intenzív kapcsolatban van a potenciálelmélettel, utóbbi viszont ponthalmaz pontpárjai távolságainak eloszlásával; ez pedig gráfelméleti meggondolások és eredmények felhasználásával alulról becsülhető „kis" halmaz híján.

A polinomok analitikus elméletében is számos új — W. Specht idevágó 1958-as német Encyklopedia cikkében is ismertetett — eredmény származik magyar szerzőktől; ezek közül azt emelném ki, amely szerint, ha egy n-edfokú polinom abszolút maximuma az egységkör kerületén a két szélső együtthatóhoz képest „nem túl nagy", úgy gyökei az origó csúcsú szögterekben egyenletesen vannak eloszolva, egy „elég erős" értelemben. Hazai szerzőktől származik azon jelenség felfedezése a komplex approximációelméletben, hogy az egységkör belsejében analitikus és a zárt egységkörben folytonos függvények nevezetes osztályaira a racionális approximáció lényegesen erősebb lehet, mint az ugyanolyan fokú polinomapproximáció.

Születtek érdekes eredmények a kvázikonform leképezések elméletében is. Kiderült pl., hogy meglepő kevés követelmény már polinomszerű, ill. elliptikus függvényszerű viselkedést von maga után. Sőt ilyenszerű eredményeket már topológiai premisszákból le lehetett vezetni.

E tárgykörből egy sikeres monográfia is készült, Turán Pál »Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen« (1953) könyve, amely magyar és kínai nyelven is megjelent és lényegesen továbbfejlesztett alakja az Interscience Tracts sorozatban van megjelenés alatt.

Eddig a komplex függvénytan olyan területeiről volt szó, amelyeken hazai kutatók értek el eredményeket. Több terület tanulmányozása kezdődött el a Matematikai Kutató Intézetben; ilyen területek: a több komplex változós függvénytan (amely igen fontos tárgykör, és amelynek Tauber-típusú kérdéseiben már van mozgás), a moduláris formák elmélete, valamint a hatványsorok nemarchimedeszi elmélete, amelyek mindkettőjének sok köze van a számelmélethez. Teljesen fehér folt viszont egyebek közt a függvényalgebrákkal operáló approximációelmélet.

Javaslat. A komplex függvénytan aktív hazai művelői a Matematikai Kutató Intézet igen kis létszámú Komplex Függvénytani Osztálya köré csoportosulnak. A komplex függvénytannal foglalkozó matematikusok létszámának növelése feltétlenül szükséges. Erre — személyi oldalról — a lehetőség megvan, hiszen tehetséges fiatalok, részint hallgatók, már tartottak saját eredményeikről előadást az említett Osztály szemináriumain. A létszámnövelés annál is inkább indokoltnak tűnik, hiszen az aspirantúra bevezetése óta csak hárman lettek komplex függvénytani célki-

tűzéssel aspiránsok. A helyzet változása jelentősen függ az egyetemi előadásoktól, jelesül a speciálelőadásoktól. Ezek közé sorolhatók a problémamegoldó szemináriumok; ilyen szeminárium, munkájában Pólya—Szegő ismert könyvére támaszkodva, az ELTE-n már működik.

Végül közüljük azoknak a hazai matematikusoknak (nem teljes) névsorát, akik a felszabadulás óta komplex függvénytani eredményeket értek el: Alpár László kandidátus (Budapest), Deák Jenő (Budapest), Erdős Pál akadémikus (Budapest), Halász Gábor kandidátus (Budapest), Kátai Imre doktor (Budapest), Korányi Ádám (külföldön), Kővári Tamás (külföldön), Mikolás Miklós kandidátus (Budapest), Petruska György (Budapest), Rényi Alfréd akadémikus (meghalt), Rényi Kató kandidátus (meghalt), Szabados József doktor (Budapest), Szilárd Károly kandidátus (Budapest), Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus (Szeged), Szüsz Péter (külföldön), T. Sós Vera kandidátus (Budapest), Turán Pál akadémikus (meghalt).

Differenciálegyenletek

E fejezetben a differenciálegyenletekre, a variációszámításra és az operátorelméletre vonatkozó kutatásokkal foglalkozunk.

E tudományágak első hazai művelői közül Schlesinger Lajos, Vályi Gyula és Kürschák József munkásságáról kell említést tenni, későbbi művelői közül pedig elsősorban Haar Alfréd és Egerváry Jenő nevét kell megemlíteni. Haar Alfréd foglalkozott a parciális differenciálegyenletek unicitási kérdéseivel, variációszámítási eredményei pedig alapvetőek. Egerváry Jenő foglalkozott a klasszikus mechanika háromtestproblémájának megoldásával egyes speciális esetekben, továbbá a hővezetési differenciálegyenlet megoldásával időtől függő peremfeltételek mellett. A differenciál- és differenciaegyenletek közötti kapcsolatot is több dolgozatában vizsgálta, végül a mátrixszámítást is felhasználta differenciálegyenleteket megközelítő differenciaegyenletek megoldására. E jelentős előzmények ellenére korábban nem alakultak ki a differenciálegyenletek elméletének szélesebb körű hazai iskolái. Az utóbbi évtizedekben azonban jelentős előrehaladást történt mind a kutatási témák, mind pedig a kutatók számát illetően.

Differenciálegyenletek elméletével kapcsolatos kutatások ma már hazánkban több helyen folynak. Elsősorban az MTA Matematikai Kutató Intézetének Differenciálegyenletek Osztályáról és a JATE Bolyai Intézetében működő differenciálegyenletek elméletével foglalkozó csoportról kell említést tenni, de számos kutató foglalkozik differenciálegyenletekkel a Budapesti Műszaki Egyetemen, az ELTE-n, a Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetben, valamint a KLTE-n is.

A Matematikai Kutató Intézeten belül vizsgált legfontosabb kérdések a következők. Közönséges másodrendű differenciálegyenletek megoldásainak kvalitatív vizsgálata. (Ezen a tárgykörön belül főleg a megoldásfüggvény menetének leírásával, a megoldások aszimptotikus viselkedésével és a megoldások zérushelyeinek eloszlásával foglalkoznak; a vizsgált egyenlettípusok a Sturm—Liouville-egyenletek és ezeket a differenciálegyenleteket magukban foglaló félilineáris és nemlineáris egyenletek.) E vizsgálatok fontos eredménye volt a Bellman-lemma egy általánosítása, amelynek különösen jelentős visszhangja volt, és amely számos alkalmazásra talált. Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek megoldásrendszereinek tulajdonságai a rendszer szinguláris helyei közelében. Retardált differenciálegyenletek. Elliptikus és parabolikus parciális differenciálegyenletek megoldásának a tartomány peremén való viselkedéséből a priori becslés megadása a megoldásfüggvényre, illetőleg ennek gra-

diensére a tartomány belsejében és ezek alkalmazása a rugalmasságtan differenciálegyenleteire. Hullámegyenlet, illetve a megfelelő sajátértékprobléma. Sajátértékbecslések a variációszámítás direkt módszereinek felhasználásával. A Mikusiński-féle operátorszámítás és ennek alkalmazása a differencia-differenciál- és az integrálegyenletek területére.

A Bolyai Intézetben a differenciálegyenletek elméletével foglalkozó csoport legfontosabb vizsgált témái: Másodrendű differenciál- és funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak oszcillációs tulajdonságai. Másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedése, stabilitáselmélet, közelebbről az ún. Ljapunov-féle második módszer továbbfejlesztése. Közönséges és retardált argumentumú differenciálegyenletek megoldásainak közelítő módszerei. Konvolúciós típusú lineáris integrálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedése. Funkcionáldifferenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémák megoldásainak egzisztenciakérdései.

A Budapesti Műszaki Egyetemen vizsgált témák: autonom rendszerek periodikus megoldása, frekvencia-szinkronizálás, periodikus megoldások előállítása és ezek stabilitásának és izoláltságának vizsgálata, a hővezetés problémája, disztribúcióelmélet és a parciális differenciálegyenletek disztribúció-megoldásai, rekurziós megoldások, operátortranszformációk, parciális differenciálegyenletek közelítő megoldása közönséges differenciálegyenlet-rendszerre való visszavezetéssel.

Az ELTE-n folyt vizsgálatok, illetve eredmények a következők. Algebrai módszer alkalmazásával alsó becslést sikerült megadni nemlineáris differenciálegyenletek megoldásainak normájára, és ezáltal a stabilitás alsó korlátozása adódott. Elliptikus parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos nem korlátos tartományra felírt peremérték-problémák megoldásainak közelítése a korlátos esetre vonatkozó megoldásokkal; a gradiens módszer alkalmazása parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására. Variációszámítás; szükséges feltétel megadása különféle, n-edrendű diszkontinuus variációszámítási problémákra, különféle elégséges feltételek megadása egy- és többdimenziós variációszámítási feladatokra, az elégséges feltételeknél nagy szerepet játszó invariáns alapfüggvények legáltalánosabb osztályának előállítása n-edrendű, egydimenziós probléma esetén.

Elsősorban a differenciálegyenletek numerikus megoldásaival kapcsolatos kutatómunka folyik a Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetben. A vizsgált témák: Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek kezdetiérték-problémáinak numerikus megoldásai; a különböző gépi módszerek összehasonlítása. Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek sajátértékproblémái, szinguláris pont közelében korlátos megoldás-sokaságok kiválasztása, és az elméleti eredmények alkalmazása félig végtelen intervallumra kitűzött Strum—Liouville-feladatok megoldására és kvantummechanikai modellekre. Differenciáljátékok elmélete, egy speciális típusú differenciáljáték vizsgálata a Pontrjagin-módszer segítségével, ún. invariáns halmazok konstruálása. Parciális differenciálegyenletek megoldására szolgáló programgyűjtemény kidolgozása. Nemlineáris parciális differenciálegyenletek és egyenletrendszerek; többváltozós parabolikus differenciálegyenlet esetén bizonyítást nyert a véges differencia séma konvergenciája; elsőrendű kétismeretlenes kvázilineáris hiperbolikus differenciálegyenlet-rendszer megoldása inhomogén esetben. Szoboljev terek. Sztochasztikus differenciálegyenletek.

A KLTE-n szélesebb körű operátorelméleti és variációszámítási kutatások folynak; az operátorelmélet különböző kiterjesztéseivel és speciális „függvények" definiálásának problémáival, illetve a variációszámítás inverz problémájával foglalkoznak.

Differenciálgeometriával kapcsolatban variációszámítási kutatások folynak a Soproni Erdészeti és Faipari Egyetemen is.

A differenciálegyenletek elmélete más tudományok, így pl. a fizika, ezen belül is a mechanika, ballisztika, csillagászat, a kémia, biológia, a műszaki tudományok és a gyakorlati élet számára is különleges jelentőséggel bír. A differenciálegyenletek gyakorlati alkalmazását illetően megemlítjük, hogy az ipar egyre inkább igényli differenciálegyenletek megoldását. Erre a felmerülő és megoldásra váró problémák örvendetesen növekvő számából lehet következtetni. Ilyen problémákkal foglalkoznak a Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetben, a BME-n, az MTA Matematikai Kutató Intézetében és az ELTE-n.

Javaslatok. 1. A gyakorlati alkalmazásokkal kapcsolatban kívánatos hangsúlyozni, hogy a differenciálegyenletek kutatásának „elméleti" oldala fontos szerepet játszik a gyakorlatban felmerülő problémák megoldásában, elsősorban a modellalkotás fázisában, amely elengedhetetlen ahhoz, hogy differenciálegyenletekkel leírható folyamatok analizálásához a számítástechnika módszereit és eszközeit alkalmazni lehessen. Javasoljuk, hogy ezt a tényt a kiemelt kutatási témák kijelölésénél is vegyék figyelembe.

2. A differenciálegyenletek területe meglehetősen szétágazó, és sok olyan kutatási ág van, amelyet hazánkban nem művelnek. Ilyen például a közönséges differenciálegyenletek területén: a sajátfüggvények aszimptotikus viselkedése, sajátértékek eloszlása, dinamikus rendszerek, differenciálegyenlőtlenségek, differenciálegyenletek Banach- és egyéb absztrakt terekben; a parciális differenciálegyenletek területén: megoldások aszimptotikus viselkedése, differenciálegyenlőtlenségek, beágyazási tételek, hiperbolikus egyenletek és egyenletrendszerek, parciális differenciálegyenletek sokaságokon és függvényterekben. Természetesen nem várható, hogy a fent felsorolt tudományterületek mindegyikén a jövőben megfelelő szakember álljon rendelkezésünkre, a hazai kutató bázis ehhez túlságosan is kis létszámú. Javasoljuk viszont a kutatások kiterjesztését a dinamikus rendszerekre, amelyekkel már egy fiatalabb kutató kezd foglalkozni.

3. Valószínű, hogy a jövőben a numerikus módszerekkel kapcsolatos elméleti problémák (pl. konvergenciabecslések) előtérbe fognak kerülni, és funkcionál-differenciálegyenletekkel, optimális folyamatok elméletével és szabályozáselmélettel is többet fognak foglalkozni világszerte, mint eddig. Éppen ezért javasoljuk fiatal kutatók szovjet aspirantúrára küldését azért, hogy e tárgykörök problematikájával megismerkedjenek.

4. Javasoljuk, hogy a jövőben a Bolyai Társulat közreműködésével gyakrabban kerüljön megrendezésre kisebb méretű, a differenciálegyenletek elméletének egy-egy szűkebb ágazatával (pl. stabilitáselmélet, differenciálegyenletek numerikus megoldása) foglalkozó nemzetközi konferencia.

5. Javasoljuk továbbá, hogy a Bolyai János Matematikai Társulat közreműködésével a differenciálegyenletek és alkalmazásaik témakörből is szerveztessék egy-két hetes nyári iskola neves külföldi előadók meghívásával.

6. A differenciálegyenletek egyetemi oktatásának fejlesztése is indokolt.

Végül közöljük azon matematikusok (nem teljes) névsorát, akik a szóbanforgó témakörben a felszabadulás óta eredményeket értek el, ill. e témakörben érdekeltek: Aczél János (külföldön), Adler György kandidátus (Budapest), Bajcsay Pál kandidátus (Budapest), Balla Katalin (Budapest), Bihari Imre kandidátus (Budapest), Bleyer András (Budapest), Bognár János kandidátus (Budapest), Czách László kandidátus (Budapest), Czipszer János (meghalt), Egerváry Jenő akadémikus (meghalt), Elbert Árpád kandidátus (Budapest), Farkas Miklós doktor (Budapest),

Fényes Tamás kandidátus (Budapest), Fenyő István doktor (Budapest), Fodor János (Budapest), Freud Géza (külföldön), Gergely József kandidátus (Budapest), Gesztelyi Ernő kandidátus (Debrecen), Győri István kandidátus (Szeged), Hatvani László kandidátus (Szeged), Hegedűs Jenő (Szeged), Hoffmann Andor (Budapest), Kardos Gilbert (külföldön), Kersner Róbert (Budapest), Kósa András kandidátus (Budapest), Lipcsei Zsolt (Budapest), Kis Ottó kandidátus (Budapest), Kosik Pál (Budapest), Makai Endre doktor (Budapest), Mályusz Károly (Budapest), Meskó Attiláné (Budapest), Moór Arthur doktor (Sopron), Pál Sándor (külföldön), Pintér Lajos kandidátus (Szeged), Rapcsák András lev. tag (Debrecen), Rózsa Pál kandidátus (Budapest), Seitz Károly kandidátus (Budapest), Sólyi Antal (meghalt), Simon László kandidátus (Budapest), Sonnevend György kandidátus (Budapest), Száz Árpád (Debrecen), Szelezsán János kandidátus (Budapest), Szép András (Budapest), Szepesvári István (Budapest), Szidarovszky Ferenc (Budapest), Szilágyi Tivadar (Budapest), Tarnay Gyula (Budapest), Terjéki József (Szeged), Tóth Árpád (Budapest), Turán Pál akadémikus (meghalt), Turczi Gyula (Budapest), Urbánszky Ferenc (Budapest), Veidinger László kandidátus (Budapest), Vicsek Tamásné (Budapest).

Függvényegyenletek

A hazai függvényegyenletekre vonatkozó kutatások a felszabadulás óta alakultak ki, és már komoly hagyományai vannak, s általában megállapítható, hogy a kutatások napjainkban is termékenyek és előremutatóak. Tekintettel arra, hogy a függvényegyenletek elmélete számos más matematikai diszciplinához kapcsolódik, igen nehéz feladat a kutatások teljes áttekintése. Ugyanis az elmélet különböző fejezeteiben algebrai, geometriai vagy valószínűségelméleti fogalomalkotásokra építenek, ezért a kutatások egy jelentős része nem tartozik az analízis témakörébe. Mégis — a szétszórt részek egysége érdekében — megpróbáljuk röviden felvázolni az egyes területek főbb kutatási irányait.

1. *Algebrai jellegű kutatások.* A különböző algebrai struktúrákon (pl. kvázicsoportok, csoportok, gyűrűk, testek) értelmezett függvényegyenletek elméletében jelentős eredményekkel és kutatói bázissal rendelkezünk. A függvényegyenletek bővítéselmélete hazai kezdeményezésekre alakult ki, s a téma analízis vonatkozásai is érdekesek.

2. *Analízis jellegű kutatások.* A függvényegyenletek analízis eszközeivel való megoldása klasszikus irányzat, amelynek lényege abban foglalható össze, hogy a mérhető, integrálható, folytonos és differenciálható megoldások többnyire „közel" esnek egymáshoz. Ebben a témában intenzív vizsgálatok folytak és folynak a különböző középértékek és információmértékek jellemzései kapcsán felmerülő egyenletekre vonatkozóan. Eredményesen alkalmazták egyes egyenletekre a disztribúcióelmélet és az operátorszámítás módszereit.

Külön kell megemlékeznünk a funkcionálanalízis módszereinek hatékonyságáról néhány klasszikus — valamely lineáris normált térben is értelmezhető — egyenlet vizsgálatánál. Számos esetben a topologikus algebrai struktúrák elméletének módszerei vezettek eredményre.

3. *Geometriai jellegű kutatások.* Hazánkban elsősorban a geometriai objektumok elméletében felmerülő függvényegyenletek vizsgálata áll a középpontban. Ezek a vizsgálatok egyrészt ismert eredmények újszerű megvilágításához, másrészt az eredmények sajátos módon való továbbfejlesztéséhez vezettek. A felmerülő egyenletek általános megoldásai jelentősen hozzájárultak a klasszifikációelmélet és a komitánselmélet fejlődéséhez.

4. *Valószínűségelméleti kutatások.* A különböző eloszlásfüggvényekre vonatkozó ellemzési problémák olyan függvényegyenletekre vezetnek, amelyek megoldásában elsősorban az analízis eszközei játszanak alapvető szerepet. Ebben a vonatkozásban számos magyar eredmény született. Az információelmélet alapjaira vonatkozó kutatások is érdekes és jelentős függvényegyenletek megoldását tették szükségessé, s ebben a témában számos eredmény fűződik magyar matematikusok nevéhez.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a függvényegyenletekre vonatkozó kutatások spektruma igen széles hazánkban. A főbb kutatói bázisok vidéken alakultak ki (Debrecen, Miskolc, Gödöllő, Sopron).

Az egyetemi oktatásban az elemi analízis ismeretektől eltekintve elsősorban speciális kollégiumokon van szó függvényegyenletekről. Ezek alkalmat adnak a kutatói bázis növelésére.

Magyar matematikusok rendszeresen részt vesznek a témához kapcsolódó külföldi kollokviumokon. Rendszeresen rendeznek hazánkban is nemzetközi kollokviumokat (Sárospatak, Balatonvilágos, Miskolc, Debrecen), legutóbb 1973-ban, az MTA támogatásával szerveztek nemzetközi kollokviumot Debrecenben.

Javaslat. Az ilyen irányú kollokviumok támogatását a jövőben is javasoljuk.

Végül közöljük azoknak a matematikusoknak (nem teljes) névsorát, akik a felszabadulás óta e tárgykörben eredményeket értek el: Aczél János (külföldön), Balogh Albert (Budapest), Csikós Miklós (Gödöllő), Daróczy Zoltán doktor (Debrecen), Ecsedi István (Miskolc), Erdős Jenő kandidátus (Debrecen), Erdős Pál akadémikus (Budapest), Fenyő István doktor (Budapest), Fenyves Ferenc (Budapest), Gesztelyi Ernő kandidátus (Debrecen), Gyires Béla doktor (Debrecen), Hosszú Miklós doktor (Gödöllő), Járai Antal (Debrecen), Kátai Imre doktor (Budapest), Kertész Andor doktor (meghalt), Lajkó Károly (Debrecen), Losonczi László kandidátus (Debrecen), Makai Imre kandidátus (Debrecen), Maksa Gyula (Debrecen), Moór Arthúr doktor (Sopron), Nagy Béla (Budapest), Palásti Ilona kandidátus (Budapest), Rényi Alfréd akadémikus (meghalt). Rimán János (Debrecen), Száz Árpád (Debrecen), Száz Géza (Budapest), Székelyhidi László (Debrecen), Varga Ottó akadémikus (meghalt), Vincze Endre kandidátus (Miskolc).

Approximációelmélet

Ez a matematikának korábban inkább „konstruktív függvénytan" elnevezéssel illetett ága hazánkban igen szép hagyományokkal rendelkezik. Az analízisen belül elég pontosan elhatárolható, mégis szükséges megjegyezni, hogy egyik határterületével, az ortogonális függvénysorok elméletével a jelen tanulmány egy külön fejezetben foglalkozik.

Nem feladatunk itt Fejér Lipót életművének méltatása, annyit azonban meg kell említenünk, hogy az ő munkássága alapozta meg a magyar approximációelméleti iskola világhírnevét. Hivatkozásul talán elég csak a Fourier-sorok részletösszegeinek számtani közepét, valamint a róla elnevezett interpolációs eljárással kapcsolatos eredményeit említeni. E tárgykörben számos eredményt ért el Haar Alfréd, Feldheim Ervin és Grünwald Géza is. A felszabadulás előtti időszakban is számos magyar matematikus választotta részben vagy teljes egészében kutatási területéül az approximációelméletet.

A felszabadulás után az approximációelméleti kutatások még fokozottabb mértékben továbbfolytatódtak. Az ilyen irányú hazai vizsgálatok szempontjából jelentős előrelépés volt az, hogy 1961-ben a Matematikai Kutató Intézetben megalakult az Approximációelméleti Csoport, amely később osztállyá szerveződött át.

Jelenleg hazánkban a Matematikai Kutató Intézetben az ELTE, a JATE és a

Budapesti Műszaki Egyetem egyes tanszékein foglalkoznak approximációelmélettel; az ilyen irányú kutatásokban érdekelt matematikusok száma — amint az a továbbiakból kitűnik — igen nagy.

Ha az approximációelméleti kutatások helyzetét vizsgáljuk — világviszonylatban —, akkor megállapíthatjuk, hogy jelenleg két, elég élesen elkülönülő irányzattal találkozhatunk. Az egyiket nevezhetnénk klasszikusnak, mert módszereit tekintve a klasszikus analízissel dolgozik, bár eredményei legtöbbször modernek, és a numerikus analízisben is alkalmazásra találnak. A másik irányzat absztrakt terekben és főleg egzisztencia- valamint unicitási kérdésekkel foglalkozik, modern módszerekkel. A nálunk elért eredmények szinte kizárólag az első csoportba tartoznak. Hogy mennyi érdekes és kutatásra érdemes problémát rejt még az ún. klasszikus approximációelmélet, arra meggyőző bizonyítékot jelent a racionális approximációelméletében tíz évvel ezelőtt bekövetkezett meglepő fordulat, amivel a későbbiekben majd részletesen foglalkozunk.

Az elért eredményekkel a következő csoportosításban foglalkozunk:

1. Polinomiális és spline-approximáció véges és végtelen intervallumon,
2. Nemlineáris approximáció,
3. Interpoláció és mechanikus kvadratúra,
4. Fourier-sorfejtéseken alapuló approximáció,
5. Ortogonális polinomok,
6. Pozitív lineáris operátorok konvergencia- és szaturációs problémái,
7. Iterációelmélet.

1. A véges intervallumon való polinomiális approximációval kapcsolatban a Timan—Teljakovszkij—Dzjadik tételekre többféle konstruktív, interpolációs bizonyítást adtak, s ezek élénk nemzetközi visszhangot váltottak ki. Az egész számegyenesen való súlyozott polinomapproximáció elméletében meglehetősen általános súlyfüggvények mellett, megfelelően definiált folytonossági modulus segítségével sikerült direkt és fordított tételeket bebizonyítani. Igen jelentősek a véges és végtelen intervallumon való egyoldali polinomapproximáció esetén elért úttörő jellegű eredmények. Megindultak a kutatások az alkalmazások szempontjából jelentős spline-approximáció területén is.

2. A nemlineáris approximáció témakörében elsősorban a racionális approximációt kell említenünk. Tíz évvel ezelőtt D. Newman bebizonyította, hogy a számos approximációelméleti témában alapvető szerepte játszó $|x|$ függvény sokkal jobban approximálható törtfüggvényekkel, mint ugyanannyiadfokú polinomokkal. A meglepő eredményt ideiglenes megtorpanás követte, mert úgy látszott, hogy az nem általánosítható bizonyos klasszikus függvényosztályokra. Végül is hazai kutatóknak sikerül feltérképezni azokat a — meglehetősen általános — függvényosztályokat, amelyekre az $|x|$ függvénynél tapasztalt, említett jelenség kisebb-nagyobb mértékben megismétlődik. Igen széleskörű kutatások indultak meg, amelyekbe külföldi kutatók is bekapcsolódtak, ill. az eredményeket továbbfejlesztették. Sikerült komplex változós függvényekre is átvinni bizonyos tételeket, s az ún. fordított tételek irányában is történt haladás. Ugyancsak érdekes eredmények születtek az egészfüggvények végtelen intervallumon való racionális approximációjával kapcsolatban. Az ún. paraméteres approximáció esetén a racionális approximációval meglepően rokon tételeket sikerült kimutatni.

3. Az interpolációelmélet sokak által művelt és egyik legeredményesebb kutatási téma. A legtöbb eredmény a hazai matematikusok által mintegy 20 éve kezdeményezett, ún. durva és finom interpolációval kapcsolatban keletkezett. Az elméletet kiterjesztették általánosabb függvényosztályokra, valamint kvadratúra-eljárásokra

is. Az utóbbi években ugyancsak sokat foglalkoztak az Hermite—Fejér interpolációval kapcsolatos problémákkal, valamint a hézagos interpolációval is. Újabban sikeresen vizsgálták a végtelen intervallumon ortogonális polinomok gyökein vett Lagrange-interpolációs eljárásokat. Jelentős eredmény a Bernstein—Rogosinski-féle eljárás általánosításaira vonatkozó hibabecslés legjobb konstansainak meghatározása is.

4. A Fourier-sorfejtéseken alapuló approximáció elméletében számos jelentős eredmény adódott. Ilyenek pl. egyes függvényosztályok approximációelméleti jellemzései (amelyeknél fontos szerepet játszanak bizonyos, a Banach-terekben való approximációra vonatkozó általános lemmák), az általános szummatórikus függvénnyel generált közepekkel való közelítések nagyságrendjének meghatározása, a Fourier-sor Abel-közepeivel való approximáció pontos konstansának meghatározása, alsó korlát megadása általános esetben az approximáció nagyságrendjére, a pontonkénti approximációra vonatkozó eredmények, az erős approximáció fogalmának bevezetése és tulajdonságainak vizsgálata, (amelynek során sikerült feltárni az approximáció rendje, kitevője és a függvény strukturális tulajdonságai közti kapcsolatot), a Bernstein—Rogosinszki-közepekkel való közelítések legjobb konstansának meghatározása.

5. Igen intenzív vizsgálat folyt az egész számegyenesen ortogonális polinomok gyökeinek eloszlására és egyéb tulajdonságaira vonatkozólag. Meglehetősen általános súlyfüggvények mellett sikerült a legnagyobb és legkisebb gyökre vonatkozólag aszimptotikus becslést adni. A témából Freud Géza egy sikeres monográfiát készített »Orthogonale Polynome« címmel, amely 1969-ben jelent meg, és amelyet angol nyelvre is lefordítottak.

6. A pozitív lineáris operátorokra vonatkozólag Korovkin-típusú tételek születtek. Vizsgálták ezen kívül az ún. véges oszcillációjú magfüggvénnyel definiált lineáris operátorok konvergenciáját is. A diszkrét lineáris operátorok konvergencia- és szaturációs problémájában érdekes, a folytonos operátorok esetétől eltérő jelenségek feltárására került sor.

7. Számos eredmény adódott a Newton—Raphson féle és az általános iterációs gyökközelítő eljárások konvergenciájával kapcsolatban.

Publikációkat, rendezvényeket és a nemzetközi kapcsolatokat illetően megjegyezzük, hogy a hazai approximációelméleti publikációk száma igen magas, különösen sok dolgozat jelenik meg az akadémiai Acta-ban.

Igen aktív a kutatók részvétele a különböző külföldi nemzetközi kollokviumokon, különösen az oberwolfachi approximációelméleti kollokviumokon. Kiemelkedően sikeres volt az 1969-ben megrendezett, első magyar—szovjet konstruktív függvénytani kollokvium, amelyről az Akadémiai Kiadó egy kollokviumi kötetet is megjelentetett.

E tárgykör kutatóinak nemzetközi kapcsolatai igen széleskörűek, különösen a szovjet, bolgár, román ill. USA-bel, kanadai és NSZK-beli matematikusokkal. Számos magyar kutatót hívtak meg hosszabb-rövidebb időre vendégprofesszornak, és sok külföldi vendég látogatott hozzánk tapasztalatcserére.

Javaslatok. 1. Javasoljuk, hogy ez a nálunk igen intenzíven művelt tudományterület a jövőben is kellő támogatást kapjon; kívánatos, hogy időről-időre tehetséges fiatalok érdeklődése irányuljon erre a területre.

2. Az ELTE-n néhány év óta approximációelméleti előadást tartanak matematikus hallgatók számára; javasoljuk az ilyen irányú egyetemi oktatás fejlesztését, amely alapul szolgálhat az utánpótlás biztosítására.

3. Javasoljuk a spline-approximációkkal kapcsolatos kutatások fejlesztését.

Végül közöljük azoknak a kutatóknak (nem teljes) névsorát, akik az approxi-

mációelmélet terén a felszabadulás óta számottevő eredményt értek el: Alexits György akadémikus (Budapest), Balázs János kandidátus (Budapest), Balázs Katalin (Budapest), Barna Béla doktor (Debrecen), Czipszer János (meghalt), Egerváry Jenő akadémikus (meghalt), Erdős Pál akdémikus (Budapest), Fejér Lipót akadémikus (meghalt), Freud Géza (külföldön), Joó István (Budapest), Kis Ottó kandidátus (Budapest), Králik Dezső (Budapest), Leindler László lev. tag (Szeged), Németh József (Szeged), Névai Pál kandidátus (Budapest), Radnay Józsefné (Budapest), Rényi Alfréd akadémikus (meghalt), Szabados József doktor (Budapest), Szabó Zoltán (Debrecen), Szász Pál doktor (Budapest), Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus (Szeged), Szüsz Péter (külföldön), Tandori Károly akadémikus (Szeged), Turán Pál akadémikus (meghalt), Vértesi Péter kandidátus (Budapest).

Ortogonális függvénysorok

Az ortogonális függvénysorok, ezen belül a Fourier- és az ortogonális polinomsorok elmélete a matematikai analízis egyik klasszikus ága. E tudományág fejlődése — ha nem is olyan nagy mértékben, mint pl. a 30-as években — jelenleg is tovább tart; az utóbbi években pl. L. Carleson és R. Hunt vizsgálatai következtében a Fourier sorok konvergenciájára vonatkozóan régóta tisztázatlan kérdéseket sikerült megválaszolni, és új módszereket sikerült kiépíteni. A klasszikus vizsgálatok egyre inkább áttolódnak az absztrakt harmonikus analízis területére, de a klasszikusabb eredményeknek is újabb alkalmazása adódik a matematika legkülönbözőbb területein; így pl. a szeparábilis Banach-terek bázis-problémájának Enflo-féle megválaszolása a Walsh-kifejezések bizonyos tulajdonságainak felhasználásán alapul, és Bocskarjov azon nevezetes eredményének bizonyítása, hogy a zárt egységkörben folytonos és nyitott egységkörben analitikus függvények osztályában van bázis, speciális ortogonális rendszer tulajdonságain múlik.

E tudományterületen a magyar matematikusok már a század eleje óta döntő fontosságú eredményeket értek el. Teljesség igénye nélkül utalni szeretnék Fejér Lipót Fourier-sorok Cesàro-szummációjával kapcsolatos eredményeire, Riesz Frigyes nevezetes tételére az általánosan ortogonális rendszerekkel kapcsolatban — az ún. Riesz—Fischer tételre —, vagy Haar Alfréd nevezetes ortogonális rendszerére, az ún. Haar-féle függvényrendszerre; eredményeik világszerte, minden képzettebb matematikus számára ismertek. De említést kell tenni Csillag Pálról, Fekete Mihályról, Grünwald Gézáról és Sidon Simonról is; különösen Sidon munkássága volt jelentős a Fourier-sorok elméletében; eredményei igen fontos helyet foglalnak el a Fourier-sorokról írt monográfiákban.

Nem csoda, hogy ilyen hagyományok után az ortogonális sorfejtések terén folyó hazai kutatások az 50-es évektől kezdve intenzív módon továbbfolytatódtak. A vizsgálatok kiszélesítéséhez hozzájárult az is, hogy az ilyen irányú vizsgálatok akkor különösen az érdeklődés előterében voltak, és az aspirantúra intézményének felhasználásával sikerült erre a területre számos fiatal matematikus érdeklődését ráirányítani.

Jelenleg körülbelül 20-ra tehető azoknak a hazai matematikusoknak a száma, akik Fourier-sorok, ortogonális polinomsorok vagy általános ortogonális sorok elméletével kapcsolatos eredményeket értek el (ebbe a számba nem számítottuk be azokat, akik csak kifejezetten approximációs kérdésekkel foglalkoznak). A kutatók viszonylag koncentráltabban dolgoznak. Jelentősebb bázis elsősorban az ELTE-n a Matematikai Kutató Intézetben és a JATE-n alakult ki; ilyen irányú vizsgálatok folynak még a Budapesti Műszaki Egyetemen is.

Az utóbbi 30 évben az ortogonális sorok elmélete területén a hazai kutatások

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

elsősorban az alábbi részterületekre terjedtek ki: 1. általános ortogonális sorok konvergencia- és szummációs kérdései, 2. ortogonális polinomsorok, 3. Fourier-sorok konvergencia- és szummációs-kérdései, 4. speciális ortogonális sorok, elsősorban Haar- és Walsh-sorok vizsgálata, 5. az erősen multiplikatív és multiplikatív rendszerek vizsgálata.

Az 1. téma terén elért eredmények közül a következőket említjük. A Menysov—Rademacher-féle konvergencia-kritérium szükségességének kimutatása monoton együtthatósorozatok esetén, a Menysov—Rademacher-kritérium különböző élesítései; általános ortogonális sorok konvergenciájára, különböző típusú szummálhatóságára és feltétel nélküli konvergenciájára szükséges és elegendő feltételek megadása; általános ortogonális sorok különböző típusú szummálhatóságának, abszolút, erős és az ún. nagyon erős szummálhatóságának vizsgálata során nyert eredmények, az ún. Lebesgue-függvények jelentőségének alaposabb feltárása, az általános ortogonális sorokra vonatkozó divergencia-tételek átvitele ortogonális polinomrendszerekre, tetszőleges (nem ortogonális) függvényrendszerek szerinti kifejezésekre vonatkozó tételek.

A 2. téma terén számos eredmény adódott klasszikus és általános ortogonális polinomsorok konvergenciájára, szummálhatóságára és erős szummálhatóságra.

A 3. téma vizsgálata során nyert eredmények igen széleskörűek, amelyek közül a következőket említjük meg. A klasszikus Dini—Lipschitz-kritérium „egyoldalúsítása", a négyzetesen integrálható függvények Fourier-sora konvergenciájára vonatkozó, a Carleson-féle eredményeket megelőző eredmények, példa megadása olyan 2π-szerinti periodikus folytonos $f_0(x)$ függvényre, amelynek Fourier-sora az $x=0$ pontban konvergens, de az $f_0(\operatorname{arctg} x)$ Fourier-sora az $x=0$ pontban divergens, négyzetesen integrálható függvények Fourier-sorának átrendezése esetén előálló divergenciajelenségek vizsgálata, a hézagos trigonometrikus rendszer Lebesgue-függvényei nagyságrendjének vizsgálata, az ún. strukturális tételek, amelyek a kifejtett függvény strukturális tulajdonságai és a Fourier-sor konvergencia- és szummációs tulajdonságai között teremtenek szoros kapcsolatot; ezek a tételek egyrészt számos különböző klasszikus eredményt foglalnak össze, másrészt új konvergencia- ill. szummálhatósági kritériumokat adnak. A Fourier-sorok abszolút konvergenciájával kapcsolatban is számos eredmény adódott. Számos eredmény vonatkozik Fourier-sorok különböző szummációs tulajdonságaira, ilyenek pl. a Nörlund-szummáció ún. Lebesgue-effektivitására vonatkozó tételek, és az erős approximáció vizsgálata során nyert különböző eredmények. Ide tartoznak azok a tételek, amelyek a kifejtett függvény integrálhatósági tulajdonságai és a Fourier-együtthatók viselkedése között teremtenek kapcsolatot; ilyenek például az ún. beágyazási tételek.

A 4. téma vizsgálata terén különösen számos eredmény adódott a Walhs-sorok konvergenciájára és szummációjára vonatkozóan. Ide tartoznak a Haar-sorok abszolút konvergenciájára, valamint a Haar-típusú rendszerekre vonatkozó eredmények. A Walsh-sorokra vonatkozó kutatások újabban kiszélesedtek, és a martingálelmélet, valamint a Carleson-féle elmélet felhasználásával egészen új típusú, általános konvergencia-tételek adódtak szorzatrendszerek szerinti kifejtések esetére, amelyek számos korábbi tételt tartalmaznak, ill. általánosítanak.

Az 5. irányú vizsgálatok megindításában és a témakör kidolgozásában magyar matematikusoké volt az úttörő szerep. Az eredményeknek valószínűségelméleti alkalmazása is jelentős, amennyiben ezek alapján különböző nagy számok törvényei adódnak, bizonyos értelemben gyengén függő valószínűségi változókra. Ide tartoznak a multiplikatív rendszerekre vonatkozó iterált logaritmustétellel és a négyenként multiplikatív rendszerekkel kapcsolatos eredmények.

Az ortogonális sorok témakörében az elmúlt években két sikeres monográfia jelent meg hazai szerzőktől, Alexits György: »Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen« (1960) (később angol és orosz nyelven is kiadták), valamint Freud Géza előbb említett könyve.

A jelenlegi vizsgálatokról általában a következőket lehet megemlíteni. A vizsgálatok igen nagyszámú eredményre vezettek; az eredmények főbb része szélesebbkörű elismerő nemzetközi visszhangot keltett; az eredmények elsősorban szovjet matematikusok eredményeihez kapcsolódnak, de élénkebb kapcsolat alakult ki elsősorban kanadai, NSZK-beli, japán, USA-beli és lengyel matematikai iskolákkal is.

Javaslatok. 1. Javasoljuk, hogy ez a nálunk hagyományos kutatási terület a jövőben is kellő támogatást kapjon; kívánatos, hogy a jövőben erre a területre kellő számú tehetséges fiatal érdeklődése irányuljon, e célból az aspirantúra lehetőségét is biztosítani kell tehetséges fiatalok számára.

2. Javasoljuk, hogy olyan nálunk kevésbé hagyományos területeken is megindduljon a kutató munka, amelyeken külföldön már intenzív vizsgálatok folynak; gondolunk itt pl. az absztrakt harmonikus analízisre és a Carleson—Hunt-féle kérdéskörre.

Végül közöljük azon kutatók (nem teljes) névsorát, akik ezen a területen az utóbbi 30 évben eredményt értek el: Alexits György akadémikus (Budapest), Alpár László kandidátus (Budapest), Berkes István (Budapest), Balatoni Ferenc (meghalt), Csernyák László kandidátus (Szeged), Erdős Pál akadémikus (Budapest), Freud Géza (külföldön), Gál István (külföldön), Halász Gábor kandidátus (Budapest), Komlós János (Budapest), Králik Dezső kandidátus (Budapest), Leindler László lev. tag (Szeged), Makai Endre doktor (Budapest), Mikolás Miklós kandidátus (Budapest), Móricz Ferenc kandidátus (Szeged), Névai Pál kandidátus (Budapest), Pál László kandidátus (Budapest), Rényi Alfréd akadémikus (meghalt), Révész Pál doktor (Budapest), Schipp Ferenc doktor (Budapest), Szalay István (Szeged), Szép András (Budapest), Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus (Szeged), Tandori Károly akadémikus (Szeged), Turán Pál akadémikus (meghalt).

Funkcionálanalízis

A funkcionálanalízishez sorolhatók mindazok a kutatások, amelyeknek a végtelen dimenziós vektorterek és a rajtuk értelmezett függvények algebrai és topologikus vizsgálata a tárgya. Ehhez a témakörhöz a következő részterületek tartoznak: a lineáris topologikus terek általános elmélete; lokálisan konvex terek; a normált terek, a Hilbert-tér és operátorainak, ill. operátoralgebráinak vizsgálata; spektrálelmélet és operátorfélcsoportok; normált algebrák; függvényalgebrák; függvényterek, Orlicz-terek, Szoboljev-terek; disztribúciók; Mikusiński-féle operátorszámítás; vektorhálók; függvényegyenletek; variációszámítás, ergodelmélet; differenciálás absztrakt terekben; csoportelőállításelmélet; differenciál- és integráloperátorok. Ebben a fejezetben az itt felsorolt szakágazatok közül mindegyik olyannal foglalkozunk, amelyben magyar kutató ért el számottevő eredményt 1945 után, kivételt képez azonban a függvényegyenletek, a differenciálegyenletek elmélete, a variációszámítás és a Mikusiński-féle operátorszámítás, amelyekkel más fejezetben foglalkozunk.

A hazai funkcionálanalízis-kutatásoknak még a század elejére visszanyúló kiváló hagyományai vannak. Riesz Frigyes 1913-ban megjelent könyvével az elmélet egyik megalapozójává vált. Haar Alfréd 1933-ban felfedezte a róla elnevezett invariáns csoportmértéket, amely a modern matematika nélkülözhetetlen segédesz-

köze. Szőkefalvi-Nagy Béla 1942-ben megjelent »Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes« c. könyve volt a Hilbert-tér lineáris operátoraira vonatkozó eredmények első modern, kompakt összefoglalása.

A funkcionálanalízis terén a felszabadulás óta elért számos eredmény közül csak egy néhányra tudunk rámutatni.

Ergodikus tételek általánosítása és a korábbi bizonyítások lényeges egyszerűsítése.

A perturbációelméletben, komplex függvénytani segédeszközök segítségével elért eredmények, amelyek F. Rellich tételeit messzemenően általánosítják, és az eredeti bizonyításokat lényegesen egyszerűsítik.

Bizonyítást nyert az is, hogy ha egy Hilbert-tér-operátor pozitív és negatív egész kitevős hatványainak normái fix korlát alatt maradnak, akkor az operátor hasonló egy unitér operátorhoz; ha csak a pozitív kitevős hatványok normáiról tesszük fel a korlátosságot, akkor az operátor kompaktságának kikötése mellett az operátor kontrakcióhoz hasonló; ezek az eredmények szintén nagy nemzetközi visszhangot keltettek, és további vizsgálatok kiinduló pontjai lettek.

Jelentősek a monoton mátrixfüggvényekkel kapcsolatos vizsgálatok, amelyek Löwner eredményeit fejlesztik tovább, Pick—Nevanlinna-típusú interpolációs kérdéseket közelítenek meg spektrálelmélet segítségével.

Külön kiemelkedők a dilatációelméleti vizsgálatok. A dilatációelmélet kialakulása 1953-ban kezdődött; az elmélet létrejöttében és kiépítésében magyar matematikus végezte az úttörő szerepet. A dilatációelmélet egyik következménye az, hogy a Hilbert-tér kontrakcióira kanonikus modellt ad meg. A modellelmélet többek között a klasszikus komplex függvénytan fogalmait általánosító vektor értékű belső és külső függvények vizsgálatán alapszik. A dilatációelméleti eredmények nagy nemzetközi visszhangot keltettek, számos alkalmazásra találtak, és ezt az elméletet számos külföldi matematikus választotta kutatási témául.

A Hilbert-tér-operátorokkal kapcsolatos további vizsgálatok a Weyl-féle felcserélési relációra, az unicelluláris operátorokra, és a nem-folytonos leképezések Hilbert-terekben történő mátrixreprezentációjára vonatkozó eredményekre vezettek. Jelentős eredmények adódtak az indefinit metrikájú terekkel kapcsolatban is. Az elméleti fizikához különösen szorosan kapcsolódnak pl. a sugár-reprezentációk folytonosságára, a Hilbert-hálók tenzori szorzatára és a Heisenberg-féle bizonytalansági relációra vonatkozó eredmények.

Számos értékes eredmény adódott az operátoralgebrák területén. Bizonyítást nyert, hogy van két egymással nem izomorf III típusú faktor. A magyar matematikusok által bevezetett ún. G-véges Neumann-algebrákra vonatkozó vizsgálatok nemzetközi visszhangra találtak, és szerepet kaptak a kvantumelméletben is. Jelentősek a C^*-algebrák axiomatikus elméletébe vágó eredmények; többek között megoldást nyert Araki és Elliott egy problémája is. A Banach-algebrák elméletében végzett kutatások területéről kiemelkedők a szorzásoperátorok elméletében elért, nemzetközi visszhangra talált eredmények.

Foglalkoztak a sorelméletben szerepet játszó speciális Banach-terekkel, valamint Banach-terek differenciálgeometriai tulajdonságaival is. A Riesz-féle reprezentációs tétel bizonyos értelemben általánosítást nyert, továbbá nemzetközi visszhangot keltő eredmények születtek a mátrixos Toeplitz-formák elméletében.

A funkcionálanalízis tárgykörben a felszabadulás óta három monográfia jelent meg. 1952-ben Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla «Leçons d'analyse fonctionnelle» c. könyve, amely hat kiadást ért meg, és lefordították angol, német, orosz, japán és kínai nyelvre is. Ez a monográfia a matematikában és az elméleti fizikában állandóan

idézett könyv; a fiatalabb matematikusok egész sora ebből, ill. az előbb említett »Spektraldarstellung«-ból ismerkedett meg a funkcionálanalízis alapjaival. A dilatációelméleti eredményeket Szőkefalvi-Nagy Béla és C. Foiaş román matematikus 1967-ben «Analyse harmonique des opérateurs dans l'espace de Hilbert» c. monográfiájukban foglalták össze, a könyv második, átdolgozott kiadása 1970-ben angolul jelent meg és oroszra is lefordították. 1974-ben pedig az »Ergebnisse« sorozatban jelent meg Bognár János »Indefinite inner product spaces« c. monográfiája, amely a tárgykörben az első ilyen összefoglaló mű.

Magyarországon nemzetközi színvonalú funkcionálanalízis kutatások folynak, sőt hazánk a funkcionálanalízis egyik világméretű bázisa. A szegedi Acta a dilatációelmélet és általánosabban a funkcionálanalízis egyik legfontosabb folyóirata világviszonylatban is.

Javaslatok. Annak ellenére, hogy a hazai funkcionálanalízis kutatások az előzőekben felsorolt nagy eredményekre vezettek, a kutatások kiszélesítése mind a kutatók számát, mind pedig a vizsgálatok körét illetően, indokoltnak tűnik.

Jelenleg ugyanis viszonylag igen kis létszámú hazai kutatógárda foglalkozik funkcionálanalízissel; másrészt e témakör kutatására csak egyetlen, Szegeden kialakult kis létszámú kutatóbázis áll rendelkezésre.

1. Elsősorban javasoljuk a szegedi kutatóbázis létszámának lényeges növelését. Javasoljuk továbbá, hogy a hazai funkcionálanalízis kutatások bázisát az ELTE-n és a Matematikai Kutató Intézetben is fejlesszék ki.

2. Javasoljuk a hazai funkcionálanalízis kutatások spektrumának kiszélesítését is. Fejlesztendő területek: csoportelőállítások elmélete, a funkcionálanalízis numerikus analízisbeli alkalmazásai, valamint az absztrakt harmonikus analízis (együttműködésben a klasszikus harmonikus analízist művelő matematikusokkal).

3. Megemlítjük még, hogy jelenleg a funkcionálanalízis fiatal tanulmányozói részére nem áll rendelkezésre magyar nyelvű tankönyv. Ezért javasoljuk a funkcionálanalízis tárgyú, magyar nyelvű tankönyv írását, vagy egy már meglevő idegen nyelvű munka lefordítását. Egy magyar nyelvű funkcionálanalízis tárgyú könyv kiadása elősegítené azt is, hogy a funkcionálanalízis terén egységesebb magyar nyelvű terminológia alakuljon ki. Legkönnyebben megoldható Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla előbb említett monográfiájának magyar nyelvre történő lefordítása, és az Akadémia Kiadó által történő kiadása.

Végül közöljük azoknak a matematikusoknak (nem teljes) névsorát, akik a felszabadulás óta a funkcionálanalízis terén eredményeket értek el: Bognár János kandidátus (Budapest), Czách László kandidátus (Budapest), Durszt Endre (Szeged), Gehér László (Szeged), Gyires Béla doktor (Debrecen), Kovács István kandidátus (Szeged), Korányi Ádám (külföldön), Máté Eörs (Szeged), Máté László kandidátus (Budapest), Matolcsi Tamás (Budapest), Nagy Béla (Budapest), Pál László kandidátus (Budapest), Pukánszky Lajos (külföldön), Riesz Frigyes akadémikus (meghalt), Sebestyén Zoltán kandidátus (Budapest), Szigeti Ferenc kandidátus (Budapest), Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus (Szeged), Szűcs József kandidátus (Szeged), Tandori Károly akadémikus (Szeged).

ОЧЕРК ПО ИЗУЧЕНИЮ ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЬЬНО ТЕМАТИКИ ОТЧЕСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

КАРОЙ ТАНДОРИ

REPORT ON INVESTIGATIONS IN ANALYSIS IN HUNGARY

K. TANDORI

NEMNEGATÍV EGÉSZ HELYEKEN ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI ÉS „DIFFERENCIÁLEGYENLETEI"

SZILÁRD KÁROLY

1. Bevezetés

A klasszikus analízisben valamely egyváltozós függvény deriváltját határérték képzésének a segítségével definiáljuk, amikor azonban differenciálunk, nem vesszük tekintetbe a derivált infinitezimális eredetét, hanem csak a differenciálási szabályokat és azt, hogy egy egyváltozós f függvény deriváltja, amelyet mi itt Df-el fogunk jelölni, szintén függvény, amely ugyanazokra a változókra van értelmezve, mint f. A legfontosabb differenciálási szabályok (f és g egyváltozós függvények):

$$D(f+g) = Df+Dg; \quad D(f\cdot g) = Df\cdot g+f\cdot Dg \text{ és} \tag{1}$$

$$\text{ha } f \equiv \text{Const, akkor } Df \equiv 0.$$

Ezek a szabályok lehetővé teszik, hogy differenciálegyenleteket alkossunk és azok megoldásaival foglalkozzunk. Az elmúlt 25 évben több szerző foglalkozott olyan D műveletek definiálásával (és azok felhasználásával), amelyek alkalmazva bizonyos f függvényekre eleget tesznek az (1) differenciálási szabályoknak. Itt mindenekelőtt megemlítjük J. Mikusiński „algebrai deriváltját", [1] és [2], és az irodalomjegyzékben közölt [3], [4], [5] és [6] cikkekben definiált derivált-fogalmakat. A jelen dolgozatban olyan f függvényekkel foglalkozunk, amelyek nemnegatív egész számokra vannak értelmezve; $f=f(n)$; $n=0, 1, 2, \ldots$. Ilyen függvények nemcsak a számelméletben szerepelnek, hanem mindenütt, ahol valamilyen sorbafejtés fordul elő. Például, ha felírjuk a z komplex változó egy a $z=0$ pont környezetében értelmezett $F(z)$ analitikus függvényének az

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Taylor sorát, akkor konstatáljuk, hogy az a_n koefficiens függvénye az $n=0, 1, \ldots$ nemnegatív egész változónak. Az ilyen függvényekre is definiálható és az alkalmazások szempontjából hasznosítható egy olyan D operáció, amely az (1) egyenleteknek eleget tesz (ahogy azt a továbbiakban meg fogjuk mutatni). Szintúgy alkothatók evvel az operációval differenciálegyenleteknek megfelelő függvényegyenletek.

2. Definíciók és jelölések

$a(n)$ jelentse az a függvény értékét az n nemnegatív egész helyen. Mikor azonban ezt a függvényt a maga egészében (mint *egy* tárgyat) tekintjük, akkor erre az $\{a(n)\}$ írásmódot használjuk (lásd [1]). A kapcsos zárójelbe vagy az $a(n)$ függvény jelét írjuk, vagy pedig azt a formulát, amely megadja az $a(n)$ függvény értékét

az n helyen. Például $\{n!\}$ azt a függvényt jelenti, amely az n helyen az $n!$ értéket veszi fel. Az összes nemnegatív helyeken értelmezett (általában komplex értékű) függvények halmazát $\mathfrak{R}$-rel jelöljük. Ebben a halmazban két függvény összegét és szorzatát definiálhatjuk úgy, hogy ezek az ismert kommutatív gyűrű követelményeknek eleget tesznek. Ha ezt megtesszük, akkor függvény-gyűrűt kapunk, amelyre az $\mathfrak{R}$ jelet megtartjuk. Ezt sokféleképpen tehetjük, azonban a jelen esetben egy ilyen gyűrű megalkotására egy különösen egyszerű izomorfizmust használunk fel, amely segít nekünk tájékozódni az $\mathfrak{R}$ gyűrű tulajdonságait illetően. Jelentse $\mathfrak{A}$ a z komplex változó síkjában definiált ama analitikus függvények gyűrűjét, amelyek a $z=0$ pont egy környezetében vannak, definiálva (két ilyen analitikus függvényt identikusnak tekintünk, ha létezik egy $z=0$ középpontú körlemez, amelyen ezek bármely z-re definiálva vannak, és ugyanazokat az értékeket veszik fel [7]). $\mathfrak{A}$ valóban kommutatív gyűrű, ha $f(z)\in\mathfrak{A}$-ra és $g(z)\in\mathfrak{A}$-ra a szorzást és az összeadást az analízisben közönséges módon definiáljuk: $f(z)+g(z)\in\mathfrak{A}$ és $f(z), g(z)\in\mathfrak{A}$. (Az összeadást és a szorzást a $z=0$ pont egy környezetére értelmezzük, amelyben úgy $f(z)$, mint $g(z)$ definiálva vannak.) Most tekintsük e függvények Taylor sorait:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\cdot z^n \quad \text{és} \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b(n)\cdot z^n \tag{2}$$

Ekkor

$$f(z)+g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[a(n)+b(n)]z^n \quad \text{és} \quad f(z)\cdot g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c(n)\cdot z^n \tag{3}$$

ahol

$$c(n)=\sum_{v=0}^{n} a(n-v)\cdot b(v).$$

A fent említett izomorfizmust így kapjuk meg: az $f(z)$, illetőleg $g(z)$ analitikus függvényeknek feleljenek meg az $\{a(n)\}$ illetőleg $\{b(n)\}$ nemnegatív egész helyeken értelmezett függvények, amelyek egy $\mathfrak{A}'$ gyűrűt alkotnak, ha ott az $[\{a(n)\}+\{b(n)\}]$ összeget és az $[\{a(n)\}\cdot\{b(n)\}]$ szorzatot úgy definiáljuk, hogy azoknak az $\mathfrak{A}$ gyűrűben $[f(z)+g(z)]$ illetőleg $[f(z)\cdot g(z)]$ feleljenek meg. ($\mathfrak{A}'$-be azok a nemnegatív egész helyeken definiált $a(n)$ függvények tartoznak, amelyekre érvényes $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a(n)|}<\infty$ minthogy a szóban forgó Taylor-sorok egy körben a $z=0$ középpont körül konvergensek [7]. A megfelelés kölcsönösen egyértelmű, minthogy egy konvergens hatványsor koefficienseinek az összessége, a fent említett értelemben pontosan egy analitikus függvényt ad és fordítva, egy analitikus függvényhez a $z=0$ pont környezetében pontosan egy $\{a(n)\}$ függvény tartozik.) Ekkor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}'$ egymással izomorf kommutatív gyűrűk lesznek. $\mathfrak{A}'$-ben két függvény, $\{a(n)\}$ és $\{b(n)\}$ összegének, illetőleg szorzatának a definíciója ez lesz:

$$\begin{aligned}\{a(n)\}+\{b(n)\}&=\{a(n)+b(n)\},\\ \{a(n)\}\cdot\{b(n)\}&=\left\{\sum_{v=0}^{n} a(n-v)\cdot b(v)\right\}.\end{aligned} \tag{4}$$

A két gyűrű között fennálló izomorfizmus segítséget nyújt nekünk egy másik definícióra, az $\{a(n)\in\mathfrak{A}'$ függvény deriváltjának a definíciójára, ha azt akarjuk, hogy $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(n), z^n$-nek a deriváltja $\mathfrak{A}$-ban az $\{a(n)\}$ függvény „deriváltjának"

az $\mathfrak{A}'$-ben feleljen meg. Minthogy $f(z)$ deriváltja

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a(n+1) \cdot z^n$$

ezért ésszerűnek látszik $\{a(n)\}$ deriváltját így definiálni:

$$D\{a(n)\} = \{(n+1) \cdot a(n+1)\}. \tag{5}$$

E definíció ésszerűségét a következőkben fogjuk megmutatni. Ha most még megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{A}$ gyűrűben az $f(z) \equiv C$ (C konstans), függvénynek az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben olyan nemnegatív egész helyeken definiált függvény felel meg, amelynek az értéke az $n=0$ helyen egyenlő C-vel, a többi helyeken pedig zérussal, akkor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}'$ izomorfizmusa és az (5) definíció segítségével nem nehéz megmutatni, hogy az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben az (1) „differenciálási" szabályok érvényben maradnak. (Az (1) szabályok, mint ismeretes, $\mathfrak{A}$-ban fennállnak.)

Terjesszük most ki a (4) és (5) definíciókat az egész $\mathfrak{R}$ függvényhalmazra, amely így gyűrűvé válik, amelynek a zérus eleme a $\{0\}$, egység eleme pedig a $\{\delta(n, 0)\}$ függvény. (Itt $\delta(\mu, \nu)$ a Kronecker-féle függvény, amely egyenlő 0-val, ha $\mu \neq \nu$ és 1-gyel, ha $\mu = \nu$.) Az $\mathfrak{A}'$ gyűrű $\mathfrak{R}$-nek valódi részgyűrűje, minthogy $\mathfrak{R}$-ben olyan $\{a(n)\}$ függvények is vannak, amelyeknek nem felel meg konvergens Taylor-sor. Így $\mathfrak{R}$-re az (1) szabályokat külön be kell bizonyítanunk.

Egy $\{a(n)\} \in \mathfrak{R}$ függvényre bizonyos esetekben célszerű olyan jelölést is alkalmazni, amely a függvényértékek eloszlását szemlélteti. Például az $\{n!\}$ függvényekre az $\{1, 1, 2! \ldots\}$ jelet is alkalmazhatjuk (a pontozás jelenti az értékképzés törvényszerűségének további n-ekre való alkalmazását). Nevezetesen, ha a függvényértékek egy n helytől kezdve mind egyenlők nullával, akkor az $\{a(n)\} = \{a(0), a(1), \ldots$ $\ldots, a(n-1), 0, \ldots\}$ írásmódot fogjuk használni.

A (4) szorzási szabályt alkalmazva konstatáljuk, hogy ha az $\{a(n)\}$ függvényt $\{c, 0, \ldots\}$-val megszorozzuk, akkor a $\{c.\, a(n)\}$ függvényt kapjuk. Így a $\{c, 0, \ldots\}$-val való szorzás minden függvényértéknek a C konstanssal való szorzását jelenti, ezért a továbbiakban $\{c, 0, \ldots\} \cdot \{a(n)\}$ helyett $C\{a(n)\} = \{c.\, a(n)\}$-et fogunk írni. A $\{c, 0, \ldots\}$ függvény a C konstans szerepét játssza, ami annak a ténynek is megfelel, hogy az (5) deriválási szabály szerint $D\{c, 0, \ldots\} = \{0\}$.

3. *Függvények összegének, szorzatának és lineáris kombinációinak a deriválása*

Legyen $\{a(n)\} \in \mathfrak{R}$ és $\{b(n)\} \in \mathfrak{R}$. Összeg deriválása. A

$$D(\{a(n)\} + \{b(n)\}) = D\{a(n)\} + D\{b(n)\} \tag{6}$$

szabály könnyen következik a (4) és (5) definíciókból (ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk).

Szorzat deriválása. (Ismét alkalmazzuk a (4) és (5) definíciókat.)

$$D(\{a(n)\} \cdot \{b(n)\}) = D\left\{\sum_{\nu=0}^{n} a(n-\nu) \cdot b(\nu)\right\} = \left\{(n+1) \sum_{\nu=0}^{n+1} a(n+1-\nu) \cdot b(\nu)\right\} = \tag{7}$$

$$= \left\{\sum_{\nu=0}^{n} (n+1-\nu)\, a(n+1-\nu) \cdot b(\nu)\right\} + \left\{\sum_{\nu=1}^{n+1} a(n+1-\nu)\, \nu \cdot b(\nu)\right\} =$$

$$= \{(n+1) \cdot a(n+1)\}\{b(n)\} + \{a(n)\}\{(n+1) \cdot b(n+1)\}$$

és így:

$$D(\{a(n)\}\cdot\{b(n)\}) = D\{a(n)\}\cdot b\{n\}+\{a(n)\}\cdot D\{b(n)\}.$$

Ennél a bizonyításnál felhasználtuk, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} a(n+1-\nu)\cdot\nu\cdot b(\nu) = \sum_{\mu=0}^{n} a(n-\mu)(1+\mu)\,b(1+\mu).$$

Lineáris kombináció deriválása. Itt tekintetbe vesszük, hogy $C_i=\{C_i, 0, \ldots\}$, ahonnan $DC_i=0$; $i=1, 2$. (6) és (7)-ből következik, hogy

$$D(C_1\{a(n)\}+C_2\{b(n)\}) = C_1D\{a(n)\}+C_2D\{b(n)\}, \tag{8}$$

azaz, a D operáció lineáris.

4. Végtelen függvénysorok, hatványsorok; az $e^{\{a(n)\}}$ függvény.

Tekintsük bizonyos megszámlálhatóan sok $\{a_\nu(n)\}\in\mathfrak{N}$ függvény sorozatát ($\nu=0, 1, 2, \ldots$). Ha bármely rögzített n helyen a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(n)$ sor konvergens $A(n)$ összeggel, akkor a $\sum_{\nu=0}^{\infty}\{a_\nu(n)\}$ sor összegét így definiáljuk:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\{a_\nu(n)\} = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(n)\right\} = \{A(n)\}$$

(lásd [8]). Ennek a konvergencia-fogalomnak az értelmében bármely $\{a(n)\}\in\mathfrak{N}$ függvényt végtelen sor összegének tekinthetünk. Ugyanis, ha szemügyre vesszük azokat az $\{a_\nu(n)\}$ függvényeket, amelyek mindegyikének az értéke mindenütt zérus, kivéve az $n=\nu$ helyet, ahol az értéke $a(\nu)$, akkor látjuk, hogy az $n=\nu$ helyen $a(n)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(n)$, mert a jobboldali sor valamennyi $\sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu(n)$ részletösszege egyenlő zérussal, ha $\mu<n$, ha pedig $\mu\geqq n$, akkor valamennyi részletösszeg egyenlő $a(n)$-nel, és így a fenti összeg-definíció értelmében:

$$\{a(n)\} = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(n)\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\{a_\nu(n)\}. \tag{9}$$

Az $\{a_\nu(n)\}$ függvényt a következő alakban írhatjuk:

$$\{a_\nu(n)\} = a(n)\{\delta(1,n)\}^\nu = a(\nu)\{\delta(1,n)\}^\nu, \tag{10}$$

mert, amint ez a (4) szorzás-szabály ν-szeri alkalmazásából következik: $\{\delta(1, n)\}^\nu = \{\delta(\nu, n)\}$, amely függvény értéke zérus, ha $\nu\neq n$ és 1, ha $\nu=n$.
A (10) egyenlőség jobb oldalát behelyettesítve a (9) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\{a(n)\} = \sum_{\nu=0}^{n} a(\nu)\{\delta(1, n)\}^\nu. \tag{11}$$

A (11) egyenlet jobb oldala hatványsor, amelyben a független változó szerepét a $\{\delta(1, n)$ függvény játssza. Abban az esetben, amikor az $\mathfrak{A}$ gyűrűben a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a(\nu)\cdot z^\nu$

hatványsor konvergens, a (11) egyenlet jobb oldala e hatványsor megfelelője az $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{R}$ gyűrűben. (A z változónak $\{\delta(1, n)\}$ felel meg.)

A továbbiakban mi hatványsornak fogjuk nevezni azt a végtelen sort is, amelyben, nem úgy, mint a (11) egyenlet jobb oldalán $\{\delta(1, n)\}$ hatványai, hanem bármely $\mathfrak{R}$-beli függvény hatványai szerepelnek.

Tekintsük most a z komplex változó $F(z) = e^{f(z)}$ függvényét, ahol $f(z) \in \mathfrak{A}$. Nyilvánvaló, hogy $F(z) \in \mathfrak{A}$. Legyen $f(z)$ megfelelője az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben az $\{a(n)\}$, $F(z)$-é pedig a $\{A(n)\}$ függvény, azaz legyen

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a(\nu) z^{\nu} \quad \text{és} \quad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[f(z)]^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A(\nu) z^{\nu} \tag{12}$$

egy bizonyos $z = 0$ középpontú körlemezen.

A $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[f(z)]^{\nu}}{\nu!}$ végtelen sor bármely m-edik részletösszegét felírhatjuk mint végtelen hatványsort:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{[f(z)]^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_m(\nu) z^{\nu}, \tag{13}$$

ezért e részletösszeg megfelelőjét az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben kétféleképpen írhatjuk: $\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\{a(n)\}^{\nu}}{\nu!}$ és $\{a_m(n)\}$,

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\{a(n)\}^{\nu}}{\nu!} = \{a_m(n)\}. \tag{14}$$

Minthogy a z-síkban a $\sum_{\nu=0}^{m} \frac{[f(z)]^{\nu}}{\nu!}$ részletösszeg bármely $z = 0$ középpontú körvonalon egyenletesen tart $F(z)$ felé, ha $m \to \infty$, ezért (a hatványsor koefficienseinek Cauchy-féle előállítása alapján) nem nehéz belátni, hogy bármely rögzített n-értékre

$$\lim_{m \to \infty} a_m(n) = A(n), \tag{15}$$

azaz

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\{a(n)\}^{\nu}}{\nu!}$$

létezik és egyenlő $\{A(n)\}$-nel.

Így az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben ez a végtelen sor az $\mathfrak{A}$-beli $F(z) = e^{f(z)}$ függvény megfelelőjének az előállítása, melyet is mi $e^{\{a(n)\}}$-nel fogunk jelölni.

$$e^{\{a(n)\}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\{a(n)\}^{\nu}}{\nu!}. \tag{16}$$

Ez az egyenlet az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben érvényes. Fényes T. és Kosik P. megmutatták (lásd [4]), hogy a jobboldalon álló hatványsor akkor is konvergens, ha csak azt tesszük fel, hogy $\{a(n)\} \in \mathfrak{R}$ és így a (16) egyenletet az $e^{\{a(n)\}}$ függvény definíciójának tekinthetjük az $\mathfrak{R}$-gyűrűben.

Ugyanolyan módszerekkel, mint amelyek a klasszikus analízisben használatosak, meg lehet mutatni, hogy, ha $\{a(n)\} \in \mathfrak{R}$ és $\{b(n)\} \in \mathfrak{R}$, akkor

$$e^{\{a(n)\}} \cdot e^{\{b(n)\}} = e^{(\{a(n)\} + \{b(n)\})} \tag{17}$$

(Természetesen, a szorzás a (4) definíciónak megfelelően értendő.)

5. „Differenciálegyenletek" az $\mathfrak{R}$-gyűrűben. A Liouville-féle tétel analogonja

A továbbiakban differenciálegyenletnek fogjuk nevezni bármely függvényegyenletet egy $\{x(n)\}\in\mathfrak{R}$ függvény és annak $D\{x(n)\}$, $D[D\{x(n)\}]$, ... deriváltjai között. Meg akarjuk mutatni, hogy a klasszikus lineáris differenciálegyenletek elméletének egyes tételei (mutatis mutandis) átvihetők az $\mathfrak{R}$ gyűrűben definiált függvények lineáris differenciálegyenleteinek az elméletébe. Tekintsük a következő egyszerű differenciálegyenletet

$$D\{x(n)\} = C\cdot\{x(n)\} \tag{18}$$

ahol C konstans. Felhasználva a derivált (5) definícióját, ezt az egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$\{(n+1)\cdot x(n+1)\} = C\cdot\{x(n)\}. \tag{19}$$

Keressük a (19) egyenletet kielégítő $\{x(n)\}\in\mathfrak{R}$ függvényeket. A (19) egyenlet rekurziós formula az $\{x(n)\}$ ismeretlen függvényre, éspedig mindkét irányban (ismerve $x(n)$-et, kiszámítjuk $x(n+1)$-et és fordítva). Könnyű belátni, hogy a (19) ill. (18) egyenlet homogén lineáris, azaz, hogy ha $\{x_1(n)\}$ és $\{x_2(n)\}$ megoldásai a (19) egyenletnek, akkor minden $\{x(n)\}=C_1\{x_1(n)\}+C_2\{x_2(n)\}$ lineáris kombináció szintén megoldás, továbbá, hogy megadva az $\{x(n)\}$ megoldás értékeit egy n helyen, a függvény értékei az összes n helyeken egyértelműen meg vannak határozva. Legyen $\{x(n)\}$ megoldás és $x(0)=k$. Ekkor $x(1)=C\cdot k$, $x(2)=\frac{1}{2}C\cdot x(1)=\frac{C^2}{2}\cdot k$,

$$x(3)=\frac{1}{3}C\cdot x(2)=\frac{C^3}{3!}k,\ \ldots,\ x(n)=\frac{C^n}{n!}k,\ \ldots$$

Megkapjuk az $\mathfrak{A}'$ gyűrűbe tartozó $\left\{\frac{C^n}{n!}k\right\}$ függvényt, amely az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}'$ gyűrűk fent leírt megfelelési szabályánál fogva a

$$k\cdot e^{c\cdot z}=k\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c^\nu}{\nu!}z^\nu\in\mathfrak{A} \tag{20}$$

megfelelője lesz az $\mathfrak{A}'$ gyűrűben. Az $e^{\{a(n)\}}$ függvény (16) definíciója szerint itt azt is mondhatjuk, hogy a (18) egyenlet megoldása az

$$\{x(n)\}=\left\{\frac{c^n}{n!}k\right\}=k\cdot e^{\{0,c,0,\ldots\}} \tag{21}$$

függvény, mert

$$k\cdot e^{\{0,c,0,\ldots\}}=k\{1,0,\ldots\}+k\{0,c,0,\ldots\}+ \tag{22}$$

$$+\frac{k}{2!}\{0,0,c^2,0,\ldots\}+\frac{k}{3!}\{0,0,0,c^3,0,\ldots\}+\ldots=$$

$$=k\left\{1,C,\frac{c^2}{2!},\frac{c^3}{3!},\ldots\right\}=\left\{\frac{C^n}{n!}k\right\}.$$

(Ez összhangban van azzal a ténnyel, hogy $C\cdot z\in\mathfrak{A}$-nak a megfelelője $\{0,c,0\ldots\}\in\mathfrak{A}'$.) Mielőtt megmutatjuk, hogy ugyanezt az eredményt más úton is (az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}'$ gyűrűk izomorfizmusának a kihasználásával) megkaphatjuk, emlékeztetünk az $\{x(n)\}\in\mathfrak{R}$ függvények két egyszerű deriválási szabályára.

Az egyik szabály: Ha $\nu>0$ egész szám, akkor

$$D(\{x(n)\}^\nu)=D\{x(n)\}\cdot\nu\cdot\{x(n)\}^{\nu-1}\quad\text{és}\quad D(\{x(n)\}^0)=D(\{1,0,\ldots\}=0. \tag{23}$$

Az első egyenlőség egyszerű következménye a szorzat (7) deriválási szabályának (lásd [4]).

A második szabály:

$$D(e^{\{x(n)\}})_{\{(u)x\}} = D\{x(n)\} \cdot e \tag{24}$$

A (24) egyenlet helyességét így mutatjuk ki.

$$D(e^{\{x(n)\}}) = D \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\{x(n)\}^v}{v!} = \sum_{v=0}^{\infty} D\left(\frac{\{x(n)\}^v}{v!}\right).$$

Az, hogy a deriválás műveletét itt tagonként végezzük el, helyes, mert a tagonként való deriválás egy n helyen azt jelenti, hogy szemügyre véve ezt a helyet, tekintjük a tag értékét az $(n+1)$ helyen, valamennyi tagot ugyanazzal az $(n+1)$ számmal szorozzuk és összegezzük őket. Ez ugyanaz, mint az összeget, amely létezik az $(n+1)$ helyen, megszorozzuk $(n+1)$-gyel. Továbbá alkalmazva a (23) szabályt:

$$\sum_{v=0}^{\infty} D\left(\frac{\{x(n)\}^v}{v!}\right) = 0 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v\{x(n)\}^{v-1}}{v!} D\{x(n)\} =$$

$$= D\{x(n)\} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\{x(n)\}^{\mu}}{\mu!} = D\{x(n)\} \cdot e^{\{x(n)\}}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Most megmutatjuk, hogy a (18) egyenlet (21) megoldását úgy is megkaphatjuk, hogy az $\mathfrak{A}$-gyűrűben jól ismert megoldási eljárást az $\mathfrak{A}'$ gyűrűvel való izomorfizmus alapján átvisszük az $\mathfrak{A}'$ gyűrűbe. Minthogy $l \cdot z \in \mathfrak{A}$-nak ($l$ konstans) az $\mathfrak{A}'$-ben a $\{0, l, 0 \ldots\} \in \mathfrak{A}'$ függvény felel meg, azért $\mathfrak{A}'$-ben a (18) egyenlet egy megoldását az

$$\{x(n)\} = e^{\{0, l, 0, \ldots\}} \tag{25}$$

alakban keressük. (l egyelőre ismeretlen konstans.) Ezt az $\{x(n)\}$-et behelyettesítve a (18) egyenletbe és alkalmazva a (24) deriválási szabályt, ezt kapjuk:

$$l \cdot e^{\{0, l, 0, \ldots\}} = C \cdot e^{\{0, l, 0, \ldots\}}$$

(minthogy $D\{0, l, 0, \ldots\} = \{l, 0, \ldots\} = l$).

Ha most az eddig ismeretlen l konstanst C-vel egyenlővé tesszük, látjuk, hogy

$$\{x(n)\} = e^{\{0, c, 0, \ldots\}} \equiv 1 + \{0, c, 0, \ldots\} + \frac{\{0, c, 0, \ldots\}^2}{2!} + \ldots = \left\{1, c, \frac{c^2}{2!}, \ldots\right\}$$

megoldása a (18) egyenletnek, éspedig az, amelyik az $n=0$ helyen az 1 értéket veszi fel és minthogy egy megoldás k-szorosai is megoldások, ezért $k \cdot e^{\{0, c, 0, \ldots\}}$ lesz olyan megoldás, amelynek az értéke az $n=0$ helyen egyenlő k-val. Így a (25) egyenletből kiindulva, szintén megkapjuk a (18) egyenlet (21) megoldását.

Az itt leírt példa mutatja, hogy a lineáris differenciálegyenletek és differenciálegyenlet-rendszerek klasszikus elmélete egyes tételeinek a megfelelői kimondhatók az $\mathfrak{R}$ gyűrű függvényeinek a „differenciálegyenleteire". Ezt az állítást még egy példával illusztráljuk. Ez a példa — az elsőrendű konstans együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elméletének az ismert Liouville-féle tétele. Tekintsük az $\mathfrak{R}$ gyűrű függvényeinek a

$$D\{x^i(n)\} = a_1^i\{x^1(n)\} + a_2^i\{x^2(n)\} + \ldots + a_m^i\{x^m(n)\}, \tag{26}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

homogén lineáris egyenletrendszerét, ahol az a_μ^ν együtthatók konstansok és $\{x^1(n)\}, \{x^2(n)\}, \ldots, \{x^m(n)\}$ az n változó $\mathfrak{R}$-gyűrűbe tartozó keresett függvényei.

Feltesszük, hogy az

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}$$

determináns $\neq 0$. A (26) egyenletrendszert az (5) definíció alapján a következő alakban írhatjuk:

$$(27) \quad \{(n+1)\cdot x^i(n+1)\} = a_1^i\{x^1(n)\} + a_2^i\{x^2(n)\} + \ldots + a_m^i\{x^m(n)\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Az egyenletrendszer a (27) alakban rekurziós formula: Ha ismerjük az $(\{x^1(n)\}, \{x^2(n)\}, \ldots, \{x^m(n)\})$ vektort az n helyen, akkor a (27) egyenletrendszer megadja ennek a vektornak az értékét az $(n+1)$ helyen és fordítva is, minthogy az A determináns $\neq 0$. Másképpen kimondva: A (26) egyenletrendszerre vonatkozó kezdeti-érték feladatnak van megoldása az $\mathfrak{R}$ gyűrűben, és ez a megoldás egyértelmű.

Minthogy a D operátor lineáris (lásd (8)), azért a (26) egyenletrendszer bizonyos p számú megoldásának a lineáris kombinációja szintén megoldás. A jelölések egyszerűsítése végett írjunk a továbbiakban az egy függvényre vonatkozó $\{x^i(n)\}$ jel helyett egyszerűen x^i-t. Ilyen értelemben jelöljük most a p megoldás-vektorok bármelyikét $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \ldots, \varphi_k^m)$-mel. $(k = 1, 2, \ldots, p)$ és vegyük szemügyre a különböző $\varphi_k = (\varphi_k^1, \ldots, \varphi_k^m)$ megoldás-vektorokat:

(28) DEFINÍCIÓ: m különböző $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \ldots, \varphi_k^m)$ megoldásvektor $(k = 1, 2, \ldots, m)$ egy alap-megoldás rendszert alkot, ha ezek a vektorok (mint az n változó függvényei) lineárisan függetlenek, azaz m konstans $C^1, C^2, \ldots, C^m$ szorzó esetében a

$$C^1\varphi_1 + C^2\varphi_2 + \ldots + C^m\varphi_m \equiv 0$$

egyenlet csakis akkor lehetséges, ha $C^1 = C^2 = \ldots = C^m = 0$. (Itt a zérus számot is és a zérus vektort is 0-val jelöltük, ami nyilvánvalóan nem okoz zavart.)

(29) TÉTEL: Legyen $x = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ tetszőleges megoldása a (26) egyenletrendszernek, és $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \ldots, \varphi_k^m)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$ a (26)-nak egy alap-megoldás rendszere. Állítjuk, hogy egyértelműen létezik m konstans $C^1, C^2, \ldots, C^m$ szám úgy, hogy

$$x = C^1\varphi_1 + C^2\varphi_2 + \ldots + C^m\varphi_m.$$

BIZONYÍTÁS: Rögzítsük az $n = 0$ helyet. A $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_m(0)$ vektorok is lineárisan független rendszert alkotnak, mert, ha létezne m konstans: $C^1, C^2, \ldots, C^m$ úgy, hogy

$$(C^1)^2 + (C^2)^2 + \ldots + (C^m)^2 > 0$$

és

$$C^1\varphi_1(0) + C^2\varphi_2(0) + \ldots + C^m\varphi_m(0) = 0$$

akkor a

$$C^1\varphi_1(n) + C^2\varphi_2(n) + \ldots + C^m\varphi_m(n) = x(n)$$

vektor-függvény (amely megoldása a (26) rendszernek) a megoldás egyértelműsége miatt a zérus-vektor volna, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ mint az n változó függvényei lineárisan függetlenek. Így, ha bármilyen $x(0)= =(x^1(0), x^2(0), \ldots, x^m(0))$ kezdeti-érték vektort megadunk (itt éppen a szóban forgó $x(n)$ vektor kezdeti értékeit), találunk hozzá egyértelműen m konstanst, $C^1, C^2, \ldots$ $\ldots, C^m$-et úgy, hogy

$$x(0) = C^1\varphi_1(0)+\ldots+C^m\varphi_m(0)$$

de akkor az

$$x(n) = C^1\varphi_1(n)+\ldots+C^m\varphi_m(n)$$

vektor függvény, amely megoldás, megegyezik (a megoldás egyértelműségének következtében) a szemügyre vett $x(n)$ megoldással, amit is bizonyítani akartunk.

Tekintsük most a

$$\{W(n)\} = \begin{Vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \ldots & \varphi_m^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \ldots & \varphi_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^m & \varphi_2^m & \ldots & \varphi_m^m \end{Vmatrix} \tag{30}$$

determinánst, amely egyetlenegy n helyen sem tűnhet el (ez következik a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_m$ vektorok lineárisan független voltából bármely rögzített n helyen), és amely megfelel a lineáris differenciálegyenletek klasszikus elméletében szerepet játszó Wronski-féle determinánsnak.

(31) TÉTEL. Legyen $S=a_1^1+a_2^2+\ldots+a_m^m$ a (26) egyenletrendszer koefficiensei mátrixában a fő-átlóban levő koefficiensek összege. Állítjuk, hogy $D\{w(n)\}=S\{w(n)\}$, és innen $\{w(n)\}=w(0)\cdot e^{\{0, s, 0, \ldots\}}$

MEGJEGYZÉS: Ez a tétel analogonja az ismert klasszikus Liouville-féle tételnek a konstans együtthatójú lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszerek esetében.

BIZONYÍTÁS. Ugyanúgy, mint a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek klasszikus elméletében, először felírjuk a $\{w(n)\}$ determinánsnak a deriváltját. A determinánsok deriválása itt éppúgy történik, mint a klasszikus esetben, minthogy ez a deriválási szabály csakis a szorzat (7) deriválási szabályának a következménye.

$$D\{W(n)\} = \begin{Vmatrix} D\varphi_1^1 & D\varphi_2^1 & \ldots & D\varphi_m^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \ldots & \varphi_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^m & \varphi_2^m & \ldots & \varphi_m^m \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \ldots & \varphi_m^1 \\ D\varphi_1^2 & D\varphi_2^2 & \ldots & D\varphi_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^m & \varphi_2^m & \ldots & \varphi_m^m \end{Vmatrix} + \tag{32}$$

$$+\ldots+\begin{Vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \ldots & \varphi_m^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \ldots & \varphi_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D\varphi_1^m & D\varphi_2^m & \ldots & D\varphi_m^m \end{Vmatrix}$$

Minthogy a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ vektorok megoldásai a (26) rendszernek, azért (behelyettesítve bármelyik φ_k-t ebbe a rendszerbe), azt kapjuk, hogy

$$D\varphi_k^i = a_1^i\varphi_k^1+a_2^i\varphi_k^2+\ldots+a_m^i\varphi_k^m; \quad k=1, 2, \ldots, m; \quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{33}$$

Ha most ezek közül az egyenletek közül csak azokat tekintjük, amelyekben a koef-

ficiensek felső indexe változatlan (csakis a k indexet változtatjuk), akkor bármely rögzített i felső indexre a következő egyenletrendszert kapjuk.

$$
\begin{aligned}
D\varphi_1^i &= a_1^i\varphi_1^1 + a_2^i\varphi_1^2 + \ldots + a_m^i\varphi_1^m \\
D\varphi_2^i &= a_1^i\varphi_2^1 + a_2^i\varphi_2^2 + \ldots + a_m^i\varphi_2^m \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\
D\varphi_m^i &= a_1^i\varphi_m^1 + a_2^i\varphi_m^2 + \ldots + a_m^i\varphi_m^m
\end{aligned} \tag{34}
$$

A (34) egyenletek azt mutatják, hogy a (32) egyenletben a jobboldali determináns-összeg minden tagjában a $(D\varphi_1^j, D\varphi_2^j, \ldots, D\varphi_m^j)$ sor $(j=1, 2, \ldots, m)$ lineáris kombinációja minden sornak. Minthogy egy sor konstanssal megszorozva és hozzáadva egy *másik* sorhoz a determináns értékén nem változtat, ezért elegendő a $(D\varphi_1^j, D\varphi_2^j, \ldots$ $\ldots, D\varphi_m^j)$ sor helyett $(a_j^j\varphi_1^j, a_j^j\varphi_2^j, \ldots, a_j^j\varphi_m^j) = a_j^j(\varphi_1^j, \varphi_2^j, \ldots, \varphi_m^j)$-t írni. Így a (32) egyenletet átírhatjuk a következő alakra:

$$
D\{W(n)\} = (a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_m^m)\{W(n)\} = S\{W(n)\}, \tag{35}
$$

amivel is a tétel első állítását bebizonyítottuk.

A második állítás a (35) egyenlet általános megoldásából adódik (lásd a (21) és (22) egyenleteket):

$$
\{W(n)\} = W(0) \cdot e^{\{0, s, 0, \ldots\}} \tag{36}
$$

Evvel a Liouville-tétel analogonját a nemnegatív egész helyeken definiált $\{x(n)\}$ függvények $\mathfrak{R}$ gyűrűjében, konstans koefficiensű lineáris homogén „differenciál-egyenlet-rendszer" esetében bebizonyítottuk. Megjegyezzük, hogy a (36) egyenlettel leírt függvény az $\mathfrak{R}$ gyűrűnek $\mathfrak{A}'$ részgyűrűjébe tartozik.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] J. Mikusiński: Rachunek Operatorów, Warszawa 1953 (magyar fordítás: Operátorszámítás, Budapest 1961)

[2] J. Mikusiński: Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus. Studia Math. *19* (1960) 187—192.

[3] Moore, D. H.: Convolution products and quotients and algebraic derivatives of sequences. The American Mathematical Monthly, *69* (1962) 132—138.

[4] Fényes T.—Kosik P.: The algebraic derivative and integral in the discrete operational calculus. Studia Scient. Math. Hung. *7* (1972) 117—130.

[5] Fényes T.—Kosik P.: Über das algebraische Integral der Mikusi skischen Operatoren. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. *9* (1964) 21—34.

[6] Wloka J.: Über lineare s-Differentialgleichungen in der Operatorenrechnung. Math. Ann. *166* (1966) 233—256.

[7] Newton, T. A.: An Application of the Generating Function to Differential Equations. The American Mathematical Monthly *68* (1961) 242—244.

[8] Butzer L.—Schulte H.: Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlichen und seine Anwendungen, Forschungsberichte des Landes Nordrhein—Westfalen. Nr. 1537. Westdeutscher Verlag. Cologne, 1965.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАБЛЕНЯ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ДЛЯ НЕОТРИЦИАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ.

К. СИЛАРД

DERIVATIVES AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FUNCTIONS DEFINED AT NON-NEGATIVE INTEGER POINTS.

K. SZILÁRD

ORTOGONÁLIS POLINOMOK ASZIMPTOTIKUS VISELKEDÉSÉRŐL

SZABADOS JÓZSEF

TURÁN PÁL [1] 1953-ban Schweitzer-feladatként közölte a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)H_n\left(\frac{n}{2x}\right)=e^{-x^2} \tag{1}$$

relációt, ahol $H_n(x)$ az n-edfokú Hermite polinom az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)^2\,dx=\sqrt{\pi}2^n n! \quad (n=1,0,2,\ldots)$$

normálással, és x egy tetszőleges komplex szám. (Egyébként (1)-ben a konvergencia egyenletes a komplex sík tetszőleges zárt, véges résztartományában.)

(1) úgy is tekinthető, mint egy egyszerű módszer az ortogonális polinomokból a súlyfüggvény visszanyerésére. Ezzel kapcsolatban TURÁN PÁL [2, XLVI. probléma] felvetette azt a kérdést, hogy ha $\{p_n(x)\}_{n=0}$ egy a nemnegatív $w(x)\in L(-\infty,\infty)$ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer (valamilyen normálással), akkor mely esetekben áll fenn a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right)=w(x) \tag{2}$$

reláció. Az alábbiakban lényegében megválaszoljuk e problémát, azzal a feltételezéssel, hogy (2) fennállását mindig azon a (véges vagy végtelen) intervallumon vizsgáljuk, amelyen kívül $w(x)$ eltűnik (vagyis a $w(x)$ ún. tartóján).

Lényeges különbség van a véges és végtelen intervallum esete között. Foglalkozzunk először a véges intervallummal; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a $[-1, 1]$ intervallum.

1. TÉTEL. *Ha a* $w(x)\in L[-1,1]$ *súlyfüggvényre ortogonális* $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{kn}x^k$ $(n=0,1,\ldots)$ *polinomrendszert úgy normáljuk, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nn}2^{-n}=1, \tag{3}$$

akkor

$$e^{-2|x|}\leqq\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right)\leqq\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right)\leqq e^{2|x|} \quad (|x|\leqq 1).$$

Bizonyítás. Legyenek a $p_n(x)$ gyökei

$$-1<x_{1n}<x_{2n}<\ldots<x_{nn}<1 \tag{4}$$

(lásd SZEGŐ [3], Theorem 3.3.1), ekkor

$$(5) \qquad \left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right) = a_{nn}\left(\frac{x}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{2x} - x_{kn}\right) = a_{nn}2^{-n}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2xx_{kn}}{n}\right),$$

vagyis elég nagy n esetén

$$a_{nn}2^{-n}\cdot\left(1-\frac{2x}{n}\right)^n \leqq \left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right) \leqq a_{nn}2^{-n}\cdot\left(1+\frac{2x}{n}\right)^n.$$

Innen (3)-ra és a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$ relációra való tekintettel következik a tétel állítása.

2. TÉTEL. *Ha a* $w(x)\in L[-1, 1]$ *súlyfüggvény kielégíti az*

$$(6) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\log [w(\cos t)\sin t]|\, dt < \infty$$

feltételt, akkor a hozzá tartozó $p_n(x)$ *ortogonális polinomokra a* (3) *normálás mellett fennáll*

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right) = 1,$$

mégpedig egyenletesen a $[-1, 1]$ *intervallumban.*

Bizonyítás. A mondott feltételek mellett a $p_n(x)$ gyökeire teljesül a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{kn} = 0$$

reláció (lásd SZEGŐ [3], Theorem 12.7.2). Így (5) és (3) alapján

$$(8) \qquad \left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right) = a_{nn}2^{-n}\exp\sum_{k=1}^{n}\log\left(1-\frac{2xx_{kn}}{n}\right) =$$

$$= a_{nn}2^{-n}\exp\left\{-\frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{kn} - \frac{2x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{kn}^2}{(1+y_{kn})^2}\right\} \to 1 \quad (n\to\infty)$$

$$\left(y_{kn}\in\left(0, -\frac{2xx_{kn}}{n}\right)\right),$$

aholis felhasználtuk a

$$(9) \qquad \log(1+u) = u - \frac{u^2}{2(1+y)^2} \quad (y\in(0, u),\ -1 < u \leqq 1)$$

sorfejtést.

3. TÉTEL. *Ha* $w(x)\in L[-1, 1]$, *akkor a* (2) *reláció csak a Legendre polinomok esetén áll fenn.*

Bizonyítás. A Legendre polinomok esetén $w(x)\equiv 1$, s ekkor a 2. tétel szerint (2) valóban fennáll. Fordítva, ha (2) fennáll, akkor az 1. tétel miatt

$$e^{-2|x|} \leqq w(x) \leqq e^{2|x|} \quad (|x| \leqq 1),$$

s így a (6) feltétel teljesül. Tehát a 2. tétel miatt (7) is fennáll, tehát $w(x)\equiv 1$, vagyis a Legendre polinomokról van szó. Q. E. D.

A végtelen intervallum esete nehezebb, s csak bizonyos megszorítások mellett sikerült elintézni.

4. TÉTEL. *Ha a* (3) *normálással* (2) *fennáll egyenletesen a valós számegyenes bármely véges zárt részintervallumán, továbbá*

$$w(x) > 0 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{10}$$

akkor $w(x)=e^{-x^2}$, *vagyis az Hermite polinomokról van szó.*

Bizonyítás. Először is belátjuk, hogy a mondott feltevések mellett

$$X_n = \max(|x_{1n}|, |x_{nn}|) = o(n). \tag{11}$$

Tegyük fel ennek ellenkezőjét, vagyis legyen $\varliminf_{n\to\infty} n/X_n = d < \infty$, továbbá $n_1 < n_2 < \dots$ egy olyan indexsorozat, hogy $\lim_{i\to\infty} n_i/X_{n_i} = d$. Ekkor a $d/2$ pont tetszőleges kis környezetében elhelyezkedő $x = n_i/2X_{n_i}$ pontokban az (5) polinom eltűnik, s így nem tarthat egyenletesen a határozottan pozitív $w(x)$ súlyfüggvényhez, egy a $d/2$ pontot tartalmazó véges intervallumon, ellentétben (2)-vel. Ezzel (11)-et beláttuk.

(2), (3) és (5) alapján

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2 x_{kn}^2}{n^2}\right) = w(x)\,w(-x). \tag{12}$$

A (9) sorfejtést alkalmazva adódik

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2 x_{kn}^2}{n^2}\right) = \exp\left\{-\frac{4x^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} x_{kn}^2 - \frac{8x^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{kn}^4}{(1+y_{kn})^2}\right\}$$

$$\left(-\frac{4x^2 x_{kn}^2}{n^2} < y_{kn} < 0\right).$$

Ebből és (12)-ből (10) és (11) miatt következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} x_{kn}^2 = O(n^2), \quad \text{és így} \quad \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{kn}^4}{(1+y_{kn})^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Mindezek alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} x_{kn}^2 = a \tag{13}$$

létezik. Alkalmazzuk most a (9)-nél finomabb

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3(1+y)^3} \quad (y \in (0, u),\ -1 < u \leqq 1)$$

sorfejtést; ekkor (5) szerint

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right) = a_{nn} 2^{-n} \exp\left\{-\frac{2x}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{kn} - \frac{2x^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} x_{kn}^2 + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \frac{8x^3}{3n^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{kn}^3}{(1+y_{kn})^3}\right\} \quad \left(y_{kn} \in \left(0, -\frac{2x x_{kn}}{n}\right)\right).$$

Itt (13) és (11) miatt

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{kn}^3}{(1+y_{kn})^3}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Így tehát (2), (3) és (13) felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{kn}=b$$

is létezik, és

$$w(x)=e^{-bx-ax^2}. \tag{15}$$

$w(x)\in L[-\infty,\infty)$ miatt nyilván $a>0$. E súlyfüggvényhez tartozó $p_n(x)$ ortogonális polinomok — egy n-től és a-tól függő konstans faktortól eltekintve — megegyeznek a $H_n\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$ lineárisan transzformált Hermite polinomokkal. A $H_n(x)$ gyökeit z_{kn}-nel jelölve, nyilván

$$x_{kn}=\frac{1}{\sqrt{a}}z_{kn}-\frac{b}{2a} \quad (k=1,\ldots,n)$$

lesznek a $p_n(x)$ gyökei. Lévén

$$\sum_{k=1}^{n}z_{kn}=0, \quad \sum_{k=1}^{n}z_{kn}^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

(lásd SZEGŐ [3], 142. old.), nyilván

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{kn}=-\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}x_{kn}^2=\frac{1}{a}+\frac{b^2-2a}{2a^2n}.$$

Ezért (14)-ből (3) és (11) miatt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n p_n\left(\frac{n}{2x}\right)=\exp\left\{-\frac{b}{a}x-\frac{1}{a}x^2\right\}.$$

Ezt (2)-vel és (15)-tel egybevetve adódik, hogy $a=1$, $b=0$, vagyis $w(x)=e^{-x^2}$. Q. E. D.

IRODALOM

[1] Jelentés az 1953. évi Schweitzer Miklós emlékversenyről, *Mat. Lapok*, **5** (1954), 134—137.
[2] TURÁN PÁL, Az approximációelmélet egyes nyitott problémáiról, *Mat. Lapok* (megjelenés alatt).
[3] G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials*. AMS Coll. Publ., Vol. XXIII (Providence, R. I., 1974).

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Й. САБАДОШ

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

J. SZABADOS

Let $w(x)$ be a weight-function and $p_n(x)$ the nth orthogonal polynomial $(n=0, 1, \ldots)$ belonging to it, with the normalization $\lim_{n\to\infty} p_n(x)(2x)^{-n}=1$. It is proved that (in case of the infinite interval under some additional conditions) the relation (2) holds only for the Legendre and Hermite polynomials.

REGULÁRIS GYŰRŰK EGY OSZTÁLYÁRÓL

TRÂN QUÝ TIÊN és LEE ANNA

1. §. Bevezetés

Ismeretes, hogy egy Artin-féle féligegyszerű gyűrű mindig reguláris (lásd pl. [3] 110. old.); és minden esetben reguláris egy olyan gyűrű is, amelyik idempotens minimális jobbideáloknak diszkrét direkt összege (lásd [7]). E gyűrűket speciális esetként tartalmazza az a gyűrűosztály, amellyel dolgozatunkban foglalkozunk, s amelyre — dolgozatunk fő eredményeként — egy regularitási kritériumot bizonyítunk be. Ennek az általánosabb gyűrűosztálynak a fogalmához és a regularitási kritériumhoz csak néhány definíció bevezetése után juthatunk el.

Legyen A tetszőleges gyűrű és jelöljön $g_i \in A$ $(i \in I)$ illetve $h_\lambda \in A$ $(\lambda \in \Lambda)$ idempotens elemeket. Nyilvánvaló, hogy $g_i A$ az A-nak a g_i idempotens elem által generált főjobbideálját, Ah_λ pedig a h_λ idempotens által generált főbalideálját jelöli.

1.1. DEFINÍCIÓ. Az A gyűrűt *operátorizomorfan felbonthatónak* nevezzük, ha A-ra teljesülnek a következő feltételek:

(1) Az A előállítható $g_i A$ $(i \in I)$ jobbideáljainak diszkrét direkt összegeként, és ugyancsak elöállítható $Ah_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ balideáljainak diszkrét direkt összegeként:

$$A = \sum_{i \in I}^{\cdot} g_i A = \sum_{\lambda \in \Lambda}^{\cdot} A h_\lambda . \tag{1.1}$$

(2) Az (1.1) előállításban létezik olyan $\omega \in I \cap \Lambda$ közös index, amelyre

$$g_\omega = h_\omega .$$

(3) A $g_i A$ $(i \in I)$ jobbideálok egymással jobboperátorizomorfak, az Ah_λ $(\lambda \in \Lambda)$ balideálok pedig egymással baloperátorizomorfak.

Megjegyezzük, hogy az operátorizomorfan felbontható gyűrű analóg a hasonlóan felbontható félcsoport fogalmával, amelyet STEINFELD OTTÓ vezetett be [5] dolgozatában.

1.2 DEFINÍCIÓ. Tetszőleges A gyűrűben a g_i $(i \in I)$ idempotens elemek által generált $g_i A$ jobbideálok R halmazát *végesen ortogonálisnak* hívjuk, ha bármely véges sok $g_{i_1} A, g_{i_2} A, \ldots, g_{i_{m_0}} A$ $(g_{i_\nu} A \in R)$ jobbideálhoz léteznek olyan $\bar{g}_{j_1}, \bar{g}_{j_2}, \ldots, \bar{g}_{j_m}$ $(m \leqq m_0)$ idempotens elemek, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{m_0} g_{i_\nu} A = \sum_{\mu=1}^{m} \bar{g}_{j_\mu} A ; \tag{a}$$

(b) mindegyik $\bar{g}_{j_\mu}A$ $(1 \leqq \mu \leqq m)$ jobbideálhoz létezik legalább egy olyan $g_{i_\nu}A$ $(1 \leqq \nu \leqq m_0)$ jobbideál, hogy $\bar{g}_{j_\mu}A$ és $g_{i_\nu}A$ jobboperátorizomorfak;

(c) $$\bar{g}_{j\mu} \cdot \bar{g}_{j\varkappa} = 0, \quad \text{ha} \quad \mu \neq \varkappa \quad (1 \leqq \mu, \varkappa \leqq m).$$

A h_λ $(\lambda \in \Lambda)$ idempotens elemek által generált Ah_λ balideálok L halmazának *véges ortogonalitása* duális módon van definiálva.

1.3. DEFINÍCIÓ. Az A operátorizomorfan felbontható gyűrűt *végesen ortogonálisnak* mondjuk, ha az

$$A = \dot{\sum_{i \in I}} g_i A = \dot{\sum_{\lambda \in \Lambda}} Ah_\lambda \quad (\exists \omega \in I \cap \Lambda : g_\omega = h_\omega)$$

felbontásban a g_iA $(i \in I)$ jobbideálok halmaza és az Ah_λ $(\lambda \in \Lambda)$ balideálok halmaza egyaránt végesen ortogonális.

A dolgozat fő eredményét adó regularitási kritérium ezután már megfogalmazható.

1.1. TÉTEL. Legyen

$$A = \dot{\sum_{i \in I}} g_i A = \dot{\sum_{\lambda \in \Lambda}} Ah_\lambda \quad (\exists \omega \in I \cap \Lambda : g_\omega = h_\omega) \tag{1.2}$$

egy operátorizomorfan felbontható A gyűrűnek egy felbontása, és tegyük fel, hogy A végesen ortogonális. Az A gyűrű akkor és csak akkor reguláris, ha $g_\omega A g_\omega$ részgyűrűje reguláris.

E tétel bizonyítása — a hasonlóan felbontható félcsoportokra érvényes analóg tételével ellentétben (lásd [4]) — több erőfeszítést igényel. Ezért a bizonyítást néhány lemmával készítjük elő, amelyeket a 2. §-ban gyűjtünk össze. Az 1.1. tétel bizonyítását a 3. § tartalmazza. A dolgozat további részében az 1.1. tétel következményeként bizonyítjuk néhány gyűrűosztály regularitását. Ezeknek a bizonyításához szükséges lemmákat ismét külön paragrafusban, a 4. §-ban közöljük, míg a korollá riumokat az 5. § tartalmazza.

2. §. *Előkészítő segédtételek*

A következő két lemmára többször hivatkozunk majd vizsgálataink során.

2.1. JACOBSON-LEMMA (lásd [2] 51. old.). Legyen g_i és g_j az A gyűrű két idempotens eleme. A g_iA és g_jA jobbideálok akkor és csak akkor jobboperátorizomorfak egymással, ha az A gyűrűben léteznek olyan r_{ij} és r_{ji} elemek, hogy

$$r_{ij}r_{ji} = g_i; \quad r_{ji}r_{ij} = g_j$$

$$g_i r_{ij} g_j = r_{ij}; \quad g_j r_{ji} g_i = r_{ji}.$$

Természetesen e lemma duálisa érvényes az Ag_i és Ag_j balideálokra.

2.2. MCCOY-LEMMA (lásd [3] 111. old.). Ha az A gyűrű $axa - a$ eleme reguláris, akkor az a elem is reguláris.

A következő két lemma tetszőleges A gyűrű reguláris elemeire vonatkozóan mond ki önmagában is érdekes eredményeket.

2.3 LEMMA. Legyen $g_\omega \neq 0$ az A gyűrű idempotens eleme. Ha az A gyűrű reguláris, akkor $g_\omega A g_\omega$ részgyűrűje is reguláris.

Bizonyítás. A $g_\omega A g_\omega$ részgyűrű tetszőleges a elemére teljesülnek a következő azonosságok:

$$a = g_\omega a g_\omega = g_\omega a = a g_\omega. \tag{2.1}$$

Mivel a feltevés szerint az A reguláris, így tetszőleges $a \in g_\omega A g_\omega$ elem is reguláris az A gyűrűben. Tehát létezik olyan $y \in A$ elem, hogy

$$a = aya.$$

Felhasználva a (2.1) azonosságokat,

$$\begin{aligned} a &= a g_\omega y g_\omega a \\ &= a(g_\omega y g_\omega) a \end{aligned}$$

érvényes, és nyilvánvaló, hogy $x = g_\omega y g_\omega \in g_\omega A g_\omega$. Ebből látható, hogy tetszőleges $a \in g_\omega A g_\omega$ elem már a $g_\omega A g_\omega$ részgyűrűben is reguláris.

2.4. LEMMA. Legyen $g_\omega \neq 0$ az A gyűrű idempotens eleme, és legyen a $g_\omega A g_\omega$ részgyűrű reguláris. Akkor a gyűrű valamennyi $a_{l\gamma} \in e_l A f_\gamma$ eleme reguláris, ahol e_l és f_γ az A gyűrű olyan idempotens elemei, hogy az $e_l A$ és $g_\omega A$ jobbideálok egymással jobboperátorizomorfak, az $A f_\gamma$ és $A g_\omega$ balideálok egymással baloperátorizomorfak.

Bizonyítás. Minthogy $e_l A$ és $g_\omega A$ jobboperátorizomorfak egymással, így a Jacobson-lemma szerint léteznek olyan $r_{\omega l}$ és $r_{l\omega}$ elemek az A gyűrűben, hogy

$$\begin{aligned} r_{\omega l} r_{l\omega} &= g_\omega; \qquad r_{l\omega} r_{\omega l} = e_l, \\ e_l r_{l\omega} g_\omega &= r_{l\omega}; \quad g_\omega r_{\omega l} e_l = r_{\omega l}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A Jacobson-lemma duálisa alapján pedig — minthogy $A f_\gamma$ és $A g_\omega$ baloperátorizomorfak — olyan $q_{\omega\gamma}, q_{\gamma\omega}$ elemek léteznek, hogy

$$\begin{aligned} q_{\omega\gamma} q_{\gamma\omega} &= g_\omega; \qquad q_{\gamma\omega} q_{\omega\gamma} = f_\gamma, \\ f_\gamma q_{\gamma\omega} g_\omega &= q_{\gamma\omega}; \quad g_\omega q_{\omega\gamma} f_\gamma = q_{\omega\gamma}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A (2.2) és (2.3) alapján tetszőleges $a_{l\gamma} \in e_l A f_\gamma$ elemre

$$\begin{aligned} a_{l\gamma} &= e_l^2 a_{l\gamma} f_\gamma^2 \\ &= r_{l\omega}(g_\omega r_{\omega l} a_{l\gamma} q_{\gamma\omega} g_\omega) q_{\omega\gamma} \end{aligned} \tag{2.4}$$

igaz. Nyilvánvaló, hogy az

$$a'_{l\gamma} = g_\omega r_{\omega l} a_{l\gamma} q_{\gamma\omega} g_\omega \tag{2.5}$$

elem a $g_\omega A g_\omega$ részgyűrű eleme. Így a (2.4) és (2.5) alapján tetszőleges $a_{l\gamma} \in e_l A f_\gamma$ elemhez van a $g_\omega A g_\omega$ részgyűrűnek olyan $a'_{l\gamma}$ eleme — amelyre tehát $a'_{l\gamma} = g_\omega a'_{l\gamma} g_\omega$ azonosság érvényes —, hogy az $a_{l\gamma}$ elem

$$a_{l\gamma} = r_{l\omega} a'_{l\gamma} q_{\omega\gamma} \tag{2.6}$$

alakban írható. A feltevés szerint a $g_\omega A g_\omega$ részgyűrű reguláris, így tetszőleges $a'_{l\gamma} \in g_\omega A g_\omega$ elemhez van olyan $y' \in g_\omega A g_\omega$ elem, hogy

$$a'_{l\gamma} = a'_{l\gamma} y' a'_{l\gamma}, \tag{2.7}$$

és erre az y' elemre, mint tudjuk, az

$$y' = g_\omega y' g_\omega \tag{2.8}$$

azonosság teljesül. Így a (2.6)—(2.8) alapján — a (2.2) és (2.3) ismételt alkalmazásával — az $a_{l\gamma} \in e_l A f_\gamma$ elemre érvényes a következő:

$$\begin{aligned} a_{l\gamma} &= r_{l\omega} a'_{l\gamma} q_{\omega\gamma} \\ &= r_{l\omega} a'_{l\gamma} g_\omega y' g_\omega a'_{l\gamma} q_{\omega\gamma} \\ &= (r_{l\omega} a'_{l\gamma} q_{\omega\gamma})(q_{\gamma\omega} y' r_{\omega l})(r_{l\omega} a'_{l\gamma} q_{\omega\gamma}). \end{aligned}$$

Az $y = g_{\gamma\omega} y' r_{\omega l}$ jelöléssel s a (2.6) figyelembevételével tehát

$$a_{l\gamma} = a_{l\gamma} y a_{l\gamma}$$

írható, ami az $a_{l\gamma} \in e_l A f_\gamma$ elem regularitását bizonyítja.

A következő lemmában egy operátorizomorfan felbontható, végesen ortogonális gyűrű tetszőleges elemének előállításával foglalkozunk.

2.5 Lemma. Legyen az A operátorizomorfan felbontható, végesen ortogonális gyűrűnek egy felbontása:

$$A = \sum_{i \in I}^{\cdot} g_i A = \sum_{\lambda \in \Lambda}^{\cdot} A h_\lambda \quad (\exists \omega \in I \cap \Lambda : g_\omega = h_\omega). \tag{2.9}$$

Akkor bármely $a \in A$ elem

$$a = \sum_{(l,\gamma) \in Q} a_{l\gamma} \quad (a_{l\gamma} \in \bar{g}_l A \bar{h}_\gamma ;\ a_{l\gamma} \neq 0) \tag{2.10}$$

alakban állítható elő, ahol a $\bar{g}_l$ $(1 \leqq l \leqq m)$, illetve a $\bar{h}_\gamma$ $(1 \leqq \gamma \leqq n)$ idempotens elemek ortogonálisak:

$$\bar{g}_l \bar{g}_k = 0 \quad (l \neq k);\ \bar{h}_\gamma \bar{h}_\beta = 0 \ (\gamma \neq \beta), \tag{2.11}$$

továbbá a $\bar{g}_l A$ és $g_\omega A$ jobbideálok egymással jobboperátorizomorfak, az $A\bar{h}_\gamma$ és $A g_\omega$ balideálok egymással baloperátorizomorfak, és $Q \subseteq M \times N$; $M = \{l : 1 \leqq l \leqq m\}$, $N = \{\gamma : 1 \leqq \gamma \leqq n\}$.

Bizonyítás. Minthogy a (2.9) szerint az A gyűrű a $g_i A$ $(i \in I)$ jobbideálok diszkrét direkt összege, ezért tetszőleges $a \in A$ elem egyértelműen írható fel

$$a = g_{i_1} a_1 + g_{i_2} a_2 + \ldots + g_{i_{m_0}} a_{m_0}$$

alakban, ahol $g_{i_\nu} a_\nu \neq 0$ $(1 \leqq \nu \leqq m_0)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $i_\nu = \nu$ $(1 \leqq \nu \leqq m_0)$ így az a elemre érvényes az

$$a = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_{m_0} a_{m_0} \tag{2.12}$$

egyértelmű előállítás.

Az A végesen ortogonális, ezért találhatók olyan $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_m$ $(m \leqq m_0)$ idempotens elemek, hogy

$$\sum_{i=1}^{m_0} g_i A = \sum_{l=1}^{m} \bar{g}_l A \quad (\bar{g}_l \bar{g}_k = 0, \text{ ha } l \neq k),$$

és mindegyik $\bar{g}_l A$ jobbideál jobboperátorizomorf valamelyik $g_i A$ jobbideállal — s minthogy $\bar{g}_i A$ jobbideál jobboperátorizomorf a $g_\omega A$ jobbideállal, így a $\bar{g}_l A$ jobbideálok is jobboperátorizomorfak a $g_\omega A$ jobbideállal —. Ezért az a elem a (2.12) helyett az

$$a = \bar{g}_1 \bar{a}_1 + \bar{g}_2 \bar{a}_2 + \ldots + \bar{g}_m \bar{a}_m \tag{2.13}$$

alakban írható. Ha most balról szorzunk a $\bar{g}_l$ elemmel, akkor a $\bar{g}_l$ $(1 \leqq l \leqq m)$ idempotens elemek ortogonalitását figyelembe véve a (2.13) egyes komponenseire

$$\bar{g}_l a = \bar{g}_l \bar{a}_l \quad (1 \leqq l \leqq m)$$

érvényes, így az a elemre az

$$a = \bar{g}_1 a + \bar{g}_2 a + \ldots + \bar{g}_m a \tag{2.14}$$

előállítást kapjuk.

Duális meggondolással nyerhető az

$$a = a\bar{h}_1 + a\bar{h}_2 + \ldots + a\bar{h}_n \tag{2.15}$$

előállítás is, ahol $\bar{h}_\gamma \bar{h}_\beta = 0$, ha $\gamma \neq \beta$, és az $A\bar{h}_\gamma$ $(1 \leqq \gamma \leqq n)$ balideálok baloperátorizomorfak az Ag_ω balideállal. Ha most a (2.15) jobboldalán az a elem helyébe ennek (2.14) alakját írjuk, akkor

$$a = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{m} \bar{g}_l a \bar{h}_\gamma . \tag{2.16}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $a_{l\gamma} = \bar{g}_l a \bar{h}_\gamma$; $M = \{l : 1 \leqq l \leqq m\}$; $N = \{\gamma : 1 \leqq \gamma \leqq n\}$; $M \times N = \{(l, \gamma) : l \in M, \gamma \in N\}$, és legyen $Q = \{(l, \gamma) \in M \times N : a_{l\gamma} \neq 0\}$. E jelölések figyelembevételével a (2.16) előállítás az

$$a = \sum_{(l,\gamma) \in Q} a_{l\gamma} \quad (a_{l\gamma} \in \bar{g}_l A \bar{h}_\gamma)$$

alakban írható, és ez megegyezik a (2.10) előállítással.

3. §. *Az 1.1. tétel bizonyítása*

Ezen előkészítések után már bebizonyíthatjuk az operátorizomorfan felbontható, végesen ortogonális gyűrűk egy regularitási kritériumát kimondó 1.1. tételt.

Bizonyítás. A feltétel szükségessége a 2.3 lemma alapján nyilvánvaló. A feltétel elégségességének bizonyításához tegyük fel, hogy az (1.2) alatti operátorizomorfan felbontható, végesen ortogonális A gyűrű $g_\omega A g_\omega$ részgyűrűje reguláris, és megmutatjuk, hogy akkor az egész A gyűrű is reguláris. A 2.5. lemma szerint tetszőleges $a \in A$ elem

$$a = \sum_{(l,\gamma) \in Q} a_{l\gamma} \quad (a_{l\gamma} \in \bar{g}_l A \bar{h}_\gamma ;\ a_{l\gamma} \neq 0 ;\ Q \subseteq M \times N) \tag{3.1}$$

alakban állítható elő, ahol a $\bar{g}_l$ $(l \in M)$ és $\bar{h}_\gamma$ $(\gamma \in N)$ idempotens elemekre a következő igaz:

$$\bar{g}_l \bar{g}_k = 0 \ (l \neq k); \quad \bar{h}_\gamma \bar{h}_\beta = 0 \ (\gamma \neq \beta), \tag{3.2}$$

a $\bar{g}_l A$ $(l \in M)$ jobbideálok jobboperátorizomorfak a $g_\omega A$ jobbideállal, az $A\bar{h}_\gamma$ $(\gamma \in N)$ balideálok pedig baloperátorizomorfak az Ag_ω balideállal.

Tetszőleges $a \in A$ elem regularitását az a (3.1) előállításában fellépő $a_{l\gamma}$ komponensek számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. A 2.4. lemma alapján valamennyi $a_{l\gamma}$ komponens reguláris, tehát az indukciós feltevés egy komponens esetén — azaz, ha $Q = \{(l, \gamma)\}$ egyelemű halmaz —, valóban igaz.

Tegyük fel most, hogy tetszőleges $Q' \subset Q$ $(Q' \neq Q)$ esetén minden

$$a' = \sum_{(l,\gamma)\in Q'} a'_{l\gamma} \quad (a'_{l\gamma} \in \bar{g}_l A \bar{h}_l)$$

elem reguláris, és bizonyítjuk, hogy akkor a (3.1) alatti a elem is reguláris. Ehhez rögzítsük a (3.1) előállításban tetszőlegesen egy $l_0, \gamma_0) \in Q$ indexpárt, és a (reguláris) $a_{l_0\gamma_0}$ elemhez válasszunk egy $y \in A$ elemet úgy, hogy

$$a_{l_0\gamma_0} = a_{l_0\gamma_0} y a_{l_0\gamma_0} \tag{3.3}$$

teljesüljön. Nyilvánvaló, hogy y megválasztható úgy, hogy $y \in \bar{h}_{\gamma_0} A \bar{g}_{l_0}$, vagyis feltehető, hogy

$$y = \bar{h}_{\gamma_0} y \bar{g}_{l_0}. \tag{3.4}$$

Tekintsük most a (3.1) alatti a elemmel és a (3.3)—(3.4) alatti y elemmel képezett

$$a' = aya - a \tag{3.5}$$

elemet. A McCoy-lemma szerint az a elem reguláris, ha a' reguláris. Az a' elemre — a (3.1)—(3.4) összefüggéseket figyelembe véve — érvényes a következő:

$$a' = \Big(\sum_{(l,\gamma)\in Q} a_{l\gamma}\Big) y \Big(\sum_{(k,\beta)\in Q} a_{k\beta}\Big) - \sum_{(l,\gamma)\in Q} a_{l\gamma} =$$

$$= \sum_{(l,\gamma)\in Q} \sum_{(l,\beta)\in Q} \bar{g}_l a_{l\gamma} \bar{h}_\gamma \bar{h}_{\gamma_0} y \bar{g}_{l_0} \bar{g}_k a_{k\beta} \bar{h}_\beta - \sum_{(l,\gamma)\in Q} \bar{g}_l a_{l\gamma} \bar{h}_\gamma =$$

$$= \sum_{(l,\gamma)\in Q} (\bar{g}_l a_{l\gamma_0} \bar{h}_{\gamma_0} y \bar{g}_{l_0} a_{l_0\gamma} \bar{h}_\gamma - \bar{g}_l a_{l\gamma} \bar{h}_\gamma) = \sum_{(l,\gamma)\in Q} a'_{l\gamma},$$

ahol

$$a'_{l\gamma} = \bar{g}_l (a_{l\gamma_0} y a_{l_0\gamma} - a_{l\gamma}) \bar{h}_\gamma \in \bar{g}_l A \bar{h}_\gamma.$$

A (3.3) miatt az (l_0, γ_0) indexű komponens

$$a'_{l_0\gamma_0} = 0,$$

és így biztosan van olyan $Q' \subset Q$ valódi részhalmaz, hogy az a' elem

$$a' = \sum_{(l,\gamma)\in Q} a'_{l\gamma}$$

alakban állítható elő. Ezért az indukciós feltevés alapján a (3.5) alatt definiált a' elem reguláris, s akkor a McCoy-lemma szerint az a elem is reguláris. Ezzel az 1.1. tételt bebizonyítottuk.

4. § *További segédtételek*

A következő paragrafusban az 1.1. tétel következményeként néhány gyűrűosztály regularitását bizonyítjuk be. E bizonyításokhoz szükségünk lesz néhány lemmára, amelyeket most elöljáróban ismertetünk.

4.1. Definíció. Az A gyűrű *féligprím*, ha nincsen a zérustól különböző bal-, jobb- és kétoldali nilpotens ideálja (v. ö. [6] 80—81. old.).

4.1. LEMMA (lásd [8] Lemma 17.10). Az A féligprím gyűrűben tetszőleges véges sok különböző $R_1, R_2, \ldots, R_{m_0}$ minimális jobbideál B összegéhez mindig léteznek olyan $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_m$ $(m \leqq m_0)$ idempotens elemek, hogy

$$B = \sum_{i=1}^{m_0} R_i = \sum_{j=1}^{m} \bar{g}_j A,$$

ahol $\bar{g}_j A$ $(1 \leqq j \leqq m)$ az A gyűrű minimális főjobbideáljai és $\bar{g}_j \bar{g}_k = 0$ $(j \neq k)$.

4.2. LEMMA (lásd [1] 36—37. old.) Legyen A féligprím gyűrű. Az $f \in A$ idempotens elemre a következő három állítás ekvivalens:

(I) fA az A minimális jobbideálja;

(II) fAf az A részferdeteste;

(III) Af az A minimális balideálja.

4.3. LEMMA (lásd [6] Theorem 8.1.). Tetszőleges A gyűrű ekvivalensek az alábbi állítások:

(I) Az A féligprím gyűrű és minimális jobbideáljai összege;

(II) Az A gyűrű J_γ $(\gamma \in \Gamma)$ kétoldali ideáljainak diszkrét direkt összege:

$$A = \dot{\sum_{\gamma \in \Gamma}} J_\gamma,$$

ahol J_γ $(\gamma \in \Gamma)$ az A gyűrű egyszerű részgyűrűje, és J_γ tartalmaz legalább egy minimális jobbideált.

A következő lemma állítása lényegében megtalálható a [2] 57—64. oldalain, de önálló tétel vagy lemma formájában nincs megfogalmazva. Ezért ezt a lemmát be is bizonyítjuk.

4.4. LEMMA. Ha az A egyszerű gyűrű tartalmaz legalább egy minimális egyoldali ideált, akkor léteznek olyan $g_i \in A$ $(i \in I)$ és $h_\lambda \in A$ $(\lambda \in \Lambda)$ idempotens elemek, hogy A a $g_i A$ $(i \in I)$ jobbideáljainak diszkrét direkt összege, és ugyancsak az Ah_λ $(\lambda \in \Lambda)$ balideáljainak diszkrét direkt összege, azaz

$$A = \dot{\sum_{i \in I}} g_i A = \dot{\sum_{\lambda \in \Lambda}} Ah_\lambda,$$

ahol a $g_i A$ $(i \in I)$ jobbideálok minimálisak és egymással jobboperátorizomorfak, az Ah_λ $(\lambda \in \Lambda)$ balideálok is minimálisak és egymással baloperátorizomorfak.

Bizonyítás. Ha az A gyűrű egyszerű, és tartalmaz legalább egy minimális egyoldali ideált, akkor A minimális főjobbideáloknak összege és minimális főbalideáloknak összege (lásd [6] Theorem 8.4.).

Mivel A minimális főjobbideálok összege, így tetszőleges $a \in A$; $a \neq 0$ elem felírható

$$a = r_1 + r_2 + \ldots + r_{m_0} \quad (r_i \in g_i A;\ 1 \leqq i \leqq m_0)$$

alakban, ahol $g_i A$ $(1 \leqq i \leqq m_0)$ az A minimális főjobbideáljai, így feltehető, hogy a g_i generáló elemek idempotensek. Az A gyűrű egyszerű, tehát még inkább féligprím. Akkor a 4.1. lemma szerint léteznek olyan $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_m$ $(m \leqq m_0)$ idempotens elemek, hogy

$$B = \sum_{i=1}^{m_0} g_i A = \sum_{j=1}^{m} \bar{g}_j A,$$

ahol $\bar{g}_jA$ $(1 \leqq j \leqq m)$ az A minimális főjobbideáljai, és $\bar{g}_j\bar{g}_k=0$ $(j \neq k)$. Ezért az a elem felírható

$$a=\bar{g}_1\bar{a}_1+\bar{g}_2\bar{a}_2+\ldots+\bar{g}_m\bar{a}_m \tag{4.1}$$

alakban. A $\bar{g}_j$ idempotensek ortogonalitása alapján látható, hogy a (4.1) előállításban

$$\bar{g}_j a = \bar{g}_j\bar{a}_j \quad (1 \leqq j \leqq m)$$

érvényes. Ha az $a \in B$ elemnek lenne a (4.1) mellett egy másik

$$a = \bar{g}_1\bar{\bar{a}}_1+\bar{g}_2\bar{\bar{a}}_2+\ldots+\bar{g}_m\bar{\bar{a}}_m \tag{4.2}$$

előállítása is, akkor ennek komponenseire ugyancsak érvényes lenne a

$$\bar{g}_j a = \bar{g}_j\bar{\bar{a}}_j \quad (1 \leqq j \leqq m)$$

összefüggés. Így a (4.1) és (4.2) összevetésével látható, hogy a egyértelműen írható

$$a = \bar{g}_1 a+\bar{g}_2 a+\ldots+\bar{g}_m a$$

alakban. Következésképpen az A gyűrű g_iA $(i \in I)$ minimális főjobbideáljainak diszkrét direkt összege:

$$A = \dot{\sum_{i \in I}} g_iA$$

Még meg kell mutatnunk, hogy a g_iA és g_jA $(i, j \in I)$ minimális főjobbideálok egymással jobboperátorizomorfak. Ismeretes, hogy a g_iA és g_jA minimális főjobbideálok jobboperátorizomorfak, ha $g_iAg_j \neq 0$ (lásd pl. [8] Lemma 17.12). Így elég belátnunk, hogy $g_iAg_j \neq 0$ $(i, j \in I)$. Mivel az A gyűrű egyszerű, így érvényes az $Ag_jA=A$ egyenlőség, amelyből $g_iAg_jA=g_iA \neq 0$, tehát $g_iAg_j \neq 0$ következik.

Duális meggondolásokkal igazolható, hogy az A gyűrű Ah_λ $(\lambda \in \Lambda)$ minimális főbalideáljainak diszkrét direkt összege:

$$A = \dot{\sum_{\lambda \in \Lambda}} Ah_\lambda,$$

ahol az Ah_λ és Ah_μ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ minimális főbalideálok egymással baloperátorizomorfak.

5. §. *Az 1.1. tétel néhány következménye*

Most az 1.1. tétel következményeként néhány gyűrűosztály regularitását bizonyítjuk be.

5.1. *korollárium.* Ha az A gyűrű egyszerű, és tartalmaz egy minimális jobbideált, akkor A reguláris.

Bizonyítás. A A gyűrűre érvényes a 4.4. lemma, azaz

$$A = \dot{\sum_{i \in I}} g_iA = \dot{\sum_{\lambda \in \Lambda}} Ah_\lambda,$$

ahol g_iA $(i \in I)$ az A gyűrű minimális főjobbideáljai, amelyek egymással jobboperátorizomorfak és Ah_λ $(\lambda \in \Lambda)$ az A gyűrű minimális főbalideáljai, amelyek egymással baloperátorizomorfak.

Az A gyűrű egyszerű, tehát féligprím, így $g_iA (i \in J)$ minimális főjobbideáljaira érvényes a 4.1. lemma, következésképpen a g_iA minimális főjobbideálok halmaza végesen ortogonális. Hasonlóan látható be, hogy az Ah_λ minimális főbalideálok halmaza is végesen ortogonális. Könnyen be lehet látni azt is, hogy feltételezhető olyan $\omega \in I \cap \Lambda$ index létezése, amelyre $g_\omega = h_\omega$. Megmutattuk tehát, hogy az A gyűrű operátorizomorfan felbontható, végesen ortogonális.

Az A gyűrű $g_\omega A g_\omega$ részgyűrűje a 4.2. lemma szerint ferdetest, tehát reguláris gyűrű. Így az 1.1. tétel szerint A is reguláris.

E kollóráriumból közvetlenül belátható az alábbi eredmény is.

5.2. *korollárium.* Tetszőleges Artin-féle egyszerű gyűrű reguláris.

Az 5.1. korollárium és a 4.3. lemma segítségével igazolható a következő korollárium.

5.3. *korollárium.* Ha az A gyűrű féligprím és minimális jobbideáljainak összege, akkor A reguláris.

Bizonyítás. A 4.3. lemma alapján az A gyűrű J_γ $(\gamma \in \Gamma)$ kétoldali ideáljainak diszkrét direkt összege:

$$A = \dot{\sum_{\gamma \in \Gamma}} I_\gamma$$

ahol J_γ az A gyűrű egyszerű részgyűrűje és J_γ tartalmaz legalább egy minimális jobbideált. Így az 5.1. korollárium alapján valamennyi J_γ részgyűrű reguláris. Az A gyűrű tehát olyan kétoldali ideálok diszkrét direkt összege, amelyek az A reguláris részgyűrűi, ezért az egész A gyűrű is reguláris.

Ismeretes, hogy egy féligegyszerű gyűrű véges sok minimális főjobbideáljainak direkt összege, és az is ismeretes, hogy egy Artin-féle féligegyszerű gyűrű mindig féligprím. Ezért az alábbi eredmény az 5.3. korollárium speciális esete.

5.4. *korollárium.* Egy A Artin-féle féligegyszerű gyűrű mindig reguláris.

IRODALOM

[1] ARTIN E.—NESBITT C. J., THRALL R. M., Rings with Minimum Conditions, University of Michigan Publications in Mathematics, Number 1, Ann Arbor, 1948.
[2] JACOBSON N., Structure of Rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 37, Providence, 1956.
[3] KAPLANSKY I., Fields and Rings, Univ. of Chicago Press, Chicago and London, 1972.
[4] MÁRKI L., On locally regular Rees matrix semigroups, Acta Sci. Math. *37* (1975) 95—102.
[5] STEINFELD O., On a generalization of completely 0-simple semigroups, Acta Sci. Math. *28* (1967) 135—145.
[6] _____, Quasi Ideals in Rings and Semigroups, Akadémiai Kiadó, Budapest, megjelenés alatt.
[7] SZÁSZ F., A főjobbideálokra nézve minimum feltételű gyűrűk, MTA III. Mat.-Fiz. Oszt. Közl. *11* (1961) 135—177.
[8] WIEGANDT R., Radical and Semisimple Classes of Rings, Queen's papers in pure and appl. math., *37*, Kingston, 1974.

ОБ ОДНИ КЛАССЕ РЕЛУЯРНЫХ КОЛЕЦ

ЧЕНЬ- КУЙ ТИЕН И АННА ЛИ

ON A CLASS OF REGULAR RINGS

TRAN QUI TIEN AND ANNA LEE

VIZSGALAPOK ÉRTÉKELÉSÉVEL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁK

DOBÓ ANDOR ÉS SZAJCZ SÁNDOR

Tekintsük a következő vizsgáztatási rendszert:

N számú vizsgakérdés egy vizsgalapra van felírva. Minden kérdéshez n számú válasz (válasz-csoport) tartozik, melyek közül csak egy a helyes. A vizsgázónak egy ilyen lapot kell kitöltenie, úgy, hogy az általa helyesnek vélt választ kell megjelölnie. Ez többnyire úgy történik, hogy a vizsgázó az általa helyesnek ítélt válasz előtti négyszögbe „x" jel bejegyzésével adja meg a feleletet. (Ha egy kérdésre több kockába is beírja az „x" jelet, a felelet hibásnak minősül!)

A vizsgalap kitöltésekor az alábbi események bekövetkezésével számolhatunk:

A vizsgázó jól válaszol;	A esemény.
A vizsgázó nem jól válaszol;	$\bar{A}$ esemény.
A vizsgázó tudja a helyes választ;	B esemény.
A vizsgázó nem tudja a helyes választ;	$\bar{B}$ esemény.

Tegyük fel, hogy a vizsgázó:

1° Minden egyes kérdésre p $(p>0)$ valószínűséggel tudja a helyes választ. Ez tehát azt jelenti, hogy:

$$P(B) = p$$

$$P(\bar{B}) = 1-p.$$

2° Ha nem tudja a választ, akkor v valószínűséggel jelöli meg az n lehetséges válasz közül a helyeset.
Ekkor tehát

$$P(A|\bar{B}) = v$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1-v.$$

3° Ha tudja a választ, akkor z valószínűséggel jelöli meg az n válasz közül a helyeset. Ekkor tehát

$$P(A|B) = z,$$

$$P(\bar{A}|B) = 1-z.$$

A szerzők [1]-ben a $z=1$ választás mellett a vizsgalapok értékelésével kapcsolatos valószínűségszámítási problémák megválaszolásával foglalkoztak. Az alábbiakban a problémakör általánosításával foglalkozunk, pontosabban azzal az esettel, amikor z a $(0, 1]$ intervallumba esően tetszőleges értéket felvehet. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a vizsgázó, ha tudja is a helyes választ, valamilyen oknál fogva (pl. vizsgadrukk, figyelmetlenség stb.) rosszul válaszol a kérdésre.

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, megemlítjük, hogy az itt tárgyalt probléma megválaszolásakor kapott kifejezésekkel megegyező összefüggéseket kapunk akkor is, ha például egy műszaki berendezés alkatrészét vizsgáljuk olyan szempontból, hogy az jó-e vagy sem, úgy, hogy közben a vizsgálat is hibalehetőséget rejt magában. Ilyen helyzet áll elő például akkor, amikor az alkatrész működőképességét olyan műszerrel kell ellenőrizni, amely csak bizonyos valószínűséggel ad helyes eredményt.

A vizsgalapok értékelésével kapcsolatos valószínűségszámítási problémák és megoldásuk

Ha a kérdésekre adott válaszokat független eseményeknek tekintjük, s a vizsgalap átnézésekor kiderül, hogy az N kérdésre adott válaszok közül k helyesnek bizonyult, úgy kérdés: mi annak a valószínűsége, hogy a vizsgázó pontosan i kérdésre tudta a helyes választ?

E kérdés megválaszolása érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

Legyen

$B_{N,2}$ — az az esemény, hogy a vizsgázó az N kérdésből i-re tudja a helyes választ;

$A_{N,k}$ — az az esemény, hogy a vizsgázó N kérdésből k-ra helyesen válaszolt.

A korábban alkalmazott jelölések felhasználásával kapjuk, hogy:

$$P(B_{N,i}) = \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}, \tag{1}$$

$$P(A_{N,k}) = \binom{N}{k} P(A)^k [1-P(A)]^{N-k}.$$

Mivel a teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = zp + (1-p)v,$$

ezért

$$P(A_{N,k}) = \binom{N}{k} [zp+(1-p)v]^k [1-v+p(v-z)]^{N-k}. \tag{2}$$

E jelölések bevezetése után kérdésünkre a $P(B_{N,i} \mid A_{N,k})$ meghatározásával válaszolhatunk, amely az összetett valószínűségi tétel értelmében a

$$P(B_{N,i}|A_{N,k}) = \frac{P(A_{N,k}|B_{N,i})P(B_{N,i})}{P(A_{N,k})} \tag{3}$$

alakban írható.

(3)-ban az $\{A_{N,k} \mid B_{N,i}\}$ esemény úgy következhet be, hogy a vizsgázó az ismert i kérdés közül pontosan j-re helyesen válaszol; ennek valószínűsége: $\binom{i}{j} z^j (1-z)^{i-j}$ és az $N-i$ kérdés közül — amelyekre nem tudja a helyes választ — pontosan $k-j$-re ad helyes választ; ennek valószínűsége:

$$\binom{N-i}{k-j} v^{k-j} (1-v)^{N-i-k+j},$$

ahol

$$\max(k+i-N, 0) \leqq j \leqq i.$$

Ebből már következik, hogy

$$P(A_{N,k}|B_{N,i}) = \sum_{j=q_1}^{q_2} \binom{i}{j} \binom{N-i}{k-j} v^{k-j} (1-v)^{N-i-k+j} z^j (1-z)^{i-j}, \tag{4}$$

ahol

$$q_1 = \max(k+i-N;0); \quad q_2 = \min(i,k).$$

Az (1)-re, (2)-re és (4)-re való tekintettel (3) az alábbi alakban írható:

(3′)

$$P(B_{N,i}|A_{N,k}) = \frac{\left[\sum_{j=q_1}^{q_2}\binom{i}{j}\binom{N-i}{k-j}v^{k-j}(1-v)^{N-i-k+j}z^j(1-z)^{i-j}\right]\binom{N}{i}p^i(1-p)^{N-i}}{\binom{N}{k}[zp+(1-p)v]^k[(1-v)+p(v-z)]^{N-k}} =$$

$$= W_N(k, i, p, v, z).$$

Eredményeinket összegezve, az alábbi tételhez jutunk:

1. TÉTEL: Tegyük fel, hogy egy vizsgázó — a közölt vizsgáztatási rendszerben — minden egyes kérdésre $p>0$ valószínűséggel tudja a helyes választ, ugyanakkor z valószínűséggel jelöli meg a helyeset; ha pedig nem tudja, akkor v valószínűséggel jelöli meg a lehetséges válaszok közül a jónak tekinthetőt.

Ha a kérdésekre adott válaszokat független eseménynek tekintjük, s a vizsgalap átnézésekor kiderül, hogy az N kérdés közül k helyesnek bizonyult, akkor annak a valószínűsége, hogy a vizsgázó pontosan i kérdésre tudta a helyes választ, a (3′) alatti összefüggéssel fejezhető ki.

Következmények:

Ha $N=k=i=1$, akkor

a) annak a valószínűsége, hogy a vizsgázó azért adott helyes választ, mert tudta a helyes eredményt:

$$P(B_{1,1}|A_{1,1}) = \frac{zp}{zp+(1-p)v} = P(B|A);$$

b) annak a valószíűnsége, hogy a vizsgázó jól válaszolt, de nem tudta a helyes kérdést:

$$P(\bar{B}_{1,1}|A_{1,1}) = \frac{v(1-p)}{v(1-p)+zp} = P(\bar{B}|A);$$

c) annak a valószínűsége, hogy a vizsgázó nem jól válaszolt, de tudta a helyes kérdést:

$$P(B_{1,1}|\bar{A}_{1,1}) = \frac{(1-z)p}{(1-z)p+(1-v)(1-p)} = P(B|\bar{A});$$

d) annak a valószínűsége, hogy a vizsgázó nem tudta a helyes választ, és nem is válaszolt jól:

$$P(\bar{B}_{1,1}|\bar{A}_{1,1}) = \frac{(1-v)(1-p)}{(1-v)(1-p)+(1-z)p} = P(\bar{B}|\bar{A}).$$

Mint látható, ha $z=1$

$$P(B|\bar{A}) = 0,$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1.$$

Ha pedig $v=\frac{1}{n}$, akkor például

$$P(B|A) = \frac{zpn}{zpn+(1-p)}.$$

2. TÉTEL:

$$\lim_{z\to 1} W_N(k, i, p, v, z) = W(k, i, p, v) = \tag{5}$$

$$= \frac{\binom{k}{i} p^i[(1-p)v]^{k-i}}{[p+(1-p)v]^k} \quad (i = 0, 1, \ldots, k),$$

vagyis $z\to 1$ esetén $W_N(k, i, p, v, z)$ értéke nem függ N-től.

Bizonyítás: Ha $z\to 1$, akkor $j<i$-re $(1-z)^{i-j}=0$, $j=i$-re pedig $(1-z)^{i-j}=1$. Ennélfogva (3′) alapján,

$$\lim_{z\to 1} W_N(k, i, p, v, z) = \frac{\binom{N-i}{k-i} v^{k-i}(1-v)^{N-k}\binom{N}{i} p^i(1-p)^{N-i}}{\binom{N}{k}[p+(1-p)v]^k[(1-v)(1-p)]^{N-k}}.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\frac{\binom{N-i}{k-i}\binom{N}{i}}{\binom{N}{k}} = \binom{k}{i},$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{z\to 1} W_N(k, i, p, v, z) = \frac{\binom{k}{i} p^i[(1-p)v]^{k-i}}{[p+(1-p)v]^k} = W(k, i, p, v) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

Q.e.d.

Az (5)-ből következik, hogy

$$W(k, k, p, v) = \frac{p^k}{[p+(1-p)v]^k},$$

$$W(k, i, p, 1) = \binom{k}{i} p^i(1-p)^{k-i},$$

$$\lim_{v\to 0} W(k, i, p, v) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = k \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Érdekes lehet még annak a valószínűsége, hogy ha a vizsgázó N kérdésből k kérdésre adott helyes választ, akkor mi a valószínűsége annak, hogy legalább l $(l\leqq k)$ kérdésre tudta a helyes választ?

Ha ezt a valószínűséget $L_N(k, l, p, v, z)$ jelöli, akkor a (3′) alatti összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$L_N(k, l, p, v, z) = \sum_{i=l}^{k} W_N(k, i, p, v, z). \tag{6}$$

Ha $z=1$, akkor

$$L_N(k, l, p, v, 1) = \sum_{i=l}^{k} W(k, i, p, v) = \sum_{i=l}^{k} \frac{\binom{k}{i} p^i[(1-p)v]^{k-i}}{[p+(1-p)v]^k} = L(k, l, p, v). \tag{6′}$$

A várható érték és szórás meghatározása $z=1$ *esetén*

Ha $z=1$ esetén a vizsgalap átnézésekor az N kérdésre adott válaszok közül k helyesnek bizonyult, akkor a vizsgázó által valóban tudott kérdések várható értéke; $M(k, p, v)$, és szórása; $D(k, p, v)$ a 2. Tétel alapján már könnyen meghatározható.

Nevezetesen fennáll az alábbi

3. TÉTEL:

$$M(k, p, v) = \frac{kp}{p+(1-p)v} \tag{7}$$

$$D(k, p, v) = \frac{\sqrt{kp(1-p)v}}{p+(1-p)v}. \tag{8}$$

Bizonyítás: definíció szerint

$$M(k, p, v) = \sum_{i=0}^{k} iW(k, i, p, v).$$

Mivel

$$\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i} p^i[(1-p)v]^{k-i} = pk \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^{i-1}[(1-p)v]^{k-i} = pk[p+(1-p)v]^{k-1};$$

$$\left(\text{Itt felhasználtuk azt, hogy } (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\right), \text{ ezért}$$

$$\sum_{i=0}^{k} iW(k, i, p, v) = \frac{pk[p+(1-p)v]^{k-1}}{[p+(1-p)v]^k},$$

amiből (7) már következik.

A (8) belátása is hasonlóan történhet. Ekkor azt kell figyelembe venni, hogy

$$D^2(k, p, v) = \sum_{i=0}^{k} i^2 W(k, i, p, v) - M^2(k, p, v),$$

továbbá, hogy

$$\sum_{i=0}^{k} i^2\binom{k}{i} p^i[(1-p)v]^{k-i} = p^2(k-1)k \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} p^{i-2}[(1-p)v]^{k-i} +$$

$$+ pk \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^{i-1}[(1-p)v]^{k-i} = p^2(k-1)k[p+(1-p)v]^{k-2} + pk[p+(1-p)v]^{k-1}.$$

Megjegyezzük, hogy ha $v=\frac{1}{n}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} M\left(k, p, \frac{1}{n}\right) = k, \tag{7'}$$

$$\lim_{n\to\infty} D\left(k, p, \frac{1}{n}\right) = 0. \tag{8'}$$

A vizsgakövetelmények meghatározása $z=1$ esetén

A $z=1$ esetén vizsgáljuk most azt, hogy az adott vizsgáztatási rendszer mellett a vizsgázó mikor feleljen meg a vizsga követelményeinek, vagyis mikor menjen át a vizsgán. Pontosabban: az N kérdésből minimálisan hány kérdésre kelljen a vizsgázónak helyes választ adnia ahhoz, hogy a vizsga követelményeit teljesítettnek tekinthessük.

Ilyen eset áll elő például akkor, ha a vizsgalap kresz-kérdéseket tartalmaz, s a vizsgázó jogosítvány megszerzése céljából tesz vizsgát.

A kérdés megválaszolása érdekében először vizsgáljuk meg azt, hogy $W(k, i, p, v)$ mely i értékre veszi fel a maximumát.

Tekintsük a

$$\frac{W(k, i+1, p, v)}{W(k, i, p, v)} = \frac{k-i}{i+1} \cdot \frac{p}{(1-p)v} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

hányadost, mely i-ben szigorúan monoton csökkenő. Mivel

$$W(k, i+1, p, v) = \frac{k-i}{i+1} \cdot \frac{p}{(1-p)v} W(k, i, p, v),$$

ezért nyilvánvaló, hogy amíg $\frac{k-i}{i+1} \cdot \frac{p}{(1-p)v} > 1$, addig $W(k, i+1, p, v) > W(k, i, p, v)$. Ez azt jelenti, hogy $W(k, i, p, v)$ arra a legnagyobb i-re veszi fel a maximumát, melyre $\frac{k-(i-1)}{i} \cdot \frac{p}{(1-p)v} \geqq 1$ még teljesül.

Ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{p(k+1)}{p+(1-p)v} \geqq i$$

egyenlőtlenséggel, melyből — a korábban mondottak alapján — ha i_0 jelöli a $W(k, i, p, v)$ maximum helyét, — kapjuk, hogy

$$i_0 = \left[\frac{p(k+1)}{p+(1-p)v}\right], \tag{9}$$

ahol $[\cdot]$ az egész rész képzésre utal.

(A közöltekből látható, hogy ha $\frac{p(k+1)}{p+(1-p)v}$ egész szám, akkor az $i=i_0+1$ is maximum-hely.)

Ezek után rátérünk a felvetett probléma vizsgálatára, melyre egyik lehetséges megoldásként a következő válasz adható:

I. Ha valamely vizsgázó az összes kérdésre helyesen válaszolt, akkor (9) szerint a vizsgázó legnagyobb valószínűséggel

$$i_0 = \left[\frac{p(N+1)}{p+(1-p)v}\right]$$

számú kérdésre tudja a helyes választ. Ezek után azt mondhatjuk: az a vizsgázó menjen át a vizsgán (kapjon jogosítványt), aki rögzített p mellett legalább i_0 számú kérdésre ad helyes választ.

II. Egy másik megoldásként mondhatjuk azt is, hogy az a vizsgázó menjen át a vizsgán, aki legalább l_0 kérdésre legalább p_0 valószínűséggel tudja a helyes választ, s itt l_0 és p_0 előre rögzített értékek.

Ez más szóval azt jelenti, hogy a vizsgázó akkor megy át a vizsgán, ha legalább k_0 kérdésre helyesen válaszol, ahol $k=k_0^*$ az a legkisebb pozitív egész szám, melyre az

$$L(k, l_0, p, v) = \sum_{i=l_0}^{k} W(k, i, p, v) \geqq p_0 \tag{10}$$

teljesül.

Ha például $N=30$, $p=0{,}9$, $v=1/3$, akkor az első esetben azt kapjuk, hogy az a vizsgázó megy át a vizsgán, aki legalább

$$i_0 = \left[\frac{p(N+1)}{p+(1-p)v}\right] = 29$$

kérdésre ad helyes választ.

A második eljárás szerint tegyük fel, hogy azt akarjuk elérni: az a vizsgázó ne bukjon meg, aki legalább $l_0=25$ kérdésre tud legalább $p_0=0{,}985$ valószínűséggel helyesen válaszolni.

Mivel $L(k, l_0, p, v)$ különböző k értékekre az alábbi értékeket veszi fel:

$$L(25,\ 25,\ 0{,}9,\ 1/3) = 0{,}403$$
$$L(26,\ 25,\ 0{,}9,\ 1/3) = 0{,}762$$
$$L(27,\ 25,\ 0{,}9,\ 1/3) = 0{,}930$$
$$L(28,\ 25,\ 0{,}9,\ 1/3) = 0{,}985,$$

ezért a vizsgán csak az a vizsgázó nem bukik meg, aki legalább 28 kérdésre adott helyes választ.

Más szóval ez azt jelenti, hogy ha a vizsgalap $N=30$ kérdést tartalmaz, s a kérdések alatt olvasható válaszok száma $n=3$, továbbá a vizsgázók minden egyes kérdésre $p=0{,}9$ valószínűséggel tudják a helyes választ, úgy 1000 olyan vizsgázó közül, aki 28 kérdésre ad helyest választ, átlagosan 15 az olyan, aki 25-nél kevesebb kérdésre ismeri a helyes választ.

Ha például a vizsgalap kresz-kérdéseket tartalmaz, s a közölt feltételek mellett 30 kérdés közül 28-nak a megválaszolása esetén a vizsgázó átmegy a vizsgán, akkor ezer — 28 kérdésre jól válaszoló — vizsgázó közül átlagosan tizenöten kapnak úgy jogosítványt, hogy a 30 kérdés közül huszonötre sem tudják a helyes választ.

E példa is mutatja, hogy nem érdektelen a vizsgalapok kiértékelésének módszereit behatóbban tanulmányozni, különösen akkor, ha a kérdések alkalmassági vizsgálatra vonatkoznak.

IRODALOM

[1] Dobó A.—Szajcz S.: Vizsgalapok értékelése. Kézirat, Bp. 1975.

О ПРОБЛЕМЫХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЬЯЗАННЫХ С ОЦЕНКОЙ ЭКЗАМИНАЦИОННЫХ ЛИСТОВ

А. ДОБО И Щ. САЙЦ

ON SOME PROBABILISTIC PROBLEMS CONNECTED WITH EVALUATION OF TESTS

A. DOBÓ AND S. SZAJCZ

METRIKÁK ÉS KONNEXIÓK AZ ÉRINTŐVEKTOROK FIBRÁLT TERÉN

NAGYNÉ SZILVÁSI MÁRTA

Első ízben S. Sasaki [5] definiált vektormezőt egy M differenciálható sokaság $T(M)$ érintőnyalábján, amelyet kiterjesztett vektormezőnek nevezett. Ugyanebben a dolgozatában Riemann-metrikát is értelmezett az érintőnyalábon, és meghatározta az ehhez a metrikához tartozó nulla torziójú Riemann-féle összefüggést (konnexiót). Az érintőnyalábnak ezek és az ezt követő differenciálgeometriai vizsgálatai még lokálisak voltak. Csak 1966-ban adta meg K. Yano a differenciálható sokaság és az érintőnyalábja közötti kapcsolatnak a globális leírását. Az M sokaság feletti tenzormezők $\mathcal{T}(M)$ algebrájából az M érintőnyalábja feletti tenzormezők $\mathcal{T}(T(M))$ algebrájába három leképezést definiált [2], [3], ezeket vertikális, teljes és horizontális lifteknek nevezte. Az első két leképezés értelmezése független az M alapsokaságon adott konnexiótól. Említésre érdemes, hogy a Sasaki által definiált kiterjesztett vektormező az alapsokaság érintő vektormezejének teljes liftjeként áll elő. A. M. Vasziljev hívta fel figyelmemet K. Yano e téren elért újabb eredményeire. Yano különböző metrikákat adott meg a fibrált tér felett, megvizsgálta a Sasaki által definiált G^L metrikát is, és megadta ezekhez a metrikákhoz tartozó konnexiókat [4]. Ebben a dolgozatban további három metrikát adunk meg az érintővektorok fibrált terén, és meghatározzuk a hozzájuk tartozó nulla torziójú Riemann konnexiókat. Az elért eredmények Sasakinak a G^L metrikára vonatkozó vizsgálataival állíthatók párhuzamba. A dolgozatban a fent említett cikkek terminológiáját és jelöléseit alkalmazzuk.

Legyen (x^i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ az M* sokaság U környezetén adott lokális koordinátarendszer, és legyen $\pi: T(M) \to M$ kanonikus projekció. A $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ környezeten indukált lokális koordinátarendszert (x^i, y^i) $(i=1, 2, \ldots, n)$, vagy rövidebben (ξ^I) $(I=1, 2, \ldots, 2n)$ jelöli, ahol $\xi^i = x^i$ és $\xi^{\bar{i}} = \xi^{i+n} = y^i$. Azaz, ha az $x \in M$ pontnak az (x^i) lokális koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ és $\bar{x} = b^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_x(M)$, akkor $\bar{x}$ koordinátái az (x^i, y^i) indukált lokális koordinátarendszerben $(a^1, a^2, \ldots, a^n, b^1, b^2, \ldots, b^n)$.

Az M sokaságon adott $\mathcal{X} = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ vektormező vertikális, teljes és horizontális liftje (a továbbiakban v-lift, c-lift, ill. h-lift) az indukált lokális koordinátarendszer-

* A továbbiakban feltesszük, hogy M összefüggő Riemann tér, valamint M és az M feletti tenzormezők és lineáris konnexiók C^∞ osztályúak.

ben a következőképpen írható fel [2], [3]:

$$\mathscr{X}^V = X^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\mathscr{X}^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{1}$$

$$\mathscr{X}^H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{js} y^j X^s \frac{\partial}{\partial y^i},$$

ahol Γ^i_{js} az M sokaságon adott affin konnexiónak az (x^i)-re vonatkozó paraméterei. $\mathscr{X}$ liftjeinek koordinátáit rövidebb alakban is felírhatjuk:

$$\mathscr{X}^V: \begin{bmatrix} 0 \\ X^i \end{bmatrix}, \quad \mathscr{X}^C: \begin{bmatrix} X^i \\ \partial X^i \end{bmatrix}, \quad \mathscr{X}^H: \begin{bmatrix} X^i \\ -\Gamma^i_s X^s \end{bmatrix}, \tag{1'}$$

ahol $\partial X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j$ és $\Gamma^i_s = \Gamma^i_{js} y^j$.

Legyen adott az M sokaságon egy G (0, 2) típusú mértéktenzor, amelynek komponenseit az (x^i) lokális koordinátarendszerben g_{ij} jelöli. Az M sokaságon tehát $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. G c-liftjének az (x^i, y^i)-re vonatkozó komponenseit egy $(2n \times 2n)$ alakú mátrixban írjuk fel [2]:

$$G^C: \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} y^k & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

S. Sasaki adott meg a $T(M)$ sokaságon egy G^L Riemann metrikát, amelyet az $e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H$, $e_{\bar{i}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V$ $(\bar{i} = i + n)$ bázisban a

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} \delta y^i \delta y^j \tag{3}$$

összefüggés definiál, ahol $dx^i = (dx^i)^V$ és $\delta y^i = dy^i + \Gamma^i_{sm} y^s dx^m = (dx^i)^H$, $i = 1, 2, \ldots, n$. G^L mátrixa tehát az e_i, $e_{\bar{i}}$ bázisban

$$G^L: \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}. \tag{3'}$$

Ennek a mértéktenzornak az (x^i, y^i) bázisra vonatkozó kovariáns komponensei a következők:

$$\bar{G}_{IJ}: \begin{pmatrix} g_{ij} + \Gamma^s_i \Gamma^t_j g_{st} & \Gamma^s_i g_{sj} \\ \Gamma^s_j g_{si} & g_{ij} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A G^L metrikára teljesülnek az alábbi összefüggések [4]:

$$G^L(X^H, Y^H) = g(X, Y) \circ \pi,$$

$$G^L(X^V, Y^V) = g(X, Y) \circ \pi, \tag{5}$$

$$G^L(X^H, Y^V) = G^L(X^V, Y^H) = 0,$$

ahol $g(X, Y)$ az M sokaságon számított skaláris szorzat. Sasaki meghatározta a G^L mértéktenzorhoz rendelt nulla torziójú Riemann-konnexió paramétereit, amelyek a $T(M)$ érintőnyaláb indukált koordinátarendszerében a következők:

$$\bar{\Gamma}^q_{ij} = \frac{1}{2}(R^q_{0is}\Gamma^s_j + R^q_{0js}\Gamma^s_i) + \Gamma^q_{ij}$$

$$\bar{\Gamma}^q_{i\bar{j}} = \frac{1}{2}R^q_{0ji}, \quad \bar{\Gamma}^q_{\bar{i}j} = \frac{1}{2}R^q_{0ij}, \quad \bar{\Gamma}^q_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

(6)
$$\bar{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij} = \partial\Gamma^q_{ij} - \frac{1}{2}\Gamma^q_r(R^r_{0is}\Gamma^s_j + R^r_{0js}\Gamma^s_i),$$

$$\bar{\Gamma}^{\bar{q}}_{i\bar{j}} = \Gamma^q_{ij} + \frac{1}{2}R^m_{0ij}\Gamma^q_m, \quad \bar{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}j} = \Gamma^q_{ij} + \frac{1}{2}R^m_{0ji}\Gamma^q_m, \quad \bar{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

ahol R^q_{kij} a görbületi tenzor komponensei és $R^q_{0ij} = y^k R^q_{kij}$.

A továbbiakban három mértéktenzort definiálunk a $T(M)$ érintőnyalábon úgy, hogy az $e_i, e_{\bar{i}}$ bázisban felírt mátrixuk

$$\begin{bmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & g_{ij} \end{bmatrix}$$

legyenek.

1. TÉTEL. *A $T(M)$ sokaságon az $e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H$, $e_{\bar{i}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V$ bázisban a*

(7)
$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,\delta y^j + g_{ij}\,\delta y^i\,dx^j$$

összefüggéssel, vagyis a

(7′)
$$\begin{bmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal adott mértéktenzor az M alapsokaságon adott G tenzor c-liftjével egyezik meg.

Bizonyítás. Végezzük el (7)-ben a $\delta y^i = dy^i + \Gamma^i_{tm}y^t\,dx^m$ helyettesítést, és hozzuk $ds^2 = G_{IJ}dx^I dx^J$ $(I, J = 1, 2, \ldots, 2n)$ alakra, ahonnan kiolvashatjuk az adott mértéktenzornak az (x^i, y^i) lokális koordinátarendszerben felírt mátrixát:

(8)
$$\begin{bmatrix} g_{is}\Gamma^s_j + g_{sj}\Gamma^s_i & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel a nulla torziójú Riemann-konnexióra $\nabla g = 0$ miatt $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^m_{ki}g_{mj} + \Gamma^m_{kj}g_{im}$ teljesül, ezért a (8) mátrix megegyezik a G^C metrika (2) mátrixával.

A G^C metrikára teljesülnek az alábbi összefüggések [4]:

(9)
$$\begin{aligned} &G^C(X^V, Y^V) = 0, \\ &G^C(X^V, Y^H) = G^C(X^H, Y^V) = g(X, Y)\circ\pi, \\ &G^C(X^C, Y^C) = (g(X, Y))^C, \\ &G^C(X^H, Y^H) = 0. \end{aligned}$$

2. TÉTEL. *A $T(M)$ sokaságon a G^C metrikához rendelt nulla torziójú Riemann-féle konnexió paraméterei egybeesnek az M sokaságon adott lineáris konnexió paramétereinek c-liftjével.*

Bizonyítás. A G^C metrikához rendelt Riemann-konnexió paramétereit a $T(M)$ sokaság egy (x^i, y^i) lokális koordinátarendszerében a

$$\tilde{\Gamma}^Q_{IJ} = \frac{1}{2}\tilde{G}^{KQ}\left(\frac{\partial \tilde{G}_{KJ}}{\partial \xi^I} + \frac{\partial \tilde{G}_{IK}}{\partial \xi^J} - \frac{\tilde{G}_{IJ}}{\partial \xi^K}\right) \tag{10}$$

képlettel számítjuk ki, ahol $\tilde{G}_{IJ}$ a G^C mértéktenzornak a (8) mátrixban felírt kovariáns komponensei ($I, J, K, Q = 1, 2, \ldots, 2n$). G^C kontravariáns komponenseit a $\tilde{G}_{JQ}\tilde{G}^{QK} = \delta^K_J$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$\tilde{G}^{QK}: \begin{bmatrix} 0 & g^{qk} \\ g^{qk} & -\Gamma^q_s g^{sk} - \Gamma^k_s g^{sq} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

ahol g^{qk} az M sokaságon adott mértéktenzor kontravariáns komponensei. A számításokban felhasználjuk a görbületi tenzor komponenseire vonatkozó

$$R^q_{0ij} = \frac{\partial \Gamma^q_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^q_i}{\partial x^j} + \Gamma^m_i \Gamma^q_{im} - \Gamma^m_i \Gamma^q_{jm} \tag{12}$$

összefüggést, ahol $R^q_{0ij} = y^k R^q_{kij}$ és $\Gamma^q_i = y^j \Gamma^q_{ji}$.

(10)-ből a $q, \bar{i}, j$ indexekre a következő adódik:

$$2\tilde{\Gamma}^q_{\bar{i}j} = g^{kq}\left[\frac{\partial}{\partial y^i} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial y^k} g_{ij}\right] = 0,$$

és hasonlóképpen a $q, i, \bar{j}$ indexekre:

$$2\tilde{\Gamma}^q_{i\bar{j}} = g^{kq}\left[\frac{\partial}{\partial y^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial y^k} g_{ij}\right] = 0.$$

Ha (10)-be a $\bar{q}, \bar{i}, j$ indexű komponenseket helyettesítjük, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$2\tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}j} = g^{kq}\left[\frac{\partial}{\partial y^i}(g_{ks}\Gamma^s_j + g_{sj}\Gamma^s_k) + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right] -$$

$$-(\Gamma^q_s g^{sk} + \Gamma^k_s g^{sq})\left(\frac{\partial}{\partial y^i} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial y^k} g_{ij}\right) = g^{kq}(g_{ks}\Gamma^s_{ji} + g_{sk}\Gamma^s_{ij}) = 2\Gamma^q_{ij}.$$

Hasonlóképpen a $\bar{q}, i, \bar{j}$ indexekre

$$2\tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{i\bar{j}} = 2\Gamma^q_{ij}$$

adódik. A q, i, j indexű paramétert a következőképpen kapjuk:

$$2\tilde{\Gamma}^q_{ij} = g^{kq}\left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial y^k}(g_{is}\Gamma^s_j + g_{sj}\Gamma^s_i)\right] = g^{kq}(g_{ks}\Gamma^s_{ji} + g_{sk}\Gamma^s_{ij}) = 2\Gamma^q_{ij}.$$

Végül a $\tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij}$ paramétereket számítjuk ki:

$$2\tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij} = g^{kq}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{ks}\Gamma^s_j + g_{sj}\Gamma^s_k) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{is}\Gamma^s_k + g_{sk}\Gamma^s_i) - \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{is}\Gamma^s_j + g_{sj}\Gamma^s_i)\right] +$$

$$+(-\Gamma^q_s g^{sk} - \Gamma^k_s g^{sq})\left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial y^k}(g_{im}\Gamma^m_j + g_{mj}\Gamma^m_i)\right] =$$

$$= g^{kq}\left[\left(\frac{\partial\Gamma^s_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^s_i}{\partial x^k} + \Gamma^r_k\Gamma^s_{ri} - \Gamma^r_i\Gamma^s_{rk}\right) g_{sj} + \left(\frac{\partial\Gamma^s_k}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^s_j}{\partial x^k} + \Gamma^r_k\Gamma^s_{rj} - \Gamma^r_j\Gamma^s_{rk}\right) g_{is}\right] +$$

$$+ g^{kq}\left(g_{kr}\Gamma^r_{si}\Gamma^s_j + g_{rk}\Gamma^r_{sj}\Gamma^s_i + \frac{\partial\Gamma^s_j}{\partial x^i} g_{ks} + \frac{\partial\Gamma^s_i}{\partial x^j} g_{sk}\right) - \Gamma^q_s g^{sk} 2 g_{kr}\Gamma^r_{ij} = R^q_{0ij} + R^q_{0ji} + 2\partial\Gamma^q_{ij}.$$

Összefoglalva tehát a

$$\tilde{\Gamma}^q_{ij} = \tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij} = \tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}j} = \Gamma^q_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij} = \partial\Gamma^q_{ij},$$

(13)

$$\tilde{\Gamma}^q_{\bar{i}j} = \tilde{\Gamma}^q_{i\bar{j}} = \tilde{\Gamma}^q_{\bar{i}\bar{j}} = \tilde{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0$$

paramétereket kaptuk. Ezek a paraméterek megegyeznek a

$$\nabla^C_{XC} Y^C = (\nabla_X Y)^C$$

összefüggéssel definiált ∇^C konnexió paramétereivel [2].

3. TÉTEL. *A $T(M)$ sokaságon az $e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H$, $e_{\bar{i}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V$ bázisra vonatkozó*

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j + g_{ij}\,dx^i\,\delta y^j + g_{ij}\,\delta y^i\,dx^j \tag{14}$$

összefüggéssel, azaz a

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{14'}$$

mátrixszal adott G^S mértéktenzornak az (x^i, y^i) lokális koordinátarendszerre vonatkozó kovariáns és kontravariáns komponensei

$$\hat{G}_{IJ}: \begin{pmatrix} g_{ij} + \partial g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

illetve

$$\hat{G}^{QK}: \begin{bmatrix} 0 & g^{qk} \\ g^{qk} & -g^{qk} + \partial g^{qk} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

ahol g_{ij} és g^{qk} az M alapsokaságon adott mértéktenzor kovariáns és kontravariáns komponense, és $\partial g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} y^k$, ill. $\partial g^{qk} = \frac{\partial g^{qk}}{\partial x^i} y^i$.

Bizonyítás. A $\hat{G}_{IJ}$ kovariáns komponenseket ugyanúgy számíthatjuk ki, mint a G_{IJ}-ket az 1. tétel bizonyításában, a $\hat{G}^{QK}$ kontravariáns komponensek pedig a $\hat{G}_{JQ}\hat{G}^{QK} = \delta^K_J$ egyenletrendszer megoldásai.

4. TÉTEL. *A $T(M)$ sokaságon adott G^S mértéktenzorra teljesülnek az alábbi összefüggések:*

$$
\begin{aligned}
&G^S(X^V, Y^V) = 0,\\
&G^S(X^V, Y^H) = G^S(X^H, Y^V) = g(XY)\circ\pi,\\
&G^S(X^H, Y^H) = g(X, Y)\circ\pi,\\
&G^S(X^C, Y^C) = g(X, Y)\circ\pi+(g(X, Y))^C.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Bizonyítás. Kiszámítjuk például az utolsó skaláris szorzatot $T(M)$-nek az (x^i, y^i) lokális koordinátarendszerében:

$$
[X^i\ \partial X^i]\begin{bmatrix} g_{ij}+\partial g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y^j \\ \partial Y^j \end{bmatrix} = g_{ij}X^iY^j+\partial(g_{ij}X^iY^j).
$$

Felhasználva, hogy [2] szerint $f^C=f_iy^i$, $f\in\mathcal{T}_0^0(M)$ teljesül, a bizonyítandó állítást kapjuk.

A most bizonyított tétel szerint tehát igaz az, hogy az adott G^S metrikában a vertikális vektorok zérusvektorok; egy vektor v-liftje pontosan akkor merőleges egy másik vektor h-liftjére, ha maguk a vektorok merőlegesek az M feletti (g_{ij}) metrikára nézve; tetszőleges horizontális vektor hossza megegyezik a π vetítéssel kapott vektor hosszával.

5. TÉTEL. A $T(M)$ sokaság felett adott G^S mértéktenzorhoz rendelt nulla torziójú Riemann-konnexió paraméterei a következők:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}^q_{ij} = \Gamma^q_{ij}, \quad \hat{\Gamma}^q_{\bar{i}j} = \hat{\Gamma}^q_{i\bar{j}} = \hat{\Gamma}^q_{\bar{i}\bar{j}} = 0.\\
&\hat{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij} = \partial\Gamma^q_{ij}, \quad \hat{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}j} = \hat{\Gamma}^{\bar{q}}_{i\bar{j}} = \Gamma^q_{ij}, \quad \hat{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Bizonyítás. Ezek a komponensek a (10) képletből számíthatók ki ugyanúgy, mint a 2. tétel bizonyításában.

Az 5. tétel szerint tehát a G^S és a G^C metrikák által meghatározott konnexiók paraméterei megegyeznek, következésképpen a geodetikus vonalak is ugyanazok.

6. TÉTEL. *A $T(M)$ sokaságon az* $e_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H$, $e_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V$ *bázisban felírt*

$$
ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,\delta y^j+g_{ij}\,\delta y^i\,dx^j+g_{ij}\,\delta y^i\,\delta y^j \tag{19}
$$

összefüggéssel, azaz a

$$
\begin{pmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{19'}
$$

mátrixszal adott G^Z mértéktenzornak az (x^i, y^i) lokális koordinátarendszerre vonatkozó kovariáns komponensei

$$
\check{G}_{IJ}:\begin{bmatrix} \partial g_{ij}+\Gamma^s_i\Gamma^t_j g_{st} & g_{ij}+\Gamma^s_i g_{sj} \\ g_{ij}+\Gamma^s_j g_{is} & g_{ij} \end{bmatrix}, \tag{20}
$$

kontravariáns komponensei pedig

$$\check{G}^{QK}: \begin{bmatrix} -g^{qk} & g^{qk}+\Gamma^k_s g^{sq} \\ g^{qk}+\Gamma^q_s g^{sk} & \partial g^{qk}-\Gamma^q_s \Gamma^k_t g^{st} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

ahol g_{ij} *és* g^{qk} *az* M *alapsokaságon adott Riemann-féle mértéktenzor kovariáns, ill. kontravariáns komponensei.*

Bizonyítás a 3. tétel bizonyításához hasonló.

7. TÉTEL. *A* $T(M)$ *sokaság felett definiált* G^Z *metrikára teljesülnek az alábbi összefüggések:*

$$\begin{aligned} &G^Z(X^V, Y^V) = g(X, Y)\circ\pi, \\ &G^Z(X^H, Y^V) = G^Z(X^V, Y^H) = g(X, Y)\circ\pi, \\ &G^Z(X^H, Y^H) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Bizonyítás a 4. tétel bizonyításához hasonló.

A 7. tétel szerint tehát tetszőleges vertikális vektor hossza megegyezik a π projekcióval kapott vektor hosszával; egy vektor h-liftje pontosan akkor merőleges egy másik vektor v-liftjére, ha maguk a vektorok merőlegesek a (g_{ij}) metrikában; tetszőleges horizontális vektor zérusvektor.

8. TÉTEL. *A* $T(M)$ *sokaságon adott* G^Z *metrikához rendelt nulla torziójú Riemann-konnexió paraméterei a következők:*

$$\begin{aligned} &\check{\Gamma}^q_{ij} = \Gamma^q_{ij} - \frac{1}{2}(R^q_{0it}\Gamma^t_j + R^q_{0jt}\Gamma^t_i), \\ &\check{\Gamma}^q_{\bar{i}j} = \frac{1}{2}R^q_{0ij}, \quad \check{\Gamma}^q_{i\bar{j}} = \frac{1}{2}R^q_{0ji}, \quad \check{\Gamma}^q_{\bar{i}\bar{j}} = 0, \\ &\check{\Gamma}^{\bar{q}}_{ij} = \partial\Gamma^q_{ij} + \frac{1}{2}\Gamma^q_m(\Gamma^t_j R^m_{0it} + \Gamma^t_i R^m_{0jt}) + \frac{1}{2}(R^q_{0it}\Gamma^t_j + R^q_{0jt}\Gamma^t_i), \\ &\check{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}j} = \Gamma^q_{ij} + \frac{1}{2}(R^q_{0ji} + \Gamma^q_m R^m_{0ji}), \\ &\check{\Gamma}^{\bar{q}}_{i\bar{j}} = \Gamma^q_{ij} + \frac{1}{2}(R^q_{0ij} + \Gamma^q_m R^m_{0ij}), \\ &\check{\Gamma}^{\bar{q}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Bizonyítás a 2. tétel bizonyításához hasonló.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU: Foundations of differential geometry I. Interscience, 1963.

[2] K. YANO and S. KOBAYASHI: Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles I., J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 194—210.

[3] K. YANO and S. ISHIHARA: Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles, J. Math. Mech. 16 (1967), 1015—1029.
[4] K. YANO and E. T. DAVIES: Metrics and connections in the tangent bundle, Kōdai Math. Sem. Rep. 23 (1971), 493—504.
[5] S. SASAKI: On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tôhoku Math. J. 10 (1958), 338—354.

МЕТРИКИ И СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ КАСАЮЩИХ ВЕКТОРОВ

МАРТА НАДЬНЭ СИЛЬВАШИ

METRICS AND CONNECTIONS ON THE FIBRED SPACE OF TANGENT VECTORS

MÁRTA, NAGYNÉ SZILVÁSI

In this paper we discuss three metrics, which can be defined on the tangent bundle $T(M)$, where M is a connected Riemannian space. We calculate the components of the torsion-free Riemannian connection of these metrics G^C, G^S and G^Z on the manifold $T(M)$.

EGY SZÁMELMÉLETI PROBLÉMA ÁLTALÁNOSÍTÁSA

KISS PÉTER

I.

G. D. Poole [1]-ben olyan tulajdonságú tízes számrendszerbeli számokat keresett, melyek egyenlőek a számjegyeik faktoriálisainak összegével. Számítógép segítségével kimutatta, hogy csak négy ilyen tulajdonságú tízes számrendszerbeli szám van, és ezek 1, 2, 145 és 40 585.

Ehhez hasonló az úgynevezett Steinhaus probléma is, melynek lényege a következő. Legyen

$$A = a_n a_{n-1} \ldots a_0$$

egy tízes számrendszerben felírt szám $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ számjegyekkel, és értelmezzük a következő függvényt

$$F(A) = a_n^k + a_{n-1}^k + \ldots + a_0^k,$$

ahol a k kitevő természetes szám. Legyen

$$F(A) = A_1, \quad F(A_1) = A_2, \quad F(A_2) = A_3, \ldots$$

H. Steinhaus [2] $k=2$ esetén bebizonyította, hogy tetszőleges A-ból kiindulva az

$$A, A_1, A_2, \ldots$$

sorozat ciklikus, vagyis valamely i-re

$$A_i = A_j \quad (j < i)$$

ami maga után vonja, hogy $A_{i+l} = A_{j+l}$ tetszőleges l-re, vagyis a j-edik tagtól kezdve az $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_{i-1}$ tagok ismétlődnek. Kimutatta elemi eszközökkel, hogy csak két különböző ciklus van, egy egyelemű: 1 és egy nyolcelemű: 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

$k=3$ esetében K. Iséki [3], $k=4$ esetében K. Chikawa, K. Iséki és T. Kusakabe [4], $k=5$ esetében K. Chikawa, K. Iséki, T. Kusakabe és K. Shibamura [5], $k=6$ és 7 esetében pedig E. T. Avanesov és V. A. Gusev [6] határozták meg az összes különböző ciklust, számítógép segítségével.

Jelen dolgozatban általánosan vetjük fel Poole és Steinhaus problémáit és néhány speciális esetben megadjuk a megoldást.

II.

Legyen az n jegyű A természetes szám tízes számrendszerbeli alakja

$$A = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0,$$

és legyen egy $f(x) \geqq 0$ egész értékű függvény értelmezve a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekre. Definiáljuk minden természetes A számra az

$$F(A) = f(a_{n-1}) + f(a_{n-2}) + \ldots + f(a_0)$$

függvényt, és vezessük be az

$$F(A) = A_1,\ F(A_1) = A_2, \ldots, F(A_i) = A_{i+1}, \ldots$$

jelölést. Bebizonyítjuk, hogy az

$$A, A_1, A_2, \ldots \tag{1}$$

sorozat tetszőleges természetes A-ból kiindulva ciklikus, és a különböző ciklusok száma véges. (Ciklus alatt a *minimális* periódust értjük.)

Jelöljük M-mel az $f(0), f(1), \ldots, f(9)$ értékek közül a legnagyobbat (amelynél nincs nagyobb). Ekkor

$$F(A) \leqq n \cdot M,$$

és van olyan r természetes szám, hogy $n \geqq r$ esetén

$$(F(A) \leqq) n \cdot M < 10^{n-1} = \frac{1}{10} \cdot 10^n.$$

Ugyanis a $b_n = \dfrac{10^n}{n}$ sorozat monoton és divergens, így valamely $n = r$-től kezdve

$$10 \cdot M < \frac{10^n}{n} \quad \text{azaz} \quad n \cdot M < \frac{1}{10} \cdot 10^n$$

M ismeretében az r küszöbszám meghatározható. Tehát ha $n \geqq r$, akkor

$$F(A) < 10^{n-1} < A,$$

így az (1) sorozat csökkenő, míg $n \geqq r$, vagyis míg A_i jegyeinek száma legalább r. Ettől kezdve (tekintettel r választására) $A_i < 10^{r-1}$. Azonban véges sok 10^{r-1}-nél kisebb természetes szám van, ezért az (1) sorozat valahányadik tagja megegyezik egy korábbi taggal; $A_i = A_j$ $(j < i)$ és ettől kezdve az $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_{i-1}$ ciklus ismétlődik. A különböző ciklusoknak közös elemük nem lehet, mert ekkor az (1) sorozat képzési szabálya miatt minden elem megegyezne. A különböző ciklusok száma véges, ugyanis minden ciklus minden eleme kisebb mint 10^{r-1}. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

III.

Vegyünk egy példát az előzőekre. Legyen $f(x) = P_x = x!$, vagyis

$$F(A) = a_{n-1}! + a_{n-2}! + \ldots + a_0!$$

Ekkor $M = 9! = 362\,880$ és $r = 8$ mert

$$10 \cdot 362\,880 < \frac{10^8}{8}.$$

Tehát ha meg akarjuk keresni a különböző ciklusokat, elég a maximum hétjegyű számokból kiinduló sorozatokat megvizsgálni. De ha $n \leqq 7$, akkor

$$F(A) \leqq 7 \cdot 362\,880 < 3 \cdot 10^6,$$

amiből következik, hogy elég az $A < 3 \cdot 10^6$ számokkal foglalkozni.

Ha A és A' csak a számjegyek sorrendjében térnek el egymástól, és egyik sem kezdődik 0-val, akkor $F(A) = F(A')$ miatt ugyanahhoz a ciklushoz vezetnek, így ezek közül csak az egyiket kell megvizsgálni, például azt, melynek jegyei monoton fogyóak.

A fentiek figyelembevételével számítógéppel megvizsgáltuk, hogy az $A < 3 \cdot 10^6$ számokból kiindulva milyen ciklusokhoz jutunk, és a következő 7 ciklust kaptuk (a ciklusok után zárójelbe írt szám azt a legkisebb A értéket mutatja, melyből kiindulva az illető ciklushoz jutunk):

4 db egyelemű ciklus:	1	(1)
	2	(2)
	145	(145)
	40 585	(40 585)
2 db kételemű ciklus:	871, 45 361	(78)
	872, 45 362	(236)
1 db háromelemű ciklus:	169, 363 601, 1454	(3)

Az egyelemű ciklusok megegyeznek Poole [1] által kapott számokkal, hiszen ezek azok az A számok, melyekre $F(A) = A$, vagyis melyek egyenlőek a jegyeik faktoriálisainak összegével.

IV.

Legyen most $f(x) = C_{10}^x = \binom{10}{x}$, vagyis $f(a_i)$ 10 elem a_i tagú ismétlés nélküli kombinációinak száma, és így

$$F(A) = \binom{10}{a_{n-1}} + \binom{10}{a_{n-2}} + \ldots + \binom{10}{a_0}.$$

Ekkor $M = \binom{10}{5} = 252$ és könnyen belátható, hogy $r = 4$. Megvizsgálva $10^{r-1} = 10^3$-ig az (1) sorozatokat, 2 ciklust kaptunk:

1 db egyelemű ciklus:	505	(505)
1 db kételemű ciklus:	463, 540	(1)

Tehát csak egy olyan szám van, és ez az 505, mely egyenlő a jegyeiből készített binomiális együtthatók összegével:

$$505 = \binom{10}{5} + \binom{10}{0} + \binom{10}{5}.$$

V.

Ha $f(x) = V_{10}^x = \dfrac{10!}{(10-x)!}$, vagyis $f(a_i)$ 10 elem a_i tagú ismétlés nélküli variációinak száma, és így

$$F(A) = V_{10}^{a_{n-1}} + V_{10}^{a_{n-2}} + \ldots + V_{10}^{a_0},$$

akkor $M = V_{10}^{9} = 3\,628\,800$, és ennek alapján belátható, hogy $r = 9$. Így elég a nyolcjegyű számok (1) sorozatait vizsgálni. Hasonlóan, mint a III-ban, kimutatható, hogy elég az $A < 3 \cdot 10^7$ esetekkel foglalkozni.

A számítógép kimutatta, hogy jelen esetben nincs egyelemű ciklus, vagyis nincs olyan A, melyre $F(A) = A$. K. Iséki vetette fel azt a kérdést, hogy a Steiunhas probléma esetén létezik-e minden k-ra egyelemű ciklus. Jelen esetben tehát a megfelelő kérdésre a válasz tagadó. Összesen 4 ciklus van, és ezek:

1 db kételemű ciklus: 12, 100 (12)

1 db négyelemű ciklus: 756 822, 2 600 820, 1 965 783, 623 0170 (1)

1 db huszonhat elemű ciklus:

7 353 370 , 1 242 001 , 5242 , 35 460 , 187 201
2 419 311 , 3 634 680 , 2 123 281 , 1 815 410 , 1 849 711
6 053 070 , 786 963 , 6 351 120 , 182 271 , 2 419 400
3 638 982 , 7 410 330 , 611 292 , 3 780 200 , 2 420 013
5952 , 3 689 370 , 6 200 641 , 307 542 , 640 891
5 599 451 , (3)

1 db harminckilenc elemű ciklus:

3 699 451 , 7 444 810 , 2 434 331 , 12 340 , 5 861
1 995 850 , 9 132 491 , 7 263 470 , 1 366 651 , 484 580
3 669 121 , 3 932 030 , 3 631 052 , 182 981 , 7 257 710
1 844 741 , 2 434 340 , 16 651 , 332 660 , 303 931
3 630 971 , 4 386 251 , 2 001 700 , 604 904 , 3 790 082
6 048 812 , 3 785 141 , 2 455 220 , 65 791 , 4 415 050
70 572 , 1 239 931 , 7 259 150 , 4 294 181 , 5 453 390
3 695 761 , 4 566 970 , 4 571 281 , 2 454 590 , (4)

A számításokat az Egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola ODRA 1204 típusú számítógépével végeztük.

IRODALOM

[1] G. D. Poole: Integers and the sum of the factorials of their digits (Math. Mag. 44, 1971, 278—79)
[2] H. Steinhaus: One hundred problems in elementary mathematics (Pergamon Press, L. T. D. Oxford 1963, p. 11—12, 55—58)
[3] K. Iséki: A problem of Number Theory (Proc. Japan Acad., 36, (1960), p. 578—83)
[4] K. Chikawa, K. Iséki and T. Kusakabe: On a problem by H. Steinhaus (Acta Arithm., VII, 1962, p. 251—252)
[5] K. Chikawa, K. Iséki, T. Kusakabe and K. Shibamura: Computation of cyclic parts of Steinhaus problem for power 5 (Acta Arithm. VII, 1962, p. 253—254)
[6] E. T. Avanesov, V. A. Gusev: A certain problem of Steinhaus (Mat. Casopis Sloven. Akad., Vied 21, 1971, p. 29—32)

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ПЕТЕР КИШ

A GENERALIZATION OF A PROBLEM IN NUMBER THEORY

P. KISS

If $A=a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ is a natural number with digits $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ in the decimal system, and the integer valued function $f(x)\geqq 0$ is defined for the digits $0, 1, \ldots, 9$, then we define the function

$$F(A) = f(a_{n-1})+f(a_{n-2})+\ldots+f(a_0)$$

for all natural numbers in the decimal system. In this paper we prove that the sequence $A, A_1, A_2, \ldots$; where $A_1=F(A)$ and $A_i=F(A_{i-1})$ $(i>1)$, is cyclic for any natural number A and we get all the distinct cycles by examining the sequences with $A<10^{r-1}$, where r is the least natural number satisfying the condition $10M<\dfrac{10^r}{r}$ (M is the greatest are of the numbers $f(0), f(1). \ldots, f(9)$).

This result is a generalization of a problem of Steinhaus and some results of G. D. Poole.

There are three examples in the paper. All the distinct cycles are given in the cases of three combinatorial functions: $f(x)=P_x=x!$ (the generalization of Poole's result) $f(x)=C_{10}^x=\binom{10}{x}$ and $f(x)=V_{10}^x=\dfrac{10!}{(10-x)!}$.

We have got the results of the examples with the help of computer ODRA 1204.

MÉGEGYSZER EGY ISKOLÁSOKNAK SZÁNT ALGEBRAKÖNYV ÜRÜGYÉN

VARECZA LÁSZLÓ

Az alábbiakban reagálni szeretnék Schmidt Tamás „Elmélkedés egy iskolásoknak szánt algebrakönyv ürügyén" (Mat. Lapok, 1972, 3—4, 349—354. old.) című „Konkrét és absztrakt struktúrák" (Budapest, Tankönyvkiadó, 1970) c. könyvemmel foglalkozó kritikai írására.

1. A 349. oldalon írja Schmidt Tamás, hogy „vitába kell szállnunk az »absztrakt« szónak az egész könyvön végigvonuló félrevezető használatával". „Nézetünk szerint az absztrakció folyamatában azok a *közös jegyek* a döntőek, amelyeket kiemelünk: az, hogy eközben mi mindentől »tekintünk el«, csak mellékes magyarázgatás (amire didaktikai okokból időnként szükség van)". „A közös jegyek kiemelése pedig egy-egy *struktúraosztály fogalmának* megalkotását jelenti (ez absztrakt fogalom: absztrakciós szintje eggyel magasabb, mint az éppen vizsgált (»konkrét«) struktúráké)". „Miért mondjuk mégis gyakran, hogy »absztrakt csoport«, »absztrakt test« stb.? Erre az izomorfia-elv világos választ ad: egy absztrakt struktúra vizsgálatakor egyszerre vizsgáljuk az összes vele izomorf struktúrát".

Egyrészt könyvemben is éppen erről van szó pl. a 69. oldalon „Az, hogy egy struktúra Boole-algebra-e nem függ attól, hogy 1. mik a halmaz elemei, 2. hogyan értelmezzük a műveleteket; csupán az a lényeges, *hogy a műveleteknek meglegyenek az 1—14. axiómákban kifejezett tulajdonságaik*. Az elemek és műveletek mibenléte mellékes, közömbös, attól eltekintünk, elvonatkoztatunk, vagyis absztrahálunk". A 7. oldalon pedig a következő olvasható „Tehát látszólag egymástól távoleső halmazokról, az elemek konkrét mibenlététől és a műveletek konkrét értelmezésétől való elvonatkoztatás után kiderülhet, hogy lényegileg azonosak, ugyanahhoz a *struktúrafajtához, struktúraosztályhoz* tartoznak".

Folytatólag a 7. oldalon az absztrahálás céljáról a következők olvashatók: „Az absztrahálás célja, pontosabban a helyes absztrahálás célja az, hogy a struktúráról többet és lényegesebbet tudjunk megállapítani, de egyszerűbben. A helyes absztrahálás azt is mutatja, hogy a tények és összefüggések függetlenek a jelölésektől és az elnevezésektől".

A 104. oldalon a következő olvasható „Struktúrák vizsgálatában az egymással izomorf struktúrákat azonosaknak tekintjük, a nem izomorfakat pedig különbözőnek. Ez az absztrakt algebra alapvető elve, az izomorfia-elv és Steinitz nevéhez fűződik. Az absztrakt algebra tárgya a struktúráknak azokat a tulajdonságait kutatni, amelyek az összes egymással izomorf struktúráknak megvannak, vagyis amely tulajdonságok izomorfizmussal szemben invariánsak. A struktúrák elemeinek mibenléte és a műveletek konkrét értelmezése közömbös". „Így a 76. ábrán illusztrált két Boole-algebra, mivel azok izomorfak, az izomorfia-elv értelmében algebrai vizsgálatokban azonosnak tekinthető. Ugyancsak az izomorfia-elv értelmében nem tekin-

tünk azonosnak pl. egy négyelemű és egy nyolcelemű Boole-algebrát, ui. azok között kölcsönösen egyértelmű és művelettartó megfeleltetés nem létesíthető, s így nem lehetnek izomorfak."

Másrészt könyvemben az alábbi idézetek mögött sejteni lehet a Gödel-féle teljességi tétel megfordítását: „Ha viszont a különféle halmazokban értelmezett különféle műveleteknek vannak megegyező tulajdonságaik, akkor ezeknek a megegyező tulajdonságoknak összes következménye is megegyező tulajdonság. Tehát ha a megegyező tulajdonságokból néhányat axiómának tekintünk, akkor ezekből az axiómákból levezethető, vagy más kifejezéssel ezekből az axiómákból formálisan bizonyítható összes tétel is érvényes a különféle halmazokban" (7—8. oldal). „Így ha egy tétel, mely az axiómák következménye, érvényes valamelyik Boole-algebrában, akkor ez a tétel érvényes az összes többi Boole-algebrában is" (94. oldal). „Ez az 1—9. axióma bármelyik kommutatív testben érvényes, s így ezen 1—9. axióma következményei is érvényesek az összes kommutatív esetekben. Az alábbiakban nézzük meg ezen 1—9. axióma néhány következményét". „Elég hosszan és koncentrált figyelemmel nézegetve a levezetést és a levezetésgráfot, minden további magyarázat nélkül világos, hogy $0b=0$. Tehát a $0b=0$ tétel is következménye a kommutatív test axiómarendszerének". „Ennek fordítottja, hogy ha egy szorzat 0, akkor az egyik tényezője 0. Tehát a kommutatív test nullosztómentes (a test is az). Ez az állítás a kommutatív test axiómáinak következménye, az axiómákból levezethető, vagy még másképpen mondva az axiómákból formálisan bizonyítható" (217. oldal). „Nézetünk szerint az, hogy mi is valójában egy matematikai bizonyítás és egy deduktív rendszer levezetésgráfok segítségével viszonylag egyszerű struktúrákon pl.: valós számtest, halmazalgebra, stb. mutatható meg a tanulóknak" (219. oldal). Tehát ami egy axiómarendszerből formálisan bizonyítható, az igaz az axiómarendszer minden modelljében és ennek fordítottja, hogy ami egy axiómarendszer minden modelljében igaz, az formálisan bizonyítható az axiómarendszerben. Ez utóbbi a Gödel-féle teljességi tétel.

Harmadrészt könyvemben az alábbi idézetek mögött sejteni lehet a modellelmélet nagyon fontos Galois-kapcsolatát: „A Boole-algebra háromműveletes struktúra. Mi történik akkor, ha egy műveletet elhagyunk? Hagyjuk el az egyváltozós műveletet és természetesen az 1—14. axiómák közül is azokat, amelyekben az egyváltozós művelet szerepel, nyolc axióma marad meg. Ha egy halmazban értelmezve van két kétváltozós művelet és teljesül ez a nyolc axióma, akkor a halmazt disztributív hálónak nevezzük. Ha e nyolc axióma közül is hagyunk el, elhagyjuk a disztributivitást kifejező axiómákat, akkor a halmazt hálónak nevezzük. Ha pedig a két kétváltozós művelet közül is csak az egyiket tekintjük, akkor a halmazt félhálónak nevezzük. Így a félháló axiómarendszere csak három axiómából áll. A Boole-algebra komplementumos disztributív háló, s így minden Boole-algebra egyben disztributív háló is, háló is és félháló is (77. ábra). Tehát a félháló általánosabb struktúrafajta a hálónál, a háló általánosabb a disztributív hálónál, a disztributív háló általánosabb a Boole-algebránál vagy másképpen mondva a Boole-algebra speciálisabb struktúrafajta, mint a disztributív háló, a disztributív háló speciálisabb, mint a háló, a háló speciálisabb, mint a félháló" (105—106. oldal). A Boole-algebrák osztálya része a félhálók osztályának, de a Boole-algebrákban érvényes azonosságok halmazának része a félhálókban érvényes azonosságok halmaza. „Jól nézzük meg a 106. ábrát! Leolvasható a gyűrű, a test, a kommutatív test fogalmak közötti logikai viszony. Minden kommutatív test egyszersmind test is és gyűrű is. A kommutatív test egy speciális test ill. gyűrű. A gyűrű a testnél általánosabb fogalom, a test fogalma pedig általánosabb a kommutatív test fogalmánál. A test fogalmát kétféleképpen is kialakíthatjuk:

1. konkrét testekből absztrahálással, 2. a gyűrű fogalmából specializálással" (196—197. oldal). A kommutatív testek osztálya része a gyűrűk osztályának, de a kommutatív testekben érvényes azonosságok halmazának része a gyűrűkben érvényes azonosságok halmaza. A Galois-kapcsolatot az „egy azonosság igaz egy struktúrában" reláció határozza meg.

Az eddigiek után is már a szerző úgy gondolja, hogy mivel egyrészt könyvén végigvonul a Steinitz-féle izomorfia-elv, melyről Schmidt Tamás is idézett művének 350. oldalán elismeri, hogy korrektül van a könyvben definiálva, továbbá az izomorfia-elv az absztrakt algebrának nagyon fontos elve; másrészt a könyvön kimondatlanul végigvonul a Gödel-féle teljességi tétel megfordítása és a fenti Galois-féle kapcsolat, melyek nagyon fontos szerepet játszanak a modellelméletben, és éppen ezért a szerző tudatosan szuggerálja és sugallja ezeket könyvében, azért a könyv nem fest hamis képet az absztrakt algebráról ellentétben Schmidt Tamás megállapításával (352. oldal).

A terminológia kérdése pedig vitatható, lehet hogy a szerző nem a legmegfelelőbb szóhasználatot alakította ki könyvében az algebrai struktúraosztályok tanítására az általános és középiskolai matematikaoktatás céljaira. De nem szabad megfeledkezni arról, hogy az általános és középiskolai matematikaoktatás nyelve sokkal inkább szennyezett a köznapi beszéd szavaival, mint az egyetemi vagy kutatói szintű matematikaoktatás, és végső soron a gyakorlat fogja kialakítani a helyes és didaktikai célokra legmegfelelőbb terminológiát. Továbbá arról sem szabad megfeledkezni, hogy az algebrai struktúraosztályokat is különböző logikai szinteken, a szabatosság különböző szintjein lehet tárgyalni. Egyébként a „*konkrét*" jelző is előfordul az irodalomban pl. Szőkefalvi-Nagy Béla „Valós függvények és függvénysorok" (Tankönyvkiadó, 1961) c. könyvének 306. oldalán „Az eddig tárgyalt *konkrét* terekhez hasonlóan az általános esetben is", vagy A. A. Sztoljár „A matematikatanítás módszerei" (Tankönyvkiadó, 1969) c. könyvének 30—31. oldalán „Az elmélet axiomatizálása, korszerű értelmezésben, nemcsak a kiválasztott axiómarendszeren alapuló elmélet logikai rendszerezését jelenti, hanem annak *konkrét* modellből, vagy *konkrét* modellekből való absztrahálását, valamint *konkretizálás* révén az absztrakt elméletből más, az eredeti kiinduló *konkrét* modellektől eltérő modellekre való utólagos áttérést is".

2. Schmidt Tamás a 350. oldalon a következőket írja: „A könyv a 202. oldalon vezeti be a komplex számok testét a következő módon kezdve: „Most az $a, b, c, \ldots$ valós számokból készítsük el az $a+bi$ alakú számokat, i az ismert $\sqrt{-1}$-et jelöli". De ha valaki ismeri a $\sqrt{-1}$-et, annak számára nem kell bevezetni. Aki meg nem ismeri, annak számára az $a+b\sqrt{-1}$ alakú kifejezés nem szám, hanem zagyvaság. Különösen meglepő, hogy a szerző a 199—201. oldalon bemutatja a komplex számok szokásos konstrukcióját, bárminő motiváció nélkül, s ezután mint új külön konstrukciót vezeti be a fent leírt inkorrekt indítással a komplex számokat, végül kimutatja a két test izomorf voltát". „Az is kérdéses, számoknak nevezhetjük-e az $a+bi+cj+dk$ alakú kifejezéseket, amint ezt a szerző a kvaterniók bevezetésének első mondatában teszi, arról sem nyújtva felvilágosítást, hogy az i, j, k tulajdonképpen micsoda (203. oldal)". „Nem szerencsés, hogy a szerző két halmaz Descartes-szorzatát a két halmaz Descarte-halmazának nevezi (12. oldal), s valószínűleg ez is magyarázza, hogy a Descartes-szorzást nem sorolja a halmazok közötti műveletek közé".

Könyvemben a 199—203. és 211—212. oldalakon nem a komplex szám fogalmának kialakítása és bevezetése volt a célom, hanem két egymással izomorf test di-

daktikai célokra való konstruálása a valós számokból a test fogalmának kialakítása céljából a Z. P. Dienes-féle matematikatanítási ill. matematikatanulási alapelvek alkalmazásával. Az absztrakt algebra tárgya és feladata szerint az absztrakt algebrában az elemek mibenlététől eltekinthetünk, és ennek megfelelően itt az i csak *elemként* szerepel, a K halmaznak egy olyan eleme, melyre $i^2 = -1$. A kvaterniókkal kapcsolatban szintén nem azt akartam tisztázni, hogy azok számok-e vagy nem, hanem olyan testet konstruálni, amely nem kommutatív, hogy az olvasó lássa, hogy a kommutatív testek osztálya a testek osztályának valódi része. Könyvem célja és felfogása szerint nem szükséges felvilágosítást adni arról, hogy az i, j, k tulajdonképpen micsoda, ezek csak *elemek*, de ugyanakkor szintén az absztrakt algebra tárgya és feladata szerint az elemek közötti műveletek tulajdonságai lényegesek, és ezért könyvemben az i, j, k elemek közötti szorzás egyértelműen definiálva van a 204. oldalon levő művelettáblával. A Descartes-halmaz elnevezésre is van példa az irodalomban pl. A. A. Sztoljár idézett könyvének 87. oldalán. A Descartes-szorzat elnevezés szinonimáinak ismeretében választotta a szerző a Descartes-halmaz elnevezést. Erre nézve a 12. oldalon olvasható, hogy „A Descartes-halmaz más elnevezései Descartes-szorzat, Descartes-tér, szorzathalmaz s i. t." A fenti terminológiára vonatkozó bekezdés itt is érvényes, lehet hogy az algebrai struktúraosztályokkal való első megismeréskor is az általános és középiskolában egy másik szinonima megfelelőbb.

A Z. P. Dienes-féle négy matematikatanítási ill. matematikatanulási alapelv a következő: (i) *A dinamika elve.* A matematikai megismerésben három szakaszt lehet megkülönböztetni. Az első szakaszban a tanuló játékos tevékenységet végez, tevékenységének nincs határozott irányultsága, csak tájékozódik környezetében. Ebben a szakaszban történik a strukturált gondolkodás előkészítése. A második szakaszban a tanuló felismeri az összefüggéseket, a tanulóban kialakul a fogalom, és ezzel a fogalommal kapcsolatban gondolkodása strukturálttá vált. A harmadik szakaszban a tanuló a környező világban felismeri ezeket az összefüggéseket illetve a struktúrát, és képes az alkalmazásra. (ii) *A konstruktivitás elve.* A konstrukció előzze meg az elemzést, a tanuló először konstruálja meg azt, amit később elemezni kíván. (iii) *A matematikai változatosság elve.* A matematikai fogalom kialakulása végett a fogalom struktúrájának minden adatát minél többféleképpen változtatni kell. A tanulók maguk is tapasztalják az adatok változását. A gondolkodás dialektikája szerint a sok variálás, vagyis a mennyiségi változás, átcsap minőségi változásba, és a tanulóban kialakul a fogalom. (iv) *Az érzéklési változatosság elve.* Helyes absztrakcióval a különféle tapasztalatokból a tanuló kiemeli az azonos matematikai tartalmat. Eszerint az elv szerint nem a matematikai adatokat variáljuk minél többféleképpen, hanem a tapasztalati anyagot. Minden tanulónak saját magának kell az absztrahálást elvégezni a tanár vezetése mellett.

Ezekhez az alapelvekhez hasonló alapelveket találunk A. A. Sztoljár idézett könyvében a 29—31., 194—195. oldalakon ill. a marxista ismeretelméletben.

A Dienes-féle négy alapelvet ill. az arra épülő matematikatanítási és matematikatanulási elméletet elfogadva és didaktikusnak tartva nem nehéz látni, hogy Schmidt Tamás következő megállapítása nem tartható: „Ez az antididaktikus módszer kulminál az „Algebra" c. fejezetben (232. oldal), ahol a síkvektorok halmazát algebrává szervezi, bevezeti köztük a vektorok szorzását, nem árulva el, hogy ezt a szorzást a komplex számoknál már kétszer bevezette, igaz nem éppen így" (352. oldal). Talán ehhez nem kell kommentárt fűzni, minden szószaporítás mellőzésével felismerhető, hogy itt a szerző a Dienes-féle matematikai változatosság elvét és a konstruktivitás elvét alkalmazta. Továbbá mivel ezzel a két elvvel együtt a Dienes-féle dinamika

elve és az érzéklési változatosság elve is végigvonul a könyvön, igaz kimondatlanul, azért a szerző úgy gondolja, hogy könyve nem antididaktikus.

3. A 350—352. oldalakon írja Schmidt Tamás, hogy „Időnként mélynek tetsző megjegyzések tarkítják a szöveget, pl.: a 232. old. „két vektor skalárszorzata segítségével definiáltuk a távolságot, ami a mérés lehetőségét biztosítja". Hogy kerül ide a mérés fizikai fogalma? „A könyv a 231—232. oldalon az euklideszi tér definícióját adja meg így: „Az 1—3. axiómáknak eleget tevő vektorteret euklideszi térnek nevezzük". Mint tudjuk, ennél lényegesen több kell ahhoz, hogy egy tér euklideszi legyen". „A Lie-algebra c. fejezet sem különb". „Kiderül, hogy ez egy nem asszociatív algebra, ami önellentmondás az adott felépítésben, hiszen az algebrát asszociatívnak definiálta". „megtudjuk, hogy a 3-dimenziós térről mondandók az n-dimenziós térre is könnyen általánosíthatók, és a dimenzió fogalmát semmi sem világítja meg".

Szőkefalvi-Nagy Béla idézett könyvének 305. oldalán a Hilbert- és Banach-terekről a következő olvasható: „A Hilbert-tér speciális Banach-tér, amelyben a normát egy skaláris szorzatfogalomból származtathatjuk". Jólismert, hogy a véges dimenziós Hilbert-teret szokás euklideszi térnek is nevezni. Krekó Béla „Mátrixszámítás" (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1966) c. könyvének 116. oldalán a következő olvasható az euklideszi térről: „(a) Az L_n bármely két pontjának távolságáról is van szó, annak feltétlenül nem-negatív számnak kell lennie. (b) Két pont távolsága csak abban az esetben lehet zérus, ha a két pont egybeesik. (c) A távolságfogalomnak ki kell elégítenie az ún. háromszögegyenlőtlenséget. Ha az L_n lineáris teret az említett követelményeknek eleget tevő metrikával látjuk el, akkor a kérdéses lineáris teret euklideszi térnek nevezzük. Az euklideszi tér tehát egy alkalmas metrikával ellátott lineáris tér." És csak a következő bekezdésben olvasható, ami nagyon lényeges az euklideszi tér definíciójában, hogy „A metrika bevezetését az 1.2. alfejezetben értelmezett skaláris szorzat fogja lehetővé tenni. *A skaláris szorzatnak így az euklideszi tér kiépítésénél központi jelentősége lesz*". Ui. szintén jólismert, hogy véges dimenziós terekben értelmezhető olyan metrika is, mely nem származtatható skalárszorzatból. De Krekó Béla könyvében az euklideszi tér definíciója felett is, alatt is csak skalárszorzatból származtatott metrikával dolgozik, s így hallgatólag ez a metrika értendő az euklideszi tér definíciójában is. Könyvemben pedig a következő olvasható: „A két vektor skalárszorzata segítségével értelmezett távolság kielégíti a metrikus tér 1—3. axiómáit, így a *vektorok halmazát* ez a távolságfüggvény metrikus térré teszi. Az 1—3. axiómáknak eleget tevő távolságfüggvénnyel ellátott vektorteret euklideszi térnek nevezzük. A sík egy két dimenziós euklideszi tér. Elemei origó kezdőpontú síkvektorok. Műveletei vektorösszeadás, vektor számszorosa, két vektor skalárszorzata. Utóbbi *két vektor skalárszorzata segítségével definiáltuk a távolságot*. Hallgatólag itt is skalárszorzatból származtatott metrika értendő, a két dimenziós esetben pedig nemcsak hallgatólag. Tehát, amit Schmidt Tamás „lényegesen többnek" tart, az csak ennyi. Könyvemben pedig fizikai mérésről nincsen szó, a „fizikai" jelző nem is fordul elő benne. A fogalom független az elnevezéstől és a fogalom, amely könyvemben a 221—232. oldalakon első megismerésben kialakításra került, az euklideszi tér fogalma. A dimenziófogalmat pedig matematikai alapfogalomnak tekintettem, azaz olyan fogalomnak, amelynek csak intuitív fogalmi tartalma van, definíció nélkül. Nem volt szándékomban ezt a fogalmat egzakt módon definiálni, ebből zavar nem származhat, mert könyvemben nem vezetek be olyan tételt, melynek bizonyításában az egzakt definícióra szükség lenne.

Közismert, hogy az *algebra* elnevezést keresztül kasul használják a kutatói szintű matematikában is. A tudományág neve is *algebra*, és egy struktúraosztály neve is *algebra*, az univerzális algebrában pedig mindegyik struktúrát *algebrának* nevezik.

Tehát mert az *algebra* szó ennyiféle értelemben szerepel, azért Schmidt Tamás szerint az egész algebra irodalom önellentmondásos?! Könyvemben tisztázom ezt az elnevezészavart a 234. oldalon: „Megjegyezzük, hogy az algebrában nem egységesek az elnevezések. Pl. algebra egy struktúrafajta neve is, de algebra a tudomány neve is és a struktúrákat szokás algebrai struktúráknak mondani, az univerzális algebrában pedig a struktúrát nevezik algebrának. Az iskolai matematikában és a köznapi beszédben pedig a betűszámtan, számtan, algebra elnevezések egyáltalán nincsenek tisztázva. Nézetünk szerint a struktúrák iskolai bevezetésével ezek a fogalmak tisztázhatók. Ui. akkor megmondhatjuk, hogy melyik struktúrát tanulmányozzuk: számgyűrűt, számtestet, algebrát, euklideszi síkot stb. és a betűk a struktúra elemeit jelölik". Ha könyvem önellentmondásos, akkor önellentmondásos pl. Fuchs László „Algebra" (Tankönyvkiadó, 1972) c. egyetemi jegyzete is, melyben a 157. oldalon olvasható, hogy „Lie-algebra oly *algebra*, amelyben a szorzás *asszociativitása helyett* a következő két tulajdonság teljesülését követeljük meg", „Lie-algebrára nevezetes példa a térbeli vektorok a vektoriális szorzásra nézve. Ez 3-dimenziós algebra a valós számtest felett", és ugyanakkor a 83. oldalon a gyűrűt R-rel jelölve az áll, hogy „R a szorzás műveletére *félcsoport*", tehát asszociatív struktúra, majd az algebra definíciója a 148. oldalon „Legyen K kommutatív test és A véges vagy végtelen dimenziós vektortér K felett. Ha A ezenfelül *gyűrű* is és (1) teljesül, akkor A-t K feletti algebrának nevezzük".

4. A Stone-tétellel kapcsolatban Schmidt Tamás a 352. oldalon a következőket írja: „Itt a »reprezentálható« szó jelentése nem tisztázott. A 209. oldalon megtudjuk, hogy Stone tétele szerint »bármelyik Boole-algebra izomorf valamelyik nem üres halmaz összes részhalmazaiból álló halmazalgebrával«. Nem ártana hangsúlyozni, hogy a reprezentálni kívánt Boole-algebra a teljes hatványhalmaz-algebrának többnyire csak egy részalgebrájával izomorf. Egyébként a véges Boole-algebrák izomorfak a teljes véges hatványhalmaz-algebrákkal, s ezt a középiskolások is játszva bebizonyíthatják, megfelelő előkészítés (atomok bevezetése, példák) után". A 351. és 353. oldalakon az alábbiakat írja Schmidt Tamás: „A magtalan szószaporításra teljes fejezeteket szentel a szerző. A »Csapalgebra« c. fejezetben a szerző a »Kapcsolóalgebra« c. rész anyagát ismételteti át az olvasóval: mint az elektromos áramot, úgy a vizet is kétállású kapcsolókon (csapokon) áramoltatja át. Ez látszólag a Boole-algebrák gyakorlati hasznosságát világítaná meg". „A könyv apróbb hibái közé soroljuk azt a néhány elírást, amely matematikailag hibás állításokat eredményez. Ilyenek: a duális áramkör fogalma (63. old.)", „A helyes állítás az volna, hogy mindegyik kapcsoló állását megváltoztatjuk (nemcsak a 0-t és 1-et) és felcseréljük a · és + jeleket, akkor az eredmény egy megváltozott állapotú áramkör". „Ha egy struktúrafajta kielégíti a Boole-algebra axiómáit, akkor az nyomban kiérdemli az ítéletalgebra, meg a kapcsolóalgebra nevet?! Hiszen az ítéletalgebrának (mint a szerző említi a 42. o.) mindössze két eleme van (i és h), úgyhogy még izomorf sem lehet nagyobb Boole-algebrákkal! Hát akkor mit jelent az, hogy az ítéletalgebra axiómarendszere?!"

R. Sikorski „Boolean algebras" (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1969) c. könyvének 7.1. és 8.2. tételei szerint bármelyik Boole-algebra izomorf valamelyik nem üres *topológikus* halmaz összes *nyílt-zárt* részhalmazaiból álló halmazalgebrával. Könyvem Stone-tételében a topológikus és nyílt-zárt jelzők hallgatólag vannak jelen a 209. oldalon. Itt is elegendő lett volna csak annyit mondani, hogy tetszőleges Boole-algebra izomorf valamelyik halmazalgebrával, könyvemben a Stone-tételnek ez a megfogalmazása is olvasható pl. a 104. oldalon.

A csapalgebrát, kapcsolóalgebrát és ítéletalgebrát nem a Boole-algebrák gya-

korlati hasznosságának megvilágítása céljából vezettem be könyvemben, hanem a Dienes-féle *dinamika elvének* és *érzéklési változatosság elvének* alkalmazásaként a Boole-algebra struktúraosztály fogalmának kialakítása céljából. Továbbá kapcsolókkal kapcsolatban szintén a kapcsolók állásáról beszélek, csak az állás szó szinonomáját az *állapot* szót használom pl. az 55—56. oldalon „egy kapcsoló kétféle *állapotban* lehet vagy átengedi az áramot vagy nem. Ha a kapcsolót valamelyik állapotban α-val jelöljük, akkor ugyanazt a kapcsolót az ellentétes állapotban $\bar{\alpha}$-sal. Ilyenképpen egyváltozós műveletet értelmeztünk, mert az α kapcsoló bármelyik állapotának egyértelműen megfeleltetjük az ellentétes állapotot". „Az elektromos kapcsolók K halmazát kapcsolóalgebrának nevezzük, K elemei elektromos kapcsolók, melyek mindegyike kétféle *állapotban* lehet. Műveletei a soros és párhuzamos kötés és a kapcsoló ellentétének állapota és a *műveletek eredményei csakis a kapcsolók állapotától függenek* (35. ábra)". Mivel a kapcsolóalgebrában a műveletek eredményei csakis a *két különböző állapottól* függenek, azért a kapcsolóalgebra kételemű Boole-algebra, két eleme a 0 (a kapcsoló nem engedi át az áramot) és az 1 (a kapcsoló átengedi az áramot). Így a kapcsoló mindegyike 0 vagy 1. Hasonlóan az ítéletalgebra mindegyik eleme i vagy h, a csapalgebra mindegyik eleme a két különböző állapot valamelyike. Ez könyvemben pl. a 72—73. oldalakon is olvasható. Egy állítás, *azonosság*, duálisának fogalma könyvemben a 20., 24., 51., 63., 69. oldalakon szerepel és pl. a 63. oldalon ha azt mondjuk, hogy felcseréljük a 0 és 1 jeleket, akkor egyben mindegyik kapcsoló állását meg kell változtatni, mert ott kételemű Boole-algebráról van szó, és annak mindegyik eleme 0 vagy 1. Arra vonatkozóan pedig, hogy két egymással duális áramkörben egyidejűleg folyik-e áram vagy sem, elírás történt könyvemben. Hiszen a 61. oldalon két egymással duális áramkörről, az $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ és $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\gamma)$ áramkörről meg is mutatom, hogy ekvivalensek, a 62. oldalon pedig az $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ és $\alpha+\bar{\alpha}$ áramkörök nem ekvivalensek. Az „ítéletalgebra axiómarendszere" kifejezés jelentésére vonatkozóan a már idézett Gödel-féle teljességi tétel és megfordítása ad magyarázatot. Ti. könyvem felfogásában az ítéletalgebra kételemű Boole-algebra, s így amely azonosságok formálisan bizonyíthatók a Boole-algebrát, mint struktúraosztályt definiáló axiómarendszerből, azok mind igazak az ítéletalgebrában is és fordítva. Tehát könyvem felfogásában a Boole-algebra struktúraosztályt definiáló axiómarendszert tekinthetjük egy valamelyik Boole-algebra, pl. a kételemű Boole-algebra axiómarendszerének is.

5. A 353. oldalon írja Schmidt Tamás, hogy „A könyv irodalomjegyzékéről csak annyit, hogy Bernays és Fraenkel »Axiomatikus halmazelmélet« c. angol nyelvű műve absztrakciós szintjében toronymagasan az itt tárgyalt anyag fölött áll, igazán kár erre a könyvre hivatkozni a halmaz és ítéletalgebra iskolai szintű tárgyalásakor".

Schmidt Tamásra nézve valóban kár, hogy a szerző ismerte ezt a könyvet P. M. Cohn, G. Grätzer, A. I. Malcev, A. Robinson, R. Sikorski könyveivel együtt, mert a szerző ezért tudta a fentiekben Schmidt Tamás idézett művének mindegyik megállapításáról megmutatni, hogy nem tartható.

ЕЩЁ РАЗ ПО ПОВОДУ КНИГИ ПО АМЕБРЕ ПРЕДНАЗНАЧЕННОЙ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

ЛАСЛО ВАРЕЦА

A NEW REMARK ON THE PRETEXT OF A TEXTBOOK ON ALGEBRA FOR SCHOOLCHILDREN

L. VARECZA

MEGJEGYZÉSEK VARECZA LÁSZLÓ VÁLASZÁHOZ

SCHMIDT TAMÁS

1. A szerző válaszából is világos, hogy a könyv néhány állításáról látja, hogy tényleg hibásak, ezekre nem reflektálok ismételten (mivel ezek a könyv apró hibái közé tartoznak). Csak annyit említenék meg, hogy sokféle olyan metrika értelmezhető 3-dimenziós terünkben, amelyek nem származtathatók skalárszorzatból (pl. $\varrho'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$, vagy

$$\varrho''(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|),$$

ahol $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$; euklideszi térnek viszont olyan lineáris teret nevezünk, amelyen egy skalárszorzat (és így a belőle származtatott metrika) ki van tüntetve (pontosabban ld. pl. RÓZSA PÁL: Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó 1974, 126. old., vagy I. M. GELFAND: Lekcii po linyejnoj algebre, Moszkva 1951, 23. old.). Sajnálatos, hogy Krekó Béla idézett könyve is — minden mértékadó irodalmi forrással ellentétben — pusztán metrikával ellátott lineáris térként értelmezi az euklideszi teret, s csak később derül ki, hogy valójában csak skalárszorzatból származtatott metrikával foglalkozik.

Ami STONE tételét illeti, topológiai fogalmak nélkül is kimondható: bármely Boole-algebra izomorf egy halmaz összes részhalmazából álló Boole-algebra egy *részalgebrájával*. (A topológiai fogalmak ismeretében ennél élesebben fogalmazhatunk.) Hibás viszont a könyv 209. oldalán olvasható állítás: „bármelyik Boole-algebra izomorf valamelyik nem üres halmaz *összes* részhalmazaiból álló halmazalgebrával".

2. Nem kétséges (nem is vitattuk), hogy a könyv a Boole-algebrák, testek, stb. *izomorfia-invariáns* tulajdonságaival foglalkozik. Azt állítani viszont, hogy van konkrét és *van absztrakt* Lie-algebra (félcsoport, csoport, stb.), zavaros. (Némelyik félcsoport konkrét, némelyik pedig absztrakt?!) A „konkrét" jelző értelemszerű használata (ld. a fenti idézeteket Szőkefalvi és Sztoljár műveiből) nem vezet az „absztrakt" szó használata körüli, cikkünk 1. pontjában (349—350. old.) elemzett fogalomzavarhoz, amely a könyvet a címétől kezdve végigkíséri.

3. Kérdéses, hogy a Gödel-féle teljességi tételre való utalás és a „bővebb axiómarendszer — szűkebb struktúraosztály" Galois-kapcsolat unos-untalan ismételt hangsúlyozása mennyiben óvja meg a könyvet attól, hogy hamis képet fessen az algebráról. Mindenesetre a könyv legfeljebb az „igazság-tételt" (ami egy axiómarendszerből levezethető, az igaz az axiómarendszer minden modelljében) „szuggerálja", nem pedig a Gödel-tételt (a fenti állítás megfordítását: ami igaz minden modellben, az levezethető az axiómákból). Itt persze csak az adott elsőrendű nyelven formálisan megfogalmazható állításokról van szó, például azonosságokról; az algebrai struktúrák szerkezetéről valamit is mondó tételek általában nem fogalmazhatók meg a struktúraosztály nyelvén. (Például az az egyszerű állítás, hogy egy csoport ciklikus,

nem fogalmazható meg a csoportok elsőrendű nyelvén, s így egy ilyen, középiskolában is könnyen bemutatható tétel, mint az, hogy egy ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus, sem formalizálható e nyelven.) Így erősen kétséges, helyeselhetjük-e Gödel tételének „szuggerálását" az algebra-oktatás középpontjába. Határozottan le kell szögeznünk, hogy az axiomatizálás *nem arra való, hogy azonosságokból újabb azonosságokat vezessünk le.* Az axiómák alapján az axiómarendszert kielégítő struktúrák *szerkezetéről* kívánunk információt nyerni. (Eközben persze néha arra is szükség van, hogy újabb azonosságokat vezessünk le.)

Az említett Galois-kapcsolat túlhangsúlyozása azt sugalmazhatja, hogy az algebrai fogalmak kialakításának alapvető módszere az axiómák hozzávétele, ill. elhagyása meglevő axiómáinkhoz/ból (vö. pl. „Háló, félháló", 105. old.). Valójában ilyesmire csak akkor kerül sor, ha az újabb struktúraosztály vizsgálata valamilyen (matematikai vagy azon kívüli) jelenség leírása szempontjából fontosnak bizonyul.

4. DIENES ZOLTÁN ismert matematikatanítási elméletének alkotó alkalmazása mindenképpen ígéretes út arra, hogy a tanulókat bevezessük az algebra szépségeibe. A szerző, válasza szerint, DIENES magasabb mércéjét állította könyve elé.

A szerző a *matematikai változatosság* elvét számos struktúrafajta definíciója esetében érvényesíti (Boole-algebrák, félcsoportok, csoportok, gyűrűk, testek). A megadott példák egy része azonban *nélkülöz bárminemű motivációt.* A „További testek" c. fejezet a komplex számok egyetemen szokásos számpáros bevezetésével kezdődik; itt különösen az

$$(a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

szorzási szabály célja érthetetlen. („Honnan vette?" — ezt még az egyetemi hallgatók is meg szokták kérdezni, ha a formula hátterét eltitkolja az előadó.) A „Gyűrű" c. rész egyetlen példája nemkommutatív gyűrűre a 2×2-es mátrixok gyűrűje. Itt a mátrixszorzás művelete deus ex machina.

A matematikai változatosság elvének aligha felel meg az az eljárás, amelynek során a *háló* fogalmához úgy jutunk, hogy a Boole-algebrákon kívül egyetlen hálót sem látunk, vagy egyetlen (motiváció híján kiagyaltnak tűnő) konstrukcióból (a komplex számok *teste*, 233. old., ezúttal a geometriai úton definiálva a szorzást) kialakítjuk az *algebra* fogalmát.

A *konstruktivitás* elve nem jelenti azt, hogy az *elemzésre* ne volna szükség. A szerző — nagyon helyesen — számos példán illusztrálja a Boole-algebra, csoport, stb. fogalmát, ugyanakkor szinte semmit nem látunk abból, hogy ezen fogalmak megalkotása után valóban képesek leszünk valami lényegeset megállapítani róluk.

A tanuló játékos tevékenységéhez a pedagógusnak megfelelő szituációt kell teremtenie, s ehhez a könyv a legtöbb struktúraosztály esetében alig, vagy egyáltalán nem ad útmutatást. A formális szabályok alapján előírt formális tevékenység (pl. a komplex számok említett számpáros bevezetése alapján a testaxiómák ellenőrzése) nem segíti elő az algebra lényegének megértését, a szabályok mögötti tartalom meglátását.

Sajnálatos, hogy a könyv lektorai egyáltalán nem álltak feladatuk magaslatán és ezáltal mind a szerzőnek, mind az algebra iránt érdeklődő tanulóknak kárt okoztak.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОТВЕТУ ВАРЕЦА

Т. Э. ШМИДТ

REMARK TO THE ANSWER OF L. VARECZA

E. T. SCHMIDT

JELENTÉS AZ 1975. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1975. október 31. és november 10. között rendezte meg az 1975. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1975-ben fejezték be.

A verseny feladatai az alábbiak voltak:

1. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\aleph_1$ számosságú $\langle T, \rightarrow \rangle$ turnament, amely nem tartalmaz $\aleph_1$ számosságú tranzitív részturnamentet. (A $\langle T, \rightarrow \rangle$ struktúrát turnamentnek nevezzük, ha $\rightarrow$ kétváltozós irreflexív, aszimmetrikus és trichotom reláció a T halmazon. A $\langle T, \rightarrow \rangle$ turnament tranzitív, ha $\rightarrow$ tranzitív reláció és így T rendezése.)

2. Igazoljuk, hogy azon $f: \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ leképezések száma, amelyekre teljesül, hogy ha f az i értéket felveszi, akkor minden $j\,(1 \leqq j \leqq i)$ értéket is felvesz, a következő kifejezéssel adható meg:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

3. Tegyük fel, hogy az S félcsoportnak nincs valódi kétoldali ideálja, és bármely $a, b \in S$ elemekre az ab és ba szorzatok közül legalább az egyik egyenlő az a, b elemek valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy ekkor vagy minden $a, b (\in S)$-re $ab = a$, vagy minden $a, b (\in S)$-re $ab = b$.

4. Mutassuk meg, hogy a racionális értékű és a komplex racionális értékű multiplikatív számelméleti függvények a konvolúció $f \circ g$

$$\left[(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)\right]$$

műveletére nézve egymással izomorf csoportokat alkotnak. (Egy komplex szám komplex racionális, ha mind valós, mind képzetes része racionális.)

5. Legyen $\{f_n\}$ a [0, 1] intervallumon Lebesgue-integrálható függvények olyan szorzata, amelyre $\int_E f_n$ konvergens minden E Lebesgue-mérhető részhalmazára [0, 1]-nek $(n \rightarrow \infty)$, és a $\lim_n f_n = f$ határérték m. m. létezik. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f integrálható, és $\int_E f = \lim_n \int_E f_n$. Igaz-e az állítás, ha E-t csak intervallumokon futtatjuk keresztül, viszont feltesszük, hogy $f_n \geqq 0$? Igaz-e a feladat állítása, ha [0, 1] helyett [0, ∞]-t veszünk?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy f differenciálható valós függvényre és valamely $M>0$ valós számra az x és t változók bármely választásakor

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)| \leqq M \cdot t^2$$

teljesül, akkor bármely x-re és t-re

$$|f'(x+t)-f'(x)| \leqq M \cdot |t|.$$

7. Legyenek a, a', b, b' valós számok, úgy hogy $a<a'<b<b'$. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ valós függvény az $[a, b']$ intervallumon folytonos, és a belsejében differenciálható. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $c\in(a, b)$ és $c'\in(a', b')$ pont, hogy

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),$$

$$f(b')-f(a')=f'(c')(b'-a')$$

és $c<c'$.

8. Igazoljuk, hogy ha egy $\{a_n\}$ nem-negatív tagú valós számsorozatra és valamilyen N természetes számra

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \leqq N \cdot a_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

teljesül, akkor az

$$\alpha_i = \sum_{n=(i-1)N+1}^{iN} a_n \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

összegekre $\alpha_{i+p} \leqq p \cdot \alpha_i$ $(i, p=1, 2, \ldots)$.

9. Legyenek l_0, c, α, g pozitív állandók, és legyen $x(t)$ az

$$(*) \qquad ([l_0+ct^\alpha]^2 x')'+g[l_0+ct^\alpha]\sin x = 0, \quad t \geqq 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

differenciálegyenletnek az $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=0$ feltételeknek eleget tevő megoldása. ((*) annak a matematikai ingának a mozgásegyenlete, amelynek hossza az $l=l_0+ct^\alpha$ törvény szerint változik.)

Bizonyítsuk be, hogy $x(t)$ értelmezve van a $[t_0, \infty)$ intervallumon, továbbá az $\alpha>2$ esetben bármely $x_0\neq 0$-hoz létezik olyan t_0, hogy

$$\liminf_{t\to\infty} |x(t)| > 0.$$

10. Igazoljuk, hogy a Hilbert-tér egy idempotens, lineáris operátora akkor és csak akkor önadjungált, ha normája 0 vagy 1.

11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (nem feltétlenül független) diszkrét valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy létezik legalább $\frac{n^2}{2}$ olyan (i, j) pár, amelyre

$$H(X_i+X_j) \geqq \frac{1}{3} \min_{1\leqq k\leqq n} \{H(X_k)\},$$

ahol $H(X)$ az X Shannon-féle entrópiáját jelöli.

12. Egy P konvex poliédernek van olyan lapja, amelynek minden más lappal van közös éle. Bizonyítandó, hogy P éleiből kiválasztható egy minden csúcson áthaladó egyszerű zárt poligon.

Az 1. feladatot *Hajnal András*, a 2.-at *Lovász László*, a 3.-at *Megyesi László*, a 4-.et *Csákány Béla*, az 5.-et *Szűcs József*, a 6.-at *Szabados József*, a 7.-et *Szőkefalvi-Nagy Béla*, a 8.-at *Leindler László*, a 9.-et *Hatvani László*, a 10.-et *Szűcs József*, a 11.-et *Katona Gyula*, a 12-et *Lovász László* bocsátotta a bizottság rendelkezésére..

A kitűzött feladatokra 63 versenyző 441 megoldást nyújtott be. A versenybizottság a versenyzők munkáját értékelve az alábbi döntést hozta:

A Schweitzer Miklós Emlékverseny I. díjában és ezzel együtt 2500 Ft pénzjutalomban részesül *Ruzsa Imre* V. éves matematikus hallgató (ELTE) mind a 12 feladat kifogástalan megoldásáért és a megoldások kiemelkedően tömör, világos megfogalmazásáért.

II. díjban és ezzel együtt 2000—2000 Ft pénzjutalomban részesülnek *Komjáth Péter* V. éves matematikus (ELTE), *Lempert László* 1975-ben végzett matematikus (ELTE) és *Totik Vilmos* III. éves matematikus (JATE) hallgatók, akik ugyancsak mind a 12 feladatra nyújtottak be megoldást, egyes feladatokra adott megoldásaikban azonban kisebb hiányosságok találhatók (Komjáth Péternél az 5., Lempert Lászlónál a 4. és Totik Vilmosnál az 1. és 5. feladatban).

III. díjban részesülnek *Füredi Zoltán* III. éves matematikus (ELTE) és *Somorjai Gábor* 1975-ben végzett matematikus (ELTE) hallgatók 10 feladat teljesen kifogástalan megoldásáért. (Füredi Zoltán a 12. feladatot is részben megoldotta.) Jutalmuk a Gál Jenőné által létesített alapítványból 1500—1500 Ft.

A bizottság kiemelkedő munkájukért dícséretben részesíti a következő versenyzőket: *Bajmóczy Ervin* V. éves matematikus (ELTE), *Győri Ervin* IV. éves matematikus (ELTE), *Móri Tamás* III. éves matematikus (ELTE), *Pálfy Péter Pál* III. éves matematikus (ELTE) és *Szendrei Mária* V. éves matematikus (JATE). Jutalmuk 300—300 Ft-os könyvutalvány.

A VERSENYBIZOTTSÁG:

Tandori Károly elnök, *Huhn András* titkár, *Csákány Béla*, *Csörgő Sándor*, *Durszt Endre*, *Fodor Géza*, *Gehér László*, *Hatvani László*, *Leindler László*, *Lovász László*, *Megyesi László*, *Móricz Ferenc*, *Nagy Péter*, *Pintér Lajos*, *Pollák György*, *Szőkefalvi-Nagy Béla*, *Szűcs József*.

A feladatok megoldásai

1. feladat

Elegendő belátni, hogy létezik olyan $f:[\omega_1]^2 \to 2$ „két színnel való színezése" az ω_1-ből alkotott rendezetlen párok halmazának, melyre a következő tulajdonság teljesül:

(1) Ha $A \subset \omega_1$, $|A| = \aleph_1$ és $i < 2$ akkor találhatók olyan B, $C \subset A$ halmazok, melyekre $|B| = |C| = \aleph_1$ és amelyekre $f(\{\beta, \gamma\}) = i$ valahányszor $\beta \in B$ és $\gamma \in C$.

Valóban, ha f kielégíti (1)-et, legyen $T = \omega_1$, és definiáljuk a $\to$ relációt a következő megkötéssel. Ha $\alpha < \beta < \omega_1$, akkor $\alpha \to \beta$, ha $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$ és $\beta \to \alpha$, ha $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$. Ha most $A \subset \omega_1$, $|A| = \aleph_1$, akkor (1)-nek $i = 0$ esetét alkalmazva választhatunk B, $C \subset A$, $|B| = |C| = \aleph_1$ halmazokat, melyekre $f(\{\beta, \gamma\}) = 0$ teljesül, ha $\beta \in B$ és $\gamma \in C$. Ismét alkalmazva (1)-et, A helyébe B-t és i helyébe 1-et téve azt nyerhetjük, hogy létezik olyan $\alpha \in B$ és $B' \subset B$, melyekre $|B'| = \aleph_1$ és $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$, ha $\beta \in B'$. Válasszunk egy olyan β-t C-ből, melyre $\alpha < \beta$ és egy olyan γ-t B'-ből,

melyre $\beta<\gamma$. Ekkor $\alpha\to\beta$, $\beta\to\gamma$ és $\gamma\to\alpha$, ezért az A által feszített részturnament nem tranzitív, és így valóban elegendő (1)-et igazolni.

Megmutatjuk most, hogy (1) következik az alábbi állításból.

(2) Létezik olyan $\langle R, \prec\rangle$ rendezett halmaz, melyre $|R|=\aleph_1$, és amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) R-nek nincs olyan $\aleph_1$ számosságú R' része, melyre $\langle R', \prec\rangle$ vagy $\langle R', \succ\rangle$ jólrendezett.

(ii) R bármely $\aleph_1$ számosságú része tartalmaz $\aleph_1$ számú páronként diszjunkt nem üres intervallumot. (Ez úgy értendő, hogy minden ilyen R' részre az $\langle R', \prec\rangle$ rendezett halmazban van $\aleph_1$ páronként diszjunkt intervallum.)

Jegyezzük meg, hogy az (ii) tulajdonságból azonnal következik az alábbi (iii) tulajdonság is.

(iii) R-nek nincs olyan $\aleph_1$ számosságú R' része, amelyre $\langle R', \prec\rangle$ vagy megfordítása $\langle R', \succ\rangle$ hasonló a valós számok egy nagyság szerint rendezett részhalmazához.

(1) bizonyításához nyilván elegendő egy $f:[R]^2\to 2$ leképezést definiálni. Feltehetjük továbbá, hogy R valós számokból áll. A valós számok nagyság szerinti rendezését $<$-el jelöljük. $\alpha\neq\beta\in R$ esetén legyen $f(\{\alpha,\beta\})=0$, ha $\alpha\prec\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$, és $f(\{\alpha,\beta\})=1$, ha $\alpha\prec\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$. Szimmetriaokokból elég megmutatni, hogy (1) $i=0$ esetén teljesül. Legyen $A\subset R$, $|A|=\aleph_1$. Az (i) tulajdonságból rutin okoskodással következik, hogy létezik olyan $A'\subset A$, $|A'|=\aleph_1$, melyre tetszőleges $\alpha\prec\beta$; $\alpha,\beta\in A'$ esetén az (α,β) A'-beli nyílt intervallum a $\prec$ rendezésben $\aleph_1$ számosságú. (Ha $\alpha,\beta\in A$ esetén α-t és β-t ekvivalensnek nevezzük, ha α és β között csak megszámlálható sok elem van, akkor ezen ekvivalencia szerinti ekvivalencia-osztályok az (i) tulajdonság szerint megszámlálhatók, így az A'-t úgy kapjuk, hogy mindegyikből kiválasztunk egy pontot.) A (ii) tulajdonság miatt választhatunk egy $I_\xi:\xi<\omega_1$ páronként diszjunkt intervallumrendszert A'-ben. Ekkor $|I_\xi|=\aleph_1$, ha $\xi<\omega_1$. Ezért mindegyik I_ξ-ből kiválaszthatunk egy $\alpha_\xi\in I_\xi$ elemet úgy, hogy α_ξ I_ξ felhalmozódási pontja a valós számok topológiájában. Legyen $A''=\{\alpha_\xi:\xi<\omega_1\}$. Ez egy $\aleph_1$ számosságú halmaz, és így a (ii) tulajdonság (iii) következménye szerint léteznek olyan $\xi\neq\eta<\omega_1$ rendszámok, melyekre $\alpha_\xi\prec\alpha_\eta$ és egyszersmind $\alpha_\xi<\alpha_\eta$. (Különben A'' $\prec$ megfordításában hasonló volna $<$-hez.) Ekkor nyilván léteznek olyan $B\subset I_\xi$, $C\subset I_\eta$, $|B|=|C|=\aleph_1$ halmazok, melyekre $\beta<\gamma$ teljesül tetszőleges $\beta\in B$, $\gamma\in C$ párra. Miután ez nyilván igaz $<$ helyett $\prec$-al, B, C kielégítik (1) kirovásait.

Hátra van még egy, a (2) feltételeit kielégítő rendezett halmaz konstrukciója. Az ilyen halmazokat Specker-típusúaknak nevezik. Vázolunk egy az irodalomból jólismert konstrukciót:

Az R halmaz olyan r függvényekből áll majd, amelyek egy megszámlálható α rendszámot képeznek a racionális számok halmazába. $R_\alpha:\alpha<\omega_1$ olyan függvényekből áll, amelyek α-t képezik szigorúan monoton módon a racionális számok halmazába. R_α-t α szerinti transzfinit rekurzióval definiáljuk.

Tegyük fel, hogy $\alpha<\omega_1$, és R_β-t $\beta<\alpha$ esetén már definiáltuk úgy, hogy $0<|R_\beta|\leqq\leqq\aleph_0$, és valahányszor $\gamma<\beta$, $r\in R_\gamma$, p racionális és $\sup\{r(\eta):\eta<\gamma\}<p$, mindig létezik olyan $s\in R_\beta$, melyre $r\subset s$ és $\sup\{s(\eta):\eta<\beta\}=p$. Ekkor nagyon könnyű látni, hogy kiválasztható egy olyan megszámlálható R_α halmaz, melyre R_α α hosszúságú növekvő sorozatokból áll, és amelyre valahányszor $\beta<\alpha$, $r\in R_\beta$, p racionális szám, $\sup\{r(\eta):\eta<\beta\}<p$, mindannyiszor létezik olyan $s\in R_\alpha$, melyre $r\subset s$ és $\sup\{s(\eta):\eta<\alpha\}=p$. Ez definiálja az $R_\alpha:\alpha<\omega_1$ halmazokat.

Legyen $R=\bigcup_{\alpha<\omega_1} R_\alpha$. Ekkor $|R|=\aleph_1$. R $\prec$ rendezését így definiálhatjuk: Ha

$s, r \in R$, akkor $s \prec r$ álljon akkor és csak akkor, ha vagy $s \subset r$ vagy $s(\eta) < r(\eta)$, ahol η a legkisebb olyan rendszám, melyre $s(\eta) \neq r(\eta)$. Nagyon könnyű igazolni, hogy ez rendezés és az (i), (ii) tulajdonságok is rutin módon igazolhatók.

Megjegyzés: A feladatban megfogalmazott állítás *R. Laver* eredménye.
Megoldották: *Komjáth Péter, Lempert László, Ruzsa Imre.*
Részben megoldotta: *Totik Vilmos.*

2. feladat

1. megoldás. Ha a tekintett függvények számát A_n-nel jelöljük, akkor közülük azok száma, amelyek az 1 értéket l különböző helyen veszik fel, $\binom{n}{l} A_{n-l}$-lel egyenlő. Mivel mindegyikük felveszi valahol az 1 értéket, kapjuk, hogy $n \geqq 1$ esetén

$$A_n = \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} A_{n-l} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} A_l.$$

A $B_n = \frac{A_n}{n!}$ jelöléssel $B_0 = 1$ és

$$B_n = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(n-l)!} B_l.$$

$B_n < 2^n$, így $|z| < \frac{1}{2}$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} B_n z^n$ sor abszolút konvergens. Határértékét $f(z)$-vel jelölve, így elvégezhetők az alábbi átalakítások:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(n-l)!} B_l z^n = 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{(n-l)!} z^n \right) B_l =$$

$$= 1 + \sum_{l=0}^{\infty} (e^z - 1) B_l z^l = 1 + (e^z - 1) f(z),$$

ahonnan

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kz}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{k^n}{2^{k+1}} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} \right) z^n.$$

Így $B_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$, amivel az állítást igazoltuk.

Balogh Zoltán és *Papp Zoltán* megoldása alapján

2. megoldás. Jelölje s_{ni} az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak az $\{1, 2, \ldots, i\}$ halmazra való ráképezéseinek számát. Ekkor a tekintett függvények száma

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ni}.$$

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmazba való leképezéseit kétféleképpen megszámlálva kapjuk, hogy

$$k^n = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} s_{ni}.$$

Így azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ni} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{2^{k+1}} s_{ni},$$

vagy másként írva (felhasználva, hogy $s_{nn+1}=s_{nn+2}=\ldots=0$, és későbbre hagyva annak bizonyítását, hogy az alkalmazott átrendezés elvégezhető)

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ni} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=i}^{\infty} \frac{\binom{k}{i}}{2^{k+1}} \right] s_{ni}.$$

A szögletes zárójelben egy negatív binomiális eloszlás tagjainak összege áll ($\frac{\binom{k}{i}}{2^{k+1}}$ annak a valószínűsége, hogy pénzdarabbal dobva az $i+1$-edik fejet a $k+1$-edik dobáskor érjük el), így a jobb oldalon is minden s_{ni} együtthatója 1. A szögletes zárójelben álló összegek abszolút konvergenciája azt is igazolja, hogy az előbbi átrendezés helyes volt, ezért a bizonyítással készen vagyunk.

Pálfy Péter Pál megoldása alapján

Kiemelkedő megoldást adott: *Komjáth Péter.*

Megoldották: *Bacsó Gábor, Balogh Zoltán, Bara Tamás, Beck József, Bíró Balázs, Bodnár István, Boros Endre, Czédli Gábor, Do Ba Khang, Füredi Zoltán, Göndöcs Ferenc, Győry Ervin, Hangya László, Hermann Péter, Kertész Gábor, Kollár János, Lempert László, Móri Tamás, Pach János, Pálfy Péter Pál, Papp Zoltán, Pham Ngoc Anh, Reviczky János, Ruzsa Imre, Simányi Nándor, Slíz Miklós, Somorjai Gábor, Szabó György, Székelyhidi László, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária, Terjéki József, Totik Vilmos, Turán György, Tuza Zsolt, Ury László, Veres Sándor, Wettl Ferenc.*

Nem teljes megoldást adtak: *Bajmóczy Ervin, Bezdek Károly, Garay Barnabás, Horváth Eszter, Kiss Emil, Seres Ákos, Stachó László, Szabó Zoltán.*

3. feladat

1. megoldás. S nyilvánvalóan idempotens. McLean tétele szerint (l. Clifford—Praston: The Algebraic Theory of Semigroups I., AMS, Providence, R. I., 1961) ezért van S-en olyan Θ kongruenciareláció, hogy S/Θ félháló, és minden Θ szerinti kongruenciaosztály derékszögű köteg. Könnyű látni, hogy S/Θ is ideálmentes, így egyelemű, tehát maga S derékszögű köteg. Más szavakkal léteznek olyan X és Y halmazok, hogy S izomorf azzal az $\langle X\times Y;\ \cdot\rangle$ félcsoporttal, amelyen a szorzást a következő szabály szerint végezzük: $(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1, y_2)$, ha $x_i\in X$, $y_i\in Y$, $i=1, 2$. De második feltételünk akkor csak úgy állhat, hogy x és y valamelyike egyelemű, ami az állítást bizonyítja.

Szendrei Mária

2. megoldás. A feltételekből könnyen adódik, hogy

(1) S idempotens, és

(2) S-nek bármely a és b elemeihez léteznek olyan $x, y\in S$ elemek, hogy $b=xay$.

Definiáljuk a következő relációkat S-en:

$$aLb \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ab = a,$$

$$aRb \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ab = b.$$

L nyilvánvalóan tranzitív, és (1) miatt reflexív is. Továbbá, ha $a, b \in S$-re aLb, akkor (1) és (2) szerint számolva

$$a = ab = axay = axay^2 = ay,$$

$$b = xay = xayay = ba,$$

azaz bLa. Ezzel beláttuk, hogy L és R ekvivalenciarelációk. L és R definíciójából, valamint a feladat második feltételéből adódik, hogy
(3) aLb és aRb egyszerre csak akkor állhat, ha $a=b$ és
(4) minden $a, b \in S$ elemekre aLb vagy aRb teljesül.
De ekvivalenciarelációkra (3) és (4) együtt csak úgy teljesülhet, ha L és R valamelyike a teljes $S \times S$ reláció.

Ruzsa Imre

Kiemelkedő megoldást adtak: *Komjáth Péter, Pálfy Péter Pál, Stachó László, Szendrei Mária, Totik Vilmos.*

Megoldották: *Bacsó Gábor, Bara Tamás, Beck József, Bezdek Károly, Boros Endre, Füredi Zoltán, Garay Barnabás, Geréb Mihály, Győri Ervin, Hermann Péter, Katona Endre, Kertész Gábor, Kiss Emil, Kollár János, Lempert László, Móri Tamás, Ruzsa Imre, Somorjai Gábor, Sonkoly Pál, Székelyhidi László, Szendrei Ágnes, Tuza Zsolt.*

Nem teljes megoldást adott: *Bajmóczy Ervin.*

4. feladat

Jelölje Q a feladatban szereplő testek bármelyikét, és legyen G_Q a Q-beli értékeket felvevő multiplikatív számelméleti függvények csoportja. Jólismert módon igazolható, hogy G_Q Abel-csoport. Megmutatjuk, hogy tetszőleges n természetes számra

(a) G_Q-ban korlátlanul vonható n-edik gyök, azaz a

$$(*) \qquad \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n\text{-szer}} = f \quad (g \text{ ismeretlen})$$

egyenlet minden $f \in G_Q$-ra megoldható, és

(b) G_Q-ban az n-edik gyök egyértelmű.

Valóban, legyen f és n adott. Ha $g \in G_Q$ megoldása a (*) egyenletnek, akkor tetszőleges p^k $(k \geqq 1)$ prímhatvány helyen

$$f(p^k) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k \\ k_i \geqq 0}} g(p^{k_1}) \ldots g(p^{k_n}) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=k \\ 0 \leqq k_i < k}} g(p^{k_1}) \ldots g(p^{k_n}) + n \cdot g(p^k),$$

és a multiplikativitás miatt

$$g(1) = 1.$$

Ez a rekurziós képlet egyértelműen meghatározza g-t, (b) tehát teljesül. Másrészt könnyű számolás adja, hogy a fenti rekurzióval definiált g (multiplikatív kiterjesztése az összes természetes számok halmazára) valóban kielégíti a (*) egyenletet, azaz (a) is érvényes.

Végül abból, hogy egy multiplikatív függvény értékeit a prímhatvány helyeken előírhatjuk, következik, hogy $|G_Q| = 2^{\aleph_0}$.

Ezzel készen állunk a feladat állításának bizonyítására. (a) miatt G_Q teljes Abel-csoport, és (b) miatt torziómentes is. Ezért (a teljes Abel-csoportok alaptételé-

nek következményeképpen) izomorf a racionális számok additív csoportjának valamely (diszkrét) direkt hatványával. G_Q számosságára vonatkozó megjegyzésünk alapján ez a direkt hatvány $2^{\aleph_0}$ tényezős. De a direkt tényezők száma izomorfia erejéig egyértelműen meghatározza a hatványt, G_Q tehát nem függ Q-tól.

Totik Vilmos

Kiemelkedő megoldást adtak: *Komjáth Péter, Pálfy Péter Pál, Papp Zoltán, Ruzsa Imre, Totik Vilmos.*

Megoldották: *Bajmóczy Ervin, Balogh Zoltán, Beck József, Bíró Balázs, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Győri Ervin, Hangya László, Kiss Emil, Kollár János, Móri Tamás, Somorjai Gábor, Szendrei Mária, Ury László.*

Részben megoldották: *Garay Barnabás, Göndöcs Ferenc, Lempert László.*

5. feladat

Legyen $E=[0, 1]$ vagy $E=[0, \infty)$ és legyen $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, ahol E_k véges mértékű mérhető halmaz, és E_k-n az $\{f_n\}$ sorozat konvergenciája egyenletes. Ilyen $\{E_k\}$ sorozat Jegorov tétele szerint nyilván létezik. Nyilvánvaló, hogy minden k-ra $\int_{E_k} f$ létezik és $\int_F f=\lim_n \int_F f_n$, ha F az E_k mérhető részhalmaza. A $\mu(G)=\lim_n \int_G f_n$ képlet E mérhető G részhalmazain egy végesen additív előjeles mértéket definiál. Beppo Levi tétele mutatja, hogy az, hogy $\int_E f$ létezik és $\mu(G)=\int_G f$ az E minden mérhető G részhalmazára, ekvivalens azzal, hogy μ σ-additív is. Ez utóbbi pedig következik abból az ismert tényből, hogy véges előjeles mértékek pontonként konvergens sorozatának határértéke is véges előjeles mérték (tehát σ-additív is) [l. Halmos, Measure Theory, Springer Verlag, New York—Heidelber—Berlin, 170. old. (14)]. Azt is be lehet látni, hogy $\int_E |f_n-f| \to 0$ $(n \to \infty)$. Ezzel a feladat első és harmadik kérdésére válaszoltunk. A feladat második kérdésére nemleges a válasz, amit pl. az $f_n(x)=n$, ha $0 \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ és $f_n(x)=0$, ha $\frac{1}{n}<x \leqq 1$ függvénysorozat mutat.

Kiemelkedő megoldást adtak: *Garay Barnabás, Lempert László, Pach János, Ruzsa Imre.*

Megoldották: *Füredi Zoltán, Göndöcs Ferenc, Győri Ervin, Somorjai Gábor, Turán György.*

Nem teljes megoldást adtak: *Balogh Zoltán, Boros Endre, Kollár János, Komjáth Péter, Székelyhidi László, Totik Vilmos.*

6. feladat

f-től csak a folytonosságot követeljük meg. Az

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)| \leqq M \cdot t^2$$

egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

(1) $$f(x+t)-2f(x)+f(x-t) \leqq M \cdot t^2$$

és

(2) $$f(x+t)-2f(x)+f(x-t) \geqq -M \cdot t^2$$

teljesül minden x-re és t-re. Legyen $h_1(x) \equiv f(x) - \frac{M}{2} x^2$. Erre (1) szerint

$$h_1(x+t)-2h_1(x)+h_1(x-t) = f(x+t)-2f(x)+f(x-t)-Mt^2 \leqq 0,$$

h_1 tehát olyan folytonos függvény, amelynek összes szimmetrikus második differenciái nem pozitívak. Az elemi analízisből ismert, hogy emiatt h_1 szükségképpen (alulról) konkáv. Ugyanilyen gondolatmenet adja (2)-ből, hogy a $h_2(x) \equiv f(x) + \frac{M}{2} x^2$ segédfüggvény pedig konvex. Tekintve, hogy konkáv ill. konvex függvényeknek léteznek a bal- és jobboldali deriváltjai és eleget tesznek a

(3) $$h_1^{(-)}(x) \geqq h_1^{(+)}(x),$$

(4) $$h_2^{(-)}(x) \leqq h_2^{(+)}(x)$$

egyenlőtlenségeknek, $f^{(-)}$ és $f^{(+)}$ is létezik, és

(5) $$f^{(-)}(x) \equiv h_1^{(-)}(x)+Mx,$$

(6) $$f^{(+)}(x) \equiv h_1^{(+)}(x)+Mx,$$

(7) $$f^{(-)}(x) \equiv h_2^{(-)}(x)-Mx,$$

(8) $$f^{(+)}(x) \equiv h_2^{(+)}(x)-Mx.$$

(3), (5) és (6) szerint $f^{(-)} \geqq f^{(+)}$, míg (4), (7) és (8) szerint $f^{(-)} \leqq f^{(+)}$. Vagyis $f^{(-)} \equiv f^{(+)}$, tehát f deriválható, és innen h_1 és h_2 is deriválhatók.

Mivel konkáv [konvex] függvény (féloldali) deriváltjai monoton csökkenők [növekvők], $x \leqq y$ esetén

(9) $$h_1'(y)-h_1'(x) = f'(y)-f'(x)-M \cdot (y-x) \leqq 0$$

és

(10) $$h_2'(y)-h_2'(x) = f'(y)-f'(x)+M \cdot (y-x) \geqq 0.$$

(9) és (10) összefoglalhatók az

$$|f'(y)-f'(x)| \leqq M\,|y-x|$$

alakba, ami ekvivalens a bizonyítandóval.

Stachó László

Kiemelkedő megoldást adtak: *Bajmóczy Ervin, Komjáth Péter, Lempert László, Móri Tamás, Páles Zsolt, Stachó László.*

Megoldották: *Bacsó Gábor, Balogh Zoltán, Beck József, Bezdek Károly, Bodnár István, Boros Endre, Czédli Gábor, Do Ba Khang, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Győri Ervin, Hangya László, Ivanyos Gábor, Kertész András, Kertész Gábor, Kiss Emil, Kollár János, Pach János, Pálfy Péter Pál, Papp Zoltán, Pham Ngoc Anh, Reviczky János, Ruzsa Imre, Simányi Nándor, Somorjai Gábor, Sonkoly Pál, Szabó György, Székelyhidi László, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária, Terjéki József, Totik Vilmos, Turán György, Tuza Zsolt, Ury László, Veres Sándor, Wettl Ferenc.*

Részben megoldotta: *Sebő András.*

7. feladat

1. megoldás. Legyen

$$D = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad D' = \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'},$$

$$r = \inf\{c \in (a, b) : f'(c) = D\}, \quad r' = \sup\{c' \in (a', b') : f'(c') = D'\}.$$

Célunk bebizonyítani, hogy $r<r'$. Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor

$$a < a' < r' \leqq r < b < b'.$$

A deriváltfüggvények Darboux-tulajdonsága miatt $f'(x)$ az (a, r) intervallumban mindig D ugyanazon oldalára esik; feltehetjük, hogy mindig $f'(x)>D$.

Hasonlóképpen $(r, b')(\subseteqq(r', b'))$-ben $f'(x)$ mindig D' ugyanazon oldalán van.

1. eset: $f'(x)>D'$ (r, b')*-ben.* A középértéktétel miatt

$$f(r)-f(a)>D(r-a), \quad f(b')-f(r) > D'(b'-r).$$

Mivel definíció szerint

$$f(b)-f(a) = D(b-a), \quad f(b')-f(a') = D'(b'-a'),$$

ezért kivonással

$$f(b)-f(r) < D(b-r), \quad f(r)-f(a') < D'(r-a'). \tag{1}$$

Másrészt ugyancsak a középértéktétel szerint

$$f(b)-f(r) > D'(b-r), \quad f(r)-f(a') > D(r-a'). \tag{2}$$

Mivel $b-r>0$ és $r-a'>0$, ezért (1) és (2) bal oldalaiból $D>D'$, jobb oldalaiból pedig $D<D'$ következik, ami ellentmondás.

2. eset: $f'(x)<D'$ (r, b')*-ben.* Hasonlóan számolva

$$D'(b-a') < f(b)-f(a') < D(b-a'),$$

innen tehát $f'(b)<D'<D<f'(a')$. Legyen $T \in (D, D')$, úgy hogy $T \neq f'(r)$. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt kell lennie az (a', b) intervallumban olyan t helynek, ahol $f'(t)=T$. Ez azonban nem lehet sem (a', r)-ben (mert ott $f'(x)>D>T$), sem (r, b)-ben (mert ott $f'(x)<D'<T$), de t nem lehet r sem (T választása miatt), ami ismét ellentmondás.

Ruzsa Imre

2. megoldás. Először megmutatjuk, hogy érvényes a következő állítás:

Legyenek p, q, q' valós számok, úgy hogy $p<q<q'$. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ valós függvény a $[p, q']$ intervallumon folytonos és a belsejében differenciálható. Akkor minden olyan $r \in (p, q)$ ponthoz, amelyre

$$f(q)-f(p) = f'(r)(q-p)$$

teljesül, található olyan $r' \in (p, q')$ pont, hogy

$$f(q')-f(p) = f'(r')(q'-p)$$

és $r'>r$.

Feltehetjük, hogy $f(p)=f(q')=0$, különben az

$$f(x)-f(p)-(x-p)\frac{f(q')-f(p)}{q'-p}$$

függvénnyel végezhetnénk el az alábbi meggondolásokat. $f(q)=0$ esetén az állítás nyilvánvaló, így még azt is feltehetjük, hogy $f(q)>0$. Válasszuk az $r\in(p, q)$ pontot úgy, hogy

$$(f(q)=)f(q)-f(p)=f'(r)(q-p).$$

Ha most $f(r)\leqq 0$, akkor az $[r, q)$ intervallumban van olyan p' pont, hogy $f(p')=0$, ezért a (p', q') intervallumban található olyan r', hogy $f'(r')=0$, így ezen r' eleget tesz a bizonyítandó állítás kirovásainak. Azt az esetet kell még megvizsgálnunk, amikor $f(r)>0$.

Mivel

$$f'(r)=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}>0,$$

van olyan $p'\in(r, q')$ pont, hogy az

$$\frac{f(p')-f(r)}{p'-r}$$

differenciahányados nagyobb mint 0, azaz $f(p')>f(r)$. Így a (p', q') intervallumban található olyan q'' pont, hogy $f(q'')=f(r)$. Ezért az (r, q'') intervallum alkalmas r' pontjára $f(r')=0$, most tehát ezen r' pont elégíti ki a bizonyítandó állítás követelményeit.

Rátérünk a feladat állításának bizonyítására. Válasszuk a $d\in(a', b)$ pontot úgy, hogy

$$f(b)-f(a')=f'(d)(b-a').$$

A most bizonyított állítást alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan $c'\in(a', b')$ pont, hogy

$$f(b')-f(a')=f'(c')(b'-a')$$

és $c'>d$, és hasonlóan adódik, hogy van olyan $c\in(a, b)$ pont, amelyre

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

és $d>c$, amivel a bizonyítást befejeztük. A bizonyításból az is látható, hogy a feladat állítása az $a\leqq a'<b<b'$ és az $a<a'<b\leqq b'$ esetben is érvényes.

Sonkoly Pál

Megjegyzés: A feladatban szereplő állítás Jan Voiculescu eredménye.

Kiemelkedő megoldást adtak: *Garay Barnabás, Katona Endre, Ruzsa Imre, Sonkoly Pál.*

Megoldották: *Balogh Zoltán, Bara Tamás, Beck József, Czédli Gábor, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Győri Ervin, Hermann Péter, Kertész András, Kiss Emil, Kollár János, Komjáth Péter, Lempert László, Móri Tamás, Pach János, Pálfy Péter Pál, Papp Zoltán, Sebő András, Seres Ákos, Simányi Nándor, Somorjai Gábor, Székelyhidi László, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária, Terjéki József, Totik Vilmos, Turán György, Wettl Ferenc.*

Nem teljes megoldást adtak: *Bacsó Gábor, Bajmóczy Ervin, Bezdek Károly, Stachó László, Szabó György, Tuza Zsolt.*

8. feladat

1. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy bármely i-re és p-re

$$\alpha_{i+p} \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i+p-1}.$$

Ebből $\alpha_{i+1} \geqq \alpha_i$ következik, s így

$$\alpha_{i+p} \geqq \alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+p-1} \geqq p \cdot \alpha_i.$$

Fenti állításunk viszont abból következik, hogy

$$\alpha_{i+p} = \alpha_{(i+p-1)N+1} + \ldots + a_{(i+p)N} \geqq \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{(i+p-1)N+1} a_n + \ldots + \sum_{n=1}^{(i+p)N} a_n\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{N} \cdot N \cdot \sum_{n=1}^{(i+p-1)N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{2N} a_n + \ldots + \sum_{n=(i+p-2)N+1}^{(i+p-1)N} a_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i+p-1}.$$

Székelyhidi László

2. megoldás. Hasonlóan, mint az előző megoldásban, kapjuk, hogy

$$\alpha_i \geqq \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k. \tag{1}$$

Most belátjuk, hogy tetszőleges i-re és p-re

$$\alpha_{i+p} \geqq 2^{p-1} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k. \tag{2}$$

Valóban, $p=1$ esetén ez éppen (1), és ha p-re igaz (2), akkor igaz $p+1$-re is, mert

$$\alpha_{i+p+1} \geqq 2^{p-1} \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k = 2^{p-1}\left(\alpha_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} \alpha_k\right) \geqq 2^{p-1} \cdot 2 \sum_{k=1}^{i} \alpha_k.$$

Mivel $\alpha_i \geqq 0$, ezért (2)-ből $\alpha_{i+p} \geqq 2^{p-1}\alpha_i$ és ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Hasonló módon megoldhatjuk a következő, több szempontból általánosabb problémát: Legyen $\{a_n\}$ nem-negatív tagú sorozat, amelyre valamilyen c-vel

$$a_n \geqq c \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Definiáljuk α_i-t ugyanúgy mint a feladatban. Mekkora a legnagyobb d_p konstans, amellyel minden ilyen sorozatra

$$\alpha_{i+p} \geqq d_p \alpha_i$$

teljesül? $\left(\text{A feladatban } c = \frac{1}{N-1}.\right)$

Először olyan e_p-t keresünk, amelyre

$$a_{n+p} \geqq e_p \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

$p=1$ esetén az $e_1=c$ választás megfelelő. Mivel

$$a_{n+p+1} \geqq e_p \sum_{i=1}^{n+1} a_i \geqq e_p(1+c) \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

ezért célszerű $e_{p+1}=e_p(1+c)$, azaz $e_p=c(1+c)^{p-1}$ vétele. Ekkor

$$\alpha_{i+p} = \sum_{n=(i+p-1)N+1}^{(i+p)N} a_n \geqq \sum_{j=1}^{N} e_{(p-1)N+j} \sum_{n=1}^{iN} a_n \geqq \left(\sum_{j=1}^{N} e_{(p-1)N+j} \right) \alpha_i,$$

így d_p választható a következőképpen

$$d_p = \sum_{j=1}^{N} c(1+c)^{(p-1)N+j-1} = (1+c)^{(p-1)N}[(1+c)^N - 1].$$

Könnyű látni, hogy ha a_n-et az $a_1=1$, $a_n=c(1+c)^{n-2}$ $(n \geqq 2)$ képlettel definiáljuk, akkor tetszőleges N és p mellett a fent megadott d_p-vel $\alpha_{p+1}=d_p\alpha_1$, így ez az egyenlőtlenség nem élesíthető.

A feladatban $c=\frac{1}{N-1}$, így ott

$$d_p = \left(\frac{N}{N-1}\right)^{(p-1)N} \left[\left(\frac{N}{N-1}\right)^N - 1 \right] \geqq e^{p-1}(e-1),$$

de még $c=\frac{1}{N}$ esetén is $d_p \geqq 2^{p-1}$.

Ruzsa Imre

Kiemelkedő megoldást adtak: *Bezdek Károly, Bodnár István, Füredi Zoltán, Komjáth Péter, Lempert László, Móri Tamás, Pach János, Pálfy Péter Pál, Reviczky János, Ruzsa Imre, Sebő András, Simányi Nándor, Székelyhidi László, Totik Vilmos, Ury László.*

Megoldották: *Bacsó Gábor, Bajmóczy Ervin, Balogh Zoltán, Beck József, Bíró Balázs, Boros Endre, Buza Antal, Czédli Gábor, Do Ba Khang, Garay Barnabás, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Győri Ervin, Hangya László, Hermann Péter, Horváth Eszter, Illés Gábor, Ivanyos Gábor, Kertész András, Kertész Gábor, Kiss Emil, Kollár János, Kornai János, Páles Zsolt, Papp Zoltán, Pham Ngoc Anh, Seres Ákos, Slíz Miklós, Somorjai Gábor, Soós Csaba, Stachó László, Szabó György, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária, Terjéki József, Turán György, Tuza Zsolt, Veres Sándor, Wettl Ferenc.*

9. feladat

Az $y=[l_0+ct^\alpha]^2x'$ jelöléssel a feladatban szereplő (*) egyenlet a vele ekvivalens

$$x' = \frac{y}{[l_0+ct^\alpha]^2}$$

$$y' = -g[l_0+ct^\alpha]\sin x \quad \left(t \geqq 0,\ |x| < \frac{\pi}{2},\ y \in R\right)$$

alakba írható. Az utóbbi rendszerre a Picard—Lindelöf-tételt alkalmazva kapjuk, hogy a (*) egyenlet $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=0$ $\left(t_0 \geqq 0,\ |x_0| < \frac{\pi}{2}\right)$ kezdeti feltételeket kielé-

gítő $x(t)$ megoldása létezik a t_0 pont egy jobb oldali környezetében. A „határig folytathatóság" tételéből (l. L. Sz. Pontrjagin, Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.) az is következik, hogy ha $x(t)$ létezik a $[t_0, T)$ $(T<\infty)$ intervallumon, de jobbra tovább nem folytatható, akkor $|x(t)|\to\frac{\pi}{2}$, ha $t\to T-0$, hiszen a (*) egyenletből könnyen látható, hogy $x'(t)$ korlátos minden korlátos intervallumon.

Vezessük be az $l(t)=l_0+ct^\alpha$ jelölést, és tekintsük a

$$V(t, x, x') = \frac{l(t)}{g}(x')^2+2(1-\cos x)$$

függvényt, amely az $l(t)=l_0+ct^\alpha$ törvény szerint változó hosszúságú matematikai ingának a teljes „mechanikai energiájából" $l(t)/2$-vel való osztással adódik. A (*) egyenletet felhasználva differenciálással kapjuk, hogy $v(t)=V(t, x(t), x'(t))$ monoton nem-növekvő függvény. Ezért

$$2 > v(t_0) = 2(1-\cos x_0) \geqq v(t) \geqq 2(1-\cos x(t)),$$

ami kizárja azt, hogy $|x(t)|\to\frac{\pi}{2}$, ha $t\to T-0$, vagyis a fenti tulajdonságú $T<\infty$ létezésének feltételezése ellentmondáshoz vezetett. Tehát az $x(t)$ megoldás értelmezve van a $[t_0, \infty)$ intervallumon.

A feladat másik állításának bizonyításához induljunk ki a (*) egyenlet kétszeri integrálásából az $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=0$ kezdeti feltételek figyelembevételével adódó

$$x(t) = x_0-g\int_{t_0}^{t}\frac{1}{[l_0+cs^\alpha]^2}\int_{t_0}^{s}[l_0+c\tau^\alpha]\sin x(\tau)\,d\tau\,ds$$

azonosságból. Ha $\alpha>2$, akkor

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{[l_0+ct^\alpha]^2}\int_{t_0}^{t}[l_0+cs^\alpha]\,ds\,dt < \infty,$$

tehát elég nagy t_0-ra

$$|x(t)| \geqq |x_0|-g\int_{t_0}^{t}\frac{1}{[l_0+cs^\alpha]^2}\int_{t_0}^{s}[l_0+c\tau^\alpha]\,d\tau\,ds > \frac{|x_0|}{2}$$

a $[t_0, \infty)$ intervallumon, amelyből nyilván következik a feladat második állítása.

Megjegyzés. Bebizonyítható, hogy ha $0<\alpha\leqq 2$, akkor a (*) egyenlet tetszőleges olyan $x(t)$ megoldására, amely értelmezve van a $[t_0, \infty)$ intervallumon, teljesül a

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

reláció (l. Hatvani L., Az állapothatározók egy részére vonatkozó attraktivitás feltételei, Prikladnaja matematika i mechanika, Moszkva; megjelenés alatt).

Kiemelkedő megoldást adtak: *Bajmóczy Ervin, Lempert László, Terjéki József, Totik Vilmos.*

Megoldották: *Füredi Zoltán, Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Somorjai Gábor, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária.*

Kissé hiányos megoldást adott: *Kiss Emil.*

10. feladat

1. megoldás. Ha T önadjungált, akkor ortogonális projekció-operátor, és ezekről jól ismert, hogy normájuk 1 vagy 0. Fordítva, legyen $\|T\| \leqq 1$ és x tetszőleges eleme a térnek. Nyilván minden μ számra igaz, hogy

$$|\mu|^2\|Tx\|^2 \leqq \|\mu Tx-(x-Tx)\|^2 = -2\,\mathrm{Re}\,[\mu(Tx, x-Tx)]+|\mu|^2\|Tx\|^2+\|x-Tx\|^2.$$

Tehát

$$\mathrm{Re}\,[\mu(Tx, x-Tx)] \leqq \frac{1}{2}\|x-Tx\|^2.$$

Ez viszont csak úgy állhat, ha

$$(Tx, x-Tx) = 0.$$

Ebből pedig már egyszerűen és ismert módon adódik, hogy $T^*=T$.

Megjegyzés. A bizonyítás jó valós és komplex térre is.

2. megoldás. T magja (zérusaltere) a $T^2=T$ tulajdonság miatt az $(I-T)x$ alakú elemek halmazával azonos, ahol x átfutja a tér összes elemét. Jól ismert tény, egyébként könnyen ki is számítható, hogy az $(I-T)x$ altér ortogonális kiegészítője az $I-T^*$ magja. Szőkefalvi-Nagy Béla egyik ismert eredménye alapján (l. pl. Sz.-Nagy—Foiaş: Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, Akadémiai Kiadó Budapest, North-Holland Publishing Company Amsterdam—London, 1970) a $\|T\| \leqq 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy T és T^* invariáns elemei ugyanazok. Tehát $I-T^*$ magja megegyezik $I-T$ magjával, ami pedig T értékkészletével egyezik meg (ez utóbbi most az $(I-T)^2=I-T$ tulajdonságból következik). Tehát minden x-re

$$(Tx, x-Tx) = 0,$$

amiből az állítás már következik.

Megoldották: *Bacsó Gábor, Bajmóczy Ervin, Balogh Zoltán, Bara Tamás, Beck József, Czédli Gábor, Do Ba Khang, Eller József, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Göndöcs Ferenc, Hermann Péter, Katona Endre, Kertész Gábor, Kiss Emil, Komjáth Péter, Lempert László, Móri Tamás, Pach János, Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál, Papp Zoltán, Reviczky János, Ruzsa Imre, Sebő András, Somorjai Gábor, Stachó László, Szabó György, Székelyhidi László, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária, Terjéki József, Totik Vilmos, Turán György, Ury László, Veres Sándor, Wettl Ferenc.*

Nem teljes megoldást adtak: *Boros Endre, Garay Barnabás, Pham Ngoc Anh.*

11. feladat

Tekintsük azt a G gráfot, amelynek szögpontjai az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemei, és amelyben az i és j pontokat akkor köti össze él, ha nem teljesül

$$H(X_i+X_j) \geqq \frac{1}{3}\min_{1\leqq k\leqq n} H(X_k). \tag{1}$$

G hurokmentes, mert minden i-re

$$H(X_i+X_i) = H(X_i) \geqq \frac{1}{3}\min_{1\leqq k\leqq n} H(X_k).$$

Megmutatjuk, hogy G-ben nincs háromszög. Legyenek i, j és l különböző elemei az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak. Nyilván

$$X_i = \frac{1}{2}([X_i + X_j] + [X_i + X_l] - [X_j + X_l]),$$

így

$$H(X_i) = H([X_i + X_j] + [X_i + X_l] - [X_j + X_l]) \leqq$$

$$\leqq H(X_i + X_j) + H(X_i + X_l) + H(X_j + X_l) \leqq$$

$$\leqq 3 \max \{H(X_i + X_j), H(X_i + X_l), H(X_j + X_l)\},$$

ahonnan

$$\frac{1}{3} \min_{1 \leqq k \leqq n} H(X_k) \leqq \frac{1}{3} H(X_i) \leqq \max \{H(X_i + X_j), H(X_i + X_l), H(X_j + X_l)\},$$

tehát az i, j, l szögpontok között valóban van kettő, amelyeket nem köt össze él.

Turán Pál egy ismert tétele szerint (l. Mat. Fiz. Lapok *48* (1941) 436—452) egy ilyen G gráf éleinek száma legfeljebb $\frac{n^2}{4}$. Így azon (i, j) párok száma, amelyekre (1) teljesül, legalább $n^2 - 2\frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$.

Komjáth Péter

Megjegyzések: 1. Az $\frac{n^2}{2}$ nem javítható. Legyen ugyanis X olyan valószínűségi változó, amelyre $H(X) \neq 0$, és legyen

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_{\left[\frac{n}{2}\right]} = X,$$

$$X_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = \ldots = X_n = -X.$$

Akkor $1 \leqq i \leqq \frac{n}{2} < j \leqq n$ esetén és $1 \leqq j \leqq \frac{n}{2} < i \leqq n$ esetén, azaz összesen $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ (i, j) párra $H(X_i + X_j) = 0$.

2. A

$$H(X_i + X_j) > \frac{1}{3} \min_{1 \leqq k \leqq n} \{H(X_k)\} \tag{2}$$

egyenlőtlenség teljesülésével kapcsolatban vizsgáljuk meg az alábbi példát.

Legyenek egy szabályos dobó-oktaéder lapjaira (fekete, zöld, kék és piros színnel) a következő számok festve:

	1. lap	2. lap	3. lap	4. lap	5. lap	6. lap	7. lap	8. lap
fekete	1	2	3	4	5	6	7	8
zöld	7	8	5	6	3	4	1	2
kék	4	3	2	1	8	7	6	5
piros	6	5	8	7	2	1	4	3

Dobjuk fel egyszer a dobó-oktaédert, és legyen ($\frac{n}{4}$-szer ismételve)

$X_1, X_2, \ldots, X_{\frac{n}{4}}$ a dobott fekete szám,

$X_{\frac{n}{4}+1}, X_{\frac{n}{4}+2}, \ldots, X_{\frac{n}{2}}$ a dobott zöld szám,

$X_{\frac{n}{2}+1}, X_{\frac{n}{2}+2}, \ldots, X_{\frac{3n}{4}}$ a dobott kék szám,

$X_{\frac{3n}{4}+1}, X_{\frac{3n}{4}+2}, \ldots, X_n$ a dobott piros szám ($n=4k$; $k \geqq 0$, egész).

Most $H(X_i)=3$, de ha X_i és X_j különböző színű dobást mutat, akkor X_i+X_j csak 2 különböző értéket vesz fel egyforma valószínűséggel, ezért $H(X_i+X_j)=1$, s így azon (i,j) párok száma, amelyekre (2) teljesül mindössze $\frac{n^2}{4}$.

Pálfy Péter Pál

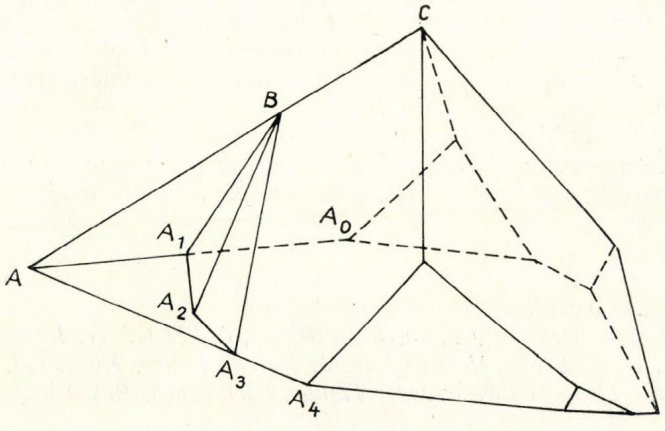
Kiemelkedő megoldást adtak: *Göndöcs Ferenc, Győri Ervin, Komjáth Péter, Pálfy Péter Pál, Ruzsa Imre, Totik Vilmos.*

Megoldották: *Bajmóczy Ervin, Balogh Zoltán, Bara Tamás, Beck József, Füredi Zoltán, Lempert László, Móri Tamás, Pach János, Somorjai Gábor, Turán György.*

Részben megoldották: *Garay Barnabás, Szabó György.*

12. feladat

1. megoldás. Legyen P kitüntetett lapja S, és tegyük fel, hogy P-nek n csúcsa van S-en kívül. n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $n=1$-re az állítás nyilvánvaló. Legyen $n>1$. Könnyen látható, hogy P élgráfjából az S-en levő éleket elhagyva fát kapunk. (Képzeljük el ugyanis, hogy a poliéder egy égitest, amelynek élei gátak, S lapját víz fedi, többi lapjai pedig üres medencék, és robbantsuk fel az S-t határoló gátakat.) Ezért P-nek van olyan B csúcsa az S-en kívül, hogy a B-ből kiinduló élek végpontjai egy kivételével S-en vannak. Jelöljük a kivételes végpontot C-vel, a többieket pedig S körüljárásának megfelelő sorrendben $A_1, A_2, \ldots, A_m$-mel. Legyen végül A_0 ill. A_{m+1} az S-nek az előbbi körüljárás szerint A_1-et megelőző, ill. A_m-re rákövetkező pontja. ($m=3$-ra l. az ábrát.)



Ha most a $\overrightarrow{CB}$ félegyenes metszi S síkját egy A pontban, akkor egészítsük ki a P poliédert az $AA_1 \ldots A_mB$ gúlával egy P' poliéderré. P' nyilván maga is konvex és kielégíti a feladat feltételét, viszont B már nem csúcsa, így az S-en kívül fekvő csúcsainak száma $n-1$. Az indukciófeltevés szerint S éleiből kiválasztható egy a feladatban mondott tulajdonságokkal rendelkező poligon. Aszerint, hogy ez a poligon az A csúcson rendre az A_0AA_{m+1}, A_0AC, vagy CAA_{m+1} sorrendben halad át, helyettesítsük benne A helyére rendre az $A_1 \ldots A_{n-1}BA_n$, $A_1A_2 \ldots A_nB$, $BA_1A_2 \ldots, A_n$ utakat. Így egy a P minden pontján áthaladó egyszerű, zárt poligont nyerünk.

Ha CB párhuzamos S-sel, akkor legyen γ olyan sík, amely metszi a $\overrightarrow{BC}$ félegyenest, de amelynek nincs közös pontja P-vel. Ha most lezárjuk a teret egy ω végtelen távoli síkkal és végrehajtunk egy olyan Π projektív transzformációt, amely γ-t ω-ba viszi át, akkor a ΠP poliéder teljes egészében a végesben fog elhelyezkedni, és a $\overrightarrow{(\Pi C)(\Pi B)}$ félegyenes is a végesben metszi ΠS síkját, ezért ismét alkalmazhatjuk az előző meggondolást.

Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a $\overrightarrow{BC}$ félegyenes metszi S-et.

Göndöcs Ferenc és *Szabó Sándor* megoldása alapján

2. megoldás. Legyen a kitüntett lap A, és jelöljük G-vel azt a gráfot, amit a poliéder élei és csúcsai által alkotott gráfból úgy nyerünk, hogy elhagyjuk az A-n levő éleket. Ekkor G fa és G-nek az A-n kívül fekvő csúcsai legalább harmadfokúak.

Válasszuk ki a P-nek tetszőleges B_1 lapját, és B_1-nek G-beli éleit színezzük (mondjuk kék színnel). Tegyük fel, hogy kiválasztottuk már a $B_1, B_2, \ldots, B_r$ lapokat úgy, hogy (1) B_i-nek és B_j-nek nincs közös csúcsa, ha $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$, és (2) minden i-hez $(i = 1, 2, \ldots, r)$ van olyan G-beli él, amely összeköti B_i-t a $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$ lapok valamelyikével. Felhasználva, hogy G összefüggő, kapjuk, hogy ha P-nek van még olyan az A-n kívüli csúcsa, amibe nem fut be színezett él, akkor közülük kiválasztható egy olyan x csúcs is, amelyet él köt össze valamelyik B_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ egy y csúcsával. Mivel x foka legalább 3, x rajta van egy olyan B_{r+1} lapon, amelynek xy nem éle. Ha B_{r+1}-nek volna olyan csúcsa, amely egyúttal csúcsa valamelyik B_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, r)$ is, akkor ezen csúcsok között volna olyan z is, amelybe x-ből eljuthatunk G-beli éleken úgy, hogy közben nem érintünk egyetlen B_i-hez $(i = 1, 2, \ldots, r)$ tartozó csúcsot sem. Másrészt az indukciófeltevés miatt x-ből z-be eljuthatunk G-beli éleken úgy is, hogy közben csak a B_i-khez $(i = 1, 2, \ldots, r)$ tartozó csúcsokat érintünk, ami ellentmond annak, hogy G fa. Tehát a $B_1, B_2, \ldots, B_{r+1}$ lapok választása is eleget tesz (1)-nek és (2)-nek. Színezzük most a B_{r+1} G-be eső éleit is.

Ezen eljárás befejeztével (ha még azokat az A-n fekvő éleket is színezzük, amelyek nincsenek rajta kiválasztott B_i lapon) elérjük, hogy P minden csúcsába fut be színezett él; ekkor a színezett élek alkotják a kívánt tulajdonságú poligont.

Do Ba Khang

Kiemelkedő megoldást adott: *Totik Vilmos.*

Megoldották: *Bajmóczy Ervin, Beck József, Czédli Gábor, Do Ba Khang, Göndöcs Ferenc, Győri Ervin, Hangya László, Katona Endre, Kiss Emil, Kollár János, Komjáth Péter, Lempert László, Móri Tamás, Pach János, Ruzsa Imre, Sebő András,*

Simányi Nándor, Stachó László, Szabó Sándor, Székelyhidi László, Szendrei Ágnes, Szendrei Mária, Terjéki József, Turán György, Tuza Zsolt, Wettl Ferenc.

Nem teljes megoldást adott: *Bacsó Gábor, Bara Tamás, Bíró Balázs, Füredi Zoltán, Garay Barnabás, Pálfy Péter Pál, Papp Zoltán, Szabó Zoltán, Ury László.*

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER DE L'ANNÉE 1975

1. Démontrer qu'il existe un tournoi $<T, \to>$ de puissance $\aleph_1$ qui ne contient pas un sous-tournoi transitif de puissance $\aleph_1$. (La structure $<T, \to>$ est appelée tournoi, si $\to$ est une relation binaire antiréflexive, antisymétrique et trichotome sur l'ensemble T. Le tournoi $<T, \to>$ est transitif, si $\to$ est une relation transitive, donc une relation d'ordre de T.)

2. Vérifier que le nombre des applications f: $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ pour lesquelles f admet toutes les valeurs j $(1 \leqq j \leqq i)$, si elle admet la valeur i, est exprimé par la formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

3. Supposons que le semi-groupe S n'a pas un vrai idéal bilatère et que pour deux éléments quelconques $a, b \in S$ l'un des produits ab et ba au moins est égal à l'un des éléments a, b. Démontrer qu'alors ou bien $ab=a$ pour tout $a, b(\in S)$, ou bien $ab=b$ pour tout $a, b(\in S)$.

4. Montrer que les fonctions multiplicatives arithmétiques à valeurs rationnelles et à valeurs rationnelles complexes engendrent des groupes isomorphes par rapport à l'opération de convolution

$f \circ g$

$$\left[(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)\right].$$

(Un nombre complexe est rationnel si sa partie réelle ainsi que sa partie imaginaire sont rationnelles.)

5. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que la suite $\int_E f_n$ soit convergente pour tout sous-ensemble E de $[0, 1]$ $(n \to \infty)$ et que $\lim_n f_n = f$ existe p.p. Démontrer que sous ces conditions f est intégrable et $\int_E f = \lim_n \int_E f_n$. Peut-on énoncer la même proposition, si E ne parcourt que des intervalles, mais l'on suppose de plus que $f_n \geqq 0$? L'assertion du problème reste-elle vraie si l'on remplace $[0, 1]$ par $[0, \infty]$?

6. Montrer que si, pour une fonction f réelle et dérivable et pour un nombre réel $M>0$, on a

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)| \leqq M \cdot t^2,$$

quels que soient les variables x et t, alors

$$|f'(x+t)-f'(x)| \leqq M \cdot t$$

pour toute x et t.

7. Soient a, a', b, b' de nombres réels tels que $a<a'<b<b'$. Admettons que la fonction réelle $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[a, b']$ et qu'elle est dérivable à l'intérieur de celui-ci. Prouver qu'il existe de points $c \in (a, b)$ et $c' \in (a', b')$ tels que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a),$$

$$f(b')-f(a') = f'(c')(b'-a')$$

et $c<c'$.

8. Vérifier que si une suite $\{a_n\}$ à termes non négatifs satisfait à la condition

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \leqq N \cdot a_m \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

où N est un nombre naturel donné et que

$$\alpha_i = \sum_{n=(i-1)N+1}^{iN} a_n \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

on a alors $\alpha_{i+p} \geqq p, \alpha_i$ $(i, p = 1, 2, \ldots)$.

9. Soient l_0, c, α, g de constantes positives et $x(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad ([l_0+ct^\alpha]^2 x')'+g[l_0+ct^\alpha]\sin x = 0 \quad t \geqq 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

remplissant la condition $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=0$. ($(*)$ est l'équation du mouvement de la pendule mathématique dont la longueur varie selon la loi $l=l_0+ct^\alpha$.)

Démontrer que $x(t)$ est définie sur l'intervalle $[t_0, \infty)$, ensuite que, dans le cas de $\alpha>2$, à chaque $x_0 \neq 0$ on peut trouver un t_0 tel que l'on ait

$$\liminf_{t\to\infty} |x(t)| > 0.$$

10. Vérifier qu'on opérateur linéaire, idempotent de l'espace de Hilbert est autoadjoint, si et seulement si sa norme est égale à 0 ou à 1.

11. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aléatoires (non nécessairement indépendantes) discrètes. Il est à établir qu'il existe $\frac{n^2}{2}$ couples (i, j) au moins telles que

$$H(X_i+X_j) \geqq \frac{1}{3} \min_{1\leqq k\leqq n} \{H(X_k)\}$$

où $H(X)$ désigne l'entropie de Shannon.

12. Le polyèdre convexe P a une face ayant une arête commune avec chacune des autres faces. Démontrer qu'il existe un polygône fermé simple formé de certaines arête de P qui passent par tous les sommets de P.

FELADATROVAT

SZERKESZTI: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, 1061 Budapest, Anker köz 1—3. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

201. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i_1+2i_2+\ldots+ni_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{i_j!}\left(\frac{x}{j}\right)^{i_j} = \binom{x+n-1}{n},$$

amelyben $i_j \geqq 0$ egész számot jelent.

Surányi János

202. Készítendő olyan $f \geqq 0$ egyváltozós függvény, amely seholsem differenciálható, de f^2 majdnem mindenütt differenciálható.

Gerlits János

203. Legyen H az X halmazon értelmezett valós függvényekből álló halmaz. H teljes affin háló, ha

(a) $f, g \in H$ esetén $\max(f, g) \in H$, $\min(f, g) \in H$, $af+b \in H$ (a, b valós),

(b) $f_n \in H$, $f_n \to f$ esetén $f \in H$.

Legyen bármely X-en értelmezett valós f függvényre

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\},$$

és

$$Z(H) = \{Z(f) : f \in H\}.$$

Mutassuk meg, hogy egy X részhalmazaiból álló S halmazrendszerhez akkor és csak akkor található olyan H teljes affin háló, amelyre $Z(H)=S$, ha S σ-algebra.

Császár Ákos

Megoldott feladatok

192. feladat. Jelölje $g(m)$ az m természetes szám különböző prímfaktorainak számát, $f(k)$ pedig legyen az a legkisebb szám, amelyre $n \geqq f(k)$ esetén

$$g\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k.$$

Bebizonyítandó, hogy

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f(k)^{1/k} < e.$$

(Erdős Pál és Szemerédi Endre)

Megoldás. A valamivel gyengébb

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f(k)^{1/k} \leqq e \tag{1}$$

egyenlőtlenséget igazoljuk.

Jegyezzük meg először is, hogy adott $\delta > 0$ mellett elég nagy k-ra

$$k^{\pi(k)} < e^{(1+\delta)k}, \tag{2}$$

ahol $\pi(k)$ jelöli a k-nál nem nagyobb prímszámok számát. Valóban,

$$k^{\pi(k)} = e^{\pi(k)\log k} = e^{\frac{\pi(k)\log k}{k}\cdot k},$$

és itt az utolsó kitevőben álló tört a prímszámtétel szerint k növekedtével 1-hez tart.

Másodszor vegyük észre, hogy ha p prímszám, n és k egész számok, $0 < k < n$, továbbá egy egész i kitevőre $p^i > k$ és p^i osztója az $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ szorzat valamelyik tényezőjének, akkor p osztója $\binom{n}{k}$-nak.

Valóban, legyen j egész és $p^j \leqq k < p^{j+1}$. A tekintett szorzatnak legalább $t_1 = \left[\frac{k}{p}\right]$ tényezője osztható p-vel; szemeljünk ki közülük t_1-et s ezek mindegyikét osszuk el p-vel. Az eredeti szorzatnak legalább $t_2 = \left[\frac{k}{p^2}\right]$ tényezője osztható p^2-tel, így a módosított szorzatban még mindig van t_2 tényező, amely p-vel osztható, osszuk is el mindegyiket p-vel. Az eljárást folytatva a j-edik lépés után az eredeti szorzatot p-nek

$$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_j = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{k}{p^j}\right]$$

kitevőjű hatványával osztottuk el, egy-egy tényezőt pedig legfeljebb p^j-vel. Mivel $i \geqq j+1$, azért az eredeti szorzat még p^{t+1}-gyel is osztható. Másrészt jól ismert (és éppen az előbbihez hasonló meggondolással bizonyítható), hogy $k!$ p-nek pontosan a t-edik hatványával osztható.

Az állítás bizonyítására térve, legyen $\delta > 0$ tetszőleges, $0 < k < n$ egészek, k-ra teljesüljön (2), és $n \geqq e^{(1+\delta)k} + k$. Ekkor az $n-k+1 \leqq m \leqq n$ egyenlőtlenségnek eleget tevő egész m számok mindegyikének van p^i alakú osztója, ahol p prímszám, i egész, és $p^i > k$; ellenkező esetben ugyanis m prímtényezős felbontásában csak k-nál nem nagyobb prímszámok szerepelhetnének, ilyen van $\pi(k)$ számú, és mindegyiknek a fellépő hatványa legfeljebb k lehetne, (2)-vel ellentétben.

Világos, hogy az előbbi feltételek mellett a különböző m-ekhez különböző p-k tartoznak. Eszerint második megjegyzésünket felhasználva kimondhatjuk, hogy $\binom{n}{k}$-nak legalább k különböző prímtényezője van, mihelyt k eleget tesz (2)-nek és $n \geqq e^{(1+\delta)k}+k$. Ez annyit jelent, hogy elég nagy k-ra

$$f(k) \leqq e^{(1+\delta)k}+k < e^{(1+\delta)k}+e^k < 2e^{(1+\delta)k},$$

s innen

$$f(k)^{1/k} < 2^{1/k} e^{(1+\delta)}.$$

Ebből már következik (1).

Szemerédi Endre

Megjegyzés. A feladat eredeti állítása ($\leqq$ helyett $<$ jellel) valószínűleg igaz, de bizonyítása bizonyára igen nehéz. A kitűzők az (1) egyenlőtlenség igazolását szánták feladatnak.

Szemerédi Endre

193. feladat. Legyen $r>0$, A és B a $[-r, r]$ intervallum nemüres részhalmaza, $h>0$ esetén A_h ill. B_h az A ill. B halmaz h sugarú zárt környezete (tehát a számegyenes azon x pontjainak halmaza, amelyekre az A ill. B pontjaitól mért távolság alsó határa $\leqq h$), $d(A, B)$ az A és B halmaz Hausdorff-távolsága (vagyis azon h számok alsó határa, amelyekre $A \subset B_h$ és $B \subset A_h$), végül λ jelölje a Lebesgue-féle mértéket. Kiszámítandó adott r és h mellett

$$\frac{|\lambda(A_h)-\lambda(B_h)|}{d(A, B)} \tag{1}$$

felső határa, miközben A és B a $[-r, r]$ intervallum olyan részhalmaz-párjait futja be, hogy $d(A, B) \neq 0$.

(Gehér István)

Megoldás. Világos, hogy az A_h halmaz nem változik, ha A-t a lezárásával helyettesítjük, és így (1) is változatlan marad A-nak és B-nek lezárásukkal való helyettesítésekor. Ezért (1) vizsgálatában zárt A, B halmazokra szorítkozhatunk. Ilyenkor könnyen láthatóan $A_{h+k}=(A_h)_k$, továbbá a $d=d(A, B)$ jelöléssel $B \subset A_d$.

Legyen most A és B az $I=[-r, r]$ intervallumnak két zárt részhalmaza, s az előbbi jelöléssel $d>0$. Szimmetriaokokból feltehetjük, hogy $\lambda(A_h) \leqq \lambda(B_h)$. Ekkor $B_h \subset (A_d)_h = A_{d+h}$ következtében

$$\frac{|\lambda(A_h)-\lambda(B_h)|}{d(A, B)} = \frac{\lambda(B_h)-\lambda(A_h)}{d} \leqq \frac{\lambda(A_{d+h})-\lambda(A_h)}{d}.$$

Itt az A_h halmaz zárt és $2h$ hosszúságú zárt intervallumok egyesítése; ezért minden komponense legalább $2h$ hosszúságú zárt intervallum, és A korlátossága miatt csak véges számú komponense lehet, úgyhogy végül is A_h véges számú diszjunkt, zárt, legalább $2h$ hosszúságú $I^{(k)}$ intervallum egyesítése ($k=1, \ldots, n$). Ekkor viszont $A_{d+h}=(A_h)_d$ az $(I^{(k)})_d$ intervallumok egyesítése, amelyeknek hossza a megfelelő $I^{(k)}$-k hosszánál $2d$-vel nagyobb, de már nem okvetlenül diszjunktak. Így aztán

$$\lambda(A_{d+h})-\lambda(A_h) \leqq 2nd.$$

Figyelembe véve, hogy $A_h \subset [-r-h, r+h]$, szükségképpen $2nh \leqq 2r+2h$, és egyen-

lőség csak az $n=1$ esetben állhat. Így $n-1<\frac{r}{h}$ még az $n=1$ esetben is, és a mondottak szerint (1) értéke nem lehet nagyobb, mint

$$2\left(\left[\frac{r}{h}\right]+c\right), \tag{2}$$

ahol $c=0$, ha $\frac{r}{h}$ egész, egyébként $c=1$.

Megmutatjuk viszont, hogy (1) el is érheti a (2) értéket, és így ez a feladat megoldása. Jelöljük ugyanis (2) értékét $2n$-nel. Ekkor $2nh<2r+2h$ miatt megadható $(-r-h, r+h)$-ban n számú $2h$ hosszúságú diszjunkt zárt intervallum. Legyen A az ezek felezőpontjaiból álló halmaz, úgyhogy $A\subset(-r, r)$, s legyen $d>0$ olyan kicsiny, hogy még $A_d\subset I$ is álljon, továbbá, hogy a felvett intervallumokkal koncentrikus $2h+2d$ hosszúságú intervallumok is diszjunktak legyenek. Ha most $B=A_d$, akkor

$$\lambda(A_h)=2nh, \quad \lambda(B_h)=\lambda(A_{d+h})=2nh+2nd$$

miatt e választással (1) értéke éppen $2n$.

Hunyadvári László és *Száz Géza*

A 193. feladat megoldását beküldte még *Császár Ákos* és *Laczkovich Miklós*.

194. feladat. Készítendő olyan kétváltozós valós függvény, amely a síkon mindenütt kétszer differenciálható, egy pontban lokális szélsőértéke van (a szigorú értelemben), elsőrendű parciális deriváltjai sehol másutt nem tűnnek el egyidejűleg, és értékkészlete a valós számok összessége.

(Császár Ákos)

Megoldás. Megmutatjuk, hogy $f(x, y)=x^2+y^2(x+1)^3$ megfelel a követelményeknek. Valóban, ez a függvény akárhányszor differenciálható. Ha $x>-1$ és $x^2+y^2\neq 0$, akkor $f(x, y)>0$, viszont $f(0, 0)=0$, úgyhogy a $(0, 0)$ pontban szigorú lokális minimuma van f-nek. Mivel

$$f_x=2x+3y^2(x+1)^2, \quad f_y=2y(x+1)^3,$$

azért f_y csak $y=0$ vagy $x=-1$ esetén tűnik el, márpedig $x=-1$ esetén $f_x=-2$, $y=0$ esetén $f_x=2x$. Mindebből látszik, hogy $f_x=f_y=0$ csak a $(0, 0)$ pontban teljesül. Végül f minden valós értéket felvesz, hiszen $f(x, 1)=x^2+(x+1)^3$ pontosan harmadfokú polinom.

Laczkovich Miklós

Megjegyzések. 1. Belátható, hogy a feladat feltételeinek megfelelő f esetén a $H_c=\{(x, y): f(x, y)=c\}$ halmazok nem lehetnek mind összefüggők. Megadható azonban olyan, a kikötéseknek megfelelő f, amelynél a H_c halmazok legfeljebb két komponensből állnak. Valószínűnek látszik, hogy ilyenkor kell lennie olyan c-nek, amelyre H_c két nemkorlátos komponensből áll. Ha azonban kétszeri differenciálhatóság helyett egyszerivel megelégszünk, akkor már létezik olyan megoldás, amelynél a H_c halmazok legfeljebb két komponensből állnak s ezek közül legfeljebb egy nemkorlátos.

Bognár Mátyás

2. A fent közölt megoldásra H_c két nemkorlátos komponensből áll $c>1$ és $c<0$ esetén, egy korlátos és két nemkorlátos komponensből $0 \leqq c<1$ esetén, és négy nemkorlátos komponensből $c=1$ esetén.

Császár Ákos

A 194. feladat megoldását beküldte még *Bognár Mátyás.*

PROBLÈMES PROPOSÉS

201. Démontrer l'identité suivante:

$$\sum_{i_1+2i_2+\ldots+ni_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{i_j!}\left(\frac{x}{j}\right)^{i_j} = \binom{x+n-1}{n},$$

où $i_j \geqq 0$ désigne un entier.

J. Surányi

202. Construire une fonction $f \geqq 0$ d'une variable qui n'est nulle part dérivable mais pour laquelle f^2 est presque partout dérivable.

J. Gerlits

203. Soit H un ensemble composé de fonctions réelles définies sur l'ensemble X. H est un treillis affine complet si

(a) $f, g \in H$ implique $\max(f, g) \in H$, $\min(f, g) \in H$, $af+b \in H$ (pour a et b réels),

(b) $f_n \in H$, $f_n \to f$ implique $f \in H$.

Posons, pour une fonction réelle f définie sur X,

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

et

$$Z(H) = \{Z(f) : f \in H\}.$$

Démontrer que, pour un système donné S de parties de X, il existe un treillis affine complet H tel que $Z(H)=S$ si et seulement si S est une σ-algèbre.

Á. Császár

TÁRSULATI ÉLET

Jelentés a Bolyai János Matematikai Társulat 1975. október 26-án tartott tisztújító közgyűléséről:

A közgyűlést Fejes Tóth László elnök nyitotta meg. Megemlékezett az elmúlt három éves periódusban elhunyt Kertész Andor, Koncz Károly, Lőrincz Pál tagtársakról. Bejelentette, hogy a közgyűlési küldöttek száma 179 fő, melyből 125-en jelen vannak, így a közgyűlés határozathozatalra képes.

A közgyűlés napirendje a következő volt:

1. Megnyitó
2. Főtitkári beszámoló
3. Pénztárosi jelentés
4. Az ellenőrző bizottság jelentése
5. A jelölő bizottság jelentése
6. A főtitkári beszámoló és pénztárosi jelentés megvitatása
7. Választás

Szünet

8. Lovász László: Gráfok és egyenlőtlenségek (előadás)
9. A jelentések feletti vita folytatása
10. A Társulat alapszabályának módosítása
11. A társulati lapok szerkesztő bizottságainak megbízása
12. Az Elnökségben képviselt négy vidéki tagozat kijelölése
13. Küldöttek választása az MTESZ Közgyűlésére
14. Indítványok
15. A szavazatszedő bizottság jelentése
16. Zárszó

A küldöttek a napirendet elfogadták.

Ezután az elnök felkérte Császár Ákos főtitkárt beszámolója megtartására.

1. Bevezetés

A következő jelentés célja, hogy képet adjon a Bolyai János Matematikai Társulat működéséről az 1972. június 30-án tartott közgyűlés óta eltelt időszakban, s egyben áttekintést nyújtson az 1972-ben megválasztott vezetőség munkájáról.

A beszámolási időszakban a Társulat a korábban hagyományosan kialakult irányokban folytatta tevékenységét, emellett néhány újszerű kezdeményezés is indult.

Az 1972-ben tartott vezetőségválasztáskor a vezetőség munkájába bevont fiatalok nagyban hozzájárultak a Társulat célkitűzésének megvalósításához. Ennek az irányzatnak további folytatása mindenképpen kívánatos.

2. A Társulat szervezete

A Társulat munkájának gerincét hagyományosan a szakosztályok és a vidéki tagozatok végzik. A beszámolási időszakban két újabb munkabizottságot alakítottunk, az Emlékőrző Bizottságot és a Felsőoktatási Bizottságot.

Társulatunkban az előző időszakkal megegyezően a következő három szakosztály működött:

a) Tudományos Szakosztály,

b) Oktatási Szakosztály,

c) A Matematika Alkalmazásai Szakosztály.

Vidéki tagozataink a következők:

1. Baranya megyei Tagozat
2. Bács-Kiskun megyei Tagozat
3. Békés megyei Tagozat
4. Borsod megyei Tagozat
5. Csongrád megyei Tagozat
6. Fejér megyei Tagozat
7. Győri Tagozat
8. Hajdú-Bihar megyei Tagozat
9. Heves megyei Tagozat
10. Komárom megyei Tagozat
11. Nógrád megyei Tagozat
12. Somogy megyei Tagozat
13. Soproni Tagozat
14. Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat
15. Szolnok megyei Tagozat
16. Vas megyei Tagozat
17. Veszprém megyei Tagozat
18. Zala megyei Tagozat

Több tagozat keretében működik helyi csoport olyan városokban, ahol a társulati tagok száma a tízet meghaladja.

3. Szakosztályok

a) *Tudományos Szakosztály*

A Szakosztály munkájának zömét hagyományosan tudományos konferenciák és előadóülések szervezése jelenti. Az előadóülések nagy részét a MTA Matematikai Kutatóintézetével közösen szerveztük, ezeken főként külföldi vendégek adtak elő. A Szakosztály különösen a vidéki és a budapesti matematikusok közötti információcsere megjavítására tett komoly lépéseket. E kezdeményezés hatása a legutóbbi hónapokban kezdett mutatkozni, de további agilis szervező munka kell még sikeres kibontakozásához.

A beszámolási időszakban alakult meg a Szakosztály vezetősége mellett működő Tudományos Bizottság.

A Szakosztály a Matematika Alkalmazásai Szakosztállyal közösen ebben az időszakban is évenként megrendezte a Fiatal Matematikusok találkozóját, (1974-től kezdve Csillag Pál nevét vette fel) valamint a végző matematikusok klubestjét, melynek komoly szerepe van a társulati életbe való vonásukban.

A szakosztályi munka keretébe tartozik a társulati könyvtár fejlesztése; ezt és ezen belül a társulati folyóiratok cseréjét Székely Gábor irányítja igen aktívan. A könyvállomány gyarapításának legfőbb akadálya a szűkös elhelyezés.

b) *Oktatási Szakosztály*

A Szakosztály munkája két részre oszlik: a tanárok és a diákok körében végzett munkára. A jelen periódusban is vállalkozott a matematikatanítás korszerűsítésével foglalkozó nemzetközi rendezvények szervezésére.

Hagyományos vándorgyűléseinket e periódusban is megtartottuk, 1972-ben a jubileumi vándorgyűlés egyik szekciójaként. A vándorgyűlés 1974-től kezdve Rátz László nevét vette fel.

A Szakosztály ebben az időszakban is segítette a vidéki tagozatokat előadások, szakkörök szervezésével.

A matematika tanításában és népszerűsítésében végzett kiváló munkáért adományozott Beke Manó Emlékdíj odaítélésére vonatkozó javaslat kidolgozása a Szakosztály jelentős feladata, amelyet igen lelkiismeretesen látott el. Örvendetes, hogy a korábbi időszakhoz képest jelentékenyen sikerült megnövelni a külföldi tanulmányútra küldött tanárok számát.

A Szakosztály évente megrendezte szokásos tanulóversenyeinket (1. 8. pont), továbbá rendszeresen folytak a Középiskolai Matematikai Délutánok, és folyamatosan működött az Ifjúsági Matematikai Kör; az utóbbi számára a téli és a tavaszi szünetben megrendeztük (az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közösen) a szokásos háromnapos ülésszakokat, vidéki diákok bevonásával.

Ugyancsak az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezvényünk a végző matematika-fizika szakos hallgatók részére tartott klubdélután. Ez a rendezvény is hatékonyan segítette a fiatalok aktivizálását.

A Szakosztály vezetősége mellett működő Oktatási Bizottság többé-kevésbé rendszeresen foglalkozott a matematikaoktatás olyan aktuális kérdéseivel, amelyekkel kapcsolatban társadalmi állásfoglalás látszott szükségesnek. Foglalkoztunk a tananyagcsökkentés kérdésével, a házifeladatok redukciójával, a módszertani folyóiratok átszervezésével, a közös érettségi-felvételi írásbeli vizsgával (az utóbbira vonatkozó javaslatainkat a Felsőoktatási Bizottsággal közösen dolgoztuk ki); e témáról a Művelődésügyi Minisztériummal közösen ankétot is rendeztünk.

A Szakosztály munkájának nagy jelentőségű része a gimnáziumi matematikaoktatási kísérlet megindítása. Erre a Társulatot a Művelődésügyi Minisztérium 1973-ban kérte fel. A kísérlet sok tekintetben az Országos Pedagógiai Intézet általános iskolában végzett komplex matematikatanítási kísérletének az új általános iskolai matematika-tantervben is tükröződő gondolatait viszi tovább a középiskolára. Alapelgondolása ennek megfelelően az, hogy a tanulókat a hagyományosan egyenlőségre, azonosságra, pontos értékre alapozott szemlélet mellett be kívánja vezetni a kombinatorikus jellegű okoskodásmódba, az analízis által előtérbe helyezett közelítő értékre és egyenlőtlenségre alapozott szemléletbe, a tömegjelenségek leírására alkalmas valószínűségi, statisztikai gondolkodásmódba is. Emellett döntően épít a tanulói aktivitásra, részben a hagyományostól alapvetően különböző módszerekkel (a tanulók gyakori aktív egyéni vagy kiscsoportos munkája, szorongásmentes óra a minősítés háttérbe szorításával s ehelyett a tanulók önkritikájának erősítésével, a tanári munka súlypontjának az óra szervezésére, a munka háttérből való irányítására történő eltolása stb.).

A kísérlet tervezetének kidolgozását és a munka irányítását a Szakosztály által kiküldött munkabizottság a MTA Matematikai Kutatóintézetének Didaktikai Csoportjával együttműködésben végezte. Az 1973—74. tanévben 5, a következőben 11 osztályban folyt a kísérlet számos lelkes pedagógus részvételével. Az előkészítésre szolgáló idő rövidsége számos nehézség forrásává vált; ezeknek áthidalása a résztvevőktől igen sok áldozatot követelt. A kidolgozott anyagok sokszorosításában a Fővárosi Pedagógiai Intézet és a MTA nyújtott jelentékeny segítséget. A kísérlettel kapcsolatos problémák megvitatásában ismételten részt vett a MTA Elnökségi Közoktatási Bizottságának Matematikai Albizottsága is.

c) *A Matematika Alkalmazásai Szakosztály*

E szakosztály is elsősorban tudományos konferenciák és előadó ülések szervezésével fejti ki tevékenységét. Kívánatos volna e tevékenység fokozása.

A Szakosztály a Tudományos Szakosztállyal együtt szervezte a Fiatal Matematikusok Találkozóit, valamint a végző matematikus hallgatók klubestjét.

A Szakosztály korábban igen aktív tanfolyamszervező tevékenysége e periódusban lecsökkent; egy tanfolyam megszervezését vették tervbe, ez azonban többszöri halasztás után végül is nem indult meg. A Szakosztály új vezetőségének feladata annak vizsgálata, hogy a körülmények alakulása folytán megszűnt-e az igény a tanfolyamokra, vagy pedig szükséges-e a korábbi eredményes tevékenység újrakezdése.

A Szakosztály jelentős lépése volt a beszámolási időszakban a matematika alkalmazásaiban kiemelkedő tevékenységet végző fiatal matematikusok jutalmazására szolgáló Farkas Gyula Emlékdíj létesítésére vonatkozó javaslat, és az Emlékdíj szabályzatának kidolgozása. Az Emlékdíjat először 1974-ben adtuk ki.

Felvetődött, de a következő időszakban vár megvalósításra az a gondolat, hogy a Szakosztály időnként szervezzen ankétokat a matematika alkalmazásaival kapcsolatos aktuális kérdések megvitatására.

Fontos szerepe van a Szakosztálynak abban, hogy kapcsolatot tart a matematika alkalmazásait igénylő egyesületekkel és más szervekkel.

4. Vidéki tagozatok

Tagozataink az ország területét csaknem teljesen behálózzák; a Zala megyei Tagozat 1975-ben alakult meg, és bízunk benne, hogy működését folyamatosan végezni fogja. Így egyedül Tolna megyében nincs még társulati tagozat. (Pest megyei tagozatunk sincsen, azonban ennek feladatait a Társulat vezetősége közvetlenül látja el.) Viszont néhány tagozatunk működése igen szerény mértékű, majdhogynem tisztán formális. A jövőre vonatkozó fontos feladatunk, hogy ezeket aktivizáljuk.

A tagozatok zömének tevékenysége elsősorban a tanárok pedagógiai munkájának segítése és az érdeklődő tanulók összefogása, versenyeink megrendezése terén mutatkozik. Azokban a tagozatokban, amelyeknek működési területén egyetem is van, ezenkívül a Tudományos ill. a Matematika Alkalmazásai Szakosztály tevékenységébe illő munka is folyik. Több tagozat szervez országos versenyeinken kívül helyi versenyeket is.

Nagyrendezvényeink szervezésében jelentős segítséget kaptunk tagozatainktól. A beszámolási időszakban kiemelendő e vonatkozásban a Heves megyei Tagozat (Nemzetközi Általános-iskolai

Matematikaoktatási Konferencia, Operációkutatási Konferencia), a Hajdú-Bihar megyei Tagozat (Jubileumi Vándorgyűlés, Számelméleti Kollokvium, Differenciálgeometriai Kollokvium), Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat (Középiskolai Matematikaoktatási Konferencia), Csongrád megyei Tagozat (algebrai minikonferenciák, Fiatal Matematikusok Találkozója), Győri Tagozat (Vándorgyűlés), Baranya megyei Tagozat (Rátz László Vándorgyűlés), Fejér megyei Tagozat Dunaújvárosi Csoportja (Rátz László Vándorgyűlés).

A Schweitzer Miklós Emlékverseny szervezését 1973-ban a Hajdú-Bihar megyei Tagozat végezte.

5. Állandó munkabizottságok

Közülük kiemelkedő munkát végzett az 1972-ben létesített Emlékőrző Bizottság. Számbavette az elhunyt kiváló matematikusok emlékének ápolása terén ránk váró feladatokat, javaslatokat tett évfordulók megünneplésére (Bolyai Farkas születésének 200-adik, Kőnig Gyula születésének 125-ödik, Bauer Mihály születésének 100-adik, Rényi Kató születésének 50-edik évfordulója), tevékenyen közreműködött elhunyt matematikusok sírjainak rendbehozatalában és gondozásában, javasolt utca- és intézmény-elnevezéseket matematikusokról. Széles körű mozgalmat kezdeményezett annak érdekében, hogy középiskolai matematikai szakkörök elhunyt matematikusok nevét vegyék fel, és névadójuk emlékét ápolják; az e téren elért szép eredmények között említést érdemel a Székesfehérváron működő Lázár Dezső Szakkör tevékenysége.

Ugyancsak 1972-ben hoztuk létre a Felsőoktatási Bizottságot a matematika felsőfokú oktatásában jelentkező, társadalmi megvitatást igénylő problémák megtárgyalására. E bizottság tevékenysége megindult, de egyelőre nem sikerült átfognia az oly fontos témakör jelentékeny részét. Igen kívánatos, hogy a következő periódusban aktívabban működjék.

6. Nagyrendezvények

a) *Kollokviumok*

A Társulat a beszámolási időszakban a következő kollokviumokat rendezte:

Európai Statisztikusok Konferenciája (1972. augusztus—szeptember, Budapest, 400 résztvevő), a Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében, a MTA és az International Statistical Institute támogatásával;

Nemzetközi Általánosiskolai Matematikaoktatási Konferencia (1973. június, Eger, 136 magyar és 74 külföldi résztvevő) az Oktatási Szakosztály szervezésében, a Művelődésügyi Minisztérium, a Kulturális Kapcsolatok Intézete és a Nemzetközi Matematikai Unió Matematikaoktatási Bizottsága támogatásával;

Végtelen és Véges Halmazok Kollokvium (1973. június, Keszthely, 94 magyar és 124 külföldi résztvevő) Erdős Pál hatvanadik születésnapja alkalmából, a Tudományos Szakosztály szervezésében, a Nemzetközi Matematikai Unió támogatásával;

Numerikus Módszerek Kollokvium (1973. szeptember, Keszthely, 56 magyar és 62 külföldi résztvevő) a Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében;

Határeloszlástételek a Valószínűségszámításban és a Statisztikában Kollokvium (1974. június, Keszthely, 35 magyar és 45 külföldi résztvevő) a Tudományos Szakosztály szervezésében;

Operációkutatási Konferencia (1974. augusztus, Eger, 250 magyar és 80 külföldi résztvevő) a Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében, a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai Közgazdaságtani Szakosztályával közösen;

Differenciálegyenletek Kollokvium (1974. szeptember, Keszthely, 87 résztvevő) a Tudományos Szakosztály szervezésében; Számelméleti Kollokvium (1974. október, Debrecen, 28 magyar és 25 külföldi résztvevő) a Tudományos Szakosztály szervezésében;

Diszkrétgeometriai Kollokvium (1975. június, Tihany, 23 magyar és 18 külföldi résztvevő) a Tudományos Szakosztály szervezésében;

Információelméleti Kollokvium (1975. augusztus, Keszthely, 42 magyar és 54 külföldi résztvevő) a Matematika Alkalmazásai Szakosztály szervezésében;

Középiskolai Matematikaoktatási Konferencia (1975. augusztus, Nyíregyháza, 58 magyar és 54 külföldi résztvevő) az Oktatási Szakosztály szervezésében, az Oktatási Minisztérium és a Kulturális Kapcsolatok Intézete támogatásával;

Differenciálgeometriai Kollokvium (1975. augusztus—szeptember, Debrecen, 40 magyar és 29 külföldi résztvevő) a Tudományos Szakosztály szervezésében.

A Csongrád megyei Tagozat a József Attila Tudományegyetemmel közösen évente rendezett minikonferenciát az algebra egy-egy területéről (1972. Automataelmélet, 1973. Félcsoportelmélet, 1974 Hálóelmélet, 1975. Univerzális Algebra).

Bevált az a kezdeményezés, hogy kollokviumi tervünket több évre előre elkészítjük, és más hazai és külföldi szervek terveivel egyeztetjük. Ezt a távlati tervet ebben az időszakban sem értelmeztük mereven, és ha a körülmények kívánták, változtattunk rajta, de nagyobb távlatra vonatkozó előrelátó tervezés a jövőben is szükséges lesz. Felmerült az a gondolat, hogy az egyes kollokviumok szervezőinek munkáját megkönnyítsük egy vezérfonal kidolgozásával.

b) *Vándorgyűlések*

1972. augusztusában a Társulat (mint az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat egyik utóda) újjáalakulásának 25. évfordulója alkalmából debreceni vándorgyűlésünket a szokásosnál lényegesen szélesebb keretek között tartottuk meg; az oktatási szekcióban elhangzott 15 előadás mellett hat tudományos szekcióban 73 előadás is szerepelt a programban. A résztvevők száma mintegy 450 volt.

A hagyományos keretek között megrendezett további vándorgyűlések adatai:
1973. július, Győr, kb. 500 résztvevő;
1974. július, Pécs, mintegy 380 résztvevő;
1975. július, Dunaújváros, 354 résztvevő.
1973-tól kezdve a régebben kialakult két szekció helyett három szekcióban folytak az előadások.

c) *Fiatal Matematikusok Csillag Pál Találkozóját*

az alábbi időpontokban és helyeken rendeztük meg:
1973. június, Szeged;
1974. június, Bodajk;
1975. június, Egervár.
Mindegyik találkozót gazdag program, élénk viták, baráti légkör jellemezte.

7. Emlékdíjak

A matematikai tudományos utánpótlás nevelésében kiemelkedő érdemeket szerzett kutatók részére alapított Szele Tibor Emlékérmet 1972-ben Gallai Tibor, 1973-ban Rédei László, 1974-ben T. Sós Vera nyerte el.

A matematika oktatásában és népszerűsítésében elért kiváló teljesítményükért 1972-ben 7, 1973-ban 6, 1974-ben 6, 1975-ben 10 tagtársunkat részesítettük a Beke Manó Emlékdíjban. A matematikai kutatómunka területén kiemelkedő fiatalok közül 1972-ben 9, 1973-ban 7, 1974-ben 7 tudományos fokozattal még nem rendelkező matematikust jutalmaztunk Grünwald Géza Emlékdíjjal.

A beszámolási időszakban alapítottuk a matematika alkalmazásai terén kiváló teljesítményt nyújtó fiatalok jutalmazására szolgáló Farkas Gyula Emlékdíjat. Ezt 1974-ben 5 matematikusnak ítéltük oda.

A jelentős önálló tudományos eredményt elért matematikus hallgatók részére alapított Rényi Kató Emlékdíjban 1973-ban 8, 1974-ben 9, 1975-ben 7 kiváló matematikai tehetségű egyetemi hallgatót részesítettünk.

Ebben az időszakban is díjakat ajánlottunk a Tudományos Diákkörök Országos Konferenciáján bemutatott kiváló matematikai pályamunkák jutalmazására és a Pedagógusképző Intézmények Szakmai Konferenciája résztvevőiknek.

8. Versenyek

Minden évben megrendezett tanulóversenyeink:
Általános Iskolai Matematikai Verseny,
Arany Dániel Verseny a középiskolák I. és II. osztálya számára,
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikából középiskolások számára,
Kürschák József Verseny érettségizettek számára,
Schweitzer Miklós Emlékverseny egyetemi hallgatók számára,
Tanárképző Főiskolák Matematikai Versenye.

A versenyek díjait részben költségvetésünkből, részben a Művelődésügyi ill. Oktatási Minisztérium támogatásából fedeztük; a Schweitzer Miklós Emlékverseny díjait 1974-től kezdve Gaál Jenőné szives ajándéka révén évi 2000 Ft-tal tudjuk kiegészíteni.

A versenyek szervezését az e célra évente kiküldött versenybizottságok végezték, a dolgozatok javításába számos külső munkatársat is vontunk be.

A Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyén legjobb eredményt elért tanulókat az elmúlt időszakban is a Művelődésügyi ill. Oktatási Minisztérium által rendelkezésre bocsátott keretből jutalmaztuk.

Ebben az időszakban is vállaltuk a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián részt vevő tanulók felkészítését; a versenyen tanulóink minden évben szép számú díjat érdemeltek ki.

9. Kiadványok

a) *Folyóiratok*

Társulatunk a következő folyóiratok szerkesztését végzi:

Matematikai Lapok,

Középiskolai Matematikai Lapok (az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közösen, a Művelődésügyi ill. Oktatási Minisztérium támogatásával),

A Matematika Tanítása (a Művelődésügyi ill. Oktatási Minisztériummal közösen),

Periodica Mathematica Hungarica.

A Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését Bakos Tibor nyugalomba vonulásával 1974-ben Fried Ervinné, a Matematika Tanítása szerkesztését pedig ugyanakkor Hódi Endre vette át.

Lapjaink megjelenése minden igyekezetünk ellenére sem volt zavartalan, a nyomdai átfutási idők növekedése ebben az időszakban sem szűnt meg.

Gondot okoz, hogy a Matematika Tanítása a papírtakarékossági rendelkezések következtében terjedelmét csökkenteni kénytelen; ez annál is fájóbb, mivel a lap a rá háruló sokoldalú feladatokat eddigi terjedelmében is alig volt képes ellátni.

Idegennyelvű tudományos folyóiratunk, a Periodica Mathematica Hungarica terjesztésével külföldön csak részben lehetünk elégedettek.

b) *Kollokviumi kötetek*

A legjobban sikerült kollokviumaink anyagát közreadó Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai sorozatban a beszámolási időszak alatt a következő kötetek jelentek meg:

Hilbert Space Operators and Operator Algebras
Ring Modules and Radicals
Inventory Control and Water Storage
Topics in Topology
Progress in Statistics (I. II.)
Infinite and Finite Sets (I. II. III.)
Limit Theorems and Probability Theory.

Előkészületben vannak a következő kötetek:

Progress in Operation Research
Topics in Number Theory
Lattice Theory
Differential Equations.

Már ez a felsorolás is mutatja, hogy Társulatunk e tevékenysége milyen intenzíven fejlődik. E kiadványaink amellett, hogy hazai matematikai életünket rangosan képviselik külföldön, nem utolsó sorban megteremtik a Társulatunk célkitűzéseinek megvalósítására szolgáló anyagi eszközök jelentékeny hányadát is.

c) *Tanfolyami jegyzetek*

A beszámolási időszakban újabb jegyzetek nem készültek, a régebben kiadottak egy része iránt azonban továbbra is érdeklődés mutatkozott; nem egy szakterületnek ma is ezek alkotják egyetlen magyar nyelven hozzáférhető forrásmunkáját.

10. Kapcsolatok más szervekkel

A beszámolási időszakban is tapasztaltuk a MTESZ vezetőinek állandó érdeklődését és segítőkészségét Társulatunk problémáival kapcsolatban. Társulatunk javaslatára következő tagtársainkat tüntették ki e periódusban MTESZ-díjjal:

1973-ban Császár Ákost, 1974-ben Péter Rózsát.

A MTESZ tagegyesületei közül továbbra is sikeresen működtünk együtt az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal (a Középiskolai Matematikai Lapok fizikai rovatának szerkesztése, az Ifjúsági Matematikai Kör konferenciáinak és a végző matematika—fizika szakos hallgatók klubestjeinek közös

szervezése) és a Neumann János Számítógéptudományi Társasággal (Operációkutatási Konferencia szervezése). Az említett konferencia szervezésében részt vett a Magyar Közgazdasági Társaság is.

Továbbra is sokoldalúan együttműködtünk a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályával is. Ennek keretében Társulatunk támogatta 1973-ban a MTA és a Kossuth Lajos Tudományegyetem által rendezett Függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek c. konferenciát és a MTA által rendezett Számítástudományi Konferenciát. Közösen rendeztünk emlékülést Bolyai Farkas és Kőnig Gyula emlékére, továbbá a Magyar—Szovjet Műszaki és Tudományos Együttműködési Egyezmény megkötésének 25. évfordulója alkalmából. A MTA Matematikai Kutatóintézetével közösen rendeztünk számos előadó ülést, és nagy segítségünkre volt az Intézet apparátusa különféle technikai jellegű (sokszorosítás stb.) nehézségek elhárításában is. Az Intézet Didaktikai Csoportjával folyamatosan együttműködtünk a gimnáziumi matematikaoktatási kísérlet megtervezésében és irányításában, s ugyanebben a munkában nagy segítségünkre volt a MTA Elnökségi Közoktatási Bizottságának Matematikai Albizottsága is.

A Művelődésügyi ill. Oktatási Minisztériummal hagyományosan jó kapcsolataink ebben az időszakban még szélesebb területen bontakoztak ki. A szokásos támogatáson (folyóiratok kiadása, tanulóversenyek szervezése) és Társulatunk részéről történő véleményadáson (különféle oktatási kérdésekben) kívül az oktatási kísérlet irányítására való felkérés is tanúsítja azt a megbecsülést, amelyben a Társulatunkban tömörült pedagógusok munkáját a Minisztérium részesíti. Támogatta a Minisztérium nemzetközi matematikaoktatási rendezvényeinket is. Ugyanezekhez kaptunk támogatást a Kulturális Kapcsolatok Intézetétől is.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Tudományos Diákkörének évente megrendezett nyári iskoláit ebben a periódusban is támogattuk anyagilag ill. szervező munkával. A nyári iskolák 1973-tól már mint a Természettudományi Karok Matematikai Tudományos Diákköreinek Nyári Iskolája szerepelnek.

A József Attila Tudományegyetemmel közös rendezvényeink a hagyományossá vált algebrai minikonferenciák.

A Kossuth Lajos Tudományegyetem valamennyi Debrecenben tartott rendezvényünket támogatta helyiségeinek rendelkezésre bocsátásával. Jubileumi Vándorgyűlésünk lebonyolításában segítséget kaptunk ezenkívül a Debreceni Református Kollégiumtól és a Nyírbátori Báthori István Múzeumtól is.

A KISZ Központi Bizottságával állandóan tartjuk a kapcsolatot az évente megrendezett diákköri konferenciákon benyújtott kiváló pályamunkák jutalmazására szolgáló díjak felajánlása formájában.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulattal is hagyományosan jó együttműködés alakult ki a Kis Matematikus Körök irányításában való részvétel, illetőleg egyes előadások közös megrendezése formájában.

Ez az áttekintés is mutatja, hogy céljaink megvalósításában számíthatunk az egész társadalom segítségére, de munkánkat állandóan figyelemmel is kísérik, így az elvárásoknak csak fokozott igyekezettel tudunk megfelelni.

11. Nemzetközi kapcsolatok

Társulatunk az elmúlt időszakban is jelentékeny részt vállalt a magyar matematika nemzetközi kapcsolatainak ápolásában.

A szocialista országokkal való kapcsolataink gerincét ezekben az években is a testvérszervezetekkel kötött csereegyezményeink alkották. A korábban megkötött csehszlovák, bolgár és NDK csereegyezmény mellett ebben a periódusban már működött a Lengyel Matematikai Társulattal kötött hasonló egyezmény is. Ezeknek keretében tagtársaink tudományos rendezvényeken vagy tanulmányutakon vesznek részt, és ugyanilyen céllal látjuk mi is vendégül az érintett országokból ideküldött matematikusokat ill. matematikatanárokat is. Igen örvendetes, hogy ebben az időszakban az előzőhöz képest lényegesen nagyobb számban tudtunk tanárokat tapasztalatcsere céljából kiutaztatni az említett országokba.

Együttműködési egyezményeinken kívül igen korlátozott mértékű kiutazási lehetőségeket biztosít a MTESZ devizakerete is. Néhány hasznos utazást sikerült azonban ezen a módon így is létrehozni.

Sok esetben tudtuk tagtársaink kiutazását az útiokmányok beszerzésével ill. útiköltség-hozzájárulással támogatni. A szocialista országokba utazók részére a kinttartózkodási költségekhez is módunk nyílt forinttámogatás formájában hozzájárulni.

Mindezek eredményeképpen évente mintegy 35 kiutazást sikerült létrehozni ill. valamilyen formában támogatni.

Nemzetközi rendezvényeink számának megnövekedtével természetszerűen megnőtt az ezeken részt vevő külföldi matematikusok száma is; legtöbbjük saját költségén érkezett, de a szakma legki-

válóbbjait Társulatunk látta vendégül. Ezenkívül évente mintegy 25 matematikust hívtunk meg egy-egy előadás tartására.

Nemzetközi kapcsolataink fejlesztésén a Külügyi Bizottság az elmúlt időszakban is körültekintően munkálkodott. Eredményes munkájukat tükrözi egy együttműködési egyezmény küszöbön álló megkötése a Jugoszláv Matematikai és Fizikai Társulattal.

A Nemzetközi Matematikai Unióban (IMU) hazánkat az IMU-Bizottság képviseli. E bizottság tevékenységét az elmúlt időszakban elsősorban az IMU 1974-ben Vancouverben megrendezett kongresszusán, ill. az ezt megelőző IMU közgyűlésen való magyar részvétel megszervezése jelentette. A közgyűlésen hazánkat két fő képviselte, a kongresszuson Társulati kiküldetésben egy küldött vett részt, összesen pedig sikeresen folytatott szervezés eredményeképpen mintegy húsz magyar résztvevőt küldtek ki különböző intézmények. A közgyűlésen Szőkefalvi-Nagy Bélát megválasztották az Exchange Committee tagjának, Surányi Jánost pedig ismét beválasztották a Nemzetközi Matematikaoktatási Bizottság (ICMI) vezetőségébe. A kongresszus felkért előadói között hazánkból ketten szerepeltek (Hajnal András és Szemerédi Endre).

Az IMU anyagilag támogatta a Végtelen és véges halmazok témájáról rendezett kollokviumunkat, az ICMI pedig az általános iskolai matematikaoktatásról rendezett konferenciát. Ugyancsak anyagi támogatást kapott az IMU-tól két fiatal tagtársunk a vancouveri kongresszuson való részvétel céljára.

Anyagi támogatást kapott az Európai Statisztikusok Találkozója is, az International Statistical Institute részéről.

12. A vezető szervek működése

Az alapszabály és az ügyrend keretei az elmúlt időszakban is megbízhatóan szabályozták a Társulat ügyvitelét. A Választmány évente kétszer, az Elnökség a nyári hónapok kivételével kéthavonként ült össze. A korábbi periódushoz képest haladást jelentett (és az előző tisztújítás választásainak helyességét mutatja), hogy az Elnökség tagjai közül aránylag kevesen maradtak az ülésektől távol. Sajnálatosan nem mondható el ez a Választmány üléseiről; a jelen közgyűlésen határozottan törekedni kell olyan választmányi tagok megválasztására, akik időt tudnak szakítani arra, hogy részt vegyenek a Társulat munkájának irányításában.

Az Elnökség összetételében két változás következett be. Lemondás folytán megüresedett a Matematika Alkalmazásai Szakosztály alelnöki tisztsége, valamint a Külügyi Bizottság titkári funkciója. Az előbbi tisztség betöltésére a következő közgyűlésig Vincze Endrét, az utóbbira Hamburger Pétert kérte fel az Elnökség. Az ideiglenes jelleggel, de hosszabb időre távol levő tisztségviselők helyettesítését az alapszabály rendelkezéseinek megfelelően oldottuk meg.

Ebben az időszakban is folyamatosan tájékoztattuk a Választmány tagjait a Társulatban folyó munkáról az időközönként kiadott tájékoztatókban. Ezek elkészítésében, de a főtitkári teendők sok más vonatkozásában is jelentős segítséget kapott a főtitkár Petruska György tagtársunktól, akit az Elnökség erre 1974-től kezdve felkért.

13. A központi apparátus munkája

A fenti beszámolóban sokszor csak futólag vázolt rendkívül sokrétű társulati munka szervezése a központi apparátus feladatait ebben az időszakban is igen nehézzé és felelősségteljessé tette. Átmenetileg ugyan, de nem kevéssé súlyosbította a helyzetet a Szabadság téri épületből az Anker közbe való átköltözésünk 1973 elején. Ezek az objektív nehézségek is okozták, hogy a társulati ügyintézés sokáig igen nagy zökkenőkkel folyt. A munka megjavítását minőségi cserékkel sikerült elérni, s a korábban indokolt panaszok az ügyvitelre a jövőben, erősen bízhatunk benne, nem fognak felmerülni.

Ugyanakkor, amikor az apparátus jelen összetétele biztosítja a folyamatosan szükséges munkák kellő szakértelmű intézését, kétségtelen az is, hogy egy-egy rendezvény szervezésében nem nélkülözhető ezután sem az alkalmi munkaerők igénybevétele. Ez azonban kellő szervezéssel semmiképpen sem megy az érdemi munka rovására, s így nem veszélyezteti feladataink végrehajtását.

A pénztárosi jelentést Révész Pál megbízott pénztáros ismertette. A Társulat bevételeit az MTESZ-től kapott állami támogatás, a tagság tagdíja, kollokviumok bevételei (részvételi díjak, esetleg állami szervek támogatásai), valamint a kollokviumi kiadványaink értékesítéséből befolyt összegek alkotják. Kiadásainkat a Társulati helyiségek fenntartási költségei, működési kiadások, kollokviumi kötetek előállítási költségei és a konferenciák szervezési költségei képezik. A küldöttek kezében levő, pontos számadatokat tartalmazó jelentés felolvasása helyett kiemelte azt az örvendetes tényt, hogy a Társulat éves negatív maradványai minden bizonnyal ez évben válnak pozitívvá; ezt támasztja alá, hogy a kollokviumi kiadványokból befolyt összeg 1975 első félévében az előző évekének többszöröse. Az Ellenőrző bizottság jelentése következett, melyet Hosszú Miklós, a bizottság elnöke, olvasott fel: A Társulat Ellenőrző bizottsága 1975. október 23-án tartotta ülését,

melyen áttekintette és megvitatta a főtitkári és pénztárosi jelentést. Megállapította, hogy a takarékossági intézkedések következtében az adminisztratív kiadások jelentősen csökkentek. Az alapszabálymódosítási javaslattal az Ellenőrző bizottság egyetért. Megállapította, hogy a Társulat könyvtára nincs kellőkép kihasználva; jobb propagandát kellene kifejteni hatékonyabb kihasználása érdekében.

Rövid szünet után Surányi János alelnök vette át az elnöklést és napirend-módosítást jelentett be: A Társulat alapszabályának módosítása következett. Ezt egyrészt a felügyelet módjának megváltozása, másrészt a költségvetés megállapításával kapcsolatos paragrafusok helyreigazítása tette szükségessé. A Társulat felügyeleti szerve az MTESZ, költségvetését a jövőben a Közgyűlés állapítja meg. A Közgyűlés ezt a jogát a következő közgyűlésig a Választmányra ruházza át.

A következőkben Schmidt Tamás, a jelölő bizottság elnöke, ismertette a bizottság új tisztségviselőkre vonatkozó javaslatát. Szólt a fontosabb tisztségeknél történt változásokról.

A szavazatszedő bizottságot a Közgyűlés a következők szerint szavazta meg: elnök Hódi Endre; tagok: Dékány Veronika, Földes Antónia, Frank András, Jelitai Árpád, Komlós János, Knuth Előd, Lovász Lászlóné, Nárai Miklós, Székely J. Gábor, Sztókay Kálmánné, Thiry Imréné, Rejtő Lídia, Votisky Zsuzsa. Majd Hódi Endre ismertette a szavazás módját.

A következő vitában Kalmár László támogatta a fiatalok mozgósítására és a csere-előadókra vonatkozó főtitkári javaslatot. Indítványozta, hogy a Felsőoktatási Bizottság foglalkozzék a matematikatanár képzés problémáival. Göndöcs László hiányolta, hogy a tagság egésze nem kap elég tájékoztatást a Társulat életéről. Nem tartotta elegendőnek, hogy az Oktatási Szakosztály munkáját lényegében csak az évenkénti vándorgyűlések megszervezése alkotja. Javasolta, adjon fórumot a Társulat az oktatás problémáival kapcsolatos kutatások megbeszélésére. Turi Istvánné értékelte a Társulat elmúlt periódusban végzett munkáját, kiemelve belőle az állami szervekkel való kapcsolatok jó alakulását és a diákokkal történő foglalkozást. Merza József felszólalásában két javaslatot tett. Meg kellene próbálni a tagdíj csekk mellett egy másodikat is küldeni a tagoknak, melyen — kívánságuk szerint — felajánlhatnának konkrét, általuk meghatározott célra fordítandó összegeket. Az előadás-meghívók kiküldésének módján is javasolt változtatást; gyűjtse be a Társulat a különböző intézmények matematikai tárgyú előadásainak és szemináriumainak tervét, és tájékoztassa a tagságot ezen rendezvényekről.

Ezután következett a szavazólapok kitöltése és leadása.

A délutáni ülés Lovász László előadásával kezdődött, majd folytatódott a vita. Lovász László hozzászólásában a Társulat díjaival kapcsolatban felvetette azt a kérdést, nem csökkenti-e a díjak erkölcsi értékét nagy számuk?

Az elhangzott felszólalásokra Császár Ákos válaszolt. Különösen megfontolandónak tartotta Merza József két javaslatát. Egyetértése jeléül igéretet tett arra, hogy az új vezetőség igyekezni fog az elhangzott javaslatokat megvalósítani.

A következőkben a Közgyűlés a társulati lapok szerkesztő bizottságait bízta meg az alábbiak szerint:

Periodica Mathematica Hungaricae: felelős szerkesztő: Turán Pál

szerkesztők: Alexits György, Császár Ákos, Fejes Tóth László, Gyires Béla, Hajnal András, Hosszú Miklós, Kalmár László, Leindler László, Makai Endre, Moór Arthur, Péter Rózsa, Prékopa András, Rapcsák András, Rédei László, Révész Pál, Rózsa Pál, Steinfeld Ottó, Surányi János, Szász Pál, Szendrei János, Szép Jenő, Szilárd Károly, Szőkefalvi-Nagy Béla, Tandori Károly, Vincze István.

Matematikai Lapok:

felelős szerkesztő: Turán Pál

szerkesztők: Császár Ákos, Fejes Tóth László, Kalmár László, Pelikán József, Rapcsák András, Surányi János.

A Matematika Tanítása:

felelős szerkesztő: Hódi Endre

szerkesztők: Ács Pál, Bereznay Gyula, Bige Istvánné, Előd Istvánné, Göndöcs László, Kovács László, Molnár József, Némethy Katalin, Nyilas Dezső, Peller József, Reményi Gusztáv, Reményi Gusztávné.

Középiskolai Matematikai Lapok:

felelős szerkesztő: Fried Ervinné

a szerkesztő bizottság vezetője: Tusnády Gábor

szerkesztők: Ács Pál, Bakos Tibor, Csirmaz László, Lukács Ottó, Petruska György, Ratkó István, Tolnai Jenő. (Petruska György távollétében Lippner György.)

Majd Hódi Endre terjesztette elő a szavazás végeredményét:

Elnök: Turán Pál
Budapesti alelnök: Surányi János
Vidéki alelnök: Knoll János
Főtitkár: Császár Ákos
Dunán inneni titkár: Pálfy Sándor
Dunántúli titkár: Pálmay Lóránt
Pénztáros: Hajnal András
Tudományos Szakosztály
Elnök: Révész Pál
Alelnök: Győry Kálmán
Titkár: Pelikán József
Matematika Alkalmazási Szakosztály
Elnök: Prékopa András
Alelnök: Vincze Endre
Titkár: Recski András
Oktatási Szakosztály
Elnök: Reményi Gusztávné
Alelnök: Békefi Zsuzsa
Titkár: Halmos Istvánné
Külügyi Bizottság
Elnök: Fried Ervin
Titkár: Márki László
Tagok: Bakó Zsuzsa, Bognár János, Csákány Béla, Hosszú Miklós, Juhász István, Petruska György, Puskás Imréné, Szász Domokos, Tamássy Lajos.
Póttagok: Rózsa Pál, Fenyő István.
Ellenőrző Bizottság
Elnök: Gyires Béla
Titkár: Merza József
Tagok: Daróczi Zoltán, Makai Endre, Molnár Ernő, Moór Arthur.
Fegyelmi Bizottság
Elnök: Szénássy Barna
Titkár: Lee Anna
Tagok: Bokor Géza, Medgyessy Pál, Pollák György, Tomor Benedek.
IMU Bizottság
Elnök: Szőkefalvi-Nagy Béla
Titkár: Lovász László
Tagok: Császár Ákos, Fejes Tóth László, Fodor Géza, Leindler László, Rapcsák András, Surányi János, Szendrei János, Tandori Károly, Turán Pál, Varga Tamás.
Választmányi tagok: Alpár László, Andrásfai Béla, Ács Pál, Babai László, Bakos Tibor, Baranyai Zsolt, Berkes István, Hajnal Imre, Herczeg János, Katona Gyula, Kiss Barna, Kis Ottó, Losonczi László, Megyesi László, Nemetz Tibor, Pósa Lajos, Reményi Gusztáv, Reiman István, Sárközy András, Scharnitzky Viktor, Schmidt Tamás, Szendrei János, Székely Gábor, T. Sós Vera, Tusnády Gábor, Urbán János, Varga Tamás, Vincze István.
Választmányi póttagok: Gyarmati Edit, Benczur András, Bognár Mátyás, Domokos Géza, Gécseg Ferenc, Kovács László Béla, Lippner György, Szalay Mihály, Leindler László, Pirkó Béla.

Az MTESZ közgyűlésére a Közgyűlés az alábbi küldötteket választotta meg:
Császár Ákos, Gyires Béla, Hajnal András, Knoll János, Petruska György, Prékopa András, Reményi Gusztávné, Révész Pál, Surányi János, Szőkefalvi-Nagy Béla, Turán Pál.

Most következett az Elnökségben képviselt négy vidéki tagozat kijelölése. Ezek: Csongrád megyei Tagozat, Heves megyei Tagozat, Vas megyei Tagozat, Veszprém megyei Tagozat.

A Közgyűlést Turán Pál elnök zárszava fejezte be, melyet betegsége miatt Surányi János olvasott fel.

A Szele Tibor Emlékérem Bizottság 1975. évi jelentése

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kijelölt bizottság 1975. november 18-án tartott ülésén úgy határozott, hogy a Szele Tibor Emlékérmet Turán Pál akadémikusnak, az MTA Matematikai Kutató Intézete osztályvezetőjének adományozza.

Indoklás: Turán Pál már 1945-ben az ELTE oktatója, 1946-ban magántanára, 1949-től nyilvános rendes tanára lett. Harminc éven át oktatott a Budapesti Tudományegyetemen.

Az MTA 1948-ban levelező, 1953-ban rendes tagjává választotta, az ország kormánya pedig 1948-ban a Kossuth-díj második, 1953-ban a Kossuth-díj első fokozatával tüntette ki.

Tudományos tevékenysége külföldi visszhangját tükrözi a számos vendégprofesszori és vendégkutatói meghívás. Ezekhez járult számos konferenciára és kongresszusra történő meghívása, amelyek száma szinte évről évre nő. 1970-ben a Nizzában rendezett Nemzetközi Matematikai Kongresszus egyik meghívott előadója. Ugyanekkor meghívták a Fields-érmét és -díjat odaítélő bizottságba is, mely a legjelentősebb nemzetközi matematikai elismerés. Turán Pál eddig az egyetlen magyar matematikus, aki ebben a megtiszteltetésben részesült.

Tagja az „Acta Arithmetica", a "Journal of Number Theory", az »Archiv für Mathematik« és a „Compositio Mathematica" nagy múltú külföldi matematikai folyóiratok szerkesztő bizottságainak.

Jelentős és sokoldalú tudományos és oktatói tevékenységén kívül a matematikai közéletből ugyancsak aktívan kiveszi részét. Az MTA, az Oktatásügyi Minisztérium, az ELTE, és a Bolyai János Matematikai Társulat által életre hívott több bizottság, ill. testület tagja volt vagy ma is az. A Bolyai János Matematikai Társulat magyarnyelvű folyóiratának, a Matematikai Lapoknak a lap megjelenése óta felelős szerkesztője.

Már fiatal korában értékes pedagógiai tapasztalatokat gyűjtött, amelyeket nagymértékben kamatoztatott később egyetemi oktatómunkája során, csakúgy, ahogy a különböző szintű matematikai tantervek elkészítésében való közreműködésével, a hazai matematikaoktatás modernizálásához nyújtott segítségével.

A fiatal matematikai tehetségek kiválasztásának nagy szakértelmet igénylő munkájában jelentős szerepet játszott. Kezdeményező részese volt annak a három évtizedre terjedő aktivitásnak, amely fokozatosan szervezett rendszerré alakította a különböző intézmények, folyóiratok, versenyek, pályázatok és díjak összességét, amelyek ma a fiatal matematikai tehetségek kellő időben való felismerését, nevelését, továbbképzését és kibontakozását biztosítják.

A TMB Matematikai Szakbizottságának tagjaként a tudományos káderek akadémiai szintű utánpótlását segítette elő.

Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának és az Osztály Matematikai Bizottságának egyik legaktívabb tagja.

Igen jelentős azoknak a matematikusoknak a száma, akik tanítványainak vagy munkatársainak vallják magukat. Sokan kezdték el az ő segítségével tudományos munkásságukat vagy tőle kaptak pályájuk során valamilyen formában döntő impulzust bizonyos kutatások megkezdéséhez és sikeres folytatásához.

Tudományos együttműködésre való hajlama, valamint az a készsége, hogy másokat is bevezessen a kutatás műhelytitkaiba, nyilván több okkal magyarázható.

Először is azzal, hogy Turán Pál sokoldalú matematikus, aki a legkülönfélébb érdeklődésű kollégáival is könnyen szót tud érteni. Széles kutatási spektrumát csupán címszavakkal jellemezve a matematika következő ágai sorolhatók fel: számelmélet, különösen az analitikus számelmélet, komplex függvénytan, általános sorelmélet és a Fourier-sorok elmélete, interpoláció és mechanikus kvadratura, approximációelmélet, differenciálegyenletek elmélete, speciális polinomok és algebrai egyenletek elmélete, numerikus analízis, determináns és mátrixelmélet, kombinatorika, gráfelmélet, a statisztikus csoportelmélet. E változatos munkássága 226 dolgozatban és „Az analízis egy új módszeréről" című könyvében öltött testet, ez utóbbi megjelent német és kínai nyelven is.

Szerteágazó kutatómunkája világos kifejezőerővel és fejlett pedagógiai érzékkel párosult. Biztos szemmel ismerte fel a tehetségeket azok óhatatlan kezdeti botladozásai ellenére is. Megismerve tanítványai hajlamait, képességeit, tudását, igyekezett tanulmányaikat azoknak megfelelő irányba terelni, mindig olyan problémákat vetve fel, vagy olyanokra híva fel a figyelmüket, amelyek egyáltalán nem triviálisak, de nem is reménytelenül nehezek és tudományos szempontból is lényegesek. Amikor pedig valaki önálló tudományos kutatómunkába kezdett, ő volt az, aki nem ismert el kudarcot, nem fogadott el csüggedést, s ha kellett, saját kifogyhatatlan matematikai optimizmusából kölcsönzött munkatársainak. Speciálkollégium, szeminárium, személyes beszélgetés vagy levelezés mind egy-egy alkalmul szolgált arra, hogy további vizsgálatokra ösztönözzön. A Matematikai Lapok felelős szerkesztői funkcióját is arra használta fel, többek között, hogy kezdők első megnyilatkozásaihoz biztosítson publikációs lehetőséget.

Mindez persze erősen összefüggött saját kutatási mechanizmusával, amelynek két fontos vonását kívánjuk aláhúzni. Az egyik új kutatási módszerek bevezetése, a másik az eredeti problémalátási mód, a problémafelvető készség. Új és híressé vált módszerei közül kettőt említünk. Már első dolgozatait, melyekben az analitikus számelmélet egy problémájával foglalkozik, ma úgy idézik, mint amelyek először alkalmazták a valószínűségszámítás módszereit a számelméletben. Említett könyvében pedig az általa felismert hatványösszeg módszert fejti ki részletesen, aminek alkalmazásával a komplex függvénytan, a differenciálegyenletek, a numerikus analízis, az algebrai egyenletek becslése, az analitikus számelmélet területén jelentkező kérdésköröket vizsgált.

Eredeti, általa felvetett problémakörei közül találomra említjük a statisztikus csoportelméletben

játszott kezdeményező szerepét, egy extremális gráfelméleti probléma megoldását, mely az azóta terebélyesen kifejlődött elmélet kiindulópontjává vált, az ikerprímszámok eloszlására vonatkozó vizsgálatait, a racionális törtfüggvényekkel való approximáció terén elért útmutató eredményeit, és még hosszan lehetne folytatni a sort.

Nagy nemzetközi érdeklődést kiváltó sikereket ért el híres, régi, máig is megoldatlan problémák vizsgálatában is, amelyek közül csupán a Riemann-féle zéta és a Dirichlet-féle L-függvények gyökeinek eloszlásával foglalkozó munkáira utalunk.

Jelentés az 1975. évi Grünwald Géza emlékdíj odaítéléséről

A díj odaítélésére kiküldött bizottság — elnök Turán Pál, tagok: Császár Ákos, Fejes Tóth László, Hajnal András, Révész Pál, Szász Domokos, Tandori Károly — 1975. október 31-i és november 14-i ülésen az alábbi döntést hozta:

A Grünwald Géza emlékdíj I. fokozatával tünteti ki és 5000—5000 Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

Baranyai Zsolt egyetemi tanársegéd, ELTE TTK, Analízis I. tanszék

ifj. Makai Endre tud. mtárs., MTA Matematikai Kutató Intézet

Márki László tud. mtárs., MTA Matematikai Kutató Intézet

A Grünwald Géza emlékdíj II. fokozatával tünteti ki és 3000 Ft pénzjutalomban részesíti:

*Gyárfás András*t az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet tud. mtársát.

Indoklás:

Baranyai Zsolt munkásságát a Rényi Alfréd által meghonosított kereséselmélet területén kezdte. Első eredményét az ismert mérlegelési problémákkal kapcsolatban érte el. Következő eredményét a minimális átlaghosszúságú dekódolható bináris kódokkal kapcsolatban; szükséges és elégséges feltételt adott a kódolandó jelek valószínűségeire, amelyek mellett a Huffman-kódok mindössze kétféle hosszúságú sorozatból állhatnak. Ezután Katona egy kereséselméleti eredményét általánosította. A probléma gráfelméleti nyelven így fogalmazható: Hány $K_{k_1,\ldots,k_d}$-vel (d színű teljes gráf, az i-edik szint k_i képviseli) izomorf gráffal fedhetők le a $k_1+\ldots+k_d$ szögpontú teljes gráf élei (ahol k_i-k rögzítettek)? Baranyai meglepő új módszert talált a megoldáshoz, mely hozzásegítette a következő híres, 1850-ből származó sejtés megoldásához: Ha $h|n$, akkor megadható n elem $\binom{n-1}{h-1}$ számú partíciója úgy, hogy minden partíció n/h számú diszjunkt h-elemű részhalmazból áll, és minden h elemű részhalmaz pontosan egy partícióban szerepel. Baranyai ötlete a következő volt: a következő nagyobb mátrixot konstruáljuk meg teljes indukcióval úgy, hogy tekintsünk el attól, hogy a mátrix értékei egészek, majd utólag csináljunk belőle a hálózati folyamatok elméletének segítségével 0,1-mátrixot. Doktori értekezésében a problémát messzemenően általánosította. A fenti témakörrel szorosan kapcsolatos hypergráf-szinezési tételei Berge és Meyer eredményeinek számottevő fejlesztései. Dolgozatainak, amelyek igen ötletgazdagok, máris jelentős visszhangjuk van.

Baranyai Zsolt dolgozatainak jegyzéke:

1. Keresési problémák, egyetemi szakdolgozat (1972), ELTE, Budapest.
2 On the optimality of a simple prefix code, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 25 (1974) 443—448.
3. On the factorization of the complete uniform hypergaph. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10, Infinite and finite sets, 1973. pp. 91—108.
4. On the edge-colouring of complete hypergraphs I (megjelenés alatt)
5. Teljes hipergráfok felbontása, egyetemi doktori értekezés, 1975.

ifj. Makai Endre 1972-ben részesült a Grünwald-díj II. fokozatában. Újabb eredményei közül az alábbi kettőt emeljük ki: Heppes Aladár egy észrevételéhez kapcsolódva felmerült a következő általános probléma: meghatározandó az a legritkább n-dimenziós gömbrács, amelynek minden k-dimenziós altérrel van közös pontja ($0 \leqq k \leqq n-1$). Makai tétele így fogalmazható: Egy konvex test legritkább nem szeparálható rácsa meghatározásának problémája ekvivalens azon test legsűrűbb rácselhelyezésének problémájával, mely az eredeti testből egy centrál szimmetrizációval és egy ezt követő polarizációval nyerhető.

ifj. Makai Endre szép eredményei éles intuiciójának, nagy tárgyi tudásának és szívós munkájának köszönhetők.

ifj. Makai Endre 1972. óra írt dolgozatainak jegyzéke

9. Gömbrácsok morfológiája, Morphology of spherical grids (társszerző Tarnai T.), Magyar Tudomány (megjelenés alatt, ugyanaz két nyelven)
10. On the thinnest non-separable lattice of convex plates (társszerző Fejes Tóth L.), Studia Sci. Math. Hung. 9 (1974), 191—193.
11. Problem 11, Periodoca Math. Hung. 5 (4), (1974), 353—354.
12. On some geometrical problems of single-layered spherical grids with triangular network, Proceedings II. Internat. Conf. on Space Structures, (Univ. Surrey-be leadva).

13. Five neighbour packings of convex plates (kézirat).
14. On the thinnest non-separable lattice of convex bodies (kézirat).
15. On the densest packing of rows of spheres (kézirat).

Márki László eddigi 12 dolgozatának tárgykör szerinti megoszlása a következő: 2 komplex függvénytan, 3 p-adikus analízis, 3 félcsoportelmélet, 1 radikálelmélet, 1 algebrai geometria (kétrészes), 1 kategóriaelmélet, 1 univerzális algebra. Egyik félcsoportelméleti dolgozatában a Green-féle relációk fogalmának messzemenő általánosítását adja. Másikban szükséges és elégséges feltételeket ad arra, hogy egy lokálisan reguláris Rees-féle mátrix-félcsoport reguláris, illetve 0-egyszerű, illetve komplett 0-egyszerű, illetve inverz félcsoport legyen. Harmadik félcsoportelméleti cikkében egy-egy struktúratétellel jellemzi a reguláris, illetve inverz félcsoportok bizonyos osztályát, és kimutatja, hogy nincs teljes analógia az idevágó gyűrű- és félcsoportelméleti eredmények között. Kategória-elmélet témájú dolgozatában azt bizonyítja, hogy ha egy kategóriában bizonyos elég általános feltételek teljesülnek (AB 5 axióma), továbbá, ha bármelyik két diszjunkt részobjektum összege részobjektuma az egyesítésüknek, akkor a részobjektumok összegei megegyeznek a diszjunkt egyesítéseikkel. Radikálelméleti dolgozatában lényegileg azt igazolja, hogy sem gyűrűkben, sem félcsoportokban nincs olyan nem triviális radikál, amellyel minden féligegyszerű objektum, illetve minden radikál objektum egyszerű, vagy szubdirekt irreducibilis objektumok 0-diszjunkt egyesítése vagy komplett, vagy diszkrét direkt szorzata lenne. Univerzális algebrával kapcsolatos dolgozatában megadja azokat a félcsoportokat és csoportokat, amelyekben bizonyos típusú függvények polinomfüggvényként állíthatók elő. A p-adikus analízis terén az egyik cikkében bevezetnek (Rédei L-val közös) egy általánosított szumma-fogalmat, és megadják néhány fontos tulajdonságát; megmutatják továbbá, hogy ez a fogalom jól használható véges p-csoportok leírásában. Egy másik idevágó (Szabados J.-fel közös) cikkében megadják a $Z_p \to Q_p$ folytonos függvényeket legjobban közelítő polinomokat; a közelíthetőségre pontos eredményt adnak Lipschitz-függvények és analitikus függvények esetén. Komplex függvénytani dolgozatainak egyikében azzal a problémával foglalkozik, hogy hogyan jellemezhetőek az $L_p(-\infty, +\infty)$ tér $(1 \leqq p \leqq 2)$ azon részhalmazai, amelyekre igaz a Wiener—Lévy tétel. A másik komplex függvénytani cikkében Rogozin, szovjet matematikus eredményeit általánosítja olyan trigonometrikus sorokra, ahol az együtthatók l^p-be tartoznak $0 < p \leqq 1$, valamint egyszerű bizonyítást ad Rogozin két tételére.
Márki László igen szorgalmas, igen jól képzett és széles érdeklődésű matematikus, aki a matematika több ágában (algebra, komplex függvénytan, p-adikus analízis, algebrai geometria) ért el jelentős eredményeket. Külön kiemelendő kiváló együttműködési készsége.
Márki László dolgozatainak jegyzéke:

1. On a characterization of sums in certain categories, Periodica Math. Hung. 1(1971), 93—95.
2. Egy Wiener—Lévy típusú problémáról, Mat. Lapok 22 (1971), 303—306.
3.a A lokális gyűrűk elméletéhez. D. A. Buchsbaum egy problémájáról I., MTA III. Oszt. Közl. 22 (1973), 55—78 (W. Vogellal).
3.b A lokális gyűrűk elméletéhez. D. A. Buschsbaum egy problémájáról II., MTA III. Oszt. Közl. (megjelenés alatt, W. Vogellal).
4. On locally regular Rees matrix semigroups, Acta Sci. Math. Szeged 31 (1975), 95—102.
5.a A generalization of Green's relations in semigroups, Semigroup Forum 7 (1974), 74—85 (Steinfeld O.-val).
5.b A generalization of Green's relations in semigroups, Acta fac. rer. nat. Univ. Comenianae (megjelenés alatt).
6. Radicals and decomposability of semigroups and rings, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. (megjelenés alatt; Wiegandt R.-al és P. N. Stewarttal közösen).
7. Megjegyzések B. A. Rogozin „Lévy—Wiener trigonometrikus sorok abszolut konvergenciájára vonatkozó tételeiben szereplő együttható-aszimptotika" c. dolgozatához, Szibirszkij Mat. Zsurnal (megjelenés alatt, oroszul).
8. Verallgemeinerter Summenbegriff in der p-adischen Analysis mit Anwendung auf die endlichen p-Gruppen, Publ. Math. (megjelenés alatt, Rédei Lászlóval).
9. Interpolation and best polynomial approximation in the domain of p-adic integers, Analysis Math. (megjelenés alatt, Szabados Józseffel).
10. Nem archimédeszi analízis I., Mat. Lapok (megjelenés alatt).
11. Structure theorems on certain regular and inverse semigroups, Czechoslovak Math. J. (megjelenés alatt).
12. Über einige Vollstandigkeitsbegriffe in Halbgruppen und Gruppen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. (megjelenés alatt).

Gyárfás Andrásnak öt megjelent dolgozata van, további öt megjelenés alatt. Megjelent dolgozatai a Ramsey-problémakörrel, Helly-típusú kérdésekkel, illetve ezek kapcsolatával foglalkoznak. Ezek közül [1]-ben az $R(k, l)$ Ramsey-szám pontos meghatározása szerepel. $R(k, l)$ az a legkisebb egész

szám, amelyre teljesül, hogy $n \geqq R(k, l)$ esetén az n szögpontú teljes gráf éleit tetszőlegesen színezve két színnel, vagy van az első színben egyszínű k hosszúságú út, vagy a második színben egyszínű l hosszúságú út.) Ez az eredmény az ún. „generalized Ramsey theory"-nak nevezhető problémakör kiindulópontja. A fenti cikk megjelenése óta tucatnyi dolgozat foglalkozik különböző típusú gráfok Ramsey-számának meghatározásával, és idézi Gyárfás—Gerencsér cikkét. [2]-ben Gallai egy problémájából kiindulva különböző struktúrák Helly-számának létezését vizsgálja. [4] és [5]-ben a Ramsey-tétel egy váratlan jellegű általánosítását fogalmazza meg, és hozza kapcsolatba Helly-struktúrák vizsgálatával. Gyárfás András megjelenés alatt álló dolgozatai a gráfelméletnek a programozásban való alkalmazásával foglalkoznak, részben software jellegűek. A megjelent dolgozatok jelentős eredményeket tartalmaznak, és nem csupán bizonyító erőről, hanem jó problémafelvető készségről is tanúskodnak. Eddigi eredményeinek érdemlegességét bizonyítja az is, hogy az irodalomban máris jelentős visszhangra találtak.
Gyárfás András dolgozatainak jegyzéke:

1. On Ramsey type problems, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. (1967), 167—170 (Gerencsér L.-val).
2. A Ramsey type problem in directed and bipartite graphs, Periodica Math. Hung. 3 (3—4. (1973), 299—304 (Lehel J.-vel).
3. A Helly type problem in trees, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 4. 571—584 (Lehel J.-vel).
4. A Ramsey type theorem and its application to relatives of Helly's theorem, Periodica Math. Hung. 3 (3—4) (1973), 261—270.
5. On Ramsey covering numbers, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. 801—816.
6. Blocking the loops of a flow-graph. Abstract, ZAMM (megjelenés alatt).
7. PATRIC-papírszalag konvertáló rendszer. MTA SzTAKI-kiadvány.
8. DAISY—CDC 3300 felhasználói ismertetők 4.
9. DAISY — An editor for or against the programmer (előadás és cikk az ECODU 1974-es ülésén).
10. A structured extension of FORTRAN, Software Practice and Experience (megjelenés alatt).

Jelentés az 1975. évi Farkas Gyula Emlékdíj odaítéléséről

A Bizottság 1975. szeptember 29-i ülésén az összes javaslat megvitatása után az alábbi döntést hozta: a Farkas Gyula Emlékdíj első fokozatával tünteti ki és 3000 Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:
Deák Istvánt, a MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályának tudományos munkatársát,
Győrfi Lászlót, a Távközlési Kutató Intézet tudományos munkatársát,
Maros Istvánt, az INFELOR tudományos munkatársát,
Rochlitz Szilvesztert, a KLTE Számítástudományi Tanszékének tanársegédét,
Ruda Mihályt, a SZTAKI tudományos munkatársát,
Simonovits Andrást, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársát.
Indoklás
Deák István 1969-ben végezte el az ELTE matematikus szakát, diplomamunkája a tározók elméletével foglalkozott. 1969-től 1972-ig a BME Villamosmérnöki Kar Matematika Tanszékén dolgozott tudományos kutatóként. 1972 óta dolgozik jelenlegi munkahelyén.
Egyik legfőbb munkája a STABIL modell programrendszere. A STABIL modell nagy méretű feladatra vonatkozó effektív megoldása igen jelentős sztochasztikus programozási szempontból, mert ezáltal bizonyítást nyert, hogy a Prékopa-féle modellek számítógépen jól realizálhatók, és reális időn belül megoldhatók. A program bonyolult, overlay szervezésben készült. FORTRAN nyelven. Egy nemlineáris programozású feladatról van szó, melynek megoldó algoritmusa minden lépésben lineáris programot használ, a függvényértékeket pedig Monte-Carlo módszerrel határozták meg. A Monte-Carlo módszerek közül egy megfelelőnek a kiválasztása is Deák egyéni munkája volt. Ez utóbbival azóta éveket foglalkozott, és sikerült olyan Monte-Carlo módszert kialakítania, és hozzá a programot (részben gépi kódban) elkészítenie, mely alkalmas többdimenziós térben elhelyezkedő halmaz valószínűségének kielégítő pontosságú meghatározására (korrelált) normális együttes eloszlás esetén. A módszer 50 dimenzióig jól működik. Ilyen nagy dimenziószámú térben valószínűségek Monte-Carlo módszerrel történő meghatározásáról az irodalomban nem olvashatunk.

Deák István publikációi

1. Deák István: Egy sztochasztikus programozási modell számítógépes kiértékelése. Egyetemi doktori disszertáció (1971).
2. Deák István: Egy sztochasztikus programozási modell számítógépes kiértékelése. MTA SzK. Közlemények 1972. 9 p. 33—49.

3. Prékopa A., Ganczer S., Deák I., Paty K.: A STABIL sztochasztikus programozási modell kísérleti alkalmazása a magyar villamosenergiaiparra. Alkalmazott Matematikai Lapok 1 (1974, sajtó alatt).
4. A. Prékopa, S. Ganczer, I. Deák, K. Paty: The STABIL stochastic programming model and its experimental application to the electrical energy sector of the Hungarian economy. Proceeding of the International Symposium on Stochastic Programming (ed. M. Dempster) (1974, sajtó alatt).
5. Deák István: A többdimenziós normális eloszlásfüggvény Monte-Carlo integrálással történő kiszámításának számítógépes tapasztalatai. Int. Közlemények (sajtó alatt).
6. Deák István: A többdimenziós normális eloszlásfüggvény számítógépes pszeudó véletlen vektorok beesési gyakoriságával. Alk. Mat. Lapok (leadva).
7. Deák István: A stabil sztochasztikus programozási modell számítógépes programcsomagja.

Győrfi László az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán 1970-ben szerzett matematika—fizika szakos tanári diplomát. „Potenciálfüggvényes algoritmusok" című doktori értekezéséért 1974-ben avatták egyetemi doktorrá.
1970 óta dolgozik a Távközlési Kutatóintézet III. Főosztályán. Győrfi László nemzetközi értelemben új eredményei rekurzív tanulási folyamatok továbbfejlesztéséhez, valamint az algoritmuskonstrukció szempontjából lényeges új döntéselméleti kapcsolatok feltárásához adnak eredeti és alkalmazási szempontból lényeges hozzájárulásokat.
Egy igen egyszerű algoritmust talált, [7], amely — a döntésfüggvényt becslő eljárással párhuzamosan — rekurzív becslést ad a téves osztályozás valószínűségére. E fajta eredményről az irodalomban egyáltalán nem tudunk. Ugyanakkor ezen az úton matematikailag alátámasztott gyakorlati eljárásnak jutunk birtokába az eddiginél mélyebb leállítási szabályok konstruálására.
Fritz Józseffel közösen [11] szellemes és mély gondolatokra támaszkodó algoritmust talált a téves osztályozás hibáját minimálizáló véges dimenziós közelítések rekurzív tanulására.
Az úgynevezett adaptív bayesi algoritmusok egy gyakorlati szempontból fontos osztályára pontos kifejezést adott [4] a négyzetes középhibára, véges lépésszámon belül.
Az eredmények két érdekes sorozatát érte el Győrfi László azoknak a jellemző mennyiségeknek a vizsgálata területén is, amelyek lényegkiemelésnél (eljárások hatékonyságának a vizsgálatában) és közelítőleg jó algoritmusok konstrukciójában bírnak jelentőséggel [5], [9].
E témakörben Gulyás Ottó érdekes eredményeit folytatta további tételekkel, az algoritmus konstrukció reprodukáló magú Hilbert terekkel kapcsolatos elméletében. Így [2] konzisztenciákat bizonyított olyan esetekre is, amikor a döntési feladat nem szinguláris. Ezen kívül az alábbi konkrét eredményeket érte el értelmezési szabályok egyedi esetek tömegén való tanulásában:
A Távközlési Kutatóintézet hatékony programkönyvtárral tudja e területen saját munkáit és mások tevékenységét segíteni. Gépi tanulásra szolgáló programkönyvtári anyag több tétele közvetlenül Győrfi László munkájának az eredménye.
Személyesen közreműködött azoknak a gyakorlati próbafeladatoknak a felkutatásában és — szakterületi kollektívákkal közös — kidolgozásában, amelyekkel tanuló algoritmusok orvosszámítástechnikai lehetőségeit tártuk fel, a részletesebb munka előkészítése céljából. Ezen a területen Kalmár László a szegedi orvosszámítástechnikai konferenciáin már második éve publikált másokkal közös eredményeket. Jól áttekinthető e tevékenysége a Távközlési Kutatóintézet 1973. évi évkönyvének ezzel kapcsolatos összefoglaló beszámolójából is.
Lényeges szerepet játszott a Távközlési Kutatóintézetben és az Országos Kardiológiai Intézetben a tanuló algoritmusok tömeges betegvizsgálati anyagokra való bevezetésében.

Győrfi László publikációi

1. L. Győrfi "Poisson processes defined on an abstract space" Studia Sci. Math. Hungar. 7 pp 243—249 1972.
2. L. Győrfi "Convergence of potential function type learning algorithms" Problems of Control and Information Theory 1 pp 247—265 1972.
3. Győrfi L. „Potenciálfüggvényes algoritmusok". Egyetemi doktori értekezés, ELTE TTK 1972.
4. L. Győrfi "Estimation of probability density and optimal decision function in RKHS" Proc. of the European Meeting of Statisticians Budapest, 1972.
5. L. Győrfi "On some estimation problems in pattern recognition" Problems of Control and Information Theory 3 pp 11. 17. 1974.
6. Bak J., Balogh B., B. Nagy A., Csánki F., Dévai F., Gulyás O., Győrfi L., Kobzos L., Ungvári L., „Számítógépes rendszer elektrokardiagrammok értékelésére" Díjnyertes pályamű, MTA 1973.
7. L. Győrfi "On the estimation of asymptotic error probability" IEEE Trans. on Information Theory 20 pp 277—278. 1974.

8. Győrfi L. „Egy készletezési probléma megoldása sztochasztikus approximációval". TKI Közlemények, 18 pp 81—88. 1973.
9. T. Faragó, L. Győrfi: "On the continuity of the error distortion function for multihypotheses decisions". IEEE Trans. on Information Theory (to appear).
10. L. Győrfi "A suboptimal solution of the linear classification problem with minimal error probability". Proc. of the Second International Joint Conference on Pattern Recognition, Copenhagen, 1974.
11. J. Fritz, L. Győrfi: "On the minimation of classification error probability in statistical pattern recognition" Submitted to IEEE Trans. on Information Theory.
12. L. Győrfi: "An upper bound of error probability for multihypotheses testing and its application in adaptive pattern recognition". Submitted to IEEE Trans. on System, Man and Cybernetics.
13. L. Győrfi, T. Nemetz: "On the dissimilarity of probability measures". Submitted to IEEE Trans. on Information Theory.

Maros István diplomáját a TTK matematika szakán szerezte 1964-ben.
Munkahelyei: Volán Elektronika, NIMIGÜSZI, INFELOR.
Munkahelyi tevékenysége a konkrét témákban való részvételen túl mások hasonló természetű munkáinak irányítására is kiterjed, negyedik éve osztályvezető (NIMIGÜSZI Matematikai osztály, INFELOR Matematikai Osztály).
Munkái közül kiemelkedő a nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldására ICL 1900 sorozatú gépekre kidolgozott algoritmus, sőt programcsomag elkészítése. Ezt a programcsomagot azóta is rendszeresen használják különféle megbízók feladatainak megoldására. Ismeretes, hogy a lineáris programozási programcsomagok algoritmikus felépítése ma már olyan bonyolult, hogy a gyári programcsomagok teljesítőképességének megközelítése is komoly reproduktív kutatást igényel. Az idézett munka — a célkitűzésnek megfelelően — néhány kritikus paraméter tekintetében túlszárnyalja az említett gépeken elérhető gyári programcsomagot. Figyelemreméltó például, hogy a Maros István vezetésével (és jórészt saját maga által írt) új program adott memória mellett durván kétszer annyi feltétel kezelésére alkalmas, mint a gyári.
A keze alól kikerült munkák nemcsak elméleti felkészültségéről, hanem jó gyakorlati érzékéről is tanúskodnak.
Aspiránsi témája is a lineáris programozással kapcsolatos, a hatékony futtatási stratégiák és a numerikus stabilitás problémája körében mozog.
A matematika alkalmazásának oktatásában is tevékenyen vesz részt. (Bolyai tanfolyamok, IFIP tanfolyamok előadója, szerkesztője, rovatvezetője több lapnak, konferenciákon rendszeresen tart előadást.)

Maros István publikációinak jegyzéke

1. Egy lemezfelszabási feladat
NIM IGÜSZI Számítástechnikai Közlemények, 1/1965.
2. Optimalizálási törekvések a helyi autóbusz közlekedésben
Információ—Elektronika, 3/1969.
3. Diphantosi egyenlet összes megoldásainak előállítása (Seregély Józseffel közös cikk)
Szervezés és Vezetés, 4/1970.
4. Program nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldására (Heppes Aladárral közös cikk)
SZÁMOLÓGÉP, 3/1971.
5. Hibaeljárások lineáris programozási algoritmusokban
Információ— Elektronika, 2/1974.
6. Nagyméretű LP feladatok megoldása ICL 1900-as gépeken
(Dobosy Antallal és Heppes Aladárral közös cikk) Szervezés és Vezetés 11/1974.
7. Nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldására készített FUT programrendszer leírása
NIM IGÜSZI 1970.
8. Nagyméretű feladatok megoldására szolgáló FUT rendszer II.
NIM IGÜSZI 1971.
9. NI 4 A—B, N 15 A—B programok használati dokumentációja
NIM IGÜSZI, 1971.
10. Gondolatok az operációkutatási módszerek alkalmazásáról
Szervezés és Vezetés, 5/1974.
11. A szénhidrogénkutatás információs rendszerének fejlesztése (Dóczi Andrással közös)
Információ—Elektronika, 3/1974.
12. Gáz-távvezeték hálózatok optimális méretezése (Heppes Aladárral közös)
NIM IGÜSZI 1969.
13. Módszerek termelési idősorokat legjobban közelítő életgörbék meghatározására
MTA Ipargazdasági Kutatócsoport közleményei 8/1967. május.

14. Optimal Time Tables for Local Transport
Technical report at IFIP Seminar London 1967.
15. Tudományos programok off-line multi üzemmódban való futtatásának rendszere
NIM IGÜSZI, 194 (T. sz. 122) 1972.

Rochlitz Szilveszter 1966-ban végzett a KLTE matematikus szakán, kitüntetéses diplomával. 1967-ben megkapta a „Felsőoktatási Tanulmányi Érdemérem" elnevezésű miniszteri kitüntetést. Végzés után előbb a Valószínűségszámítási Tanszék tanársegéde, majd a Számoló Központ tudományos munkatársa. Jelenleg a Számítástudományi Tanszék tanársegéde, és a Számítástechnikai Tudományos Diákkör vezetője. Vezetése mellett két hallgató kiemelt különdíjat, egy pedig kari első díjat kapott benyújtott dolgozatáért.
Eddigi tudományos tevékenysége két nagy területre irányul: valószínűségszámítás és számítástechnika.
Eddig 11 megjelent ill. közlésre elfogadott dolgozata — ebből 3 magyarul és idegen nyelven is — 3 egyetemi jegyzete van, s több dolgozatban elismeréssel hivatkoznak munkásságára.
Az [1] dolgozatban a Rados G. és Gyires B. féle determináns-tételek megfelelőit adja meg a nemnegatív elemű mátrixok permanenseire. E munka értékét a szochasztikus mátrixok permanenseinek matematikai statisztikai jelentősége adja meg.
A [4] és [4.*a*] dolgozatban, valamint a [8] előadásban az exponenciális sűrűségfüggvények keverékének felbontásával foglalkozik, továbbfejlesztve R. Bellman eljárását. A Rochlitz Szilveszter által kidolgozott módszer számítógépes realizálása lényegesen egyszerűbbé vált a korábbihoz képest. Egyben ezt orvosi-biológiai alkalmazási lehetőséggel is összekapcsolja.
Az [1] előadásban Arató M. dolgozatához kapcsolódva módszert ad Gauss—Markov folyamatok paraméterének becslésére, s azt számítógépre realizálja is.
A [2], [3], [6], [7], [8] dolgozatok, valamint a [4], [5], [6], [9], [10], [11] előadások alapvetően kvantumkémiai témakörből valók. Ezekben — természetszerűleg — Rochlitz Szilveszter matematikai és számítástechnikai módszerek kidolgozásában játszott igen fontos szerepet.
Az [5], [9], dolgozat, valamint a [2], [3], [7], [11] előadások a szöveti antigének vizsgálatával, ill. az ott alkalmazott biometriai-számítástechnikai módszerekkel foglalkoznak.
Az eredmények mindennapos gyakorlati jelentősége a fehérvérsejtek és vérlemezkék transzfuziójában, az anya—gyerek immunológiában és az újszülött védelmében mutatkozik meg.
Rochlitz Szilveszter e témában kifejtett tevékenységének egyik elismerése, hogy 1972-ben rendezett nemzetközi Workshop adatainak matematikai elemzésére őt kérték fel; [5] dolgozat.
A többi dolgozata a liquor által tartalmazott anyagok vizsgálatával foglalkozik. Ezek, s még nem publikált eredmények lehetővé teszik bizonyos idegrendszeri betegségek egyszerűbb diagnosztizálását.
A felsorolt témákon kívül foglalkozik az ODRA—1204 alapsoftware fejlesztésével is. E téren elért eredményeit a KLTE Számoló Központban igen jól tudják hasznosítani.

Rochlitz Szilveszter publikációi

[1] Über die Permanente des Verallgemeinerten tensoriellen Produkts der Matrizen, Publ. Math., Debrecen 16 (1969) 229—237.
[2] IR Spectroscopic Investigation of 4- and 4'-Monosubstituted and 2'-benzylosy-4-Substituted Chalcone Epoxides, Acta Chim., Bp., 7 77 (3) (1973) 323—331.
(Társszerzők: Z. Dinya—Gy. Litkei—R. Bognár—Gy. Mátyás—P. Jékel)
[3] Trimetroprims analógjainak kvantumpharmakológiai vizsgálata, 1973, DOTE (kongresszusi kiadvány). (Társszerzők: Dinya Z.—Tóth B.)
[4] A radioaktív izotópok használata az agy vérkeringésének vizsgálatában, Ideggy. Szemle, Bp., 26 (1973) 535—542. (Társszerzők: Szalontai K.—Molnár L.)
[4a] The Use of Radioactive Isotopes in the Examination of Cerabral Blood Flow, Acta Physiologia, Bp., 44 (1) 1—10. (1973). (Társszerzők: K. Szalontai—L. Molnár)
[5] Relations of HL—A and RH Systems to Immune Reactivity. (Joint Report of the Results of "HL—A Immune Response Workshop", Bp., 1972. Vox Sanguinis, Basel (S. Karger) 27 (1974.) 470—482. (Társszerzők: Gy. G. Petrányi ed.)
[6] Újabb adatok a trimetroprim és analógjainak kvantumpharmakológiai vizsgálatához. Acta Pharm. Hungarica. (Közlésre elfogadva) (Társszerzők: Dinya Z.—Tóth B.)
[7] Egyes imidazo-pirimidon származékok kvantumkémiai vizsgálata. Acta Chim. (Közlésre elfogadva). (Társszerzők: Z. Dinya—R. Reiter—L. Toldy.)
[8] Flavonoidok elektródszerkezetének kvantumkémiai vizsgálata Acta Chim. (Közlésre elfogadva). (Társszerzők: Z. Dinya—Á. Kiss—P. Jékel—G. Pongor—Gy. Litkei—R. Bognár.)
[9] Számítástechnikai módszerek genetikai vizsgálatokban különös tekintettel a szöveti antigénekre. Szeged, Neumann Kollokvium kiadványa, 1975. 493—500.

[10] Az idegszövet és a lumbális liquor szénhydrát-anyagcseréjének kapcsolatáról. Ideggy. Szemle, Bp., (közlésre elfogadva). (Társszerzők: Molnár L.—Molnár P.—Miklóssy I. Kovács)
[11] A serum és liquor-maradék nitrogén tartalmának prognosticus értéke. Ideggy. Szemle, Bp. (Közlésre elfogadva) (Társszerzők: Miklóssy J.—Molnár L.)
[11a] The prognostic Values of the non-protein Nitrogen Content in the Serum and the CSF. Közlésre előkészítve. (Társszerzők: J. Miklóssy— L. Molnár.)

Egyetemi jegyzetei:

1. Az ODRA—1204 számológép programozási rendszerei, Debrecen, KLTE SzK, 1971.
2. Az ODRA—1204 számológép kezelése, Debrecen, KLTE SzK, 1971.
3. A bővített kiépítésű ODRA—1204 számológép programozása és kezelése, Debrecen, KLTE SzK, 1972. (Mindhárom esetben társszerző: Jékel Pál)

Ruda Mihály publikált munkássága 1968-ban, az MTA III. Oszt. Közleményekben megjelent „Relaxációs pontelhelyezési eljárások" cikkel kezdődik, melyet több, szintén geometriai extremális feladat megoldásával folytatott (Fejes Tóth László sejtéseihez kapcsolódva).
Mint a SZTAKI Valószínűségszámítási Osztályának munkatársa részt vett és önálló eredményeket ért el az ezen az osztályon végzett idősorelemzési és sztochasztikus folyamatok statisztikájára koncentrálódó elméleti és gyakorlati munkában. Ezt tükrözik az 1973—74-ben megjelent cikkei, és a hozzájuk kapcsolódó kórházi morbiditási vizsgálatok számítógépes feldolgozását ismertető dokumentációk. Résztvett az idősorelemzési programcsomag összeállításában.

Ruda Mihály publikációi

1. Time series analysis on CDC 3300.
   Előadás Tusnády Gáborral és Szeidl Lászlóval:
   9. European Meeting of Statisticians, Budapest, 1972. 661—665.
2. A time series analysis program package, Proceedings of the Computer Science Conference, Székesfehérvár, (1973), 329—334.
3. Idősorelemzés I. (társszerzővel)
   MTA SZTAKI tanulmány, 1973.
4. Elsőrendű autóregressziós folyamat paraméterbecsléséről.
   MTA SZTAKI Közlemények, 11. (1973), 27—31.
5. Parameter estimation in the first-order autoregressive process, Biometrika (1974) 61, № 3, 632—633.
6. Kórházi morbiditási vizsgálattal kapcsolatos statisztikai és számítástechnikai meggondolások (társszerzőkkel),
   Számítástechnikai és Kibernetikai módszerek az orvostudományban és a biológiában, 4. Kollokvium, Szeged, 1973.
7. On an estimate for the parameter of a multidimensional stationary Gaussian Markov process and an application of it (társszerzővel), MTA SZTAKI Közlemények, 13 (1974) 21—30.
8. An approach to the hospital morbidity data system development in Hungary, (társszerzőkkel), Symposium on medical data processing Toulouse, 1975. márc. 3—7. XXXI. 1—12.
9. A kórházi morbiditási vizsgálat számítógépes feldolgozásának tapasztalatai és továbbfejlesztése (társszerzőkkel)
   Számítástechnikai és kibernetikai módszerek az orvostudományban és biológiában, 5. kollokvium, Szeged, 1974.
10. Az 1972—73. évi kórházi morbiditási vizsgálat számológépes feldolgozása (1—2. kötet), MTA SZTAKI dokumentáció.
11. Statisztikai és számítástechnikai módszerek alkalmazása kórházi morbiditási vizsgálatokban (társszerzőkkel),
    MTA SZTAKI Intézeti tanulmány (megjelenőben).
12. Relaxációs pontelhelyezési eljárások, MTA III. O. K. 18. (1968.)
13. Körelhelyezések téglapontokon, MTA III. O. K., 19. (1969.)
14. Fejes Tóth László egy sejtéséről, MTA III. O. K. 19. (1969.)
15. Egyenlőtlenségek numerikus bizonyítása I.,
    MTA III. O. K., 19. (1969).
16. Some estimates in connection with the critical path method, Project planning by network analysis, Proceedings of the Second International congress. (1969.).
17. A matematika alkalmazásának egyik lehetséges útja a neveléstudományi kutatómunkában (társszerzővel), Magyar Pedagógia, 1975/1.
18. Egy felezősokszögekre vonatkozó tétel (megjelenőben) MTA III. O. K.

19. Egyenlőtlenségek numerikus bizonyítása II.,
MTA III. O. K., (megjelenőben).
20. Alakzatrendszerek tömörségének vizsgálata (megjelenőben) MTA III. O. K.

Simonovits András 1970-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán. Az egyetem befejezése óta az MTA Közgazdaságtudományi Intézetében dolgozik, jelenleg tudományos munkatársként.
Feladata bizonyos közgazdasági modellek és problémák matematikai elemzése.
[1] dolgozatában azt bizonyította be — Bródy sejtését követve —, hogy dinamikus zárt ÁKM modellben (ÁKM = ágazati kapcsolatok mérlege) a fejlődési ütem relatív hibája lényegében kisebb mint az ár- és a volumenvektorok relatív hibáinak a kétszeres szorzata. [6] dolgozatában az érték termelési árrá alakulásának Marxtól származó, Bródy által modellezett folyamatának konvergenciáját bizonyítja.
[8] dolgozatában igazolja többek között Bródy sejtését, hogy ha az ÁKM együtthatók teljesen függetlenek, akkor a szokásos rutin becslés alábecsüli a bruttó termelés várható értékét. Matematikai formában: legyen A nxn-es, nemnegatív, sztochasztikus elemű mátrix, 1-nél kisebb spektrálsugárral. Legyenek a valószínűségi változók teljesen függetlenek. Ekkor $MI-A^{-1} = I-MA^{-1}$.
[4] dolgozatában áttekinti a szerteágazó irodalmat, és ellenpéldákkal illusztrálja, hogy egyes szerzők túláltalánosították tételeiket. Pozitív eredményeket bizonyít a két-osztályos rendszerekre, végül pedig egy általános sejtést mond ki, amelyet bizonyos esetekben igazol is. A dolgozat írásával egyidőben, de tőle függetlenül Sevcik kanadai kutató is hasonló eredményekhez jutott.
Közös sejtésüket Gittins és Jones angol kutatók általánosították. [5] dolgozatában Bronstein és Veklerov ill. Jaiswal tételeit általánosítja tetszőleges számú igényosztályra és sztochasztikus kiszolgálási időre.
[5.a] egyetemi doktori értekezésében e két dolgozatot foglalja össze. [6] is hasonló területtel foglalkozik: a sor-hossz és a kiszolgálási díjak közötti kapcsolattal — maximálisan általánosítva az eddigi irodalom főbb eredményeit.
Szakdolgozatában, [1], az ún. team-elmélet T. A. Marschak modelljének súlyos matematikai tévedéseire hívja fel a figyelmet. A hibákat kijavítja, de ezzel eltűnik Marschak dolgozatának legérdekesebb eredménye. [2] dolgozata összefoglalást ad a team-elméletről. Kornai Jánossal együtt nemrég fejezték be a [9] dolgozatot, amely a műszaki szabályozás elmélet módszereivel vizsgálja a készletek szerepét a gazdasági stabilizálásában. Mivel a gazdasági életben több (sok) egység egymástól részben függetlenül tevékenykedik, alapvetően módosítani kell a műszaki szabályozás elméleti modelleket — és ez jelentős matematika nehézségeket okoz.

Simonovits András publikációi

1. „Pozitív mátrixok Raleigh-hányadosáról", Szigma, 1969. 1. sz. 76—78. o.
2. „A team-elméletről", Szigma, 1970. 4. sz. 285—302. o.
3. "On Some Properties of a Decentralized Adjustment Process" (kézirat, 1971) p. 27.
4. "Direct Comparison of Different Priority Queueling Disciplines"
Studia Sci. Math. Hungarica 1973. pp. 225—243.
5. "On Discretionary Queueing Disciplines", Proceedings of the Meeting of European Statisticians, Budapest, Bolyai Társ. (megjelenés alatt).
5.b „A kiszolgálási rend optimizálása sorbanállásnál", (egyetemi doktori disszertáció = 4+5)
6. „Megjegyzések a dinamikus ÁKM harmonikus volumen- és árarányainak meghatározásáról", Szigma, 1973. 3. sz. 225—235.
7. "The regulation of Queue-Size by Levying Tolls" (1973 — benyújtva a Management Science-hez) p. 12.
8.a „A Leontief-inverz alá- ill. fölébecslésének egyik okáról", Szigma, 1973. 4. sz. 309—315.
8.b "Note on Underestimation and Overestimation of the Leontief-inverse"
(8.a angol nyelvű változata, elfogadva az Econometrica-nál) p. 12.
9. Kornai Jánossal együtt: Elemi szabályozásról (1974, kézirat).

A Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar megyei Tagozatának 1975. évi rendezvényei:

Február 13.
Szénássy Barna: Megemlékezés Bolyai Farkasról.

Március 12.
Balázs János: Approximáció spline-függvényekkel.

Április 9.
Szénássy Barna: 200 éve született Bolyai Farkas. (TIT-tel közösen).
Rapcsák András: A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása a térszemlélet kialakításában (TIT-tel közösen).

Április 17.
Jan Grandel: Duplán sztochasztikus pontfolyamatok (angolul).
Kárteszi Ferenc: Egy Szele Tibortól eredő véges geometriai probléma tisztázása.
Április 18.
Kárteszi Ferenc: A szögfogalom tanításának nehézségeiről és azok feloldásáról.
Április 30.
René Deheuvels: Konform invariánsok (franciául).
Május 8.
Huhn András: Gyengén disztributiv hálók és alkalmazásaik.
Május 27.
A. J. Lawrance: Kétváltozós Poisson-folyamatok (angolul).
Június 10.
Manfréd Stern: A hálóelmélet egy alkalmazása a funkcionálanalízisben.
Június 12.
P. L. Kannappan: On measures of information.
Augusztus 28—szeptember 2.
Differenciálgeometriai Kollokvium.
Október 17.
Bártfai Pál: Konvex analízis és matematikai statisztika.
Október 18.
Walter Harnau: Többértékű logikák.

KÖNYVISMERTETÉS

JEAN BRUNIN: LOGIQUE BINAIRE DES CIRCUITS CÂBLÉS ET DES PROGRAMMES ENREGISTRÉS (TOME 1: SYSTÈMES COMBINATOIRES)

(Institut d'Informatique de Namur, 1975. — 325 oldal)

A belga intézet tervezett kiadványsorozatának (melynek első kötetét ismertetjük) előszavában olvashatjuk: Az első két kötet (J. Brunin) a Boole-algebrák elemeivel, valamint a hardware és software alkalmazásokkal foglalkozik, a 3. (H. Leroy) programozási nyelvekkel, módszerekkel. További kötetek vannak előkészületben, az információs rendszerek adatstruktúra-modelljeiről, a COBOL programozási nyelvről, egy költségvetés-tervezési rendszerről és számos egyéb területről.

A jelen kötet első fejezete a Boole-algebrákkal foglalkozik. Az alapfogalmakon kívül számos gyakorlati módszert ad Boole-függvények egyszerűbb alakra hozására.

A 2. fejezet különböző funkciójú elemi logikai áramkörök különféle (relékkel, főleg azonban félvezetőkkel, ill. integrált áramköri elemekkel történő) megvalósításait tárgyalja.

A 3—5. fejezetek kombinációs hálózatok software és hardware problémáival foglalkoznak (míg a szekvenciális hálózatok hasonló problémái a 2. kötetbe kerültek). Ismertetésre kerülnek pl. kódoló, összeadó-kivonó eljárások, döntéstáblák és logikai egyenletek programozásai.

A fejezetek végén számos, meglehetősen különböző jellegű és nehézségű feladat található, összesen közel száz darab.

A kötet elsősorban a számítógépekkel, digitális áramkörökkel stb. foglalkozó mérnökök érdeklődésére számíthat.

RECSKI ANDRÁS

FARKAS IRÉN—FARKAS MIKLÓS: INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA

Akadémiai Kiadó, Budapest — Adam Hilger Ltd., London, 1975. 205 old.

A lineáris algebrával ismerkedni kívánó olvasó — a nemzetközi könyvkiadást figyelembe véve — sok jó könyv között válogathat. (Sajnos a választék bőségéről már le kell mondania annak, aki a bevezető ismerkedésen túlmenő betekintést kíván kapni az elméletbe, vagy ennek speciális fejezeteivel kíván megismerkedni). A magyar könyvkiadás hosszú ideig mostohán kezelte a lineáris algebrát, ezt a gyakorlati alkalmazásokban oly fontos szerepet játszó elméletet. Annál örvendetesebb, hogy az utóbbi években több lineáris algebrával foglalkozó monográfia jelent meg magyar szerzők tollából.

Farkas Irén és Farkas Miklós könyve, mint azt címe is mutatja, a lineáris algebra bevezető ismertetései körébe tartozik. A hat fejezetből álló könyv első fejezete a közönséges tér megszokott vektoralgebrájával foglalkozik, jól érzékeltetve azonban a bevezetett fogalmak (bázis, koordináták) általánosabb érvényét. A második fejezet a komplex számokat a valós számok rendezett számpárjaiként vezeti be, majd ezeknek a síkbeli (a Gauss-síkon való) ábrázolását mutatja meg. A harmadik fejezet a mátrixalgebra címet viseli; tartalma a szokásos mátrixaritmetika és a legfontosabb speciális (így a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus, hermitikus és ferdén hermitikus) mátrixok, a rendezett szám n-esek lineáris tere, a determinánselmélet — a szerzők a determinánselméletnek egy olyan kifejtését adják, amely nem igényel kombinatorikai előkészítést —, az inverz mátrix és a rang definíciója. A negyedik fejezet a lineáris egyenletrendszerek elméletét tárgyalja. E fejezet helyet ad a lineáris programozás alapfeladatának is. Az ötödik fejezet tartalmazza a lineáris és az euklideszi tér axiomatikus tárgyalását. A hatodik fejezet a lineáris vagy euklideszi teret önmagába leképező lineáris operátorokat tárgyalja. Külön hangsúlyt kapnak a szimmetrikus operátorok és kapcsolatuk a kvadratikus alakokkal.

Farkasék könyve eltér a hasonló címet viselő más művektől. Formailag az eltérés abban nyilvánul meg, hogy — előismeretet nem feltételezve — anyagaként a könyv a közönséges tér vektoralgebráját, a komplex számok ismertetését, valamint a determinánselméletet is tartalmazza, s ez utóbbit nem a megszokott módon. Az eltérés lényege azonban az anyag felépítésében és induktív tárgyalásmódjában rejlik. Az absztrakt lineáris és euklideszi tér definíciójával pédául csak az 5. fejezetben találkozik az olvasó. Addig azonban egy sor konkrét modellen — így a közönséges sík és tér vektorai, a komplex számok, a rendezett szám n-esek, a mátrixok példáján — már jól megismerkedhetett a lineáris és az euklideszi tér fogalmaival és szerkezetével.

A könyv legfőbb erénye éppen az anyag egységes elv szerinti felépítése és következetesen végigvitt induktív tárgyalásmódja. Nem biztos, hogy vezetésével a kezdő könnyebben jut el a lineáris algebra alapismereteihez, az elméletben jártas olvasó azonban biztosan élvezettel fedezi fel a gondosan megírt könyv erényeit és szépségeit.

LEE ANNA

ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IN DER DDR

(VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1974. p. 756.)

A terjedelmében és külsejében egyaránt impozáns kiadvány összegező jellegű: a Német Demokratikus Köztársaság megalakulásának 25. évfordulója alkalmával ismerteti az ottani matematikai élet alakulását, továbbá bemutatja a kelet-német tudósok által a matematika különböző területein elért újabb eredményeket.

A Tudományos Akadémia Matematikai Osztálya elnökének, Karl *Schröter*nek a kiadvány célját megjelölő rövid bevezetője, majd a kiadó ezt követő kissé részletezőbb előszava (mely többek között vázolja a matematika-oktatás korszerűsítését célzó reformokat is) után sorra kerülnek — külön fejezetekre bontva — azok a tárgykörök (szám szerint 27), melyekben nemzetközi téren figyelemre méltó eredményeket értek el az NDK matematikusai. E tárgykörök kiterjednek az elméleti kutatásokra, a matematikával ölelkező határterületekre (pl. áramlástan, relativitáselmélet), az elméleti eredmények népgazdasági alkalmazásaira, valamint a kibernetikával és a matematikai gépekkel kapcsolatos vizsgálatokra.

A könyv nem olyan — márcsak a tárgykörök sokfélesége miatt sem —, amilyent egyfolytában végig szoktunk olvasni, de a szerkesztőknek nem is ilyen kiadvány összeállítása volt a célja. Inkább reprezentálni akarja azt a munkát, ami a matematika terén folyt a közel múltban az NDK-ban. A kiadvány ezek ellenére hasznos a matematika különböző területein búvárkodók számára: egyrészt összefoglalóan láthatjuk az egyes területeken elért német eredményeket, másrészt — a fejezetek végén szereplő gazdag bibliográfiák révén — az ezeket tárgyaló értekezések listáját, megjelenési helyük és idejük koordinátáival.

A szerkesztő bizottság és az egyes fejezetek íróinak a száma közel jár a százhoz. Nyilvánvaló, hogy ilyen nagyszámú író-gárda esetén nehéz megteremteni az optimális arányokat, egységesíteni a szempontokat. A kiadvány külön érdeme, hogy törekszik a kellő mértéktartásra, és — amennyire ezt meg tudjuk ítélni — az egyes fejezetek terjedelme tükrözi a tárgyalt diszciplina súlyát, a benne elért eredmények gazdagságát.

Az egyes cikkek az érintett tárgykör rövidre fogott előtörténetét, kialakulását is vázolják, így bepillantást engednek a régebbi matematika-történeti adatokba. Néhány fejezet anyaga tanúsítja azt is, hogy igen hatékony volt az utóbbi évtizedekben a kelet-német és a magyar matematikusok együttműködése több területen (pl. az absztrakt algebrában, a valószínűségszámításban stb.), a magyar vendégprofesszorok pedig eredményes munkát végeztek a német egyetemeken néhány matematikai tárgykör kialakításában, népszerűsítésében.

Mindazoknak a figyelmébe ajánlhatjuk ezt a gondosan szerkesztett kiadványt, akik áttekintő képet óhajtanak nyerni az NDK sokrétű matematikai életéről, gazdag könyv- és folyóirat kiadásáról, a negyedszázad kiemelkedőbb rendezvényeiről, az ottani matematikai versenyekről, és főleg a matematikai eredményekről.

SZÉNÁSSY BARNA

SZENDREI JÁNOS: ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Tankönyvkiadó 1975.

Az utóbbi évtizedben az algebra és számelmélet fejlődése ugrásszerűen meggyorsult, és az érdeklődők tábora igen nagy mértékben kiszélesedett. A megnövekedett érdeklődés elsősorban annak köszönhető, hogy az alkalmazásokban e területek fokozottabban jutnak szóhoz. Az algebra és számelmélet iránt érdeklődők részére számos kitűnő idegen nyelvű könyv áll rendelkezésre, de magyarnyelvű szakirodalomban csak az utóbbi években indult meg a fellendülés. Sokáig csak Szele Tibornak az ötvenes évek elején íródott könyve jelentette az egyetlen magyarnyelvű forrást (nem számítva

az algebra és számelmélet egyes speciális fejezeteivel foglalkozó könyveket), amely az akkori elsőéves egyetemi anyagot tárgyalta. Aki elmélyültebb tanulmányokat akart folytatni, az a különféle egyetemi jegyzeteket vehette kézbe, ha egyáltalán hozzá tudott jutni. Sajnos e többségükben kiváló jegyzetek egyike sem jelent meg könyvalakban. A 70-es években azután egymásután láttak napvilágot bevezető algebra könyvek, amelyek elsősorban középiskolások számára készültek. Az első, komolyabb rendszeres tanulmányokat lehetővé tevő magyarnyelvű könyv Szendrei János kitűnő könyve, amelyet a tanárképző főiskolák hallgatói részére készített. A könyv azonban sokkal szélesebb olvasótáborra számíthat, jobb képességű középiskolás diákoktól kezdve mindazoknak melegen ajánlható, akik a számelmélet és algebra alapjaival szeretnének megismerkedni.

Mint ahogy a szerző a könyv előszavában írja, az anyag összeállításánál a tanárképző főiskolák 1972-es képzési tervét vette alapul. Így a szerző bizonyos fokig kötve volt, a könyvet úgy kellett felépíteni, hogy a klasszikus algebra, kombinatorika jó néhány eredményét is tárgyalja. Ez véleményem szerint megnehezítette a munkát, de ennek ellenére a szerző az anyag összeválogatását kifogástalanul oldotta meg. Egyébként meggyőződésem, hogy az anyag kiválogatása másodlagos, az elsődleges, hogy hogyan mutatjuk azt be. Elveszünk-e az egyes eredmények sűrűjében, vagy a könyv elolvasása után gazdagabbak leszünk-e egy szemlélet móddal. Szendrei János könyvét elolvasva, állíthatom, hogy legfőbb erénye az, hogy a modern algebra szemlélet-módjával ajándékozza meg az olvasót. Amellett, hogy számos ismerettel leszünk gazdagabbak, bepillantást nyerünk a modern algebra világába.

A könyv tizenegy fejezetre oszlik. Mint ahogy a szerző is rámutat, ezek sorrendje nem feltétlenül rögzített. Az első fejezet a halmazelméleti alapismereteket tárgyalja. Igen szerencsésnek tartom, hogy a halmazokkal való műveleteket a szerző kihangsúlyozza. Nagyon helyesnek tartom, hogy az olvasó viszonylag hamar megismerkedhet a rendtípusokkal, ill. rendszámokkal. (Sajnos egyetemi képzésünkben erre eléggé későn kerül sor.) A fejezetet a 17. § zárja le, amely a halmazelméleti antinomiákról egy érdekfeszítő olvasmány.

A második fejezet a kombinatorika alapfogalmait tárgyalja. Úgy érzem jó lenne, ha a fejezet anyagát a hallgatók már a középiskolában megismernék.

A harmadik fejezetben az alapvető algebrai fogalmakat ismerhetjük meg. Itt a 3. §-ban talán jó lett volna az egyes konkrét struktúra típusok definiálása előtt is néhány példát mutatni. A fejezet egyik leglényegesebb fogalomalkotása a homomorfizmus.

A negyedik fejezet az euklideszi gyűrűket tárgyalja. Először az egész számok, majd a polinomgyűrűk tárgyalása után, közös általánosításként érkezünk el az euklideszi gyűrű értelmezéséhez. Az egyértelmű prímfelbontás tárgyalásánál nem ártott volna rámutatni, hogy a szereplő fogalmak, ill. tételek a szorzásra „épülnek", ezek lényegében félcsoportelméleti tételek.

A prímszámelmélet alapjaival is ebben a fejezetben ismerkedhetünk meg. Szerepel bizonyítás nélkül néhány mély tétel a prímszámok számának becslésére vonatkozóan. A számelméleti függvények sorából hiányolom a Moebius-féle függvényt. (Talán a tökéletes számok rovására is érdemes lenne tárgyalni a Moebius-féle megfordítási formulát.) Az oszthatósági szabályokat átengedném a középiskolának.

Az ötödik fejezetben a Gauss-féle gyűrűkkel ismerkedhetünk meg, amelyek az euklideszi gyűrűknek fontos általánosításai.

A hatodik fejezet a komplex számoké. A komplex számok bevezetése a legalgebraibb, nélkülöz minden mestersségesnek tetsző konstrukciót.

A hetedik fejezet a vektorok sokirányú szerepével ismertet meg, a fejezet végére eljutunk a vektortér fogalmához. A lineáris transzformációk azután elvezetnek a mátrixokhoz, amelyekkel a nyolcadik fejezet foglalkozik. A következő fejezet az algebrai egyenleteket, ill. egyenletrendszereket tárgyalja. Úgy érzem a harmad és negyedfokú egyenletekről jobb lenne kevesebbet mondani. Helyes, hogy a 21. §-ban egyenletek közelítő megoldásába kapunk bepillantást.

A tizedik fejezetben ismerkedhetünk meg behatóbban az algebrai struktúrákkal. A nagyszámú példa megkönnyíti az olvasó számára az absztrakt fogalmak megértését. Igen élvezetes formában bepillantást kapunk a Galois-elméletbe, és így lehetőség nyílik a geometriai szerkeszthetőség tárgyalására. A fejezet végén érdemes lett volna bizonyítani, hogy minden véges Boole-algebra izomorf egy halmaztesttel, példát szolgáltatva egy gyönyörű struktúratételre. A fejezetből hiányolom még a ciklikus csoportokat, hiszen segítségükkel példát mutathatunk az algebra alapvető céljára, a struktúrák leírására.

Végül a 11. fejezet a számfogalom felépítését tárgyalja. Itt külön kiemelendő az 5. §, amely az algebrákkal foglalkozik, és bizonyítva szerepelteti a híres Frobenius tételt.

Összefoglalva, Szendrei János könyvével magyarnyelvű irodalmunk egy kitűnő könyvvel lett gazdagabb. Témaválasztása elősegíti a helyes szemlélet-mód kialakulását. Az anyag kiválasztására vonatkozó néhány apróbb észrevételem csupán javaslat az igen valószínű későbbi kiadások részére. A könyv megírása biztosítja, hogy az olvasó egy mindvégig élvezetes olvasmányt kapjon kézhez. Megfontolandónak tartom, a könyv esetleges idegennyelvű kiadását is.

Schmidt Tamás

GÁLL ÉVA: VIGYÁZAT! CSAK GYEREKEKNEK

Az „Utazások Matematikaországban" sorozat egyik részeként jelent meg 1975-ben.

A sorozatnak— és ezzel összhangban a könyv szerzőjének is — legfontosabb célja, hogy a gyermekeket bevezesse, sok-sok játékos elemet tartalmazó feladattal, a matematika néhány problémakörébe, s eközben hozzásegítsen a problémamegoldó gondolkodásmód kialakulásához.

Gáll Éva bevezetőjéből kitűnik, hogy főként azt szeretné, ha a gyerekek önállóan küzdenének meg a feladatokkal. Ami azonban nem zárja ki azt a lehetőséget, hogy a pedagógusok ne használhatnák fel munkájuk során az értékes ötleteket, valamint egy-egy téma feldolgozásában a könyv logikai menetét.

A narrátor szöveget egy gyermek mondja el, amivel egyrészt motivál, másrészt a szükséges mélységig értelmezi a feladatokat. Önálló feldolgozásra a következő témaköröket javaslom:

tükrözés, eltolás, nagyítás, az előző három variációja, egyenlőtlenség-rendszer megoldása és kombinatorikai feladatok.

Inkább közös mint egyéni feldolgozásra az alábbi fejezeteket ajánlanám.

1. Helymeghatározás egy rendezett számpár segítségével. Ebben a fejezetben egyrészt didaktikailag nem kellően átgondoltnak találom az x, y tengelyek bevezetését. Másrészt nem matematikailag indokolt a koordináta tengelyek negatív felének használata.

2. Párhuzamos és merőleges egyenesek a koordináta-rendszerben. Ennek a fejezetnek a sikeres feldolgozásához megfelelő alapismeretekre van szükség.

3. A számrendszerhez kapcsolódó részt szervesen be lehet illeszteni a téma órai feldolgozásába, akár a probléma felvetéseként is. (Az utóbbi megállapítás nemcsak erre a fejezetre vonatkozik.)

4. A szimmetriával kapcsolatos feladatok megoldása is nyilván csak a szimmetria fogalmának ismerete mellett lehetséges.

Szinte minden témakör után sok gyakorló feladat közül válogathatunk. Az összes feladat megoldása nem célszerű, mert nem minden esetben hoz új gondolatot, alaposabb megértést.

Összegezve: a könyvet jól felhasználhatónak tartom a matematika tanításában és az önálló matematika tanulásban is.

Reméljük a sorozat következő részére nem kell sokáig várnunk!

CSAHÓCZI ERZSÉBET

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat beérkezett: 1976. VII. 14 — Terjedelem 18,5 (A/5) ív
76-3050 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

CONTENTS

J. MERZA: The mathematical work of A. Rapcsák 1
L. FEJES TÓTH: Remarks on a dual of Tarski's plank problem 13
P. TURÁN: Some open problems of approximation theory 21
Y. R. SHOENFIELD: Martin's axiom 77
K. TANDORI: Report on investigations in analysis in Hungary 87
K. SZILÁRD: Derivatives and differential equations defined at non-negative integer points 105
J. SZABADOS: Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials 115
TREN QUÝ TIÊN and Anna Lee: On a class of regular rings 119
A. DOBÓ and K. SZAJCZ: On some probabilistic problems connected with evaluation of tests ... 129
MÁRTA, NAGYNÉ SZILVÁSI: Metrics and connections on the fibred space of tangent vectors 137
P. KISS: A generalization of a problem in number theory 145
L. VARECZA: A new remark on the pretext of a textbook on algebra for schoolchildren 151
E. T. SCHMIDT: Remarks to the answer of L. Varecza 159
Report on the M. Schweitzer Competition in 1975 161
Problems 181
Society life 187
Book reviews 207

СОДЕРЖАНИЕ

Иожеф Мерза: Андраш Рапчак 60 лет 1
Ласло Фейеш Тот: Замечания к одной дуальной проблеме полос Тарского 13
Пал Туран: О некоторых открытых проблемах теории приближений..... 21
Й. Р. Шенфильд: Аксиома Мартина 77
Карой Тандори: Очерк по изучению положения относительно тематики отечественных исследований по математическому анализу 87
Карой Силард: О проивздных и дифференциальных уравнениях функций определенных для неотрицательных челих чисел 105
Иожеф Сабадош: Об асимптотическом поведении ортогональных многочленов 115
Чень Куй Тиен—Анна Ли: Об одномклассе регулярных колец 119
Андор Добо—Карой Сайц: О проблемах теории вероятнистей связанных с оценкой экзамнационных лиетов 129
Марта Силваши Надьнэ: Метрики и связиости в расслоенном пространстве касающихся векторов 137
Петер Киш: Обобщение одной проблемы теории гисал 145
Ласло Вареца: Еще раз по поводу книги по алгебре предназнагенной для школьников 151
Тамаш Э. Шмидм: Замегания к ответу Вареца 159
Доклад о мемориальном математическом конкурсе имени Миклоша Швейцера 1975-ого года 161
Задари 181
Из жизни общества 187
Обзор книг 207

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564

3.42.045

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

25. évfolyam, 1974

3-4

9

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1977. június — 25. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Császár Ákos.
Szerkesztők: Fejes Tóth László, Lovász László, Pelikán József, Rapcsák András, Révész Pál, Surányi János.
Szerkesztőség: Budapest 1061 VI., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1 és *bármely postahivatalban*. Pénzforgalmi jelzőszám: KHI 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010 Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185-680.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TURÁN PÁL (1910. aug. 18—1976. szept. 26.) 211
TURÁN PÁL dolgozatainak jegyzéke 212
TURÁN PÁL matematikai munkássága I.
1. SZABADOS JÓZSEF: Approximációelmélet 223
2. ERDŐS PÁL és SZALAY MIHÁLY: Statisztikus csoportelmélet és partícióelmélet 229
3. SIMONOVITS MIKLÓS: Turán Pál hatása a gráfelméletre 239
KALMÁR LÁSZLÓ (1905. márc. 27.—1976. aug. 2.) 251
ERDŐS PÁL: Néhány személyes és matematikai emlékem Kalmár Lászlóról 253
PÉTER RÓZSA (1905. febr. 17.—1977. febr. 16.) 257
TURÁN PÁL: Megemlékezés a fasizmus matematikus áldozatairól 259
BÖRÖCZKY KÁROLY: Gömbkitöltések állandó görbületű terekben I.
1. A „sűrűség" fogalma az n-dimenziós hiperbolikus térben 265
CSÁSZÁR ÁKOS: Szögek és szögfüggvények 307
TEMESVÁRI ÁGOTA: Távolságok hatványösszegének extrémumáról 329
RUZSA IMRE: Előre vagy hátra a matematikatanítás reformjának útján 343
Jelentés az 1976. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 353
Feladatrovat 370
Társulati élet 377
Könyvismertetés 417

TURÁN PÁL

1910. aug. 18.—1976. szept. 26.





Mélyen megrendültünk mindannyian, amikor tudomásul kellett vennünk, hogy Turán Pál nincs többé. Ha tudtuk is, hogy súlyosan beteg, elképzelhetetlennek tűnt, hogy ez a ragyogó elme, ez az állandóan kutató szellem elhagyjon bennünket, akik állandó inspirációt merítettünk jelenlétéből.

Budapesten született 1910 augusztus 28-án, iskoláit is itt végezte, 1933-ban a Budapesti Tudományegyetemen mennyiségtan-természettan szakos középiskolai tanári, majd 1935-ben bölcsészdoktori oklevelet nyert. Állás nélkül, pusztán nehézfejű diákok korrepetálásából tengette életét 1938-ig, amikor teljes óraszámú helyettes tanár lett az Országos Rabbiképző Intézet gimnáziumában. A mindinkább fasizálódó kormányhatalom őt is karmai közé ragadta s felszabaduláskor csak egyedül ő úszta meg élve a rémuralmat 4 testvér közül. Turán még ilyen képtelen körülmények között is állandóan dolgozott, mégpedig rendkívüli eredménnyel, s az addig elmaradt elismerés külső jelei is mutatkozni kezdtek: 1945-ben az Egyetem magántanárrá habilitálta, 1947-ben a Koppenhágai Egyetem hívta meg, majd az Institut for Advanced Study meghívására Princetonban adott elő 1948 augusztusáig, amikor minden marasztalás ellenére hazatért és itt végre 1949 elején az ELTE professzora lett. Kétszer kapott Kossuth-díjat (1948, 1952), a Magyar Tudományos Akadémia 1948-ban levelező, 1953-ban pedig rendes tagjai közé választotta.

Turán Pált kétségkívül a matematikai kutatók élvonalának legjobbjai között tartotta számon a nemzetközi tudományos közvélemény. Ez a megbecsülés tükröződik a nagyszámú, egész kontinensekre kiterjedő meghívásokból, tudományos kitüntetésekből és abból is, hogy lengyel, holland és amerikai kutatók hazájukban kapott ösztöndíjak alapján jöttek hozzá Budapestre, hogy itt Turán vezetése mellett intenzifikálják saját kutatásaikat. Tömören: Turán Pál a szó szoros értelmében világhírű tudós volt.

Úgy érzem, hogy még ennél is több volt: *művész*, a matematikai invenció művésze, akit éles logikáján, és virtuóz technikáján túl matematikai invenciója, esztétikai érzéke, elmélyültsége néha még akkor is a helyes ötletekre tudott vezetni, ha egy probléma a megoldhatatlanságig bonyolultnak látszott. Az ilyen esetekben, ha

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

egyáltalán valami, csak a nagy összefüggéseket felismerő elmélyedés és az új, még senki által sem végigjárt út meglátása vezethet célhoz. Az új ötletek, új eljárások tömegét lelte meg, mintha az lett volna a jelmondata: járt utat a járatlanért hagyd el. És valóban, munkáinak szinte célja volt, hogy ne csak megoldjon egy-egy szép problémát, hanem virtuóz számítási technikája segítségével *módszert* teremtsen egyéb vizsgálatok számára, amelyek az ismert ejárási módok szerint aligha vezettek volna eredményre. Ez az originalitása tette lehetővé, hogy elsőként alkalmazzon valószínűségszámítási módszereket számelméleti vizsgálatokra. Így érte el azt, hogy „Az analízis egy új módszeréről" című, németül és kínaiul is megjelent könyvében a matematika legkülönbözőbb, egymástól távolesőnek látszó területeit kapcsolja össze, egyetlen általa talált matematikai strutúrára vezesse vissza.

Hatalmas volt problémafelvető készsége; sohasem mulasztott el egyetlen alkalmat sem, hogy tudományos problémáit másokkal ne közölje szóban, levélben vagy nyomtatásban. Ilyen módon még saját rendkívüli képességein túl, mások ösztönzésével és támogatásával is szolgálta a tudományos haladást, az objektív igazság megismerését. Ma is nyomdára vár 87 approximáció-elméleti problémája, amelyeket már betegen írt le, hogy további kutatásokra buzdítsa ennek a témakörnek a kutatóit. Szívesen dolgozott együtt másokkal, amiről számos társszerzővel írt munkája tanúskodik és még nagyobb azoknak a száma, akik munkájuk indítékainak felsorolásában Turán Pálra hivatkoznak. Forró tudományos légkört teremtett maga körül, amelyben minden arravaló fiatalemberben kifejlődött a felfedezés öröme átélésének a képessége, az igazságok felderítésének a vágya. Intézetünk tudományos munkatársainak úgyszólván mindegyikére közvetlenül vagy közvetve hatott matematikusi egyénisége, amely aktívan támogatott minden épkézláb kutatói munkát, csupán a dilettantisztikus törekvésekkel helyezkedett szembe, mivel ezek alig szolgálták az igazi haladást.

Minden külső gátlást igyekezett legyőzni saját belső erői segítségével. Amikor a fasiszta barbárság arra kényszerítette, hogy villanydrótokat húzzon oszlopokra, azzal védekezett a kaján elnyomás ellen, hogy matematikai gondolataival foglalkozott. Egyszer azt mondta nekem: legjobb ötleteim dróthúzás közben támadtak, mert akkor magamban lehettem és senki sem vette észre, hogy gondolkodom. — Alattomos betegsége nyilván befolyásolta ugyan képességei teljes kifejtését, de nem törte meg az utolsó percig sem alkotói kedvét. Fáradtan, betegen is tovább dolgozott, amíg csak erre fizikailag képes volt. Őreá is illenek Bartók Béla halálos ágyán mondott szavai: azt sajnálom, hogy tele poggyásszal kell elmennem.

Turán Pál is tele poggyásszal hagyott itt bennünket, magyar matematikusokat. Vigaszul tanítványait hagyta reánk, a fiatal kutatók egész seregét, akik az ő nyomain járva keresik az újat, a lényegeset, a minden múló divattól független igazságot, amelynek ő mindig törhetetlen bajnoka volt.

ALEXITS GYÖRGY

TURÁN PÁL DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1. Über das zweite Hauptproblem der „Factorisatio Numerorum". (Szekeres Györggyel), Acta Litt. ac Scient. Szeged 6 (1933) p. 143—154.
2. On a problem in the elementary theory of numbers. (Erdős Pállal), Amer. Math Monthly 41 (1934) p. 608—611.
3. Az egész számok prímosztóinak számáról. Math. és Fiz. Lapok (1934) p. 103—130.
4. On a theorem of Hardy and Ramanujan. Journ. of the Lond. Math. Soc. 9 (1934) p. 274—276.
5. Über die arithmetischen Mittel der Fourierreihen. Journ. of the London Math. Soc. 10 (1935) p. 277—280.

6. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan. Journ. of the Lond. Math. Soc. 11 (1936) p. 125—133.
7. Ein zahlentheoretischer Satz. (Erdős Pállal), Mitteilungen des Forschungsinstituts für Math. und Mech. Tomsk, Bd. I. p. 101—103.
8. Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes (Erdős Pállal), Mitt. der Forsch. Inst. für Math. und Mech. Tomsk Bd. I. (1935) p. 144—147.
9. On some sequences of integers. (Erdős Pállal). Journ. of the Lond. Math. Soc. 11 (1936) p. 261—264.
10. On interpolation I. (Erdős Pállal), Ann. of Math. 38 (1937) p. 142—155.
11. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression I. Acta Litt. ac Scient. Szeged 8 (1937) p. 226—235.
12. Über den Blochschen Satz. (Grünwald Gézával), Acta Litt. ac Scient. Szeged 8 (1937) p. 236—240.
13. Egy szélsőértékfeladat a determinánselméletben. (Szekeres Györggyel), Math. és Term. Tud. Értesítő (1937) p. 796—806.
14. Über Interpolation. (Grünwald Gézával), Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1938) p. 137—146.
15. Über die monotone Konvergenz der Cesáro-Mittel bei Fourier- und Potenzreihen. Proc. of the Cambr. Phil. Soc. 34 (1938) p. 134—143.
16. On interpolation II. (Erdős Pállal), Ann. of Math. 39 (1938), p. 702—724.
17. Über die Partial-summen der Fourierreihe. Journ. of the London Math. Soc. (1938) p. 278—282.
18. Über die Ableitung von Polynomen. Compositio Math. (1939) p. 88—95.
19. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression II. Acta Litt. ac Scient. Szeged Bd. 9 (1939) p. 187—192.
20. On uniformly dense distribution of certain sequences of points. (Erdős Pállal), Ann. of Math. Vol. 41 (1940) p. 162—173.
21. Determinánsokra vonatkozó szélsőértékfeladatok. Math. és Term. Tud. Értesítő (1940) p. 95—105.
22. On interpolation III. (Erdős Pállal), Ann. of Math. Vol. 41 (1940) p. 510—553.
23. Über die Verteilung der Primzahlen I. Acta Litt. ac Scient. Szeged (1941) p. 81—104.
24. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. Math. és Fiz. Lapok (1941) p. 436—452.
25. On a problem of Sidon in additive number-theory and on some related problems. (Erdős Pállal), Journ. of London Math. Soc. 16 (1941) p. 212—215.
26. Über die Wurzeln der Dirichletschen L-Funktionen. Acta Litt. ac Scient. Szeged T. X. (1943) p. 188—201.
27. On rational polynomials. Acta Univ. Szeged (1946) p. 106—113.
28. On a theorem of Littlewood. Journal of the London Math. Soc. (1946) p. 268—275.
29. Sur la théorie des fonctions quasi-analytiques. Comptes Rendus Paris, (1947) p. 1750—1752.
30. On the gap-theorem of Fabry. Hungarica Acta Math. (1947) Bd. I. p. 21—29.
31. On Riemann's hypothesis. Acad. de Sciences de l'URSS Bull. (1947) p. 197—262.
32. On power—series whose coefficients form a multiply monotonic sequences. Lőw Immanuel emlékkönyv. (1947) p. 300—305.
33. On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mat.-Fys. Meddelelses. Bd. XXIV. No. 17 (1948) p. 1—36.
34. On certain exponential sums. Indagationes Math. Vol. X. fasc. 2. (1948) p. 343—352.
35. On the strong summability of the Fourier-series. Journ. of Indian Math. Soc. Vol. XII. (1948) p. 8—12.
36. On some new questions on the distribution of prime-numbers. (Erdős Pállal), Bull. of Amer. Math. Soc. Vol. 54 (1948) p. 371—378.
37. On some example in the theory of power series. Bull. of Amer. Math. Soc. Vol. 54 (1948) p. 932—936.
38. On a problem in the theory of uniform distribution. (Erdős Pállal), Indagationes Math. Vol. X. fasc. 5 (1948) p. 370—378 és 406—413.
39. On Descartes—Harriot's rule. Bull. of Amer. Math. Soc. (1949) Vol. 55, p. 797—800.
40. On the distribution of real roots of almost periodical polynomials. Publ. Math. Debr. T. I. Fasc. I. (1949) p. 38—41.
41. Megemlékezés. Matematikai Lapok (1949) I. 1. füzet, p. 3—16.
42. Remark on a theorem of Fejér. Publ. Math. Debr. T. I. Fasc. 2 (1949), p. 95—97
43. Fejér Lipót matematikai munkássága. Matematikai Lapok (1949) I. 3. füzet p. 160—170.
44. On a new method in the analysis with applications. Casopis pro pest. mat. a fys. roc. 74 (1949) p. 123—131.

45. On the distribution of roots of polynomials. (Erdős Pállal), Ann. of Math. Vol. 51 (1950) p. 105—119.
46. On the theory of mechanical quarature. Acta Szeged 1950. T. XII. part A. p. 30—37.
47. A számelmélet újabb eredményei a Szovjetunióban. Mat. Lapok (1950), I. 4. füzet. p. 243—266.
48. On the remainder-term of the prime-number forma. 1. Acta Math. Acad. Sci. Hung. T. I. Fasc. I. (1950) p. 48—63.
49. On the zeros of the polynomials of Legendre. Casopis pro pest. mat. a fys. roc. 75 (1950) p. 113—122.
50. On the remainder-term of the prime-number formula, II. Acta Math. Hung. T. I. Fasc. 3—4. (1950) p. 155—166.
51. On approximative solution of algebraic equations. Publ. Math. Debr. T. II. Fasc. 1. (1951) p. 26—42.
52. A note on Fermat's conjecture. Journ. of the Indian Math. Soc. Vol. XV. Part A (March—June) (1951), Memorial Volume to S. Pillai, p. 47—50.
53. On a certain point of the kinetical gas theory. (Egerváry Jenővel), Studia Math. (1951) p. 170—180.
54. On Carlson's theorem in the theory of zeta-function of Riemann. Acta Math. Hung. T. II. Fasc. 1—2. (1951) p. 39—73.
55. Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról. A MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. I. köt. 1. füzet (1951) p. 279—287.
56. A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről. (Egerváry Jenővel), A MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. I. köt. 2—4. füz. (1951) p. 303—314.
57. Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére. (Rényi Alfréddel), A MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. I. köt. 2—4. füz. (1951) p. 369—370.
58. A függvényfogalom bevezetéséről. Litografált K. M. kiadás. (1952).
59. Az egész számok bizonyos sorozatairól. Középisk. Mat. Lapok. VIII. (1954) p. 33—41.
60. On an application of the typical means in the theory of zeta-function of Riemann. Comm. du Sém. Math. de l'Univ. de Lund. Tome supp. ded. a M. Riesz (1952) p. 239—252.
61. On a property of lacunary power-series. Acta Litt. ac Scient. T. XIV. fasc. 4 (1952) p. 209—218.
62. On a trigonometrical sum. Ann. de Soc. Pol. de Math. T. XXV. (1952) p. 155—161.
63. Az analízis egy módszerének újabb alkalmazásairól. A MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. II. köt. (1952) p. 145—153.
64. Sur l'algèbre fonctionelle. Comptes Rendus du Prem. Congr. des Math. Hong. p. 267—290.
65. On the zeros of polynomials. (Rényi Alfréddel), Acta Math. Hung. T. III. fasc. 4. (1952) p. 275—284.
66—67. Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól. (Über eine neue Methode der Analysis und ihre Anwendungen). Könyv, megjelent magyarul és németül a MTA kiadásában (1953).
68. Egy Steinhaus féle problémáról. Mat. Lapok IV. évf. 4. (1953) p. 263—278.
69. A függvénytan és sorelmélet bizonyos érintkezési pontjairól. ELTE TTK évkönyve 1952—53. p. 5—13.
70. On the theory of graphs. Coll. Math. Vol. III. (1953) fasc. 1. p. 19—30.
71. On a problem of K. Zarankiewicz. (T. Sós Verával és Kővári Tamással), Coll. Math. Vol. III. (1954) Fasc. 1. p. 50—57.
72. Hermite-expansion and stripe for zeros of polynomials. Archiv der Math. Vol. V. (1954) fasc. 1—3. p. 148—152.
73. A kínai matematika történetének egy problémájáról. Mat. Lapok V (1954) p. 1—6.
74. A Riemann-féle zeta-függvény gyökeiről (székf. előadás). A MTA III. Oszt. Közl. IV. (3) (1954) p. 357—368.
75. A second note on Fermat's conjecture (Dénes Péterrel). Publ. Math. Debr. T.4, fasc. 1—2. (1955) p. 28—32.
76. Grünwald Géza élete és matematikai munkássága. Mat. Lapok VI. 1 (1955) p. 6—27.
77. On Lindelöf's conjecture. Acta Math. Hung. T. V. Fasc. 3—4. (1954) p. 145—163.
78. On a new analytical method and its applications. Coll. Math. Vol. III. Fasc. 2 (1955) p. 91—112.
79. On the role of the Lebesgue-functions in the theory of the Lagrange interpolation. (Erdős Pállal), Acta Math. Hung. T. VI. fasc. 1—2. (1955) p. 47—66.
80. Notes on interpolation I. (On some interpolatorical properties of the ultraspherical polynomials.) Acta Math. Hung. T. VI. (1955) p. 67—80 (Surányi Jánossal).
81. On some new theorems in the theory of diophantine approximations. (T. Sós Verával), Acta Math. Hung. T. VI. 3—4. (1955) p. 241—257.
82. On the instability of systems of differential equations. Acta Math. Hung. VI. 3—4. (1955) p. 257—271.

83. Faktoriálisos számrendszerbeli számjegyek eloszlásáról. Mat. Lapok VII. 1—2. (1956) p. 71—76.
84. On a problem in the theory of determinants. Acta Sinica (1955) p. 411—423.
85. Remark on the zeros of characteristic equations. Publ. Math. Debr. T. 4. Fasc. 3—4. (1956) p. 406—410.
86. On the zeros of the zeta function of Riemann. Report of an international colloqu. on zeta-functions. Bombay 1956, p. 17—36. (Journ. of Indian Math. Soc.)
87. Über eine neue Methode der Analysis. Wiss. Zeitschr. der Humboldt-Univ. zu Berlin (1955/56) p. 275—279.
88. Über eine Anwendung einer neuen Methode auf die Theorie der Riemannschen Zetafunktion. Bid. p. 281—284.
89. Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels. Acta Math. Hung. VII. 3—4. (1956) p. 291—295.
90. Notes on interpolation, II. Explicit formulae. (Surányi Jánossal), Acta Math. Hung. T. VIII. (1957) Fasc. 1—2. p. 201—215.
91. Remark on the theory of the quasianalytical function classes. Publ. of the Math. Inst. of the H. Acad. Sci. Vol. I. Fasc. 4. (1956) p. 481—489.
92. Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásáról c. könyv átdolgozott kínai kiadása, 1956. Peking.
93. Über lakunäre Potenzreihen. Revue de Mathématique pures et appliquées. T. I. (1956) p. 27—32.
94. On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann. Acta Arithmetica IV. 1. (1958) p. 31—56.
95. On a theorem of Erdős—Kac. (Rényi Alfréddel), Acta Arith. IV. 1. (1958) p. 71—84.
96. Über die Potenzsummen komplexer Zahlen. Archiv der Math. IX. Fasc. 1—2. (1958) p. 59—64.
97. Bizonyos típusú szélsőértékfeladatokról. Középisk. Mat. Lapok XVI. 3—4. (1958) p. 65—69. ill. 97—101.
98. Notes on interpolation III. Convergence. (Balázs Jánossal), Acta Math. Hung. T. IX. (1958) Fasc. 1—2. p. 195—214.
99. On an inequality. Annales Univ. Sci. Budapest. de Rol. Eötvös nomin. Sectio Math. T. I. (1958) p. 3—6.
100. Remarks on the theory of diophantine approximation (Erdős Pállal és Szüsz Péterrel), Coll. Math. VI. (1958) p. 119—126.
101. Notes on interpolation IV. Inequalities (Balázs Jánossal), Acta Math. Hung. T. IX. fasc. 3—4. (1958) p. 243—258.
102. Notes on interpolation V. On the stability of interpolation. (Egerváry Jenővel), Acta Math. Hung. T. IX. fasc. 3—4. (1958), p. 259—267.
103. A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence circle. Publ. de l'Inst. Math. de l'Ac. Serbe des Sc. Belgrade (1958) p. 19—26.
104. To the analytical theory of algebraic equations. Izv. na Matematicseszkaja Insztt. T. III. (1959) p. 123—137.
105. Notes on interpolation VI. On the stability of the interpolation on an infinite interval (Egerváry Jenővel), Acta Math. Hung. T. X. Fasc. 1—2. (1959) p. 55—62.
106. Notes on interpolation VII. Convergence in infinite intervals (Balázs Jánossal), Acta Math. Hung. T. X. Fasc. 1—2. (1959) p. 63—68.
107. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Euler-Festband, 1959, p. 322—336.
108. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern. Rédei Lászlóval, Acta Arith. V. 2. (1959) p. 223—225.
109. On the infinite product representation of functions regular and nonvanishing in the unit-circle. Bull. de l'Acad Pol. des Scl. Vol. II. No. 8 (1959) p. 481—486.
110. On a property of the stable or conditionally stable solutions of systems of non-linear differential equations. Annali di Math. Vol. XLVIII. (1959) p. 333—340.
111. A note on the real zeros of Dirichlet's L-functions. Acta Arith. V. 3. (1959) p. 309—314.
112. Nachtrag zu meiner Abhandlung „On some approximative Dirichlet-polynomials in the theory of zeta-function of Riemann". Acta Math. Hung. T. X. fasc. 3—4. (1959) p. 277—298.
113. A hatványsorok elméletének egy kérdéséről. Mat. Lapok X. 3—4. (1959) p. 278—282.
114. On the distribution of zeros of general exponential polynomials. Publ. Math. Debr. T. VII. (1960) p. 130—136.
115. A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-function. Acta Szeged T. XXI. Fasc. 3—4. (1960) p. 311—318.
116. On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximations. Acta Math. Hung. T. XI. fasc. 3—4. (1960) p. 299—316 .

117. Fejér Lipót, 1880—1959. Mat. Lapok XII. 1—3. (1960) p. 8—18.
117b Lipót Fejér, Uszpehi Matematicseszkih Nauk XV, 4 (94), (1960), 111—122.
118. An extremal problem in the theory of interpolation (Erdős Pállal) Acta Math. Hung. T. XII. Fasc. 1—2. (1961) p. 221—234.
119. Remark on a theorem of Erhard Schmidt. Mathematica, Cluj. T. 2. (25) Fasc. 2 (1960) p. 373—378.
120. Sur la distribution des valeurs d'une fonction entière. Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. VI. Ser. A. fasc. 1—2. p. 157—164 (Alpár Lászlóval).
121. On a density theorem of U. V. Linnik. Ibid. p. 165—180.
122. On the eigenvalues of matrices. Annali di Matem. pura ed appl. Vol. LIV (1961) p. 397—402.
123. On some further one-sided theorems of new type in the theory of diophantine approximation. Acta Math. Hung. I. XII. Fasc. 3—4. (1961) p. 455—468.
124. Notes on interpolation VIII. Mean convergence in infinite intervals (Balázs Jánossal), Acta Math. Hung. T. XII. Fasc. 3—4. (1961) p. 469—474.
125. On some one-sided theorems of the theory of diophantine approximation. Journal of the Indian Math. Soc. Vol. XXIV. (1960) p. 533—574.
126. On the monotone convergence of certain Riemann-sums. (Szegő Gáborral) Publ. Math. Debr. T. 8. Fasc. 3—4. (1961) p. 326—335.
127. Research problems. Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. Sci. Vol. VI. Ser. A. Fasc. 3. (1961) p. 417—423.
128. A remark on Hermite—Fejér interpolation. Ann. Univ. Sci. Budapest de Rol. Eötvös nomin. T. III—IV. (1960—61) p. 369—377.
129. On Lindelöf's conjecture concerning Riemann zeta-function. Illinois Journ. of Math. Vol. 6. (1962) p. 95—97.
130. On some questions concerning determinants. Annales Pol. Matem. XII. (1962) p. 49—53.
131. The comparative theory of primes I. (S. Knapowskival), Acta Math. Hung. T. XIII. Fasc. 3—4. (1962) p. 299—314.
132. The comparative theory of primes II. Acta Math. Hung. T. XIII. Fasc. 3—4. (1962) p. 315—342 (S. Knapowskival)
133. The comparative theory of primes III. Acta Math. Hung. T XIII. Fasc. 3—4. (1962) p. 343—364. (S. Knapowskival)
134. On a certain problem in the theory of power-series with gaps. Pólya-Festschrift (1962) p. 404—409.
135. Egy komplex számok hatványösszegeire vonatkozó szélsőértékfeladatról és annak egy alkalmazásáról. Mat. Lapok XIII. fasc. 3—4. (1962) p. 279—288.
136. The comparative theory of primes IV. Acta Math. Hung. XIV. 1—2. (1963) p. 31—42. (S. Knapowskival)
137. The comparative theory of primes V. (S. Knapowskival), Acta Math. Hung. T. XIV. 1—2. (1963) p. 43—64.
138. The comparitive theory of primes. (S. Knapowskival) Acta Math. Hung. T. XIV. Fasc. 3—4. (1963) p. 251—268).
139. Untersuchungen über Dirichlet-Polynomen. Heft 13 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik (1963) p. 71—79 (Akad. Verlag, Berlin).
140. The comparative theory of primes VII. (S. Knapowskival), Acta Math. Hung. T. XIV. Fasc. 3—4. (1963) p. 241—250.
141. Ugyanez, VIII. Ibid. p. 251—268.
142. Erdős Pál 50 éves. Mat. Lapok XIV. 1—2. (1963) p. 1—28.
143. Hermite-expansion and distribution of zeros of polynomials. (Makai Endrével), Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. Vol. VIII. Ser. A. Fasc. 1—2. (1963) p. 157—164.
144. Diofantikus approximáció és alkalmazott matematika. Matem. Lapok XIV. 3—4. (1963) p. 264—276.
145. Further developments in the comparative prime-number theory, I. (S. Knapowskival), Acta Arith. IX. 1. (1964) p. 23—40.
146. On the distribution of values of a class of entire functions I. (Dancs Istvánnal), Publ. Math. Debr. T. 11. Fasc. 1—4. (1964) p. 257—265.
147. On the distribution of values of a class of entire functions I. (Dancs Istvánnal) Publ. Math. Debr. T. 11. Fasc. 1—4. (1964) p. 257—265.
148. Further developments in the comparative prime-number theory, II. (S. Knapowskival), Acta Arith. 3 (1964) p. 293—314.
149. On the comparative theory of primes. Trudi csetvertogo vszeszojuznovo matematicseszkovo szjezda, Leningrád 1961. T. II. p. 137—142. (Megjelent 1965-ben)
150. A remark on the heat equation. Journ. d'Analyse Mathématique, Vol. XIV. (1965) p. 443—448.
151. On an assertion of Cebysev (S. Knapowskival), Journ. d'Analyse, T. XIV. (1965) p. 267—274.

152. Notes on interpolation IX. Approximative representation of Fourier-transform (Balázs Jánossal), Acta Math. Hung. T. XVI. fasc. 1—2. (1965) p. 215—220.
153. Further developments in the comparative prime-number theory, III. (S. Knapowskival), Acta Arith. XI. Fasc. 1. (1965) p. 115—127.
154. On some conjectures in the theory of numbers. Proc. of the Lond. Math. Soc. (1965), p. 288—299.
155. On some problems of a statistical group-theory, I. Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gegiete, Bd. 4. Heft. 2 (1965) p. 175—182 (Erdős Pállal).
156. Further developments in the comparative prime-number theory, IV. Accumulation theorems for residue-classes representing quadratic non-residues mod k. (S. Knapowskival), Acta Arith. T. XI. 2. (1965) p. 147—162.
157. Further developments in the prime-number theory. V. The use of two-sided theorems (S. Knapowskival), Studia Sci. Math. Hung. T. I. Fasc. 1—2. (1966) p. 193—202.
158. On the twin-prime problem I. Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci. Vol. IX. Ser. A. Fasc. 3 (1964) p. 247—262.
159. On the constructive theory of functions I. Publ. of the Inst. of the Hung. Acad. of Sci. Vol. IX. Ser. A. Fasc. 3 (1964) p. 495—502 (Szüsz Péterrel).
160. On a characterisation of Dirichlet's L-functions, Annales Univ. Sci. Budapest. de Rol. Eötvös nomin. T. VIII (1965) p. 65—69.
161. A konstruktív függvénytan egy újabb irányáról. A MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl. XVI. 1. (1966) p. 33—46. (Szüsz Péterrel.)
162. Az összehasonlító prímszámelmélet egyes problémáiról. Mat. Lapok XVII. 1—2. (1966) p. 19—32.
163. On the constructive theory of functions II. (Szüsz Péterrel), Studia Sci. Math. Hung. T. I. Fasc. 1—2. (1966) p. 65—70.
164. Further developments in the comparative prime-number theory, VI. (S. Knapowskiva), Acta Arith. T. XII. Fasc. 1. (1966) p. 85—96.
165. On the approximation of piecewise analytic functions by rational functions. Szovremennie problemi teorii analiticseszkich funkcii, Erevan 1965. p. 296—299 (megjelent 1967-ben).
166. On the constructive theory of functions, III. (Szüsz Péterrel), Studia Sci. Math. Hung. T. I. Fasc. 3—4. (1966) p. 315—322.
167. O nekotorich teoretiko-funkcionalnich metodach reseta v teorii csiszel. Dokl. Akad. Nauk SSSR 1966 T. 171. No. 6 p. 1289—1292.
168. A statisztikus csoportelmélet egyes problémáiról. (Erdős Pállal), MTA III. Oszt. Közl. XVII. (1967) p. 51—58.
169. On some problems in the theory of mechanical quadrature. Matematica, Cluj. Vol. 8 (41) (1966) p. 181—192.
170. Some function theoretical sieve methods in the theory of numbers. Amer. Math. Soc. Transl. 1967. p. 1661—1664.
171. On some problems of a statistical group-theory, II. (Erdős Pállal), Acta Math. Hung. T. 18. Fasc. 1—2. (1967) p. 151—163.
172. Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled "An equivalent power series". Acta Math. Hung. T. 18. Fasc. 1—2. (1967) p. 171—173.
173. On the twin-prime problem II. Acta Arith. XIII. 1. (1967) p. 61—90.
174. On some problems of a statistical group-theory, III. (Erdős Pállal), Acta Math. Hung. T. XVIII. Fasc. 3—4. (1967) p. 309—320.
175. On the twin-prime problem III. Acta Arith. XIV. Fasc. 4. (1968) p. 399—408.
176. On some problems of a statistical group-theory, IV. (Erdős Pállal), Acta Math. Hung. T. XIX. Fasc. 3—4. (1968) p. 413—436.
177. On an inequality of Cebysev. Annales Univ. Sci. Budapest de Rol. Eötvös nomin. T. XI. (1968) p. 15—16.
178. Algebrai egyenletek közelítő megoldásáról. MTA III. Oszt. Közl. XVIII (1968) p. 223—236.
179. Über die angenäherte Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen und Eigenwerten von Matrizen. Berichte der IV. Int. Math. Kongress über Anwendungen der Math. in den Ingenieurwissensch. Weimar 1967. p. 209—216.
180. Über einige Fragen der vergleichenden Primzahlentheorie. Abhandl. aus Zahlenth. und Analysis. VEB Deutsch. Verl. der Wissensch. Berlin 1968, p. 159—171 (S. Knapowskival).
181. On the distribution of roots of Riemann zeta and allied functions, I. (Halász Gáborral). Journ of Number Theory, Vol. I. (1969) p. 122—137.
182. Fordítások H. Cremer "Carmina Mathematica" c. kötetéből. Mat. Lapok XIX. 3—4. (1968) p. 373—375.
183. On a certain limitation of eigenvalues of matrices. Aequationes Math. Vol. 2. fasc. 2—3. (1969) p. 184—189.

184. On some statistical properties of the alternating group of degree n. L'Enseignement Mathématique T. XV. (1969) p. 89—99. (Dénes Józseffel és Erdős Pállal).
185. A remark on linear differential equations. Acta Math. Hung. T. XX. Fasc. 3—4. (1969) p. 357—360.
186. On a problem concerning the zeros of Dirichlet's L-functions. Publ. of the Ramanujan Inst. Vol. 1. (1969) p. 95—100.
187. Zeta roots and prime numbers. Colloquia Mathematica Soc. János Bolyai Vol. 2. (Number Theory), Debrecen, Hung. p. 205—216. (1969).
188. Application of graph theory to geometry and potential theory. Proc. of the Calgary Intern. Confer. on Combinatorial Structures etc. 1969. p. 423—434.
189. On some connections between combinatorics and group theory. Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 4. Combinatorial Theory and its applications, Balatonfüred, 1969, p. 1055—1082.
190. Analysis and diophantine approximation. Institute Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica Vo. IV. (1970) p. 133—153.
191. Ortogonális polinomokra vonatkozó megjegyzések. Matematikai Lapok 20. 3—4. (1969) p. 305—310.
192. Rényi Kató élete és matematikai munkássága. Mat. Lapok, 20 (1969), 219—229.
193. On the work of Alan Baker. Rapports sur les Médailles Fields, Actes du Cong. Int. Math. T. 1, 3—5. (1971). Gauthier-Villars
194. On the distribution of roots of Riemann zeta and allied functions, II. Acta Math. Hung. T. XXI. Fasc. 3—4. (1970) p. 403—419 (Halász Gáborral).
195. On some applications of graph theory, II. (Erdős Pállal, A. Méirrel, Vera T. Sóssal), Studies in Pure Mathematics, Papers presented to Richard Rado, ed. by L. Mirsky, Acad. Press, 1971. p. 89—100.
196. On some recent results in the analytical theory of numbers. Proc. of Sympos. in Pure Math. Vol. XX. 1969. Institute on number theory. Megjelent 1971-ben. p. 359—374.
197. On some problems on a statistical group theory, V. Periodica Math. Vol.1 (1) (1971) p. 5—13. (Erdős Pállal)
198. A general inequality of potential theory. Proc. of the NRD Conference on Class. Funct. Theory (1970) p. 137—141.
199. On some general problems in the theory of partitions I. (Erdős Pállal), Acta Arith. XVIII. (1971) p. 53—62.
200. Megjegyzés az egységgömb felületének pakolási állandóiról. Mat. Lapok XXI. 1—2. (1970) p. 39—44. (Megj. 1971. aug.)
201. Rényi Alfréd munkássága. Mat. Lap. 21 (1971) p. 199—210.
202. Diophantine approximation and analysis. Actes du Congrès Internat. des Mathématiciens, Gauthier-Villars, 1971. p. 519—528.
203. On a trigonometric inequality. Proc. of the Conference of Constr. Theory of Functions, 1969. (Megj. 1972). p. 505—512.
204. Commemoration on Stanislas Knapowski. Colloqu. Mathem. Vol. XXIII. Fasc. 2. (1971) p. 309—321.
205. On some applications of graph theory to analysis. Proc. of the Internat. Conference on Constr. Theory of Functions, Várna 1969 p. 505—512 (megjelent 1972).
206. On some problems of a statistical group theory, VI. Journ. of Indian Math. Soc. Vol. 34 (1970) p. 175—192.
207. On some applications of graph theory, III. (Erdős Pállal, A. Méirrel és T. Sós Verával), Canad. Math. Bull. Vol. 15 No. 1 (1972) p. 27—32.
208. On some applications of graph theory I. (Erdős Pállal, A. Méirrel és T. Sós Verával), Discrete Math. Vol. 2. (1972) p. 207—228.
209. On some problems of a statistical group theory, VII. (Erdős Pállal). Periodica Math. Hung. T. 2. (1972) p. 149—163.
210. Further developments in the comparative prime number theory, II. (S. Knapowskival) Acta Arith. T. XX. (1972) p. 193—201.
211. New results and applications of the theory of diophantine approximations and its applications. Ed. by Ch. F. Osgood. Acad. Press 1972. p. 306—326.
212. Exponential sums and the Riemann conjecture. Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. XXIV. Anal. Numb. Theory 1973. p. 305—314.
213. Über die Siegel Nullstelle der Dirichletschen Funktionen. Acta Arith. Vol. XXIV. (1973) fasc. 2. p. 135—141.
214. Investigations in powersum theory I. (I. Dancs-csal) Ann. Univ. Budap. de Rol. Eötvös nomin. T. XVI. (1973) p. 47—52.
215. Investigations in the powersum theory, II. (I. Dancs-csal) Acta Arith. Vol. XXV. (1973) p. 104—113.

216. On a property of rational functions. (Q. I. Rahman-nal), Ann. Univ. Budap. de Rol. Eötvös nomin. T. XVI. (1973) p. 37—45.
217. On some phenomena and problems of the powersum method. Sympos. on Complex Analysis, Canterbury, 1973, ed. by J. Clunie and W. K. Hayman, p. 129—132.
218. On a property of partitions. Journ. of Number Theory Vol. 6. No. 6. (1974) p. 405—411.
219. Combinatorics, partitions, group theory — Proc. Coll. Int. sulle Teorie Combinatorie, Rome, 1973. Atti dei Convegni Lincei 17. p. 181—200. (1976)
220. Powersum method and the approximative solution of algebraic equations. Mathematics of Computation. Vol. 29 (1975) p. 311—318.
221. Investigations in the powersum theory III. (Dancs I.-al), Annali di Matem. Pura ed. Applicata, Vol. CIII (1975) p. 199—205.
222. Investigations in the powersum theory, IV. (Dancs I.-al), Publ. Math. Debr. T. 22. Fasc. 1—2. (1975) p. 123—131.
223. On some phenomena in the theory of partitions. Journées arithmétiques de Bordeaux. Soc. Math. de France Asterisque 24—25 (1975) p. 311—319.
224. Remark to a theorem of N. Wiener. Papers dedicated to Prof. L. Ilieff's 60th anniversary, Sofia, 1975, p. 479—483.
225. On orthogonal polynomials, Analysis Matem. T. I. Fasc. 4. (1975) p. 297—312.
226. On the latent roots of lambda matrices. Comput. and Mathem. with Applications, Vol. 1 (1975) p. 307—313.
227. On the sign changes of $(\pi(x)$—li $x)$, I. (With S. Knapowski). Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 13. North Holland Publ. Comp. 1976. p. 153—170.
228. Investigations in powersum theory, V. Publ. Math. Debr. 23 (1976) p. 299—307. (Dancs I.-nal)
229. Investigations in powersum theory, VI. (Dancs I.-nal) sajtó alatt
230. Investigations in powersum theory, VII. (Dancs I.-nal) sajtó alatt
231. On the sign changes of $(\pi(x)-\text{li}\,x)$, II. (S. Knapowskival), Monatshefte f. Math. 82 (1976) p. 163—175.
232. On a phenomenon concerning (0,2) interpolation. (S. Schmeisserrel és Q. I. Rahmannal) Periodica Math. Hung. IX. 1—2. (1978) p. 163—171.
233. Az approximációelmélet egyes nyitott problémáiról. Mat. Lapok. 25. (1974) 1—2. p. 21—75.
234. On some open problems of approximationtheory. Journal of Approximation theory (sajtó alatt)
235. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group. I. (Szalay Mihállyal) Acta Math. Hung. 29. (1977) 3.—4. p. 361—379.
236. On some problems of statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group. II. (Szalay Mihállyal) Acta. Math. Hung. 29. (1977) 3.—4. p. 381—392.
237. On prime numbers $\equiv 1$ resp 3 (mod 4) (S. Knapowskival) Mann—Ross—Taussky Vol. (sajtó alatt)
238. Remarks on the characters belonging to the irreducible representation of the symmetric group S_n of n letters. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 19. Fourier series and approximation theory. (Ed. G. Alexits and P. Turán) (sajtó alatt)
239. A note of welcome. Journal of Graph Theory. 1. (1977) p. 7—9.
240. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group. III. (Szalay Mihállyal) Acta Math. (sajtó alatt)
241. On a problem of E. Landau. Rolf Nevanlinna Symposium Proceedings, Istanbul, sajtó alatt.
242. Egy különös életút, Ramanujan, I.—II. Köz. Mat. Lap. 55. (1977) 2. p. 49—54., 55. (1977) 3.—4. p. 97.—106.
243. On a problem of E. Landau. Acta Arithmetica. Vol. 36. n. 2.
244. Megemlékezés a fasizmus matematikus áldozatairól, Mat. Lap.
245. On a new method in analysis and its applications. Wiley-Interscience Trancts Series (sajtó alatt)

TURÁN PÁL MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA I.

1. APPROXIMÁCIÓELMÉLET

SZABADOS JÓZSEF

Az approximációelmélet a matematikai analízisnek elég jól elhatárolható része, bár az ortogonális sorok — és speciálisan a Fourier-sorok — elméletével meglehetősen szorosan összefonódik. (Turán Pálnak az utóbbi irányban folytatott kutatásairól másutt szólunk.) Tárgyát és módszereit tekintve elsősorban a klasszikus analízishez sorolható. Hazánkban az approximációelméletnek igen szép, elsősorban Fejér Lipóttól kiinduló hagyományai vannak, s jelenleg is sok matematikus választja részben vagy egészében kutatásai tárgyának ezt a témát. Ez is indokolja, hogy Turán Pál idevágó eredményeinek külön fejezetet szenteljünk.

Turán Pál egész életművét végigkíséri az approximációelmélet iránti megmegújuló érdeklődése. Első három interpolációelméleti dolgozatában ([10], [16], [22]) — melyet 1937—40-ben Erdős Pállal közösen írt — először is Szegő Gábor, Fejér Lipót és Pólya György vizsgálataihoz kapcsolódva, a mechanikus kvadratúra konvergenciájával foglalkozik. Legyen $p(x)$ egy a $[-1, 1]$ intervallumban nemnegatív súlyfüggvény, és jelölje $L_n(f, x)$ a korlátos és Riemann-integrálható $f(x)$ függvénynek az e súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomrendszer n-edfokú tagjának gyökein felépített Lagrange-interpolációs polinomját. Amennyiben

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx \quad \text{és} \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{p(x)} \quad \text{véges,} \tag{1}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f(x)-L_n(f, x)|\,dx = 0.$$

Ez volt az irodalomban az első általános ún. „erős kvadratúra-konvergenciát" kimondó eredmény. A $p(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ $(\alpha, \beta > -1)$ esetben, vagyis a Jacobi-polinomokra ebből az általános tételből számos érdekes s az addig ismerteknél általában erősebb speciális eset olvasható ki. Ugyancsak megadnak egy szükséges feltételt a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [f(x)-L_n(f, x)]^2\,dx = 0 \tag{2}$$

ún. középértékben vett konvergenciára, tetszőleges (nem szükségképpen ortogonális polinomok gyökeire vonatkozó) alappontrendszer esetén; ez

$$\int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{n} l_k(x)^2 = O(1), \tag{3}$$

ahol

$$(4) \qquad l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

a

$$(5) \qquad -1 \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq 1$$

alappontrendszerhez tartozó fundamentális polinomok. (Sőt, ha (3) nem áll fenn, akkor (2) még egy alkalmas *folytonos* függvényre sen teljesül.)

A (4) polinomoknak egyébként is meghatározó szerepük van az interpolációs eljárások konvergencia-divergencia kérdéseiben. [16]-ban Fejér Lipót kezdeményezését követve foglalkoznak azzal a fordított irányú problémával, hogy adott interpolációs tulajdonságokból az (5) csomópont-rendszer eloszlására következtessenek. Bebizonyítják, hogy ha a (4) fundamentális polinomok egyenletesen korlátosak a $[-1, 1]$ intervallumban, akkor alkalmas $c_1 > c_2 > 0$ konstansokkal fennáll

$$(6) \qquad \frac{c_1}{n} \leqq \theta_k - \theta_{k+1} \leqq \frac{c_2}{n} \quad (k = 1, \ldots, n-1;\ \theta_k = \arccos x_k).$$

Másszóval az egységkörre vetített csomópontok ún. kvázi-egyenletes eloszlásúak. Ez nagymértékben általánosítja Fejérnek a normális pontcsoportokra vonatkozó eredményét. Azt is bebizonyítják, hogy ha a

$$\lambda_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)\, dx \quad (k = 1, \ldots, n)$$

ún. Cotes-számok nemnegatívak, akkor (6)-ban a felső becslés teljesül (az alsó általában nem). Ugyanez igaz olyan ortogonális polinomok gyökeire is, ahol a súlyfüggvény két pozitív korlát közé esik. Ha a Cotes-számokról csak annyit tudunk, hogy

$$(7) \qquad |\lambda_k| = O(n^{c_3}) \quad (k = 1, \ldots, n;\ c_3 > 0),$$

akkor igaz a gyengébb

$$(8) \qquad \theta_k - \theta_{k+1} \leqq c_4 \frac{\log n}{n} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

becslés, s ez utóbbi nem javítható. (8) ugyancsak fennáll, ha olyan ortogonális polinomok gyökeiről van szó, amelyekre (1) teljesül.

Az említett cikksorozat III. részében [22] elsősorban ortogonális polinomok gyökein vett interpolációval foglalkoznak. Többek között bebizonyítják, hogy ha a $p(x) \geqq 0$ súlyfüggvényre egy $[a, b] \subset [-1, 1]$ részintervallumban $p(x) \geqq m > 0$ teljesül, akkor a megfelelő $\omega_n(x)$ (1 főegyütthatójú) ortogonális polinom ugyanezen intervallumban a következőképpen becsülhető:

$$|\omega_n(x)| < \frac{n}{2^n} \sqrt{\frac{72}{(b-a)m} \int_{-1}^{1} p(t)\, dt}.$$

Ez Shohat $a = -1$, $b = 1$-re vonatkozó eredményének általánosítása. Ugyancsak vizsgálják az ortogonális polinomok viselkedését a $[-1, 1]$ intervallum mentén felhasított komplex számsíkon is. A gyökeloszlással kapcsolatos (6) eredményt általánosítják részintervallumokra is.

Fontos és érdekes kérdés az adott részintervallumra eső gyökök aszimptotikus száma; ezzel kapcsolatban bebizonyítják, hogy ha az alappolinomokra (7) teljesül, akkor bármely $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ és $\varepsilon > 0$ esetén fennáll

$$\left| \sum_{\substack{\nu \\ \alpha \leqq \theta_\nu \leqq \beta}} 1 - \frac{\beta - \alpha}{\pi} n \right| \leqq c(\varepsilon) n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

(Ezt később Erdős tovább javította.) Ugyanez igaz pozitív alsó korláttal rendelkező súlyfüggvény ortogonális polinomjaira is.

A Lagrange-interpoláció *egyenletes* konvergenciájával kapcsolatban Grünwald Gézával közösen bebizonyítják [14], hogy ha a $p(x)$ súlyfüggvény kielégíti a $p(x)\sqrt{1-x^2} \geqq m > 0$ feltételt, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \max_{|x| \leqq 1} |L_n(f, x) - f(x)| = 0$$

minden $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha \left(\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1 \right)$ esetén. Ez a sokat idézett eredmény átvezet bennünket az interpoláció ún. „finom" és „durva" elméletéhez, melyet Turán Erdős Pállal közösen alkotott meg [79]. Itt azt vizsgálják, hogy az interpoláció ún. Lebesgue-konstansai, vagyis az

$$M_n = \max_{|x| \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$$

mennyiségek, mennyire határozzák meg egy $\mathrm{Lip}\, \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ osztályra nézve a konvergencia-divergencia jelenségeket. Tegyük fel, hogy $M_n \sim n^\beta$ $(0 < \beta < 1)$. Ekkor

(a) ha $\alpha > \beta$, akkor a Lagrange-interpoláció egyenletesen konvergens minden $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ esetén;

(b) ha $\alpha < \frac{\beta}{\beta+2}$, akkor valamely $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ esetén $L_n(f_1, x)$ normája korlátlan, midőn $n \to \infty$;

(c) ha $\frac{\beta}{\beta+2} < \alpha < \beta$, akkor léteznek olyan alappontrendszerek, hogy az interpoláció egyenletesen konvergens minden $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ esetén, de léteznek olyanok is, hogy alkalmas $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ mellett az interpoláció divergens (s ugyanakkor mindkét alappontrendszer Lebesgue-konstansa $\sim n^\beta$).

Az (a) és (b) esetek jelentik az interpoláció „durva" elméletét, mert akkor pusztán az $\{M_n\}$ sorozat ismeretében eldönthető a konvergencia-divergencia kérdése. A (c) esetben ehhez viszont finomabb vizsgálatokra van szükség, hiszen azonos Lebesgue-konstansú pontrendszerek teljesen másképp viselkedhetnek.

Ezek az alapvető jelentőségű vizsgálatok igen széles visszhangra találtak. Számosan kapcsolódtak a nyitvahagyott kérdésekhez, általánosították az eredményeket, s még napjainkban is intenzív kutatások folynak ez irányban. A fenti eredményeket idézi pl. A. F. Timan nevezetes approximációelméleti monográfiájában is.

Ugyancsak 1955-ben indította el Turán Pál a „Notes on interpolation" c. cikksorozatát, melyet különböző társszerzőkkel (Surányi János, Balázs János, Egerváry Jenő) tíz éven keresztül publikált ([80], [90], [98], [101], [102], [105], [106], [124], [152]). Ez az eredmények gazdag tárházát felsorakoztató sorozat legjelentősebb része az ún. hézagos interpoláció elméletének kifejlesztése. A klasszikus Hermite-interpolá-

ció feladata abból áll, hogy adott helyeken előírjuk a függvényértékeket, valamint bizonyos (a helytől esetleg függő) számú konzekutív deriváltat, és keressük az e feltételeket kielégítő legalacsonyabb fokszámú polinomot. A hézagos interpolációnál viszont nem szükségképpen konzekutív deriváltakat írunk elő, s ezáltal merőben új helyzet áll elő. E kérdéskör vizsgálatát — eltekintve G. BIRKHOFF-nak a század elején végzett szórványos kutatásaitól, valamint Pólya György egy 1931-ből származó cikkétől — kezdeményezték a fentebb említett cikksorozatban, a kérdéses polinom egzisztenciája, unicitása, előállítása és konvergenciája szempontjából. Arra a meglepő tényre jutottak, hogy az alappontok számának paritásától függően a (0, 2)-interpolációs polinom (vagyis amikor a függvényértékeket és a második derivált értékeit írjuk elő; ez volt vizsgálataik tárgya) esetleg nem is létezik, vagy ha létezik, akkor végtelen sok ilyen polinom van. E meglepő jelenséget elsősorban az ultraszférikus Jacobi-polinomok gyökeire mint alappontokra vonatkozólag tárták fel, de vizsgálták a Legendre-polinom integráljának gyökeit is. Az utóbbi esetben páros sok alappont mellett a (0, 2)-interpoláció feladata egyértelműen megoldható, s a megoldás explicite előállítható. Sőt, ha egy függvény megfelelő strukturális tulajdonságokkal rendelkezik, és az előírt második derivált értékek „nem túl nagyok", akkor ezen (0, 2)-interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál a függvényhez.

Ezek a vizsgálatok legalább olyan széles visszhangot váltottak ki, mint a finom és durva interpoláció elmélete. Turán Pál és társszerzői nyomán ma már a hézagos interpolációt olyan messzemenő általánosságban vizsgálják, hogy megadnak egy $0-1$ mátrixot, ahol az i-edik sor j-edik eleme aszerint 0 vagy 1, hogy az i-edik helyen a j-edik deriváltat előírjuk-e vagy sem, s e mátrixban a 0-k és 1-ek elhelyezkedése dönti el a megoldhatóságot.

Ugyancsak az említett cikksorozatban kezdődik az ún. stabil interpolációs eljárások vizsgálata. Legyenek adva az (5) helyek, továbbá (valamilyen fokszámmal) az $r_k(x)$ $(k=1, \ldots, n)$ polinomok az $r_k(x_l)=\delta_{kl}$ $(k, l=1, \ldots, n)$ tulajdonsággal. Az

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k r_k(x)$$

interpolációs eljárást *stabilnak* nevezzük, ha tetszőleges y_k $(k=1, \ldots, n)$ valós számok mellett

$$\min_{1 \leqq k \leqq n} y_k \leqq R_n(x) \leqq \max_{1 \leqq k \leqq n} y_k.$$

Faber tétele miatt a Lagrange-interpoláció sohasem stabil, de pl. a Csebisev-gyökökön vett Hermite—Fejér-interpoláció stabil. A stabil interpoláció *fokszámán* az $r_k(x)$-ek fokszámainak összegét értjük. Meghatározzák a minimális fokszámú stabil interpolációt, s kiderül, hogy ennek alappontjai az $(n-2)$-edfokú Legendre-polinom gyökei, valamint a ± 1 pontok. Ezzel egy újtípusú jellemzését adják a Legendre-polinomok gyökeinek (az első ilyen jellemzés a Gauss—Jacobi-kvadratúra alappontrendszere volt). A kapott interpolációs eljárás egyenletesen konvergál minden folytonos függvény esetén. A definíció alkalmas módosításával a stabilitás fogalmát kiterjesztik a $[0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$ intervallum esetére is.

Röviden utaltunk már az ún. Hermite—Fejér-interpolációra. Ez a függvényértékek és az első deriváltak értékeinek előírását jelenti. Fejér klasszikus eredménye szerint, ha a Csebisev-polinomok gyökein írjuk elő a függvényértékeket és bizonyos „nem túl nagy" deriváltakat, akkor az eredményül adódó eljárás minden folytonos függvényre konvergens lesz. Turán Pál azt vizsgálta [128], hogy miként befolyásolja

egyetlen deriváltérték-előírás elhagyása a konvergenciát. Azt a meglepő jelenséget találta, hogy már ez a minimális változtatás is divergenciát eredményezhet, és a konvergencia csak egy bizonyos globális integrálfeltételt kielégítő folytonos függvényekre marad meg. Ez a kezdeményezés is igen termékenynek bizonyult; azóta a problémát számos irányban általánosították már. Ugyancsak az Hermite—Fejér-interpolációval kapcsolatos azon Erdős Pállal közös eredménye [118], amely szerint az ún. másodfajú alapfüggvények maximuma mindig legalább $c \cdot \frac{\log n}{n}$.

Az interpolációelmélettel szoros kapcsolatban álló mechanikus kvadratúra problémái is sokat foglalkoztatták Turán Pált. A 30-as években írt, Erdős Pállal közös, ezzel kapcsolatos eredményeiről már szóltunk. A kérdésre 1950-ben más vonatkozásban visszatért [46]. Azt vizsgálta, hogy egy

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \sim \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{k-1} f^{(\mu)}(x_\nu)\lambda_\nu^{(\mu)}$$

alakú kvadratúra-formula mikor lesz minden legfeljebb $((k+1)n-1)$-edfokú polinomra pontos; ez általánosítása a Gauss—Jacobi-féle kvadratúrának (amikor is $k=1$). Azt találta, hogy ha k páros, akkor ez nem megoldható, ha pedig k páratlan, akkor az $\{x_\nu\}$ pontosan az

$$\int_{-1}^{1} |\pi_n(x)|^{k+1}\,dx \quad (\pi_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)$$

kifejezést minimizáló polinom gyökei. Hasonló eredmény adódott bizonyos súlyozott integrálok közelítésére is.

Igen jelentősek azok az eredmények, amelyeket Turán Pál Szüsz Péterrel közösen a racionális approximáció terén a 60-as évek közepén ért el [159], [161], [163], [165], [166]. D. Newman 1964-ben bebizonyította, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon az $|x|$ függvény $3e^{-\sqrt{n}}$ pontossággal approximálható egyenletesen legfeljebb n-edfokú racionális törtfüggvényekkel (szemben a polinomiális approximációval, melynek rendje csak $O(n^{-1})$). Tekintettel arra, hogy az $|x|$ függvénynek a polinomiális approximáció elméletében meghatározó szerepe van, azt várták, hogy ez az eredmény döntő előrehaladást hoz majd a racionális approximáció mindaddig csak meglehetősen gyér eredményekkel rendelkező elméletében. Mindazonáltal kiderült, hogy pl. a klasszikus Lip α $(0<\alpha<1)$ osztályban vannak olyan függvények, amelyek n-edfokú racionális törtekkel sem approximálhatók jobban, mint $O(n^{-\alpha})$. Ez a tény a reményeket meglehetősen lelohasztotta, s annál inkább meglepő volt, amikor Turán Pál megadott olyan egyszerű függvényosztályokat, melyekre a racionális approximáció rendje lényegesen jobb, mint a polinomiális. Tekintsük azokat az $f(x) \in C[-1, 1]$ függvényeket, amelyekhez van egy olyan $-1=a_0<a_1<\ldots<a_s=1$ felosztás, hogy $f(x)$ analitikus minden $[a_i, a_{i+1}]$ $(i=0, \ldots, s-1)$ intervallumban. E függvényekre a racionális approximáció rendje $O(e^{-c(f)\sqrt{n}})$ lesz, míg a polinomiális approximáció általában nem jobb, mint $O(n^{-1})$. Turán Pál nem elégedett meg azzal, hogy egy ilyen nagymértékű javulást mutató tételt talált, hanem kereste ennek mélyebb okát is. Kimutatta, hogy a Newman-féle racionális törtfüggvények (amelyeknek döntő szerepük van a szakaszonként analitikus függvények tárgyalásában) pólusai igen közel vannak a 0-hoz, s emiatt jóval „hajlékonyabbak", mint a polinomok. A szakaszonként analitikus függvényeket olyan racionális függvényekkel lehet jól approximálni, amelyeknek pólusai a függvény szinguláris pontjaihoz torlódnak.

E jelenség feltárása azután módot adott arra is, hogy további, racionális függvényekkel jobban approximálható függvényosztályokat derítsenek fel. Másik nevezetes eredménye a konvex függvényekre vonatkozik: itt a racionális approximáció rendje bármely belső részintervallumban $O\left(\frac{\log^4 n}{n^2}\right)$; szemben a polinomiális approximációval, amelyé csak $O(n^{-1})$.

Ezen úttörő jellegű vizsgálatok nyomán igen széles körű kutatások indultak meg a racionális approximáció területén (elsősorban magyar, szovjet és bolgár kutatók részéről), s ebben vitathatatlan Turán Pál kezdeményező szerepe.

A fenti ismertetés természetesen vázlatos, és nem terjed ki Turán Pál valamennyi kutatási témájára. Szólhattunk volna az interpoláció Lebesgue-konstansának pontos alsó becsléséről, a Riemann-összegek monoton konvergenciájáról, az ortogonális polinomokra vonatkozó újabb eredményeiről, s még sok másról is, de úgy gondoljuk, hogy az eddigiek is bizonyítják, hogy Turán Pál igen gazdag életművet hagyott ránk. Külön kiemelhetjük azt a tényt, hogy 30 approximációelméleti témájú dolgozatából 20-at társszerzőkkel írt, ami világosan mutatja intenzív együttműködési hajlamát. E hajlam természetesen nemcsak a közös publikációkban, hanem a tanítványokkal való gondos törődésben, irányításban és problémafelvetésben is megnyilvánult. Nehéz lenne pótolni azt az űrt, ami halálával a magyar approximációelméleti iskolában keletkezett.

Utoljára szólunk arról az e folyóirat hasábjain nemrég megjelent dolgozatáról, melyet már súlyos betegen, de töretlen lelkesedéssel írt. „Az approximációelmélet egyes nyitott problémáiról" [231] c. dolgozatában 89, többségében tőle származó, s szinte az approximációelmélet egészét felölelő problémát vet fel. Mindazok, akik valamilyen módon kapcsolatban állnak az approximációelmélettel, e dolgozatot úgy tekintik, mint Turán Pál értékes szellemi hagyatékát, amely még sokáig bőséges forrása lesz a szép és érdekes kutatásoknak. Sokan vannak, akik Turán Pált tanítómesterüknek tekintik, s bármily fájdalmas is volt korai halála számunkra, mégis elmondhatjuk, hogy ennél szebben, mint e problémafelvető dolgozat örökül hagyásával, nem búcsúzhatott volna tőlünk.

2. STATISZTIKUS CSOPORTELMÉLET ÉS PARTÍCIÓELMÉLET

ERDŐS PÁL és SZALAY MIHÁLY

1. Mielőtt részletesen ismertetnénk TURÁN PÁL eredményeit a címbeli területeken, néhány kiragadott tétel vázlatos kimondásával igyekszünk érzékeltetni a problémakört, a statisztikus jellegű tételek szerkezetét.

A matematika olyan területein, mint pl. a valós függvénytan, a gráfelmélet, gyakoriak és megszokottak olyan jellegű tételek, amelyek a vizsgált objektumokra „viszonylag kevés kivétellel" teljesülnek. Érdemes megemlíteni egy ilyen jellegű algebrai tételt is. B. L. VAN DER WAERDEN bizonyította be 1933-ban, hogy rögzített n-re bizonyos értelemben „majdnem minden" egész együtthatós n-edfokú algebrai egyenlet Galois-csoportja az S_n n-edfokú szimmetrikus csoport. 1944-ben V. L. GONCSAROV megmutatta, hogy S_n majdnem minden eleme (tehát eltekintve legfeljebb $o(n!)$ számú elemtől) „körülbelül" $\log n$ ciklust tartalmaz a kanonikus felbontásában. Tekintsük most S_n-ben az elemek rendjét. E. LANDAU egy ismert tétele szerint

$$\max_{P \in S_n} O(P) = \exp\left\{(1+o(1))\sqrt{n \log n}\right\}, \tag{1.1}$$

tehát *minden* elem rendje jóval kisebb, mint a triviális $n!$ korlát.

TURÁN PÁL a [155] alatti dolgozatban ERDŐS PÁLlal közösen bebizonyította, hogy *majdnem minden* elem rendje még az (1.1)-beli kifejezésnél is jóval kisebb (tehát viszonylag kevés elem rendje juthat akár csak a közelébe is az (1.1)-beli maximumnak), pontosabban tetszőleges $\varepsilon>0$, $\delta>0$ esetén $n>n_0(\varepsilon, \delta)$-ra S_n-nek legalább $(1-\delta)n!$ számú elemére teljesül a következő:

$$\exp\left\{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\log^2 n\right\} \leqq O(P) \leqq \exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\log^2 n\right\}. \tag{1.2}$$

Így még a kis rendű elemek is „kevesen" vannak. Itt hangsúlyozni kell, hogy a kivételes elemeket tekintve, ezek száma meglehetősen nagy lehet, csupán a csoport rendjéhez viszonyítva kicsi. Például S_n-ben az egyetlen n elemű ciklusból álló permutációk száma

$$(n-1)! = \frac{1}{n} n!$$

illetve rendje

$$n = \exp\{\log n\}.$$

Tehát ezek nem teljesítik (1.2)-t és elég sokan is vannak, viszont, a csoport rendjével hasonlítva össze, csak $o(n!)$ a számuk. (Ugyanez a példa mutatja, hogy hasonló a helyzet GONCSAROV említett tételénél is.)

A későbbiekben ismertetjük TURÁN PÁL hasonló jellegű eredményeit a rendértékek aritmetikai szerkezetével, ill. konjugált osztályok elemszámával és (elemeinek) rendjével kapcsolatban. Most inkább a [176] alatti (szintén ERDŐSsel közös) dolgozatának azt az eredményét emeljük ki, amely véges csoportok szimmetrikus csoportokba való beágyazásával kapcsolatos. Közismert, hogy minden legfeljebb n-edrendű csoport beágyazható S_n-be, s természetes kérdés, hogy milyen S_m-re igaz ez $m<n$ esetén. Kommutatív csoportok esetére [176] egyik tétele ad statisztikus választ: Legyen

$$\psi(n) \nearrow \infty, \quad \psi(n) = n^{o(1)}. \tag{1.3}$$

Ekkor majdnem minden legfeljebb n-edrendű kommutatív csoport beágyazható S_m-be, ha

$$m = \left[\frac{n}{\psi(n)}\right], \tag{1.4}$$

s ez lényegében nem is javítható.

A statisztikus csoportelméleti eredmények változatosságát szemlélteti, hogy [176] egy másik tétele logaritmikus aszimptotikát szolgáltat S_n-ben egy P-vel felcserélhető elemek számára, majdnem minden konjugált osztályból vett P-re.

S_n-ben a ciklusfelbontás és a rend kapcsolatára gondolva vagy emlékezve arra, hogy S_n konjugált osztályainak száma éppen az n *partíció*inak száma, nem meglepő, hogy a statisztikus csoportelméleti eredmények kapcsolatban vannak pozitív egészek különböző típusú partíciói összeadandóinak viselkedésével, s az ezekre nyert eloszlási tételek önmagukban is érdekesek.

TURÁN PÁL statisztikus csoportelméleti és partícióelméleti eredményeit a [155], [168], [171], [174], [176], [184], [189], [197], [199], [206], [209], [218], [219], [223], [235], [236], [238], [240] alatti dolgozatok tartalmazzák. A bizonyítások változatos segédeszközöket használnak fel az analízisből, számelméletből, kombinatorikából, valószínűségszámításból és algebrából, szerkezetüket tekintve pedig elsősorban számelméleti és részben valószínűségszámítási jellegűek. Figyelembe véve, hogy a témakörben viszonylag kevés hasonló jellegű eredmény született korábban, bízvást mondhatjuk, hogy *a számelmélet egy új, alkalmazásokban gazdag fejezetéről van szó.*

2. A részletes ismertetésre térve, vizsgáljuk S_n elemeinek rendjét. Majdnem minden P-re már említettük az (1.2) becslést, amely azonban még nem a legerősebb. A statisztikus vizsgálatot egyébként D. H. LEHMER azon tapasztalata inspirálta, hogy véletlenszerűen kivett P-re $O(P)$ nagyon kicsi az (1.1)-beli maximumhoz képest.

TURÁN PÁL statisztikus csoportelméleti eredményeinek nagy része egy 7 dolgozatból álló, ERDŐS PÁLlal közös sorozatban szerepel (ld. [155], [171], [174], [176], [197], [206], [209]). Az (1.2) becslés a sorozat I. részében, a [155] alatti dolgozatban szerepel, valamivel erősebb formában, sőt, a bizonyítás tulajdonképpen kiadja a következőt. Ha $\omega(n) \nearrow \infty$ tetszőleges lassan, akkor majdnem minden P-re (tehát legfeljebb $o(n!)$ elem kivételével)

$$\left|\log O(P) - \frac{1}{2}\log^2 n\right| \leqq \omega(n)\log^{\frac{3}{2}} n. \tag{2.1}$$

Érdemes megemlíteni, hogy közben GONCSAROV tételének következő analogonja adódik. Jelöljük $k(P)$-vel a P kanonikus felbontásában szereplő *különböző* ciklushosszak számát. Ekkor majdnem minden P-re teljesül

$$|k(P) - \log n| < \omega(n)\sqrt{\log n}. \tag{2.2}$$

(Ugyanakkor könnyű belátni, hogy *minden* P-re csupán

$$1 \leqq k(P) \leqq \left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]$$

állítható, s mindkét oldalon elérhető egyenlőség.) Az említett különböző ciklushosszak legkisebb közös többszöröse adja $O(P)$-t. [155]-ből az is kiderül, hogy ez a lk.k.t. majdnem minden P-re „lényegében" a szorzattal helyettesíthető.

Hogy (2.1) tovább már nem javítható (amennyiben legfeljebb $o(n!)$ kivételt engedünk meg), azt a sorozat III. részének (ld. [174]) tétele mutatja, mely szerint $O(P)$ „logaritmikus Gauss-eloszlást" mutat, pontosabban, tetszőleges nagy x_0 pozitív számra és $x \in [-x_0, x_0]$-ra $K(n, x)$-szel jelölve azon P-k számát S_n-ben, amelyekre

$$\log O(P) \leqq \frac{1}{2}\log^2 n + \frac{x}{\sqrt{3}}\log^{\frac{3}{2}} n \tag{2.3}$$

teljesül, $[-x_0, x_0]$-ban egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(n, x)}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv. \tag{2.4}$$

3. A csoportelmélet több kérdésében az $O(P)$ értékénél fontosabb az aritmetikai szerkezete. (Ilyen jellegű tételből nyerte FROBENIUS 1893-ban, hogy minden négyzetmentes rendű véges csoport feloldható.) A. SCHINZEL vetette fel azt a kérdést, vajon igaz-e, hogy majdnem minden P-re $O(P)$ páros. A sorozat II. része (ld. [171]) messzemenő általánosítással válaszolja meg a kérdést. [171] egyik tétele szerint ugyanis, ha $\omega(n) \nearrow \infty$ tetszőleges lassan, akkor *majdnem minden* P-re $O(P)$ osztható *minden* olyan prímhatvánnyal, amely legfeljebb

$$\frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}-\frac{\omega(n)}{\log\log n}\right\}, \tag{3.1}$$

s ez lényegében nem is javítható, mivel [171] egy másik tétele szerint majdnem minden P-re van olyan prímszám, amely legfeljebb

$$\frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}+\frac{\omega(n)}{\log\log n}\right\} \tag{3.2}$$

és vele $O(P)$ már nem osztható.

Előre adott prímmel való oszthatósággal kapcsolatban érdekes a következő eredmény (ld. [171]) a $\log n$ körüli prímekre. Ha α rögzített pozitív szám, p_0 olyan prím, melyre

$$p_0 = (\alpha + o(1))\log n, \tag{3.3}$$

továbbá $b(n)$ jelöli azon P-k számát, amelyekre $O(P)$ nem osztható p_0-lal, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(n)}{n!} = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right), \tag{3.4}$$

tehát S_n elemeinek egy pozitív százaléka még osztható p_0-lal, de ez már nem állítható majdnem minden elemre.

Ezután meglepő lehet, hogy az $O(P)$ $p_{\max}$ maximális prímfaktora még „majdnem mindig" „igen nagy", pontosabban (ld. [171]), ha $\omega(n) \nearrow \infty$ tetszőleges lassan, akkor majdnem minden P-re

$$n \exp\{-\omega(n)\sqrt{\log n}\} < p_{\max} < n \exp\left\{-\frac{1}{\omega(n)}\sqrt{\log n}\right\} \tag{3.5}$$

(persze szó sincs arról, hogy „majdnem mindig" ugyanaz a prím lépne fel maximálisként).

A következő tétel, mely (3.5) bizonyításához kellett, önmagában is érdekes. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_s$ egészek, melyekre

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_s \leqq n. \tag{3.6}$$

Ekkor S_n-ben azon P-k száma, amelyeknek nincs sem a_1, sem a_2, ..., sem a_s hosszúságú ciklusuk a kanonikus felbontásban, legfeljebb

$$n!\left(\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

A bizonyításokban alapvető szerepet játszik az a gondolat, mellyel TURÁN PÁL 1934-ben G. H. HARDY és S. RAMANUJAN $\nu(m)$-re (m különböző prímfaktorainak száma) vonatkozó tételét bizonyította, ti. hogy majdnem minden $m \leqq n$-re $\nu(m) = (1+o(1))\log\log n$. Számos statisztikus csoportelméleti tételben fordul elő a

$$\sum_{m=1}^{n}\{\nu(m)-\log\log n\}^2$$

kifejezéssel analóg összegek vizsgálata, ami a bizonyítások valószínűségszámítási hátterét mutatja (Csebisev-egyenlőtlenség).

Érdemes még megemlíteni, hogy J. D. DIXON a (3.6)—(3.7) tétel felhasználásával bizonyította be 1967-ben E. NETTO azon sejtését, hogy $P_1, P_2 \in S_n \sim \frac{3}{4}$ valószínűséggel generálják S_n-et.

4. S_n-ben az $O(P)$ értékek statisztikus vizsgálata más szempontok (más „súlyozás") szerint is történhet. Mivel „sok" elemre lehet a rend azonos, a (2.1)-től lényegesen eltérő a helyzet, ha a *különböző* rend-értékeket vizsgáljuk. A sorozat IV. részéből (ld. [176]) kiderül, hogy S_n elemeire a különböző rend-értékek száma

$$\exp\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{n}{\log n}}+O\left(\frac{\sqrt{n}\log\log n}{\log n}\right)\right\}, \tag{4.1}$$

s a lehetséges különböző rend-értékek közül majdnem minden a következő alakú:

$$\exp\left\{(1+o(1))\frac{\sqrt{6}\log 2}{\pi}\sqrt{n\log n}\right\}, \tag{4.2}$$

ami lényegesen nagyobb, mint (1.2), bár még mindig csak kb. négyzetgyöke az (1.1)-beli maximumnak. Mindenesetre a lehetséges rend-értékek többsége csaknem olyan nagy, amilyen nagy csak lehet, viszont a legtöbb P-hez a „kevés" közepes rend-érték tartozik.

Ismét új oldalról világítja meg a rendek eloszlását, ha — $O(H)$-val jelölve S_n egy H konjugált osztályában az elemek közös rendjét — $O(H)$ viselkedését nézzük majdnem minden H konjugált osztályra. A sorozat VII. részének (ld. [209]) eredménye szerint majdnem minden H-ra

$$O(H) = \exp\{(A_0+o(1))\sqrt{n}\}, \tag{4.3}$$

ahol

$$A_0 = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} \sum_{j\neq 0} \frac{(-1)^{j+1}}{3j^2+j} \sim 1{,}81.$$

Eszerint a (2.1)-beli jóval kisebb értéket „kevés, de népes" osztály elemei okozzák. (Már ez is felveti majdnem minden H osztály elemszámának kérdését, amire még visszatérünk.) Ha *minden* H-t tekintünk, ezek eléggé különböző elemszámúak lehetnek, így — statisztikusan — $O(H)$ aritmetikai szerkezete várhatóan eltér $O(P)$-étől. Valóban, a sorozat V. részének (ld. [197]) tétele szerint, (3.5)-tel szemben, $\omega(n)\nearrow\infty$ esetén majdnem minden H konjugált osztályra $O(H)$ maximális prímfaktora

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}\log\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}). \tag{4.4}$$

A sorozat VI. részéből (ld. [206]) kiderül, hogy (3.1)-nek is van analogonja újabb szempontunkból, nevezetesen, $\omega(n)\nearrow\infty$ esetén majdnem minden H-ra $O(H)$ osztható minden olyan prímhatvánnyal, amely legfeljebb

$$\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{n}}{\log n}\left\{1+5\frac{\log\log n}{\log n}-\frac{\omega(n)}{\log n}\right\}, \tag{4.5}$$

s lényegében ez sem javítható (a (3.1)—(3.2)-höz hasonlóan).

5. Külön kiemeljük a sorozat IV. részének (ld. [176]) azon tételét, mely szerint majdnem minden konjugált osztályból vett P-re teljesül, hogy a P-vel felcserélhető S_n-beli elemek száma

$$\exp\{(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\sqrt{n}\log^2 n\}. \tag{5.1}$$

DÉNES JÓZSEF megjegyezte, hogy (5.1) alkalmazható az $XYX^{-1}Y^{-1}=P$ kommutátoregyenlet megoldásszámának vizsgálatánál.

Fontos következménye (5.1)-nek, hogy S_n majdnem minden konjugált osztálya

$$n!\exp\{-(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\sqrt{n}\log^2 n\} \tag{5.2}$$

elemet tartalmaz. Ennek egy reprezentációelméleti alkalmazását fogjuk később ismertetni.

6. Az ismertetett eredmények nagy része közvetlenül adja a megfelelő tételeket S_n helyett A_n-re, az n-edfokú alternáló csoportra. Néhány problematikus esetet vizsgál TURÁN PÁL a [184] alatti, DÉNES JÓZSEFfel és ERDŐS PÁLlal közös dolgozatban. Az egyik problémát A_n konjugált osztályszámának meghatározása jelenti. Míg S_n konjugált osztályainak száma az n partícióinak száma, [184] egyik tételéből kiderül, hogy A_n konjugált osztályainak száma lényegében az előbbinek fele, de csak

viszonylag durván, valójában valamivel nagyobb. Ezután (5.1) átvihető A_n-re. [184]-ben szerepel a (2.3)—(2.4) következő analogonja is. Rögzített valós x-re jelöljük $F(n, x)$-szel A_n azon P elemeinek számát, amelyekre

$$\log O(P) \leqq \frac{1}{2}\log^2 n + \frac{x}{\sqrt{3}}\log^{\frac{3}{2}} n. \tag{6.1}$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n, x)}{\frac{1}{2}n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv. \tag{6.2}$$

7. A *4.*, *5.* és *6.*-ban ismertetett tételek bizonyításához különböző típusú partíciókra vonatkozó eredményekre volt szükség. Ezek közül most azt a klasszikustól eltérőt említjük meg, mely különböző q_j prímekre

$$q_1^{\beta_1} + q_2^{\beta_2} + \ldots + q_l^{\beta_l} \leqq n \tag{7.1}$$

megoldásszámát és majdnem minden megoldásban az összeadandók számát adja meg. (Előbbire [176]-ban a (4.1)-beli kifejezés, utóbbira pedig

$$l = \frac{2\sqrt{6}}{\pi}\log 2\sqrt{\frac{n}{\log n}} + O(\sqrt{n}\log^{-0{,}73} n) \tag{7.2}$$

adódott.)

A (7.1) probléma elvezetett egy általánosabb partícióelméleti tétel bizonyításához. Ennek (és további partícióelméleti eredmények, újabb alkalmazások) ismertetéséhez részletesebben kell foglalkoznunk pozitív egészek partícióinak néhány típusával.

8. Tekintsük először a klasszikus, EULER óta vizsgált partíciókat, azaz az n pozitív egész

$$n = x_1 + x_2 + \ldots, \quad 1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \quad (x_i \text{ egész}) \tag{8.1}$$

alakú előállításait. Ezek $p(n)$ számára G. H. HARDY és S. RAMANUJAN tétele szerint, nem is a legerősebb alakban,

$$p(n) = \frac{1+o(1)}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}\right). \tag{8.2}$$

(Így S_n konjugált osztályainak száma $p(n)$, és az említett, majdnem minden konjugált osztályra vonatkozó eredmények legfeljebb $o(p(n))$ kivétellel értendők.)

ERDŐS PÁL 1941-ben J. LEHNERrel megmutatta, hogy n majdnem minden (8.1) típusú partíciójában (tehát legfeljebb $o(p(n))$ kivétellel) az összeadandók száma

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}), \tag{8.3}$$

hacsak $\omega(n) \nearrow \infty$.

Hasonló tételek érvényesek az ún. egyenlőtlen partíciókra, tehát az n szám

$$n = y_1 + y_2 + \ldots, \quad 1 \leqq y_1 < y_2 < \ldots \quad (y_i \text{ egész}) \tag{8.4}$$

alakú előállításaira. Ekkor (8.2), ill. (8.3) megfelelői

$$q(n) = \frac{1+o(1)}{4n^{3/4} \cdot 3^{1/4}} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{n}\right), \tag{8.5}$$

illetve

$$\frac{2\sqrt{3}\log 2}{\pi} \sqrt{n} + O\left(\omega(n) n^{1/4}\right). \tag{8.6}$$

A (7.1) probléma mutatja, hogy alkalmazási szempontból jelentős (8.4)-nek

$$n \geqq z_1 + z_2 + \ldots, \quad 1 \leqq z_1 < z_2 < \ldots$$

alakú általánosítása, éspedig abban az esetben, amikor z_i nem akármilyen egész, hanem prímhatvány. Ennek megoldása vetette fel a következő, jóval általánosabb problémát.

Legyen

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \tag{8.7}$$

egészeknek olyan sorozata, melyre

$$A(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqq x} 1 = B \frac{x^\alpha}{\log^\beta x}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}, \quad \alpha, \beta \text{ valós}, \quad 0 < \alpha \leqq 1. \tag{8.8}$$

Jelöljük $F(n)$-nel

$$\begin{cases} \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_j} \leqq n \\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \end{cases} \tag{8.9}$$

megoldásszámát és kérdezzük az összeadandók számát majdnem minden megoldásban.

TURÁN PÁL a [199] alatti dolgozatban ERDŐS PÁLlal bebizonyította többek között, hogy (8.7)—(8.8) mellett (8.9) majdnem minden megoldásában (tehát legfeljebb $o(F(n))$ megoldástól eltekintve) az összeadandók száma

$$Cn^{\alpha/\alpha+1} \log^{-\beta/\alpha+1} n \{1 + O(\log^{-1/4(\alpha+1)} n)\}, \tag{8.10}$$

ahol C csak B-től, α-tól és β-tól függő explicit konstans.

A (8.8) megszorítást sok (8.7) típusú sorozat triviálisan teljesíti. Például a $\lambda_\nu = \nu$ választással következményként adódik (8.6) egy gyengébb alakja, és hasonlóképpen teljesül (8.8), amikor (8.7) gyanánt a k-adik hatványokat ($\lambda_\nu = \nu^k$) választjuk, vagy az összes prímeket, vagy az összes prímhatványokat stb.

9. DÉNES JÓZSEF vetette fel azt a problémát, hogy adott típusú partíciókra mennyi azon partíció-párok száma, amelyeknek nincsenek egyenlő részösszegeik. Ez a probléma még nincs teljes általánosságban megoldva, ha viszont csak a közös *összeadandókat* vizsgáljuk, erre nézve TURÁN PÁL igen meglepő eredményeket bizonyított [219] és [218] alatti dolgozataiban, nemcsak partíció-párokra, hanem partíció k-asokra is. Nemcsak az derült ki, hogy majdnem minden k-asnak *van* közös összeadandója, hanem elég sok ilyen van.

Foglalkozzunk először a (8.1) típusú partíciókkal, s legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsi, továbbá $k \geqq 2$ rögzített egész. Ekkor a [219] alatti dolgozat egyik tétele szerint majdnem minden partíció k-asban (tehát legfeljebb $o(p(n)^k)$ kivétellel) *legalább* $\left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right)$-szor annyi közös összeadandó van (multiplicitással!), mint a k-asban sze-

replő partíciók maximális összeadandószáma, azaz — (8.3)-mal kombinálva — majdnem minden k-asban *legalább*

$$(9.1) \qquad (1-o(1))\frac{\sqrt{6}}{2k\pi}\sqrt{n}\log n$$

közös összeadandó van (multiplicitással).

Még érdekesebb, hogy az előbbi tételnek olyan általánosítása is van (ld. [219]), amikor pl.

$$(9.2) \qquad N \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots \leqq n_k \leqq N(1+o(1)) \quad (N \to \infty)$$

esetén az $n_1, n_2, \ldots, n_k$ partícióiból alkotjuk a k-asokat (ekkor érvényes az előbbi állítás megfelelője legfeljebb

$$o(p(n_1)p(n_2)\cdot \ldots \cdot p(n_k))$$

kivétellel), s még gyengébb korlátozás esetén is van hasonló becslés.

Azt hihetnénk, hogy e jelenség oka mindössze olyasféle jellegű, hogy a multiplicitás miatt „sok" partícióban eleve sok közös „kicsi" összeadandó van. (Könnyen látható pl., hogy $\omega(n)\nearrow\infty$ esetén majdnem minden (8.1) típusú partícióban legalább $\frac{\sqrt{n}}{\omega(n)}$-szer szerepel az 1 összeadandóként, bár ezek még messze nem adnak $(1-o(1))\frac{\sqrt{6}}{2k\pi}\sqrt{n}\log n$ közös összeadandót.)

Így igazán meglepő Turán Pál [218] alatti dolgozatának azon eredménye, mely *egyenlőtlen* (tehát (8.4) típusú) partíciókra ad hasonló tételt, nevezetesen, $\varepsilon>0$, $k\geqq 2$ egész esetén, a (8.4) típusúakból alkotott majdnem minden partíció k-asban (tehát legfeljebb $o(q(n)^k)$ kivétellel) *legalább* $\left(\frac{1}{k\cdot 2^k\cdot\log 2}-\varepsilon\right)$-szor annyi közös összeadandó van, mint a k-asban szereplő partíciók maximális összeadandószáma, azaz — (8.6)-tal kombinálva — majdnem minden k-asban *legalább*

$$(9.3) \qquad (1-o(1))\frac{\sqrt{3}}{\pi k 2^{k-1}}\sqrt{n}$$

közös összeadandó van. (Ennek az eredménynek is van (9.2)-re vonatkozó általánosítása.)

10. Most visszatérünk az (5.2) eredményhez, tehát hogy S_n majdnem minden H konjugált osztályára

$$(10.1) \qquad |H| = n!\exp\left\{-(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\sqrt{n}\log^2 n\right\},$$

ahol $|H|$ a H elemszáma.

Ismeretes, hogy S_n páronként nem-ekvivalens, (a komplex test feletti) irreducibilis reprezentációinak száma S_n konjugált osztályainak száma, azaz $p(n)$. Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p(n)}$ S_n páronként nem-ekvivalens, irreducibilis reprezentációi, és legyen χ_ν a Γ_ν karaktere. Ekkor (az egyik ortogonalitási relációból)

$$(10.2) \qquad \sum_{\nu=1}^{p(n)} |\chi_\nu(H)|^2 = \frac{n!}{|H|}.$$

[219]-ben (10.1) egy alkalmazásaként adódik (10.2)-vel, hogy majdnem minden H konjugált osztályra

$$\max_{\nu} |\chi_\nu(H)| = \exp\left\{(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{8\pi}\sqrt{n}\log^2 n\right\}, \tag{10.3}$$

az E egységosztályra pedig (mely előbb a kivételek közé tartozott)

$$\max_{\nu} |\chi_\nu(E)| = \exp\left\{\frac{1}{2}n\log n - \frac{n}{2} + O(\sqrt{n})\right\}, \tag{10.4}$$

tehát lényegében $\sqrt{n!}$ (a lehetséges maximum $|\chi_\nu(H)|$-ra). Azonban $\chi_\nu(E)$ éppen Γ_ν dimenziója, ezek mindegyike viszont közvetlen kapcsolatban van n (8.1) típusú partícióival, amelyeket most a következő alakban írunk. Legyen

$$\Pi = \left\{\begin{matrix} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m = n \\ \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_m \geqq 1 \end{matrix}\right\} \quad (\lambda_\mu \text{ egész}), \quad (m = m(\Pi)) \tag{10.5}$$

n egy általános partíciója.

Frobenius és Schur egy tétele szerint létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés n partíciói és S_n irreducibilis reprezentációi között, hogy a Π partíciónak megfelelő Γ_Π-re

$$\dim \Gamma_\Pi = \chi_\Pi(E) = n! \frac{\prod\limits_{1\leqq\mu<\nu\leqq m}(\lambda_\mu-\lambda_\nu+\nu-\mu)}{\prod\limits_{\mu=1}^{m}(\lambda_\mu+m-\mu)!}. \tag{10.6}$$

Ha nemcsak a (10.4)-beli maximumra vagyunk kíváncsiak, hanem $\chi_\Pi(E)$ értékére majdnem minden Π-re, akkor a (10.6) formula alkalmazásánál várhatóan sokat kell tudni majdnem minden Π összeadandóiról.

Erdős és Lehner (8.3) tételéből majdnem minden Π-re (a (10.5) jelöléssel)

$$m = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}), \tag{10.7}$$

hacsak $\omega(n) \nearrow \infty$. Ebből az asszociált partíciók segítségével adódik majdnem minden Π-re az is, hogy a maximális összeadandóra

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}). \tag{10.8}$$

Mint Szalay megjegyezte, már a (10.6)—(10.7)—(10.8)-ból nyerhető majdnem minden Π esetén $\chi_\Pi(E)$-re a következő logaritmikus aszimptotika:

$$\chi_\Pi(E) = \exp\left\{\frac{1}{2}n\log n + O(n\log\log n)\right\}, \tag{10.9}$$

ebből pedig (10.3) „fordított"-ja is adódik:

$$\max_{H} |\chi_\nu(H)| = \exp\left\{\frac{1}{2}n\log n + O(n\log\log n)\right\} \tag{10.10}$$

majdnem minden Γ_ν karakterére.

11. (10.9) javításához azonban már viszonylag pontos becslések szükségesek a λ_μ összeadandókra majdnem minden Π-re (sőt — legalább egy részükre — egyenletesen is, hogy (10.6)-ban szimultán alkalmazhatók legyenek), s e becslések önmagukban is érdekesek.

TURÁN PÁL a [235], [236], [240] alatti dolgozatokban SZALAY MIHÁLYlyal közösen vizsgálta az összeadandók eloszlását majdnem minden Π-re, s kiderült, hogy (nem is a legerősebb alakban idézve)

$$\log^6 n \leqq \mu \leqq \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - 5\sqrt{n}\log\log n \tag{11.1}$$

esetén

$$\lambda_\mu = \left(1+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}\log\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\pi\mu}{\sqrt{6n}}\right)} \tag{11.2}$$

teljesül *egyenletesen* legfeljebb $O(p(n)\cdot n^{-1})$ partíció kivételével. (Közben adódott egy új bizonyítás (10.7)—(10.8)-ra kissé általánosabb alakban.) Bár az alkalmazáshoz (11.1)—(11.2) volt fontos, megemlítjük, hogy hasonló (ha nem is egyenletes) becslések adódtak a „komplementer" tartományokra. Ha $\omega(n)\nearrow\infty$, akkor

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - 5\sqrt{n}\log\log n \leqq \mu \leqq \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - \sqrt{n}\,\omega(n) \tag{11.3}$$

esetén majdnem minden Π-re

$$\lambda_\mu = \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\log n - \frac{\pi\mu}{\sqrt{6n}}\right) + O(1)\sqrt{\frac{1}{2}\log n - \frac{\pi\mu}{\sqrt{6n}}}\right\}. \tag{11.4}$$

Ha pedig $B(n)\nearrow\infty$ és

$$B(n) \leqq \mu \leqq \log^6 n, \tag{11.5}$$

akkor majdnem minden Π-re teljesül

$$\lambda_\mu = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}\log\mu + O(\sqrt{n\log\mu}). \tag{11.6}$$

Ezekkel már lényegesen lehetett javítani a (10.9) becslést, nevezetesen, [240] tétele szerint legfeljebb $O(p(n)\cdot n^{-1})$ kivétellel

$$\chi_\Pi(E) = \sqrt{n!}\exp\{-An + O(n^{\frac{7}{8}}\log^4 n)\}, \tag{11.7}$$

ahol A jól definiált pozitív konstans.

ERDŐS PÁL megjegyezte, hogy (11.7)-ben $O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ hibatag már nem érhető el a *kitevőben* majdnem minden Π-re, tehát (11.7) nincs túl messze a lehető legjobbtól.

A hosszú ismertetés ellenére korántsem idéztük minden részletében TURÁN PÁL eredményeit a témakörben, de igyekeztünk bemutatni a vizsgálatok változatosságát, számos alkalmazását, s bizonyosak vagyunk benne, hogy ezek az eredmények sok kutatót fognak inspirálni a témakör további vizsgálatára.

3. TURÁN PÁL HATÁSA A GRÁFELMÉLETRE

SIMONOVITS MIKLÓS

Sok cikket kezdtek már azzal, Erdős Pál, én is és sokan mások, hogy: „Turán Pál 1940-ben a következő tételt bizonyította be:..." Most is egyszerűbb volna ezt tenni. Hadd kezdjem most mégis ott, hogy ha megkérdeznék tőlem, ki tanítványának vallom magam, három nevet válaszolnék és az egyik Turán Pál volna. Azonban Turántól elsősorban nem gráfelméletet, hanem komplex analízist, és ami talán még fontosabb, matematika-szemléletet tanultam. Ezért itt két dologról szeretnék írni: Turán hatásáról a gráfelméletre és arról, milyennek láttam Turán matematika-szemléletét, illetve kapcsolatát a matematikához.

Mégha ez részben elkerülhetetlen is, szomorúnak érzem, hogy manapság a matematikusok többsége egy szűk területre specializálja magát. Ennek egyik főoka talán az, hogy csak a legjobbak maradhatnak meg az élvonalban egyszerre több területen is. Ezért lényeges, hogy Turán jelentőset alkotott számelméletben, interpoláció- és approximációelméletben, a polinomok és algebrai egyenletek elméletében, a komplex függvénytanban, Fourier-analízisben. Megalkotta az úgynevezett hatványösszegmódszert, melyet mind Ő, mind mások igen hatékonyan alkalmaztak a matematika legkülönbözőbb területein (például számelméletben, numerikus analízisben, differenciálegyenletek stabilitásproblémáiban, stb.). Egyik megalkotója a statisztikus csoportelméletnek.... Mindezért, amikor Turán gráfelméleti munkásságára gondolunk, vagy munkásságának hatására a gráfelméleten belül, nem szabad elfelejteni, hogy olyan ez, mint amikor egy nagy kép egy kis részletéről készült reprodukciót szemlélünk: sok szempontból hűen tükrözi az egészet, olykor azonban erősen hiányos. Így Turán nagy tudása és bizonyító ereje feltehetőleg jobban kidomborodik a cikksorozat többi cikkeiben, azonban egyedülálló probléma-meglátó és elméletteremtő készsége itt is igen jól látható.

1. A ± 1 *determinánsok*

Nem egy gráfelméleti, hanem egy kombinatorikai-algebrai problémával kezdem: Turán Pál és Szekeres György [13]-ban a következő kérdést vizsgálták:

Legyen $A=(a_{i,j})$ egy $n\times n$-es mátrix, melynek minden eleme $+1$ vagy -1. Jelölje $\det A$ A determinánsát. Milyen nagy lehet $|\det A|$?

Hadamard tétele szerint egy determináns értéke felbecsülhető a sorvektorok hosszának szorzatával, ezért $|\det A|\leqq n^{n/2}$ esetünkben. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a sorok páronként ortogonálisak egymásra. Az ilyen ± 1 mátrixokat Hadamard-mátrixoknak nevezzük. Könnyen bizonyítható, hogy csak $n=4k$ esetén létezhet Hadamard-mátrix és régi híres sejtés, hogy minden $n=4k$ esetén létezik is.

Ismert a sejtés bizonyítása, ha $n=2^k$ vagy ha $n=4k$ és $n-1$ prím. A det A-ra vonatkozó kérdés tehát két különböző szinten érdekes: ha nincs Hadamard-mátrix, ill. ha valószínűleg van, csak ezt nem tudjuk bizonyítani. Kissé úgy is felfogható a probléma, hogy azt kérdezzük: ha nincs Hadamard-mátrix, milyen mértékben létezik „majdnem-Hadamard-mátrix". Visszatérve Szekeres és Turán problémájához, $|\det A|$-ra, pontosabban ennek maximumára már előttük is voltak bizonyos konstrukciók útján nyert alsó becslések, Turánék azonban más utat választottak. Bebizonyították, hogy az összes $n\times n$-es ± 1-es mátrix determinánsának négyzetösszege $n!\cdot 2^{n^2}$ és negyedik hatványának összege $(n!)^2 f(n)\cdot 2^{n^2}$, ahol

$$f(1)=1,\quad f(2)=2,\quad f(n)=f(n-1)+\frac{2}{n}f(n-2). \tag{1}$$

(Itt tájékoztatásul megjegyzem, hogy tetszőleges $c>0$-ra $f(n)$ n^{2-c} és n^2 közé esik, ha n elég nagy.)

Mit jelent a fenti eredmény? A négyzetösszegre vonatkozó persze az jelenti, hogy $\det^2 A$ átlaga $n!$, így kell olyan determinánsnak lennie, mely $\sqrt{n!}\cong n^{n/2}e^{-n/2}\sqrt[4]{2\pi n}$-nél nem kisebb, hasonlóan, a negyedik hatványokra vonatkozó eredmény szerint kell olyannak is lennie, melyre $|\det A|\geqq\sqrt{n!}\sqrt[4]{f(n)}$. Később Turán [21, 84]-ben a fenti eredményeket továbbfejlesztette, olyan jellegű kérdéseket vizsgálva, hogy legalább mekkora lesz $|\det A|$, ha az első néhány sorát lineárisan független ± 1 vektorokként előzetesen lerögzítjük.

Miért több a fenti eredmény egy speciális kérdés szellemes megválaszolásánál? Azért, mert a véletlen matematikai struktúrák, a valószínűségszámítási módszerek más területeken való alkalmazásának talán egyik első példáját láthatjuk itt. Azt a jelenséget figyelhetjük meg, hogy míg bizonyos optimumfeladatokban a szélsőértéket adó struktúrák nagyon szabályosak, más esetekben majdnem minden struktúra közel optimális és esetleg az optimumot adó is minden szabályosságot nélkülöző, véletlenszerű struktúra. Ez a jelenség lép fel például véletlen gráfokkal kapcsolatban is igen sokszor, vagy a véletlen kódok elméletében, vagy, hogy egy újabb keletű témát is említsek, a komputeralgoritmusok elméletében és a gyakorlatban oly fontos hash-mátrixok esetében is a véletlen mátrixok adják meg a „majdnem optimumot". Ebből a szempontból a Turán—Szekeres cikket feltétlenül úttörőnek kell tekinteni. (Ugyanakkor persze az önmagában is érdekes, hogy a ± 1-mátrixok determináns-négyzetösszege, illetve negyedik hatványösszege ilyen szép alakban fejezhető ki.)

...És ha már a valószínűségszámítási módszereknél tartunk, hadd kalandozzak el egy kicsit a számelmélet területére. Turán 1934-ben [4]-ben egy újabb bizonyítást adott Hardy és Ramanujan azon híres tételére, mely szerint ha tekintjük a számokat 1-től n-ig, majdnem mindegyiknek hozzávetőlegesen $\log\log n$ prímosztója van. Turán lényegében a következőt csinálta: kiszámította a prímosztók számának várható értékét és szórását, majd alkalmazta a Csebisev-egyenlőtlenséget, ezzel egy igen rövid és az addiginál lényegremutatóbb bizonyítást adva a tételre. Bizonyítása valószínűleg az első példája valószínűségszámítási módszerek alkalmazásának számelméleti függvények értékeloszlás-vizsgálatában. (Megjegyzem, hogy sem a Szekeres—Turán-cikk, sem a Hardy—Ramanujan-tétel bizonyítása nem valószínűségszámításos terminológiában van megfogalmazva, de ez itt lényegtelen.)

2. *Turán gráftétele*

Erdős és Szekeres, nem ismervén Ramsey tételét, 1935-ben azt újra felfedezték [L]. Turán ennek kapcsán jutott el gráftételéhez [24]. Mielőtt Turán tételét kimondanám, néhány jelölést vezetek be. G^n mindig egy n szögpontú gráfot fog jelölni, $K_d(n_1, \ldots, n_d)$ a teljes d-kromatikus gráfot n_i ponttal az i-edik osztályában, azaz $K_d(n_1, \ldots, n_d)$ pontjai a $C_1, \ldots, C_d$ diszjunkt osztályokba vannak osztva és két pont akkor és csak akkor van összekötve, ha különböző osztályba tartozik; végül, C_i elemszáma éppen n_i, $i=1, \ldots, d$. Itt és az alábbiakban is, ha az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, gráfon irányítatlan, hurok és többszörös él nélküli gráfot értünk. $K_d(n_1, \ldots, n_d)$ specialis eseteként $K_d(1, \ldots, 1) =: K_d$-t, a d szögpontú teljes gráfot kapjuk. Egy G gráf élszáma $e(G)$, pontszáma $v(G)$, kromatikus száma $\chi(G)$. Egy E halmaz elemszámát $|E|$-vel jelöljük.

Ramsey tételét most így is fogalmazhatjuk: Ha egy G^n gráf nem tartalmaz k független pontot és p a legnagyobb olyan egész szám, melyre $\binom{k+p-2}{p-1} \leqq n$, akkor G^n tartalmaz egy K_p-t. Turán azt kérdezte, milyen más feltétellel, mondjuk, milyen $e(G^n)$-re vonatkozó alsó becsléssel lehetne biztosítani egy teljes p-es létezését G^n-ben a független pontok maximális számára vonatkozó feltétel helyett? Így jutott el tételéhez:

Turán-tétel. Legyen $T^{n,d} =: K_d(n_1, \ldots, n_d)$ a legegyenletesebb $n = n_1 + \ldots + n_d$ felosztásra: $\left|n_i - \frac{n}{d}\right| \leqq 1$ teljesüljön $i=1, \ldots, d$-re. ($T^{n,d}$ egyértelműen definiált.) Adott n-re és p-re az n szögpontú, K_p-t nem tartalmazó gráfok között létezik egyetlenegy maximális élszámú és ez éppen $T^{n,p-1}$.

(Az triviális, hogy $T^{n,p-1}$ nem tartalmaz teljes p-est, ugyanis csak $p-1$ osztálya lévén, egy p szögpontú G^p részgráfja mindig tartalmaz két pontot $T^{n,p-1}$ ugyanazon osztályából, és ezek között nem fut él. Az is világos, hogy $e(G^n) \geqq \binom{n}{2}$ esetén $G^n = K_n$, azaz, $n \geqq p$-re tartalmaz K_p-t. A kérdés tehát az, hogy $e(T^{n,p-1})$ és $\binom{n}{2}$ között hol az a határ, mely már biztosítja K_p-t G^n-ben. Turán tétele szerint ez éppen $e(T^{n,p-1})+1$. Az egyébként könnyen igazolható, hogy ha $n \equiv r \bmod (p-1)$ és $0 \leqq r \leqq p-2$, akkor

$$e(T^{n,p-1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \cdot (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$

Érdemes Turán tételét a komplementer formába is átfogalmazni. Ezt úgy kapjuk, hogy G^n helyett a komplementerét, $\overline{G}^n$-et tekintjük.

Turán tétele (komplementer formában). Ha G^n nem tartalmaz p független pontot, akkor $e(G^n) \geqq e(\overline{T}^{n,p-1})$, és egyenlőség csak $G^n = \overline{T}^{n,p-1}$ esetén áll fenn.

($\overline{T}^{n,p-1}$ egyébként $p-1$ teljes gráf uniója, és valóban nem tartalmaz p független pontot.)

3. *A Turán tétele nyomán kialakult elmélet*

Turán tételének közlése után igen komoly elmélet alakult ki körülötte. Nem kétséges, hogy Turán azzal gyakorolta a legnagyobb hatást a gráfelméletre, hogy ezen elmélet alapjait lerakta: Bebizonyította igen kerek és elegáns tételét, elmagyarázta, hogy miért tartja érdekesnek a problémát, majd néhány további megoldatlan

kérdést is felvetett, részben cikkében, részben Erdőshöz írt leveleiben, tételével kapcsolatban. Az alábbiakban, ahelyett, hogy a Turán-tétel körüli elméletet részletesen ismertetném, főbb fejezeteiből ragadok ki néhány tipikus eredményt. Ezek kiválasztásánál vagy fontosságuk, vagy könnyen érthetőségük volt a szempont.

(a) *A hipergráf-probléma.* Turán már [24]-ben megfogalmazta ezt az extrém gráfok elméletének egyik legizgalmasabb, ma is megoldatlan problémáját, melyet az eredeti formában idézek.

A zárójeles részek tőlem származnak. „Az I. tétel (=Turán tétele) egy másik érdekes kérdésre is rögtön választ ad. Egy teljes n-szögben minden teljes p-est reprezentáljunk egy élével; természetesen $p \leqq n$. (Itt a reprezentálás egy olyan élrendszer, megadása, melyből mindegyik K_p tartalmaz legalább egy élt.) Ezen reprezentálás nyilván nagyon sokféleképp vihető keresztül. Keresendő azon reprezentálási mód, mely a lehető legkevesebb éllel reprezentál. A kérdés úgy is kifejezhető, hogy egy adott p számhoz, melyre $3 \leqq p \leqq n$, keresendő az n szögpontú teljes gráf oly éleinek minimális rendszere, melyek együttesen minden teljes p-szöget „lefognak". A III. tétel (=Turán-tétel komplementer formában) erre pontos választ ad, ... Azon természetesen adódó általánosabb kombinatorikus kérdésre, hogy n elem r-edosztályú kombinációi közül *legalább* hányat kell kivenni, hogy minden p-edosztályú kombinációban legyen legalább egy kiválasztott r-edosztályú ($r \leqq p$), egyelőre nem tudok válaszolni."

Turán kérdése a hipergráfok nyelvén így fogalmazható: Legalább hány éle van egy H^n r-uniform hipergráfnak, ha nincs benne p független pont.

Ez a komplementer tételnek felel meg, a másik alak: Ha egy r-uniform n szögpontú hipergráfban nincs teljes p-es, legfeljebb hány hiperéle lehet ezen hipergráfnak?

A probléma még a legegyszerűbb esetben is máig megoldatlan: legyen $r=3, p=4$ és $T^{n,3,3}$ legyen az a hármas-rendszer, melyet n pont legegyenletesebb 3 osztályba, C_1, C_2, C_3-ba osztása után úgy kapunk, hogy vesszük az összes $(x_{i,j}, x_{i,j'}, x_{i,j''})$ és $(x_{i,j}, x_{i,j'}, x_{i+1,j''})$ alakú hármast, ahol $x_{i,s} \in C_i$ és $x_{4,s} =: x_{1,s}$, $i=1, 2, 3$, $j, j', j''=1, \ldots, \left[\frac{n}{3}\right]$ vagy $\left[\frac{n}{3}\right]+1$, továbbá a hármas pontjai mind különbözők. Sejtés: Ha egy 3-uniform hipergráfban, azaz egy hármasrendszerben kevesebb hármas van, mint $T^{n,3,3}$-ban, akkor van benne 4 független pont: (u, v, w, z), melynek egyik hármasa se tartozik a hármasrendszerünkhöz. Nemcsak a sejtés nem eldöntött, de még az sem, vajon aszimptotikusan igaz-e.

(b) *Az általános probléma.* Legyen $\mathcal{L}$ egy véges vagy végtelen gráfosztály, melynek elemeit „tiltott gráfoknak" fogjuk nevezni, és legyen

$$\mathrm{ex}(n, \mathcal{L}) = \max \{e(G^n): G^n \text{ nem tartalmaz } L \in \mathcal{L}\text{-t}\}.$$

Így $\mathrm{ex}(n, \mathcal{L})$ az $\mathcal{L}$-hez tartozó „Turán-küszöb". Legyen $\mathrm{Ex}(n, \mathcal{L})$ az ún. extrém gráfok, azaz a tiltott részgráfot nem tartalmazó maximális élszámú gráfok osztálya. Az általános probléma $\mathrm{ex}(n, \mathcal{L})$ és $\mathrm{Ex}(n, \mathcal{L})$ meghatározása.

Turán egy Erdőshöz írt problémája nyomán született meg az Erdős—Gallai-tétel, melyet itt első illusztrációként megfogalmazok:

Erdős—Gallai-tétel [H]. Ha P^t jelöli a t szögpontú utat, akkor

$$\mathrm{ex}(n, P^t) \leqq \frac{t-2}{2} n,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha n osztható $(t-1)$-gyel. Ekkor csak egyetlen S^n extrém gráf létezik és ez $\frac{n}{t-1}$ darab K_{t-1}-ből áll.

(Később Faudree és Schelp [M] meghatározták $\mathrm{ex}(n, P^t)$-t és $\mathrm{Ex}(n, P^t)$-t minden n-re pontosan.) Egy érdekes megoldatlan probléma az

Erdős—T. Sós-sejtés. Legyen F^t egy tetszőleges t szögpontú fa. Bizonyítandó, hogy ekkor is

$$\mathrm{ex}(n, F^t) \leqq \frac{t-2}{2} n.$$

(Az $\frac{n}{t-1}$ darab teljes $t-1$-esből álló S^n példája mutatja, hogy a sejtés éles, ha igaz.)

(c) *Az elfajult eset.* Ebben és a következő részben $\mathrm{ex}(n, \mathscr{L})$ nagyságrendjének $\mathscr{L}$-től való függését vizsgáljuk meg. Legyen

$$p = p(\mathscr{L}) =: \min \{\chi(L): L \in \mathscr{L}\}.$$

Az $\mathscr{L}$ osztályt elfajultnak mondjuk, ha $p(\mathscr{L})=2$, erősen elfajultnak, ha van $\mathscr{L}$-ben fa vagy erdő. Belátható, hogy $\mathscr{L}$ akkor és csak akkor erősen elfajult, ha $\mathrm{ex}(n, \mathscr{L}) = O(n)$.

Különösen érdekesek az extrémgráf-problémák között az elfajult, de nem erősen elfajult Turán-típusú gráfproblémák. Az elmélet továbbfejlesztése szempontjából is az egyik legfontosabbnak látszik ez a ma még meglehetősen felderítetlen terület. Az egyik első idevágó eredmény a

Kővári—T. Sós—Turán-tétel, [71]. Legyen $p \leqq q$. Ekkor

$$\mathrm{ex}(n, K_2(p, q)) \leqq \frac{1}{2} \sqrt[p]{q-1}\, n^{2-(1/p)} + o(n^{2-(1/p)}).$$

(A fenti tétel éles, ha $p=q=2$, és a szorzókonstanstól eltekintve $p=2$, 3-ra is mindig éles. Az sejthető, hogy a szorzókonstanstól eltekintve mindig pontos. A fenti tételt egyébként Erdős is bebizonyította Turánéktól függetlenül.)

Legyen most $\mathscr{L}$ tetszőleges véges, elfajult, de nem erősen elfajult gráfosztály. Ekkor létezik két olyan pozitív konstans, c és c', melyekre

$$n^{2-c'} < \mathrm{ex}(n, \mathscr{L}) < n^{2-c} \quad \text{ha} \quad n > n_0(\mathscr{L}).$$

A felső becslés könnyen adódik a Kővári—T. Sós—Turán-tételből, az alsó becslés valószínűségszámítási módszerekkel nyerhető, pontosabban, közvetlen következménye Erdős alábbi eredményének:

$$\mathrm{ex}(n, \{C^3, C^4, \ldots, C^{2k}\}) \geqq c_k n^{2-\frac{1}{2k-1}},$$

ahol C^j a j pontú kör, c_k egy csak k-tól függő pozitív konstans.

(d) *A nem-elfajult eset aszimptotikája.* Az Erdős—Stone-tételt [K] kissé gyengítve a következő módon is fogalmazhatjuk:

$$\mathrm{ex}(n, K_{d+1}(t, \ldots, t)) = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{d}\right) + o(n^2).$$

Ebből Erdős és Simonovits már triviálisan kapták [J], hogy tetszőleges $\mathscr{L}$ tiltott gráfosztályra

$$\mathrm{ex}(n, \mathscr{L}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) n^2 + o(n^2),$$

ahol $p=p(\mathscr{L})$. Ezt továbbfejlesztve Erdős és Simonovits egymástól függetlenül bebizonyították a következő tételt: [*F*, *G*, *R*]

Erdős—Simonovits-tétel. Ha S^n egy tetszőleges extrém gráf $\mathscr{L}$-re, elhagyható S^n-ből és hozzáadható S^n-hez $o(n^2)$ él úgy, hogy éppen $T^{n,p-1}$-et kapjuk meg. Ha ráadásul $\mathscr{L}$ véges is, akkor S^n minimális fokszáma $\approx\left(1-\frac{1}{p-1}\right)n$.

A fenti két tétel úgy interpretálandó, hogy tetszőleges $\mathscr{L}$-re az extrém gráf csak nagyon kevéssé függ $\mathscr{L}$-től, $p(\mathscr{L})$ már lényegében meghatározza az extrém gráf struktúráját, annak ellenére, hogy $p(\mathscr{L})$ csak igen kevés információt tartalmaz $\mathscr{L}$-re nézve. Következménye ennek az is, hogy $\mathscr{L}$-re az extrém gráf csak $o(n^2)$ élben különbözik a K_p-hez tartozó extrém gráftól. Azt is mutatják ezek a tételek, hogy véletlenül vagy nem véletlenül, de Turán a K_p-re vonatkozó tételén keresztül megint a tipikus jelenséget ragadta meg. (Nem zártuk ki a $p=2$ esetet sem, azonban ekkor állításaink a Kővári—T. Sós—Turán-tétel triviális következményei.)

(e) *A túltelített gráfok problémája.* Ha egy G^n gráfnak $\mathrm{ex}\,(n, \mathscr{L})+k$ éle van valamilyen adott $k=1, 2, \ldots$-re, akkor $\mathrm{ex}\,(n, \mathscr{L})$ definíciója szerint G^n tartalmaz egy $L\in\mathscr{L}$-t. Az a meglepő jelenség figyelhető meg, hogy ilyenkor G^n nemcsak egy, de igen sok tiltott részgráfot tartalmaz. Illusztrációként a következő eredményeket említeném meg:

Rademacher-tétel (publikálatlan, 1941!). Ha $e(G^n)=\mathrm{ex}\,(n, K_3)+1$, akkor G^n legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ háromszöget tartalmaz.

Erdős-tétel, [D]. Ha $e(G^n)=\mathrm{ex}\,(n, K_p)+k$ valamilyen $1\leqq k\leqq c_p n$-re, ahol $c_p>0$ egy csak p-től függő konstans, akkor G^n legalább annyi K_p-est tartalmaz, mint az az S^n gráf, mely $T^{n,p-1}$-ből k él hozzáadásával adódik. ($e(G^n)=e(S^n)$.)

Világos, hogy Rademacher tétele Erdős tételének nagyon speciális esete. Erdős tételét úgy fogalmaztam, hogy abból az élessége is azonnal látszik. Képlettel is megfogalmazhattam volna, ekkor például $p=3$-ra G^n-ben $k\left[\frac{n}{2}\right]$ háromszöget tudunk biztosítani. A kérdésnek kiterjedt irodalma van, csupán Moser, Moon, Bollobás, Lovász és Simonovits nevét említem itt meg a fentieken kívül.

Kissé más jellegű, de ugyancsak a túltelített gráfokkal foglalkozó tételek azok is, amelyekben $e(G^n)>\mathrm{ex}\,(n, L)$ esetén nemcsak egy $L\subseteq G^n$ létezését bizonyítjuk be, hanem egy $L'\supseteq L$-ét is. Egy példa erre:

Dirac-tétel, [C]. Legyen $e(G^n)\geqq\mathrm{ex}\,(n, K_p)$, $G^n\neq T^{n,p-1}$ és t egy tetszőleges p és $2p-2$ közötti egész. Ekkor G^n tartalmaz (nemcsak egy K_p-t, de) egy olyan G^t gráfot is, melyből legfeljebb $(t-p)$ él hiányzik: G^n tartalmaz egy K_{p+1}-et egy él híján, egy K_{p+2}-t 2 él híján, ... ($t=p$-re visszakapjuk Turán tételét).

(f) *Multigráfok és irányított gráfok.* Itt csak a multigráf-problémánál általánosabb irányított-gráf-problémára szorítkozom. Rögzítünk egy r-et és csak olyan irányított gráfokat tekintünk, melyekben két pont között azonos irányban legfeljebb r ív fut. Adott $\vec{\mathscr{L}}$ irányított gráf-osztály esetén $\mathrm{ex}\,(n, \vec{\mathscr{L}})$ és $\mathrm{Ex}\,(n, \vec{\mathscr{L}})$ definíciója a szokásos. Az ezirányú kutatásokat W. G. Brown és F. Harary kezdték el [A], W. G. Brown, Erdős és Simonovits több általános tételt bizonyítottak be [B], melyekből azonban az is kiderült, hogy a helyzet itt jóval bonyolultabb, mint a közönséges gráfok esetén. Így például lényegében csak $r=1$-re vannak általános tételek.

(g) *Extrém-hipergráf-problémákról újra.* Az extrém-hipergráf-problémák általában jóval nehezebbek, mint akár a közönséges-, akár az irányított-hipergráf-problémák. Turán megoldatlan problémája mellett a Kővári—T. Sós—Turán-tétel egy hipergráf-általánosítását is ismertetem.

Legyen $K^{(r)}(p, \ldots, p)$ az az r-uniform hipergráf, melynek pontjai $x_{i,j}$ $i=1, \ldots, r$, $j=1, \ldots, p$ és hiperélei a p^r darab $(x_{1,j_1}, \ldots, x_{r,j_r})$ alakú r-esek, tehát azok, amelyek mindegyik „sorból" pontosan egy elemet tartalmaznak.

Erdős-tétel, [E]. $\operatorname{ex}(n, K^{(r)}(p, \ldots, p)) = 0(n^{r-(1/p^{r-1})})$. Ha $r=2$, a Kővári—T. Sós—Turán-tételt kapjuk. Érdekes megoldatlan probléma, vajon pontos-e a fenti becslés a legegyszerűbb esetben: ha $r=3$, $p=2$.

(h) *További problémákról.* Sok mindenről nem írtam itt, az alábbiakban futólag említek néhány ilyen problémakört. A véletlen gráfok elmélete szoros kapcsolatban áll a Turán-típusú extrémgráf-problémákkal. Kiterjedt irodalommal bír a topologikus részgráfok extremális elmélete: itt $\mathscr{L}$ a véges sok előre megadott gráffal topológiailag ekvivalens gráfok osztálya. Érdekes terület a véges geometriák elméletének alkalmazása alsó becslések nyerésére elfajult problémák esetében. Végül megemlítem a paraméteres problémákat, ahol az $\mathscr{L}$ tiltott gráfosztály valamilyen természetes módon függ n-től is. Tulajdonképpen az Erdős—Stone-tétel is ilyen: eredeti formájában azt állította, hogy ha $t_1=n$, $t_i=\log t_{i-1}$, akkor minden $c>0$-ra van olyan $c'>0$, hogy amennyiben

$$e(G^n) > \left(1-\frac{1}{p-1}+c\right)\cdot\frac{n^2}{2},$$

akkor G^n tartalmaz egy $K_p(t, \ldots, t)$-t $t=[c't_p]$-re. (Ma már ismert ugyanez $t=[c'\log n]$-nel is, ami éles.)

4. *A Turán-tétel Turán Pál által kezdeményezett alkalmazásairól*

Turán tétele a gráfelmélet egy igen alapvető kérdésére ad választ, így nem meglepő a gráfelméleten belüli alkalmazhatósága. Erre itt nem térek ki. Jóval meglepőbb azonban az, hogy a matematikának a gráfelmélettől igen távoleső területein is nemegyszer segít a Turán-tétel. Itt elsősorban erről szeretnék írni: röviden ismertetem a Turán Pál által elindított alkalmazásokat és a körülöttük kialakult elméletet.

Turán 1968-ban egy előadást tartott a Bolyai Társulatban gráftételének alkalmazásáról, bizonyos síkbeli ponthalmazok távolságeloszlásának leírására, illetve idevágó eredményeinek alkalmazásáról a potenciálok becslésére. Előadásának továbbfejlesztett változatát mondta el az 1969-es calgary-i gráfkonferencián is. Ezen két előadásával Turán (megint) egy új kutatási irányt kezdett el. A konferencia kötetében Turán cikke [188] mellett már T. Sós Vera cikke is Turán előadásaival kapcsolatban felvetődő problémákat old meg. Hamarosan Turán további eredményeket közöl [198, 200, 204] cikkeiben, majd egy három cikkből álló cikksorozat jelenik meg Erdős, Meir, T. Sós és Turán szerzőnégyestől összefoglalva és továbbfejlesztve a Turán-tétel geometriai, potenciálelméleti, komplex függvénytani és egyéb alkalmazásait [195, 206, 207].

Az itt bemutatandó alkalmazások egyik fő segédeszköze a pakolási konstansok sorozata. Legyen M tetszőleges metrikus tér, F legyen M bizonyos véges részhalmazainak egy osztálya. Tegyük fel, hogy

(i) létezik olyan C, hogy minden $A\in F$ C-nél kisebb átmérőjű,

(ii) ha $A'\subseteq A\in F$, akkor $A'\in F$,

(iii) legyen $P\in A\in F$ és $c>0$.

Ekkor van olyan P', melyre $d(P, P')<c$ és $A\cup\{P'\}\in F$.

Amikor a fenti feltételeknek eleget tevő F halmaz-családokról beszélünk, elsősorban az alábbi három tipikus esetre gondolunk:

(a) FR^k egy D korlátos tartományának lezárásába eső véges ponthalmazok rendszere.

(b) A $D \subseteq R^k$ korlátos tartomány lezárásából most csak azon véges részhalmazokat vesszük, melyek 1-nél kisebb átmérőjűek.

(c) Legyen $h<k$ és $D \subseteq R^h$ legyen megint egy korlátos tartomány lezárása. Tekintsük R^k azon véges részhalmazait, melyeknek minden h-dimenziós síkra vett vetülete lefedhető D-nek egy eltoltjával.

I. Az alábbiakban a metrikát $d(x, y)$-nal jelölve, a $d(P_i, P_j)$ távolságok értékeloszlása iránt érdeklődünk olyan $(P_1, \ldots, P_n)$ pont n-esekre, melyek F-hez tartoznak. A pakolási konstansok definíciója:

$$d_k = \sup_{(P_1,\ldots,P_k)\in F} \min_{1\leqq i<j\leqq k} d(P_i, P_j).$$

Világos, hogy $d_k \geqq d_{k+1}$. Ha az M metrikus tér R^n egy kompaktuma, akkor $d_k \to 0$ is teljesül. Legyen $i_1=1$ és $i_2, \ldots, i_j$ legyenek a d_i sorozat ugráspontjai, azaz legyen

$$d_{i_j} > d_{i_j+1} = d_{i_j+2} = \ldots = d_{i_{j+1}} > d_{i_{j+1}+1} = \ldots$$

Turán távolságeloszlási tétele [188]. Legyen $k \geqq 2$ és $n>i$. Tetszőleges $(P_1, \ldots, P_n) \in F$-re azon P_i, P_j párok száma, melyre

$$d(P_i, P_j) \leqq d_{i_\nu+1} (= d_{i_\nu+1}), \quad i \neq j$$

legalább

$$\frac{n^2}{2i_\nu} - \frac{n}{2}.$$

A tétel nagyon erős értelemben éles: az egyenlőség eléretik minden tekintett F-re, $\nu \geqq 2$-re és $n \equiv 0 \pmod{i_\nu}$-re. Tulajdonképpen (ii) és (iii) csak az élesség biztosításához kell.

A fenti távolságeloszlási tétel érdekes önmagában is és külön érdekes széleskörű alkalmazhatósága miatt. Érdekes kapcsolatban áll például egy nagyon régi geometriai problémával is [188, 200]. Mint Turán leírja [200]-ben, ha F az egységgömb véges részhalmazainak rendszere a térben, akkor

„...Míg Gregory azt állította, hogy egy egységgömböt érinthet 13 páronként egymásba nem nyúló egységgömb, addig Newton állítása szerint ilyen gömb legfeljebb 12 van. Belátható, hogy Gregory állítása a pakolási állandókkal kifejezve azt jelentené, hogy $d_{13}=1$, míg Newtoné azt, hogy $d_{13}<1$."

Mint láttuk, az ilyen jellegű állítások Turán tételén keresztül igen szoros kapcsolatban vannak a gömbfelszínen megadott pontrendszerek távolságeloszlásával. Egyébként csak 1874-ben derült ki, hogy Newtonnak volt igaza. Azt a hasonló állítást, hogy $d_{11}=d_{12}$ igaz-e, csak a legutóbbi időben döntötték el, mikor Turán cikkét írta, még nem létezett elfogadhatóan leírt, minden kételyt kizáró bizonyítása az egyenlőségnek. Turán, távolságeloszlási tételéből, a következőt bizonyította:

Ahhoz, hogy $d_{11}>d_{12}$ teljesüljön, szükséges és elégséges, hogy található legyen valamilyen $n \geqq 26$-ra az egységgömb felületén egy olyan $(Q_1, \ldots, Q_n)$ pontrendszer, melyre a $d(Q_i, Q_j)>d_{12}$ egyenlőtlenség legalább $\frac{9}{20}n^2+1$ pontpárra igaz.

II. A fentinél is meglepőbb, hogy Turán tétele a távolságeloszlási tételen keresztül potenciálok becslésére is alkalmas.

Legyen r_{xy} az x és y pontok távolsága, D legyen egy kompakt halmaz R^m-ben. Legyen μ egy mérték D-n, $f(r)$ egy monoton csökkenő függvény. Ilyenkor a fizikából ismert potenciált általánosítva nevezzük potenciálnak az

$$I(f) = \iint_{D \times D} f(r_{xy})\, d\mu_x\, d\mu_y$$

integrált. (Fizikában $f(r)=\frac{1}{r^{m-2}}$, illetve $m=2$-re $f(r)=\log\frac{1}{r}$ a leggyakoribb választás.)

Tétel. Ha $|D|$ a D halmaz mértéke, d_k pedig D véges részhalmazai rendszerének k-adik pakolási állandója, akkor

$$I(f) \geqq |D| \sum_k f(d_k)/(k^2-k).$$

Ha $I(f)$-re felső becslést akarunk kapni, az eredmények szükségszerűen bonyolultabb formájúak, ezeket nem ismertetem.

III. Mint ismert, a matematikában igen fontos a kis, elhanyagolható halmazok árnyalt mérése. Erre szolgál a 0-mértékű halmaz, vagy az első kategóriájú halmaz fogalma. Komplex függvénytanban a kapacitást szokás a kis halmazok mérésére felhasználni. Mint sok más mértéknél, itt is az az alapvető kérdés, hogy egy halmaz 0 kapacitású-e vagy sem. Turán és társszerzői a következőt bizonyították be egyebek között:

Tétel [207]. Legyen $D \subseteqq R^2$ kompakt és d_k legyen D véges részhalmazai rendszerének k-adik pakolási konstansa. Ha

$$\sum_k \frac{1}{k^2} \log d_k$$

divergens, akkor D komplex kapacitása 0. Ugyanekkor minden $c>0$ konstansra létezik olyan D, melyre

$$\sum_k \frac{1}{k^{2-c}} \log d_k$$

divergens, de D nem 0 kapacitású.

Még egy nem gráfelméleti alkalmazást ismertetnék Turán gráftételére egy más területről. Katona Gyula foglalkozott olyan jellegű kérdésekkel, hogy hogyan lehetne valószínűségszámításbeli egyenlőtlenségeket levezetni Turán-típusú tételekből [P]. Turán tételét alkalmazva bebizonyította például, hogy ha ξ és η két vektorértékű független valószínűségi változó, akkor

$$P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi| \geqq x)^2.$$

Ismertetésemet itt befejezem, mégegyszer aláhúzva, hogy a fentiekkel főleg illusztrálni akartam mondókámat, nem törekedtem teljességre.

5. *Néhány gondolat Turán és a matematika kapcsolatáról*

Az alábbiakban két izgalmas kérdésre próbálok választ találni:

— Mi volt Turán Ars Mathematica-ja, milyen főbb szempontok vezérelték kutatásaiban?

Mi volt Turán elméletteremtő erejének titka?

A második kérdéssel kezdem. Láttuk, hogy Turán gráftétele egy egész elmélet alapkövévé vált, hogy távolságeloszlási tétele és alkalmazásai nyomán is egy kisebb elmélet alakult ki. Említettem, hogy a Hardy—Ramanujan-tételre adott bizonyítása nyomán indult meg a számelméleti függvények értékeloszlásának valószínűségszámítási elmélete. Kiemelkedő elméletet alkotott a „hatványösszeg-módszer" körül. Ezek és további példák sora mutatja, hogy Turánnak valami különös elméletteremtő képessége volt. Hogyan és miért? Azt hiszem, a válasz az, hogy Turán mindig az új jelenségek után kutatott: olyan problémákat, jelenségeket keresett, melyek különböztek a már ismertektől, melyek szépek voltak, érdekesek és jól tükrözték az éppen célbavett területet. A szépség, érdekesség, meglepőség Turán matematikájában mindig igen fontos volt. Ugyanakkor soha sem tartotta fontosnak, hogy tételeit a lehető legáltalánosabb formában fogalmazza meg. Turán matematizálási stílusára vonatkozólag hadd idézzem Rényi Aldréd szavait [Q]:

„Turán matematikai munkásságának másik jellemző vonása az a páratlan problémameglátó képessége, amelyre a fentiekben többször utaltam. Arról van szó, hogy impozáns átfogó — teljes joggal enciklopédikusnak nevezhető — tudása ellenére, ha egy problémát alaposabban szemügyre vesz, nem hagyja magát a legcsekélyebb mértékben sem befolyásolni azáltal, hogy hogyan *szokás* a szóban forgó problémát megközelíteni; soha nem tesz egy lépést sem kitaposott utakon anélkül, hogy meggondolná, hogy valóban ez az egyedüli elképzelhető és a leginkább célravezető út-e. Érthető, hogy ha valaki *így* halad előre, az gyakran fedez fel új ösvényeket, amelyek közül egyesek idővel a tudomány új országútjaivá válhatnak. *Turán* eredeti, az új módszerek keresésére irányuló kérdésfeltevései teszik munkáit olyan frissé és gondolatébresztővé. Munkáit olvasva különösen erőteljesen érezzük azt, hogy a tudományban nem léteznek véglegesen „elintézett", lezárt problémák, és nincsenek „egyedül üdvözítő" eljárások.

Turán munkásságának ezek a vonásai megmagyarázzák azt is, hogy előadásai, a vele való matematikai beszélgetések miért hatnak annyira ösztönzőleg mindenkire."

Az alábbiakban néhány példával támasztom alá Rényi szavait Turán gondolatébresztő kérdésfelvetéseiről: olyan példákkal, melyekben Turán által felvetett kérdésekre mások válaszoltak, mások építettek elméletet köréjük.

Ismert történet Turánról, hogy 1944-ben munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott, ahol a téglaégető kemencéktől kellett csilléken elszállítani a téglát bizonyos lerakodó helyekig. Ahol a sínek keresztezték egymást, a csille gyakran kiborult. Történetesen minden kemence és minden lerakóhely között futott sín. Turán ennek alapján a következő matematikai problémát fogalmazta meg: Ágyazzuk be $K_2(p, q)$-t a síkba úgy, hogy a metszések száma a lehető legkisebb legyen. Turán ezen, ún. téglagyári problémája azóta híressé vált, van egy sejtés az optimális beágyazásra, születtek hibás bizonyítások is a sejtésre, de teljes általánosságban a probléma még ma is megoldatlan. A legélesebb eredmény $K_2(5, q)$ optimális beágyazása. A probléma egyébként ma gyakorlatilag „még fontosabb", mint 1944-ben: az integrált áramkörök, elektronikus kapcsolások lépten-nyomon ilyen jellegű problémák megoldását követelik.

Egy másik nevezetes probléma Erdős és Turán alábbi kérdése: Legyen $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ egy pozitív egészekből álló végtelen sorozat, és $A(n)$ jelölje az 1 és n közé eső a_i-k számát. A sorozat alsó sűrűsége, $\liminf \frac{A(n)}{n}$, legyen pozitív. Igaz-e, hogy ekkor tetszőleges k egész számra van egy k tagú számtani sor a sorozatban. K. F. Roth „Field medal"-os matematikus munkássága egyik kiemelkedő eredményeként tartották számon a $k=3$ eset elintézését, az általános eset hosszú ideig volt

bizonytalan, míg végül Szemerédi Endre doktori disszertációjában bebizonyította, hogy a fenti kérdésre igenlő a válasz.

Érdekes, hogy Turán egy interpolációelméleti probléma kapcsán egy olyan kérdést vetett fel, melyből a végtelen irányított gráfokra vonatkozó eredmények egy egész sora született meg. Turán kérdése a következő volt: Ha egy kontinuum számosságú irányított gráf minden pontja véges fokú, van-e a gráfban végtelen sok független pont? Ennek nyomán alakult ki az ún. binér relációk elmélete, melynek legfőbb eredményei Erdőstől, Grünwald Gézától, Lázár Dezsőtől, Sierpińskitől, Sophie Piccardtól, Ruzievicztől, Fodor Gézától és Hajnal Andrástól származnak.

Utolsó példaként a síkba rajzolható gráfok automorfizmuscsoportját említeném. Babai László olyan jellegű kérdésekkel foglalkozott, hogy adott G csoporthoz milyen speciális tulajdonságú olyan S gráfok találhatók, melyek automorfizmuscsoportja, Aut (S), éppen G. Egy beszélgetés során Turán megkérdezte Babait, vajon a síkbarajzolható gráfok automorfizmuscsoportja jellemezhető-e csoportelméletileg? Babai a kérdésen majdnem két évet dolgozott, munkája nyomán több érdekes tétel született, egyebek között bebizonyította, hogy G akkor és csak akkor Aut (S) valamilyen S síkba rajzolható gráfra, ha szimmetrikus és polihedrális csoportokból egy úgynevezett általánosított koszorúszorzással előállítható. Babai kandidátusi disszertációjának legérdekesebb eredményei éppen ezek a Turán kérdése nyomán született tételek. Az külön meggondolandó, miért érdemes éppen a síkba rajzolható gráfok automorfizmuscsoportját vizsgálni. Azt hiszem, erre az a válasz, hogy a síkba rajzolható gráfok sokat vizsgált osztálya és automorfizmuscsoportjaik között semmi triviális kapcsolat sem látható. Egyébként ez az első olyan osztály, melynek automorfizmuscsoportjai nem minden csoportot reprezentálnak.

Szeretnék Turán matematizálásával kapcsolatban még egy dolgot megemlíteni: Mindig csodáltam azt, ahogy Turán „elraktározta" a matematikát. Itt nem az emlékezőtehetségére gondolok, hanem arra, hogy ha egy tétel felkeltette érdeklődését, azt addig ízlelgette, addig gondolkodott, töprengett rajta, amíg mind részleteiben, mind egészében, az ismert tételekhez való kapcsolatában is teljesen fel nem dolgozta. Előadásaiban is ezt a módszert követte; a szóban forgó téma érdekességét és más témákkal való kapcsolatát mindig erősen kidomborította. Így nemegyszer olyan tételek izgalmas voltáról is meg tudott engem győzni, melyeket eredetileg érdektelennek véltem. (Előfordult persze a fordítottja is: általam érdekesnek vélt tételekről módosítanom kellett véleményemet Turánnal való beszélgetés után.)

A második kérdésre válaszolva persze az elsőt is majdnem teljesen megválaszoltam. Egy kérdésre kellene még kitérnem: Turán matematikaszeretetére. Ezzel kapcsolatban hadd idézzem újra csak Rényi 1960-ban, Turán 50 éves születésnapjára írt szavait:

„Nem hiszem, hogy ne lett volna olyan nap az elmúlt harminc év alatt, amelyen *Turán* ne foglalkozott volna valamit matematikával, tekintet nélkül a körülötte lejátszódó, időnként viharos történelmi eseményekre és a mindennapi élet örömeire és gondjaira (amelyek őt egyébként épp oly közelről érintik, mint bárki mást)... . Tanúja voltam egyszer, hogy egy tanítványa megkérdezte *Turán*tól, mi a titka annak, hogy az események sodrában, a legkedvezőtlenebb körülmények között is képes volt matematizálni. „Nincs ennél egyszerűbb dolog — válaszolta Turán — ehhez csak az szükséges, hogy az embert igazán érdekeljék a matematikai problémák". Ebben a mondatban valóban benne van *Turán* sikereinek egyik „titka"."

[A] W. G. Brown and F. Harary: Extremal Digraphs, Combinatorial Theory and its Applications, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 4. I. 135—198.
[B] W. G. Brown, P. Erdős and M. Simonovits: Extremal problems for directed graphs, Journal of Combinatorial Theory *15*B (1973) 77—93.
[C] G. Dirac: Extensions of Turán's theorem on graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *14*. (1963) 417—422.
[D] Erdős, P.: On the number of complete subgraphs contained in certain graphs, Magy. Tud. Acad. Mat. Kut. Int. Közl. *7* (1962) 459—474.
[E] P. Erdős: On extremal problems on graphs and generalized graphs, Israel J. of Math. 2 (3) (1964) 183—190.
[F] P. Erdős: Some recent results on extremal problems in graph theory (Results), Theory of Graphs, Intern. Symp., Rome (1966) 118—123.
[G] P. Erdős: On some new inequalities concerning extremal properties of graphs, Theory of Graphs, Proc. Coll. Tihany (Hungary) (1966) 77—81.
[H] P. Erdős and T. Gallai: On maximal paths and circuits in graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., *10* (1959) 337—356.
[J] P. Erdős and M. Simonovits: A limit theorem in graph theory, Studia Sci. Math. Hungar. *1* (1966) 51—57.
[K] P. Erdős and A. H. Stone: On the structure of linear graphs, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946) 1089—1091.
[L] P. Erdős and Gy. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, Compositio Math. *2*. (1935) 463—470.
[M] R. J. Faudree and R. H. Schelp: Ramsey type results, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary, 1973, 657—665.
[P] Katona Gy.: Gráfok, vektorok és valószínűségszámítási egyenlőtlenségek. Mat. Lapok, *20* (1—2) (1969) 123—127.
[Q] Rényi A.: Turán Pál matematikai munkásságáról (Ötvenedik születésnapja alkalmából), Mat. Lapok *11* (4) (1960) 229—263.
[R] M. Simonovits: A method for solving extremal graph problems in graph theory, stability problems, Theory of Graphs, Proc. Coll. Tihany, (Hungary), (1966) 279—319.
[S] V. T. Sós: On extremal problems in graph theory, Combinatorial Structures and their Applications, (Gordon and Breech, New York, 1970) 407—410.

KALMÁR LÁSZLÓ

1905. márc. 27.—1976. aug. 2.



Alig hihető, váratlan és súlyos csapás érte a magyar matematikát: 1976. augusztus 2-án elhunyt Kalmár László, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, a József Attila Tudományegyetem nyugalmazott professzora, a Bolyai János Matematikai Társulat és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság tiszteletbeli elnöke.*

Senki sem hitte el, hogy nyugdíjas. Jó egészségben, frissen töltötte üdülésének heteit, tele volt tervekkel, meghívásoknak készült eleget tenni: minderre néhány perces szívroham tett pontot.

Kalmár László a budapesti tudományegyetemen szerzett matematika-fizika szakos tanári oklevelet. Korán feltűnt nemcsak a matematikai alkotó munkára való képességével (elsőéves korában megnyerte az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat tanulóversenyét), hanem a matematika legkülönbözőbb irányaiban megszerzett széles körű tájékozottságával. Így pályája sok kortársához képest olajozottan indult: tanársegédi állást kapott a szegedi tudományegyetemen olyan matematikaprofesszorok oldalán, mint Riesz Frigyes, Haar Alfréd, Kerékjártó Béla. Hamarosan megértek kiváló tehetségének első gyümölcsei: egymás után jelentek meg önálló tudományos eredményeket közlő dolgozatai, a matematika oktatását finom ötletekkel hatékonyabbá tevő, s ezek következményeit gazdag színpompával elemző, valamint egy-egy kevéssé ismert témakört kiváló meggyőző erővel ismertető és megkedveltető cikkei. Tudományos eredményeinek belső értéke mellett e páratlanul sokoldalú tevékenysége is méltán tette őt érdemessé 1936-ban, már mint a szegedi egyetem magántanárát, az Eötvös Társulat König Gyula-jutalmára. Az ennek odaítélésekor írott jelentés szavai Kalmár László egyéniségét ma is érvényes fogalmazással jellemzik: „...munkássága bővelkedik fontos és érdekes eredményekben, és így a velük való foglalkozás sok tanulsággal is jár. Ő sokoldalú matematikus és produkciói nem korlátozódnak a matematika valamely speciális fejezetére. Nagy tudásával a matematika bármely területén otthonosan mozog és erős kritikai érzékével a lényegest a lényegtelentől könnyen szétválasztva, megtalálja a problémák megoldásának legrövidebb útját."

Kalmár László széles körű tájékozottságát az említett jelentés a továbbiakban részletesen igazolja: oly szerteágazó területekre eső értékes eredményekről számol be,

* Kalmár László matematikai munkásságának ismertetésére következő számunkban visszatérünk.

mint az interpoláció elmélete, az analitikus számelmélet, a csoportelmélet, a játékelmélet, a logikai függvénykalkulus eldöntésproblémája, s mindez csupán az első tíz évi kutatómunka termése. Kétségtelen, hogy az aktív tudományos produkció további vonalában a legutóbbi témaköré, illetve általánosabban a matematikai logikáé hosszú időre a vezető szerep; ide vágnak azok a mélyenjáró eredményei, amelyekért 1950-ben a Kossuth-díjjal kitüntették, akkor már Riesz Frigyes utódaként a szegedi egyetemen.

Kalmár Lászlónak ez a fő témaköre a matematika belső fejlődésének válságából keletkezett, hiszen a halmazelméletben fellelt antinómiák tisztázására dolgozták ki azt a nagyon finom logikai kalkulust, amelynek révén eleinte a matematika alapvető kérdéseinek megnyugtató lezárását remélték, majd éppen ennek az apparátusnak a segítségével lezárás helyett a hallatlanul izgalmas, ismeretelméleti szempontból is döntő fontosságú, a matematika maximális nyitottságát tanúsító eredményeket találták.

Ötvenedik éve körül járt Kalmár László, amikor érdeklődése újabb terület, a számítástudomány felé fordult. Szükségszerű volt, hogy ennek így kellett történnie. Hiszen a számítógépek megjelenésével a matematikai logika szublimált finomságú, csak a legmélyebben gondolkodók által méltányolt kérdések vizsgálatára kidolgozott apparátusa a leggyakorlatibb matematikai munka nélkülözhetetlen alapjává vált. Hogyan ne ismerte volna fel a születőben levő új tudomány fontosságát éppen ő, aki annyira lépést tartott mindennel, ami új és előrevivő! Életének utolsó két évtizedét szentelte a számítástudomány hazai meghonosításának, terjesztésének, fellendítésének, s tette ezt már akkor, amikor csaknem egyedül küzdött a jó ügyért közömbös, vagy éppen ellenséges légkörben. Fáradhatatlan szervező munkával hozta létre Szegeden a programtervező matematikus szakot, és oktatta ennek hallgatóit, vezette a megszervezett kibernetikai laboratóriumot. Méltán nyerte el e munkájával az Állami Díjat, s érdemelte ki a Bolyai János Matematikai Társulat, valamint a Neumann János Számítógéptudományi Társaság tiszteletbeli elnökévé való megválasztását.

Amikor a Bolyai Társulat 1969-ben emlékérmet alapított azoknak a jutalmazására, akik a fiatal kutatóknak a matematikai alkotásba való bevezetése terén kiemelkedő érdemeket szereztek, egyhangú volt az a vélemény, hogy az emlékérmet első alkalommal Kalmár Lászlónak ítéljék oda. Indokolta ezt az, hogy ő éppen páratlan aktivitása és sokoldalúsága révén nemcsak a szűkebb szakterületén működő kutatóknak nyújtott évtizedeken át segítséget, hanem olyan, tőle távolabb álló területeknek is meg tudott nyerni tehetséges fiatalokat, mint például az algebrának a sajnos oly fiatalon elvesztett Szele Tibort is, akiről az emlékérmet elnevezték. Cikkei, egyetemi jegyzetei, előadásai, levelezése, s nem utolsó sorban beszélgetései, vitái révén Kalmár László matematikus-nemzedékeknek volt tanítója, nevelője.

Emlékét alkotásai, matematikai eredményei, tanítványai, egy fiatal s fejlődő tudományág valamennyi művelője őrzi és ápolja.

CSÁSZÁR ÁKOS

NÉHÁNY SZEMÉLYES ÉS MATEMATIKAI EMLÉKEM KALMÁR LÁSZLÓRÓL

ERDŐS PÁL

Remélem, az olvasó megbocsátja, hogy néhány, Kalmárral kapcsolatos személyes élményemről fogok beszámolni, és egy meg nem jelent közös cikkünk tartalmát röviden ismertetem. Talán az olvasó azt is megbocsátja egy nagyon öreg embernek, kinek felgyógyulása (az élet gyógyíthatatlan betegségéből) talán már nincs oly messze, hogy néhány személyes emlékéről is beszámol. Sajnos, már nem vagyunk oly sokan a régi baráti körből, kikkel a harmincas évek elején együtt voltunk, s mire sor kerül, hogy rólam emlékezzenek meg, talán már senki se lesz, aki emlékezne.

1931 márciusában találtam egyszerű bizonyításomat Csebisev ismert tételére, miszerint minden $n>1$-re n és $2n$ között mindig van prímszám. Bizonyításom pontatlan fogalmazásom miatt nehezen volt érthető (pl. nem tettem különbséget $\frac{n}{k}$ és $\left[\frac{n}{k}\right]$ között — ami persze az olvasó helyzetét nem könnyítette meg). Bizonyításom különben úgy keletkezett, hogy néhány héttel korábban bebizonyítottam, hogy n és n^2 között mindig van prímszám és ezt a bizonyítást előadtam Fejér szemináriumában — első előadásom nem volt éppen könnyen érthető, de folytatva az előadásban kifejtett módszereket, bebizonyítottam Csebisev tételét.

1931 őszén Grünwald Géza és Lázár Dezső Szegedre utaztak, ugyanis ott felvették őket az egyetemre (talán a mai olvasó már nem tud az úgynevezett numerus claususról: a zsidó hallgatók arányszáma nem lehetett nagyobb 5%-nál). Kérésemre odaadták Kalmárnak rosszul és pontatlanul fogalmazott kéziratomat, aki nem sajnálta a nem csekély fáradságot, hogy a bizonyítást „tisztába rakja" és a ki nem mondott lemmákat megfogalmazta. Pl. tőle ered a következő lemma: Ha $p^\alpha \left| \binom{n}{k} \right.$, akkor $p^\alpha \leqq n$.

1931 novemberében Szegedre utaztam egy hétre — első matematikai utazásom, s első távollétem otthonról. Mondanom se kell, hogy Kalmár nagyon kedvesen fogadott. Megismerkedtem Rieszszel, Haarral, Kerékjártóval, Nagy Gyulával és Vincze Istvánnal — ha jól emlékszem, Nagy Bélával csak később találkoztam.

Engem a prímszámok már 1923 óta nagyon érdekelnek, amikor is édesapámtól (szüleim matematikusok voltak) megtanultam Euklidesz bizonyítását arra, hogy végtelen sok prímszám van és azt a tételt, hogy minden k-ra van k egymás után következő összetett szám. Akkor 1931—34 között sokat foglalkoztam a prímszámtétellel és számtani sorokban levő prímszámokkal. Erről szól disszertációm is, amelyet különben szintén Kalmár fogalmazott meg és írt le jól érthető formában.

1937-ben csináltuk említett, publikálatlan közös munkánkat. Általában akkoriban az volt a hiedelem számelméleti körökben, hogy elemi bizonyítás a prímszámtételre lehetetlen, de minden $\varepsilon>0$-ra konstruálható oly elemi bizonyítás Csebisev

és Sylvester szellemében, mely kimutatná, hogy ha $x > x_0(\varepsilon)$, akkor

$$(1) \qquad (1-\varepsilon)\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1+\varepsilon)\frac{x}{\log x},$$

ahol $\pi(x)$ az x-nél kisebb prímszámok számát jelöli.

Ez utóbbi véleményt igazoltuk Kalmárral. Vizsgáltuk a következő szorzatot:

$$(2) \qquad \prod_{k=1}^{t}\left(\left[\frac{n}{k}\right]!\right)^{\mu(k)}\left(\left[n\sum_{k=1}^{t}\frac{\mu(k)}{k}\right]!\right)^{-1}.$$

A (2) alatti szorzat prímfaktorainak teljesen elemi vizsgálatával kimutattuk, hogy ha

$$(3) \qquad \left|\sum_{k=1}^{5}\mu(k)\right| < \eta s$$

elegendő sok s-re fennáll, akkor (1) következik — teljesen explicit és könnyen áttekinthető egyenlőtlenséget nyertünk (1)-re. Kalmár ide vonatkozó nekem írt levele biztosan megvan nekem, csak nem lenne egészen könnyű megtalálni, talán Kalmár hagyatékából valami előkerül. Ezzel célunkat elértük, mert a prímszámtételből tudjuk, hogy (3) minden $s > s_0(\eta)$-ra igaz. Tehát az a furcsa jelenség áll elő, hogy ha a prímszámtétel igaz, akkor tudunk rá elemi bizonyítást csinálni, de csak azért tudjuk, hogy (1)-re a bizonyítás minden $\varepsilon > 0$-ra sikerül, mert tudjuk, hogy a prímszámtétel igaz. Talán nem érdektelen, hogy ez a furcsa jelenség egy ilyen természetesen adódó problémánál előfordul.

Hogy történt, hogy e cikket nem publikáltuk? 1939 márciusában az amerikai matematikai társulat Duke Universityben tartott összejövetelén megismerkedtem Barkley Rosserrel; beszélgetésünk közben kiderült, hogy ő is megcsinálta, amit mi Kalmárral csináltunk, sőt, ő ugyanezt megcsinálta számtani sorokban előforduló prímszámpárokra is — azaz, ha $\pi(x; a, d)$ jelenti a $p < x$, $p \equiv a \pmod d$, $(a, d) = 1$ prímszámok számát, akkor elemi úton bebizonyítható, hogy

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{\varphi(d)\log x} < \pi(x; a, d) < (1+\varepsilon)\frac{x}{\varphi(d)\log x},$$

de megint csak azért tudjuk, hogy a bizonyítás sikerül, mert tudjuk, hogy a számtani sorra való prímszámtétel igaz. Rosser bizonyítása meglehetősen hasonlított a mi bizonyításunkra. Rossernek ekkor már készen volt a bizonyítás kézirata, s így Kalmárral úgy határoztunk, hogy cikkünket nem publikáljuk. Rosser cikkében hivatkozott arra, amit mi csináltunk.

Rosser cikkét elküldte a Transactions of the Amer. Math. Soc.-nak. Minthogy ő főleg logikai vizsgálatai miatt volt ismert, a cikket egy logikusnak küldték el lektorálni — a lektor a cikket nem teljesen értette és sok apróbb dolgot kifogásolt. Rossert ez elkedvetlenítette s a cikket sohase publikálta, ami talán kár volt, mert úgy vettem észre, hogy e jelenség, mely itt természetes módon fordul elő, általában érdekelte a matematikusokat.

Marad még az a kérdés, hogy e Csebisev-módszer alkalmas lehetne-e a prímszámtétel elemi bizonyítására. Azaz, legyen $f(x)$ növekvő függvény és

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{x} f\left(\frac{x}{k}\right) = x\log x + cx + o(x).$$

Következik-e (4)-ből, hogy $f(x)=x+o(x)$? Ingham ezt bebizonyította, de bizonyítása nem elemi, és így az a kérdés, hogy vajon a prímszámtétel bizonyítható-e olyan elemi úton, mely nem használja Selberg formuláját, egyelőre nyitva marad.

1939 tavaszán Kalmár és én egymástól függetlenül észrevettük, hogy $\prod_{p\leqq n} p<4^n$ indukcióval, egy sorban bizonyítható. E bizonyítás több könyvben megjelent, s így ezt itt nem kell részleteznem.

Kalmártól különösen az 1932—34-es időkből több hosszú és érdekes levelem van. Kalmár, aki néhány évvel idősebb volt, mint mi (Turán, Szekeres, Klein Eszter, Wachsberger Márta), úgy beszélt rólunk, hogy a „kicsinyek" — ez nem lekicsinylés volt, hanem a korkülönbségre vonatkozott, mely akkor jelentős volt.

Egy levelére jól emlékszem (a levelek mind megvannak, csak nem könnyű hozzájuk jutni). Még 1932-ben kérdeztem: jelölje A_n azon determináns maximális értékét, melynek minden eleme 0 vagy 1. Mekkora A_n? Szekeres és Turán is belekapcsolódott e kérdésekbe, s ők a maximumot a négyzetes középpel helyettesítették. Hamarosan észrevettem az ortogonális ± 1-es mátrixokkal való kapcsolatot, s akkor azt sejtettem, hogy ilyen mátrix csak $n=2^k$-ra van. Kalmár azonban egyik hosszú levelében megadta az ide vonatkozó irodalmat, s elmondta, hogy a helyes sejtés $n=4k$ — e gyönyörű kérdéssel sajnos nem boldogultam.

НЕКОТОРЫЕ ЛИЧНЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОСПОМИНАНИЯ О ЛАСЛО КАЛМАРЕ

ПАЛ ЕРДЁШ

MY PERSONAL AND MATHEMATICAL REMINISCENCES OF LÁSZLÓ KALMÁR

P. ERDŐS

PÉTER RÓZSA

(1905. febr. 17.—1977. febr. 16.)



Egyik súlyos csapás a másik után éri a magyar matematikát: Kalmár László és Turán Pál után elveszítettük immár 1977. február 17-én Péter Rózsát, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagját, az Eötvös Loránd Tudományegyetem nyugalmazott professzorát, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökét.*

Nem volt könnyű Péter Rózsa életútjának indulása. A tanári oklevél megszerzése után másfél évtizeden át oktatott kinevezés nélkül, óraadóként, ideiglenes tanárként, polgári iskolában, ipariskolában, foglalkozott magántanítványokkal, és gyűjtötte fáradhatatlanul a pedagógiai tapasztalatokat, vállalta szaktárgyától távol eső tárgyak tanítását is, abban a reményben, hogy egyszer majd elnyeri a biztos megélhetést nyújtó tanári kinevezést. Hiába számolt be az 1932-es Nemzetközi Matematikai Kongresszuson a matematikai logika terén elért eredményeiről olyan sikerrel, hogy ennek hatására megválasztották a Journal of Symbolical Logic szerkesztőbizottsági tagjává, az 1930-as évek magyar művelődéspolitikájának nem ilyen matematikatanárok kellettek. Kinevezés helyett a minden munkalehetőségtől való megfosztás, az üldöztetés évei várták.

Péter Rózsának a felszabadulás nemcsak a fizikai terror megszüntét jelentette, hanem azt a napot is, amelytől kezdve a társadalomtól először kapta meg a megbecsülést, a nyugodt alkotó munka lehetőségét. Néhány éves középiskolai tanári működés, tankönyvírói megbizatás után újabb, szívéhez oly közel álló feladatot kapott, a Budapesti Pedagógiai Főiskola matematikai tanszékének vezetését. Itt válthatta valóra korábbi álmait, itt nevelhette igazán a leendő pedagógusokat a matematika szeretetére, arra, hogy hogyan tudják a gyermekek nyiladozó értelmében a matematikai gondolkodás csíráit felfedezni, megerősíteni, belőlük az egész személyiséget átható készség- és magatartásformákat kialakítani.

A főiskolán eltöltött évek életének talán legboldogabb időszakát jelentették. Sikerült olyan baráti, családias légkört teremtenie, amelyben a formalitást és általtekintélytiszteletet elutasító egyénisége jól érezte magát, és ahol munkáját kedve szerint végezhette. Ebben az időszakban dolgozik tudományos tevékenységének egyik legjelentősebb írásos dokumentumán, Rekursive Funktionen című monográfiáján. 1951-ben Kossuth-díj is jelzi munkásságának elismerését.

* Péter Rózsa matematikai munkásságának ismertetésére egy későbbi számunkban visszatérünk.

A főiskola megszűntével kapott egyetemi tanári kinevezést 1955-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetemre. Itt matematikai nevelői tevékenységét szűkebb szakterületének oktatásában, a halmazelméletről és a matematikai logikáról tartott előadásokban és a matematikai logika különféle témáival foglalkozó szemináriumok irányításával igyekezett megvalósítani, de feladatának tekintette a tanárjelöltek állandó segítését is a tanítási gyakorlat megszerzésében.

Ennek az időszaknak nagy élménye Péter Rózsa számára a számítógépek megjelenése; ezek révén vált a rekurzív függvények elmélete, amelynek munkássága jelentős részét szentelte, az elméleti matematika egy kevesek által értett és méltányolt fejezetéből az érdeklődés homlokterében álló, közvetlen gyakorlati alkalmazások szempontjából is elsőrendű fontosságú tudományterületté. Újult erővel látott hozzá, hogy eredményeit a számítástudomány által felvetett problémákra alkalmazza, erről a témáról készítette 1976-ban megjelent újabb nagysikerű monográfiáját. Érdemeinek újabb elismerését jelzi 1970-ben az Állami Díj ezüst fokozata, 1973-ban a Magyar Tudományos Akadémia tagjai közé való megválasztása. Kormányunk előbb a Munka Érdemrend arany fokozatával, majd a Magyar Népköztársaság Zászlórendje második fokozatával tüntette ki, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége 1975-ben MTESZ-Díjban részesítette, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökévé választotta.

Péter Rózsa színes egyéniségét alig méltathatja az, aki csak szakmai, tudományos és oktató tevékenységét tekinti át. Az ő érdeklődése ennél sokkal szélesebb területeket ölelt fel. Az irodalommal és művészettel egész életében szoros kapcsolatban maradt. Sajtóbemutatókra járt, filmkritikákat írt, Rilke-verseket fordított. Irodalmi kapcsolataiból, Benedek Marcellal folytatott levelezéséből alakult ki Játék a végtelennel című könyve azoknak a számára, akik úgy érzik, hogy a matematikától távol állnak, de szeretnék mégis megismerni ennek a számukra titokzatos világnak a szépségeit. Alig tudjuk, mit csodáljunk jobban a matematikai ismeretterjesztésnek ebben a számtalan sok nyelvre lefordított mesterművében: a szakmai tisztaságot-e, vagy a reménytelennek látszó fogalmi nehézségek bravúros áthidalását a lényeg megtartásának szigorú igényével. Csak vérbeli pedagógus, aki legkülönbözőbb érdeklődésű tanítványait kitűnően ismeri és szereti, és az emberi kultúra minden területét magáénak érzi, ajándékozhatott meg bennünket ezzel a remekművel.

Rajongva szerette barátait, és önzetlen támogatásukra állandóan kész volt. Ugyanilyen rajongással ragaszkodott azokhoz a matematikusokhoz, akik tanítványai voltak. Életüket, pályafutásukat aggódó figyelemmel kísérte, és minden sikerüknek örült. Mégis, a legjobban és mindenekfölött az igazságot szerette. Ez tette őt szenvedélyes és makacs vitatkozóvá. Az ellentmondókra lelke mélyén sohasem haragudott, mert csak az alamusziak és az opportunisták voltak az ő igazi ellenségei. Mindig számítani lehetett arra, hogy Péter Rózsa a végsőkig kiáll, ha valakit vagy valamilyen jó ügyet igazságtalanság ér.

Az utolsó években tanúi voltunk annak a rendkívüli emberi méltósággal folytatott küzdelemnek, melyet a betegséggel és a halállal vívott. Pontosan tudta, mi baja van, és sohasem titkolta. Nyugdíjba vonulásának évében sürgős operáción esett át. Úgy intézte, hogy csak egy előadást kelljen elmulasztania, mert a tanítást mindennél előbbrevalónak tartotta.

Egy áldozatkész, az igazságot szenvedélyesen kereső élet szűnt meg Péter Rózsa eltávozásával. Emlékét munkatársai és barátai őrzik, és fenntartják maradandó tudományos eredményei, amelyeken nemzedékek nevelődnek.

CSÁSZÁR ÁKOS

MEGEMLÉKEZÉS A FASIZMUS MATEMATIKUS ÁLDOZATAIRÓL

A Bolyai János Matematikai Társulat Emlékőrző Bizottsága a fasizmus matematikus-áldozatainak emlékét a MTA Matematikai Kutató Intézetében felállított, következő szövegű emléktáblával örökítette meg.

„A fasizmus matematikus áldozatai emlékére"

„Új falak tövében felhangzik majd szavam"

(Radnóti Miklós)

Nagyjaink

Bauer Mihály	1874—1945
Csillag Pál	1892—1944
Grünwald Géza	1913—1943
König Dénes	1884—1944
Sidon Simon	1892—1941
Szűcs Adolf	1884—1945

Az alkotás útján elindultak

Aczél Ervin	— —1942
Ádám István	1925—1944
Feldheim Ervin	1912—1944
Krausz József	— —1944
Lázár Dezső	1913—1943
Sándor Gyula	1921—1945
Schweitzer Miklós	1923—1945
Valkó István	1904—1945
Waldapfel László	1911—1942

és sok más indulni készülő fiatal tehetség."

Az emléktábla leleplezése 1976. június 25-én történt és ez alkalommal Turán Pál, a Társulat Elnöke, a következő emlékbeszédet tartotta.

Mikor a megbeszélések során szóba került, hogy én tartsam az emlékbeszédet az emléktábla leleplezésénél, elsőnek Aeneas szavai jutottak eszembe az Aeneisből; mikor Dido kérdezi őt Trója sorsáról. „Infandum regina iubes

renovare dolorem", — elmondhatatlan fájdalmat kívánsz felidézni, királynő. Hiszen a tábláról sok kedves barátom neve mellől óhatatlanul felmerül előttem az egész kor. Felmerül minden szörnyűségével, melyben magam is benne éltem, és igen kevésen múlt, hogy ehelyütt ma nem csupán az emléktáblán levő nevemmel vagyok jelen, mint egyike az alkotás útján elindult fiataloknak. E korról, melyben a haza és vallás *szavak* a legalapvetőbbnek vélt etikai normák lábbaltiprására szolgáltak oly sokaknak ürügyül, ne essék több szó itt; ez sem felejtést, sem felejteni akarást nem jelent. De a tábláról nevek kerülnek szemünk elé, melyek java része a mai generációnak első pillanatra semmit vagy igen keveset mond. Azon dolgozatok, melyek a Matematikai Lapokban Bauer Mihályról, Grünwald Gézáról, König Dénesről, Szűcs Adolfról és a fiatalabbak egy részének matematikai munkásságáról megjelentek, legalább ennek egy részéről adnak tájékoztatást. Így ezen alkalommal fő feladatomnak azt érzem, hogy a tábla szomorú listáján szereplők közül azokról szóljak, kiknek nevét még nem őrzi nyomtatott megemlékezés. Ez persze egyáltalán nem jelenti egy részletes írásos megemlékezés kötelezettségének elodázását.

Hogy mégis Bauer Mihállyal kezdem a megemlékezést, annak tárgyi és személyi okai vannak. Tárgyi oka annak jelzése, hogy az algebrai számelméletben, mely Bauer fő munkaterülete volt, ő ma már klasszikusnak számít, akinek a Német Matematikai Encyklopedia Furtwängler—Hasse—Jehne által íródott 1953-as algebrai-számelméleti referátuma nem kevesebb, mint 8 dolgozatának eredményeit ismerteti. De pl. a kiváló lengyel matematikus, Andrzej Schinzel és munkatársainak több jelentős dolgozata épít az általuk „Bauerian fields"-nek („Bauer féle testek"-nek) nevezett testek tulajdonságaira.

Személyi okom az a tisztelet és szeretet, melyet iránta érzek 1933 óta, mióta egyszer Erdős Pállal felkerestük lakásán az akkori Tisza Kálmán tér 11-ben (ma Köztársaság-tér) első közös elemi számelméleti dolgozatunkkal, mely — úgy tűnt — megtetszett neki, és bátorítására rendszertelen időközökben látogattuk ezután. Bauer egész életében a Műegyetemen működött, ott tartott magántanári előadásokat változatos témákról; magam elsősorban analitikai számelméletről hirdetett előadását szerettem volna meghallgatni. Bár a kutatás mellett az oktatás volt életeleme, ezen előadásait a Műegyetemen különösen eluralkodó korszellem miatt már nem tudta tartani, pedig előadáskéziratait élete végéig csiszolgatta azon reményben, hogy majd megint tarthatja őket valamikor. Akkor már érdeklődése kizárólag algebrai számelméletre koncentrálódott és beszélgetéseinkből ezirányban sokat profitáltam; így tőle hallottam először a prímideál-tételt Dedekind átfogalmazásában, melyet hamarosan jól fel tudtam használni. Az érdekesebb részeket írásban is elküldte nekem, apró gyöngybetűs kezeírásával, pedig romló látása már akkor is állandó lidércnyomása volt. Ezeket híven őrzöm azóta is. De, amik könnyekig meghatóak voltak, azok munkaszolgálatom alatt a különböző alakulataimhoz küldött lapjai. Ezekben — 66—67 évesen — a Zentralblattból kiírta kézírással azokat a referátumokat, melyekről azt gondolta, hogy különösen érdekelnek engem. Mondanom sem kell, hogy ilyent tőle *kérni* sohasem mertem volna, de eszembe se jutott volna; nemes lelke, meleg érzésvilága indította erre csupán.

Fejér Lipót összegyűjtött munkái kiadásával megbízatván az Akadémia által, levelezése átnézése alkalmából két különnyomatra találtam, melyek mindkettejének dedikációja úgy kezdődött, hogy „Méltóságos Dr. Fejér Lipót egyetemi tanár úrnak, mély tisztelettel". Az első dedikáció befejezése „halálraítélt", a másiké „inferioris". Mindkét különnyomat és dedikáció szerzője Sidon Simon volt. A dedikációk szövege különleges lelkialkatot jelez, ami haláláig tartó személyes kapcsolatunk tapasztalataiból nekem nem jelentett újat. Ez már első találkozásunkkor kitűnt, melyet

— szokás szerint — Erdős iniciált és készített elő. Kicsit előbb értünk lakásához, még nem volt otthon, az ajtó előtt vártunk. Ő akkor már 40-es éveiben volt; általában azt gondolná az ember, hogy egy ilyen korú matematikusnak jólesik maga a tény is, hogy fiatalabbak hozzáfordulnak. Első megszólalása, a szabványüdvözlet után az volt: „Jőjjenek máskor *és főleg* máshoz". Azután mégis beengedett; az elég hosszú beszélgetés alatt azonban végig mindkettőnknek hátatfordítva ült, ami — mint később kiderült — minden új ismeretség esetén szokása volt. Biztosítási matematikusként dolgozott; a hivatali élettel járó, természetesnek mondható nehézségek mellett idiosyncraziái olyan mértékben irritálták, hogy állását 1934-ben felmondta. Hogy az akkori világszerte eluralkodó politikai áramlatok ismeretében mire számított, nem lehet tudni; végkielégítési összege elfogyván, azon, csupán létminimumot nyújtó gyűjtés eredményére kellett hagyatkoznia, amit Pestről (sőt Európából) számára meg lehetett szervezni, állást kapni többé nem tudott. Pedig akkor ő már a trigonometrikus sorok elméletének elismert kutatója volt, ma már klasszikusa. 1927-es tétele az abszolút konvergens trigonometrikus sorok elméletébe új vért vitt, és Wiener, Banach és Paul Lévy munkái nyomán ezen elmélet a klasszikus harmonikus analízis egyik főiránya mindmáig. Jean Pierre Kahane 1962-es stockholmi kongresszusi előadásában, mely a harmonikus analízis főirányának akkori helyzetét vázolta, jelentős teret adott a Carleson-, Helson- és Sidon-halmazokra vonatkozó eredményeknek; Sidon neve ezen előadásban legtöbbet szereplő magyar név. Hogy mire gondolhatott állása felmondásakor, nem tudhatni; egy homályos megjegyzésére emlékszem, melyben Keletet és a vörös csillagot említette. Talán egyetemi alkalmazás lehetőségét remélte ettől, mikoris matematizálásra és tudása átadására fordíthatja összes energiáját, bár pszichológiai nehézségeinek tudatában volt. Az azonban még álmaiban sem jött elő, hogy az is lehetséges, hogy állami Matematikai Kutató Intézet létesüljön, mely sok egyéb funkciója mellett nyugodt munkalehetőséget tud adni az övéhez hasonló extrém esetekben.

Matematikai munkáinak és azok hatásának adekvát elemzése nyilván nem jelen alkalomra való feladat. De az talán igen, hogy miért tekintendő Sidon a fasizmus áldozatának. Sidon 1941-ben halt meg a Szabolcs utcai kórházban. Halála éppoly különös volt, mint élete. Halála után átnéztem albérleti szobájában maradt könyveit és feljegyzéseit. Ilyenek kevesen voltak, és igazoló irata semmi. Csillag Páltól tudtam csak, hogy a verseczi rabbi fia volt és 1892-ben született; szobájában még születési bizonyítványt sem találtam. Pedig abban az „okmánykorszakban", melyben állampolgári, illetőségi és egy *megfelelő* születési bizonyítvány fontosabb volt, mint az ember, ezek létfontosságúak voltak; már óraadó tanár voltam és pesti születést mutató születési bizonyítványom mellett bekértek illetőségi bizonyítványt is (ami szerencsére volt). Sidonnak ilyen semmi sem volt és 1941-ben tömegével szállították el észak felé az ilyen embereket az országból. Hogy ő éppen ezen folyamat kezdete előtt halt meg, élete egyetlen szerencséjének tekinthető talán. Temetésén rokona nem volt; sírja helyét még körülbelül tudnám a Kozma utcai temetőben, nevét azonban csak tételek és könyvek őrzik.

Csillag Pálhoz is hosszú személyes barátság fűzött. Őhozzá is Erdős (és talán Péter Rózsa) iniciativájára kerültem; ő egészen másképp fogadott minket, mint Sidon. Széles kultúrájú, irodalmi és zenei tájékozottságú ember volt, jól csellózott; ma is emlékszem arra a zavarra, amit éreztem, mikor első látogatásunkkor átment másik szobájába, azzal, hogy „most hozom a feleségemet" és visszajött a csellójával. Csak később értettem meg az öniróniát és melankóliát, ami a tréfa mögött rejlett. Egész élete egy nagy akadályverseny volt. 1897 április 17-én született, hogy az emléktáblát kissé korrigáljam (és főleg azt a lexikont, melyből az adatot vették). 1915-ben.

érettségizett, de már az érettségire a budakeszi tüdőbeteg-szanatóriumból ment. 1921-ben doktorált Fejérnél, aki csak 1925-ben tudott a Goldberger-féle textilgyárban bérelszámoló állást szerezni neki (mikor már jelentős komplex függvénytani munkái jelentek meg, főleg a Picard-tétel köréből). De bámulatosan rugalmas szelleme hamarosan beletanult a textilfestésbe és annak szakértője és újítója lett; ezen osztály fejeként többször kiküldték Lyonba és — ami neki egészségi állapota miatt legfontosabb volt — kötetlen munkaidőt kapott. Ilyen minőségben Berlinbe is eljutott, épp az első világháború utáni infláció alatt; mikor otthon kérdezték, mit látott a városból, azt felelte, hogy „semmit, hisz csak pénzváltásra volt időm". El tudom képzelni, hogy ezt mondván elrajzolt vonalú arcán felvonult széles nevetése, mint mikor sűrű felhőzet mögül egy pillanatra előtör a napsugár. Humorérzéke sok nehézségen segítette át.

Az ő matematikai munkái elemzésére sincs itt persze idő; hatásuk jelzésére csak annyit, hogy Hans Wittich 1964-ben a Math. Zeitschr.-ben megjelent „Über eine Borelsche Identität" c. dolgozata Csillag 1928-as és 1935-ös Math. Annalen-dolgozataiból indul ki és folytatja azokat. Még talán sokoldalúságukat említeném röviden. Itt inkább két további dologgal illusztrálnám szellemi erejét, melyek közül főleg a második a fontos. Dr. Bálint Mihállyal, az ismert pszichoanalitikussal régi barátságban volt. Mikor egyszer Bálint 1931-ben mutatott Csillagnak egy cikket, mely az Imago c. pszichoanalitikai folyóiratban jelent meg bizonyos pszichológiai folyamatok quantitatív méréséről, ehhez Csillagnak olyan sok helytálló, lényeges megjegyzése volt, hogy közös dolgozatot írtak erről az Imago-ban. A második abból a korból való, mikor állását ott kellett hagynia a gyárban. Egy Mátrai-Gottwald nevű mérnök kapott megbízást héjszerkezetek építésére és a kapcsolatos matematikai nehézségek miatt Csillaghoz fordult. Csillag, megnézve az idevágó irodalmat, azok javarészét hibásnak, a számítási módszereket meg nem felelőknek találta. A hibákat korrigálva, a számítási módszereket kezelhetővé tudta leegyszerűsíteni. Mikor 1941-ben a pesti Izraelita Hitközség szabadegyetemi előadássorozatokat kezdett hirdetni, Csillag Pált is megkérték előadónak. Előadását „Numerikus módszerek" címen hirdette meg; *alkalmasint ez volt az első egyetemi színvonalú egész tanéves előadás magyar földön, kifejezetten numerikus analízisről.* Rényi és Schweitzer ezen előadásokat hallgatták és ezek eredményességét mutatja, hogy a héjszámításokban már aktívan részt tudtak venni.

Csillag Pálnak 1944 október 15-e után persze el kellett hagynia lakását. Az év december első felében halt meg a Szabolcs utcai szükségkórházban. Minden bizonnyal jeltelen tömegsírban pihen.

Feldheim Ervin barátom emlékének rövid felvillantásával fejezem be a megemlékezést. Pesten nem nyervén felvételt az egyetemre, Párizsban tanult és ott valószínűségszámításból írta disszertációját. Valószínűségszámítási munkáit később megmutattam Rényinek, aki érdekesnek találta azokat; együttműködésük nyilván meggyorsította volna a valószínűségszámítás hazai fejlődését, a szovjet és francia iskolák erényeinek egyesítésével. Idehaza főleg a klasszikus ortogonális polinomokkal foglalkozott, melyeket bámulatos formai érzékkel és virtuozitással kezelt. Ezek igazi méltánylásának ideje csak most jött el, mikor az USA-ban — főleg Szegő könyvének hatására — Richard Askey körül iskola alakult ki. Egyik eredményének sorsa különösen elgondolkoztató. Megint Fejér levelezésének átnézése közben, a hatvanas évek elején Feldheim egy levelét találtam bizonyos eredményekkel; a dátum kevéssel 1944-es bori behívója előtti lehetett. Tehát a levél jó 15 évet pihent Fejér levelei között. Gondoltam, ezt a levelet félreteszem. *Másnap* kaptam Szegőtől egy levelet, melyben éppen egy Feldheim levelében megoldott problémát vetett fel! Elküldve Szegőnek

Feldheim levelét, Szegő publikálta azt, alkalmazásokkal. „Habent sua fata epistolae". Askey egy nyári iskolán 10 előadásból álló sorozatot tartott klasszikus ortogonális polinomokról, ebben Feldheim ezen és más-más eredményei jelentős terjedelemben szerepelnek. Feldheim Borból sohasem tért vissza; minden bizonnyal a cservenkai vérengzésben ölték meg.

Érdemi mondanivalóm végére értem. Javaslom, hogy egyperces felállással emlékezzünk meg az áldozatokról.

TURÁN PÁL

ВОСПОМИНАНИЯ О МАТЕМАТИКАХ ПАВИШХ ЖЕРТВАМИ ФАШИЗМА

ПАЛ ТУРАН

TO THE MEMORY OF MATHEMATICIAN VICTIMES OF THE FASCISM

P. TURÁN

GÖMBKITÖLTÉSEK ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ TEREKBEN I.

BÖRÖCZKY KÁROLY

1. A „SŰRŰSÉG" FOGALMA AZ n-DIMENZIÓS HIPERBOLIKUS TÉRBEN

Legyen egy n-dimenziós állandó görbületű térben T egy pozitív térfogatú test, valamint $\{T_i\}$ pozitív térfogatú testek egy megszámlálható halmaza. A $\{T_i\}$ halmaznak a T testre vonatkozó sűrűségén általában a $\frac{\sum(T_i \cap T)}{T}$ hányadost értjük[1]. Azt is megengedjük, hogy T az egész n-dimenziós szférikus tér legyen.

Megemlítjük, hogy ezt a sűrűség fogalmat módosíthatjuk. Így pl. a kitöltéseknél a $\frac{\sum' T_i}{T}$ kitöltési sűrűséget használhatjuk, ahol a $\sum'$ a $\{T_i\}$ halmaz T-ben teljesen benne levő testjeire vonatkozó összegzést jelent. A lefedéseknél pedig a $\frac{\sum^* T_i}{T}$ lefedési sűrűséget tekinthetjük, ahol a $\sum^*$ a $\{T_i\}$ halmaz T-be belenyúló testjeire vonatkozó összegzést jelent.

Bizonyos sűrűség fogalom a teljes n-dimenziós euklideszi térben is értelmezhető. Rankin [1947] gömbökkel, Hlawka [1949] konvex testekkel való kitöltésekre, ill. lefedésekre értelmeztek sűrűséget. Az n-dimenziós euklideszi térben a sűrűség fogalom további általánosítására megemlítjük Fejes Tóth [1953a] és Groemer [1963] eredményeit.

Tekintsünk az n-dimenziós euklideszi térben egy megszámlálható sok, pozitív térfogatú testből álló $\{T_i\}$ rendszert. A következőképpen értelmezhető $\{T_i\}$-nek az egész térre vonatkozó δ kitöltési (vagy felső), ill. Δ lefedési (vagy alsó) sűrűsége:

$$\delta = \overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(T_i \cap G(R))}{G(R)} \quad \text{és} \quad \Delta = \underline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(T_i \cap G(R))}{G(R)}, \tag{1}$$

ahol $G(R)$ egy R sugarú gömb, amelynek középpontja a tér egy rögzített O pontja. Bizonyítható, hogy a δ ill. Δ független az O pont megválasztásától. Ez következik abból, hogy ha két rögzített középpont O_1 és O_2 távolságát c-vel jelöljük, akkor egy c vastagságú gömbgyűrű térfogata elhanyagolhatóan kicsi lesz a belső gömb térfogatához viszonyítva nagy gömbsugár esetén, pontosabban

$$\lim_{R=\infty} \frac{G(R+c)-G(R)}{G(R)} = \lim_{R=\infty} \frac{(R+c)^n - R^n}{R^n} = 0. \tag{2}$$

[1] A továbbiakban is, ha nem okoz félreértést, egy testet és a térfogatát ugyanúgy jelöljük.

Az is nyilvánvaló, hogy elég T_i helyett $T_i \cap G(R)$-től megkövetelni a térfogat létezését Így, ha $\{T_i\}$ elemei nem nyúlnak egymásba, akkor $\{T_i\}$-nek és $\cup T_i$-nek ugyanaz a kitöltési, ill lefedési sűrűsége.

A teljes n-dimenziós euklideszi térre vonatkozó fenti sűrűség definíciót az n-dimenziós hiperbolikus térre nem lehetett kiterjeszteni, mert az O ponttól való függőség, ill függetlenség problémája megoldatlan volt. Ugyanis az euklideszi eset bizonyításában fontos szerepet játszó (2) határérték a $\varkappa$ görbületű n-dimenziós térben nem válik nullává; pontosabban

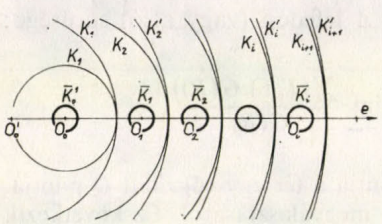
$$\lim_{R=\infty} \frac{G(R+c)-G(R)}{G(R)} = e^{(n-1)c\sqrt{-\varkappa}} - 1 > 0.$$

A következőkben ezt a problémát lezárjuk. Megmutatjuk ugyanis, hogy — az mint várható volt —, a hiperbolikus esetben az O ponttól való függetlenség nem áll fenn.

Először egy körrendszert konstruálunk:

Tekintsünk a $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon egy irányított e egyenest, azon egy O_0, egy O_0' pontot és egy $\{O_i\}$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ ponthalmazt, amelyekre az $O_0'O_0 = \frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ és $O_0O_i = \left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ összefüggések állnak fenn, ahol $O_0'O_0$ és O_0O_i előjeles távolságot jelent. Jelöljük az O_0 középpontú $i \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ sugarú kört K_i-vel (1 ábra), K_i és K_{i+1} által határolt körgyűrűt G_i-vel és vezessük be a $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = \frac{G_i}{K_1}$ jelölést is.

Legyen $\overline{K}_0^1$ egy O_0 középpontú r sugarú kör, ahol $r < \frac{1}{4} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ tetszőleges rögzített pozitív érték. A $\overline{K}_0^1$ körnek a K_1 körbeli sűrűségét jelöljük d-vel. Az O_i pont köré írjunk olyan r_i sugarú $\overline{K}_i$ kört, amelyre $\overline{K}_i = \frac{\lambda_i}{[\lambda_i]}\,\overline{K}_0^1$. Nyilván $r \leqq r_i < \frac{5}{4}\,r$ és $r_i \to r$, ha $i \to \infty$. Az r és r_i megválasztásából adódik, hogy a G_i körgyűrű a $\overline{K}_i$ kört a belsejében tartalmazza. A $\overline{K}_i$ kört vegyük $[\lambda_i]$ példányban, s az így kapott egymást fedő köröket jelöljük $\overline{K}_i^j$-vel $(1 \leqq j \leqq [\lambda_i])$. Ezeknek a köröknek a G_i körgyűrűben a sűrűsége



1. ábra

$$\frac{[\lambda_i]\overline{K}_i}{K_{i+1}-K_i} = \frac{\lambda_i \overline{K}_0^1}{K_{i+1}-K_i} = \frac{\overline{K}_0^1}{K_1} = d.$$

Így a K_{l+1} körben a $\{\overline{K}_i^j\}$ $(0 \leqq i \leqq l;\ 1 \leqq j \leqq [\lambda_i])$ körhalmaz sűrűsége is d.

A kívánt körrendszer a $\{\overline{K}_i^j\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots;\ 1 \leqq j \leqq [\lambda_i])$ körrendszer.

1. esetként az O pontnak válasszuk az O_0 pontot és a köréje írt R sugarú kört jelöljük $K(R)$-vel. Vezessük be továbbá a $\{\overline{K}_i^j\}$ körrendszernek a $K(R)$ körre vonatkozó sűrűségére az $f_1(R)$ jelölést, azaz

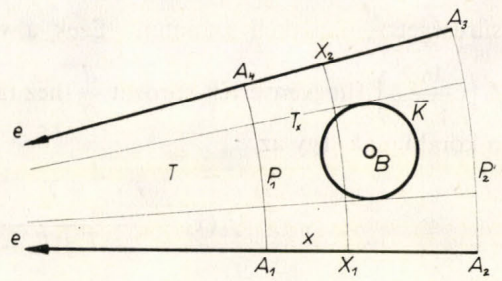
$$f_1(R) = \frac{\sum(\overline{K}_i^j \cap K(R))}{K(R)}.$$

A $\overline{\lim}_{R=\infty} f_1(R)$ és a $\underline{\lim}_{R=\infty} f_1(R)$ értékeket kell meghatároznunk. Az $f_1(R)$ függvény az $R=i\cdot\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ $(i=1, 2, \ldots)$ helyen a d értéket veszi fel. Az $f_1(R)$ függvénynek az $R=i\cdot\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}+x$ helyen felvett értékeiről, ahol $0\leqq x\leqq\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ rögzített érték és $i\to\infty$, könnyen belátható, hogy egy $\bar{f}_1(x)$ értékhez konvergálnak, amit szemléletesen a következőképpen lehet megadni:

Legyen p_1 és p_2 két egymástól $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ távolságra haladó parallel paraciklus, s az e_1 és e_2 irányított egyenesek ezek tengelyei. Az e_1 egyenesnek p_1 és p_2-vel alkotott metszéspontját A_1, ill A_2-vel, az e_2 egyenesnek p_1 és p_2-vel alkotott metszéspontját A_4, ill A_3-mal jelöljük. Legyen az e_1 egyenes iránya az A_2A_1 irány (2. ábra).

Az e_1 és e_2 tengelyeket úgy válasszuk meg, hogy az $A_1A_2A_3A_4$ paraciklusgyűrű cikk területe K_1 területével megegyezzen. Az e_1 és e_2 egyenesek középpárhuzamos egyenesének és a p_1 és p_2 paraciklusok középparallel paraciklusának a metszéspontját jelöljük B-vel. A B pont köré írjunk egy r sugarú $\overline{K}$ kört. Az r értékét válasszuk akkorára, hogy a $\overline{K}$ kört az $A_1A_2A_3A_4$ paraciklusgyűrű cikk tartalmazza[2]. Így az $A_1A_2A_3A_4$ paraciklusgyűrű cikkben a $\overline{K}$ kör sűrűsége d. A p_1 és p_2 paraciklusok között p_1-től x távolságra haladó parallel paraciklusnak és az e_1 és e_2 egyenesnek a metszéspontját jelöljük X_1, ill. X_2-vel. Jelöljük továbbá az $\overset{\frown}{A_1A_4}$ paraciklusívhez tartozó paraciklus cikket T-vel, az $A_1X_1X_2A_4$ paraciklusgyűrű cikket pedig T_x-szel. Ezek után az $\bar{f}_1(x)$ a következőképpen adható meg:

$$\bar{f}_1(x)=\frac{T\cdot d+\overline{K}\cap T_x}{T+T_x},$$



2. ábra

ami annak felel meg, hogy a p_1-hez tartozó paraciklus cikkben d a sűrűség, miként a $\{K_i\}$ köreiben

Mivel az $\overset{\frown}{A_2A_3}$ és $\overset{\frown}{A_1A_4}$ paraciklusívek aránya 2, ezért $T=K_1$. Így az $\bar{f}_1(x)$ a következőképpen is írható

$$\bar{f}_1(x)=\frac{\overline{K}+\overline{K}\cap T_x}{K_1+T_x}.$$

Végül a keresett $\overline{\lim}$ és $\underline{\lim}$ értékekre az alábbi adódik:

$$\overline{\lim}_{R=\infty} f_1(R)=\max\bar{f}_1(x)=d_1 \quad \text{és}$$

$$\underline{\lim}_{R=\infty} f_1(R)=\min\bar{f}_1(x)=d_2.$$

[2] Belátható egy kissé hosszabb, de elemi gondolatmenettel, hogy ez nem jelent újabb megszorítást.

Ezek az értékek $\bar{f}_1(x)$ folytonossága miatt léteznek és nyilván $0<d_2<d<d_1$.

2. esetként az O pontnak válasszuk az O_0' pontot, és a köréje írt R sugarú kört jelöljük $K'(R)$-rel. Vezessük be továbbá a $\{\bar{K}_i^j\}$ körrendszernek a $K'(R)$ körbeli sűrűségére az $f_2(R)$ jelölést, azaz

$$f_2(R)=\frac{\sum(\bar{K}_i^j\cap K'(R))}{K'(R)}.$$

A $\overline{\lim\limits_{R=\infty}} f_2(R)$ és a $\underline{\lim\limits_{R=\infty}} f_2(R)$ értékeket kell meghatároznunk. A $K'(R)\left(R=(i+1)\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}};\right.$ $\left.i=1, 2, \ldots\right)$ kört jelöljük K_i'-vel, a K_i' és K_{i+1}' körök által határolt körgyűrűt pedig G_i'-vel. A K_i' kör és a K_i kör ugyanazokat a köröket tartalmazza a $\{\bar{K}_i^j\}$ körrendszerből (1. ábra). Viszont az előbbi kör nagy R értékekre közel kétszer akkora területű mint az utóbbi kör, mert a területük arányának határértéke, $R\to\infty$ esetén, pontosan 2. Ezért az $f_2(R)$ függvénynek az $R=i\cdot\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ helyen felvett értékei, $i\to\infty$ esetén a $\frac{d}{2}$ értékhez tartanak Az $f_2(R)$ függvénynek az $R=(i+1)\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}+x$ helyen felvett értékei $\bar{f}_2(x)$ határértékének a meghatározásához, ahol $0\leqq x\leqq\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ rögzített érték és $i\to\infty$, az $\bar{f}_1(x)$ meghatározásánál leírt konstrukciót (2. ábra) a következőképpen kell módosítani: Egyrészt az $A_1A_2A_3A_4$ paraciklusgyűrű cikk területe a duplája legyen a korábbinak, azaz $2K_1$ legyen, másrészt a T paraciklus cikkbeli sűrűséget $\frac{d}{2}$-nek kell számítani. Ezek a változások megfelelnek annak, hogy az $f_2\left(i\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}\right)$ függvényérték sorozat $\frac{d}{2}$-hez tart. A T és a T_x területe is a duplája lett a korábbinak. Így az

$$\bar{f}_2(x)=\frac{T\cdot\frac{d}{2}+T_x\cap\bar{K}}{T+T_x}=\frac{\bar{K}+T_x\cap\bar{K}}{2K_1+T_x}$$

összefüggésből adódik, hogy $\bar{f}_2(x)=\frac{\bar{f}_1(x)}{2}$. Az $\bar{f}_2(x)$ nevezője ugyanis duplája az $\bar{f}_1(x)$ nevezőjének, de a számlálóik azonosak, mert az $\bar{f}_2(x)$-hez tartozó T_x hiába dupla olyan széles mint az $\bar{f}_1(x)$-hez tartozó T_x, ha ugyanazt metszi ki a $\bar{K}$ körből.

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\overline{\lim_{R=\infty}} f_2(R)=\max\bar{f}_2(x)=\frac{d_1}{2}\quad\text{és}$$

$$\underline{\lim_{R=\infty}} f_2(R)=\min\bar{f}_2(x)=\frac{d_2}{2}.$$

Tehát az O_0' pont mind az alsó, mind a felső „sűrűségre" fele akkora értéket ad, mint az O_0 pont. Ezzel beláttuk, hogy ha a hiperbolikus síkon az (1)-nek megfelelően próbálnánk alsó vagy felső sűrűséget értelmezni, akkor ezek az értékek függenének az O pont megválasztásától, így ezt a definiálási próbálkozást el kell vetnünk.

Megemlítjük még, hogy egy alkalmas $\{\overline{K}_i^j\}$ körrendszerből egy olyan körkitöltés is készíthető, amelyre az O_0 és O_0' pontok különböző „kitöltési sűrűségeket" adnak. Az alábbiakban bemutatjuk ezt a konstrukciót.

Az egymást fedő $\overline{K}_i^j$ $(1 \leqq j \leqq [\lambda_i])$ köröket az O_0 pont körül forgassuk szét úgy, hogy ezek egymást sorban kívülről érintsék, az e egyenesre szimmetrikusan helyezkedjenek el és páratlan $[\lambda_i]$ esetén az egyik kör fedje a $\overline{K}_i$ kört, páros $[\lambda_i]$ esetén az e egyenest érintő körök messék a $\overline{K}_i$ kört. Ezeket a köröket jelöljük sorban K_i^j-vel $(1 \leqq j \leqq [\lambda_i])$, a középpontjaikat O_i^j-vel. Tehát K_i^1 és $K_i^{[\lambda_i]}$ a két szélső kör. Legyen $\overline{K}_0^1 \equiv K_0^1$.

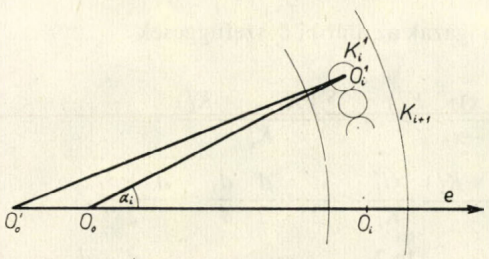
Tekintsük a $\{K_i^j\}$ $(0 \leqq i;\ 1 \leqq j \leqq [\lambda_i])$ köreiből álló körkitöltést.

1. esetként az O pontnak válasszuk az O_0 pontot és a köréje írt R sugarú kört jelöljük úgy, mint korábban $K(R)$-rel. Mivel az O_0 ponttól a K_i^j és a $\overline{K}_i^j$ kör ugyanakkora távolságra van, a $K(R)$ körben a $\{K_i^j\}$ és $\{\overline{K}_i^j\}$ körrendszerek sűrűsége ugyanakkora. Ezért $\{K_i^j\}$ O_0 pontra számított „kitöltési sűrűsége" d_1.

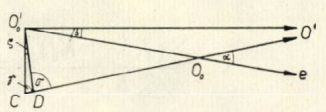
2. esetként az O pontnak válasszuk az O_0' pontot, és használjuk a korábban bevezetett jelölésmódot. Az O_0' ponttól a $\overline{K}_i^j$ kör messzebb van mint a K_i^j kör, hacsak a két kör nem fedi egymást. Ezért a $K'(R)$ kör nagyobb vagy ugyanakkora összkörterületet kitevő részhalmazt tartalmaz $\{K_i^j\}$-ből, mint $\{\overline{K}_i^j\}$-ből. Rögzített i mellett a $\{K_i^j\}$ körei közül a K_i^1 van legközelebb az O_0' ponthoz. Ezért az $O_0'O_i^1$ és az $O_0'O_i$ távolságok különbségének határértékét kell meghatároznunk. Az $O_0O_i = O_0O_i^1$ egyenlőség miatt fennáll az $O_0'O_i = O_0'O_0 + O_0O_i^1$ egyenlőség is. Tehát azt kell megállapítanunk, hogy az $O_0'O_0O_i^1$ háromszög $O_0'O_0$ és $O_0O_i^1$ oldalainak összege határértékben mennyivel nagyobb az $O_0'O_i^1$ oldalnál (3. ábra). Legyen $O_i^1O_0O_i \sphericalangle = \alpha_i$. Tekintsük az $f_1(x)$ meghatározásánál szereplő $\overline{K}$ kör két olyan érintője által meghatározott sávot, amelyek a p_1 paraciklus tengelyei (2. ábra). Jelöljük ennek a sávnak p_1-ből kimetszett paraciklusívének és az $\overset{\frown}{A_1A_4}$ paraciklusívnek az arányát $\mu(r)$-rel. Nyilván $\lim\limits_{r=0} \dfrac{\mu(r)}{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{\overset{\frown}{A_1A_4}}$. Az is könnyen belátható, hogy $\alpha_i \to \mu(r)\pi$, ha $i \to \infty$.

Jelöljük $\mu(r)\pi$-t α-val. Így $\lim\limits_{r=0} \dfrac{\alpha}{r} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{\overset{\frown}{A_2A_4}}$, azaz $r \to 0$ esetén $\alpha \to 0$-hoz.

Jelöljük O^1-gyel egy olyan O_0 kezdőpontú félegyenes végpontját, amely $\pi - \alpha$ szöget zár be az $O_0'O_0$ szakasszal. A félegyenes O_0-n túli meghosszabbításán vegyük fel a C, ill. D pontot úgy, hogy $O_0O_0' = O_0C$, ill. $O^1O_0'D \sphericalangle = O^1DO_0' \sphericalangle$ legyen (4. ábra). Mivel $O^1CO_0' \sphericalangle < O^1O_0'C \sphericalangle$ a D pont a CO_0 szakaszon helyezkedik el. Az $O_0'O_0O_i^1 \triangle$ $O_0'O_0$ és $O_0O_i^1$ oldalainak összege és az $O_0'O_i^1$ oldal különbségének határértékét a CD távolság adja meg.



3. ábra



4. ábra

Jelöljük az $O_0O_0'O^1\sphericalangle$-t β-val, az $O_0CO_0'\sphericalangle$-t γ-val, az $O_0DO_0'\sphericalangle$-t σ-val és a $CO_0'D\sphericalangle$-t ϱ-val. A megfelelő szögek egyenlőségéből adódik, hogy $\varrho=\beta+\gamma-\sigma$. Nyilvánvaló, hogy $\beta<\alpha$ és $\gamma<\sigma<\frac{\pi}{2}$. Ha $r\to O$-hoz, akkor $\alpha\to 0$ miatt nyilván $\beta\to 0$-hoz, $\gamma\to\frac{\pi}{2}$-hez, $\sigma\to\frac{\pi}{2}$-hez és így $\varrho\to 0$-hoz. Ezenkívül $r\to 0$ esetén $CO_0'\to 0$-hoz és σ hegyesszögűsége miatt $DO_0'\to 0$-hoz. Ebből következik, hogy $CD\to 0$-hoz $r\to 0$ esetén. Létezik ezért egy $s>0$ érték, hogy $0<r<s$ esetén $CD<\frac{1}{5}\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$. Legyen $\bar{r}$ egy tetszőleges érték, amelyre $\bar{r}<\min\left(s, \frac{1}{5}\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}\right)$, ill. $\bar{r}>0$.

A továbbiakban az $\bar{r}$ értékhez tartozó $\{K_i^j\}$ körkitöltést tekintsük. Vezessük be a $\{K_i^j\}$ körkitöltés $K'(R)$-beli sűrűségére, $\frac{\sum(K_i^j\cap K'(R))}{K'(R)}$-re az $f_3(R)$ jelölést. A G_i' körgyűrű középkörétől határértékben az O_i^j pontok $\frac{1}{5}\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$-nál kevesebbel távolodhatnak el, ezért létezik egy olyan N_1 természetes szám, hogy $i>N_1$ esetén az O_i^j pontok a G_i' középkörétől $\frac{1}{4}\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$-nál kisebb távolságra vannak. A $\{K_i^j\}$ köreinek sugarai kisebbek $\frac{1}{4}\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$-nál. Ezért a G_i' körgyűrű $i>N_1$ esetén tartalmazza a K_i^j $(1\leqq j\leqq[\lambda_i])$ köröket. Ebből következik, hogy a G_i' körgyűrűben és a K_i' körben $i>N_1$ esetén a $\{K_k^j\}$ és a $\{\overline{K}_k^j\}$ körrendszerek sűrűsége ugyanakkora. Tehát $i>N_1$-re az $f_2(R)$ és az $f_3(R)$ függvényeknek az $R=(i+1)\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ helyen felvett értékei egyenlők. Így az $f_3(R)$ függvény értékeinek fenti sorozata is $\frac{d}{2}$-hez konvergál. Természetesen a $\{G_i'\}$-beli sűrűség értékek is $\frac{d}{2}$-hez konvergálnak. Válasszunk egy olyan d' értéket, hogy $d<d'<d_1$ teljesüljön. Ez előbbiek miatt létezik egy olyan $N_2\geqq N_1$ természetes szám, hogy $i>N_2$ esetén G_i'-ben is és K_i'-ben is a $\{K_k^j\}$ sűrűsége kisebb mint $\frac{d'}{2}$. A $\frac{G_i'}{K_i'}$ terület arány tart 1-hez, ha $i\to\infty$. Ezért létezik egy olyan $N_3\geqq N_2$ természetes szám, hogy $i>N_3$ esetén $\frac{G_i'}{K_i'}<\frac{d_1}{d'}$.

Tekintsük az $f_3(R+x)$ függvény értéket, ahol $R=(i+1)\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$, $i>N_3$ rögzített érték és $0\leqq x\leqq\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$. Nyilvánvalóan igazak az alábbi összefüggések:

$$f_3(R+x)=\frac{\sum\left(K'(R+x)\cap K_k^j\right)}{K'(R+x)}<\frac{\sum(K_{i+1}'\cap K_k^j)}{K_i'}=$$

$$=\frac{\sum(K_i'\cap K_k^j)}{K_i'}+\frac{\sum(G_i'\cap K_k^j)}{G_i'}\cdot\frac{G_i'}{K_i'}<\frac{d'}{2}+\frac{d'}{2}\cdot\frac{d_1}{d'}=\frac{d'+d_1}{2}.$$

Ezek szerint $f_3(R)<\frac{d'+d_1}{2}$, ha $R>(N_3+2)\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$. Így $\overline{\lim\limits_{R=\infty}}\ f_3(R)\leqq\frac{d'+d_1}{2}<d_1$.

Tehát az $\bar{r}$ értékhez tartozó $\{K_i^j\}$ körkitöltés O_0 ponthoz rendelt „kitöltési sűrűsége" d_1, az O_0' ponthoz rendelt „kitöltési sűrűsége" pedig kisebb d_1-nél. Így a hiperbolikus síkon a „kitöltési sűrűségre" sem áll fenn az O ponttól való függetlenség, tehát körkitöltésekre sem lehet (1)-nek megfelelően sűrűséget értelmezni.

Az n-dimenziós euklideszi térben a már definiált teljes térre vonatkozó kitöltési, ill. lefedési sűrűség meghatározására azonban ismert és nagyon gyakran használt módszer a következő:

Tekintsünk az n-dimenziós euklideszi térben egy megszámlálható sok, pozitív térfogatú testből álló $\{T_i\}$ rendszert. Bontsunk fel az n-dimenziós euklideszi teret olyan cellákra, hogy azok átmérői felülről korlátos halmazt alkossanak. Ha a $\{T_i\}$ rendszernek az egyes cellákbeli sűrűsége d_1 és d_2 $(0 \leqq d_1 \leqq d_2)$ közé esik, akkor könnyen igazolható, hogy $\delta \leqq d_2$, ill. $\Delta \geqq d_1$. Ha minden cellában ugyanakkora a sűrűség, akkor a kitöltési, ill. lefedési sűrűség is ez a közös érték.

Még az is megengedett, hogy a cellákbeli sűrűséget az általános esettől eltérően a $\frac{\sum T_i(C)}{C}$ alakban értelmezzük, ahol C a cellát, $T_i(C)$ a T_i testnek a C-hez rendelt bizonyos részét jelöli. Mielőtt erre példát mutatnánk két nagyon gyakran használt cellafelbontást említünk.

Legyen egy n-dimenziós állandó görbületű térben $\{O_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ egy olyan ponthalmaz, amelynek a végesben nincs torlódási pontja, továbbá létezzék egy olyan $R>0$ érték, hogy az n-dimenziós állandó görbületű tér minden egyes R sugarú gömbjében legyen legalább egy O_i pont. Minden egyes O_i pont köré írjunk egy olyan T_i gömböt, amelynek az átmérője egy előre adott pozitív korlátnál kisebb.

A T_i gömb Dirichlet—Voronoj-féle cellájának (röviden D—V-cellának) fogjuk nevezni azoknak a pontoknak az összességét, amelyeknek a T_i gömbre vonatkozó hatványuk kisebb vagy egyenlő minden más T_j $(j \neq i)$ gömbre vonatkozó hatványnál. (Egy külső pontnak gömbre vonatkozó hatványán a pontból a gömbhöz húzott érintő négyzetét, gömbfelületi pont hatványán a nullát értjük. Egy belső pontnak gömbre vonatkozó hatványát negatívnak választjuk, az abszolút érték két a ponton áthaladó legrövidebb húr félhosszának a négyzete adja. Ismeretes, hogy két gömb hatványalakzata egy „hipersík".) A D—V-cella (legfeljebb elfajuló) konvex politop.

Tekintsük az n-dimenziós állandó görbületű tér azon „támasz"[3] gömbjeit, amelyek nem tartalmaznak belsejükben O_i pontot, de tartalmaznak a határukon olyan $n+1$ O_i pontot, amelyek nincsenek egy „hipersík"-ban. Egy ilyen „támasz" gömb határán elhelyezkedő O_i pontok konvex burkát nevezzük egy Delaunay-féle cellának (röviden D-cellának), amely egy konvex politop.

Ismeretes, hogy a D—V-cellák is és a D-cellák is határaiktól eltekintve egyrétűen lefedik az n-dimenziós állandó görbületű teret. Az n-dimenziós állandó görbületű tér e két cellafelbontását nevezzük D—V-felbontásnak, ill. D-felbontásnak.

A D—V-felbontás, ill. a D-felbontás segítségével az n-dimenziós euklideszi térben a $\frac{\sum T_i(C)}{C}$ alakban értelmezett cellabeli sűrűséget pl. a következőképpen lehet megadni:

1. Ha C a T_i gömb D—V-cellája, akkor $T_i(C)$ lehet a teljes T_i gömb.

2. Ha C egy D-cella és O_i csúcsa C-nek, akkor $T_i(C)$ lehet a T_i gömb és a C cella O_i-beli térszögletének a közös része.

Az n-dimenziós euklideszi térben értelmezett kitöltési és lefedési sűrűség feut leírt meghatározási módjának az analógiája alapján az n-dimenziós hiperbolikus

[3] Ld. Delaunaynál „üres" gömbök.

térben a következő H hipotézist használták kitöltési, ill. lefedési sűrűség értelmezésére[4]:

Adott az n-dimenziós hiperbolikus térben megszámlálható sok pozitív téfogatú T_i test. Tegyük fel, hogy az n-dimenziós hiperbolikus teret sikerült olyan cellákra felbontani, melyek átmérői felülről korlátos halmazt alkotnak és a $\{T_i\}$ rendszer sűrűsége minden cellában d_1 és d_2 $(0 \leqq d_1 \leqq d_2)$ közé esik, akkor az egész hiperbolikus térre vonatkozó δ kitöltési, ill. Δ lefedési sűrűség bármely „értelmes" definíciója mellett $\delta \leqq d_2$, ill. $\Delta \geqq d_1$ és $d_1 = d_2$ esetén $\delta = d_2$, ill. $\Delta = d_1$.

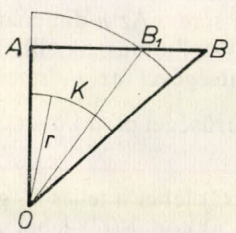
A következőkben megmutatjuk, hogy az egész hiperbolikus térre vonatkozó sűrűségfogalomnak még e fenti értelmezése is korrekciókra szorul. Bizonyos $\{T_i\}$ rendszerekhez többféle cellafelbontást konstruálunk, és H szerint ugyanannak a $\{T_i\}$ rendszernek más és más lenne a sűrűsége annak megfelelően, hogy melyik cellafelbontás alapján állapítjuk meg azt[5]. Több konstrukciót mutatunk be annak illusztrálására, hogy a hiperbolikus tér milyen rendellenesnek tűnő jelenségeket produkál a sűrűséggel (átlagolással) kapcsolatban, illetve milyen megszorításokkal lehetne az n-dimenziós hiperbolikus térre értelmezni sűrűséget.

A konstrukciók ismertetése előtt néhány egyszerű segédtételt említünk az állandó görbületű felületeken:

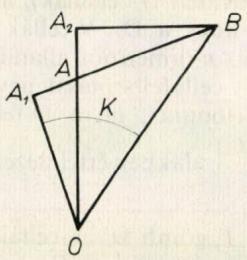
1. Segédtétel: *Legyen K egy állandó görbületű felület egy r sugarú O középpontú körre, továbbá a következők teljesüljenek egy $OAB\triangle$-re: $OAB\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$, $OA \cong r$ és OB a háromszög legnagyobb oldala. Legyen B_1 az AB oldal egy tetszőleges belső pontja. Állítás: A K körnek az $OB_1B\triangle$-ben, az $OAB\triangle$-ben és az $OAB_1\triangle$-ben vett sűrűségei monoton növekvő értékeket adnak.*

Bizonyítás: Az AB oldal bármely két pontjára igaz, hogy amelyik pont az A-hoz van közelebb, az egyúttal az O-hoz is közelebb van. Ezért az $OB_1B\triangle$-ben nyilván kisebb a K kör sűrűsége, mint az O középpontú OB_1 sugarú körben, s ebben ismét kisebb a sűrűség, mint az $OAB_1\triangle$-ben (5. ábra). Mivel az $OAB\triangle$-t az $OB_1B\triangle$-re és az $OAB_1\triangle$-re lehet szétvágni, így ebben a sűrűség közbülső értéket vesz fel, ami az állításunkat igazolja.

2. Segédtétel: *Legyen K egy állandó görbületű felület egy r sugarú O középpontú köre, továbbá egy OA_1B és egy OA_2B háromszögre a következők teljesüljenek: $OA_1B\sphericalangle = OA_2B\sphericalangle = 90°$, $OA_2 > OA_1 \cong r$ és OB a háromszögnek legnagyobb oldala. Állítás: a K körnek az $OA_1B\triangle$-ben nagyobb a sűrűsége, mint az $OA_2B\triangle$-ben.*



5. ábra



6. ábra

[4] Ld. Fejes Tóth [1953$_b$], [1953$_d$], [1959], Molnár [1962], Heppes—Molnár [1962], Böröczky—Florian [1964].

[5] Ld. Heppes—Molnár [1965].

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy a háromszögek az OB szakasz ugyanazon oldalán helyezkednek el. Az OA_2 és az A_1B szakaszok metszik egymást, s jelöljük a metszéspontot A-val (6. ábra). Az $OA_2B\triangle$-ben nyilván kisebb a K kör sűrűsége, mint az $OAB\triangle$-ben. Az 1. Segédtétel szerint az $OAB\triangle$-ben a K kör sűrűsége kisebb, mint az $OA_1B\triangle$-ben, ami az állításunk helyességét jelenti.

Könnyen belátható, hogy az előbbi kétsegédtételünkből adódik a következő

3. Segédtétel: *Legyen egy állandó görbületű felületen K_1 és K_2 két r sugarú O_1 ill. O_2 középpontú kör, továbbá egy $O_1A_1B_1\triangle$-re és $O_2A_2B_2\triangle$-re a következő összefüggések álljanak fenn: $O_1A_1B_1\sphericalangle = O_2A_2B_2\sphericalangle = 90°$, $O_2A_2 \cong O_1A_1 \cong r$, $O_1B_1 \leqq O_2B_2$ és O_1B_1, ill. O_2B_2 a háromszögek legnagyobb oldalai. Amennyiben $O_1A_1B_1\triangle \not\cong O_2A_2B_2\triangle$, az $O_1A_1B_1\triangle$-ben a K_1 kör sűrűsége nagyobb, mint az $O_2A_2B_2\triangle$-ben a K_2 köré.*

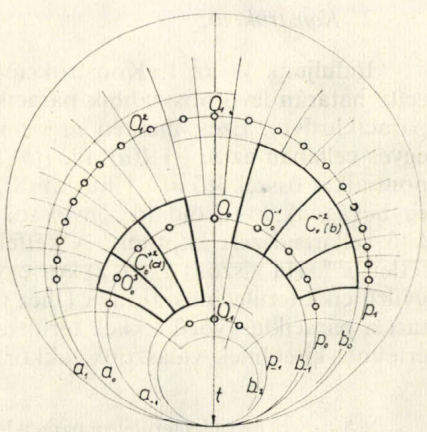
1. *Konstrukció:*

Tekintsünk a $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon egy irányított t egyenest. Vegyük fel ezen az $\{O_i\}$ $(i=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ponthalmazt úgy, hogy az $O_{i+1}O_i$ irányított szakasz $\frac{\ln m}{\sqrt{-\varkappa}}$ hosszúságú legyen, ahol $m>1$ egész. Tekintsük továbbá a t tengelyű O_i pontokon áthaladó p_i parallel paraciklusokat. Irányítsuk p_i-t úgy, hogy az O_i pontban t irányát $-90°$-kal elforgatva kapjuk meg p_i irányát. A p_i paracikluson jelöljük ki az $\{O_i^j\}$ $(j=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ponthalmazt úgy, hogy az $\widehat{O_iO_i^j}$ paraciklus-ív előjeles hossza $j \cdot l$ legyen, ahol az l egy rögzített pozitív érték. Nyilván $O_i^0 \equiv O_i$ (7. ábra; $m=3$). Az O_i^j ponton áthaladó paraciklus tengely a p_{i+1} paraciklust az O_{i+1}^{mj} pontban metszi, mert két szomszédos paraciklus p_{i+1} és p_i megfelelő íveinek aránya m. Az $O_i^{j-1}O_i^j$ és az $O_i^jO_i^{j+1}$ szakaszok felezőmerőlegesei által határolt sávot jelöljük S_i^j-vel.

Legyen x tetszőleges rögzített érték $1<x<m$. Az O_0O_1 szakaszon, a felezőpontjára szimmetrikusan vegyük fel a B_0A_0 szakaszt úgy, hogy az előjeles hossza $\frac{\ln x}{\sqrt{-\varkappa}}$ legyen. Tekintsük a t egyenesen azokat az A_i és B_i pontokat, amelyekre az $O_0A_0 = O_iA_i$ és $O_0B_0 = O_iB_i$ előjeles szakaszokra vonatkozó összefüggések fennállnak. Jelöljük az A_i és B_i pontokon áthaladó t tengelyű paraciklusokat a_i, ill. b_i-vel.

Az $\{O_i^j\}$ pontrendszerhez a következőképpen adunk meg két cellafelbontást:

a) Az O_i^j pont $C_i^j(a)$ cellája legyen az a_{i-1} és az a_i paraciklusok által határolt paraciklusgyűrű és az S_i^j közös része. Könnyen belátható, hogy $C_i^j(a) \cong C_n^k(a)$ $(i, j, k, n$ tetszőleges). A $C_i^j(a)$ cella rövidebb paraciklusívének a hosszát jelöljük $l(a)$-val. A hosszabbik paraciklusívének a hossza $m \cdot l(a)$ lesz, mivel az a_{i-1} és az



7. ábra

a_i távolsága $\frac{\ln m}{\sqrt{-\varkappa}}$. A $C_i^j(a)$ cellák határaiktól eltekintve egyrétűen lefedik a hiperbolikus síkot. Közös területüket jelöljük $C(a)$-val.

b) Az O_i^j pont $C_i^j(b)$ cellája legyen a b_{i-1} és a b_i paraciklusok által határolt paraciklusgyűrű és az S_i^j közös része.

Az *a)* pontbeliekhez hasonlóan $C_i^j(b) \cong C_k^n(b)$, továbbá jelöljük a $C_i^j(b)$ cella rövidebb paraciklusívének hosszát $l(b)$-vel, a területét $C(b)$-vel. A hosszabbik paraciklusív ez esetben $m \cdot l(b)$ hosszúságú. $\{C_i^j(b)\}$ cellái is határaiktól eltekintve egyrétűen lefedik a hiperbolikus síkot.

A $C_i^j(a)$ és a $C_i^j(b)$ cellákat ugyanabból az S_i^j sávból metszi ki két $\frac{\ln m}{\sqrt{-\varkappa}}$ szélességű paraciklusgyűrű. Így a cellák területaránya megegyezik a megfelelő paraciklusívek hosszának arányával. Ezért $C(b) : C(a) = l(b) : l(a) = x$, hiszen az a_{i-1} és b_{i-1} paraciklusívek távolsága $\frac{\ln x}{\sqrt{-\varkappa}}$.

Az $\{O_i^j\}$ ponthalmaz pontjai köré írjunk akkora sugarú kongruens köröket, hogy azokat a $C_i^j(a)$ és a $C_i^j(b)$ cellák is tartalmazzák. E körrendszer sűrűsége minden egyes $C_i^j(a)$ cellában, ill. $C_i^j(b)$ cellában ugyanakkora, csak az előbbiben x-szer nagyobb. Tehát a $\{C_i^j(a)\}$ cellarendszer H szerint x-szer nagyobb „sűrűséget" ad a körrendszer „sűrűségére" mint a $\{C_i^j(b)\}$ cellarendszer, holott egy körrendszerhez egyértelműen szeretnénk hozzárendelni „sűrűséget" (pl. ez esetben kitöltési „sűrűséget").

Ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan sűrűségfogalom, amely a teljes hiperbolikus síkra vonatkozóan a klasszikus sűrűségfogalmaknak azzal a természetes tulajdonságával rendelkezne, hogy amennyiben a „részekben" ugyanakkora a sűrűség, akkor az „egészben" is ez a közös érték a sűrűség.

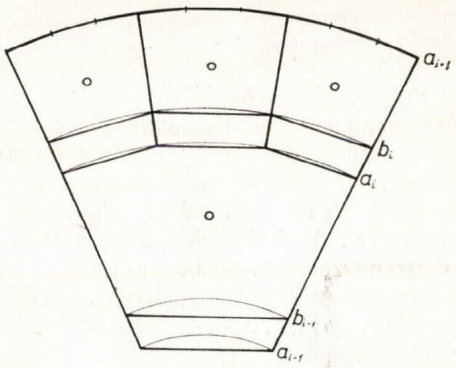
Megemlítjük még, hogy a konstrukcióban az $x > 1$ érték előre tetszőlegesen megadható. Ha az x számot minden határon túl növeljük, akkor természetesen mindig újabb és újabb körrendszereket kell konstruálni. Egy ilyen rögzített körrendszerhez nem csak kétféle „sűrűség" értéket lehet hozzárendelni, hanem hasonló módon bármilyen közbülső értéket is, csak az x értéket kell kisebbnek (1-nek is) választani.

2. *Konstrukció:*

Induljunk ki az 1. Konstrukcióból. Legyen m páratlan. A $C_i^j(a)$, ill. a $C_i^j(b)$ cella határán levő hosszabbik paraciklusívet bontsuk fel m $l(a)$, ill. $l(b)$ hosszúságú paraciklusívre. Ezek mentén m szomszédos cella csatlakozik a cellához. Minden egyes cellában az $m+1$ $l(a)$, ill. $l(b)$ hosszúságú paraciklusívet helyettesítsük a végpontjaikat összekötő $m+1$ húrral (8. ábra). Az új cellák is egy cellarendszeren belül egybevágóak, $m+3$ oldalú konvex sokszögek. Így két konvex egybevágó sokszögekből álló cellarendszert kaptunk. A kétféle sokszög területaránya viszont már nem feltétlen x [6]. Ha viszont $l \to 0$, akkor egy ilyen sokszög és a neki megfelelő paraciklusgyűrű cikk területének aránya 1-hez tart. Így közben a kétféle sokszög területaránya tart a paraciklusgyűrű cikkek területarányához, x-hez. Ha az l értékét egy bizonyos értéknél kisebbnek választjuk, akkor az O_i^j pontot a $C_i^j(a)$ cellából kapott sokszög

[6] A paraciklusszelet területe a paraciklusív hosszának monoton növő alulról konvex függvén · Ennek alapján be lehet látni, hogy a fenti arány mindig kisebb mint x.

tartalmazza. Ennek teljesüléséhez ugyanis az kell, hogy a $C_i^j(a)$ cellából lemetszett paraciklusszelet vastagsága kisebb legyen az O_i^j pont és az a_i paraciklus távolságánál. Ha pedig a $C_i^j(a)$ cellából kapott sokszög tartalmazza az O_i^j pontot, akkor már a $C_i^j(b)$ cellából kapott sokszög is tartalmazza azt.



8. ábra

Válasszuk az l értékét akkorára, hogy egyrészt a kétféle sokszög tartalmazza a megfelelő O_i^j pontot, másrészt a sokszögek területaránya valamilyen előre adott mértékben közelítse meg az x értéket.

Az O_i^j pontok köré írjunk akkora sugarú kongruens köröket, hogy azok mindkét fajta sokszögekben benne legyenek.

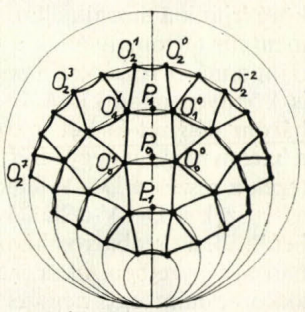
Így olyan kongruens körökből álló körrendszert és hozzá két olyan konvex egybevágó sokszögekből álló cellarendszert konstruáltunk, hogy H szerint az általuk szolgáltatott „sűrűségek" aránya a tetszőlegesen adott x értékhez tetszőlegesen közel van, azaz pl. akármilyen nagy is lehet ez az érték.

Tehát a cellák konvexitásának megkövetelésével sem lehet a „sűrűség" egyértelműségét elérni. Sőt még az egyes körrendszerekhez tartozó „sűrűségek" arányának egy bizonyos korlát alatt való tartása is sikertelennek bizonyul.

Mielőtt további körrendszerek „sűrűségét" vizsgálnánk, előbb olyan pontrendszereket konstruálunk, amelyeket a későbbiekben felhasználunk.

3. *Konstrukció:*

Tekintsünk a $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon egy irányított t egyenest. Vegyük fel ezen a $\{P_i\}$ $(i=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ponthalmazt úgy, hogy a $P_{i+1}P_i$ irányított szakasz előjeles hossza $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ legyen. Tekintsük továbbá a t tengelyű P_i pontokon áthaladó p_i parallel paraciklusokat. Irányítsuk a p_i paraciklusokat úgy, hogy a P_i pontban a t irányát $-90°$-kal elforgatva a p_i irányát kapjuk meg. A p_i paracikluson jelöljük ki az $\{O_i^j\}$ $(j=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ponthalmazt úgy, hogy a $\overset{\frown}{P_iO_i^j}$ paraciklusív előjeles hossza $(2j-1)\cdot l$ legyen, ahol az l egy rögzített pozitív érték (9. ábra).



9. ábra

Az O_i^j ponton áthaladó paraciklustengely a p_{i+1} paraciklust az O_{i+1}^{2j} és az O_{i+11}^{2j-1} ívfelező pontjában metszi, vagy másképpen fogalmazva az $O_{i+1}^{2j}O_{i+1}^{2j-1}$ szakasz felezőmerőleges egyenese áthalad az O_i^j ponton, azaz $O_iO_{i+1}^{2j-1}=O_iO_{i+1}^{2j}$. Az $O_{i+1}^{2j}O_{i+1}^{2j+1}$ szakasz felezőmerőlegese viszont azonos az $O_iO_i^{j+1}$ szakasz felezőmerőlegesével. Ezért a hiperbolikus sík felbontható az $O_iO_{i+1}^{2j-1}O_{i+1}^{2j}$ egyenlőszárú háromszögekből és az $O_iO_{i+1}^{2j}O_{i+1}^{2j+1}O_i^{j+1}$ téglalapokból álló cellarendszerre $(i, j=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Ezek a

háromszögek, ill. téglalapok egymásközt egybevágóak. Az általuk alkotott mozaik csúcsalakzatai is egybevágóak. Így az O_i^j pontrendszer egy lokálisan homogén pontrendszer.

3.1. *Konstrukció:*

A 3. Konstrukcióban szereplő $O_i^j O_{i+1}^{2j-1} O_{i+1}^{2j}$ háromszög csúcsszöge elég kis l értékre kisebb mint az alapon levő szögek, hiszen $l \to 0$ esetén a csúcsszög nullához, az alapon levő szögek 90°-hoz tartanak. Az l értékét növelve a csúcsszög nő, az alapon levő szögek csökkennek, s mivel a háromszög szögeinek összege 180°-nál kisebb, lesz egy olyan $l = l_1$ érték, amikor a csúcsszög egyenlő lesz az alapon levő szögekkel. Az l_1 értékhez tartozó $\{O_i^j\}$ pontrendszert tekintsük a 3.1. Konstrukció pontrendszerének. Ebben a pontrendszerben az $O_i^j O_{i+1}^{2j-1} O_{i+1}^{2j}$ háromszögek szabályosak, az $O_i^j O_{i+1}^{2j} O_{i+1}^{2j+1} O_i^{j+1}$ négyszögek pedig négyzetek. Az $\{O_i^j\}$ pontrendszer pontjai egy (3, 4, 3, 4, 4) szimbólumú lokálisan félig szabályos mozaik csúcspontjai.

3.2. *Konstrukció:*

Az előbbi 3.1. Konstrukcióban szereplő l_1 értéknél tovább növelve az l értékét az $O_i^j O_{i+1}^{2j-1} O_{i+1}^{2j}$ háromszögben az alapon levő szögek, s így összegük is csökken, a csúcsszög viszont nő. Növeljük az l értékét egy olyan l_2 értékig, amikor az $O_i^j O_{i+1}^{2j-1} O_{i+1}^{2j}$ háromszögben a csúcsszög egyenlő az alapon nyugvó két szög összegével. Ez elérhető, mert l növelésével a csúcsszög 180°-hoz, az alapon levő szögek pedig 0°-hoz is tetszőleges közel kerülhetnek. Az l_2 értékhez tartozó $\{O_i^j\}$ pontrendszert tekintsük a 3.2. Konstrukció pontrendszerének. Ez a pontrendszer egy olyan mozaik csúcsaiból álll, amelynek a lapjai „félnégyzetnek" megfelelő háromszögek és téglalapok.

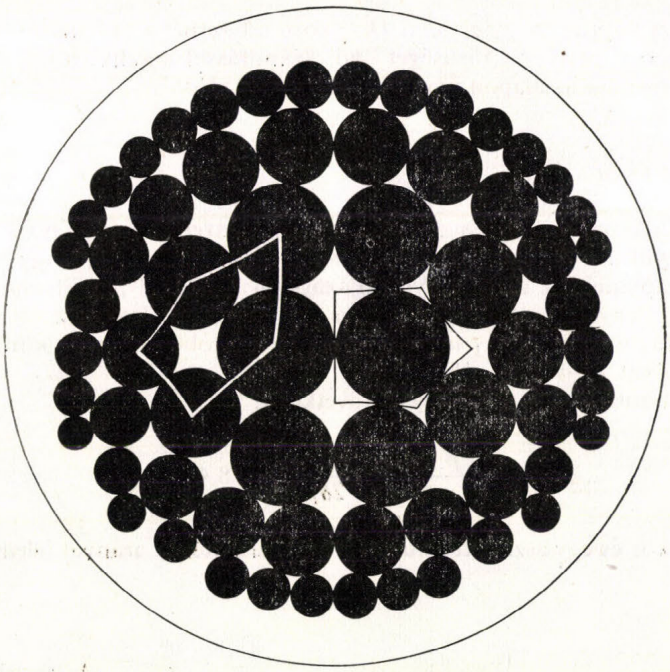
Megjegyzés: A 3. konstrukcióban szereplő mozaik $l \leqq l_2$ esetén az $\{O_i^j\}$ pontrendszer D-felbontását adja, mert a lapok tartalmazzák a körülírt kör középpontjaikat. A D-felbontás fundamentális tartományait az $O_i^j O_{i+1}^{2j-1} O_{i+1}^{2j} O_{i+1}^{2j+1} O_i^{j+1}$ $(i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ötszögek adják, melyek kongruensek.

4. *Konstrukció:*

Tekintsük a 3.1. konstrukció $\{O_i^j\}$ pontrendszerét, amely egy (3, 4, 3, 4, 4) szimbólumú lokálisan féligszabályos mozaik csúcspontjaiból áll. A mozaik csúcsai köré írjunk a mozaik élhosszával megegyező átmérőjű köröket. A D-felbontás fundamentális tartományának a szabályos háromszög részében a körök sűrűsége nagyobb, mint a másik részében, a négyzetben (lásd Fejes Tóth L. [1953b], ill. az 1. Segédtételből is könnyen adódik). A D—V-felbontásban az O_i^j pont cellája az e pontba befutó három négyzet és két szabályos háromszög középpontjainak konvex-burka, amely a három négyzet negyedrészből és a két szabályos háromszög harmadból tevődik össze (ezek a részek a D—V-felbontás és a D-felbontás celláinak a közös részei) (10. ábra).

Ezek a D—V-cellák kongruensek. Szimmetria okok miatt a „négyzet negyedében", ill. a „szabályos háromszög harmadában" ugyanakkora a sűrűség, mint magában a négyzetben, ill. a szabályos háromszögben. Tehát a D—V-cellában a sűrűség akkora, mint egy négyzet 3/4 részében és egy szabályos háromszög 2/3 részében együttvéve.

Ebből következik, hogy H szerint ennél a körrendszernél a D-felbontás nagyobb „sűrűséget" ad, mint a D—V-felbontás, mert a D-felbontás fundamentális tartományában a szabályos háromszög nagyobb súllyal szerepel, mint a D—V-felbontás cellájában. Számítás szerint a D-felbontás adta „sűrűség" 0,8313..., a D—V-felbontás szerint a „sűrűség" 0,8285... .

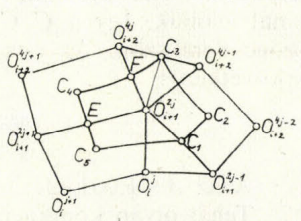


10. ábra

5. *Konstrukció:*

Tekintsük a 3.2. konstrukció $\{O_i^j\}$ pontrendszerét, s e pontok köré írjunk az $O_i^j\, O_{i+1}^{2j}$ távolsággal megegyező átmérőjű köröket. Jelöljük az O_i^j középpontú kört K_i^j-vel. Tekintsük továbbá a K_{i+1}^{2j} kör D—V-celláját. Ez a cella az O_{i+1}^{2j} csúcsba futó lapok körülírt körei középpontjainak, a C_1, C_2, C_3, C_4, C_5-nek a konvexburka (11. ábra).

Legyenek a C_1 és a C_3 pontok, a háromszöglap körülírt kör középpontok, az $O_{i+1}^{2j-1}\, O_{i+1}^{2j}$, ill. az $O_{i+2}^{4j-1}\, O_{i+2}^{4j}$ szakaszok felezőpontjai. Az $O_{i+1}^{2j}\, O_{i+1}^{2j+1}$ és az $O_{i+1}^{2j}\, O_{i+2}^{4j}$ szakaszok felezőpontjait jelöljük E-vel, ill. F-fel. A $C_1C_2C_3C_4C_5$ D—V-cella a három kongruens $C_1C_2C_3O_{i+1}^{2j}$, $EC_4C_3O_{i+1}^{2j}$ és $EC_5C_1O_{i+1}^{2j}$ négyszögre vágható szét úgy, hogy közben az O_{i+1}^{2j} középpontú kört is harmadoltuk. Egy ilyen négyszög a D-felbontás egy téglalapjának és egy háromszöglapjának a negyedéből áll. Az $EC_4C_3O_{i+1}^{2j}$ négyszög például az $EC_4\, FO_{i+1}^{2j}$ négyszögből, az $O_{i+1}^{2j}\, O_{i+2}^{4j}\, O_{i+2}^{4j+1}\, O_{i+2}^{2j+1}$ téglalap negyedéből és az $O_{i+1}^{2j}\, C_3\, F$ háromszögből,



11. ábra

az $O_{i+1}^{2j} O_{i+2}^{4j-1} O_{i+2}^{4j}$ háromszöglap negyedéből tevődik össze. Tehát a $C_1 C_2 C_3$ O_{i+1}^{2j}, az $EC_4 C_3 O_{i+1}^{2j}$ és az $EC_5 C_1 O_{i+1}^{2j}$ négyszögekben ugyanakkora a K_{i+1}^{2j} kör sűrűsége, mint a D—V-cellában. Másrészt ezekben a négyszögekben szimmetria okok miatt ugyanakkora a K_{i+1}^{2j} kör sűrűsége, mint az egy téglalapból és egy háromszöglapból álló D-felbontás fundamentális tartományában a $\{K_i^j\}$ kör-rendszer sűrűsége.

Tehát azt kaptuk, hogy ennél a $\{K_i^j\}$ körrendszernél a D-felbontás és D—V-felbontás H szerint egyenlő „sűrűséget" ad. Számítással adódik, hogy a D-felbontás egy háromszögében az alapon nyugvó szög $\alpha = 40°53'36''$.

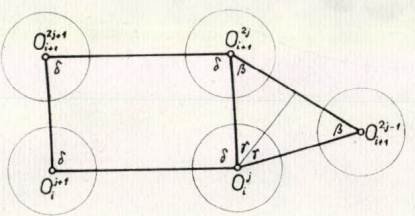
6. *Konstrukció:*

Tekintsünk most is egy a 3. konstrukcióban szereplő $\{O_i^j\}$ pontrendszert. Az l értékét vegyük az l_2-nél egy kicsit kevesebbnek. Például úgy, hogy a mozaik egy háromszög lapjának az alapon nyugvó szögei $\beta = 43°7'18''$, a fél csúcsszöge pedig $\gamma = 38°52'52''$ legyenek. A téglalap szöge $\delta = 79°42'19''$ lesz. Az O_i^j pontok köré írjunk kongruens, az $O_i^j O_{i+1}^{2j}$ távolságnál nem nagyobb átmérőjű köröket. Jelöljük ezeket a köröket K_i^j-vel (12. ábra).

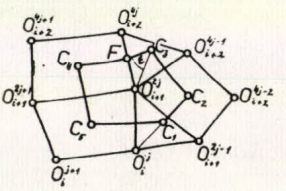
A D-felbontás adta Δ sűrűség a következő:

$$\Delta = \frac{\beta+\gamma+2\delta}{270°-(\beta+\gamma+2\delta)} \cdot C = 8{,}44505 \cdot C,$$

ahol C a K_i^j kör és egy aszimptotikus négyszög területének arányát jelenti.



12. ábra



13. ábra

A K_{i+1}^{2j} kör D—V-cellájának a csúcspontjait jelöljük C_1, C_2, C_3, C_4, C_5-tel (13. ábra), hasonlóan az 5. konstrukcióban használt jelöléshez. Legyen a C_1 és a C_3 pont az $O_i^j O_{i+1}^{2j-1} O_{i+1}^{2j}$ háromszöglap, ill. az $O_{i+1}^{2j} O_{i+2}^{4j-1} O_{i+2}^{4j}$ háromszöglap körülírtkör középpontja. Az $O_{i+1}^{2j} O_{i+2}^{4j}$ szakasz felezőpontját F-fel, az $FC_3 O_{i+1}^{2j} \sphericalangle$-t ε-nal jelöljük. Így a $C_2 C_3 C_4 \sphericalangle = 2\varepsilon$, a $C_5 C_1 C_2 \sphericalangle = 180° - \varepsilon$. A D—V-cella többi szöge derékszög. Az ε-ra $47°24'55''$ adódik. A D—V-felbontás adta $\bar{\Delta}$ sűrűség a következő:

$$\bar{\Delta} = \frac{360°}{90°-\varepsilon} \cdot C = 8{,}45373\, C.$$

Azaz $\bar{\Delta} > 1{,}001 \cdot \Delta$.

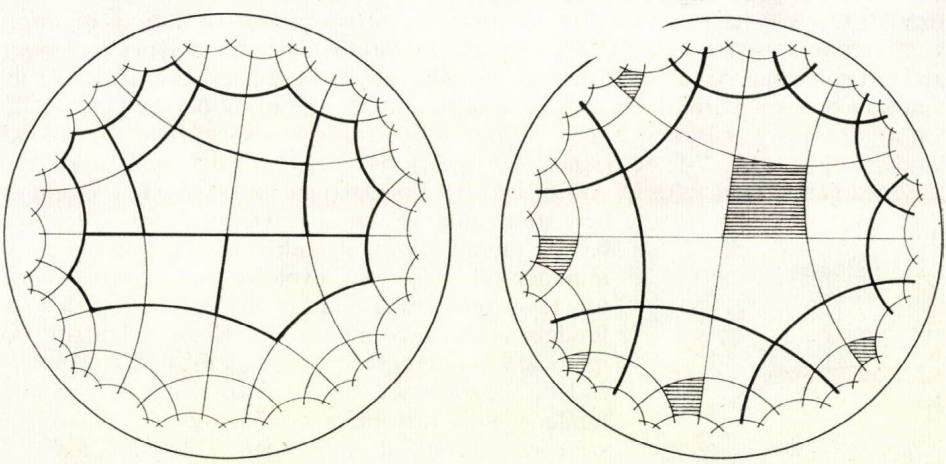
Tehát olyan kongruens körökből álló körrendszert konstruáltunk, ahol H szerint a D—V-felbontás ad nagyobb sűrűséget, mint a D-felbontás.

A 4., 5. és 6. konstrukciók eredményét összevetve elmondhatjuk, hogy a D-felbontásból és a D—V-felbontásból származó H alapján megállapított „sűrűség" értékek bármelyike lehet nagyobb a másiknál, s néha persze egyenlők is. Tehát H szerint még a két leggyakrabban használt cellafelbontás is különböző sűrűségeket adhat.

A következőkben két szép, Heppes Aladártól származó konstrukciót mutatunk be.

7. *Konstrukció:*

Tekintsük a (4, 5, 4, 5) szimbólumú féligszabályos mozaikot a hiperbolikus síkon. Egy csúcsba 2—2 szabályos négyszög, ill. szabályos ötszög fut be felváltva, azaz „sakktábla"-szerű a négyszögek és az ötszögek elhelyezése (14. ábra). Nevezzük dominónak az olyan oégyszöglap és ötszöglap egyesítését, amelyeknek közös oldaluk van. Ilyen dominókkal a hiperbolikus sík kirakható. Például először egy dominó összes szomszédos mozaiklapját rajkuk ki dominókkal. Majd az így kapott dominóhalmaz összes szomszédos mozaiklapját rakjuk ki dominókkal. Ez megtehető, mert ezek a szomszédos mozaiklapok egy gyűrűszerű tartományt alkotnak, amely mindenütt pontosan egy lap „szélességű", s ebben a gyűrűben a négyszöglapok és az ötszöglapok egymáshoz oldallal csatlakozva felváltva következnek. Ez az eljárás így nyilván folytatható, s egy tetszőleges nagy kör belsejében levő összes mozaiklapot véges sok lépés után így lefedtük dominókkal. Tehát a dominó a mozaik fundamentális tartományának tekinthető.



14. ábra

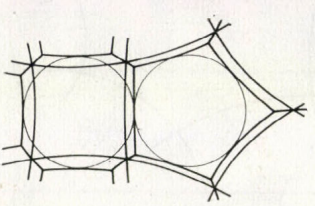
Másrészt tekintsünk egy négyszöglapot és a szomszédait, azaz a négyszöglappal csúcsban érintkező másik 4 négyszöglapot és az oldallal érintkező 4 ötszöglapot. Az így kapott 5 négyszög és 4 ötszög egyesítése egy nyolcszöget ad (14. ábra). Nevezzünk egy ilyen nyolcszöget a mozaik nyolcszögének. A mozaik két nyolcszögét szomszédosnak mondjuk, ha van közös határpontjuk, de nincs közös belsőpontjuk. A mozaik nyolcszögeivel is a hiperbolikus sík kirakható, azaz a mozaik fundamentális

tartományainak tekinthetők. A kirakás lényegében egyértelmű: Vegyük a mozaik egy nyolcszögét, majd az ezzel szomszédos mozaik nyolcszögeket, s mindig a már meglevő mozaik nyolcszögek szomszédos mozaik nyolcszögeit.

A mozaik csúcspontjai köré írjunk a mozaik élhosszával megyegyező átmérőjű köröket. A körrendszer D-cellái a mozaik lapjai. Mivel egy szabályos ötszög körülírt köre nagyobb sugarú az ugyanakkora oldalú szabályos négyszög körülírt körénél ,a 3. Segédtétel szerint a négyzetben a körrendszer sűrűsége nagyobb, mint a szabályos ötszögben. A körrendszer „sűrűségét" ezért a fundamentális tartományok segítségével határozzuk meg. A dominó akkora sűrűséget ad, mint 1 négyzet és 1 szabályos ötszög együttvéve. A mozaik nyolcszöge viszont akkora sűrűséget ad, mint 5 négyzet és 4 ötszög együttvéve. Ez utóbbiban a sűrűség nagyobb, mert ebben nagyobb súllyal szerepel a négyzet. Tehát H szerint a körrendszer „sűrűsége" a mozaik nyolcszöge alapján nagyobb lenne, mint a dominó alapján.

8. *Konstrukció:*

Tekintsük megint az előbbi (4, 5, 4, 5) féligszabályos mozaikot és ennek egy, a 7. konstrukcióban szereplő dominókkal való, ill. mozaik nyolcszögekkel való lefedését. A mozaik lapközéppontjai köré írjunk akkora sugarú kongruens köröket, hogy egy szomszédos négyzetlap és egy ötszöglap középpontjai köré írt körök érintkezzenek. Vizsgáljuk a körrendszer D—V-celláit. Két szomszédos érintkező kör hatványvonala nem a mozaik két megfelelő szomszédos lapjának a közös élegyenese, hanem egy az ötszöglap középpontjához közelebb eső egyenes, mivel az ötszöglap beírt köre nagyobb sugarú a négyzetlap beírt körénél. Ezért az ötszöglaphoz tartozó kör D—V-cellája ezzel az ötszöglappal koncentrikus szabályos ötszög (15. ábra). A négyzetlaphoz tartozó kör D—V-cellája egy olyan nyolcszög, amelynek a négyzetlap beírt sokszöge. Mind a két fajta D—V-cellának, az ötszögnek és a nyolcszögnek is ugyanakkora a körülírt köre. Ezért a 3. Segédtétel szerint az ötszög D—V-cellában a körrendszer sűrűsége nagyobb, mint a nyolcszög D—V-cellában. Azt mondhatjuk, hogy a D—V-felbontáshoz úgy jutottunk, hogy a féligszabályos mozaik négyzetlapját a nyolcszög D—V-cellával, az ötszöglapját az ötszög D—V-cellával helyettesítettük. Ezzel a helyettesítéssel a féligszabályos mozaik fundamentális tartományaihoz, a dominóhoz, ill. a mozaik nyolcszögéhez olyan két tartományt rendeltünk, amelyek a D—V-felbontás fundamentális tartományai. A D—V-felbontás dominó adta fundamentális tartományában 1 nyolcszög és 1 ötszög szerepel, míg a mozaik nyolcszöge adta fundamentális tartományban 5 nyolcszög és 4 ötszög szerepel. Tehát a körrendszer „sűrűségére" H szerint a dominó adta fundamentális tartomány szolgáltat nagyobb értéket, mint a mozaik nyolcszöge adta fundamentális tartomány.

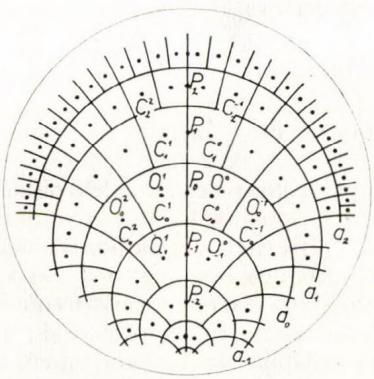


15. ábra

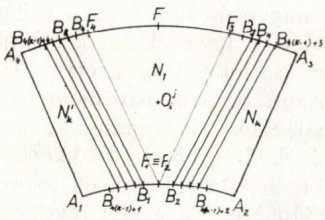
A 7., ill. 8. konstrukció példa arra, hogy ha akár a D-cellák, akár a D—V-cellák között átlagolással (fundamentális tartományokkal) lehet H szerint „sűrűséget" kapni, akkor az átlagolás különböző értékeket adhat.

9. *Konstrukció:*

Induljunk ki a 3. Konstrukcióból valamilyen rögzített $l \leqq l_2$ érték esetén (9. ábra). Jelöljük a t tengelyű és a P_iP_{i+1} szakasz felezőpontján áthaladó paraciklust a_i-vel, az $O_i^{j-1}O_i^j$ és az $O_i^jO_i^{j+1}$ szakaszok felezőmerőlegesei által meghatározott sávot S_i^j-vel, ahol $(i, j=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Az O_i^j ponthoz cellaként rendeljük hozzá az a_{i-1} és az a_i paraciklusok által határolt paraciklus-gyűrű és S_i^j közös részét. Jelöljük ezt a cellát C_i^j-vel. $\{C_i^j\}$ cellái egybevágóak. A C_i^j cella a_i-n elhelyezkedő íve kétszer akkora, mint az a_{i-1}-n levő íve, mivel az a_i és a_{i-1} paraciklusok távolsága $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$. Ezért a C_i^j cellához a hosszabbik paraciklusíve mentén két szomszédos cella csatlakozik C_{i+1}^{2j} és C_{i+1}^{2j-1} (16. ábra). $\{C_i^j\}$ cellái határaiktól eltekintve egyrétűen lefedik a hiperbolikus síkot.



16. ábra



17. ábra

Az O_i^j ponthoz egy új cellát rendelünk hozzá. Jelöljük azt $\bar{C}_i^j$-vel. Legyen $k \geqq 2$ tetszőleges egész szám. A C_i^j cella csúcsait jelöljük A_1, A_2, A_3 és A_4-gyel, ahol az $\widehat{A_3A_4}$ a hosszabbik paraciklusíve a cellának, továbbá legyen az A_4 pont a C_{i+1}^{2j} cella csúcsa (17. ábra). Az $\widehat{A_1A_2}$, ill. az $\widehat{A_3A_4}$ paraciklus ív jelezőpontja legyen F_1 (jelöltük ezt a pontot egyúttal F_2-vel is), ill. F. Az $\widehat{FA_3}$, ill. az $\widehat{FA_4}$ paraciklusív felezőpontja legyen az F_3, ill. F_4. $\widehat{F_mA_m}=\frac{l}{2\sqrt{2}}$ $(1 \leqq m \leqq 4)$. Az $\widehat{F_mA_m}$ paraciklusíven vegyük fel a B_{4q+m} $(0 \leqq q \leqq k-1)$ pontokat úgy, hogy $\widehat{F_mB_m}=b_1 \geqq 0$, $\widehat{B_{4q+m}B_{4(q+1)+m}}=b_2>0$ $(0 \leqq q \leqq k-2)$, $\widehat{B_{4(k-1)+m}A_m}=b_3 \geqq 0$ és $b_1+(k-1)b_2+b_3=\frac{l}{2\sqrt{2}}$ legyen. Húzzuk meg a $B_{4q+2}B_{4(q+1)+3}$, ill. $B_{4q+1}B_{4(q+1)+4}$ $(0 \leqq q \leqq k-2)$ szakaszokat, amelyek a C_i^j cellát résztartományokra bontják. Ezeket a résztartományokat a következőképpen jelöljük, ahol $0 \leqq q \leqq k-3$:

a $B_1B_2B_7B_8$ tartományt N_1-gyel,
a $B_{4q+2}B_{4(q+1)+2}B_{4(q+2)+3}B_{4(q+1)+3}$ tartományt N_{q+2}-vel,
a $B_{4(q+1)+1}B_{4q+1}B_{4(q+1)+4}B_{4(q+2)+4}$ tartományt N'_{q+2}-vel,
a $B_{4(k-2)+2}A_2A_3B_{4(k-1)+3}$ tartományt N_k-val és
az $A_1B_{4(k-2)+1}B_{4(k-1)+4}A_4$ tartományt N'_k-val.

Azaz a középső résztartományt jelöltük N_1-gyel, s ennek $(q-1)$-ik szomszédját N_q, ill. N'_q-val $(2 \leqq q \leqq k)$. Szimmetria miatt nyilván $N_q \cong N'_q$. Az N_q, ill. N'_q $(1 \leqq q \leqq k$ és legyen $N'_1 \equiv N_1)$ tartományokra az jellemző, hogy ha két szomszédos cella paraciklusívvel csatlakozik egymáshoz, miként a C_i^j cella a C_{i+1}^{2j-1}, ill. C_{i+1}^{2j} cellához, akkor egy C_i^j cellabeli N_q, ill. N'_q $(1 \leqq q \leqq k-1)$ tartomány egy b_2 hosszúságú paraciklusív mentén csatlakozik a C_{i+1}^{2j-1} cellabeli N_{q+1}, ill. C_{i+1}^{2j} cellabeli N'_{q+1} tartományhoz.

Az O_i^j ponthoz tartozó $\bar{C}_i^j$ cellát az alábbi tartományok egyesítéseként nyerjük, ahol $1 \leqq q \leqq k-1$ (18. ábra; $k=4$):

a C_i^j cella N_1 tartománya, (3)

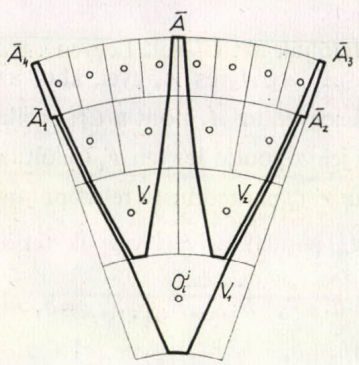
a $C_{i+q}^{2^q j}$ cella N'_{q+1} tartománya, (4)

a $C_{i+q}^{2^q(j-1)+1}$ cella N_{q+1} tartománya, (5)

a $C_{i+q}^{2^{q-1}(2j-1)+1}$ cella $\bigcup_{q+1}^{k} N_s$ tartománya, (6)

a $C_{i+q}^{2^{q-1}(2j-1)}$ cella $\bigcup_{q+1}^{k} N'_s$ tartománya. (7)

A (4)-ben, ill. (7)-ben szereplő cellák szomszédosak, mert ha egy cellánál egy eggyel nagyobb alsó indexű cellát nézünk, akkor ennek a felső indexe kétszerese az előzőének. Így ezek a cellák mindig egy FA_4 paraciklusívnek megfelelő paraciklusív mentén csatlakoznak. Ezért a $\bar{C}_i^j$-hez rendelt tartományok (4) esetén mindig b_2 hosszúságú paraciklusív mentén csatlakoznak. (7) esetén egymáshoz szintén csatlakoznak ezek a tartományok, csak a közös paraciklusív hossza az alsó index eggyel való növekedtével b_2-vel csökken, s az utolsó csatlakozásnál b_2+b_3 hosszúságú a közös paraciklusív. Az (5)-ben, ill. (6)-ban szereplő cellák szintén szomszédosak, mert ha egy cellánál egy eggyel nagyobb alsó indexű cellát nézünk, akkor ennek a felső indexe az előbbi felső indexe kétszeresénél eggyel kisebb. Így ezek a cellák mindig egy FA_3 paraciklusívnek megfelelő paraciklusív mentén csatlakoznak. A korábbi esethez hasonlóan $\bar{C}_i^j$-nek (5)-beli résztartományai b_2 hosszúságú paraciklusív mentén csatlakoznak egymáshoz, míg a (6)-beli résztartományokra ugyanaz igaz, mint a (7)-beliekre. A $\bar{C}_i^j$ cella szimmetrikus az O_i^j ponton áthaladó paraciklus tengelyre. A (6) és (7) ugyanakkora alsó indexű cellái e tengely mentén szomszédosak, sőt a $\bar{C}_i^j$ cella ezekben levő résztartományai is szomszédosak.



18. ábra

A $\bar{C}_i^j$ cella tehát a következő alakú: a C_i^j cella N_1 tartományából három ág nyúlik az i-nél nagyobb alsó indexű C cellák felé: a (4)-hez tartozó tartományok egyesítéseként adódó bal oldalinak nevezett ág, a (6)-hoz és (7)-hez tartozó tartományok egyesítéseként adódó középsőnek nevezett ág és az (5)-höz tartozó tartományok egyesítéseként adódó jobb oldalinak nevezett ág.

A $\bar{C}_i^j$ cella az S_i^j sávban helyezkedik el. A bal oldali ág utolsó résztartománya, a $C_{i+k-1}^{2^{k-1}j}$ cella N'_k tartománya a cella A_1A_4 oldalszakasza mentén az S_i^j sáv egyik oldalegyenesére támaszkodik. Ennek a szakasznak a végpontjait, mint a $\bar{C}_i^j$ csúcsait, jelöljük $\bar{A}_1$ és $\bar{A}_4$-gyel. Hasonlóan az előbbihez a jobb oldali ág utolsó résztartomá-

nya, a $C_{i+k-1}^{2^{k-1}(j-1)+1}$ cella N_k tartománya a cella A_2A_3 oldalszakasza mentén támaszkodik az S_i^j sáv másik oldalegyenesére. Ennek a szakasznak a végpontjait, mint a $\bar{C}_i^j$ csúcsait, jelöljük $\bar{A}_2$ és $\bar{A}_3$-mal. Az O_i^j ponton áthaladó paraciklus tengely és az a_{i+k-1} paraciklus metszéspontja legyen az $\bar{A}$ pont. A $\bar{C}_i^j$ határán ciklikusan elhelyezkedő $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}$ és $\bar{A}_4$ pontok ezt a határt 5 részre bontják, az $\bar{A}_4\bar{A}_1$ és az $\bar{A}_2\bar{A}_3$ szakaszokra, továbbá az $\bar{A}_1$ és $\bar{A}_2$ pontokat összekötő V_1, az $\bar{A}_3$ és $\bar{A}$ pontokat összekötő V_2 és az $\bar{A}$ és $\bar{A}_4$ pontokat összekötő V_3 görbékre. A V_1, V_2 és V_3 görbék egybevágók. Ugyanis mindegyik a végein egy-egy b_3 hosszúságú paraciklusívből, a közepén egy $2b_1$ hosszúságú paraciklusívből, s közben két egybevágó törött-vonalból áll. Könnyen belátható, hogy a megfelelő paraciklusívek, ill. szakaszok egyenlő hosszúak és az általuk bezárt szögek egyenlők, ami biztosítja az egybevágóságot. Így a $\bar{C}_i^j$ cella középső és szélső ágai közé a $\bar{C}_{i+1}^{2j-1}$ és a $\bar{C}_{i+1}^{2j}$ cellák pontosan beleilleszkednek. Ennek alapján is belátható, hogy a $\{\bar{C}_i^j\}$ cellarendszer a cellák határaitól eltekintve egyrétűen lefedi a hiperbolikus síkot.

Ezt a tényt azonban azáltal is igazoljuk, hogy megmutatjuk, hogy a C_i^j cella egyes résztartományai $\{\bar{C}_m^n\}$ mely celláihoz tartoznak hozzá. Mivel a $\{C_i^j\}$ és a $\{\bar{C}_m^n\}$ cellarendszer is szimmetrikus a t egyenesre, és ezen egyik cella sem nyúlik keresztül, ezért elég az egyik félsíkra pl. a $j, n \geqq 1$ által jellemzett félsíkra igazolni, hogy ezt a $\{\bar{C}_m^n\}$ cellarendszer a cellák határaitól eltekintve egyrétűen lefedi.

Vizsgáljuk meg, hogy a C_i^j cella egy résztartománya mikor tartozhat hozzá egy $\bar{C}_m^n$ cellához. Nyilván teljesülnie kell a $0 \leqq i-m<k$ egyenlőtlenségnek. Ha $i=m$, akkor nyilván $j=n$ és az N_1 résztartomány tartozik hozzá a $\bar{C}_m^n$ cellához. Ha $i-m>0$, akkor a C_i^j cellába egy $\bar{C}_m^n$ cella csak az ágaival nyúlhat bele.

A $j-1$ számot írjuk fel a kettes számrendszerben.

A (4)-ből leolvasható, hogy egy $\bar{C}_m^n$ cella bal oldali ága csak akkor nyúlik bele a C_i^j cellába, ha $j \equiv 0 \bmod (2^{i-m})$, azaz $(j-1)$-nek az utolsó $(i-m)$ jegye $1-s$.

Az (5)-ből az olvasható le, hogy egy $\bar{C}_m^n$ cella jobb oldali ága csak akkor nyúlik bele a C_i^j cellába, ha $j \equiv 1 \bmod (2^{i-m})$, azaz $(j-1)$-nek az utolsó $(i-m)$ jegye 0.

A (6)-ból az olvasható le, hogy egy $\bar{C}_m^n$ cella középső ágának bal oldali fele csak akkor nyúlik bele a C_i^j cellába, ha $j \equiv 1 \bmod (2^{i-m-1})$, de $j \not\equiv 1 \bmod (2^{i-m})$, azaz $(j-1)$-nek az utolsó $(i-m-1)$ jegye 0, de előttük $1-s$ áll ($i-m=1$ esetén természetesen ez azt jelenti, hogy az utolsó jegy $1-s$).

A (7)-ből az olvasható le, hogy egy $\bar{C}_m^n$ cella középső ágának jobb oldali fele csak akkor nyúlik bele a C_i^j cellába, ha $j \equiv 0 \bmod (2^{i-m-1})$, de $j \not\equiv 0 \bmod (2^{i-m})$, azaz $(j-1)$-nek az utolsó $(i-m-1)$ jegye 1-es, de előttük 0 áll ($i-m=1$ esetén természetesen ez azt jelenti, hogy az utolsó jegy 0).

Ezek után pontosan megadjuk, hogy a C_i^j cella egyes résztartományai mely cellákhoz tartoznak hozzá.

Tekintsük a $(j-1)$-nek a kettes számrendszerben az utolsó $(k-1)$ jegyét. Az N_1 tartomány nyilván mindig a $\bar{C}_i^j$-hez tartozik. A többi tartomány szempontjából két fő esetet különböztetünk meg.

1. A $(j-1)$ szám utolsó jegye $1-s$.

Ebben az esetben az $N_2' \cup \bigcup_2^k N_s$ tartomány a $\bar{C}_{i-1}^{\frac{j}{2}}$ cellához tartozik.

1. *a)* Legyen $(j-1)$-nek az utolsó $(k-1)$ jegye $1-s$.

Ekkor az N_s' $(2<s \leqq k)$ tartomány a $\bar{C}_{i-s+1}^{\frac{j}{2^{s-1}}}$ cellához tartozik.

1. *b)* Legyen $(j-1)$-nek az utolsó p $(2 \leqq p<k-1)$ jegye $1-s$, de a $(p+1)$-ik jegye 0.

Ebben az esetben az N_s' $(2<s\leqq p+1)$ tartomány a $\overline{C}_{i-s+1}^{\frac{j}{2^{s-1}}}$ cellához tartozik, az $\bigcup_{p+2}^{k} N_s'$ tartomány a $\overline{C}_{i-p-1}^{\frac{j+2^p}{2^{p+1}}}$ cellához tartozik.

1. *c)* Legyen $(j-1)$ utolsó előtti jegye: 0.

Ekkor az $\bigcup_{3}^{k} N_s'$ tartomány a $\overline{C}_{i-2}^{\frac{j+2}{4}}$ cellához tartozik.

2. A $(j-1)$ szám utolsó jegyen 0.

Ebben az esetben az $N_2 \cup \bigcup_{2}^{k} N_s'$ tartomány a $\overline{C}_{i-1}^{\frac{j+1}{2}}$ cellához tartozik.

2. *a)* Legyen $(j-1)$-nek az utolsó $(k-1)$ jegye 0.

Ekkor az N_s $(2<s\leqq k)$ tartomány a $\overline{C}_{i-s+1}^{\frac{j+s^{s-1}-1}{2^{s-1}}}$ cellához tartozik.

2. *b)* Legyen $(j-1)$-nek az utolsó p $(2\leqq p<k-1)$ jegye 0, de a $(p+1)$-ik, jegye $1-s$.

Ebben az esetben az $N_s(2<s\leqq p+1)$ tartomány a $\overline{C}_{i-s+1}^{\frac{j+2^{s-1}-1}{2^{s-1}}}$ cellához tartozik. az $\bigcup_{p+2}^{k} N_s$ tartomány a $\overline{C}_{i-p-1}^{\frac{j+2^p-1}{2^{p+1}}}$ cellához tartozik.

2. *c)* Legyen $(j-1)$ utolsó előtti jegye $1-s$.

Ekkor az $\bigcup_{3}^{k} N_s$ tartomány a $\overline{C}_{i-2}^{\frac{j+1}{4}}$ cellához tartozik.

A $(j-1)$ szám összes lehetséges $(k-1)$ utolsó jegye esetén megadtuk, hogy a C_i^j cella minden egyes résztartománya $\{\overline{C}_m^n\}$ mely cellájához tartozik hozzá, azaz beláttuk, hogy a $\{\overline{C}_m^n\}$ cellahalmaz a cellák határaitól eltekintve egyrétűen lefedi a hiperbolikus síkot.

A C_i^j és a $\overline{C}_i^j$ cella területére — mint az könnyen belátható — az alábbi összefüggések érvényesek:

$$C = N_1 + 2\sum_{2}^{k} N_s, \tag{8}$$

$$\overline{C} = N_1 + 2\sum_{2}^{k} sN_s. \tag{9}$$

Ezekből közvetlenül adódik, hogy

$$k \cdot C > \overline{C}. \tag{10}$$

Ugyanakkor azt akarjuk, hogy $\overline{C}$ lehetőleg nagy legyen. (8) és (9) összehasonlításából látszik, hogy ezt úgy érhetjük el, hogy az N_k értékét lehetőleg „nagynak", a többi N_s $(1\leqq s\leqq k-1)$ értéket pedig „kicsinek" választjuk. Ez b_1, b_2 és b_3 alkalmas megválasztásával érhető el (17. ábra). Az F_3 ponton áthaladó paraciklus tengely a C cellából egy $\frac{C}{4}$ területű paraciklusgyűrű cikket vág le, amelyet az F_2F_3 szakasz által C-ből lemetszett $F_2A_2A_3F_3$ tartomány tartalmaz. Így az $F_2A_2A_3F_3$ tartomány területe nagyobb, mint $\frac{C}{4}$. Az $\overset{\frown}{F_2A_2}$ ill. $\overset{\frown}{F_3A_3}$ paraciklusíven vegyünk fel egy olyan E_2, ill. E_3 pontot, hogy az $\overset{\frown}{F_2E_2}$ és $\overset{\frown}{F_3E_3}$ paraciklusívek egyenlő hosszúak legyenek,

továbbá az E_2E_3 szakasszal kettévágott $F_2A_2A_3F_3$ tartományból keletkezett $E_2A_2A_3E_3$ tartomány területe nagyobb legyen $\frac{C}{4}$-nél. Jelöljük az $\widehat{F_2E_2}$ paraciklusív hosszát ε-nal.

Legyen pl. $b_1=\frac{\varepsilon}{2}$ és $b_2=\frac{\varepsilon}{2(k-1)}$. Ekkor $B_{4(k-1)+2}\equiv E_2$ és $B_{4(k-1)+3}\equiv E_3$. Ezért az N_k tartomány tartalmazza az $E_2A_2A_3E_3$ tartományt, s így $N_k>\frac{C}{4}$. Felhasználva (8)-t és (9)-t adódik. hogy

$$\bar{C} > C+2(k-1)N_k > C+(k-1)\frac{C}{2} = \frac{k+1}{2}C. \tag{11}$$

Az O_i^j pont köré írjunk olyan r sugarú K_i^j kört, amelyet az F_1F_3, az F_1F_4 szakaszok és az $\widehat{F_3F_4}$ paraciklusív által határolt tartomány tartalmaz, azaz bármelyik $\bar{C}_i^j$ cella tartalmaz függetlenül b_1, b_2, b_3 és k megválasztásától. Mivel a k értékét tetszőleges nagynak választjuk, (11) alapján a $\bar{C}$ terület is tetszőleges nagy lehet. Így azt kapjuk, hogy a $\{K_i^j\}$ körrendszerhez megadható kongruens cellákból álló cellarendszereknek egy sorozata úgy, hogy H szerint a $\{K_i^j\}$ körrendszer „sűrűségére" szolgáltatott értékek sorozata nullához tart.

Megjegyzés: A $\bar{C}_i^j$ cella nyilván sokszögesíthető, hiszen csak a V_1, V_2 és V_3 görbék 2—2 b_3 hosszúságú és 1—1 $2b_1$ hosszúságú paraciklusívét kell pl. a végpontjaikat összekötő húrral helyettesíteni. Ez a módosítás ugyan a cella területét valamivel csökkenti, de a csökkentés mértéke pl. b_1 és b_3 rögzítése esetén k-tól független.

Tehát olyan kongruens sokszögekből álló cellarendszerek is megadhatók egy rögzített körrendszerhez, hogy a körrendszer H szerinti „sűrűségértékei" nullához tartanak.

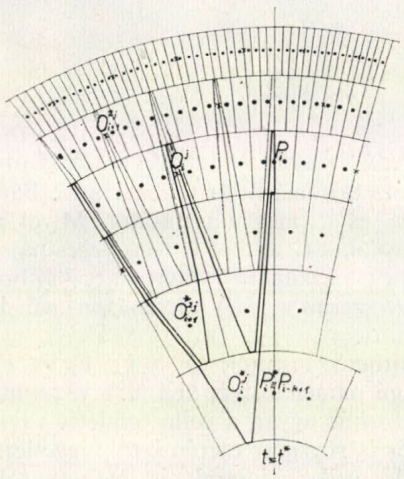
10. *Konstrukció:*

Tekintsük a 3. konstrukcióban szereplő $\{O_i^j\}$ pontrendszert valamilyen rögzített l_0 ($l_0 \leqq l_2$) érték esetén. Tekintsünk továbbá egy másik 3. konstrukcióban szereplő $\{\overset{*}{O}{}_i^j\}$ pontrendszert. (Ezt jelölésben általánosan $*$-gal fogjuk megkülönböztetni.) Az $\{\overset{*}{O}{}_i^j\}$ pontrendszerhez tartozó l érték legyen $\frac{l_0}{2^{k-1}}$, ahol $k\geqq 2$ rögzített egész szám. A két konstrukcióban szereplő t és $\overset{*}{t}$ irányított egyenesek legyenek azonosak. A $\{P_i\}$ és $\{\overset{*}{P}_i\}$ ponthalmazokra teljesüljön a $\overset{*}{P}_i\equiv P_{i-k+1}$ összefüggés. Ez azt jelenti, hogy $P_i\overset{*}{P}_i=\frac{(k-1)\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$.

Tekintsük az $\{\overset{*}{O}{}_i^j\}$ pontrendszerhez a 9. konstrukcióban megadott $\{\overset{*}{\bar{C}}{}_i^j\}$ cellarendszert. Az $\overset{*}{O}{}_i^j$ ponton keresztül húzzuk meg a paraciklus tengelyt, s erre negatív irányban mérjünk fel $\frac{(k-1)\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ távolságot az $\overset{*}{O}{}_i^j$ pontból. Így az O_i^j ponthoz jutunk, mivel az l értékeit és a P_i és $\overset{*}{P}_i$ pontokat éppen ennek megfelelően választottuk. Ebből következik, hogy a $\overset{*}{\bar{C}}{}_i^j$ cella a középső ágának a legutolsó rétegében

tartalmazza az O_i^j pontot (19. ábra). Ezért az O_i^j pont cellájának tekinthetjük a $\overset{*}{C}_i^j$ cellát.

Tekintsük továbbá az $\{O_i^j\}$, ill. az $\{\overset{*}{O}_i^j\}$ pontrendszerekhez a 9. konstrukcióban hozzárendelt $\{C_i^j\}$, ill. $\{\overset{*}{C}_i^j\}$ cellarendszereket. A C_i^j és a $\overset{*}{C}_i^j$ cella területe között a $\overset{*}{C}=\frac{C}{2^{k-1}}$ összefüggés áll fenn, hiszen a cellák egyforma vastag paraciklusgyűrű cikkek, s a megfelelő íveik aránya éppen 2^{k-1}. A 9. konstrukció (10) megállapítása szerint $k\overset{*}{C}>\overset{*}{C}$, s így az előbbi egyenlőséget figyelembe véve



19. ábra

$$\frac{k}{2^{k-1}}C>\overset{*}{C}. \tag{12}$$

Ebből következik, hogy ha k tart a végtelenhez, akkor a $\overset{*}{C}$ tart nullához.

Így az $\{O_i^j\}$ pontrendszerhez tetszőlegesen kis területű egybevágó cellákból álló cellarendszert konstruáltunk.

$\{O_i^j\}$ pontjai köré írjunk akkora r sugarú kongruens köröket, hogy $\{\overset{*}{C}_i^j\}$ cellái tartalmazzák őket. Ha $k\to\infty$, akkor $r\to 0$, sőt könnyen belátható, hogy H szerint a körrendszer „sűrűségére" a $\{\overset{*}{C}_i^j\}$ adta értékek is nullához tartanak. Viszont a középpontok rögzítettsége miatt a D—V-cellák fixek. Így H szerint a körrendszer $\{\overset{*}{C}_i^j\}$ cellafelbontás adta „sűrűségének" és a D—V-felbontás adta „sűrűségének" az aránya tetszőlegesen nagy lehet, miközben a körközéppontok rögzítettek.

11. *Konstrukció:*

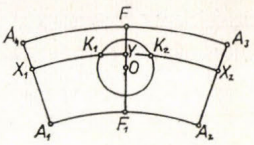
Tekintsük a 10. konstrukcióban szereplő $\{O_i^j\}$ pontrendszert és a hozzárendelt $\{\overset{*}{C}_i^j\}$ cellarendszert, valamint a $\{C_i^j\}$ cellarendszert. A C_i^j cellára használjuk a 9. konstrukció jelöléseit. $\{O_i^j\}$ pontjai köré írjunk kongruens köröket úgy, hogy $\{C_i^j\}$ cellái a belsejükben tartalmazzák a köröket. Jelöljük a körök halmazát $\{K_i^j\}$-vel. A C_i^j cellában tekintsünk egy tetszőleges, p_i-vel parallel p paraciklust. Messe p az A_1A_4 szakaszt X_1, az FF_1 szakaszt Y, az A_2A_3 szakaszt X_2 pontban (20. ábra).

Egy ponttranszformációt értelmezünk a C_i^j cellán. Ha p nem metszi a K_i^j kört, akkor az $\widehat{X_1X_2}$ paraciklusív minden pontja maradjon helyben. Ha az $\widehat{X_1Y}$, ill. $\widehat{YX_2}$ paraciklusív a K_i^j kört a K_1, ill. K_2 pontban metszi, akkor az $\widehat{X_1Y}$, ill. $\widehat{YX_2}$ paraciklusívet lineárisan képezzük le az $\widehat{X_1K_1}$, ill. $\widehat{K_2X_2}$ paraciklusívre[6]. Így egy területet nem növelő ponttranszformációt adtunk meg, amely a C_i^j cellát a C_i^j cella és

[6] Az, hogy a K_i^j kör FF_1 szakaszon levő belső pontjainak két képük is van, nem jelent problémát, mert csak terület értékeket vizsgálunk.

a K_i^j kör külseje lezártjának a közös részére képezi le. Ezt a transzformációt minden C_i^j cellában végezzük el. A $\overset{*}{C}{}_i^j$ cella képének és a K_i^j körnek az egyesítését jelöljük X_i^j-vel. $\{X_i^j\}$ nyilván a hiperbolikus sík egy cellafelbontását adja. Mivel a transzformáció területet nem növelő, igaz a következő egyenlőtlenség

$$X_i^j < \overset{*}{C}{}_i^j + K_i^j. \tag{13}$$



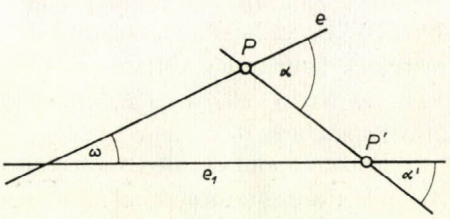
20. ábra

$\{X_i^j\}$ cellái nem kongruensek, de csak véges sok különböző alakú van közöttük. Tekintsük ugyanis a C_{i+q}^p $(0 \leqq q \leqq k-1; 2^q(j-1) < p \leqq 2^q j)$ cellák egyesítését, s jelöljük ezt U_i^j-vel. U_i^j megegyezik az a_{i+k-1} és az a_{i-1} paraciklusok által határolt paraciklusgyűrű és az S_i^j sáv közös részével. U_i^j tartalmazza a $\overset{*}{C}{}_{i+k-1}^p$ $(2^{k-1}(j-1) < p \leqq 2^{k-1} \cdot j)$ cellákat és az összes olyan K_{i+q}^p kört, amelyek miatt ezeknek a celláknak az alakja módosult. Így U_i^j tartalmazza az X_{i+k-1}^p $(2^{k-1}(j-1) < p \leqq 2^{k-1} j)$ cellákat is. Ezek száma 2^{k-1}. Minden X_m^n cella ezek valamelyikével kongruens, mert X_m^n benne van az U_{m-k+1}^s tartományban, ahol $s = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}\right] + 1$, és az a kongruencia, amelyik U_{m-k-1}^s-t U_i^j-be viszi, egyúttal az $\{O_i^j\}$ ponthalmaznak az általuk tartalmazott pontjait is fedésbe hozza.

Az X_i^j cellák átmérői tehát egy véges halmazt alkotnak, azaz egy pozitív korlátnál kisebbek. H szerint a $\{K_i^j\}$ körrendszernek $\{X_i^j\}$ által szolgáltatott „sűrűsége" (12) és (13) alapján tetszőlegesen közel lehet 1-hez akármilyen kis sugarú is a $\{K_i^j\}$ körrendszer.

A 9. és 11. konstrukció eredményét összevetve a következő mondható: megadható egy rögzített konsgruens körökből álló körkitöltés és két cellarendszer úgy, hogy H szerint a körrendszer „sűrűsége" az egyik cellarendszer alapján tetszőleges közel van 0-hoz, a másik cellarendszer alapján tetszőleges közel van 1-hez.

Az eddigi vizsgálataink alapján azt lehetne gondolni, hogy H alapján egy kongruens körökből álló körrendszer „sűrűségére" különböző értékek csak speciális körközéppont elrendezések mellett adódnak. A következőkben megmutatjuk, hogy ez nem így van, hanem nagyon sok körközéppont elrendeződés mellett ugyanannak a körrendszernek a „sűrűségére" H alapján különböző értékeket kapunk.



21. ábra

Először egy ponttranszformációt definiálunk:

Tekintsünk a $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon egy t irányított egyenest. A hiperbolikus sík egy tetszőleges P pontjához rendeljünk hozzá egy olyan P' pontot, amelyre a PP' irányított egyenes párhuzamos t-vel és a PP' távolság egy adott $s \geqq 0$ érték. Jelöljük ezt a ponttranszformációt $N[t, s]$-sel, az inverzét pedig $N[t, -s]$-sel.

$N[t, s]$, ahol s tetszőleges valós szám, egy területarántytartó leképezés. Minden tartomány területét az $e^{-s\sqrt{-\varkappa}}$ szorosába viszi. Az olyan paraciklusgyűrű cikk tartományokra, amelyeket t tengelyű paraciklusok határolnak, ez triviális. Más területtel rendelkező tartományok pedig ilyen paraciklusgyűrű cikkek egyesítésével tetszőlegesen megközelíthetők.

Ha egy q görbének egy P pontban van érintője, akkor a q' képgörbének is van a P' képpontban érintője. Ugyanis, ha a P pontbeli e érintőnek, ill. a P' pontbeli e_1 érintőnek a PP' egyenessel alkotott hajlásszögét α-val ill. α'-vel jelöljük, akkor könnyen belátható, hogy ezekre a $\operatorname{tg}\alpha = e^{s\sqrt{-\varkappa}}\operatorname{tg}\alpha'$ összefüggés áll fenn. Ebből adódik az $\alpha' < \alpha < e^{s\sqrt{-\varkappa}}\alpha'$ egyenlőtlenség $s>0$ esetén. Így, ha az e és az e_1 egyenesek metszik is egymást, az ω hajlásszögük kisebb, mint $(e^{s\sqrt{-\varkappa}}-1)\alpha'$, azaz kisebb, mint $(e^{s\sqrt{-\varkappa}}-1)\frac{\pi}{2}$ (21. ábra). Ebből következik, hogy ha egy e egyenest egy $N[t, s]$ transzformáció egy e' görbébe visz, akkor az előre adott $\varepsilon>0$ és $t_0>0$ értékekhez megadható egy olyan $s_0>0$ érték, hogy $0<s<s_0$ esetén az e egyenes ε sugarú környezete tartalmazza az e' görbe egy tetszőleges érintőjén elhelyezkedő olyan t_0 hosszúságú szakaszokat, amelyeknek az egyik végpontja az érintési pont.

12. *Konstrukció:*

Legyen a hiperbolikus síkon $\{O_i\}$ egy olyan ponthalmaz, amelynek bármely két pontjának a távolsága legalább b, ahol b egy rögzített pozitív érték. Létezzék továbbá az $\{O_i\}$ ponthalmazhoz egy olyan $R>0$ érték, hogy a hipernolikus sík minden R sugarú körében legyen legalább egy O_i pont.

$\{O_i\}$ pontjai köré írjunk r sugarú köröket, ahol $\frac{b}{2}-r=c>0$. Jelöljük az O_i pont köré írt kört K_i-vel. Tekintsük a hiperbolikus síknak egy olyan $\{C_i\}$ cellafelbontását, hogy a C_i cella tartalmazza ne csak a K_i kört, hanem az ezzel koncentrikus $r+s$ sugarú kört is, ahol s egy rögzített pozitív érték. Ezen kívül $\{C_i\}$ cellái átmérőjeinek halmaza természetesen legyen felülről korlátos. (C_i-nek választhatjuk pl. a K_i kör D—V-celláját és s tetszőleges érték lehet, amelyre $0<s\leqq c$.) Jelöljük a K_i kör sűrűségét a C_i cellában d_i-vel. Legyen $\inf d_i = \Delta_1$ és $\sup d_i = \Delta_2$.

Alkalmazzuk a hiperbolikus síkra az $N[t, s]$ transzformációt, ahol t egy tetszőleges irányított egyenes. C_i képét jelöljük $N(C_i)$-vel. Az $N(C_i)$ tartomány is tartalmazza a K_i kört, mivel a K_i körvonal és C_i határának távolsága legalább s, ugyanakkor C_i határának a pontjait s távolsággal mozdította el a ponttranszformáció. $\{N(C_i)\}$ egy cellafelbontását adja a hiperbolikus síknak. Nyilván az új cellák átmérőinek halmaza is korlátos és az új cellák területe a régieknek $e^{-s\sqrt{-\varkappa}}$-szorosa. Ezért az $N(C_i)$ cellában a K_i kör sűrűsége $e^{s\sqrt{-\varkappa}}d_i$. Így ezeknek az értékeknek az alsó határa $e^{s\sqrt{-\varkappa}}\cdot\Delta_1$, felső határa pedig $e^{s\sqrt{-\varkappa}}\cdot\Delta_2$.

Tehát, ha van egy olyan körrendszer, ahol $\Delta_1=\Delta_2$, azaz H szerint a „sűrűsége" Δ_2, akkor a transzformált cellák alapján H szerint a „sűrűsége" egyúttal $e^{s\sqrt{-\varkappa}}\Delta_2$ is.

Megjegyzés: Ha az $N[t, s]$ transzformáció helyett az inverzét alkalmazzuk, akkor a transzformált cellákban kisebb a sűrűség mint a $\{C_i\}$ celláiban.

Korollárium:

Legyen $\{O_i\}$ a hiperbolikus sík egy tetszőleges $\{p, q\}$ szimbólumú szabályos mozaikjának csúcsponthalmaza. Az O_i pont köré írjunk a mozaik élhosszának harmadával megegyező sugarú K_i kört. A D—V*-cellák egy $\{q, p\}$ szimbólumú szabályos mozaik lapjai. Nyilván a $\{K_i\}$ körkitöltés és a* D—V*-felbontás megfelel a konstrukcióbeli követelményeknek. s értéke pl. a $\{p, q\}$ mozaik élhosszának $\frac{1}{6}$-a lehet.*

Tehát annak megfelelően, hogy az $N[t, s]$ transzformációt vagy az inverzét alkalmazzuk, a szabályos $\{K_i\}$ körkitöltés „sűrűsége" H szerint a D—V-felbontás adta értéknél nagyobb, ill. kisebb is lehet.

Bizonyos esetekben a 12. Konstrukcióban, ill. a Korolláriumban szereplő transzformált cellák konvexesíthetők is. A következőkben erre mutatunk példát.

13. *Konstrukció:*

Legyen $\{O_i\}$ a hiperbolikus sík egy $\{3, 9\}$ szimbólumú szabályos mozaikjának csúcsponthalmaza. Az O_i pont köré írjunk a mozaik élhosszának harmadával megegyező sugarú K_i kört. A $\{K_i\}$ körhalmazhoz tartozó D-felbontás a $\{3, 9\}$ szimbólumú szabályos mozaik, a D—V-felbontás egy $\{9, 3\}$ szimbolumú szabályos mozaik. A K_i kör D—V-celláját C_i-vel, a D—V-cellák területét T-vel és C_i-ben K_i sűrűségét d-vel jelöljük. Tekintsük a $\{3, 9\}$ mozaikot mint gráfot, ahol a gráf csúcsai a mozaik csúcsai, a gráf élei a mozaik élei. Megmutatjuk, hogy ez a gráf 4 színnel kiszínezhető úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. A négyszín sejtés egy ismert átfogalmazása szerint ehhez a háromszöglapokhoz kell úgy $+1$ vagy -1-et hozzárendelni, hogy az egy csúcsba futó háromszöglapokhoz rendelt értékek összege osztható legyen 3-mal. A $\{3, 9\}$ mozaik minden háromszöglapjához a $+1$-et rendeljük hozzá. Így minden csúcsban 9 a kérdéses összeg, azaz 4 színnel kiszínezhető a gráf. Mivel az élben szomszédos háromszöglapokhoz ugyanazt az értéket rendeltük hozzá, ez az átfogalmazás szerint annak felel meg, hogy két élben szomszédos háromszöglap 4 csúcsát különböző színűre kell színezni. Ebből következik, hogy egy csúcs 9 szomszédos csúcsa közül ciklikusan minden harmadik azonos színű. Ennek alapján különben könnyen belátható az is, hogy az azonos színű pontok egy $\{3, 18\}$ szimbólumú szabályos mozaik csúcsponthalmazát adják. Az O_i pontokat és a D—V-cellájukat a fentieknek megfelelően nevezzük kéknek, zöldnek, fehérnek és pirosnak. Ha az $\{O_i\}$ ponthalmaz két csúcsa a D-felbontásban nincs éllel összekötve, akkor a D—V-felbontásban az ezeknek megfelelő cellák nem szomszédosak. Ezért az egyszínű D—V-cellák nem szomszédosak.

Válasszunk egy tetszőleges t irányított egyenest és egy későbbiekben pontosabban meghatározott $s>0$ értéket, ahol az s legfeljebb a $\{3, 9\}$ mozaik élhosszának az $\frac{1}{6}$-ával egyenlő. A D—V-felbontásra alkalmazzuk az $N[t, s]$ transzformációt. Az előző konstrukcióban már beláttuk, hogy $\{N(C_i)\}$ celláinak a területe $e^{-s\sqrt{-\varkappa}}\,T$. Az $N(C_i)$ cella tartalmazza a K_i kört és az $N(C_i)$ cellában a K_i kör sűrűsége $e^{s\sqrt{-\varkappa}}\,d$.

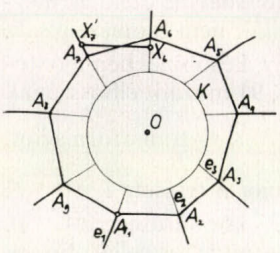
Tekintsük a D—V-felbontás egy C_i celláját és a kilenc szomszédos cellát. Ennek a 10 cellának az egyesítését ragadjuk ki a cellarendszerből a $\{K_i\}$ körhalmaz bennük levő köreivel együtt, és mozgassuk el úgy, hogy az O_i pont és a C_i cella egy csúcsa a t egyenesre kerüljenek. Ebben az új helyzetben az O_i pontot, a K_i kört, ill. a C_i cellát jelöljük O-val, K-val, ill. C-vel. Forgassuk el az O pont körül a cellák egyesítését egy β szöggel, ahol $O \leqq \beta \leqq \frac{2\pi}{9}$. Jelöljük az elforgatott C kilencszöget C_β-val. Alkalmazzuk erre a 10 szabályos kilencszögre az $N[t, s]$ transzformációt. A kilencszögek oldalainak képei sima görbeívek lesznek. Jelöljük a C_β csúcsainak képeit $A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_9$-cel (22. ábra). Az A_j $(1 \leqq j \leqq 9)$ pontba befut egy olyan kilencszög oldal képe, amelyik nem határolja $N(C_\beta)$-t. Ezt a görbeívet A_j pontban hosszabbítsuk meg érintő irányban a K körig. Jelöljük ezt a görbeívet és a meghosszabbítását e_j-vel.

Az $N[t, s]$ transzformáció korábban említett tulajdonsága miatt nyilván létezik egy olyan $s_1(\beta)>0$ érték, hogy $0<s<s_1(\beta)$ esetén a különböző e_j görbék nem metszik egymást. Legyen $s<s_1(\beta)$.

Vegyünk fel az e_j, ill. e_{j+1} ($j+1$ moduló 9 értendő) görbéken egy X_j, ill. X'_{j+1} pontot úgy, hogy ha az $N(C_\beta)$ $\overset{\frown}{A_jA_{j+1}}$ ívét helyettesítjük az e_j görbén levő $\overset{\frown}{A_jX_j}$ ív, az $X_jX'_{j+1}$ szakasz és az e_{j+1} görbén levő $\overset{\frown}{X'_{j+1}A_{j+1}}$ ív egyesítésével, akkor az így módosított $N(C_\beta)$ tartomány ugyanakkora területű legyen, mint korábban volt. Ez a helyettesítés az $N(C_\beta)$-hoz $\overset{\frown}{A_jA_{j+1}}$ mentén csatlakozó cella területét sem változtatja meg. Ha X_j és X'_{j+1} közül az egyiket az e_j, ill. e_{j+1} görbe mentén közelítjük a K körhöz, akkor a másik távolodik. Mivel az $N(C_\beta)$ páratlan „csúcsú", ezért egyértelműen létezik olyan $\{X_j\}$ $(1\leqq j\leqq 9)$ ponthalmaz, hogy $X_j\equiv X'_j$. Ezeknek a pontoknak a segítségével hajtsuk végre az $\overset{\frown}{A_jA_{j+1}}$ ívek helyettesítését. Így az $N(C_\beta)$ cellát az $X_1X_2\ldots X_9$ poligonnal helyettesítettük. Közben egyetlen cella területe sem változott meg. Mivel $s\to 0$ esetén az $X_1X_2\ldots X_9$ poligon tart a C_β poligonhoz, ezért megadható a tetszőleges $\varepsilon_1>0$ értékhez egy $s_2(\beta)<s_1(\beta)$ pozitív érték úgy, hogy $0<s<s_2(\beta)$ esetén az X_j pont a C_β poligon megfelelő csúcsától legfeljebb ε_1 távolságra van. Legyen egyrészt ε_1 kisebb mint a $\{3, 9\}$ mozaik élhosszának $\frac{1}{6}$-a, másrészt legyen akkora, hogy az $X_1X_2\ldots X_9$ poligon konvex legyen. Ebben az esetben a módosított cellaoldalak sem metszenek bele a 10 szabályos kilencszögben levő körökbe.

Így β minden értékéhez tartozik egy $s_2(\beta)$ érték. Folytonossági meggondolásokból könnyen adódik, hogy létezik egy $s_2>0$ érték, amelyre $s_2<s_2(\beta)$. Az $N[t, s]$ transzformációban legyen $0<s<s_2$.

Tekintsük az $\{N(C_i)\}$ cellarendszerből a kék D—V-cellák képeit. Mivel a kék D—V-cellák nem szomszédosak és minden egyes D—V-cella a középpontján áthaladó t-vel párhuzamos egyeneshez képest egybevágó helyzetű valamely C_β-val, ezért a fent leírt módon minden egyes kék D—V-cella képe helyettesíthető olyan kéknek nevezett konvex kilencszöggel, hogy a helyettesítés után is minden cellának a területe $e^{-s\sqrt{-\varkappa}}\,T$.



22. ábra

Hasonlóan az előzőekhez a fehér D—V-cellák képeit akarjuk konvex kilencszögekkel helyettesíteni. A különbség a két eset között az, hogy egy fehér D—V-cella képének egyes csúcsaiba nem egy D—V-cella oldalának a képe fut be harmadik élként, hanem egy azt helyettesítő X_jX_{j+1} típusú szakasz. Azért, hogy a fenti eljárást mégis ugyanúgy végrehajthassuk, válasszuk a fenti eljárásban az ε_1-t akkorára, hogy az X_jX_{j+1} szakaszok meghosszabbításai az e_j „görbeívek" szerepét játszhassák. Folytonossági meggondolásokból egyszerűen adódik, hogy ilyen $\varepsilon_1>0$ érték létezik. A fehér D—V-cellák képeinek konvex kilencszögekkel való helyettesítése a kék kilencszögek alakját esetleg módosítja, de a területét és a konvexitását nem.

Az eddigiekhez hasonlóan a zöld D—V-cellák képeit helyettesítsük konvex kilencszögekkel. A fehér D—V-cellák képeinek helyettesítésénél alkalmazott eljárást kell alkalmazni. Ebben az esetben is a kék, ill. fehér kilencszögek alakja módosulhat, de a területük és a konvexitásuk megmarad.

A kék, fehér és zöld D—V-cellák képeinek a konvexesítése után a piros D—V-cellák képei is poligonok lettek. Mivel ezek a sokszögek $s\to 0$ esetén tartanak

a D—V-cellákhoz, ezért létezik egy $s_3<s_2$ pozitív érték úgy, hogy $0<s<s_3$ esetén a piros sokszögek is konvexek.

Tehát a $\{3, 9\}$ mozaik csúcspontjai köré írt $\{K_i\}$ körrendszer, egy olyan kongruens körökből álló körkitöltés, hogy a D—V-felbontás alapján H szerint $\{K_i\}$ „sűrűsége" d. Ugyanakkor megadható a $\{K_i\}$ körrendszerhez egy olyan konvex kilencszögekből álló cellarendszer, hogy ennek alapján H szerint $\{K_i\}$ sűrűsége $e^{s\sqrt{-\varkappa}}\,d$, ahol $0<s<s_3$.

Természetesen hasonlóan megadható egy $s_4<0$ érték is, amelyre a $s_4<s<0$ esetén a $\{K_i\}$ körrendszer „sűrűsége" H szerint $e^{s\sqrt{-\varkappa}}\,d$.

Tehát H szerint bizonyos szabályos körrendszerek „sűrűségére" megadható a D—V-felbontásból származó „sűrűségértéknél" nagyobb és kisebb érték is még konvex cellafelbontások mellett is.

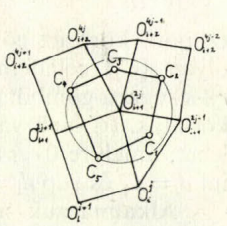
Eddig a kitöltésekkel foglalkoztunk. A lefedésekkel kapcsolatban egy új jelenségre akarunk még rámutatni. Arra, hogy egy kongruens körökből álló körlefedés „sűrűségére" más értéket kaphatunk, ha a D—V-cellában vizsgáljuk a körrendszer sűrűségét, vagy ha a kör terletét elosztjuk a D—V-cella területével.

14. *Konstrukció:*

Tekintsük a 3. konstrukcióban szereplő $\{O_i^j\}$ pontrendszert egy $l<l_1$ érték esetén. Tekintsük továbbá az O_{i+1}^{2j} pont D—V-celláját. A jelölést válasszuk ugyanúgy, mint a 6. Konstrukcióban a 13. ábrán (23. ábra). Az $\{O_i^j\}$ pontjai köré írjunk akkora sugarú köröket, hogy azok a D—V-cella derékszögű csúcsain menjenek keresztül. Jelöljük az O_i^j középpontú kört K_i^j-vel. Legyen az $O_{i+1}^{2j}\,C_1C_5\sphericalangle = 60°+x$, s így $O_{i+1}^{2j}\,C_1C_2\sphericalangle = 60-2x$. $l<l_1$ miatt az $O_i^j\,O_{i+1}^{2j-1}\,O_{i+1}^{2j}\triangle$ alapja kisebb, mint a szára. Ezért az x pozitív érték.

Válasszuk az l értékét az l_1 értékhez olyan közelinek, hogy egy D—V-cellába csak a szomszédos D—V-cellák körei messenek bele. Ezt megtehetjük, mert az l_1 értékhez tartozó D—V-cellákhoz a nem szomszédos D—V-cellák körei még csak hozzá sem érnek.

Határozzuk meg az O_{i+1}^{2j} pont D—V-cellájában a $\{K_i\}$ körhalmaz sűrűségét. A többszörös fedések a szomszédos körök benyúlásaiból adódnak. Az egyes szomszédos körök által szolgáltatott kétszeresen fedett részt a két kör hatványvonalára tükrözzük ki. A K_{i+1}^{2j+1} kör benyúló részének a tükörképe a K_{i+1}^{2j} körnek a C_4C_5 húrja által lemetszett kisebbik szelete, azaz ezen a részen a kitükrözés a D—V-cellát a K_{i+1}^{2j} körré egészíti ki. A K_{i+1}^{j2} kör belsejében levő C_1 és C_3 csúcsoknál levő szögek közül a C_3-nál levő nagyobb, mint 120°, pontosabban $C_2C_3C_4\sphericalangle = 120°+2x$, a C_1-nél levő kisebb mint 120°, pontosabban $C_5C_1C_2\sphericalangle = 120°-x$. Ezért a kitükrözött részek C_3-nál átfedik egymást $6x$ foknyira az $O_{i+1}^{2j}\,C_3$ sugáregyenesre szimmetrikusan. C_1-nél a kitükrözött részek nem adják ki a teljes szöget, $3x$ foknyi rész hiányzik. Ezt a $3x$ fokos szöget az $O_{i+1}^{2j}\,C_1$ sugár egyenese határolja, mert a $C_5C_1C_2\sphericalangle$-nek C_5C_1-re vonatkozó tükörképe éppen a $C_5C_1O_{i+1}^{2j}\sphericalangle$ mellékszöge (24. ábra). Mivel a C_1 és a C_3 pontok ugyanakkora távolságra vannak az O_{i+1}^{2j} ponttól, ezért a kitükrözések után a kétszeresen fedett rész fele egybevágó a le nem fedett résszel.

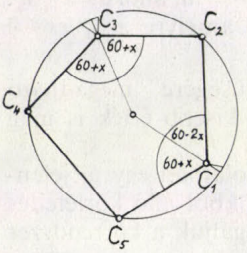


23. ábra

Ezért a $\{K_i^j\}$ körhalmaznak egy D—V-cellába eső részeinek területösszege nagyobb mint egy kör területe. Tehát a $\{K_i^j\}$ körlefedésnek minden D—V-cellában

ugyanakkora a sűrűsége, de ez az érték nagyobb, mint a kör és a D—V-cella területének az aránya.

Megjegyzés: Ha az l értékét l_1 és l_2 közöttinek választjuk, akkor az $O_i^j\, O_{i+1}^{2j-1}\, O_{i+1}^{2j}\triangle$-ben az alap a legnagyobb oldal. Ennek az felel meg, hogy az x negatív szög. Egy D—V-cellába ebben az esetben is csak a szomszédos D—V-cellák körei nyúlnak bele. Így a kitükrözések után C_3-nál $|6x|$ foknyi fedetlen rész lesz, míg C_1-nél $|3x|$ foknyi duplafedés lesz. Ebben az esetben a fedetlen rész kétszerese a duplán fedett résznek. Ezért a körhalmaznak egy D—V-cellába eső részeinek területösszege kisebb mint egy kör területe. Így a körhalmaznak minden D—V-cellában ugyanakkora a sűrűsége, de ez az érték kisebb, mint a kör és a D—V-cella területének az aránya.



24. ábra

A következőkben azt illusztráljuk, hogy a magasabb dimenziós hiperbolikus terekben a „sűrűség" értelmezési próbálkozás H alapján hasonló problémákat vet fel, mint a hiperbolikus síkon.

Értelmezhetjük az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű hiperbolikus térben is az $N[t, s]$ ponttranszformációt ugyanúgy mint a hiperbolikus síkon, ahol $n \geqq 3$. Azaz legyen t egy irányított egyenes, $s \geqq 0$ rögzített érték. Az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű hiperbolikus tér egy tetszőleges P pontjához rendeljük hozzá azt a P' pontot, amelyre a PP' irányított egyenes párhuzamos t-vel és $PP' = s$. Az inverzét jelöljük $N[t, -s]$-sel. Az $N[t, s]$ transzfomáció, ahol s valós, egy térfogataránytartó leképezés. Minden test térfogatát az $e^{(1-n)s\sqrt{-\varkappa}}$-szorosába viszi.

15. *Konstrukció:*

Ez a konstrukció a 12. konstrukció többdimenziós megfelelője.

Legyen az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű hiperbolikus térben $(n \geqq 3)$ $\{O_i\}$ pontoknak egy olyan rendszere, hogy bármely két pontjának a távolsága legalább $b > 0$. Létezzék továbbá egy olyan $R > 0$ érték, hogy az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű hiperbolikus tér minden R sugarú gömbje tartalmazzon legalább egy O_i pontot.

$\{O_i\}$ pontjai köré írjunk r sugarú gömböket, ahol $\frac{b}{2} - r = c > 0$. Jelöljük az O_i pont köré írt gömböt G_i-vel. Tekintsük az n-dimenziós hiperbolikus térnek egy olyan $\{C_i\}$ cellafelbontását, hogy a C_i cella tartalmazza a G_i-vel koncentrikus $r+s$ sugarú gömböt, ahol $s > 0$. Ezen kívül a cellák átmérőinek halmaza legyen felülről korlátos. (C_i-nek választhatjuk pl. a G_i gömb D—V-celláját és s tetszőleges érték lehet, amelyre $0 < s \leqq c$.) Jelöljük a G_i gömb sűrűségét a C_i cellában d_i-vel. Legyen $\inf d_i = \Delta_1$ és $\sup d_i = \Delta_2$.

Alkalmazzuk az n-dimenziós hiperbolikus térre az $N[t, s]$ transzformációt, ahol t egy tetszőleges irányított egyenes. C_i képét jelöljük $N(C_i)$-vel. $N(C_i)$ tartalmazza a G_i gömböt, mert G_i felületének és C_i határának a távolsága legalább s, ugyanakkor C_i határának a pontjait s távolsággal mozdította el a ponttranszformáció. $\{N(C_i)\}$ egy cellafelbontását adja az n-dimenziós hiperbolikus térnek. Az új cellák átmérőinek halmaza is korlátos. Az új cellák térfogata a régieknek $e^{(1-n)s\sqrt{-\varkappa}}$-szorosa. Ezért az $N(C_i)$ cellában a G_i gömb sűrűsége $e^{(n-1)s\sqrt{-\varkappa}}\, d_i$. Így ezeknek az értékeknek az alsó, ill. felső határa $e^{(n-1)s\sqrt{-\varkappa}}\, \Delta_1$, ill. $e^{(n-1)s\sqrt{-\varkappa}}\, \Delta_2$.

Tehát, ha van egy olyan gömbrendszer, ahol $\Delta_1=\Delta_2$, azaz H szerint a „sűrűsége" Δ_2, akkor a transzformált cellák alapján H szerint a „sűrűsége" egyúttal $e^{(n-1)s\sqrt{-\varkappa}}\cdot\Delta_2$ is.

Ez azt jelenti, hogy nagyon sok gömbközéppont elrendeződés mellett a gömbrendszer „sűrűségére" H szerint különböző értékek adódnak.

16. *Konstrukció:*

Ez a konstrukció az 1. Konstrukció többdimenziós megfelelője.

Tekintsünk az n-dimenziós $\varkappa$ görbületű hiperbolikus térben egy t irányított egyenest. Vegyünk fel ezen egy $\{O_i\}$ $(i=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ponthalmazt úgy, hogy az $O_{i+1}O_i$ irányított szakasz $\frac{\ln m}{\sqrt{-\varkappa}}$ hosszúságú legyen, ahol $m>1$ páratlan egész szám. Tekintsük továbbá a t tengelyű O_i ponton áthaladó F_i $(n-1)$-dimenziós paraszférát. F_i-t tekintsük úgy, mint egy $(n-1)$-dimenziós euklideszi tér modelljét. Vegyünk fel benne egy l élhosszúságú $(n-1)$-dimenziós „kockarácsot", amelynek az egyik csúcsa az O_i pont. A különböző $(n-1)$-dimenziós parallel paraszférákban levő „kockarácsok" irányai legyenek olyanok, hogy az n-dimenziós hiperbolikus tér t tengely menti eltolásával ezek a kockarácsok egymással fedésbe hozhatók legyenek. Jelöljük az F_i-ben levő „kockarács" pontjait O_i^j-vel $(j=1, 2, \ldots)$.

Legyen x tetszőleges rögzített érték, amelyre $m>x>1$. Az O_0O_1 szakaszon a felezőpontjára szimmetrikusan vegyük fel az A_0B_0 szakaszt úgy, hogy a B_0A_0 szakasz előjeles hossza $\frac{\ln x}{\sqrt{-\varkappa}}$ legyen. Tekintsük a t egyenesen az A_i és B_i pontokat, amelyekre az előjeles távolságokra vonatkozó $O_0A_0=O_iA_i$ és $O_0B_0=O_iB_i$ egyenlőségek fennállnak. Jelöljük az A_i és B_i pontokon áthaladó t tengelyű $(n-1)$-dimenziós paraszférákat $F(A_i)$ és $F(B_i)$-vel. Jelöljük továbbá $F(A_i)$ és $F(A_{i-1})$, ill. $F(B_i)$ és $F(B_{i-1})$ által határolt n-dimenziós paraszféragyűrűket $S(A_i)$, ill. $S(B_i)$-vel.

Tekintsük az $\{O_i^j\}$ ponthalmazt rögzített i mellett és ezeknek a pontoknak az n-dimenziós hiperbolikus térben a D—V-celláikat. Ezek a D—V-cellák $(n-1)$-dimenziós kockákra épített aszimptotikus gúlák. Az O_i^j pont D—V-celláját jelöljük DV_i^j-vel.

Az O_i^j ponthoz cellaként rendeljük hozzá egyrészt $S(A_i)\cap DV_i^j$-t, másrészt $S(B_i)\cap DV_i^j$-t. Jelöljük ezeket a cellákat $C_i^j(A)$, ill. $C_i^j(B)$-vel. Nyilván a $\{C_i^j(A)\}$ és $\{C_i^j(B)\}$ az n-dimenziós hiperbolikus tér egy-egy cellafelbontását adja.

$\{C_i^j(A)\}$ cellái, ill. $\{C_i^j(B)\}$ cellái egymásközt egybevágóak. A $C_i^j(B)$ cella térfogata a $C_i^j(A)$ cella térfogatánál x^{n-1}-szer nagyobb, mert ugyanolyan vastagságú n-dimenziós paraszféragyűrűkből kivágott cikkek a cellák, s a megfelelő paraciklusívek hosszának aránya x.

$\{O_i^j\}$ pontjai köré írjunk kongruens gömböket úgy, hogy $\{C_i^j(A)\}$ és $\{C_i^j(B)\}$ cellái is tartalmazzák a gömböket. A gömbrendszer „sűrűségére" H szerint a $\{C_i^j(A)\}$ cellarendszer x^{n-1}-szer nagyobb értéket ad, mint a $\{C_i^j(B)\}$ cellarendszer. Mivel az x tetszőlegesen megválasztható, ezért az így adódó különböző „sűrűség" értékek aránya is tetszőleges lehet, azaz pl. tetszőlegesen nagy is lehet. Azonban ugyanúgy, mint az 1. Konstrukcióban, ha az x értékét minden határon túl növeljük, akkor mindig újabb gömbközéppont rendszereket kell választanunk.

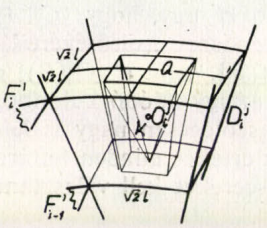
17. *Konstrukció:*

Ez a konstrukció a 9. Konstrukció 3-dimenziós megfelelője. A konstrukciót szemléletes úton adjuk meg.

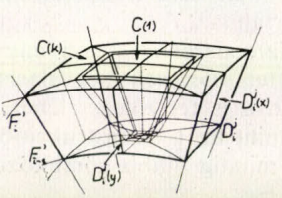
Vegyünk fel a $\varkappa$ görbületi hiperbolikus térben egy t irányított egyenest és ezen egy $\{P_i\}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ponthalmazt úgy, hogy $P_{i+1}P_i = \frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ legyen, ahol $P_{i+1}P_i$ előjeles távolságot jelent. A P_i ponton áthaladó t tengelyű paraszférát jelöljük F_i-vel. F_i-t tekintsük mint az euklideszi sík modelljét. Az F_i paraszférán vegyünk fel egy olyan $2l$ oldalú „négyzetrácsot", ahol $l \leqq l_2$, hogy egyrészt a P_i pont egy „négyzetlap" középpontja legyen, másrészt a különböző paraszférákban levő „négyzetrácsok" a hiperbolikus tér t tengely menti eltolásával egymásba átvihetők legyenek. Egy ilyen „négyzetrács" két egymásra merőleges élegyenesseregének egyeneseit nevezzük x, ill. y „egyeneseknek". Nevezzük egy másik „négyzetrács" egy élegyenesét szintén x, ill. y „egyenesnek" annak megfelelően, hogy egy már x vagy y-nak nevezett „egyenesből" adódik a hiperbolikus tér egy alkalmas t tengely menti eltolásával. Az F_i paraszférán levő „négyzetrács" csúcspontjait jelöljük O_i^j-vel $(j=1, 2, \ldots)$.

Tekintsük az F_i paraszférán levő „négyzetrács" csúcspontjainak a hiperbolikus térben vett D—V-celláit. Ezek a cellák négyzetre épített aszimptotikus gúlák. Az O_i^j pont D—V-celláját jelöljük DV_i^j-vel. Jelöljük továbbá a t tengelyű és a P_iP_{i+1} szakasz felezőpontján áthaladó paraszférát F_i'-vel. Az O_i^j ponthoz cellaként rendeljük hozzá az F_{i+1}' és az F_i' paraszférák által határolt paraszféragyűrű és DV_i^j közös részét. Jelöljük ezt a cellát D_i^j-vel (25. ábra). $\{D_i^j\}$ cellái nyilván egybevágóak. A D_i^j cellát az F_i', ill. az F_{i-1}' paraszférán egy $2\sqrt{2}l$, ill. egy $\sqrt{2}l$ oldalú „négyzet" határolja. A D_i^j celláról azt mondjuk, hogy egy $\sqrt{2}l$ oldalú „négyzetre" kifelé (a paraszféra tengelyen negatív irányban) épített $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ magasságú paraszféragyűrű cikk. Térfogatát jelöljük D-vel. A D_i^j cellához a nagyobbik „négyzet" mentén 4 szomszédos cella csatlakozik. $\{D_i^j\}$ cellái határaiktól eltekintve egyrétűen lefedik a hiperbolikus teret.

Az O_i^j ponton áthaladó x, ill. y „egyenesnek" nevezett paraciklus síkját jelöljük $H_i^j(x)$, ill. $H_i^j(y)$-nal. A $H_i^j(x)$ hiperbolikus síkra az y „egyenesnek" nevezett paraciklusok mentén vetítsük rá az $\{O_m^n\}$ $(m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n=1, 2, \ldots)$ ponthalmazt. Könnyen belátható, hogy a vetületi pontok halmaza a $H_i^j(x)$ hiperbolikus síkban egy olyan a 3. Konstrukcióban definiált és többek között a 9. Konstrukcióban is szereplő ponthalmaz, amely az l értékhez tartozik. A 9. Konstrukcióban a ponthalmaz egy pontjához két cellát rendeltünk hozzá, egy C_i^j cellát (16. ábra), ill. egy $\bar{C}_i^j$ cellát (18. ábra), ahol a $\bar{C}_i^j$ cella $k \geqq 2$ rétegből áll. Az O_i^j ponthoz a $H_i^j(x)$ hiperbolikus



25. ábra



26. ábra

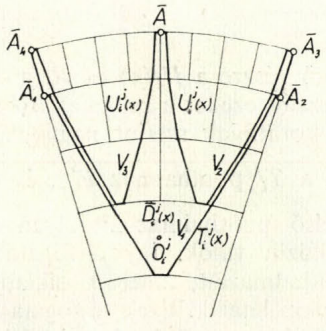
síkban ennek megfelelően rendeljünk hozzá egy $D_i^j(x)$ és egy $\bar{D}_i^j(x)$ cellát. Tekintsük a hiperbolikus tér összes olyan mozgását, amelyek az y „egyeneseknek" nevezett paraciklusokat önmagukban csúsztatják el. Jelöljük $D_i^j(x, y)$-nal mindazon pontok halmazát, amelyek ilyen mozgással $D_i^j(x)$ pontjaiba átvihetők. Hasonlóan értelmezzük x és y szerepének felcserélésével a $D_i^j(y, x)$ ponthalmazt is. Könnyen belátható, hogy

$$D_i^j = D_i^j(x, y) \cap D_i^j(y, x).$$

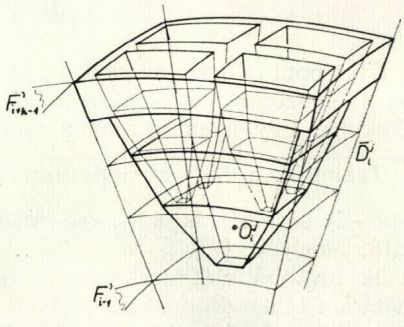
A $D_i^j(x)$, ill. $D_i^j(y)$ cellát bontsuk fel résztartományokra úgy, mint a 9. Konstrukcióban a C_i^j cellát (17. ábra). A $D_i^j(x)$, ill. $D_i^j(y)$ résztartományai a $D_i^j(x, y)$, ill. $D_i^j(y, x)$ ponthalmazokban természetes módon kijelölnek részponthalmazokat. Jelöljük ezeket a részhalmazokat a 9. Konstrukcióbeli jelölésnek megfelelően $N_q(x, y)$, $N_q'(x, y)$, ill. $N_q(y, x)$ és $N_q'(y, x)$-szel $(1 \leqq q \leqq k)$. Legyen továbbá $C(1) = N_1(x, y) \cap N_1(y, x)$ és $C(k) = D_i^j \cap (N_k(x, y) \cup N_k'(x, y) \cup N_k(y, x) \cup N_k'(y, x))$ (26. ábra).

Ha a 9. Konstrukcióbaan bevezetett b_1 és b_2 értékek tartanak 0-hoz, akkor a a $D_i^j - C(k)$ ponthalmaz tart az F_i' paraszférán levő, D_i^j cellát határoló „négyzettel" koncentrikus, fele akkora oldalú Q „négyzet" és az F_{i-1}' paraszférán levő, D_i^j cellát határoló „négyzet" középpontjának a K konvex burkához. Ez a K konvex burok része a Q „négyzetre" befelé épített $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ magasságú paraszféragyűrű cikknek (25. ábra). Ez a cikk $\frac{D}{4}$ térfogatú. Így K $\frac{D}{4}$-nél kisebb térfogatú. Tehát, ha $b_1 \to 0$ és $b_2 \to 0$, akkor $C(k)$ torfogata egy $\frac{3}{4}$ D-nél nagyobb értékhez tart. Válasszuk b_1 és b_2 értékét akkorára, hogy $C(k) > \frac{3}{4} D$ legyen. Megjegyezzük, hogy a $C(1)$ ponthalmaz a K ponthalmazt mindig tartalmazza.

Tekintsük a $\bar{D}_i^j(x)$ cellát. Alkalmazzuk a 9. Konstrukcióban használt jelölést. Jelöljük továbbá a V_1 görbe, az $\bar{A}_1\bar{A}_4$ és $\bar{A}_2\bar{A}_3$ szakaszok és az $\overset{\frown}{\bar{A}_3\bar{A}_4}$ paraciklusív által határolt tartományt $T_i^j(x)$-szel, a V_2 és V_3 görbék és az $\overset{\frown}{\bar{A}_3\bar{A}_4}$ paraciklusív által közrefogott tartományt pedig $U_i^j(x)$-szel (27. ábra). A korábbiaknak megfelelően jelöljük $T_i^j(x, y)$, ill. $U_i^j(x, y)$-nal mindazon pontok halmazát, amelyek a hiperbolikus tér egy olyan mozgásával vihetők $T_i^j(x)$, ill. $U_i^j(x)$ pontjaiba, amelyik az y „egyeneseknek" nevezett paraciklusokat önmagukban csúsztatja el. Ha-



27. ábra



28. ábra

sonlóan értelmezhető x és y szerepének felcserélésével a $T_i^j(y, x)$ és az $U_i^j(y, x$ ponthalmaz is.

Az O_i^j ponthoz egy új $\bar{D}_i^j$ cellát rendelünk a következőképpen (28. ábra):

$$\bar{D}_i^j = T_i^j(x, y) \cap T_i^j(y, x) - U_i^j(x, y) \cap U_i^j(y, x).$$

A DV_i^j aszimptotikus gúla tartalmazza a $T_i^j(x, y) \cap T_i^j(y, x)$ ponthalmazt, így a $\bar{D}_i^j$ cellát is. A $T_i^j(x, y) \cap T_i^j(y, x)$ ponthalmaznak F_i'-vel párhuzamos paraszférákkal alkotott metszete „négyzet", a paraszféra tengelyekkel való metszete pedig az F_{i+k-1}' paraszférán végződő szakasz. Ezért egy ilyen „négyzetre" kifelé épített paraszféragyűrű cikk, amennyiben nem nyúlik túl az F_{i+k-1}' paraszférán a $T_i^j(x, y) \cap$ $\cap T_i^j(y, x)$ ponthalmazban benne van. Az $U_i^j(x, y) \cap U_i^j(y, x)$ négy egybevágó részből tevődik össze, amelyek a $T_i^j(x, y) \cap T_i^j(y, x)$ ponthalmaznak az F_{i+k-2}' és F_{i-1}' paraszférák közé eső T_i^j részével is egybevágóak, mivel a V_2 és V_3 görbék is egybevágóak a V_1 görbével. Nyilván a $\{\bar{D}_i^j\}$ cellarendszer cellái egybevágóak. Jelöljük a $\bar{D}_i^j$ és a T_i^j ponthalmazok térfogatát $\bar{D}$ és T-vel. A $\bar{D}_i^j$ cellába $\{D_{i+1}^n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ cellái közül négy cella pontosan beleilleszkedik. Ennek alapján könnyen belátható, hogy a $\{\bar{D}_i^j\}$ cellarendszer a cellák határpontjaitól eltekintve egyrétűen lefedi a hiperbolikus teret.

A következőkben D és $\bar{D}$ arányát becsüljük meg. A $T_i^j(x, y) \cap T_i^j(y, x)$ ponthalmaz térfogata $2^{2k-2}D+T$, mivel az F_{i+k-1}' és F_{i+k-2}' paraszférák közé eső része a ponthalmaznak egy $2^{k-1}\sqrt{2}\,l$ oldalú „négyzetre" kifelé épített $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ magasságú paraszféragyűrű cikk. Így

$$\bar{D} = 2^{2k-2}D - 3T.$$

A T_i^j ponthalmazból az F_{i+s}' $(0 \leqq s \leqq k-3)$ paraszféra egy olyan Q_s „négyzetet" metsz ki, amelyiknek az oldala nagyobb mint $(2^{s+1}-1)\sqrt{2}\,l$ (27. ábra). Ezért a Q_s „négyzetre" kifelé épített $\frac{\ln 2}{\sqrt{-\varkappa}}$ magasságú paraszféragyűrű cikk térfogata nagyobb mint $(2^{s+1}-1)^2\,D$. Így a T_i^j ponthalmaz F_{i+s+1}' és F_{i+3}' paraszférák közé eső részének a térfogata méginkább nagyobb, mint $(2^{s+1}-1)^2 D$. Ezért

$$T > \sum_0^{k-3} (2^{s+1}-1)^2 D > \left(\frac{2^{2k-2}}{3} - 2^k\right) D, \quad \text{azaz}$$

$$\bar{D} < 3 \cdot 2^k D. \tag{14}$$

A $C(k)$ ponthalmazt bontsuk négy egybevágó részre a $H_i^j(x)$ és $H_i^j(y)$ hiperbolikus síkok szögfelező síkjai segítségével. Nevezzük ezeket a részeket $B(k)$ ponthalmazoknak. Egy ilyen résznek a térfogata a korábbiak szerint nagyobb, mint $\frac{3}{16}D$. Tekintsük a DV_i^j aszimptotikus gúla, ill. a T_i^j ponthalmaz F_{i+s}' és F_{i+s-1}' $(0 \leqq s \leqq k-2)$ paraszférák közé eső részét. Az első ponthalmaz 2^{2s} olyan cellára bontható, amelyek $\{D_{i+s}^n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ cellái közül valók. Így térfogata $2^{2s}D$. Tekintsük továbbá e 2^{2s} cella olyan $B(k)$ ponthalmazait, amelyek síklapjukkal DV_i^j határára támaszkodnak. 2^{s+2} ilyen ponthalmaz létezik. Ezek térfogata együtt nagyobb mint $3 \cdot 2^{s-2}D$. Mivel ezek a $B(k)$ ponthalmazok T_i^j-be és egymásba sem

nyúlnak bele, ezért a T_i^j ponthalmaz F'_{i+s} és F'_{i+s-1} paraszférák közé eső részének a térfogata kisebb mint $(2^{2s}-3\cdot 2^{s-2})D$. Így

$$T < \sum_0^{k-2} (2^{2s}-3^{s+2})D = \left(\frac{2^{2k-2}}{3}-3\cdot 2^{k-3}+\frac{5}{12}\right)D, \quad \text{azaz}$$

$$\bar{D} > \left(2^k+2^{k-3}-\frac{5}{4}\right)D.$$

Ebből következik, hogy $k \geqq 4$ esetén

$$\bar{D} > 2^k D. \tag{15}$$

Az $\{O_i^j\}$ ponthalmaz pontjai köré írjunk akkora sugarú kongruens G_i^j gömböket, hogy a G_i^j gömböket a K ponthalmazok tartalmazzák. Így a G_i^j gömböt a D_i^j és a $\bar{D}_i^j$ cella is tartalmazza k értékétől függetlenül. Tehát a $\{G_i^j\}$ egy fix gömbkitöltés a hiperbolikus térben.

A $\{G_i^j\}$ fix gömbkitöltés „sűrűségére" H szerint $k \geqq 4$ esetén a $\{D_i^j\}$ cellafelbontás (15) alapján legalább 2^k-szer nagyobb sűrűséget ad mint a $\{\bar{D}_i^j\}$ cellafelbontás. Tehát $k \to \infty$ esetén a $\{\bar{D}_i^j\}$ cellafelbontásból adódó „sűrűség" tart 0-hoz.

Megjegyzés: 1. A 10. Konstrukció mintájára az $\{O_i^j\}$ ponthalmazhoz meg lehet adni egy olyan $\{\overset{*}{\bar{D}}_i^j\}$ cellafelbontást, hogy ezek a cellák egybevágóak, a $\overset{*}{\bar{D}}_i^j$ cella tartalmazza az O_i^j pontot, a cellák határpontjaiktól eltekintve egyrétűen lefedik a hiperbolikus teret és a cellák térfogata $k \to \infty$ esetén nullához tart. Ugyanis (14) alapján a $\overset{*}{\bar{D}}_i^j$ térfogatára $3\cdot 2^{2-k}D$-nél kevesebb adódik.

2. A 11. Konstrukció mintájára a $\overset{*}{\bar{D}}_i^j$ cella az O_i^j pont körül „kigömbölyíthető" úgy, hogy a cella többi részének a térfogata nem nő. Így meg lehet adni a hiperbolikus térnek egy olyan fix gömbkitöltését és olyan cellafelbontásait, hogy a gömbkitöltés H szerinti „sűrűségére" adódó értékek $k \to \infty$ esetén 1-hez tartanak.

A bemutatott 17 konstrukció alapján meggyőződhettünk arról, hogy olyan a teljes hiperbolikus térre vonatkozó sűrűségfogalom, amely a legtermészetesebb kikötéseknek eleget tudna tenni, nem létezik.

Az így felmerült nehézséget többféleképpen is megpróbálhatjuk megoldani. Molnár József vetette fel, hogy a teljes hiperbolikus térben a sűrűség értékek helyett sűrűség intervallumot használjunk. A 9. és a 11. Konstrukció azt mutatta, hogy egy ilyen sűrűségintervallum további megszorítások nélkül már semmit mondóan bő lenne. Az intervallum leszűkítésére Molnár József azt javasolta, hogy csak konvex cellafelbontásokat engedjünk meg. A 13. Konstrukcióban láttuk, hogy még így is bizonyos szabályos körrendszerek „sűrűsége" ténylegesen intervallum lenne. A sűrűség intervallumok bevezetése további kérdéseket vet fel, s a különböző elhelyezések „sűrűségének" összehasonlítása elég nehezen kezelhetőnek látszik.

Egy másik megközelítési mód, hogy ha a teljes hiperbolikus térben egy halmazrendszer sűrűségéről beszélünk, akkor mindig megmondjuk, hogy melyik cellarendszerben tekintjük a sűrűséget. Előnye ennek a szemléletnek, hogy átmenti az eddigi hiperbolikus térben elért eredményeket. A továbbiakban ezt az utat követjük, s a gömbrendszerek sűrűségét a D—V-cellákban vizsgáljuk.

Felmerül a kérdés, hogy a korlátos tartományoknál van-e bővebb halmaz a hiperbolikus terekben, amelyben még a klasszikus módon értelmezhető sűrűség. Molnár József kérdezte, hogy egy paracikluson belül lehet-e sűrűséget értelmezni. Megmutatjuk, hogy lehet, s általában az n-dimenziós hiperbolikus térben bizonyos paraszférán belüli testekre is lehet sűrűséget értelmezni.

Az n-dimenziós hiperbolikus térben legyen F egy $(n-1)$-dimenziós paraszféra, V pedig F és F belsejének az egyesítése. Legyen továbbá $\{T_i\}$ megszámlálható sok pozitív térfogatú testből álló halmaz, amelyet V tartalmaz. Az F paraszférát tekintsük mint egy $(n-1)$-dimenziós euklideszi tér modelljét. Legyen F egy tetszőleges pontja O. Az F paraszférán az O pont körül írt R sugarú gömböt jelöljük $G(R, O)$-val. Tekintsük a $G(R, O)$-ra épített, paraszféra tengely alkotójú aszimptotikus kúpnak V-be eső részét. Jelöljük ezt $V(R, O)$-val. A $\{T_i\}$ halmaz V-re vonatkozó δ kitöltési (felső), ill. Δ lefedési (alsó) sűrűségét a következőképpen értelmezzük:

$$(16) \qquad \delta = \overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(T_i \cap V(R,O))}{V(R,O)} \quad \text{ill.} \quad \Delta = \underline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(T_i \cap V(R,O))}{V(R,O)}.$$

Meg kell mutatnunk, hogy δ, ill. Δ független az O pont választásától. Legyen O^*F egy O-tól különböző pontja, és $OO^*=c$. Mivel

$$\frac{\sum(T_i \cap V(R,O^*))}{V(R,O^*)} \leqq \frac{V(R+c,O)}{V(R,O^*)} \cdot \frac{\sum(T_i \cap V(R+c,O))}{V(R+c,O)} =$$

$$= \frac{G(R+c,O)}{G(R,O^*)} \cdot \frac{\sum(T_i \cap V(R+c,O))}{V(R+c,O)} = \frac{(R+c)^{n-1}}{R^{n-1}} \cdot \frac{\sum(T_i \cap V(R+c,O)}{V(R+c,O)},$$

$$\frac{\sum(T_i \cap V(R,O^*))}{V(R,O^*)} \geqq \frac{V(R-c,O)}{V(R,O^*)} \cdot \frac{\sum(T_i \cap V(R-c,O))}{V(R-c,O)} =$$

$$= \frac{G(R-c,O)}{G(R,O^*)} \cdot \frac{\sum(T_i \cap V(R-c,O))}{V(R-c,O)} = \frac{(R-c)^{n-1}}{R^n} \cdot \frac{\sum(T_i \cap V(R-c,O))}{V(R-c,O)}$$

$$\text{és} \quad \lim_{R=\infty} \frac{(R+c)^{n-1}}{R^{n-1}} = \lim_{R=\infty} \frac{(R-c)^{n-1}}{R^{n-1}} = 1,$$

ezért az O, ill. O^* pontra vonatkozó $\overline{\lim}$ és $\underline{\lim}$ értékek (16)-ban megegyeznek egymással.

A $\{T_i\}$ halmaz V-re vonatkozó sűrűségéhez hasonlóan beszélhetünk V valamely mérhető részhalmazának V-re vonatkozó sűrűségéről is. Legyen U V-nek olyan mérhető részhalmaza, amelynek V-re vonatkozó $\underline{d}$ alsó sűrűsége egy pozitív érték. Tekintsünk továbbá egy olyan megszámlálható sok pozitív térfogatú testből álló $\{S_i\}$ halmazt, amelynek elemeit U tartalmazza. Legyen $U(R, O)=U \cap V(R, O)$. Így az $\{S_i\}$ halmaznak U-ra vonatkozó δ kitöltési (felső), ill. Δ lefedési (alsó) sűrűségét a következőképpen értelmezzük:

$$(17) \qquad \delta = \overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(S_i \cap U(R,O))}{U(R,O)} \quad \text{ill.} \quad \Delta = \underline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(S_i \cap U(R,O))}{U(R,O)}.$$

δ, ill. Δ O ponttól való függetlenségének bizonyítása az előbbiekhez hasonlóan történik. Nyilván

$$\frac{\sum(S_i \cap U(R,O^*))}{U(R,O^*)} \leqq \frac{U(R+c,O)}{U(R,O^*)} \cdot \frac{\sum(S_i \cap U(R+c,O))}{U(R+c,O)} \quad \text{és}$$

$$\frac{\sum(S_i \cap U(R,O^*))}{U(R,O^*)} \geqq \frac{U(R-c,O)}{U(R,O^*)} \cdot \frac{\sum(S_i \cap U(R-c,O))}{U(R-c,O)}.$$

Így a függetlenség bizonyításához csak azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{R=\infty} \frac{U(R+c, O)}{U(R, O^*)} = \lim_{R=\infty} \frac{U(R-c, O)}{U(R, O^*)} = 1.$$

$$1 \leqq \frac{U(R+c, O)}{U(R, O^*)} = 1 + \frac{U \cap (V(R+c, O) - V(R, O^*))}{U(R, O^*)} \leqq 1 + \frac{V(R+c, O) - V(R, O^*)}{U(R, O^*)}.$$

Mivel U-nak V-re vonatkozó alsó sűrűsége $\underline{d}$, ezért bármely $\underline{d}$-nél kisebb pozitív ε-hoz megadható egy $R_0(\varepsilon)$ úgy, hogy $R > R_0$-ra $U(R, O^*) \geqq (\underline{d} - \varepsilon)\, V(R, O^*)$. Így $R > R_0$-ra

$$1 \leqq \frac{U(R+c, O)}{U(R, O^*)} \leqq 1 + \frac{1}{\underline{d} - \varepsilon} \cdot \frac{V(R+c, O) - V(R, O^*)}{V(R, O^*)}.$$

A $\lim_{R=\infty} \frac{V(R+c, O)}{V(R, O^*)} = 1$ miatt viszont $\lim_{R=\infty} \frac{U(R+c, O)}{U(R, O^*)} = 1$ is teljesül, s ebből már a $\lim_{R=\infty} \frac{U(R-c, O)}{U(R, O^*)}$ is következik. Ezzel megmutattuk, hogy az $\{S_i\}$ halmaznak U-ra vonatkozó felső, ill. alsó sűrűsége független az O pont választásától.

A fentiekhez hasonlóan értelmezhetjük egy $\{S_i\}$ halmaznak U-ra vonatkozó valamely sűrűségét abban az esetben is, ha $\{S_i\}$ elemei nem részei U-nak.

A továbbiakban egy $\{S_i\}$ halmaz U-ra vonatkozó sűrűségének a tulajdonságait vizsgáljuk.

Először is nyilvánvaló, hogy egy $\{S_i\}$ halmaz U-ra vonatkozó alsó (ill. felső) sűrűsége az U_1-re és U_2-re vonatkozó alsó (ill. felső) sűrűségei közé esik, ha U_1 és U_2 az U halmaz két mérhető részre való bontásával keletkezik.

A paraszférán belül értelmezett sűrűségnek egyik alapvető és a továbbiakban legtöbbet használt tulajdonsága a következő:

Ha U felbontható olyan pozitív térfogatú cellákból álló $\{U_n\}$ cellarendszerre, hogy a cellák átmérőinek halmaza felülről korlátos, és U minden egyes pontját $\{S_i\}$ elemei közül legfeljebb k_1 tartalmazza, ahol k_1 egy rögzített érték, akkor δ nem nagyobb a cellákban fellépő sűrűségek sup-nál, ill. Δ nem kisebb a cellákban fellépő sűrűségek inf-nál.

Ebből következik, hogy ha létezik U-nak olyan az előbbi kikötéseknek eleget tevő $\{U_k\}$ cellafelbontása és ugyancsak a fentieknek eleget tevő olyan $\{S_i\}$ halmaz, hogy minden cellában a sűrűség egyenlő, akkor $\delta = \Delta$ és ez a közös érték megegyezik a cellabeli sűrűséggel.

$\{S_i\}$-nek az $\{U_k\}$ cellarendszer celláiban vett sűrűségeinek sup-t, ill. inf-t jelöljük $\overline{\delta}$, ill. $\underline{\Delta}$-sal. Azt kell tehát igazolnunk, hogy $\delta \leqq \overline{\delta}$, ill. $\Delta \geqq \underline{\Delta}$.

Tekintsük azt az F-fel koncentrikus $(n-1)$-dimenziós $F(R)$ paraszférát, amelyet V tartalmaz és F-től mért távolsága $\frac{\ln R}{\sqrt{-\varkappa}}$, ahol $R > 1$. Így a $V(R, O)$ aszimptotikus kúp az $F(R)$ paraszférából egy egységnyi sugarú $(n-1)$-dimenziós gömböt

vág ki, ahol a gömb sugarát a paraszférán mérjük. Ez az $(n-1)$-dimenziós paraszférikus gömb viszont a $V(R, O)$ aszimptotikus kúpot vágja ketté; egy véges részre és egy kisebb aszimptotikus kúpra. A véges részt jelöljük $W(R, O)$-val, és vezessük be az $U \cap W(R, O) = UW(R, O)$ jelölést (29. ábra). A kisebb aszimptotikus kúpok, $V(R, O) - W(R, O)$-k egymással mind egybevágóak. Térfogatukat jelöljük v-vel.

Megmutatjuk először, hogy ha $\{S_i\}$ az U halmaz minden egyes pontját legfeljebb k_1-szer fedi le, akkor δ, ill. Δ a véges átmérőjű $UW(R, O)$-ban vett sűrűség segítségével is értelmezhető a következőképpen:

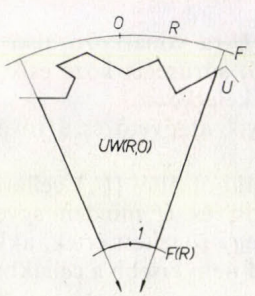
$$(18) \qquad \delta = \overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(S_i \cap UW(R, O))}{UW(R, O)} \quad \text{és} \quad \Delta = \underline{\lim_{R=\infty}} \frac{\sum(S_i \cap UW(R, O))}{UW(R, O)}.$$

δ és Δ definíciójában (17)-ben a $\dfrac{\sum(S_i \cap U(R, O))}{U(R, O)}$ tört szerepel az itteni $\dfrac{\sum(S_i \cap UW(R, O))}{UW(R, O)}$ helyett. A két nevező közül $UW(R, O)$ része $U(R, O)$-nak és különbségükre

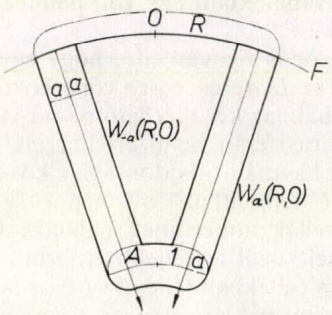
$$U(R, O) - UW(R, O) \leqq V(R, O) - W(R, O) = v.$$

$\underline{\lim}_{R=\infty} \dfrac{U(R, O)}{V(R, O)} = \underline{d} > 0$ miatt $U(R, O)$ és $UW(R, O)$ is végtelenhez tart R növekedtével. Így az arányuk viszont 1-hez tart.

Mivel $U(R, O)$ és $UW(R, O)$ különbsége legfeljebb v, ezért $\sum(S_i \cap U(R, O))$ és $\sum(S_i \cap UW(R, O))$ különbsége legfeljebb $k_1 v$, azaz egy rögzített korlát alatt marad. Ezért a (17) és (18)-beli két tört $\overline{\lim}$-ja, ill. $\underline{\lim}$-ja megegyezik, s ezzel (18)-at igazoltuk.



29. ábra



30. ábra

Jelöljük $\overline{U}(R, O)$-val, ill. $\underline{U}(R, O)$-val az $UW(R, O)$-ba belenyúló, ill. az $UW(R, O)$-ban teljesen benne levő U_k cellák egyesítését. Legyen az U_k cellák átmérőinek egy felső korlátja a. A $W(R, O)$ a sugarú külső parallel tartományának V-be eső részét jelöljük $W_a(R, O)$-val. Jelöljük továbbá $W_{-a}(R, O)$-val azt a testet, amelyet a $(V - W(R, O))$ a sugarú külső parallel tartományának V-ből való levonásával kapunk (30. ábra). Végül vezessük be az $U \cap W_a(R, O) = U_a(R, O)$ és $U \cap W_{-a}(R, O) = U_{-a}(R, O)$ jelöléseket.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Mivel az U_k cellák átmérői a-nál nem nagyobbak, ezért $U_a(R, O) \supset \overline{U}(R, O) \supset$ $\supset UW(R, O) \supset \underline{U}(R, O) \supset U_{-a}(R, O)$. Így

$$\frac{\sum(S_i \cap UW(R, O))}{UW(R, O)} \leqq \frac{\overline{U}(R, O)}{UW(R, O)} \cdot \frac{\sum(S_i \cap \overline{U}(R, O))}{\overline{U}(R, O)} \leqq$$

$$\leqq \frac{\overline{U}(R, O)}{UW(R, O)} \bar{\delta} \leqq \frac{U_a(R, O)}{UW(R, O)} \bar{\delta} \quad \text{ill.}$$

(19)

$$\frac{\sum(S_i \cap UW(R, O))}{UW(R, O)} \geqq \frac{\underline{U}(R, O)}{UW(R, O)} \cdot \frac{\sum(S_i \cap \underline{U}(R, O))}{\underline{U}(R, O)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\underline{U}(R, O)}{UW(R, O)} \underline{\Delta} \geqq \frac{U_{-a}(R, O)}{UW(R, O)} \underline{\Delta}.$$

Az $\dfrac{U_a(R, O)}{UW(R, O)}$ és $\dfrac{U_{-a}(R, O)}{UW(R, O)}$ értékeket kell megbecsülnünk.

(20) $$U_a(R, O) - UW(R, O) = U \cap (W_a(R, O) - W(R, O)) \leqq W_a(R, O) - W(R, O).$$

$$UW(R, O) - U_{-a}(R, O) = U \cap (W(R, O) - W_{-a}(R, O)) \leqq W(R, O) - W_{-a}(R, O).$$

A $V(R, O)$ aszimptotikus kúp térfogatát úgy számíthatjuk, mint egy n-dimenziós paraszféra cikknek a térfogatát, vagyis az F paraszféra felületen elhelyezkedő $G(R, O)$-nak egy konstans szorosaként. $G(R, O)$-t viszont egy $(n-1)$-dimenziós euklideszi gömbnek tekinthetjük, így

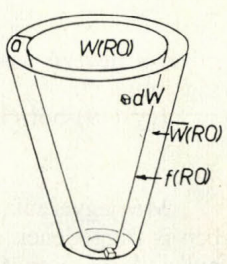
$V(R, O) = c_1 R^{n-1}$, ahol c_1 egy konstans.

A $W(R, O)$ test $V(R, O)$-ból egy egység sugarú $(n-1)$-dimenziós paraszférikus gömbre épített aszimptotikus kúp elhagyásával adódott, ahol ennek a kúpnak a térfogatát $V(R, O)$-éhoz hasonlóan számíthatjuk. Ezért

(21) $$W(R, O) = c_1(R^{n-1} - 1).$$

Az előbbi egység sugarú $(n-1)$-dimenziós paraszférikus gömb a sugarú parallel tartományát jelöljük A-val (30. ábra).

A $W(R, O)$ testet határoló paraszféra tengelyek $W(R, O)$-hoz tartozó pontjainak egyesítését jelöljük $f(R, O)$-val. Helyezzünk $f(R, O)$-ra kifelé merőlegesen a hosszúságú szakaszokat, és ezen szakaszok egyesítését jelöljük $\overline{W}(R, O)$-val. Ha $f(R, O)$-n veszünk egy df elemi felületdarabot, akkor az erre állított a hosszúságú szakaszok egyesítése egy $d\overline{W}$ elemi test darabot ad, ahol $d\overline{W} = c \cdot df$. Mivel $\overline{W}(R, O)$ az O ponton áthaladó paraszféra tengelyre nézve forgásszimmetrikus test, ezért rögzített R mellett c csak az F paraszférától mért távolságtól függ. c viszont monoton növekvő függvénye ennek a távolságnak, mert az aszimptotikus kúp egyre szűkül a távolság növekedtével ($n > 2$ esetben a monotonitás szigorúan monoton növekvő függvényt jelent) (31. ábra). Tehát c maximumát F-től legtávolabb éri el, ott ahol $W(R, O)$-t az egységsugarú $(n-1)$-dimenziós pa-



31. ábra

raszférikus gömb lezárja. Itt viszont R-től függetlenül mindig ugyanakkora a kúppalást görbülete, így c maximuma c_2 R-től független érték. Ezért

$$\overline{W}(R, O) < c_2 f(R, O).$$

$n>2$ esetén $f(R, O)$ felszíne $W(R, O)$ térfogatához analóg módon számítható, csak eggyel alacsonyabb dimenzióban. Tehát $V(R, O)$ palástjának felszínéből kell levonni a megfelelő részének a felszínét. $V(R, O)$ palástja $G(R, O)$ felületére támaszkodik, amely egy $(n-1)$-dimenziós euklideszi gömb felületének felel meg. Ezért $V(R, O)$ palástjának felszíne $c_3 \cdot R^{n-2}$ alakú, ahol c_3 konstans. Így

$$f(R, O) = c_3(R^{n-2}-1), \quad \text{azaz}$$

$$\overline{W}(R, O) < c_2 c_3(R^{n-2}-1).$$

A $W_a(R, O)$ parallel tartománynak $W(R, O)$-ból kinyúló részét a $\overline{W}(R, O)$ és A testek együtt nyilván lefedik (30. ábra), ezért

$$W_a(R, O)-W(R, O) < \overline{W}(R, O)+A < c_2 c_3(R^{n-2}-1)+A.$$

Ha $f(R, O)$-ra merőlegesen befelé állítunk a hosszúságú szakaszokat, akkor ezek egyesítéseként egy olyan $\underline{W}(R, O)$ testet kapunk, amely nyilván $\overline{W}(R, O)$-nál kisebb térfogatú. Ugyanakkor a $W(R, O)$ testnek a $W_{-a}(R, O)$ testből kinyúló részét a $\underline{W}(R, O)$ és A testek együtt nyilván lefedik (30. ábra). Ezért az előbbiekhez hasonlóan

$$W(R, O)-W_{-a}(R, O) < \underline{W}(R, O)+A < \overline{W}(R, O)+A, \quad \text{s így}$$

$$W(R, O)-W_{-a}(R, O) < c_2 c_3(R^{n-2}-1)+A.$$

$n=2$ esetén $f(R, O)=\dfrac{2 \ln (R)}{\sqrt{-\varkappa}}$ és $\overline{W}(R, O)=\underline{W}(R, O)=\dfrac{2 \ln (R)}{\sqrt{-\varkappa}} \operatorname{sh} a\sqrt{-\varkappa}$, Így az $n>2$ esethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$W_a(R, O)-W(R, O) < c_4 \ln R+A \quad \text{ill.}$$

$$W(R, O)-W_{-a}(R, O) < c_4 \ln R+A.$$

(20) figyelembe vételével $U_a(R, O)$ és $UW(R, O)$, ill. $UW(R, O)$ és $U_{-a}(R, O)$ különbségeire az adódik, hogy $n>2$ esetben ezek $c_2 c_3(R^{n-2}-1)+A$-nál, $n=2$ esetben pedig $c_4 \ln R+A$-nál kisebbek. Az $UW(R, O)$ értéke viszont legalább $\underline{d}W(R, O)$, azaz (21) alapján legalább $\underline{d} c_1(R^{n-1}-1)$.

Ebből következik, hogy

$$\lim_{R=\infty} \frac{U_a(R, O)}{UW(R, O)} = \lim_{R=\infty} \frac{U_{-a}(R, O)}{UW(R, O)} = 1,$$

mivel a nevező nagyságrendje nagyobb a számláló és nevező különbségének nagyságrendjénél.

Így (19)-ből (18) figyelembevételével már adódik a bizonyítandó állítás, hogy

$$\delta \leqq \bar{\delta}, \quad \text{ill.} \quad \Delta \geqq \underline{\Delta}.$$

Megjegyezzük, hogy $n=2$ esetén a (17)-beli és a (18)-beli definíciók még az esetben is függetlenek az O ponttól, ha az U tartomány V-re vonatkozó alsó sűrűsége nulla. A $\delta \leqq \bar{\delta}$ és $\Delta \geqq \underline{\Delta}$ egyenlőtlenségek viszont ilyen esetben már nem feltétlenül teljesülnek.

Az előzőek szerint két parallel paraciklus esetén értelmezhető a belső paraciklusnak a külső parallel paraciklusban vett sűrűsége, vagy pl. tekintsük a $\{\infty, 3\}$ szimbólumú szabályos mozaikot, amelynek lapjaiba egy-egy érintő paraciklust lehet írni. Akkor értelmezhető a mozaik egy lapjában a beírt paraciklus sűrűsége.

Egy paracikluson belüli tartományban értelmezhető sűrűség alkalmazásaként még megemlítjük Imre Margit [1964] eredményének egy továbbvitelét:

Tekintsük a hiperbolikus sík egy $\{p, 3\}$ mozaikjának egy tetszőleges paracikluson belül elhelyezkedő olyan lapjainak az egyesítését, hogy a lapok egyesítésének a paraciklusra vonatkozó alsósűrűsége pozitív legyen. Tekintsünk továbbá a lapok egyesítésében egy olyan körkitöltést, amely a mozaik lapjaiba írt körökkel megegyező sugarú körökből áll. A körkitöltésnek a lapok egyesítésében vett kitöltési sűrűsége nem lehet nagyobb egy kör és egy mozaik lap területének hányadosánál.

Természetesen ez az eredmény Imre Margit [1964] eredményének megfelelően részben egymásra boruló körök esetére is általánosítható, mivel Imre Margit bizonyítása átvihető erre az esetre is.

ЧПАКОВКИ СФЕРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ I. 1. ПОНЯТИЕ «ПЛОТНОСТИ» В n-МЕРНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСВЕ

КАРОЙ БЁРЁЦКИ

SPHERE PACKING IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE I.

K. BÖRÖCZKY

IRODALOM

AGENO, M. [1961], Elementi per una sistematica dei monostrati chiusi I—II, Istituto superiore di sanita 24, 1—19; 28, 1—63.

BAMBAH, R. P. (1954*a*], On lattice coverings by spheres, *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 20, 25—52.

— [1954*b*], Lattice coverings with four-dimensional spheres, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 50, 203—8.

BAMBAH, R. P.—DAVENPORT, H. [1952], The covering of n-dimensional space by spheres, *J. Lond. Math. Soc.* 27, 224—9.

BAMBAH, R. P.—ROGERS, C. A.—ZASSENHAUS, H. [1964], On coverings with convex domains, *Acta Arith.* 9, 191—207.

Барановский, Е. П. [1963], О минимумах плотности решетчатого покрытия пространства равными шарами, *Уч. зап. Ивановск.* гос. пед. ин-т 34, 71—6.

— [1964], О заполнении n-мерных евклидовых пространств равными шарами. I, Изв. высш. учебн. заведений, *Математика* 2, 14—24.

— [1967], Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположение в пространствах постоянной кривизны, *Итоги науки ВИНИТИ АН СССР* 189—225.

BARNES, E. S. [1956], The covering of space by spheres, *Canad. J. Math.* 8, 293—304.

BENDER, C. [1874], Bestimmung der größten Anzahl gleich großer Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen, *Arch. Math. Phys.* 56, 302—6.

BLACHMAN, N. M. [1963], The closest packing of equal spheres in a larger sphere, *Amer. Math. Monthly* 70, 526—9.

BLACHMAN, N. M.—FEW, L. [1963], Multiple packing of spherical caps, *Matematika* 10, 84—8.

BLEICHER, M. N. [1962], Lattice covering of n-space by spheres, *Canad. J. Math.* 14, 632—50.

BLEICHER, M. N.—FEJES TÓTH, L. [1964], Circle-packings and circle-coverings on a cylinder, *Michigan Math. J.* 11, 337—41.

BLICHFELDT, H. F. [1914], A new principle in the Geometry of Numbers, with some applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* 15, 227—35.

— [1925], On the minimum value of positive real quadratic forms in 6 variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* 31, 386.

— [1926], The minimum value of positive quadratic forms in seven variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* 32, 99.
— [1929], The minimum value of quadratic forms, and the closest packing of spheres, *Math. Ann.* 101, 605—8.
— [1934], The minimum value of positive quadratic forms in sexs, seven and eight variables, *Math. Z.* 39, 1—15.
BÖRÖCZKY, K. [1964], Über stabile Kreis- und Kugelsysteme, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 7, 79—82.
— [1967], Über Dunkelwolken, *Proc. Colloqu. on Convexity* (Copenhagen 1965), Köbenhavns Univ. Math. Inst. Copenhagen, 13—7.
BÖRÖCZKY, K.—FLORIAN, A. [1964], Über die dichteste Kugelpackung in hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15, 237—45.
COXETER, H. S. M. [1935], The functions of Schläfli and Lobatschefsky, *Quart. J. Math.* 6, 13—29.
— [1948], *Regular Polytopes*, London.
— [1954], Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 4, 263—74.
— [1956], Regular honeycombs in hyperbolic space, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians*, Amsterdam, 3, 155—69.
— [1958], Close-packing and froth, *Illinois J. Math.* 2, 746—58.
— [1961], Introduction to geometry, New York—London.
— [1963], An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size, *Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I. 7, 53—71.
COXETER, H. S. M.—FEW, L.—ROGERS, C. A. [1959], Covering space with equal spheres, *Matematika* 6, 147—57.
DANZER, L. [1960], Drei Beispiele zu Lagerungsproblemen, *Arch. Math.* 11, 159—65.
DAVENPORT, H. [1952], The covering of space by spheres, *Rend. Circ. Math. Polermo* 1, 92—107.
— [1964—65], Problems of packing and covering, Univ. e Politec. *Torino Rend. Sem. Mat.* 24, 41—48.
DAVENPORT, H.—HAJÓS, G. [1951], 35. Feladat, *Matematikai Lapok* 2, 68.
Делоне, Б. Н.—Рышков, С. С. [1963], Решение задачи о намиенее плотном решетчатом покрытии четырехмерного пространства равными шарами, *Докл. АН. СССР.* 152, 523—4.
ERDŐS, P.—ROGERS, C. A. [1953], The covering of *n*-dimensional space by spheres, *J. London Math. Soc.* 28, 287—93.
FEJES TÓTH, G. [1969], Kreisüberdeckungen der Sphäre, *Studia Sci. Math. Hung.* 4, 225—47.
FEJES TÓTH, L. [1940], Über einen geometrischen Satz, *Math. Zeitschrift* 46, 83—5.
— [1942], A szabályos testek, mint szélsőértékfeladatok megoldásai, *Matematikai és Természettudományi Értesítő* 61, 471—7.
— [1943], Über die dichteste Kugellagerung, *Math. Zeitschrift* 48, 676—84.
— [1944], Extremális pontrendszerek a síkon, a gömbfelületen és a térben, *Acta Sci. Math. Nat.* Kolozsvár 23, 1—54.
— [1950], Some packing and covering theorems, Acta Univ. Szeged, *Acta Sci. Math.* 12/A, 62—7.
— [1953*a*], *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg.
— [1953*b*], Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 103—10.
— [1953*c*], Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 111—4.
— [1953*d*], On close-packings of spheres in spaces of constant curvature, *Publ. Math.* Debrecen 3, 158—67.
— [1954], Über die dichteste Horozyklenlagerung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 5, 41—4.
— [1956*a*], Über die dünnste Horozyklenüberdeckung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 7, 95—8.
— [1956*b*], On the volume of a polyhedron in non-Euklidean spaces, *Publ. Math.* Debrecen 4, 256—61.
— [1959*a*], Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung, *Arch. Math.* 10, 307—13.
— [1959*b*], Verdeckung einer Kugel durch Kugeln, *Publ. Math.* 6, 234—40.
— [1960], Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, *Elemente der Math.* 19, 25—36.
— [1960—61], On the stability of a circle packing, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 3—4, 63—6.
— [1963], Újabb eredmények a diszkrét geometriában, *Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.* 13, 341—54.
— [1964], *Regular Figures*, Oxford—London—New York—Párizs.
— [1965*a*], *Reguläre Figuren*, Budapest.
— [1965*b*], Minkowskian distribution of discs. *Proc. Amer. Math. Soc.* 16, 999—1004.
— [1968], Solid circle-packings and circle-coverings, *Studia Sci. Math. Hungar.* 3, 401—9.
FEJES TÓTH, L.—HEPPES, A. [1967], A variant of the problem of the thirteen spheres, *Canad. J. Math.* 19, 1092—1100.

FEJES TÓTH, L.—MOLNÁR, J. [1958], Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachr.* 18, 235—43.
FEW, L. [1953], On the double packing of spheres, *J. London Math. Soc.* 28, 297—304.
— [1956], Covering space by spheres, *Mathematika* 3, 136—9.
— [1964], Multiple packing of spheres, *J. London Math. Soc.* 39, 51—4.
— [1968], Double packing of speres. A new upper bound, *Mathematika* 15, 88—92.
FLORIAN, A. [1963], Dichteste Packung inkongruenter Kreise, *Monatsh. Math.* 67, 229—42.
Гамецкий, А. Ф. [1962], К теории покрытия *n*-мерного эвклидова пространства равными шарами, *Докл. АН СССР* 146, 991—4.
GAUSS, C. F. [1831], Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1831 Juli 9, see Werke, Göttingen, 1836, II, 188—96.
GILBERT, E. N. [1964], Randolmy packed and solidly packed spheres, *Canad. J. Math.* 16, 286—98.
GOLDBERG, M. [1970], The packing of equal circles in a square. *Math. Mag.* 43, 24—30.
GRAN OLSSON, R. [1955], Über Porenvolumen und Porenziffer in der Erdbaumechanik und die verschiedene dichte Packung von Kugeln. *Norske Vid. Selsk. Forh.* Trondheim 28, 96—9; II. [1956], 29, 22—3.
GROEMER, H. [1961], Eine Ungleichung für die Dichte von Lagerungen konvexer Körper, *Arch. Math.* 12, 477—80.
— [1963], Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum, *Math. Z.* 81, 260—78.
GRÜNBAUM, B. [1960], On a problem of L. Fejes Tóth, *Amer. Math. Monthly* 67, 882—4.
HABICHT, W.—VAN DER WAERDEN, B. L. [1951], Lagerung von Punkten auf der Kugel, *Math. Ann.* 123, 223—234.
HADWIGER, H. [1952], Einlagerung kongruenter Kugeln in eine Kugel, *Elemente der Math.* 7, 97—103.
HAJÓS, GY. [1964], Über Kreiswolken, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 7, 55—57.
HEPPES, A. [1955], Über mehrfache Kreislagerungen, *Elem. Math.* 10, 125—7.
— [1959], Mehrfache gitterförmige Kreislagerungen in der Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 10, 141—8.
— [1960—61], Ein Satz über gitterförmige Kugelpackungen, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math.* 3—4, 89—90.
— [1961], Über Kreis- und Kugelwolken, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 12, 209—14.
— [1967*a*], On the number of spheres which can hide a given sphere, *Canad. J. Math*, 19, 413—8.
— [1967*b*], On the densest paking of circles not blocking each other, *Studia Sci. Math. Hungar.* 2, 257—63.
HEPPES, A.—MOLNÁR, J. [1960], I. Újabb eredmények a diszkrét geometriában. *Mat. Lapok* 11, 330—55.
— [1962], Újabb eredmények a diszkrét geometriában II, *Mat. Lapok* 13, 39—72.
— [1965], Újabb eredmények a diszkrét geometriában III, *Mat. Lapok* 16, 19—41.
HLAWKA, E. [1949], Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, *Monatsh. Math. Phys.* 53, 81—131.
— [1964], Überdeckung durch konvexe Scheiben. *Sitzungsber. Berliner math. Ges.* 1961—64. 28—36.
HORTOBÁGYI, I. [1971], Durchleuchtung gitterförmiger Kugelpackung mit Lichtbündeln, *Studia Sci. Math. Hungar.* 6.
HORVÁTH, J. [1970], Über die Durchsichtigkeit gitterförmiger Kugelpackungen, *Studia Sci. Math. Hungar.* 5, 421—6.
— [1971], Egységgömbök elhelyezése gömbhéjakban, *Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.* 20, 291—302.
— [1974], Die Dichte der Kugelpackung in einer Schicht 4-dimensionales euklidischen Raumes, *Per. Math. Hung.* 5 (3), 195—199.
HORVÁTH, J.—MOLNÁR, J. [1967], On the density of non-overlapping unit spheres lying in a strip, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 10, 193—201.
IMRE, M. [1964], Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 15, 115—121.
KERSHNER, R. [1939], The number of circles covering a set, *Amer. J. Math.* 61, 665—71.
KORKIN, A. H.—ZOLOTARJEV, E. J. [1872], Sur les formes quadratiques positives quarternaires, *Math. Ann.* 5, 581—3.
— [1877], Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* 11, 242—92.
KRAMMER, G. [1960], Megjegyzés gömbnek körökkel való kitöltéséhez és lefedéséhez, *Mat. Lapok* 11, 120—3.
LAGRANGE, J. L. [1773], Recherches d'arithmétique, Neuveaux *Mémoires de l'Académie royal des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 265—312; Oeuvres, III, 693—758.
LARMAN, D. G. [1968], On packings of unequal spheres in R_n, *Canad. J. Math.* 20, 967—9.
LEECH, J. [1956], The problem of the thirteen spheres. *Math. Gaz.* 40, 22—23.

LEKKERKERKER, C. G. [1951], Kugelpackung, *Math. Centrum* Amszterdam. Rapport ZW, 023, 8.
MAHLER, K. [1946], On lattice points in a cylinder, *Quart. J. Math.* 17, 16—18.
— [1947], On the area and the densest packing of convex domains, *Proc. Acad. Wet.* Amsterdam 50, 109—18.
MALÉ, T. [1973], Sur les empilements des sphères dans les espaces á courbure constante, Bamako (doktori értekezés).
MIŃKOWSKI, H. [1904], Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, *Nachr. Ges. Wiss.* Göttingen, Math-Physik. Kl. 311—55.
MOLNÁR, J. [1959], Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 2, 33—40.
— [1961], Alcune generalizzazioni del teorema de Segre-Mahler, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.* Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 30, 700—5.
— [1962], Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 12, 223—63.
— [1963], Estensione del teorema di Segre-Mahler allo spazio, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.* Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 35, 166—8.
— [1965], Volumenabschätzung eines Polyeders in Räumen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 14, 431—3.
— [1965*b*], Tong quan ve hinh hoc roi rac, *Tap San Toan Ly* 3, 17—21.
— [1966*a*], Aggregati di cerchi di Mińkowski, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 71, 101—8.
— [1966*b*], Collocazioni di cerchi con esigenza di spazio, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 9, 71—86.
— [1967], On the λ-system of circles, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 18, 405—10.
MORDELL, L. J. [1944], Observation on the minimum of a positive quadratic form in eight variables, *J. Lond. Math. Soc.* 19, 3—6.
RANKIN, R. A. [1947], On the closest packing of spheres in n-dimensions, *Ann. Math.* Princeton II. 48, 1062—81.
— [1955*a*], On packing of spheres in Hilbert spaces, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 2, 145—46.
— [1955*b*], The closest packing of spherical caps in n-dimensions. *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 2, 139—144.
ROBINSON, R. M. [1961], Arrangements of 24 points on a sphere, *Math. Ann.* 144, 17—48.
ROGERS, C. A. [1950), A note on coverings and packings, *J. Lond. Math. Soc.* 25, 327—31.
— [1951], The closest packing of convex two-dimensional domains, *Acta Math.* 86, 309—21.
— [1958], The packing of the equal spheres, *Proc. London Math. Soc.* (3) 8, 609—20.
— [1963], Covering a sphere with spheres. *Mathematika* 10, 157—64.
— [1964], *Packing and covering*, Cambridge.
SCHAER, J. [1965], The densest packing of 9 circle in a square, *Canad. Math. Bull.* 8, 273—7.
— [1966*a*], On the densest packing of spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* 9, 265—70.
— [1966*b*], The densest packing of five spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* 9, 271—4.
— [1966*c*], The densest packing of six spheres in a cube, *Canad. Math. Bull.* 9, 275—80.
SCHÜTTE, K.—VAN DER WAERDEN, B. L. [1953], Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* 125, 325—34.
SEGRE, B.—MAHLER, K. [1944], On the densest packing of circles, *Amer. Math. Monthly* 51, 261—70.
TAMMES, R. M. L. [1930], On the origine of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains, *Rec. Trav. Bot. Neerl.* 27, 1—84.
THUE, A. [1892], Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. *Fordhl. Skand. Naturforsk.* 14, 352—3.
— [1910], Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene. *Christiania Vid. Selsk. Skr.* 1, 3—9.
VORONOI, G. F. [1907], Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, *J. reine angew. Math.* 133, 97—178.
— [1908], Nonvelles applications des paraméteres continus á la théorie des formes quadratiques, Deuxiéme Mémoire, Recherches sur les parallélоédres primitifs, *J. reine angew. Math.* 134, 198—287.
VAN DER WAERDEN, B. L. [1961], Pollenkörner, Punkverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie, *Die Naturwissenschaften* 48, 189—92.
WATSON, G. L. [1956], The covering of space by spheres, *R. C. Circ. Mat. Palermo*, (2) 5, 93—100.
WESTER, O. [1960], An infinite packing theorem for spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.* 11, 324—6.
WOODS, A. C. [1965], The densest double lattice packing of four-spheres, *Mathematica* 12, 138—42.
ZALGALLER, V. A. [1969], *Convex polyhedra with regular faces*, New York.
ZEITLER, H. [1965], Eine reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes, *Elem. Math.* 20, 73—9.

SZÖGEK ÉS SZÖGFÜGGVÉNYEK

CSÁSZÁR ÁKOS

1. Bevezetés. Nincs az a középfokú vagy matematikai tárgyat is oktató felsőfokú iskolatípus, amelyben a matematikai tárgy (vagy tárgyak) ne érintenék a szögfüggvények témakörét. Ugyanekkor nincs talán egyetlen olyan iskolatípus sem, amelyben ez a témakör hézagtalanul, minden részletének szabatos kidolgozásával kerülne tárgyalásra. Nem meglepő ez a középiskolában, ahol jól ismert és természetes okokból nem csak ebben a tekintetben, hanem sok más vonatkozásban sem lehet cél a végsőkig menő precizitás, és természetesen ugyanez mondható a felsőfokú intézmények matematikai előadásának jó részéről is. Leendő matematikusok vagy matematikatanárok oktatásakor mindenesetre kívánatos volna a tárgyalás logikai hézagtalanságára törekedni, más területeken is, ebben a kérdéskörben is, akár a részletek tényleges kidolgozásával, akár olyan út felvázolásával, amelyen járva a felépítés hézagtalanul elvégezhető volna.

Az, hogy ez a tisztázás még egyetemi előadásokban és tankönyvekben is elmarad rendszerint, elsősorban azzal magyarázható, hogy a geometria és az analízis sajátos határterületéről van szó. Az analízisnek minden előadója és minden tankönyve bevezeti és kiterjedten felhasználja (természetesen) a trigonometrikus függvényeket, azonban definíciójukat és alapvető tulajdonságaik igazolását legtöbbször elhagyja azzal az indokolással, hogy ez a geometriából ismeretes.

Valóban, a geometria is foglalkozik ezekkel a függvényekkel (inkább szögfüggvényeknek nevezve őket), azonban már definíciójukat is tisztázatlanul hagyja tulajdonképpen, hiszen a szokásos, az egységkört felhasználó értelmezés támaszkodik vagy a szögmérésnek, vagy a körív-hossz mérésének elméletére, s ezek a geometria keretében nincsenek tisztázva, nem is tisztázhatók, hiszen az utóbbi nyilvánvalóan az analízis körébe tartozik, s ugyanez mondható az előbbiről, még ha ez kevésbé szembeszökő is.

A szögfogalom és a szögmérés elmélete az utóbbi években élénk vita tárgya volt a francia matematikatanárok között. Szakdidaktikai folyóiratuk, a Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public hasábjain egymással polemizáló cikkek sora jelent meg, amelyekből végül kikristályosodott logikailag hézagtalannak és az oktatásban követendőnek ítélt álláspontjuk. E cikksorozat tanulmányozása, s főként az eredményt összefoglaló lexikonszerű szócikkek meggyőznek arról, hogy a „szög" szó számos egymással többé-kevésbé kapcsolatban álló fogalmat takar, amelyek között azonban tisztán kell látni a különbségeket (és ezzel természetesen mindenki egyetért), de arról is, hogy az általuk javasolt út követése az oktatásban megvalósíthatatlan; ezt kell mondani nem is elsősorban azért, mert a felhasznált apparátus a topologikus csoportok elméletéig terjed, hanem főként hallatlan nehézkessége miatt (így például a cos és sin függ-

vényeknek négyféle definícióján át jut el az analízisben használatos definíciókig (nem egymással tartalmilag azonos függvényeket definiálnak más-más módon, hanem más-más függvényeket különböztetnek meg különböző értelmezési tartományul szolgáló halmazokkal)).

Ha egyszer a szögfogalom a geometriának ennyire kényes pontja, és kialakításakor az analízis módszerei végső soron amúgy sem kerülhetők el (az analízis szerepe a franciák által javasolt felépítésben a topologikus csoportokon keresztül jelentkezik), akkor kézenfekvő gondolat a trigonometrikus függvényeknek olyan tárgyalását adni, amely teljesen az analízis eszközeire támaszkodik. Ezt valóban megteszi az analízisnek néhány tankönyve. Így például G. Kowalewski [1] a cos és sin függvényeket hatványsorukkal definiálja, alapvető tulajdonságaikat ebből nagyon elegánsan származtatja, azonban teljesen adós marad (legalábbis bevezetésük után jó hosszú ideig) e függvények geometriai szerepének elárulásával. Szász Pál [2] először az arctg függvényt értelmezi deriváltjának integráljaként, majd ennek inverzeként a tg függvényt, s végül a cos és sin függvényeket erre támaszkodva. Ő a geometriai vonatkozásokra is rögtön rámutat, azonban tárgyalása végül is meglehetősen erősen eltér a szokásostól a logikai hézagtalanság kedvéért.

A következő sorok célja éppen nem az, hogy valami merőben új ötleten alapuló, újszerű felépítést mutassanak be; ellenkezőleg, összhangot szeretnének teremteni a geometriában szokásos tárgyalásmód és a hézagtalan precizitás között, megmutatva, hogyan lehet szabatossá tenni azt, amin általában át szoktak siklani. A közben felhasznált apparátus alapjában véve nem lép túl az elsőéves egyetemi előadások szokásos anyagán; formálisan mindenesetre támaszkodik a komplex számok algebrájára és a folytonosság fogalmára a komplex síkon, ez azonban csakis a képletek lehető egyszerűsége céljából történik, s ezek kissé bonyolultabbá válása árán végig elkerülhető volna.

A következő néhány pont a felhasznált segédeszközöket foglalja össze, az analízis keretében történő tárgyalás teljessége érdekében a felhasznált geometriai fogalmakat kirészletezve. Viszont a trigonometrikus függvények elméletének megalapozása után arra is rámutatok, hogyan használható fel a kidolgozott apparátus a geometriában szereplő különféle szögfogalmak tisztázására, főként a mérés szemszögéből. A közelmúltban Varga Tamás [3] elemezte ezeket a kérdéseket didaktikai szempontból, s rámutatott arra, hogy a következőkben leírt felépítés milyen tapasztalatokkal támasztható alá már a kisgyermek ismeretkörének keretében is.

2. Körpályák. Legyen $\mathbf{C}$ a komplex sík

2.1. Nevezzük ($\mathbf{C}$-beli, irányított, folytonos) *görbé*nek a $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ folytonos függvényt, ahol $a<b$, tehát $[a, b]$ az $\mathbf{R}$ számegyenesnek nem elfajuló zárt intervalluma. $\varphi(a)$ a *görbe kezdőpontja,* $\varphi(b)$ pedig a *végpontja.* A $K_\varphi=\{\varphi(t):a\leqq t\leqq b\}\subset\mathbf{C}$ ponthalmaz a φ *görbe képe.*

2.2. Ha $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ görbe, $c<d$, $c, d\in\mathbf{R}$, és $\omega:[c, d]\to[a, b]$ szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény, amelyre $\omega(c)=a$, $\omega(d)=b$, akkor $\psi=\varphi\circ\omega$ is görbe. A φ és ψ görbét egymással *ekvivalens*nek mondjuk, ha egyik a másikból ilyen módon állítható elő. Ezt a $\varphi\sim\psi$ szimbólummal jelöljük; az így definiált reláció valóban reflexív, szimmetrikus és tranzitiv.

Ekvivalens görbék képe, kezdő- és végpontja megegyezik.

2.3. Ha $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ görbe, legyen $a\leqq t\leqq b$ esetén $\varphi^*(t)=\varphi(a+b-t)$. Ekkor $\varphi^*:[a, b]\to\mathbf{C}$ is görbe, amelyre $K_{\varphi^*}=K_\varphi$, $\varphi^*(a)=\varphi(b)$, $\varphi^*(b)=\varphi(a)$. φ^*-ról azt mondjuk, hogy φ-ből az *irányítás ellenkezőre változtatásával* keletkezik. Világos, hogy $(\varphi^*)^*=\varphi$, és $\varphi\sim\psi$ esetén $\varphi^*\sim\psi^*$.

2.4. Legyen $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ görbe, $a\leqq c<d\leqq b$. Ekkor $\varphi|[c, d]$ is görbe. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az utóbbi görbe *részgörbéje* φ-nek. A részgörbe képe részhalmaza φ képének.

2.5. Legyen $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ és $\psi:[c, d]\to\mathbf{C}$ két görbe. Ekkor a $\varphi(b)=\psi(c)$ feltétel mellett a

$$\chi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{ha} \quad a\leqq t\leqq b,\\ \psi(c+t-b), & \text{ha} \quad b\leqq t\leqq b+d-c\end{cases}$$

képlet egy $\chi:[a, b+d-c]\to\mathbf{C}$ görbét definiál. A χ görbéről azt mondjuk, hogy ψ-nek φ-hez való *fűzésével* keletkezik, és erre a $\chi=\varphi\vee\psi$ szimbólumot alkalmazzuk. Világos, hogy $K_\chi=K_\varphi\cup K_\psi$. Ha $\varphi\sim\varphi_1$, $\psi\sim\psi_1$, és ψ hozzáfűzhető φ-hez (azaz ha φ végpontja azonos ψ kezdőpontjával), akkor ψ_1 is hozzáfűzhető φ_1-hez, és $\varphi\vee\psi\sim\varphi_1\vee\psi_1$.

Könnyen belátható, hogy érvényes a $(\varphi\vee\psi)\vee\omega=\varphi\vee(\psi\vee\omega)$ asszociatív törvény abban az értelemben, hogy az egyik oldal létezése maga után vonja a másiknak a létezését és az egyenlőséget. Ha létezik $\varphi\vee\psi$, akkor létezik $\psi^*\vee\varphi^*$ is, és $(\varphi\vee\psi)^*\sim\psi^*\vee\varphi^*$.

2.6. A $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ görbe *egyszerű,* ha $a\leqq t_1<t_2\leqq b$ esetén $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$. A φ görbe *zárt,* ha $\varphi(a)=\varphi(b)$. (Ennek az elnevezésnek semmi köze sincs a φ görbe képének mint ponthalmaznak zártságához, K_φ ugyanis bármely görbe esetén korlátos és zárt ponthalmaz.) A φ görbe *egyszerű zárt görbe,* ha $\varphi(a)=\varphi(b)$, de $a\leqq t_1<t_2<b$ esetén $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$. (Ekkor tehát a görbe zárt, de nem egyszerű.)

2.7. A $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ görbe *rektifikálható,* ha van olyan K korlát, amelyre $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|\leqq K.$$

Az ilyen K korlátok legkisebbike a φ görbe $s(\varphi)$ *hosszúsága*. Ha φ rektifikálható, akkor φ^* is ilyen, valamint minden φ-vel ekvivalens ψ görbe is, és $s(\varphi)=s(\varphi^*)=s(\psi)$. Rektifikálható görbe minden részgörbéje is rektifikálható. Ha φ és ψ rektifikálható és létezik $\varphi\vee\psi$, akkor az utóbbi is rektifikálható, és $s(\varphi\vee\psi)=s(\varphi)+s(\psi)$.

Legyen $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ rektifikálható, és $a<u\leqq b$ esetén $f(u)=s(\varphi|[a, u])$, $f(a)=0$. Ekkor f szigorúan monoton növekedő és folytonos $[a, b]$-ben.

Ha $\varphi:[a, b]\to\mathbf{C}$ folytonosan differenciálható, akkor rektifikálható is, mégpedig

$$s(\varphi)=\int_a^b|\varphi'(t)|\,dt.$$

2.8. Legyen a következőkben K a sík $c=a+bi$ pontja körül (a és b valós) $r>0$ sugárral készített körvonal:

$$K=\{z\in\mathbf{C}:\ |z-c|=r\}.$$

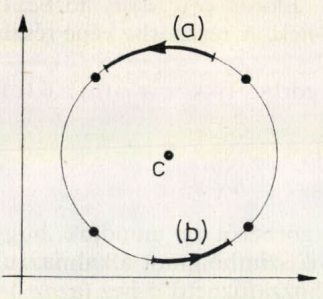
Legyen még $-\frac{r}{\sqrt{2}}\leqq u<v\leqq\frac{r}{\sqrt{2}}$. A $\varphi:[u, v]\to\mathbf{C}$ görbét *pozitív* (bejárású) *elemi ívnek* mondjuk, ha a következő képletek valamelyike adja meg:

(a) $\varphi(t)=(a-t)+i\left(b+\sqrt{r^2-t^2}\right)$,

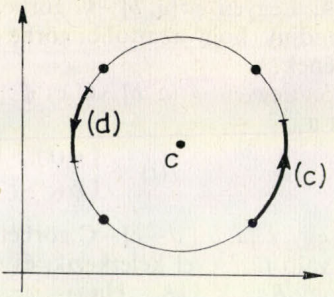
(b) $\varphi(t)=(a+t)+i\left(b-\sqrt{r^2-t^2}\right)$,

(c) $\varphi(t)=\left(a+\sqrt{r^2-t^2}\right)+i(b+t)$,

(d) $\varphi(t)=\left(a-\sqrt{r^2-t^2}\right)+i(b-t)$.



1. ábra



2. ábra

Az $u=-\frac{r}{\sqrt{2}}$, $v=\frac{r}{\sqrt{2}}$ esetben *pozitív alapív*ről beszélünk. Ha φ pozitív elemi ív vagy pozitív alapív, akkor φ^*-ot *negatív elemi ív*nek, ill. *negatív alapív*nek mondjuk. Ha szükséges K szerepének kiemelése, akkor *K-n fekvő elemi ív*ekről ill. *alapív*ekről fogunk beszélni. A K-n fekvő alapívek kezdő- és végpontjai, tehát az $\left(a\pm\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+i\left(b\pm\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ pontok a K körvonal *csomópont*jai.

2.9. Legyen K az előbbi körvonal. K-n fekvő *körpálya*nak nevezzük az olyan φ görbét, amely ekvivalens egy

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$$

alakú görbével, ahol minden φ_k elemi ív K-n. (Itt az összefűzés asszociativitása miatt felesleges zárójeleket előírni.) Minden ilyen elemi ívekből összefűzött φ-vel ekvivalens görbe a φ körpályának egy *előállítás*a. A körpályát *pozitív*nak, ill. *negatív*nak mondjuk, ha van olyan előállítása, amelyben minden tag pozitív, ill. negatív elemi ív. Ha φ körpálya, akkor φ^* is körpálya, mégpedig negatív ill. pozitív, ha maga φ pozitív ill. negatív. Ha φ és ψ körpálya és létezik $\varphi \vee \psi$, akkor ez is körpálya, mégpedig φ-vel és ψ-vel együtt ez is pozitív, ill. negatív.

K-n fekvő *nullapálya*nak mondjuk az egyelemű értelmezési tartományon definiált $\varphi: \{u\} \to \mathbf{C}$ leképezést, ahol $u \in \mathbf{R}$ és $\varphi(u) \in K$.

3. Hasonlóság a síkban. Legyen $\mathbf{C}$ továbbra is a komplex sík.

3.1. Síkbeli *hasonlóság*nak mondjuk az olyan $H: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ leképezést, amely a pontok távolságait k-szorosukba viszi át, ahol $k>0$ adott szám, azaz amelyre

$$|H(z_1)-H(z_2)| = k|z_1-z_2| \quad (z_1, z_2 \in \mathbf{C}).$$

Itt k a *hasonlósági tényező*. A $k=1$ esetben a hasonlóságot *kongruencia*nak mondjuk.

Egy k_1 tényezőjű H_1 és egy k_2 tényezőjű H_2 hasonlóság $H_2 \circ H_1$ összetétele $k_2 k_1$ tényezőjű hasonlóság.

3.2. Át akarjuk tekinteni a sík összes lehetséges hasonlóságait. Evégből először a kongruenciákat vizsgáljuk, és közülük is mindenekelőtt azokat, amelyek a 0 pontot rögzítve tartják.

Legyen tehát H kongruencia, és $H(0)=0$. Tetszőleges $z \neq 0$ pontot véve $0<t<1$ esetén

$$|z| = |tz|+|(1-t)z|,$$

és így

$$|H(z)| = |H(tz)|+|H(z)-H(tz)|.$$

Mivel az $|a+b| \leqq |a|+|b|$ egyenlőtlenségben egyenlőség (akkor és) csak akkor áll, ha a és b egyike 0, vagy pedig hányadosuk pozitív, azért innen

$$H(tz) = t'H(z), \quad t' > 0,$$

s másrészt

$$|H(tz)| = |tz| = t \cdot |z| = t \cdot |H(z)|,$$

és így $t'=t$, azaz

(1) $$H(tz) = tH(z) \quad (0 < t < 1)$$

természetesen a $z=0$ esetben is.

Ha $t>1$, akkor (1)-ből $H(z)=\frac{1}{t}H(tz)$, ami a triviális $t=1$ esettel kiegészítve mutatja, hogy (1) minden pozitív t-re áll.

Legyen most $z_1 \neq z_2$, $z_3=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$. Ekkor

$$|z_1-z_2| = |z_1-z_3|+|z_3-z_2|,$$

tehát

$$|H(z_1)-H(z_2)| = |H(z_1)-H(z_3)|+|H(z_3)-H(z_2)|.$$

Ebből a fent mondottak szerint

$$H(z_1)-H(z_3) = t\big(H(z_3)-H(z_2)\big), \quad t > 0,$$

s mivel még $|z_1-z_3|=|z_3-z_2|$ folytán

$$|H(z_1)-H(z_3)| = |H(z_3)-H(z_2)|,$$

azért itt $t=1$, és

$$H(z_3) = H\left(\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right) = \frac{1}{2}\big(H(z_1)+H(z_2)\big).$$

Innen (1)-et figyelembe véve

(2) $$H(z_1+z_2) = H(z_1)+H(z_2),$$

(1) miatt még a $z_1=z_2$ esetben is.

A $z_2=-z_1$ választással kapjuk (2)-ből, hogy (1) érvényes a $t=-1$ esetben is, majd ezt a pozitív t esetével kombinálva és a triviális $t=0$ esettel kiegészítve adódik (1) érvénye minden valós t-re.

Ennélfogva valós x, y esetén

$$H(x+iy) = xH(1)+yH(i).$$

Legyen

$$H(1) = a+bi, \quad H(i) = c+di, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Ekkor

(3) $$a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1,$$

továbbá $|i-1|^2=2$ folytán $|H(i)-H(1)|^2=2$, azaz

$$(c-a)^2+(d-b)^2 = 2,$$

$$c^2+d^2+a^2+b^2-2ac-2bd = 2,$$

és (3) folytán

(4) $$ac+bd=0.$$

(3) miatt c és d nem tűnhet el egyszerre, s például $c\neq 0$ esetén $a=-\frac{d}{c}b$, amit (3)-ba helyettesítve

$$\left(\frac{d^2}{c^2}+1\right)b^2=1, \quad (d^2+c^2)b^2=c^2,$$

és ismét (3)-ból $b^2=c^2$. Ugyanez igaz a $c=0$ esetben is, ami $d\neq 0$ miatt (4)-ből látszik. (3)-ból ezután $a^2=d^2$.

Mármost a $b=c\neq 0$ esetben (4)-ből $a=-d$, tehát $H(i)=b-ai$, és

$$H(x+iy)=x(a+bi)+y(b-ai)=(a+bi)(x-iy),$$

viszont a $b=-c\neq 0$ esetben $a=d$, $H(i)=-b+ai$, és

$$H(x+iy)=x(a+bi)+y(-b+ai)=(a+bi)(x+iy).$$

Végül a $b=c=0$ esetben állhat $a=d$ vagy $a=-d$, és ismét e két képlet valamelyikére jutunk.

Ezek szerint a 0-t fixen tartó kongruenciák vagy a

(5) $$H(z)=mz,$$

vagy pedig a

(6) $$H(z)=m\bar{z}$$

képlettel írhatók le, ahol $m=H(1)$, tehát $|m|=1$, a felső vonás pedig a komplex konjugáltat jelöli.

3.3. Legyen most H tetszőleges kongruencia, $H(0)=p$. Mivel a $H_1(z)=z-p$ képlet is nyilván kongruenciát definiál, azért $H_1 \circ H$ is kongruencia, mégpedig nyilván a 0 pontot rögzítve tartó. Ezért vagy $H(z)-p=mz$, azaz

(1) $$H(z)=mz+p,$$

vagy pedig $H(z)-p=m\bar{z}$,

(2) $$H(z)=m\bar{z}+p.$$

Mindkét esetben $|m|=1$.

Speciálisan, ha H fixen tartja a c pontot, akkor (1)-ből $mc+p=c$, tehát $p=c-mc$, és

(3) $$H(z)=c+m(z-c),$$

viszont (2)-ből $m\bar{c}+p=c$, $p=c-m\bar{c}$, úgyhogy

(4) $$H(z)=c+m\overline{(z-c)}.$$

(1)-ből és (2)-ből látszik, hogy a $w=H(z)$ egyenletnek minden $w\in\mathbf{C}$ mellett pontosan egy megoldása van, vagyis hogy minden kongruenciának van inverze, s ez természetesen szintén kongruencia.

A kongruenciák fixpontjait, tehát a $z=H(z)$ egyenlet megoldásait vizsgálva $m=1$, $p=0$ esetén természetesen minden $z\in\mathbf{C}$ fixpont. Az (1) alakú H kongruenciák-

nak $m=1$, $p\neq 0$ esetén nyilván nincs fixpontjuk, $m\neq 1$ esetén viszont nyilván pontosan egy fixpont van; ha ez c, akkor H a (3) alakban írható.

Tekintsünk most egy (2) alakú kongruenciát, amelynek van fixpontja, mondjuk c; ekkor H a (4) képlettel adható meg. Ilyenkor c-n kívül további fixpontok is vannak, s ezek könnyen áttekinthetők.

Valóban, legyen $n\in\mathbf{C}$ olyan szám, amelyre $n^2=m$, $|n|=1$. Az $m=-1$ esetben ilyet ad $n=i$, egyéb esetekben pedig az $m=a+bi$ jelöléssel, $|m|=1$ figyelembevételével könnyen ellenőrizhető módon megfelel

$$n=\sqrt{\frac{1+a}{2}}+i\frac{b}{\sqrt{2(1+a)}}.$$

Ekkor $c+n$ is fixpont, hiszen $H(c+n)=c+n^2\bar{n}=c+n$. Viszont bármely további z fixpontot tekintve a $t=\dfrac{z-c}{n}$ jelöléssel a $z=c+tn$ összefüggésből

$$c+n^2\bar{t}\bar{n}=c+tn$$

csak a $t=\bar{t}$, azaz $t\in\mathbf{R}$ esetben teljesülhet, s akkor teljesül is. Eszerint a (4) kongruencia összes fixpontjai a $c+tn$ alakú pontok, ahol t valós és $|n|=1$, $n^2=m$. Ezek a fixpontok egy egyenest töltenek ki, s a kongruencia nem más, mint erre az egyenesre való *tükrözés*, hiszen tetszőleges $z\in\mathbf{C}$ esetén az előbbi t számot bevezetve

$$\frac{1}{2}\big(z+H(z)\big)=\frac{1}{2}(c+tn+c+n^2\bar{t}\bar{n})=c+\frac{t+\bar{t}}{2}n=d$$

fixpontja H-nak, mert a jobb oldalon n szorzója valós, továbbá a d körüli i tényezőjű

$$H_1(w)=d+i(w-d)$$

forgás z-t is, $H(z)$-t is erre az egyenesre forgatja rá:

$$H_1(z)=d+i(c+tn-d)=c+\frac{n}{2}(t+\bar{t}-it+i\bar{t}),$$

$$H_1\big(H(z)\big)=d+i(c+\bar{t}n-d)=c+\frac{n}{2}(t+\bar{t}+it-i\bar{t}),$$

hiszen a jobb oldalon a két zárójelben valós szám áll.

Az olyan kongruenciát, amelynek pontosan egy fixpontja van, *forgás*nak nevezzük; ha a fixpont c, *c körüli forgás*ról beszélünk. A fentiek szerint ezeket a (3) képlet írja le $|m|=1$, $m\neq 1$ esetén. Célszerűen forgásnak tekintjük az $m=1$ esetben adódó $H(z)=z$ képletű *identitás*t is, mert ekkor elmondhatjuk, hogy a c körüli forgások csoportot alkotnak a leképezések összetételének műveletére nézve, hiszen a

(5) $$H_1(z)=c+m_1(z-c),\quad H_2(z)=c+m_2(z-c)$$

képletekből

(6) $$H_2\big(H_1(z)\big)=c+m_2m_1(z-c),$$

és m_1-gyel és m_2-vel együtt $m_1 m_2$ abszolút értéke is 1. A csoport semleges eleme éppen az identitás, s az (5) alatti H_1 inverze az $m_2 = \frac{1}{m_1}$ választással adódó H_2. Minthogy $m_1 \neq m_2$ esetén $H_1(z+1) \neq H_2(z+1)$, elmondhatjuk, hogy a c körüli forgások csoportja izomorf az 1 abszolút értékű komplex számok szorzásműveletre vonatkozó csoportjával.

A már előbb említett $H(z) = z+p$ alakú kongruenciáknak evidens tulajdonsága, hogy bármely pont távolsága a saját képétől ugyanakkora: $|H(z)-z| = |p|$. Más ilyen tulajdonságú kongruencia nincs is. Valóban, a szokott $m = a+bi$ jelölést bevezetve (a, b valós), és valós z-ket tekintve akár (1), akár (2) alakú H esetén

$$|H(z)-z|^2 = |(m-1)z+p|^2 = (a-1)^2 z^2 + b^2 z^2 + uz + v,$$

z-től független u-val és v-vel, és ez csak akkor lehet z-től független, ha $a-1 = b = 0$, azaz ha $m = 1$. A (2) esetben még a $z = yi$ ($y \in \mathbf{R}$) alakú pontokat is vizsgálva és $m = 1$-et figyelembe véve

$$|H(z)-z|^2 = |-yi+p-yi|^2 = 4y^2 + u_1 y + v_1,$$

y-tól független u_1, v_1 számokkal, ami nyilván nem lehet független y értékétől.

A most említett tulajdonság tehát jellemzi a $H(z) = z+p$ alakú kongruenciákat. Ezeket *eltolás*oknak nevezzük. Csoportot alkotnak ezek is, hiszen

(7) $$H_1(z) = z+p_1, \quad H_2(z) = z+p_2$$

esetén

(8) $$H_2(H_1(z)) = z+p_1+p_2,$$

a semleges elem a $p = 0$ esetben adódó identitás, és H_1 inverze a $p_2 = -p_1$ választással adódó H_2.

Ha H tetszőleges kongruencia, és $c \in \mathbf{C}$ is tetszőleges, akkor a $H_c(z) = z+c-H(c)$ eltolásra nyilván igaz, hogy $F = H_c \circ H$ a c pontot fixen tartó kongruencia, úgyhogy

$$H = H_c^{-1} \circ F$$

írható. Így minden kongruencia előállítható egy c-t fixen tartó kongruenciának és egy eltolásnak egymásutánjából. Világos, hogy ha H (1) alakú, akkor F is ilyen alakú, ha pedig H (2) alakú, akkor ugyanez áll F-re is. Eszerint az, hogy a c-t fixen tartó leképezés forgás vagy tükrözés, nem függ c választásától. Az (1) alakú kongruenciákat tehát az jellemzi, hogy előállíthatók egy forgás és egy eltolás összetételéből; ez valóban jellemzi őket, mert a forgások és az eltolások (1) alakúak, és világos, hogy az (1) alakú kongruenciák is csoportot alkotnak, hiszen

(9) $$H_1(z) = m_1 z+p_1, \quad H_2(z) = m_2 z+p_2$$

esetén

(10) $$H_2(H_1(z)) = m_2 m_1 z + m_2 p_1 + p_2,$$

a semleges elem az identitás, és H_1 inverze az $m_2 = \frac{1}{m_1}$, $p_2 = -m_2 p_1$ választással adódik. Ezeket az (1) alakú kongruenciákat *mozgás*oknak nevezzük.

3.4. Most már áttekinthetjük a sík összes hasonlóságait. Vegyük először is észre, hogy $c \in \mathbf{C}$, $k > 0$ esetén k tényezőjű hasonlóságot definiál a

(1) $$H(z) = c+k(z-c)$$

képlet. Az így nyert hasonlóságok esetében bármely $z \neq c$ pont képe ugyanazon a c-ből kiinduló félegyenesen van, mint maga z, és ez a tulajdonság a k tényezőjű hasonlóságok között jellemzi is az (1) alatti H-t. Az ilyen hasonlóságokat *c középpontú homotéciá*knak mondjuk. (A homotécia szó használatos ennél általánosabb értelemben is.)

Ha most H tetszőleges k tényezőjű hasonlóság, akkor bármely $c \in \mathbf{C}$ pontot választva és H után egy c középpontú, $\frac{1}{k}$ tényezőjű homotéciát végrehajtva nyilván kongruencia keletkezik. Ezért vagy

$$c+\big(H(z)-c\big)\frac{1}{k} = mz+p,$$

vagy pedig

$$c+\big(H(z)-c\big)\frac{1}{k} = m\bar{z}+p,$$

ahol $|m|=1$. A két esetnek megfelelően vagy

$$H(z) = kmz+q, \tag{2}$$

vagy pedig

$$H(z) = km\bar{z}+q \tag{3}$$

alakú előállításhoz jutunk.

Eszerint minden H hasonlóság vagy a (2), vagy a (3) alakban írható, ahol $|m|=1$, és $k>0$ a hasonlóság tényezője. Úgy is mondhatjuk, hogy a hasonlóságokat a 3.3. (1) vagy 3.3. (2) alakú képletek adják meg, csak most $m \neq 0$ tetszőleges, és $|m|$ adja a hasonlóság tényezőjét.

Ebből először is látszik, hogy minden hasonlóságnak is van inverze, a hasonlóságok is csoportot alkotnak. Látszik másrészt, hogy bármely H hasonlósághoz található tetszőlegesen választott $c \in \mathbf{C}$ mellett olyan c középpontú H_0 homotécia, hogy $H_0 \circ H = H_1$ kongruencia, azaz hogy

$$H = H_0^{-1} \circ H_1, \tag{4}$$

ahol H_1 kongruencia, H_0^{-1} pedig természetesen H_0-lal együtt c középpontú homotécia. Vegyük észre, hogy H-t (2) vagy (3) alakú képlet adja meg attól függően, hogy H_1 mozgás-e vagy nem, és H-nak ez a tulajdonsága a c pont választásától független, hiszen ha minden z-re

$$km_1 z+q_1 = km_2 \bar{z}+q_2,$$

akkor a $z=0$ helyettesítéssel $q_1=q_2$, majd $z=1$-ből $m_1=m_2$, s ez a $z=i$ esetben ellentmondásra vezet. Így a hasonlóságok között vannak olyanok, amelyek egy mozgás és egy középpontos homotécia összetételével állíthatók elő, s olyanok, amelyeknek nincs ilyen előállításuk; az előbbiek a (2) alakúakkal azonosak, és a 3.3 (9) és (10) képletek mintájára látható, hogy ezek külön is csoportot alkotnak.

3.5. Ha φ görbe, H pedig hasonlóság, akkor $H \circ \varphi$ is görbe. Ha $\varphi \sim \psi$, akkor $H \circ \varphi \sim H \circ \psi$. Nyilván $(H \circ \varphi)^* = H \circ \varphi^*$, és ha $\varphi \vee \psi$ létezik, akkor

$$H \circ (\varphi \vee \psi) = (H \circ \varphi) \vee (H \circ \psi).$$

Minthogy H-nak van inverze, φ-vel együtt $H\circ\varphi$ is egyszerű, ill. zárt, ill. egyszerű zárt görbe. Ha φ rektifikálható, akkor $H\circ\varphi$ is ilyen, mégpedig

$$s(H\circ\varphi) = ks(\varphi),$$

ahol k a H hasonlóság tényezője.

3.6. Legyen most K a c középpontú, r sugarú körvonal, H pedig a c középpontú, k tényezőjű homotécia. Ekkor K képe a c középpontú, kr sugarú körvonal, és K csomópontjait H a $H(K)$ körvonal megfelelő csomópontjaiba viszi át.

Ha φ K-n fekvő 2.8. (a), (b), (c) vagy (d) típusú elemi ív vagy alapív, akkor $H\circ\varphi$ ekvivalens egy ugyanilyen típusú $H(K)$-n fekvő elemi ívvel vagy alapívvel; pl. (a) típusú $\varphi\colon [u, v]\to\mathbf{C}$ esetén

$$H(\varphi(t)) = (a-kt)+i\left(b+k\sqrt{r^2-t^2}\right)$$

következtében $H\circ\varphi=\psi\circ\omega$, ahol $\psi\colon[ku, kv]\to\mathbf{C}$ a

$$\psi(t) = (a-t)+i\left(b+\sqrt{(kr)^2-t^2}\right)$$

képlettel, $\omega\colon[u, v]\to[ku, kv]$ pedig az $\omega(t)=kt$ képlettel van megadva. Ebből kiindulva hasonló állítható a K-n fekvő negatív elemi ívek, negatív alapívek, körpályák, speciálisan pozitív vagy negatív körpályák H-val alkotott összetételeiről is; mindezek ugyanilyen típusú $H(K)$-n fekvő görbékkel lesznek ekvivalensek.

4. Pályaszög. Legyen K továbbra is a $c=a+bi$ középpontú, r sugarú körvonal.

4.1. Egy K-n fekvő elemi ív kezdő- és végpontjának megadásával egyértelműen meg van határozva. Valóban, a φ elemi ív kezdőpontját p-vel, végpontját q-val jelölve, φ akkor és csak akkor lesz például 2.8 (a) típusú pozitív elemi ív, ha az $r_0=\frac{r}{\sqrt{2}}$ jelöléssel

$$-r_0 \leqq \operatorname{Re}(q-c) < \operatorname{Re}(p-c) \leqq r_0,$$

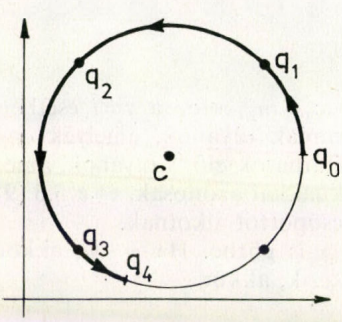
továbbá

$$\operatorname{Im}(p-c) > 0, \quad \operatorname{Im}(q-c) > 0,$$

s ha már tudjuk, hogy φ ilyen típusú, akkor

$$u = a-\operatorname{Re} p, \quad v = a-\operatorname{Re} q.$$

Így a p kezdő-, q végpontú K-n fekvő elemi ív jelölésére egyértelműen használható a $\varphi=(pq)$ szimbólum. Hasonlóan egy K-n fekvő körpálya $\varphi_1\vee\varphi_2\vee\ldots\vee\varphi_n$ előállítását jelölhetjük röviden a $(p_0p_1p_2\ldots p_n)$ szimbólummal, ahol $\varphi_k=(p_{k-1}p_k)$ $(k=1, \ldots, n)$.



3. ábra

Látszik a fenti meggondolásból az is, hogy minden pozitív (negatív) elemi ív részgörbéje egy egyértelműen meghatározott pozitív (negatív) alapívnek; azt, hogy melyiknek, megszabja az elemi ív képéhez tartozó s a csomópontoktól különböző bármely pontnak a megadása, ugyanis világos, hogy K-nak bármely a csomópontoktól különböző pontja pontosan egy pozitív (negatív) alapív képéhez tartozik hozzá.

4.2. Bármely K-n fekvő pozitív (negatív) körpályának pontosan egy olyan $(q_0q_1\ldots q_m)$ előállí-

tása van, amelyben $(q_{k-1}q_k)$ pozitív (negatív) elemi ív minden k-ra, és $1 \leqq k \leqq m-1$ esetén q_k csomópont (úgyhogy $2 \leqq k \leqq m-1$ esetén $(q_{k-1}q_k)$ pozitív (negatív) alapív).

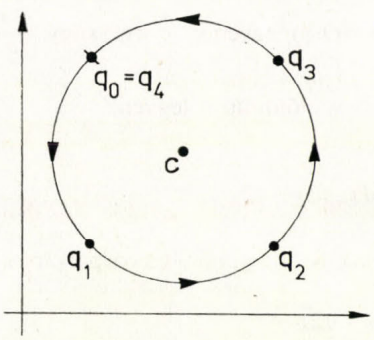
Legyen például a φ pozitív körpályának $(p_0p_1 \ldots p_n)$ olyan előállítása, amelyben minden $(p_{k-1}p_k)$ pozitív elemi ív. Az $n=1$ esetben $m=1$, $q_0=p_0$, $q_1=p_1$ nyilván megfelel. Ha már tudjuk, hogy a $(p_0p_1 \ldots p_{n-1})$ pozitív körpályának létezik az állításban leírt tulajdonságú $(q_0q_1 \ldots q_m)$ előállítása, akkor először tegyük fel, hogy q_m csomópont; ekkor a $q_{m+1}=p_n$ jelöléssel $(q_0 \ldots q_mq_{m+1})$ nyilván a kívánt típusú előállítása φ-nek. Ha viszont q_m nem csomópont, akkor $p_{n-1}=q_m$ folytán $(p_{n-1}p_n)$ ugyanannak a pozitív alapívnek részgörbéje, mint $(q_{m-1}q_m)$, és így $(q_{m-1}q_m) \vee (p_{n-1}p_n)$ is pozitív elemi ív; ezért ekkor $(q_0 \ldots q_{m-1}p_n)$ a kívánt tulajdonságú előállítása φ-nek.

Az állított unicitás abból adódik, hogy egy elemi ív képe nem tartalmazhat más csomópontot, mint (legfeljebb) az ív kezdő- és végpontját. Így q_0 és q_m természetesen φ kezdő- és végpontjával azonos, $q_1, \ldots, q_{m-1}$ pedig rendre azonosak a φ befutásakor q_0 után érintett csomópontokkal, a befutás sorrendjében.

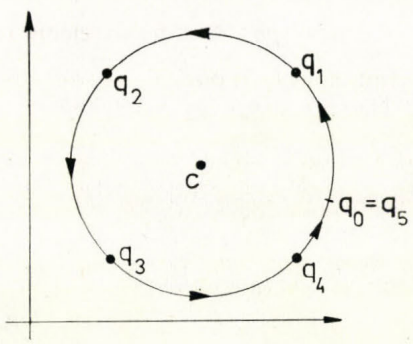
Egy φ pozitív (negatív) körpálya most tárgyalt típusú előállítását *kanonikus előállítás*nak mondjuk.

4.3. A φ pozitív (negatív) körpályát pozitív (negatív) *egyszerű zárt körpálya*nak mondjuk, ha φ egyszerű zárt görbe. Legyen φ pozitív egyszerű zárt körpálya, kanonikus előállítása $(q_0 \ldots q_m)$.

Ha q_0 csomópont, akkor q_1 annak az egyetlen pozitív alapívnek a végpontja, amelynek kezdőpontja q_0, s hasonlóan egyértelműen adódik q_2 és q_3; ha q_4 nem volna csomópont, akkor $m=4$ volna, és φ nem lehetne zárt görbe. Így ekkor q_4 csomópont, mégpedig nyilván $q_4=q_0$, és az előállítás $(q_0 \ldots q_4)$.



4. ábra



5. ábra

Ha q_0 nem csomópont, akkor q_1 annak a pozitív alapívnek a végpontja, amelynek képéhez q_0 tartozik, majd egyértelműen adódik q_2, q_3, q_4; $m>5$ esetén $q_5=q_1$ adódnék, és φ nem volna egyszerű zárt görbe, úgyhogy $m=5$, és természetesen $q_5=q_0$. Most tehát a kanonikus előállítás $(q_0 \ldots q_5)$ alakú.

Megfordítva, világos hogy ha $q_0=q_4$ csomópont, akkor létezik $(q_0 \ldots q_4)$ kanonikus előállítású pozitív körpálya, és ez pozitív egyszerű zárt körpálya. Ugyanez a helyzet, ha $q_0=q_5$ nem csomópont, a $(q_0 \ldots q_5)$ kanonikus előállítással.

Ugyanilyen meggondolással látszik, hogy ha a $(q_0 \ldots q_m)$ kanonikus előállítású pozitív körpálya zárt görbe (ilyenkor pozitív *zárt körpálya*ról beszélünk), akkor $m=4n$ vagy $m=4n+1$ aszerint, hogy q_0 csomópont-e vagy nem.

Természetesen ugyanilyen megállapításokat lehet tenni a negatív egyszerű zárt, ill. negatív zárt körpályákról (az utóbbiakon olyan negatív körpályákat értve, amelyek zárt görbék).

4.4. Az elemi ívek megadásában szereplő φ leképezések folytonosan differenciálhatók, így minden elemi ív, s akkor minden körpálya is rektifikálható. Minden K-n fekvő alapív hosszúsága ugyanakkora, ami abból látszik, hogy 2.8. képletei szerint mindegyiknek hosszúságát az

$$\int_{-r_0}^{r_0} \frac{r}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt$$

integrál adja meg, de abból is, hogy a $H(z)=c+i(z-c)$ képlettel megadott forgás az (a) típusú pozitív alapívet a (d) típusúba, emezt a (b) típusúba, ezt pedig a (c) típusúba viszi át (és a (c) típusút az (a) típusúba).

Minden K-n fekvő egyszerű zárt körpálya hosszúsága ugyanakkora, mégpedig az alapívek hosszúságának négyszerese. Ez evidens akkor, ha a körpálya kanonikus előállítása $(q_0 \ldots q_4)$ alakú, de igaz akkor is, ha ez az előállítás $(q_0 \ldots q_5)$, mert ilyenkor $(q_4q_5) \vee (q_0q_1)=(q_4q_1)$ alapív. A K-n fekvő egyszerű zárt körpályák hosszúságát K *kerület*ének nevezzük, és $\pi(K)$-val jelöljük.

Ha K_1 a c_1 középpontú, r sugarú körvonal, akkor $\pi(K_1)=\pi(K)$ hiszen a $H(z)=z+c_1-c$ eltolás a K-n fekvő alapíveket a K_1-en fekvő alapívekbe viszi át. Így $\pi(K)$ csak r-től függ. Másrészt a $H(z)=c+r(z-c)$ homotécia a c középpontú, egységnyi sugarú K_0 körvonal alapíveit K alapíveibe viszi át, úgyhogy a $\pi(K_0)=2\pi$ jelölést bevezetve $\pi(K)=2\pi r$.

4.5. Ha (pq) K-n fekvő elemi ív, legyen $\alpha(pq)$ egyenlő $\frac{s}{r}$-rel vagy $\frac{-s}{r}$-rel aszerint, hogy (pq) pozitív vagy negatív; itt s jelöli (pq) hosszúságát.

Ha $(p_0p_1 \ldots p_n)$ egy K-n fekvő körpályának egy előállítása, legyen

$$\alpha(p_0 \ldots p_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(p_{k-1}p_k).$$

Ha $\varphi_1=(p_0 \ldots p_n)$ és $\varphi_2=(q_0 \ldots q_m)$ ugyanannak a $\varphi:[u_0, v_0] \to \mathbf{C}$ körpályának két előállítása, akkor

$$\alpha(p_0 \ldots p_n) = \alpha(q_0 \ldots q_m).$$

Valóban, legyen $\varphi_1:[u_1, v_1] \to \mathbf{C}$, $\varphi_2:[u_2, v_2] \to \mathbf{C}$, és $\omega_1:[u_0, v_0] \to [u_1, v_1]$, $\omega_2:[u_0, v_0] \to [u_2, v_2]$ az a két szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény, amelyre $\varphi=\varphi_1 \circ \omega_1=\varphi_2 \circ \omega_2$. Tekintsük azokat az

$$u_1 = t_0' < t_1' < \ldots < t_n' = v_1, \quad u_2 = t_0'' < t_1'' < \ldots < t_m'' = v_2$$

paraméterértékeket, amelyekre $\varphi_1(t_k')=p_k$, $\varphi_2(t_k'')=q_k$. Tekintsük az $[u_0, v_0]$ intervallumban az összes $\omega_1^{-1}(t_k')$ és $\omega_2^{-1}(t_k'')$ alakú helyeket, és jelöljük őket növekvő sorrendben $u_0=t_0<t_1<\ldots<t_l=v_0$-val. Vezessük még be az $r_j=\varphi(t_j)$ jelölést is.

Legyen $1 \leqq k \leqq n$ rögzített, és $\omega_1^{-1}(t_{k-1}')=t_{j_1}$, $\omega_1^{-1}(t_k')=t_{j_2}$. Ekkor $\varphi|[t_{j_1}, t_{j_2}]$ a $\varphi|[t_{j-1}, t_j]$ görbék egymáshoz fűzésével áll elő, ahol $j=j_1+1, \ldots, j_2$. Ezekkel rendre ekvivalens ω_1 megfelelő megszorításainak közvetítésével $\varphi_1|[t_{k-1}', t_k']$, ill. $\varphi_1|[\omega_1(t_{j-1}), \omega_1(t_j)]$, $\varphi_1|[t_{k-1}', t_k']$ viszont ekvivalens a (p_{k-1}, p_k) elemi ívvel, úgy-

hogy a $\varphi_1|[\omega_1(t_{j-1}), \omega_1(t_j)]$ görbék ennek az elemi ívnek részgörbéivel ekvivalensek, tehát a (p_{k-1}, p_k)-éval megegyező előjelű elemi ívekkel, amelyek kezdő- és végpontjaik révén (r_{j-1}, r_j) alakúnak bizonyulnak. Ebből mindenekelőtt látszik, hogy

$$\alpha(p_{k-1}, p_k) = \sum_{j=j_1+1}^{j_2} \alpha(r_{j-1}, r_j),$$

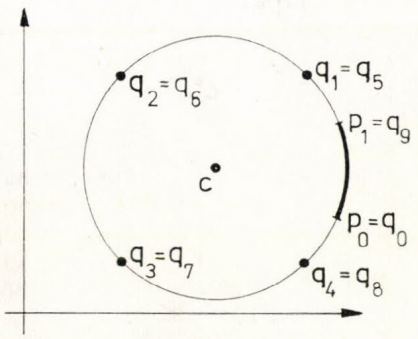
másrészt eredményünket sorban k minden szóbajövő értékére alkalmazva kitűnik, hogy $(r_0 \dots r_l)$ is egy előállítása φ-nek, és $\alpha(p_0 \dots p_n) = \alpha(r_0 \dots r_l)$. Ugyanilyen meggondolás mutatja, hogy $\alpha(q_0 \dots q_m) = \alpha(r_0 \dots r_l)$.

4.5. Az előző eredményre támaszkodva most már megállapodhatunk abban, hogy egy K-n fekvő körpálya *pályaszög*ének nevezzük az $\alpha(p_0 \dots p_n)$ számot, ahol $(p_0 \dots p_n)$ a körpálya tetszőleges előállítása. A φ körpálya pályaszögét $\alpha(\varphi)$-vel jelöljük.

A definícióból látszik, hogy pozitív (negatív) körpálya pályaszöge pozitív (negatív). Nyilvánvalóan

$$\alpha(\varphi^*) = -\alpha(\varphi), \quad \alpha(\varphi \vee \psi) = \alpha(\varphi) + \alpha(\psi),$$

ha $\varphi \vee \psi$ létezik. Minden pozitív egyszerű zárt körpálya pályaszöge 2π, a pozitív zárt körpályáké pedig $2\pi n$ alakú, ahol $n \in \mathbf{N}$. A negatív egyszerű zárt körpályák, ill negatív zárt körpályák pályaszögére ugyanígy -2π, ill. $-2\pi n$ adódik.



6. ábra

Definiáljuk még a nullapálya pályaszögét is, 0-val egyenlőnek.

4.6. Ha két K-n fekvő körpálya közös kezdőpontból közös végpontba vezet, akkor pályaszögeik különbsége $2k\pi$, ahol k egész szám.

Legyen először a tekintett két körpálya pozitív, kanonikus előállításuk $(p_0 \dots p_n)$ és $(q_0 \dots q_m)$, s például $n \leqq m$. Ha $n=1$, tehát $(p_0 p_1)$ elemi ív, és p_0 nem csomópont, akkor $(q_{m-1} q_1)$ nyilván az az alapív, amelynek $(p_0 p_1)$ részgörbéje. Így a $(q_0 \dots q_m)$ előállítás helyettesíthető a $(q_0 \dots q_{m-1} p_0 p_1)$ előállítással, tehát

$$\alpha(q_0 \dots q_m) = \alpha(q_0 \dots q_{m-1} p_0) + \alpha(p_0 p_1),$$

és itt a jobb oldal első tagja $2k\pi$ alakú, hiszen $(q_0 \dots q_{m-1} p_0)$ (pozitív) zárt körpálya. Hasonló, de egyszerűbb a meggondolás, ha p_0 csomópont; feltettük természetesen, hogy $m>1$, mert az $m=1$ esetben nincs mit bizonyítani (ekkor $k=0$).

Ha az állítás $n>1$ mellett $(n-1)$-re már igazolva van, akkor csak azt kell észrevenni, hogy ilyenkor $p_1 = q_1$ (ti. mindkettő a $(p_0 p_1)$-et részgörbeként tartalmazó alapív végpontja), tehát a feltevés szerint érvényes

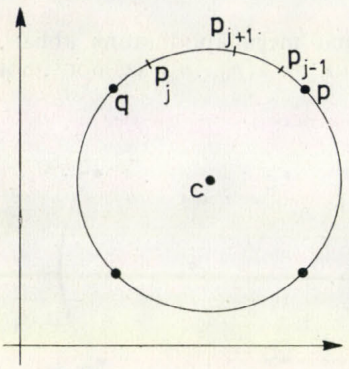
$$\alpha(p_1 \dots p_n) = \alpha(q_1 \dots q_m) + 2k\pi$$

egyenlőségből $\alpha(p_0 p_1)$ hozzáadásával nyerjük az állítást.

Ugyanígy okoskodhatunk, ha két negatív körpályáról van szó. Ha $(p_0 \dots p_n)$ pozitív, $(q_0 \dots q_m)$ negatív körpálya, és $p_0 = q_0$, $p_n = q_m$, akkor $(p_0 \dots p_n q_{m-1} \dots q_0)$ pozitív zárt körpálya, tehát

$$2k\pi = \alpha(p_0 \dots p_n q_{m-1} \dots q_0) = \alpha(p_0 \dots p_n) + \alpha(q_m \dots q_0) = \alpha(p_0 \dots p_n) - \alpha(q_0 \dots q_m).$$

Ezekután elég azt belátni, hogy minden körpályához található ugyanolyan kezdő- és végpontú s ugyanakkora pályaszögű pozitív vagy negatív körpálya. Ez viszont abból következik, hogy ha egy körpálya $(p_0 \ldots p_n)$ előállításában fellépnek pozitív elemi ívek is, negatív elemi ívek is, akkor a $p_1, \ldots, p_{n-1}$ pontok valamelyikét törölni lehet a pályaszög megváltoztatása nélkül. Ennek belátására pedig csak olyan j-t kell keresni, hogy $(p_{j-1}p_j)$ és (p_jp_{j+1}) egyike pozitív, másika negatív legyen, és észrevenni, hogy ilyenkor az első elemi ív egy (pq) alapívnek, a második pedig (qp)-nek részgörbéje, úgyhogy $(p_{j-1}p_{j+1})$ is elemi ív, mégpedig a pozitív és negatív körpályákra már igazolt eredményünk szerint



7. ábra

$$\alpha(p_{j-1}p_{j+1}) = \alpha(p_{j-1}p_j)+\alpha(p_jp_{j+1}).$$

4.7. Az előző állítás megfordításaként könnyű belátni, hogy ha a közös kezdőpontú φ és ψ körpályákra

$$\alpha(\varphi)-\alpha(\psi) = 2k\pi, \quad k \text{ egész},$$

akkor φ-nek és ψ-nek végpontja is közös. Valóban, ha ezek különböző p és q pontok volnának, akkor attól függően, hogy p és q mely pozitív alapív képéhez tartozik hozzá, más-más módon, de legfeljebb öt elemi ív felhasználásával készíthető p-ből q-ba vezető pozitív χ körpálya, amely egyszerű görbe, és valódi részgörbéje egy p kezdőpontú pozitív egyszerű zárt körpályának. Így $0<\alpha(\chi)<2\pi$, viszont $\varphi \vee \chi$ kezdő- és végpontja megegyezik ψ kezdő- és végpontjával, úgyhogy $\alpha(\psi)=\alpha(\varphi)+\alpha(\chi)+2n\pi$, n egész, ami a feltevésnek ellentmond.

Eredményünk, akárcsak az előző, igaz marad akkor is, ha a tekintett körpályák egyike nullapálya.

4.8. Az előzők kiegészíthetők azzal a megjegyzéssel, hogy ha $p \in K$ és $\alpha \in \mathbf{R}$ tetszőleges, akkor van p kezdőpontú, α pályaszögű körpálya. Csakugyan, az előző okoskodás mintájára készíthetünk p kezdőpontú pozitív vagy negatív egyszerű zárt körpályát, majd ennek ismételt önmagához fűzésével olyan p kezdőpontú körpályákat, amelyeknek pályaszöge $2k\pi$, ahol k tetszőleges pozitív vagy negatív egész szám. Ha $2k\pi$ előjele megegyezik α előjelével, és $|2k\pi| > |\alpha|$, akkor a $2k\pi$ pályaszögű körpálya alkalmas részgörbéje meg fog felelni a célnak, tekintettel arra, hogy a részgörbe hosszúsága folytonosan függ a végpont paraméterétől, és így ugyanez mondható a részgörbe pályaszögéről is. Az $\alpha=0$ esetet a nullapálya intézi el.

4.9. Azt akarjuk megvizsgálni, mit mondhatunk $H\circ\varphi$ pályaszögéről, ha H hasonlóság. Az világos, hogy $H(K)$ $H(c)$ középpontú, kr sugarú körvonal, ahol k jelöli a H hasonlóság tényezőjét, és így azt várjuk, hogy ha φ K-n fekvő körpálya, akkor $H\circ\varphi$ viszont $H(K)$-n fekvő körpálya lesz. Ez azonban csak egyes speciális esetekben triviális, az általános eset vizsgálata előkészítést igényel.

Vegyük észre először is, hogy ha a 2.8.-ban definiált pozitív elemi ívekben szereplő φ-ket

$$\varphi(t) = c+x(t)+iy(t) \tag{1}$$

alakban írjuk, ahol $x(t)$ és $y(t)$ valós, akkor t-nek minden szóba jövő értékére

$$-x'(t)y(t) > 0, \quad x(t)y'(t) \geqq 0, \tag{2}$$

ha (a) vagy (b) típusú az elemi ív,

$$x(t)y'(t) > 0, \qquad -x'(t)y(t) \geqq 0, \tag{3}$$

ha (c) vagy (d) típusú elemi ívről van szó. Negatív elemi ívek esetén természetesen fordított irányú egyenlőtlenségek állnak. (2) és (3) alapján azt is mondhatjuk, hogy bármely pozitív elemi ív pontjaiban

$$x(t)y'(t)-x'(t)y(t) > 0, \tag{4}$$

negatív elemi ív pontjaiban pedig ugyanez a kifejezés negatív.

Megfordítva tegyük fel, hogy $\varphi:[u, v]\to K$ folytonosan differenciálható, és minden $t\in[u, v]$ helyen teljesül (4). Ekkor e t helyek mindegyikén fennáll vagy (2), vagy (3) első egyenlőtlensége, s akkor x' és y' folytonossága miatt ugyanez az egyenlőtlenség még t-nek egy környezetében is teljesül. A Borel-féle befedési tételt felhasználva, megadható ezért $[u, v]$-nek olyan

$$u = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = v$$

felosztása, hogy mindegyik $[t_{k-1}, t_k]$-ban vagy (2) első egyenlőtlensége, vagy (3) első egyenlőtlensége mindenütt teljesül. Ebből viszont következik, hogy $\varphi|[t_{k-1}, t_k]$ pozitív körpálya minden k-ra, s akkor ugyanez mondható magáról φ-ről is.

Valóban, ha pl. (2) első egyenlőtlensége fennáll $t\in[u', v']$ esetén, akkor $y(t)$ állandó előjelű $[u', v']$-ben, legyen például $y(t)>0$, úgyhogy $x'(t)<0$, és $x(t)$ szigorúan monoton fogyó. Ennek megfelelően $[u', v']$ legfeljebb három részre osztható, amelyekben $x(t)\geqq r_0$, illetve $r_0\geqq x(t)\geqq -r_0$, végül $x(t)\leqq -r_0$. Világos, hogy φ-nek ezek közül a középsőre való megszorítása ekvivalens egy (a) típusú pozitív elemi ívvel, az elsőre való megszorítása egy (c) típusúval, a harmadikra való megszorítása pedig egy (d) típusúval. Hasonlóan intézhető el a többi szóbajövő eset.

Ha ugyanilyen feltételek mellett a (4)-gyel ellentétes irányú egyenlőtlenség teljesül, akkor természetesen φ negatív körpályának adódik.

Vegyük észre, hogy a (4) egyenlőtlenség így is írható:

$$\operatorname{Im}\left(\overline{(\varphi(t)-c)}\,\varphi'(t)\right) > 0. \tag{5}$$

4.10. Legyen most egy H hasonlóság

$$H(z) = mz+p \quad (m \neq 0)$$

alakú, és φ K-n fekvő pozitív elemi ív. Ekkor $H\circ\varphi$ $K(H)$-ba vezető folytonosan differenciálható leképezés, és minden pontjában teljesül a 4.9. (5)-nek megfelelő egyenlőtlenség:

$$H(\varphi(t))-H(c) = m\varphi(t)+p-(mc+p) = m(\varphi(t)-c),$$

tehát

$$\operatorname{Im}\left(\overline{m(\varphi(t)-c)}\,m\varphi'(t)\right) = |m|^2 \operatorname{Im}\left(\overline{(\varphi(t)-c)}\,\varphi'(t)\right) > 0.$$

Ebben az esetben tehát minden pozitív elemi ív, s akkor minden pozitív körpálya is H alkalmazásával $H(K)$-n fekvő pozitív körpályába megy át. Hasonlóan adódik, hogy ha φ K-n fekvő negatív körpálya, akkor $H\circ\varphi$ negatív körpálya lesz $H(K)$-n.

Ha viszont a H hasonlóság

$$H(z) = m\bar{z}+p$$

alakú, akkor ugyanilyen számolás azt mutatja, hogy pozitív elemi ívből, s akkor pozitív körpályából is negatív körpálya, negatív körpályából pozitív körpálya keletkezik.

Minthogy egy K-n fekvő φ pozitív körpálya pályaszöge nyilván $\frac{1}{r}s(\varphi)$, egy negtívé pedig $-\frac{1}{r}s(\varphi)$, továbbá $s(H\circ\varphi)=|m|s(\varphi)$, és $H(K)$ sugara $|m|r$, azért kimondhatjuk, hogy $H\circ\varphi$ pályaszöge egyenlő φ-vel vagy annak (-1)-szeresével, aszerint hogy H egy középpontos homotécia és egy mozgás összetétele, vagy pedig nem ilyen alakú. Speciálisan a mozgások megőrzik, a tükrözések ellenkezőre változtatják a pályaszöget.

5. Trigonometrikus függvények. Az előző eredmények felhasználásával a trigonometrikus függvények bevezetése könnyen elvégezhető.

5.1. Legyen K a 0 pont körüli 1 sugarú körvonal. Jelöljük $e(\alpha)$-val az 1 kezdőpontú, α pályaszögű K-n fekvő körpályák közös végpontját, s legyen definícióképpen

$$\cos\alpha = \operatorname{Re} e(\alpha), \quad \sin\alpha = \operatorname{Im} e(\alpha), \tag{1}$$

tehát

$$e(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha. \tag{2}$$

Ebből a cos és sin függvények alaptulajdonságai, a pályaszögekről szóló eredmények felhasználásával, a szokásos módon könnyen kiadódnak. Példaképpen igazoljuk az addiciós képleteket.

Legyen $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$ tetszőleges, φ és ψ egy-egy 1 kezdőpontú, α ill. β pályaszögű körpálya K-n. Tekintsük még a

$$H(z) = e(\alpha)z$$

képlettel definiált H forgást. Ekkor $H\circ\psi$ pályaszöge is β, és ez a $H(1)=e(\alpha)$ pontból a $H(e(\beta))=e(\alpha)e(\beta)$ pontba vezető körpálya, úgyhogy képezhető $\varphi\vee(H\circ\psi)$, és az 1 pontból az $e(\alpha)e(\beta)$ pontba vezet. Ennek a körpályának pályaszöge a mondottak szerint $\alpha+\beta$, azaz

$$e(\alpha+\beta) = e(\alpha)e(\beta) = (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) =$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta).$$

A jobb oldalon az első zárójel adja $\cos(\alpha+\beta)$, a második $\sin(\alpha+\beta)$ értékét.

5.2. Gyorsabban is célhoz juthatunk, ha valamivel többet használunk fel a komplex analízis apparátusából.

Definiáljuk először is az ismert hatványsorral az e^z komplex változós függvényt. A sor minden $z\in\mathbf{C}$ helyen abszolút konvergál, ezért a sorok szorzástétele alkalmazható, és könnyű számolással az

$$e^a e^b = e^{a+b} \tag{1}$$

eredményhez vezet.

Legyen most t valós, és

$$\varphi(t) = e^{it}.$$

A jobb oldal sor alakjából kiolvasható, hogy $\varphi(t)$ konjugáltja e^{-it}, és így (1) felhasználásával $|\varphi(t)|=1$. Ugyancsak a definiáló sorból olvasható ki, hogy $\varphi'(t)=i\,e^{it}$. (Ehhez nincs szükség a komplex változós derivált fogalmára, elég e^{it} sorában a valós

és képzetes részt külön tagonként deriválni.) Ebből látszik, hogy $\varphi|[u, v]$ K-n fekvő pozitív körpálya, $\bar{\varphi}|[u, v]$ pedig negatív körpálya, mégpedig a legegyszerűbben úgy, hogy észrevesszük, hogy a 4.9. (5) képlet bal oldala $c=0$ esetén az $\operatorname{Im}(\overline{\varphi(t)}\varphi'(t))$ kifejezéssel egyenlő, és ez esetünkben 1, ill. -1.

Az ívhosszúság integrálalakját használva most már látszik, hogy $\alpha>0$ esetén $s(\varphi|[0, \alpha])=s(\bar{\varphi}|[0, \alpha])=\alpha$, és így e két körpálya közül az elsőnek pályaszöge α, a másodiké $-\alpha$, s mindkettőnek kezdőpontja $e^0=1$. Ezért az 5.1.-ben bevezetett jelöléssel

$$e(\alpha) = e^{i\alpha} \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Innen mindjárt kiolvasható $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ hatványsoralakja, és minden szükséges tulajdonsága is könnyen kiadódik, az addiciós képletek például (1) segítségével.

Az itt leírt felépítésnek az 5.1. alattival szemben az a fő előnye, hogy a cos és sin függvény differenciálhatósága egyszerre kiadódik, és így nincsen szükség a

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

egyenlőtlenségnek geometriai segédeszközöket lényegesen igénybe vevő levezetésére.

A cos és sin függvény (ill. a második felépítésben az e^z függvény) periodicitása természetesen abból adódik, hogy az 1 pontból kiinduló s egymásétól $2k\pi$-vel eltérő pályaszögű körpályák végpontja közös.

6. Geometriai szögfogalmak. Azt akarjuk vázolni, hogyan lehet a geometriában használatos szögfogalmakhoz eljutni a pályaszög fogalmából kiindulva.

6.1. Legyen ismét $c \in \mathbf{C}$. Az összes c körüli körvonalakon fekvő körpályákat együtt *c körüli körpályák*nak mondjuk, s közöttük újabb (a görbék körében definiált ekvivalenciarelációnál durvább) ekvivalenciarelációt vezethetünk be, ha a c körüli φ és ψ körpályát olyankor mondjuk ekvivalensnek, ha van olyan c középpontú H homotécia, amelyre $H\circ\varphi$ a korábbi értelemben ekvivalens ψ-vel. Az, hogy ez a reláció valóban reflexív, szimmetrikus és tranzitív, könnyen következik abból a tényből, hogy a c középpontú homotéciák csoportot alkotnak. Az egymással a mostani értelemben ekvivalens c körüli körpályák ekvivalenciaosztályai a c körüli *forgásszög*ek. Az egy forgásszöghöz tartozó körpályák kezdő- és végpontjai egy-egy c-ből kiinduló félegyenest alkotnak, ezek a forgásszög *szár*ai, mégpedig az első a *kezdőszár*, a második a *végszár*. Az egy forgásszöghöz tartozó körpályák pályaszögei 4.10. szerint mind ugyanakkorák, közös értékük a *forgásszög mértéke*, ennek abszolút értéke a *forgásszög tágassága*. Az előbbi tetszőleges valós szám lehet, az utóbbi tetszőleges nemnegatív szám. Magát a c pontot a forgásszög *csúcs*ának mondjuk.

6.2. Tekintsük a c-t fixen tartó

$$H(z) = c + m(z-c) \quad (m \neq 0) \tag{1}$$

alakú leképezéseket. Közéjük tartoznak speciálisan a c körüli forgások és a c középpontú homotéciák. A 3.2. (5) és (6) képletekből látszik, hogy ezek közül bármely kettőnek a sorrendje felcserélhető.

Legyen most (1) egy c körüli forgás, és tekintsünk egy $p \neq c$ pontot s ennek $H(p)$ képét. Mivel $|H(p)-c|=|p-c|=r$, léteznek olyan körpályák a c középpontú, r sugarú K körön, amelyek p-ből $H(p)$-be vezetnek. 4.6. alapján tudjuk, hogy ezeknek pályaszögei $\alpha+2k\pi$ alakúak, ahol α alkalmas valós szám, k pedig egész szám. Nem nehéz megmutatni, hogy ez a pályaszög-halmaz nem függ a p pont választásától.

Valóban, ha $q \neq c$ tetszőleges, van olyan (1) alakú H_1 leképezés, amely p-t q-ba viszi át, mégpedig pontosan egy, ti. az, amelyben $m_1 = \frac{q-c}{p-c}$. (Ha $|q-c| = |p-c|$, akkor H_1 speciálisan forgásnak adódik.) Ha most a φ körpálya p-ből $H(p)$-be vezet, akkor $H_1 \circ \varphi$ nyilván $q = H_1(p)$-ből $H_1(H(p)) = H(H_1(p)) = H(q)$-ba fog vezetni, és pályaszöge ugyanakkora, mint φ-é.

Eszerint minden c körüli forgáshoz hozzárendelhetjük a valós számoknak egy halmazát, amelynek elemei egymástól 2π egész számú többszöröseiben különböznek, és megadják a valamely $p \neq c$ pontból p képébe vezető körpályák pályaszögeit. E számhalmaz elemeit nevezzük a kérdéses forgáshoz tartozó *elforgatási szög*eknek.

Legyen H_1 és H_2 két c körüli forgás, egy-egy elforgatási szögük α ill. β. Ha $p \neq c$, és φ egy p-ből $H_1(p)$-be vezető, ψ pedig egy p-ből $H_2(p)$-be vezető körpálya, $\alpha(\varphi) = \alpha$, $\alpha(\psi) = \beta$, akkor $H_1 \circ \psi$ $H_1(p)$-ből $H_1(H_2(p))$-be vezet, tehát $\varphi \vee (H_1 \circ \psi)$ p-ből vezet $H_1(H_2(p))$-be. Ezért a $H_1 \circ H_2$ forgás egyik elforgatási szöge $\alpha + \beta$.

Ha tetszőlegesen kiválasztunk egy 2π hosszúságú félig zárt intervallumot (például $[0, 2\pi)$-t), és minden c körüli forgáshoz az ebbe eső elforgatási szögét rendeljük hozzá, elmondhatjuk, hogy két forgás összetételekor elforgatási szögeiket össze kell adni, majd esetleg 2π valamely egész számú többszörösének hozzáadásával a kiszemelt intervallumba visszavinni, hogy az eredő forgás megfelelő elforgatási szögéhez jussunk. Így a forgások összetétele a valós számok 2π modulus szerinti összeadásába megy át az elforgatási szögek bevezetésével, más szóval a c körüli forgások csoportja izomorf a valós számok additív csoportjának a 2π egész számú többszöröseiből álló alcsoportja szerinti faktorcsoportjával (s akkor persze az $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ csoporttal is, ahol $\mathbf{Z}$ az egész számokból álló alcsoport). Az, hogy valóban izomorfiáról van szó, abból látszik, hogy minden $0 \leqq \alpha < 2\pi$ számhoz található egy $p \neq c$ pontból kiinduló α pályaszögű körpálya, és így a p pontot e körpálya végpontjába átvivő forgás is, de különböző α-knak különböző körpálya-végpontok s így más-más forgások felelnek meg.

6.3. Legyen most $c \in \mathbf{C}$ és tekintsünk két c-ből kiinduló P és Q félegyenest. Pontosan egy olyan c körüli forgás van, amely P-t Q-ba viszi át; ezt úgy kaphatjuk meg, hogy veszünk P-n egy $p \neq c$ pontot, majd tekintjük Q-nak azt az egyetlen q pontját, amelyre $|q-c| = |p-c|$, és elkészítjük a p-t q-ba vivő c körüli forgást. Ez aztán P-t is Q-ba viszi, ugyanis általában is igaz, hogy ha H kongruencia, akkor egy c-ből kiinduló félegyenesnek a képe $H(c)$-ből kiinduló félegyenes, ami viszont abból a már 3.2.-ben is felhasznált tényből látható, hogy c, b, a akkor és csak akkor fekszik egy egyenesen, mégpedig a b pont a másik kettő között, ha $|c-a| = |c-b| + |b-a|$.

A P-t Q-ba átvivő forgás elforgatási szögeit a (P, Q) (rendezett) *félegyenespár elforgatási szög*einek mondjuk. Ezek tehát ismét $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ alakú elemekből álló számhalmazt alkotnak, alkalmas $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett. A megfelelő definíciók figyelembevételével azt mondhatjuk, hogy ezek olyan c körüli körpályák pályaszögei, amelyek egy P-n fekvő $p \neq c$ pontból egy Q-n fekvő pontba vezetnek.

Ha M mozgás, akkor az $(M(P), M(Q))$ félegyenespár elforgatási szögei megegyeznek a (P, Q) félegyenespár elforgatási szögeivel, hiszen a fenti p, q pontokat tekintve egy p-ből q-ba vezető c körüli φ körpálya esetén $M \circ \varphi$ $M(p)$-ből $M(q)$-ba vezető $M(c)$ körüli körpálya lesz, s ennek pályaszöge ugyanakkora, mint φ-é.

Megfordítva, ha a (P, Q) félegyenespár és a (P_1, Q_1) félegyenespár elforgatási szögei megegyeznek, akkor van olyan M mozgás, amely P-t P_1-be, Q-t Q_1-be viszi át. Ha ugyanis P_1 és Q_1 a c_1 pontból indul ki, vigyük először c-t c_1-be egy T eltolással, majd egy P-n fekvő $p \neq c$ pontot felvéve, vigyük a $T(p)$ pontot egy P_1-en fekvő pontba egy c_1 körüli F forgással. Ekkor $M = F \circ T$ lesz a keresett mozgás, mert ez a fentiek

szerint P-t P_1-be viszi, s ha egy c körüli φ körpálya p-ből egy Q-n fekvő q pontba vezet, akkor $M \circ \varphi$ pályaszöge akkora, mint φ-é, tehát egyenlő (P, Q) s így (P_1, Q_1) egyik elforgatási szögével, és ezért a P_1-en fekvő $M(p)$ pontból a szükségképpen Q_1-en fekvő $M(q)$ pontba vezet; így Q képe Q_1.

Ha P, Q, R c-ből kiinduló félegyenesek, és (P, Q), (Q, R) egyik elforgatási szöge α ill. β, akkor (P, R) egyik elforgatási szöge $\alpha+\beta$, a (Q, P) félegyenespár egyik ilyen szöge pedig $-\alpha$. Ha P és P' egy c-n áthaladó egyenesnek c által meghatározott két félegyenese, akkor (P, P') egyik elforgatási szöge π, ugyanis a P-t P'-be átvivő forgás az említett egyenest önmagába viszi (hiszen egyenes képe bármely kongruenciánál egyenes, ami ugyanúgy látható be, mint előbb a félegyenesekről szóló hasonló állítás), tehát P'-t P-be, és így a keresett elforgatási szög kétszerese $2k\pi$ alakú, de maga nem ilyen alakú.

6.4. Az előbb mondottak alapján természetes a következő definíció. Vezessünk be ekvivalenciarelációt a **C** sík közös kezdőpontú félegyenesekből álló (P, Q) rendezett félegyenespárjai között úgy, hogy (P, Q)-t és (P_1, Q_1)-et akkor mondjuk egymással ekvivalensnek, ha van olyan M mozgás, amelyre $M(P)=P_1$, $M(Q)=Q_1$. Ez tényleg ekvivalenciareláció, mert a mozgások csoportot alkotnak. Az e relációnak megfelelő ekvivalenciaosztályokat *rendezett szög*eknek mondjuk. A rendezett szöghöz tartozó bármelyik félegyenespárnak ugyanazok az elforgatási szögei, ezeket tehát a *rendezett szög mértékszámai*nak mondhatjuk. Lényeges, hogy két félegyenespár pontosan akkor tartozik ugyanahhoz a rendezett szöghöz, ha elforgatási szögeik ugyanazok.

A rendezett szögek között egy összeadásnak nevezett műveletet vezethetünk be a következő módon. Tekintünk az adott rendezett szögekhez tartozó egy-egy (P, Q) és (P_1, Q_1) félegyenespárt, majd az utóbbit egy mozgással átvisszük egy (P_2, Q_2) félegyenespárba úgy, hogy $P_2=Q$ legyen, s a két rendezett szög összege az a rendezett szög lesz, amelyhez (P, Q_2) tartozik. A művelet eredménye nem függ a kiválasztott félegyenespároktól, hiszen a mértékszámokra áttérve voltaképpen ezeket adtuk össze 2π egész számú többszöröseitől eltekintve. Ugyanez mutatja, hogy a rendezett szögek az imént definiált művelettel kommutatív csoportot alkotnak, amely izomorf az $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ faktorcsoporttal (ahol $2\pi\mathbf{Z}$ természetesen a 2π egész számú többszöröseinek halmazát jelöli, **R** additív csoportjának alcsoportjaként tekintve).

6.5. Legyen most E és F **C**-ben két, a c ponton áthaladó egyenes, a c pont által meghatározott félegyeneseik P és P', ill. Q és Q'. Azok a c körüli forgások, amelyek E-t F-be viszik át, nem mások, mint a P-t Q-ba átvivő és a P-t Q'-be átvivő forgás. Ha az előbbinek egy elforgatási szöge α, akkor az utóbbié $\alpha+\pi$ (mivel a π elforgatási szögű forgás Q-t Q'-be viszi). Így az E-t F-be vivő c körüli forgások elforgatási szögei $\alpha+k\pi$ alakúak, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$ és k az összes egész számokat futja végig. Ezeket nevezhetjük az (E, F) *egyenespár elforgatási szögei*nek. A 6.3.-ban mondottakhoz hasonlóan látható, hogy az (E, F) és (E_1, F_1) egyenespárok elforgatási szögei pontosan akkor egyeznek meg, ha van olyan mozgás, amely E-t E_1-be, F-et pedig F_1-be viszi át.

Ennek alapján 6.4. mintájára az egymást metsző (vagy egybeeső) egyenesekből álló egyenespárok között is bevezethetünk ekvivalenciaosztályokat, két rendezett egyenespárt ugyanabba az osztályba sorolva, ha egymásba mozgással átvihetők. Az így egymással ekvivalens egyenespárok elforgatási szögeikkel jellemezhetők. Értelmezhető ezután a kérdéses ekvivalenciaosztályok összeadása is, olyan (E, F) és (E_1, F_1) reprezentánsokat kiválasztva, amelyeknek tagjai egy c ponton haladnak át és $F=E_1$, majd az összeget az (E, F_1) párt tartalmazó osztállyal egyenlőnek definiálva; így nyilván az $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ faktorcsoporttal izomorf csoport keletkezik.

6.6. Legyen P és Q ismét a c pontból kiinduló két félegyenes. A (P, Q) félegyenespár elforgatási szögei között van olyan, amelyre $-\pi < \alpha \leqq \pi$. Nevezzük $|\alpha|$-t a P *és* Q *félegyenes hajlásszögének*; ez tehát $[0, \pi]$-be esik (és értéke bármely ebbe az intervallumba eső számmal egyenlő lehet).

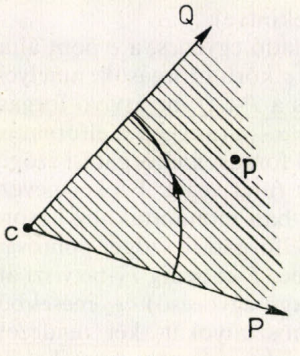
A 6.3.-ban követett meggondolással igazolható, hogy ha H kongruencia, akkor $H(P)$ és $H(Q)$ hajlásszöge ugyanakkora, mint P és Q hajlásszöge. Megfordítva, ha P és Q, valamint P_1 és Q_1 hajlásszöge egyaránt α, akkor (P, Q) egyik elforgatási szöge $\varepsilon\alpha$, ahol ε értéke 1 vagy -1, s ha T tetszőleges tükrözés, akkor $(T(P), T(Q))$ egyik elforgatási szöge $-\varepsilon\alpha$. Ennélfogva vagy (P, Q), vagy $(T(P), T(Q))$ elforgatási szögei megegyeznek (P_1, Q_1) elforgatási szögeivel, tehát vagy (P, Q), vagy $(T(P), T(Q))$ mozgással (P_1, Q_1)-be vihető.

Hasonlóképpen nevezhetjük a c ponton áthaladó E és F *egyenesek hajlásszögének* az (E, F) egyenespár $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-be eső elforgatási szögének abszolút értékét. E és F hajlásszöge pontosan akkor ugyanakkora, mint az E_1 és F_1 egyenesek hajlásszöge, ha létezik E-t E_1-be és F-et F_1-be átvivő kongruencia.

Lehetne az egymásba kongruenciával átvihető félegyenespárok vagy egyenespárok között ekvivalenciaosztályokat bevezetni és ilyen osztályok összeadását a 6.4.-ben és 6.5.-ben követett módon definiálni, ennek azonban alig van jelentősége, hiszen az így definiált összeadás a megfelelő hajlásszögek összeadásába csak korlátozottan megy át (pl. félegyenespárok esetén akkor, ha a hajlásszögek összege nem nagyobb π-nél).

6.7. Látszólag a félegyenesek hajlásszögével eljutottunk a legegyszerűbb s a geometria elemeiben kizárólag szereplő szögfogalomhoz. A nemkonvex sokszögek π-nél nagyobb belső szögeire gondolva világossá válik, hogy ez nincs így. Ezek értelmezéséhez újabb szögfogalomra van szükségünk.

Legyen ismét P és Q két c-ből kiinduló félegyenes, továbbá p egy sem P-n, sem Q-n rajta nem fekvő pont. Nevezzük (P, Q, p) *szögtartomány*nak azon $z \in \mathbf{C}$ pontok halmazát, amelyek p-ből P és Q metszése nélkül töröttvonallal elérhetők, hozzávéve P és Q pontjait. (P, Q, p) pontosan akkor azonos (P, Q, q)-val, ha p és q egymással P és Q metszése nélkül összeköthető (mindig töröttvonallal való összekötésre gondolva). P és Q a *szögtartomány szárai*, c a *szögtartomány csúcsa*. $P \neq Q$ esetén két olyan szögtartomány van, amelyeknek szárai P és Q, $P = Q$ esetén csak egy ilyen van az előbbi definíció szerint, ilyenkor tekintsük még szögtartománynak P-t is.



8. ábra

c középpontú homotéciák segítségével könnyen látható, hogy ha egy c körüli φ pozitív körpálya kezdő- és végpontjai közül az egyik P-n, a másik Q-n helyezkedik el, és képe a (P, Q, p) szögtartománynak része, akkor ezzel pályaszöge egyértelműen meg van határozva. Ezt az értéket mondjuk a *szögtartomány tágasságá*nak; az egybeeső szárú, e szárra redukált szögtartomány tágassága definíció szerint 0. A szögtartomány tágassága eszerint tetszőleges szám lehet $[0, 2\pi]$-ből; a közös szárú két szögtartomány tágasságainak összege 2π.

6.8. Vizsgálatainkat mindeddig a $\mathbf{C}$ komplex síkon végeztük. Az itt bevezetett különféle fogalmakat tetszőleges (három vagy akár több dimenziós) euklideszi térben fekvő S síkra a következőképpen vihetjük át.

Ismeretes, hogy bármely síkhoz található **C**-t S-be átvivő $V: \mathbf{C} \to S$ kongruencia (azaz távolságtartó leképezés), amelyre $V(\mathbf{C}) = S$, és így V-nek van V^{-1} inverze (és ez is kongruencia). A **C**-ben fekvő körvonalaknak V-nél keletkező képe S-ben fekvő körvonal, úgyhogy kézenfekvő az a megállapodás, hogy egy ilyen V kongruenciát megválasztva *S-beli körpályán* a $V \circ \varphi$ alakú görbéket értjük, ahol φ **C**-ben fekvő körpálya.

Az így S-ben kapott körpályák ugyanazok maradnak, ha V helyett egy másik $V_1: \mathbf{C} \to S$ kongruenciát használunk. Ekkor ugyanis $V_1^{-1} \circ V = H: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ismét kongruencia, és így $\psi = H \circ \varphi$ ismét körpálya C-ben, és $V_1 \circ \psi = V \circ \varphi$.

Nem ennyire egyszerű a helyzet, ha az S-beli $V \circ \varphi$ körpálya pályaszögét a φ körpálya $\alpha(\varphi)$ pályaszögével egyenlőnek kívánjuk definiálni. Valóban, ez a pályaszög már függ V megválasztásától, igaz, csak annyiban, hogy előjele bizonytalan. Arról van nyilván szó, hogy az előbbi jelölésekkel $V \circ \varphi = V_1 \circ \psi$ pályaszöge V használatakor $\alpha(\varphi)$-nek, V_1 használatakor $\alpha(\psi)$-nek adódik, és itt $\alpha(\psi)$ egyenlő $\alpha(\varphi)$-vel vagy $-\alpha(\varphi)$-vel aszerint, hogy $V_1^{-1} \circ V = H$ **C**-nek mozgása-e vagy sem.

E meggondolás alapján kézenfekvő a következő definíció. Vezessünk be a $V: \mathbf{C} \to S$ kongruenciák között ekvivalenciarelációt, V-t és V_1-et ekvivalensnek mondva, ha $V_1^{-1} \circ V$ mozgás a **C** komplex síkon. Ez valóban ekvivalenciareláció, mert $V^{-1} \circ V$ az identitás, $V^{-1} \circ V_1 = (V_1^{-1} \circ V)^{-1}$, végül

$$(V_2^{-1} \circ V_1) \circ (V_1^{-1} \circ V) = V_2^{-1} \circ V,$$

és mozgás inverze, valamint mozgások összetétele is mozgás.

Legalább két ekvivalenciaosztály van, ha ugyanis T például egy tükrözés **C**-ben, akkor V és $V \circ T$ különböző osztályokhoz tartoznak: $V^{-1} \circ (V \circ T) = T$ nem mozgás. Kettőnél több ekvivalenciaosztály viszont nincs: ha $V_1^{-1} \circ V = H$ nem mozgás, akkor $V_1^{-1} \circ (V \circ T) = H \circ T$ mozgás, hiszen a 3.3. (1) és (2) képletekből látszik, hogy **C**-nek

$$H_1(z) = m_1 \bar{z} + p_1, \quad H_2(z) = m_2 \bar{z} + p_2$$

képletű kongruenciáiból

$$H_2(H_1(z)) = m_2(\overline{m_1 \bar{z} + p_1}) + p_2 = m_2 \overline{m_1} z + m_2 \overline{p_1} + p_2,$$

úgyhogy két nem-mozgás kongruencia összetétele mozgás.

Így a leírt módon a $V: \mathbf{C} \to S$ kongruenciákat két osztályba sorolhatjuk; ezeket az S sík *irányítás*ainak nevezzük. Jelöljük ezt a két irányítást az I^* és I_* szimbólumokkal.

Most már az S-beli $V \circ \varphi$ körpályához a V felhasználásával hozzárendelt pályaszöget jelöljük $\alpha^*(V \circ \varphi)$-vel vagy $\alpha_*(V \circ \varphi)$-vel aszerint, hogy $V \in I^*$ vagy $V \in I_*$. A mondottak szerint ezek egyike a másikból (-1)-gyel való szorzással keletkezik, pontosabban

$$\alpha^*(V \circ \varphi) = \alpha(\varphi), \quad \text{ha} \quad V \in I^*,$$

s ugyanekkor $\alpha_*(V \circ \varphi) = -\alpha(\varphi)$.

Legyen $J: S \to S$ az S síknak önmagába való kongruenciája. V és $J \circ V$ pontosan akkor határozza meg ugyanazt az irányítást, ha $V^{-1} \circ J \circ V$ mozgás **C**-ben. Mármost világos, hogy $z \in \mathbf{C}$ és $V^{-1}(J(V(z)))$ között a távolság ugyanakkora, mint V-nél származó képeik, azaz $J(V(z))$ és $V(z)$ között. Ebből először is látszik, hogy J pontosan akkor eltolás S-ben, ha $V^{-1} \circ J \circ V$ eltolás **C**-ben, majd hogy $V(z)$ pontosan akkor fixpontja J-nek, ha z fixpontja $V^{-1} \circ J \circ V$-nek. Így aztán J és $V^{-1} \circ J \circ V$ egyszerre forgás vagy tükrözés (S-ben, ill. **C**-ben), s így $V^{-1} \circ J \circ V$ pontosan akkor mozgás, ha maga J mozgás, figyelembe véve, hogy

$$V^{-1} \circ (J_1 \circ J_2) \circ V = (V^{-1} \circ J_1 \circ V) \circ (V^{-1} \circ J_2 \circ V).$$

Így aztán természetes, hogy a J kongruenciát *irányítástartónak* mondjuk, ha mozgás, és *irányításfordítónak* az ellenkező esetben. Világos, hogy

$$\alpha^*(J \circ V \circ \varphi) = \alpha^*(V \circ \varphi) \quad \text{vagy} \quad \alpha^*(J \circ V \circ \varphi) = \alpha_*(V \circ \varphi)$$

aszerint, hogy J irányítástartó vagy irányításfordító.

Minthogy a V kongruencia a c-ből kiinduló félegyeneseket a $V(c)$-ből kiinduló félegyenesekbe viszi át, könnyen látható, hogy J pontosan akkor $V(c)$ középpontú homotécia S-ben, ha $V^{-1} \circ J \circ V$ c középpontú homotécia $\mathbf{C}$-ben. Ebből látszik, hogy egy S-beli hasonlóság alkalmazásakor adott irányítás mellett a körpályák pályaszögei változatlanok maradnak vagy (-1)-gyel szorzódnak aszerint, hogy a tekintett hasonlóság előállítható egy középpontos homotécia és egy mozgás összetételével, vagy sem. Minthogy a pályaszögek (-1)-gyel való szorzása a sík másik irányítására való áttéréssel is megvalósítható, lehet a *hasonlóságokat* is *irányítástartóknak* vagy *irányításfordítóknak* nevezni az említett két esetnek megfelelően.

Ha az S síkban egy irányítást megválasztunk, akkor a fenti módon bevezethetjük a körpályák pályaszögeit, majd az összes további ezekre alapozott szögfogalmakat. Ezeknek számértéke (pontosabban a számérték előjele) általában függ az irányítás megválasztásától; nem függnek természetesen az irányítástól azok a fogalmak, amelyeknek definíciójában abszolút értéket kell venni (például a félegyenesek hajlásszöge).

A bevezetőben említett francia cikksorozat kritizálja az általunk rendezett szögnek nevezett fogalom sokszor használt „irányított szög" elnevezését. A kritikát jogosnak kell mondani, hiszen az egymásba mozgással átvihető félegyenespárok osztályai nem függnek a választott irányítástól, s nem függ ettől a közöttük bevezetett összeadási művelet sem, csupán a hozzájuk rendelt mértékszámok előjele múlik azon, melyik irányítást választottuk.

Hasonló okokból kell óvatosan bánni a kongruenciák (vagy hasonlóságok) irányítástartó és irányításfordító elnevezéseivel. Ezek az osztályok, láttuk, az irányítás fogalmától teljesen függetlenül bevezethetők, így az említett elnevezéseknek a felépítés korai fázisában való használata igen könnyen válhat félreértés forrásává.

6.9. Nem szorul bővebb magyarázatra, hogy a pályaszögek s a rájuk alapozott további szögfogalmak minden lényeges sajátsága (kivéve az ívhosszúsággal való kapcsolatukat) érvényes marad, ha a pályaszögek számértékét egy tetszőlegesen megválasztott szorzószámmal szorozzuk. Ez annak felel meg, hogy egy alapul választott körpálya pályaszögét vezetjük be egységnek. Így a fentiekben tárgyalt (és az analízis szempontjából egyedül ésszerű) pályaszög-értékekről át lehet nehézség nélkül térni pl. a fokokban megadott értékekre.

IRODALOM

[1] G. KOWALEWSKI: Grundzüge der Differential- und Integralrechnung (Leipzig—Berlin, 1909).
[2] SZÁSZ P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei I. (Budapest, 1951).
[3] VARGA T.: A szögfogalmak kialakításáról. A Matematika Tanítása, *23* (1976), 84—90.

УГЛЫ И УГЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

АКОШ ЧАСАР

ANGLES AND CIRCULAR FUNCTIONS

Á. CSÁSZÁR

TÁVOLSÁGOK HATVÁNYÖSSZEGÉNEK EXTRÉMUMÁRÓL

TEMESVÁRI ÁGOTA

Fejes Tóth László vetette fel a következő problémát: Legyen az euklideszi térben n pont, amelyek azon feltétel mellett, hogy bármely kettő távolsága legalább egy, szabadon mozoghatnak. Keressük a pontoknak azt az elrendezését, amikor a pontok között fellépő $\binom{n}{2}$ távolság reciprokának összege maximális. A probléma nehéz voltára való tekintettel Fejes Tóth László az alábbi egyszerűbb problémát vetette fel.

Tekintsük az euklideszi sík n számú pontját, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat, továbbá az általuk meghatározott összes $A_j A_k$ $(j \neq k)$ távolságokat. Az így definiált távolságok összegét az

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \delta(n)$$

írásmóddal jelöljük. Mi a $\delta(n)$ minimuma és mely $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontalakzat esetén lép fel a minimum, ha bármely két pont távolsága $\geqq 1$.

Ebben a dolgozatban megoldjuk a Fejes Tóth László által felvetett problémát, ha a pontok egy síkban vannak és számuk nem nagyobb 7-nél. Általánosítjuk a problémát annyiban, hogy nem csak a távolságok reciprok összegének maximumát vizsgáljuk, hanem a távolságok v-edik hatványának összegét, ha $v \leqq 2$ $(v \neq 0)$, és meghatározzuk az extrémumot és az extrémumot adó pontrendszert, ha $n \leqq 7$. $v = 1$ esetén, $n \leqq 7$-re Horváth Jenő oldotta meg a problémát [1]-ben. Bebizonyítjuk, hogy $v \leqq 2$ $(v \neq 0)$ és $n \leqq 7$ esetén az extremális alakzat az euklideszi síkon ugyanaz lesz, mint a $v = 1$ esetben, azaz:

TÉTEL. *Legyen $v \leqq 2$ $(v \neq 0)$ valós szám és $n \leqq 7$ természetes szám, továbbá n db pont az euklideszi síkon úgy, hogy bármely két pont távolsága nem kisebb* 1*-nél. A pontok között fellépő távolságok v-edik hatványának összege $n = 7$ esetben akkor lesz extremális, ha a pontok egy egység oldalú szabályos hatszög csúcsaiban és középpontjában lesznek. Az $n = 6$, $n = 5$, $n = 4$, $n = 3$ esetekben az extrémumot adó alakzatot úgy kapjuk, ha a szabályos hatszög csúcsaiból valamilyen körüljárásnak megfelelően törlünk egy-egy csúcsot. $v = 2$ és $n = 4$-re a maximumot adó alakzat nem egyértelmű, minden olyan egység oldalú rombusz jó, melynek átlói nem kisebbek* 1*-nél.*

A bizonyítás egyszerűbb leírása érdekében [1]-hez hasonlóan átfogalmazzuk a problémát. Helyezzünk el n számú, egységátmérőjű körlemezt a síkon úgy, hogy semelyik kettőnek se legyen közös belső pontja, és az összes körpárok középpontjai meghatározta távolságok hatványösszegének extrémuma valósuljon meg. Jelöljük a távolságok hatványösszegét $\delta_v(n)$-nel, az A_j középpontú, egységátmérőjű körlemezt pedig k_j-vel.

Először a későbbiekben felhasznált segédtételeket mondjuk ki. Nem bizonyítjuk azokat, amelyek $v=1$ esetén [1]-ben szerepelnek és $v\leqq 2$ esetben is hasonlóan láthatók be.

Segédtételek

1. Segédtétel. *Ha az* $f(x)=a^2(x)+b^2(x)$ $x\in(\alpha;\beta)$ *függvény monoton csökken, ahol* $a(x)\geqq b(x)>0$, $a(x)$ *és* $b(x)$ *differenciálható, valamint* $a'(x)>0$, *akkor az* $f_v(x)=a^v(x)+b^v(x)$ *függvény* $0<v<2$ *esetén monoton csökken,* $v<0$ *esetén pedig monoton nő.*

Bizonyítás. Az $f(x)$ függvény első deriváltja

$$f'(x) = 2[a(x)a'(x)+b(x)b'(x)] \leqq 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$0 < a(x)a'(x) \leqq -b(x)b'(x). \tag{1}$$

Mivel $a(x)\geqq b(x)>0$ és $v-2<0$,

$$0 < a^{v-2}(x) \leqq b^{v-2}(x). \tag{2}$$

(1)-et és (2)-t összeszorozva kapjuk, hogy

$$a^{v-1}(x)a'(x) \leqq -b^{v-1}(x)b'(x),$$

vagyis

$$a^{v-1}(x)a'(x)+b^{v-1}(x)b'(x) \leqq 0$$

adódik, amelyet v-vel szorozva $f_v'(x)$ adódik. Így $0<v<2$-re $f_v'(x)\leqq 0$ és $v<0$-ra $f_v'(x)\geqq 0$, tehát az állítás teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor lép fel, ha $f'(x)=0$ és $a(x)=b(x)$.

Jelöljük $A_1, A_2, \ldots, A_n$-nel az olyan egységátmérőjű $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nyílt körlemezek középpontjait, amelyeknek páronként nincs közös részük. Legyen $\bar{A}$ tartomány az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ középpontok konvex burka, A pedig a tartomány határa.

2. Segédtétel. *Hogyha az* A *vonal* $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ *darabja* A_j*-ben megtörik, és* k_j *vagy az* A_{j-1} *vagy az* A_{j+1} *középpont körül úgy forgatható el az* $A_{j-1}A_{j+1}$ *egyenessel határolt,* A_j*-t nem tartalmazó félsík felé, hogy közben a többi körlemez egyikébe se ütközzék, akkor e művelet hatására a középpontok közötti távolságok* v*-edik hatványának összege,* $\delta_v(n)$ $0<v\leqq 2$ *esetén csökken,* $v<0$ *esetén pedig nő.*

Bizonyítása [1] 1. segédtételéhez hasonlóan történhet.

A további segédtételek kimondása előtt jelöléseket vezetünk be (1. ábra). Legyen A és B egy O középpontú egységsugarú kör két pontja, F az $\overset{\frown}{AB}$ ív felezéspontja, valamint az $AOF\sphericalangle=2\alpha<\pi$, továbbá C az $\overset{\frown}{AFB}$ ív olyan pontja, amelyre $AC\geqq CB$ és $\overset{\frown}{AFC}\leqq\pi$. Jelöljük az $FOC\sphericalangle$-et 2δ-val, továbbá az AC és CB szakaszok v-edik hatványának összegét $H_\alpha^v(\delta)$-val, azaz

$$H_\alpha^v(\delta) = AC^v+CB^v = 2^v[\sin^v(\alpha+\delta)+\sin^v(\alpha-\delta)],$$

ahol

$$0 \leqq \delta \leqq \alpha, \quad \alpha+\delta \leqq \frac{\pi}{2}.$$

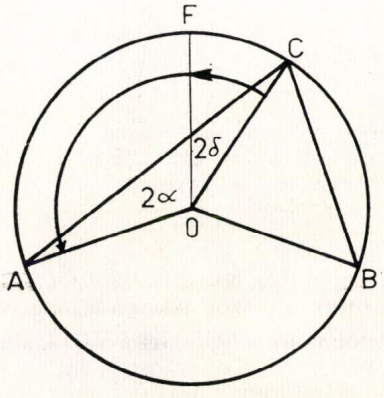
Jelöljük az $y=\sin^{\nu} x \quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $(1<\nu\leqq 2)$ függvény inflexiós szögét i_{ν}-vel. Az $1<\nu\leqq 2$ esetben $0<i_{\nu}\leqq\frac{\pi}{4}$ (2. ábra).

3. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* $1<\nu<2$ *valós szám. Ha*

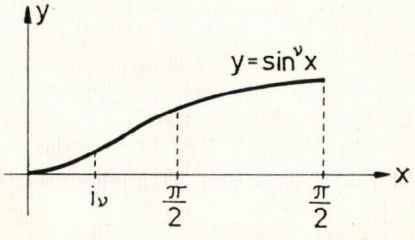
1. $\frac{\pi}{4}\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$, *akkor* $H_{\alpha}^{\nu}(\delta)$ *monoton csökken;*

2. $i_{\nu}<\alpha<\frac{\pi}{4}$, *akkor* $H_{\alpha}^{\nu}(\delta)$ *először monoton csökken, majd monoton nő, azaz egyetlen minimuma van;*

3. $0<\alpha\leqq i_{\nu}$, *akkor* $H_{\alpha}^{\nu}(\delta)$ *monoton nő.*



1. ábra



2. ábra

BIZONYÍTÁSA [2]-ben található.

4. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $0<\nu\leqq 1$, *akkor* $H_{\alpha}^{\nu}(\delta)$ *monoton csökken, ha* $\nu<0$, *akkor* $H_{\alpha}^{\nu}(\delta)$ *monoton nő.*

BIZONYÍTÁS. Mivel az $y=\sin^{\nu} x \quad x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ függvény $0<\nu\leqq 1$ esetén konkáv, $\nu<0$ esetén pedig konvex, az állítás nyilván teljesül.

Könnyen belátható a 3. és 4. segédtételek két következménye:

5. SEGÉDTÉTEL. *Az r sugarú körbe írt nem tompaszögű r-nél nem kisebb oldalú háromszögek halmazában* $\nu<0$, *ill.* $0<\nu\leqq 2$ *esetén azokra a háromszögekre a legnagyobb, ill. legkisebb az oldalak ν-edik hatványának összege, amelyeknek oldalai:* r, $2r$, $\sqrt{3}r$.

6. SEGÉDTÉTEL. *Ha négy egységátmérőjű, közös belső ponttal nem rendelkező körlemez középpontjainak konvex burka háromszög, akkor a középpontok meghatározta távolságok ν-edik hatványának összegére:*

$$\delta_{\nu}(4)\geqq 4+2^{\nu}+\sqrt{3}^{\nu}, \quad \text{ha} \quad 0<\nu\leqq 2$$

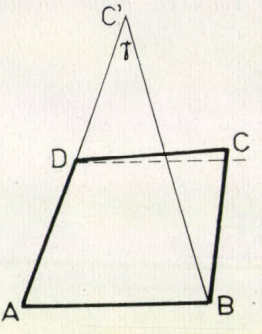
ill.

$$\delta_{\nu}(4)\leqq 4+2^{\nu}+\sqrt{3}^{\nu}, \quad \text{ha} \quad \nu<0.$$

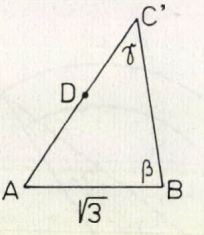
Az előbbi két segédtétel $v=1$ esetre [1]-ben megtalálható.

7. SEGÉDTÉTEL. *Ha az $ABCD$ konvex négyszög oldalaira teljesül, hogy $BC=CD=1$, $1\leqq AB\leqq\sqrt{3}$ és $1\leqq AD\leqq 2$, akkor $BCD\sphericalangle+CDA\sphericalangle\leqq 240°$.*

BIZONYÍTÁS. Húzzunk párhuzamost az AB oldallal a D és C csúcspontokon keresztül. Tegyük fel, hogy a D-n át húzott párhuzamosnak van közös pontja a CB oldallal. Legyen C' az AD oldal meghosszabbításán olyan pont, amelyre $DC'=1$ (3. ábra). Jelölje γ a $DC'B\sphericalangle$-et, amely $AC'\geqq AB$ miatt hegyesszög. Könnyen belát-



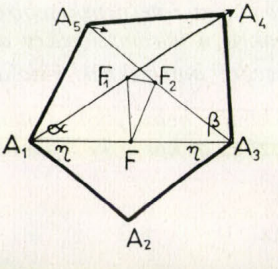
3. ábra



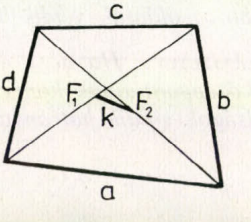
4. ábra

ható, hogy $ABC\sphericalangle\geqq ABC'\sphericalangle$, s mivel $DAB\sphericalangle$ állandó, így $BCD\sphericalangle+CDA\sphericalangle\leqq 180°+\gamma$. Ha az AC' és BC' oldalak hosszát rögzítjük, a γ szög akkor a legnagyobb, ha $AB=\sqrt{3}$, vagyis ha AB a lehető legnagyobb. Jelöljük az $ABC'\sphericalangle$-et β-val (4. ábra). Mivel $C'A\geqq 2$, $\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{C'A}\sin\beta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$. Minthogy γ hegyesszög az előbbi egyenlőtlenségből $\gamma\leqq 60°$ adódik. Tehát $BCD\sphericalangle+CDA\sphericalangle\leqq 240°$. Egyenlőség akkor és csak akkor lép fel, ha $AD=1$ és $\beta=90°$ egyszerre teljesül, azaz a négyszög háromszöggé fajul. A bizonyítás hasonlóan végezhető el, ha a C-n át húzott párhuzamosnak van közös pontja az AD oldallal.

8. SEGÉDTÉTEL. *Az $A_1, \ldots, A_5$ konvex ötszögre teljesüljenek a következő feltételek: $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_5A_1=1$, $A_1A_3\geqq A_4A_5\geqq 1$, $A_2A_4\geqq A_2A_5$ (5. ábra). Ha A_4-et az A_3, A_5-öt az A_1 körül úgy forgatjuk, hogy A_2A_4 növekedjen, A_4A_5 pedig monoton csökkenjen, akkor az $A_1A_4^2+A_3A_5^2$ és az $A_2A_5^2+A_2A_4^2$ négyzetösszegek monoton csökkennek.*



5. ábra



6. ábra

BIZONYÍTÁS. Legyen egy a, b, c, d oldalú konvex négyszög e átlójának felezőpontja F_1, f átlójának felezőpontja F_2 és $F_1F_2=k$ (6. ábra). Ekkor igaz az

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = e^2+f^2+4k^2 \tag{3}$$

egyenlőség.

Alkalmazzuk (3)-at az $A_1A_3A_4A_5$ négyszögre:

$$A_1A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_5^2+A_5A_1^2 = A_1A_4^2+A_3A_5^2+4F_1F_2^2, \tag{4}$$

ahol F_1 az A_1A_4, F_2 pedig az A_3A_5 felezőpontja (5. ábra). Az [1] cikk 2.3.1.-ben történik meg annak bizonyítása, hogy a mozgatás során $\alpha+\beta$ csökken, ahol $\alpha=A_3A_1A_5\sphericalangle$ és $\beta=A_1A_3A_4\sphericalangle$. A különbség itt csak annyi, hogy az $A_2A_4A_5$ háromszögre felírt cosinus tételben $A_4A_5^2=1$ helyett $\geqq 1$ szerepel, amely a feltétel szerint monoton csökken, így deriváltja nem nagyobb 0-nál. Tehát a bizonyítás többi része ugyanúgy mehet, mint [1]-ben.

Legyen F az A_1A_3 felezőpontja. Így $FF_2 \# \frac{1}{2}A_1A_5$, $F_1F \# \frac{1}{2}A_3A_4$ és $F_1FF_2\sphericalangle = \pi-(\alpha+\beta)$. A mozgatás során az F_1FF_2 háromszögben két oldal állandó és a két oldal által közrezárt szög nő, így a harmadik oldal $F_1F_2=k$ nő. (4)-ben a bal oldal monoton csökken, a jobb oldalon $F_1F_2^2$ nő, tehát $A_1A_4^2+A_3A_5^2$ csökken. Ezzel az állítás első részét bebizonyítottuk.

Az $A_1A_2A_5$ és az $A_3A_2A_4$ háromszögekre felírt cosinus tételt összeadva:

$$f(\beta) = A_2A_5^2+A_2A_4^2 = 4-2[\cos(\beta+\eta)+\cos(\alpha+\eta)] \quad (\beta \geqq \alpha),$$

ahol $\eta=A_3A_1A_2\sphericalangle$ és α a β szög függvénye.

$$\cos(\beta+\eta)+\cos(\alpha+\eta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\eta\right)\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

így

$$f(\beta) = 4-4\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\eta\right)\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

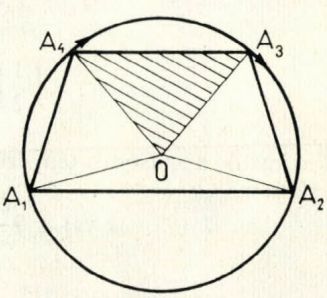
aminek β szerinti első deriváltja

$$f'(\beta) = 4\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\eta\right)\frac{\alpha'(\beta)}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\eta\right)\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\left(-\frac{\alpha'(\beta)}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\alpha'(\beta)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\eta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = 2\alpha'(\beta)\sin(\alpha+\eta),$$

ahol $\alpha'(\beta)$ az $\alpha+\beta$ csökkenése és a β növekedése miatt $\leqq 0$, és $\alpha+\eta<180°$, így $\sin(\alpha+\eta)>0$. Tehát $f'(\beta)\leqq 0$ és egyenlőség csak $\alpha=\beta$ esetben van, azaz $A_2A_5^2+A_2A_4^2$ csökken.

9. SEGÉDTÉTEL. *Tekintsünk egy O középpontú, egységsugarú körbe beírt, a kör középpontját tartalmazó $A_1A_2A_3A_4$ trapézt (7. ábra). Jelöljük az $A_1OA_4\sphericalangle=A_2OA_3\sphericalangle$-et $2\alpha_1$-gyel, az $A_1OA_3=A_2OA_4\sphericalangle$-et $2\alpha_2$-vel. Tegyük fel, hogy $120°\leqq A_1OA_2\sphericalangle<180°$, $60°\leqq 2\alpha_1\leqq 120°$ és $60°\leqq A_4OA_3\sphericalangle\leqq 120°$. Ha O körül elforgatjuk az OA_4A_3 háromszöget, akkor a $T_\nu=A_1A_3^\nu+A_3A_2^\nu+A_2A_4^\nu+A_4A_1^\nu$ hatványösszeg csökken, ahol $1<\nu\leqq 2$ valós szám.*



7. ábra

BIZONYÍTÁS. Jelöljük 2ε-nal azt a szöget, amellyel az OA_4A_3 háromszöget O körül a szimmetrikus helyzetből elforgattuk. A jelölésekkel

$$T_v(\varepsilon) = 2^v[\sin^v(\alpha_2+\varepsilon)+\sin^v(\alpha_1-\varepsilon)+\sin^v(\alpha_2-\varepsilon)+\sin^v(\alpha_1+\varepsilon)],$$

ahol

$$30^\circ \leqq \alpha_1-\varepsilon \leqq \alpha_1+\varepsilon \leqq 60^\circ \quad \text{és} \quad 60^\circ \leqq \alpha_2-\varepsilon \leqq \alpha_2+\varepsilon < 90^\circ.$$

A $T_v(\varepsilon)$ függvény első deriváltja

$$T_v'(\varepsilon) = 2^v \cdot v[-\sin^{v-1}(\alpha_1-\varepsilon)\cos(\alpha_1-\varepsilon)-\sin^{v-1}(\alpha_2-\varepsilon)\cos(\alpha_2-\varepsilon)+$$

$$+\sin^{v-1}(\alpha_2+\varepsilon)\cos(\alpha_2+\varepsilon)+\sin^{v-1}(\alpha_1+\varepsilon)\cos(\alpha_1+\varepsilon).$$

Mivel $T_v'(0)=0$, tehát ha bebizonyítjuk, hogy $T_v'(\varepsilon)$ monoton csökken, akkor $\varepsilon>0$-ra $T_v'(\varepsilon)\leqq 0$, azaz $T_v(\varepsilon)$ monoton csökken az adott intervallumban.

Vizsgáljuk külön a

$$v_1(\varepsilon) = -\sin^{v-1}(\alpha_1-\varepsilon)\cos(\alpha_1-\varepsilon)-\sin^{v-1}(\alpha_2-\varepsilon)\cos(\alpha_2-\varepsilon)$$

és a

$$v_2(\varepsilon) = \sin^{v-1}(\alpha_2+\varepsilon)\cos(\alpha_2+\varepsilon)+\sin^{v-1}(\alpha_1+\varepsilon)\cos(\alpha_1+\varepsilon)$$

függvényeket.

A $v_1(\varepsilon)$ első deriváltja

$$v_1'(\varepsilon) = \sin^{v-2}(\alpha_1-\varepsilon)[v\cos^2(\alpha_1-\varepsilon)-1]+\sin^{v-2}(\alpha_1-\varepsilon)[v\cos^2(\alpha_2-\varepsilon)-1].$$

Az $y=\sin^v x$ $x\in[30^\circ, 90^\circ)$ függvény harmadik deriváltja

$$y''' = v\sin^{v-3}x\cos x[v^2\cos^2 x-3v+2] < v\cdot\sin^{v-3}x\cos x[v^2-3v+2] \leqq 0,$$

$1<v\leqq 2$ és $v\sin^{v-3}x\cos x>0$ miatt. Ebből következik, hogy $v_1'(\varepsilon)$ monoton nő ε függvényében. A $v_1'(\varepsilon)$-t növeljük tehát, ha $\varepsilon=\alpha_1-30^\circ$ helyen vesszük:

$$v_1'(\varepsilon) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{v-2}\left[v\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1\right]+\sin^{v-2}(30^\circ+\alpha_2-\alpha_1)\cdot[v\cdot\cos^2(30^\circ+\alpha_2-\alpha_1)-1].$$

Az $y(\alpha_2-\alpha_1)=\sin^{v-2}(30^\circ+\alpha_2-\alpha_1)[v\cdot\cos^2(30^\circ+\alpha_2-\alpha_1)-1]$ függvény monoton csökken, így növeljük $v_1'(\varepsilon)$-t, ha $\alpha_2-\alpha_1$ helyébe a legkisebb értéket, azaz 30°-ot írunk. Tehát

$$v_1'(\varepsilon) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{v-2}\left[v\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1\right]+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{v-2}\left[v\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^v\cdot\frac{1}{3}[9v-12+\sqrt{3}^v\cdot v-4\cdot\sqrt{3}^v].$$

Tekintsük a második tényező, az $r(v)=9v-12+\sqrt{3}^v\cdot v-4\sqrt{3}^v$ függvény első deriváltját:

$$r'(v) = 9+\sqrt{3}^v+v\cdot\sqrt{3}^v\ln\sqrt{3}-4\sqrt{3}^v\ln\sqrt{3} =$$

$$= 9+\sqrt{3}^v+\frac{v}{2}\sqrt{3}^v\ln 3-2\sqrt{3}^v\ln 3, \quad (1{,}098 < \ln 3 < 1{,}1)$$

ami pozitív, hiszen $2\sqrt{3}^{\nu} \ln 3 < 6{,}6$. Tehát $r'(\nu) > 0$, azaz $r(\nu)$ monoton nő, így $r(\nu) \leqq r(2) = 0$.

$$v_1'(\varepsilon) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \cdot \frac{1}{3} r(\nu) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \cdot \frac{1}{3} r(2) = 0,$$

amiből következik, hogy $v_1(\varepsilon) \leqq v_1(0)$, ahol egyenlőség csak $\varepsilon = 0$ esetén lép fel.

Hasonlóan igazolható, hogy $v_2(\varepsilon) \leqq v_2(0)$. De $v_1(0) = -v_2(0)$, így $T_{\nu}'(\varepsilon) = 2^{\nu} \cdot \nu \cdot [v_1(\varepsilon) + v_2(\varepsilon)] \leqq 0$, és egyenlőség csak $\varepsilon = 0$ esetben van.

10. SEGÉDTÉTEL. *Az $A_1, \ldots, A_6$ egységoldalú konvex hatszög A_4A_6 átlója legyen egységnyi, a többi átlója nem kisebb* 1*-nél, valamint $A_1A_4 \leqq A_3A_6$ (8. ábra). Mozgassuk az $A_1A_2A_3$ háromszöget mereven úgy, hogy $A_6A_1 = A_4A_3 = 1$ maradjon, miközben A_5A_1 nő. Ezen mozgatásnál a távolságok v-edik hatványösszege $0 < \nu \leqq 2$ esetén csökken, $\nu < 0$ esetén pedig nő.*

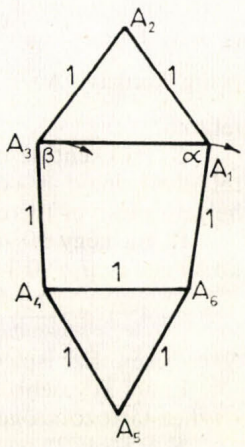
BIZONYÍTÁS. A 8. és az 1. segédtételből következik, hogy az $A_1A_2A_3A_4A_6$ ötszögön belül a hatványösszeg megfelelően változik, azaz $0 < \nu \leqq 2$ esetén csökken, $\nu < 0$ esetén nő.

Legyen $A_4A_3A_1 \sphericalangle = \beta$ és $A_3A_1A_6 \sphericalangle = \alpha$. A 8. segédtétel bizonyításánál szerepelt az, hogy az előbbi mozgatás során $\alpha + \beta$ csökken. Ekkor viszont $A_3A_4A_6 \sphericalangle + A_1A_6A_4 \sphericalangle$ nő. Az

$$A_3A_5A_1 \sphericalangle = 60^\circ - (A_1A_5A_6 \sphericalangle + A_3A_5A_4 \sphericalangle) =$$

$$= 60^\circ - \left[90^\circ - \frac{60^\circ + A_1A_6A_4 \sphericalangle}{2} + 90^\circ - \frac{60^\circ + A_3A_4A_6 \sphericalangle}{2}\right] =$$

$$= -60^\circ + \frac{1}{2}[A_1A_6A_4 \sphericalangle + A_3A_4A_6 \sphericalangle],$$



8. ábra

tehát az $A_3A_5A_1 \sphericalangle$ is nő.

Az $A_1A_3A_5$ háromszög hegyeszögű, így a 3. segédtétel alapján ha A_5 a háromszög körülírt körén mozogna $A_5A_3^{\nu} + A_5A_1^{\nu}$ csökkenne, ha $0 < \nu \leqq 2$ és nőne, ha $\nu < 0$. Az $A_3A_5A_1 \sphericalangle$ növekedése azt jelenti, hogy a körülírt kör sugara a segédtételben szereplő mozgatás során csökken, tehát az $A_5A_3^{\nu} + A_5A_1^{\nu}$ ekkor is csökken, ha $0 < \nu \leqq 2$ és nő, ha $\nu < 0$.

Az A_2A_5 csökken, hiszen A_2O, OA_5 és $A_2OA_5 \sphericalangle$ csökken, ahol O az $A_1A_3A_5$ háromszög körülírt körének a középpontja. Így az előzőek alapján teljesül az állítás.

11. SEGÉDTÉTEL. *Az $A_1, \ldots, A_7$ csúcsok által meghatározott, egységoldalú konvex hétszög A_i csúcsánál levő szögét jelöljük $2\alpha_i$-vel. Tegyük fel, hogy a hétszögre $A_iA_j \leqq 1$ $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, 7)$ feltétel teljesül. Legyen $S_{\nu} = 2^{\nu} \sum_1^7 \sin^{\nu} \alpha_i$, amelyről belátjuk, hogy*

$$S_{\nu} > 3 + 4 \cdot 2^{\nu}, \quad \text{ha} \quad 0 < \nu \leqq 2$$

és

$$S_{\nu} < 3 + 4 \cdot 2^{\nu}, \quad \text{ha} \quad \nu < 0.$$

BIZONYÍTÁS. A feltételekből következik, hogy

$$30° \leqq \alpha_i \leqq 90° \quad \text{és} \quad \sum_1^7 \alpha_i = 450°.$$

Tekintsük az $y=\sin^\nu x$ $x\in[30°; 90°]$ függvényt. Ennek első és második deriváltja:

$$y' = \nu \cdot \sin^{\nu-1} x \cdot \cos x, \quad \text{ill.} \quad y'' = \nu \cdot \sin^{\nu-2} x[\nu \cdot \cos^2 x - 1].$$

$\nu<0$ esetén, mivel y konvex, S_ν nő, ha az α_i és az α_j szögeket úgy toljuk szét, hogy összegük ne változzon. Ezt az eljárást ismételve, végülis három 30°-os és négy 90°-os szöget kapunk, vagyis $S_\nu \leqq 3+4\cdot 2^\nu$.

Ha $0<\nu\leqq 1$, akkor y konkáv, így S_ν csökken, ha a $\nu<0$ esetben alkalmazott széttolást elvégezzük, tehát $S_\nu \geqq 3+4\cdot 2^\nu$.

Az $1<\nu\leqq 2$ esetben az y függvény $x\in(0; i_\nu)$ esetén konvex, az $x\in(i_\nu; 90°)$ esetén pedig konkáv. Az i_ν inflexiós szögre az $1<\nu\leqq 2$ és $\cos^2 i_\nu = \frac{1}{\nu}$ miatt a $0<i_\nu\leqq 45°$ teljesül.

S_ν csökkentése ebben az esetben a konkáv részhez tartozó szögek előbbi széttolásával, majd a konvex részen levő szögeknek a számtani közepükkel (α) való helyettesítésével történik. Ezután a következő esetek lehetségesek:

1. Ha négy 90°-os szög van, akkor a többi négy szögre 180° jut. Az utóbbiak közül egy az $[i_\nu; 90°]$-ban van (β) és három szög egyenlő (α) nagyságú, tehá $\beta=45°-3(\alpha-45°)$, így $\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq 45°\geqq i_\nu$. A 3. segédtétel 1. része alapján α és β széttolásával S_ν csökken. Ezt ismételve négy 90°-os és három 30°-os szöget kapunk.

Ennél kevesebb számú 90°-os szög nem lehet, mert akkor a maradék konvex részhez tartozó szögekre 45°-nál nagyobb rész esne.

$S_\nu=3+4\cdot 2^\nu$ nem lehetséges, mert nem állítható elő a feltételeknek eleget tevő olyan „hétszög", amelynek négy 180°-os és három 60°-os szöge van.

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA

A következőkben a körlemezek elhelyezkedései közül csak azokat az eseteket vizsgáljuk, amelyeknél az [1]-ben használt módszerek nem használhatók. A későbbiekben nem tárgyalt eseteknél az [1]-ben szereplő a 1., 2. segédtételek, 2.a, ill. 2.b helyett az itteni 2., 3. és 4., 5., ill. 6. segédtételeket kell használni.

Az $n=3, 4$ *esetekben* [1] alkalmazható.

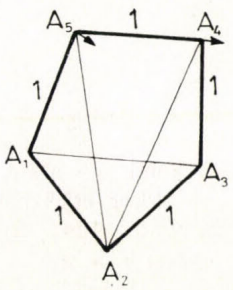
Legyen $n=5$.

Ha a középpontok konvex burka ötszög, akkor a 2. segédtétel miatt vehetünk egységoldalú ötszöget. Legyen A_2A_4 a leghosszabb átló, A pedig az A_2-nek A_1A_3-ra vonatkozó tükörképe. Belátható, hogy $36°\leqq A_2A_1A_3\sphericalangle\leqq 60°$. Alkalmazzuk a 8. segédtételt, így A_5-öt A-ba forgatva a négyzetösszeg csökken (9. ábra). Ezután A_2 és A_1 mozgatásánál alkalmazzuk a 8. segédtételt (10. ábra) és a $d_2(5)$-nek megfelelő extremális alakzatot kapjuk. Az 1. segédtétel alapján ez a $d_\nu(5)$-nek is megfelelő extremális alakzat.

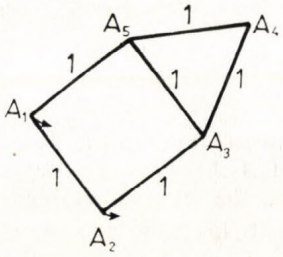
A további esetek [1]-hez hasonlóan vizsgálhatók.

Legyen $n=6$.

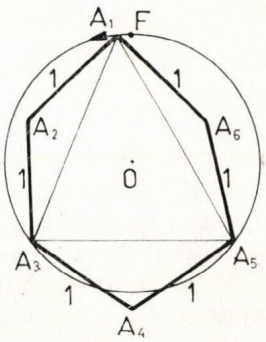
Ha a középpontok konvex burka hatszög, akkor a 2. segédtétel miatt elég az egységoldalú hatszögekkel foglalkozni. [1]-ben bizonyítva van, hogy az $A_1A_3A_5$ és az $A_2A_4A_6$ háromszögek közül az egyik körülírt körének sugara nem kisebb, a másiknak pedig nem nagyobb az egységnél. Legyen pl. az $A_1A_3A_5$ háromszög körülírt k körének sugara $\frac{2}{\sqrt{3}} \geqq r \geqq 1$ és $A_1A_5 \geqq A_1A_3 \geqq A_3A_5$ (11. ábra). Az A_1-et mozgassuk k-n úgy, hogy A_1A_5 nőjön és k_2k_3-on, k_6k_5-ön gördüljön. Először bebi-



9. ábra



10. ábra



11. ábra

zonyítjuk, hogy A_2A_6 monoton csökken. Ehhez elég belátni, hogy az $A_2A_1A_3\sphericalangle + A_6A_1A_5\sphericalangle$ csökken, hiszen $A_3A_1A_5\sphericalangle$ állandó, így $A_2A_1A_6\sphericalangle$ csökken az $A_2A_1A_6$ egységnyi szárú háromszögben, tehát A_2A_6 is csökken. Legyen az A_1-et tartalmazó A_3A_5 ív felezőpontja F, $A_3OF\sphericalangle = 2\gamma_0$ és $A_1OF\sphericalangle = 2\delta$, ahol O a k kör középpontja. Így

$$g(\delta) = A_2A_1A_3\sphericalangle + A_6A_1A_5\sphericalangle =$$

$$= \arccos [r \sin(\gamma_0 - \delta)] + \arccos [r \sin(\gamma_0 + \delta),]$$

aminek első deriváltja

$$g'(\delta) = -\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\gamma_0 + \delta)}} \cdot r \cdot \cos(\gamma_0 + \delta) + \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\gamma_0 - \delta)}} \cdot r \cdot \cos(\gamma_0 - \delta).$$

Azt kell belátni, hogy $g'(\delta) \leqq 0$, vagyis

$$\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\gamma_0 + \delta)} \cos(\gamma_0 - \delta) \leqq \sqrt{1 - r^2 \sin^2(\gamma_0 - \delta)} \cos(\gamma_0 + \delta).$$

Négyzetreemelés után látható, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha $r \geqq 1$. Ez viszont feltétel volt.

A 8. és az 1. segédtétel alapján $A_2A_5^v + A_3A_6^v$ és $A_4A_6^v + A_2A_4^v$ megfelelően változik.

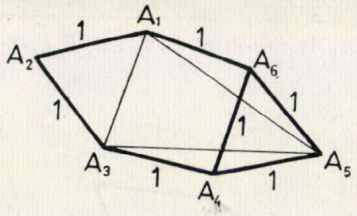
Az A_1A_4 távolság csökken, így $A_1A_4^v$ $0 < v \leqq 2$ esetén csökken, $v < 0$-nál nő.

$A_1A_3^v + A_1A_5^v$ $0 < v \leqq 1$ esetén csökken, $v < 0$ esetén nő a 4. segédtétel alapján, $1 < v \leqq 2$ esetén az $A_1A_3A_5$ háromszög hegyesszögű volta miatt a 3. segédtételből adódóan csökken.

Az előbbiek alapján az A_1 mozgatásánál a hatványösszeget $0 < v \leqq 2$ esetén csökkentettük, ill. $v < 0$ esetén növeltük. Az A_1 mozgatásánál a következő esetek adódhatnak, ha feltételezzük, hogy a konvex burkon belül nem kerül pont:

I. k_6 a k_4 körbe ütközik, a többi távolság $\geqq 1$ (12. ábra). Ugyanilyen típusú alakzat keletkezik, ha k_1 k_3-ba ütközik.

II. k_6 k_3-ba ütközik. Ekkor $A_6A_3A_2A_1$ is rombusz, így $A_1A_2A_4A_5$ paralelogramma (13. ábra). Ha k_1 k_4-be ütközik, a konvex burok ugyancsak paralelogramma lesz.



12. ábra

Az I. esetben $A_1A_5 > A_3A_5$ miatt $A_1A_4 > A_3A_6$, tehát a 10. segédtételt úgy alkalmazzuk, hogy A_1A_4 nőjön és A_1A_5 két egységnyi legyen (k_3 csak akkor ütközhet k_6-ba az $A_1A_6A_5 \sphericalangle \leqq 180°$ esetén, ha A_1A_3 is egységnyi volt és ekkor $A_1A_5 = 2$). Mivel $A_3A_6 \geqq 1$, így $A_3A_4A_6 \sphericalangle \geqq 60°$, így $A_3A_5 \geqq \sqrt{3}$. Az $A_2A_6 \geqq 1$, vagyis $A_2A_1A_6 \sphericalangle \geqq 60°$, így az $A_2A_1A_5$ háromszögre felírt cosinus tételből

$$A_2A_5^2 = 1+4-4\cdot\cos A_2A_1A_6 \sphericalangle \geqq 3$$

adódik, amiből $A_2A_5 \geqq \sqrt{3}$. Így

$$\sum_1^6 A_5A_i^v = 2+2^v+A_3A_5^v+A_2A_5^v \geqq 2+2^v+2\cdot\sqrt{3}^v, \quad \text{ha} \quad 0 < v \leqq 2$$

(5) ill.

$$\sum_1^6 A_5A_i^v \leqq 2+2^v+2\cdot\sqrt{3}^v, \quad \text{ha} \quad v < 0.$$

Az $A_1A_2A_3A_4A_6$ ötszögre a becslés

$$\delta_v(5) \geqq 7+2^v+2\cdot\sqrt{3}^v, \quad \text{ha} \quad 0 < v \leqq 2$$

(6) ill.

$$\delta_v(5) \leqq 7+2^v+2\cdot\sqrt{3}^v, \quad \text{ha} \quad v < 0.$$

(5)-öt és (6)-ot összeadva

$$\delta_v(6) > d_v(6), \quad \text{ha} \quad 0 < v \leqq 2$$

ill.

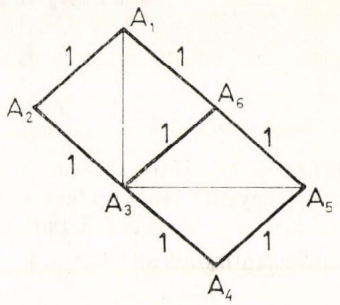
$$\delta_v(6) < d_v(6), \quad \text{ha} \quad v < 0$$

adódik, mivel az egyenlőség (5)-ben és (6)-ban egyszerre nem léphet fel.

A II. esetben az $A_1A_5A_4 \sphericalangle$-et csökkentjük az $A_1A_2A_4A_5$ paralelogrammában (13. ábra). Ekkor az átlók négyzetösszege állandó, így az 1. segédtételből következik, hogy $A_1A_4^v+A_2A_5^v$ csökken, ha $0 < v \leqq 2$ és nő, ha $v < 0$. A többi távolság ugyanaz marad és végül k_3 és k_5, k_2 és k_6 körök is érintkeznek (14. ábra). A változtatás után a távolságösszeg: $\delta_v(6) = 9+2\cdot 2^v+3\cdot\sqrt{3}^v+3^v$, amire $\delta_v(6) > d_v(6)$, ha $0 < v \leqq 2$, ill. $\delta_v(6) < d_v(6)$, ha $v < 0$.

A középpontok konvex burka az $A_2A_3A_4A_5A_6$ ötszög és a $k_2, \ldots, k_6$ körök érintik k_1-et, tehát a $k_2, \ldots, k_6$ körök középpontjai egy egységsugarú A_1 középpontú körön vannak és mindegyik oldalhoz tartozó középponti szög kisebb-egyenlő 120° és nagyobb-egyenlő 60° (15. ábra).

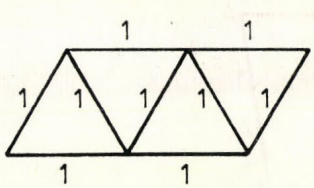
Egy sokszög másodszomszéd csúcsait összekötő átlóit a későbbiekben „másodátlóknak" nevezzük. Az ötszögünk minden „másodátlójához" tartozó középponti szög a [120°; 180°] intervallumban van.



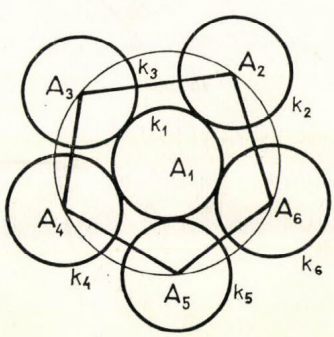
13. ábra

A $v \leqq 1$ esetben a hatványösszeg megfelelő változtatásával a következőképpen juthatunk el a $d_v(6)$-nak megfelelő elrendezéshez. Legyen pl. az A_4A_5 a legnagyobb oldal. A_1 körül k_5-öt k_6-ig, k_4-et k_3-ig, majd együtt k_5-öt és k_6-ot k_2-ig végül k_4-et és k_3-at együtt k_2-ig forgatjuk. A 4. segédtételből következik, hogy egy-egy forgatás végére $\delta_v(6)$ megfelelően változott és végül $d_v(6)$-nak megfelelő elrendezést kaptuk.

Az $1 < v \leqq 2$ esetben tegyük fel, hogy pl. A_4A_6 a legnagyobb „másodátló" és $A_2A_5 \cong A_3A_5$. Forgassuk A_1 körül k_2 és k_3 köröket együtt, míg k_2 a k_6-ba nem ütközik. *A* 3. és a 9. segédtétel miatt a hatványösszeg csökkent és $A_3A_6 \leqq A_6A_4$. Ezután A_1 körül k_3 és k_4 köröket forgatjuk együtt, míg k_3 a k_2-be nem ütközik. Ha ezután pl. $A_2A_5 \leqq A_2A_4$, akkor A_1 körül együtt forgatjuk a k_5 és a k_4 kört, míg k_5 k_6-ba



14. ábra



15. ábra

ütközik. $\delta_v(6)$ a végső helyzetre nyilván csökkent és $A_3A_1A_5 \sphericalangle = 180°$. A 3. segédtétel szerint tovább csökkentünk, ha k_4-et A_1 körül k_5-ig forgatjuk. Így eljutottunk a $d_v(6)$-nak megfelelő elrendezéshez.

A további esetek [1]-hez hasonlóan vizsgálhatók.

Legyen $n=7$.

Ha a középpontok konvex burka hétszög, a 2. segédtétel miatt elegendő az egységnyi oldalú esettel foglalkozni.

Egy sokszög harmadszomszéd csúcsait összekötő átlókat a későbbiekben „harmadátlóknak" nevezzük.

Vegyük az előbbi hétszög „harmadátlóit". Belátjuk, hogy legfeljebb négy „harmadátló" nem nagyobb $\sqrt{3}$-nál, és ezek csak úgy helyezkedhetnek el, hogy egy-

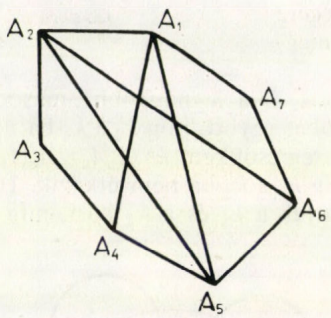
máshoz csatlakoznak (16. ábra). A 16., 17., 19. és 20. ábrán a behúzott átlókról tegyük fel, hogy $\leqq \sqrt{3}$ hosszúságúak.

$$a) \quad A_3A_6 \leqq \sqrt{3} \quad \text{miatt} \quad A_4\sphericalangle + A_5\sphericalangle \leqq 240°,$$

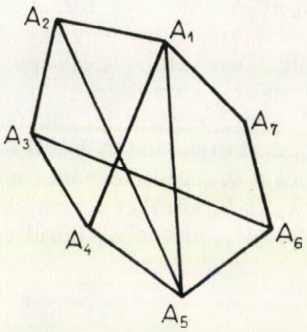
$$A_1A_5 \leqq \sqrt{3} \quad \text{miatt} \quad A_6\sphericalangle + A_7\sphericalangle \leqq 240°,$$

$$A_1A_4 \leqq \sqrt{3} \quad \text{miatt} \quad A_2\sphericalangle + A_3\sphericalangle \leqq 240°,$$

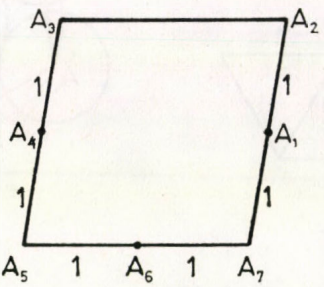
tehát $A_1\sphericalangle \geqq 180°$. A konvexitás miatt csak az egyenlőség állhat fenn, de ekkor az előző egyenlőtlenségekben is mindenütt egyenlőségnek kell fennállni, vagyis a középpontokra a következő paralelogramma adódik: 18. ábra. Itt $A_2A_5 = 2 \cdot A_1A_6 \geqq 2$, ami ellentmond az $A_2A_5 \leqq \sqrt{3}$ feltételnek, tehát ez az eset nem valósulhat meg.



16. ábra



17. ábra

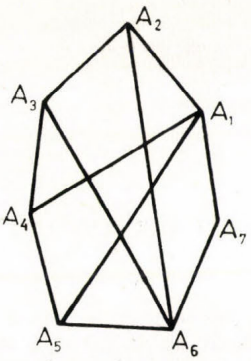


18. ábra

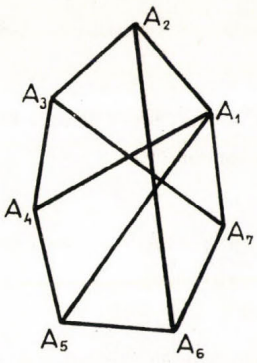
b) Hasonlóan látható be, hogy 2—2 $\sqrt{3}$-nál nem nagyobb „harmadátló" nem csatlakozhat egymáshoz (19. ábra).

c) Ha csak egy csatlakozó $\sqrt{3}$-nál nem nagyobb „harmadátló" lenne (20. ábra), akkor $A_1A_4 \leqq \sqrt{3}$ miatt $A_2\sphericalangle + A_3\sphericalangle \leqq 240°$, $A_2A_6 \leqq \sqrt{3}$ miatt $A_1\sphericalangle + A_7\sphericalangle \leqq 240°$, $A_3A_7 \leqq \sqrt{3}$ miatt az $A_3A_7A_5A_4$ négyszögben $A_4\sphericalangle + A_4A_5A_7\sphericalangle \leqq 240°$. Így $A_7A_5A_6\sphericalangle + A_6\sphericalangle \geqq 180°$. Mivel ezek az $A_5A_6A_7$ háromszög szögei, elfajuló esetben összegük maximálisan 180° lehet, ekkor viszont minden helyen egyenlőségnek kell fennállni.

A 7. segédtételből adódik, hogy $A_4 \sphericalangle + A_4A_5A_7 \sphericalangle = 240°$ akkor és csak akkor lehet, ha $A_3A_7 = \sqrt{3}$ és $A_5A_7 = 1$, de ekkor $A_7A_5A_6 \sphericalangle + A_6 \sphericalangle = 120°$, így ellentmondáshoz jutottunk, tehát a *c*) eset sem állhat fenn.



19. ábra



20. ábra

d) Most belátjuk, hogy a megvalósítható, 16. ábrán látható esetben a többi „harmadátló" nem kisebb $\sqrt{3}$-nál. $A_4A_7 \geqq \sqrt{3}$, mert ha $A_4A_7 < \sqrt{3}$ teljesülne, akkor a 7. segédtétel miatt $A_5 \sphericalangle + A_6 \sphericalangle < 240°$ lenne, de $A_2A_6 \leqq \sqrt{3}$ miatt $A_1 \sphericalangle + A_7 \sphericalangle \leqq 240°$ és $A_1A_4 \leqq \sqrt{3}$ miatt $A_2 \sphericalangle + A_3 \sphericalangle \leqq 240°$. Ekkor $A_4 \sphericalangle > 180°$ következne, ami ellentmond a hétszög konvexitásának. Ugyanígy bizonyítható, hogy A_3A_7, $A_3A_6 \geqq \sqrt{3}$. Most megbecsüljük a hatványösszeget. Az $A_1A_2A_4A_5A_6$ ötszög átlóit a $2+2^\nu+2\cdot\sqrt{3}^\nu$ összeggel, az $A_3A_7^\nu + A_4A_7^\nu + A_3A_6^\nu$ összeget $3\cdot\sqrt{3}^\nu$-nel, a hétszög „másodátlóinak" hatványösszegét pedig a 11. segédtétel alapján $3+4\cdot 2^\nu$-nel lehet becsülni. A hétszög oldalainak hatványösszege 7. Az A_4A_6 átlót duplán számoltuk. A $0 < \nu \leqq 2$ esetében tehát

$$\delta_\nu(7) \geqq 7+(2+2^\nu+2\cdot\sqrt{3}^\nu)+3\cdot\sqrt{3}^\nu+(3+4\cdot 2^\nu)-A_4A_6^\nu \geqq$$

$$\geqq 12+5\cdot\sqrt{3}^\nu+2^\nu+4\cdot 2^\nu-2^\nu > d_\nu(7).$$

Ugyanígy $\delta_\nu(7) < d_\nu(7)$, ha $\nu < 0$.

Ha a hétszögnek négynél kevesebb számú „harmadátlója" nem nagyobb $\sqrt{3}$, akkor is nyilván igaz az előbbi alsó, ill. felső becslés.

A további esetek [1]-hez hasonlóan vizsgálhatók.

IRODALOM

[1] HORVÁTH J., Távolságok összegére vonatkozó egy minimum problémáról, *Matematikai Lapok*, *20* (1969), 25—37.

[2] TEMESVÁRI Á., Über das Minimum der v-Potenzsumme der Seiten solcher n-Ecke, die in einen gegebenen Kreis eingeschrieben sind II., *Annales*.

ОБ ЭКСТРЕМУМЕ СТЕПЕННЫХ СУММ РАССТОЯНИЙ

АГОТА ТЕМЕШВАРИ

ÜBER DAS EXTREMUMPROBLEM BEI DER v-POTENZSUMME VON LÄNGEN

Á. TEMESVÁRI

Betrachten wir n verschiedenen Punkte $(A_1, \ldots, A_n)$ der euklidischen Ebene, weiterhin die gesamten durch diese Punkte bestimmten A_iA_k $(i \neq k)$ Längen, die nicht kürzer als 1 sein dürfen. Die v-Potenzsumme der so definierten Längen bezeichnen wir mit $\delta_v(n)$. Das Extremum von $\delta_v(n)$ bezeichnen wir $d_v(n)$. Wie gross ist $d_v(n)$ und bei welchen $A_1, \ldots, A_n$ Punkten kommt es vor?

In dieser Behandlung lösen wir das Problem im Falle $n \leqq 7$ und $v \leqq 2$ $(v \neq 0)$. Die Extremalfigur ist ebenso wie im Falle $v = 1$ [1]. Wir betrachten ein regelmässiges Sechseck, dessen Seiten die Länge 1 betragen. Wir bezeichnen das Mittelpunkt mit A_1 und der Reihenfolge eines der beiden Umläufe entsprechend die Eckpunkte mit $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$. So bekommen wir im Falle $n = 7$ die Extremalfigur. Streichen wir nacheinander der Punkte A_7, A_6, A_5, A_4. Den Streichungen entsprechend ergibt der Rest nacheinander die Extremalfiguren in den Fallen $n = 6$, $n = 5$, $n = 4$, $n = 3$.

ELŐRE VAGY HÁTRA A MATEMATIKATANÍTÁS REFORMJÁNAK ÚTJÁN?

RUZSA IMRE

1974 ősze óta az általános iskolák évről évre növekvő hányadában új tanterv szerint tanítják a matematikát. Az előirányzatok szerint 1978 szeptemberétől valamennyi általános iskolánk első osztályában életbe lép az új matematika-tanterv, amely a jelenlegi „ideiglenes" tantervnek a tapasztalatok alapján korrigált változata lesz.

1976 őszén a *Tankönyvkiadó* gondozásában jelent meg az *Úton a matematikatanítás reformja felé* c. könyv, az „Új utak a matematika tanításában" sorozat 3. köteteként. A cím alapján az érdeklődő azt sejtheti, hogy e kötet a folyamatban levő matematikatanítási reform ügyét óhajtja szolgálni. Segítséget nyújt a tanítóknak és a tanároknak az új tananyag és az új oktatási módszerek megismeréséhez és elsajátításához, átadja a már felgyülemlett tapasztalatok egy részét, tisztázza a félreértéseket, eloszlatja az aggályokat, fölkelti az új iránti érdeklődést stb. Ez az igény a könyvvel szemben azért is indokolt, mert az a Tankönyvkiadó adta ki, melynek hivatása az állami oktatásügy szolgálata. A 4200 példányszámú könyv a matematika minden általános iskolai pedagógusához hivatott szólni.

A könyv azonban csalódást okoz mindazoknak, akik a fenti reményekkel látnak neki olvasásához. A kötet négy tanulmánya közül csupán egy áll maradéktalanul és egyértelműen a matematikatanítás folyamatban levő reformjának szolgálatában. Szerzője *Nagy Lajosné dr.*, az Egri Tanárképző Főiskola tanára. Igaz, a tanulmány terjedelme 155 oldal, a 277 oldal terjedelmű könyvnek több mint a fele.

A tanulmány szerzője irányítója volt az egri főiskola gyakorló iskolájában az 1968/69. tanévben megindult ún. *komplex* matematikatanítási kísérletnek. (Mint ismeretes, a „komplex" elnevezéssel futó kísérletsorozatok eredményei alkotják a fő tapasztalati bázisát a matematikatanítás jelenlegi reformtervének.) A kísérlet az általános iskola alsó tagozatára, az 1—4. osztályokra terjedt ki. A cikk a kísérletről szóló beszámoló. Megoldhatatlan feladat rövid tartalmi ismertetést készíteni róla. Ezért a recenzens arra szorítkozik, hogy a matematika minden pedagógusának figyelmébe ajánlja ezt a nagyon gondos, szakszerű, lelkes, ám mégis tárgyilagos, sőt önkritikus beszámoló-kiértékelő tanulmányt. Elvi jellegű tanácsai és gyakorlati pedagógiai útmutatásai rendkívül hasznosak mindazok számára, akik most vagy ezután kezdenek hozzá az új tanterv szerinti matematikaoktatáshoz az általános iskola alsó tagozatában. (A későbbiekben néhány illusztráló idézettel fogok majd ízelítőt nyújtani e tanulmányból.)

Dr. Remsei Nándorné cikke („Oktatási módszerek eredményességének vizsgálata", 243—276) szubjektíve jószándékú írás, ám objektív eredményeivel szemben komoly kételyek támadnak az olvasóban. Egyszerűség kedvéért illusztráljuk a szerző mondanivalóját saját „esettanulmányával". Kitűzött feladat: Eldöntendő, hogy egy

konkrét általános iskolai tananyag (törttel való szorzás) tanítására a hagyományos vagy a feladatlapos tanítási módszer hatékonyabb-e. A hatékonyság javasolt mércéje: a tanulócsoport pontszámösszege az ellenőrző teszteléskor, törve a tanulócsoportnak a tananyag elsajátítására fordított időösszegével. (A szerző képletében ugyan „pontszámösszeg" és „időösszeg" helyett rendre „átlagpontszám" és „átlagidő" szerepel, ki tudja miért. De nem kívánok kötekedni a cikk kisebb-nagyobb matematikai pontatlanságainak felsorolásával.) Megoldás: Négy (4) tanítási óra után a tesztdolgozat — a fenti hatékonysági mérce alkalmazásával— egyértelműen a feladatlapos módszer nagyobb hatékonyságát igazolja.

Az olvasó kérdései: Tanítási módszernek minősíthető-e egyáltalán a feladatlapok alkalmazása? Lehet-e bármilyen módszer hatékonyságáról *négy* (4) tanítási óra tapasztalatai alapján megbízható véleményt formálni? Olyan egyszerű mérce-e a pedagógiai hatékonyság, hogy két könnyen mérhető adat hányadosával kifejezhető? S még lehetne folytatni a kételkedő kérdéseket.

Érdemes összevetni a hatékonyságmérés itt javasolt szimpla (bár tarka matematikai köntösbe öltöztetett) módszerét azokkal az eredményességi vizsgálatokkal, amelyekről Nagy Lajosné dr. számol be idézett tanulmányának 110—179. oldalain. Az előbbi, sajnos, inkább arra alkalmas, hogy idegenkedést, bizalmatlanságot váltson ki a pedagógusokból az eredményességi vizsgálatokkal, felmérésekkel szemben. Az utóbbi beszámolóban nincs szó a matematikai statisztika arzenáljának felvonultatásáról. Egyszerű, áttekinthető táblázatok és grafikonok, sok-sok szöveges kommentárral, az eredmények kritikus kiértékelésével. És *hét* területre terjed ki az oktatónevelő munka hatékonyságának vizsgálata (tárgyi tudás, egyszerű matematikai készség, logikus gondolkodás, figyelem, alkotó fantázia, kombinatív készség, magatartás konfliktushelyzetben).

Félreértés ne essék: nem helytelenítem a pedagógiai-pszichológiai vizsgálatokban a matematikai statisztika indokolt és komoly alkalmazását. De a matematikai módszerek látszatalkalmazása valójában ellenpropaganda komoly alkalmazásukkal szemben. Sajnos, dr. Remsei Nándorné tanulmánya, a szerző jó szándéka ellenére, inkább a matematikai statisztika lejáratására, mintsem becsületének öregbítésére alkalmas.

Demeter Katalin tanulmánya („Részletek a variációs matematikatanítás eljárásrendszeréből", 191—241) három részre tagolódik. Az első részben a variációs tanítási módszer elvi problémáival foglalkozik, helyenként polemizálva más didaktikai felfogásokkal. A második rész a módszer alkalmazására vonatkozó konkrét részleteket mutat be a tanítási gyakorlatból, ennek keretében is folytatva az eléggé éles elvi polémiát. A befejező rész a variációs módszert követő kísérleti tanítások eredménykiértékelési adatait ismerteti.

Nagy Lajosné dr. és Demeter Katalin beszámolói két *különböző* matematikatanítási koncepcióról szólnak, a szakmai zsargon szerint az első „a komplexről", a második „a variációsról". Ráadásul a szakmai közvélemény úgy tudja, hogy ezek *riválisok* koncepciók. A kötet címe és elvileg heterogén tartalma azt a benyomást kelti az olvasóban, hogy a matematikatanítás reformjának követendő útját oktatásügyi hatóságaink még nem döntötték el. E benyomásnak persze ellentmond az ideiglenes tanterv bevezetése, és az a tény, hogy az új tanterv a komplex tanítási kísérletek tapasztalataira épült. Így a kötet kiválóan alkalmas arra, hogy zavart keltsen a matematika általános iskolai pedagógusai körében, és kételyeket ébresszen a reform végrehajtására vonatkozó állami utasítások komolysága iránt.

Félretéve e problémát, lássuk érdemben Demeter Katalin tanulmányát. A szerző szerint a variációs tanítási eljárás „célja a gondolkodási merevség feloldása", ill.

„kialakulásának megelőzése volt. Azt az ismert hibalehetőséget kívántuk kiküszöbölni, hogy a tanult és ismert összefüggéseket, feladatokat, szokatlan formában látva, a tanulók nem tudtak alkalmazni, ill. megoldani" (195). Egészítsük ki e programnyilatkozatot a tanulmány második részében feldolgozott konkrét tanítási fogások, eszközök, feladatlapok, órarészletek stb. tanulságaival, s a következő kép bontakozik ki előttünk: A variációs tanítási eljárás célja (a matematika tanítására alkalmazva) a hagyományos számtan-mértan tananyag oktatásában olyan fogások bevezetése, amelyek elsősorban a számolási rutinnak és az elemi formális átalakítások készségének alaposabb, mélyebb, a korábbinál megbízhatóbb kialakítását célozzák.

Feltéve, hogy Demeter Katalin tanulmánya hűen tükrözi a variációs eljárás célkitűzéseit és módszereit, máris eloszlathatunk egy elterjedt tévhitet: *A „komplex" és a „variációs" nem rivális oktatási módszerek,* egyszerűen azért nem, mert nem ugyanarra a témára vonatkoznak. A „komplex" célja az iskolai matematikaoktatás tananyagának (tartalmának) és módszerének együttes és átfogó megreformálása (s ez áll az ideiglenes tantervre is!). A variációs programban nem látjuk nyomát sem a matematika új, modern világunkhoz alkalmazkodó felfogásának; itt a régi számolásimérési tudnivalók alkotják az általános iskolai „matematikát". A legjobb esetben azt mondhatjuk, hogy bizonyos oktatási területeken a két koncepció oktatási módszerei összehasonlíthatók. És persze, összehasonlíthatók a két koncepciót motiváló elvi (filozófiai, pszichológiai, didaktikai stb.) nyilatkozatok is.

Demeter Katalin néhány elvi nyilatkozata összhangban van az új tantervben megfogalmazott tantervi és módszertani irányelvek szellemével. Így a tanulók önálló munkájáról s az osztálytársaktól való tanulásról mondottak (196—198) helytállóak. A számolási rutin fontosságának hangsúlyozásával is egyetérthetünk. E témában elítélőleg szól konkrétan meg nem nevezett irányzatokról és személyekről, amelyek, ill. akik lebecsülik a számolási készség fejlesztését, olyan indokolással, hogy a számológépek korszakában erre nincs szükség (212—213). Valami konkrét veszélyre óhajt itt figyelmeztetni a szerző? Lássuk, mit mond erről az új tantervben a *Tantervi irányelvek* 8. pontja:

„...a mechanikus számolás, a szóbeli és írásbeli műveletek megtanulása nem veszti el jelentőségét, de a készség fokára való emelésre több idő jut.... Nemcsak a numerikus számolásban, hanem általában a feladatok megoldásában a gyorsaságnál nagyobb jelentőséget kell tulajdonítani a jövőben az önállóságnak, önellenőrzésnek, az eredményért való felelősségvállalásnak, a matematikai úton kapott eredmény valóságra vonatkoztatásának, alkalmazni tudásának. Elsősorban az olyan képességek fejlesztésében kell igényesebbeknek lennünk, amelyekben az embert a gép nem tudja vagy csak alacsony hatásfokkal tudja pótolni." (Lásd pl.: *Kézikönyv* az ideiglenes matematika-tanterv 1. osztályos anyagának tanításához, Tankönyvkiadó, 1974, 8. A továbbiakban e kiadványra röviden a ‚Kézikönyv' jelöléssel hivatkozom.)

Ugyanitt a *Módszertani irányelvek* 11. pontjában ezt találjuk:

A tanulók „munkájuk közben ... bizonyos ismereteket, eljárásokat, algoritmusokat olyan gyakran alkalmaznak, hogy azok bevésődnek emlékezetünkbe, felhasználásuk mintegy automatikussá válik. Az emlékezet- és készségfejlesztés elhanyagolása más fontos célok elérését is veszélyeztetné. De ezeket is tegyük érdekessé azzal, hogy nem összefüggésükből kiragadva, hanem problémákba ágyazva végeztetjük őket, és így lehetőleg elkerüljük a gépies, egyhangú gyakoroltatást." (Kézikönyv 14.)

Tegyük ezek mellé még Nagy Lajosné dr. tanulmányának egy részletét (84):

„A jártasságok, ill. a készségek fejlesztését nem a végnélküli mechanikus művelet-, ill. feladatvégzésekkel segítjük. Sokszor érte már az a vád ezt a kísérletet, hogy ‚a numerikus számolási készséget nem fejleszti kellően', ‚variálni tud a gyerek, de téveszti az egyszeregyet' stb. Igaz az, hogy nem jut annyi idő a készségfejlesztő gyakorlatokra, mintha csak a hagyományos anyagot tanulnák. Aki téveszt az összeadásban, annak nem kell büntetésből 10 összeadást készítenie stb. Az említett hátrány tapasztalatunk szerint a 4. osztály végére csökken, sőt megszűnik... . A változatos szöveges feladatok, az érdekes logikai problémákra a válaszkeresés jobban motivált a helyes műveletvégzésre, mint a nagyon sok gyerek számára unalmas szorzások, osztások végzése."

Az idézetek egyértelműen tanúsítják, hogy sem a „komplexben", sem az új tantervben nincs szó a számolási készség lebecsüléséről. Szükségtelen a harangot félreverni és megnevezés nélkül vádaskodni. De, ettől függetlenül, el kell ismernünk, hogy igen jelentős felfogásbeli különbség látható az új tanterv és Demeter Katalin álláspontja között abban a kérdésben, hogy mekkora súlyt helyezzünk a számolási rutin kialakítására, és milyen módszereket alkalmazzunk ennek érdekében.

A Demeter Katalin bemutatta anyagból az tűnik ki, hogy az ő felfogásában a számolási rutin kialakítása alapvető, uralja és csaknem kitölti az egész tananyagot. A módszer pedig mintegy háromnegyed részben gépies, száraz, ponthajhászó „agycsuklógyakorlat". Lehetséges, hogy bizonyos eredményekhez vezet. De milyen áron? Egy tanítási fogás helyességét nem szabad pusztán azzal mérni, hogy bizonyos mechanizmusok kialakítását mekkora hatásfokkal szolgálja.

A recenzens véleménye szerint az új tanterv irányelvei e kérdésben helyesek és mértéktartóak, ám a számolási rutin kialakításának megfelelő módszerei tanítási gyakorlatunkban még nem kellően kidolgozottak. E témakörben talán föl lehetne használni a „variációs" módszer bizonyos tapasztalatait és fogásait is, a (nézetem szerint) téves alapkoncepció átvétele nélkül, és persze az egyoldalúságból fakadó túlzások mellőzésével.

Demeter Katalin elvi nyilatkozatainak nagyobb része azonban szöges ellentétben áll az új tanterv irányelveivel. Lássunk néhány példát!

„A variációs tanítási eljárásban szemléltetést és manipulációt csak igen kis mértékben alkalmazunk... . Tapasztalataink szerint a szemléltetés és a manipuláció megnehezíti az absztrakció kialakulását... az eszközök elvonják a tanulók figyelmét a szemléltetendő problémáról" (198—199). Demeter Katalin szerint a manipulációnak „különösen a csecsemőkorban van nagy szerepe", az iskolai jelentősége minimális (ugyanott).

Az új tantervben a Módszertani irányelvek 5. pontja így foglalkozik e kérdéssel: „A problémák fölvetésében és a tanulási helyzetek tervezésében kapcsolódnunk kell a tanulók tapasztalataihoz (a környezetükben található tárgyak, matematikai kirándulások stb.). Hasznosak a matematikai gondolatokat magukba sűrítő konkrét modellek, matematikai munkaeszközök is, különösen alsó fokon (egy részük később is). Ezeket a tanulók mindaddig igénybe vehetik, amíg a kellő absztrakciók ki nem alakultak bennük, amíg hasonló problémákat puszta elképzelés alapján is meg tudnak oldani." (Kézikönyv 12.) — Az itt említett modellek és eszközök használatát nevezi Demeter Katalin manipulációnak.

„Nem látjuk igazoltnak azt a nézetet — írja Demeter Katalin —, amely szerint a valóság összefüggéseit kicsinyített, mesterséges modelleken kell szemléltetni, s az ezekkel való sok manipulálás útján és eredményeképpen alakulnak ki a fogalmak a környező valóság összefüggéseire vonatkozóan." (200.)

Az itt visszautasított nézet némi eltúlzása az új tanterv idézett szemléletének, de a korábbi Demeter-idézetünk alapján világos, hogy szerzőnk a pontosabban fogalmazott, mérsékeltebb nézettel sem ért egyet. Kérdés: *milyen tanítási tapasztalatok alapján* vonja kétségbe az állami tanterv álláspontját? A hagyományos számolás-mérés tananyag tanítási tapasztalata alapján? Tegyük föl egy pillanatra, hogy e tapasztalati bázison kételkedése jogos lenne. Van-e tapasztalati alapja *az új tananyag* tanításáról? Erre vonatkozóan tanulmányában egy betűnyi utalást sem találunk.

Végülis Demeter Katalin implicite azzal vádolja az új állami tantervet, hogy az hibás, empirikusan ellenőrizetlen didaktikai módszereket ír elő (vagy legalábbis javasol) pedagógusainknak. Aki csak felületesen is ismeri az új tanterv megszületésének történetét, jól tudja, hogy ez a vád abszolút hamis. Hosszú évek kísérleti tanítási tapasztalatai *igazolják* a modellek és munkaeszközök használatának előnyeit az alsófokú matematikatanításban, éspedig mind a hagyományos számolás-mérés tananyagban, mind az új, a modern matematikai szemléletmód kialakítását előkészítő témakörökben (azok és ezek az új tantervben amúgyis szétválaszthatatlan, komplex egységet képeznek). Ilyen tapasztalatokról ír Nagy Lajosné dr. is tanulmányának néhány helyén (59—62, 64—67), és persze számos más, nyomtatásban vagy sokszorosított formában megjelent dokumentumra, továbbá sok száz pedagógus írásban nem rögzített véleményére is lehetne hivatkozni.

Az új tantervet nem megalapozatlan elképzelések mániákusai, nem is laikusok vagy amatőrök hozták létre. Sokéves tanítási kísérletek, széles körű társadalmi és szakmai viták előzték meg kidolgozását. Túlzásoktól mentes megfogalmazásai tükrözik a Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Tudományos Akadémia illetékes bizottságainak egyöntetű állásfoglalását is. A tanterv irányelveinek megtámadása „nem látjuk indokoltnak" és „tapasztalataink szerint" motivációkkal abszolút megalapozatlan, és egy olyan kötetben, amely a pedagógusok széles körének informálására szolgál, 1976—77-ben, a kísérleti tanterv bevezetésének harmadik évében, közel jár egy állami határozat meghiúsítását célzó propagandához.

Ugyancsak az új tanterv irányelveivel kerül szembe Demeter Katalin akkor is, amikor szót emel a differenciált vagy csoportfoglalkozások ellen (198), a frontális osztályfoglalkoztatás univerzális alkalmazása mellett törve lándzsát. Érvelésének elvi elemzése helyett hadd utaljak itt Nagy Lajosné dr. tanulmányának néhány részletére (39, 67—68, 79—80, 114—115). Ezekből világosan kiderül, hogy a differenciált foglalkoztatás elleni kifogások is megalapozatlanok. Mellesleg: A közös feladatokon dolgozó osztályban az élenjárók „húzóereje" a gyöngébbekkel szemben ténylegesen „taszítóerővé" válik; ennek észrevételéhez sem elmélyült megfigyelés, sem alapos pszichológiai iskolázottság nem szükséges. „A tanulás legfőbb indítéka a teljesítményen alapuló sikerélmény legyen" — szögezi le világosan az új tanterv (Kézikönyv 12).

„A tanítási órán nem korrepetálunk, nem foglalkozunk egy-egy tanuló egy-egy hibájának kiküszöbölésével" — írja Demeter Katalin (198). Az új tanterv Módszertani irányelvek 8. pontja szerint: „A differenciált foglalkoztatás legfőbb célja a gyengébb tanulók hatékony és tapintatos segítése." (Kézikönyv 13.) Nagy Lajosné dr. szerint: „A leggyengébbekkel külön foglalkozik a pedagógus *órán és korrepetáláson*" (68, kiemelés tőlem).

„A variációs tanításban tanuló nem dolgozik a táblánál!" — írja Demeter Katalin (234). Igaza van addig, hogy a pedagógus ne használja íródeáknak a tanulót, és ne dolgoztasson *egy* tanulót a táblánál, miközben a többiek unatkoznak vagy gépiesen másolnak. De nagy valószínűséggel téved, ha (főleg az alsó tagozatban) semmi lehetőséget nem lát olyan táblai munkára, amely lényegében az egész osztályt

foglalkoztatja. Néhány ilyen lehetőséget bemutat Nagy Lajosné dr. tanulmánya is (75—78); hasonló példákat a „komplex" kísérletben részt vevő pedagógusok kapásból mondanak.

Egyetérthetünk Demeter Katalinnal abban, hogy a tanulók tudásszintjének fölmérésekor differenciáltan kell figyelembe venni a jó megoldásokat, a megoldatlan feladatokat, és a hibás eredményeket (sőt, adott esetben a lehetséges hibák típusai szerint is szükséges lehet a differenciálás). A helyes értékelési rendszer azonban alkalmazkodik a kitűzött feladatok természetéhez. Ha a feladat történetesen egy reláció (mondjuk a „kisebb" reláció) felismerése, akkor az a tanuló, aki kb. ugyanannyi helyes választ adott, mint hibásat, az nyilván nem ismeri, nem érti még a kérdéses relációt, valójában nem dolgozott, hanem találgatott („totózott"). „Munkája" objektíve semmivel sem értékesebb, mint azé a tanulóé, aki egyetlen feladatot sem oldott meg (ebből a témakörből). *Ebben az esetben* a hibás megoldásért járó pontlevonás a helyes kiértékelés szempontjából reális, pedagógiai szempontból pedig eszköz *a felelősségvállalásra nevelésben,* és nincs ellentmondásban a büntetésnek mint tanulási motivációnak elutasításában. Demeter Katalin idevágó, a *Kézikönyv* bizonyos helyeit érintő kritikája (az erkölcsi nevelés „gellert" kap stb., 223—224) azon alapszik, hogy bizonyos (főleg számolási) feladattípusok értékelésére helyes elvet kiterjeszt olyan feladattípusokra is, amelyek értékelésére nem alkalmas.

A számolási rutin túlértékelése motiválja Demeter Katalin azon érvelését is, hogy a „csak egy helyen elszámoltam magam" tanulói védekezés „nem fogadható el, még akkor sem, ha a tanuló megoldása egy magasabb szintű képesség meglétére utal, és egy alacsonyabb szintű képesség volt hiányos" (213). Abban persze teljesen igaza van, hogy az ilyen szituációkat intenzíven föl kell használnunk a munkamorálra, a felelősségvállalásra nevelés szempontjából. Az új tanterv nem véletlenül hangsúlyozza a becslés, a numerikus érték nagyságrendjének megállapítása, s általában az önellenőrzés szerepét. Ha a számolási hibát vétő tanuló *fölismeri,* hogy végeredménye irreális, s ha még a helyes nagyságrendet is meg tudja állapítani, akkor felelősségtudatra nevelésünk eredményes. De nagy hiba, sőt a jövő mérnök- és természettudós nemzedéke nevelése szempontjából egyenesen tragikus lenne, ha a számolási készséget többre vagy ugyanannyira értékelnénk, mint az önálló alkotói jellegű képességeket. „...a nagy gondolatok, felfedezések, tervek mindig valamilyen konkrét, precíz megoldásban manifesztálódnak, és itt már nem lehet ‚csak' " — írja Demeter Katalin (213). Vajon nem tudná a szerző, hogy ilyen esetekben a kiszámításokat többszörösen (és ma már gépekkel) ellenőrzik? Hogy a rosszul épített házak stb. nem számolási, hanem tervezői (vagy technológiai) hibák miatt szoktak összedőlni? Hogy a nagyságrendi hiba csak egy Verne-regényben okozhat konfliktust? — „Az iskolai képzésnek, az iskolai értékrendnek adekvátnak kell lennie a társadalom igényeivel és értékrendjével. Ellenkező esetben az iskola nem tölti be a társadalom által neki szánt szerepet" — írja (213). *Ezzel teljes mértékben egyet kell értenünk.* Társadalmunk munkája, képessége, teljesítménye szerint értékeli az újítót, a tervezőt, a tudóst akkor is, ha bizonyos képességei (pl. manuális készsége vagy számolási rutinja) netán az átlagszintet sem érik el; és nem faragtat széklábakat Michelangelókkal.

Még folytatni lehetne a vitát Demeter Katalin cikkének néhány további elvi jellegű megállapításával, de az eddigiek már lehetővé teszik az összefoglalást. A tanulmányban találunk néhány helyes, az új tanterv szellemével egybevágó állásfoglalást. A bemutatott dokumentáció arról is tanúskodik, hogy a „variációs" eljárás átvett néhány fogást a „komplextől" (pl. az I. osztályos anyagban a tízes átlépés tanítási módszerét, 227—228). A tanulmány nagyobb része azonban propa-

ganda a matematikatanítás új ideiglenes tanterve ellen (bár a tantervet a szerző egyszer sem említi), mégpedig érvekkel meg nem alapozott propaganda. Ezért a szóban forgó kötetben való megjelentetése egyértelműen hiba volt.

Utoljára hagytam *dr. Lénárd Ferenc* tanulmányát („A matematikatanítás korszerű megalapozásának néhány pszichológiai problémája", 7—33), amely a kötetben az első helyet foglalja el (mintegy azt sugalmazva, hogy e cikk ad elvi útmutatást a matematikatanítás folyó reformjához). A tanulmány mondanivalóját az utolsó bekezdés így summázza:

„Bemutattam a matematikatanítás korszerűsítési törekvéseinek nevelési, pszichológiai kulcsproblémáit. Sajnálatos, hogy mindezeknek a problémáknak a megvitatása a hazai pedagógiai irodalomból teljesen hiányzik annak ellenére, hogy az állami oktatásról és az állami oktatás fejlesztéséről szóló párthatározat ezt határozottan és világosan előírja." (31.)

A szerző panasza alighanem indokolt. Ha az itt említett vita már megtörtént volna, akkor talán nem került volna sor arra sem, hogy a szerző cikke *e kötetben* megjelenjék. Ugyanis e cikknek sem az a célja, hogy a folyamatban levő reformot támogassa, hanem inkább az, hogy kérdésessé tegye a reform koncepcióját.

Dr. Lénárd egy sor, a matematika tanításának korszerűsítésével kapcsolatos álláspontot és koncepciót ismertet, némelyeket egyetértően, némelyeket pedig bírálva és elutasítóan. Az elutasított álláspontok között vannak olyanok, amelyek — kisebb-nagyobb módosításokkal — föllelhetők az új tantervben, és vannak olyanok is, amelyek az új tantervben mértéktartóan fogalmazott elvek szertelen és egyoldalú eltúlzásai. Számos esetben az elutasított elvek képviselői nincsenek megnevezve. *Hazai* vitapartnerekre mindössze két ízben hivatkozik: egyszer Gádor Endréné és Surányi János egy közös cikkére, és másodszor a jelen recenzióban már idézett „Kézikönyv"-re. Az olvasó a tanulmányból nem tudhatja meg, hogy az (indokoltan vagy indokolatlanul) elutasított nézeteket kik képviselik, jelen vannak-e ezek a nézetek a hazai reformtörekvésekben. Néhány példa:

„...az ‚új' matematika a számolást mint a gondolkodásra nevelésre alkalmatlan eljárást félretette" (16).

„A felfedeztető tanításnak azt a formáját, amely nem ad a tanulók számára jól felépített feladatrendszert, hanem a tanulókat teljesen magára hagyja, a ‚mély vízbe' dobja, rendkívül időrablónak, az alapfokú oktatásban pedig egyenesen károsnak, ártalmasnak tartom." (20.)

„...a nevelési feladatokat azok a korszerűsítési eljárások képtelenek megoldani, amelyek a felfedeztetést fetisizálják, a tanulási munka helyett a játékokat helyezik előtérbe, amelyek a fogalom kialakításának a valóságnak nem megfelelő elméletét erőszakolják rá a tanulókra, amelyek az osztályfoglalkoztatás helyett kiscsoportos tanítást vezetnek be, hangoztatva a tanulók közötti nagy különbségeket, amelyek lemondanak az egész tanulócsoport egységes irányításáról, a munka rendjének megszerettetéséről." (30.)

A cikk idézett záróakkordja alapján az olvasó kénytelen azt gondolni, hogy az iménti idézetek akut *hazai* problémákra utalnak. Csakhogy ilyen túlfeszített, végletes nézeteket sem az új tantervben, sem pl. Nagy Lajosné dr. beszámolójában *nem* találunk. Kiknek a nézeteit ostorozza a szerző? Hazai túlzókét, vagy külföldiekét? Miért aktuális éppen most ez a bírálat?

Dr. Lénárd cikkének egyik jellegzetes vonása a homályos, elmosódó címzés a bírált nézetek tekintetében. Szinte azt sugalmazza, hogy *a sorok között* olvasson az olvasó.

A cikk másik jellegzetes vonása az elfogadott, dicsért álláspontok forrásaira vonatkozó adatok elhomályosítása. A tanulmány alapján úgy tűnik, mintha dr. Lénárdnak a matematika tanítására vonatkozó filozófiai, pedagógia és pszichológiai nézetei *(a)* a dialektikus logikán alapulnának (10—12), és *(b)* általánosan elfogadottak lennének a szovjet pedagógiai irodalomban és az iskolai gyakorlatban (19—20, 30—31). Bár ezek túlnyomó részben tekintélyi érvek, legalább akkora súlyú tekintélyi ellenérveket lehet velük szembeállítani, *ugyancsak a szovjet pedagógiai irodalomból.*

Dr. Lénárd tanulmánya — Demeter Katalin tanulmányához hasonlóan — néhány pontban egyértelműen szembenáll az alsófokú matematikatanítás jelenleg folyó reformjával. A fontosabb nézeteltérések (a teljesség igénye nélkül) a következők.

(1) Dr. Lénárd szerint a matematikai fogalmak egy véget nem érő fejlődésben alakulnak át egyre érettebb fogalmakká. A szakkifejezések és a szimbólumok bevezetése e folyamat *kezdete,* nem pedig vége (hiszen nincs is vége a folyamatnak; 10—12, 19; Demeter 200). — Lehet, hogy dr. Lénárd elméletének következményei nem ütköznek ki erősen az elemi számtan-mértan tanításában. De hogy milyen tragikus következményei vannak a rajta alapuló módszernek pl. a valós szám, a határérték és általában az analízis elemei tanításában, azt jól ismerjük a régi középiskolai praxisból. Az egyetemi matematikaoktatásban a hallgatók nagyobbik részének fejéből négy év alatt sem lehetett kiverni az érleletlenül beléjük adagolt eltorzult fogalmakat.

(2) Az előző elv egy kihatása a tiltakozás a „keretek" alkalmazása ellen, a betűszimbólumok (változók) helyett (12—13). Dr. Lénárd szerint *a keretjelölés nem matematikai szimbólum* (10). Először is, ez tévedés. Ha egy matematikai feladatban vagy értekezésben egy jel egyértelműen és dekódolhatóan jelöl egy fogalmat, akkor az a jel ott matematikai szimbólum, függetlenül attól, hogy kevesen vagy sokan használják. Sok esetben a matematikusok is szívesebben használnának betűk helyett más jeleket, ha ez nem jelentene technikai problémát a nyomdák számára. Az elsőosztályosnak, akinek a betűírás még nehezen megy, nyilván kényelmesebb a keretek használata. De nem ez a lényeges. Talán nem lesz haszontalan, ha egy kis kitérőt teszünk e probléma elvi tisztázása érdekében.

A matematikai szimbólumok egy része *konstans* jelentésű (az azonosság és egyéb relációk jele, konvencionális függvényjelek, számjegyek); ezek használatának bevezetése a legkevésbé problematikus. Az iskolai gyakorlatban használunk *alkalmilag konstans* jelentésű szimbólumokat (rendszerint betűket) is; ezek *egy feladaton belül* egy meghatározott matematikai objektumot jelölnek, mintegy tulajdonnévpótlók vagy névrövidítések. Alkalmazásuk egy fokkal nagyobb óvatosságot igényel, alkalomról alkalomra változó jelentésük miatt. Végül a matematikai szimbólumok speciális osztályát alkotják a *névmáspótlók,* amelyeket (nem valami szerencsésen) *változók*nak nevez a szaknyelv. Használatuk mindenekelőtt az ún. kvantifikált állítások pontos szerkezetének feltárására szolgál. Az individuumneveknek változókkal való helyettesítésével az állításokból (zárt mondatokból) ún. *nyitott mondatok* képezhetők. Megfordítva — és ez a matematika tanításában a lényeges elem —, nyitott mondatból a változóknak (megfelelő kategóriába tartozó) nevekkel való helyettesítésével (igaz vagy hamis) zárt mondat, állítás keletkezik. Ez a hevenyészett logikai elemzés már illusztrálja a változók speciális szerepét, s a helyes használatuk elsajátításával kapcsolatos pedagógiai és pszichológiai problémát. A változó alapvetően más funkciójú szimbólum, mint a tartósan vagy alkalmilag konstans denotátumú jel. Az ún. szabad előfordulású változó (az alsófokú oktatásban elsősorban ez jelentős) semmi konkrétat nem jelöl (ez a lényeges eltérés a matematikai konstansokhoz

képest!), csupán fenntartja a helyet a behelyettesítendő tulajdonnév számára, esetleg (de nem mindig) utal az értelmesen behelyettesíthető objektumok kategóriájára vagy osztályára. (Indokolatlan leszűkítés a változót „az ismeretlen" jeleként interpretálni.) E speciális — és más jelekhez képest újszerű — logikai szerepük helyes megértése olyan pszichológiai probléma, amely a hatévesek oktatásában éppúgy jelen van, mint a felnőttoktatásban (beleértve az esti egyetemi matematika és logika oktatás tapasztalatait is). Súlyos hibának tartom a változók bevezetésének problémáját egy kalap alá vonni a konstans denotátumú jelek használatának problémájával. E hibát csak magyarázhatja, de nem mentheti a modern logikában való járatlanság, a változók precíz logikai szerepének nem ismerése. — Visszatérve a keretjelölésre, a tapasztalatok szerint ez nagyon is érzékletesen és szemléletesen tárja föl a változók igazi, *helyfenntartó* szerepét. A keretet ki lehet tölteni, s nem is egyféleképpen; használatuk a kicsinyek számára természetes, alig igényel magyarázatot. (Maguk is szívesen csinálnak „nyitott mondat" feladatokat; lásd pl. Nagy Lajosné dr. tanulmányában, 87.) Egy idő múlva a keretek fokozatosan helyettesíthetők betűkkel (ez általában nem minden tanuló számára válik *egyazon időben* magától értetődővé). Elképzelhető, hogy más jó megoldás is lehetséges a változók használatának helyes tanításához. Egy biztos: a változók bevezetése logikailag, pedagógiailag és pszichológiailag is más természetű probléma, mint mondjuk a ‚<' vagy a ‚–' jel bevezetése.

(3) Dr. Lénárd általában helyteleníti a matematikai szemléltető- és munkaeszközök használatát, a „manipulációt", a Dienes-készletet, a színes rudakat stb. (25—29; Demeter 198—199). Mellesleg: a színes rudak felhasználását tévesen írja le: „a tanulók nem számokkal dolgoznak, hanem színekkel" (27). Ténylegesen nem a rudak vagy a színek jelentik a számokat, hanem két-két rúd hosszának (vagy térfogatának) aránya, az egység alkalmanként változik.

(4) Helyteleníti dr. Lénárd a játék szerepeltetését az oktatásban (30), valamint a felfedeztető módszer alkalmazását. „Kísérletileg igazolható" — írja —, „hogy gátlások, szorongások, elbizonytalankodások és elkedvetlenedések jóval gyakrabban lépnek fel a felfedeztető módszer alkalmazásakor, mint abban az esetben, ha feladatlapokkal irányítjuk a tanulócsoport munkáját." (24—25.) Ki, hol és mikor végzett ilyen kísérleti igazolást, erről nincs említés. (Az ellenkező tapasztalatokról élményszerű képet kaphat az olvasó pl. Nagy Lajosné dr. tanulmányából.)

(5) Végül elítéli a tanulókkal való differenciált foglalkozás módszereit, különösképp a kiscsoportos munkát (30).

Sem a terjedelem, sem a recenzens fölkészültsége nem teszi lehetővé Demeter Katalin és dr. Lénárd Ferenc tanulmányainak részletes és szakszerű elemzését. A recenzens összefoglalóan csak annak leszögezésére szorítkozik, hogy mindkét cikk néhány nagyon fontos elvi és módszertani kérdésben határozottan és egyértelműen szembenáll az általános iskola új matematika-tantervében megfogalmazott tantervi és módszertani irányelvekkel, továbbá hogy szembenállásuk nélkülözi azt a tárgyszerű megalapozottságot, amely a pedagógiai vitában általában, s egy állami dokumentumba foglalt tervvel szemben különösen kötelező. Röviden: objektíve mindkét cikk *propagandairat* a matematikaoktatás folyamatban levő reformja ellen.

Távol álljon tőlem az a nézet, hogy az ellenzéket el kell hallgattatni. A jóindulatú, a közös ügy sikerét féltő kritika hasznos, sőt nélkülözhetetlen. Mi több, a nem egészen építő szándékú kritikából is lehet tanulni. (Dr. Lénárd és Demeter Katalin cikkeinek is van tanulságuk.) Nem vonhatjuk kétségbe azt sem, hogy a szerzők őszintén hisznek elgondolásuk helyességében. A vita hevében a kisebb túlzások és elragadtatások is megérthetők, s emberileg menthetők. De két dolog a bírálat szabadsága *a megfelelő fórumon,* és egy folyamatban levő állami terv elleni agitáció.

A reform megvalósításának egyik nagy gondja éppen az ingadozó pedagógusok és a tájékozatlan vagy máris hamisan informált közvélemény megnyerése. Eleve kudarcra ítélt az a program — legyen az beruházási, gyártmányfejlesztési, vagy oktatási reformprogram —, amelynek megvalósítása során *a megvalósítók soraiban* zavartalanul dolgozhat a program meghiúsítását célzó propaganda.

A Tankönyvkiadó ismertetett kiadványa éppen ilyen propagandának biztosított szabad fórumot. Ideje lenne, ha a kiadó illetékesei eldöntenék végre: *merre van az „előre" a matematikatanítás reformjának útján?*

ВПЕРЁД ИЛИ НАЗАД ПО ПУТИ РЕФОРМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ?

ИМРЕ РУЖА

PROGRESS OR RETROGRESS ON THE WAY OF TEACHING MATHEMATICS?

I. RUZSA

JELENTÉS AZ 1976. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1976. november 5. és 15. között rendezte meg az 1976. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1976-ban fejezték be.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Legyen R a természetes számok halmazán értelmezett, kétváltozós rekurzív reláció. Tegyük fel, hogy R rendezési reláció, amely ω típusú rendezést értelmez és jelölje $f(n)$ az ezen rendezés szerinti n-edik elemet. Mutassuk meg, hogy ekkor $f(n)$ nem feltétlenül rekurzív.

2. Tegyük fel, hogy a G végtelen gráf bármely A megszámlálhatóan végtelen szögponthalmazához található a G gráfnak olyan $P \notin A$ pontja, amely A-nak végtelen sok pontjával van összekötve. Bizonyítandó, hogy létezik G-nek olyan megszámlálhatóan végtelen A szögponthalmaza, melyhez nem-megszámlálhatóan végtelen sok olyan P pont is létezik, hogy e P pontok mindegyike A-nak végtelen sok pontjával van összekötve.

3. Jelölje H azoknak az n természetes számoknak a halmazát, amelyekre $d(n)|n$. Mutassuk meg, hogy

a) $n! \in H$ minden elég nagy n-re,

b) H null-sűrűségű.

4. Jelölje Z a racionális egészek gyűrűjét. Konstruáljunk olyan I integritási tartományt, amelyre

a) $Z \subsetneq I$,

b) $I \setminus Z$ egyetlen eleme sem algebrai (azaz nem gyöke Z-beli együtthatós polinomnak),

c) I-nek csak triviális endomorfizmusai vannak.

5. Legyen $S_\nu = \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, ahol a b_j-k tetszőleges, a z_j-k pedig zérustól különböző komplex számok $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Igazoljuk, hogy

$$|S_0| \leqq n \cdot \max_{0 < |\nu| \leqq n} |S_\nu|.$$

6. Legyen $0 \leqq c \leqq 1$ és jelölje η a racionális számok halmazának rendtípusát. Tegyük fel, hogy minden r racionális számhoz hozzárendeltük $[0, 1]$ egy Lebesgue-mérhető és c-mértékű H_r részhalmazát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik egy Lebesgue-mérhető és c-mértékű $H \subset [0, 1]$ halmaz úgy, hogy minden $x \in H$ esetén az

$$\{r;\ x \in H_r\}$$

halmaz tartalmaz η típusú részhalmazt.

7. Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (a komplex számok fölött) lineárisan független reguláris függvények a komplex sík egy tartományán. Bizonyítandó, hogy ekkor az $f_j \cdot f_k$ $(1 \leqq j, k \leqq n)$ függvények is lineárisan függetlenek.

8. Bizonyítsuk be, hogy az $\{x^n + x^{n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ polinomrendszer (valós együtthatós) lineáris kombinációinak halmaza mindenütt sűrű $C[0, 1]$-ben.

9. Legyen D az n-dimenziós tér egy konvex részhalmaza és tegyük fel, hogy a D' halmazt egy pozitív arányú centrális hasonlóság és egy ezt követő eltolás segítségével kapjuk D-ből. Tegyük fel továbbá, hogy D és D' térfogatának összege 1, valamint, hogy $D \cap D' \neq \emptyset$. Határozzuk meg $D \cup D'$ konvex burka térfogatának szuprémumát, ha D és D' befutják az összes, a fenti feltételeket kielégítő halmazt.

10. Adott egy legfeljebb kontinuum-számosságú X halmaz és egy τ metrizálható topológia X-en. Bizonyítsuk be, hogy ekkor megadható egy olyan topológia X-en, amely τ-nál durvább, metrizálható és szeparábilis.

11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = +1) = \frac{1}{2}$$

eloszlással és legyen $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $S_0 = 0$,

$$T_n = \frac{\max\limits_{0 \leqq k \leqq n} S_k}{\sqrt{n}}$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} \log n \cdot T_n = 0$$

1 valószínűséggel.

Az alábbiakban felsoroljuk, hogy az egyes feladatokat kik bocsátották a bizottság rendelkezésére.

1. feladat Pósa Lajos
2. feladat Erdős Pál és Hajnal András
3. feladat Erdős Pál
4. feladat Fried Ervin
5. feladat Halász Gábor
6. feladat Laczkovich Miklós
7. feladat Lempert László
8. feladat Szabados József
9. feladat Fejes-Tóth László és ifj. Makai Endre
10. feladat Juhász István
11. feladat Révész Pál

A versenyre 17 versenyző 104 megoldást nyújtott be. A legtöbb helyes megoldás a 4., 7. és 8. feladatra (11—11 db), a legkevesebb a 2. feladatra (2 db) érkezett.

A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság döntése alapján

I. díjat (és 4000 Ft-os pénzjutalmat) nyert *Ruzsa Imre* (ELTE, 1976-ban végzett hallgató),

II. díjat (és 3500 Ft-os pénzjutalmat) nyert *Komjáth Péter* (ELTE, 1976-ban végzett hallgató).

A bizottság III. díjat nem adott ki.

I. dicséretben (és 1500 Ft-os pénzjutalomban) részesült *Totik Vilmos* (JATE, IV. éves matematikus hallgató),

II. dicséretben (és 1000 Ft-os pénzjutalomban) részesült *Bajmóczi Ervin* (ELTE, 1976-ban végzett hallgató),

III. dicséretben (és 400—400 Ft-os könyvjutalomban) részesültek *Füredi Zoltán* (ELTE, IV. éves matematikus hallgató), *Geréb Mihály* (ELTE, IV. éves matematikus hallgató), *Győri Ervin* (ELTE, V. éves matematikus hallgató), *Kiss Emil* (ELTE, III. éves matematikus hallgató) és *Kollár János* (ELTE, II. éves matematikus hallgató).

A III. dicséretben részesültek részére a könyvutalványok beszerzését a Gaál Jenőné örökösei által létesített alapítvány tette lehetővé.

Ruzsa Imre valamennyi feladatot megoldotta, a 9. feladatra adott megoldásában apró diszkussziós hiányosság van. Megoldásai rendkívül elegánsak, fogalmazásuk világos. Kiemelkedő az 1., 3., 6., 10. és 11. feladatra adott megoldása, a 6. és 11. feladat állításait élesíti.

Komjáth Péter az 5. feladat kivételével (amelyet csak egy speciális esetben vizsgált) valamennyi feladatot megoldotta. Kiemelkedőek az első három feladatra adott megoldásai: az első feladathoz fűzött megjegyzésével megvilágítja a feladat hátterét: megmutatja, hogy a második feladat egy bizonyos irányban nem élesíthető és a harmadik feladat második állítását is pontosítja.

Totik Vilmos az 5. feladat kivételével valamennyi feladatra küldött be megoldást, azonban a 2. és 4. feladatra adott megoldása hibás. Megoldásai kissé körülményesek; kivételt képez a 9. feladat, amelyre ő adja a legegyszerűbb megoldást.

Bajmóczy Ervin az 1., 3., 4., 5., 6., 7., 8. és 11. feladatra küldött be megoldást, a 11. feladatra adott megoldása hibás. A 6. és 8. feladat állításait általánosítja.

Füredi Zoltán a 3., 4., 7., 8., 9. és 10. feladatra küldött be megoldást, a 10. feladatra adott megoldása hibás, a 9. feladatra adott megoldása pedig hiányos. Megemlítendő, hogy a 3. feladatra ő adta a legelegánsabb megoldást.

Geréb Mihály az 1., 3., 6., 7., 8. és 9. feladatra nyújtott be megoldást, a 7. és 9. feladatra adott megoldása hiányos. Rendkívül szellemesek a 3. és 6. feladatra adott megoldásai, a 8. feladat állítását általánosítja.

Győri Ervin a 3., 4., 6., 7., 8. és 9. feladatra küldött be megoldást. A 3. feladat második állítására adott megoldása hibás és kissé hiányos a feladat első felére, illetve a 9. feladatra adott megoldása is. A 6. feladatot általánosítja.

Kiss Emil a 3., 5., 6., 7., 8., 9. és 10. feladatra küldött be megoldást. A 6. feladatra adott megoldása hibás és a 9. feladatra adott megoldása is hiányos.

Kollár János a 3., 4., 5., 7., 8., 9. és 10. feladatra küldött be megoldást. A 8. és 9. feladatra, valamint a 3. feladat első felére adott megoldása hibás, azonban az utóbbi két esetben a hibák könnyen javíthatók. Kiemelendők a 4. feladatra adott rendkívül szellemes megoldásai; a feladatra három, teljesen független úton haladó megoldást adott.

Megemlítjük, hogy a fel nem sorolt versenyzők mindegyike legfeljebb három feladat teljes megoldását küldte be, ami azt mutatja, hogy négy feladat megoldásának birtokában már „érdemes volt" pályázni.

Budapest, 1976. december 15.

A versenybizottság:

Császár Ákos (elnök)
Fejes Tóth László
Fried Ervin
Hajnal András
Halász Gábor
Laczkovich Miklós (titkár)
Révész Pál

A feladatok megoldásai

1. feladat

A feladat állítása egyszerű következménye az alábbi jólismert tételeknek:

1) Van olyan $A \subset \mathbb{N}$ halmaz, amely rekurzíve felsorolható (azaz egy rekurzív függvény értékkészlete), de nem rekurzív (azaz a karakterisztikus függvénye nem rekurzív).

2) Tetszőleges végtelen, rekurzíve felsorolható A halmazhoz van olyan rekurzív függvény, amely A elemeit ismétlődés nélkül felsorolja.

3) Egy $A \subset \mathbb{N}$ halmaz pontosan akkor rekurzív, ha van A elemeit felsoroló monoton rekurzív függvény.

Vegyünk tehát egy rekurzíve felsorolható, de nem rekurzív A halmazt és egy A-t ismétlődés nélkül felsoroló g függvényt (A nyilván végtelen, ilyen tehát létezik). Definiáljuk az R relációt így:

aRb pontosan akkor, ha $g(a) < g(b)$. R nyilván egy ω típusú rendezést definiáló reláció és rekurzív, hiszen karakterisztikus függvénye

$$r(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad g(a) < g(b) \\ 0, & \text{ha} \quad g(a) \geqq g(b). \end{cases}$$

Legyen a rendezés n-edik eleme $f(n)$. Ha $f(n)$ rekurzív volna, akkor $h(n) = g(f(n))$ az A halmazt felsoroló monoton rekurzív függvény lenne, tehát 3) szerint A rekurzív lenne, ami ellentmondás.

Komjáth Péter, Ruzsa Imre és Turán György megoldása.

Megjegyzés: Komjáth Péter megmutatta, hogy a feladat állítása lényegében ekvivalens az 1) állítással, azaz ha adott egy, a feladat feltételeit kielégítő R reláció, akkor ebből konstruálhatunk egy rekurzíve felsorolható, de nem rekurzív halmazt.

A feladatot megoldották: *Bajmóczi Ervin, Geréb Mihály, Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Totik Vilmos* és *Turán György*.

2. feladat

Tegyük fel, hogy G ellenpélda a feladat állítására, azaz, ha V jelenti G szögpont-halmazát, akkor

(1) minden $A \subset V$ megszámlálhatóan végtelen részhalmazra azon $p \in V - A$ pontok H_A halmaza, amelyek A-nak végtelen sok elemével vannak összekötve egy nemüres, megszámlálható halmaz.

A H_A halmaz nyilván végtelen, mert ellenkező esetben a $B = A \cup H_A$ halmazhoz nem létezne olyan $p \in V - B$ pont, amely B végtelen sok elemével van összekötve. Ebből következik, hogy ha G-ből elhagyjuk véges sok pontját, a visszamaradó gráf még mindig rendelkezik az (1) tulajdonsággal (V nyilván nem-megszámlálható).

Először megmutatjuk, hogy G-ből elhagyható véges sok pont úgy, hogy a maradék G_1 gráfnak nincs véges sok pontja, amely V-t egy megszámlálható halmaz kivételével lefogja. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor van olyan véges X_0 halmaz, amely egy megszámlálható halmaz kivételével V minden elemét lefogja; van egy véges $X_1 \subset V - X_0$ halmaz, ami szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, és így tovább, indukcióval definiálhatjuk a diszjunkt, véges X_n halmazokat, amelyek mindegyike lefogja V-t egy-egy megszámlálható halmaz kivételével. Legyen $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$,

ekkor V-nek megszámlálható kivétellel minden pontja végtelen sok A-beli ponttal van összekötve, azaz $V-H_A$ megszámlálható. Ez azonban lehetetlen, mert V nyilvánvalóan nem megszámlálható és (1) szerint H_A megszámlálható.

Mivel első megjegyzésünk szerint G_1 is rendelkezik az (1) tulajdonsággal, feltehetjük, hogy $G=G_1$.

Legyen $A\subset V$ tetszőleges megszámlálható halmaz, ekkor van olyan $F(A)\subset V-A$ megszámlálhatóan végtelen halmaz úgy, hogy $H_A\subset F(A)$ és A bármely véges sok $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eleméhez van $F(A)$-nak végtelen sok eleme, amely $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egyikével sincs összekötve. Valóban, legyen $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$ és tegyük $F(A)$-ba minden n-re $V-A$ végtelen sok elemét, amelyik $\{a_1, \ldots, a_n\}$ egyikével sincs összekötve. Hogy ezt lehet, azt fenti megjegyzésünk garantálja. Ezután vegyük az így kapott elemek és H_A unióját.

Legyen most $A_0\subset V$ tetszőleges megszámlálhatóan végtelen halmaz és legyen

$$A_i = F(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad A_\omega = F\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right).$$

Ekkor $p\in A_\omega$ és tetszőleges i esetén p A_i-nek csak véges sok pontjával lehet összekötve. Valóban, $p\in A_\omega\subset V-\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\subset V-A_{i+1}$ és így $p\notin F(A_0\cup\ldots\cup A_i)\supset H_{A_i}$.

Legyen $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i=\{a_n;\ n=1, 2, \ldots\}$, $A_\omega=\{b_n;\ n=1, 2, \ldots\}$. Definiálunk egy végtelen $C=\{c_n;\ n=1, 2, \ldots\}$ halmazt úgy, hogy $C\subset\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ és $n<m$ esetén c_m sem a_n-nel, sem b_n-nel nincs összekötve. Ez biztosítani fogja az ellentmondást, mert ekkor $p\in H_C$ esetén $p\notin\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (hiszen $p=a_n$ esetén p legfeljebb n db c_m-mel van összekötve) és így $p\in H_C\subset H_{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\subset F\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)=A_\omega$. Ez azonban ismét lehetetlen, mert $p=b_n$ esetén p megint csak a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pontokkal lehet összekötve C-ből.

Legyen tehát $c_1\in A_0$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $c_1, \ldots, c_n$ adottak úgy, hogy $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n\}\subset A_0\cup A_1\cup\ldots\cup A_N$ alkalmas N-re. Ekkor A_{N+1}-nek van egy végtelen T részhalmaza úgy, hogy T elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egyikével sincsenek összekötve. Mivel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mindegyike (fenti megjegyzésünk szerint) csak véges sok T-beli elemmel van összekötve, így c_{n+1}-et T maradék részéből választva, kikötéseink teljesülni fognak.

Komjáth Péter megoldása.

Megjegyzés: Komjáth Péter megmutatta, hogy a kontinuum-hipotézis segítségével konstruálható olyan, a feladatban leírt tulajdonságú G gráf, amelyben minden A megszámlálhatóan végtelen halmaznak van olyan megszámlálhatóan végtelen B részhalmaza, amelyre H_B megszámlálható.

A feladatot *Komjáth Péter* és *Ruzsa Imre* oldották meg.

3. feladat. a) Megmutatjuk, hogy $n\neq 3,5$ esetén $d(n!)|n!$.

Tudjuk, hogy $n!=\prod_{p\leqq n} p^{a_p}$ ahol

$$a_p = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] \quad \text{és így} \quad d(n!) = \prod_{p\leqq n}(a_p+1).$$

$d(n!)|n!$ bizonyításához nyilván elég megmutatni, hogy minden $p \leqq n$ prímhez hozzárendelhető egy $h(p) \leqq n$ természetes szám úgy, hogy $(a_p+1)|h(p)$ és $p<q \leqq n$ esetén $h(p) \neq h(q)$. $p \leqq \sqrt{n}$-re legyen $h(p)=a_p+1$. Ekkor

$$h(p) = a_p+1 \leqq 1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right] < 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{2^i} = 1+n$$

és így $h(p) \leqq n$.

Ha $p<q \leqq \sqrt{n}$, akkor nyilván $h(p) \geqq h(q)$, hiszen $\left[\frac{n}{pi}\right] \geqq \left[\frac{n}{qi}\right]$ minden i-re. Így $h(p)=h(q)$ csak úgy volna lehetséges, ha $\left[\frac{n}{p}\right]=\left[\frac{n}{q}\right]$ állna. Ekkor azonban $0<\frac{n}{p}-\frac{n}{q}<1$, amiből $(q-p)n<pq \leqq n$, ami lehetetlen.

Az így definiált $h(p)$ számok tehát kielégítik feltételeinket. $p>\sqrt{n}$-re a $h(p)$ számokat indukcióval definiáljuk. Legyen $\sqrt{n}<r \leqq n$ prím és tegyük fel, hogy $h(p)$ már definiált minden r-nél kisebb prímre. a_r+1 többszöröseinek száma n-ig

$$\left[\frac{n}{a_r+1}\right]=\left[\frac{n}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{r^i}\right]}\right]=\left[\frac{n}{1+\left[\frac{n}{r}\right]}\right] \geqq$$

$$\geqq \frac{n-\left[\frac{n}{r}\right]}{1+\left[\frac{n}{r}\right]} \geqq \frac{n-\frac{n}{r}}{1+\frac{n}{r}} = n\cdot\frac{r-1}{n+r} > \frac{r-1}{2}$$

feltéve, hogy $r<n$. Mivel az r-nél kisebb prímek száma legfeljebb $r-1/2$, így a_r+1-nek van olyan többszöröse, amely nem szerepel az eddig definiált $h(p)$ számok között. Ezen többszörösök bármelyikét választhatjuk $h(r)$-nek. Ezzel beláttuk, hogy $h(p)$ definiálható az n-nél kisebb prímekre, amivel $d(n!)|n!$-t is megmutattuk minden összetett n-re.

Ha $n>2$ prím, akkor $a_n+1=2$ és így $h(n)$ gyanánt egy n-nél nem nagyobb páros számot kell választanunk. Ezek között biztosan lesz a már definiált $h(p)$-ktől különböző, ha $\pi(n)-1<\left[\frac{n}{2}\right]$ azaz $\pi(n) \leqq \frac{n-1}{2}$. Ez nyilvánvalóan teljesül, ha az n-nél kisebb páratlan számok közül legalább kettő nem prím, tehát ha $n \geqq 11$. A 11-nél kisebb prímek közül $d(n!)|n!$ teljesül $n=2$ és 7-re és nem teljesül $n=3$ és 5-re, amivel állításunkat igazoltuk.

Füredi Zoltán megoldása.

A feladat *a)* részét megoldották: *Bara Tamás, Bajmóczy Ervin, Éltető László, Füredi Zoltán, Garay Barna, Geréb Mihály, Győri Ervin* (megoldása kissé hiányos), *Hangya László, Kiss Emil, Kollár János* (megoldásában könnyen javítható hiba van), *Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Totik Vilmos, Turán György.*

b) Jelölje $H(x)$ a H sorozat elemeinek számát x-ig. Legyen K tetszőleges, egynél nagyobb egész és legyen $H_1=\{n;\ n \in H$ és az $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_s^{a_s}$ prímtényezős felbontásban $a_i<K\ (i=1, 2, \ldots, s)\}$, $H_2=H \setminus H_1$.

Nyilvánvaló, hogy H_2 elemeinek száma x-ig legfeljebb

$$\sum_p \left[\frac{x}{p^K}\right] < x \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^K} < x \cdot \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^K} = \frac{x}{K-1}.$$

Megmutatjuk, hogy $n \in H_1$ esetén $d(n) < K^K$. Valóban, ekkor $d(n)$ nem osztható K-nál nagyobb prímmel, hiszen $p > K$, $p | d(n)$ esetén volna olyan q^a prímtényezője n-nek, amelyre $p | a+1$ teljesülne, ami lehetetlen $a < K \leqq p-1$ miatt. Mivel $d(n)$ prímtényezőinek kitevője kisebb, mint K, így nyilván $d(n) < \pi(K)^K < K^K$.

Legyen $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s} \in H_1$, ekkor tehát $2^s \leqq d(n) < K^K$ és így $s \leqq [K \cdot \log_2 K] = r$. Ismert, hogy a legfeljebb r prímosztóval rendelkező számok nullsűrűségű sorozatot alkotnak (lásd HARDY and WRIGHT: An introduction to the theory of numbers, 22.10, The number of prime factors of n). Ezzel beláttuk, hogy $H(x) < \frac{x}{K-1} + o(x)$, amiből (mivel K tetszőleges volt) adódik $H(x) = o(x)$.

Füredi Zoltán megoldása.

Megjegyzés. Ruzsa Imre dolgozatában bizonyítás nélkül közölte az alábbi becslést: minden pozitív ε-ra $x(\log x)^{-(1/2+\varepsilon)} < H(x) < x(\log x)^{-1/2}$, ha x elég nagy.

A feladat *b)* részét megoldották: *Bajmóczy Ervin, Bíró Balázs, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Kiss Emil, Kollár János, Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Totik Vilmos, Turán György.*

4. feladat. I. megoldás. Legyen a egy rögzített transzcendens valós szám és jelöljük A-val azon $\frac{f(a)}{g(a)}$ alakú számok halmazát, ahol $f, g \in Z[x]$ és g primitív, azaz együtthatóinak nincs egynél nagyobb közös osztója. A egységelemes integritási tartomány, amelyre teljesül, hogy

a) A/Z-ben nincs algebrai elem, valamint

b) minden $\alpha \neq 0$, $\alpha \in A$-hoz van olyan $\beta \neq 0$, $\beta \in A$, hogy $\alpha\beta \in Z$.

Legyen M azon $Z \subset I \subset R$ integritási tartományok halmaza, melyekre *a)* és *b)* teljesül. M teljesíti a Zorn-lemma feltételeit, így van egy J maximális elem M-ben. Belátjuk, hogy ekkor

c) minden $\alpha > 0$, $\alpha \in J$-re léteznek nullától különböző $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in J$ és $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in J$ elemek úgy, hogy

$$\alpha \sum_{i=1}^{k} \beta_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^2.$$

Valóban, legyen $\alpha > 0$, $\alpha \in J$ tetszőleges. Ha α egész, vagy $\sqrt{\alpha} \in J$, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen $\alpha \in J \setminus Z$, $\alpha \neq \beta^2 (\beta \in J)$ és tekintsük a $J[\sqrt{\alpha}]$ integritási tartományt, erre teljesül *b)*. Valóban, ha $\beta + \gamma\sqrt{\alpha} \neq 0$; $\beta, \gamma \in J$, akkor van olyan $\delta \neq 0$, $\delta \in J$, hogy $\delta(\beta^2 - \gamma^2\alpha) \in Z$ (feltehetjük, hogy $\beta^2 - \gamma^2\alpha \neq 0$) és így $(\beta + \gamma\sqrt{\alpha})(\delta\beta - \delta\sqrt{\alpha}) \in Z$.

Mivel $J \subsetneq J[\sqrt{\alpha}]$, így J maximalitása miatt $J[\sqrt{\alpha}]$-ra nem teljesülhet *a)*. Így van olyan $\beta, \gamma \in J$, hogy $\gamma \neq 0$ és $\beta + \gamma\sqrt{\alpha}$ algebrai, azaz van olyan $f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ polinom, amelyre $f(\beta + \gamma\sqrt{\alpha}) = 0$.

$$f(\beta + \gamma\sqrt{\alpha}) = \sum_{i=0}^{N} a_i (\beta + \gamma\sqrt{\alpha})^i = C + D\sqrt{\alpha},$$

ahol C és D, mint β, γ és α egész-együtthatós polinomjai, J-beliek. Ha $D=0$, akkor $C=0$ és így $f(\beta-\gamma\sqrt{\alpha})=C-D\sqrt{\alpha}=0$, tehát $\beta-\gamma\sqrt{\alpha}$ is algebrai. Ebből adódik, hogy $\gamma\sqrt{\alpha}$ és $\gamma^2\alpha$ is algebrai, tehát *a)* szerint $\gamma^2\alpha=n$ egész és így *c)* állítása teljesül α-ra. Ha $D\neq 0$, akkor $C+D\sqrt{\alpha}=0$-ból $\alpha D^2=C^2$ és így *c)* ismét teljesül.

Megmutatjuk, hogy J kielégíti a feladat követelményeit. Legyen φ egy nem-triviális endomorfizmus J-ben. Ekkor nyilván $\varphi(1)=1$ és így $\varphi(n)=n$ minden $n\in Z$-re. Ha $\alpha\neq 0$, $\alpha\in J$, akkor *b)* szerint $\varphi(\alpha)\neq 0$. Ha pedig $\alpha>0$, akkor *c)*-ből egyszerűen következik, hogy $\varphi(\alpha)>0$, amivel megmutattuk, hogy φ rendezéstartó. Azonban ekkor φ csak az identitás lehet, amit könnyen beláthatunk, ha φ-t művelettartóan kiterjesztjük J hányadostestére és konstatáljuk, hogy ekkor φ a racionális számokat fixen hagyó, rendezéstartó leképezés.

Kollár János megoldása.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a

$$J=Z\left[x,\frac{1}{x},\frac{1}{x+3},\frac{1}{x+10}\right]$$

integritási tartomány is megfelel a feltételeknek. $J\setminus Z$ elemei nyilván transzcendensek, így csak azt kell megmutatnunk, hogy J-nek nincs nem-triviális endomorfizmusa. J nyilvánvalóan az $\dfrac{f(x)}{x^k(x+3)^n(x+10)^m}$ alakú racionális törtfüggvényekből áll, ahol $f\in Z[x]$ és $k, n, m\geqq 0$. Ebből következik, hogy J invertálható elemei pontosan az $\varepsilon x^k(x+3)^n(x+10)^m$ alakú elemek, ahol $\varepsilon=\pm 1$ és k, n, m tetszőleges egészek. Legyen φ egy tetszőleges endomorfizmusa J-nek. Ha $\varphi\neq 0$, akkor $\varphi(1)=1$ és így invertálható elem képe invertálható. Így a fentiek szerint

$$\varphi(x)=\varepsilon_1 x^{k_1}(x+3)^{n_1}(x+10)^{m_1} \tag{1}$$

$$\varphi(x+3)=\varepsilon_2 x^{k_2}(x+3)^{n_2}(x+10)^{m_2}=\varphi(x)+3 \quad \text{és} \tag{2}$$

$$\varphi(x+10)=\varepsilon_3 x^{k_3}(x+3)^{n_3}(x+10)^{m_3}=\varphi(x)+10 \tag{3}$$

ahol $\varepsilon_i=\pm 1$ és k_i, n_i, m_i alkalmas egészek $(i=1, 2, 3)$. Ha $k_1<0$, akkor (1)-ből és (2)-ből adódik, hogy $k_2=k_1$ ((2)-ben a jobb oldalnak $-k_1$-edrendű pólusa van 0-ban, tehát a bal oldalnak is), amiből

$$\varepsilon_2(x+3)^{n_2}(x+10)^{m_2}=\varepsilon_1(x+3)^{n_1}(x+10)^{m_1}+3\cdot x^{-k_1}. \tag{4}$$

$x=0$-t helyettesítve

$$\varepsilon_2\cdot 3^{n_2}\cdot 10^{m_2}=\varepsilon_1\cdot 3^{n_1}\cdot 10^{m_1},$$

amiből $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $n_1=n_2$, $m_1=m_2$. Ez azonban lehetetlen (4) miatt, tehát $k_1\geqq 0$. Teljesen hasonlóan adódik $k_i\geqq 0$, $n_i\geqq 0$ és $m_i\geqq 0$ $(i=1, 2, 3)$.

Ha $n_1>0$, akkor (3)-ban $x=-3$-at helyettesítve adódik, hogy $n_3=0$ és $\varepsilon_3\cdot(-3)^{k_3}\cdot 7^{m_3}=10$, ami nyilván lehetetlen. Így $n_1=0$ és hasonlóan, $m_1=0$. $k_1=0$ nem lehet, mert ekkor $\varphi(x)=\varepsilon_1$-ből $\varphi(x+3)=2$ vagy 4 adódna (2)-vel ellentétben. Így $k_1>0$, tehát (2)-ben $x=0$-t helyettesítve kapjuk, hogy $k_2=0$ és $\varepsilon_2\cdot 3^{n_2}\cdot 10^{m_2}=3$. Ebből $\varepsilon_2=1$, $n_2=1$ és $m_2=0$, tehát

$$\varphi(x+3)=x+3=\varphi(x)+3, \quad \text{azaz} \quad \varphi(x)=x.$$

Így $\varphi(a)=a$ teljesül minden $a\in J$-re, q.e.d.

Kollár János megoldása.

A feladatot megoldották: *Bajmóczy Ervin, Bara Tamás, Bíró Balázs, Éltető László, Füredi Zoltán, Győri Ervin, Kollár János, Komjáth Péter, Ruzsa Imre.*

5. feladat. Legyen $\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$ és legyen $\max_{0\leqq k\leqq n}|a_k|=|a_m|$. Nyilván $|a_m|\geqq 1$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n}a_k S_{k-m}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_k b_j z_j^{k-m}=\sum_{j=1}^{n}b_j z_j^{-m}\sum_{k=0}^{n}a_k z_j^k=0.$$

Ebből $|S_0|=\left|\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\left(-\frac{a_k}{a_m}\right)S_{k-m}\right|\leqq\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}|S_{k-m}|\leqq n\cdot\max_{0<|v|\leqq n}|S_v|$, q.e.d.

Bajmóczy Ervin, Kiss Emil és *Kollár János* megoldása.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenségben pontosan akkor áll egyenlőség, ha $b_1=b_2=\ldots=b_n$ és a z_k-k az $a.e^{\frac{2\pi i}{n+1}\cdot j}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ számokon futnak át, ahol a tetszőleges, 1 abszolút értékű konstans.

A feladatot megoldották: *Bajmóczy Ervin, Kiss Emil, Kollár János* és *Ruzsa Imre.*

6. feladat. A feladatra két megoldást adunk. Mindkettőben szükségünk lesz a következő egyszerű lemmára:

Legyen M egy halmazrendszer, amely a (0, 1) intervallum bizonyos részhalmazaiból áll és tegyük fel, hogy minden $A\in M$ esetén van olyan $x\in A$, hogy $A\cap(0, x)\in M$ és $A\cap(x, 1)\in M$. Ekkor M minden elemének van η típusú részhalmaza.

Rendezzük el a (0, 1) intervallum racionális számait egy $r_1, r_2, \ldots$ sorozatba. Legyen $A\in M$ tetszőleges. Indukcióval megadunk egy olyan $x_n\in A$ sorozatot, amelyre teljesül, hogy 1) ugyanúgy van rendezve, mint az (r_n) sorozat, 2) $A\cap(0, x_n)\in M$, $A\cap(x_n, 1)\in M$ minden n-re, valamint $A\cap(x_i, x_j)\in M$ minden $x_i<x_j$ párra.

A feltétel szerint van olyan $x_1\in A$, hogy $A\cap(0, x_1)\in M$ és $A\cap(x_1, 1)\in M$. Ha pedig $x_1, x_2, \ldots, x_n$-et már kiválasztottuk, akkor legyenek r_{n+1} közvetlen szomszédai $r_1, r_2, \ldots, r_n$ közül r_i és r_j, $r_i<r_j$. Az indukciós feltétel szerint $x_i<x_j$ és $A\cap(x_i, x_j)\in M$, így van olyan $x_{n+1}\in A\cap(x_i, x_j)$, hogy $A\cap(x_i, x_{n+1})\in M$ és $A\cap(x_{n+1}, x_j)\in M$. Hasonlóan választhatjuk ki x_{n+1}-et, ha $r_{n+1}>r_i$ $(i\leqq n)$ vagy $r_{n+1}<r_i$ $(i\leqq n)$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Most rátérünk a feladat I. megoldására, ami a következő segédtételen alapszik:

Legyenek a $H_n\subset[0, 1]$ halmazok mérhetőek és legalább c-mértékűek $(n=1,2,\ldots)$. Ekkor azon x pontok H halmaza, amelyekre az $\{n;\ x\in H_n\}$ sorozat pozitív felső sűrűségű, szintén mérhető és legalább c-mértékű.

A segédtétel bizonyítása: jelölje f_n a H_n halmaz karakterisztikus függvényét és legyen $g_n=(f_1+f_2+\ldots+f_n)/n$. Nyilvánvaló, hogy $x\in H$ akkor és csak akkor, ha $n\to\infty$ esetén $g_n(x)$ nem tart 0-hoz, amiből azonnal adódik H mérhetősége. Mivel $0\leqq g_n(x)\leqq 1$ teljesül minden n-re, így

$$\lambda(H)\geqq\int_H g_n(x)\,dx=\int_0^1 g_n(x)\,dx-\int_{[0,1]\setminus H}g_n(x)\,dx=c-\int_{[0,1]\setminus H}g_n(x)\,dx.$$

$x\in[0, 1]\setminus H$ esetén $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0$, tehát a kis Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]\setminus H}g_n(x)\,dx=0.$$

Így az előző egyenlőtlenségből $\lambda(H)\geqq c$, amivel a segédtételt beláttuk.

Legyen (r_n) a $(0, 1)$ intervallum racionális számainak egy egyenletes eloszlású sorozatba rendezése, azaz, amelyre teljesül, hogy minden $(a, b) \subset (0, 1)$ intervallumra az $\{n; r_n \in (a, b)\}$ sorozat sűrűsége $b-a$. (Egy egyszerű példa ilyen sorozatba rendezésre a következő: először lerögzítünk egy tetszőleges (s_n) sorozatba rendezést, majd az (s_n) sorozatból sorban kiválasztjuk azokat a legkisebb indexű elemeket, amelyek rendre az alábbi intervallumokba esnek:

$$[0, 1], \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right], \ldots$$

mindig ügyelve arra, hogy egy elemet csak egyszer válasszunk ki.)

Legyen $A \subset (0, 1)$ és tegyük fel, hogy az $\{n; r_n \in A\}$ sorozat pozitív felső sűrűségű. Megmutatjuk, hogy ekkor A tartalmaz η típusú részhalmazt. Az előrebocsátott lemma szerint ehhez elég belátni, hogy van olyan $x \in A$, amelyre $\{n; r_n \in A \cap (0, x)\}$ és $\{n; r_n \in A \cap (x, 1)\}$ is pozitív felső sűrűségűek.

Legyen az $\{n; r_n \in A\}$ sorozat felső sűrűsége d és legyen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$ a $[0, 1]$ intervallum egy $d/3$-nál finomabb felosztása. Mivel (r_n) egyenletes eloszlású, így az $\{n; r_n \in A \cap (x_{i-1}, x_i)\}$ sorozatok felső sűrűsége kisebb, mint $d/3$ minden i-re. Következőleg, ha d_i-vel jelöljük az $\{n; r_n \in A \cap (0, x_i)\}$ sorozat felső sűrűségét, akkor $0 < d_i - d_{i-1} < d/3$ teljesül $i = 1, 2, \ldots, m$-re. Mivel $d_m = d$, így van olyan i, hogy $0 < d_{i-1} < d_i < d$. Ekkor $d_{i-1} < d_i$-ből következik, hogy az $A \cap (x_{i-1}, x_i)$ halmaz végtelen és könnyen láthatóan bármelyik $x \in A \cap (x_{i-1}, x_i)$ elemre teljesül, hogy az $\{n; r_n \cap A \cap (0, x)\}$ és $\{n; r_n \in A \cap (x, 1)\}$ sorozatok is pozitív felső sűrűségűek.

Tekintsük most a feladatban adott H_r halmazokat, és legyen H_1 azon x-ek halmaza, amelyekre az $\{n; x \in H_{r_n}\}$ sorozat pozitív felső sűrűségű. Előző megjegyzésünk szerint $x \in H_1$ esetén az $\{r; x \in H_r\}$ halmaz tartalmaz η típusú részhalmazt. Segédtételünket a H_{r_n} halmaz-sorozatra alkalmazva adódik, hogy H_1 mérhető és $\lambda(H_1) \geqq c$, q.e.d.

Geréb Mihály és *Győri Ervin* megoldása alapján.

II. megoldás. Ha egy A halmaz lezártja pozitív mértékű, akkor A tartalmaz η típusú részhalmazt, hiszen az $M = \{A \subset (0, 1); \lambda(\bar{A}) > 0\}$ halmazrendszer nyilván kielégíti a lemma feltételét. Így elég megmutatnunk, hogy a $H_2 = \{x; \lambda(\overline{\{r; x \in H_r\}}) > 0\}$ halmaz mérhető, és $\lambda(H) \geqq c$.

Tekintsük az $f(x) = \lambda(\overline{\{r; x \in H_r\}})$ függvényt. Nyilván $0 \leqq f(x) \leqq 1$; ha belátjuk, hogy $f(x)$ Lebesgue-mérhető és $\int_0^1 f(x)\,dx \geqq c$, akkor készen leszünk.

Legyen egy tetszőleges $A \subset [0, 1]$ halmaz esetén $A_n = \bigcup_{\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right] \cap A \neq \emptyset} \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]$.

Nyilván $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bar{A}$, tehát $\lim_{n \to \infty} \lambda(A_n) = \lambda(\bar{A})$. Legyen tehát $f_n(x) = \lambda(\{r; x \in H_r\}_n)$, ekkor $f_n \searrow f$ és így elég belátni, hogy $f_n(x)$ Lebesgue-integrálható és $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geqq c$.

$\lambda(A_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} g_{n,i}(A)$, ahol $g_{n,i}(A) = 0$ vagy 1 aszerint, hogy van-e A-nak pontja $\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]$-ben. Nyilván $f_{n,i}(x) \overset{\text{def}}{=} g_{n,i}(\{r; x \in H_r\}) = \sup\left\{k_r; r \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right\}$, ahol k_r

a H_r halmaz karakterisztikus függvénye. k_r integrálható, és $\int_0^1 k_r(x)dx=c$, tehát $f_{n,i}$ is integrálható és $\int_0^1 f_{n,i}(x)dx \geqq c$. Mivel $f_n=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} f_{n,i}$, így ebből következik, hogy f_n is integrálható és $\int_0^1 f_n(x)dx \geqq c$, q.e.d.

Lényegében *Bajmóczy Ervin* és *Ruzsa Imre* megoldása.

Megjegyzés. Jelöljük H_0-lal azon x-ek halmazát, amelyekre az $\{r;\ x\in H_r\}$ halmaz tartalmaz η típusú részhalmazt. Legyen (r_n) a (0, 1) intervallum racionális pontjainak egy rögzített, egyenletes eloszlású sorozatba rendezése, és jelöljük H_1-gyel azon x-ek halmazát, amelyekre az $\{n;\ x\in H_{r_n}\}$ sorozat pozitív felső sűrűségű. Legyen H_2 azon x-ek halmaza, amelyekre az $\{r;\ x\in H_r\}$ halmaz lezártja pozitív mértékű. Végül, legyen H_3 azon x-ek halmaza, amelyekre $\{r;\ x\in H_r\}$ sűrű (0, 1) egy részintervallumában. Könnyű belátni, hogy tetszőleges A racionális számhalmazra az $\{n;\ r_n\in A\}$ sorozat felső sűrűsége legfeljebb $\lambda(\bar{A})$. Ebből következik, hogy $H_3\subset H_1\subset \subset H_2\subset H_0$ teljesül minden H_r rendszerre (és így az I. megoldás mélyebb állítást bizonyít, mint a második, mert szűkebb halmazról mutatja meg, hogy legalább c-mértékű). Másrészről a $\lambda(H_3)\geqq c$ állítás már nem igaz; meg lehet mutatni, hogy minden $0<c<1$ esetén van olyan, a feladat feltételeit kielégítő H_r rendszer, amelyre az $\{r;\ x\in H_r\}$ halmazok sehol sem sűrűek minden $x\in[0, 1]$-re és így ekkor $H_3=\emptyset$.

Megjegyezzük még, hogy ha a H_r halmazok mérhetőek, akkor H_0 is mérhető. Meg lehet mutatni ugyanis, hogy amennyiben a H_r halmazok Borel-halmazok (vagy általánosabban, ha analitikusak), akkor H_0 is analitikus és így mérhető. Ebből egyszerűen következik H_0 mérhetősége az általános esetben is.

A feladatot megoldották: *Bajmóczy Ervin, Geréb Mihály, Győri Ervin, Komjáth Péter, Ruzsa Imre* és *Totik Vilmos.*

7. feladat. Először a következő segédtételt bizonyítjuk:

Legyenek az f_i, g_i $(1\leqq i\leqq n)$ függvények regulárisak egy D tartományban és tegyük fel, hogy a g_i függvények nem mindegyike azonosan 0. Ha $\sum_{i=1}^{n} f_i\bar{g}_i=0$, akkor az f_i-k lineárisan összefüggenek.

Valóban, tetszőleges $h\neq 0$-ra és $z\in D$-re

$$0=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(z+h)\overline{g_i(z+h)}-f_i(z)\overline{g_i(z)}}{h}=\sum_{i=1}^{n}\overline{g_i(z+h)}\frac{f_i(z+h)-f_i(z)}{h}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}f_i(z)\overline{\left(\frac{g_i(z+h)-g_i(z)}{h}\right)}\cdot\frac{\bar{h}}{h}.$$

h-val nullához tartva először a valós, majd a képzetes tengelyen adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}f_i'(z)\overline{g_i(z)}+\sum_{i=1}^{n}f_i(z)\overline{g_i'(z)}=0 \quad \text{és}$$

$$\sum_{i=1}^{n}f_i'(z)\overline{g_i(z)}-\sum_{i=1}^{n}f_i(z)\overline{g_i'(z)}=0 \quad \text{minden } z\in D\text{-re},$$

amiből $\sum_{i=1}^{n} f_i' \bar{g}_i = 0$. A fenti okoskodást ismételve adódik, hogy $\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \bar{g}_i = 0$ teljesül minden m-re.

Feltehetjük, hogy $0 \in D$; legyen $f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} z^j$ és $g_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(i)} z^j$ $(|z| < \delta)$. Feltehető továbbá, hogy $b_0^{(i)} \neq 0$ legalább egy i-re (ellenkező esetben a g_i függvényeket leosztjuk egy alkalmas z-hatvánnyal). A $\sum_{i=1}^{n} f_i^{(m)} \bar{g}_i$ függvény 0-ban vett értéke $m! \sum_{i=1}^{n} a_m^{(i)} \bar{b}_0^{(i)} = 0$ minden m-re és így $\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_0^{(i)} f_i = 0$, mert a hatványsorában minden együttható nulla. Ezzel a segédtételt beláttuk.

Most megmutatjuk, hogy ha a g_j $(1 \leqq j \leqq m)$ függvények is regulárisak és lineárisan függetlenek D-n, akkor az $\{f_i \bar{g}_j\}$ $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m)$ rendszer és lineárisan független. Ebből az $m = n$, $g_i = f_i$ választással azonnal következik a feladat állítása (ez az általánosítás Bajmóczy Ervintől származik). Valóban, legyen $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} f_i \bar{g}_j = 0$. Ekkor $\sum_{i=1}^{n} f_i \overline{(\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_{ij} g_j)} = 0$ és így a segédtétel szerint $\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_{ij} g_j = 0$ minden i-re. Ebből a g_j-k lineáris függetlensége miatt következik, hogy $c_{ij} = 0$ minden $1 \leqq i \leqq n$-re és $1 \leqq j \leqq m$-re, q.e.d.

Bajmóczy Ervin és *Kollár János* megoldása nyomán.

A feladatot megoldották: *Bajmóczy Ervin, Bara Tamás, Bíró Balázs, Füredi Zoltán, Győri Ervin, Hangya László, Kiss Emil, Kollár János, Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Totik Vilmos.*

8. feladat. Jelöljük P-vel az $x^n + x^{n^2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ polinomok lineáris kombinációinak halmazát. Weierstass tétele szerint a polinomok halmaza sűrű $C[0, 1]$-ben, így elég belátni, hogy x^n egyenletesen megközelíthető P-beli polinomokkal minden $n \geqq 0$-ra.

$n = 0, 1$ esetén $x^n \in P$. Ha $n > 1$, akkor legyen

$$f_m^n(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{m-i}{m} \left(x^{n^{2^i}} + x^{n^{2^{i+1}}}\right) =$$

$$= x^n + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} x^{n^{2^i}} \overset{\text{def}}{=} x^n + \frac{1}{m} \cdot A(x),$$

nyilván $f_m^n(x) \in P$. Az $A(x)$-et definiáló összeg tagjai váltakozó előjelű és abszolút értékben nem csökkenő sorozatot alkotnak, az összeg első tagjai pedig 0 és 1 közé esik, így $0 \leqq A(x) \leqq 1$. Következőleg $|x^n - f_m^n(x)| \leqq \frac{1}{m}$ teljesül minden $x \in [0, 1]$-re, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Geréb Mihály, Hangya László és *Totik Vilmos* megoldása.

Megjegyzés. Bajmóczy Ervin és *Geréb Mihály* észrevette, hogy a feladat a következőképpen általánosítható: legyen $g(n)$ a nem-negatív számok halmazán értelmezett és értékeit ugyanitt felvevő, szigorúan monoton függvény. Ekkor az $\{x^n + x^{g(n)};\ n = 0, 1, \ldots\}$ polinomrendszer lineáris kombinációinak halmaza sűrű $C[0, 1]$-ben. A bizonyítás történhet a fentinek egyszerű módosításával.

A feladatot megoldották: *Bajmóczy Ervin, Balogh Zoltán, Bara Tamás* (megoldása hiányos), *Éltető László, Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Győri Ervin, Hangya László, Kiss Emil, Komjáth Péter, Ruzsa Imre* és *Totik Vilmos*.

9. feladat. A feltételekből következik, hogy D és D' belső ponttal rendelkező, korlátos és konvex halmazok. A feladat nyilván ekvivalens a $\frac{V(co(D\cup D'))}{V(D)+V(D')}$ mennyiség szuprémumának meghatározásával, ahol a D és D' halmazokra a fenti feltételeken kívül még teljesül, hogy $D\cap D'\neq\emptyset$ és D'-t egy centrális hasonlóság és egy eltolás segítségével kapjuk D-ből (V je]öli a térfogatot és co a konvex burkot). Legyen a centrális hasonlóság aránya egy rögzített $\lambda>0$ szám. Megmutatjuk, hogy ekkor a keresett szuprémum $(1+\lambda+\ldots+\lambda^n)/(1+\lambda^n)=f(\lambda)$, és ez fel is lép. Ez $n=1$-re triviális, a továbbiakban legyen $n>1$.

Először megmutatjuk, hogy a $\lambda=1$ eset visszavezethető a $\lambda\neq 1$ esetre. Ugyanis $\lambda=1$ esetén nagyítsuk a p közös pontból D'-t $1+\varepsilon$-szorosára. Mivel D-nek és az így kapott D'_ε-nek közös pontja lesz p, így $V(co(D\cup D'))\leqq V(co(D\cup D'_\varepsilon))\leqq$ $\leqq f(1+\varepsilon)(V(D)+V(D'_\varepsilon))$. Itt $\varepsilon\searrow 0$ esetén a jobb oldal tart $f(1)(V(D)+V(D'))$-höz.

Legyen tehát $\lambda\neq 1$. D és D' esetleges szerepcseréjével, $f(\lambda)=f(\lambda^{-1})$ miatt feltehető, hogy $0<\lambda<1$. Ekkor D' D-ből egyetlen centrális hasonlósággal kapható, amelynek középpontja legyen O (az origó).

$V(D)=\sup V(P)$, ahol $P\subset D$ (zárt) poliéder. Könnyen belátható, hogy ilyen P-kre $V(D)-V(P)$ pontosan akkor tart 0-hoz, ha $r(P, D)=\sup_{x\in D} d(x, P)$ 0-hoz tart, ahol $d(x, P)$ jelöli x és P távolságát. Ezenkívül könnyen láthatóan $r(P, D)\leqq\varepsilon$ esetén $r(co(P\cup P'), co(D\cup D'))\leqq\varepsilon$ (P' jelöli P képét D'-ben). Tegyük fel, hogy P tartalmazza D és D' egy közös pontját és ennek a hasonlóságnál való ősképét; ekkor $P\cap P'\neq\emptyset$. Tehát a fenti P-kre $V(P)\to V(D)$ esetén $V(co(P\cup P'))\to$ $\to V(co(D\cup D'))$, és a szuprémum $\leqq f(\lambda)$ bizonyításánál elég poliéderekre szorítkoznunk.

Legyen tehát D (zárt) poliéder, $D'=\lambda D$, $p\in D\cap D'$. Feltehető, hogy $0\notin D$. Könnyen láthatóan $co(D\cup\lambda D)=\bigcup_{\lambda\leqq\mu\leqq 1}\mu D$. Legyen $E=\left(\bigcup_{0\leqq\mu\leqq 1}\mu D\right)\setminus D$, ekkor

$$\bigcup_{\lambda\leqq\mu\leqq 1}\mu D = D\cup(E\setminus\lambda E)\quad\text{és így}$$

$$V\left(\bigcup_{\lambda\leqq\mu\leqq 1}\mu D\right)=V(D)+(1-\lambda^n)V(E).$$

Belátjuk, hogy $V(E)\leqq V(D)\frac{\lambda}{1-\lambda}$. Legyenek D-nek azon $n-1$ dimenziós lapjai, amelyeknek 0 szigorúan a külső (D-t nem tartalmazó) partján fekszik, $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Ekkor az O-t és p-t összekötő szakasz az F_i lap π_i hipersíkját egy p_i pontban metszi. Ezért, a $q=\frac{1}{\lambda}p$ jelöléssel

$$d(0, \pi_i)=\frac{\overline{Op_i}}{\overline{pq_i}}d(q, \pi_i)\leqq\frac{\overline{Op}}{\overline{qp_i}}d(q, \pi_i)=\frac{\lambda}{1-\lambda}d(q, \pi_i).$$

Mivel $\bar{E}$ az F_i alapú, O csúcsú gúlák uniója, és az F_i alapú q csúcsú gúlák D-ben vannak, így az előző egyenlőtlenségből

$$V(E)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} d(0,\pi_i)\cdot V_{n-1}(F_i)\leqq\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} d(q,\pi_i)V_{n-1}(F_i)\leqq\frac{\lambda}{1-\lambda}V(D)$$

(V_{n-1} jelöli az $n-1$ dimenziós térfogatot). Az előzőkből

$$\frac{V(co(D\cup D'))}{V(D)+V(D')}=\frac{V\left(\bigcup_{\lambda\leqq\mu\leqq 1}\mu D\right)}{V(D)(1+\lambda^n)}=\frac{V(D)+(1-\lambda^n)V(E)}{V(D)(1+\lambda^n)}\leqq$$

$$\leqq\frac{1+(\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^n)}{1+\lambda^n}=f(\lambda).$$

Most megmutatjuk, hogy $f(\lambda)$ a pontos maximum. Legyen D egy $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ szimplex, D' megfelelő csúcsai $p_1', p_2', \ldots, p_{n+1}'$, és legyen $p_1'=p_2$. (A $\lambda=1$ esetben jelölje D' D-nek azt az eltoltját, amelyre $p_1'=p_2$.) Ekkor $co(D\cup D')$ a D' szimplexből és egy csonkagúlából (ill. a $\lambda=1$ esetben egy hasábból) áll, így térfogata $\lambda^n V(D)+$ $+(1+\lambda+\ldots+\lambda^{n-1})V(D)=f(\lambda)\big(V(D)+V(D')\big)$.

Hátra van még $\sup_{\lambda>0} f(\lambda)$ meghatározása. Állítjuk, hogy $f(\lambda)\leqq f(1)=(n+1)/2$, azaz $(n+1)(1+\lambda^n)-2(1+\lambda+\ldots+\lambda^n)\geqq 0$. Ez pedig az $1+\lambda^n-\lambda^i-\lambda^{n-i}=(1-\lambda^i)\cdot$ $\cdot(1-\lambda^{n-i})\geqq 0$ egyenlőtlenségek összegzéséből adódik ($0\leqq i\leqq n$).

Lényegében *Totik Vilmos* megoldása.

A feladatot megoldották: *Éltető László Hangya László, Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Totik Vilmos. Kollár János* megoldásában könnyen javítható hiba van, *Füredi Zoltán, Geréb Mihály, Győri Ervin, Kiss Emil* megoldása hiányos.

10. feladat. I. megoldás. Azt mondjuk, hogy egy A halmazt részhalmazainak egy rendszere szeparál, ha bármely $a, b\in A$, $a\neq b$ esetén létezik olyan részhalmaz a rendszerben, amely a-t tartalmazza, de b-t nem. Ha A legfeljebb kontinuumszámosságú, akkor mindig van részhalmazainak megszámlálható szeparáló rendszere. Ágyazzuk be ugyanis A-t R-be és vegyük a racionális végpontú intervallumoknak megfelelő halmazokat.

Először megmutatjuk, hogy megadható X-ben zárt halmazok olyan sorozata, amely szeparálja X-et. Ismert (l. pl. Császár, Bevezetés az általános topológiába, 320. oldal), hogy minden metrizálható térnek van σ-diszjunkt bázisa. Legyen tehát $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ X-nek olyan bázisa, hogy B_n diszjunkt, nem-üres halmazokból áll. Ekkor B_n legfeljebb kontinuum-számosságú, vegyünk fel egy őt szeparáló $\{B_n^i;\ i=1, 2, \ldots\}$ rendszert (amely tehát halmazrendszerek rendszere). Legyen B_n^i elemeinek uniója U_n^i, ekkor U_n^i nyílt halmaz a τ topológiában.

Az $\{U_n^i\}$ rendszer szeparálja X-et. Legyen ugyanis $x, y\in X$, $x\neq y$. Mivel B bázis, valamilyen n-re van olyan $V\in B_n$, hogy $x\in V$, $y\notin V$. Esetleg van olyan $V'\in B_n$, hogy $y\in V'$, esetleg nincs, de mindenesetre legfeljebb egy van, mert B_n diszjunkt. Válasszunk ki egy olyan B_n^i-t, amelyre $V\in B_n^i$, $V'\notin B_n^i$ (illetve egy tetszőleges V-t tartalmazó B_n^i-t, ha nincs V'). Nyilván $x\in U_n^i$ és $y\notin U_n^i$. Az $\{U_n^i\}$ rendszerrel együtt nyilván az U_n^i halmazok komplementereinek rendszere is szeparálja X-et. Rendezzük el ezeket a komplementereket egy $F_1, F_2, \ldots$ sorozatba. (F_n) tehát zárt halmazokból álló, X-et szeparáló rendszer.

Legyen d egy τ-t indukáló korlátos távolság X-en. Tekintsük a következő $f: X \to l^1$ leképezést:

$$f(x) = \left(\frac{d(F_1, x)}{2^1}, \frac{d(F_2, x)}{2^2}, \ldots \right).$$

f injektív, mert ha $x \neq y$, akkor van olyan F_n, hogy $x \in F_n$, $y \notin F_n$, és akkor $d(F_n, x) = 0 \neq d(F_n, y)$. f folytonos is, mert az l^1-beli távolságot D-vel jelölve $D(f(x), f(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |d(F_n, x) - d(F_n, y)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d(x, y) = d(x, y)$.

Tekintsük most az f által megadott inverzkép-topológiát X-en. Mivel l^1 szeparábilis metrikus tér (és metrikus terekben a szeparabilitás öröklődő), valamint f injektív, azért ez a topológia is szeparábilis és metrizálható lesz, f folytonossága miatt pedig durvább, mint τ.

Kollár János, Komjáth Péter, Ruzsa Imre és *Totik Vilmos* megoldása.

II. megoldás. Tetszőleges $m > 0$ számosság esetén $J(m)$-mel jelöljük az alábbi metrikus teret: $J(m)$ pontjai az (i, x) párok lesznek, ahol $i \in I$ (I egy tetszőleges, m számosságú halmaz) és $x \in [0, 1]$, azonban az $(i, 0)$ alakú pontokat azonosítjuk egymással. $J(m)$ d metrikáját a következőképpen definiáljuk:

$$d((i, x): (j, y)) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } i \neq j \\ |x - y|, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A bizonyítás során felhasználjuk azt a tételt, amely szerint minden m súlyú metrikus tér beágyazható megszámlálható sok $J(m)$ tér topologikus szorzatába. (Lásd pl. Engelking: Outline of general topology, 197. old. 7. tétel.)

Jelölje P az (X, τ) topologikus tér következő tulajdonságát: van τ-nél durvább, szeparábilis és metrizálható topológia X-en. Nyilvánvaló, hogy P tulajdonságú terek minden altere és megszámlálható sok P tulajdonságú tér topologikus szorzata is P tulajdonságú, továbbá, hogy a feladat feltételeinek eleget tevő metrikus terek súlya legfeljebb c (kontinuum). Minthogy az idézett tétel szerint minden legfeljebb c súlyú metrikus tér beágyazható megszámlálható sok $J(c)$ tér topologikus szorzatába, így elég belátni, hogy $J(c)$ rendelkezik a P tulajdonsággal.

Nyilvánvaló, hogy $J(c)$ homeomorf azzal a metrikus térrel, melynek alaphalmaza a zárt egységkör, két különböző O-ból kiinduló sugáron fekvő pont távolsága pedig e két pont abszolút értékének összege. Így az egységkör természetes (euklideszi) topológiája egy ennél durvább, szeparábilis és metrikus topológia.

Balogh Zoltán és *Kiss Emil* megoldása.

A feladatot megoldották: *Balogh Zoltán, Kiss Emil, Kollár János, Komjáth Péter, Ruzsa Imre* és *Totik Vilmos.*

11. feladat. Legyen $(S_b - S_a)^* = \max_{a \leqq k < b} S_k$. Olyan $\omega(n)$ és $f(n)$ sorozatokat keresünk, amelyekre

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ (f(n))^{-1/2} S^*_{f(n)} > \omega(f(n)) \right\} < \infty$$

és

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ (f(n+1))^{-1/2} \left[(S_{f(n+1)} - S_{f(n)})^* + f^{1/2}(n) \omega(f(n)) \right] < \frac{\varepsilon}{\log f(n+1)} \right\} = \infty$$

minden $\varepsilon>0$-ra. Ilyen $\omega(n), f(n)$ sorozatok konstruálása esetén, a Borel—Cantelli-lemma szerint, ugyanis 1 valószínűséggel az

$$\frac{S^*_{f(n)}}{\sqrt{f(n)}} > \omega(f(n))$$

események közül csak véges, míg az

$$(f(n+1))^{-1/2}\left[(S_{f(n+1)}-S_{f(n)})^*+f^{1/2}(n)\omega(f(n))\right] < \frac{\varepsilon}{\log f(n)}$$

események közül végtelen sok következik be. Ebből következőleg az

$$\frac{S^*_{f(n+1)}}{\sqrt{f(n+1)}} \leqq \frac{(S_{f(n+1)}-S_{f(n)})^*+S^*_{f(n)}}{\sqrt{f(n+1)}} < \frac{\varepsilon}{\log f(n+1)}$$

események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be Feladatunk tehát az a) és b) feltételeket kielégítő $\omega(n), f(n)$ sorozatokat keresni.

Felhasználjuk, hogy

$$P\left(\frac{S^*_n}{\sqrt{n}} < x\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

(lásd pl. Rényi: Foundations of probability) és ez akkor is teljesül, ha x-et egy $x_n=o(n^{1/3})$ sorozattal helyettesítjük. Így

$$P\left(\frac{(S_{f(n+1)}-S_{f(n)})^*+\sqrt{f(n)}\omega(f(n))}{\sqrt{f(n+1)}} < \frac{\varepsilon}{\log f(n+1)}\right) \geqq$$

$$\geqq P\left(\frac{(S_{f(n+1)}-S_{f(n)})^*}{\sqrt{f(n+1)-f(n)}} < \frac{\varepsilon}{\log f(n+1)} - \frac{\sqrt{f(n)}\omega(f(n))}{\sqrt{f(n+1)}}\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}A, \quad \text{ahol} \quad A = \frac{\varepsilon}{\log f(n+1)} - \frac{\sqrt{f(n)}\omega(f(n))}{\sqrt{f(n+1)}},$$

ha A elég kicsi. Vagyis $f(n)$-t és $\omega(n)$-t úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log f(n+1)} = \infty, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{f(n)\omega^2(f(n))}{f(n+1)}} < \infty,$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\omega(f(n))}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du < \infty$$

legyen. Könnyen ellenőrizhető, hogy pl. $\omega(f(n))=n^3$ és $f(n+1)=(n!)^{14}$ választások esetén (i), (ii), (iii) teljesül.

Turán György megoldása.

A feladatot megoldották: *Komjáth Péter, Ruzsa Imre, Totik Vilmos* és *Turán György*.

PROBLEMS OF THE M. SCHWEITZER COMPETITION 1976

1. Let R be a binary recursive relation defined on the set of natural numbers. Suppose that R is an order relation defining an order of type ω, and let $f(n)$ stand for the n-th element according to this order. Show that $f(n)$ is not necessarily recursive.

2. Suppose that to any countably infinite set A of vertices of an infinite graph G, there exists a vertex $P \notin A$ of G which is connected with infinitely many vertices of A. Prove that G contains a countably infinite set A of vertices admitting non-countably infinitely many vertices P such that each of these vertices P is connected with infinitely many vertices of A.

3. Let H denote the set of natural numbers n such that $d(n) | n$. Show that

a) $n! \in H$ for n sufficiently large.

b) H is of density zero.

4. Let Z denote the ring of rational integers. Construct an integral domain I such that

a) $Z \subsetneq I$

b) none of the elements of $I \setminus Z$ are algebraic (i. e. they are not roots of polynomials with coefficients in Z),

c) I admits only trivial endomorphisms.

5. Put $S_\nu = \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, where the b_j's are arbitrary, the z_j's are non-zero complex numbers ($j = 1, 2, \ldots, n$). Prove that

$$|S_0| \leqq n \cdot \max_{0 < |\nu| \leqq n} |S_\nu|.$$

6. Let $0 \leqq c \leqq 1$ and let η denote the order type of the set of rational numbers. Suppose that to every rational number r, a Lebesgue measurable subset H_r of [0, 1] with measure c is assigned. Prove that there exists a Lebesgue measurable set $H \subset [0, 1]$ with measure c such that for every $x \in H$, the set

$$\{r; x \in H_r\}$$

contains a subset of type η.

7. Let $f_1, \ldots, f_n$ be linearly independent (over the complex numbers) regular functions in a domain of the complex plane. Prove that the functions $f_j \cdot \bar{f}_k$ ($1 \leqq j, k \leqq n$) are also linearly independent.

8. Prove that the set of linear combinations (with real coefficients) of the system of polynomials $\{x^n + x^{n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ is everywhere dense in $C[0, 1]$.

9. Let D be a convex subset of the n-dimensional space, and suppose that the set D' can be obtained From D by a homothety with a positive ratio and a consecutive translation. Suppose in addition that the sum of the volumes of D and D' is 1 and that $D \cap D' \neq \emptyset$. Determine the supremum of the volume of the convex hull of $D \cup D'$ when D and D' run through all the sets satisfying the above conditions.

10. Given a set X of cardinality at most continuum and a metrizable topology τ on X, prove that there exists a metrizable and separable topology on X which is coarser than τ.

11. Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent, identically distributed random variables with distribution

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = +1) = \frac{1}{2},$$

and put $S_0 = O$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ($n = 1, 2, \ldots$),

$$T_n = \frac{\max\limits_{0 \leqq k \leqq n} S_k}{\sqrt{n}}.$$

Prove that

$$\liminf_{n \to \infty} \log n \cdot T_n = 0$$

with probability 1.

FELADATROVAT

Szerkesztik: CSÁSZÁR ÁKOS és LOVÁSZ LÁSZLÓ

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, 1061 Budapest, Anker köz 1—3. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladatok

204. Legyen X és Y két kompakt Hausdorff-tér, és tegyük fel, hogy az X-en, ill. Y-on értelmezett nem-negatív folytonos függvények a szorzásra nézve izomorf félcsoportokat alkotnak. Bizonyítandó, hogy X és Y homeomorfak. Igaz marad-e az állítás, ha nem-negatív helyett pozitívot mondunk?

Császár Ákos

205. Legyen $f: R \to R$ akárhányszor differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy minden $x \in R$-hez van olyan nemnegatív egész n szám, hogy $f^{(n)}(x) = 0$. Bizonyítandó, hogy f polinom.

Laczkovich Miklós

206. Legyenek A_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ az n-dimenziós euklidészi tér olyan konvex részhalmazai, hogy minden $0 \leqq j_0, \ldots, j_n \leqq m$ esetén $A_{0j_0} \cap \ldots \cap A_{nj_n} \neq \emptyset$. Bizonyítandó, hogy van olyan $0 \leqq i \leqq n$, melyre

$$A_{i0} \cap A_{i1} \cap \ldots \cap A_{im} \neq \emptyset.$$

Lovász László

Megoldott feladatok

195. feladat. Legyen H véges halmaz, G pedig olyan permutációcsoport H-n, hogy G minden egységtől különböző elemének egyetlen fixpontja van. Igazoljuk, hogy ez a fixpont közös.

(Lovász László)

Megoldás. Legyen H elemeinek száma h, G elemeinek száma g, G egységeleme e. A $g = 1$ esetben az állítás semmitmondó, így feltehetjük, hogy $g \neq 1$.

Definiálunk egy relációt H-n: legyen $a, b \in H$ esetén $a \sim b$, ha van olyan $p \in G$, hogy $p(a)=b$. G csoport voltából következik, hogy ez ekvivalenciareláció, a megfelelő ekvivalenciaosztályokat a H halmaz G szerinti tranzitivitási osztályainak nevezzük. Legyenek ezek $H_1, \ldots, H_t$, H_i elemeinek száma h_i.

Ha $a, b, c \in H_i$, akkor ismét G csoport voltából következik, hogy a-t b-be G-nek ugyanannyi eleme viszi át, mint b-t a-ba s mint a-t c-be, így speciálisan ugyanennyi az a-t fixen tartó G-beli elemek száma is. Ez a szám tehát megadja általában a H_i valamely adott elemét H_i tetszőleges másik adott elemébe átvivő csoportelemek számát, jelöljük w_i-vel. A mondottak szerint $w_i h_i = g$. Látszik az is, hogy a G elemeihez tartozó fixpontok összes száma $\sum_{i=1}^{t} w_i h_i = tg$, ami éppen az ismert Burnside-féle lemma állítása.

Esetünkben e-nek h fixpontja van, G többi $g-1$ elemének pedig egy-egy, úgyhogy

$$h + g - 1 = tg. \tag{1}$$

Végezzük a tranzitivitási osztályok számozását úgy, hogy $i=1, \ldots, r$ esetén $w_i > 1$, $i=r+1, \ldots, t$ esetén pedig $w_i = 1$ legyen. Biztosan $r \geqq 1$, hiszen a feltevés szerint van G-nek e-től különböző eleme s ennek egy fixpontja. Minthogy $i=r+1, \ldots, t$ esetén $h_i = g$, azért

$$h = \sum_{i=1}^{r} h_i + (t-r)\, g, \tag{2}$$

továbbá ha a fixpontok összeszámolását csak G-nek e-től különböző elemeire végezzük, akkor a

$$\sum_{i=1}^{r} (w_i - 1) h_i = g - 1 \tag{3}$$

összefüggésre jutunk.

(2)-ből (1) figyelembevételével adódik a

$$\sum_{i=1}^{r} h_i = h - tg + rg = 1 + (r-1)\, g \tag{4}$$

egyenlőség. Végül tekintetbe véve, hogy (3) bal oldalán minden $w_i > 1$, (4)-ből és (3)-ból

$$g - 1 \geqq \sum_{i=1}^{r} h_i = 1 + (r-1)\, g$$

nyerhető, ami csak az $r=1$ esetben nem vezet ellentmondáshoz. Eszerint $r=1$ és akkor (4)-ből $h_1 = 1$.

Okoskodásunk azt mutatja tehát, hogy van egyelemű tranzitivitási osztály; ennek egyetlen elemét így G-nek minden eleme fixen tartja.

Kelen Miklós

A 195. feladat megoldását beküldte még *Száz Géza*.

196. feladat. Legyen A egyszerű egységelemes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik olyan B-vel izomorf $F = \{f: X \to A\}$ függvénygyűrű egy adott B gyűrűhöz, amelyre minden adott $x \in X$ és $a \in A$ elemhez van olyan $f \in F$ függvény, hogy $f(x) = a$, ha a B gyűrű minden nullától különböző ideáljának van A-val izomorf faktorgyűrűje.

(Wiegandt Richárd)

Megoldás. A feladatban szereplő feltételt másképpen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy B minden nullától különböző ideáljának van A-ra való epimorfizmusa. Ennek megfelelően a feladat állításánál valamivel többet mond, ha megmutatjuk, hogy egy A egyszerű egységelemes gyűrű megadása után egy $B \neq \{0\}$ gyűrűre egymással egyenértékűek a következő állítások:

(a) Létezik egy X halmaz és egy X-en értelmezett, A-beli értékeket felvevő függvényekből álló F függvénygyűrű (amelyben a gyűrűműveletek a függvények pontonkénti összeadásával és szorzásával vannak értelmezve) úgy, hogy F izomorf B-vel, és adott $x \in X$ ponthoz és $a \in A$ értékhez mindig található olyan $f \in F$ függvény, amelyre $f(x) = a$;

(b) Minden B-beli nullától különböző (kétoldali) I ideálhoz található olyan $r: I \to A$ homomorfizmus, hogy $r(I) = A$;

(c) Minden B-beli nullától különböző I ideálhoz található olyan $s: B \to A$ homomorfizmus, hogy $s(I) = A$.

(a)⇒(b): Azt mutatjuk meg, hogy (b) állítása magára az (a)-ban szereplő F-re teljesül, mert akkor természetesen igaz lesz az F-fel izomorf B-re is. Mármost ha I ideál F-ben és $g \in I$, $g \neq 0$, akkor legyen $x \in X$ olyan pont, amelyben $g(x) \neq 0$, és $r: I \to A$ az $r(f) = f(x)$ képlettel értelmezve. Világos, hogy r homomorfizmus, mégpedig $r(g) \neq 0$ miatt nullától különböző. Továbbá $r(I)$ ideál A-ban, hiszen adott $a \in A$-hoz van olyan $h \in F$, hogy $h(x) = a$, s akkor bármely $f \in I$ esetén

$$ar(f) = h(x)f(x) = (hf)(x) \in r(I),$$

minthogy $hf \in I$, és ugyanilyen módon $r(f)\,a \in r(I)$. Mivel azonban A egyszerűsége miatt A-ban minden nullától különböző ideál A-val egyenlő, azért $r(I) = A$.

(b)⇒(c): Megmutatjuk, hogy a (b)-ben szereplő r homomorfizmus kiterjeszthető egy $s: B \to A$ homomorfizmussá.

Valóban, legyen $i \in I$ olyan, hogy $r(i) = e$, ahol e jelöli A egységelemét (feltesszük, hogy $e \neq 0$, hiszen az egész feladat semmitmondó, ha A nullagyűrű). Legyen aztán $b \in B$ esetén

$$s(b) = r(ibi).$$

Ekkor $s: B \to A$ homomorfizmus. Először is nyilván

$$s(b+c) = r\big(i(b+c)i\big) = r(ibi+ici) = r(ibi)+r(ici) = s(b)+s(c),$$

másrészt

$$s(b)s(c) = r(ibi)r(ici) = r(ibiici) = r(ib)r(i)r(i)r(ci) =$$

$$= r(ib)eer(ci) = r(ib)r(ci) = r(ibci) = s(bc),$$

ahol figyelembe vettük, hogy tetszőleges $b, c \in B$ esetén ib és ci I-hez tartozik i-vel együtt. Továbbá s kiterjesztése r-nek, mivel $b \in I$ esetén

$$s(b) = r(ibi) = r(i)r(b)r(i) = er(b)\,e = r(b).$$

(c)⇒(a): Legyen X az összes olyan $x: B \to A$ homomorfizmusok halmaza, amelyekre $x(B) = A$. (c)-ből az $I = B$ választással látszik, hogy $X \neq \emptyset$. Értelmezzünk minden $b \in B$ gyűrűelemhez egy $q(b): X \to A$ függvényt a

$$q(b)(x) = x(b)$$

képlettel. Így $q(B)$ függvénygyűrű lesz, és ha ezt F-fel jelöljük, akkor $q: B \to F$ homomorfizmus. Valóban,

$$q(b-c)(x) = x(b-c) = x(b)-x(c) = q(b)(x)-q(c)(x),$$

tehát

$$q(b-c) = q(b)-q(c) \in F,$$

s hasonlóan

$$q(bc)(x) = x(bc) = x(b)x(c) = q(b)(x)q(c)(x),$$

tehát

$$q(bc) = q(b)q(c) \in F.$$

Megmutatjuk még, hogy q monomorfizmus, azaz hogy $b \in B$, $b \neq 0$ esetén van olyan $x \in X$, hogy $q(b)(x) = x(b) \neq 0$.

Ez más szóval azt jelenti, hogy ha K_x jelöli az x homomorfizmus magját, akkor

$$\bigcap_{x \in X} K_x = \{0\}.$$

Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy a bal oldali metszet egy nullától különböző I ideál. Ekkor (c) szerint van olyan $s: B \to A$ homomorfizmus, hogy $s(I) = A$. Így természetesen $s \in X$, tehát $I \subset K_s$ az I ideál definíciója szerint, amiből viszont $s(I) = \{0\}$ következik, ami ellentmondás.

Wiegandt Richárd és *Császár Ákos*

Megjegyzés. A megoldásban követett gondolatokat fel lehet használni az olyan gyűrűk jellemzésére, amelyek izomorfak egy valós értékű függvényekből álló és az összes állandókat tartalmazó függvénygyűrűvel (l. Á. Császár: Some problems concerning $C(X)$, General Topogy and Its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Springer-Verlag, 1977, 43-55, 11.)

Császár Ákos

197. feladat. Legyen (f_n) valós polinomoknak olyan sorozata, amely a számegyenesen mindenütt tart egy f limeszfüggvényhez, és tegyük fel, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ és véges számú $g_1, \ldots, g_m$ polinom úgy, hogy

$$|g_i(x)-g_i(y)| \leqq \delta \quad (i = 1, \ldots, m)$$

esetén

$$|f_n(x)-f_n(y)| \leqq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bizonyítandó, hogy ekkor f is polinom.

(Császár Ákos)

Megoldás. Legyen $g_1, \ldots, g_m$ mindegyike legfeljebb k-adfokú. Megmutatjuk, hogy ugyanez áll az f_n-ek mindegyikére is. Ez triviális a $k = 0$ esetben, mert akkor a feltétel szerint

$$|f_n(x)-f_n(y)| \leqq \varepsilon$$

teljesül minden n-re, x-re és y-ra, azaz mindegyik f_n korlátos, és így állandó.

Legyen tehát $k > 0$. Ekkor feltehetjük, hogy van a g_i polinomok között pontosan k-adfokú, s aztán azt is, hogy egyikük sem 0-adfokú, ugyanis a feltevések változatlanul érvényesek maradnak a 0-adfokú g_i-k törlése után is. Legyen n rögzítve.

Válasszunk olyan nagy c számot, hogy $x>c$ esetén $g_i'(x)\neq 0$ $(i=1, \ldots, m)$, továbbá $f_n'(x)\neq 0$. Ha feltesszük, hogy f_n fokszáma k-nál nagyobb, akkor c-t még olyan nagynak is választhatjuk, hogy $x>c$ esetén

$$\left|\frac{f_n'(x)}{g_i'(x)}\right| > \frac{\varepsilon}{\delta} \quad (i=1, \ldots, m)$$

teljesüljön. Rögzítsünk egy ilyen x-et, s aztán keressük meg a legkisebb $y>x$ helyet, ahol

$$\max_{1\leqq i\leqq m} |g_i(x)-g_i(y)| = \delta.$$

Ilyen természetesen van, hiszen mindegyik g_i folytonos és a végtelenben határértéke végtelen. Most a Cauchy-féle középérték-tétel szerint

$$\frac{f_n(x)-f_n(y)}{g_i(x)-g_i(y)} = \frac{f_n'(z)}{g_i'(z)}$$

alkalmas x és y közötti z-vel. A feltevés szerint a jobb oldal abszolút értékben nagyobb $\frac{\varepsilon}{\delta}$-nál, a bal oldal nevezőjének abszolút értéke viszont legalább egy i-re éppen δ, úgyhogy a számláló abszolút értékének ε-nál nagyobbnak kell lennie. Ez azonban ellentmond a feladat feltevésének.

Ha viszont már tudjuk, hogy mindegyik f_n legfeljebb k-adfokú, akkor $k+1$ különböző $x_0, \ldots, x_k$ helyet felvéve a Lagrange-féle interpolációs képlet szerint

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{k} f_n(x_j)\, p_j(x),$$

ahol a $p_j(x)$-ek a felvett alappontokhoz tartozó Lagrange-féle alappolinomok. Innen rögtön látszik, hogy

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_j)\, p_j(x)$$

is (legfeljebb k-adfokú) polinom.

Hermann Tamás

Megjegyzés. Egy X alaphalmazon tekintsünk egy X-en értelmezett valós függvényekből álló Φ függvényosztályt. Az olyan Φ függvényosztályok, amelyek valamely X-en értelmezett alkalmas uniform struktúra mellett az utóbbira nézve egyenletesen folytonos függvények összességéből állnak, jellemezhetők néhány feltétellel, amelyek közül az egyik az, hogy Φ tartalmazza minden Φ elemeiből képezett egyenletesen konvergens sorozatnak a limeszfüggvényét, egy további feltétel pedig úgy szól, hogy ha $f_n\in\Phi$, $f_n\to f$ pontonként, és minden elég kicsiny $\varepsilon>0$-hoz van véges számú $g_i\in\Phi$ úgy, hogy $|g_i(x)-g_i(y)|\leqq\varepsilon$ $(i=1, \ldots, m)$ esetén $|f_n(x)-f_n(y)|\leqq\varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$, akkor $f\in\Phi$. Felvetődik az a kérdés, hogy ez az utóbbi kikötés nem vonja-e maga után az előbbit; a feladat éppen azt mutatja, hogy ez nincs így, hiszen a polinomok halmaza eleget tesz az utóbbi kikötésnek (még annál erősebb kikötésnek is), viszont belőle az egyenletes konvergencia már kivezet. (Vö.: Á. Császár, Gleichmässige Approximation und gleichmässige Stetigkeit, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *20* (1969), 253—261.)

Császár Ákos

PROBLEMS

1. Let X and Y be compact Hausdorff spaces and suppose that the multiplicative semigroup formed by the non-negative continuous functions on X and Y, respectively, are isomorphic. Prove that X and Y are homeomorphic. Does the assertion remain true with "positive" instead of "non-negative"?

Á. Császár

2. Let $f: R \to R$ be an infinitely many times differentiable function such that for every x there exists a non-negative integer n such that $f^{(n)}(x)=0$. Show that f is a polynomial.

M. Laczkovich

3. Let A_{ij} $(i=0, 1, \ldots, n; j=0, 1, \ldots, m)$ be convex subsets of R^n such that for every $0 \leqq j_1, \ldots, j_n \leqq m$, $A_{0j_0} \cap \ldots \cap A_{nj_n} \neq \emptyset$. Prove that there exists a $0 \leqq i \leqq n$ such that $A_{i0} \cap A_{i1} \cap \ldots \cap A_{im} \neq \emptyset$.

L. Lovász

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS A SZELE TIBOR EMLÉKÉREM 1976. ÉVI ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kijelölt Bizottság 1977. január 6-án tartott ülésén elhatározta, hogy az 1976. évi Szele Tibor Emlékérmet Alexits György akadémikusnak, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos tanácsadójának adományozza.

A Bizottság döntését az alábbiakkal indokolja:

Alexits György akadémikus a mai magyar matematikus közélet köztiszteletben álló vezető egyénisége, akit világszerte az approximációelmélet és a kifejtések elmélete egyik „nagy öregje"-ként tartanak számon.

Csaknem hat évtizedes matematikai tevékenységéről részletesebben beszámolni igen nagy feladat lenne. A következőkben csupán azokat a leglényegesebb momentumokat említjük, amelyek számára a Szele Tibor Emlékérem odaítélést elsősorban indokolják.

Alexits György 1899-ben Budapesten született. 1919-ben, a Tanácsköztársaság bukása után a Szocialista Diákok Szövetségében kifejtett tevékenysége miatt emigrálni volt kénytelen. Egyetemi tanulmányait a grazi egyetemen végezte. Kezdetben az elméleti fizika érdekelte, de egyetemi tanulmányai során érdeklődése egyre inkább a matematika felé fordult; doktori disszertációja — amelynek alapján 1924-ben a grazi egyetemen doktorrá avatták — a Laplace-féle differenciálegyenlet megoldásaival kapcsolatos kérdésekkel foglalkozott.

Egyetemi tanulmányai befejezése után igen sokféle tevékenységet folytatott; volt biztosítási matematikus, napilapnál zenekritikus; majd az 1926—27 években a bukaresti egyetemen Fourier-sorokról adott elő.

Magyarországra visszatérve az Eötvös Loránd Tudományegyetemen megszerezte matematika—fizika szakos középiskolai tanári oklevelét. Ezután egy évtizeden át polgári iskolai, majd középiskolai tanárként működött. Ezekben az években P. Urysohn és K. Menger munkásságának hatására dimenzióelmélettel és görbeelmélettel, majd a metrikus geometria kérdéseivel foglalkozott; ilyen irányú eredményei is már nemzetközi érdeklődést keltettek.

1941-től a budapesti műegyetemen kisegítő tanársegédként is tevékenykedett. Egyetemi doktorátusának Kolozsvárott történt honosítása után 1943-ban a műegyetemen magántanárrá habilitálták. Ezekben az években kutató tevékenysége elsősorban az approximációelmélet és az ortogonális sorok elmélete felé fordult; e tárgykörben jelentős eredményeket ért el.

1944-ben az ellenállási mozgalomban való részvétele miatt koncentrációs táborba vitték. Visszatérése után Alexits György számára nehéz, eredményekben és a haladásért folytatott harcban gazdag évek következtek. Az ország teljesen szétzilált kulturális életét kellett ujjáépíteni. Ebben az igen nehéz, sokszor hálátlan feladatok teljesítését megkívánó munkában nagy lelkesedéssel, önzetlenül és fáradtságot nem kímélve vette ki részét. Kultúrpolitikai tevékenységének legfontosabb állomásai: 1947 és 1948 között közoktatásügyi államtitkár, egy éven keresztül a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára volt. Államtitkári működésének ideje alatt több egyetemi matematikai tanszék létesült. A Tudományos Tanácsot az ország szétzilált tudományos élete újjáélesztésének elősegítésére hívták létre; főtitkárságának ideje alatt a Tudományos Tanácsban óriási szervező munka folyt, számos tudományos kutató intézetet létesítettek. Nagy erőfeszítést igénylő feladatok hárultak rá az új akadémia alapjainak lerakásában is; ő volt az újjászervezett Akadémia első főtitkára.

1948-ban nyilvános rendes tanárrá nevezték ki a Budapesti Műszaki Egyetem III. sz. Matematikai Tanszékére, a Vegyészmérnöki Karra. 1967 júniusáig ennek a tanszéknek a vezetője volt; utána 1970-ben történt nyugdíjállományba vonulásáig a MTA Matematikai Kutató Intézete Valósfüggvénytani Osztályának osztályvezetőjeként tevékenykedett; jelenleg a Matematikai Kutató Intézet tudományos tanácsadója. 1948-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, majd 1949-ben a Magyar Tudományos Akadémia tagja lett. 1951-ben a Kossuth-díj II. fokozatát majd 1970-ben az Állami-díj I. fokozatát kapta. A szegedi József Attila Tudományegyetem, a jassi-i egye-

tem és a giesseni egyetem tiszteletbeli doktora; számos hazai és külföldi állami kitüntetés birtokosa. Jelentős tevékenységet fejtett ki a különböző akadémiai folyóiratok szerkesztésével kapcsolatban; jelenleg az Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae főszerkesztője és az Analysis Mathematica közös szovjet—magyar akadémiai folyóirat szerkesztőbizottsága magyar tagozatának tagja.

Az előbbiekben említett országos jelentőségű, nagy elfoglaltsággal járó és sok energiát lekötő tudománypolitikai és tudományszervezési feladatok mellett tudományos kutató tevékenységét is folytatta. Már a negyvenes évektől kezdve érdeklődése mindinkább az approximációelmélet, az általános ortogonális sorok, a Fourier- és az ortogonális polinomsorok területére irányult, majd az egyéb feladatok csökkenésével egyre inkább kiszélesedett. Elsősorban ezeken a területeken érte el legjelentősebb, új utakat nyitó és iskolát teremtő eredményeit. Munkássága körülbelül 80 tudományos közleményben és három könyvben realizálódott. Bolyai Jánosról írt tudományos életrajzában Bolyai Jánosnak, mint embernek helyesebb, a korábbi különböző torzításoktól mentes képét adja. A vegyészek számára Fenyő Istvánnal együtt írt matematikai tankönyvét német nyelven is kiadták. Tudományos szempontból legjelentősebb az ortogonális sorok konvergencia kérdéseiről készített monográfiája, amely angol, német és orosz nyelven is megjelent, és amely világviszonylatban is e kérdéskör egyik legismertebb és leggyakrabban idézett kézikönyve lett.

Az utóbbi évtizedekben számos külföldi meghívásnak tett eleget, több külföldi egyetemen, így például Argentínában Bahia Blancaban, az Egyesült Államokban Salt Lake Cityben, Kanadában Waterlooban, a Német Szövetségi Köztársaságban Giessenben és Marburgban, valamint Franciaországban Párizsban a Sorbonne-on működött közre vendégprofesszorként.

Alexits György tudományos, tudománypolitikai és tudományszervező munkássága mellett kiemelendő az a tevékenysége, amelyet a fiatalabb matematikus kutató gárda nevelése terén fejtett ki. Ilyen irányú tevékenységének nagy mértékben köszönhető az a tény, hogy jelenleg hazánkban az approximációelméletnek és a kifejtések elméletének jelentős, nemzetközi szinten is elismert kutató bázisa van. E kérdéskörökkel foglalkozó fiatalabb vagy középkorú matematikus kutatóink csaknem mindegyike valamilyen módon Alexits György tanítványának tekinthető, indíttatást kapott tőle, és hálás lehet segítő támogatásának. Közvetlen tanítványainak tekinthetők például Freud Géza, Králik Dezső, Schipp Ferenc és Tandori Károly, de jelentős indíttatást kaptak, illetve csatlakoztak vizsgálataihoz például Csernyák László, Czipszer János, Joó István, Leindler László, Móricz Ferenc, Szalay István, Szenthe János, Pál László, Révész Pál, Németh József. Vendégprofesszori működése során több külföldi fiatal matematikus érdeklődését keltette fel eredménnyel az általa vizsgált kérdések iránt, és számos külföldi fiatal szakember is csatlakozott vizsgálataihoz.

Alexits György iskolateremtő tevékenységének sikere elsősorban a matematika iránti szeretetében és lelkesedésében rejlik; a matematika iránti szeretet és lelkesedés határozták meg egész tevékenységét. Ezekhez társult érdekes, színes és szuggesztív egyénisége, amelyek a vele való beszélgetést gondolatébresztővé és serkentővé tették, elsősorban a fiatalabb matematikusok számára, akikkel szívesen, közvetlen módon, önzetlenül foglalkozott. Kiemelendő segítőkészsége, iránymutató, szerencsés problémafelvető hajlama, amely ugyancsak nagy mértékben hozzájárult ahhoz, hogy a vele kapcsolatba kerülő fiatal matematikusok érdeklődését felkeltse a matematika, elsősorban a valós függvénytan iránt.

Magas kora ellenére kutató munkáját és másokban gondolatébresztő tevékenységét a mai napig aktívan folytatja, igen színvonalas szemináriumot vezet a Matematikai Kutató Intézetben.

Az előzőek alapján a Bizottság megállapította, hogy Alexits György akadémikus minden vonatkozásban messzemenően megfelel azoknak a követelményeknek, amelyeket a Szele Tibor Emlékérem odaítéléséhez megkívánnak.

JELENTÉS AZ 1976. ÉVI GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1976. évi Grünwald-díj odaítélésére: Császár Ákos elnök, Fejes Tóth László, Hajnal András, Makai Endre, Rapcsák András, Révész Pál, Schmidt Tamás, Szász Domokos titkár, Tandori Károly. Révész Pál és Schmidt Tamás külföldi út miatt nem vehetett részt a bizottság munkájában. A bizottság első ülésén kooptálta Sárközy András.

A bizottság 1976. november 2-án és november 16-án ülésezett. A javasoltak között igen sok kiemelkedő fiatal matematikus volt, de a bizottság a díj magas színvonalon tartását szem előtt tartva, nem akart lényegesen eltérni az előző évben adott díjak számától. Így az összes javaslatok alapos mérlegelése után az alábbi döntést hozta:

A Grünwald Géza Emlékdíj I. fokozatával tünteti ki és 5000,— Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

Frankl Péter gyakornok, MTA Matematikai Kutató Intézete Információelméleti Osztálya

Körner János tudományos munkatárs, MTA Matematikai Kutató Intézete Információelméleti Osztálya.

A Grünwald Géza Emlékdíj II. fokozatával tünteti ki és 3000,— Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

Joó István aspiráns, JATE Bolyai Intézete

Korchmáros Gábor tanársegéd, BME Közlekedésmérnöki Kar Matematikai Tanszék

Szalay Mihály tanársegéd, ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék.

Indokolás

Frankl Péter:

Frankl a fiatal matematikus nemzedék kiemelkedően tehetséges egyénisége. Munkásságát a csoportelmélet területén kezdte, később érdeklődése a kombinatorika és ezen belül az extremális halmazrendszerek vizsgálata irányába fordult. Azon felül, hogy igen nagy számú dolgozatot írt — 15 megjelent, illetve sajtó alatt levő dolgozatán kívül még legalább 10 olyan dolgozata is van előkészületben, melynek eredményei már széles körben ismertek — azt is elmondhatjuk, hogy munkásságának máris nagy hatása van. Munkásságáról nagysikerű előadásokban számolt be nemzetközi konferenciákon is.

Extremális halmazrendszerekre vonatkozó eredményei, ezek ötletgazdagsága és módszereinek hatékonysága új fejezetet nyitottak a kombinatorika e fontos ágában. Számos olyan problémát oldott meg, mely azelőtt megtámadhatatlannak látszott.

Csak egy kiragadott példával illusztráljuk eredményeit. Erdős Pál, Chao Ko és Richard Rado bizonyították a következő tételt: Ha $\mathcal{F}$ valamely n elemű halmaz k elemű részhalmazainak olyan rendszere, hogy bármely kettőnek t közös eleme van, akkor, ha $n > n_0(k, t)$, $\mathcal{F}$ elemszáma legfeljebb $\binom{n-t}{k-t}$. E — természetesen adódó eredményben — $n_0(k, t)$ értéke nem volt ismert. Hsien megmutatta, hogy $n_0(k, t)$ $t \cdot k^2$-nek választható. Franklnak, nagy meglepetésre, sikerült megmutatni, hogy $t \geqq 15$-re $n_0(k, t)$ pontos értéke $(t+1)(k-t+1)$. Erről szóló közleménye az Ötödik Magyar Kombinatorika Konferencia kötetében jelenik meg.

Frankl Péter dolgozatainak jegyzéke

1. The proof of a conjecture of G. O. H. Katona, *J. Combinatorial Theory*, A 19 (2), 208—213.
2. A theorem on Sperner families satisfying an additional condition, *J. Combinatorial Theory*, A 20 (1), 1—11.
3. A theorem on Sperner-systems satisfying an additional condition, *Studia Sci. Math. Hung.* 9 (1974), 425—431.
4. An extremal problem of coding type, *Ars Combinatoria*, 1 (1976) 53—55.
5. On commutator subgroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 27 (1976).
6. Families of finite sets satisfying an intersection condition, *Bull. Austral. Math. Soc.* 15 (1976), 73—79.
7. On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance, *J. Combinatorial Theory*, (megjelenés alatt) (Deza M.-el).
8. On the minimum number of disjoint pairs in a family of finite sets, *J. Combinatorial Theory*, (megjelenés alatt).
9. Generalizations of theorems of Katona and Milner, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt).
10. Families of finite sets containing no disjoint sets and their unions, *Periodica Math. Hung.* (megjelenés alatt).
11. Systems of sets satisfying a union-condition, *Studia Sci. Math. Hung.* (megjelenés alatt).
12. Sperner families satisfying additional restrictions, *Periodica Math. Hung.* (megjelenés alatt).
13. Intersection properties of the systems of finite sets, Proc. Fifth Hung. Conf. Comb. (megjelenés alatt) (Deza M.-el és Erdős Pállal.)
14. The Erdős—Ko—Rado theorem is true for $n = ckt$, Proc. Fifth Hung. Conf. Comb. (megjelenés alatt).
15. Comparable families of subsets, *Journal of the London Math. Soc.* (megjelenés alatt), (A. Hilton-nal).

Körner János:

Körner kutatási területe az információelmélet legmodernebb ága, a hírközlési hálózatok elmélete (multiuser communication). E kutatási terület impozáns fellendülésének egyik elindítója éppen az ő (Gács Péterrel közös) dolgozata volt a közös információ kérdéséről, amely egyike volt az 1973.

évben II. Grünwald díjjal jutalmazott munkáinak. Azóta 10 dolgozata jelent meg, illetve áll megjelenés alatt; az ezekben megoldott problémák súlya alapján joggal mondható, hogy Körner János ennek a nemzetközi érdeklődés homlokterében álló témakörnek egyik, talán a legeredményesebb kutatója. Problémafelvető és lényeglátó képessége kiváló. Munkastílusának jellegzetessége, hogy nagyon jól tud másokkal együtt dolgozni, amit az is bizonyít, hogy dolgozatainak többségét társszerzőkkel írta.

Különösen kiemelendő, hogy az általa kezdeményezett és — részben társszerzőkkel — kidolgozott módszer, amely a halmazok zajos csatornán keresztüli „képeinek" aszimptotikus jellemzésén alapul, jelenleg a témakör leghatékonyabb általános módszere. Ennek segítségével sikerült meghatározni különböző érdekes forráshálózatok sebességtartományát, valamint korábban kezelhetetlen fontos esetekben az ún. rádiócsatorna kapacitástartományát, jelentős lépést téve ennek a nagyon nehéz problémának teljes megoldása felé.

Körner János munkájának nemzetközi elismerését bizonyítja a rájuk való számos hivatkozás, beleértve a nyomtatásban még meg nem jelenteket is, valamint a különböző konferenciákon elhangzott előadásai iránt megnyilvánult jelentős érdeklődés.

Körner János 1973 óta írt dolgozatainak jegyzéke

1. On the connection between the entropies of input and output distributions of discrete memoryless channels, Brassói Valószínűségszámítási Konferencia, 1974. kiadványában, (megjelenés alatt) (R. Ahlswede-vel).
2. Source coding with side information and a convergence for degraded broadcast channels, *IEEE Transactions on Inform. Theory*, 21, (1975) no. 6, (R. Ahlswede-vel).
3. On common information and related characteristics of correlated information sources, *IEEE Transactions on Inform. Theory*, (megjelenés alatt) (R. Ahlswede-vel).
4. Bounds on conditional probabilities with applications in multiuser communication, *Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 34 (1976) 157—177 (R. Ahlswede-vel és Gács Péterrel).
5. Images of sets via two different channels and their use in multi-user communication. *IEEE Transactions of Inform. Theory* (Megjelenik 1977 januárban) (Marton Katalinnal).
6. Comparison of two channels, a keszthelyi 1975. évi Információelméleti kollokvium kötetéhez benyújtva és elfogadva (Marton Katalinnal).
7. General broadcast channels with degraded message sets, *IEEE Transactions of Inform. Theory*, (megjelenés alatt), (Marton Katalinnal).
8. Some methods in multi-user communication: a tutoral survey. Information Theory. *New Trends and Open Problems*, ed. G. Longo. Springer-Verlag, Wien—New York, 1975, pp. 173—224.
9. Broadcast channels with confidential messages. IEEE Transactions of Inform. Theory (előadásra került az 1976. évi IEEE Symposiumon, Ronneby, Svédország), (megjelenés alatt), (Csiszár Imrével).
10. Source networks with unauthorized users, Journal of Combinatorics, Information and System Sciences (előadásra került: szovjet információelm. szimpozium, 1976), (megjelenés alatt), (Csiszár Imrével).

Joó István:

Joó István jelenleg Tandori Károly egyetemi tanár ösztöndíjas aspiránsa. Korábban interpolációelméleti kérdésekkel foglalkozott. Még egyetemi hallgató korában elért eredményeiért 1972-ben Rényi Kató Emlékdíjban részesült.

[1] dolgozatában — kapcsolódva Egerváry Jenő és Turán Pál korábbi vizsgálataihoz — a $[0, \infty)$ intervallumon olyan interpolációs eljárás stabilitásának kérdésével foglalkozik, amelynél a 0 pontban vett deriváltra is kikötés van.

[2] dolgozatában — továbbfejlesztve Balázs János korábbi eredményeit — a Jacobi- és a Laguerre-polinomok jellemzését adja azáltal, hogy ezek gyökein adható meg stabil interpolációs eljárás.

[3] ill. [4] dolgozatában — általánosítva Balázs János, Fejér Lipót és Grünwald Géza, ill. Fejér Lipót korábbi eredményeit — a Jacobi polinomok, ill. a Laguerre polinomok gyökein vett stabil interpolációs eljárás approximációját vizsgálja.

[5] dolgozatában Fejér-féle normális alappont-rendszer fogalmát terjeszti ki végtelen intervallum esetére.

[6] dolgozatában többek között kimutatja, hogy a szigorúan normális alappontrendszerrel képzett interpolációs polinomok a zárt alapintervallumon folytonos és a végpontokban eltűnő függvény esetén egyenletesen konvergálnak.

Joó István újabb vizsgálatai függvénysorok konvergenciájának és szummálhatóságának kérdéskörére irányulnak.

[8] dolgozatában — általánosítva Tandori Károly egy korábbi eredményét — kimutatja, hogy ha egy függvényrendszer l^p-re vonatkozóan ($p \geqq 1$) mértékben T-szummációs rendszer, ahol T tetszőleges, reguláris mátrix-szal meghatározott szummációs eljárás, akkor l^p-re mértékben konvergenciarendszer is. (Tandori Károly korábban ezt az állítást csak l^2-re, sor-véges mátrixok esetére bizonyította be.)

A [9] dolgozatban ellenpéldával igazolják, hogy ez az állítás a majdnem mindenütt való konvergenciára általában nem igaz.

A [10] dolgozatban — továbbfejlesztve Móricz Ferenc egy korábbi tételét — az általános ortogonális sorok (C, 1)-szummálhatóságára vonatkozó Kaczmarz-féle tételt terjeszti ki igen általános szummációs eljárásokra.

A [11] dolgozatban — általánosítva E. M. Nikisin egy korábbi, majdnem mindenütt való konvergenciára vonatkozó tételét — azt igen általános szummációs eljárásra terjeszti ki. Ilymódon szükséges és elegendő feltételt ad meg arra vonatkozóan, hogy egy függvényrendszer l^2-re vonatkozóan T-konvergenciarendszer legyen.

Végül a [12] dolgozatban — élesítve A. A. Talaljan egy korábbi nevezetes tételét — kimutatja, hogy egyenletesen korlátos ortonormált $\{\varphi_n(x)\}$ rendszerből $\{a_n\}$ nullszorzatokkal képzett $\sum a_n \varphi_n(x)$ sorok „túlnyomó többsége" univerzális sor; ti. a nullszorzatok terében második kategóriájú halmazt alkotnak az ilyen tulajdonságú $\{a_n\}$ sorozatok.

Joó István újabb vizsgálataiban elsősorban E. M. Nikisin és S. Banach valós függvénytani eredményeire támaszkodik.

Joó István széleskörű ismeretekkel rendelkezik, aki a modern valós függvénytani eredményekben is járatos.

Joó István dolgozatainak jegyzéke

1. Stable interpolation on an infinite interval, *Acta Math. Acad. Sci Hung.* 25 (1974), 147—157.
2. An interpolation theoretical polynomial, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 26 (1975), 163—169.
3. On interpolation on the roots of Jacobi polynomials. *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math. 17 (1974), 119—124.
4. Interpolation on the roots of Laguerre polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math. 17 (1974), 183—188.
5. On positive linear interpolation operators, *Analysis Math.* 1 (1975), 273—281.
6. Stabil interpolatióról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, (megjelenés alatt).
7. Stabil interpolációról. Egyetemi doktori disszertáció (Budapest, 1974).
8. A remark on convergence system in measure, *Acta Sci. Math.* (megjelenés alatt).
9. On almost everywhere convergence systems, *Acta Sci. Math.*, (megjelenés alatt), (Tandori Károllyal).
10. On summability of orthogonal series, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt) (Alexits Györggyel és Tandori Károllyal).
11. On almost everywhere T convergence systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt).
12. On a theorem of Talaljan, Proc. Conf. on Fourier Analysis and Approximation (Budapest, 1972) (megjelenés alatt).

Korchmáros Gábor:

Korchmáros tudományos munkásságának nagy része (ld. pl. [3], [5], [6], [7], [9], [10], [13]) a k-ívek és oválisok elméletéhez, a véges geometriák egy sokat vizsgált modern ágához kapcsolódik. Legjelentősebb kutatói között olyan nagy nevekkel is találkozhatunk, mint R. C. Bose, M. Hall, B. Segre. Ezen elmélet felépítésében nagyjelentőségű fogalmak és tételek azok, amelyek segítségével az ovális struktúrák leírhatók. Korchmáros Gábornak — többek között — sikerült jellemeznie az automorfizmusokkal rendelkező ovális-struktúrákat (ld. [10]) és ezzel egy 10 éve nyitott problémát oldott meg. [6] dolgozatában egy B. Segre-től származó k-íveket eredményező szerkesztési eljárást vizsgál és néhány (részben ugyancsak Segre által felvetett) idevágó kérdést tisztáz. [5] és [9] dolgozataiban nemdesarguesi síkokon oválisokat konstruál, míg a [13] dolgozat a címében meghatározott ovális osztályok jellemzését adja. A bizonyítások alapos technikai felkészültséget igényelnek. Korchmáros geometriai és kombinatorikai módszereket modern csoportelméleti eszközökkel kombinálva operál.

[4] dolgozatában elért eredmények B. Grünbaum és mások hasonló jellegű vizsgálataival vannak kapcsolatban; egy olyan eredményt általánosít tetszőleges n-re, amelynek $n=5$-re vonatkozó speciális esetével hat szerző is foglalkozik.

[1], [2], [8] dolgozatokban egy-egy diszkrét geometriai problémát old meg. Így pl. [1] dolgozatában Fejes Tóth László egy sejtését igazolja hétszögekre. Az általános esetre pedig 3. dolgozatában két bizonyítást is ad.

Az [5], [6], [7], [8] dolgozatot B. Segre mutatta be az Accademia Nazionale dei Lincei előadó ülésein.

Legújabb vizsgálataiban a Suzuki-csoportok szerkezetét is érdekes megvilágításba helyezi, s egy 12 éve izgató kérdésnek megnyugtató tisztázását adja.

Véges algebrai (csoportelméleti) felkészültsége imponáló. Ez geometriai vizsgálataiból is kiviláglik. Irodalomismerete roppant széles, tájékozódása állandó és alapos.

Korchmáros Gábor dolgozatainak jegyzéke

1. Egy affin szabályos sokszögekhez vezető eljárás. *Mat. Lapok* 22 (1969), 405—411.
2. Az n-dimenziós euklideszi tér keresztekkel való egyrétű kitöltése. Diákköri dolgozat (1970).
3. Véges projektív és affin síkok ovalisaiból kiválasztható reguláris pontalakzatok. Doktori disszertáció, 84 oldal (1972).
4. Poligoni regolari. *Rivista di Math. dell'Univ. di Parma* (4) 1 (1975), 1—6, megjelenés alatt.
5. Ovali nei piani di Hall d'ordine dispari, *Rend. dell'Accad. Naz. Lincei*, 8, LVI—I. fasc. III. 315—317 (1974).
6. Osservazioni sui risultati di B. Segre relativi a k-archi contenenti $k-1$ punti di una conica, *Rend. dell'Accad. Naz. Lincei*, 8, LVI—I. fasc. IV. 541—549 (1974).
7. Poligoni affin regolari dei piani di Galois d'ordine dispari, *Rend. dell'Accad. Naz. Lincei*, LVI—I. fasc. V. 690—697 (1974).
8. Una limitazione per li volume n-dimensionale di un simplesso avante spigoli di date lunghezze, *Rend. dell'Accad. Naz. Lincei*, 8, LVI—I. fasc. VI. 876—879 (1974).
9. Ovali nei piani di Moulton. Atti del Convegno Internazionale sulle Teorie Combinatorie, Roma (1973).
10. Su una classificazione delle ovali dotate di automorfismi, *Atti dell'Accad.* XL., Rendiconti, Serie V, vol. I—II. 1—10 (1975).
11. Darstellung der Einheitsmatrix über einen kommutativen Körper als zyklische Matrixsumme. Eine Anwendung in der Theorie der n-Ecke, *Period. Polyt.* 4. (1976). 2. 75—82.
12. Estensioni del concetto di poligono affin regolare ad un qualunque piano affine, *Rend. dell'Accad. Naz. Lincei* LVIII—I. fasc. II. 210—218 (1976).
13. Sulle ovali di translazione in un piano di Galois d'ordine pari, Atti dell'Accad. IX. *Rendiconti*, Serie V. Vol. III—IV (1975), (megjelenés alatt).
14. Ein geometrischer Zugang zur Theorie der affin-regulären n-Ecke von F. Bachmann und E. Schmidt, *Per. Polyt.* 5. 1 (1976) (megjelenés alatt).
15. Collineations groups which are 2-transitive on an oval. V. Magyar Komb. Kollokv. kiadványában (1972) (megjelenés alatt).
16. Una proprietà gruppale delle involuzioni planari che mutano in sé un'ovale di un piano proiettivo finito, *Boll. Unione Mat. Ital.* (megjelenés alatt).
17. Le ovali del piano duale di Suzuki-Lüneburg che possono venir mutate in sé da gruppi di collineazioni isomorfi al gruppo semplice di Suzuki, *Rend. dell'Accad. Naz. Lincei*, (megjelenés alatt).

Szalay Mihály:

Szalay eddigi vizsgálatai a számelméletnek és csoportelméleti alkalmazásainak több problémakörére terjednek ki. A modulo p primitív gyökökkel kapcsolatban meghatározza az egymás utáni primitív gyökökből álló adott hosszúságú sorozatok [1], ill. az adott differenciájú párok [3] számának aszimptotikus értékét ($p \to +\infty$ esetén). [2] dolgozatában azt mutatja meg, hogy adott determinánsú, egész együtthatós, pozitív definit kvadratikus alakok osztályszáma (ha a vegyes indexű együtthatók párosak) a változók számával monoton nő. [4] dolgozatában és [7] disszertációjában az n-edfokú szimmetrikus csoport elemei rendjének maximumára és annak primosztói számára ad igen éles aszimptotikus formulát. Vizsgálatait disszertációjában egy ügyes gondolattal kiterjeszti szimmetrikus félcsoportra is. [5] dolgozata és a disszertáció számos (még nem publikált, de feltétlenül közlésre érdemes) eredménye Turánnak a hatványösszeg-módszerrel kapcsolatban felvetett problémáira ad választ. Az elméletnek a nehezebb, viszonylag kevésbé kidolgozott része a hatványösszegeknek a $|z_j| \leq |z_1| = 1$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) feltétel mellett történő vizsgálata. Szalay ebben az esetben az $s_\nu = \sum_{j=1}^{n} z_j^\nu$ és $g_\nu = \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu$ összegek abszolút értékének ν-re vonatkozó maximumára, ill. a $\sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu|^2$ összegre ad finom becsléseket. Számos ügyes ötlet segítségével sikerült lényegesen hozzájárulnia a problémakör jobb megvilágításához. Legújabb vizsgálatai az S_n szimmetrikus csoport irreducibilis reprezentációinak dimenziójára vonatkoznak. Ezek szoros kapcsolatban vannak az n szám partícióival, és számuk azok $p(n)$ számával megegyezik. [6] cikkében Szalay majdnem minden reprezentációra érvényes, jó alsó korlátot ad a dimenzióra. Turánnal közös, sok ötletet és sok ügyes számolást is igénylő újabb

vizsgálatai során a [8]—[10] dolgozatokban a partíciók összeadandói (nagyság szerinti) eloszlásának igen finom leírását adják, ami lehetővé teszi a dimenzió logaritmusának az aszimptotikus meghatározását „majdnem minden" reprezentációra.

Szalay Mihály nehéz kérdésekkel foglalkozó sokoldalú matematikus. Bizonyításai szép ötleteket egyesítenek a technika alapos ismeretével.

Szalay Mihály dolgozatainak jegyzéke

1. Primitív gyökök eloszlásáról, *Matematikai Lapok* 21 (1970), 357—362.
2. Kvadratikus alakok osztályszámáról. *Mat. Lapok* 22 (1971), 111—117.
3. On the distribution of the primitive roots of a prime. *Journ. Number Theory* 7 (1975), 184—188.
4. Landau egy tételéről. *Mat. Lapok* 22 (1971), 317—321.
5. J. W. S. Cassels egy tételéről, *Mat. Lapok* 23 (1972), 109—112.
6. A note on the dimensions of representations of S_n. *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* 13. Topics in Number Theory, Debrecen, 1974, 383—388.
7. Számelméleti extrémumproblémák. Egyetemi doktori disszertáció, 1974, 65. old.
8—10. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group, I—III. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt) (Turán Pállal).

JELENTÉS AZ 1976. ÉVI FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1976. évi Farkas Gyula Emlékérem odaítélésére a következő bizottságot küldte ki:

elnök: Prékopa András
alelnök: Vincze Endre
titkár: Recski András
tagok: Dávid Gábor
Farkas Miklós
Fischer János
Gécseg Ferenc
Gulyás Ottó
Gyires Béla
Heppes Aladár
Hosszú Miklós
Katona Gyula
Kiss Ottó
László Zoltán
Náray Miklós
Pintér Lajos
Sonnevend György
Vincze István

A bizottság a beérkezett javaslatokat megvitatta és az alábbi döntést hozta:

az 1976. évi Farkas Gyula Emlékdíj I. fokozatával tünteti ki és 3500—3500, Ft pénzjutalomban részesíti
Dávid Gábort, az MTA SZTAKI tudományos munkatársát,
Faragó Tibort, az Országos Meteorológiai Szolgálat tudományos munkatársát,
Recski Andrást, a Távközlési Kutató Intézet tudományos munkatársát és
Szántai Tamást, a Budapesti Műszaki Egyetem adjunktusát.

II. fokozatával tünteti ki és 2000—2000, Ft pénzjutalomban részesíti
Farkas Ernőt, az MTA SZTAKI tudományos munkatársát és
Vermes Domonkost, a szegedi József Attila Tudományegyetem tanársegédét.

Indoklás

Dávid Gábor 1942-ben született Szolnokon. 1967-ben végezte el az ELTE TTK matematikus szakát. Az egyetem elvégzése után az MTA Számítástechnikai Központjába került, mely később egyesült az MTA AKI-val.

Dávid Gábor az egyetem elvégzése után matematikai statisztikával kezdett foglalkozni. A statisztikán belül elsősorban a szimulációs módszerek és a becsléselmélet alkották érdeklődési körét. Az [1]-ben a tapasztalati sűrűségfüggvénynek előzetes mintavételen alapuló definícióját adja. Módszere gépi feldolgozásra különösen alkalmas. Számítástechnikával az akadémiai számítógép üzembe-

helyezésekor kezdett foglalkozni. Megvizsgálta az operációs rendszerek több közös vonását és kísérletet tett ezek általános megfogalmazására. [2]-ben a munkavezérlés elveit ismerteti ezek alapján, [3]-ban bevezette a folyamatok és a vezérlés fogalmát és ezek alapján egységes tárgyalást kísérelt meg. Jelenleg a problémamegoldás matematikai modelljével és annak számítástudományi alkalmazásaival foglalkozik, résztvesz a távlati számítási rendszer kidolgozásában. A [4, 5, 6, 7, 8] cikkekben a megoldandó problémát adektávan tükröző számítási rendszerek rendszertechnikai, architekturális jellemzőit írja le és a problémák torzításmentes számítógépes megoldási módszereit fejleszti ki.

A [9—25] számú tanulmányai, cikkei ezekhez a jelentősebb eredményekhez kapcsolódnak.

Aktív szerepet vállal a hazai és a nemzetközi tudományos életben. A Bolyai János Matematikai Társulat Számítástudományi Albizottságának elnöke, a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Software Szakosztályának titkára. Fő szervezője volt több hazai és nemzetközi konferenciának.

Dávid Gábor dolgozatainak jegyzéke

1. On the convergence of empirical distribution and density functions, *Studia Sci. Math. Hung.* 6 (1971), 55—61.
2. Two remarks on operating systems, (Weimar, ZfR-informationen, Deutsche Akademie der Wissenschaften, ZfR-C-72, 01, 76—82).
3. A IV. generációs számítógép rendszerek ember-gép kapcsolat összefüggő software és eszköz vonatkozásai. MTA SzK, 1972. Tanulmány 73. o.
4. User's guide to the interactive microprogramming software MICAS, Pisa, Istituto di Elaborazione della Informazione CNR, N. I. B74—16. 79 o.
5. Internal description of the interactive microprogramming software MICAS, N. T. C74—6. Pisa, Istituto di Elaborazione della Informazione CNR (1974) 151 o.
6. A számítástechnikai rendszerek architektúrája, Tanulmány, 1975. MTA ESzR—III., 50 oldal, (orosz nyelven).
7. A számítási rendszer logikai struktúrája, MTA ESzR—III., 1975. orosz nyelven, 26 o.
8. IMS — a microprogramming system. (Software for Minicomputers) C. G. Bell (ed), North-Holland, 1975. p. 213—222.

Cikkek, tanulmányok

9. Egy hálózat-elemző program. *Információ Elektronika*, 1968. 1. 32—35.
10. Szimulációs programról. MTA SzK Közlemények, 1968. 1.
11. A sűrűségfüggvény becsléséről. MTA SzK Közlemények, 1967. 3. 163—181.
12. Az eloszlás és sűrűségfüggvény becslésének konvergenciája. MTA SzK Közlemények, 1968. 4. 26—39.
13. A software fenntartása és generálása. MTA SzK (1971) (orosz nyelven).
14. Gépikód, nyelvek. Operációs rendszerek. KGM ISzSzI, 1971., 60. o.
15. Az ISO task ismertetése. MTA SzK Software Bulletin (1971) II. 3—7. o.
16. Az ideális számítógép, MTA I. Főosztály, Tanulmány — Lőcs Gyulával és Gehér Istvánnal közösen — 1973., 35 o.
17. A számítórendszer software rendszerének és logikai struktúrájának kölcsönhatása, Tanulmány, 1974. MTA TT. I. Főosztály ESzR—III. munkaközösség, ebből: A supervisor funkciók és a logikai struktúra kölcsönhatása 2/1—13. o.
18. A rendszer komponenseinek összetétele, funkciói és struktúrája, 1974. MTA ESzR—III., 50 o.
19. A gép-gép és ember-gép közötti együttműködés rendszertechnikai és technikai feltételeinek kutatása, 1974. MTA ESzR—III., 38 o.
20. A kisszámítógépek felhasználása nagyszámítógépek, rendszerek és hálózatok elemeként, 1974. MTA ESzR—III., munkaközösség, 71 o.
21. A CYBER 170 számítógép sorozatról, MTA User Journal 7/1974. Software 31/7—(27—33). Ismertetés.
22. Közös amerikai—magyar alakfelismerési szeminárium. (1975. Data 8. 214—15. o.).
23. Beszámoló az amerikai—magyar alakfelismerési szemináriumról, *Információ Elektronika*, 1975/4. 250—254.
24. Joint Hungarian—American seminar on pattern recognition, Proceeding — szerkesztés, Vámos Tiborral közösen — 320 o.
25. Adatbázis kezelő alrendszer architektúrája, Moszkva, 1976. (megjelenés alatt) oroszul.

FARAGÓ TIBOR 1948. december 9-én született Budapesten. Matematikai tanulmányait a „Leningrádi Állami Egyetem" matematikai fakultásán folytatta és 1972-ben kitűnő eredménnyel, vörös

diplomával fejezte be. Tanulmányai alapján az Oktatási Miniszter „Felsőoktatási Érdemérem" kitüntetését érdemelte ki.

1972—1974 között a Távközlési Kutató Intézet tudományos segédmunkatársa, 1974-től az Országos Meteorológiai Intézet tudományos munkatársa.

Ezen időszak alatt (1972—1976) 17 publikációt készített. E dolgozatokban az alakfelismerés és a statisztikus prognosztika kérdéseivel foglalkozik elsősorban. A dolgozatok az elméleti eredményeken kívül azok alkalmazásaival, elsősorban a hosszútávú meteorológiai előrejelzésekben való hasznosításával foglalkoznak.

A statisztikus alakfelismerés egyik fontos kérdése a megfigyelt ξ objektumok leírására szolgáló paraméterek kiválasztása. Gyakori, hogy a ξ alakzat helyett egy $\eta = T\xi$ statisztikából származó minta alapján történik a döntésfüggvény konstrukciója. A [3]—[6], [9]—[10] dolgozatokban a szerző azzal a kérdéskörrel foglalkozik, hogy bizonyos folytonossági feltételek esetén a $\xi \sim \eta$ feltételekből milyen következtetések vonhatók le a $d(\xi)$, $d(\eta)$ optimális (Bayes-i) döntésfüggvények közelségére. Vizsgálja többek között azt az esetet, amikor η a ξ Karhunen—Loève sorának egy szelete, és a $[d(\xi) - d(\eta)]$ függvény folytonosságával a $\xi \sim \eta$ közelségének függvényében.

A hazai meteorológiai kutatásban a hosszútávú (1 hónapnál hosszabb idejű) prognózisok statisztikai módszereinek kidolgozása és alkalmazása nem régi keletű. E témával foglalkozó munkacsoport tagjaként Faragó Tibor több dolgozatot jelentetett meg regressziós és analógiás módszerekről.

A [11] cikk az analógiás eljárás matematikai modelljét és az alakfelismeréssel való kapcsolatát tárgyalja, míg [12], [13] egy-egy konkrét előrejelzési módszerrel foglalkozik. A [16] cikk egy a hidrodinamikai egyenletekre támaszkodó statisztikus módszer továbbfejlesztése. A [14] dolgozat a szélökések maximumának statisztikai vizsgálatát tárgyalja. A [15] és [17] dolgozatok az alkalmazott előrejelzési módszerek számítógépes realizálásával, programjaival és azok alkalmazásainak tapasztalataival foglalkoznak.

Faragó Tibor publikációinak jegyzéke

[1] Faragó T.: Egy prognózisfeladat felállításáról véges sztochasztikus automatára, *Vics. technika i voproszi kibernetiki*, Leningrád, 9, 1973. (orosz nyelven).

[2] Faragó T.: Egy prognózisfeladat megoldása véges sztochasztikus automatára, *Vics. technika i voproszi kibernetiki*, Leningrád, 11. 1974. (orosz nyelven).

[3] Faragó T.—Gulyás O.: Feature — kiválasztási módszerekről az alakfelismerésben, Proc. of Computer Science Conf., Székesfehérvár, 1973. (Orosz nyelven).

[4] Faragó T.—Gulyás O.: Some methods of expansion type Feature extraction in pattern recognition, *Proc. of the Prague Symp. on Asymp. Stat.*, Prague, 1973.

[5] Faragó T.—Gulyás O.: The feature extraction in pattern recognition, *Proc. of Conf. on Information Theory*, Tallin, 1973.

[6] Faragó T.—Győrfi L.: The error distortion function in two-hypotheses decision problem, *Proc. of IFAC Conf. on Information Theory*, Budapest, 1974.

[7] Faragó T.—Gulyás O.: A regressziós típusú extrapoláció, *Meteorológiai Tanulmányok*, OMSZ, Budapest, 2, 1974.

[8] Faragó T.—Gulyás O.: A valószínűségi sűrűségfüggvény becslése és illesztése, *Meteorológiai Tanulmányok*, OMSZ, Budapest, 3., 1974.

[9] Faragó T.—Győrfi L.: On the continuity of the error distortion function for multiple-hypothesis decisions, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, IT—21, July, 1975.

[10] Faragó T.: A mintatér bizonyos transzformációiról, *Probl. Peredacsi Informacii*, Moszkva, 1, 1975. (orosz nyelven).

[11] Faragó T.—Kaba M.—Gulyás O.: Az analógia elvén alapuló prognosztikai módszerek matematikai modellje, *Időjárás*, 3, (1975).

[12] Faragó T.: Egy kombinált regressziós eljárásról. *Időjárás*, 1975.

[13] Faragó T.—Kaba M.: Havi középhőmérsékletek analógiás előrejelzése a Hess—Brezowsky katalógus alapján és a Bayes-hiba becslése, *Időjárás*, 1976. (orosz nyelven, megjelenés alatt).

[14] Faragó T.: On the estimation of the probability distribution of maximum values and the statistical analysis of a wind velocity sample, *Időjárás*, 1976 (megjelenés alatt).

[15] Faragó T. et al., A hosszabb érvényességi idejű prognózisokkal kapcsolatos kutatások és azok számítástechnikai vonatkozásai, Módszertani áttekintés; „Az OMSZ adatfeldolgozó és adattároló rendszer alapjainak kialakítása R—50 kategóriájú számítógépre" kötetben, OMSZ, 1975.

[16] Faragó T.: On the modelling of stochastic dynamic prediction, beadva a *TELLUS*-hoz, Stockholm, 1976.

[17] Faragó T. et al.: Távprognosztikai adatbank és kezelőrendszer jelene; az alkalmazói programokkal való kapcsolatai és általános kiépítésének alapvető szempontjai, OMSZ, 1976.

RECSKI ANDRÁS 1948-ban született, 1971-ben végezte el az ELTE TTK matematikus szakát, azóta a Távközlési Kutató Intézetben dolgozik. A Bolyai János Matematikai Társulat 1975-ben a Grünwald Géza emlékdíj II. fokozatával tüntette ki. (A publikáció-jegyzék nem tartalmazza a Grünwald-díj indoklásában szereplő dolgozatokat, valamint 15 népszerűsítő cikket.)

Recski András a villamos hálózatok egy matroid-elméleti modelljét dolgozta ki, amely a korábban használt modelleknél alkalmasabb arra, hogy a mai elektronikában használt áramköröket leírja. A matroid a lineáris függést általánosító kombinatorikai struktúra. Recski az elektromos hálózatokhoz két matroid összegét rendeli; az egyik a hálózat gráf-struktúrájából adódó, a másik a vezérelt elemek folytán fellépő összefüggéseket veszi figyelembe; és kiderül, hogy éppen egy (már mások által korábban, matematikai célokra definiált) összegfogalom e két matroidra alkalmazva az áramköri összefüggések teljes leírását adja. Ezzel lehetővé válik az eddig használt módszereknél egzaktabb számítógépes hálózatanalízis.

Recski részletesen kidolgozta e vizsgálat módszereit. Eredményeit számos, nemzetközi folyóiratokban és kollokviumi kötetekben megjelent cikkben, továbbá munkahelyi közleményekben publikálta. Írt ezek mellett néhány népszerűsítő cikket is. Legalább 7 nemzetközi konferencián tartott előadást, köztük az 1976-os budapesti Mat. Programozási, az 1975-ös torinói „European Conference on Circuit Theory and Design"-on, továbbá 1975-ben Dániában és Novi Sad-on. Munkái mind a kombinatorikával foglalkozó matematikusok, mind a villamosmérnökök elismerését kivívták.

Recski András dolgozatainak jegyzéke

[1] Kombinatorikai struktúrák a koncentrált paraméterű villamos hálózatok matematikai elméletének megalapozásában. Szakdolgozat, ELTE TTK, 1971.

[2] Bevezetés az algebrába és kombinatorikába, különös tekintettel a hálózatelméleti alkalmazásokra. Sokszorosított jegyzet a TKI hálózatelméleti szemináriumaihoz, 1972.

[3] Többrétegű nyomtatott áramköri lapok számítógép segítségével történő tervezésére szolgáló algoritmusok kidolgozása (Abos Imrével és Frank Andrással közösen). TKI—I—74—321—5. intézeti tanulmány, 1974.

[4] Adattárral rendelkező, nyomtatott áramköri lapok dokumentációját előállító programrendszer. (Abos Imrével és Bodrog Leventével közösen). TKI—I—74—322—4. intézeti tanulmány 1974.

[5] Véletlen particiókról. TKI. Közlemények, 19 (1974) 3, 65—76.

[6] On the sum of matroids II. *Proc. 5th British Combinatorial Conference*, Aberdeen, 1975. Utilitas Math., Winnipeg, 515—520.

[7] Anvendelser af diskret matematik. Sokszorosított egyetemi jegyzet. Danmarks Tekniske Højskole, Lyngby, 1975.

[8] Matroidok alkalmazása a villamos hálózatok analízisében. *Matematikai Lapok*, (sajtó alatt).

[9] Contributions to the *n*-port interconnection problem by means of matroids. *Coll. Math. Soc. János Bolyai* Combinatorics, Keszthely, Hungary, 1976., (megjelenőben).

[10] Matroids and *n*-ports. Proc. IX. International Symposium on Mathematical Programming. Budapest, 1976., (megjelenőben).

[11] Matroids and independent state variables. *Proc. Second European Conference on Circuit Theory and Design*, Genova, 1976. Vol. I. 44—51.

[12] State variable analysis of active networks by means of matroids, Part I. The „General" case. *International Journal on Circuit Theory and Applications* (megjelenőben).

[13] Matroidelméleti módszerek a villamos hálózatok analízisében. TKI Közlemények, 21 (1976) 1, 61—81.

[14] Matroidok és villamos hálózatok. Kandidátusi disszertáció, Budapest, 1976.

SZÁNTAI TAMÁS 1946-ban született Hódmezővásárhelyen. Ugyanitt, a Bethlen Gábor Gimnáziumban érettségizett 1964-ben. Ezután az ELTE matematika szakos hallgatója lett. Az egyetemet 1969-ben végezte el. 1969 és 1972 között a BME Villamosmérnöki Kar Matematika Tanszékén dolgozott kutatói minőségben egy OT munkán.

1972 és 1975 között aspiráns volt Prékopa András vezetése alatt. Eközben féléves tanulmányi ösztöndíjjal Angliában tartózkodott. Az aspirantúra elvégzése után előbb az SZTAKI-ban dolgozott tudományos munkatársként. 1976. szeptember 1. óta a BME Villamosmérnöki Kara Matematika Tanszékének adjunktusa.

Szántai Tamás tudományos tevékenysége két szakaszra osztható. Az elsőben érdeklődése való színűségelméleti jellegű volt, tudományos vezetője Mogyoródi József volt. Nála írta és védte meg 1970-ben „véletlen pontfolyamatok ritkítása" című disszertációját [1]. E témából néhány további cikket is írt, melyek elméleti szempontból igen érdekesnek és szellemesnek mondhatók. [2, 3, 4].

Legfontosabb operációkutatási vonatkozású eredményei a következők. A [6, 7] dolgozatok egy új többdimenziós gamma eloszlást vezetnek be és adják meg annak empírikus adatokhoz való

illesztési metodikáját. Ennek az eloszlástípusnak a bevezetését elsősorban vízügyi alkalmazások tették szükségessé.

Multigamma eloszlás felhasználásával készült sztohasztikus és dinamikus programozási modellt tárgyal az [5] dolgozat.

A [10] dolgozat eredményeit a Balaton vízszintjének szabályozására alkalmazták. 1920 és 1970 között visszamenőleg megnézték, hogyan sikerült volna a vízszintszabályozás ezzel a módszerrel. Igen jó eredmények adódtak.

A [9] dolgozat a STABIL modell megoldására adott Szántaitól származó eljárásról és gépi programról számol be. Szántainak sikerült a korábbi gépidő eredményeket lényegesen megjavítani. Ehhez a munkához kapcsolódik a [8] dolgozatban tárgyalt új szimulációs módszer.

Szántai Tamás igen tehetséges és sokoldalú fiatal matematikus. Megemlítendő még, hogy Szántai Tamás igen szép, lelkiismeretes munkát végez az Alkalmazott Matematikai Lapok technikai szerkesztőjeként.

Szántai Tamás dolgozatainak jegyzéke

[1] SZÁNTAI TAMÁS: Véletlen pontfolyamatok ritkítása, Egyetemi doktori disszertáció, Budapest, 1970.

[2] MOGYORÓDI JÓZSEF ÉS SZÁNTAI TAMÁS: Pontfolyamatok ritkításáról, *MTA III. Osztály Közleményei*, 20 (1971), 85—95.

[3] SZÁNTAI, T., "On limiting distributions for the sums of random number of random variables concerning the rarefaction of recurrent processes", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaricae*, 6 (1971), 443—452.

[4] SZÁNTAI, T., "On an invariance problem related to different rarefactions of recurrent processes", *Studia Sci. Math. Hungaricae*, 6 (1971), 453—456.

[5] PRÉKOPA, A. AND SZÁNTAI, T., "On multi-stage stochastic programming (With application to optimal control of water supply)", in: *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 12. Progress in Op. Res., Eger (Hungary), (1974) 733—755.

[6] PRÉKOPA ANDRÁS ÉS SZÁNTAI TAMÁS: Egy új többdimenziós gamma eloszlás és annak illesztése empírikus adatokhoz, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 1 (1975) (sajtó alatt.)

[7] PRÉKOPA, A. AND SZÁNTAI, T., "A new multivariate gamma distribution and its fitting to empirical data", Water Resources Research, 1975, (sajtó alatt).

[8] SZÁNTAI TAMÁS: Egy eljárás a többdimenziós normális eloszlásfüggvény és gradiense értékeinek meghatározására, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 2 (1976) (sajtó alatt).

[9] SZÁNTAI TAMÁS: A Prékopa-féle STABIL sztochasztikus programozási modell numerikus megoldásáról, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 2 (1976) (sajtó alatt).

[10] PRÉKOPA, A. AND SZÁNTAI, T., "On optimal regulation of a storage level with application to the water level regulation of a lake", in: *Proceedings of the IX. Symposium on Mathematical Programming*, Budapest, 1976, (sajtó alatt).

FARKAS ERNŐ 1944-ben született. 1968-ban végezte el az egyetemet és azóta az MTA SzTAKI-ban dolgozik.

Fő területe az algoritmus-elmélet, programozási nyelvek szintaxisa és szemantikája. Főbb eredményeit az 1, 2, 15, 17 sorszámú cikkeiben közli. Az [1]-ben közölt eredménye jelentősen hozzájárul a programozási nyelvek szemantikájának új megközelítésében folytatott kutatásokhoz. Elméleti vizsgálatait jól és céltudatosan valósítja meg gyakorlati munkáiban. Fő feladatának tekinti a számítástudomány módszereinek, ezen belül az alkalmazási módszereknek a kidolgozását. Az általa kifejlesztett MP makroprocesszor az elméleti eredményeinek a realizálása, egyúttal hatékony munkaeszköz az intézet más munkáiban. [3, 4, 5, 15].

Több alkalmazási feladatban vezetőként vett részt [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16], amelyekben alapos tárgyismeretről, széles látókörről és kitűnő alkalmazói készségről tett tanúbizonyságot.

Farkas Ernő dolgozatainak jegyzéke

[1] On the evaluation of nested partial functions (Conference on the Formalization of Sematics of Programming Languages and Writing of Compilers; Frankfurt (Oder (GDR) 1974. Szept Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 11 (1975) 4—6, 264—267).

[2] Programozási nyelvek szintaxisa és szemantikája, azok definíciója és formalizálása. (MTA SzTAKI NSSZT közös kiadvány 1973).

[3] A GPM (10010) makroprocesszor (u. ott).

[4] Az MP/O makroprocesszor (u. ott).

[5] Egy processzor makro kiterjesztésre, értelmezésre és fordításra. (Programozási Rendszerek '72 (Szeged).

[6] CII 10010 FORTRAN 16 K felhasználói leírás.

[7] BASIC FORTRAN 1010 B rendszerterve (VIDOS rendszerterv).
[8] BASIC FORTRAN 1010 B felhasználói leírás.
[9] BASIC FORTRAN 1010 B készítői szintű leírása.
[10] A VIDOS assembler lebegőpontos aritmetikai és konverziós extrakódjainak készítői szintű leírása. (6—10 publikáció Bach Ivánnal, Fabók Juliannával és Laufer Judittal közösen.)
[11] Rendszerterv a LISP 1.5 programnyelv R—10 számítógépen történő implementálására.
[12] LISP R—10 kézikönyv.
[13] Rendszerterv a BASIC nyelv implementálására.
[14] Az EDITOR program felhasználói ismertetője. (Hermann Gáborral közösen).
[15] MP 0.2 Makroprocesszor általános ismertetése. SzTAKI tanulmány 53,1976.
[16] VIDOS-BASIC felhasználói leírás.
[17] A compiler oriented syntax definition. Computational linguistics + Computer Languages X. 1975.

VERMES DOMOKOS egyetemi tanulmányait — állami ösztöndíjasként — a Drezdai Műegyetemen végezte, ahol az elektromérnöki oklevele mellett a valószínűségszámítás szakirányú matematikusi diplomát is megszerezte. Végzése óta, 1972. január 1. óta a JATE Bolyai Intézetében dolgozik.

Tudományos kutató tevékenységét már Drezdában, hallgatóként megkezdte. Munkába állása után kutatásait tovább folytatta, 1974-ben a JATE Természettudományi Karán doktori szigorlatot tett. Elért eredményeiről több hazai és külföldi konferencián beszámolt.

Az alapprobléma, amivel foglalkozik, a következő: Adott Markov-folyamatok egy d paramétertől függő családja, egy célhalmaz a folyamatok állapotterében és egy additív költségfunkcionál. Kérdés, hogyan határozzuk meg a d paraméter mindenkori értékét a folyamat megfigyelt állapotainak függvényében, hogy a célhalmazt minimális költséggel érjük el.

A [2] dolgozatban bizonyította az optimalitás szükséges és elégséges feltételét általános Markov folyamatokra. [3] és [7] ún. fél-Markov folyamatokkal foglalkoznak, amiket azonban visszavezet speciális Markov folyamatok vizsgálatára. A fél-Markov folyamatok fontosak az alkalmazásokban (sorbanállás, tömegkiszolgálás, felújítás, biztosítás, elágazó folyamatok a fizikában, populációk szaporodása stb.). Az általa vizsgált pontfolyamatokra az általános esetre vonatkozó eredményeken túlmenően még további folytonossági tulajdonságok is adódnak.

Az [5]—[6] cikkek a rendszerelmélet alkalmazásai technológiai folyamatokra. Ezek azzal a kérdéssel foglalkoznak, hogy lehet egy, a gyártási folyamatban fellépő zavart a lehető legrövidebb idő alatt kiküszöbölni. Egy algoritmust javasolnak, amivel a folyamat paramétereiből és a zavar mértékéből ki lehet számítani, mit a legjobb tenni.

Vermes Domokos dolgozatainak jegyzéke

[1] "On Bayes solutions of experimental design problems" Preprints of the "European Meeting of Statisticians 1972" p. 153.
[2] "A necessary and sufficient optimality condition for Markovian control problems" *Acta Sci. Math.* 34 (1973), 401—413.
[3] "Optimal control of point processes" Proceedings of the *SIAM Symposium on Stochastic Control* 1974, 233—239, Budapest, 1974.
[4] "Markov folyamatok optimális irányításáról" (Doktori értekezés) Szeged, 1974.
[5] „Anwendung der Methode des Zustandsraumes zur Beschreibung und Optimierung technologischer Prozesse I" (K. Terplannal közösen) *Zeitschrift für Messen, Steuern, Regeln* (Berlin) 17 (1974), Heft 7, 247—250.
[6] „Anwendung der Methode des Zustandsraumes zur Beschreibung und Optimierung technologischer Prozesse II" (K. Terplannal közösen) *Zeitschrift für Messen, Steuern, Regeln* 17 (1974), Heft 12, 422—424.
[7] "On optimal control of semi-Markov processes" *Acta Sci. Math.* 36 (1974), 345—356.
[8] „Zur optimalen Steuerung sprungartiger Markoff-Prozesse" *Beiträge zur Analysis* No. 9, (1976), 147—151. Berlin.

JELENTÉS A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ 26. KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1976. évi Beke Manó Emlékdíj odaítélésére az Elnökség a következő bizottságot küldte ki:

elnök: SURÁNYI JÁNOS
titkár: ANDRÁSFAI BÉLA
tagok: PÁLFY SÁNDOR
PÁLMAY LÓRÁNT
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ
SZAKÁL PÉTER
WINKLER MIHÁLYNÉ.

A bizottság május 27-én és június 23-án tartott ülésén foglalkozott a beérkezett javaslatokkal és kiegészítő információkkal. Munkájában szem előtt tartotta, hogy a Társulat a díjak odaítélésében elsősorban a matematika oktatása és népszerűsítése terén elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni. Winkler Mihályné nem vett részt a bizottság munkájában.

A bizottság a következő határozatot hozta:

5000 Ft (nagydíj) jutalomban részesíti URBÁN JÁNOST, az ELTE Analízis I. Tanszék adjunktusát.

2500—2500 Ft jutalomban részesíti:

BERTALAN ZOLTÁNNÉ ált. és középiskolai tanárt, Győr megyei vezető szakfelügyelőt,

C. NEMÉNYI ESZTER tanítónőt, az OPI matematika tanszékének adjunktusát,

DEMETER KÁROLYNÉ mat.—fiz. szakos tanárt, a TIT osztályvezetőhelyettesét,

GERGELY PÉTER ált. isk. mat.—fiz. szakos tanárt, Pest megyei vezető szakfelügyelőt,

ORAVECZ PÁLNÉT, a Bp. Bartók Béla u. 27. sz. alatti ált. isk. tanítónőjét és

TAKÁCS JÓZSEFET, a veszprémi Lovassy László Gimnázium mat.—fiz. szakos tanárát.

Indokolás

URBÁN JÁNOS egyetemi adjunktus

Az egyetem elvégzése óta az ELTE Analízis I. tanszékén oktat. Mintaszerűen lelkiismeretes oktatómunkája példaként állhat a leendő tanárok előtt. 1969—72-ig a Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban is tanított egy speciális matematika tantervű osztályban. Itt próbálta ki a középiskolai tanításra vonatkozó elképzeléseit. Különösen mélyrehatóan vizsgálta az analízis középiskolai anyagba való beépítésének lehetőségeit. Elképzeléseiről több ízben tartott továbbképző előadást a speciális matematika tantervű osztályokban tanító tanárok számára. Ebben az évben jelent meg a Határértékszámítás c. könyve, amely továbbképző anyagként szolgálhat minden matematikatanár számára. E könyv felépítése olyan módszertani elv alapján készült, amely biztosítja a könyv eredményes felhasználását a tanítási gyakorlatban is. Ruzsa Imrével közösen írt Matematikai logika c. könyve nagy segítséget nyújtott a matematikát oktatóknak. Több olyan könyvet fordított, amely a matematika tanításának korszerűsítésében jelentős szerepet tölt be. Számos népszerűsítő és továbbképző előadást tartott a Társulat felkérésére. Éveken át szervezte a Középiskolai Matematikai Délutánokat. Részt vesz az Arany Dániel matematikai verseny feladatainak kiválasztásában és a dolgozatok elbírálásában. Titkára a Társulat Felsőoktatási Bizottságának és az Oktatási Minisztérium Matematikai Szakbizottságának.

A TIT Matematikai Választmány titkáraként sokoldalú tevékenységével támogatja a két szervezet hatékony együttműködésének megvalósítását.

BERTALAN ZOLTÁNNÉ ált. és középiskolai tanár

1945-től tanít a ménfőcsanaki általános iskolában, 1966-tól szakfelügyelői munkát lát el, jelenleg megyei vezető szakfelügyelő. A BJMT győri tagozatának alelnöke, a TIT győri szervezetében a matematikai szakosztály vezetőségi tagja. Munkáját a sokoldalúság jellemzi. Aktív tevékenységet fejt ki az ált. iskolai tanárok komplex továbbképzésében: több alkalommal tartott előadásokat, szemináriumokat és gyakorlatokat. Tanítványai megértik és megszeretik a matematikát. Általános iskolai tanulók számára feladatmegoldó szakköröket szervez, különösen a tehetséges tanulók gondozására. Tanulói éveken át szép eredményeket értek el a szaktárgyi versenyeken. A Győr megyében működő KMBK-einek megszervezésében komoly érdeme van. 1963-ban az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetés birtokosa lett. A megyei általános iskolákban végzett eredményvizsgálatokról 1968-ban a Matematika Tanításában cikket írt. A Társulat rendezvényeinek, vándorgyűléseinek szervezésében aktívan tevékenykedik.

C. NEMÉNYI ESZTER tanítónő és középiskolai tanár

Kimagasló érdemeket szerzett az 1978-tól életbe lépő általános iskolai új matematikai tanterv kidolgozásában és kipróbálásában. E tervet előkészítő iskolatelevíziós műsorok jó része az ő tervei szerint, az ő és tanítványai közreműködésével készültek. A pedagógusok továbbképzésének, sőt a továbbképzők továbbképzésének állandó közreműködője. Szerzője, ill. társszerzője a komplex matematikatanítási kísérlet, majd az új tanterv főbb dokumentumainak: munkalapoknak, kézikönyveknek, továbbképzési kiadványoknak. Az általános iskolai oktatást előkészítő óvodai matematikai tanítási kísérletek irányítója. Előadásokat tart a TIT-ben. A Társulat Vándorgyűlésein sikeresen szerepelt előadásaival és bemutató tanításaival. A MTA Elnökségi Közoktatási Bizottsága Matematika Albizottságának tagja. Az Oktatásügy kiváló dolgozója.

DEMETER KÁROLYNÉ

A TIT osztályvezető-helyettese, matematika—fizika szakos tanár. Hivatali kötelességét meghaladó odaadásával felbecsülhetetlen segítséget nyújtott a matematika népszerűsítésében és a korszerű matematikatanítás bevezetéséhez. Munkája eredményeképpen terjedt el az egész országban a KMBK mozgalom. Ötlete nyomán szerveződtek és immár 7. éve folynak a nyári 6 napos előadói konferenciák, amelyeknek keretében mintegy 200 tanárt készítenek fel a KMBK foglalkozások színvonalas

vezetésére. Ezek a konferenciák kiváló előképzést biztosítanak a korszerű matematikát tanító általános iskolai tanárok számára. Demeter Károlyné szervezte meg az 5., 6. és 7. osztályos általános iskolai tanulók országos matematika versenyét. Felelős szerkesztője a KMBK feladatlapsorozatoknak. Az azokhoz készült tanári módszertani útmutatók és példatárak megjelenési feltételeit is ő teremtette meg. Aktív harcosa annak, hogy a számítástechnikai kultúra már az általános iskolások körében is elkezdődjék.

GERGELY PÉTER ált. iskolai tanár

Lelkes híve, támogatója és terjesztője a korszerű matematikatanításnak. Tanárok részére tanfolyamokat szervezett, megyék között tapasztalatcsere-mozgalmat indított el. Komoly erőfeszítéseket tett azért, hogy az iskolák matematikai munkaeszközökkel megfelelően ellátottak legyenek. Közreműködött az ideiglenes matematikai tanterv bevezetését segítő diamagnó továbbképzési sorozat előállításában. Szakfelügyeleti csoportjával a megyék között elsőként végzett tudományos módszerekkel önálló eredményvizsgálatot. Szoros kapcsolatot tart az egri Tanárképző Főiskolával és a TIT szervezettel. Irányítja és segíti a szakkörök tevékenységét megyeszerte. Részt vesz az úttörő matematikusok nyári szaktáborának szervezésében.

ORAVECZ PÁLNÉ tanítónő

Eredményes munkájával évek óta áll a matematikatanítás reformjának szolgálatában. Az ITV továbbképző műsoraiban az alsó tagozatos foglalkozásokat főrészt ő mutatja be igen ügyesen, és hatásosan hívja fel a figyelmet a módszer lényegére. Az óráit látogatók demokratikus, szép szellemet, számos jó ötletet leshetnek el. Hasznos munkát végez a budapesti alsótagozatos nevelők továbbképzésében. A Fővárosi Pedagógiai Intézet megbízásából konzultációt vezet a budai kerületek első osztályos nevelői részére. Előadásokat tart a Pest megyei alsó tagozatos nevelők új tanterv szerinti matematika tanítására előkészítő tanfolyamán. Lelkes, hozzáértő munkájával új híveket toboroz és képez a korszerű matematika oktatáshoz.

TAKÁCS JÓZSEF középiskolai mat.—fiz. szakos tanár

Mindig keresi az újat, a jobbat, s így meg tudja szerettetni tanítványaival a matematikát. Diákjai mind az egyetemi felvételi vizsgákon, mind a különböző versenyeken megállják a helyüket. 7 éve tanít speciális matematikai tagozaton. A KMBK-nak vezető tanára, a 7. osztályos feladatlapjainak egyik készítője. A MTA Matematikai Intézetének felkérésére kísérletet végzett a matematika II. tagozaton az algebra anyagának egységesebbé tételével kapcsolatban. Tapasztalatairól az e tagozaton oktatók nyári továbbképzésén előadásban számolt be. Tanítók és tanárok különböző továbbképzésein vállalt konzultáció-vezetést. A Társulat vándorgyűlésein két ízben is tartott előadást. Eredményes oktató-nevelő munkájának elismeréseként 1975-ben megkapta az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést.

JELENTÉS AZ 1976. ÉVI RÉNYI KATÓ EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1976. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére az alábbi összetételű bizottságot jelölte ki:

T. SÓS VERA elnök, PINTZ JÁNOS titkár, GYŐRY KÁLMÁN, LIPPNER GYÖRGY, POLLÁK GYÖRGY.

A bizottság 1976. május 25-én megtartott ülésén a beérkezett javaslatok megvizsgálása után a következő határozatot hozta:

A Rényi Kató díj I. fokozatában és az ezzel járó *1500 Ft* pénzjutalomban részesül:

KOMJÁTH PÉTER, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója.

A Rényi Kató díj II. fokozatában és az ezzel járó *1000 Ft* pénzjutalomban részesülnek:

BALOGH ZOLTÁN, a KLTE IV. éves matematikus szakos hallgatója,
BOSZNAY ÁDÁM, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója,
BUI MINH PHONG, az Egri Tanárképző Főiskola IV. éves hallgatója,
CZÉDLI GÁBOR, a JATE IV. éves matematikus szakos hallgatója,
GYŐRI ERVIN, az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója,
SZENDREI MÁRIA, a JATE V. éves matematikus szakos hallgatója,
TÓTH GÁBOR, az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója,
TOTIK VILMOS, a JATE III. éves matematikus szakos hallgatója,
URY LÁSZLÓ, az ELTE IV. éves matematikus szakos hallgatója.

KOMJÁTH PÉTER kombinatorikus halmazelméleti kérdésekkel foglalkozott. Majdnem diszjunkt halmazrendszerek konstruálására vonatkozólag ért el új és igen érdekes eredményeket, továbbfejlesztve Hajnal és Galvin vizsgálatait. Hasonló jellegű rendtípusokkal kapcsolatos kérdéseket is felvet és megold. Bizonyításai sokszínűek és mélyek.

BALOGH ZOLTÁN a topologikus terek relatív kompaktságának fogalmán alapuló, a topológia egy jelenleg igen aktívan vizsgált kutatási területén ért el eredményeket a metrikus és lokálisan kompakt terek közös általánosításait illetően.

Bosznay Ádám szeparábilis Banach terek és Hilbert terek approximációs kérdéseit vizsgálva többek között bebizonyította, hogy komplementumos altér alkalmas ε átnormálás segítségével Csebisev altérré tehető.

Bui Minh Phong az egész számok másodrendű sorozatokra vonatkozó rendjét vizsgálta és több korábbi tételt élesített ill. általánosított. Foglalkozott a Mersenne és Fermat féle számok prímvoltának eldöntésével is.

Czédli Gábor a moduláris hálók varietásaira vonatkozólag ért el eredményeket. Kimutatta többek között, hogy Abel-csoportoknál kontinuum számosságú ún. kongruenciavarietás létezik, megoldva ezzel Ralph Freese egy problémáját.

Győri Ervin a végtelen matroidok újabb értelmezését és alkalmazását adta, továbbá Lovásztól függetlenül, vele egyidőben megoldotta Frank András egy sejtését, amellyel gráfok bizonyos előírt tulajdonságú komponensekre bontásának lehetőségét bizonyítja.

Szendrei Mária a félcsoportelméletben ért el eredményeket. Messzemenően általánosította a Bruck—Reilly-féle konstrukciót és ennek segítségével a reguláris félcsoportok egy fontos osztályára nyert szép struktúratételt.

Tóth Gábor a differenciálegyenlet-rendszerek triangularizálhatóságának terén, valamint diszkrét dinamikus differenciálegyenlet-rendszerek kiterjesztéseinek unicitásával kapcsolatban ért el eredményeket.

Totik Vilmos metrikus terekben értelmezett függvények folytonossági valamint alulról illetve felülről félig folytonossági pontjainak halmazát vizsgálja, továbbá bizonyos végtelen mátrixokhoz tartozó szummációs eljárásokkal kapcsolatban ért el eredményeket.

Ury László a metrizáció kiterjesztésére vonatkozó Hausdorff-tételt az univerzális terekre vonatkozó eredményekkel kapcsolja össze, vizsgálatait a dimenzióelmélet irányába is továbbfejlesztette.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT NAGYRENDEZVÉNYEI 1976. ÉVBEN:

Csillag Pál találkozó
(fiatal matematikusok összejövetele, 1976. június 10—14. Balatonlelle)
Szervezők: Baranyai Zsolt, Lippner György, Pintz János.

A fiatal matematikusok hagyományos találkozóját ezúttal a BME KISZ-táborában tartottuk. A 110 résztvevő mintegy 50 előadást hallgatott. Ezek témája változatos volt; új elméleti eredmények ismertetése éppúgy szerepelt mint egy-egy alkalmazott matematikai feladat megoldásáról vagy nehézségeiről szóló beszámoló. A Találkozó sikeréhez hozzájárult a Balázs Béla Stúdió filmjeinek vetítése, a Kaposvári Csíky Gergely Színház előadásának megtekintése, valamint a Kishegyi Borozóban tett kirándulás.

V. Magyar Kombinatorika Kollokvium
(1976. VI. 28.—VII. 3. Keszthely)
Szervező bizottság:
elnök: T. Sós Vera
titkár: Baranyai Zsolt
tagok: Ádám András, Katona Gyula, Komlós János, Lovász László, Pollák György, Recski András, Simonovits Miklós, Gyires Béla.

A kollokviumon 93 külföldi és 56 magyar (ebből 10 egyetemi hallgató) matematikus vett részt. A három szekcióban folyó előadások témája felölelte a gráfelmélet különböző területeit, a blokkrendszerek, véges geometriák, hipergráfok elméletének legújabb eredményeit egyaránt.

A meghívott előadók nagy része eleget tudott tenni meghívásunknak, így jelen volt C. Berge (Franciaország), J. Bosák, M. Fiedler, Z. Hedrlin, J. Nesetril, A. Pultr, V. Rödl (Csehszlovákia), J. Edmonds, R. Guy, W. Tutte (Canada), R. Graham, M. Hall, A. Hoffman, D. K. Ray-Chaudhuri, J. Spencer (USA), W. Mader (Nyugat-Berlin), C. Nash-Williams (Anglia), H. Sachs, H.-J. Voss (NDK). Az előadások az Agrártudományi Egyetem Növényvédelmi Intézetének termeiben folytak, kedvező körülmények között.

A tudományos programot egy hangverseny, egy badacsonyi kirándulás, egy a matematika és a matematikusok helyzetéről szóló nemzetközi vita s végül a záróbankett egészítette ki.

A konferencián az alábbi előadások hangzottak el:
W. Mader: Über n-fach zusammenhängende Eckenmengen
G. Chaty: On critically and minimally k-vertex (arc) strongly connected digraphs
Surányi L.: On a problem of Gallai concerning line-critical graphs

J. EDMONDS: K-covers of directed cuts
LOVÁSZ L.: Some finite basis theorems
M. HALL: Matrices satisfying the incidence equation
H. BEKER: Strongly divisible designs
M. SEKANINA: Hamiltonian lines in powers of graphs
R. LASKAR: Decompotisions of some composite graphs into Hamiltonian cycles
C. HOEDE: On characterizations of Hamiltonian graphs
SZEMERÉDI E.: On a problem of Schnizel and Davenport
RUZSA I.: On the cardinality of $A+A$ and $A-A$
D. KUREPA: On a sequence of integers
VESZTERGOMBI K.: Some problems of restricted partitions
GYIRES B.: On a conjecture of Van der Waerden type
J. SEIDEL: Eutatic stars
D. CVETKOVITZ: Graphs related to exceptional root systems
S. G. HOGGAR: "Equiangular" lines
V. PLESS: Code graphs
R. HÄGGKVIST: A partial solution of the Evans conjecture for latin squares
J. M. S. SIMOES-PEREIRA: Edge-sets of hypergraphs with a B^r like property and partition numbers of graphs
F. STERBOUL: A problem of constructive combinatorics
BECK J.: Estimation for the concentration function of combinatorial number theory
M. DEZA: Intersection properties of systems of finite sets
FRANKL P.: The Erdős—Ko—Rado theorem is true for $n=ckt$
P. CAMION: Rising sequences of stigms in orinted matroids
A. SCHRIJVER: The linking of matroids by linking systems
RECSKI A.: Contribution to the n-port interconnection problem by means of matroids
R. J. WILSON: Graph theory and chemistry
A. J. HOFFMAN: On lattice polyhedra
UHRIN B.: Some combinatorial identities useful in systems of linear inequalities
C. S. EDWARDS: An eigenvalue approach to $f(n, 4, 4)$, $f(n, C_3 \text{ or } C_4)$ and $f(n, C_4)$
P. ROSENTIEHL: The combinatorial Gauss problem of the planar closed curve
S. JENDROL: On the face vector and vertex vector of a map
PALÁSTI I.: On the number of spherical polygons with given sides determined by grate gircles
R. L. GRAHAM: On graphs which contain all small trees as subgraphs
GYÁRFÁS A.: Finding prescribed edge-disjoint trees in complete graphs
H. J. VOSS: Properties of graphs with circuits of prescribed lengths
KÁSZONYI L.: On half-planar geometries
KATONA G. O. H.: Continuous versions of combinatorial extremal graph theorems
J. SEIDEL: Eutatic stars (II.)
J. WALLIS: A note on using sequences to construct orthogonal designs
D. K. RAY-CHAUDHURI: Characterization of graphs derived from geometries
KORCHMÁROS: Collineation groups which are transitive on an oval
A. E. BROUWER: On associative block designs
W. DÖRFLER: A complete lattice in graph theory
KOMJÁTH P.: Almost dense set-systems
S. A. BURR: Generalizations of a Ramsey-theory result of Chvátal
J. NESETRIL: Some recent results in Ramsey theory I.
V. RÖDL: Some recent result in Ramsey theory II.
B. HARRIS: Comments on a theorem of Yu. N. VOLOSHIN
M. FIEDLER: Aggregation in graphs
D. D. GRANT: Anti-directed circuits in digraphs
Frank A.: How to orient the edges of a graph?
W. DEUBER—B. ROTSCHILD: Categories without the Ramsey property
R. H. SCHELP: Some connected Ramsey-numbers
"How to choose research directions?" Introductory remarks by R. L. GRAHAM—J. J. SEIDEL—V. T. Sós (Moderator: Z. HEDRLIN)
W. T. TUTTE: Chromatic sums
J. SPENCER: Probabilistic methods in combinatorics
R. K. GUY: Partisan and inpartial combinatorial games
C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS: Should axiomatic set theory be translated into graph theory?
A. J. W. HILTON: A 4-colour conjecture for planar graphs
R. GILES: Facets and other faces of branching polyhedra
J. C. BERMOND: On a combinatorial problem of antennas in radio-astronomy

M. C. GOLUMBIC: Threshold graphs and synchronizing parallel processes
J. TURGEON: β-valuations of regular graphs with complete components
B. ZELINKA: Dot-compositions of graphs
J. DOYEN: Non equivalent Hamiltonian circuits on the n-dimensional cube
Z. HEDRLIN: Structural statistics
A. P. WOJDA: Strongly (p, a) — Hamiltonian graphs
Z. SKUPIEN: Generating path factors of a tree and related problems
B. STECHKIN: Gatherings and their applications in combinatorial designs
D. DUMONT: Sur certaines interpretations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi
D. S. JOHNSON: A number theoretic bin-packing conjecture
J. S. BYRENES: Polynomials with coefficients of moduls one
H. SACHS: On a result in the theory of graph spectra
I. GUTMAN: Partial ordering of forests according to their charasterictic polinomials
BABAI L.: Spectra and isomorphism of Cayley graphs
IMRICH, W.: On graphical regular representation
A. PULTR: Classes of graphs given by exsistence or non-exsistence of morphisms
A. MARCZYK: Properties of line-multigraphs of hypergraphs
M. C. HEYDEMANN: Line of hypergraphs
C. BERGE: New results about multicolourings
T. SÓS V.—SIMONOVITS M.: On intersection properties of hypergraphs and other systems
ROSTA V.—SURÁNYI L.: On Ramsey multiplicity
P. HAMMER—FÖLDES S.: Split and matrogenic graphs
W. WESSEL: A second family of edge-critical wheels
GYŐRI E.: On division of graphs to connected subgraphs
N. J. A. SLOANE: New bounds for error-correcting codes and packing numbers
BARANYAI ZS.: On a search problem of G. O. H. Katona
A. GERMA: On hypergraph designs
J. BOSÁK: Geodetic graphs
H. HARBORTH: Crossing on edges in drawings of complete multipartite graphs
FUTÓ P.: On graph theoretical cluster techniques

Diákköri nyári iskola
(1976. VII. 5.—11. Eger)

A Diákköri nyári iskolának 50 hallgatója volt, 4 fő a KLTE-ről, 8 fő a JATE-ről, 38 fő az ELTE diákja. A rendezvényen, melyet az egri Tanárképző Főiskolán tartottak, 11 előadás hangzott el.

Rátz László Vándorgyűlés
(1976. VII. 7.—10. Baja)

A vándorgyűlés szervezésében Békefi Zsuzsa, Halmos Istvánné és Urbán János vettek részt, a munkát Reményi Gusztávné irányította.

A rendezvényen mintegy 370-en hallgatták az előadásokat az általános- és középiskolai tananyag egy-egy új fejezetéről, az új módszerekről. Megjelent Hanga Mária (oktatási miniszterhelyettes) is, aki az új tanév feladatairól tartott előadást. Nagy érdeklődés kísérte Urbán János beszélgetését Kalmár Lászlóval és Péter Rózsával, akik életpályájukról és a matematika tanításával kapcsolatos nézetükről nyilatkoztak. (A beszélgetés, valamint a vándorgyűlés néhány előadásának anyagát a résztvevők utólag nyomtatásban fogják megkapni.)

A vándorgyűlés keretében sor került az 1976. évi Beke Manó emlékdíjak kiosztására. Ez alkalomból Surányi János megemlékezett Beke Manóról, Németh Tibor pedig ismertette életművét.

A Vándorgyűlés előadásai az alábbiak voltak:
C. NEMÉNYI ESZTER—RADNAI GYULÁNÉ: Halmazok, logika
HETYEI GÁBOR: A geometriatanítás problémáiról
ZSUFFA ISTVÁN: A számítógépek alkalmazási lehetőségei a vízgazdálkodásban
URBÁN JÁNOS: Néhány halmazalgebrai feladat
C. NEMÉNYI ESZTER—RADNAI GYULÁNÉ: Geometria szemléletes fokon
PÁLFY SÁNDOR: Az általános iskolai matematikatanítás jelene és jövője
LUKÁCS OTTÓ: Számítástechnika az általános iskolában
SZENDREI JÁNOS: Csoportok a középiskolai anyagban
RITOÓK PÁLNÉ: Néhány pszichológiai szempont a matematikatanítás személyiségmegismerési és személyiség-fejlesztési lehetőségeihez
HERCZEG JÁNOS: Az iskolarádió matematika szakkörének munkájáról
HETYEI GÁBOR: A középiskolai matematikatanítás mennyire teszi lehetővé az első éves hallgatók beilleszkedését a felsőfokú matematikaoktatásba?

C. NEMÉNYI ESZTER—RADNAI GYULÁNÉ: Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Az általános iskolai algebratanítás néhány kérdése
HERCZEG JÁNOS: Az iskolarádió matematika szakkörének munkájáról
RÁBAI IMRE—PÁLMAY LÓRÁNT—SCHARNITZKY VIKTOR: Mit kérdezünk felvételi vizsgán matematikából?

Fourier-analízis és approximációelméleti kollokvium
(1976. VIII. 16—21. Budapest)

Szervező bizottság:
elnök: TURÁN PÁL
tiszteletbeli elnök:
ALEXITS GYÖRGY
titkár: VÉRTESI PÉTER
tagok: ALPÁR LÁSZLÓ
FARKAS MIKLÓS
HALÁSZ GÁBOR
KIS OTTÓ
LEINDLER LÁSZLÓ
SZABADOS JÓZSEF
TANDORI KÁROLY

A kollokviumon 116 fő vett részt — ebből 32 hazai matematikus.

A konferencián az ortogonális sorok, interpolációs vizsgálatok, racionális approximáció, szaturáció, Hausdorff-metrikában történő approximáció, absztrakt approximáció és harmonikus analízis témájából hangzott el 92 előadás. A téma leghíresebbjei közül D. J. NEWMAN (amerikai), T. GANELIUS (svéd), L. CARLESON (svéd), S. M. NYIKOLSKIJ (szovjet), L. COLLATZ (nyugatnémet), W. CHENEY (amerikai), N. P. KORNYEJCSUK (szovjet), B. SZENDOV (bolgár), G. I. SUNOUCHI (japán), tartottak előadást. Az előadásokon kívül problémaszekción is találkoztak a résztvevők, talán ez volt a leglátogatottabb ülés. A konferencia kulturális programjaként dunai hajókirándulás szerepelt.

A rendezvényen a következő előadások hangzottak el:
K. TANDORI: Über die Lebesguesche Funktionen
ALBINUS, G.: On the exsistence of rapidly approximating sequences of finitedimensional subspaces in spaces of measurable functions
B. BACAPOULOS: On a class of constrained approximations and optimizations
F. MÓRICZ: On the convergence properties of double orthogonal series
J. MUSIELAK: Approximation by singular modulars
J. JOÓ: Note to a theorem of Talaljan on universal series
F. SCHIPP: On Carleson's method
A. GRUNDMANN: Inverse theorems of Kantorovic operators
B. BROSOWSKI: On simultaneous best approximation
P. SIMON: Über einen Konjugierungsbegriff
J. PÁL: On a. e. differentiability of dyadic integral functions on R_+
L. CARLESON: Some problems in harmonic analysis related to statistical mechanics
G. ALEXITS: On absolute convergence of series of form $\sum c_n \varphi(n, x)$
B. DRESELER: Lebesgue constants for spherical partial sums of Fourier series on compact Lie proups
S. ROPELA: Unconditional spline bases in L_p spaces
P. SJÖLIN: Equivalence of Haar and Franklin bases in L^p, $1<p<\infty$
E. L. STARK: Die Feinstruktur periodischer approximierender Identitäten
J. R. NESSEL: On Nikolskii-type inequalities I: Regular orthogonal expansions
A. BEREZOVSKIJ: On a type of interpolating parabolic splines
J. SZABADOS: On some convergent interpolatory polynomials
G. WILMES: On Nikolskii-type inequalities II.: Application to multiplies
P. VÉRTESI: Hermite—Fejér and Lagrange interpolations
W. TREBELS: Multiplier criteria for Jacobi expansions
B. D. BOJANOV: Favard's interpolation problem for periodic functions
O. KIS: Some approximating methods by trigonometric and algebraic polynomials
H. STAHL: The asymptotic behaviour of orthogonal polynomials
R. POLJAKOV: Applications of splines for solving systems of Hammerstein type integral equations
A. A. PRIVALOV: Approximation of functions by interpolation
Y. MEYER: Calderon's commutators by complex interpolation
L. LEMPERT: Recursion for orthonormal polynomials on a complex domain
N. P. KORNEICUK: Spline approximation for periodic functions
J. ALBRICHT: On uniform convergence of multiple Fourier series

K. ENDL: On a theorem of Favard
M. W. MÜLLER: Degree of L_p-approximation by integral Schoenberg splines
H.-B. KNOOP: On two-dimensional interpolation
S. M. NIKOLSKII: Some inequalities for the functions of weight classes
G. I. SUNOUCHI: Remarks on some points in the theory of Fourier series
V. MAIER: The L_p norm of the approximation error for linear positive operators
L. LEINDLER: On inverse type theorems realted to the strong approximation of Fourier series
P. POTTINGER: On the C_k-approximation by Baskakov operators
P. M. TAMARAZOV: Finite differences smothness and approximation
B. I. GOLUBOV: Gibbs phenomenon for the spherical Riesz means of Fourier series and integrals of several variables
Z. DITZIAN: On a saturation theorem
A. F. LEONTIEV: Representation of functions by Dirichlet series
V. I. BELIJ: Application of conformal invariant in problems of approximation of functions of a complex variable
B. SENDOV: Best Hausdorff approximation
ST. HARTMAN: Splitting of Fourier series
F. FEHÉR: The K- and I-interpolation methods on rearrangement-invariant function spaces and their duality
T. P. BOJANOC: Approximation of plane curves
M. GOLITSCHEK: Approximation by imaginary exponential sums
H. TRIEBEL: Multipliers of function spaces of Besov type
V. M. VESELINOV: Asymptotic distribution of points of maximal deviation in the polynomials of best Hausdorff approximation
A. K. VARMA: An analogue of some inequalities of P.Turán concerning algebric polynomials having all zeros inside $(-1; +1)$
H. WALLIN: An embedding theorem for generalized Besov spaces with three indices
V. H. HRISTOV: An improvement of the Dini—Lipschitz condition for uniform convergence of Fourier series
H. TÜRNPU: Asymptotic properties of series of derivatives
J. HEDBERG: Approximation by $C\infty$ functions in Sobolev
S. P. TASHEV: Inverse theorems for Hausdorff metric
G. L. ILIEV: Parametric approximation of functions
D. J. NEWMAN: Rational function approximation to x^n
L. COLLATZ: Approximation methods for differential equations
L. ALPÁR: Tauberian theorems of power series of two variables
A. ANDREEV: Approximative solution of differential equation with discontinuity
S. LYTTKENS: Tauberian remainder theorems
G. SONNEVEND: On the potimisation of adaptive algorithm
S. ALJANCIC: A remark on the class of functions of Avakuvomic—Karamata and that of Bari—Steckin
W. CHENEY: Extremal projections in L_1-spaces
J. SZALAY: On generalized absolute Cesaro summability
L. B. O. FERGUSON: Approximation by integral Müntz-polynomials
V. A. POPOV: On the uniform approximation of functions with derivatives of bounded variations
F. J. DELVOS: Boolean methods in surface interpolation
T. HERMANN: Approximation of unbounded functions on $(0, \infty)$ by positive linear operators
NGUYEN XUAN KY: Degree of best approximation with weight
A. V. EFIMOV: Problems of discrete Fourier transforms
G. SOMORJAI: Müntz-type theorems
P. P. PETRUSHEV: Uniform approximation by rational functions
Z. A. CANTURIA: Absolute convergence of Fourier series
B. STÖCKERT: Anisotropic function spaces
V. K. ZADIRAKA: Optimal quadrature formulae for Fourier integrals
J. NÉMETH: On embedding theorems
M. LEVIN: Approximation theorems in L_2 and their applications for constructing optimal integrating formulae
T. GANELIUS: Degree of approximation by rationals in the complex plane
J. SICIAK: Some applications of the best approximation by polynomials of several complex variables
J. BOMAN: On the moduls of continuity of vector valued functions
A. SHARMA: Classes of connections defined by differential inequalities
W. SCHEMPP: G-stable Fourier representative
I. SINGER: Approximation in vector-valued norms

W. LUH: Universal-Funktionen in der Approximations-theorie

IX. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpózium

(1976. VIII. 23—27. Budapest)

Szervező bizottság:

Nemzetközi: A. PRÉKOPA (elnök), J. ABEDIE, E. BALAS, M. L. BALINSKI, E. M. L. BEALE, J. M. BENNETT, R. W. COTTLE, G. B. DANTZIG, L. C. W. DIXON, I. DRAGAN, J. EDMONDS, K. H. ELSTER, I. I. EREMIN, A. M. GEOFFRION, F. GIANNESSI, F. G. GOLSTEIN, M. D. GRIGORIADIS, M. IRI, P. KALL, L. V. KANTOROVICH, A. A. KORBUT, J. KRARUP, H. W. KUHN, F. A. LOOTSMA, B. MARTOS, B. S. MIHALEVICH, G. MITRA, N. N. MOISEEV, F. NOZIČKA, W. OETTLI, A. ORDEN, B. T. POLJAK, M. J. D. POWELL, T. R. ROCKAFELLAR, J. B. ROSEN, G. S. RUBINSTEIN, J. A. TOMLIN, A. W. TUCKER, HOAND TUY, S. VAJDA, S. WALUKIEVICZ, H. P. WILLIAMS, P. WOLFE.

Hazai: B. MARTOS (elnök), A. BAKÓ, P. BOD, F. FORGÓ, A. HEPPES, P. KELLE, B. KREKÓ, A. PRÉKOPA, P. SZ. TURCHÁNYI.

A szimpóziumot, melyen mintegy 550 (100 magyar, 150 szocialista országbeli és 300 nem szocialista résztvevő) vett részt a Magyar Tudományos Akadémia székházában tartották. A Matematikai Programozási Társaság első ízben bízott meg szocialista országot a szimpózium megrendezésével.

Az előadásokat részint plenáris ülések keretében (10 előadás) részint 4 vagy 5 párhuzamos szekcióban (320 előadás) hallgatták.

Az előadások az alábbi fő témakörökbe sorolhatók: lineáris programozás, nemlineáris programozás, komplementaritás és fixpont elmélet, hálózati folyamatok, gráf- és kombinatorikai problémák, sztochasztikus programozás, játékelmélet, dinamikus programozás és kontrollelmélet, a mérnöki tervezésben, a közgazdaságban, a természettudományok és biológia terén, az iparban történő alkalmazások, a matematika programozás tanítása, matematikai programozási software. Ezeken kívül a SIGMAP tartott két szekcióülést és egy kerekasztal megbeszélést. A Nobel-díjas L. V. KANTOVICH előadását betegsége miatt J. V. ROMANOVSZKIJ (Szovjetunió) tartotta meg. A matematikai programozás nagyjai közül G. B. DANTZIG, H. W. KUHN, A. W. TUCKER, J. B. ROSEN, A. ORDEN, R. T. ROCKAFELLAR, W. ORCHARD-HAYS (amerikai), E. M. L. BEALE (angol), a Matematikai Programozási Társaság elnöke, J. ABODIE (francia), M. IRI (japán) és F. GIANNESSI (olasz) tartottak előadást.

A rendezvényen a következő előadások hangzottak el:

Augusztus 23.

Megnyitó beszédet tartott: PRÉKOPA ANDRÁS és E. M. L. BEALE

Előadások:
Paralel szekciók:

„A" szekció: Optimization in Networks
Elnök: G. L. THOMPSON (USA)

C. B. DANTZIG (USA):	Energy Modelling and Large Scale Mathematical Programming
H. W. KUHN (USA):	Nonlinear Programming Duality and Economics
G. H. BRADLEY—G. G. BROWN—G. W. GRAWES (USA):	Large Scale Network Optimization
E. L. PETERSON (USA):	The Conical Duality and Complementarity of Price and Quantity for Multicommodity Spatial and Temperal Network Allocation Problems
R. E. CAMPELLO (F)—N. F. MACULAN (Brasilia):	Branch and Bound Approach to a Fixed-Charge Network Expansion
M. MINOUX (F):	Circuitless Graphs, Generalized Dynamic Programming and Applications
C. DINESCU (R):	On Two Problems concerning Paths in a Graph

„B" szekció: Nonlinear Programming, Special Problems
Elnök: K. H. ELSTER (DDR)

L. MCLINDEN (USA):	Duality in Gauge Programming
A. TAMIR (IL):	Ergodicity and Symmetric Mathematical Programs
F. CORDELLIER—J. C. FIOROT (F):	Three Algorithms for the Fermat—Weber's Problem with Generalized Cost Functions

G. S. RUBINSTEIN (SU): Axial Structures and Theory of Partitioning of Convex Sets

Y. KOBAYASHI—M. OHKITA—M. INOUE (J): Economization of a Chebyshev Expansion by Way of Turning in the Truncation Error

M. HOSSZÚ—Z. SZARKA (H): Generalization of Centro Problems

M. SCHOCH (DDR): A Min—Max Fixed Cost Problem

„C" szekció: Applications in Enginnering Design
Elnök: K. SZENDY (H)

K. SZENDY—A. PRÉKOPA—T. SZÁNTAI: Planning of Optimal Extension of Interconnected Power Systems Using Stochastic Programming

R. JUSERET (B): Long Term Optimization of Electrical System Generation by Convex Programming

P. G. HARHAMMER (A): Economic Dispatch in Electric Power System

A. KALLIAUER (A): Compactification and Decomposition Methods for NLP Problems with Nested Structures in Hydro Power System Planning

J. F. MAURRAS—J. MACHADO (F): Short Term Resources Allocation

R. J. PETERS—K. C. CHU—M. JAMASHIDI (USA): Optimization of a Water Resources System by Stochastic Programming without Recourse and Linear Rules

M. GRÓSZ (H): Finding Optimal Number, Place and District of Transformer in Law Voltage Electric Networks by a Set Covering Problem

„D" szekció: Discrete Programming
Elnök: A. KORBUT (SU)

M. L. BALINSKI—H. P. YOUNG (USA): Multiple Objectives in Apportionment: an Axiomatic Approach

E. BALAS—N. CHRISTOFIDES (USA): A New Penalty Method for the Travelling Salesman Problem

S. HONG—M. W. PADBERG (USA): On the Solution of the Travelling Salesman Problems

M. M. SYSLO (PL): Generalizations of the Standard Travelling Salesman Problem

D. G. LIESEGANG (D): The "Tube-Passing Problem" and the Travelling Salesman Problem

Augusztus 24.

Plenáris szekció
Elnök: G. B. DANTZIG (USA)

E. M. L. BEALE (GB): Mathematical Models for Location of Government

A. PRÉKOPA (H): Application of Stochastic Programming to Engineering Design

Paralel szekciók:

„A" szekció: Discrete Programming
Elnök' A. GEOFFRION (USA)

R. R. MEYER—J. M. FLEISCHER (USA): Double-Relaxation Optimality Condition for Integer Programming

S. WALUKIEWICZ—I. KALISZEWSKY (PL): Tighter Equivalent Formulations of Integer Programming Problems

S. HOLM (DK)—D. KLEIN (USA): Parametric Analysis for Integer Programming Problems

M. LIBURA (PL): Stability Regions for Optimal Solutions of the Integer Programming Problem

„B" szekció: Nonlinear Programming, Theory
Elnök: A. V. FIACCO (USA):

S. M. ROBINSON (USA): Regularity and Stability in Optimization and Equilibrium Problems

J. GUDDAT—D. KLATTE (DDR): Stability in Nonlinear Parametric Optimization

B. MOND—B. C. CRAVEN (USA): Sufficient Optimality Conditions for Complex Programming with Quasi-Concave Constraints

B. C. Craven—B. Mond (USA):	Lagrangean Conditions for Quasi-Differentiable Optimization
B. Kummer (DDR):	Global Stability of Optimization Problems
A. Ben-Israel—A. Ben-Tal—S. Zlobec (CDN):	Characterizations of Optimality in Convex Programming without a Constraint Qualification

„C" szekció: Applications in Engineering Design, Traffic
Elnök: J. Krarup (DK)

J. Billheimer (USA):	Transformation Network Design
J. Monigl—B. Vásárhelyi—A. Bakó—L. Király (H):	Studies on Analytical Traffic Forecasting and Assignment
M. Mercatani—B. Rindi—A. Volpentesta (I):	Problems Related to Crew Planning and Scheduling in a Railroad Company Assignment Approaches and Algorithms
S. A. Kádas (H):	An Application of Geometric Programming to the Gravity Model of Trip Distribution
M. Florian (CDN):	A Multicommodity Convex Cost Flow Model for Planning of Multi-Modal Urban Transportation Networks

„D" szekció: Graphs and Combinatorics
Elnök: M. Iri (J)

M. W. Padberg (USA):	On the Complexity of Set Packing Polyhedra
L. E. Trotter—D. B. Weinberger (USA):	Symmetric Blocking and Antiblocking Relations for Generalized Circulations
M. Grötschel (D):	Further Result Concerning the Facial Structure of the Symmetric Travelling Salesman Problems
B. Korte—D. Hausmann (D):	Colouring Criteria for Adjacency on 0—1 Polyhedra
P. Futó (H):	On a New Hypergraph Theoretical Cluster Technique
P. Hansen—M. Delattre (B):	Cluster Analysis by Graph Colouring

Augusztus 24. délután:

„A" szekció: Mathematical Programming Software
Elnök: G. Mitra (GB)

J. M. Mulvey (USA):	Design and Testing of a Network-Based 0—1 Integer Programming Code
W. Orchard-Hays (USA):	On a Complexity in Using Computers and Some Recent Experience in Mastering It
B. J. Lageweg—J. K. Lenstra—A. H. G. Ronnooy Kan (NL):	The Complexity Structure of a Class of Scheduling Problems
Y. Sorimachi—H. Mukawa—Y. Okamoto—T. Tamai (J):	Implementation of the Heuristic Mixed Integer Program to the Mathematical Programming System

„B" szekció: Nonlinear Programming, Methods
Elnök: J. Abadie (F)

J. B. Rosen (USA):	A Two-Phase Method for Nonlinear Constraint Problems
U. M. Garcia-Palomares (Venezuela):	The Global Solution of Nonlinear Optimization Problems with Nonlinear Equality Constraints
J. P. Laurent—C. Carasso (F):	An Algorithm of Successive Minimization in Convex Programming
H. Yamashita (J):	A Differential Equation Approach to Nonlinear Programming and its Application to Global Optimization
B. R. Stonebridge (GB):	Least-Squares without Normal Equations

„C" szekció: Applications in Natural and Human Sciences
Elnök: J. L. Balintfy (USA)

S. Vajda (GB):	Control of Manpower System by Linear Programming
L. F. Escudero—A. Vazques-Muniz (E):	A Mathematical Model for Air Pollutions Abatement, Numerical Results
G. T. Herman—A. H. Lent (USA):	A Relaxation Method with Application in Diagnostic Radiology

H. KULOKARI (SF): Optimizing the Long-Term Activity Rate of a Closed Population

F. ARGENTESI (I): Direct Differential Identification of Compartmental System by Linear Programming

L. TELEGDI—T. KUTAS (H): Comparison of Different Methods for Fitting Functions to Agricultural Data

Augusztus 24., este

„A" szekció: A Mathematical Programming, Software
Elnök: F. A. LOOTSMA (NL)

N. N. MOISEEV—YU. G. EVTUSHENKO (SU): Interactive Optimization System

G. MITRA (GB): UIMP: User Interface for Mathematical Programming

U. PAPE (D): Criteria for the Design of an Interactive Graph Manipulation System (GRAMAS)

P. RANDI—M. R. SCALAS (I): An interactive Code for Mixed Integer Linear Programs; Application to Crew and Manpower Scheduling Problems

C. COHEN—B. ROBINSON (USA): An Integrated System for Interactive Nonlinear Programming Computations

„B" szekció: Nonlinear Programming, Methods
Elnök: L. S. SHAPLEY (USA)

P. W. MOLINA (USA): A Theory of Resource Allocation and a Decomposition Method for Mathematical Programming

A. V. FIACCO (USA): Sensitivity Analysis of a Well-Behaved Kuhn-Tucker Triple

H. HOLLATZ—R. NEIGEBAUER (DDR): A Programming System for Choosing Algorithm which Solve Minimizing Problems with Constraint

A. S. ANTIPIN (SU): A Gradient Type Method for Search of Augmented Lagrangian Function Saddlepoint

W. TELLE (SU): The Application of Modified Lagrange Function in Block-Structured Optimization

„C" szekció: Linear Programming
Elnök: J. TOMLIN (USA)

M. VLACH (CS): Condition for the Existence of a Solution to the Multi-Index Transportation Problems

W. JUNGINGER (D): Locating Stepping-Stone Paths and Assigning Dual Prices in Multi-Index Transportation Problems

H. ISERMAN (D): An Algorithm for Solving the Transportation Problem with Multiple Linear Objective Functions

L. D. PYLE (USA): The Generalized Inverse in Linear Programming, a Generalization of the Simple Algorithm

„D" szekció: Discrete Programming
Elnök: A. W. TUCKER (USA)

J. ARAOZ—J. EDMONDS (USA): Master Semigroup Polyhedra

E. L. JOHNSON (USA): Development of a Subadditive Approach to Integer Programming

A. VOLPENTESTA (I): Finite Groups and Integer Linear Programs. An Unifying Survey and Some New Properties

F. WEINBERG (CH): A Necessary and Sufficient Condition for the Aggregation of Linear Diophantine Equations

Augusztus 25., délelőtt

Plenáris szekció
Elnök: W. ORCHARD-HAYS (USA)

J. TOMLIN (USA): A Survay of Recent Advances in Mathematical Programming Systems

L. V. KANTOROVICH—
J. V. ROMANOVSKIJ (SU): Optimization in Economics: Results, Difficulties and Perspectives

A. GEOFFRION (USA): What Every Modeller Should Know About Objective Function Approximations

Paralel szekciók

„A" szekció: Complementarity and Fixed Points
Elnök: O. L. MANGASARIAN (GB)

O. L. MANGASARIAN (GB): Characterization of Linear Complementarity Problems Solvable by Linear Programming

R. W. COTTLE (USA): On Solving Linear Complementarity Problems as Linear Programs

R. W. H. SARGENT (GB): An Efficient Implementation of the Lemke Algorithm and Its Extension to Deal with Upper and Lower Bounds

G. R. JAHANSHAHLOU—G. MITRA (GB): The Linear Complementarity Problem and a Tree Search Algorithm for its Solution

„B" szekció: Nonlinear Programming, Methods
Elnök: J. B. ROSEN (USA)

R. MIFFLIN (USA): An Algorithm for Nonsmooth Optimization

J. E. FALK (USA): On Solving Max-Min Problems

G. PIERRA (F): A New Algorithm for Quadratic Programming

G. CHRISTOV (BG): Hyperbolic Optimization Problem

A. W. TUCKER (USA): Least-Squares Extensions of General Linear Programs

„C" szekció: Application in Industry
Elnök: L. C. W. DIXON (GB)

A. H. O. BROWN (GB): The Development of a Computer Optimization Facility and its Use in Project Supersonic Engine Design

O. B. G. MADSEN (DK): On Optimal Cutting Problems

K. S. GILL (GB): Junction Control Strategies for an Automated Transit System

J. HÁRS (H) A Nonlinear Programming Model in the Production of Metallic Alloys

„D" szekció: SIGMAP Session Computer Practices
Elnök: S. GASS (USA)

D. KLINGMAN—J. MULVEY (USA): Applicability of Network Technology to Interactive Decision Making

C. COHEN—J. STEIN (USA): Dissemination and Maintenance of Mathematical Programming Software: Experience with M. P. O. S.

R. P. O'NEILL (USA): Experiences in Solving Mixed Linear-Nonlinear Programs

„E" szekció: Stochastic Programming
Elnök: B. BEREANU (R)

R. M. KARP (USA): Probabilistic Analysis of Travelling Salesman Algorithms

J. B. WETS (B): The Optimal Recourse Problem

K. K. DATTA—S. DAS GUPTA (India): On Large Scale Undiscounted Markov Decision Processes

G. SALINETTI (I): Convergence Questions in Stochastic Optimization

A. ORDEN (USA): A Study of Pivot Probabilistics in LP Tableaus

Augusztus 25., délután

„A" szekció: Discrete Programming
Elnök: E. L. JOHNSON (USA)

E. BALAS (USA): Some Recent Developments in 0—1 Programming

M. A. H. DEMPSTER—A. PUNTER—
C. H. WHITTINGTON (USA): Near Optimal Solution of Very Large Structured Integer Programming Problems Using Combinatorial Iteration Strategies

I. DIENES—L. B. KOVÁCS (H): Finding Maximal Restricted Chains of Discrete Graphs for the Solution of a Geological Problem: Setting up Stratigraphic Subdivisions

E. SEIFFART (DDR): On the Solution of a Queuing Problem

„B" szekció: Nonlinear Programming, Theory
Elnök: R. T. ROCKAFELLAR (USA)

F. H. CLARKE (USA):	Necessary Conditions Without Differentiability or Convexity
F. NOZICKA (CS):	Spherical Projection of Convex Sets
P. MAZZOLENI (I):	Constrained Optimization Problems for Setvalued Functions
M. AVRIEL (IL)—S. SHAILLE (D):	Second Order Characterizations of Pseudoconvex Functions
C. C. AGUNWAMBA (Nigeria):	Nonlinear Programming: Constraint Regularization

„C" szekció: Applications in Economics
Elnök: H. W. Kuhn (USA)

R. HOLUB—J. SOJKA (CS):	Analysis of Economics Structure Development by Means of Mathematical Programming
M. AUGUSZTINOVICS (H):	Applications for the Long Term Planning of the Hungarian Economy
R. L. FRANCIS—T. J. LOWE—E. W. REINHARDT (USA):	A One Pass Algorithm for a Warehouse Sizing Problem

„D" szekció: D. R. Fulkerson Memorial Session
Elnök: G. L. NEMHAUSER (USA)

G. B. DANTZIG (USA):	Fulkerson's Contribution to Large Scale Programming
J. EDMONDS (CND):	Totally Dual Integral Polyhedra
L. LOVÁSZ (H):	Primitive Simplices in Lattice Polyhedra
R. BLAND (USA):	Combinatorial Generalization of Linear Programming Duality

„E" szekció: Game Theory
Elnök: W. OETTLI (D)

L. S. SHAPLEY—B. PELEG—M. MASCHLER (USA):	Geometric Properties of the Kernel of a Game
I. DRAGAN (R):	Two Dimensional Concepts of Solution for Cooperative n-Person Games
M. A. LOPEZ CERDÁ—M. A. COBERNA TORRENT—J. T. PASTOR CIURANA (E):	The Alternative Theorems and Its Relation with the Game Theory and the Algebraic Topological Properties of R^n
K. LOMMATZSCH (DDR):	A Game Played by Linear Optimiziers
F. SZIDAROVSZKY (H):	The Concave Oligopoly Game

Augusztus 25., este

„A" szekció: Dynamic Programming and Control Theory
Elnök: H. TUY (Vietnam)

J. A. E. E. VAN NUMEN (NL):	Contracting Markov Decision Processes
F. A. VAN DER DUYN SCHOUTEN (NL):	Markov Decision Processes with Continuous Time Parameter
R. KLÖTZLER (D):	Multiobjective Dynamic Programming
A. I. PROPOI (SU):	Problems of Dynamic Linear Programming
V. E. KRINONOZHKO (SU):	A Method for Linear Dynamic Programs with the Use of Basic Matrices Factorization
S. P. CHEBORAREV (SU):	On the Use of Matrix Factorization Techniques in Penalty Function Methods for Structurized Linear Problems
Y. M. I. DIRICKX (B):	Approximations in Bayesian Dynamic Programming
M. S. SERTEL (D):	Simple Results on Compacts Acts Implying Solvability of Compact Dynamic Optimization Problems
J. WIJNGAARD (NL):	An Application of Dynamic Programming to a Building Game with Dominoes

„B" szekció: Nonlinear Programming, Unconstrained Optimization
Elnök: M. J. D. POWELL (USA)

G. P. MCCORMICK (USA):	Second Order Convergence Using a Modified Armijo Step-Size Rule fur Function Minimization

L. C. W. DIXON (GB): An On-Line Variable Metric Method
R. FLETCHER (GB): The Quest for a Natural Metric
E. SPEDICATO (I): Scaled Versus Unscaled Variable Metric Algorithms: a Computational Experience
V. I. SHMYRJOV (SU): Compact Method of conjugate Directions for Quadratic Programming

„C" szekció: Teachning of Mathematical Programming
Elnök: A. ORDEN (USA)
H. GREENBERG (USA): Mathematical Programming Systems
E. L. PETERSON (USA): Introductory Course on Nonlinear Theory
J. F. SHAPIRO (USA): Mathematical Programming Models as Integrators: Interdisciplinary Computer Systems Design and Use
C. VAN DO PANNE (CDN): Choices for a First Course in Mathematical Programming
J. J. M. BENNETT (AUS): The Teaching of Mathematical Programming to Computer Scientists
G. W. ROGERSON (AUS): A Case Study Approach to Teaching Mathematical Programming
H. MÜLLER-MERBACH (D): Develop-It-Yourself Programs in Mathematical Programming
C. COHEN (USA): The Practical USE of MP Codes in Teaching Optimization Modelling

„D" szekció: Graphs and Combinatorics
Elnök: F. WEINBERG (CH)
M. L. FISCHER (USA)—
G. L. NEMHAUSER (USA)—
L. A. WOOLSEY (B): Analysis of Approximations for Minimizing Submodular Functions
M. SAKAROVITCH (F): Connection in Matrices $\{-1, 0, +1\}$
T. L. LIEBLING (CH): Steiner's Problem of Graphs: Applications, Theory, Algorithms
P. KORHONEN (SF): An Algorithm for Transforming a Spanning Tree into a Steiner Tree
K. TRUEMPER (USA): Algebraic Characterizations of Unimodular and Totally Unimodular Matrices

Augusztus 26., délelőtt

Plenáris szekció:
Elnök: E. M. L. BEALE (GB)
P. WOLFE (USA): On Nondifferentiable Optimization
M. J. D. POWELL (USA): The Augmented Lagrangian Method for Nonlinear Constraints

Paralel szekciók:

„A" szekció: Optimization in Networks
Elnök: M. VLACH (CS)
J. MARQUEZ (Mexico): A Network Solution to a General Vehicle Scheduling Problem
K. TONE (J): On Optimal Pattern Flows
N. SIEBER (DDR): Optimization Questions in Networks
K. NEUMANN (D): Optimal Controlling of Gert Network
P. KAS (H): On a Special Type Job Sequencing Problem
C. DINESCU—B. SAVOLESCU (R): About the Maximum Flow in a Network

„B" szekció: Nonlinear Programming, Methods
Elnök: B. T. Poljak (SU)
D. P. BERTSFKAS (USA): Multiplier Methods: a Survey
A. CAMBINI—P. CARRARESI—
F. GIANNESSI (I): Sequential Methods for Mathematical Programming
J. J. STOODIOT—N. V. HIEN (B): An Exponential Penalty Method For Minimax Problem with Constraint

L. Corwell—M. Minkoff—H. Schultz (USA):	A Comparision of Several Augmented Lagrangian Functions
M. Hamala (CS):	A Quasibarrier Method for Convex Programming
A. A. Kaplan (SU):	A New Class of Penalty Functions and Bounds of Convergence Rate

„C" szekció: Linear Programming
Elnök: S. Vajda (GB)

H. Müller-Merbach (D):	Towards a Design Methodology of Linear Models
M. Rössler (CH)	Linear Programming with Nonlinear Parametrization
D. Granot—F. Granot (CDN):	A Parametric Primal Algorithm for Discrete Chebyshev Linear Approximation
I. Kun (H):	A Geometrical Approach to the Theory of Linear Inequalities
W. Thämmelt (DDR):	A Linear Programs in Topological Vector Lattices
C. J. Hegedűs (H):	On the Method of Succesive Projections

„D" szekció: Discrete Programming
Elnök: S. Walukiewicz (OL)

H. P. Williams (GB):	The Economic Interpretation of Duality for Practical Mixed Integer Programming
G. Castellani—F. Giannessi (I):	Decomposition Methods for Mixed Integer Program. Application to Staffing Problems
L. C. W. Dixon—P. Mazzoleni (I):	Mixed Integer Convex Programming
A. Brarley (USA):	Experiments with Mixed Integer Programming Models
M. A. Frumkin (SU):	The Iterative Process of Linear Function Optimization on Integer Points of a Cone
A. Bachem (GB):	Integer Linear Programming over Cones Using Generalized Fundamental Points

„E" szekció: Dynamic Programming and Control Theory
Elnök: G. S. Rubinstein (SU)

S. Zionts (USA):	Choosing Among Alternative Decisions Involving Multiple Criteria
O. Hellman (SF):	On the Theory of Search, a Case Where The Motion of the Target is Random
T. R. Gitshev (BG):	Linear Control System with Quadratic Integral Criteria of Effectivity
K. Schittkowski (D):	Discretization and Numerical Solution of a Time-Optimal Parabolic Boundary Value Control Problem
H. Maurer (D):	Contribution to Perturbation Theory of Infinite Nonlinear Programming Problem
Gy. Sonnevend (H):	Construction of Invariant Sets in a Partially Observed System Subject to Arbitrary Non-Stochastic Disturbances Using a Special Decomposition of Convex Sets
H. J. Sebastian (DDR):	Optimal Control of Discrete Processes with Uncomplete Information

Augusztus 26., délután

Paralel szekciók

„A" szekció: Application in Economics
Elnök: V. F. Pugatchov (SU)

E. R. Kamuntu (Kenya):	Mathematicál Programming for the Planning of Peasant Economy the Case for Uganda
T. D. Berezneva (SU):	The Structure of Equilibrium Levels in von Neumann Type Models
J. F. Shapiro (USA):	Steepest Ascent Decomposition Methods for Mathematical Programming / Economic Equilibrium Models
H. T. Burley (AUS):	Productive Efficiency Measures
Gy. Gábor (H):	Three Quasi-Equilibrium Economic Models
V. I. Jiaynov (SU):	Solution One Sector Dynamic Model with Technological Change

„B" szekció: Nonlinear Programming, Theory
Elnök: S. M. Robinson (USA)

R. T. Rockafellar (USA):	Greedy Prices: A Saddle Point Condition Characterizing Optimality in General Nonlinear Programming
K. O. Kortanek USA):	Perfect Duality in Generalized Linear Programming
P. O. Lindberg (S):	A Generalization of Fenchel Conjugation Leading to Generalized Lagrangians and Nonconvex Duality
E. G. Golstein—N. V. Tretyakov (SU):	Modified Lagrange Functions in Convex Programming and Their Generalizations
M. A. H. Dempster—J. B. Wets (USA):	On Regularity Conditions in Constrained Optimization: Variational Theory, Fritz John and Karush—Kuhn—Tucker Conditions

„C" szekció: Applications in Engineering Design
Elnök: F. Giannessi (I)

M. D. Grigoriadis (USA):	Near Optimal Methods for Designing Some Classes of Data Communication Networks
J. Krarup—P. M. Pruzán (DK):	Layout Planning, Evaluation and Optimization
H. Nguyen Mauch (CDN):	Optimal Mining in a Decentralized Framework
G. Lükő (H):	Unicity Theorem for Location Problem

„D" szekció: Stochastic Programming
Elnök: J. Dupacova (CS)

J. L. Balintfy (USA):	A Stochastic Programming Model of the Selective Menu Problem
B. Bereanu (R):	Stochastic — Parametric Linear Programs
R. G. Dyson (GB):	Minimax Solution to Stochastic Programs — an Aid to Planning Under Uncertainty
I. M. Stancu-Minasian (R):	On the Multiple Minimum Risk Problem
J. Mayer (H):	A New Method for the Solution of a Stochastic Programming Problem of A. Prékopa

„E" szekció: Testing and Validation of MP Software
Elnök: R. P. O'Neill (USA)

R. P. O'Neill (USA):	Comparison and Validation of Algorithmic Procedures in Mathematical Programming
M. L. Lenard (USA):	Testing Algorithms for Linearly Constrained Nonlinear Programming Using Randomly Generated Problems
R. S. Dembo—J. M. Mulvey (USA):	On the Analysis and Comparison of Mathematical Programming Algorithms and Software
E. Brocklehurst—K. Dennis (GB):	Testing Linear Programming Software

Augusztus 26., este

Paralel szekciók:

„A" szekció: Complementarity and Fixed Points
Elnök: R. W. Cottle (USA)

M. J. Todd (USA):	Optimal Dissection of Simplices
R. Jeroslow (USA):	Cutting-Planes for Complementarity Constraints
N. Meggiddo (IL)—M. Kojima (J):	On the Existence on Solutions in Nonlinear Complementarity Theory
L. Filus (PL):	Some Modification of the Sperner Lemma

„B" szekció: Nonlinear Programming, Unconstrained Optimization
Elnök: R. Fletcher (GB)

J. L. Coffin (CDN):	Nondifferentiable Optimization
A. Auslender (F):	Minimization of Convex Functions with Errors
L. Toint—F. M. Callier (B):	On the Accelerating Property of an Algorithm for Function Minimization Without Calculating Derivatives

„C" szekció: Application in Enginnering Design
Elnök: N. GLASSMANN (USA)

S. C. MUELLER—	Optimal Design of Processes Modelled in Polynomial
G. V. REKLAITIS (USA):	Functions Using Separable Programming
R. M. STARK (USA):	On Stochastic Zero-Degree Geometric Programming
A. W. JONES (USA):	Optimizing Remote Switching Design and Administration
M. FANER (PL):	On the Possibility of Optimization of Elastic Trusses by Pseudoboolean Programming

„D" szekció: Graphs and Combinatorics
Elnök: J. EDMONDS (CDN)

R. G. BLAND (B):	Pivoting on Orionted Matroids and Two New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method
R. E. BIXBY (USA):	Characterizing Ternay Matroids
P. M. CAMERINI—F. MAFFIOLI (I):	Polynomial Bounding for NP-Complete Matroid Problems
U. ZIMMERMANN (D):	Matroid Intersection Problems with Generalized Objectives
A. RECSKI (H):	Matroids and n-Ports

„E" szekció: Panel Discussion
Sponsored by the Working Committee on Algorithms
Issues in the Evaluation of Mathematical Programming Algorithms

Elnök:	H. J. GREENBERG (USA)
	R. H. J. JACKSON (USA)
	P. E. GILL (GB)
Résztvevők:	J. L. KREUSER (USA)
	F. A. LOOTSMA (NL)
	J. M. MULVEY (USA)
	R. P. O'NEILL (USA)
	J. A. TOMLIN (USA)

Augusztus 27., délelőtt

Plenáris előadások:
Elnök: E. G. GOHLSTEIN (SU)

J. ABADIE (F):	Solving Integer Nonlinear Programming Problems
H. TUY (Vietnam):	On Fixed Point Methods in Mathematical Programming and Some Related Questions

Paralel szekciók:

„A" szekció: Mathematical Programming Software
Elnök: J. M. MULVEY (USA)

F. A. LOOTSMA (NL):	Software Design for Nonlinear Optimization
I. M. ASSA (BG):	Computational Experience and Application with the Geoffrion's Algorithm
A. MEERAUS (AUS):	Toward a General Algebraic Modelling System
I. DEÁK (H):	Monte Carlo Evaluation of the Multidimensional Normal Distribution Function by the Ellipsoid Method

„B" szekció: Nonlinear Programming, Theory
Elnök: I. I. EREMING (SU)

K. H. ELSTER (DDR):	Recent Results in the Theory of Conjugate Functions
J. W. NIEUWENHUIS (NL):	Separating sets with Relative Interior in Frechet Spaces
J. TIND (DK):	Certain Kinds of Polar Sets and Their Relation to Mathematical Programming
M. R. SERTEL (D):	Simple Results on Compact Acts Implying Solvability of Compact Dynamic Optimization Problems
J. J. M. EVERS (NL):	A Duality Theory for Convex Infinite Horizon Programs
M. S. DUBSON (SU):	The Necessary Minimum Condition of $1+a$ Order and Duality in Non-Convex Programming

N. N. Astafiev (SU): An Approximation of Convex Program by Linear Programs

„C" szekció: Graphs and Combinatorics
Elnök: L. E. Trotter (USA)

R. E. Burkard (D): An Algebraic Approach to Combinatorial Optimization Problems
D. De Werra (CH): On Optimization in Edge-Chromatic Scheduling
I. Vasköví—M. Galbavy (H)—Yu. Kichatov (SU): Eigenvalues and Eigenvectors in Semi-Modules and Their Interpretation in the Theory of Graphs
G. Centkowski—P. Kosewski (PL): The Application of Bivalent Nonlinear Programming to the Linear Electronic Nework Synthesis Problem

„D" szekció: Discrete Programming
Elnök: L. B. Kovács (H)

J. A. Ferland—M. Florian (CDN): A Sub-Optimal Algorithm to Solve a Large Scale 0—1 Programming Problem
E. R. Brocklehurst—K. Dennis (GB): Computational Experience with Heuristic Algorithms for the Pure and Mixed Integer Programming Problems
E. H. McCall (USA): Zero-One Mixed Integer Programming Using Interactive Graphics
L. Slominski (SU): Bottleneck Assignment Problem: an Efficient Algorithm
L. Mihályffy (H): A Method of Successive Optima for Solving the Assignment Problem
A. N. Elshafei (EGY): An Algorithm for the Quadratic Assignment Problem

„E" szekció: Nonlinear Programming: Special Problems
Elnök: J. M. Bennett (AUS)

C. van de Panne—B. C. Jain (CDN): Transportation Type Method for the Plant Location Problem
K. Beer—K. Käschel (DDR): Column Generation in Quadratic Programming
H. Bernau (H): Upper-Bound-Techniques for Quadratic Programming
A. B. Yadikin (SU): A Parametric Approach to the Solution of Linear and Quadratic Programming Problems
G. R. Bitran—A. C. Hax (Brasilia): The Solution of Convex Knapsack Problems with Bounded Variables
S. Shaible (D): Recent Results in Fractional Programming
G. Kéri (H): On a Class of Quadratic Forms

Augusztus 27., délután

Paralel szekciók:

„A" szekció: Game Theory
Elnök: I. Dragan (R)

W. Oettli (D): The Principle of Feasible Directions for Continuous Minimax Problems
M. V. T. Sääksjärvi (SF): Wood Procurement as a Cooperative Game
M. Koehler (CH): A Game Theoretic Extension of a Dynamic Marketing Model
H. P. Young (USA): Power, Prices and Incomes in Voting Games
F. Lemvi-Fog (DK): A New Construction Management Game

„B" szekció: Nonlinear Programming, Theory
Elnök: F. Nozicka (CS)

I. I. Eremin (SU): Nonstationar Processes of Mathematical Programming
J. Szymanowski—A. Ruszczynski (PL): Convergence Analysis for Two-Level Algorithms of Mathematical Programming
F. Fazekas (H): Matrix Algorithmical Programming at Linear, Non-Linear and Stochastic Problems
J. L. Kreuser (USA): Superlinearly Globally Convergent Algorithm for Nonlinear Programming via Sequential Linear Programs

„C" szekció: Applications in Industry
Elnök: A. H. O. Brown (GB)

M. Černá—J. Krouzek (CS):	On The Use of Zero-One Programming for Finding an Optimal Solution of a Scheduling Problem in Steelworks Environments
O. Benli—P. Nanda (USA):	A Solution Procedure for Location-Allocation Production
R. Slowinski—J. Weglarz (PL):	An Algorithms for Solving a Certain Nonlinear Scheduling Problem

„D" szekció: Discrete Programming
Elnök: J. V. Romanovski (SU)

P. L. Hammer (CDN)—G. Gallo—B. Simeone (I):	Quadratic Knapsack Problem
G. D'Atri (I):	Lagrange Multipliers in Integer Programming
B. Vízvári (H):	Generalized Lagrange Multipliers in Integer Programming
J. L. Nicolas (F):	Non-Linear Optimization in Integers Problems and Hyghly Composite Numbers
R. Sosinski (PL):	New Tool for 0—1 Knapsack Problem $0(n)$ Reduction Algorithms and Dominance Constraint
Cs. Fábián (R):	An Algorithm for Integer-Nonlinear Programming

Paralel szekciók:

„A" szekció: Applications in Engineering Design
Elnök: H. P. Williams (GB)

J. M. Bennett (AUS):	Quadratic Programming and Piecewise Linear Networks, with Structural Engineering Application
H. Baier (D):	Multicriteria Decision Making in Design of Elastic Structures
E. Halmos—T. Rapcsák (H):	Optimal Sizing of Undefined Rod Structures
M. Machova (CS):	The State of Development and Application of Network Analysis in CSSR
J. Cerny—L. Slavicek (CS):	Comparison of the Methods for Convergence Promotion in the Chemical Engineering Simulation System
Cs. Ligeti—J. Tóth (H):	Some Problems of the Application fo Mathematical Programming in Agricultural Plants

„B" szekció: Nonlinear Programming: Methods
Elnök: B. Martos (H)

C. Lemarechal (F):	Combining Kelley's and Conjugate Gradient Methods
M. L. Lenard (USA):	Methods of Conjugate Directions for Linearly Constrained Nonlinear Programming
A. S. J. Batchelor—E. M. L. Beale (GB):	A Revised Method of Conjugate Gradient Approximation Programming
H. Tuy (Vietnam):	Improved Algorithms for Concave Programming Under Linear Constraints
S. L. Krynski (PL):	Minimization of a Concave Function Under Linear Constraint (Modification of Tuy's Methods)
V. I. Dimitru (R):	Some Problem and Results in UC Computer Optimization Techniques

„C" szekció: Stochastic Programming
Elnök: P. Kall (CH)

V. M. Ermoliev (SU):	Primal Methods for the Stochastic Extremum Problem with Nondifferentiable Functions
J. Dupacova (CS):	Experience in Multistage Stochastic Programming Models
K. Marti (CH):	Approximation to Stochastic Programs

„D" szekció: Discrete Programming
Elnök: P. L. HAMMER (CDN)

E. L. LAWLER—J. LABETOULLE (F): Scheduling of Prallel Machines with Preemtion
M. GUIGNARD—K. SPIELBERG (CDN): Maintenance Scheduling
P. J. BRUCKER (D): Sequencing Unit-Time Job with Treelike Precedence on m Machines to Minimize Maximum Lateness
M. T. MISZCZYNSKI— An Optimal Cutting Algorithms for Rectangle Elements
K. R. STERLEC (PL):
L. KAUFMANN (B): The Assignment Problem with Compatible Jobs

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Budapesti rendezvények

Január 2—3.
Ifjúsági Matematikai Kör téli ankétja
1. REIMAN ISTVÁN: A geometria új fejezetéről
2. URBÁN JÁNOS: A matematika axiómáiról

Január 5.
LUKÁCS JENŐ: A kétdimenziós gamma-eloszlás jellemzése

Január 15.
Választmányi ülés

Január 16.
B. J. GARDNER: Radicals and varieties of rings and algebras

Január 23.
Ifjúsági Matematikai Kör ülése; az 1976. évi Országos Középiskolai Tanulmányi verseny I. fordulójának feladatai

Február 13.
Ifjúsági Matematikai Kör ülése
SOUKUP LAJOS: A prímszámok érdekes tulajdonságairól

Február 27.
Kerekasztal-beszélgetés a matematika alkalmazásai és művelői helyzetéről (PRÉKOPA ANDRÁS—FISCHER JÁNOS)

Március 1.
P. LANCASTER: Állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek újfajta számelmélete

Március 2.
P. LANCASTER: Operátorpolinomok sajátértékeinek és sajátvektorainak numerikus számítása

Március 5.
Ifjúsági Matematikai Kör ülése
PINTZ JÁNOS: Újabb eredmények a prímszámok eloszlásáról

Március 19.
FISCHER JÁNOS: Idősorok és alakfelismerő módszerek a genetikában

Április 20.
Ankét „A hazai alkalmazott matematika helyzete és problémái" címmel

Március 22.
SZENDREI ÁGNES: Modulusok idempotens reduktjairól

Március 30.
W. SCHMIDT: Gleichverteilung und Ungleichverteilung

Április 9—10.
Ifjúsági Matematikai Kör tavaszi ankétja
CSIRMAZ LÁSZLÓ: Az invariancia-elv a kombinatorikában
MOLNÁR EMIL: A tükrözés — geometriáról
Az Országos Tanulmányi Verseny döntőjének feladatai; feladatmegoldások

Május 6.
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Operátorok és H^∞-beli függvények

Május 7.
G. KREWERAS: Some properties of the set of linear extensions of a finite partial order

Május 6—7.
R. M. DUDLEY: Second Derivatives of Convex Functions on R^k.
On multinominal probabilities.

Május 11.
R. A. DEVORE: Some problems in approximation theory

Május 21.
GÉCSEG FERENC: Automataelmélet
Május 24—28.
J. G. SINAI öt előadásból álló sorozatot tartott a következő témákban:
Markov mezők egyértelműsége és a fázisátalakulás problémája.
A fázisok leírása, fázisdiagramm konstrukciója az Isingmodell kis perturbációihoz.
Nem-Gauss határeloszlástétel és a kritikus indexek meghatározása Dyson-típusú hierarchikus modellekben.
Május 28.
A FLORIAN: Einige Extremaleigenschaften regulärer Polyeder
Június 7.
J. T. LEWIS: Some dynamical theories of Brownian motion
Június 8.
D. L. BURKHOLDER: Wiener folyamatok és klasszikus analízis
Június 5.
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatainak ismertetése, eredményhírdetés és díjkiosztás
(I. osztályosok feladatait SZOLCSÁNYI ENDRE, II. osztályosokét FRANK ANDRÁS ismertette)
Június 18.
1976-ban végző matematika szakos hallgatók klubdélutánja
SURÁNYI JÁNOS: Törekvések a matematika tanításának javítására
Június 25.
RÉNYI ALFRÉD emléktáblájának és a fasizmus áldozatai emlékére állított márványtáblának leleplezése. Emlékbeszédet mondott TURÁN PÁL és RÉVÉSZ PÁL.
Július 6.
E. LUKÁCS: A normális eloszlás egy jellemzésének stabilitásáról
Augusztus 16.
F. D. TALL: What set theory doing to mathematics
Augusztus 18.
LEE JONES: A combinatorial problems in probability theory
Augusztus 28.
R. W. QUACKENBUSH: An introduction to the Algebra of Social Choice
Augusztus 31—szeptember 3.
A Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Tudományos Akadémia által közösen irányított középiskolai matematikatanítási kísérletben résztvevő tanárok számára négy napos megbeszéléssorozat. Tematikája:
— a függvények és az analízis kísérleti tanítása az I—IV. osztályban
— a kísérlet három éves tapasztalatai
— beszámoló a karlsruhei nemzetközi matematikaoktatási kongresszusról
Szeptember 13.
T. A. DOWLING: On geometries associated with partially ordered sets
R. M. WILSON: On the exsistence of combinatorial designs
Szeptember 20.
G. ANGER: Inverse problems in differential equations
O. GERSTNER: Various types of reflexive rings
Szeptember 24.
Ifjúsági Matematikai Kör ülése
HÓDI ENDRE: Beszámoló a XVIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról
Október 30.
Kürschák József Matematikai Tanulóverseny
Október 18.
G. PILZ: Fastringe und ihre Anwendungen
Október 22.
Ifjúsági Matematikai Kör ülése
MAKAI ENDRE: Kombinatorikus geometriai problémák
Október 29.
ZIERMANN MARGIT: Készletutánpótlási eljárások matematikai modellezése
November 5.
RAPCSÁK TAMÁS—HALMOS ENDRE: Statikailag határozatlan rúdszerkezetek optimális méretezése
November 12.
LUGOSI GÁBOR: Termelésirányítási rendszerek és operációkutatás
Ifjúsági Matematikai Kör feladatmegoldó-délutánja PELIKÁN JÓZSEF vezetésével

November 19.
Sólyom Csaba: Olajkútfúrások hálóterves ütemezése
November 22.
A. Rosenberg: Recent progress in the structure theory of Witt rings of quadric forms
December 3.
Mayer János: Új algoritmus a STABIL sztochastikus programozási modell megoldására
December 10.
Dávid Gábor: Kísérletek a számítástudomány matematikai megalapozására
December 17.
Benkőné, Dobrosz, Lugosi: Egy autóbusz ütemezési rendszeréről
December 3.
Sz. L. Szoboljev kötetlen beszélgetés formájában ismertette a Szovjetunió Tudományos Akadémiája Novoszibirszki Matematikai Kutató Intézetében folyó kutatások főbb irányait
December 15.
Grünwald Géza és Farkas Gyula Emlékdíj kiosztása, a Schweitzer Miklós Emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása, a Diákköri konferenciára benyújtott dolgozatok külön díjainak kiosztása
December 29—30.
Ifjúsági Matematikai Kör téli ankétja
Csirmaz László: Érdekességek a polinomokról
Reimann István: A vetítés geometriai szerepe
Feladatmegoldások.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BAJAI CSOPORTJÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Május 20.
Wiegandt Richárd: Beszámoló az ishlamabadi egyetemen folyó postgraduális képzésről az algebraoktatás területén
Július 7—10.
Rátz László Vándorgyűlés
Október 14.
Dániel József: A programozott gyakorlatok szervezése műszaki főiskolákon

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BARANYA MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 18., február 5., március 3.
Vörös György: A matematikatanítás pszichológiai problémái
Január
Pálmay Loránd: Matematikai versenyelőkészítő előadás
Február
Reiman István: Matematikai versenyelőkészítés
Kiss Elemér: Tantárgy-koncentráció
Március
Kőváry Károly: Matematikai versenyfeladatok megoldása
Április 1., május 6., augusztus 30.
Selényi Géza: Geometriai transzformációk
Április 28.
Urbán János: Kombinatorikai vonatkozású feladatmegoldások
Május
Általános iskolai matematikai verseny megyei szinten
Zipernovszky kupa (mat. verseny 1—2. osztályosoknak)
Szeptember 7.
Vörös György: A matematikatanítás világnézeti problémái
November
Selényi Géza: A WANG-gép bemutatása
November 4.
Vörös György: A matematikatanítás világnézeti problémái II.
December 2.
Szabó Gizella: A BASIC-programozásról

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BÁCS-KISKUN MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Február

Az 1975. évi Bács-Kiskun megyei Matematikai Tanulmányi Verseny tapasztalatai (tanári ankét)

Március

NIZSALOVSZKY FERENC: Az audiovizuális oktatás lehetőségei a matematika tanításában

Április

HADI ISTVÁN: A matematikaoktatás a szakmunkások 3 éves szakközépiskolájában

Október

KÁLMÁN SÁNDOR: Bács-Kiskun megyei Matematikai Tanulmányi Verseny (I. ford.)

Folyamatos ellenőrzés lineáris egyenletrendszerek asztali számítógéppel történő megoldásánál

November

SÁRKÖZY ERNŐ: Számítógép a középiskolában

Bács-Kiskun megyei Matematikai Tanulmányi Verseny (II. ford.)

Neumann János Matematika Tanulmányi Verseny

A műszaki főiskolák matematika oktatóinak II országos konferenciája

December

A Bács-Kiskun megyei Matematikai Tanulmányi Verseny eredményhírdetése

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BORSOD MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Február 18.

KELEMEN JÓZSEF: A felvételi írásbeli és szóbeli tapasztalatai

Február 20.

HUSZTHY LÁSZLÓ: Programozott oktatási kísérlet a NME levelező tagozatán

Február 27.

NIKODÉMUSZ ANTAL: Differenciálható operátorok

Március 26.

ANDRÁSFAI BÉLA: Ötletek a topológia tanításához

Március 27.

NIKODÉMUSZ ANTAL: Versenyfeladatok megoldása

Április 16.

SMRCZ ERVIN—FARAGÓ ISTVÁN: A véges elemek módszerének alkalmazása parciális differenciálegyenletek megoldására és programcsomagjának ismertetése

Május 21.

VARGA LÁSZLÓ: A programozás módszertanának elvi és gyakorlati kérdései

November 25.

BIZÁM GYÖRGY: A Bolyai-geometria axiomatikus felépítésének ismertetése

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT CSONGRÁD MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 20.

GÉCSEG FERENC: Finnországi élménybeszámoló

Vezetőségválasztás

Február 6.

GÉCSEG FERENC: Fa-automaták és környezetfüggetlen nyelvek

Február 20.

NÉMETH JÓZSEF: Beágyazási tételek

Március 5.

GÉCSEG FERENC: Zártsági tételek a felismerhető fa-halmazok körében

Március 19.

GÉCSEG FERENC: Felismerhető fa-halmazokra vonatkozó eldöntési problémák

Április 2.

GÉCSEG FERENC: Reguláris fa-halmazok

Április 8.

HATVANI LÁSZLÓ: Waziewski topológiai módszere és alkalmazásai

Április 16.
GÉCSEG FERENC: Fa-automaták analízise és szintézise
Május 6.
HATVANI LÁSZLÓ: Az aszimptotikus stabilitás néhány módszeréről
Május 13.
GYŐRI ISTVÁN: A Ljapunov második módszerének alkalmazásai a differenciálegyenletek kvalitatív elméletében
Május 20.
TERJÉKI JÓZSEF: Mikolajska egy stabilitási tételének kiterjesztése aszimptotikus stabilitásra
Május 21.
GÉCSEG FERENC: Fa-automatákkal indukálható transzformációk
Május 26.
CSÁKÁNY BÉLA: Boole függvények zárt osztályai
Május 27.
POLLÁK GYÖRGY: Lineáris rekurzióval definiált sorozatok periodicitásáról
Június 3.
LENKEHEGYI ATTILA: Szabad parciálisan rendezett algebrák
Augusztus 23—27.
Félcsoportelméleti kollokvium
Szeptember 7.
H. KAISER: Some results and problems on complete universal algebras
Szeptember 8.
E. SZ. LJAPIN: Parciális gruppoidok folytatása félcsoporttá
Szeptember 15.
E. SZ. LJAPIN: 1. A modern algebra alapfogalmai
2. Parciális gruppoidok folytatása félcsoporttá II.
Szeptember 16.
E. SZ. LJAPIN: Parciális gruppoidok folytatása félcsoporttá III.
Szeptember 22.
E. SZ. LJAPIN: Parciális gruppoidok folytatása félcsoporttá IV.
Szeptember 23.
GYŐRI ISTVÁN: Driver egy eredményének általánosítása
Szeptember 24.
SIMON ENDRE: Értelmezők és fordítók
Szeptember 29.
1. E. SZ. LJAPIN: Azonosságok félcsoportokban
2. K. STRASSNER: Kongruenzverbände autonomer Semiautomaten
Október 6.
HUHN ANDRÁS: Kongruencia-varietásokról I.
Október 8.
SIMON ENDRE: A VDL axiómarendszere
Október 20.
HUHN ANDRÁS: Kongruencia-varietásokról II.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT FEJÉR MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

DUNAÚJVÁROS

Február 2.
PÁLMAY LÓRÁNT: Felvételi tapasztalatok
Március 23.
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Szakkör

SZÉKESFEHÉRVÁR

Január
A Fejér megyei középiskolások 1976. évi matematikai versenyének döntője
Február
Fejér, Pest és Veszprém megyei középiskolások matematikai versenye

Március
LÁNG HUGÓ: Lázár Dezső élete és munkássága
Október
VARGA TAMÁS: Az általános iskolai tanterv

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT GYŐRI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 16-án: Zalaegerszegi versenyfeladatok ismertetése
Előadó: MOLNÁR ERNŐ tanár
Január 20-án: Versenyelőkészítő feladatok
A Bolyai Farkas szakkör II. évfolyamának bővített ünnepi ülése
Előadó: SZABÓ RUDOLFNÉ tanár
Január 29-én: Feladatmegoldó délután tanároknak
Egyenlőtlenségek III.
Előadó: CZAPÁRY ENDRE BJMT elnök
Február 14-én: A számonkérés, folyamatos ellenőrzés különböző módszerei
A Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskolával közös rendezvény
1. Előadás: Számonkérés tesztvizsgával
Előadó: SCHARNITZKY VIKTOR főiskolai tanár
2. Előadás: Az objektív ellenőrzés és számonkérés lehetősége a főiskolai matematika oktatásában
Előadó: TÓTH JULIANNA adjunktus
3. Előadás: Folyamatos ellenőrzés lineáris egyenletrendszerek asztali számítógéppel történő megoldásánál
Előadó: KALMÁR SÁNDOR főiskolai tanár
Február 26-án: Feladatmegoldó klubdélután tanárok részére
Szélsőértékes feladatok megoldása szemléletes úton
Előadó: CZAPÁRY ENDRE megyei vezető szakfelügyelő
A Bolyai Farkas területi szakkörök foglalkozásai januárban három, februárban négy alkalommal történtek
Szakkörvezetők: ZSEBŐK OTTÓ tanár III. évfolyam
CZAPÁRY ENDRE III. évfolyam
SZABÓ RUDOLFNÉ IV. évfolyam
A szakkörök az OKTV és AD versenyfeladatait oldották meg
Február 14-én: Neumann János Matematikai Verseny feladatainak megoldása
Előadó: KUTI JÓZSEF főiskolai docens
Március 25-én: Lineáris programozás az ipari termelés szolgálatában
Előadó: TOMOR BENEDEK egy. adjunktus
Március 30-án: Megyei matematikai verseny értékelése
Eredményhirdetés
Előadó: MOLNÁR ERNŐ
Március 2., 16., 23. 30. Bolyai F. Interskoláris szakkör I. és II. oszt. részére 1972-től az Arany D. versenyfeladatokat dolgozta fel
Szakkörvezető: ZSEBŐK OTTÓ
Március 2., 9., 16., 23., 30. Interskoláris szakkör a III. oszt. részére
Inverzió
Szélsőértékfeladatok elemi megoldásai
Tanulmányi verseny 1976.
Március 1., 8., 22., 29. Interskoláris szakkör a IV. oszt. részére
Korábbi évek KÖMAL feladatai
Szakkörvezető: SZABÓ RUDOLFNÉ
Április 20., 27. az Interskoláris szakkörök Arany D. versenyfeladatokkal, függvényvizsgálattal, kombinatórikai feladatokkal foglalkoztak
Szeptember 29-én: Amire a feladatmegoldásnál ügyelni kell
Előadó: KECSKÉS ATTILA főiskolai adjunktus
Okt. 14-én: A modern matematika elemei az általános iskolai tantervben
TIT—Bolyai közös rendezvény
Előadó: IMRECZE ZOLTÁNNÉ vezető szakfelülgyelő
Október 27-én: Feladatmegoldó délután a III. és a IV. oszt. részére
Előadó: REIMAN ISTVÁN docens
November 18-án: A matematika ipari alkalmazásai

Előadó: KUTI JÓZSEF tanszékvezető főiskolai tanár
November 24-én: Kürschák verseny 1976.
Előadó: PÁLMAI LÓRÁNT
December 8-án: Feladatmegoldó délután az I. és II. oszt. részére
Előadó: MOLNÁR ERNŐ tanár

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BÉKÉS MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 5—6—7—8.
Fizikai dolgozók gyermekeinek egyetemi előkészítő tanfolyama
Április 6—7—8—9.
Fizikai dolgozók gyermekeinek egyetemi előkészítő tanfolyama
Április 7—8.
Az általános iskolai új matematika tanterv tanítására való felkészülés segítése
1. Műveletek halmazokkal, a halmazok tulajdonságai. Kapcsolat a tagadással.
2. A függvény fogalma, megadásának módjai
Április 8.
A tanulók érdeklődését felkeltő érdekességek az általános iskolai matematikai tantervben
Augusztus 26.
A kombinatorika alapjai
Augusztus 27.
A matematikai szakkörök vezetésének néhány problémája. Érdekes feladatok megoldása
Szeptember 3.
Kombinatorika, valószínűség, statisztika (kísérletek és ellenőrzésük az ált. iskolában)

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT HAJDÚ-BIHAR MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 8.
E. LUKÁCS: A többdimenziós Poisson-eloszlás jellemzéséről
Március 16.
MANFRED STERN: Standard ideálok AC-hálókban
Április 1.
W. M. SCHMIDT: Ein effektiver Thuescher Satz für algebraische Funktionen
Április 21.
V. V. FILIPPOV: Topologikus terek dimenzióelméletének modern problematikája
Május 15.
MOÓR ARTHÚR: Frenet formulák skalárgörbületű terekben
Május 28.
JAN STANKIEWICZ: Modular Majorization and Inclusion of Domains
Június 11.
ADOLF KOTZAUER: Das digitalgraphische System DIGRA 73.
Szeptember 14.
MAURER GYULA: Reláció-struktúrák

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT HEVES MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Február 23.
KELEMEN ENDRE vezetésével kerekasztal tanácskozás
Március 25.
HÓDI ENDRE feladatmegoldó délutánt tartott középiskolás tanulók részére
Április 23.
RUZSA IMRE: A geometria és a valóság
Október 4.
PELLE BÉLA—NAGY LAJOSNÉ: Beszámoló a karlsruhei nemzetközi matematikaoktatási konferenciáról
Október 14.
PALOTAI MIHÁLY: Az új tantervek bevezetésének tapasztalatai, a matematikai versenyek eredményei

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT NÓGRÁD MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 20.
ORAVECZ L.: Trigonometrikus egyenletek megoldásának problémái
BOGNÁR MIHÁLY: Tanulói tevékenykedtetés módszere a szakmunkásképző intézetekben
Március 4.
SZABÓ SÁNDORNÉ: A matematika és a szakmai tárgyak kapcsolata a szakmunkásképző intézetekben
BORBÉNYI LÁSZLÓNÉ: Ismétlő-rendszerező órák a N. osztályban
TÓBIÁS A.: Az egyenes koordináta geometriája
Október 11.
RÁBAI IMRE: A halmazalgebra és matematikai logika elemeinek alkalmazása, egyenlőtlenségek megoldásában
SZEBERÉNYI E.: Az egy szintre hozás lehetőségei a szakmunkásképző intézetekben
November 3.
FRIED ERVIN: Gráfokról. Versenyfeladatok (Középiskolai mat. délután)
December 7.
ALMÁSI LAJOS: A függvénytranszformációk és geometriai transzformációk kapcsolata
GÁBRI KATALIN: A trigonometria felépítésének egy lehetősége

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT KOMÁROM MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

November 11. KÁRTESZI FERENC: A matematikai gondolkodás fejlődése
November 12. KÁRTESZI FERENC: Korszerűsítési törekvések a középfokú oktatásban (Tata).
December 10. HERCZEG JÁNOS: A teljes hatvánnyá kiegészítés (Tatabánya)
December 16. MEGGYESI LÁSZLÓ: A teljes indukció (Esztergom)

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SOPRONI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 22. KÁTAI IMRE: Differenciálegyenletek megoldása kevés aritmetikai művelettel
Március 26. TOMOR BENEDEK: Lineáris programozás
Ugyanekkor a megyei matematikai verseny eredményhirdetése
Előadó: MOLNÁR ERNŐ győri tagozati titkár
Március 31. BARÓTI BÉLA: Számítógép bemutató
Április 1. SZENTE JÁNOS: A Mieses-féle motoralgebra megalapozása
Szeptember 30. MEGGYESI LÁSZLÓ: A tökéletes számok

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SZABOLCS-SZATMÁR MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Március 9. FITOS LÁSZLÓ: A gondolkodás fejlesztése a geom. órákon
Március 9. VARECZA ÁRPÁD: A matematikatanítás világnézeti kérdései
Április 6. MARTOS JÁNOSNÉ: A matematikai logika elemei az ált. isk. tananyagban
Április 23. DARVASI GYULA: Halmazok és relációk
Május 14. BEREZNAI GYULA: Relációk, függvények
Szeptember 14. MAURER GYULA: Reláció-struktúrák

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VAS MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Január 8. Matematikai klubdélután. A Vas megyei Bolyai verseny feladatainak bemutatása: SZÍVÁS JÁNOS, FARKAS GELLÉRT, MÁROVITS FERENC
Február 25. Úttörő vetélkedő lebonyolítása a Nagy Lajos Gimnáziumban: KARÁTH LÁSZLÓ
A szombathelyi Tanárképző Főiskola I. matematikai szakestje: SZÍVÁS JÁNOS
Március 30. Új tagok beszervezése
Matematikai klubdélután a kőszegi gimnáziumban
Az általános iskolások szombathelyi matematikai versenye: VITÁLYOS SÁNDOR

Április. A celldömölki gimnázium nyilvános klubdélutánja: Dr. Kikindai Kristófné
A szombathelyi Tanárképző Főiskola II. matematikai szakestje: Beliczky Tibor
Május. A szentgotthárdi Gimnázium matematikai klubdélutánja: Kovács Gyuláné
Június 28—július 10. Fizikai dolgozók középiskolába beíratkozott gyermekei részére tanfolyam szervezése és lebonyolítása: Horváth Béla
Augusztus 27. Matematikai szakmai értekezlet Szombathelyen a középiskolai tanárok részére: Horváth Béla
Szeptember 1. A fizikai dolgozók gyermekei részére szervezett bentlakásos tanfolyam értékelése: Horváth Béla (A tanfolyam hallgatói közül 124 tanulót vettek fel felsőfokú intézetekbe, 75%)
Szeptember 20. Az 1976. évi Vas megyei Bolyai Középiskolai verseny szervezése: Szívás János, Farkas G., Márovits F. és Horváth Béla
A szombathelyi Tanárképző Főiskola III. matematikai szakestje: Bognár Stefánia
November 18. Az 1976. évi Vas megyei középiskolai matematikai verseny. 873 tanuló jelentkezett versenyünkre.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VESZPRÉM MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

I. Előadások
Február 16. Császár Ákos: A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközei
Március 8. Farkas Miklós: Matematikus-mérnök szakos képzés a Budapesti Műszaki Egyetemen
Március 25. Császár Ákosné: Matematika oktatás a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karán
Április 29. Kósa András: A függvény fogalma
November 15. Kósa András: A közönséges differenciálegyenletek elméletének alaptételei

II. Továbbképzés
Áprilisban (egy hét): Az általános iskolai és a középiskolai tanárokból kiválasztott 26 fő számára a matematika tanításával kapcsolatos tanfolyam
(Ezen a tanfolyamon képeztük ki a megye matematika tanításának antenna hálózatát.)
Június vége — július eleje (egy hét): A speciális matematika tagozaton tanító tanárok számára tanfolyam
Szeptember 3. A veszprémi középiskolai matematikai módszertani munkaközösség számára módszertani előadás

III. Tanulók, hallgatók foglalkoztatása
1. Fejér—Pest—Veszprém megyék közti középiskolai matematika verseny megrendezése
2. A Kis Matematikusok Baráti Köreinek szakmai patronálása. (A TIT megyei szervezetével közösen.)

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT ZALA MEGYEI TAGOZATÁNAK 1976. ÉVI RENDEZVÉNYEI

Szeptember 17. Cseke Zoltán: Halmazok, műveletek halmazokkal I.
Szeptember 24. Pintér Ferenc: A halmazelmélet alkalmazása az általános iskolában. Feladatok, játékok
Október 1. Cseke Zoltán: Műveletek halmazokkal II.
Október 8. Cseke Zoltán: Matematikai logika alapjai
Október 15. Pintér Ferenc: Különböző alapú számrendszerek
Október 22. Pintér Ferenc: Műveletek végzése különböző alapú számrendszerekben
Október 29. Cseke Zoltán: Logikai ítéletek, műveletek logikai ítéletekkel
November 12. Pintér Ferenc: Kombinatorika I.
November 19. Pintér Frenc: Kombinatorika II.
November 26. Cseke Zoltán: Számfogalom felépítése. Számosság problémája.

KÖNYVISMERTETÉS

MAURER GYULA—VIRÁG IMRE: BEVEZETÉS A STRUKTÚRÁK ELMÉLETÉBE Kolozsvár—Napoca, Dacia, 1976.

Majdnem negyedszázad telt el Rédei Algebrájának megjelenése óta, s ez idő alatt az algebra tudományáról alkotott képünk jócskán megváltozott. Bármilyen előremutató volt is annakidején Rédei algebra-felfogása, már régen esedékes, hogy az említett változásokat tükröző új magyar nyelvű monográfia jelenjen meg. A két kolozsvári szerző műve ugyan szerényebb célt tűz maga elé, elsősorban nem a szakembernek, hanem a tanulónak szól, de egyben egy hasonló tárgyú monográfia útját is egyengeti s így ebben a vonatkozásban is úttörő munkának tekinthető, amellett, hogy az első magyar nyelvű tankönyv ebben a tárgykörben (Szendrei János főiskolai tankönyve jellegénél fogva nem mehetett túlságosan mélyre). Ezért örömmel és fokozott érdeklődéssel vettük kézbe a gondos kiállítású kötetkét.

Az első hat fejezet (a könyvnek mintegy harmadrésze) a halmazelméleti és logikai alapokat fekteti le. A 7. fejezet a lezárási rendszer (a szerzők „zárási"-t mondanak) és a szűrő fogalmát tárgyalja, a következő kettő pedig a relációs, ill. algebrai struktúrákat. A relációs struktúrák közül különösen a különböző rendezett és előrendezett struktúrákkal foglalkozik részletesen. Az utolsó három fejezet a klasszikus egy- és kétműveletes struktúrákról, illetve az operátorstruktúrákról szól.

A könyv igen alapos, helyenként valósággal minuciózus gonddal készült munka. Kétségkívül jó szolgálatot fog tenni mind az ismereteit felfrissíteni kívánó tanárnak, mind az anyaggal először ismerkedő egyetemistának, olyan részleteket is megvilágítva, melyek kidolgozására egyetemi előadás keretében nem jut idő. Hátterében sokéves oktatói tapasztalat érződik, mely lehetővé teszi a szerzőknek, hogy az általános tárgyalásmód ellenére se tévesszék szem elől a didaktikai célokat. Az új fogalmakat számos példa világítja meg, mégpedig általában nem ad hoc példák, hanem e fogalmak fontos matematikai alkalmazásai. Az is a szerzők didaktikai érzékét — vagy inkább tudását dícséri, hogy azokat a nehéz halmazelméleti bizonyításokat, melyek csak magának a halmazelméletnek szempontjából érdekesek, mint pl. az ekvivalencia tételé vagy a jólrendezési tételé, bölcs önmérséklettel nem végzik el, nem törődve az e tekintetben megcsontosodott „játékszabályokkal". Sok esetben a megszokottól eltérő megvilágításba helyezik egyik-másik struktúrát, hogy ezzel közelebb hozzák az olvasóhoz, így a 3.6.2 fixponttételben, mely tulajdonképpen egy fontos reprezentáció-elméleti tétel elemi alakja, vagy a 10.4.8 tételben a csoport bináris műveletének „prioritásáról" a másik két művelettel szemben, mely jelentéktelen apróságnak tűnhet, de a kezdőnek bizonyosan hasznára van. Az olvasót változatos tipográfia segíti a könnyebb áttekintésben.

A hazai és az erdélyi matematikusok közötti kapcsolatok elégtelen voltának következménye, hogy szóhasználatunk elég sok ponton eltér egymástól. Kívánatos lenne közös terminológia kidolgozása (a belföldi sem egységes), két esetben azonban mindenképpen a nálunk használt kifejezéseket részesíteném előnyben: a szerzők „kancellatív" (félcsoport, gyűrűelem stb.) helyett „reguláris"-t mondanak, ami a nemzetközi szaknyelvben más értelmet kapott, továbbá a könyvben szereplő „algebrai struktúra" kifejezés helyett (bár ez nálunk is használatos) a felépítés inkább az „algebra" elnevezést kívánja, mivel most a „részstruktúra" szó két különböző jelentéssel fordul elő.

Egy esetleges második kiadásban az „Algebrai struktúra" című 9. fejezetet jó lenne néhány ponttal bővíteni. Fel lehetne venni pl. az egyenletekkel definiált kongruenciákat, a Birkhoff-tétel másik felét (bizonyítással), s különösen a racionális ekvivalencia fogalmát. Ez utóbbira szükség is volna, enélkül ugyanis homályban marad, hogy az olyanféle algebrai struktúrák, mint a csoport, hogyan alkothatnak varietást, ha két- vagy háromműveletes struktúrának tekintjük őket, míg egyműveletes struktúraként nem definiálhatók azonosságokkal. Ezzel kapcsolatban az is tisztázásra szorul, hogy a részalgebrák függenek az alapműveletektől.

Végül még két kritikai megjegyzés. 1. A kiválasztási axiómáról néhány téves, illetve vitatható állítás szerepel 6.4.27-ben. 2. A háló, mint relációs struktúra részstruktúráinak a szerzők csak a

részalgebrákat tekintik. Ez a következetlenség könnyen elkerülhető lenne a terminológia módosításával: a szóbanforgó relációs struktúra nevezhető hálószerűen rendezett struktúrának, s ennek részstruktúrái persze nem azonosak a megfelelő háló részalgebráival.

POLLÁK GYÖRGY

RÉNYI ALFRÉD: VÁLOGATOTT MUNKÁI I—III. (Szerk.: TURÁN PÁL)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976, 628 oldal, 646 oldal, 667 oldal

Három kötetben jelent meg RÉNYI ALFRÉD 156 cikkét tartalmazó válogatás, mely lényegében véve RÉNYI egész tudományos munkásságát felöleli. Mindhárom kötet tartalmazza TURÁN PÁLNAK RÉNYIRŐL írt angolnyelvű életrajzát, valamint RÉNYI összes munkáinak jegyzékét, melyet MEDGYESSY PÁL állított össze. Ez az összeállítás összesen 355 munkát sorol fel, ebben az említett 156 cikken kívül könyvei, esszéi, népszerűsítő munkái, jegyzetei stb. is szerepelnek. A kötetben és jelen ismertetésben az egyes cikkek számozása az összes munkát felsoroló jegyzék sorszámaira utal és ennek a sorrendnek megfelelően, tehát nagyjából időrendi sorrendben kerültek bele a válogatásba. Így az I. kötet a 3. sorszámú cikkel kezdődik, a 127. számúval végződik, 1948—1956 közötti 52 cikket tartalmaz. A II. kötet az 1956—1961-ben írt 128. és 188. számok közötti 48 cikket foglal magában, míg a III. kötet cikkeinek száma 56, sorszámai 193. és 355. közöttiek, megjelenési dátumuk pedig 1962—1970. A legtöbb cikk nyelve angol (az eredetileg magyar és orosz nyelvű cikkeket lefordították), de van néhány francia és német nyelvű cikk is a gyűjteményben. A 156 cikk közül 93-nak RÉNYI az egyedüli szerzője, a többit társszerzővel együtt írta. Leggyakrabban, szám szerint 29-szer ERDŐS PÁL neve szerepel a társszerzők között.

RÉNYI ALFRÉD munkássága, így válogatott cikkeinek témája is rendkívül sokrétű. Munkásságának részletesebb ismertetésére vonatkozólag utalunk a Matematikai Lapok 21. évfolyamának (1970) 3—4. számára. Válogatott cikkeinek gyűjteménye szinte kivétel nélkül tartalmazza az ott felsorolt eredményeket. A témakörökben való tájékozódást jelentősen elősegítik az egyes cikkek után írt kommentárok, melyek egyrészt összefogják RÉNYINEK ahhoz kapcsolódó dolgozatait, másrészt ismertetik a témakörben elért további eredményeket. A kommentátorok: BÁRTFAI PÁL, CSISZÁR IMRE, FRITZ JÓZSEF, HALÁSZ GÁBOR, KATONA GYULA, RÉVÉSZ PÁL, SZÁSZ DOMOKOS, SZEMERÉDI ENDRE, VINCZE ISTVÁN. A válogatott cikkgyűjtemény bizonyára nagy hatással lesz e témakörök további vizsgálatára, hiszen itt együtt megtalálhatók azok az alapvető eredmények és módszerek, melyekre olyan sokat hivatkoznak, és melyek további kutatásokat és eredményeket ösztönöztek. Mert RÉNYINEK legtöbb cikke alapvető jelentőségű az adott témakörben, további fontos vizsgálatok kiindulópontja. Cikkei nem csak eredményekben hoztak újat, hanem többnyire az alkalmazott módszerekben is, melyek mindig elegánsak, szellemesek és rendkívül hatásosak.

A cikkek részletes ismertetésére természetesen nem térhetünk ki, de igyekszünk a fontosabb témakörök szerint csoportosítani a 3 kötetben található dolgozatokat. Ez nem mindig könnyű feladat, hiszen sok cikk több témakörbe is besorolható. Ismeretes, hogy Rényi első jelentős eredményeit a számelméletben érte el, ezért eggyel kezdjük a felsorolást.

Számelmélet. Az 1962-ben megjelent 200. sz. cikk angol fordítása az 1948-as orosz nyelvű cikknek, mely a Goldbach sejtéssel kapcsolatos híres eredményét tartalmazza: bármely páros szám felbontható egy prím és egy „majdnem prím" összegére. Külön fel szeretnénk hívni a figyelmet TURÁN PÁLNAK e cikkhez fűzött kommentárjára, mely kimerítően ismerteti mind e témakör, mind pedig a cikkben alkalmazott szitamódszer RÉNYI és mások által történt továbbfejlesztését és az ehhez kapcsolódó eredményeket. Rényit már ez a témakör is elvezette a valószínűségszámításhoz, így további számelméleti cikkei többnyire erősen valószínűségszámítási jellegűek. A szitamódszer, főleg a Linnik féle „nagy szita" vizsgálatával és továbbfejlesztésével foglalkoznak még a 14., 15., 20., 23., 29., 155., 161., 315. sz. dolgozatok, de ide sorolhatjuk az ezzel szorosan összefüggő maximálkorrelációról írott 166. sz. cikket, amely a valószínűségszámításban is jelentős.

Alapvető a prímosztók számával kapcsolatos 112. sz. és főleg a 144. sz. cikk. További számelméleti függvényekkel foglalkozik a 210., 250. és 251. sz. dolgozat. Igen jelentős eredményeket ért el RÉNYI a valószínűségszámítási módszerek számelméleti alkalmazását illetően. A 151. sz. cikk egy nagy összefoglaló dolgozat ebből a tárgykörből. Ide sorolható még a diofantikus approximációval foglalkozó 135. sz. és véletlen egész számok additív tulajdonságairól szóló 170. sz. cikk is.

A 7., 8., 17., 19., 26., 27. sz. cikkek is fontos számelméleti problémákat tárgyalnak.

Sok cikk tartozik a *valós számok reprezentációja* tárgykörbe, mely mind számelméleti, mind valószínűségszámítási szempontból érdekes. Ezek a 12., 117., 139., 150., 152., 157., 164., 199. és 247. sz. cikkek, melyek főleg Cantor-, Engel- és Sylvester-sorokkal, a lánctört kifejtésnek és általánosításainak ergodikus és metrikus tulajdonságaival foglalkoznak. A felsoroltak közül külön megemlítjük az irodalomban sokat idézett 164. sz. ERDŐS—RÉNYI cikket, mely a Cantor-sorokra vonat-

kozó fontos eredményeken kívül egy jól alkalmazható elégséges feltételt ad a Borel—Cantelli lemma divergens felére.

Valószínűségszámítás. Rendkívül nagy jelentőségű és hatású RÉNYI valószínűségszámítási munkássága. Ezen belül is igen sok témával foglalkozott és ért el jelentős eredményeket, ezért a valószínűségszámítást több kisebb tárgykörre bontjuk.

Határeloszlások. Elsősorban a véletlen tagszámú összegek határeloszlásával foglalkozó 133. és 169. sz. cikkeit kell megemlíteni, de ide sorolhatjuk a keverő sorozatokra vonatkozó 148. és 153. sz., valamint a stabilis sorozatokra vonatkozó 209. és 211. sz. cikkeket is. A 119. sz. cikk csoportokon értelmezett valószínűségi változókkal foglalkozik, a 162. sz. cikk véges sokaságból vett mintára, a 171. sz. cikk bolyongásra, a 184. és 195. sz. cikk bizonyos urna-problémákra vonatkozó határeloszlásokat tárgyal. Ebbe a tárgykörbe sorolható még a 36. és 128. sz. cikk is. A 109. sz., HÁJEKKEL közös cikkben a Kolmogorov egyenlőtlenség messzemenő általánosítását adják, melyet ma az irodalomban mindenütt Hájek—Rényi egyenlőtlenségnek neveznek. A Kolmogorov egyenlőtlenséggel foglalkozik még a 116. és 185. sz. cikk is.

Poisson folyamat. Több szempontból vizsgálta RÉNYI a Poisson-folyamatot. Erre vonatkozó fontos eredményeit a 39., 50., 69., 127., 228., 284. és 287. sz. cikkek tartalmazzák.

Rendezett minta. A 84. sz. cikkben publikálta RÉNYI alapvető eredményeit a Kolmogorov próba módosításával kapcsolatban. Az ott bevezetett statisztikákat ma az irodalomban Rényi-statisztikáknak nevezik. Új és rendkívül elegáns az a módszer is, amellyel itt és 94.-ben ezen statisztikákra és általában a rendezett mintákra vonatkozó eloszlásokat és határeloszlásokat nyernek. Ebbe a tárgykörbe tartozik a 69. és 301. sz. cikk is.

Feltételes valószínűségi mezők. Ezt a témát maga Rényi kezdeményezte és célja az volt, hogy olyan problémákat is tudjon valószínűségszámítási szempontból tárgyalni, melyeknél nem véges mértékek lépnek fel. Ide tartozik 110., 120., 131., 237. sz. cikk.

Több cikk foglalkozik *események valószínűségére vonatkozó egyenlőtlenségekkel.* Ezek 181., 188., 215., 303.

Érdekes és újszerű problémát tárgyal a 342. sz. ERDŐS—RÉNYI cikk, melyben egy *új nagy számok törvényét* mondanak ki és bizonyítanak. Ezt ma az irodalomban „Erdős—Rényi-féle nagy számok törvénye"-nek nevezik.

Egyéb valószínűségszámítási témák közül a 31. és 229. sz. cikkek *karakterizációs problémákat*, a 149. sz. cikk egy *térkitöltési problémát* tárgyal, a 194. sz. cikk pedig *kiemelkedő elemekkel* foglalkozik.

Gyakorlati alkalmazás. Rendkívül sokoldalú elméleti munkái mellett igen jó érzékkel foglalkozott RÉNYI főleg a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásaival is. Ilyen tárgyú cikkei a 67., 68., 88., 100., 106., 122., 124., 165., 230. és 341. számúak.

Információelmélet. Az ide tartozó cikkek 3 alcsoportba oszthatók: az *információelmélet alapjait* (entrópia, dimenzió, stb.) tárgyalja a 121., 143., 159., 160., 174., 175., 180. és 242. sz. cikk. Az *információelmélet statisztikai vonatkozásai* témakörbe tartozó alapvető dolgozatok: 231., 236., 265., 266., 285., 288., 305., 328. A harmadik csoport, az ún. *kereséselmélet*, melyben RÉNYINEK több alapvető eredménye is van. Ide sorolhatók a 182., 187., 193., 213., 249., 344. sz. dolgozatok.

Valószínűségszámítás alkalmazása a matematika többi ágában. A számelméleti alkalmazásokról már szóltunk, de RÉNYI igen sok további cikkében is előszeretettel és eredményesen alkalmazott valószínűségszámítási módszereket a matematika többi ágában. Így pl. *véletlen konvex poligonokkal* foglalkozik a 208., 223., 302. cikk, *véletlen mátrixokkal* a 214., 304 cikk, *szummációs módszerekkel* a 136., 168. cikk, míg a 132. tárgya *Bernstein-polinomok*, a 186-é a *Legendre polinomok*, a 318-é *véletlen egész függvények*, a 198-é egy *Zygmund probléma*, az 59. sz. cikk pedig egy *Steinhaus-sejtés* megválaszolása. A 350. sz. cikk, melyet a Kanadai Matematikai Kongresszusra készített, a témáról egy nagy összefoglaló dolgozat.

Kombinatorika és gráfelmélet. A számelméleti, valószínűségszámítási és információelméleti cikkek között is jócskán akad kombinatorikai vonatkozású. A 3 kötetben található gráfelméleti cikkek a következők: 158., 163., 167., 172., 183., 201., 216., 260., 263., 286., 332., 343., 347. Ezek témája főleg véletlen gráfok, összefüggő gráfok, fák bizonyos tulajdonságai, Prüferkód, stb. Kombinatorikai tárgyú még a 118. sz. cikk is.

Komplex függvénytan. Van RÉNYINEK néhány cikke, melyek közvetlenül nem valószínűségszámítási vonatkozásúak. A számelméleti és gráfelméleti cikkein kívül talán legjelentősebbek a komplex függvénytani cikkei, melyek bizonyos együttható becslésekre, gyökök számára, egyrétű függvényekre, stb. mondanak ki fontos tételeket. Ezek a cikkek: 24., 30., 123., 134., 145., 146., 154., 212., 244.

Végül meg szeretnénk jegyezni, hogy kimaradt néhány cikk, melyet nem tudtunk besorolni a fenti témakörök egyikébe sem. Természetesen ezek is érdekesek és fontosak, de talán túl speciális témájúak ahhoz, hogy ilyen általános jellegű ismertetésben megemlítsük. Lehetséges, hogy az általunk követett besorolás is szubjektív és önkényes. E sorok írója elnézést kér azoktól, akik más besorolást tartottak volna célszerűnek, és más cikkeket tartottak volna említésre méltónak. Ment-

ségére szabadjon idézni TURÁN PÁLT, aki ezt írja RÉNYIRŐL (Mat. Lapok 21. évf. 3—4. sz. 199. old.) „Munkássága olyan sokrétű, hogy egyetlen matematikus nemigen akad, aki azt adekvát módon át tudná fogni". Válogatott cikkeinek puszta áttekintése is csak megerősíti ezt a megállapítást.

CSÁKI ENDRE

D. O. SKLARSZKIJ—N. N. CSENVOC—I. M. JAGLOM: VÁLOGATOTT FELADATOK ÉS TÉTELEK AZ ELEMI MATEMATIKA KÖRÉBŐL

I. rész, Aritmetika és algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

Pólya György és Szegő Gábor ma már klasszikus feladatgyűjteményének megjelenése óta kimondva vagy hallgatólagosan ez a példakép a feladatgyűjtemények készítői és a mérce a bírálók számára. Nos, a SKLARSZKIJ—CSENCOV—JAGLOM szerzőhármas műve állja az összehasonlítást. Mint az előszóban hangoztatják, nem a középiskolai matematika tananyag mélyebb megértését akarják elősegíteni, hanem új ötletekkel és módszerekkel ismertetik meg az olvasót: az önálló kutatás örömével.

A könyv 320 számozott feladatot tartalmaz. Az egyes témakörök: bemelegítő feladatok, számjegyek változtatásával kapcsolatos feladatok, számok oszthatóságával kapcsolatos feladatok, különböző aritmetikai feladatok, egyenletek megoldása az egész számok körében, összegek és szorzatok meghatározása, különböző algebrai feladatok, polinomok algebrája, komplex számok, néhány számelméleti feladat, nevezetes egyenlőtlenségek, számsorok, sorozatok.

Ezek a feladatcsoportok nagyjából függetlenek egymástól, bár sokszor előfordul, hogy egy későbbi fejezetben kimondott általános tételnek speciális esetei korábban már szerepeltek.

A feladatok nehézségi foka igen különböző. Akadnak egészen egyszerűek is, de például az is feladat (251. sz.), hogy minden pozitív egész szám felírható legfeljebb 53 egész szám negyedik hatványának összegeként. A nehéz, illetve különösen nehéz feladatokat egy és két csillag jelöli.

A szerzők következetesen ragaszkodnak a címben jelzett „elemi"-séghez, jóllehet a számelméleti függvények vagy a kongruencia fogalmának alkalmazásával a közölt megoldások egyszerűbben elmondhatók lennének. A könyv terjedelmének jelentős részét a megoldások részletes ismertetése foglalja le. A szerzők egy feladatnak nem ritkán több megoldását is közlik. A könyv végén találhatók a feladatok eredményei, illetve az általában egymondatos útbaigazítások.

A gondos fordítói munka dícséretet érdemel.

SZÉP ANDRÁS

KÉZIKÖNYV AZ IDEIGLENES MATEMATIKA TANTERV 2. OSZTÁLYOS ANYAGÁNAK TANÍTÁSÁRÓL

Szerzői: CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER
MERŐ LÁSZLÓ
VARGA TAMÁS

Szerkesztette: CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER

A kézikönyv szerzői és bírálói az ideiglenes tanterv készítésében, illetve alkalmazásában résztvevő pedagógusok. Így nemcsak a matematikatanítással szemben támasztott „kor-követelményeket" ismerik, hanem a megvalósítás lehetőségeit is, az azt befolyásoló objektív és szubjektív tényezőket. Ez tükröződik szerkezetében, a fejezetek tárgyalásmódjában.

A kézikönyv nevében rejlő rendeltetése miatt a tananyag feldolgozásán túl sokkal többre vállalkozik, szemléletet alakít, módszerre tanít, és ahol szükséges, új matematikaismeretet nyújt a pedagógus számára.

Az első fejezetben megfogalmazza a matematikatanítás előtt álló feladatokat, hangsúlyozva a képességfejlesztést, mint korkövetelményt. A módszertani irányelvekben az új arányokban jelentkező feladat megvalósításához nyújt segítséget. Ennek több pontja tartalmazza azokat az eljárásokat, melyekkel tekintettel lehetünk a tanulók ismereteiben, képességeiben fennálló különbségre. (Ez igen jól hasznosítható a hátrányos helyzetben élők számára.) Felhívja a figyelmet a frontális osztályfoglalkoztatás mellett a munkaszervezésnek más formájára is (pl. egyéni és kiscsoportos munka, az osztály felbontása). Hangsúlyozza a munkaeszközök jelentőségét, amit addig használ a tanuló, amíg szüksége van rá.

MTA Könyvtára
Periodika 19 78/2096 n.

A könyv tantervi része az 1. osztályéhoz hasonlóan 5 fejezetben csoportosítja a tananyagot.

1. Halmazok, logika
2. Számtan, algebra
3. Relációk, függvények, sorozatok
4. Geometria, mérések
5. Kombinatorika, valószínűség, statisztika (megkülönböztetve a törzs- és kiegészítő tananyagot).

A követelményekben rögzíti azokat az ismereteket, melyek a 3. osztályban való továbbhaladáshoz szükségesek. A törzsanyagnak csak egy része szerepel követelményként, másik része előkészítő vagy érlelő jellegű.

A heti bontású tanmenetjavaslat és munkalapok, feladatkártyák lényege, szerepe, felhasználásának ismertetése után kerül sor a részletes feldolgozására.

Igen körültekintően tárgyalja a tananyagot, a legmegfelelőbb módszereket, a munkaeszközök használatát, a munkalapok feladatainak megoldását. Itt találhatók a szükséges elméleti ismeretek, melyek a pedagógus önképzését is szolgálják, segítséget nyújtva a következők tanításához is.

Szeretném külön kiemelni a mellékletként megjelenő Feladatkártyákat. A szétszedhető, feladatokra vágható lapon egy-egy „szöveges feladat" található. Ezek nem mindig alapműveletekre vezethető problémákat tartalmaznak, van köztük olyan is, amelyet tevékenységgel, rajzzal oldanak meg a gyerekek. A pedagógus többféle céllal használhatja fel (differenciálás, aktualizálás, hiányok pótlása, stb.). Az egy-egy alkalomra legmegfelelőbb kiválasztásában a „szél-lyuksor" nyújt igen ötletes segítséget. Így választhatók ki a feladatok a törzs- és kiegészítő anyag, a téma, a nehézségi fokozat, a megoldások száma és módja szerint. További előnye az, hogy folyamatosan bővíthető.

Keresettsége azt bizonyítja, hogy nemcsak a komplex-matematikát tanítók használják kézikönyvként.

NAÁL LÁSZLÓNÉ

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Budai László
A kézirat beérkezett: 1977. VI. 8. — Terjedelem: 18,55 (A/5) ív
77-3395 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

CONTENTS

PAUL TURÁN (18. Aug. 1910—26. Sept. 1976.) 211
List of works of PAUL TURÁN 212
The mathematical work of PAUL TURÁN I.
1. J. SZABADOS: Approximation theory 223
2. P. ERDŐS and M. SZALAY: Statistical group theory and theory of partitions 229
3. M. SIMONOVITS: Influence of Turán on graph theory 239
LÁSZLÓ KALMÁR (27. March 1905.—2. Aug. 1976.) 251
P. ERDŐS My personal and mathematical reminiscences of László Kalmár 253
RÓZSA PÉTER (17. Febr. 1905.—16. Febr. 1977.) 257
P. TURÁN: To the memory of mathematician victimes of the fascism 259
K. BÖRÖCZKY: Sphere packing in spaces of constant curvature I. 265
Á. CSÁSZÁR: Angles and circular functions 307
ÁGOTA TEMESVÁRI: On the extremum of power sums of distances 329
I. RUZSA: Progress or retrogress on the way of tiching mathematics 343
Report on the M. Schweitzer Mathematical Competition in 1976. 353
Problems 370
Activity of the Society 377
Book-review 417

СОДЕРЖАНИЕ

Пал Туран (18 08. 1910—26. 09. 1976) 211
Список трудов Пала Турана 212
Математическая деятельность Пала Турана I.
1. Ёжеф Сабадош: Теория аппроксимации 223
2. Пал Ердёш и Михай Салаи: Статистическая теория групп и теория разбиений 229
3. Миклош Шимонович: Влияние Пала Турана в теории графов 239
Ласло Калмар (27. 03. 1905—02. 08. 1976) 251
Пал Ердёш: Некоторые личные и математические воспоминания о Ласло Калмаре 253
Рожа Петер (17. 02. 1905—16. 02. 1977) 257
Пал Туран: Воспоминания о математиках, павших жертвами фашизма 259
Карой Бёрёцки: Пополнение сферами в пространствах постоянной кривизны. I.
1. Понятие «плотности» в n-мерном гиперболическом пространстве 265
Акош Часар: Углы и угловые функции 307
Агота Темешвари: Об экстремуме степенных сумм расстояний 329
Имре Ружа: Вперёд или назад по пути реформы преподавания математики 343
Доклад о мемориальном математическом конкурсе имени Миклоша Швейцера 1976-ого года 353
Задачи 370
Из жицни общества 377
Обзор книг 417

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

1828—1978

MEGJELENT AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS 150. ÉVÉBEN

INDEX: 25 564
ISSN 0025-519X