312.046
2
23
1972

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

23. évfolyam, 1972

1-2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1973. március — 23. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Császár Ákos, Fejes Tóth Lásztó, Kalmár László, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest 1061 VI., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*. Pénzforgalmi jelzőszám: KHI. 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Az 1972. évi Állami díjjal kitüntetett Fejes Tóth László és Makai Endre dolgozatainak jegyzéke 1

Fejes Tóth László: Egy záródási tétel 9
Kurt Mahler: Transzcendens számok II. 13
K. Hartig és Surányi János: Kombinatorikai és geometriai meggondolások a számelméletben 25
Hoffmann György és Surányi László: A prímszámtétel első aritmetikai bizonyításának ismertetése 31
Lovász László: A szita-formuláról 53
Halász Gábor: Statisztikus interpoláció 71
Pelikán József: A csoportelmélet legegyszerűbb megoldatlan problémái 89
Ngnyên Xuân Ký: Fourier-transzformáltak módosított folytonossági modulusáról 99
Komlós János, Sulyok Miklós és Szemerédi Endre: Egy kombinatorikus számelméleti segédtétel 103
Szalay Mihály: J. W. S. Cassels egy tételéről 109
Szemerédi Endre: Teljes négyest nem tartalmazó gráfokról 113
Oláh Gyula: Ültetett fákról 117
Ifj. Makai Endre: Síkbeli halmazok kisebb részekre osztása 129
Fejes Tóth Gábor: Szabályos sokszöghöz vezető iterációs eljárások 135
Névai G. Pál: Lagrange-féle interpoláció a valós tengelyen 143
Deák Jenő: Az általánosított Faber-sorok néhány tulajdonsága 147
Rosta Vera: Három főkör egy extremális helyzete 161
Rupp Márta: Ritka mátrixok invertálása gráfok segítségével 163
Kelemen József: Megjegyzések egy diofantoszi egyenletrendszerhez 173
Feladatrovat 187
Társulati élet 195
Könyvismertetés 211
Új könyvek 213

300.519
JCH 312.046

MATEMATIKAI LAPOK

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

23. ÉVFOLYAM, 1972

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

MATEMATIKAI LAPOK

23. évfolyam, 1972

TARTALOMJEGYZÉK

G. Birkhoff: Az algebra mai fejlődési irányai ..... 237—256
Császár Ákos tudományos munkái ..... 234—236
Deák Jenő: Az általánosított Faber-sorok néhány tulajdonsága ..... 147—160
Fejes Tóth Gábor: Szabályos sokszöghöz vezető iterációs eljárások ..... 135—142
Fejes Tóth László: Egy záródási tétel ..... 9—12
Fejes Tóth László dolgozatainak jegyzéke ..... 1—5
Halász Gábor: Statisztikus interpoláció ..... 71—88
K. Hartig és *Surányi János:* Kombinatorikai és geometriai meggondolások a számelméletben ..... 25—30
Hoffmann Andor: Víztároló áramlási viszonyainak meghatározása C-szummálható sorok alkalmazásával ..... 291—296
Hoffmann György és *Surányi László:* A prímszámtétel első aritmetikai bizonyításának ismertetése ..... 31—52
Hortobágyi István: Konvex lemezek Newton-számáról ..... 313—318
Juhász István és *Petruska György:* Császár Ákos ötven éves ..... 217—233
Kelemen József: Megjegyzések egy diofantoszi egyenletrendszerhez ..... 173—186
Komlós János, Sulyok Miklós és *Szemerédi Endre:* Egy kombinatorikus számelméleti segédtétel ..... 103—108
Kun Kuti Márton: A K_n determináns alkalmazásáról ..... 337—348
Lovász László: A szita-formuláról ..... 53—70
K. Mahler: Transzcendens számok II. ..... 13—24
Makai Endre dolgozatainak jegyzéke ..... 7—8
Ifj. Makai Endre: Síkbeli halmazok kisebb részekre osztása ..... 129—134
Nagy Zsigmond: A Ramsey-szám egy konstruktív becslése ..... 301—302
Névai G. Pál: Lagrange-féle interpoláció a valós tengelyen ..... 143—146
Névai G. Pál: Fourier-sorok és interpoláció I. ..... 261—290
Ngnyên Xuân Ký: Fourier-transzformáltak módosított folytonossági modulusáról ..... 99—102
Ngueyen Mong Hy: Páratlan rendű affin Galois-síkok ellipszise mint affin szabályos sokszög ..... 303—312
Oláh Gyula: Ültetett fákról ..... 117—128
Pelikán József: A csoportelmélet legegyszerűbb megoldatlan problémái ..... 89—98
Rosta Vera: Három főkör egy extremális helyzete ..... 161—162
Rupp Márta: Ritka mátrixok invertálása gráfok segítségével ..... 163—172
Schmidt Tamás: Elmélkedés egy iskolásoknak szánt algebrakönyv ürügyén ..... 349—354
Surányi János: Véges Abel-csoportok egy előállításmódjáról ..... 257—260
Szabados József: Egy komplex egységkörre vonatkozó interpolációs problémáról ..... 297—300
Szalay Mihály: J. W. S. Cassels egy tételéről ..... 109—112
Szekeres István: A tanulás folyamatának függvénytani leírása ..... 319—336
Szemerédi Endre: Teljes négyest nem tartalmazó gráfokról ..... 113—116
Jelentés az 1972. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről ..... 355—384
Feladatrovat ..... 187—194, 385—390
Társulati élet ..... 195—210, 391—406
Könyvismertetés ..... 211—213, 407—410
Új könyvek ..... 213—215, 410—412

79-4294 — Szegedi Nyomda

FEJES TÓTH LÁSZLÓ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1. Des séries exponentielles de Cauchy. Comptes Rendus de Paris 200 (1935) 1712—1714.
2. Sokszögekre vonatkozó szélsőértékfeladatokról. Középisk. Mat. Fiz. Lapok 13 (1937) 1—4.
3. A Cauchy-féle exponenciális sor. Mat. Fiz. Lapok 45 (1938) 3—20.
4. Poliéderekre vonatkozó szélsőértékfeladatok. Mat. Fiz. Lapok 45 (1938) 191—199.
5. Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen. Compositio Math. 6 (1939) 456—467.
6. Two inequalities concerning trigonometric polynomials. J. London Math. Soc. 14 (1939) 44—46.
7. Über zwei Maximumaufgaben bei Polyedern. Tohoku Math. J. 46 (1939) 79—83.
8. A simuló n-lapról. Mat. Fiz. Lapok 46 (1939) 141—145.
9. Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschrift 46 (1940) 83—85.
10. Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe. Compositio Math. 7 (1940) 474—476.
11. Sur un théorème concernant l'approximation des courbes par des suites de polygones. Annali di Pisa 18 (1940) 1—3.
12. Egy extremális soklapról. Mat. Ter.-tud. Ért. 59 (1940) 476—479.
13. Einige Extremaleigenschaften des Kreisbogens bezüglich der Annäherung durch Polygone. Acta Sci. Math. 10 (1943) 164—173.
14. Über eine Extremaleigenschaft der Kegelschnittbogen. Monatshefte für Math. Phys. 50 (1943) 317—326.
15. Über die dichteste Kugellagerung. Math. Zeitschrift 48 (1943) 676—684.
16. Az egyenlőoldalú háromszögrács, mint szélsőértékfeladatok megoldása. Mat. Fiz. Lapok 49 (1942) 238—248.
17. A szabályos testek, mint szélsőértékfeladatok megoldásai. Mat. Term.-tud. Ért. 61 (1942) 471—477.
18. A lehűlés Fourier-soráról. Mat. Term.-tud. Ért. 61 (1942) 478—495.
    61 (1942) 478—495.
19. Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jahresbereicht DMV 53 (1943) 66—68.
20. Egy gömbfelület befedése egybevágó gömbsüvegekkel. Mat. Fiz. Lapok 50 (1943) 40—46.
21. Über einige Extremaleigenschaften der regulären Polyeder und des gleichseitigen Dreiecksgitters. Ann. Pisa (2) 13 (1943) 51—58.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

22. Az ellipszis izoperimetrikus és az ellipszoid izepifán tulajdonságáról. Mat. Term.-tud. Ért. 62 (1943) 88—94.
23. A gömbfelületet egyenlő felszínű konvex részekre osztó legrövidebb görbehálózat. Mat. Term.-tud. Ért. 62 (1943) 349—354.
24. A térnek egy szélsőértékfeltételt kielégítő felbontása soklapokra. Mat. Fiz. Lapok 51 (1944) 3—19.
25. Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben. Acta Sci. Math. Nat. Kolozsvár 23 (1944) IV.+54.
26. Über die Fouriersche Reihe der Abkühlung. Acta Sci. Math. 8 (1946) 28—36.
27. Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt. Acta Sci. Math. 8 (1946) 93—95.
28. Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise. Comm. Math. Helv. 17 (1944/45) 256—261.
29. Mittlere Trefferzahlen und geometrische Wahrscheinlichkeiten (Társszerző: H. Hadwiger) Experientia 3 (1947) 1—10.
30. Über Mittelwerte in einem Bereichsystem (Társszerző: H. Hadwiger) Bul. Polit. Iasi 3 (1948) 29—35.
31. An inequality concerning polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 139—146.
32. Approximation by polygons and polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 431—438.
33. On ellipsoids circumscribed and inscribed to polyhedra. Acta Sci. Math. 11 (1948) 225—228.
34. The isopiphan problem for n-hedra. Amer. J. Math. 70 (1948) 147—180.
35. New proof of a minimum property of the regular n-gon. Amer. Math. Monthly 54 (1947) 589.
36. Inequalities concerning polygons and polyhedra. Duke Math. J. 15 (1948) 817—822.
37. Übei die mittlere Schnittpunktszahl konvexer Kurven und Isoperimetrie. Elemente der Math. 3 (1948) 1.
38. On the densest packing of convex domains. Kon. Ned. Acad. Wet. 51 (1948) 189—192.
39. Onthe total length of the edges of a polyhedron. Kon. Nors. Vid. Selks. Forhand. 21 1948) 32—34.
40. On (the densest packing of circles in a convex domain. Kon. Nors. Vid. Selks. Forhand. 21 (1948) 68—70.
41. Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung. Comm. Math. Helv. 23 (1949) 342—349.
42. On the densest packing of spherical caps. Amer. Math. Monthly 56 (1949) 330—331.
43. Extremum properties of the regular polyhedra. Can. J. Math. 2 (1950) 22—31.
44. Ausfüllung eines konvexen Bereiches durch Kreise. Publ. Math. 1 (1949) 92—94.
45. Some packing and covering theorems. Acta Sci. Math. 12 (1950) 62—67.
46. Covering by dismembered convex discs. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 806—812.
47. A Brunn—Minkowski-féle tételről. Mat. Lapok 1 (1950) 211—217.
48. Az izoperimetrikus probléma. Mat Lapok 1 (1950) 363—383; 2 (1951) 34—45.
49. Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung. Acta Math. Sci. Hung. 1 (1950) 273—376.
50. A legsűrűbb gömbelhelyezésről. Első Magyar Mat. Kongr. Közl. (1950) 619—642.

51. Über gesättigte Kreissysteme. Math Nachr. 5 (1951) 253—258.
52. Über den Affinumfang. Math. Nachr. 6 (1951) 51—64.
53. Ein Beweisansatz für die isoperimetrische Eigenschaft des Ikosaeders. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3 (1952) 155—163.
54. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin, 1953. X+197.
55. Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953) 103—110.
56. Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953) 111—114.
57. On close-packings of spheres in spaces of constant curvature. Publ. Math. 3 (1953) 158—167.
58. Über die dichteste Horozyklenlagerung. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5 (1954) 41—44.
59. Extremum properties of the regular polytopes. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6 (1955) 143—146.
60. Annäherung von Kurven durch Kurvenbogenzügen. Publ. Math. 3 (1954) 273—280.
61. Megjegyzések Dowker sokszögtételeihez. Mat. Lapok 6 (1955) 176—179.
62. Characterozation of the nine regular polyhedra by extremum properties. Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956) 31—48.
63. On the volume of a polyhedron in non-Euclidean spaces. Publ. Math. 4 (1956) 256—261.
64. Über die dünnste Horozyklenüberdeckung. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956) 95—98.
65. Triagles inscrits et circonscrits àune courbe convexe sphérique. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956) 163—167.
66. On the sum of distances determined by a point set. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1957) 397—401.
67. Pontok elhelyezése egy tartományban (Társszerző: Erdős Pál). MTA III. Oszt. Közl. 6 (1956) 185—190.
68. Szabályos alakzatok. MTA III. Oszt. Közl. 7 (1957) 39—47.
69. Filling of a domain by isoperimetric discs. Publ. Math. 5 (1957) 119—127.
70. Über eine Extremaleigenschaft des fünf- und sechseckigen Sternes. Elemente der Math. 13 (1958) 32—34.
71. Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise. (Társszerző: Molnár József) Math. Nachrichten 18 (1958) 235—243.
72. Über Extremaleigenschaften der regulären Polyeder. Izvesztija na Mat. Inszt. Bulg. Akad. Nauk. 4 (1959) 121—128.
73. Annäherung von Eibereichen durch Polygone. Math.-Phys. Semesterberichte 6 (1959) 253—261.
74. Über eine Punktverteilung auf der Kugel. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959) 13—19.
75. An extremal distribution of great circles on a sphere. Publ. Math. 6 (1959) 79—82.
76. Eräitä „kauniita" ekstremaalikuvioita. Arkhimedes No. 2 (1959) 1—10.
77. Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung. Archiv der Math. 10 (1959) 307—313.
78. An arrangement of two-dimensional cells. Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math. 2 (1959) 61—64.
79. Körbe és kör köré írt sokszögekről. Mat. Lapok 10 (1959) 23—25.

80. Sur la représentation d'une population infinie par une nombre fini d'éléments. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10 (1959) 299—304.
81. Verdeckung einer Kugel durch Kugeln. Publ. Math. 6 (1959) 234—240.
82. Filling of a domain by equiareal discs. (Társszerző: Heppes Aladár) Publ. Math. 7 (1960) 198—203.
83. Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie. Elemente der Math. 15 (1960) 25—36.
84. On shortest nets with meshes of equal area. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960) 363—370.
85. Über eine Volumenabschätzung für Polyeder. Monatshefte für Math. 64 (1960) 374—377.
86. On the stability of a circle packing. Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math. 3—4. (1960/61) 63—66.
87. Regular figures. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1964. XI+339 pp. — Reguläre Figuren. Akadémiai Kiadó, Bp. 1965. 316. pp.
88. Dichteste Kreispackungen auf einem Zylinder. Elemente der Math. 17 (1962) 30—33.
89. Über stabile Körpersysteme. (Társszerző: Heppes Aladár) Compositio Math. 15 (1963) 119—126.
90. On primitive polyhedra. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962) 379—382.
91. Isoperimetric problems concerning tesselations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 14 (1963) 343—351.
92. The total length of the edges of a non-Euclidean polyhedron with triangular faces. (Társszerző: H. S. M. Coxeter.) Quarterly Journal of Math. Oxford, 2nd series, 14 (1963) 273—284.
93. On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra. MTA Mat. Kut. Int. Közl. 8.A (1963) 53—57.
94. Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Vielecke. MTA Mat Kut. Int. Közl. 8.A (1963) 299—302.
95. Mi a „diszkrét geometria"? MTA III. Oszt. Közl. 13 (1963) 229—238.
96. Újabb eredmények a diszkrét geometriában. MTA III. Oszt. Közl. 13 (1963) 341—354.
97. On the total area of the faces of a four-dimensional polytope. Canadian Journ. of Math. 17 (1965) 93—99.
98. Two-dimensional honeycombs. (Társszerző: M. N. Bleicher.) Amer. Math. Monthly 72 (1965) 969—973.
99. What the bees know and what they do not know. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 468—481.
100. Circle-packings and circle-coverings on a cylinder. (Társszerző: M. N. Bleicher) Michigan Math. Journ. 11 (1964) 337—341.
101. Minkowskian distribution of discs. Proc. of the Amer. Math. Soc. 16 (1965) 999—1004.
102. Minkowskian circle-aggregates. Math. Annalen 171 (1967) 97—103.
103. Regions enclosed by convex domains. (Társszerző: Heppes Aladár) Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966) 413—417.
104. Mehrfache Kreisunterdeckungen und Kreisüberdeckungen auf der Kugel. Elemente der Math. 21 (1966) 34—35.
105. Distribution of points in the elliptic plane. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965) 437—440.

106. Packings and coverings in the plane. Proc. Coll. Convexity, Copenhagen, 1965 (1967) 78—87.
107. On the permeability of a circle-layer. Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966) 5—10.
108. Eine Kennzeichnung des Kreises. Elemente der Math. 22 (1967) 25—27.
109. On the arrangement of houses in a housing estate. Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967) 37—42.
110. Close packing of segments. Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math. 10 (1967) 57—60.
111. On the number of equal discs that can touch another of the same kind. Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967) 363—367.
112. Über das Didosche Problem. Elemente der Math. 23 (1968) 97—101.
113. On the permeability of a layer of parallelograms. Studia Sci. Math. Hungar. 3 (1968) 195—200.
114. A variant of the problem of the thirteen spheres. (Társszerző: Heppes Aladár) Canad. J. Math. 19 (1967) 1092—1100.
115. Solid circle-packings and circle-coverings. Studia Sci. Math. Hungar. 3 (1968) 401—409.
116. Über die Nachbarschaft eines Kreises in einer Kreispackung. Studia Sci. Math. Hungar. 4 (1969) 93—97.
117. Egy sokszög oldalainak hatványösszegéről. Mat. Lapok 19 (1968) 55—58.
118. Három lemez Dido-helyzetéről. Mat. Lapok 19 (1968) 9—12.
119. Remarks on a theorem of R. M. Robinson. Studia Sci. Math. Hungar. 4 (1969) 441—445.
120. Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969) 375—381.
121. Über eine affininvariante Masszahl bei Eipolyedern. Studia Sci. Math. Hungar. 5 (1970) 173—180.
122. Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások. Mat. Lapok 20 (1969) 15—23.
123. Perfect distribution of points on a sphere. Periodica Math. Hungar. 1 (1971) 25—33.
124. Über Scheiben mit richtungsinvarianter Packungsdichte. Elemente der Math. 16 (1971) 58—59.
125. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. 2. Auflage. Die Grundlehren der Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 65. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972. XI+238 pp.
126. Punktverteilungen in einem Quadrat. Studia Sci. Math. Hung. 6 (1971) 439—332.
127. Distribution of points on convex polyhedra. Periodica Math. Hungar. 4 (1973) 9—18.
128. Remark on a paper of C. H. Dowker. (Társszerző: Fejes Tóth Gábor.) Periodica Math. Hungar. 3 (1973) 271—274.
129. On totally separable domains. (Társszerző: Fejes Tóth Gábor) Acta Math. Acad. Sci. Hung. 24 (1973) 229—232.
130. Lencsék legsűrűbb elhelyezése a síkon. Mat. Lapok 22 (1971) 209—213.
131. On the density of a connected lattice of convex bodies. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 24 (1972) 373—376.
132. Five-neighbour packing of convex discs. Periodica Math. Hungar. 6 (1975).
133. Egy záródási tétel. Mat. Lapok. 25. (1974).
134. On the thinnest non-separable lattice of convex plates. (Társszerző: E. Makai) Studia Sci. Math. Hungar. 9 (1974)

MAKAI ENDRE DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1. Über eine Eigenwertabschätzung bei gewissen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Compositio Mathematica, 6, 1939, 368—374.
2. Asymptotische Abschätzung der Eigenwerte gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Annali della Scuola Normale di Pisa, II. 6., 1941, 123—126.
3. Bizonyos másodrendű differenciálegyenletek sajátértékeinek becslése. Matematikai és Fizikai Lapok, 48, 1941. 510—532.
4. A property of mean of harmonic functions. Rend. Circolo Matem. di Palermo 63, 1941, 33—40.
5. Zur Berechnung der Eigenfrequenzen inhomogener Saiten. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 22, 1942, 167—168.
6. Rácsháromszögekről és rácsparallelogrammákról. Matematikai és Fizikai Lapok, 50, 1943, 47—50.
7. Über die Nullstellen von Funktionen, die Lösungen Sturm—Liouville'scher Differentialgleichungen sind. Commentarii Mathematici Helvetici 16, 1944, 153—199.
8. On a monotonic property of certain Sturm—Liouville functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3, 1952, 165—172.
9. On systems of polynomials orthogonal in two intervals. Publ. Math. Debrecen, 2, 1952, 222—228.
10. A note on the solution of Heun's differential equation in a special case. Publ. Math. Debrecen, 3, 1953, 140—143.
11. A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods. I. Publ. Math. Debrecen, 5, 1957, 5—37.
12. A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods. II. Public. Math. Debrecen, 5, 1958, 269—274.
13. A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods. III. Contiguous systems. Publ. Math. Debrecen, 6, 1959, 204—213.
14. On the inequality of Mathieu, Publ. Math. Debrecen, 5, 1957, 204—205.
15. On a maximum problem. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9, 1958, 105—109.
16. An estimation in the theory of diophantine approximations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9, 1958, 299—307.
17. Steiner type inequalities in plane geometry. Periodica Polytechnica, Budapest, 3, 1959, 345—355.
18. On the principal frequency of a membrane and related problems. Czechoslovak Math. Journal, 9, 1959, 66—70.
19. Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam. Acta Sci. Math. Szeged, 20, 1959, 33—35.

20. The first main theorem of P. Turán. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10, 1959, 405—411.
21. On generalizations of an inequality due to Pólya and Szegő. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12, 1961, 189—191.
22. Membránok alaphangjáról. Műszaki Egyetem Évkönyve, Budapest, 1961. 242—246.
23. On a minimum problem. Annales Univ. Sci. Budapest, 4, 1961.
24. Principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam. Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. (Essays in honor of G. Pólya) Stanford Univ. Press., 1962, 227—231.
25. Sur la convergence des séries de Fourier des fonctions de carré sommable. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 1893—1895.
26. Hermite expansion and distribution of zeros of polynomials (Turán Pállal együtt). Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. 8 (1963) 157—163.
27. Fundamental frequencies of two and three dimensional membranes. Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. 8 (1963) 109—123.
28. On a minimum problem II. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 15 (1964) 63—66.
29. On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions. I. Publ. Math. Debrecen, 11 (1964) 101—118.
30. On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions, II. Publ. Math. Debrecen 12 (1963) 89—106.
31. A lower estimation of the principal frequencies of simply connected membranes, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965) 319—323.
32. The dimensioning of gas pipe lines (Fonó Alberttal együtt) Acta Tech. Hung. 50 (1965) 64—67.
33. Eine untere Abschätzung des Grundtons einer Membran. Zeitschr. ang. Math. u. Mech., 46 (1966) T 124—125.
34. A proof of Saint-Venant's theorem on torsional rigidity. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966) 419—422.
35. A property of Dirichlet's kernel. Studia Sc. Math. Hung. 1 (1966) 11—16.
36. On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions III. Studia Sci. Math. Hung. 2 (1967) 43—48.
37. A maximum problem connected with polynomials, Indian J. of Math. 9 (1967) 451—455.
38. On the torsional rigidity of a beam of convex cross section, Zeitschr. ang. Math. u. Mech. 49 (1969) 92—93.
39. On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions IV. Acta Math. Hung. 20 (1969) 383—391.
40. A remark to the preceding paper of H. Kleindienst. Studia Sc. Math. Hung. 4 (1969) 471—472.
41. Complete orthogonal systems of eigenfunctions of three triangular membranes. Studia Sci. Math. Hung. 5 (1970) 51—62.
42. Eigenvalues of powers of functions. Studia Sci. Math. Hung. 6 (1971) 161—162.
43. A property of Dirichlet's kernel, II. Publ. de la Fac. d'Électrotechn. de l'Univ. de Belgrade, série Math. et Phys. No 357—380 (1971) 55—58.
44. Remarks on the three body problem in Quantum Mechanics. Studia Sci. Math. Hung. 6 (1971) 467—480.

EGY ZÁRÓDÁSI TÉTEL

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Rapcsák Andrásnak 60. születésnapjára

Helyezzünk egy sima asztallapra bizonyos számú, mondjuk n, tízfillérest egy konvex gyűrűbe, vagyis úgy, hogy a tízfilléresek középpontjai egy konvex n-szög csúcsait alkossák és a szomszédos csúcsokhoz tartozó tízfilléresek érintsék egymást. Illesszünk a gyűrűhöz kívülről egy további tízfillérest, amely a gyűrű legalább egy körét érinti, majd egy újabb tízfillérest, amely mind az előzőt, mind a gyűrűt érinti, és így tovább. Azt fogjuk tapasztalni, hogy az így szerkesztett körlánc mindig egy $n+6$ tagú konvex gyűrűvé zárul.

Ez a kísérlet, valamint a záródás szükségszerű bekövekezésének általánosabb feltételek mellett való alábbi bizonyítása hasznos lehet az iskolai oktatásban is.

Konvex lemezeken egy zárt konvex lemez eltolt példányait értjük. Ha két lemez metszete egy pont vagy egy szakasz, akkor azt mondjuk, hogy a lemezek érintik egymást. Kiválasztunk az egyik lemezen egy pontot, s tekintjük az eltolásban ennek a pontnak megfelelő pontot a többi lemezen. Ezeket a pontokat *homológ* pontoknak mondjuk. Helyezzünk el n lemezt úgy, hogy a homológ pontok egy (tágabb értelemben) konvex n-szög csúcsaiba essenek és a szomszédos csúcsokhoz tartozó lemezek érintsék egymást. A lemezek most egy *konvex gyűrűt* alkotnak. A gyűrűt érintő lemezen olyan lemezt értünk, amely a gyűrű legalább egy lemezét érinti, de a gyűrű egy lemezével sincs közös belső pontja. Induljunk ki a gyűrűt kívülről érintő egy lemezből, rakjunk mellé egy második lemezt, amely a gyűrűt és az első lemezt is érinti úgy, hogy az első lemez, a második lemez és a gyűrű valamely lemeze pozitív forgásirányban következzen egymás után. Rakjunk a második lemezhez az előbb leírt módon egy harmadikat, és így tovább. Ilyen módon a gyűrűre fekvő *láncot* kapunk. Ha a lánc záródik, vagyis a lánc valahányadik szeme érinti az elsőt, anélkül, hogy a lánc két tagja egymásba nyúlna, akkor a gyűrűre fekvő gyűrűről beszélünk.

A lánc szerkesztése az első lemez rögzítése esetén sem mindig egyértelmű. De a lánc záródása az első lemez tetszés szerinti választása mellett is mindig biztosítható. Ezt fejezi ki a következő

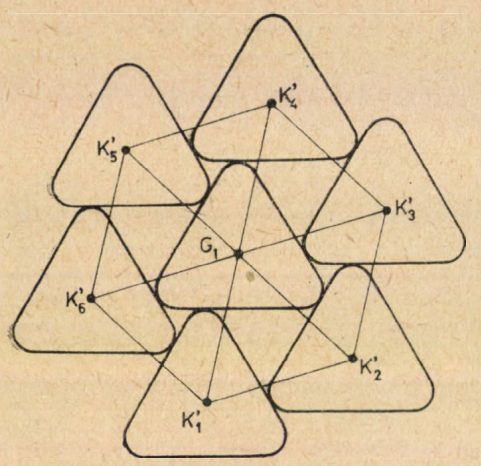
Tétel. Egy konvex k lemez n eltolt példányából képzett konvex g gyűrűhöz mindig szerkeszthető k $n+6$ eltolt példányából egy olyan g-re fekvő gyűrű, amelyiknek egyik lemeze tetszés szerinti módon megadható.

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy ha a lánc első lemezét megadjuk, akkor az egész lánc konstrukciója biztosan egyértelmű, ha a lemezek szigorúan konvexek. Később be fogjuk bizonyítani, hogy már egy sokkal gyengébb feltétel is biztosítja az egyértelműséget. A lemez egy *határszakaszán* a lemez és valamely támaszegyenesének metszetét, egy *húrján* pedig a lemez két határpontját összekötő szakaszt

értjük. Valamely irányt a lemez *kritikus irányának* nevezünk, ha ilyen irányú határszakaszainak teljes hossza nagyobb az illető irányba eső legnagyobb húr hosszánál. Az említett feltétel az, hogy a lemeznek ne legyen kritikus iránya. Kimondható ezért a fenti tétel következő korollárium:

Legyen g egy kritikus irány nélküli konvex k lemez n eltolt példányából alkotott konvex gyűrű. Legyenek továbbá $k_1, k_2, \ldots$ k-nak g-t kívülről, egymást pedig a megadott sorrendben érintő további eltolt példányai. Akkor $k_{n+7}=k_1$.

Tételünket először abban az esetben bizonyítjuk, amikor a gyűrű egyik lemeze sem nyúlik egy másikba. Legyenek a gyűrű lemezei pozitív ciklikus sorrendben $g_1, \ldots, g_n$. Legyen továbbá $k_1=k_1'$ a gyűrűt kívülről érintő lemez; érintse ez mondjuk g_1-et. Tekintsünk most egy olyan k_2' lemezt, amely mind k_1'-et, mind g_1-et érinti, úgy hogy g_1, k_1' és k_2' pozitív forgásirányban következzenek egymás után. Definiáljuk most a $k_3', k_4', \ldots$ lemezt olyan módon, hogy $i>2$-re k_i' legyen az a lemez, amely k_{i-1}'-ből a k_{i-2}'-t g_1-be átvivő eltolással jön létre, szimbolikusan: $k_i' = k_{i-1}' + \overrightarrow{k_{i-2}' g_1}$. A lemezek homológ pontjait a megfelelő nagy betűvel jelölve, $K_1', K_2', \ldots$ egy G_1 középpontú affin szabályos hatszög csúcsait alkotják, s így $K_7'=K_1'$ (1. ábra).

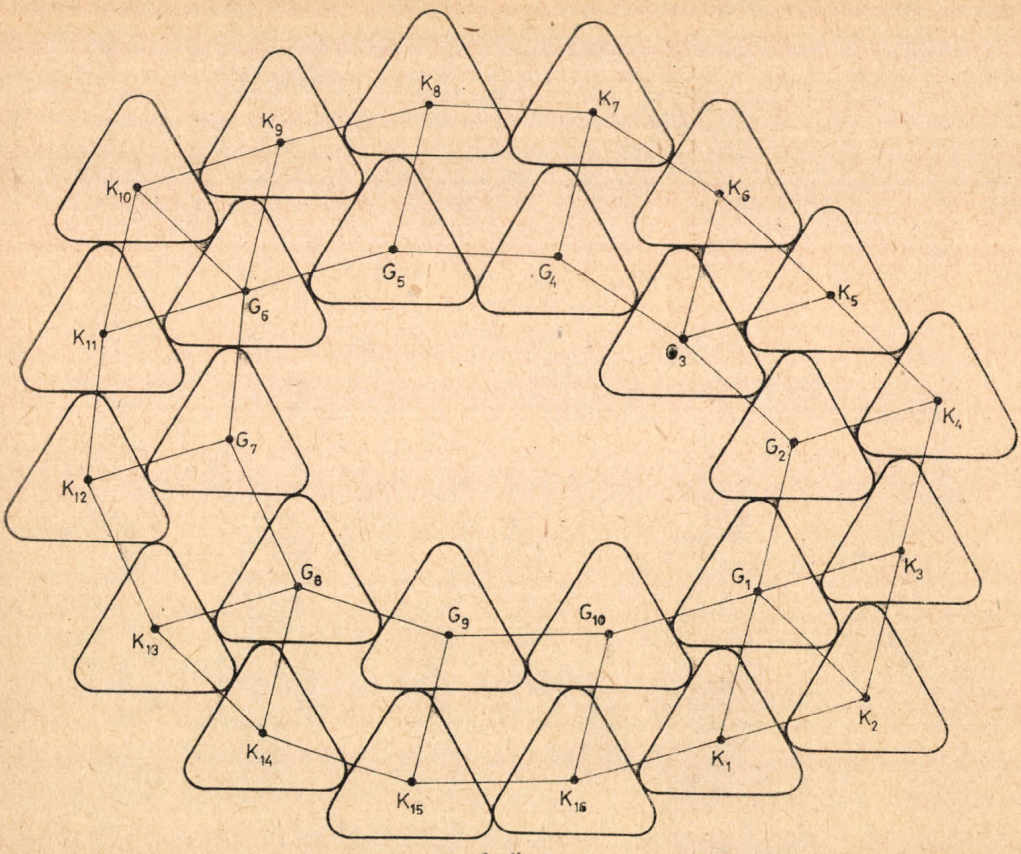


1. ábra

Ha most a $k_1', k_2', \ldots$ sorozatban k_j' az utolsó olyan lemez, amelynek még nincs közös belső pontja g_2-vel, akkor legyenek a konstruálandó lánc kezdő elemei $k_1=k_1', \ldots, k_j=k_j'$. (A 2. ábrán $j=3$.) A lánc következő eleme legyen $k_{j+1} = k_j + \overrightarrow{g_1 g_2}$. A k_{j+1} lemez nyilvánvalóan érinti g_2-t, s könnyen belátható módon nincs közös pontja g_1-gyel. Mivel k_{j+1}-nek g konvexitása miatt g_2-n kívül g más lemezével sincs közös belső pontja, azért k_{j+1} érinti g-t. Legyen most $k_{j+2} = k_{j+1} + \overrightarrow{g_2 g_3}$ vagy $k_{j+2} = k_{j+1} + \overrightarrow{k_{j-1}' g_1}$, aszerint amint a $k_{j+1} + \overrightarrow{k_{j-1}' g_1}$ lemeznek van-e közös belső pontja g_3-mal vagy nincs. A lánc konstrukciójának folytatása nyilvánvaló.

Be kell látnunk, hogy $K_{n+7}=K_1$, és hogy $K_1, \ldots, K_{n+6}$ egy konvex sokszög csúcsai. Tekintsük a $G_1K_jK_{j+1}G_2$ paralelogrammát. A $G_1 \ldots G_n$ sokszög minden oldalához csatlakozik egy-egy ilyen paralelogramma. Ezek közé a paralelogrammák közé $G_1 \ldots G_n$ bizonyos csúcsainál a $G_1K_1'K_2'$, …, $G_1K_6'K_1'$ háromszögek közül egynek vagy többnek eltolt példánya van beékelve. A konstrukcióból következik, hogy a ciklikusan egymás után következő paralelogrammák és háromszögek teljes oldalak mentén csatlakoznak. Ezért a $K_{n+7}=K_1$ relációban kifejezett záródást valóban biztosítja az a tény, hogy a háromszögek megfelelően eltolt példányai konvex hatszöget alkotnak.

Tekintsük most a $K_1 \ldots K_{n+6}$ sokszög szögeit. Azokban a csúcsokban, amelyekben két paralelogramma találkozik, a kérdéses szög megegyezik $G_1 \ldots G_n$ megfelelő szögével, s így ez a szög $\leqq 180°$. Tegyük most fel, hogy mondjuk a $G_1K_3K_4$ háromszöget a $G_1K_4K_5G_2$ paralelogramma követi (2. ábra). Mivel k_4-nek nincs közös belső pontja g_2-vel, azért a K_3K_4 és G_1G_2 félegyenes párhuzamos vagy divergál. Mivel a definíció szerint $K_5 = K_4 + \overrightarrow{G_1G_2}$, azért a $K_5K_4K_3 \sphericalangle \leqq 180°$. Eszerint a $K_1 \ldots K_{n+6}$ sokszög valóban konvex.

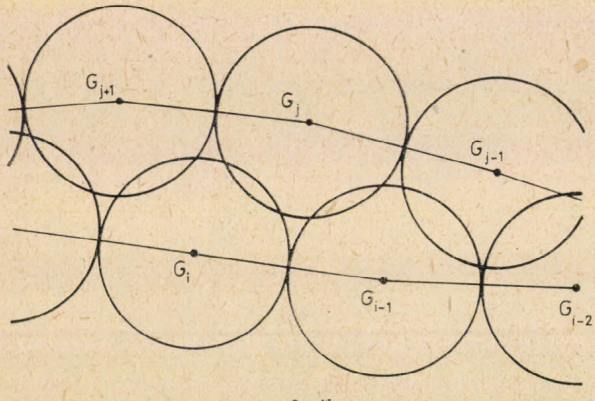


2. ábra

A fenti konstrukcióban csupán arra kellett ügyelnünk, hogy a lánc minden lemeze érintse g egy lemezét, és ne nyúljon g-nek az érintett lemezzel szomszédos lemezeibe. Mivel g konvex és feltettük, hogy g lemezei nem nyúlnak egymásba, azért a lánc lemezei g más lemezeibe sem nyúlhatnak. Ha azonban elejtjük azt a feltételt, hogy g lemezei nem nyúlnak egymásba, akkor elképzelhető, hogy g valamely lemeze g két másik lemezén „átnyúlva" belemetsz a fenti előírással szerkesztett lánc valamelyik lemezébe. Megmutatjuk, hogy ez nem fordulhat elő.

Azt állítjuk, hogy egy konvex lemez eltolt példányaiból alkotott konvex gyűrű egy lemeze sem nyúlhat a gyűrű két lemezébe. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy g_i-nek közös belső pontja van g_j- és g_{j+1}-gyel. A gyűrű konvexitása miatt a G_iG_{i+1} és a G_iG_{i-1} félegyenes közül az egyik, mondjuk az első, vagy metszi a G_jG_{j+1} egyenest vagy párhuzamos azzal (3. ábra). Mivel a $g_i+\overrightarrow{g_{j+1}g_j}$ lemez belenyúlik g_j-be, ugyanez igaz a g_{i+1} lemezre is. Tehát g_j is belenyúlik két másik lemezbe, nevezetesen g_i- és g_{i+1}-be. Ámde a gyűrű konvexitása miatt a G_jG_{j-1} félegyenes metszi a G_iG_{i+1} egyenest vagy párhuzamos azzal. Ezért megismételve az előbbi gondolatot látjuk, hogy g_{i+1} belemetsz g_{j-1}-be, g_{i+2} g_{j-1}- és g_{j-2}-be, és így tovább. De ez lehetetlen, mert egy bizonyos m indexre g_{i+m} érinti vagy g_{j-m}- vagy g_{j-m-1}-et. Hasonlóan zárható ki az az eset, amikor g_i a gyűrű két nem szomszédos lemezének belsejébe metsz.

Megmutatjuk most, hogy ha k-nak nincs kritikus iránya, akkor a gyűrűre fekvő lánc konstrukciója egyértelmű. Rögzítsük a k_1 lemez helyzetét, s hozzuk a k_2 lemezt minden lehetséges módon érintkezésbe k_1-gyel. Eközben K_2 egy K_1-re szimmetrikus tartomány határát írja le. Ez a tartomány, a lemez úgynevezett *vektortartomány*a, tudvalevőleg konvex. Rögzítsük most k_2-t is úgy, hogy az továbbra is érintse k_1-et, s hozzuk a k_3 lemezt érintkezésbe mind k_1- mind k_2-vel olyan módon, hogy k_1, k_2 és k_3 pozitív forgásirányban kövesse egymást. Most K_3 rajta van a K_1 és K_2 középpontú vektortartományok határának metszetén. Annak a feltétele, hogy k_3 helyzete egyértelmű legyen nyilvánvalóan az, hogy ez a metszet egy pontpár legyen.



3. ábra

Gondoljuk meg, hogy a lemez K_1K_2 irányú maximális húrjának a hossza éppen a K_1K_2 szakasz hosszával egyenlő. Másrészt a vektortartomány K_1K_2 irányú egyik határszakaszának hossza megegyezik a lemez ilyen irányú határszakaszainak összegével. Ha ez hosszabb a K_1K_2 szakasz hosszánál, akkor a K_1 és K_2 középpontú két vektortartomány határa két szakaszban, ellenkező esetben két pontban metszi egymást. Ha tehát K_1K_2 nem kritikus irány, akkor k_3 helyzete egyértelmű.

Ez a meggondolás akkor is alkalmazható, ha k_1, és k_2 nem érinti egymást. Jelöljük a K_1K_2 irányú maximális húr hosszát h-val. Ha $h<K_1K_2<2h$, és K_1K_2 nem kritikus irány, akkor k_3 helyzete továbbra is egyértelmű.

Tegyük most fel, hogy $K_1K_2=2h$, vagyis a K_1 és K_2 középpontú két vektortartomány érinti egymást, és van két diszjunkt lemez, k_3 és k_4, amelyek érintik k_1- és k_2-t. Mivel egyrészt K_3 és K_4 rajta van a K_1 és K_2 középpontú vektortartományok határainak metszetén, másrészt K_3 és K_4 távolsága nagyobb, mint a K_3K_4 irányú maximális húr, azért a K_3K_4 irány kritikus.

A lánc konstrukciója úgy történt, hogy minden újabb lemezt két másikkal hoztunk érintkezésbe. Ez a két lemez vagy érinti egymást, vagy mindkettőt érinti a gyűrű egy lemeze. Ha tehát nincs kritikus irány, akkor az előzőek alapján a konstrukció valóban egyértelmű.

ТЕОРЕМА ЗАМЫКАНИЯ

ЛАСЛО ФЕЙЕШ ТОТ

EIN SCHLIESSUNGSSATZ

L. FEJES TÓTH

TRANSZCENDENS SZÁMOK II.

KURT MAHLER

KONVERGENS LAURENT-SOROK ÉS FORMÁLIS LAURENT-SOROK

19. Azok a számok, melyekről el kívánjuk dönteni, hogy algebraiak vagy transzcendensek, gyakran valamely $f(z)$ egyváltozós analitikus függvény $z=\alpha$ *algebrai pontjaiban* (azaz α algebrai szám) felvett $\beta=f(\alpha)$ függvényérték alakban adottak. Az analitikus függvények viszont megadhatók az elemeik által, vagyis mindazon konvergens hatványsorok által, melyek valamely körben előállítják a függvényt.

Általánosabban foglalkozzunk az

$$f(z) = \sum_{h=\eta}^{\infty} f_h (z-c)^h$$

Laurent-sorral, amely konvergál az

$$U_\varrho(c): \qquad 0 < |z-c| < \varrho$$

tartományban. Itt c egy komplex, ϱ egy pozitív szám, és η egy tetszőleges egész.

Ha $\eta<0$, $f(z)$-nek pólusa van a $z=c$ pontban, ha ellenben $\eta>0$, akkor $f(z)$ reguláris $U_\varrho(c)$ $z=c$ középpontjában is. Az utóbbi esetben a Laurent-sor $f(z)$ közönséges Taylor-sorával azonos.

Ha $\varrho=\infty$ a Laurent-sor konvergál az egész síkon, kivéve esetleg a $z=c$ pontot, ha az pólus. Ha ellenben ϱ véges, akkor $f(z)$ esetleg folytatható az $U_\varrho(c)$ tartományon kívül. A $\beta=f(\alpha)$ függvényérték vizsgálatához ilyen folytatásra általában nem lesz szükség és elegendő lesz $f(z)$-t $U_\varrho(c)$-beli z értékekre tekintenünk.

Az $f(z)$ függvény Laurent-sorának néhány alapvető tulajdonsága algebrai jellegű és semmi kapcsolatban nem áll a sor konvergenciájával.

Ezért bevezetjük az általánosabb formális Laurent-sorok osztályát, ahol ezek a tulajdonságok igen egyszerű alakot öltenek.

20. Legyen K egy tetszőleges zéró karakterisztikájú test. A továbbiakban kiemelkedő szerepük lesz a következő testeknek: Q a racionális számok, A az algebrai számok, R a valós számok és C a komplex számok teste. Legyen továbbá z egy határozatlan. Vezessük be a következő jelöléseket: $K[z]$ a z határozatlanú K-beli együtthatós (a továbbiakban K-feletti) polinomok gyűrűje. $K(z)$ a $K[z]$ hányados teste, melynek elemei a z racionális függvényei, K-beli együtthatókkal.

$K\langle z-c\rangle$, ahol c K-beli, az

$$f = \sum_{h=\eta}^{\infty} f_h (z-c)^h$$

formális Laurent-sorok halmaza, ahol f_h K-beli és η valamely f-től függő egész szám. Bevezetve az

$$f_h=0, \quad \text{ha} \quad h<\eta$$

jelölést, a sor a következő jobban kezelhető alakba írható:

$$f = \sum_{h=-\infty}^{\infty} f_h (z-c)^h.$$

K elemei játsszák a *konstansok* szerepét, míg azon elemek, melyek csak $K[z]$, $K(z)$ vagy $K\langle z-c\rangle$-beliek, *függvények*.

A $K\langle z-c\rangle$ halmaz gyűrűvé válik, ha az összeadás és szorzás műveletét a következőképpen definiáljuk. Ha

$$g = \sum_{h=-\infty}^{\infty} g_h (z-c)^h,$$

ahol $g_h=0$, hacsak $h<\xi$ egy másik Laurent-sor $K\langle z-c\rangle$-ben, akkor legyen

$$f+g = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (f_h+g_h)(z-c)^h$$

és

$$fg = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_{h-k} (z-c)^h.$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy $f+g$ $K\langle z-c\rangle$-ben van. Az fg szorzatot tekintve a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_{h-k}$$

összeg legfeljebb véges sok nullától különböző tagot tartalmaz, és minden tagja nulla, ha h negatív és $|h|$ elég nagy. Így fg is $K\langle z-c\rangle$-ben van. Abban a speciális esetben, amikor $K=C$ és a sor valamely $U_\varrho(c)$ tartományban konvergál, a most definiált műveletek megegyeznek a konvergens sorokra vonatkozó megfelelő műveletekkel. Könnyen igazolható, hogy az összeadás és a szorzás $K\langle z-c\rangle$-ben *kommutatív*, *asszociatív* és *disztributív*. Azonosítsuk $K\langle z-c\rangle$

$$f_0 + \sum_{h=1}^{\infty} 0(z-c)^h \quad \text{ahol} \quad f_0 \in K$$

elemét az f_0 K-beli elemmel, így K a $K\langle z-c\rangle$ részteste lesz. Általánosabban legyen a egy $K[z]$-beli polinom. Ez a polinom felírható

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_h (z-c)^h$$

alakban, ahol az a_h együtthatók K-beliek. Azonosítsuk a-t $K\langle z-c\rangle$

$$\sum_{k=0}^{m} a_h (z-c)^h + \sum_{k=m+1}^{\infty} 0(z-c)^h$$

elemével. Ezzel a leképezéssel $K[z]$ nyilvánvalóan $K\langle z-c\rangle$ részgyűrűje lesz.

21. Könnyű belátni, hogy $K\langle z-c\rangle$ valójában test. Legyen ugyanis f egy tetszőleges nullától különböző eleme $K\langle z-c\rangle$-nek. Ekkor létezik egy olyan η index, melyre

$$f_\eta \neq 0, \quad \text{de} \quad f_h=0, \quad \text{ha} \quad h<\eta.$$

η-t az f *rendjének* nevezzük és így jelöljük:

$$\operatorname{ord} f = \eta.$$

Mármost létezik $K\langle z-c\rangle$-nek egy másik, 0-tól különböző

$$f^{-1} = \sum_{k=-\eta}^{\infty} f_h^* (z-c)^h$$

eleme, mely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:

$$f f^{-1} = 1.$$

Ugyanis ez a reláció ekvivalens az f^{-1} f_h^* együtthatóira vonatkozó alábbi végtelen lineáris egyenletrendszerrel

$$f_\eta f_{-\eta}^* = 1, \quad f_\eta f_{-\eta+1}^* + f_{\eta+1} f_{-\eta}^* = 0, \quad f_\eta f_{-\eta+2}^* + f_{\eta+1} f_{-\eta+1}^* + f_{\eta+2} f_{-\eta}^* = 0, \ldots$$

és ezek a lineáris egyenletek lépésről lépésre megoldhatók, mert f_η a feltevés szerint nem zérus. f^{-1} létezése $K\langle z-c\rangle$ minden $f \neq 0$ elemére azt jelenti, hogy $K\langle z-c\rangle$ test. Mivel már tudjuk, hogy es a test tartalmazza a $K[z]$ gyűrűt, így annak $K(z)$ hányadostestét is tartalmazza résztestként.

22. Az eddigiekben az f rendjét csak 0-tól különböző f-re definiáltuk, legyen ebben a speciális esetben

$$\operatorname{ord} 0 = \infty.$$

Ezzel a konvencióval könnyűszerrel igazolhatók az elemek rendjének alábbi tulajdonságai:

(1) $$\operatorname{ord}(f+g) \geqq \min(\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g), \quad \operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord} f + \operatorname{ord} g.$$

Speciálisan legyen a egy nullától különböző polinom. Ekkor nyilván a rendje és foka között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

(2) $$\operatorname{ord} a \leqq \partial(a).$$

23. $K\langle z-c\rangle$ elemeire definiálható a *differenciálás* formális művelete. Legyen ismét

$$f = \sum_{h=\eta}^{\infty} f_h (z-c)^h$$

a fenti testnek egy általános eleme. f n-edik deriváltját a

$$\frac{d^n f}{dz^n} = f^{(n)} = \sum_{h=\eta}^{\infty} h(h-1)\ldots(h-n+1) f_h (z-c)^{h-n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

képlettel adjuk meg, így $f^{(n)}$ is $K\langle z-c\rangle$-beli. Nem nehéz belátni, hogy

(3) $$f^{(n+1)} = \frac{df^{(n)}}{dz}, \quad f^{(n+p)} = \frac{d^p f^{(n)}}{dz^p}$$

és

(4) $$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Itt g $K\langle z-c\rangle$ egy másik eleme, és az utolsó formulában feltételezzük, hogy g nullától különböző. Nyilvánvaló, hogy

(5) $$\operatorname{ord} f' = (\operatorname{ord} f) - 1, \quad \text{ha} \quad \operatorname{ord} f \neq 0.$$

Ha azonban $\operatorname{ord} f = 0$, akkor $\operatorname{ord} f'$ tetszőleges nem negatív értéket felvehet. Speciálisan f' akkor és csak akkor tűnik el, ha eleme a konstansok K testének.

24. Abban a speciális esetben, mikor $K = C$ a komplex számtest, jelölje $C\{z-c\}$ mindazon $C\langle z-c\rangle$-beli f sorok halmazát, melyek valamely

$$U_\varrho(c): \quad 0 < |z-c| < \varrho$$

tartományban konvergálnak, ahol ϱ egy pozitív f-től függő szám. A $\varrho = \infty$ eset is megengedhető. Mint már a 20. §-ban említettük, a $C\langle z-c\rangle$-ben definiált műveletek $C\{z-c\}$-ben konvergens Laurent-sorok összeadásává és szorzásává válnak és ugyanez áll a differenciálásra is.

Ha f egy $C\{z-c\}$-beli sor, akkor megállapodunk abban, hogy mindig $f(z)$-vel jelöljük azt az $U_\varrho(c)$-ben analitikus függvényt, amelyhez ez a Laurent-sor konvergál.

Nyilvánvaló, hogy $C\{z-c\}$ gyűrű. Valójában ez egy test. Legyen ugyanis $f \in C\{z-c\}$ f nem nulla. Mivel $z = c$ legfeljebb egy pólusa $f(z)$-nek, és mivel ez a függvény reguláris, valamely $U_\varrho(c)$ tartományban, létezik egy esetleg kisebb

$$U_\sigma(c): \; 0 < |z-c| < \sigma,$$

ahol $0 < \sigma < \varrho$ tartomány, úgy, hogy $f(z)$ nem tűnik el $U_\sigma(c)$-ben. Így a reciprok függvény $f(z)^{-1}$ reguláris $U_\sigma(c)$-ben, és legfeljebb egy pólusa van $z = c$-ben. Következőleg $f(z)^{-1}$ egy $U_\sigma(c)$-ben konvergáló Laurent-sorba fejthető és ez éppen a $C\langle z-c\rangle$-ben definiált f^{-1} sor lesz.

25. Legyen $w_0, w_1, \ldots w_n$, ahol $n \geqq 0$ $n+1$ újabb határozatlan és legyen $A(z, w_0, w_1, \ldots, w_n)$ a $z, w_0, w_1, \ldots w_n$ egy nem nulla polinomja, melynek együtthatói K-beliek. Gyakran foglalkozunk majd olyan $f \in K\langle z-c\rangle$ sorokkal, melyek kielégítenek egy

$$A(z, f, f', \ldots, f^{(n)}) = 0$$

típusú formális algebrai differenciálegyenletet és a későbbi fejezetekben részletesen vizsgálni fogjuk a $K = Q$ és a $K = A$ eseteket.

Már most bebizonyítjuk a következő tételt, melynek egy speciális esetére hamarosan szükségünk lesz:

(6) *Legyen K_0 a K egy részteste és legyen c K_0-beli, valamint f $K_0\langle z-c\rangle$-beli. Tegyük fel, hogy létezik egy nem azonosan zérus $A(z, w_0, w_1, \ldots w_n)$ K-feletti polinom, melyre*

$$A(z, f', \ldots, f^{(n)}) = 0$$

Ekkor létezik egy nem azonosan zérus $A_0(z, w_0, w_1, \ldots w_n)$ K_0-feletti polinom is, melyre

$$A_0(z, f, f', \ldots, f^{(n)}) = 0$$

Bizonyítás: Az $A(z, w_0, w_1, \ldots w_n)$ polinom felírható a következő összegalakban:

$$A(z, w_0, w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\tau=1}^{t} A_\tau z^{\nu_\tau} w_0^{\nu_{\tau 0}} w_1^{\nu_{\tau 1}}, \ldots, w_n^{\nu_{\tau n}}.$$

ahol t egy pozitív egész $A_1, \ldots A_t$ a K véges sok nullától különböző eleme és a

ν_τ, $\nu_{\tau 0}$, $\nu_{\tau 1}$, ... $\nu_{\tau n}$ kitevők bizonyos nem negatív egésznek. Legyen B_1, ... B_t t határozatlan és legyen

$$B(z, w_0, w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\tau=1}^{t} B_\tau z^{\nu_\tau} w_0^{\nu_{\tau 0}} w_1^{\nu_{\tau 1}}, \ldots, w_n^{\nu_{\tau n}}$$

Ekkor

$$B(z, f', \ldots, f^{(n)}) = \sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_\tau$$

ahol a

$$g_\tau = z^{\nu_\tau} f^{\nu_{\tau 0}} f'^{\nu_{\tau 1}}, \ldots, f^{(n)\nu_{\tau n}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

szorzatok $K_0\langle z-c\rangle$ elemei, azaz mondhatjuk, hogy

$$g_\tau = \sum_{h=-\infty}^{\infty} g_{\tau h}(z-c)^h \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

Következésképpen

$$B(z, f, f, \ldots, f^{(n)}) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_{\tau h} \right) (z-c)^h.$$

Itt a jobb oldal akkor és csak akkor az azonosan zérus sor, ha B_1, ... B_t kielégíti az összes

$$\sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_{\tau h} = 0 \qquad (h = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

homogén lineáris egyenletet. Ezen végtelen sok lineáris egyenlet közül legfeljebb véges sok lehet lineárisan független a K_0 felett. Legyen

$$\sum_{\tau=1}^{t} B_\tau g_{\tau h\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

ilyen lineárisan független egyenletek egy maximális rendszere. Ezen egyenletek együtthatói K_0-ban vannak és

$$B_1 = A_1 \neq 0, \ldots, B_t = A_t \neq 0$$

egy nem triviális megoldásrendszer. Ebből következik, hogy a fenti egyenleteknek van egy

$$B_1 = A_{01}, \ldots, B_t = A_{0t}$$

megoldásrendszere is, ahol A_{01}, ..., A_{0t} nem mind nulla és K_0-beli. Így

$$\sum_{\tau=1}^{t} A_{0\tau} g_{\tau h} = 0 \qquad (h = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots,)$$

és az új

$$A_0(z, w_0, w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\tau=1}^{t} A_{0\tau} z^{\nu_\tau} w_0^{\nu_{\tau 0}} w_1^{\nu_{\tau 1}}, \ldots, w_n^{\nu_{\tau n}}$$

polinom eleget tesz a tétel állításának.

Fogalmazzuk meg tételünket explicit alakban az $n=0$ speciális esetben, hamarosan szükségünk lesz rá.

(7) *Legyen K_0 a K egy részteste, és legyen c K_0-, f pedig $K_0\langle z-c\rangle$-beli. Tegyük fel, hogy létezik egy $A(z, w)$ nem azonosan zérus K-feletti polinom, melyre*

$$A(z, f) = 0.$$

Ekkor létezik egy $A_0(z, w)$ *nem azonosan zérus* K_0*-feletti polinom is, melyre:*

$$A_0(z, f)=0.$$

26. Az 1. §-ban megkülönböztettünk algebrai és transzcendens számokat. Hasonló megkülönböztetés létezik analitikus függvényekre még általánosabban $K\langle z-c\rangle$-beli formális Laurent-sorokra is.

$K\langle z-c\rangle$ valamely f elemét *algebrainak* nevezzük, ha létezik egy nem azonosan zérus $A(z, w)$ K-feletti polinom, melyre

$$A(z, f)=0, \tag{8}$$

és f-et *transzcendensnek* nevezzük, ha nincs ilyen polinom.

Legyen sepciálisan $K=C$ a komplex számtest és legyen f a $C\langle z-c\rangle$ $C\{z-c\}$ résztestének eleme. Ha f algebrai a $C\langle z-c\rangle$-re nézve és például (8) egyike azon algebrai egyenleteknek, melyeket f kielégít, akkor a megfelelő $f(z)$ analitikus függvény z-ben azonosan kielégíti az

$$A(z, f(z))=0$$

algebrai egyenletet, ilyenkor $f(z)$-t *algebrai analitikus függvénynek* nevezzük. Ha ellenben f transzcendens $C\langle z-c\rangle$-re nézve, akkor $f(z)$ transzcendens analitikus függvény. A komplex függvénytanban számos olyan egyszerű tulajdonság ismeretes, mely lehetőséget ad az algebrai és a transzcendens analitikus függvények megkülönböztetésére. Ezen tulajdonságok egyikének sincs nyilvánvaló kiterjesztése az általános $K\langle z-c\rangle$-testbeli formális Laurent-sorokra. Azonban mégis lehet $K\langle z-c\rangle$ elemei transzcendenciájára egy szükséges és elégséges feltételt nyerni. Ez a feltétel algebrai természetű és a valós, ill. komplex számokra vonatkozó 3. Tétel analogonja, sőt még a bizonyítás is nagyon hasonló.

27. Az alábbi bizonyításban a következő jelölésekre lesz szükség. Jelölje $K[z, w]$ z és w összes K feletti polinomjainak gyűrűjét, $K(z)[w]$ a w összes $K(z)$-feletti polinomjainak gyűrűjét és $K\langle z-c\rangle[w]$ a w összes $K\langle z-c\rangle$-feletti polinomjainak gyűrűjét. Mindhárom esetben $\partial_w(a)$ jelöli $a(z, w)$ fokát w-ben és hasonlóképpen ∂_z jelöli $a(z, w)$ fokát z-ben, ha az $K[z, w]$-ben van. Az utóbbi esetben legyen

$$\lambda(a) = \partial_z(a)+\partial_w(a).$$

Ha $A(z, w)$ a zérus polinom 0, akkor a $\partial_z(0)$, $\partial_w(0)$ és $\lambda(0)$ mennyiségek mindegyikét ∞-nek definiáljuk. Fennállnak a polinomok összege, illetve szorzata fokszámára szokásos összefüggések, nevezetesen

$$\lambda(a+b) \leqq \max(\lambda(a), \lambda(b)), \quad \lambda(ab) = \lambda(a)+\lambda(b).$$

Legyen továbbá f $K\langle z-c\rangle$ egy tetszőleges algebrai eleme. Jelölje $\Sigma(f)$ mindazon $K(z)[w]$-beli

$$A^*(w) = A_0^*+A_1^* w+ \ldots +A_M^* w$$

polinomok halmazát, melyre

$$A_M^* \neq 0 \quad \text{és} \quad A^*(f) = 0.$$

$\Sigma(f)$-ben létezik legalább egy legkisebb fokszámú $A^*(w)$ polinom $\partial_w(A^*)=M$. Ekkor f-et M-edfokúnak nevezzük a $K(z)$ felett és így jelöljük:

$$\partial^\circ(f)=M.$$

Legyen $A^*(w)\in\Sigma(f)$ egy ilyen legkisebb fokszámú polinom, jelölje az együtthatókat képező $A_0^*, A_1^*, \ldots A_M^*$ racionális függvények nevezőinek legkisebb közös többszörösét d és legyen

$$A(z, w) = d\,A^*(w) = A_0+A_1w+\ldots+A_Mw_M.$$

Ez az új polinom mind $\Sigma(f)$-nek, mind $K[z, w]$-nek eleme. Könnyen belátható, hogy irreducibilis $K[z, w]$ felett és egy K-beli el nem tűnő faktortól eltekintve egyértelmű. Ekkor ismét azt mondjuk, hogy $A(z, w)$ az *f minimálpolinomja.*

Nyilván

$$\partial^\circ(f)=\partial_w(A)=M.$$

Legyen továbbá

$$L^0(f)=\partial_z(A)=\max\left(\partial(A_0), \partial(A_1), \ldots \partial(A_M)\right)$$

és nevezzük $L^0(f)$-et az *f szélességének.*

28. Tegyük fel, hogy $f\in K\langle z-c\rangle$ algebrai és legyen

$$A(z, w) = A_0+A_1w+\ldots+A_Mw^M$$

a minimálpolinomja. Mivel $A(z, w)$ eltűnik, ha $w=f$, létezik egy alábbi szorzatfelbontása $K\langle z-c\rangle[w]$-ben:

$$A(z, w) = (w-f)B(w), \tag{10}$$

ahol $B(w)\in K\langle z-c\rangle[w]$ w-nek polinomja, de nem szükségképpen polinomja z-nek is, és $B(w)$ a következő alakba írható:

$$B(w) = B_0+B_1w+\ldots+B_{M-1}w^{M-1}.$$

Itt $B_0, B_1, \ldots B_{M-1}$ $K\langle z-c\rangle$-beliek és explicit alakjuk a következő

$$B_k = A_{k+1}+A_{k+2}f+\ldots+A_mf^{m-k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, M-1).$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy

$$\operatorname{ord} f\geqq 0. \tag{11}$$

Az $A_0, A_1, \ldots, A_M$ polinomok rendje nem negatív, következésképpen

$$\operatorname{ord} B_k\geqq 0 \qquad (k=0, 1, \ldots M-1). \tag{12}$$

Legyen most

$$a(z, w) = a_0+a_1w+\ldots+a_mw^m$$

egy tetszőleges polinom $K[z, w]$-ben, melyre

$$a_m\neq 0, \quad a(z, f)\neq 0$$

$a(z, w)$ z, ill. w szerinti foka:

$$\partial_z(a)=\max\left(\partial(a_0), \partial(a_1), \ldots \partial(a_m)\right), \quad \partial_w(a)=m.$$

Mivel $A(z, w)$ irreducibilis és $w=f$ esetén eltűnik, míg $a(z, w)$ nem tűnik el, $A(z, w)$ és $a(z, w)$ w-re vonatkozó rezultánsa

$$\left.\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_M & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 & A_1 & \dots & A_M \end{vmatrix}\right\} m \text{ sor}$$

$$\left.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_m \end{vmatrix}\right\} M \text{ sor}$$

nem nulla. Ez a rezultáns egy $K(z)$-beli polinom, melynek foka kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\partial(R(A, a)) \leqq m\partial_z(A)+M\partial_z(a).$$

A polinomok rendje és foka közötti (2) összefüggés alapján, ebből az is következik, hogy

(13) $$\operatorname{ord} R(A, a) \leqq m\partial_z(A)+M\partial_z(a).$$

A rezultánsok szorzására vonatkozó általános formula szerint $A(z, w)$ (10)-es előállításából következik, hogy

(14) $$R(A, a) = R(w-f, a)\, R(B, a).$$

Továbbá

(15) $$R(w-f, a) = a(z, f) \geqq 0.$$

Az $R(B, a)$ rezultáns is felírható az $R(A, a)$-hoz hasonló determináns alakban, méghozzá ezen determináns minden eleme vagy egy B_k sor, vagy egy a_k polinom vagy 0, azaz nem negatív rendű a (12) szerint. Így

$$\operatorname{ord} R(B, a) \geqq 0$$

is fennáll.

Másrészt (14) és (15) szerint

$$\operatorname{ord} R(B, a) = \operatorname{ord} R(A, a) - \operatorname{ord} a(z, f),$$

következésképpen a (13) becslésből adódik, hogy

$$\operatorname{ord} a(z, f) \leqq m\partial_z(A)+M\partial_z(a).$$

Eredményünk a következőképpen fogalmazható meg:

(16) *Legyen* f $K\langle z-c\rangle$ *valamely algebrai eleme, melynek rendje*

$$\operatorname{ord} f \geqq 0.$$

Ha $a(z, w)$ *egy tetszőleges polinom* $K[z, w]$*-ben, akkor vagy*

$$a(z, f)=0,$$

vagy

$$a(z, f) \neq 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{ord} a(z, f) \leqq L^0(f)\partial_w(a)+\partial^0(f)\partial_z(a).$$

Tételünk az 1. Tételnek a $K\langle z-c\rangle$ testre vonatkozó analogonja.

Az ord f-re vonatkozó megszorítástól könnyű megszabadulni, ezt az olvasóra bízzuk.

29. Egy későbbi alkalmazás érdekében megvizsgálunk egy speciális esetet $a(z, w)$-nek az alábbi lineáris polinomot választjuk:

$$a(z, w) = w - a_1,$$

ahol a_1 egy $K[z]$-beli polinom. Ebben az esetben

$$\partial_z(a) = \partial(a_1), \quad \partial_w(a) = 1.$$

Ekkor, ha $f \in K\langle z - c\rangle$ algebrai és ord $f \geqq 0$, továbbá f nem polinom $K[z]$-ben, akkor minden $K[z]$-beli a_1-re

$$\text{ord}\,(f - a_1) \leqq L^0(f) + \partial^0(f)\partial(a_1). \tag{17}$$

Ebből az egyenlőtlenségből könnyen adódik a transzcendentalitás alábbi elégséges feltétele:

(18) *Tegyük fel, hogy $f \in K\langle z - c\rangle$ nem polinom és hogy létezik polinomok egy*

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

végtelen sorozata $K[z]$-ben, melyre

$$\lim_{r\to\infty} \partial(a_r) = \infty, \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\text{ord}\,(f - a_r)}{\partial(a_r)} = \infty.$$

Ekkor f transzcendens.

Ugyanis ha r elég nagy,

$$\text{ord}\, f = \text{ord}\,\{(f - a_r) + a_r\} \leqq \min\,(\text{ord}\,(f - a_r), \text{ord}\, a_r) \geqq 0,$$

mivel ord a_r nem lehet negatív. Így az állítás közvetlenül következik (17)-ből.

Az alkalmazások szempontjából előnyösebb a transzcendencia fenti kritériumát egy másik ezzel ekvivalens alakban megadni:

Az

$$f = \sum_{h=0}^{\infty} f_h (z - c)^h$$

$K\langle z - c\rangle$-beli sort *erősen hézagosnak* nevezzük, ha létezik az egész számoknak egy

$$\{s_1, s_2, s_3, \ldots\} \quad \text{és egy} \quad \{t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots\}$$

sorozata, melyekre

$$0 = t_0 \leqq s_1 < t_1 \leqq s_2 < t_2 \leqq s_3 < t_3 \leqq \ldots, \qquad \lim_r \frac{t_r}{s_r} = \infty,$$

$$f_{s_r} \neq 0, \quad f_{t_r} \neq 0, \quad \text{de} \quad f_h = 0 \quad \text{ha} \quad s_r < h < t_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots,)$$

Alkalmazzuk (18)-at oly módon, hogy legyen

$$a_r = \sum_{h=0}^{s_r} f_h (z - c)^h, \qquad f - a_r = \sum_{h=t_r}^{\infty} f_h (z - c)^h$$

Ekkor a következő eredményre jutunk.

(19) *Minden erősen hézagos sor transzcendens.*

30. Az eddigiekben $f \in K\langle z-c\rangle$ $\partial^0(f)$ fokát csak akkor definiáltuk, ha f algebrai. Ha f transzcendens, akkor a következő konvenciót használjuk:

$$\partial^0(f) = \infty,$$

ahol ∞ ismét minden egész számnál nagyobbnak tekintendő.

Legyen most m és t két pozitív egész és legyen f egy olyan algebrai vagy transzcendens eleme $K\langle z-c\rangle$-nek, melyre

$$\operatorname{ord} f \geqq 0, \quad \partial^0(f) > m.$$

Jelöljön továbbá $a(z, w)$ egy tetszőleges $K[z, w]$-beli polinomot, melyre

$$\partial_z(a) \leqq t, \quad \partial_w(a) \leqq m$$

fennáll.

A legáltalánosabb ilyen típusú polinom

$$a(z, w) = \sum_{h=0}^{t} \sum_{k=0}^{m} a_{hk} z^h w^k$$

ahol az a_{hk} együtthatók K-beliek. $w = f$ helyettesítéssel $a(z, f)$ $K\langle z-c\rangle$ elemévé válik, azaz felírható

$$a(z, f) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h (z-c)^h$$

alakban. Itt az új α_h együtthatók homogén lineáris polinomjai az $(m+1)(t+1)$ a_{hk} paraméternek K-beli együtthatókkal. Ezek az a_{hk}-k megválaszthatók úgy K-ban, hogy ne tűnjék el mindegyikük és hogy az együtthatók közül $(m+1)(t+1)-1$ zérus legyen. Legyenek ezek azok az együtthatók, melyekre

$$h = 0, 1, 2, \ldots \quad (m+1)(t+1)-2.$$

Következésképpen

$$\operatorname{ord} a(z, f) \geqq (m+1)(t+1)-1.$$

Továbbá

$$a(z, f) \neq 0,$$

mivel $\partial^0(f) > m$.

Ezért fennáll a következő tétel:

(20) *Legyen m és t két pozitív egész és legyen $f \in K\langle z-c\rangle$ olyan, hogy* ord $f \geqq 0$, $\partial^0(f) > m$ *Ekkor létezik egy a polinom $K[z, w]$-ben, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

$$\partial_z(a) \leqq t, \quad \partial_w(a) \leqq m, \quad a(z, f) \neq 0, \quad \operatorname{ord} a(z, f) \geqq mt+m+t.$$

Ez az eredmény a 2. Tétel analogonja.

31. Az eddigiek alapján könnyűszerrel megadható a transzcendencia alábbi szükséges és elégséges feltétele.

4. Tétel: Egy $K\langle z-c\rangle$-beli f sor, melyre ord $f \geqq 0$ *akkor és csak akkor transzcendens, ha létezik polinomoknak egy*

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

végtelen sorozata $K[z, w]$-ben és pozitív számoknak egy

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$$

végtelenhez konvergáló sorozata, úgy hogy

$$a_r(z,f)\neq 0, \quad \operatorname{ord} a_r(z,f)\leqq \omega_r\lambda(a_r) \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy f transzcendens. Ha ugyanis f algebrai, akkor (16)-ból következik, hogy

$$\operatorname{ord} a_r(z,f)\leqq\{L_0(f)+\partial^0(f)\}\ \lambda(a_r) \qquad (r=1,2,3\ldots).$$

Ha viszont f transzcendens, akkor alkalmazzuk (20)-at úgy, hogy legyen

$$t=m=r \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Ekkor azt tapasztaljuk, hogy létezik polinomoknak egy $a_r\in K[z,w]$ sorozata, melyre

$$a_r(z,f)\neq 0,\ \lambda(a_r)\leqq 2r,\ \operatorname{ord} a_r(z,f)>r^2 \qquad (r=1,2,3,\ldots)$$

és ez a sorozat rendelkezik a tételben állított tulajdonságokkal.

A 4. Tétel a valós vagy komplex számokra vonatkozó 3. Tétel megfelelője. Bár a 4. Tétel szükséges és elégséges feltételt ad a formális sorok transzcendenciájára, mégis sok kérdést hagy nyitva.

Úgy tűnik, hogy a tétel semmiféle választ nem ad a következő kérdésre:

A. Probléma: Ha

$$f=\sum_{h=0}^{\infty} f_h(z-c)^h$$

$K\langle z-c\rangle$ *egy olyan algebrai eleme, amely nem polinom, akkor létezhet-e tetszőleges hosszúságú* $f_h, f_{h+1}, \ldots f_k$ *csupa zérus elemből álló együtthatósorozat*? Erre a kérdésre semmilyen választ nem ismerek. Abban a speciális esetben, amikor $f\in K(z)$ egy racionális függvény, a válasz negatív, sőt ennél több is ismert, de a bizonyítás bonyolult.

(Mahler 1935, Lech 1954, Mahler 1956)

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА II

КУРТ МАЛЕР

TRANSCENDENTAL NUMBERS II.

K. MAHLER

KOMBINATORIKAI ÉS GEOMETRIAI MEGGONDOLÁSOK A SZÁMELMÉLETBEN

KLAUS HÄRTIG és SURÁNYI JÁNOS

Erdős Pálnak, 60. születésnapjára

1. A Fermat- és a Wilson-féle kongruenciatételre régóta ismeretes[1] egyszerű kombinatorikai bizonyítás, amit geometriai megfogalmazásban különösen egyszerű elmondani. Már Leibniz és Gauss talált ilyen bizonyításokat. A bizonyítások közös magja a következő:

Adott egy S véges halmaz és S-nek egy T kölcsönösen egyértelmű leképezése önmagára, amelyik periodikus, azaz valamilyen m pozitív egész számszor ismételve T-t az azonos leképezést kapjuk.[2] S bármely a eleméből kiindulva az $a_0=a$, $a_1=Ta$, $a_2=T^2a=T(Ta)$, ... sorozat[3] tiszta periodusos, mert a T leképezés kölcsönösen egyértelmű volta miatt $T^ka=T^la$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $T^{k+1}a=T^{l+1}a$. Így a legkisebb pozitív s-re, amire a_s a sorozat egy korábbi elemével egyezik, ez a korábbi elem a_0; az $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$ különbözők és a sorozat további része ezeknek az elemeknek periodikus ismétléséből áll. Speciálisan a sorozat a-val egyenlő elemei $a_0, a_s, a_{2s}, \ldots$ és csak ezek. Mivel feltétel szerint $a_m=T^ma=a$, így $s|m$.

2. Legyen p törzsszám, a pozitív egész, S az összes egészekre értelmezett azon függvények halmaza, amelyek értékkészlete a $\{0, 1, \ldots, a-1\}$ halmaz, és amelyek p szerint periodikusak; minden x-re $f(x+p)=f(x)$. Végül T legyen a következő módon értelmezve: minden f függvényre

$$(Tf)(x) = f(x+1). \tag{1}$$

Ez úgy szemléltethető, hogy egy szabályos p-szög minden egyes csúcsát a darab szín valamelyikével megszínezzük, majd a sokszöget a középpontja körül $2\pi/p$ szöggel elfordítjuk. Elég ugyanis az $1, 2, \ldots, p$ helyeken felvett függvényértékeket szemléltetni és az értékeknek színeket feleltetni meg!

Ekkor bármely f-ből kiindulva vagy 1 vagy p periodusú sorozatot kapunk, 1 periódusút csak az a darab konstans függvény esetében.[4] A maradó a^p-a függvény p hosszúságú periódusokba osztható, így adódik az

I. Tétel (Fermat): *Ha p törzsszám,*

$$a^p-a \equiv 0 \pmod{p}. \tag{2}$$

[1] Lásd pl. [2] I. 56—57. old. ill. II. 101—103. old.

[2] S végességéből következik ilyen m létezése, hiszen bármely elemre ismételten alkalmazva T-t periodikus sorozatot kapunk és a periódusok legkisebb közös többszöröse egy megfelelő m. A továbbiakban azonban éppen az lesz a lényeges, hogy T egy periódusát ismerjük előre és ebből tudunk az egyes sorozatok periódusára következtetést levonni.

[3] T ismételt alkalmazásának jelölésére a hatvány írásmódot használjuk.

[4] Valóban, ha vannak különböző színű csúcsok, akkor egy színváltásnál elfordítás után az egyik csúcs egy más színű csúcs helyére kerül.

3. Legyen ismét p törzsszám, S a 0, 1, ..., $p-1$ elemek ciklikus permutációinak halmaza.[5] A T transzformáció minden elemet az 1-gyel nagyobba, ill. $p-1$-et a 0-ba viszi át.

Ezt szemléltethetjük úgy, hogy a $P_0P_1...P_{p-1}$ szabályos p-szög $P_1, P_2, ..., P_{p-1}$ csúcsaihoz odaírjuk az 1, 2, ..., $p-1$ elemek egy permutációját, végül P_0-ból elindulva sorra az 1-gyel, innen a 2-vel, ..., innen a $p-1$-gyel jelölt csúcshoz húzunk egyenesszakaszt, végül onnan P_0-hoz. Az így kapott irányított, zárt törtvonalat („sokszöget", amely azonban átmetszheti önmagát) úgy fordítjuk el, hogy a P_0-t megelőző csúcs kerüljön P_0-ba.

T periódusa ismét p. Azoknak a permutációknak a periódusa 1, amelyek valamilyen $1 \leqq a \leqq p-1$-re a 0, a, $2a$, ..., $(p-1)a$ számok p-vel való osztásának maradékából állnak. Belátható, hogy ezek permutációkat alkotnak.

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy minden csúcsból a rákövetkező ugyanannyiadikba kell élnek vezetnie, és azt kell belátni, hogy ezek együtt egyetlen zárt törtvonalat alkotnak, nem esnek szét többre. Erre még visszatérünk.

A maradó $(p-1)!-(p-1)$ permutációt p elemű osztályokra rendezi T. Így azt kaptuk:[6]

II. Tétel (Wilson): *Ha p törzsszám*

$$(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

4. A p törzsszámnak itt felbonthatatlan voltát használtuk, azaz azt, hogy nincs más (pozitív) osztója, csak 1 és p. Ismeretes azonban, hogy a törzsszámoknak megvan az a tulajdonságuk is, hogy

III. Tétel: Ha egy p törzsszám nem osztója sem a-nak, sem b-nek, akkor nem osztója ab-nek sem. Ezt a továbbiakban prím tulajdonságnak nevezzük. Ezt felhasználva (2)-ből leolvashatjuk a Fermat-tétel következő alakját:

I′ Tétel: Ha p törzsszám és $p \nmid a$, akkor

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{3}$$

Fordítva, (3)-ból is következik a prím tulajdonság. Ha ugyanis $p \nmid a$ és $p \nmid b$, akkor[7]

$$(ab)^{p-1} = a^{p-1} \cdot b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

s így ab nem lehet p-vel osztható.

A prím tulajdonság jelentőségét az adja meg, hogy következik belőle a szemlélet alaptétele:[8]

IV. Tétel: Minden pozitív összetett szám a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen bomlik fel törzstényezők szorzatára.

[5] Azaz az elemeket egy kör kerületére írjuk tetszés szerinti sorrendben és nem tüntetünk ki kezdőpontot az elrendezésben.

[6] Ezek a föntebb idézett klasszikus bizonyítások.

[7] Vagy: ha $p \mid ab$ és $p \nmid a$, akkor

$$b \equiv ba^{p-1} = ab \cdot a^{p-2} \equiv 0 \pmod{p},$$

azaz $p \mid b$.

[8] Lásd pl. [2] I. 22—23. és 32—33. old.

Így felmerül a kérdés, hogy nem bizonyítható-e (3), vagy más olyan összefüggés, amiből a prím tulajdonság következik, hasonló eszközökkel, esetleg maga a prím tulajdonság. Valóban számos ilyen összefüggés található.

5. Bizonyítjuk a következőt:

V. Tétel: ha p törzsszám, $1 \leqq a \leqq p-1$, akkor

$$p \mid \binom{p}{a}. \tag{4}$$

Most S-nek a **2.** alattiakból csak azokat a függvényeket választjuk, amelyek p egymásutáni hely közül a számún az 1, a többi helyen a 0 értéket veszik fel, T pedig ismét az (1)-gyel értelmezett transzformáció. Mivel most S-ben nincs konstans függvény, az **1.** pont meggondolása (4)-et adja.

6. (4)-ből teljes indukcióval ismét belátható (2), de érvényes a következő is:

VI. Tétel: Az V. tételből következik, hogy, ha $1 \leqq a \leqq p-1$, akkor

$$p \nmid a!, \tag{5}$$

továbbá a III. tétel. Az állítások $p=2$-re nyilvánvalóak, $(2 \nmid 1!$, továbbá páratlan számok szorzata páratlan). Így feltehetjük, hogy p páratlan prím. A VI. tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. $a=1$-re (5) nyilvánvaló. Másrészt

$$a!\left\{\frac{1}{p}\binom{p}{a}\right\} = (p-1)(p-2)\ldots(p-(a-1)) \equiv (-1)^{a-1}(a-1)! \pmod{p}.$$

Így, ha $p \nmid (a-1)!$, akkor $p \nmid a!$. $\left(\text{Azt is kaptuk, hogy } p^2 \nmid \binom{p}{a}.\right)$

Ha most c és d p-vel osztva az a, ill. b pozitív, p-nél kisebb maradékot adja, úgy $c \cdot d$ akkor és csak akkor nem osztható p-vel, ha ab nem osztható vele, illetőleg ha $a(p-b)$ nem osztható vele. Mivel $b \neq p-b$ (p páratlan), így feltehetjük, hogy $b \neq a$. Ekkor azonban

$$ab \mid a! \text{ vagy } ab \mid b!$$

és, mint láttuk, a jobb oldali számok nem oszthatók p-vel, így ab sem, tehát cd sem.

7. A **3.** alatt kimondott állítás, amelynek bizonyítását későbbre halasztottuk, nem más, mint a prím tulajdonság, de könnyű egy sokkal általánosabb tételt is nyerni módszereinkkel:

VII. Tétel (Kalmár [1]): *Ha az a, b, c, d egészekre $ab=cd$, akkor van olyan r, s, t, u egész, amelyre*

$$a=rs, \quad b=tu, \quad c=rt, \quad d=su.$$

Feltehetjük, hogy a, b, c, d egyike sem 0, mert különben nyilvánvalóan igaz az állítás. Válasszuk S-nek a 0, a, $2a$, ... számok legkisebb nem-negatív maradékát (mod c), továbbá S bármely m elemére legyen[9]

$$Tm \equiv m+a \pmod{c}.$$

[9] Természetesen mindig az S-beli elemet, tehát a legkisebb nem-negatív maradékot kell választani.

Ekkor T^c az azonos leképezés. A 0-ból kiindulva képezett sorozat legrövidebb periódusát t-vel jelölve $t|c$ és mivel b is periódusa a sorozatnak, $t|b$. Van tehát olyan r és u egész, amelyre

$$b=tu, \quad c=rt.$$

Másrészt az, hogy t periódus, azt jelenti, hogy van olyan s egész, amelyre $ta=sc=srt$, azaz

$$a=rs.$$

Mindezt az $ab=cd$ összefüggésbe helyettesítve adódik

$$d=su.$$

Szemléletesen: A c kerületű körre egy P_0 pontból kiindulva mérjük fel ismételten az a hosszúságú ívet. A keletkező végpontok legyenek $P_1, P_2, \ldots$. Azt tudjuk, hogy $P_b=P_0$. Ha először a t-edik lépésben értünk vissza P_0-ba, akkor tovább már a $P_1, \ldots, P_{t-1}, P_0$ pontok ismétlődnek periodikusan. Akkor is ezeket a pontokat kapjuk, ha bármelyik P_i pontból indulunk ki. Eszerint a kört úgy fordítva el, hogy P_0 valamelyik P_i-be menjen át, a $\{P_0, \ldots, P_{t-1}\}$ ponthalmaz önmagába megy át, tehát ezek egy szabályos t-szög csúcsai. Jelöljük két szomszédos csúcs közti ív hosszát r-rel. Mivel b-szer körüljárva is P_0-ba kerültünk, így b valamilyen u egészszámszorosa t-nek. Végül t-szer felmérve a-t, valamilyen s egészszámszor jártuk körül a kört.[10] Ezek éppen a fenti egyenlőségekre vezetnek.

8. Ha a-nak és c-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, akkor innen az adódik, hogy $r=1$ és $s=a|d$, azaz

VIII. Tétel: Ha egy (egész) szám osztója egy szorzatnak és az egyik tényezővel nincs 1-nél nagyobb közös osztója, akkor a szám osztója a másik tényezőnek. Ennek a tételnek további speciális esete a prím tulajdonság.

9. Végül megmutatjuk, hogy (3) közvetlenül is bizonyítható az itt alkalmazott módszerrel. Feltehetjük, hogy $1 \leqq a \leqq p-1$, mert ellenkező esetben vehetjük a legkisebb nem-negatív maradékát (mod p). Egy maradékosztálynak vagy minden elemére áll (3), vagy egyre sem. A **2.** alatt definiált f függvények közül most csak azokat tekintjük, amelyekre $f(0)=0$, és ennek megfelelően T-t így értelmezzük: minden x helyen

$$(Tf)(x) \equiv f(x+1)-f(1) \pmod{a}.$$

A transzformált függvényből most is egyértelműen meghatározhatjuk az eredetit. Könnyen látható ugyanis, hogy ha $Tf=g$, akkor

$$f(x) \equiv g(x-1)-g(p-1) \pmod{a},$$

miután $\quad g(p-1) = (Tf)(p-1) \equiv f(p)-f(1) = f(0)-f(1) = -f(1) \pmod{a}.$

T ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$(T^2f)(x) = (T(Tf))(x) \equiv (Tf)(x+1)-(Tf)(1) \equiv$$

$$\equiv f(x+2)-f(1)-(f(2)-f(1)) = f(x+2)-f(2) \pmod{a};$$

és általában

$$(T^kf)(x) \equiv f(x+k)-f(k) \pmod{a}.$$

[10] Figyeljük meg, hogy a geometriai meggondolásban eddig még azt sem használtuk fel a-ról, c-ről és r-ről, hogy egész. Ha viszont a és c egész, akkor az összes fellépő ívek is, így r is egész.

Így T periódusa p. Egy függvényre T-t alkalmazva a keletkező sorozat periódusa tehát vagy p vagy 1.

Határozzuk meg azokat a függvényeket, amelyekből 1 periódusú sorozat keletkezik T ismételt alkalmazásával. Ezekre

$$(Tf)(x) \equiv f(x+1)-f(1) \equiv f(x) \pmod{a},$$

azaz

$$f(x+1)-f(x) \equiv f(1) \pmod{a}.$$

Mivel $f(0)=0$, ebből

$$f(k) \equiv kf(1) \pmod{a}$$

következik és ez a sorozat is periodikus. A sorozatnak p egy periódusa, miután minden f periodikus p szerint. A legrövidebb periódus tehát ismét csak p vagy 1 lehet. Nem lehet p, mert f csak $a<p$ különböző értéket vehet fel, így $f(1)=f(0)=0$, tehát csak az $f=0$ konstans függvénynek 1 a periódusa, a többi $a^{p-1}-1$ függvény T szerint p elemű osztályokba osztható, vagyis fennáll (3).

Szemléletesen ábrázolhatjuk a függvényeket a szokásos módon. A transzformációk során fellépő (mod a) változtatásokat pedig úgy vehetjük tekintetbe, hogy az x-tengellyel a többszörösei távolságban párhuzamosakat húzunk és minden pont távolságát az alatta levő legközelebbi egyenestől mérjük. Tehetjük azt is, hogy a síkot „feltekerjük" egy a kerületű hengerre.[11] T ekkor azt jelenti, hogy a síkot a $(-1, -f(1))$ vektorral eltoljuk. Ebből a transzformáció egyértelmű megfordíthatósága és az, hogy 1 periódusú csak a lineáris függvény lehet, mindjárt nyilvánvaló.

IDÉZETT MUNKÁK

[1] KALMÁR L.: A számelmélet alaptételéről, Matematikai és fizikai lapok, 43 (1936) 27—45. oldal.

[2] KÜRSCHÁK J., HAJÓS GY., NEUKOMM GY., SURÁNYI J.: Matematikai versenytételek I—II, 3. ill. 2. kiad., Szakköri füzet, Budapest 1965., Tankönyvkiadó 135, 163 old.

КОМБИНАТОРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

К. ГЁРТИГ И Я. УРАНИ

COMBINATORIAL AND GEOMETRICAL INVESTIGATIONS IN NUMBER THEORY

K. HÄRTIG AND J. SURÁNYI

[11] A p szerinti periodicitást viszont úgy vehetjük tekintetbe, hogy a hengert még egy p kerületü gyűrűvé összetekerjük. Aki jól el tud képzelni térbeli alakzatokat, ezen gyűrűn (tóruszon) még-jobban követheti a gondolatmenetet.

A PRÍMSZÁMTÉTEL ELSŐ ARITMETIKAI BIZONYÍTÁSÁNAK ISMERTETÉSE

HOFFMANN GYÖRGY és SURÁNYI LÁSZLÓ

Erdős Pálnak 60. születésnapjára

Ebben a cikkben a prímszámtétel első elemi (aritmetikai) bizonyításával foglalkozunk.

BEVEZETÉS

Az x-nél nem nagyobb pozitív prímszámok számát a szokásnak megfelelően $\pi(x)$-szel fogjuk jelölni. Ennek becslése a számelmélet egyik központi kérdése. Legendre 1798-ban megjelent könyvében az

$$\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

formulát adja meg, mint jó közelítést $\pi(x)$-re, Gauss pedig tőle függetlenül körülbelül egy időben az ún. integrállogaritmust, a

$$\operatorname{Li} x = \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

függvényt. A két állítás nem különbözik lényegesen, hiszen mindkét becslés $x/\log x + o(x/\log x)$ nagyságrendű.[1] Ezek a prímszámtáblázatok tanulmányozása alapján kimondott sejtések tehát egyenértékűek azzal az állítással, hogy

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{1}$$

Először Csebisevnek sikerült bebizonyítania eredményeket a $\pi(x)$ függvény viselkedésére vonatkozóan 1850-ben. Megmutatta többek között, hogy ha x elég nagy, akkor

$$\frac{7}{8}\frac{x}{\log x} < \pi(x) < \frac{9}{8}\frac{x}{\log x}, \tag{2}$$

és hogy ha a $\pi(x)\log x/x$ kifejezésnek van határértéke minden határon túl növő x-ekre, akkor ez a határérték csak 1 lehet.[2] Az (1) állításra csak 1896-ban sikerül

[1] Ha g pozitív monoton függvény, $f = O(g)$ azt jelenti, hogy az $|f(x)|/g(x)$ hányados korlátos marad minden határon túl növő x-ekre, $f = o(g)$ pedig azt, hogy $f(x)/g(x) \to 0$, ha x minden határon túl nő. Ha f, g pozitív függvény, $f = \Omega(g)$ jelenti, hogy f/g egy pozitív konstans fölött marad.

[2] Vö. idevonatkozóan pl. [2] 123-129 o. vagy [5].

bizonyítást találniuk komplex-függvénytani úton J. Hadamardnak és Ch. de la Vallée-Poussinnek egymástól függetlenül, B. Riemann alapvető gondolatait továbbfejlesztve.

Könnyebb a $\pi(x)$ függvény helyett a következő függvényt vizsgálni:[3]

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p.$$

A kettő közötti kapcsolat leolvasható az

$$x^{\pi(x)} = \prod_{p \leqq x} x \geqq \prod_{p \leqq x} p \geqq \prod_{\frac{x}{\log x} \leqq p \leqq x} p \geqq \left(\frac{x}{\log x}\right)^{\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{\log x}\right)}$$

egyenlőtlenségekből. Ezekből logaritmust véve

$$\pi(x) \log x \geqq \vartheta(x) \geqq \left(\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{\log x}\right)\right)(\log x - \log\log x) \geqq$$

$$\geqq \pi(x)\log x - \pi(x)\log\log x - \pi\left(\frac{x}{\log x}\right)\log x.$$

Most (2)-t használva

$$\pi(x)\log\log x + \pi\left(\frac{x}{\log x}\right)\log x = O\left(\frac{x}{\log x}\log\log x\right) = o(x)$$

adódik. Ezzel azt kaptuk, hogy (1) ekvivalens a következővel:

(1′) $$\vartheta(x) = x + o(x).$$

A $\vartheta(x)$ függvény szoros kapcsolatba hozható a következő $\zeta(s)$ függvénnyel:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s \text{ komplex, } \operatorname{Re} s > 1).$$

Ennek a függvénynek a vizsgálatán alapulnak (1′) komplex függvénytani bizonyításai. (A függvénynek az ilyen bizonyításokban lényeges szerepet játszó 0-helyei eloszlására máig sem sikerült teljes fényt deríteni; az ezekre vonatkozó Riemann sejtés ma is eldöntetlen.)

1949 előtt (1)-nek (ill. (1′)-nek) csak függvénytani bizonyításai voltak ismeretesek. 1949-ben Erdős Pál [1] és Atle Selberg [4] elemi (aritmetikai) bizonyítást adott (1′)-re. Az aritmetikai bizonyítás lehetőségétől eredetileg azt remélték, hogy általa esetleg közelebb lehet jutni $\zeta(s)$ függvénytani úton még nem tisztázott tulajdonságaihoz, így mindenekelőtt a Riemann-sejtéshez. Ma már úgy tűnik, hogy az aritmetikai módszerek ehhez nem elég erősek.

Az alábbiakban Erdős [1] dolgozata alapján ismertetjük a prímszámtétel első aritmetikai bizonyítását. Ez a módszer kevéssé ismert, mert maga a cikk nehezen követhető, és ismeretes más, egyedül Selbergtől származó bizonyítás is. Végig Erdős cikkét követjük, de az ott közölt számítás-vázlatokat a jobb érthetőség kedvéért pontossá tettük. Ez azonban a rövidség rovására ment, ezért az egyes részek előtt röviden összefoglaljuk az ötleteket és a számítások menetét, hogy a leírás érthető maradjon.

[3] A következőkben p-vel és q-val jelölt összegzési, ill. szorzatbeli változók mindig csak a prímszámokon futnak át, anélkül, hogy erre külön utalnánk.

A prímszámtételt (1′) alakban bizonyítjuk. Selberg következő híres egyenlőtlenségéből [4] — amelyet ő aritmetikai úton bizonyított be — indulunk ki:

$$\sum_{p \leqq x} \log^2 p + \sum_{pq \leqq x} \log p \log q = 2x \log x + o(x \log x). \tag{3}$$

Ezt az egyenlőtlenséget, amelyik az eddigi aritmetikai bizonyítások mindegyikének a kiindulópontja, bizonyítás nélkül használjuk fel. Bizonyítása megtalálható pl. [3] 360—363. oldalán. Ebből Erdős nyomán először a következő, (1′)-nél valamivel gyengébb állítást vezetjük le:

(A) Erdős: (3)-ból következik, hogy tetszőleges kis pozitív c számhoz létezik olyan $x_0(c)$ és olyan pozitív $\delta(c)$ szám, hogy ha $x > x_0(c)$, akkor

$$\vartheta((1+c)x) - \vartheta(x) \geqq \delta(c)x.$$

A dolgozat 2. részében megmutatjuk, hogy az első részben alkalmazott módszerrel levezethető (A)-ból (1′). Ezt először Selberg mutatta meg. Végül a harmadik részben [1] nyomán megmutatjuk, hogy ez a módszer közvetlenül is elvezet a prímszámtétel bizonyításához.

1. RÉSZ (A) BIZONYÍTÁSA

1. §. A következő egyenlőtlenségeket és jelöléseket fogjuk használni: (1. [3] 341—342. old. és [5] 73—76., 81—82. és 86—89. old.)

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\vartheta(x)}{x} = A \leqq 1{,}5 \quad \text{és} \quad \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\vartheta(x)}{x} = a > O, \tag{4}$$

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + o(\log x). \tag{5}$$

Másrészt a

$$\Lambda'(n) = \log n \quad \text{ha} \quad n \text{ prím}$$

$$\Lambda'(n) = 0 \quad \text{ha} \quad n \text{ nem prím}$$

jelölést használva (4) szerint

$$\vartheta(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda'(n) = O(x)$$

és így a (3) bal oldalán álló összeg így alakítható át:

$$\sum_{p \leqq x} \log^2 p = \sum_{n \leqq x} \Lambda'(\mathrm{n}) \log n = \sum_{n \leqq x-1} \Big(\sum_{m \leqq n} \Lambda'(\mathrm{m}) \Big) (\log n - \log(n+1)) +$$

$$+ \sum_{n \leqq x} \Lambda'(n) \log x = \vartheta(x) \log x - \sum_{n \leqq x} \vartheta(n) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \vartheta(x) \log x + O(x).$$

A második összegre viszont

$$\sum_{pq \leqq x} \log p \log q = \sum_{p \leqq x} \log p \left(\sum_{q \leqq \frac{x}{p}} \log q \right) = \sum_{p \leqq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p.$$

Így (3) a következő alakba is írható:

$$(6) \qquad \vartheta(x)\log x+\sum_{p\leqq x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\log p = 2x\log x+o(x\log x).$$

Megjegyzés: Mi ebből az egyenlőségből $\vartheta(x)-\vartheta(y)$ alakú növekményekre fogunk következtetéseket levonni. (A) azt állítja, hogy bármilyen kis $c>0$-ra

$$\vartheta(x(1+c))-\vartheta(x) = \Omega(x).$$

A bizonyítás indirekt úton történik. Feltesszük, hogy valamely c-re ez nem teljesül, azaz valamely $X(c)$ végtelenben torlódó halmazon $\vartheta(x(1+c))-\vartheta(x) = o(x)$. (6)-ból be fogjuk látni (1. alaplemma), hogy ekkor nagyon sok olyan $p<x$ prím van, amelyre a $\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+c)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)$ növekmény viszonylag nagy: $2c\frac{x}{p}$-hez közeli. (Ez azt jelenti, hogy nagyon sok, elég hosszú intervallumon a $\vartheta(x)$ függvény az intervallumhossz kétszeresével nő. Ez, mint alább (7) mutatni fogja, a lehető legnagyobb növekedés.) Ezen prímek közül ki fogunk tudni válogatni egy olyan egyenletesen sűrű és elég hosszú $p_1<p_2<\ldots<p_k$ prímsorozatot, amelyekre ezeket a $\vartheta\left(\frac{x}{p_i}(1+c)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_i}\right)$ növekményeket összeadva $\vartheta\left(\frac{x}{p_i}\right)$ nagyobbnak adódnék, mint (4) engedné.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $\vartheta(x)$ növekedéséről (3) alapján a következőt tudjuk: Ha $x_2>x_1$,

$$(7) \qquad \vartheta(x_2)-\vartheta(x_1)<2(x_2-x_1)+o(x_2),$$

vagyis

$$(7') \qquad \vartheta(x_2)-\vartheta(x_1)<2(x_2-x_1)+f(x_2)\cdot x_2,$$

ahol $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ és f pozitív monoton függvény. Ugyanis (3)-at x_2-re és x_1-re felírva kivonás után

$$\sum_{x_1\leqq p\leqq x_2}\log^2 p<2x_2\log x_2-2x_1\log x_1+o(x_2\log x_2)$$

adódik. Itt két esetet kell szétválasztanunk:

a) $x_1>x_2/\log^2 x_2$. Ekkor $\log x_1/\log x_2 = 1+o(1)$ miatt $\log x_1$-gyel elosztva a jobb oldalon $2(x_2-x_1)+o(x_2)$ marad. Másrészt

$$\frac{\sum_{x_1<p\leqq x_2}\log^2 p}{\log x_1} > \sum_{x_1<p\leqq x_2}\log p = \vartheta(x_2)-\vartheta(x_1),$$

így (7) adódik.

b) $x_1\leqq x_2/\log^2 x_2$ esetén x_1 is és (4) miatt $\vartheta(x_1)$ is $o(x_2)$ nagyságrendű, így (7) helyett $\vartheta(x_2)<2x_2+o(x_2)$-t elég belátni, ez pedig (4)-ből következik.

2. §. Rátérünk (A) bizonyítására. Indirekt feltesszük, hogy van olyan c, amelyre az állítás nem igaz, azaz létezik olyan $X(c)$ természetes számokból álló végtelen halmaz, amelyre

$$\lim_{\substack{x\in X(c)\\ x\to\infty}}\frac{\vartheta(x(1+c))-\vartheta(x)}{x} = O.$$

A továbbiakban ezt és az ilyenfajta összefüggéseket így jelöljük:

$$\vartheta(x(1+c))-\vartheta(x) = o_{X(c)}(x).$$

Tekintsük az ilyen c-k szuprémumát ((4) biztosítja, hogy ez véges), jelöljük ezt C-vel. Belátjuk, hogy van egy olyan X sorozat (X elemei divergálnak a végtelenbe), hogy

$$\vartheta(x(1+C))-\vartheta(x) = o_X(x). \tag{8}$$

(Azaz C-re sem igaz (A).) Legyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

„Átlós rendszerrel" minden n pozitív egészhez kiválasztunk egy x-et úgy, hogy $x > n$ és $\vartheta(x(1+C))-\vartheta(x) \leqq \varepsilon_n x$. Ilyen x van. Legyen ugyanis $C-\varepsilon_n/4=c_n$. Válasszunk egy n-nél nagyobb x-et, amelyre egyrészt $\vartheta(x(1+c_n))-\vartheta(x)<\varepsilon_n/4\cdot x$, másrészt, ha $y, y' > x$, akkor $\vartheta(y)-\vartheta(y')<3(y-y')$. Ilyen x egyrészt $c_n<C$ és C definíciója miatt, másrészt (7) miatt létezik. Erre

$$\vartheta(x(1+C))-\vartheta(x) \leqq \vartheta(x(1+C))-\vartheta(x(1+c_n)+\vartheta(x(1+c_n))-\vartheta(x)<$$

$$<3(C-c_n)x+\frac{\varepsilon_n}{4}x = \varepsilon_n x,$$

ahogy akartuk. A továbbiakban ezen x-ek halmazát jelöljük X-szel. X teljesíti (8)-at.

Most rátérünk az alaplemma előkészítésére. Ehhez először is (3)-at $x(1+C)$-re és x-re felírva, a kivonás után

$$\sum_{x<p\leqq x(1+C)} \log^2 p + \sum_{x<pq\leqq(1+C)x} \log p \log q = 2Cx\log x + o(x\log x)$$

adódik.

$$O \leqq \sum_{x<p\leqq x(1+C)} \log^2 p \leqq \big(\log(1+C)+\log x\big) \sum_{x<p\leqq x(1+C)} \log p \leqq$$

$$\leqq (C+\log x)[\vartheta(x(1+C))-\vartheta(x)]$$

és így (8) miatt

$$\sum_{x<pq\leqq x(1+C)} \log p \log q = 2Cx\log x + o_X(x\log x),$$

vagyis

$$\sum_{p\leqq x(1+C)} \log p\left[\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\right] = 2Cx\log x + o_X(x\log x). \tag{9}$$

(9) — (7)-tel és (5)-tel együtt — ad lehetőséget arra, hogy $x\in X$ esetén sok olyan $p<x$ prímet találjunk, amelyre $\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)$ „közel" $2C\frac{x}{p}$. Legyen x és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Nevezzük az x-nél kisebb p prímet (ε, x)-jó prímnek, ha

$$\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) > 2(C-\varepsilon)\frac{x}{p} \tag{10a}$$

és (ε, x)-rossz prímnek, ha

$$\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \leqq 2(C-\varepsilon)\frac{x}{p}. \tag{10b}$$

1. *Lemma.* *Tetszőleges* $\varepsilon>0$-ra[4]

$$\sum_{\substack{p\leqq x\\ p(\varepsilon,x)\text{-rossz prím}}} \frac{\log p}{p} = o_x(\log x). \tag{11}$$

Bizonyítás: (9) bal oldalát technikai okokból kissé „megrövidítjük". Belátjuk, hogy az $x/\log\log x$-nél nagyobb prímek adaléka csak a maradéktaghoz ad hozzá, azaz

$$\sum_{p\leqq\frac{x}{\log\log x}} \log p\left[\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\right] = 2Cx\log x+o_x(x\log x). \tag{9'}$$

Ugyanis:

$$O \leqq \sum_{\frac{x}{\log\log x}\leqq p\leqq x(1+G)} \log p\left[\vartheta\left(\frac{x}{p}(x+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\right] \leqq \tag{9''}$$

$$\leqq \sum_{\frac{x}{\log\log x}\leqq p\leqq x(1+C)} \log p\,\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right) \leqq \vartheta\left(\frac{x}{\frac{x}{\log\log x}}(1+C)\right) \sum_{\frac{x}{\log\log x}\leqq p\leqq x(1+C)} \log p \leqq$$

$$\leqq \vartheta\big((1+C)\log\log x\big)\vartheta\big(x(1+C)\big) = O(x\log\log x) = o(x\log x).$$

Ha most a bal oldalt két részre vágjuk, az (ε, x)-jó és (ε, x)-rossz prímek szerint, akkor (10b) szerint

$$\sum_{\substack{p\leqq\frac{x}{\log\log x}\\ p(\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \log p\left[\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\right] \leqq 2(C-\varepsilon)x \sum_{\substack{p\leqq x\\ p(\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} \tag{12}$$

és (7') alapján

$$\sum_{\substack{p\leqq\frac{x}{\log\log x}\\ p(\varepsilon,x)\text{-jó}}} \log p\left[\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\right] \leqq 2Cx \sum_{\substack{p\leqq x\\ p(\varepsilon,x)\text{-jó}}} \frac{\log p}{p} + \tag{12'}$$

$$+f\big((1+C)\log\log x\big)x\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}$$

Adjuk össze (12) és (12')-t, majd (9')-t, (5)-t és $f\big((1+C)\log\log x\big) = o(1)$-et használva

$$2Cx\log x \leqq 2Cx\log x-\varepsilon x \sum_{\substack{p\leqq x\\ p(\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p}+o_x(x\log x)$$

adódik, amiből (11) következik.

3. §. *Megjegyzés:* Az alaplemma tehát biztosítja, hogy „majdnem minden" $p<x$ prímre a $\vartheta\left(\frac{x}{p}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)$ az intervallumhossznak „majdnem" kétszeresével nő. A célunk — mint mondtuk — úgy jutni ellentmondásra, hogy keresünk

[4] Az alaplemmát minden pozitív ε-ra külön bizonyítjuk, mint később a többi lemmákat is, és ugyanez áll a később szereplő t-re is. Azonban használni ezeket a lemmákat csak egy-egy konkrét, de elég kicsi ε-ra és t-re fogjuk. Az egész bizonyítás elmondható lenne úgy is, hogy csak az alább (16) és (19)-cel definiált ε-ra és t-re bizonyítjuk a lemmákat.

ilyen jó $p_1<p_2<\ldots<p_k$ prímeket úgy, hogy az $I_i=\left[\frac{x}{p_i},\frac{x}{p_i}(1+C)\right]$ intervallumokon a $\vartheta(x)$ függvény növekedése már annyi legyen, hogy $\vartheta\left(\frac{x}{p_1}\right)>1{,}5\frac{x}{p_1}$ legyen. Ehhez nyilván arra van szükség, hogy az I_i intervallumok se ne nyúljanak túlságosan egymásba, se túl távol ne legyenek egymástól, ha nem nyúlnak egymásba. Ezen két követelményt kielégítő elég hosszú, jó prímekből álló $p_1<p_2<\ldots<p_k$ sorozatot kell tehát találnunk. Ezt fogja biztosítani a 2. lemma. Ha ilyen $p_1<\ldots<p_k$ sorozat már van, pusztán végig kell pontosan számolnunk, ami adódott, hogy ellentmondást kapjunk. Ezt a 4. §-ban fogjuk megtenni.

Most a 2. lemmában megfogalmazzuk pontosan, hogy mit értünk azon, hogy az I_i intervallumok ne nyúljanak túlzottan egymásba, és ha nem nyúlnak egymásba, ne legyenek nagyon messze egymástól. Ezt a p_i/p_{i+1} tört kétoldali korlátozásával fogjuk elérni. Ugyanígy azt, hogy a $p_1<\ldots<p_k$ sorozat elég hosszú legyen, p_k/p_1 alsó limitálásával érjük el:

2. *Lemma. Legyen* $\varepsilon, t>0$ *tetszőleges. Van olyan* $x_1(\varepsilon,t)$ *küszöb, hogy* $x>x_1(\varepsilon,t)$ *és* $x\in X$ *esetén létezik* $p_1<\ldots<p_k$ (ε,x)*-jó prímekből álló sorozat a következő tulajdonságokkal:*

a) $10<p_k/p_1<1000$ b) $i=1,2,\ldots,k-1$-re $(1+C)(1+t)^2p_i>p_{i+1}>(1+t)p_i$
c) $p_1>\log x$, $p_k<x/\log\log x$.

(Természetesen a 2. lemmát C-hez képest kis t-re fogjuk használni.)

Bizonyítás: A továbbiakban (ε,x)-jó prímek helyett csak jó prímeket mondunk ezen bizonyítás során. Legyen $\varepsilon, t>0$ tetszőleges rögzített, $x\in X$, $x>x_1$ legyen

d) $B=\max\left((1+t)^2(1+C)^2,\ 100\right)$,

végül $\eta(t)>0$, x_1 legyen olyan, hogy minden u-ra $\log u>x_1$ esetén

e) $\vartheta(u(1+C)(1+t))-\vartheta(u)>\eta(t)(1+t)(1+C)u$.

(C maximalitása miatt ilyen $\eta(t)$ és x_1 található.)

Tekintsük a következő $J_r=[B^{2r},B^{2r+1}]$ intervallumokat, ahol $r=1,2,\ldots,$ $\ldots,[\log x/2\log B]-1$. Belátjuk, hogy köztük $\Omega(\log x)$ az olyan intervallumok száma, amelyekben van a), b), c)-t kielégítő jó prímekből álló $p_1<p_2<\ldots<p_k$ sorozat. Nyilvánvaló, hogy a $\left[\log x,\frac{x}{B\log\log x}\right]$ számközbe eső J_r intervallumok száma $\log x/2\log B-o_X(\log x)$. A továbbiakban csak ezekre szorítkozunk.

Jelölje $p_1^{(r)}$ minden (ilyen) r esetén a $J_r^{\frac12}=[B^{2r},B^{2r+\frac12}]$-ben levő legkisebb jó prímet (ha van ilyen), továbbá ha $p_i^{(r)}$ létezik és $p_i^{(r)}\in J_r$, és létezik a $[p_i(1+t),$ $p_i(1+t)(1+C)]$ intervallumban jó prím, akkor $p_{i+1}^{(r)}$ jelölje a legkisebbet köztük. Így definiáltunk egy $p_1^{(r)},\ldots,p_k^{(r)}$ jó prím sorozatot, amely d) miatt a $J_r'=[B^{2r},B^{2r+2})$. intervallumban van, méghozzá úgy, hogy $i<k$-ra $p_i^{(r)}<B^{2r+1}$ és legfeljebb $p_k^{(r)}>B^{2r+1}$. A sorozat azonban lehet üres is. Az is nyilvánvaló, hogy ha egy r-re $p_k^{(r)}>B^{2r+1}$, akkor erre az r-re $p_1^{(r)},\ldots,p_k^{(r)}$ teljesíti a), b), c)-t, hiszen $B\geqq100$ és $p_1^{(r)}<B^{2r+\frac12}$. Így $p_k^{(r)}/p_1^{(r)}$ $B^{\frac12}$ és $B(1+t)(1+C)\leqq B^{\frac12}$ közt, azaz 10 és 1000 közt van. Azt akarjuk tehát belátni, hogy $\Omega_X(\log x)$ számú r-re $p_k^{(r)}>B^{2r+1}$.

Nézzük meg, hogy mikor kell olyan $p_k^{(r)}$-nél megállni, amely nem nagyobb B^{2r+1}-nél. Vagy akkor, ha $J_r^{\frac12}=[B^{2r},B^{2r+\frac12})$ nem tartalmaz jó prímet, vagy ha

$T_r = [p_k^{(r)}(1+t), p_k^{(r)}(1+t)^2(1+C)]$ nem tartalmaz jó prímet és $B^{2r+\frac{1}{2}} \leqq p_k^{(r)} \leqq B^{2r+1}$. d) miatt ez mindkét esetben azt jelenti, hogy a $J_r' = [B^{2r}, B^{2r+2})$ intervallumban találtunk egy $J_r'' = [u, (1+t)(1+C)u]$ alakú intervallumot, amelyben legfeljebb csak rossz prímek vannak. (Ugyanis $p_k^{(r)} \leqq B^{2r+1}$ miatt $p_k^{(r)}(1+t)^2(1+C) \leqq$ $\leqq B^{2r+1}(1+t)^2(1+C) < B^{2r+2}$ d) szerint, és így $T_r \subset J_r'$. Ha pedig $J_r^{\frac{1}{2}}$ nem tartalmaz jó prímet, akkor $[B^{2r}, B^{2r}(1+t)(1+C)] \subset J_r^{\frac{1}{2}} \subset J_r'$ sem.)

Ha $u > \log x$, akkor $x > x_1$ miatt (l. e))

$$\sum_{p \in J_r''} \frac{\log p}{p} > \frac{1}{(1+t)(1+C)u} \sum_{p \in J_r''} \log p \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{(1+t)(1+C)u} (\vartheta((1+t)(1+C)u) - \vartheta(u)) > \eta(t).$$

Az alaplemma szerint azonban fennáll (11), másrészt

$$\sum_{\substack{p<x \\ p\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} \geqq \sum_r{}' \sum_{p \in J_r''} \frac{\log p}{p} \geqq \eta(t) \sum_{r < \frac{\log x}{2 \log B}}{}' 1, \tag{13}$$

ahol a Σ' azt jelöli, hogy csak olyan r-ekre terjesztjük ki az összegezést, amelyekre J_r''-et az előbb definiáltuk. Mivel azonban J_r''-et pontosan olyan r-ekre definiáltuk, amelyekre $p_k^{(r)} > B^{2r+1}$ nem áll, és $J_r \subset \left[\log x, \frac{x}{B \log \log x}\right]$ — azaz amilyen r-ekre nincs a), b), c)-nek eleget tevő jó-prím sorozat J_r'-ben — ezért (11) és (13) a bizonyítás elején tett megjegyzéssel együtt azt adja, hogy $\frac{\log x}{2 \log B} - o_X(\log x)$ számú r-re J_r'-ben van a lemma feltételeit kielégítő sorozat, tehát minden elég nagy x-re van legalább egy ilyen sorozat, amint azt a lemma állítja. (ε, t rögzített.)

4. §. Ezekután rátérünk a bizonyításból hátralevő számolásra. Ennek vázlata a következő:

1. lépés (7) és (10a) azt mondja, hogy az $I_j = \left[\frac{x}{p_j}, \frac{x}{p_j}(1+C)\right]$ intervallumon a ϑ függvény növekedése maximális: „lényegében" az intervallumhossz kétszerese. Másrészt, ha $K = [a, b]$, $L = [a', b']$ két olyan intervallum, hogy $(\vartheta(b) - \vartheta(a))/(b-a)$, és $(\vartheta(b') - \vartheta(a'))/(b'-a')$ is „lényegében" 2, és $a \leqq a' \leqq b \leqq b'$, (azaz $K \cap L \neq \emptyset$), akkor (7) szerint $(\vartheta(b) - \vartheta(a'))/(b-a')$ is legfeljebb 2 „lényegében", így $\vartheta(b') - \vartheta(a) =$ $= \vartheta(b') - \vartheta(a') + \vartheta(b) - \vartheta(a) - (\vartheta(b) - \vartheta(a'))$ legalább $2(b'-a') + 2(b-a) - 2(b-a') =$ $= 2(b'-a)$, azaz a ϑ függvény a $K \cup L$ intervallumon is maximálisan, az intervallumhossz kétszeresével nő.

Bontsuk tehát fel az I_j szakaszok unióját $K_1, K_2, \ldots, K_l$ zárt diszjunkt intervallumok uniójára. Ez a felbontás egyértelmű:

$$K_i = \left[\frac{x}{p_{j_i}}, \frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)\right], \quad j_1 = k > j_2 > \ldots > j_l \geqq j_{l+1} + 1 = 1;$$

ha $j_i > j \geqq j_{i+1} + 1$, akkor $I_j \cap I_{j-1} \neq \emptyset$ és $I_{j_{i+1}} \cap I_{j_{i+1}+1} = \emptyset$, azaz ha $j_i > j \geqq$ $\geqq j_{i+1} + 1$, akkor,

$$\frac{x}{p_j}(1+C) \geqq \frac{x}{p_{j-1}} \quad \text{és} \quad \frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C) < \frac{x}{p_{j_{i+1}}}.$$

A fenti gondolatmenet alapján várható, hogy ha ε-t elég kicsinek választjuk és K_i nem túl sok I_j-nek az egyesítése, akkor K_i-n a ϑ függvény még mindig „lényegében" K_i hosszának kétszeresét növi. (Hogy K_i nem túl sok I_j intervallumból áll, azt éppen k felső limitálása adja: $p_{j+1}/p_j > 1+t$ és így $1000 > p_k/p_1 > (1+t)^k$.)

2. lépés. Végső soron arra vagyunk kíváncsiak, hogy a ϑ függvény K_1 bal oldali és K_l jobb oldali végpontja közt mennyit nő, azaz $\vartheta\left(\frac{x}{p_1}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_k}\right)$ mekkora. A 2. lemma b) része azt biztosítja, hogy K_{i+1} bal oldali végpontja nem túl nagy K_i jobb oldali végpontjához képest, és ha t elég kicsi, akkor a K_{i+1} intervallum lényegesen hosszabb a „kimaradó" $\left[\frac{x}{p_{j_i+1+1}}(1+C), \frac{x}{p_{j_i+1+1}}\right]$ intervallumnál. Így t megfelelő választásával elérhető lesz, hogy a ϑ függvény $\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}(1+C)$ és $\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)$ közt is az intervallumhossz több mint 1,8-szorosával nőjjön:

$$\vartheta\left((1+C)\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}\right)-\vartheta\left((1+C)\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}\right) > \vartheta\left((1+C)\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_{j_{i+1}}}\right) \sim$$

$$\sim 2\left((1+C)\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}-\frac{x}{p_{j_{i+1}}}\right) > 1{,}8\left(\frac{x}{p_{j_{i+1}+2}}-\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}\right)(1+C),$$

ha t elég kicsi.

3. lépés. Ha egyszer beláttuk, hogy valamely fix ε és t-re minden elég nagy $x \in X$-re és a 2. lemmának eleget tevő $p_1 < \ldots < p_k$ (ε, x)-jó sorozatra igazak a következők:

$$\text{(14a)}\quad \vartheta\left(\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)\right) > 1{,}8(1+C)\left(\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}-\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}\right)$$

$$i=1, \ldots, l-1,$$

és

$$\text{(14b)}\qquad \vartheta\left(\frac{x}{p_{j_2+1}}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_{j_1}}\right) > 1{,}8\left(\frac{x}{p_{j_2+1}}(1+C)-\frac{x}{p_{j_1}}\right),$$

akkor ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_{j_{l-1}+1}}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_{j_1}}\right) = \vartheta\left(\frac{x}{p_1}(1+G)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_k}\right) > 1{,}8\left(\frac{x}{p_1}(1+C)-\frac{x}{p_k}\right).$$

De $p_k/p_1 > 10$, így $\frac{x}{p_k} < 0{,}1\,\frac{x}{p_1}$, azaz

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_1}(1+C)\right) > \vartheta\left(\frac{x}{p_1}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_k}\right) > 1{,}8\,\frac{x}{p_1}(1+C)-0{,}18\,\frac{x}{p_1} > 1{,}6\,\frac{x}{p_1}(1+C).$$

Ez ellentmond (4)-nek, hiszen $p_1 < p_k < x/\log\log x$, így x/p_1 x-szel együtt minden határon túl nő, és X a végtelenben torlódik, valamint a 2. lemma szerint ilyen $p_1 < \ldots < p_k$ sorozat minden $x_1(\varepsilon, t)$-nél nagyobb $x \in X$-re van.

Így már csak x_0, ε, t-t kell úgy megválasztanunk a bizonyítás befejezéséhez, hogy $x>x_0$, $x\in X$ esetén a 2. lemmát kielégítő $p_1<\ldots<p_k$ sorozatra (14a), (14b) fennálljon. A fenti gondolatmenetből az is kiderült, hogy először a 2. lépést kell végigszámolnunk: az itt kapott t-t rögzíteni, ekkor már k limitálva lesz és az 1. lépés keresztülvihető. Jelölje tehát $K_i=[a_i, b_i]$ a fent definiált intervallumokat: $a_i=x/p_{j_i}$, $b_i=(1+C)x/p_{j_{i+1}+1}$. Először belátjuk tehát, hogy ha t elég kicsi, akkor

$$\frac{b_{i+1}-a_{i+1}}{b_{i+1}-b_i}\geqq 0{,}99. \tag{15}$$

De

$$\frac{b_{i+1}-a_{i+1}}{b_{i+1}-b_i}=1-\frac{a_{i+1}-b_i}{b_{i+1}-b_i}=1-\frac{\frac{a_{i+1}}{b_i}-1}{\frac{b_{i+1}}{b_i}-1}.$$

A következőket kell most figyelembe venni: $\frac{b_{i+1}}{b_i}>\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\geqq 1+C$ hiszen $b_{i+1}=$ $=\left(\frac{x}{p_{j_{i+2}+1}}\right)(1+C)\geqq\frac{x}{p_{j_{i+1}}}(1+C)=(1+C)a_i$. Másrészt a 2. lemma b) pontja szerint

$$\frac{a_{i+1}}{b_i}=\frac{\frac{x}{p_{j_{i+1}}}}{\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)}=\frac{p_{j_{i+1}+1}}{p_{j_{i+1}}(1+C)}<(1+t)^2.$$

Így

$$\frac{b_{i+1}-a_{i+1}}{b_{i+1}-b_i}=1-\frac{\frac{a_{i+1}}{b_i}-1}{\frac{b_{i+1}}{b_i}-1}>1-\frac{2t+t^2}{C}.$$

Ha tehát t-t a következőképpen választjuk:

$$t=\min(2,\ 0,\ 01\ C/4), \tag{16}$$

akkor (15) adódik.

A továbbiakban tehát t-t rögzítjük (16)-nak megfelelően. Ezzel elértük azt is, hogy k egy abszolút konstans alatt marad. (14a) és (14b) belátásához már nem kell más, mint a következő:

$$\vartheta(b_i)-\vartheta(a_i)>1{,}9(b_i-a_i) \quad \text{ha} \quad i=1,\ \ldots,\ l. \tag{17}$$

Ugyanis ebből (14b) $i=1$ választással azonnal adódik és másrészt ebből (15) szerint adódik $i=1,\ \ldots,\ l-1$-re, hogy

$$\vartheta(b_{i+1})-\vartheta(b_i)>\vartheta(b_{i+1})-\vartheta(a_{i+1})>1{,}9(b_{i+1}-a_{i+1})\geqq$$

$$\geqq 0{,}99\cdot 1{,}9(b_{i+1}-b_i)>1{,}8(b_{i+1}-b_i)$$

ami éppen (14a).

Tehát be kell látni, hogy ε, x_0 alkalmas választása mellett (17) fennáll $x>x_0$, $x\in X$ esetén a 2. lemmát (16)-nak megfelelő t-vel kielégítő $p_1<\ldots<p_k$ sorozatra. Mivel k egy abszolút konstans alatt marad, így elég a következőt belátni:

Van olyan csak ε-tól függő $x_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy ha $x>x_0(\varepsilon)$, $x\in X$, akkor igaz a következő:

Ha $I_j, \ldots, I_{j+m}$ olyan, hogy $I_{j+l+1}\cap I_{j+l}\neq\emptyset$ $(l=0, \ldots, m-1)$, akkor

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_j}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_{j+m}}\right)>2(1-2(m+1)\varepsilon)\left(\frac{x}{p_j}(1+C)-\frac{x}{p_{j+m}}\right). \tag{18}$$

Ha ugyanis (18)-at már beláttuk, akkor

$$\varepsilon=\frac{5}{200k},\quad x_0=x_0(0{,}05)\quad\left(k\leqq\frac{3\log 10}{\log(1+t)}\right) \tag{19}$$

választással (17) adódik: ugyanis $K_i=I_{j_{i+1}+1}\cup I_{j_{i+1}+2}\cup\ldots\cup I_{j_i}$, és ezen intervallumok közül a szomszédosak egymásba metszenek, másrészt $1\leqq j_{i+1}+1\leqq j_i\leqq k$, azaz $m=j_i-j_{i+1}-2\leqq k-1$-re alkalmazva (16)-ot,

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_i}\right)>2(1-2(j_i-j_{i+1}-1)\varepsilon)\left(\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)-\frac{x}{p_{j_i}}\right)>$$

$$>2(1-2k\varepsilon)\left(\frac{x}{p_{j_{i+1}+1}}(1+C)-\frac{x}{p_{j_i}}\right),$$

azaz

$$\vartheta(b_i)-\vartheta(a_i)>1{,}9(b_i-a_i),$$

amint (17) állítja.

(18)-at indukcióval könnyű látni: $m=0$-ra (17) igaz, hiszen p_j (ε, x)-jó prím. Tegyük fel, hogy $m'=m-1$-re már (18) igaz, ha $x>x_0(\varepsilon)$, ahol $x_0(\varepsilon)$ olyan, hogy ha $x>x_0(\varepsilon)$, akkor a (7′)-ben szereplő f függvényre

$$f((1+C)\log\log x)<\frac{2\varepsilon C}{1+C}.$$

Belátjuk, hogy (18) ugyanezen $x_0(\varepsilon)$-ra és m-re is igaz.

Egyrészt indukció szerint

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_{j+m}}\right)>2(1-2m\varepsilon)\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C)-\frac{x}{p_{j+m}}\right)>$$

$$>2\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C)-\frac{x}{p_{j+m}}\right)-4m\varepsilon\left(\frac{x}{p_j}(1+C)-\frac{x}{p_{j+m}}\right). \tag{20}$$

Másrészt mivel p_j (ε, x)-jó prím, ezért

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_j}(1+C)\right)-\vartheta\left(\frac{x}{p_j}\right)>2(C-\varepsilon)\frac{x}{p_j}>2\left(\frac{x}{p_j}(1+C)-\frac{x}{p_j}\right)-2\varepsilon\left(\frac{x}{p_j}(1+C)-\frac{x}{p_{j+m}}\right). \tag{21}$$

Végül (7') szerint és $I_{j+1} \cap I_j = \emptyset$ azaz $x/p_{j+1}(1+C) > x/p_j$ szerint (használva $p_{j+1} < p_k < x/\log\log x$ azaz $x/p_{j+1} > \log\log x$-et), kapjuk:

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C)\right) - \vartheta\left(\frac{x}{p_j}\right) < 2\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C) - \frac{x}{p_j}\right) + f\left((1+C)\log\log x\right)\frac{x}{p_{j+1}}(1+C) <$$

$$(22) \qquad < 2\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C) - \frac{x}{p_j}\right) + 2\varepsilon\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C) - \frac{x}{p_{j+1}}\right) <$$

$$< 2\left(\frac{x}{p_{j+1}}(1+C) - \frac{x}{p_j}\right) + 2\varepsilon\left(\frac{x}{p_j}(1+C) - \frac{x}{p_{j+m}}\right).$$

Ha (20) és (21) összegéből (22)-t levonjuk, adódik, hogy

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_j}(1+C)\right) - \vartheta\left(\frac{x}{p_{j+m}}\right) > 2\left(\frac{x}{p_j}(1+C) - \frac{x}{p_{j+m}}\right) - (4m+4)\varepsilon\left(\frac{x}{p_j}(1+C) - \frac{x}{p_{j+m}}\right) =$$

$$= 2\left(1 - 2(m+1)\varepsilon\right)\left(\frac{x}{p_j}(1+C) - \frac{x}{p_{j+m}}\right),$$

azaz (18) m-re is igaz, ha $x > x_0(\varepsilon)$, $x \in X$.

Ezzel az (A) állítás bizonyítását befejeztük.

5. §. Mielőtt tovább folytatnánk, először megemlítjük a következőket: Minden pozitív ϱ-hoz van $\eta(\varrho) > 0$ és $u_1(\varrho)$ küszöbszám, hogy ha $u > u_1(\varrho)$, akkor

$$\sum_{u < p < \left(\frac{A}{a} + \varrho\right)u} \log p > \eta(\varrho)\left(\frac{A}{a} + \varrho\right).$$

Ez (4)-ből könnyen adódik. Így minden $u > u_1(\varrho)$-ra ($\varrho > 0$)

$$(23) \qquad \sum_{u < p < \left(\frac{A}{a} + \varrho\right)u} \frac{\log p}{p} > \eta(\varrho)\,(>0).$$

Másrészt (A) szerint minden 1-nél nagyobb c-hez van $\delta(c) > 0$, hogy $u > u_0(c)$ esetén

$$\vartheta(u(1+c)) - \vartheta(u) > \delta(c)(1+c)u,$$

ahonnan adódik, hogy minden $u > u_0(c)$-re

$$(24) \qquad \sum_{u < p < (1+c)u} \frac{\log p}{p} > \delta(c)\,(>0).$$

(A)-ból csak (24)-et fogjuk felhasználni. Elmondható tehát, hogy (A) jelentősége az, hogy a $c \in \left(1, \frac{A}{a}\right]$-ra is kiadja (24)-et, amit csak $c \in \left(\frac{A}{a}, \infty\right)$-ra tudunk közvetlenül. A bizonyításból ki fog derülni, hogy az eredeti bizonyításban szükség van erre a többletre.

6. §. Ebben a részben Selberg nyomán megmutatjuk, hogy az előző részben követett módszert újra alkalmazva (A)-ból hogyan következik (1′).

Először is bebizonyítjuk a következő fontos tényt:

3. *Lemma:* $A+a=2$.

Bizonyítás: A definíciója alapján van X számhalmaz, amely tetszőleges nagy számot tartalmaz, és ha $x \in X_A$, akkor

$$\vartheta(x) = Ax + o_{X_A}(x). \tag{25}$$

Ezt (6)-tal összevetve

$$\sum_{p \leqq x} \log p \, \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) = (2-A)x \log x + o_{X_A}(x \log x) \tag{26}$$

adódik. Ebből (9″)-höz hasonlóan nyerjük, hogy

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \log p \, \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) = (2-A)x \log x + o_{X_A}(x \log x). \tag{27}$$

Másrészt azonban (4) miatt

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \log p \, \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \geqq ax \sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \frac{\log p}{p} + o(x \log x).$$

Ezt (27)-tel összevetve (5) alapján

$$(2-A)x \log x \geqq ax \sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \frac{\log p}{p} + o_{X_A}(x \log x) = ax \log x + o_{X_A}(x \log x),$$

és ebből $2 \geqq A+a$ következik.

Ha az itteni okoskodásban a és A szerepét felcseréljük, akkor az előző gondolatmenetet végig számolva $a+A \geqq 2$ is adódik, amivel a 3. lemmát igazoltuk.

7. §. Először felvázoljuk a következő bizonyítás gondolatmenetét. Indirekt módon okoskodunk, feltesszük, hogy $A \neq a$. Ezt a feltevést alkalmazva könnyen következik a 4. lemma, amely szerint ha valamely y_1-re $\vartheta(y_1) \approx a y_1$, akkor $y_2 \in (c y_1, y_1)$-re $\vartheta(y_2) \approx A y_2$ nem állhat, ahol $c \approx \frac{a}{A}$. Ezekután (A) gondolatmenetét követve belátjuk, hogy ha egy x-re $\vartheta(x) \approx Ax$, akkor „majdnem minden" $p < x$-re $\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \approx a\frac{x}{p}$. Ez, az előzőekkel összevetve tehát azt jelenti, hogy található „nagyon sok" diszjunkt $\left(c\frac{x}{p}, \frac{x}{p}\right)$ intervallum, amelyben nincs $\vartheta(y) \approx Ay$-t teljesítő y. (7. lemma) Az ellentmondást az fogja adni, hogy ha p_1 a legkisebb prím, amelyre $\vartheta\left(\frac{x}{p_1}\right) \approx a\frac{x}{p_1}$, akkor az előző rész alaplemmájával analóg okoskodás adja, hogy majdnem minden $g < \frac{x}{p_1}$ prímre $\vartheta\left(\frac{x}{p_1 g}\right) \approx A\frac{x}{p_1 g}$.

Mivel a prímek sok vagy kevés voltát most is mindig a $\Sigma \log p/p$ összeggel mérjük, ez (24) miatt fog ellentmondást adni. (24)-re $c>\frac{a}{A}$ miatt lesz szükségünk.

A következő részben meg fogjuk mutatni, hogy a 4. lemma kis módosításával, amelyben csak (7)-et használjuk, a (cy_1, y_1) tágítható úgy, hogy $c<\frac{a}{A}$ és ekkor már (23) is elég lesz ugyanehhez az okoskodáshoz.

Most rátérünk a bizonyításra. Tegyük fel, hogy $a \neq A$, azaz (4) szerint $0<a<A<\infty$. Legyenek ε, δ egyelőre tetszőleges pozitív számok. Mint mondtuk, az $a \neq A$ indirekt feltevést a következő lemmában használjuk ki:

4. *Lemma.* *Legyen* $y_1>0$*-ra* $\vartheta(y_1)<(a+\varepsilon)y_1$, $\varepsilon, \delta>0$ *rögzített,* $\varepsilon+\delta<A-a$. *Ekkor minden* $y_2 \in \left(\frac{a-\varepsilon}{A-\delta} y_1, y_1\right)$*-ra*

$$\vartheta(y_2)<(A-\delta)y_2.$$

Bizonyítás: A bizonyítás $\vartheta(x)$ monotonitásából közvetlenül adódik: Ha $((a+\varepsilon)/(A-\delta))y_1<y_2<y_1$, akkor

$$\vartheta(y_2) \leqq \vartheta(y_1)<(a+\varepsilon)y_1<(A-\delta)y_2.$$

Ezek után legyen Y olyan végtelenbe tartó pozitív számsorozat, amelyre

$$\vartheta(x) = Ax+o_Y(x). \tag{28}$$

Definiáljuk végül az előző részhez hasonlóan az (a, ε, x)-jó, (A, ε, x)-jó és (a, ε, x)-rossz, (A, ε, x)-rossz prímeket, most $\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\Big/\frac{x}{p}$-nek az a, illetve A-tól való eltérése szerint: legyen $\varepsilon, x>0$ tetszőleges. Egy $p<x$ prím (a, ε, x)-jó vagy -rossz, illetőleg (A, ε, x)-jó vagy -rossz, aszerint, amint

$$\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \leqq (a+\varepsilon)\frac{x}{p} \quad \text{vagy} \quad \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) > (a+\varepsilon)\frac{x}{p}, \tag{29a}$$

illetőleg

$$\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \geqq (A-\varepsilon)\frac{x}{p} \quad \text{vagy} \quad \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) < (A-\varepsilon)\frac{x}{p} \tag{29b}$$

teljesül.

Bebizonyítjuk, hogy $x \in Y$-ra „majdnem minden" $p<x$ prím (a, ε, x)-jó, azaz igaz az

5. *Lemma.* *Legyen* $\varepsilon>0$ *rögzített. Ekkor*

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p\ (a, \varepsilon, x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} = o_Y(\log x). \tag{30}$$

(Itt az o_Y függvény ε-ban nem feltétlenül egyenletes.)[5]

[5] Megint elmondható lenne a bizonyítás úgy, hogy ε-t és δ-t (33)-nak megfelelően választjuk, és csak ezen ε, δ-ra bizonyítunk. Ehhez η' és s definícióját lásd (30′)-ben.

Ugyanúgy, mint az alaplemma bizonyításánál, most is felhasználjuk, hogy (6) alapján $\vartheta(x)$-ből $\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)$ értékére „majdnem minden" prímre vissza lehet következtetni. (6)-ból (27)-et úgy vezettük le, hogy X_A-ról csak azt használtuk fel, hogy (25)-öt teljesíti, mivel pedig Y-ra ugyanaz a kikötés teljesül, (27) Y-ra is alkalmazható, azaz a 3. lemma szerint

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \log p \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) = ax \log x + o_Y(x \log x).$$

Másrészt a, valamint az (a, ε, x)-rossz prímek definíciója miatt

$$\sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \log p \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \geqq ax \sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{\log\log x} \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-jó}}} \frac{\log p}{p} + o\left(x \sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{\log\log x} \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-jó}}} \frac{\log p}{p}\right) +$$

$$+ (a+\varepsilon)x \sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{\log\log x} \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} = ax \sum_{p \leqq \frac{x}{\log\log x}} \frac{\log p}{p} + o(x \log x) + \varepsilon x \sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{\log\log x} \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} =$$

$$= ax \log x + o(x \log x) + \varepsilon x \sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{\log\log x} \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p}.$$

Ennek az előző formulával való összevetéséből

$$\sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{\log\log x} \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} = o_Y(\log x),$$

és (5) miatt a lemma állítása következik.

8. §. (30)-ból belátjuk, hogy „nagyon sok" diszjunkt $\left(d\frac{x}{p}, \frac{x}{p}\right)$ intervallum van, amelyek csupa (a, ε, x)-jó prímet tartalmaznak.

6. *Lemma.* *Legyen* $\varepsilon > 0$ *tetszőleges rögzített, és* $c > 1$ *tetszőleges szám,* $B = \frac{2A}{a} \cdot c$, $d = 1/4 \log B$. *Ekkor van* c, ε*-tól függő* $x_0(c, \varepsilon)$ *küszöbszám, hogy minden* $x \in Y$, $x > x_0(c, \varepsilon)$*-hoz találhatók* $N = [d \log x] + 2$*-vel* $p_1 < p_2 \ldots < p_N$ (a, ε, x)*-jó prímek, amelyekre* $\frac{p_{i+1}}{p_i} > c$.

A 2. lemma bizonyításához hasonló módon járunk el. Legyen $1 \leqq r < \left[\frac{\log x}{2 \log B}\right]$-ra $J_r = [B^{2r}, B^{2r+1})$. Miután két különböző J_r-ben levő (a, ε, x)-jó prím hányadosa nagyobb c-nél, az állításhoz elég azt belátni, hogy elég nagy $x_0(c, \varepsilon)$-ra van $[d \log x] + 2$ J_r-ben (a, ε, x)-jó prím, ha $x > x_0(c, \varepsilon)$. Ehhez pedig elég azt belátni, hogy legfeljebb $o_Y(\log x)$ J_r-ben nincs (a, ε, x)-jó prím, ekkor ugyanis az állítást igazoltuk. Legyen

ezért most $x \geq \exp\left[u_1\left(\frac{A}{a}\right)\right]$ (l. (23)). Ha valamely $r > \log\log x$-re J_r-ben nincs (a, ε, x)-jó prím, akkor (23) szerint

$$\sum_{\substack{p \in J_r \\ p\,(a,\varepsilon,x)\text{-rossz}}} \frac{\log p}{p} = \sum_{p \in J_r} \frac{\log p}{p} > \eta\left(\frac{A}{a}\right) = \eta$$

ahol $\eta > 0$ abszolút konstans, hiszen csak A, a abszolút konstansoktól függ. Ez pedig (30) miatt pontosan azt jelenti, hogy legfeljebb $o_Y(\log x) + \log\log x = o_Y(\log x)$ J_r-ben nincs (a, ε, x)-jó prím. Ezzel a 6. lemmát beláttuk.

A későbbiek kedvéért megjegyezzük, hogy (24)-et, azaz (A)-t nem használtuk (annál inkább (A) gondolatmenetét).

Legyen most $\varepsilon > 0$ rögzített $x \in Y$, $x > x_0\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2, \varepsilon\right)$ a 6. lemma x_0-jával. Válasszuk $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$-nek a 6. lemmában biztosított (a, ε, x)-jó prímeket, amelyekre $\frac{p_{i+1}}{p_i} > \left(\frac{A}{a}\right)^2$. $N = \left[\frac{1}{12 \log \frac{2A}{a}} \log x\right] + 2$ (p_i függ x-től és ε-tól, de ezt a kényelem okából nem jelöljük). Miután p_i (a, ε, x)-jó prím, ezért $\vartheta\left(\frac{x}{p_i}\right) < (a+\varepsilon)\frac{x}{p_i}$. Így a 4. lemma szerint $\left(\left(\frac{a+\varepsilon}{A-\delta}\right)\frac{x}{p_i}, \frac{x}{p_i}\right)$ intervallumba eső y-okra $\vartheta(y) < (A-\delta)y$.

Ha $q < \frac{x}{p_1}$ $\left(A, \delta, \frac{x}{p_1}\right)$-jó prím, akkor $\frac{x}{p_1 q}$ nem eshet ilyen intervallumba, azaz

$$q \notin \left(\frac{p_i}{p_1}, \frac{p_i}{p_1}\frac{A-\delta}{a+\varepsilon}\right) = I_i.$$

Mivel

$$\frac{A-\delta}{a+\varepsilon} < \frac{A}{a} < \left(\frac{A}{a}\right)^2,$$

ezért az I_i-ik páronként diszjunktak. Másrészt, és itt használjuk egyedül (24)-et,

$$l = \frac{1-\frac{s}{2}}{1+\frac{s}{2}}, \quad s = \frac{A-a}{A+a} \quad \text{azaz} \quad \frac{1+s}{1-s} = \frac{A}{a}$$

jelöléssel $\frac{(A-\delta)}{(a+\varepsilon)} > l\frac{A}{a}$, ha $\delta < \frac{s}{2}A$, $\varepsilon < \frac{s}{2}A$ s így

$$\frac{p_i}{p_1} > v = u_0\left(l\frac{A}{a} - 1\right)$$

esetén

$$(30') \qquad \sum_{\substack{q\in I_i \\ q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}}} \frac{\log q}{q} = \sum_{q\in I_i} \frac{\log q}{q} > \sum_{\frac{p_i}{p_1}<q<l\frac{A}{a}\frac{p_i}{p_1}} \frac{\log q}{q} > \delta\left(l\frac{A}{a}-1\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{1+s}{1+\frac{s}{2}}\frac{1-\frac{s}{2}}{1-s}-1\right) = \eta'.$$

A további okoskodást csak a fenti feltételt kielégítő ε, δ-ra végezzük. Mivel η' és v abszolút konstansok, azt kapjuk tehát, hogy

$$O<\delta \leqq \frac{s}{2}A, \quad O<\varepsilon<\frac{s}{2}a, \quad x\in Y, \quad x>x_0\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2,\varepsilon\right), \quad x>\left(\frac{A}{a}\right)^{24v}$$

esetén

$$(31) \qquad \sum_{q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} > \sum_{q<i<N} \sum_{\substack{q\in I_i \\ q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}}} \frac{\log q}{q} > \eta'(N-v) > \frac{\eta' \log x}{24\log\frac{2A}{a}}.$$

Itt $\dfrac{\eta'}{24\log\frac{2A}{a}}$ abszolút konstans. Ha be tudnánk látni egy, az 5. lemmához hasonló állítást, azaz, hogy

$$\sum_{q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} = o\left(\log\frac{x}{p_1}\right),$$

akkor meg lenne az ellentmondás. Ezt azonban csak akkor tudnánk, ha fennállna $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{p_1}=a$, de mi csak azt tudjuk, hogy

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_1}\right) < (a+\varepsilon)\frac{x}{p_1} \text{ (és itt } \varepsilon \text{ rögzített).}$$

Azonban ha az 5. lemma okoskodását ilyen feltétel mellett végigvisszük, így is ellentmondás adódik, vagyis azt kapjuk, hogy ε, δ-t megfelelő kicsinek választva

$$\frac{\sum\limits_{q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q}}{\log x}$$

tetszőlegesen kicsivé tehető. Ez pedig már ellentmond (31)-nek. Belátjuk tehát hogy érvényes a következő

7. *Lemma: Legyenek* $\varepsilon, \delta>0$ *rögzítettek. Ekkor*

$$(32) \qquad \sum_{q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} \leqq \frac{\varepsilon}{\delta}\log x + o_Y(\log x).$$

Ha ezt sikerül belátnunk, akkor valóban befejeztük (1′) bizonyítását, hiszen pl.

$$\delta = \frac{sa}{2}, \quad \varepsilon = \min\left(\frac{\eta'}{24\log\frac{2A}{a}}\frac{sa}{3}, \frac{sa}{2}\right) \tag{33}$$

választással teljesülnek a (31)-hez ε, δ-ra tett kikötések, így (32) ilyen választással ellentmond (31)-nek, ugyanis

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \leqq \frac{2}{3}\frac{\eta'}{24\log\frac{2A}{a}}.$$

(32) *helyett azt látjuk be, hogy ha* $\varepsilon, \delta > 0$ *rögzítettek, akkor*

$$\sum_{q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} \leqq \frac{\varepsilon}{\delta}\log\frac{x}{p_1} + o_Y\left(\log\frac{x}{p_1}\right). \tag{33′}$$

Ehhez emlékeztetünk arra, hogy p_1 is x-től és ε-től függ, valamint, hogy $p_1\left(\frac{A}{a}\right)^{2N-2} < p_N < x$ miatt

$$\frac{x}{p_1} > \exp\left(2\log\frac{A}{a}\frac{\log x}{12\log\frac{2A}{a}}\right),$$

ezért x-szel együtt $\frac{x}{p_1}$ is a végtelenhez tart, azaz (33′)-nek és a következőkben használt 0 ( ) jeleknek van értelmük. Használjuk az $\frac{x}{p_1} = x_1$ jelölést.

(33′) bizonyításához a már szokott módon abból indulunk ki, hogy mivel p_1 (a, ε, x)-jó ezért $\vartheta(x_1) < (a+\varepsilon)x_1$, így

$$\sum_{q \leqq x_1} \log^2 q \leqq (a+\varepsilon)x_1 \log x_1.$$

Ezt (3)-mal összevetve, és a 3. lemma szerint $2-a-\varepsilon = A-\varepsilon$ beírásával $x \in Y$-ra azt adja, hogy

$$(A-\varepsilon)x_1\log x_1 + o(x_1\log x_1) \leqq \sum_{q\leqq x_1}\log q\,\vartheta\left(\frac{x_1}{q}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{q\leqq\frac{x_1}{\log\log x_1}\\ q(A,\delta,x_1)\text{-jó}}} \vartheta\left(\frac{x_1}{q}\right)\log q + \sum_{\substack{q\leqq\frac{x_1}{\log\log x_1}\\ q(A,\delta,x_1)\text{-rossz}}} \vartheta\left(\frac{x_1}{q}\right)\log q + \sum_{\frac{x_1}{\log\log x_1} < q < x_1} \vartheta\left(\frac{x_1}{q}\right)\log q \leqq$$

$$\leqq Ax_1 \sum_{q(A,\delta,x_1)\text{-jó}} \frac{\log q}{q} + o\left(x_1 \sum_{q(A,\delta,x_1)\text{-jó}} \frac{\log q}{q}\right) + (A-\delta)x_1 \sum_{q(A,\delta,x_1)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} +$$

$$+ o(x_1\log x_1) = Ax_1\log x_1 - \delta x_1 \sum_{q(A,\delta,x_1)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} + o(x_1\log x_1)$$

innen (33) adódik. A 7. lemma bizonyításánál nem használtuk (24)-et.

3. RÉSZ

Az előző rész bizonyítása során már kiemeltük, hogy (24)-et, azaz (A)-t is, csak (30′) felírásánál használtuk. A 4—7. lemmákban elegendő (23) is. Ha most megfigyeljük a (30′)-höz és (31)-hez vezető gondolatmenetet, akkor megfigyelhetjük, hogy ott (23) azért nem elegendő, mert a 4. lemma által biztosított jó prím nélküli intervallumok csak $\frac{A-\varepsilon}{a+\delta}<\frac{A}{a}$ „hosszúak". Ha sikerül az I_i intervallumot $\frac{p_i}{p_1}$ másik oldalára is egy kicsit megnyújtani, akkor remélhető, hogy (31) levezetéséhez (23) is elég, s így (A)-t nem kell használnunk.

Ahhoz, hogy az I_i intervallum $\frac{p_i}{p_1}$ másik oldalára is „megnyúljon", a 4. lemma analogonját kellene belátni $y_2\in(y_1, cy_1)$-ben valamilyen elég nagy c-re. A 4. lemmához elég volt a $\vartheta(x)$ függvény iránytangensének nem-negatív volta, azonban ellenkező irányú becsléshez kell $\vartheta(x)$ iránytangensének valamilyen felső korlátja. Ezt pontosan (7) szolgáltatja. Tehát (7)-ből belátjuk a 4. lemmát kiegészítő

4′ *Lemmát.* Legyen $\delta, \varepsilon>0$ tetszőleges, $y_1>0$. Ekkor létezik egy, csak δ-tól függő z szám úgy, hogy ha $\vartheta(y_1)<(a+\varepsilon)y_1$ és $y_2>z$, akkor $y_2\in\left(y_1, \frac{A-\varepsilon}{a+2\delta}y_1\right)$ esetén $\vartheta(y_2)<(A-\delta)y_2$.

Bizonyítás: (7) felhasználásával van z, hogy $y_2>y_1$, $y_2>z$ esetén

$$\vartheta(y_2)-\vartheta(y_1)<2(y_2-y_1)+\delta y_2.$$

Innen, ha $\vartheta(y_1)<(a+\varepsilon)y_1$ és $y_2<\frac{A-\varepsilon}{a+2\delta}y_1$, akkor a 3. lemmát használva

$$\vartheta(y_2)<(2+\delta)y_2-(2-a-\varepsilon)y_1<(2+\delta)y_2-(A-\varepsilon)\frac{a+2\delta}{A-\varepsilon}y_2=$$

$$=(2+\delta-a-2\delta)y_2=(A-\delta)y_2,$$

ahogy állítottuk.

Ezekután megmutatjuk, hogy a (31)-hez vezető gondolatmenet most hogyan módosítható úgy, hogy (24) helyett (23) is elegendő legyen.

Legyen ismét $\varepsilon_1 x>0$ rögzített, $x\in Y$, $x>x_0\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2, \varepsilon\right)$ a 6. lemma x_0-jával. (Mint említettük, a 6. lemmát (A)-tól függetlenül nyertük.) Válasszunk ismét a 6. lemmában biztosított $p_1<p_2<\ldots<p_N$ (a, ε, x)-jó prímeket, amelyekre $\left(\frac{A}{a}\right)^2<\frac{p_{i+1}}{p_i}$, $N=\left[\frac{1}{12\log\frac{2A}{a}}\log x\right]+2$. p_i (x, ε)-tól függ, de ezt megint nem jelöljük. Miután p_i (a, ε, x)-jó prím, így

$$\vartheta\left(\frac{x}{p_i}\right)<(a+\varepsilon)\frac{x}{p_i}.$$

Innen egyrészt úgy, mint a 8. §-ban a 4. lemmából következik, hogy az

$$I_i = \left(\frac{p_i}{p_1}, \frac{p_i}{p_1}\frac{A-\delta}{a+\varepsilon}\right)$$

intervallumban nincs $\left(A, \delta, \frac{x}{p_1}\right)$-jó prím, másrészt ugyanolyan triviális számolással a 4′ lemmából következik, hogy az

$$I_i' = \left(\frac{a+2\delta}{A-\varepsilon}\frac{p_i}{p_1}, \frac{p_i}{p_1}\right)$$

intervallumban sem lehet $\left(A, \delta, \frac{x}{p_1}\right)$-jó prím. Így tehát most minden $p_i > z(\delta)$-ra azt kapjuk, hogy a

$$K_i = \left(\frac{a+2\delta}{A-\varepsilon}\frac{p_i}{p_1}, \frac{p_i}{p_1}\frac{A-\delta}{a+\varepsilon}\right)$$

intervallumba nem esik $\left(A, \delta, \frac{x}{p_1}\right)$-jó prím. Ha ε-t és δ-t elég kicsire választjuk, ennek az intervallumnak a „hossza" már közel $\left(\frac{A}{a}\right)^2 > \frac{A}{a}$, így (23) alkalmazható (24) helyett: ha $\varepsilon, \delta < \frac{A-a}{A}\frac{a}{6}$, akkor

$$\frac{A-\delta}{a+\varepsilon} > \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a}+1\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{A-\varepsilon}{a+2\delta}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a}+1\right)$$

így K_i „hossza" nagyobb $\frac{1}{4}\left(\frac{A}{a}+1\right)^2 > \frac{A}{a}$. $\left(\frac{A}{a} \neq 1!\right)$. Ezért most (30′) helyett azt kapjuk, hogy (23) miatt, ha $\frac{p_i}{p_1} > v' = u_1\left(\frac{1}{4}\left(\frac{A}{a}+1\right)^2 - \frac{A}{a}\right)$ és $p_i > z(\delta)$ ($p_i > i$ miatt pl. $i > z(\delta)$-ra tehát)

(34)

$$\sum_{\substack{q \in K_i \\ q \left(A, \delta, \frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}}} \frac{\log q}{q} = \sum_{q \in K_i} \frac{\log q}{q} > \sum_{\substack{2\frac{p_i}{p_1}\frac{1}{1+\frac{A}{a}} < q \\ q < \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a}+1\right)\frac{p_i}{p_1}}} \frac{\log q}{q} > \eta\left(\frac{1}{4}\left(\frac{A}{a}+1\right)^2 - \frac{A}{a}\right) = \eta''$$

Itt η'', v' abszolút konstansok.

Így minden fix ε, δ-ra, melyre teljesül

(35) $$0 < \varepsilon, \ \delta < \frac{A-a}{A}\frac{a}{6},$$

azt kapjuk, hogy ha $x > x_0\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2, \varepsilon\right)$ és $x \in Y$, akkor — lévén, hogy a K_i intervallumok

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} > \left(\frac{A}{a}\right)^2 > \frac{A-\delta}{a+\varepsilon}\Big/\frac{A-\varepsilon}{a+2\delta}$$

miatt diszjunktak, —

$$\sum_{q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} > \sum_{\substack{\max(z(\delta),v')\leqq i\\ i\leqq N}} \sum_{\substack{v\in K_i\\ q\left(A,\delta,\frac{x}{p_1}\right)\text{-rossz}}} \frac{\log q}{q} > \eta''(N-\max(z(\delta),v')),$$

azaz (N definíciójából) minden fix (35)-öt kielégítő ε, δ-ra

$$\sum_{q(A,\delta,x_1)\text{-rossz}} \frac{\log q}{q} \geqq \frac{\eta''}{12\log\frac{2A}{a}} \log x + o_Y(\log x).$$

(Itt a o nem egyenletes δ-ban, de ez nem zavar. A bal oldal függ ε-tól is, hiszen $\frac{x}{p_1}=x_1$ függ tőle, a jobb oldal nyilván egyenletes ε-ban — azaz nem függ tőle —, de erre nem lesz szükségünk, hiszen az okoskodást elég egy konkrét (ε,δ)-párra végezni.) A 7. lemma, amely megint csak nem használja (24)-et, most már könnyen adja az ellentmondást

$$\varepsilon=\frac{a}{8}\frac{A-a}{A}\frac{\eta''}{12\log\frac{2A}{a}} \quad \text{és} \quad \delta=\frac{A-a}{A}\frac{a}{7}$$

választással.

IRODALOM

[1] P. Erdős: On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. Proceedings of the National Academy of Sciences 35 (1949) pp. 374—384.

[2] Erdős P.—Surányi J.: Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 250 old.

[3] G. H. Hardy—E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, ed. Clarendon Press, Oxford, 1968. 420 old.

[4] A. Selberg: An elementary proof of the prime-number theorem. Annals of Mathematics (2) 50 (1949) pp. 305—313.

[5] Gyarmati E. (Lánczi I.-né)—Turán P.: Számelmélet. Egyetemi jegyzet, 1962.

ПЕРВОЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

ДЬЁРДЬ ГОФМАН И ЛАСЛО ШУРАНИ

AN EXPOSITION OF THE FIRST ARITHMETICAL PROOF OF THE PRIME NUMBER THEOREM

G. HOFFMANN AND L. SURÁNYI

The aim of this paper is to give a detailed elaboration of the first elementary arithmetical proof of the prime number theorem presented in Erdős's paper [1].

A SZITA-FORMULÁRÓL

LOVÁSZ LÁSZLÓ

1. Az ún. logikai szitaformula közismert, elemi módszer bizonyos típusú kombinatorikai feladatok megoldására, már középiskolás szinten is (l. pl. [6]). Típusfeladat a következő: Egy osztály 40 tanulója közül 25 szereti a matematikát, 25 a fizikát, 20 a történelmet. 15-en szeretik a matematikát is és a fizikát is, 10-en a matematikát és történelmet, 10-en a fizikát és történelmet. Mindhármat 5-en szeretik. Hányan nem szeretik egyiket sem?

A szita-formula lényegét azonnal világossá teszi az alábbi megoldás: a 40 tanulóból 25, 25, 20 szeret egy-egy tantárgyat, így ezeket vonjuk le. Ekkor azonban többször vontuk le azokat, akik több tárgyat is szeretnek; így hozzá kell adni $15+10+10$-et. Így azonban azokat, akik mindhárom tárgyat szeretik, 3-szor levontuk, majd 3-szor hozzáadtuk. Tehát ezeket még egyszer le kell vonnunk. Az eredmény tehát

$$40-25-25-20+15+10+10-5=0.$$

Könnyű igazolni, hogy hasonlóan járhatunk el általánosabb esetben is: Ha adott egy N elemű S halmaz és $a, b, c\ldots$ tulajdonságok, és $N_{a,b,\ldots,l}$ jelöli azon S-beli elemek számát, melyeknek az $a, b, \ldots, l$ tulajdonsága megvan (esetleg a többi is), akkor azon elemek M száma, melyeknek egyik tulajdonságuk sincs meg,

$$M = N-N_a-N_b-\ldots+N_{ab}+N_{ac}+N_{bc}+\ldots-N_{abc}-\ldots . \tag{1}$$

Dolgozatunk célja, hogy bemutassa a formulának néhány olyan alkalmazását, melyek matematikai szempontból is érdekes eredményekhez vezetnek. Az alkalmazások egy része meglepő módon, nem leszámlálási feladatokra vonatkozik, hanem többek között algebrai kérdésekre. A válogatás tartalmaz közismert dolgokat és új, nyomtatásban nemrég megjelent eredményeket is, hiszen a hangsúly a megoldási módszeren van. Egy példától eltekintve, nem térünk ki a módszer számelméleti alkalmazásaira, mert azok bemutatása mind a felhasznált segédeszközök mélységét, mind a bizonyítások hosszát illetően meghaladná cikkünk kereteit. A szitamódszerekről szép összeállítás található pl. [4]-ben.

Bemutatjuk azonban a szita-formula egy újkeletű általánosítását, mely érdekes hálóelméleti kapcsolatokat mutat és melyről eddig, tudtunkkal, magyar nyelven nem esett szó.

A részletes irodalmi utalások helyett általában újabb keletű, összefoglaló művekre utalunk, ahol az olvasó a témakör további kapcsolataival is megismerkedhet.

2. Egy leszámlálási feladatra adott válaszról nem lehet mindig egyértelműen eldönteni, hogy valóban válasz-e, ill. végső válasz-e. A végeredmény gyakran egy többé-kevésbé bonyolult, a paraméterektől függő tagszámú összeg, és nem világos,

nem hozható-e ez egyszerűbb alakra. Egy ilyen kifejezésnél általában többet mond egy egyszerű függvényekből álló formula, mely aszimptotikusan vagy nagyságrendileg közelíti a pontos eredményt.

A szita-formula esetében általában nyilván nem adható egyszerűbb válasz a leszámlálási feladatra. Más a helyzet azonban, ha a formulát speciális esetben alkalmazzuk. Meg kell állapítanunk, hogy a kapott kifejezésnek sok „hibája" van: a tagok száma igen nagy (k tulajdonság esetén 2^k) a tagok változó előjelűek (így az összeget nem lehet pl. néhány tagjával alulról becsülni[1]). A számelméletben általános módszereket dolgoztak ki e „hibák" kiküszöbölésére (pl. Selberg-szita). Mi most olyan alkalmazásokat fogunk bemutatni, ahol a szita-formula előnyös tulajdonságai (pl. a tagok egyszerű szerkezete) lesznek jól kihasználhatók.

3. Jelölje $\varphi(n)$ az n-hez relatív prím, n-nél kisebb természetes számok számát (n természetes szám). Legyenek n prímosztói $p_1, \ldots, p_k$. Ekkor $\varphi(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azoknak a számát jelöli, melyek a $p_1, \ldots, p_k$ prímek egyikével sem oszthatók. Így $\varphi(n)$ meghatározható úgy, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számok közül „kiszitáljuk" azokat, melyek $p_1, \ldots, p_k$ valamelyikével oszthatók. Mivel olyan szám n-ig, mely $p_{i_1}, \ldots, p_{i_v}$ mindegyikével osztható, pontosan $\dfrac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_v}}$ van, az eredmény

$$(2)\quad \varphi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \ldots - \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3} - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k}$$

Könnyen észrevehető, hogy e képlet az

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

zorzat kifejtésével azonos. Tehát

$$(3)\qquad \varphi(n) = n \cdot \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Ez a képlet „valódi" választnak tekinthető, hiszen alapján $\varphi(n)$ lényeges tulajdonságai igazolhatók.

Röviden utalunk itt a szita-formula számelméleti alkalmazásainak alapgondolatára. Ha $\varphi(n)$ helyett, mondjuk, az n-nél nem nagyobb prímszámok $\pi(n)$ számára volnánk kíváncsiak, akkor így próbálhatnánk meg eljárni: $\pi(n) = \pi(\sqrt{n}) + R - 1$, ahol $R-1$ a $\sqrt{n}$ és n közötti prímek számát jelenti. Itt $\pi(\sqrt{n}) \leqq \sqrt{n}$ elhanyagolható, R pedig az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon elemeinek száma, melyek a $\sqrt{n}$-nél kisebb $2, 3, \ldots, p$ prímekkel nem oszthatók. Tehát R is egy szitálási eljárás végeredménye, és (2)-höz hasonló képlettel kapható, csakhogy, mivel itt a szereplő prímek n-nek nem osztói, a fellépő tagok

$$\left[\frac{n}{p_1 \cdots p_1}\right]$$

alakúak. Ez éppen elég ahhoz, hogy (3) típusú szorzatra bontás ne sikerüljön. Megkísérelhetnénk minden tagnál az egészrész-jelet elhagyni, így azonban az elkövetett

[1] Az azonban igaz, hogy az (1) összegnek az előjel-váltásokig terjedő részletösszegei felváltva alulról, ill. felülről becsülik a végeredményt.

hibáról csak annyit állíthatnánk, hogy $<2^{\pi(\sqrt{n})}$, ami lényegesen nagyobb, mint n s így az egész becslést elrontja (itt látszik a szita-formula egyik említett „hibája": túl sok tagja van).

Mint már jeleztük, nem kívánunk azoknak a számelméleti módszereknek az ismertetésébe belemenni, melyek e nehézségek kiküszöbölésére születtek.

4. Hány olyan permutációja van az $1, 2, \ldots, n$ elemeknek, mely minden elemet megmozgat? Könnyű megtalálni a „szitálásos" megfogalmazást: az $n!$ permutáció közül ki kell szitálnunk azokat, melyek egy elemet fixen hagynak. Azon permutációk száma, melyek adott k elemet fixen hagynak, nyilván $(n-k)!$ Mivel ez a k elem $\binom{n}{k}$-féleképpen választható, a végeredmény

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e},$$

ahol a $\approx$ jelnél az eltérés $<\frac{1}{n+1}$. Így ebben az esetben is igen egyszerűen kezelhető volt a formula.

5. Az egyszerűen megfogalmazható leszámlálási feladatok közül az első olyan, melyre a válasz nem adható meg zárt alakban[2], a következő: Hányféleképpen lehet n ajándéktárgyat k ember között szétosztani úgy, hogy mindegyik kapjon legalább egyet? Nyilvánvaló, hogy az embereket permutálva más-más szétosztásokhoz jutunk; így a szétosztások száma $k!$-nak többszöröse: $k!S(n, k)$, ahol $S(n, k)$ az n elem k nem-üres osztályba sorolásainak számát jelenti. $S(n, k)$-t szokás *másodfajú Stirling-számnak*[3] is nevezni. Anélkül, hogy e számok érdekes tulajdonságainak tárgyalásába belemennénk, (ezekről sokat olvashat az érdeklődő pl. [11]-ben), megjegyezzük, hogy a definícióból levezethetően

$$\sum_{k=1}^{n} S(n, k)x(x-1)\ldots(x-k+1) = x^n \tag{4}$$

Valóban, tekintsünk n ajándékot és x embert. Az n ajándék lehetséges szétosztásainak száma nyilván x^k. Számoljuk össze, hány olyan van ezek között, melynél pontosan k ember kap ajándékot. Ez a k ember $\binom{x}{k}$-féleképpen választható ki; ha ez már megtörtént, az ajándékokat kell szétosztani e k elem között, hogy mindegyik kapjon valamit; ez $k!S(n, k)$-féleképpen történhet. Így a lehetséges szétosztások száma

$$\sum_{k=1}^{n} k!S(n, k)\binom{x}{k} = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)x(x-1)\ldots(x-k+1).$$

Ezzel természetesen csak pozitív egész x-ek esetére bizonyítottuk be (4)-et; azonban

[2] A faktoriálist zárt alaknak tekintjük, ami természetesen megegyezés kérdése.

[3] Az $s(n, k)$ *elsőfajú Stirling-számok* az $x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} s(n, k)x^k$ azonossággal definiálhatók. A kétfajta Stirling-számok közötti kapcsolatot a

$$\sum_{k=m}^{n} S(n, k)s(k, m) = \delta_{n,m}$$

azonosság biztosítja.

(4) mindkét oldalán x-nek egy-egy polinomja áll, melyek x végtelen sok értékére megegyeznek. Ebből következik, hogy azonosan egyenlők.

A (4) összefüggés $S(n, k)$-ra rekurzív kiszámítási lehetőséget nyújt; levezetünk most egy közvetlen formulát is. Jobb lesz visszatérni a $k!S(n, k)$ számra, az ajándékkiosztások számára. Úgy fogjuk ezt kiszámítani, hogy az összes k^n kiosztási lehetőség közül „kiszitáljuk" azokat, melyben valaki nem kap ajándékot. Azon szétosztási lehetőségek száma, melyekben adott j ember nem kap ajándékot, tehát minden ajándékot a többi $k-j$ között osztunk szét, $(k-j)^n$. Így

$$k!S(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy a (4) és (5) összefüggések egymásból is levezethetők, pl. a 13. pontban is ismertetett technikával.

6. Mivel nyilvánvalóan $S(n, n)=1$, (5)-ből következik, hogy

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \begin{cases} n! & \text{ha } k=n, \\ 0, & \text{ha } k>n. \end{cases} \tag{6}$$

Hasonlóan más nevezetes azonosságokat is nyerhetünk, ha egy leszámlálási feladat eredményét egyrészt közvetlenül, másrészt a szita-formula segítségével felírjuk. Például számoljuk meg, hányféleképpen lehet n forintot k ember között úgy szétosztani, hogy mindegyikük kapjon valamit (az előző pontban tárgyalt feladathoz képest az a változás, hogy mindegy, ki melyik forintost kapja). Ha a forintokat egyenként adom oda, kezdve az első emberen, majd egy idő után a másodikhoz lépve stb., akkor tulajdonképpen csak azt kell megmondanom, mely forintosok után kell továbblépnem. Így az eredmény $\binom{n-1}{k-1}$. Másrészt, ha j adott ember nem kap pénzt, akkor azt kell megszámolnom, hányféleképpen lehet n forintot $k-j$ ember között szétosztani (itt nincs kikötve, hogy mindegyikük kapjon!). Ez nyilván úgy is megtehető, hogy $n+k-j$ forintot szétosztunk úgy, hogy mindegyikük kapjon legalább egyet, majd egyet-egyet visszaveszünk. Így e szám $\binom{n+k-j-1}{k-j-1}$. Tehát

$$\binom{n-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n+k-j-1}{k-j-1} = \sum_{g=0}^{k-1} (-1)^{k-g} \binom{k}{g} \binom{n+g-1}{n} \tag{7}$$

7. *Turnamentnek* nevezünk egy olyan (véges) irányított gráfot,[4] melynek bármely két pontja között egyetlenegy él megy (valamelyik irányban). Az elnevezés arra utal, hogy ha egy teljes körmérkőzés végeredményét egy gráffal szemléltetjük oly módon, hogy minden csapatot egy ponttal ábrázolunk és egy pontból a másikba nyilat vezetünk, ha a megfelelő csapat legyőzte a másikat, úgy egy turnamentet kapunk (feltéve, hogy nincsen döntetlen). A legegyszerűbb szerkezetű turnament a *tranzitivan irányított*, melyet úgy kapunk, hogy a pontokat sorbarendezzük és minden pontpárt a korábbiból a későbbibe mutató nyíllal kötünk össze.

Az olvasó kevés fáradsággal be fogja tudni bizonyítani, hogy

minden turnamentben van (irányított) Hamilton-út.

[4] A gráfelméleti elnevezéseket illetően lásd [1].

Ennél lényegesen mélyebb *Rédei tétele: Minden turnamentben a Hamilton-utak száma páratlan.*

Ennek a tételnek lényegében Szelétől származó bizonyítását fogjuk itt ismertetni (l. [2]). A szita-formulát az alábbi, önmagában is érdekes lemma bizonyításánál használjuk:

Lemma: Egy (irányított) G gráfban és komplementerében található Hamilton-utak száma azonos paritású.[5]

Bizonyítás. Legyen G Hamilton-útjainak száma $h(G)$. Jelölje G_0 a G ponthalmazán értelmezett azon gráfot, melyben bármely két pontot mindkét irányban él köt össze. Ekkor G Hamilton-útjainak számát úgy nyerhetjük, hogy G_0 Hamilton-útjai közül „kiszitáljuk" azokat, melyek $\bar{G}$-ből tartalmaznak élt. Legyenek $e_1, \ldots, e_n$ $\bar{G}$ élei, és jelölje $h(e_1, \ldots e_k)$ G_0 azon Hamilton-útjainak számát, melyek az $e_1, \ldots, e_k$ éleket tartalmazzák. Ekkor

$$h(G) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{e_1, \ldots, e_k} h(e_1, \ldots, e_k) \tag{9}$$

a szita-formula szerint. Nézzük meg, mennyi $h(e_1, \ldots, e_k)$. Nyilvánvalóan ez a szám csak akkor nem-nulla, ha az $e_1, \ldots, e_k$ élek egy úton fekhetnek, tehát maguk is néhány útdarabot alkotnak. Legyen ezen útdarabok, valamint az $e_1, \ldots, e_k$ élek által le nem fedett pontok száma p. Ekkor nyilván

$$h(e_1, \ldots, e_k) = p!,$$

hiszen minden Hamilton-út meghatározza a p útdarab és pont egy sorrendjét és megfordítva. Így $p>1$ esetén $h(e_1, \ldots, e_k)$ páros, vagyis a (8) formulában minden tag páros, kivéve azon tagokat, melyeknél $e_1, \ldots, e_k$ a $\bar{G}$ gráf egy Hamilton-útját alkotják. Mivel mod 2 az előjel nem számít, (8)-ból

$$h(G) \equiv h(\bar{G}) \pmod 2$$

adódik.

Ezekután Rédei tétele egyszerűen igazolható. Legyen T egy turnament, T' a belőle egy $\overrightarrow{xy}$ él megfordításával nyert turnament. Elegendő igazolni, hogy $h(T)$ és $h(T')$ azonos paritásúak; hiszen élek ismételt megfordításával minden turnamentből eljuthatunk a tranzitivan irányítottba, melynek egyetlenegy Hamilton-útja van.

Jelölje mármost G_1 azt a gráfot, melyet úgy kapunk, hogy T-hez hozzávesszük az $\overrightarrow{yx}$ élt; G_2 azt a gráfot, melyet T-ből az $\overrightarrow{xy}$ él elhagyásával kapunk; végül legyen G_3 a G_2 éleinek megfordításával nyert gráf. Ekkor nyilván

$$h(G_3) = h(G_2). \tag{9}$$

Vegyük észre továbbá, hogy $G_3 = \bar{G}_1$, s így a lemma szerint

$$h(G_3) \equiv h(G_1) \pmod 2. \tag{10}$$

Végül vegyük észre, hogy fennáll a

$$h(G_1) + h(G_2) = h(T) + h(T') \tag{11}$$

[5] Irányított G gráf komplementerén azt a $\bar{G}$ gráfot értjük, melynek pontjai Gpontjai, és az $\overrightarrow{ab}$ élt akkor és csak akkor tartalmazza, ha G nem.

Legelább 4 pont esetén irányítatlan gráfokra is igaz a lemma állítása, és lényegében ugyanúgy igazolható.

összefüggés. Valóban, G_1 minden Hamilton-útja T, T' valamelyikének is Hamilton-útja, s akkor és csak akkor lesz mindkettőnek Hamilton-útja, ha G_2-nek is Hamilton-útja. Így minden Hamilton-út ugyanannyiszor (egyszer vagy kétszer) van beszámítva (11) mindkét oldalán.

Mármost (9)—(11) szerint

$$h(T)+h(T') = h(G_1)+h(G_2) = h(G_1)+h(G_3) \equiv 0 \pmod 2,$$

ami a tételt bizonyítja.

A lemma bizonyítása érdekes kapcsolatot mutat a gráfban és komplementerében található, bizonyos típusú részgráfok között. E gondolat számos más helyen is alkalmazást nyer. A fentiekhez hasonló paritási eredmény például, hogy

minden gráf teljes párosításainak száma azonos párosságú komplementere részleges párosításainak számával.

Három érdekes alkalmazását tartalmazza e gondolatnak a soron következő három fejezet.

8. Alkalmazzuk a szita-formulát egy (irányítatlan) G gráf háromszögeinek leszámlálására. Tekintsük a G szögpont-halmazán értelmezett G_0 teljes gráfot, és ennek háromszögei közül szitáljuk ki azokat, melyek tartalmaznak $\bar{G}$-beli élt. Jelölje $\Delta(G)$ G háromszögeinek számát, $\Delta(e_1, \ldots, e_i)$ $1 \leqq i \leqq 3$ pedig az $e_1, \ldots, e_i$ éleket tartalmazó háromszögek számát a teljes gráfban. Ekkor

$$\Delta(G) = \binom{n}{3} - \sum_{e_1} \Delta(e_1) + \sum_{e_1 \neq e_2} \Delta(e_1, e_2) - \sum_{e_1 \neq e_2 \neq e_3} \Delta(e_1, e_2, e_3),$$

ahol e_1, e_2, e_3 a $\bar{G}$ gráf élein futnak át. Itt az utolsó tag nyilván $\Delta(\bar{G})$; a második $(n-2)\bar{e}$, ahol $\bar{e}$ a $\bar{G}$ éleinek száma; a középső $\sum_{i=1}^{n} \binom{\bar{\varphi}_i}{2}$, ahol $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n$ a $\bar{G}$ gráf fokszámai; így

$$\Delta(G) = \binom{n}{3} - \bar{e}(n-2) + \sum_{i=1}^{n} \binom{\bar{\varphi}_i}{2} - \Delta(\bar{G}). \tag{12}$$

E formulából több irányban is tovább következtethetünk. Nyerhetjük egyrészt, hogy

$$\Delta(G)+\Delta(\bar{G}) = \binom{n}{3} - \bar{e}(n-2) + \sum_{i=1}^{n} \binom{\bar{\varphi}_i}{2} \geqq \binom{n}{3} - \bar{e}(n-2) + n\binom{\frac{2\bar{e}}{n}}{2} \geqq \frac{n(n-1)(n-5)}{6}$$

(megkeresve az $\bar{e}$-ban másodfokú polinom szélsőértékét). Adódik tehát Goodman [3] alábbi tétele:

Egy n szögpontú gráf és komplementere által tartalmazott háromszögek együttes száma $\geqq \dfrac{n(n-1)(n-5)}{6}$.

Ez az állítás nyilvánvalóan élesítése annak a közismert feladatnak, hogy hat pontú gráfban vagy háromszög, vagy három független pont található.

Ha most csak a gráfban található háromszögek száma érdekel, akkor felírhatjuk a nyilvánvaló

$$3\Delta(\bar{G}) \leqq \sum_{i=1}^{n} \binom{\bar{\varphi}_i}{2}$$

egyenlőtlenséget. (12) adja, ha $e = \binom{n}{2} - \bar{e}$, hogy

$$\Delta(G) \geqq \binom{n}{3} - \bar{e}(n-2) + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}\binom{\bar{\varphi}_i}{2} \geqq \binom{n}{3} - \bar{e}(n-2) + \frac{2}{3}n\binom{\frac{2\bar{e}}{n}}{2} = \frac{e}{3n}(4e-n^2).$$

Így megkaptuk Moser és Moon alábbi tételét:

Egy n pontú, e élű gráfban található háromszögek száma $\geqq \frac{e}{3n}(4e-n^2)$.

Speciálisan kapjuk Turán gráf-tételének háromszögekre vonatkozó esetét (l. [15], [14]):

Ha egy n csúcsú gráf éleinek száma $> \frac{n^2}{4}$, *akkor a gráf tartalmaz háromszöget.*

Megjegyzések: a) Turán tétele általában teljes k-asokra vonatkozik. Érdekes volna az általános esetre is hasonló bizonyítást találni. Hasonlóan felvetődik a fenti gondolatok hipergráfokra (pl. 3 végpontú élekkel rendelkező gráfokra) való általánosításának kérdése is.

b) T. Sós Vera rámutatott, hogy Turán tételének idézett esete más, ugyancsak leszámláláson alapuló gondolatmenettel is igazolható; a (12) szita-formula „rövid" volta miatt a fenti bizonyítás is átfogalmazható volna más leszámlálási eljárásokká. Úgy tűnik azonban, a fenti szitás elindulás a legtermészetesebb.

9. A G gráf egy jó színezésén csúcsainak egy olyan színezését értjük, melynél minden él két végpontja különböző színű. Nyilván csak akkor beszélhetünk jó színezésről, ha G-ben nincs hurokél. A jó színezéshez szükséges színek minimális száma a gráf *kromatikus száma.* A kromatikus szám a gráf egyik legfontosabb, legtöbbet vizsgált jellemzője; ennek ellenére igen keveset tudunk róla. Birkhoff és Whitney vezették be a *kromatikus polinom* fogalmát a kromatikus szám vizsgálatára. Érdekességét az adja, hogy lényegében ez az egyetlen, kromatikus számra vonatkozó vizsgálati irány, melyet a síkbarajzolhatósággal sikerült kapcsolatba hozni; ez a végszín-sejtés szempontjából érdekes. A téma irodalmáról és eredményeiről jó áttekintést nyújt Tutte [16]. Itt most csak a fogalmat és egy alaptulajdonságát ismertetjük.

Legyen G egy gráf, x egy természetes szám, és tekintsük a G gráf x színnel történő színezéseinek számát. Jelölje ezt $p_G(x)$. A $p_G(x)$ függvényt, mint x függvényét a G gráf *kromatikus polinomjának* nevezzük.

Határozzuk meg e számot néhány speciális gráf esetén. Ha $G = K_n$ az n csúcsú teljes gráf, akkor ennek csúcsai mind különböző színűek egy jó színezésnél. Ezért

$$p_{K_n}(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1). \tag{13}$$

Ha $G = P_n$ egy n hosszúságú út, akkor az első pontját x-féleképpen színezhetjük, majd végighaladva az úton, minden újabb pontot $(x-1)$-féleképpen, így

$$p_{P_n}(x) = x(x-1)^{n-1}.$$

E példák sugallják, hogy *a kromatikus polinom x-nek polinomja.*

Ez a tény sokféleképpen igazolható. Most a szita-formulából vezetjük le, egyben egy formulát is nyerünk $p_G(x)$-re.

A követendő módszerhez be fogunk vezetni néhány fogalmat. Erre nem lenne szükség, de a következőkben is jó szolgálatot fognak tenni.

Ha G_1, G_2 gráfok, akkor $G_1 < G_2$ azt jelenti, hogy G_1, G_2 ponthalmaza közös, és G_1 élei G_2-nek is élei.

A G_1 gráf egy *homomorfizmusán* egy G_2 gráfba egy olyan leképezést értünk, mely G_1 pontjait G_2 pontjaira képezi le úgy, hogy összekötött pontokat összekötött pontokba visz. Itt egy pont akkor számít önmagával összekötöttnek, ha egy hurokélnek végpontja. Jelölje $G_1 \to G_2$ G_1-nek G_2-be történő homomorfizmusainak halmazát. Ekkor nyilván

$$|G \to K_x| = p_G(x). \tag{14}$$

Mármost $|G_1 \to G_2|$ könnyen kiszámítható a szita-formula alapján. Szitáljuk ki ugyanis G_1 ponthalmazának G_2 ponthalmazába történő leképezései közül azokat, melyek G_1 valamely élét nem-összekötött pontpárba, vagyis $\bar{G}_2$ egy élébe viszik ($\bar{G}_2$ a G_2 gráf teljes komplementere, tehát ahol G_2-ben nem volt hurokél, oda hurokél kerül stb.). Ekkor a szita-formula szerint

$$|G_1 \to G_2| = \sum_{H < G_1} (-1)^{e(H)} |H \to \bar{G}_2|, \tag{15}$$

ahol $e(H)$ H élszámát jelöli. Így

$$|G \to K_x| = \sum_{H < G} (-1)^{e(H)} |H \to \bar{K}_x| \tag{16}$$

Mármost $\bar{K}_x$ x hurokéllel ellátott, de egymással össze nem kötött pontból áll. H egy homomorfizmusa $\bar{K}_x$-be H komponenseit egy-egy ilyen pontba képezi le, egymástól függetlenül. Így, ha H-nak $p(H)$ összefüggő komponense van,

$$|H \to \bar{K}_x| = x^{p(H)} \tag{17}$$

Végeredményben (14), (16) és (17) alapján

$$p_G(x) = \sum_{H < G} (-1)^{e(H)} x^{p(H)}, \tag{18}$$

ami valóban mutatja, hogy $p_G(x)$ x-nek polinomja.

Megjegyezzük, hogy e polinom számos tulajdonsága ismeretes. Legyen e a G gráf egy éle, és jelölje $G-e$, ill. G/e azt a gráfot, melyet G-ből e elhagyása, ill. egy ponttá összevonása útján kaptunk. Ekkor fennáll

$$p_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x). \tag{19}$$

$p_G(x)$ fokszáma G pontszáma, főegyütthatója 1, együtthatói alternáló előjelűek és összefüggő gráfra valamivel tovább, mint a közepéig abszolút értékben nőnek. Mindezt könnyen bebizonyíthatja az olvasó a (19) összefüggés alapján. Nem ismeretes azonban tudomásom szerint, hogy a legnagyobb abszolút értékű együttható utáni együtthatók abszolút értékei monoton csökkennek-e.

Nézzünk meg még a (18) formulában két konkrét együtthatót. Az $(n-1)$-edfokú tag együtthatója az összes $n-1$ komponensű részgráfok száma; mivel ezek nyilván egyetlenegy élből és még $n-2$ izolált pontból állnak,

az $(n-1)$-edfokú tag együtthatója az élek száma.

Másrészről észrevehetjük, hogy konstans tag (18)-ban nincs, vagyis

$$p_G(0)=0.$$

Továbbá a lineáris tag együtthatójára

$$p'_G(0) = C_0 - C_1, \tag{20}$$

ahol C_0 a páros élszámú, C_1 a páratlan élszámú összefüggő feszítő részgráfok száma. Korábbi megjegyzéseink alapján adódik, hogy összefüggő, páros pontszámú gráf esetén

$$C_1 > C_0,$$

ami önmagában is érdekes összefüggés.

10. A gráfelmélet egy nevezetes megoldatlan problémája Ulam sejtése: meghatározzák-e az n ($n \geqq 3$) pontú gráfot[6] $n-1$ pontú feszített részgráfjai? Pontosabban: legyen G, H két n pontú gráf, pontjaik halmaza $\{g_1, \ldots, g_n\}$, ill. $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Tegyük fel, hogy $G-g_i \cong H-h_i$ ($i=1, \ldots, n$). Igaz-e, hogy $G \cong H$?

A problémán töprengve, általában az első megfogalmazáshoz jobb fordulnunk: adott n darab $n-1$ pontú gráf (izomorfia erejéig); keressük meg azt az n pontú gráfot, melynek ezek az $n-1$ pontú feszített részgráfjai; más szóval, rekonstruáljuk belőlük a gráfot. Ezért szokás az Ulam-sejtést rekonstrukció-sejtésnek is nevezni.

Igen sok minden könnyen rekonstruálható. Az élszám például így: összeadva az $n-1$ pont által feszített részgráfok élszámait, az élszám $(n-2)$-szeresét kapjuk. Hasonlóan, összeszámolhatjuk, hogy egy adott k csúcsú gráf ($k<n$) hányszor fordul elő G-ben részgráfként. Mindez azonban nem bizonyult elégnek a sejtés igazolásához.

Megfogalmazható egy analóg kérdés éleket mondva pontok helyett: Legyen G, H két m élű gráf, éleik halmaza $\{e_1, \ldots, e_m\}$, ill. $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Tegyük fel, hogy $G-e_i \cong H-f_i$ ($i=1, \ldots, m$). Igaz-e, hogy $G \cong H$?



1. ábra

Egy ellenpéldát mutat az 1. ábra. Mégis, olyan ellenpélda, melynek több pontja volna, nem ismeretes; megmutatható továbbá, hogy ha Ulam sejtése, vagyis a pontrekonstrukció probléma igaz, akkor igaz az él-rekonstrukció probléma is.

Könnyű meggondolni megint, hogy ha ismerjük a G gráfból az egyes élek elhagyása után visszamaradó részgráfokat, akkor minden $k<m$-re ismerjük a k élű részgráfokat.

[6] E pontban hurokél nélküli gráfokat tekintünk.

Most a szita-formula egyszerű alkalmazásaként megmutatjuk [8]:

Ha G n pontú, m élű gráf és $m>\frac{1}{2}\binom{n}{2}$, akkor G rekonstruálható az egy-egy élének elhagyása után megmaradó gráfokból. Más szóval, ha H egy másik n pontú, m élű gráf, G, ill. H élhalmaza $\{g_1, \ldots g_m\}$, ill. $\{h_1, \ldots, h_m\}$ és $G-g_i \cong H-h_i$ $(i=1, \ldots, m)$, akkor $G \cong H$.

Legyen X n pontú gráf, és jelölje $X \Rightarrow G$ az X gráf G-be történő kölcsönösen egyértelmű leképezéseinek halmazát (tehát azon leképezéseit X ponthalmazának G ponthalmazába, melyek összekötött pontokat összekötött pontokba visznek). A (16) formulához hasonlóan adódik itt is

$$|H \Rightarrow G| = \sum_{X<H} (-1)^{e(X)} |X \Rightarrow \bar{G}|, \tag{21}$$

és

$$|G \Rightarrow G| = \sum_{X<G} (-1)^{e(X)} |X \Rightarrow \bar{G}|. \tag{22}$$

A döntő észrevétel az, hogy korábbi megjegyzésünk szerint G és H valódi részgráfjai között minden X gráf ugyanannyiszor fordul elő. A (21) és (22) egyenlőségek jobb oldalán álló összegek $X<H$, $X \neq H$, ill. $X<G$, $X \neq G$-nek megfelelő tagjai tehát ugyanazok. Az $X=H$, ill. $X=G$-nek megfelelő tagok pedig 0-k, hiszen H-nak, ill. G-nek több éle van, mint $\bar{G}$-nek a feltevés szerint, s így $|H \Rightarrow \bar{G}| = |G \Rightarrow \bar{G}| = 0$. Így (21) és (22) jobb oldalán ugyanaz áll; innen

$$|H \Rightarrow G| = |G \Rightarrow G| > 0,$$

s ebből, tekintve, hogy H és G élszáma azonos, következik, hogy izomorfak.

11. Utolsó példánk egy algebrai jellegű alkalmazás. Legyenek A, B, C véges csoportok és tegyük fel, hogy

$$A \times C \cong B \times C. \tag{23}$$

Következik-e, hogy $A \cong B$? Ez csoportelméleti eszközökkel (nem nagyon könnyen) bizonyítható. Felvethető azonban ugyanez más struktúraosztályok (gyűrűk, félcsoportok stb.) esetében is. Gráfoknak is definiálható direkt szorzata (l. pl. [13]), ezzel kapcsolatban ugyenez a kérdés felmerül. Az alábbi gondolatmenet alkalmazható mindezen esetekben (tulajdonképpen tetszőleges, bizonyos végességi feltételeknek eleget tevő kategóriákban;[7] Itt csoportok esetét tárgyaljuk, hogy ne kelljen új fogalmakat definiálni.

Jelölje hom (X, Y), ill. mon (X, Y) az X csoportnak az Y csoportba történő homomorfizmusainak, ill. monomorfizmusainak számát.

Lemma: Ha A, B véges csoportok és minden véges X csoportra hom $(X, A) =$ $=$hom (X, B), *akkor* $A \cong B$.

Ha „hom" helyett „mon" állna, akkor az állítás triviális volna: mon $(B, A) =$ $=$mon $(B, B) > 0$, így B részcsoportja A-nak. Ez megfordítva is következik, tehát $A \cong B$.

[7] Az egyetlen fontos feltétel az, hogy A, B mindegyikének legyen homomorfizmusa C-be. Bizonyos struktúraosztályokban (csoportok, gyűrűk, félcsoportok) ez automatikusan teljesül, máshol (pl. gráfok) nem. Utóbbi esetben bonyolultabb megfontolások kellenek a kérdés tisztázásához (l. [7]).

Elegendő tehát a mon (X, A)=mon (X, B) egyenlőséget igazolni. Ez úgy fog történni, hogy a mon (X, A) mennyiséget kifejezzük a hom (Y, A) mennyiségekkel. X-nek A-ba történő homomorfizmusainak számát úgy határozzuk meg, hogy az összes homomorfizmus közül „kiszitáljuk" azokat, melyek nem-egységelemet egységelemre képeznek le.

Jelölje $1 \neq x_1, \ldots, x_i \in X$ esetén $N(x_1, \ldots, x_i)$ az $x_1, \ldots, x_i$ által generált normálosztót.[8] X azon homomorfizmusai A-ba, melyek $x_1, \ldots, x_i$ mindegyikét az egységelembe viszik, természetes módon azonosíthatók $\frac{X}{N(x_1, \ldots, x_i)}$ A-ba történő homomorfizmusaival. Így a szita-formula szerint

$$\mathrm{mon}(X, A) = \sum_{i=0}^{|X|-1} (-1)^i \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_i \in X \\ x_1, \ldots, x_i \neq 1}} \hom\left(\frac{X}{N(x_1, \ldots, x_i)}, A\right)$$

Mivel mon (X, B) is hasonló képlettel fejezhető ki, ahol a jobb oldalon a feltétel szerint ugyanazok a számok állnak, valóban következik mon (X, A)=mon (X, B). Ezzel a lemmát igazoltuk.

A „rövidítési szabály" bizonyításához azt a közismert (és egyszerűen igazolható) tényt fogjuk felhasználni, hogy

$$\hom(X, A \times C) = \hom(X, A)\ \hom(X, C);$$

így $A \times C \cong B \times C$ esetén tetszőleges véges X csoportra

$$\hom(X, A)\ \hom(X, C) = \hom(X, A \times C) = \hom(X, B \times C) =$$

$$= \hom(X, B)\ \hom(X, C),$$

innen

$$\hom(X, A) = \hom(X, B),$$

amiből a lemma szerint $A \cong B$ következik.

12. A cikk befejezéseként egy Rota [12] és mások által kidolgozott általánosítását ismertetjük a szita-formulának (l. p. [5]).

Legyen $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$ egy parciálisan rendezett halmaz; feltehetjük, hogy az indexezést úgy végeztük, hogy $x_i \leqq x_j$ esetén $i \leqq j$. Tekintsük mindazon $n \times n$-es (a_{ij}) valós mátrixokat, melyekben

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow x_i \leqq x_j.$$

Jelölje ezen mátrixok összességét $\mathfrak{M}$.

Lemma: $\mathfrak{M}$ zárt az összeadás, skalárral való szorzás, szorzás és (reguláris mátrixokra) az inverzképzés műveletére nézve.

Bizonyítás: Az összeadásra és skalárral való szorzásra vonatkozó állítás triviális. Ha $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}$, akkor az $AB = C = (c_{ij})$ mátrixra

$$c_{ij} = \sum_{v=0}^{n} a_{iv} b_{vj} \neq 0$$

esetén van olyan v, hogy $a_{iv} \neq 0$ és $b_{vj} \neq 0$, ebből $x_i \leqq x_v$ és $x_v \leqq x_j$, tehát valóban $x_i \leqq x_j$.

[8] Az általános esetben normálosztó helyett kongruencia-relációról kellene beszélni.

Végül legyen $A=(a_{ij})\in\mathfrak{M}$, $A^{-1}=(b_{ij})$, és tegyük fel, hogy $b_{ij}\neq 0$, bár $x_i \not\leqq x_j$ valamely i, j-re, és legyen a tekintett i maximális. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij} = 0 \tag{24}$$

Azonban az $a_{ik}b_{kj}=0$, ha $k\neq i$; valóban, $x_i \not\leqq x_k$ esetén $a_{ik}=0$; legyen $x_i \leqq x_k$. Ekkor mindenesetre $i<k$ és $y_k \not\leqq x_j$, (mert $x_i \not\leqq x_j$), tehát i maximális volta miatt $b_{kj}=0$. Így (24)-ből csak

$$a_{ii}b_{ij}=0$$

marad. Azonban A reguláris, így $\det A=a_{11}\ldots a_{nn}\neq 0$, tehát $a_{ii}\neq 0$, ami ellentmondás.

Látható az is, hogy $A=(a_{ij})\in\mathfrak{M}$ akkor és csak akkor invertálható, ha a főátlóbeli elemek nem 0-k. Fontos szerepet játszik mármost három speciális mátrix. Legyen

$$Z=(z_{ij}),\quad z_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x_i \leqq x_j,\\ 0, & \text{ha} \quad x_i \not\leqq x_j;\end{cases}$$

továbbá $U=Z-I$ és $W=Z^{-1}$. (Mivel $\det Z=1$, W létezik és $\mathfrak{M}$-beli.) Legyen

$$W=(\mu(x_i, x_j)).$$

E mátrixok szerepét világítsuk meg néhány speciális esetben.

a) Legyen $H=\{1, 2, \ldots, n\}$, a részben-rendezés pedig az oszthatóság. Ekkor W definíciója szerint $WZ=I$, vagyis

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(i,j)z_{jk} = \sum_{j|k} \mu(i,j) = \delta_{ik}. \tag{25}$$

A számelméletből ismeretes, hogy a Möbius-féle μ-függvény eleget tesz a

$$\sum_{d|k} \mu(d) = \begin{cases}1, & \text{ha} \quad k=1,\\ 0, & \text{ha} \quad k\neq 1\end{cases} \tag{26}$$

összefüggésnek. Ezt kissé bonyolultabban így is írhatjuk:

$$\sum_{i|d|k} \mu\left(\frac{d}{i}\right) = \delta_{ik}$$

vagyis

az $\{1, 2, \ldots, n\}$ *halmazt az oszthatóság szerint rendezve* $\mu(i,j)=\mu\binom{j}{i}$ *lesz.*

b) Legyen H az m elemű S halmaz részhalmazainak összessége, a tartalmazás szerint rendezve (röviden: S részhalmaz-hálója). Megmutatjuk, hogy $A\subseteq B\subseteq S$ esetén

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B-A|}. \tag{27}$$

Valóban,

$$\sum_{\subseteq AX\subseteq B} \mu(A, X) = \sum_{A\subseteq X\subseteq B} (-1)^{|X-A|} = \sum_{Y\subseteq B-A} (-1)^{|Y|} =$$

$$= \binom{|B-A|}{0} - \binom{|B-A|}{1} + \binom{|B-A|}{2} - \ldots = \begin{cases}1, & \text{ha} \quad A=B,\\ 0, & \text{ha} \quad A\subset B.\end{cases}$$

A $\mu(x, y)$ függvényt (az a) példa miatt) a H halmaz Möbius-függvényének hívjuk. Néhány tulajdonságát könnyen megállapíthatjuk. A definíció azonnal adja, hogy

$$\mu(a, a) = 1,$$

$$\sum_{a \leqq x \leqq b} \mu(a, x) = \sum_{a \leqq x \leqq b} \mu(x, b) = 0, \quad \text{ha} \quad a < b.$$

E relációk rekurzív kiszámítási lehetőséget adnak; így $\mu(x, y)$ egész. Az is látszik, hogy ha H-ban a rendezést megfordítjuk, a kapott H^* halmaz $\mu^*(x, y)$ Möbius-függvényére $\mu^*(x, y) = \mu(y, x)$. Emiatt minden szereplő állításunk egy *duálisa* is igaz, melyet a rendezés megfordításával kapunk.

13. Az a) példa sugallja, hogy a nevezetes Möbius-féle transzformáltat is általánosítsuk tetszőleges részben rendezett halmazokra. Legyen H véges részben rendezett halmaz, $f(x)$ pedig egy H elemein értelmezett függvény. Ekkor $f(x)$ *összegezési függvényén* a

$$g(y) = \sum_{x \leqq y} f(x) \tag{28}$$

függvényt értjük.

Legyen $\mathbf{f} = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Ekkor (28) így írható

$$\mathbf{f}Z = \mathbf{g}$$

Innen

$$\mathbf{f} = \mathbf{g}W, \quad \text{vagyis}$$

$$f(x) = \sum_{y \leqq x} g(y)\mu(y, x). \tag{29}$$

A (29) formula a Möbius-féle megfordítási képlet általánosítása. Valóban, ha

$$g(k) = \sum_{i|k} f(i),$$

akkor (29) szerint

$$f(k) = \sum_{i|k} g(i)\mu\left(\frac{k}{i}\right).$$

Legyen $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$ az S halmaz bizonyos részhalmazaiból álló halmaz, H a T összes részhalmazainak halmaza és $f(X)$ $(X \subseteq T)$ azon S-beli elemek száma, melyek az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok közül pontosan a X'-beliekhez nem tartoznak hozzá. Ekkor

$$g(X) = \sum_{Y \subseteq X} f(Y)$$

jelöli mindazon elemek számát, melyek a $T - X$-beli A_i halmazokban benne vannak. A (29) képlet szerint

$$f(T) = \sum_{X \subseteq T} g(X)(-1)^{|T-X|},$$

ami pontosan a szita-formula.

14. Ezekután felvetődik a kérdés, nem lehet-e a parciálisan rendezett H halmaz alkalmas megválasztásával további érdekes eredményeket nyerni. Ebben az akadályoz, hogy a $\mu(x, y)$ függvényről nem sokat tudunk. A továbbiakban a $\mu(x, y)$

függvényre vonatkozólag olyan állítások fognak szerepelni, melyek megkönnyítik kiszámítását.

Először is megjegyezzük, hogy $\mu(x, y)$ csak az $[x, y]$ intervallumnak (az $x \leqq z \leqq y$ feltételnek eleget tevő z elemek halmazának) szerkezetétől függ. Ez a definíció alapján könnyen látható. Így elegendő egy olyan parciálisan rendezett halmazban, melyben van egy legkisebb 0 és legnagyobb 1 elem, a $\mu(0, 1)$ érték kiszámítása. Erre a megjegyzésre ugyan nem mindig lesz szükségünk, de jó szem előtt tartani.

Induljunk ki abból, hogy egyszerű számolás alapján U^k i-edik sorának és j-edik oszlopának metszéspontjában az $x_i = y_0 < y_2 < \ldots < y_n = x_j$ tulajdonságú $(y_0, \ldots, y_n)$ láncok száma áll; így elég nagy k-ra $U^k = 0$, tehát

$$I + (-U)^k = I.$$

Megszorozva mindkét oldalt $(I+U)^{-1} = W$-vel, nyerjük, hogy

$$W = I - U + U^2 - U^3 + \ldots . \tag{30}$$

Jelölje $r_k(x, y)$ az $x < y$ elemeket összekötő, $k+1$ elemű láncok számát. Ekkor

$$\mu(x, y) = -r_1(x, y) + r_2(x, y) - \ldots \qquad (x < y). \tag{31}$$

Ez a képlet emlékeztet az algebrai topológia Euler—Poincaré-féle formulájára; valóban, Rota rámutatott, hogy a $\mu(x, y)$ számok egy alkalmas komplexus Euler-karakterisztikájaként is felfoghatók.

A kombinatorika szempontjából legérdekesebb esetekben H egy véges háló. Ez esetben további fontos kifejezéseket is kaphatunk $\mu(x, y)$-ra:

Jelölje q_k a H háló azon atom[9] -k-asainak számát, melyek egyesítése 1.

Ekkor

$$\mu(0, 1) = -q_1 + q_2 - q_3 + \ldots . \tag{32}$$

Bizonyítás: Teljes indukciót használunk a háló elemszáma szerint. Jelölje A az atomok halmazát. Tekintsük az alábbi összeget:

$$\sum_{X \subseteq A} (-1)^{|X|}. \tag{33}$$

Ez nyilván 0, hiszen így írható:

$$\sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k} (-1)^k.$$

Másrészt tekintsük minden $v \in H$-ra mindazon $X \subseteq A$-kat, melyek elemeinek egyesítése v. Az ilyen X-eknek megfelelő tagok összege $\mu(0, v)$, ha $v \neq 1$, az indukciós feltevés szerint, így a (33) összeg így írható

$$0 = \sum_{\substack{v \in H \\ v \neq 1}} \mu(0, v) - q_1 + q_2 - \ldots$$

Mivel azonban μ definíciója szerint

$$\sum_{v \in H} \mu(0, v) = 0,$$

ebből (32) következik.

[9] Egy háló atomján olyan nem-nulla elemet értünk, melynél kisebb nem-nulla elem nincsen.

15. Legyen G egy gráf, pontjainak halmaza P. P egy *megengedett particiójá*n olyan particiót értünk, melyben az egyes osztályok összefüggő részgráfot feszítenek. A megengedett particiók a finomság szerinti rendezésre nézve egy L_G hálót alkotnak, melyet G *kontrakció-hálójának*[10] nevezünk. Az elnevezés arra utal, hogy ha egy $T \in L_G$ partició egy-egy osztályát összevonjuk, akkor a kapott $G|T$ gráfot úgy is megkaphatnánk, hogy éleket ismételten összevonunk.

Egyszerű számolással verifikálható a következő azonosság:

$$\sum_{S \geqq T} p_{G|S}(x) = x^{|T|} \tag{34}$$

ahol $p_{G|S}(x)$ a $G|S$ gráf kromatikus polinomját, $|S|$ pedig az S partició osztályainak számát jelöli. Valóban, $G|T$ egy (nem szükségképpen jó) x színnel történő színezése esetén az egyes színek által feszített részgráfok összefüggő komponenseit összevonva, egy olyan $G|S$, $(S \geqq T)$ gráfot kapunk, melynek az adott színezésből természetesen származtatott színezése már jó színezés. Ez a gondolatmenet meg is fordítható. Tehát a $G|S$, $(S \geqq T)$ gráfok összes jó színezései egy-egyértelműen megfeleltethetők $G|T$ összes színezéseinek (x színnel). Ez bizonyítja (34)-et.

Mármost (34)-ből a (29) megfordítási formula duálisa szerint

$$p_{G|T}(x) = \sum_{S \geqq T} \mu(T, S) x^{|S|}, \tag{35}$$

speciálisan

$$p_G(x) = \sum_{S} \mu(0, S) x^{|S|}. \tag{36}$$

Így újabb bizonyítást nyertünk arra, hogy a kromatikus polinom—polinom. Figyeljük meg, hogy a lineáris tag együtthatója

$$p'_G(0) = \mu(0, 1). \tag{37}$$

Összevetve ezt a korábbi (20) képlettel, adódik, hogy

$$\mu(0, 1) = C_0 - C_1. \tag{38}$$

Érdekes gyakorló feladatként javasoljuk az olvasónak, hogy (38)-at a kromatikus polinomok használata nélkül, a (32) képlet alapján számítsa ki.

Különösen érdekesek a (34), (36), (37) képletek abban az esetben, amikor $G = K_n$ teljes gráf. Ekkor L_G a pontok P halmazának teljes partícióhálója. A (13) képlet miatt (34) a (4), (36) az

$$s(n, k) = \sum_{|S|=k} \mu(0, S)$$

formulát, míg (37) a

$$\mu(0,1) = (x(x-1) \ldots (x-n+1))'_{x=0} = (-1)^n (n-1)! \tag{39}$$

[10] Egy gráf kontrakció-hálója nem más, mint matroidjának altér-hálója (l. [9]). E ponton az itt kifejtett elmélet szorosan kapcsolódik a kombinatorika másik fontos fejezetéhez, a matroidelmélethez.

($S \geqq T$, $(S, T \in L_G)$, ha S minden osztálya része T egy osztálynak.

formulát adja. A (39) formula, melyet Rota, Frucht és Schützenberger fedeztek fel, megadja a partícióháló Möbius-függvényét. Érdemes még a (38) formulával is összevetni; ezt az olvasóra bízzuk.

16. Végül egy érdekes azonosságot említünk (Wilf [17]). Legyen $f(x)$ tetszőleges függvény az L véges hálón,

$$g(x) = \sum_{y \leqq x} f(y)$$

az összegezési függvénye és

$$F = \begin{pmatrix} f(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(x_n) \end{pmatrix}$$

Ekkor az

$$A = Z^T F Z = (a_{ij})$$

mátrixra

$$a_{ij} = \sum_{v=1}^{n} z_{vi} f(x_v) z_{vj} = \sum_{\substack{x_v \leqq x_i \\ x_v \leqq x_j}} f(x_v) = g(x_i \wedge x_j).$$

Innen

$$\det g(x_i \wedge x_j) = \det Z^T F Z = \det F = f(x_1) \ldots f(x_n), \tag{40}$$

Ez a formula akkor is igaz, ha L csupán metszet-félháló, hiszen csupán annyit használtunk ki. Legyen L az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz az oszthatóság szerint rendezve, $f(i) = \varphi(i)$, ekkor, mint ismeretes, $g(i) = i$ és kapjuk a nevezetes

$$\det[(i,j)]_{i,j=1}^{n} = \varphi(1) \ldots \varphi(n)$$

azonosságot.

Másrészről, legyen $L = L_G^*$, $g(T) = x^{|T|}$, akkor (35) miatt $f(T) = p_{G|T}(x)$, s így (40)-ből

$$\det[x^{|T \vee S|}]_{T,S \in L_G} = \prod_{T \in L_G} p_{G|T}(x)$$

Ezzel érdekes új formulát nyertünk a kromatikus polinomra.

IRODALOM

[1] ANDRÁSFAI B.: Ismerkedés a gráfelmélettel, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
[2] BERGE, C., Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970.
[3] GOODMANN, On sets of acquaintances and strangers at any party, Amer. Math. Monthly 66 (1959) 778—783.
[4] HALBERSTAM, ROTH, Sequences
[5] HALL, M. jr., Combinatorial Theory, Blaisdell, Waltham—Toronto—London, 1967. Orosz nyelven: M. ХОЛЛ. КОМБИНАТОРИКА, ИЗД. МИР, 1970.
[6] KÜRSCHÁK—HAJÓS—NEUKOMM—SURÁNYI: Matematikai Versenytételek I, 3. kiadás Tankönyvkiadó, Budapest, 1964, 93. old.
[7] LOVÁSZ, L.: On the cancellation law among finite relational structures, Periodica Math. Hung. 1 (1971) 145—156.
[8] LOVÁSZ, L., A note on the line reconstruction problem, J. Comb. Theory 13 (1972) 309—310.
[9] LOVÁSZ L.: A matroidelmélet rövid áttekintése, Matematikai Lapok 22 (1971) 249—267.
[10] Monn, J. W.-Moser, L., On a problem of Turán, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 7 (1962) 283—286.
[11] RIORDAN, J., Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, New York, 1958.
[12] ROTA, G. C., On the foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, 2 (1964), 340—368.
[13] SABIDUSSI, G.: Graph Multiplication, Math. 72 (1962) 446—457.
[14] SACHS, H., Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teubner, Leipzig, 1970.
[15] TURÁN, P.: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat. Fiz. Lapok 48 (1941) 436—452.
[16] TUTTE, W. T., More about chromatic polinomials and the golden ratio, Comb. Structures Appl., Gordon and Breach, New York—London—Paris 1970, 439—453.
[17] WILF, H. S., Hadamard determinants, Möbius functions and the chromatic number of a graph, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968) 960—964.

О ФОРМУЛЕ РЕШЕТА

ЛАСЛО ЛОВАС

ON THE SIEVE FORMULA

L. LOVÁSZ

STATISZTIKUS INTERPOLÁCIÓ

HALÁSZ GÁBOR

1. §. Tusnády Gábor vetette fel a következő problémát.[1] Legyen $g(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ ismeretlen valós függvény, amiről csak azt tudjuk, hogy eleget tesz bizonyos simasági feltételeknek. Itt csak az r-szer korlátosan differenciálhatóságról lesz szó, de világos lesz, mi a teendő más, gyengébb vagy erősebb feltételek esetén. A függvény meghatározása érdekében méréseket végezhetünk általunk választott tetszőleges n helyen; legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$. A mérési eredmények $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ nem pontosak, hanem független valószínűségi változók, amelyeknek csak $E(\xi_i)$ várható értéke a pontos érték, $g(x_i)$. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a ξ_i-k normális eloszlásúak 1 szórással. Feladat: a mérések alapján meghatározni olyan $\psi(x)$ függvényt, amely nagy valószínűséggel egyenletesen jól közelíti $g(x)$-et. A közönséges interpolációtól eltérően itt nem követelünk semmit — mint ahogy nem lenne természetes követelni — az „interpoláló" függvény milyenségét illetően, (előírt fokú polinom stb.).

$c_1, c_2, \ldots$ pozitív konstansokat fognak jelölni, amelyek függhetnek más, állandónak képzelt mennyiségektől.

1. *Tétel. Előre adott r természetes számhoz megadható n alappont, $x_i \in [0, 1]$ $(i=1, \ldots, n)$ és $\psi(x)=\psi_n(x, \xi_1, \ldots \xi_n)$ függvény úgy, hogy $n \geqq n_0(\varepsilon, r)$ esetén*

$$\sup_{0 \leqq x \leqq 1} |g(x)-\psi(x)| \leqq c_1 \left(\frac{\log n}{n}\right)^{r/2r+1}$$

legalább $1-\varepsilon$ valószínűséggel[2], *($\varepsilon>0$ tetszőleges). Itt a ξ_i-k független, 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változók $E(\xi_i)=g(x_i)$ várható értékkel; $g(x)$ tetszőleges $[0, 1]$-ben r-szer differenciálható függvény, amelyre $|g^{(r)}(x)| \leqq M$. $c_1=c_1(M, r)$ csak r-től és M-től függ.*

A becslés erősségét illetően egyelőre csak azt jegyezzük meg, hogy a kitevő $r \to \infty$ esetén $\frac{1}{2}$-hez tart. Ez valóban az abszolút határ: ha $g(x)$ konstans függvény, amikor is egyszerűen azonos eloszlású változók várható értékének becsléséről van szó, mint ismeretes, valóban csak $\frac{1}{n^{1/2}}$ hibával lehet általában becsülni. Egyes spe-

[1] Szóbeli közlés. Könnyen elképzelhető, hogy a probléma már megoldott, de erről nincs tudomásunk.

[2] Valójában 1 valószínűséggel minden elég nagy n-re is fennáll (l. a bizonyítást).

ciális eloszlásoknál, például egyenletes eloszlásnál, ugyan kisebbé tehető a hiba, de ekkor, mint világos lesz, tételünk becslése is megfelelően javul.

A bizonyítás egészen primitív, különálló valószínűségszámítási és függvénytani becslésből áll. Érdekes volna olyan tételt találni, ahol ez a két összetevő szorosabban fonódik össze. Vannak-e például olyan függvényosztályok, amelyek statisztikus interpoláció szempontjából máshogyan viselkednek, mint az közönséges interpolációs viselkedésük alapján várható lenne? Hogy a fenti feladatnál ilyen meglepetésre nem számíthatunk, azt mutatja az, hogy legalábbis lineáris eljárással az 1. Tétel eredménye nem javítható.

2. *Tétel. Statisztikus interpoláció eljárásunk legyen* $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\xi_i$ *alakú, ahol az* $a_i(x)$*-ek tetszőleges függvények; az* x_i *alappontokról semmit sem kötünk ki.* x_i, ξ_i, $g(x)$ *jelentése ugyanaz, mint az 1. Tételben. Ha minden egyes* $g(x)$ *függvényre, amelyre* $|g^{(r)}(x)| \leqq M$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, *fennállna, hogy*

$$P\left(\sup_{0 \leqq x \leqq 1} |g(x) - \psi(x)| \leqq R\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$g(x)$*-től független* R*-rel, akkor*

$$R \geqq c_2(M, r)\left(\frac{\log n}{n}\right)^{r/2r+1}.$$

Az 1. Tételhez konstruálandó eljárás természetesen lineáris lesz. Az $\frac{1}{2}$-nek nincs különösebb jelentősége, bármilyen pozitív számmal helyettesíthető lenne. c_1, azaz c_2 pontos értékének és a megfelelő eljárásnak a meghatározása gyakorlati szempontból is érdekes feladat lenne.

2. §. Hasonló, többet vizsgált probléma a statisztikában a sűrűségfüggvény becslése, (lásd [1], ahol több irodalmi utalás is található).

Legyen $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ ismeretlen, ismét bizonyos feltételeknek eleget tevő sűrűségfüggvény. Becsléséhez rendelkezésünkre áll n elemű minta, azaz $\eta_1, \ldots, \eta_n$ független, a közös $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók. A feladat $f(x)$ nagy valószínűséggel való jó közelítése.

Kis jóindulattal ez a feladat is nevezhető interpolációnak. Az előző feladattal közeli rokonság nyilvánvalóbb lenne, ha a sűrűségfüggvény helyett magát az eloszlásfüggvényt becsülnénk: az előbbi ξ_i változók szerepét $\frac{1}{n}\sum_{\eta_i \leqq x} 1$ venné át bizonyos x-ekkel. Valójában innen jutott Tusnády Gábor, a feladat egyszerűsítése során, az előző feladathoz.

A következő explicit, lokális eredménnyel kezdjük.

3. *Tétel. Legyenek* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *független, azonos eloszlású változók* $f(x)$ *sűrűségfüggvénnyel.* $\varrho > 0$, $\Delta > 0$, d *tetszőleges valós;*

$$\sup_{d-2\Delta \leqq x \leqq d+2\Delta} |f^{(r)}(x)| \leqq M_r \qquad (r = 0, 1, \ldots),$$

(ahol $f^{(0)}(x) = f(x)$*), feltéve, hogy* $f(x)$ *r-szer differenciálható az illető intervallumban. Csak r-től,* Δ*-tól, d-től,* ϱ*-tól és* M_0*-tól függően megadható* $\varphi(x) = \varphi_n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)$*, amelyre*

$$P\left(\sup_{d-\Delta \leqq x \leqq d+\Delta} |f(x) - \varphi(x)| > 3\varrho + \frac{16M_r\Delta^r}{r!}\right) \leqq 4re^{-n\varrho^2\Delta/8rM_0}.$$

Konkrét esetre való alkalmazásánál úgy járunk el, hogy a számegyenest alkalmasan intervallumokra osztjuk és a rendelkezésre álló paramétereket is mindig optimálisan választva, a valószínűségekre adódó korlátokat összeadjuk. Ha $f(x)$ eleve feltételezendő nagyságrendi viselkedése (azaz M_0 ismerete) és simasági feltétele (azaz M_r ismerete) alapján ez az összeg kellően kicsi, akkor legfeljebb ilyen valószínűségű esemény kivételével az egész számegyenesen jó becslést nyertünk. Példaként szolgáljon a már vizsgált simasági feltétel esete.

4. *Tétel.* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *és* $f(x)$ *jelentése ugyanaz, mint a 3. Tételben. Rögzített* r *mellett legyen* $|f^{(r)}(x)| \leqq M$ *és* $|f(x)| \leqq \frac{A}{\log(3+|x|)}$ $(-\infty < x < +\infty)$. *Ekkor pusztán* r*-től és* A*-tól függően megadható olyan* $\varphi(x) = \varphi_n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, *amelyre* $\varepsilon > 0$ *és* $n \geqq n_0(\varepsilon)$ *esetén*

$$P\left(\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - \varphi(x)| \leqq c_3 \left(\frac{\log n}{n} \right)^{r/2r+1} \right) \geqq 1 - \varepsilon.$$

$c_3 = c_3(M, A, r)$.[2]

Ez az állítás $r=1$ és $r=2$ esetén valamivel erősebb nagyságrendi megszorítással és valamivel rosszabb logn-hatvánnyal Révész Páltól [1] származik. A bizonyítás közben rámutatunk, hogy mi a különbség az általános r esetéhez képest.

Fenti tételeinket elemi úton igazoljuk, de mutatunk a Fourier-transzformáció elméletén alapuló módszert is.

Legyen

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx$$

$f(x)$ Fourier-transzformáltja, azaz valószínűségszámítási nyelven az illető eloszlás karakterisztikus függvénye. $f(x)$ simasági feltétele, például többszöri parciális integrálással, általában átfogalmazható $F(t)$ nagyságrendi viselkedésére. Második módszerünket itt csak normabeli közelítésre használjuk, de mint majd a dolgozat végén is megjegyezzük, eljárásunk ugyanolyan jó eredményt ad egyenletes közelítésre is, mint a 3. Tétel.

5. *Tétel.* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *és* $f(x)$ *jelentése ugyanaz, mint a 3. Tételben,* $F(t)$ *az eloszlás karakterisztikus függvénye. Csak* T*-től függően megadható* $\varphi(x) = \varphi_n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, *amelyre*

$$P\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx} > \varrho \right) \leqq \frac{1}{2\pi\varrho^2} \left(\frac{2T}{n} + \int_{|t| \geqq T} |F(t)|^2 dt \right).$$

Ennél pontosabb eredmény is nyerhető, amelynek segítségével a hibabecslésben nemcsak a pontos nagyságrend, hanem a konstans szorzó valószínűleg pontos értéke is meghatározható bizonyos esetekben (l. a bizonyításhoz fűzött megjegyzést).

Csak megemlítjük, hogy ha $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(r)}(x)|^2 dx \leqq M$, akkor tételünk $1-\varepsilon$ valószínűséghez $\frac{1}{n^{r/2r+1}}$ nagyságrendű hibabecslést ad. (Ugyanez a jelenség, a $\log n$-hatvány eltűnése lépne fel az 1. Tételben is, ha a szuprémum-normát $L_2(0, 1)$ normával helyettesítenénk.)

Foglalkozzunk most inkább az erősebb feltételek esetével. Az $F(t)$-re vonatkozó lehető legerősebb feltétel az, hogy $F(t)=0$ $|t|>T$-re. Ez is ekvivalens simasági feltétellel:

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(r)}(x)| = O(T^r) \qquad (r\to\infty).$$

(A 3. Tétel alakjából még nem látszik, hogy a simasági feltételek erősségének határa van.) Ha T-t ismerjük, akkor ezzel a T-vel tételünk azt a meglepő eredményt állítja, hogy ennél a függvényosztálynál már direkt elérhető az $\frac{1}{n^{1/2}}$ hibabecslés, ami természetesen az abszolút határ. Sőt becslésünk ekkor torzítatlan is lesz.

Következmény. Az 5. Tétel jelöléseivel

$$E(\varphi(x)) = f(x) \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

és

$$P\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-\varphi(x)|^2 dx} \leqq \frac{c_4(\varepsilon, T)}{n^{1/2}}\right) \geqq 1-\varepsilon,$$

hacsak $F(t)=0$ $|t|>T$ *esetén.*

A 3. Tétel, ha még feltesszük, hogy $|f(x)|\leqq\frac{A}{\log(3+|x|)}$, ebben az esetben a $\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}$ egyenletes hibatagot adja, ami így valószínűleg a legjobb, amit normálisan definiált függvényosztályra el lehet érni.

3. §. Az 1. Tétel bizonyítása. Számos hasonló eljárás adható meg, az itt következőhöz semmilyen approximáció-elméleti eredményre sem kell hivatkoznunk.

Minden egyes $\frac{i}{m}$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ pontban végezzünk k független mérést, az eredmények legyenek $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \ldots \xi_{i,k}$. Az $m<n$ egészet később fogjuk meghatározni és ha $k=\left[\frac{n}{m+1}\right]$, akkor így n-nél esetleg kevesebb mérést is végeztünk, de nem lesz szükségünk többre.

Az egyes osztópontokban becslésünket így definiáljuk:

$$\psi\left(\frac{i}{m}\right) = \frac{\xi_{i,1}+\ldots+\xi_{i,k}}{k}$$

Mint független, normális eloszlású változók összege, rögzített i-re ez normális eloszlású $g\left(\frac{i}{m}\right)$ várható értékkel és $\frac{1}{\sqrt{k}}$ szórással. Tetszőleges $\varrho\geqq 0$-lal

$$P\left(\left|g\left(\frac{i}{m}\right)-\psi\left(\frac{i}{m}\right)\right|>\varrho\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varrho\sqrt{k}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du \leqq e^{\frac{\varrho^2 k}{2}}\,.^3$$

[3] Ugyanis $\int_a^\infty e^{-u^2/2}du \leqq e^{-a^2/2}\int_a^\infty e^{-(u-a)^2/2}du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a^2/2}$.

i $m+1 \leqq 2m$ értéket vehet fel; kizárva tehát egy legfeljebb $2me^{-\varrho^2 k/2}$ valószínűségű eseményt

$$\left|g\left(\frac{i}{m}\right)-\psi\left(\frac{i}{m}\right)\right| \leqq \varrho \tag{1}$$

egyszerre minden i-re. A $\psi\left(\frac{i}{m}\right)$ értékeket most közönséges interpolációval kiterjesztjük az egész [0, 1]-ben értelmezett függvénnyé. $r>1$ esetén tegyük fel, hogy m osztható $(r-1)$-gyel és válasszuk ki minden $(r-1)$-edik osztópontot: $a_l = \frac{l(r-1)}{m}$ $\left(l=0, 1, \ldots, \frac{m}{r-1}\right)$. Az $[a_l, a_{l+1}]$ intervallumban $\left(l=0, \ldots, \frac{m}{r-1}-1\right)$ legyen $\psi(x)$ az r darab $\frac{i}{m} \in [a_l, a_{l+1}]$ alapponthoz és a megfelelő $\psi\left(\frac{i}{m}\right)$ értékekhez tartozó közönséges $(r-1)$-edfokú Lagrange-interpolációs polinom. Ha $r=1$, akkor az osztathatósági feltétel elesik, $a_l = \frac{l}{m}$ $(l=0, \ldots, m)$ és az $[a_l, a_{l+1})$ intervallumban $(l=0, \ldots, m-1)$ $\psi(x)$ legyen azonosan $\psi(a_l)$. Kérdés, mennyire tér el az így definiált függvény $g(x)$-től.

Tegyük fel, hogy $x \in [a_l, a_{l+1})$. A Taylor-formula szerint

$$g(x) = g(a_l) + \frac{g'(a_l)}{1!}(x-a_l) + \ldots + \frac{g^{(r-1)}(a_l)}{(r-1)!}(x-a_l)^{r-1} + \frac{g^{(r)}(\tau)}{r!}(x-a_l)^r,$$

ahol $\tau \in [a_l, x]$. A polinomiális részt $P_l(x)$-szel jelölve, feltevésünk szerint

$$|g(x)-P_l(x)| \leqq \frac{M}{r!}(x-a_l)^r \leqq \frac{c_5}{m^r}. \tag{2}$$

Amennyiben (1) fennáll, úgy $a_l \leqq \frac{i}{m} \leqq a_{l+1}$ esetén innen

$$\left|P_l\left(\frac{i}{m}\right)-\psi\left(\frac{i}{m}\right)\right| \leqq \varrho + \frac{c_5}{m^r}.$$

Mind $P_l(x)$, mind $\psi(x)$ $(r-1)$-edfokú polinom $[a_l, a_{l+1}]$-ben, (illetve konstans $[a_l, a_{l+1})$-ben $r=1$ esetén) és ezért ebből következik, hogy az egész $[a_l, a_{l+1})$ intervallumban

$$|P_l(x)-\psi(x)| \leqq c_6\left(\varrho + \frac{c_5}{m^r}\right)$$

csak r-től függő c_6-tal. (Ez rögtön belátható, ha az intervallumot lineárisan például [0, 1]-gyé transzformáljuk és a kapott r ekvidisztans pontra felírjuk a Lagrange-interpolációs formulát, amelynek alappolinomjai így csak r-től függenek.) Ismét (2) alapján

$$|g(x)-\psi(x)| \leqq c_6\left(\varrho + \frac{c_5}{m^r}\right) + \frac{c_5}{m^r} \leqq c_7\left(\varrho + \frac{1}{m^r}\right), \tag{3}$$

ami így az egész [0, 1]-ben érvényes. Itt felhasználtuk (1)-et, ami fennáll legfeljebb $2me^{-\varrho^2 k/2}$ valószínűségű esemény kivételével. Hátra van még a paraméterek optimális választása.

Célszerű, ha az utolsó becslésben $\varrho = \frac{1}{m^r}$. Tekintettel arra, hogy definíciója szerint $k \geqq \frac{n}{m+1} - 1 \geqq \frac{n}{4m}$, $\left(\text{ha } m \leqq \frac{n}{4}\right)$, a kivételes valószínűség nemcsak ε-nál, hanem még például $\frac{1}{n}$-nél is kisebb lesz, ha

$$2me^{\frac{-\varrho^2 k}{2}} < ne^{-\frac{1}{2m^{2r}} \cdot \frac{n}{4m}} \leqq \frac{1}{n},$$

azaz

$$m \leqq \left(\frac{n}{16 \log n}\right)^{1/2r+1}.$$

Válasszunk tehát m-nek ezen határ és annak fele közt egy egészet, $(r-1)$-gyel osztható, ha $r>1$; elég nagy n-re ez megtehető. Minden feltétel teljesül és (3) a kívánt becslést adja. (Látható, hogy a kivételes valószínűségre akár $\frac{1}{n^\beta}$ korlát is elérhető akármilyen nagy β-val, c_1 növelése árán, amiből az is következik, hogy a hibabecslés 1 valószínűséggel minden elég nagy n-re érvényes.)

A 2. Tétel bizonyítása. Rögzített x-re annál inkább érvényes, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel $\psi(x) \in [g(x)-R, g(x)+R]$. $\psi(x)$ eloszlása normális és így annak elemi tulajdonságaiból leolvasható a várható értékre

$$|g(x) - E(\psi(x))| = \left|g(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) g(x_i)\right| \leqq R \tag{4}$$

és a szórásnégyzetre

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|^2 < 3R^2. \tag{5}$$

Rögzítsünk egy $p(u)$ $(-\infty < u < +\infty)$ függvényt, amely eltűnik $|u| \geqq 1$-re, r-szer differenciálható, $|p^{(r)}(u)| \leqq M$ és $p(0) > 0$. ($[-1, 1]$-ben legyen például $c_8(M, r)(1-u^2)^r$) $\Delta > 0$ esetén akármilyen $y \in [0, 1]$ mellett $g(x) = \Delta^r p\left(\frac{x-y}{\Delta}\right)$-ra $|g^{(r)}(x)| \leqq M$, fennáll rá tehát (4), amit $x=y$-ra felírva

$$\left|\Delta^r p(0) - \sum_{i=1}^{n} a_i(y) \Delta^r p\left(\frac{x_i - y}{\Delta}\right)\right| \leqq R.$$

Ha most Δ-t úgy választjuk, hogy

$$\Delta^r p(0) = 2R \tag{6}$$

és bevezetjük az $I_y = (y-\Delta, y+\Delta)$ jelölést, akkor innen

$$R \leqq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(y) \Delta^r p\left(\frac{x_i - y}{\Delta}\right)\right| \leqq \Delta^r \max_u |p(u)| \sum_{x_i \in I_y} |a_i(y)|,$$

(hiszen $p(u)=0$, ha $|u| \geqq 1$), azaz

$$\sum_{x_i \in I_y} |a_i(y)| \geqq \frac{p(0)}{2 \max_u |p(u)|} = c_9. \tag{7}$$

Tekintsük az $y=2l\Delta$ értékeket, azaz a diszjunkt $I_{2l\Delta}\left(l=0, \ldots \left[\frac{1}{2\Delta}\right]\right)$ intervallumokat és közülük is azokat, amelyek az x_i mérési pontok közül legfeljebb $4\Delta n$-et tartalmaznak. Ilyen intervallumok vannak, sőt számuk legalább $\frac{1}{4\Delta}$, ellenkező esetben ugyanis legalább $\frac{1}{4\Delta}$ intervallum mindegyike $4\Delta n$-nél több pontot tartalmazna, de $\frac{1}{4\Delta} \cdot 4\Delta n = n$, ami ellentmondás. Ezután y-on mindig ezen legalább $\frac{1}{4\Delta}$ érték valamelyikét értjük.

Alkalmazzuk bármelyikükre (7)-et és a Schwartz-egyenlőtlenséget, figyelembe véve a (6) definíciót:

$$(8) \qquad c_9^2 \leqq \Big(\sum_{x_i \in I_y} |a_i(y)|\Big)^2 \leqq \sum_{x_i \in I_y} |a_i(y)|^2 \cdot 4\Delta n = c_{10} R^{1/r} n \sum_{x_i \in I_y} |a_i(y)|^2.$$

(5)-tel összevetve adódna

$$c_9^2 \leqq c_{10} \cdot 3R^{2+\frac{1}{r}} n, \quad R \geqq \frac{c_{11}}{n^{r/2r+1}},$$

ami majdnem a bizonyítandó állítás. A logaritmus-hatvány hiánya (5) gyengeségének következménye, amelynek levezetésében az egyenletes approximációra vonatkozó feltételünket csak pontonként használtuk ki.

A fenti legalább $\frac{1}{4\Delta}$ y-érték közül most indukcióval kiválasztunk néhányat. y_1 legyen azok bármelyike. Tegyük fel, hogy már megvan $y_1, \ldots, y_{s-1}$. y_s-et ezektől különbözőnek vesszük úgy, hogy később meghatározandó δ-val $(\delta < 1)$

$$(9) \qquad \sum_{x_i \in I_{y_s}^*} |a_i(y_j)|^2 \leqq \delta R^2$$

minden egyes $1 \leqq j \leqq s-1$ esetén. Rögzített j mellett (5) alapján legfeljebb $\frac{3R^2}{\delta R^2} = \frac{3}{\delta}$ y_s-értékre nem teljesül ez az egyenlőtlenség, így összesen legfeljebb

$$s-1+(s-1)\frac{3}{\delta} \leqq \frac{4(s-1)}{\delta}$$

értéket kell kizárnunk, és ha

$$\frac{4(s-1)}{\delta} < \frac{1}{4\Delta},$$

akkor a megmaradók bármelyikét véve y_s-nek, az indukciós lépés elvégezhető. Az eljárás az $y_j\left(j=1, \ldots, \left[\frac{\delta}{16\Delta}\right]\right)$ pontok kiválasztásáig biztosan folytatható. Feltehetjük például, hogy $\Delta \leqq \frac{1}{16n^{1/4r}}$, ellenkező esetben ugyanis (6) szerint nincs mit bizonyítanunk. Legyen akkor $\delta = \frac{1}{n^{1/8r}}$. A pontok száma így legalább $[n^{1/8r}]$. Ezek közül csak az első K-t fogjuk használni, a $K \leqq n^{1/8r}$-t később határozzuk meg.

Legyen most $g(x) \equiv 0$, azaz $E(\xi_i)=0$. A tétel feltevéséből adódik speciálisan, hogy

$$P\Big(\max_{j=1,\dots,K} |\psi(y_j)| \leqq R\Big) \geqq \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Legyen $J_j = \bigcup_{s=j+1}^{K} I_s$ és próbáljuk meg $\psi(y_j)$-t

$$\psi_1(y_j) = \sum_{x_i \notin J_j} a_i(y_j)\xi_i$$

részösszegével helyettesíteni. A különbség,

$$\psi(y_j) - \psi_1(y_j) = \sum_{x_i \in J_j} a_i(y_j)\xi_i$$

0 várható értékű normális eloszlású változó (9) szerint legfeljebb $(K-j)\delta R^2 \leqq K\delta R^2$ szórásnégyzettel. Emiatt, figyelembe véve a $\delta = \frac{1}{n^{1/8r}}$ definíciót,

$$P(|\psi(y_j) - \psi_1(y_j)| > R) \leqq e^{-\frac{R^2}{2K\delta R^2}} = e^{-\frac{n^{1/8r}}{2K}},$$

ahonnan

$$P\Big(\max_{j=1,\dots,K} |\psi(y_j) - \psi_1(y_j)| \leqq R\Big) \geqq 1 - Ke^{-\frac{n^{1/8r}}{2K}} \geqq \frac{3}{4},$$

ha például $K=[n^{1/16r}]$, ami megengedett és $n \geqq n_0(r)$. Az itt és (10)-ben szereplő események együttes bekövetkezésekor $|\psi_1(y_j)| \leqq 2R$ $(j=1, \dots, K)$ és így a két valószínűségre vonatkozó egyenlőtlenségből

$$P\Big(\max_{j=1,\dots,K} |\psi_1(y_j)| \leqq 2R\Big) \geqq \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4}. \tag{11}$$

Bontsuk fel az itt szereplő esemény ellentettjét az

$$A_s: |\psi_1(y_j)| \leqq 2R \quad (j=1, \dots, s-1), \quad |\psi_1(y_s)| > 2R$$

részekre, $(s=1, \dots, K)$. Mivel ezek kölcsönösen kizárják egymást, legalább az egyikre

$$P(A_s) \leqq \frac{1}{K} \leqq \frac{2}{n^{1/16r}}.$$

Rögzítsünk egy ilyen s-et. Itt még nem használtuk ki (11)-et.

Nekünk a

$$\psi_2(y_s) = \sum_{x_i \in I_{y_s}} a_i(y_s)\xi_i$$

részösszeget kell vizsgálnunk. Vegyük észre — ez volt a korábbi lépések célja —, hogy $\psi_1(y_j)$ $(j=1, \dots, s-1)$ nem függ az itt szereplő ξ_i-ktől és természetesen

$$\psi_1(y_s) - \psi_2(y_s) = \sum_{x_i \notin I_{y_s} \cup J_s} a_i(y_s)\xi_i$$

sem függ azoktól. Ezen utóbbi szórásnégyzete (5) alapján minden esetre legfeljebb $3R^2$ és így

$$P(|\psi_1(y_s) - \psi_2(y_s)| \leqq 4R) \geqq 1 - e^{-\frac{(4R)^2}{2 \cdot 3R^2}} = 1 - e^{-\frac{8}{3}} \geqq \frac{7}{8}.$$

Hozzávéve ide még a $|\psi_1(y_j)| \leqq 2R$ $(j=1, \ldots, s-1)$ feltételeket, amelyek (11) szerint legalább $\frac{1}{4}$ valószínűséggel fennállnak,

$$P\left(|\psi_1(y_j)| \leqq 2R \quad (j=1, \ldots, s-1), \quad |\psi_1(y_s)-\psi_2(y_s)| \leqq 4R\right) \geqq \frac{1}{4}+\frac{7}{8}-1=\frac{1}{8}.$$

Az itt szereplő esemény megjegyzésünk szerint független a

$$B: |\psi_2(y_s)|>6R$$

eseménytől. Az együttes bekövetkezés valószínűsége tehát legalább

$$\frac{1}{8}P(B).$$

Az együttes bekövetkezésből azonban következik A_s, és így

$$\frac{1}{8}P(B) \leqq P(A_s) \leqq \frac{2}{n^{1/16r}}.$$

Másrészről, $\psi_2(y_s)$ szórását σ-val jelölve

$$P(B)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{6R/\varrho}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du > \frac{1}{4}e^{-\left(\frac{6R}{\varrho}\right)^2}$$ [4]

és a kettőt összevetve

$$\sigma^2=\sum_{x_i \in I_{y_s}} |a_i(y_s)|^2 \leqq c_{12}\frac{R^2}{\log n}.$$

(8)-ból $y=y_s$-sel innen

$$\frac{R^2}{\log n}\cdot R^{1/r} n \geqq c_{13},$$

amiből az állítás már következik.

4. §. Sűrűségfüggvény-becslés.

Sűrűségfüggvényt a legkézenfekvőbb alkalmas $\delta>0$ mellett a

$$\frac{1}{2\delta n}\sum_{x-\delta<\eta_i\leqq x+\delta} 1$$

mennyiséggel becsülni. Legyen

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\delta}, & \text{ha} \quad -\delta \leqq x<\delta \\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

akkor ezt így is írhatjuk:

$$\varphi(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x-\eta_i).$$

A fenti $h(x)$ általában mégsem ad jó eredményt, ezért célszerű alkalmasabbat keresni. Ezt az általános becslési eljárást Rosenblatt [2] vezette be, de ő azt is kikötötte,

[4] Ugyanis $\int_a^{\infty} e^{-u^2/2}du \geqq e^{-(a+1)^2/2} \geqq e^{-1-a^2}$

hogy $h(x)$ legyen maga is sűrűségfüggvény, azaz, hogy normálástól eltekintve $h(x) \geqq 0$. Ilyennel, mint látni fogjuk, nem tudjuk tételeink eredményét elérni. A nem-negativitás követelménye azonban nem indokolt és felesleges is. Egyelőre csak azt tegyük fel, hogy $h(x)$ x-ben korlátos.

A 3. Tétel bizonyítása. Az eloszlás eltolásával elérhetjük, hogy $d=0$. Elég továbbá csak a $\Delta=1$ esettel foglalkozni, ugyanis ezt $f(x)$ helyett $f(x\Delta)\Delta$-ra, ϱ helyett $\varrho\Delta$-ra alkalmazva, amikoris M_0 helyett $M_0\Delta$, M_r helyett $M_r\Delta^r$ veendő, éppen a kívánt állítást kapjuk.

A bizonyítás két részből áll: valószínűségszámítási meggondolásból adódik, hogy $\varphi(x)$ nagy valószínűséggel közel van várható értékéhez. Ezt a 4. Tétel bizonyítása után található Segédtételben intézzük el. Az illető várható érték

$$E(\varphi(x)) = E(h(x-\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-u)f(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(x-u)\,du.$$

(η-val az η_i-kel azonos eloszlású változót jelölünk.) A most következő függvénytani részben ennek $f(x)$-től való eltérését vizsgáljuk.

Rögzített $x \in [-1, 1]$ mellett írjuk fel az x körüli Taylor-formulát:

$$f(x-u) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(-u) + \ldots + \frac{f^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}(-u)^{r-1} + \frac{f^{(r)}(\tau)}{r!}(-u)^r \qquad (|u| \leqq 1),$$

ahol $\tau \in [-2, 2]$ valamilyen közbülső érték. $h(u)$-val beszorozva és integrálva az első tag, ha h integrálja 1, pontosan $f(x)$-et adja. Kívánatos volna, ha a következő $r-1$ tag kiesne, amikoris az utolsó adná a hibatagot. (Ezt nem-negatív h csak $r=1$-re vagy $r=2$-re tudja megtenni, innen van ez a korlátozás a korábbi eredményekben, l. [1].) Meg fogunk adni olyan $h(u)$ függvényt, amelyre

$$h(u) = 0, \quad \text{ha} \quad |u| > 1,$$

$$\int_{-1}^{1} h(u)\,du = 1,$$

$$\int_{-1}^{1} h(u)u^s\,du = 0, \quad \text{ha} \quad s = 1, \ldots, r-1$$

$$\int_{-1}^{1} |h(u)|^2\,du \leqq 1{,}25r,$$

$$\sup_{-1 \leqq u \leqq 1} |h(u)| \leqq 2r.$$

Ekkor $x \in [-1, 1]$ esetén a fentiek szerint

$$(12) \qquad \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(x-u)\,du \right| \leqq \frac{M_r}{r!} \int_{-1}^{1} |h(u)u^r|\,du \leqq \frac{4M_r}{r!}.$$

Még mindig rögzített $x \in [-1, 1]$ mellett alkalmazzuk a Segédtételt $q(u) = h(x-u)$ választással. Ehhez:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x-u)|^2 f(u)\,du \leqq 1{,}25rM_0 \overset{\text{def}}{=} D.$$

Ekkor a $q(u)$ szuprémumára tett feltevés is teljesülni fog, ha

$$2r \leqq \frac{1{,}25rM_0}{\varrho}, \qquad M_0 \geqq 1{,}6\varrho.$$

Ezt azonban minden további nélkül feltehetjük, ellenkező esetben ugyanis $\varphi(x) \equiv 0$ választással tételünk állítása triviális. A Segédtétel szerint tehát

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} h(x-\eta_i)\text{-}$$

re, mindjárt (12)-t is felhasználva,

$$P\left(|\varphi(x)-f(x)| > \varrho + \frac{4M_r}{r!}\right) \leqq 2e^{-\frac{n\varrho^2}{8rM_0}}.$$

Írjuk ezt fel a $2r$-edik Csebisev-polinom gyökhelyein, azaz az $x = x_l = \cos\frac{2l+1}{4r}\pi$ $(l=0, \ldots, 2r-1)$ pontokban. Kizárva tehát egy legfeljebb

$$2r \cdot 2e^{-\frac{n\varrho^2}{8rM_0}}$$

valószínűségi eseményt (éppen ez a korlát áll a tételben),

$$|\varphi(x_l)-f(x_l)| \leqq \varrho + \frac{4M_r}{r!} \qquad (l=0, \ldots, 2r-1)$$

egyszerre minden l-re.

A Taylor-formulát most a 0 pont körül írjuk fel. Az első r tagból álló polinomiális részt $P(x)$-szel jelölve,

$$|f(x)-P(x)| \leqq \frac{M_r}{r!} \qquad (|x| \leqq 1). \tag{13}$$

Speciálisan, az előző egyenlőtlenséggel összevetve

$$|\varphi(x_l)-P(x_l)| \leqq \varrho + \frac{5M_r}{r!}. \tag{14}$$

Most mégis térjünk el $\varphi(x)$ fenti definíciójától és határozzunk meg olyan $\varphi^*(x)$ legfeljebb $(r-1)$-edfokú polinomot, amelyre a

$$\max_{l=0,\ldots,2r-1} |\varphi(x_l)-\varphi^*(x_l)|$$

minimális. (Ilyen egyébként csak egy van. Majd a 4. Tételhez egyszerűbben számítható eljárást adunk meg, mindenesetre ez az eljárás is jól definiált.)

Mivel $P(x)$ is legfeljebb $(r-1)$-edfokú polinom, ez a minimális érték (14) szerint legfeljebb

$$\varrho + \frac{5M_r}{r!}$$

és így

$$|P(x_l)-\varphi^*(x_l)| \leqq 2\left(\varrho + \frac{5M_r}{r!}\right) \qquad (l=0, \ldots, 2r-1).$$

Ez fennáll a $2r$ számú x_l pontban, márpedig $P(x)-\varphi^*(x_l)$ legfeljebb $(r-1)$-edfokú. Ebből, mint a teljesség kedvéért be fogjuk látni, következik, hogy az egész $[-1, 1]$-ben

$$|P(x)-\varphi^*(x)| \leqq 3\left(\varrho+\frac{5M_r}{r!}\right) \qquad (|x|\leqq 1)$$

és (13)-mal összevetve

$$|f(x)-\varphi^*(x)| = 3\varrho+\frac{16M_r}{r!} \qquad (|x|\leqq 1),$$

ami azt mutatja, hogy a $\varphi^*(x)$ becslés eleget tesz a tétel követelményeinek.

Konstruáljuk meg most $h(x)$-et, amelyet $[-1, 1]$-ben legfeljebb $(r-1)$-edfokú polinomnak fogunk választani. Ezt a $[-1, 1]$-ben az azonosan 1 súlyfüggvényre ortonormált $\{p_s(x)\}$ polinomrendszer szerint kifejtve (ezek konstans szorzótól eltekintve a Legendre-polinomok),

$$h(x) = \sum_{s=0}^{r-1} c_s p_s(x),$$

ahol $\int_{-1}^{1} h(x)dx=1$ azt jelenti, hogy $c_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$, míg az előírt ortogonalitási feltételek ekvivalensek azzal, hogy $h(x)$ minden egyes $(p_s(x)-p_s(0))$-ra $(s=1, \ldots, r-1)$ ortogonális, azaz

$$0 = \int_{-1}^{1} h(x)(p_s(x)-p_s(0))dx = c_s - p_s(0)\int_{-1}^{1} h(x)dx,$$

$$c_s = p_s(0) \qquad (s=1, \ldots, r-1),$$

ami így $s=0$-ra is érvényes. A becslésekhez felhasználjuk a $p_s(x)$ polinomok néhány tulajdonságát. Ezek mind megtalálhatók Szegő „Orthogonal Polynomials" című könyvében.

$$\int_{-1}^{1} |h(x)|^2 dx = \sum_{s=0}^{r-1} |c_s|^2 = \sum_{s=0}^{r-1} |p_s(0)|^2.$$

Páratlan s-re $p_s(0)=0$, párosra pedig

$$p_s(0) = \frac{1}{2^s}\binom{s}{\frac{s}{2}}\sqrt{\frac{2+1}{2}} < \sqrt{2{,}5},$$

ahonnan

$$\int_{-1}^{1} |h(x)|^2\, dx \leqq 1{,}25r.$$

Ami a maximum becslését illeti, páros s-re (csak ilyenek szerepelnek $h(x)$ sorában)

$$|p_s(x)| \leqq \frac{p_s(0)}{(1-x^2)^{1/4}} \qquad (|x|<1),$$

ami jó becslést ad például $|x| \leqq \frac{55}{64}$-re:

$$|h(x)| = \left| \sum_{s=0}^{r-1} p_s(0) p_s(x) \right| \leqq \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} \sum_{s=0}^{r-1} p_s^2(0) < 2r.$$

$|x| > \frac{55}{64}$-re az ugyancsak ismert

$$\sum_{s=0}^{r-1} p_s(0) p_s(x) = \frac{r}{\sqrt{4r^2-1}} \cdot \frac{p_{r-1}(0) p_r(x) - p_r(0) p_{r-1}(x)}{x}$$

formulából és a $|p_s(x)| \leqq \sqrt{\frac{2s+1}{2}}$ becslésből durván

$$|h(x)| \leqq \frac{64}{55} \frac{r}{\sqrt{4r^2-1}} \sqrt{2{,}5} \sqrt{\frac{2r-1}{2}} < 2r,$$

amivel készen vagyunk.[5]

Ígéretünkhöz híven igazoljuk még Bernstein egy eredményének speciális esetét, nevezetesen, hogy

$$K \overset{\text{def}}{=} \max_{-1 \leqq x \leqq 1} |p(x)| \leqq \sqrt{2},$$

ha

$$\max_{l=0,\ldots,2r-1} |p(x_l)| \leqq 1$$

minden legfeljebb r-edfokú valós együtthatós polinomra. Elég ezt $T(\vartheta) = p(\cos \vartheta)$-ra $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi)$ igazolni, ami mint ismeretes, legfeljebb r-edrendű cosinus-polinom. Az x_l pontok a $\vartheta_l = \frac{2l+1}{4r}\pi$ pontokba mennek át. $T(\vartheta)$-t az egész számegyenesen tekintve, annak párossága és 2π-szerinti periodicitása miatt $|T(\vartheta_l)| \leqq 1$ minden l-re $(l = 0, \pm 1, \ldots)$. Legyen ϑ' $T(\vartheta)$ egy maximum-helye; azt is feltehetjük, hogy $K = T(\vartheta') > 0$. $T(\vartheta) \geqq K \cos r(\vartheta - \vartheta')$, ha $|\vartheta - \vartheta'| \leqq \frac{\pi}{2r}$, ugyanis a két r-edrendű polinom különbségének ellenkező esetben multiplicitással számolva legalább $2r+1$ gyöke volna $[\vartheta - \pi, \vartheta + \pi)$-ben, mint az a függvénymenetekből leolvasható, és ez ellentmondás. Mármost a ϑ'-höz legközelebbi ϑ_l-re $|\vartheta_l - \vartheta'| \leqq \frac{\pi}{4r}$, amire tehát az egyenlőtlenség teljesül és

$$1 \geqq T(\vartheta_l) \geqq K \cos r \frac{\pi}{4r} = \frac{K}{\sqrt{2}},$$

amit bizonyítani akartunk.

A 4. Tétel bizonyítása. A számegyenes felbontásánál itt vehetünk egyforma hosszú intervallunokat. Legyen tehát $d = 2j\Delta$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$ és alkalmazzuk a 3. Tételt minden egyes j-re, célszerűen $\varrho = \Delta^r$-nel, tekintve, hogy r, M_r most konstansak; M_0-nak $\frac{A}{\log(2+2|j|\Delta)}$ vehető, (ugyanis $\Delta < \frac{1}{4}$ lesz).

[5] Elbert Árpád és Makai Endre közlése szerint mindketten igazolni tudják, hogy $|h(x)| \leqq |h(0)|$ $(|x| \leqq 1)$, ami a tétel állandóit valamelyest javítaná.

A szereplő valószínűségek összegére a

$$c_{14} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-c_{15} n \Delta^{2r+1} \log(2+2|j|\Delta)} \leqq c_{14} e^{-c_{15} n \Delta^{2r+1} \log 2} + \frac{2c_{14}}{\Delta} e^{-c_{15} n \Delta^{2r+1} \log 2}$$ [6]

korlát adódik, feltéve, hogy

$$c_{15} n \Delta^{2r+1} \geqq 2. \tag{15}$$

Az összegre így még a

$$\frac{c_{16}}{\Delta} e^{-c_{17} n \Delta^{2r+1}} < c_{18} n e^{-c_{17} n \Delta^{2r+1}} \leqq \frac{c_{18}}{n}$$

egyenlőtlenség is érvényes, ha

$$\Delta = \left(\frac{2 \log n}{c_1 n} \right)^{1/2r+1}.$$

A (15) feltétel elég nagy n-re teljesül és $\frac{c_{18}}{n}$ valószínűségű eseménytől eltekintve minden egyes j-re találtunk $\varphi(x)$ becslést, amelyre

$$\sup_{(2j-1)\Delta \leqq x \leqq (2j+1)\Delta} |f(x) - \varphi(x)| \leqq c_{19} \left(\frac{\log n}{x} \right)^{r/2r+1},$$

amivel az egész valós tengelyen becsültük $f(x)$-et a kívánt hibával. (Az 1. Tétel bizonyítása után tett megjegyzés itt is érvényes.)

Segédtétel. Legyenek $\eta_1, \ldots, \eta_n$ azonos eloszlású független valószínűségi változók $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, $q(u)$ $(-\infty < x < +\infty)$ mérhető függvény, amelyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(u)|^2 f(u)\, du \leqq D,$$

$$\sup_{-\infty < u < +\infty} |q(u)| = \frac{D}{\varrho}.$$

Ekkor

$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} q(\eta_i) - \int_{-\infty}^{\infty} q(u) f(u)\, du \right| > \varrho \right) \leqq 2e^{-\frac{n\varrho^2}{6D}}.$$

A teljesség kedvéért közöljük a standard bizonyítást.

Feltehetjük, hogy $E(q(\eta)) = \int_{-1}^{1} q(u) f(u)\, du = 0$, ugyanis $q(u)$-ból ezt levonva minden feltétel érvényben marad, csak az utolsót kell $\sup |q(u)| \leqq \frac{2D}{\varrho}$-val helyettesíteni. A függetlenség miatt

$$E\left(e^{\frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n} q(\eta_i)}\right) = \left[E\left(e^{\frac{\lambda}{n} q(\eta)}\right)\right]^n$$

[6] Általában, ha $\alpha \geqq 2$, $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\alpha \log(2+\beta j)} \leqq \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha \log(2+\beta u)}\, du = \frac{2}{\beta} \frac{e^{-\alpha \log 2}}{\alpha - 1} \leqq \frac{2}{\beta} e^{-\alpha \log 2}$.

és ha például

$$\frac{\lambda}{n}|q(u)| \leqq 1, \tag{16}$$

akkor

$$E\left(e^{\frac{\lambda}{n}q(\eta)}\right) \leqq E\left(1+\frac{\lambda}{n}q(\eta)+\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{n^2}|q(\eta)|^2\right) = 1+\frac{3\lambda^2}{2n^2}\int_{-\infty}^{\infty}|q(u)|^2 f(u)\,du \leqq e^{\frac{3\lambda^2 D}{2n^2}},$$

tehát

$$E\left(e^{\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}q(\eta_i)}\right) \leqq e^{\frac{3\lambda^2 D}{2n}}.$$

Másrészt a bal oldal nagyobb, mint

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q(\eta_i) > \varrho\right)e^{\lambda\varrho},$$

és alkalmazva ugyanezt $-q(u)$-val adódik, hogy

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q(\eta_i)\right| > \varrho\right) \leqq 2e^{\frac{3\lambda^2 D}{2n}-\lambda\varrho}.$$

λ optimális értéke $\lambda=\frac{n\varrho}{3D}$, ami a kívánt becslést adja. Ellenőrizni kell még (16)-ot:

$$\frac{\lambda}{n}|q(u)| \leqq \frac{n\varrho}{3Dn}\cdot\frac{2D}{\varrho} < 1.$$

Az 5. Tétel bizonyítása. Itt is

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}h(x-\eta_i)$$

lesz, csak $h(x)$-et más alapon választjuk. A Fourier-transzformáltakra térve, amelyeket a megfelelő nagybetűvel jelöljük,

$$\Phi(t) = H(t)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{it\eta_i}$$

és a Parseval-formula szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)-H(t)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{it\eta_i}|^2dt,$$

feltéve, hogy $h(x)$ négyzetesen integrálható. ($f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, vagy ami ugyanaz, $F(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ a tételben hallgatólagosan fel van tételezve.)

Számítsuk ki ennek várható értékét. Az integrandus,

$$|F(t)|^2-2Re\left\{\overline{F(t)}H(t)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{it\eta_i}\right\}+|H(t)|^2\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}e^{it(\eta-\eta_j)}$$

várható értékéhez:

$$E(e^{it\eta_i}) = F(t),$$

$$E(e^{it(\eta_i-\eta_j)}) = E(e^{it\eta_i})E(e^{-it\eta_j}) = F(t)\overline{F(t)}, \qquad (i\neq j)$$

és így az illető várható érték

$$|F(t)|^2-2Re\{H(t)|F(t)|^2\}+|H(t)|^2\frac{1}{n^2}\left(n+n(n-1)|F(t)|^2\right)=$$

$$=|F(t)|^2|1-H(t)|^2+\frac{1}{n}|H(t)|^2(1-|F(t)|^2),$$

amit integrálva a négyzetintegrál keresett várható értékét kapjuk. Célszerű tehát a

$$H(t)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad |t|\leqq T\\ 0, & \text{ha} \quad |t|>T\end{cases}$$

választás, azaz a Fourier-transzformáció inverziós képlete alapján

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(t)e^{-ixt}dt=\frac{\sin Tx}{\pi x}.$$

Ekkor

$$E\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|^2dx\right)\leqq\frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|>T}|F(t)|^2dt+\frac{2T}{n}\right),$$

ahonnan

$$P\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|^2dx>\varrho^2\right)\leqq\frac{1}{2\pi\varrho^2}\left(\int_{|t|>T}|F(t)|^2dt+\frac{2T}{n}\right),$$

amit bizonyítanunk kellett.

Ha a négyzetintegrál szórását is kiszámolnánk, aminek nincs elvi nehézsége, pusztán hosszadalmas, akkor azt tapasztalnánk, hogy az, amennyiben T n-nel együtt végtelenhez tart, kisebb nagyságrendű, mint a most kiszámolt várható érték. Ekkor tehát a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva a négyzetintegrál nagyságát pontosan ismernénk és jobb, bizonyos esetekben valószínűleg a legjobb tételt kapnánk (esetleg $H(t)$-t is a konkrét feladatnak megfelelően módosítva).

A Következmény bizonyítása.

$$\varphi(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(x-\eta_i)$$

becslésünk várható értéke

$$k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x-u)f(u)du.$$

A Fourier-transzformáltakra térve, egyelőre formálisan

$$K(t)=H(t)F(t)$$

és ha $F(t)=0$ $|t|>T$ esetén, akkor $H(t)$-nek az előző bizonyításbeli definíciójával $K(t)=H(t)F(t)=F(t)$, ahonnan $k(x)=f(x)$, mint állítottuk. (Vegyük figyelembe, hogy az adott esetben mind $k(x)$, mind $f(x)$ folytonos.) A formális számolást könnyű volna precízen megalapozni. A másik állítás a 4. Tétel közvetlen folyománya.

Jegyezzük még meg, hogy mint a bevezetésben már utaltunk rá, $h(x)$ (azaz $H(t)$) ilyen választása nemcsak a normabeli, hanem az egyenletes közelítésre is al-

kalmas, éspedig ugyanolyan jó eredményt ad, mint a 3. Tétel legalábbis erősebb simasági feltételek esetén, de kis módosítással, nevezetesen a

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |t| \leqq T \\ 2 - \dfrac{|t|}{T}, & \text{ha} \quad T < |t| \leqq 2T \\ 0, & \text{ha} \quad 2T < |t| \end{cases}$$

definícióval, már minden esetben. Ezzel itt nem foglalkozunk.

Befejezésül szeretnék köszönetet mondani Tusnády Gábornak és Révész Pálnak, akiknek a problémát és sok, számomra tanulságos beszélgetést köszönhetek.

IRODALOM

[1] RÉVÉSZ, P.: On empirical density function Periodica Math. Hung., 2 (1—4), (1972) 85—110.
[2] ROSENBLATT, M.: Remarks on some non-parametric estimates of density function, Ann. Math. Statist. 27 (1956), 832—837.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

ГАБОР ХАЛАС

STATISTICAL INTERPOLATION

G. HALÁSZ

Let $g(x)$ be an unknown function in $[0, 1]$. By a statistical interpolation method we mean a choice of n points $x_i \in [0, 1]$ and a random function $\psi(x) = \psi(x, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ for approximating $g(x)$, where ξ_i are independent random variables with expectation $g(x_i)$ and e.g. of normal distribution with variance 1. If $|g^{(r)}(x)| \leqq M$ (r is any integer) then an interpolation method is constructed (Theorem 1) for which

$$\max_{0 \leqq x \leqq 1} |g(x) - \psi(x)| \leqq c(M, r) (\log n/n)^{r/2r+1}$$

with probability $1 - \varepsilon$ for $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Under certain restriction on $\psi(x)$ this is best possible (Theorem 2).

In the related problem of density estimation one is given a sample of n elements η_i with a common but unknown density function $f(x)$ to be estimated by an appropriate $\varphi(x) = \varphi(x, \eta_1, \ldots, \eta_1)$. If $|f^{(r)}(x)| \leqq M$, $|f(x)| \leqq \dfrac{c}{\log(2 + |x|)}$, then the same estimate as above can be achieved for $\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - \varphi(x)|$ (Theorem 4). Approximation in L_2 norm (Theorem 5) as well as stronger smoothness conditions on $f(x)$ (Theorem 3) are also treated. In the extreme smooth case when the characteristic function of the distribution vanishes for large values, $\varphi(x)$ can even be chosen to be an unbiased estimation of $f(x)$ ($\varphi(x)$ itself is not necessarily a characteristic function). (Corollary to Theorem 5.)

A CSOPORTELMÉLET LEGEGYSZERŰBB MEGOLDATLAN PROBLÉMÁI

PELIKÁN JÓZSEF

Az alábbi problémák abban az értelemben egyszerűek, hogy megfogalmazásukhoz csak a legalapvetőbb csoportelméleti fogalmak szükségesek. A velük kapcsolatban eddig elért eredmények megfogalmazásához viszont gyakran további fogalmak szükségesek. Ezek nagy részét a cikkben definiáljuk, az itt nem definiált fogalmakat illetően pedig Kuros [29] könyvére utalunk. Természetesen nem törekedhettünk teljességre, a rendkívül nagyszámú megoldatlan probléma közül pusztán néhánynak az ismertetésére szorítkozhattunk.

1. probléma: Igaz-e, hogy ha a végtelen G csoportnak minden valódi részcsoportja véges, akkor G kommutatív?

A probléma „O. Ju. Smidt problémája" néven ismeretes, mert ő vetette fel 1938-ban (ld. [6]). Könnyen látható, hogy azok a végtelen Abel-csoportok, melyeknek minden valódi részcsoportjuk véges, a $C(p^\infty)$ csoportok, ahol p prímszám. ($C(p^\infty)$-nel jelöljük az összes p-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportját). Kargapolov [26] (és tőle függetlenül valamivel később Ph. Hall és Kulatilaka [22]) bebizonyította, hogy ha egy lokálisan véges G végtelen csoportnak minden valódi részcsoportja véges, akkor G kommutatív. (Egy csoportot lokálisan végesnek nevezünk, ha minden végesen generált részcsoportja véges. Hasonlóan lokálisan feloldhatónak, ill. lokálisan nilpotensnek fogunk nevezni egy csoportot, ha a megfelelő tulajdonság a végesen generált részcsoportjaira teljesül.)

A bizonyítás felhasználja Feit és Thompson azon igen mély eredményét [9], amely szerint minden páratlan rendű véges csoport feloldható. Kargapolov fenti eredménye könnyen láthatóan azt jelenti, hogy már csak a végesen generált végtelen csoportokra kell bebizonyítani, hogy valódi részcsoportjaik végességéből következik kommutativitásuk. Sztrunkov [43] továbbmenőleg bebizonyította, hogy elég a 2 elemmel generálható csoportokra szorítkozni, pontosabban a következő tételt bizonyította: ha a G végtelen csoport minden, 2 elemmel generált részcsoportja véges, akkor G tartalmaz végtelen kommutatív részcsoportot.

A csoportelmélet egyik legnevezetesebb problémaköre a ma már megoldott Burnside-féle probléma, amellyel kapcsolatban azonban igen sok kérdés maradt még eldöntetlen.

Burnside-probléma: Igaz-e, hogy minden végesen generált torziócsoport véges?

(Torziócsoportnak nevezzük az olyan csoportot, melynek minden eleme végesrendű.) Más fogalmazásban: igaz-e, hogy minden torziócsoport lokálisan véges?

A problémát Burnside [3] 1902-ben vetette fel. Bizonyos további megkötésekkel könnyen adódik a pozitív válasz, pl. könnyen bizonyítható, hogy minden feloldható torziócsoport lokálisan véges.

Az eredeti problémát 1964-ben sikerült megoldania Golodnak [13], bebizonyítván, hogy minden $k \geqq 3$ és p prímszám esetén létezik olyan k elemmel generált p-csoport, ami végtelen. A bizonyítás egy Golod és Safarevics [14] által bizonyított gyűrűelméleti lemmán alapul. Továbbra is eldöntetlen maradt azonban a Burnside-probléma következő módosítása: igaz-e, hogy ha G végesen generált és van olyan n természetes szám, hogy minden $g \in G$-re $g^n = 1$, akkor G véges? Könnyen látható, hogy az olyan k elemmel generált csoportok között, melyeknek minden elemére teljesül $g^n = 1$, van egy „legnagyobb":

$$B(n, k) \cong F_k / F_k^n$$

(F_k jelöli a k elemmel generált szabad csoportot, F_k^n pedig ennek az a részcsoportja, amelyet F_k elemeinek n-ik hatványai generáltak.)

$B(n, k)$ abban az értelemben legnagyobb, hogy az összes többi, k elemmel generált csoport, melynek minden elemére $g^n = 1$, $B(n, k)$-nak homomorf képe. Elég tehát $B(n, k)$ végességét eldönteni. Mivel $B(n, 1) \cong C(n)$ (az n-edrendű ciklikus csoport), csak a $k \geqq 2$ eset érdekes. Az $n = 2$ eset triviális, hivatkozva arra a közismert elemi tényre, hogy egy olyan csoport, amelynek minden eleme másodrendű, szükségképpen kommutatív. Könnyen láthatóan

$$|B(2, k)| = 2^k$$

$B(3, k)$ végességét maga Burnside bizonyította [3], $B(3, k)$ rendjét pedig Levi és van der Waerden [32] határozták meg:

$$|B(3, k)| = 3^{m(k)},$$

ahol

$$m(k) = \binom{k}{3} + \binom{k}{2} + k \tag{1}$$

$B(4, k)$ végességét Szanov [41] bizonyította, de $B(4, k)$ rendje csak $k = 2$ esetén ismeretes:

$$|B(4,2)| = 2^{12}$$

$B(6, k)$ végességét M. Hall [20] bizonyította és $B(6, k)$ rendjét is sikerült meghatároznia:

$$|B(6, k)| = 2^a 3^{m(b)}$$

ahol

$$a = 1 + (k-1)3^{m(k)} \qquad \text{(ld. (1))}$$

és

$$b = 1 + (k-1)2^k.$$

Ezeken kívül semmilyen $B(n, k)$ végessége nincs bizonyítva.

Az ellenkező irányban Novikov és Adjan [34], [35], [36] rendkívül bonyolult apparátus felhasználásával 1968-ban bebizonyította, hogy $B(n, k)$ $k \geqq 2$ és $n \geqq 4381$, n páratlan esetén végtelen és ezzel a szűkebb Burnside-probléma is negatív megoldást nyert. Az itt szereplő alsó korlátot később sikerült 4381-ről 697-re leszorítani ([1], a bizonyítás még nincs publikálva), de n páratlan voltát továbbra is ki kell kötni.

A szűkebb Burnside-probléma negatív megoldása különös érdekességet ad a következő kérdésnek: ha nem is igaz, hogy azok a k elemmel generált csoportok, melyek minden elemére teljesül $g^n = 1$, végesek, igaz-e hogy az ilyen tulajdonságú véges csoportok rendje felülről korlátos? Könnyen látható, hogy a kérdés ekvivalens

azzal, hogy az ilyen tulajdonságú véges csoportok között van-e olyan, amelynek az összes többi ilyen tulajdonságú véges csoport homomorf képe (vagyis az ilyen tulajdonságú véges csoportok között van-e „legnagyobb").

A kérdés első pillantásra kissé erőltetettnek tűnik. Annál meglepőbb, hogy a kérdésre pozitív a válasz. Kosztrikin [28] bebizonyította, hogy, ha p tetszőleges prímszám, azon k elemmel generált véges csoportok között, melyeknek minden eleme p-edrendű, van egy amelynek az összes többi ilyen csoport homomorf képe. Meglepő az is, hogy a bizonyítás Lie-algebrákon keresztül történik. Nem-prímszám kitevő esetén a kérdés megoldatlan.

Mint a későbbiekben látni fogjuk, a Burnside-probléma számos egyéb megoldatlan csoportelméleti problémához kapcsolódik.

Azt mondjuk, hogy egy G csoportban teljesül a minimum-feltétel, ha G részcsoportjainak minden csökkenő

$$H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots \supseteq H_i \supseteq H_{i+1} \supseteq \ldots$$

végtelen sorozatára valamilyen i indextől kezdve

$$H_i = H_{i+1} = H_{i+2} = \ldots$$

vagyis, ha G részcsoportjainak minden szigorúan csökkenő sorozata véges. A maximum-feltétel analóg módon van értelmezve.

2. probléma: Igaz-e, hogy ha egy G csoportban a minimum-feltétel és a maximumfeltétel is teljesül, akkor G véges?

Könnyen látható, hogy egy G csoportban akkor és csak akkor teljesül a maximum-feltétel, ha G minden részcsoportja (maga G is) végesen generált. (Ismeretes, hogy egy végesen generált csoportnak részcsoportjai nem feltétlenül végesen generáltak, pl. az x, y elemekkel generált F_2 szabad csoportnak az $x^{-i}yx^i$ $(i=1, 2, \ldots)$ elemek által generált részcsoportja nem végesen generált. Igaz viszont, hogy egy végesen generált csoport véges indexű részcsoportja maga is végesen generált.)

Ezek után észrevehetjük, hogy ha a Burnside-problémára pozitív lenne a válasz, a 2. probléma pozitív megoldása is azonnal adódna: a maximum-feltételnek eleget tevő csoportok végesen generáltak, a minimum-feltételnek eleget tevők pedig nyilvánvalóan torziócsoportok.

A maximum-feltételnek eleget tevő csoportok végesen generáltak, tehát megszámlálhatók. A minimum-feltételnek eleget tevő csoportok jellemzésére nem ismert semmilyen használható szükséges és elégséges feltétel, sőt még az alábbi kérdés is eldöntetlen.

3. probléma: Igaz-e, hogy minden minimum-feltételnek eleget tevő csoport megszámlálható?

A minimum-feltételnek eleget tevő Abel-csoportok leírása nem nehéz. A G Abel-csoport akkor és csak akkor tesz eleget a minimum-feltételnek, ha G a következő alakú:

$$G = C(p_1^\infty) \times \ldots \times C(p_k^\infty) \times A$$

ahol $p_1, \ldots, p_k$ (nem feltétlenül különböző) prímszámok, A pedig egy véges Abel-csoport. Látjuk tehát, hogy a minimum-feltételnek eleget tevő Abel-csoportok megszámlálhatók.

Az 1., 2., 3. problémák mindegyikére azonnal adódna a pozitív válasz, ha az alábbi, Csernyikovtól származó problémára pozitív lenne a válasz.

4. probléma: Igaz-e, hogy minden minimum-feltételnek eleget tevő csoport tartalmaz véges indexű kommutatív részcsoportot?

A kérdésre a pozitív választ lokálisan feloldható csoportok esetén Csernyikov [4], [5] bizonyította 1940-ben, 1970-ben pedig Sunkov [40] és tőle függetlenül Kegel és Wehrfritz [27] bizonyították, hogy lokálisan véges csoportokra is pozitív a válasz. Ebből természetesen a korábban említett Kargapolov-féle eredmény azonnal adódik.

A fenti problémával (és az 1. problémával) kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy sokáig nem volt ismeretes olyan végtelen csoport, amelynek ne lenne végtelen kommutatív részcsoportja. Novikov és Adjan [37] bizonyították, hogy $B(n, k)$ $k \geqq 2$, $n \geqq 4381$, n páratlan esetén olyan végtelen csoport, amelynek minden Abel-féle részcsoportja véges. Később Adjan [2] bebizonyította, hogy e csoportok minden véges részcsoportja ciklikus. $B(n, k)$-ra azonban nem teljesül a minimumfeltétel, sőt az n-re tett fenti kikötések mellett $B(n, 2)$ tartalmaz $B(n, 3)$-mal izomorf részcsoportot. Mint érdekességet megemlítjük, hogy Laffey [30] bebizonyította, hogy minden végtelen gyűrű tartalmaz végtelen kommutatív részgyűrűt.

A maximum-feltételnek eleget tevő csoportokra vonatkozik az alábbi kézenfekvő kérdés:

5. probléma: Ha egy G csoport minden részcsoportja végesen generált, van-e olyan (G-től függő) k szám, hogy G minden részcsoportja generálható legfeljebb k elemmel?

Azokat a véges csoportokat, amelyek nem kommutatívak, de minden valódi részcsoportjuk kommutatív, Rédei [38] írta le 1947-ben. Az ilyen csoportok mind feloldhatók (a rendjük legfeljebb 2 különböző prímszámmal osztható). Megoldatlan viszont az alábbi

6. probléma: Létezik-e olyan G végtelen csoport, amely nem kommutatív, de minden valódi részcsoportja kommutatív?

A véges esetről mondottakat szem előtt tartva nem érdektelen az az eredmény [42], hogy a fenti tulajdonságú feloldható csoport nem létezik.

Már hivatkoztunk arra az egyszerű tényre, hogy ha egy G csoport minden g elemére $g^2 = 1$, akkor G Abel-csoport. Ha G minden g elemére $g^3 = 1$, akkor G nilpotens és a nilpotencia-osztálya legfeljebb 3 (ld. [25]). Megoldatlan viszont az alábbi

7. probléma: Igaz-e, hogy ha egy G csoport minden g elemére $g^4 = 1$, akkor G feloldható?

Hogy megfogalmazhassuk az itt elért eddigi legerősebb eredményt, emlékeztetünk arra, hogy mint a Burnside-probléma tárgyalásánál említettük, $B(4, k)$ véges. Tehát $B(4, k)$ véges 2-csoport, így nilpotens. Nilpotencia-osztályára a következő, Wright-tól [50] származó felső becslés ismeretes: $B(4, k)$ nilpotencia-osztálya legfeljebb $3k-1$. Ez $k=2$-re éles, de nagyobb k-ra könnyen lehet, hogy nem éles. ($k \geqq 4$ esetén a legélesebb ismert alsó becslés $k+1$, l. Gupta—Tobin [16].) Mármost N. D. Gupta és mások [17], [18], [19], a következőt bizonyították: ha van olyan $k > 2$, amelyre $B(4, k)$ nilpotencia-osztálya legfeljebb $3k-3$, akkor igaz a 7. problémában szereplő állítás.

Van példa olyan G csoportra, amelynek minden g elemére $g^4 = 1$, de G nem nilpotens [15].

Vezessük be a következő jelöléseket: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, továbbá rekurzive: $[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = [[x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}]$. Ha egy G csoport bármely két x, y elemére teljesül az $[x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{n\text{-szer}}] = 1$ egyenlőség, akkor azt mondjuk, hogy G-ben teljesül

az n-ik Engel-feltétel. (Az elnevezés eredete az, hogy az analóg feltétel következményeit Lie-algebrák esetén Engel vizsgálta először.) Az első Engel-feltétel nyilván a csoport kommutativitásával ekvivalens. Levi [31] bizonyította 1942-ben, hogy a második Engel-feltétel teljesüléséből következik, hogy a csoport nilpotens és nilpotencia-osztálya legfeljebb 3 (sőt, ha a csoport nem tartalmaz 3 rendű elemet, akkor a nilpotencia-osztály legfeljebb 2, azaz a csoport kommutátorcsoportja része a centrumnak). Könnyen látható, hogy ha egy G csoport minden g elemére $g^3=1$, akkor G-ben teljesül a második Engel-feltétel; ebből adódik a 7. probléma előtt említett eredmény.

8. probléma: Igaz-e, hogy ha egy G csoport bármely két x, y elemére $[x, y, y, y]=1$, akkor G feloldható?

Ha G véges, akkor a harmadik (és általánosabban tetszőleges n esetén az n-ik) Engel-feltétel teljesüléséből következik, hogy G nilpotens. Továbbmenőleg Heineken [23] bebizonyította, hogy ha G-ben teljesül a harmadik Engel-feltétel, akkor G lokálisan nilpotens. Ugyancsak Heineken [23] bizonyította, hogy ha G-ben teljesül a harmadik Engel-feltétel, és G nem tartalmaz 2 és 5 rendű elemeket, akkor G nilpotens (és nilpotencia-osztálya legfeljebb 4). Itt a 2 rendű elemekről szóló kikötést nem lehet elhagyni [15], nem ismeretes viszont, hogy az 5 rendű elemről tett kikötés elhagyható-e.

A 7. és 8. probléma „együtt" megoldott: Gupta és Weston [17] bizonyították, hogy egy olyan G csoport, amelyre teljesül a harmadik Engel-feltétel, továbbá G bármely g elemére $g^4=1$, feloldható, sőt feloldhatósági hossza legfeljebb 5. Ugyancsak ők bizonyították, hogy ha G olyan 2-csoport, amelyben teljesül a harmadik Engel-feltétel, de G nem feloldható, akkor G elemeinek rendjei nem korlátosak felülről.

Ha G egy tetszőleges csoport, $\Phi(G)$-vel jelöljük G összes maximális részcsoportjainak metszetét. (Speciálisan, ha G-nek nincs maximális részcsoportja, akkor $\Phi(G)=G$.) $\Phi(G)$ neve: G Frattini-részcsoportja. A Frattini-részcsoport fontos szerepet játszik a csoportelméletben. Pl. egy véges csoport Frattini-részcsoportja mindig nilpotens, továbbá egy G véges csoport akkor és csak akkor nilpotens, ha $G' \subseteq \Phi(G)$. (G' jelöli G kommutátorrészcsoportját.)

Ha μ-vel jelölünk egy olyan hozzárendelést, ami minden csoporthoz valamely természetes módon definiált részcsoportját rendeli (pl. centrum, kommutátorrészcsoport stb.), akkor a „direkt szorzat μ-je egyenlő az egyes direkt faktorok μ-jeinek direkt szorzatával" típusú állítás — ha igaz — általában triviális szokott lenni. Némileg meglepő tehát, hogy az alábbi probléma megoldatlan.

9. probléma: Igaz-e, hogy

$$\Phi(G_1 \times G_2) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2)?$$

Véges G_1, G_2 esetén az állítás persze triviálisan igaz. Bebizonyítható [7], hogy ez a probléma ekvivalens a következővel.

10. probléma: Van-e olyan G egyszerű csoport, amelynek nincs maximális részcsoportja?

A 9. problémára akkor és csak akkor igenlő a válasz, ha a 10.-re tagadó.

A következőkben néhány, véges csoportokra vonatkozó megoldatlan problémát említünk. A véges csoportok elméletének egyik központi problémája az összes véges egyszerű csoportok leírása. A jelenleg ismert véges csoportok listája egyrészt olyan végtelen sorozatokból áll, melyek elemei hasonló szerkezetű, csak egy vagy

több (a természetes számokon vagy bizonyos prímhatványokon végigfutó) paraméterértéktől függő egyszerű csoportok, másrészt van kb. 20 olyan véges egyszerű csoport, amelyik nem illik bele az ismert végtelen sorozatok egyikébe sem (ún. sporadikus egyszerű csoportok). Az ismert egyszerű csoportok listája bizonyos szempontokból már kielégítő, pl. Thompson [46] bebizonyította, hogy minden „minimális" véges egyszerű csoport (vagyis minden olyan véges egyszerű csoport, amelynek valódi részcsoportjai feloldhatók) szerepel a listán. Valószínű azonban, hogy a lista még messze van a teljességtől. Az utóbbi 10—15 évben a véges csoportok elméletében történt rendkívül nagy előrehaladás ellenére jónéhány régóta megoldatlan probléma van. Mi itt is egy-két „legegyszerűbb" probléma ismertetésére szorítkozunk.

Triviálisan bizonyítható, hogy egy G csoport automorfizmuscsoportjában G belső automorfizmusai egy normálosztót alkotnak. Az e szerint vett faktorcsoportot nevezzük G külső automorfizmuscsoportjának.

11. probléma: Igaz-e, hogy minden véges egyszerű csoport külső automorfizmuscsoportja feloldható?

Azt a sejtést, hogy a fenti problémára pozitív a válasz, Schreier-sejtésnek nevezik. A Schreier-sejtés az ismert véges csoportokra (egy-két legújabban felfedezett sporadikus egyszerű csoport kivételével) igazolva van. Wielandt [48] bebizonyította, hogy a G véges egyszerű csoportra igaz a Schreier-sejtés, feltéve, hogy G tartaimaz prímindexű részcsoportot. Glauberman [12] bebizonyította, hogy a G véges egyszerű csoportra igaz a Schreier-sejtés, ha G 2-Sylow részcsoportjának automorfizmuscsoportja feloldható.

A Schreier-sejtés megoldása más, látszólag távoleső problémák megoldása szempontjából igen fontos lenne. Ilyen pl. az alább ismertetendő probléma.

Legyen G egy n-edfokú permutációcsoport, vagyis az S_n n-edfokú szimmetrikus csoportnak egy részcsoportja. G-t k-tranzitívnak nevezzük (k természetes szám), ha akárhogyan adva meg $\{a_1, \ldots, a_k\}$-t és $\{b_1, \ldots, b_k\}$-t, ahol $\{a_1, \ldots, a_k\}$ és $\{b_1, \ldots, b_k\}$ az S_n által permutált $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak két k elemű részhalmaza, van olyan $g \in G$ permutáció, amely mindegyik a_i-t b_i-be viszi ($i = 1, 2, \ldots, k$). Nyilván $j < k$ esetén egy k-tranzitív permutációcsoport j-tranzitív is. Az 1-tranzitív permutációcsoportokat röviden tranzitívnak nevezzük. Maga S_n n-tranzitív, az A_n alternáló csoport pedig $(n-2)$-tranzitív. A továbbiakban csak az S_n-től és A_n-től különböző permutációcsoportokat tekintjük.

12. probléma: Létezik-e 6-tranzitív permutáció-csoport?

A Cayley-tételből következik, hogy minden csoport izomorf egy tranzitív permutációcsoporttal. Könnyen látható, hogy egy 2-tranzitív n-edfokú permutációcsoport rendje oszható $n(n-1)$-gyel. Ebből következik, hogy pl. 3 rendű 2-tranzitív permutációcsoport nincsen, tehát nem minden csoport izomorf egy 2-tranzitív permutációcsoporttal. Azonban a 2-tranzitív, sőt a 3-tranzitív permutációcsoportok száma is végtelen. 4-tranzitív permutációcsoportból 4 ismeretes: az M_{11}, M_{12}, M_{23} és M_{24} Mathieu-csoportok (definíciójukat l. [49]). Ezek közül M_{12} és M_{24} 5-tranzitív is.

Wielandt [47] bebizonyította, hogy ha a Schreier-sejtés igaz, akkor nem létezik 8-tranzitív permutációcsoport. Ezt Nagao [33] élesítette, megmutatván, hogy a Schreier-sejtésből következik, hogy 7-tranzitív permutációcsoport sem létezik.

Frobenius [11] bizonyította 1903-ban ez alábbi tételt: ha a G véges csoport rendjének k osztója, akkor azon G-beli g elemek száma, melyekre $g^k = 1$ teljesül, k-nak többszöröse. Megoldatlan viszont az alábbi

13. probléma: Legyen k a G véges csoport rendjének osztója és tegyük fel, hogy azon G-beli g elemek száma, melyekre $g^k=1$ teljesül, k-val egyenlő. Igaz-e, hogy akkor ez a k elem egy részcsoportot alkot?

Ha a G véges csoport feloldható, a válasz igenlő [21]. A probléma nehézségét mutatja, hogy a pozitív válaszból rögtön következnék az alábbi, Frobeniustól [10] származó mély tétel: ha a G n-edfokú tranzitív permutációcsoport minden (egységelemtől különböző) eleme a permutált $1, 2, \ldots, n$ számok közül legfeljebb egyet hagy fixen (vagyis G ún. Frobenius-csoport), akkor G-nek azon elemei, amelyek semelyik számot sem hagyják fixen, az egységelemmel együtt G egy részcsoportját alkotják.

Sokáig eldöntetlen probléma volt, hogy vajon ez a részcsoport minden Frobenius-csoport esetén nilpotens-e. Ezt Thompson [44], [45] bizonyította be, aki megmutatta, hogy igaz a következő tétel, amelynek a szóban forgó részcsoport nilpotenciája közvetlen következménye: Ha a G véges csoportnak van fixpontmentes, prímrendű automorfizmusa, akkor G nilpotens. (Fixpontmentesnek nevezzük G egy utomorfizmusát, ha G semelyik, egységelemtől különböző elemét sem hagyja fixen.) Továbbra is megoldatlan azonban az alábbi

14. probléma: Igaz-e, hogy ha a G véges csoportnak van fixpontmentes automorfizusa, akkor G feloldható?

A következő probléma igen régi.

15. probléma: Igaz-e, hogy minden véges egyszerű csoport generálható két elemmel?

A legtöbb ismert véges egyszerű csoportra ez igazolva van [8]. Az általános esetre vonatkozóan sokáig semmi előrehaladás nem történt. Még az sem volt ismeretes, hogy nincs-e olyan véges egyszerű csoport, amelynek minden két elemmel generált részcsoportja feloldható. Nemrégiben Thompsonnak [46] sikerült bizonyítania, hogy ha egy G véges csoport minden két elemmel generált részcsoportja feloldható, akkor G maga is feloldható. (Összehasonlításként érdemes meggondolni, hogy triviális az, hogy G kommutatív, ha bármely két elemmel generált részcsoportja kommutatív és nem nehéz annak a bizonyítása, hogy a G véges csoport nilpotens, ha bármely két elemmel generált részcsoportja nilpotens.)

A végtelen egyszerű csoportok általában nem generálozhatók 2 elemmel, hiszen van akármilyen számosságú egyszerű csoport, sőt sokáig nem volt ismeretes végesen generált végtelen egyszerű csoport (l. Higman [24]).

Annak illusztrálására, hogy még a látszólag jól ismert csoportokkal kapcsolatban is számos egyszerű kérdés megoldatlan, befejezésül az alábbi problémát említjük.

Tegyük fel, hogy az S_p szimmetrikus csoport (p prímszám) által permutált objektumok a mod p maradékosztályok. Ekkor az $x \to ax+b$ ($a \not\equiv 0 \pmod p$) típusú leképezések könnyen láthatóan S_p-nek egy $p(p-1)$ rendű részcsoportját alkotják. Ez a részcsoport nagyon „kicsi", hiszen $(p-2)!$ az indexe.

16. probléma: Igaz-e, hogy az $x \to ax+b$ ($a \not\equiv 0 \pmod p$) típusú leképezések S_p-nek egy maximális részcsoportját alkotják?

[1] S. I. ADJAN: Identités dans les groupes, Actes, Congrès intern. math. (Nice, 1970) I, 263—267. Gauther-Villars, Paris, 1971.
[2] С. И. Адян: О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя, Тр. Мат. ин-та АН СССР, 112 (1971). 64—72
[3] W. BURNSIDE: On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, Quart. J. Pure and Appl. Math., 33 (1902), 230—238.
[4] С. Н. Черников: Бесконечные локально разрешимые группы, мат. сб., 7 (1940), 35—64
[5] С. Н. Черников: К теории бесконечных специальных групп. Мат. сб., 7 (1940), 539—548
[6] С. Н. Черников: О проблеме Шмидта, Укр. мат. ж., 23 (1971), 598—603
[7] V. DLAB—V. KOŘINEK: The Frattini subgroup of a direct product of groups, Czech. Math. J., 10 (85) (1960), 350—358.
[8] W. FEIT: The current situation in the theory of finite simple groups, Actes, Congrès intern. math. (Nice, 1970) I, 55—93., Gauthier-Villars, Paris, 1971.
[9] W. FEIT—J. G. THOMPSON: Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math., 13 (1963), 755—1029.
[10] G. FROBENIUS: Über auflösbare Gruppen IV, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., 1901, 1216—1230.
[11] G. FROBENIUS: Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., 1903, 987—991.
[12] G. GLAUBERMAN: On the automorphism group of a finite group having no nonidentity normal subgroups of odd order, Math. Z., 93 (1966), 154—160.
[13] Е. С. Голод: О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых р-группах, Изв. АН СССР, сер. мат., 28 (1964), 273—276
[14] Е. С. Голод — И. Р. Шафаревич: О башне полей классов, Изв. АН СССР, сер. мат. 28 (1964), 261—272
[15] K. W. GRUENBERG: The Engel elements of a soluble group, Illinois J. Math., 3 (1959), 151—168.
[16] N. D. GUPTA—S. J. TOBIN: On certain groups with exponent four, Math. Z., 102 (1967), 216—226.
[17] N. D. GUPTA—K. W. WESTON: On groups of exponent four, J. Algebra, 17 (1971), 59—66.
[18] C. K. GUPTA—N. D. GUPTA: On groups of exponent four II, Proc. Amer. Math. Soc., 31 (1972), 360—362.
[19] N. D. GUPTA—R. B. QUINTANA, Jr.: On groups of exponent four III, Proc. Amer. Math. Soc., 33 (1972), 15—19.
[20] M. HALL, Jr.: Solution of the Burnside problem for exponent 6, Proc. Nat. Acad. Sci., 43 (1957), 751—753.
[21] M. HALL, Jr.: The theory of groups, Macmillan, New York, 1959.
[22] PH. HALL—C. R. KULATILAKA: A property of locally finite groups, J. London Math. Soc., 39 (1964), 235—239.
[23] H. HEINEKEN: Engelsche Elemente der Länge 3, Illinois J. Math., 5 (1961), 681—707.
[24] G. HIGMAN: A finitely generated infinite simple group, J. London Math. Soc., 26 (1951), 61—64.
[25] B. HUPPERT: Endliche Gruppen I, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1967.
[26] М. И. Каргаполов: О проблеме О. Ю. Шмидта, Сибирск. мат. ж., 4 (1963), 232—235
[27] O. H. KEGEL—B. A. F. WEHRFRITZ: Strong finiteness conditions in locally finite groups, Math. Z., 117 (1970), 309—324.
[28] А. И. Кострикин: О проблеме Бернсайда, Изв. АН СССР, сер. мат., 23 (1959), 3—34
[29] A. G. KUROS: Csoportelmélet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
[30] T. J. LAFFEY: On commutative subrings of infinite rings, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 3—5.
[31] F. LEVI: Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions, J. Indian Math. Soc., 6 (1942), 87—97.
[32] F. LEVI—B. L. VAN DER WAERDEN: Über eine besondere Klasse von Gruppen, Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ., 9 (1933), 154—158.
[33] H. NAGAO: On multiply transitive groups I, Nagoya Math. J., 27 (1966), 15—19.
[34] П. С. Новиков — С. И. Адян: О бесконечных периодических группах I, Изв. АН СССР, сер. мат., 32 (1968), 212—244
[35] П. С. Новиков — С. И. Адян: О бесконечных периодических группах II, Изв. АН СССР, сер. мат., 32 (1968), 251—524
[36] П. С. Новиков — С. И. Адян: О бесконечных периодических группах III, Изв. АН СССР, сер. мат., 32 (1968), 709—731
[37] П. С. Новиков — С. И. Адян: О коммутативных подгруппах и проблеме сопряжен-

ности в свободных периодических группах нечетного порядка, Изв. АН СССР, сер. мат., 32 (1968), 1176—1190
[38] L. Rédei: Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, J. reine angew. Math., 188 (1950), 201—227.
[39] R. Steinberg: Generators for simple groups, Can. J. Math., 14 (1962), 277—283.
[40] В. П. Шунков: О локально конечных группах с условием минимальности для аблевых подгрупп, Алгебра и логика, 9 (1970), 579—615
[41] И. Н. Санов: Решение проблемы Бернсайда для показателя 4, Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, 55 (1940), 166—170
[42] Н. Ф. Сесекин — О. С. Широковская: Об одном классе двуступенных групп, Мат. сбо., 46 (1958), 133—142
[43] С. П. Струнков: Подгруппы периодических групп, Докл. АН СССР, 170 (1966), 279—281
[44] J. G. Thompson: Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order, Proc. Nat. Acad. Sci., 45 (1959), 578—581.
[45] J. G. Thompson: Normal p-complements for finite groups, Math. Z., 72 (1960), 332—354.
[46] J. G. Thompson: Non-solvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 383—437.
[47] H. Wielandt: Über den Transitivitätsgrad von Permutationsgruppen, Math. Z., 74 (1960), 297—298.
[48] H. Wielandt: On automorphisms of doubly transitive permutations group, Proc. Int. Conf. Theory of Groups (Canberra, 1965), 389—393., Gordon and Breach, New York, 1967.
[49] E. Witt: Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ., 12 (1938), 256—264.
[50] C. R. B. Wright: On the nilpotency class of a group of exponent 4, Pacific J. Math., 11 (1961), 387—394.

САМЫЕ ПРОСТЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ГРУПП

ЙОЖЕФ ПЕЛИКАН

ON THE SIMPLEST UNSOLVED PROBLEMS IN GROUP THEORY

J. PELIKÁN

FOURIER-TRANSZFORMÁLTAK MÓDOSÍTOTT FOLYTONOSSÁGI MODULUSÁRÓL

NGUYÊN XUÂN KÝ

Legyen $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$ az összes olyan $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ mérhető függvények tere, amelyre létezik

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}$$

Legyen továbbá $L_\infty(-\infty, \infty)$ az összes $(-\infty, \infty)$-ben lényegében korlátos mérhető függvények tere

$$\|f\|_\infty = \underset{-\infty < t < \infty}{\text{es. sup.}} |f(t)|.$$

Továbbiakban egyszerűség kedvéért $L_p(-\infty, \infty)$ jelölésre csak L_p-t írunk, $1 \leqq p \leqq \infty$. Legyen p' a p-hez konjugált szám, azaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{ha} \quad 1 < p < \infty$$

$$p' = \infty \quad \text{ha} \quad p = 1$$

Ismeretes, hogy $1 \leqq p \leqq 2$ esetén, minden $f \in L_p$ függvénynek van Fourier-transzformációja, pontosabban a következő integrál:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) \, dt \tag{1}$$

az $L_{p'}$ tér normájában konvergál egy $I(f; x)$ függvényhez és normájukra fennáll a következő összefüggés:

$$\|If\|_{p'} \leqq Ap \|f\|_p, \qquad 1 \leqq p \leqq 2 \tag{2a}$$

$$\|If\|_2 = \|f\|_2 \tag{2b}$$

ahol A_p csak p-től függő constans és $A_2 = 1$ (lásd pl.: A. ZYGMUND [4] II. kötet 254. p. (3. 2) Theorem).

Tegyük fel, hogy valamely tulajdonság értelmezve van minden L_p térben, $1 \leqq p \leqq \infty$. Felmerül a kérdés, hogy ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezzel a tulajdonsággal L_p-térben, akkor mit mondhatunk $I(f; x)$ Fourier-transzformációjáról, természetesen $L_{p'}$-térben és fordítva. Ebben a dolgozatban ezt fogjuk vizsgálni a következő ún. Lip* (p, α)-feltételre nézve. Ezt FREUD GÉZA [1] vezette be a súlyozott polinomapproximációval kapcsolatban.

Egy tetszőleges $f \in L_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$ függvény módosított folytonossági modulusát következőképpen értelmezzük:

$$\Omega^*(p, f, \delta) = \sup_{0<h\leqq\delta} \|f(x+h)-f(x)\|_p + \|\tau(\delta x) f(x)\|_p \qquad \delta > 0 \tag{3}$$

ahol $\tau(x)$ következő függvény:

$$\tau(x) = \begin{cases} x & \text{ha} \quad |x| \leqq 1 \\ 1 & \text{ha} \quad |x| > 1 \end{cases} \tag{4}$$

Egy $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy $\mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$-feltételnek tesz eleget, $1 \leqq p \leqq \infty$, $0 < \alpha < 1$, ha $f \in L_p$ és

$$\Omega^*(p, f, \delta) = O(\delta^\alpha). \tag{5}$$

Jelölésben: $f \in \mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$. Legyen $f(x)$ egy r-szer differenciálható függvény, jelöljük:

$$f^{(r)*}(x) = [e^{x^2/2} f(x)]^{(r)} e^{-x^2/2}, \qquad r = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Tétel:

a) *Ha* $f(x) \in \mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$, $1 \leqq p \leqq 2$, $0 < \alpha < 1$, *akkor* $I(f; x) \in \mathrm{Lip}^*(p', \alpha)$. *Ha* $e^{x^2/2} f(x)$ *r-szeres integrálfüggvénye* $[e^{x^2/2} f(x)]^{(r)}$ *függvénynek, és* $f^{(r)*}(x) \in \mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$, $1 \leqq p \leqq 2$, $0 < \alpha < 1$, *akkor* $e^{x^2/2} I(f; x)$ *r-szeres integrálfüggvénye* $[e^{x^2/2} I(f; x)]^{(r)}$ *függvénynek, és* $[I(f, x)]^{(r)*} \in \mathrm{Lip}^*(p', \alpha)$, $r = 1, 2, \ldots$.

b) *A* $p = 2$ *esetben az állítás megfordítható: Legyen* $f(x) \in L_2$. *Ha* $I(f; x) \in \mathrm{Lip}^*(2, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, *akkor* $f(x) \in \mathrm{Lip}^*(2, \alpha)$. *Ha* $e^{x^2/2} I(f; x)$ *r-szeres integrálfüggvénye* $[e^{x^2/2} I(f; x)]^{(r)}$ *függvénynek és* $[I(f; x)]^{(r)*} \in \mathrm{Lip}^*(2, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, *akkor* $e^{x^2/2} f(x)$ *r-szeres integrálfüggvénye* $[e^{x^2/2} f(x)]^{(r)}$ *függvénynek, és* $f^{(r)*}(x) \in \mathrm{Lip}^*(2, \alpha)$, $r = 1, 2, \ldots$.

Bizonyítás: Jelöljük P_n-nel ($n = 0, 1, \ldots$) az összes legfeljebb n-edfokú komplex együtthatós algebrai polinomok halmazát. Továbbá $P_n^* = e^{-x^2/2} P_n$, azaz P_n^* az összes olyan $e^{-x^2/2} \varphi(x)$ alakú függvények halmaza, ahol $\varphi(x) \in P_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Írjuk az (1) integrálban az $f(t)$ helyébe $\Phi_n(t) = e^{-t^2/2} H_n(t)$-et, ahol $H_n(x)$ az n-edfokú Hermite-féle ortogonális polinom ($n = 0, 1, \ldots$), akkor az (1) integrál konvergál $(-i)^n \Phi_n(x)$-hez, vagyis igaz, hogy

$$I(\Phi_n; x) = (-i)^n \Phi_n(x), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

(Lásd pl. SZŐKEFALVY-NAGY BÉLA [2] vagy *N. Wiener* [3].) Mivel minden legfeljebb n-edfokú polinom felírható a $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x)$ Hermite-féle polinomok lineáris kombinációjaként, így minden $\Phi(x) \in P_n^*$ felírható a $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ Hermite-féle függvények lineáris kombinációjaként, és I transzformáció lineáris, következik, hogy $I(\Phi; x) \in P_n^*$, sőt I transzformáció P_n^*-et önmagára viszi át:

$$I(P_n^*) = P_n^*, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Legyen $\varrho(x)$ olyan függvény, hogy $e^{-x^2/2} \varrho(x) \in L_p$ $1 \leqq p \leqq \infty$. Legyenek:

$$\varepsilon_n^{(p)*}(\varrho) = \inf_{\varphi \in P_n} \|e^{-x^2/2} [\varrho(x) - \varphi(x)]\|_p, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

$$\omega^*(p, \varrho, \delta) = \sup_{0<h\leqq\delta} \|e^{-(x+h)^2/2} \varrho(x+h) - e^{-x^2/2} \varrho(x)\| p + \|\tau(\delta x) \varrho(x) e^{-x^2/2}\|_p, \tag{10}$$

$$\delta > 0$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

FREUD GÉZA [1] bizonyította, hogy minden $0<\alpha<1$ számra

$$\begin{cases} \varepsilon_n^{(p)*}(\varrho) = O(n^{-\alpha/2}) \text{ akkor és csakis akkor, ha} \\ \omega^*(p, \varrho, \delta) = O(\delta^\alpha) \end{cases} \tag{11}$$

Továbbá: valamely r természetes szám esetén:

$$\begin{cases} \varepsilon_n^{(p)*}(\varrho) = O(n^{-(r+\alpha)/2}) \text{ akkor és csak akkor, ha} \\ \varrho(x) \ r\text{-szeres integrál függvénye } \varrho^{(r)}(x)\text{-nek és} \\ e^{-x^2/2}\varrho^{(r)}(x) \in Lp \text{ továbbá } \omega^*(p, \varrho^{(r)}, \delta) = O(\delta^\alpha). \end{cases} \tag{12}$$

Legyen most $f \in L_p$, $1 \leqq p \leqq 2$.
Legyenek:

$$\begin{cases} \varrho(x) = e^{x^2/2} f(x) \\ \gamma(x) = e^{x^2/2} I(f; x) \end{cases} \tag{13}$$

akkor nyilván $e^{-x^2/2}\varrho(x) \in L_p$, és $I(f; x) \in L_{p'}$ miatt, az is igaz, hogy $e^{-x^2/2}\gamma(x) \in L_{p'}$. A (2a) és (8) képletekből következik, hogy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(p)*}(\varrho) &= \inf_{\varphi \in P_n} \|e^{-x^2/2}\varrho(x) - e^{-x^2/2}\varphi(x)\|_p \geqq \\ &\geqq \inf_{\varphi \in P_n} A_p^{-1} \|I[e^{-x^2/2}\varrho(x) - e^{-x^2/2}\varphi(x)]\|_{p'} = \\ &= A_p^{-1} \inf_{\varphi \in P_n} \|e^{-x^2/2}\gamma(x) - I[e^{-x^2/2}\varphi(x)]\|_{p'} = \\ &= A_p^{-1} \inf_{\psi \in P_n} \|e^{-x^2/2}\gamma(x) - e^{-x^2/2}\psi(x)\|_{p'} = \\ &= A_p^{-1} \varepsilon_n^{(p')*}(\gamma), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

$p=2$ esetben $A_2=1$, továbbá (2b) és (8) miatt mindenütt egyenlőség áll fenn, vagyis igaz, hogy minden nemnegatív n egész számra

$$\begin{cases} \varepsilon_n^{(p)*}(\varrho) \geqq A_p^{-1} \varepsilon_n^{(p')*}(\gamma), \qquad 1 \leqq p < 2 \\ \varepsilon_n^{(2)*}(\varrho) = \varepsilon_n^{(2)*}(\gamma). \end{cases} \tag{14}$$

A (3), (10) és (13)-ból következik, hogy

$$\begin{cases} \Omega^*(p, f, \delta) = \omega^*(p, \varrho, \delta) \\ \Omega^*(p, If, \delta) = \omega^*(p, \gamma, \delta) \end{cases} \tag{15}$$

Állításunk (15); (11); (12); (14) összefüggésekből következik.

IRODALOM

[1] GÉZA FREUD: On approximation with weight $e^{-x^2/2}$ by polynomials, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), No. 6.
[2] SZŐKEFALVY-NAGY BÉLA: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
[3] N. WIENER: The Fourier integral and certain of its applications, Dover Publications Inc., New York, 1932.
[4] A. ZYGMUND: Trigonometric series, Volume II. Cambridge, ot the University Press 1959.

О МОДИФИЦИРОВАННОМ МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИЗОБРЛЖЕНИЙ ПО ФУРЬЕ

НГУЙЕН СУН КИ

ON THE MODIFIED CONTINUITY MODULI OF FOURIER-TRANSFORMS

NGUYEN XUÂN KÝ (Budapest)

Let L_p, $1 \leqq p < \infty$ be a space of p-th power integrable functions in $(-\infty, \infty)$ with norm $\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)|^p dt \right\}^{1/p}$; and let L_∞ be a space of the essentially bounded functions in $(-\infty, \infty)$ with norm: $\|f\|_\infty = \operatorname{es.sup}_{-\infty < t < \infty} |f(t)|$. Let $f \in L_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$ and let

$$\Omega^*(p, f, \delta) = \sup_{0 < h \leqq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_p + \|\tau(\delta x) f(x)\|_p \qquad \delta > 0$$

where $\tau(x) = |x|$ for $|x| \leqq 1$ and $\tau(x) = 1$ for $|x| > 1$. The function $\Omega^*(p, f, \delta)$ (of δ) is called the modified integral modulus of continuity (in L_p) of f. This notion is introduced by Géza Freud [1]. We shall say that the function f satisfies a $\mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$-condition $1 \leqq p \leqq \infty, 0 < \alpha < 1$ if $f \in L_p$ and $\Omega^*(p, f, \delta) = O(\delta^\alpha)$, in symbols: $f \in \mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$. Let If be the Fourier-transformation of f in L_p, $1 \leqq p \leqq 2$. In this paper we show that if $f \in \mathrm{Lip}^*(p, \alpha)$ $1 \leqq p \leqq 2$, $0 < \alpha < 1$ theen $If \in \mathrm{Lip}^*(p', \alpha)$, where $p' = \dfrac{p}{p-1}$ if $1 < p \leqq 2$ and $p' = \infty$ if $p = 1$. In the case when $p = 2$ our statement is reversible. Similar statements are true also for derivatives.

EGY KOMBINATORIKUS SZÁMELMÉLETI SEGÉDTÉTEL

KOMLÓS JÁNOS, SULYOK MIKLÓS és SZEMERÉDI ENDRE

A kombinatorikus számelmélet sok problémája írható le a következő „lineáris" módon: adott egy r változós lineáris egyenletrendszer

$$\varrho: \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{(i)} x_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, S.$$

Legyen $f(n)$ az a legnagyobb m egész, amelyre megadható egy m elemű A részhalmaza az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számoknak, „melyben ϱ nem teljesül", azaz tetszőleges $\{x_1, x_2, \ldots x_r\} \subset A$ számokat véve ezek nem elégítik ki ϱ-t. Vagy másképpen fogalmazva: akárhogyan véve egy $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ részhalmazt, melynek *több* mint $f(n)$ eleme van, lesz r egész $x_1, x_2, \ldots, x_r$ az A-ban, amely kielégíti ϱ-t.

Ilyen feladatok pl.: Sidon problémája, ahol

$$\varrho: \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

(az általánosabb Sidon-problémánál

$$\varrho: \quad x_1 + \ldots + x_h - x_{h+1} - \ldots - x_{2h} = 0),$$

itt ismeretes az $f(n) \sim \sqrt{n}$ aszimptotika (az általánosabb Sidon-problémánál a $c_1 n^{1/h} < f(n) < c_2 n^{1/h}$ egyenlőtlenség) (Erdős Turán, Rényi, Singer, Bose, Chowla és mások, lásd pl. [1]); a k-tagú számtani sorozatokat nem tartalmazó halmazok problémája, ahol

$$\varrho: \quad x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$$
$$x_2 + x_4 - 2x_3 = 0$$
$$\cdots$$
$$x_{k-2} + x_k - 2x_{k-1} = 0,$$

itt az $f(n) = r_k(n)$ függvényre a következő becslések ismeretesek:

$$n^{1 - \frac{c}{\sqrt{\log n}}} < f(n) = o(n)$$

(Roth [2], Szemerédi [3]); és még sok hasonló megfogalmazású, de igen különböző nehézségű probléma (lásd [1]).

Az analóg feladat tetszőleges n egész esetére a következő:

Legyen $g(n)$ az a legnagyobb m egész, melyre a következő teljesül:

bármely n elemű $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmaznak van egy m elemű A részhalmaza, melyben ϱ nem teljesül. (Nyilván $g(n) \leqq f(n)$).

Várható, hogy a $g(n)$ függvény nem sokkal kisebb mint $f(n)$, azaz az első n szám esete „közel a legrosszabb". Mégis, az ismert becslések sokkal gyengébbek, pl. Sidon problémájára mindössze $g(n) > n^{1/3}$ ismeretes, a számtani sorokra semmilyen alsó becslés.

A fenti sejtés azonban igaz, bebizonyítottuk ugyanis a következő tételt:

Tétel. Bármely ϱ egyenletrendszerhez létezik egy olyan $c = c(\varrho)$ pozitív konstans, hogy minden elég nagy n-re

$$g(n) > c f(n).$$

A tétel bizonyítása az Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.-ban jelenik meg.

A fenti tételhez először használtunk egy segédtételt, mely, mint Erdős megjegyezte, nélkülözhető a bizonyításban. Mivel úgy gondoljuk azonban, hogy a segédtétel önálló érdeklődésre tarthat számot, itt közöljük.

Az állítás lényege az, hogy ha n szám közül az utolsó nagyobb, mint egy c_0 küszöb, akkor van olyan a_n-nél kisebb q egész, melyre vett maradékai az n számnak mind kicsik q-hoz képest. Pontosabban a következő állítás igaz:

Segédtétel. Tetszőleges N és $n > 20$ számokhoz van olyan $c_0 = c_0(N, n)$ szám, melyre a következők teljesülnek: ha $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ egészek és $a_n > c_0$, akkor létezik olyan $q < a_n$, hogy

$$a_i = h_i q + r_i,$$

ahol az összes r_i maradék különböző és

$$0 < r_i < \frac{q}{N}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

c_0 választható a következő számnak:

$$(10N)^{(10N)^{(10N)^{(10N)^n}}}$$

A SEGÉDTÉTEL BIZONYÍTÁSA

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$l = 2\alpha^n, \quad m = tl! < a_n$$

ahol α és t később meghatározandó természetes számok, továbbá $(x)^m$ az x egész legkisebb pozitív maradéka modulo m, és $(x)^{|m|}$ a legkisebb abszolút értékű maradékának abszolút értéke.

Osszuk fel a $[0, m]$ intervallumot α számú egyenlő részre és tekintsük az $(a_1)^m, (2a_1)^m, \ldots, (la_1)^m$ számokat. Ekkor létezik egy $\left[(k_1-1)\frac{m}{\alpha}, k_1\frac{m}{\alpha}\right]$ intervallum, ahova az

$$(a_1)^m, (2a_1)^m, \ldots, (la_1)^m$$

számok közül legalább

$$\frac{l}{\alpha} = 2\alpha^{n-1} \text{ esik.}$$

Ezek legyenek:

$$(d_{1,1}a_1)^m, (d_{1,2}a_1)^m, \ldots, (d_{1,2\alpha^{n-1}}a_1)^m.$$

Tekintsük a

$$(d_{1,1}a_2)^m, (d_{1,2}a_2)^m, \ldots, (d_{1,2\alpha^{n-1}}a_2)^m$$

számokat. Létezik egy $\left[(k_2-1)\frac{m}{\alpha}, k_2\frac{m}{\alpha}\right]$ intervallum, ahova e számok közül legalább $\frac{l}{\alpha^2}=2\alpha^{n-2}$ esik. Így folytatva az eljárást az n-ik lépés után marad legalább két számunk $d_1 \neq d_2$ az $1, 2, \ldots, l$ számok közül, úgyhogy:

$$((d_1-d_2)a_1)^{|m|} \leqq \frac{m}{\alpha}$$

$$((d_1-d_2)a_2)^{|m|} \leqq \frac{m}{\alpha}$$

$$\ldots$$

$$((d_1-d_2)a_n)^{|m|} \leqq \frac{m}{\alpha}.$$

Tehát $|d_1-d_2|a_i = h_i m + r_i$,

ahol $$|r_i| \leqq \frac{m}{\alpha} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Mivel

$$1 \leqq |d_1-d_2| < l$$

így

$$d_1-d_2 | m$$

innen $d_1-d_2 | r_i$.

Tehát

$$m' = \frac{m}{|d_1-d_2|}, \quad r_i' = \frac{r_i}{|d_1-d_2|}$$

jelöléssel

(1) $$a_i = h_i m' + r_i'$$

ahol

$$|r_i'| \leqq \frac{m'}{\alpha}$$

(2) és

$$\frac{m}{l} < m' \leqq m.$$

Írjuk (1)-et a következő alakban

$$a_i = h_i(m'-s) + (h_i s + r_i')$$

Szeretnénk az s-t úgy megválasztani, hogy a következők teljesüljenek

(A) $$h_i s + r_i' > 0$$

minden i-re.

(B) $$h_i s + r_i' < \frac{m'-s}{N}$$

Ebben az esetben választhatjuk ugyanis az $(m'-s)$-t q-nak, ha még az is teljesül, hogy

$$m'-s \nmid a_i-a_j \qquad (i \neq j).$$

Felhasználva (2)-t könnyen látható, hogy ha $\alpha \geqq 2N$, akkor az alábbi két feltételt kielégítő s számok kielégítik (A)-t és (B)-t is:

(I) $$s > \frac{1}{\alpha-2} \frac{m'^2}{\min\limits_{h_i>0} a_i}$$

(II) $$s < \frac{1}{4N} \frac{m'^2}{a_n}.$$

Hogy ilyen s-t találjunk, elegendő ha

(i) $$\frac{1}{4N} \frac{m'^2}{a_n} > \frac{2}{\alpha-2} \frac{m'^2}{\min\limits_{a_i>m'/2} a_i},$$

(ii) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8N} \frac{m'^2}{a_n}}{\log a_n} > n^2 \log a_n,$$

továbbá α-t és t-t úgy kell megválasztani, hogy

(iii) $$m < a_n$$

(iv) $$\alpha \geqq 2N$$

teljesüljenek. (i) és (ii) biztosítja, hogy az

$$\left[m' - \frac{1}{\alpha-2} \frac{m'^2}{\min\limits_{a_i>m'/2} a_i}, m' - \frac{1}{4N} \frac{m'^2}{a_n}\right]$$

intervallumban van olyan q (prím-) szám, amelyre nézve az a_i számok $(i=1, 2, \ldots, n)$ mind különböző maradékosztályba esnek, azaz $q \nmid a_i-a_j$ $(i \neq j)$. Ugyanis a_i-a_j-nek legfeljebb

$$\frac{\log |a_i-a_j|}{\log 2} \leqq 2 \log |a_i-a_j|$$

prímosztója lehet és $\log |a_i-a_j| \leqq \log a_n$. Így az $\binom{n}{2}$ különbségnek legfeljebb $n^2 \log a_n$ különböző prímosztója lehet.

(i) teljesül, ha

(i') $$a_I = \min_{a_i>m'/2} a_i > \frac{8N}{\alpha-2} a_n.$$

Legyen $a_0 \overset{\text{def}}{=} 1$. Úgy választjuk meg I-t (és l-t), hogy

(v) $$\frac{a_I}{a_{I-1}} > 4l \text{ és}$$

(vi) $$a_I > 2l! \text{ teljesüljenek,}$$

ti. ekkor létezik olyan t egész, melyre

$$\frac{a_I}{2} \leqq tl! \leqq a_I,$$

és ekkor az $m=tl!$ választás kielégíti (iii)-t, és így valóban

$$a_I \geqq m \geqq m' > \frac{m'}{2}, \quad a_{I-1} < \frac{1}{4l} a_I \leqq \frac{2m}{4l} \leqq \frac{m'}{2}.$$

Most megválasztjuk előbb az I indexet, majd az α számot úgy, hogy a fenti feltételek teljesüljenek ((i'), (ii), (iv), (v), (vi)).

Feltehetjük, hogy

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq 2N < (10N)^n,$$

mert $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 2N$ egyenlőtlenségből következnék

$$a_{n-1} < \frac{a_n - n}{N}$$

és ha $1 \leqq k \leqq n$ egy olyan szám, mely nem szerepel a sorozatunkban, úgy a

$$q = a_n - k$$

választás kielégítené a segédtétel feltételeit.

Legyen j a legnagyobb olyan egész, amely mellett

$$\frac{a_{n-i+1}}{a_{n-i}} < (10N)^{in^i} \qquad 1 \leqq i \leqq j\text{-re}$$

és legyen $I = n-j$.

Nyilván $1 \leqq j \leqq n$ és vegyük észre, hogy $j \leqq n-1$, másképp az egyenlőtlenségeket összeszorozva

$$a_n = \frac{a_n}{a_0} \leqq (10N)^{\sum_{i=1}^{n} in^i} < (10N)^{n^{n+2}}$$

adódnék, ami ellentmond a

$$a_n \geqq (10N)^{(10N)^{(10N)^n}} \tag{3}$$

feltételnek. Azaz $1 \leqq I \leqq n-1$. Legyen $\alpha = 9N\left[\frac{a_n}{a_I}\right]'$, ahol $[x]' = -[-x]$ ((i') és (iv) tehát automatikusan teljesülnek).

Mivel

$$\frac{a_n}{a_I} \leqq (10N)^{\sum_{i=1}^{j} in^i}, \tag{4}$$

az I index definíciója miatt

$$\frac{a_I}{a_{I-1}} > (10N)^{(j+1)n^{j+1}},$$

tehát

$$\frac{a_J}{a_{J-1}} > (10N)^{(j+1)n^{j+1}} > (10N)^{n\left(1+\sum_{i=1}^{j} in^i\right)} \geqq \left(10N\left[\frac{a_n}{a_J}\right]'\right)^n > 8\left(9N\left[\frac{a_n}{a_J}\right]'\right)^n = 4l$$

(ha $n>20$) (v)-nek megfelelően.

Még ellenőriznünk kell a (ii) és (vi) relációk teljesülését.

(4)-ből

$$a_J \geqq \frac{a_n}{(10N)^{n^{n+1}}},$$

ahonnan (3)-at és (4)-et még egyszer használva következik (vi). (ii)-höz induljunk ki az

$$m' > \frac{m}{l} > \frac{a_J}{2l}$$

egyenlőtlenségből. Innen és (3), (4)-ből (ii) ugyanúgy következik, mint (vi).

IRODALOM

[1] HALBERSTAM, H.—ROTH. K. F.: Sequences. Vol. I. Oxford, Clarendon Press, 1966.
[2] ROTH, K. F.: On certain sets of integers, II. J. London Math. Soc. 29 (1954) 20—26.
[3] SZEMERÉDI, E.: On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arithmetica (sajtó alatt).

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ПО КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ЯНОШ КОМЛОШ, МИКЛОШ ШУЙОК И ЭНДРЭ СЕМЕРЕДИ

A LEMMA OF COMBINATORIAL NUMBER THEORY

J. KOMLÓS, M. SULYOK and E. SZEMERÉDI

In an other paper (appearing in the Acta Math. Acad. Sci. Hung.) the authors proved the following theorem:

We are given a system ϱ of linear equations

$$\varrho: \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{(i)} x_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, S.$$

Let $f(n)$ denote the largest integer m for which there is a subset A, $|A|=m$ of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that "ϱ does not hold in A", i.e. there are no r-tuples $x_1, \ldots, x_r$ in A satisfying ϱ.

Let $g(n)$ denote the largest integer m for which an arbitrary set $\{a_1, \ldots, a_n\}$ of n elements contains a subset A, $|A|=m$ such that ϱ does not hold in A. (Obviously $g(n) \leqq f(n)$.)

Theorem. *For any system ϱ of linear equations there is a positive constant $c=c(\varrho)$ such that*

$$g(n) > cf(n), \text{ for all } n \text{ large enough.}$$

For proving this theorem first we used a lemma but, as remarked by Erdős, the theorem can be proved without using it. Since the lemma is of some independent interest, we publish it here separately.

Lemma. *For any integers N and $n>20$ there is a constant $c_0=c_0(N, n)$ such that for arbitrary integers $a_1<\ldots<a_n$, $a_n>c_0$ there is a $q<a_n$ for which $a_i=h_iq+r_i$ where all the residues r_i are different and*

$$0 < r_i < \frac{q}{N}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Further, c_0 can be taken

$$(10N)^{(10N)^{(10N)^n}}$$

J. W. S. CASSELS EGY TÉTELÉRŐL

SZALAY MIHÁLY

Legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n$ olyan komplex számok, amelyekre

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n|, \tag{1}$$

legyen továbbá $s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu$, ahol ν pozitív egész.

J. W. S. CASSELS [4]-ben bebizonyította, hogy (1) mellett

$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-1} |s_\nu| = 1. \tag{2}$$

(Itt az egyenlőség pl. $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, ..., $z_n = 0$ választással elérhető.)

Az alkalmazási lehetőségekre nézve lásd: TURÁN PÁL [1], [2]; az extremális rendszerekre nézve: DANCS ISTVÁN [5].

(2)-ben a $2n-1$ nem is javítható, mert ($n \geqq 2$ esetén) megadható olyan, az (1)-et kielégítő értékrendszer, amelyre

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-2} |s_\nu| < 1. \tag{3}$$

A (3)-at először M. BOWEN találta, CASSELS [4] egyszerűbb példája a következő:

$$z_1 = 1, \quad z_j = \alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{2n-1}(j-1)} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \tag{4}$$

ahol $0 < \alpha < 1$, s α elég kicsinek választandó.

TURÁN PÁL egyetemi speciálelőadásában megmutatta, hogy $\alpha = n^{-2}$ választással CASSELS példájából adódik

$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-2} |s_\nu| \leqq 1 - \frac{1}{3 \cdot n^{4n-3}}, \tag{5}$$

s felvetette, hogy elérhető-e (5)-ben lényeges javítás.

E dolgozatban bebizonyítjuk:

Tétel: $n \geqq 2$ *esetén* (1) *mellett*

$$\frac{1}{2} \leqq \min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-2} |s_\nu| \leqq 1 - \frac{1}{16 \cdot n^4}. \tag{6}$$

A (6)-beli felső becslés azt mutatja, hogy a $2n-1$ az (5) alapján vártnál lényegesebb ugrópont. Megjegyezzük, hogy (6)-ban az alsó becslés, mely természetes

módon vezet el felső becslést adó példákhoz, várhatóan igen gyenge, ugyanis már $1 \leqq v \leqq n$-re F. V. ATKINSON [3]-ban bebizonyította, hogy (1) mellett

$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq v \leqq n} |s_v| > \frac{1}{6}. \tag{7}$$

Először a (6)-beli alsó becslést bizonyítjuk:

Legyen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ egy az (1)-et kielégítő rendszer, s az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $z_1 = 1$. Ekkor

$$\max_{1 \leqq v \leqq 2n-2} |s_v| \geqq \max_{1 \leqq v \leqq 2n-2} \operatorname{Re} s_v = 1 + \max_{1 \leqq v \leqq 2n-2} \operatorname{Re}(z_2^v + \ldots + z_n^v) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \max_{1 \leqq v \leqq 2n-2} (z_2^v + \ldots + z_n^v + \bar{z}_2^v + \ldots + \bar{z}_n^v). \tag{8}$$

Legyen most $s_v^* = z_2^v + \ldots + z_n^v + \bar{z}_2^v + \ldots + \bar{z}_n^v$, és $z_2, \ldots, z_n, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$ legyenek a

$$z^{2n-2} + a_1 z^{2n-3} + \ldots + a_{2n-3} z + a_{2n-2} \tag{9}$$

polinom (összes) gyökei. Ekkor $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ valósak, s (1) miatt

$$|a_{2n-2}| \leqq 1. \tag{10}$$

(CASSELS a fenti módon jutott (2) tételéhez $1 \leqq v \leqq 2n-1$-gyel, s bizonyítva, hogy $\max_{1 \leqq v \leqq 2n-1} s_v^* \geqq 0$.)

Alsó becslésünkhöz (8) miatt elegendő megmutatni, hogy

$$\max_{1 \leqq v \leqq 2n-2} s_v^* \geqq -1. \tag{11}$$

Tegyük fel, hogy $v = 1, 2, \ldots, 2n-2$-re $s_v^* < -1$ teljesülne. Ekkor a Newton—Girard-formulákból

$$\begin{cases} a_1 = -s_1^* \\ 2a_2 = (-s_2^*) + a_1(-s_1^*) \\ 3a_3 = (-s_3^*) + a_1(-s_2^*) + a_2(-s_1^*) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (2n-2)a_{2n-2} = (-s_{2n-2}^*) + a_1(-s_{2n-3}^*) + \ldots + a_{2n-3}(-s_1^*). \end{cases} \tag{12}$$

Mivel indirekt feltevésünk szerint $v = 1, 2, \ldots, 2n-2$ esetén $-s_v^* > 1$, (12) egyenleteiből kapjuk:

$$a_1 > 1, \quad a_2 > 1, \ldots, a_{2n-3} > 1, \quad a_{2n-2} > 1,$$

s itt a legutolsó ellentmond (10)-nek.

A kívánt alsó becslést ezzel bebizonyítottuk, s megjegyezzük, hogy a fenti módon nem is érhetünk el jobbat, ti. (11)-ben az egyenlőség elérhető, méghozzá úgy is, hogy $s_1^* = s_2^* = \ldots = s_{2n-2}^* = -1$ legyen, amennyiben

(13) $z_2, \ldots, z_n, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$ gyanánt a $(2n-1)$-edik egységgyököket választjuk az 1 nélkül (valamely sorrendben), hisz így az (1)-et teljesítő rendszereket kapunk. Ilyen rendszerből származik CASSELS (4) példája is a felső becsléshez. Látható, hogy (4)-nek az a gyengéje, hogy a képzetes rész (α-tól független része) már kis v-re nagy lehet (hisz „fölül" vannak a z_j-k). Kézenfekvő tehát olyan (13) típusú rendszerből kiindulni, amelynek ez

a hátránya nincs, pl. úgy, hogy CASSELS példájában „minden második" helyett a konjugáltját vesszük.

Tekintsük most már a következőket:

$$z_1 = 1, \quad z_j = \alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{2n-1}(2j-3)} \qquad j = 2, 3, \ldots, n; \tag{14}$$

ahol $0 < \alpha < 1$, később megválasztandó.

A (14) rendszerre $v = 1, 2, \ldots, 2n-2$ esetén

$$s_v = 1 + \alpha^v \cdot e^{\frac{2\pi i v}{2n-1}} \left(1 + e^{\frac{4\pi i v}{2n-1}\cdot 1} + e^{\frac{4\pi i v}{2n-1}\cdot 2} + \ldots + e^{\frac{4\pi i v}{2n-1}(n-2)}\right),$$

ahonnan rövid számolással

$$s_v = 1 - \frac{\alpha^v}{2} + i\frac{\alpha^v}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi v}{2n-1},$$

majd

$$|s_v|^2 = 1 - \alpha^v + \frac{\alpha^{2v}}{4\cos^2 \frac{\pi v}{2n-1}} \tag{15}$$

adódik. (Látható, hogy $|\operatorname{Im} s_v|$ csak $v = n$ „körül" lesz nagy.)

A felső becsléshez legyen

$$\alpha = (n\sqrt{2})^{-\frac{2}{n-1}}, \tag{16}$$

így $0 < \alpha < 1$, tehát (1) teljesül.

Vizsgáljuk először $1 \leqq v \leqq n-1$-et. Ekkor

$$\cos^2 \frac{\pi v}{2n-1} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi v}{2n-1}\right) \geqq \left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi v}{2n-1}\right)\right)^2 = \frac{(2n-1-2v)^2}{(2n-1)^2},$$

és (15)-ből kapjuk $1 \leqq v \leqq n-1$-re:

$$|s_v|^2 \leqq 1 - \alpha^v + \frac{(2n-1)^2}{4} \cdot \frac{\alpha^v}{\alpha^{-v} \cdot (2n-1-2v)^2}. \tag{17}$$

Az $\alpha^{-x}(2n-1-2x)^2$ függvényt diszkutálva, könnyen látható, hogy (16) mellett a függvény az $\left[\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right]$ intervallumban $x = n - \frac{1}{2} - \frac{n-1}{\log(n\sqrt{2})}$-ig monoton nő, onnan monoton fogy, tehát ($n \geqq 2$) $1 \leqq v \leqq n-1$-re:

$$\alpha^{-v}(2n-1-2v)^2 \geqq \min\left(\alpha^{-1}(2n-3)^2, \alpha^{-(n-1)}\right) = 2 \cdot n^2, \tag{18}$$

és (17)-ből ekkor

$$|s_v|^2 \leqq 1 - \frac{\alpha^v}{2}, \quad |s_v| \leqq 1 - \frac{\alpha^v}{4} \leqq 1 - \frac{1}{8 \cdot n^2}. \tag{19}$$

Ha pedig $n \leqq v \leqq 2n-2$, akkor (15)-ből

$$|s_v|^2 \leqq 1 - \alpha^v + n^2\alpha^{2v} \leqq 1 - \alpha^v(1 - n^2\alpha^{n-1}) = 1 - \frac{\alpha^v}{2},$$

tehát $|s_v| \leqq 1 - \frac{\alpha^v}{4} \leqq 1 - \frac{1}{16 \cdot n^4}$, s ezzel (6) bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy némi számolással fenti példánkban $n \geqq 8$-ra

$$|s_n| \leqq 1 - \frac{1}{9 \cdot n^2},$$

így (1) mellett $n \geqq 8$-ra

$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| \leqq 1 - \frac{1}{9n^2}. \tag{20}$$

KOMLÓS JÁNOS—SÁRKÖZY ANDRÁS—SZEMERÉDI ENDRE [6] szerint viszont $n > n_0$ esetén (1) mellett

$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq n} |s_\nu| < 1 - \frac{1}{250n}. \tag{21}$$

(20) becslésünk $n \geqq 8$-tól már érvényes, bár csak $8 \leqq n \leqq 27$ esetén jobb, mint (21).

Végül köszönetemet fejezem ki TURÁN PÁL professzornak megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] TURÁN PÁL, Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen (Budapest, 1953), Akadémiai Kiadó.
[2] TURÁN PÁL, Remark on the Preceding Paper of J. W. S. Cassels, Acta Math. Hung. **7** (1956), 291—294.
[3] F. V. ATKINSON, On Sums of Powers of Complex Numbers, Acta Math. Hung. **12** (1961), 185—188.
[4] J. W. S. CASSELS, On the Sums of Powers of Complex Numbers, Acta Math. Hung. **7** (1956), 283—290.
[5] DANCS ISTVÁN, Komplex számok hatványösszegeiről, Mat. Lapok **13** (1962), 108—114.
[6] KOMLÓS JÁNOS—SÁRKÖZY ANDRÁS—SZEMERÉDI ENDRE, Komplex számok hatványösszegeiről, Mat. Lapok **15** (1964), 337—347.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЖ. В. С. КАССЕЛСА

МИХАЙ САЛАИ

ON A THEOREM OF J. W. S. CASSELS

M. SZALAY

Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be complex numbers with

$$1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_n| \tag{1}$$

and put (for positive integer ν) $s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu$.

J. W. S. CASSELS proved (see [4]) that under (1)

$$\min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-1} |s_\nu| = 1.$$

Here the $2n-1$ is the best possible since for $n \geqq 2$ (after M. BOWEN's first example) J. W. S. CASSELS exhibited an example for which the inequality

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-2} |s_\nu| \leqq 1 - \frac{1}{3 \cdot n^{4n-3}}$$

holds.

In this paper we proved that for $n \geqq 2$ under (1) the inequality

$$\frac{1}{2} \leqq \min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \max_{1 \leqq \nu \leqq 2n-2} |s_\nu| \leqq 1 - \frac{1}{16n^4}$$

holds.

TELJES NÉGYEST NEM TARTALMAZÓ GRÁFOKRÓL

SZEMERÉDI ENDRE

Erdős Pál és T. Sós Vera vizsgálták a következő Ramsey—Turán-típusú kérdéskört [1]. Legyen $f(n, k, l)$ az a legnagyobb szám, melyre igaz, hogy van olyan n-szögpontú G gráf, mely nem tartalmaz teljes k szögpontú gráfot, a komplementer $\bar{G}$ gráf nem tartalmaz teljes l szögpontú gráfot és $e(G)=f(n, k, l)$ ($e(G)$ jelöli G éleinek számát).

A szerzők a cikkükben bebizonyítják, hogy

$$f(n, 3, l) \leqq \frac{n \cdot l}{2}$$

azaz

$$f(n, 3, l) = o(n^2) \quad \text{ha} \quad l=p(n),$$

de ezzel szemben, ha $l=o(n)$, akkor

$$f(n, 5, l) = (1+o(1))\frac{n^2}{4}.$$

Eldöntetlen marad, vajon igaz-e, ha $l=o(n)$, akkor $f(n, 4, l)=o(n^2)$. Továbbá bebizonyítják, ha $l=0(n)$, akkor

$$f(n, 4, l) \leqq (1+o(1))\frac{n^2}{6}.$$

Ezt az eredményt élesítem a következő tételben:

Tétel. *Ha* $l=o(n)$, *akkor*

$$f(n, 4, l) \leqq (1+o(1))\frac{n^2}{8}.$$

• *Bizonyítás.* Adott $0<\varepsilon<\frac{1}{20}$. Legyen G egy n szögpontú gráf, mely nem tartalmaz teljes négyszöget, a komplementer $\bar{G}$ nem tartalmaz $l=\delta n$ szögpontú teljes gráfot és

$$e(G) \geqq (1+\varepsilon)\frac{n^2}{8},$$

belátjuk, hogy ha δ elég kicsi és n elég nagy, e feltételek ellentmondanak.

Jelölje $V=\{1, 2, \ldots, n\}$ a G szögpontjainak, E a G éleinek halmazát, $|X|$ az X halmaz elemeinek számát,

$$\mu(i, A) = \{j \in A : (i, j) \in E\}$$

$$\nu(i, A) = |\mu(i, A)|,$$

($\nu(i, V)$ tehát az i pont foka),

$$A_j = \left\{i \in V : \left(\frac{1}{4} + j\frac{\varepsilon}{10}\right)n \leqq \nu(i, V) < \left(\frac{1}{4} + (j+1)\frac{\varepsilon}{10}\right)n\right.$$

$$s = \max\{j : |A_j| \geqq \varepsilon^3 \cdot n\}.$$

(Nyilván $s \geqq 5$.)

Most megfogalmazunk egy lemmát.

Lemma. Ha $G=(V, E)$ egy tetszőleges n szögpontú gráf és γ, η_1, η_2 adott pozitív konstansok, akkor bármely $A \subset V$ részhalmazhoz van olyan $A^* \subset A$, $V^* \subset V$ pár, melyre a következők teljesülnek:

1) $|A^*| \geqq |A|\gamma^{\frac{1}{\eta_1}}$

2) $\nu(i, V^*) \geqq \nu(i, V) - \eta_2 n$ minden $i \in A^*$-ra

(3) tetszőleges $Y \subset V^*$, $|Y| \geqq \eta_1 \cdot n$ esetén az A^* halmaz $\{i \in A^* : \nu(i, Y) < \eta_2 |Y|\}$ részhalmazának elemszáma legfeljebb $\gamma|A^*|$.

A lemma bizonyítása. Definiálunk egy X_j, Y_j, Z_j sorozatot a következőképpen: $X_0 = A$, $Y_0 = \Phi$, $Z_0 = V$, és ha már X_j, Y_j, Z_j definiálva van és az (X_j, Z_j) pár — mint (A^*, V^*) — nem elégíti ki a lemma feltételeit, akkor legyen Y_{j+1} egy olyan halmaz, melyre

$$|Y_{j+1}| \geqq \eta_1 \cdot n \text{ és}$$

$$|\{i \in X_j : \nu(i, Y_{j+1}) < \eta_2 |Y_{j+1}|\}| > \gamma |X_j|.$$

Legyen

$$X_{j+1} = \{i \in X_j : \nu(i, Y_{j+1}) < \eta_2 |Y_{j+1}|\}$$

$$Z_{j+1} = V - \bigcup_{t=0}^{j+1} Y_t.$$

Nyilván

$$|X_j| \geqq \gamma^j |A|,$$

$$\nu(i, Z_j) > \nu(i, V) - \eta_2 \left| \bigcup_{t=0}^{j} Y_t \right| \text{ minden } i \in X_j\text{-re},$$

$$|Z_j| \leqq n - j\eta_1 n.$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség ellentmondó $j > \frac{1}{\eta_1}$ esetén, van olyan $j \leqq \frac{1}{\eta_1}$, melyre (X_j, Z_j) kielégíti a lemma feltételeit.

A tétel bizonyításához alkalmazzuk a lemmát először az A_s halmazra

$$\gamma = \frac{1}{3}, \quad \eta_1 = \varepsilon\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{400}{\varepsilon^2}}, \quad \eta_2 = \frac{\varepsilon}{40}$$

választással. A_s^*, V_s^* legyenek a lemma által biztosított halmazok. Nyilván

$$|V_s^*| \geqq \left(\frac{1}{2} + (2s-1)\frac{\varepsilon}{10}\right)n,$$

mert ellenkező esetben lenne $i_1, i_2 \in A_s^*$, $(i_1, i_2) \in E$ $\left(\text{mert } |A_s^*| \geqq \varepsilon^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\eta_1}} \cdot n \overset{\text{def}}{=\!=} \delta n\right)$,

és a lemma szerint

$$|\mu(i_1, V_s^*) \cap \mu(i_2, V_s^*)| \leqq \left(\frac{\varepsilon}{10} - 2\eta_2\right)n \overset{\text{def}}{\geqq} \delta \cdot n$$

lenne, létezne tehát $t_1, t_2 \in \mu(i_1, V_s^*(\cap \mu(i_2, V_s^*)$ $(t_1, t_2) \in E$. Ekkor viszont i_1, i_2, t_1, t_2 teljes négyszöget alkotnának.

Másrészt s maximalitásából könnyű számolással adódik, hogy van

$$L \subset V_s^*, \quad |L| \geqq \varepsilon n$$

és

$$v(i, V) \geqq \left(\frac{1}{4} - (s-2)\frac{\varepsilon}{10}\right)n \text{ minden } i \in L\text{-re.}$$

Alkalmazzuk a lemmát L-re $\bar{\gamma} = \frac{\varepsilon}{50}$, $\bar{\eta}_1 = \frac{\varepsilon^2}{400}$, $\bar{\eta}_2 = \frac{\varepsilon}{40}$ választással, és legyenek L^*, V_L^* a lemma által biztosított halmazok. A fentihez hasonló okoskodás adja, hogy

$$|V_L^*| > \left(\frac{1}{2} - (2s-2)\frac{\varepsilon}{10}\right)n.$$

Innen

$$|V_s^* \cap V_L^*| \geqq \frac{\varepsilon}{10} \cdot n.$$

A lemma szerint van $i_1 \in A_s^*$, melyre

$$v(i_1, L^*) \geqq \frac{\varepsilon^2}{40}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{400}{\varepsilon^2}} |L^*|, \quad v(i_1, V_s^* \cap V_L^*) \geqq \frac{\varepsilon^2}{400} \cdot n.$$

Szintén a lemmából kapjuk, hogy van $i_2 \in \mu(i_1, L^*)$, melyre

$$v\left(i_2, \mu(i_1, V_s^* \cap V_L^*)\right) > \frac{\varepsilon^3}{16000} n \overset{\text{def}}{\geqq} \delta n.$$

Ekkor visszont van $t_1, t_2 \in \mu(i_1, V_s^* \cap V_L^*) \cap \mu(i_2, V_s^* \cap V_L^*)$, $(t_1, t_2) \in E$ és így i_1, i_2, t_1, t_2 teljes négyszöget adnak.

QED.

IRODALOM

[1] P. ERDŐS, VERA T. SÓS, Some remarks on Ramsey's and Turán's theorem. Colloquia Math. Balatonfüred 1971. 395—404.

О ГРАФАХ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ПОЛНЫХ ЧЕТВЕРОК

ЭНДРЭ СЕМЕРЕДИ

ON GRAPHS CONTAINING NO COMPLETE QUADRANGLE

E. SZEMERÉDI

ÜLTETETT FÁKRÓL

OLÁH GYULA

Ebben a dolgozatban bizonyos speciális tulajdonságú fák leszámlálásával foglalkozunk. Mivel témánk szorosan kapcsolódik egyik korábbi, hasonló tárgyú cikkünkhöz, a felhasználásra kerülő alapfogalmak és tételek kifejtését itt most mellőzzük. Ezekre vonatkozólag az [1] dolgozatra utalunk.

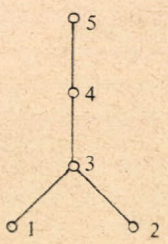
Tekintsük a közönséges értelemben vett — tehát $(n, \{1\})$ spektrumú — fák H halmazát. Ismeretes, hogy H elemeinek száma, vagyis $|H|$ egyenlő n^{n-2}-vel. Ezt az eredményt a gráfelméletben *Cayley*-tételeként szokás idézni [2].

Legyen $G(U, K) \in H$, ahol U a G fa szögpontjainak, K pedig az éleinek halmazát jelöli. Feltevésünk értelmében $|U|=n$, $|K|=n-1$ és az egyszerű G gráf összefüggő. Szokás az ilyen G fát szabad fának is nevezni.

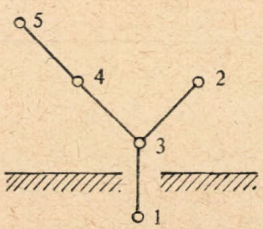
Ha most a G fa egyik szögpontjának kitüntetett szerepet szánunk — és ezt a szögpontot elnevezzük a fa gyökérpontjának —, akkor úgynevezett ültetett fához, pontosabban szólva a G-ből képezhető egyik ültetett fához jutunk. Szemléletesen úgy képzelhetjük a dolgot, mintha a G fát a kiválasztott gyökérpontjánál fogva a „földbe ültettük" volna. Például legyen $G(U, K)$ az a fa, amelyre

$$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad K=\{1, 3;\ 2, 3;\ 3, 4;\ 4, 5\},$$

akkor ezt a szabad fát a következő ábrával szemléltethetjük:

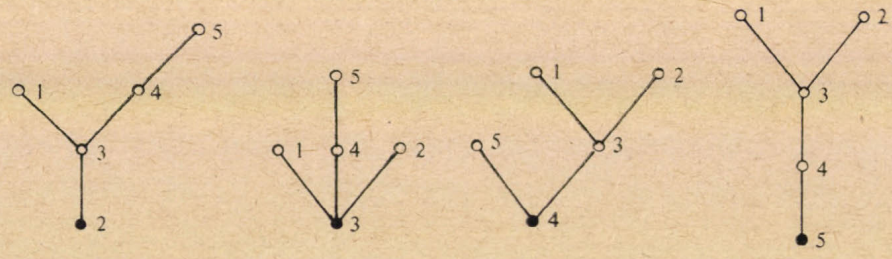


Ha a G fa 1-gyel jelölt szögpontját választjuk gyökérpontnak, akkor a következő módon ábrázolhatjuk a keletkezett ültetett fát:



(1)

Nyilvánvaló, hogy G-ből annyi különböző ültetett fa származtatható, ahány szögpontja van; tehát jelen esetben 5. Ezek közül egyet már felrajzoltunk, a többi 4 pedig a következő lesz:



Egyszerűbbé tehetjük az ábrázolást, ha megállapodunk mondjuk abban, hogy a gyökérpontot sötétített köröcskével, a nem gyökérpontokat pedig világos köröcskékkel jelöljük. Ebben az esetben a félreértés veszélye nélkül el is hagyhatjuk az ábráról a „föld" jelölését.

Jelölje H_1 a H elemeiből alkotható ültetett fák halmazát, akkor az elmondottak értelmében nyilvánvaló, hogy

$$|H_1| = n|H| = n \cdot n^{n-2} = n^{n-1}.$$

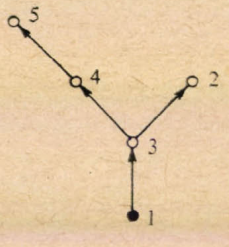
Ezt az eredményt ugyancsak Cayley-tételeként szokás említeni.

Egy ültetett fa törzsélének fogjuk nevezni a fa mindazon éleit, amelyeknek az egyik végpontjuk nem gyökérpont, a másik viszont az. Ültetett fának legalább egy törzséle van. Azt fogjuk mondani, hogy az ültetett fa l törzsű, ha a fának pontosan l darab különböző törzséle van. Érdekes probléma lehet azon n szögpontú ültetett fák számának meghatározása, amelyeknek pontosan l törzsük van $(1 \leqq l \leqq n-1)$. Erre a kérdésre később még visszatérünk, és megmutatjuk hogy a keresett szám

$$n\binom{n-2}{l-1}(n-1)^{n-l-1}. \tag{2}$$

Ha most az irányított fákat tekintjük abban az értelemben, hogy a fa éleit irányítással látjuk el, de úgy, hogy a keletkezett irányított gráfnak pontosan egy kezdőpontja legyen, akkor nyilvánvaló, hogy az n szögpontú fák és az n szögpontú irányított fák között kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendelés létesíthető. Nevezetesen, ha az irányítatlan ültetett fa gyökérpontját kezdőpontnak fogjuk fel, ezzel minden törzsél irányítását egyértelműen meghatároztuk. A már irányítással rendelkező élekkel szomszédos éleket pedig úgy irányítsuk, hogy irányításuk megegyezzék az előbbiekével. Így minden élt egyértelműen irányítottunk: a gyökérpontból irányított út vezet a fa minden szögpontjához.

Például az (1) ábrán feltüntetett ültetett fához a következő irányított fát rendeljük hozzá:



Tehát, ha $\vec{H}$ jelöli az n szögpontú irányított fák halmazát, akkor ennek elemszámára

$$|\vec{H}| = |H_1| = n^{n-1}. \tag{3}$$

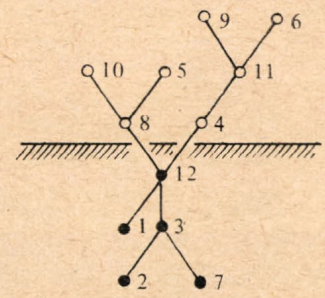
Az eddig említett, jól ismert eredmények általánosításaihoz juthatunk, ha az ültetett fa fogalmát az eddigieknél tágabban értelmezzük. A következőkben néhány lehetséges felfogást vizsgálunk meg közelebbről.

1. Legyen G egy n szögpontú fa, a k és l pedig egész szám úgy, hogy $1 \leqq k \leqq n-1$; $1 \leqq l \leqq n-k$. A G fát k gyökerű, l törzsű ültetett fának fogjuk nevezni, ha a G-ben úgy van kijelölve k szögpont gyökérpont gyanánt, hogy a következő két feltétel teljesül:

I. G-ből törölve az összes nem gyökérpontot és az ezekre illeszkedő éleket, a megmaradó gráf egy fa;

II. G-nek l törzséle van, amelyek mind ugyanarra a gyökérpontra illeszkednek.

A fenti értelemben vett ültetett fa például $n=12$, $k=5$, $l=2$ esetén a következő:



(4)

Triviális, hogy $k=1$ esetén a hagyományos értelemben vett ültetett fákhoz jutunk.

Jelölje $H_{k,l}$ az n szögpontú, k gyökerű, l törzsű ültetett fák halmazát és legyen $H_k = H_{k,1} \cup H_{k,2} \cup \ldots \cup H_{k,n-1}$. Határozzuk meg előbb a $|H_{k,l}|$, majd $|H_k|$ értékét!

Az $l=1$ esetén rendkívül könnyű a dolgunk. Legyen ugyanis adott a síkon n számozott pont. Válasszunk ki közülük k pontot és ezekből készítsünk egy — a hagyományos értelemben vett — ültetett fát. A megmaradó $n-k$ pontból ugyancsak alkossunk egy — hagyományos értelemben vett — ültetett fát, majd a két ültetett fa gyökérpontját kössük össze egy éllel. Látható, hogy így egy olyan fát kapunk, amely eleme lesz $H_{k,1}$-nek, ha az elsőként megalkotott k szögpontú fát jelöljük ki „gyökérzetnek". Az is világos, hogy ilyen módon $H_{k,1}$ minden eleme egyszer és csakis egyszer kapható meg.

Az n pont közül k darab $\binom{n}{k}$-féleként választható ki. A kiválasztott pontokból k^{k-1} számú, különböző ültetett fa készíthető, a megmaradó $n-k$ szögpontból pedig $(n-k)^{n-k-1}$ számú, különböző ültetett fa keletkezik. Mivel ezek a lehetőségek egymástól függetlenek, következik a

$$|H_{k,1}| = \binom{n}{k} (n-k)^{n-k-1} k^{k-1}$$

egyenlőség.

Az általános eset, vagyis amikor az l értékét nem konkretizáljuk, már kissé nehezebb.

Határozzuk meg először azon k gyökerű, l törzsű ültetett fák számát, amelyekben a gyökérzethez tartozó k szögpont az 1-től k-ig terjedő egész számokkal, a fa többi szögpontja pedig a $k+1$-től n-ig terjedő egész számokkal van megszámozva, és az l törzsél mindegyike az 1-gyel számozott gyökérpontra illeszkedik. Legyen most G egy ilyen fa és vizsgáljuk meg ennek *Prüfer-kódját* [3]. Ehhez — mint ismeretes — úgy juthatunk, hogy előállítunk egy $n-2$ tagú sorozatot a következő módon:

Megkeressük a G legnagyobb számozású végpontját, legyen ez x. Legyen a rá illeszkedő egyetlen él másik végpontja y. A megkonstruálandó sorozat első eleméül válasszuk az y számot. Ezután töröljük G-ből az x szögpontot és az xy élt. Így egy G' fához jutunk. Keressük meg ennek a legnagyobb számozású végpontját és az erre illeszkedő él másik végpontját jelölő számot válasszuk a sorozat következő elemének. Ezután töröljük G'-ből az említett végpontot és a rá illeszkedő élt: így egy G'' fához jutunk. Folytassuk az eljárást mindaddig, amíg egy kétszögpontú fához nem jutunk.

Az elmondottak alapján az $n-2$ tagú sorozat utolsó $k-2$ helyének mindegyikére az 1-től k-ig terjedő egész számok közül kell egyet-egyet beírni. Az $(n-k)$-adik helyre biztosan 1 kerül, az első $n-k-1$ helyre viszont csak az $1, k+1, k+2, \ldots, n$ számok közül kerülhet egy-egy; méghozzá úgy, hogy az 1-et pontosan $l-1$-szer írjuk le.

Az [1] dolgozatra hivatkozva tudjuk, hogy minden fához egy és csakis egy Prüfer-kód tartozik, és minden Prüfer-kódhoz egy és csakis egy fa. Ha tehát felírunk tetszés szerint egy olyan $n-2$ tagú sorozatot, amelynek első $n-k-1$ eleme az $1, k+1, k+2, \ldots, n$ számok közül kerül ki úgy, hogy közben az 1-et pontosan $l-1$-szer írjuk le, továbbá a sorozat $(n-k)$-adik helyén 1 áll, az utolsó $k-2$ helyre pedig az $1, 2, \ldots, k$ számok közül választottunk; akkor ehhez a sorozathoz kölcsönösen egyértelmű módon egy olyan fa van hozzárendelve, amelyben az 1-től k-ig jelzett szögpontok maguk is fát alkotnak és a k szögpontú fából csak az 1-gyel jelzett szögponton át „juthatunk ki", méghozzá a rá illeszkedő pontosan l számú törzsél valamelyikén.

Ezek szerint az említett Prüfer-kódok száma megegyezik azon n szögpontú, k gyökerű, l törzsű ültetett fák számával, amelyekben a gyökérpontok 1-től k-ig vannak számozva, és az l törzsél mindegyike az 1-es pontra illeszkedik.

Ez a szám viszont nyilvánvalóan

$$\binom{n-k-1}{l-1}(n-k)^{n-k-l}k^{k-2},$$

hiszen az első $n-k-1$ hely közül az 1-esek helyét $\binom{n-k-1}{l-1}$-féleként választhatjuk ki, a maradék $n-k-l$ hely mindegyikére $n-k$ szám kerülhet és az utolsó $k-2$ hely mindegyike k-féleként tölthető ki.

Ugyanennyi olyan n szögpontú, k gyökerű, l törzsű ültetett fa létezik akkor is, ha azt kívánjuk meg, hogy az l törzsél mindegyike az 1-es gyökérpont helyett akármelyik másik gyökérpontra illeszkedjék. Tehát azon n szögpontú, k gyökerű, l törzsű ültetett fák száma, amelyekben a gyökérzet pontjai 1-től k-ig vannak számozva:

$$\binom{n-k-1}{l-1}(n-k)^{n-k-l}k^{k-1}.$$

Ha most még azt is figyelembe vesszük, hogy a gyökérpontok számozása $\binom{n}{k}$-féleképpen választható meg, akkor azt kapjuk, hogy igaz az

1. *Tétel:*

$$|H_{k,l}| = \binom{n}{k}\binom{n-k-1}{l-1}(n-k)^{n-k-l}k^{k-1}$$

$$(1 \leqq k \leqq n-1;\ 1 \leqq l \leqq n-k).$$

Eredményünkből a hagyományos értelemben vett ültetett fákra vonatkozóan valóban (2) adódik.

Ha most az összes k gyökerű ültetett fák $|H_k|$ számát akarjuk meghatározni, akkor l szerint kell összegeznünk 1-től $n-k$-ig:

$$|H_k| = \sum_{l=1}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k-1}{l-1}(n-k)^{n-k-l}k^{k-1} = \binom{n}{k}(n-k+1)^{n-k-1}k^{k-1}.$$

Igaz tehát a

2. *Tétel:*

$$|H_k| = \binom{n}{k}(n-k+1)^{n-k-1}k^{k-1}.$$

Ez $k=1$ esetén a hagyományos értelemben vett ültetett fákra vonatkozó Cayley-tételt adja.

A 2. tétel bizonyításához közvetlenül is eljuthatunk, ha rögtön minden l-re vizsgáljuk a k gyökerű ültetett fák Prüfer-kódját.

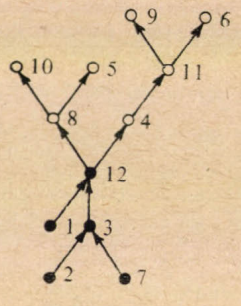
Az $n-2$ tagú sorozat utolsó $k-2$ helyét nyilván azokkal a számokkal kell kitölteni, amelyeket az $\binom{n}{k}$-féleként meghatározott k számból választunk ki; az első $n-k-1$ helyet $n-k+1$ számú szám közül választva töltjük ki; az $(n-k)$-adik hely kitöltésekor viszont a k szögpontú fa egyik szögpontjának számozását kell beírni, tehát ismét a kiválasztott k szám valamelyikét. Mivel az említett lehetőségek egymástól függetlenek, így a lehetőségek számainak szorzata adja a keresett számot, amit éppen a 2. tételben fejeztünk ki.

Az elmondottakból az is következik, hogy az **1.** szerint általánosított értelemben vett ültetett fák száma:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(n-k+1)^{n-k-1}k^{k-1}.$$

Az ilyen fák, ugyanúgy, mint a hagyományos értelmezés esetén, egyértelműen meghatároznak egy irányítást. Nevezetesen, legyen a fa valamennyi törzsélének kezdőpontja a rá illeszkedő gyökérpont, ugyanakkor azonban ez a gyökérpont legyen valamennyi reá illeszkedő gyökérzetbeli élnek végpontja. A már irányítással rendelkező élekkel szomszédos éleket pedig irányítsuk úgy, hogy irányításuk

megegyezzék az előbbiekével. Más szóval irányítsuk úgy a fa éleit, mintha a törzsélekre illeszkedő gyökérpont kezdőpont volna, majd a gyökérzetbeli éleket mind fordítsuk ellenkező irányításúvá. Például a (4)-ben ábrázolt ültetett fából így a következő irányított fa keletkezik:



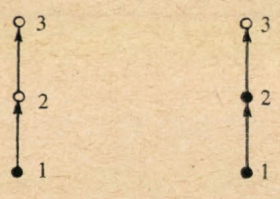
Az így értelmezett irányított fáknak nyilván megvan az a tulajdonságuk, hogy a gyökérzet bármely pontjából irányított út vezet a fa bármelyik nem gyökérpontjához.

Az n szögpontú — általánosított értelemben vett — irányított fák halmazát $\vec{H}'$-vel jelölve, igaz tehát a következő

3. *Tétel:*

$$|\vec{H}'| = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k+1)^{n-k-1} k^{k-1}.$$

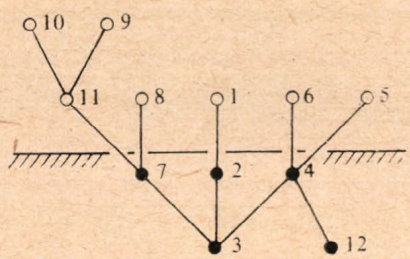
Jegyezzük meg azonban azt, hogy a fenti tétel csak akkor érvényes, ha az irányított fában a gyökérpontok is meg vannak jelölve (pl. sötétített köröcskékkel). Ugyanis az a helyzet, hogy a hagyományos értelmezés esetén a gyökérpontot külön nem szükséges megjelölni, hiszen az élek irányítása a gyökérpontot egyértelműen kijelöli. Az általánosított értelmezés esetén ez nincs így, hiszen mi például különböző irányított fának tekintettük az alábbi két fát:



2. További általánosításra nyílik lehetőség, ha elhagyjuk azt a megszorítást, hogy az l törzsél mindegyikének ugyanarra a gyökérpontra kell illeszkednie.

Legyen G egy n szögpontú fa, és k olyan egész szám, amelyre $1 \leqq k \leqq n-1$. A G fát k fagyökerű ültetett fának fogjuk nevezni, ha G-ben gyökérpont gyanánt úgy van kijelölve k szögpont, hogy ha G-ből töröljük az összes nem gyökérpontot, valamint az ezekre illeszkedő éleket, akkor a megmaradó gráf egy fa.

Például alább egy 12 szögpontú, 5 fagyökerű ültetett fát láthatunk:



(5)

Ennek a fának 5 törzséle van, amelyek közül egy a 2-es, kettő-kettő pedig a 7-es és a 4-es gyökérpontokra illeszkedik.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $k=1$ esetén itt is hagyományos értelemben vett ültetett fákhoz jutunk.

Jelöljük L_k-val az n szögpontú, k fagyökerű ültetett fák halmazát, és jelölje az előzőekhez hasonlóan $L_{k,l}$ ennek azon részhalmazát, amelynek elemei az l törzséllel rendelkező fák. Határozzuk meg az $|L_k|$ és az $|L_{k,l}|$ értékét!

Legyen $G \in L_k$, és tegyük fel, hogy G gyökérpontjai az 1-től k-ig terjedő egészekkel, a többi szögpontjai pedig a $k+1$-től n-ig terjedő egészekkel vannak megszámozva.

Tekintsük most a G-hez tartozó Prüfer-kódot! Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy az $n-2$ tagú sorozat utolsó $k-2$ helyének mindegyikére csak az $1, 2, \ldots, k$ számok közül kerülhet egy-egy. Az első $n-k-1$ hely kitöltésekor az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyike számításba jöhet, viszont amikor az $(n-k)$-adik helyet töltjük ki, akkor ismét csak az $1, 2, \ldots, k$ számok közül választhatunk. Ebből már következik — ismét az előző pontra és az [1] dolgozatra hivatkozva —, hogy azon n szögpontú, k fagyökerű ültetett fák száma, amelyekben a gyökérpontok számozására az $1, 2, \ldots, k$ számokat használtuk fel, nem más, mint:

$$n^{n-k-1}k^{k-1}.$$

Mivel pedig a gyökérpontok számozásának megválasztására $\binom{n}{k}$ lehetőségünk van, azt kapjuk, hogy igaz a következő:

4. *Tétel:*

$$|L_k| = \binom{n}{k} n^{n-k-1}k^{k-1}$$

$$(1 \leqq k \leqq n-1).$$

Az előzőek alapján a bizonyítás részletezése nélkül is könnyen belátható, hogy ugyancsak érvényes az alábbi

5. *Tétel:*

$$|L_{k,l}| = \binom{n}{k}\binom{n-k-1}{l-1}(n-k)^{n-k-l}k^{k+l-2}$$

$$(1 \leqq k \leqq n-1;\ 1 \leqq l \leqq n-k).$$

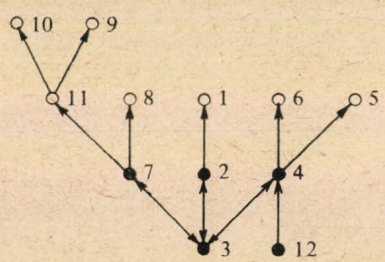
A **2.** szerint általánosított értelemben vett ültetett fák számára pedig

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} n^{n-k-1} k^{k-1}$$

adódik.

Ha most az előzőek mintájára az általánosított értelemben vett ültetett fák segítségével akarjuk definiálni az általánosabb értelemben vett irányított fákat — kikötve azt, hogy továbbra is bármelyik gyökérpontból irányított út vezessen a fa minden nem gyökérpontjához —, akkor a következő módon kell eljárnunk: A törzséleket irányítsuk úgy, hogy a rájuk illeszkedő gyökérpont kezdőpontjuk legyen. A gyökérzethez nem tartozó további élekkel tegyünk ugyanúgy, mint az előzőekben, vagyis egy már irányítással rendelkező éllel szomszédos valamennyi él irányítása egyezzék meg az előbbi irányításával. A gyökérzetbeli élek irányítása viszont már nem intézhető el ilyen egyszerűen. Nyilvánvaló, hogy általában a követelményeknek megfelelő irányítás csak úgy érhető el, ha bizonyos éleknek kettős irányítást adunk. Célszerű arra törekedni, hogy az ilyen kettős irányítású élek száma minimális legyen. Könnyű belátni, hogy ha a gyökérpontok alkotta fának azt a minimális részgráfját tekintjük, amely tartalmazza az összes, törzsélre illeszkedő gyökérpontot, akkor az ebben szereplő éleknek kettős irányítást kell adni. A gyökérzet további éleinek irányítása ezek után már egyértelmű: minden olyan élt, amely az előbb említett részfához kapcsolódik, úgy irányítsunk, hogy az irányítás e felé a részfa felé mutasson; a többi gyökérzetbeli élt viszont úgy kell irányítanunk, hogy egy már irányítással rendelkező éllel szomszédos valamennyi él irányítása egyezzék meg az előbbi irányításával. Az elmondott eljárással minden ültetett fához hozzárendeltünk egy irányított fát, és az is nyilvánvaló, hogy különbözőkhöz különbözőt.

Például az (5)-ben ábrázolt ültetett fából az alábbi — általánosabb értelemben vett — irányított fa keletkezik:



Ha az n szögpontú — az utóbbi értelemben vett — irányított fák halmazát $\vec{L}$ jelöli, akkor az elmondottak alapján nyilvánvalóan igaz a

6. *Tétel:*

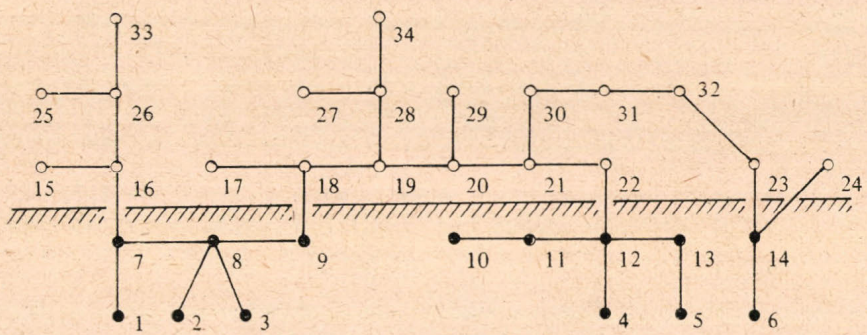
$$|\vec{L}| = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} n^{n-k-1} k^{k-1}.$$

Megemlítjük, hogy az **1.** végén tett megjegyzés a 6. tételre is érvényes: az irányított fában a gyökérpontok megjelölését nem hagyhatjuk el.

3. Az általánosításban még messzebb mehetünk, ha azt a követelményt is elhagyjuk, hogy a gyökérzet fát alkosson.

Legyen G egy n szögpontú fa, és k olyan egész szám, hogy $1 \leqq k \leqq n-1$. A G fát k gyökérpontú ültetett fának fogjuk nevezni, ha G-ben gyökérpont gyanánt ki van jelölve tetszőleges k szögpont.

Például alább egy 34 szögpontú, 14 gyökérpontú ültetett fa látható:



(6)

Jelölje L_k' az n szögpontú, k gyökérpontú ültetett fák halmazát. Az $|L_k'|$ értékének meghatározásakor most rendkívül könnyű a dolgunk, hiszen magától értetődik, hogy

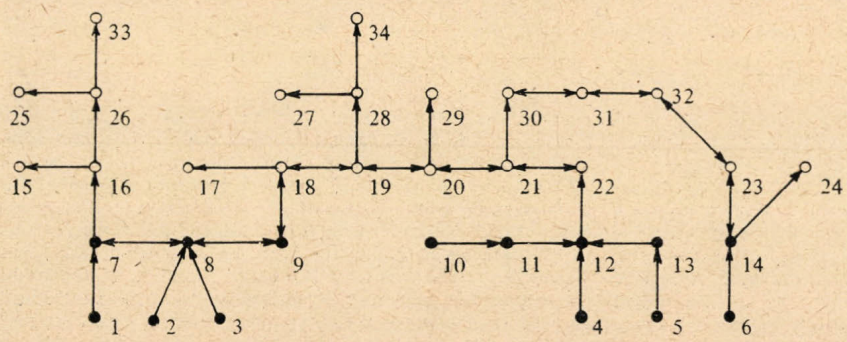
$$|L_k'| = \binom{n}{k} n^{n-2}.$$

Ebből persze az is következik, hogy az n szögpontú ültetett fák száma:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} n^{n-2} = (2^n - 2) n^{n-2}.$$

Az irányított fák értelmezésének általánosításában eddig követett utat folytatva, most is megállapodhatunk abban, hogy az értelmezendő irányításnak olyannak kell lennie, hogy bármelyik gyökérpontból irányított úton el lehessen jutni a fa minden nem gyökérpontjához. Ez elérhető, ha most magának a fának tekintjük azt a minimális részfáját, amely az összes törzsélt tartalmazza, majd ebből a részfából töröljük az összes végpontot (2 szögpontú fa esetén csak az egyiket), a ráilleszkedő éllel együtt és az így keletkezett F részfa minden élét kettős irányítással látjuk el. Ezután az F-hez kapcsolódó éleket irányítsuk F felé, vagy az ellenkező irányba aszerint, hogy az illető él másik végpontja gyökérpont-e vagy sem. Az összes további él irányítására pedig azt az utasítást adjuk, hogy egy már irányítással rendelkező éllel szomszédos valamennyi élt úgy kell irányítani, hogy irányítása megegyezzék az előbbiével. Minden nehézség nélkül be lehet látni, hogy így minden ültetett fából pontosan egy irányított fa keletkezik, és különbözőkből különböző jön létre.

Például a (6) ábrán látható ültetett fából a most leírt eljárással a következő — általánosabb értelemben vett — irányított fa keletkezik:



Ha az n szögpontú — utóbbi értelemben vett — irányított fák halmazát $\vec{L}'$ jelöli, akkor az elmondottak alapján igaz a

7. *Tétel:*

$$|\vec{L}'| = (2^n - 2)n^{n-2}.$$

Itt is jegyezzük meg, hogy a gyökérpontok megjelölését általában nem engedhetjük el.

Arra is érdemes felhívni a figyelmet, hogy az az eljárás, amellyel **3.**-ban előállítottuk az ültetett fából a megfelelő irányított fát, a korábban tárgyalt esetek mindegyikére alkalmazható (beleértve a hagyományos értelmezésnek megfelelő esetet is).

Befejezésül megemlítjük, hogy az általánosabb értelemben vett ültetett, illetve irányított fák nem csak elméleti szempontból érdekesek, hanem alkalmazhatók a gyakorlat számos problémájában, bizonyos közlekedési, szállítási, gyártási, vagy információ-áramlási kérdések megoldásakor.

Például a (4) ábrán feltüntetett ültetett fa, illetve a belőle keletkezett irányított fa reprezentálhat egy olyan információs rendszert, amelyben az öt gyökérpont egy-egy információforrást jelöl, amelyekből a rendszer minden más pontjához el kívánjuk juttatni az információt. Itt a problémát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a 3. információforrás csak a 2. és 7. információforrástól beszerzett információk birtokában képes új információt beszerezni, a 12. pedig csak az 1. és 3. forrásokból kapott információk ismeretében tud új információt nyújtani.

Hasonló reprezentációk könnyen adhatók az (5) és (6) ábrán látható ültetett fákra, illetve a belőlük keletkezett irányított fákra is.

Budapest, 1972. augusztus 16.

IRODALOM

[1] OLÁH, GY.: Fákra vonatkozó leszámlálási problémák, Mat. Lapok 21. (1970) 103—142.
[2] CAYLEY, A.: Collected papers, Cambridge, 1897, Vol. 13. 26—28.
[3] PRÜFER, A.: Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, Archiv für Math. u. Phys. 27 (1918) 142—144.

О ДЕРЕВЬЯХ С КОРНЯМИ

ДЮЛА ОЛАХ

ON ROOTED TREES

GY. OLÁH

We will call "rooted tree in extensive interpretation" the tree G with n labelled vertices, if in G we mark out k vertices ($1 \leqq k \leqq n-1$) which are named "root-points". Every branch in G will be named "trunk-branch", if one of its end-points is root-point, but the other is not. Now we give the definition of orientation of the branches in G: Let F' be such minimal subtree of G, which includes all trunk-branches of G. Cancelling every end-point of F' (in the case F' has exactly 2 vertices, only one of them) and every branch which is incident with the end-points we get the tree F. Let us give double orientation to all branches in F. Let the branches of G which are joined to F be orientated to F or inversely according to that, whether the other end-point of the branch is a root-point or not. As regards the orientation of further branches, we give the next rule: let all neighbours of an orientated branch be orientated in the same interpretation. The obtained graph

will be called "directed tree in extensive interpretation". It follows, that from any root-point of a directed tree leads (directed) path to all vertices which are not root-points.

If we don't take any restriction to the root-points, then the number of directed trees with n vertices and k root-points is

$$\binom{n}{k} n^{n-2}.$$

If we require, that the k root-points should form subtree of the original tree, then the number of directed trees is

$$\binom{n}{k} n^{n-k-1} k^{k-1}$$

and among these there are

$$\binom{n}{k}\binom{n-k-1}{l-1} (n-k)^{n-k-l} k^{k+l-2}$$

directed trees, which have exactly l trunk-branches ($1 \leqq l \leqq n-k$).

If we even require that every trunk-branch of the original tree should be incident with only one vertex of the subtree, consisting of k root-points, then the number of such directed trees is

$$\binom{n}{k} (n-k+1)^{n-k-1} k^{k-1}$$

and among these there are

$$\binom{n}{k}\binom{n-k-1}{l-1} (n-k)^{n-k-l} k^{k-1}$$

directed trees which have exactly l trunk-branches.

Finally, if $k=1$, we get the rooted, or rather directed trees in the traditional interpretation. Number of these — as it is known — is n^{n-1}, and among these we can find

$$n\binom{n-2}{l-1} (n-1)^{n-l-l}$$

trees which have exactly l trunk-branches.

SÍKBELI HALMAZOK KISEBB RÉSZEKRE OSZTÁSA

IFJ. MAKAI ENDRE

Borsuk bebizonyította, hogy egy egységnyi átmérőjű n-dimenziós gömböt nem lehet n egynél kisebb átmérőjű részre bontani, de általánosan még be nem bizonyított sejtése szerint az n-dimenziós euklideszi térben minden korlátos ponthalmaz felbontható $n+1$ az eredetinél kisebb átmérőjű részhalmazra. Ehhez a problémához további kérdések kapcsolódnak, amelyeket itt csak $n=2$-re fogalmazunk meg: Mi az a legkisebb $d=d_k$ szám, amelyre igaz, hogy bármely egységnyi átmérőjű síkbeli ponthalmaz felbontható k legfeljebb d átmérőjű részhalmazra? Mik az extremális ponthalmazok, vagyis azok az egységnyi átmérőjű ponthalmazok, amelyek nem bonthatók fel csupa d_k-nál kisebb átmérőjű k részhalmazra? Ezeket a kérdéseket k néhány értékére Lenz [3, 4] vizsgálta.

Ebben a dolgozatban analóg kérdésekkel foglalkozunk, amelyeket Fejes Tóth László vetett fel: Mi az a legkisebb $\delta=\delta_k$ szám, amelyre igaz, hogy bármely egységnyi átmérőjű síkbeli ponthalmaz felbontható k egyenessel csupa legfeljebb δ átmérőjű részhalmazra? (Azaz a k egyenes felbontja a síkot zárt, esetleg a végtelenbe nyúló konvex sokszögekre, és a ponthalmaznak ezek bármelyikébe eső része legfeljebb δ átmérőjű.) Ha legkisebb ilyen δ szám nem létezik, akkor jelölje δ_k az ilyen δ számok infimumát. Továbbá mik ebben a problémában az extremális ponthalmazok?

Látni fogjuk, hogy az egy és két egyenessel való felbontás problémája ugyanazokhoz az extremális pontrendszerekhez vezet, mint a két, ill. négy részre történő felbontás problémája. Az extremális pontrendszerek a zárt, állandó szélességű konvex lemezek és ezek bizonyos részhalmazai, illetőleg egy zárt körlap és ennek bizonyos részhalmazai. Ezt fejezi ki az 1., ill. a 2. tétel.

Egy D ponthalmaz zárt burkát $\bar{D}$-sal jelöljük.

1. *Tétel. Egy egységnyi átmérőjű D ponthalmazra ekvivalensek a következő állítások.* (1) *D nem bontható fel egy egyenessel egynél kisebb átmérőjű részekre.* (2) *D nem bontható fel két egynél kisebb átmérőjű részre.* (3) *$\bar{D}$ része egy E zárt, konvex, állandó 1 szélességű tartománynak, és $\bar{D}$ tartalmazza E határának azon pontjait, amelyek nincsenek egy E határához hozzátartozó 1 sugarú nyílt köríven.*

Ez a tétel az extremális pontrendszerek konstruktív karakterizációját adja. Extremális pl. egy Reuleaux-háromszög minden olyan részhalmaza, amelynek zárt burka tartalmazza a Reuleaux-háromszög csúcsait.

Jegyezzük meg, hogy E és D között a következő kapcsolat áll fenn: E azon 1 sugarú zárt körök metszete, amelyek középpontjai $\bar{D}$-ban fekszenek.

A szerzővel egy időben az extremális pontrendszereknek ugyanezt a karakterizációját nyerte Böröczky Károly is.

V. G. Boltyanszkij két különböző módon karakterizálta az extremális pont-

rendszereket, de nem konstruktívan (l. [1], 9,, 27., 31., 33. old.). Bizonyításunk az ő bizonyításától különböző.

Bizonyítás. (1)⇒(3). Mivel D nem bontható fel egy egyenessel 1-nél kisebb átmérőjű részekre, ugyanaz érvényes $\bar{D}$-ra is. Legyen E azon zárt 1 sugarú körök metszete, amelyek középpontjai $\bar{D}$-ban vannak. Ekkor — $d(X)$-szel jelölve az X ponthalmaz átmérőjét — $d(\bar{D}) \leqq d(E)$. Ha E tartalmaz 1-nél nagyobb távolságú P, Q pontpárt, akkor $\bar{D}$ része a P és Q középpontú zárt 1 sugarú körök metszetének. Ezt a P és Q által meghatározott egyenes két 1-nél kisebb átmérőjű részre vágja szét. Ez az egyenes $\bar{D}$-t is két 1-nél kisebb átmérőjű részre bontja. Mivel ez ellentmond feltevésünknek, azért $d(E)=1$.

Legyen G egy $\bar{D}$-t tartalmazó állandó 1 szélességű zárt konvex tartomány. Mivel $G \subset E$, azért $G=E$. Megmutatjuk, hogy $\bar{D}$ tartalmazza E határának minden olyan P pontját, amely nincs egy E határához tartozó, nyílt 1 sugarú köríven.

Legyen P egy ilyen pont. Három esetet különböztetünk meg. (a) Legyen olyan PQ átmérője E-nek, hogy P és Q közül egyik sem végpontja más átmérőnek. (b) Legyen két különböző PQ_1, PQ_2 átmérő. (c) Legyen P egyetlen PQ átmérőnek végpontja, és Q legyen egy másik átmérőnek is végpontja. Legyen e az (a) esetben a P és Q által meghatározott egyenes, a (b) esetben a Q_1PQ_2 szög felezője. Ha $P \notin \bar{D}$, e $\bar{D}$-t két 1-nél kisebb átmérőjű részre bontja, ami ellentmondás. A (c) esetben megmutatjuk, hogy P torlódáspontja az (a) és (b) esetben tárgyalt (ugyancsak P-vel jelölt) pontoknak, s így $P \in \bar{D}$. Ha P-hez közeli P' határpontokra (b) nem áll fenn, akkor a P'-ből kiinduló átmérő másik végpontja, $Q'=Q'(P')$ folytonosan és monoton változik, ha P' meghatározott irányban mozog E határán. Feltételezésünk szerint P nem belső pontja egy olyan ívnek, ahol $Q'(P')$ konstans. Így P torlódási pontja olyan P'_m pontoknak, amelyekre $P'_m \neq P'$ esetén $Q'(P'_m) \neq Q'(P')$. Ezek a P'_m-k az (a) esetben tárgyalt típusúak.

(3)⇒(2). Tegyük fel indirekt módon, hogy $D=H_1 \cup H_2$, ahol $d(H_1|, d(H_2)<1$. Legyen F_i a $\bar{H}_i$-nak és az E határán fekvő azon PQ nyílt íveknek az uniója, amelyeknek nincs közös pontjuk $\bar{D}$-sal és amelyekre $P, Q \in \bar{H}_i$. Az így definiált F_i halmaz zárt, $d(F_i)<1$ és $F_1 \cup F_2$ tartalmazza E határát. Ez ellentmondás.

(2)⇒(1) triviális.

Láttuk, hogy $d_2=\delta_1=1$. A most következő tétel első fele megadja d_4 és δ_2 közös értékét, második fele az extremális ponthalmazokat jellemzi.

2. *Tétel. Minden egységnyi átmérőjű D ponthalmaz felbontható két egyenessel legfeljebb $1/\sqrt{2}$ átmérőjű részekre. Az egyenlőség esetét a következő három ekvivalens állítás fejezi ki:* (1) *D nem bontható fel két egyenessel $1/\sqrt{2}$-nél kisebb átmérőjű részekre.* (2) *D nem bontható fel négy $1/\sqrt{2}$-nél kisebb átmérőjű részre.* (3) *$\bar{D}$ része egy E zárt, 1 átmérőjű körlemeznek, és $\bar{D}$ tartalmazza E határát.*

Megjegyzés. Innen látható, hogy minden egységnyi átmérőjű ponthalmaz felbontható négy legfeljebb $1/\sqrt{2}$ átmérőjű részre.

A teljesség kedvéért közöljük a bizonyítást, amely lényegében megegyezik Lenz [3] bizonyításával, kiegészítve azzal a Fejes Tóth Lászlótól származó észrevétellel, hogy a [3]-beli bizonyítás a két egyenessel való felbontás esetére is alkalmazható.

Bizonyítás. Fedjük le $\bar{D}$ konvex burkát, E-t egy legfeljebb 1 hosszúságú oldalakkal rendelkező téglalappal. Ennek a téglalapnak a középvonalai D-t $1/\sqrt{2}$-nél nem nagyobb átmérőjű részekre osztják.

(1)⇒(3). (1)-ből következik, hogy minden fenti $P_1P_2P_3P_4$ téglalap 1 oldalhosszú négyzet, s ezért E állandó 1 szélességű. Így tehát E nem tartalmaz egyetlen P_i-t sem. Ugyancsak (1) miatt E tartalmazza $P_1P_2P_3P_4$ oldalainak középpontjait.

Legyen a fenti négyzet egyik oldalának irányszöge ϑ, s a négyzet középpontja $r(\vartheta)=(x(\vartheta), y(\vartheta))$. Megmutatjuk, hogy $r'(\vartheta)=0$. Nyilvánvalóan elég megmutatni, hogy $r'(0)=0$. Mivel a ϑ szöghöz tartozó négyzet oldalainak középpontjai a 0 szöghöz tartozó négyzetben vannak, azért $|x(\vartheta)-x(0)|, |y(\vartheta)-y(0)| \leqq (1-\cos\vartheta)/2$, s ezért valóban $r'(0)=0$. Eszerint E 1 átmérőjű zárt körlemez. $\bar{D}$ tartalmazza E kerületét, mivel E a $\bar{D}$-nak konvex burka.

(3)⇒(2) bizonyítása egy [1]-ben szereplő bizonyítással analóg (l. 12—13. old.). Tegyük fel, indirekt módon, hogy $D=\bigcup_{j=1}^{4} H_j$, $d(H_j)<1/\sqrt{2}$. Akkor $\bar{H}_j$-nak és E határának metszete egy $\pi/2$-nél kisebb íven van. Ezért $\bigcup_{j=1}^{4} H_j$ nem tartalmazza E határát, ami ellentmondás.

(2)⇒(1) triviális.

Legyen D egységnyi átmérőjű síkbeli ponthalmaz. Vizsgálhatjuk a következő kérdéseket. Mi az a legkisebb $d=d_k(D)$ szám, amelyre igaz, hogy D felbontható k legfeljebb d átmérőjű részhalmazra? Hasonlóan: mi azon δ számok $\delta_k(D)$ infimuma, amely δ számokra igaz, hogy D felbontható k egyenessel csupa legfeljebb δ átmérőjű részhalmazra?

3. *Tétel. Minden egységnyi átmérőjű D ponthalmaz felbontható három egyenessel legfeljebb $4-2\sqrt{3}$ átmérőjű részekre. $4-2\sqrt{3}$ helyett 1/2-nél kisebb számra az állítás nem igaz.*

Bizonyítás. A D halmaz befoglalható egy G állandó 1 szélességű konvex tartományba. G köré pedig írható egy $1/\sqrt{3}$ oldalhosszú H szabályos hatszög. Legyenek a H hatszög csúcsai $P_1, \ldots, P_6$. G nem tartalmazhat olyan P_i és P_j csúcsot, amelyekre i és j egyike páros, másika páratlan. Sőt G benne van egy K kilencszögben, amelyet H-ból a következőképpen nyerünk. H három, páronként nem szomszédos csúcsánál egy-egy egyenlőszárú háromszöget levágunk H-ból. Legyenek ezeknek a háromszögeknek az alapjai $\dfrac{5-\sqrt{21}}{4}$ hosszúak. K felbontható három egyenessel legfeljebb $4-2\sqrt{3}$ átmérőjű részekre. A három egyenes egy $7-4\sqrt{3}$ oldalhosszú szabályos háromszöget határol és a három egyenes a H hatszög egy-egy oldalával párhuzamos. Az általuk határolt háromszög hasonló helyzetű és közös középpontú azzal a háromszöggel, amelyet a K kilencszögnek a H hatszöghöz nem tartozó oldalainak egyenesei határolnak. Ebből következik, hogy $\delta_3(D) \leqq 4-2\sqrt{3}$. Innen kapjuk, hogy $\delta_3 \leqq 4-2\sqrt{3} \approx 0{,}5358$.

Mivel az 1 átmérőjű kör nem bontható fel három egyenessel 1/2-nél kisebb átmérőjű részekre, azért $\delta_3 \geqq 1/2$.

Ennél jobb becslést kaphatunk esetleg az alábbi meggondolással (l. [2], 70. feladat megoldása). Feltehetjük, hogy a körülírt kör sugara nagyobb 1-nél. Akkor van olyan ABC hegyesszögű háromszög, amelynek csúcsai D-hez tartoznak és amely D körülírt körébe van írva. Ennek a háromszögnek az oldalai legfeljebb 1 hosszúságúak. D benne van az A, B, C körül írt egységsugarú körök, továbbá D körülírt körének metszetében.

Fejes Tóth László sejtése a következő: (1) Az egyik extremális halmaz a D

Reuleaux-háromszög, azaz $\delta_3(D)=\delta_3$. (2) Az egyik extremális egyeneshármas (azaz amely a D Reuleaux-háromszöget legfeljebb $\delta_3(D)$ átmérőjű részekre bontja) egy $1-2\sqrt{3}\sin 15°$ oldalhosszú szabályos háromszöget határol. Ez a szabályos háromszög hasonló helyzetű és közös középpontú azzal a háromszöggel, amelynek csúcsai a Reuleaux-háromszög csúcsai. Ekkor $\delta_3(D)=2\sin 15°\approx 0{,}5176$ volna. (3) A Reuleaux-háromszög egy része elhagyható, úgy, hogy a megmaradt halmaz még mindig zárt extremális halmaz. Esetleg elhagyható pl. az a nyílt háromszög, amelyet a (2)-ben említett három egyenes határol.

Legyen D egységnyi átmérőjű konvex tartomány. Sejthető, hogy nagy k-ra $\delta_k(D)$ aszimptotikusan akkor lép fel, ha a felosztásnál használt k egyenes és négy támaszegyenes egybevágó téglalapokból álló hálót határoz meg (a téglalapháló alkalmas megválasztásánál). Ekkor valószínűleg az extremális tartományok aszimptotikusan az állandó 1 szélességű tartományok volnának.

Legyen D egységnyi átmérőjű Jordan-mérhető ponthalmaz, amelynek Jordan-mértéke pozitív. Sejthető, hogy nagy k-ra $d_k(D)$ aszimptotikusan egy szabályos hatszöges felbontás esetén lép fel (l. [4]). Ekkor valószínűleg az extremális halmaz aszimptotikusan az 1 átmérőjű kör volna. d_k-ra aszimptotikus alsó becslést is ad [4], amely a szabályos hatszöges felbontásból adódó aszimptotikus felső becsléshez (l. [4]) elég közel van.

Az n dimenziós euklideszi térben is felvethetjük a következő kérdéseket: Melyik az a legkisebb $d=d_k^n$ szám, amelyre igaz, hogy bármely egységnyi átmérőjű ponthalmaz felbontható k legfeljebb d átmérőjű részhalmazra? Hasonlóan: mi azon δ számok δ_k^n infimuma, amely δ számokra igaz, hogy bármely egységnyi átmérőjű ponthalmaz felbontható k hipersíkkal legfeljebb δ átmérőjű részhalmazokra? Esetleg az 1. és 2. tétellel analóg bizonyos állítások érvényesek. Álljon D egy állandó 1 szélességű konvex tartomány határának azon pontjaiból, amelyek nincsenek egy olyan nyílt, 1 sugarú gömbfelületdarabon, amely a tartomány határához hozzátartozik. Ekkor D nem bontható fel $n-1$ hipersíkkal 1-nél kisebb átmérőjű részekre, továbbá nem bontható fel n darab 1-nél kisebb átmérőjű részre. Fejes Tóth László egy példája, az 1 élhosszú szabályos szimplex csúcsainak halmaza, nem a fenti típusú ($n\geqq 3$-ra), de nem bontható fel n darab 1-nél kisebb átmérőjű részre. $n-1$ hipersíkkal viszont felbontható 1-nél kisebb átmérőjű részekre.

IRODALOM

[1] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг: Разбиение фигур на меньшие части, Наука, Москва, 1971.

[2] I. M. Jaglom, W. G. Boltjanski: Konvexe Figuren, Deutsch. Verl. Wiss. Berlin, 1956.

[3] H. Lenz: Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers, Arch. Math. 7 (1956), 34—40.

[4] H. Lenz: Zerlegung ebener Bereiche in konvexen Zellen von möglichst kleinem Durchmesser, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 58 (1956), 87—97.

РАЗДЕЛЕНИЕ НА МЕНЬШИЕ ЧАСТИ МНОЖЕСТВ НА ПЛОСКОСТИ

ЭНДРЕ МАКАИ МЛАДШИЙ

SUBDIVISION OF PLANAR SETS INTO SMALLER PARTS

E. MAKAI Jr.

Let D be a planar set of unit diameter. Let $d_k(D)$ denote the minimal number d for which D can be divided into k parts of diameters not exceeding d. Similarly let $\delta_k(D)$ denote the infimum of those numbers δ, for which D can be divided by k straight lines into parts of diameters not exceeding δ. Let $d_k=\sup_D d_k(D)$ and $\delta_k=\sup_D \delta_k(D)$. $\delta_1(D)=1 \Leftrightarrow d_2(D)=1 \Leftrightarrow \bar{D} \subset E$, where E is a closed convex domain of constant width 1 and D contains those points of the boundary of E which are not on an open circular arc of radius 1 belonging to the boundary of E. ([1] contains different equivalent conditions.) Theorem 2 is a slight variant due to L. Fejes Tóth of a theorem in [3]. $\delta_2=d_4=1/\sqrt{2}$. Moreover $\delta_2(D)=1/\sqrt{2} \Leftrightarrow d_4(D)=1/\sqrt{2} \Leftrightarrow \bar{D} \subset E$, where E is a closed circle of diameter 1 and $\bar{D}$ contains the boundary of E. We have $1/2 \leqq \delta_3 \leqq 4-2\sqrt{3}$. Maybe this can be improved by considering that D belongs to the intersection of its circumcircle and of three unit circles about points of the perimeter of the circumcircle. L. Fejes Tóth conjectures that (1) one of the extremal sets is the Reuleaux triangle D (2) $\delta_3(D)=2 \sin 15°$ (3) some part of D can be deleted still to have a closed extremal set. It is conjectured that for large values of k an asymptotically best subdivision of a convex domain by k straight lines forms a lattice of congruent rectangles. It is conjectured that an asymptotically best subdivision of a Jordan-measurable set of positive Jordan-measure into k parts is a regular hexagonal subdivision (cf. [4]).

SZABÁLYOS SOKSZÖGHÖZ VEZETŐ ITERÁCIÓS ELJÁRÁSOK

FEJES TÓTH GÁBOR

Fejes Tóth László heurisztikus bizonyítást adott a következő tételre.

Legyen $P_0, P_1, \ldots$ n-szögeknek egy olyan sorozata, amelyben P_0 egy tetszés szerinti konvex n-szög, és P_k oldalegyenesei P_{k-1} külső szögfelezői ($k=1, 2, \ldots$). Ekkor megadható minden P_k n-szögnek egy-egy hasonló példánya, Q_k, úgy hogy a $Q_0, Q_1, \ldots$ sorozat egy szabályos n-szöghöz konvergál [1].

Felmerül a kérdés, vajon dualizálható-e ez a tétel olyan értelemben, hogy körülírt sokszögek helyett beírt sokszögeket tekintünk. Pontosabban: megadható-e egy eljárás, melynek segítségével egy konvex n-szöghöz egy beírt konvex n-szög szerkeszthető, úgy hogy az eljárás iterálása szabályos sokszöghöz vezessen [1]? Ebben a dolgozatban megadunk egy ilyen eljárást. Érvényes ugyanis a következő

1. *Tétel. Kiindulva egy tetszés szerinti konvex* $P_0=A_1^0 \ldots A_n^0$ *n-szögből, szerkesszük meg a* $\{P_k=A_1^k \ldots A_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ *sokszögsorozatot, úgy hogy választva* P_0 *belsejében egy* O *pontot és egy* 1*-nél kisebb, pozitív* λ *számot,* A_i^{k+1} *az* $A_i^k A_{i+1}^k$ *oldalnak az a pontja legyen, amelyre*

$$(1-\lambda)(A_i^k O A_i^{k+1} \sphericalangle) = \lambda(A_i^{k+1} O A_{i+1}^k \sphericalangle),$$

ahol $A_{n+1}^k = A_k^1$. *Ekkor minden* P_k *n-szöghöz megadható annak egy hasonló* Q_k *képe, úgy hogy a* $Q_0, Q_1, \ldots$ *sokszögsorozat szabályos n-szöghöz konvergál.*

Ennek a tételnek a helyessége a szemlélet alapján éppen olyan könnyen és meggyőzően alátámasztható, mint az előbb említett tételé. Arról van ugyanis szó, hogy a sokszögek oldalainak O-ra vonatkozó látószögei az iteráció során „kiegyenlítődnek", s feltéve a látószögek egyenlőségét, ugyanez történik a csúcsoknak O-tól mért távolságaival is. Mindazonáltal ezeknek a tételeknek egzakt bizonyítása nem egészen egyszerű.

Mindkét tétel bizonyítása egy segédtételen alapszik, amelynek tömörebb megfogalmazása céljából egy elnevezést vezetünk be. Legyen ε a $(0, 1/2)$ nyílt intervallumba eső rögzített szám. Az (a, b) intervallum *ε-magján*, röviden *magján* értjük az $[a+\varepsilon(b-a), b-\varepsilon(b-a)]$ zárt intervallumot.

Legyen $\{a_1^k, \ldots, a_n^k\}_{k=0}^{\infty}$ szám n-esek egy olyan sorozata, amelyben $(a_1^0, \ldots, a_n^0)$ egy tetszés szerinti szám n-es, és a_i^{k+1} benne van az a_i^k és a_{i+1}^k által meghatározott intervallum magjában ($i=1, \ldots, n$; $a_{n+1}^k = a_1^k$). Látni fogjuk, hogy ekkor k növekedtével minden a_i^k ugyanahhoz a határértékhez tart. Ennél valamivel többre lesz szükségünk.

Segédtétel. Legyen $\mathbf{x}^1=(x_1^1, \ldots, \mathbf{x}_n^1)$, $\mathbf{x}^2=(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, ... n-dimenziós vektoroknak egy olyan sorozata, hogy a $\max_i x_i^k = x^k$ jelöléssel $\sum_{i=1}^{\infty} x^k < \infty$ legyen. Az $\mathbf{a}^0 =$

$=(a_1^0, \ldots, a_n^0)$ vektorból kiindulva készítsük el az $\mathbf{a}^0=(a_1^0, \ldots, a_n^0)$, $\mathbf{a}^1=(a_1^1, \ldots, a_n^1)$, ... sorozatot, úgy hogy $a_i^{k+1}-x_i^{k+1}$ az a_i^k és a_{i+1}^k által meghatározott intervallum valamely rögzített ε-nal képzett ε-magjába essen ($a_{n+1}^k=a_1^k$; $i=1, \ldots, n$; $k=0, 1, \ldots$). Akkor a $\lim_{k\to\infty} a_i^k$ határérték létezik, s értéke független i-től.

Mivel az a_i^k ($i=1, \ldots, n$; $k=0, 1, \ldots$) számok korlátos sorozatot alkotnak, azért elegendő bebizonyítani, hogy $\lim_{k\to\infty} M(\mathbf{a}^k)=0$, ahol $M(\mathbf{a}^k)=\max_i a_i^k-\min_i a_i^k$.

Legyen $V(\mathbf{a}^k)=|a_1^k-a_2^k|+\ldots+|a_n^k-a_1^k|$. Mivel $M(\mathbf{a}^k)\leqq\frac{1}{2}V(\mathbf{a}^k)$, azért csak annyit kell belátnunk, hogy $\lim_{k\to\infty} V(\mathbf{a}^k)=0$. Nyilvánvaló, hogy $M(\mathbf{a}^k)\geqq\frac{1}{n}V(\mathbf{a}^k)$. Ezért egyrészt van olyan j index, hogy $a_{j+1}^k-a_j^k\geqq\frac{1}{n^2}V(\mathbf{a}^k)$, másrészt van olyan l index, hogy $a_l^k-a_{l+1}^k\geqq\frac{1}{n^2}V(\mathbf{a}^k)$.

Definiáljuk az $|x|^+$ szimbólumot a következőképpen:

$$|x|^+=\begin{cases}x, & \text{ha } x\geqq 0;\\ 0, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

Vezessük be továbbá a $\mathbf{b}^k=(b_1^k, \ldots, b_n^k)=\mathbf{a}^k-\mathbf{x}^k$ jelölést. Mivel $a_{j+1}^k-a_j^k>0$ és b_j^{k+1} benne van az (a_j^k, a_{j+1}^k) intervallum magjában, azért

$$a_{j+1}^k-b_j^{k+1}\geqq\varepsilon(a_{j+1}^k-a_j^k).$$

Másrészt b_{j+1}^{k+1} helyzetétől függetlenül nyilvánvaló, hogy

$$b_{j+1}^{k+1}-a_{j+1}^k\geqq-|a_{k+1}^j-b_{j+1}^{k+1}|^+.$$

A két utóbbi egyenlőtlenséget összeadva,

$$b_{j+1}^{k+1}-b_j^{k+1}\geqq\varepsilon(a_{j+1}^k-a_j^k)-|a_{j+1}^k-b_{j+1}^{k+1}|^+.$$

Ezért

$$a_{j+1}^{k+1}-a_j^{k+1}\geqq\varepsilon(a_{j+1}^k-a_j^k)-|a_{j+1}^k-b_{j+1}^{k+1}|^+-2x^{k+1}.$$

Ha ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldala, s ennélfogva a bal oldala is pozitív, akkor hasonló egyenlőtlenséget írhatunk fel eggyel nagyobb felső indexre is. Felírhatjuk ezért egymás után az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned}
&a_{j+1}^k-a_j^k\geqq\frac{1}{n^2}V(\mathbf{a}^k),\\
&a_{j+1}^{k+1}-a_j^{k+1}\geqq\varepsilon(a_{j+1}^k-a_j^k)-|a_{j+1}^k-b_{j+1}^{k+1}|^+-2x^{k+1}>0,\\
&a_{j+1}^{k+2}-a_j^{k+2}\geqq\varepsilon(a_{j+1}^{k+1}-a_j^{k+1})-|a_{j+1}^{k+1}-b_{j+1}^{k+2}|^+-2x^{k+2}>0,\\
&\qquad\vdots\\
&a_{j+1}^{k+p}-a_j^{k+p}\geqq\varepsilon(a_{j+1}^{k+p-1}-a_j^{k+p-1})-|a_{j+1}^{k+p-1}-b_{j+1}^{k+p}|^+-2x^{k+p}>0,\\
&0\geqq\varepsilon(a_{j+1}^{k+p}-a_j^{k+p})-|a_{j+1}^{k+p}-b_{j+1}^{k+p+1}|^+-2x^{k+p+1}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Itt egyelőre feltételeztük, hogy az utolsó egyenlőtlenség megfelelő $p<n$-re fennáll.

Ha ilyen p index nem létezik, akkor kell lennie egy olyan n-nél kisebb q indexnek, hogy teljesüljenek az (1) mintájára képzett alábbi egyenlőtlenségek:

$$
\begin{aligned}
a_l^k - a_{l+1}^k &\geqq \frac{1}{n^2} V(\mathbf{a}^k), \\
a_{l-1}^{k+1} - a_l^{k+1} &\geqq \varepsilon(a_l^k - a_{l+1}^k) - |a_l^k - b_{l-1}^{k+1}|^+ - 2x^{k+1} > 0, \\
a_{l-2}^{k+2} - a_{l-1}^{k+2} &\geqq \varepsilon(a_{l-1}^{k+1} - a_l^{k+1}) - |a_{l-1}^{k+1} - b_{l-2}^{k+2}|^+ - 2x^{k+2} > 0, \\
&\vdots \qquad (2) \\
a_{l-q}^{k+q} - a_{l-q+1}^{k+q} &\geqq \varepsilon(a_{l-q+1}^{k+q-1} - a_{l-q}^{k+q-1}) - |a_{l-q+1}^{k+q-1} - b_{l-q}^{k+q}|^+ - 2x^{k+q} > 0, \\
0 &\geqq \varepsilon(a_{l-q}^{k+q} - a_{l-q-1}^{k+q}) - |a_{l-q}^{k+q} - b_{l-j-1}^{k+q+1}|^+ - 2x^{k+q+1}.
\end{aligned}
$$

Ugyanis bizonyos $(k+n)$-nél kisebb felső indexre az (1) és (2) alatti egyenlőtlenségek bal oldalai egymás (-1)-szeresei, s így nem lehet mindkettő pozitív.

A következő meggondolásban egyaránt kiindulhatunk (1) vagy (2) helyességéből. Tételezzük ezért fel, hogy fennállnak az (1) alatti egyenlőtlenségek.

Figyelembe véve, hogy b_i^{r+1} a_i^r és a_{i+1}^r közé esik,

$$V(\mathbf{a}^r) = \sum_{i=1}^{n} |a_{i+1}^r - a_i^r| = \sum_{i=1}^{n} (|a_{i+1}^r - b_i^{r+1}| + |b_i^{r+1} - a_i^r|).$$

Ezért

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{a}^r) - V(\mathbf{b}^{r+1}) &= \sum_{i=1}^{n} (|b_{i+1}^{r+1} - a_{i+1}^r| + |a_{i+1}^r - b_i^{r+1}| - |b_{i+1}^{r+1} - b_i^{r+1}|) \geqq \\
&\geqq |b_{j+1}^{r+1} - a_{j+1}^r| + |a_{j+1}^r - b_j^{r+1}| - |b_{j+1}^{r+1} - b_j^{r+1}| \geqq \\
&\geqq 2 \min \{|a_{j+1}^r - b_j^{r+1}|^+, |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+\}.
\end{aligned}
$$

Másrészt

$$V(\mathbf{a}^{r+1}) = V(\mathbf{b}^{r+1} + \mathbf{x}^{r+1}) \leqq V(\mathbf{b}^{r+1}) + V(\mathbf{x}^{r+1}) \leqq V(\mathbf{b}^{r+1}) + 2nx^{r+1},$$

tehát

$$V(\mathbf{a}^r) - V(\mathbf{a}^{r+1}) \geqq 2 \min \{|a_{j+1}^r - b_j^{r+1}|^+, |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+\} - 2nx^{r+1}.$$

A fentiek alapján, ha

$$a_{j+1}^r - a_j^r > 0 \text{ és } \varepsilon(a_{j+1}^r - a_j^r) - |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+ - 2x^{r+1} > 0,$$

akkor $b_{j+1}^{r+1} - b_j^{r+1} > 0$, s így

$$V(\mathbf{a}^r) - V(\mathbf{a}^{r+1}) \geqq 2|a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+ - 2nx^{r+1}.$$

Ha viszont

$$a_{j+1}^r - a_{j+1}^r > \text{, de } \varepsilon(a_{j+1}^r - a_j^r) - |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+ - 2x^{r+1} \leqq 0,$$

akkor $|a_{j+1}^r - b_j^{r+1}|^+ \geqq \varepsilon(a_{j+1}^r - a_j^r)$ miatt

$$\min \{|a_j^{r+j} - b_j^{r+1}|^+, |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+\} \geqq \varepsilon(a_{j+1}^r - a_j^r) - 2x^{r+1},$$

s így

$$V(\mathbf{a}^r) - V(\mathbf{a}^{r+1}) \geqq 2\varepsilon(a_{j+1}^r - a_j^r) - 2(n+2)x^{r+1}.$$

Ezért az (1) alatti egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy

$$V(\mathbf{a}^k) - V(\mathbf{a}^{k+p+1}) \geqq 2 \sum_{r=k}^{k+p-1} |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+ +$$

$$+ 2\varepsilon(a_{j+1}^{k+p} - a_j^{k+p}) - 4x^{k+p+1} - 2n \sum_{r=k+1}^{k+p+1} x^r \geqq$$

$$\geqq 2 \sum_{r=k}^{k+p-1} \varepsilon^{p+k-r} |a_{j+1}^r - b_{j+1}^{r+1}|^+ +$$

$$+ 2\varepsilon(a_{j+1}^{k+p} - a_j^{k+p}) - 4x^{k+p+1} - 2n \sum_{r=k+1}^{k+p+1} x^r \geqq$$

$$+ 2\varepsilon^{p+1} \frac{1}{n^2} V(\mathbf{a}^k) - 2(n+2) \sum_{r=k+1}^{k+p+1} x^r \geqq$$

$$\geqq 2\varepsilon^n \frac{1}{n^2} V(\mathbf{a}^k) - 2(n+2) \sum_{r=k+1}^{k+p+1} x^r.$$

A $V(\mathbf{a}^i) \leqq V(\mathbf{b}^i) + V(\mathbf{x}^i) \leqq V(\mathbf{a}^{i-1}) + V(\mathbf{x}^i)$ egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$V(\mathbf{a}^{k+1}) \leqq V(\mathbf{a}^{k+p+1}) + \sum_{i=k+p+2}^{k+n} V(\mathbf{x}^i) \leqq$$

$$\leqq V(\mathbf{a}^{k+p+1}) + 2n \sum_{i=k+p+2}^{k+n} x^i.$$

Mivel azonban az előzőek alapján

$$V(\mathbf{a}^{k+p+1}) \leqq \left(1 - \frac{2\varepsilon^n}{n^2}\right) V(\mathbf{a}^k) + 2(a+2) \sum_{r=k+1}^{k+p+1} x^r,$$

azért

$$V(\mathbf{a}^{k+n}) \leqq \mu V(\mathbf{a}^k) + 2(n+2) \sum_{r=k+1}^{k+n} x^r,$$

ahol

$$\mu = 1 - \frac{2\varepsilon^n}{n^2}.$$

Minthogy ez az egyenlőtlenség bármely nem negatív egész k számra fennáll, azért ismételt alkalmazásával nyerjük a tetszőleges nem negatív k- és m-re érvényes

$$V(\mathbf{a}^{k+nm}) \leqq \mu^m V(\mathbf{a}^k) + \mu^{m-1} 2(n+2) \sum_{i=k+1}^{k+n} x^i + \ldots +$$

$$+ 2(n+2) \sum_{i=k+(m-1)n}^{k+mn} x^i$$

egyenlőtlenséget.

Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés azonban, $\mu < 1$ és a $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$ sor konvergenciája miatt 0-hoz tart, midőn $m \to \infty$.

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az utolsó egyenlőtlenségből nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{x}^k = \mathbf{O}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor van olyan $0 < \nu < 1$ szám, hogy

$$|a_i^k - \lim_{j \to \infty} a_j^i| < \nu^k \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots,).$$

Tekintsük most az 1. Tételben szereplő $\{P_k = A_1^k \ldots A_n^k\}_{k=0}^{\infty}$ sokszögsorozatot. A sokszögsorozat szerkesztéséből nyilvánvaló, hogy O benne van mindegyik P_k belsejében. Megmutatjuk, hogy P_k oldalainak látószögei O-ból k növekedtével mind $2\pi/n$-hez tartanak. Bevezetve az

$$\alpha_i^k = A_i^k O A_{i+1}^k \sphericalangle$$

jelölést, az $\boldsymbol{\alpha}^0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)$, $\boldsymbol{\alpha}^1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1)$, ... sorozatra nyilván teljesülnek a segédtétel feltételei $\varepsilon = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$ és $\mathbf{x}^k = \mathbf{O}$ választással. Mivel

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k = 2\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

azért valóban

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_i^k = \frac{2\pi}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

A későbbiekre való tekintettel említsük meg, hogy a fenti megjegyzés alapján α_i^k exponenciálisan tart $2\pi/n$-hez.

Az 1. Tétel bizonyításához most már csak annyit kell megmutatni, hogy az OA_i^k távolságok egy csupán k-tól függő, megfelelő „nagyítási" faktorral szorozva $k \to \infty$ esetén ugyanahhoz a határértékhez tartanak.

Legyen

$$a_i^k = \left(\frac{\sin \frac{2\lambda\pi}{n} + \sin \frac{2(1-\lambda)\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}} \right)^k OA_i^k.$$

Ha felírjuk, hogy az $A_i^k O A_{i+1}^k$ háromszög területe az $A_i^k O A_i^{k+1}$ és $A_i^{k+1} O A_{i+1}^k$ háromszögek területének összegével egyenlő, a kapott egyenlőség rendezése után az

$$OA_i^{k+1} = \frac{OA_i^k \, OA_{i+1}^k \sin \alpha_i^k}{OA_i^k \sin \lambda\alpha_i^k + OA_{i+1}^k \sin (1-\lambda)\alpha_i^k}$$

egyenlőséghez jutunk. Vezessük be a

$$b_i^k = \left(\frac{\frac{1}{a_i^{k-1}} \sin \lambda\alpha_i^{k-1} + \frac{1}{a_{i+1}^{k-1}} \sin (1-\lambda)\alpha_i^{k-1}}{\sin \lambda\alpha_i^{k-1} + \sin (1-\lambda)\alpha_i^{k-1}} \right)^{-1}$$

és a

$$v_i^k = \frac{\left(\sin \frac{2\lambda\pi}{n} + \sin \frac{2(1-\lambda)\pi}{n} \right) \sin \alpha_i^{k-1}}{(\sin \lambda\alpha_i^{k-1} + \sin (1-\lambda)\alpha_i^{k-1}) \sin \frac{2\pi}{n}} - 1$$

jelöléseket. Ekkor

$$a_i^k = b_i^k(1+v_i^k).$$

Legyen

$$a = \inf_{i,k} a_i^k \quad \text{és} \quad A = \sup_{i,k} a_i^k.$$

Először is megmutatjuk, hogy $0<a$ és $A<\infty$. Mivel b_i^{k+1} az a_i^k és a_{i+1}^k számok pozitív súlyokkal vett harmonikus közepe, s így e számok közé esik, azért elegendő azt megmutatni, hogy a $\prod_{k=1}^{\infty}(1+v_i^k)$ szorzat konvergens ($i=1, \ldots, n$). Ez azonban valóban igaz, mert az α_{i-k}^k konvergenciájára tett megjegyzés miatt van olyan $0<q<1$ szám, hogy $|v_i^k|<q^k$, s így a $\sum_{k=1}^{\infty} v_i^k$ sor abszolút konvergens [2].

Mivel

$$0 < \min_i \alpha_i^0 \leqq \alpha_i^k \leqq \max_i \alpha_i^0 < \pi,$$

azért b_i^k definíciója szerint $1/b_i^k$ nem más, mint $1/a_i^{k-1}$ és $1/a_{i-1}^{k-1}$ olyan súlyokkal vett számtani közepe, amelyek $(0, 1)$-nek a végpontokat nem tartalmazó, i-től és k-tól független részintervallumába esnek. Ez azt jelenti, hogy $1/b_i^k$ az $1/a_i^{k-1}$ és $1/a_{i+1}^{k-1}$ által meghatározott intervallum valamilyen ε' magjába esik, ahol ε' nem függ sem i-től, sem k-tól. Ebből viszont egyszerű számolással adódik, hogy b_i^k az a_i^{k-1} és a_{i+1}^{k-1} által meghatározott intervallum ε-magjába esik, ahol ε sem függ i-től és k-tól. Megfelel például ε következő választása:

$$\varepsilon = \varepsilon' \frac{a}{A-\varepsilon'(A-a)}.$$

Legyen

$$\mathbf{x}^k = (b_1^k v_1^k, \ldots, b_n^k v_n^k).$$

Mivel $a<b_i^k<A$ ($i=1, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots$), azért felhasználva a $\sum_{k=1}^{\infty} v_i^k$ sor abszolút konvergenciáját, látjuk, hogy az $\mathbf{x}^k$ vektorok és ε fenti választása mellett az $\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \ldots$ vektorsorozat eleget tesz a segédtétel feltételeinek. Ezért $\mathbf{a}^k$ olyan vektorhoz konvergál, amelynek minden koordinátája egyenlő.

Ezzel az 1. Tétel bizonyítását befejeztük.

A segédtétel felhasználásával egzakt bizonyítás adható Fejes Tóth László fent említett tételére is. Sőt, bebizonyítható az általánosabb

2. *Tétel. Legyen $P_0, P_1, \ldots$ n-szögeknek egy olyan sorozata, amelyben P_0 egy tetszés szerinti konvex n-szög, és P_k oldalegyenesei P_{k-1}-nek ciklikusan irányított külső szögeit λ:$(1-\lambda)$ arányban osztják $(0<\lambda<1)$. Akkor minden P_k n-szöghöz megadható annak egy hasonló Q_k képe, úgy hogy a $Q_0, Q_1, \ldots$ sokszögsorozat szabályos n-szöghöz konvergál.*

A 2. Tétel bizonyítása az 1. Tétel bizonyításához hasonló módon történik. A részletek kidolgozását az olvasóra bízzuk.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth László, Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások. Mat. Lapok 20 (1969), 15—23.
[2] K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer-Verlag (Berlin—Heidelberg, 1947).

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ВЕДУЩИЕ К РЕГУЛЯРНОМУ МНОГОУГОЛЬНИКУ

ГАБОР ФЕЙЕШ ТОТ

ITERATION PROCESSES GIVING REGULAR POLYGONS

G. FEJES TÓTH

Let $P_0 = A_1^0 \dots A_n^0$ be an arbitrary convex n-gon and O an inner point of P_0. Choosing a positive number λ less than 1, construct the sequence of n-gons $\{P_k = A_1^k \dots A_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ defined by the condition that A_i^{k+1} is the point of the segment $A_i^k A_{i+1}^k$ such that

$$(1-\lambda)(\sphericalangle A_i^k O A_i^{k+1}) = \lambda(\sphericalangle A_i^{k+1} O A_{i+1}^k)$$

It is proved that to each k there is a polygon Q_k similar to P_k so that the sequence $Q_0, Q_1, \dots$ converges to a regular n-gon.

An analogous theorem is proved for a certain sequence of polygons each circumscribed about the previous one.

LAGRANGE-FÉLE INTERPOLÁCIÓ A VALÓS TENGELYEN

NÉVAI G. PÁL

Legyen $\alpha(x)$ a valós tengelyen értelmezett integrális súlyfüggvény. Jelölje $p_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ az $\alpha(x)$-hez tartozó n-edik ortonormált polinomot, x_{kn} $(k=1, 2, \ldots, n)$ a $p_n(x)$ gyökeit, $\lambda_n(x)=\left[\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)^2\right]^{-1}$ az n-edik Christoffel-féle függvényt, $l_{kn}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ az $\{x_{kn}\}$ alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs eljárás k-adik alappolinomját. Legyen továbbá $L_n(x, f)$ a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényt az $\{x_{kn}\}$ csomópontokban interpoláló Lagrange-parabola, azaz

$$L_n(x, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) l_{kn}(x),$$

$\omega_R(f; t)$ $(R=1, 2, \ldots)$ pedig az f függvénynek az egész valós tengelyre vonatkozó R-edik simasági modulusa.

Tétel. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan valós tengelyen értelmezett $\beta(x)>0$ függvény, amely a következő tulajdonságokkal bír:

a) *A $\beta(x)^{-2}$ függvény $d\alpha$ szerint integrálható, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_n(x_{kn}) \beta(x_{kn})^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)^{-2}\, d\alpha(x),$$

azaz a $\beta(x)^{-2}$ függvényhez konstruált Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratura eljárás konvergens.

b) *Minden nem-negatív egész n számra**

$$|x|^n \beta(x) < c_1 (q_n)^n \qquad (-\infty < x < \infty),$$

ahol a $\{q_n\}$ számsorozat olyan, hogy $q_n \geqq 1$ és $\frac{q_n}{n} \downarrow 0$, ha $n \to 0$.

Ekkor, ha $\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty$ és valamely rögzített R természetes számra

$$\sum_{n=1}^{n} \omega_R\left(f; \frac{q_n}{n}\right)^2 < \infty,$$

abban az esetben $L_n(x, f)$ α-majdnem mindenütt az $f(x)$ függvényhez konvergál.

Megjegyzések. 1. Véges alapintervallum esetére ALEXITS GYÖRGY a [2] dolgozatában hasonló tételt bizonyított be.

* c_1 és a továbbiakban $c_2, \ldots, c_8$ n-től és x-től független pozitív konstansokat jelöl.

2. Analóg tétel mondható ki a pozitív valós tengelyen értelmezett integrális súlyfüggvényekhez tartozó ortonormált polinomok gyökhelyein alapuló Lagrange-féle interpolációs eljárások konvergenciájáról.

3. Néhány speciális esetre vannak sokkal pontosabb eredmények is (l. FREUD [4] és [5], KIS [8]), az általános esetre azonban — tudomásom szerint — semmilyen tétel nem volt

4. Ha $\alpha(x)' = |x|^{\varepsilon} \exp(-x^{2k})$ $(k=1, 2, \ldots; \varepsilon > -1)$, akkor — mint az könnyen belátható — $\beta(x)$ egyenlő lehet $\exp\left(-\frac{x^{2k}}{4}\right)$-gyel, és ebben az esetben $q_n = \left(\frac{2n}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}$.

5. A Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratura eljárás konvergenciájára elégséges feltételek találhatók FREUD GÉZA [7] könyvének III. részében.

A Tétel bizonyításánál szükség lesz a következő segédtételre, amelyhez hasonlót az Olvasó FREUD GÉZA [6] dolgozatában találhat.

Segédtétel. Legyen $\gamma(x)>0$ egy olyan a valós tengelyen értelmezett függvény, hogy

$$|x|^n \gamma(x) < c_2 (\varrho_n)^n \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

$n=0,1,2,\ldots$, ahol $\{\varrho_n(\geqq 1)\}$ egy a γ függvénytől függő számsorozat. Legyen továbbá R tetszőleges rögzített egész szám, $G(x)$ pedig egy a valós tengelyen korlátos és egyenletesen folytonos függvény. Ekkor minden n természetes számhoz található egy olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú $\pi_n(x)$ polinom, amely eleget tesz a

$$\gamma(x)|g(x)-\pi_n(x)| < c_3 \omega_R\left(g; \frac{\varrho_n}{n}\right) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2}$$

egyenlőtlenségnek.

Bizonyítás. Az általánosított Jackson-tétel (l. Ju. A. BRUDNIJ [3]) szerint létezik egy olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú $\pi_n(x)$ polinom, hogy

$$|g(x)-\pi_n(x)| < c_4 \omega_R\left(g; \frac{\varrho_n}{n}\right) \qquad (|x| \leqq 4\varrho_n).$$

Megmutatjuk, hogy ez a $\pi_n(x)$ polinom a (2) egyenlőtlenséget is kielégíti. Valóban, ha $|x| \leqq 4\varrho_n$, akkor (1) következtében

$$\gamma(x)|g(x)-\pi_n(x)| < c_2 c_4 \omega_R\left(g; \frac{\varrho_n}{n}\right) \qquad (|x| \leqq 4\varrho_n).$$

Ha most $|x| \geqq 4\varrho_n$, akkor a FREUD [6] Lemma 3. szerint

$$\gamma(x)|g(x)-\pi_n(x)| \leqq \gamma(x)\left[\sup_{-\infty<x<\infty} |g(x)| + \left(\frac{|x|}{2\varrho_n}\right)^n \max_{|x|\leqq 4\varrho_n} |\pi_n(x)|\right] \leqq$$

$$\leqq c_2 \left(\frac{\varrho_n}{|x|}\right)^n \sup_{-\infty<x<\infty} |g(x)| + c_2 2^{-n}\left[\sup_{-\infty<x<\infty} |g(x)| + c_4 \omega_R\left(g; \frac{\varrho_n}{n}\right)\right] <$$

$$< c_5 2^{-n} < c_6 \omega_R\left(g; \frac{\varrho_n}{n}\right) \qquad (|x| \geqq 4\varrho_n).$$

Tehát c_3 egyenlő lehet $(c_2 c_4 + c_6)$-tal. A Segédtételt bebizonyítottuk.

Rátérünk a Tétel bizonyítására. A Segédtételből következően minden n-re létezik egy olan legfeljebb $(n-1)$-edfokú $\pi_n(x)$ polinom, hogy

$$|f(x)-\pi_n(x)| < c_7\beta(x)^{-1}\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right).$$

Innen

$$|f(x)-L_n(x,f)| \leqq c_7\beta(x)^{-1}\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}|f(x_{kn})-\pi_n(x_{kn})||l_{kn}(x)|.$$

Világos, hogy az első tag $o_x(1)$. Továbbá

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_{kn})-\pi_n(x_{kn})||l_{kn}(x)| \leqq \sup_{-\infty<x<\infty}[\beta(x)|f(x)-\pi_n(x)|]\sum_{k=1}^{n}\frac{|l_{kn}(x)|}{\beta(x_{kn})} \leqq$$

$$\leqq c_7\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{l_{kn}(x)^2}{\lambda_n(x_{kn})}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_n(x_{kn})\beta(x_{kn})^{-2}\right)^{1/2}.$$

Jól ismert, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{l_{kn}(x)^2}{\lambda_n(x_{kn})}=\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)^2$$

(l. pl. FREUD [7] I. (4.7) képlet). Innen és a $\beta(x)$ függvényre kirótt a) feltételből következően

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_{kn})-\pi_n(x_{kn})||l_{kn}(x) \leqq c_8\left[\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right)^2\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)^2\right]^{1/2}.$$

Kronecker egy tétele (l. ALEXITS [1] 2.2.2. Tétel) értelmében ez utóbbi kifejezés $o(1)$ minden olyan x pontban, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x)^2\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right)^2<\infty \tag{3}$$

Tételünk bizonyításához elegendő tehát belátnunk, hogy (3) α-majdnem mindenütt teljesül. Valóban,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_n(x)^2\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right)^2 d\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_R\left(f;\frac{q_n}{n}\right)^2<\infty,$$

tehát Beppo Levi tétele (l. SZŐKEFALVI-NAGY [9] 140. o.) szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x^2)\omega_R\left(f;\frac{\alpha_n}{n}\right)^2$$

sor α-majdnem mindenütt konvergens.

IRODALOM

[1] ALEXITS, GY.: *Convergence problems of orthogonal series*, Budapest, 1961.

[2] ALEXITS, GY.: Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), 233—236.

[3] Брудный, Ю. А.: Обобщение одной теоремы А. Ф. Тимана, *Доклады* АН СССР 148 (1963), 1237—1240.

[4] FREUD, G.: Lagrangesche Interpolation über die Nullstellen der Hermiteschen Orthogonalpolynome, *Studia Sci. Math. Hung.*, 4 (1968), 179—190.
[5] FREUD, G.: Lagrange-féle interpolációs eljárások konvergenciája végtelen intervallumon, *Matematikai Lapok*, 18 (1967), 289—292.
[6] FREUD, G.: On weighted polynomial approximation on the whole real axis, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 20 (1969), 223—225.
[7] FREUD, G.: *Orthogonal Polynomials*, Budapest, 1971.
[8] KIS, O Лагранжевом ингерполировании по обобщенным узлам Эрмита, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 23 (1972), 389—417.
[9] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest, 1954.

ЛАГРАНЖЕВО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Г. П. НЕВАИ

Пусть $\alpha(x)$ некоторая интегральная весовая функция, определенная на всей вещественной оси. Обозначим через x_{kn} корни n-го ортонормального относительно веса $d\alpha(x)$ многочлена, а через $\lambda_n(x)$ n-ую функцию Кристоффеля, принадлежашую к весу $d\alpha(x)$. Пусть далее $L_n(x, f)$ интерполяционный многочлен Лагранжа, совпадающий с функцией $f(x)$, определенной на всей оси, в узлах $\{x_{kn}\}_{k=1}^{n}$, а $\omega_R(f; t)$ модуль гладкости R-го порядка функции $f(x)$. Доказывается следуюшая

Теорема. *Допустим, что существует на всей оси определенная положительная функция* $\beta(x)$ *со следующим свойствами:*

а) *Функция* $\beta(x)^{-2}$ *интегрируема по* $d\alpha$ *и*

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_n(x_{kn})\,\beta(x_{kn})^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)^{-2}\,d\alpha(x).$$

б) *Для всех неотрицательных целых чисел* n *имеет место неравенство*

$$|x|^n \beta(x) < c_1 (q_n)^n \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где последовательность $\{q_n\}$ *такова, что* $q_n \geqq 1$ *и* $\dfrac{q_n}{n} \downarrow 0$, *если* $n \to \infty$.

Если $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty$ *и для некоторого фиксированного натурального числа* R

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_R\left(f; \frac{q_n}{n}\right)^2 < \infty,$$

то в этом случае $L_n(x, f)$ α*-почти всюду сходится к функцию* $f(x)$.

Замечания. 1. Подобную теорему доказал Г. Алексич [2] для конечного основного интервала.

2. Аналогичную теорему можно доказать о сходимости интерполяционных процессов Лагранжа по корням ортонормальных относительно веса, определенного на положительной полуоси, полиномов.

3. Для некоторых специальных случаев есть более точные результаты (см. Фройд [4] и [5], Киш [8]).

4. Если $\alpha(x)' = |x|^{\varepsilon} \exp(-x^{2k})$ $(k = 1, 2, \ldots;\ \varepsilon > -1)$, то можно взять $\beta(x)$ равной $\exp\left(-\dfrac{x^{2k}}{4}\right)$, и в этом случае $q_n = \left(\dfrac{2n}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}$.

5. Достаточные условия сходимости механического квадратурного процесса Гаусса—Якоби $(*)$ можно найти в третьей главе книги Г. Фройда [7].

LAGRANGEAN INTERPOLATION ON THE REAL AXIS

G. P. NÉVAI

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT FABER-SOROK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

DEÁK JENŐ

0. BEVEZETÉS

Jól ismert tény, hogy ha az $f(z)$ függvény a komplex sík valamely b pontjának egy környezetében analitikus, akkor az

$$1, z-b, (z-b)^2, \ldots \tag{0. 1}$$

polinomok szerint sorba fejtehető, azaz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n.$$

Ez a sor ($f(z)$-nek a b körüli hatványsora) egy b középpontú körben (vagy az egész síkon) állítja elő $f(z)$-t. Felmerül a kérdés, megadható-e (0. 1) helyett olyan

$$\Pi_0(z), \Pi_1(z), \Pi_2(z), \ldots$$

polinomsorozat, mely szerint nem feltétlenül kör alakú tartományban fejthetők sorba az analitikus függvények. Ezzel a problémával először G. FABER [1] foglalkozott. Fő eredménye a következő:

Legyenek a β_n-ek olyan komplex számok, amelyekkel a

$$z = g(t) = t + \beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \ldots \tag{0. 2}$$

függvény analitikus és egyrétű a $|t| > p$ körkülsőben ($p > 0$). Jelöljük g inverzét f-fel. Ekkor nyilván f is analitikus a végtelen valamely környezetében, és ott

$$t = f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \ldots \tag{0. 2}$$

alakban írható. Legyen

$$C_r = \{z : |f(z)| = r\}, \quad r > p$$

az f függvény egyik nívóvonala. Állítás: létezik olyan (f-től függő) polinomsorozat, hogy minden $r > p$ esetén bármely, a C_r-en belül analitikus függvény ezen polinomok szerint C_r belsejében sorba fejthető. FABER [1] konkrétan megad egy ilyen polinomsorozatot; ezeket a polinomokat az f-hez tartozó Faber-polinomoknak nevezzük, a szerintük haladó sorokat pedig Faber-soroknak. A Faber-polinomok pontos alakját később írjuk fel. A fenti sorfejtési tulajdonsággal azonban nemcsak a Faber-polinomok rendelkeznek, hanem bizonyos általánosításaik is, amelyeket általánosított Faber-polinomoknak nevezünk; ezeket is FABER [2] fedezte fel.

A hatványsorokra érvényes tételek egy része átvihető Faber-sorokra is. Vannak olyan módszerek, amelyek egy-egy tételkör átvitelére alkalmasak, ezek közül a leghatékonyabb H. TIETZ [4] nevéhez fűződik. TIETZ átviteli tételét, amelyet ő közönséges Faber-sorokra mondott ki, mi általánosított Faber-sorokra bizonyítjuk be ((2. A) tétel), majd ennek a segítségével ugyanazon analitikus függvény különböző általánosított Faber-sorfejtéseinek a kerületi viselkedését hasonlítjuk össze.

Az általánosított Faber-sorokat a TIETZ által bevezetett, és a közönséges Faber-sorokra alkalmazott lineáris operátorok általánosított változatának ((1. 1) és (1. 2)) segítségével vizsgáljuk.

1. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT FABER-SOR FOGALMA

Legyen g és $f=g^{-1}$ a (0. 2)—(0. 3)-ban definiált (a továbbiakban rögzített) függvény. Legyen továbbá

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{t^n}, \quad b_0 \neq 0$$

analitikus és sehol sem 0 a $|t|>p$-ben. Jelölje $I(C_r)$ a C_r görbe belsejét, $E(C_r)$ pedig a külsejét. Legyen

$$\bar{I}(C_r) = I(C_r) \cup C_r$$

és

$$\bar{E}(C_r) = E(C_r) \cup Cr.$$

A C_r-en analitikus függvényeken két operátort értelmezünk:

$$(L_r\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \varphi(\zeta) \frac{S(f(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in I(C_r), \tag{1. 1}$$

$$(L_r^*\varphi)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \varphi(\zeta) \frac{S(f(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in E(C_r). \tag{1. 2}$$

$L_r\varphi$, ill. $L_r^*\varphi$ analitikus $I(C_r)$-ben, ill. $E(C_r)$-ben, sőt, mivel az integrációs út φ regularitási tartományában áthelyezhető C_r-en kívüli, ill. belüli görbére:

(1. A) *$L_r\varphi$ analitikus $\bar{I}(C_r)$-en, $L_r^*\varphi$ analitikus $\bar{E}(C_r)$-en.*

Könnyen belátható továbbá, hogy:

(1. B) *L_r és L_r^* lineáris, és a következő értelemben folytonos: ha $\varphi_n \to \varphi$ C_r egy környezetében egyenletesen, akkor $L_r\varphi_n \to L_r\varphi$ és $L_r^*\varphi_n \to L_r^*\varphi$, $\bar{I}(C_r)$-en, ill. $\bar{E}(C_r)$-en egyenletesen.*

A Cauchy-féle integráltételből következik, hogy:

(1. C) *C_r egy környezetében $\varphi S(f) = L_r\varphi + L_r^*\varphi$.*

Rögzített φ esetén az (1. 2)-ben $\varphi(\zeta)S(f(\zeta))$ korlátos, $1/(\zeta - z)$ pedig 0-hoz tart, ha $z \to \infty$, így

$$(L_r^*\varphi)(\infty) = 0. \tag{1. 3}$$

Legyen most F analitikus $\bar{I}(C_r)$-en. Ekkor

$$F(g(t))=G(t)$$

analitikus a

$$K_r=\{t: |t|=r\}$$

körvonal egy környezetében, így a K_r egy környezetében analitikus $G(t)/S(t)$ függvény (feltettük, hogy S sehol sem tűnik el) a 0 körül Laurent-sorba fejthető:

$$\frac{G(t)}{S(t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n. \tag{1.4}$$

$t=f(z)$ helyettesítéssel az

$$\frac{F(z)}{S(f(z))}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f^n(z) \tag{1.5}$$

összefüggés C_r egy környezetében egyenletesen érvényes. L_r-et az (1. 5) mindkét oldalára alkalmazva:

$$\int_{C_{r+\varepsilon}} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\left[L_r\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f^n\right)\right](z)$$

C_r egy környezetében, az F-től függő elég kis ε-nal. Itt a bal oldal nyilván $F(z)$, a jobb oldalon L_r-et (1. B) szerint tagonként alkalmazhatjuk, így

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (L_r f^n)(z) \tag{1.6}$$

$\bar{I}(C_r)$-en egyenletesen fennáll. Vizsgáljuk ezután az $L_r f^n$ függvényeket. Az integrációs út áthelyezésével látható, hogy $L_r f^n$ r-től független, és az egész (nyílt) síkon analitikus. (1. C) szerint C_r egy környezetében

$$L_r f^n = f^n S(f)-L_r^* f^n. \tag{1.7}$$

Az itt szereplő függvények azonban analitikusak $\bar{E}(C_r)$-ben, így az (1. 7) ott is érvényes. (1. 3) szerint $(L_r^* f^n)(\infty)=0$, tehát $L_r f^n$-nek ugyanolyan szingularitása van a végtelenben, mint $f^n S(f)$-nek, és a ∞-beli értékük is azonos. Ezért (mivel $L_r f^n$ anlitikus az egész síkon) $L_r f^n$ nem más, mint $f^n S(f)$-nek a reguláris része. $f^n S(f)$-ben a legnagyobb kitevőjű tag $b_0 z^n$, így $n<0$ esetén $L_r f^n \equiv 0$, $n\geqq 0$ esetén pedig $b_0\neq 0$ miatt $L_r f^n$ pontosan n-edfokú polinom.

Vezessük be az $L_r f^n$ helyett a Π_n jelölést. Az így definiált polinomot az (f, S) függvénypárhoz tartozó n-edik általánosított Faber-polinomnak nevezzük. Ha az egyszerű Π_n jelölés félreérthető, akkor $\Pi_n^{(f,S)}$-et írunk. Az $S(t)\equiv 1$ esetben kapott $P_n=P_n^{(f)}=\Pi_n^{(f,1)}$ polinomot az f függvényhez tartozó n-edik (közönséges) Faber-polinomnak nevezzük. (1. 6) most már így írható:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(z). \tag{1.8}$$

Ez a formula $\bar{I}(C_r)$-en egyenletesen teljesül. (1. 8)-at az F függvény általánosított Faber-sorának ($\Pi_n=P_n$ esetén Faber-sorának) nevezzük.

A fentiekben követett gondolatmenetet alkalmazta TIETZ [4] az $S(t)\equiv 1$ speciális esetben.

Szükségünk lesz FABERnek a következő klasszikus tételére:

(1. D) a) *Tegyük fel, hogy F analitikus $I(C_r)$-ben. Ekkor egy és csak egy olyan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat létezik, amelyre*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(z), \quad z \in I(C_r). \tag{1.9}$$

Ezen $\{a_n\}$ sorozatra

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{1}{r},$$

és (1. 9) az $I(C_r)$ belsejében egyenletesen konvergens. Ha F-nek van szingularitása C_r-en, akkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}, \tag{1.10}$$

és (1. 9) az $E(C_r)$-ben divergens.

b) *Ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(z)$$

konvergens $I(C_r)$-ben, akkor ott analitikus függvényt állít elő.

c) *Ha az $\{a_n\}$ sorozatra teljesül (1. 10) $r>p$-vel, akkor (1. 9) olyan függvényt állít elő, amely $I(C_r)$-ben analitikus, de C_r-en van szingularitása.*

Megemlítjük még, hogy az általánosított Faber-polinomok a

$$\Pi_n = b_0 P_n + b_1 P_{n-1} + \ldots + b_n P_0$$

formulával fejezhetők ki a közönséges Faber-polinomok segítségével (FABER [2]).

Az általánosított Faber-polinomokra és -sorokra vonatkozó további eredmények találhatók SMIRNOV és LEBEDEV [5] könyvében (157—173. old.).

2. AZ ÁTVITELI TÉTEL

(2. A) *Tétel. Legyen*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(z) \tag{2.1}$$

konvergens $I(C_r)$-ben, $r>p$. Ekkor F analitikus $I(C_r)$-ben,

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n(z) \tag{2.2}$$

konvergens és analitikus $I(C_r) \cap E(C_p)$-ben, ahol $E(C_p) = \bigcup_{r>p} E(C_r)$. Továbbá

$$F(z) - S(f(z)) F_0(z) \tag{2.3}$$

analitikusan folytatható $E(C_p)$-re, a végtelenben eltűnik, és

$$F(z) - S(f(z)) F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\Pi_n(z) - S(f(z)) f^n(z)] \tag{2.4}$$

az $E(C_p)$ zárt részhalmazain egyenletesen teljesül.

Ezt az átviteli tételt közönséges Faber-sorokra TIETZ [4] igazolta.

Bizonyítás. (1. D) szerint F analitikus $I(C_r)$-ben, továbbá (2. 1) egyenletesen konvergens $I(C_r)$ belsejében. Ugyancsak (1. D) szerint (2. 1) azonos F-nek az 1. pontban definiált általánosított Faber-sorával (r helyett r'-vel, $p<r'<r$). (1. 5) szerint (2. 2) egyenletesen konvergens $C_{r'}$ egy környezetében (minden $p<r'<r$ esetén), azaz konvergens és analitikus $I(C_r)\cap E(C_p)$-ben. (1. 7) szerint

$$\Pi_n(z)-S(f(z))f^n(z) = -(L_r^* f^n)(z). \tag{2. 5}$$

Mivel (2. 2) egyenletesen konvergens $C_{r'}$ egy környezetében, (1. B) miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (L_r^* f^n)(z)$$

egyenletesen konvergens $\bar{E}(C_{r'})$-ben, azaz (2. 4) jobb oldala (2. 5) szerint $\bar{E}(C_{r'})$-ben egyenletesen konvergens; továbbá (2. 1) és (2. 2) miatt $C_{r'}$-n igaz a (2. 4) egyenlőség, így (2. 3) a (2. 4)-gyel analitikusan folytatható $\bar{E}(C_{r'})$-re. Tehát (2. 3) valóban analitikusan folytatható $\bar{E}(C_p)$-re. (2. 4) minden $\bar{E}(C_{r'})$-n egyenletesen konvergens ($p<r'<r$), tehát valóban egyenletesen konvergens $E(C_p)$ zárt részhalmazain. (2. 3) a végtelenben (1. 3) miatt tűnik el.

3. KONVERGENCIA ÉS SZUMMABILITÁS

Legyen a továbbiakban $r>p$ rögzített.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(z) \tag{3. 1}$$

a továbbiakban mindig $I(C_r)$-ben analitikus függvény, és

$$F_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{3. 2}$$

(3. A) *Lemma. Legyen* $\alpha>-1$. (3. 1) *pontosan akkor* (C,α)*-szummábilis* $z_0\in C_r$*-ben, ha* (3. 2) (C,α)*-szummábilis* $f(z_0)$*-ban.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\Pi_n(z_0) - S(f(z_0))f^n(z_0)] \tag{3. 3}$$

(C,α)-szummábilis. Ehhez viszont HARDY és LITTLEWOOD tétele ([3], 45. tétel) szerint elég belátni, hogy (3. 3) konvergens, és

$$a_n[\Pi_n(z_0) - S(f(z_0))f^n(z_0)] = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3. 4}$$

(2. A) szerint azonban (3. 3) konvergens. (1. D) szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n \Pi_n(z)$$

is konvergens $I(C_r)$-ben, így erre is alkalmazhatjuk a (2. A) tételt, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} [na_n \Pi_n(z_0) - S(f(z_0))f^n(z_0)] \tag{3. 5}$$

konvergens, tehát (3. 4) teljesül.

(3. B) *Lemma.* (3. 1) *pontosan akkor abszolút konvergens* $z_0 \in C_r$*-ben, ha* (3. 2) *abszolút konvergens* $f(z_0)$*-ban.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy (3. 3) abszolút konvergens. (3. 4)-hez hasonlóan igazolható, hogy

$$a_n[\Pi_n(z_0) - S(f(z_0))f^n(z_0)] = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

azaz (3. 3) valóban abszolút konvergens.

(3. C) *Tétel. Ha* (3. 1) *abszolút konvergens* C_r *egy pontjában, akkor abszolút konvergens az egész* C_r*-en.*

Bizonyítás. Ha (3. 1) abszolút konvergens $z_0 \in C_r$-ben, akkor (3. B) szerint (3. 2) abszolút konvergens $f(z_0) \in K_r$-ben. Hatványsorról lévén szó, evidens, hogy (3. 2) abszolút konvergens az egész K_r-en, így ismét (3. B)-t alkalmazva adódik a tétel állítása.

Ennek alapján (3. B)-t így is fogalmazhatjuk:

(3. D) *Lemma.* (3. 1) *pontosan akkor abszolút konvergens* C_r*-en, ha* (3. 2) *abszolút konvergens* K_r*-en.*

(3. E) *Lemma. Legyen B egy konvergenciatartó szummációs mátrix.* (3. 1) *pontosan akkor B-szummábilis* $z_0 \in C_r$*-ben, ha* (3. 2) *B-szummábilis* $f(z_0)$*-ban.*

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül adódik (3. 3) konvergenciájából.

(3. F) *Lemma.* (3. 1) *pontosan akkor egyenletesen konvergens a* $H \subset C_r$ *halmazon, ha* (3. 2) *egyenletesen konvergens* $f(H) \subset K_r$*-en.*

Bizonyítás. (2. A) szerint (2. 4) egyenletesen konvergens H-n, így (3. 1) pontosan akkor egyenletesen konvergens H-n, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n S(t) t^n \tag{3. 6}$$

egyenletesen konvergens $f(H)$-n. De $|S(t)|$-nek $f(H)$-n van pozitív alsó és felső korlátja, így (3. 6) pontosan akkor egyenletesen konvergens $f(H)$-n, ha (3. 2) ilyen tulajdonságú.

Eddig az általánosított Faber-sorokat egy hozzájuk rendelt hatványsorral hasonlítottuk össze. Ezután különböző általánosított Faber-sorfejtések egymással való kapcsolatát vizsgáljuk.

Legyen most megadva az S függvény mellett egy másik

$$S^\circ(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^\circ}{t^n}, \quad b_0^\circ \neq 0$$

analitikus és $|t| > p$-ben el nem tűnő függvény is. Legyen $\Pi_n^\circ = \Pi_n^{(f, S^\circ)}$. Az előző

lemmák szerint, ha (3. 1) konvergens, (C, α)-szummábilis ($\alpha > -1$), abszolút konvergens, vagy egy halmazon egyenletesen konvergens, akkor

$$F^{\circ}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n^{\circ}(z) \tag{3. 7}$$

is ilyen tulajdonságú. (A lemmákat először (3. 1)-re és (3. 2)-re, majd visszafelé (3. 2)-re és (3. 7)-re kell alkalmazni.) Azonban a (3. 1) és a (3. 7) más-más függvényt állít elő. Felmerül a kérdés: mi igaz ugyanannak a függvénynek a kétféle (Π_n és Π_n° szerinti) sorfejtésére. A továbbiakban erre a kérdésre keresünk választ. Legyen F másik sorfejtése:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\circ} \Pi_n^{\circ}(z). \tag{3. 8}$$

(3. 1) és (3. 8) összehasonlítása előtt egy kis előkészítésre van szükségünk.

Legyen

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n t^n \tag{3. 9}$$

konvergens, ha $\varrho < |t| < 1$ ($\varrho > 0$). Azt mondjuk, hogy $\varphi \in (C, \alpha)$, ha a reguláris része,

$$\varphi_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n \tag{3. 10}$$

$t = 1$-ben (C, α)-szummábilis. (3. 10)-hez hasonlóan φ főrészére a

$$\varphi_-(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n t^n \tag{3. 11}$$

jelölést használjuk. Azt mondjuk, hogy $\varphi \in (K, \alpha)$, ha

$$\left\{\frac{\gamma_n}{A_n^{\alpha}}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad \left(A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}\right)$$

konvergens sorozat. A Cesàro-szummabilitás definíciója szerint $\varphi_+ \in (C, \alpha)$ pontosan akkor, ha

$$\frac{\varphi_+(t)}{(1-t)^{\alpha+1}} \in (K, \alpha). \tag{3.12}$$

Az is igaz azonban, hogy:

(3. G) *Lemma.* $\varphi \in (C, \alpha)$ *pontosan akkor, ha*

$$\frac{\varphi(t)}{(1-t)^{\alpha+1}} \in (K, \alpha). \tag{3.13}$$

Bizonyítás. $\varphi \in (C, \alpha)$ definíció szerint pontosan akkor, ha $\varphi_+ \in (C, \alpha)$. Ez az előbbi megjegyzés szerint pontosan akkor teljesül, ha (3. 12) fennáll. Elég tehát a lemma bizonyításához belátni, hogy (3. 12) ekvivalens (3. 13)-mal, ehhez viszont elég megmutatni, hogy

$$\frac{\varphi_-(t)}{(1-t)^{\alpha+1}} \in (K, \alpha) \tag{3. 14}$$

mindig teljesül. Itt a φ_--ra a (3. 11) sorfejtés érvényes, továbbá

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} t^n, \quad |t|<1.$$

$\varrho<|t|<1$-ben a két sor szorzatát képezve a

$$\frac{\varphi_-(t)}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n t^n$$

Laurent-sorban $n \geqq -1$-re

$$\delta_n = \gamma_{-1} A_{n+1}^{\alpha} + \gamma_{-2} A_{n+2}^{\alpha} + \dots .$$

Legyen μ természetes szám, ekkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\delta_n}{A_n^{\alpha}} - \varphi_-(1) \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{-\nu} \left(\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - 1 \right) \right| \leqq$$

$$\leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{\mu} \left| \gamma_{-\nu} \left(\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - 1 \right) \right| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \left| \gamma_{-\nu} \left(\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - 1 \right) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\mu} \overline{\lim_{n\to\infty}} |\gamma_{-\nu}| \left| \frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - 1 \right| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} |\gamma_{-\nu}| \left(\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} + 1 \right).$$

Rögzített ν mellett $\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} \to 1$, így

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\delta_n}{A_n^{\alpha}} - \varphi_-(1) \right| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} |\gamma_{-\nu}| \left(\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} + 1 \right).$$

A (3. 11) 1-nél kisebb sugarú körön kívül konvergens, így a Cauchy—Hadamard-formula szerint alkalmas K konstanssal és $\tau<1$ számmal

$$|\gamma_{-\nu}| \leqq K\tau^{\nu}.$$

Alkalmas K' konstanssal:

(3. 15)
$$\frac{A_{n+\nu}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} \leqq K' \left(\frac{n+\nu}{n} \right)^{\alpha},$$

így

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\delta_n}{A_n^{\alpha}} - \varphi_-(1) \right| \leqq KK' \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{n+\nu}{n} \right)^{\alpha} \right] \tau^{\nu}.$$

Itt

$$\frac{n+\nu}{n} \leqq \nu+1,$$

$$1 + \left(\frac{n+\nu}{n} \right)^{\alpha} \leqq 1 + \left(\frac{n+\nu}{n} \right)^{\alpha+1} \leqq 1 + (\nu+1)^{\alpha+1} \leqq 2(\nu+1)^{\alpha+1}.$$

Ebből $\mu \to \infty$ esetén:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{\delta_n}{A_n^{\alpha}} - \varphi_-(1) \right| \leqq 0,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{A_n^{\alpha}}=\varphi_-(1), \tag{3.16}$$

tehát (3. 14) teljesül.

Vezessük még be a következő jelölést:

$$\check{S}(t)=\frac{S(t)}{S^{\circ}(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\check{b}_n}{t^n}.$$

Itt $\check{b}_0\neq 0$, $\check{S}$ a $|t|>p$-ben analitikus és nem tűnik el.

Most már rátérhetünk F két különböző sorfejtésének, (3. 1)-nek és (3. 8)-nak a vizsgálatára.

(3. H) *Tétel. Ha* (3. 1) (C,α)*-szummábilis* $z_0\in C_r$*-ben,* $\alpha>-1$, *akkor* (3. 8) *is* (C,α)*-szummábilis* z_0*-ban.*

It a két sorfejtés szerepe felcserélhető, így a két sor pontosan ugyanolyan rendben Cesàro-szummábilis.

Bizonyítás. (3. A) szerint

$$F_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$$

$t_0=f(z_0)$-ban (C,α)-szummábilis. A jelölések egyszerűsítése céljából legyen $t_0=1$. Így $F_1\in(C,\alpha)$, azaz (1. 4) szerint

$$\frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n t^n\in(C,\alpha),$$

és a (3. G) alapján

$$\frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)}\cdot\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\in(K,\alpha). \tag{3.17}$$

Ha belátjuk, hogy

$$\frac{F(g(t))}{S(t)}\cdot\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\in(K,\alpha)). \tag{3.18}$$

is fennáll, akkor (3. G)-ből

$$\frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^{\circ}t^n\in(C,\alpha),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\circ}t^n\in(C,\alpha).$$

$t_0=1$-ről visszatérve $t_0=f(z_0)$-ra adódik, hogy

$$F_1^{\circ}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\circ}t^n$$

(C,α)-szummábilis $f(z_0)$-ban, tehát (3. A) szerint (3. 8) (C,α)-szummábilis z_0-ban.

Hátravan (3. 18) igazolása. Legyen

$$\psi(t) = \frac{F(g(t))}{S(t)} \cdot \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n t^n. \tag{3. 19}$$

Ez konvergens, ha $p<|t|<1$. (A $t_0=1$ feltevés miatt most $p<1$.) (3. 17) szerint

$$\psi \in (K, \alpha). \tag{3.20}$$

A (3. 18) így is írható:

$$\psi \check{S} \in (K, \alpha). \tag{3. 21}$$

Már csak (3. 21)-et kell bebizonyítani. Legyen

$$\psi(t)\,\check{S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n t^n.$$

$\check{S}$ sorát és a (3. 19) sort összeszorozva:

$$\eta_n = \check{b}_0 \varepsilon_n + \check{b}_1 \varepsilon_{n+1} + \check{b}_2 \varepsilon_{n+1} + \ldots,$$

azaz

$$\frac{\eta_n}{A_n^\alpha} = \check{b}_0 \frac{A_n^\alpha}{A_n^\alpha} \frac{\varepsilon_n}{A_n^\alpha} + \check{b}_1 \frac{A_{n+1}^\alpha}{A_n^\alpha} \frac{\varepsilon_{n+1}}{A_{n+1}^\alpha} + \ldots,$$

tehát

$$\frac{\eta_n}{A_n^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} \frac{\varepsilon_\nu}{A_\nu^\alpha}, \tag{3. 22}$$

ahol

$$c_{n\nu} = \begin{cases} 0 & (\nu < n) \\ \check{b}_{\nu-n} \dfrac{A_\nu^\alpha}{A_\nu^\alpha} & (\nu \geqq n). \end{cases} \tag{3. 23}$$

(3. 20) szerint $\{\varepsilon_\nu / A_\nu^\alpha\}_{\nu=0}^{\infty}$ konvergens sorozat. (3. 21) igazolásához azt kell belátni, hogy $\{\eta_n / A_n^\alpha\}_{n=0}^{\infty}$ is konvergens sorozat, ehhez (3. 22) szerint elég megmutatni, hogy a $[c_{n\nu}]$ mátrix konvergenciatartó szummációs eljárás.

Ennek bizonyításához a Toeplitz—Schur-tétel szerint azt kell csak igazolni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} c_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{3. 24}$$

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ konvergens sorozat,} \tag{3. 25}$$

és

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}|\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ korlátos sorozat.} \tag{3. 26}$$

(3. 24) evidens (3. 23) alapján. $\check{S}$ 1-nél kisebb sugarú körön kívül reguláris, így alkalmas $K>0$-val és $\tau<1$-gyel:

$$|\check{b}_\nu| \leqq K\tau^\nu. \tag{3. 27}$$

(3. 15) és (3. 27) szerint

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}| = \sum_{\nu=n}^{\infty} |\check{b}_{\nu-n}| \frac{A_\nu^\alpha}{A_n^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} |\check{b}_\mu| \frac{A_{n+\mu}^\alpha}{A_n^\alpha} \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} K\tau^\mu K' \left(\frac{n+\mu}{n}\right)^\alpha \leqq$$

$$\leqq 2KK' \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} \tau^\mu (\mu+1)^{\alpha+1}\right],$$

tehát (3. 26) teljesül. A (3. G) bizonyításában levő számolást φ helyett $\check{S}$-re, δ_n helyett

$$\delta_n' = \check{b}_0 A_n^\alpha + \check{b}_1 A_{n+1}^\alpha + \check{b}_2 A_{n+2}^\alpha + \ldots \tag{3.28}$$

-ra elvégezve adódik, hogy (3. 16)-hoz hasonlóan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n'}{A_n^\alpha} = \check{S}(1),$$

de (3. 23) és (3. 28) szerint

$$\frac{\delta_n'}{A_n^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu},$$

azaz (3. 25) teljesül.

(3. I) *Tétel. Ha* (3. 1) *abszolút konvergens* C_r*-en, akkor* (3. 8) *is abszolút konvergens* C_r*-en.*

Bizonyítás. (3. D) szerint (3. 2), és így

$$\frac{F(g(t))}{S(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$$

is abszolút konvergens K_r-en. Továbbá $\check{S}$ Laurent-sora abszolút konvergens K_r-en, így

$$\frac{F(g(t))}{S(t)} \check{S}(t) = \frac{F(g(t))}{S^\circ(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^\circ t^n$$

abszolút konvergens K_r-en, azaz ismét (3. D)-t alkalmazva: (3. 8) abszolút konvergens C_r-en.

(3. J) *Tétel. Ha* (3. 1) *Abel-szummábilis* $z_0 \in C_r$*-ben, akkor* (3. 8) *is Abel-szummábilis* z_0*-ban.*

Bizonyítás. (3. E) szerint (3. 2), és így

$$\frac{F(g(t))}{S(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$$

is Abel-szummábilis $t_0 = f(z_0)$-ban. Ezt a t_0-ban reguláris $\check{S}$ függvénnyel szorozva az Abel-szummabilitás megmarad, azaz

$$\frac{F(g(t))}{S^\circ(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^\circ t^n$$

Abel-szummábilis t_0-ban. (3. E)-t most a másik irányba alkalmazva adódik a tétel állítása.

(3. K) *Tétel. Ha* (3. 1) *egyenletesen konvergens a* $H \subset C_r$ *halmazon, akkor* (3. 8) *is egyenletesen konvergens H-n.*

Bizonyítás. (3. F) szerint

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n = \frac{F(g(t))}{S(t)} \tag{3.29}$$

egyenletesen konvergens $h=f(H)\subset K_r$-en. Ugyancsak (3. F) szerint a tétel igazolásához elég belátni, hogy ebből következik

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{\circ} t^n = \frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)} \tag{3.30}$$

h-n való egyenletes konvergenciája.

$$\frac{F(g(t))}{S(t)} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{\tau}} = \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} a_\mu t^\mu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\tau^\nu}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \tau^{k-n}\right) t^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \tau^k\right) t^n,$$

ahol $\tau \in K_r$, $p < |t| < r$. Ugyanígy

$$\frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t^n} \sum_{n=-\infty}^{n} a_k^{\circ} \tau^k\right) t^n,$$

azonban

$$\frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{\tau}} = \check{S}(t) \left[\frac{F(g(t))}{S(t)} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{\tau}}\right],$$

azaz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{\circ} \tau^k\right) t^n = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\check{b}_l}{t^l}\right) \left[\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau^\mu} \sum_{\nu=-\infty}^{\mu} a_\nu \tau^\nu\right) t^\mu\right],$$

tehát

$$\frac{1}{\tau^n} \sum_{k=-\infty}^{n} a_k^{\circ} \tau^k = \check{b}_0 \frac{1}{\tau^n} \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \tau^k + \check{b}_1 \frac{1}{\tau^{n+1}} \sum_{k=-\infty}^{n+1} a_k \tau^k + \ldots,$$

így

$$\sum_{k=-\infty}^{n} a_k^{\circ} \tau^k = \check{b}_0 \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \tau^k + \frac{\check{b}_1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{n+1} a_k \tau^k + \ldots. \tag{3.31}$$

Másrészt (3. 29) és (3. 30) alapján

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n^{\circ} t^n = \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\check{b}_k}{t^k}\right), \quad t \in I(K_r) \cap E(K_p).$$

Itt (3. A) és (3. H) szerint a szereplő sorok h-n konvergensek, ezért az Abel-féle folytonossági tétel szerint

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{\circ}\tau^n = \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\tau^l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\check{b}_k}{\tau^k}\right), \quad \tau\in h,$$

vagyis

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{\circ}\tau^k = \check{b}_0\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\tau^k + \frac{\check{b}_1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\tau^k + \ldots,$$

ebből (3. 31)-et levonva:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{\circ}\tau^k = \check{b}_0\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\tau^k + \frac{\check{b}_1}{\tau}\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\tau^k + \ldots \tag{3. 32}$$

(3. 29) egyenletesen konvergens h-n, így minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan N természetes szám, hogy minden $\nu>N$-re

$$\left|\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k\tau^k\right| < \varepsilon \tag{3. 33}$$

minden $\tau\in h$-ra. Legyen $n\geqq N$, ekkor (3. 33) és (3.32) szerint

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{\circ}\tau^k\right| \leqq |\check{b}_0|\varepsilon + \left|\frac{\check{b}_1}{\tau}\right|\varepsilon + \ldots = \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\check{b}_k}{\tau^k}\right| = \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\check{b}_k|}{r^k},$$

tt a $\sum|\check{b}_k|/r^k$ véges szám, tehát (3. 30) egyenletesen konvergens h-n.

A (3. H) tétellel kapcsolatban felmerül a kérdés: igaz marad-e, ha (C, α) helyett tetszőleges más szummációs eljárást alkalmazunk? Erre a kérdésre még a permanens szummációs eljárások körében is tagadó választ kaphatunk. Tekintsük e célból a sorok zárójelezéseit. Ezek nyilván permanens szummációs eljárások, hiszen egy konvergens sor összegén a zárójelezés nem változtat. Egy ilyen zárójelezést triviálisnak nevezünk, ha véges soktól eltekintve minden zárójel a sornak csak egy tagját foglalja magába.

(3. L) *Tétel. Legyen a B szummáció egy nem triviális zárójelezés. Ekkor* (3. 1)*-nek $z_0\in C_r$-ben való B-szummabilitásából* **nem** *következik, hogy* (3. 8) *is B-szummábilis z_0-ban.*

Bizonyítás. A tételt csak egy speciális esetben igazoljuk: legyen a B szummáció az a zárójelezés, melynek során a $2n$-edik és a $(2n+1)$-edik tagot foglaljuk egy zárójelbe ($n=0, 1, \ldots$). (Az általános eset bizonyítása hasonlóan történhet.) Legyen

$$p = \frac{1}{2}, \quad r = 1, \quad z_0 = 1,$$

$$f(z) = z, \quad S(t) \equiv 1, \quad S^{\circ}(t) = \frac{1}{2+\frac{1}{t}}.$$

Ekkor $\Pi_n(z) = z^n$. Legyen

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[\Pi_{4n}(z) - \Pi_{4n+1}(z)] = \sum_{n=0}^{\infty}(z^{4n} - z^{4n+1})$$

Ez a sorfejtés $z_0=1$-ben nyilván B-szummábilis. Legyen másrészt

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\circ}\Pi_n^{\circ}(z). \tag{3.34}$$

A tétel igazolására elég megmutatni, hogy ez nem B-szummábilis 1-ben. Tegyük fel, hogy (3. 34) B-szummábilis 1-ben. Ekkor (3. E) szerint

$$F_1^{\circ}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\circ}t^n \tag{3.35}$$

is B-szummábilis $t_0=f(z_0)=f(1)=1$-ben. Azonban

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{\circ}t^n=\frac{F(g(t))}{S^{\circ}(t)}=F(t)\left(2+\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(t^{4n}-t^{4n+1})\right]\left(2+\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(t^{4n-1}+t^n-2t^{4n+1}),$$

azaz

$$F_1^{\circ}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(t^{4n}-2t^{4n+1}+t^{4n+3}),$$

tehát F_1° sora $t_0=1$-ben

$$1-2+0+1+1-2+0+1\pm\ldots,$$

ennek a B-transzformáltja $-1+1-1+1\mp\ldots$, tehát (3. 35) feltevésünkkel ellentétben nem B-szummábilis 1-ben.

IRODALOM

[1] Faber, G.: Über polynomische Entwickelungen, *Math. Ann.* **57** (1903) 389—408.
[2] Faber, G.: Über polynomische Entwickelungen, *Math. Ann.* **64** (1907) 116—135.
[3] Hardy, G. H.: *Divergent series,* Clarendon Press, Oxford (1949).
[4] Tietz, H.: Faber series and the Laurent decomposition, *Mich. Math. J.* **4** (1957) 175—179.
[5] Smirnov, V. I.—Lebedev, N. A.: *Functions of a Complex Variable,* Iliffe Books Ltd, London (1968).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФАБЕРА

ЕНЁ ДЭАК

SOME PROPERTIES OF THE GENERALIZED FABER SERIES

J. DEÁK

HÁROM FŐKÖR EGY EXTREMÁLIS HELYZETE

ROSTA VERA

Egy bolygón bizonyos számú, mondjuk n, támaszpontot akarunk létesíteni, hogy azokból kiindulva a bolygót felkutassuk. Hogyan kell a támaszpontok helyét választani, ha azt akarjuk, hogy a bolygó valamely pontjának a legközelebbi támaszponttól mért távolságának maximuma minimális legyen? Ennek a problémának a megoldása csupán $n \leqq 7$-re, továbbá $n=10$-, 12- és 14-re ismert [1, 2, 3]. Az extremális pontrendszerek karaktere annyira függ n speciális értékétől, hogy az általános megoldásra vonatkozóan még egy sejtés felállítása is szinte reménytelennek látszik.

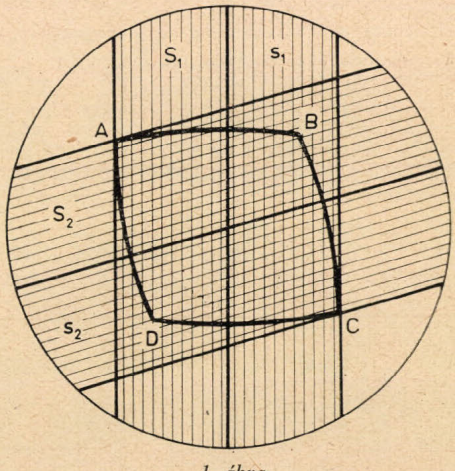
Egy bolygó felkutatásának egy másik módja az, hogy köréje a bolygó lefényképezésére berendezett n műholdat küldünk. Tegyük fel, hogy a bolygó forgás nélkül lebeg az űrben, és hogy a műholdak megadott, egyenlő magasságban keringenek a bolygó felett. Hogyan kell a műholdak pályáját választani, hogy azok a legjobban befogják a bolygót? Pontosabban: hogyan kell egy gömbön n főkört úgy elhelyezni, hogy a gömb valamely pontjának a legközelebbi főkörtől mért távolságának maximuma minimális legyen?

Ezt a problémát Fejes Tóth László vetette fel. Sejtése szerint az extremális helyzetben a főkörök a gömböt $2n$ egybevágó gömbkétszögre bontják [4]. Ha ez a sejtés helyes, akkor itt — ellentétben az előbbi problémával — megvan az általános megoldás lehetőségének reménye.

A sejtés $n=2$-re nyilvánvalóan igaz. Az alábbiakban bebizonyítjuk a sejtés helyességét $n=3$-ra.

Legyen az egységgömbön s_1, s_2 és s_3 három főkör. Azok a pontok, amelyek s_i-től legfeljebb $\pi/6$ gömbi távolságra vannak, egy s_i-re szimmetrikus $\pi/3$ szélességű gömbövet alkotnak. Jelöljük ezt a gömbövet S_i-vel. Azt állítjuk, hogy ha S_1, S_2 és S_3 együttesen lefedi a gömböt, akkor s_1, s_2 és s_3 a gömböt hat egybevágó gömbkétszögre bontja.

Legyen s_1 és s_2 hajlásszöge α. Megmutatjuk először, hogy ha $\alpha > \pi/3$, akkor S_1, S_2 és S_3 nem fedi le a gömböt. Messe s_1 és s_2 egymást az északi és déli pólusban. Ha s_1 és s_2 hajlásszöge $> \pi/3$, akkor az s_1 és s_2 által meghatározott négy gömbkétszög közül mindegyikben van olyan rész, amelyet S_1 és S_2 nem fed le. Ez nyilvánvaló,



1. ábra

ha nézzük az egyenlítő S_1 és S_2 által le nem fedett részeit. A négy fedetlen rész közül mindegyik két-két $\pi/3$ sugarú nyílt gömbsüveg metszete. Nevezzük ezeket a részeket lencséknek. Be kell látnunk, hogy S_3 nem képes lefedni mind a négy lencsét.

S_3 komplementere két antipódikus, $\pi/3$ sugarú gömbsüveg, amelyek középpontjai s_3 pólusai. Ha tehát S_3 lefedi valamelyik lencsét, akkor s_3 mindkét pólusa ennek a lencsének minden pontjától legalább $\pi/3$ távolságra van. Ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy nincs a gömbön olyan pont, amelynek mind a négy lencsétől mért távolsága $>\pi/3$. Más szavakkal: azt kell belátnunk, hogy a lencsék $\pi/3$ távolságú paraleltartományai lefedik a gömböt.

Mérjünk fel minden egyes lencse minden határpontjában a lencsét határoló körívre merőlegesen egy-egy $\pi/3$ hosszúságú félig nyílt szakaszt. Mivel ezek a szakaszok benne vannak az illető lencsék paraleltartományaiban, csupán a lencsék és ezen szakaszok unióján kívül fekvő pontokra kell fordítani a figyelmünket. Ezek a pontok két nyílt négyszöget alkotnak. Legyen $ABCD$ az egyik négyszög, mégpedig úgy betűzve, hogy A és C a két nagyobb lencse egy-egy csúcsa legyen. Mivel a négyszög oldalai nem nagyobbak $\pi/3$-nál, azért az A és C körül írt $\pi/3$ sugarú nyílt körök lefedik a négyszöget.

Ezzel elintéztük azt az esetet, amikor $\alpha>\pi/3$. Ha α $\pi/3$-nál nagyobb értékeken át $\pi/3$-hoz tart, akkor a két kisebb lencse két ponttá zsugorodik. Az $\alpha=\pi/3$ esetben csak ez a két pont a gömb olyan pontja, amely nincs benne az S_1 és S_2 által szabadon hagyott két nyílt lencse $\pi/3$ távolságú paraleltartományában. Ha tehát $\alpha=\pi/3$ és S_1, S_2 és S_3 lefedi a gömböt, akkor s_1, s_2 és s_3 pólusai az egyenlítőt hat egyenlő ívre bontják.

Ha $\alpha<\pi/3$, akkor ismét nem lesz olyan pont, amely mindkét lencsétől legalább $\pi/3$ távolságra van, s így ez az eset is kizárható. Az $\alpha<\pi/3$ eset azonban a fentiek figyelembe vétele nélkül is könnyen elintézhető, mert a lencsék most tartalmaznak egy-egy $\pi/3$-nál nagyobb átmérőjű kört. Ezek pedig egy $\pi/3$ szélességű gömbövvel nem fedhetők le.

Megjegyzés. E dolgozat megírása után jutott tudomásomra, hogy J. Linhart [5] a fenti sejtés helyességét $n=4$-re is bebizonyította.

IRODALOM

[1] L. Fejes Tóth: Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten. Matematikai és Fizikai Lapok 50 (1943) 40—46.
[2] K. Schütte: Überdeckung der Kugel mit höchstens acht Kreisen. Math. Ann. 129 (1955) 181—186.
[3] G. Fejes Tóth: Kreisüberdeckungen der Sphäre. Studia Sci. Math. Hung. 4 (1969) 225—247.
[4] L. Fejes Tóth: Exploring a planet. Amer. Math. Monthly, Research problem (megjelenőben).
[5] J. Linhart: Eine extremale Verteilung von Grosskreisen. Elemente der Math. (megjelenőben).

ЭКСТРЕМИЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ТРЕХ БОЛЬШИХ КРУГОВ

ВЕРА РОШТА

AN EXTREMAL DISTRIBUTION OF THREE GREAT CIRCLES

VERA ROSTA

RITKA MÁTRIXOK INVERTÁLÁSA GRÁFOK SEGÍTSÉGÉVEL

RUPP MÁRTA

BEVEZETÉS

Ismeretes, hogy a Sherman—Morrison—Woodbury-formula szerint, ha $\mathbf{D}$ n-edrendű, invertálható mátrix és $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ $n \times r$ típusú mátrixok, ahol $r \leqq n$, akkor $\mathbf{D}+\mathbf{U}\mathbf{V}^T$ akkor és csak akkor invertálható, ha $\mathbf{E}+\mathbf{V}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ invertálható ($\mathbf{E}$ r-edrendű), az inverzre pedig a

$$(\mathbf{D}+\mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{D}^{-1}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{E}+\mathbf{V}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{D}^{-1}$$

összefüggés érvényes.

Ezt a formulát akkor célszerű használni, ha egy kvadratikus $\mathbf{M}$ mátrixot úgy tudunk $\mathbf{M} = \mathbf{D}+\mathbf{U}\mathbf{V}^T$ alakban felírni, hogy $r \ll n$, és a $\mathbf{D}^{-1}$ mátrixot vagy már ismerjük, vagy könnyen ki tudjuk számítani.

A következőkben olyan módszert ismertetünk, mellyel szimmetrikus, domináns átlójú, ritka mátrixot — egy a mátrixhoz rendelt gráf segítségével — a Sherman—Morrison—Woodbury-formulához alkalmas alakra tudunk hozni.

Számos olyan módszer ismeretes, mellyel ún. ritka (sparse) mátrixot egy a mátrixhoz rendelt gráf segítségével hozhatunk invertálás szempontjából praktikusabb alakra. Lásd például F. Harary [2] és A. L. Dulmage—M. S. Mendelsohn [4] dolgozatát. Ezek a módszerek azonban szimmetrikus mátrixokra nem alkalmazhatók. Módszerünk G. Kron ún. diakoptikai módszerein alapuló, villamoshálózatok egyenletrendszerét a hálózat részekre bontásával megoldó módszer (l. a [8] irodalmi hivatkozás (55) összefüggését) mátrixelméleti kielemzésének általánosítása.

DEFINÍCIÓK

1. Egy $\mathbf{M}$ mátrix reducibilis, ha létezik $\mathbf{P}$ permutáció mátrix úgy, hogy

$$\mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{P}^T = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_{22} \end{vmatrix}$$

alakú, ahol $\mathbf{M}_{11}$ és $\mathbf{M}_{22}$ négyzetes mátrixok.

Az $\mathbf{M}$ mátrix irreducibilis, ha nem reducibilis.

Ha egy szimmetrikus mátrix reducibilis, akkor kvázidiagonál, azaz létezik olyan $\mathbf{P}$, hogy

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^T = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_{22} \end{vmatrix}$$

alakú, ahol $\mathbf{B}_{11}$ és $\mathbf{B}_{22}$ négyzetes, (szimmetrikus) mátrixok.

2. Egy **M** mátrix domináns átlójú, ha

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}| \leqq |m_{ii}| \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Egy mátrix irreducibilisen domináns átlójú, ha irreducibilis, és domináns átlójú, de legalább egy i-re a határozott egyenlőtlenség érvényes.

Egy mátrix duplán domináns átlójú, ha domináns átlójú és a fenti egyenlőtlenségben legalább két i-re a határozott egyenlőtlenség érvényes.

3. Egy irányítás nélküli gráf egyszerű, ha nem tartalmaz sem párhuzamos, sem hurokéleket.

4. Komponensnek nevezzük egy nem összefüggő gráf olyan részgráfjait, melyeket egyetlen összefüggő részgráf sem tartalmaz valódi részeként.

5. Egy összefüggő gráfban vágásnak nevezzük éleknek egy olyan halmazát, melyet a gráfból elhagyva a gráf már nem lesz összefüggő, de e halmaz egyetlen részhalmazára sem igaz ez az állítás.

6. Legyen G olyan egyszerű, irányítás nélküli gráf, melynek élei és pontjai számozottak, és van egy ún. kitüntetett pontja. Legyen a G gráfhoz tartozó incidencia mátrix az az $m \times n$ típusú $A = [a_{ik}]$ mátrix, amelyre

$$a_{ik} = \begin{cases} +1, & \text{ha az } i\text{-edik él illeszkedik a } k\text{-adik pontra,} \\ 0, & \text{ha nem,} \end{cases}$$

az élek száma m, a pontok száma $n+1$.

Az **A** mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, ha a G gráfnak van kitüntetett pontra illeszkedő éle.

Megjegyezzük, hogy egy gráf kitüntetett pontja villamoshálózatoknál a földelésnek felel meg.

7. A következőkben, ha kitüntetett ponttal rendelkező gráfok összefüggéséről, vagy komponensekre bontásáról beszélünk, azt mindig úgy értjük, hogy a gráfból elhagyjuk a kitüntetett pontot, és az arra illeszkedő ún. kitüntetett végű éleket.

(Ha az így nyert gráf összefüggő, akkor az eredeti is, ha nem akkor az eredeti sem. Komponensekre bontásnál ezt a gráfot bontjuk komponensekre. Egy komponensnek van kitüntetett végű éle, ha van olyan pontja, melyre az eredeti összefüggő gráfban illeszkedett kitüntetett végű él.)

I. SEGÉDTÉTEL

Minden n-edrendű, szimmetrikus **B** mátrix felírható $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$ alakban, ahol $\mathbf{Y} = \langle y_k \rangle$ egy m-edrendű diagonálmátrix, **A** egy olyan $m \times n$ típusú mátrix, melynek nincs két egyenlő sora, minden sorában egy vagy két 1-es áll, a többi elemek zérussal egyenlők.

$$1 \leqq m \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

$$y_k \neq 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

BIZONYÍTÁS

Írjuk a kvadratikus $\mathbf{M}$ mátrixot

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \mathbf{E}_{ij}$$

alakban, ahol $\mathbf{E}_{ij}$ az i, j-edik mátrixegység.

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & \ldots\ldots & & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & \ldots\ldots & & 0 & \ldots\ldots & & 0 \end{array} \right| \end{array}.$$

Válasszuk külön a fődiagonális elemeit:

$$\mathbf{M} = \sum_{n=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_{ij} \mathbf{E}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \mathbf{E}_{ii}.$$

Mindkét taghoz a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_{ij} \mathbf{E}_{ii}$ kifejezést hozzáadva, illetve levonva:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} m_{ij} (\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ii}) + \sum_{i=1}^{n} \left(m_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_{ij} \right) \mathbf{E}_{ii}.$$

A kapott összefüggést egy n-edrendű $\mathbf{B}$ szimmetrikus mátrixra alkalmazva:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} (\mathbf{E}_{ii} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji} + \mathbf{E}_{jj}) + \sum_{i=1}^{n} \left(b_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij} \right) \mathbf{E}_{ii}.$$

Mivel $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ [0 \ \ldots \ 0 \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0] \end{array}$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j) + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij} \right) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j.$$

Vezessük be az n-edrendű $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{b}_{ij}]$ mátrixot, ahol

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{ha} \quad i \neq j \\ b_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij} & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

és az

$$\mathbf{f}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j, & \text{ha } i \neq j \\ \mathbf{e}_i, & \text{ha } i = j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

vektorokat.

Ekkor

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \tilde{b}_{ij} \cdot \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{f}_{ij}^T$$

írható.

Jelölje y_k a $\tilde{b}_{ij}$ elemeket az i, j indexpárok valamilyen sorrendjében, a_k pedig az f_{ij} vektorokat ugyanolyan sorrendben, akkor

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{m} y_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}^k,$$

ahol m egyenlő a nem zérus $\tilde{b}_{ij}$ elemek számával.

Legyen $\mathbf{A}$ az $\mathbf{a}^k$ sorvektorokból álló $m \times n$ típusú mátrix, és $\mathbf{Y} = \langle y_k \rangle$ m-edrendű diagonálmátrix. ($y_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots m$).

Ekkor:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \mathbf{A}$$

ahol $\mathbf{A}$ valóban olyan mátrix, melynek minden sorában álló 1 elemek száma 1 vagy 2, a többi eleme zérus, mert $\mathbf{A}$ sorai az $\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j$, illetve az $\mathbf{e}^i$ vektorok. Az $\mathbf{A}$ mátrixnak nincsen két egyenlő sora, mert az i, j indexpárok mind különbözők.

AZ I. SEGÉDTÉTEL KIEGÉSZÍTÉSE

Legyen $\mathbf{P}$ egy m-edrendű permutációmátrix, és legyen $\mathbf{A}' = \mathbf{PA}$ és $\mathbf{Y}' = \mathbf{PYP}^T$. Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{YA}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{A}'^T\mathbf{Y}'\mathbf{A}'$ is igaz.

Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{B}$ mátrix I. segédtételbeli előállítása ettől eltekintve egyértelmű a következő előállításra nézve.

Ezáltal minden szimmetrikus mátrixhoz egy egyszerű, kitüntetett ponttal rendelkező G gráfot rendelünk, melynek incidencia mátrixa az $\mathbf{A}$ mátrix. A G gráf éleihez az $\mathbf{Y}$ diagonálmátrix elemeit rendeljük. Az előállítás az élek számozásától eltekintve egyértelmű lesz.

Az n-edrendű $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (szimmetrikus) mátrix elemei ugyanis a következők:

c_{ii} = az i-edik pont foka (azaz az i-edik pontra illeszkedő élek száma)

$$c_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{ha van } i, j \text{ pontokat összekötő él} \\ 0, & \text{ha nincs.} \end{cases}$$

A főátlóban álló és a többi elem között az alábbi összefüggés érvényes:

$$c_{ii} = \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij}, & \text{ha az } i\text{-edik pontból nem indul ki kitüntetett végű él} \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij} + 1, & \text{ha van az } i\text{-edik pontra illeszkedő kitüntetett végű él.} \end{cases}$$

Megjegyzés

Ha az **A** mátrixot irányított (és kitüntetett ponttal rendelkező) gráfokra definiáltuk volna, akkor a **C** mátrix éppen az a mátrix lenne, melyről ismeretes, hogy determinánsának értéke éppen egy gráf összes kifeszítő fáinak számát adja meg.

Az n-edrendű $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$ (szimmetrikus) mátrix elemei pedig a következők:

A b_{ii} elem az i-edik pontra illeszkedő élekhez rendelt értékek összegével egyenlő.

$$b_{ij} = \begin{cases} y_k, & \text{ha } i, j \text{ él létezik, és az ehhez rendelt érték} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Igaz még, hogy

$b_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij}$, ha az i-edik pontra nem illeszkedik kitüntetett végű él,

és

$b_{ii} \neq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij}$, ha az i-edik pontra illeszkedik kitüntetett végű él, és az ehhez rendelt érték $y_k = b_{ii} - \sum_{j\neq i} b_{ij}$.

Megjegyzés

Ha az **A** mátrixot irányított gráfokra definiáltuk volna, és az y_k elemek mind pozitívak lennének, akkor **B** egy villamos hálózat ún. csomóponti admittancia mátrixa lenne.

Ezek szerint egy tetszőleges m-edrendű $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ szimmetrikus mátrixból az **A** és **Y** mátrixokat így kaphatjuk meg:

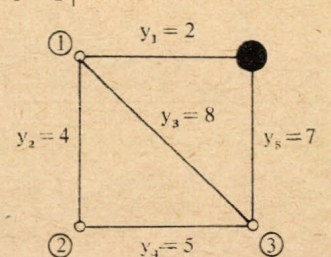
Nevezzük a $b_{ij}\neq 0$ elemeket valamilyen sorrendben y_k értékeknek ($k=1, 2, \ldots p$, $p\leqq m$) és minden ilyen elemhez rendeljük az **A** mátrix k-adik sorát, ahol az i-edik és j-edik oszlopban $+1$ áll, a sor többi elemei zérusok.

A $b_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij} \neq 0$ értékeket nevezzük olyan y_k értékeknek, ahol $k=p+1, p+2, \ldots$ $\ldots, m$, és minden ilyen értékhez az **A** mátrix k-adik sorát rendeljük, ahol az i-edik oszlopban $+1$ áll, a sor többi tagjai zérusok.

Az 1. ábrán látható egy **B** mátrix $\mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$ felírása, és az **A** mátrixhoz tartozó G gráf.

$$\begin{vmatrix} 14 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 5 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 8 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$$



1. ábra G

TOVÁBBI MEGJEGYZÉSEK AZ I. SEGÉDTÉTELHEZ

Könnyű belátni, hogy

1. Ha a **B** mátrix még irreducibilis is, akkor **A** egy összefüggő gráf incidencia mátrixa, és

$$n-1 \leqq m \leqq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ha G egy **A** incidencia mátrixú összefüggő gráf, akkor a $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$ mátrix irreducibilis.

2. A **B** mátrix akkor és csak akkor kvázidiagonál, ha a G gráf nem összefüggő. A **B** mátrix fődiagonálisában álló blokkok száma és a gráf komponenseinek száma egyenlő.

3. Ha a **B** mátrix nem szinguláris, akkor

$$n \leqq m \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Ha a G gráf összefüggő és van legalább egy kitüntetett végű éle, akkor a **B** mátrix irreducibilisen domináns átlójú.

Szükségünk lesz a következő igen egyszerű és könnyen belátható állításra.

II. SEGÉDTÉTEL

a) Szimmetrikus domináns átlójú $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ mátrixból $b_{ij}(e_i+e_j)(e^i+e^j)$ alakú diádokat levonva az eredmény szintén szimmetrikus, domináns átlójú mátrix lesz, és az egyes sorokban érvényes kisebb egyenlő, illetve határozottan kisebb reláció soronként is érvényben marad.

Egy ilyen diádnak a szimmetrikus mátrixból való kivonása a mátrixhoz az I. segédtétel szerint rendelt gráfban egy nem kitüntetett végű él elhagyását jelenti.

Egy ilyen diád alakja:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & & & i & & & j & & & \\
 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & \\
i & 0 & \dots & b_{ij} & 0 \dots 0 & b_{ij} & 0 & \dots & 0 & \\
 & \vdots & & 0 & & 0 & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & \dots & 0 & & \\
j & 0 & \dots & b_{ij} & 0 \dots 0 & b_{ij} & 0 & \dots & 0 & \\
 & \vdots & & 0 & & 0 & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 &
\end{array}.$$

b) Szimmetrikus, domináns átlójú mátrixon egy **P** permutációmátrix-szal végzett $\mathbf{PBP}^T$ transzformáció eredménye egy szintén szimmetrikus, domináns

átlójú mátrix lesz, és az egyes sorokra érvényes egyenlőtlenségi relációkat a sorok a permutálás során természetesen magukkal viszik.

A szimmetrikus mátrixhoz rendelt gráfban ez a transzformáció a pontok átszámozását jelenti.

*

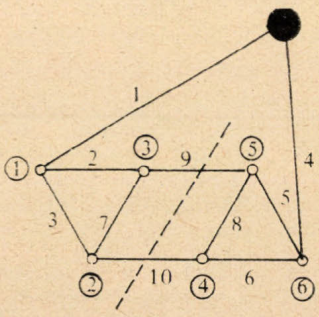
Legyen **B** n-edrendű szimmetrikus, irreducibilisen és duplán domináns átlójú mátrix, és $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$ a **B** mátrix I.segédtételbeli felírása.

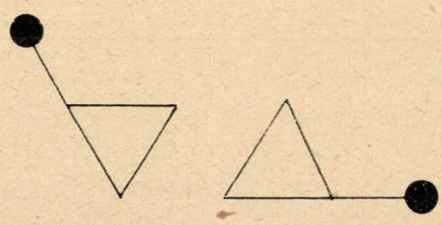
Bontsuk fel az **A** illeszkedési mátrix által meghatározott G gráfot élek elhagyásával (vágások egymásutánjával) komponensekre (s) úgy, hogy minden komponensben szerepeljen legalább egy kitüntetett pont (ezt meg tudjuk tenni, a **B** mátrix duplán domináns átlójú), és úgy, hogy $r<n$ legyen, ahol r az elhagyott élek száma. (Ez utóbbi feltételnek is eleget tudunk tenni, hiszen még a teljes gráf is $n-1$ él elhagyásával 2 komponensre bontható, ha az egyik komponens egy izolált pont).

Tekintsük az **A** sorainak egy olyan permutációját, hogy $\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{A}_H\\ \mathbf{A}_k\end{vmatrix}$ az **A** mátrix egy olyan particionált alakja legyen, melynél az $\mathbf{A}_k$ mátrixban szerepelnek az elhagyott élekben szereplő sorok. Ugyanezt a permutációt az **Y** diagonálmátrix elemein végrehajtva legyen az $\mathbf{Y}=\begin{vmatrix}\mathbf{Y}_H & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{Y}_k\end{vmatrix}$ olyan particionált alak, melynél az $\mathbf{Y}_k$ mátrixban szerepelnek az elhagyott élekhez rendelt y értékek. (Az $\mathbf{A}_H$ mátrix egy nem összefüggő G' gráf incidencia mátrixa.)

A második ábrán a G gráf komponensekre bontása, és az ehhez tartozó $\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{A}_H\\ \mathbf{A}_k\end{vmatrix}$ particionált alakú mátrix látható. (Itt s=2)

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c|cccccc|l}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{A}_k \\
6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{A}_H \\
10 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}$$





Ezek szerint a **B** mátrix a következő alakban írható:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A} = |\mathbf{A}_H^T\mathbf{A}_k^T| \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Y}_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{A}_H \\ \mathbf{A}_k \end{vmatrix} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H + \mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k\mathbf{A}_k.$$

Ekkor kimondjuk a következő tételt:

TÉTEL

Az n-edrendű, szimmetrikus, irreducibilisen és duplán domináns átlójú **B** mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H + \mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k\mathbf{A}_k$$

felírása $\mathbf{D} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H$, $u = \mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k$, $\mathbf{V} = \mathbf{A}_k^T$ választással teljesíti a Sherman—Morrison—Woodbury formula feltételeit, azaz inverze a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H)^{-1} -$$
$$-(\mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H)^{-1}\mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k[\mathbf{E} + \mathbf{A}_k(\mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H)^{-1}\mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k]^{-1}\mathbf{A}_k(\mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H)^{-1}.$$

BIZONYÍTÁS

A tételt megelőző konstrukcióból látható, hogy $\mathbf{U} = \mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k$, $\mathbf{V} = \mathbf{A}_k^T$ $n \times r$ típusú mátrixok, ahol $r < n$.

A $\mathbf{D} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H$ mátrix a nem összefüggő G' gráfhoz tartozó, az I. segédtétel szerint kvázidiagonál mátrix. A II. segédtétel szerint a **D** mátrix duplán domináns átlójú, és mivel a G' gráf minden komponensének van legalább egy kitüntetett végű éle, ezért az I. segédtétel szerint a főátlóban álló blokkok irreducibilisen domináns átlójú mátrixok. Ezekből következik, hogy a **D** mátrix blokkonként invertálható. (l. [5].)

A **B** mátrix invertálható, mivel irreducibilisen domináns átlójú (l. [5]), ezért a Sherman—Morrison—Woodbury-formula szerint az

$$[\mathbf{E} + \mathbf{A}_k(\mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H)^{-1}\mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k]^{-1}$$

mátrix létezik.

AZ INVERTÁLÁSI ELJÁRÁS ALKALMAZÁSA

Az előzőkben láttuk, hogy minden irreducibilisen és duplán domináns átlójú szimmetrikus mátrix invertálható a fenti tétellel megadott módszerrel. Megjegyezzük, hogy ha csak annyit teszünk fel, hogy domináns átlójú és szimmetrikus legyen a mátrix, akkor a reducibilis eset azt jelenti, amikor a mátrix máris kvázidiagonál, a domináns, de nem duplán domináns átlójú mátrixhoz rendelt gráf pedig nem bontható komponensekre, mert csak egy kitüntetett pontja van.

Mint a bevezetésben említettük, a Sherman—Morrison—Woodbury-formulát akkor célszerű alkalmazni, ha a $\mathbf{D}^{-1}$ mátrixot vagy már ismerjük, vagy viszonylag egyszerűen számítható ki. Esetünkben ez teljesül, mivel $\mathbf{D} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H$ kvázidiagonál mátrix, amelyet blokkonként invertálhatunk. Szintén a bevezetésben említettük, hogy $r \ll n$ is szükséges ahhoz, hogy érdemes legyen az invertálási formulát alkalmazni. Erre azért van szükség, mert az $(\mathbf{E} + \mathbf{V}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})^{-1}$ mátrix r-edrendű. Ez olyankor teljesül, ha az eredetileg invertálandó **B** sok zérust tartalmazó, ún. ritka mátrix.

Ekkor ugyanis a mátrixhoz rendelt gráf éleinek száma a pontokhoz képest kicsi, és várható, hogy $r \ll n$ él elhagyásával tudjuk komponensekre bontani. Ezért módszerünket a tétel feltételeit kielégítő ritka mátrixok invertálására ajánljuk.

Elsősorban azonban olyankor ajánljuk a módszert — hasonlóan egyéb ritka mátrix invertálási módszerhez (l. pl. [2] és [4]-ben) — ha egy feladatban több olyan mátrixot kell invertálni, melyekben azonos helyen állnak zérusok. Ekkor ugyanis több mátrixnak ugyanaz a G gráf fog megfelelni, (hiszen az $\mathbf{A}$ mátrixban álló 1 elemek helye csak attól függött, hogy a $\mathbf{B}$ mátrixban hol voltak nem zérus elemek) és csak az élekhez rendelt $\mathbf{Y}$ diagonálmátrix lesz minden mátrixnál más és más. Így a G gráf komponensekre bontását, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix $\begin{vmatrix}\mathbf{A}_H\\ \mathbf{A}_k\end{vmatrix}$ particionált alakját csak egyszer kell elkészíteni. Ez utóbbi probléma technikai megvalósítását itt nem tárgyaljuk részletesen. Annyit megemlítünk, hogy a problémát át lehet fogalmazni diszkrét programozási feladattá. Ezen kívül léteznek a problémát megoldó heurisztikus algoritmusok.

Hálózatszámítási feladatokon kívül megemlíthetünk néhány olyan példát, ahol módszerünk jól alkalmazható.

Műszaki feladatokból adódó, nem szabályos tartományon értelmezett parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásában szereplő mátrix nem lesz szalagmátrix alakú. Egyes esetekben viszont domináns átlójúvá rendezhető át.

Bizonyos feltételek mellett a $\mathbf{D}=[d_{ij}]$, $d_{ij}=M[\xi_i - M(\xi_i)][\xi_j - M(\xi_j)]$ kovariancia-mátrix is ritka, domináns átlójú mátrix.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Busacer—Saaty: Véges gráfok és hálózatok. Műszaki Könyvkiadó Bp. 1962.
[2] F. Harary: A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning. Numerische Mathematik 4, 128—135 (1962).
[3] F. Harary: Graphs and matrices. Siam Rewiew Vol. 9. No. 1., January.
[4] A. L. Dulmage—N. S Mendelsohn: Oo the inversion of sparse mathices. Math. Computation Vol. 16 494-496.
[5] Orthega-Rheinbolt: Iterative solution of nonlinear equations. Chapter 2. Linear algebra. Academic Press New York and London 1970.
[6] R. Zurmühl: Matrizen Springer-Verlag Berlin. 1958.
[7] Seshu-Reed: Linear graphs and electrical networks Addison Werley, Mass. 1961.
[8] Singer Dénes: Rúdszerkezetek hálózatelméletéről. Műszaki Tudomány 45 (1972) 223—241.

ОБРАЩЕНИЕ „РЕДКИХ" МАТРИЦ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ

МАРТА РУПП

SPARSE MATRIX INVERSION BY GRAPHS

MÁRTA RUPP

Any $n \times n$ symmetric matrix can be written in the form $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T\mathbf{Y}\mathbf{A}$, where $\mathbf{Y}$ is an $m \times m$ diagonal matrix, and $\mathbf{A}$ is the incidence matrix of a graph G having m edges and $n+1$ vertices. We decompose G into components by omitting r edges, and get $\mathbf{B} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H + \mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k\mathbf{A}_k$, where the first term is a block-diagonal and the second term has rank r. If $\mathbf{B}$ is irreducibly and doubly diagonally dominant, we can use the Sherman—Morrison—Woodbury formula:

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{D}+\mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{E}+\mathbf{V}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{D}^{-1},$$

where $\mathbf{D} = \mathbf{A}_H^T\mathbf{Y}_H\mathbf{A}_H$, $\mathbf{U} = \mathbf{A}_k^T\mathbf{Y}_k$, $\mathbf{V} = \mathbf{A}_k^T$.

MEGJEGYZÉSEK EGY DIOFANTOSZI EGYENLETRENDSZERHEZ

KELEMEN JÓZSEF

I.

Legyen m és n adott természetes szám, $f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ pedig $(i=1, 2, \ldots, m)$ a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ valós változók egész együtthatójú homogén polinomja. Legyen továbbá x_j zérustól különböző egész szám, k_j pedig $(j=1, 2, \ldots, n)$ adott természetes szám.

1. *Tétel: Az*

$$f_i(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_n^{k_n}) = 0 \tag{1}$$

egyenletrendszer $(i=1, 2, \ldots, m)$ *akkor és csak akkor oldható meg, ha az*

$$f_i(y_1^{(k_1, l_1)}, y_2^{(k_2, l_2)}, \ldots, y_n^{(k_n, l_n)}) = 0 \tag{2}$$

egyenletrendszer $(i=1, 2, \ldots, m)$ *megoldható, ahol*

$$l_j = [k_1, k_2, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_n], \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

továbbá az (a, b) *szimbólum a és b legnagyobb közös osztóját,* $[a, b]$ *pedig a és b legkisebb közös többszörösét jelöli, és a* (2) *egyenletrendszer megoldásán is olyan megoldást értünk, ahol az* y_j *ismeretlen* $(j=1, 2, \ldots, n)$ *zérustól különböző egész szám.*

Bizonyítás.

A feltétel szükséges. Ha (1) megoldható és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ megoldása, akkor

$$y_j = \sqrt[k_j]{x_j^{(k_j, l_j)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

a (2) egyenletrendszer megoldása. A (3) számok ugyanis zérustól különböző egészek és kielégítik a (2) egyenletrendszert.

A feltétel elegendő. Jelölje t_v $(v=1, 2, \ldots, n)$ azt a legkisebb nem-negatív egész számot, amelyre $(k_v, l_v)+l_v t_v$ osztható k_v-vel. (Ilyen t_v a lineáris diophantoszi egyenletek elmélete szerint létezik.)

Tegyük fel, hogy (2) megoldható, legyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldása, továbbá

$$t = \prod_{v=1}^{n} y_v^{l_v t_v}.$$

Ekkor

$$x_j = t^{\frac{l_j}{k_j}} y_j^{\frac{(k_j, l_j)}{k_j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

az (1) egyenletrendszer megoldása. A (4) számok ugyanis zérustól különböző egészek és — mivel f_i homogén — kielégítik az (1) egyenletrendszert. Qu.e.d.

1. *Segédtétel: Ha*

$$k = [k_1, k_2, \ldots, k_n],$$

$$K = [(k_1, l_1), (k_2, l_2), \ldots, (k_n, l_n)],$$

akkor az

$$L = \frac{K}{k}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu t_\nu}{(k_\nu, l_\nu)}\right]$$

kifejezés értéke egész szám.

Bizonyítás. Legyen μ az $1, 2, \ldots, n$ számok valamelyike és tekintsük a

$$kL = \frac{K}{(k_\mu, l_\mu)}[(k_\mu, l_\mu) + l_\mu t_\mu] + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} \frac{K}{(k_\nu, l_\nu)} l_\nu t_\nu$$

egyenlőséget. Mivel K értelmezése alapján $\frac{K}{(k_\mu, l_\mu)}$ és $\frac{K}{(k_\nu, l_\nu)}$ egész szám, azért kL egész szám. Mivel t_μ értelmezése alapján $(k_\mu, l_\mu) + l_\mu t_\mu$ osztható k_μ-vel, l_ν értelmezése alapján pedig, ha $\nu \neq \mu$, l_ν osztható k_μ-vel, azért kL osztható k_μ-vel. De μ az $1, 2, \ldots, n$ számok bármelyike lehet, tehát kL osztható $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$-vel, k-val. Ha kL k-val osztható egész szám és $kL \neq 0$, akkor L egész szám. Qu.e.d.

A továbbiakhoz két új jelölést vezetünk be.

Legyen

$$Y_j = y_j r_1^{-\frac{K}{(k_j, l_j)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol r_1 zérustól különböző tetszőleges racionális szám; legyen továbbá

$$T = \prod_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{l_\nu t_\nu}.$$

2. *Tétel: Az* (1) *egyenletrendszer megoldásai előállíthatók*

$$x_j = r^{\frac{k}{k_j}} T^{\frac{1}{k_j}} Y_j^{\frac{(k_j, l_j)}{k_j}} \tag{5}$$

alakban $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *ahol* r *zérustól különböző racionális szám, olyan, hogy az* (5) *formulákkal definiált* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *számok egészek legyenek.*

Bizonyítás. (5) zérustól különböző egész számokat definiál, amelyek az (1) egyenletrendszernek megoldásai.

Másrészt (5) az (1) egyenletrendszer összes megoldását tartalmazza. Bármelyik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ megoldást adjuk meg ugyanis, létezik a (2) egyenletrendszernek olyan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldása és olyan, zérustól különböző racionális r, amelyek az (5) formulák révén tetszőleges racionális r_1 esetén $(r_1 \neq 0)$ az adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ megoldást állítják elő, mégpedig:

$$y_j = x_j^{\frac{k_j}{(k_j, l_j)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$r = r_1^L \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{-t_\nu}.$$

Az így definiált $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ugyanis az 1. tétel szerint az (1) egyenletrendszer megoldása;

mivel $r_1 \neq 0$, azért $r \neq 0$;

az 1. segédtétel alapján racionális r_1 esetén r is racionális;

végül, helyettesítve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ és r értékét (5)-be, közben felhasználva, hogy

$$\frac{k_v l_v}{(k_v, l_v)} = [k_v, l_v] = k \qquad (v = 1, 2, \ldots, n),$$

meggyőződhetünk arról, hogy az adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ megoldást kapjuk. Qu.e.d.

1. *Példa.* A

$$\begin{cases} 4x_1^7 + 3x_2^8 - 4x_3^9 + 5x_4^{13} - 8x_5^{13} = 0 \\ 20x_1^7 - 7x_2^8 - 9x_3^9 + 3x_4^{13} - 7x_5^{13} = 0 \\ 5x_1^7 + 6x_2^8 - 7x_3^9 - 4x_4^{13} + 3x_5^{13} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha a

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 4y_3 + 5y_4^{13} - 8y_5^{13} = 0 \\ 20y_1 - 7y_2 - 9y_3 + 3y_4^{13} - 7y_5^{13} = 0 \\ 5y_1 + 6y_2 - 7y_3 - 4y_4^{13} + 3y_5^{13} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldható. Ennek megoldásai — Cramer szabálya alapján —:

$$y_1 = \frac{22}{7}(-3y_4^{13} + 4y_5^{13}),$$

$$y_2 = \frac{19}{7}(-3y_4^{13} + 4y_5^{13}),$$

$$y_3 = \frac{1}{7}(-100y_4^{13} + 131y_5^{13}).$$

Itt y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 akkor és csak akkor egész számok, ha $y_4^{13} + y_5^{13}$ osztható 7-tel, azaz, ha $y_4 + y_5$ osztható 7-tel. Ha tehát

$$y_4 = u_1,$$

akkor

$$y_5 = -u_1 + 7u_2,$$

és így

$$y_1 = \frac{22}{7}[-3u_1^{13} + 4(-u_1 + 7u_2)^{13}],$$

$$y_2 = \frac{19}{7}[-3u_1^{13} + 4(-u_1 + 7u_2)^{13}],$$

$$y_3 = \frac{1}{7}[-100u_1^{13} + 131(-u_1 + 7u_2)^{13}],$$

ahol

$$u_1(-u_1 + 7u_2) \neq 0,$$

egyébként u_1 és u_2 tetszőleges egész számok.

Ha r_1 értékét 1-nek választjuk, akkor

$$Y_j = y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, 5),$$

továbbá

$$k_1 = 7; \qquad k_2 = 8; \qquad k_3 = 9; \qquad k_4 = k_5 = 13;$$

$$l_1 = 936; \qquad l_2 = 819; \qquad l_3 = 728; \qquad l_4 = l_5 = 6552;$$

$$(k_1, l_1) = (k_2, l_2) = (k_3, l_3) = 1; \quad (k_4, l_4) = (k_5, l_5) = 13;$$

$$t_1 = 4; \qquad t_2 = 5; \qquad t_3 = 1; \qquad t_4 = t_5 = 0;$$

$$k = 6552;$$

$$T = y_1^{3744} y_2^{4095} y_3^{728};$$

tehát (5) alapján

$$\begin{cases} x_1 = r^{936} y_1^{535} y_2^{585} y_3^{104}; \\ x_2 = r^{819} y_1^{468} y_2^{512} y_3^{91}; \\ x_3 = r^{728} y_1^{416} y_2^{455} y_3^{81}; \\ x_4 = r^{504} y_1^{288} y_2^{315} y_3^{56} y_4; \\ x_5 = r^{504} y_1^{288} y_2^{315} y_3^{56} y_5. \end{cases}$$

Ha például

$$u_1 = 1; \quad u_2 = 0; \quad r = 1,$$

akkor

$$y_1 = -22; \quad y_2 = -19; \quad y_3 = -33; \quad y_4 = 1; \quad y_5 = -1$$

és így

$$\begin{cases} x_1 = 2^{535} \cdot 3^{104} \cdot 11^{639} \cdot 19^{585}; \\ x_2 = -2^{468} \cdot 3^{91} \cdot 11^{559} \cdot 19^{512}; \\ x_3 = 2^{416} \cdot 3^{81} \cdot 11^{497} \cdot 19^{455}; \\ x_4 = -2^{288} \cdot 3^{56} \cdot 11^{344} \cdot 19^{315}; \\ x_5 = 2^{288} \cdot 3^{56} \cdot 11^{344} \cdot 19^{315}; \end{cases}$$

II.

Az alábbiakban az (1) egyenletrendszer egyik speciális esetével foglalkozunk. Legyen az $f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ polinom ($i=1, 2, \ldots, m$) elsőfokú, az egyenletrendszer pedig

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^{k_j} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

2. *Segédtétel: Ha*

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *a* (6) *egyenletrendszer megoldása;*
$n_1, n_2, \ldots, n_m$ *természetes számok;*

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_m < n_{m+1} = n;$$

$$F_{i,\alpha} = \sum_{j=n_{\alpha-1}+1}^{n_\alpha} a_{i,j} x_j^{k_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m+1);$$

F_α *az*

$$\begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \dots & F_{1,m+1} \\ F_{2,1} & F_{2,2} \dots & F_{2,m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ F_{m,1} & F_{m,2} \dots & F_{m,m+1} \\ 1 & 1 \dots & 1 \end{vmatrix}$$

determináns utolsó sorának α*-adik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa* ($\alpha = 1, 2, \dots, m+1$), *akkor*

$$F_1 = F_2 = \dots = F_{m+1}.$$

Bizonyítás. Legyen i az $1, 2, \dots, m$ számok valamelyike. Definíció szerint

$$F_i = (-1)^{m+i+1} \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \dots & F_{1,i-1} & F_{1,i+1} \dots & F_{1,m+1} \\ F_{2,1} & F_{2,2} \dots & F_{2,i-1} & F_{2,i+1} \dots & F_{2,m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ F_{m,1} & F_{m,2} \dots & F_{m,i-1} & F_{m,i+1} \dots & F_{m,m+1} \end{vmatrix}.$$

E determináns utolsó oszlopában a (6) egyenletrendszer alapján $F_{j,m+1}$ helyére

$$-F_{j,1} - F_{j,2} - \dots - F_{j,m}$$

helyettesíthető ($j = 1, 2, \dots, m$). Ekkor a determináns, mivel utolsó oszlopa m tagú összeg, m számú determináns összegére bontható. Egy kivételével mindegyik értéke zérus, mivel két oszlopuk csak előjelben különbözik egymástól, tehát

$$F_i = (-1)^{m+i+1} \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \dots & F_{1,i-1} & F_{1,i+1} \dots & F_{1,m} & -F_{1,i} \\ F_{2,1} & F_{2,2} \dots & F_{2,i-1} & F_{2,i+1} \dots & F_{2,m} & -F_{2,i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \\ F_{m,1} & F_{m,2} \dots & F_{m,i-1} & F_{m,i+1} \dots & F_{m,m} & -F_{m,i} \end{vmatrix}.$$

Az utolsó oszlopból -1 kiemelése, majd oszlopcserék után

$$F_i = (-1)^{m+i+1+1+m-i} \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \dots & F_{1,m} \\ F_{2,1} & F_{2,2} \dots & F_{2,m} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ F_{m,1} & F_{m,2} \dots & F_{m,m} \end{vmatrix} = F_{m+1}$$

adódik ($i = 1, 2, \dots, m$). Qu.e.d.

Vezessük most be a

$$K_\alpha = [k_{n_{\alpha-1}+1}, k_{n_{\alpha-1}+2}, \dots, k_{n_\alpha}], \qquad \alpha = 1, 2, \dots, (m+1)$$

jelölést, és tegyük fel, hogy $K_1, K_2, \dots, K_{m+1}$ egymáshoz páronként relatív prím természetes számok. Ekkor egyrészt

$$k = [k_1, k_2, \dots, k_n] = [K_1, K_2, \dots, K_{m+1}] = \prod_{\alpha=1}^{m+1} K_\alpha,$$

másrészt a

$$\frac{k}{K_\alpha} = L_\alpha$$

jelöléssel

(7) $$(K_\alpha, L_\alpha) = 1, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, (m+1).$$

Jelölje továbbá q_α azt a legkisebb nem-negatív egész számot ($\alpha=1, 2, \ldots, m+1$), amelyre $q_\alpha L_\alpha+1$ osztható K_α-val. (Ilyen q_α létezését (7) biztosítja.) Végül $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zérustól különböző egész számok;

$$D_{i,\alpha} = \sum_{j=n_{\alpha-1}+1}^{n_\alpha} a_{i,j} u_j^{k_j}$$

($i = 1, 2, \ldots, m$; $\alpha = 1, 2, \ldots, m+1$);
D_α a

$$\begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \ldots & D_{1,m+1} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \ldots & D_{2,m+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_{m,1} & D_{m,2} & \ldots & D_{m,m+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

determináns utolsó sorának α-adik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa ($\alpha=1, 2, \ldots, m+1$);

$$D = \prod_{\alpha=1}^{m+1} D_\alpha^{q_\alpha L_\alpha};$$

az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ egészek értéke olyan, hogy $D \neq 0$; r zérustól különböző racionális szám;

$$x_j = r^{\frac{k}{k_j}} u_j D_\beta^{\frac{1}{k_j}} D^{\frac{1}{k_j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{ha } n_0+1 \leqq j \leqq n_1, \\ 2, & \text{ha } n_1+1 \leqq j \leqq n_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m+1, & \text{ha } n_m+1 \leqq j \leqq n_{m+1}, \end{cases}$$

r nevezőjét úgy választjuk meg, hogy az így definiált $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok egészek legyenek.

3. *Tétel: A* (8) *formulák a* (6) *egyenletrendszer megoldásait állítják elő.*

Bizonyítás: Az értelmezésből következik, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zérustól különböző egész számok. Másrészt értéküket a (6) egyenletrendszerbe helyettesítve, kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^{k_j} = \sum_{\alpha=1}^{m+1} \left(\sum_{j=n_{\alpha-1}+1}^{n_\alpha} a_{i,j} x_j^{k_j} \right) = \sum_{\alpha=1}^{m+1} \left(\sum_{j=n_{\alpha-1}+1}^{n_\alpha} a_{i,j} r^k u_j^{k_j} D_\alpha D \right) =$$

$$= r^k D \sum_{\alpha=1}^{m+1} \left(D_\alpha \sum_{j=n_{\alpha-1}+1}^{n_\alpha} a_{i,j} u_j^{k_j} \right) = r^k D \sum_{\alpha=1}^{m+1} D_\alpha D_{i,\alpha} =$$

$$= r^k D \begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \ldots & D_{1,m+1} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \ldots & D_{2,m+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_{m,1} & D_{m,2} & \ldots & D_{m,m+1} \\ D_{i,1} & D_{i,2} & \ldots & D_{i,m+1} \end{vmatrix} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

minthogy e determináns két sora — az i-edik és az utolsó — megegyezik. Qu.e.d.

3. *Segédtétel: Az*

$$F = \frac{1}{k}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{m+1} q_\alpha L_\alpha\right)$$

kifejezés értéke egész szám.

Bizonyítás: Ha az 1. segédtétel $K=1$ speciális esetét megfelelő jelölésekkel alkalmazzuk, állításunkat kapjuk.

4. *Tétel: A* (8) *formulák a* (6) *egyenletrendszer minden olyan megoldását előállítják, amelyre*

$$F_{m+1} \neq 0.$$

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a (6) egyenletrendszer olyan megoldása, amelyre $F_{m+1} \neq 0$. Az

$$u_j = x_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$r = F_{m+1}^{-F}$$

számok a (8) formulák révén az adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ megoldást állítják elő, hiszen ekkor

$$D_{i,\alpha} = F_{i,\alpha}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m+1);$$

$$D_\alpha = F_\alpha = F_{m+1} \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m+1);$$

$$D = \prod_{\alpha=1}^{m+1} F_\alpha^{q_\alpha L_\alpha} = F_{m+1}^{Fk-1},$$

tehát

$$r^{\frac{k}{k_j}} u_j D_\beta^{\frac{1}{k_j}} D^{\frac{1}{k_j}} = x_j \left(F_{m+1}^{-Fk} F_{m+1} F_{m+1}^{Fk-1}\right)^{\frac{1}{k_j}} = x_j. \qquad \text{Qu.e.d.}$$

2. Példa. Oldjuk meg az 1. példát az elmondottak alapján!
Ekkor

$$n_0 = 0; \qquad n_1 = 1; \qquad n_2 = 2; \qquad n_3 = 3; \qquad n_4 = 5;$$

$$K_1 = 7; \qquad K_2 = 8; \qquad K_3 = 9; \qquad K_4 = 13;$$

$$k = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13 = 6552;$$

$$L_1 = 936; \qquad L_2 = 819; \qquad L_3 = 728; \qquad L_4 = 504;$$

$$q_1 = 4; \qquad q_2 = 5; \qquad q_3 = 1; \qquad q_4 = 9;$$

$$D_1 = -u_2^8 u_3^9 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5u_4^{13} - 8u_5^{13} \\ -7 & -9 & 3u_4^{13} - 7u_5^{13} \\ 6 & -7 & -4u_4^{13} + 3u_5^{13} \end{vmatrix} = 242 u_2^8 u_3^9 (-3u_4^{13} + 4u_5^{13});$$

$$D_2 = u_1^7 u_3^9 \begin{vmatrix} 4 & -4 & 5u_4^{13} - 8u_5^{13} \\ 20 & -9 & 3u_4^{13} - 7u_5^{13} \\ 5 & -7 & -4u_4^{13} - 3u_5^{13} \end{vmatrix} = 209 u_1^7 u_3^9 (-3u_4^{13} + 4u_5^{13});$$

$$D_3 = -u_1^7 u_2^8 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5u_4^{13} - 8u_5^{13} \\ 20 & -7 & 3u_4^{13} - 7u_5^{13} \\ 5 & 6 & -4u_4^{13} + 3u_5^{13} \end{vmatrix} = 11u_1^7 u_2^8 (-100u_4^{13} + 131u_5^{13});$$

$$D_4 = u_1^7 u_2^8 u_3^9 \begin{vmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 20 & -7 & -9 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 77u_1^7 u_2^8 u_3^9;$$

$$D = D_1^{3744} D_2^{4095} D_3^{728} D_4^{4536};$$

(8) szerint pedig

$$\begin{cases} x_1 = r^{936} u_1 D_1^{535} D_2^{585} D_3^{104} D_4^{648}, \\ x_2 = r^{819} u_2 D_1^{468} D_2^{512} D_3^{91} D_4^{567}, \\ x_3 = r^{728} u_3 D_1^{416} D_2^{455} D_3^{81} D_4^{504}, \\ x_4 = r^{504} u_4 D_1^{288} D_2^{315} D_3^{56} D_4^{349}, \\ x_5 = r^{504} u_5 D_1^{288} D_2^{315} D_3^{56} D_4^{349}, \end{cases}$$

illetőleg a

$$D_1 = 77u_2^8 u_3^9 d_1,$$

$$D_2 = 77u_1^7 u_3^9 d_2,$$

$$D_3 = 77u_1^7 u_2^8 d_3,$$

$$R = 77^2 r u_1^{10} u_2^{11} u_3^{17}$$

jelölésekkel

$$\begin{cases} x_1 = R^{936} d_1^{535} d_2^{585} d_3^{104}, \\ x_2 = R^{819} d_1^{468} d_2^{512} d_3^{91}, \\ x_3 = R^{728} d_1^{416} d_2^{455} d_3^{81}, \\ x_4 = R^{504} u_4 d_1^{288} d_2^{315} d_3^{56}, \\ x_5 = R^{504} u_5 d_1^{288} d_2^{315} d_3^{56}, \end{cases}$$

a már ismert eredménynek megfelelően.

A példák sorát egy olyan egyenletrendszer megoldásával zárjuk, amely egyenletrendszerre az 1. tételt alkalmazva, az eredeti egyenletrendszert kapjuk vissza, a (8) formulák azonban eredményre vezetnek.

3. Példa. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 5x_2^3 + 3x_3^4 - 7x_4^4 - x_5^5 + 2x_6^5 + 3x_7^7 - 9x_8^7 = 0 \\ 6x_1^3 - 7x_2^3 - x_3^4 + 5x_4^4 + 8x_5^5 - 11x_6^5 - 8x_7^7 + 10x_8^7 = 0 \\ x_1^3 + 2x_2^3 + 4x_3^4 + 9x_4^4 - 2x_5^5 - 3x_6^5 + x_7^7 + 5x_8^7 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Ekkor

$$n = 8, \quad m = 3, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 6$$

$$K_1 = 3, \quad K_2 = 4, \quad K_3 = 5, \quad K_4 = 7, \quad k = 420,$$

$$L_1 = 140, \quad L_2 = 105, \quad L_3 = 84, \quad L_4 = 60,$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 3, \quad q_3 = 1, \quad q_4 = 5,$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{ha } 1 \leqq j \leqq 2, \\ 2, & \text{ha } 3 \leqq j \leqq 4, \\ 3, & \text{ha } 5 \leqq j \leqq 6, \\ 4, & \text{ha } 7 \leqq j \leqq 8, \end{cases}$$

$$D_1 = -\begin{vmatrix} 3u_3^4 - 7u_4^4 & -u_5^5 + 2u_6^5 & 3u_7^7 - 9u_8^7 \\ -u_3^4 + 5u_4^4 & 8u_5^5 - 11u_6^5 & -8u_7^7 + 10u_8^7 \\ 4u_3^4 + 9u_4^4 & -2u_5^5 - 3u_6^5 & u_7^7 - 5u_8^7 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4u_1^3 + 5u_2^3 & -u_5^5 + 2u_6^5 & 3u_7^7 - 9u_8^7 \\ 6u_1^3 - 7u_2^3 & 8u_5^5 - 11u_6^5 & -8u_7^7 + 10u_8^7 \\ u_1^3 + 2u_2^3 & -2u_5^5 - 3u_6^5 & u_7^7 - 5u_8^7 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = -\begin{vmatrix} 4u_1^3 + 5u_2^3 & 3u_3^4 - 7u_4^4 & 3u_7^7 - 9u_8^7 \\ 6u_1^3 - 7u_2^3 & -u_3^4 + 5u_4^4 & -8u_7^7 + 10u_8^7 \\ u_1^3 + 2u_2^3 & 4u_3^4 + 9u_4^4 & u_7^7 - 5u_8^7 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4u_1^3 + 5u_2^3 & 3u_3^4 - 7u_4^4 & -u_5^5 + 2u_6^5 \\ 6u_1^3 - 7u_3^3 & -u_3^4 + 5u_4^4 & 8u_5^5 - 11u_6^5 \\ u_2^3 + 2u_2^3 & 4u_3^4 + 9u_4^4 & -2u_5^5 - 3u_6^5 \end{vmatrix},$$

az egyenletrendszer olyan megoldásai pedig, amelyekre

$$\begin{vmatrix} 4x_1^3 + 5x_2^3 & 3x_3^4 - 7x_4^4 & -x_5^5 + 2x_6^5 \\ 6x_1^3 - 7x_2^3 & -x_3^4 + 5x_4^4 & 8x_5^5 - 11x_6^5 \\ x_1^3 + 2x_2^3 & 4x_3^4 + 9x_4^4 & -2x_5^5 - 3x_5^5 \end{vmatrix} \neq 0,$$

az alábbiak:

$$\begin{cases} x_1 = r^{140} u_1 D_1^{47} D_2^{105} D_3^{28} D_4^{100}, \\ x_2 = r^{140} u_2 D_1^{47} D_2^{105} D_3^{28} D_4^{100}, \\ x_3 = r^{105} u_3 D_1^{35} D_2^{79} D_3^{21} D_4^{75}, \\ x_4 = r^{105} u_4 D_1^{35} D_2^{79} D_3^{21} D_4^{75}, \\ x_5 = r^{84} u_5 D_1^{28} D_2^{63} D_3^{17} D^{60}, \\ x_6 = r^{84} u_6 D_1^{28} D_2^{63} D_3^{17} D_4^{60}, \\ x_7 = r^{60} u_7 D_1^{20} D_2^{45} D_3^{12} D_4^{43}, \\ x_8 = r^{60} u_8 D_1^{20} D_2^{45} D_3^{12} D_4^{43}. \end{cases}$$

Ha például

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 1,$$

akkor

$$D_1 = 160, \qquad D_2 = 116, \qquad D_3 = 236, \qquad D_4 = 202$$

és így $r = \frac{1}{16}$ esetén:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 2^{41} \cdot 5^{47} \cdot 29^{105} \cdot 59^{28} \cdot 101^{100}, \\ x_3 = x_4 = 2^{30} \cdot 5^{35} \cdot 29^{70} \cdot 59^{21} \cdot 101^{75}, \\ x_5 = x_6 = 2^{24} \cdot 5^{28} \cdot 29^{63} \cdot 59^{17} \cdot 101^{60}, \\ x_7 = x_8 = 2^{17} \cdot 5^{20} \cdot 29^{45} \cdot 59^{12} \cdot 101^{43}. \end{cases}$$

A (8) formulák akkor állítanak elő zérustól különböző számokat, ha $r \neq 0$, $u_1 u_2 \dots u_n \neq 0$ és $D \neq 0$. Nem vizsgáltuk azonban az eddigiekben, hogy teljesíthető-e ez a feltétel.

Tegyük most fel tehát, hogy $D=0$, bármilyen, zérustól különböző egész értékeket vesznek is fel $u_1, u_2, \dots, u_n$. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok, egymástól különböző $u_1, u_2, \dots, u_n$ értékcsoport esetén D-nek ugyanaz a tényezője zérus, legyen például

$$D_{m+1} = \begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \dots & D_{1,m} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \dots & D_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{m,1} & D_{m,2} & \dots & D_{m,m} \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a determináns $D_{i,\alpha}$ definíciója, valamint a determinánsok tulajdonságai alapján

$$\prod_{\alpha=1}^{m} (n_\alpha - n_{\alpha-1})$$

számú,

$$u^{k}_{j_1} u^{k}_{j_2} \dots u^{k}_{j_m} \begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_m} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \dots & a_{2,j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,j_1} & a_{m,j_2} & \dots & a_{m,j_m} \end{vmatrix}$$

alakú tag összegére bontható, ahol

$$n_{\alpha-1} + 1 \leqq j_\alpha \leqq n_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, m. \tag{9}$$

Ezeknek a tagoknak az összege azonban feltételeink alapján csak akkor lehet zérus, ha az

$$\begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_m} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \dots & a_{2,j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,j_1} & a_{m,j_2} & \dots & a_{m,j_m} \end{vmatrix} \tag{10}$$

determináns értéke zérus a $j_1, j_2, \dots, j_m$ indexek minden megengedett választása esetén.

Fordítva, ha a (10) determináns értéke zérus minden olyan esetben, amikor $j_1, j_2, \dots, j_m$ választása (9) szerint történik, akkor $D_{m+1}=0$, bárhogyan választjuk is $u_1, u_2, \dots, u_n$ értékét, és így a (8) formulák csupa zérust állítanak elő.

Hasonló gondolatmenet alkalmazható, ha a $D_\alpha = 0$, $\alpha \leqq m$ feltételből indulunk ki, s az alábbiakban foglalhatjuk össze eredményünket:

A (6) egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik olyan megoldása, hogy

$$\prod_{j=1}^{n} x_j \neq 0$$

és

$$\prod_{\alpha=1}^{m+1} F_\alpha \neq 0,$$

ha az

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{1,n_{\alpha-1}+1} & a_{1,n_{\alpha-1}+2} & \dots & a_{1,n_\alpha} \\ a_{2,n_{\alpha-1}+1} & a_{2,n_{\alpha-1}+2} & \dots & a_{2,n_\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,n_{\alpha-1}+1} & a_{m,n_{\alpha-1}+2} & \dots & a_{m,n_\alpha} \end{bmatrix} \qquad \alpha = 1, 2, \dots, (m+1)$$

mátrixok közül bárhogyan is választunk ki m számút, mindegyik kiválasztott mátrixból kiválasztható egy oszlop úgy, hogy az ezekből az oszlopokból készített determináns értéke különbözik zérustól.

IV.

Befejezésül megmutatjuk, hogy ha a (6) egyenletrendszer lineáris, akkor a (8) formulák ugyanazt az eredményt szolgáltatják, mint a Cramer-szabály.

Ha ugyanis

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1,$$

$$m < n,$$

$$n_\alpha = \alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

akkor

$$K_1 = K_2 = \dots = K_{m+1} = 1,$$

$$k = 1,$$

$$L_1 = L_2 = \dots = L_{m+1} = 1,$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{m+1} = 0,$$

$$D = 1,$$

$$\frac{D_\alpha}{(-1)^{m+\alpha+1}} = \begin{vmatrix} a_{1,1}u_1 & \dots & a_{1,\alpha-1}u_{\alpha-1} & a_{1,\alpha+1}u_{\alpha+1} & \dots & a_{1,m}u_m & D_{1,m+1} \\ a_{2,1}u_1 & \dots & a_{2,\alpha-1}u_{\alpha-1} & a_{2,\alpha+1}u_{\alpha+1} & \dots & a_{2,m}u_m & D_{2,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}u_1 & \dots & a_{m,\alpha-1}u_{\alpha-1} & a_{m,\alpha+1}u_{\alpha+1} & \dots & a_{m,m}u_m & D_{m,m+1} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

ahol

$$D_{i,m+1} = \sum_{j=m+1}^{n} a_{i,j}u_j, \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{12}$$

és

$$\alpha = 1, 2, \dots, m;$$

$$D_{m+1} = \begin{vmatrix} a_{1,1}u_1 & a_{1,2}u_2 & \dots & a_{1,m}u_m \\ a_{2,1}u_1 & a_{2,2}u_2 & \dots & a_{2,m}u_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}u_1 & a_{m,2}u_2 & \dots & a_{m,m}u_m \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$\beta = \begin{cases} j, & \text{ha} \quad 1 \leqq j \leqq m, \\ m+1, & \text{ha} \quad m+1 \leqq j \leqq n, \end{cases}$$

a (8) formulák alapján

$$x_j = \begin{cases} ru_j D_j, & \text{ha } 1 \leqq j \leqq m, \\ ru_j D_{m+1}, & \text{ha } m+1 \leqq j \leqq n, \end{cases} \tag{14}$$

végül

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{1,\alpha} \\ a_{2,\alpha} \\ \vdots \\ a_{m,\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

$$A_{m+1} = \begin{bmatrix} a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha tehát $j \geqq m+1$, akkor (14) alapján

$$u_j = \frac{x_j}{rD_{m+1}},$$

és így (12) szerint

$$D_{i,m+1} = \frac{1}{rD_{m+1}} \sum_{j=m+1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

s ezt (11)-be helyettesítve,

$$D_\alpha \frac{ru_\alpha D_{m+1}}{(-1)^{m+\alpha+1} u_1 u_2 \ldots u_m} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,\alpha-1} & a_{1,\alpha+1} & \ldots & a_{1,m} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{1,j} x_j \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,\alpha-1} & a_{2,\alpha+1} & \ldots & a_{2,m} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{2,j} x_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,\alpha-1} & a_{m,\alpha+1} & \ldots & a_{m,m} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{m,j} x_j \end{vmatrix}$$

adódik. De (13) szerint

$$D_{m+1} = u_1 u_2 \ldots u_m A,$$

tehát

$$D_\alpha \frac{ru_\alpha A}{(-1)^{m+\alpha+1}} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\alpha-1} & a_{1,\alpha+1} & \dots & a_{1,m} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{1,j}x_j \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,\alpha-1} & a_{2,\alpha+1} & \dots & a_{2,m} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,\alpha-1} & a_{m,\alpha+1} & \dots & a_{m,m} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{m,j}x_j \end{vmatrix},$$

illetőleg oszlopcserék után

$$-D_\alpha ru_\alpha A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\alpha-1} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{1,j}x_j & a_{1,\alpha+1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,\alpha-1} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{2,j}x_j & a_{2,\alpha+1} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,\alpha-1} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{m,j}x_j & a_{m,\alpha+1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

De (14) szerint, ha $\alpha \leqq m$, akkor

$$x_\alpha = ru_\alpha D_\alpha,$$

tehát

$$x_\alpha = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\alpha-1} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{1,j}x_j & a_{1,\alpha+1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,\alpha-1} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{2,j}x_j & a_{2,\alpha+1} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,\alpha-1} & \sum_{j=m+1}^{n} a_{m,j}x_j & a_{m,\alpha+1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix},$$

ami valóban a Crámer-szabálynak megfelelő eredmény.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

ЙОЖЕФ КЕЛЕМЕН

REMARKS ON A SYSTEM OF DIOPHANTINE EQUATIONS

J. KELEMEN

FELADATROVAT

SZERKESZTI: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, 1061 Budapest, Anker köz 1—3. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

189. Legyen

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} - \frac{1}{2}\cos t, \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy $0 \leqq t \leqq \pi$ esetén $f(t)$ legkisebb értéke $\frac{1}{2}$, legnagyobb értékét egyetlen helyen veszi fel, amely $7\pi/12$ és $2\pi/3$ között fekszik, s a maximum értéke 0,65... .

Lee Lorch

190. Mutassuk meg, hogy a

$$2x^2 - 1 = (2a^2 - 1)(y^2 - 2)$$

egyenletnek minden egész $a \neq 0$ mellett végtelen sok egész számpárokból álló megoldása van.

Várnai Ferenc és *Surányi János*

191. Legyen $f(x, y)$ olyan kétváltozós valós függvény, amely külön x és külön y függvényeként mindenütt jobbról folytonos. Bizonyítandó, hogy f-nek kétváltozós folytonossági helyei sűrű halmazt alkotnak a síkon.

Császár Ákos

MEGOLDOTT FELADATOK

180. feladat. Legyen az $e(x) = e^{2\pi i x}$ jelöléssel

$$F(v, u; s) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{1+2k} \left(v + \frac{1}{2} + k\right)^{-s} e\left(\left(\frac{v+1}{2} + k\right) u\right),$$

ahol

$$u^2 < \frac{1}{4}, \quad v^2 < \frac{1}{2}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1,$$

továbbá

$$f(v, u; 1-s) = \pi^{s/2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \sum F(\pm v, \pm u; 1-s),$$

ahol az összegezés az előjelek lehetséges kombinációival előálló négy tagra terjed ki. Bizonyítandó, hogy

$$f(v, u; 1-s) = f(u, v; s).$$

(Wilhelm Maier, Jena)

Megoldás. Tekintsük a Lerch által bevezetett

$$G(z, x; s) = \sum_{m=0}^{\infty} (z+m)^{-s} e(xm) \qquad (|\arg z| < \pi, \quad 0 < x < 1)$$

függvényt $\operatorname{Re} s > 0$ mellett. Ez a

$$c = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}$$

jelöléssel eleget tesz a

$$cG(z, x; 1-s) =$$

$$= i^s e(-zx) G(x, 1-z; s) + i^{-s} e(z-zx) G(1-x, z; s)$$

$$(0 < z, x, \operatorname{Re} s < 1)$$

függvényegyenletnek. Az itt kizárt $x=0$ és $x=1$ értékek is tekintetbe vehetők, ha G integrálelőállításának megfelelően elfogadjuk a

$$G(z, 0; s) = \lim_{x \to 0} \left(G(z, x; s) - \Gamma(1-s) e(-zx) (-2\pi i x)^{s-1}\right)$$

definíciót, valamint $G(z, 1; s)$ definíciójául egy ugyanilyen kifejezést az $x \to 1$ határátmenettel; itt az $s=1, 2, \ldots$ értékeket kell csak kizárnunk.

Legyen most

$$H(z, x; s) = e\left(\frac{x}{2}\right) G(z, x; s).$$

Így

$$ce\left(zx - \frac{z}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) H(z, x; 1-s) = i^{s-1} H(x, 1-z; s) + i^{1-s} H(1-x, z; s).$$

Ha aztán

$$v = z - \frac{1}{2}, \quad u = x - \frac{1}{2}, \quad v^2 < \frac{1}{4}, \quad u^2 < \frac{1}{4},$$

továbbá figyelembe vesszük, hogy

$$F(v, u; s) = e\left(\frac{vu}{2}\right) H\left(v + \frac{1}{2}, u + \frac{1}{2}; s\right),$$

akkor az előbbi függvényegyenletből

$$cF(v, u; 1—s) = i^{s-1}F(u, -v; s)+i^{1-s}F(-u, v; s)$$

adódik. Írjuk fel ezt a $\pm v$, $\pm u$ argumentumokra az előjelek minden kombinációjával. Ekkor a jobb oldalon az $i^{s-1}+i^{1-s}$ tényező kiemelhető és az állítást nyerjük.

Wilhelm Maier

Megjegyzés. A $v \to \frac{1}{2}$ határátmenet a Riemann-féle ζ-függvény függvényegyenletéhez vezet.

Wilhelm Maier

181. feladat. Értelmezzük a pozitív egész m, n számokra az f függvényt az

$$f(m, 1) = f(1, m) = m+1,$$

$$f(m+1, n+1) = f(m+1, n)+f(m, n+1)-\left(m+n-2\left[\frac{m+n}{2}\right]\right)$$

rekurzív definícióval. Adjunk az f függvényre explicit előállítást!

(Surányi János)

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy

$$f(m, n) = \binom{m+n}{n} - \sum \binom{m+n-p-q}{n-q}, \tag{1}$$

ahol az összegezés az olyan p, q egész számpárokra terjed ki, amelyekre

$$2 \leqq p \leqq m, \quad 2 \leqq q \leqq n, \quad p+q \text{ páratlan}, \tag{2}$$

az üres összegen szokás szerint 0-t értve.

Valóban, az (1) képlet jobb oldalán üres az összeg, ha $m=1$ vagy $n=1$, és így ekkor az állítás nyilván igaz. Elég tehát megmutatni, hogy ha (1) teljesül az (m, n) pár helyett az $(m+1, n)$ és $(m, n+1)$ párokra, akkor fennáll az $(m+1, n+1)$ párra is. Mármost, az alábbi összegekben mindig csak az olyan p, q párokat szerepeltetve, amelyekre $p+q$ páratlan,

$$f(m+1, n+1) = f(m+1, n)+f(m, n+1)-\left(m+n-2\left[\frac{m+n}{2}\right]\right) =$$

$$= \binom{m+1+n}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} - \sum_{p=2}^{m+1}\sum_{q=2}^{n}\binom{m+1+n-p-q}{n-q} -$$

$$-\sum_{p=2}^{m}\sum_{q=2}^{n+1}\binom{m+n+1-p-q}{n+1-q} - \left(m+n-2\left[\frac{m+n}{2}\right]\right) =$$

$$= \binom{m+1+n+1}{n+1} - \sum_{p=2}^{m+1}\sum_{q=2}^{n+1}\binom{m+1+n+1-p-q}{n+1-q},$$

ugyanis az utóbbi egyenlőség bal oldalán a $2 \leqq p \leqq m$, $2 \leqq q \leqq n$ feltételeknek eleget

tevő tagokat a két levont összegből összevonhatjuk, az első levont összeg $p = m+1$ mellett adódó tagjainak mindegyike, s ugyanúgy a második levont összeg $q = n+1$ mellett adódó tagjainak mindegyike is 1, s ugyanezzel egyenlők a jobb oldali levont összeg megfelelő tagjai is, végül a jobb oldali összeg $p = m+1, q = n+1$ mellett adódó tagja csak akkor lép fel, ha $m+n$ páratlan, s akkor értéke 1, márpedig ugyanez az értéke az

$$m+n-2\left[\frac{m+n}{2}\right]$$

kifejezésnek is. Így az (1) előállítást kettős teljes indukcióval igazoltuk.

Császár Ákos

II. megoldás. A feladatot a következő általánosabb alakban vizsgáljuk. Legyen g és h a természetes számokon, k pedig a természetes számokból alkotott párokon értelmezett tetszőleges adott függvény, az f függvényt pedig az

$$f(m, 1) = g(m), \quad f(1, n) = h(n), \quad g(1) = h(1),$$

$$f(m+1, n+1) = f(m+1, n)+f(m, n+1)+k(m, n) \tag{3}$$

rekurzív definíció értelmezze. Megmutatjuk, hogy ekkor $m \geqq 2$, $n \geqq 2$ esetén

$$f(m, n) = \sum_{i=2}^{m} \binom{m+n-i-2}{n-2} g(i) + \sum_{j=2}^{n} \binom{n+m-j-2}{m-2} h(j) + \tag{4}$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} \binom{n+i-j-2}{n-j} k(m-i+1, j-1)$$

érvényes.

Valóban, (4) igaz az $m=n=2$ esetben:

$$f(2, 2) = f(2, 1)+f(1, 2)+k(1, 1) =$$

$$= g(2)+h(2)+k(1, 1),$$

és most (4) jobb oldala

$$\binom{0}{0} g(2) + \binom{0}{0} h(2) + \binom{0}{0} k(1, 1)$$

alakot ölt. Most az $n=2$ feltétel mellett (4)-et m szerinti indukcióval igazolhatjuk:

$$f(m+1, 2) = f(m+1, 1)+f(m, 2)+k(m, 1) =$$

$$= g(m+1) + \sum_{i=2}^{m} \binom{m-i}{0} g(i) + \binom{m-2}{m-2} h(2) + \sum_{i=2}^{m} \binom{i-2}{0} k(m-i+1, 1)+k(m, 1) =$$

$$= \sum_{i=2}^{m+1} \binom{m+1-i}{0} g(i) + \binom{m+1-2}{m+1-2} h(2) + \sum_{i=2}^{m+1} \binom{i-2}{0} k(m+1-i+1, 1)$$

az állításnak megfelelően.

Az $m=2$ feltétel mellett hasonlóan n szerinti indukciót alkalmazhatunk:

$$f(2,n+1)=f(2,n)+f(1,n+1)+k(1,n)=$$

$$=\binom{n-2}{n-2}g(2)+\sum_{j=2}^{n}\binom{n-j}{0}h(j)+\sum_{j=2}^{n}\binom{n-j}{n-j}k(1,j-1)+h(n+1)+k(1,n)=$$

$$=\binom{n+1-2}{n+1-2}g(2)+\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1-j}{0}h(j)+\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1-j}{n+1-j}k(1,j-1).$$

Most aztán az I. megoldásban követetthez hasonló kettős indukcióval az $(m+1,n)$ és $(m,n+1)$ párról következtetünk az $(m+1,n+1)$ párra:

$$f(m+1,n+1)=f(m+1,n)+f(m,n+1)+k(m,n)=$$

$$=\sum_{i=2}^{m+1}\binom{m+1+n-i-2}{n-2}g(i)+\sum_{j=2}^{n}\binom{n+m-j-1}{m-1}h(j)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m+1}\sum_{j=2}^{n}\binom{n+i-j-2}{n-j}k(m+1-i+1,j-1)+\sum_{i=2}^{m}\binom{m+n+1-i-2}{n+1-2}g(i)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1+m-j-2}{m-2}h(j)+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1+i-j-2}{n+1-j}k(m-i+1,j-1)+k(m,n).$$

Itt az első és a negyedik összeg együtt

$$\sum_{i=2}^{m+1}\binom{m+1+n+1-i-2}{n+1-2}g(i),$$

s hasonlóan a második és az ötödik együtt

$$\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1+m+1-j-2}{m+1-2}h(j)$$

alakban írható.

A hatodik összegben tegyünk az i összegezési index helyébe $(i-1)$-et; ekkor ez az összeg a következőbe megy át:

$$\sum_{i=3}^{m+1}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+i-j-2}{n+1-j}k(m+1-i+1,j-1).$$

Most a harmadik és a hatodik összegből (az utóbbinak mondott átalakítása után) összevonhatók azok a tagok, amelyekben

$$3\leqq i\leqq m+1,\quad 2\leqq j\leqq n, \tag{5}$$

és szolgáltatják a

$$\sum_{i=2}^{m+1}\sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1+i-j-2}{n+1-j}k(m+1-i+1,j-1)=S \tag{6}$$

összegnek azokat a tagjait, amelyekben i és j (5)-nek eleget tesz. A (6) összeg ama tagjai, amelyekben $i=2$, $2 \leqq j \leqq n$, egyenlők a harmadik összeg megfelelő tagjaival, azok pedig, amelyekben $j = n+1$, $3 \leqq i \leqq m+1$, egyenlők az átalakított hatodik összeg megfelelő tagjaival. Végül a (6) összeg fennmaradó $i=2$, $j = n+1$ esetén adódó tagjának értéke $k(m, n)$. Mindennek figyelembevételével

$$f(m+1, n+1) = \sum_{i=2}^{m+1} \binom{m+1+n+1-1-2}{n+1-2} g(i) + \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1+m+1-j-2}{m+1-2} h(j) + S,$$

az állításnak megfelelően.

Tóth János

Megjegyzés. Érdekes, hogy a (4) előállítás látszólag nem válik egyszerűbbé, ha g, h és k helyébe az eredeti feladatnak megfelelő

$$g(m) = m+1, \quad h(n) = n+1,$$

$$k(m, n) = -\left(m+n-2\left[\frac{m+n}{2}\right]\right)$$

kifejezéseket helyettesítjük. Így nem látszik könnyűnek a (2) előállításnak (4)-ből való levezetése sem.

Szerk.

182. feladat. Adjunk meg a [0, 1] intervallumon olyan, az intervallum euklideszi topológiáját indukáló távolságot, hogy három tetszőleges pont közül mindig legyen két olyan, amelyeknek a távolsága irracionális.

(Gerlits János és Hamburger Péter)

Megoldás. Ilyen távolságot az egész számegyenesen is meg lehet adni.

Jól ismert (és könnyen belátható), hogy bármely metrikus térben az eredeti távolsággal azonos topológiát indukáló távolságot vezethetünk be, ha az eredeti távolságot ϱ-val jelölve, az újat pedig σ-val,

$$\sigma(x, y) = f(\varrho(x, y)),$$

ahol f a $[0, +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, folytonos, konkáv függvény, és $f(0)=0$. Ezt az eljárást alkalmazzuk a számegyenesen a

$$\varrho(x, y) = |x-y|$$

távolságra és az előbbi feltételeknek nyilván eleget tevő

$$f(t) = \frac{1-e^{-qt}}{q}$$

függvényre, ahol $q>0$ irracionális szám. Így a feladat követelésének megfelelő távolsághoz jutunk.

Valóban, ha $x<y<z$, akkor az $y-x=a$, $z-y=b$ jelöléssel

$$\sigma(x, y)=f(a), \qquad \sigma(y, z)=f(b), \qquad \sigma(x, z)=f(a+b),$$

és

$$f(a+b)=\frac{1-e^{-qa-qb}}{q}=$$

$$=\frac{1-e^{-qa}}{q}+\frac{1-e^{-qb}}{q}-\frac{(1-e^{-qa})(1-e^{-qb})}{q}=f(a)+f(b)-qf(a)f(b).$$

Innen látszik, hogy ha $f(a)$ és $f(b)$ racionális, akkor $f(a+b)$ biztosan irracionális, hiszen $f(a)\neq 0\neq f(b)$.

Császár Ákos

Megjegyzés. Könnyű megadni olyan metrikus teret, amelyben bármely két különböző pont távolsága irracionális; legyen például $\varrho(x, y)=0$, ha $x=y$, és $\varrho(x,y)=q$, ha $x\neq y$, ahol q ismét pozitív irracionális szám. Összefüggő térben azonban ez lehetetlen, hiszen ilyen térben

$$0<c<\varrho(x, y)$$

esetén van olyan z pont, amelyre $\varrho(x, z)=c$.

Császár Ákos

PROBLÈMES PROPOSÉS

189. Soit

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}-\frac{1}{2}\cos t, \quad f(0)=\frac{1}{2}.$$

Démontrer que, dans l'intervalle $0\leqq t\leqq\pi$, la valeur minimale de f est égale à $\frac{1}{2}$, la valeur maximale est prise en un seul point situé entre $7\pi/12$ et $2\pi/3$, et la valeur du maximum est égale à 0,65 ....

L. Lorch

190. Démontrer que l'équation

$$2x^2-1=(2a^2-1)(y^2-2)$$

possède, pour un entier quelconque $a\neq 0$ donné, une infinité de solutions en nombres entiers.

F. Várnai et *J. Surányi*

191. Soit $f(x, y)$ une fonction réelle de deux variables qui est partout continue de droite en tant que fonction de x et également en tant que fonction de y. Démontrer que les points de continuité de f, considérée comme fonction de deux variables, forment un ensemble dense dans le plan.

Á. Császár

TÁRSULATI ÉLET

A SZELE TIBOR EMLÉKÉREM BIZOTTSÁGÁNAK JELENTÉSE

A Társulat Elnöksége az 1972. évi Szele Tibor emlékérem odaítélésére az alábbi bizottságot küldte ki: Kalmár László elnök, Révész Pál titkár, Császár Ákos, Erdős Pál, Hajnal András, Gyires Béla, Kertész Andor, Kis Ottó, Kovács István, Surányi János és Tandori Károly. A bizottság ez év május 29-én tartotta ülését. Az ülésről kimentette magát Erdős Pál, Kis Ottó, Tandori Károly.

A bizottság az ez évi Szele Tibor emlékérmet 7000,—Ft Gallai Tibornak ítélte oda.

Gallai Tibor példaképül szolgálhat mind a fiatal matematikusok számára, mind a fiatalokkal való lelkiismeretes törődés tekintetében. Tudományos munkássága a 30-as évek elején kezdődött; disszertációja és néhány más munkája a polinomok geometriájának klasszikus elméletében elért új eredményeket tartalmaz. Fő kutatási területe azonban a gráfelmélet. Ebben elért eredménye az idevágó szakkönyvek (így König D., O. Ore, C. Berge, A. A. Zykov, H. Sachs, F. Harary, L. Mirsky könyve) legkülönbözőbb fejezeteiben szerepelnek, és jelentős számú folyóiratcikk csatlakozik gráfelméleti dolgozataihoz. Munkáinak jegyzése meg fog jelenni a közzéteendő ismertetésben, az azonban Gallai úgyszólván példa nélküli szerénységénél és túlzott önkritikájánál fogva korántsem tartalmazza minden jelentős eredményét. Első gráfelméleti eredményei közül több nem cikkben csak König Dénes alapvető gráfelméleti könyvében szerepel; és amikor Gallai bebizonyította Sylvester 50 évig nyitott sejtését, ezt rövidsége miatt (ami pedig csak fokozhatja érdemét) nem tartotta publikálásra érdemesnek; bizonyítása csak szóbeli közlés útján vált ismertté, és fejti ki hatását mindmáig.

Claude Berge 1970-ben megjelent könyve a virágzó magyar gráfelméleti iskola egyik első reprezentánsaként említi Gallait. Valóban e tárgykör csaknem minden magyar művelője tanítványának tekinti magát.

De ez messzemenően többet jelent a legtöbb mester-tanítvány viszonylatnál; és ez az, ami különösen predesztinálja az emlékdíjra Gallai Tibort, aki hivatott tanár a szó legnemesebb értelmében. Középiskolai tanár korában didaktikai elgondolásai az idegenkedőkkel is megszerettette a matematikát, és ahol megvolt a csírája kibontakoztatták a matematikai tehetségeket. Az érdeklődőkkel az iskolai anyagon túlmenően külön is foglalkozott. Osztályának, amelyik lányosztály volt, negyedrésze választott matematika szakot; ezek közül került ki T. Sós Vera kandidátus és dr. Gyarmati Edit is. Akik ismerik, azok tudják, milyen nehéz szívvel hagyta ott a középiskolát, a matematikus nevelésnek ezt az alapvető területét; valósággal kényszerítették rá társadalmunk érdekeire hivatkozva, aminek ő mindig alárendelte magát.

Kimagasló egyetemi oktatómunkája mellett sem szűnt meg a tehetséges iskolásokkal foglalkozni, mégpedig nemcsak alkalomszerűen tette ezt, hanem rendszeresen. Feladatokon keresztül vezette be őket a matematika különböző ágaiba, tanította matematikát olvasni, cikket fogalmazni.

Sokat fáradozott azon is, hogy az ő érdeklődési körén túl eső területeken is kellő ösztönzést, segítséget kapjanak az érdeklődő fiatalok. Így törődésének hatása erősen túlterjed azon, ami közvetlenül felmérhető.

Közvetlen tanítványai közt említhetjük Pósa Lajost, aki fiatalon követője lett Gallainak törődő, nevelő magatartásában is, Lovász Lászlót, akit segített disszertációja témájának megválasztásában, és rávezette eredményei alkalmazási lehetőségeire is. Lehetne tovább sorolni a fiatalokat, akiknek páratlan segítséget nyújtott, kiemelve Andrásfai Béla kandidátust, akinek olyan aspiránsvezetője volt, hogy több év múltán is csodálattal emlékszik vissza erre, és akinek azon túl is mindig készséges tanácsadója. És sorolhatnánk azokat a dolgozatokat, amelyeknek elindítói Gallai eredményei, problémái voltak.

Nem hagyhatjuk említés nélkül azt a lelkiismeretességet, amivel Gallai minden munkáját végzi, és rendkívüli szerénysége mellett azt az etikai szilárdságot, amely példaképpé teszi a matematikus fiatalság előtt. Ebben Szele Tiborral rokon egyéniség.

JELENTÉS A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ HUSZONKETTEDIK KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1972. évi BEKE MANÓ Emlékdíj odaítélésére a Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi Bizottságot jelölte ki:

elnök: Surányi János
titkár: Puskás Imréné
tagok. Abonyi Ivánné
Balogh Viktória
Lipa András
Macskássy Attila
Ruzsa Imre

A Bizottság 1972. május 12-én és június 14-én tartott ülésén foglalkozott beérkezett javaslatokkal és kiegészítő információkkal. A Bizottság szem előtt tartotta, hogy a Társulat a díjak odaítélésében a matematika oktatása, és népszerűsítése terén kifejtett tevékenységet és elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni.

A Bizottság a következő határozatot kozta: az 1972-es évben BEKE MANÓ emlékdíjjal, valamint emlékplakettal jutalmazza az alábbiakat:

Egyenként 2500,— Ft jutalomban részesülnek:

Baky Ágnes gimnáziumi tanár (Dr. Münnich Ferenc Gimnázium és Szakközépiskola Dunaújváros)

Bársony Sándorné általános iskolai tanár Nyíregyháza

Hajnal Imre (Szeged város középiskolai matematikai szakfelügyelője)

Karádi Károlyné (III. ker. általános isk. szakfelügyelő Budapest)

Kántor Sándor (adjunktus KLTE, Debrecen)

Kiss Barna (adjunktus Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszék)

Molnár Ernő (Gimnáziumi tanár Révai Gimnázium Győr)

Indoklás:

Baky Ágnes

Baky Ágnes 1962 óta tanít a dunaújvárosi Dr. Münnich Ferenc Gimnázium és Szakközépiskolában. Igen jó szakmai és módszertani felkészültséggel rendelkező tanár. Példamutató lejkiismeretességgel végzi oktató- nevelőmunkáját; nagyfokú tárgyszeretet és szakmai lelkesedés hatja át. Tanítványait logikus gondolkodásra neveli, versenyeken és felvételi vizsgákon eredményesen szerepelnek. Nagy gondot fordít a tehetséges tanulókkal való foglalkozásra és a tehetségek felkutatására, évek óta rendszeresen vezet matematikai szakkört, s nagyon sok energiát fordít a versenyekre való felkészítésre.

Mint iskolai munkaközösségvezető, nagyon jól működő lelkes szaktanári kollektívát tudott létrehozni, kartársai készségesen segítik a célkitűzések megvalósításában.

1968-ban megszervezte a Bolyai Társulat Fejér megyei Tagozatának dunaújvárosi csoportját; tagokat toborzott, gazdag és változatos programot biztosított mind a tanárok, mind a tanulók részére.

Számítógépek programozásával foglalkozó tanfolyamot szervezett a szaktanárok és az érdeklődő tanulók számára. Jó kapcsolatot épített ki a városban működő Kohó- és Fémipari Főiskolával a főiskola oktatószemélyzetét is bevonta a rendezvények szervezésébe. A tanári továbbképzést bemutató óra tartásával is segítette. Tagja a megyei versenybizottságnak, 1970 óta pedig a megyei Továbbképzési Kabinet Matematikai Szekciójának tagjaként értékes javaslatokkal segíti a szaktárgyi irányító munkát.

Bársony Sándorné

Polgári iskolai tanári oklevél birtokában kezdte tanári munkáját a Nyíregyházi Polgári iskolában.

Igen jó felkészültségű nevelő. Példamutató nevelői hivatástudattal, lelkiismeretességgel végzi csaknem harminc éve a matematika tanítását. Munkájára a céltudatosság, határozottság, sokoldalúság a jellemző, 1969-ben az oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést kapta meg.

Mint városi munkaközösségvezető sokat tett a matematika tanításának korszerűsítése érdekében. Tapasztalatait előadások és bemutató tanítások során szívesen adta és adja át ma is kartársainak. A Tanárképző Főiskola megalakulásakor 3 éven át egyik csoport nála hospitált és tanított a Tanszék megelégedésére. A hallgatók megszerették mint példamutató embert és pedagógust. Magukkal vitték a gyermekek iránt érzett határtalan felelősséget, és szeretetet, így munkája kihat a város területén túl is. Különös ügyszeretettel rendszeresen foglalkozik a matematika iránt érdeklődő gyermekekkel iskolai és iskolán kívüli szakkörökön is. Hat éve vezet Kis Matematikus Baráti Kört igen eredményesen. Négy éve vezeti a szakosított tantervű általános iskolai csoportokat.

Hajnal Imre

Matematika-fizika szakos tanári oklevelének megszerzése után a hódmezővásárhelyi Bethlen Gábor Gimnáziumban tanított, majd rövidesen Szegedre került, ahol 1953-ig a szegedi Szakérettségis kollégiumnak lett tanára. 1953-tól ismét Hódmezővásárhelyre került.

Kiemelkedő tanári tevékenységének eredményeként került 1965-ben Szegedre a JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumba matematika szakos szakvezetőnek. Tanítványai — odaadó munkássága következtében — egyre többször vettek részt a Középiskolai Matematikai Lapok versenyében, valamint az országos tanulmányi versenyen. 1966-tól a Szőkefalvi Nagy Gyula emlékverseny szervezője és irányítója. 1969-től a matematika tagozatos osztálynak vezetője, s ebben a munkában is kiváló eredményeket ért el, ilyen irányú pedagógiai tevékenysége országosan elismert. Szeged város középiskolai matematikai szakfelügyelője.

A matematika szakos tanárok továbbképzésében évek óta részt vesz, a Bolyai Társulattal együttműködve több előadást tartott Hódmezővásárhelyen, Szegeden és Békéscsabán.

Két alkalommal nyert írásos pályamunkájával díjat a Csongrád megyei Tanács, illetve Szeged város Művelődésügyi Osztályánál; a pályamunkák címe: Algebrai átalakítások; A matematikatanítás problémái.

Kiváló tanár kitüntetést kapott kiemelkedő tanári tevékenysége elismeréseként.

Karádi Károlyné

Budapesten szerzett matematika-fizika szakon polgári iskolai tanári oklevelet. Tanított a Főiskola gyakorló iskolájában, a Pedagógiai Gimnáziumban, az Árpád Gimnázium esti tagozatán, a Szentgothárdi Tüdőszanatórium Gimnáziumában, a III. kerületi általános iskolában, jelenleg kerületi általános iskolai szakfelügyelő.

Oktató-nevelőmunkája igen eredményes. Több tanítványa jutott el az évek során a Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny, illetve az Általános Iskolai Matematikai Tanulóverseny döntőjéig, s ott helyezést is értek el. Az általa tanított osztályok tanulói a matematikát az átlag fölötti szinten sajátították el. Erről tanúskodtak az OPI Matematika Tanszékének kísérleti céljára és a budapesti tanárok továbbképzését szolgáló bemutató tanításai, továbbá az Iskolatelevízióban 1968-ban tartott tanítása. A Kis Matematikusok Baráti Körének tanulóit évek óta igen sikeresen tanítja. Az általános Iskolai tanulók Matematikai tanulóversenyének lebonyolításában aktívan részt vesz, mint a Versenybizottság tagja.

Szakirodalmi tevékenysége is jelentős: 1957—58-ban feladatgyűjteményt állít össze az ált. iskolai VIII. osztályos tanulók részére.

1960—61-es tanévben dolgozatot készít az OPI részére a matematika és a gyakorlati foglalkozás kapcsolatáról; 1967-ben az SZTI részére a matematika és a természettudományok kapcsolatáról. A geometriatanítással kapcsolatos cikke jelent meg a Matematika Tanításban. Bírálatot írt több szakköri füzetről, tanári segédkönyvről. Matematika szakfelügyelői munkája is kiváló. Kerületi összefoglaló elemzései is példamutatóak, színvonalasak, segítik a tantárgy eredményesebb tanítását.

Kántor Sándor

Tanulmányainak végzése közben többször köszönthettük őt, mint Arany Dániel, Kürschák József és Schweitzer verseny győztesét.

Oklevelének megszerzése után középiskolai kapcsolatai elsősorban szakkörvezetés tanártovábbképzés vonalán, továbbá versenydolgozatok javításában mutatkoztak. Kiemelkedő az 1965—69 között Debrecenben tartott központi feladatmegoldó szakkör vezetése. Tanítványai diákolimpiákon vettek részt és értékes helyezéseket nyertek.

Nagyszámú tanártovábbképző előadást tartott, amelyek közül kiemelhető a komplex továbbképzésen „integrálszámítás" címmel tartott előadássorozat és 1970. évben a spec. mat. tagozatos tanárok soproni továbbképzésén „a vonal" c. előadássorozat.

1968 óta minden évben nagy segítséget jelent munkája, melyet az országos versenydolgozatok bírálatánál kifejt.

Egyetemi előadásokat és gyakorlatokat hallgató kora óta, közel két évtizede tart. Kísérletet végez tesztrendszerű vizsgáztatásra feladatlapokkal, és a reform tanterv szellemében megújított analízishez példaanyaggal ellátott helyi jegyzetet adott ki.

A középiskolai matematika anyaggal kapcsolatos szakértelmét gyümölcsöztette több szakkönyv és tankönyv lektorálójaként.

Kiss Barna

Középiskolai tanulmányait Sárospatakon végezte, majd a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Természettudományi Karán szerzett matematika—fizika szakos tanári oklevelet 1953-ban. A mai napig a Nehézipari Műszaki Egyetem Matematika Tanszékének oktatója, adjunktusa.

1953—56 közötti időben a Magyar—Szovjet Barátsági Hónap keretén belül a Tagozat által rendezett vidéki előadások tartásában aktívan részt vett. Ezeken az alkalmakon a megye és Miskolc város több középiskolájában tartott ún. kiselőadásokat. A Borsodi Tagozat Diákszakosztályának a vezetője. Aktívan szervezi a matematika iránt érdeklődő diákok részére a városban és a megyében az ún. kiselőadásokat. Ezek közül többet ő maga is tart. Megalakítja a „Miskolci Ifjú Matematikusok Kör"-ét, s ezzel állandó fórumot biztosít a tehetségesebb diákok felkészítésének, ill. felkészültségük bemutatásának. A „Miskolci Ifjú Matematikusok Köre" csaknem 10 évig aktívan működött és jogutódja a Matematikai Önképzőkör az egész megye területéről ma is vonzza a matematika iránt érdeklődő tehetséges diákokat.

1962 őszétől a Borsodi Tagozat titkára. Közel 10 éves munkássága alatt több mint 500 előadást szervezett. A hivatalos tanszéki oktatói tevékenysége mellett a társulati munkáját is mindig lelkiismeretesen végezte és végzi ma is. A Borsodi Tagozat jó hírneve, tartalmi munkája az elmúlt 10 évben is sokat javult, amiben nem kis része volt a titkárnak. Az elmúlt évben aktívan részt vett a vándorgyűlés szervezésében és lebonyolításában.

Molnár Ernő

A győri Révai Miklós Gimnázium tanára. Munkásságának középpontjában a Bolyai János Matematikai Társulat győri Tagozatának irányítása áll, amelynek 11 év óta titkára. A tagozat működésében komoly érdemeket szerzett. Figyelemre méltó ügybuzgalommal és hozzáértéssel igyekszik az egyetemmel nem rendelkező várost hozzákapcsolni a Budapesten folyó társulati élethez. Nemcsak Győrött szervez sikeres rendezvényeket; a helyi tagozat hatása érezhető a környező városokban is. Ebben a tevékenységében pozitívumként említendő meg, hogy Komárom megyében önálló tagozat jött létre, amelynek szervezése Molnár Ernőnek köszönhető.

Több alkalommal vállalt diákelőadásokat Pápán, Komáromban, Tatabányán, Esztergomban, Budapesten. De aktív szerepet vállalt a győri tanárok feladatmegoldó délutánjának irányításában és elevenné tételében is.

Munkássága közismert „A Matematika Tanítása" című folyóirat olvasói előtt is. Közel 15 éve a folyóirat legjobb feladatmegoldói közé tartozik. Diákjai is sokat tanulnak a szakkörökön szellemes probléma megoldásaiból.

Az országos matematikai tanulmányi versenyek aktív segítője. Többek között az országos matematikai úttörőversenybizottságának tagja. Közreműködött a Győrött megrendezésre került nemzetközi matematikai szinpózium előkészítésében.

AZ 1973. ÉVI RÉNYI KATÓ DÍJ BIZOTTSÁG JELENTÉSE

Az 1973. évi Rényi Kató Emlékdíjakat az 1972. évre kijelölt bizottság ítélte oda. A bizottság tagjai voltak: Tandori Károly, a bizottság elnöke, Bognár Mátyás, Czách László, Fejes Tóth Gábor, Győry Kálmán, Hajnal András, Hosszú Miklós, Králik Dezső és Pollák György. A bizottság 1973. május 23-án tartotta ülését. A rendelkezésre álló anyagi keret szűkös volta miatt a bizottság az azonos eredményt elért hallgatók közül előnyben részesítette az ötödéveseket. A beérkezett javaslatok mérlegelése után a bizottság az alábbi határozatot hozta:

A Rényi Kató Emlékdíj I. fokozatában és 1500 forint pénzjutalomban részesülnek:

Nagy Zsigmond, az ELTE V. éves matematikus hallgatója,
Pintz János, az ELTE IV. éves matematikus hallgatója,
Szűcs András, a Leningrádi Egyetem V. éves matematikus hallgatója.

A Rényi Kató Emlékdíj II. fokozatában és 1000 forint pénzjutalomban részesülnek:

Joó István, az ELTE V. éves matematikus hallgatója,
Pethő Attila, a KLTE IV. éves matematikus hallgatója,
Rimán János, a KLTE V. éves matematika—fizika szakos hallgatója,
Simon Péter, az ELTE V. éves matematika—fizika szakos hallgatója,
Vetier András, az ELTE V. éves matematikus hallgatója.

Nagy Zsigmond egy igen értékes új eredményt ért el a kategóriaelméletben. Ezen kívül több eredménye van a számítástechnika területén, melyeknek egy része önálló publikációként megjelent.

Számítástechnikai eredményei közül kiemeljük „A TRACE forrásnyelvi nyomkövető program" című dolgozatát, melynek eredményeit a gyakorlatban is felhasználják.

Pintz Jánosnak eddig öt dolgozata jelent meg, ill. van sajtó alatt. Különösen értékesek a Dirichlet-féle L függvénnyel kapcsolatos eredményei.

Szűcs András kutatási területe az algebrai topológia. Figyelemre méltóak a kobordizmusok elméletében elért értékes eredményei.

Joó István az approkszimációelmélet és a sorelmélet területén ért el érdekes eredményeket.

Pethő Attila eddig két, lényeges új eredményeket tartalmazó dolgozatot készített, mindkettő a diofantikus egyenletek témakörével foglalkozik.

Rimán János Győry Kálmánnal közösen írt dolgozatában a szerzők Schur-típusú irreducibilitási tételeket bizonyítanak, melyek lényegesen jobbak, mint a korábban ilyen irányban nyert eredmények.

Simon Péternek az absztrakt harmonikus analízis területén elért érdekes eredményeit jutalmazta a bizottság.

Vetier András fő érdeklődési területe a valószínűségszámítás. Önálló eredményeket a reprodukáló magú Hilbert terek elméletében ért el.

JELENTÉS
A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ 23. KIOSZTÁSÁRÓL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1973. február 1-i ülésén a Beke Manó emlékdíj odaítélésére a következő bizottságot küldte ki:

elnök: Gádor Endréné, Surányi János

titkár: Baky Ágnes

tagok: Bársony Sándorné
Hajnal Imre
Karádi Károlyné
Kántor Sándor
Kiss Barna és
Molnár Ernő előadó.

A Bizottság, az emlékdíj alapszabályainak megfelelően úgy határozott, hogy a díjak odaítélésével a matematika oktatásban és népszerűsítésben kiváló eredményt elért kartársak munkásságát kívánja jutalmazni.

A Bizottság f. év április 6-án, valamint május 3-án megtartott ülésein a következő határozatot hozta:

Megosztott nagydíjjal és 3000,— 3000, forinttal tüntette ki *Lukács Ottót*, a budapesti Könnyűipari Műszaki Főiskola docensét és *Scharnitzky Viktort*, a budapesti Könnyűipari Műszaki Főiskola tanszékvezető tanárát;

2500,— 2500, forintos díjjal *Békefi Zsuzsát*, a veszprémi Lovassy László gimnázium tanárát, *dr. Gyarmathi Lászlót*, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem docensét, *Kunstár Jánosnét*, a szegedi Ságvári Endre általános iskola szakvezető tanárát és *dr. Perlaki Ernőnét*, a győri Gyakorló Általános iskola alsó tagozatos nevelőjét.

Indoklás:

Lukács Ottó

a Budapesti Könnyűipari Műszaki Főiskola docense

1955-ben az ELTE-n szerzett matematika—fizika szakos tanári oklevelet. Dolgozott szerkesztőként a Középiskolai Matematikai Lapoknál és a Tankönyvkiadónál, tanított középiskolában és a Budapesti Műszaki Egyetemen. 1964 óta van jelenlegi munkahelyén, az akkor még Felsőfokú Könnyűipari Technikumon.

Nagyon jó pedagógus, órái hangulatosak, logikusan felépítettek. Olyan módszereket alkalmaz, amelyek a gyengébb képességű hallgatók számára is hozzáférhetővé teszik a matematikát. Színvonalas jegyzeteket készít, munkájában megbízható, pontos. Jelenleg a matematikának a könnyűiparon belüli alkalmazásával foglalkozik és erről a témáról tanárok számára is tart előadásokat. Közel egy évtizede szervezi és irányítja a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldásainak javítását, megkönnyítve ezzel a Szerkesztőség emberfeletti munkáját.

A középiskolai oktatás hálával gondolhat reá azért is, mert Neukomm Gyula Főszerkesztő halálával ért veszteség idején a középiskolai lapok szerkesztőségét zökkenésmentessé, folyamatossá tette. Részt vesz az Arany Dániel Versenybizottság munkájában is.

Cikkei jelentek meg a Középiskolai Matematikai Lapokban és a Matematika Tanításában.

Könyvei: Scharnitzky Viktorral: Érdekes matematikai gyakorló feladatok III., IV., és V. kötete. Tankönyvkiadó 1969—71. és 72.

: Németh Tiborral: Matematika a dolgozók gimnázuma számára I. és II. kötet, önállóan a III. és IV. kötet.

A matematikai statisztika néhány alkalmazása az iparban (Élő matematika III. kötete sajtó alatt).

Koordinátageometria vektorokkal a síkban és a térben (sajtó alatt). Televíziós játék a középpontos és tengelyes szimmetria összehasonlítására (forgatókönyv).

Scharnitzky Viktor

a Budapesti Könnyűipari Műszaki Főiskola tanszékvezető tanára

1954-ben szerzett az ELTE-n matematika—fizika tanári oklevelet.

1963 óta működik jelenlegi munkahelyén, előzőleg az Építő és Közlekedési Műszaki Egyetemen dolgozott. Hallgatói nagyon szeretik, sokat is foglalkozik velük. Szakmai tudása mellett igen jó pedagógiai érzékkel is rendelkezik. Kitűnő előadó és jó szervező. Igen nagy agilitása és embersége miatt kollégái szeretik és becsülik.

Sok cikke és könyvbírálata jelent meg különböző matematikai folyóiratokban. Öt egyetemi ill. főiskolai jegyzetet írt. A Természettudományi Lexikon munkatársa, az Iskola Televízióban az „Irány az egyetem" és a „Felsőfokú matematika" című sorozatok munkatársa.

Megjelent könyvei:

Pataki Bélánéval: „Felsőfokú matematika" az Iskola Televízió kiadása, 1968—69.
Lukács Ottóval: „Érdekes matematikai gyakorló feladatok III., IV. és V. kötete." Tankönyvkiadó 1969. 71., 72.

Egyetemi felvételi feladatok. 1966—69. Tankönyvkiadó, 1970.

Mátrixszámítás. Műszaki Könyvkiadó 1970.

A televíziós sorozatokkal és könyveivel igen sok segítséget nyújtott és nyújt az érettségire, ill. egyetemi felvételi vizsgára készülő fiataloknak. A Társulat munkájából is kiveszi a részét.

Egy ideig a pénztárosi teendőket látta el, jelenleg az Arany Dániel Tanuló verseny központi bizottságának tagja.

Békefi Zsuzsa

a Veszprémi Lovassy László Gimnázium és Szakközépiskola tanára

Pályakezdésétől fogva a matematika tanításának korszerűsítése, az új a jobb keresése, a matematika tanítás elméleti és módszertani problémáinak kutatása jellemzi. Gyakorlati munkája nagyon sokirányú.

Megyeszerte ismert, de harcosan kapcsolódik bele a problémák országos gondjaiba, megvitatásába is — a speciális matematikai osztályokéba éppúgy, mint a normál osztályok eredményeinek vizsgálatába (témazáró dolgozatok, matematikai érettségi országos tapasztalatai, tananyagcsökkentés stb.).

Mint megyei munkaközösségvezető mindig megtalálja a lehetőségét, hogy az általa kipróbált és jól bevált módszereket, vagy a szakirodalomban olvasott és jónak ítélt javaslatokat, korszerűsítési törekvéseket ismertesse. Van mondanivalója az általános iskolai tanároknak és a Kis Matematikusok Baráti köre vezetőinek is.

Igen eredményesen tanítja a matematikát e kör kis tagjainak, normál és speciális tagozatos matematikai osztályoknak egyaránt.

Szakszervezeti és ifjúsági szervezeti funkciója mellett a megye egyetemi előkészítő bentlakásos matematika tanfolyamának szervezését is vállalja, de megbízatása van a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Intézetétől is: közreműködik egy kutatási témában, amely a tananyag egységesebbé tételét célozza a modern algebra elemeinek segítségével.

Dr. Gyarmathi László

a KLTE docense, a matematikai tudományok kandidátusa

Az ábrázoló geometria—fizika szakos tanári oklevele megszerzése után egy ideig a debreceni Fazekas Mihály gimnáziumban tanított, majd 7 éven át a debreceni Tanárképző Intézet Gyakorló Gimnáziumában mint vezető tanár végzett igen eredményes munkát. Közben több éven át a debreceni tankerületben matematikából és ábrázoló geometriából szakfelügyelőként is működött. 1951-től a Kossuth Lajos Tudományegyetem geometriai tanszékének docense, 1966-ban megszerezte a kandidátusi fokozatot. Átmenetileg tanított a Dolgozók Gimnáziumában és a szakérettségizők tanfolyamain is.

Oktatási munkájának jellemzője azoknak a módszereknek a keresése, melyek révén a középiskolai tanulók, ill. az egyetemi hallgatók minél inkább meg tudják kedvelni a matematikai tudományokat. Sokat foglalkozott a térszemlélet kialakításával kapcsolatos oktatási problémákkal, ezekről több cikket is írt a „Középiskolai Tanáregyesületi Közlöny"-ben és a „A matematika tanítása" c. folyóiratban. A matematika oktatásának tapasztalatairól a „Felsőoktatási Szemle"-ben értekezett.

Középiskolai tanítási gyakolatának tapasztalatait mint vezető tanár és mint szakfelügyelő adta át kartársainak és a leendő szakembereknek.

Gyakorló gimnáziumi tanítványai közül számosan értek el kiemelkedő eredményeket különféle matematikai versenyeken.

Mint egyetemi oktató az ábrázoló geometria-szakos tanárok képzésének volt hosszú éveken át a szervezője és irányítója. 10 éven át volt a vezetője az egyetem matematikai módszertani bizottságának, és tagja a tanárképzési tanácsnak. 1953-ban a Felsőoktatás Kiváló Dolgozója lett.

Több országos jegyzetet írt az ábrázoló geometria hallgatói részére. Társszerzőként közreműködött a technikumok I—III. osztályos matematikai tankönyveinek megírásában. Állandó résztvevője volt az ábrázoló geometriai oktatás modernizálást célzó munkálatoknak. Tudományos munkásságát számos ábrázoló geometriai tanulmány, társadalmi tevékenységét pedig sok Bolyai és TIT-előadás jelzi.

Szeretnők remélni, hogy hosszú és igen eredményes pedagógiai munkássága után nyugállományban vonulva gazdag tapasztalatait továbbra is kamatoztatni fogja a tanárképzés érdekében.

Kunstár Jánosné

a Szegedi Ságvári Endre általános iskola szakvezető tanára

25 éves tanári pályája alatt kiemelkedő szakmai és pedagógiai munkája eredményeként tanítványai hosszú sora kedvelte és szerette meg a matematikát.

A Kis Matematikusok Baráti Körének versenyén, az általános iskolai országos versenyen, a Középiskolai Matematikai Lapok megoldói és a középiskolai versenyeken szereplő tanulók között sorban feltűnnek volt tanítványai; közülük többen választották a matematika szakos tanári pályát, néhányan tudományos munkát végeznek. Mint szakvezető tanár a tanárjelöltekkel 19 év óta igen eredményesen foglalkozik, külön törekvése, hogy a tanárjelöltek didaktikai érdeklődését és kísérletező kedvét felkeltse és tudásukat elmélyítse.

A matematika tanítás korszerűsítési kérdéseit nagyon jól ismeri. Tanítását áthatja a korszerűbb és jobb módszerek keresése és alkalmazása. A Kis Matematikusok Baráti Körének szegedi megindulása óta, annak munkájában tevékenyen részt vesz. Az OPI irányításával 1971-ben szervezett kísérletbe is bekapcsolódott, amely a komplex oktatást a hagyományos alsó tagozati oktatás után az 5. osztályban kezdi. A matematika tanítás korszerűsítésével kapcsolatban előadást tartott Szegeden az általános és középiskolai tanároknak, továbbá Csongrád megyében, Békés megyében, Szabadkán és Zentán is.

A Bolyai Társulat Csongrád megyei Tagozatában évek óta végez kiemelkedő munkát, elsősorban a matematika népszerűsítése területén.

A JATE Neveléstudományi Intézetének megbízásából a felső tagozat négy osztályának teljes matematika anyagából (osztályonként 8 témából, témánként 4—4 változatban) témazáró feladatlapokat készített, melyek részben szegedi, részben országos kipróbáláson vannak.

Dr. Perlaki Ernőné

a győri Gyakorló Általános Iskola alsó tagozatos nevelője

Huszonhat éves pályájának utolsó tíz évét tölti jelenlegi munkahelyén és tágabban hét, szűkebben öt év óta kapcsolódott be a komplex matematikai tanítási kísérletbe.

Az egész Kisalföldön ő indította el a legeredményesebb módon az új tananyag új módszerekkel történő tanítását és mutatta be a tanítási eszközök munkaeszközzé nemesített használatát tanítványainak, azok szüleinek, kartársainak, az egész Balaton vonaláig felfigyelő vidéknek és az országhatárokon túlról jövő érdeklődő pedagógusoknak. Tanítási óráit most már a készülő tanítók majd nem mindennap, pedagógus-csoportok, munkaközösségek, továbbképzős csoportok, sőt országos fórumok is igen gyakran látogatják.

Mindenki az új módszer eredményességéről való meggyőződéssel és annak vállalni akarásával távozik onnan. A tanítási órákon kívül fáradhatatlan a tanácsadásban, az eszközkészítésben, a munkaeszköz és szakirodalom ajánlásban.

Munkaeszközeit sokszor bemutatta szülői értekezleteken és TIT rendezvényeken, de a helyi technika Háza több kiállítási vitrinjét is megtöltötték azok, legutóbb egy hónapon keresztül.

Tanítási tapasztalatairól, nehézségeiről és eredményeiről szerkesztői felkérésre maga is beszámol a Pedagógiai Szemle májusi számának egy cikkében.

JELENTÉS

az 1971. évi GRÜNWALD GÉZA Emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1971. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítélésére. Elnök Turán Pál, titkár Bártfai Pál, tagok Bognár Mátyás, Dancs István, Freud Géza, Hajnal András, Kertész Andor, Kovács István és Révész Pál. A bizottság 1971. nov. 12- én, 26-án és dec. 3-án ülésezett és az alábbi határozatot hozta. A díj első fokozatával (3500,— Ft) tünteti ki

BLEYER ANDRÁS aspiránst

és

Komlós Jánost, a MTA Matematikai Kutatóintézetének tudományos munkatársát.

A díj második fokozatával (2000,— Ft) tünteti ki

Ajtai Miklóst, a MTA Matematikai Kutatóintézetének gyakornokát,
Fejes Tóth Gábort, az ELTE Valószínűségszámítási tanszékének tanársegédjét,
Fritz Józsefet, a MTA Matematikai Kutatóintézetének tudományos munkatársát, és
Hatvani Lászlót, a JATE Analízis tanszékének tanársegédjét.

Indoklás:

Bleyer Andrásnak első dolgozatai topológiai tárgyúak, pszeudostruktúrák izometrikus leképezésére vonatkoznak. Bevezeti a Lipschitzfeltétel egy nagyfokú általánosítását és fixpont tételt bizonyít teljesen reguláris terek konstrukciójára. Másik dolgozata „kerek komprimált körök"-re vonatkozik.

További dolgozatai a Mikusinski-féle M operátortest lineáris transzformációival foglalkoznak. Bleyer érdeme, hogy felismeri, miszerint számos alapvető, az alkalmazások szempontjából is fontos kérdés visszavezethető arra a hipotézisre, hogy M minden endomorfizmusa jellemezhető a szakaszonként polinomfüggvények halmazára való megszorításával. Eredményeinek jelentős része ezen hipotézis egyszerűen bizonyítható speciális eseteiből is következik, Bleyer munkásságának ilyen feldolgozása még nem fejeződött be, így az e téren végzett kutatás inkább a várható és elérhető eredményeket feltáró pionírmunka, mint eredményeket szigorúan bizonyító matematikai elmélet.

A parciális differenciálegyenletek tárgyalása során eredményesen használható Efros-transzformációkat korábban nem sikerült beépíteni Mikusinski elméletébe, holott azok Laplace-transzformációval könnyen tárgyalhatók voltak. Bleyer feltárta az utat; ezek értelmezhetők azáltal, hogy az M egy alkalmas részgyűrűjén értelmezett homomorfizmust kiterjesszük az egész M egy endomorfizmusává. Ilyen módon az Efros-transzformációk a Mikusinszki elmélet keretében tárgyalhatóak. Erre a tárgyalásra vissza lehet vezetni a Hankel transzformációt is. Ez igen jelentős új lehetőséget tár fel az operátorszámítás újabb alkalmazásaira. Bevezeti a „gyenge exponenciális függvény"-t és ennek segítségével állítja elő az M test endomorfizmusait, továbbá bevezeti a Mikusinski-félénél általánosabb gyenge logaritmus fogalmát.

Végül bevezeti a „τ-folytonos operátor" fogalmát, ennek segítségével (a „kiterjesztési tétel"-től független!) bizonyítást ad Wloka fontos tételére, amely az alulról korlátos tartójú disztribúciókat beágyazza a Mikusinszki-testbe.

BLEYER ANDRÁS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Néhány kompaktifikációnál használt halmazrendszer kapcsolatáról, *Mat. Lapok* XIX. (3—4) 1968, 313—316.
[2] On some generalizations of the isometrical mappings and their applications, *Periodica Politechnica (Elec. Engineering)* 13(4) 1969, 257—274.
[3] On continuous endomorphisms of Mikusinski's operátor field, *Acta Math. Acad. Scien. Hung.* 21 (3—4) 1970, 393—402.
[4] On the Integral Reprezentation of the Endomorphisms of Mikusiński's operator field, *Proc. of Edinburgh Math. Soc.* 17 (4) 1971, 351—367.
[5] On linear transformations of the Mikusinski operator field, *Bolletino U.M.I.* 4 (4) 1971, 1—15.
[6] A note and a corrigenda to the paper titled „On linear transformations of the Mikusiński operator field, *Bolletino U.M.I.* 4 (4) 1971, 1028—1030.
[7] On the Mikusinski's operator field, *Publ. Math.* (Debrecen), sajtó alatt.
[8] Algebraic logarithm and the continuous endomorphisms of the operator field, *Studia Sci. Math. Hung.*, sajtó alatt.

Komlós János 1967-ben részesült a Grünwald díj második fokozatában, az azóta végzett munkásságában elsősorban a multiplikatív rendszerekkel kapcsolatos eredményeit kell kiemelnünk ([5], [8], [9]). A [5] dolgozatban a centrális határeloszlástételnek független valószínűségi változókra vonatkozó szükséges és elégséges feltételét általánosítja multiplikatív rendszerekre. Megemlítendő, hogy ezzel a kérdéssel Komlós előtt foglalkozott Révész, Móricz és Gaposhkin, de a végleges eredményt csak Komlós vizsgálatai hozták meg. A [8], [9] dolgozatok ugyancsak számos korábbi eredmény (Alexits, Tandori, Révész, Móricz, Sharma, Serfling, Goposhkin) messzemenő általánosítását tartalmazzák. Ezek a dolgozatok a következő frappáns eredményt tartalmazzák:

A $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ függvényrendszert k-anként multiplikatívnak nevezzük, ha

$$\int |\varphi_i|^k d\mu \leqq c \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\int \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k} d\mu = 0 \qquad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k).$$

Tétel. Ha $\{\varphi_i\}$ $2k$-anként multiplikatív (valamely fix $k > 1$-re) és $\sum c_k^2 < \infty$, akkor $\sum c_k \varphi_k$ m. m. konvergens, de ha $\{\varphi_i\}$ $(2k+1)$-enként multiplikatív, minden természetes k-ra, akkor a $\sum c_k \varphi_k$ m.m. való konvergenciája csak a $\sum c_k^2 \log^2 k < \infty$ esetben biztosítható. Továbbá, ha $\{\varphi_k\}$ négyenként multiplikatív, $\int \varphi_i^2 d\mu = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ és $\sum c_k^2 = +\infty$, akkor $\sum c_k \varphi_k$ pozitív mértékű halmazon divergens.

Komlós számos kombinatorikai jellegű eredménye is jelentős nemzetközi visszhangot váltott ki.

KOMLÓS JÁNOS 1967 UTÁN MEGJELENT TUDOMÁNYOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Prekopa András egy problémájáról. Matematikai Lapok 19 (1968) 349—351.
[2] On the sum of elements of ± 1 matrices. Combinatorial theory and its applications, Balatonfüred, 1969, 721—728. (Sulyok Miklóssal közösen.)
[3] On a problem of Moser. Combinatorial theory and its applications, Balatonfüred, 1969, 365—367. (Erdős Pállal közösen.)
[4] Some combinatorial theorems of monotonicity. Canadian Math. Bull. 14 (1971) 151—157. (V. Chvatal-lal közösen)
[5] A central limit theorem for multiplicative random variables. Canadian Math. Bull. 16 (1973.)
[6] On the capacity of graphs. Periodica Math. Hung. 3 (1973) 125—133 (Erdős Pállal közösen).
[7] Enumeration of regular matrices. Studia Sci. Math. Hung. 3 (1973) 125—133 (Békéssy Andrással közösen).
[8] Remark to a paper of Gaposhkin. Acta Math. Szeged 33 (1972) 237—241 (Révész Pállal közösen).
[9] On the series $\sum c_k \varphi_k$. Studia Math. Sci. Hung. (sajtó alatt.)
[10] On the rate of convergence of the Robbins-Monro method. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 25 (1972) 39—47 (Révész Pállal közösen).

Ajtai Miklós értékes eredményeket ért el a disztributív hálók kongruencia relációra és a disztributív hálók kompakt Hausdorff téren értelmezett folytonos függvények disztributív hálójába való beágyazhatóságára vonatkozó vizsgálatai terén. Nevezetes eredménye Radó Tibor egy több mint negyven éve megoldatlan sejtésének megcáfolása. Ugyancsak figyelemre méltóak a rekurzív sorozatok oszthatósági tulajdonságaira vonatkozó eredményei.

AJTAI MIKLÓS TUDOMÁNYOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On divisibility properties of recurring sequences. Compositio Math. (1969)
[2] On congruence relations and idempotent endomorphisms of distributíve lattices. Annales (1970)
[3] Distributive lattices with operators. Acta Szeged (sajtó alatt).

Fejes Tóth Gábor több figyelemre méltó eredményt ért el különböző geometriai problémákban. Ezek közül csak néhányat emelünk ki.

Inkongruens körök elhelyezésével és fedésével kapcsolatos problémák általában nehezek, s ezekből eddig csak keveset tudunk. Fejes Tóth Gábor meghatározta a sík két fajta körrel való fedése sűrűségének infimumát [4]. Ennek numerikus értéke 1,01837 . . . , s ez a korlát tetszés szerinti pontossággal megközelíthető nagyságrendben különböző körök alkalmas elrendezésével.

Egy ideig nyitott kérdés volt az, hogy vajon készíthető-e bármely hatnál nagyobb k egész számhoz véges sok fajta konvex sokszög felhasználásával k-szomszédos mozaik. Fejes Tóth Gábor ezt a kérdést egy szellemes konstrukcióval pozitív értelemben eldöntötte [3].

B. L. van der Waerden, K. Schütte, R. M. Robinson és több más szerző foglalkozott a gömb n kongruens körrel való legsűrűbb kitöltésével és legritkább fedésével. A probléma nehézségének illusztrálására megemlítjük, hogy a kitöltési problémát az első két szerző $n=7$-, 8- és 9-re egy majdnem 30 oldalas dolgozatban oldotta meg. A fedési probléma, amely általában nehezebb mint a kitöltési, korábban csak az $n \leqq 7$ és az aránylag könnyen elintézhető $n=12$ esetben volt megoldva. Fejes Tóth Gábor ezt a problémát kombinatorikus és elemi geometriai módszerek ügyes kombinációjával megoldotta $n=10$- és 14-re [2].

FEJES TÓTH GÁBOR DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Über die Blockierungszahl einer Kreispackung. Elem. Math. 19 (1964) 49—53.
[2] Kreisüberdeckungen der Sphäre. Stud. Sci. Hung. 4 (1969) 225—247.
[3] Über parkettierungen konstanter Nachbarnzahl. Stud. Sci. Math. Hung. 6 (1971) 133—135.
[4] Covering the plane with two kinds of circles. Kézirat. Előadás az 1971-ben Oberwolfachban tartott Diszkrét geometriai kollokviumon.
[5] Remark on a paper of C. H. Dowker. Per. Math. Hung. (megjelenőben), (Fejes Tóth Lászlóval közösen).
[6] Szabályos sokszöghöz vezető iterációs eljárások. Mat. Lapok (megjelenőben).

Fritz József kutatási területe az információelmélet, valamint ennek a statisztikus fizikában való alkalmazása. [1] dolgozata gázrendszerek egyensúlyi állapotáról szól, itt a rendszer matematikai modelljeként sztochasztikus pontfolyamatot tekint. Így felmerül a tetszőleges pontfolyamatok entrópiája definiálásának szükségessége. Ezzel a kérdéssel foglalkozik — Rényi egy gondolatát általánosítva — [2] dolgozata, majd [4] dolgozatában a sztochasztikus folyamatoknak egy — a pontfolyamatokat speciális esetként tartalmazó — osztályára a probléma véglegesnek tűnő megoldását adja. Ugyanerre a folyamatosztályra [3] dolgozatában bizonyítja a McMillan-féle aszimptotikus ekripartíció tétel általánosítását, ami a fizikai alkalmazás szempontjából alapvetően fontos eredmény. Ezekben a vizsgálatokban egy valószínűségeloszlás valamely tetszőleges mértékre vonatkozó általánosított entrópiája játssza a főszerepet. Fritz József [5] dolgozatában ennek a mennyiségnek frappáns axiomatikus jellemzését adja. [6] dolgozatában pedig Rényi és Csiszár korábbi hasonló eredményeit lényegesen általánosítva, általános állapotterű Markov-láncok egy tág osztálya ergodicitási tulajdonságaira ad egyszerű információelméleti bizonyítást. Említést érdemel még az információelmélet alapfogalmait elemi eszközökkel nagyon világosan bemutató [7] szakköri füzete.

Fritz József munkásságát a mély matematikai gondolkodás és kitűnő absztrakciós készség jellemzi. Ugyanakkor sohasem bonyolódik öncélú absztrakciákba, legtöbb dolgozata konkrét fizikai motivációjú. Munkái tehát az elmélet és alkalmazás egységének is szép példái.

FRITZ JÓZSEF TUDOMÁNYOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Information theory and thermodynamics of gas systems. Proceedings Colloquium on Information Theory, Debrecen, 1967, 167—175.
[2] Entropy of point processes. Studia Sci. Math. Hung. 4 (1969) 389—399.
[3] Generalization of McMillan's theorem to randon set-functions. Studia Sci. Math. Hung. 5 (1970) 369—394.
[4] An approach to the entropy of point processes. Periodica Math. Hung. 3 (1973) 73-83.

[5] On the characteristic properties of generalized entropy. Problems of Control and Information Theory 1 (1972) 177—191.
[6] An information-theoretical proof of limit theorems for reversible Markov processes. Trans. Sixth Prague Conf. Inf. Theory 1971. (sajtó alat).

Hatvani László a nemlineáris differenciálegyenletek vizsgálata terén ért el értékes és fontos eredményeket. [1] dolgozatában A. Meir, D. Wilett és J. S. W. Wong vizsgálataihoz kapcsolódik, A. C. Laser egy tételének az

$$y'' + \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{2i+1} = 0$$

egyenletre vonatkozó két olyan általánosítását adja meg, melyek speciális esetként tartalmazzák az előbbi szerzők két tételét. A [3] dolgozata J. S. W. Wong egy 1967-ben felvetett problémájára adja meg a választ. Bebizonyítja, hogy az

$$x'' + a(t)g(x, x')x' + b(t)f(x) = 0$$

differenciálegyenletre, hogy elég általános együtthatófeltételek mellett az egyenlet zérus-megoldása globálisan aszimptotikusan stabil. A sajtó alatt levő [4]-ben kritériumot ad arra, hogy a

$$(p(t) \cdot x')' + q(t)f(x) = 0$$

egyenlet megoldása mely feltételek mellett rendelkezik a $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ tulajdonsággal.

HATVANI LÁSZLÓ TUDOMÁNYOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] On the asymptotic behaviour of the solutions of $y'' + \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{2i+1} = 0$. Studia Sci. Math. Hung; 4 (1969) 355—365.
[2] Bizonyos másodrendű nem-lineáris differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről. Egyetemi doktori disszertáció, Bolyai Intézet, Szeged, 1969.
[3] On the stability of the zero solutionof certain second order non-linear differential equations. Acta Sci. Math. 32 (1971) 1—9.
[4] On the asymptotic behaviour of the solutions of $(p(t)x')' + q(t)f(x) = 0$. Publ. Math. Debrecen (sajtó alatt).

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT 1972. ÉVI ELŐADÁSAI

Január 4—5.
Ifjúsági Matematikai Kör ankétja.
Január 20.
Fried Ervin: Filmbeszámoló a kanadai útjáról.
Február 10.
B. Rotschild (USA): Euclidean Ramsey Theorems.
Február 11.
Babai László: Az approximációs polinomokról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Március 10.
Az Országos Matematikai Tanulmányi Verseny I. fordulója feladatainak megbeszélése.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Március 13.
P. K. Sen (USA): Bahadur Representation of Sample Quantiles for Strong Mixing Processes.
Március 30.
W. Imrich (Austria): Síkgráfok automorfizmusai.
Április 7—8.
Ifjúsági Matematikai Kör ankétja.
Reiman István: Bolyai geometriájáról.
Tusnády Gábor: Optimális stratégiák.
Feladatmegoldások.

Április 14.
H. RETKIN (Anglia): Combinatorial ideas on error corresting codes.
Április 28.
Az Országos Matematikai Tanulmányi Verseny döntőjének feladatai. Az ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Április 29.
BERKES ISTVÁN: A szerencsejátékok stratégiájáról.
Középiskolai Matematikai Délután.
Május 2.
J. L. MASSEY: Recent trends of finite algebra in code construction and related topics.
Május 3.
J. L. MASSEY: On the Mathematical Theory of Convolutional codes.
Május 12.
L. K. SCHMETTERER (Austria): Einbettung unendlich oft teilbarer Gesetze.
Május 18.
K. GUSTAFSON (USA): Essential Self-Adjointness of the Dirac Operator and the Rellich—Kato Theorem.
Május 27.
HERCZEG JÁNOS: A spirograph matematikai háttere.
Középiskolai Matematikai Délután.
Május 30.
Június 2.
R. R. VARSAMOV (SZU): Az algebrai kódolás válogatott kérdéseiről.
R. R. VARSAMOV (SZU): A polinomok véges tereken történő redukciójának alapvető elméleti kérdéseiről.
Június 2.
A végzős matematikus hallgatók klubdélutánja.
Előadók: TURÁN PÁL és HEPPES ALADÁR.
A klubdélután keretében kiosztásra került az 1972. évi Rényi Kató díj.
Június 3.

ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY

eredményhirdetése és díjkiosztása.

Június 16.
Gh. PIC (România): Kutatások a véges $\tilde{I}I$ megoldható csoportok területén.
Június 19.
S. FALK (NSZK): Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren Hermetischer Matrizenpaare durch RITZ-Iteration.
Június 26.
R.Z. DOMIATY (Austria): Metrische Räume mit einer Elementarlänge.
Június 23.
R. W. NEWCOMB (USA): Interval analysis in computer-aided circuit design.
Julius 3.
T. KAILATH (USA): Radon—Nikodym derivatives with respect to Wiener measure.
Július 4.
T. KAILATH (USA): Recursive calculation of spline functions by reproducing kernel methods.
Július 26.
U. GRENANDER (Sweden): Computational Probability.
Július 27.
U. GRENANDER (Sweden): Progress in Compumetrics.
Július 28.
U. GRENANDER (Sweden): Statistical Geometry: A Tool for Pattern Analysis.
Augusztus 25.
A. D. KEEDWELL (Anglia): Projective Planes with Characteristic.
Augusztus 28.
M. PETRICH (USA): Categories of vector and projective spaces, semigroups, rings and lattices.
Szeptember 8.
B. M. SCHEIN (SZU): Free inverse semigroups.
Szeptember 14.
M. FINDLER (USA): Néhány kutatási téma a mesterséges intelligencia köréből.

Szeptember 15.
F. ESCALANTE (Mexico): Schnittverbände in Graphen.
Szeptember 29.
HÓDI ENDRE: Beszámoló a XIV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Október 14.
BARANYAI ZOLT: Hogyan kell pénzt keresni (keresési feladatok).
Középiskolai Délután.
Október 16.
F. NEUMAN (Csehszlovákia): Oscillation of solutions of linear n-th order homogeneous differential equations.
Október 27.
A. FLORIAN (Austria): Integrale auf konvexen Mosaiken.
Október 30.
W. VOGEL (NDK): Prímsorozatok egy konstrukciója és alkalmazásai.
November 2.
K. BOSCH (NSZK): Über Funktionen Markowscher Kätten.
November 3.
F. MIGLIORINI (Olaszország): Magnifying Elements and Relative Minimal Subsets in Semigroups.
November 10.
Qu. I. RAHMAN (Canada): On a Result of W. K. Hayman.
November 30.
WIEGANDT RICHARD: Vetített képes beszámoló Pakisztánról.
December 1.
MAKAI ENDRE: Szélsőérték feladatok a síkgeometriában.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
December 1.
RÁCZ JÁNOS: Beszámoló a mongóliai szakosított matematika tantervű osztályokról.
December 8.
KÜRSCHÁK JÓZSEF MATEMATIKAI TANULÓVERSENY eredményhirdetése és díjkiosztása.
December 15.
SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY eredményhirdetése és díjkiosztása.
December 16.
FRIED ERVIN: Nem egész „egészek" (bizonyos algebrai egészekről).
Középiskolai Délután.

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT CSONGRÁD MEGYEI TAGOZATA ÁLTAL 1970. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSOK JEGYZÉKE

1. 1970. január 14. Hatvani László
Laplace-transzformáció és alkalmazása a differenciál-differenciaegyenletek elméletében
2. 1970. január 21. Hatvani László
Retardált differenciálegyenletekre vezető különböző feladatok
3. 1970. január 29. V. I. Gorbacsuk (Kiev)
Operátoregyüttható differenciálegyenletek peremfeladatairól
4. 1970. február 4. Pintér Lajos
Kvázipolinomok zéróhelyeiről
5. 1970. február 11. Hatvani László
Differenciál-differenciaegyenletekre és egyenletrendszerekre vonatkozó egzisztencia- és unicitás-tételek
6. 1970. február 18. Varga Gyöngyi
Diofantoszi egyenletek
Veisz János, Kuruc Géza
Fourier sorok
7. 1970. február 20. Szabó Lajos (Budapest)
Félcsoportok növelő elemeiről
8. 1970. március 6. Jauch József
Számelméleti függvényekről

9. 1970. március 11. Pintér Lajos
Elsőrendű konstans együtthatós egyenletekre vonatkozó korrekt Cauchy-probléma
10. 1970. március 11. Kissnémeth Katalin
Matematikai játékok
11. 1970. március 20. Megyesi László
A Bolyai Társulat szerepe, jelentősége
12. 1970. április 15. Farkas Mária
Kvadratikus programozási feladatok
Lőrinc Mária
Néhány raktározási feladat
13. 1970. április 15. Pintér Lajos
Egyenletesen korrekt Cauchy-probléma. Operátorfélcsoportok
14. 1970. április 23. Dr. Surányi János (Budapest)
Újabb vizsgálatok a matematikai logika eldöntésproblémájára vonatkozóan
15. 1970. április 24. Dr. Rédei László (Budapest)
Véges p-csoportok
16. 1970. május 6. Hegedűs Jenő
A parciális differenciálegyenletek elméletének néhány kérdéséről
17. 1970. május 7. Moór Artur (Sopron)
Rekurrens görbületű terek
18. 1970. május 12. Varga Tibor
Minszk 22 bemutatása
19. 1970. május 15. Fried Ervin (Budapest)
Véges *p*-csoportok egy reprezentációja
20. 1970. május 15. Szenthe János
Lokálisan korlátolt görbületű inverziók
21. 1970. május 18. Gurkov R. M. (Szovjetunió)
Számítástechnika alkalmazása az ipar irányításában (a nagy ipari egyesülés tapasztalatai alapján)
22. 1970. május 18. Marjanovics T. P. (Szovjetunió)
Összetett rendszerek ismertetése, kutatása és modellezése
23. 1970. május 19. Andon F. I. (Szovjetunió)
Automatizált irányítórendszerekhez szükséges matematikai információk kidolgozásának kérdése
24. 1970. szeptember 16. Hatvani László
Szimmetrikus operátorok kiterjesztéséről
25. 1970. szeptember 23. M. L. Puri (Indiana University, Bloomington)
Monparametric Methods in Multivariate Analysis
26. 1970. szeptember 25. Masako Izumi és Shin-Ichi Izumi (Canberra)
„On a theorem of Prof. Sz.-Nagy concerning integrability of trigonometric series"
27. 1970. szeptember 30. Hegedűs Jenő
Referátum
A. D.
28. 1970. október 2. Csákány Béla
Transzlációfélcsoportokról I.
29. 1970. október 14. Pintér Lajos
Lineáris másodrendű operátoregyüttható differenciálegyenletek oszcilláló megoldásairól
30. 1970. október 16. Pollák György
Transzlációfélcsoportokról II.
31. 1970. október 29. A. L. Smelkin (Moszkva)
Azonosságok véges bázisának kérdéséről csoportokban
32. 1970. október 31. Konrad Fiechtner (Berlin)
Über schwech reguläre primitive Klassen
33. 1970. november 3. Elbert Árpád (Budapest)
A retardált differenciálegyenletek néhány problémájáról
34. 1970. november 10. Makkai Mihály (Budapest)
Modellelméleti eredmények véges kvantorblokkokkal rendelkező végtelen formulákra
35. 1970. november 13.
Klubdélután Dr. Rédei László akadémikus Tagozatunk volt elnöke 70. születésnapja alkalmából
36. 1970. november 20. Gécseg Ferenc
Néhány tétel transzlációfélcsoportokra I.

37. 1970. november 27. Gécseg Ferenc
Néhány tétel transzlációfélcsoportokra II.
38. 1970. december 2. Győri István
Konvolúciós integrálegyenletek megoldásainak tulajdonságai
Néhány alkalmazás a valószínűségszámítás köréből
39. 1970. december 7. A. Olavszkij (Moszkva).

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT DEBRECENI TAGOZATÁNAK 1970. ÉV I. FÉLÉVI ELŐADÁSAI

1. 1970. május 16. Moszejenkov Borisz Iljics (Kiev)
A nem-stacionális rezgésfolyamatok aszimptotikus módszerekkel való kutatása
2. 1970. május 16. Ljasko Ivan Ivanovics (Kiev)
A matematikai fizika határfeladatai megoldásának új számítási-analitikai módszere
3. 1970. május 18. Moszejenkov Borisz Iljics (Kiev)
1. A Kievi Egyetem differenciálegyenletek tanszékén folyó tudományos kutatómunka fő irányai
2. Az egy-dimenziós határfeladatokkal, nem lineáris határfüggvényekkel leírható mechanikus rendszerek egyfázisú rezgéseinek kutatása.
4. 1970. május 18. Ljasko Ivan Ivanovics (Kiev)
1. Az összegezett fogalmak alap-képleteinek általánosítása
2. A matematikai fizika határfeladatainak megoldása az összegezett fogalmak módszerével
5. 1970. május 19. Dr. Csákány Béla (Szeged)
Univerzális algebrák szabályos primitív osztályainak jellemzése
6. 1970. május 20. Dr. Prékopa András (Budapest)
Logaritmikusan konkáv mértékek
7. 1970. május 21. Dr. Moór Arthur (Sopron)
A kétszeresen rekurrens görbületű terek
8. Dr. Kátai Imre (Budapest)
Számelméleti problémák

1972. június 19. és 23. között rendeztük meg Keszthelyen a *Topológiai Kollokviumot*. A szervező bizottság jelentése a következő:

A szervező bizottság tagjai voltak:

Elnök: Császár Ákos,

Tagok: Bognár Mátyás, Deák Ervin, Gacsányi Sándor Gerlits János, Hamburger Péter (titkár), Juhász István.

A kollokviumon 126 matematikus vett részt, 20 országból (86 külföldi és 40 magyar), mégpedig Lengyelországból 18, az Egyesült Államokból 10, a Szovjetunióból és Jugoszláviából 8—8, Csehszlovákiából és a Német Szövetségi Köztársaságból 6—6, a Német Demokratikus Köztársaságból és Hollandiából 5—5, Ausztriából 4, Angliából és Olaszországból 3—3, Bulgáriából és Kanadából 2—2, Brazíliából, Indiából, Japánból, Norvégiából, Svájcból és Észak-Vietnámból 1—1 matematikus vendégünk volt.

A kollokviumon 14 meghívott előadó tartott 45 perces előadást. Meghívott előadóknak a topológiai kutatásokban nemzetközi hírnevet szerzett matematikusok közül hívtunk meg: F. W. Bauer (NSZK), Bognár Mátyás (Magyarország), G. Chogosvili (Szovjetunió), Deák Ervin (Magyarország), C. H. Dowker (Anglia), J. de Groot (Hollandia), Hajnal András (Magyarország), H. Herrlich (NSZK), K. Kuratowski (Lengyelország), S. Mardešić (Jugoszlávia), K. Morita (Japán), V. I. Ponomarov (Szovjetunió), M. E. Rudin (Egyesült Államok), Ju. M. Smirnov (Szovjetunió). Három szekcióban további 57 húszperces előadás hangzott el. Az előadók között voltak olyan neves matematikusok, mint többek között: A. Alexiewicz (Lengyelország), R. D. Anderson (Egyesült Államok), E. Binz (Svájc), Császár Ákos (Magyarország), R. Duda (Lengyelország), Erdős Pál (Magyarország), F. B. Jones (Egyesült Államok), O. V. Lokucievsky (Szovjetunió), A. A. Malcev (Szovjetunió), E. E. Moise (Egyesült Államok), S. Negrepontis (Kanada), M. M. Postnikov (Szovjetunió), F. D. Tall (Kanada), L. A. Tumarkon (Szovjetunió).

Az előadások felosztása három szekcióba (a topológia alkalmazásai, általános topológia, algebrai topológia), téma szerint történt. Összesen 71 előadás hangzott el, ezek közül 12-t magyar matematikus tartott.

Csütörtök délután két szekcióban (algebrai topológia és általános topológiai) probléma-délutánt tartottunk. Itt az előadók eddig megoldatlan új problémákat (kb. 35—40) ismertettek a topológia területéről.

A Bolyai János Matematikai Társulat egy kötet kibocsátását tervezi, amely tartalmazni fogja az előadások anyagát, a felvetett problémákat és a kollokviumon valamilyen okból részt nem vett néhány világhírű topológus cikkét.

A tudományos üléseket a keszthelyi Agrártudományi Egyetemen tartottuk, amellyel Társulatunknak hosszabb ideje nagyon jó kapcsolata van. Az egyetem által biztosított körülmények most is kifogástalanok voltak. Üléseinket reggel 9-től déli 1 óráig, délután 3/4 4 órától este 1/2 8 óráig tartottuk. Ezen kívül bőven volt lehetőség a személyes konzultációkra is. Ezt segítette elő az is, hogy a résztvevők a keszthelyi Helikon Szállóban, illetve a közeli motelben (40 személy) és campingben (14 személy) voltak elszállásolva.

Tudományos üléseken kívül szerveztünk egy hajókirándulást Badacsonyba, közös vacsorával és borkóstolóval egybekötve, továbbá a szervező bizottság elnöke állófogadást adott a Helikon Szálló halljában. Ezen a résztvevő matematikusokon kívül az őket kísérő családtagjaik kb. 40 személy is részt vettek. Ezenkívül a megnyitó ülés előtt a meghívott előadókat és a szervező bizottság tagjait fogadta Dr. Bellák Sándor, a keszthelyi Agrártudományi Egyetem rektora, aki röviden ismertette az Egyetem múltját és terveit.

A kollokviumot K. Kuratowski akadémikus, a Lengyel Tudományos akadémia alelnöke, a MTA tiszteleti tagja zárta. Beszédében nagyon hasznosnak mondta a kollokviumot, köszönetet mondott a Bolyai János Matematikai Társulatnak a kollokvium szervezéséért, amellyel alkalmat adott arra, hogy a topológiai élet képviselői találkozhattak és tudományos megbeszélést folytathattak.

KÖNYVISMERTETÉS

MAURER I. GYULA—VIRÁG IMRE: A RELÁCIÓELMÉLET ELEMEI

DACIA kiadó Kolozsvár, 1972; 80 oldal.

A kis könyvecske témája valójában az algebrai struktúrák — mégpedig a reláció- és műveleti — struktúrák — elméletébe való bevezetés.

Az algebrai struktúrák — és más matematikai vagy nem matematikai struktúrák vizsgálata az egész világon mindinkább előtérbe kerül. A fenti könyv is egy ilyen témájú, bevezető jellegű tanulmány. A könyv feltehetően igen kedvelt a Román Népköztársaságban, mert ott a struktúrák nagyobb szerepet kapnak a középfokú oktatásban. Talán éppen ezért lenne célszerű nálunk is mennél szélesebb körben elterjeszteni e könyvet. Gondolok elsősorban a középiskolai tanárokra, másodsorban pedig az egyetemi és középiskolai diákságra. De nálunk is megszívlelhető a könyv eredeti ajánlása: „... a korunk tudományosságának megismerésére törekvő olvasó asztalára szánjuk ezt a könyvet".

Mindenekelőtt szeretném röviden ismertetni a könyv tartalmát.

Az első fejezet címe: Relációk. A halmazelméleti alapfogalmak és jelölések bevezetése után itt található a reláció fogalmának a definiálása. Elsősorban természetesen a „bináris" (kétváltozós) relációk szerepelnek; speciálisan az ekvivalenciarelációk és részben-rendezési relációk. Ezután definiálja — speciális esetként — a függvényeket, illetve leképezéseket; majd rátér a speciális típusú függvények (nem analízisbeli függvények!) vizsgálatára. Újabb specializálás után bevezeti a művelet — és ezzel egyidőben az algebrai struktúra fogalmát.

A második fejezet címe: Algebrai struktúrákban és rendezett halmazokban értelmezett relációk. Az általános definíció után bevezeti a fontosabb algebrai struktúrákat. Ezután a kongruencia-relációk; majd a homomorfizmusok vizsgálatára tér rá. Végül a monoton leképezéseket vizsgálja.

Ezzel tulajdonképpen a könyv témája számunkra szinte be is fejeződött; mert a harmadik — a matematikai absztrakcióról szóló rész Rényi A.: Dialógusok a matematikáról c. könyvéből való idézetet tartalmaz csupán; ez az idézet festi alá a könyv jellegét.

A negyedik rész feladatokat és ezeknek megoldásait tartalmazza.

Ha a könyv jellegét és feladatát igen röviden kellene megadni, azt lehetne mondani róla, hogy „bevezető enciklopédia". Bevezető jellege abban nyilvánul meg, hogy nem közöl tételeket; inkább arra törekszik, hogy a felsorolt definíciókat számos ügyes példával megvilágítsa. Az enciklopédikus jelleg annak a következménye már, hogy ilyen nagy anyagot ilyen kis oldalszámra koncentráltak össze (a könyv kis alakú!).

Ajánljuk mindazoknak, akik hozzá tudnak jutni a könyvecskéhez olvassák el, mert szép tiszta világos felépítése — a tématól függetlenül is örömet okoz. Itt említeném meg azt is, hogy külön örömet okoz a használt általános és matematikai nyelv számunkra szokatlan „íze". Azoknak pedig, akik a könyvet meg tudják vásárolni — vagy ajándékképpen megkaphatják, érdemes a könyv birtokosává válni. Bármely kétséges esetben, bármely idevonatkozó szakmai kérdésnél nyugodtan konzultálhatunk a könyvvel, abból mindig jó tanácsot, hasznos útmutatást kaphatunk.

Fried Ervin

FARKAS MIKLÓS (főszerk.): MATEMATIKAI KISLEXIKON

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 444 oldal, 82,— Ft

Az utóbbi évtizedekben a matematika alkalmazási területe rohamosan terjed, tanítása és tanulása gyors ütemben szélesedik, és ennek során egyre többen kerülnek többé-kevésbé szoros kapcsolatba a matematikával. A felhasználásra kerülő matematikai anyag egyrészt bővül, másrészt specializálódik, és így az alkalmazók is egyre több matematikai fogalommal találkoznak. Így vetődött fel az a gondolat, hogy a szakkönyveken kívül célszerű volna olyan könyv összeállítása és meg-

jelentetése magyar nyelven, amely a matematika legfontosabb területeinek leggyakrabban használt fogalmait, tételeit, eredményeit, eljárásait foglalná össze, természetesen bizonyítások nélkül. Ez — amint azt a bel- és külföldi példák bizonyítják — kétféle módon is lehetséges: enciklopédikus módon vagy lexikonszerűen. Az előbbi módszer az anyagot logikus sorrendben állítja össze, az utóbbi a fogalmakat, tételeket, eredményeket betűrendben sorolja fel. Az előbbire példa magyar nyelven a *Matematikai kisenciklopédia* (Gondolat Kiadó, Budapest, 1968), vagy például német nyelven a *Kleine Enzyklopädie, Mathematik* (Enzyklopädie Verlag, Leipzig, 1965). Az utóbbi lehetőséget német nyelven például a *Mathematisches Wörterbuch I—II.* (Akademie Verlag und Teubner Verlag, Berlin und Leipzig, 1965) képviseli. Magyar nyelven matematikai lexikon még nem jelent meg. A *Természettudományi Lexikon* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964—68) bőségesen tartalmaz ugyan matematikai anyagot, de ez összterjedelmének (6 kötet, több mint 5 ezer oldal) csupán mintegy 20%-a, és így ez a sorozat annak az olvasónak, akit elsősorban a matematikai rész érdekel, kicsit kényelmetlen és meglehetősen drága.

A most megjelent *Matematikai kislexikon* közel háromezer címszót tartalmaz. A címszavak részletesen feldolgozzák egyrészt a középiskolában és a nem matematikusokat képező egyetemi és főiskolai szakokon oktatott matematikai anyag minden fontosabb fogalmát, másrészt a matematika speciális területeinek azokat a fogalmait, amelyek az elmélet vagy az alkalmazások szempontjából fontosak.

Az egyes címszavak megfogalmazásánál arra törekedtek a szerzők, hogy a szöveg egyrészt korszerű és matematikailag egzakt legyen, másrészt a lényeg könnyebb megértése érdekében lehetőleg szemléletes legyen. Ezt célozza a 266 ábra is. Azoknak a címszavaknak, amelyek a viszonylag kisebb matematikai előképzettségű olvasókat is érdekelhetik, a megszövegezése részletesebb és a szöveg a fogalmak általános érvényű kimondása mellett utal a speciális esetekben érvényes értelmezésekre is.

Egy-egy szócikk címszavaként általában a szóban forgó fogalom leginkább használatos elnevezését választották a szerzők, de a címszó mögött állnak (zárójelben) a fogalom szinonim kifejezései is. Annak biztosítása érdekében, hogy az olvasó bármely terminológiából kiindulva eljusson az illető fogalom meghatározásához, a szinonim kifejezések utaló címszóként is szerepelnek a legtöbb helyen. Az áttekinthetőség növelése érdekében a rokon címszavak legtöbbször összevontan szerepelnek (pl. szögfüggvények), de ekkor az egyes speciális fogalmak utaló címszóként is előfordulnak.

Ha ugyanazon a kifejezésen a matematika különböző ágaiban vagy vonatkozásaiban mást értenek, akkor ezeket az eltérő értelmezéseket sorszámozva tartalmazza a szócikk, és az első helyen a legszélesebb körben használt definíció áll.

A matematikában használt jelölések is nagy változáson mentek át az utóbbi években. A Matematikai kislexikon szerzői úgy választották meg a jelölésrendszerüket (és ez nem is volt könnyű feladat), hogy a lexikonban a régebben használt jelölésrendszert ismerő olvasók, és a legmodernebb rendszerrel dolgozók is egyaránt egyértelműen és jól tájékozódjanak.

Úgy vélem, hogy a szerzők (Csébfalvi Károly, Kósa András, Merza József, Révész Pál, Schmidt Tamás, Steinfeld Ottó, Wiegandt Richárd) és a főszerkesztő (Farkas Miklós) aprólékos, gondos és fáradságos munkája nem volt hiábavaló, mert egy (a maga szabta határok között) teljesnek mondható, könnyen kezelhető, korszerű matematikai lexikont állítottak össze, amely (és ehhez nem kell különösebb jóstehetség) nagy sikert fog aratni nemcsak a matematikát különböző fokon tanítók és tanulók között, hanem a matematikát művelők, a matematikát alkalmazók, elsősorban mérnökök, közgazdászok körében, és a matematika iránt pusztán csak érdeklődők között is.

Scharnitzky Viktor

FRIED ERVIN: ABSZTRAKT ALGEBRA ELEMI ÚTON

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972, 312 oldal)

A tudomány fejlődéséhez szorosan hozzátartozik annak népszerűsítése, az érdeklődők szélesebb körével való megismertetés. A matematika népszerűsítése — annak absztrakt jellege miatt — igen nehéz feladat; és az ilyen jellegű könyvek többsége csak az egyszerűbb matematikai diszciplinák köréből meríti anyagát. Mélyebb, alapvető fogalmak megismertetésére már igen kevesen vállalkoznak. A modern algebra területén mind ez ideig hiánycikknek számított a népszerűsítő irodalom. Léteznek ugyan könyvek, amelyek az algebra egyes egyszerűbb fogalmaival és eredményeivel foglalkoznak, de ez még nem népszerűsítés. Hiányzik belőlük a legfontosabb, az, hogy a tárgyalt anyagot megszerettessék az olvasóval, az hogy az olvasó kíváncsiságát felébresszék a témakör iránt.

Fried Ervin könyve — egy népszerűsítő könyvvel szemben támasztott ezen kívánalmakat — messzemenően kielégíti. Megismertet, megszerettet és áttekintést nyújt. Célját a szerző nem utolso-

sorban könnyed, szellemes stílusának köszönheti, amellyel egy sereg nehéz fogalmat emberi közelségbe tud hozni. A jó stílus mellett a szerző nagy gonddal válogatta össze anyagát, sohasem felejti el, hogy egy definíció önmagában vajmi kevés, ha azt nem támasztja alá egy sereg az olvasó számára érdekes, érthető példával.

A könyv négy részre tagozódik. Az első részben a szerző a csoportokat és félcsoportokat mutatja be. Először, igen szerencsés módon, bővebb teret szentel a permutálások csoportjának és ezáltal szinte játékosan ismerteti meg az olvasót több csoportelméleti alapfogalommal. Ezúttal a későbbiekben szinte már minden természetessé válik az olvasó számára. A csoportok legfontosabb elemi tulajdonságainak megismertetése után elvezeti az olvasót a csoportelméleti konstrukciókhoz, mellyel máris az algebra leglényegesebb vizsgálataihoz kerülünk.

Nem felejtkezik meg a szerző arról sem, hogy bemutassa a félcsoportelméletnek napjainkban igen fontos alkalmazását az automataelméletben.

A második rész témája a gyűrűk, testek, vektorterek. A gyűrűk bemutatása az egész számok, ill. a polinomok gyűrűje segítségével történik. Egy paragrafust szentel a szerző az egyértelmű prímfaktorizáció kérdésének, majd ezután áttér a vektorterek tárgyalására. Talán kicsit több helyet szentelhetett volna a szerző a gyűrűelméletnek, például igen hálás téma lett volna a hányadostest fogalma.

A harmadik rész egy kis ízelítőt ad a Boole-algebrák és hálók elméletéből. Talán szerencsés lett volna egy kis helyet szentelni a hálók és geometria kapcsolatának.

A negyedik rész egy ügyes áttekintést ad a modern algebra néhány igen fontos újabb irányáról.

A könyv értékét nagymértékben emelik a jól összeválogatott feladatok.

Összefoglalva, Fried Ervin könyve kitűnően megírt népszerűsítő könyv, mely alkalmas arra, hogy különösebb matematikai előismeretek nélkül, viszonylag mélyebb algebrai fogalmakat, az algebra lényegét, kutatási irányait megismerhessük.

Helyes lenne, ha a könyvet angol, ill. német nyelven is kiadnák, minden bizonnyal külföldön is sikeres műnek számítana.

Schmidt Tamás

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1972-ben jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyvek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

ASHBY, W. ROSS, *Bevezetés a kibernetikába*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, 342 oldal, 56 Ft.

BAKOS TIBOR—LŐRINCZ PÁL—TUSNÁDY GÁBOR, *Középiskolai matematikai versenyek 1969*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 123 oldal, 14 Ft.

BANACH STEFAN, *Differenciál- és integrálszámítás* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 459 oldal, 56 Ft.

BÁRCZY BARNABÁS, *Differenciálszámítás* (3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 280 oldal, 20,50 Ft.

BIZÁM GYÖRGY—HERCZEG JÁNOS, *Játék és logika 85 feladatban* (2. és 3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 339 oldal, 36 Ft.

BUSZLENKO, N. P., *Bonyolult rendszerek szimulációja*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 346 oldal, 49 Ft.

CSER ANDOR, *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 310 oldal, 32 Ft.

CSER ANDOR—ERHARDT IMRE—HIRSCHBERG FRIGYESNÉ—IMRECZE ZOLTÁNNÉ—JELITAI ÁRPÁD MIKLÓS GYÖRGYI—MOLNÁR JÓZSEF—PÁLFY SÁNDOR—RÁCZ JÁNOS, *Szakköri feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 219 oldal, 12 Ft.

CZAPÁRI ENDRE—HORVAY KATALIN—PÁLMAY LORÁNT, *Tanári segédkönyv a gimnáziumok III. osztályában a matematika tanításához* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 307 oldal, 33 Ft

CZAPÁRI ENDRE—GYAPJAS FERENC—HORVAY KATALIN—PÁLMAY LORÁNT, *Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák IV. osztályában a matematika tanításához* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 207 oldal, 22 Ft.

ELŐD ISTVÁNNÉ, *Számoljunk együtt!* 7—8. osztály, Segédkönyv a szülők számára (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 374 oldal, 34 Ft.

FARKAS MIKLÓS (főszerk.), *Matematikai kislexikon*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 443 oldal, 82 Ft.

FODOR JÁNOS—HORVÁTH ATTILA—RÁBAI IMRE—SZÉKELY JENŐ, *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára* II. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 396 oldal, 28 Ft.

FORRAI TIBORNÉ—KŐHEGYI JÁNOSNÉ—VAJDA JÓZSEF, *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben*, Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskolák 5. osztálya matematika oktatásához, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 210 oldal, 17 Ft.

FORRAI TIBORNÉ—JAKAB ALBERT—KISS PÉTER—LÉNÁRD FERENC—PELLE BÉLA—SURÁNYI JÁNOS—SZOMBATHY MIKLÓS—VARGA TAMÁS, *Néhány hazai és külföldi kísérlet. Új utak a matematika tanításához*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 195 oldal, 15,50 Ft.

FRIED ERVIN, *Absztrakt algebra elemi úton*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 311 oldal, 38 Ft.

GÉHER KÁROLY, *Lineáris hálózatok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 527 oldal, 85 Ft.

GROSSMANN, I.—MAGNUS, W., *Csoportok és gráfjaik*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 199 oldal, 17,50 Ft.

GYAPJAS FERENC, *A kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának módszertani problémái*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 176 oldal, 19. 50 Ft.

HAJÓS GYÖRGY, *Bevezetés a geometriába* (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 594 oldal, 63 Ft.

HÁMORI MIKLÓS, *Relációk az általános és középiskolai tanulók számára*, Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 180 oldal, 10,50 Ft.

HÁMORI MIKLÓS, *Halmazok, Matematikai logika az általános és középiskolai tanulók számára* (2. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 160 oldal, 9 Ft.

HARDY ZSIGMOND—DR. SÓLYOM MIHÁLY, *Út a modern algebrához*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 277 oldal, 22 Ft.

HORVAY KATALIN—PÁLMAY LORÁNT, *Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II osztályaiban a matematika tanításához* (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 153 oldal, 16,50 Ft.

JAKAB ALBERT—PELE BÉLA—PERGE IMRE—SZEPESSY BÁLINT, *Gyakorlati számolások*, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 176 oldal, 10,50 Ft.

JÁNOSSY LAJOS—TASNÁDI PÉTER, *Élő matematika*, 2. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 61 oldal, 6 Ft.

KAUFMANN, A., *Pontok, élek, ívek, gráfok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest,1972, 173 oldal, 15 Ft.

KAUFMANN, A.—DESBAZEILLE, G., *A kritikus út módszereinek matematikai alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 206 oldal, 28,50 Ft.

KAUFMANN, A.—GULLMANN, G., *Matematikai újdonságok szülők számára*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 239 oldal, 18 Ft.

KÁRTESZI FERENC, *A geometriatanítás korszerűsítéséről*, Új utak a matematika tanításában 2. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 182 oldal, 15 Ft.

KÁRTESZI FERENC, *Bevezetés a véges geometriába*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, 275 oldal, 60 Ft.

KLEY, A., *Hibrid számítógépek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 117 oldal, 12 Ft.

KREKÓ BÉLA, *Optimumszámítás (Nemlineáris programozás)*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972, 655 oldal, 85 Ft.

LÁNCZOS KORNÉL, *Számok mindenütt*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1972, 202 oldal, 13 Ft.

LOHBERG ROLF—LUTZ THEO, *Hogyan gondolkodik az elektronikus számítógép* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 162 oldal, 18 Ft.

LOHBERG ROLF—LUTZ THEO, *Számítógép állást keres* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 147 oldal, 15,50 Ft.

LOVÁSZ LÁSZLÓ—L. VESZTERGOMBI KATALIN—PELIKÁN JÓZSEF, *Kombinatorika az általános iskolai és középiskolai matematika szakkörök számára* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 127 oldal, 7,50 Ft.

LŐCS GYULA—VIGASSY GYÖRGY, *A* FORTRAN *programozási nyelv* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 335 oldal, 26 Ft.

LUKÁCS ERNŐNÉ—RÁBAI IMRE, *Eleget tudok-e matematikából* (Érettségire, felvételire) (2. kiadás), Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972, 367 oldal, 26 Ft.

MANSFIED, D. E.—THOMPSON D., *Matematika új felfogásban* II. kötet, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1972, 202 oldal, 21,50 Ft.

NAGY LAJOSNÉ—CSŐKE LAJOS, *A függvények és tanításuk az általános iskolában*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 223 oldal, 18 Ft.

NAGY SÁNDOR, *A logarléc* (6. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. X. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 81 oldal, 8 Ft.

NEMÉNYI VILMOS, *Gazdasági rendszerek irányítása* (A gazdasági kibernetika alapjai), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972, 265 oldal, 53 Ft.

Operációkutatási esettanulmányok (Szerk. CSATH MAGDOLNA), Számítástechnikai Oktató Központ kiadása, 1972, 495 oldal, 70 Ft.

OYSTEIN, ORE, *A gráfok és alkalmazásaik*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1972, 158 oldal, 10,50 Ft.

ORLICKY I., *A sikeres számítógéprendszer*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972, 328 oldal, 30 Ft.

PETHES ENDRE, *222 ábrázoló geometriai feladat* (3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 248 oldal, 29 Ft.

POGÁTS FERENC, *Vektorgeometria* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972. 363 oldal, 26,50 Ft.

PONTRJAGIN, L. SZ., *Közönséges differenciálegyenletek*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, 323 oldal, 58 Ft.

PRÉKOPA ANDRÁS, *Valószínűségelmélet* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, 1972, 440 oldal, 49 Ft.

RÁBAI IMRE, *Elemi matematikai példatár*, I. kötet, Trigonometria, Koordináta-geometria, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1972, 257 oldal, 18 Ft.

REIMAN ISTVÁN, Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 100 oldal, 6 Ft.

REIMANN JÓZSEF, *Ismerkedés a valószínűségszámítással*, Zrínyi Katonai Kiadó, Budapest, 1972, 260 oldal, 30 Ft.

REJTŐ MAGDA—PACH ZS. PÁLNÉ—RÉVÉSZ PÁL, *Matematika*, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest 1972, 1280 oldal, 180 Ft.

SAIN MÁRTON, *Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 416 oldal, 46 Ft.

SCHOPP JÁNOS, *Kúpszeletek* (3. kiadás), Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest 1972, 128 oldal, 7 Ft.

SIERPINSKI WACLAW, *200 feladat az elemi számelméletből* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 151 oldal, 7,50 Ft.

SZÁSZ GÁBOR, *Az axiomatikus módszer*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 135 oldal, 11 Ft.

SZÉP JENŐ, *Analízis* (2. átdolgozott és bővített kiadás), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972, 777 oldal, 99 Ft.

SZERÉNYI TIBOR, *Analízis*, (Tanárképző Főiskolai Tankönyvek) Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 578 oldal, 59 Ft.

SKLARSZKIJ, D. O.—CSENCOV, N. N.—JAGLOM, I. M., *Válogatott feladatok és tételek az elemi geometria köréből II. rész*, 1. kötet, Geometria I. Planimetria, Tankönyvkiadó, 1972, 261 oldal, 38 Ft.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, *Valós függvények és függvénysorok* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 370 oldal, 35 Ft.

SZ.-NAGY BÉLA, (ed) *Hilbert space operators and operators algebras*, (Colloquia Mathematica Societas János Bolyai, 5.), A Bolyai János Matematikai Társulat és a Nort-Holland Publishing Co. kiadása, Budapest—Amsterdam—London, 1972, 544 oldal.

SZÖRÉNYINÉ, KARVALY VALÉRIA, *Aritmetikai és geometriai feladatok*. Egy év a matematika szakkörben (2. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 75 oldal, 5 Ft.

TAKÁCS LAJOS—ZIERMANN MARGIT, *Valószínűségszámítás* (3. kiadás), Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 147 oldal, 8,50 Ft.

VIGASSY LAJOS, *Geometriai transzformációk* (2. kiadás), Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 100 oldal, 6 Ft.

WINCZE ENDRE, *Valószínűségszámítás*, Műszaki matematika V. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972, 282 oldal, 39 Ft.

WILLIAMS, J. D., *Játékelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 391 oldal, 32 Ft.

WOLTERS, M. F., *Kulcs a számítógéphez* 1—2. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 854 oldal, 80 Ft.

ZADEH, L. A.—POLAK, E., *Rendszerelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, 476 oldal, 85 Ft.

Scharnitzky Viktor

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat beérkezett: 1973. IX. 6. — Terjedelem: 20,7 (A/5) ív
73-3992 — Szegedi Nyomda

СОДЕРЖАНИЕ

Список научных трудов лауреатов государственной премии 1972-го года Ласло Фейеш-Тот и Эндрэ Макаи

Ласло Фейеш-Тот: Теорема замыкания 1
Курт Малер: Трансцендентные числа II 9
К. Гёртиг и Янош Шурани: Комбинаторные и геометрические рассуждения в теории чисел 13
Дьёрдь Гофман и Ласло Шурани: Первое арифметическое доказательство теоремы о простых числах 25
Ласло Ловас: О формуле решета 31
Габор Халас: Статистическая интерполяция 53
Иожеф Пеликан: Самие простейшие нерешенные проблеми теории групп 71
Нгуйен сун Ки: О модифицированном модуле непрерывности изображений по фурье 89
Янош Комлош, Миклош Шуйок и Эндре Семереди: Вспомогательная теорема по комбинаторной теории чисел 99
Михай Салаи: Об одной теореме Дж. В. С. Касселса 103
Эндрэ Семеди: О графах, не содержащих полных четверок 109
Дюла Олах: О деревьях с корнями 113
Эндре Макаи младший: Разделение на меньшие части множеств на плоскость 117
Габор Фейеш-Тот: Итерационные методы, ведущие к регулярному многоугольнику 129
Пал Г. Неваи: Лагранжева интерполяция на действительной оси 135
Енё Дэак: Некоторые свойства обобщенных рядов фабера 143
Вера Рошта: Экстремильное положение трех больших кругов 147
Марта Рупп: Обращение „разреженных" Матриц при помощи грагов 161
Иожеф Келемен: Замечения по одной системе диофантовых уравнений 163
Задачи 173
Из живни общества 187
Обзор книг 195
..... 211

CONTENTS

The list of works of L. Fejes Tóth and E. Makai 1

L. Fejes Tóth: A closing theorem 9
K. Mahler: Transcendental numbers II 13
K. Hartig and J. Surányi: Combinatorial and geometrical ideas in number theory 25
G. Hoffmann and L. Surányi: An exposition of the first arithmetical proof of the prime number theorem 31
L. Lovász: On the sieve formula 53
G. Halász: Statistical interpolation 71
J. Pelikán: On the simplest unsolved problems in group theory 89
Ngnyên Xuân Ký: On the modified continuity moduli of Fourier-transforms 99
J. Komlós, M. Sulyok and E. Szemerédi: A lemma of combinatorial number theory 103
M. Szalay: On a theorem of J. W. S. Cassels 109
E. Szemerédi: On graphs containing no complete quadrangle 113
Gy. Oláh: On rooted trees 117
E. Makai jr.: Subdivision of planar sets into smaller parts 129
G. Fejes Tóth: Iteration processes giving regular polygons 135
G. P. Névai: Lagrangean interpolation on the real axis 143
J. Deák: Some properties of the generalized Faber series 147
Vera Rosta: An extremal distribution of three great circles 161
Márta Rupp: Sparse matrix inversion by graphs 163
J. Kelemen: Remarks on a system of Diophantine equations 173
Problems 187
Activity of the Society 195
Book-review 211

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

23. évfolyam, 1972

3-4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1974. december — 23. évfolyam 3—4. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Császár Ákos, Fejes Tóth László, Kalmár László, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest 1061 VI., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kadóhivatal: Akadémiai Kiadó, 1363 Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: KHI. 215-96 162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11 488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

JUHÁSZ ISTVÁN és PETRUSKA GYÖRGY: Császár Ákos ötven éves 217
Császár Ákos tudományos munkái 234
GARRETT BIRKHOFF: Az algebra mai fejlődési irányai 237
SURÁNYI JÁNOS: Véges Abel-csoportok egy előállításmódjáról 257
NÉVAI G. PÁL: Fourier-sorok és interpoláció I. 261
HOFFMANN ANDOR: Víztároló áramlási viszonyainak meghatározása C-szummálható sorok alkalmazásával 291
SZABADOS JÓZSEF: Egy a komplex egységkörre vonatkozó interpolációs problémáról 297
NAGY ZSIGMOND: A Ramsey-szám egy konstruktív becslése 301
NGUYEN MONG HY: Páratlan rendű affin Galois-síkok ellipszise mint affin szabályos sokszög 303
HORTOBÁGYI ISTVÁN: Konvex lemezek Newton-számáról 313
SZEKERES ISTVÁN: A tanulás folyamatának függvénytani leírása 319
KUN KUTI MÁRTON: A K_n determináns alkalmazásairól 337
SCHMIDT TAMÁS: Elmélkedés egy iskolásoknak szánt algebrakönyv ürügyén 349
Jelentés az 1972. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről 355
Feladatrovat 385
Társulati élet 391
Könyvismertetés 407
Új könyvek 410

CSÁSZÁR ÁKOS ÖTVEN ÉVES

JUHÁSZ ISTVÁN és PETRUSKA GYÖRGY

Szívesen teszünk eleget a szerkesztőbizottság kérésének, hogy ötvenedik születésnapján ismertetést írjunk CSÁSZÁR ÁKOS sokoldalú és termékeny tudományos tevékenységéről. Számunkra, akik tanítványai vagyunk, külön öröm, hogy ezt a gondolatokban gazdag és jelentős munkásságot — ha csak nagy vonalakban is — megismertethetjük a Matematikai Lapok olvasóival. Reméljük, hogy ez legalább annyira sikerülni fog, hogy egyszersmind az ünnepelt születésnapi ajándékául is szolgálhat.

CSÁSZÁR ÁKOS két fő kutatási területe a valós függvénytan és az általános topológia. Az alábbiakban először — korábbi érdeklődési területe — a valós függvénytan, majd a topológia terén elért eredményeit próbáljuk ismertetni és e két területen belül csak a szorosan összetartozó eredmények kedvéért borítjuk fel az időrendi sorrendet.

A [2] cikk a magasabbrendű approximatív deriválttal foglalkozik. (Az $f(x)$ függvény a-pontbeli approximatív limesze az A szám, ha minden $\varepsilon>0$-ra az $\{x: |f(x)-A| \geqq \varepsilon\}$ halmaz a-ban nulla sűrűségű.) Annak az elemi tételnek, amely szerint egy korlátos változású függvény majdnem mindenütt differenciálható, a Denjoy—Hincsin-tétel az approximatív általánosítása: ha egy $f(x)$ függvény bizonyos általános értelemben korlátos változású, akkor majdnem mindenütt létezik az approximatív deriváltja. A dolgozat azt igazolja, hogy ha egy függvény bizonyos kiterjesztett értelemben korlátos változású, akkor m. m. létezik n-edrendű approximatív deriváltja.

Hasonló jellegű általánosítás a [3] cikk témája. Az $f(x)$ függvény VBG^* az E halmazon, ha $E=\bigcup_1^\infty E_k$ és minden fix k-ra a $\sum_{\nu=1}^{N} \omega(I_\nu, f)$ összegek korlátosak, ahol $\omega(I, f)$ jelöli f oszcillációját az I intervallumon és $\{I_\nu\}_{\nu=1}^N$ tetszőleges egymásba nem nyúló intervallumok rendszere, amelyek végpontjai az E_k halmazban vannak. A korlátos változású függvény fogalmának ezt az általánosítását a Denjoy—Luzin-tétel teszi érdekessé, amely szerint ahhoz, hogy $f(x)$ m. m. differenciálható legyen az E halmazon, szükséges és elégséges, hogy VBG^* legyen E-n. A [3] cikkben ennek a tételnek n-edrendű deriváltra vonatkozó általánosítása szerepel. Megadható a korlátos változás fogalmának olyan „n-edrendű" általánosítása (az R_nG^* tulajdonság, amelyre $R_1G^*=VBG^*$), amellyel $f^{(n)}(x)$ akkor és csak akkor létezik m. m. az E halmazon, ha $f(x)$ R_nG^* tulajdonságú. Hasonló tétel az erős deriváltakra is megfogalmazható.

A [4] cikk az ún. „intern" tulajdonságú függvényekkel foglalkozik: $f(x)$ intern az (a, b) intervallumon, ha $a<x<y<b$-re

$$\min\left(f(x), f(y)\right) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max\left(f(x), f(y)\right).$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A monoton függvények triviálisan ilyenek, de a monotonitás nem szükséges feltétel, mert az $f(x+y)=f(x)+f(y)$ függvényegyenlet megoldásai is mind intern függvények. A dolgozat eredménye szerint ha egy intern függvény nem monoton (a, b)-n, akkor nem is mérhető.

Ezt a tételt élesíti az [5] dolgozat, ahol kiderül, hogy egy nem monoton intern függvény semmilyen pozitív mértékű halmazon sem lehet mérhető.

A [8] dolgozatban közvetlen, egyszerű bizonyítás található arra a tételre, amely szerint egy kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha determinánsának bal felső sarok aldeterminánsai pozitívak.

A Darboux-tulajdonsággal, illetve ennek bizonyos általánosításával foglalkozik [10]. $f(x)$ Darboux-tulajdonságú ha bármely a, b-re az (a, b) intervallumban felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket. A $D_{\mathfrak{N}}$ tulajdonságú függvények olyanok, hogy felvesznek minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket, kivéve egy adott („kis" halmazokat tartalmazó) $\mathfrak{N}$ halmazrendszerhez tartozó halmazt. A cikk eredménye szerint a Darboux-tulajdonság, ill. a $D_{\mathfrak{N}}$ tulajdonság ekvivalens ezek alkalmasan definiált lokális teljesülésével.

Az $f(x)$ függvény x_0-beli α-adrendű Lipschitz-számainak nevezzük az $\frac{F(x)-F(x_0)}{(x-x_0)^{\alpha}}$ $(0<\alpha<1)$ tört jobb, ill. bal oldali limesz szuperiorját, ill. inferiorját, ezeket rendre $\bar{L}_{\alpha}^{+}F(x_0)$, $\bar{L}_{\alpha}^{-}F(x_0)$, $\underline{L}_{\alpha}^{+}F(x_0)$, $\underline{L}_{\alpha}^{-}F(x_0)$ jelöli. A Lipschitz-számokról Besicovitch igazolta, hogy mérhető $F(x)$ függvényre az $\{x: \bar{L}_{\alpha}^{-}F(x)<\bar{L}_{\alpha}^{+}F(x)<+\infty\}$ halmaz nullamértékű.

A [7] cikkben kiderül, hogy a Besicovitch-tétel tetszőleges véges értékű $f(x)$ függvényre fennáll, azaz a mérhetőség feltétele elejthető. Másrészt, ha L helyett Λ-val jelöljük a megfelelő approximatív Lipschitz-számokat, akkor mérhető és véges értékű $F(x)$ függvényre az $\{x: \bar{\Lambda}_{\alpha}^{-}F(x)<\bar{\Lambda}_{\alpha}^{+}F(x)<+\infty\}$ halmaz is nulla mértékű.

E cikk eredményeinek messzemenő általánosításával és élesítésével foglalkozik a [9] dolgozat. A Lipschitz-számok olyan módon általánosíthatók, hogy a nevezőben $(x-x_0)^{\alpha}$ helyett $\varphi(x-x_0)$ szerepel, ahol a $\varphi(h)$ függvényről azt kell kikötni, hogy szigorúan monoton növekedő $h>0$-ra,

$$\lim_{h\to+0}\varphi(h)=0,\quad \lim_{h\to+\infty}\varphi(h)=+\infty,\quad \lim_{h\to+0}\frac{\varphi(h)}{h}=+\infty,$$

és végül, hogy φ logaritmikusan konkáv. Ha a definícióban approximatív limeszt használunk, akkor az approximatív általános Lipschitz-számokat kapjuk.

Ezek után érvényesek a következő állítások. Tetszőleges $f(x)$ függvényre az $\{x: \bar{L}_{\varphi}^{-}f(x)<\bar{L}_{\varphi}^{+}f(x)\}$ halmaz, mérhető $f(x)$ függvényre az $\{x: \bar{\Lambda}_{\varphi}^{-}f(x)<\bar{\Lambda}_{\varphi}^{+}f(x)\}$ halmaz nulla mértékű. Ha a féloldali felső Lipschitz-számok (közönséges vagy approximatív) végesek egy E halmazon, akkor m. m. megegyeznek E-n. Ha jobb oldaliak végesek E-n, akkor bal oldaliak is m. m. végesek. Speciálisan, ha egy függvény egy E halmaz minden pontjában féloldali Lipschitz-feltételt teljesít, akkor m. m. Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

A [14], [16] dolgozatok közös alapgondolata a következő: az analízis alapfogalmait (monotonitás, határérték, derivált) általánosítsuk úgy, hogy a szokásos definíciókban szereplő kikötéseknek egy „kis" kivételes halmazon nem kell fennállniuk.

Legyen $\mathfrak{N}$ a valós számok részhalmazaiból álló halmazrendszer, amelyre

$$B \subset A \in \mathfrak{N} \Rightarrow B \in \mathfrak{N},$$

$$A_k \in \mathfrak{N},\ k = 1, \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{N}$$

teljesül.

Mármost nevezhetjük az $f(x)$ függvényt az x_0 pontban jobbról $\mathfrak{N}$-növőnek ([16)], ha van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\{x : f(x) \leqq f(x_0),\ x_0 < x < x_0 + \delta\} \in \mathfrak{N}.$$

Ha $\mathfrak{N}$ csak az üres halmazt tartalmazza, akkor ez nyilván a jobb oldali lokális (szigorú) növekedés szokásos definíciója. Nyilvánvaló, hogy hogyan kell definiálni a megfelelő $\mathfrak{N}$-tulajdonságot a nem csökkenés, a fogyás, a bal oldali növekedés, ill. fogyás és az oszcilláló függvény esetére. (Itt az $\mathfrak{N}$ nem-csökkenés nem tartalmazza speciális esetként az $\mathfrak{N}$-növekedést!) Feltéve ezeket. a tulajdonságokat, egy adott függvény egy adott x_0 pontban lényegében 9-féleképpen viselkedhet (pl. jobbról $\mathfrak{N}$-növekedő, balról $\mathfrak{N}$-oszcillál stb.). A [16] dolgozat azt vizsgálja, hogy ha egy függvény a 9 közül ugyanannak a tulajdonságnak tesz eleget az E halmaz minden pontjában, akkor milyen szerkezetű az E halmaz. Pl. ha $f(x)$ E minden pontjában jobbról $\mathfrak{N}$ nem-csökkenő, balról $\mathfrak{N}$ nem-növekvő (minimumszerű hely), akkor $E = N \cup H$, ahol $N \in \mathfrak{N}$ és H-n a függvény csak megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.

Ugyanebben a cikkben az ún. approximatív monotonitást és szélsőértéket is vizsgálja a szerző. Ez megfelel az előbb leírt általánosítási *elvnek*, de nem speciális esete a fenti módszernek. Ha az analízis egy lokális tulajdonságának definíciójában megengedjük, hogy kirovás ne teljesüljön egy olyan halmazon, amely az adott pontban nulla-sűrűségű, akkor jutunk az adott tulajdonság approximatív megfelelőjéhez. Az $\mathfrak{N}$-tételek analogonjai itt is kimondhatók. Pl., ha egy $f(x)$ függvénynek az E halmaz minden pontjában approximatív lokális minimuma van úgy, hogy a fogyás balról mindig szigorú, jobbra a növekedés sosem szigorú, akkor E nullmértékű. A cikk módszereivel klasszikus eredmények is új megvilágításba kerülnek. Egyszerűbben igazolható például, hogy ha egy mérhető $f(x)$ függvényre az approximatív derivált egy K halmaz minden pontjában nulla, akkor a K halmaz f-képe nulla mértékű.

A [16]-ban leírt általánosítások kétváltozós lehetőségeivel foglalkozik a [12] cikk.

Álljon most az $\mathfrak{N}$ rendszer a sík egyes részhalmazaiból, egyébként ugyanazt kötjük ki, mint az előbb. Jelölje $S(z_0, r_0, \alpha, \beta)$ a z_0 pont egy szögtér környezetét, azaz

$$S(z_0, r_0, \alpha, \beta) = \{z = re^{i\varphi} + z_0,\ 0 < r < r_0,\ \alpha < \varphi < \beta\}.$$

Az $f(z)$ függvényt nevezzük $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ tulajdonságúnak, ha alkalmas $r > 0$ érték mellett

$$\{z : f(z) \leqq f(z_0),\ z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)\} \in \mathfrak{N}.$$

Ez tehát a lokális $\mathfrak{N}$-növekedés általánosítása egy adott szögtérre. Ha most például $f(z)$ az E halmaz minden pontjában egyszerre $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ és $C_{\alpha+\pi,\beta+\pi}(\mathfrak{N})$ tulajdonságú, akkor $E = N \cup H$, ahol $N \in \mathfrak{N}$ és H megszámlálható sok rektifikálható ívvel lefedhető. Az egyik fő segédeszköz a Kolmogorov—Vercsenko-tétel általánosítása: ha az E halmaz minden z_0 pontjához van $r > 0$ és $\alpha < \beta$ úgy, hogy $E \cap S(z_0, r, \alpha, \beta) \in \mathfrak{N}$, akkor $E = N \cup H$, ahol $N \in \mathfrak{N}$ és H lefedhető megszámlálható sok rektifikálható ívvel.

Ebben a cikkben is találkozunk a fogalmak approximatív változataival. Pl. nevezzük az $f(z)$ függvényt a z_0 pontban $\Gamma_{\alpha\beta}$ tulajdonságúnak, ha a $\{z: f(z) \leqq f(z_0)\}$ nívóhalmazt az $S(z_0, \infty, \alpha, \beta)$ szögtérre megszorítva z_0-ban nulla sűrűségű halmazt kapunk. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a szóban forgó szögtérben és a z_0-hoz közel „lényegében" $f(z) > f(z_0)$ teljesül. Érvényes ezután a következő tétel: ha az E halmaz minden pontjához található $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$ úgy, hogy $f(z)$ az adott pontban egyszerre $\Gamma_{\alpha\beta}$ és $\Gamma_{\alpha+\pi,\beta+\pi}$ tulajdonságú, akkor E nullamértékű.

A [15] cikk a derivált számokat általánosítja a már említett módszerrel. Bevezeti az $\mathfrak{N}$-szuprémum, az $\mathfrak{N}$-lim szup. az $\mathfrak{N}$-limesz fogalmát (ha pl. $\mathfrak{N}$ a nullmértékű halmazok rendszere, akkor az $\mathfrak{N}$-szuprémum a jól ismert lényeges szuprémummal egyezik meg), erre alapozva egyszerű megadni tetszőleges véges valós függvény 4 darab $\mathfrak{N}$-deriváltszámát. Érvényes a jól ismert Denjoy—Young—Saks-tétel megfelelője: egy nullamértékű halmaz kivételével 4 eset lehetséges:

1. a négy $\mathfrak{N}$-deriváltszám megegyezik és véges,
2. a jobb oldali felső a bal oldali alsóval egyezik és végesek, de a bal oldali felső $+\infty$, a jobb oldali alsó $-\infty$,
3. a 2. eset szimmetrikus párja a jobb és bal oldal felcserélésével,
4. a felső deriváltszámok $+\infty$-nel, az alsók $-\infty$-nel egyenlők.

Igen érdekes eredmény például a következő: ha az E halmaz egyik pontjának sincs olyan féloldali környezete, amely $\mathfrak{N}$-hez tartozik (ez például automatikusan teljesül, ha $\mathfrak{N}$ nem tartalmaz valódi intervallumot) és az $\mathfrak{N}$-derivált m. m. létezik E-n, akkor ez m. m. az approximatív deriválttal egyezik meg.

Az approximatív monotonitással és az approximatív deriváltszámokkal foglalkozik részletesen a [32] cikk. Erre az esetre is igazolható a Denjoy—Young—Saks-tételnek megfelelő állítás.

Egy további szempont figyelembevételével nyúl a kérdéshez a [36] dolgozat. Ebben a limesz, ill. speciálisan a deriváltszámok általánosításához úgy jutunk, hogy a számegyenes szokásos topológiáját egy finomabb T topológiára cseréljük. A T topológiát megengedettnek nevezi a szerző, ha bármely x pont bármely T-környezetére $V \cap (-\infty, x) \neq \emptyset \neq V \cap (x, +\infty)$. Ha egy megengedett topológia környezeteit kettévágjuk úgy, hogy az adott ponttól jobbra, ill. balra eső részét vesszük, a két féloldali topológiát, T^+-t és T^--t kapjuk. Ha $\mathfrak{N}$ egy halmazrendszer, amely nemtriviális intervallumot nem tartalmaz, és amelyre

$$N_1 \in \mathfrak{N},\ N_2 \in \mathfrak{N} \Rightarrow N_1 \cup N_2 \in \mathfrak{N},$$

$$N_1 \subset N_2 \in \mathfrak{N} \Rightarrow N_1 \in \mathfrak{N},$$

akkor a szokásos környezetekből $\mathfrak{N}$ elemeit levonva olyan környezetekhez jutunk, amelyek egy $T(\mathfrak{N})$ megengedett topológiát határoznak meg.

Ugyancsak megengedett az A approximatív topológia, amelyben egy pont környezetei olyan halmazokból állanak, amelyek az illető pontban 1 (belső) sűrűségűek.

Az analízisben fontos szerepet játszanak olyan tételek, amelyek lokális tulajdonságok feltételezésével egy intervallumon biztosítják egy függvény monotonitását (pl. ilyen az az elemi tétel, hogy ha $f'(x)$ létezik és $\geqq 0$, akkor f monoton növekedő a szóban forgó intervallumon).

Általános tételekhez úgy jutunk, hogy a lokális feltételeket egy topológiára alapozzuk, amelyet topológiák egy széles osztályából tetszőlegesen választhatunk.

A T megengedett topológia (B)-tulajdonságú, ha a T^--ban zárt és ugyanakkor T^+-ban nyílt halmazok csak az $(a, +\infty)$ vagy az $[a, +\infty)$ alakú félegyenesek $(-\infty \leqq a \leqq +\infty)$. Az A és a $T(\mathfrak{N})$ mindig (B) tulajdonságú topológia. Érdekes,

hogy a (B) tulajdonság már magában is ekvivalens egy monotonitási kritériummal, pontosabban (B) ekvivalens a következő állítások bármelyikével:

— Ha az f függvény az $a<x\leqq b$ halmazon felülről félig folytonos a T^- topológiában és az $a\leqq x<b$ halmaz pontjaiban T^+-ra nézve növekedő, akkor f monoton növekedő az $[a, b]$ intervallumon.

— Ha f növekedő T^--ra nézve $a<x\leqq b$ pontjaiban és növekedő T^+-ra nézve $a\leqq x<b$ pontjaiban, akkor monoton növekedő $[a, b]$-n.

Legyen T egy (B)-tulajdonságú megengedett topológia. Ekkor érvényes a következő tétel.

Ha $f(x)$ véges értékű valós függvény $[a, b]$-n úgy, hogy

$$\limsup_{t\to x}{}_{T^-} f(t) \leqq f(x), \quad a < x \leqq b,$$

$$\liminf_{t\to x}{}_{T^+} f(t) \geqq f(x), \quad a \leqq x < b$$

az $a\leqq x<b$ pontokra, továbbá, egy megszámlálható halmazt kivéve $\underline{D}_{T^+} f(x) > -\infty$ (az alsó deriváltszám T^+-ra nézve) és $[a, b)$-n majdnem mindenütt $\underline{D}_{T^+} f \geqq 0$, akkor f monoton növekedő $[a, b]$-n.

A [13] cikk a Rényi Alfréd által megalapozott feltételes valószínűségi mező fogalmával és általánosításaival foglalkozik. Jelölje S a valószínűségi mezőt, $\mathscr{A}$ az események σ-algebráját, $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$, P a valószínűség.

A dolgozat az $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{A}$, $C\in\mathscr{B}$, $BC\in\mathscr{B}\Rightarrow$

$$P(A|BC)P(B|C) = P(AB|C)$$

axióma egyes általánosításait, ill. ekvivalenseit tárgyalja. A fő kérdés az, hogy mikor lehet a feltételes valószínűséget egy mértékből, ill. egy mértékcsaládból származtatni. A $\{\mu_\alpha\}$ mértékcsalád feltételes valószínűségi mezőt generál, ha mindegyik μ_α mérték definiálva van $\mathscr{A}$-n, minden $B\in\mathscr{B}$ halmazhoz van olyan α index, hogy $0<\mu_\alpha(B)<+\infty$, $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$, $0<\mu_\alpha(B)<+\infty$ esetén

$$P(A|B) = \frac{\mu_\alpha(AB)}{\mu_\alpha(B)}.$$

A $\{\mu_\alpha\}$ család „dimenzió szerint" rendezett, ha az $\{\alpha\}$ indexhalmaz rendezett és $\alpha<\beta$, $\mu_\alpha(A)<+\infty$ esetén

$$\mu_\beta(A) = 0.$$

Tekintsük a következő tulajdonságot:

$$(*) \qquad A_i\in\mathscr{A},\ B_i\in\mathscr{B},\ A_i\subset B_i\cap B_{i+1},\quad i = 1, 2, \ldots, n,\ B_{n+1} = B_1$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} P(A_i|B_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i|B_{i+1}).$$

Egy feltételes valószínűségi mezőre a következő tulajdonságok ekvivalensek: Eleget tesz a $(*)$ axiómának; dimenzió szerint rendezett mértékcsaládból származtatható; van $(S, \mathscr{A}, \mathscr{B}^*, P^*)$ additív bővítése; van $(S, \mathscr{A}, \mathscr{B}^*, P^*)$ kváziadditív bővítése. (Az additív bővítés azt jelenti, hogy van $\mathscr{B}^*\supset\mathscr{B}$ rendszer úgy hogy $B_1, B_2\in\mathscr{B}^*\Rightarrow$ $\Rightarrow B_1\cup B_2\in\mathscr{B}^*$ és a P^* függvényre $B\in\mathscr{B}$ esetén $P^*(A|B)=P(A|B)$. A kváziadditív bővítésnél $\mathscr{B}^*$-ról azt tesszük fel, hogy $B_1, B_2\in\mathscr{B}^*$ esetén van $B\in\mathscr{B}^*$ úgy, hogy $B_1\cup B_2\subset B$ és

$$P^*(B_1|B)+P^*(B_2|B) > 0.)$$

Ha ráadásul az $(S, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P)$ feltételes valószínűségi mezőre teljesül, hogy $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ esetén van $B \in \mathcal{B}$ úgy, hogy $B_1 \cup B_2 \subset B$ és $P(B_1|B) > 0$, $P(B_2|B) > 0$, akkor ez a mező egyetlen mértékből is származtatható. Ahhoz pedig, hogy a mező egyetlen mértékből származtatható legyen, szükséges és elégséges, hogy legyen olyan $(S, \mathcal{A}, \mathcal{B}^*, P^*)$ bővítése, amely az előbbi elegendő feltételnek eleget tesz.

A [20] és [26] cikk egy egyszerű konstrukciót ír le, amely a paraméterek választásától függően akár folytonos és sehol sem differenciálható függvényre, akár monoton növekedő, folytonos és m. m. 0 deriválttal rendelkező függvényre ad példát.

A [19] dolgozat a Denjoy—Young—Saks-tétel általánosítását igazolja m-dimenziós additív F intervallum-függvényekre és

$$\underline{F}_\alpha = \underline{\lim} \frac{F(I)}{I}$$

alakú deriváltszámokra, ahol az I m-dimenziós intervallum mértéke $|I|$, $I \to x$ és

$$\frac{|I|}{(I \text{ maximális oldalhossza})^m} \geqq \alpha.$$

A [25] dolgozat Ostrowskinak egy Jensen-konvex függvényekre vonatkozó tételét általánosítja n dimenzióra. Az n-dimenziós tér egy K konvex részhalmazán értelmezett $f(x)$ függvény Jensen-konvex, ha $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ha ezután $f(x)$ Jensen-konvex a konvex, nyílt K halmazon és van olyan mérhető $g(x)$ függvény és pozitív mértékű mérhető $E \subset K$ halmaz, hogy $x \in E$ esetén $f(x) \leqq g(x)$, akkor $f(x)$ folytonos K-n.

A [17] dolgozat a normális eloszlás jellemzésére ad általános feltételeket.

Legyen $\Phi(x)$ egy monoton nem-csökkenő függvény a $(-r, r)$ intervallumon $(0 < r \leqq +\infty)$, amely eleget tesz a következő feltételnek: akárhogy adjuk meg $n = 2, 3, \ldots$ értékét és a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ feltételnek eleget tevő valós számokat, és egy a valós számot, található olyan δ, hogy ha $0 < |h_i| < \delta$, akkor

$$\prod_{i=1}^{n} |\Phi(a + x_i + h_i) - \Phi(a + x_i)| \leqq \prod_{i=1}^{n} |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|$$

teljesül (feltéve, hogy a felvett változók $(-r, r)$-be esnek). Ekkor $\Phi(x)$ vagy egy

$$\Phi(x) = \begin{cases} A, & -r < x < 0 \\ B, & 0 < x < r \end{cases} \qquad (A < B)$$

alakú lépcsős függvény, vagy

$$\Phi(x) = A \int_0^x e^{-Bu^2}\, du + C, \quad A \geqq 0, \quad B \geqq 0.$$

Ha az egyenlőtlenség $a \neq 0$ esetén szigorú, akkor a lépcsős függvény esete nem fordulhat elő.

A tétel kiterjesztése F. BERNSTEIN hasonló tételének, aki azt is kikötötte, hogy $\Phi(x)$ korlátos deriválttal rendelkezzék. A bizonyításhoz számos érdekes valós függvénytani eszközre van szükség. Például a következő tételt bizonyítja a szerző: ha a $\varphi(x)$ valós függvény mérhető a nyílt I intervallumon és egy nulla mértékű halmaz elhagyása után a maradó R halmazon φ véges és eleget tesz a

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y))$$

feltételnek, akkor van olyan folytonos konvex függvény I-n, amely φ-vel megegyezik az R halmazon.

A klasszikus ortogonális polinomrendszerek rendelkeznek bizonyos közös tulajdonságokkal: a polinomok kifejezhetők a Rodrigues-formulával, eleget tesznek speciális alakú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek, a derivált polinomok is ortogonális rendszert alkotnak. A [22] dolgozat eredménye szerint mindezek a közös tulajdonságok azon alapulnak, hogy a súlyfüggvények mind eleget tesznek bizonyos egyszerű analitikus feltételeknek. Érvényes a következő tétel. Az (a, b) véges vagy végtelen intervallumon értelmezett $w(x)$ súlyfüggvény rendelkezzék a következő tulajdonságokkal: $w(x)>0$, $\frac{w'(x)}{w(x)}=\frac{L(x)}{Q(x)}$, ahol $L(x)$ legfeljebb első-, $Q(x)$ legfeljebb másodfokú polinom és $Q(x)>0$, $\int_a^b w(x)dx$ véges, $w(x)Q(x)p(x)\to 0$ ha $p(x)$ tetszőleges polinom és $x\to a+0$, vagy $x\to b-0$. Ekkor a

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[w(x)Q(x)^n]$$

egyenlőség pontosan n-edfokú polinomot határoz meg és $n=0, 1, 2, \ldots$ mellett ezek a polinomok a $w(x)$ súlyra nézve ortogonális rendszert alkotnak (a, b)-n. A $p_n^{(k)}(x)$ deriváltak (fix k mellett) $w(x)Q(x)^k$-ra alkotnak ortogonális rendszert és $p_n(x)$ eleget tesz egy $Q(x)y''+[L(x)+Q'(x)]y'+c_n y = 0$ alakú differenciálegyenletnek, ahol a c_n konstans függhet n-től.

A [29] cikkben a lineáris funkcionálok integrál előállítására vonatkozó tételeknek egy messzemenő általánosítása található.

Legyen $\mathfrak{S}$ a H alaphalmaz bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra, μ egy mérték $\mathfrak{S}$-en. A

$$g = \{g_A : A \in \mathscr{A}\}$$

függvénycsaládot pszeudo-függvénynek hívjuk, ha $\mathscr{A}\subset\mathfrak{S}$ egy részgyűrű és minden $A\in\mathscr{A}$ halmazhoz tartozik egy A-n értelmezett $\mathfrak{S}$-mérhető g_A függvény úgy, hogy bármely $A_1, A_2\in\mathscr{A}$ halmazpár esetén g_{A_1} és g_{A_2} μ-majdnem mindenütt megegyezik az $A_1\cap A_2$ halmazon. Ha továbbá f egy $\mathfrak{S}$ mérhető függvény, amelyhez van olyan $A\in\mathscr{A}$ halmaz, hogy f az A-n kívül zérus, akkor abban az esetben mondjuk, hogy $f\cdot g$ integrálható H-n, ha $f\cdot g_A$ integrálható A-n és ekkor az integrált az

$$(*) \qquad \int_H fg\,d\mu = \int_A fg_A\,d\mu$$

képlettel definiáljuk. Ha g egy rögzített pszeudo-függvény akkor a $(*)$ képlet lineáris funkcionált határoz meg, hacsak f egy alkalmas lineáris függvényteret fut

végig. Kérdés, hogy mikor lehet egy funkcionált a (*) alakban előállítani? Erre ad választ a cikk fő eredménye a következő formában: Legyen F a H-n értelmezett véges valós értékű $\mathfrak{S}$-mérhető függvényeknek egy osztálya, amely

1. lineáris tér,
2. $f_1, f_2 \in F \Rightarrow \min_{\max}(f_1, f_2) \in F$,
3. $f \in F$, $c > 0 \Rightarrow \min(f, c) \in F$,
4. minden $f \in F$ eltűnik egy μ-re nézve σ-véges A halmazon kívül.

Egy, az F térben értelmezett T lineáris funkcionált akkor és csak akkor lehet (*) alakban előállítani, ahol a g pszeudofüggvény egy alkalmasan választott $\mathscr{A} \subset \mathfrak{S}$ rész-σ-gyűrűhöz tartozik, ha $T(f_n) \to 0$ minden olyan $\{f_n\} \subset F$ sorozatra, amely m. m. nullához tart és amelyhez van

$$|f_n(x)| \leqq f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$f \in F$$

tulajdonságú majoráns-függvény.

A [31] cikk új és egyszerű bizonyítást ad arra a tételre, amely szerint (0, 1) és [0, 1] nem bontható fel véges sok diszjunkt és páronként egymásba eltolással átvihető halmaz egyesítésére.

A [34] dolgozat a komplex függvénytan megalapozására (a Cauchy-féle integráltétel, monodrómia tétel stb. kimondása) nyújt teljesen precíz felépítést, amely elkerüli a sík-topológia nehéz tételeit. A felépítés alapja az index fogalma, amely szemléletesen azt tartalmazza, hogy egy adott görbe hányszor „kerül meg" egy adott pontot. Kiderül, hogy egyes, a szemléletből egyszerűen leszűrhető tulajdonságok az indexet már egyértelműen meghatározzák és ezután a φ görbe a pontra vonatkozó $n(\varphi, a)$ indexének definíciójaként az $n(\varphi, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z-a}\, dz$ integrált véve, csupán ezeket a meghatározó tulajdonságokat kell verifikálni.

A [39], [41], [54], [57] cikkek témája az egyenletes approximáció, a Stone—Weierstrass-tétel általánosítása. A nem üres E halmazon legyen Φ valós értékű függvények egy családja. Ez a család a

$$\sigma_f(x, y) = |f(x) - f(y)| \quad (f \in \Phi)$$

pszeudoszimmetrikák segítségével egy U_Φ uniform struktúrát generál $E \times E$-n. Legyen $C(U_\Phi)$ az U_Φ-re nézve egyenletesen folytonos valós függvények halmaza. Milyen kikötéseket kell Φ-re tenni ahhoz, hogy $C(U_\Phi)$ elemei Φ-beliekkel egyenletesen approximálhatók legyenek? Ha ez nem teljesül, mi a feltétele annak, hogy egy adott $h \in C(U_\Phi)$ függvény egyenletesen közelíthető legyen?

Tegyük fel, hogy Φ tartalmazza a konstans függvényeket és minden eleme korlátos. Ekkor MAAK eredménye szerint, ha Φ gyűrű, NÖBELING—BAUER eredménye szerint, ha Φ vektorháló, akkor $C(U_\Phi)$ elemei egyenletesen közelíthetők. Ezek a feltételek lényegesen enyhíthetők, elég feltenni, hogy Φ szubtraktív háló, azaz $f, g \in \Phi \Rightarrow f - g$, $\min(f, g)$, $\max(f, g) \in \Phi$, vagy azt, hogy Φ affin háló: $f, g \in \Phi \Rightarrow$ $\Rightarrow \min_{\max}(f, g) \in \Phi$, αf, $\alpha + f \in \Phi$ tetszőleges valós α-ra. Még általánosabban, ([57]) legyen Φ korlátos valós függvények egy nem üres halmaza, amely ún. félig affin hálót alkot,

azaz létezik a valós számoknak egy egyik irányban sem korlátos Γ részhalmaza úgy, hogy $0 \in \Gamma$ és ha $f, g \in \Phi$, α tetszőleges valós és $\gamma \in \Gamma$, akkor

$$\min_{\max}(f, g) \in \Phi,\ f + \alpha \in \Phi,\ \gamma \cdot f \in \Phi.$$

Ekkor minden $h \in C(U)$ függvény egyenletes limesze egy Φ-beli sorozatnak.

Ha viszont azt tesszük fel, hogy Φ szubtraktív háló, de ahelyett, hogy Φ minden konstanst tartalmaz, csupán azt követeljük meg, hogy $f \in \Phi$, $\alpha > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \min(f, \alpha) \in \Phi$, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $h \in C(U_\varphi)$ egyenletes limesz legyen, a következő: $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz létezzék $\delta > 0$ és $f_1, \ldots, f_n \in \Phi$ úgy, hogy

$$|f_i(x)| < \delta \quad (i = 1, \ldots, n) \Rightarrow |h(x)| < \varepsilon.$$

Ezekkel az eszközökkel igazolható pl. a következő igen általános Stone—Weierstrass-típusú tétel: ha a kompakt E topologikus téren adva van folytonos függvényeknek egy Φ családja, amely tartalmazza a konstansokat, elválasztja E pontjait és vagy szubtraktív hálót, vagy félig affin hálót alkot, akkor minden E-n értelmezett folytonos függvény egy Φ-beli sorozat egyenletes limesze.

Ugyanezen fogalmak segítségével adható pontos feltétel arra, hogy egy adott Φ függvénycsaládhoz mikor található olyan U uniform struktúra, hogy a korlátos és U-ra nézve egyenletesen folytonos függvények osztálya éppen Φ legyen.

[42] és [46] intervallum függvényekkel foglalkozik. O. HÁJEK bebizonyította, hogy bármely függvény felső deriváltja a második Baire-osztályba tartozik. Ennek általánosításaként [46] igazolja, hogy ha $\varphi(I)$ tetszőleges intervallum függvény intervallumoknak egy tetszőleges ϑ rendszerén, és

$$\frac{M(x)}{m(x)} = \lim \frac{\sup}{\inf} \varphi(I), \quad x \in \bar{I}, \quad I \in \vartheta, \quad |I| \to 0,$$

akkor M és m a második Baire-osztályba tartozik a

$$K = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup \{\bar{I} : I \in \vartheta, |I| < \varepsilon\}$$

halmazon.

Visszatekintve a valós függvénytani eredmények ismertetésére, elmondhatjuk, hogy a hosszabb és jelentősebb dolgozatokból csupán egy-egy fontosabb eredményt ragadtunk ki, lehetőleg olyanokat, amelyek megvilágítják a cikk témáját; a bizonyítások szépségét, a felhasznált fogalmak sokoldalúságát az érdeklődő olvasónak magának kell felfedeznie.

CSÁSZÁR ÁKOS első topológiai témájú dogozatában [1] H. E. VAUGHAN következő tételére ad igen egyszerű, elemi bizonyítást:

Egy metrizálható térhez akkor és csak akkor van olyan kompatibilis metrika, melyre minden korlátos halmaz (relatíve) kompakt, ha e tér lokálisan kompakt és szeparábilis.

[6]-ban geometriaibb jellegű problémát tárgyal. Miután kimutatja, hogy a tetraéder az egyetlen gömbbel homeomorf poliéder, melynek „nincs átlója", azaz bármely két csúcsát él köti össze, konstruál egy a tórusszal homeomorf ilyen tulajdonságú P poliédert, melyet a geométerek ma is „Császár-féle test" néven emlegetnek. P-nek 7 csúcsa és 21 éle van.

S. MRÓWKÁval közösen írott [28] dolgozatukban a szomszédsági tereknek és azok Szmirnov-féle kompaktifikációinak elméletét gazdagítják. Mint ismeretes, egy R halmaz összes részhalmazain értelmezett δ binér relációt szomszédsági struk-

túrának nevezünk, ha az eleget tesz bizonyos axiómáknak, melyek tükrözik azt az intuitív elképzelést, hogy A, $B \subset R$ esetén $A\delta B$ jelentése „A közel van B-hez", azaz „A szomszédos B-vel". Például, ha R egy normális topologikus tér, melyben $\bar{A}$ jelöli az A halmaz lezárását, az

$$A\delta B \Leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

reláció egy szomszédsági struktúrát határoz meg.

Ha most adott egy $\langle R, \delta \rangle$ szomszédsági tér, δ egy topológiát indukál R-en, melyre $x \in R$ és $V \subset R$ esetén V akkor és csak akkor környezete x-nek, ha $\{x\}\bar{\delta}R \setminus V$. (Természetesen $\bar{\delta}$ jelöli δ komplementerét, azaz $A\bar{\delta}B$ jelentése „A és B távoli".) Belátható, hogy egy topológiát akkor és csak akkor indukál valamely szomszédsági struktúra, ha az teljesen reguláris.

Ju. M. Szmirnovtól származik az a nevezetes és alapvető fontosságú eredmény, mely szerint egy teljesen reguláris tér topológiáját indukáló szomszédsági struktúrák és a tér kompaktifikációi között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Fenti dolgozat fő eredménye Szmirnov e tételének egy új bizonyítása. Míg Szmirnov eredeti bizonyítása a centrált rendszerek módszerét alkalmazta, az új bizonyítás a szomszédságtartó (vagy δ-folytonos) függvények segítségével, az $I = [0, 1]$ egységintervallum egy alkalmas hatványába való beágyazás útján történik. Bevezetik a szomszédsági terek szomszédsági súlyának fogalmát, s ezzel meghatározható az a legkisebb hatványkitevő, melyre a beágyazás elvégezhető.

A topologikus tér fogalmáról a Matematikai Lapokban írott [18] cikksorozata kiváló összefoglalása az általános topológia akkori állásának. A főbb topologikus struktúrák, azaz topológiák, uniform és szomszédsági terek és ezek összefüggéseinek elméletébe való bevezetése mellett ismerteti Nagata és Szmirnov alapvető fontosságú metrizációs tételét. Úgy gondoljuk, ez a cikksorozat ma is elsőszámú „ajánlott olvasmány" azok számára, akik ezzel a témakörrel ismerkedni szeretnének.

A topológia egy másik, szintén geometriaibb jellegű ágával, nevezetesen a görbék elméletével, foglalkoznak a [23], [24], [27] és [33] dolgozatok. Eredményeik K. Menger, F. Frankl és F. B. Jones munkáihoz kapcsolódnak.

Hogy ezeket ismertethessük, bocsássuk előre a következő definíciót. Adatván egy tetszőleges n természetes szám, egy R topologikus tér p pontjáról azt mondjuk, hogy (Menger-féle) rendje n, ha n az a legkisebb m szám, melyre a p pont minden környezete tartalmazza p-nek olyan nyílt környezetét, amelynek határa legfeljebb m pontból áll.

[23]-ban, melyet Czipszer Jánossal közösen írt, új, elemi és igen egyszerű bizonyítást adnak Frankl alábbi tételére:

Ha X nem-degenerált, összefüggő, szeparábilis Hausdorff-tér, melyben minden pont rendje legfeljebb 2, akkor X homeomorf egy egyszerű folytonos síkgörbével (azaz zárt, vagy nyílt intervallummal, félegyenessel, vagy körvonallal). Ezután megmutatják, hogy a tétel érvényben marad, ha benne a szeparábilitás feltételének helyébe a metrizálhatóság feltételét helyettesítjük. Majd rámutatnak, hogy a szeparábilitás feltételének elhagyása esetén bizonyítási módszerük kiadja azt a szintén Frankltől származó eredményt, hogy ha egy összefüggő, s legalább kétpontú X Hausdorff-térben minden pont rendje legfeljebb kettő, akkor X homeomorf egy általánosított egyszerű folytonos görbével. Ezeket a síkgörbékhez hasonló módon kapjuk, ha bennük a valós egyenest tetszőleges folytonosan rendezett halmazzal helyettesítjük.

Végül általánosítják Menger egy közönséges görbékre kimondott tételét a következő módon:

Ha X egy nem-degenerált, összefüggő, kompakt Hausdorff-tér, melyben minden pont rendje véges és a 2-nél nagyobb rendű pontok száma is véges, akkor X felbomlik véges sok általánosított ív uniójára úgy, hogy két ilyen ívnek csak végpontja lehet közös. Rámutatnak arra is, hogy megfelelő változtatásokkal ez a tétel nemkompakt esetre is átvihető.

[24]-ben szerző F. B. JONES egy tételét némileg élesítve a következő tételre ad elemi bizonyítást.

Ha R egy nem-degenerált, teljes metrikus tér, amely összefüggő, lokálisan összefüggő és atriodikus (azaz nem tartalmaz olyan alakzatot, amelyet három diszjunkt ívből egyik végpontjuk azonosítása révén nyerünk), akkor R homeomorf egy egyszerű folytonos síkgörbével.

[33]-ban definiálja egy tetszőleges gráf természetes reprezentációját, mint egy olyan topologikus teret, melyben a gráf minden élének megfelel egy a valós egyenessel homeomorf altér. Vizsgálja a gráfok és reprezentánsaik különböző tulajdonságait, majd az alábbi tételt bizonyítja:

Valamely G topologikus tér akkor és csak akkor reprezentál egy gráfot, ha

(i) G metrizálható;

(ii) G lokálisan összefüggő;

(iii) G elágazási pontjai (azaz 2-nél magasabb rendű pontjai) R halmazának nincs torlódási pontja G-ben;

(iv) minden $p \in R$ elágazási pontnak van olyan környezete, amely nem tartalmazza $G \setminus R$ egyetlen komponensét sem.

Kétségtelen, hogy CSÁSZÁR ÁKOS legjelentősebb hozzájárulása az általános topológiához a szintopogén struktúrák elméletének megteremtése és alapos kidolgozása volt. Természetesen nem vállalkozhatunk itt arra, hogy ezt az elméletet, amely egy vaskos könyv és számos cikk tartalmát képezi, teljességében ismertessük. Megpróbálunk azonban olyan ismertetést adni, amely alapján az olvasó képet alkothat az elmélet jelentőségéről, gazdagságáról és szépségéről egyaránt.

Bevezetésül emlékeztetünk arra, hogy az általános topológia klasszikus struktúrái nem csak a folytonosság absztrakt tárgyalását lehetővé tevő topologikus terek, hanem az egyenletes folytonosság számára hasonló szerepet játszó uniform terek is, melyek elméletét A. WEIL dolgozta ki. Ezek mellé társul még a szomszédsági terek JEFREMOVICS és SZMIRNOV által bevezetett és vizsgált fogalma. (Mindhárom struktúrafajta klasszikus módon történő ismertetése megtalálható [18]-ban.)

Természetes módon vetődik fel most az a kérdés, vajon található-e olyan általános „folytonossági" struktúra fajta, amelynek a definíciójuk alapján nagyon eltérő jellegű, de viselkedésük szempontjából számos rokonságot mutató klasszikus struktúrák speciális esetei. Ezt a kérdést oldja meg CSÁSZÁR ÁKOS az ún. szintopogén struktúrák fogalmának bevezetésével [21] dolgozatában. Nem sokkal később már egy alaposan kidolgozott elméletet tár az olvasó elé [30] monográfiájában, melyet több fordítás s egyúttal lényeges bővítés is követ, [37] és [38].

Abból a célból, hogy ismertessük ennek az elméletnek néhány alapgondolatát, bevezetünk néhány jelölést és definíciót.

Legyen E tetszőleges halmaz. Egy E részhalmazai között értelmezett $\prec$ relációt rendezésnek nevezünk, ha az tranzitív.

$\prec$-et félig topogén rendezésnek nevezzük, ha kielégíti a következő axiómákat:

(O_1) $\emptyset \prec \emptyset$, $E \prec E$;

(O_2) $A \prec B$ esetén $A \subset B$;

(O_3) $A \subset A' \prec B' \subset B$ esetén $A \prec B$.

Topogén rendezésnek hívunk egy olyan félig topogén rendezést, amely kielégíti az alábbi axiómát is:

(Q) Ha $A \prec B$ és $A' \prec B'$, akkor $A \cap A' \prec B \cap B'$ és $A \cup A' \prec B \cup B'$.

Megmutatjuk most, hogy mindhárom klasszikus struktúra „lefordítható a topogén rendezések nyelvére". Ha $\langle E, \tau \rangle$ egy topologikus tér, E részhalmazai között definiálhatjuk az alábbi $\prec_\tau$ relációt:

$$A \prec_\tau B \Leftrightarrow A \subset \operatorname{Int} B,$$

azaz $A \prec_\tau B$ jelenti, hogy A része a B halmaz belsejének.

Ha $\langle E, \delta \rangle$ egy szomszédsági tér, legyen

$$A \prec_\delta B \Leftrightarrow A \delta E \setminus B,$$

azaz B ún. „szomszédsága" A-nak.

Végül egy $\langle E, \mathcal{U} \rangle$ uniform tér esetében minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez legyen $A \prec_U B \Leftrightarrow x \in A$ és $\langle x, y \rangle \in U$ esetén $y \in B$. Könnyen látható, hogy az imént definiált relációk mind topogén rendezések. Ahhoz azonban, hogy pontosabban megérthessük, miként adhatók meg a klasszikus struktúrák topogén rendezések segítségével, először is bevezetjük ilyen rendezések speciális típusait, majd néhány operációt, amelyek (félig) topogén rendezésekhez ilyen speciális típusú rendezéseket rendelnek.

A $\prec$ rendezést szimmetrikusnak nevezzük, ha

(S) $A \prec B$ esetén $E \setminus B \prec E \setminus A$ is fennáll. Könnyű látni, hogy a fent definiált $\prec_\delta$ és $\prec_U$ rendezések szimmetrikusak.

Perfektnek hívjuk, ha eleget tesz a következő feltételnek:

(P) $A_i \prec B_i$ $(i \in I)$ esetén

$$\bigcup_{i \in I} A_i \prec \bigcup_{i \in I} B_i$$

bármely I indexhalmazra, és biperfektnek, ha kielégíti a következő axiómát:

(B) $A_i \prec B_i$ $(i \in I)$ esetén

$$\bigcup_{i \in I} A_i \prec \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{és} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \prec \bigcap_{i \in I} B_i.$$

Világos, hogy egy szimmetrikus perfekt rendezés biperfekt is, továbbá, hogy a fenti $\prec_\tau$ topogén rendezés perfekt.

Ha $\prec$ egy tetszőleges félig topogén rendezés E-n, $\prec^q$-val jelöljük a $\prec$-nél finomabb topogén rendezések közül a legdurvábbat. (Ha R és S két reláció ugyanazon a halmazon, akkor mondjuk, hogy R finomabb S-nél, ill. S durvább R-nél, ha xSy esetén xRy is mindig fennáll.) Így $\prec$ akkor és csak akkor topogén, ha $\prec = \prec^q$.

$\prec^s$ jelenti a $\prec$-nél finomabb szimmetrikus rendezések közül a legdurvábbat, s hasonlóan kapható $\prec^p$, ill. $\prec^b$, a fenti definícióban „szimmetrikus" helyére „perfekt", ill. „biperfekt" helyettesítéssel. A ^{q,s,p,b} operációk létezésének bizonyítása és tulajdonságaik vizsgálata megtalálható [30]-ban. Ez utóbbiak közül itt csak egyet említünk: topogén rendezésekhez ismét topogén rendezést rendelnek.

Legyen most adva egy E halmaz és azon adott topogén rendezéseknek egy $\mathcal{S}$ családja. $\mathcal{S}$-et szintopogén struktúrának nevezzük E-n, ha teljesíti a következő két feltételt:

(S_1) Bármely két $<'$ és $<''$ $\mathscr{S}$-beli rendezéshez van olyan $<\in\mathscr{S}$, amelyik finomabb mind $<'$-nél, mind $<''$-nél.

(S_2) Minden $<\in\mathscr{S}$-hez létezik $<'\in\mathscr{S}$ úgy, hogy $A<B$ esetén mindig van olyan C, melyre

$$A <' C <' B.$$

Egy $\mathscr{S}$ szintopogén struktúrát szimmetrikusnak, perfektnek, ill. biperfektnek nevezünk, ha minden $<\in\mathscr{S}$ rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

Belátható a következő: ha $\langle E, \tau\rangle$ topologikus tér, akkor az egyetlen $<_\tau$ perfekt topogén rendezésből álló $\{<_\tau\}$ család szintopogén struktúra E-n (egy olyan szintopogén struktúrát, mely egyetlen rendezésből áll, egyszerűnek vagy topogén struktúrának szokás nevezni), amely egyértelműen meghatározza τ-t, ui. $G\subset E$ akkor és csak akkor τ-nyílt halmaz, ha $G<_\tau G$ fennáll. S igaz ennek a megfordítása is: ha $\langle E, \mathscr{S}\rangle$ olyan szintopogén tér, melyre $\mathscr{S}$ egyetlen $<$ perfekt topogén rendezésből áll, akkor

$$\tau_< = \{G \subset E\colon G < G\}$$

topológia E-n, amelyre

$$A \subset \operatorname{Int}_\tau B \Leftrightarrow A < B.$$

Más szóval a topologikus terek és az *egyszerű perfekt* szintopogén terek között, igen természetes módon, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Hasonlóképpen kiderül, hogy a szomszédsági struktúrák az *egyszerű szimmetrikus* szintopogén struktúrákkal, az uniform struktúrák pedig a *szimmetrikus perfekt* szintopogén struktúrákkal azonosíthatók. Sőt az is megmutatható, hogy az utóbbi időben egyre inkább vizsgált ún. kvázi-uniform struktúrák, melyeket az uniform struktúrákból a szimmetria feltételének elvetésével nyerünk, szintén azonosíthatók szintopogén struktúrák egy speciális típusával, nevezetesen a *biperfekt* szintopogén struktúrákkal.

Természetesen nem elegendő megállapítani azt a tényt, hogy a szintopogén struktúrák magukban foglalják a klasszikus struktúrákat, hanem kívánatos az általános struktúrák olyan elméletének kiépítése, amely felöleli és így egy csapásra elintézi a klasszikus struktúrák közös, általános tulajdonságait. E feladat megoldása Császár Ákos [30], ill. [37] monográfiájának fő célja, s erre még későbbi cikkeiben is visszatér.

Példaként felsorolunk néhányat a szintopogén struktúrákra általánosított fogalmak közül.

Legyenek adva $\langle E, \mathscr{S}\rangle$ és $\langle E', \mathscr{S}'\rangle$ szintopogén terek és $f\colon E\to E'$ leképezés. f-et $[\mathscr{S}, \mathscr{S}']$-folytonosnak nevezzük, ha minden $<'\in\mathscr{S}'$-höz található olyan $<\in\mathscr{S}$, melyre $A'<'B'$ esetén $f^{-1}(A')<f^{-1}(B')$ is fennáll. Ha most $\mathscr{S}$ és $\mathscr{S}'$ egyszerű perfekt struktúrák, azaz topológiák, kiderül, hogy az $[\mathscr{S}, \mathscr{S}']$-folytonosság ekvivalens a szokásos értelemben vett folytonossággal. Ha $\mathscr{S}$ és $\mathscr{S}'$ egyszerű szimmetrikus (azaz szomszédsági) struktúrák, akkor az $[\mathscr{S}, \mathscr{S}']$-folytonosság a δ-folytonossággal azonos. Végül, ha $\mathscr{S}$ és $\mathscr{S}'$ szimmetrikus perfekt struktúrák, azaz f uniform terek közti leképezés, akkor f $[\mathscr{S}, \mathscr{S}']$-folytonossága az egyenletes folytonossággal egyenértékű.

Adatván a szintopogén terek közötti folytonos leképezések fogalma, könnyen definiálható egy az E halmazon adott szintopogén struktúrák közötti parciális rendezés a következő módon: az $\mathscr{S}'$ struktúráról akkor és csak akkor mondjuk azt, hogy *gyengébb* $\mathscr{S}$-nél, ha az id: $E\to E$ identikus leképezés $[\mathscr{S}, \mathscr{S}']$-folytonos.

Ha most $\{\langle E_i, \mathcal{S}_i\rangle : i \in I\}$ szintopogén tereknek tetszőleges családja, definiálhatjuk az $\mathcal{S}_i$ szintopogén struktúrák *szorzatát*, mint azt a leggyengébb $\mathcal{S}$ szintopogén struktúrát $\bigtimes_{i\in I} E_i$-n, melyre valamennyi

$$\mathrm{pr}_i : \bigtimes_{i\in I} E_i \to E_i$$

projekció $[\mathcal{S}, \mathcal{S}_i]$-folytonos.

Ha most a szorzat tényezői valamelyik klasszikus struktúrafajtához tartoznak, a szintopogén szorzat nem feltétlenül marad ilyen tulajdonságú, azonban a klasszikus struktúrák szokásos szorzatai kanonikus módon asszociálhatók a szintopogén szorzathoz.

[30] egyik legmeglepőbb eredménye az a tétel, mely szerint minden szintopogén struktúra ekvivalens valós függvények egy családja által indukált gyenge struktúrával — természetesen a valós egyenesen nem a szokásos topológiát, hanem egy más struktúrát véve alapul. Ehhez egyébként felhasználja az Uriszon-féle lemmának egy érdekes szintopogén általánosítását.

Tárgyalásra kerülnek továbbá olyan általános fogalmak, mint szétválasztási axiómák, konvergencia, teljesség, kompaktság szintopogén terekben; ennek megfelelően szintopogén terek teljes burka, ill. kompaktifikációi stb. Ezek részletezésére itt nem térhetünk ki.

A [40] és [48] cikkekben egy olyan általános eljárást vezet be és vizsgál, amelynek a fenti monográfiában csupán speciális esetei szerepelnek, mint például egy szintopogén struktúra inverz képének, teljes burkának, vagy kompaktifikációjának konstrukciója.

Természetesen az átviteli eljárás a szintopogén strukturát alkotó egyes topogén rendezések átvitelén alapszik. Legyen adott egy E halmaz, D legyen E részhalmazainak egy rendszere, s legyen továbbá h D-nek egy leképezése egy E' halmaz hatványhalmazába (azaz E' összes részhalmazainak halmazába). Tegyük fel továbbá, hogy h monoton a következő értelemben: $A, B \in D$, $A \subset B$ esetén $h(A) \subset h(B)$. Ekkor minden $\prec$ félig topogén rendezéshez E-n hozzárendelhető egy $\prec^h$ félig topogén rendezés E'-n a következő módon: $A', B' \subset E'$-re $A' \prec^h B' \Leftrightarrow A' = \emptyset$ vagy $B' = E'$ vagy léteznek $A, B \in D$, melyekre $A \prec B$ és $A' \subset h(A) \subset h(B) \subset B'$. Ha most D-ről és h-ról feltesszük, hogy $X, Y \in D$ esetén $X \cup Y \in D$, $X \cap Y \in D$ és $h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y)$, $h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y)$, akkor ha $\prec$ topogén volt, $\prec^h$ is az. Továbbá, ha $\mathcal{S}$ egy szintopogén struktúra E-n és teljesül az a feltétel, hogy $A \prec B$, $\prec \in \mathcal{S}$ esetén mindig van olyan $C \in D$, melyre $A \subset C \subset B$, akkor $\mathcal{S}^h = \{\prec^h : \prec \in \mathcal{S}\}$ ismét szintopogén struktúra, E'-n.

Ezt a nyilván rendkívül általános átviteli eljárást hasznosítja [47] cikkében, ahol is a szintopogén struktúrák és az L. HADDAD által bevezetett ugyancsak igen általános folytonossági struktúrafajta, az ún. „tramail"-ok kapcsolatát vizsgálja.

Legyen E tetszőleges halmaz, és $\mathfrak{E}$ jelölje az összes E-beli ultraszűrők halmazát. Egy „tramail" definíció szerint, nem más, mint egy kvázi-uniform struktúra $\mathfrak{E}$-n.

Definiáljuk most a h leképezést E hatványhalmazából $\mathfrak{E}$ hatványhalmazába a következő módon: $X \subset E$-re legyen

$$h(X) = \{u \in \mathfrak{E} : X \in u\}.$$

Ekkor h a fenti átviteli eljárás szempontjából igen előnyös tulajdonságokkal rendelkezik.

Az összes $h(X)$ alakú halmazok egy $\mathcal{T}_0$ topológiát generálnak $\mathfrak{E}$-n, és $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$-nek egy a $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{T}_0$ szorzattopológiára nézve zárt és $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ diagonálisát tartalmazó részhalmazát nevezi Haddad „cotte"-nak.

A h leképezés segítségével minden $<$ félig topogén rendezés *átvihető* egy $<^h$ félig topogén rendezésbe $\mathfrak{E}$-n. Ekkor $(<^h)^b$ egy biperfekt topogén rendezés $\mathfrak{E}$-n, melynek egy-egyértelmű módon megfelel egy $\varrho((<^h)^b)$ reflexív reláció $\mathfrak{E}$-n, amelyről kiderül, hogy egy „cotte". Az így konstruált

$$< \to \gamma(<) = \varrho((<^h)^b)$$

γ leképezés segítségével szerzőnek lehetősége nyílik arra, hogy HADDAD (bizonyítás nélkül közölt) állításait szisztematikus módon beágyazza a szintopogén struktúrák elméletébe.

Teljesül például, hogy a γ leképezés a topogén rendezések és a „cotte"-ok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít, továbbá az, hogy a $<$ topogén rendezés E-n akkor és csak akkor perfekt (azaz topológiát határoz meg), ha minden $\mathfrak{S}$ $\mathscr{T}_0$-nyílt halmazra

$$\{u \in \mathfrak{E} : \exists v \in \mathfrak{S}(\langle u, v\rangle \in \gamma(<))\}$$

szintén $\mathscr{T}_0$-nyílt.

[30]-ban, valamint a [45] és [52] dolgozatokban foglalkozik topogén terek ún. „dupla kompaktifikációjával". Az $\langle E, <\rangle$ topogén teret akkor nevezzük „duplán kompakt"-nak, ha $\langle E, <^s\rangle$, vagy ami ezzel ekvivalens, az $\langle E, <^{sp}\rangle$ topologikus tér, kompakt. Nos, egy $\langle E', <'\rangle$ szuperterét $\langle E, <\rangle$-nek $\langle E, <\rangle$ dupla kompaktifikációjának hívjuk, ha $\langle E', <'\rangle$ duplán kompakt, E sűrű benne és még bizonyos szétválasztási feltétel teljesül. Kimutatja, hogy minden topogén térnek van, izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott, dupla kompaktifikációja, amely a szimmetrikus esetben ($< = <^s$) a megfelelő szomszédsági tér Szmirnov-féle kompaktifikációjával azonos. [45]-ben ezt az eljárást tetszőleges szintopogén terekre általánosítja, míg [52]-ben topogén terek egy olyan osztályán vizsgálja a dupla kompaktifikáció egy konstrukcióját, amely osztály magában foglalja az összes topologikus teret és bizonyos fontos szomszédsági struktúrákat. Ez a konstrukció egy reguláris és normális háló ultraszűrőin alapszik és párhuzamos az ún. Wallman-típusú kompaktifikációk konstrukciójával.

[51]-ben a teljesen reguláris terek egy V. I. ZAJCEVTŐL származó „függvénymentes" jellemzését bizonyítja és némileg élesíti a szintopogén struktúrák eszközeivel.

Az [53] és [58] dolgozatok topologikus terek bővítéselméletével foglalkoznak, ezúttal klasszikus, nem szintopogén eszközökkel, bár nyilvánvaló, hogy pl. van kapcsolat [53] és [52] között.

Legyen adva egy E topologikus tér s annak egy rögzített $\mathscr{S}$ nyílt szubbázisa. Legyen $\mathscr{T}$ az $\mathscr{S}$ elemeinek komplementumaiból álló zárt szubbázis és $\mathscr{V} = \mathscr{T} \cup \mathscr{S}$.

Ha $\mathscr{A}$ egy tetszőleges halmazrendszer, akkor $\mathscr{A}$-szitának nevezünk egy $s \subset \mathscr{A}$-t, ha s bármely két eleme metszi egymást és $A \in s$, $A \subset B \in \mathscr{A}$ esetén $B \in s$ is fennáll. Egy ultra $\mathscr{A}$-szita természetesen egy maximális $\mathscr{A}$-szita.

Nos, az összes ultra $\mathscr{V}$-sziták egy kanonikus topológiával ellátva E-nek egy E^h bővítését határozzák meg. A szerző tekinti E^h bizonyos E-t tartalmazó altereit, melyek $\mathscr{S}$-re, $\mathscr{T}$-re vagy $\mathscr{V}$-re vonatkozólag bizonyos tulajdonságokkal rendelkeznek. Például

$$\{u \in E^h : u \ \mathscr{T}\text{-szita}\} \cup E$$

azonos E-nek a $\mathscr{T}$ zárt szubbázishoz tartozó hiperbővítésével, amelyet J. DE GROOT vezetett be, míg

$$E^w = \{u \in E^h : u \text{ centrált kvázi } \mathscr{T}\text{-szita}\} \cup E$$

E-nek egy általánosított Wallman-típusú kompaktifikációja, mely az $\mathscr{S}$-re tett megfelelő kikötések mellett valóban az E Wallman-típusú kompaktifikációjával

azonos. (Az s szita kvázi $\mathscr{A}$-szita, ha minden $S \in s$-hez léteznek $A_i \in \mathscr{A} \cap s$ $(i = 1, \ldots, n)$ halmazok úgy, hogy $\bigcap_1^n A_i \subset S$.) [58]-ban folytatja e szuper-terek vizsgálatát és E^h-nak, valamint $E^d = \{u \in E^h : u$ centrált$\}$-nak deskriptív („szita-mentes") jellemzését adja.

A [49], [55], [60], [61] dolgozatokban kiterjedt vizsgálatokat végez szintopogén struktúrával ellátott csoportokról. Mivel a topologikus csoportok jólismert elméletében a topologikus struktúra mellett bizonyos uniform struktúrák is lényeges szerepet játszanak, s a szintopogén struktúrák ezeknek közös általánosításai, ez a megközelítés igen természetes.

A klasszikus elmélet igen nehezen használhatóvá válik akkor, ha a szorzás vagy az inverzképzés művelete nem tesz eleget a szokásos folytonossági feltételeknek. Ezekben a dolgozatokban ebben az irányban is komoly előrelépés történik azáltal, hogy a szintopogén struktúrák elméletét a szerző csoportstruktúrával ellátott halmazokra alkalmazza.

Most ismertetjük e cikksorozat néhány fő definícióját és eredményét. Kiindulásul nem a szintopogén struktúrákat, hanem a még ezeknél is általánosabb ún. rendezésstruktúrákat vezeti be. Topogén rendezéseknek egy $\mathfrak{R}$ családját valamely E halmazon akkor nevezzük rendezés-struktúrának, ha az (S_1) feltételt kielégítő (azaz irányított).

Ha most E egy (multiplikatív) csoport és $\mathfrak{R}$ egy rendezés-struktúra E-n, akkor:

$\mathfrak{R}$ *balfolytonos*, ha minden $c \in E$-re a $\sigma_c(x) = c \cdot x$ leképezés $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$-folytonos, ami könnyen láthatólag azzal ekvivalens, hogy minden $c \in E$-hez és $\prec \in \mathfrak{R}$-hez van olyan $\prec_1 \in \mathfrak{R}$, melyre

$$A \prec B \Rightarrow cA \prec_1 cB;$$

$\mathfrak{R}$ *egyenletesen balfolytonos*, ha a fenti $\prec_1$ nem függ c-től, azaz minden $\prec \in \mathfrak{R}$-hez van $\prec_1 \in \mathfrak{R}$, melyre minden c-nél

$$A \prec B \Rightarrow cA \prec_1 cB;$$

$\mathfrak{R}$ *balinvariáns*, ha minden $\prec \in \mathfrak{R}$-re és $c \in E$-re

$$A \prec B \Rightarrow cA \prec cB;$$

(természetesen definiálhatók hasonló módon a megfelelő *jobb oldali* fogalmak is);

$\mathfrak{R}$ *ϱ-folytonos*, ha az inverzképzés $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$-folytonos, azaz minden $\prec \in \mathfrak{R}$-hez van $\prec_1 \in \mathfrak{R}$, melyre

$$A \prec B \Rightarrow A^{-1} \prec_1 B^{-1};$$

$\mathfrak{R}$ *ϱ-invariáns*, ha

$$A \prec B \Rightarrow A^{-1} \prec B^{-1};$$

végül ha ^{a} egy ún. elemi operáció (mint pl. ^{t,p,b,s,i}), akkor

$\mathfrak{R}$ *^{a}-folytonos*, ha a szorzás mint $E \times E$-ből E-be történő leképezés $((\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})^a, \mathfrak{R})$-folytonos.

A szerző számos összefüggést tár fel a felsorolt különböző folytonossági fogalmak között, továbbá példákon kimutatja, hogy ezek általában nem esnek egybe.

Minden $\mathfrak{R}$-hez megkonstruál egy $\mathfrak{R}^\sigma$ rendezésstruktúrát, amely a legdurvább $\mathfrak{R}$-nél finomabb balinvariáns rendezésstruktúra. Ha $\mathfrak{R}$ szintopogén, akkor $\mathfrak{R}^\sigma$ is az.

Vizsgálja továbbá e fogalmakat speciális, így elsősorban perfekt és biperfekt, rendezésstruktúrákra. Ezek segítségével jellemezni tudja mind a paratopologikus, mind a féltopologikus csoportokat, pl. E valamilyen τ topológiával ellátva akkor

és csak akkor paratopologikus, ha τ egy balinvariáns és egy jobbinvariáns kváziuniform struktúrából egyaránt származtatható.

[59]-ben a J. C. KELLEY által bevezetett ún. bitopologikus terek elméletével foglalkozik. Ha egy E halmazon adott két $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológia, az $\langle E; \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\rangle$ hármast bitopologikus térnek nevezzük. Különösen érdekes az az eset, mikor e topológiák konjugáltak, vagyis ha van olyan kváziuniform struktúra E-n, amely $\mathcal{T}_1$-et, míg a duálisa $\mathcal{T}_2$-t indukálja. Szerző e cikkében kimutatja, hogy ez ekvivalens olyan $\mathcal{T}$ topogén struktúra létezésével E-n, melyre $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}^p$ és $\mathcal{T}_2=\mathcal{T}^{cp}$. Az ilyen $\mathcal{T}$-ket $\langle E; \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\rangle$-vel kompatibilisnek nevezi, s bebizonyítja, hogy ezek között mindig van legfinomabb, melyet $\mathcal{T}_0$-val jelöl.

$\langle E; \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\rangle$-t duplán kompaktnak nevezi, ha van olyan kompatibilis topogén struktúra, amelyik duplán kompakt. Belátja, hogy ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ konjugáltak, $\langle E; \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\rangle$ akkor és csak akkor duplán kompakt, ha a $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ által generált topológia kompakt, majd megmutatja, hogy $\mathcal{T}_1$- és $\mathcal{T}_2$-re tett igen enyhe szétválasztási feltételek mellett már $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ kompakt voltából is következik $\langle E; \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\rangle$ duplán kompaktsága.

Ezután a topogén terek dupla kompaktifikációjának elméletét alkalmazva bevezeti e fogalmat konjugált bitopologikus terek esetére, megmutatja, hogy egy rögzített bitopologikus tér dupla komapktifikáció között — a közönséges terek kompaktifikációinak elméletéhez hasonló módon — értelmezhető egy részben rendezés, amelyre nézve mindig van egy legnagyobb dupla kompaktifikáció, s ez természetes megfelelője a bitopologikus terek körében az ún. Stone—Čech-féle kompaktifikációnak.

Végül feltétlenül említést kell tennünk [56]-ról, amely az első igazán teljesnek mondható magyar nyelvű bevezetés az általános topológiába. Ez a mű biztos, hogy hosszú időn keresztül fogja betölteni a magyar nyelvű topológiai alaptankönyv szerepét.

Mikor CSÁSZÁR ÁKOST méltatjuk, szoros értelemben vett tudományos munkája mellett nem feledkezhetünk meg tudományszervezői tevékenységéről sem. Kevés matematikusról mondható el, hogy olyan hosszú időn át és olyan eredményesen fáradozott volna a matematikai közéletben, mint ő. Egyetemi oktató és szervező munkája mellett 1966 óta a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára, 1973 óta az Akadémia Természettudományi I. Főosztályának elnöke, számos bizottság tagja és munkájuknak tevékeny részese. Akik együtt dolgoznak vele, tudják, hogy mindig számítani lehet higgadt és határozott döntéseire, a lényeg gyors meglátása mellett az apró részletekre is kiterjedő figyelmére.

Tudományos munkásságáért számos kitüntetésben részesült, 1962-ben Akadémiai díjat, 1963-ban Kossuth-díjat kapott. 1970-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választották.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ А. ЧАСАРА

ИШТВАН ЮХАС И ДЬЁРДЬ ПЕТРУШКА

THE MATEMATICAL WORK OF Á. CSÁSZÁR

I. JUHÁSZ AND J. PETRUSKA

CSÁSZÁR ÁKOS TUDOMÁNYOS MUNKÁI

1. An elementary proof of a theorem of H. E. VAUGHAN, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhanglingen **20** (1947), No. 1.
2. Sur les dérivées approximatives d'ordre supérieur, Commentarii Mathematici Helvetici **21** (1948), 253—260.
3. Sur les fonctions à variation bornée d'ordre supérieur, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3) **64** (1948), 275—284.
4. Sur une classe de fonctions non mesurables, Fundamenta Mathematicae **36** (1949), 72—76.
5. Sur les fonctions internes, non monotones, Acta Scientiarum Mathematicarum **13** (1949), 48—50.
6. A polyhedron without diagonals, Acta Sci. Math. **13** (1949), 140—142.
7. Sur les nombres de Lipschitz approximatifs, Acta Sci. Math. **12B** (1950), 211—214
8. Sur les formes quadratiques positives, Publiacationes Mathematicae **1** (1950), 186—188.
9. Sur les nombres de Lipschitz généralisées, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **1** (1950), 277—302.
10. A Darboux-féle tulajdonságról — Sur la propriété de Darboux, Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei (1952), 551—560.
11. A feltételes valószínűségi mezőkről, A MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **4** (1954), 427—428.
12. Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables, Acta Sci. Math. **15** (1954), 183—202.
13. Sur la structure des espaces de probabilité conditionelle, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **6** (1955), 337—361.
14. Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **6** (1955), 451—461.
15. Sur une généralisation de la notion de dérivée, Acta Sci. Math. **16** (1955), 137—159.
16. Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable, Colloquium Mathematicum **4** (1956), 13—29.
17. Sur une caractérisation de la répartition normale de probabilités, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7** (1957), 359—382.
18. A topologikus tér fogalmáról, Matematikai Lapok **8** (1957), 37—60; 211—231; **9** (1958), 37—63.
19. Quelques remarques sur un ouvrage de M. V. PTÁK, Publ. Math. **5** (1957), 154—161.
20. Megjegyzés GEŐCZE ZOÁRD függvényéhez, Mat. Lapok **8** (1957), 268—271.
21. Sur une classe de structures topologiques générales, Revue de Mathématiques Pures et Appliquées **2** (1957), 399—407.
22. Sur les polynômes orthogonaux classiques, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolande Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica **1** (1958), 32—39.
23. Sur les courbes irramifiées, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9** (1958), 315—328 (CZIPSZER JÁNOSsal közösen).
24. Sur les courbes atriodiques, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9** (1958), 329—332.
25. Konvex halmazokról és függvényekről, Mat. Lapok **9** (1958), 273—282.
26. Sur les singularités des fonctions continues, Bulletin de Mathématiques de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la R. P. R. **2 (50)** (1958) 133—135.

27. Sur les courbes irramifiées, Lucrările Consfătuirii de Geometrie şi Topologie, Iaşi, 1958, 79—80.
28. Sur la compactification des espaces de proximité, Fund. Math. **46** (1959), 195—207 (S. MRÓWKÁval közösen).
29. Sur la représentation canonique des fonctionnelles linéaires, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **2** (1959), 85—92.
30. Fondaments de la topologie générale (Budapest, Akadémiai Kiadó és Paris, Gauthier-Villars, 1960, 232 o.).
31. Sur les théorèmes de J. MYCIELSKI et W. GUSTIN concernant les décompositions de l'intervalle, Colloqu. Math. **7** (1960), 255—256 (S. MARCUSszal közösen).
32. Monotonité locale et dérivabilité approximatives de fonctions quelconques, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **3—4** (1960—61), 41—52.
33. Sur la représentation topologique des graphes, Fund. Math. **50** (1962), 249—256.
34. A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközeiről, Mat. Lapok **13** (1962), 73—94.
35. Complétion et compactification d'espaces syntopogènes, General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the Symposium held in Prague in September, 1961 (1962), 133—137.
36. Sur les critères locaux de monotonité, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **5** (1962), 43—50.
37. Foundations of general Topology (Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1963. xiv+380 o.).
38. Grundlagen der allgemeinen Topologie (Budapest, Akadémiai Kiadó és Leipzig, Teubner Verlag, 1963, 367 o.).
39. Sur des critères généraux d'approximation uniforme, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **6** (1963), 17—26 (CZIPSZER JÁNOSsal közösen).
40. Transposition de structures syntopogènes, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **6** (1963), 55—70.
41. Sur un critère d'approximation uniforme, A MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei **8** (1963), 413—416.
42. Sur les limites extrêmes de fonctions d'intervalle, Rev. Roumaine Math. **9** (1964), 39—45.
43. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA tudományos munkásságának ismertetése, Mat. Lapok **15** (1964), 1—22.
44. Czipszer János (1930—1963), MTA Mat. Kut. Int. Közl. **8B** (1964), 491—497.
45. Double compactification d'espaces syntopogènes, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **7** (1964), 3—11.
46. Supplément à la note „Sur les limites extrêmes de fonctions d'intervalle" Rev. Roumaine Math. **10** (1965), 405—407.
47. Structures syntopogènes et tramails, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **8** (1965), 101—117.
48. Contributions à la transposition de structures syntopogènes Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **9** (1966), 27—43.
49. Syntopogene Halbgruppen, Proceedings of the Second Prague Topological Symposium, 1966, 101—102.
50. Erweiterung, Kompaktifizierung und Vervollständigung syntopogener Räume, Proceedings of the I. International Symposium on Extension Theory, Berlin, 1967, 51—54.
51. On the characterization of completely regular spaces, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **11** (1968), 79—82.

52. Über die doppelte Kompaktifizierung gewisser topogener Räume, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **11** (1968), 83—103.
53. Double compactification and Wallman compactification, Proceedings of the International Symposium on Topology, Herceg-Novi, 1968, 113—117.
54. Gleichmässige Approximation und gleichmässige Stetigkeit, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **20** (1969), 253—261.
55. Syntopogene Gruppen I., Mathematische Nachrichten **39** (1969), 1—20.
56. Bevezetés az általános topológiába (Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970. xiv+ 424 o.).
57. An approximation theorem for uniform spaces, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **22** (1971), 177—186.
58. Wallman-type compactifications and superextensions, Periodica Mathematica Hungarica **1** (1971), 55—80.
59. Doppeltkompakte bitopologische Räume, Theory of Sets and Topology (Berlin, 1972), 59—67.
60. Syntopogene Gruppen II., Mathematica Cluj **13** (**36**) (1971), 25—50.
61. Syntopogene Gruppen III.—IV., Annal Univ. Budapest., Sect. Math. **14** (1971), 23—52; 53—65.
62. Invariant structures and transformation groups, Colloquia Societatis Bolyai, sajtó alatt.
63. On some subspaces of hyperextensions, Annal. Univ. Budapest., Sect. Math. **15** (1972), 11—119.
64. Syntopogenous structures and transformation groups, Symposia Mathematica, sajtó alatt.
65. Strongly complete supercomplete und ultracomplete spaces, sajtó alatt.

AZ ALGEBRA MAI FEJLŐDÉSI IRÁNYAI

GARRETT BIRKHOFF, Harvard University

1. Bevezetés. A szimbolikus algebra sokkal régebbi, mint azt számos matematikus gondolná: a nyomok egészen ALEXANDRIAI DIOPHANTOSZig (i. sz. 250. körül) és BRAHMAGUPTÁig (i. sz. 598—665) vezetnek, lásd CAJORI [7, 101—5. old.] és BALL [1, 154—6. old.]. Sőt, az úgynevezett „modern" algebra is több, mint száz éves már!

Ezek után talán nem tűnik meglepőnek, hogy a nagysebességű számítógépek felhasználhatósága újabb fejlődési irányokat nyitott az algebrában. Fő célom, hogy felvázoljam ezeket az irányokat — erre a 8—10. fejezetekben fog sor kerülni. Ezt megelőzően azonban szeretném röviden áttekinteni, hogy mai tudásunk szerint miként fejlődött az algebra az elmúlt századok során.

2. Klasszikus algebra. A *modern algebra* elnevezést eredetileg 1930-ban, a *klasszikus algebrától* való megkülönböztetésül használták, ami viszont általában az *egyenletek elméletét* jelentette. Az egyenletek elmélete úgy határozható meg, mint *numerikus problémák megoldása szimbólumok segítségével.* Története AL-KHWARIZMIvel és más iszlám matematikusokkal kezdődik, i. sz. 800—1000 körül. A leglényegesebb gondolat az, hogy az egyes *numerikus* állításokat szimbolikus *egyenletekkel* helyettesítjük, melynek tagjait jól meghatározott törvények szerint átrendezhetjük és megváltoztathatjuk, hogy ezáltal az eredetivel ekvivalens, de remélhetőleg egyszerűbb egyenletekhez jussunk. Az eredeti egyenletet akkor tekintjük „megoldott"-nak, ha az ismeretlen mennyiség alkotja az egyenlőség egyik oldalát, míg a másik oldalon csak ismert mennyiségeket tartalmazó valamilyen kifejezés szerepel.

Bár az „egyenlet gyöke" kifejezés szanszkritból származik [1,2], és a szám „hatványa" kifejezés már AL-KHWARIZMI *Algebrájában* („al-jabr") megjelenik, a klasszikus algebra mai formája csak fokozatosan alakult ki. Az arab „al-jabr" nem terjedt el Nyugat-Európában, és a +, − jelek is csak 1500 körül érték el mai jelentőségüket. Nem sokkal ezután nagy előrelépés történt: a harmad-, és negyedfokú egyenlet megoldása gyökjelekkel, amely CARDANO *Ars Magnájában* (1545) már szerepel.

A következő két évszázadban a fejlődés főleg[3] az alkalmazásokkal való kapcsolatnak köszönhető, az (analitikus) geometriának, ahol a negatív szám fogalma szemléletes jelentést nyert, és a differenciál- és integrálszámításnak, a végtelen sorok (formális) használata által. Egészen 1750 utánig a képzetes gyökök és a komplex számok szerepe tisztázatlan maradt, a lineáris egyenletrendszerek és determinánsok tárgyalása pedig rendszertelen és töredékes volt.

1750 és 1830 között azonban, főleg EULER, LAGRANGE és GAUSS munkássága nyomán hatalmas fejlődés ment végbe, és tulajdonképpen mai formájában kialakult

[1)2)] A megjegyzések a cikk végén találhatók.

a klasszikus algebra. Így például minden z komplex számra definiálták az e^z exponenciális függvényt (hatványsorként), és következményképpen az $a^z = e^{z \ln a}$ függvényt minden a pozitív és z komplex számra. EULER a Lagrange-rezolvenst is felfedezte [13, 27. old.].

Mindenekelőtt azonban ekkor ismerték fel, mondták ki szabatosan, és bizonyították be az algebra alaptételét. EULER az alaptétel egymással ekvivalens, *valós* formáit vizsgálta. Ezek közül kettő:

a) minden n-edfokú ($n>2$) valós együtthatós polinom reducibilis;

b) minden valós együtthatós polinom (egyértelműen) felbontható valós együtthatós első-, és másodfokú polinomok szorzatára.

Az a) feltétel $n<5$-re CARDANO eredményeiből következik, $n=5$-re pedig azért igaz, mert minden páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. EULER meg volt győződve arról, hogy a tétel minden n-re áll, de bizonyítása meglehetősen homályos.

Az a) és b) feltétel könnyen láthatóan ekvivalens az alaptétel szokásos megfogalmazásával:

c) minden komplex együtthatós polinom felbontható elsőfokú polinomok szorzatára.

GAUSS 1800-tól kezdve több viszonylag precíz bizonyítást adott a c) formára, tisztázta, hogy minden algebrai egyenletnek van komplex megoldása ($x+yi$, $i=\sqrt{-1}$), az (x, y)-sík pontjainként való geometriai interpretáció pedig több, mint szemléletes jelentést adott a komplex számoknak.

Ugyancsak GAUSS dolgozta ki a lineáris egyenletrendszerek iterációs és eliminációs megoldását, és 1825 körül már a determinánsok tulajdonságai is általánosan ismertek voltak.

Néhány évvel később GALOIS és ABEL megmutatták, hogy egy általános ötödfokú egyenlet nem oldható meg gyökjelekkel.[4] A matematikusok ezután az egyenletek elméletéről egyre inkább a szimbolikus algebra *nem*-numerikus alkalmazásaira fordították figyelmüket, mint pl. csoportokra, vektorokra és mátrixokra.

MODERN ALGEBRA AZ I. VILÁGHÁBORÚIG

3. „Modern" algebra 1860-ig. Bár 1830 után egy egész évszázadon át valós és komplex algebra töltötte meg a kézikönyveket, a „modern" algebra már 1860-ra, néhány figyelemre méltó eredményt ért el.

LAGRANGE még 1770-ben foglalkozott n jel permutációinak „szimmetrikus csoportjával,", és ennek részcsoportjaival, világosan felismerte ezek jelentőségét az

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (x-x_1)\ldots(x-x_n) = 0 \qquad (1)$$

egyenlet gyökjelekkel való megoldásában. Melléktermékként felfedezte a Lagrange-tételt: G csoport minden részcsoportjának rendje osztója a csoport rendjének.

RUFFINI, GALOIS és CAUCHY szintén hozzájárult a csoportelmélet fejlődéséhez, még 1845 előtt [13; 45—53. old.], GALOIS pedig 1830-ban alapvető lépést tett a testelmélet kialakítása felé azzal, hogy tetszőleges p^r prímhatvány-rendű *véges testet* konstruált (a csoport és a test definícióját l. 4. fej.).

LEGENDRE és GAUSS még korábban, 1801-ben megkonstruálta a Z_n számgyűrűt „modulo" n (azaz n egész számú többszörösei 0-val egyenlők), és az $m+ni$ „Gauss-egészek" ($m, n \in Z$ egészek,[5] $i=\sqrt{-1}$ gyűrűjét, s ezzel elindították a kommutatív

gyűrűk tanulmányozását. Sőt, GAUSS azt is bebizonyította, hogy a $Z[i]$ Gauss-egészek körében *egyértelmű* a prímfelbontás.

1850-ben már *nem-kommutatív* gyűrűket is vizsgáltak. HAMILTON 1843-ban bevezette a *kvaterniókat*. Mivel ezek a komplex számokat speciális esetként tartalmazzák, *hiperkomplex* számoknak is nevezhetők. *Ausdehnungslehre* című könyvének első kiadásában (1844-ben) H. GRASSMANN már tárgyalja úgy a *vektoralgebrát* (amely Descartes geometriában használt szimbolikus módszerének elég természetes általánosítása), mind pedig, némiképp pontatlanul, a hiperkomplex számokat általában. Ezeket a fogalmakat aztán (tisztázva kapcsolatukat az n-dimenziós geometriával) egyrészt CAYLEY, másrészt *Quaternions* (1859) című könyvének előszavában HAMILTON, harmadsorban pedig könyvének második kiadásában (1878) GRASSMANN tette pontosabbá. Sőt, CAYLEY 1858-ban azt is megmutatta [13, 84. old.], hogy a determinánsok VANDERMONDE és LAPLACE által kialakított elmélete csak egyik ága a sokkal hatékonyabb *mátrixalgebrának*. A mátrixalgebra sokban hasonlít a közönséges algebrához, de az A és B mátrixokra általában $AB \neq BA$, azaz a mátrixok szorzása, akár a kvaterniók, *nem*-kommutatív.

Az először CAYLEY által formálisan bevezetett mátrixok (1858) fokozatosan forradalmasították a lineáris algebrát, és ma már nélkülözhetetlenek úgy a tiszta, mint az alkalmazott matematikában.[6]

Nem sokkal 1859 előtt a modern algebra két új területén indult meg a kutatás. BOOLE 1854-ben adta ki az *Introduction to the Laws of Thought* című munkáját, melyben megmutatta, hogy az arisztotelészi logika lényeges része leírható a közönséges algebra egy analogonjával, melyet „Boole-algebrának" neveznek. Ebben az új „logikai algebrában" az algebra szokásos azonosságain kívül a szokatlan

$a^2 = a+a = a$ (ma úgy írnánk: $a \wedge a = a \vee a = a$),

$(a+b)a = a$, és $(a+b)(a+c) = a+bc$ azonosságok is teljesülnek.

4. Az axiomatikus tárgyalás. Az eddigiekből az derült ki, hogy az úgynevezett „modern algebra" (melyet a sajtó a „szputnyik-utáni korban" „új matematikának" keresztelt át) főbb ágainak nagy részét a matematikusok már 1860 előtt is ismerték. Az algebra alapjainak axiomatikus tárgyalása azonban csak később következett be. LAGRANGE a csoportokra vonatkozó Lagrange-tételre, GALOIS a Galois-testek konstrukciójára úgy jött rá, hogy soha még csak nem is gondolt a csoport vagy a test axiomatikus definiálására, alapfogalmaik teljesen intuitívek voltak! A „kommutatív" és „disztributív" elnevezéseket (a szorzás megfelelő tulajdonságaira) is csak 1814 óta (SERVOIS[7]), az „asszociatív" kifejezést csak 1835 óta (HAMILTON) használjuk.

A valós és komplex test algebrájától különböző területek egyenjogúsításában nagy szerepe van PEACOCK, WOODHOUSE[8], HAMILTON, DE MORGAN, BOOLE és CAYLEY algebrai és filozófiai vizsgálódásainak, de túlzónak mondható E. T. BELL megállapítása [3., 180—1. old.], miszerint PEACOCK volt az első, aki „az algebrát az eukideszi módon absztrakt, hipotetikus-deduktív tudományként fogta fel". Bár PEACOCK megelőzte HANKELT az „ekvivalens formák permanenciájának elvével", „Symbolical Algebrája" főleg geometriai alkalmazásokkal foglalkozik, és szó sem esik benne axiómákról vagy posztulátumokról. Ebben a tekintetben H. GRASSMANN *Ausdehnungslehre*-jéhez (1844) hasonlít[9].

Az axiómák szerepe sokkal világosabb H. GRASSMANN *Formenlehre*-jében (1872), E. SCHRÖDER *Operationkreis der Logikkalkul*-jában (1877), CAYLEY (1878), FROBENIUS és STICKELBERGER (1879), DEDEKIND[10], WEBER (1882, 1893) és E. H. MOORE axiomatikus csoportelméleti, testelméleti, modulus- és ideálelméleti tárgyalásában,

továbbá BENJAMIN PIERCE és fia, C. S. PEIRCE tőlük független munkáiban (HARVARD, 1870—71).[11]

A fentiek hatására kezdeményezte PEANO[12] 1888-ban az aritmetika axiomatikus tárgyalását — de erről később még részletesebben lesz szó. Tíz évvel később, *Grundlagen der Geometrie* [9] című művében HILBERT megpróbálta EUKLIDESZ rendszerét tökéletesíteni. Ami a precizitást illeti, sikerrel járt, ami viszont a pedagógiát illeti — annál kevésbé! Legfontosabb eredménye az axiomatikában talán az volt, hogy tisztázta az axiómarendszerekben a függetlenség, konzisztencia és teljesség fogalmait.

1902-ben E. H. MOORE megmutatta, hogy HILBERT axiómái nem függetlenek, az ezt követő évtizedben pedig E. V. HUNTINGTON, L. E. DICKSON és O. VEBLEN alapos analízisnek vetette alá a csoport, test, a valós és komplex test, a logikai algebra és a geometria axiómáit. MOORE és HUNTINGTON dolgozata[13] kitűnő képet ad munkájukról, színesebb de kevésbé megbízható áttekintéshez lásd [2., 3. fej.]. Részben a fentiek eredményeként az algebra axiomatikus tárgyalása végül általánosan elfogadottá vált. Kiderült, hogy meglepően kevés és egyszerű axióma (jóval kevesebb, mint az euklideszi geometriában[14]), már hatékony algebrai elméletek kiépítését teszi lehetővé. Például a csoportelmélet a logika általános alapelveire és az alábbi, E. V. HUNTINGTONtól származó axiómákra épül (1906):

DEFINÍCIÓ. *G csoport* legyen elemek (kisbetűkkel jelölve) olyan halmaza, ahol bármely két x, y elemre értelmezve van az *xy szorzat*, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

G1. A szorzás *asszociatív:* $x(yz)=(xy)z$ minden $x, y, z \in G$-re

G2. Minden $a, b \in G$-re van $x, y \in G$, hogy $xa=b$ és $ay=b$.

(A fentiekben PEANO $x \in G$ jelölését használtuk, jelentése „x eleme a G halmaznak").

Az axiómákból ügyes meggondolásokkal további egyszerű tulajdonságokat vezethetünk le, pl.: (i) minden G csoportban van egy egyértelmű e „idempotens" elem, melyre $ee=e$, (ii) erre az elemre $ex=xe=x$, minden $x \in G$-re (azaz G-n e „egységelemként" viselkedik), (iii) G2-ben x és y a és b által egyértelműen meghatározottak stb.

Hasonlóképpen a testelmélet az alábbi, szintén HUNTINGTONtól származó axiómákból indul ki:

DEFINÍCIÓ. *K test* legyen elemek olyan halmaza, ahol értelmezve van az $x+y$ *összeg* és az *xy szorzat*, melyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

K1. Az összeadás és a szorzás *kommutatív:*

$$x+y = y+x, \quad \text{és} \quad xy = yx \quad \text{minden} \quad x, y \in K\text{-ra}.$$

K2. Az összeadás és a szorzás *asszociatív:*

$$x+(y+z) = (x+y)+z \quad \text{és} \quad x(yz) = (xy)z \quad \text{minden} \quad x, y, z \in K\text{-ra}.$$

K3. A szorzás *disztributív:*

$$x(y+z) = xy+xz \quad \text{minden} \quad x, y, z \in K\text{-ra}.$$

K4. Minden $a, b \in K$-ra van $x \in K$, hogy $a+x = b$.

K5. Ha $a+a \neq a$, akkor van $y \in K$, hogy $ay=b$. (Valójában Huntington gyengítette K5-öt, mert $b+b \neq b$-t is feltette.)

(Természetesen az $a+a \neq a$ feltevés az $a \neq 0$ feltevésnek másféle megfogalmazása, melyet HUNTINGTON azért választott, mert nem akarta feltenni „nulla" létezését K-ban.)

Az algebra axiomatikus megközelítése és a különféle algebrai rendszerek fontosságának tudata bizonyos adott feltételeket kielégítő *összes lehetséges algebrai rendszerek* meghatározására ösztönzött, így pl. az összes véges test (GALOIS meg is találta mindet), az összes n-edrendű csoport, stb. meghatározására. Ebben az esetben természetesen azonosnak kell tekintenünk mindazon csoportokat (illetve testeket), amelyek *izomorfak*, azaz, amelyeknek elemei között *szorzástartó* (a testek esetében összeadás *és* szorzástartó) *bijekció* létezik. Az ilyen bijekciót nevezzük *izomorfizmusnak*.

5. Morfizmusok és részalgebrák. Általában hasznos tudni, hogy az A és B algebrai rendszerek között mikor létezik (homo)*morfizmus*, vagyis olyan $\Theta: A \to B$ leképezés, amely a rendszerek meghatározó operációit megtartja. Végül hasznos ismerni A *részalgebráit*, vagyis azon S részhalmazait, melyek az összes axiómákat kielégítik — ekkor azt is mondjuk, hogy A az S *kiterjesztése*. (Így pl. a komplex test a valós test kiterjesztése.) A részalgebrák vizsgálatánál általában elég a megfelelő operációkra vonatkozó *zártság* vizsgálata. Pl. egy részcsoportnak tartalmaznia kell: (i) az egységelemet, (ii) x-szel együtt x^{-1}-et, és (iii) x-szel és y-nal együtt xy-t is. Testekben az összeadásra, kivonásra, szorzásra és osztásra vonatkozó zártságot kell megkövetelnünk.

A fenti fogalmak az összes szokásos rendszerekben alkalmazhatók — ezekre a későbbiekben fogok visszatérni.

6. Mélyebb fejlődés: 1860—1914. Az axiomatikus megalapozás évtizedeiben az algebra úgy kiterjedésben, mint mélységben rendkívüli mértékben továbbfejlődött. Ez alkalommal csak néhány különösen említésre méltó eredmény felvázolására kell szorítkoznom.

Először is a Galois-elmélet következőképpen világítható meg: (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért a Q racionális test bővítéseire szorítkozom, bár az eredmények tetszőleges test bővítéseire általánosíthatók): legyen $F=Q[x_1, \ldots, x_n]$ a

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_k \in Q$$

racionális együtthatós polinom gyökei által generált test. Legyen továbbá a Q feletti F test $G(p:Q)$ *Galois-csoportja* F mindazon α automorfizmusainak csoportja, melyekre minden $x \in Q$-ra $\alpha(x)=x$. A Galois-tétel szerint a $p(x)=0$ egyenlet akkor és csak akkor oldható meg *gyökjelekkel*, ha a $G(p:Q)$ Galois-csoport feloldható az alábbi értelemben.

DEFINÍCIÓ. Legyen a G véges csoport *kompozíciólánca* G részcsoportjainak olyan

$$1\, \Delta S_1\, \Delta_2\, \Delta S \ldots \Delta S_r = G$$

lánca, ahol mindegyik részcsoport a rákövetkezőnek maximális normálosztója. Képezzük az $S_k|S_{k-1}$ faktorcsoportokat. G feloldható, ha ezek Abel-csoportok (avagy ezzel ekvivalens: ha a faktorcsoportok prímrendűek). A tiszta csoportelmélet később további mély eredményekkel gazdagodott. Az 1860 és 1914 között eltelt fél évszázad során számos figyelemreméltó tétel született véges csoportokról, ezek közül csak néhányat említek. Először is be lett bizonyítva, hogy az $S_k|S_{k-1}$ halmaz (izomorfizmus és átrendezés erejéig) független a kompozíciósortól (Jordan—Hölder-

tétel). Azután bebizonyították, hogy ha p^n osztója a G csoport rendjének, akkor G-nek van p^n rendű részcsoportja (Sylow tétele).

Harmadszor megemlíteném, hogy az algebrai számelmélet területén DEDEKIND kifejlesztette az ideálelméletet, és ennek segítségével jelentősen általánosította GAUSSnak a Gauss-egészek egyértelmű felbontására vonatkozó úttörő eredményét, nagyszerű egyértelmű felbontási tételt talált tetszőleges algebrai számtestre (azaz a C komplex testnek a Q racionális test feletti minden véges dimenziós résztestére). Nevezetesen, belátta, hogy a prímideálok szorzatára való felbontás egyértelmű.[15]

DEDEKINDet az ideálelmélet és az egyértelmű prímfelbontás iránti beható érdeklődése vezette a legnagyobb közös osztó (*lnko*) és a legkisebb közös többszörös (*lkkt*) axiomatikus szempontú vizsgálatához. Felismerte az *lnko* és az *lkkt* analógiáját a Boole-algebra „és" és „vagy" műveleteivel, ez vezette a *hálók („Dualgruppen"), modulácris hálók, disztributív hálók és vektorhálók* elemi elméletének kialakításához és alkalmazásához (l. két úttörő dolgozatát 1897-ből és 1901-ből). Így az algebra egyik fontos új ágához jutott, mely a Boole-algebrát speciális esetként foglalja magában.

7. Asszociatív lineáris algebrák. BENJAMIN PEIRCE 1870-ben — tehát körülbelül ugyanakkor, mikor DEDEKIND hatékony eszközzé fejlesztette az ideálelméletet — érte el úttörő jelentőségű eredményeit a „hiperkomplex számok" GRASSMANN, HAMILTON és CAYLEY által határozatlanul körvonalazott elméletében. PEIRCE először is definiálta a „lineáris algebrát" egy adott F test felett: ez legyen olyan A halmaz, melynek elemei r darab i_e báziselem tetszőleges

$$a = (a_1, \ldots, a_r) = a_1 i_1 + \ldots + a_r i_r \tag{2}$$

lineáris kombinációi, ahol a szorzás az alábbi alakú:

$$ab = \sum (a_l b_m) i_l i_m = \sum a_l b_m \gamma_{lmn} i_n; \tag{2'}$$

ahol γ_{lmn} tetszőleges skalár (F eleme). Egy lineáris algebra akkor asszociatív, ha a (2') szorzás asszociatív.

Nevezetes asszociatív lineáris algebrát alkotnak Hamilton kvaternói. Itt 4 báziselem van, $1, i, j, k$ és így 64 konstans (közülük sok 0), melyeket az alábbi szabályok határoznak meg:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \text{minden } a\text{-ra} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{3}$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad k \cdot i = -ik = j. \tag{3'}$$

A (3') azonosságok felismerhetően a vektorszorzás azonosságai. A valós test feletti $R(i, j, k)$ kvaternióalgebra egyben *divízióalgebra* is: minden $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \neq 0$ kvaterniónak van inverze, melyet meg is adhatunk:

$$a^{-1} = (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k)/(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \tag{3''}$$

PEIRCE[16] megmutatta, hogy a valós test felett a komplex számokon és a kvaterniókon kívül *nincs* hiperkomplex divízióalgebra.

Még fontosabb az $A = \|a_{lm}\| = \sum a_{lm} e_{lm}$ n^2-mátrixok alkotta $Mn(F)$ *teljes mátrixalgebra*. $Mn(F)$ e_{lm} báziselemei az alábbi szabályok szerint szorozhatók:

$$e_{lm'} e_{l'm'} = \begin{cases} e_{lm'} & \text{ha} \quad m = l' \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{4}$$

Így a konstansok az alábbi módon adhatók meg:

$$(4') \qquad \gamma_{lm,l'm',l''m''} = \begin{cases} 1, & \text{ha } l' = m,\ l'' = l,\ m'' = m' \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

1870 után több matematikus próbálta osztályozni a valós és komplex test feletti asszociatív lineáris algebrákat, olykor az algebra alaptételét is alkalmazva. Különösen FROBENIUS (1878, 1903), MOLIEN (1893), és CARTAN (1898) dolgozatai érdemelnek említést.[17]

1907-ben publikált figyelemreméltó munkájában WEDDERBURN megmutatta, hogy CARTAN és FROBENIUS struktúratételeinek zöme tetszőleges test feletti asszociatív lineáris algebrákra bizonyítható! Többek között igazolta a következő alapvető tételeket, melyeknek pontos értelmét alább tisztázom majd. Részletezést l. [3. 11. fej.].

WEDDERBURN maga mondta, hogy „ezen dolgozatban található tételek túlnyomó részét mások, főleg CARTAN és FROBENIUS, már bizonyították a racionális test feletti algebrákra."

(i) Minden asszociatív lineáris algebra előáll, mint egy „féligegyszerű" részalgebra és egy egyértelműen meghatározott „nilpotens" invariáns részalgebra direkt összege (a vektortereknél szokásos értelemben).

(ii) Az (i)-ben szereplő félig egyszerű összeadandó előáll, mint egyértelműen meghatározott „egyszerű" lineáris algebrák direkt összege.

(iii) Az (ii)-ben szereplő mindegyik *egyszerű* összeadandó valamilyen n-re az $n \times n$-es $A = \|aij\|$ mátrixok $M_n(D)$ „teljes mátrixalgebrája", ahol az a_{ij} elemek az asszociatív lineáris algebrában szereplő F test feletti valamely D „divízióalgebra" elemei.

(i) megértéséhez emlékeztetünk arra, hogy egy lineáris algebrát akkor nevezünk „nilpotensnek", ha valamilyen n egészre az összes n tényezős $a_1 a_2 \ldots a_n$ szorzat eltűnik. „Részalgebra" az eredeti algebra valamely, az összeadásra és a szorzásra (és a skalártest feletti lineáris kombinációra) nézve zárt részhalmaza, egy ilyen K részalgebra „invariáns", ha $k \in K$-ből következik, hogy $ak \in K$ és $ka \in K$ minden a-ra, még ha a nem is eleme K-nak, ezen feltétel szerint K a gyűrűelméleti értelemben vett *ideál*.

Nem minden lineáris algebra asszociatív. A nem-asszociatív algebrák legfontosabb családját a *Lie-algebrák* alkotják. Ezekben az asszociatív törvényt az alábbi azonosságok helyettesítik:

$$[aa] = 0, \quad [ab]+[ba] = 0, \quad [[ab]c]+[[bc]a]+[[ca]b] = 0,$$

minden a, b, c-re. Az 1870-es években LIE megmutatta, hogy a Lie-algebrák adják a véges számú paramétert tartalmazó *folytonos csoportok* megértésének kulcsát. Ezért volt különösen fontos, hogy KILLING (1888—1890) és ÉLIE CARTAN (1894) be tudták bizonyítani, hogy az asszociatív algebrákra vonatkozó fentebb említett struktúratételekhez hasonló állítások igazak a Lie-algebrákra is, és hogy meg tudták határozni a C feletti összes „egyszerű" Lie-algebrákat. KILLING és CARTAN ezen, Lie-algebrákra vonatkozó munkái még MOLIEN és CARTAN asszociatív lineáris algebrákra vonatkozó, hasonló munkái *előtt* keletkeztek.[17a]

A fenti fejlődést talán úgy foglalhatnánk össze, hogy az algebristák 1914 előtt többet tudtak a „modern algebráról", mint amennyit a legtöbb egyetemet végzett fiatal tud manapság. Mindazonáltal az algebrát még mindig alacsonyabb rendűnek ítélték, mint a klasszikus analízist, és a komplex test egyeduralkodó volt. Az 1900 körül leginkább elterjedt két algebrakönyv közül (melyek az algebrát a számelmélettől

elkülönítve vizsgálták) az egyik, WEBERÉ, algebrai függvényekkel, a másik SERRETÉ, pedig lánctörtekkel kezdődött!

8. Szimbolikus logika Gödelig. Visszatekintve nem tűnik meglepőnek, hogy a 19. század algebristáinak és logistáinak átütő sikerei arra ösztönöztek néhány nagy fantáziájú matematikust, hogy létrehozzák a *szimbolikus logikát*, mely a tételek bizonyítását szimbólumok néhány szabály, „axióma" által meghatározott manipulációjára vezeti vissza. Valójában a gondolat legalábbis LEIBNIZig nyúlik vissza, aki már 1700 körül megjósolta, olyan szimbolikus módszerek létrejöttét, melyek „jobban megnövelik az értelem hatalmát, mint amennyire optikai eszköz valaha is segítette a látást". Termékeny képzelete a differenciál-, és integrálszámítás hatékony szimbolikus algebráját (melynek jelentős részét ő találta fel), úgy fogta fel, mint a szimbolikus módszerek lehetőségeinek közvetlen bizonyítékát.

1899 után PEANO volt az, aki hatalmas mértékben továbbfejlesztette a szimbolikus módszert. Legfontosabb eredményeit *a Formulario Matematico* (5. kiadás 1908) tartalmazza, melynek előszavában így ír: „A matematikában minden fejlődés a szimbólumok bevezetésével áll kapcsolatban... Két szimbolikus rendszer közül az az előnyösebb, amelyik kevesebb szimbólumot használ. De a szimbolikus módszerek alapvető haszna a számolás megkönnyítése." Az előszó a különböző szimbólumok — pl. $+$, $\times$, D (derivált), $\int$, a vektor, a Boole-algebra szimbólumai — eredetének áttekintésével folytatódik. Javasolja az $\in$ (eleme) és a $\exists$ (létezik) szimbólumok bevezetését. PEANO azt állítja, hogy ezekkel, és még néhány szimbólummal és szimbolikus megállapodással az egész matematika szimbolikus formában kezelhető.[18]

Valójában a teljesen szimbolikus matematika gondolata nem PEANÓnál merül fel először. HÉRIGONE 1634-ben a következőket írja a *Cursus Mathematicus* előszavában: „A matematikai bizonyítás újszerű, rövid módszerét találtam fel, mely minden nyelv használata nélkül is érthető." WALLIS (1656) és BARROW (1655, 1660) használta is HÉRIGONE szimbolikus módszerét.[19]

A továbbiakban PEANO 386 oldallal igazolja állítását, áttekinti (1) a matematikai logika, (2) az aritmetika, (3) az algebra, (4) a vektorok (a „geometria"), (5) a határértékfogalom, (6) a derivált- és (7) az integrálfogalom szimbolikus felépítését. Az (1) és (2) rész a legsikerültebb, az utóbbi tartalmazza a nem-negatív egész számok híres, Peano-féle felépítését[20] a „rákövetkezés-függvény" segítségével: $1 = 0+$, $2 = 1+$, $3 = 2+$, ... Az aritmetika törvények levezetése a fenti felépítésben kitűnő. Az ezután következő 70 oldalon PEANO a szimbolikus tárgyalást kiterjeszti síkbeli görbékre, differenciálegyenletekre, és több más témakörre is.

Mégis, a *Formulaire* minden gondolati gazdagsága és éleslátása ellenére elsősorban gondolatébresztő erőmutatvány. PEANO seholsem sorolja fel a formulaátalakítás szabályait, és logikai axiómáinak rendszerét sem állítja össze. Bizonyításai, akárcsak EUKLIDESZ geometriai bizonyításai, csak úgy fogadhatók el, ha *jelentést* tulajdonítunk a szavaknak.

A fenti hiányosságokat RUSSEL és WHITEHEAD pótolta háromkötetes remekművében, a *Principia Mathematicá*ban. [18] Itt részletezték azokat a szimbólumátalakításokat (a „következtetési szabályokat"), melyeket a szimbolikus logikában feltétlenül felhasználhatunk valamilyen feltevésből kiindulva következtetések levonására (azaz matematikai bizonyításra).

A részletes következtetési szabályokat a szimbolikus logika „axiómáiként" használva, WHITEHEAD és RUSSEL megmutatták, hogy az R valós test (a pozitív egészekből), valamint a halmazelmélet és az aritmetika nagy része szimbólumok

segítségével felépíthető. Ezek a fontos eredmények tapasztalati bizonyságot szolgáltattak ahhoz az állításhoz, hogy *minden matematikai bizonyítás visszavezethető szimbólumok mechanikus átalakítására* (azaz tiszta szimbolikus logikára).[21]

Senki sem vonja kétségbe WHITEHEAD és RUSSEL állítását, miszerint „Peano-nyelvű" következtetési szabályaik (i) kifogástalanok, amennyiben a szöveg angol megfogalmazását tekintjük, és (ii) az elemi matematika jó részéhez elegendőek is. Mindezek ellenére úgy gondolom, hogy a (közel kétezer oldalas!) *Principia* valóságos matematikai tartalma jóval kevesebb, mint PEANO művének tartalma, és még azt sem mondhatjuk el, hogy a szimbolikus módszerek „megnövelik az értelem hatalmát", sőt azt hiszem, hogy éppen ellenkezőleg, *csökkentik* azt. Ennek valószínűleg pszichológiai okai vannak.[22]

9. Hilbert és Gödel, 1918—31. „A logika russeli axiomatizálása az axiomatika csúcsteljesítménye."[23] A fentieket HILBERT írta (1918)-ban, az az ember, aki alig 20 évvel korábban tökéletesítette EUKLIDESZ axiómarendszerét, a *Grundlagen der Geometrie* című híres munkájában. A könyv bevezetőjéből idézem a következőket:

„A geometria deduktív (folgerichtige) felépítéséhez — éppúgy, mint a számelméletben — csak néhány alaptételre (Grundsätze) van szükség. Euklidesz óta számosan tárgyalták ezen, ún. *axiómák*[24] felépítését... Ez a könyv egy újabb kísérlet a lehető legegyszerűbb teljes geometriai axiómarendszer felépítésére ... egyben tisztázni szeretném az axiómák egyes csoportjainak jelentőségét és az egyes axiómák következményeit is."

HILBERT és munkatársai, főleg W. ACKERMANN és P. BERNAYS[25], 1918 után komoly erőfeszítéseket tettek, hogy az *axiómaelmélet analízisének* szellemében *deduktíve* (azaz matematikai érveléssel) igazolják WHITEHEAD és RUSSELL axiómáinak helyességét, mégpedig az alábbi értelemben.

Figyelmüket két kérdésre összpontosították:

(i) az axiómák ellentmondásmentessége, azaz: bizonyítandó hogy nincs olyan p állítás, hogy p és ennek p tagadása is bizonyítható,

(ii) eldönthető-e egy tetszőleges (pl. aritmetikai) állítás igaz vagy hamis volta véges sok lépésen belül?

HILBERT az első problémával valószínűleg akkor találkozott, amikor a Grundlagen der Geometrie-ben a descartes-i geometriát használta az euklideszi geometria modelljéül, a másodikkal pedig akkor, amikor azon kérdéshez jutott vajon megadott egész együtthatós többismeretlenes algebrai egyenlet egész számokban való megoldhatósága eldönthető-e véges sok lépésben (HILBERT 10. problémája).

Az (i) kérdésre ACKERMANN (aki előzőleg bebizonyította a Whitehead—Russel-axiómák egyikének redundanciáját) és VON NEUMANN adott pozitív választ 1927-ben, *alkalmas megszorításokkal.* Technikai jellegű megszorításaik[26] látszólag teljesen ártalmatlannak tűntek, így 1927—30 körül a Hilbert programjával kapcsolatos nézetek optimisták voltak.

A (ii) kérdésre, az eldönthetőségi problémára *(Entscheidungsproblem)* aztán GÖDEL 1931-ben mégis negatív választ adott, még aritmetikai állításokra vonatkozóan is. Szellemes matematikai érveléssel, mely végeredményben CANTOR átlós konstrukcióján alapszik, az eldönthetetlenségből levezette a Whitehead—Russel—Hilbert-rendszer *nem-teljességét,* mégpedig a következő értelemben. Ha az eddigi axiómákon kívül a *konzisztencia-axiómát* is igaznak tételezzük fel („hamis állítások nem bizonyíthatók"), egy olyan számelméleti formula bizonyítható be, melyet enélkül nem lehetne igazolni. Következésképp a Hilbert-axiómarendszer ellentmondástalansága bizonyíthatatlan, így az (i) kérdés eldönthetetlen.

Így GÖDEL egycsapásra megsemmisítette HILBERT reményeit. HERMANN WEYLt idézve[27]: „GÖDEL bizonyos módon megszámlálta HILBERT formalizmusának összes szimbólumát, formuláját és formulasorozatát, ily módon a konzisztencia kérdését aritmetikai állítássá tette. Be tudta bizonyítani, hogy ez az állítás az adott formalizmuson belül nem bizonyítható, és nem is cáfolható. Ez csak két dolgot jelenthet: vagy a konzisztencia bizonyításához olyasmit is fel kell használnunk, aminek nincs formális megfelelője a rendszerben, azaz nem sikerült a matematikai levezetések folyamatát tökéletesen formalizálnunk, vagy pedig le kell mondanunk a konzisztencia szigorúan „véges" bizonyításáról. Amikor GENTZEN 1936-ban végül bebizonyította az aritmetika konzisztenciáját, valóban át is lépte ezt a határt, mert nyilvánvalónak tételezett fel egy olyan gondolatmenetet, mely CANTOR, „másodosztályú rendszámaira épül".

GÖDEL eredménye darabokra törte a PEANO, WHITEHEAD és RUSSEL által formalizált logikához fűzött félévszázados optimizmust. Megmutatta, hogy ez a formalizálás képtelen feloldani Cantor halmazelméletének ellentmondásait és kétértelműségeit.[28]

A MODERN ALGEBRA URALMA, 1930—70

10. A „modern" algebra felemelkedése. Nem sokkal azelőtt, hogy GÖDEL összetörte a szimbolikus logisták reményét, hogy „Peano-nyelven" formalizálják az egész matematikát, VAN DER WAERDEN *Modern Algebrája* (1930—31) újabb forradalmi folyamatot indított el. E nagyszerűen megírt könyv szerzője meg is fogalmazza célját az előszóban.

„Az absztrakt, formális vagy axiomatikus irány, mely új lendületet adott az algebra fejlődésének[29], mindenekelőtt új fogalmakhoz vezetett úgy a *csoportelméletben*, mint a *testelméletben*, az *értékeléselméletben* és a *hiperkomplex számok elméletében*, új kapcsolatok felismerésére, mély eredmények kimondására adott lehetőséget. A könyv célja, hogy a fogalmak ezen új világával ismertesse meg az olvasót."

Mint már jeleztem, az axiomatikus tárgyalás és a „modern" algebra jelentős része 1914 előttről származik. Mégis, még 1929-ben is, a legtöbb egyetemen — így a Harvardon is — a modern algebra fogalmait és módszereit az analízissel összehasonlítva mellékes jelentőségűnek tekintették. VAN DER WAERDEN egyszeriben központi jelentőségűvé tette a „modern algebrát", hangsúlyozva a fogalmak, módszerek matematikai és filozófiai egységét és hatékonyságát (melyet EMMY NOETHER és néhány tanítványa, elsősorban E. ARTIN, R. BRAUER és H. HASSE fejlesztett nagymértékben tovább). Nem túlzás azt állítani, hogy az előadásmód frissessége és lelkesedése felvillanyozta a matematikai világot — főleg a magamfajta 30 év alatti matematikusokat.

A klasszikus *valós és komplex algebra* a múltba tűnt, vagy legalábbis úgy látszott, hogy inkább része az analízisnek, mint a tulajdonképpeni algebrának. Ez a felfogás tükröződik a *Moderne Algebrában* is, ahol először a Galois-elmélet, és egy *tetszőleges* test legkisebb algebrailag zárt bővítésének egyértelműsége (STEINITZ, 1910) — transzfinit indukcióval bizonyítva — kerül sorra, a valós és komplex testnek pedig még a *definíciója* is csak ezután következik! Mennyire más ez, mint WEBER, SERRET és PERRON tárgyalása!

11. Hálóelmélet. Ez az új magatartás volt a hálóelmélet újjászületésének egyik fő ösztönzője. A hálóelmélet DEDEKIND úttörő dolgozataitól a 30-as évekig nem fejlődött. 1933-ban azt írtam, hogy a hálóelmélet „alkalmas arra, hogy segítségével

próbáljuk megoldani az absztrakt algebra kombinatorikus jellegű problémáit".[30] 1938-ra már olyan nagymértékű volt a fejlődés (főleg logikai, algebrai, geometriai, valószínűségszámítási, mérték- és integrálelméleti, funkcionálanalízisbeli alkalmazások), hogy az American Mathematical Society külön szimpoziont tartott az akkor még igen fiatal tudományágról.[31]

12. Egyetemi algebra. A klasszikus algebra helyét a modern algebra vette át. Egyetemi szinten a modern algebra mégis csak a II. világháború után vált igazán népszerűvé — ez a népszerűség részben a *Survey of Modern Algebra*-nak köszönhető, melyet 1941-ben írtam Mac Lane-nel közösen. Akkori tárgyalásunk ma már szinte konzervatívnak tűnik! VAN DER WAERDENtől eltérően az egyenletek elméletét a csoportok definíciója előtt vettük, a valós és komplex mátrixok elméletét pedig (beleértve a szimmetrikus és Hermite-féle mátrixokra vonatkozó főtengelytételt is) a Galois-elmélet előtt. A halmaz- és logikai algebra megértésének fontosságát szem előtt tartva, a Boole-algebrára is kitértünk; erre később még visszatérek.

13. Bourbaki hatása. A francia egyetemeken nem sokkal ezután vált népszerűvé az N. BOURBAKI[32] *Élémentes de Mathématique* c. művében megfogalmazott absztrakt matematika. Ez a több kötetes mű (mely nagyrészt az 1945—55 között eltelt tíz évben született), kísérlet arra, hogy az egész (tiszta) matematikát a *halmaz* és a *függvény* fogalmaiból építsék fel: a könyv úgy tekinti a matematikát, mint absztrakt *halmazstruktúrák* és köztük értelmezett leképezések (főleg *morfizmusok*) összességét (l. 1. köt. 4. fej.).

A 2. kötet ebben a szellemben tárgyalja az *algebrai* struktúrákat, melyeket *elemek* olyan halmazaiként definiál, ahol véges sok elemre vonatkozó *operációk* vannak értelmezve. Az olvasó ezután csoportokkal, gyűrűkkel, testekkel és más említett rendszerekkel kapcsolatos gondosan kicsiszolt és rendszeres definíciók, példák és tételek hosszú sorával találkozik. Az egyéb matematikai ágak hasonló szellemben kerülnek sorra a későbbi kötetekben. Végső hatásként a matematika úgy áll előttünk, mint egy, *a halmaz és függvény fogalmaiból tisztán deduktíve felépített, hatalmas csiszolt monolit.*

14. Az absztrakt algebra virágzása. A VAN DER WAERDEN könyve által keltett lelkesedés, melyet a fent leírt hatások is erősítettek, példátlan virágzást hozott létre az utóbbi 40 évben az absztrakt algebra minden területén. Így a *csoportelmélet*, a *gyűrűelmélet* és a *testelmélet* (a Moderne Algebra zöme ezen területeknek volt szentelve), újabb, rendkívül mély eredményekkel gazdagodott, melyre a legnagyszerűbb példa talán az a tétel, *mely szerint minden páratlanrendű véges csoport feloldható.* Ez a tétel (melyre THOMPSON és FEIT bizonyítása több mint 200 oldal terjedelmű) már régen sejtés volt —, de a bizonyítás 1930 előtt a legtöbb matematikus számára reménytelennek tűnt.

Az utóbbi 40 évben LIE és JORDAN elméletei, valamint a multilineáris algebrák olyan fejlődésen mentek keresztül, melynek fényében 1930-as tudásunk amatőr színvonalú, ha nem éppen naiv. Ugyanez áll a hálóelméletre, a félcsoport, és kvázicsoport-elméletre, a kategóriaelméletre, a homologikus és a kombinatorikus algebrára, melyek 1930-ban majdnem, vagy teljesen ismeretlenek voltak. Végezetül az algebrai geometria az axiomatikus algebra új ágaként alakult ki, és szilárdan épül a kommutatív gyűrűk elméletére, ezek ideáljaival és értékeléseivel kapcsolatos mély tételekre.[33]

15. További fejlemények. A lelkesedés által keltett szökőárnak további következményei is voltak. 1930-ban a magamfajta fiatal emberek számára van der Waerden

könyve után úgy tűnt, hogy a matematikában kétszáz éve domináló, az infinitezimális analízisre épülő *klasszikus analízis* ósdi és kimerült. A VAN DER WAERDEN által az algebrában alkalmazott absztrakt megközelítés nemsokára divatos is lett a funkcionálanalízisben és a topológiában. Az a gondolat, hogy az egész matematika topologikus algebrának tekinthető, jelentős ösztönzést kapott HILBERT V. problémájának megoldásától, mely megmutatta, hogy a Lie-csoportok elméletében a differenciálhatóság puszta folytonossággal helyettesíthető, és minden lokálisan euklideszi folytonos csoport izomorf egy analitikus Lie-csoporttal [22, 184. old.]. Még a parciális differenciálegyenletek kutatása — az alkalmazott matematikusok hagyományos erőssége — is egyre inkább általános egzisztencia és egyértelműségi tételek kimondására alkalmas új absztrakt fogalmak kutatására irányul.

Részben a fenti hangsúlyeltolódások okozták, hogy 1960 körül a legtöbb fiatal matematikus úgy gondolta, hogy az egész matematika axiomatikusan felépíthető a halmaz és a függvény fogalmaiból. És ez a felfogás akkor már nem is tűnt modernnek, sőt éppen ez lett a klasszikus. 1959-ben VAN DER WAERDEN a *„Moderne Algebra"* címet *„Algebrára"* változtatta. A 60-as években MAC LANE-nel közösen újabb „Algebrát" írtam, melyben még tovább mentünk az absztrakcióval. A tiszta algebra nagy részét a morfizmus, a kategória, és az „univerzalitás" központi fogalmaira építettük. Az algebra „univerzális" megközelítését, melyet a hálóelmélet szerepét hangsúlyozva a 30-as és 40-es években kezdeményeztem, COHN és GRÄTZER két jelentős könyvben fejlesztette tovább. LAWVERE (1965) javasolta a „Kategóriák kategóriáját, mint a matematika alapját", a következőkkel kezdve:

„Az utóbbi évtizedek matematikai fejlődése során az a meggyőződés alakult ki, hogy a matematikai objektumok lényeges tulajdonságai inkább az objektumok absztrakt struktúrájával kapcsolatosak, mint az objektumokat alkotó elemekkel. Felmerül a kérdés: lehetséges-e a matematika e felfogás szerinti megalapozása? Olyan megalapozásról lenne szó, amelyben az osztályok és az „osztály elemének lenni" fogalom semmilyen szerepet sem játszik. Itt „megalapozáson" elsőrendű axiómák olyan rendszerét értjük, melyben a szokásos matematikai objektumok definiálhatók, és tulajdonságaik bizonyíthatók Ez a megalapozás a klasszikusnál természetesebb és használhatóbb lenne, például ami az algebrai topológiát, a funkcionálanalízist, és az általános algebrai rendszerek modellelméletét illeti."

16. A 60-as évek „új matematikája". A 60-as évek első felében a „szputnyik-utáni korszakban" a lelkesedés tovább nőtt. Divatba jött — különösen az USA-ban — a halmaz, függvény és axióma fogalmainak tanítása az általános iskolákban —, olyan fogalmak tanítása, melyeket gyakran maguk a tanárok is csak félig értettek meg! A kezdeményezők útnak indították az „új matematika" ötven évvel ezelőtt még ismeretlen mítoszát. Az egyik állítólagos cél a matematikatanárok és kutatók feltételezett létszámhiányának megszüntetése volt. Minden szépen hangzott abban az időben, mikor a háború utáni „gyermekáldás" és a konjunktúra megnégyszerezte a matematikatanárok iránti keresletet, és az alaptudományokba vetett bizalom évente 10—15%-kal növelte a tiszta matematika anyagi támogatását. De 1972-ben, úgy tűnik, mindez már nem aktuális! (Mindez az USA-ban. Szerk.)

Összefoglalásképpen: az algebra 1930 és 1960 között harmonikusan fejlődött, egyenletesen, gyorsan és végeredményben diadalmasan a fent leírt irányokban. Az algebra diadalát mutatja, hogy a négy első Field Medalból hármat analízisben elért eredményekért adtak ki (1936, 1950), az 1970-ben kiosztott 4 díjból pedig hármat algebrában elért eredményekért. (Ezek egyike analitikai számelméleti volt. Szerk.)

Az utolsó 5—10 évben azonban jelentős új irányzatok jelentek meg. Ezek közül egyesek bizonyos szélsőségek ellentéteként jelentkeztek, így pl. RENÉ THOM nemrég

adta közre *A „modern" matematika: oktatási és filozófiai tévedés*[35] című gondolatébresztő cikkét, melyben az algebra helyett a geometriát javasolja, mivel „minden algebrai probléma vagy triviális, vagy megoldhatatlan. Ezzel szemben a geometria klasszikus kérdései változatos problémák sokaságát kínálják."

De nem kívánok sokáig időzni egy olyan évtized túlzásainál, melyre legtöbben némi nosztalgiával gondolunk. Egyes kutatócsoportok szélsőséges absztrakciója, a gyerekek túlzott tempójú oktatása és az algebra kritikátlan terjeszkedése a fizika megalapozásában olyan reakciókat váltott ki, melyek az ellenkező végletbe való átcsapással fenyegetnek.

Ehelyett inkább az algebra négy *pozitív* jelenkori irányzatáról szólnék, melyek véleményem szerint sokat ígérőek a jövőre nézve.

NÉGY SZÁMÍTÓGÉP-INSPIRÁLTA MAI FEJLŐDÉSI IRÁNY

17. Az új numerikus algebra. A 40-es évek körül új forradalom bontakozott ki, melynek végső matematikai következményeit ma még nem láthatjuk előre. Ugyanis a *nagysebességű digitális* számítógépek megépítése lehetségessé tette olyan matematikai problémák megoldását, melyek effektív keresztülvitele előzőleg megfizethetetlenül drága és időigényes volt. Sok matematikus számára — előttem is — az 50-es években vált világossá, hogy az *alkalmazott matematika így létrejött forradalma* új lehetőségeket, területeket nyit az alapkutatás előtt is. Így például, mivel a digitális számítógépek csak *véges* sok jeggyel tudják a valós számokat jelölni, és függvényeket is csak *véges* sok pontban ábrázolják (közelítő „csomópontok" egyes „rácspontokban"), a differenciálegyenletek számítógépes megoldása (fizikai vagy mérnöki alkalmazásoknál) a *kerekítéskor* és *levágáskor* adódó hibák alapos *numerikus analízisét* igényli.[36]

Ahhoz, hogy (adott pontossággal) *megoldjunk* egy differenciálegyenletrendszert, az eredeti rendszert először közelítő *algebrai egyenletek* rendszerével helyettesítjük (melyeket pl. a véges differenciák módszerével kaphatunk), melyben az ismeretlenek általában csomópontokon felvett értékeket jelentenek, és a számítógép aztán ezt oldja meg (szintén közelítőleg). A *diszkretizációról* ezúttal többet nem szólok, mert a numerikus analízis és az approximációelmélet idevonatkozó tételei a klasszikus analízis körébe tartoznak. Elégedjünk meg annyival, hogy ezek az eljárások gyakran igen nagy mátrixokhoz és esetleg 50 000-nél is több ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszerekhez vezetnek. A fő probléma: hogyan lehetne ezeket gazdaságosan megoldani?

A kapott mátrixoknak gyakran vannak speciális tulajdonságaik, melyeket aztán alaposan ki kell használnunk. Pl. általában nagyon *ritkák* (legtöbb elemük 0), sokszor szimmetrikusak, vagy lineáris transzformációval, permutációval szimmetrizálhatók. Előfordulhat, hogy főátlóbeli elemeik „dominánsak" (azaz legalább akkorák, mint az egy sorban levő többi elem abszolút értékének összege), vagy pedig főátlóbeli elemeik pozitívak, és a mellékátlóbeliek negatívak. Lényegében a fenti tulajdonságú mátrixokat nevezik *Stieltjes-mátrixoknak*, gyakran kerülnek elő hálózati folyamatokkal kapcsolatos problémákban.

Általában a célunk kétféle lehet: (i) lineáris rendszer megoldása (a rendszer $Ax=b$ alakban írható), vagy (ii) A *sajátértékeinek* meghatározása (ezek természetesen $|A-\lambda I| = 0$ gyökei). Ami (i)-t illeti, 1940-ben a matematikusok úgy gondolták, hogy ha egy egyenletrendszert (egyáltalán!) érdemes megoldani, úgy azt *Gauss-féle eliminációval* érdemes, a többi meg tiszta favágás. Néhány kitűnő analitikus

(így GAUSS, JACOBI és VON MISES) nagyra értékelte az *iterációs* módszereket (melyeket GAUSS használt is), tanulmányozta konvergenciájukat, de ezeket a módszereket a „lineáris algebra"-könyvek teljesen figyelmen kívül hagyták (és hagyják ma is!). Hasonló megjegyzések érvényesek a sajátérték-problémákra is, ahol a matematikus tapasztalatai 3×3-as (még jó, ha nem 2×2-es) $A=\|a_{ij}\|$ mátrixokra korlátozódtak, melyek sajátértékei a képletgyűjteményekben található azon formulák szerint határozhatók meg, melyek a

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\beta\lambda-A=0$$

harmadfokú egyenlet megoldására vonatkoznak, ahol

$$\beta=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}a_{32}-a_{31}a_{13}-a_{12}a_{21}.$$

A gyakorlatban nagy mátrixokra az ehhez hasonló módszerek rendkívül pontatlanok és nem gazdaságosak.[37] Helyettük az 50-es években újabb módszereket javasoltak, ezek megteremtése és további analízise a „klasszikus" algebra jelentős új részterületét hozta létre: az *új numerikus algebrát*. VARGA [17], WILKINSON [19] és YOUNG [20] könyvei jelenlegi ismereteink kitűnő áttekintését adják, jó lenne, ha minden, a korral lépést tartó fiatal algebrista legalább valamennyire tisztában lenne tartalmukkal!

18. Ritka mátrixok. Az utóbbi 5 évben jelentős fejlődés ment végbe (GAUSShoz képest) a sokismeretlenes, ritka mátrixú egyenletrendszerek *eliminációs* megoldásában. Az új eredmények a gráfelmélet gondolatköréből merítenek, a jelenlegi munka áttekintését pl. [15] tartalmazza.

A (valós és komplex) numerikus algebra további érdekes kutatási területei közül itt csak a három legfontosabbat említeném (az erre vonatkozó közlemények a legtöbb folyóiratban megtalálhatók):

(a) Legfeljebb 100-adfokú polinomok gyökeinek meghatározása.
(b) Többváltozós függvények nem-feltételes szélsőértékei.
(c) Lineáris programozás és egyéb módszerek függvények minimalizálására egyenletek és egyenlőtlenségek által meghatározott „megkötések" között.

Valójában ezek az „új" területek is 1940-ig nyúlnak vissza, ha nem tovább. GEORG DANTZIG már 1947-ben definiálta a lineáris programozást, és a „szimplex"-módszert is feltalálta lineáris programozási feladatok megoldására, ld. G. HADLEY: *Linear Programming*, 20. old. (ADDISON—WESELY, 1962). KEMÉNY, SNELL és THOMPSON 10 évvel később írt, népszerű *Introduction to Finite Mathematics* című könyve az anyagnak elsőévesek számára is érthető feldolgozását adja (Prentice-Hall, 1957).

19. Egész aritmetika. A számítógépek programozásánál alapvető különbség van a *pontos* „egész aritmetika" és a *közelítő* aritmetika között. A fentiekben nem esett szó az „egész programozásról" és a diophantoszi egyenletek számítógépes megoldásáról, mert ezekhez „egész", és nem komplex vagy valós numerikus algebrára van szükség. Az egész számok numerikus algebrája a numerikus algebra további fontos fejlődési irányát jelenti.

20. Automataelmélet. Sok matematikus a számítógépeket egyszerűen szuperlogarléceknek képzeli, melyek elsődleges szerepe az, hogy hosszadalmas numerikus számításokat végezzenek el. Ezt látszik igazolni az is, hogy az „aritmetikai egység" esetleg valóban a „hardware" legösszetettebb része; mégis, a számítógépek ennél jóval sokoldalúbbak. A nagy számítógépeket „*univerzális*" gépeknek tervezték,

többféle „szellemi munka" végzésére képesek. Az ipari forradalom azért jöhetett létre, mert voltak gépek, melyek az embernél olcsóbban és hatékonyabban végezték „fizikai" munkát. A számítógép-forradalomban ugyanez a cél a szellemi munkával. Ez a lehetőség különösen izgalmassá teszi a számítógépek tanulmányozását. Matematikai tanulmányozásuk — részben azért, mert az általános számítógépek véges számú alkatrészből álló *digitális* szerkezetek — egy új, *tisztán algebrai* fogalomra épül, melyet axiomatikusan fogok definiálni.

DEFINÍCIÓ. Az *M véges állapotú gép* (vagy „automata") az *A* „bemeneti jelek", *S* „állapotok" és *Z* „kimeneti jelek" halmazából áll, melyeket a $\nu: A \times S \to S$ és $\zeta: A \times S \to Z$ relációk kötnek össze. A ν operáció minden $a \in A$ „bemeneti jelhez" és $s \in S$ „kezdőállapothoz" egy $\nu(a, s) \in S$ „új állapotot" rendel, a ζ operáció minden a-hoz és s-hez egy $\zeta(a, s) \in Z$ kimenőjelet rendel.

Egy véges állapotú gépet úgy lehet valamivel konkrétabban elképzelni, hogy van egy s_0 *kezdőállapot*, innen *rekurzíve* $s_k = \nu(s_{k-1}, a_k)$ és a *kinyomtatás* $z_k = \zeta(s_{k-1}, a_k)$, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$. Így tehát a gép a bemenő $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jelsorozatot $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kimenő jelsorozattá alakítja át.

Absztrahálva: a gép csupán egy újfajta $M = [A, S, Z, \nu, \zeta]$ algebrai rendszer. Ha *M*-et *Z* és ζ elhagyásával egyszerűsítjük (ezt a kategóriaelméletben „felejtő funktornak" nevezik), az egyszerűsített *M* rendszer *egy szabad félcsoportnak* (az összes lehetséges input „programok" A^* halmaza) *egy halmazra* (az *S* állapothalmaz) *gyakorolt hatását* írja le. Az output nélküli gépek elmélete tehát axiomatikus (vagy „modern") algebrával jól leírható, és mint nemrég kiderült[30], az elméletre az ún. „univerzális" algebra is alkalmazható.

21. Turing-gépek. A véges állapotú gépekhez hasonló, de annál kicsit bonyolultabb a „Turing-gép" melyet TURING talált fel 1936-ban, mielőtt még nagysebességű általános digitális számítógépek léteztek volna. TURING bebizonyította, hogy gépe a matematikai gondolkodás legtöbb folyamatát végre tudná hajtani. Így pl. képes minden „definiálható" (azaz „számítható") valós szám bináris vagy tizedesjegyeinek kiírására — mint pl. *e*, π, vagy a $J_n(x)$ Bessel-függvény *k*-adik gyöke — és „a korlátozott Hilbert-féle függvénykalkulus minden bizonyítható formulájának levezetésére", megadva az összes igaz tételt, és nem adva meg egyetlen hamisat sem.

Úgy húsz évvel azután, hogy TURING megmutatta, hogy gépe *elvileg* végre tudná hajtani a LEIBNIZ, WHITEHEAD, RUSSELL és HILBERT által megálmodott mechanikus tétel-bizonyítást, HAO WANG mindezt a *gyakorlatban* is megvalósította. Olyan programot írt, mellyel percek alatt előállította az ítéletkalkulus WHITEHEAD és RUSSELL által a *Principiában* kimondott, egyenlőséget tartalmazó 350 tételének bizonyítását![40]

22. A számítási eljárások összetettsége; az optimalizálás. A harmadik jelentős algebrai (és általában: matematikai) irányzat a *számítási eljárások összetettségével* és az *optimalizálással* foglalkozik. Az algebra alkalmazásaiban a formaátalakítás gazdaságossága elsődleges szempont, és mégis, a tiszta matematikai szakfolyóiratokban sokáig tabu volt ilyesmiről írni. Ez a sznob tabu több alapvető tényt elhomályosított.

A matematikai logikában Russell-, Whitehead- és a Hilbert-iskola nem foglalkozott komolyan a formális deduktív rendszerek gazdaságosságával, bár LEIBNIZ és PEANO megpróbált kialakítani (és ki is alakított, főleg LEIBNIZ!) olyan szimbolikus eljárásokat, melyek a matematikai bizonyításokat gazdaságossabbá és

ezáltal hatékonyabbá tennék. Szembeszökő a különbség, ha összehasonlítjuk a WHITEHEAD és RUSSEL által a halmazok és relációk alapvető tulajdonságainak levezetéséhez felhasznált szimbólumok számát azon szimbólumok számával, melyek segítségével a matematikusok ugyanoda eljutnak. Ez ideig az ítéletkalkulus az egyetlen terület, ahol a mechanikus tételbizonyítás nagyteljesítményű számítógépek segítségével gyakorlatilag is megvalósítható (l. HAO WANG, 21. fej.).

A gazdaságosság jelentőségét felismerve a matematikai logisták általános definíciók speciális esetekre vonatkozó alkalmazásaival kezdték meg a „számítási eljárások összetettségének" vizsgálatát. Munkájuk már meg is hozta első gyümölcsét a számok és mátrixok szorzásával kapcsolatos rövidebb eljárások fejlődésében.

A végső cél természetesen a szimbolikus módszerek *optimalizálása*. Az optimalizálás kérdése azonban számos olyan új kérdést vetett fel, melyek *tiszta* algebristák egész generációit ösztönözhetik majd további kutatásokra. Ezek közül kettőt említenék: (i) a Boole-algebra „legrövidebb forma" problémája, (ii) az információelmélet „leggazdaságosabb kódolás" problémája.

A legújabb meglepő felfedezésekkel kapcsolatos izgalmas optimalizálási problémák közé tartoznak a következők: (iii) legalább hány művelet szükséges két n-jegyű egész szám szorzásához?, (iv) legalább hány művelet szükséges két $n \times n$-es mátrix szorzásához?, (v) hogyan lehet egy n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert a lehető legkevesebb összeadással, kivonással, szorzással és osztással megoldani? Ezúttal sajnos nem térhetek ki a kérdések részletesebb tárgyalására, ehhez l. [21] és [11, 2. kötet 258—78. old.].

23. Kombinatorikus algebra. A negyedik jelenkori irányzat a *kombinatorikus* (elsősorban *gráfokkal* és *hálózatokkal* kapcsolatos) gondolatokra helyezi a fő hangsúlyt.[41] Ez az irányzat minden bizonnyal annak az ösztönös felismerésnek köszönhető, hogy a digitális számítógépek és a matematikai levezetések szerkezetének elemzése kombinatorikus módszereket igényel, HERMANN WEYLt idézve (1949): „Az érzékszervek és az agyba futó idegek hálózata olyan tárgykör, melynek a téma természete szerint szüksége van kombinatorikus vizsgálatokra. A modern számítógépek mechanikus és elektronikus eszközök segítségével a gyakorlat nyelvére fordítják le kombinatorikai ismereteinket."[42]

Az axiomatikus algebra-, valószínűségszámítás- és statisztika-előadásokat *megelőző* elemi „Diszkrét matematika"-előadásoktól kezdve[43] egészen DONALD KNUTH nagy igényű 7-kötetes munkájáig, a *The Art of Computer Programming*-ig a fő hangsúly változatlan: permutációk, kombinációk, generátorfüggvények, fák, tároláselmélet, kereséselmélet, rekurzió, differenciálegyenletek, blokkrendszerek stb. Az idézett művek felületes áttekintése is meggyőzheti az olvasót, hogy az analízis 200 éves uralma véget ért, és helyét az egyetemeken egyre inkább az algebra, a legszélesebb értelemben vett diszkrét matematika, a szimbólum-átalakítás *tudománya* (és többé már nem művészete!) veszi át.

Ez a fejlődési irány bizonyos értelemben a VAN DER WAERDEN által megkezdett forradalmat viszi tovább, bár jelentős változtatásokkal. Az axiómák és az euklideszi mintájú deduktív rendszerek többé már nem tűnnek annyira alapvetőnek. Ugyanez áll a csoportokra, gyűrűkre, részcsoportokra, részgyűrűkre, és morfizmusokra. Helyüket különböző *relációstruktúrák* (pl. részben rendezések, kombinatorikus topológiai értelemben vett „komplexusok") veszik át, melyek az 1930—60 között oly fontos, általános algebrai technikával jóval kevésbé kezelhetők.

A digitális számítógépekkel és a kombinatorikával a legszorosabb kapcsolatban az 1930—60 között elhanyagolt loop-ok, monoidok, hálók (vagy grupoidok,

félcsoportok és félhálók) állnak. Ahogy a *csoportok* a *szimmetriákhoz* kapcsolódnak, úgy kapcsolódnak a *loopok* a *designokhoz* (vagy „patternokhoz"), a *monoidok* a *hatásokhoz* (pl. input utasítás az automata állapotaira), és a *hálók* a *struktúrákhoz*.

ROTA[44] és munkatársai megmutatták, hogy a hálóelmélet nemcsak az algebra kombinatorikus problémáira alkalmazható (amint azt 1933-ban gondoltam, l. 7. fej.), hanem általános kombinatorikai problémákra is. Sőt, N. S. MENDELSOHN a közelmúltban az univerzális algebra fogalmainak segítségével kombinatorikus struktúrákat (combinatorial designs) hozott létre és viszont [23, 123—32. old.].

Vajon hová vezetnek ezek az új irányzatok? Egy dologban biztos vagyok: van der Waerden klasszikus „modern" algebráját nem teszik elavultabbá, mint a valós és komplex algebra vagy az analízis lett VAN DER WAERDEN után. Mint KNUTH ([11, 1. köt. 1. old.], l. még [1]) is hangsúlyozza, a számítástudományban központi jelentőségű *algoritmus* szó nem más, mint az „algebra" szót alkotó AL-KHWARIZMI nevének eltorzítása.

A fent leírt négy irányzatot körülbelül úgy *ösztönözték* a számítógépek, mint az analízist a geometria, a mechanika és a matematikai fizika. Ezek a kutatási területek új utakat nyitnak a következő generációk számára, a kapcsolatok és alkalmazások egyre növekvő változatosságát és gazdagságát, a régi és új gondolatok keveredését és átalakulását hozzák létre. Az algebrát csakis ez a fejlődés teheti mindig is friss, és izgalmas tudománnyá!

IRODALOM

[1] W. W. ROUSE BALL: A Short History of Mathematics, 3rd ed. Macmillan, New York, 1901.
[2] ERIC T. BELL: Mathematics: Queen and Servant of Sciences, McGraw-Hill, New York, 1951.
[3] ERIC T. BELL: The Development of Mathematics, McGraw-Hill New York, 1940.
[4] GARRETT BIRKHOFF és THOMAS C. BARTEE: Modern Applied Algebra, McGraw-Hill, New York, 1970.
[5] GARRETT BIRKHOFF és SAUNDERS MACLANE: A survey of Modern Algebra, MacMillan, New York, 1941
[6] NICOLAS BOURBAKI: Éléments d'Histoire des Mathématiques, Hermann, Paris, 1960.
[7] FLORIAN CAJORI: A History of Mathematical Notations, 2-kötet. Open Court, Chicago, 1928—9.
[8] GEORGE GRÄTZER: Universal Algebra, Van Nostrand Princeton, New York 1968.
[9] DAVID HILBERT: Grundlagen der Geometrie, 1899, 2nd ed. 1901. ford. angolra E. J. FOWNSEND, Open Court, Chicago 1902, 1910.
[10] DAVID HILBERT, W. ACKERMANN: Grundzüge der theoretische Logik, 4th ed. 1949.
[11] DONALD KNUTH: Algorithms, 7. terv. kötet, Addison—Wesley, Reading, Mass. 1969.
[12] S. S. MACLANE, G. BIRKHOFF: Algebra, MacMillan, New York 1967.
[13] UTA MERZBACH: „Development of Modern Algebraic Structures from Leibniz to Dedekind" Ph. D. Thesis Harward, 1965.
[14] GIUSEPPE PEANO: Formulario Mathematico, 4th ed. Torino, 1908.
[15] DONALD ROSE és RALPH WILLOUGHBY (szerk.): Sparse Matrices and their Applications, Plenum Press, New York, 1971.
[16] B. L. VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra, 2. köt. Springer New York, 1930—31.
[17] RICHARD S. VARGA: Matrix Iterative Analysis, Pretic-Hall Englewood Cliffs, N. J. 1962.
[18] ALFRED N. WHITEHEAD and BERTRAND RUSSEL: Principia Mathematica 3. köt. Cambridge Univ. Press. 1911.
[19] JAMES WILKINSON: The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1966.
[20] DAVID M. YOUNG: Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, New York, 1971.
[21] GARRETT BIRKHOFF, MARSHALL HALL (szerk.): Computers in Algebra and Number Theory, SIAM-AMS Proceedings. vol. IV. Amer. Math. Society, 1971.
[22] DEAN MONTGOMERY, LEO ZIPPIN: Topological Transformation Groups, Wiley-Interscience, New York, 1955.
[23] W. TUTTE (szerk.): Recent Progress in Combinatorics. Academic Press, New York, 1969.

MEGJEGYZÉSEK

[1] Ld. 1. old. lábjegyzet.

[2] Hasznos megjegyzéseikért köszönettel tartozom Prof. DAVID. PINGREE-nek (Prown University) THOMAS HAWKINS-nak, GIAN-CARLO ROTA-nak, GERALD SACHS-nak és JOHN TATE-nek.

[3] A PASCAL által felfedezett binomiális tétel ebből a szempontból említésre méltó kivétel. Ehhez a szakaszhoz l. ROUSE BALL [1] és E. T. BELL [3].

[4] Írásaik rendkívül homályosak, l. G. BIRKHOFF, *Isis* 3 (1973) 260—7. GALOIS munkáját BETTI tisztázta 1852-ben.

[5] A Z (a német *Zahl*-szám szóból) szokás szerint a $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ halmazt jelöli. A. GAUSS az egészek vizsgálatát mod n LEGENDRE felfedezésének tartja.

[6] A lineáris és nem-kommutatív algebra alapos történeti áttekintését l. N. BOURBAKI [6, 78—91 és 120—28 old.]. CAUCHY hozzájárulásának összegezését l. E. T. BELL [2, 102—15. old.]

[7] GERGONNE: Annales **5** (1814—15), 93. old., HAMILTONról l. H.: Mathematical Papers, III. köt. Cambrige Univ. Press, 1967. A determinánsokról LEIBNIZnek és CRAMERnek töredékes elképzelései voltak, l. [1 375. old.] és D. J. STRUIK, *A source Book in Mathematics*, Harvard University Press, 1969, 180. old.

[8] R. WOODHOUSE, Phil. Trans. **91** (1801), 89—119; G. PEACOCK, Reps. Brit. Assn. Adv. Sci. 3 (1834), 185—32 és *Algebra*, 2. köt. 1845.; A. DE MORGAN, Trans. Camb. Phil. Soc. **7** (1839) 173—87 és 287—300; G. BOOLE, Cambridge Dublin Math. J. **3** (1848) 183—98.

[9] B. KLEIN, *Entwicklung der Mathematik im 19 ten Jahrhundert* 1.köt. 175. old. szerint „majdnem olvashatatlan".

[10] L. kiegészítései DIRICHLET *Vorlesungen über Zahlentheorie*-jéhez, 1863. 1871.

[11] BENJAMIN PEIRCE, *Linear Associative Algebra*, Boston, 1870; l. még Amer. J. Math. **3** (1880) 15—57, és **4** (1881) 97—229 (újranyomva Proc. Am. Acad. Boston, 1875 alapján).

[12] L. *Collected Papers*, 2. köt., Cremonese, Rome, 1958. 134. old. Az Amer. Math. Society *Semicenternial Addresses*-ben (2. köt. 15. old.) BELL az axiomatikus megközelítést PEANOnak tulajdonítja! PEANO elsőként *számozta* tételeit.

[13] Transactions of the Amer. Math. Soc. (1902—5) 3—6 köt. a fentiek egy tucat, axiómarendszerekkel kapcsolatos cikkét tartalmazza.

[14] EUKLIDESZ *Elemek* c. műve geometriai „posztulátumokat" és mennyiségtani, (algebrai) „axiómákat" tartalmazott, i. e. 300 körül keletkezett Alexandriában, l. BALL [1].

[15] Az ideálelméletet és DEDEKIND algebrai számokkal kapcsolatos munkásságát tárgyalja [3, 10. fej.]

[16] Id. mű, 216—29. old. Ugyanezt függetlenül FROBENIUS is belátta l. fent id. mű.

[17] G. FROBENIUS, CRELLE, **85** (1878) 1—63 és Berlin Sitzb. (1903) 504—37 és 634—5. WEDDERBURN: *Lectures on Matrices*, Amer. Math. Soc. 1934. 1933-ig teljes bibliográfiát tartalmaz.

[17a] Ld. THOMAS HAWKINS, Archive for History of Exact Sciences, **8** (1972), 243—87.

[18] Hasonló szimbolikus írásmódot használ: E. H. MOORE: *Introduction to a form of General Analysis* New Haven Colloquium, Yale Univ. Press. 1910.

[19] Lásd F. CAJORI „Past struggles between symbolists and rhetoricians ...". Proc. Int. Math. Congress Toronto (1924) 2. köt. 937—41. old.

[20] Első kiadás 1889 *(Arithmetices principia nova methoda exposita)*

[21] Magát a tényt RUSSELL 10 évvel korábban említi a szellemes *Principles of Mathematicsben*, melynek eredetileg a *Principia Mathematica* második kötete lett volna!

[22] L. G. BRIKHOFF, „Mathematics and Psychology" SIAM Review, **11** (1969) 429—69.

[23] *∞erke*, 3. köt. 153. old.; Math. Annalen 78, 405—15.

[24] HILBERT itt nem használja EUKLIDESZ megkülönböztetését (mennyiségtani axiómák — geometria posztulátumok)

[25] L. [10] és *Grundlagen der Mathematik* (2. köt. 1939)

[26] L. S. C. KLEENE, *Introduction Mathematics*, VAN NOSTRAND, 1952, 204—5. old.

[27] MONTHLY, **53** (1946) 1—18, GÖDEL eredeti dolgozata: Monato, Math. Phys. **38** (1931) 173—98.

[28] A kérdés alapos történeti áttekintését l. N. BOURBAKI 6, 1. Fej. és (P. BERNAYS tollából) HILBERT: 3. köt., 196—217. old. l. még ebben a kötetben HILBERT logikai tárgyú dolgozatait is.

[29] Németül „der Algebra ihren erneuten Aufschwung verdankt."

[30] Proc. Comb. Phil. Soc. **29** (1933) 441.

[31] Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938) 793—827.

[32] Fiatal francia matematikusok egy csoportja vette fel ezt az álnevet 1937-ben. Céljuk az volt, hogy megdöntsék a francia matematikában a klasszikus analízis hegemóniáját. BOURBAKI nézeteire l. MONTHLY, **57** (1950) 221—32, pl. „az axiomatikus módszer a matematikai technika standardizálása", „az alapvető matematikai struktúrák a csoport, a rendezett halmaz és a topologikus tér."

[33] Pl. mai algebrai geometriai kutatónak ismernie kell O. ZANSKI és P. SAMUEL *Commutative Rings* c. könyvét, mint bevezető anyagot, de nem kell ismernie a harmadfokú valós görbék newtoni osztályozását!

[34] F. WILLIAM LAWVERE, „The category of categories as a foundation for mathematics" Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla, 1969 (S. Eilenberg szerk.) Springer, 1966.

[35] American Scientist, Nov.—Dec. 1971.

[36] A deduktív gondolkodáshoz szokott matematikusok vegyék figyelembe, hogy a hibaszámításban az elméleti megfontolások mellett a gyakorlati tapasztalatnak is nagy szerepe van.

[37] Bár még mindig nem annyira gazdaságtalan, mint a Cramer-szabály, mely gyakran egyedül szerepel a tananyagban!

[38] Ld. MARVIN MINSKY: *Computation: Finite and Infinite Machines,* Prentice-Hall, 1967.

[39] G. BIRKHOFF, J. D. LIPSON, „Heterogenous Algebras", J. Comb. Analysis **2** (1969)

[40] H. WANG, IBM J. Res. Develop. **4** (1960) 2—22. Általában: a komputer mint „agy" ld. 22. megjegyzés.

[41] WALLIS, TCHIRNHAUS és LEIBNIZ már 1700 előtt észrevették, hogy a kombinatorika az algebrához tartozik. Ld. [13, 14. old.] [21. 2. old.]

[42] E. F. BECKENBACH (szerk.) *Applied Combinatorial Mathematics,* Wiley, 1964, 537. old.

[43] Középfokon ld. C. L. LIU: *Introduction to Combinatorial Mathematics,* McGraw-Hill, 1968, haladóknak, M. HALL, *Combinatorial Theory,* Ginn, 1967.

[44] „On the foundations of combinatorial theory" J. für Wahrsch. **2** (1966) 340—68., *Combinatorial Geometries* (előzetes kiadás) M. I. T. Press, 1970 és az ottani utalások.

Fordította: *Turán György*

СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ

Г. БИРКХОФ:

CURRENT TRENDS IN ALGEBRA

G. BIRKHOFF

VÉGES ABEL-CSOPORTOK EGY ELŐÁLLÍTÁSMÓDJÁRÓL

SURÁNYI JÁNOS

Az 1949. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny 3. feladata a következő volt: *Legyen p páratlan törzsszám, legyen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ és $b_1, b_2, \ldots, b_p$ az $1, 2, \ldots, p$ számok tetszőleges permutációja. Bizonyítandó, hogy az $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_pb_p$ számokat modulo p redukálva sohasem kapjuk az $1, 2, \ldots, p$ számok egy permutációját.* Itt nyilván p csak a saját párja lehet és így el is hagyható, azaz elég a redukált maradékrendszert vizsgálni. TURÁN PÁL jegyezte meg, hogy összetett modulusra ebben a formában már nem mindig igaz az állítás, pl. az 1, 3, 5, 7 számokat rendre 1, 7, 3, 5-tel szorozva és modulo 8 redukálva, 1, 5, 7, ill. 3 adódik. Ezzel kapcsolatban felvetette a problémát, hogy milyen m modulusra létezik egy redukált maradék rendszernek két olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_{\varphi(m)}$ permutációja, amelyekre $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{\varphi(m)}b_{\varphi(m)}$ is redukált maradékrendszer; illetőleg még általánosabban, melyek azok a csoportok, amelyek elemeinek létezik két olyan permutációja, hogy ezekben a megfelelő elemeket páronkint összeszorozva újra megkapunk minden elemet és mindegyiket csak egyszer.

Az alábbiakban véges kommutatív (Abel-) csoportokra válaszolom meg a problémát.

A csoport elemeinek kívánt módon történő előállítása nyilvánvalóan nem lehetséges, ha pontosan egy másodrendű elem van, mert ekkor a csoport összes elemeinek a szorzatában előfordul minden elemnek a (tőle különböző) inverze kivéve a másodrendű elemet, a szorzat tehát a másodrendű elemet adja; a kettős szorzatok szorzata viszont ez előbbi szorzat négyzete, tehát az egységelem.

A véges Abel-csoportok alaptétele szerint ezek prímhatvány-rendű ciklikus csoportok direkt szorzataként állíthatók elő. Akkor van egyetlen másodrendű elemük, ha a direkt tényezők között egyetlen egynek a rendje 2-nek egy hatványa. Megmutatjuk, hogy a többi véges Abel-csoportnak elő lehet állítani az összes elemeit a kívánt módon.

TÉTEL. *Egy véges Abel-csoport elemeinek mindig megadható két olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ permutációja, hogy az $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ szorzatok is kiadják a csoport minden elemét, kivéve, ha a csoportnak egyetlen egy másodrendű eleme van.* Más módon jellemezve *azok a csoportok alkotnak kivételt, amelyek ciklikus csoportok direkt szorzatára bonthatók úgy, hogy azok között egyetlen páros rendű faktor legyen.*

Ha a csoport két olyan csoport direkt szorzata, amelyekre külön-külön lehetséges a kívánt módon való előállítás, akkor az egész csoportra is lehetséges. Legyen ugyanis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az egyik részcsoport elemeinek két olyan elrendezése, hogy az a_iA_i szorzatok egyszer végigfutnak a részcsoport elemein és

$b_1, b_2, \ldots, b_m$; $B_1, B_2, \ldots, B_m$ a másik részcsoport elemeinek két megfelelő permutációja. Ekkor a csoport minden eleme egyértelműen előállítható $a_i b_j$ alakban. Ehhez az $A_i B_j$ elemet rendelve hozzá világos, hogy az egész csoport elemeinek két kívánt elrendezését kapjuk. Elég tehát az alaptétel szerinti felbontást olyan részszorzatokra bontani, amelyek külön-külön rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal.

Páratlan rendű ciklikus csoport rendelkezik a kívánt tulajdonsággal: megfelel pl. ha mindegyik elemet önmagával párosítjuk; páros rendű viszont nem, mert egyetlen másodrendű eleme van. A továbbiakat a következő észrevételre építjük: Ha egy $2n$-edrendű ciklikus csoport egy generáló elemének első n hatványát rendre a páratlan hatványokkal szorozzuk a $2n-1$-ediktől lefelé, majd a következő n hatványt újra ugyanezekkel az elemekkel ugyanebben a sorrendben, akkor megkapjuk a csoport minden elemét. Ugyanez áll, ha a páratlan hatványok helyett a párosakat vesszük csökkenő sorrendben. Mindkét esetben vehetjük a hatványok (2-vel) csökkenő sorozata helyett annak bármelyik ciklikus permutációját is.

Visszatérve most már az eredeti problémára, ha az alaptétel szerinti felbontást tekintve a prímszám-hatvány rendű direkt tényezők között több 2-hatvány rendű van, akkor ezeket párokba, esetleg egy 3-tényezős részszorzatra oszthatjuk. Elég tehát ezekről a részszorzatokról belátni, hogy előállíthatók az elemek két permutációjának a kompozíciójaként. Eljárást fogunk adni általánosabban 2 és 3 páros rendű ciklikus csoport szorzatának a kívánt előállítására.

Két tényező esetén rögzítsünk egy-egy generáló elemet (rendjük legyen $2k$, ill. $2l$). Elég lesz csak a kitevőikből álló (u, v) rendezett párokat írni le (a $2k$-ad rendűét írva előre). Az első elrendezésben u $2l$ hosszúságú szakaszokban állandó és szakaszonkint 1-gyel növekszik 0-tól $2k-1$-ig; v minden szakaszban 0-tól $2l-1$-ig nő.

A második elrendezésben legyen u l hosszúságú félszakaszonkint állandó kétszer végigfutva csökkenőleg $2k-1$-től 0-ig. (Így minden második félszakaszt nézve tulajdonképpen egyszer a csökkenő páratlan kitevőket párosítottuk a 0-tól $k-1$-ig, majd a k-tól $2k-1$-ig terjedő kitevőkkel, egyszer a páros kitevőket.) Ezzel azt értük el, hogy a szorzatban az első kitevő az első és utolsó félszakaszon $2k-1$ lesz, a többi helyen két-két szomszédos félszakaszon egyenlő lesz $2k-2$-től egyenként csökkenve 0-ig.

A v értékek megválasztásával egyfelől azt kell elérnünk, hogy az ugyanazon u értékhez tartozó két félszakaszon minden v érték előforduljon, másfelől azt, hogy a szorzatban ugyanazt az u értéket szolgáltató két félszakaszon együtt minden v érték létrejöjjön. Ehhez elég 4—4 félszakaszt a többiektől függetlenül vizsgálni: Azokat amelyeken u értéke az első elrendezésben r, $r+1$, $k+r$, $k+r+1$, a másodikban $2k-2r-2$, $2k-2r-3$, $2k-2r-2$, $2k-2r-3$ ($0 \leqq r \leqq k-1$; az u értékeket természetesen mindig mod $2k$ értve). Ezeken a félszakaszokon v értéke az első elrendezésben sorra l-től $2l-1$-ig, 0-tól $l-1$-ig, l-től $2l-1$-ig, 0-tól $l-1$-ig nő. Ha a második elrendezésben az első félszakaszban v-t a csökkenő páratlan kitevőkön futtatjuk át, akkor a szorzatban v ezen a félszakaszon $l-1$-től 0-ig csökken. Így v-nek a következő félszakaszon is a páratlan kitevőkön kell végigfutnia a második elrendezésben, a hátralevő két félszakasz mindegyikén pedig a páros kitevők csökkenő sorozatán. Ez a választás ki is elégíti az összes követelményeket, így 2 tényező esetére megadtunk egy megfelelő párosítást. Valójában nem csak egyet, mert a második elrendezésben az u értékeket is permutálhatjuk ciklikusan, minden egyes félszakasz-négyesben a páros és páratlan kitevők szerepét megcserélhetjük és a párosakat is a páratlanokat is ciklikusan permutálhatjuk egymástól függetlenül.

Három tényező esetén egy $2k$-ad-, egy $2l$-ed- és egy $2m$-edrendű elem kitevőiből álló hármasokat kell kétféleképpen elrendeznünk. Az első elrendezés legyen

most is lexikografikus: Az első kitevő, u, $4lm$-hosszúságú tömbönkint nő 0-tól $2k-1$-ig, a második, v, minden tömbben $2m$ hosszúságú szakaszonkint állandó, szakaszonkint 1-gyel nő 0-tól $2l-1$-ig, a harmadik, w, pedig szakaszonkint nő 0-tól $2m-1$-ig. A második elrendezésben a tömböket is és a tömbökön belül a szakaszokat is megfelezzük. Az u értékek féltömbönkint egyesével fogynak kétszer végigfutva $2k-1$-től 0-ig; a v értékek minden tömbben félszakaszonkint csökkennek ismét egyesével kétszer $2l-1$-től 0-ig. Ekkor a szorzatban u értéke két-két szomszédos féltömbben egyenlő és páronkint egyesével csökken. Az első és az utolsó féltömb alkot egy párt. Hasonlóan féltömbökön belül két-két félszakasz alkot párt egyező v értékkel. Az első, ill. utolsó félszakasz a pár-féltömb utolsó, ill. első félszakaszával alkot párt a szorzat vonatkozásában. A második elrendezésben viszont egy u értékhez tartozó félszakaszok másik fele mind a $k+u$ értékhez, mint első kitevőhöz tartozik. Ugyanúgy látható, mint két tényező esetén, hogy ismét csak négy-négy félszakaszon kell a w értékeket alkalmasan megválasztani függetlenül az összes többi elemtől. Egy alkalmas választás pl. hogy a tömbök első felében (tehát mindaddig, míg az első elrendezésben $u<k$), w minden félszakaszon az utolsó kivételével a páros kitevők csökkenő sorozatán fusson végig, míg ezen az utolsó félszakaszon és a második félben ismét az utolsó félszakasz kivételével mindig a páratlan kitevők csökkenő sorozatán, az utolsó félszakaszon pedig megint a párosakén.

Ezzel állításunkat beláttuk, de világos, hogy az eljárás alkalmas akárhány páros rendű ciklikus csoport kívánt tulajdonságú elrendezéseinek az előállítására.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ЯНОШ ШУРАНЬИ

ON A METHOD TO REPRESENT THE ELEMENTS OF A FINITE ABELIAN GROUP UNIQUELY

J. SURÁNYI

Following theorem is proved: *The elements of an Abelian group admit two arrangements* $a_1, a_1, \ldots, a_n$ *and* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *such that* $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ *give again all elements of of the group unless the group has a single elements of degree* 2. An other characterization of the exceptional groups is that they have representation as direct product of cyclic groups a single one of the factors being of even order.

FOURIER-SOROK ÉS INTERPOLÁCIÓ

NÉVAI G. PÁL

I. FOURIER-SOROK ÉS TRIGONOMETRIKUS LAGRANGE-INTERPOLÁCIÓ

1.1. § *Bevezetés*

Legyen Q egy tetszőleges, de rögzített természetes szám. Jelölje E^Q a Q-dimenziós Euklidészi teret, E^Q pontjai pedig legyenek $\vec{x}=\{x_i\}_{i=1}^Q$, $\vec{N}=\{N_i\}_{i=1}^Q$ stb. $\vec{N}$ természetes vektor (ill. nem-negatív), ha $\vec{N}$ koordinátái mind természetes (il. nemnegatív stb.) számok. Legyen továbbá $|\vec{k}|=\{|k_i|\}$, $\vec{k}+\vec{l}=\{k_i|l_i\}$, $\vec{k}+c=\{k_i+c\}$ (c valós szám), $\frac{1}{\vec{k}}=\left\{\frac{1}{k_i}\right\}$ stb.; $\vec{k}\leqq\vec{N}$, ha $k_i\leqq N_i$ ($i=1, 2, \ldots, Q$).

Legyen $\tilde{C}_Q$ a folytonos, minden x_i koordináta szerint 2π-periodikus, valósértékű $f(\vec{x})$ ($-\vec{\infty}<\vec{x}<\vec{\infty}$) függvényeknek a Banach-tere, amely a szokásos normával van ellátva, tehát

$$\|f\| = \max_{|\vec{x}|\leqq\vec{\pi}} |f(\vec{x})|.$$

Ha $\vec{N}$ természetes vektor, akkor legyen

$$D_{\vec{N}}(\vec{t}) = \prod_{i=1}^{Q} D_{N_i}(t_i),$$

ahol

$$D_{N_i}(t_i) = \frac{\sin\left(N_i+\frac{1}{2}\right)t_i}{2\sin\frac{t_i}{2}}$$

az N_i-edik Dirichlet-féle magfüggvény. Ha $f\in\tilde{C}_Q$, akkor az $f(\vec{x})$ függvény Q-dimenziós trigonometrikus Fourier-sorának az N_i-edik kubikus részletösszegét jelölje

$$S_{\vec{N}}(\vec{x},f) = \pi^{-Q} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(\vec{t})\, D_{\vec{N}}(\vec{x}-\vec{t})\, dt_1 \ldots dt_Q, \tag{1.1.1}$$

az a legfeljebb $\vec{N}$-edrendű Q-változós trigonometrikus interpolációs polinom pedig, amely megegyezik az $f(\vec{x})$ függvénnyel az ekvidisztáns

$$\vec{x}^{(\vec{k},\vec{N})} = \left\{i^{(k_i,N_i)}\right\} = \left\{\frac{2k_i\pi}{2N_i+2}\right\}$$

($\vec{k}$ tetszőleges egész vektor) alappontokban, legyen

$$\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x},f) = \prod_{i=1}^{Q}\left(\frac{2}{2N_i+1}\right) \sum_{|\vec{k}|\leqq\vec{N}} f(\vec{x}^{(\vec{k},\vec{N})})\, D_{\vec{N}}(\vec{x}-\vec{x}^{(\vec{k},\vec{N})}). \tag{1.1.2}$$

Ha $U: \tilde{C}_Q \to \tilde{C}_Q$ valamilyen operátor, akkor legyen LU az U operátor Lebesgue-féle állandója, $LU(\vec{x})$ pedig a Lebesgue-féle függvénye, tehát pl.

$$LS_{N_i} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_{N_i}(t)|\, dt \left(= \frac{4}{\pi^2} \log N_i + O(1) \right)$$

és

$$L\tilde{S}_{N_i}(x_i) = \frac{2}{2N_i+1} \sum_{k=-N_i}^{N_i} \left| D_{N_i}\left(x_i - \frac{2k\pi}{2N_i+1} \right) \right| \left(= \frac{2}{\pi} \left| \sin\left(N_i + \frac{1}{2} \right) x_i \right| \log N_i + O(1) \right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, Q)$$

az (1.1.1) és (1.1.2) által generált egydimenziós eljárások Lebesgue-féle kifejezései.

Jelölje $\overset{i}{T}_{h_i}$ az i-edik változó szerinti, h_i mennyiséggel történő transzláció operátorát, azaz

$$\overset{i}{T}_{h_i} f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_Q).$$

Legyen továbbá

$$\Delta_{h_i}^{R_i} \equiv {}_i\Delta_{h_i}^{R_i} = \left(\frac{\overset{i}{T}_0 - \overset{i}{T}_{h_i}}{2} \right)^{R_i}$$

és

$$\nabla_{h_i} \equiv {}_i\nabla_{h_i} = \frac{\overset{i}{T}_0 + \overset{i}{T}_{h_i}}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, Q; \quad R_i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ha $\vec{R}$ nem-negatív egész vektor, akkor legyen

$$\Delta_{\vec{h}}^{\vec{R}} = \prod_{i=1}^{Q} \Delta_{h_i}^{R_i}$$

és a $\tilde{C}_Q$-beli $f(\vec{x})$ függvény normált $\vec{R}$-edik simasági modulusát jelölje

$$\omega_{\vec{R}}(f; \vec{u}) = \sup_{\substack{|\vec{h}| \leqq \vec{u} \\ \vec{x} \in E^Q}} |\Delta_{\vec{h}}^{\vec{R}} f(\vec{x})| \quad (\vec{u} \geqq 0),$$

az L_1 metrika szerinti normált $\vec{R}$-edik simasági modulusa pedig legyen

$$\omega_{\vec{R}}(f; \vec{u})_{L_1} = \max_{\substack{|t_i| \leqq \pi \\ (R_i = 0)}} \max_{|\vec{h}| \leqq \vec{u}} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \left| \prod_{\substack{i=1 \\ (R_i \neq 1)}}^{Q} \frac{1}{2\pi} \Delta_{h_i}^{R_i} f(\vec{t}) \right| \prod_{\substack{i=1 \\ (R_i \neq 0)}}^{Q} dt_i .$$

Jelölje $H_{\vec{M}}^{T}$ ($\vec{M}$ természetes vektor) a legfeljebb $\vec{M}$-edrendű Q-változós trigonometrikus polinomok halmazát. Ha $f \in \tilde{C}_Q$, akkor legyen

$$E_{\vec{M}}(f) = \min_{H \in H_{\vec{M}}^{T}} \max_{|\vec{x}| \leqq \vec{\pi}} |f(\vec{x}) - H(\vec{x})| \tag{1.1.3}$$

az $f(\vec{x})$ függvénynek a $H_{\vec{M}}^{T}$-beli polinomokkal történő legjobb egyenletes approximációjának a mértékszáma. Legyen továbbá $\hat{H}(\vec{x}) \equiv \hat{H}(\vec{x}, f, \vec{M})$ az a polinom, amelyre (1.1.3)-ban a minimum ténylegesen realizálódik.

Legyen $\vec{R}$ egy természetes vektor. $\vec{R}^*$ akkor projekciója az $\vec{R}$ vektornak, ha $R_i^* = R_i$ vagy 0 ($i = 1, 2, \ldots, Q$) és $\vec{R}^* \not\equiv \vec{O}$. Világos, hogy az összes különböző pro-

jekció száma 2^Q-1 ($\vec{R}$ saját magának egy projekciója). Legyen továbbá

$$\varepsilon(\vec{R}^*)_i = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad R_i^* = R_i \\ 0, & \text{ha} \quad R_i^* = 0. \end{cases}$$

$Q=1$ esetén még a további jelöléseket is alkalmazni fogom. Az

$$S_n(x,f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k(x,f)$$

konjugáltját az

$$\bar{S}_n(x,f) = \sum_{k=1}^{n} -a_k(f)\sin kx + b_k(f)\cos kx \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k(x,f)$$

fogja jelölni, az

$$\tilde{S}_n(x,f) = \frac{a_{0n}(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_{kn}(f)\cos kx + b_{kn}(f)\sin kx \equiv \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}_{kn}(x,f)$$

konjugáltját pedig az

$$\bar{\tilde{S}}_n(x,f) = \sum_{k=1}^{n} -a_{kn}(f)\sin kx + b_{kn}(f)\cos kx \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{\tilde{A}}_{kn}(x,f)$$

$$(f \in \tilde{C}_1; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

A fenti kifejezésekben $a_k(f)$ és $b_k(f)$ az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóit, $a_{kn}(f)$ és $b_{kn}(f)$ pedig az $f(x)$ függvény Fourier—Lagrange-együtthatóit jelentik.

1.2. § *A konjugált függvény Fourier-sorának és a trigonometrikus interpolációs polinomok konjugáltjainak konvergenciájáról*

Jól ismert, hogy a $\tilde{C}_1$-beli $f(x)$ függvény

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

konjugált függvénye, amely a LUZIN [1]—PRIVALOV [1] tétele szerint majdnem mindenütt létezik, sőt RIESZ MARCELL [1] tételéből következően p minden olyan értékére, amelyre $1<p<\infty$, beletartozik az $\tilde{L}_p$ függvénytérbe, nem szükségképpen folytonos vagy akár korlátos, még akkor sem, ha $f(x)$ abszolút folytonos. Ugyanakkor, ha $f(x)$ is és $\bar{f}(x)$ is folytonos, akkor $S_n(x,f)$ egyenletes konvergenciájából következik $S_n(x,\bar{f}) \equiv \bar{S}_n(x,f)$ egyenletes konvergenciája (l. FEJÉR [1] és [2]-t). Kézenfekvő tehát a kérdés, hogy ha $f, \bar{f} \in \tilde{C}_1$, akkor mekkora a különbség $\|S_n(f)-f\|$ és $\|\bar{S}_n(f)-\bar{f}\|$ között. Ha ezt a különbséget becsülni tudjuk, akkor a Fourier-részletösszegek eltérése nagyságrendjének ismeretében következtetni tudunk a (folytonos) konjugált függvény Fourier-összegeinek konvergencia sebességére. A másik kérdés, amelyik felmerül, az az, hogy ha $\|\tilde{S}_n(f)-f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, akkor mit mondhatunk a $\|\bar{\tilde{S}}_n(f)-\bar{f}\|$ kifejezésről, feltéve, hogy $f, \bar{f} \in \tilde{C}_1$. Nem érdektelen továbbá az $|\|\bar{\tilde{S}}_n(f)-\bar{f}\| - \|\tilde{S}_n(f)-f\||$ mennyiség vizsgálata sem.

A jelen paragrafusban bizonyításra kerülő tételeket a további paragrafusokban fogom alkalmazni.

1.2.1. TÉTEL. *Ha $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ mindkettő $\tilde{C}_1$-be tartozó függvény, akkor minden rögzített természetes R számra*

$$(1.2.1) \qquad \left|\|S_n(f)-f\|-\|\bar{S}_n(f)-\bar{f}\|\right| = O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)+\omega_R\left(\bar{f};\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

BIZONYÍTÁS. A tételt elegendő R páratlan értékeire bebizonyítani. Világos, hogy

$$\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n}\right)^R\right]\bar{A}_k(x,f)-\bar{f}(x)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^R\bar{A}_k(x,f),$$

tehát

$$\|\bar{S}_n(f)-\bar{f}\| \leqq \left\|\sum_{k=1}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n}\right)^R\right]\bar{A}_k(f)-\bar{f}\right\|+\frac{1}{n^R}\|S_n^{(R)}(f)\|.$$

A jobb oldali első összeadandó V. V. ZSUK [1] tétele szerint

$$O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)+\omega_R\left(\bar{f};\frac{1}{n}\right)\right].$$

A SZTYECSKIN [1] egyenlőtlenség következtében

$$\frac{1}{n^R}\|S_n^{(R)}(f)\| \leqq \omega_R\left(S_n(f);\frac{\pi}{n}\right) \leqq \|S_n(f)-f)\|+\omega_R\left(f;\frac{\pi}{n}\right).$$

Ily módon

$$(1.2.2) \qquad \|\bar{S}_n(f)-\bar{f}\| \leqq \|S_n(f)-f\|+O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)+\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\right].$$

Nyilvánvaló, hogy ebben az egyenlőtlenségben f és $\bar{f}$ felcserélhető, tehát az (1.2.1) reláció bizonyítást nyert.

Külön figyelmet érdemes szentelnünk azoknak az eseteknek, amikor $\omega_R(f;\delta)$ és $\omega_R(\bar{f};\delta)$ azonos nagyságrendűek. I. I. PRIVALOV [1] tétele szerint, ha $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$, akkor $\bar{f}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. ALEXITS GYÖRGY [2] tétele értelmében, ha $f\in\mathrm{Lip}\,1$, akkor $E_n(\bar{f})=O\left(\frac{1}{n}\right)$, tehát A. ZYGMUND [1] eredményeiből következően $\omega_2(\bar{f};\delta)=O(\delta)$. Érvényes tehát az

1.2.2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, akkor*

$$(1.2.2) \qquad \left|\|S_n(f)-f\|-\|\bar{S}_n(f)-\bar{f}\|\right| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Általában akkor lesz

$$\omega_R(\bar{f};\delta) = O[\omega_R(f;\delta)],$$

ha valamilyen természetes l számra

$$\int_0^1 \frac{\omega_l(f;u)}{u}\,du < \infty$$

és

$$\delta^R\int_\delta^1 \frac{\omega_l(f;u)}{u^{R+1}}\,du+\int_0^\delta \frac{\omega_l(f;u)}{u}\,du = O[\omega_R(f;\delta)]$$

(l. N. K. BARI—SZ. B. SZTYECSKIN [1]-et).

Az 1.2.1. Tétellel kapcsolatban érdekesnek találom megjegyezni a következőt. V. V. Zsuk [2] bebizonyította, hogy ha $\bar{f}(x)$ $r(=1, 2, \ldots)$-szer folytonosan differenciálható, akkor

$$\left|(n+1)^r \|S_n(f)-f\| - \|S_n(\bar{f}^{(r)})-\bar{f}^{(r)}\|\right| = O_r[E_n(\bar{f}^{(r)})],$$

Az ő bizonyítása azonban $r=0$-ra nem alkalmazható, ti. ő lényegesen felhasználja a Bernstein-egyenlőtlenség következő variánsát:

$$\|\bar{T}_n^{(r)}\| \leqq n^r \|T_n\| \quad (T_n \in H_n^T),$$

amely csak természetes (pontosabban pozitív valós) r számokra igaz, míg $r=0$ esetén csak a gyengébb

$$\|\bar{T}_n\| \leqq C \cdot \log n \, \|T_n\|$$

(C valamilyen pozitív állandó) egyenlőtlenség teljesül.

1.2.3. Tétel. *Ha $f, \bar{f} \in \bar{C}_1$, akkor* (1.2.2) *akkor is érvényben marad, ha S_n helyébe $\bar{\bar{S}}_n$-at, $\bar{S}_n$ helyébe pedig $\bar{\bar{S}}_n$-at írunk.*

Bizonyítás. Elegendő azt belátni, hogy

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left[1-\left(\frac{k}{n}\right)^R\right] \bar{A}_{kn}(f)-\bar{f} \right\| = O\left[\left\| \sum_{k=1}^{n} \left[1-\left(\frac{k}{n}\right)^R\right] \bar{A}_k(f)-\bar{f} \right\| \right].$$

Ez az összefüggés D. L. Berman [1] egy eredményéből következik — amely szerint, ha $U_n^{(i)}(x,f)$ $(i=1, 2;\ n=1, 2, \ldots)$ két olyan a $\bar{C}_1$-at saját magába leképező lineáris operátor sorozat, amelyre

1. Ha $f \in \bar{C}_1$, akkor $U_n^{(i)}(x,f) \in H_n^T$ $(i = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$,
2. Ha $f \in H_n^T$ akkor $U_n^{(1)}(x,f) = U_n^{(2)}(x,f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

akkor

$$\|U_n^{(2)}(f)-f\| \leqq U_n^{(1)}(f)-f\| \cdot [1+LU_n^{(1)}+LU_n^{(2)}]$$

—, ti. a mi esetünkben mindkét eljárás Lebesgue-féle állandói korlátosak (l. J. Marcinkiewicz—A. Zygmund [1]-et).

1.2.4. Következmény. *Ha $f, \bar{f} \in \bar{C}_1$ és $n \to \infty$ esetén $\bar{\bar{S}}_n(x,f)$ egyenletesen az $f(x)$ függvényhez konvergál, akkor*

$$\|\bar{f}-\bar{\bar{S}}_n(f)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1.2.5. Következmény. *Ha $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, akkor*

$$\|\bar{\bar{S}}_n(f)-\bar{f}\| \leqq \|\tilde{S}_n(f)-f\| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

1.3. § *Alapvető reprezentációk, becslések és konvergencia-kritériumok*

Ez a paragrafus alkotja értekezésem első részének a gerincét. Olyan reprezentációkat fogok adni az $S_N(\vec{x},f)-f(\vec{x})$ és az $\tilde{S}_N(\vec{x},f)-f(\vec{x})$ kifejezésekre, amelyekből az első rész szinte valamennyi eredménye elemi úton — egyszerű számolással — fog következni.

Módszeremet illusztrálandó legyen $Q=1$. Ekkor

$$S_N(x,f) = \Delta_{\frac{2\pi}{2N+1}} S_N(x,f) + \nabla_{\frac{2\pi}{2N+1}} S_N(x,f) \quad (f \in \tilde{C}_1), \tag{1.3.1}$$

tehát

$$S_N(x,f) - f(x) = \Delta_{\frac{2\pi}{2N+1}} S_N(x,f) + \left[\nabla_{\frac{2\pi}{2N+1}} S_N(x,f) - f(x)\right]. \tag{1.3.2}$$

A szögletes zárójelben levő kifejezés W. ROGOSINSKI és SZ. N. BERNSTEIN eredményei szerint (l. az Irodalomjegyzéket) egyenletesen 0-hoz fog tartani, ha $N \to \infty$, tehát az $S_N(x,f)-f(x)$ kifejezés $N \to \infty$ esetén egy $o(1)$ tagtól eltekintve pontosan úgy viselkedik, mint a $\Delta_{\frac{2\pi}{2N+1}} S_N(x,f) \equiv S_N(x, \Delta_{\frac{2\pi}{2N+1}} f)$ kifejezés. Ez utóbbi vizsgálata lényegesen egyszerűbb, mint az előbbié. Az (1.3.1) azonosságot KIS OTTÓ [1] „fedezte fel" 1968-ban és segítségével pár sorban olyan eredményeket nyert, amelyeknek a múltban hosszú cikkek egész sorát szentelték. Én 1970-ben KIS OTTÓtól függetlenül újra „felfedeztem" (1.3.1)-et, sőt rájöttem, hogy az (1.3.1) identitás iterálható. Erről szól az

1.3.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen I_Q: $\tilde{C}_Q \to \tilde{C}_Q$ az identitás operátora, $\vec{R}$ tetszőleges nem-negatív egész vektor, $\vec{\delta}$ tetszőleges valós vektor. I_Q előállítható a következő formában:*

$$I_Q = \Delta_{\vec{\delta}}^{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{Q} \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \ldots < j_i \\ (\in [1,2,\ldots,Q])}} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j_1, j_2, \ldots, j_i)}}^{Q} \Delta_{\delta_k}^{R_k} \prod_{l=1}^{i} \left[\sum_{m_l=0}^{R_{j_l}-1} \Delta_{\delta_{j_l}}^{m_l} \nabla_{\delta_{j_l}} \right] \right\}. \tag{1.3.3}$$

BIZONYÍTÁS. Az egyszerűség kedvéért legyen

$$\gamma_{R_i} = \Delta_{\delta_i}^{R_i} \quad \text{és} \quad \psi_{R_i} = \sum_{v_i=0}^{R_i-1} \Delta_{\delta_i}^{v_i} \nabla_{\delta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, Q).$$

Először — indukció segítségével — lássuk be az

$$I_Q = \gamma_{R_i} + \psi_{R_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, Q) \tag{1.3.4}$$

egyenlőséget. Ez nyilvánvalóan igaz, ha $R_i=0$. Ha $R_i>0$, akkor az indukciós feltevés folytán

$$I_Q = \gamma_{R_i-1} + \psi_{R_i-1},$$

vagyis

$$I_Q = \gamma_{R_i-1}(\Delta_{\delta_i} + \nabla_{\delta_i}) + \psi_{R_i-1} = \gamma_{R_i} + \gamma_{R_i-1}\nabla_{\delta_i} + \psi_{R_i-1} = \gamma_{R_i} + \psi_{R_i},$$

tehát (1.3.4) valóban fennáll. (1.3.4)-ből következően

$$I_Q = \prod_{i=1}^{Q} (\gamma_{R_i} + \psi_{R_i}),$$

ahonnan — a szorzást formálisan elvégezve — azt kapjuk, hogy*

* $k=0$-ra $\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} (\,) = 1$.

$$I_Q = \prod_{i=1}^{Q} \gamma_{R_i} \left[\sum_{k=0}^{Q} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \ldots < i_k \\ (\in [1,2,\ldots,Q])}} \frac{\psi_{R_{i_1}} \psi_{R_{i_2}} \ldots \psi_{R_{i_k}}}{\gamma_{R_{i_1}} \gamma_{R_{i_2}} \ldots \gamma_{R_{i_k}}} \right],$$

ami megegyezik (1.3.3)-mal.

Legyen i egy 1-nél nem kisebb és Q-nál nem nagyobb természetes szám, és legyen $\vec{j}_i=(j_1, j_2, \ldots, j_i)$, ahol $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leqq Q$. i-dimenziós Bernstein—Rogosinski-féle operátornak fogjuk nevezni a $\tilde{C}_Q$-n értelmezett

$$B(\vec{h}, \vec{j}_i) = \prod_{k=1}^{i} \nabla_{h_{j_k}}$$

operátort, ahol $\vec{h}$ egy tetszőleges valós vektor.

1.3.2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\vec{n}$ természetes vektor, $\vec{h}_{\vec{n}} = \dfrac{2\pi}{2\vec{n}+1}$. Ekkor*

$$LB(\vec{h}_{\vec{n}}, \vec{j}_i) S_{\vec{n}} \leqq \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z}\, dz\right]^i \prod_{k=1}^{Q} LS_{n_k} \quad (k \neq j_1, j_2, \ldots, j_i) \tag{1.3.5}$$

és

$$LB(\vec{h}_{\vec{n}}, \vec{j}_i) \tilde{S}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^i \prod_{k=1}^{Q} L\tilde{S}_{n_k}(x_k) \quad (k = j_1, j_2, \ldots, j_i). \tag{1.3.6}$$

Ez a segédtétel közvetlenül következik W. ROGOSINSKI és SZ. N. BERNSTEIN egy-dimenziós eredményeiből (l. az Irodalomjegyzéket) és az (1.1.1) és (1.1.2) formulákból.

1.3.3. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $f \in \tilde{C}_Q$ és $i=Q$, akkor $B(\vec{h}_{\vec{n}}, \vec{j}_i) S_{\vec{n}}(\vec{x}, f)$ is és $B(\vec{h}_{\vec{n}}, \vec{j}_i) \tilde{S}_{\vec{n}}(\vec{x}, f)$ is egyenletesen $f(\vec{x})$-hez konvergálnak, ha $\vec{n} \to \vec{\infty}$, azaz az összes n_k $(k=1, 2, \ldots, Q)$ koordináta egymástól függetlenül végtelenhez tart.*

1.3.4. TÉTEL. *Legyen $\vec{R}$ egy tetszőleges, de rögzített nem-negatív egész vektor. Ha $n=1, 2, \ldots$ esetén a természetes $\vec{N} \equiv \vec{N}(n)$ olyan, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log N_i}{\log n} < \infty$ $(i=1, 2, \ldots, Q)$, akkor minden $\tilde{C}_Q$-beli függvényre*

$$\left|\left[S_{\vec{N}}(\vec{x}, f) - \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{N}}} S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)\right] - \left[f(\vec{x}) - \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{N}}} f(\vec{x})\right]\right| \leqq C_1 (\log n)^{Q-1} E_{\vec{N}}(f) \tag{1.3.7}$$

és

$$\left|\left[\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f) - \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{N}}} \tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)\right] - \left[f(\vec{x}) - \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{N}}} f(\vec{x})\right]\right| \leqq C_2 (\log n)^{Q-1} E_{\vec{N}}(f) \tag{1.3.8}$$

$$\left(\vec{h}_{\vec{N}} = \frac{2\pi}{2\vec{N}+1}\right),$$

ahol a C_1 és C_2 konstansok csak $\vec{R}$-től és a $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log N_i}{\log n}$ $(i=1, 2, \ldots, Q)$ értékektől függenek.

BIZONYÍTÁS. Csak (1.3.7)-et fogom bizonyítani; (1.3.8) bizonyítása analóg módon történik. Mivel

$$S_{\vec{N}}(\vec{x}, f) - f(\vec{x}) = S_{\vec{N}}(\vec{x}, f - \hat{H}) - [f(\vec{x}) - \hat{H}(\vec{x})] \quad (\hat{H}(\vec{x}) = \hat{H}(\vec{x}, f, \vec{N})),$$

ezért az 1.3.1 Segédtétel szerint

$$S_{\bar{N}}(\vec{x},f)-f(\vec{x}) = \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\bar{N}}} S_{\bar{N}}(\vec{x})f-\hat{H})+$$

$$+\sum_{i=1}^{Q}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\(\in[1,2,\ldots,Q])}}\left\{\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}\Delta^{R_k}_{h_{k\bar{N}}}\prod_{l=1}^{i}\left[\sum_{m_l=0}^{R_{j_l}-1}\Delta^{m_l}_{h_{j_l,\bar{N}}}\nabla_{h_{j_l,\bar{N}}}S_{\bar{N}}(\vec{x},f-\hat{H})\right]\right\}-$$

$$-[f(\vec{x})-\hat{H}(\vec{x})]=$$

$$(1.3.9)\qquad = \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\bar{N}}} S_{\bar{N}}(\vec{x},f)-\Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\bar{N}}} f(\vec{x})-\Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\bar{N}}}[\hat{H}(\vec{x})-f(\vec{x})]+$$

$$+\sum_{i=1}^{Q}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\(\in[1,2,\ldots Q])}}\left\{\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}\Delta^{R_k}_{h_{k,\bar{N}}}\prod_{l=1}^{i}\left[\sum_{m_l=0}^{R_{j_l}-1}\Delta^{m_l}_{h_{j_l,\bar{N}}}\nabla_{h_{j_l,\bar{N}}}S_{\bar{N}}(\vec{x},f-\hat{H})\right]\right\}-$$

$$-[f(\vec{x})-\hat{H}(\vec{x})].$$

Az utóbbi kifejezésben a harmadik és az ötödik összeadandó abszolút értéke nem nagyobb $E_{\bar{N}}(f)$-nél, a negyedik tag abszolút értékét pedig az 1.3.2 Segédtétel szerint felülről becsülhetjük a

$$(1.3.10)\qquad \sum_{i=1}^{Q}\left\{\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\(\in[1,2,\ldots,Q])}}\left[\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}LS_{N_k}\prod_{l=1}^{i}R_{j_l}\right]\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}dz\right]^i\right\}E_{\bar{N}}(f)$$

kifejezéssel, amely a tétel feltételei folytán kisebb, mint $C_3(\log n)^{Q-1}E_{\bar{N}}(f)$, ahol C_3 egy alkalmasan megválasztott konstans. A tétel bizonyítást nyert.

Az (1.3.7) és (1.3.8) egyenlőtlenségek jobb oldalán szereplő C_1 és C_2 konstansok kiszámításához az (1.3.10) kifejezést kellene alaposabban megvizsgálnunk. Ez a kifejezés $Q>2$ esetén — sajnálatos módon — rendkívül bonyolult. Könnyen belátható ugyanakkor, hogy $Q=1, 2$ esetén érvényes az

1.3.5. TÉTEL. *Ha $Q=1$ és R tetszőleges nem-negatív egész szám, akkor minden természetes n számra*

$$(1.3.11)\qquad \left|[S_n(x,f)-\Delta^{R}_{\frac{2\pi}{2n+1}}S_n(x,f)]-[f(x)-\Delta^{R}_{\frac{2\pi}{n+1}}f(x)]\right| \leqq$$

$$\leqq\left[R\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}dz+2\right]E_n(f)\,(f\in\tilde{C}_1).$$

Továbbá, ha $Q=2$ és $\vec{R}=(R_1, R_2)$ egy tetszőleges nem-negatív egész vektor, akkor minden természetes $\vec{n}=(n_1, n_2)$ vektor esetén

$$(1.3.12)\qquad \left|[S_{\vec{n}}(\vec{x},f)-\Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{n}}}S_{\vec{n}}(\vec{x},f)]-[f(\vec{x})-\Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{n}}}f(\vec{x})]\right| \leqq$$

$$\leqq\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}dz\,(R_2LS_{n_1}+R_1LS_{n_2})+\left(\frac{2}{\pi}\frac{\sin z}{z}\int_0^{\pi}dz\right)^2R_1R_2+2\right\}E_{\vec{n}}(f)$$

$$\left(f\in\tilde{C}_2;\quad \vec{h}_{\vec{n}}=\frac{2\pi}{2\vec{n}+1}\right).$$

Analóg állítások érvényesek a megfelelő trigonometrikus interpolációs összegekre is.

1.3.6. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $f \in \tilde{C}_1$, *R egy tetszőleges, de rögzített, természetes szám, akkor a*

$$\varphi(x) = \varphi(x, R, n) = f(x) - \Delta^{R}_{\frac{2\pi}{2n+1}} f(x)$$

függvényt $S_n(x, \varphi)$ *is és* $\tilde{S}_n(x, \varphi)$ *is* $E_n(f)$ *sebességgel közelíti meg.*

Az 1.3.4. és 1.3.5. tételekből közvetlenül következnek az alábbi becslések, amelyek lényegesen általánosítják A. SZ. BEZLJUDNIJ [1], P. T. BUGAJEC [1], [2], SZ. M. NYIKOLSZKIJ [1], [2], és V. V. ZSUK [2] eredményeit:

Az 1.3.4. *Tétel feltételei mellett*

$$|f(\vec{x}) - S_{\bar{N}}(\vec{x}, f)| \leqq \prod_{i=1}^{Q} LS_{N_i} \omega_{\bar{R}}(f; \vec{h}_{\bar{N}}) + \tag{1.3.13}$$

$$+ O[(\log n)^{Q-1} E_{\bar{N}}(f) + \omega_{\bar{R}}(f; \vec{h}_{\bar{N}})]$$

és

$$|f(\vec{x}) - \tilde{S}_{\bar{N}}(\vec{x}, f)| \leqq \prod_{i=1}^{Q} L\tilde{S}_{N_i}(x_i) \omega_{\bar{R}}(f; \vec{h}_{\bar{N}}) + \tag{1.3.14}$$

$$+ O[(\log n)^{Q-1} E_{\bar{N}}(f) + \omega_{\bar{R}}(f; \vec{h}_{\bar{N}})].$$

Továbbá az 1.3.5. *Tétel feltételei mellett* $Q = 2$ *esetén*

$$|f(\vec{x}) - S_{\bar{n}}(\vec{x}, f)| \leqq [LS_{n_1} \cdot LS_{n_2} + 1] \omega_{\bar{R}}(f; \vec{h}_{\bar{n}}) + \tag{1.3.15}$$

$$+ \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz (R_2 LS_{n_1} + R_1 LS_{n_2}) + \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right)^2 R_1 R_2 + 2 \right\} E_{\bar{n}}(f)$$

és

$$|f(\vec{x}) - \tilde{S}_{\bar{n}}(\vec{x}, f)| \leqq [L\tilde{S}_{n_1}(x_1) L\tilde{S}_{n_2}(x_2) + 1] \omega_{\bar{R}}(f; \vec{h}_{\bar{n}}) + \tag{1.3.16}$$

$$+ \left\{ \frac{4}{\pi} (R_2 L\tilde{S}_{n_1}(x_1) + R_1 L\tilde{S}_{n_2}(x_2)) + \frac{16}{\pi^2} R_1 R_2 + 2 \right\} E_{\bar{n}}(f),$$

ha pedig $Q = 1$, *akkor*

$$|f(x) - S_n(x, f)| \leqq [LS_n + 1] \omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) + \left[R \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz + 2 \right] E_n(f) = \tag{1.3.17}$$

$$= LS_n \omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2\pi+1}\right) + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right]$$

és

$$|f(x) - \tilde{S}_n(x, f)| \leqq [L\tilde{S}_n(x) + 1] \omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) + \left(\frac{4R}{\pi} + 2\right) E_n(f) = \tag{1.3.18}$$

$$= L\tilde{S}_n(x) \omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right].$$

Az (1.3.13)—(1.3.18) egyenlőtlenségek onnan következnek, hogy az $S_{\bar{N}}$ és $\tilde{S}_{\bar{N}}$ operátorok a $\Delta^{\bar{R}}_{\bar{h}_{\bar{N}}}$ operátorral kommutálnak. Az approximációelméletből jól ismert „fűrészfog" függvények segítségével könnyen belátható, hogy *az* (1.3.13)—(1.3.18) *egyenlőtlenségek jobb oldalaiban található első tagok konstansai* — azaz az 1-ek —

mind optimálisak. Az (1.3.17) és (1.3.18) összefüggésekben azért lehetett $E_n(f)$-et $\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)$-nel helyettesíteni, mert az általánosított Jackson-tétel értelmében

$$E_n(f) = O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right]$$

(l. Sz. B. Sztyecskin [2]-t).

Nyilvánvaló, hogy a Jackson-tétel $Q>1$ esetén ilyen formában már nem lehet igaz, hiszen $\omega_{\vec{R}}(f; \vec{\delta}) \equiv 0$, ha az $f(\vec{x})$ függvény független valamelyik x_i $(i=1, 2, \ldots, Q)$ koordinátától. Innen azt kapjuk, hogy az (1.3.13) és (1.3.14) egyenlőtlenségek az alábbi Lebesgue-féle egyenlőtlenségeket élesítik:

$$|f(\vec{x}) - S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)| \leqq \left[\prod_{i=1}^{Q} LS_{N_i} + 1\right] E_{\vec{N}}(f), \tag{1.3.19}$$

$$|f(\vec{x}) - \tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)| \leqq \left[\prod_{i=1}^{Q} L\tilde{S}_{N_i}(x_i) + 1\right] E_{\vec{N}}(f), \tag{1.3.20}$$

hiszen nálam a logaritmus eggyel alacsonyabb hatványon jelenik meg, mint a Lebesgue-féle becslésekben.

1.3.7. Tétel. *A természetes* $\vec{N} \equiv \vec{N}(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *vektor legyen olyan, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} N_i = \infty \quad \text{és} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N_i}{\log n} < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, Q).$$

Legyen továbbá $f \in \tilde{C}_Q$. *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{Q-1} E_{\vec{N}}(f) = 0 \tag{1.3.21}$$

akkor ahhoz, hogy $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$, *ill.* $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ *egyenletesen konvergáljon* $n \to \infty$ *esetén az* $f(\vec{x})$ *függvényhez, szükséges és elegendő egy olyan nem-negatív egész* $\vec{R}$ *vektor létezése, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{\vec{R}}\left(S_{\vec{N}}(f); \frac{1}{\vec{N}}\right) = 0, \tag{1.3.22}$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{\vec{R}}\left(\tilde{S}_{\vec{N}}(f); \frac{1}{\vec{N}}\right) = 0. \tag{1.3.23}$$

Bizonyítás. Az elégségesség következik az 1.3.4. Tételből, a szükségesség pedig a nyilvánvalóan igaz

$$\omega_{\vec{R}}(S_{\vec{N}}(f); \vec{\delta}) \leqq \|S_{\vec{N}}(f) - f\| + \omega_{\vec{R}}(f; \vec{\delta})$$

és

$$\omega_{\vec{R}}(\tilde{S}_{\vec{N}}(f); \vec{\delta}) \leqq \|\tilde{S}_{\vec{N}}(f) - f\| + \omega_{\vec{R}}(f; \vec{\delta})$$

egyenlőtlenségekből.

Megjegyzem, hogy az $f \in \tilde{C}_Q$ feltétel lényeges, amit a következő egyszerű példa is igazol. Legyen

$$\varphi(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k \log k}.$$

Világos, hogy $\varphi \notin \tilde{C}_1$, tehát $S_n(x, \varphi)$ nem konvergálhat egyenletesen $\varphi(x)$-hez $n \to \infty$ esetén. Ugyanakkor $\|S_n'(\varphi)\| = o(n)$, tehát $\omega\left(S_n(\varphi); \frac{1}{n}\right) = o(1)$.

Világos, hogy ha (1.3.22) vagy (1.3.23) teljesül valamilyen $\vec{R} = \vec{R}_1$ értékre, akkor minden természetes $\vec{R}$ értékre is teljesül. Ha az $f(\vec{x})$ függvény valójában Q-nál kevesebb változótól függ, akkor (1.3.22) is és (1.3.23) is mindig teljesül, következésképpen az (1.3.21) feltétel teljesülése önmagában elegendő az $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ és $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ sorozatok egyenletes konvergenciájához. Érdemesnek tartom megjegyezni, hogy *az* (1.3.21) *összefüggés* $Q = 1$ *esetén mindig teljesül.* Az (1.3.21) feltételt a továbbiakban gyengített Lebesgue-feltételnek fogom nevezni.

1.3.8. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a* $\tilde{C}_Q$*-beli* $f(\vec{x})$ *függvény eleget tesz a gyengített Lebesgue-feltételnek és valamilyen nem-negatív egész* $\vec{R}$ *vektor esetén kielégíti a*

$$\lim_{n \to \infty} (\log n)^Q \omega_{\vec{R}}\left(f; \frac{1}{\vec{N}}\right) = 0. \tag{1.3.24}$$

($\vec{N}$ *olyan, mint az* 1.3.7. *Tételben) Dini—Lipschitz-feltételt, akkor* $n \to \infty$ *esetén* $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ *is és* $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ *is egyenletesen az* $f(\vec{x})$ *függvényhez konvergálnak.*

Ha az $f(\vec{x})$ függvény valamelyik x_i koordináta szerint $\alpha(>0)$-ad rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, továbbá i-nek erre az értékére $\liminf_{n \to \infty} \frac{\log N_i}{\log n} > 0$ akkor (1.3.24) teljesül, következésképpen az $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ és $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ egyenletes konvergenciája csakis a $(\log n)^{Q-1} E_{\vec{N}}(f)$ kifejezés viselkedésétől függ.

Az 1.3.7. Tétel bizonyítása során beláttuk, hogy ha $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ vagy $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ egyenletesen $f(\vec{x})$-hez konvergál $\vec{N} \to \vec{\infty}$ esetén, akkor

$$\lim_{\substack{\vec{N} \to \vec{\infty} \\ \vec{\delta} \to \vec{0}}} \omega_{\vec{R}}(S_{\vec{N}}(f), \quad \text{ill.} \quad \tilde{S}_{\vec{N}}(f); \vec{\delta}) = 0. \tag{1.3.25}$$

Érdekes lenne megvizsgálni azt a kérdést, hogy (1.3.25) önmagában ((1.3.21) nélkül) elegendő-e az $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ illetve az $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ egyenletes konvergenciájához $Q > 1$ esetén is.

Az 1.3.7. Tétel $Q = 1$ esetén szükséges és elégséges feltételt ad arra nézve, hogy pl. a Fourier-sor egyenletesen konvergáljon. Természetes tehát, hogy magában foglalja az összes (eddig ismert és nem ismert) egyenletes-konvergencia kritériumokat. Nézzük meg, hogyan kapható meg belőle a Dirichlet—Jordan-féle kritérium. Világos, hogy

$$\omega\left(S_N(f); \frac{1}{N}\right) \leqq \frac{1}{N} \|S_N'(f)\|,$$

továbbá

$$S_N(x, f)' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)' \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) \, df(t),$$

tehát

$$|S_N(x, f)'| \leqq \frac{2N+1}{2\pi} \operatorname*{var}_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} f + \frac{m}{2} \operatorname*{var}_{-\pi}^{\pi} f,$$

ahol m egy tetszőleges olyan természetes szám, amelyre $1 \leqq m < N$. Ha most $m = m(N)$ eléggé lassan, de ∞-hez tart $N \to \infty$ esetén, akkor azt kapjuk, hogy $\|S'_N(f)\| = o(N)$, tehát $\omega\left(S_N(f); \frac{1}{n}\right) = o(1)$. *A Dirichlet—Jordan-tétel tehát az integrálszámítás második középérték-tételének felhasználása nélkül nyert bizonyítást!*

Számítástechnikai szempontból principiális jelentőséggel bírnak az ún. a posteriori típusú hibabecslések, azaz bizonyos közelítő eljárások olyasfajta hibabecslései, amelyek önmagukat javítják azáltal, hogy minél több adatot számítunk ki, minél több iterációt végzünk. Az 1.3.4. és 1.3.5. tételekből ilyen a posteriori becsléseket is kaphatunk. Például (1.3.11)-ből következik, hogy ha $f \in \tilde{C}_1$ és R egy tetszőleges természetes szám, akkor

$$|f(x) - S_n(x, f)| \leqq \omega_R\left(S_n(f); \frac{2\pi}{2n+1}\right) + \omega_R\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) +$$

$$+\left[\frac{2R}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}\,dz + 2\right] E_n(f) = \omega_R\left(S_n(f); \frac{2\pi}{2n+1}\right) + O_R\left(\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Még ennél is fontosabb az $\tilde{S}_n(x, f)$-re vonatkozó a posteriori hibabecslés, hiszen a gyakorlatban a függvények általában csak bizonyos pontokban vannak megadva:

$$|f(x) - \tilde{S}_n(x, f)| \leqq \omega_R\left(\tilde{S}_n(f); \frac{2\pi}{2n+1}\right) + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$(f \in \tilde{C}_1,\ R = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Most a következő kérdéssel fogok foglalkozni. Tegyük fel, hogy $\vec{N}$ *úgy tart* $\vec{\infty}$*-hez, hogy az összes* N_i *koordináta egymástól függetlenül tart a végtelenhez.* Megkérdezem, hogy melyek azok az $f(\vec{x})$ függvényre kirótt strukturális feltételek, amelyek biztosítják $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$-nek és $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$-nek az $f(\vec{x})$ függvényhez történő egyenletes konvergenciáját? Az alábbiakban erre a problémára egy nagyon egyszerű és kézenfekvő megoldást adok.

1.3.9. TÉTEL. *Legyen* $f \in \tilde{C}_Q$. *Ha létezik egy olyan természetes* $\vec{R}$ *vektor, hogy minden* $\vec{R}^*$ *projekciójára*

$$\lim_{\vec{\delta} \to \vec{0}} \omega_{\vec{R}^*}(f; \vec{\delta}) \cdot \prod_{i=1}^{Q}\left[\log\frac{1}{|\delta_i|}\right]^{\varepsilon(\vec{R}^*)_i} = 0, \tag{1.3.26}$$

akkor $\vec{N} \to \vec{\infty}$ *esetén* $S_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ *is és* $\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x}, f)$ *is egyenletesen az* $f(\vec{x})$ *függvényhez konvergálnak.*

BIZONYÍTÁS. A tételt csak a Fourier-sorokra fogom bebizonyítani, a bizonyítás szóról-szóra átvihető az interpoláció esetére is. Az 1.3.4. Tétel bizonyítását újra átnézve megállapíthatjuk, hogy csak az (1.3.9) jobb oldalán levő negyedik tag 0-hoz való konvergenciáját kell kimutatni. Ebben az összegben is $i = Q$ értékre fellépő tag az 1.3.3. Következmény folytán egyenletesen nullához tart. A meg-

maradt tagok abszolút értéke felírható a következő formában:

$$\left|\sum_{i=1}^{Q-1}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\ [\in(1,2,\ldots,Q])}}\left\{\prod_{l=1}^{i}\left[\sum_{m_l=0}^{R_{j_l}-1}\Delta_{h_{j_l,\vec{N}}}^{m_l}\nabla_{h_{j_l,\vec{N}}}S_{\vec{N}}(\vec{x},\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}\Delta_{h_{k,\vec{N}}}^{R_k}f)\right]\right\}-\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{Q-1}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\ (\in[1,2,\ldots,Q])}}\left\{\prod_{l=1}^{i}\left[\sum_{m_l=0}^{R_{j_l}-1}\nabla_{h_{j_l,\vec{N}}}^{m_l}\Delta_{h_{j_l,\vec{N}}}\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}\Delta_{h_{k,\vec{N}}}^{R_k}f(\vec{x})\right]\right\}-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{Q-1}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\ (\in[1,2,\ldots,Q])}}\left\{\prod_{l=1}^{i}\left[\sum_{m_l=0}^{R_{j_l}-1}\Delta_{h_{j_l,\vec{N}}}^{m_l}\nabla_{h_{j_l,\vec{N}}}\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}\Delta_{h_{k,\vec{N}}}^{R_k}(\hat{H}(\vec{x})-f(\vec{x}))\right]\right\}\right|,$$

amely kisebb, mint

$$\sum_{i=1}^{Q-1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}dz\right)^i\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\ (\in[1,2,\ldots,Q])}}\left\{\prod_{l=1}^{i}R_{j_l}\prod_{\substack{k=1\\(k\neq j_1,j_2,\ldots,j_i)}}^{Q}LS_{N_k}\omega_{\vec{R}^*(\vec{R}\setminus\{j_l\})}(f;\vec{h}_{\vec{N}})\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{Q-1}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\ (\in[1,2,\ldots,Q])}}\left\{\prod_{l=1}^{i}R_{j_l}\omega_{\vec{R}^*(\vec{R}\setminus\{j_l\})}(f;\vec{h}_{\vec{N}})\right\}+\left\{\prod_{i=1}^{Q-1}\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_i\\ (\in[1,2,\ldots,Q])}}\prod_{l=1}^{i}R_{j_l}\right\}E_{\vec{N}}(f)=$$

$$=O_{\vec{R}}\left[\sum_{\vec{R}^*\neq\vec{R}}\omega_{\vec{R}^*}(f;\vec{h}_{\vec{N}})\prod_{i=1}^{Q}(\log N_i)^{\varepsilon(\vec{R}^*)_i}+E_{\vec{N}}(f)\right],$$

ahol $\vec{R}^*(\vec{R}/\{j_l\})$ $\vec{R}$-nek azt a projekcióját jelenti, amelynél a j_l-ik helyeken 0 áll. A tétel bizonyítást nyert.

Az 1.3.9. Tétel alapvető fontosságára az az egyszerűség és jól ismert tény mutat rá, hogy az (1.3.19) és (1.3.20) Lebesgue-féle becslésekben a jobb oldalon álló kifejezések általában sohasem tarthatnak 0-hoz, ha $\vec{N}$ úgy tart $\vec{\infty}$-hez, hogy az összes koordinátája egymástól függetlenül tart ∞-hez, azaz néhány triviális eset kivételével nem állhat fenn a

$$\lim_{\vec{N}\to\vec{\infty}}E_{\vec{N}}(f)\prod_{i=1}^{Q}\log N_i=0\quad(Q>1)$$

összefüggés.

Az 1.3.9. Tétel jelentős általánosítása L. V. Zsizsiasvili [1] (258. o.) egy eredményének, amelyet ő bizonyítás nélkül közöl.

Az 1.3.4. és 1.3.9. tételek bizonyítása közben a következő — a továbbiakban felhasználásra kerülő — összefüggéseket nyertük:

(1.3.27)
$$S_{\vec{N}}(\vec{x},f)-f(\vec{x})=\Delta_{\vec{h}_{\vec{N}}}^{\vec{R}}S_{\vec{N}}(\vec{x},f)+$$

$$+\begin{cases}O_{\vec{R}}\left[\sum_{\vec{R}^*\neq\vec{R}}\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)\prod_{i=1}^{Q}(\log N_i)^{\varepsilon(\vec{R}^*)_i}\right], & \text{ha}\quad Q>1\\ O_{\vec{R}}\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{N}\right)\right], & \text{ha}\quad Q=1\end{cases}$$

és

$$\text{(1.3.28)}\qquad \tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x},f)-f(\vec{x}) = \Delta^{\vec{R}}_{\vec{h}_{\vec{N}}}\tilde{S}_{\vec{N}}(\vec{x},f)+$$

$$+\begin{cases} O_{\vec{R}}\left[\sum\limits_{\vec{R}^*\neq\vec{R}}\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)\prod\limits_{i=1}^{Q}(\log N_i)^{\varepsilon(R^*)_i}\right], & \text{ha } Q>1,\\ O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{N}\right)\right], & \text{ha } Q=1 \end{cases}$$

ha $f\in\tilde{C}_Q$, $\vec{R}$ rögzített természetes vektor és $\vec{N}$ koordinátái egymástól függetlenek ((1.3.27) és (1.3.28) maradéktagjaiból $E_{\vec{N}}(f)$-et a több-dimenziós Jackson-tétel segítségével tüntettem el (l. A. F. TYIMAN [1], 288. o.-t)), továbbá

$$\text{(1.3.29)}\qquad |f(\vec{x})-S_{\vec{N}}(\vec{x},f)| = \left|\sum_{\vec{R}^*}\Phi S_{\vec{N}}(\vec{x},\Delta^{\vec{R}^*}_{\vec{h}_{\vec{N}}}f)\right|+$$

$$+O_{\vec{R}}\left[\sum_{\vec{R}^*}\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)\right]\quad\left(\vec{h}_{\vec{N}}=\frac{2\pi}{2\vec{N}+1}\right),$$

ahol $\Phi=\Phi(\vec{R}^*,\vec{N})$ aszerint az x_i változók szerint képez Bernstein—Rogosinski-féle összegszerűségeket, amelyekre $R_i^*=0$. Az (1.3.29) maradéktagjánál ismételten felhasználtam a több-dimenziós Jackson-tételt. (1.3.29)-ben — természetesen — $S_{\vec{N}}$ helyett $\tilde{S}_{\vec{N}}$ is írható.

1.3.10. MEGJEGYZÉS. W. ROGOSINSKI és SZ. N. BERNSTEIN *eredményeiből következően (l. az Irodalomjegyzéket) az* (1.3.7), (1.3.8), (1.3.11), (1.3.12), (1.3.13), (1.3.14), (1.3.15), (1.3.16), (1.3.17), (1.3.18), (1.3.27), (1.3.28) *és* (1.3.29) *formulákban* $\frac{2\pi}{2\vec{N}+1}$ *helyett* $\frac{\pi}{\vec{N}}$ *is írható;* ebben az esetben a maradéktagok konstansai fognak csak megváltozni.*

1.3.11. MEGJEGYZÉS. *Az* (1.3.27) *és* (1.3.28) *összefüggésekből* (1.3.13)*-hoz és* (1.3.14)*-hez hasonló pontos konstansos becslések nyerhetők olyan* $\vec{N}$ *értékekre, amelyeknek koordinátái egymástól függetlenek, ezek felsorolásától azonban eltekintek.*

1.4. § *A Dini—Lipschitz-kritérium általánosítása*

A Dini—Lipschitz-féle konvergencia-kritériumnak megfelelően, ha $f\in\tilde{C}_1$ és valamely rögzített természetes R számra

$$\text{(1.4.1)}\qquad |\Delta^R_\delta f(x)| \leqq \frac{\varepsilon(\delta)}{|\log|\delta||}\quad(|x|\leqq 2\pi),$$

ahol $\varepsilon(\delta)\geqq 0$ és $\varepsilon(\delta)\underset{\delta=0}{\to}0$, akkor $S_n(x,f)$ is és $\tilde{S}_n(x,f)$ is egyenletesen az $f(x)$ függvényhez konvergálnak $n\to\infty$ esetén.

Jelen paragrafusban meg fogom mutatni, hogy az (1.4.1) feltétel helyettesíthető az alábbi egyoldali Dini—Lipschitz-feltétellel:

$$\text{(1.4.2)}\qquad \Delta^R_\delta f(x)\geqq -\frac{\varepsilon(\delta)}{|\log\delta|}\quad(|x|\leqq 2\pi,\ \delta\geqq 0),$$

ahol $\varepsilon(\delta)\ (\geqq 0)\xrightarrow[\delta\to+0]{}0$ és R egy rögzített természetes szám.

* Illetve, ahol $\frac{2\pi}{2\vec{n}+1}$ van, oda $\frac{\pi}{\vec{n}}$ írható.

Eredményeim az 1.3. §-ban bebizonyított (l. az (1.3.27) és (1.3.28) összefüggéseket)

$$\frac{S_n}{\tilde{S}_n}(x,f)-f(x)=\frac{S_n}{\tilde{S}_n}\left(\Delta^R_{\frac{2\pi}{2n+1}}f\right)+O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{N}\right)\right] \tag{1.4.3}$$

($n=1, 2, \ldots$; R rögzített természetes szám) reprezentációk egyik alkalmazásának tekinthetők.

1.4.1. Tétel. *Ha a $\tilde{C}_1$-ba tartozó $f(x)$ függvény az* (1.4.2) *feltételt $R=1$-gyel kielégíti, akkor*

$$\|f-\frac{S_n}{\tilde{S}_n}(f)\|=O\left[\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f;t)}{t^2}\,dt+\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]. \tag{1.4.4}$$

Bizonyítás. Csak a Fourier-összegeket fogom vizsgálni, az interpolációs polinomokra az (1.4.4) becslés analóg módon látható be. A Dirichlet-formula szerint

$$S_n(x,\Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}}f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}}f(t+x)D_n(t)\,dt,$$

tehát (1.4.2) következtében

$$|S_n(x,\Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}}f)|\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}}f(t+x)+\frac{\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\left|\log\frac{2\pi}{2n+1}\right|}\right]|D_n(t)|\,dt+ \tag{1.4.5}$$

$$+\frac{\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\left|\log\frac{2\pi}{2n+1}\right|}\leqq\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}}f(t+x)|D_n(t)|\,dt\right|+$$

$$+\frac{\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\left|\log\frac{2\pi}{2n+1}\right|}\left[1+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt\right],$$

ha $|x|\leqq\pi$. Továbbá

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}}f(t+x)|D_n(t)|\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t+x)-f(x)]\left[\left|D_n\left(t-\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right|-|D_n(t)|\right]dt\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(f;|t|)\left|D_n\left(t-\frac{2\pi}{2n+1}\right)+D_n(t)\right|dt.$$

Egyszerű számítások alapján belátható, hogy

$$\left|D_n\left(t-\frac{2\pi}{2n+1}\right)+D_n(t)\right| \leqq C\min\left\{n, \frac{1}{nt^2}\right\} \quad (|t| \leqq \pi),$$

ahol $C(>0)$ valamilyen alkalmas abszolút konstans (l. pl. I. P. NATANSZON [1], I. X. 4. §-t). Innen

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_{\frac{2\pi}{2n+1}} f(t+x)|D_n(t)|\,dt\right| = \tag{1.4.6}$$

$$= O\left[\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f;t)}{t^2}dt\right] =$$

$$= O\left[\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f;t)}{t^2}dt\right].$$

A tétel most már egyszerű módon következik az (1.4.3), (1.4.5) és (1.4.6) formulákból.

Érdemesnek találom megjegyezni, hogy minden folytonossági modulusra

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f;t)}{t^2}dt = O\left[\omega\left(f;\frac{\log n}{n}\right)\right],$$

ha pedig $\omega(f;t)=t^\alpha$ $(0<\alpha<1)$, akkor

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f;t)}{t^2}dt = O\left[\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\right].$$

1.4.2. TÉTEL. *Ha* $f\in\tilde{C}_1$ *és* (1.4.2) *valamilyen* 1*-nél nagyobb rögzített természetes* R *számra teljesül, akkor*

$$\left\|f-\frac{S_n}{\tilde{S}_n}(f_{n,R})\right\| = O\left[\omega_{R-1}\left(f;\frac{1}{n}\right)+\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]. \tag{1.4.7}$$

BIZONYÍTÁS. Az 1.4.1. Tétel bizonyítását átnézve megállapíthatjuk, hogy az akkor is igaz marad, ha az $f(x)$ függvény az n értékétől is függ, azaz $f(x)=f_n(x)$. Világos, hogy ha kielégíti (1.4.2)-t, akkor az 1.4.1. Tételt alkalmazhatjuk az $f_{n,R}(x)\equiv\Delta^{R-1}_{\frac{2\pi}{2n+1}} f(x)$ függvényre. Tehát

$$\left\|f_{n,R}-\frac{S_n}{\tilde{S}_n}(f)\right\| = O\left[\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f_{n,R};t)}{t^2}dt+\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right],$$

vagyis

$$\left\|f_{n,R}-\frac{S_n}{\tilde{S}_n}(f_{n,R})\right\| = O\left[\omega_{R-1}\left(f;\frac{1}{n}\right)+\varepsilon\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right], \tag{1.4.8}$$

hiszen

$$\omega(f_{n,R};t) \leqq \omega_{R-1}\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right) \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

és

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega(f_{n,R};t)}{t^2}\,dt \leqq \omega_{R-1}\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

(1.4.7) következik (1.4.3)-ból és (1.4.8)-ból ((1.4.3)-at ezúttal az $R-1$ értékére alkalmazzuk).

(1.4.4) és (1.4.7) az egyenletes konvergencia bizonyításán kívül bizonyos becsléseket is ad a konvergencia sebességére, amelynek rendkívül érdekes következményei vannak.

SALEM és ZYGMUND [1] után a $\tilde{C}_1$-beli $f(x)$ függvényt monoton-típusúnak fogjuk nevezni, ha létezik egy olyan $C=C(f)$ konstans, hogy $f(x)+Cx$ monoton x minden értékére.

R. SALEM és A. ZYGMUND [1] bebizonyították, hogy *ha* $f\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ *és* $f(x)$ *monoton típusú, akkor*

$$\|S_n(f)-f\| = O(n^{-\alpha}) \tag{1.4.9.}$$

és

$$\|\bar{S}_n(f)-\bar{f}\| = O(n^{-\alpha}). \tag{1.4.10}$$

Nos, ez a tétel az 1.4.1. Tételből és az 1.2.2. Következményből rögtön következik, hiszen ha $f(x)$ monoton típusú, akkor $\varepsilon(\delta)$ egyenlő lehet $C\cdot|\log\delta|\cdot\delta$-val. *Sőt*, az 1.2.5. Következmény folytán (1.4.9)-*ben* $S_n(f)$ *helyett* $\tilde{S}_n(f)$-*et*, (1.4.10)-*ben pedig* $\bar{S}_n(f)$ *helyett* $\bar{\tilde{S}}^n(f)$-*et is írhatunk*. A Salem—Zygmund-féle tétel sajnos nem ad választ arra az esetre, ha $\alpha=1$. A válasz egyszerű:

1.4.3. TÉTEL. *Ha* $f\in\tilde{C}_1\cap\mathrm{Lip}\,1$ *és létezik egy olyan* $C=C(f)$ *konstans, hogy az* $f(x)+Cx^2$ *függvény* x *minden értékére konvex, akkor*

$$\left\|\begin{matrix}S_n\\ \tilde{S}_n\end{matrix}(f)-f\right\| = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.4.11}$$

és

$$\left\|\begin{matrix}\bar{S}_n\\ \bar{\tilde{S}}_n\end{matrix}(f)-\bar{f}\right\| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.4.12}$$

Az 1.4.3. Tétel következik (1.4.7)-ből $(R=2)$ és onnan, hogy ebben az esetben $\varepsilon(\delta)=C|\log\delta|\delta^2$, továbbá az 1.2. § eredményeiből.

Az (1.4.12) becslés külön érdekessége az, hogy nem kell a priori feltételezni az $\bar{f}(x)$ függvénynek a Lip 1 függvényosztályba való tartozását, amely összefüggés általában véve nem is fog fennállni.

Hasonló tételek fogalmazhatók meg olyan függvényekre is, amelyekre $f(x)+Cx^M$ $(M=3,4,\ldots)$ lesz M-monoton függvény, ezekre az általánosításokra azonban nem térek ki.

Ha $Q>1$, akkor is ugyanez lesz a szituáció; az (1.3.26) Dini—Lipschitz-feltételek ebben az esetben is egyoldalíthatóak, mégpedig pontosan ugyanolyan szkéma szerint, mint $Q=1$ esetén. $Q>1$-re azonban a kapott feltételek — nagy számuk és bonyolultságuk miatt — kevésbé esztétikusan néznek ki, mint a $Q=1$ esetében.

1.5. § *L_1-simasági modulus és konvergencia*

Jelölje $H_Q(\vec{R})$ ($Q=1, 2, \ldots$; $\vec{R}$ természetes vektor) azoknak a $\tilde{C}_Q$-beli $f(\vec{x})$ függvényeknek az osztályát, amelyekre

$$\omega_{\vec{R}^*}(f;\vec{\delta})_{L_1} = O\left[\prod_{i=1}^{Q}(\delta_i)^{\varepsilon(\vec{R}^*)_i}\right], \tag{1.5.1}$$

ha $\vec{R}^*$ az $\vec{R}$ vektornak egy tetszőleges projekciója.

A H betűt G. H. HARDY tiszteletére vezettem be, aki elsőként adott meg $Q>1$ esetén ($Q=2$, $\vec{R}=\vec{1}$) egy olyan függvényosztályt, mégpedig a Hardy-féle értelemben korlátos változású kétváltozós függvények HV_2 osztályát (l. HARDY [1], TONELLI [1]-et) amely elemeire (1.5.1) teljesül, azaz $HV_2 \subset H_2(\vec{1})$.

1.5.1. TÉTEL. *Ha $f \in H_Q(\vec{R})$, akkor*

$$\|f-S_{\vec{N}}(f)\| = O\left[\sum_{\vec{R}^*}\left|\log\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)\right|^{d(\vec{R}^*)}\cdot\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)\right], \tag{1.5.2}$$

ahol $d(\vec{R}^*)=\sum_{i=1}^{Q}\varepsilon(\vec{R}^*)_i$, *tehát* $\|f-S_{\vec{N}}(f)\| \underset{\vec{N}\to\infty}{\to} 0$.

BIZONYÍTÁS. (1.3.29) következtében

$$\|f-S_{\vec{N}}(f)\| = \sum_{\vec{R}^*}\|\Phi S_{\vec{N}}(\Delta^{\vec{R}^*}f)\| + O\left[\sum_{\vec{R}^*}\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)\right] \quad \left(\Delta^{\vec{R}^*}\equiv\Delta^{\vec{R}^*}_{\frac{2\pi}{2\vec{N}+1}}\right), \tag{1.5.3}$$

ahol a $\Phi=\Phi(\vec{R}^*, \vec{N})$ operátor az $S_{\vec{N}}(\vec{x}, \Delta^{\vec{R}^*}f)$-ből aszerint az x_i változók szerint képez Bernstein—Rogosinski-típusú összegszerűségeket, amelyekre $\varepsilon(\vec{R}^*)_i=0$. Tekintsük $\vec{R}$-nek egy tetszőleges $\vec{R}^*$ projekcióját, és vizsgáljuk meg a $\Phi S_{\vec{N}}(\vec{x}, \Delta^{\vec{R}^*}f)$ kifejezést. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_i = \min\left\{\frac{1}{N_i\cdot\omega_{\vec{R}^*}\left(f;\frac{1}{\vec{N}}\right)}, \pi\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, Q, \quad \text{de} \quad \varepsilon(\vec{R}^*)_i \neq 0),$$

$\vec{m}$ tehát egy $d(\vec{R}^*)$ dimenziós vektor;

$$\square = \{\vec{t}; |\vec{t}| \leqq \vec{m}\} \quad (\vec{t}\in E^{d(\vec{R}^*)}),$$

$\square_i$-k $(i=1, 2, \ldots, d(\vec{R}^*)^3-1)$ pedig olyan $d(\vec{R}^*)$ dimenziós téglatestek, hogy

$$\square \cup \bigcup_i \square_i = [-\pi, \pi]^{d(\vec{R}^*)}$$

és

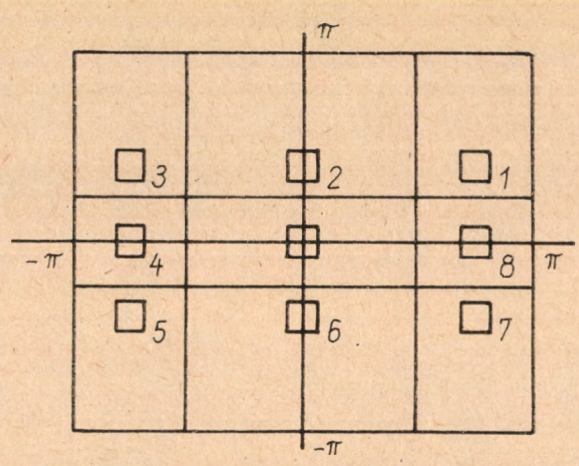
$$\square \cap \square_i = \Phi, \quad \square_i \cap \square_j = \Phi,$$

tehát például $d(\vec{R}^*)=2$ esetén
Világos, hogy*

$$|\Phi S_{\vec{N}}(\vec{x}, \Delta^{\vec{R}^*}f)| \leqq \tag{1.5.4}$$

$$\leqq C\cdot \max_{|\vec{x}|\leqq\vec{\pi}} \max_{\substack{t_j \\ \varepsilon(\vec{R}^*)_j=0}} \int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta^{\vec{R}^*}f(\vec{t}+\vec{x})| \prod_{\substack{i=1 \\ \varepsilon(\vec{R}^*)_i\neq 0}}^{Q} |D_{N_i}(t_i)|\,dt_i,$$

* C itt és a pragrafuson belül a továbbiakban f, $\vec{x}$ és $\vec{N}$-től független konstansot jelöl.



hiszen a Φ operátor Bernstein—Rogosinski-típusú. Az (1.5.4) jobb oldalán szereplő integrált felosztjuk a $\square$ és $\square_i$ téglatesteken vett integrálok összegére. A $\square$-n vett integrál kisebb, mint

$$C \cdot \omega_{\bar{R}^*}\left(f; \frac{1}{\vec{N}}\right) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ \varepsilon(\bar{R}^*)_i \neq 0}}^{Q} \log(1+N_i m_i),$$

mivel $|D_n(t)| \leqq C \cdot \frac{n}{1+nt}$. Mindegyik $\square_i$ téglatesthez található egy olyan i_0 szám, hogy t_{i_0} nem a $[-m_{i_0}, m_{i_0}]$ határok között fog változni. Feltehetjük, hogy $m_{i_0} < \pi$, hiszen különben a $\square_i$ téglatesten vett integrál nullával lenne egyenlő. Ekkor

$$\max_{|\vec{x}| \leqq \vec{\pi}} \max_{\substack{t_j \\ \varepsilon(\bar{R}^*)_j = 0}} \int \ldots \int_{\square_i} |\Delta^{\bar{R}^*} f(\vec{t}+\vec{x})| \prod_{\substack{i=1 \\ \varepsilon(\bar{R}^*)_i \neq 0}}^{Q} |D_{N_i}(t_i)| \leqq$$

$$\leqq C \cdot \frac{1}{m_{i_0}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0 \\ \varepsilon(\bar{R}^*)_i \neq 0}}^{Q} N_i \omega_{\bar{R}^*}\left(f; \frac{1}{\vec{N}}\right)_{L_1} = O\left(\frac{1}{m_{i_0} N_{i_0}}\right),$$

hiszen $f \in H_Q(\vec{R})$. A mondottakból következően

$$\|\Phi S_N(\Delta^{\bar{R}^*} f)\| = O\left[\left|\log \omega_{\bar{R}^*}\left(f; \frac{1}{\vec{N}}\right)\right|^{d(\bar{R}^*)} \cdot \omega_{\bar{R}^*}\left(f; \frac{1}{\vec{N}}\right)\right],$$

amely becslés (1.5.3)-mal együtt igazolja az 1.5.1. Tételt.

1.6. § *A szakaszosan monoton függvényekről.*

Legyen $Q=1$. Egy $f(x)$ függvény akkor k-monoton ($k=1, 2, \ldots$) az $[a, b]$ szakaszon, ha x és $\delta \geqq 0$ minden olyan értékeire, amelyekre $x, x+k\delta \in [a, b]$ az $f(x)$ függvény k-adik differenciája δ lépésközzel, azaz $\Delta_\delta^k f(x)$, megtartja az előjelét.

Legyen $M(N, k)$ azoknak a $\tilde{C}_1$-beli $f(x)$ függvényeknek az osztálya, amelyekre létezik a $[-\pi, \pi]$ szakasznak egy N részből álló olyan $\varrho = \varrho(f)$ beosztása —

$$\varrho: -\pi = c_0 < c_1 < \ldots < c_N = \pi$$

—, hogy minden $[c_j, c_{j+1}]$ $(j=0, 1, \ldots, N-1)$ szakaszon az $f(x)$ függvény k-monoton.

G. I. NATANSZON [1] bebizonyította, hogy ha $f \in M(N, k+2)$ és $f(x)$ k-szor folytonosan differenciálható, ahol k egy tetszőleges nem-negatív egész szám, akkor

$$\|f - S_n(f)\| = O_k\left[\log(N+1)\,\omega\left(f^{(k)}; \frac{1}{n}\right)\cdot n^{-k}\right]. \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.6.1}$$

G. I. NATANSZON tételét általánosítandó be fogom bizonyítani a következő állítást.

1.6.1. TÉTEL. *Ha* $f \in M(N, k)$ *és* $k \geqq 2$, *akkor*

$$\left\|f - \frac{S_n}{\tilde{S}_n}(f)\right\| = O_k\left[\log(N+1)\,\omega_{k-1}\left(f; \frac{1}{n}\right)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.6.2}$$

BIZONYÍTÁS. Csak a Fourier-részletösszegekre vonatkozó állítást fogom igazolni, a tétel második része analóg módon bizonyítható. (1.3.27) szerint

$$S_n(x, f) - f(x) = S_n\left(x, \Delta^k_{\frac{2\pi}{2n+1}} f\right) + O_k\left[\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)\right],$$

tehát elegendő az $S_n(x, \Delta^k f) \equiv S_n\left(x, \Delta^k_{\frac{2\pi}{2n+1}} f\right)$ kifejezést megvizsgálni. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy

$$\min_{0 \leqq i \leqq N-1} (c_{i+1} - c_i) > \frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Ha ez nem teljesülne, akkor lehetséges volna egy olyan $\{c_{i_j}\}$ $(j=0, 1, \ldots, M(<N);$ $c_{i_0} = -\pi, c_{i_M} = \pi)$ részsorozatot kiválasztani $\{c_i\}$-ből, hogy

$$\min_{0 \leqq j \leqq M-1} (c_{i_{j+1}} - c_{i_j}) > \frac{2k\pi}{2n+1}$$

és a $\Delta^k_{\frac{2\pi}{2n+1}}$ kifejezés megtartaná az előjelét, ha $x \in \left[c_{i_j}, c_{i_{j+1}} - \frac{2k\pi}{2n+1}\right]$ $(j=0, 1, \ldots,$ $\ldots, M-1)$. Ilyeténképpen, bevezetve a $h = \frac{2\pi}{2n+1}$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$S_n(x, \Delta^k f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\pi} \int_{c_i}^{c_{i+1}-kh} \Delta^k f(t)\, D_n(x-t)\, dt + \tag{1.6.3}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\pi} \int_{c_i - kh}^{c_i} \Delta^k f(t)\, D_n(x-t)\, dt = I_1 + I_2.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$I_2 = O\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i - kh}^{c_i} |D_n(x-t)|\,dt\right)\omega_k(f;h)\right] =$$

$$= O_k[\log(N+1)\omega_{k-1}(f;h)]. \tag{1.6.4}$$

Tekintettel arra, hogy a $[c_i, c_{i+1}-kh]$ szakaszon a $\Delta^k_{\frac{2\pi}{2n+1}} f(t)$ kifejezés megtartja az előjelét, elvégezhetjük a következő becsléseket:

$$|I_1| \leqq \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{1}{\pi} \int_{c_i}^{c_{i+1}-kh} \Delta^k f(t) |D_n(x-t)|\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{1}{\pi} \int_{c_i}^{c_{i+1}-kh} \left(\Delta^{k-1} f(t+h) - \Delta^{k-1} f(t)\right) |D_n(x-t)|\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{1}{\pi} \int_{c_i+h}^{c_{i+1}-(k-1)h} \Delta^{k-1} f(t) \left(|D_n(x-t+h)| - |D_n(x-t)|\right) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{c_i}^{c_i+h} \Delta^{k-1} f(t) |D_n(x-t)|\,dt + \frac{1}{\pi} \int_{c_{i+1}-kh}^{c_{i+1}-(k-1)h} \Delta^{k-1} f(t) |D_n(x-t)|\,dt \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2} \omega_{k-1}(f;h) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t+h) + D_n(x-t)|\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\pi} \int_{c_i}^{c_i+h} + \frac{1}{\pi} \int_{c_{i+1}-kh}^{c_{i+1}-(k-1)h} |\Delta^{k-1} f(t) D_n(x-t)|\,dt. \tag{1.6.5}$$

Az (1.6.5) egyenlőtlenség-láncolat jobb oldalán levő második tag pontosan ugyanúgy becsülhető, mint I_2, az első tag pedig $\omega_{k-1}\left(f; \frac{1}{n}\right)$ nagyságrendű, hiszen mint Sz. N. BERNSTEIN [1] kimutatta,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t+h) + D_n(x-t)|\,dt \leqq \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

A tétel első része tehát következik az (1.6.3)—(1.6.5) összefüggésekből.

Az 1.6.1. Tételből és az 1.2. § eredményeiből következik az

1.6.2. TÉTEL. *Ha* $f \in N(N,k)$ $(k \geqq 2)$ *és* $\bar{f} \in \tilde{C}_1$, *akkor*

$$\left\| \bar{f} - \frac{\bar{S}_n}{\tilde{S}_n}(f) \right\| = O_{k,N}\left[\omega_{k-1}\left(f; \frac{1}{n}\right) + \omega_{k-1}\left(f; \frac{1}{n}\right)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.6.6}$$

1.7. § *További becslések* $\|f - S_n(f)\|$*-re*

Legyen $\varphi(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ egy a következő tulajdonságokkal rendelkező számsorozat:

$$\varphi(n) \geqq 1, \quad \varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \varphi(n) = O(n).$$

Legyen továbbá $H(\varphi)$ azoknak a $\tilde{C}_1$-ba tartozó $f(x)$ függvényeknek az osztálya, amelyekre

$$\varphi(n)\left|\int_a^b f(e^{i\xi})e^{in\xi}\,d\xi\right| = O(1) \tag{1.7.1}$$

bármely a, b $(-\pi \leqq a < b \leqq \pi)$ értékekre egyenletesen. Ha $\varphi(n) \equiv n$, akkor $H(\varphi)$ megegyezik a J. HADAMARD [1] által definiált korlátos eltérésű függvények osztályával (l. még ALEXITS [1]-et).

1.7.1. TÉTEL. *Ha $f \in H(\varphi)$, R egy tetszőleges, de rögzített természetes szám, $\theta(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ egy tetszőleges olyan számsorozat, amelyre*

$$\frac{c_1}{n} \leqq \frac{\theta(n)}{\varphi(n)} \leqq c_2 \quad (n > n_0) \quad (0 < c_1, c_2),$$

akkor

$$\|f - S_n(f)\| = O\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right) \cdot \log\frac{n\theta(n)}{\varphi(n)} + \frac{1}{\theta(n)}\right]. \tag{1.7.2}$$

BIZONYÍTÁS. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c_1 = e$ és $c_2 = \pi$. Az (1.3.27) összefüggésből és az 1.3.10. Megjegyzésből következően

$$S_n(x, f) - f(x) = S_n\left(x, \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f\right) + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right], \tag{1.7.3}$$

azaz

$$S_n(x, f) - f(x) = \tag{1.7.4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t) D_n(t)\,dt + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right].$$

Az egyszerűség kedvéért csak a második integrált fogom becsülni. Elemi átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t) D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t) \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\theta(n)}{\varphi(n)}} + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\theta(n)}{\varphi(n)}}^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t) \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt + O_R\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\theta(n)}{\varphi(n)}}^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t) \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt + O\left[\omega_R\left(f; \frac{1}{n}\right)\log\frac{n\theta(n)}{\varphi(n)}\right],$$

tehát az integrálszámítás második középérték-tétele szerint

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^{R} f(x+t)\,D_n(t)\,dt = \tag{1.7.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi \operatorname{tg}\dfrac{\theta(n)}{2\varphi(n)}} \int_{\alpha}^{\beta} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^{R} f(x+t)\sin nt\,dt +$$

$$+ O\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\log\frac{n\theta(n)}{\varphi(n)}\right],$$

ahol $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$. (1.7.4)-ből és (1.7.5)-ből az (1.7.2) becslés rögtön következik, hiszen minden $-\pi \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$ értékre

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^{R} f(x+t)\sin nt\,dt = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} f(x+t)\sin nt\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \int_{\alpha^{**}}^{\beta^{**}} f(t)\cos nt\,dt \sin nx + \int_{\alpha^{**}}^{\beta^{**}} f(t)\sin nt\,dt \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= O\left[\left|\int_{\alpha^{**}}^{\beta^{**}} f(e^{i\xi})\,e^{in\xi}\,d\xi\right| + \frac{1}{n}\right],$$

ahol $-\pi \leqq \alpha^* < \beta^* \leqq \pi$ és $-\pi \leqq \alpha^{**} < \beta^{**} \leqq \pi$.

Az 1.7.1. Tételt az $R=1$ esetre J. P. NASH [1] és M. SATO [1] bizonyították be, mégpedig az én bizonyításomnál összehasonlíthatatlanul bonyolultabb módon.

1.7.2. KÖVETKEZMÉNY. *Az* 1.7.1. *Tétel feltételei mellett, ha* $\bar{f} \in \tilde{C}_1$, *akkor*

$$\|\bar{f} - \bar{S}_n(f)\| = O\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\log\frac{n\theta(n)}{\varphi(n)} + \frac{1}{\theta(n)} + \omega_{R'}\left(\bar{f};\frac{1}{n}\right)\right] \tag{1.7.6}$$

minden rögzített $R'(=R, R+1, \ldots)$ *számra.*

(1.7.6) következik az 1.2.1. Tételből.

Az 1.7.1. Tételből egy sor konvergencia-kritérium következik $S_n(x,f)$-re nézve. Benne foglaltatik például a Dini—Lipschitz-kritérium $(\theta(n)=\varphi(n)=\log n)$, a Jordan—Dirichlet-kritérium $(\varphi(n)=n,\ \theta(n)$ eléggé lassan tart a végtelenhez). Az Olvasóra bízom, hogy újabb konvergencia-kritériumokat fogalmazzon meg.

1.7.3. TÉTEL. *Ha* $f \in \tilde{C}_1$ *és* R *egy tetszőleges, de rögzített, természetes szám, akkor*

$$\|f - S_n(f)\| = O\left\{\left\{1+\log\left[1+\frac{n\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_1}}{\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)}\right]\right\}\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{1.7.7}$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük (1.7.4)-et, pontosabban — az egyszerűség kedvéért — a benne levő második integrált. Legyen $m=\dfrac{\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_1}}{\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)}$. Nyilvánvaló, hogy

$$\left|\int_0^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t)\, D_n(t)\, dt\right| = \left|\int_0^{m} + \int_m^{\pi} \Delta_{\frac{\pi}{n}}^R f(x+t)\, D_n(t)\, dt\right| =$$

$$= O\left[\log(1+mn)\,\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m}\,\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_1}\right],$$

hiszen a Dirichlet-mag abszolút értéke majorálható a $\dfrac{Cn}{1+nt}$ függvénnyel, ahol C egy alkalmasan megválasztott konstans. Ily módon a tétel bizonyítást nyert.

Az 1.7.3. Tétel, amely M. SATO [2] egy tételének az általánosítása, ugyancsak konvergencia-kritériumokat tartalmaz, ezek felsorolásától azonban eltekintek.

Jelen paragrafus eredményei is tetszés szerint kombinálhatók az 1.2. § eredményeivel.

1.8. § *A Fourier—Lagrange-féle együtthatókról*

N. WIENER [1] 1924-ben bebizonyította — és evvel RIESZ FRIGYES [1] egy kérdésére válaszolt —, hogy ha $f(x)$ korlátos változású, akkor annak, hogy $f(x)$ ekvivalens legyen egy $\tilde{C}_1$-beli függvénnyel, szükséges és elégséges feltétele az alábbi reláció teljesülése:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{[a_k(f)]^2+[b_k(f)]^2} = 0.$$

WIENER tételét azóta sokan általánosították (l. L. D. BERMAN [2], *R.* I. GOLUBOV [1], [2], F. I. HARSILADZE [1], F. KEOGH—G. PETERSEN [1], SZ. M. LOZINSZKIJ [1], V. A. MATVEJEV [1], J. A. SIDDIQI [1] és L. C. YOUNG [1]-et).

Én ebben a pontban WIENER tételének egy interpolációs analogonját fogom bebizonyítani, mégpedig a továbbiakban definiálandó korlátos R-változós függvények esetére.

Legyen $f(x)$ egy 2π szerint periodikus függvény, $c_{kn}(f)$ $(|k|=0, 1, \ldots, n)$ pedig jelölje $f(x)$ komplex Fourier—Lagrange-féle együtthatóit, azaz

$$c_{kn}(f) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_{jn}) e^{-ikx_{jn}} \quad (|k| = 0, 1, \ldots, n) \quad \left(x_{jn} = \frac{2j\pi}{2n+1}\right).$$

1.8.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen R egy tetszőleges nem-negatív egész szám. Az $f(x)$ függvény $c_{kn}(f)$ együtthatóit előállíthatjuk a következőképpen:*

$$c_{kn}(f) = \frac{2^R e^{-iRkh}}{(e^{-ikh}-1)^R}\, c_{kn}(\Delta^R f) \quad (|k| = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.8.1}$$

ahol $h = \dfrac{2\pi}{2n+1}$ *és* $\Delta^R f(x) = \Delta_h^R f(x)$.

Bizonyítás. Ha $R=0$, akkor (1.8.1) teljesül. Legyen most $R\geqq 1$-et és tételezzük fel, hogy (1.8.1) az $R-1$ értékre is teljesül. Világos, hogy

$$c_{kn}(\Delta^{R-1}f)=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\Delta^{R-1}f(x_{jn})e^{-ikx_{jn}}=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}[\Delta^{R-1}f(x_{jn})-\Delta^{R-1}f(x_{j+1,n})]\sum_{l=0}^{j}e^{-ikx_{ln}}=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\Delta^{R}f(x_{jn})\frac{e^{-ikx_{j+1,n}}-1}{e^{-ikh}-1}=$$

$$=\frac{2e^{-ikh}}{e^{-ikh}-1}c_{kn}(\Delta^{R}f)-\frac{2}{(2n+1)(e^{-ikh}-1)}\sum_{j=0}^{2n}\Delta^{R}f(x_{jn}).$$

Az utóbbi kifejezésben a második összeadandó nullával egyenlő, hiszen $R\geqq 1$. Állításunkat tehát indukció segítségével igazoltuk.

Érvényes tehát az

1.8.2. SEGÉDTÉTEL. *Minden természetes számra teljesül az*

$$|c_{kn}(f)|=(2k)^{-R}(2n+1)^{R-1}\sum_{j=0}^{2n}|\Delta^{R}f(x_{jn})| \quad (n=1,2,\ldots;\ |k|=1,2,\ldots,n) \tag{1.8.2}$$

egyenlőtlenség.

1.8.3. SEGÉDTÉTEL. *Ha R természetes szám, akkor*

$$\sum_{k=-n}^{n}[\Delta^{R}f(x_{kn})]^2=\frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varrho_{kn})^2\sin^{2R}\frac{k\pi}{2n+1} \quad (n=1,2,\ldots), \tag{1.8.3}$$

ahol

$$\varrho_{kn}=\sqrt{[a_{kn}(f)]^2+[b_{kn}(f)]^2}.$$

Bizonyítás. Minthogy $\tilde{S}_n(x,f)$ az $f(x)$ függvényt interpolálja az $\{x_{kn}\}$ alappontokban, ezért

$$\sum_{k=-n}^{n}[\Delta^{R}f(x_{kn})]^2=\sum_{k=-n}^{n}[\Delta^{R}\tilde{S}_n(x_{k_n},f)]^2. \tag{1.8.4}$$

Világos, hogy $\Delta^{R}\tilde{S}_n(x,f)$ — ugyanúgy, mint $\tilde{S}_n(x,f)$ — egy legfeljebb n-ed rendű triginometrikus polinom, tehát a Parseval egyenlőség szerint

$$\sum_{k=-n}^{n}[\Delta^{R}\tilde{S}_n(x_{kn},f)]^2=(2n+1)\sum_{k=-n}^{n}|c_{kn}[\Delta^{R}\tilde{S}_n(f)]|^2 \tag{1.8.5}$$

(l. A. ZYGMUND [2], X (2.8)-at). Tehát az (1.8.3) összefüggés igazolásához ki kell számítanunk az $|c_{kn}[\Delta^{R}\tilde{S}_n(f)]|^2$ kifejezéseket. Minthogy

$$\tilde{S}_n(x,f)=\sum_{k=-n}^{n}c_{kn}(f)e^{ikx},$$

ezért

$$\Delta^{R}\tilde{S}_n(x,f)=\sum_{k=-n}^{n}c_{kn}(f)\Delta^{R}e^{ikx}=\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}c_{kn}(f)\left(\frac{1-e^{ikh}}{2}\right)^{R}e^{ikx},$$

tehát

$$|c_{kn}[\Delta^R \tilde{S}_n(f)]|^2 = |c_{kn}(f)|^2 \sin^{2R} \frac{k\pi}{2n+1} = \tag{1.8.6}$$

$$= \frac{1}{4}(\varrho_{|k|,n})^2 \sin^{2R} \frac{k\pi}{2n+1} \quad (|k| = 1, 2, \ldots, n).$$

Az (1.8.3) összefüggés következik (1.8.4)—(1.8.6)-ból.

Megjegyzem, hogy ezt a segédtételt az $R=1$ esetre D. L. BERMAN [2] bizonyította be.

Most már bebizonyítható az alábbi Wiener-típusú tétel, amelyet az $R=1$ esetre az Olvasó a fentebb idézett Berman-cikkben találhat meg.

1.8.4. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ egy olyan 2π szerint periodikus függvény, amelynek nincsen másodfajú szakadása, továbbá minden x-re az $f(x)$ szám $f(x-0)$ és $f(x+0)$ között helyezkedik el. Ha az $f(x)$ függvény korlátos R-változású ($R=1, 2, \ldots$) az $\{x_{kn}\}$ alappontokban, azaz*

$$V(f, R, \{x_{kn}\}) = \sup_n \sum_{k=-n}^{n} |\Delta_h^R f(x_{kn})| < \infty \quad \left(h = \frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

abban az esetben $f \in \tilde{C}_1$ akkor és csak akkor, ha teljesül a következő feltétel:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^R} \sum_{k=1}^{n} k^R \varrho_{k,n} = 0, \tag{1.8.7}$$

ahol

$$\varrho_{kn} = \sqrt{[a_{kn}(f)]^2 + [b_{kn}(f)]^2}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha $f(x)$ folytonos, akkor az 1.8.3. Segédtétel következtében*

$$\frac{1}{n^R} \sum_{k=1}^{n} k^R \varrho_{k,n} \leqq C(R) \left\{ \sum_{k=-n}^{n} [\Delta^R f(x_{kn})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq C(R, V) \left[\omega_R \left(f; \frac{2\pi}{2n+1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = o(1).$$

Tegyük most fel, hogy (1.8.7) teljesül és legyen $\{n_i\}$ a természetes számoknak egy olyan szigorúan monoton növekvő részsorozata, amelyre

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i^R} \sum_{k=0}^{n_i} k^R \varrho_{k,n_i} = 0.$$

Az 1.8.2. és 1.8.3. Segédtételek szerint

$$\sum_{k=-n_i}^{n_i} [\Delta^R f(x_{k,n_i}[)]^2 \leqq C(R) n_i \sum_{k=1}^{n_i} (\varrho_{k,n_i})^2 \frac{k^{2R}}{n_i^{2R}} \leqq \tag{1.8.8}$$

$$\leqq C(R, V) \frac{1}{n_i^R} \sum_{k=1}^{n_i} \varrho_{k,n_i} k^R = o(1),$$

* $C(\,)$ a zárójelen belül kiírt paraméterektől függő véges és pozitív konstansot jelöl.

viszont, ha az $f(x)$ függvény csak első fajú szakadásokkal bír— és azokkal ténylegesen bír —, akkor (1.8.8) bal oldala nem tarthat nullához, ha $i \to \infty$. Az $f(x)$ függvény tehát szükségszerűen folytonos. A tétel igazolást nyert.

1.9. § *Néhány finomabb becslés a triginometrikus interpolációs polinomokkal kapcsolatban*

Jelen paragrafusban néhány olyan becslést adok bizonyítás nélkül az

$$|f(x)-\tilde{S}_n(x,f)|$$

kifejezésre, amely érzékenyen reagál arra, hogy a vizsgált x pont milyen távolságra helyezkedik el a hozzá legközelebb eső

$$x_{kn}=\frac{2k\pi}{2n+1} \quad (|k|=0,1,2.\ldots)$$

csomóponttól.

1.9.1. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ r-szer ($r=0,1,2,\ldots$) folytonosan differenciálható, 2π szerint periodikus függvény, $R(>r)$ tetszőleges, de rögzített egész szám. Jelölje α — rögzített n érték mellett — az x ponthoz legközelebb fekvő x_{kn} csomópont indexét (ha két ilyen csomópont van, akkor a kisebbik indexét). Ha $n>R$, akkor*

$$\tilde{S}_n(x,f)-f(x)=$$

$$=(-1)^R\frac{2}{2n+1}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq -R+\alpha}}^{n}\Delta^R_{\frac{2\pi}{2n+1}}f(x_{kn})D_n(x-x_{k+R,n})+$$

$$+O(1)n^{-R}\omega\left(f^{(r)};\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{n}\right),$$

ahol az $O(1)$ kifejezés csak r-től és R-től függ.

Jelölje $H(v,\omega)$ azoknak a $\tilde{C}_1$-beli $f(x)$ függvényeknek az osztályát, amelyeknek a $[-\pi,\pi]$ szakaszon a változása, illetve a folytonossági modulusa nem nagyobb egy előre megadott nem-negatív v számnál, illetve $\omega(\delta)$ majoránsnál.

1.9.2. TÉTEL. *Érvényes a*

$$\sup_{f\in H(v,\omega)}|f(x)-\tilde{S}_n(x,f)|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\log\left\{1+\min\left[n,\frac{v}{2\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)}\right]\right\}\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})+x|}{n}\right)\quad(n=1,2,\ldots)$$

aszimptotikus egyenlőség.

Legyen a továbbiakban $f(x)$ egy r-szer ($r=0,1,2,\ldots$) folytonosan differenciálható, 2π-periodikus függvény, $\omega(\delta)$ egy tetszőleges majoráns, N egy természetes szám.

1.9.3. Tétel. *Ha* $f \in M(N, r+1)$ *(l. az* 1.6. §-*t) és* $\omega(f^{(r)}; \delta) \leqq \omega(\delta)$, *akkor*

$$|f(x) - \tilde{S}_n(x, f)| = O(1) \frac{\log(N+1)}{n^r} \omega\left(\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

feltéve, hogy

$$\delta \int_{\delta}^{2\pi} \frac{\omega(t)}{t} dt = O[\omega(\delta)].$$

Az $O(1)$ *kifejezés csakis r-től és* ω*-tól függ.*

1.9.4. Tétel. *Ha* $f \in M(N, R)$, *ahol* $R > r+1$, *és* $\omega(f^{(r)}; \delta) \leqq \omega(\delta)$, *akkor*

$$|f(x) - \tilde{S}_n(x, f)| = O(1) \frac{\log(N+1)}{n^r} \omega\left(\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ahol az $O(1)$ *kifejezés csak r-től és R-től függ.*

Fourier-sorokra az 1.9.2. Tételt V. G. Kominar [1], az 1.9.3. és 1.9.4. tételeket pedig G. I. Natanszon [1] bizonyította be. Fourier-sorok esetén — természetesen — az $\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|$ tényező nem jelenik meg, hiszen ott minden x pont egyenrangú.

РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Г. П. НЕВАИ

В настоящей работе мы введем новый метод при помощи которого некоторые исследования одномерных и многомерных рядов Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов), их сопряженных, далее интерполяционных процессов Лагранжа основанных на корнях классических (Якоби, Эрмит, Лагер) ортогональных многочленов окажутся почти очевидными; мы получим такие результаты при помощи элементарных рассуждений, которые (даже их существенно упрощенные варианты) до сих пор были изучены различными авторами в длительных работах.

Сущность нашего метода заключается в том что при помощи тождества

$$a \equiv \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}$$

исследование сходимости рассматриваемых приближающих процессов мы сведем к исследованию некоторых сумм типа Бернштейна—Рогозинского. Эти последние могут быть изучены намного проще чем исходные процессы.

В первой части нашей работы мы исследуем приближение непрепывных, периодических функций одной и многих переменных с помощью тригонометрических рядов Фурье и тригонометрических интерполяционных сумм, а во второй части мы занимаемся полиномиальным Лагранжевым интерполированием непрерыных, непериодических функций одной переменной.

После введения нужных в первой части определений в § 1.2 мы даем оценки для разности между уклонением сумм Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов) и и их сопряженных. В качестве следствия мы получим теорему Фейера, согласно которой если обе f и $\tilde{f}$ непрерывны, тогда из равномерной сходимости ряда Фурье одной из них вытекает также равномерная сходимость ряда Фурье другой функции. Результаты § 1.2 применяются в последующих параграфах первой части.

В § 1.3 мы даем такие оценки для уклонения одномерных и многомерных сумм Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов) от непрерыных, периодических функций одной и многих переменных, которые сформулированы в терминологии модулей гладкости и мер наилучших приближений. В частности мы показываем, что разность между уклонением сумм Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов) и некоторой раз-

ностью этого же самого уклонения есть весьма малая величина, например в случае одной переменной она имеет порядок меры наилучшего приближения. Далее мы найдем многомерный аналог условия Дини-Липшица. Мы определим также оптимальные значения некоторых постоянных, участвующих в оценках уклонения сумм Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов). Мы получим такие а постериори оценки для скорости сходимости сумм Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов), которые самы по себе улучшаются при вычислении все большего и большего числа данных:

$$|f(x)-S_n(x,f)| = O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)+\omega_R\left(S_n(f);\frac{1}{n}\right)\right] \quad (n=1,2,\ldots) \quad (f\in C_{2\pi};\ R=1,2,\ldots).$$

В § 1.4 мы показываем что классическое условие Дини—Липшица для сходимости рядов Фурье (тригонометрических интерполяционных многочленов) можно заменить условием

$$f(x+\delta)-f(x) \geqq -\frac{\varepsilon(\delta)}{|\log\delta|} \quad (\delta \geqq 0, \varepsilon(\delta)(\geqq 0) \xrightarrow[\delta\to+0]{} 0),$$

которое мы назавьем односторонним условием Дини—Липшица. Из нашего результата вытекают также некоторые обобщения результатов Р. Салема и А. Зигмунда.

В § 1.5 мы доказываем, что если непрерывная, периодическая функция многих переменных имеет L_1 модули гладкости малого порядка, тогда ее ряд Фурье сходится равномерно, далее мы найдем также скорость сходимости ее сумм Фурье.

В § 1.6 мы исследуем суммы Фурье (тригонометрические интерполяционные многочлены) кусочно монотонных (многократно монотонных) функций и доказываем что эти приближающие процессы вообще говорья дают приближение порядка наилучшего. Наши результаты дополняют исследования Г. И. Натансона.

В § 1.7 мы определим скорость сходимости сумм Фурье функций, имеющих ограниченное отклонение. Эти функции были введены Ж. Адамаром. Далее мы даем оценки для скорости сходимости сумм Фурье непрерывных, периодических функций в терминологии L_1 модулей гладкости.

В § 1.8 при помощи коэфициентов Фурье—Лагранжа мы даем необходимое и достаточное условие чтобы функция органиченной R вариации была непрерывной.

В § 1.9 мы даем такие оценки для скорости сходимости тригонометрических интерполяционных многочленов, которые весьма чувствительно реагируют на тот факт, что рассматриваемое значение аргумента данной функции как далеко расположено от множества узлов интерполяции.

В первом параграфе второй части мы введем некоторые определения, а в § 2.2 мы рассматриваем интерполяционные процессы Лагранжа, основанные на корнях классических (Якоби, Эрмит, Лагер) ортогональных многочленов и показываем, что и в этом случае хорошо известное условие Дини—Липшица, которое было исследовано в работах Г. Сеге, Г. Фройда и автора, можно заменить односторонним условием Дини—Липшица. Из этого вытекает также, что эти процессы сходятся для функций имеющих ограниченное изменение.

В § 2.3 мы занимаемся вопросом, как быстро процессы, рассмотренные в § 2.2 сходятся к функциям имеющим ограниченное Φ изменение.

FOURIER SERIES AND INTERPOLATION

G. P. NÉVAI

In this paper we introduce a new method with the aid of which certain investigations of one- and multi-dimensional Fourier-series, trigonometrical interpolational processes and their conjugates, further of Lagrangian interpolating processes based on the zeros of the classical (Jacobi, Hermite, Laguerre) orthogonal polynomials become almost obvious; we obtain such results by elementary calculations which (and even their simplified variants) had been proved before by much more difficult way.

The main point of our method is that with aid of the identity

$$a \equiv \frac{a-b}{2}+\frac{a+b}{2}$$

we trace the investigations of the convergence of the above mentioned approximating processes back to investigations of some sums of Bernstein—Rogosinski type. These latter may be treated much simpler than the former processes.

In the first part of the present paper we consider the approximation of continuous periodic functions of one and several variables by trigonometric Fourier series and trigonometric interpolational sums, in the second part we deal with Lagrangian interpolation of non-periodic functions.

After the introductory paragraph 1.1 in the § 1.2 we give several estimations for the deviation of the Fourier partial sums (trigonometric interpolating polynomials) and of their conjugates. As a consequence we obtain a FEJÉR's theorem which says that if both f and $\bar{f}$ are continuous then the convergence of the Fourier series of f or $\bar{f}$ implies the convergence of the Fourier series of the other function. The results obtained in the § 1.2 are applied in the further paragraphs of the first part.

In the § 1.3 we give such estimations for the deviation of one- and multidimensional Fourier partial sums (trigonometric interpolating polynomials) from continuous periodic functions of one and several variables which are formulated in terminology of moduli of smoothness of higher orders and of degrees of best approximations. Among other things we show that the difference between the deviations of the Fourier partial sums (trigonometric interpolating polynomials) and certain differences of these deviations is very small, in particular, in the case of functions of one variable this difference is of order of the best approximation. Further we find the multi-dimensional analogue of the Dini—Lipschitz convergence test. We define also the exact value of the constants in some estimations of the deviation of the Fourier partial sums (trigonometric interpolating polynomials). We give such estimations of a posteriori type for the speed of convergence of the Fourier partial sums (trigonometric interpolating polynomials) which become better and better if we compute more and more data:

$$|f(x)-S_n(x,f)| = O_R\left[\omega_R\left(f;\frac{1}{n}\right)+\omega_R\left(S_n(f);\frac{1}{n}\right)\right] \quad (n=1,2,\ldots)\ (f\in C_{2\pi};\ R=1,2,\ldots)$$

In the § 1.4 we show that the condition in the classical Dini—Lipschitz convergence test may be replaced by the so called one-sided Dini—Lipschitz condition which says:

$$f(x+\delta)-f(x) \geqq -\frac{\varepsilon(\delta)}{|\log\delta|} \quad (\delta \geqq 0, \varepsilon(\delta)\ (\geqq 0) \xrightarrow[\delta\to+0]{} 0).$$

From this we obtain also generalizations of some results due to R. SALEM and A. ZYGMUND.

In the § 1.5 we prove that if the L_1 moduli of continuity of higher order of continuous, periodic functions several variables are small then their Fourier-series converge uniformly and we define also the speed of convergence.

In the § 1.6 we investigate the Fourier partial sums (trigonometric interpolating polynomials) of picewise monotonic and picewise multiple monotonic functions and we prove the these approximating processes converge in general with order of the best approximation. Our results complete some investigations due to G. I. NATANSON.

In the § 1.7 we define the speed of convergence of Fourier partial sums of functions of bounded deviation introduced by M. J. HADAMARD. Further we give estimations in terminology of L_1 moduli of smoothness for the speed of convergence of the Fourier partial sums of continuous periodic functions.

In the § 1.8 we give a necessary a sufficient condition with the aid of the Fourier—Lagrange coefficients so that a function of bounded R-th variation would be continuous.

In the § 1.9 we give such estimations for the speed of convergence of the trigonometric interpolating polynomials which are sensitive to the distance between the argument of the function we consider and the set of the nodes of interpolation.

In the § 2.1 we introduce the notations we use in the second part. In the § 2.2 we consider the Lagrangian interpolating processes based on the zeros of the classical (JACOBI, HERMITE, LAGUERRE) orthogonal polynomials and we show that even in this case the well known Dini—Lipschitz condition due to G. SZEGŐ, G. FREUD and myself may be replaced by the one-sided Dini—Lipschitz condition. As a consequence we also obtain that these processes converge also for functions of bounded variation.

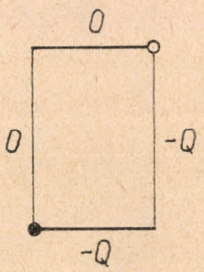
In the last § 2.3 we deal with question that how rapidly converge the processes considered in the § 2.2 to functions of bounded Φ variation introduced by L. C. YOUNG.

VÍZTÁROLÓ ÁRAMLÁSI VISZONYAINAK MEGHATÁROZÁSA C SZUMMÁLHATÓ SOROK ALKALMAZÁSÁVAL

HOFFMANN ANDOR

A dolgozat pontszerű forrás, ill. nyelő esetén adott alakú víztároló áramlási viszonyait tárgyalja. Ez az idealizált modell fizikailag igen jó megközelítést ad, mert a víztároló méreteihez képest a víz bevezetésének (forrás), ill. elvezetésének (nyelő) a térbeli kiterjedése elhanyagolható.

Ismeretes, hogy a forrás, ill. nyelő leírható a Dirac-féle delta disztribúcióval, amelyet itt a tároló véges kiterjedése miatt periodikussá tehetünk; ezt pedig előállíthatjuk egy $(C, 1)$ szummálható Fourier—Stieltjes-sorral. A megoldást ugyancsak ilyen alakú sorral kapjuk, amely a tartomány belsejében közönséges értelemben is konvergál, mégpedig egyenletesen.



1. ábra

Tekintsünk — síkáramlási problémaként — egy téglalap alakú víztárolót, amelynek egyik sarkán egy Q erősségű forrás, az ebből kiinduló átló másik végpontján pedig ugyancsak egy Q erősségű nyelő működik. Határozzuk meg a sebesség- mezőt, ill. az áramvonalakat.

Az $u=u(x, y)$ potenciálfüggvény — feltéve, hogy ideális közeg síkáramlását tekintjük — kielégíti a

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Laplace-féle differenciálegyenletet.

A peremfeltétel a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = f(x, y)$$

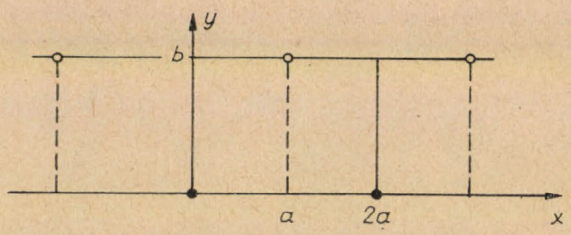
Neumann-feladatot kell hogy kielégítse, ahol $\frac{\partial u}{\partial n}$ a befelé mutató normális szerinti deriváltat jelenti és $f(x, y)$ adott függvény.

Tekintettel arra, hogy a forrás, valamint a nyelő idealizálva egy pontra zsugorodik és a pontokban meghatározott véges mennyiségű folyadékot kell a tartályba be-, ill. kiáramoltatni, a $\frac{\partial u}{\partial n}$ e pontok kivételével mindenütt zérus lesz; e pontokban pedig végtelenné válik, mégpedig úgy, hogy a $\frac{\partial u}{\partial n}$ integrálja a beáramlási oldal, ill. a kiáramlási oldal mentén a forrás, ill. nyelőerősséget adja.

Ezt a tényt tekintetbe véve és a differenciálegyenlet megoldására a Bernoulli—Fourier-módszert alkalmazva az $f(x, y)$ az $y=0$ és $y=b$ oldalakon a Dirac-féle

periodikus delta disztribúcióval lesz egyenlő; a másik két oldalon pedig azonosan zérus lesz.

Az $x=0$ és $x=a$ oldalakon a szimmetriaviszonyok miatt nem lesz átáramlás (l. 2. ábra).



2. ábra

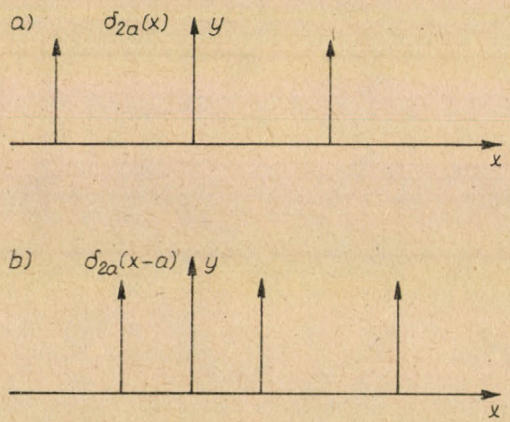
Az előbbi meggondolásokat figyelembe véve a peremfeltételek a következők lesznek

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = Q\delta_{2a}(x) = \frac{Q}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{a}x\right],$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = Q\delta_{2a}(x-a) = \frac{Q}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{a}x\right], \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0.$$

A $\delta_{2a}(x)$, ill. $\delta_{2a}(x-a)$ periodikus disztribúciók



3. ábra

Az $u(x, y)$ potenciálfüggvény a következő lesz

$$u = \frac{Q}{a}y+\frac{2Q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(-1)^n-\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right]\cos\frac{n\pi}{a}x. \tag{3}$$

Ez a függvény kielégíti a *DE*-et és a peremfeltételt. Belátható, hogy az u függvényt előállító függvénysor a $0 \leqq x \leqq a$, $0 < y < b$ tartomány minden zárt résztartományában egyenletesen konvergál.

A peremen pedig a konvergenciát disztribúció értelemben — azaz a Cesàro-féle közepeléssel — tekintjük.

A (3) sor konvergenciája rögtön látható a szögletes zárójelben levő tagokból, mert

$$-\operatorname{cth}\frac{n\pi}{a}b\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y=-e^{-\frac{n\pi}{a}y}-\frac{e^{-\frac{n\pi}{a}(2b-y)}+e^{-\frac{n\pi}{a}(2b+y)}}{1-e^{-\frac{2n\pi}{a}b}}$$

és $y<b$; és ehhez hasonló egyenlőségre vezethető vissza — elemi számítással — a deriváltak sorának konvergenciája is a tartomány belsejében.

A sebességmező a tartomány belsejében:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2Q}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{Q}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y+\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\frac{n\pi}{a}x\right].$$

Ez az előzőek szerint a tartomány zárt résztartományában egyenletesen konvergens.

A Cauchy—Riemann-egyenletek segítségével (4)-ből meghatározhatjuk a $v(x, y)$ áramfüggvényt:

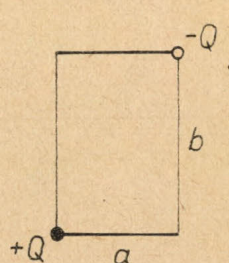
$$v(x,y)=-\frac{Q}{a}x-\frac{2Q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b}{n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y+\frac{1}{n}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y\right]\cdot \tag{5}$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Nézzük az áramfüggvényt a peremen:

$$\begin{aligned} &v(0,y)=0\\ &v(a,y)=-Q\\ &v(x,0)=-\frac{Q}{a}x-\frac{2Q}{\pi}\frac{\pi}{a}\frac{a-x}{2}=-Q\\ &v(x,b)=\frac{Q}{\pi}\left[-\frac{\pi}{a}x+\frac{\pi}{a}x\right]=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Tehát a perem áramvonal.



4. ábra

Bevezetve az

$$\alpha_i = \frac{\pi}{a} x_i; \quad \beta_j = \frac{\pi}{a} y_j; \quad \beta = \frac{\pi}{a} b$$

$$0 \leqq x_i \leqq a; \quad 0 \leqq y_j \leqq b$$

jelöléseket a (4) és (5) kifejezést számításra alkalmas alakban írhatjuk:

(7)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) =$$

$$= \frac{2Q}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\beta_j} + e^{-n(2\beta-\beta_j)} + (-1)^{n+1}[e^{-n(\beta-\beta_j)} + e^{-n(\beta+\beta_j)}]}{1-e^{-2n\beta}} \cdot \sin n\alpha_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\beta_j} - e^{-n(2\beta-\beta_j)} + (-1)^n[e^{-n(\beta-\beta_j)} - e^{-n(\beta+\beta_j)}]}{1-e^{-2n\beta}} \cdot \cos n\alpha_i\right],$$

(8)
$$v(x_i, y_j) =$$

$$= -\frac{Q}{\pi}\left[\alpha_i + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\beta_j} - e^{-n(2\beta-\beta_j)} + (-1)^n[e^{-n(\beta-\beta_j)} - e^{-n(\beta+\beta_j)}]}{n(1-e^{-2n\beta})} \cdot \sin n\alpha_i\right].$$

A sebességmegoszlás a tartomány peremén a (7) szerint:

(9)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, 0) =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[2\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha_i + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\beta} + (-1)^{n+1} e^{-n\beta}}{1-e^{-2n\beta}} \sin n\alpha_i\right] =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\beta} + (-1)^{n+1} e^{-n\beta}}{1-e^{-2n\beta}} \sin n\alpha_i\right],$$

(10)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, b) =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin n\alpha_i + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\beta} + (-1)^{n+1} e^{-2n\beta}}{1-e^{-2n\beta}} \sin n\alpha_i\right] =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\beta} + (-1)^{n+1} e^{-2n\beta}}{1-e^{-2n\beta}} \sin n\alpha_i\right]$$

$$(0 \leqq x_i \leqq a),$$

(11)
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, y_j) =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n\beta_j}-e^{-n(2\beta-\beta_j)}+(-1)^n[e^{-n(\beta-\beta_j)}-e^{-n(\beta+\beta_j)}]}{1-e^{-2n\beta}}\right],$$

(12)
$$\frac{\partial u}{\partial y}(a, y_j) =$$

$$= \frac{Q}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n[e^{-n\beta_j}-e^{-n(2\beta-\beta_j)}]+e^{-n(\beta-\beta_j)}-e^{-n(\beta+\beta_j)}}{1-e^{-2n\beta}}\right]$$

$$(0 \leqq y_j \leqq b).$$

A (9) és (10) egyenlőségeknél felhasználtuk a

$$\operatorname{ctg} x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2nx \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin 2nx$$

disztribúció-egyenlőségeket.

A (9) és (10) egyenleteket az $x_i \to +0$, ill. $x_i \to a-0$ esetekben szemlélve látható, hogy a (2) peremfeltételekben szereplő „egydimenziós" periodikus disztribúciók síkbeli forrásmegoldást adnak. Ebből a sebességtér, ill. az áramvonalak szimmetriája következik a (0, 0), (a, b) átlóra vonatkozólag.

IRODALOM

[1] Mikusiński, J.—Sikorski, R.: The elementary theory of distributions (I.) Rozprawy Matematyczne XII. Warszawa, 1957.

[2] Fenyő, I.: Über eine technische Anwendung der Distributionentheorie. Periodica Polytechnica Electr. Engin., **9**. 62 (1965)

[3] Gelfand, I. M.—Schilow, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I. VEB Verlag, Berlin, 1967.

[4] De Jager, E. M.: Applications of distributions in mathematical physics. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat téglatest alakú víztároló medencében levő áramlási viszonyokat vizsgálja a feladatot síkáramlásra egyszerűsítve. A vizsgálat így egy téglalapra redukálódik, amelynek egyik sarkán egy pontszerű forrás és az ebből kiinduló átló másik végpontján egy pontszerű nyelő van. Így a feladat matematikailag a kétdimenziós Laplace-egyenletre vonatkozó Neumann-feladat lesz. A peremen pedig — a pontszerű forrás ill. nyelő miatt — a Dirac-féle delta disztribúció adódik. A megoldás egzakt előállítható és a kapott végtelen sor — az $y=0$ és $y=b$ peremhez egészen közeli pontokat kivéve — gyorsan konvergál. Magán a peremen szintén gyors a konvergencia, persze itt a konvergenciát disztribúció értelemben, azaz a Cesaro- ill. Fejér-féle közepeléssel tekinti.

ПРИМЕНЕНИЕ C-СУММИРУЕМЫХ РЯДОВ КОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ В РЕЗЕРВУАРЕ

А. ГОФМАН

USE OF (*C*, 1) SUMMABILITY SERIES IN THE FLOW IN WATER BASINS

A. HOFFMANN

The paper deals with two dimensional flow in water basins of rectangular contour. In the two opposite corners of the rectangle a point source and sink are placed respectively. The case is reduced to a Neumann boundary value problem for the Laplace equation. On the boundary one gets the Dirac delta distribution because of the singularities. An exact solution is presented in form of an infinite series, which converges rapidly except of points very near the boundaries $y=0$ and $y=b$. On the boundary itself the convergence is also rapid, but in the sense of (*C*, 1) summability.

EGY A KOMPLEX EGYSÉGKÖRRE VONATKOZÓ INTERPOLÁCIÓS PROBLÉMÁRÓL

SZABADOS JÓZSEF

VÉRTESI PÉTER vetette fel az alábbi problémát: Adott a komplex egységkör kerületén n különböző pont:

$$z_k = e^{it_k} \quad (k = 1, \ldots, n; \quad 0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 2\pi), \tag{1}$$

továbbá n tetszőleges komplex szám: $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Legyen $t_{n+1} = t_1$, és

$$d_n = \min_{1 \leqq k \leqq n} (t_{k+1} - t_k). \tag{2}$$

Konstruálandó olyan $p(z)$ polinom, amely kielégíti az alábbi feltételeket:

(i) $$\operatorname{grad} p(z) \leqq \frac{c_1}{d_n},$$

(ii) $$p(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

(iii) $$\max_{|z|=1} |p(z)| \leqq c_2 \max_{1 \leqq k \leqq n} |w_k|,$$

ahol c_1 és c_2 pozitív, abszolút konstansok.

Ezt a problémát elsőnek HALÁSZ GÁBOR oldotta meg (tudomásom szerint a megoldást nem publikálta). Az ő konstrukciójában c_1 nincs explicite meghatározva, c_2 értéke viszont 1, ami az elérhető legkisebb konstans.

Az alábbiakban én egy a HALÁSZ megoldásától teljesen eltérő konstrukciót adok meg,

$$c_1 = 12\pi \quad \text{és} \quad c_2 = \frac{75\pi^2}{300 - 2\pi^2} \approx 2{,}63$$

értékekkel. A c_2 tekintetében ez ugyan gyengébb, mint HALÁSZ eredménye, de ha az (i) és (iii)-ból a Bernstein-egyenlőtlenség alapján adódó

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leqq \frac{c_1 c_2}{d_n} \max_{1 \leqq k \leqq n} |w_k|$$

becslést tekintjük, akkor itt az általam megadott $c_1 c_2$ konstans explicit meghatározott, míg HALÁSZnál nem, s nála valószínűleg egy sokkal nagyobb érték adódna.

Megjegyzendő még, hogy a probléma interpolációelméleti hátterű (erről később még említést teszek), s ilyen vonatkozásban c_1 és c_2 értéke teljesen közömbös.

Rátérve a konstrukció leírására, legyen

$$\zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{m}} \quad (k = 1, \dots, m),$$

ahol

$$m = \left[\frac{6\pi}{d_n}\right] + 1 > \frac{6\pi}{d_n} \geqq 3n. \tag{3}$$

Ekkor

$$t_{k+1} - t_k \geqq d_n \geqq \frac{6\pi}{n} \tag{4}$$

miatt minden t_k-hoz található egy l_k úgy, hogy

$$\left|t_k - \frac{2\pi l_k}{m}\right| \leqq \frac{\pi}{m} \quad (k = 1, \dots, n; \quad 1 \leqq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leqq m). \tag{5}$$

Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = w_j \quad (j = 1, \dots, n), \tag{6}$$

ahol

$$a_{jk} = \begin{cases} \left\{\dfrac{(z_j^m - 1)\zeta_{l_k}}{m(z_j - \zeta_{l_k})}\right\}^2, & \text{ha} \quad z_j \neq \zeta_{l_k} \\ 1, & \text{ha} \quad z_j = \zeta_{l_k}. \end{cases} \tag{7}$$

Itt (5) miatt

$$|a_{jj}| = \frac{1}{m^2}\left|\frac{z_j^m - 1}{z_j - \zeta_{l_j}}\right|^2 = \left(\frac{\sin m\dfrac{t_j - \dfrac{2\pi l_j}{m}}{2}}{m \sin \dfrac{t_j - \dfrac{2\pi l_j}{m}}{2}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\dfrac{m}{\pi}}{\dfrac{m}{2}}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \quad (j = 1, \dots, n), \tag{8}$$

továbbá

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \leqq \frac{4}{m^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{|z_j - \zeta_{l_k}|^2} = \frac{4}{m^2}\left(\sum_{\substack{\left|t_j - \frac{2\pi l_k}{m}\right| \leqq \pi \\ k \neq j}} + \sum_{\left|t_j - \frac{2\pi l_k}{m}\right| > \pi}\right) \frac{1}{|z_j - \zeta_{l_k}|^2}.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy itt az első szumma nem kisebb, mint a második. Ekkor

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \leqq \frac{2}{m^2} \sum_{\substack{\left|t_j - \frac{2\pi l_k}{m}\right| \leqq \pi \\ j \neq k}} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{t_j - \dfrac{2\pi l_k}{m}}{2}} \leqq \frac{2\pi^2}{m^2} \sum_{\left|t_j - \frac{2\pi l_k}{m}\right| \leqq \pi} \frac{1}{\left(t_j - \dfrac{2\pi l_k}{m}\right)^2}.$$

Mármost (4) és (5) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\left|t_j - \frac{2\pi l_k}{m}\right| \geqq |t_j - t_k| - \left|t_k - \frac{2\pi l_k}{m}\right| \geqq \frac{\pi}{m}(6|j-k| - 1),$$

és így végülis

$$(9) \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} |a_{jk}| \leqq 2 \sum_{k\neq j} \frac{1}{(6|j-k|-1)^2} \leqq \frac{4}{25} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{75}.$$

(8) és (9) azt mutatják, hogy a (6) egyenletrendszer egyértelműen megoldható $\left(\text{lévén } \frac{4}{\pi^2} > \frac{2\pi^2}{75}\right)$. Legyen $x_{j'}$ maximális abszolút értékű az $x_1, \ldots, x_n$ számok között. Ekkor

$$w_{j'} = a_{j'j'}x_{j'} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j'}}^{n} a_{j'k}x_k$$

miatt, felhasználva a (8) és (9) becsléseket,

$$|w_{j'}| \geqq |a_{j'j'}| \cdot |x_{j'}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j'}}^{n} |a_{j'k}| \cdot |x_k| \geqq |x_{j'}| \left(|a_{j'j'}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j'}}^{n} |a_{j'k}|\right) \geqq \frac{1}{c_2} |x_{j'}|$$

adódik, vagyis

$$(10) \qquad \max_{1\leqq k\leqq n} |x_k| \leqq c_2 \max_{1\leqq k\leqq n} |w_k|.$$

Ezen előkészítések után a szerkesztendő polinom a következőképpen adható meg:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left\{\frac{(z^m-1)\zeta_{l_k}}{m(z-\zeta_{l_k})}\right\}^2.$$

Ugyanis (3) miatt grad $p(z) \leqq 2m-2 \leqq \frac{12\pi}{d_n}$; továbbá (6) és (7) az (ii) fennállását jelentik. Végül (10) alapján, $z=e^{it}$ jelöléssel,

$$|p(z)| \leqq \max_{1\leqq k\leqq n} |x_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m^2} \left|\frac{z^m-1}{z-\zeta_{l_k}}\right|^2 \leqq$$

$$\leqq c_2 \max_{1\leqq k\leqq n} |w_k| \cdot \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\sin m \dfrac{t-\dfrac{2\pi k}{m}}{2}}{m \sin \dfrac{t-\dfrac{2\pi k}{m}}{2}} \right| \equiv c_2 \max_{1\leqq k\leqq n} |w_k|$$

adódik. Ugyanis, ha az utolsó trigonometrikus összegből egyet levonunk, akkor egy olyan, legfeljebb $m-1$-edfokú trigonometrikus polinomot kapunk, amely deriváltjával együtt eltűnik a $\frac{2\pi k}{m}$ $(k=1, \ldots, m)$ helyeken, s így azonosan 0. Ezzel (iii)-t is beláttuk.

Megjegyezzük, hogy m definíciójának megfelelő módosításával elérhetjük a $c_2 = \frac{\pi^2}{4}+\varepsilon$ értéket, ahol ε egy tetszőleges kis pozitív szám, de ennek az az ára, hogy c_1 értéke megnő, és végtelenhez tart, midőn $\varepsilon \to +0$.

A fenti konstrukció említett interpolációelméleti alkalmazása a következő. Legyen $\omega(h)$ egy tetszőleges folytonossági modulus, és jelöljük $AC(\omega)$-val azon $f(z)$ függvények osztályát, melyek analitikusak a $|z|<1$ nyílt körlemezen, s amelyek $\omega(f, h)$ folytonossági modulusa a $|z|\leqq 1$ zárt körlemezen $O(\omega(h))$ nagyságrendű. Legyen továbbá

$$L_n(f, z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\, l_k(z)$$

az $f(z)$ függvénynek az (1) alappontokra vonatkozó Lagrange-féle interpolációs polinomja. Itt $l_k(z)$ az ún. interpolációs alapfüggvény, és

$$\lambda_n = \max_{|z|=1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(z)|$$

az interpolációs eljárás Lebesgue-függvénye. A Jackson-tétel komplex analogonja biztosítja a

$$\max_{|z|=1} |f(z) - L_n(f, z)| = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n\right) \quad (f \in AC(\omega))$$

felső becslést. Amennyiben $\lim_{h=+0} h/\omega(h) = 0$, a fenti $p(z)$ polinomok segítségével megadható egy olyan $f^*(z) \in AC(\omega)$, amelyre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\max_{|z|=1} |f^*(z) - L_n(f^*, z)|}{\omega(d_n)\lambda_n} > 0.$$

Ez pontos analogonja az [1]-beli 2. tételnek, s a bizonyítás is szóról szóra azonos. A megfelelő probléma a Lip 1 osztályra vonatkozólag nyitott.

IRODALOM

[1] О. КИШ, Замечания о порядке погрешности интерполяции, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), 339—346. old.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ОТНОСЯЩЕЙСЯ КОМПЛЕКСНОЙ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Й. САБАДОШ

ON AN INTERPOLATION PROBLEM FOR THE COMPLEX UNIT CIRCLE

J. SZABADOS

To the numbers (1) and arbitrary complex numbers $w_1, \ldots, w_n$ a polynomial $p(z)$ is constructed such that

(i) $$\deg p(z) \leqq \frac{12\pi}{d_n} \quad (d_n \text{ is defined by (2)})$$

(ii) $$p(z_k) = w_k \quad (k = 1. \ldots, n)$$

and

(iii) $$\max_{|z|=1} |p(z)| \leqq \frac{75\pi^2}{300 - 2\pi^2} \max_{1\leqq k\leqq n} |w_k|$$

hold. The result is applied to the problem of lower estimate for the error of Lagrange interpolation.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A RAMSEY-SZÁM EGY KONSTRUKTÍV BECSLÉSE

NAGY ZSIGMOND

$n \to (k)_2^2$, ha minden n szögpontú gráf olyan, hogy vagy maga, vagy a komplementuma tartalmaz k szögpontú teljes gráfot. RAMSEY tételének [3] egy speciális esete a következőt állítja: Minden k egész számhoz létezik olyan minimális $n(k)$ egész, melyre $n \to (k)_2^2$. Ha $k \geqq 3$, a $2^{k/2}$ szögpontú gráfok között az összes ekkora gráf számánál kevesebb ilyen gráf van, ezért $n(k) > 2^{k/2}$ [2]. Konstruktív módon azonban nem találtak olyan gráfot, hogy sem maga, sem komplementuma nem tartalmaz k szögpontú teljes gráfot, és ilyen sok szögpontja van. ABBOTT [1] olyan sorozatokat konstruál, melyek szerint $n(k+1) > k^c$ elég nagy k-ra olyan c konstansokkal, melyekre ismert legalább egy k^c szögpontú példa. Az $n(k)$ pontos meghatározásához minden $n(k)$ szögpontú gráfot meg kell vizsgálni, ezért ez a feladat már elég nagy rögzített k mellett is gyakorlatilag megoldhatatlannak látszik, kis k-ra viszont $n(k)$ ismert: $n(3)=6$ és $n(4)=18$. Emiatt ABBOTT tétele egy $k^{\log_2 5}$ és egy $k^{\log_3 17}$ nagyságú alsó becslést ad $n(k+1)$-re. Itt egy olyan gráfsorozatot adok meg, mely szerint $n(k+1) > ck^3$ egy rögzített c konstanssal.

Legyenek a gráf szögpontjai egy k elemű halmaz három elemű részhalmazai. Ekkor a szögpontok száma $\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k$. Legyen két szögpont összekötve, ha pontosan egy pontban metszik egymást.

Ha G' az adott gráf egy legalább 8 elemű teljes részgráfja, akkor egyik szögpontjának van olyan pontja, melyet még legalább három G'-beli szögpont tartalmaz. Ezt a négy szögpontot csak úgy metszheti egy háromelemű részhalmaz, ha tartalmazza közös pontjukat, ezért a G'-beli szögpontok pontosan ebben a pontban metszik egymást. Minthogy a G'-beli szögpontok egyesítése legfeljebb k elemű, G' szögpontjainak száma legfeljebb $\frac{k-1}{2}$.

Ha G'' a komplementum egy teljes részgráfja, akkor G'' elemei között a $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$ reláció equivalencia, ugyanis a refiexivitás és a szimmetria nyilvánvaló, a tranzitivitás pedig fennáll, mert ha g_1 és g_3 is legalább két pontban metszi a háromelemű g_2-t, akkor a metszetük nem üres. Ha belátom, hogy egy equivalenciaosztály szögpontjainak a száma nem nagyobb, mint a szögpontok egyesítésének a számossága, akkor, minthogy különböző osztálybeli szögpontok egyesítései nem metszik egymást, azt kapom, hogy G szögpontjainak száma legfeljebb az alaphalmaz számossága, azaz k. A legfeljebb négy szögpontot tartalmazó osztályokra az állítás nyilvánvaló, ha pedig egy equivalenciaosztály legalább öt szögpontot tartalmaz, akkor az előzőhöz hasonló módon belátható, hogy bármely két szögpontjának a metszete ugyanaz, így az egyesítés a szögpontok számánál kettővel több pontot tartalmaz.

A gráfbeli és a komplementumbeli maximális teljes gráfok különböző méretei miatt ABBOTT módszerével a c konstansra adódó felső korlát $\frac{1}{6}$-ról $\frac{2}{9}$-re növelhető.

IRODALOM

[1] H. L. Abbott: Lower bounds for some Ramsey numbers. Discrete Mathematics **2** (1972) 289—294
[2] P. Erdős: Some remarks on the theory of graphs. Bull. Am. Math. Soc. **53** (1947) 292—294
[3] F. P. Ramsey: On a problem in formal logic. Proc. London Math. Soc. **30** (1930) 264—286

КОНСТРУКТИВНАЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА РАМСЕЯ

Ж. НАДЬ

A CONSTRUCTIVE ESTIMATION OF THE RAMSEY NUMBER

ZS. NAGY

PÁRATLAN RENDŰ AFFIN GALOIS-SÍKOK ELLIPSZISE MINT AFFIN SZABÁLYOS SOKSZÖG

NGUYEN MONG HY

A Matematikai Lapokban 1971-ben[1] a 9-edrendű affin Galois-sík ellipszisére vonatkozó észrevételt közöltem [1], most egy olyan tételről írok, amely annak az észrevételnek az általánosításaként adódik.

E közleményben $q=p^r$ egy $p\neq 2$ prímszám hatványát jelöli, r pedig egy természetes számot. $GF(q)=\mathbf{K}$ a koordinátatest, **AGS** az affin Galois-sík, **ES** az euklideszi sík szavakat helyettesíti. A **K** egy a elemére vonatkozó $a=\square$ és $a=\triangle$ jelölésmód azt fejezi ki, hogy a a test négyzeteleme, illetve nem négyzeteleme [2]. Az **ES** egy szabályos $A_0A_1A_2\ldots A_q$ sokszögének csúcsai és egy **AGS** egy $P_0P_1P_2\ldots P_q$ sokszögének csúcsai közt az egy-egyértelmű

$$\pi=\begin{pmatrix}A_0A_1A_2\ldots A_q\\ P_0P_1P_2\quad\ P_q\end{pmatrix}$$

megfeleltetés rendelkezzék a következő tulajdonsággal. Az **AGS** értelmében $P_jP_k\|P_lP_m$ reláció akkor és csak akkor áll fenn, ha az **ES** értelmében $A_jA_k\|A_lA_m$ teljesül. Ha ilyen π megfeleltetés létezik, akkor a $P_0\ldots P_q=\mathbf{P}$ poligont *affin-szabályos* $(q+1)$-*szögnek* nevezzük. — Ha nem okozhat félreértést, röviden **P** *szabályos sokszögről* beszélünk. —

Az említett közleményben az **AGS** ellipszisének olyan kanonikus egyenletét használtuk, amely a húrok irányténye zőinek meghatározására a legcélszerűbb. Ez a kanonikus egyenlet — vö. [2] —

$$ax^2-y^2=c,\quad \text{ahol}\quad a,c,x,y\in\mathbf{K}\quad\text{és}\quad a=\triangle.$$

Az ott szereplő ellipszis a kilencedrendű **AGS**-nek az

$$x^2+4y^2=1$$

egyenlettel definiált ponthalmaza. A $GF(9)=\mathbf{K}$ elemeinek ottani jelöléseit és a test ottani művelettábláit használva, az idézett egyenlet

$$6x^2-y^2=6$$

alakra hozható, és 6 a **K** testben nem négyzetelem.

[1] Sajnálatos módon értelemzavaró sajtóhibával jelent meg (22. évfolyam 3—4. szám). A 327. oldal utolsó előtti sorának a végén helyesen nem., hanem; áll és folytatásként „P_1:(0,0), P_2:(2,1), P_3:(1,1), P_4:(6,7), P_5:(3,7), P_6:(7,2), P_7:(5,2), P_8:(8,5), P_9:(4,5).” következik, ami a nyomtatásból kimaradt. Azonkívül a 328. oldal 5. sorában $\langle 2,5\rangle$ helyett $\langle 1,5\rangle$, és 10. sorában $\langle 2,5\rangle=\langle 4,6\rangle$ helyett $\langle 3,6\rangle=\langle 5,7\rangle$ a helyes.

Itteni mondanivalóink céljára a projektív Galois-sík — rövidebben **PGS**-oválisának kanonikus egyenlete alkalmasabb. [3] Ez úgy adódik, hogy a koordinátaháromszög A_1, A_3 csúcsa az oválison van, A_1A_2 és A_3A_2 pedig A_1-ben, illetve A_3-ban az ovális érintője, továbbá az E egységpont is az oválison van. Ebben az elhelyezésben

$$x_1x_3 - x_2^2 = 0$$

az ovális egyenlete. Világos, hogy ennek az egyenletnek csakis az $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ pont és az $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda^2, \lambda, 1)$ pontok tesznek eleget (λ végigfut a **K** test elemein). Világos, hogy az így meghatározott ponthalmaz $q+1$ pontból áll.

Rögzítsük a síknak az

$$ax_1 - x_3 = 0 \quad (a = \triangle)$$

egyenlettel definiált d egyenesét. Világos, hogy ezt az egyenest a $(0, 1, 0)$ és az $(1, \lambda, a)$ pontok alkotják. Az így definiált $1+q$ pont egyike sincs rajta az oválison, hiszen $0 \cdot 0 - 1^2 \neq 0$, és $1 \cdot a - \lambda^2 \neq 0$, mert $a = \triangle$ folytán $a = \lambda^2$ lehetetlen.

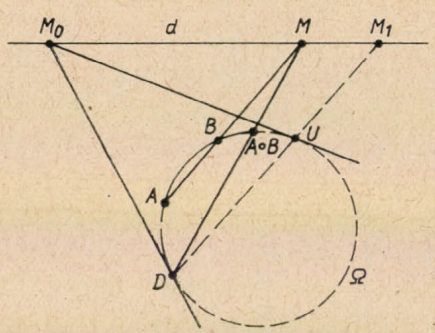
Most a d egyenest összes pontjaival együtt törölve, a sík maradéka **AGS**, amelyen oválisunk ellipszis, mert $q+1$ pontból áll.

Ez után az előkészítés után rátérünk annak a problémának a tisztázására, hogy a páratlan rendű **AGS** ellipszisét alkotó ponthalmaz kifeszítette egyenesek párhuzamossági struktúrája milyen.

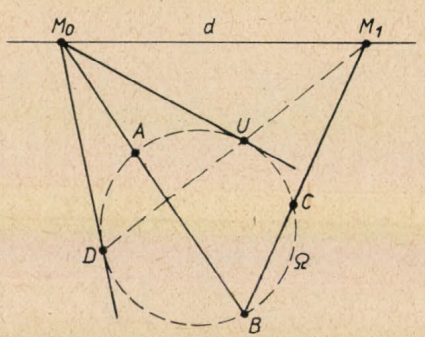
1. EGY GRAFIKUS MŰVELET ADOTT OVÁLISON

A következőkben q páratlan számot, **PS**(q) pedig q-adrendű projektív síkot jelöl. A sík Ω oválisa $q+1$ pontból áll, s legyen d e pontok egyikét sem tartalmazó egyenes. A d egyenesnek $(q+1)/2$ pontján nem halad át érintő, a többi $(q+1)/2$ pontjának mindegyikén pedig két-két érintő halad át. Legyen M_0 a d egyenesnek érintővel közös pontja, és az M_0 ponton áthaladó egyik érintő érintési pontja D, a másiké U. Most a D *vezérpont* és d *vezéregyenes* által az Ω ponthalmazon egy grafikus műveletet létesítünk. Először a D-től és egymástól különböző $A, B (\in \Omega)$ pontokra értelmezzük a műveletet, amelyekre nézve még az $AB \cap d = M \neq M_0$ feltétel is teljesül (1. ábra).

Az $M \neq M_0$ feltevésből következik, hogy DM az oválisnak nem érintője, tehát van egy a D-től különböző közös pontja is az oválissal. Ez a grafikus művelet ered-



1. ábra



2. ábra

ménye, az $A \circ B$ pont. Az AB összekötő egyenes a BA-val azonos, ennélfogva $A \circ B = B \circ A$.

Megtartva a többi feltételt, megengedjük az $A = B$ egybeesést. Ebben az esetben AB szerepét az ovális A pontbeli érintője veszi át, és a $DM \cap \Omega$ ponthalmaz D-től különböző elemét $A \circ A$-val jelöljük.

Ha $A \neq B$, de $A = D$, vagy $B = D$, akkor $M \neq M_0$ és DM az oválist egy D-től különböző $D \circ B = B \circ D$, illetve $A \circ D = D \circ A$ pontban is metszi, ami pedig nem más, mint a B, illetve az A pont. Eszerint a D pont *műveletünk semleges eleme*, feltéve, hogy $D \circ D = D$. — Ez pedig értelmezés dolga, hiszen a D pontbeli érintő veszi át az AB egyenes szerepét, az érintőnek pedig nincs az Ω-val, D-től különböző pontja. —

Ha $A \neq B$ és $A \neq D \neq B$, de $M = M_0$ (2. ábra), akkor az értelmezést tovább kell bővítenünk, mert a DM_0 egyenesnek (érintő) nincs az Ω-val, D-től különböző közös pontja. Ebben az esetben $A \circ B = B \circ A$ ponton a D pontot értjük. S még további megállapodásként a $D \circ D = D$ és $U \circ U = D$ értelmezést csatoljuk. Ilyen módon eljutottunk az *inverz elem* értelmezéséhez: A és B egymásnak inverze, ha $AB \cap d = M_0$, továbbá D és U inverze maga a D, illetve az U pont.

Egy pillanatra úgy tűnik, mintha az Ω két speciális szerepű pontja, a D és U szimmetrikus szerepet játszana. Így például ők és csakis ők felelnek meg az

$$X \circ X = D$$

egyenletnek. Az viszont, hogyha $D \neq A \neq U$, és az

$$X \circ A = A$$

megoldását keressük, mutatja a szimmetria hiányát, hiszen

$$D \circ A = A \neq U \circ A.$$

Még egy megjegyzést fűzünk a művelethez. A sík D ponton áthaladó egyenesei — a D tartó pontú sugársor — egy-egyértelmű megfeleltetést létesítenek — jelölje ω — a vezéregyenes és az ovális pontjai között, mégpedig az ω-nak M_0 és M_1 pontra gyakorolt hatását tekintve

$$\omega = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ \cdots & \cdots \\ D & U \end{pmatrix}.$$

TÉTEL. *A d, D vezérelemekhez tartozó művelet az oválist mint ponthalmazt egységelemes kommutatív kvázicsoporttá szervezi.*

2. EGY ADOTT KÜLSŐ TENGELYRE NÉZVE PASCAL-OVÁLIS SÍKJA

Ismeretes a véges síkok különböző szintű specializálásának az a módja, hogy a síkot definiáló három illeszkedési axiómát bizonyos konfigurációs tételek érvényességének feltételezésével kiegészítjük. Így jutunk a Desargues-féle véges sík fogalmához is (ami a Galois-síkkal ekvivalens — [3] —). BUEKENHOUT nevezetes tétele is ebbe a témakörbe tartozik, hiszen olyan konfigurációs feltételt ad meg, amely ha teljesül, *a* **PS**(q) *egy* Galois-*sík* következményt vonja maga után [4]. Itt most a Buekenhout-feltétel egy lényegesen gyöngített változatával definiálunk síkot.

A már eddig bevezetett jelölések értelmében folytatjuk mondanivalónkat. Így tehát Ω és d rögzített ponthalmazok egy **PS**(q)-n, a $d \cap \Omega$ üres, Ω ovális és d egyenes.

Az oválisba beírt

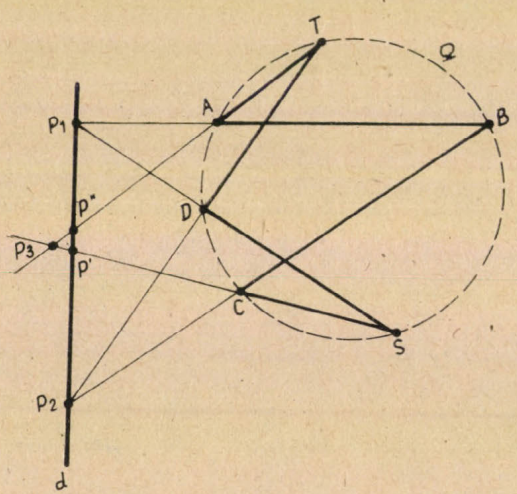
$$\mathbf{A} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

pontciklussal létesített

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 = P_1, \quad A_2A_3 \cap A_5A_6 = P_2, \quad A_3A_4 \cap A_6A_1 = P_3$$

metszéspontokat a beírt **A** hatszög *átlóspontjainak* nevezzük. Megengedjük két egymásutáni pont egybeesését is, akár több pont esetében is, de kettőnél több pont nem eshet egybe. Ilyen esetben az A_jA_j egyenes az A_j pontbeli érintőt jelenti. A $P_1P_2P_3$ ponthármas általában háromszöget feszít ki. Tekintsük a szó mondott tágabb értelmében beírt olyan **A** hatszögek összességét, amelyek bármelyikének két átlóspontja a d egyenesen van. Ha teljesül az a feltétel, hogy mindezeknek a hatszögeknek a harmadik átlóspontja is a d egyenesen van, akkor Ω-t *a d tengelyre nézve Pascal-oválisnak* nevezzük. Ilyen d, Ω alakzatpár létezése a **PS**(q)-t definiáló axiómákból nem következik. A létezés feltételezése egy további axiómát jelent, ami a sík fogalmának specializálását vonja maga után. Az ilyen síkot a következőkben *gyöngén Pascal-síknak* fogjuk mondani.

BUEKENHOUT tétele most így fogalmazható: *Ha* **PS**(q) *egy Ω oválisa a sík minden egyenesére mint tengelyre nézve Pascal-ovális, akkor a sík egy Galois-sík.* — Ez a tétel páros q-ra is érvényes. —



3. ábra

Felvetődik most a kérdés, hogy a d tengelyre nézve Pascal-oválison grafikus műveletünk miféle struktúrát létesít. Tekintsük evégből először azt az esetet, midőn $q > 3$, továbbá az A, B, C, D pontok az ovális páronként különböző pontjai (3. ábra).

Az 1. ábrához fűzött értelmezés és a 3. ábra egybevetése alapján világos, hogy $A \circ B = S$ és $B \circ C = T$. Az $SC \cap d = P'$ és $AT \cap d = P''$ pontok közvetítésével utunk az ovális $S \circ C = (A \circ B) \circ C$, illetve $A \circ T = A \circ (B \circ C)$ pontjához. Ez a két pont egybeesik, ha $P' = P''$, vagyis ha az $SC \cap AT = P_3$ pont is a d egyenesen van. Az $ABCSDT$ hatszögnek pedig P_1, P_2, P_3 a három átlóspontja. Ha tehát az Ω a vezéregyenesre mint tengelyre nézve Pascal-ovális, akkor az A, B, C ponthármasra nézve érvényes a művelet asszociativitása.

Tegyük hozzá a mondottakhoz, hogy nem minden ponthármas követeli meg a gyönge Pascal-feltétel teljesülését, vagyis van olyan ponthármas, amelyre nézve e feltételtől függetlenül fennáll az asszociativitás. — Így például a páronként különböző elemekből álló A, B, D ponthármasra nézve $(A \circ B) \circ D = A \circ (B \circ D)$ a semleges elem műveleti tulajdonsága folytán fennáll, hiszen $(A \circ B) \circ D = A \circ B$, $B \circ D = B$ és így $A \circ (B \circ D) = A \circ B$ is igaz. Más okból $(A \circ A) \circ A = A \circ (A \circ A)$. Hiszen $A \circ A = Q \in \Omega$, és a kommutativitásból $Q \circ A = A \circ Q$ következik. —

Ha a **PS**(q) oválisa a vele közös pontot nem tartalmazó d tengelyre nézve Pascal-ovális, akkor műveletünk olyan egységelemes kvázicsoporttá szervezi az ovális pontjait, amely a műveletre nézve asszociatív is. Ebben az esetben tehát érvényes a következő

TÉTEL. *A D, d vezérelemekkel létesített grafikus művelet, ha a d tengelyre nézve Ω egy Pascal-ovális, az ovális pontjait ($q+1$-edrendű) kommutatív csoporttá szervezi.*

3. A GALOIS-SÍK ELLIPSZISÉN ÉRTELMEZETT GRAFIKUS MŰVELET

Tovább specializálva a véges projektív síkot, a grafikus művelettel létesített kommutatív csoport is speciálisabbá válik. Legyen a q most is páratlan szám, a sík egy q-adrendű **PGS**, az Ω és a d egyenlete pedig — a bevezetésben közöltek szerint — legyen

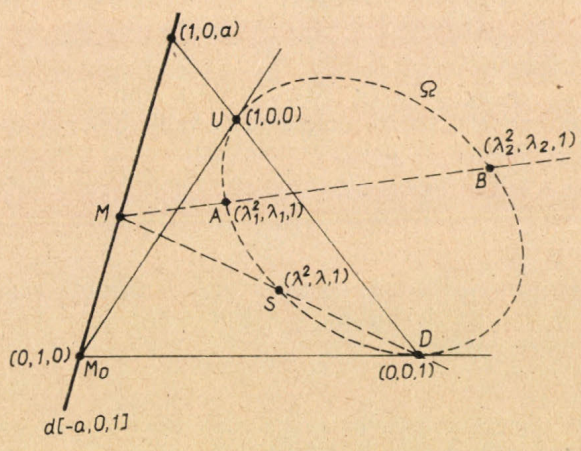
$$x_2^2 = x_1 x_3, \quad \text{illetve} \quad x_3 = a x_1 \quad (\text{ahol } a = \triangle).$$

A 4. ábrán a pontokat koordináta-hármasukkal neveztük meg. Az 1. ábrával egybevetve, az ottani D, U, M_0 pont szerepét itt rendre a (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0) pont veszi át; és itt a $[-a, 0, 1]$ vonalkoordináta-hármas határozza meg a d vezéregyenest.

Most tehát a $(\lambda^2, \lambda, 1)$ elemek és az (1, 0, 0) elem alkotta halmazon tekintjük a

$$D\colon (0, 0, 1),\ d\colon [-a, 0, 1]$$

vezérelemekkel meghatározott művelet hatását.



4. ábra

Legyen a két műveleti elem és az eredmény az

$$A\colon (\lambda_1^2, \lambda_1, 1) \quad \text{— esetleg } (1, 0, 0) \text{ —},$$

$$B\colon (\lambda_2^2, \lambda_2, 1) \quad \text{— esetleg } (1, 0, 0) \text{ —},$$

$$S = A \circ B\colon (\lambda^2, \lambda, 1) \quad \text{— esetleg } (1, 0, 0) \text{ —}.$$

Ebben az esetben az összekötő egyenesek vonalkoordinátái az ismert módon adódnak. Így

$$AB\colon [1, -(\lambda_1+\lambda_2), \lambda_1\lambda_2],$$

$$DS\colon [1, -\lambda, 0];$$

esetleg $AU\colon [0, 1, -\lambda_1]$, $UU\colon [0, 0, 1]$,

esetleg $DU\colon [0, 1, 0]$, $DD\colon [1, 0, 0]$.

A grafikus művelet definíciója szerint — az ábra M pontját tekintve — AB, DS, d egy sugársor elemei lévén, általában az

$$\begin{vmatrix} 1 & -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

összefüggés adódik. Ha esetleg $S=U$, azaz DS szerepében $DU\colon [0, 1, 0]$ lép fel, akkor:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Az előbbi determináns kifejtéséből

$$\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+a\lambda_1\lambda_2}$$

adódik, ha $1+a\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Az $1+a\lambda_1\lambda_2 = 0$ esetben a jobb oldalon álló tört értelmét veszti. Akkor azonban a második determináns válik 0-sá, hiszen a determináns kifejtése éppen a $-(1+a\lambda_1\lambda_2)$ kifejezést szolgáltatja.

Ha λ végigfut a koordinátatest elemein, az elemeket egy-egyértelműen Ω pontjai reprezentálják:

$$\lambda \rightleftarrows (\lambda^2, \lambda, 1).$$

Kivételt képez az ovális $(q+1)$-edik pontja, az $(1, 0, 0)$ pont amely nem ábrázol a $\mathbf{K}$ testhez tartozó elemet. Jelölje ezt a K halmazhoz nem tartozó elemet u. Az u elemmel K halmazt bővítjük:

$$K \cup u = L.$$

Az L halmazban egy műveletet értelmezünk a következő posztulátumokkal:
1° Ha λ_1, λ_2 a $\mathbf{K}$ test elemei, de $1+a\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, akkor

$$\lambda_1 * \lambda_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+a\lambda_1\lambda_2};$$

2° ha pedig $1+a\lambda_1\lambda_2=0$, akkor $\lambda_1 * \lambda_2 = u$.
3° Ha $0 \neq \lambda \in \mathbf{K}$, akkor

$$u * \lambda = \lambda * u = (a\lambda)^{-1}.$$

4° $u * 0 = 0 * u = u$.
5° $u * u = 0$.

Világos dolog, hogy az $x_1x_3-x_2^2=0$ egyenletű oválison a D: (0, 0, 1) vezérpont és a d: $[-a, 0, 1]$ vezéregyenessel létesített grafikus művelet az L halmazon értelmezett $\alpha * \beta$ műveletet reprezentálja. A Galois-sík oválisa a sík minden egyenesére mint tengelyre nézve Pascal-ovális. Mindezekből következik, hogy az 1°—5° *kirovásokkal definiált* $\mathbf{L}=(L, *)$ *struktúra egy* $(q+1)$*-edrendű kommutatív csoport.* Ez a csoport izomorf a D, d vezérelemekkel az $x_1x_3-x_2^2=0$ egyenletű oválison létesített grafikus művelet által származtatott csoporttal, röviden **Ω**-val.

Előre sejthető, hogy az **L** csoport (a **K** testből való származtatása folytán) valamiféle speciális kommutatív csoport. Hiszen az **Ω** csoport már gyöngén Pascal-sík esetén is fellép, míg az **Ω** mint az **L** izomorf grafikus képe Pascal-féle **PS**-on, más szóval Galois-síkon lép fel.

Az **L** csoport fogalma a csoportot definiáló 1°—5° követelmények alapján algebrai fogalom. Ámde az a tény, hogy izomorf mását, az **Ω** csoport fogalmát geometriai úton alakítottuk ki, párhuzamot teremt a Galois-sík oválisának geometriai úton való vizsgálata és az **L** csoport tisztán algebrai úton való vizsgálata között.

4. A GALOIS-TESTBŐL SZÁRMAZTATOTT L CSOPORT

A **K** test egy $a=\triangle$ elemével egy **Q** testet származtatunk (kvadratikus bővítés) jól ismert módon. A K halmaz elemeiből alkotott rendezett elempárok mint elemek alkotják a Q halmazt:

$$(x, y)\in Q, \quad (x\in K, y\in K).$$

Q halmazban egy új összeadást és egy új szorzást definiálunk. Kifejezésükre az $(x_1, y_1)\perp(x_2, y_2)$, illetve az $(x_1, y_1)\curlywedge(x_2, y_2)$ írásmódot használjuk. A műveletek definíciója:

$$(x_1, y_1)\perp(x_2, y_2) = (x_1+y_2, y_1+y_2),$$
$$(x_1, y_1)\curlywedge(x_2, y_2) = (x_1x_2+ay_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

Könnyen következik e definíciókból, hogy a Q halmaz elemeit a két művelet testté szervezi: $(Q, \perp, \curlywedge)=\mathbf{Q}$. A **Q** test zéruseleme és egységeleme a (0, 0), illetve az (1, 0) elem; az additív és a multiplikatív inverz, ha (x, y) az adott elem:

$$(-x, -y); \quad \text{illetve} \quad (x, y)\neq(0, 0) \quad \text{esetén} \quad \frac{x}{x^2-ay^2}, \; -\frac{y}{x^2-ay^2}.$$

Az utóbbihoz nyomban fűzzük hozzá, hogy $x^2-ay^2=0$ nem lehet, mert különben $x^2=ay^2$ volna, ami az $a=\triangle$ feltevés miatt lehetetlen (hiszen egy $\triangle$ és egy $\square$ karakterű elem szorzata $\triangle$ karakterű elem).

Minthogy a **K** test $q=p^r$ $(p\neq 2)$ elemű, azért a **Q** test $q^2=p^{2r}$ elemből áll, vagyis szintén véges test. Ennélfogva *a* **Q** *test multiplikatív csoportja egy* q^2-1 *rendű ciklikus csoport.* Tudjuk, hogy a ciklikus csoport minden részcsoportja és faktorcsoportja is ciklikus csoport. Következő okoskodásunkban erre a tényre támaszkodunk. a Bontsuk fel az $(x, y)\neq(0, 0)$ elemek alkotta $(q^2-1$ elemű$)$ Q' halmazt $q+1$ számú, egyenként $q-1$ elemű részhalmazra a következő módon — megállapodva a K halmaz elemeinek $K=\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ jelölésében, 0-sal és 1-essel jelölve **K** test zéruselemét és egységelemét —:

$$Z_u\colon \{(0, 1), (0, 2), \ldots, (0, q-1)\}; \quad Z_t\colon r(1, t), (2, 2t), \ldots, (q-1, (q-1)t)\},$$

ahol t végigfut **K** elemein.

Látni fogjuk, hogy $\mathbf{Z}_0$ a $\mathbf{Q}$ multiplikatív csoportjának részcsoportja. A Z_0 halmazt tekintve a

$$(b, 0) \in Z_0, \quad (c, 0) \in Z_0 \quad (b \neq 0 \neq c)$$

elemek $\mathbf{Q}$-ban definiált szorzata

$$(b, 0) \curlywedge (c, 0) = (bc, 0) \in Z_0.$$

A $\mathbf{Q}$ egységeleme $(1, 0) \in Z_0$. Ha $0 \neq c \in \mathbf{K}$, akkor $c^{-1} \in \mathbf{K}$ és $(c, 0) \in Z_0$, $(c^{-1}, 0) \in Z_0$, továbbá

$$(c, 0) \curlywedge (c^{-1}, 0) = (1, 0),$$

vagyis $\mathbf{Q}$-ban $(c, 0)$ elem multiplikatív inverze a $(c^{-1}, 0)$ elem. Tehát $\mathbf{Z}_0$ valóban részcsoportja $\mathbf{Q}$ multiplikatív csoportjának, $\mathbf{Q}'$-nek.

A Z_0 egy elemével akár a Z_u, akár egy Z_t halmaz egy elemét szorozva, eredményül a szorzott elemet tartalmazó halmaz egy elemét kapjuk. Legyenek ugyanis $\mathbf{K}$-nak a zéruselemétől különbözők a b és c elemek, akkor

$$(b, 0) \in Z_0, \quad (0, c) \in Z_u.$$

Ezeknek a $(b, 0)$, $(0, c)$ elemeknek a $\mathbf{Q}$-ban értett szorzata

$$(b, 0) \curlywedge (0, c) = (0, bc) \in Z_u.$$

Ha pedig $t \in \mathbf{K}$, akkor

$$(c, ct) \in Z_t$$

és a $(b, 0)$, (c, ct) elemek $\mathbf{Q}$-ban értett szorzata

$$(b, 0) \curlywedge (c, ct) = (bc, bct) \in Z_t.$$

A Z_0, Z_u, Z_t halmazokra eddig megállapított tényeket az indexekre szorítkozó következő jelölésmóddal fejezhetjük ki:

4* $$0 \circ u = u \circ 0 = u, \quad 0 \circ t = t \circ 0 = t.$$

A Z_u két elemének szorzata $\mathbf{Q}$-ban

$$(0, b) \curlywedge (0, c) = (abc, 0) \in Z_0,$$

ami az indexekkel való

5* $$u \circ u = 0$$

jelölésre vezet.

Legyen most $(0, b) \in Z_u$ mellett $t \neq 0$ és $(c, ct) \in Z_t$, akkor

$$(0, b) \curlywedge (c, ct) = (abct, bc) \in Z_s.$$

Minthogy $(d, ds) \in Z_s$, az s paraméter $\mathbf{K}$ testnek azt az elemét jelenti, amellyel az elempár első elemét szorozva, a második elem áll elő. Itt most ez a meggondolás, az

$$(abct)(at)^{-1} = (aa^{-1})(bc)(tt^{-1}) = bc$$

összefüggés szerint arra vezet, hogy

$$s = (at)^{-1}.$$

Itt is áttérhetünk megállapításainknak az

$$3^* \qquad u \circ t = t \circ u = (at)^{-1}$$

alakban való kifejezésére.

Olyan eset is lehet, hogy a két tényező egyike sincs sem a Z_0, sem a Z_u halmazban, de a szorzat egy Z_u-beli elem. Legyen ugyanis a két tényező

$$(b, bt), \quad (c, cs), \quad \text{ahol} \quad bc + abcts = 0.$$

Most $bc \neq 0$, tehát $1 + ats = 0$, vagyis $s = -(at)^{-1}$. Ebben az esetben

$$(b, bt) \curlywedge (c, cs) = (0, (t+s)bc) \in Z_u,$$

hiszen $t + s = 0$ nem lehet. — Az s ugyanis $-(at)^{-1}$ lévén, ezt behelyettesítve egyenletünkből az $at^2 = 1$ állítás következik, ami az $a = \triangle$ feltevéssel ellenkezik. — Írhatjuk tehát,

$$2^* \qquad \text{ha} \quad s = -(at)^{-1}, \quad \text{akkor} \quad s \circ t = t \circ s = u.$$

Végezetül a két tényezőre kikötjük, hogy $s \neq -(at)^{-1}$, akkor

$$(b, bt) \curlywedge (c, cs) = (bc(1 + ats), (t + s)bc) \in Z_{t.s} = Z_{s.t}.$$

A szóban forgó elempár első elemét nyilvánvalóan

$$\frac{t+s}{1+ats} \in \mathbf{K}$$

elemmel kell szorozni, hogy a másodikhoz, a $(t+s)bc$ elemhez jussunk. Megállapításunkat a következő formában írhatjuk:

$$1^* \qquad \text{ha} \quad 1 + ats \neq 0, \quad \text{akkor} \quad t \circ s = \frac{t+s}{1+ats}.$$

Ha egybevetjük az eddigi megállapításainkat, akkor könnyen belátható, hogy az **L** csoport a $\mathbf{Q}'/\mathbf{Z}_0$ faktorcsoporttal izomorf, ennélfogva ciklikus csoport, hiszen a **Q** véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Ha tehát visszatérünk az affin Galois-sík ellipszisének vizsgálata során elért **L** csoporthoz, a reá vonatkozó legfontosabb tudnivalót fejezi ki az elért

TÉTEL. *Az* **L** *csoport* $(q+1)$*-edrendű ciklikus csoport.*

5. A GALOIS-SÍK ELLIPSZISE MINT SZABÁLYOS SOKSZÖG

Visszatérünk a 4. ábrához. Az **L** csoport egy generátoreleme legyen λ, és a csoport művelete értelmében tekintett hatványaira vezessük be a $\overset{*}{\lambda}{}^k$ jelölést:

$$\overset{1}{\underbrace{\lambda}} * \overset{2}{\underbrace{\lambda}} * \ldots * \overset{k}{\underbrace{\lambda}} = \overset{*}{\lambda}{}^k.$$

Így az **L** csoportot alkotó elemek ciklikusan rendezett sorozata:

$$\overset{*}{\lambda}(= \lambda), \overset{*}{\lambda}{}^2, \overset{*}{\lambda}{}^3, \ldots, \overset{*}{\lambda}{}^{q+1}.$$

Ez a paramétersorozat a Ω ellipszisen egy $P_1, P_2, \ldots, P_{q+1}$ pontciklusba rendezi az összes pontokat.

Az eddigiekből könnyen következik — a

$$\overset{*}{\lambda}^k * \overset{*}{\lambda}^l = \overset{*}{\lambda}^{k+l}$$

összefüggésre való tekintettel, és ha $P_{q+1}=P_0$ jelölést használjuk —, hogy a geometriai

$$P_j P_h \cap P_k P_l \in d$$

reláció fennállásával ekvivalens az indexekre vonatkozó, közönséges értelemben olvasott

$$j+h \equiv k+l \pmod{q+1}$$

számelméleti relációval.

Ez az eredmény pedig azt jelenti, hogy az Ω-t alkotó $P_1P_2P_3\ldots P_qP_0$ pontciklus párhuzamosságtartó euklideszi modellje a körbeírt szabályos $(q+1)$-szög körüljárásának megfelelő $A_1A_2A_3\ldots A_qA_0$ pontciklus.

* * *

Befejezésként megjegyzem, hogy tőlem függetlenül, sőt korábban már KORCHMÁROS G. bebizonyította, hogy az **L** csoport ciklikus. Bizonyítását — eddig még nyomtatásban nem publikálta — nem ismerem. E tételt sejtésként kandidátusi értekezésemben leírtam és speciális esetekben — például ha $q=9,25$, és ha $q=p$, ahol p egy $4k+3$ alakú prímszám — be is bizonyítottam. Az általános eset bizonyítását azután sikerült megtalálnom, amikor értesültem róla, hogy sejtésem bebizonyítható.

Itt mondok köszönetet aspiránsvezetőmnek, KÁRTESZI FERENC professzornak, aki tanácsaival és útmutatásával munkámat elősegítette.

IRODALOM

[1] NGOUYEN MONG HY: A kilencrendű affin Galois-sík szabályos sokszögeiről. *Matematikai Lapok*, **22** (1971), 223—229.
[2] B. SEGRE: Proprietà elementari relative ai segmenti ed alle coniche sopra un campo qualsiasi ed una congettura di SEPPO IKKA per il caso dei campi di Galois. *Annali di matematica pura ed applicata*, S. IV.-T. **96** (1973), 289—337.
[3] KÁRTESZI F. *Bevezetés a véges geometriákba.* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.)
[4] F. BUEKENHOUT: Plans projectifs à ovoïdes pascaliens. *Arch. Math.* **17** (1966), 89—93.

ЭЛЛИПС ПЛОСКОСТЕЙ ГАЛУА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА КАК АФФИННЫЙ РЕГУЛЯРНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

НГУЕН—МОНГ ХИ

ELLIPSE DI UN PIANO AFFINE DI GALOIS COME UN POLIGONO REGOLARE

NGUYEN MONG HY

Consideriamo il campo di Galois GF(q), doce q sia dispari. Sia Ω un'ellipse di un piano affine appartenente al campo delle coordinate $\mathbf{K}=\mathrm{GF}(q)$. L'autore dimostra il fatto seguente. Si può trovare una permutazione ciclica dei punti di Ω, $P_0P_1\ldots P_q$ tali che le rette P_jP_h e P_kP_l sono parallele se e soltanto se

$$j+h \equiv k+l \pmod{q}$$

Questo risultato era ottenuto nel seminario del professore F. KÁRTESZI.

Il metodo della dimostrazione è geometrico-algebraica che adopera due operazioni grafiche definite nell'insieme dei punti di Ω.

KONVEX LEMEZEK NEWTON-SZÁMÁRÓL

HORTOBÁGYI ISTVÁN, Budapest

A jelen dolgozatban vizsgált probléma egy régi, ismert problémához, a tizenhárom gömb problémájához kapcsolódik. Ez utóbbi — amely már I. NEWTON és D. GREGORY között is a vita tárgya volt — a következőképpen hangzik: Érinthet-e egy gömböt 13 vele egybevágó egymásba nem nyúló gömb?

Ez a kérdés sokáig eldöntetlen maradt, míg végül először R. HOPPE és C. BENDER bebizonyította, hogy NEWTONnak volt igaza, amikor azt állította, hogy egy gömböt legfeljebb 12 vele egybevágó, egymásba nem nyúló gömb érinthet.

H. S. M. COXETER [3] vetette fel ennek a problémának a kézenfekvő többdimenziós általánosítását, nevezetesen azt, hogy az n-dimenziós euklideszi térben egy gömböt legfeljebb hány vele egybevágó egymásba nem nyúló gömb érinthet?

A keresett N_n szám értékét $n>3$-ra nem ismerjük ($N_2=6$, $N_3=12$). Bizonyos konstrukciók azt mutatják, hogy $N_4\geqq 24$, $N_5\geqq 40$, $N_6\geqq 72$, $N_7\geqq 126$ és $N_8\geqq 240$. Másrészt BÖRÖCZKY K. [2] bebizonyította, hogy $N_4\leqq 26$ és sejtések vannak arra vonatkozóan, hogy $N_5\leqq 48$, $N_6\leqq 85$, $N_7\leqq 146$ és $N_8\leqq 244$.

A gömb helyett tetszőleges konvex test esetében is feltehető a következő probléma: Az n-dimenziós euklideszi térben egy konvex testet hány olyan egymásba nem nyúló test érinthet, amely az eredetiből eltolással származik GROEMER [10] (l. még [6] és [5]) egy tétele szerint a keresett szám 3^n-1, s egyenlőség csak a paralellotópokra érhető el.

További kérdés, hogy egy konvex testet legfeljebb hány vele egybevágó (nem szükségképpen hasonló helyzetű), egymásba nem nyúló test érinthet?

Ennek a problémának a síkbeli megfelelőjével FEJES TÓTH L. [4] foglalkozott. Egy kétdimenziós konvex testet *konvex lemeznek* és egy konvex lemezt érintő vele egybevágó, egymásba nem nyúló lemezek maximális számát a lemez *Newton-számának* fogjuk nevezni.

FEJES TÓTH L. [4] bebizonyította a következő tételt: Egy K konvex lemez Newton-száma legfeljebb

$$(4+2\pi)\frac{D}{d}+2+\frac{d}{D}, \tag{1}$$

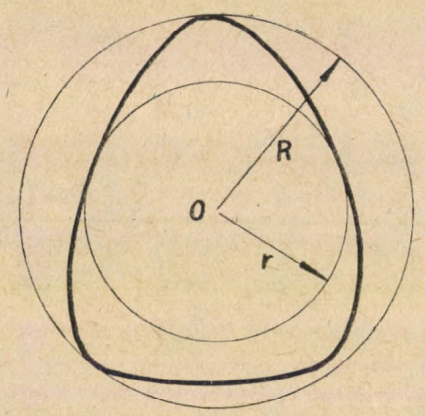
ahol D, illetve d K különböző irányokban mért szélességének a maximumát, illetve a minimumát jelenti.

Három vagy annál magasabb dimenziós terekben hasonló eredmény nem ismeretes.

BÖRÖCZKY K. [1] bebizonyította, hogy egy szabályos n-szög Newton-száma $n=3$ esetén 12, $n=4$ esetén 8 és ha $n\geqq 6$, akkor 6. FEJES TÓTH L. sejtését, miszerint a szabályos ötszög Newton-száma is 6, J. LINHART [8] bizonyította be.

Az (1)-es formula egy szabályos n-szög S_n Newton-számára a következő felső korlátokat adja: $S_3 \leqq 14$, $S_4 \leqq 17$, és $S_6 \leqq 14$. Látható, hogy a kapott becslés $n=3$ esetében elég jó, míg $n=4$- és $n=6$-ra durva. Hasonlóan elég durva a korlát, ha $\frac{d}{D} \approx 1$. Érdekes viszont az eredmény abban az esetben, amikor $\frac{d}{D}$ kicsi. Pontos becslést kapunk pl. egy olyan egyenlőszárú háromszögre, amelyre teljesül a $\frac{d}{D} = \sin\frac{\pi}{19}$ egyenlőség.

Egy K konvex lemezt kívülről érintő, valamely lemezzel kongruens, egymásba nem nyúló lemezek maximális számát K *F-re vonatkoztatott Newton-számának* nevezzük.



1. ábra

Ismeretes [9], hogy egy adott konvex F lemezhez egyértelműen megadható egy olyan minimális vastagságú körgyűrű, amely tartalmazza F határát. (1. ábra.) Ezt a körgyűrűt F minimálkörgyűrűjének nevezzük.

TÉTEL. *Jelöljük R és r-rel egy konvex F lemez minimálkörgyűrűjét határoló külső és belső kör sugarát. Ha $R<3r$, akkor egy k kerületű konvex lemez F-re vonatkoztatott Newton-száma legfeljebb*

$$(2) \qquad \frac{k+2R\pi}{\sqrt{4r^2-(R-r)^2}}.$$

Bizonyítás. Elégítse ki F a tételben kirótt feltételt. Tegyük fel, hogy a k kerületű konvex K lemezt kívülről az F-fel kongruens, egymásba nem nyúló $F_1, F_2, \ldots, F_n$ lemezek érintik. Jelöljük $F_1, F_2, \ldots, F_n$ minimálkörgyűrűinek középpontjait $O_1, O_2, \ldots, O_n$-nel, a K lemez r, illetve R szélességű külső paralel tartományainak a határvonalait pedig l_1, illetve l_2-vel. Nyilvánvaló, hogy az $O_1, O_2, \ldots, O_n$ pontok az l_1 és az l_2 görbék által határolt tartományba esnek, és mivel az F_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ lemezek nem nyúlhatnak egymásba, azért bármely két körgyűrűközéppont közötti távolság legalább $2r$.

Rajzoljuk meg l_1 O_i-n átmenő normálisát. Ez nyilván l_2-nek is normálisa. Jelöljük ennek a normálisnak l_1 és l_2-vel való metszéspontjait O_i' és O_i''-vel. Továbbá jelöljük s_{ij}-vel l_2 $O_i''O_j''$ húrjához tartozó ívének hosszát (2. ábra).

Megmutatjuk, hogy $s_{ij} \geqq \sqrt{4r^2-(R-r)^2}$. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor O_i'' és O_j'' az O_iO_j egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik (2. ábra). Feltehetjük, hogy O_i' távolsága az $O_i''O_j'' \equiv e$ egyenestől legalább akkora mint az O_j' ponté.

Tekintsük az e és a vele párhuzamos, O_j'-n átmenő egyenes által határolt sávot. Ennek szélessége legfeljebb $R-r$. Mivel az O_iO_j szakasz e sávba esik és a hossza legalább $2r$, azért e-re vetett merőleges vetületének a v_{ij} hosszára fennáll a $v_{ij} \geqq \geqq \sqrt{4r^2-(R-r)^2}$ egyenlőtlenség.

Mivel l_2 konvex és O_iO_i'' és O_jO_j'' l_2 normálisai, azért az $O_iO_i''O_j''$ és az $O_jO_j''O_i''$ szögek egyike sem lehet tompaszög. Ebből következik, hogy az O_iO_j szakasz vetülete az $O_i''O_j''$ szakaszra esik és így

$$s_{ij} \geqq O_i''O_j'' \geqq v_{ij} \geqq \sqrt{4r^2-(R-r)^2}.$$

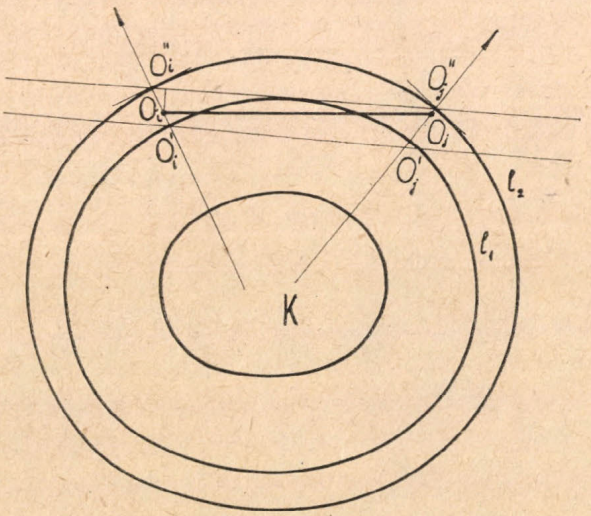
Ha viszont O_i'' és O_j'' az O_iO_j egyenes különböző oldalán fekszik, akkor nyilvánvaló módon $s_{ij} \geqq O_iO_j > \sqrt{4r^2-(R-r)^2}$ (3. ábra).

Mivel l_2 hossza $k+2R\pi$ (l. [7]), azért

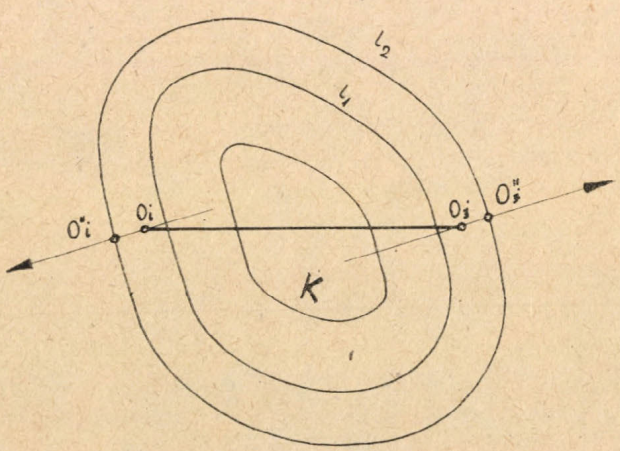
$$k+2R\pi = s_{12}+s_{23}+\ldots+s_{n1} \geqq n\sqrt{4r^2-(R-r)^2},$$

vagyis

$$n \leqq \frac{4k+2R\pi}{\sqrt{4r^2-(R-r)^2}}.$$



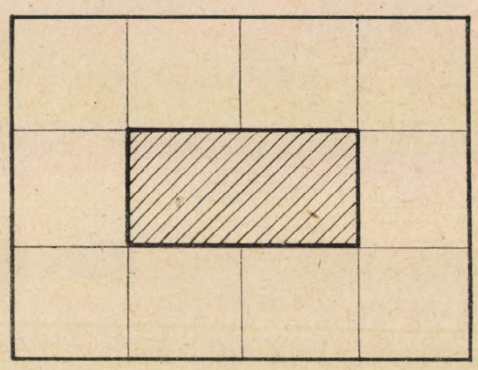
2. ábra



3. ábra

Alkalmazzuk (2)-t az 1 és 2 oldalhosszúságú téglalapnak az 1 oldalhosszúságú négyzetre vonatkoztatott n Newton-számának a meghatározására:

$$n \leqq \frac{k+2R\pi}{\sqrt{4r^2-(R-r)^2}} = \frac{6+\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}(1+2\sqrt{2})}} \approx 10{,}6743.$$



4. ábra

A 4. ábra mutatja, hogy n pontosan 10.

Ha $F \equiv K$, a lemez Newton-számára kapunk becslést. Ez a becslés $d \approx D$-re jobbnak bizonyul mint (1).

Alkalmazva (2)-t a szabályos n-szög S_n Newton-számára, azt kapjuk, hogy $S_3 \leqq 13$, $S_4 \leqq 8$, $S_5 \leqq 7$, $S_6 \leqq 7$ és $n > 6$-ra $S_n \leqq 6$. Az $n = 4$ és $n \geqq 7$ esetben a becslés pontos.

SUR LE NOMBRE DE NEWTON DES DOMAINES CONVEXES BORNÉS

HORTOBÁGYI I., Budapest

Soient K et F de domaines convexes bornés. On appelle nombre de Newton de K par rapport à F le nombre maximal de domaines disjoints et congruents à F qui ont point de contact mais pas de points intérieurs communs avec K.

On demontre le théorème suivant:

Notons par R resp. r le rayon du cercle circonscrit resp. inscrit à F determinant une bande circulaire minimale de F. Si $R > 3r$ le nombre de Newton d'un domaine convexe de perimètre k par rapport à F est

$$\leqq \frac{k+2R\pi}{\sqrt{4r^2-(R-r)^2}}.$$

La borne est precise en cas du carré et de polygons réguliers ayant le nombre des cotés supérieur à 6 si $K \equiv F$. L'article contienne aussi exemple pour $K \not\equiv F$ (v. fig. 4).

IRODALOM

[1] BÖRÖCZKY K.: Über die Newtonsche Zahl regulärer Vielecke, Periodica Math. Hungar., Vol. 1 (1), 1971. 79—83.

[2] BÖRÖCZKY, K. und FLORIAN, A.: Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum. Acta. Math. Acad. Hungar., 15 (1964), 237—245.

[3] COXETER, H. S. M.: An upper bound for the number of equel nonoverlapping spheres that can touch another of the same size, Proceedlings of Symposia in Pure Mathematics, Volume VII., Convexity, Amer. Math. Soc., (1963), 53—71.
[4] FEJES TÓTH, L.: On the number of equel discs that can touch another of the same kind, Studia Sci. Math. Hung., **2** (1967), 363—367.
[5] GRÜNBAUM, B.: On a conjecture of Hadwiger, Pacific J. Math., **11** (1961), 215—219.
[6] HADWIGER, H. DEBRUNNER, H. and KLEE, V.: Combinatorical Geometry in the Plane, New York, (1964), Theorem 43, P. 18.
[7] JAGLOM, I. M. und BOLTJANSKI, W. G.: Konvexe Figuren, Berlin (1956).
[8] LINHART, J.: Über die Newtonsche Zahl regulärer Fünfecke, Periodica Math. Hungar. (Nyomás alatt)
[9] BONNESEN, T.—FENCHEL, W.: Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934.
[10] GROEMER, H.: Abschätzung für die Anzahl der konvexen Körper die einen konvexen Körper berühren, Monatsh. Math. **65** (1961) 74—81.

О ЧИСЛЕ НЬЮТОНА ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

И. ХОРТОБАДЬИ

THE NEWTON NUMBER OF CONVEX DISCS

I. HORTOBÁGYI

A TANULÁS FOLYAMATÁNAK FÜGGVÉNYTANI LEÍRÁSA

SZEKERES ISTVÁN

E dolgozat az emberi tanulást az idő függvényében vizsgálja matematikai módszerrel, ezzel a tanulás folyamatának egy matematikai modelljét adja meg.

A tanulás igen általános és bonyolult pszichológiai fogalom, ezért nem törekedhetünk annak teljes matematikai leírására, csupán a felejtést és a reminiszcenciát vesszük figyelembe. Modellünket azonban úgy építjük fel, hogy további tanulást meghatározó tényezők (fáradás, a tanuló és a tanulandó anyag viszonyának változása stb.) figyelembevételére is legyen lehetőség.

A pszichológiából ismert fogalmakat nem definiáljuk, azokat alapfogalomként kezeljük. Ilyen alapfogalom maga a tanulás, a tanuló, az anyag (a tanulás tárgya), a tanuló pszichológiai állapota, stb.

Megállapításainkat egyetlen tetszőlegesen rögzített tanulóra vonatkoztatjuk, akinek pszichológiai állapota a tanulás megkezdésekor adott, majd a tanulás folyamán az általunk meghatározott módon változik. Ugyancsak tetszőlegesen rögzített a megtanulandó anyag.

Fontos feladatunk, hogy az anyagot mérhetővé tegyük.

Egységnyinek vesszük azt az anyagmennyiséget, melyet a tanuló egységnyi idő alatt tud megtanulni a nulla időpillanathoz tartozó pszichológiai állapot mellett. (A nulla időpillanat a tanulás megkezdésének pillanata, ahonnan az időt fogjuk számítani.)

Az anyag egysége tehát függ a tanulótól és annak kezdeti pszichológiai állapotától, amiket mi rögzítettünk. Definíciónk alapján a tanuló számára „nehezebb" anyagot mi nem nehezebbnek, hanem többnek vesszük.

E bevezető után áttérünk a modell leírására, ahol mindenek előtt a tanulás sebességét definiáljuk.

1. A TANULÁS SEBESSÉGE

Egy adott pillanatban a tanuló tanulási sebességét azzal a maximális anyagmennyiséggel mérjük, melyet a tanuló az adott pillanathoz tartozó pszichológiai állapot mellett egységnyi idő alatt tud áttanulmányozni úgy, hogy ha közben nem felejt, akkor az így áttanulmányozott anyagot hiánytalanul produkálni tudja.

Az anyag egységének definíciójából következik, hogy a tanulás sebessége a tanulás megkezdésekor egységnyi. A tanulás folyamán a tanulás sebessége állandóan változik, aminek oka sokrétű. A tanulás sebességét csökkentő tényező például a fáradás. A tanulás folyamán megváltozik a tanuló és az anyag viszonya (mi egy-

szerűen pszichológiai állapotváltozásnak tekintjük), ami a sebességet növelő tényezőként szerepelhet.

A tanulás sebességét x időpillanatban $\lambda(x)$-szel jelöljük és feltesszük, hogy $\lambda(x)$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $\lambda(x)$ értelmezési tartománya a folyamatos tanulás intervalluma,

b) $\lambda(0)=1$,

c) $\lambda(x)>0$,

d) $\lambda(x)$ az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos.

Amíg más feltételt nem teszünk mindig folyamatos tanulással dolgozunk, a tanulás megszakítása után ugyanis a sebességfüggvény megváltozik, amit könnyen beláthatunk, ha a pihenés folyamatára gondolunk.

Vegyünk fel a folyamatos tanulás intervallumán egy $[x, x+\Delta x]$ intervallumot és tekintsük ezen a tanulás sebességét egy állandó $\lambda(\xi)$ értéknek, ahol $x \leqq \xi \leqq x+\Delta x$. Ha $T(x)$-szel jelöljük a $[0, x]$ intervallumon áttanulmányozott anyagmennyiséget, akkor az előbbiek szerint igaz a

$$T(x+\Delta x)-T(x) = \lambda(\xi)\cdot\Delta x, \quad \text{ahol} \quad x<\xi\leqq x+\Delta x$$

egyenlőség, ahonnan

$$T'(x) = \lambda(x), \tag{1.1}$$

illetve a $T(0)=0$ feltételt felhasználva

$$T(x) = \int_0^x \lambda(t)\,dt. \tag{1.2}$$

Szükségünk lesz még az $[x_1, x_2]$ intervallumon áttanulmányozott anyagmennyiségre, melyet

$$T(x_2)-T(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

formában írhatunk fel.

2. A TANULÁS ÁLTALÁNOS EGYENLETEI

Vegyünk fel egy tetszőleges nagyságú a anyagmennyiséget, melyről tegyük fel, hogy a tanuló a tanulás megkezdése után t_1 idő elteltével egyetlen pillanatban tanulta. Egy t_2 ($\geqq t_1$) időpillanatban már nem a anyagmennyiséget tud az előbb tanultból, hanem valamely $a\cdot D(t_1, t_2-t_1)$-t, azaz egy t_1-től és t_2-től függő számmal szorzódik. E változás oka speciálisan lehet a felejtés, melyet a következő fejezetben részletesen vizsgálunk.

A most bevezetett $D(x_1, x_2)$ függvényre az alábbi feltételeket tesszük:

a) $D(x_1, 0)=1$,

b) $1 \geqq D(x_1, x_2)>0$,

c) az első változó folytonos, a második változó differenciálható függvénye.

A továbbiakban a folyamatos tanulás vizsgálatánál mindig a most bevezetett $D(x_1, x_2)$ függvény leírása lesz a feladatunk, mert ezzel felírhatjuk az x-ben tudott $f(x)$ anyagmennyiséget, ha a tanuló a $[0, x]$ intervallumon folyamatosan tanul az első fejezetben leírt sebességgel, de bármely pillanatban tanult anyag $D(x_1, x_2)$ függvény szerint változik.

$f(x)$ meghatározása érdekében vegyük a $[0, x]$ intervallum egy beosztását, ahol az i-edik osztáspontot x_i-vel jelöljük. Vizsgáljuk először az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon tanult anyag változását.

Az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon tanult anyagmennyiség (1.3) alapján

$$T(x_{i+1}) - T(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda(t)\,\mathrm{d}t,$$

vagy

$$T(x_{i+1}) - T(x_i) = \lambda(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i), \quad \text{ahol} \quad x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}.$$

Tekintsük ezt az anyagmennyiséget egy adott ξ_i pillanatban tanult anyagmennyiségnek. Mivel ennek az x-ben tudott részét keressük, ezért $x - \xi_i$ ideig változik, tehát $D(\xi_i, X - \xi_i)$-vel szorzódik. Az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon tanult anyag x-ben tudott része tehát

$$\lambda(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)\cdot D(\xi_i, x - \xi_i), \quad \text{ahol} \quad x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}.$$

Az egyes részintervallumokban tanult anyagok x-ben tudott részeit összegezve kapjuk az x-ben tudott összes anyagot:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\xi_i)\cdot D(\xi_i, x - \xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i), \quad \text{ahol} \quad x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}.$$

Mivel a jobb oldal folytonos függvény integrálközelítő összege, ezért

$$f(x) = \int_0^x \lambda(t)\cdot D(t, x - t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Ehhez hasonlóan adjuk meg az x-ben tudott anyagmennyiséget abban az esetben is, ha a tanuló egy $y(\leqq x)$ időpillanatban abbahagyta a tanulást.

Tegyük fel először, hogy a tanulás ideje alatt és a tanulás abbahagyása után ugyanazon $D(x_1, x_2)$ függvény szerint változik egy adott pillanatban tanult anyag tudott része. Ezt figyelembe véve megismételhetnénk az előbbi gondolatmenetet, csupán az integrációs tartomány változik, hisz a $[0, y]$ intervallumon tanult folyamatosan a tanuló. Ezért, ha $F(x, y)$-nal jelöljük az y-ig tanultból x-ben tudott anyagmennyiséget, akkor

$$F(x, y) = \int_0^y \lambda(t)\cdot D(t, x - t)\,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

összefüggéshez jutunk.

Még általánosabb összefüggést kapunk, ha nem tesszük azt a nagyon is önkényes megszorítást, hogy a tanulás abbahagyása után ugyanúgy változik a tudott anyag, mint a tanulás ideje alatt.

Tegyük fel tehát, hogy a tanulás ideje alatt továbbra is $D(x_1, x_2)$ függvény szerint változik egy adott pillanatban tanult anyag tudott része, a tanulás abbahagyása után pedig egy $B(x_1, x_2)$ függvény írja le a változást, ahol az első változó az anyag megtanulásától a tanulás abbahagyásáig eltelt időt, a második változó pedig a tanulás abbahagyásától eltelt időt jelenti. Pontosabban egy t pillanatban tanult a anyag változása a következő:

a) y-ban (a tanulás abbahagyásakor) tudott anyagmennyiség:

$$a \cdot D(t, y-t),$$

b) $x(>y)$-ben tudott anyagmennyiség:

$$a \cdot D(t, y-t) \cdot B(y-t, x-y).$$

A most bevezetett $B(x_1, x_2)$ függvényről feltesszük, hogy $B(x_1, 0)=1$ minden x_1-re, és $B(x_1, x_2)$ mindkét változó folytonos függvénye.

Készítsük el a $[0, y]$ intervallum egy beosztását, majd a fentieket figyelembe véve állítsuk elő $F(x, y)$-t integrálközelítő összeg formájában. A már bemutatott gondolatmenet alapján kapjuk, hogy

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\xi_i) \cdot D(\xi_i, y-\xi_i) \cdot B(y-\xi_i, x-y) \cdot (y_{i+1}-y_i),$$

ahol

$$y_i \leqq \xi_i \leqq y_{i+1}.$$

A beosztást minden határon túl finomítva

$$F(x, y) = \int_0^y \lambda(t) \cdot D(t, y-t) \cdot B(y-t, x-y)\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

összefüggéshez jutunk.

Mivel eddig a tanulás folyamatára semmiféle megszorítást nem tettünk, ezért a fenti összefüggéseket joggal nevezhetjük a tanulás általános egyenleteinek.

A következő fejezetekben részletesebben vizsgáljuk a felejtést és a reminiszcenciát, mivel azonban kísérleti eredményekre nem támaszkodunk, ezért továbbra is általános összefüggésekhez jutunk, melyekkel módszert adunk a kísérleti eredmények vizsgálatához.

3. A FELEJTÉS VIZSGÁLATA

A továbbiakban az áttanulmányozott anyag két részre oszlik: a tudott anyagra és az elfelejtett anyagra.

Vegyünk fel most is egy tetszőleges nagyságú a anyagmennyiséget és tegyük fel, hogy a tanuló egy adott pillanatban tanulta. A felvett a anyag az idő múlásával állandóan csökken, ezt a változást az előző fejezetben bevezetett $D(x_1, x_2)$-nek megfelelő függvény írja le. A tárgyalás egyszerűsége érdekében azonban megelégszünk a következő speciális esettel: feltesszük, hogy egy adott pillanatban tanult anyag felejtése nem függ a megtanulásának időpontjától, csupán az azóta eltelt időtől, feltesszük továbbá, hogy az anyag felejtése ugyanúgy történik a tanulás ideje alatt, mint a tanulás abbahagyása után. Ezeket a feltételeket figyelembe véve látható, hogy a tudott anyag változását egy egyváltozós egyetemes függvény írja le. Jelöljük ezt a függvényt $D(x, t)=E(t)$-vel, ahol t a megtanulás óta eltelt időt jelenti, azaz a adott pillanatban tanult anyagból t idő múlva a tanuló $a \cdot E(t)$ mennyiségre emlékszik, vagyis ennyi a tudott anyagmennyiség. E jelölést alkalmazva x idejű folyamatos tanulás után az x-ben tudott $f(x)$ anyagmennyiséget (2.1) felhasználásával a következőképpen írhatjuk fel:

$$f(x) = \int_0^x \lambda(t) \cdot E(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Hasonlóan módosul az $F(x, y)$ függvény is:

$$F(x, y) = \int_0^y \lambda(t) \cdot E(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

További feladatunk $E(t)$ függvény leírása.

Ha azt tennénk fel, hogy a tanuló egyenlő időközönként egyenlő részét felejti az anyagnak, akkor

$$E(t) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^t \text{ lenne, ahol } \frac{1}{p} \text{ a felejtés aránya,}$$

vagyis időegység alatt a tudott anyag ennyiedrészét felejtené el a tanuló. Ez azonban nem fedné a valóságot, hisz könnyen belátható, hogy ilyen feltétel mellett állandó tanulási sebesség esetén a tanulásnak felső határa lenne, ami a gyakorlatnak ellentmond. Ezért feltesszük, hogy a tanuló a régebbi anyagot kisebb arányban felejti, mint az újabban tanultat. Ezt úgy fogjuk fel, hogy a tudott anyag az idő múlásával egyre nagyobb súllyal rendelkezik a felejtéssel szemben.

Vizsgáljuk a felvett a anyagmennyiség változását először olyan feltétel mellett, hogy annak tulajdonsága a felejtéssel szemben változatlan, vagyis olyan tulajdonságú marad, mint a tanulás pillanatában volt. Ekkor elfogadjuk azt a feltevést, hogy a tanuló egyenlő időközönként egyenlő részét felejti a tudott anyagnak és az egységnyi idő alatt elfelejtett rész arányát $\frac{1}{p}$-vel jelöljük. Röviden a nulla időpillanathoz az $\frac{1}{p}$ felejtési arányt rendeltük. Ha viszont a megtanulás után t idő elteltével követeljük meg, hogy az anyag tulajdonsága a felejtéssel szemben állandóvá váljék, akkor most is egyenlő időközönként egyenlő részét felejtené tovább, viszont egységnyi idő alatt nem $\frac{1}{p}$, hanem ennél kevesebb $\frac{1}{p\varphi(t)}$-ed részét felejtené a t-ben tudott anyagnak

$$\left(1-\frac{1}{p\varphi(t)}\right)^r$$

-ed részére emlékezne a tanuló. A felejtés folyamatára ezeket a feltevéseket fogadjuk el a továbbiakban.

A most bevezetett $\varphi(t)$ függvényt súlyfüggvénynek nevezzük és azt mondjuk, hogy egy adott pillanatban tanult anyag tudott részének felejtéssel szembeni súlya (röviden súlya) t idő múlva $\varphi(t)$.

Feltesszük, hogy $\varphi(t)$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) Értelmezve van minden $0 \leqq t < \infty$ pontban.

b) $\varphi(0) = 1$.

c) Szigorúan monoton növő.

d) Folytonos az értelmezési tartomány minden pontjában.

Feltesszük még, hogy $p > 1$.

Ezek után áttérünk az $E(t)$ függvény meghatározására.

A felvett a anyagmennyiségből tehát a tanuló t idő múlva $a \cdot E(t)$ mennyiséget tud. Elég kicsi Δt időnövekedést feltételezve az anyag súlyát változatlannak tekinthetjük, így $t+\Delta t$-ben ennek

$$\left(1-\frac{1}{p\varphi(t)}\right)^{\Delta t}$$

ed részét tudja a tanuló, tehát

$$a \cdot E(t+\Delta t) = a \cdot E(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{p\varphi(t)}\right)^{\Delta t},$$

melyből

$$\frac{a \cdot E(t+\Delta t)}{a \cdot E(t)} = \left(1 - \frac{1}{p\varphi(t)}\right)^{\Delta t}.$$

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve és Δt-vel osztva az

$$\frac{\ln E(t+\Delta t) - \ln E(t)}{\Delta t} = \ln\left(1 - \frac{1}{p\varphi(t)}\right)$$

differencialhányadoshoz jutunk, melyből $\Delta t \to 0$ határátmenettel az

$$[\ln E(t)]' = \ln\left(1 - \frac{1}{p\varphi(t)}\right)$$

egyenletet kapjuk. Mivel $E(0)=1$ (l. $D(x_1, x_2)$-re adott feltétel), ezért

$$E(t) = e^{\int_0^t \ln\left(1 - \frac{1}{p\varphi(u)}\right) du}. \tag{3.3}$$

A felejtés modelljének leírásakor alapgondolatunk volt, hogy a tudott anyaghoz egy számot rendeltünk, melyet az anyag súlyának neveztünk. Az x-ben tudott $f(x)$ anyagmennyiség súlyeloszlása nem homogén, hisz az egyes részeit különböző időben tanulta. A legrégebben (0 időpillanatban) tanult anyag súlya $\varphi(x)$, még a legfrissebb (x-ben tanult) anyag súlya 1, a többi anyag súlya e két érték között változik.

A súlyeloszlást szemléletessé tehetjük, ha felírjuk a (3.1) alatti integrál ekvidisztans osztáspontokhoz tartozó

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\xi_i) \cdot E(x - \xi_i) \cdot \Delta r$$

közelítő összegét, ahol

$$\Delta r = \frac{x}{n} \quad \text{és} \quad (i-1)\Delta r \leqq \xi_i \leqq i\Delta r.$$

A felírt összeg egy tetszőleges tagja a ξ_i valamely Δr nagyságú környezetében tanult $\lambda(\xi_i)\Delta r$ anyag tudott része x-ben, tehát súlya $\varphi(x-\xi_i)$.

A súlyeloszlás további vizsgálata érdekében vezessük be a

$$h = h(r) = f(x) - F(x, r)$$

jelölést. Mivel h az $[r, x]$ intervallumon tanult anyag x-ben tudott részét jelenti, ezért tekinthetjük a $[0, f(x)]$ intervallum változójának. Az r pontban tanult anyag súlyát nevezzük $f(x)$ h pontbeli súlyának és $\varphi_x(h)$-val jelöljük. Nyilvánvaló, hogy

$$\varphi_x(h) = \varphi(x-r).$$

Mindkét oldalt r szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_x(h)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\varphi_x(h)}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = -\varphi'(x-r).$$

Mivel

$$h'(r) = -\lambda(r) \cdot E(x-r),$$

ezért

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_x(h)}{\mathrm{d}h} = \frac{\varphi'(x-r)}{\lambda(r) \cdot E(x-r)}. \tag{3.4}$$

4. AZ ISMÉTLÉS LEÍRÁSA

Ebben a fejezetben az előbbi gondolatmenetet visszük tovább az elfelejtett anyag újratanulásának, ismétlésének leírásával.

Tegyük fel, hogy a $[0, b]$ intervallumon folyt az előbbiekben leírt tanulás. Ez idő alatt $T(b)$ anyagmennyiséget tanulmányozott át a tanuló és ebből b-ben tud $f(b)$-t, tehát az összes elfelejtett anyag

$$T(b) - f(b) = \int_0^b \lambda(t) \cdot [1 - E(b-t)]\, \mathrm{d}t$$

nagyságú. b-től ezt az elfelejtett anyagot kezdi újratanulni, illetve ismételni a tanuló. Már most megállapíthatjuk, hogy az átismétlendő anyag $T(b) - f(b)$-nél nagyobb lesz, mivel az ismétlés folyamán felejt a tanuló.

Mielőtt azonban a részletes vizsgálatokat elkezdenénk, írjuk le a modell pontos tulajdonságait. Feladatunk most is a sebességfüggvény és az adott pillanatban tanult anyag további változásának megadása.

Az ismétlés elkezdésétől számított t időpillanatban a tanulás sebességét jelöljük $\bar{\lambda}(t)$-vel. Mivel ezzel részletesen nem foglalkozunk, csak annyit jegyzünk meg róla, hogy $\bar{\lambda}(0) > \lambda(b)$ feltétel látszik helyesnek, mivel most már az egyszer tanult anyag újratanulásáról van szó. Ugyanakkor valószínűnek látszik, hogy a tanulás sebességét ezután a fáradás határozza meg, mert a tanuló és az anyag viszonya nem változik lényegesen.

Az átismételt anyag tudott része változásának leírásához először a súly fogalmát kell általánosítanunk. Az egy adott pillanatban elfelejtett anyaghoz is súlyt rendelünk, mely egy $\Phi(s, t)$ függvény szerint változik, ahol s az anyag súlya az elfelejtés pillanatában, t pedig az azóta eltelt idő.

$\Phi(s, t)$-re feltesszük, hogy

a) Mindkét változó folytonos függvénye.
a) t-nek szigorúan monoton csökkenő függvénye.
c) $\Phi(s, 0) = s$.
d) $\Phi(1, t) \equiv 1$.
e) $\lim_{t \to \infty} \Phi(s, t) = 1$.
f) $s \geqq \Phi(s, t) \geqq 1$.

Tegyük fel, hogy a tanuló egy adott pillanatban $\Phi(s, t)$ súlyú elfelejtett anyagot ismétel. Az újratanulás pillanatától ismét a $\varphi(x)$ függvény szerint változzon az újra-

tanult anyag tudott részének súlya. Pontosabban az újratanulástól számított x idő múlva az átismételt anyag tudott részének súlya

$$\varphi[\varphi^{-1}(\Phi(s,t))+x] \tag{4.1}$$

lesz.

(Itt kihasználtuk, hogy $\varphi(x)$ szigorúan monoton.)

Definiálni fogjuk az adott pillanatban tanult anyag t idő alatt elfelejtett részének súlyát.

Vegyünk fel egy adott pillanatban (először) tanult a anyagmennyiséget. Mivel ezt folyamatosan felejti, ezért egy bizonyos t idő múlva az elfelejtett rész súlyösszetétele változó, mi ezeknek a súlyoknak az átlagát fogjuk venni. Osszuk fel a $[0, t]$ intervallumot ekvidisztans osztáspontokkal n egyenlő részre, majd $\frac{t}{n}$-t jelöljük Δy-nal. Mivel az $[i\Delta y, (i+1)\Delta y]$ intervallumon

$$a\cdot E(i\Delta y)-a\cdot E((i+1)\Delta y) = -a\cdot[E((i+1)\Delta y)-E(i\Delta y)]$$

anyagmennyiséget felejt el a tanuló, melynek súlya az elfelejtés pillanatában $\varphi(\xi_i)$ ahol $i\Delta y \leqq \xi_i \leqq (i+1)\Delta y$, ezért az a-ból elfelejtett összes anyag t-ben

$$-a\cdot\sum_{i=0}^{n-1}[E((i+1)\Delta y)-E(i\Delta y)],$$

ahol az egyes tagok súlya rendre

$$\Phi[\varphi(\xi_i), t-\xi_i].$$

Vegyük a

$$\frac{-a\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\{[E((i+1)\Delta y)-E(i\Delta y)]\cdot\Phi[\varphi(\xi_i), t-\xi_i]\}}{-a\cdot\sum_{i=0}^{n-1}[E((i+1)\Delta y)-E(i\Delta y)]}$$

súlyozott átlagot, majd ennek $n\to\infty$-ben vett határértékét. E határértéket $\psi(t)$-vel jelölve

$$\psi(t) = \frac{1}{E(t)-1}\int_0^t E'(y)\cdot\Phi[\varphi(y), t-y]\,dy \tag{4.2}$$

összefüggéshez jutunk. Az így definiált $\psi(t)$-t nevezzük egy adott pillanatban tanult anyag t idő alatt elfelejtett része súlyának.

Kezdje el a tanuló az ismétlést b-ben, mégpedig az eredeti sorrendet megtartva. Jelöljük $k(z)$-vel az eredetileg $[0, z]$ intervallumon tanult anyag elfelejtett részének ismétléséhez szükséges időt. Az egész anyag átismétlése tehát $k(b)$ ideig tart. Vegyünk fel a $[0, b]$ intervallumon egy z és egy $z+\Delta z$ pontott, ezeknek a $[0, k(b)]$ intervallumon megfelel egy $k(z)$, illetve $k(z+\Delta z)$ pont. Mivel a $[b+k(z)\ b+k(z+\Delta z)]$ intervallumon a tanuló $k(\xi)$ ideje ismétel, ahol $z\leqq\xi\leqq z+\Delta z$, ezért itt

$$\lambda(k(\xi))\cdot[k(z+\Delta z)-k(z)]$$

anyagmennyiséget tanulmányoz át. Másrészt viszont ezen az intervallumon az eredetileg z-től $z+\Delta z$-ig tanult $\lambda(\xi)\cdot\Delta z$ anyagmennyiségből elfelejtett

$$\lambda(\xi)\cdot\Delta z-\lambda(\xi)\cdot\Delta z\cdot E[b+k(\xi)-\xi]$$

anyagmennyiséget tanulmányozza át (ugyanis $b+k(\xi)-\xi$ ideig felejtette), ezért

$$\bar{\lambda}(k(\xi))\cdot[k(z+\Delta z)-k(z)] = \lambda(\xi)\cdot\Delta z-\lambda(\xi)\cdot\Delta z\cdot E[b+k(\xi)-\xi],$$

melyből

$$\bar{\lambda}(k(z))\cdot k'(z) = \lambda(z)-\lambda(z)\cdot E[b+k(z)-z] \tag{4.3}$$

differenciálegyenletet kapjuk $k(z)$-re.

Vegyünk fel a $[b, b+k(b)]$ intervallumon egy tetszőleges x pontot és jelöljük $m_b(x)$-szel a b-től x-ig átismételt anyagnak x-ben tudott részét. $m_b(x)$ meghatározása végett vegyünk fel továbbá egy tetszőleges y és $y+\Delta y$ pontot a $[b, x]$ intervallumon, melyeknek az előbbiek szerint a $[0, b]$ intervallumon egy $k^{-1}(y-b)$ és egy $k^{-1}(y+\Delta y+b)$ pont felel meg. A felvett $[y, y+\Delta y]$ intervallumon a tanuló $\bar{\lambda}(\xi-b)\cdot\Delta y$ anyagmennyiséget tanulmányoz át, ahol $y\leqq\xi\leqq y+\Delta y$, melynek súlya az ismétléskor

$$\psi[\xi-k^{-1}(\xi-b)].$$

Mivel s súllyal induló a mennyiségű anyagból t idő múlva a tanuló

$$a\cdot\frac{E[\varphi^{-1}(s)+t]}{E[\varphi^{-1}(s)]}$$

mennyiségre emlékszik, ezért x-ben az $[y, y+\Delta y]$ intervallumon tanult anyagból

$$\bar{\lambda}(\xi-b)\cdot\Delta y\cdot\frac{E\{\varphi^{-1}[\psi(\xi-k^{-1}(\xi-b))]+x-\xi\}}{E\{\varphi^{-1}[\psi(-k^{-1}(\xi-b))]\}}$$

mennyiségre emlékszik a tanuló. Ezt minden részintervallumra meghatározva és összegezve kapjuk $m_b(x)$ egy integrálközelítő összegét, melyből határátmenettel az

$$m_b(x) = \int_b^x \bar{\lambda}(y-b)\cdot\frac{E[\varphi^{-1}\{\psi(y-k^{-1}(y-b))\}+x-y]}{E[\varphi^{-1}\{\psi(y-k^{-1}(y-b))\}]} \tag{4.4}$$

összefüggéshez jutunk.

Az összes x-ben tudott $I(b, x)$ anyagot úgy kapjuk, hogy $m_b(x)$-hez hozzáadjuk az ismétlés nélkül is tudott anyagmennyiséget, tehát

$$I(b, x) = m_b(x)+F(x, b). \tag{4.5}$$

Megjegyezzük még, hogy ha a tanuló nem kezdi meg az ismétlést a tanulás abbahagyásakor (b-ben), hanem egy ($b<$) c időpillanatban, akkor a tanulási folyamat a tanulás sebességében és a tanulandó anyag súlyában fog eltérni a fentitől, így más lesz a $k(z)$ függvény is.

Befejezésül vizsgáljuk meg az x-ben tudott anyagmennyiség szempontjából az alábbi két eset közötti különbséget:

a) A tanuló folyamatosan tanul x-ig ismétlés nélkül.

b) A tanuló b-ig tanul folyamatosan, majd x-ig ismétel, ahol $b<x\leqq b+k(b)$ feltétel teljesül.

a) esetben az x-ben tudott anyagmennyiség $f(x)$, melyet a következő formában is felírhatunk:

$$f(x) = \int_0^b \lambda(t)\cdot E(x-t)\,dt+\int_b^x \lambda(t)\cdot E(x-t)\,dt.$$

Ha viszont a b) esetet tekintjük, akkor az x-ben tudott anyagot (4.4) és (4.5) alapján

$$I(b, x) = \int_0^b \lambda(t) \cdot E(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x \bar{\lambda}(t-b) \cdot \frac{E[\tau(t)+x-t]}{E[\tau(t)]}\,\mathrm{d}t$$

alakban írhatjuk, ahol $\tau(t)$ jelentése (4.4)-ből leolvasható.

Vegyük e két érték különbségét:

$$I(b, x) - f(x) = \int_0^x \left\{ \bar{\lambda}(t-b) \cdot \frac{E[\tau(t)+x-t]}{E[\tau(t)]} - \lambda(t) \cdot E(x-t) \right\} \mathrm{d}t.$$

Könnyen belátható, hogy általában igaz az

$$\frac{E(c+t)}{E(c)} > E(t) \text{ egyenlőtlenség.}$$

Ha még $\bar{\lambda}(t-b) > \lambda(t)$ (nem szükséges feltétel) is teljesül, akkor nyilvánvaló, hogy

$$I(b, x) > f(x).$$

Bizonyos feltételek teljesülésekor tehát az ismétléssel nagyobb tudásra lehet szert tenni, mint ismétlés nélkül ugyanannyi idő alatt.

5. REMINISZCENCIA VIZSGÁLATA

A pszichológiában reminiszcenciának nevezik azt a jelenséget, hogy a tanulás utáni közvetlen felidézés általában kisebb tudást mutat, mint egy bizonyos idő elteltével történő felidézés, vagyis a tanulás befejezése után egy ideig növekszik a produkálható anyag mennyisége.

x-ben produkálhatónak nevezzük tehát azt a $g(x)$ anyagmennyiséget, melyet a tanuló x-beli felidézésekor el tud mondani az x-ig tanult anyagból. A tudott (el nem felejtett) és a produkálható anyag különbségét gátlás alatt levő anyagmennyiségnek fogjuk nevezni. A reminiszcenciát úgy fogjuk értelmezni, hogy a tanulás abbahagyása után az ott gátlás alatt levő anyag „felszabadul", produkálhatóvá válik. A gátlást és a felszabadulást egy-egy folyamatként kezeljük, melyet úgy képzelünk el, hogy egy bizonyos idő alatt történő tanulás hatására gátlás alá kerül az addig produkálható anyag egy meghatározott része, majd azonnal elkezdődik (a tanulás ideje alatt is) ennek a gátlás alatt levő anyagnak a felszabadulása. Így a tudott anyag mindig két részre oszlik: a produkálható és a gátlás alatt levő anyagra. Szerepelni fog még a felszabadult anyag fogalma, mely olyan anyagot jelent, amelyik gátlás alatt levő anyagból lett produkálhatóvá, de a modellben nem különböztetjük meg, vagyis ugyanolyan produkálható anyagnak tekintjük, mint ami még nem volt gátlás alatt.

Kezdjük most is a modell pontos leírásával.

A tudott anyag felejtése továbbra is a harmadik fejezetben leírt módon történik, függetlenül attól, hogy az anyag produkálható vagy gátlás alatt levő állapotban van.

Egy adott pillanatban tanult anyag gátlás alá kerülése és felszabadulása (a felejtéshez hasonlóan) független a megtanulás idejétől.

A gátlásról feltesszük, hogy csak a tanulás ideje alatt megy végbe és mindig csak a produkálható anyagra vonatkozik. Hogy feltevésünket pontosan megtehessük, vegyünk fel egy adott pillanatban produkálható anyagmennyiséget, melynek nagysága tetszőleges a, majd tételezzük fel, hogy a tanuló tanul, de csak a gátlás érvényesül, tehát tekintsünk el a felejtéstől és a felszabadulástól. Ilyen feltételek mellett t idő múlva a produkálható részt $a \cdot H(t)$-vel jelöljük. A gátlás folyamatára feltesszük, hogy

$$H(t) = (1-\gamma)^t, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq \gamma < 1. \tag{5.1}$$

E feltétel szerint tehát egységnyi idő alatt a produkálható anyag γ-szorosa kerül gátlás alá.

A felszabadulásra feltesszük, hogy a tanulástól függetlenül megy végbe, ugyanúgy történik a tanulás ideje alatt mint annak abbahagyása után. Vegyünk fel egy c gátlás alatt levő anyagmennyiséget és tegyük fel, hogy csak a felszabadulás folyamata játszódik le. A még t idő múlva gátlás alatt levő anyagmennyiséget $c \cdot K(t)$-vel jelöljük és feltesszük, hogy

$$K(t) = (1-\delta)^t, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq \delta < 1. \tag{5.2}$$

δ tehát az egységnyi idő alatt felszabadult anyagmennyiség aránya.

Megjegyezzük, hogy (5.1) és (5.2) nem lényeges feltevések (melyek meglehetősen önkényesek), sőt a tanulás folyamatát ezek figyelembevétele nélkül írjuk le, így csupán egy lehetőségként szerepelnek.

Lássuk be a következő állításokat:

a) Egy a felejtéssel szemben $\varphi(\xi)$ súlyú a produkálható anyagmennyiségből t idő múlva

$$a \cdot \frac{E(\xi+t)}{E(\xi)} \cdot H(t) \tag{5.3}$$

mennyiség lesz produkálható, ha a felszabadulástól eltekintve csak a felejtést és a gátlást vesszük figyelembe.

b) Jelöljük $a \cdot \overline{K(t) \cdot H(t)}$-val az egy tetszőleges (adott pillanatban) produkálható a anyagmennyiségből t idő elteltével még mindig produkálható anyagmennyiséget, ha a gátlást és a felszabadulást vesszük figyelembe, de a tanuló nem felejt. Igaz az alábbi egyenlőség:

$$a \cdot \overline{K(t) \cdot H(t)} = a \cdot \left[\frac{\ln(1-\delta)}{\ln(1-\delta)(1-\gamma)} + \left(1 - \frac{\ln(1-\delta)}{\ln(1-\delta)(1-\gamma)}\right) ((1-\delta)(1-\gamma))^t \right]. \tag{5.4}$$

c) A felejtéssel szemben $\varphi(\xi)$ súlyú c nagyságú gátlás alatt levő anyagmennyiségből t idő múlva

$$c \cdot \frac{E(\xi+t)}{E(\xi)} \cdot K(t) \tag{5.5}$$

lesz gátlás alatt, ha rá csak a felejtés és a felszabadulás hat.

d) Egy adott pillanatban tanult (egységnyi súlyú) a produkálható anyagmennyiségből t idő múlva

$$a \cdot \overline{H(t) \cdot K(t)} \cdot E(t) \tag{5.6}$$

lesz produkálható, ha a tanuló felejt, de fellép a gátlás és a felszabadulás is.

A fenti állítások közül csak a b)-t igazoljuk, hisz a többi triviális, illetve d) következménye b)-nek.

A b) állítás igazolásához vegyünk fel egy a produkálható anyagmennyiséget (a felejtéssel szembeni súlya lényegtelen, mivel most a felejtést nem vesszük figyelembe). A gátlásra és a felszabadulásra adott feltevéseink alapján nyilvánvaló, hogy

$$a \cdot \overline{K(t+\Delta t) \cdot H(t+\Delta t)} = a\overline{K(t) \cdot H(t)} \cdot (1-\gamma)^{\Delta t} + a[1 - \overline{K(t) \cdot H(t)}] \cdot [1-(1-\delta)^{\Delta t}],$$

mert t-ben $a \cdot \overline{K(t) \cdot H(t)}$ c produkálható és $a \cdot [1 - \overline{K(t) \cdot H(t)}]$ a gátlás alatt levő alatt levő anyagmennyiség. Ebből viszont a $\overline{K(t) \cdot H(t)}$ függvényre a

$$\left(\overline{K(t) \cdot H(t)}\right)' = \overline{K(t) \cdot H(t)} \cdot \ln(1-\delta)(1-\gamma) - \ln(1-\delta)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melyet $\overline{K(0) \cdot H(0)} = 1$ feltétel mellett megoldva az állításunkat igazoló összefüggéshez jutunk.

Közvetlenül beláthatók az alábbi következmények:

a) A felejtéssel szemben $\varphi(\xi)$ súlyú, c nagyságú gátlás alatt levő anyagmennyiségből t idő alatt

$$c \cdot (1 - K(t)) \cdot \frac{E(\xi+t)}{E(\xi)} \tag{5.7}$$

válik produkálhatóvá, ha közben a felszabadulás és a felejtés játszódik le gátlás nélkül.

b) Egy adott pillanatban tanult (egységnyi súlyú) a produkálható anyagmennyiségből t idő múlva

$$a \cdot [1 - \overline{K(t) \cdot H(t)}] \cdot E(t) \tag{5.8}$$

lesz gátlás alatt, ha feltételezzük a felejtést, gátlást és a felszabadulást is.

Ezek után határozzuk meg az x-ben produkálható $g(x)$ anyagmennyiséget, ha a tanuló $[0, x]$ intervallumon folyamatosan tanul, ahol a felejtés, gátlás és a felszabadulás a fent leírt módon történik.

Mivel a második fejezetben bevezetett $D(x_1, x_2)$ függvénynek most az (5.6) alatti függvény felel meg, ezért $g(x)$-et a következő formában írhatjuk fel:

$$g(x) = \int_0^x \lambda(t) \cdot \overline{K(x-t) \cdot H(x-t)} \cdot E(x-t)\, \mathrm{d}t. \tag{5.9}$$

Valamivel bonyolultabb az x-ben produkálható $G(x, y)$ anyagmennyiség felírása, ha a tanuló $y\,(\leqq x)$ ideig tanult folyamatosan, majd abbahagyta a tanulást. A $G(x, y)$ felírása érdekében osszuk a $[0, y]$ intervallumot n részre, az így kapott részintervallumok i-edik tagját jelöljük $[x_i, x_{i+1}]$-el és vizsgáljuk először az ezen tanult anyag változását.

Az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon tanult $\lambda(\xi)[x_{i+1} - x_i]$ anyagmennyiségből (ahol $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$) (5.8) alapján y-ban

$$\lambda(\xi_i) \cdot [x_{i+1} - x_i] \cdot [1 - \overline{H(y-\xi_i) \cdot K(y-\xi_i)}] \cdot (y-\xi_i)$$

lesz gátlás alatt, mivel a megtanulástól $y-\xi_i$ idő telt el. Az $[y, x]$ intervallumon ez az anyag felejtődik és felszabadul. Mivel y-ban a felejtéssel szemben $\varphi(y-\xi_i)$ súlyú volt, ezért $x-y$ idő alatt

$$\frac{E(x-\xi_i)}{E(y-\xi_i)}\text{-ed részét felejti el,}$$

ugyanakkor felszabadul $K(x-Y)$-ad része, így x-ben már csak

$$\lambda(\xi_i)\cdot[x_{i+1}-x_i]\cdot\left[1-\overline{K(y-\xi_i)\cdot H(y-\xi_i)}\right]\cdot E(x-\xi_i)\cdot K(x-y)$$

mennyiség lesz gátlás alatt.

Az összes részintervallumon tanult anyag x-ben gátlás alatt levő részét összegezve, majd a beosztást minden határon túl finomítva kapjuk az x-ben gátlás alatt levő összes anyagmennyiséget:

$$\int_0^y \lambda(t)\cdot\left[1-\overline{K(y-t)\cdot H(y-t)}\right]\cdot E(x-t)\cdot K(x-y)\,\mathrm{d}t.$$

Ha ezt kivonjuk az x-ben tudott összes $F(x, y)$ anyagból, akkor megkapjuk az x-ben produkálható $G(x, y)$ anyagmennyiséget:

$$G(X,y)=F(x,y)-\int_0^y \lambda(t)\cdot\left[1-\overline{K(y-t)\cdot H(y-t)}\right]\cdot E(x-t)\cdot K(x-y)\,\mathrm{d}t. \tag{5.10}$$

Vizsgáljuk meg még részletesebben a produkálható anyag változását a tanulás abbahagyása után, azaz rögzítsük y értékét és $G(x, y)$-t x függvényében vizsgáljuk.

A rövidebb írásmód kedvéért vezessük be az

$$1-\overline{K(y-t)\cdot H(y-t)}=q(t).$$

jelölést.

E jelölést felhasználva (5.10)-ből kapjuk, hogy

$$F(x,y)-G(x,y)=\int_0^y \lambda(t)\cdot E(x-t)\cdot q(t)\cdot K(x-y)\,\mathrm{d}t.$$

Ebből az alakból leolvashatjuk a modell egyik fontos tulajdonságát: a tanulás abbahagyása után egy bizonyos idő elteltével a produkálható anyag mennyisége nem különbözik lényegesen a tudott anyagtól, pontosabban

$$\lim_{x\to\infty}[F(x,y)-G(x,y)]=0, \tag{5.11}$$

ha y rögzített.

Ennek belátásához megjegyezzük, hogy

$$\int_0^y \lambda(t)\cdot E(x-t)\cdot q(t)\,\mathrm{d}t$$

x-nek korlátos függvénye és $\lim_{x\to\infty} K(x-y)=0$ (l. (5.2)), ha $\delta\neq 0$.

A modell másik fontos tulajdonsága, hogy a tanulást befolyásoló paraméterek megadhatók úgy, hogy a produkálható anyag mennyisége a tanulás abbahagyása után növekedjék. Ez a növekedés általában csak egy $[y, m]$ intervallumra vonatkozik, ahol m a tanulási folyamat egy jellegzetes pontja, ugyanis itt a legnagyobb a produkálható anyag mennyisége.

Bebizonyítjuk, hogy p megadható úgy, hogy a

$$G(x+\Delta x, y)-G(x, y)>0$$

teljesüljön rögzített y, x, Δx, γ, δ esetén, ahol feltesszük, hogy $0<\gamma$ és $0<\delta$.

Írjuk fel $G(x, y)$ függvény növekményét (5.10) és (3.2) felhasználásával:

$$G(x+\Delta x, y)-G(x, y)=$$

$$=\int_0^y \lambda(t)\cdot E(x+\Delta x-t)\cdot[1-q(t)K(x+\Delta x-y)]-E(x-t)\cdot[1-q(t)K(x-y)]\}\,\mathrm{d}t.$$

Válasszuk p-t akkorára, hogy t egy rögzített t_0 értékére teljesüljön az

$$\left[1-\frac{1}{p\varphi(x-y)}\right]^{\Delta x}>\frac{1-q(t_0)\cdot K(x-y)}{1-q(t_0)\cdot K(x-y)\cdot(1-\delta)^{\Delta x}}$$

egyenlőtlenség (ezt megtehetjük, mivel a bal oldal 1-hez tart, ha p tart a végtelenbe, a jobb oldal értéke pedig 1-nél kisebb). Ekkor viszont minden $0\leqq t\leqq t_0$ feltételt kielégítő t-re igaz az

$$\frac{E(x+\Delta x-t)}{E(x-t)}>\frac{1\,q(t)\cdot K(x-y)}{1-q(t)\cdot K(x-y)\cdot(1-\delta)^{\Delta x}}$$

összefüggés, mert a jobb oldali hányadosnál t helyére egyre kisebb számot írva $q(t)$ növekedése miatt a hányados csökken, másrészt az $E(x+\Delta x-t)$ és $E(x-t)$ függvények hányadosa (3.3) alapján csak nagyobb lehet az előző egyenlőtlenség bal oldalánál.

Az utóbbi egyenlőtlenség alapján viszont könnyen belátható, hogy az így választott p esetén a $[0, t_0]$ intervallumon a növekmény integrálja alatti függvény pozitív. Ehhez csak azt kell még észrevenni, hogy $K(x-y)\cdot(1-\delta)^{\Delta x}=K(x+\Delta x-y)$.

Írjuk fel a fenti integrált összeg formájában:

$$G(x+\Delta x, y)-G(x, y)=\int_0^{t_0}+\int_{t_0}^{y},$$

majd t_0-lal közelítsünk y értékéhez, közben p értékét úgy változtatva, hogy az összeg első tagja mindig pozitív maradjon. Mivel az összeg második tagja ilyen feltétel mellett 0-hoz tart, ezért elérhető, hogy az összeg, illetve a növekmény pozitív legyen, ami állításunkat igazolja.

6. EGY KÍSÉRLETI EREDMÉNY ELEMZÉSE

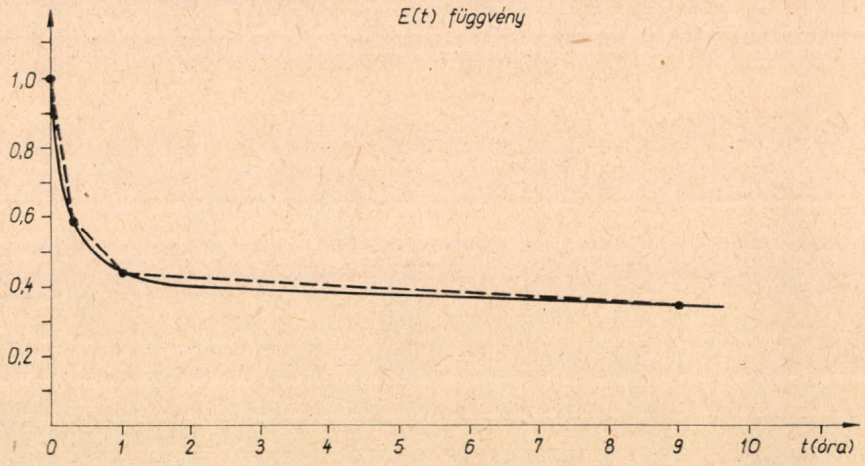
Ebbinghaus a felejtés mértékét vizsgálta (l. Rubinstein: Általános pszichológia alapjai I. kötet) úgy, hogy a kísérleti személyekkel értelmetlen szótagokat tanultatott meg, majd bizonyos időközönként felmérte a még tudott anyagmennyiséget a megtanulás abbahagyása után.

Ebbinghaus kísérleteinek eredményét az alábbi táblázat mutatja, ahol az általunk bevezetett jelöléseket használjuk:

t (óra)	0	$\frac{1}{3}$	1	9	24	48	72	744
E(t)	1	0,592	0,442	0,358	0,337	0,278	0,254	0,211

A pszichológiában ezen eredmény realitását vitatják (éppen az értelmetlen tanulás konstruálása miatt), mi ezzel a kérdéssel nem foglalkozunk, a fenti értékeket mint kísérleti eredményeket elfogadjuk és megállapításainkat ez alapján tesszük meg.

A továbbiakban 9 órás folyamatos tanulást tételezünk fel, így az előző táblázat első négy adatára lesz szükségünk. A szóbanlevő négy adat $E(t)$ függvény négy pontját határozza meg, a többi értékeket mi adjuk meg grafikon segítségével, ami



1. ábra

természetesen egy bizonyos mértékig önkényes, amit további kísérlettel lehetne helyesbíteni. $E(t)$ függvényen tehát az 1. ábrán levő grafikon által meghatározott függvényt értjük.

Határozzuk meg először $f(x)$ függvényt $\lambda(t) \equiv 1$ feltétel mellett. $f(x)$-et (3.1) alapján a görbe alatti terület kiszámításával határozzuk meg, melyre az alábbi eredményeket kapjuk:

x (óra)	0	0,1	$\frac{1}{3}$	0,5	$\frac{2}{3}$	1	2	4	9
$f(x)$	0	0,088	0,244	0,343	0,435	0,575	0,995	1,77	3,62

$f(x)$ függvényt a 2. ábrán ábrázoltuk.

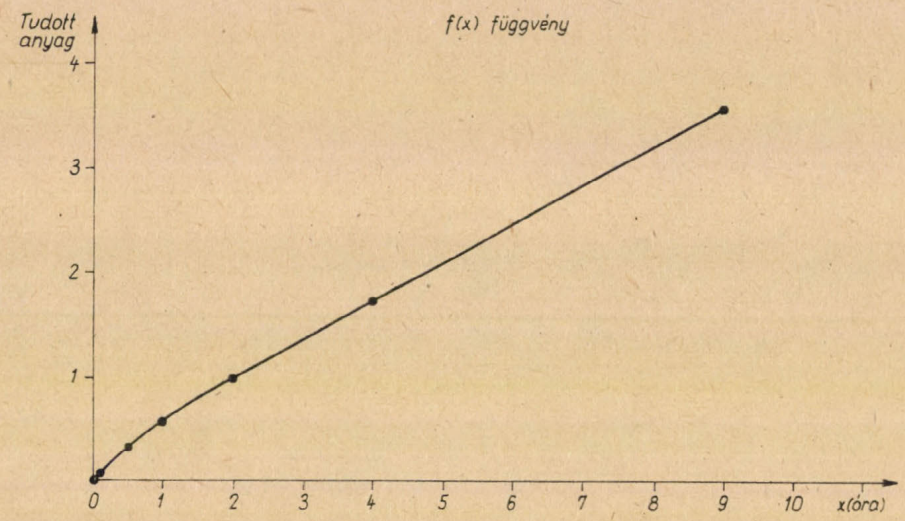
Ehhez hasonlóan határozhatnánk meg az $F(x, y)$ függvényt is.
Érdekes feladat még a $\varphi(t)$ súlyfüggvény meghatározása. Mivel

$$E(t) = e^{\int_0^t \ln\left(1-\frac{1}{p\varphi(u)}\right)du},$$

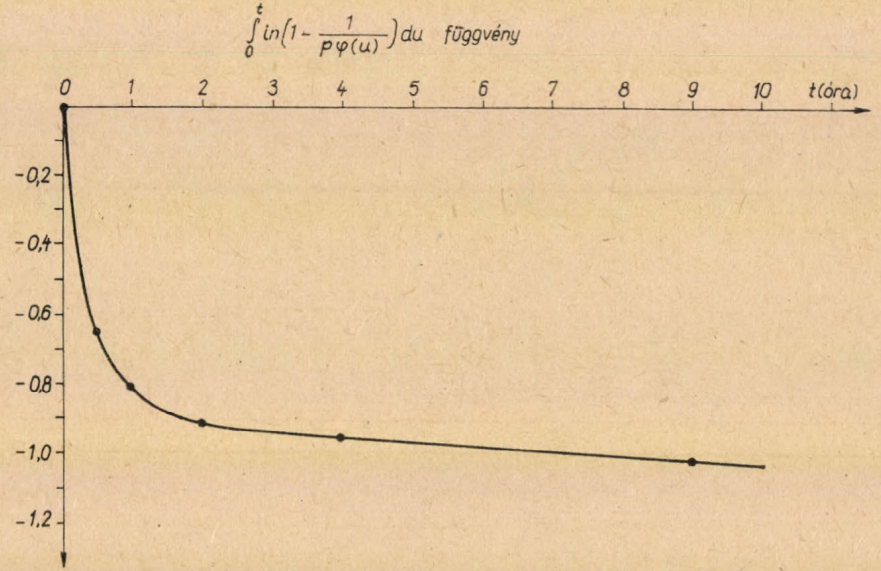
ezért $\varphi(t)$ meghatározását több lépésben végezzük. Először az 1. ábra alapján számítással meghatározzuk a kitevő értékét a fentebb már szerepelt jellegzetes pontok-

ban, majd ezt ábrázoljuk. A részletes számításokat elvégezve az alábbi értéktáblázathoz jutunk:

t (óra)	0	0,1	$\frac{1}{3}$	0,5	$\frac{2}{3}$	1	2	4	9
kitevő	0	−0,274	−0,524	−0,644	−0,702	−0,816	−0,915	−0,959	−1,027



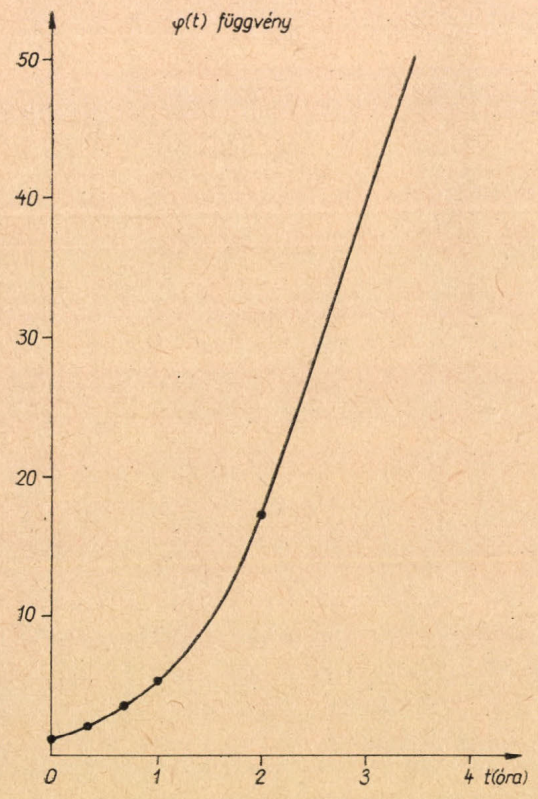
2. ábra



3. ábra

E függvény grafikonja alapján (l. 3. ábra) méréssel meghatározzuk ennek a differenciálhányados függvényét:

t (óra)	0	0,1	$\frac{1}{3}$	0,5	$\frac{2}{3}$	1	2	4	9
$\ln\left(1-\frac{1}{p\varphi(t)}\right)$	-4	$-1,92$	$-0,66$	$-0,46$	$-0,35$	$-0,22$	$-0,06$	$-0,02$	–



4. ábra

Mivel $\varphi(0)=1$, ezért $\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=-4$, amiből $p=1,02$. A táblázat alapján $\varphi(t)$ értékei az adott pontokban számítással határozhatók meg. A részletes számítások eredményeit az alábbi táblázat tartalmazza, a $\varphi(t)$ függvényt a 4. ábrán ábrázoltuk.

t (óra)	0	0,1	$\frac{1}{3}$	0,5	$\frac{2}{3}$	1	2	4	9
$\varphi(t)$	1	1,195	2,11	2,77	3,46	5,2	17,2	54	–

Megjegyezzük még, hogy az $E(t)$ függvény 0 pont körüli gyors csökkenése az oka annak, hogy p igen közel van az 1-hez.

ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА УЧЕНИЯ

ИШТВАН СЕКЕРЕШ

ANALYTIC DESCRIPTION OF THE PROCESS OF LEARNING

I. SZEKERES

A K_n DETERMINÁNS ALKALMAZÁSAIRÓL

KUN KUTI MÁRTON

Az alábbiakban a

$$K_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & 0 \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & -1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & \dots & -1 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns-típus széles körű alkalmazási lehetőségeit mutatjuk be néhány tétel bizonyítása és több nevezetes mennyiség kifejezése által.

Látni fogjuk, hogy a K_n determináns minden más determinánsnál nagyobb mértékben alkalmazható algebrai kifejezések és nevezetes mennyiségek szemléletes és áttekinthető alakú kifejezésére és ezért igen sok bizonyításnál is eredményesen használható. Erre elsősorban azon 15 tulajdonsága teszi alkalmassá, melyekkel e determináns a determinánsok általános tulajdonságain kívül rendelkezik. E 15 tulajdonságból 14 az [5] 299—302-ben található. A 15-ik *tulajdonságnak* tekinthetjük a következő tételt:

Ha a -1 *elemekből álló és minden 2-ik diagonális sor elemeit* -1*-gyel megszorozzuk, a determináns értéke nem változik. Ha a fő- és minden 2-ik diagonális sor elemeit megszorozzuk* -1*-gyel, akkor a determináns* $(-1)^n$*-szeresét kapjuk,* azaz

$$K_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & -\alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{41} & \alpha_{42} & -\alpha_{43} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-2}\alpha_{n-1,1} & (-1)^{n-3}\alpha_{n-1,2} & (-1)^{n-4}\alpha_{n-1,3} & \dots & \alpha_{n-1,n-1} & 1 \\ (-1)^{n-1}\alpha_{n1} & (-1)^{n-2}\alpha_{n2} & (-1)^{n-3}\alpha_{n3} & \dots & -\alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -\alpha_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & -\alpha_{22} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & -\alpha_{42} & \alpha_{43} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\alpha_{n-1,1} & (-1)^{n-2}\alpha_{n-1,2} & (-1)^{n-3}\alpha_{n-1,3} & \dots & -\alpha_{n-1,n-1} & -1 \\ (-1)^n\alpha_{n1} & (-1)^{n-1}\alpha_{n2} & (-1)^{n-2}\alpha_{n3} & \dots & \alpha_{n,n-1} & -\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

BIZONYÍTÁS. Jelöljük az első determinánst U_n-nel, a 2-ikat V_n-nel. A K_n determináns 3-ik tulajdonsága [5] 299. old. szerint K_n-nek és U_n-nek az utolsó sor szerinti kifejtése

$$K_n = \alpha_{nn}K_{n-1} + \alpha_{n,n-1}K_{n-2} + \alpha_{n,n-2}K_{n-3} + \ldots + \alpha_{n2}K_1 + \alpha_{n1}$$

$$U_m = \alpha_{nn}U_{n-1} + \alpha_{n,n-1}U_{n-2} + \alpha_{n,n-2}U_{n-3} + \ldots + \alpha_{n2}U_1 + \alpha_{n1}.$$

Ekkor — tekintve, hogy $K_1 = U_1 = \alpha_{11}$ — a teljes indukció alapján belátható, hogy $K_n = U_n$.

Ha V_n minden sorát -1-gyel végigszorozzuk, akkor U_n-et, vagyis K_n-et kapjuk.

A K_n determinánsnak bizonyítások terén való alkalmazhatóságára rávilágít a következő három tétel igazolása:

1. ÁLLÍTÁS. *Ha az*

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{és} \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

hatványsorok együtthatói pozitívok és kielégítik az $a_n > b_1 a_{n-1}$ *és* $b_1 b_{k-1} > b_k$ *feltételeket,* ahol $k = 2, 3, \ldots, n$, *akkor*

$$\frac{a(z)}{b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

együtthatói is pozitívok.

E tétel egy elégséges (de nem szükséges) feltételt ad azzal az általánosabb problémával kapcsolatban, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy két nem negatív együtthatós hatványsor hányadosának hatványsora is nem negatív együtthatójú legyen. E problémát MEDGYESSY PÁL vetette fel és egy speciális esetben tárgyalta is ([7] 176.) a sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióira, illetve generátorfüggvények hányadosára vonatkozó vizsgálataival kapcsolatban.

BIZONYÍTÁS. Az egyszerűség kedvéért legyen $b_0 = 1$. Ugyanis az általánosságot nem korlátozza az, hogy $b(z)$-et b_0-al végigosztott hatványsornak tekintjük.

Ismeretes, [5] 306., hogy ez esetben

$$C_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & -b_2 & -b_1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & -b_{n-1} & -b_{n-2} & -b_{n-3} & \ldots & -b_1 & -1 \\ a_n & -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \ldots & -b_2 & -b_1 \end{vmatrix} \quad (A).$$

Képezzük az utolsó két sor szerinti Laplace-féle kifejtést:

$$C_n = \begin{vmatrix} -b_1 & -1 \\ -b_2 & -b_1 \end{vmatrix} C_{n-2} + \begin{vmatrix} -b_2 & -1 \\ -b_3 & -b_1 \end{vmatrix} C_{n-3} + \begin{vmatrix} -b_3 & -1 \\ -b_4 & -b_1 \end{vmatrix} C_{n-4} + \ldots + \begin{vmatrix} -b_{n-1} & -1 \\ -b_n & -b_1 \end{vmatrix} C_0 +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 \\ a_n & -b_1 \end{vmatrix}.$$

Ugyanis a K_n determináns 3-ik tulajdonsága szerint [5] 299. a kifejtés többi determinánsai zérusok. Tehát

$$C_n = (b_1^2 - b_2)C_{n-2} + (b_1 b_2 - b_3)C_{n-3} + (b_1 b_3 - b_n)C_{n-4} + \ldots$$

$$\ldots + (b_1 b_{n-1} - b_n)C_0 + (a_n - b_1 a_{n-1}).$$

Tehát, ha $b_1 b_{k-1} > b_k$ és $a_n > b_1 a_{n-1}$, ahol $k = 2, 3, \ldots, n$, akkor $C_n > 0$.

MEGJEGYZÉS. Ha az (A) determinánsnak az utolsó 3, 4, ... sor szerinti Laplace-féle kifejtését képezzük, akkor C_n pozitív voltára ugyanígy további — de bonyolultabb — elégséges feltételeket kaphatunk.

2. ÁLLÍTÁS. *Nem negatív együtthatós hatványsor reciprokának hatványsorában nem lehet minden együttható nem negatív.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $b(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b'_v z^v$-ben minden együttható nem negatív és legyen az első nem zérus együttható b'_i. Ekkor

$$b(z) = b'_i z^i \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{ahol} \quad n = v - i, \; b_0 = 1 \quad \text{és} \quad b_n = \frac{b'_v}{b'_i} \geqq 0.$$

Ha

$$\frac{1}{b(z)} = \frac{1}{b'_i z^i} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

akkor a legutóbbi (A) determináns szerint — tekintve, hogy ekkor (A)-ban $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$ —

$$C_n = \begin{vmatrix} -b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{n-1} & -b_{n-2} & -b_{n-3} & \ldots & -1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \ldots & -b_1 \end{vmatrix}.$$

Ebből, ha $b_1 \neq 0$, akkor $C_1 = -b_1$. Tehát ekkor $C_1 < 0$. Ha $b_1 = 0$ és $b_2 \neq 0$, akkor $C_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -b_2 & 0 \end{vmatrix} = -b_2$. Tehát ekkor $C_2 < 0$. Ha b_2 is zérus és $b_3 \neq 0$, akkor $C_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_3$. Tehát ekkor $C_3 < 0$, stb. Tehát, ha $b(z)$-ben $b_0 = 1$ után következő első nem zérus együttható b_k, akkor $C_k = -b_k$. Vagyis ekkor $C_k < 0$.

3. ÁLLÍTÁS. Ha két páros, vagy két páratlan kitevőjű hatványsort egyenlő kitevőjűeknek; egy páros és egy páratlan kitevőjűt különböző kitevőjűeknek nevezünk, akkor az olyan hatványsorokra, amelyek hányadosának nincs szinguláris pontja, fennáll a következő tétel:

Egyenlő kitevőjű hatványsorok hányadosa páros kitevőjű és különböző kitevőjűek hányadosa páratlan kitevőjű hatványsor.

BIZONYÍTÁS. Négy eset lehetséges.

1. *eset.* Ha

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}; \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} z^{2n} \quad \text{és} \quad \frac{a(z)}{b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

akkor csak azt kell igazolni, hogy $a(z)/b(z)$-ban a páratlan kitevőjű hatványok együtthatói zérusok.

Ismeretes, hogy ez esetben, ha $b_0 = 1$, akkor

$$C_{2n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & -b_4 & 0 & -b_2 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_4 & 0 & -b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & -b_{2n} & 0 & -b_{2n-2} & 0 & -b_{2n-4} & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -b_{2n} & 0 & -b_{2n-2} & 0 & \dots & -b_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

A 2-ik sor elemei egy kivételével zérusok, tehát e sor és a 3-ik oszlop kihagyható. De ekkor a 4-ik sor elemei lesznek egy kivételével zérusok. E sort és az 5-ik oszlopot kihagyva a 6-ik sor elemei lesznek egy kivételével zérusok. Így folytatva, végül az utolsó sorban csak zérusok maradnak, tehát $C_{2n+1} = 0$.

2. *eset.* Ha

$$(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} z^{2n-1}; \quad b(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} z^{2n-1}, \quad \text{akkor} \quad \frac{a(z)}{b(z)}$$

ben z-vel egyszerűsíthetünk és akkor a számláló is és a nevező is páros kitevőjű hatványsor lesz és akkor az 1. esetet kapjuk.

3. *eset.* Ha

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} z^{2n-1}; \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} z^{2n} \quad \text{és} \quad \frac{a(z)}{b(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

akkor csak azt kell igazolni, hogy a páros kitevőjű hatványok együtthatói zérusok.

Ismeretes, hogy ez esetben, ha $b_0 = 1$, akkor

$$C_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_4 & 0 & -b_2 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & 0 & -b_{2n-2} & 0 & -b_{2n-4} & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & -b_{2n} & 0 & -b_{2n-2} & 0 & -b_{2n-4} & \dots & -b_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ez első sor elemei egy kivételével zérusok, tehát e sor és a 2-ik oszlop kihagyható. De ekkor a 3-ik sor elemei lesznek egy kivételével zérusok. E sort és a 4-ik oszlopot kihagyva, az 5-ik sor elemei lesznek egy kivételével zérusok. Így folytatva, végül az utolsó sorban csak zérusok maradnak. Tehát $C_{2n}=0$.

4. *eset.* Ha

$$a(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}z^{2n} \quad \text{és} \quad b(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}z^{2n-1}, \quad \text{ekkor} \quad \frac{a(z)}{b(z)}$$

csak akkor nem szinguláris a $z=0$ helyen, ha $a_0=0$. Ez esetben a törtet z-vel egyszerűsíthetjük és ekkor a 3-ik esetet kapjuk.

A K_n DETERMINÁNS SZORZATALAKJA

A K_n determinánst szorzattá alakítjuk, mert e szorzatalak egyik speciális esetét a továbbiakban sokszor alkalmazzuk.

Vonjuk ki az első sor α_{i1}: α_{11}-szeresét a többi sorból

$$K_n=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{22}+\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{32}+\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} & \alpha_{33} & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Vonjuk most ki a második sor $\left(\alpha_{i2}+\dfrac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}\right):\left(\alpha_{22}+\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)$-szeresét az utána következő sorokból

$$K_n=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_{22}+\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{33}+\dfrac{\alpha_{32}+\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{22}+\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}} & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{43}+\dfrac{\alpha_{42}+\dfrac{\alpha_{41}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{22}+\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}} & \alpha_{44} & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ezt folytatva kapjuk végül, hogy

$$K_n = \alpha_{11}\left(\alpha_{22}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)\left(\alpha_{33}+\frac{\alpha_{32}+\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{22}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}}\right)\left(\alpha_{44}+\frac{\alpha_{43}+\frac{\alpha_{42}+\frac{\alpha_{41}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{22}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}}}{\alpha_{33}+\frac{\alpha_{23}+\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{22}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}}}\right)\dots$$

$$\dots\left(\alpha_{nn}+\cfrac{\alpha_{n2}+\frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{n,n-1}+\cfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}}\Bigg/\cfrac{\alpha_{22}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{n-1,2}+\frac{\alpha_{n-1,1}}{\alpha_{11}}}\Bigg/\cfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\Bigg/\cfrac{\alpha_{22}+\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}}{\alpha_{n-1,n-1}+\cfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}}\right).$$

Ilyen módon minden determináns szorzattá alakítható. Ha az egyes oszlopok elemei egyenlők, akkor e tényezőkben fellépő törtek mindegyikének értéke az egység. Tehát ez esetben

$$K_n = \alpha_{11}(\alpha_{22}+1)(\alpha_{33}+1)\dots(\alpha_{nn}+1).$$

A K_n DETERMINÁNS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

A K_n determinánssal háromféleképpen is kifejezhető az $y(z)=u(z)\cdot v(z)$ szorzatfüggvény differenciálásának Leibniz-féle szabálya. Az alábbi három determináns közül az első kettő az utolsó sor szerinti kifejtéssel szolgáltatja a Leibniz-féle szabályt. A 3-ik determinánsban az utolsó sor elemeihez tartozó aldeterminánsok a K_n determináns szorzatalakja szerint sorjában $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots$. Tehát az utolsó sor szerinti kifejtéssel is a Leibniz-féle szabályt kapjuk.

$$y^{(n)} = \begin{vmatrix} u & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u' & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u'' & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & v^{(n)} & \binom{n}{1} v^{(n-1)} & \binom{n}{2} v^{(n-2)} & \dots & \binom{n}{n-1} v' & v \end{vmatrix}.$$

$$y^{(n)} = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-2}{3} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & -1 \\ u^{(n)}v & u^{(n-1)}v' & u^{(n-2)}v'' & u^{(n-3)}v''' & \dots & u'v^{(n-1)} & uv^{(n)} \end{vmatrix}.$$

$$y^{(n)} = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & \frac{n-3}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & \frac{n-3}{2} & \frac{n-5}{3} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & \frac{n-3}{2} & \frac{n-5}{3} & \frac{n-7}{4} & \dots & \frac{1-n}{n} & -1 \\ u^{(n)}v & u^{(n-1)}v' & u^{(n-2)}v'' & u^{(n-3)}v''' & \dots & u'v^{(n-1)} & uv^{(n)} \end{vmatrix}.$$

K_n determinánssal az n-ed fokú racionális egész függvény többféleképpen is kifejezhető. Az irodalomban ([4] 187. és [6] 104—107.) szereplő kifejezéseken kívül még igazak az alábbiak is

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{z}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \left(\frac{z}{2}\right)^2 & \frac{z}{2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \left(\frac{z}{2}\right)^3 & \left(\frac{z}{2}\right)^2 & \frac{z}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{z}{2}\right)^n & \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{z}{2}\right)^{n-2} & \dots & \frac{z}{2} & -1 \\ a_0 & 2a_1 & 2a_2 & \dots & 2a_{n-1} & 2a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z^2 & z & -1 & \dots & 0 & 0 \\ z^3 & z^2 & z & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z & -1 \\ a_0 & a_1 & \frac{a_2}{2} & \dots & \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}} & \frac{a_n}{2^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Ezek a homogenitási tulajdonságból ([5] 300.) az utolsó sor szerinti kifejtéssel beláthatók.

A gyöktényezős alak is — kétféleképpen is — kifejezhető K_n determinánssal

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z & z_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z & z & z_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z & z & z & \ldots & z_n \\ 1 & z & z & z & \ldots & z \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & z & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z_1 & z & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & z_1 & z_2 & z & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z \\ 1 & z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \end{vmatrix}.$$

Ez a K_n determináns szorzat alakjából következik.

SPECIÁLIS K_n DETERMINÁNSOK

A K_n determináns 7-ik tulajdonsága szerint ([5] 300.) fennáll

$$K_n = 2 \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & -1 & \ldots & 0 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \ldots & -1 \\ \alpha^n & \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \ldots & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha^n \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (2\alpha)^n.$$

Ha $\alpha = \frac{1}{2}$, akkor

$$2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2} & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-2}} & \frac{1}{2^{n-3}} & \ldots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1.$$

A homogenitási tulajdonság alapján az alábbi — mondhatnánk: dupla Vandermonde — determináns zérus.

$$V_n = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \alpha^{n-4} & \ldots & 1 \\ \alpha^n & \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \ldots & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A K_n determináns szorzatalakjából következik, hogy

$$\begin{vmatrix} 1-\beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_1 & -\beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & -\beta_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & -\beta_n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & -\alpha_n \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_1+\beta_1-1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_1+\beta_1-1 & \alpha_2+\beta_2-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1+\beta_1-1 & \alpha_2+\beta_2-1 & \dots & -1 \\ 1 & \alpha_1+\beta_1-1 & \alpha_2+\beta_2-1 & \dots & \alpha_n+\beta_n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)\dots(\alpha_n+\beta_n)\dots\dots(B).$$

Ha (B)-ben $\beta_i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -\alpha_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1).$$

Ha (B)-ben $\alpha_i = \alpha - 1$ és $\beta_i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha-1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha-1 & \alpha-1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \dots & -1 \\ 1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \dots & \alpha-1 \end{vmatrix} = \alpha^n.$$

Ha (B)-ben $\alpha_i = a$ és $\beta_i = \pm b$, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & \pm b & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & a & \pm b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & a & \dots & \pm b \\ 1 & a & a & a & \dots & a \end{vmatrix} = (a \pm b)^n.$$

Ha (B)-ben $\alpha_i = i+1$ és $\beta_i = 1$, akkor

$$2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n!.$$

Ha (B)-ben $\alpha_i = k+i-1$ és $\beta_i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & k+1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k & k+1 & k+2 & \dots & -1 \\ 1 & k & k+1 & k+2 & \dots & k+n-1 \end{vmatrix} = \frac{(n+k)!}{k!}.$$

A K_n determináns szorzatalakja szerint és ha (B)-ben $\alpha_i = \frac{n-k}{i}$ és $\beta_i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & \frac{n-3}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ n & \frac{n-3}{2} & \frac{n-5}{3} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & \frac{n-3}{2} & \frac{n-5}{3} & \frac{n-7}{4} & \dots & -1 \\ n & \frac{n-3}{2} & \frac{n-5}{3} & \frac{n-7}{4} & \dots & \frac{n-2k+1}{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & n-k & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & n-k & \frac{n-k}{2} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-k & \frac{n-k}{2} & \frac{n-k}{3} & \dots & -1 \\ 1 & n-k & \frac{n-k}{2} & \frac{n-k}{3} & \dots & \frac{n-k}{k} \end{vmatrix} = \binom{n}{k}.$$

Ha (B)-ben rendre $\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2i}$; $\alpha_i = \frac{i}{i+1}$ és $\beta_i = 1$; $\alpha_i = \frac{i+1}{i}$ és $\beta_i = 1$, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \dots & -\frac{1}{2n} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots & \frac{n-1}{n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \dots & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}.$$

Ez utóbbiból az

$$e = \lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \dots & \frac{n+1}{n} & 1 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

kifejezés helyessége az utolsó sor szerinti kifejtéssel belátható. Ha (B)-ben $\alpha_i = \frac{1}{4i^2-1}$ és $\beta_i = 1$, akkor

$$K_\infty = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \frac{1}{1\cdot 3} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \frac{1}{1\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 5} & -1 & 0 & \dots \\ 1 & \frac{1}{1\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 7} & -1 & \dots \\ 1 & \frac{1}{1\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 5} & \frac{1}{5\cdot 7} & \frac{1}{7\cdot 9} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}.$$

Mert K_n szorzatalakja szerint

$$K_\infty = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\left(1+\frac{1}{5\cdot 7}\right)\dots = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots = \frac{\pi}{2}$$

IRODALOM

[1] BEKE M.: Determinánsok. Athenaeum, Budapest, 1933; 45—50.
[2] M. DIETRICH: Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunctionen. Crelle's Journal **69** (1868) 190—196.
[3] GLAISHER: Expressions for Laplaces coefficients. Bernoullian and Eulerian numbers as determinats. Messenger of Matematics. London and Cambridge. **6** (1877) 49—63; **7** (1878) 160—165; **8** (1879) 158—167.
[4] GÜNTHER: Über aufsteigende Kettenbrüche. Zeitschrift für Matematik. **21** (1876) 187.
[5] KUN KUTI M.: A K_n determináns és alkalmazásai. Matematikai Lapok. (1962) 298—310.
[6] C. A. LAISANT: Sur un determinant remarquable. Bulletin de la Société Math. de France. (1889) 104—107.
[7] MEDGYESSY P.: Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása. I. Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **21** (1972) 129—200.
[8] E. PASCAL: Die Determinanten. Leipzig. (1900) a) 155; b) 132—138.
[9] E. PASCAL: Repetitorium der Höheren Mathematik. I. Analysis. (1910) Zweite Aufl. Erste Hälfte. Kap. II. 71.
[10] STUDNICKA: Über eine neue Determinanteneigenschaft. Böhmische Ges. Berichte. N. **7** (1880) 50—64.
[11] STUDNICKA: Über eine neue Formel der Kombinatorik. Böhmische Ges. Berichte. N. **29** (1879) 295—298.
[12] STUDNICKA: Notiz über einige Determinanten in welchen Binomialcoeffizienten als Elemente auftreten. Böhmische Ges. Berichte. N. **28** (1879) 292—295.

О ПРИМЕНЕНИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ K_n

M. КУН КУТИ

ÜBER DIE ANWENDUNGEN DER DETERMINANTE K_n

M. KUN KUTI

Dieser Artikel behandelt die Anwendungen der speziellen Determinante

$$K_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \dots & -1 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Er stellt die Produktform dieser Determinante, ferner den Beweis einiger Sätze und die Herstellung mehrerer algebraischen Ausdrücke bzw. bemerkungswerter Konstanten durch diese Determinante vor.

ELMÉLKEDÉS EGY ISKOLÁSOKNAK SZÁNT ALGEBRAKÖNYV ÜRÜGYÉN

SCHMIDT TAMÁS

Egyre fontosabb, hogy az iskolai tanulók ne csak egy-egy fontos (és meglehetősen absztrakt) fogalommal (valós szám, térbeli vektor stb.) ismerkedjenek meg, hanem a *struktúrákban való gondolkodásmódot* sajátítsák el, bejárva egyúttal az egyre magasabb fokú absztrakciók útját, mely az önálló absztrahálási készséget is kifejleszti. Minderre kiváló alkalmat nyújt a modern algebra, amely nem egyes struktúrákat vizsgál, hanem *struktúraosztályokat* egyszerre, és a változatos fogalomalkotás módot ad az absztrakció dinamikus folyamatának hatásos bemutatására.

Ezekkel szemben az oktatásban a valós számok és az euklideszi tér ismertetése dominál, egy-egy olyan struktúráé, amelyek az *abszolútságot* és megváltoztathatatlanságot sugalmazzák a tanulóknak; ahol az esetleg felsorolt axiómáknak ($a+b = b+a$, párhuzamossági axióma stb.) a nagy többség számára semmi jelentősége, hiszen ezen állítások *a priori* világosak, ellenkezőjük el sem képzelhető — mert nincsenek *struktúraosztályok*, egy axiómarendszerre *több modell*. A legelemibb állítások bizonyítása holmi axiómák alapján nem más, mint a szavak csűrés-csavarása, ha a tanulónak nem mutattuk be, hogy van más, a vizsgálttal azonos típusú struktúra is.

Ezeken a szemléleti vonatkozásokon kívül cseppet sem mellékes az algebrai (és kombinatorikus) struktúrák egyre szélesedő alkalmazási köre, amely mind többeket érint.

Az *iskolai tanterv elmaradt a kor követelményeitől*. Ezért egyre sürgetőbben vetődik fel az absztrakt algebra iskolai oktatásához szükséges magyar nyelvű irodalom megteremtésének szükségessége.

VARECZA LÁSZLÓ: Konkrét és absztrakt struktúrák c. műve, amely 1970-ben jelent meg a Tankönyvkiadó gondozásában, kettős célt tűzött maga elé:

a) a struktúrák fogalmának kialakítását az olvasóban, konkrét struktúrákból való absztrahálással, továbbá áttekintést adni a gyakran előforduló struktúrákról;

b) az olvasó meggyőzését arról, hogy a struktúrákat az iskolai matematikaoktatás szerves részévé kell tenni.

A vázoltak alapján a legmesszebbmenőkig *helyeselnünk kell a szerző szándékát*. A szerző a könyvben bemutatja a Boole-algebra, félcsoport, csoport, gyűrű, test, vektortér, algebra fogalmát.

Sajnos, a szándékot nem koronázta teljes siker. Az alábbiakban a könyv néhány vitatható mozzanatát elemezzük. A kevésbé súlyosakkal kezdjük.

1. Vitába kell szállnunk az „absztrakt" szónak az egész könyvön végigvonuló félrevezető használatával. (14. o. „Van konkrét... és van absztrakt téglalap".) A szerző szerint a „konkrét" félcsoportok, csoportok, gyűrűk stb. elemeinek miben-

lététől és a műveletek elvégzésének mikéntjétől elvonatkoztatva kapjuk az „absztrakt" félcsoportot, gyűrűt stb. Pl.: 234. o. „A konkrét algebrákból úgy kapjuk az absztrakt algebrát, hogy eltekintünk az elemek mibenlététől és a műveletek konkrét értelmezésétől, vagyis absztrahálással." De ebben az értelemben minden egyes struktúra *konkrét*, hiszen elemei megkülönböztetett egyedek, még ha ez nem is érdekel minket. Ami valóban *absztrakt* a szó általánosan elfogadott értelmében, az a félcsoport stb. *fogalma*. Tetézi a félreérthetőséget, hogy a szerző az absztrakt félcsoport stb. fent leírt fogalomzavarát szinte minden esetben a vizsgált struktúraosztály axiómáinak lefektetése után közvetlenül közli az olvasóval. Ez azt a benyomást kelti a *tájékozatlan olvasó*ban, hogy az „absztrakt struktúrának" csak a műveleti tulajdonságai számítanak: az axiómák, s mindaz, ami azokból levezethető. Talán még az izomorfia-elv is ezt mondaná? A 211. oldalon, miután a szerző legalább 4-edszer ismétli meg a struktúrák izomorfiájának korrekt definícióját (l. még 104., 130., 169. old.), azt a magyarázó megjegyzést fűzi hozzá, hogy „Az a lényeges, hogy a megfelelő műveletek tulajdonságai megegyezzenek".

Nézetünk szerint az absztrakció folyamatában azok a *közös jegyek* a döntőek, amelyeket kiemelünk; az, hogy eközben mi mindentől „tekintünk el", csak mellékes magyarázgatás (amire didaktikai okból időnként szükség van).

A közös jegyek kiemelése pedig egy-egy *struktúraosztály fogalmának* a megalkotását jelenti (ez „absztrakt" fogalom: absztrakciós szintje eggyel magasabb, mint az éppen vizsgált („konkrét") struktúráké).

Miért mondjuk mégis gyakran, hogy „absztrakt csoport", „absztrakt test" stb.? Erre az izomorfia-elv világos választ ad: egy „absztrakt" struktúra vizsgálatakor egyszerre vizsgáljuk az összes vele izomorf struktúrát. Tehát az „absztrakt" jelző nem is magára a struktúrára, hanem vizsgálatának módjára utal. Ezt a pongyola szóhasználatot nem célszerű az iskolában propagálni, különösen nem az e könyvben kiélezett és félreértett konkrét-absztrakt ellentétet.

2. A könyv a 202. oldalon vezeti be a komplex számok testét, a következő módon kezdve: „Most az $a, b, c, \ldots$ valós számokból készítsük el az $a+bi$ alakú számokat. i az ismert $\sqrt{-1}$-et jelöli." De ha valaki ismeri a $\sqrt{-1}$-et, annak a számára már nem kell a komplex számokat bevezetni. Aki meg nem ismeri, annak számára az $a+b\sqrt{-1}$ alakú kifejezés nem szám, hanem zagyvaság. Különösen meglepő, hogy a szerző a 199—201. oldalon bemutatja a komplex számok szokásos konstrukcióját, bárminemű *motiváció nélkül*, s ezután, mint új, külön konstrukciót vezeti be a fent leírt inkorrekt indítással a komplex számokat, végül kimutatja e két test izomorf voltát.

Az is kérdéses, *számok*nak nevezhetjük-e az $a+bi+cj+dk$ alakú kifejezéseket, amint ezt a szerző a kvaterniók bevezetésének első mondatában teszi, arról sem nyújtva felvilágosítást, hogy i, j, k tulajdonképpen micsoda (203. old.).

Nem szerencsés, hogy a szerző két halmaz Descartes-szorzatát a két halmaz Descartes-halmazának nevezi (12. old.), s valószínűleg ez is magyarázza, hogy a Descartes-szorzást nem sorolja a halmazok közti műveletek közé.

3. A könyv kicsiny terjedelme ellenére megengedi magának azt a luxust, hogy bizonyos (néhol vitatható értékű) kijelentéseket unos-untalan ismételget, szájbarág. Ilyen a konkrét-absztrakt, speciális-általános viszonya, az izomorfia-elv, az izomorfizmus és homomorfizmus fogalma és viszonyuk.

Időnként mélynek tetsző megjegyzések tarkítják a szöveget. Pl.: 232. old. „két-vektor skalárszorzata segítségével definiáltuk a távolságot, ami a *mérés lehetőségét biztosítja*". Hogy kerül ide a mérés fizikai fogalma? A mérés lehetőségét nem az elvont matematikai definíció, hanem a mérési utasítás szokta biztosítani. Ha

a tárgyalt elméletet a fizikai valósággal óhajtjuk összevetni, sokkal messzebbről kell kiindulni. Egy ilyen felszínes megjegyzés csak zavart okozhat.

Ugyanezen az oldalon olvasható a következő: „Megjegyezzük, hogy az euklideszi tér általánosításaként kapjuk a *Hilbert-teret*, a Hilbert-tér általánosításaként a *Banach-teret*. Ezt csupán azért említjük, hogy lássuk e fontos konstrukciók logikai viszonyát."

Úgyhogy a logikai viszonyukat, azt látjuk. De, hogy mik is ezek a fontos fogalmak, arról semmit, még annyit sem, hogy milyen irányú az általánosítás. Kommentár nélkül idézünk egy másik mondatot (51. old.): „Ezek az azonosságok a konjunkció, stb. definíciójából következnek és *fordítva:* visszavezethetők e definíciókra."

A magtalan *szószaporításra teljes fejezeteket* is szentel a szerző. A „*Csapalgebra*" c. fejezetben a szerző a „Kapcsolóalgebra" c. rész anyagát ismételteti át az olvasóval: mint az elektromos áramot, úgy a vizet is kétállású kapcsolókon (csapokon) áramoltatja át. Ez látszólag a Boole-algebrák gyakorlati hasznosságát világítaná meg. Valójában, míg a kapcsolóalgebrák (logikai áramkörök) didaktikai és gyakorlati haszna ismert, a csapalgebra fogalma kifejezetten mesterkélt. Kapcsolókat igen egyszerűen sorba és párhuzamosan kötni, és egyszerű példákon illusztrálható az ilyen áramkörök gyakorlati alkalmazása. A csapok soros és párhuzamos kötése nehézkes és céltalan. Nem beszélve az azonos, de többszörösen előforduló csapokról, amilyenekre például az $\alpha(\alpha+\beta) = \alpha$ azonosság igazolásakor szükség van.

Megjegyzendő, hogy ezt a kérdést (amely a tanulókat könnyen megzavarja), nem is érinti a „Kapcsolóalgebra" c. rész sem, (l. pl. MANSFIELD—BRUCKHEIMER: Matematika modern felfogásban, III.).

A „Lie-algebra" c. fejezet sem különb (235. old.). A szerző a térbeli vektorok vektorális szorzatát („vektorszorzat") definiálja, megállapítja, hogy $a \times b = -b \times a$, és, hogy a szorzás nem asszociatív.

„Így a tér vektorai a vektorszorzatra nézve nem alkothatnak sem félcsoportot, sem csoportot, tehát semmilyen asszociatív algebrai struktúrát." Kiderül, hogy ez egy nem asszociatív algebra, ami önellentmondás az adott felépítésben, hiszen az algebrát asszociatívnak definiálta.

Végül megtudjuk, hogy „Ezt a nem asszociatív algebrát szokás *Lie-algebrának* is nevezni. Más elemhalmazok is alkothatnak Lie-algebrát, s így a Lie-algebrákkal kapcsolatban is beszélhetünk *konkrét Lie-algebrákról,* illetve *absztrakt Lie-algebrákról.*" Ezzel zárul a fejezet. Se definíció, se magyarázat, mindenesetre beszélhetünk róla, hiszen oly sok mindenről beszél az ember, amiről mit sem tud.

Hasonló a helyzet a 224. oldalon: megtudjuk, hogy a 3-dimenziós térről mondandók az *n*-dimenziós térre is könnyen általánosíthatók, ám a dimenzió fogalmát semmi sem világítja meg. Előjönnek a koordináták is, bár bázisról, a koordináták mibenlétéről szó sem volt.

4. A könyv apróbb hibái közé soroljuk azt a néhány elírást, amely matematikailag hibás állításokat eredményez. Ilyenek: A 63. oldalon szerepel a duális áramkör fogalma: fel kell cserélni a $-$ és $+$ jeleket (soros és párhuzamos kapcsolás), valamint a 0 és 1 jeleket (a mindig zárt és a mindig nyitott kapcsolót).

„Ha egy áramkörben folyik áram, akkor a vele duális áramkörben is folyik áram."

Ez nem igaz. $\alpha+\bar{\alpha}$-ban mindig folyik; duálisan, $\alpha \cdot \bar{\alpha}$-ban soha. Viszont az sem igaz, hogy ha egy áramkörben folyik áram, akkor a duálisában nem folyik:

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$$

s itt a két oldal egymás duálisa.

A helyes állítás az volna, hogy ha mindegyik kapcsoló állását megváltoztatjuk (nemcsak a 0-t és 1-et) és felcseréljük a − és + jeleket, akkor az eredmény egy megváltozott állapotú áramkör.

A 104. oldalon — STONE tételét így mondja ki a szerző:

„Bármely Boole-algebra reprezentálható valamely nem üres halmaz összes részhalmazaiból álló halmazalgebrával."

Itt a „reprezentálható" szó jelentése nem tisztázott. A 209. oldalon megtudjuk, hogy STONE tétele szerint „bármelyik Boole-algebra izomorf valamelyik nem üres halmaz összes részhalmazaiból álló halmazalgebrával". Nem ártana hangsúlyozni, hogy a reprezentálni kívánt Boole-algebra a teljes hatványhalmaz-algebrának többnyire csak egy *részalgebrájával* izomorf. Egyébként a véges Boole-algebrák izomorfak a teljes véges hatványhalmaz-algebrákkal, s ezt a középiskolások is játszva bebizonyíthatják, megfelelő előkészítés (atomok bevezetése, példák) után.

A 236. oldalon olvassuk, hogy „Nehéz bizonyítani (mellőzzük is a bizonyítást), hogy a vektorszorzat nem *asszociatív*". Ha már tudjuk a vektorszorzat definícióját, mi nehéz van annak megértésében, hogy ha a, b két merőleges egységvektor, akkor

$$(a \times a) \times b = 0 \neq a \times (a \times b)?$$

Valóban nehéz volna azonban azt igazolni, amit a következő félmondat állít: „vagyis tetszőleges a, b, c vektorok esetén

$$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)".$$

Ilyen hibát a tanulók maguktól is gyakran elkövetnek, nem kell őket erre külön tanítani.

A 231—232. oldalon a könyv az euklideszi tér definícióját adja meg így: „Az 1—3 axiómáknak eleget tevő távolságfüggvénnyel ellátott vektorteret euklideszi térnek nevezzük." Az 1—3 pedig a metrikus tér axiómái. Mint tudjuk, ennél lényegesen több kell ahhoz, hogy egy tér euklideszi legyen.

5. Rátérünk a könyv általunk súlyosnak ítélt hibáinak elemzésére.

A könyv *hamis képet fest* az absztrakt algebráról.

Úgy tünteti fel, *mintha az algebra öncélú absztrakciók sorozata volna.* A könyv nagy része semmiféle motivációt nem ad az algebrai konstrukciókhoz, és nem is használja őket semmi másra, mint, hogy „nini, újfent absztrahálhatunk". Ez az antididaktikus módszer kulminál az „Algebra" c. fejezetben (232. oldal), ahol a síkvektorok halmazát algebrává „szervezi": bevezeti köztük a „vektorok szorzását", nem árulva el, hogy ezt a szorzást a komplex számoknál már kétszer bevezette, igaz, nem éppen így. Szerencsére most csak annyit vétet észre az olvasóval, hogy gyűrűt kaptunk, azt már nem, hogy kommutatív testet. Így aztán ebből az egyetlen motiváció hiján kiagyaltnak látszó (geometriailag önkényes koordinátarendszer-választástól függő) példából remekül kiabsztrahálja az *algebra* fogalmát. Persze a fejezet elején kitűzött célnak a zéróalgebra is megfelelt volna. Nullosztómentes algebrát 3-dimenzióban nem is lehet konstruálni, így talán nem véletlen, hogy a fejezetben a szerző „egyszerűség kedvéért" 2-dimenzióra szorítkozik.

A „Lie-algebra" c. fejezetről már szóltunk.

A 228. oldalon látjuk a skalárszorzat definícióját, a koordináták szorzatösszegeként. (Deus ex machina.) Nem használja másra, mint a vektor hosszának kiszámítására, de ahhoz nem kell két különböző vektort szorozni tudunk.

A Boole-algebra az egyetlen példa, amelyből a hálót és a félhálót „általánosítja" (105. old.).

Magára a Boole-algebrára nem lehet panasz: 6-féle „konkrét" Boole-algebrával is találkozik az olvasó. Ezek ismertetése teszi ki a könyv első 100 oldalát. Egy-egy ilyen Boole-algebra-fajta ismertetése eleinte így fejeződik be: „Halmazalgebra axiómái" (26. o.), „Ítéletalgebra axiómái" (51. o.), „Kapcsolóalgebra axiómái" (64. o.). A határozott névelő hiánya mellett itt főleg az a zavaró, hogy nem értjük, mi ez az axiómatizálgatás.

Ha egy struktúrafajta kielégíti a Boole-algebra axiómáit, akkor az nyomban kiérdemli az *ítéletalgebra,* meg a *kapcsolóalgebra* nevet?! Hiszen az ítéletalgebrának (mint a szerző is említi, 42. o.) mindössze két eleme van (*i* és *h*), úgyhogy még izomorf sem lehet nagyobb Boole-algebrákkal! Hát akkor mit jelent ez, hogy az ítéletalgebra axiómarendszere?!

Ha axiómatizálunk, az absztrakt algebrában ezt azért tesszük, hogy egy *struktúraosztályt* kijelöljünk (pl. a Boole-algebrákat). Az osztályba az adott axiómarendszer *modelljei* tartoznak (pl. az ítéletalgebra). Szó sincs tehát arról, hogy a felsorolt axiómák volnának az ítéletalgebra axiómái (azaz, hogy nem is volna más algebrai tulajdonsága az ítéletalgebráknak, mint ami a Boole-algebrák axiómáiból levezethető). Az ítéletalgebra egy a sok Boole-algebra közül, azaz *kielégíti* a Boole-algebrák axiómáit, ennél azonban többet is mondhatunk róla.

Az algebra azonban nemcsak struktúraosztályok elkülönítésével foglalkozik — ezt híven tükrözné a könyvbeli céltalan axiómatizálgatás. Az algebra ezen struktúraosztályok elemeinek *szerkezetét* igyekszik megragadni; ha lehet az adott osztály összes elemét (izomorfia erejéig) megadni. Ennek a törekvésnek a legcsekélyebb jele is hiányzik ebből a könyvből. Jellemző a *prímtestek* definíciója (207. o.): „Megkonstruáltunk egy hételemű testet, a 7-es prímszámra vonatkozó maradékosztályok testét. Ezt a testet az irodalomban *prímtestnek* nevezik. A fenti konstrukció az összes prímszámokhoz elkészíthető, ui. mindegyik prímszámhoz tartozik egy *prímtest.* Ezeken kívül még egy testet nevezünk *prímtestnek*, a *racionális számtestet*, vagyis az $\frac{a}{b}$ alakú számok testét, ahol *a*, *b* tetszőleges egész számok, de $b \neq 0$.

Ilyenképpen izomorfizmustól eltekintve az összes prímtestek megkonstruálhatók az egész számok halmazából."

Ahelyett tehát, hogy a prímtestek természetes definíciója (minimális test, nincs valódi részteste) alapján példát adna egy, a középiskolában is levezethető, egyszerű, de elegáns struktúratételre, inkább egy önkényes és indokolatlan definíciót mond.

Hasonlóan egyszerű struktúratétel volna a véges Boole-algebrák atomjaik halmazának hatványhalmazaként való reprezentációja.

6. A könyv *irodalomjegyzékéről* csak annyit, hogy BERNAYS és FRAENKEL „Axiomatikus halmazelmélet" című angol nyelvű műve absztrakciós szintjében toronymagasan az itt tárgyalt anyag fölött áll, igazán kár erre a könyvre hivatkozni a halmaz és ítéletalgebra iskolai szintű tárgyalásakor.

7. Összefoglalva: VARECZA LÁSZLÓ könyve sem iskolásoknak, sem tanári kézikönyvnek *nem ajánlható.* A szerző az általa helyesen kitűzött célt nagy ívben elkerüli, az absztrakt algebrát egy definíciógyűjteményként állítja elénk. Az absztrakció folyamatát többnyire nem motiválja, öncélúnak láttatja. Szövegezése többször zavaros, néhány állítása hibás. Az anyag iskolai feldolgozásához alig ad útmutatást.

A könyv hátsó borítója arról tájékoztatja a vásárlót, hogy a könyv „csak repülőgépről" ad képet az absztrakt algebra csodálatos birodalmáról, célja nem

az apró részletek elemzése, hanem az összefüggő egész „gráfjainak" megláttatása. Eme lelkendező bevezető után megtudjuk, hogy „a szerző megvalósította célkitűzéseit" (a korábban idézett kettős célt). Az az érzésünk, hogy aki ezt a szöveget megfogalmazta, vagy nem olvasta el a könyvet, vagy nem tudja, mi az algebra.

МЕДИТАЦИЯ ОБ ОДНОМ УЧЕБНИКЕ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

ТАМАШ ШМИДТ

MEDITATION ON AN ALGEBRA TEXTBOOK FOR SCHOOL

T. SCHMIDT

JELENTÉS AZ 1972. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1972. november 3. és 13. között rendezte meg az 1972. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. A versenyen részt vehettek mindazok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1972-ben fejezték be és az ennél fiatalabbak.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Legyen $\mathcal{F}$ nem üres halmazrendszer, amely rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

a) Ha $X \in \mathcal{F}$, akkor található $Y \in \mathcal{F}$ és $Z \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $Y \cap Z = \emptyset$, $Y \cup Z = X$.

b) Ha $X \in \mathcal{F}$, $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$, akkor vagy $Y \in \mathcal{F}$, vagy $Z \in \mathcal{F}$.

Bizonyítandó, hogy létezik olyan $X_n \in \mathcal{F}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ csökkenő halmazsorozat, melyre

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \emptyset.$$

2. Legyen értelmezve az A véges halmazon egy $\leqq$ reflexív és antiszimmetrikus reláció. Bizonyítsuk be, hogy ez a reláció egy A-t tartalmazó alkalmas, ugyancsak véges B halmazra úgy terjeszthető ki reflexív és antiszimmetrikus relációvá, hogy bármely két B-beli elemnek létezzék B-ben legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja.

(c az $a_1, \ldots, a_r$ elemek felső, d ezeknek alsó korlátja, ha minden a_i elemre $d \leqq a_i \leqq c$. x a szóban forgó elemeknek legkisebb felső korlátja, ha felső korlát és minden felső korlátnak alsó korlátja. A legnagyobb alsó korlát analóg módon definiálható. A reláció B-re való kiterjesztésén olyan B-beli relációt értünk, amelyre két A-beli elem között akkor és csak akkor áll fenn a $\leqq$ reláció B-beli értelemben, ha A-beli értelemben fennáll.)

3. Legyen λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ különböző pozitív számok adott, végtelenhez tartozó sorozata, és tekintsük az összes

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \lambda_i$$

alakban előállítható számok halmazát, ahol $n_i \geqq 0$ egész, de véges sok i-től eltekintve $n_i = 0$.

Legyen

$$L(x) = \sum_{\lambda_i \leqq x} 1 \quad \text{és} \quad M(x) = \sum_{\mu \leqq x} 1.$$

(Az utóbbi összegben minden μ annyiszor szerepel, ahány fenti típusú előállítása van.)

Igazoljuk, hogy ha

$$\frac{L(x+1)}{L(x)} \to 1 \quad (x \to \infty),$$

akkor

$$\frac{M(x+1)}{M(x)} \to 1 \quad (x \to \infty).$$

4. Legyen G feloldható torziócsoport, amelyben minden Abel-féle részcsoport végesen generált.

Bizonyítsuk be, hogy G véges.

5. Az $f(x)$ $(0, 1)$-en értelmezett valós függvényt approximatíve folytonosnak nevezzük $(0, 1)$-ben, ha minden $x_0 \in (0, 1)$ és $\varepsilon > 0$ esetén a $H = \{x \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ halmaznak x_0 1 belső sűrűségű pontja.

Legyen $F \subset (0, 1)$ egy megszámlálható zárt halmaz és $g(x)$ egy tetszőleges F-en értelmezett valós értékű függvény.

Bizonyítandó, hogy ekkor van olyan $f(x)$ $(0, 1)$-en értelmezett approximatíve folytonos függvény, amelyre

$$f(x) = g(x) \quad \text{minden } x \in F\text{-re.}$$

6. Legyen $P(z)$ n-edfokú komplex együtthatós polinom,

$$P(0) = 1, \quad \text{és} \quad |P(z)| \leqq M, \quad \text{ha} \quad |z| \leqq 1.$$

Igazoljuk, hogy $P(z)$ minden, a zárt egységkörbe eső gyöke legfeljebb $c\sqrt{n}$ multiplicitású, ahol $c = c(M) > 0$ csak M-től függő állandó.

7. Legyen $f(x, y, z)$ az egységgömbben nemnegatív harmonikus függvény, amelyre egy $0 \leqq x_0 < 1$-gyel és $0 < \varepsilon < (1 - x_0)^2$-tel fennáll az $f(x_0, 0, 0) \leqq \varepsilon^2$ egyenlőtlenség.

Igazoljuk, hogy ekkor az origó körüli $(1 - 3\varepsilon^{1/4})$ sugarú gömbben $f(x, y, z) \leqq \varepsilon$.

8. Adottak az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok a síkban, ahol A_4 az $A_1A_2A_3$ $\triangle$ súlypontja.

Keressük az A_5 pontot a síkban úgy, hogy a

$$\frac{\min\limits_{1 \leqq i < j < k \leqq 5} T(A_iA_jA_k)}{\max\limits_{1 \leqq i < j < k \leqq 5} T(A_iA_jA_k)}$$

arány a lehető legnagyobb legyen.

($T(ABC)$ jelöli az ABC $\triangle$ területét.)

9. Legyen K az n-dimenziós euklideszi térben egy zárt konvex test. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ egy K-ba írt maximális térfogatú szimplex csúcsai. Definiáljuk a $P_{n+2}, P_{n+3}, \ldots$ pontokat szukcesszív módon úgy, hogy P_k $(k > n+1)$ legyen K-nak olyan pontja, amelyre $P_1, \ldots, P_k$ konvex burkának térfogata maximális.

Legyen ez a térfogat V_k. Vizsgáljuk meg $\underline{n}$ különböző értékeire az alábbi állítás helyességét:

„A $V_{n+1}, V_{n+2}, \ldots$ sorozat konkáv."

10. Legyen $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ megszámlálható bázisú topológia az E halmazon. Bizonyítandó, hogy akkor és csak akkor létezik $(E\times E)$-n olyan σ valós függvény, amelyre

$$0 \leqq \sigma(x, y) < +\infty, \quad \sigma(x, x) = 0,$$

$$\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y)+\sigma(y, z) \quad (x, y, z\in E)$$

és a

$$V_1(p, \varepsilon) = \{x|\sigma(x, p) < \varepsilon\}$$

halmazok p-nek $\mathcal{T}_1$-re nézve, a

$$V_2(p, \varepsilon) = \{x|\sigma(p, x) < \varepsilon\}$$

halmazok pedig $\mathcal{T}_2$-re nézve környezetbázisát alkotják ($\varepsilon>0$), ha $p\in E$ és $\mathcal{T}_i$-nyílt $G(p\in G)$ esetében van olyan $\mathcal{T}_i$-nyílt G' és $\mathcal{T}_{3-i}$-zárt F, hogy $p\in G'\subset F\subset G$ $(i=1, 2)$.

11. n urnába bedobunk (egymás után) N golyót. A dobások függetlenek és mindegyik golyó egyforma valószínűséggel eshet az n urna bármelyikébe. Legyen $X_i=X_i\ (N, n)$ az i-edik urnában levő golyók száma az N dobás után. Vizsgáljuk az

$$y(N, n) = \min_{1\leqq i\leqq n} \left|X_i - \frac{N}{n}\right|$$

valószínűségi változót.

Bizonyítsuk be a következő három állítást:

A) Ha $n\to\infty$ és $\frac{N}{n^3}\to\infty$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\frac{y(N, n)}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{N}{n}}} < x\right) \to 1-e^{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}x}$$

bármely rögzített pozitív x-re.

B) Ha $n\to\infty$ és $\frac{N}{n^3}\leqq K$ (konstans), akkor minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $A>0$, hogy

$$\mathbf{P}(y(N, n) < A) > 1-\varepsilon.$$

C) Ha $n\to\infty$ és $\frac{N}{n^3}\to 0$, akkor

$$\mathbf{P}(y(N, n) < 1)\to 1.$$

Az 1. feladatot Fred Galvin (USA), a 2. feladatot Fried Ervin, a 3. feladatot Halász Gábor, a 4. feladatot Pelikán József, az 5. feladatot Laczkovich Miklós és Petruska György, a 6 feladatot Halász Gábor, a 7. feladatot Turán Pál, a 8. feladatot Surányi János, a 9. feladatot Fejes-Tóth László és ifj. Makai Endre, a 10. feladatot Császár Ákos, a 11. feladatot Révész Pál bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A versenybizottság összetétele az alábbi volt: Császár Ákos, Fejes-Tóth László, Fried Ervin, Hajnal András, Halász Gábor, Pelikán József (titkár), Révész Pál, Turán Pál (elnök).

A verseny a szokásosnál nehezebbnek bizonyult. A kitűzött feladatokra 18 versenyző összesen 95 megoldást adott be.

A versenybizottság az I. díjat és az ezzel járó 3000 Ft pénzjutalmat RUZSA IMRÉnek, az ELTE II. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

RUZSA IMRE mind a 11. feladatra adott be megoldást. A 10. feladatra adott megoldása rossz. Kiemelkedőek az 1., 3., 5., 6. és 11. feladatokra adott megoldásai. Megoldásai elegánsak, leírásuk világos, tömör.

A versenybizottság a II. díjat és az ezzel járó 2000 Ft pénzjutalmat NAGY ZSIGMONDnak, az ELTE V. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

NAGY ZSIGMOND a 3. és a 6. feladat kivételével midegyik feladatra adott be megoldást. A 9. feladatra adott megoldása több ponton hiányos. Kiemelkedőek az 1. és 11. feladatra adott megoldásai. Megoldásai általában világosak, bár leírásuk néha pontatlan.

A versenybizottság a három III. díjat és az ezzel járó 1500—1500 Ft pénzjutalmat BABAI LÁSZLÓnak, az ELTE V. éves matematikus hallgatójának, FRANKL PÉTERnek, az ELTE II. éves matematikus hallgatójának és PINTZ JÁNOSnak, az ELTE IV. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

BABAI LÁSZLÓ megoldja a 2., 4., 5., 7., 8., 9. és 10. feladatokat és értékes részeredményeket ér el a 6. feladatban. A 11. feladatra benyújtott részmegoldása rossz. Megoldásainak fogalmazása világos, precíz.

FRANKL PÉTER megoldja a 4., 7., 8. és 9. feladatokat és apróbb hiányosságokkal megoldja a 3., 5. és 10. feladatokat. A 2. feladatra adott megoldása rossz. Megoldásainak fogalmazása általában túlságosan elnagyolt.

PINTZ JÁNOS megoldja a 2., 4., 5., 7., 8. és 9. feladatokat. A 6. feladatra adott megoldása elvben jó és szellemes, de kivitelezésében kisebb hiba van. A 10. feladatra adott megoldása rossz. Kiemelkedő a 8. feladatra adott megoldása. Megoldásai precízen fogalmazottak.

A versenybizottság dicséretben és 250—250 Ft könyvjutalomban részesíti LEMPERT LÁSZLÓt, az ELTE III. éves matematikus hallgatóját és SURÁNYI LÁSZLÓt, az ELTE végzett matematikus hallgatóját.

LEMPERT LÁSZLÓ megoldja a 2., 4., 7., 8. és 9. feladatokat és apróbb hiányosságokkal az 5. feladatot. A 10. feladatra adott megoldása rossz. Megoldásainak fogalmazása világos.

SURÁNYI LÁSZLÓ megoldja a 2., 4., 5., 7., 8. és 11. feladatokat. A 9. feladatot csak részben oldja meg. Megoldásai általában rendkívül bonyolultak, leírásuk hosszadalmas.

1. FELADAT

Bebizonyítjuk, hogy a feladat a) feltétele helyébe a következő gyengébb feltételt téve:

a') Ha $X\in\mathcal{F}$, akkor található $Y\in\mathcal{F}$ és $Z\in\mathcal{F}$ úgy, hogy $Y\cap Z=\emptyset$, $Y\cup Z\subseteq X$ is igaz a feladat állítása.

Feltesszük az ellenkezőjét, vagyis, hogy ha $X_n\in\mathcal{F}$, $X_i\supseteq X_{i+1}$, akkor $\bigcap X_n\neq\emptyset$. Ebből fogunk következtetéseket levonni az ellentmondásig.

1. Minden $A\in\mathcal{F}$ halmazhoz van olyan $A'\in\mathcal{F}$, hogy $A'\subseteq A$ és $A'=\bigcup_1^\infty A_i$, ahol az A_i-k páronként diszjunktak és minden $A_i\in\mathcal{F}$. Ugyanis az a') feltétel szerint létezik $A_1, A_1'\in\mathcal{F}$ úgy, hogy $A_1\cup A_1'\subseteq A$, $A_1\cap A_1'=\emptyset$. Ugyanígy létezik $A_2, A_2'\in\mathcal{F}$ úgy, hogy $A_2\cup A_2'\subseteq A_1$, $A_2\cap A_2'=\emptyset$ stb. Ha a kapott $A_1, A_2, \ldots$ halmazokra $\bigcup_1^\infty A_i\in\mathcal{F}$,

készen vagyunk. Ha nem, a b) feltétel szerint $A_0 = A - \bigcup_1^\infty A_i \in \mathcal{F}$ és $A' = A = \bigcup_0^\infty A_i$ megfelel.

2. Minden $A \in \mathcal{F}$ halmazhoz létezik olyan B, $C \in \mathcal{F}$, hogy $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C \subseteqq A$ és ha $B \subseteqq P \subseteqq B \cup C$, akkor $P \in \mathcal{F}$.

Tekintsük az 1. pontban szereplő A_i halmazokat és próbáljunk egy N_i halmazsorozatot definiálni a most következő módon. Legyen $N_1 = A'$ és ha N_{i-1} megvan, legyen N_i az alábbi négy feltételnek eleget tevő tetszőleges halmaz.

$$N_i \in \mathcal{F},$$

$$N_i \subseteqq N_{i-1},$$

$$N_i \subseteqq \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j,$$

végtelen sok j-re $N_i \cap A_j \in \mathcal{F}$.

A harmadik feltétel szerint $\bigcap N_i = \emptyset$, ha a sorozat végtelen, tehát a rekurziónak valahol meg kell szakadnia. Tegyük fel, hogy az utolsó tag N_n. Legyen $B = N_n \cap A_n$ és $C = N_n \cap A_k$, ahol $k > n$ olyan, hogy $N_n \cap A_k \in \mathcal{F}$. Tegyük fel, hogy van olyan P, hogy $B \subseteqq P \subseteqq B \cup C$, de $P \notin \mathcal{F}$. Ekkor $N_n - P \in \mathcal{F}$ és könnyen látható, hogy $N_{n+1} = N_n - P$ a rekurzió jó folytatása lenne. ($B \in \mathcal{F}$ a $P = B$ választásból adódik.)

3. $A \in \mathcal{F}$-hez a fentiek szerint létezik megfelelő B_1, $C_1 \in \mathcal{F}$. $C_1 \in \mathcal{F}$-hez ismét a fentiek szerint létezik megfelelő B_2, $C_2 \in \mathcal{F}$ ($B_2 \cup C_2 \subseteqq C_1$, $B_2 \cap C_2 = \emptyset$) és í. t. Legyen $P_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} B_j$. Ekkor $P_i \supseteqq P_{i+1}$, $\bigcap P_i = \emptyset$ és $B_i \subseteqq P_i \subseteqq B_i \cup C_i$ miatt $P_i \in \mathcal{F}$. Így valóban ellentmondásra jutottunk.

Lényegében RUZSA IMRE megoldása.

MEGJEGYZÉS. A feladat hátterét megvilágítja a következő halmazelméleti játék. Ketten játszanak: világos és sötét. Adott egy X_1 halmaz. Világos ezt valahogyan felbontja az Y_1, Z_1 diszjunkt halmazok uniójára. Ezután sötét kiválasztja az Y_1 és Z_1 közül az egyiket (jelöljük ezt X_2-vel) és ezt az X_2-t valahogyan felbontja az Y_2, Z_2 diszjunkt halmazok uniójára. Ezután világos kiválasztja az Y_2, Z_2 halmazok közül az egyiket (jelöljük ezt X_3-mal) és ezt valahogyan felbontja az Y_3, Z_3 diszjunkt halmazok uniójára stb. Így előáll egy $X_1, X_2, X_3, \ldots$ megszámlálhatóan végtelen halmazsorozat. Világos nyer, ha $\bigcap X_i \neq \emptyset$, sötét nyer, ha $\bigcap X_i = \emptyset$. Ha a feladat állítása nem lenne igaz, tehát létezne olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszer, amelyre az a), b) feltételek teljesülnek, de $\bigcap X_i = \emptyset$ semmilyen $\mathcal{F}$-beli csökkenő X_i halmazsorozatra sem teljesül, akkor világosnak minden $X_1 \in \mathcal{F}$ esetén volna nyerő stratégiája: mindegyik X_{2k+1}-et úgy bontaná fel, hogy $Y_{2k+1} \in \mathcal{F}$ és $Z_{2k+1} \in \mathcal{F}$ teljesüljön, ill. Y_{2k} és Z_{2k} közül mindig azt választaná ki, amelyik eleme $\mathcal{F}$-nek.

Az ilyen $\mathcal{F}$ halmazrendszerek keresésére pedig az szolgáltatta az indítékot, hogy egyelőre nem ismeretes az, hogy milyen számosságú X_1 halmazok esetén van világosnak, ill. sötétnek nyerő stratégiája.

A feladatot megoldották: NAGY ZSIGMOND, RUZSA IMRE.

2. FELADAT

A B halmaz A összes elemeiből és összes részhalmazaiból fog állni (Az a elemet és az $\{a\}$ halmazt nem azonosítjuk.) A továbbiakban kis betű mindig elemet, nagy betű pedig részhalmazt jelöl.

A $\leqq$ reláció értelmezése:

$$a \leqq b \quad \text{már adott}$$

$$a \leqq P \text{ ha } a \in P$$

$$P \leqq a \text{ ha } a \notin P$$

$$P \leqq Q \text{ ha } P \subseteq Q.$$

Ez a reláció nyilván reflexív és antiszimmetrikus. Belátjuk, hogy létezik felső és alsó korlát.

Ha egy tetszőleges ilyen rendszerben két elem összehasonlítható, $\alpha \leqq \beta$, akkor nyilván β legkisebb felső és α legnagyobb alsó korlátjuk. Így, mivel egy elem és egy részhalmaz mindig összehasonlítható, csak az alábbi eshetőségeket kell megnézni:

a) két összehasonlíthatatlan elem;

b) két részhalmaz, egyik sem tartalmazza a másikat.

Az a) esetben, ha a és b az elemek, a legkisebb felső korlát $\{a, b\}$, a legnagyobb alsó korlát pedig $A - \{a, b\}$. Ezek nyilván korlátok; legyen c vagy C tetszőleges felső, d vagy D tetszőleges alsó korlát. Mivel feltevésünk szerint sem c, sem d nem egyezik meg a és b egyikével sem, így definíció szerint $\{a, b\} \leqq c$ és $d \leqq A - \{a, b\}$. Továbbá szintén definíciónk szerint $a, b \in C$, $a, b \notin D$, így valóban $\{a, b\} \leqq C$ és $D \leqq A - \{a, b\}$.

A b) esetben pedig P és Q legkisebb felső korlátja $P \cup Q$, legnagyobb alsó korlátja pedig $P \cap Q$. Ezek nyilván korlátok; ha valamely más korlát szintén halmaz, akkor a helyzet világos. Végül legyen a felső, b pedig alsó korlát. Ekkor $P \leqq a$ és $Q \leqq a$, tehát $a \notin P$ és $a \notin Q$, vagyis $a \notin P \cup Q$, azaz $P \cup Q \leqq a$. Hasonlóan $b \leqq P$ és $b \leqq Q$, tehát $b \in P$ és $b \in Q$, vagyis $b \in P \cap Q$, azaz $b \leqq P \cap Q$.

RUZSA IMRE

MEGJEGYZÉS. A megoldásban konstruált B halmazról könnyen látható, hogy benne bármely részhalmaznak van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja. Ezen erősebb feltételnek eleget tevő bővítési halmaz létezését bizonyította BABAI LÁSZLÓ, LEMPERT LÁSZLÓ és MICHALETZKY GYÖRGY.

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, KÉRCHY LÁSZLÓ, LEMPERT LÁSZLÓ, MÉRŐ LÁSZLÓ, MICHALETZKY GYÖRGY, NAGY ZSIGMOND, PINTZ JÁNOS, RUZSA IMRE, SURÁNYI LÁSZLÓ, TÁTRAY PÉTER.

3. FELADAT

(Amikor a megoldásban μ-kről beszélünk, nemcsak a számértékükre gondolunk, hanem egy konkrét $\{n_i\}$ sorozattal képzeljük megadva, tekintettel arra, hogy egy szám esetleg többféleképpen is előállítható.)

Ha $\mu_1 = \sum n_i^{(1)} \lambda_i$, $\mu_2 = \sum n_i^{(2)} \lambda_i$, akkor jelentse $\mu_1 | \mu_2$ azt, hogy $n_i^{(1)} \leqq n_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ekkor

$$\mu = \sum_{\substack{n \geqq 1 \text{ egész, } \lambda_i \\ n\lambda_i | \mu}} \lambda_i$$

és

$$\sum_{\mu \leqq x} \mu = \sum_{\mu \leqq x} \sum_{\substack{n \geqq 1, \lambda_i \\ n\lambda_i | \mu}} \lambda_i$$

A belső összegben $\mu' = \mu - n\lambda_i$ is μ-szám, összegezzünk eszerint. Így

$$\sum_{\mu \leqq x} \mu = \sum_{\mu' \leqq x} \sum_{\substack{n \geqq 1, \lambda_i \\ n\lambda_i \leqq x - \mu'}} \lambda_i$$

A $\sum_{\substack{n \geqq 1, \lambda_i \\ n\lambda_i \leqq y}} \lambda_i = \mathscr{L}(y)$ jelöléssel (μ' helyett μ-t írva)

$$\sum_{\mu \leqq x} \mu = \sum_{\mu \leqq x} \mathscr{L}(x - \mu). \tag{1}$$

Írjuk ezt fel $x+1$-re is és vonjuk ki a kettőt egymásból:

$$\sum_{x < \mu \leqq x+1} \mu = \sum_{\mu \leqq x} \big(\mathscr{L}(x+1-\mu) - \mathscr{L}(x-\mu)\big) + \sum_{x < \mu \leqq x+1} \mathscr{L}(x+1-\mu).$$

A bal oldal legalább $x(M(x+1)-M(x))$, a jobb oldal második összege legfeljebb $\mathscr{L}(1)(M(x+1)-M(x))$ (mivel $\mathscr{L}(y)$ monoton növő). Tehát

$$(x - \mathscr{L}(1))(M(x+1) - M(x)) \leqq \sum_{\mu \leqq x} \big(\mathscr{L}(x+1-\mu) - \mathscr{L}(x-\mu)\big).$$

Itt $\mathscr{L}(y)$ csak a λ_i sorozattal van kifejezve és a rá vonatkozó feltételből be fogjuk látni, hogy

$$\frac{\mathscr{L}(y+1)}{\mathscr{L}(y)} \to 1 \quad (y \to \infty), \tag{2}$$

ahonnan elég nagy K-ra $\mathscr{L}(y+1) - \mathscr{L}(y) \leqq \varepsilon \mathscr{L}(y)$, ha $y \geqq K$. Az összeget ezért $\mu \leqq x-K$ és $\mu > x-K$ szerint felbontva,

$$\sum_{\mu \leqq x-K} \big(\mathscr{L}(x+1-\mu) - \mathscr{L}(x-\mu)\big) \leqq \varepsilon \sum_{\mu \leqq x-K} \mathscr{L}(x-\mu) \leqq \varepsilon \sum_{\mu \leqq x} \mathscr{L}(x-\mu) =$$

$$= \varepsilon \sum_{\mu \leqq x} \mu \leqq \varepsilon x M(x)$$

(felhasználva újra (1)-et), ill.

$$\sum_{x-K < \mu \leqq x} \big(\mathscr{L}(x+1-\mu) - \mathscr{L}(x-\mu)\big) \leqq \mathscr{L}(K+1) M(x).$$

Kaptuk tehát, hogy

$$(x - \mathscr{L}(1))(M(x+1-M(x)) \leqq \varepsilon x M(x) + \mathscr{L}(K+1) M(x)$$

$$\frac{M(x+1) - M(x)}{M(x)} \leqq \frac{\varepsilon x + \mathscr{L}(K+1)}{x - \mathscr{L}(1)}$$

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{M(x+1) - M(x)}{M(x)} \leqq \varepsilon$$

és mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{M(x+1) - M(x)}{M(x)} = 0.$$

Be kell még látni (2)-t. Ehhez először is

$$\mathcal{L}(x)=\sum_{\lambda_i\leqq x}\lambda_i\sum_{1\leqq n\leqq\frac{x}{\lambda_i}}1\geqq\sum_{\lambda_i\leqq\frac{x}{2}}\lambda_i\frac{x}{2\lambda_i}+\sum_{\frac{x}{2}<\lambda_i\leqq x}\lambda_i\geqq\frac{x}{2}L\left(\frac{x}{2}\right)+ \tag{3}$$

$$+\frac{x}{2}\left(L(x)-L\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}xL(x).$$

Mármost

$$\mathcal{L}(x+1)-\mathcal{L}(x)=\sum_{\substack{n\geqq 1,\ \lambda_i\\ x<n\lambda_i\leqq x+1}}\lambda_i.$$

Előre megadott $\varepsilon>0$-hoz bontsuk szét az összegezést $\lambda_i\leqq\varepsilon(x+1)$ és $\lambda_i>\varepsilon(x+1)$ esetére:

$$\sum_{\lambda_i\leqq\varepsilon(x+1)}\lambda_i\sum_{\frac{x}{\lambda_i}<n\leqq\frac{x+1}{\lambda_i}}1\leqq\frac{1}{\min\lambda_i}\sum_{\lambda_i\leqq\varepsilon(x+1)}\lambda_i$$

(mivel az n-re vonatkozó intervallum hossza legfeljebb $\frac{1}{\min\lambda_i}=$konstans). Tovább

$$\frac{1}{\min\lambda_i}\sum_{\lambda_i\leqq\varepsilon(x+1)}\lambda_i\leqq\frac{\varepsilon(x+1)}{\min\lambda_i}L(\varepsilon(x+1))\leqq\frac{2\varepsilon x}{\min\lambda_i}L(x)\leqq\frac{4\varepsilon}{\min\lambda_i}\mathcal{L}(x)$$

felhasználva (3)-at. A másik részben $n\leqq\frac{x+1}{\varepsilon(x+1)}=\frac{1}{\varepsilon}$, tehát

$$\sum_{1\leqq n\leqq\frac{1}{\varepsilon}}\sum_{\frac{x}{n}<\lambda_i\leqq\frac{x+1}{n}}\lambda_i\leqq\sum_{1\leqq n\leqq\frac{1}{\varepsilon}}\frac{x+1}{n}\left(L\left(\frac{x+1}{n}\right)-L\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

A belső összegben véges sok tag van (rögzített $\varepsilon>0$ mellett) és mindegyikre a feltétel szerint

$$L\left(\frac{x+1}{n}\right)-L\left(\frac{x}{n}\right)\leqq L\left(\frac{x}{n}+1\right)-L\left(\frac{x}{n}\right)=o\left(L\left(\frac{x}{n}\right)\right)=o(L(x))$$

amint $x\to\infty$, tehát a teljes összeg $o((x+1)L(x))=o(\mathcal{L}(x))$, ismét (3) szerint. Végeredményben

$$\mathcal{L}(x+1)-\mathcal{L}(x)\leqq\frac{4\varepsilon}{\min\lambda_i}\mathcal{L}(x)+o(\mathcal{L}(x)),$$

ahonnan

$$\frac{\mathcal{L}(x+1)-\mathcal{L}(x)}{\mathcal{L}(x)}\to 0,$$

amit bizonyítani akartunk.

HALÁSZ GÁBOR

MEGJEGYZÉS. A fenti megoldás az (1) formulán alapult. E formula felhasználását a következő gondolatmenet motiválja:

Ha $\lambda_i = \log p_i$, ahol p_i az i-edik prím, akkor a μ-számok a $\log n$-ek, ahol $n \geqq 1$ egész, mindegyik egyszer. Bár ekkor az $L(x)$-re vonatkozó feltétel éppen nem teljesül $\left(\frac{L(x+1)}{L(x)} \to e\right)$ de természetes a prímszámelméletben (például a Csebisev-tétel bizonyításánál) alkalmazott formulából, az $n!$ prímfelbontásának megfelelő formulából kiindulni. Ez nem más, mint (1).

A feladatot megoldotta RUZSA IMRE, kissé hiányos FRANKL PÉTER megoldása.

4. FELADAT

Minden végesen generált Abel-féle torziócsoport véges. Tehát a feladat állítása úgy fogalmazható, hogy ha egy G feloldható torziócsoport minden Abel-féle részcsoportja véges, akkor G maga is véges. Ehelyett a következő erősebb állítást látjuk be: Ha egy G feloldható torziócsoport minden Abel-féle normálosztója véges, akkor G véges. Ehhez először a következő segédtételt bizonyítjuk:

Ha a G csoportnak létezik olyan kommutatív normálosztója, amely szerint vett faktorcsoport is kommutatív és G minden Abel-féle normálosztója véges, akkor G véges.

Valóban, legyen H a szóban forgó normálosztó. Ha a tartalmazásra részben rendezzük G összes, H-t tartalmazó Abel-féle normálosztóit, akkor a Zorn-lemma alapján lesz egy maximális, legyen ez F. Ha egy g elem F minden elemével felcserélhető, akkor F és g egy kommutatív normálosztót generálnak (a generátumuk azért normálosztó, mert G/H kommutatív), így F maximalitása folytán $g \in F$, tehát F a saját centralizátora. Így G/F izomorf Aut (F) egy részcsoportjával, amely F végessége miatt maga is véges. Tehát G is véges.

Most a feladat állítását igazoljuk a kommutátorlánc hossza szerinti teljes indukcióval. Ha ez 1, akkor nincs mit igazolni, ha 2, akkor az állítás a fenti lemmából következik. Legyen a kommutátorlánc utolsó olyan eleme, amely még nem az egységrészcsoport, P. P kommutatív normálosztó, így véges és G/P kommutátorláncának hossza eggyel kisebb. Ha belátjuk, hogy G/P minden kommutatív normálosztója véges, akkor a feladat állítása indukciónk alapján következik.

Legyen N/P G/P egy kommutatív normálosztója, akkor N kielégíti a segédtétel feltételeit, így véges, amiből persze N/P végessége is következik. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

FRANKL PÉTER

MEGJEGYZÉS. A feladatból a feloldhatóság, vagy annak valamilyen gyengített formájának kikötése nem hagyható el: NOVIKOV és ADJAN adtak példát 1968-ban olyan végtelen csoportra, amelyben az elemek véges rendűek (sőt, az elemrendek felülről korlátosak) mégis minden Abel-féle részcsoport véges (sőt ciklikus).

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, FRANKL PÉTER, LEMPERT LÁSZLÓ, MICHALETZKY GYÖRGY, NAGY ZSIGMOND, PINTZ JÁNOS, RUZSA IMRE, SURÁNYI LÁSZLÓ.

5. FELADAT

1. megoldás. Legyen $F = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Jelölje $I(x, n)$ az x középpontú, $1/n$ sugarú zárt intervallumot. Az (a, b) intervallum „középső p-szeresén" $(0 \leqq p < 1)$ értjük az $\left[a + \frac{1}{2}(b-a)(1-p),\ b - \frac{1}{2}(b-a)(1-p)\right]$ zárt intervallumot.

Rekurzióval definiáljuk a J_n intervallumrendszert azzal a tulajdonsággal, hogy J_n megszámlálható sok diszjunkt zárt intervallumból áll, melyek egyike sem metszi F-et, és a J_n-beli intervallumok végpontjai halmazának egyetlen torlódási pontja c_n, továbbá $m \neq n$ esetén K_n és K_m diszjunktak, ahol K_n jelöli a J_n-beli intervallumok egyesítését.

Tegyük fel, hogy $n' < n$-re már definiáltuk $J_{n'}$-t és azok rendelkeznek a fenti tulajdonságokkal. Így az $\bigcup_{k=1}^{n-1} K_k = L_n$ halmaz lezárása: $L_n \cup \{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ nem tartalmazza c_n-et. Tehát c_n alkalmas környezetét, $I(c_n, r_n)$-et sem metszi. Feltehető, hogy $r_n \leqq n$. Tekintsük minden j-re $(j=1, 2, \ldots)$ az $I(c_n, r_n+j) - I(c_n, r_n+j+1) - F$ halmaz belsejét. Ez (véges vagy) megszámlálható sok nyílt intervallum egyesítése. Ezen nyílt intervallumok összhosszúsága nyilván egyenlő az $I(c_n, r_n+j) - -I(c_n, r_n+j+1) = M(n, j)$ halmaz mértékével, tehát közülük véges soknak az egyesítése már legalább $(1-1/j)$-szer ekkora mértékű. Válasszuk ki ezen véges sok intervallum középső $(1-1/j)$-szeresét, ezek alkossák a $J_{n,j}$ intervallumrendszert. Legyen $J_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_{n,j}$.

Világos, hogy az így definiált J_n intervallumrendszerek valóban rendelkeznek a fent mondott tulajdonságokkal (s így a rekurzió korrekt). Továbbá a $J_{n,j}$-beli intervallumok $M(n, j)$ mértékének legalább $(1-1/j)^2$-szeresét kitöltik, így a J_n-beli intervallumok egyesítésének, K_n-nek a sűrűsége c_n-ben 1.

Értelmezzük f-et a következőképpen: legyen $x \in K_n$, valamint $x = c_n$ esetén $f(x) = g(c_n)$. Ha igazoljuk hogy, az $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup F$ halmaz zárt, akkor ezután f-et úgy értelmezhetjük az ebbe a halmazba nem tartozó helyeken, hogy az ezen zárt halmaz komplementumát alkotó megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallumon lineáris legyen, s az intervallum végpontjain a már definiált értéket vegye fel. Az így definiált f függvény F pontjaiban nyilván approximatíve folytonos, minden egyéb pontban folytonos. Ez utóbbi abból következik, hogy $x \notin F$ esetén x távolsága F-től pozitív, mondjuk $1/m$-nél nagyobb, ahol m természetes szám. Így az $r_n \geqq n$ feltevés folytán x-nek az $1/2m$ sugarú környezetét $n > 2m$ esetén K_n nem metszi. Tehát

$$I(x, 2m) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup F \right) = I(x, 2m) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{2m} K_n \right)$$

A jobb oldal azonban véges sok zárt intervallum egyesítése. Ezzel egyrészt igazoltuk, hogy az $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup F$ halmaz zárt, másrészt az ennek felhasználásával f-re adott definíciónk szerint f megszorítása $I(x, 2m)$-re egy folytonos töröttvonalfüggvény.

BABAI LÁSZLÓ

2. megoldás. Legyen az F halmaz $F = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Úgy képzeljük, hogy $f(x)$ annál inkább „érezzen meg" egy r_i-ben felvett függvényértéket, minél közelebb van r_i x-hez. Ezt próbáljuk meg elérni egy ilyen típusú definícióval:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g(r_i)}{u(i)|x - r_i|}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u(i)|x - r_i|}} \quad \text{ha} \quad x \notin F. \tag{1}$$

Most különböző nagyságrendi kikötéseket teszünk $u(i)$-re, hogy ez a sor mindig konvergens és a kapott függvény approximatíve folytonos legyen, végül megmutatjuk, hogy ezek kielégíthetők.

A sor mindig konvergens lesz, ha pl.

$$u(i) > i^2|g(r_i)| \quad \text{és} \quad u(i) > i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

ugyanis, ha $x \notin F$, akkor F zárt lévén $\min_i |x-r_i| > 0$.

$(0, 1) - F$ pontjaiban f folytonos lesz (egy kis környezetben a számláló és a nevező is folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens sor összege), tehát ott approximatíve folytonos is.

Nézzünk tehát valamely r_i-t. Legyen $d = \min_{j<i} |r_i - r_j|$, $\delta < \frac{d}{2}$. Belátjuk, hogy ha δ elég kicsi, (1)-ben a számláló kb. $\frac{g(r_i)}{u(i)\,|x-r_i|}$, a nevező pedig kb. $\frac{1}{u(i)\,|x-r_i|}$ lesz általában az $(r_i-\delta, r_i+\delta)$ intervallumban. Mindenesetre

$$\sum_{j<i} \frac{g(r_j)}{u(j)|x-r_j|} = O(1) \tag{3}$$

és

$$\sum_{j<i} \frac{1}{u(j)|x-r_j|} = O(1)$$

$\left(\text{ui. } |x-r_j| > d - \frac{\delta}{2} > \frac{d}{2}\right)$. Az x-eket két részre osztjuk. Az egyik részben vannak azok, ahol minden $j>i$-re

$$\frac{1+|g(r_j)|}{u(j)|x-r_j|} < \frac{1}{j^2}. \tag{4}$$

Az ilyen x-ekre (3) és (4) miatt

$$f(x) = \frac{\frac{g(r_i)}{u(i)|x-r_i|} + O(1)}{\frac{1}{u(i)|x-r_i|} + O(1)} = \frac{g(r_i) + O(|x-r_i|)}{1 + O(|x-r_i|)},$$

ami $g(r_i)$ ε sugarú környezetébe esik, ha δ elég kicsi. Azt kell tehát elérni, hogy az ilyen x-ek mértéke $(r_i-\delta, r_i+\delta)$-ban $(2+o(1))\delta$ legyen. De ha (4) nem teljesül, akkor

$$|x-r_j| < \frac{j^2}{u(j)}\left(1+|g(r_j)|\right) = \varepsilon_j.$$

Az ilyen „rossz" x-ek mértéke $(r_i-\delta, r_i+\delta)$-ban $\leqq 2 \sum_{|r_i-r_j|<\delta+\varepsilon_j} \varepsilon_j$. Ha most

$$\varepsilon_j \leqq \frac{|r_i - r_j|^2}{j^2},$$

akkor ez a mérték

$$\leqq 2 \sum_{|r_i-r_j|<\delta+\frac{|r_i-r_j|^2}{j^2}} \frac{|r_i-r_j|^2}{j^2} \leqq 2\left(\frac{4}{3}\delta\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = O(\delta^2) = o(\delta),$$

ha $\delta \to 0$ $\left(\text{ui.}\ \frac{|r_i-r_j|^2}{j^2} \leqq \frac{|r_i-r_j|}{4}, \text{ így } \frac{3}{4}|r_i-r_j| < \delta\right)$.

Ez a kikötés pedig azt adja, hogy ez (2)-vel együtt tetszőleges j-re csak véges sok feltétel, tehát megvalósítható.

RUZSA IMRE

MEGJEGYZÉS. A versenyzők — RUZSA IMRE kivételével — valamennyien az 1. megoldáshoz hasonló megoldást adtak a feladatra.

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, KÉRCHY LÁSZLÓ, NAGY ZSIGMOND, PINTZ JÁNOS, RUZSA IMRE, SURÁNYI LÁSZLÓ, SZTACHÓ LÁSZLÓ, TÁTRAY PÉTER. Kissé hiányos a következők megoldása: FRANKL PÉTER, LEMPERT LÁSZLÓ, MÉRŐ LÁSZLÓ. Jó konstrukciót ad, de rosszul bizonyítja MICHALETZKY GÖRGY.

6. FELADAT

1. megoldás. Elég az 1 multiplicitását vizsgálni. Ugyanis, ha arra belátunk valamit, azt alkalmazhatjuk a $p(z)=P(\alpha z)$ polinomra, ha $|\alpha|\leqq 1$ és így ugyanazt a becslést megkaptuk minden, az egységkörbe eső gyökre.

A megoldás gondolatmenete a következő: tekintjük az

$$F(P) = \int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\varphi})|\, d\varphi$$

integrált, belátjuk, hogy ez létezik és nemnegatív. Ezután megbecsüljük felülről, külön az 1 környezetében, az 1 multiplicitásának és P fokszámának segítségével, és külön a többi helyen, a $|P(z)|\leqq M$ feltételből kiindulva.

Hogy az integrál létezik, azt elég $z-z_0$ alakú polinomokra belátni, hiszen ha $P(z) = c\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$, akkor

$$\log|P(z)| = \log|c| + \sum_{i=1}^{n}\log|z-z_i|.$$

$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\varphi}-z_0|\, d\varphi$ létezése evidens, ha $|z_0|\neq 1$. Legyen most $|z_0|=1$; nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $z_0=1$ (egy $\varphi = \eta+\varphi_0$ helyettesítés egymásba viszi őket). Ekkor

$$\log|e^{i\varphi}-1| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$\int_0^{2\pi} \log\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$ pedig valóban létezik és értéke 0 (l. SZÁSZ PÁL: A differenciál és integrálszámítás elemei, I. köt. 444. old.).

Most számítsuk ki $\alpha \neq 1$ esetén is az

$$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{e^{i\varphi}}{\alpha} \right| d\varphi \quad (\alpha \neq 0)$$

integrált! Ennek értéke nyilván csak α abszolút értékétől függ (ismét a fenti helyettesítés alkalmazható), tehát ugyanaz az $\alpha\varepsilon_1, \alpha\varepsilon_2, \ldots, \alpha\varepsilon_n$ számokra, ahol ε_j-k az n-edik egységgyökök. Így

$$nf(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} f(\alpha\varepsilon_j) = \int_0^{2\pi} \log \left| \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{e^{i\varphi}}{\alpha\varepsilon_j} \right) \right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{e^{in\varphi}}{\alpha^n} \right| d\varphi.$$

Ha most $|\alpha| > 1$, akkor ahogy $n \to \infty$, ez a jobb oldali integrál tart nullához, mivel $1 - \frac{e^{in\varphi}}{\alpha^n} \to 1$ egyenletesen, tehát $f(\alpha) = 0$. Ha pedig $|\alpha| < 1$, akkor

$$n(f(\alpha) + 2\pi \log |\alpha|) = \int_0^{2\pi} \log |\alpha^n - e^{in\varphi}| \, d\varphi \to 0,$$

mivel $1 - |\alpha|^n < |\alpha^n - e^{in\varphi}| < 1 + |\alpha|^n$, tehát ekkor csak $f(\alpha) = -2\pi \log |\alpha|$ lehetséges. Mindhárom esetben $f(\alpha) \equiv 0$.

A mi esetünkben $P(0) = 1$ lévén $P(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_j} \right)$, tehát

$$F(P) = \sum_{j=1}^{n} f(z_j) \leqq 0. \tag{1}$$

Legyen most $P(z) = (z-1)^k Q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, ahol $Q(1) \neq 0$. Most megbecsüljük $F(P)$-t k, n és M segítségével. Legyen

$$F(P) = \int_0^{2\pi} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} = F_1 + F_2.$$

Ekkor

$$F_2 \leqq \int_0^{2\pi} \log M \, d\varphi = 2\pi \log M. \tag{2}$$

F_1-et megint két részre bontjuk:

$$F_1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \log |(z-1)^k| \, d\varphi + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \log |Q(e^{i\varphi})| \, d\varphi = F_3 + F_4. \tag{3}$$

Nyilván

$$F_3 = k \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \log \left(2 \sin \frac{|\varphi|}{2} \right) d\varphi < 2k \int_0^{\varepsilon} \log \varphi \, d\varphi = 2k\varepsilon(\log \varepsilon - 1). \tag{4}$$

F_4 becsléséhez Q becslése kell, ezt Q 1 körüli kifejtésének együtthatóiból nyerjük. Legyen $Q(1+z) = R(z)$. R együtthatóit P együtthatóiból számoljuk ki az $R(z) = \frac{P(z+1)}{z^k}$ képlet segítségével.

$$P(z+1) = \sum_{j=0}^{n} a_j (z+1)^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{j} a_j \binom{j}{m} z^m = \sum_{m=k}^{n} z^m \sum_{j=m}^{n} a_j \binom{j}{m},$$

mivel z^m együtthatója feltevésünk szerint $m<k$ esetén 0. Tehát

$$R(z)=\sum_{m=0}^{n-k} b_m z^m, \quad b_m=\sum_{j=m+k}^{n} a_j \binom{j}{m+k}. \tag{5}$$

Továbbá a Cauchy-egyenlőtlenségek szerint $|a_j|=\frac{|P^{(j)}(0)|}{j!}\leqq M$, amit (5)-be téve

$$|b_m|\leqq M\sum_{j=m+k}^{n}\binom{j}{m+k}=M\binom{n+1}{m+k+1}. \tag{6}$$

Ha $|z|=\delta$ és $\delta\cdot\frac{n-k}{k+2}<1$, akkor (6) miatt

$$\frac{|R(z)|}{M}\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\delta^m\binom{n+1}{m+k+1}=\binom{n+1}{k+1}\left(1+\delta\frac{n-k}{k+2}+\delta^2\frac{n-k}{k+2}\frac{n-k-1}{k+3}+\ldots\right)\leqq$$

$$\leqq\binom{n+1}{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\delta\frac{n-k}{k+2}\right)^j=\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{1-\delta\frac{n-k}{k+2}}$$

$|e^{i\varphi}-1|=2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\leqq|\varphi|$, tehát ha $\varepsilon<\frac{k+2}{2(n-k)}$ akkor $|\varphi|\leqq\varepsilon$ esetén

$$|Q(e^{i\varphi})|=|R(e^{i\varphi}-1)|\leqq M\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{1-\varepsilon\frac{n-k}{k+2}}<2M\binom{n+1}{k+1}.$$

Ha $k\geqq 2$, akkor a $t!>t^te^{-t}$ képlet felhasználásával

$$\binom{n+1}{k+1}=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}=\frac{(n^2-1)n(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}<$$

$$<\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}<\left(\frac{en}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Így

$$\log|Q(e^{i\varphi})|<\log(2M)+(k+1)\log\frac{en}{k+1}.$$

Tehát

$$F_4<2\varepsilon\left[\log(2m)+(k+1)\log\frac{en}{k+1}\right].$$

Mindent összegyűjtve, (1), (2), (3) és (4) alapján

$$(\pi+\varepsilon)\log M+\varepsilon\log\frac{2en}{k+1}+\varepsilon k\log\frac{\varepsilon n}{k+1}\geqq 0. \tag{7}$$

Most ha $n=\frac{k^2}{2c}$ legyen $\varepsilon=\frac{c}{k}$. (Ez megfelel az $\varepsilon<\frac{k+2}{2(n-k)}$ feltételnek.) Ekkor (7)

így alakul:

$$\left(\pi+\frac{c}{k}\right)\log M+\frac{c}{k}\log\frac{ek^2}{c(k+1)}+c\log\frac{k}{2(k+1)}\geqq 0.$$

Csak rontunk, ha $k+1$ helyett is k-t írunk. Ezen felül $\frac{c}{k}=\frac{k}{2n}\leqq\frac{1}{2}$ miatt $\pi+\frac{c}{k}<$

<4, $\frac{c}{k}\log\frac{ek}{c}<\frac{c}{k}\frac{ek}{c}=e<3$ így végül

$$4\log M+3\geqq c\log 2$$

$$c<8\log M+6. \tag{8}$$

Mivel $k=\sqrt{2cn}$, (8) azt jelenti, hogy a feladat állítását

$$c(M)=\sqrt{16\log M+12}$$

választással bebizonyítottuk.

RUZSA IMRE

2. megoldás. Elég az 1 multiplicitását vizsgálni (l. előző megoldás). Bebizonyítjuk a következő segédtételt:

SEGÉDTÉTEL. Tegyük fel, hogy az $\omega_n(z)$ n-edfokú polinomra $|\omega_n(z)|\leqq M$, ha $|z|\leqq 1$ és $z=1$ a polinom l-szeres gyöke. Ekkor van olyan c_1 abszolút konstans $\left(c_1=\frac{4e}{\pi}+\varepsilon\right)$, hogy $z=e^{i\psi}$, $|\psi|<\frac{l\pi}{2n}$ esetén fennáll

$$\frac{\omega_n(z)}{(z-1)^l}<M\left(\frac{c_1 n}{l}\right)^l.$$

Bizonyítás. Az állítást $\omega_n^2(z)=\omega_{2n}(z)$ jelöléssel

$$\left|\frac{\omega_{2n}(z)}{(z-1)^{2l}}\right|<M^2\left(\frac{c_1 n}{l}\right)^{2l}$$

alakba írva igazoljuk minden $2n$-edfokú polinomra. Legyenek a $z^{2n}+1=0$ egyenlet gyökei $z_k=e^{i\frac{2k-1}{2n}\pi}$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$.

ÁLLÍTÁS. Léteznek olyan a_k $(k=l, l+1, \ldots, 2n-l+1)$ komplex számok, hogy

$$\frac{\omega_{2n}(z)}{(z-1)^{2l}}=\sum_{k=l}^{2n-l+1}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{z_k-\frac{1}{z_k}}+1\right)\frac{a_k}{2}\,\omega_{2n}(z_k)\prod_{\substack{j=l\\ j\neq k,\ 2n+1-k}}^{2n-l+1}(z-z_j).$$

Tegyük fel, hogy $\omega_{2n}(z_v)\neq 0$ $(l\leqq v\leqq 2n-l+1)$. (Ilyen v nyilván létezik, hiszen ω_{2n} 1-től különböző gyökeinek száma legfeljebb $2n-2l$.) Ekkor $l\leqq i\leqq 2n-l+1$, $i\neq v$-re legyen

$$a_i=\frac{1}{(z_i-1)^{2l}\prod\limits_{\substack{j=l\\ j\neq i,\ 2n-i+1}}^{2n-l+1}(z_i-z_j)}.$$

Ekkor $z=z_i$ $(i\neq v)$ helyen a bal- és jobb oldal értéke megegyezik, hisz jobboldalt a szummában szereplő tagok $k=i$ kivételével nullák; ha $k\neq 2n-i+1$ is teljesül, akkor a

$$\prod_{\substack{j=l \\ j\neq k,\, 2n+1-k}}^{2n-l+1} (z_i - z_j) = 0$$

tényező, ha $k = 2n-i+1$, akkor a

$$\frac{z_i - \dfrac{1}{z_i}}{z_k - \dfrac{1}{z_k}} + 1 = 0$$

tényező miatt, míg $k=i$-re a_i definíciója miatt lesz éppen egyenlő a két oldal értéke. Ezekután a megmaradt a_v-t válasszuk úgy, hogy a fellépő $z^{2n-2l+1}$ tag és $\dfrac{1}{z}$ együtthatója 0 legyen. Ezt megtehetjük, hisz a két együttható egymás ellentettje, mivel

$$\prod_{\substack{j=l \\ j\neq k,\, 2n+1-k}}^{2n-l+1} (-z_j) = 1$$

minden k-ra, ugyanis minden fellépő $(-z_j)$-vel együtt annak reciproka, $(-z_{2n+1-j})$ is fellép. Így tehát az

$$\frac{1}{2} \sum_{k=l}^{2n-l+1} a_k \omega_{2n}(z_k) = 0$$

feltételt kell elérni, ami $\omega_{2n}(z_v)\neq 0$ miatt megfelelő a_v választással elérhető. De így a bal- és jobboldalt álló kifejezés egyaránt $(2n-2l)$-edfokú polinom, amelyek $2n-2l+1$ helyen (a $z = z_i$, $l \leqq i \leqq 2n-2l+1$, $i \neq v$ helyeken) megegyeznek, tehát azonosan egyenlők. (Ebből természetesen következik, hogy a $z=z_v$ helyen is egyenlők, tehát az $i\neq v$ esethez hasonlóan

$$a_v = \frac{1}{(z_v-1)^{2l} \prod\limits_{\substack{j=l \\ j\neq v,\, 2n-v+1}}^{2n-l+1} (z_v - z_j)}$$

is fennáll.)

Felhasználva, hogy

$$\left| (z_i^2-1) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,\, 2n+1-i}}^{2n} (z_i - z_j) \right| = 2n,$$

(ami abból adódik, hogy $|z_i^2-1| = \left|z_i - \dfrac{1}{z_i}\right| = |z_i - z_{2n+1-i}|$ és

$$\left| \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{2n} (z_i - z_j) \right| = |(z^{2n}+1)'_{z=z_i}| = 2n)$$

$|a_i|$-ra a következő becslést kaphatjuk, $\varphi=\dfrac{\pi}{n}$ jelöléssel ($l\leqq i\leqq n$-re, $i>n$-re ugyan-

úgy megy a szimmetria miatt)

$$|a_i| = \left| \frac{1}{(z_i-1)^{2l} \prod\limits_{\substack{j=l \\ j\neq i,\, 2n+1-i}}^{2n-l+1} (z_i - z_j)} \right| = \left| \frac{\left[\prod\limits_{j=1}^{l-1} (z_i - z_j) \prod\limits_{j<2n-l+2}^{2n} (z_i - z_j) \right] (z_i^2 - 1)}{(z_i-1)^{2l}} \right| \cdot \frac{1}{2n} \leqq$$

$$\leqq \frac{\prod\limits_{j=1}^{l-1} [(i-j)\varphi] \prod\limits_{j=0}^{l-2} [(i+j)\varphi] \cdot 2}{\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi}{2} \right]^{2l-1}} \cdot \frac{1}{2n} \leqq \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{2l-2} \cdot 2^{2l-1} \cdot \varphi^{2l-2}}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{2l-1} \cdot \varphi^{2l-1} \cdot n} \leqq 2^{2l}.$$

$$\left(\text{Felhasználtunk, hogy } \frac{\tau}{2} \leqq \sin\tau \leqq \tau,\ \tau \leqq \frac{\pi}{2}. \right)$$

Ezekután minden $z=e^{i\psi}$, $|\psi| \leqq \frac{l\pi}{2n}$ esetén meg kell becsülnünk felülről a

$$\left| \prod_{\substack{j=l \\ j\neq i,\, 2n-i+1}}^{2n-l+1} (z - z_j) \right| \leqq 4 \left| \prod_{j=l}^{2n-l+1} (z - z_j) \right|$$

kifejezést. De itt párosával tekintve, a $z=e^{i\psi}$, $z_j=e^{i\vartheta}$ jelöléssel

$$|(z-z_j)(z-z_{2n-j+1})| = 4 \sin\frac{\vartheta-\psi}{2} \sin\frac{\vartheta+\psi}{2} = 2(\cos\psi - \cos\vartheta) \leqq 2(1-\cos\vartheta),$$

azaz a kifejezés a $z=1$ helyen maximális az adott $|\psi| \leqq \frac{l\pi}{2n}$ intervallumban. Másrészt

$$4 \left| \prod_{j=l}^{2n-l+1} (1-z_j) \right| = 4 \frac{\left| \prod\limits_{j=1}^{2n} (1-z_j) \right|}{\left| \prod\limits_{j=1}^{l-1} (1-z_j) \right|^2} \leqq \frac{4(1^{2n}+1)}{\left[\prod\limits_{j=1}^{l-1} \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi}{2} \right]^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{8}{\left[\frac{1}{2}(l-2)! \left(\frac{\varphi}{2}\right)^{l-1} \right]^2} \leqq \left(\frac{c_0 n}{l\pi} \right)^{2l-2}.$$

Felhasználva, hogy $z=e^{i\psi}$, $|\psi| \leqq \frac{l}{2} \cdot \frac{\pi}{n}$ így minden $i \geqq l$-re

$$\frac{z - \frac{1}{z}}{z_i - \frac{1}{z_i}} = \left| \frac{2 \operatorname{Im} z}{2 \operatorname{Im} z_i} \right| \leqq 1$$

kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\omega_{2n}(z)}{(z-1)^{2l}} \right| \leqq n \cdot 2 \cdot \frac{2^{2l}}{2} \cdot M^2 \cdot \left(\frac{c_0 n}{l\pi} \right)^{2l-2} < M^2 \left(\frac{c_1 n}{l} \right)^{2l}$$

és ezzel a segédtétel igazolást nyert.

Legyen $$g(\vartheta) = |\omega_n(e^{i\vartheta})|^2.$$

Legyen

$$\omega_n(z) = c \prod_{|z_\nu|<1} (z - z_\nu) \prod_{|z_\mu|\geq 1} (z - z_\mu),$$

$$\omega_n^*(z) = c \prod_{|z_\nu|<1} (1 - z\bar{z}_\nu) \prod_{|z_\mu|\geq 1} (z - z_\mu).$$

Ekkor PÓLYA—SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2. Band, 82. o., 43. példa szerint $|\omega_n(z)| = |\omega_n^*(z)|$, $|z| = 1$ esetén (ez nyilvánvaló) és itt

$$\frac{\omega_n(0)}{\omega_n^*(0)} = \prod_{|z_\nu|<1} |z_\nu| \leqq 1,$$

tehát

$$|\omega_n^*(0)| \geqq |\omega_n(0)| = 1$$

és így a 2. kötet 84. o., 53. példa szerint

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta = \log |\omega_n^*(0)|^2 \geqq \log 1 = 0.$$

Másrészt minden ϑ-ra $g(\vartheta) \leqq M^2$ és $|\vartheta| \leqq \frac{l\pi}{2n}$-re fennáll

$$g(\vartheta) = |\omega_{2n}(e^{i\vartheta})| \leqq M^2 \left(\frac{c_1 n}{l} |z - 1|\right)^{2l} \leqq M^2 \left(\frac{c_1 n}{l} \vartheta\right)^{2l},$$

de így ezen intervallumban

$$\log g(\vartheta) \leqq 2 \log M + 2l \log \frac{c_1 n}{l} \vartheta.$$

Ezt csak $|\vartheta| \leqq \frac{l}{nc_1} \left(< \frac{l}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$-ben használjuk, másutt $\log g(\vartheta) \leqq 2 \log M$-mel becsülünk és így kapjuk:

$$0 \leqq \int_0^{2\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta \leqq 2\pi \cdot 2 \log M + 2 \cdot 2l \int_0^{\frac{l}{nc_1}} \log \left(\frac{c_1 n}{l} \vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \log M + 2 \cdot 2l \cdot \frac{l}{c_1 n} \int_0^1 \log \tau\, d\tau = 4\pi \log M + 4 \frac{l^2}{c_1 n} (-1)$$

azaz

$$4 \frac{l^2}{c_1 n} \leqq 4\pi \log M$$

$$l^2 \leqq \pi c_1 \log M \cdot n$$

$$l \leqq \sqrt{\pi c_1} \sqrt{\log M} \sqrt{n} = c(M) \sqrt{n},$$

amit bizonyítani akartunk.

MEGJEGYZÉS. Ha n nagy, akkor $c_1 = \frac{4e}{\pi} + \varepsilon$ választható.

PINTZ JÁNOS megoldása, kisebb javításokkal.

A feladatot megoldotta: RUZSA IMRE, kis hibával megoldotta: PINTZ JÁNOS, részeredményt ért el BABAI LÁSZLÓ.

7. FELADAT

Csak az egységgömb belsejében tekintjük értelmezettnek f-et. $(x_0, 0, 0)$ helyett x_0-t, (x, y, z) helyett x-et írunk.

Legyen $0 \leqq A < 1$, $0 \leqq B < 1$. Tegyük fel, hogy $x, x_0 \in R^3$ és $|x| \leqq A$, $|x_0| \leqq B$. Legyen $\max(A, B) < R < 1$. Ekkor f-nek az origó körüli R sugarú $S(0, R)$ gömbön felvett értéke a Poisson-formula szerint meghatározza f értékét e gömb belsejében:

$$f(x) = \frac{R-|x|^2}{4\pi R} \int_{S(0,R)} \frac{f(\zeta)}{|x-\zeta|^3} dS_\zeta = \frac{R-|x|^2}{4\pi R} \int_{S(0,R)} \left(\frac{|x_0-\zeta|}{|x-\zeta|} \right)^3 \cdot \frac{f(\zeta)}{|x_0-\zeta|^3} dS_\zeta .$$

Nyilván $|x_0-\zeta| \leqq R+|x_0|$, $|x-\zeta| \geqq R-|x|$. Felhasználva f nemnegatív voltát is, innen az adódik, hogy

$$f(x) \leqq \left(\frac{R+|x_0|}{R-|x|} \right)^3 \cdot \frac{R-|x|^2}{4\pi R} \int_{S(0,R)} \frac{f(\zeta)}{|x_0-\zeta|^3} dS_\zeta = \left(\frac{R+|x_0|}{R-|x|} \right)^3 \cdot \frac{R-|x|^2}{R-|x_0|^2} f(x_0) =$$

$$= \frac{(R+|x_0|)^2}{R-|x_0|} \cdot \frac{R+|x|}{(R-|x|)^2} f(x_0) \leqq f(x_0) \frac{(R+B)^2}{R-B} \cdot \frac{R+A}{(R-A)^2} .$$

Mivel ez minden elég nagy $R<1$-re igaz, $R \to 1-0$ határátmenettel, $1-A = \alpha$, $1-B = \beta$ jelöléssel, $0<\alpha$, $\beta \leqq 1$-et felhasználva

$$f(x) \leqq f(x_0) \frac{(1+B)^2}{1-B} \frac{1+A}{(1-A)^2} = f(x_0) \frac{(2-\beta)^2(2-\alpha)}{\alpha^2\beta} \leqq f(x_0) \frac{8}{\alpha^2\beta}$$

Tehát $\alpha^2\beta \geqq 8\varepsilon$ esetén $f(x) \leqq \frac{1}{\varepsilon} f(x_0)$. Feladatunkban $\varepsilon < (1-|x_0|)^2$ miatt $|x_0| < 1-\varepsilon^{1/2}$ és $|x| \leqq 1-3\varepsilon^{1/4}$, tehát $\alpha = 3\varepsilon^{1/4}$ és $\beta = \varepsilon^{1/2}$ választható; így $\alpha^2\beta = 9\varepsilon > 8\varepsilon$, tehát

$$f(x) \leqq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon.$$

BABAI LÁSZLÓ

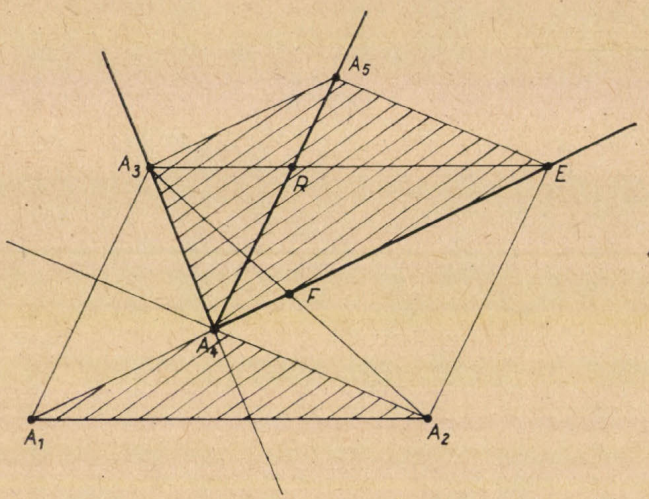
MEGJEGYZÉSEK. 1. A feladat állítása tulajdonképpen a harmonikus függvények maximumelvének kiterjesztése. A maximumelv szerint, ha $f(x, y)$ $x^2+y^2<1$-ben harmonikus és $\geqq 0$ itt, és $x_0<1$-gyel $P_0=(x_0, 0)$-ban 0, akkor az egész körben 0 (analóg módon magasabb dimenziókra is). A feladat azt adja, hogy ha $f(x, y)$ harmonikus és nemnegatív $x^2+y^2<1$-ben és $P_0=(x_0, 0)$-ban „kis pozitív", akkor egy „majdnem 1" sugarú körben az az origó körül mindenütt „kis pozitív".

2. Ilyen formában a tétel igaz körlap helyett tetszőleges korlátos T tartományra, mint az körláncos okoskodással belátható. Továbbmenőleg explicit formula is elérhető pl. konvex tartomány esetére, a P_0 köré írt T-beli maximális kör sugarával és T átmérőjével.

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, FRANKL PÉTER, LEMPERT LÁSZLÓ, MÉRŐ LÁSZLÓ, MICHALETZKY GYÖRGY, NAGY ZSIGMOND, PINTZ JÁNOS, RUZSA IMRE, SURÁNYI LÁSZLÓ, TÁTRAY PÉTER.

8. FELADAT

A súlyponton áthaladó súlyvonalak 6 szögtartományra bontják a síkot. Állítjuk, hogy mindegyik szögtartományban pontosan egy megfelelő A_5 pont van, amelyre a szóban forgó arány maximális, mégpedig ez az arány 1/4. Legyen A_2A_3 felezőpontja F, A_1-nek F-re való tükörképe E, az A_3E szakasz A_3-hoz közelebbi harmadolópontja R, végül A_5 az A_4R félegyenes azon pontja, amelyre $A_4A_5=\frac{3}{2}A_4R$. Az A_3A_4E szögtartományban ez az A_5 a keresett pont. Vegyünk ugyanis egy tet-



1. ábra

szőleges A_5 pontot az A_3A_4E szögtartományban. Ha ez nincs az A_3A_4E háromszögben, akkor a $T(A_4A_5E)=2T(A_1A_5A_4)=2b$, $T(A_3A_5A_4)=a$, $T(A_1A_2A_4)=c$, $T(A_1A_2A_5)=d$ jelölések mellett az ábrán vonalkázott terület:

$$a+2b+c=d, \tag{1}$$

mivel a bal oldali összeg olyan háromszögek területösszegével egyenlő, melyek egyik oldala $A_1A_2=A_3E$ és a megfelelő magasságok összege az $A_1A_2A_5$ háromszög A_1A_2-höz tartozó magasságával egyenlő. Ha előjeles területekre gondolunk, akkor az (1) összefüggés akkor is igaz marad, ha A_5 az A_3A_4E háromszögbe esik. Tehát az előjel nélküli területekre minden esetben igaz

$$a+2b+c \leqq d.$$

Innen

$$\min(a, b, c) \leqq \frac{1}{4}d \tag{2}$$

tehát a keresett arány $\leqq 1/4$.

(2)-ben az egyenlőség teljesülésének szükséges és elégséges feltétele $a=b=c=\frac{1}{4}$. Ez egyrészt azt jelenti, hogy A_5 négyszer akkora távolságra van az A_1A_2 egyenestől,

mint A_4, másrészt azt, hogy $T(A_3A_4A_5)=T(A_1A_4A_5)$, vagyis $A_4A_5 \| A_1A_3$. E két feltétel együtt éppen azt jelenti, hogy A_5 valóban az általunk korábban definiált pont.

Közvetlen számolással igazolható, hogy ekkor az $A_1A_2A_5$ háromszög a maximális területű, és az összes többi $A_iA_jA_k$ háromszög területe $\leqq \frac{d}{4}$.

Lényegében PINTZ JÁNOS megoldása.

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, FRANKL PÉTER, LEMPERT LÁSZLÓ, MÉRŐ LÁSZLÓ, MICHALETZKY GYÖRGY, NAGY ZSIGMOND, PINTZ JÁNOS, RUZSA IMRE, SURÁNYI LÁSZLÓ, SZABÓ GÖRGY, TÁTRAY PÉTER.

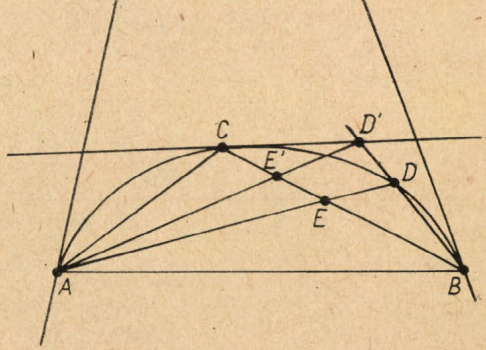
9. FELADAT

A feladat állítása $n=0$-ra értelmetlen, $n=1$-re nyilvánvalóan igaz. Nézzük $n=2$-re.

Az, hogy a kiinduló szimplex minden csúcsa minden dimenzió mellett a konvex test határán van, nyilvánvaló, hisz különben távolíthatnánk a nem ott levő csúcsot az átellenes hipersíktól. A két dimenziós esetben indukcióval következik, hogy az újonnan hozzávett csúcsok is mind a határra kerülnek:

Az indukciós alap biztosítva van. Tegyük fel, hogy az első n pont a határon van, akkor ezek együttvéve egy konvex n-szöget határolnak, melynek minden oldala felett egy (esetleg csak a triviális) része van a konvex idomunknak. Ezek valamelyikébe kerül az új pont, s a sokszög egy háromszöggel „nő". A maximalitás miatt az új pont is a határra kell, hogy kerüljön, q.e.d.

A konkávitáshoz azt kell belátni, hogy két egymást követő növekedés közül a második nem nagyobb, mint az első. Ha az új pontok más oldalak feletti ívekre kerülnek, akkor ez nyilvánvaló, hisz felcserélve vennénk hozzá azokat különben. Ha ugyanazon oldal felett vesszük hozzá a pontokat, akkor legyen A és B az oldal két végpontja, C és D a hozzávett pontok. Mivel C-t vettük először hozzá, ezért $ABC\triangle$ területe nagyobb, vagy egyenlő, mint $ABD\triangle$-é. Ha az átlók metszéspontját E-vel jelöljük, akkor az állítás következik, ha bebizonyítjuk: $T(EAB)\geqq T(ECD)$, ui. az első növekmény $T(ABC)$, míg a második $T(ABD)+T(ECD)-T(EAB)$. Megjegyezzük továbbá, hogy az idomunk A és B-beli felfelé (l. ábra) irányuló támaszfélegyenesei metszik egymást, különben A és B közül a később választott nem lenne maximális tulajdonságú. C-ben húzzunk párhuzamost AB-vel, ez az AD egyenest az AD szakasz egy nem belső D' pontjában metszi, így ha D helyett D'-vel bizonyítjuk a kívánt egyenlőtlenséget, akkor az D-vel még inkább következik, de ABE' és $CD'E'$ háromszögek hasonlóak, s a fenti megjegyzés alapján (ahol esetleg a metszéspont lehet a végtelenben is) az AB szakasz nem rövidebb, mint a CD' szakasz, így az állítás következik.



2. ábra

Most belátjuk, hogy $n\geqq 3$-ra a sorozat nem feltétlenül konkáv.

3-ra ellenpéldának jó a szabályos oktaéder. Legyenek az első beírt szimplex csúcsai az oktaéder tetszőleges 4, nem-egysíkú csúcsa. Ennek térfogata maximális, mert tételezzük fel az ellenkezőjét és legyen $ABCD$ olyan maximális térfogatú tetraéder, melynek maximálisan sok csúcsa van az oktaéder csúcsai közül, de mondjuk A nem ilyen. Vegyünk fel A-n át egy BCD-vel párhuzamos síkot, a maximalitás folytán ez nem tartalmazhatja az oktaéder belső pontját, viszont van az oktaéderrel közös pontja, ezért tartalmazza az oktaéder legalább egy csúcsát, s akkor A helyett azt a pontot vehetnénk negyediknek, amely ellentmondás állításunkat igazolja. Ugyanúgy bizonyítható, hogy az ötödiknek felveendő pontot is választhatjuk az oktaéder csúcsai közül, ugyanis az oktaéder szemközti lapjai párhuzamosak, így a két laptól egyaránt maximális távolságra levő pontok egy élét alkotják. A hatodik csúcs az oktaéder hatodik csúcsa lesz, s ez az utolsó növekmény kétszerese a megelőzőnek, így a sorozat nem konkáv.

Az általános eset most már következik, elég az oktaéderre gúlát emelni, azaz az oktaéder komplementer alterében fekvő valamely $n-3$ dimenziós szimplex és az oktaéder által kifeszített testet venni. Azt, hogy ez jó, a fentivel egyező módon igazolhatjuk, ugyanis már az első lépésben hozzá kell vennünk az összes, az oktaéder csúcsaitól különböző csúcsot a maximalitás miatt, s az újonnan hozzáveendő csúcsoknak az oktaéder által generált háromdimenziós síkban kell lenniük a maximalitás miatt.

FRANKL PÉTER

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, FRANKL PÉTER, LEMPERT LÁSZLÓ, PINTZ JÁNOS, RUZSA IMRE. Kissé hiányos megoldást adtak: NAGY ZSIGMOND, TÁTRAY PÉTER. Erősen hiányos megoldást adtak: MÉRŐ LÁSZLÓ, MICHALETZKY GYÖRGY. Csak az $n=2$ esettel foglalkozott: SURÁNYI LÁSZLÓ.

10. FELADAT

Tegyük fel, hogy létezik a kívánt tulajdonságú $\sigma(x, y)$ függvény. Legyen $p \in E$, G nyílt $\mathcal{T}_i$-ben, $p \in G$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $V_i(p, \varepsilon) \subset G$. Legyen $0 < \delta < \varepsilon$, $G' = V_i(p, \delta)$ és F legyen G'-nek $\mathcal{T}_{3-i}$-beli lezártja. A háromszögegyenlőtlenséget alkalmazva könnyen adódik, hogy G', F, G valóban kielégítik a feltételt. (Ebben az irányban nincs szükség a megszámlálható bázisra.)

A továbbiakban G mindig nyílt, F zárt halmazt jelöl. Felső index jelzi, hogy ez melyik topológiában értendő. Pl. $\overline{G^{(1)}}^{(2)}$ jelöli a $\mathcal{T}_1$-ben nyílt $G^{(1)}$ halmaz $\mathcal{T}_2$-beli lezártját. Igazoljuk a σ létezésére adott feltétel elégségességét. A bizonyítás az Uriszon-féle metrizációs tétel ismert levezetésének módosítása.

(1) *Tyihonov-lemma:* $F^{(1)} \cap F^{(2)} = \emptyset$ esetén létezik $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ úgy, hogy $G^{(1)} \supset F^{(2)}$, $G^{(2)} \supset F^{(1)}$, $G^{(1)} \cap G^{(2)} = \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $p \in F^{(i)}$. Ekkor $p \in E - F^{(3-i)}$, ez utóbbi nyílt $\mathcal{T}_{3-i}$-ben, tehát a feltétel szerint van olyan $G' = G'^{(3-i)}(p)$, melyre $p \in G'^{(3-i)}$ és $\overline{G'^{(3-i)}(p)}^{(i)} \subset$ $\subset E - F^{(3-i)}$, azaz $\overline{G'^{(3-i)}(p)}^{(i)} \cap F^{(3-i)} = \emptyset$.

Minden ilyen $G'^{(j)}(p)$ halmazhoz rendeljük hozzá a $\mathcal{T}_j$-beli megszámlálható bázis egy $U^{(j)}$ elemét: $p \in U^{(j)} \subset G'^{(j)}(p)$. Így összesen megszámlálható sok $U^{(j)}$

halmazunk van: $U_n^{(j)}$, $n=1, 2, \ldots$ $(j=1, 2, \ldots)$ és ezekre

$$F^{(3-i)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^{(i)}, \quad \overline{U_n^{(i)}}^{(3-i)} \cap F^{(i)} = \emptyset. \tag{2}$$

Legyen most

$$U_{n*}^{(i)} = U_n^{(i)} - \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_k^{(3-i)}}^{(i)}.$$

Ezekre az $U_{n*}^{(i)}$-kre is fennáll (2) és nyilván $U_{n*}^{(i)} \cap U_{m*}^{(3-i)} = \emptyset$. Továbbá $U_{n*}^{(i)}$ is nyílt $\mathcal{T}_i$-ben. Világos tehát, hogy

$$G^{(i)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n*}^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

megfelel a lemma követelményeinek.

(3) *Uriszon-lemma:* $F^{(1)} \subset G^{(2)}$ esetén létezik olyan $\varrho(x, y)$ valós függvény $E \times E$-n, amelyre

$$0 \leqq \varrho(x, y) \leqq 1, \quad \varrho(x, x) = 0$$

$$\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad (x, y, z \in E) \tag{4}$$

és a

$$V_{\varrho}^{(1)}(p, \varepsilon) = \{x | \varrho(x, p) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0) \tag{5}$$

halmazok $\mathcal{T}_1$-ben nyíltak, a

$$V_{\varrho}^{(2)}(p, \varepsilon) = \{x | \varrho(p, x) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0) \tag{6}$$

halmazok $\mathcal{T}_2$-ben nyíltak, továbbá

$$x \in F^{(1)}, \quad y \notin G^{(2)} \quad \text{esetén} \quad \varrho(x, y) = 1 \tag{7}$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket: $G_0^{(2)} = \emptyset$, $F_0^{(1)} = F^{(1)}$, $G_1^{(2)} = G^{(2)}$, $F_1^{(1)} = E$. Legyen D a $[0, 1]$ zárt intervallum egy sűrű, megszámlálható részhalmaza: $D = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$, ahol $r_0 = 0$, $r_1 = 1$.

Rekurzióval definiáljuk a $G_n^{(2)}$, $F_n^{(1)}$ halmazokat úgy, hogy $G_n^{(2)} \subset F_n^{(1)}$ és $r_n < r_m$ esetén

$$F_n^{(1)} \subset G_m^{(2)}$$

Ezek a tulajdonságok a már definiált esetekben $(n, m = 0, 1)$ fennállnak. Ha az n-nél kisebb $(n \geqq 2)$ indexekre már definiáltuk a halmazokat, akkor nézzük meg, melyek r_n szomszédai $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ közül. Legyenek ezek r_k és r_l: $r_k < r_n < r_l$, $0 \leqq k, l \leqq n-1$. Alkalmazzuk az (1) lemmát az $F_k^{(1)}$ és $E - G_l^{(2)}$ halmazokra: $r_k < r_l$ és az indukciós feltevés folytán $F_k^{(1)} \cap (E - G_l^{(2)}) = \emptyset$, így (1) szerint van olyan $G_n^{(2)}$ és $G_{n*}^{(1)}$, melyekre $G_n^{(2)} \cap G_{n*}^{(1)} = \emptyset$,

$$G_n^{(2)} \supset F_k^{(1)}, \quad G_{n*}^{(1)} \supset E - G_l^{(2)},$$

azaz $F_n^{(1)} = E - G_{n*}^{(1)}$ jelöléssel

$$F_n^{(1)} \subset G_l^{(2)}.$$

$G_n^{(2)} \cap G_{n*}^{(1)} = \emptyset$ pedig azt jelenti, hogy

$$G_n^{(2)} \subset F_n^{(1)}.$$

Világos, hogy az indukciós feltevések helyessége öröklődik, tehát a rekurzív definíció korrekt.

Legyen $x \in E$ esetén

$$g(x) = \inf(\{r_n | x \in G_n^{(2)}\} \cup \{1\})$$

$$f(x) = \sup(\{r_n | x \notin F_n^{(1)}\} \cup \{0\})$$

$(0 \leqq f(x), g(x) \leqq 1)$. Látható, hogy

$$f|F^{(1)} = g|F^{(1)} \equiv 0, \; f|E - G^{(2)} = g|E - G^{(2)} \equiv 1.$$

Továbbá, ha $n \geqq 2$

$$g(x) < r_n \Rightarrow x \in G_n^{(2)} \Rightarrow x \in F_n^{(1)} \Rightarrow f(x) \leqq r_n,$$

tehát minden $x \in E$-re $f(x) \leqq g(x)$. Ha azonban $f(x) < g(x)$ állna valamely $x \in E$-re, akkor volna olyan $r_n, r_m \in D$, melyekre

$$f(x) < r_n < r_m < g(x)$$

Ekkor azonban egyrészt $x \in F_n^{(1)}$, másrészt $x \notin G_m^{(2)}$, harmadsorban pedig $F_n^{(1)} \subset G_m^{(2)}$, ellentmondás. Tehát E-n $f(x) = g(x)$.

Legyen

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad f(x) \geqq f(y) \\ f(y) - f(x), & \text{ha} \quad f(x) < f(y) \end{cases} \qquad (x, y \in E)$$

ϱ-ra nyilván teljesül $0 \leqq \varrho(x, y) \leqq 1$, $\varrho(x, x) = 0$ valamint (4) és (7) is. (4) folytán (5) ill. (6) helyett elegendő azt igazolnunk, hngy $p \in \operatorname{int}^{(i)} V_\varrho^{(i)}(p, \varepsilon)$ $(p \in E, \varepsilon > 0)$ $(i = 1,2)$.

$i = 1$ esetén:

Legyen $\varepsilon > 0, p \in E$. Így

$$V_\varrho^{(1)}(p, \varepsilon) = \{x | \varrho(x, p) < \varepsilon\} = \{x | f(p) - f(x) < \varepsilon\} \supset E - F_n^{(1)} \ni p,$$

hacsak n-et úgy választjuk, hogy $f(p) - \varepsilon < r_n < f(p)$. $f(p) = 0$ esetén $V_\varrho^{(1)}(p, \varepsilon) = E \ni p$. $E - F_n^{(1)}$, ill. E $\mathcal{T}_1$-nyílt.

$i = 2$ esetén:

$$V_\varrho^{(2)}(p, \varepsilon) = \{x | \varrho(p, x) < \varepsilon\} = \{x | f(x) - f(p) < \varepsilon\} =$$

$$= \{x | g(x) - g(p) < \varepsilon\} \supset G_n^{(2)} \ni p,$$

hacsak $g(p) < r_n < g(p) + \varepsilon$. $g(p) = 1$ esetén $V_\varrho^{(2)}(p, \varepsilon) = E$.

Ezzel (3)-at igazoltuk.

Rátérünk a tétel igazolására.

Legyen P az összes olyan $(U^{(i)}, V^{(i)})$ párok halmaza, ahol $U^{(i)}, V^{(i)}$ a $\mathcal{T}_i$ topológia megszámlálható bázisának elemei és

$$\overline{U^{(i)}}^{(3-i)} \subset V^{(i)} \quad (i = 1, 2\text{-re}).$$

Így P-nek megszámlálható sok eleme van:

$$P = \{(U_1, V_1), (U_2, U_2), \ldots\}$$

$k = 1, 2, \ldots$-ra definiáljuk $E \times E$-n a $\varrho_k(x, y)$ függvényt.

Legyen $(U_k, V_k) = (U_k^{(i)}, V_k^{(i)})$. Alkalmazzuk a (3) lemmát $i = 2$ esetén az $F^{(1)} = \overline{U_k^{(2)}}^{(1)}$, $G^{(2)} = V_k^{(2)}$ halmazpárra, s az így nyert $\varrho(x, y)$ függvényt nevezzük ϱ_k-nak. $i = 1$ esetén legyen $F^{(2)} = \overline{U_k^{(1)}}^{(2)}$, $G^{(1)} = V_k^{(1)}$ és alkalmazzuk azt a (3)-mal egyező

módon igazolható (3*) állítást, melyben (3)-hoz képest az (1)-es és (2)-es felső index szerepet cserél és mindenütt $\varrho(a, b)$ helyett $\varrho(b, a)$ írandó. (Így végül (5) és (6) egyszerűen helyet cserél, (4) pedig önmagába megy át.) Az így kapott ϱ neve legyen ϱ_k.

Legyen

$$\sigma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varrho_k(x, y).$$

Világos, hogy így minden $x, y \in E$-re $0 \leqq \sigma(x, y) \leqq 1$, $\sigma(x, x) = 0$ és (4) folytán $\sigma(x, z) \leqq \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$ is teljesül.

Igazoljuk, hogy $\varepsilon > 0$, $p \in E$ esetén

$$p \in \operatorname{int}^{(i)} V_i(p, \varepsilon) \quad (i = 1, 2).$$

Legyen N olyan nagy, hogy $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor

$$V_i(p, \varepsilon) \supset \bigcap_{k=1}^{N} V_{\varrho k}^{(i)}\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

A jobb oldal azonban (5) és (6) szerint (p-t tartalmazó) nyílt halmaz $\mathcal{T}_i$-ben.

Már csak azt kell igazolni, hogy $p \in \operatorname{int}^{(i)} U$ esetén $p \in V_i(p, \varepsilon) \subset U$ alkalmas $\varepsilon > 0$-ra. $p \in \operatorname{int}^{(i)} U$ folytán van olyan $G^{(i)}$, majd ehhez a feltételek miatt olyan $G'^{(i)}$ halmaz $\mathcal{T}_i$ megszámlálható bázisában, melyekre

$$p \in G'^{(i)}, \quad \overline{G'^{(i)}}^{(3-i)} \subset G^{(i)} \subset U.$$

Tehát $(G'^{(i)}, G^{(i)}) = (U_k^{(i)}, V_k^{(i)}) \in P$ valamely k-ra. Így $p \in G'^{(i)}$ és (7) felhasználásával

$$V_i\left(p, \frac{1}{2^k}\right) \subset V_{\varrho_k}^{(i)}(p, 1) \subset G^{(i)}.$$

BABAI LÁSZLÓ

A feladatot megoldották: BABAI LÁSZLÓ, NAGY ZSIGMOND. Kissé hiányos FRANKL PÉTER, erősen hiányos MICHALETZKY GYÖRGY megoldása.

11. FELADAT

A bizonyítás alapgondolata a következő: X_i $B(p, N)$ eloszlású (binomiális eloszlás p, N paraméterekkel), ahol $p = \frac{1}{n}$. Ha az X_i-k függetlenek lennének, a feladat állításait könnyen igazolni lehetne. Természetesen nem azok, hiszen $X_1 + \ldots + \ldots + X_n = N$, de látni fogjuk, hogy ha k elég kicsi, akkor közülük k darab lényegében függetlennek tekinthető.

Legyenek tehát X_i' $B(p, N)$ eloszlásúak és függetlenek, $a_1, \ldots, a_k$ k darab természetes szám a $[0, N]$ intervallumból,

$$\alpha = P(X_i = a_i;\ i = 1, \ldots, k), \quad \alpha' = P(X_i' = a_i;\ i = 1, \ldots, k).$$

Legyen továbbá

$$a = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad a_i = pN + b_i, \quad b = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Be fogjuk látni, hogy $\alpha \sim \alpha'$ bizonyos feltételek mellett. Ezen feltételek a következők: $k = O(1)$, $b_i = o(\sqrt{N})$, $N \geqq n$.

Nyilván

$$\alpha = \frac{N!}{\left(\prod_{i=1}^{k} a_i!\right)(N-a)!} P^a (1-kp)^{N-a}$$

és

$$\alpha' = \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{N}{a_i}\right) P^a (1-p)^{kN-a},$$

tehát

$$\beta = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{N!^{k-1}(N-a)!(1-p)^{kN-a}}{\left(\prod_{i=1}^{k}(N-a_i)!\right)(1-kp)^{N-a}}.$$

Ennek megbecslésére a Stirling-formulát használjuk:

$$t! = \sqrt{2\pi t}\, t^t e^{-t+o\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

A logaritmus hibája, azaz a becsült és a valódi β logaritmusának különbsége az $O\left(\frac{1}{t}\right)$ tagokból

$$O\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N-a_i} + \frac{k-1}{N} + \frac{1}{N-a}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right) = o(1),$$

mert

$$a_i = pN + o(\sqrt{N}),\quad a = kpN + o(\sqrt{N}),\quad p = \frac{1}{n} \to 0.$$

és $N \geqq n$ miatt $N \to \infty$. Az e^{-t} és a $\sqrt{2\pi}$ tagok kiesnek, a $\sqrt{t}$-s tagok értéke

$$\sqrt{\frac{N^{k-1}(N-a)}{\prod_{i=1}^{k}(N-a_i)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a}{N}}{\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{a_i}{N}\right)}} = 1 + o(1).$$

Így végül

$$\beta \sim \frac{N^{N(k-1)}(N-a)^{N-a}}{\prod_{i=1}^{k}(N-a_i)^{N-a_i}} \frac{(1-p)^{kN-a}}{(1-kp)^{N-a}} = \frac{\left(1-\frac{a}{N}\right)^{N-a}}{(1-kp)^{N-a}} : \frac{\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{a_i}{N}\right)^{N-a_i}}{(1-p)^{kN-a}} =$$

$$= \left(1-\frac{b}{N(1-kp)}\right)^{N-a} \Big/ \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{b_i}{N(1-p)}\right)^{N-a_i}.$$

A tagok egyenként 1-hez tartanak, ezért alkalmazhatjuk rájuk a $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ képletet. A másodfokú tagok értéke

$$= O\left(\frac{b^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2}{N}\right) = o(1).$$

Az elsőfokú tagoké

$$= \frac{-b(N-kpN-b)}{N(1-kp)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i(N-pN-b_i)}{N(1-p)} = \frac{b^2}{N(1-kp)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i^2}{N(1-p)} = o(1),$$

így tényleg $\log \beta = o(1)$.

Az A) *feladat megoldása*

Legyen

$$\alpha_k = P\left(|X_i - pN| < x\sqrt{\frac{N}{n^3}};\ i = 1, \ldots, k\right)$$

$$c = P\left(y(N, n) < x\sqrt{\frac{N}{n^3}}\right).$$

Tudjuk, hogy ha $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események és

$$S_j = \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_j \leqq n} P(A_{i_1} \ldots A_{i_j}),$$

akkor

$$\sum_{j=0}^{2s+1} (-1)^j S_j \leqq P(\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_n) \leqq \sum_{j=0}^{2s} (-1)^j S_j.$$

(l. pl. BOGNÁRNÉ—MOGYORÓDI—PRÉKOPA—RÉNYI—SZÁSZ: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény, I. 2. 11. c. feladat.)

Eszerint

$$\sum_{j=0}^{2s+1} (-1)^j \binom{n}{j} \alpha_j \leqq 1 - c \leqq \sum_{j=0}^{2s} (-1)^j \binom{n}{j} \alpha_j.$$

Azonban

$$\alpha_k \sim \alpha_k' = P\left(|X_i' - pN| < x\sqrt{\frac{N}{n^3}};\ i = 1, \ldots, k\right),$$

ugyanis az előzőekben bizonyított aszimptotikus egyenlőséget lehet alkalmazni minden $X_i - pN = b_i$ rendszerre, ahol $|b_i| < x\sqrt{\frac{N}{n^3}}$. Mivel $\alpha_k' = \alpha'^k$, ahol $\alpha' = P\left(|X_1' - pN| < x\sqrt{\frac{N}{n^3}}\right)$, ezért

$$1 - c = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} \alpha'^j + O\left(\binom{n}{k+1} \alpha'^{k+1}\right) + o\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \alpha'^j\right).$$

Az első szumma $(1-\alpha')^n$ kifejtésének első k tagja; ha ezt $(1-\alpha')^n$-nel helyettesítjük, az elkövetett hiba szintén csak $O\left(\binom{n}{k+1} \alpha'^{k+1}\right)$ lesz. A lokális De Moivre—Laplace-tételből (itt használjuk ki, hogy $\frac{N}{n^3} \to \infty$)

$$\alpha' \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{n}.$$

Most válasszunk egy tetszőleges kis ε-t. Ha k elég nagy, akkor mint egyszerű számolás mutatja, az első hibatag $<\varepsilon$. A második pedig $o((1+\alpha')^n) = o(1)$. Végül $\log(1-\alpha') = -\alpha' + O(\alpha'^2)$, $n\log(1-\alpha') = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x + o(1)$, amivel készen vagyunk.

A C) feladat megoldása

Pontosabban az alábbit bizonyítjuk: tetszőlegesen kicsiny ε-hoz létezik olyan δ és n_0, hogy ha $n > n_0$ és $\frac{N}{n^3} < \delta$; akkor $P(y(N,n) < 1) > 1-\varepsilon$.

Ha pontosan le akarnánk másolni az előző gondolatmenetet, ott csúszna be hiba, hogy $\binom{n}{k+1}\alpha'^{k+1}$ nem lesz kicsi és $(1+\alpha')^n$ nem marad korlátos, ha α' túl nagy. A továbbiakban mindkét nehézség kiküszöbölődik, mivel ezek helyébe

$$\binom{\left[A\sqrt{\frac{N}{n}}\right]}{k+1}\left(c\sqrt{\frac{n}{N}}\right)^{k+1}, \quad \text{ill.} \quad \left(1+c\sqrt{\frac{n}{N}}\right)^{\left[A\sqrt{\frac{n}{N}}\right]}$$

lép. Nézzük meg ugyanis annak a valószínűségét, hogy az első $\left[A\sqrt{\frac{N}{n}}\right]$ urna valamelyikénél fellép $\left|X_i - \frac{N}{n}\right| < 1$. (Ha δ elég kicsi, akkor $A\sqrt{\frac{N}{n}} < n$.) Itt

$$P\left(\left|X_i' - \frac{N}{n}\right| < 1\right) = c\sqrt{\frac{n}{N}},$$

ahol c pozitív korlátok között marad, hacsak $N \geqq n$ (ami feltehető, mert ellenkező esetben az állítás triviális). Ezután pedig már ugyanúgy végrehajtható a becslés, mint az előbb.

A B) feladat megoldása

Az előző részben megadott δ-val feltehetjük, hogy $\frac{N}{n^3} \geqq \delta$, hiszen különben már az előző eredmény biztosítja a kívánt egyenlőtlenséget. Ekkor $\alpha' = \frac{cA}{n}$, ahol c szintén pozitív korlátok között van (melyek δ-tól és K-tól függenek). Ezzel az α'-vel pedig ismét alkalmazható az A) feladat megoldásának végén bemutatott módszer.

RUZSA IMRE

A feladatot megoldották: NAGY ZSIGMOND, RUZSA IMRE, SURÁNYI LÁSZLÓ.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER DE L'ANNÉE 1972

1. Soit $\mathcal{F}$ un sistèmes d'ensemble non vide ayant les deux propriétés suivantes:
a) Si $X \in \mathcal{F}$, il existent $Y \in \mathcal{F}$ et $Z \in \mathcal{F}$ tels que $Y \cap Z = \emptyset$, $Y \cup Z = X$.
b) Si $X \in \mathcal{F}$, $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$, alors ou bien $Y \in \mathcal{F}$, ou bien $Z \in \mathcal{F}$.
Démontrer qu'il existe une suite d'ensembles décroissante $X_n \in \mathcal{F}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ telle que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \emptyset.$$

2. Une relation $\leqq$ rèflexive et antisymétrique soit définie dans l'ensemble fini A. Démontrer qu'on peut prolonger cette relation à une relation rèflexive et antisymétrique dans un ensemble convenable B également fini contenant A, de manière que deux éléments arbitraires de B possèdent en B leur petit borne supérieure et leur plus grande borne inférieure.

(c est la borne supérieure et d est la borne inférieure des éléments $a_1, \ldots, a_r$, si, pour tout élément a_i, on a $d \leqq a_i \leqq c$. x est la plus petite borne supérieure des éléments en question, si elle est borne supérieure et qu'elle est borne inférieure de toutes les bornes supérieures. On entend sur le prolongement de la relation à B une relation en B, lorsque la relation a lieu entre deux éléments de A dans B, si et seulement si elle subsiste dans A.)

3. Soit λ_i $(i=1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs donnés tendant vers l'infini. Considérons l'ensemble de tous les nombres qu'on peut représenter sous la forme

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \lambda_i$$

où les $n_i \geqq 0$ sont des entiers, mais $n_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i. Soit

$$L(x) = \sum_{\lambda_i \leqq x} 1 \quad \text{et} \quad M(x) = \sum_{\mu \leqq x} 1.$$

(Dans la dernière somme μ intervient autant de fois qu'il a de représentations du type plus haut.)

Vérifier que si

$$\frac{L(x+1)}{L(x)} \to 1 \quad (x \to \infty),$$

alors

$$\frac{M(x+1)}{M(x)} \to 1 \quad (x \to \infty).$$

4. Soit G un groupe de torsion soluble, dans lequel tout sous-groupe abélien est engendré par un nombre fini d'éléments.

Prouver que G est fini.

5. On appelle la fonction réelle $f(x)$ définie dans $(0,1)$ approximativement continue, si, pour tout $x_0 \in (0,1)$ et $\varepsilon > 0$, x_0 est un point intérieur de densité 1 de l'ensemble $H = \{x \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$.

Soit $F \subset (0,1)$ un ensemble dénombrable fermé et $g(x)$ une fonction arbitraire réelle définie sur F.

Prouver que, dans ce cas, il existe $f(x)$ approximativement continue, définie dans $(0,1)$ telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in F$.

6. Soit $P(z)$ un polynôme du degré n, avec des coefficients complexes, $P(0) = 1$, et $|P(z)| \leqq M$ pour $|z| \leqq 1$.

Vérifier que chaque racine de $P(z)$ qui se trouve dans le cercle unité fermé a un ordre de multiplicité égal à $c\sqrt{n}$ au plus, où $c = c(M) > 0$ est une constante qui ne dépend que de M.

7. Soit $f(x, y, z)$ une fonction non négative et harmonique dans la sphère unité, vérifiant l'inégalité $f(x_0, 0, 0) \leqq \varepsilon^2$ pour un x_0 tel que $0 \leqq x_0 < 1$ et $0 < \varepsilon < (1 - x_0)^2$.

Prouver qu'alors $f(x, y, z) \leqq \varepsilon$ dans une sphère de centre à l'origine et de rayon $(1 - 3\varepsilon^{1/4})$.

8. A_1, A_2, A_3, A_4 sont les points du même plan et A_4 est le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$.

Déterminer le point A_5 de ce plan tel que le rapport

$$\frac{\min\limits_{1 \leqq i < j < k \leqq 5} T(A_i A_j A_k)}{\max\limits_{1 \leqq i < j < k \leqq 5} T(A_i A_j A_k)}$$

soit le plus grand possible.

($T(ABC)$ désigne l'aire du triangle ABC.)

9. Soit K un corps fermé convexe dans l'espace euclidien à n dimensions. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ les sommets d'un simplexe de volume maximal inscrit dans K. Définissons successivement les points $P_{n+2}, P_{n+3}, \ldots$ tels que $P_k (k > n+1)$ soit un point de K pour lequel le volume de l'enveloppe convexe de $P_1, \ldots P_k$ est maximum.

Soit V_k ce volume. Examinons la validité, pour les différentes valeurs de n, de l'assertion ci-après:

„La suite $V_{n+1}, V_{n+2}, \ldots$ est concave."

10. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies à bases dénombrables dans l'ensemble E. Pour qu'il existe dans $E\times E$ une fonction réelle σ telle que

$$0 \leqq \sigma(x, y) < +\infty,\ \sigma(x, x) = 0$$

$$\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y)+\sigma(y, z) \quad (x, y, z \in E)$$

et que les ensembles

$$V_1(p, \varepsilon) = \{x|\sigma(x, p) < \varepsilon\}$$

forment une base de voisinage de p par rapport à $\mathcal{T}_1$ et les ensembles

$$V_2(p, \varepsilon) = \{x|\sigma(p, x) < \varepsilon\}$$

en constituent une par rapport à $\mathcal{T}_2 (\varepsilon>0)$, il faut et il suffit que si $p \in E$ et G est un ouvert de $\mathcal{T}_i$ $(p \in G)$ il existe un $\mathcal{T}_i$-ouvert G' et un $\mathcal{T}_{3-i}$-fermé F pour lesquels $p \in G' \subset F \subset G (i=1,2)$.

11. On jette (successivement) N boules dans n urnes. Les jets sont indépendants et les boules peuvent tomber dans chaque urne avec la même probabilité. Soit $X_i = X_i(N, n)$ le nombre des boules dans la i-ème urne après les N jets. Considérons la variable aléatoire

$$y(N, n) = \min_{1 \leq i \leq n} \left| X_i - \frac{N}{n} \right|.$$

Démontrer les trois propositions suivantes:

A) Si $n \to \infty$ et $\dfrac{N}{n^3} \to \infty$, alors

$$\mathbf{P}\left(\frac{y(N, n)}{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{N}{n}}} < x \right) \to 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}x}$$

pour tout x fixé.

B) Si $n \to \infty$ et $\dfrac{N}{n^3} \to K$ (constante), alors il existe $A>0$ pour tout $\varepsilon>0$ tel que

$$\mathbf{P}(y(N, n) < A) > 1-\varepsilon.$$

C) Si $n \to \infty$ et $\dfrac{N}{n^3} \to 0$, alors

$$\mathbf{P}(y(N, n) < 1) \to 1.$$

ДОКЛАД О МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНКУРСЕ 1972-ГО ГОДА ПОСВЯЩЕННОМ ПАМЯТИ МИКЛОША ШВЕЙТЦЕРА

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, 1061 Budapest, Anker köz 1—3. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

192. Jelölje $g(m)$ az m természetes szám különböző prímfaktorainak számát, $f(k)$ pedig legyen az a legkisebb szám, amelyre $n \geqq f(k)$ esetén

$$g\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k.$$

Bebizonyítandó, hogy

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f(k)^{1/k} < e.$$

ERDŐS PÁL és SZEMERÉDI ENDRE

193. Legyen $r>0$, A és B a $[-r, r]$ intervallum nem-üres részhalmaza, $h>0$ esetén A_h, ill. B_h az A, ill. B halmaz h sugarú zárt környezete (tehát a számegyenes azon x pontjainak halmaza, amelyekre az A, ill. B pontjaitól mért távolság alsó határa $\leqq h$), $d(A, B)$ az A és B halmaz Hausdorff-távolsága (vagyis azon h számok alsó határa, amelyekre $A \subset B_h$ és $B \subset A_h$), végül λ jelölje a Lebesgue-féle mértéket. Kiszámítandó adott r és h mellett

$$\frac{|\lambda(A_h) - \lambda(B_h)|}{d(A, B)}$$

felső határa, miközben A és B a $[-r, r]$ intervallum olyan részhalmaz-párjait futja be, hogy $d(A, B) \neq 0$.

GEHÉR ISTVÁN

194. Készítendő olyan kétváltozós valós függvény, amely a síkon mindenütt kétszer differenciálható, egy pontban lokális szélsőértéke van (a szigorú értelemben), elsőrendű parciális deriváltjai sehol másutt nem tűnnek el egyidejűleg, és értékkészlete a valós számok összessége.

CSÁSZÁR ÁKOS

183. feladat. Egy E metrikus térben az (x_n) pontsorozatot Corson-félének mondjuk, ha minden $\varepsilon>0$-ra van ε-nál kisebb átmérőjű részsorozata. A tér erősen teljes, ha minden Corson-sorozatnak van torlódási pontja. A térnek egy $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ nyílt halmazokból álló $E=\bigcup_1^\infty G_i$ befedése Cauchy-féle, ha minden (x_n) Cauchy-sorozathoz van olyan n_0 és i, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in G_i$; e befedés egyenletes, ha van olyan $\varepsilon>0$, hogy minden ε-nál kisebb átmérőjű halmaz része egy alkalmas G_i-nek. Mutassuk meg, hogy E akkor és csak akkor altere egy erősen teljes metrikus térnek, ha minden Cauchy-féle befedése egyenletes.

(CSÁSZÁR ÁKOS)

Megoldás. Világos, hogy minden Cauchy-sorozat Corson-féle, és jól ismert, hogy ha egy Cauchy-sorozatnak van torlódási pontja, akkor konvergens. Ezért minden erősen teljes metrikus tér teljes tér is. Az is evidens, hogy egy erősen teljes térnek minden zárt altere is erősen teljes. Mindebből következik, hogy az E metrikus tér akkor és csak akkor altere egy erősen teljes metrikus térnek, ha E' teljes burka erősen teljes.

Mindenekelőtt a következő segédtételt igazoljuk: *Az E metrikus tér akkor és csak akkor erősen teljes, ha minden $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, $E=\bigcup_1^\infty G_i$ nyílt befedése egyenletes.*

Valóban, ha ez a befedés nem egyenletes, legyen minden m és i természetes számra A_m olyan $\frac{1}{m}$-nél kisebb átmérőjű halmaz, amely egyetlen G_i-nek sem része, és $a_{mi} \in A_m - G_i$. Ha (x_n) az a_{mi} $(m \leqq i)$ pontok sorozatba rendezésével keletkezik, akkor (x_n) Corson-sorozat, hiszen A_m-be eső részsorozata $\frac{1}{m}$-nél kisebb átmérőjű, de nincs torlódási pontja, mert adott k mellett G_k-ba csak az $m \leqq i < k$ feltételnek eleget tevő véges számú a_{mi} eshet. Így ekkor E nem erősen teljes.

Legyen megfordítva (x_n) torlódási pont nélküli sorozat E-ben. Ekkor a

$$G_i = E - \overline{\{x_n : n \geqq i\}}$$

jelöléssel G_i nyílt, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, $E=\bigcup_1^\infty G_i$. Ha tehát ez a befedés egyenletes, akkor alkalmas $\varepsilon>0$ számra minden ε-nál kisebb átmérőjű halmaz része egy G_i-nek, és így (x_n) nem lehet Corson-féle.

A feladat állításának igazolására térve tegyük fel először, hogy az E tér E' teljes burka erősen teljes. Ha $E=\bigcup_1^\infty G_i$ Cauchy-féle befedés, álljon G_i' azokból az $x \in E'$ pontokból, amelyeknek alkalmas V környezetére $V \cap E \subset G_i$. Ekkor G_i' nyílt,

$$G_i' \cap E = G_i, \quad G_1' \subset G_2' \subset \ldots,$$

végül

$$E' = \bigcup_1^\infty G_i'. \tag{1}$$

Valóban, ha

$$x \in E' - \bigcup_1^\infty G_i'$$

volna, akkor x-nek $\frac{1}{n}$ sugarú környezetében volna egy $x_n \in E - G_n$ pont, és az így

kapott x-hez konvergáló és ezért Cauchy-féle (x_n) sorozatra alkalmas n_0 és i mellett $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in G_i$ állna, ami $n = \max(n_0, i)$ választással lehetetlen. A segédtételt az E' térre alkalmazva adódik, hogy az (1) befedés egyenletes, és így alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett E-nek bármely ε-nál kisebb átmérőjű részhalmaza egy $G_i = G_i' \cap E$ halmaznak része, úgyhogy a G_i halmazok E-nek egyenletes befedését adják.

Most tegyük fel, hogy E-nek minden Cauchy-féle befedése egyenletes, és tekintsük az E' teljes buroknak egy

$$E' = \bigcup_1^\infty G_i', \quad G_1' \subset G_2' \subset \ldots \tag{2}$$

nyílt befedését. Legyen H_i' azoknak az $x \in E'$ pontoknak a halmaza, amelyeknek $(E' - G_i')$-től való távolsága $> \frac{1}{i}$. Ekkor H_i' is nyílt, továbbá

$$E' = \bigcup_1^\infty H_i', \quad H_1' \subset H_2' \subset \ldots, \quad \overline{H_i'} \subset G_i'. \tag{3}$$

Itt az első egyenlőség abból adódik, hogy ha $x \in G_k'$ és x-nek $\varepsilon > 0$ sugarú környezete része G_k'-nek, akkor $i > k$, $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{2}$ esetén $x \in H_i'$. Mármost a

$$H_i = H_i' \cap E$$

jelöléssel a H_i halmazok E-nek Cauchy-féle befedését adják. Ehhez csak azt kell észrevenni, hogy ha (x_n) Cauchy-sorozat E-ben, akkor $x_n \to x \in E'$ alkalmas x-re, s ekkor $x \in H_i'$ alkalmas i-re, tehát elég nagy n_0 indexre $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in H_i$. A feltevés szerint ez a Cauchy-féle befedés egyenletes, tehát megfelelő $\varepsilon > 0$ választással E-nek minden ε-nál kisebb átmérőjű részhalmaza egy H_i-ben fekszik. Ha most $A' \subset E'$ $\frac{\varepsilon}{3}$-nál kisebb átmérőjű, és B' az A' halmaz $\frac{\varepsilon}{3}$ sugarú környezetét jelöli, akkor $B = B' \cap E$ egy H_i-nek része, továbbá nyilván $A' \subset \overline{B}$, úgyhogy

$$A' \subset \overline{H_i} \subset \overline{H_i'} \subset G_i'.$$

Eszerint ekkor E' erősen teljes.

CSÁSZÁR ÁKOS

MEGJEGYZÉS. Erősen teljes metrikus térre példa nyilván bármely kompakt metrikus tér, mert ebben minden sorozatnak van torlódási pontja. Nem kompakt, de erősen teljes metrikus térre példát szolgáltat a számegyenes vagy bármely euklideszi tér, hiszen ebben egy Corson-féle sorozatnak van korlátos részsorozata, s akkor a Bolzano—Weierstrass-féle tétel szerint torlódási pontja is.

Nehezebb példát mutatni teljes, de nem erősen teljes metrikus térre. Megmutatjuk, hogy ilyen az $I = [0, \pi]$ intervallumon folytonos valós függvények E tere a szokásos

$$\varrho(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)| : t \in I\}$$

távolsággal ellátva. Ez közismerten teljes. Megmutatjuk, hogy nem erősen teljes.

Valóban, legyen $f_n(t) = \sin 2^n t$,

$$g_{nm} = f_n + \frac{1}{n+1} f_m,$$

és (h_k) az összes g_{nm} függvényeknek egy sorozatba rendezése. Minthogy $n_1 \neq n_2$ esetén nyilván

$$1 \leqq \varrho(f_{n_1}, f_{n_2}) \leqq 2,$$

azért $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$ esetén a g_{nm} függvények rögzített n mellett ε-nál kisebb átmérőjű részsorozatot alkotnak, úgyhogy (h_k) Corson-féle. Viszont ha $f \in E$ és $\varrho(f, f_n) \geqq \frac{1}{2}$, $n \geqq 2$, akkor $\varrho(f, g_{nm}) \geqq \frac{1}{6}$ minden m-re, és adott f mellett $\varrho(f, f_n) < \frac{1}{2}$ legfeljebb egy $n = n_0$ indexre teljesülhet, továbbá f-nek elég kis sugarú környezetében a g_{1m}, ill. $g_{n_0 m}$ függvények közül legfeljebb egy-egy található. Így f nem lehet torlódási pontja a (h_k) sorozatnak.

CSÁSZÁR ÁKOS

A 183. feladat megoldását beküldte még SZÁZ GÉZA.

194. feladat. Legyen $a_i > 0$, $\sum_1^n a_i = 1$, $0 < b_1 \leqq \ldots \leqq b_n$, és

$$f(s) = \left(\sum_1^n a_i b_i^s \right)^{1/s}.$$

Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{s \to +\infty} f'(s) = 0.$$

(DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR)

Megoldás. Az

$$f(s)^s = g(s)$$

jelöléssel egyszerű számítás mutatja, hogy

$$f'(s) = f(s) \left[-\frac{1}{s^2} \log g(s) + \frac{1}{s} \frac{1}{g(s)} \sum_1^n a_i b_i^s \log b_i \right].$$

Minthogy nyilván

$$b_1 \leqq f(s) \leqq b_n,$$

tehát

$$b_1^s \leqq g(s) \leqq b_n^s,$$

azért

$$\frac{\log b_1}{s} \leqq \frac{\log g(s)}{s^2} \leqq \frac{\log b_n}{s}.$$

Továbbá a

$$g(s) = \sum_1^n a_i b_i^s$$

összefüggésre tekintettel súlyozott számtani középként

$$\log b_1 \leqq \frac{1}{g(s)} \sum_1^n a_i b_i^s \log b_i \leqq \log b_n,$$

és így a szögletes zárójelben a második tag is 0-hoz tart.

SZÁZ GÉZA

MEGJEGYZÉSEK. 1. A fenti számításból az is látszik, hogy a feladat állításán túl

$$|f'(s)| \leqq \frac{C}{s}$$

alkalmas C állandóval.

Szerk.

2. Fent láttuk, hogy $f(s)$ korlátos. Ennél is több igaz:

$$\lim_{s \to +\infty} f(s) = b_n.$$

Valóban, a

$$q = \sum_{b_i = b_n} a_i$$

jelölést bevezetve $0 < q \leqq 1$, és nyilván

$$q b_n^s \leqq g(s) \leqq b_n^s,$$

tehát

$$q^{1/s} b_n \leqq f(s) \leqq b_n.$$

Szerk.

A 184. feladat megoldását beküldte még CSÁSZÁR ÁKOS.

185. feladat. Legyen $\mathfrak{C}$ az n-dimenziós térben a $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ halmazok rendszere, ahol $a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, és $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ az olyan $(x_1, \ldots, x_n)$ pontokból áll, amelyekre $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ minden i-re, s legfeljebb egy i-re áll (az egyik oldalon) egyenlőség. Bizonyítandó, hogy $\mathfrak{C}$ tetszőleges elemeinek egyesítése előállítható közülük megszámlálható soknak egyesítéseként is.

(GEHÉR LÁSZLÓ)

Megoldás. $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ egyesítése $2n$ olyan Descartes-szorzatnak, amelyek mindegyikének $n-1$ tényezője az $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ nyílt intervallumok közül való, az n-edik pedig a kihagyott intervallum egyik végpontjának hozzávételével. Így elég belátni, hogy a $\mathfrak{C}$-ről állított tulajdonság teljesül az említett Descartes-féle szorzatok rendszerére, illetőleg az egy meghatározott típushoz tartozó Descartes-szorzatokéra. Tekintsük például az

$$(1) \qquad [a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

alakú halmazok rendszerét, s erre igazoljuk a mondott tulajdonságot.

Minthogy két (1) alakú halmaz metszete vagy üres, vagy ugyancsak (1) alakú, azért e halmazok egy topológia bázisát alkotják. Ez a topológia szorzata az $(n-1)$-dimenziós euklideszi topológiának és a számegyenes ama topológiájának, amelynek bázisát az $[a, b)$ alakú félig zárt intervallumok alkotják. Elég tehát azt tudni, hogy e szorzattér minden altere Lindelöf-féle, hiszen akkor bázishalmazok tetszőleges egyesítése közülük megszámlálható soknak egyesítése lesz.

Minthogy a számegyenesen az $[a, b)$ alakú intervallumok alkotta bázis közismerten olyan topológiát szolgáltat, hogy rá nézve minden altér Lindelöf-féle (l. pl. CSÁSZÁR ÁKOS: Bevezetés az általános topológiába (Budapest, 1970), (2.4.21) tétel), azért végül is elég annyit belátni, hogy ha egy E_1 topologikus tér minden altere Lindelöf-féle, E_2 pedig megszámlálható bázisú topologikus tér, akkor az $E_1 \times E_2$ szorzattér minden altere is Lindelöf-féle.

Ennek belátására legyenek a G_i $(i \in I)$ halmazok nyíltak $E_1 \times E_2$-ben. Meg kell mutatnunk, hogy a G_i halmazok egyesítése közülük megszámlálható soknak is

egyesítése. (Egy A altér nyílt befedése $G_i \cap A$ alakú halmazokkal történik.) Feltehetjük, hogy

$$G_i = U_i \times V_i,$$

ahol U_i nyílt halmaz E_1-ben, V_i pedig E_2-nek egy megszámlálható bázisából van véve, hiszen a szorzattér minden nyílt halmaza ilyen alakú halmazoknak egyesítése. Mármost azokat a G_i-ket tekintve, amelyekre $V_i = V$ rögzített, a megfelelő U_i-k egyesítése közülük már megszámlálható soknak egyesítéseként is írható, és így a kérdéses G_i-k egyesítése is megszámlálható sok $U_i \times V$ alakú halmaznak, tehát megszámlálható sok G_i-nek egyesítése. Minthogy V is megszámlálható sok halmazon fut át, az állítást nyerjük.

CSÁSZÁR ÁKOS

PROBLÈMES PROPOSÉS

192. Désignons par $g(m)$ le nombre des facteurs premiers distincts du nombre naturel m, et par $f(k)$ le plus petit nombre tel que $n \geqq f(k)$ entraîne

$$g\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k.$$

Démontrer

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} f(k)^{1/k} < e.$$

P. ERDŐS et E. SZEMERÉDI

193. Soient $r > 0$, A et B des parties non vides de l'intervalle $[-r, r]$, désignons par A_h et par B_h, pour $h > 0$, le voisinage fermé de rayon h de A et de B respectivement (c'est-à-dire l'ensemble des x tels que la borne inférieure des distances de x aux points de A ou B est $\leqq h$), soit $d(A, B)$ la distance de Hausdorff de A et B (c'est-à-dire la borne inférieure des nombres h tels que $A \subset B_h$ et $B \subset A_h$), désignons enfin par λ la mesure de Lebesgue. Calculer, pour r et h donnés, la borne supérieure de la valeur

$$\frac{|\lambda(A_h) - \lambda(B_h)|}{d(A, B)}$$

lorsque A et B parcourent les couples des parties de l'intervalle $[-r, r]$ tels que $d(A, B) \neq 0$.

I. GEHÉR

194. Construire une fonction réelle de deux variables qui soit deux fois dérivable sur tout le plan, possède un maximum ou minimum au sens strict dans un point du plan, ses dérivées partielles ne s'annulant simultanément dans aucun autre point et dont les valeurs parcourent tous les nombres réels.

Á. CSÁSZÁR

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS AZ 1973. ÉVI SZELE TIBOR EMLÉKÉREM ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1973. évi SZELE TIBOR EMLÉKÉREM odaítélésére az alábbi bizottságot küldte ki: KALMÁR LÁSZLÓ elnök, RÉVÉSZ PÁL titkár, CSÁSZÁR ÁKOS, ERDŐS PÁL, GALLAI TIBOR, HAJNAL ANDRÁS, GYIRES BÉLA, KERTÉSZ ANDOR, KIS OTTÓ, KOVÁCS ISTVÁN, SURÁNYI JÁNOS és TANDORI KÁROLY. A bizottság 1973. április 24-én tartotta ülését. A beérkezett javaslatokat megvitatta és az alábbi határozatot hozta:

A SZELE TIBOR EMLÉKÉREM odaítélésére kiküldött bizottság az 1973. évi SZELE TIBOR EMLÉKÉRMET és a vele járó 7000, — Ft összeget RÉDEI LÁSZLÓ akadémikusnak ítélte oda.

RÉDEI LÁSZLÓ rendkívül aktív és produktív matematikus, aki világviszonylatban is az algebra legkiválóbb művelői közé tartozik. Első dolgozata 1921-ben jelent meg, s azóta több mint 150 jelentős tudományos dolgozatot és 9 nagysikerű könyvet publikált. Bár az algebrán kívül más matematikai diszciplinákkal is foglalkozott (mint pl. geometria, gráfelmélet), tudományos vizsgálatainak kiemelkedőek félcsoport-, csoport-, gyűrű- és testelméleti, valamint algebrai számelméleti eredményei. Kutatómunkáját a tudomány iránti alázat és olthatatlan lelkesedés jellemzi. Kitartásával, szívós munkájával példát mutathat minden matematikusnak. Számos esetben reménytelennek látszó nehéz problémákhoz nyúl, vállalja a teljes sikertelenség kockázatát is, s önfeláldozó munkáját gyakran csak évek múltán koronázza siker. Ilyen vonatkozásban talán legtipikusabb a hézagos polinomok elméletében elért eredménye, melyet egy monográfiában is összefoglalt.

Több mint három évtizedes egyetemi ill. kutatóintézeti munkássága során nagy hatással volt tanítványaira. Egyetemi előadásai, amelyekben nem a közölt anyag terjedelmére, hanem sokkal inkább annak kellő megvilágítására helyezte a súlyt, igen népszerűek voltak. Kitűnő tudományos légkört tudott maga körül teremteni. Problémáit önzetlenül megosztotta tanítványaival, s minden érdekelte, ami környezetében a matematikával kapcsolatban történt. Figyelemmel kísérte és támogatta tanítványait első tudományos szárnypróbálgatásukban, s nem egyszer segített nekik dolgozataik megfogalmazásában is. A RÉDEI által kialakított mester—tanítvány viszonyra az a legjellemzőbb, hogy ebben a kapcsolatban a mester is tanítványnak érezte magát, s tanítványait mindig munkatársaknak is tekintette.

A RÉDEIt körülvevő nagyszerű tudományos atmoszféra áldásait élvezte RÉDEI legkiválóbb tanítványa, SZELE TIBOR is, aki mindig nagy hálával emlékezett azokra a segítségekre, amelyeket RÉDEItől kapott. SZELE RÉDEItől kapta disszertációs témáját a gráfelmélet köréből, s e témában rövid időn belül a várakozáson messze túlmenő eredményeket ért el. RÉDEI irányításával és SZELE aktív közreműködésével hamarosan létre jött a „magyar algebrai iskola", amelynek eredményeire az egész világon felfigyeltek.

RÉDEI akadémikus a tanítványok egész sorát nevelte. Közvetlen tanítványai közül hadd említsük meg SZELE TIBOR mellett CSÁKÁNY BÉLÁT, FÁRY ISTVÁNT, PEÁK ISTVÁNT, POLLÁK GYÖRGYÖT, STEINFELD OTTÓT, SZÁSZ GÁBORT, SZENDREI JÁNOST és WIEGANDT RICHÁRDOT. Ha nem is közvetlen tanítványai, de RÉDEI tanítványainak vallják magukat KERTÉSZ ANDOR, SZÁSZ FERENC, SZÉP JENŐ is, akik az elmúlt két évtizedben a RÉDEIvel való szoros szakmai és baráti együttműködés során sokat tanultak tőle és sok ösztönzést nyertek kutatómunkájukhoz. RÉDEI megnevezett tanítványai közül öten a tudományok doktorai (egyik egy külföldi akadémia tagja) hatan a tudományok kandidátusai, egy pedig külföldön élő professzor.

RÉDEI barátságos, közvetlen, szeretetreméltó egyénisége lehetővé tette, hogy tanítványai mindenkor bizalommal forduljanak hozzá kérdéseikkel, kéréseikkel, s ő a segítséget sohasem tagadta meg. Szívesen dolgozik tanítványaival együtt. Ezt számos, tanítványaival közösen írt cikk is bizonyítja. Kitűnően ért ahhoz, hogy tanítványait kutatómunkájukban lelkesedésével buzdítsa.

A SZELE TIBOR EMLÉKÉRMET odaítélő bizottság az egész magyar matematikai társadalom nevében elismerését és háláját akarja kifejezni döntésével RÉDEI LÁSZLÓ akadémikusnak azért a kiváló tudományos és tudományos utánpótlást nevelő munkájáért, melyet a magyar algebrai iskola megteremtéséért és felvirágoztatásáért évtizedeken át kifejtett.

JELENTÉS AZ 1973. ÉVI GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1973. évi GRÜNWALD-DÍJ odaítélésére: TURÁN PÁL elnök, CSÁSZÁR ÁKOS, FEJES TÓTH LÁSZLÓ, HAJNAL ANDRÁS, RAPCSÁK ANDRÁS, RÉVÉSZ PÁL, SCHMIDT TAMÁS, SZÁSZ DOMOKOS, TANDORI KÁROLY.

A bizottság 1973. november 13-án és 27-én ülésezett. Megtárgyalta a beérkezett javaslatokat és azt is megvizsgálta, hogy az előzetesen javasolt fiatal matematikusokon kívül nincsenek-e olyanok, akik a díjra érdemesek és figyelembe vette az így felmerült neveket is.

A bizottság abban az örömtelien nehéz helyzetben volt, hogy a javasoltak igen magas színvonalat képviseltek. Végül az összes javaslat alapos mérlegelése után a bizottság az alábbi döntést hozta:

A GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ I. fokozatával tüntette ki és 3500,— Ft díjban részesíti:
BERKES ISTVÁN tud. segédmunkatárs
MTA Matematikai Kutató Intézet
GERLITS JÁNOS tud. munkatárs
MTA Matematikai Kutató Intézet
PETRUSKA GYÖRGY adjunktus
ELTE TTK Analízis I. Tanszék

A GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ II. fokozatával tüntette ki és 2500,— Ft díjban részesíti:
DEMETROVICS JÁNOS aspiráns
Lomonoszov Egyetem, Moszkva
GÁCS PÉTER tud. segédmunkatárs
MTA Matematikai Kutató Intézet
KÖRNER JÁNOS tud. segédmunkatárs
MTA Matematikai Kutató Intézet
LACZKOVICH MIKLÓS tanársegéd
ELTE TTK Analízis I. Tanszék

INDOKOLÁS

BERKES ISTVÁN kutatásainak tárgya az iterált logaritmus tétel és a hézagos ortogonális sorok statisztikus vizsgálata.

[1] dolgozatában az iterált logaritmus tétel Strassen-féle funkcionális változatával foglalkozik, és azt bizonyítja be, hogy ha egy véletlen töröttvonal sorozat eloszlása bizonyos értelemben a Wiener-folyamathoz konvergál, akkor e sorozatra érvényes a funkcionális iterált logaritmus tétel. E tétel speciális esetként tartalmazza az e területen korábban bebizonyított legtöbb lényeges eredményt és számos további eredmény is kiadódik belole.

Ilyen tételeket tartalmaz [2] doktori disszertációja is, melyben Strassen tételét számos függő valószínűségi változó osztályra, például martingálokra, keverő sorozatokra, Markov-láncokra stb. terjeszti ki.

[3] dolgozatában azt bizonyítja, hogy a Walsh-rendszer bármely, az ún. Erdős-féle hézagfeltételnek eleget tevő részsorozatához konstruálható olyan Wiener-folyamat, amely e sorozat részletösszegeit igen jól approximálja. E tétel következményeként számos határeloszlástételt bizonyít be Walsh-sorokra. Analóg eredményeket tartalmaz (Hadamard-) hézagos trigonometrikus sorokra vonatkozó [4] dolgozata. [5] dolgozatában a funkcionális iterált logaritmus tételt bizonyítja be multiplikatív rendszerekre, RÉVÉSZ és mások eredményeinek általánosításaképpen. [6]-ban pedig bebizonyítja, hogy az iterált logaritmus tétel végtelen szórású valószínűségi változók esetében is tovább nem élesíthető állítás.

A BERKES által vizsgált problémakör már fogalmilag is igen nehéz. Tanulmányozása a valószínűségszámítás legmodernebb fejezeteinek beható ismeretét tételezi fel. Így már az is jelentős érdemnek tekinthető, ha egy fiatal matemat.kus, lényegében önállóan eljut addig, hogy a szóbanforgó elméletet megértse és megtalálja e további problémákat. BERKES ezen túlmenően lényeges új eredményeket ért el.

BERKES ISTVÁN DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] The functional law of the iterated logarithm for dependent random variables. Zeitschrift für Warscheinlichkeitstheorie **26** (1973), 245—258.
[2] Strassen tétele függő valószínűségi változókra és alkalmazásai. Doktori disszertáció. 1973.
[3] Approximation of lacunary Walsh-series with Brownian motion. Studia Sci. Math. Hung., sajtó alatt.

[4] Functional limit theorems for lacunary trigonometric and Walsh series. Studia Sci. Math. Hung., sajtó alatt.
[5] On Strassen's version of the loglog law for multiplicative systems. Studia Sci. Math. Hung., sajtó alatt.
[6] A remark to the law of the iterated logarithm. Studia Sci. Math. Hung. 7 (1972), 189—197.

GERLITS JÁNOSnak eddig 3 dolgozata jelent meg nyomtatásban és további 3 van sajtó alatt. (a [2] dolgozat társszerzőkkel készült, a megjelent [3] dolgozat pedig a sajtó alatt álló [4] dolgozat eredményeinek előzetes közleménye).

Az [1] dolgozat az iránydimenzió DEÁK ERVINtől bevezetett fogalmával foglalkozik és tisztáz néhány, részben DEÁK által felvetett kérdést. Lényeges eredményei a következők: Ha a T_0-terek egy nem-megszámlálható halmazának mindegyik eleme legalább két pontból áll, akkor szorzatuk iránydimenziója egyenlő a tényezők iránydimenzióinak összegével. Ha egy X metrizálható térre $\dim X=0$, akkor $\mathrm{Dim}\, X\leqq 1$. Ha X erősen metrizálható és $\dim X$, $\mathrm{Dim}\, X$ közül az egyik véges, akkor

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X \leqq 2\dim X+2.$$

Ha egy metrikus tér súlya $\leqq \aleph_1$, akkor iránydimenziója $\leqq \aleph_0$. Ha X ívszerűen összefüggő metrikus tér, akkor $\mathrm{Dim}\, X$ egyenlő a tér súlyával, ha az utóbbi $>\aleph_1$, és $=\aleph_0$, ha a tér súlya $\aleph_1$. (Itt $\dim X$ a befedési dimenzió, $\mathrm{Dim}\, X$ az iránydimenzió, és egy tér erősen metrizálható, ha T_3-tér és van benne olyan bázis, amely megszámlálható sok csillag-véges befedés egyesítése.)

A [2] dolgozatban egy Tyihonov-tér maradékaival foglalkoznak a szerzők, ahol a tér maradékán a tér komplementumát értik valamely Hausdorff-kompaktifikációban. A fő eredmény annak igazolása, hogy mindazon tereknek közösek a maradékaik, amelyek nemkompakt, lokálisan kompakt, összefüggő, lokálisan összefüggő metrikus terek és nincs kétértelmű maradékuk. A számos érdekes közbenső eredmény között szerepel a felsorolt tulajdonságokkal rendelkező tereknek egy érdekes jellemzése is.

A [3] és [4] dolgozat egy S. MRÓWKA által bevezetett térosztályt vizsgál és általánosít. Ha m végtelen számosság, ill. ξ egy végtelen rendszám, nevezzük az X Hausdorff-teret m-adikusnak ill. ξ-adikusnak, ha folytonos képe az A_m tér ill. a $W^*(\xi)$ tér valamely hatványának; itt A_m az m számosságú diszkrét tér egypontos kompaktifikációja, $W^*(\xi)$ pedig a ξ-nél nem nagyobb rendszámok halmaza a rendezéstopológiával. Mrówka egy problémájának megoldásaként GERLITS bebizonyítja hogy bármely ξ-adikus tér súlya és karaktere megegyezik. A bizonyítás fő segédeszköze a $B(n)$ tulajdonság bevezetése; adott n számosságra egy X teret $B(n)$ tulajdonságúnak mond, ha nemüres nyílt halmazok bármely n számosságú rendszeréhez van olyan n számosságú részrendszer és olyan $p\in X$ pont, hogy p minden környezete az adott részrendszernek csak n-nél kevesebb elemét nem metszi. Megmutatja, hogy minden ξ-adikus tér $B(n)$ tulajdonságú minden n számosságra, és ebből levezeti R. ENGELKING és R. MARTY több ismert eredményét, valamint ENGELKING és A. PELCZYNSKI két tételének általánosítását.

GERLITS dolgozatai valamennyien nehéz kérdéseket tárgyalnak mélyenfekvő módszerekkel. Nemcsak a szerző széleskörű irodalmi tájékozottsága derül ki belőlük, hanem az is, hogy rengeteg ötlettel alkalmaz — ha kell, egyszerű fogásokat, ha kell bonyolult konstrukciókat. Nem ontja a publikációkat; erősen, talán túlságosan is fejlett önkritikával csak a valóban nehéz eredményeket közli. Kisebb ötleteit feladatok formájában értékesíti (van köztük olyan is, amelyet később neves külföldi szerző nyomtatásban közölt).

GERLITS JÁNOS DOLGOZATAI

[1] On some problems concerning directional dimensions, Studia Sci. Math. Hung. 6 (1971), 409—417.
[2] A class of spaces with identical remainders (G. R. BLAKLEY-vel és K. D. MAGILLel közösen), Studia Sci. Math. Hung. 6 (1971), 117—122.
[3] On m-adic spaces, Proc. Third Prague Topol. Symp. 1971, 147—148.
[4] On a problem of S. Mrówka, Period. Math. Hung., sajtó alatt.
[5] On G p-spaces, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, sajtó alatt.
[6] On the depth of topological spaces, Proc. Amer. Math. Soc., sajtó alatt.

PETRUSKA GYÖRGYnek a GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ II. fokozatának elnyerése (1970) óta három dolgozata jelent meg és további három van sajtó alatt, részben társszerzőkkel.

Az [1] dolgozat a szerzőnek egy korábbi, HAJNAL ANDRÁSsal közös cikkéhez kapcsolódik. E régebbi cikkben a szerzők érdekes eljárást dolgoztak ki, amellyel sikerült a Darboux-féle tulajdonságú függvényekre lokális jellemzést adniuk. A jelen cikk ugyanezeket a módszereket úgy fejleszti tovább, hogy velük sikerül előállítania a kvázi-Darboux-féle függvényeknek egy A. M. BRUCKNERtől és J. G. CEDERtől származó jellemzését (egy függvény kvázi-Darboux-féle, ha megszámlálható sok hely kivételével megegyezik egyDarboux-féle függvénnyel).

A [3] cikkben a szerzők egy ERDŐS PÁL által felvetett kombinatorikai problémára adnak részleges választ. A következő kérdést vizsgálják. Legyen H egy $n+m$ elemű halmaz, $N_1, \ldots, N_k$ pedig H-nak n elemű részhalmazai. Tegyük fel, hogy az N_i halmazok metszete üres, és hogy H minden $n+1$ elemű részhalmazának van olyan három elemű részhalmaza, amelyet egyetlen N_i sem fed le. A kérdés az, hogy adott n és k mellett legalább mekkorának kell az m számnak lenni ahhoz, hogy ilyen H és $N_1, \ldots, N_k$ halmazok létezzenek. A szerzők az ilyen m-ekre alsó becslést tudnak adni. A három elemű részhalmaz helyett két eleműt vizsgáló analóg kérdést korábban több szerző is tárgyalta (J. H. FOLKMAN, HAJNAL A., ERDŐS P., SURÁNYI L., E. C. MILNER és N. SAUER).

A [4] dolgozattal egy hosszabb sorozat veszi kezdetét, amely az approximatívan folytonos, első Baire-osztályba tartozó, valamint deriváltként előállítható függvények számos tulajdonságát vizsgálja és ér el velük kapcsolatban igen érdekes, az irodalomban találhatóknál sokszor jóval többet mondó eredményeket. E dolgozatok java része a szerzőnek és LACZKOVICH MIKLÓSnak közös munkája, közös mindenekelőtt egy igen termékenynek bizonyuló, sokféle alkalmazást lehetővé tevő módszernek a kidolgozása.

Maga a [4] dolgozat D. PREISS egy eredményét élesíti; az eredeti tétel azt mondja ki, hogy minden második Baire-osztályhoz tartozó függvény deriváltfüggvények sorozatának limeszeként állítható elő. A szerzők megmutatják, hogy lehet deriváltfüggvény helyett korlátos, approximatív folytonos függvényt is mondani.

Az [5] dolgozat azt a kérdést vizsgálja, hogy ha adva van egy intervallumban Baire-féle első osztályba tartozó f függvény és H az intervallumnak egy részhalmaza, milyen kikötést kell H-ra tenni ahhoz, hogy f megegyezzék a H halmazon egy az intervallumban approximatívan folytonos függvénnyel, illetőleg egy az intervallumban deriváltként előállítható függvénnyel. Megmutatják, hogy mindkét esetben az a szükséges és elegendő feltétel, hogy H Lebesgue-mértéke nulla legyen. Ez az approximatív folytonosságra vonatkozó változatban aránylag egyszerű topológiai módszerekkel kiadódik, a deriváltfüggvény esete viszont a fent említett, a szerzők által sávmódszernek nevezett eljárás felhasználását igényli. A bizonyítás az önmagukban is igen érdekes segédtételek hosszú során át történik. A probléma nehézségét az adja, hogy a deriváltfüggvények osztálya igen nehezen kezelhető, jóval bonyolultabb szerkezetű minden más függvényosztálynál. Ennek tulajdonítható, hogy — amint a szerzők rámutatnak — előfordulhat, hogy egy korlátos függvényt a H halmazról ki lehet ugyan deriváltfüggvénnyé terjeszteni, de korlátos deriváltfüggvénnyé nem lehet; az általában szokásos kiterjesztési tételek esetében ilyesmi nem fordul elő.

A [6] dolgozat azt a kérdést veti fel, hogy milyen tulajdonságú A és B halmazokat lehet deriváltfüggvénnyel szétválasztani (tehát olyan deriváltfüggvényt megadni, amely az egyik halmazon 0, a másikon 1 értéket vesz fel). Itt is a sávmódszer alkalmazása vezet a megoldáshoz, és itt is az a helyzet, hogy a szétválasztás esetleg csak nemkorlátos deriváltfüggvénnyel hajtható végre.

PETRUSKA GYÖRGYnek e módszer további alkalmazásaként még néhány publikációja van előkészületben. Az általa vizsgált problémák nehezek és mélyek, az alkalmazott módszerek sok szellemes gondolatot koncentrálnak.

PETRUSKA GYÖRGY DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE (1970 ÓTA)

[1] On quasi-Darboux functions, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **23** (1972), 127—136.

[2] A kalapácsos daráló gépüzemtani és elméleti vizsgálata (BÖLÖNI ISTVÁNnal és TUSNÁDY GÁBORral), Akadémiai Kiadó, 1973.

[3] On a combinatorial problem, I. (SZEMERÉDY ENDRÉvel), Studia Math. Acad. Sci. Hung., **7** (1972), 366—376.

[4] A theorem on approximately continuous functions (LACZKOVICH MIKLÓssal), Acta Math. Acad. Sci. Hung., **24** (1973), sajtó alatt.

[5] Baire 1 functions, approximately continuous functions and derivatives (LACZKOVICH MIKLÓssal), Acta Math. Acad. Sci. Hung., **25** (1974), sajtó alatt.

[6] Separation and approximation by derivatives, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **25** (1974), sajtó alatt.

DEMETROVICS JÁNOSnak, aki jelenleg a moszkvai Lomonoszov Egyetemen Sz. V. JABLONSZKI professzor aspiránsa, 1 dolgozata jelent meg, további 5 van közlésre elfogadva, továbbá elkészült kandidátusi értekezése, melynek tézisei [3] szám alatt szerepelnek a csatolt irodalomjegyzékben. Így összesen 7 elbírálható közleménye van. E közlemények mind a k-értékű logikák és a határértékű logikák körében vizsgált problémákkal foglalkoznak.

A k-értékű logika definíció szerint az összes olyan véges változós függvények halmaza, melyek k-ból k-ba mennek.

Az ω-ból ω-ba menő véges változós függvények egy olyan halmazát, mely megszámlálható, szuperpozícióval szemben zárt és amelybe minden k-értékű logika homomorf módon beágyazható (itt a művelet, melyet a homomorfizmus megőriz, a szuperpozíció) határértékű logikának nevezik.

E függvényhalmazok struktúrájának vizsgálata erősen algebrai jellegű, ugyanakkor számos kombinatorikus ötletet is kíván. Az első klasszikus eredmény Posttól származik, aki a 2-értékű logika struktúráját teljesen leírta.

A kutatás központjában az ún. majdnem teljes osztályok vizsgálata, a bázisok vizsgálata és a különböző nem izomorf, majdnem teljes rendszerek számosságának vizsgálata állt. Demetrovics néhány klasszikus problémával kapcsolatban, több ízben messzemenően általánosította Gavrilov és Jablonszki korábbi eredményeit.

Egy igen érdekes és szép eredménye a következő: Minden k egészhez kontinuum sok páronként nem izomorf k-bázisú határértékű logika létezik, ugyanez az eredmény érvényes $\aleph_0$-bázisú és bázissal nem rendelkező határértékű logikákra is. Ez korábban csak $k \geqq 3$ volt ismeretes és bizonyítása messzemenően egyszerűbb, mint Gavrilov régi bizonyítása, mely csak $k \geqq 3$-ra volt jó. Külön érdeme, hogy egy meglehetősen általános módszert dolgozott ki, mellyel sok esetben meg tudja mutatni, hogy ha valamilyen fajta határértékű logika egyáltalán létezik, akkor kontinuum sok páronként nem izomorf ilyen van.

A bizonyítások szellemesek és jó technikai felkészültséget igényelnek. Demetrovics alaposan bedolgozta magát egy olyan nálunk alig ismert tárgykörbe, mellyel világszerte többen foglalkoznak és számos érdekes új eredményt ért el.

DEMETROVICS JÁNOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Határértékű logikák majdnem teljes osztályai halmazainak számosságával, Acta Cybernetika I. (1972) 233—239.

[2] Páronként nem izomorf határértékű logikák számából, Diszkrétnij Analiz, Novoszibirszk № 24. (1973).

[3] Határértékű logikák teljességének kérdései. Kandidátusi értekezés tézisei. (9. oldal).

[4] Határértékű logikák összehasonlítása, végesértékű logikák beágyazásai szerint. Diszkrétnij Analiz, Novoszibirszk (1973) sajtó alatt (12. oldal).

[5] Határértékű logikák homomorfizmus struktúrájának néhány általános tulajdonságával. Kibernetika, Kiev, sajtó alatt (29. oldal).

[6] A minimális határértékű logika vizsgálata, Diszkrétnij Analiz, sajtó alatt (22. oldal).

[7] Határértékű logikák néhány homomorfizmusára, Jénai Konferencia közleményei, sajtó alatt (4. oldal).

Gács Péternek eddig 2 dolgozata és egy népszerűsítő cikke jelent meg nyomtatásban, 3 dolgozata van sajtó alatt, és van egy publikálatlan kézirata.

[1] dolgozatában a Hausdorff dimenzió fogalmából kiindulva definiálja valószínűségeloszlások dimenzióját. Ezt jellemzi, mint egy dimenziósűrűség függvény integrálját és foglalkozik a Hausdorff és Rényi dimenzió kapcsolatával.

A [2] dolgozatban Fejes Tóth László kérdését vizsgálja meg valamivel általánosabban arra vonatkozólag, hogy milyen n-ekre lehet a síkon egybevágó halmazokat elhelyezni úgy, hogy mindegyiknek n szomszédja van és több halmaz már nem is férne köréjük.

Körner Jánossal közös [5] dolgozatában Csiszár Imre kérdésére válaszolva bebizonyítják, hogy két emlékezetnélküli forrásban tartalmazott közös információt a kódolásnál lényegében nem lehet kihasználni. Eredményüknek máris számottevő nemzetközi visszhangja van.

Szász Domokossal közös dolgozatában [7] Cox egy problémájára válaszolva azzal foglalkozik, hogy ha egy euklideszi tér rácspontjait egymástól függetlenül azonos eloszlással elmozdítjuk, akkor egy nagy konvex halmazba eső pontok számának szórásnégyzete a felületnek közel hányszorosa lesz.

Az utóbbi 3 évben fő érdeklődési területe mindinkább a sorozatok véletlenségének és bonyolultságának definiálásával és jellemzésével foglalkozó, Kolmogorov által kezdeményezett elmélet. [3] dolgozatában Bernoulli-sorozatok és Markov-láncok esetén a Martin—Löf-féle véletlen sorozatokat jellemzi Kolmogorov-féle bonyolultságok növekedési nagyságpontjával. [6] dolgozatában a Kolmogorov bonyolultság Levin által adott módosításával foglalkozik. Azt vizsgálja, hogy a Levin-féle bonyolultságra az additivitás milyen mértékben érvényes. Dolgozatának gondolatát Levin már felhasználta újabb érdekes eredmény eléréséhez. [4] dolgozata a témáról igen szerencsés kézzel írt népszerűsítő munka.

Gács Péter ötletgazdag, komoly bizonyító erővel rendelkező matematikus. Ez már [1] [2] [3] és [7] dolgozataiból is kitűnik, ahol neves matematikusok által felvetett problémákat old meg. Ugyanakkor a problémákat, a szereplő fogalmakat szellemesen tovább módosítja, mélyíti. Rendkívül igényes és erősen önkritikus. A véletlenség fogalmával kapcsolatos nehéz és mély kutatásokban — bár ezekkel csak nemrég foglalkozik — máris jelentős eredményeket ért el.

GÁCS PÉTER DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] Hausdorff-dimension and probability-distributions, Periodica Math. Hung. **3** (1973) 59—71.
[2] Packing of convex sets with a great number of neighbours. Acta Math. Ac. Sci. Hung. **23** (1972), 383—388.
[3] Complexity criteria for Bernoulli and finite Markov randomness (publikálatlan).
[4] A véletlenség fogalmáról, Magyar Tudomány, 1973. №. 3. 152—159.
[5] Common information is much less than mutual information, Problems of Control and Information Theory (sajtó alatt, KÖRNER JÁNOSsal).
[6] Algoritmikus információ szimmetriájáról (oroszul), Dokladü AN SZSZSZR (sajtó alatt).
[7] On a problem of Cox. Annals of Probability (sajtó alatt, SZÁSZ DOMOKOSsal).

KÖRNER JÁNOS kutatási területe az információelmélet, ezen belül elsősorban a kombinatorikus módszerekkel megközelíthető problémák érdeklik. Az ezekről kialakított szemlélete mély és sok szempontból újszerű. Eredeti problémafelvetései a témakör alapvető kérdéseihez kapcsolódnak, melyek az utóbbi években az USA-ban is az érdeklődés homlokterébe kerültek. Munkáját az eredetiség mellett elsősorban jó kombinatorikus technika jellemzi.

Eddig 7 dolgozata jelent meg, illetve van sajtó alatt, [1] dolgozatában a feltételes entrópiát kódolási feladaton keresztül jellemzi. Az itt használt technikát — a tipikus sorozatok módszerét — [2]-ben újszerű és jóval nehezebb feladatra alkalmazza: olyan kódolási problémát vet fel és old meg, ahol bizonyos betűk összecserélése megengedett, egy gráfstruktúra által meghatározott értelemben. Így entrópiafogalmat kap gráfokra, mégpedig kétfélét is. Ezek összefüggését és kódelméleti jelentőségét vizsgálja LONGOval közös, de döntő részben önálló eredményeit tartalmazó cikkében. Végül [7] dolgozata a probléma frappáns lezárását adja: itt teljesen jellemzi azokat a gráfokat, melyek kétféle entrópiája között fennáll a szemléletesen elvárt additivitási összefüggés, s megadja a gráfentrópia kiszámítási módját. A kapott gráfosztály a perfekt gráfok osztályának valódi bővítése, s annál sok szempontból jobb tulajdonságokkal rendelkezik (például a gráfszorzás nem vezet ki belőle).

GÁCS PÉTERrel közös [3] dolgozata azt a meglepő tényt bizonyítja, hogy két emlékezet nélküli forrás közötti korrelációt a kódolásnál (triviális esetektől eltekintve) nem lehet hatékonyan kihasználni. Ennek az eredménynek már eddig is számottevő nemzetközi visszhangja volt.

Egy újszerű kódolási problémát tárgyal [6] dolgozata is. A megoldás egy önmagában is érdekes lemmán múlik, amely BERGER egy alapvető eredményének kiterjesztése egy a korábbi bizonyítási módszerekkel nem kezelhető esetre.

KÖRNER JÁNOS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

[1] A property of conditional entropy. Studia Sci. Math. Hung. **6** (1971) pp. 355—359.
[2] Coding of an information source having ambiguous alphabet and the entropy of graphs. Transactions of the 6th Prague Conference on Information Theory etc. (1971).
[3] Common information is much less than mutual information. Problems of Control and Information Theory. (GÁCS PÉTERrel).
[4] A consistency problem of contitional distributions. International Centre for Mechanical Sciences Int. Rept, № 4 Udine, April 1972.
[5] Two-step encoding of finite sources. IEEE Transactions on Information Theory. (1973 novemberben megjelenik) (G. LONGOval).
[6] Coding of finite sources with sum-type distortion. IEEE Transactions on Information Theory.
[7] On some properties of perfect graphs. Studia Sci. Math. Hung.

LACZKOVICH MIKLÓSnak lényeges szerepe volt annak a „sávmódszer"-nek a kidolgozásában, amellyel a valós függvénytan sok nehéz és szép problémáját sikerült máris megoldani. Idevágó eredményeiről két PETRUSKA GYÖRGY-gyel közös, sajtó alatt levő dolgozatban számolt be (részletes ismertetésüket l. a PETRUSKÁra vonatkozó indoklásban [4] és [5] alatt), és további dolgozatai vannak előkészületben.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT 1973. ÉVI ELŐADÁSAI

Április 12.
NEMETZ TIBOR: Valószínűségszámítási feladatok.
Április 13.
HORVÁTH JÁNOS (Franciaország): Riesz Marcell-féle transzformációkról.
LACZKOVICH MIKLÓS: Két négyzetszám összegeként előállítható számokról. (Diákköri előadás.)
Április 17.

G. GRIMEISEN (NSZK): Continuous relations and lower-semicontinuous set-valued mappings.

Május 4.

Ifjúsági Matematikai Kör ankétja.

Május 31.

A Bolyai János Matematikai Társulat választmányának ülése.

Június 1.

Végzős matematikusok klubdélutánja.

RÉNYI KATÓ EMLÉKDÍJ kiosztása.

Június 5.

RUDOLF LINDL (Ausztria): Algebraisch-zahlentheoretische Eigenschaften der Tschebyscheff-polinome in einer und mehreren Variablen.

Június 8.

KÁROLYHÁZI FRIGYES: Miből van az anyag?

ANDRÁSFAI BÉLA: Gráfelméleti módszerek optimumszámításban.

Június 9.

Az Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyek feladatainak ismertetése (BARÓTI GYÖRGY, ELEKES GYÖRGY, SZALAY MIHÁLY, LUKÁCS OTTÓ, FRANK ANDRÁS).

Július 9.

ANATOLE BECK: The paradox of the hare and the tortoise. On the uniqueness of solutions of differential equations.

Augusztus 31.

SRI GOPAL MOHANTI (Kanada): Néhány kombinatorikus eredmény a fluktuációelméletben.

Szeptember 3.

J. N. SRIVASTAVA: Keresőrendszerek, 0—1 mátrixok és gráfelmélet.

GEORGE R. SELL (USA): Existence of dichotomies for linear differential systems.

Szeptember 14.

E. LUKÁCS (USA): A többdimenziós Poisson-eloszlás jellemzése.

Szeptember 28.

HÓDI ENDRE: Beszámoló a XV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.

Október 2.

HAJNAL ANDRÁS: A halmazelmélet jelenlegi állásáról (összintézeti szeminárium a Matematikai Kutató Intézetben a Bolyai Társulattal közös rendezésben).

Október 11.

Elnökségi ülés.

Október 20.

BABAI LÁSZLÓ: Végtelen játék végtelen automatával.

Október 26.

TURÁN PÁL: Particiókról (Középiskolai délután keretében).

November 13.

Z. GOVINDARAJULU (USA): Locally most powerful rank order tests for the one-way random effects modell.

November 16.

Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

KÜRSCHÁK versenyfeladatok megoldásainak megbeszélése.

November 20.

FREUD GÉZA: Klasszikus analízis és modern matematika (összintézeti szeminárium a Matematikai Kutató Intézetben a Bolyai társulattal közös rendezésben).

November 23.

PRÉKOPA ANDRÁS: A sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémái.

November 24.

PELIKÁN JÓZSEF: Matematikai problémák a nyelvészetben (középiskolai délután keretében).

November 30.

HAMBURG PÉTER (Románia): Új módszerek a komplex függvénytan tanításában.

December 7.

SZELE TIBOR EMLÉKÉREM,

GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ kiosztása.

SCHWEITZER MIKLÓS matematikai emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása.

December 14.

KÜRSCHÁK JÓZSEF matematikai tanulóverseny eredményhirdetése és díjkiosztása.

A. FLORIAN (Ausztria): Reguläre Mosaike und Newtonsche Zahlen.

M. BLEICHER (USA): Filling convex sets with similar sets.

December 20.
BOSKOWITZ ANNA (Ausztrália): Az ausztráliai oktatási és vizsgáztatási rendszerről.
December 21.
AJTAI MIKLÓS: Algoritmusok (az Ifjúsági Matematikai Kör rendezésében).
Szeptember 17.
REINER FRITZSCHE: Kötetlen beszámoló hálóelméleti kutatásairól.
Október 18.
RÉVÉSZ PÁL: Sztohasztikus approximáció.
Október 22.
DARÓCZY ZOLTÁN: A matematika modern irányzatai.
Október 24.
RAPCSÁK ANDRÁS: A geometria filozófiai vonatkozásai.
Október 26.
ROCHLITZ SZILVESZTER: A számítógépek alkalmazási lehetőségei.
November 23.
DOMINIK SYNAL: Központi határeloszlási tételekről abban az esetben, ha véletlen összegekről van szó, és nincs feltétel momentumokra.
V. HOBOT: Sajátértékszámítás az ODRA 1204 számológépen.
November 27.
D. DOROGUROV: A regressziós függvény nemparaméteres becslésének konzisztenciájáról.
December 6.
K. ELSASSER: Kurven—Ordnung und birationale Transformationen über einer endlichen Körper.
W. MOLDENHAUER: Konvergenzbetrachtungen beim Finiten-Element-Verfahren.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT FEJÉR MEGYEI TAGOZATA DUNAÚJVÁROSI CSOPORTJÁNAK 1972—1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

1972-ben
PÁLFY SÁNDOR: Általános iskolai matematikai tanároknak a szakköri munkáról.
PÁLFY SÁNDOR: Általános iskolai tanítók számára szakköri foglalkozás.
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Szakköri foglalkozás általános iskolai tanulóknak.
REMÉNYI GUSZTÁV: Szakköri foglalkozás középiskolai tanulóknak.
KŐVÁRY KÁROLY: Szakköri foglalkozás középiskolai tanulóknak.
PÁLMAY LÓRÁNT: Az egyetemi felvételi tapasztalatairól.
1973-ban:
PÁLFY SÁNDOR: Szakköri foglalkozás általános iskolai tanulóknak.
PÁLMAY LÓRÁNT: Az egyetemi felvételi vizsga tapasztalatairól.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BÁCS-KISKUN MEGYEI CSOPORTJÁNAK 1972—1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

1972-ben:
HADI ISTVÁN: Egyváltozós regresszió.
HADI ISTVÁN: Többszörös lineáris regresszió.
KALMÁR SÁNDOR: Számítógépek az oktatásban.
KOVÁCS IMRE: Számítástechnika az oktatásban.
SÁRKÁNY ERNŐ: A matematikatagozatos osztályok tanításának kérdései.
1973-ban:
KALMÁR SÁNDOR: Sztohasztikus folyamatok I, II, III.
HADI ISTVÁN: A dinamikus programozásról.
HADI ISTVÁN: A körutazási probléma.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT DEBRECENI TAGOZATÁNAK 1972—1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

1972-ben:
Január 20.
SZÉNÁSSY BARNA: Kepler matematikai tevékenysége.
Február 9.
SZÉNÁSSY BARNA: Kepler és a magyar matematika.
Március 2.

Szénássy Barna: A két Bolyai a középiskolában.

Március 14.

P. L. Szimokony: Ismertető jellegű előadás a végtelen kicsiny deformációjának elméletéről.

Március 27.

P. L. Szimokony: Felületek infinitézimális deformációi.

Március 30.

Máthé Attila: Nagy számosságok és a Boole-értékű modellek. Előadás a Schweitzer-verseny feladatairól.

Április 10.

Fejes Tóth László: Elhelyezkedések és fedések a síkban.

Április 20.

Szénássy Barna: A két Bolyai és Gauss.

Május 11.

Szénássy Barna: Bolyai és Gauss.

Május 18.

Szénássy—Sarlai: Bolyai estéje.

Május 26.

Turán Pál: Diofantikus approximációktól differenciálegyenletekig.

Szénássy—Sarlai: Bolyai estéje.

Május 29.

Medgyessy Pál: Sűrűségfüggvény-szuperpozíciók felbontásával kapcsolatos újabb vizsgálatok.

Augusztus 23—26.

A Bolyai János Matematikai Társulat Jubileumi Vándorgyűlésének előadásai:

A) *Az Oktatási Szakosztály elhangzott előadásai*

a) *Általános iskolai szekció*

Andrásfai Béla: Felületek topológiája.

Békefi Zsuzsanna: Feladatsorozatok tervezése.

Jékel Pál: Beszámoló a KLTE Számoló Központjának oktatási munkájáról. Számológép bemutatás.

Péter Rózsa: Rekurziókról.

Pogáts Ferenc: Geometriai transzformációk.

Szalay Mihály: Számelmélet általános iskolában.

Szendrei János: Korszerű szempontok érvényesítésének lehetőségei a jelenlegi tananyagban.

Varga Tamás: Valószínűségszámítás az általános iskolában.

b) *Középiskolai szekció*

Andrásfai Béla: Felületek topológiája.

Jékel Pál: Beszámoló a KLTE Számoló Központjának oktatási munkájáról. Számológép bemutatás.

Kertész Andor: Georg Cantor és a halmazelmélet kialakulása.

Péter Rózsa: Rekurziókról.

Rapcsák András: A tér geometriája és ennek néhány filozófiai vonatkozása.

Surányi János: Polinomok és végtelen polinomok.

Tusnádi Gábor: Bevezetés a matematikai statisztikába.

B) *A Tudományos Szakosztály elhangzott előadásai*

I. Szekció (algebra, számelmélet, gráfelmélet, kombinatórika, halmazelmélet, matematikai logika):

Andrásfai Béla: Extrém-gráfok fokszám problémájához.

Andréka Hajnal: A szimuláció fogalma különböző automatareprezentációk ekvivalenciájának tekintetében.

Erdős Jenő: Nem-kommutatív csoportok duális csoportja.

Fenyves Ferenc: Általános inverz tulajdonságú loopok elmélete.

Gesztei Ernő: Félig rendezett félcsoportokhoz tartozó csoportokról.

Győry Kálmán: Diofantikus vizsgálatok a számelméletben.

Klukovics Lajos: Kommutatív univerzális algebrákról.

Kovács Béla: Additív típusú diofantoszi egyenletek lokális megoldhatóságáról.

Lovász László—Recski András: Grafikus metroidokról.

Németi István: A szimuláció fogalma különböző automata reprezentációk ekvivalenciájának tekintetében.

Schein B.: Representation of special inverse semigroups.

Szász Gábor: Néhány hálóelméleti problémáról.

II. Szekció (klasszikus analízis, funkcionálanalízis, topológia):
ALEXITS GYÖRGY: Függvénysorok néhány konvergencia kérdéséről.
BARNA BÉLA: Az iterációelmélet néhány kérdéséről.
BUZÁSI KÁROLYNÉ: Uniform terek dimenziója a transzformációcsoportok elméletében.
CSÁSZÁR ÁKOS: Duplán kompakt bitopológikus terek.
CSÁSZÁR ÁKOSNÉ: Megjegyzések egy Riesz-féle szétválasztási axiómához.
FENYVES FERENC: Kvázicsoportokon értelmezett függvényegyenletek. (Speciális loopok izotópjai.)
GACSÁLYI SÁNDOR: Biperfekt topogén rendezések és magvas lefedések.
GESZTEI ERNŐ: Valós operátortest rendezett részgyűrűi.
GYŐRI ISTVÁN: Megjegyzések az elsőrendű késleltetett argumentumú differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről.
KLIMÓ JÁNOS: N_0 kompaktság jellemzése és egyéb eredmények.
MÁTÉ LÁSZLÓ: Egy Banach-algebra homologikus dimenziója és a teljesen homogén operátorok közötti összefüggés.
MIKOLÁS MIKLÓS: Szakadásos függvények és általánosított differenciál-operátorok.
SZÁZ ÁRPÁD: Ortogonális polinomok szerinti Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájával kapcsolatos megjegyzések.
SZIGETI FERENC: Fóliázások Banach-terekben.
SZŐKEFALVI—NAGY BÉLA: Operátorok karakterisztikus függvényeiről.
TANDORI KÁROLY: Mensov-típusú becslések.

III. Szekció (geometria):
BÖRÖCZKY KÁROLY: Sűrűség a hiperbolikus síkon.
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Megoldatlan problémák a szemléletes geometriában.
GYARMATHI ATTILA: Hiperkörök és hipercsavarvonalak ortogonálos projekciói.
GYARMATHI LÁSZLÓ: Nyomelemes centrális projekció a Bolyai—Lobacsevszkij geometriában.
HORVÁTH JENŐ: Egységgömbök elhelyezése hengerben.
MOLNÁR EMIL: A tükrözés-fogalom abszolútgeometriai alkalmazásairól.
MÓOR ARTHUR: Rekurrens görbületű Finsler-terek altereiről.
NAGY PÉTER: Az affinösszefüggésű vonalelemsokaságok elméletének egy absztrakt megalapozásáról.
RAPCSÁK ANDRÁS: Metrizálható affinösszefüggő terek.
STROMMER GYULA: A geometriai szerkesztések elméletében elért néhány újabb eredményről.
SZABÓ JÓZSEF: Az axonometria metrikus feladatainak egységes megoldásáról.
SZENTHE JÁNOS: A görbék metrikus elméletéről.
TAMÁSSY LAJOS: A reál tér metrikus tenzora .
VERMES IMRE: A hiperbolikus tér egybevágó szabályos hasábokkal létesített mozaikjai.

IV. Szekció (valószínűségszámítás, matematikai statisztika, operációkutatás, numerikus és gépi matematika):
ARATÓ MÁTYÁS: Regressziós feladatok az időelemzésben.
BÁNYA GYÖRGYNÉ (SÁNDOR JÚLIA): Valószínűségeloszlások alkalmazása vetőmagtételek minősítésénél.
BÁRTFAI PÁL: A kétdimenziós Chernoff-tételről.
BULLAIN BERNARDO: A visszacsatolt kimenetelű logikai hálózat viselkedésének és stabilitásának algoritmikus vizsgálati feltételei.
FREY TAMÁS: Sztochasztikus nyelvek és algoritmusok.
GERGELY TAMÁS—TÖRÖK LÁSZLÓ TURUL: Diszkrét tömegkiszolgálási rendszerek időváltozóit leíró folyamat.
GERENCSÉR LÁSZLÓ: Az (s, S) elnevezésű készletmodell kiszámítása.
GYIRES BÉLA: A normális eloszlás egyik jellemzése.
GYÖRFY LÁSZLÓ: Empirikus hipotézisvizsgálat két alternatív hipotézis esetén.
KLAFSZKY EMIL: Az input-output tábla előrebecsléséről.
KOMÁROMI ÉVA: Véges primál módszer a hozzárendelési feladat megoldására.
LUKÁCS OTTÓ: A matematikai statisztika alkalmazása a könnyűiparban.
PRÉKOPA ANDRÁS: Megjegyzések a logaritmikusan konkáv mértékek elméletéhez.
REIMANN JÓZSEF: Véletlen leképezések statisztikai vizsgálata.
REMSEI NÁNDOR: Egy sztochasztikus modell a gépjavítás optimalizálására.
SZABÓ ZOLTÁN: Divergenciapontmentes egyenletmegoldó iterációkról.
SZARVAS ISTVÁN: A megbízhatóságelmélet alkalmazása a TMK-ban.
TOMKÓ JÓZSEF: Többváltozós eseményfolyamatok.
TUSNÁDI GÁBOR: A sztochasztikus approximáció exponenciális sebessége.

V. Szekció (a matematika története):

HORVÁTH MIKLÓS: Tallózás Leibnitz matematikai levelezésében.
KERTÉSZ ANDOR: Száz éves a valós számok egzakt bevezetése.
OLÁHNÉ ERDÉLYI MÁRIA: Brassai Sámuel munkája kora matematikai műveltségének emeléséért.
SARLÓSKA ERNŐ: Bolyai János eszmevilága, a Tan és Üdvtan szellemkör történeti helye.
SZABÓ ÁRPÁD: A matematika-történet és a tudománytörténet néhány általános elvi kérdése.
SZÉNÁSSY BARNA: Debrecen matematikai múltja.
VEKERDI LÁSZLÓ: Néhány XVIII. századi honi matematikai tankönyvről.

VI. Szekció (a matematika oktatásának kérdései):

BOGNÁR STEFÁNIA: A számfogalom elmélyítése.
FEKETE ZOLTÁN: Koordináta (függvény) transzformáció.
HAITMANN BÉLA: Statisztikai módszerek oktatása nem-matematikus hallgatóságnak.
LUKÁCS OTTÓ: Általános helyzetű kúpszeletek egyenletének egy egyszerű tárgyalása.
MÁTÉ LÁSZLÓ: A funkcionálanalízis módszerei algoritmusok kialakításában.
OBÁDOVICS J. GYULA: A „számítástechnika" oktatása közép- és felsőfokú intézményekben.
STACHÓ LAJOS: Számítógépi módszerek.
SZENTES OSZKÁR: Folyamatábrák felhasználása a matematika oktatásában.
VINCZE ISTVÁN: A valószínűségszámításnak a szakirányban való képzéssel kapcsolatos néhány kérdésről.

Szeptember 26.
W. VOGEL (NDK): Félig rendezett félcsoportok láncfeltételekkel.
November 4.
V. GALKIN (Szovjetunió): Számítógépekről.
V. MATVEJEV (Szovjetunió): Tömegkiszolgálással kapcsolatos problémák.

1973-ban:
Január 27.
HEINRICH TIEDE (NDK): Tanárjelöltek szakmódszertani képzése a rostocki egyetemen.
Január 28.
HEINRICH TIEDE (NDK): Modernizálási törekvések az NDK középiskoláiban.
Március 7.
KERTÉSZ ANDOR: Szele Tibor élete és munkássága.
Március 15.
SZÉNÁSSY BARNA: Válogatott feladatok matematikusaink munkásságából.
Március 30.
MOÓR ARTHUR: Rekurrens görbületű Finsler-terek.
Március 31.
GYARMATHI LÁSZLÓ: Varga Ottó élete és munkássága.
Április 10.
SZŰCS JÓZSEF: Mátrixok diagonizálása.
Április 11.
OSKAR VALDIVIA (Peru): Komplex kobordizmusok.
Április 16.
FRIED ERVIN: Vetítettképes beszámoló Kanadáról.
WIEGANDT RICHÁRD: Vetítettképes beszámoló Pakisztánról.
Április 17.
FRIED ERVIN: Gyengén asszociatív hálók.
WIEGANDT RICHÁRD: Radikálelmélet topológiai vonatkozásai.
Május 4.
ERDŐS PÁL: Problémák és eredmények az elemi számelméletben.
Május 5.
GYARMATHI LÁSZLÓ: Varga Ottó élete és munkássága.
Május 24.
WALTHER EBERL (Ausztria): Sztochasztikus folyamatok alkalmazása.
Május 28.
KÓSA ANDRÁS: Az optimumszámítás új módszereiről.
Június 25.
H. KIESEWETTER (NDK): Konstruktion von besten Approximationen in normierten Räumen.
Július 8.
PINTZ JÁNOS: Formula, modell, interpretáció, elemi rész, Löwenheim—Skolem tétel.

Július 9.

Pósa Lajos: A Zermelo—Fraenkel axiómarendszer.
A halmazelmélet felépítése a Zermelo—Fraenkel axiómarendszer alapján. Transzfinit rekurzió.

Július 10.

Nádai László: Fundáltság, sorvasztás, tükrözési elv.
Beck József: Abszolútság.
Tátray Péter: Konstruálható halmazok.

Július 11.

Nagy Zsigmond: Konstruálható halmazok.

Július 12.

Mérő László: $V=L \vdash \aleph_1=2^{\aleph_0}$
Pethő Attila: A Cohen-módszer alapfogalmai.
Beck József: Láncfeltétel. A számosságok viselkedése.
Szelezsán János: Számítástechnikai előadás. Korreferens: Izsák János. Neutronok matematikai modellje.
Babai László: Megszámlálhatóan additív 0—1 mérték sohasem konstruálható.

Július 13.

Fiala Tibor: Rekurzív függvények.
Kászonyi László: Véletlen számsorozatok.
Dékány István: Véletlen számsorozatok.
Gács Péter: Új eredmények a véletlen számsorozatokról.

Július 14.

Nagy Zsigmond: Conz (ZF+kontinuum hipotézis).
Nádai László: A valós számok halmazának nem létezik definiálható jólrendezése.
Járai Antal: Véletlen számsorozatok előállítása.
Győry György: Véletlen számokról.

Július 15.

Gerencsér László: Operációkutatási előadás.
Harmathy Zoltán: Számológépek számológéppel történő szimulációja.
Csizmazia Albert: Számítástechnika.
Végh Sándor: Aritmetikai kifejezések fordítása.

Szeptember 4—8.

A „Függvényegyenletek és egyenlőtlenségek" c. nemzetközi kollokviumon elhangzott előadások
S. Golab: Über eine Funktionalgleichung von K. Menger
Száz Á.: Additive relations
R. Ger és J. Ger: Thin sets and convex functions
Tandori Károly: Über die Verbesserung einer Abschätzung von V. F. Gaposchkin
D. C. Russell: Bounded sequences satisfying a linear inequality
Z. Powazka: Stetige Lösungen von einer Unglecheit die mit dem Cosinus verbunden ist
Hosszú Miklós: Some functional equations of associative type
D. Brydak: On the functional inequalities in a single variable
E. Turdza: On the functional inequalities of higher orders
Pl. Kannappan: On the measurable solution of a functional equation connected with generalized directed divergence
D. Willett: A generalization of Caplygin's inequality
S. Tope: On a certain methods of determination of morphisms for G-objects
B. Choczewski: Regularity properties of solutions of some functional equations
Losonczi László: Integral inequalities for meanvalues
A. A. Nudelmann: Orosz nyelvű előadás
C. J. Eliezer: Convex functions and inequalities
Ecsedi István: On a Functional Equation
L. Reich: Die Rolle von Funktionalgleichungen bei der Linearisierung in anaytischen Iteration biholomorpher Abbildungen
Vincze Endre: Begründung der Komplexen Zahlen mit Hilfe der Funktionalglechungen
P. S. Bullen: On some forms of Whiteley
M. Krüppel: Nichtmonotone, vertauschbare Funktionen
S. B. Steckin: Analytische Ungleichungen in der Zahlentheorie
Móricz F.: Generalization of some classical inequalities in the theory of orthogonal series
V. V. Arestov: Orosz nyelvű előadás
Németh J.: Generalizations of the Hardy—Littlewood inequality
Daróczy Zoltán: On the seguence of mappings with braching property
A. Smajdor: On absolutely monotonic iteration groups
Uhrin Béla: On some inequalities concerning non-negative sequences

MOÓR ARTHUR: Aus Vektoren gebildete Übertragungsparameter
LAJKÓ KÁROLY: Special Multiplicative Dilatations
I. OLKIN: Identically distributed linear forms and the normal distribution
GYIRES BÉLA: On the permanent-derivates of doubly stochastic matrices
GESZTELYI ERNŐ: Distinguability by means of sets of continuous functions
V. I. LEVIN: Neue Ergebnisse über die zyklische Ungleichungen
L. COLLATZ: Functional Inequalities and free approximation for differential equations

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT GYŐRI TAGOZATÁNAK 1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

November—december:
Bolyai szakköri ülések (előadók CZAPÁRY ENDRE, SZABÓ RUDOLFNÉ, ZSEBŐK OTTÓ).
December 19.
Szakmai klubest.
CZAPÁRY ENDRE: A matematika oktatás legújabb módszerei.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT HEVES MEGYEI TAGOZATÁNAK 1972—1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

1972-ben:
Október 23—24.
CSŐKE LAJOS: A belgiumi matematikai konferencián szerzett tapasztalatok: a számítástechnikai ismeretek alapfokú oktatásának lehetőségeiről és módszereiről.
November 10. és 22.
BALOGH VIKTÓRIA: Számelmélet, számrendszerek tanításának feladatai és módszerei.
November 21.
KATONA GYULA: Szervezés és információelmélet (a műszaki hónap keretében).
November 23.
REIMAN ISTVÁN: A teljes indukció alkalmazásai a matematikában.
1973-ban:
Február 7, március 16.
BALOGH VIKTÓRIA: A matematikai logika tanításának feladatai és módszerei az általános iskolában.
Március 22.
HORVÁTH ISTVÁN: Az írásvetítő alkalmazása a programozott oktatásban.
Március 27.
KOMJÁTI MARGIT: A gimnáziumi I. osztályos tanulók matematikai ismereteiről szerzett felmérési tapasztalatok.
Március 30.
CSŐKE LAJOS: Gépi programok készítése — folyamatábrák.
Április 6. 14.
BALOGH VIKTÓRIA: Közös tulajdonságú pontok halmaza, mértani helyek.
Október 18.
HÓDI ENDRE: Egyenlőtlenség, szélsőértékfeladatok.
November 1.
PERGE IMRE: Ismertető a számítógép működéséről.
November 9. 14.
BALOGH VIKTÓRIA: A kombinatórika tanítása az általános iskolában.
November 14.
RADOS MIHÁLY: Az alsótagozatos geometriaoktatás kísérletének ismertetése.
November 15.
PERGE IMRE: Gépterhelési ütemterv készítése számítógéppel és az órarendkészítés.
November 16.
KERTÉSZ ANDOR: A kiválasztási axióma és a matematikai végtelen filozófiai problémái.
November 20.
HALÁSZ VINCE: Oktatógépek alkalmazása a programozott oktatásban.
November 21.
KONCZ JÓZSEF: A számítógép működéséről.
November 23.
PÁLFY SÁNDOR: Az általános iskolai átmeneti tanterv bevezetésének előkészítése.
December 7.
PRÉKOPA ANDRÁS: Víztározási rendszerek optimális méretezése matematikai módszerekkel.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT NYÍREGYHÁZI TAGOZATÁNAK 1972—1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

1972-ben:
Március 17.
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Az általános iskolai geometriaoktatás időszerű problémái.
Szeptember 14—15.
HEPPES ALADÁR, KOVÁCS LÁSZLÓ: Gazdaságosság, optimumkeresés.
December 8.
SZÉNÁSSY BARNA: Segner András János és a hazai matematika.
1973-ban:
Szeptember 28.
SZŐNYI LÁSZLÓ, KŐVÁRI LÁSZLÓNÉ: Kis számítógépek és software.
Október 10.
RAPCSÁK ANDRÁS: A tér szerkezete.
November 15.
GÁDOR ENDRÉNÉ: A korszerű geometriaoktatás problémái.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT PÉCSI TAGOZATÁNAK 1972—1973. ÉVBEN TARTOTT ELŐADÁSAI

1972-ben:
Március:
KÖNYVES TÓTH KÁLMÁN, FEKETE GÉZA és KISS KÁLMÁN: A számítástechnikával kapcsolatos középiskolai anyag (tanfolyam).
ERHARDT IMRE: Jellemformálás a matematikaórákon.
REIMAN ISTVÁN, PÁLMAY LÓRÁNT, KŐVÁRY KÁROLY, HETYEI GÁBOR, KAMARÁS LAJOS, SELÉNYI GÉZA, SIMON ISTVÁN, FEHÉR JÁNOS, TÓTH JÚLIA, PÓDA BÉLA, URBÁN JÁNOS, MOLNÁR EMIL: Bolyai délutánok a város és a megye középiskolás tanulóinak (12 foglalkozás).
Arany Dániel verseny.
Április:
GÁDOR ENDRÉNÉ: Beszámoló az amerikai út tapasztalatairól.
Október:
A Kürschák József matematikai tanulóverseny lebonyolítása.
KÁRPÁTI FERENC: Légi fényképezés.
November:
Schweitzer Miklós verseny.
Fejér Lipót verseny.
VARGA TAMÁS: Beszámoló a matematikaoktatás területén folyó kísérletekről.
HÓDI ENDRE: Beszámoló a matematikai kongresszusról.
ERHARDT IMRE: Csoportfoglalkozások időszerű kérdései.
BALOGH VIKTÓRIA: Matematikai logika.
VIGAND LÁSZLÓNÉ: Bemutató szakköri foglalkozás általános iskolában.
HETYEI GÁBOR: A gráfelmélet néhány kérdése.
PÁLMAY LÓRÁNT: Geometriai transzformációk, csoportok.
URBÁN JÁNOS: A matematikatanítás feladatai a világnézeti nevelés terén. Végtelen a matematikában.
VÖRÖS GYÖRGY: Általános iskolai matematikatanítás tartalmi korszerűsítséének iránya, kísérletei.
1973-ban:
Január:
KAMARÁS LAJOS: Halmazalgebra.
ERHARDT IMRE: Az oktatás pszichológiai problémái.
SELÉNYI GÉZA: A topológia alkalmazása a szakköri foglalkozásokon.
Április:
PELLER JÓZSEF: Beszámoló a gyakorlógimnáziumi I. osztályban végzett kísérletekről.
REIMAN ISTVÁN: A szakköri foglalkozások szervezése a középiskolákban.
KŐVÁRI KÁROLY: A halmazok szerepe a korszerű matematikatanításban.
November:
GÁDOR ENDRÉNÉ: Beszámoló a legújabban megkezdett kísérletekről.
SELÉNYI GÉZA: A geometria tanítása a középiskolákban, hogyan használható fel az általános iskolai alapozás.
Vezetőségi ülés: a következő év munkatervének megbeszélése.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VESZPRÉM MEGYEI TAGOZATÁNAK 1972—1973. ÉVI ELŐADÁSAI

1972-ben:

BENCZE TIBOR, DELZSÉNYI MIKLÓS, TOMOR BENEDEK, WILDE LÁSZLÓNÉ: Számítástechnikai előadássorozat középiskolai tanárok számára.
ANDRÁSFAI BÉLA: Gráfelméleti érdekességek.
URBÁN JÁNOS: Világnézeti nevelés a matematikaoktatásban.
ARNHOFFER MIHÁLY: Csoportelméleti alapismeretek.
BÉKEFI ZSUZSA: A csoportelmélet középiskolai vetületei.
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Megoldatlan problémák a szemléletes geometriában.
KNOLL JÁNOS: Beszámoló az általános iskolai matematikaoktatási kísérletekről.
SURÁNYI JÁNOS: Számelméleti érdekességek.

1973-ban:

ANDRÁSFAI BÉLA: Néhány gráfelméleti tétel.
CZÁCH LÁSZLÓ: A disztribúcióelmélet alapjai.
KÓSA ANDRÁS: Optimális irányítások elmélete.
URBÁN JÁNOS: Matematikai logika, logikai műveletek.
POGÁTS FERENC: A topológia elemei.
NEMETZ TIBOR: A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika középiskolai tanításának lehetősége a matematika tagozaton.
SOÓS GYULA: Differenciálható sokaságok I, II.
KNOLL JÁNOS: Beszámoló a franciaországi tapasztalatokról.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT 1973. ÉVBEN TARTOTT RENDEZVÉNYEI

Nemzetközi Általános iskolai Matematikaoktatási Kollokvium
Ideje: 1973. június 18—22.
Helye: Eger
Szervezőbizottság:
Elnök: SZENDREI JÁNOS
Titkár: RECSKI ANDRÁS
Tagok: CSÁKI DÁNIELNÉ, GÖNDÖCS LÁSZLÓ, IMRECZE ZOLTÁNNÉ, PÁLFY SÁNDOR, VÖRÖS GYÖRGY.

Végtelen és Véges Halmazok Elmélete Kollokvium
Ideje: 1973. június 25—30.
Helye: Keszthely.
Szervezőbizottság:
Díszelnök: ERDŐS PÁL
Társelnökök: FODOR GÉZA, T. SÓS VERA
Elnök: HAJNAL ANDRÁS
Titkár: BABAI LÁSZLÓ
Tagok: ÁDÁM ANDRÁS. HAMBURGER PÉTER, JUHÁSZ ISTVÁN, KATONA GYULA, MAKKAI MIHÁLY, MÁTÉ ATTILA, SZEMERÉDI ENDRE.

Numerikus Analízis Kollokvium
Ideje: 1973. szeptember 2—7.
Helye: Keszthely.
Szervezőbizottság:
Elnök: RÓZSA PÁL
Titkár: VEIDINGER LÁSZLÓ
Tagok: GERGELY JÓZSEF, KIS OTTÓ, LEE ANNA, POPPER GYÖRGY, SZIDAROVSZKY FERENC, VARGA LÁSZLÓ.

KÖNYVISMERTETÉS

ÚJ UTAK A MATEMATIKA TANÍTÁSBAN. 1.
NÉHÁNY HAZAI ÉS KÜLFÖLDI KÍSÉRLET
Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

A könyv egy sorozat első darabja, a sorozat célja tanulmányok, műhely-munkák közlése. Dicsérendő kezdeményezés, kifogásolni a sorozat célját — az első kötet alapján — csak annyiban lehet, hogy nem elég konkrét, nem kíván az összes matematika tanárhoz szólni, nem mindig igyekszik az összes matematika tanárnak mondani valamit.

Az első tanulmány SURÁNYI JÁNOS: „A matematikaoktatás korszerűsítésének néhány alapelve" című munkája, egyben a Művelődésügyi Minisztérium által 1968. őszén létrehozott, a matematikatanítás korszerűsítésének a lehetőségeit vizsgáló bizottság jelentése. A jelen helyzet ismertetéséből indul ki, részletesen megvizsgálja a tennivalókat, és konkrét javaslatokkal zárul. A jelen helyzet ismertetésénél a tanulmány megelégszik annak leszögezésével, hogy az érettségizettek többsége „borzadva" gondol vissza a matematikára, és néhány felmérő dolgozat alapján utal arra, hogy ma a matematikatanításra elsősorban az algoritmikus eljárások begyakorlása a jellemző, és leginkább az önálló gondolkozást hiányolhatjuk. Úgy érzem azonban, ez a helyzetfelmérés nem elég konkrét, akármilyen korszerűsítést hajtunk is végre a jövőben, annak az elbírálása lehetetlen lesz, ha a kiindulópontot nem ismerjük pontosan. Volt-e fejlődés nálunk az elmúlt 25 évben? Ha igen, miben? Kielégítő-e ennek a fejlődésnek az üteme? Hol állunk a többi országhoz képest? Azt, hogy szükség van korszerűsítésre a tanulmány végül is nem a meglevő elmaradással indokolja, hanem azzal, hogy fel kell készítenünk a tanulókat a matematika várhatóan gyors fejlődéséből fakadó új eredmények alkalmazására. Ezt kicsit maximalistának érzem, ha arra gondolok, hogy jelenleg hozzávetőlegesen 200 évvel van elmaradva az iskola a matematika mögött.

A korszerűsítés alapja a tanulmány szerint a tanulók önálló matematikai gondolkozásra való nevelése. Ezt segíti elő az órák új típusú szervezése, a csoportos foglalkozás, a feladatlapok alkalmazása, az osztályzás helyett effektívebb ösztönzők bevezetése, a modern segédeszközök (programozott oktatás, számítógépek) felhasználása. A tantervbe új elemként kerülne be a világos számfogalom kialakítása, a függvényfogalom általános kiépítése, és a lineáris vektorterek, topológia, valószínűségszámítás, absztrakt algebra elemeivel való megismerkedés. A tennivalók között a tanulmány is első helyen említi a helyzetünk pontos felmérését. A következő pont a kutató és kísérletező munka kiszélesítése. Felhívja a figyelmet a tanárhiány káros növekvő tendenciájára.

Ha a könyv elejéről a végére ugrunk, VARGA TAMÁS öt cikkét találjuk összegyűjtve (ezek mindegyike másodszor jelenik itt meg nyomtatásban, a cikkek 68—70 között íródtak). Hadd idézzek néhány mondatot. „Nálunk (mármint a szerző által szervezett kísérleti iskolában) a gyerekektől szabad olyat is kérdezni, amit még nem tanultak... Egyébként csak gépek (volnának), gépeket pedig nem érdemes nevelni, mert gyártani tökéletesebbeket tudunk." „Nem szemléltető eszközöket mutat fel a tanító, hanem munkaeszközökkel dolgoznak a gyerekek." De a valószínűségszámítási kísérleteket ismertető részből legszívesebben egész oldalakat idéznék. Áll a gyerek (ötéves) az urna előtt, töpreng, milyen színű lesz a következő golyó, és véletlenül eltalálja. „Honnan tudtad, hogy most a kéket húzod?" „Hát ... gondolkoztam, hogy az-e." A kislány (másik) mindig sárgát húz. „Nem tudsz kéket húzni?" „Nem." „Akkor se, ha nagyon próbálod?" „Csak ha mind kék lesz, akkor." Ne tessék nevetni! Ezek nem gyerek-száj poénok. Csak a kész válaszokra megtanított gyerekekhez szokott fülünk számára azok. Bármiről is volna szó, már az a tény, hogy a gyereknek magának kell az egész szituációt mérlegelni, besorolni, véleményt mondani, már ez szokatlan — de hogy a negyedik gimnáziumi anyagból lassan kiszoruló valószünűségszámítást ötéves gyerekeknek tanítani? Ugye csodálkoznak? Örömömet csak az utolsó az egész komplex matematika tanítást három oldalban ismertető cikk rontotta némiképp: amit addig négy változatban már olvastam, az itt — majdnem a felismerhetetlenségig zsugorítva — újra megismétlődött. Egy ilyen tanulmánykötet szerkesztésénél oda kell figyelni, kiknek szól a szöveg, a Magyar Hírlapnak írt cikk feltehetőleg nem elsősorban matematika tanárok számára készült.

Most hova lapozzunk? Talán SZOMBATHY MIKLÓS: „Gondolatok a gimnáziumok szakosított tantervű osztályairól" című tanulmányára. Saját bőrén szerzett tapasztalatait mondja el a szerző (Egerben tanít) élvezetes stílusban, gondolatébresztően. Talán nem mindenki tudja, hogy nálunk ma már két különböző matematikai tagozatos gimnázium is van: a matematika I., és a matematika II., ezekben a matematika anyag arányos a tagozat számával. Ebben a tanulmányban a mat. I. közben megszűnt (matematika—fizika tagozatos) formájáról van szó, a tapasztalatok remélhetőleg érvényesek a mostani mat. I.-re is. A tantervbővítésről szólva leszögezi a szerző (és ebben egyetértek vele), hogy csak azután gondolhatunk a tagozatokon szokásos komplex számok, oszthatóság, skaláris szorzat, stb. bevezetésére, ha a „reguláris" gimnáziumi anyagot már kellő mélységben megtanítottuk, hiszen a gimnáziumban visszatérő probléma, hogy nincs idő az anyag részletes és alapos felfolgozására, ha a tagozatos nagyobb óraszámot gyorsan teletömködjük mindenféle újabb ismerettel — könnyen magunk, és a matematika tanítás alatt vághatjuk el ezzel a fát. Nem tudok azonban osztozni a szerzőnek a hazai oktatási kísérletek konzervativizmusa feletti örömében. Azt én nem erénynek, hanem kényszerűségnek érzem, és attól félek, a lejtőn való lecsúszástól a konzervativizmusban meglevő fékező erő se tud már megmenteni minket, ha hirtelen be nem gyújtunk néhány eddig ki nem használt tartalékrakétát.

Hát most hova? FORRAI TIBORNÉ: „Önálló munkára épített osztályfoglalkozás az általános iskola felső tagozatán" című munkájában az MTA Pszichológiai Intézetének kísérleti osztályában 1966—67-ben indított kísérletről számol be. A kísérlet célja „a matematikaoktatás hatásfokának emelése az általános iskola felső tagozatán pszichológiai szempontból korszerűbb, az alkotó gondolkodást jobban fejlesztő eljárás segítségével". A kezdeti sikerek után „A matematikai szakfelügyelet segítségével és ellenőrzésével az 1969—70 tanévtől többszáz vidéki iskolában folyik az oktatás az (új) eljárással". Az új eljárás lényege, ha jól értem, hogy a tanulók önállóan oldanak meg feladatokat a füzetükben, aztán az osztály közösen megbeszéli a megoldást, és minden tanuló önállóan értékeli a saját munkáját, óra végén összesítik a szerzett pontokat. Azt hiszem, az eljárás sikere a feladatokon, ha szabad így mondani, feladatlapokon múlik. Ha azok a tankönyv-feladatok szokott színvonalán vannak, lehet, hogy nem lelkesítik eléggé a tanulókat. Nem örülök annak, hogy kialakulóban van (vagy már ki is alakult) nálunk egy programozott oktatás ellenes légkör, amelyben a legtöbbször hangoztatott érv az, hogy a programozott oktatás nem jó, mert kész válaszokat ad a gyerekek szájába. Ezt én nagyon veszélyesnek érzem, mert könnyen meglehet, hogy félreértjük a programozott oktatás lényegét, csak azt látjuk, hogy szokott ott lenni valami abcd-vel, vagy 1 2 3 4-gyel jelzett felsorolás, és eleve visszautasítjuk az egészet. Egy biztos: a régi rendszer, a fehér papír rendszere nem nagyon lelkesítő. Ülni az érintetlen papír előtt, ahol csak az lesz, amit az ember maga megcsinál, kétségtelen lehet lelkesítő. De nem állandóan és nem 14 éves gyerekeknek. A mások gondolatához való kapcsolódás, a megkezdett mondat befejezése, a hosszú folyamatoknak most ezt a láncszemét gyakoroljuk, most azt, de úgy, hogy közben állandóan látjuk az egészet, még eléggé ki nem aknázott lehetőségeitől kár volna eleve megfosztani magunkat. Ezek a mai gyerekek (de mikor nem voltak ilyenek a gyerekek) azt mondják: ha te adsz valamit, én is adok — de a tanárnak, ha üres kézzel megy be az órára, nem adnak semmit. Az valóban mindegy, hova írják a tanulók a megoldást, a füzetbe-e, vagy a feladatlapra. De annak a feladatnak (ha szabad így mondanom, feladatlapnak) megfelelően előkészítve kell lennie. És nem baj az, ha néha csak egy megfelelő szó kiválasztása a gyerek összes munkája. Energiát takarít meg vele, ha nem kell mindig fülét-farkát megcsinálnia minden feladatnak. És ne feledjük, hogy a felszabaduló gondolkodási kapacitás önálló munkában jelentkezik, amit másutt nagyon jól ki lehet használni.

Be kell vallanom, hogy két tanulmányt nem értek. PELLE BÉLA—JAKAB ALBERT: „Egy lépés a geometriatanításunk korszerűsítésének az útján" című munkája a geometriai transzformációk, a tükrözés, az eltolás, a forgatás tanításáról szól, de nagyon formálisnak érzem. „A tanár utasítására a tanulók piros színessel kihúzzák az ACD és az $A'B'C'$ háromszögeket." Ez a korszerűsítés? „A tanár utasítást ad az $A'B'C'$ háromszög pontonkénti szerkesztésére." „Minden pont, amely a tükrözési nyíl kezdő- és végpontjától egyenlő távolságra van, a tükrözés tengelyén fekszik." Mire jó ez a tükrözési nyíl (hol kellene tartani, minden tanuló kap)? DR. LÉNÁRD FERENC: „Modellalkotás variációk segítségével a gondolkodás rugalmasságának fejlesztésére az alsófokú matematikaoktatás első éveiben" című munkájából aztán egy ártatlan betűt nem értek. Kik, mikor, mi célból, hányszor mondják végig ezeket a végtelen litániákat? Minden esetre a tanulók fele ötöst kapott év végén (láthatjuk) a kísérlet sikeres volt. Örvendetes ez az „objektivitás" a hazai pedagógiai kísérletekben, de nem hiszem, hogy az értékelés egyetlen módja a kísérletet végző tanár évvégi osztályzatainak az országos átlaggal való összehasonlítása.

KISS PÉTER: „Korszerűsítési kísérletek a skandináv matematikaoktatásban" című tanulmány képviseli egyedül a főcím „külföldi" részét. Félelmetes így felsorolva olvasni, mi az ördögöt nem tanítanak ezek a svédek. Halmazelmélettel egyenletrendszerek megoldását, hogy az $y=2x$ egyenlet nem így van náluk, hanem így:

$$\{(x, y) : y = 2x\}$$

olvasd: azon (x, y) számpároknak a halmaza, amelyekre $y = 2x$ teljesül. Aztán ezt a halmazt elmetsszük azzal a halmazzal, hogy azt mondja

$$\{(x, y): y = x+1\}$$

azoknak a ... stb. Lehet, hogy ez a példa így kiragadva nevetséges: az egyszerű dolgoknak a fennkölt absztrakció kedvéért történő cikornyás átfogalmazása nekem se tetszik, de a matematikában nagyon gyakran figyelmen kívül hagyjuk a következő tényt. Mindent amit tanítunk az emberiség 5—10 ezer év alatt szedte össze. Amit már régóta tudunk, az szinte bekerül a „tudatunk alá". A friss, 100—200 éve szerzett ismeretek a „felszínen" maradnak, amitől nagyapánk idegenkedett, mi is idegenkedünk — ha az átadási mechanizmus merev. A hétköznapi élet átadási mechanizmusai általában rugalmasabbak: négyéves gyerek megtanulhatja, hogyan kell egy magnetofont kezelni, a robbanómotorok működését is kész mindenki az entropia ismerete nélkül megérteni. Azért, mert mi a halmaz, valószínűség, csoport, gráf, stb. fogalmával 20—25 éves korunkban ismerkedünk meg, még nem feltétlenül szükséges, hogy ez minden ránkkövetkező generációval így történjen. És nem is történik így, ha mi képesek vagyunk az apáink által bonyolultnak tartott fogalmakat úgy egyszerűsíteni, hogy azt a gyerekek is megértsék. Ez természetesen nehéz, körültekintő munkát igényel, a modernizálás nem azt jelenti, hogy bemegyek az óvodába, és elmondom a csoportaxiómákat. Ezért volna jó, ha a külföldi kísérletekről folyamatosan tájékztatnánk a hazai tanárokat, és a sorozat köteteiben a hazai és külföldi témák mostani 6:1 aránya a külföldiek javára tolódna el.

Tusnády Gábor

MATEMATIKA PÉLDÁKBAN

Minden tanév elején csaknem 10 000 nappali, esti és levelező tagozatos egyetemi és főiskolai hallgató kezd felsőfokú matematikát tanulni. Közismert tény, hogy a matematika tanulásának fontos mozzanata a példamegoldás, a gyakorlás, az alkalmazás. Mindezekhez példatárakra is szükség van. Hazánkban jelenleg elég sokféle matematikai példatár van forgalomban a legkülönbözőbb témakörökből, és ezek sorában előkelő helyet foglal el a Műszaki Könyvkiadó példatár-sorozata, amelynek borítólapját Bolyai Farkas arcképe díszíti és ezért Bolyai-sorozatnak is szokták nevezni. Az eddig megjelent 9 kötetből 6-nak már második, illetve harmadik kiadása is megjelent, és úgy vélem, hogy ha egy részben közép-, részben felsőfokú matematikai példatár-sorozat kötetei magyar nyelven több tízezer példányban jelennek meg és fogynak el, azt jelentős sikernek lehet tekinteni.

Miben rejlik a sorozat sikerének a titka?... A sikernek nyilvánvalóan több oka is lehet. Úgy gondolom, hogy az alábbi körülmények lényeges szerepet játszottak a sikerben:

1. *A sorozat köteteiben csak kidolgozott feladatok vannak.* Ez azt jelenti, hogy a feladatgyűjteményt nemcsak a már önálló munkára képes tehetségesebb olvasók használják, hanem éppen a közepesek, a gyengébbek, a kezdők is, akik éppen ezzel a segítséggel teszik meg az első lépéseket (igaz hogy kézenfogva) az önálló munka felé.

2. Mivel a kötetekben csak kidolgozott feladatok szerepelnek, *a kötetek nagy segítséget jelentenek különösen az esti és levelező oktatásban résztvevőknek,* akik nem fordulhatnak problémáikkal bármikor az oktatókhoz.

3. A közölt feladatok nagyobbik része *gyakorló feladat,* de természetesen van a kötetekben nehezebb, összetettebb, és ötleteket kívánó feladat is. A szerzők a közölt megoldások során számos ötletet mutatnak be, és ahhoz, hogy az olvasónak újabb ötletei támadjanak, nem árt, ha másoktól is lát ötletet.

4. Minden kötetben az egyes anyagrészek előtt *elméleti összefoglalók* vannak, amelyek tanuláskor, a vizsgára való felkészüléskor és később, az alkalmazásokhoz kiválóan felhasználhatók.

5. A kötetek *felépítése közel egységes,* tehát, ha valaki egy bizonyos tárgykör tanulmányozására igénybe vette a sorozat megfelelő kötetét és annak felépítése elnyerte tetszését, a többi tárgykört is hasonló módszerekkel tanulmányozhatja.

6. Az eddig megjelent kötetek azok közül a tárgykörök közül dolgoztak fel néhányat, amelyekkel a legtöbb egyetemi és főiskolai hallgató találkozik.

7. A *kötetek* nemcsak a magántanulásban, hanem a felsőfokú és részben a középfokú *tantermi oktatásban* is előnyösen felhasználhatók, és számos intézményben a sorozat köteteit segédkönyvnek használják.

8. A kötetek külső formája is tetszetős, *ára pedig az egyetemi és főiskolai hallgatók anyagi viszonyaihoz van méretezve.*

Melyek azek a kötetek? A felsorolás a kötetek megjelenésének az időrendjét követi.

1. BÁRCZY BARNABÁS: *Differenciálszámítás* (első kiadás 1968, második kiadás 1971, harmadik kiadás 1973, 280 oldal, 20,50 Ft). A kötet a függvénytani alapfogalmak után a differenciálszámítás szabályait és technikáját mutatja be 200 példa segítségével, majd az alkalmazások közül a szöveges szélső érték feladatok megoldása, a L'Hospital-szabály, a Taylor-sorfejtés, az egyenletek közelítő megoldása Newton módszerével és a függvényvizsgálat szerepel.

2. BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás* (első kiadás 1969, második kiadás 1971, harmadik kiadás 1973, 360 oldal, 26,— Ft). A kötet előbb a határozatlan integrál kiszámítására mutatja be a szokásos módszereket és eljárásokat, majd a határozott integrál kiszámítására és alkalmazására kerül sor. Az alkalmazások közül a területszámítás, az ívhosszszámítás, a forgástestek felszínének és tér fogatának a kiszámítása, a súlypontszámítás és egyéb fizikai feladat szerepel. A kötet végén a határozott integrál közelítő kiszámítása és számos feladat található.

3. KRATOFIL DEZSŐ: *Algebra* (első kiadás 1970, második kiadás 1973, 324 oldal, 24,— Ft). A kötet a középiskolai algebra-anyag összefoglalását adja és ezzel bizonyos mértékig elüt a sorozat többi kötetétől. Elsősorban az esti és levelező tagozaton tanulók számára nyújt segítséget a középiskolai anyag egy részének (algebra, első- és másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, és egyenlőtlenségek, a logaritmus, sorozatok, kombinatorika) a felfrissítéséhez.

4. POGÁTS FERENC: *Vektorgeometria* (első kiadás 1970, második kiadás 1972, 364 oldal, 26,50 Ft). A kötetben a vektorgeometria alapfogalmai után a vektorokra vonatkozó alapműveletek és ezek geometriai és fizikai alkalmazásaira találunk példákat, majd a gömbháromszögtan, a sík és a tér analitikus geometriája kap részletes feldolgozást. A kötet 1971-ben nívódíjban részesült.

5. SOLT GYÖRGY: *Valószünűségszámítás* (első kiadás 1969, második kiadás, 1971, harmadik kiadás 1973, 266 oldal, 20,— Ft). A kombinatorikai feladatok után a valószínűség kiszámításának klasszikus módjára van közel 100 feladat. A kötet további részében a feltételes valószínűségre, a valószínűségi változók várható értékére és szórására, továbbá a fontosabb valószínűségi eloszlásokra van számos feladat.

6. SCHARNITZKY VIKTOR: *Mátrixszámítás* (első kiadás 1970, második kiadás 1973, 340 oldal, 25,— Ft). A determinánsokkal kapcsolatos műveletekre, tulajdonságokra és alkalmazásokra, valamint az elemi mátrix-műveletekre vonatkozó példák után a mátrixok elemi átalakítására, invertálására, diadikus felbontására, transzformálására, saját értékeinek a kiszámítására található számos példa. Az alkalmazások, értékeinek a kiszámítására található számos példa. Az alkalmazások közül az inhomogén és homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása, néhány vektrortranszformáció és néhány közgazdaságtani probléma szerepel.

7. SÁRKÖZI ANDRÁS: *Komplex számok* (1973, 283 oldal, 21,— Ft). A komplex számok kétféle bevezetése után az algebrai, a trigonometrikus és az exponenciális alakban adott komplex számokkal elvégezhető műveletek műveleti szabályaira találunk számos példát. Külön fejezet foglalkozik a gyökvonással és az egységgyökökkel. A kötet második részében a valós és komplex együtthatós polinomok tulajdonságainak vizsgálata szerepel.

8. KIS OTTÓ—KOVÁCS MARGIT: *Numerikus módszerek* (1973, 547 oldal, 39,—Ft). A kötet témái: Az ALGOL 60 programozási nyelv. A hibaszámítás elemei. Egyenletek megoldása. A lineáris algebra numerikus módszerei. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása. Függvények közelítése. Numerikus integrálás. Differenciál- és integrálegyenletek megoldása. A feladatok megoldásának programjait a szerzők ALGOL 60 nyelven írták és a megoldásokat az Egyetemi Számítóközpont RAZDAN 3 típusú gépe számította ki.

9. POGÁTS FERENC: *Trigonometria* (1973, 413 oldal, 28,— Ft). Az irányított szög és a szögfüggvények bevezetése után egy-egy fejezet foglalkozik a szögfüggvények értékeivel, goniometriai azonosságok bizonyításával, a sinus- és cosinus tétellel, trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek megoldásával, a szögfüggvények ábrázolásával és a ciklometrikus függvényekkel. A kötetben összesen 230 számozott feladat van, de mivel egy sorszám több feladatot is jelent, a feladatok száma meghaladja az 500-at.

Úgy vélem, hogy nemcsak a sorozat egy-egy kötetének, hanem a teljes sorozatnak is helye van mindazoknak a könyvtárában, akik felsőfokú matematikát tanulnak vagy tanítanak.

Scharnitzky Viktor

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1973-ban jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyvek* és felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

ALEXITS GYÖRGY—FENYŐ ISTVÁN: *Matematika vegyészek számára* (6. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 403 oldal, 38,— Ft.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Ismerkedés a gráfelmélettel* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 237 oldal, 24.—Ft.

BAJCSAY PÁL: *Többváltozós függvények és differenciálásuk* (4. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. VI. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 98 oldal, 9,50,— Ft.

BAJCSAY PÁL: *Többváltozós függvények integrálása* (4. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. VII. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 108 oldal, 10,— Ft.

BAJCSAY PÁL: *Közönséges differenciálegyenletek* (Első rész), (5. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok B. VII.* kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 290 oldal, 27,50,— Ft.

BAJCSAY PÁL—FAZEKAS FERENC: *Közönséges diflerenciálegyenletek* (Második rész) (3. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, B. VII. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 323 oldal, 31,— Ft.

BAKOS TIBOR—LŐRINCZ PÁL—TUSNÁDY GÁBOR: *Középiskolai matematikai versenyek 1970,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 143 oldal, 15,— Ft.

BALOGH VIKTÓRIA: *Tanári kézikönyv az ált. isk. matematika szakosított* tantervű 7—8. osztályai matematika tanításához, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 208 oldal, 16,50,— Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás, példatár* (3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 360 oldal, 26,— Ft.

BOLYAI JÁNOS: *Appendix, a tér tudománya* (Szerk. KÁRTESZI FERENC), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 212 oldal, 48,— Ft.

COXETER, H. S. M.: *A geometriák alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 472 oldal, 92.—Ft.

DENKINGER GÉZA—GYURKÓ LAJOS: *Matematikai analízis, feladatgyűjtemény* (2. javított kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 295 oldal, 20,— Ft.

DIENES ZOLTÁN: *Építsük fel a matematikát.* Gondolat, Budapest, 1973, 308 oldal, 18,50 Ft.

ELŐD ISTVÁNNÉ: *Számoljunk együtt 5—6* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 363 oldal, 19,— Ft.

FAGYEJEV, D. K.—SZOMINSZKIJ, J. SZ.: *Felsőfokú algebrai feladatok* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 272 oldal, 42,— Ft.

FAZEKAS FERENC: *Határozott integrál* (Első rész) (4. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. V.* kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 262 oldal, 25,50 Ft.

FENYŐ ISTVÁN: *Integrálegyenletek* (3. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, C. III. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 180 oldal, 17,— Ft.

FLORES IVÁN: *Korszerű számítógépek rendszertechnikája* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 334 oldal, 65,— Ft.

FREY TAMÁS: *Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok* (3. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, B. VI. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 206 oldal, 19,50 Ft.

FREY TAMÁS—SZELEZSÁN JÁNOS: *Számítástechnika* Műszaki értelmező szótár 33. kötet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 168 oldal, 45,— Ft.

FREY TAMÁS—SZELEZSÁN JÁNOS: *Matematikai kibernetika* Műszaki értelmező szótár 34. kötet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 120 oldal, 33,— Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—VÁRI JÁNOS: *Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztálya számára* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 184 oldal, 20,50 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ: Lineáris algebra, példatár (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 266 oldal, 26,— Ft.

GELFAND, I. U.—GLAGOLJEVA, IE. G.—KIRILOV, A. A.—SNOL, E. E.: *A koordinátamódszer* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 166 oldal, 15,— Ft.

GERGELY JÓZSEF—HÓDI ENDRE—KELEMEN LÁSZLÓ—LUKÁCS OTTÓ—SAIN MÁRTON—SÓLYOM MIHÁLY: *A lánctörtektől a számítógépig* Élő matematika, 3. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 159 oldal, 13,— Ft.

GOLENKÓ, D. I.: *Statisztikai módszerek alkalmazása gazdasági rendszerekben* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973, 214 oldal, 25,50 Ft.

GYEMIDOVICS, B. P.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest 1973, 595 oldal, 69,— Ft.

HÁMORI MIKLÓS: *Ismerkedés a komputerrel,* Számítástechnika I. az általános iskolai és középiskolai tanulók számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 168 old. 10,— Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ: *Tanári segédkönyv az Iskolatelevízió műsoraihoz, Számtan-mértan az ált. isk. 7—8. osztálya számára,* Tankönyvkiadó' Budapest, 1973, 142 oldal, 13,50 Ft.

KIS OTTÓ—KOVÁCS MARGIT: *Numerikus módszerek,* Műszaki Könyvliadó, Budapest, 1973, 548 oldal, 39,— Ft.

KOMORÓCZY GYÖRGY: *A TRAMPS szöveges információ visszakereső és kezelő programrendszer,* Statisztikai Kiadó, Budapest, 1972, 158 oldal, 57.—Ft.

KORNAI JÁNOS: *A gazdasági szerkezet matematikai tervezése* (Lipták Tamás és Wellisch Péter közreműködésével) (2. bővített és átdolgozott kiadás), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973, 507 oldal, 92,— Ft.

KÓSA ANDRÁS: *Variációszámítás* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 243 oldal, 24,— Ft.

KŐHEGYI JÁNOSNÉ—VAJDA JÓZSEF: *Egyéni matematika tanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az ált. isk. 6. osztálya számára,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 216 oldal, 13,— Ft.

KÖVES PÁL—PÁRNICZKY GÁBOR: *Általános statisztika,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973, 816 oldal, 139,— Ft.

KRATOFIL DEZSŐ: *Algebra, példatár* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 324 oldal, 24,— Ft.

LŐBEL, G.—MÜLLER, P.—SCHMIDT, H.: *Számítástechnikai kislexikon,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 466 oldal, 89,— Ft.

LŐCS GYULA: *Az ALGOL 60 programozási nyelv,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 256 oldal, 19,50 Ft.

LŐCS GYULA—VIGASSY JÓZSEF: *A FORTRAN programozási nyelv* (3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 336 oldal, 26,— Ft.

LUKÁCS ERNŐNÉ—RÁBAI MIKLÓS: *Eleget tudok-e matematikából* (Érettségire, felvételire). (3. átdolgozott és bővített kiadás), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973, 463 oldal, 33,— Ft.

LUKÁCS OTTÓ—SCHARNITZKY VIKTOR: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok* V. kötet, (Középiskolai szakköri füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 186 oldal, 14,— Ft.

MANSFIELD, D. E.—BRUCKHEIMER, M.: *Matematika új felfogásban,* III. kötet, Budapest, 309 oldal, 29,— Ft.

MC CRACKEN, D. D.: *Bevezetés az ALGOL programozásba* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 122 oldal, 17,50 Ft.

MEDGYESSY PÁL—TAKÁCS LAJOS: *Valószínűségszámítás* (3. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok C. V. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 338 oldal, 31,— Ft.

MEIER, R. C.—NEWELL, W. T.—PAZER, H. L.: *Szimuláció a vállalati gazdálkodásban,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973, 431 oldal, 80,— Ft.

MÜLLER JÓZSEF—ROSTA LÁSZLÓ—SZONDI BÉLA: *Matematikai feladatgyűjtemény a szakmunkástanulók számára* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

NEUMANN JÁNOS: *A számológép és az agy* (2. kiadás) Gondolat, Budapest, 1972, 134 oldal, 14,— Ft.

NÉMETHY KATALIN: *Szintezési útmutató a 10121/I—II—III matematikai feladatgyűjteményhez,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 170 oldal, 10,— Ft.

OBÁDOVICS J. GYULA—SZARKA KÁROLY: *Felsőbb matematikai összefoglaló műszakiaknak,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 644 oldal, 50,— Ft.

PAPY: *Ismerkedés a topológiával,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 260 oldal, 29,— Ft.

PESCHEL MANFRÉD: *Kibernetikai rendszerek,* automaták, optimálás, tanulás és gondolkodás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 160 oldal, 15,50 Ft.

PETRICH GÉZA: *Mérőszámos ábrázolás* (14. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 62 oldal, 2,50 Ft.

PETRICH GÉZA: *Ábrázoló geometria* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 413 oldal, 60,— Ft.

POGÁTS FERENC: *Trigonometria példatár,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 414 oldal, 28,— Ft.

PORWIT, K.: *Az optimumszámítás kérdései a központi tervezésben,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973, 325 oldal, 37,— Ft.

RAHOVSZKI RUDOLF: *Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga, matematika,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 150 oldal, 8,— Ft.

RASZTIGIN, L. A.: *A véletlen világa,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 200 oldal, 18,50 Ft.

RÁBAI IMRE: *Elemi matematikai példatár II.,* Algebra, geometria, Gondolat, Budapest, 1973, 252 oldal, 17,50 Ft.

REVUZ ANDRÉ: *Modern matematika, — élő matematika,* Gondolat, Budapest, 1973, 122 oldal, 10,— Ft.

RÉNYI ALFRÉD: *Ars mathemtica* (Elvek és utak), Magvető Könyvkiadó, Budapest, 1973, 387 oldal, 30,— Ft.

SÁRKÖZI ANDRÁS: *Komplex számok, példatár,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 282 oldal, 21,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Mátrixszámítás, példatár* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 340 oldal, 25,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából II. kötet, 1970—1971,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 158 oldal, 13,— Ft.

SKLJARSZKIJ, D. O.—CSENCOV, N. N.—JAGLOM, I. M.: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 420 oldal, 50,— Ft.

SOLT GYÖRGY: *Valószínűségszámítás* (3. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 268 oldal, 20,— Ft.

STIEFEL, E.: *Bevezetés a numerikus matematikába,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 304 oldal, 27,50 Ft.

SZÁSZ PÁL: *Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 396 oldal, 60,— Ft.

TATÁR ISTVÁN: *Számtan-mértan feladatgyűjtemény az ált. isk. 7. o. számára* (4. kiadás), Tankönyvkiad Budapest, 1973, 98 oldal, 4,50 Ft.

VARGA JÓZSEF: *Gyakorlati programozás I. kötet,* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 324 oldal, 32,— Ft.

VARGA JÓZSEF: *Gyakorlati programozás II. kötet,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973, 96 oldal, 10,50 Ft.

79 75
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat beérkezett: 1974. IV. 2. — Terjedelem: 17,5 (A/5) ív
1974-1580 — Szegedi Nyomda

СОДЕРЖАНИЕ

Иштван Юхас и Дьердь Петрушка: Математическая деятельность А. Часара 217
Г. Биркхоф: Современное направления развития алгебры 237
Янош Шураньи: Об одном способе представления элементов конечных Абелевых групп 257
Г. П. Неваи: Ряды Фурье и интерполяция 261
Андор Хофман: Применение C-суммируемых рядов к определению течения воды в резервуаре 291
Йожеф Сабадош: Об одной интерполяйионной проблеме относщейся комплексной единичной окружности 297
Жигмонд Надь: Конструктивная оценка числа Рамсея 301
Нгуен-Монг Хи: Эллипс плоскостей Галуа нечетного порядка как аффинный регулярный многоугольник 303
Иштван Хортобадьи: О числе Ньютона выпуклых областей 313
Иштван Секереш: Теоретико-функциональное описание процесса учения 319
Мартон Кун Кути О примененуй определутеля $И_n$ 337
Тамаш Шмидт: Медитация об одном учебнике алгебры для школьников. 349
Доклад о математическом конкурсе 1972-го года посвященном памяти Миклоша Швейцера 355
Задачи 385
Из жизни общества 391
Обзор книг 407
Новые книги 410

CONTENTS

I. Juhász and G. Petruska: The mathematical work of Á. Császár 217
G. Birkhoff: Current trends in algebra 237
J. Surányi: On a method to represent the elements of a finite Abelian group uniquely 257
G. P. Névai: Fourier series and interpolation I. 261
A. Hoffmann: Application of (C,1)-summable series to determining the flow in water basins 291
J. Szabados: On an interpolation problem for the complex unit circle 297
Zs. Nagy: A constructive estimation of the Ramsey number 301
Nguyen Mong Hy: The ellipse of Galois planes of odd order as an affine regular polygon 303
I. Hortobágy: The Newton number of convex disc 313
I. Szekeres: Analytic description of the process of learning 319
M. Kun Kuti: Applications of the determinant K_n 337
T. Schmidt: Meditations on an algebra textbook for school 349
Report on the M. Schweitzer competition in 1972 355
Problems 385
Society life 391
Book reviews 407
New books 410

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft