312.046
III
22
1971

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

22. évfolyam, 1971

1-2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1971. december — 22. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest, V., Szabadság tér 17. Telefon: 311-793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest,V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: KHI. 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Erdős Pál és Joel Spencer: Erdős és Hajnal egy problémájáról. 1
Az 1970. évi Állami díjjal kitüntetett Hajnal András dolgozatainak jegyzéke 3
Prékopa András: A lineáris programozás egy kombinatorikai jellegű tárgyalásáról 7
B. H. van der Waerden: Ötlet és meggondolás. A Baudet sejtés bizonyítása 25
Kurt Mahler: Transcendens számok. I. 31
Lee Anna: Általánosított mátrix inverzekre adott újabb formulák 51
Nemetz Tibor: A teljes gráf adott Hamilton körével adott számú közös élt tartalmazó Hamilton körök aszimptotikus számáról 59
Gerencsér László: Globális konnexiók differenciálható sokaságokon 65
Molnár Emil: A hiperbolikus geometria kúpszeleteinek aszimptota tulajdonságai, az aszimptoták és a fókuszok kapcsolata szintetikus tárgyalásban 77
Freud Róbert: Megjegyzések Wirsing egy tételének bizonyításához 93
Kelemen József: Diophantoszi egyenletek megoldása fokszámuk csökkentésével 103
Szalay Mihály: Kvadratikus alakok osztályszámáról 111
Vermes Imre: Egybevágó hiperciklusok elhelyezéséről 119
ifj. Ruzsa Imre: A kongruenciatartó függvényekről 125
Kiss Ildikó: Fejes Tóth László egy sejtésének a bizonyítása 135
Pintz János: A Dirichlet-féle függvények elméletének egy pontjához 143
Névai G. Pál: A Laguerre-polinomok gyökein alapuló Lagrange-féle interpolációról 149
Recski András: A Fibonacci-számok általánosításáról 165
Gerencsér László: Irányítható felületek 171
Freud Róbert: Egy elemi módszer diofantikus egyenletek megoldására 173
Feladatrovat 179
Társulati élet 187
Könyvismertetés 193

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ERDŐS ÉS HAJNAL EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

ERDŐS PÁL és JOEL SPENCER

Legyen $\mathcal{S}$ tetszőleges halmaz $f(A)$ egy halmazfüggvény, mely $\mathcal{S}$ minden véges A részhalmazához $\mathcal{S}-A$ egy x elemét rendeli. Ha $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ egy tetszőleges részhalmaza, akkor

$$F(\mathcal{S}_1) = \bigcup_{A \subset \mathcal{S}_1} f(A),$$

ahol A végigfut $\mathcal{S}_1$ minden véges részhalmazán. Az $\mathcal{S}_1$ halmazt akkor nevezzük függetlennek, ha $\mathcal{S}_1 \cap F(\mathcal{S}_1)$ üres.

Legyen $|\mathcal{S}| = n < \aleph_0$ (azaz $\mathcal{S}$ véges halmaz). $h(n)$ legyen az a legnagyobb szám, hogy minden f függvényre $\mathcal{S}$-nek van egy $\mathcal{S}_1$ független részhalmaza, melyre $|\mathcal{S}_1| \geqq h(n)$. $H(n)$ legyen az a legkisebb szám, melyre van oly f függvény, hogy minden $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$ részhalmazra, melyre $|\mathcal{S}_2| \geqq H(n)$, $F(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}$. Erdős és Hajnal bebizonyították, [1] hogy ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor

$$\frac{\log n}{\log 2} < H(n) < \frac{\log n}{\log 2} + \frac{(3+\varepsilon)\log\log n}{\log 2}. \tag{1}$$

Valószínűnek látszik, hogy $\left(H(n) - \frac{\log n}{\log 2}\right) \to \infty$, ha $n \to \infty$, de e kérdés még nincs tisztázva. (1)-ből azonnal adódik, hogy

$$h(n) < \frac{\log n + 3\log\log n}{\log 2} + o(\log\log n) \tag{2}$$

[1]-ben $h(n)$-re csak nagyon gyenge alsó becslés áll.

Fennáll a következő

Tétel. Legyen $n > n_0(\varepsilon)$. Akkor

$$\frac{\log n - \log\log n}{\log 2} + o(\log\log n) < h(n) < \frac{\log n + 3\log\log n}{\log 2} + o(\log\log n).$$

A felső becslés, mint már mondtuk, [1]-ben áll és ezt nem sikerült javítanunk, s így csak az alsó becsléssel foglalkozunk.

Legyen $A \subset \mathcal{S}$, $|A| = r$. Az A halmazt akkor nevezzük rossznak, ha van oly $A_1 \subset A$ részhalmaza, melyre

$$|A_1| = r-1 \quad \text{és} \quad A = A_1 \cup f(A_1).$$

Az r elemű rossz részhalmazok száma nyilván legfeljebb $\binom{n}{r-1}$. Továbbá nyil-

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ván, ha $\mathcal{S}_1$ egyetlen rossz részhalmazt se tartalmaz, akkor (és csakis akkor) $\mathcal{S}_1$ független.

$\mathcal{S}$ azon k elemű részhalmazainak száma, melyek legalább egy rossz részhalmazt tartalmaznak, nyilván legfeljebb

$$\sum_{r=2}^{k} \binom{n}{r-1}\binom{n-r}{k-r} = A_k.$$

Ha $A_k < \binom{n}{k}$, akkor van k elemű független részhalmaz — azaz $h(n) \geqq k$. Mármost nyilván

$$A_k < n^{k-1} \sum_{r=2}^{k} \frac{1}{(r-1)!\,(k-r)!} < n^{k-1} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{3}$$

Továbbá egyszerű számolás adja, hogy ha $k < 2 \log n$ és $n > n_0$, akkor

$$\binom{n}{k} > \frac{1}{2} \frac{n^k}{k!}. \tag{4}$$

(3) és (4)-ből nyerjük, hogy ha

$$\frac{1}{2} \frac{n^k}{k!} > n^{k-1} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{azaz} \quad n > k\,2^k, \tag{5}$$

akkor $A_k < \binom{n}{k}$ és $h(n) \geqq k$. (5)-ből tételünk azonnal következik.

Érdekes lenne $h(n)$-et $o(\log \log n)$ pontossággal meghatározni. Egyelőre nem tudjuk, hogy igaz-e $h(n) > \dfrac{\log n}{\log 2}$ ha $n > n_j$.

Ha n végtelen számosság, $h(n)$ és $H(n)$ hasonlósága megszűnik, de ezzel e cikkben nem foglalkozunk.

IRODALOM

[1] ERDŐS PÁL és HAJNAL ANDRÁS, Egy kombinatorikus problémáról. Mat. Lapok 19 (1962), 345—348.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭРДЁША И ХАЙНАЛА

П. ЭРДЁШ и Д. СПЕНСЕР

ON A PROBLEM OF ERDŐS AND HAJNAL

P. ERDŐS and J. SPENCER

Let $|\mathcal{S}| = n$, $f(A)$ a set function which maps every subset of $\mathcal{S}$ into an element of $\mathcal{S}$ so that $f(A) \notin A$. A subset B of $\mathcal{S}$ is said to be independent if for every $A \subset B$ $f(A) \notin B$. $h(n)$ is the greatest integer for which for every function f there is an independent set having at least $h(n)$ elements. The authors prove

$$\frac{\log n - \log \log n}{\log 2} + o(\log \log n) < h(n) < \frac{\log n + 3 \log \log n}{\log 2} + o(\log \log n).$$

AZ 1970. ÉVI ÁLLAMI DÍJJAL KITÜNTETETT HAJNAL ANDRÁS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1. A. Hajnal. On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. Zeitschrift f. Math. Logik u. Grundlagen d. Math. *2* (1956), 131—136.
2. Hajnal, A.—Kalmár, L., Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez. I—II. Mat. Lapok (1956), 26—42, 218—229.
3. A. Hajnal and L. Kalmár. An elementary combinatorical theorem with an application to axiomatic set theory. Publ. Math. 4 (1955—56), 431—449.
4. A. Hajnal and J. Surányi. Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. Annales Universitatis Sci. Budapestiensis 1 (1958) 113—121.
5. P. Erdős and A. Hajnal. On the structure of setmappings. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), 111—130.
6. A. Hajnal. Neumann János axiomatikus halmazelméleti munkásságáról. Mat. Lapok 10 (1959), 5—11.
7. P. Erdős, G. Fodor and A. Hajnal. On the structure of inner set mappings. Acta Sci. Math., 20 (1959), 81—90.
8. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks on set theory VII., Acta. Sci. Math. 21 (1960) 154—163.
9. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks on set theory VIII., Michigan Math. Journ. 7 (1960), 187—191.
10. P. Erdős and A. Hajnal. On the topological product of discrete compact spaces, General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of Symposium in Prague in September 1961, 148—151.
11. A. Hajnal. Some results and problems in set theory. Acta Math. Sci. Hung. 11 (1960), 277—298.
12. A. Hajnal. Proof of a conjecture of S. Ruziewicz. Fundamenta Math. 50 (1961) 123—128.
13. A. Hajnal. On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961) 321—376.
14. P. Erdős and A. Hajnal. On a property of families of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961), 87—123.
15. J. Czipszer, P. Erdős and A. Hajnal. Some extremal problems on infinite graphs. Publications of the Math. Inst. of the Hungarian Academy of Science 7 Ser. A. (1962), 441—457.
16. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks concerning our paper „On the structure of set mappings". Acta Math. Sci. Hung. 13 (1962) 223—226.
17. P. Erdős and A. Hajnal. On a classification of denumerable order types and an application to the partition calculus. Fundamenta Math. 51 (1962) pp. 117—129.
18. K. Corrádi and A. Hajnal. On the maximal number of independent circuits in a graph. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1963) 423—439.

19. P. Erdős and A. Hajnal. On complete topological subgraphs of certain graphs. Annales Univ. Sci. Bp. 7 (1964) 143—149.
20. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks on set theory IX. Michigan Math. Journ. 11 (1964), 107—127.
21. A. Hajnal. Remarks on a theorem of W. P. Hanf. Fundamenta Math. 54 (1964), 109—113.
22. P. Erdős, A. Hajnal and J. W. Moon. A problem in graph theory. American Math. Monthly. 71 (1964). 1107—1110.
23. A Hajnal. On the topological product of discrete spaces. Notices of the Am. Math. Soc. (1964).
24. A. Hajnal. A theorem on k-Saturated graphs. Canadian Math. Journ. (1964).
25. P. Erdős, A. Hajnal and R. Rado. Partition relations for cardinal numbers. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965), 93—196.
26. P. Erdős and A. Hajnal. On a problem of S. Jònsson. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 14 (1966), 19—23.
27. P. Erdős and A. Hajnal. On chromatic number of graphs and setsystems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (1966) 17, 61—99.
28. P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner. On the complete subgraphs of graphs defined by systems of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966), 159—229.
29. P. Erdős and A. Hajnal. On decomposition of graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967) 359—377.
30. A. Hajnal and I. Juhász. Some results in set theoretical topology. Doklady Akad. Nauk USSR (oroszul) 172 (1967), 541—542. és Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 141—143. (angol fordítás.)
31. A. Hajnal and I. Juhász. On discrete subspaces of topological spaces. Indag. Math. 29 (1967), 343—356.
32. P. Erdős and A. Hajnal. On the chromatic number of infinite graphs. Graph theory Symposium held in Tihany, Hungary 1966, 83—98.
33. A. Hajnal and Gy. Petruska. Remarks on Darboux functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969) 13—20.
34. P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner. On sets of almost disjoint subset of a set. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19 (1968) 209—218.
35. A. Hajnal and I. Juhász. Some remarks on a property of topological cardinal functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 25—37.
36. G. Fodor and A. Hajnal. On regressive functions and α-complete ideals. Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences. 15 (1967), 427—432.
37. Erdős Pál, Hajnal András. Kromatikus gráfokról, Mat. Lapok 18 (1967) 1—4.
38. Hajnal András. A kontinuumproblémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról. Mat. Lapok 17 (1966), 253—260.
39. A. Hajnal and I. Juhász. On hereditarily α-Lindelöf and hereditarrily α-separable spaces. Annales Univ. Budapestiensis, 11 (1968), 115—124.
40. P. Erdős and A. Hajnal. Unsolved problems in set theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XIII. Providence, R. I. (1971) pp. 17—48.
41. A. Hajnal, I. Juhász. Discrete subspaces of topological spaces II. Indagationes Mathematicae. 31 (1969), 18—30.
42. P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner. A problem on well ordered sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung 20 (1969), 323—329.
43. Erdős Pál, Hajnal András. Egy kombinatorikus problémáról. Matematikai Lapok 19 (1968), 345—348.

44. A. Hajnal. On some combinatorial problems involving large cardinals. Fundamenta Math. 69 (1970), pp. 39—53.
45. A. Hajnal. Ulam-matrices for inaccessible cardinals. Bull. Acad. Pol. des Sci. 17 (1969), pp. 683—688.
46. A. Hajnal, E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. Combinatorial Theory and its applications. Balatonfüred, Hungary (1969) pp. 601—623.
47. P. Erdős, A. Hajnal, E. C. Milner. Set mappings and polarized partitions, ibidem. pp. 327—363.
48. A. Hajnal, Vera T. Sós. On a problem of bypartite graphs, ibidem.
49. P. Erdős, A. Hajnal. Some results and problems for certain polarized partitions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21 (1970) pp. 369—392.
50. Hajnal A., Jelentés az 1968. évi Schweitzer Miklós Matematikai emlékversenyről. Mat. Lapok.
51. A. Hajnal, E. C. Milner. Some theorems on scattered order types. P. M. H. 1 (1971), pp. 55—63.
52. P. Erdős, A. Hajnal, E. C. Milner. Polarized partition relations for ordinal numbers. Studies in pure mathematics. Academic Press, pp. 63—87.
53. P. Erdős, A. Hajnal. Ordinary partition relations for ordinal numbers. P. M. H. 1 (1971) 171—185.
54. P. Erdős, A. Hajnal, E. C. Milner. Partition relations for η_α sets. Hausdorff Memorial volume (megjelenés alatt).
55. A Hajnal. A negative partition relation. Proceedings of the National Academy 68 (1971), pp. 142—144.
56. P. Erdős, A. Hajnal. Problems and results in finite and infinite combinatorial analysis. Annals of the New York Academy of Sciences 175 (1970), pp. 115—124.
57. A. Hajnal, I. Juhász. Discrete subspaces and de Groot's conjecture about the number of open subsets. Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications, Belgrad (1969), 179.
58. A. Hajnal, E. C. Milner, E. Szemerédi. A cure for the telephone disease. Research paper No. 106, Yellow Series of The University of Calgary, January 1971. Can. Math. Bull. (megjelenés alatt).
59. A. Hajnal and I. Juhász. On disjoint representation of ultrafilters. Hausdorff Memorial Volume 33 (1971) 457—463
60. A. Hajnal and I. Juhász. On some consequences of Martin's axiom. Indagationes Math (megjelenés alatt).
61. J. Baumgartner and A. Hajnal. A proof (involving Martin's Axiom) of a partition relation. Fundamenta Math. (megjelenés alatt).
62. P. Erdős, E. Fried, A. Hajnal and E. C. Milner. Some remarks on simple tournaments. Algebra Universalis (megjelenés alatt).

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ АНДРАША ХАЙНАЛА

THE LIST OF WORKS OF A. HAJNAL

A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS EGY KOMBINATORIKAI JELLEGŰ TÁRGYALÁSMÓDJA

PRÉKOPA ANDRÁS

1. Bevezetés. Ebben a cikkben a lineáris programozás alapjait tárgyaljuk újszerű felfogásban. A tárgyalásmód érdekessége, hogy matematikai előismeretet nem tételez fel. Néhány fogalmat fel fogunk használni, ezeket azonban szisztematikusan letárgyaljuk a velük kapcsolatos, számunkra szükséges alaptételekkel együtt. A tárgyalásmódunk „kombinatorikai" elnevezését a későbbiekben megmagyarázzuk. A cikket alkalmasnak tartom a középiskolai szakköri tanulmányozásra is. Ezáltal a tanulók a modern alkalmazott matematika egy igen hatékony, bevált módszere alapjainak az ismeretét sajátíthatják el és így ezúton is lehetővé válik számukra a ma matematikájával való foglalkozás.

Noha matematikai előismeretet nem tételezünk fel, mégis az olvasó számára a matematikai jelölések ne legyenek nagyon idegenek. Amikor számról beszélünk, ezen mindig valós számot értünk. Halmazon, vagy rendszeren matematikai objektumok egy összességét értjük. Két halmaz egyesítésének (jele $\cup$), közös részének (jele $\cap$), különbségének (jele $-$) a fogalmat ismertnek vesszük; ezek olyan egyszerűek, hogy közismerteknek tekinthetők. Egy halmazt elemeinek felsorolásával is megadhatunk. Ekkor a felsorolt elemeket kapcsolt zárójelek közé tesszük. Előfordul, hogy egyetlen elemből álló halmazról van szó, pl. álljon a halmaz a 2 számból. A következetesség úgy kívánja, hogy ezt a halmazt így jelöljük $\{2\}$. Feltételezzük még a kettős összegezésben az összegezések sorrendje felcserélhetőségének az ismeretét.

2. Alapfogalmak és alaptételek. Néhány egyszerű fogalmat és tételt említünk meg, melyekre később támaszkodni fogunk.

1. Definíció. m-méretű vektoron rendezett szám m-est értünk, vagyis m számot, melyekkel kapcsolatban megmondjuk, melyik az első, második, ..., m-edik. Ezeket a számokat a vektor komponenseinek nevezzük. A vektorokat vastagított kis latin betűkkel jelöljük. Ha egy $\mathbf{a}$ vektort komponenseinek felsorolásával adunk meg, akkor a komponenseket vagy egy sorban, vagy egymás alá írva (ahogy mondani szokás) egy oszlopban helyezzük el kerek zárójelek között. Ha $\mathbf{a}$ komponensei $a_1, \ldots, a_m$, akkor tehát

$$\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_m), \quad \text{vagy} \quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

2. Definíció. Az $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_m)$ m-méretű vektor c-szeresén (ahol c valós szám) a $(ca_1, \ldots, ca_m)$ vektort értjük és ezt $c\mathbf{a}$-val, vagy $\mathbf{a}c$-vel jelöljük.

3. Definíció. Ha $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_m)$, $\mathbf{b}=(b_1, \ldots, b_m)$ m-méretű vektorok, akkor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegén az

$$(a_1+b_1, \ldots, a_m+b_m) \tag{2. 2}$$

vektort értjük és ezt $\mathbf{a}+\mathbf{b}$-vel jelöljük.

4. Definíció. Egy $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r$ m-méretű vektorokból alkotott vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezünk, ha a

$$\lambda_1\mathbf{g}_1+\cdots+\lambda_r\mathbf{g}_r = \mathbf{0} \tag{2. 3}$$

egyenlőség csak a $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$ esetben áll fenn. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r$ lineárisan összefüggők. A $\mathbf{0}$ jelölés annak a vektornak a jelölésére szolgál, melynek minden komponense zéró. Ezt a jelölést tetszőleges méretű vektorra alkalmazzuk, a konkrét esetekben általában világos, hogy milyen ennek a mérete.

5. Definíció. Tekintsünk egy m méretű vektorokból alkotott $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszert. Ennek egy $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ részhalmazát bázisnak nevezzük, ha ez utóbbiak lineárisan függetlenek és az előbbiek mind kifejezhetők az utóbbiak lineáris kombinációiként, vagyis találhatók olyan d_{ip} számok, hogy

$$\mathbf{a}_p=\sum_{i\in I} d_{ip}\mathbf{a}_i, \quad p=1, \ldots, n; \qquad I=\{i_1, \ldots, i_r\}. \tag{2. 4}$$

A (2. 4) felírásról áttekintő képet ad a következő séma

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \\ \hline \mathbf{a}_{i_1} & d_{i_1 1} & d_{i_1 2} & \ldots & d_{i_1 n} \\ \mathbf{a}_{i_2} & d_{i_2 1} & d_{i_2 2} & \ldots & d_{i_2 n} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{a}_{i_r} & d_{i_r 1} & d_{i_r 2} & \ldots & d_{i_r n} \end{array} \tag{2. 5}$$

A felső sorban álló $\mathbf{a}_p$ vektor (2. 4) előállítását úgy kapjuk meg, hogy az $\mathbf{a}_p$ alatti számokkal rendre megszorozzuk a tábla bal oldalán álló vektorokat, majd ezeket összeadjuk. Bizonyos vektorok valós számszorosainak összegét a szóban forgó vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

1. Tétel. Ha egy $\mathbf{g}$ vektor kifejezhető a vele azonos méretű lineárisan független $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor ez csak egyféleképpen tehető meg.

Bizonyítás. Ha ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= c_1\mathbf{g}_1+\cdots+c_r\mathbf{g}_r, \\ \mathbf{g} &= d_1\mathbf{g}_1+\cdots+d_r\mathbf{g}_r, \end{aligned} \tag{2. 6}$$

akkor ebből azonnal adódik, hogy

$$(c_1-d_1)\mathbf{g}_1+\cdots+(c_r-d_r)\mathbf{g}_r = \mathbf{0} \tag{2. 7}$$

és a lineáris függetlenség miatt $c_1-d_1 = 0, \ldots, c_r-d_r = 0$.

2. Tétel. Véges sok azonos méretű vektor akkor és csak akkor alkot lineárisan független vektorrendszert, ha közülük egyik sem fejezhető ki a megmaradók lineáris kombinációjaként.

A bizonyítást annak igen egyszerű volta miatt mellőzzük.

3. Tétel. Legyenek $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r$ azonos méretű, lineárisan független vektorok, $\mathbf{g}$ egy további vektor, melyre

$$\mathbf{g} = d_1\mathbf{g}_1 + \cdots + d_r\mathbf{g}_r. \tag{2. 8}$$

A $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{j-1}, \mathbf{g}, \mathbf{g}_{j+1}, \ldots, \mathbf{g}_r$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $d_j \neq 0$.

Bizonyítás. Ha $d_j = 0$, akkor (2. 8) szerint a $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{j-1}, \mathbf{g}, \mathbf{g}_{j+1}, \ldots, \mathbf{g}_r$ vektorok lineárisan összefüggők, hiszen a $\mathbf{g}$ vektort a jobb oldalra hozva, annak együtthatója -1, fennáll tehát egy (2. 3) típusú reláció nem mind 0 együtthatókkal. Ezzel beláttuk, hogy ha $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{j-1}, \mathbf{g}, \mathbf{g}_{j+1}, \ldots, \mathbf{g}_r$ lineárisan függetlenek, akkor $d_j \neq 0$.

Tegyük most fel, hogy $d_j \neq 0$ és bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{j-1}, \mathbf{g}, \mathbf{g}_{j+1}, \ldots, \mathbf{g}_r$ lineárisan függetlenek. Ha ezek lineárisan összefüggők volnának, akkor alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ nem mind zéró számokkal fennállna egy

$$\lambda_1\mathbf{g}_1 + \cdots + \lambda_{j-1}\mathbf{g}_{j-1} + \lambda_j\mathbf{g} + \lambda_{j+1}\mathbf{g}_{j+1} + \cdots + \lambda_r\mathbf{g}_r = \mathbf{0} \tag{2. 9}$$

reláció. Itt $\lambda_j \neq 0$, mert $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{j-1}, \mathbf{g}_{j+1}, \ldots, \mathbf{g}_r$ lineárisan függetlenek (lineárisan független vektorrendszer része is lineárisan független). Eszerint

$$\mathbf{g} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\mathbf{g}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\mathbf{g}_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\mathbf{g}_{j+1} - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_j}\mathbf{g}_r. \tag{2. 10}$$

Ám ez lehetetlenség, mert (2. 8)-ban $\mathbf{g}_j$ együtthatója $d_j \neq 0$, (2. 10)-ben pedig $\mathbf{g}_j$ együtthatója 0 és így a $\mathbf{g}$ vektor kétféleképpen volna kifejezhető a lineárisan független $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r$ vektorok segítségével, ellentétben az 1. Tétel állításával.

4. Tétel. Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ azonos méretű vektorok és legyen $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ ezek egy bázisa. Legyen $\mathbf{a}_j \in \{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$, $\mathbf{a}_k \notin \{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$. Tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{a}_i, i \in I, i \neq j, \mathbf{a}_k\}$ vektorrendszer vektorai lineárisan függetlenek, ahol $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Ekkor ez utóbbi is bázisa az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszernek.

Bizonyítás. Az $\mathbf{a}_k$ vektor kifejezhető az $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ vektorok lineáris kombinációjaként (a (2. 4) jelöléssel élve):

$$\mathbf{a}_k = \sum_{i \in I} d_{ik}\mathbf{a}_i, \tag{2. 11}$$

ahol $d_{jk} \neq 0$ a 3. Tétel szerint, továbbá

$$\mathbf{a}_p = \sum_{i \in I} d_{ip}\mathbf{a}_i, \qquad p = 1, \ldots, n. \tag{2. 12}$$

A (2. 11) egyenlőségből az $\mathbf{a}_j$ vektort kifejezhetjük. A kapott kifejezést (2. 12)-be helyettesítve látható, hogy $\mathbf{a}_p$ kifejezhető az $\mathbf{a}_i$, $i \in I$, $i \neq j$, $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként minden $p = 1, \ldots, n$ esetén. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. Tétel. Tekintsük az azonos méretű $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorokból alkotott halmazt és ennek egy lineárisan független vektorokból alkotott részhalmazát. Ekkor ez utóbbiak vagy bázist alkotnak, vagy bázissá kiegészíthetők az előbbiek közül bizonyos vektorok hozzávételével.

Bizonyítás. Ha a részhalmaz vektorai nem alkotnak bázist, akkor ehhez hozzávehető olyan további vektor $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ közül, hogy az eggyel nagyobb elemszámú részhalmaz vektorai lineárisan függetlenek. Ha ugyanis ez nem volna megtehető, akkor vektoraink bázist alkotnának. Valóban, legyen mondjuk $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ a szóban forgó részhalmaz. Ha $\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ lineárisan összefüggők, akkor alkalmas $\lambda, \lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_s$ számokkal — melyek között van 0-tól különböző — felírható volna egy

$$\lambda \mathbf{a}_p + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0} \tag{2. 13}$$

reláció. Itt $\lambda \neq 0$, különben $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ lineárisan összefüggők volnának, ellentétben a feltevéssel. Eszerint $\mathbf{a}_p$ kifejezhető $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ lineáris kombinációjaként.

Látjuk tehát, hogy $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ bővíthető további vektorral a lineáris függetlenség megtartása mellett. Az új rendszer vagy bázis, vagy tovább bővíthető s. í. t. Véges sok lépéssel eljutunk egy bázishoz és ezzel a bizonyítás készen van.

3. Egy transzformációs formula. Tekintsük az m-méretű $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorokat és legyen $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer egy bázisa. Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}_0$ kifejezhető $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ alkalmas lineáris kombinációjaként (ekkor nyilván kifejezhető az $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ vektorok alkalmas lineáris kombinációjaként is. Felírjuk a (2. 4) előállítást, de most az $\mathbf{a}_0$ vektorra is:

$$\mathbf{a}_p = \sum_{i \in I} d_{ip} \mathbf{a}_i, \; p = 0, 1, \ldots, n; \quad I = \{i_1, \ldots, i_r\}. \tag{3. 1}$$

Ennek a felírásnak a szemléltetésére is használható a (2. 5) tábla azzal a különbséggel, hogy most $\mathbf{a}_0$-nak is kell egy oszlopot csinálni. A táblát ellátjuk még egy új sorral, melyet bizonyos $c_0 = 0, c_1, \ldots, c_n$ számokra támaszkodva a következőképpen értelmezünk:

$$d_{op} = \sum_{i \in I} d_{ip} c_i - c_p, \qquad p = 0, 1, \ldots, n. \tag{3. 2}$$

Ezek után a tábla a következő

(3. 3)

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\ldots$	$\mathbf{a}_n$	
$\mathbf{a}_{i_1}$	$d_{i_1 0}$	$d_{i_1 1}$	$d_{i_1 2}$	$\ldots$	$d_{i_1 n}$	δ_{i_1}
$\mathbf{a}_{i_2}$	$d_{i_2 0}$	$d_{i_2 1}$	$d_{i_2 2}$	$\ldots$	$d_{i_2 n}$	δ_{i_2}
$\vdots$	—	—	—	—	—	$\vdots$
$\mathbf{a}_{i_r}$	$d_{i_r 0}$	$d_{i_r 1}$	$d_{i_r 2}$	$\ldots$	$d_{i_r n}$	δ_{i_r}
	d_{00}	d_{01}	d_{02}	$\ldots$	d_{0n}	δ_0

A tábla jobb oldalán elhelyezkedő $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_r}, \delta_0$ szimbólumok azoknak a soroknak mint $n+1$ méretű vektoroknak a jelölésére szolgálnak, amelyek mellett a szimbólumok állnak.

Legyen $j \in I$, $k \notin I$, azaz $\mathbf{a}_j$ legyen eleme a bázisnak, $\mathbf{a}_k$ pedig nem. Tegyük fel, hogy $d_{jk} \neq 0$. Ekkor a 3. Tétel szerint az $\mathbf{a}_i$, $i \in I \cup \{k\} - \{j\}$ vektorok lineárisan függetlenek, a 4. Tétel szerint pedig bázist alkotnak. Könnyű belátni, hogy $\mathbf{a}_0$ ezek lineáris kombinációjaként is kifejezhető. Vezessük be az

$$I^{(1)} = I \cup \{k\} - \{j\} \tag{3. 4}$$

jelölést és írjuk fel az $\mathbf{a}_p$, $p=0, 1, \ldots, n$ vektorokat az új bázis vektoraival (3. 1)-hez hasonlóan. Az új együtthatókat $d_{pi}^{(1)}$-gyel jelölve,

$$\mathbf{a}_p = \sum_{i \in I^{(1)}} d_{ip}^{(1)} \mathbf{a}_i, \qquad p=0, 1, \ldots, n. \tag{3. 5}$$

Az új (3. 2) számok pedig

$$d_{op}^{(1)} = \sum_{i \in I^{(1)}} d_{ip}^{(1)} c_i - c_p, \qquad p=0, 1, \ldots, n. \tag{3. 6}$$

Kapunk egy újabb (3. 3) típusú táblát, melyben a bal oldalon $\mathbf{a}_j$ helyett $\mathbf{a}_k$ szerepel, d_{ip} helyett mindenütt $d_{ip}^{(1)}$, a sorok jelölésére pedig alkalmazzuk a $\boldsymbol{\delta}_{i_1}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\delta}_{i_r}^{(1)}, \delta_0^{(1)}$ jelölést. Egy transzformációs formularendszert állít az alábbi

6. Tétel. Fennállnak a következő egyenlőségek

$$\boldsymbol{\delta}_i^{(1)} = \boldsymbol{\delta}_i^{(0)} - \frac{d_{ik}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)}, \qquad i \in I^{(0)} \cup \{0\}, i \neq j, \tag{3. 7}$$

$$\boldsymbol{\delta}_k^{(1)} = \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)},$$

ahol a 0 felső indexszel ellátott szimbólum ugyanazt jelenti, mint a felső index nélküli megfelelő szimbólum.

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi egyenlőséget

$$\mathbf{a}_p = \sum_{i \in I^{(0)}} d_{ip}^{(0)} \mathbf{a}_i - \beta \mathbf{a}_k + \beta \mathbf{a}_k = \sum_{i \in I^{(0)}} (d_{ip}^{(0)} - \beta d_{ik}^{(0)}) \mathbf{a}_i + \beta \mathbf{a}_k, \qquad p=0, 1, \ldots, n. \tag{3. 8}$$

Innen azonnal látható, hogy ha a β számot a következő módon választjuk

$$\beta = \frac{d_{jp}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}}, \tag{3. 9}$$

akkor (3. 8) jobb oldalán $\mathbf{a}_j$ együtthatója zéróval lesz egyenlő. Ebből következik, hogy ha $i \in I$, $i \neq j$, akkor

$$d_{ip}^{(1)} = d_{ip}^{(0)} - \frac{d_{jp}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} d_{ik}^{(0)} = \tag{3. 10}$$

$$= d_{ip}^{(0)} - \frac{d_{ik}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} d_{jp}^{(0)}, \qquad p=0, 1, \ldots n.$$

(3. 8) jobb oldalán $\mathbf{a}_k$ együtthatójaként megkapjuk a $d_{kp}^{(1)}$ számot, ami éppen (3. 9)-cel egyenlő, tehát

$$d_{kp}^{(1)} = \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} d_{jp}^{(0)}, \qquad p=0, 1, \ldots, n. \tag{3. 11}$$

A (3. 10) és a (3. 11) egyenlőségekből a (3. 7) egyenlőségek közvetlenül leolvashatók a felső sorban álló, $i=0$ esethez tartozó egyenlőség kivételével. Ezt pedig a következőképpen bizonyítjuk.

Definíció szerint

$$\boldsymbol{\delta}_0^{(1)} = \sum_{i \in I^{(1)}} c_i \boldsymbol{\delta}_i^{(1)} - \mathbf{c}, \tag{3. 12}$$

ahol c a $c_0=0$, $c_1, \ldots, c_n$ számokból mint komponensekből alkotott $n+1$ méretű vektor. Felhasználva a már bebizonyított transzformációs formulákat, azt kapjuk, hogy

$$\text{(3. 13)} \qquad \boldsymbol{\delta}_0^{(1)} = \sum_{\substack{i \in I^{(1)} \\ i \neq k}} c_i \left(\boldsymbol{\delta}_i^{(0)} - \frac{d_{ik}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} \right) + \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} c_k - \mathbf{c} =$$

$$= \sum_{i \in I^{(0)}} \left(\boldsymbol{\delta}_i^{(0)} - \frac{d_{ik}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} \right) c_i + \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} c_k - \mathbf{c} =$$

$$= \boldsymbol{\delta}_0^{(0)} - \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} \sum_{i \in I^{(0)}} d_{ik}^{(0)} c_i + \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} c_k = \boldsymbol{\delta}_0^{(0)} - \frac{d_{0k}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)}.$$

Ezzel a 6. Tételt bebizonyítottuk. Megjegyezzük, hogy a bizonyításban sehol nem használtuk ki a c_0 szám 0 mivoltát, a tétel tehát tetszőleges c_0 esetén igaz. A későbbiekben azonban mindig csak a $c_0=0$ esettel lesz dolgunk.

4. A lineáris programozás feladata. Mindenekelőtt megemlítünk egy gyakran alkalmazott jelölésmódot. Ha **a** és **b** n méretű vektorok, akkor az $\mathbf{a} \leqq \mathbf{b}$ reláción azt értjük, hogy

$$a_1 \leqq b_1, \ldots, a_n \leqq b_n.$$

A lineáris programozás feladata abban áll, hogy minimalizálandó, vagy maximalizálandó egy

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

alakú függvény,[1] ún. célfüggvény, feltéve, hogy teljesülnek bizonyos alábbi típusú egyenlőségek, egyenlőtlenségek:

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leqq b_i, \qquad i = 1, \ldots, t,$$

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, \qquad i = t+1, \ldots, m.$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0.$$

A minimalizálandó, illetve maximalizálandó szavak úgy értendők, hogy keresendő legalább egy olyan $x_1, \ldots, x_n$ számrendszer, melyen a célfüggvény a lehető legkisebb, illetve a lehető legnagyobb értékét veszi fel. A minimumkeresés esete visszavezethető a célfüggvény -1-szeresének maximumkeresésére, ezért a feladat megoldását illetően csak a maximumfeladattal foglalkozunk. Másfelől minden lineáris programozási feladat ekvivalens egy olyan lineáris programozási feladattal, melyben nincsenek egyenlőtlenségek, csak egyenlőségek. Ugyanis az előbb megfogalmazott feladat ekvivalens a következővel:

maximalizálandó $(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n)$,
feltéve, hogy

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n + v_i = b_i, \qquad i = 1, \ldots, t,$$

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, \qquad i = t+1, \ldots, m.$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, \quad v_1 \geqq 0, \ldots, v_t \geqq 0.$$

[1] A függvény általános fogalmát sem nem vezettük be, sem nem vettük ismertnek. Itt ugyanis csak erről az egy, mégpedig igen egyszerű függvénytípusról van szó, és erről sem kell tudni többet annál, hogy minden $x_1, \ldots, x_n$ számrendszerhez hozzárendeli a $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ számot.

Az ekvivalencia abban áll, hogy ha egy $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ számrendszer maximalizálja a célfüggvényt az eredeti feladatban, akkor az

$$x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)},$$

$$v_i^{(0)} = b_i - a_{i1}x_1^{(0)} - \cdots - a_{in}x_n^{(0)}, \qquad i = 1, \ldots, t$$

számrendszer maximalizálja a célfüggvényt, az utóbbi feladatban és viszont.

Az a feladat, mellyel a megoldás szempontjából részletesen foglalkozunk, a következő:

maximalizálandó $(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n)$,

feltéve, hogy

$$\mathbf{a}_1x_1 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{a}_0, \tag{4. 1}$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$$

ahol $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ azonos méretű vektorok. Feltesszük, hogy $\mathbf{a}_0$ kifejezhető az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok nem-negatív együtthatókkal vett lineáris kombinációjaként, másszóval van olyan $x_1, \ldots, x_n$ számrendszer, mely eleget tesz a feltételeknek.

6. Definíció. Egy $x_1, \ldots, x_n$ számrendszert, illetve az ezekből a számokból alkotott $\mathbf{x}$ vektort megoldásnak nevezünk, ha

$$\mathbf{a}_1x_1 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{a}_0. \tag{4. 2}$$

7. Definíció. Az $\mathbf{x}$ megoldást megengedett megoldásnak nevezzük, ha $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$, amelynek más jelölése $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$. A megengedett megoldások közül azt, melyhez tartozó célfüggvény-érték a legnagyobb, optimális megoldásnak nevezzük.

8. Definíció. Egy $\mathbf{x}$ megoldást bázismegoldásnak nevezünk, ha az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszernek van olyan $B = \{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ bázisa, hogy $x_p = 0$, ha $p \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Az $\mathbf{x}$ vektor $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ komponenseit báziskomponenseknek nevezzük. Ezeket a

$$\sum_{i \in I} x_i\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0, \qquad I = \{i_1, \ldots, i_r\} \tag{4. 3}$$

egyenlet egyértelműen meghatározza. Minden bázismegoldás tartozik egy vagy több bázishoz, de minden bázishoz csak egy bázismegoldás tartozik.

9. Definíció. Egy B bázist és a hozzá tartozó $\mathbf{x}$ bázismegoldást megengedettnek nevezünk, ha $\mathbf{x} \geqq 0$.

7. Tétel. Ha a (4. 1) feladatnak van megengedett megoldása, akkor van megengedett bázismegoldása is.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}$ megengedett megoldás, vagyis teljesítse a (4. 1) feladatban szereplő feltételeket. Az $\mathbf{x}$ vektor bizonyos komponensei lehetnek zérók. Ha vannak ilyenek, tegyük fel, hogy ezek az utolsók, vagyis

$$\mathbf{a}_1x_1 + \cdots + \mathbf{a}_sx_s = \mathbf{a}_0, \qquad s \leqq n. \tag{4. 4}$$

(Ha $\mathbf{x}$-nek minden komponense 0, akkor az természetesen megengedett bázismegoldás, vagyis ekkor nincs mit bizonyítani.) Ha $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ lineárisan függetlenek, akkor készen vagyunk, mert ezeket kiegészítve egy B bázissá, $\mathbf{x}$ a B bázishoz tar-

tozó megengedett bázismegoldás. Ha $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ lineárisan összefüggők, akkor találhatók olyan nem mind 0 számok, $\mu_1, \ldots, \mu_s$, melyekkel fennáll a

$$\mu_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \mu_s\mathbf{a}_s = \mathbf{0} \tag{4. 5}$$

egyenlőség. Feltehetjük, hogy a μ_i számok között van pozitív, mert ellenkező esetben (4. 5)-öt -1-gyel végigszorozzuk és akkor már ez az eset áll elő. A (4. 5) egyenlőséget d-vel megszorozva és levonva a (4. 4) egyenlőségből, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_1(x_1 - d\mu_1) + \cdots + \mathbf{a}_s(x_s - d\mu_s) = \mathbf{0}. \tag{4. 6}$$

Válasszuk meg a d számot a következő szabály szerint

$$d = \min_{i:\mu_i>0} \frac{x_i}{\mu_i} = \frac{x_j}{\mu_j} \tag{4. 7}$$

Ekkor $x_1 - d\mu_1 \geqq 0, \ldots, x_s - d\mu_s \geqq 0$ és ezek közül legalább az egyik ((4. 7) szerint a j-edik feltétlenül) zéróval egyenlő. Az alábbi n-méretű vektor

$$(x_1 - d\mu_1, \ldots, x_s - d\mu_s, 0, \ldots, 0),$$

a fentiek szerint megengedett megoldás és legfeljebb $s-1$ komponense pozitív. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg a pozitív komponensek melletti vektorok lineárisan függetlenek. Ezeket azután egy B bázissá kiegészítve, kapunk egy B bázishoz tartozó megengedett bázismegoldást. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. A bizonyítás módszert is ad arra vonatkozólag, hogy hogyan lehet egy megengedett megoldás ismerete alapján egy megengedett bázismegoldást konstruálni.

5. A lexikografikus szimplex módszer. Véges eljárást adunk a (4. 1) feladat megoldására. Kiindulunk egy megengedett bázismegoldásból és véges sok lépésben eljutunk egy olyan bázismegoldáshoz, mely a feladat optimális megoldása. Alkossuk meg a (4. 1) feladat $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektoraihoz és $c_1, \ldots, c_n$ számaihoz tartozó (3. 3) táblát és nevezzük ezt a $B = \{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ bázishoz tartozó szimplex táblának (a szimplex szó használatának a magyarázatára nem térünk ki). A B bázis legyen megengedett, ami annyit jelent, hogy az ún. 0-adik oszlop elemei nem-negatívak, legfeljebb az utolsó szám kivételével, vagyis

$$d_{i_1 0} \geqq 0, \ldots, d_{i_r 0} \geqq 0. \tag{5. 1}$$

A (3. 3) tábla az alábbi három típus valamelyikébe tartozik.

I. $d_{01} \geqq 0,\ d_{02} \geqq 0, \ldots, d_{0n} \geqq 0.$

II. Van olyan k $(1 \leqq k \leqq n)$, melyre $d_{0k} < 0$ és a (3. 3) táblában e fölött minden elem nem-pozitív, vagyis $d_{ik} \leqq 0$ minden $i \in I$ esetén.

III. Van olyan k $(1 \leqq k \leqq n)$, hogy $d_{0k} < 0$ és minden ilyen d_{0k} elem fölötti oszlopban van pozitív szám, vagyis minden ilyen k-hoz van olyan $i \in I$, hogy $d_{ik} > 0$.

8. Tétel. Az I. esetben a B bázishoz tartozó bázismegoldás a (4. 1) feladat optimális megoldása.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{y}$ megengedett megoldás, vagyis $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ és

$$y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_0. \tag{5. 2}$$

Minthogy $y_1 \geqq 0, \ldots, y_n \geqq 0$, továbbá

$$\sum_{i \in I} d_{ip} c_i \geqq c_p, \qquad p = 1, \ldots, n, \tag{5. 3}$$

ebből kifolyólag

$$\sum_{p=1}^{n} c_p y_p \leqq \sum_{p=1}^{n} y_p \sum_{i \in I} d_{ip} c_i = \sum_{i \in I} c_i \sum_{p=1}^{n} y_p d_{ip}. \tag{5. 4}$$

Másfelől az $\mathbf{a}_p$ vektorok (3. 1) előállítását felhasználva, (5. 2) alapján írhatjuk, hogy

$$\mathbf{a}_0 = \sum_{p=1}^{n} \mathbf{a}_p y_p = \sum_{p=1}^{n} y_p \sum_{i \in I} d_{ip} \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i \sum_{p=1}^{n} d_{ip} y_p. \tag{5. 5}$$

Figyelembe véve, hogy a B bázishoz tartozó bázismegoldás báziskomponensei $d_{i_1 0} = x_{i_1}, \ldots, d_{i_r 0} = x_{i_r}$, fennáll az

$$\mathbf{a}_0 = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i x_i \tag{5. 6}$$

egyenlőség. Az (5. 5) és az (5. 6) egyenlőségek egybevetéséből adódik, hogy

$$x_i = \sum_{p=1}^{n} d_{ip} y_p, \qquad i \in I. \tag{5. 7}$$

Ezt (5. 4) jobb oldalán behelyettesítve, a

$$\sum_{p=1}^{n} c_p y_p \leqq \sum_{i \in I} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{5. 8}$$

relációhoz jutunk, mely szerint minden $\mathbf{y}$ megengedett megoldás esetén a célfüggvény értéke kisebb, vagy egyenlő, mint a célfüggvény értéke az $\mathbf{x}$ bázismegoldás esetén. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

9. Tétel. Ha a II. eset fordul elő, akkor tetszőleges L számhoz található olyan megengedett megoldás, melyen a célfüggvény értéke L-nél nagyobb. Nincs tehát véges optimum.

Bizonyítás. Legyen k olyan, hogy $d_{0k} < 0$ és $d_{ik} \leqq 0$ minden $i \in I$ esetén. Tekintsük az

$$\mathbf{a}_0 = \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i - \beta \mathbf{a}_k + \beta \mathbf{a}_k = \sum_{i \in I} (x_i - \beta d_{ik}) \mathbf{a}_i + \beta \mathbf{a}_k \tag{5. 9}$$

egyenlőséget. Ha $\beta \geqq 0$ és ezen kívül β olyan, hogy a jobb oldalon mindegyik $\mathbf{a}_i$ együtthatója nem-negatív, akkor az

$$x_i - \beta d_{ik}, \quad i \in I; \ \beta \tag{5. 10}$$

számokból és 0-kból a többi helyeken egy megengedett megoldás épül fel. A célfüggvény értéke ezen a következő

$$\sum_{i \in I} (x_i - \beta d_{ik}) c_i + \beta c_k = \sum_{i \in I} x_i c_i - \beta d_{0k}. \tag{5. 11}$$

Minthogy $d_{ik} \leqq 0$ minden $i \in I$ esetén, ezért tetszőleges $\beta \geqq 0$ számot választva, az (5. 10) számok nem-negatívak, vagyis részei egy megengedett megoldásnak. Minthogy pedig $d_{0k} < 0$, (5. 11) jobb oldala tetszőleges naggyá tehető elég nagy β megválasztásával. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

10. Definíció. Egy $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_t) \neq \mathbf{0}$ vektort lexikografikusan pozitívnak nevezünk, jele $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$, ha komponenseiben balról jobbra haladva, az első zérótól kü-

lönböző komponens pozitív. Akkor mondjuk, hogy $\mathbf{z}_1$ lexikografikusan kisebb, mint a vele azonos méretű $\mathbf{z}_2$, ha $\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1$ lexikografikusan pozitív. E tény jelölésére a $\mathbf{z}_1 \prec \mathbf{z}_2$ vagy a $\mathbf{z}_2 \succ \mathbf{z}_1$ szimbólumot használjuk.

11. Definíció. A (3. 3) táblát lexikografikusan pozitívnak nevezzük, ha sorai (legfeljebb a 0-adik, más szóval az utolsó sor kivételével) lexikografikusan pozitívak, vagyis

$$\boldsymbol{\delta}_i \succ \mathbf{0}, \qquad i \in I. \tag{5. 12}$$

10. Tétel. Ha a B bázishoz tartozó (3. 3) tábla lexikografikusan pozitív, $d_{0k}<0$ és van olyan $i \in I$, hogy $d_{ik}>0$, továbbá megalkotjuk a $B^{(1)}$ bázist oly módon, hogy behozzuk az $\mathbf{a}_k$ vektort (ha $\mathbf{a}_p$ bázisbeli, akkor $d_{0p}=0$, amint az könnyen látható, tehát $d_{0k}<0$ miatt $\mathbf{a}_k$ nem lehet bázisbeli) és elhagyjuk azt az $\mathbf{a}_j$ vektort, melynek j indexére teljesül a

$$\operatorname*{lex\,min}_{i:d_{ik}>0} \frac{1}{d_{ik}} \boldsymbol{\delta}_i = \frac{1}{d_{jk}} \boldsymbol{\delta}_j \tag{5. 13}$$

egyenlőség, akkor a $B^{(1)}$ bázishoz tartozó (3. 3) tábla is lexikografikusan pozitív, továbbá

$$\boldsymbol{\delta}_0^{(1)} \succ \boldsymbol{\delta}_0^{(0)}. \tag{5. 14}$$

Megjegyzés. Véges sok egymástól különböző vektor (akár lexikografikusan pozitívak, akár nem) lexikografikus minimuma mindig egyértelműen meghatározott. Ezen azt a vektort értjük, melyre teljesül, hogy valamely k esetén a k-adik komponense kisebb, mint az összes többi vektor k-adik komponense, k-nál kisebb indexű komponensei pedig (ha van ilyen egyáltalán) kisebbek, vagy egyenlők a többi vektor megfelelő komponenseinél. A $\boldsymbol{\delta}_i$, $i \in I$ vektorok között nem lehet két olyan, hogy az egyik a másik állandószorosa, mert a (3. 3) tábla i_1 indexű sorában $\mathbf{a}_{i_1}$ alatt 1-es van, $\mathbf{a}_{i_2}$ alatt 0, míg az i_2 indexű sorában $\mathbf{a}_{i_2}$ alatt van 1-es és $\mathbf{a}_{i_1}$ alatt 0. Ezért az (5. 13) lexikografikus minimum egyértelműen meghatároz egy vektort. Ennek az indexe a j.

A tétel bizonyítása. A 6. Tételben bebizonyított (3. 7) transzformációs formulákra támaszkodunk. A $B^{(1)}$ bázis vektorainak indexhalmaza

$$I^{(1)} = I^{(0)} \cup \{k\} - \{j\}. \tag{5. 15}$$

(3. 7) alapján azonnal látjuk, hogy $\boldsymbol{\delta}_k^{(1)} \succ \mathbf{0}$, hiszen $\boldsymbol{\delta}_j^{(0)} \succ \mathbf{0}$ és $d_{jk}^{(0)}>0$. (3. 7) felső sorában két esetet kell vizsgálnunk. Ha egy $i \in I$, $i \neq j$ esetén $d_{ik}^{(0)}<0$, akkor

$$-\frac{d_{ik}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} \succ \mathbf{0}, \tag{5. 16}$$

tehát

$$\boldsymbol{\delta}_i^{(1)} = \boldsymbol{\delta}_i^{(0)} + \left(-\frac{d_{ik}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)}\right) \succ \mathbf{0}. \tag{5. 17}$$

Ha viszont $d_{ik}^{(0)}>0$, akkor ahhoz, hogy $\boldsymbol{\delta}_i^{(1)} \succ \mathbf{0}$ legyen, szükséges és elegendő, hogy teljesüljön az alábbi reláció

$$\frac{1}{d_{ik}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_i^{(1)} = \frac{1}{d_{ik}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_i^{(0)} - \frac{1}{d_{jk}^{(0)}} \boldsymbol{\delta}_j^{(0)} \succ \mathbf{0}. \tag{5. 18}$$

Ez azonban a j index (5. 13) alapján való kiválasztása miatt valóban teljesül. Eszerint a $B^{(1)}$ bázishoz tartozó tábla is lexikografikusan pozitív.

Be kell még bizonyítanunk az (5. 14) relációt. Ehhez kiírjuk az $i=0$ esethez tartozó (3. 7) transzformációs formulát. Az adódik, hogy

$$\delta_0^{(1)} = \delta_0^{(0)} - \frac{d_{0k}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \delta_j^{(0)}. \tag{5. 19}$$

Vegyük figyelembe, hogy $d_{0k}^{(0)} < 0$ miatt

$$-\frac{d_{0k}^{(0)}}{d_{jk}^{(0)}} \delta_j^{(0)} \succ \mathbf{0}. \tag{5. 20}$$

Ebből látható, hogy $\delta_0^{(1)} \succ \delta_0^{(0)}$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

A lexikografikus szimplex módszer a következő. Kiindulunk egy megengedett bázisból (a 7. Tétel szerint mindig van megengedett bázis és megengedett bázismegoldás, ha egyáltalán van megengedett megoldás), melyet B-vel jelölünk. Az ehhez tartozó (3. 3) tábla vagy lexikografikusan pozitív, vagy a vektorok átszámozásával azzá tehető, ugyanis a bázisbeli vektorokat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$-rel jelölve, a tábla az alábbi alakú:

(5. 21)

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\ldots$	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_{r+1}$	$\ldots$	$\mathbf{a}_n$
$\mathbf{a}_1$	d_{10}	1	0	$\ldots$	0	$d_{1,r+1}$	$\ldots$	d_{1n}
$\mathbf{a}_2$	d_{20}	0	1	$\ldots$	0	$d_{2,r+1}$	$\ldots$	d_{2n}
$\vdots$	$\ldots$							
$\mathbf{a}_r$	d_{r0}	0	0	$\ldots$	1	$d_{r,r+1}$	$\ldots$	d_{rn}
	d_{00}	d_{01}	d_{02}	$\ldots$	d_{0r}	$d_{0,r+1}$	$\ldots$	$d_{0,n}$

Minthogy a bázis megengedett, következik, hogy $d_{10} \geqq 0$, $d_{20} \geqq 0$, $\ldots$, $d_{r0} \geqq 0$. Ha valamelyik 0, akkor is lexikografikusan pozitív a megfelelő sor, mert balról jobbra haladva, az első zérótól különböző szám az 1-es. A vektorok sorrendjén többé már nem változtatunk. Megnézzük, hogy a tábla az I, II, III. típusok közül melyikbe tartozik. Az I, vagy II esetben az eljárás véget ér. Az I. esetben a feladatot megoldottuk. A II. esetben az eljárás kimutatja, hogy nincs véges optimum. A III. esetben tovább megyünk. Tetszés szerint kiválasztunk egy olyan k indexet, melyre $d_{0k} < 0$. Ehhez meghatározzuk az (5. 13) szabály alapján a hozzá egyértelműen tartozó j indexet. Áttérünk a $B^{(1)}$ bázisra. Tudjuk, hogy $\delta_0^{(0)} \prec \delta_0^{(1)}$. Ezután ismét három eset van s. í. t. valahányszor a III. eset fordul elő, mindig át tudunk térni egy olyan újabb bázisra, melyhez tartozó szimplex tábla lexikograkusan pozitív (tehát akkor a bázis megengedett is) és a 0-adik sor, vagyis az utolsó sor lexikografikusan megnő. Ilyenformán kapunk egy

$$\delta_0^{(0)} \prec \delta_0^{(1)} \prec \delta_0^{(2)} \prec \ldots \tag{5. 22}$$

sorozatot. Ebből az következik, hogy amelyik bázist érintettük, arra soha vissza nem térhetünk, különben az (5. 22) vektorok között volnának egyenlők. Eszerint a lexikografikus szimplex módszer véges sok lépéssel elvezet az I. vagy II. eset valamelyikéhez. Ugyanis véges sok bázis van, mert egyáltalán csak véges sok különböző módon választhatunk ki r számú vektort n közül és nem is mindegyik választás eredményez bázist.

Bebizonyítottuk tehát, hogy fennáll a

11. Tétel. A lexikografikus szimplex módszer véges sok lépésben véget ér.

Egyben bebizonyítottuk az alábi tételt is.

12. Tétel. Ha a (4. 1) feladatnak van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektoroknak mindig van olyan megengedett bázisa, melyhez tartozó (3. 3) táblában

$$d_{01} \geqq 0, \ \ldots, \ d_{0n} \geqq 0. \tag{5. 23}$$

6. Példa. (Beale példája [7]). Tekintsük a következő feladatot

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 &= 0, \\ \tfrac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 &= 0, \\ x_3 + x_7 &= 1, \\ x_1 \geqq 0, \ x_2 \geqq 0, \ x_3 \geqq 0, \ x_4 \geqq 0, \ x_5 \geqq 0, \ x_6 \geqq 0, \ x_7 \geqq 0, \\ \max\left(\tfrac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - 6x_4\right). \end{aligned}$$

Jelen esetben $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7$ vektoraink a következők

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6. 2}$$

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(6. 2) alapján azonnal látjuk, hogy $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7$ lineárisan függetlenek és alkalmas lineáris kombinációikkal mindegyik vektor előállítható, sőt $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7$ nemcsak bázis, hanem megengedett bázis is. A báziskomponensek

$$x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1.$$

Vektorainkat nem számozzuk át, elegendő az is a lexikografikus szimplex módszer alkalmazása szempontjából, ha a (3. 3) induló tábla megalkotásakor az $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7$ vektort előre vesszük a felső sorban. Az induló szimplex tábla a következő

(6. 2)

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_5$	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
$\mathbf{a}_6$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
$\mathbf{a}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0
	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6

1. tábla

A tábla a III. kategóriába tartozik. Az $\mathbf{a}_1$ vektor bevonható a bázisba, mert $d_{01} = -\frac{3}{4} < 0$. A d_{01} szám fölött van két pozitív szám. Ezek sorait rendre el kell osztani az adott sorban álló előbb említett pozitív számmal. Az alábbi vektorokat kapjuk:

$$4(0, 1, 0, 0, \tfrac{1}{4}, -8, -1, 9), \quad 2(0, 0, 1, 0, \tfrac{1}{2}, -12, -\tfrac{1}{2}, 3). \tag{6. 3}$$

A (6. 3) vektorok lexikografikus minimuma a második, ezt az $\mathbf{a}_6$ melletti sorból alkottuk. Tehát $j = 6$, az $\mathbf{a}_6$ vektor elhagyja a bázist. Az új táblát a (3. 7) transzformációs formulákkal kapjuk:

(6. 4)

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_5$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$
$\mathbf{a}_1$	0	0	2	0	1	-24	-1	6
$\mathbf{a}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0
	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	2	$-\frac{5}{4}$	$\frac{21}{2}$

2. tábla

Most csak $\mathbf{a}_3$ vonható be a bázisba. Fölötte csak egy pozitív szám áll és ez $\mathbf{a}_7$ sorában van. Tehát $\mathbf{a}_7$ elhagyja a bázist. Az új tábla:

(6. 5)

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_5$	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	2	1	1	-24	0	6
$\mathbf{a}_3$	1	0	0	1	0	0	1	0
	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	2	0	$\frac{21}{2}$

3. tábla

Ez a tábla az I. kategóriába tartozik, tehát optimális megoldáshoz jutottunk. Az optimális $\mathbf{x}$ vektor a következő:

$$\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, \tfrac{3}{4}, 0, 0), \tag{6. 6}$$

az optimum értéke pedig

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 = \frac{5}{4}. \tag{6. 7}$$

A d_{00} szám mindig a célfüggvény értékével egyenlő az adott bázismegoldás esetén. Az optimum értéke tehát mindig az $\mathbf{a}_0$ alatti utolsó szám az utolsó táblában.

A lexikografikus szimplex módszer helyett a gyakorlatban szokás az ún. szimplex módszert alkalmazni. Ez abban áll, hogy kiindulunk egy B megengedett bázisból; ha a tábla a III. típusba tartozik, akkor választunk egy k indexet, melyre $d_{0k}<0$, majd ehhez meghatározunk egy tetszőleges olyan j indexet, melynek $\mathbf{a}_j$ vektorát a bázisból $\mathbf{a}_k$ érdekében eltávolítva, az új $B^{(1)}$ bázis megengedett lesz. Az eljárás végességére azonban nincs garancia és éppen az előbbi példa lehetőséget ad a végtelen eljárás, az ún. ciklizálás bemutatására. Ha ugyanis az 1. táblát tekintve eldöntjük, hogy $\mathbf{a}_1$ jön be a bázisba, de nem az $\mathbf{a}_6$ vektort hagyjuk el, hanem az $\mathbf{a}_5$-öt, akkor ismét megengedett bázist kapunk. Részletes tárgyalás nélkül közöljük, hogy az alábbi bázisok az alábbi sorrendben követhetik egymást a szimplex módszer szabályainak betartása mellett:

(6. 8)
$$\begin{gathered}\{\mathbf{a}_5,\ \mathbf{a}_6,\ \mathbf{a}_7\},\\ \{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_6,\ \mathbf{a}_7\},\\ \{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_7\},\\ \{\mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_7\},\\ \{\mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4,\ \mathbf{a}_7\},\\ \{\mathbf{a}_5,\ \mathbf{a}_4,\ \mathbf{a}_7\},\\ \{\mathbf{a}_5,\ \mathbf{a}_6,\ \mathbf{a}_7\},\end{gathered}$$

Látható, hogy a végén visszajutunk az $\{\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7\}$ bázishoz és ha ugyanúgy járunk el, mint az előbb, akkor az eljárás ciklizál, soha nem ér véget. A lexikografikus szimplex módszer két lépéssel elvezetett az optimális megoldáshoz.

7. Induló bázis keresése, a kétfázisú módszer. Az eddigi tárgyalás során véges eljárást adtunk a lineáris programozás feladatának megoldására. Feltételeztük azonban, hogy ismerünk egy induló megengedett bázist. Most röviden ismertetjük az induló bázis keresésének legfontosabb módszerét, mely az ún. kétfázisú módszer első fázisában áll.

Tekintsük a (4. 1) feladatot. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_0$ vektor minden komponense nem-negatív. Ez a feltétel nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen ha a feltételi egyenletrendszer valamelyikében a jobb oldalon negatív szám áll, az egyenletet -1-gyel megszorozva, a kívánt alakot kapjuk. A (4. 1) feladatból kiindulva megkonstruáljuk az alábbi feladatot:

maximalizálandó $(-x_{n+1}-\cdots-x_{n+m})$,
feltéve, hogy

(7. 1)
$$\mathbf{a}_1x_1+\cdots+\mathbf{a}_nx_n+\mathbf{a}_{n+1}x_{n+1}+\cdots+\mathbf{a}_{n+m}x_{n+m}=\mathbf{a}_0,$$
$$x_1\geqq 0,\ \ldots,\ x_n\geqq 0,\quad x_{n+1}\geqq 0,\ \ldots,\ x_{n+m}\geqq 0,$$

ahol az $\mathbf{a}_i$, $i=0, \ldots, n+m$ vektorok m-méretűek, továbbá $\mathbf{a}_{n+1}=\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n+m}=\mathbf{e}_m$, ez utóbbiak pedig az ún. egységvektorok, $\mathbf{e}_i$ i-edik komponense 1, a többi pedig 0. Minthogy az $\mathbf{a}_{n+1}, \ldots, \mathbf{a}_{n+m}$ vektorok nem szerepelnek az eredeti feladatban, ezeket mesterséges vektoroknak nevezik. A mesterséges vektorok a (7. 1) feladat egy megengedett bázisát alkotják. Valóban, ezek lineárisan függetlenek, alkalmas lineáris kombinációjukként bármely m-méretű vektor kifejezhető, végül pedig $\mathbf{a}_0$ kifejez-

hető ezek nemnegatív súlyokkal vett lineáris kombinációjaként ti. $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_{n+1}x_{n+1}+\cdots$ $\cdots+\mathbf{a}_{n+m}x_{n+m}$ ahol x_{n+i} egyenlő $\mathbf{a}_0$ i-edik komponensével, $i=1, \ldots, m$. A (7. 1) feladatnak van véges optimuma, mert a célfüggvény értéke minden megengedett megoldáson negatív, vagy zéró és így nem vehet fel tetszőlegesen nagy értéket. A (7. 1) feladat célfüggvényének maximuma zéróval egyenlő, ha a (4. 1) feladatnak van megengedett megoldása. Ha tehát a (7. 1) feladatra alkalmazzuk a lexikografikus szimplex módszert, akkor az optimális megoldás esetén $x_{n+1}=\cdots=x_{n+m}=0$ adódik. Mármost két eset van. Az eljárás végén nyert optimális bázis nem tartalmaz, illetve tartalmaz mesterséges vektort. Az előbbi esetben nyertünk egy megengedett bázist a (4. 1) feladat számára. Ekkor elvetjük a mesterséges vektorokat és a (7. 1) feladat célfüggvényét, továbbá előírjuk a (4. 1) feladat célfüggvényét és megoldjuk a (4. 1) feladatot. Ez a kétfázisú módszer második fázisa. Az utóbbi esetben maradt mesterséges vektor a bázisban, ám a bázisnak az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok közé tartozó része is lineárisan független vektorokból áll, tehát az kiegészíthető bázissá az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok közül bizonyosak hozzávételével (5. Tétel). Így ismét a (4. 1) feladat induló megengedett bázisához jutunk és elvégezzük a második fázist, a (4. 1) feladat optimalizálását.

Példa. Tekintsük a következő feladatot

$$
\begin{gathered}
x_1+2x_2+3x_3+2x_4 = 7, \\
4x_1+6x_2+2x_3+ \ x_4 = 10, \\
x_1\geqq 0, \quad x_2\geqq 0, \quad x_3\geqq 0, \quad x_4\geqq 0, \\
\max\,(x_1+3x_2+4x_3+5x_4).
\end{gathered} \tag{7. 2}
$$

Az első fázisban megoldjuk az alábbi feladatot:

$$
\begin{gathered}
x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5 \quad = 7, \\
4x_1+6x_2+2x_3+ \ x_4 \quad +x_6 = 10, \\
x_1\geqq 0, \quad x_2\geqq 0, \quad x_3\geqq 0, \quad x_4\geqq 0, \quad x_5\geqq 0, \quad x_6\geqq 0, \\
\max\,(-x_5-x_6).
\end{gathered} \tag{7. 3}
$$

Bevezetjük az

$$
\mathbf{a}_0=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_5=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
$$

vektorokat, $\mathbf{a}_5$ és $\mathbf{a}_6$ mesterséges vektorok. Az ezekből alkotott bázishoz tartozó szimplex tábla a következő:

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$
$\mathbf{a}_5$	7	1	2	3	2	1	0
$\mathbf{a}_6$	10	4	6	2	1	0	1
	−17	−5	−8	−5	−3	0	0

1. tábla

A bázisba az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ vektorok akármelyike bekerülhet. Ha $\mathbf{a}_2$ mellett döntünk, akkor a lexikografikus szimplex módszer szabálya szerint $\mathbf{a}_6$ hagyja el a bázist. Az új tábla a következő:

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$
$\mathbf{a}_5$	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
$\mathbf{a}_6$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	$-\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{3}$

2. tábla

Most úgy döntünk, hogy $\mathbf{a}_3$ bejön a bázisba; ekkor a kimenő vektor $\mathbf{a}_5$. Az új tábla, mely egyben az első fázis utolsó táblája a következő:

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$
$\mathbf{a}_3$	$\frac{11}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$
	0	0	0	0	0	1	1

3. tábla

Véget ért az első fázis, mégpedig oly módon, hogy az optimális bázis nem tartalmaz mesterséges vektort. Az $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok a (4. 1) feladat induló megengedett bázisát alkotják. Az ezekhez tartozó, a (4. 1) feladatnak megfelelő szimplex tábla egy részét a 3. táblából nyerjük az utolsó sor és az utolsó két oszlop elhagyásával. Az új utolsó sort a (4. 1) feladat célfüggvényének felhasználásával kiszámítva, az alábbi táblához jutunk:

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_3$	$\frac{11}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{5}{7}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	0	$-\frac{1}{14}$
	$\frac{68}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	0	$-\frac{33}{14}$

4. tábla

Elkezdődik a második fázis, de egy lépésben be is fejeződik, mert ha $\mathbf{a}_4$ bejön a bázisba, $\mathbf{a}_3$ pedig kimegy, akkor az alábbi táblát kapjuk:

	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{a}_4$	$\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	1
$\mathbf{a}_2$	$\frac{13}{10}$	$\frac{7}{10}$	1	$\frac{1}{10}$	0
	$\frac{149}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{33}{10}$	0

5. tábla

Ha az első fázis végeztével marad mesterséges vektor a bázisban, akkor az átmenet a második fázisba bonyolultabb a numerikus számolás szempontjából. Ezt az esetet nem részletezzük.

Megjegyezzük még, hogy ha az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok között vannak egységvektorok, akkor ugyanilyen mesterséges vektorokat nem vezetünk be. Ez esetben az első fázis feladata m-nél kevesebb mesterséges vektort tartalmaz, a célfüggvény csak a mesterséges vektorok melletti x-ek összegének -1-szerese lesz. Induló bázisként a mesterséges vektorok és az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ közötti egységvektorok használhatók. Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok között gyakran azért vannak egységvektorok, mert bizonyos egyenlőtlenségeket egyenlőségekké tettünk (l. a 4. szakasz elejét). Gyakran előfordul, hogy mindegyik feltétel kisebb-egyenlőséges és a jobb oldalakon álló számok nemnegatívak. Ekkor az egyenlőségessé átalakított feltételekben megtalálható mind az m egységvektor. Ekkor sem mesterséges vektorra, sem pedig első fázisra egyáltalán nincs szükség.

Elméletünk elvi része a 6. szakasszal befejeződött. A 7. szakasszal az volt a célunk, hogy a tárgykörrel most ismerkedő olvasót egyben képessé tegyük egyszerűbb feladatok kézi számolás útján való megoldására. A jobban elmélyülni szándékozók számára ajánljuk a [8] művet.

A kombinatorika a véges halmazok elmélete. Véges sok bázis, véges sok (3. 3) típusú tábla van és ezek között kell olyat találni, melyre $d_{i0} \geqq 0$, $i \in I$, továbbá $d_{0p} \geqq 0$, $p = 1, \ldots, n$. Módszert adtunk egy olyan tábla megkeresésére, melyre ezek teljesülnek, feltéve, hogy ismeretes egy a $d_{i0} \geqq 0$, $i \in I$ feltételeknek eleget tevő bázis. Ebben áll a jelenlegi tárgyalás kombinatorikai jellege.

A lineáris programozás felfedezője L. V. Kantorovics szovjet matematikus. A feladat megoldására szolgáló igen hatékony szimplex módszer megalkotója Dantzig amerikai matematikus [3]. Az általunk adott tárgyalásmód lényegében megtalálható a [8] könyvben is. Hivatkoznunk kell még a [2], [4], [5] művekre, melyekből fontos gondolatokat nyertünk az itt közölt tárgyalásmód kialakításához. A 6. szakaszban tárgyalt példa Beale-től származik [1]. Ez a példa azért érdekes, mert megmutatja a ciklizálás lehetőségét a szimplex módszer alkalmazásakor. A kétfázisú módszert Dantzig, Orden és mások fejlesztették ki a Rand Corporationnél.

IRODALOM

[1] E. M. L. Beale, Cycling in the dual simplex algorithm, Naval Research Quarterly Logistics 2 (1955), 269—275.

[2] A. Charnes, W. W. Cooper, A. Henderson, An introduction to linear programming, Wiley, New York, 1953.

[3] G. B. Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, a [7] cikkgyűjteményben 339—347 oldalak.

[4] G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe, The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints, Pacific J. of Math. 5 (1955), 183—195.

[5] D. Gale, The theory of linear economic models, McGraw-Hill, New York, 1960.

[6] Л. В. Канторович, Математические методй в организации и планировании производства, МГУ, 1939.

[7] T. C. Koopmans (szerkesztő), Activity analysis of production and allocation, Wiley, New York, 1951.

[8] Prékopa A., Lineáris programozás I, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.

ОБ ОДНОЙ ДИСКУССИИ КОМБИНАТОРНОГО ХАРАКТЕРА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

A. ПРЕКОПА

A COMBINATORIAL THEORY OF LINEAR PROGRAMMING

A. PRÉKOPA

The presented elementary combinatorial theory is based on the elegant and general format of the lexicographics published first in [8]. This version of the lexicographics can be considered as a refined paraphrase of the previous theories in [2], [4] and [5]. No mathematical knowledge is supposed except for some usual notations. The author thinks that the paper is understandable for secondary school students too and in this way they can get acquainted with part of the applied mathematics of our time.

ÖTLET ÉS MEGGONDOLÁS A MATEMATIKÁBAN
A BAUDET-SEJTÉS BIZONYÍTÁSA*

B. L. VAN DER WAERDEN*

Ennek a cikksorozatnak az első részében írtam röviden olyan ötletről, amiről szerencsés körülmények folytán pontosan le lehetett írni azokat a feltételeket, amik között fölmerült. Ezt most részletesebben írom le.

A korán meghalt holland matematikus, Baudet, a következő sejtést mondta ki: „Ha a természetes számok 1, 2, 3, ... halmazát két osztályra osztjuk, akkor legalább az egyik tartalmaz l-tagú számtani sorozatot, ahol l tetszőleges, előre adott természetes szám". Amikor Artin, Schreier és én 1926-ban, Hamburgban, Artin táblája előtt erről a sejtésről beszélgettünk, sikerült azt nekünk közösen bebizonyítanunk. Eközben egy nagyon lényeges gondolat Artintól származik. Az az ötlet, ami végül is elvezet a megoldáshoz, tőlem eredt.

A kéttagú sorozat esete, $l=2$, triviális: ha három számot két osztályba osztunk, akkor közülük kettőnek ugyanabba az osztályba kell tartoznia.

Az $l=3$ esetben sem kell tekinteni az összes természetes számot, hanem csak az 1-től 9-ig terjedőket. Bárhogyan osztjuk ezeket a számokat két osztályba, egyikük tartalmaz háromtagú sorozatot; ezt bebizonyítjuk az összes lehetséges eset végignézésével. Eljárhatunk például a következőképpen:

Azt az osztályt, amelyik az 1 számot tartalmazza, hívhatjuk elsőnek. Attól függően, hogy a 2, 3, 4 számok melyik osztályba tartoznak, nyolc eset lehetséges. Példaként tekintsük azt az esetet, amikor 1 és 2 az első osztályba tartoznak, a 3 és 4 a másodikba.

Ha 5 a második osztályba tartozik, akkor a 3, 4, 5 sorozatot nyerjük. Ezért föltehetjük, hogy 5 az első osztályba tartozik.

Ha 8 az első osztályba tartozik, akkor a 2, 5, 8 sorozatot nyerjük. Tartozzék tehát 8 a második osztályba.

Ha 6 a második osztályba tartozik, akkor a 4, 6, 8 sorozatot nyerjük. Tartozzék ezért 6 az első osztályba.

Ha el akarjuk kerülni az 5, 6, 7 sorozatot, a 7-et a második osztályhoz kell számítanunk.

A 9-nél már nincs kiút. Ha az első osztályba tartozik, akkor az 1, 5, 9 sorozatot nyerjük, ha pedig a második osztályba, akkor a 7, 8, 9 sorozatot nyerjük.

Hasonlóan, vagy még könnyebben nézhetjük végig az összes többi esetet. Mindezt végiggondoltam még az Artinnal és Schreierrel való találkozás előtt.

Schreier most azt a kérdést tette föl, lehet-e a Baudet-sejtést élesíteni abban azértelemben, hogy a számsornak csak véges sok kezdő elemét tekintjük, más szóval, hogy létezik olyan $N(l)$ korlát, hogy már az 1-től $N(l)$-ig terjedő számokat két osztályra

* Elemente der Matematik 9 (1954)-ben publikálva.

osztva, az egyik osztály tartalmaz l-tagú sorozatot. Erre a kérdésre könnyen lehetett válaszolni. Meggondoltuk, hogy ha a Baudet-sejtés egyáltalában igaz, akkor ilyen $N(l)$ korlát is létezik. Egy ismert halmazelméleti meggondolásmód, az „átlós módszer", erre az eredményre vezet. Nincs szükség itt ennek a módszernek a reprodukálására, mert a további meggondolásokban már nem játszik semmi szerepet.

Most megpróbáltuk bizonyítani a feltevést mindjárt az élesebb formában, az $N(l)$ korláttal. Ha az állítást esetleg teljes indukció segítségével kell bebizonyítani, akkor az ilyen véges élesítés csak hasznos lehet; így okoskodtunk.

Ekkor Artin észrevette, hogy ha a feltevés általánosan igaz két osztályra, akkor szükségszerűen igaz k osztályra is. Legyen például $k=4$. Ekkor mindenekelőtt ezeket az osztályokat kettőnként összekapcsolhatjuk. Így kapunk egy kevésbé finom felosztást, csak két osztályra. Az egyikben szükségszerűen van $N(l)$ tagú számtani sorozat. Ennek a sorozatnak tagjait megszámozhatjuk 1-től $N(l)$-ig. Ezek a számok a finomabb felosztásnak ismét két osztályába tartoznak, és az állításnak megfelelően, amit igaznak fogadtunk el két osztályra, ezen osztályok egyikében szükségszerűen van l-tagú sorozat.

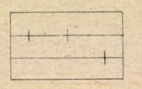
Így továbbmegyünk két osztályról négyre, pontosan ugyanígy négy osztályról nyolcra stb. Ezért az osztályok száma tetszőleges nagy lehet.

Most megpróbáltuk az állítást l-re bebizonyítani teljes indukcióval. $l=2$-re az úgynevezett skatulyaelvvel van dolgunk. Ha $k+1$ tárgyat kell elhelyezni k skatulyában, akkor egyikük feltétlenül tartalmaz legalább két tárgyat. Ez nagyon hasznos elv, amit Dirichlet sikerrel alkalmazott a számelméletben.

Artin azt várta — és a siker azt mutatta, hogy igaza volt —, hogy a kettőről k osztályra való általánosítás hasznos lesz az indukciós bizonyításnál. Mégpedig lehetséges, amint gondolta, megpróbálni a sejtést bebizonyítani tetszőleges k-ra és l tagra, indukciós feltevésnek véve, hogy már be van bizonyítva minden k-ra és $l-1$ tagra.

Ezt az eleinte kissé határozatlan meggondolást a megbeszélés során élesítettük, főleg Artin, a következő módon. Tekintsük feladatunknak a sejtés bebizonyítását két osztályra és l tagú sorozatra. Ha az összes egész szám két osztályba van osztva, akkor például az egymást követő számokból álló számhármasok automatikusan nyolc osztályra vannak osztva, mert a számhármas három száma egymástól függetlenül az 1. vagy 2. osztályban lehet, és ez $2^3=8$ lehetőséget ad. Most ezeket a számhármasokat megszámozhatjuk, véve például mindig a számhármas első számát, mint sorszámot, úgy, hogy az n sorszámú számhármas az $n, n+1, n+2$ számokból áll. Ezek a sorszámok ekkor nyolc osztályra vannak osztva, és erre a nyolc osztályra kétségkívül alkalmazhatjuk az indukciós feltevést.

Ugyanez a helyzet, ha több, mint három egymást követő számból álló „blokkokat" tekintünk. Az indukciós feltevés szerint létezik elég sok egymást követő „blokk" között $l-1$ tagú számtani sorozat blokkokból. A számok osztályokra való osztásának „mintája", amit ezen blokkok egyikében találunk, pontosan ugyanígy ismétlődik meg a sorozatnak mind az $l-1$ blokkjában. Lehetséges, gondolta Artin, hogy ezek az ismétlődő minták lehetővé teszik l-tagú sorozat konstrukcióját. Ezen kívül a blokkok, ha elég hosszúak, maguk is tartalmaznak $l-1$ tagú számtani sorozatot egy osztályban levő számokból. Ezek is fölhasználhatók a konstrukcióhoz.



1. ábra

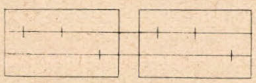
Megpróbáltuk ezért, mivel az állítás igaz $l=2$-re, átmenni $l=2$-ről $l=3$-ra, mégpedig kezdetben két osztályt vettünk (tekintet nélkül arra, hogy ezt az esetet megvizsgáltuk már az előbb, az összes lehetséges eset figyelembevételével). A számokat vízszintesen egységnyi távolságra levő kis keresztirányú vonásokkal jelöltük meg két vízszintes egyenesen, amelyek a két osztályt jelölték.

Bármely egymást követő három szám között az indukciós feltevés szerint, azaz ebben az esetben a skatulyaelv szerint, kell lenni kettőnek, ami ugyanabba az osztályba tartozik, mondjuk az elsőbe. Ha most folytatjuk azt a számtani sorozatot, ami ezzel a két vonással kezdődik, akkor feltehetjük, hogy a harmadik vonás már nem az első osztályhoz tartozik (mivel az ellenkező esetben már készen volnánk), hanem a másodikhoz. Így kapjuk az 1. ábrát.

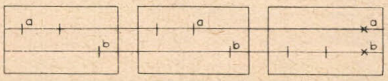
Eddig az összes meggondolást közösen végeztük. A továbbiakban pedig a következőképpen okoskodtam:

Minden, öt egymást követő számból álló blokkban föl kell lépni olyan elrendezésnek, mint az 1. ábrán, mivel a blokk első három száma közül már kettő szükségszerűen ugyanabba az osztályba tartozik, és ezt a kéttagú sorozatot a blokkon belül kiegészíthetjük háromtagúvá.

Ezek az elrendezések ismétlődnek, mivel az öt számból álló blokkok $2^5=32$ osztályra vannak osztva, és 33 egymást követő[1] blokk között a skatulyaelv szerint kell lenni legalább kettő egyformának. Így kapjuk a 2. ábrát, miközben az első és második blokk eleje között a távolság vízszintesen legfeljebb 32.



2. ábra



3. ábra

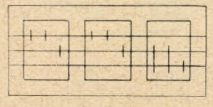
De ez még mindig nem ad háromtagú sorozatot. Hogy ilyen sorozatot kapjak, eltoltam a második, öt számból álló blokkot még egyszer ugyanolyan távolsággal, és tekintettem azt a háromtagú sorozatot, ami ez által az eltolás által keletkezett az említett számokból (3. ábra).

Ennek az eltolt sorozatnak a harmadik számánál már nincs kiút. Vagy az első osztályba tartozik: ekkor ebben az osztályban van a, a, a sorozat. Vagy a második osztályhoz tartozik, ekkor a második osztályban van b, b, b sorozat.

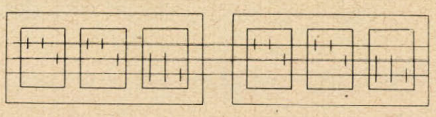
Ez a bizonyítás egyelőre csak a már korábban tekintett $k=2$, $l=3$ esetre szól. Ennek ellenére az elmondása után az volt a határozott meggyőződésem, hogy kezemben van már az általános megoldás.

Artin és Schreier nem hitték még. Ekkor analóg módon bebizonyítottam nekik a soron következő $k=3$, $l=3$ esetet.

Ebben az esetben mindenekelőtt alkalmazhatjuk ugyanazt a meggondolást (öt helyett hét számból álló blokkokkal, és 2^5 helyett 3^5 távolsággal), de most a harmadik blokk harmadik számánál van kiút. Tartozhat a harmadik osztályhoz, és így kapjuk a 4. ábrán látható elrendezést. Minden, $3^5+3^5+7=h$ egymást követő számból álló nagy blokkban található ilyen elrendezés. Most a nagy blokkok 3^h osztályra esnek szét. Minden 3^h+1 egymást követő nagy blokk között a skatulyaelv értelmében van két egyforma. Beléjük rajzoljuk a kis blokkokat, és így kapjuk az 5. ábrát.



4. ábra

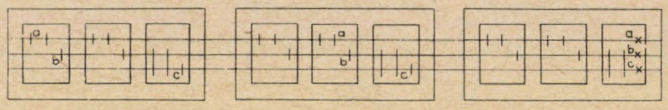


5. ábra

[1] „Egymást követő" jelentése: egy hellyel eltolt.

Most pedig eltoljuk a nagy blokkot, és ekkor az eltolt c szám helyén vagy a, a, a sorozatot kapunk az első osztályban, vagy b, b, b sorozatot a másodikban, vagy c, c, c sorozatot a harmadikban (6. ábra).

Ekkor minden érdekeltnek világos lett, hogy $l=3$-ra a bizonyítás módszere alkalmazható tetszőleges k-ra. De Artin és Schreier meg akarták még nézni az $l=4$ esetet.



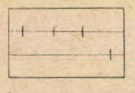
6. ábra

Mindenekelőtt megint két osztályt vettem. A már bebizonyítottak szerint elég sok, mondjuk n egymást követő szám között van háromtagú sorozat, amelynek mindegyik eleme egy osztályba tartozik. Ha meghosszabbítjuk ezt a sorozatot, akkor a negyedik tag más osztályba tartozik (az ellenkező esetben ugyanis már készen volnánk). Mind a négy szám hozzátartozik egy m egymást követő számból álló blokkhoz, ahol m az

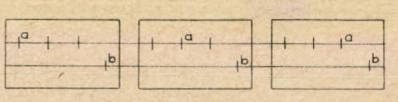
$$n+(n-1)/2 \tag{1}$$

szám egész része. Minden ilyen blokkban fellép tehát a 7. ábrán mutatott elrendezés.

A g hosszúságú blokkok 2^g számú osztályra vannak osztva. Elég sok, mondjuk $n(3, 2^g)$ egymást követő blokk között van ezért három blokk számtani sorozatban, amik ugyanabba az osztályba tartoznak. Az első blokkban levő elrendezés pontosan megismétlődik a másodikban és a harmadikban (8. ábra).



7. ábra



8. ábra

Ha most hozzávesszük a negyedik blokkot, szükségszerűen újból kapunk a, a, a, a vagy b, b, b, b számtani sort.

Mihelyt ezt kihoztam, mindhármunknak világos lett, hogy az eljárás tovább ugyanúgy megy, hogy tetszőleges l-re is sorban kimeríthetjük a $k=2, 3, \ldots$ eseteket, és így áttérhetünk általában $l-1$-ről l-re.

Az a bizonyítás, amit megjelentettem a „Nieuw Archief voor Wiskunde" 15, 212 (1927)-ben, az itt szemléletesen megmagyarázott gondolatsor pontos reprodukálása. Az előbb tekintett (1) kifejezésnek, aminek általános alakja

$$n+\left[\frac{n-1}{l-2}\right] \tag{2}$$

a „Nieuw Archief"-ben az $l-1$-ről l-re való áttérésnél a

$$n(l-1,k)+\left[\frac{n(l-1,k)-1}{l-2}\right] \tag{3}$$

kifejezés felel meg.

Az a bizonyítás, amit Hincsin közöl egy nagyon szép könyvében[2], nem különbözik lényegesen az enyémtől; csak a (2) kifejezés helyett egyszerűen $2n$-et vesz. Továbbá ő egymást követő blokkok helyett egymás mellett elhelyezett és érintkező blokkokat tekint, mint $(a, \ldots, a+b-1)$ és $(a+b, \ldots, a+2b-1)$, ami által a becslés kicsit kevésbé pontos.

A fölfedezés pszichológiájának sajátos nehézségei vannak. Többségünknek nehézséget jelent utólag visszaemlékezni mindarra, ami a fejünkben szövődött. Még nehezebb úgy reprodukálni a saját előkészítő meggondolásainkat, hogy a többiek azt megértsék. Azokat a rövid gondolattöredékeket, amelyek az önmagunkkal való beszélgetésünket alkotják, nem lehet másoknak továbbadni precizírozás és megmagyarázás nélkül, a precizírozás által pedig eltorzulnak a gondolatok.

Mégis a Baudet sejtésről való beszélgetésünk esetén a reprodukálást lehetővé tevő feltételek sokkal kedvezőbbek, ugyanis az összes gondolatot, ami bennünk fölmerült, mindjárt kimondtuk, és a többiek ezeket felfogták a táblára rajzolt vonások segítségével. Arra, amit kimondtunk és lerajzoltunk, sokkal jobban tudunk emlékezni, és sokkal jobban tudjuk reprodukálni, mint magukat a gondolatokat. Minden útmutatás, amit Artintól és Schreiertől kaptam, szintén ki lett mondva és *csak annyira hatottak rám, amennyire ki lettek mondva.* Tehát ez ideális eset a felfedezés folyamatának végiganalizálására, és az igazi ötletnek a rendszeres meggondolástól való szétválasztására.

A számoknak keresztirányú vonásokkal való geometriai szemléltetése magától adódott. Ugyanez igaz a végtelen számsorozatoknak az első véges sok tagjával való helyettesítésének megpróbálására, különösen, amikor a legegyszerűbb esetekben az első véges sok szám elegendőnek bizonyult. Az első véges sok szám kézzelfoghatóbb és áttekinthetőbb, mint a végtelen számsorozat. Elég alapunk volt elvárni, hogy a tételnek ezzel az élesítésével a teljes indukció meg lesz könnyítve.

„Mindig a legegyszerűbb esettel kell kezdeni" — szokta mondani Hilbert. Így az $l=2$ esettel kezdtük, és az ismert „skatulyaelvhez" jutottunk. Ez nemcsak $k=2$-re érvényes, hanem tetszőleges k-ra. Így a tetszőleges k-ra való általánosítás már teljesen világos volt.

Mivel $l=2$-re a sejtés igaz, felmerült a gondolat, hogy az indukcióban $l-1$-ről l-re következtessünk. Az indukciós bizonyítás szempontjából természetesen a leghasznosabb, ha $l-1$ hosszúságra lehetőleg sokat teszünk fel, és l hosszúságra lehető kevés bizonyítását tűzzük ki célul.

Így lett felvázolva a bizonyítás terve. $l-1$ hosszúságra és *minden* k-ra kellett igaznak elfogadni a sejtést és megpróbáltuk bizonyítani l hosszúságra és egyetlen k-ra, például $k=2$-re. Ekkor kezdetben a legegyszerűbb esetre ($k=2$, $l=3$) szorítkoztunk, és próbáltunk találni olyan meggondolást, amit esetleg át lehet vinni a soron következő esetekre.

A skatulyaelvnek megfelelően az egyik osztályban van kéttagú sorozat $(a, a+d)$. Hogy áttérjünk háromtagú sorozatra, hozzá kell még fűzni az $a+2d$ számot. Ha ez ugyanabban az osztályban van, mint a és $a+d$, akkor készen vagyunk; ezért feltehetjük, hogy $a+2d$ a másik osztályban van (1. ábra).

Eddig nem volt más lehetőség a meggondolásra, de most a bizonyítás megakadt. Hogy tovább haladjunk, szükséges volt egy ötlet, és ha nem csal az emlékezetem, Artin volt az, akinek ez az ötlete támadt. Az indukciós feltevést (azaz ebben az esetben a skatulyaelvet) nemcsak számokra, hanem egymást követő blokkokra is alkalmazhatjuk, mivel ezek is osztályokra vannak osztva. Itt az osztályok száma egy

[2] A. J. Hincsin, A számelmélet három gyöngyszeme (oroszul 1947; németül 1951; angolul 1952).

kicsit több, de ez nem baj, mert rendelkezésünkre áll az indukciós feltevés *minden k*-ra.

Artin ötlete következtében biztosítva volt az egész mintablokk megismételhetősége, és elkészíthettük a 2. ábrát, ahol az első blokkban két szám volt az első osztályból, és egy a másodikból, és ezek számtani sorozatot alkottak, a második blokkban pedig a megfelelő számok ugyanabban az osztályban voltak.

Hogy kellett most áttérni a háromtagú sorozatra? Emlékezzünk arra, hogy az előbb tekintett példában a 9 kiút nélküli helyzete abban állott, hogy úgy az első, mint a második osztályban háromtagú sorozatot képez, az első esetben az 1-gyel és 5-tel, a másodikban a 7-tel és 8-cal.

Teljesen hasonlóan jutunk most itt is kilátástalan helyzethez, hozzácsatoljuk a 3. ábrán ábrázolt harmadik blokkot, és találunk benne egy számot, ami vagy az első osztályban képez egy *a*, *a*, *a* háromtagú sorozatot, vagy a második osztályban egy *b*, *b*, *b* sorozatot.

Így ez volt az én ötletem. Annak megfelelően, amit mondtam, világosnak kell lenni, hogy az ötlet könnyen adódott, és egyszerűen, csaknem szükségszerűen következett a korábbi meggondolásokból. Az egyedüli szám, amely a 2. ábrán mind az első osztály két számával *a*, *a*, *a* sorozatot, mind a második osztály két számával *b*, *b*, *b* sorozatot alkot, a 3. ábrán a harmadik blokk *a*-val és *b*-vel jelölt harmadik száma.

A leginkább figyelemreméltó volt ebben az ötletben a teljes bizonyosság érzése, ami vele együtt járt. Intuitív meggyőződésem volt, hogy pontosan ugyanaz a módszer, amit a táblán bemutattam a $k=2$, $l=3$ esetben, célhoz vezet az összes bonyolultabb esetekben is.

Hogyan keletkezhetett ez a meggyőződés a tudat alatt, azt nem tudom. Mégis úgy gondolom, meg tudom magyarázni, miért nem voltak Artin és Schreier olyan biztosak ebben még akkor sem, amikor megmagyaráztam nekik a $k=2$, $l=3$ esetet. Ők csak az eredményt látták: *a*, *a*, *a* sorozat létezését az első osztályban, vagy *b*, *b*, *b* sorozatét a másodikban. Én pedig megtaláltam az ilyen sorozatok képzésének a módját, és határozott érzésem volt, hogy ez a módszer alkalmazható a soron következő esetekre is.

Ez úgy van, mint amikor almát szakítunk a fáról. Ha leszakítunk egy almát, és a másik kissé magasabban függ, akkor lehetséges, hogy mi magunk tudjuk, hogy kissé nagyobb erőkifejtéssel elérjük még azt a másik almát is, míg a néző, aki csak azt látja, hogy elértük épp azt az egy almát, kételkedik ebben. Mégis nemcsak az almát szereztük meg, hanem annak a mozdulatnak az érzését is, amit a leszakításakor végeztünk.

Az az érzés, hogy a bizonyítás módszere tovább is alkalmazható, nemegyszer csalóka. Gyakran kiderül később, hogy a soron következő esetekben újabb nehézség bukkan föl. Ennek ellenére az ilyen előérzetek a bizonyítás módszereinek alkalmazhatósági területéről a leghasznosabb útjelzők közé tartoznak a matematikai kutatásoknál.

(Fordította: ifj. Makai Endre)

ИДЕЯ И ОБДУМЫВАНИЕ.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ БОДЕ

Б. Л. ВАН ДЕР ВАРДЕН

THE HISTORY OF THE PROOF OF BAUDET CONJECTURE

B. L. VAN DER WAERDEN

TRANSZCENDENS SZÁMOK EGZISZTENCIÁJA ÉS FŐBB TULAJDONSÁGAI* I.

KURT MAHLER

1. Azok a számok, melyekkel a továbbiak során foglalkozni fogunk valósak vagy képzetesek és feladatunk annak eldöntése, hogy a szóban forgó számok algebraiak vagy transzcendensek-e.

A ξ számot *algebrai szám*nak nevezünk, ha létezik legalább egy, racionális együtthatós

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0 \quad (m \geqq 1, a_m \neq 0)$$

egyenlet, melyet ξ kielégít. Mivel az együtthatók beszorozhatók a nevezők legkisebb közös többszörösével, ξ eleget tesz egy olyan egész együtthatós egyenletnek is, melynek együtthatói relatív prímek. Ha ξ nem tesz eleget ilyen algebrai egyenletnek, akkor *transzcendens*nek nevezzük.

Könnyen bizonyíthatjuk, hogy algebrai számok léteznek. Legyenek p, q és $r \neq 0$ tetszőleges számok. Ekkor a $\varrho = p/r$ racionális szám kielégíti az $rx - p = 0$ lineáris egyenletet és a $\sigma = (p+qi)/r$ komplex szám eleget tesz az $r^2x^2 - 2prx + p^2 + q^2 = 0$ másodfokú egyenletnek. Így ϱ és σ algebrai számok. Nyilvánvaló, hogy az összes ilyen ϱ sűrű halmazt alkot a számegyenesen és a σ-k halmaza is sűrű a komplex síkon. Ebből következik, hogy a valós algebrai számok sűrű halmazt alkotnak a számegyenesen és a komplex algebrai számok halmaza mindenütt sűrű a komplex síkon.

Ismeretes, hogy az algebrai számok halmaza, A egy test. Így, ha ξ transzcendens és $\alpha \neq 0$ A valamely eleme, akkor $\alpha\xi$ is transzcendens. Ezért, ha létezik legalább egy valós transzcendens szám, akkor a valós transzcendens számok sűrűn helyezkednek el a valós egyenesen és ha legalább egy komplex transzcendens szám létezik, akkor a komplex transzcendens számok halmaza sűrűn helyezkedik el a komplex síkon.

1844-ben J. Liouville bizonyította először azt a nem nyilvánvaló tényt, hogy léteznek transzcendens számok. Módszerét jelen fejezet során később ismertetjük, egyéb összefüggéseivel kapcsolatban. Először a jóval egyszerűbb G. Cantor-féle egzisztencia bizonyítást (1874) tárgyaljuk.

2. A továbbiak során a következő jelöléseket használjuk:

Legyen $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ tetszőleges, valós vagy komplex együtthatós polinom. A

$$H(a) = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_m|) \quad \text{és} \quad L(a) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|$$

* Jelen cikk Kurt Mahlernek, a transzcendens számok elmélete kiváló kutatójának előadásaiból a bevezető részt tartalmazza. A közlést ezen elmélet iránti megélénkült érdeklődés indokolja, melynek egyik jeleként kapott A. Baker 1970-ben Fields-Medalt idevágó eredményeiért.

mennyiségeket a polinom *magasság*ának és *szélesség*ének nevezzük; mindkettő a polinom együtthatói nagyságának mérésére szolgál. Bár a magasságot gyakrabban használjuk a hosszúság előnye az, hogy tetszőleges $a(x)$ és $b(x)$ polinomok esetén kielégíti az alábbi két egyszerű egyenlőtlenséget:

$$L(a+b) \leqq L(a)+L(b), \quad L(ab) \leqq L(a)L(b). \tag{1}$$

Ha az $a(x)$ fokszáma pontosan m (azaz $a_m \neq 0$), akkor a $\partial(a)=m$ jelölést használjuk. A zérus polinom fokszámára

$$\partial(0) = -\infty$$

jelölést használjuk, ahol a $-\infty$ szimbólum minden véges egésznél kisebbet jelent.

Így érvényesek a

$$\partial(a+b) \leqq \max(\partial(a), \partial(b)), \quad \partial(ab) = \partial(a)+\partial(b) \tag{2}$$

összefüggések.

Célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket is:

$$\Lambda(a) = 2^{\partial(a)} L(a), \quad \text{általánosabban} \quad \Lambda_C(a) = C^{\partial(a)} L(a),$$

ahol a második kifejezésben szereplő C, egynél nagyobb valós állandó.

3. Egy $a(x)$ egész együtthatós polinom *primitív* ha együtthatói relatív prímek, ha pedig a_m, a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív, akkor *normált polinom*ról beszélünk. Ugyanezen jelöléseket fogjuk használni a megfelelő $a(x)=0$ algebrai egyenlettel kapcsolatban is.

Legyen ξ egy tetszőleges algebrai szám. Ekkor ξ végtelen sok különböző primitív és normált $a(x)=0$ egyenletnek tesz eleget. Ezen egyenletek között van egy és csak egy legkisebb fokszámú; jelölje ezt

$$A(x|\xi) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M \quad (A_M > 0),$$

ekkor $\partial(A)=M$. $A(x|\xi)$-t ξ *minimálpolinom*jának nevezzük. A minimálpolinom lényeges tulajdonsága, hogy irreducibilis a racionális számtest felett, azaz nem bontható fel két pozitív fokszámú racionális együtthatós polinom szorzatára.

Bevezetjük még a következő jelöléseket: $\partial^0(\xi)=\partial(A)=M$ ξ *fokszáma*, $H^0(\xi)=H(a)$ ξ *magassága*, $L^0(\xi)=L(A)$ ξ *szélessége*. Itt a felső index 0-t azért használjuk, hogy ezeket a mennyiségeket megkülönböztessük a konstans ξ polinom fokszámától, magasságától és szélességétől.

Az $A(x|\xi)=0$ egyenlet M-ed fokú, így M gyöke van:

$$\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(M-1)}. \tag{3}$$

A gyökök egymástól különböző valós vagy komplex számok, és egyikük ξ-vel egyenlő. Tegyük fel, hogy minden esetben

$$\xi = \xi^{(0)}.$$

Az $A(x|\xi)=0$ egyenlet (3)-ban szereplő gyökei ξ *algebrai konjugált*jai.

4. A Cantor-féle bizonyítás lényege az, hogy megmutatja, hogy az összes algebrai számok halmaza, A megszámlálható, a valós számoknak pedig létezik egy nem megszámlálható részhalmaza, jelölje ezt B. A két halmaz különbsége $B-A = B-(A \cap B)$ nem üres, így B tartalmaz olyan elemet ami nincs A-ban, tehát transzcendens.

Egyszerűen belátható az, hogy A megszámlálható. Jelölje $\mathscr{A}$ a különböző irreducibilis primitív és normált polinomok halmazát. Ezek a polinomok pozitív fokszámúak és egészegyütthatósak. A minden eleméhez egyértelműen hozzárendeltünk egy $\mathscr{A}$-beli polinomot és az $\mathscr{A}$-beli polinomok gyökei elemei A-nak.

Minden rögzített páros egész r számra a

$$\Lambda(A)=r$$

egyenletnek véges sok $\mathscr{A}$-beli polinom tesz eleget. Rendezzük sorban az $\mathscr{A}$-beli polinomokat: először tekintsük azokat, melyekre $\Lambda(A)=2$, majd azokat, melyekre $\Lambda(A)=4$, ezeket követi $\Lambda(A)=6$ stb. ... Ily módon $\mathscr{A}$ összes polinomját

$$A_1(x), A_2(x), A_3(x), \ldots$$

sorozatba rendeztük.

Állítsuk sorba előbb $A_1(x)$, majd $A_2(x)$ gyökeit, és így tovább:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

sorozat tartalmazza A minden elemét, így A megszámlálható.

Természetesen nemcsak A, hanem tetszőleges részhalmaza is megszámlálható. Így megszámlálható a valós algebrai számok halmaza, a $[0, 1]$ intervallum valós algebrai számainak halmaza, a $|z|<1$ komplex egységkör komplex algebrai számainak halmaza.

5. Jelölje B azon ξ valós számok halmazát, melyek előállíthatók

$$\xi = \cfrac{0+1}{g_1+\cfrac{1}{g_2+\cfrac{1}{g_3+\cfrac{1}{\ddots}}}} = [0, g_1, g_2, g_3, \ldots]$$

végtelen lánctört alakban, ahol a $g_1, g_2, g_3, \ldots$ számok csak az 1 vagy 2 értéket veszik fel. B a $[0, 1]$ intervallum összes irracionális számainak egy részhalmaza.

Állítjuk, hogy B *nem megszámlálható halmaz.* Ellenkező esetben B elemei egy $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ sorozatba rendezhetők lennének, ahol ξ_r egy lánctört:

$$\xi_r=[0, g_1^{(r)}, g_2^{(r)}, \ldots] \qquad (r=1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

Ekkor az

$$\eta = [0, 3-g_1^{(1)}, 3-g_2^{(2)}, \ldots]$$

lánctört B-nek eleme. η különbözik B minden elemétől, tehát ellentmondásra jutottunk.

B nem megszámlálható, a 4. elején tett megjegyzés szerint B *tartalmaz transzcendens számokat.* Ennél jóval több is igaz: nevezetesen B összes transzcendens elemét tartalmazó $B-A$ halmaz *nem megszámlálható*, mivel $B = (A \cap B) \cup (B-A)$ ahol $A \cap B$ megszámlálható.

Shibata 1929-ben bebizonyította, hogy minden B halmazbeli ξ-re

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{12}q^2}$$

tetszőleges p és $q(>0)$ egészekre. Alkalmazva ezt az eredményt B transzcendens elemeire; látjuk, hogy vannak racionális számokkal rosszul approximálható transzcendens számok. A későbbiekben szerepelnek majd olyan transzcendens számok is, melyek racionális számokkal igen jól közelíthetők.

Eredményünkből csupán az következik, hogy léteznek transzcendens elemei B-nek. Maillet 1906-ban megjelent könyvében megad egy konstrukciót a B halmaz transzcendens elemeire, bizonyítása azonban igen bonyolult.

Mivel *valós* transzcendens számok léteznek, az 1.-ban tett megjegyzés szerint *nem-valós komplex* transzcendens számok is léteznek. Így a komplex transzcendens számok halmaza *nem* megszámlálható.

6. Miután beláttuk, hogy transzcendens számok léteznek, egyszerű szükséges és elégséges feltételt keresünk annak eldöntésére, hogy egy szám transzcendens-e. Mielőtt erre rátérünk, a polinomok és kvadratikus alakok néhány, önmagában is érdekes tulajdonságával fogunk foglalkozni.

Legyen

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

tetszőleges komplex együtthatós polinom. Az előzőekben már bevezettük a $\partial(a)$ fokszámot, a $H(a)$ magasságot és az $L(a)$ szélességet, továbbá az $\Lambda(a)$ és $\Lambda_C(a)$ kifejezéseket, és megjegyeztük, hogy $L(a)$ rendelkezik az (1) tulajdonsággal.

Célszerű még bevezetni $a(x)$ együtthatóinak következő függvényét:

$$M(a) = \exp\left(\int_0^1 \log |a(e^{2\pi i t})|\, dt\right) > 0 \quad \text{ha} \quad a(x) \not\equiv 0$$

és $M(0) = 0$ ha $a(x) \equiv 0$. $M(a)$-t $a(x)$ *mértékének* nevezzük; a konstans polinom esetén $M(a)$ megegyezik a közönséges abszolút értékkel.

A definíció azonnali következményeként $M(a)$ multiplikatív:

$$M(ab) = M(a)M(b). \tag{5}$$

$a(x)$ zérushelyei segítségével egy egyszerűbb előállítás adható $M(a)$-ra, mely a jólismert Jensen-formula speciális esete. A továbbiakban egy ettől független bizonyítást adunk erre az előállításra.

7. Legyen $r \geqq 0$ és τ tetszőleges valós szám. Vizsgáljuk az $x - re^{2\pi i\tau}$ lineáris polinom mértékét:

$$M(x - re^{2\pi i\tau}) = \exp\left(\int_0^1 \log |e^{2\pi i t} - re^{2\pi i\tau}|\, dt\right) = \exp\left(\int_0^1 \log |e^{2\pi i (t-\tau)} - r|\, dt\right).$$

Az integrandus t-ben periodikus függvény, periódushosszúsága 1, ha tehát $t - \tau = s$-t helyettesítünk az integrálba, a következő összefüggést kapjuk:

$$M(x - re^{2\pi i\tau}) = \exp\left(\int_0^1 \log |e^{2\pi i s} - r|\, ds\right) = M(x - r).$$

Tehát

$$M(x - \alpha) = M(x - |\alpha|) \tag{6}$$

minden α komplex számra. Így tetszőleges pozitív egész n-re:

$$\{M(x-\alpha)\}^n = \prod_{k=0}^{n-1} M(x-\alpha e^{2\pi ik/n}) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \log|e^{2\pi it} - \alpha e^{2\pi ik/n}|\, dt\right) =$$

$$= \exp\left(\int_0^1 \log|e^{2\pi int} - \alpha^n|\, dt\right).$$

Helyettesítsünk a fenti képletbe $nt = u$-t, ekkor:

$$\{M(x-\alpha)\}^n = \exp\left(\int_0^n \log|e^{2\pi iu} - \alpha^n|\, \frac{du}{n}\right) = \exp\left(\int_0^1 \log|e^{2\pi iu} - \alpha^n|\, du\right).$$

Igy

$$M(x-\alpha) = M(x-\alpha^n)^{1/n}, \tag{7}$$

ahol az n-edik gyök pozitív értékét tekintjük. (6)-t és (7)-t alkalmazva ($n \geqq 2$ helyettesítéssel) azonnal látható, hogy

$$M(x-\alpha) = 1 \quad \text{ha} \quad |\alpha| = 1. \tag{a}$$

Tegyük fel most, hogy $|\alpha| < 1$ és válasszuk n-t olyan nagyra, hogy

$$\tfrac{1}{2} \leqq 1 - |\alpha|^n \leqq |e^{2\pi it} - \alpha^n| \leqq |1| + |\alpha|^n \leqq 2,$$

ekkor

$$\tfrac{1}{2} \leqq M(x-\alpha^n) \leqq 2.$$

Ismét (7)-t alkalmazva és n-nel végtelenhez tartva következik, hogy

$$M(x-\alpha) = 1 \quad \text{ha} \quad |\alpha| < 1. \tag{b}$$

Végül legyen $|\alpha| > 1$, ekkor

$$M(x-\alpha^n) = \exp\left(\int_0^1 \log|e^{2\pi it} - \alpha^n|\, dt\right) = |\alpha|^n \exp\left(\int_0^1 \log|1 - \alpha^{-n} e^{2\pi it}|\, dt\right).$$

Ha n tart a végtelenhez, akkor $\log|1-\alpha^{-n}e^{2\pi it}|$ t-ben egyenletesen tart 0-hoz, így

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha|^{-n} M(x-\alpha^n) = 1.$$

A (7) képletet alkalmazva kapjuk, hogy

$$M(x-\alpha) = |\alpha| \quad \text{ha} \quad |\alpha| > 1. \tag{c}$$

(a), (b), (c) formulák az alábbi képletbe foglalhatók:

$$M(x-\alpha) = \max(1, |\alpha|).$$

Az $M(a)$-ra vonatkozó (5) szorzási formula a következő egyszerű eredményre vezet:

Ha $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ *zérushelyei* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, *azaz*

$$a(x) = a_m \prod_{j=0}^{m-1} (x - \alpha_j),$$

akkor

$$M(a) = |a_m| \prod_{k=0}^{m-1} \max(1, |\alpha_k|). \tag{8}$$

8. Mivel

$$|a(e^{2\pi i t})| = |a_0 + a_1 e^{2\pi i t} + \cdots + a_m e^{2\pi i m t}| \leqq |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| = L(a),$$

$M(a)$-ra teljesül az

$$M(a) \leqq L(a) \tag{9}$$

egyenlőtlenség. $M(a)$-ra adható, egy a fentihez hasonló, de kevésbé nyilánvaló alsó becslés.

Az $a(x)$ polinom a_k együtthatója

$$a_k = (-1)^{m-k} a_m \sigma_{m-k}$$

alakban írható, ahol σ_{m-k} az $(m-k)$-adik *elemi szimmetrikus függvény*, azaz $\binom{m}{m-k} = \binom{m}{k}$ számú $\alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_{m-k}}$ szorzat összege, ahol $j_1, j_2, \ldots, j_{m-k}$ páronként különböző elemei a $0, 1, \ldots, m-1$ elemekből álló halmaznak. Következésképpen

$$|a_k| \leqq \binom{m}{k} M(a), \tag{10}$$

mivel

$$|a_m \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_{m-k}}| \leqq M(a).$$

A (10) formula $k=0$ és $k=m$ esetén is fennáll. Felhasználva, hogy $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^k$, (10)-t k szerint összegezve $(k=0, 1, \ldots, m)$ kapjuk, hogy

$$L(a) \leqq 2^{\partial(a)} M(a). \tag{11}$$

Végül a szorzásra vonatkozó (5) egyenlőségből, a (9) és (10) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$L(a)\, L(b) \leqq 2^{\partial(a)} M(a)\, 2^{\partial(b)} M(b) \leqq 2^{\partial(ab)} M(ab) \leqq 2^{\partial(ab)} L(ab)$$

azaz

$$L(ab) \geqq 2^{-\partial(ab)} L(a) L(b). \tag{12}$$

A magasságra vonatkozó

$$H(ab) \geqq e^{-\partial(ab)} H(a) H(b)$$

(12)-höz hasonló egyenlőtlenség Gelfondtól (1952) származik.

9. Legyen ξ valós vagy komplex algebrai szám és 3.-ban definiált minimálpolinomja legyen:

$$A(x|\xi) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_M x^M.$$

Tekintsünk egy tetszőleges másik $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ $(a_m \neq 0)$ egészegyütthatós polinomot. Definíció szerint $A(\xi|\xi) = 0$, továbbá $A(x|\xi)$ irreducibilis. Következésképpen $a(\xi)$ csak akkor 0, ha $A(x|\xi)$ osztója $a(x)$-nek. Fordítva, ha $a(\xi)$ nem tűnik el, akkor $a(x)$ nem osztható $A(x|\xi)$-vel, tehát

$$a(\xi^{(j)}) \neq 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, M-1),$$

ahol $\xi^{(0)} = \xi$, $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(M-1)}$ ξ algebrai konjugáltjai. Tegyük fel most, hogy ezek az egyenlőtlenségek fennállnak.

$A(x|\xi)$ és $a(x)$ rezultánsa

$$R = R(A, a) = A_M^m \, a(\xi^{(0)}) \, a(\xi^{(1)}) \ldots a(\xi^{(M-1)})$$

zérótól különböző szám lesz. Determináns alakjában felírva

$$R = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_M & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_0 & A_1 & \ldots & A_M \end{vmatrix} \Big\} m \text{ sor}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \end{vmatrix} \Big\} M \text{ sor}$$

tehát R egy 0-tól különböző egész szám. Így $|R| \geqq 1$. Az

$$|a(\xi^{(j)})| = |a_0 + a_1 \xi^{(j)} + \cdots + a_m \xi^{(j)\,m}| \leqq L(a) \max(1, |\xi^{(j)}|)^m$$

triviális becslésből rögtön következik, hogy

$$\text{(d)} \qquad 1 \leqq |R| \leqq |A_M|^m |a(\xi)| \prod_{j=1}^{m-1} \{L(a) \max(1, |\xi^{(j)}|)^m\} =$$

$$= |a(\xi)| \, M(A)^m \, L(a)^{M-1} \max(1, |\xi|)^{-m}.$$

Abban az esetben, amikor ξ nem valós, a fentieknél erősebb eredményt kaphatunk. Legyen ekkor mondjuk $\xi^{(1)} = \bar{\xi}$, $\bar{\xi}$ gyöke az $A(x|\xi) = 0$ egyenletnek, továbbá

$$|\xi^{(1)}| = |\xi|, \quad |a(\xi^{(1)})| = |a(\xi)|.$$

Ekkor:

$$\text{(e)} \qquad 1 \leqq |R| \leqq |A_M|^m |a(\xi) \, a(\xi^{(1)})| \prod_{j=2}^{M-1} \{L(a) \max(1, |\xi^{(j)}|)^m\} =$$

$$= |a(\xi)|^2 \, M(A)^m \, L(a)^{M-2} \max(1, |\xi|)^{-2m}.$$

Vezessük be a következő függvényt:

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ ha } \alpha \text{ valós}, \\ 2 \text{ ha } \alpha \text{ nem valós}. \end{cases}$$

$\sigma(\alpha)$ segítségével a (d) és (e) becslések egy képletbe írhatók:

$$|a(\xi)| \geqq \frac{\max(1, |\xi|)^m}{M(A)^{m/\sigma(\xi)} \, L(A)^{(M/\sigma(\xi))-1}}.$$

Esetünkben

$$m=\partial(a),\quad M=\partial^0(\xi),\quad M(A)\leqq L(A)=L^0(\xi).$$

Ily módon a következő R. Gütingtől (1961) származó tételt kaptuk:

1. Tétel: Tetszőleges ξ algebrai szám és $a(x)$ egészegyütthatós polinom esetén vagy

$$a(\xi)=0,$$

vagy

$$|a(\xi)|\geqq\frac{\max(1,|\xi|)^{\partial(a)}}{L^0(\xi)^{\partial(a)/\sigma(\xi)}L(a)^{(\partial^0(\xi)/\sigma(\xi))-1}}.$$

10. Alkalmazzuk tételünket abban az esetben, amikor ξ valós, irracionális szám, ekkor $\partial^0(\xi)\geqq 2$ és $\sigma(\xi)=1$, és legyen $a(x)=p-qx$, ahol p és $q>0$ egészek. Ekkor $a(\xi)\neq 0$. Mivel $L(a)=|p|+q$ a tétel következménye:

$$|p-q\xi|\geqq\frac{\max(1,|\xi|)}{L^0(\xi)(|p|+q)^{\partial^0(\xi)-1}}$$

azaz

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\geqq\frac{\max(1,|\xi|)}{L^0(\xi)\left(1+\frac{|p|}{q}\right)^{\partial^0(\xi)-1}}q^{-\partial^0(\xi)}.$$

Ennek megfelelően

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\geqq\frac{\max(1,|\xi|)}{L^0(\xi)\,|\xi|^{\partial^0(\xi)-1}}q^{-\partial^0(\xi)}\quad\text{vagy}\quad\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\geqq 1\geqq q^{-\partial^0(\xi)}$$

aszerint, hogy $\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<1$ és ezért $1+\frac{|p|}{q}>|\xi|$ vagy $\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\geqq 1$. Vezessük be a csak ξ-től függő

$$\gamma(\xi)=\min\left(1,\frac{\max(1,|\xi|)}{L^0(\xi)\,|\xi|^{\partial^0(\xi)-1}}\right)$$

állandót. Ezt felhasználva a következő eredményt kaptuk:

(13) *Bármely ξ valós irracionális algebrai számra* $\left|\xi-\frac{p}{p}\right|\geqq\gamma(\xi)q^{-\partial^0(\xi)}$ *minden p és $q(>0)$ egész számra.*

Ezt a tételt Liouville (1844) bizonyította, de $\gamma(\xi)$-re más becslést adott. Ebből kiindulva mutatott példát először konkrét transzcendens számra.

Liouville tételének következménye a transzcendentalitás egy elégséges (de *nem* szükséges) feltétele.

14) *Legyen ξ valós szám. Ha létezik a valós számoknak egy végtelenhez tartó ω_1, ω_2, ... sorozata, és racionális számoknak $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ... sorozata, melyekre $q_r\geqq 2$,*

$$0<\left|\xi-\frac{p_r}{q_r}\right|\leqq q_r^{-\omega_r}\qquad(r=1,2,3,\ldots)$$

teljesül, akkor ξ transzcendens.

Más szóval, ha ξ „túl jó" approximálható recionális számokkal, akkor nem lehet algebrai.

A (14) tulajdonsággal rendelkező számokat *Liouville-számok*nak nevezzük. Könnyen adhatunk példát Liouville-számra. Tekintsük mondjuk a

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$$

számot. Válasszuk p_r-t és q_r-t a következőképpen:

$$p_r = 2^{r!} \sum_{n=1}^{r} 2^{-n!}, \quad q_r = 2^{r!} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

Ekkor

$$0 < \xi - \frac{p_r}{q_r} = \sum_{n=r+1}^{\infty} 2^{-n!} \leqq 2^{-(r+1)!}(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots) = 2 \cdot 2^{-(r+1)r!},$$

így elég nagy r-re

$$0 < \xi - \frac{p_r}{q_r} < q_r^{-r}.$$

(14) alapján ξ Liouville-szám, így tehát transzcendens.

A módszert általánosítva, Liouville-számok nem megszámlálható részhalmazát kaphatjuk. Ennek ellenére, az összes Liouville-szám halmazának Lebesgue-mértéke zéró.

Az e szám ismert lánctört alakjából (Perron 1929) következik, kogy e nem Liouville-szám, hasonló okból a π szám sem Liouville-féle (Mahler 1932).

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[ne]}{2^n}$ szám, ahol $[x]$ x egész részét jelenti, nem triviális példa Liouville-számra (Böhmer 1927).

11. Liouville (13) eredményét Thue (1908), Siegel (1921), Dyson (1947) és Roth (1955) lényegesen javították. Roth a következő, igen mély, bizonyos értelemben nem javítható tétel bizonyította.

(15) *Ha ξ valós irracionális algebrai szám és $\tau > 2$ adott állandó, akkor létezik $\gamma^*(\xi, \tau) > 0$ állandó, hogy* $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geqq \gamma^*(\xi, \tau) q^{-\tau}$ *minden p és $q(>0)$ egész számra.*

$\tau = 2$-re az állítást még nem igazolták és valószínűleg nem is igaz.

(15) tételből kaptunk egy újabb elégséges feltételt a transzcendenciára:

(16) *Legyenek ξ és $\tau > 2$ valós számok. Ha létezik különböző racionális számokból álló* $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ *sorozat, melyre*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_r}{q_r}\right| \leqq q_r^{-\tau} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

akkor ξ transzcendens.

Ez a tétel is jól használható transzcendens számok konstruálására. Segítségével belátható (nem egészen egyszerűen), hogy a

$$0{,}123456789101112\ldots$$

végtelen tizedestört és végtelen sok, ehhez hasonló tizedestört transzcendens. Ezt először közvetlenül Mahler (1937) bizonyította.

Későbbiekben majd bebizonyítjuk, hogy (16) tulajdonsággal rendelkező számok halmazának Lebesgue-mértéke zéró. Jóllehet, ez a számhalmaz nem megszámlálható, hiszen minden Liouville-számot tartalmaz.

12. A transzcendens számoknak van egy másik osztálya, melyet az 1. Tétel segítségével kaphatunk meg.

Legyen $\xi > 1$ olyan algebrai szám, melynek hatványai: $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ nem egészek. Tekintsük a következő $a(x)$ polinomokat:

$$a(x) = x^m - [\xi^m] \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mivel $L(a) = 1 + [\xi^m]$, az 1. Tétel alapján:

$$\xi^m - [\xi^m] \geqq \frac{\max(1, \xi)^m}{L^0(\xi)^m (1 + [\xi^m])^{\partial^0(\xi)+1}} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Így létezik egy ξ-től függő, $C(\xi) > 0$ állandó, hogy

$$\xi^m - [\xi^m] \geqq C(\xi)^{-m} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

A következő példa mutatja, hogy ez az egyenlőtlenség már nem javítható. $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ esetén könnyen ellenőrizhető, hogy minden m természetes számra

$$[\xi^m] = \begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m & \text{ha } m \text{ páratlan,} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1 & \text{ha } m \text{ páros,} \end{cases}$$

ennek megfelelően

$$\xi^m - [\xi^m] = \begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-m} & \text{ha } m \text{ páratlan,} \\ 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-m} & \text{ha } m \text{ páros.} \end{cases}$$

(17) egyenlőtlenség esetünkben fennáll $C(\xi) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ állandóval, és minden páratlan m-re pontos egyenlőség teljesül.

(17)-ből egy szám transzcendenciájára a következő elégséges feltételt nyerjük:

(18) *Legyen $\xi > 1$ olyan szám, melynek hatványai $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ nem egészek. Ha*

$$\liminf_{m \to \infty} \{\xi^m - [\xi^m]\}^{1/m} = 0$$

akkor ξ transzcendens.

Ha ξ rendelkezik a fenti tulajdonsággal és valamely $C > 1$ állandóval a

$$0 < \xi^m - [\xi^m] \leqq C^{-m}$$

egyenlőtlenség végtelen sok pozitív egész m-re teljesül, akkor (17) alapján ξ nem lehet algebrai.

Nehéznek látszik annak eldöntése, hogy a (18)-ban szereplő feltétel a transzcendencia szükséges feltétele vagy sem.

Példát mutatunk (18)-s tulajdonsággal rendelkező számra. Definiálunk egy $g_1, g_2, \ldots$ sorozatot: $g_1=1$, $g_{r+1}=g_r^{r+1}+1$ $(r=1, 2, \ldots)$. Ekkor

$$\xi_r = g_r^{1/r!} \qquad (r=1, 2, \ldots)$$

választással nyilvánvaló, hogy

$$\xi_1<\xi_2<\xi_3<\cdots \tag{19}$$

Azt állítjuk, hogy

$$g_r \leqq 2^{r!-(r-1)!} \qquad (r=1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Ez a formula $r=1$ esetén igaz; tegyük fel, hogy beláttuk, hogy valamely rögzített $r\geqq 1$ számra már bizonyítottuk. Ekkor

$$g_{r+1} \leqq 2^{(r+1)(r!-(r-1)!)}+1 = 2^{(r+1)!-r!-(r-1)!}+1 \leqq 2^{(r+1)!-r!}$$

mivel

$$(r+1)!-r!-(r-1)! \geqq 0, \quad \text{és} \quad (r-1)! \geqq 1.$$

A formula teljesül $(r+1)$-re is, tehát (20) igaz minden r-re.

(20) alapján $\xi_r<2$ $(r=1, 2, \ldots)$. Ekkor, felhasználva (19)-t, létezik a $\xi = \lim_{r\to\infty} \xi_r$, továbbá

$$\xi_r<\xi\leqq 2 \qquad (r=1, 2, \ldots).$$

Mivel $\xi_2=\sqrt{2}$

$$\xi_r>\sqrt{2} \quad \text{és} \quad g_r>2^{\frac{1}{2}r!} \quad \text{ha} \quad r\geqq 3.$$

Következésképpen:

$$g_{r+1}<g_r^{r+1}\{1+2^{-\frac{1}{2}(r+1)!}\}, \quad \xi_{r+1}<\xi_r\{1+2^{-\frac{1}{2}(r+1)!}\}^{\frac{1}{(r+1)!}}$$

és így

$$0<\xi_{r+1}-\xi_r<\xi_r\{(1+2^{-\frac{1}{2}(r+1)!})-1\}.$$

A differenciálszámítás középértéktétele szerint tetszőleges $0<\lambda<1$ és $x>0$ számok esetén létezik egy ϑ szám, $0<\vartheta<1$, hogy

$$(1+x)^\lambda = 1+\lambda x(1+\vartheta x)^{\lambda-1} \leqq 1+\lambda x.$$

Így, ha $r\geqq 3$, akkor

$$0<\xi_{r+1}-\xi_r<\xi_r\frac{2^{-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!} \leqq \frac{2^{1-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!},$$

és ezért

$$0<\xi-\xi_r = \sum_{\varrho=r}^{\infty}(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho) \leqq \sum_{\varrho=r}^{\infty}\frac{2^{1-\frac{1}{2}(\varrho+1)!}}{(\varrho+1)!} < \frac{2^{2-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!}.$$

Egy további következmény, hogy elég nagy r-re:

$$0<\xi^{r!}-g_r = \xi^{r!}-\xi_r^{r!} = (\xi-\xi_r)\sum_{\varrho=0}^{r!-1}\xi^\varrho\,\xi_r^{r!-\varrho-1} \leqq$$

$$\leqq(\xi-\xi_r)r!\,\xi^{r!-1} \leqq \frac{2^{2-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!}\,r!\,2^{r!} \leqq 2^{-\frac{1}{3}(r+1)!}.$$

Így ha r elég nagy, az is teljesül hogy

$$[\xi^{r!}] = g_r$$

és

$$0 < \xi^{r!} - [\xi^{r!}] < 2^{-\frac{1}{3}(r+1)!} < 1.$$

Ebből két dolog következik, egyrészt ξ-nek nincs olyan hatványa mely egy egész számmal megegyezik, másrészt

$$0 \leqq \liminf_{m\to\infty} \{\xi^m - [\xi^m]\}^{\frac{1}{m}} \leqq \liminf_{r\to\infty} \{\xi^{r!} - [\xi^{r!}]\}^{\frac{1}{r!}} \leqq \lim_{r\to\infty} 2^{-\frac{r+1}{3}} = 0.$$

Ezért ξ rendelkezik a (18) tulajdonsággal, tehát transzcendens.

ξ definícióját kissé megváltoztatva, (18)-s tulajdonságú számok nem megszámlálható halmazát konstruálhatjuk meg. Nem ismert, hogy e vagy π ilyen tulajdonságúak-e, bár mindkét esetben valószínűbb a nemleges válasz.

13. Az 1. Tétel egészegyütthatós polinomok algebrai számokon felvett értékével foglalkozik. Legyen ξ transzcendens, vagy elég nagy fokszámú algebrai szám, mondjuk $\partial^0(\xi) > m$. Ekkor ha

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

nem azonosan zéró, egészegyütthatós, legfeljebb m-edfokú polinom, akkor

$$a(\xi) \neq 0.$$

Megmutatjuk, hogy az $a(x)$ polinom megválasztható úgy, hogy $|a(\xi)|$ tetszőleges kicsi legyen kivéve azt a triviális esetet, mikor ξ nem valós és $m=1$.

Ilyen polinomok konstruálására több módszer ismeretes. A legismertebb, Dirichlettől származik és az általa bevezetett skatulya-elven alapszik. Azonban számunkra megfelelőbb Hermite módszere, mely pozitív definit kvadratikus alakok minimumbecslésén múlik. Hermite eredeti becslései meglehetősen gyengék voltak, ezeket később mások — többek között Minkowski (1910) és Bichfeldt (1917) — lényegesen javították. Mi itt megelégszünk egy igen egyszerű becsléssel, amely egyébként triviálisan következik Minkowski lineáris alakokra vonatkozó tételéből.

14. A most következő tétel Minkowski klasszikus, lineáris alakokra vonatkozó tétele (1910).

(19) *Legyenek*

$$l_h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} l_{hk} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

n változós lineáris alakok, determinánsuk:

$$d = \begin{vmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Legyenek továbbá $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *pozitív számok;*

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \geqq |d|.$$

Ekkor léteznek $x_1^0, \ldots, x_n^0$ *egészek — melyek nem mindegyike nulla — hogy*

$$|l_h(x_1^0, \ldots, x_n^0)| \leqq \lambda_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Alkalmazzuk ezt a tételt az

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_{hk} x_h x_k$$

valós együtthatós kvadratikus alakra. Feltesszük, hogy

$$F_{hk} = F_{kh}$$

és $F(x_1, \ldots, x_n)$ pozitív definit, azaz $F(x_1, \ldots, x_n) > 0$ minden $x_1, \ldots, x_n$ — $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$ — valós értékrendszerre. Pozitív definit kvadratikus alak diszkriminánsa

$$D_F = \begin{vmatrix} F_{11} \ldots F_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ F_{n1} \ldots F_{nn} \end{vmatrix}$$

mindig pozitív. Egy kvadratikus alak végtelen sokféleképpen írható fel n számú valós, n változós lineáris alak négyzetének összegeként:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h=1}^{n} l_h(x_1, \ldots, x_n)^2.$$

Legyen a lineáris alakok determinánsa d, ekkor

$$D_F = d^2.$$

Minkowski tételében (19) legyen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = |d|^{\frac{1}{n}} = D_F^{\frac{2}{n}}.$$

Ekkor léteznek $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ egész számok, hogy

$$|l_h(x_1^0, \ldots, x_n^0)|^2 \leqq D_F^{1/n} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Így a következő eredményt nyertük:

(20) *Ha $F(x_1, \ldots, x_n)$ egy n változós pozitív definit kvadratikus alak, D_F diszkriminánssal, akkor léteznek $x_1^0, \ldots, x_n^0$ egész számok, melyek nem mindegyike zéró, hogy*

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0) \leqq n D_F^{1/n}.$$

15. Alkalmazzuk ezt a tételt az

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h=1}^{p} (f_{h1} x_1 + \cdots + f_{hn} x_n)^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

speciális kvadratikus alakra, ahol f_{hk} tetszőleges valós szám és p tetszőleges pozitív egész. A továbbiakban a $\sum_{h=1}^{p}$ jelet egyszerűen $\sum$-val helyettesítjük. Az előbbi kvadratikus alak diszkriminánsa

$$D_F = \begin{vmatrix} \sum f_{h1} f_{h1} + 1 & \sum f_{h1} f_{h2} & \ldots & \sum f_{h1} f_{hn} \\ \sum f_{h2} f_{h1} & \sum f_{h2} f_{h2} + 1 & \ldots & \sum f_{h1} f_{hn} \\ \vdots & \vdots & & \\ \sum f_{hn} f_{h1} & \sum f_{hn} f_{h2} & \ldots & \sum f_{hn} f_{hn} + 1 \end{vmatrix}$$

felírható mint 2^n különböző determináns összege, hiszen D_F minden sora

$$\sum f_{hk} f_{h1} \dots \sum f_{hk} f_{hk} + 1 \dots \sum f_{hk} f_{hn}$$

a

$$\sum f_{hk} f_{h1} \dots \sum f_{hk} f_{hk} \dots \sum f_{hk} f_{hn}$$

és a 0...1...0 — ahol 1 a k-adik helyen áll — sorok összege.

A felbontás segítségével D_F a következő alakban írható:

$$D_F = 1 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k + \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 \leqq n} \Delta_{k_1 k_2} + \dots + \Delta_{12 \dots n},$$

ahol minden rögzített v-re $1 \leqq v \leqq n$,

$$\Delta_{k_1 k_2 \dots k_v} = \begin{vmatrix} \sum f_{hk_1} f_{hk_1} & \sum f_{hk_1} f_{hk_2} \dots \sum f_{hk_1} f_{hk_v} \\ \sum f_{hk_2} f_{hk_1} & \sum f_{hk_2} f_{hk_2} \dots \sum f_{hk_2} f_{hk_v} \\ \vdots & \vdots \\ \sum f_{hk_v} f_{hk_1} & \sum f_{hk_v} f_{hk_2} \dots \sum f_{hk_v} f_{hk_v} \end{vmatrix}.$$

A $\sum$ jelek helyébe $\sum_{k=1}^{p}$-t írva, $\Delta_{k_1 k_2 \dots k_v}$ vp determináns összege lesz:

$$\sum_{h_1=1}^{p} \sum_{h_2=1}^{p} \dots \sum_{h_v=1}^{p} \begin{vmatrix} f_{h_1 k_1} f_{h_1 k_1} & f_{h_2 k_1} f_{h_2 k_2} \dots f_{h_v k_1} f_{h_v k_v} \\ f_{h_1 k_2} f_{h_1 k_1} & f_{h_2 k_2} f_{h_2 k_2} \dots f_{h_v k_2} f_{h_v k_v} \\ \vdots & \vdots \\ f_{h_1 k_v} f_{h_1 k_1} & f_{h_2 k_v} f_{h_2 k_2} \dots f_{h_v k_v} f_{h_v k_v} \end{vmatrix},$$

ami megegyezik a következő determinánssal:

$$\sum_{h_1=1}^{p} \sum_{h_2=1}^{p} \dots \sum_{h_v=1}^{p} \begin{vmatrix} f_{h_1 k_1} & f_{h_2 k_1} \dots f_{h_v k_1} \\ f_{h_1 k_2} & f_{h_2 k_2} \dots f_{h_v k_2} \\ \vdots & \vdots \\ f_{h_1 k_v} & f_{h_2 k_v} \dots f_{h_v k_v} \end{vmatrix} f_{h_1 k_1} f_{h_2 k_2} \dots f_{h_v k_v},$$

Ha az előbbi képletben a $k_1, k_2, \dots, k_v$ számok közül kettő megegyezik, akkor a determináns értéke nulla, ha pedig k_i-t és k_j-t felcseréljük — $1 \leqq i < j \leqq v$ — akkor a determináns értéke előjelet vált. Következésképpen

$$\Delta_{k_1 k_2 \dots k_v} = \sum_{1 \leqq h_1 < h_2 < \dots < h_v \leqq p} \begin{vmatrix} f_{h_1 k_1} & f_{h_2 k_1} \dots f_{h_v k_1} \\ f_{h_1 k_2} & f_{h_2 k_2} \dots f_{h_v k_2} \\ \vdots & \vdots \\ f_{h_1 k_v} & f_{h_2 k_v} \dots f_{h_v k_v} \end{vmatrix}^2$$

és így D_F diszkrimináns

$$(21) \qquad D_F = \sum_{v=1}^{n} \sum_{1 \leqq h_1 < h_2 < \dots < h_v \leqq p} \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 < \dots < k_v \leqq n} \begin{vmatrix} f_{h_1 k_1} \dots f_{h_v k_1} \\ \vdots \\ f_{h_1 k_v} \dots f_{h_v k_v} \end{vmatrix}$$

alakban írható, ahol a legbelső összeg üres ha $v > \min(n, p)$.

Nézzük meg D_F értéket két egyszerű esetben.

(22) $$D_F = 1 + \sum_{k=1}^{n} f_{1k}^2 \quad \text{ha} \quad p=1.$$

(23) $$D_F = 1 + \sum_{h=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} f_{hk}^2 + \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 \leqq n} \begin{vmatrix} f_{1k_1} & f_{2k_1} \\ f_{1k_2} & f_{2k_2} \end{vmatrix} \quad \text{ha} \quad p=2.$$

Az általános képletet (21)-t, a továbbiakban fogjuk majd alkalmazni.

16. Eredményünk első alkalmazásaként, legyen m tetszőleges pozitív egész szám és ξ valós szám, melyre $\partial^0(\xi) > m$. Legyen továbbá s és t két paraméter, melyre

$$s \geqq \max(1, |\xi|)^{\frac{m}{m+1}}$$

$$t = (m+1)(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}} \max(1, |\xi|)^{\frac{m}{m+1}} s,$$

így

$$t \geqq (m+1)(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}}.$$

Tekintsük az

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_m) = s^{2(m+1)}(x_0 + x_1\xi + \cdots + x_m\xi^m)^2 + x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_m^2$$

kvadratikus alakot. A 15. jelölését használva:

$$n = m+1, \quad p = 1, \quad f_{10} = s^{m+1}, \quad f_{11} = s^{m+1}\xi, \ldots, f_{1m} = s^{m+1}\xi^m.$$

Így (22) segítségével felírhatjuk a diszkriminánst:

$$D_F = 1 + s^{2(m+1)}(1 + \xi^2 + \xi^4 + \cdots + \xi^{2m}) \leqq 1 + s^{2(m+1)}(m+1)\max(1, |\xi|)^{2m}.$$

Az s-re vonatkozó alsó becslést felhasználva nyerjük, hogy

$$D_F \leqq s^{2(m+1)} \max(1, |\xi|)^{2m} + s^{2(m+1)}(m+1)\max(1, |\xi|)^{2m} \leqq$$

$$\leqq s^{2(m+1)}(m+2)\max(1, |\xi|)^{2m}.$$

(20) tételt alkalmazva léteznek $a_0, a_1, \ldots, a_m$ egészek, melyek nem mindegyike zéró, és ha

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

akkor

$$s^{2(m+1)}a(\xi)^2 + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leqq$$

$$\leqq (m+1)s^2(m+1)^{\frac{1}{m+1}} \max(1, |\xi|)^{\frac{2m}{m+1}} = \frac{t^2}{m+1}.$$

Mivel $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 > 0$, és ξ algebrai szám foka m-nél nagyobb, $a(\xi) \neq 0$. Így

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+1)^{\frac{1}{2}}(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}} \max(1, |\xi|)^{\frac{m}{m+1}}}{s^m}$$

és

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 < \frac{t^2}{m+1}.$$

Az $|a(\xi)|$-re felírt egyenlőtlenség ekvivalens a

$$0<|a(\xi)|<\frac{(m+1)^{m+\frac{1}{2}}(m+1)^{\frac{1}{2}}\max(1,|\xi|)^m}{t^m}$$

egyenlőtlenséggel, tehát

$$0<|a(\xi)|<\frac{(m+2)^{m+1}\max(1,|\xi|)^m}{t^m}.$$

A Cauchy-formulát alkalmazva nyerjük, hogy

$$L(a)=1\,|a_0|+1\,|a_1|+\cdots+1\,|a_m|\leqq(m+1)^{\frac{1}{2}}(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_m^2)^{\frac{1}{2}}$$

következkezésképpen

$$0<L(a)<t.$$

Ezzel beláttuk a következő eredményt.

(24) *Ha*

$$\sigma(\xi)=1,\quad \partial^0(\xi)>m\quad \text{és}\quad t\geqq(m+1)(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}},$$

akkor létezik egy egészegyütthatós $a(x)$ polinom, melyre

$$\partial(a)\leqq m,\quad 0<L(a)<t,\quad 0<|a(\xi)|<\frac{(m+2)^{m+1}\max(1,|\xi|)^m}{t^m}.$$

17. A második esetben legyen m 2-nél nagyobb pozitív egész és ξ nem valós komplex szám. Vezessük be az s és t paramétereket

$$s\geqq\max(1,|\xi|)^{-\frac{2m}{m+1}},\quad t=(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}\max(1,|\xi|)^{\frac{2m}{m+1}}s,$$

és így

$$t\geqq(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Az

$$F(x_0,x_1,\ldots,x_m)=s^{m+1}|x_0+x_1\xi+\cdots+x_m\xi^m|^2+x_0^2+x_1^2+\cdots+x_m^2$$

kifejezés egy pozitív definit kvadratikus alak, mivel

$$F(x_0,x_1,\ldots,x_m)=s^{m+1}(x_0\lambda_0+x_1\lambda_1+\cdots+x_m\lambda_m)^2+$$
$$+s^{m+1}(x_0\mu_0+x_1\mu_1+\cdots+x_m\mu_m)^2+x_0^2+x_1^2+\cdots+x_m^2,$$

ahol λ_k és μ_k jelöli $(k=0,1,\ldots,m)$ ξ^k valós és képzetes részét, így

$$\xi^k=\lambda_k+i\mu_k,$$

tehát

$$\lambda_k^2+\mu_k^2=|\xi|^{2k}\quad\text{és}\quad|\lambda_h\mu_k-\lambda_k\mu_h|\leqq|\xi|^{h+k}.$$

$F(x_0,x_1,\ldots,x_m)$-t a 15.-ban szereplő általános képletből

$$n=m+1,\quad p=2,\quad f_{10}=s^{\frac{m+1}{2}}\lambda_0,\ldots,f_{1m}=s^{\frac{m+1}{2}}\lambda_m$$
$$f_{20}=s^{\frac{m+1}{2}}\mu_0,\ldots,f_{2m}=s^{\frac{m+1}{2}}\mu_m$$

esetén kapjuk.

(23) alapján a vizsgált kvadratikus alak diszkriminánsa:

$$D_F = 1 + s^{m+1} \sum_{k=0}^{m} (\lambda_k^2 + \mu_k^2) + s^{2(m+1)} \sum_{0 \leqq k_1 < k_2 \leqq m} (\lambda_{k_1}\mu_{k_2} - \lambda_{k_2}\mu_{k_1})^2.$$

A fenti képletben

$$\sum_{k=0}^{m} (\lambda_k^2 + \mu_k^2) = \sum_{k=0}^{m} |\xi|^{2k} \leqq (m+1) \max (1, |\xi|)^{2m}$$

és

$$\sum_{0 \leqq k_1 < k_2 \leqq m} (\lambda_{k_1}\mu_{k_2} - \lambda_{k_2}\mu_{k_1})^2 < \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{m} |\xi|^{2(k_1+k_2)} \leqq (m+1)^2 \max (1, |\xi|)^{4m}.$$

s alsó becslését felhasználva

$$D_F \leqq 1 + s^{m+1}(m+1) \max (1, |\xi|)^{2m} + s^{2(m+1)}(m+1)^2 \max (1, |\xi|)^{4m} \leqq$$

$$\leqq s^{2(m+1)}\{1 + (m+1) + (m+1)^2\} \max (1, |\xi|)^{4m} \leqq s^{2(m+1)}(m+2)^2 \max (1, |\xi|)^{4m}$$

adódik. Az előbbi egyenlőtlenséget és (20)-t alkalmazva, léteznek $a_0, a_1, \ldots, a_m$ egészek, hogy

$$s^{m+1}|a(\xi)|^2 + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leqq (m+1)s^2(m+2)^{\frac{2}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{4m}{m+1}},$$

ahol $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ és

$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 > 0 \quad \text{így} \quad a(\xi) \neq 0.$$

Tehát

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+1)^{\frac{1}{2}}(m+2)^{\frac{1}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{2m}{m+1}}}{s^{\frac{m-1}{2}}}$$

és

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 < (m+1)(m+2)^{\frac{2}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{4m}{m+1}} s^2.$$

A valós esethez hasonlóan az első egyenlőtlenség ekvivalens a

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+1)^{\frac{m}{2}}(m+2)^{\frac{1}{2}} \max (1, |\xi|)^m}{t^{\frac{m-1}{2}}}$$

egyenlőtlenséggel, míg a másodikból

$$0 < L(a) \leqq (m+1)^{\frac{1}{2}}(a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< (m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{2m}{m+1}} s = t$$

következik.

Ily módon a következő eredményt nyertük:

(25) *Ha* $\sigma(\xi) = 2$, $\partial^0(\xi) > m \geqq 2$, $t \geqq (m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$,

akkor létezik egy egész együtthatós $a(x)$ polinom, melyre

$$\partial(a) \leqq m, \quad 0 < L(a) < t,$$

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+2)^{\frac{m+1}{2}} \max(1, |\xi|)^m}{t^{\frac{m-1}{2}}}.$$

(24) és (25) eredményekből kiolvasható a következő, valamivel gyengébb tétel.

2. Tétel: Legyen ξ valós, vagy komplex szám és m olyan egész, hogy

$$\sigma(\xi) \leqq m < \partial^0(\xi).$$

Ekkor minden, a

$$t \geqq (m+2)^{1+\frac{1}{m+1}}$$

feltételnek eleget tevő t-hez létezik olyan egészegyütthatós $a(x)$ polinom, melyre

$$\partial(a) \leqq m, \quad 0 < L(a) < t, \quad 0 < |a(\xi)| < \frac{(m+2)^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}} \max(1, |\xi|)^m}{t^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}-1}}.$$

Tartsunk t-vel monoton növekedve végtelenhez. Ebben az esetben az $a(x)$ polinom sem marad változatlan, hiszen $|a(\xi)|$ felső korlátja nullához tart. Mivel t az $L(a)$ felső korlátja, $a(x)$ egészegyütthatós polinomok, *páronként különböző, végtelen sorozatát* kapjuk, úgy hogy $\partial(a) \leqq m$ és

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+2)^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}} \max(1, |\xi|)^m}{L(a)^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}-1}}.$$

Másrészt ha $\partial^0(\xi) \leqq m$, akkor ez a gondolatmenet nem alkalmazható, és ha t elég nagy, akkor $a(x)$ egy fix polinommá válik, melyre

$$a(x) \not\equiv 0, \quad \text{de} \quad a(\xi) = 0.$$

Természetesen akkor $a(x)$-nek osztója lesz $A(x|\xi)$, ξ minimálpolinomja.

18. Az 1. és 2. Tételek lehetővé teszik, hogy szükséges és elégséges feltételt adjunk a transzcendenciára. Felhasználjuk a korábban bevezetett

$$\Lambda(a) = 2^{\partial(a)} L(a)$$

jelölést.

3. Tétel: A valós vagy komplex ξ szám akkor és csak akkor transzcendens, ha létezik (i) egészegyütthatós, páronként különböző polinomok

$$\{a_1(x), a_2(x), \ldots\}$$

végtelen sorozata és (ii) pozitív számok végtelenhez tartó

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

sorozata, úgy hogy

$$0 < |a_r(\xi)| \leqq \Lambda(a_r)^{-\omega_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

A tétel érdekessége az, hogy semmiféle megszorítást nem tartalmaz $\partial(a_r)$-re, az

$a_r(x)$ fokszámára; $\partial(a_r)$ mint r függvénye lehet korlátos vagy nem korlátos, kicsi vagy nagy.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy ha ξ rendelkezik a térbeli tulajdonsággal, akkor transzcendens.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Az 1. Tétel szerint így minden r-re

$$\frac{\max(1,|\xi|)^{\partial(a_r)}}{L^0(\xi)^{\frac{\partial(a_r)}{\sigma(\xi)}}L(a_r)^{\frac{\partial^0(\xi)}{\sigma(\xi)}-1}} \leqq |a_r(\xi)| \leqq \{2^{\partial(a_r)}L(a_r)\}^{-\omega_r}$$

azaz

$$2^{\partial(a_r)}L(a_r) \leqq \max(1,|\xi|)^{-\frac{\partial(a_r)}{\omega_r}} L^0(\xi)^{\frac{\partial(a_r)}{\omega_r\sigma(\xi)}} L(a_r)^{\frac{\partial^0(\xi)-\sigma(\xi)}{\omega_r\sigma(\xi)}}.$$

Nyilván

$$\max(1,|\xi|)^{\frac{\partial(a_r)}{\omega_r\sigma(\xi)}} \leqq 1.$$

Ha r — és így ω_r is — elég nagy, akkor

$$L^0(\xi)^{\frac{\partial(a_r)}{\omega_r\sigma(\xi)}} \leqq 2^{\frac{1}{2}\partial(a_r)}$$

és

$$L(a_r)^{\frac{\partial^0(\xi)-\sigma(\xi)}{\omega_r\sigma(\xi)}} \leqq L(a_r)^{\frac{1}{2}},$$

mivel $L(a_r)\geqq 1$. Ebből következik, hogy elég nagy r-re

$$\Lambda(a_r)\leqq\Lambda(a_r)^{\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(a_r)\leqq 1.$$

Másrészt, abból, hogy az a_r polinomok páronként különbözőek $\lim_{r\to\infty}\Lambda(a_r)=+\infty$ adódik. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Legyen most ξ egy transzcendens szám. A tételben állított $\{a_r(x)\}$ és $\{\omega_r\}$ sorozatok végtelen sokféleképp konstruálhatók meg. Tekintsük pozitív egész számok végtelenhez tartó

$$\{m_1, m_2, \ldots\}$$

sorozatát, legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges kis pozitív konstans és

$$\{t_1, t_2, \ldots\}$$

pozitív számok olyan sorozata, hogy

$$t_r\geqq(m_r+2)^{1+\varepsilon} \qquad (r=1,2,\ldots).$$

Minden rögzített r-re alkalmazzuk a 2. Tételt $m=m_r$ és $t=t_r$ esetén. Ezt csak elég nagy r-re végezhetjük el, hiszen ekkor

$$t_r\geqq(m_r+2)^{1+\varepsilon}\geqq(m_r+2)^{1+\frac{1}{m_r+1}}.$$

Így ha $r\geqq r_0$, akkor létezik egy egészegyüttható s $a_r(x)$ polinom, hogy

$$\partial(a_r)\leqq m_r, \quad 0<L(a_r)<t,$$

$$0<|a_r(\xi)|<\frac{(m_r+2)^{\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)}}\max(1,|\xi|)^{m_r}}{t_r^{\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)}-1}}.$$

Mivel

$$m_r+2\leqq t_r^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

adódik, hogy

$$0<|a_r(\xi)|<t_r^{\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)}-\left(\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)}-1\right)}\max(1,|\xi|)^{m_r}=t_r^{1-\frac{\varepsilon(m_r+1)}{(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}}\max(1,|\xi|)^{m_r}.$$

m_r és t_r végtelenhez tartanak és

$$t_r\max(1,|\xi|)^{m_r}\leqq t_r^{\frac{\varepsilon(m_r+1)}{2(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}}$$

hacsak r elég nagy. Ezért

$$0<|a_r(\xi)|<t_r^{-\frac{\varepsilon(m_r+1)}{2(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}},\quad \text{ha}\quad r\geqq r_1.$$

Másrészt

$$\Lambda(a_r)=2^{\partial(a_r)}L(a_r)\leqq 2^{m_r}t_r=t_r^{\lambda_r},$$

ahol

$$\lambda_r=1+\frac{m_r\log 2}{\log t_r}.$$

A definícióból következik, hogy

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\lambda_r}{m_r}=0.$$

Így tehát felírható:

$$t_r^{-\frac{\varepsilon(m_r+1)}{2(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}}=\Lambda(a_r)^{-\omega_r},$$

ahonnan

$$\lim_{r\to\infty}\omega_r=+\infty$$

rögtön következik. Ezzel beláttuk, hogy ξ rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

A 3. Tétel igen fontos, hiszen nagyon általános. Konkrét példákon látható, hogy speciális számok transzcendenciájának bizonyítására felhasználható. Általában nem könnyű egy olyan $a_r(x)$ egészegyütthatós polinomsorozatot találni, hogy $|a_r(\xi)|$ megfelelő gyorsasággal konvergáljon nullához. Szerencsére megfelelő szabadsággal rendelkezünk ilyen sorozatok választásában, amint ezt a tétel bizonyítása is mutatja.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

К. МАЛЕР

TRANSCENDENTAL NUMBERS

K. MAHLER

ÁLTALÁNOSÍTOTT MÁTRIX INVERZEKRE ADOTT ÚJABB FORMULÁK

LEE ANNA

1. §. Ismeretes, hogy adott n-edrendű invertálható komplex A mátrix esetén az

$$Ax=b \tag{1. 1}$$

alakban írt egyenletrendszernek — bármilyen komplexelemű b vektor esetén is — egyértelmű megoldása van, s e megoldás az A mátrix inverze és a b vektor segítségével

$$x=A^{-1}b \tag{1. 2}$$

alakban állítható elő. Ha az (1. 1) egyenletrendszer A együttható mátrixa szinguláris vagy téglalap alakú, akkor az (1. 1) egyenletrendszer nem minden b esetén oldható meg, s ha megoldható is — amit a továbbiakban mindig feltételezünk —, a megoldás általában nem egyértelmű.

A gyakorlati feladatok nagy hányadát képezik a lineáris (vagy linearizált) fittelési feladatok megoldása a legkisebb négyzetek módszerével. A megoldandó

$$Bx=y$$

feladat normálegyenleteinek rendszerét ebből a B^H hermitikus transzponált mátrixszal való szorzás után kapjuk:

$$Ax=(B^H B)x=B^H y=b.$$

Ez az egyenlet pedig — bármilyen is volt a B mátrix és az y vektor — már mindig megoldható.

Mivel szinguláris vagy téglalap alakú A mátrix esetén az A^{-1} nem létezik, így ebben az esetben az (1. 1) egyenletrendszer megoldása vagy megoldásai nem állíthatók elő (1. 2) alakban. Az azonban igaz, hogy ha x_0 az (1. 1) egyenletrendszernek egy partikuláris megoldása, akkor az (1. 1) valamennyi megoldását előállíthatjuk az

$$x = x_0+y, \tag{1. 3}$$

alakban, ahol y végigfut az $Ay=0$ homogén egyenlet megoldásain.

Érthető, hogy a lineáris egyenletek elméletében nagy teret kaptak azok a kutatások, amelyeknek célja adott A mátrixhoz olyan A^g mátrix konstruálása, amely bármely olyan b esetén, amelyre az (1. 1) egyenletrendszer megoldható, e b vektor segítségével kapott

$$x_0=A^g b$$

vektor az (1. 1) egyenletrendszernek egy partikuláris megoldását állítja elő. Az ilyen A^g mátrix rendelkezik az inverz bizonyos tulajdonságaival; kielégíti például az

$$A A^g A = A$$

egyenletet. Ezért indokolt az ilyen tulajdonságú mátrixra az általánosított inverz elnevezés. Felmerül a kérdés, hogy általánosított inverz mátrix mindig létezik-e?

A kérdésre adható igenlő válasznál erősebb állítást bizonyított R. PENROSE 1955-ben megjelent nevezetes [20] cikkében. Megmutatta ugyanis, hogy tetszőleges $m \times n$ típusú komplex elemű A mátrix esetén az

(1) $AXA = A$

(2) $XAX = X$

(3) $(AX)^H = AX$

(4) $(XA)^H = XA$

egyenleteknek egyértelmű megoldása van, amelyet ő általánosított inverz-nek (generalized inverse) nevezett. R. RADO 1956-ban megjelent [23] dolgozatában megmutatta, hogy a Penrose-tól származó általánosított inverz megegyezik az E. H. MOORE által 1920-ban általános reciprok (general reciprocal [17]) néven bevezetett fogalommal, amelyet aztán Moore 1935-ben megjelent [18] könyvébe is bevett és tovább vizsgált.

Az (1)—(4) feltételek által definiált, egyértelmű általánosított mátrix inverzre általánosan elterjedt a Moore—Penrose általánosított inverz vagy pseudoinverz elnevezés és az A^+ jelölés. A pseudoinverznek — mint egyértelmű általánosított inverznek — természetesen elsősorban elméleti jelentősége van. A gyakorlati problémák megoldásánál általában elegendő gyengébb feltételeknek eleget tevő — s így általában nem is egyértelmű — általánosított inverzek alkalmazása. Érthető, hogy az általánosított mátrix inverzek irodalma igen nagy. Az e témakörben megjelent publikációk száma ma már több százra tehető, s ezek néhány kivétellel mind Penrose [20] dolgozata után jelentek meg.

A különböző általánosított inverzekre az alább következő osztályozások a legelterjedtebbek. Az A mátrix a dolgozat további részében mindig komplex eleműnek tekintendő, s hacsak mást nem mondunk $m \times n$ típusú.

a) *osztályozás* (Rhode osztályozása [25], [26]):

(i) *Definíció:* Az $n \times m$ típusú A^g mátrix az A általánosított inverze, ha kielégíti az (1) feltételt.

(ii) *Definíció:* Az $n \times m$ típusú A^r mátrix az A reflexív általánosított inverze, ha kielégíti az (1) és (2) feltételt.

(iii) *Definíció:* Az $n \times m$ típusú A^n mátrix az A normális általánosított inverze, ha kielégíti az (1), (2) és (3) feltételt.

(iv) *Definíció:* Az (1)—(4) feltételeket kielégítő egyértelműen meghatározott A^+ mátrixot az A pseudoinverzének nevezzük.

b) *osztályozás* (lásd pl. [1], [15] és [16]):

(v) *Definíció:* Az $n \times m$ típusú $A^{(i,j,k)}$ mátrixot az A (i, j, k)-inverzének nevezzük, ha az (1)—(4) Penrose-feltételek közül kielégíti az i-ediket, j-ediket és k-adikat.

c) *osztályozás* (lásd [22]):

(vi) *Definíció:* Az $n \times m$ típusú A^{g_i} mátrixot az A i-feltételű általánosított invezének nevezzük, ha A^{g_i} kielégíti a Penrose-feltételek első i egyenletét $(i = 1, 2, 3)$.

Figyelembe véve a háromféle osztályozást nyilvánvaló, hogy

$$A^g = A^{(1)} = A^{g_1}; \quad A^r = A^{(1,2)} = A^{g_2}; \quad A^n = A^{(1,2,3)} = A^{g_3};$$

A jelölések természetesen úgy értendők, hogy a szóban forgó mátrix a megfelelő tulajdonságú általánosított inverzek osztályának egy reprezentánsa.

A különböző típusú inverzek tulajdonságát, előállítását, egymásközötti kapcsolatát sokan vizsgálták már. A jelen dolgozat 2. §-ban előbb megmutatjuk, hogy teljes sorrangú A mátrix esetén minden 1-feltételű általánosított inverz egyben 3-feltételű is. Majd formulát adunk egy ilyen inverz megkonstruálására. A 3. §-ban néhány, a pseudoinverz megkonstruálására vonatkozó eljárás ismertetése után az A mátrix particionált alakjának felhasználásával állítjuk elő a pseudoinverzet. Ugyanezen particionált alak segítségével megadunk egy (1, 2, 3)-inverzet előállító formulát, amelynek érdekessége, hogy igen sok zérus eleme van.

2. §. Az 1-feltételű általánosított inverzekkel több szerző foglalkozik, így A. BJERHAMMAR [2], R. C. BOSE [4], C. A. ROHDE [25], [26], R. M. PRINGLE és A. A. RAYNER [22]. A 3-feltételű (normális) általánosított inverzről A. J. GOLDMAN és M. ZELEN ír először „weak generalized inverse" néven [7], és ROHDE foglalkozik vele részletesebben [25], [26]. A 2-feltételű (reflexív) általánosított inverz létezését C. R. RAO [26] bizonyítja először, J. S. FRAME pedig „semi-inverse" néven utal rá [8]. Mind a négy típusú általánosított inverzzel és alkalmazásaikkal részletesen foglalkozik J. Z. HEARON a [12]—[14] terjedő cikkek sorozatában és ROHDE [27]. ROHDE-tól ered az 1- és 2-feltételű általánosított inverzek kapcsolatára vonatkozó alábbi tétel.

Tétel: (Rohde [26]): A $\varrho(A) = \varrho(A^g)$ rang egyenlőség teljesüléséhez szükséges és elegendő, hogy A^g reflexív — azaz 2-feltételű — általánosított inverz legyen.

Ismeretes, hogy az 1-feltételű általánosított inverzek rangjára a $\varrho(A^g) \geqq \varrho(A)$ egyenlőtlenség érvényes. A. G. FISHER azt is bebizonyítja [7], hogy az $m \times n$ típusú r rangú A mátrixhoz minden q $(0 \leqq q \leqq \min(m, n) - r)$ egészre létezik $r + q$ rangú általánosított inverz.

A teljes sorrangú — azaz $r \times n$ típusú — mátrixok 1-feltételű általánosított inverzeire igaz a következő tétel.

1. *Tétel:* Ha A^g a teljes sorrangú A mátrix 1-feltételű általánosított inverze, akkor A^g egyben 3-feltételű — azaz normális — általánosított inverz.

Bizonyítás: Az A^g $n \times r$ típusú mátrix, ahol most $r \leqq n$ érvényes, így $\varrho(A^g) \leqq r$. Másrészt tudjuk, hogy $\varrho(A^g) \geqq \varrho(A) = r$. Ezért szükségképpen $\varrho(A^g) = r = \varrho(A)$. Akkor Rohde előbb idézett tétele alapján A^g reflexív — azaz 2-feltételű — általánosított inverz.

Az is ismeretes, hogy $\varrho(AA^g) = \varrho(A) = r$ és AA^g idempotens mátrix. Az AA^g r-edrendű mátrix, az előbbiek alapján tehát invertálható idempotens. Így $AA^g = I_r$

az r-edrendű egységmátrix lehet csak. De akkor A^g kielégíti a (3) Penrose feltételt is. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés: Hasonlóan bebizonyítható, hogy ha A^g az $n \times r$ típusú teljes oszloprangú A mátrix (1)-inverze, akkor A^g egyben (1, 2, 4)-inverz is.

A következőkben teljes sorrangú A mátrixnak egy 1-feltételű — tehát a most bizonyított tétel alapján egyben 3-feltételű — általánosított inverzét előállító formulát adunk meg. Ehhez azonban szükségünk lesz néhány jelölés bevezetésére.

Jelölje Ω az $\{1, 2, \ldots, n\}$ véges halmaz rendezett szám r-eseiből álló halmazt ($r \leqq n$). Az Ω elemeit jelölje ω. Ha A $r \times n$ típusú mátrix és $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$, akkor $A(\omega)$ jelölje az A mátrixnak az $i_1, i_2, \ldots, i_r$ oszlopokból álló r-edrendű minor mátrixát, $A(\bar{\omega})$ pedig jelentse azt az $r \times (n-r)$ típusú mátrixot, amelyet az A mátrixból az $i_1, i_2, \ldots, i_r$ indexű oszlopok elhagyása után kapunk. Jelölje továbbá P_ω azt az n-edrendű permutációs mátrixot, amely balról való szorzás által egy n sorból álló mátrix sorait a

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r & i_{r+1} & \ldots & i_n \end{pmatrix} \qquad i_{r+k} < i_{r+j} \Leftrightarrow k < j \tag{2.1}$$

permutáció szerint rendezi át.

2. *Tétel:* Ha A teljes sorrangú $r \times n$ típusú mátrix, akkor egy 3-feltételű általánosított inverzét előállítja a

$$A^g = \Big(\sum_{\omega \in \Omega} |A(\omega)|\Big)^{-1} \sum_{\omega \in \Omega} P_\omega \begin{bmatrix} \operatorname{adj} A(\omega) \\ \hline 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

formula.

A (2. 2) kifejezésben $|A(\omega)|$ az $A(\omega)$ mátrix determinánsát adj $A(\omega)$ az $A(\omega)$ adjungált jelöli.

Bizonyítás: A P_ω definíciója és a (2. 1) permutáció figyelembevételével belátható, hogy ha egy n oszlopból álló mátrixot jobbról szorzunk a P_ω permutációs mátrixszal, akkor az az adott mátrix $i_1, i_2, \ldots, i_r$ indexű oszlopait rendre az $1, 2, \ldots, r$ indexű oszlopokba, az $i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_n$ indexű oszlopokat pedig az $r+1, r+2, \ldots, n$ indexű oszlopokba viszi. Ennek alapján igaz a következő egyenlőség

$$\begin{aligned} AA^g &= \Big(\sum_{\omega \in \Omega} |A(\omega)|\Big)^{-1} A \sum_{\omega \in \Omega} P_\omega \begin{bmatrix} \operatorname{adj} A(\omega) \\ \hline 0 \end{bmatrix} \\ &= \Big(\sum_{\omega \in \Omega} |A(\omega)|\Big)^{-1} \sum_{\omega \in \Omega} A P_\omega \begin{bmatrix} \operatorname{adj} A(\omega) \\ \hline 0 \end{bmatrix} \\ &= \Big(\sum_{\omega \in \omega} |A(\omega)|\Big)^{-1} \sum_{\omega \in \Omega} [A(\omega) \mid A(\bar{\omega})] \begin{bmatrix} \operatorname{adj} A(\omega) \\ \hline 0 \end{bmatrix} \\ &= \Big(\sum_{\omega \in \Omega} |A(\omega)|\Big)^{-1} \sum_{\omega \in \Omega} |A(\omega)| \, I_r = I_r. \end{aligned}$$

Ebből az $AA^gA = A$ egyenlőség azonnal adódik, s az 1. tétel alapján a 2. tétel állításának igazolására elég volt ezt bizonyítanunk.

3. §. A pseudoinverz megadására vonatkozó irodalomból itt csak néhány módszerre utalunk, amelyet a pseudoinverz előállításánál alkalmazni szoktak.

I. *A mátrix bázisfaktorokra bontása*

Ismeretes, hogy egy $m \times n$ típusú r rangú A mátrix mindig felbontható

$$A = BC \tag{3. 1}$$

alakban, ahol B $m \times r$, C pedig $r \times n$ típusú mátrix. Ha (3. 1) az A mátrixnak egy ilyen felbontása, akkor az A pseudoinverzre a

$$A^+ = C^H (B^H A C^H)^{-1} B^H \tag{3. 2}$$

vagy

$$A^+ = C^H (C C^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H \tag{3. 3}$$

kifejezés adható meg (lásd pl. [6] és [21]).

II. *A mátrix általánosított spektrálfelbontása*

Minden $m \times n$ típusú mátrix felbontható

$$A = U \sum V^H \tag{3. 4}$$

alakban, ahol U az AA^H m-edrendű pozitív definit hermitikus mátrix ortonormált sajátvektoraiból álló unitér mátrix, V az $A^H A$ n-edrendű mátrix ortonormált sajátvektoraiból álló unitér mátrix, a Σ pedig $m \times n$ típusú nemnegatív diagonál mátrix, amelynek nemnegatív diagonálelemei az $A^H A$ (vagy AA^H) mátrix sajátértékeinek nemnegatív négyzetgyökei. A (3. 4) előállítást az A mátrix általánosított spektrálfelbontásának nevezzük. Ha A (3. 4) alakban van előállítva, akkor

$$A^+ = V \sum^+ U^H,$$

ahol Σ^+ $n \times m$ típusú diagonálmátrix a Σ mátrixból úgy keletkezik, hogy a nemzérus diagonális elemek helyett azok reciproka áll és a mátrixot transzponáljuk (lásd pl. [3], [5], [10], [11]).

III. *Rohde redukciója*

Rohde a különböző általánosított inverzek vizsgálatánál [25] a következő összefüggést használja. Ha A $m \times n$ típusú r rangú mátrix, akkor létezik olyan P és Q m-edrendű, ill. n-edrendű mátrix, hogy

$$PAQ = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad Q = [Q_1 \; Q_2], \tag{3. 5}$$

ahol B r-edrendű nemszinguláris mátrix. G. L. Morris és P. E. Odell [19] megmutatják, hogy ha A kielégíti a (3. 5) összefüggést, akkor $A^+ a$.

$$Q^{-1} A^+ P^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} P_1 P_2^+ \\ -Q_2^+ Q_1 B^{-1} & Q_2^+ Q_1 B^{-1} P_1 P_2^+ \end{bmatrix}$$

összefüggést elégíti ki.

A következőkben a pseudoinverzre megadunk egy formulát, amelyet az A alkalmas particionalt alakjából nyerünk.

Ha az A $m\times n$ típusú r rangú mátrix bal felső sarokminora nem zérus, akkor A a

$$A=\begin{bmatrix} B & S \\ T & W \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

alakban particionálható, ahol B r-edrendű invertálható mátrix. A feltevés szerint az utolsó $m-r$ sor az első r sor lineáris kombinációja, így egyszerű számolással adódik, hogy $W=TB^{-1}S$. Az A mátrix tehát a (3. 6) helyett a

$$A=\begin{bmatrix} B & S \\ T & TB^{-1}S \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

alakban írható fel.

3. *Tétel:* A (3. 7) alakban megadott A mátrix pseudoinverze

$$A^{+}= \tag{3.8}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} B^H(BB^H+SS^H)^{-1}B(B^HB+T^HT)^{-1}B^H & B^H(BB^H+SS^H)^{-1}B(B^HB+T^HT)^{-1}T^H \\ \hline S^H(BB^H+SS^H)^{-1}B(B^HB+T^HT)^{-1}B^H & S^H(BB^H+SS^H)^{-1}B(B^HB+T^HT)^{-1}T^H \end{array}\right].$$

Bizonyítás: A (3. 7) mátrixra alkalmazzuk a bázisfaktorokra bontást. Egy előállítás

$$A=\begin{bmatrix} B \\ T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & B^{-1}S \end{bmatrix}.$$

A pseudoinverzre vonatkozó (3. 3) formula erre a mátrixra a

$$A^{+}=\begin{bmatrix} I \\ S^H(B^H)^{-1} \end{bmatrix}(I+B^{-1}SS^H(B^H)^{-1})^{-1}(B^HB+T^HT)^{-1}\begin{bmatrix} B^H & T^H \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} I \\ S^H(B^H)^{-1} \end{bmatrix}B^H(BB^H+SS^H)^{-1}B(B^HB+T^HT)^{-1}\begin{bmatrix} B^H & T^H \end{bmatrix},$$

ami megegyezik a (3. 8) mátrixszal.

1. *Megjegyzés:* Ha A $m\times n$ típusú r rangú mátrix, akkor van olyan P és Q m-edrendű, ill n-edrendű permutációs mátrix, hogy

$$A=PA_1Q \tag{3.9}$$

és A_1 már (3. 8) alakú mátrix. Ekkor a (3. 9) alatti A pseudoinverze

$$A^{+}=Q^TA_1^{+}P^T,$$

és ebben az A_1 pseudoinverzét a (3. 8) adja meg. (A T jelzés a transzponáltra utal.)

2. *Megjegyzés:* Ha A teljes sorrangú, illetve teljes oszloprangú, akkor a (3. 8) a

$$A=[BS],$$

illetve az

$$A=\begin{bmatrix} B \\ T \end{bmatrix}$$

alakra redukálódik. A pseudoinverz megfelelően az

$$A^+ = \begin{bmatrix} B^H(BB^H+SS^H)^{-1} \\ S^H(BB^H+SS^H)^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve az

$$A^+ = [(B^H B+T^H T)^{-1} B^H \ (B^H B+T^H T)^{-1} T^H]$$

kifejezésre egyszerűsödik.

Figyelembe véve az A (3. 7) particionált alakját, egyszerű számolással igazolható a következő tétel.

4. *Tétel:* A (3. 7) alakban megadott A mátrixnak egy (1, 3, 4)-inverzét adja meg az alábbi formula

(3. 9)
$$A^{(1,3,4)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} B^H(SS^H+BB^H)^{-1}-(T^H T+B^H B)^{-1}T^H TB^{-1} & (T^H T+B^H B)^{-1}T^H \\ S^H(SS^H+BB^H)^{-1} & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} (T^H T+B^H B)^{-1}-B^{-1}SS^H(SS^H+BB^H)^{-1} & (T^H T+B^H B)^{-1}T^H \\ S^H(SS^H+BB^H)^{-1} & 0 \end{array}\right].$$

A (3. 9) formula érdekessége, hogy az utolsó $m-r$ sorból és $n-r$ oszlopból álló mátrixa zérus. Figyelembe véve az előző tétel 1. megjegyzését könnyen látható, hogy az eredeti A mátrix bármely invertálható r-edrendű minormátrixának komplementér minormátrixát tekintjük is, a (3. 9) alatt megadott $A^{(1,3,4)}$ inverz megfelelő helyzetű $(n-r)\times(m-r)$ típusú minormátrixa zérus lesz. A (3. 9) mátrix tehát sok zéruselemet tartalmazhat.

IRODALOM

[1] Ben-Israel, A.—Charnes, A., An explicit solution of a special class of linear programming problems; Oper. Res. 16 (1968) 1166—1175.

[2] Bjerhammar, A., A generalized matrix algebra; Kung. Techn. Högsk. Handl. Stockholm, No. 124, 1958. 32 pp.

[3] Boot, J. C. G., The computation of the generalized inverse of singular or rectangular matrices; Amer. Math. Monthly 70 (1963) 302—303.

[4] Bose, R. C., Unpublished lecture notes on analysis of variance; University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, 1959.

[5] Chipman, J. S.—Rao, M. M., Projections, generalized inverses, and quadratic forms; J. Math. Anal. Appl. 9 (1964) 1—11.

[6] Egerváry, J., Az inverz mátrix általánosítása; MTA Mat. Kut. Int. Közleményei 1 (1956) 315—324.

[7] Fisher, A. G., On construction and properties of the generalized inverse; Siam J. Appl. Math. 15 (1967) 269—272.

[8] Frame, J. S., Matrix functions and applications; IEEE Spectrum 1 (1964) 208—220.

[9] Goldman, A. J.—Zelen, M., Weak generalized inverses and minimum variance linear unbiased estimation; Math. Research Center Techn. Rept. 314, U. S. Army, Madison, Wisconsin, 1963.

[10] Golub, G. H.—Kahan, W., Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix; J. Siam Num. Anal. Ser. B 2 (1965) 205—224.

[11] Golub, G. H.—Reinsch, C., Singular value decomposition and least squares solutions; Numer. Math. 1 (1970) 403—420.

[12] Hearon, J. Z., Constraction of EP generalized inverses by inversion of non-singular matrices; J. Res. Nar. Bur. Standards Sec. B 71/B (1967) 57—60.

[13] Hearon, J. Z., Polar factorization of a matrix; J. Res. Nat. Bur. Standards Sec. B. 71/B (1967) 65—67.

[14] HEARON, J. Z., Symmetrizable generalized inverses of symmetrizable matrices; J. Res. Nat. Bur. Standards Sec. B 71/B (1967) 229—231.
[15] MEYER, C. D. JR., On ranks of pseudoinverses; SIAM Rev. 11 (1969) 382—385.
[16] MEYER, C. D. JR., Generalized inverses of triangular matrices; SIAM J. Appl. Math. 18 (1970) 401—406.
[17] MOORE, E. H., On the reciprocal of the general algebraic matrix; Abstract, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1919—20) 394—395.
[18] MOORE, E. H., General Analysis, Memoirs of the Amer. Philos. Soc. Vol. I., 1935.
[19] MORRIS, G. L.—ODELL, P. L., A characterization for generalized inverses of matrices; SIAM Rev. 10 (1968) 208—211.
[20] PENROSE, R., A generalized inverse for matrices; Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 406—413.
[21] PETERS, G.—WILKINSON, J. H., The least squares problem and pseudo-inverses; Comput. J. 13 (1970) 309—316.
[22] PRINGLE, R. M.—RAYNER, A. A., Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models; SIAM Rev. 12 (1970) 107—115.
[23] RADO, R., Note on generalized inverses of matrices; Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956) 600—601.
[24] RAO, C. R., A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics; J. Royal Statist. Soc. Ser. B. 24 (1962) 152—158.
[25] ROHDE, C. A., Contributions to the theory, computations and application of generalized inverses; Doctoral Dissertation, N. North Carolina State College, Raleigh, North Carolina, 1964.
[26] ROHDE, C. A., Some results on generalized inverses; SIAM Rev. 8 (1966) 201—205.
[27] ROHDE, C. A., Special applications of the theory of generalized inversion to statistics; Proceedings of the Symposium on Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices, Texas Technological College, Lubbock, Texas, 1968; Texas Technological College Mathematics Series No. 4., 239—266.

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБРАТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ

А. ЛИ

ON SOME NEW FORMULAE CONCERNING GENERALIZED MATRIX INVERSES

A. LEE

A TELJES GRÁF ADOTT HAMILTON-KÖRÉVEL ADOTT SZÁMÚ KÖZÖS ÉLT TARTALMAZÓ HAMILTON-KÖRÖK ASZIMPTOTIKUS SZÁMÁRÓL

NEMETZ TIBOR

1. BEVEZETÉS

Jelen dolgozat szervesen kapcsolódik a szerző [3] dolgozatához, annak folytatásaként kell tekinteni. A célból, hogy önmagában is érthető legyen, röviden összefoglaljuk [3] jelöléseit és eredményeit.

Egy gráf valamennyi csúcsán áthaladó kört Hamilton körnek nevezünk. Jelöljük $H_n(r)$-rel az n szögpontú teljes gráf azon Hamilton köreinek számát, melyeknek pontosan r közös éle van egy előre adott Hamilton-körrel. Bizonyítottuk a következő, $r \geqq 1$ esetén érvényes rekurziót:

$$(1.1) \qquad H_n(r) = \frac{n}{r}\left[\frac{2(n-r)}{n-1} H_{n-1}(r-1) - \frac{2(r-1)}{n-2} H_{n-2}(r-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{2r}{n-1} H_{n-1}(r) + \frac{r}{n-2} H_{n-2}(r) + \frac{r-2}{n-2} H_{n-2}(r-2)\right],$$

ahol definíciószerűen

$$(1.2) \qquad H_n(r) = 0, \quad \text{ha} \quad r < 0.$$

Bevezetve az

$$(1.3) \qquad M_n(r) = \frac{r}{n} H_n(r), \quad r \geqq 0$$

jelölést, (1.1) a következő alakba írható:

$$(1.1^*) \qquad M_n(r) = 2H_{n-1}(r-1) - 2M_{n-1}(r-1) - 2M_{n-2}(r-1) +$$

$$+ 2M_{n-1}(r) + M_{n-2}(r) + M_{n-2}(r-2).$$

Megadtunk továbbá egyebek között $H_n(0)$-ra egy olyan rekurziós összefüggést, mely csak a $H_{n-k}(0)$, $k = 1, 2, \ldots, 5$ tagokat tartalmazza. Ez módot adott $H_n(0)$ nagyságrendjének vizsgálatára. Legyen

$$(1.4) \qquad h_n(r) = \frac{1}{(n-1)!} H_n(r).$$

Bebizonyítottuk, hogy $h_n(0)$ szigorúan monoton növő sorozatot alkot s így létezik határértéke. Nyertük, hogy

$$\lim_{(n)} h_n(o) \geqq \frac{1}{31}.$$

Egyben utaltunk arra, hogy ezen összefüggés birtokában (1. 1) alapján határérték-reláció vezethető le $r \geqq 1$ esetére is. Jelen dolgozat célja ennek az állításnak az egzakt bizonyítása. Bebizonyítjuk(*), hogy a $\lim h_n(r)$ határérték létezik és

$$h(r) = \lim_{(n)} h_n(r) = \frac{2^{r-1}}{r!} \cdot \frac{1}{e^2} \tag{1. 5}$$

2. A $h_n(r)$, $n = 1, 2 \ldots$ SOROZAT HATÁRÉRTÉKE:

Az (1. 1) összefüggés mindkét oldalát $n \cdot (n-2)!$-sal osztva, $h_n(r)$ definícióját alkalmazva nyerjük:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) h_n(r) = \frac{2}{r} h_{n-1}(r-1) - 2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{1}{n-1} \cdot h_{n-1}(r-1) - \tag{2. 1}$$

$$- 2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{(n-2)^2} h_{n-2}(r-1) + \frac{2}{n-1} h_{n-1}(r) + \frac{1}{(n-2)^2} h_{n-2}(r) +$$

$$+ \left(1 - \frac{2}{r}\right) \frac{1}{(n-2)^2} h_{n-2}(r-2).$$

Mivel

$$0 \leqq H_n(r) \leqq \sum_{r=0}^{n} H_n(r) = \frac{1}{2}(n-1)!$$

így nyilván

$$0 \leqq h_n(r) \leqq \tfrac{1}{2},$$

tehát $\frac{1}{n} \cdot h_n(r) \to 0$, s még inkább $\frac{1}{n^2} h_n(r) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ezért (2. 1)-ből határátmenettel adódik, hogy

$$h(r) = \lim_{(n)} h_n(r) = \frac{2}{r} \lim_{(n)} h_n(r-1) = \frac{2}{r} h(r-1), \tag{2. 2}$$

ahol $h(r)$-t éppen (2. 2) definiálja. Mivel a [3] dolgozatban bizonyítottuk, hogy létezik és pozitív a $h(0)$ határérték, (2. 2) alapján következik, hogy a $h(r)$ határérték is létezik és pozitív tetszőleges r-re. Továbbá a rekurzió ismételt alkalmazásával látható, hogy

$$h(r) = \frac{2^r}{r!} \cdot h(0), \tag{2. 3}$$

Legyen

$$h = \sum_{r=0}^{\infty} h(r) = h(0) \cdot e^2.$$

Nyilvánvaló, hogy $h \leqq \frac{1}{2}$. Valóban, ellenkező esetben létezne olyan $\varepsilon > 0$ és $R(\varepsilon) = R > 0$, hogy

$$\sum_{r=0}^{R} h(r) > \frac{1}{2} + \varepsilon$$

(*) Baróti György egyetemi doktori disszertációjában [1] jelen dolgozattól lényegesen eltérő módszerrel hasonló eredményt ért el.

lenne; — továbbá tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $N=N(\varepsilon, R)$, hogy

$$\max_{0\leq r\leq R} |h_n(r)-h(r)|<\frac{\varepsilon}{2R},$$

hacsak $n>N$. Így ekkor

$$\frac{1}{2}\geqq\sum_{r=0}^{R} h_n(r)>\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

ami ellentmondás. Adódott:

$$h(r)\leqq\frac{1}{2}\cdot e^{-2}\cdot\frac{2^r}{r!} \tag{2.4}$$

A célból, hogy kimutassuk, hogy a (2.4) becslés a pontos értéket szolgáltatja, keressünk n-től független „jó" felső korlátot $h_n(r)$-re. (2.1) alapján azonnal látszik, hogy

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)h_n(r)= \tag{2.5}$$

$$=\frac{2}{r}h_{n-1}(r-1)+\frac{2}{n-1}h_{n-1}(r)+\frac{2}{(n-2)^2}h_{n-2}(r)+\frac{1}{(n-2)^2}h_{n-2}(r-2).$$

Legyen

$$s_r=\sup_{(n)} h_n(r) \tag{2.6}$$

(2.5) jobb oldalán tagonként szuprémumot véve:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)h_n(r)\leqq\frac{2}{r}s_{r-1}+\left[\frac{2}{n-1}+\frac{2}{(n-2)^2}\right]s_r+\frac{1}{(n-2)^2}s_{r-1} \tag{2.7}$$

Figyelembe véve, hogy $h_n(r)=0$, ha $r<n$, így elegendő az $r\geqq n$ esetet vizsgálni. Ekkor

$$\frac{1}{(n-2)^2}<\frac{2}{r^2};\quad \frac{1}{n}\leqq\frac{1}{10};\quad 2\left[\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-2)^2}\right]\leqq\frac{4}{10},$$

hacsak $n\geqq 10$. Nyilvánvaló továbbá, hogy $h_n(r)$ a bal oldalon is helyettesíthető s_r-rel. Átrendezés után adódik:

$$s_r\leqq\frac{4}{r}s_{r-1}+\frac{4}{r^2}s_{r-2} \tag{2.8}$$

(2.4) sugallja, hogy s_r is majorizálható $\frac{x^r}{r!}$-sal, alkalmas x esetén. Keressünk tehát egy ilyen x-et! Elegendő találni olyan x-et, melyre

$$\frac{4}{r}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{4x^{r-2}}{r^2(r-2)!}\leqq\frac{x^r}{r!} \tag{2.9}$$

Valóban, ekkor (2.8) alapján

$$s_r\leqq\frac{x^r}{r!},\quad \text{hacsak}\quad s_{r-i}\leqq\frac{x^{r-i}}{(r-i)!},\quad i=1,2.$$

Pozitív x értékekre szorítkozva (2. 9) ekvivalens a következővel:

$$4x+4\frac{r-1}{r}\leqq x^2.$$

Ez nyilvánvalóan teljesül, ha

$$x^2\geqq 4x+4,$$

azaz ha

$$x\geqq 2(1+\sqrt{2}).$$

Mivel $\frac{x^r}{r!}\to\infty$, ha $x\to\infty$ rögzített r esetén, így nyilván létezik olyan x_{10} és x_{11}, hogy

$$s_{10}\leqq\frac{x_{10}^{10}}{10!}\quad\text{és}\quad s_{11}\leqq\frac{x_{11}^{11}}{11!}$$

Így $x=\max\{x_{10}, x_{11}, 5\}$ választás megfelel céljainknak. Nyertük:

$$s_r\leqq\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{ha}\quad r<10\\ \frac{x^r}{r!} & \text{ha}\quad r\geqq 10\end{cases}$$

Mivel $\sum_{r=0}^{\infty}s_r<+\infty$, így $h=\frac{1}{2}$ is teljesül. Ez az állítás azonnal következik a nagy Lebesgue-tételből, de közvetlenül is belátható az alábbi úton: Tegyük fel, hogy $h<\frac{1}{2}-\varepsilon$, valamilyen $\varepsilon>0$-ra. Válasszuk meg ekkor $R_1=R_1(\varepsilon)$-et, úgy, hogy

$$\sum_{R_1}^{\infty}\frac{x^r}{r!}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$R_1\geqq 10$ teljesüljön. $N=N(\varepsilon)$-t megválasztva ugyanúgy, mint (2. 4) levezetésénél, $n>N$-re adódik:

$$\frac{1}{2}=\sum_{r=0}^{n}h_n(r)\leqq\sum_{r=0}^{R_1-1}h_n(r)+\sum_{r=R_1}^{\infty}s_r\leqq h+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{1}{2},$$

ami nyilvánvalóan ellentmondás. Eredményünket tétel formájában megfogalmazva:

Tétel: A $\frac{2}{(n-1)!}H_n(r)$, $r=0, 1, \ldots$ mennyiségek határeloszlása létezik és $\lambda=2$ paraméterű Poisson-eloszlás, azaz

$$2h(r)=\lim_{(n)}\frac{2}{(n-1)!}H_n(r)=\frac{2^r}{r!}\cdot e^{-2}.$$

3. $H_n(r)$ KIFEJEZÉSE $H_i(r-1)$ ÉS $H_i(r-2)$ SEGÍTSÉGÉVEL

A konvergencia sebességének vizsgálatánál hasznos lehet olyan rekurzió levezetése, melyben $H_n(r)$ csak $H_i(s)$, $s<r$ tagoktól függ. Ilyen összefüggés birtokában reményünk lehet arra, hogy $h_n(s)$, $s<r$-re vonatkozó állításokat indukcióval átvihessük $h_n(r)$-re is. Ezt a célt megvalósítandó rögzítsük r értékét. Ezen fix érték mellett a rövidség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$M_n = M_n(r), \quad H_n = H_n(r-1), \quad L_n = M_n(r-1), \quad K_n = M_n(r-2) \tag{3. 1}$$

Az (1. 1*) alapján érvényes:

$$M_n = 2H_{n-1} - 2L_{n-1} - 2L_{n-2} + 2M_{n-1} + M_{n-2} + K_{n-2}. \tag{3. 2}$$

A jobb oldalról az M_i tagokat kívánjuk eltüntetni. Ezt megtehetjük (3. 2) ismételt alkalmazásával, úgy, hogy a jobb oldalról minden lépésben a legmagasabb indexű M_i tagot küszöböljük ki.

Az első lépés után adódik

$$M_n = (2H_{n-1} - 4H_{n-2}) - (2L_{n-1} + 6L_{n-2} + 4L_{n-3}) + \\ + 5M_{n-2} + 2M_{n-3} + (k_{n-2} + 2k_{n-3})$$

Értelmezzük az $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$, $c_i^{(k)}$, d_k és l_k számokat a következőképpen: Legyen a $(k-1)$-edik kiküszöbölés után M_n előállítása a következő:

$$M_n = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(k)} H_{n-i} - \sum_{i=1}^{k+1} b_i^{(k)} L_{n-i} + \sum_{i=2}^{k+1} c_i^{(k)} k_{n-i} + d_k M_{n-k} + e_k M_{n-k-1}. \tag{3. 3}$$

Behelyettesítve $d_k \cdot M_{n-k}$ (3. 2) szerinti előállítását, együttható összehasonlítással adódik, hogy

$$a_i^{(k)} = a_i^{(k+1)}, \quad \text{ha} \quad i \leqq k \quad \text{és} \quad a_{k+1}^{(k+1)} = 2d_k$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k+1)}, \quad \text{ha} \quad i \leqq k, \; b_{k+1}^{(k+1)} = b_{k+1}^{(k)} + 2d_k \quad \text{és} \quad b_{k+2}^{(k+1)} = 2d_k$$

$$c_i^{(k)} = c_i^{(k+1)}, \quad \text{ha} \quad i \leqq k+1 \quad \text{és} \quad c_{k+2}^{(k+1)} = d_k$$

$$d_{k+1} = 2d_k + e_k$$

$$e_{k+1} = d_k.$$

Valamennyi együttható kifejezhető a d_k sorozat segítségével. Elhagyva a felső indexet $d_i^{(k)}$ és $c_i^{(k)}$ esetén, bevezetve a $b_{k+1} = b_{k+1}^{(k+1)}$ és $b_{k+2}^* = b_{k+2}^{(k+1)}$ jelölést, nyerjük:

$$a_{k+1} = 2d_k$$

$$b_{k+1} = b_{k+1}^* + 2d_k = 2d_k + 2d_{k-1}$$

$$b_{k+2}^* = 2d_k \tag{3. 4}$$

$$c_{k+2} = d_k$$

$$e_{k+1} = d_k$$

$$d_{k+1} = 2d_k + d_{k-1}. \tag{3. 5}$$

A fentiek segítségével (3. 3)-at a következő alakba írhatjuk:

$$(3.6)\qquad M_n = 2\sum_{i=1}^{k} d_{i-1} H_{n-i} - 2\sum_{i=1}^{k} (d_{i-1}+d_{i-2}) L_{n-i} - 2d_{k-1} L_{n-1-k} +$$

$$+\sum_{i=2}^{k+1} d_{i-2} K_{n-i} + d_k M_{n-k} + d_{k-1} M_{n-k-1},$$

ahol a $\{d_n\}$ sorozatot a (3. 5) alatti rekurzió definiálja a $d_0=1$, $d_1=2$ kezdeti feltétel mellett. Mint az a lineáris differencia-egyenletek elméletéből jól ismert (lásd pl. Gelfand [2])

$$d_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n,$$

ahol α és β a kezdeti feltételek által van meghatározva, míg $x_{1,2} = 1\pm\sqrt{2}$ az

$$x^2-2x-1 = 0$$

karakterisztikus egyenlet két gyöke.

Mivel $M_n(n)=1$ és $M_n(n-1) = 0$, így $k = n-1-r$ választás mellett $M_{n-k}=0$ és $M_{n-k-1}=1$, d_n számszerű értékeinek helyettesítésével (3. 6) a kívánt rekurziós összefüggést szolgáltatja. Megjegyezzük, hogy (3. 6) alapján lehetőség van $H_n(r)$ explicit kifejezésére is. Ennek elvégzése helyett azonban utalunk az [1] dolgozatra.

IRODALOM

[1] Baróti György: Hamilton-körökkel kapcsolatos problémákról. (Egyetemi doktori disszertáció, ELTE, TTK 1971.)

[2] Gelfond, A. O.: Differenciaszámítás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

[3] Nemetz Tibor: A teljes gráf adott Hamilton körével adott számú közös élt tartalmazó Hamilton körök számáról. Matematikai Lapok, (1971).

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗАДАННОЕ ЧИСЛО ОБЩИХ РЕБЕР С ДАННОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ ПОЛНОГО ГРАФА

T. HEMETЦ

ON A PROBLEM ABOUT HAMILTONIAN CYCLES

T. NEMETZ

This paper is a continuation of [3]. The number $H_n(r)$ of the Hamiltonian cycles having exactly r common edges with a fixed one in the complete graph of n vertices is investigated. Using the recursion (1.1) established in [3] we prove that $\frac{2}{(n-1)!} H_n(r)$ is asymptotically Poisson-distributed with parameter $\lambda=2$, i.e.

$$\lim_{(n)} \frac{2}{(n-1)!} H_n(r) = \frac{2^r}{r!} e^{-2}.$$

GLOBÁLIS KONNEXIÓK DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOKON

GERENCSÉR LÁSZLÓ

1. BEVEZETÉS

A differenciálható sokaság [1] a felület általánosítása és e fogalmat a geometriai vizsgálatok kibővítése céljából alkottuk. A koordinátázás puszta megadása azonban nem elegendő ilyen vizsgálatokhoz. A differenciálható sokaságok általános elmélete nem tud lényeges különbséget mutatni pl. egy körlap és egy félgömb között. Ezek egymással homeomorfak. El kell tehát látnunk a sokaságokat még egy mennyiséggel. Hogy milyen mennyiséggel, arra a klasszikus vizsgálatok adnak útmutatást.

A klasszikus felületelméletben központi szerepet játszanak az érintősíkokat kifeszítő r_i vektorok r_{ij} deriváltjai. Ezen r_{ij} mennyiségek helyes értelmezése az, ami a geometriai vizsgálatokat absztrakt sokaságokon lehetővé teszi. Az r_{ij}-k értelmezése korántsem triviális: az r_i vektorok deriválása ugyanis absztrakt sokaságon értelmét veszti. Különböző pontokhoz tartozó érintővektorok ugyanis teljesen idegen absztrakt vektorterek elemei. Célunk lesz tehát valami módon azonosítani a különböző pontokban vett érintőtereket. Az azonosítás módja persze önkényes, s épp ez az a plusz, amivel a sokaságot feltétlenül fel kell ruháznunk, hogy további, valóban geometriai vizsgálatnak értelme legyen.

Most felsoroljuk a gyakran előforduló fogalmakat és jelöléseket. Sokaságon mindig végtelen sokszor differenciálható sokaságot értünk. (Röviden C^∞ sokaság). A „differenciálható" szó ezért mindig végtelen sokszori differenciálhatóságot jelent. A görbéket $x(t)$, $0 \leqq t \leqq t_0$, a vektormezőket ζ, η, ill. τ, adott x, z pontban felvett értéküket $\zeta(x)$, $\tau(z)$ jelöli. Egyetlen érintővektort általában u, v fogja jelölni. Ha félreértésre nincs lehetőség a „differenciálható" jelzőt elhagyjuk a most felsorolt fogalmak elől. Legyen $\varphi: X \to Y$ differenciálható leképezés. A $d\varphi: T(X) \to T(Y)$ leképezést, amelyet a φ indukál az érintősokaságok között, röviden továbbra is φ-vel jelöljük.

Lie csoportnak nevezünk egy G halmazt, amelyen adott egy csoportstruktúra és egy analitikus sokaságstruktúra, úgy hogy a csoportműveletek analitikusak (lásd [2]).

2. A LIE DERIVÁLT

A bevezetésben megállapítottuk, hogy különböző x_0, x_1 pontokhoz tartozó T_{x_0}, T_{x_1} terek azonosításának mikéntje a tényleges geometriai vizsgálat kiindulópontja. Egy ilyen azonosításhoz juthatunk, ha megadunk magán az X sokaságon egy transzformációt, amely x_0-t x_1-be viszi. E transzformáció deriváltja egy leképezést ad. Ez a leképezés példáinkban mindig izomorfizmus lesz. Vektorok deriválásához egyetlen ilyen transzformáció megadása persze kevés.

Legyen tehát megadva egy G egyparaméteres transzformációsereg, amely Lie csoport, de legalábbis lokális Lie csoport [2]. G elemeit $g(t)$ jelöli, t a paraméter. G hat az X egy U környezetén; az x pont képét $g(t)\cdot x$ jelöli. Fennáll tehát, hogy a $(g(t), x) \to g(t)\cdot x$ leképezés differenciálható és $g_1(g_2 x)=(g_1 g_2)x$.

A G mint transzformációcsoport leírható egy

$$y^i(t)=\varphi^i(x^1 \dots x^n, t) \qquad i=1, 2, \dots, n$$

függvényrendszerrel, ahol $y=g(t)x$ és x^i, ill. y^i az x, ill. y pontok koordinátáit jelölik egy lokális koordinátarendszerben.

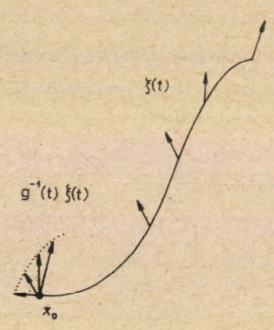
Legyen már most $\zeta(x)=\xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ egy U-ban értelmezett vektormező. Legyen még $x_0 \in U$ és $x(t)$ az x_0-ból kiinduló trajektória, azaz $x(t)=g(t)\cdot x_0$. A $T_{x(t)}$ érintőterek között van egy azonosításunk, (azaz egy izomorfizmusunk) s így e görbe mentén már deriválni is tudjuk a $\zeta(x)$ mezőt. Bevezetve a $\xi(t)=\zeta(x(t))$ jelölést definiáljuk a deriválást a következő képlettel:

$$D\xi=\frac{d}{dt}(g^{-1}(t)\,\xi(t))\Big|_{t=0} \tag{1}$$

Ezt abszolút deriváltnak nevezzük. A jobb oldali $\dfrac{d}{dt}$ operáció értelmes, hiszen a $g^{-1}(t)\xi(t)$ vektorok egy, a T_{x_0}-ban fekvő görbét írnak le.

Egy G egyparaméteres transzformációcsoport egyértelműen jellemezhető trajektóriáinak megadásával. Ezt a trajektóriasereget pedig ismerjük, ha ismerjük az érintők alkotta mezőt. Ezt a mezőt η jelöli. Tehát

$$\eta^i(x)=\frac{d}{dt}(\varphi^i(x, t))\Big|_{t=0}$$



1. ábra

Bebizonyítjuk most a következő szép tételt (lásd [1]).

1. Tétel. Az (1) által definiált deriválás eredménye nem más, mint az $[\eta, \zeta]$ Poisson zárójel.

Megjegyzés: A tétel szerint az $[\eta, \zeta]$ Poisson-zárójelben az η mint differenciáloperátor hat a ξ mezőn. Ezt aláhúzza a Jacobi-identitás is, amely átrendezés után a szorzat deriválási szabályát fejezi ki.

Bizonyítás:

$$d(g^{-1}(t))\xi(t)=d(g(-t))\xi(t)=dg(-t)\xi(t)=$$

$$=\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x^1(t), \dots, x^n(t), -t)\xi^j(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{t=0}.$$

A jobb oldal t szerinti deriváltját számítsuk most ki $t=0$-ban. Azt kapjuk, hogy:

$$D\xi=\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial x^j \partial x^k}(x(0), 0)\cdot\dot{x}^k(0)\cdot\xi^j(0)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{t=0}-$$

$$-\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial x^j \partial t}(x(0), 0)\cdot\xi^j(0)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{t=0}+\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x(0), 0)\cdot\dot{\xi}^j\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{t=0}.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\varphi^i(x, 0)=x^i$, ezért a $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x(0), 0)$ mátrix identitás, és $\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^j \partial x^k}(x(0), 0)=0$, ha $t=0$. Eredményünk ezért egyszerűsödik:

$$D\xi = \left(\dot{\xi}^i - \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^j \partial t}\xi^j\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\xi^j\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = [\eta, \xi]$$

amit bizonyítani akartunk.

A deriválás eredménye az X sokaság egy érintővektora. Ez így van a klasszikus esetben is, ha belső geometriai vizsgálatokat végzünk.

Analitikus szempontból a következőket mondhatjuk: a ξ mező deriváltjának komponenseit a ξ komponenseiből kapjuk egy elsőrendű, de nem homogén differenciáloperátor alkalmazásával. Elszakadva most e megállapítás eredetétől, e differenciáloperátort a legáltalánosabb alakban így írhatjuk

$$(D_k \xi)^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\xi^j$$

(itt az x^k koordináta irányában történő deriválásról van szó). Ez a definíció függ a koordinátarendszertől, s ezért a Γ^i_{jk} paraméterek megválasztása semmiképp sem lehet önkényes: a $(D_k\zeta)^i$ számok különböző koordinátarendszerekre vonatkozóan egy és ugyanazon vektornak a koordinátái kell hogy legyenek. Ezért a koordinátarendszertől függő Γ^i_{jk} paraméterek között egy bizonyos transzformációs törvény lesz érvényes. A Γ^i_{jk}-k a tenzoroknál kicsit bonyolultabban transzformálódnak.

Egy kérdés azonban továbbra is nyitott: a tenzorok önálló matematikai objektumként is léteznek. A tenzorok koordinátamentes definíciója ugyanis: vektorok fölött értelmezett multilineáris függvény. Mi az a matematikai objektum mármost, aminek paraméterei a Γ^i_{jk}-k? A dolgozatban erre is feleletet kapunk.

3. A LIE DERIVÁLT ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Legyen $x(t)$ tetszőleges görbe X-en, $\zeta(t)$ egyparaméteres vektorsereg $x(t)$ mentén. A $\Gamma_{x(t)}$ érintőterek azonosítását most a legközvetlenebbül egy $(e_i(t))$ párhuzamos n-él sereg megadásával oldjuk meg. Ezt a következőképpen kell érteni: az $x(t)$ görbe minden pontjában megadunk n lineárisan független vektort: $e_1(t), \ldots, e_n(t)$. Az $e_i(t)$ egyparaméteres sereg természetesen differenciálható. Az $e_i(t)$ vektorokat különböző t-k mellett azonosaknak tekintjük. Így általában egy u és egy v vektor akkor tekintendő egyenlőnek (más néven: párhuzamosaknak), ha koordinátáik az (e_i) n-élekre vonatkozóan megegyeznek.

Legyen tehát $\zeta(t) = \xi^i(t)e_i \cdot (t)$, akkor a Lie-derivált mintájára a deriválás képlete:

$$\frac{D}{Dt}\xi = \dot{\xi}^i e_i$$

Ez a képlet egy vektort ad a deriválás eredményeként. Ennek a vektornak a koordinátáit fogjuk most kiszámítani egy másik, a kitüntetettől különböző $(f_i(t))$ n-él seregre vonatkozóan.

Legyen tehát $\xi(t) = \bar{\xi}^i(t) \cdot f_i(t)$ és $f_i(t) = A^j_i(t)e_j(t)$. Behelyettesítéssel: $\xi(t) = \bar{\xi}^i A^j_i e_j$. Ezek után

$$\frac{D}{Dt}\xi = \frac{d}{dt}(\bar{\xi}^i A^j_i) \cdot e_j = \left(\frac{d}{dt}\bar{\xi}^i\right) \cdot f_i + \bar{\xi}^i \left(\frac{d}{dt} A^j_i\right) B^k_j \cdot f_k$$

ahol $B(t)$ az $A(t)$ mátrix inverze. Az f_k vektor együtthatója: $\frac{d}{dt}\xi^k + \left(A^{-1}\frac{d}{dt}A\right)^k_i \xi^i$. A derivált vektor komponensei együttes formában így írhatók:

$$\frac{d}{dt}\xi + \omega\xi \tag{2}$$

ahol ξ a $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ szám n-est jelöli, ω pedig az $A^{-1}\frac{d}{dt}A$ mátrixot. Ezzel megoldottuk a $\frac{D}{Dt}\xi$ kiszámításának problémáját általános n-élre vonatkozóan.

Induljunk ki most közvetlenül a (2) képletből. Ha a deriválást nem csak egy irányban akarjuk végezni, akkor a képletet így módosítjuk:

$$\frac{D}{Dt}\xi = d\xi + \omega\xi \tag{3}$$

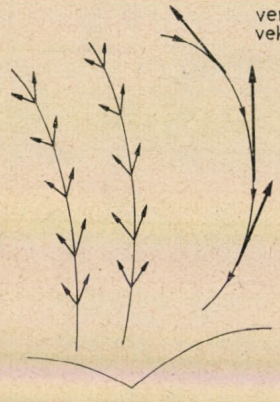
Itt $d\xi$ az n db $d\zeta^1, \ldots, d\zeta^n$ differenciálforma együttesét jelöli, ω a mátrixértékű differenciálforma, vagy másképp: ω egy olyan mátrix, melynek elemei differenciálformák. Adott v irányhoz képletünk egy szám n-est rendel, amely a derivált vektor koordinátáiból áll.

Minden számítás persze egy fix koordinátarendszerre vonatkozóan történik. Az ω differenciálforma általános alakja:

$$\omega = (\omega^j_i) = \Gamma^j_{ik}\,dx^k$$

A Γ^j_{ik}-k most ugyanazt a szerepet játsszák, mint a Lie-derivált esetén, de most már egy differenciálforma paramétereiként jelentkeznek. Azonban ez a differenciálforma még mindig függ a koordinátarendszertől. A (3) képlet a (2) képlet formai általánosítása. Az eredményül kapott szám n-esek nem feltétlenül koordinátái egy vektornak. Ehhez a Γ^j_{ik}-k speciális választása szükséges.

A leírt módszer egy szemléletes átfogalmazását adjuk most. Az X sokaság egy U koordinátakörnyezetét vesszük. U minden x pontja fölé emeljük az összes x-beli n-élek halmazát. Adott X-re az összes ilyen n-él egy önkényesen kitüntetett n-él nem-szinguláris lineáris transzformációjával jön létre. Ezért egy ilyen x fölötti halmaz amit fibrumnak, vagy szálnak fogunk nevezni egy-egy értelmű megfelelésben áll az összes n-edrendű nem-szinguláris mátrixok halmazával. Ez utóbbit $GL(n)$ jelöli. $GL(n)$ Lie csoport [2]. Ezek után könnyű belátni, hogy az U fölötti összes n-élek halmaza sokasággá tehető és ez a sokaság izomorf lesz a szorzatsokasággal. Ezt a sokaságot E jelöli. A konstrukciót később részletesebben leírjuk.



2. ábra

Még egy fogalmat: az $U \times G$ szorzatsokaságban egy $x \times G$ alakú halmaz részsokaság. E részsokaság érintővektorainak E-beli képeit vertikális vektoroknak nevezzük.

Az $x(t)$ görbe mentén kitüntetett $(e_i(t))$ párhuzamos n-élek az E sokaságban egy $w(t)$ görbével ábrázolhatók. Ha A konstans nem szinguláris

lineáris transzformáció, akkor párhuzamos lesz a $w(t) \cdot A$-él sereg is. Ezeket az utakat horizontális utaknak, érintőiket horizontális vektoroknak nevezzük.

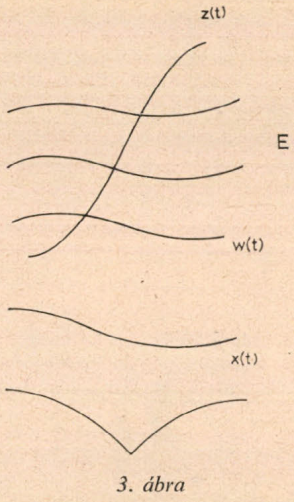
Az $(f_i(t))$ n-nél sereget ábrázolja egy E-beli görbe. A korábbi jelölések szerint $z(t) = w(t) \cdot A(t)$. Ezért

$$\dot{z}(t) = \dot{w}(t) A(t) + w(t) \cdot \dot{A}(t)$$

(A deriválás jogosultságát és pontos értelmét később ismertetjük.)

Az egyenlőség jobb oldalának első tagja egy horizontális vektor, második tagja vertikális. Mindkettő a $w(t) \cdot A(t)$ ponthoz tartozik.

Az $x(t)$ fölötti fibrum Lie-csoport, melynek egységeleme a $w(t)$. Tekinteni fogjuk tehát a $w(t) \cdot \dot{A}(t)$ vektor által generált elemet a $gl(n)$ Lie algebrában. Ez egyszerűen $A^{-1}(t)\dot{A}(t)$, az eredeti vektor ugyanis a $w(t) \cdot A(t)$ pontban volt fölmérve. Nagy vonalakban tehát a következőt mondhatjuk:



3. ábra

A $z(t)$ görbe érintőjének vertikális komponense az $A^{-1}(t) \dfrac{d}{dt} A(t)$ elemet generálja.

Mivel az $A^{-1}\dot{A}$ mátrix a (2) képletben az inhomogén rész együtthatója, ennek az észrevételnek döntő súlya lesz az elmélet egységes felépítése szempontjából.

A globális vizsgálat során olyan sokaságokkal is kell majd foglalkoznunk, amelyek csak lokálisan $U \times G$ alakúak. Ezeket nyalábоknak fogjuk nevezni. Most egy kis kitérőt kell tennünk, hogy bizonyos technikai részleteket előkészítsünk.

4. A NYALÁB

Azt mondjuk, hogy a G Lie-csoport effektíven hat az F sokaságra, ha értelmezve van egy $g \cdot f$ szorzat, azaz egy $G \times F \to F$ differenciálható leképezés, melyre teljesülnek az alábbiak:

$f \to g \cdot f$ differenciálható leképezés minden g-re $(g_1, g_2)f = g_1(g_2 f)$ és végül ha $gf = f$ minden $f \in F$-re, akkor $g = e$.

Legyen most U egy további differenciálható sokaság. Az $U \times F$ sokaság azon differenciálható izomorfizmusai (röviden diffeoi), melyek szálanként úgy hatnak, mint valamely $g \in G$ az (U, F, G) halmazt alkotják. Részletesebben: (U, F, G)-be tartoznak az $(u, f) \to (u, t(u, f))$ alakú diffeok, ahol $t : U \times F \to F$ differenciálható, s rögzített u mellett $t(u, f) = g \cdot f$ alkalmas g-vel. Ezek után rátérhetünk e szakasz központi fogalmának, a nyalábnak az ismertetésére.

Definíció: Egy (E, X, F, G, Π, Φ) hatost — ahol E, X, F sokaság, G Lie csoport, mely effektíven hat F-en, Π differenciálható leképezés E-ről X-re, Φ egy bizonyos leképezésrendszer — nyalábnak nevezünk, ha teljesülnek a következők:

1) $\varphi \in \Phi$ diffeo valamely $U \times F$ és $\Pi^{-1}(U)$ között. Itt $U \subset X$ nyílt halmaz. Ez a diffeo olyan, hogy $\Pi\varphi(u, f) = u$. (A diffeo fibrumonként hat.)
2) Ha $\varphi, \psi \in \Phi$ és a megfelelő U, V-k metszete nem üres, akkor $\psi^{-1}\varphi_{U \cap V \times G} \in$ $\in (U \cap V, F, G)$.
3) A φ-khez tartozó U-k, lefedik X-et, a $\Pi^{-1}(U)$-k lefedik E-t.
4) Az 1, 2, 3-nak eleget tevő Φ család maximális ezen tulajdonságokra nézve.

Az E sokaságot nyalábtérnek, az X sokaságot alaptérnek, F-et fibrumtípusnak, G-t struktúra-csoportnak, Π-t projekciónak, Φ elemeit trivializálásoknak nevezzük. Ha egy hatos kielégíti az 1, 2, 3, követeléseket, létezik pontosan egy bővebb hatos (amelynél tehát a Φ halmaz bővebb), melyre 4. is teljesül. Ez a Zorn lemmával könnyen igazolható. Előfordulhat, hogy két különböző hatos maximális bővítése egybeesik, ilyenkor nincs értelme különbséget tenni e hatosok között. A 4. tulajdonság tehát megkülönböztető szerepű.

Ha $F=G$ és G hatása önmagán baleltolás, akkor a nyalábot principális nyalábnak nevezzük.

Rögzítsünk egy $x\in U$ pontot. A φ trivializálást megszorítjuk egy $F\cong\{x\}\times$ $\times F\to\Pi^{-1}(x)$ diffeová, s ezt φ_x-szel jelöljük. Legyen φ, ψ két trivializálás $x\in U\cap V$. 2) szerint létezik pontosan egy $g_x\in G$, hogy $\varphi_x f=\psi_x l$, akkor és csak akkor, ha $g_x f=l$. („Pontosan egy" az effektivitás miatt.)

Ezek után definiáljuk principális nyalábban a G elemeivel való jobbszorzást. Legyen $z\in E$, $z=\varphi_x k$, ahol $k\in G$. Vegyünk továbbá egy $g\in G$ elemet. A g-vel való jobbszorzás definíciója:

$$zg=\varphi_x kg$$

Megmutatjuk, hogy a definíció értelmes, az eredmény csak z-től és g-től függ. Valóban, vegyünk egy másik $z=\psi_x l$ előállítást. zg-re most kapjuk: $zg=\psi_x lg$. Be kell bizonyítani, hogy $\varphi_x kg=\psi_x lg$. A $z=\varphi_x k=\psi_x l$ egyenlőség alapján $g_x k=l$. Ebből $g_x kg=lg$, tehát a bizonyítandó egyenlőség helyes.

Az E tér lokálisan direkt szorzat, azaz előáll $\Pi^{-1}(U)$ alakú halmazok egyesítéseként, s e halmazok mindegyikére van egy $U\times G\to\Pi^{-1}(U)$ trivializálás. Ezért beszélhetünk vertikális érintővektorokról. Koordinátákkal végzett egyszerű számolás mutatja, hogy egy t érintővektor pontosan akkor vertikális, ha $\Pi t=0$. A vertikális vektorok terét V_2 jelöli.

Principális nyaláb egy t vertikális vektorához természetes módon hozzárendeljük a G csoport L Lie-algebrájának egy elemét. Ezt $\omega(t)$-vel fogjuk jelölni. A hozzárendelést így csináljuk: Legyen t érintővektor a z pontban és $z=\varphi_x k$. Definíciónk:

$$\omega(t)=\lambda_k^{-1}\varphi_x^{-1}t$$

λ_g a G csoport g-vel való baleltolását jelenti. Megmutatjuk, hogy az eredmény csak t-től függ. Legyen tehát $z=\psi_x l$; ebből $\omega(t)=\lambda_l{}^{-1}\psi_x^{-1}t$. Be kell látnunk, hogy $\lambda_k{}^{-1}\varphi_x^{-1}=\lambda_l{}^{-1}\psi_x^{-1}$. Ezek a fibrum $F=G$-be való leképezései. Az inverz leképezéseket alkalmazzuk tetszőleges $g\in G$ elemre: a $\varphi_x kg$, ill. $\psi_x lg$ elemeket kapjuk E-ben. Ezek egyenlőségét épp az előző bekezdésben bizonyítottuk. Az egyenlőség minden g-re igaz, így maguk a leképezések, és így azok inverzei is egyenlők.

Most hozzáfoghatunk a legfontosabb nyaláb ismertetéséhez. Ez az n-élek nyalábja. Az E nyalábtér egy F_x fibrumát az x-ben felvett összes n-él alkotja, a Π projekció: $\Pi F_x=x$. Az E halmazt most sokasággá tesszük. Legyen $U\subset X$ egy x^i függvényekkel koordinátázott környezet. Egy $x\in U$ pontban felvett (l_i) n-élt állítsunk elő az $e_i=a_i^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ alakban. Mármost a $\Pi^{-1}(U)$ halmaz koordinátázható az $\tilde{U}\times GLn$ halmazzal. ($\tilde{U}$ az U-t koordinátázó euklideszi halmazt jelöli), $\tilde{\varphi}:(e_i)\to$ $\to(x^1\ldots x^n, a_1^1, a_1^2, \ldots, a_n^n)$.

Az a_i^j mátrixot röviden A-val jelöljük. Legyen most V egy másik, y^i függvényekkel koordinátázott környezet,

$$e_i=a_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}=a_i^j\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial y^k}{\partial x^j}=\left(a_i^j\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}=b_i^k\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Az A és B koordinátamátrixok között tehát fennáll a $B=CA$ kapcsolat, ahol $C=\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right)$. Az új koordinátázás tehát tömör formában:

$$\tilde{\psi}:(e_i)\to(y^1 \dots y^n, CA).$$

Világos, hogy $\tilde{\psi}\tilde{\varphi}^{-1}$ differenciálható függvény, így E sokasággá lett.

A $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ koordinátázást most kissé módosítjuk:

$$\varphi:(e_i)\to(x, A) \quad \psi:(e_i)\to(x, B)$$

Világos, hogy a φ, ψ leképezések $\Pi^{-1}(U\cap V)$-t $(U\cap V)\times GL(n)$, ill. $(U\cap V)\times GL(n)$-re úgy képezik, hogy eleget tesznek a nyaláb definíciójában szereplő 1., 2., 3. tulajdonságoknak az $F=G=GL(n)$ választás mellett. (2. a $B=CA$ egyenlőségből következik.) E-t ezentúl tehát mint principális nyalábot kezelhetjük, melynek fibrumtípusú és struktúracsoportja a $GL(n)$ csoport.

5. AZ INFINITÉZIMÁLIS KONNEXIÓ

A világosabb fogalmazás kedvéért először a konnexió általános fogalmával ismerkedünk meg. Tényleges feladatunkhoz csak a következő szakaszban térünk vissza.

Egy E principális nyaláb minden z pontjában megadunk érintővektoroknak egy H_z alterét. Ezt horizontális térnek, vektorait horizontális vektoroknak nevezzük, s a következők teljesülését kívánjuk meg:

1) H_z és V_z direkt összege a T_z teljes érintőtér, azaz minden vektor egyértelműen felírható, mint egy horizontális és egy vertikális vektor összege. Egy u vektor komponenseit H_u és V_u fogja jelölni.
2) H_z differenciálható módon függ z-től. Ez azt jelenti, hogy egy differenciálható τ mezőből keletkező H_τ mező is differenciálható.
3) H_z invariáns a G-vel való jobbszorzásra:

$$H_{zg} = H_z \cdot g$$

A 3. követelmény jelentőségét a következő szakaszban fogjuk megérteni. H_z altereknek egy ilyen seregét infinitezimális konnexiónak nevezzük.

Legyen most adva egy infinitézimális konnexió. Egy $u\in T_z$ vektor V_u vertikális komponense generálja az L Lie-algebra egy elemét. A korábbi jelölés megtartásával ezt $\omega(u)$ fogja jelölni. ω a $T(E)$ érintősokaságnak L-be való lineáris leképezése, melyre igazak a következők:

1) $\omega(u)$ az u generáltja, ha u vertikális.
2) ω differenciálható: egy τ differenciálható mezőre a $z\to\omega(\tau(z))$ leképezés E-ből L-be differenciálható.
3) $\omega(ug)=\operatorname{adj} g^{-1}\omega(u)$.

A 3. tulajdonságban $\operatorname{adj} g^{-1}$ az L Lie-algebra adjungált leképezését jelenti. Ezt a G csoport konjugálása: $h\to g^{-1}hg$ indukálja az érintőtéren. Az egyenlőséget elég vertikális u-ra igazolni. (Ez a H_z alterek G-invariációjának következménye.) Legyen mondjuk $u=\varphi_x t_h$. (Az alsó index a vektor kezdőpontját jelöli.) Akkor $\omega(u)=h^{-1}t_h$. Továbbá $ug = \varphi_x t_h \cdot g = \varphi_x t_{hg}$ és $\omega(ug) = g^{-1}h^{-1}t_{hg} = g^{-1}h^{-1}t_h \cdot g = g^{-1}\cdot\omega(u)\cdot g$, amint állítottuk.

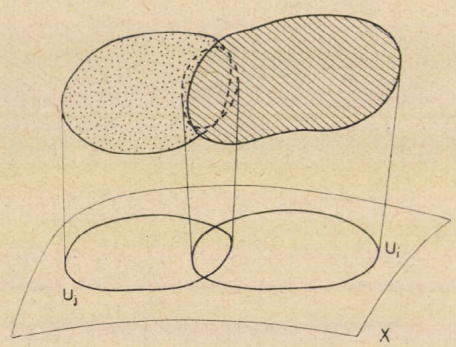
Az ω differenciálforma meghatározza a H_z altereket: $H_z = \{u : \omega(u) = 0\}$. Az 1., 2., 3. tulajdonságaiból következik, hogy H_z infinitézimális konnexió. Az ω formát ezért magát is infinitézimális konnexiónak nevezzük. E fogalom kiaknázása csak a következő szakaszban történik. Most még néhány általános fogalmat vezetünk be, melyek azonban már csak inkább technikai jellegűek.

Legyen $x(t)$ görbe X-en, kezdőpontja x_0. Legyen $z_0 \in E$ olyan, hogy $\Pi z_0 = x_0$. A differenciálegyenletek elméletéből könnyen következik, hogy létezik oly $z(t) \subset E$ út, mely z_0-ból indul, $\Pi z(t) = x(t)$ és $\dot{z}(t)$ mindig horizontális [3]. Az ilyen $z(t)$-t az $x(t)$ út horizontális felemelésének nevezzük.

A Lie-derivált általánosításakor az ideális $(e_i(t))$ n-él sereg mellett szerepelt egy $(f_i(t))$ n-él sereg is. Numerikus feladatokban ez elkerülhetetlen. Az általános esetben is felveszünk olyan adatokat, amelyek a koordinátarendszer (vagy az $(f_i(t))$ sereg) konkrét megválasztásának felel meg. Az X sokaságot lefedjük U_i környezetek egy rendszerével. Minden U_i-n megadunk egy $z_i(x)$ metszetet: ez egy $U_i \to E$ leképezés, melyre $\Pi z_i(x) = x$. Az $x \to z_i(x)$ leképezésnél egy x-ből induló v vektornak megfelel egy $z_i(x)$-ből induló u vektor. Definiálunk most U_i-n egy ω_i differenciálformát az

$$\omega_i(v) = \omega(u)$$

képlettel. Ez a definíció lokális. Tegyük fel, hogy $U_i \cap U_j$ nem üres. Milyen kapcsolat van ω_i és ω_j között?



4. ábra

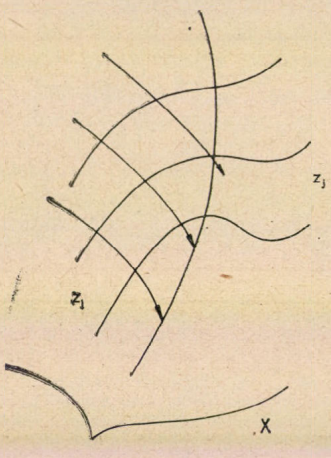
$U_i \cap U_j$-ben bevezetjük a g_{ij} függvényt a $z_j(x) = z_i(x) \cdot g_{ij}(x)$ egyenlőség alapján. g_{ij} az $U_i \cap U_j$-nek G-be való leképezése. A v érintővektor érintse az $x(t) \subset X$ görbét. A megfelelő u vektorok a $z_i(x(t))$, ill. a $z_j(x(t))$ görbék érintői lesznek. Deriváljuk a $z_j(x(t)) = z_i(x(t)) \cdot g_{ij}(x(t))$ egyenlőséget t szerint.

A jobb oldalt röviden $z(t) \cdot g(t)$-vel jelöljük. Vegyünk egy olyan φ trivializálást, melyre $\varphi_{x(t)} e = z_i(t)$.

A $z(t) \cdot g(t)$ görbe érintőinek koordinátáit a $\dot{z}(t)$ és $\dot{g}(t)$ vektorok koordinátáinak együttese adja.

Ebből következik, hogy

$$\frac{d}{dt} z(t)\, g(t) = \dot{z}(t)\, g(t) + z(t)\, \dot{g}(t)$$



5. ábra

Számítsuk most ki ω-t a definíció szerint. Kapjuk, hogy

$$\omega_j = (\mathrm{adj}\, g_{ij}^{-1})\omega_i + g_{ij}^{-1} \dot{g}_{ij}. \tag{6}$$

Az ω_i formák tekinthetők az a forma paramétereinek lokális formában. A (6) transzformációs törvény e paraméterek változását írja le. A (6) által kifejezett transzformáció alapvető: ha adottak az ω_i formák, melyek közt fennáll a (6) kompatibilitási feltétel,

akkor létezik olyan ω infinitézimális konnexió, melynek „paraméterei" épp az ω_i-k. (A $z_i(x)$ metszeteket közben rögzítettnek gondoljuk.) A bizonyítás megtalálható Lichnerowicz könyvében [3].

6. A LINEÁRIS KONNEXIÓ

Elérkeztünk a döntő szakaszhoz. Legyen E az X sokaság feletti n-élek nyalábja. Az E nyalábon adott konnexiót lineáris konnexiónak nevezzük. Egy X-ben fekvő $x(t)$ út horizontális felemelését, ami egy E-beli $w(t)$ út, most kitüntetett, párhuzamos n-él seregnek fogjuk venni. A $w(t)$ n-élt néha $(e_i(t))$-vel jelöljük. A 3. szakaszból világos, hogy párhuzamos lesz a $w(t)\cdot g$ n-él sereg is, ha g konstans lineáris transzformáció. Ha tehát egy deriválást akarunk értelmezni az $x(t)$ út mentén a $z(t)$ horizontális felemeléstől függetlenül, akkor egy $w(t)$ horizontális úttal együtt a $w(t)\cdot g$ út is horizontális kell, hogy legyen. Innen a 3. feltétel az infinitézimális konnexiók definíciójában.

A 3. szakasz végén vázolt gondolatmenet most már teljes szigorúsággal így fest: adott egy ω lineáris konnexió.

Elkészítjük egy $x(t)\subset X$ út valamely horizontális felemelését: $(e_i(t))=w(t)\subset E$. Ez az n-él sereg egy deriválást értelmez az $x(t)$ út mentén, s ez a deriválás a felemeléstől független. Egy $\xi(t)$ egyparaméteres vektormező deriváltját valamely más $z(t)=(f_i(t))$ n-él seregre vonatkoztatva is kiszámíthatjuk. Eredményünk ekkor: $(D\zeta)^i=\frac{d}{dt}\zeta^i+\left(A^{-1}\frac{d}{dt}A\right)^i_j\zeta^j$. Itt A-t a $z(t)=w(t)\cdot A(t)$ egyenlőség definiálja. Beláttuk, hogy

$$A^{-1}\frac{d}{dt}A=\omega(\dot{z}). \tag{7}$$

Vegyünk most egy U koordinátakörnyezetet az x^i koordinátákkal. A $\frac{\partial}{\partial x^i}$ természetes n-élek E egy $z(x)$ metszetét definiálják. Beszélhetünk tehát az U-n definiált ω^u lokális differenciálformákról. Az abszolút derivált iránytól függetlenített alakja (7) szerint: $(D\zeta)^i_u=d\zeta^i_u+\omega^{ui}_j\zeta^j_u$. Tömör formában a következő tételt mondhatjuk ki:

2. *Tétel.* A

$$(D\zeta)_u=d\zeta_u+\omega^u(\zeta_u) \tag{8}$$

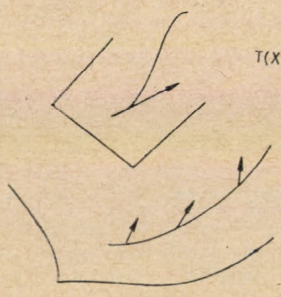
forma vektorforma.

Itt a jobb oldali számértékek egy adott koordinátarendszerre vonatkoznak. A Tétel tartalma, hogy az eredményül kapott szám n-es (egy irányra alkalmazva a formát) a koordinátázás változtatásakor vektorszerűen transzformálódik.

A tétel közvetlenül is bizonyítható (lásd [3]), de az általunk választott út bár hosszadalmasnak tűnik, de rámutat arra a primitív gondolatra, amelynek az egész elmélet csupán gondos kifejtése: ti. a párhuzamos n-élek ötletére.

Most bemutatunk még egy utat, amely a lineáris konnexiók fogalmához vezet. A klasszikus felületelméletben az abszolút deriválthoz egy közönséges deriválás és egy felületre való vetítés után jutunk. Hasonló módon próbálkozhatunk absztrakt sokaságon is.

Egy $\zeta(t)$ egyparaméteres vektormező a $T(X)$ érintősokaságban egy görbe. E görbe érintője a $T(T(X))$ sokaság egy eleme. Ezt valamiképp vetíteni kell a T_x



6. ábra

érintőtérre, hiszen az eredményvektornak T_x-ben kell lennie. Itt számos nehézség merült föl, amelyet Ehresmann egy nagyszerű gondolatta áthidalt:

Egy $\zeta=\zeta^i f_i$ mező deriválását formálisan így végezzük: $D\zeta = \xi^i f_i + \dot{\zeta}^i f_i$. Az abszolút deriváláshoz elegendő tehát az (f_i) n-élekre megadni a deriválás formuláját:

$$\left(\frac{d}{dt}\right) f_i = \omega_i^j f_j$$

Az $(f(t))$ n-élek az n-élek E nyalábjában egy görbét alkotnak. E görbe érintővektorát vetítsük megadott módon az F_x fibrum érintőterére. A kapott vertikális vektor a *gln* Lie-algebra egy ω_i^j elemét határozza meg. Természetes dolog az $\omega_i^j f_j$ n-élt az (f_i) n-él deriváltjának venni. A deriválás rögzítéséhez pusztán a vetítés módját kell megadnunk, azaz egy lineáris konnexiót.

7. LOKÁLIS KOORDINÁTÁK

A lineáris konnexiók lokális alakját fogjuk vizsgálni. Az X sokaságon egy koordinátarendszer segítségével bevezethető egy ω^u forma. Legyen U, V két koordináta környezet x^i, ill. $\bar{x}^i$ koordinátafüggvényekkel. Az n-élt alkotó differenciáloperátorok között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

A $z_u = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, ill. $z_V = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right)$ metszetek között a szorzó tényező tehát $g_{uV} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}^j}\right)$. A (6) képlet esetünkben:

$$\omega_V = g_{uV}^{-1} \omega_u g_{uV} + g_{uV}^{-1} dg_{uV} \tag{9}$$

(Az adj operátor a *gln* Lie-algebrában konjugálást jelent, a szorzat szokásos mátrixszorzással végzendő.)

Írjuk fel most ω-t teljes részletességgel:

$$\omega_u = \Gamma_{jk}^i dx^k \quad \text{ill.} \quad \omega_V = \bar{\Gamma}_{jk}^i d\bar{x}^k$$

A Γ_{jk}^i-kat Christoffel szimbólumoknak nevezik. A (8) transzformációt is részletesen felírjuk:

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i d\bar{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} (\Gamma_{bc}^a dx^c) \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k =$$

$$= \Gamma_{bc}^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial x^6}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \cdot d\bar{x}^k + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \cdot d\bar{x}^k$$

A $d\bar{x}^k$-k a differenciálformák terében bázist alkotnak, ezért:

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{bc}^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \tag{10}$$

A képlet első tagja egy harmadrendű tenzor transzformációját írja le. A második tag az euklideszi tér $\bar{x}^i$ görbevonalú koordinátákkal végzett vizsgálatából ismerős:

derékszögű x^i koordinátákra nézve ugyanis $\Gamma^a_{bc}=0$ a második tag magában $\bar{\Gamma}^i_{jk}$-val egyenlő.

Az x^k irányú abszolút deriváltat kovariáns deriváltnak is nevezik, ha elvonatkoztatunk a görbétől, amelyen a deriválás történik. Ennek kiszámítása a (8) képlet alapján:

$$(D_k\xi)^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\xi^j \tag{11}$$

Az $x(t)$ görbe mentén pedig így deriválunk:

$$\frac{D}{dt}\xi = \dot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk}\xi^j\dot{x}^k \tag{12}$$

Itt ismét (8) jobb oldalát alkalmaztuk az $\dot{x}(t)$ vektorra. A (11) képlet tehát egy vektor komponenseit adja, ha a Γ^i_{jk}-k eleget tesznek a (9) transzformációs törvénynek. Ez természetesen közvetlen úton is megkapható, de akkor a Γ^i_{jk}-k egy egyelőre ismeretlen mennyiség paraméterei lesznek.

Az $x(t)$ görbe mentén parallelnek nevezünk egy vektor-sereget, ha abszolút deriváltja 0. Ez egy differenciálegyenletet ad:

$$\dot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk}\xi^j\dot{x}^k = 0 \tag{13}$$

A $\zeta^i(0)$ kezdeti feltétel tetszőleges megadása esetén ez az egyenlet megoldható, mert lineáris. A $\zeta(t)$ vektort a $\zeta(0)$ párhuzamos eltoltjának nevezzük. Ez az elnevezés a korábbival nyilván összhangban van.

Egy görbét autoparallelnek (speciális esetekben geodetikusnak) mondunk, ha érintői a görbe mentén párhuzamos sereget alkotnak. A (12) egyenletből a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{14}$$

egyenletet kapjuk $\zeta^j=\dot{x}^j$ helyettesítéssel. A (10)—(14) egyenletek klasszikus esetből jól ismertek.

Most még néhány problémát és példát mutatunk be. Kérdéses mindenekelőtt egy lineáris konnexió létezése. Definiálhatók-e globálisan a (9)-nek eleget tevő Γ^i_{jk} paraméterek? Ez mindig lehetséges, ezt szintén Ehresmann bizonyította (lásd [4]).

Most vegyünk egy G Lie csoportot. A T_e érintőteret a T_g térrel azonosító leképezés λ_g, g-vel való baleltolás. Most nemcsak egy görbe mentén, hanem egyszerre az egész sokaságon felvehetünk egy párhuzamos n-él sereget; bármely kettő egymásból baleltolással származik. Ez azt jelenti, hogy a konnexió integrálható: létezik olyan részsokaság E-ben, melynek érintőterei épp a H_2 terek. Ez azt is jelenti, hogy a párhuzamos eltolás úttól független. Egy Lie csoport autoparallel görbéje, mely az egységből indul egyparaméteres részcsoport. Az autoparallel görbék egyenlete másodfokú, így a kezdeti értéken kívül a kezdőirányt is kijelölhetjük. Így kapjuk a különböző irányba induló egyparaméteres részcsoportokat.

Utolsó példánk a Riemann-sokaság. Megmutatható, hogy létezik egyetlen olyan szimmetrikus konnexió (azaz $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$) mely párhuzamos eltoláskor a vektorok hosszát nem változtatja meg. Ennek paraméterei a metrikus alap-tenzorral így fejezhetők ki:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{in}\left(\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n}\right)$$

(lásd [3]).

IRODALOM

[1] R. L. Bishop—R. J. Crittenden: Geometry of manifolds. Academic Press. (1964).
[2] P. M. Cohn: Lie groups. Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. No 46. 1961.
[3] A. Lichnerowicz: Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Roma CNR Monografie Matematiche 1955.
[4] Ch. Ehresmann: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré differentiable Colloque de topologie, Bruxelles 1950.
[5] W. Ambrose—I. M. Singer: A theorem on holonomy. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 75 (1953) p. 428—443.
[6] N. Steenrod: The topology of fibre bundles. Princeton University Press 1951.

ГЛОБАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Л. ГЕРЕНЧЕР

GLOBAL CONNECTIONS ON DIFFERENTIABLE MANIFOLDS

L. GERENCSÉR

The paper contains an introduction to the theory of linear connections on differentiable manifolds. Our main purpose was to stress the geometric background of the well-known concepts of abstract differential geometry. After the introduction in the second chapter we define a vector-derivation with the aid of a one-parameter transformation group, which effects on the manifold. We arrive in this way to the well-known Lie-bracket. This very special kind of derivation is further extended in Chapter 3, where the parallel n-frames along a path are given a priori. A simple computation gives here the first hint, how connections will be transformed if coordinates are changed. We give a plausible description of the above construction, where the elements of the concept of fibre bundle are given. Chapter 4 contains the exact definition of fibre bundles and that of principal bundles. Specially the principal bundle of n-frames is described in detail. Chapter 5 gives the exact generalization of the introductory examples: the definition of infinitesimal connection. We show how the associated differential form on the bundle of n-frames defines a differential form on the manifold itself. The concept of linear connection is introduced in the sixth chapter, where we become able to finish the formulation and proof of the important Theorem 2. The necessity of introducing the principal bundle of n-frames is shown here in a different way, too. Chapter 7 joins our conclusions to the most ordinary concept of Christoffel symbols, their transformation rule is derived here. from the assumption that they are defined on the ground of linear connections. At last we give two examples for manifolds with linear connections: the Lie-groups and the Riemannian manifolds.

A HIPERBOLIKUS GEOMETRIA KÚPSZELETEINEK ASZIMPTOTATULAJDONSÁGAI, AZ ASZIMPTOTÁK ÉS FÓKUSZOK KAPCSOLATA SZINTETIKUS TÁRGYALÁSBAN

MOLNÁR EMIL

BEVEZETÉS

Ebben a közleményben folytatjuk a [12]-ben megkezdett vizsgálatokat[1]. Ott említettük, hogy a hiperbolikus geometria kúpszeleteinek analitikus tárgyalását VÖRÖS CYRILL [11] könyve tartalmazza legrészletesebben. A projektív koordinátarendszer és a CAYLEY-metrika alkalmazásával az euklideszi geometriából ismert tételek analogonjait vezette le. A távolságokra és szögekre vonatkozó tételek így terjedelmes diszkussziót kívántak. Ő fedezte fel először a fokális és aszimptotatulajdonságok dualitását, és ennek alapján megadta a kúpszeletek teljes osztályozását. MIHAILEANU [7] és FLADT [3] ugyancsak analitikus módszerrel az osztályozás kérdésére térnek vissza. Az egyes kúpszeletfajták elnevezésénél — néhány kivétellel — FLADT terminológiájához igazodtunk.

Az euklideszi geometriából jól ismert a következő tétel: Ha egy egyenes a hiperbolát A és B, a hiperbola aszimptotáit C_1 és C_2 pontban metszi, akkor a C_1C_2 szakasz felezőpontja azonos az AB szakasz felezőpontjával.

Megmutatjuk, hogy a hiperbolikus geometriában minden kúpszeletre igaz e tétel analogonja, ha a kúpszeletet és aszimptotáit kúp (az euklideszi forgáskúp hiperbolikus analogonja) síkmetszésével származtatjuk. Az egyöntetűség és egyszerűség kedvéért azonban célszerű az említett tulajdonságot a „tükrözések nyelvére" fordítani: $B=C_1AC_2$, azaz a C_1, A, C_2 pontokra vonatkozó tükrözések egymásutánja helyettesíthető a B pontra vonatkozó tükrözéssel (2. Tétel).

Sőt ez a tulajdonság definiálásra is alkalmas. A sík tetszőleges p_1, p_2 egyeneséből és alkalmasan választott A pontjából kiindulva tükrözésekkel $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ ponthalmazt, $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ egyeneshalmazt definiálunk. Megmutatjuk, hogy „erre kúp építhető", jogosan nevezhetjük **k**-t kúpszeletnek, **e**-t vonalkúpszeletnek (4—7. Tétel).

A kúpszeletek aszimptotatulajdonságai a [12]-ben tárgyalt fokális tulajdonságok duálisai. Ebben a dualitásban az aszimptotáknak a fókuszok, kúpszeletpontnak a pontbeli érintő felel meg. A kúpmetszetként történő származtatás egyszerűen világít rá e dualitás lényegére, az aszimptoták és fókuszok kapcsolatára (8., 9. Tétel).

Az egy egyenesre illeszkedő fókuszok és aszimptotapólusok minőségétől függően megadjuk a kúpszeletek osztályozását is (9. Tétel, 8—16. ábrák). Érdekességként megemlítjük, hogy a hiperbolikus geometriában egy kúpszeletnek több (maximálisan három (11. ábra)) fókusz- és aszimptotapárja is lehet, és ezekre a tárgyalt tételek egyaránt érvényesek (5. Tétel és duálisa).

[1]) [12] MOLNÁR E.: A kúpszeletek fokális tulajdonságainak szintétikus, „abszolút" tárgyalása (Matematikai Lapok **21** 1970. 3—4. 335—355.).
Ebben található a témához kapcsolódó [1]—[11] munkák felsorolása is.

A szintetikus tárgyalásban — ugyanúgy mint [12]-ben — fontos segédeszközünk a tükrözésfogalom, melynek alkalmazására BACHMANN [1] könyve ösztönzött. Továbbá sok helyen lényeges, hogy — a kúpfogalom bevezetésével — térgeometriai megfontolásokat használunk síkgeometriai tételek bizonyításához.

Módszerünk különböző esetek sokaságát fogja össze, a hiperbolikus geometria változatosságát csak a legfontosabbnak vélt ábrákkal érzékeltetjük.

TÜKRÖZÉSEKRE VONATKOZÓ LEMMÁK

A hiperbolikus geometriát a klasszikus projektív térben bevezetett CAYLEY—KLEIN-féle modelljével szemléltetjük. Ábráinkon speciálisan az ideális elemekkel bővített euklideszi tér egységgömbjének ortogonális axonometrikus képe, illetőleg az egységkör szerepel. Hogy a terjedelmes esetszétválasztást elkerüljük a modellre nézve „külső" pontokat, egyeneseket, síkokat a „belsőkkel", azaz „valódiakkal" egyenértékű jelentéssel szerepeltetjük. Sőt az abszolút alakzat pontjait, érintő egyeneseit és érintő síkjait — a „határ-elemeket" — is csak akkor emeljük ki „$*$"-gal a szövegben, ha az feltétlenül szükséges. Az ábrákon ezt elhagyjuk, hiszen ott egyébként is látható, hogy miről van szó.

Mindezt az abszolút alakzat által indukált Ω projektív polaritás teszi jogossá, mely — mint azt [12]-ben felsoroltuk — összefogja a hiperbolikus geometria illeszkedési és merőlegességi tételeit. Az A, B, ... pólusokhoz tartozó polársíkokat $A^\Omega \equiv \alpha$, $B^\Omega \equiv \beta$, ... jelöli.

Ha csak síkgeometriára korlátozódunk, Ω egy ω pont-egyenes polaritást indukál, ahol A, B, ... polárisát $A^\omega \equiv a$, $B^\omega \equiv b$, stb. jelöli.

Egy harmonikus perspektivitást, melynek centruma A, perspektivitási síkja $\alpha \equiv A^\omega$ jogosan nevezünk A pont-tükrözésnek, vagy α sík-tükrözésnek, mert merőlegességtartó involutórius kollineáció ($A \mid \alpha$). $X^A \equiv Y$ jelöli, hogy az A tükrözésnél az X alakzathoz Y-t rendeljük. Ha $Y^B \equiv Z$, akkor $X^{AB} \overset{\text{def}}{\equiv} (X^A)^B \equiv Y^B \equiv Z$ fejezi ki, hogy az A és B tükrözések kompozíciója, vagy szorzata az X alakzathoz a Z alakzatot rendeli. A tükrözések generálják a hiperbolikus geometria transzformációcsoportját. (Talán nem okoz zavart, hogy a tér- és síkelemeket és a megfelelő tükrözéseket ugyanúgy jelöljük. A különbségre utal, hogy a térelemek azonosságát „$\equiv$" jellel, a transzformációk azonosságát „$=$" jellel írjuk.)

A későbbi bizonyításoknál alapvetőek a most következő LEMMÁK, melyeket [12]-ben már lényegében felsoroltunk. Itt duális formában ismételjük meg a legfontosabbakat, bizonyításukat nem részletezzük [1], [5].

1. LEMMA. *(Három tükrözés tétele.)*

a) *Ha A, B, C nem határpontok és közülük kettő egy t egyenesre illeszkedik, a harmadik akkor és csak akkor illeszkedik t-hez, ha az ABC transzformáció pont-tükrözés. Ha $ABC = D$, akkor $CBA = D$, és a D pont is t-hez illeszkedik.*

b) *Ha A és B nem határpontok, C^* viszont határpont, és hármuk közül kettő a t egyenesre illeszkedik, a harmadik akkor és csak akkor illeszkedik t-hez, ha a C^*-ra illeszkedő minden c^* határegyenesre $(c^*)^{AB} \equiv (c^*)^{BA} \equiv c^*$.*

2. LEMMA. *(Szimmetriapont létezése.)*

Ha A és B belső pontok, vagy mindkettő külső pont, és a t egyenesre illeszkednek, akkor van olyan t-re illeszkedő K pont, hogy $A^K \equiv B$. Ezzel ekvivalens $B = KAK$, K a szimmetriapont. Két eset lehetséges:

a) *Ha t^* határegyenes, akkor csak egy szimmetriapont van.*

b) *Ha t nem határegyenes, akkor két szimmetriapont van, ezek egymáshoz konjugáltak.*

1. MEGJEGYZÉS. Az $ABC=D$ képletben mindig páros számú belső (és külső) pont szerepel.

KÚP ÉS KÚPMETSZET

Némi módosítással megismételjük a [12]-ben is szereplő definíciókat.

Kúp: A tér t egyenesére illeszkedő ξ síkban felveszünk egy x egyenest, melynek t-vel közös pontja L. Az x-re illeszkedő, ξ-re merőleges sík ε. Feltesszük, hogy ξ és ε belső síkok, x t-re nem merőleges belső egyenes. A t-re illeszkedő összes síkra tükrözve x, ξ, ε képei rendre a $\mathbf{K}$ kúp alkotói, tengelysíkjai, érintősíkjai. Ha t-hez határsík is illeszkedik, akkor ezt is tengelysíknak és érintősíknak tekintjük, a határsík határpontját és L-et tartalmazó egyenest is az alkotók közé soroljuk.

A t egyenes a kúp tengelye, L a kúp csúcsa, a kúp pontjai az alkotók pontjai.

Kúp aszimptotasíkjai: Az x alkotónak két határpontja van: V^* és W^*. A V^*-ból és W^*-ból a t tengelyre bocsátott merőleges síkokat π_1, illetve π_2 jelölje. π_1 és π_2 a $\mathbf{K}$ kúp aszimptotasíkjai.

A Lemmák duálisai biztosítják, hogy a fenti definíciókban x szerepét bármely alkotó átveheti, ha az nem határegyenes.

A t egyenes minőségétől függően 3-féle kúpról beszélünk. A 2—5. ábrákon „oldalnézetből" láthatjuk őket:

Körkúp (2. ábra) — t belső egyenes;

Hiperkúp (3. ábra) — t külső egyenes, polárisa $\bar{t}$ belső egyenes;

Parakúp (4—5. ábra) — t^* határegyenes.

2. MEGJEGYZÉS. [12]-ben még egy hiperkúpról volt szó, amikor is t és x külső egyenes, ξ külső sík, ε belső sík. Ennek a kúpnak azonban nincsenek aszimptotasíkjai, ezért most nem foglalkozunk vele.

Tekintsünk egy $\mathbf{K}$ kúpot és egy ϑ belső síkot. Feltesszük, hogy ϑ nem illeszkedik a kúp L csúcsára.

Kúpszelet: $\mathbf{K}$ és ϑ közös pontjai $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta)$ kúpszeletet alkotnak.

Vonalkúpszelet: A $\mathbf{K}$ kúp érintősíkjainak ϑ-val közös egyenesei $\mathbf{e}(\mathbf{K}, \vartheta)$ vonalkúpszeletet alkotnak.

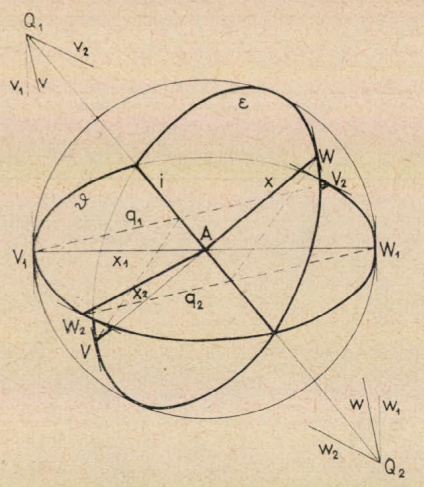
Kúpmetszet: $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta)$ és $\mathbf{e}(\mathbf{K}, \vartheta)$ együtt.

Ha $\vartheta \equiv \pi_1$, vagy $\vartheta \equiv \pi_2$, akkor a kúpmetszet ϑ abszolút alakzata. Ezt az esetet a továbbiakban kizárjuk.

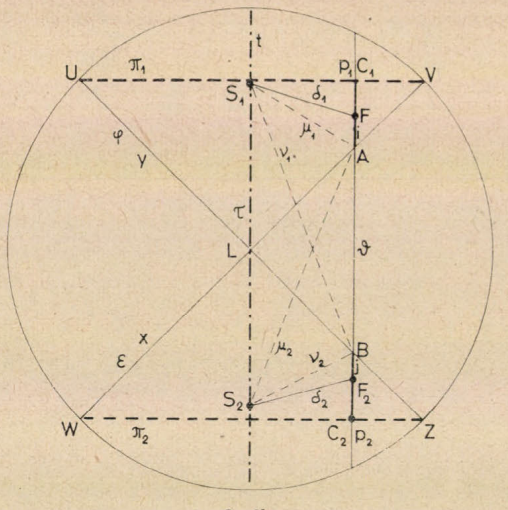
A kúpmetszet aszimptotái ϑ és π_1, illetve ϑ és π_2 metszésvonalai. Ezeket p_1, illetve p_2-vel jelöljük. Az elnevezést indokolja, hogy az aszimptoták határpontjai éppen $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta)$ határpontjai.

A továbbiakban rögzítsük a $\mathbf{K}$ kúp x alkotóját. Feltesszük, hogy x nem határegyenes, határpontjait V^*, illetve W^* jelöli. ξ legyen az x-hez tartozó tengelysík, ε az érintősík. ϑ és x metszéspontját A, ϑ és ε metszésvonalát i jelöli ($A \in \mathbf{k}$, $i \in \mathbf{e}$). Feltesszük, hogy A nem határpont. A p_1 és p_2 aszimptoták i-vel közös Q_1, illetve Q_2 pontját i-hez és A-hoz tartozó aszimptotapontnak nevezzük. (Az 1. ábrán a kúp t tengelyét nem tüntettük fel, i határegyenes is lehet.)

1. TÉTEL. *Az i-hez és A-hoz tartozó Q_1 és Q_2 aszimptotapontok külső pontok, és A a szimmetriapontjuk: $Q_1^A \equiv Q_2$.*



1. ábra



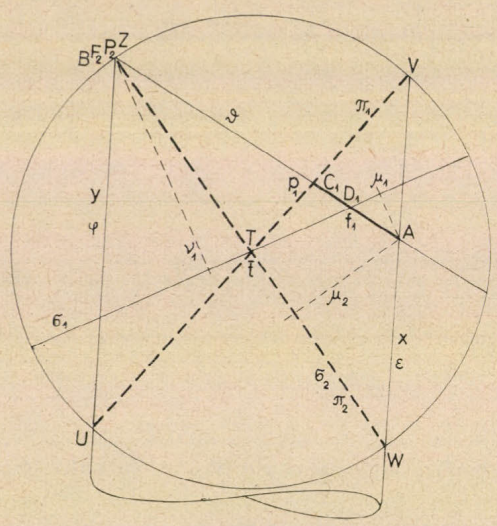
2. ábra

Bizonyítás (1. ábra): A π_1 és ε síkok merőlegesek ξ-re, másrészt V^* közös határpontjuk. Ebből következik, hogy π_1 és ε metszésvonala, v^* határegyenes. Ezért a Q_1 pont — mely ε, ϑ, π_1 közös pontja, s így v^* és i közös pontja is — külső pont. Ugyanígy π_2 és ε metszésvonala a W^*-ra illeszkedő w^* határegyenes, w^* és i Q_2 metszéspontja külső pont.

Az A tükrözésnél tehát

$$(i, \varepsilon, v^*, Q_1)^A \equiv (i, \varepsilon, w^*, Q_2).$$

(Részletesebben $i^A \equiv i$, $\varepsilon^A \equiv \varepsilon$, $v^{*A} \equiv w^*$, stb.)



3. ábra

2. TÉTEL. *Az A kúpszeletpontra illeszkedő tetszőleges ϑ síkbeli h egyeneshez egy-egy értelműen hozzárendelhető*

a **K** *kúp egy $y = U^*Z^*$ alkotója, h és y B metszéspontja* ($B \in \mathbf{k}$);

K *y alkotóhoz tartozó φ érintősíkja, φ és ϑ j metszésvonala* ($j \in \mathbf{e}$);

K *y-hoz tartozó η tengelysíkja.*

Jelölje h és p_1 metszéspontját C_1, h és p_2 metszéspontját C_2.

A következő esetek vannak (az 1. és 2. indexek felcserélhetők):

1. *C_1 és C_2 nem határpontok* (2., 4. ábra).

Állítások: **a)** *B nem határpont és $B = C_1AC_2$.*

b) $Q_1^{C_1} \overset{\text{def}}{\equiv} R_1$ *és* $Q_2^{C_2} \overset{\text{def}}{\equiv} R_2$ *éppen a j egyenes aszimptotapontjai és* $R_1^B \equiv R_2$

2. *C_1 nem határpont, C_2^* határpont* (3. ábra).

Állítások: **a)** $B^* \equiv C_2^*$ *határpont.*

b) $Q_1^{C_1} \overset{\text{def}}{\equiv} R_1$ *és* $R_2^* \overset{\text{def}}{\equiv} C_2^* \equiv B^*$ *éppen a j egyenes aszimptotapontjai.*

3. $C_1^* \equiv C_2^*$ *határpont* (5. ábra).

Állítások: **a)** $B^* \equiv C_1^* \equiv C_2^*$ *határpont.*

b) $R_1^* \equiv R_2^* \overset{\text{def}}{\equiv} B^*$ *a* j *egyenes aszimptotapontjai.*

Bizonyítás (a 2—5. ábrák specialitásait nem használjuk fel): Tekintsük a h egyenes és a kúp L csúcsa által meghatározott χ síkot. A χ-re merőleges, t-re illeszkedő síkot τ jelölje.

I. Ha a τ tengelysík nem határsík (2., 3. ábra), akkor

$$(x, V^*, W^*, \varepsilon, \xi)^\tau \overset{\text{def}}{\equiv} (y, U^*, Z^*, \varphi, \eta)$$

mellett $y \mathrel{I} \chi$.

II. Ha τ^* határsík (T^* a pólusa) (4., 5. ábra), akkor $T^* \mathrel{I} \chi$, és $y^* \overset{\text{def}}{\equiv} \overset{\text{def}}{\equiv} LT^*$, $U^* \equiv Z^* \overset{\text{def}}{\equiv} T^*$, $\varphi^* \equiv \eta^* \overset{\text{def}}{\equiv} \tau^*$ mellett $y^* \mathrel{I} \chi$.

Minthogy $\vartheta \mathrel{\bar{I}} L$; ha h végigseper az A pontra illeszkedő ϑ-beli egyenesek halmazán, akkor τ végig sepri a t-re illeszkedő tengelysíkok halmazát. A K kúp definíciójából következik a megadott kapcsolatok egyegyértelműsége (a lemmák duálisai alapján).

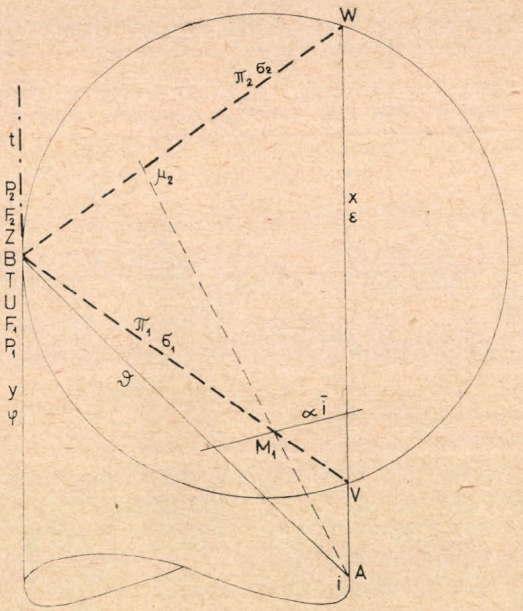
1. a) A $C_1 A C_2$ transzformáció az 1. Lemma szerint pont-tükrözés, és ez a pont h-ra illeszkedik. A χ síkban fekvő $U^*V^*W^*Z^*$ négyszög pontjait tekintve

$$(U^*)^{C_1 A C_2} \equiv (V^*)^{A C_2} \equiv (W^*)^{C_2} \equiv Z^*.$$

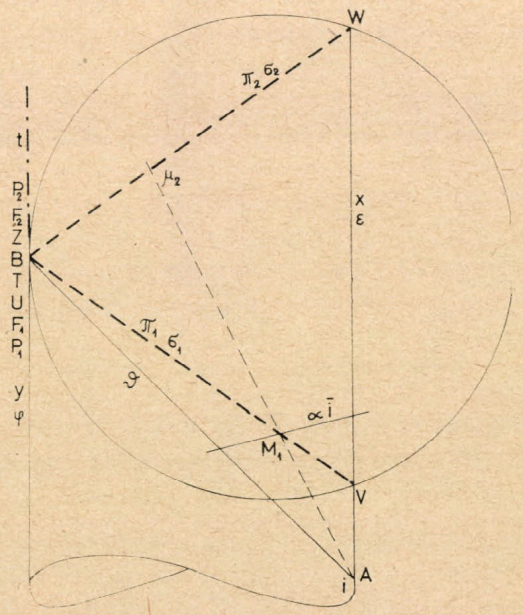
Ez azt jelenti, hogy $C_1 A C_2 = B$, hiszen B a h és $y \equiv U^* Z^*$ egyetlen közös pontja. (Ez a **II.** esetben (4. ábra) $U^* \equiv Z^*$ mellett is igaz.)

b) Tudjuk, hogy Q_1 v^* és ϑ metszéspontja, ahol a v^* határegyenes V^*-ra, π_1-re és ε-ra illeszkedik. Ezért a $(v^*)^{C_1} \equiv v^*$ határegyenes π_1-re, U^*-ra és ezért φ-re is illeszkedik, és $R_1 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1^{C_1} \equiv (\pi_1 \varphi \vartheta) \equiv (p_1 j)$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $R_2 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_2^{C_2} \equiv$ $\equiv (\pi_2 \varphi \vartheta) \equiv (p_2 j)$. (Például $(\pi_1 \varphi \vartheta)$ jelöli π_1, φ, ϑ közös részét.) Az 1. Tételt is alkalmazva

$$R_1^B \equiv R_1^{C_1 A C_2} \equiv Q_1^{A C_2} \equiv Q_2^{C_2} \equiv R_2.$$



4. ábra



5. ábra

2. a) $\vartheta \not\perp L$ miatt csak $C_2^* \equiv Z^*$ lehetséges. Ez y-nak is pontja, ezért $B^* = C_2^* = Z^*$.

b) Ugyanúgy mint az **1.** esetben $R_1 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1^{C_1} \equiv (\pi_1\ \varphi\vartheta) \equiv (p_1 j)$, másrészt $C_2^* \equiv B^* \equiv (p_2 j)$.

3. a) Minthogy $\vartheta \not\perp L$, ezért csak $C_1^* \equiv U^* \equiv Z^* \equiv C_2^* \equiv B^*$ lehetséges. Ekkor tehát y^* határegyenes (**II.** eset), φ^* határsík, j^* határegyenes.

b) $R_1^* = R_2^* = B^* = (p_1 p_2 j^*)$.

3. MEGJEGYZÉS. Ha $h \equiv i$, ebben az esetben (és máskor nem) $\chi \equiv \varphi \equiv \varepsilon$, $x \equiv y$, $A \equiv B$, $i \equiv j$, $R_1 \equiv Q_1 \equiv C_1$, $R_2 \equiv Q_2 \equiv C_2$. Az 1. Tétel a 2. Tétel speciális esete (2. Lemma). Továbbá következik ebből hogy $p_1^A \neq p_2$.

Az 1. és a 2. Tétel módot nyújt arra, hogy a kúpszelet és vonalkúpszelet aszimptotákkal történő definícióját csupán a síkban kíséreljük meg.

$\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ PONTHALMAZ, $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ EGYENESHALMAZ

Legyenek p_1 és p_2 a ϑ sík tetszőleges egyenesei, A a sík egy pontja. Feltesszük, hogy A nem illeszkedik p_1 és p_2 egyikére sem, A nem határpont, és $p_1^A \neq p_2$. A $(p_1 p_2^A) \equiv Q_1$, $(p_1 p_2^A) \equiv Q_2$ pontok az A-hoz rendelt aszimptotapontok, Q_1, Q_2 és A közös egyenesét i jelöli. Továbbá A-t úgy választjuk, hogy Q_1 és Q_2 ne legyenek határpontok.

Az A-ra illeszkedő minden egyes h egyenesen — a $(hp_1) \equiv C_1$ és $(hp_2) \equiv C_2$ pontok közvetítésével — B pontot, B-hez rendelt R_1, R_2 aszimptotapontokat és j egyenest definiálunk. A B pontok a $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ ponthalmazt, a j egyenesek — az $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ egyeneshalmazt alkotják:

a) Ha C_1 és C_2 nem határpontok, akkor a $B = C_1 A C_2$ transzformáció egyértelműen meghatározza a B pontot. $R_1 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1^{C_1}$ és $R_2 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_2^{C_2}$ az aszimptotapontok. R_1, R_2 és B közös egyenese a j egyenes.

b) Ha például C_2^* határpont, de C_1 nem határpont, akkor $B^* \overset{\text{def}}{\equiv} C_2^*$. $R_1 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1^{C_1}$, $R_2 \overset{\text{def}}{\equiv} C_2^* \equiv B^*$; $j \overset{\text{def}}{\equiv} R_1 R_2^*$.

c) Ha $C_1^* \equiv C_2^*$ határpontok ($c_1^* \overset{\cdot}{\equiv} c_2^*$ a polárisuk), akkor $B^* \overset{\text{def}}{\equiv} C_1^* \equiv C_2^*$. $R_1^* \equiv R_2^* \overset{\text{def}}{\equiv} B^*$, $j^* \overset{\text{def}}{\equiv} c_1^* \equiv c_2^*$.

d) Feltesszük, hogy az A pontra illeszkedő egyetlen h egyenesre sem teljesül, hogy C_1^* és C_2^* határpontok és $C_1^* \neq C_2^*$. Ez az A pont választására jelent újabb korlátozást.

3. TÉTEL. a) *$h \equiv i$ pontosan akkor teljesül, ha $B \equiv A$, $j \equiv i$.*

b) *Ha C_1 és C_2 nem határpontok, akkor*

$$R_1 \equiv (p_1 p_2^B),\ R_2 \equiv (p_2 p_1^B) \quad \text{és} \quad R_1^B \equiv R_2 .$$

Bizonyítás: a) $Q_1^A \equiv (p_1 p_2^A)^A \equiv (p_1^A p_2) = Q_2$. Ebből a 2. Lemma szerint $A Q_1 A = Q_2$, azaz $Q_1 A Q_2 = A$ következik. Ha tehát $h \equiv i$, akkor $C_1 \equiv Q_1$ és $C_2 \equiv Q_2$ miatt $B = C_1 A C_2 = Q_1 A Q_2 = A$. Továbbá

$$R_1 \equiv Q_1^{C_1} \equiv Q_1, \quad R_2 \equiv Q_2^{C_2} \equiv Q_2, \quad \text{és így} \quad j \equiv i.$$

Fordítva, ha valamely h-ra $B = C_1 A C_2 = A$, akkor $C_2 \equiv C_1^A$ és $C_1 \equiv C_2^A$, azaz $C_1 \equiv (p_1 p_2^A) \equiv Q_1$, $C_2 \equiv (p_2 p_1^A) \equiv Q_2$, tehát $h \equiv i$.

b) $R_1 \equiv Q_1^{C_1} \equiv (p_1 p_2^A)^{C_1} \equiv (p_1^{C_1} p_2^{AC_1}) \equiv (p_1 p_2^{C_2 B}) \equiv (p_1 p_2^B)$. Felhasználtuk, hogy $p_1^{C_1} \equiv p_1$, $p_2^{C_2} \equiv p_2$, és $B = C_1 A C_2$ miatt $A C_1 = C_2 B$. Ugyanígy igazolható a másik két azonosság.

4. TÉTEL. *Ha az A-hoz rendelt Q_1 és Q_2 aszimptotapontok külső pontok, akkor van olyan* **K** *kúp, hogy a* $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta)$, $\mathbf{e}(\mathbf{K}, \vartheta)$ *kúpmetszet aszimptotái* p_1, p_2 *és* $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta) \equiv \equiv \mathbf{k}(A, p_1, p_2)$, $\mathbf{e}(\mathbf{K}, \vartheta) \equiv \mathbf{e}(A, p_1, p_2)$.

Bizonyítás: Az 1. Tétel-hez (és az 1. ábrához) kapcsolódva $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ és $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ „fölé" olyan **K** kúpot építünk, melynek x alkotójához A illeszkedik, az x alkotóhoz tartozó ε érintősík i-ben metszi ϑ-t, a **K** kúp π_1 és π_2 aszimptotasíkjának és ϑ-nak a metszésvonala pedig p_1, illetve p_2. Ezután az állítás a 2. Tétel a) és b) állításaiból és a definíciókból következik.

Vegyünk fel egy tetszőleges i-re illeszkedő ε síkot ($\varepsilon \neq \vartheta$). Q külső pont, ezért polársíkja belső egyenesben metszi ε-t. Ennek egyik határpontját jelölje V^*. Minthogy $Q_2 \equiv Q_1^A$, ezért a $W^* \overset{\text{def}}{=} V^{*A}$ határpont Q_2 polársíkjához illeszkedik, és az $x \overset{\text{def}}{=} V^*W^*$ egyenes A-ban döfi a ϑ síkot.

A p_1-re és V^*-ra illeszkedő síkot π_1, p_2 és W^* síkját π_2 jelölje. π_1 és π_2 közös merőlegese (pólusaik közös egyenese) legyen t. A t-re illeszkedő ε-ra merőleges ξ sík V^*-ra és W^*-ra, tehát x-re is illeszkedik. A t tengely és az x alkotó által meghatározott $\mathbf{K}(x)$ kúp tehát kielégíti a követelményeket.

4. MEGJEGYZÉS. Látható, hogy ε választásától függően több alkalmas kúp is van.

Vizsgáljuk meg most a kizárt esetet. A Q_1 és Q_2 aszimptotapontok csak akkor lehetnek belső pontok, ha p_1 és p_2 belső egyenesek. (A 6. ábrán láthatjuk, hogy ez az eset valóban felléphet.)

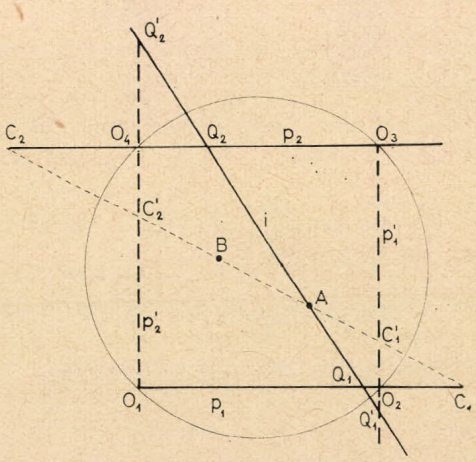
Jelölje p_1 határpontjait O_1, O_2, p_2 határpontjait O_3, O_4. Az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög az *aszimptotanégyszög* az O_1O_2—O_3O_4, O_2O_3—O_4O_1, O_1O_3—O_2O_4 oldalpárok a *négyszög szemköztes oldalai.* Ha például $O_2 \equiv O_3$, akkor az O_2O_3 oldal határegyenes.

5. MEGJEGYZÉS. A definícióból látható, hogy O_1, O_2, O_3, O_4 éppen a $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ halmaz határpontjai, az egyes kúpszeletfajtákat bemutató ábrákon láthatjuk az egybeesések különféle lehetőségeit is (9., 11., 13—16. ábra).

5. TÉTEL. *A* $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ *és* $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ *halmaz definíciójában a* p_1, p_2 *aszimptotapár szerepét az aszimptotanégyszög bármely szemköztes oldalpárja betöltheti. Ha* $p_1 \equiv O_1O_2$, $p_2 \equiv O_3O_4$ *és például* $p_1' \equiv \equiv O_2O_3$, $p_2' \equiv O_4O_1$, *akkor* $\mathbf{k}(A, p_1, p_2) \equiv \equiv \mathbf{k}'(A, p_1', p_2')$, $\mathbf{e}(A, p_1, p_2) \equiv \mathbf{e}'(A, p_1', p_2')$.

Bizonyítás (6. ábra): Az A pontra illeszkedő tetszőleges h egyenes p_1, p_2 és p_1', p_2'-vel közös pontjait rendre C_1, C_2 és C_1', C_2' jelöli, speciálisan az i metszéspontjai Q_1, Q_2, illetve Q_1', Q_2'. A h egyenes $\mathbf{k}'(A, p_1', p_2')$-hez tartozó pontja B', $\mathbf{e}'(A, p_1', p_2')$ megfelelő egyenese j' legyen, az aszimptotapontok R_1' és R_2'.

1. Ha B nem határpont, akkor C_1, C_2 és C_1', C_2' egyike sem határpont és a definíció szerint $B = C_1AC_2$, $B' = C_1'AC_2'$.



6. ábra

$O_1^{C_1 C_1' C_2} \equiv O_2^{C_1' C_2} \equiv O_3^{C_2} \equiv O_4$, ezért az 1. Lemma szerint $C_1 C_1' C_2 = C_2'$.

$$B' = C_1' A C_2' = C_1' A (C_1 C_1' C_2) = C_1' (A C_1 C_1') C_2 = C_1' (C_1' C_1 A) C_2 = C_1 A C_2 = B.$$

Felhasználtuk az $AC_1C_1' = C_1'C_1A$ összefüggést az 1. Lemma szerint.

Ha speciálisan $h \equiv i$, akkor $Q_1 Q_1' Q_2 = Q_2'$ és a 3. Tétel alkalmazásával

$$Q_1' A Q_2' = A, \quad \text{azaz} \quad Q_1'^{A} \equiv Q_2' \quad \text{és} \quad i' \equiv i.$$

Ugyanígy láthatjuk be, hogy $R_1 R_1' R_2 = R_2'$ és $R_1'^{B} \equiv R_2'$, $j' \equiv j$.

2. Ha B^* határpont, például $B^* \equiv O_4$, akkor az 1. Lemma mindkét részét és a 2. Lemmát is alkalmazzuk.

a) Ha $O_4 \not\equiv O_1$ és $O_4 \equiv O_3$, akkor C_1, C_1' nem határpontok, $C_2^* \equiv C_2'^* \equiv O_4$ határpontok: $R_1 \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1^{C_1}$, $R_1' \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1'^{C_1'}$, $i \overset{\text{def}}{\equiv} R_1 O_4$, $i' \overset{\text{def}}{\equiv} R_1' O_4$.

Megmutatjuk, hogy $i \equiv i'$, azaz $O_4^{R_1 R_1'} \equiv O_4$.

$$O_4^{R_1 R_1'} \equiv O_4^{(C_1 Q_1 C_1)(C_1' Q_1' C_1')} \equiv O_4^{(C_1 A Q_2 A C_1)(C_1' A Q_2' A C_1')} \equiv$$

$$\equiv O_4^{(C_1 A) Q_2 (A C_1 C_1') A Q_2' (A C_1')} \equiv O_4^{Q_2 C_1' C_1 Q_2' (A C_1')} \equiv O_3^{C_1' C_1 Q_2' (A C_1')} \equiv O_2^{C_1' Q_2' (A C_1')} \equiv$$

$$\equiv O_1^{Q_2' (A C_1')} \equiv O_4^{A C_1'} \equiv O_4.$$

b) Ha $O_4 \equiv O_1$, de O_3 tőlük különböző, akkor C_1' nem határpont. Be kell látnunk, hogy $R_1' \overset{\text{def}}{\equiv} Q_1'^{C_1}$ a j^* határegyenesben van, azaz $O_4^{R_1'} \equiv O_4$, hiszen ez jelenti azt, hogy $j' \equiv j^*$.

$$Q_4^{R_1'} \equiv O_4^{C_1' Q_1' C_1'} \equiv O_4^{C_1' (A Q_2' A) C_1'} \equiv O_4^{(C_1' A) Q_2' (A C_1')} \equiv O_4^{Q_2' (A C_1')} \equiv O_4^{A C_1'} \equiv O_4.$$

c) Ha $O_4 \equiv O_1 \equiv O_3$, akkor $j' \equiv j^*$ a definícióból adódik.

6. TÉTEL. *A* $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ *és* $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ *halmazhoz mindig választható olyan* p_1', p_2' *aszimptotapár, hogy az A-hoz rendelt* Q_1' *és* Q_2' *aszimptotapontok külső pontok legyenek.*

Bizonyítás (6. ábra): Nem lehetséges, hogy i az O_1O_2—O_3O_4, illetve O_2O_3—O_4O_1 aszimptotapárok mindegyikét belső pontokban metszi, ha O_1O_2—O_3O_4 és O_2O_3—O_4O_1 metszéspontja sem belső pont. A számozás alkalmas megválasztásával ez viszont mindig elérhető.

7. TÉTEL. *A* $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ *ponthalmaz kúpszelet, az* $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ *egyeneshalmaz vonalkúpszelet.*

Bizonyítás: Az 5., 6. és 4. Tételből kiolvasható, hogy $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$, $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ fölé mindig építhető olyan $\mathbf{K}$ kúp, melynek aszimptotasíkjai az $O_1O_2O_3O_4$ aszimptotanégyszög valamely szemköztes oldalpárjában metszi ϑ-t.

AZ ASZIMPTOTÁK ÉS FÓKUSZOK KAPCSOLATA

A hiperbolikus sík kúpszeleteinek aszimptotatulajdonságait a [12]-ben tárgyalt fokális tulajdonságokkal összevetve szembetűnő dualitást láthatunk a definíciókban és ezért a tételekben is. A pont↔egyenes, fókusz↔aszimptota, vonalkúpszelet↔kúpszelet, vezérsugár↔aszimptotapont, stb. szerepcsere — az illeszkedési relációk értelemszerű alkalmazásával — lehetővé teszi, hogy azoknak a tételeknek a duálisát

is megfogalmazzuk és igazoljuk, melyeket csak [12]-ben, vagy csak ebben a közleményben tárgyaltunk.

Kúp közvetítésével, tehát térbeli megfontolással beláttuk azt is, hogy az aszimptotákkal definiált kúpszelet és vonalkúpszelet fókuszokkal is definiálható és fordítva. Ezután jogos a $\mathbf{k}(A, i, p_1, p_2, F_1, F_2)$; $\mathbf{e}(A, i, p_1, p_2, F_1, F_2)$ jelölés is.

Az 1. ábrán, továbbá a 2—5. ábrákon együttesen szemléltetjük a vezérsugarak és aszimptotapontok, a fókuszok és aszimptoták definícióját. [12] alapján röviden megismételjük a szükséges fogalmakat.

Legyen x a $\mathbf{K}$ kúp alkotója, melynek határpontjai V^* és W^*, ξ a hozzátartozó tengelysík, ε az érintősík. ϑ és x metszéspontja A, ϑ és ε metszésvonala i. Feltesszük, hogy A nem határpont, i nem határegyenes. ϑ-nak és ε-nak két szimmetriasíkja van μ_1 és μ_2. Ezek kimetszik a kúp t tengelyéből az S_1, illetve S_2 DANDELIN-pontokat, S_1 és S_2 ϑ-ra merőleges vetületei a $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta)$, $\mathbf{e}(\mathbf{K}, \vartheta)$ kúpmetszet F_1, illetve F_2 fókuszai.

$$(x, V^*, W^*)^{\mu_1} \overset{\text{def}}{\equiv} (x_1, V_1^*, W_1^*), \quad (x, V^*, W^*)^{\mu_2} \overset{\text{def}}{\equiv} (x_2, V_2^*, W_2^*)$$

definiálják az $F_1A \equiv x_1$ és $F_2A \equiv x_2$ vezérsugarakat, valamint ezek határpontjait és a hozzájuk tartozó v_1^*, w_1^*, v_2^*, w_2^* határegyeneseket. Megengedjük, hogy $V_1^* \equiv W_2^*$ és $V_2^* \equiv W_1^*$ teljesüljön, tudnillik, ha $x_1 \equiv x_2$.

Az aszimptoták definíciójával összevetve látható, hogy az aszimptoták merőlegesek az F_1F_2 egyenesre, azaz a t tengely ϑ-ra való merőleges vetületére. Másképpen az aszimptoták P_1, illetve P_2 pólusa illeszkedik az F_1F_2 egyenesre, amit a kúpmetszet tengelyének nevezünk, és s-sel jelöljük. Ha pedig $\vartheta \perp t$, akkor $F_1 \equiv F_2 \equiv P_1 \equiv P_2$. Ilyenkor az s tengely többértelmű.

Az i-hez tartozó Q_1 és Q_2 aszimptotapontra v^*, v_1^*, v_2^*, illetőleg w^*, w_1^*, w_2^* illeszkedik. Tehát a ϑ síkban a $Q_1 q_1$ polárisa V_1^*-ra és V_2^*-ra, a $Q_2 q_2$ polárisa pedig W_1^*-ra és W_2^*-ra illeszkedik.

Ezeket az észrevételeket nemcsak x-re, A-ra, i-re mondhatjuk el.

8. TÉTEL. *A kúpmetszet tetszőleges B pontjához és a hozzátartozó j egyeneséhez rendelt y_1, y_2 vezérsugarak és az R_1, R_2 aszimptotapontok r_1, r_2 polárisai egy az U_1^*, U_2^*, Z_1^*, Z_2^* határpontokból álló négyszög $U_1^*Z_1^* - Z_2^*U_2^*$, illetve $U_2^*U_1^* - Z_1^*Z_2^*$ szemköztes oldalpárját alkotják.*

Bizonyítás: Össze kell vetnünk [12] 2. Tételének és a jelen dolgozat 2. Tételének eseteit. A 2—5. ábrák ezt a célt szolgálják, a 7. ábra pedig — egyetlen esetben — a ϑ síkbeli viszonyokat tükrözi.

I. 1. ϑ-nak és φ-nek két szimmetriasíkja van v_1 és v_2 (2., 7. ábra). Ekkor j nem határegyenes, de B határpont is lehet. Az 1. ábrához kapcsolódva — megfelelő szerepcserével — a tétel kimondása előtti gondolatmenetet ismételhetjük meg.

$$(U^*, Z^*)^{v_1} \equiv (U_1^*, Z_1^*), \quad (U^*, Z^*)^{v_2} \equiv (U_2^*, Z_2^*).$$

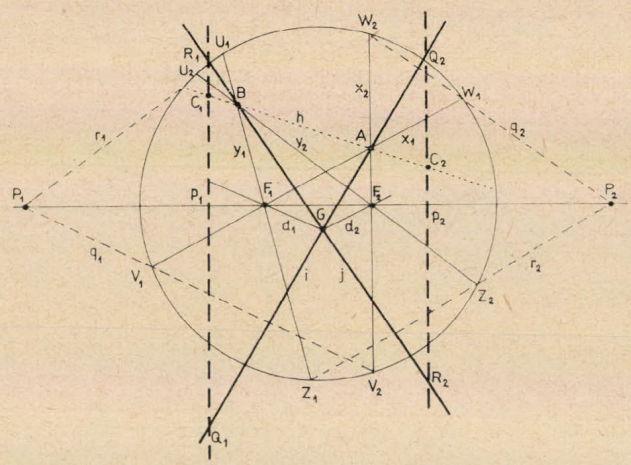
R_1 polárisa $r_1 \equiv U_1^*U_2^*$, R_2 polárisa $r_2 \equiv Z_1^*Z_2^*$. Ha például $U_1^* \equiv U_2^* \equiv B^*$, akkor r_1^* határegyenes.

I. 2. ϑ-nak és φ-nek egy szimmetriasíkja van, mondjuk v_1 (3. ábra).

Ekkor j^* határegyenes (határpontja j^*), de B esetleg nem határpont.

$$(U^*, Z^*)^{v_1} \equiv (U_1^*, Z_1^*), \quad j^* \equiv y_2^*, \quad U_2^* \equiv Z_2^* \equiv J^*$$

Minthogy $R_1 \equiv (j^*u^*)$, $R_2 \equiv (j^*z^*)$, ezért $r_1 \equiv U_1^*U_2^*$, $r_2 \equiv Z_1^*Z_2^*$.



7. ábra

II. 1. $\varphi^* \equiv \tau^*$ határsík (pólusa T^*) és $\vartheta \not\mid T^*$ (4., 7. ábra).
Ekkor j külső egyenes, B külső pont. Mint [12]-ben láttuk, ekkor

$$(y_1, U_1^*, Z_1^*) \equiv (x, V^*, W^*)^{\mu_1 \delta_1}, \quad (y_2, U_2^*, Z_2^*) \equiv (x, V^*, W^*)^{\mu_2 \delta_2},$$

ahol $\delta_1 \equiv GF_1S_1$, $\delta_2 \equiv GF_2S_2$; $G \equiv (ij)$; F_1, F_2 a fókuszok; S_1 és S_2 a DANDELIN-pontok.

$R_1 \equiv Q_1^{C_1}$-ről tudjuk, hogy j-re illeszkedik, továbbá π_1 T^*-hoz tartozó u^* határegyenesére, hiszen $u^* \equiv v^{*C_1}$.

Tudjuk, hogy $u^{*\mu_1\delta_1} \equiv u^*$, hiszen $T^* \mathrel{I} u^*$ és $(\tau^*, \mu_1, \delta_1) \mathrel{I} G$ (1. b) Lemma duálisa). Ez viszont azt jelenti, hogy R_1 a $\pi_1^{\mu_1\delta_1}$ síkra is illeszkedik. $\pi_1^{\mu_1\delta_1}$ és ϑ metszésvonala éppen

$$(\pi_1{}^{\mu_1\delta_1}\vartheta) \equiv (\pi_1\varepsilon)^{\mu_1\delta_1} \equiv v^{*\mu_1\delta_1} \equiv u_1^*.$$

Tehát R_1 illeszkedik az U_1^* polárisára, ezért r_1 illeszkedik U_1^*-re.

Ugyanigy látható be hogy $R_1 \mathrel{I} v^{*\mu_2\delta_2} \equiv u_2^*$ és $r_1 \mathrel{I} U_2^*$; $R_2 \mathrel{I} w^{*\mu_1\delta_1} \equiv z_1^*$ és $r_2 \mathrel{I} Z_1^*$; $R_2 \mathrel{I} w^{*\mu_2\delta_2} \equiv z_2^*$ és $r_2 \mathrel{I} Z_2^*$.

II. 2. $\varphi^* \equiv \tau^*$ határsík (pólusa T^*) és $\vartheta \mathrel{I} T^*$ (5. ábra).
Ekkor j^* határegyenes, $B^* \equiv T^*$ határpont.

$$j^* \equiv y_1^* \equiv y_2^*, \quad R_1^* \equiv R_2^* \equiv T^*, \quad r_1^* \equiv r_2^* \equiv j^*.$$

Tehát $U_1^* \equiv U_2^* \equiv Z_1^* \equiv Z_2^* \equiv T^*$.

9. TÉTEL. *A kúpmetszet s tengelyére illeszkedő F_1, F_2 fókuszok és P_1, P_2 aszimptotapólusok elhelyezkedésére a következő esetek* lehetségesek (az 1, 2 indexek értelemszerűen felcserélhetők):

1. *F_1, F_2, P_1, P_2 egyike sem határpont, $P_1 \equiv F_1P_2F_2$. A pontok vagy mind különböznek, vagy mind egybeesnek.*

2. *$F_1^* \equiv P_2^*$ határpont, P_1 és F_1 nem határpont.*

3. *$P_1^* \equiv F_1^*$, $P_2^* \equiv F_2^*$ határpontok, de e két határpont különböző.*

4. *$P_1^* \equiv P_2^* \equiv F_1^* \equiv F_2^*$ egybeeső határpontok.*

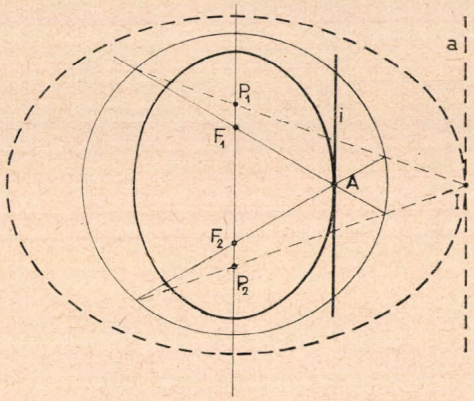
Bizonyítás: Az A ponthoz és az i egyeneshez tartozó $V_1^* W_1^* W_2^* V_2^*$ négyszög és az s tengely lehetséges kölcsönös helyzeteit kell számbavenni. (1. ábra, 8—16. ábrák.) Megengedtük a $V_1^* \equiv W_2^*$ és $V_2^* \equiv W_1^*$ egybeesést.

1. s a négyszög egyik csúcsára sem illeszkedik. Az $F_1 P_2 F_2$ transzformáció az 1. Lemma szerint s-re illeszkedő pontra történő tükrözés, másrészt q_1 határpontjait felcseréli:

$$V_1^{*F_1 P_2 F_2} \equiv W_1^{*P_2 F_2} \equiv W_2^{*F_2} \equiv V_2^*.$$

Ezért

$$F_1 P_2 F_2 = P_1.$$



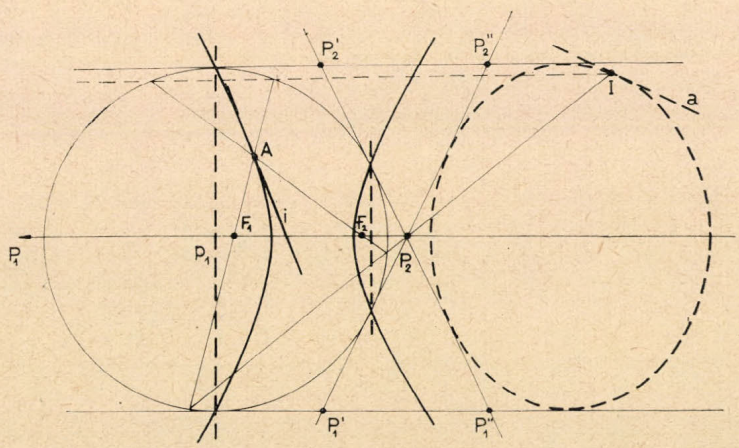
8. ábra

2. s a négyszög egyetlen csúcsára illeszkedik például W_1^*-re.

3. s a négyszög $V_1^* W_2^* — V_2^* W_1^*$ oldalpárjainak egyike, például $s \equiv V_1^* W_2^*$, de $V_1^* \not\equiv W_2^*$, $V_2^* \not\equiv W_1^*$.

4. Az előbbi esetben $V_1^* \equiv W_2^*$ és $V_2^* \equiv W_1^*$. A kúpmetszet definíciója a többi esetet kizárja, a 4. Tétel (illetőleg [12] 6. Tétele) mutatja, hogy a fenti esetek valóban fellépnek.

6. MEGJEGYZÉS. A 8. és 9. Tétel módot nyújt arra, hogy a kúpmetszetet egy tengelyre illeszkedő fókuszaiból és aszimptotapólusaiból határozzuk meg — fel-



9. ábra

téve, hogy a négy pont közül legfeljebb kettő esik egybe —: Az F_1, P_1, F_2 különböző pontokhoz egy s-re nem illeszkedő W_1^* határpontot megadva már egyértelműen meghatározhatjuk sorra a V_1^*, V_2^*, W_2^* határpontokat is. Ha W_1^* F_1 polárisára, és P_2 polárisára sem illeszkedik, akkor a határpontok különböznek, és így A és i is

egyértelmű. A 7. ábra ezt mutatja. Továbbá láthatjuk rajta a B pontot és j egyenest A-hoz és i-hez kapcsoló összefüggéseket:

$$(V_1^*, V_2^*)^{C_1} \equiv (U_1^*, U_2^*), (W_1^*, W_2^*)^{C_2} \equiv (Z_1^*, Z_2^*) \quad \text{és}$$

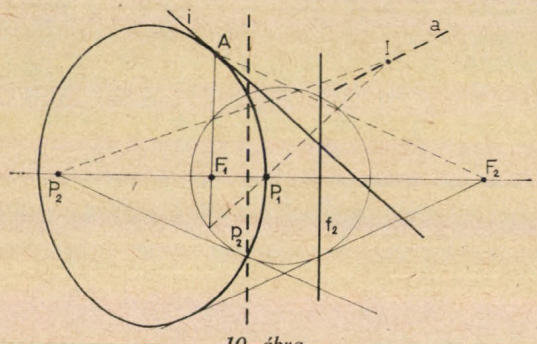
$$(V_1^*, W_1^*)^{d_1} \equiv (U_1^*, Z_1^*), \quad (V_2^*, W_2^*)^{d_2} \equiv (U_2^*, Z_2^*).$$

Ez az önmagában is tetszetős konfiguráció még további „szerkesztési" feladatok megoldásához is elvezet.

A KÚPSZELETEK OSZTÁLYOZÁSA

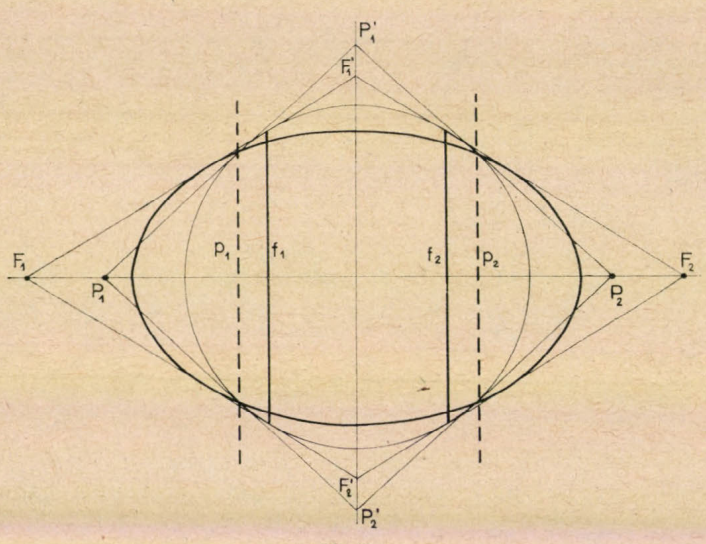
A 8. és 9. Tétel alapján 20 féle kúpszeletet különböztethetünk meg, ezek „gazdaságos" bemutatását segíti elő a következő

10. TÉTEL. *Ha a* $\mathbf{k}(A, i, p_1, p_2, F_1, F_2)$, $\mathbf{e}(A, i, p_1, p_2, F_1, F_2)$ *kúpmetszet poláralakzatát képezzük — tehát* $\mathbf{k}$ *pontjainak polárisait és* $\mathbf{e}$ *egyeneseinek pólusait vesszük —, akkor a kapott* $\mathbf{e}'(I, a, f_1, f_2, P_1, P_2)$, *illetve* $\mathbf{k}'(I, a, f_1, f_2, P_1, P_2)$ *is kúpmetszet, csak* f_1 *és* f_2 *az aszimptoták,* P_1 *és* P_2 *a fókuszok.*



10. ábra

Bizonyítás (8—16. ábrák): Már említettük, hogy az aszimptotákkal történő definíció és a fokális definíció egymás duálisai. Ha például $\mathbf{e}(i, F_1, F_2)$ síkbeli fokális definíciójából indulunk ki, a polaritással éppen a $\mathbf{k}'(I, f_1, f_2)$ ponthalmaz síkbeli aszimptotás definíciójához jutunk, f_1, f_2 az aszimptoták.



11. ábra

Már láttuk, hogy ha **e** vonalkúpszelet, akkor az *i*-hez rendelt vezérsugarak belső egyenesek. Pólusaik — az *I*-hez rendelt aszimptotapontok — külső pontok, és így $\mathbf{k}'(I, f_1, f_2)$ kúpszelet. (Az **e** és **k**′ fölé épített kúpok persze általában különböznek.)

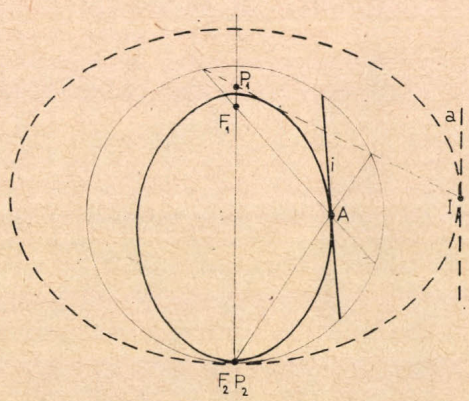
Ezután lássuk az osztályozást. F_1, F_2, P_1, P_2 elhelyezkedését csak a 8—16. ábrákon tüntetjük fel.

8. ábra: *Ellipszis — Poláris ellipszis* (FLADTnál *Ausserabsoluter umschliessender Kegelschnitt*).

9. ábra: *Konvex hiperbola — Poláris konvex hiperbola* (FLADTnál *Ausserabsoluter ausschliessender Kegelschnitt*).

10. ábra: *Szemihiperbola* — polárisa is ugyanilyen típusú.

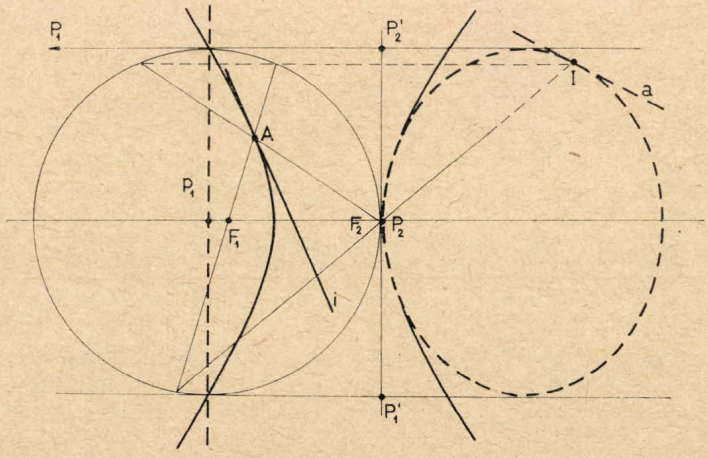
11. ábra: *Konkáv hiperbola* — polárisa is ugyanilyen típusú.



12. ábra

12. ábra: *Elliptikus parabola — Poláris elliptikus parabola* (FLADTnál *Ausserabsolute umschliessende Parabel*).

13. ábra: *Konvex hiperbolikus parabola — Poláris konvex hiperbolikus parabola* (FLADTnál *Ausserabsolute ausschliessende Parabel*).



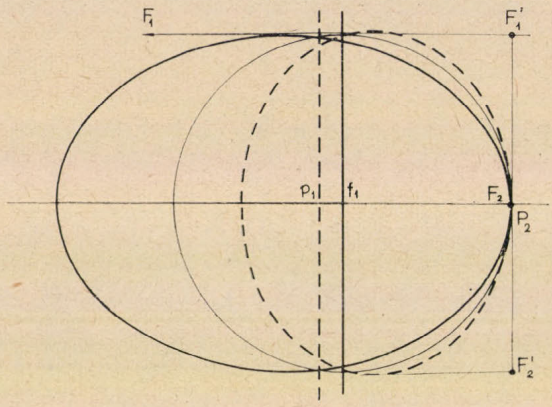
13. ábra

14. ábra: *Kétrészes parabola — Konkáv hiperbolikus parabola.*

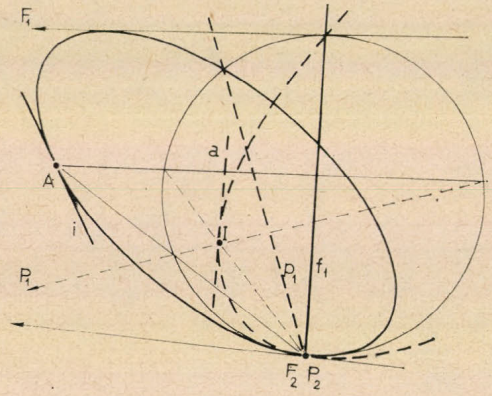
15. ábra: *Oszkuláló parabola* — polárisa is ugyanilyen típusú.

16. ábra: *Konvex hiperciklus* — polárisa is ugyanilyen típusú (FLADTnál ez nem szerepel.)

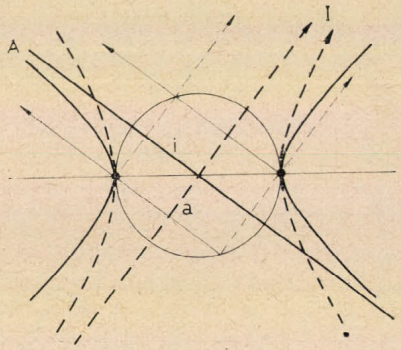
Ábrákon nem szemléltetjük a ciklusokat és polárisaikat. Ekkor a fókuszok és az aszimptotapólusok egybeesnek.



14. ábra



15. ábra



16. ábra

Kör — Poláris kör (FLADT ezt nem illeti külön névvel). Ekkor $F_1 \equiv F_2 \equiv P_1 \equiv P_2$ belső pont.

Hiperciklus — Poláris hiperciklus (FLADTnál mindkettő *Abstandslinie*). Ekkor $F_1 \equiv F_2 \equiv P_1 \equiv P_2$ külső pont. Polárisa belső egyenes.

Paraciklus — Poláris paraciklus. (FLADTnál mindkettő *Grenzkreis.*) Ekkor $F_1^* \equiv \equiv F_2^* \equiv P_1^* \equiv P_2^*$ határpont.

Végül megemlítjük, hogy a kúpszeletek említett aszimptotákkal történő definíciójának az euklideszi és az elliptikus geometriában is van értelme. De a kúpmetszetként való származtatásnál, továbbá a fokális definícióval történő összehasonlításnál az eddigiektől „idegen" eszközöket kellene alkalmazni, ti. a komplex projektív geometria elemeit.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, СВЯЗЬ МЕЖДУ АСИМПТОТАМИ И ФОКУСАМИ В СИНТЕТИЧЕСКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Э. МОЛЬНАР

DIE ASYMPTOTENEIGENSCHAFTEN DER KEGELSCHNITTE DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE, DER ZUSAMMENHANG DER ASYMPTOTEN UND DER BRENNPUNKTEN IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

E. MOLNÁR

In dieser Arbeit setzen wir die Untersuchengen der Arbeit *Die synthetische absolutgeometrische Behandlung der Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte* (Matematikai Lapok **21.** 1970. 3—4. 335—355.) fort.

Schneiden wir den Kegel **K** mit einer Ebene ϑ, so können wir den Punktkegelschnitt $\mathbf{k}(\mathbf{K}, \vartheta)$, den Linienkegelschnitt $\mathbf{e}(\mathbf{K}, \vartheta)$ und die Asymptoten p_1, p_2 definieren. Auf Grund der wesentlichen Eigenschaften dieser Figuren werden die Punktmenge $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ und die Linienmenge $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$, — indem wir uns nur auf die Ebene beschränken, von den Geraden p_1, p_2 und einem geeignet ausgewählten Punkt A ausgehen — mit Hilfe von Spiegelungen definiert. Es wird bewiesen, dass ein Kegel auf $\mathbf{k}(A, p_1, p_2)$ und $\mathbf{e}(A, p_1, p_2)$ aufgebaut werden kann.

Eine Dualität verbindet die Asymptoteneigenschaften mit den Brennpunkteigenschaften. Diese Dualität ordnet die Asymptoten den Brennpunkten, den Punktkegelschnitt dem Linienkegelschnitt zu. Wir erklären das Wesen dieser Dualität, die Zusammenhänge der Asymptoten und der Brennpunkten. Zuletzt überblicken wir der zwanzigerleie Kegelschnitte der hyperbolische Geometrie.

In unserer synthetischen Methode spielt die Spiegelungsbegriff die wichtigsten Rolle (nach F. BACHMANN). Das Cayleysche-Kleinsche Modell erleichtert für uns die Diskussion und den Überblick der verschiedenen Fälle.

MEGJEGYZÉSEK WIRSING EGY TÉTELÉNEK BIZONYÍTÁSÁHOZ

FREUD RÓBERT

I.

E. Wirsing [1]-ben bebizonyította Erdős Pál következő régi nevezetes sejtését: Ha $f(n)$ additív számelméleti függvény és $f(n+1) = f(n)+O(1)$, akkor $f(n) = c \cdot \log n + h(n)$, ahol $h(n)$ korlátos függvény.

Az alábbiakban Wirsing bizonyítását több ponton egyszerűsítjük, és egyúttal megpróbáljuk megvilágítani, hogyan lehet rájönni a bizonyítás gondolatára.

Azokra a bizonyítási lépésekre, amelyeken nem változtattunk, csak utalunk.

p-vel és q-val a továbbiakban mindig prímet jelölünk, c_i-vel pedig pozitív konstansokat.

II.

Wirsing először a következő lemmát bizonyítja:

Ha $f(n)$ additív és $f(n+1) = f(n)+O(1)$, akkor van olyan $g(n)$ teljesen additív függvény, melyre $f(n) = g(n)+O(1)$.

A lemma alapján a tétel nyilván következik az alábbiból:

Ha $f(n)$ teljesen additív, és $f(n+1) = f(n)+O(1)$, akkor $f(n) = c \cdot \log n$.

Wirsing ennél erősebb állítást bizonyít:

Ha $f(n)$ teljesen additív és valamely K konstanssal

$$f(n+1) \leqq f(n)+K, \quad \text{minden } n\text{-re,} \tag{1}$$

akkor $f(n) = c \cdot \log n$.

Mi is ezen erősebb állítás bizonyításával foglalkozunk.

III.

Bizonyításunk indirekt; tegyük fel, hogy $\frac{f(n)}{\log n} \neq c$. $f(n)$ helyett alkalmas D konstanssal az $f(n)+D \cdot \log n$ függvényt tekintve feltehető, hogy

$$f(n) \text{ pozitív és negatív értékeket is felvesz.} \tag{2}$$

(2)-ből már ellentmondásra fogunk jutni. Megjegyezzük, hogy Wirsing bizonyításában a

$$\limsup \frac{f(n)}{\log n} \neq \liminf \frac{f(n)}{\log n} \tag{3}$$

feltételből adódik az ellentmondás.

(3) szintén könnyen következik az indirekt feltevésből — felhasználva $f(n)$ teljes additivitását is. Azonban (3) láthatóan lényegesen „kiélezettebb" feltétel, mint (2).

IV.

A bizonyítás hátterét próbáljuk először megvilágítani.
Ismert, hogy teljesen additív $f(n)$-re

$$(4) \qquad \sum_{n\leqq x} f(n) = \sum_{n\leqq x} \sum_{p^\alpha \mid n} f(p) = \sum_{p^\alpha \leqq x} f(p) \sum_{\substack{p^\alpha \mid n \\ n\leqq x}} 1 = \sum_{p^\alpha \leqq x} f(p) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right].$$

Legyen a egy tetszőleges természetes szám. Az (1) feltétel és a teljes additivitás miatt gyümölcsözőnek látszik $f(an-1)-f(n)$ vizsgálata:

$$(5) \qquad f(an-1)-f(n) \geqq f(an)-K-f(n) = f(a)-K.$$

Érdemesnek tűnik ezért a $\sum_{n\leqq x} f(an-1)$ összeget (4)-hez hasonlóan átalakítani, majd belőle (4)-et kivonni.

$$(6) \qquad \begin{cases} \sum_{n\leqq x} f(an-1) = \sum_{n\leqq x} \sum_{p^\alpha \mid an-1} f(p) = \sum_{p^\alpha \leqq ax-1} f(p) \sum_{\substack{an\equiv 1 (p^\alpha) \\ n\leqq x}} 1 = \\ = \sum_{\substack{p^\alpha \leqq ax-1 \\ (p,a)=1}} f(p) \left(\left[\frac{x}{p^\alpha}\right] + \varepsilon_{p^\alpha, a, x} \right) \end{cases}$$

ahol $\varepsilon_{p^\alpha, a, x}=0$ vagy 1; akkor lesz $\varepsilon_{p^\alpha, a, x}=1$, ha x-nek mod p^α vett legkisebb nemnegatív maradéka nagyobb vagy egyenlő, mint az $an\equiv 1 (p^\alpha)$ legkisebb pozitív n_0 megoldása.

Így egyrészt (5) alapján

$$(7) \qquad \sum_{n\leqq x} f(an-1)-f(n) \geqq \sum_{n\leqq x} (f(a)-K) = x\cdot(f(a)-K)$$

másrészt (4) és (6) miatt

$$(8) \qquad \begin{cases} \sum_{n\leqq x} f(an-1)-f(n) = \sum_{\substack{p^\alpha \leqq x \\ (p,a)=1}} f(p)\, \varepsilon_{p^\alpha, a, x} - \sum_{\substack{p^\alpha \leqq x \\ p \mid a}} f(p) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right] + \\ + \sum_{\substack{x < p^\alpha \leqq ax-1 \\ (p,a)=1}} f(p) \left(\left[\frac{x}{p^\alpha}\right] + \varepsilon_{p^\alpha, a, x} \right) = S_1 - S_2 + S_3 \end{cases}$$

(7) és (8)-ból adódik:

$$(9) \qquad S_1 + S_3 - S_2 \geqq x(f(a)-K).$$

Nyilván $S_3 = \sum_{\substack{x < p^\alpha \leqq ax-1 \\ (p,a)=1}} f(p)\varepsilon_{p^\alpha, a, x}$, tehát (9) átírható a következő alakba:

$$(10) \qquad S_4 = \sum_{\substack{p^\alpha \leqq ax-1 \\ (p,a)=1}} f(p)\, \varepsilon_{p^\alpha, a, x} \geqq x(f(a)-K) + S_2.$$

Válasszuk meg most a-t ügyesen:

$$a = q^s, \quad \text{ahol} \quad f(q) > 0 \quad \text{(ilyen } q \text{ (2) szerint létezik)}$$

$f(q) > 0$ miatt $S_2 > 0$, így (10)-ből

$$S_4 \geqq x(f(a) - K) \tag{11}$$

adódik.

Bevezetve még a $z = ax$ jelölést (11)-ből kapjuk:

$$S_5 = \sum_{\substack{p^\alpha \leqq z \\ (p,a)=1}} f(p)\, \varepsilon_{p^\alpha, a,\, x/a} \geqq z \frac{f(a) - K}{a} = z \cdot c_1 \tag{12}$$

ha s olyan nagy, hogy $f(a) - K > 0$.

V.

(12) bal oldala *látszólag* lényegében csak az $f(p)$ értékektől függ. Tegyük fel, hogy ez ténylegesen így lenne, tehát (12) bal oldala nem függne a-tól, mondjuk pl. $S_6 = \sum_{p^\alpha \leqq z} f(p)$ állna ott S_5 helyett.

Ekkor kapnánk, hogy

$$S_6 \geqq c_1 \cdot z. \tag{13}$$

A (2) feltétel szerint van olyan q_1 prím, melyre $f(q_1) < 0$. A IV-beli gondolatmenetet

$$\sum_{n \leqq x} f(q_1^t \cdot n + 1) - f(n)\text{-nel}$$

elvégezve

$$S_6 \leqq -c_2 \cdot z\text{-t} \tag{14}$$

kapnánk.

(13) és (14) egyszerre nyilvánvalóan lehetetlen. Tehát, ha (12) bal oldalán S_5 helyett S_6 állna, akkor máris ellentmondásra jutottunk volna.

VI.

Azonban a valóságban (12) bal oldalán nem S_6, hanem S_5 áll, és ebben $f(p)$ együtthatója; $\varepsilon_{p^\alpha, a, z/a}$ igen erősen függ nemcsak a-tól, hanem z-től is. És ez a függés teljesen áttekinthetetlen. Éppen $\varepsilon_{p^\alpha, a, z/a}$-nak z-től való függése az, ami a legnagyobb problémát jelenti.

Nem is remélhetjük azt — ami V-höz hasonló gondolatmenettel célhoz vezetne —, hogy $\varepsilon_{p^\alpha, a, z/a}$ „átlagosan" pl. 1/2, azaz ha helyébe 1/2-et írunk, úgy (12) bal oldala „nem változik lényegesen".

VII.

Ezért próbáljuk IV-beli kiinduló lépésünket, (4)-et finomítani, annak valamely általánosított alakjából elindulni.

Kézenfekvően kínálkozik a következő lehetőség: Legyen $u(n)$ később alkalmasan megválasztandó számelméleti függvény, és vizsgáljuk a $\sum_{n\leqq x} f(n)\cdot u(n)$ összeget.

$$(15)\qquad \begin{cases} \sum_{n\leqq x} f(n)\cdot u(n) = \sum_{n\leqq x} u(n) \sum_{p^\alpha/n} f(p) = \sum_{p^\alpha\leqq x} f(p) \sum_{\substack{p^\alpha/n \\ n\leqq x}} u(n) = \\ = \sum_{p^\alpha\leqq x} f(p) \sum_{l\leqq \frac{x}{p^\alpha}} u(l\cdot p^\alpha). \end{cases}$$

Ahhoz, hogy további átalakításokat végezhessünk, fel kell tennünk, hogy

$$(16)\qquad u(n) \text{ teljesen multiplikatív.}$$

Így

$$(17)\qquad \sum_{p^\alpha\leqq x} f(p) \sum_{l\leqq \frac{x}{p^\alpha}} u(l\cdot p^\alpha) = \sum_{p^\alpha\leqq x} f(p)\cdot u(p^\alpha) \sum_{l\leqq \frac{x}{p^\alpha}} u(l)$$

Vagyis (15)-öt és (17)-et egybevetve:

$$(18)\qquad \sum_{n\leqq x} f(n)\cdot u(n) = \sum_{p^\alpha\leqq x} f(p)\cdot u(p^\alpha) \sum_{l\leqq \frac{x}{p^\alpha}} u(l)$$

Hasonlóan okoskodva egy később alkalmasan megválasztandó

$$(19)\qquad v(n) \text{ teljesen multiplikatív}$$

függvénnyel:

$$(20)\qquad \sum_{n\leqq x} f(an-1)\, v(an-1) = \sum_{p^\alpha\leqq ax-1} f(p)\cdot v(p^\alpha) \sum_{\substack{p^\alpha k\equiv -1(a) \\ k\leqq \frac{ax}{p^\alpha}}} v(k)$$

Most (20) és (18) különbségét vizsgáljuk:

$$(21)\qquad \begin{cases} \sum_{n\leqq x} f(an-1)\, v(an-1) - f(n)\cdot u(n) = \\ = \sum_{p^\alpha\leqq x} f(p)\Big\{v(p^\alpha) \sum_{\substack{p^\alpha k\equiv -1(a) \\ k\leqq \frac{ax}{p^\alpha}}} v(k) - u(p^\alpha) \sum_{l\leqq \frac{x}{p^\alpha}} u(l)\Big\} + \\ + \sum_{x<p^\alpha\leqq ax-1} f(p)\cdot v(p^\alpha) \sum_{\substack{p^\alpha k\equiv -1(a) \\ k\leqq \frac{ax}{p^\alpha}}} v(k) = S_7 + S_8. \end{cases}$$

Másrészt az (1) feltételt felhasználva, (21) bal oldalára kapjuk:

$$(22)\qquad \sum_{n\leqq x} f(an-1)\, v(an-1) - f(n)\cdot u(n) = \sum_{n\leqq x} v(an-1)\{f(an-1)-f(n)\} +$$
$$+ \sum_{n\leqq x} f(n)\{v(an-1)-u(n)\} \geqq (f(a)-K) \sum_{n\leqq x} v(an-1) +$$
$$+ \sum_{n\leqq x} f(n)\{v(an-1)-u(n)\} = S_9 + S_{10}.$$

A hatékony továbbmenetelhez szükségünk van arra, hogy S_{10} elhanyagolható legyen, azaz, hogy $v(an-1)-u(n)$ „kicsi", továbbá arra, hogy S_7-ben (lásd (21)) a kapcsos zárójelbeli különbségből a csak p^α-tól függő részt kiemelhessük; ezt $u(p^\alpha) = c_3 \cdot v(p^\alpha)$ biztosítja.

Ezt a két követelményt egyszerre elégíti ki az

$$u(n)=v(an) \tag{23}$$

választás.

Ezzel azonban elrontottuk $u(n)$ multiplikativitását, azaz (16) nem teljesül, ezért (17)-től kezdve módosítanunk kell lépéseinket; (17), (18) és (21) nem érvényesek. Helyettük a következő összefüggések lesznek helyesek:

$$\begin{cases} \sum\limits_{p^\alpha \leqq x} f(p) \sum\limits_{l \leqq \frac{x}{p^\alpha}} u(l \cdot p^\alpha) = \sum\limits_{p^\alpha \leqq x} f(p) \sum\limits_{l \leqq \frac{x}{p^\alpha}} v(a \cdot l \cdot p^\alpha) = \\ = \sum\limits_{p^\alpha \leqq x} f(p) \cdot v(p^\alpha) \sum\limits_{l \leqq \frac{x}{p^\alpha}} v(al) \end{cases} \tag{17'}$$

$$\sum_{n \leqq x} f(n) \cdot u(n) = \sum_{p^\alpha \leqq x} f(p)\, v(p^\alpha) \sum_{l \leqq \frac{x}{p^\alpha}} v(al) \tag{18'}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n \leqq x} f(an-1)\, v(an-1) - f(n)\, u(n) = \\ = \sum\limits_{p^\alpha \leqq x} f(p) \cdot v(p^\alpha) \Big\{ \sum\limits_{\substack{p^\alpha k \equiv -1 \,(a) \\ k \leqq \frac{x}{p^\alpha}}} v(k) - \sum\limits_{l \leqq \frac{x}{p^\alpha}} v(al) \Big\} + S_8 = \\ = S_{11} + S_8 \end{cases} \tag{21'}$$

(21′) és (22) egybevetéséből

$$S_{11} + S_8 \leqq S_9 + S_{10} \tag{24}$$

adódik.

S_{11}-et (lásd (21′)) átalakítjuk.

$$\begin{cases} S_{11} = \sum\limits_{p^\alpha \leqq x} f(p) \cdot v(p^\alpha) \{ v(k_0) - v(a) + v(a+k_0) - v(2a) + \cdots \} - \\ - \sum\limits_{\substack{p \mid a \\ p^\alpha \leqq x}} f(p) \cdot v(p^\alpha) \sum\limits_{l \leqq \frac{x}{p^\alpha}} v(al) = S_{12} - S_{13}, \\ \text{ahol } k_0 \text{ a } p^\alpha \cdot k \equiv -1 \pmod{a} \text{ kongruencia legkisebb pozitív megoldása.} \end{cases} \tag{25}$$

S_{12}-ben $f(p) \cdot v(p^\alpha)$ együtthatója egy véges összeg, amely akkor lesz jól kezelhető ha egy Leibniz-típusú sor részletösszege, vagyis ha

$$v(n) \text{ monoton fogyólag 0-hoz tart.} \tag{26}$$

Ekkor

$$v(k_0) - v(a) \leqq v(k_0) - v(a) + v(k_0+a) - \cdots \leqq v(k_0) \tag{27}$$

(26) és (19)-ből Erdős Pál nevezetes tétele szerint következik, hogy

$$v(n)=\frac{1}{n^{\beta}}, \quad \beta>0$$

Az egyszerűség kedvéért rögtön $\beta=1$-gyel próbálkozunk, legyen tehát

$$v(n)=\frac{1}{n} \tag{28}$$

Következik a megválasztása; ugyanúgy, mint IV-ben legyen $a=q^s$, ahol $f(q)>0$.
A (24) egyenlőtlenséget alakítjuk tovább.
Először S_{11}-et (lásd (25)) becsüljük:
$S_{11}=S_{12}-S_{13}$; $f(q)>0$ miatt $S_{13}>0$, S_{12}-re pedig kapjuk (27) és (28) alapján

$$S_{12}=\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqq x\\(p,a)=1}}\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\left\{\frac{1}{k_0}-\frac{1}{a}+\frac{1}{k_0+a}-\dots\right\}=\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqq x\\(p,a)=1}}\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\left(\frac{1}{k_0}+O\left(\frac{1}{a}\right)\right)$$

Könnyen megmutatható, hogy (1)-ből következik

$$f(n)=O(\log n) \tag{29}$$

Igy

$$S_{12}=\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqq x\\(p,a)=1}}\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\cdot\frac{1}{k_0}+O\left(\frac{1}{a}\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqq x\\(p,a)=1}}\frac{\log p}{p^{\alpha}}\right)=\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqq x\\(p,a)=1}}\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\cdot\frac{1}{k_0}+O\left(\frac{1}{a}\log x\right).$$

((29) alapján nyilván feltehetjük azt is, hogy $|f(n)|\leqq\log n$. A kényelmesebb írásmód kedvéért többnyire ezt fogjuk használni.)
Azaz

$$S_{11}<S_{12}\leqq\sum_{\substack{p^{\alpha}\leqq x\\(p,a)=1}}\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\cdot\frac{1}{k_0}+\frac{c_4}{a}\log x \tag{30}$$

Most S_8-at (lásd (21)) becsüljük:

$$S_8=\sum_{x<p^{\alpha}\leqq ax-1}\frac{f(p)}{p^{\alpha}}\cdot\sum_{\substack{p^{\alpha}k\equiv -1\,(a)\\k\leqq\frac{ax}{p^{\alpha}}}}\frac{1}{k}$$

Itt a belső $\sum$-nak nyilván legfeljebb 1 tagja lehet, tehát (29)-et felhasználva, kapjuk:

$$|S_8|\leqq\sum_{x<p^{\alpha}\leqq ax-1}\frac{|f(p)|}{p^{\alpha}}=O\left(\sum_{x<p^{\alpha}\leqq ax-1}\frac{\log p}{p^{\alpha}}\right)\leqq c_4\cdot\log a \tag{31}$$

Végül S_9 és S_{10} (lásd (22)) becslései:

$$|S_{10}|=\left|\sum_{n\leqq x}f(n)\cdot\left\{\frac{1}{an-1}-\frac{1}{an}\right\}\right|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}=c_5 \tag{32}$$

$$S_9=(f(a)-K)\sum_{n\leqq x}\frac{1}{an-1}=\frac{f(a)-K}{a}(\log x+O(1))$$

(30), (31) és (32)-t (24)-be behelyettesítve adódik:

$$(33)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\substack{p^{\varkappa}\leqq x \\ (p,\,a)=1}} \dfrac{f(p)}{p^{\varkappa}} \cdot \dfrac{1}{k_0} \geqq \dfrac{f(a)-c_6}{a}\left(\log x + O(1)\right) - c_4 \log a - c_5 = \\ \qquad = \dfrac{f(a)-c_6}{a} \log x + C(a) \end{cases}$$

Azaz, ha $a=q^s$ olyan nagy, hogy $f(a)>c_6$, akkor elég nagy x-re (ezen rögzített a mellett)

$$(34)\qquad \sum_{\substack{p^{\varkappa}\leqq x \\ (p,\,a)=1}} \frac{f(p)}{p^{\varkappa}} \cdot \frac{1}{k_0} \geqq c_7 \cdot \log x$$

A (34) egyenlőtlenség (12)-nek analogonja. (34)-ben $\dfrac{f(p)}{p^{\varkappa}}$ együtthatója $\dfrac{1}{k_0}$, ahol k_0 a $p^{\varkappa}k \equiv -1 \pmod a$ kongruencia legkisebb pozitív megoldása, tehát $\dfrac{1}{k_0}$ csak a-tól és $p^{\varkappa}$-tól függ, x-től nem. Ez az óriási előrelépés (12)-vel szemben, amely a továbbhaladást lehetővé teszi.

Vezessük be a következő jelölést:

$$\frac{1}{k_0} = W_a(p^{\varkappa})$$

VIII.

(33) bal oldalán tehát $\dfrac{f(p)}{p^{\varkappa}}$ együtthatója $W_a(p^{\varkappa})$. Ha $W_a(p^{\varkappa})$ — rögzített a-ra — elég „egyenletes" lenne, akkor kapnánk az $S_{14} = \sum\limits_{p^{\varkappa}\leqq x} \dfrac{f(p)}{p^{\varkappa}}$ összegre, hogy elég nagy x-re

$$(35)\qquad S_{14} > c_8 \log x.$$

Analóg dolgozva $\sum\limits_{n\leqq x} \dfrac{f(q_1^t \cdot n+1)}{q_1^t \cdot n+1} - \dfrac{f(n)}{q_1^t \cdot n}$-nel, ahol $f(q_1)<0$, ugyanígy adódna, hogy $S_{14} < -c_9 \cdot \log x$, ami ellentmondás (35)-tel.

IX.

Vizsgáljuk tehát $W_a(p^{\varkappa})$ egyenletességét! Ha pl. $a=$prím, akkor $W_a(p^{\varkappa})$ értékei $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{a-1}$, azaz „átlagérték" kb. $\dfrac{\log a}{a}$, míg a „szórás" $\sim \sqrt{\dfrac{\pi^2}{6} \cdot \dfrac{1}{a} - \dfrac{\log^2 a}{a^2}} \sim \dfrac{c_{10}}{\sqrt{a}}$, vagyis a szórás lenyeli az átlagértéket, $W_a(p^{\varkappa})$ ingadozása igen nagy.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az „átlagérték" és „szórás" szavak használata egyelőre teljesen megalapozatlan, csakis heurisztikusan dolgozunk még velük.

X.

Sok a-ra együttesen használva (33)-at nagyobb kiegyenlítettséget remélhetünk $\frac{f(p)}{p^\alpha}$ együtthatójára.

Ezért összegezzük (33)-at rögzített x mellett minden $a \in H$-ra, ahol H később alkalmasan megválasztandó véges részhalmaza a természetes számoknak.

Az egyöntetű írásmód kedvéért legyen $W_a(p^\alpha)=0$, ha p/a.

$$(36) \qquad \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} \underbrace{\left(\sum_{a \in H} W_a(p^\alpha) \right)}_{W(p^\alpha)} \geqq \sum_{a \in H} \frac{f(a)-c_6}{a} \log x + \sum_{a \in H} C(a)$$

Legyen y később alkalmasan megválasztandó konstans. H-ról annyit már rögzítünk, hogy csak y-nál kisebb bizonyos prímek az elemei.

Ekkor (36) jobb oldalát becsülve:

$$\log x \left(\sum_{a \in H} \frac{f(a)}{a} - \sum_{a \in H} \frac{c_6}{a} \right) + \sum_{a \in H} C(a) \geqq \log x \left(\sum_{a \in H} \frac{f(a)}{a} - c_6 \cdot \log\log y \right) - D(y)$$

Így (36)-ból kapjuk, hogy (y-hoz képest is) elég nagy x-re

$$(37) \qquad \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} W(p^\alpha) \geqq c_{11} \cdot \log x \left(\sum_{a \in H} \frac{f(a)}{a} - c_6 \log\log y \right)$$

Nézzük $W(p^\alpha)$ egyenletességét:

„Átlagérték":

$$M\big((Wp^\alpha)\big) = \sum_{a \in H} M\big(W_a(p^\alpha)\big) \sim \sum_{a \in H} \frac{\log a}{a}$$

„Szórás":

$$D^2\big(W(p^\alpha)\big) \leqq \sum_{a \in H} D^2\big(W_a(p^\alpha)\big) \leqq \sum_{a \in H} \frac{\frac{\pi^2}{6}}{a} \leqq c_{12} \cdot \log\log y$$

$W(p^\alpha)$ egyenletessége

$$(38) \qquad D(W) \ll M(W)$$

esetén várható, azaz ha

$$(39) \qquad \sum_{a \in H} \frac{\log a}{a} \gg \sqrt{\log\log y}$$

Továbbá szükséges, hogy (37) jobb oldalán $\log x$ együtthatója pozitív legyen vagyis

$$(40) \qquad \sum_{a \leqq H} \frac{f(a)}{a} \gg \log\log y$$

(29) alapján (40) erősebb követelmény (39)-nél.

(40)-et nagyon egyszerűen bizonyítjuk (ez lényeges rövidítés Wirsing gondolatmenetéhez képest):

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

(34)-ben tetszőleges a-t véve (nem szükséges $a \in H$), x helyett y-t írva kapjuk, hogy elég nagy y-ra

$$(41)\qquad \begin{cases} c_7 \log y \leqq \sum\limits_{p^\alpha \leqq y} \dfrac{f(p)}{p^\alpha} \cdot W_a(p^\alpha) \leqq \sum\limits_{\substack{p^\alpha \leqq y \\ f(p)>0}} \dfrac{f(p)}{p^\alpha} W_a(p^\alpha) \leqq \\ \leqq \sum\limits_{\substack{p^\alpha \leqq y \\ f(p)>0}} \dfrac{f(p)}{p^\alpha} \cdot 1 \end{cases}$$

Így $H=\{a;\ a$ prím, $a \leqq y$, $f(a)>0\}$ választással (41)-ből adódik (40) (mivel $\sum\limits_{\substack{p^\alpha \leqq y \\ \alpha \geqq 2 \\ f(p)>0}} \dfrac{f(p)}{p^\alpha} = O(1)$, tehát elhanyagolható).

Elég nagy y-ra tehát (41) és (37)-ből adódik

$$(42)\qquad \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} W(p^\alpha) \leqq c_{13} \cdot \log x \cdot \log y$$

Másrészt (39), azaz (38) teljesülése heurisztikusan azt sugallja, hogy

$$\sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} W(p^\alpha) \sim \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} \cdot M(W(p^\alpha)),$$

azonban ez korántsem ilyen nyilvánvaló; a precíz bizonyításhoz a következő mély számelméleti tétel szükséges:

Ha $(j, m) = 1$, akkor

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqq x \\ p^\alpha \equiv j\,(m)}} \frac{\log p}{p^\alpha} = \frac{1}{\varphi(m)} \cdot \log x + O(1)$$

Legyen $m = \prod\limits_{a \in M} Ha$.

Nyilván $w(p^\alpha)$ értéke csak attól függ, hogy p^α melyik maradékosztályban van mod m. Az is világos, hogy vizsgálatainkban elhanyagolhatjuk azon p prímeket, melyekre p/m.

Ezek alapján:

$$\left| \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} \left(M(W(p^\alpha)) - W(p^\alpha)\right) \right| \leqq \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{\log p}{p^\alpha} |M(W) - W(p^\alpha)| =$$

$$= \sum_{(j,m)=1} |M(W) - W(j)| \sum_{\substack{p^\alpha \leqq x \\ p^\alpha \equiv j\,(\mathrm{mod}\ m)}} \frac{\log p}{p^\alpha} =$$

$$= \sum_{(j,m)=1} |M(W) - W(j)| \left(\frac{1}{\varphi(m)} \cdot \log x + O(1) \right) \leqq$$

$$\leqq \log x \cdot D(W) + O(1) \leqq \log x \sqrt{\log \log y} + O(1)$$

A fentiekből és (42)-ből következik, hogy

$$M(w) \cdot \sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} \geqq c_{13} \cdot \log x \cdot \log y - \log x \sqrt{\log \log y} \geqq c_{14} \cdot \log x \log y$$

Azaz rögzített nagy y-nal, ehhez képest is elég nagy x-re

$$\sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} \geqq c_{15} \cdot \log x \tag{43}$$

A már többször jelzett analóg módon pedig ugyanígy

$$\sum_{p^\alpha \leqq x} \frac{f(p)}{p^\alpha} \leqq -c_{16} \cdot \log x$$

adódik, ami ellentmond (43)-nak.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] E. WIRSING: A characterization of the function $\log n$ as an additive arithmetical function, Istituto Nazionale di Alta Mathematica, Symposia Mathematica, Volume IV, 45—57 p., Academic Press, London and N. Y., 1970.

ЗАМЕЧАНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Э. ВИРЗИНГА

Р. ФРЕЙД

Э. Вирзинг доказывает в [1] следующую теорему, являющуюся знаменитой до тех пор нерешенной проблемой П. Эрдёша:

Если $f(n)$ является аддитивной арифметической функцией и $f(n+1) = f(n)+O(1)$, то $f(n) = c \log n + h(n)$ где $h(n)$ ограниченная функция.

Мы упрощаем доказательство и пытаемся показать естественный ход мыслей, водящий к конкретному доказательству.

SOME REMARKS ON THE PROOF OF A THEOREM OF E. WIRSING

R. FREUD

E. Wirsing proves in [1] the following theorem, which was a famous unsolved problem proposed by P. Erdős:

If $f(n)$ is an additive arithmetical function and $f(n+1)=f(n)+O(1)$, then $f(n)=c\cdot\log n+h(n)$, where $h(n)$ is bounded.

We simplify the proof and give a background to the idea of the proof.

DIOPHANTOSZI EGYENLETEK MEGOLDÁSA FOKSZÁMUK CSÖKKENTÉSÉVEL

KELEMEN JÓZSEF

I.

[1] általánosításaként vizsgáljuk a

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_{i,1}^{k_{i,1}}, x_{i,2}^{k_{i,2}}, \ldots, x_{i,m_i}^{k_{i,m_i}}) = 0 \tag{1}$$

egyenletet, ha $n, m_1, m_2, \ldots, m_n$, $k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots, k_{i,m_i}$ adott természetes számok $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,m_i}$ zérustól különböző ismeretlen egész számok, $f_i(z_{i,1}, z_{i,2}, \ldots, z_{i,m_i})$ pedig a $z_{i,1}, z_{i,2}, \ldots, z_{i,m_i}$ valós változók egész együtthatójú, g_i fokszámú homogén polinomja. (Mivel két azonos fokszámú polinom összege egyetlen polinomként szerepeltethető, azért feltehetjük, hogy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ egymástól páronként különböző természetes számok.)

Alkalmazzuk a következő jelöléseket:

(a, b), ill. $[a, b]$ jelölje a és b legnagyobb közös osztóját, ill. legkisebb közös többszörösét,

$$g = [g_1, g_2, \ldots, g_n],$$

$$K_i = [k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots, k_{i,m_i}],$$

$$K_{i,j} = [k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots, k_{i,j-1}, k_{i,j+1}, \ldots, k_{i,m_i}],$$

$$l_{i,j} = \frac{g}{g_i} \cdot [K_1, K_2, \ldots, K_{i-1}, K_{i,j}, K_{i+1}, \ldots, K_n],$$

$$k = [g_1 K_1, g_2 K_2, \ldots, g_n K_n],$$

$$k_i = [(k_{i,1}, l_{i,1}), (k_{i,2}, l_{i,2}), \ldots, (k_{i,m_i}, l_{i,m_i})],$$

$$K = [g_1 k_1, g_2 k_2, \ldots, g_n k_n],$$

$t_{i,j}$ az a legkisebb nem-negatív egész szám, amelyre $(k_{i,j}, l_{i,j}) + l_{i,j} t_{i,j}$ osztható $k_{i,j}$-vel,

$$L = \frac{K}{k}\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{l_{i,j} t_{i,j}}{(k_{i,j}, l_{i,j})}\right],$$

$$L_{i,j} = \frac{g_i [k_{i,j}, l_{i,j}]}{k}.$$

1. SEGÉDTÉTEL: *L természetes szám.*

Bizonyítás. kL természetes szám, hiszen

$$kL = K + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{K}{(k_{i,j}, l_{i,j})} l_{i,j}\, t_{i,j},$$

K pedig, definíciója alapján, osztható $(k_{i,j}, l_{i,j})$-val.

Legyen α az $1, 2, \ldots, n$ számok közül, β pedig az $1, 2, \ldots, m_\alpha$ számok közül valamelyik. Ekkor

$$kL = \frac{K}{(k_{\alpha,\beta}, l_{\alpha,\beta})} [(k_{\alpha,\beta}, l_{\alpha,\beta}) + l_{\alpha,\beta}\, t_{\alpha,\beta}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \beta}}^{m_\alpha} \frac{K}{(k_{\alpha,j}, l_{\alpha,j})} l_{\alpha,j}\, t_{\alpha,j} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{K}{(k_{i,j}, l_{i,j})} l_{i,j}\, t_{i,j}.$$

Itt $\frac{K}{(k_{\alpha,\beta}, l_{\alpha,\beta})}$ osztható g_α-val, $(k_{\alpha,\beta}, l_{\alpha,\beta}) + l_{\alpha,\beta}\, t_{\alpha,\beta}$ pedig $k_{\alpha,\beta}$-val, tehát

$$\frac{K}{(k_{\alpha,\beta}, l_{\alpha,\beta})} [(k_{\alpha,\beta}, l_{\alpha,\beta}) + l_{\alpha,\beta}\, t_{\alpha,\beta}]$$

osztható $g_\alpha k_{\alpha,\beta}$-val. Továbbá $\frac{K}{(k_{\alpha,j}, l_{\alpha,j})}$ osztható g_α-val, $l_{\alpha,j}$ pedig, ha $j \neq \beta$-val, $k_{\alpha,\beta}$-val, s így $\frac{K}{(k_{\alpha,j}, l_{\alpha,j})} l_{\alpha,j} t_{\alpha,j}$ is osztható $g_\alpha k_{\alpha,\beta}$-val. Végül, ha $i \neq \alpha$, akkor $\frac{K}{(k_{i,j}, l_{i,j})}$ osztható (g_i, g_α)-val, $l_{i,j}$ pedig $\frac{g_\alpha}{(g_i, g_\alpha)} k_{\alpha,\beta}$-val, azaz $\frac{K}{(k_{i,j}, l_{i,j})} l_{i,j} t_{i,j}$ is osztható $g_\alpha k_{\alpha,\beta}$-val. kL tehát osztható $g_\alpha k_{\alpha,\beta}$-val. De β bármelyik lehetett az $1, 2, \ldots, m_\alpha$ számok közül, kL tehát $[g_\alpha k_{\alpha,1}, g_\alpha k_{\alpha,2}, \ldots, g_\alpha k_{\alpha,m_\alpha}]$-vel, $g_\alpha K_\alpha$-val is osztható. De α is bármelyik lehetett az $1, 2, \ldots, n$ számok közül, kL tehát osztható $[g_1 K_1, g_2 K_2, \ldots, g_n K_n]$-vel, k-val. Ha kL k-val osztható természetes szám, akkor L természetes szám.

2. SEGÉDTÉTEL: $L_{i,j}$ *természetes szám.*

Bizonyítás. $l_{i,j}$ definíciója alapján

$$g_i[k_{i,j}, l_{i,j}] = [g_i k_{i,j}, gK_1, gK_2, \ldots, gK_{i-1}, gK_{i,j}, gK_{i+1}, \ldots, gK_n].$$

Ha $1 \leqq \alpha \leqq n$, akkor tehát $g_i[k_{i,j}, l_{i,j}]$ osztható $g_\alpha K_\alpha$-val. Ha ugyanis $\alpha \neq i$, akkor gK_α, ha pedig $\alpha = i$, akkor $[g_i k_{i,j}, gK_{i,j}]$ osztható $g_\alpha K_\alpha$-val. $g_i[k_{i,j}, l_{i,j}]$ tehát osztható $[g_1 K_1, g_2 K_2, \ldots, g_n K_n]$-vel, k-val, azaz $L_{i,j}$ egész szám. Előjelét is figyelembe véve, természetes szám.

1. TÉTEL: *Az* (1) *egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a*

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i\left(y_{i,1}^{(k_{i,1}, l_{i,1})}, y_{i,2}^{(k_{i,2}, l_{i,2})}, \ldots, y_{i,m_i}^{(k_{i,m_i}, l_{i,m_i})}\right) = 0$$

egyenlet megoldható, a (2) *egyenlet megoldásán is olyan megoldást értve, ahol az* $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m_i}$ *ismeretlenek zérustól különböző egész számok.*

Bizonyítás.

A feltétel szükséges. Ha (1) megoldható, akkor (2) is megoldható, hiszen

$$y_{i,j}=x_{i,j}^{\frac{k_{i,j}}{(k_{i,j},\,l_{i,j})}}$$

(2)-nek a megoldása.

A feltétel elegendő. Ha (2) megoldható, akkor (1) is megoldható, hiszen

$$x_{i,j}=y_{i,j}^{\frac{(k_{i,j},\,l_{i,j})}{k_{i,j}}}\prod_{\alpha=1}^{n}\prod_{\beta=1}^{m_\alpha}y_{\alpha,\beta}^{\frac{g_\alpha l_{\alpha,\beta}\,t_{\alpha,\beta}}{g_i k_{i,j}}}$$

(1)-nek a megoldása.

Legyen r_1 zérustól különböző tetszőleges racionális szám, valamint

$$Y_{i,j}=y_{i,j}\,r_1^{-\frac{K}{g_i(k_{i,j},\,l_{i,j})}}.$$

2. TÉTEL: *Az* (1) *egyenlet megoldásai előállíthatók*

$$x_{i,j}=r^{\frac{k}{g_i k_{i,j}}}Y_{i,j}^{\frac{(k_{i,j},\,l_{i,j})}{k_{i,j}}}\prod_{\alpha=1}^{n}\prod_{\beta=1}^{m_\alpha}Y_{\alpha,\beta}^{\frac{g_\alpha l_{\alpha,\beta}\,t_{\alpha,\beta}}{g_i k_{i,j}}} \tag{3}$$

alakban, ahol r zérustól különböző racionális szám, olyan, hogy (3) *egész számokat definiáljon.*

Bizonyítás. (3) nyilvánvalóan (1) megoldása. Másrészt (3) az (1) egyenlet összes megoldását tartalmazza. Az (1) egyenlet bármelyik megoldását tekintjük ugyanis, létezik (2)-nek olyan megoldása, és olyan, zérustól különböző racionális r, amelyek a (3) formulák révén tetszőleges racionális r_1 esetén ($r_1\neq 0$) az adott megoldást állítják elő, mégpedig

$$y_{i,j}=x_{i,j}^{\frac{k_{i,j}}{(k_{i,j},\,l_{i,j})}},$$

$$r=r_1^{L}\prod_{\alpha=1}^{n}\prod_{\beta=1}^{m_\alpha}x_{\alpha,\beta}^{-L_{\alpha,\beta}\,t_{\alpha,\beta}}.$$

Állításunk a fenti $y_{i,j}$ és r értékének (3)-ba való helyettesítésével igazolható.

1. PÉLDA. Oldjuk meg a

$$3x_{1,1}^{12}-5x_{1,1}^{6}x_{1,2}^{8}+2x_{1,2}^{16}-7x_{2,1}^{10}-10x_{2,1}^{5}x_{2,2}^{7}-3x_{2,2}^{14}=0 \tag{4}$$

egyenletet!

Ekkor

$$n=m_1=m_2=2,$$

$$k_{1,1}=3,\quad k_{1,2}=4,\quad k_{2,1}=5,\quad k_{2,2}=7,$$

$$g_1=4,\quad g_2=2,\quad g=4,$$

$$K_1=12,\quad K_2=35,\quad k=1680,$$

$$K_{1,1}=4,\quad K_{1,2}=3,\quad K_{2,1}=7,\quad K_{2,2}=5,$$

$$l_{1,1}=140,\quad l_{1,2}=105,\quad l_{2,1}=168,\quad l_{2,2}=120,$$

$$(k_{1,1},\,l_{1,1})=(k_{1,2},\,l_{1,2})=(k_{2,1},\,l_{2,1})=(k_{2,2},\,l_{2,1})=1,$$

$$k_1=k_2=1,\quad K=4,$$

$$t_{1,1}=1,\quad t_{1,2}=3,\quad t_{2,1}=3,\quad t_{2,2}=6,$$

a (4) egyenlet pedig akkor és csak akkor oldható meg, ha a

$$3y_{1,1}^4 - 5y_{1,1}^2 y_{1,2}^2 + 2y_{1,2}^4 - 7y_{2,1}^2 - 10y_{2,1}y_{2,2} - 3y_{2,2}^2 = 0 \tag{5}$$

egyenlet megoldható. Ez utóbbi egyenlet minden olyan megoldása, amelyre $y_{2,1} + y_{2,2} \neq 0$, előállítható

$$\begin{cases} y_{1,1} = 2r_1 u_1 u_3 \\ y_{1,2} = 2r_1 u_2 u_3 \\ y_{2,1} = -r_1^2 u_3 (3u_1^4 - 5u_1^2 u_2^2 + 2u_2^4 - 3u_3^2) \\ y_{2,2} = r_1^2 u_3 (3u_1^4 - 5u_1^2 u_2^2 + 2u_2^4 - 7u_3^2) \end{cases} \tag{6}$$

alakban, ahol u_1, u_2, u_3 zérustól különböző egész számok,

$$3u_1^4 - 5u_1^2 u_2^2 + 2u_2^4 - 3u_3^2 \neq 0,$$

$$3u_1^4 - 5u_1^2 u_2^2 + 2u_2^4 - 7u_3^2 \neq 0,$$

r_1 zérustól különböző racionális szám, melynek nevezőjét úgy választjuk meg, hogy $y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,1}, y_{2,2}$ egészek legyenek. (6) ugyanis — behelyettesítéssel ellenőrizhető — megoldás, másrészt pedig minden $y_{1,1}$, $y_{1,2}$, $y_{2,1}$, $y_{2,2}$ megoldást előállít, ha $y_{2,1} + y_{2,2} \neq 0$, mégpedig

$$u_1 = y_{1,1}, \quad u_2 = y_{1,2}, \quad u_3 = -y_{2,1} - y_{2,2}, \quad r_1 = -\frac{1}{2(y_{2,1} + y_{2,2})}$$

révén.

Mivel

$$\frac{K}{g_1(k_{1,1}, l_{1,1})} = \frac{K}{g_1(k_{1,2}, l_{1,2})} = 1,$$

$$\frac{K}{g_2(k_{2,1}, l_{2,1})} = \frac{K}{g_2(k_{2,2}, l_{2,2})} = 2,$$

azért

$$Y_{1,1} = 2u_1 u_3,$$

$$Y_{1,2} = 2u_2 u_3,$$

$$Y_{2,1} = -u_3 (3u_1^4 - 5u_1^2 u_2^2 + 2u_2^4 - 3u_3^2),$$

$$Y_{2,2} = u_3 (3u_1^4 - 5u_1^2 u_2^2 + 2u_2^4 - 7u_3^2),$$

(3) alapján pedig

$$\begin{cases} x_{1,1} = r^{140} Y_{1,1}^{47} Y_{1,2}^{105} Y_{2,1}^{84} Y_{2,2}^{120}, \\ x_{1,2} = r^{105} Y_{1,1}^{35} Y_{1,2}^{79} Y_{2,1}^{63} Y_{2,2}^{90}, \\ x_{2,1} = r^{168} Y_{1,1}^{56} Y_{1,2}^{126} Y_{2,1}^{101} Y_{2,2}^{144}, \\ x_{2,2} = r^{120} Y_{1,1}^{40} Y_{1,2}^{90} Y_{2,1}^{72} Y_{2,2}^{103}. \end{cases}$$

Ha

$$y_{2,1} + y_{2,2} = 0,$$

akkor (5) szerint

$$3y_{1,1}^4 - 5y_{1,1}^2 y_{1,2}^2 + 2y_{1,2}^4 = 0,$$

ahonnan

$$y_{1,2} = \pm y_{1,1}.$$

Az $r_1=1$ választással $Y_{i,j}=y_{i,j}$, s így

$$\begin{cases} x_{1,1} = \pm r^{140} y_{1,1}^{152} y_{2,1}^{204}, \\ x_{1,2} = \pm r^{105} y_{1,1}^{114} y_{2,1}^{153}, \\ x_{2,1} = \quad r^{168} y_{1,1}^{182} y_{2,1}^{245}, \\ x_{2,2} = -r^{120} y_{1,1}^{130} y_{2,1}^{175}, \end{cases}$$

illetve az $ry_{1,1}y_{2,1}=R$ jelöléssel

$$\begin{cases} x_{1,1} = \pm R^{140} y_{1,1}^{12} y_{2,1}^{64}, \\ x_{1,2} = \pm R^{105} y_{1,1}^{9} y_{2,1}^{48}, \\ x_{2,1} = \quad R^{168} y_{1,1}^{14} y_{2,1}^{77}, \\ x_{2,2} = -R^{120} y_{1,1}^{10} y_{2,1}^{55}. \end{cases}$$

II.

Tekintsük most az (1) egyenlet egyik speciális esetét.
Legyen m természetes szám és $m<n$,

$$k'=[g_1K_1, g_2K_2, \ldots, g_mK_m],$$

$$k''=[g_{m+1}K_{m+1}, g_{m+2}K_{m+2}, \ldots, g_nK_n],$$

k' és k'' egymáshoz relatív prím természetes számok:

$$k=[g_1K_1, g_2K_2, \ldots, g_nK_n]=[k',k'']=k'k'',$$

t az a legkisebb nem-negatív egész szám, amelyre $k't+1$ osztható k''-vel, $u_{i,j}$ zérustól különböző egész számok,

$$D_1=\sum_{i=1}^{m} f_i(u_{i,1}^{k_{i,1}}, u_{i,2}^{k_{i,2}}, \ldots, u_{i,m_i}^{k_{i,m_i}}) \neq 0,$$

$$D_2=-\sum_{i=m+1}^{n} f_i(u_{i,1}^{k_{i,1}}, u_{i,2}^{k_{i,2}}, \ldots, u_{i,m_i}^{k_{i,m_i}}) \neq 0.$$

3. TÉTEL: *Az* (1) *egyenlet olyan megoldásai, amelyekre*

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_{i,1}^{k_{i,1}}, x_{i,2}^{k_{i,2}}, \ldots, x_{i,m_i}^{k_{i,m_i}}) \neq 0 \tag{7}$$

teljesül, előállíthatók

$$\begin{cases} x_{i,j} = r^{\frac{k}{g_ik_{i,j}}} u_{i,j} D_1^{\frac{k'}{g_ik_{i,j}} t} D_2^{(k''-t)\frac{k'}{g_ik_{i,j}}} \\ (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,m_i) \\ x_{i,j} = r^{\frac{k}{g_ik_{i,j}}} u_{i,j} D_1^{\frac{k't+1}{g_ik_{i,j}}} D_2^{\frac{k}{g_ik_{i,j}}-\frac{k't+1}{g_ik_{i,j}}} \\ (i=m+1,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m_i) \end{cases} \tag{8}$$

alakban, ahol r zérustól különböző racionális szám, olyan, hogy (8) *egész számokat definiáljon.*

Bizonyítás. Behelyettesítéssel könnyen igazolható, hogy (8) az (1) egyenlet megoldása és (7) is teljesül.

Fordítva, (8) az (1) egyenlet minden olyan megoldását előállítja, amelyre (7) fennáll. Bármelyik ilyen megoldást adjuk meg ugyanis, léteznek zérustól különböző $u_{i,j}$ egész számok és zérustól különböző racionális r, amelyekkel (8) az adott megoldást állítja elő, mégpedig:

$$u_{i,j}=x_{i,j},$$

$$r=\left[\sum_{i=1}^{m} f_i\left(x_{i,1}^{k_{i,1}}, x_{i,2}^{k_{i,2}}, \ldots, x_{i,m_i}^{k_{i,m_i}}\right)\right]^{-1}.$$

Állításunk az így definiált $u_{i,j}$ és r számok (8)-ba való helyettesítésével igazolható. Könnyen belátható, hogy $D_1 D_2 \neq 0$ is fennáll.

2. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{1,1}^9+x_{1,1}^6x_{1,2}^3+x_{1,1}^3x_{1,2}^6+x_{1,2}^9-x_{2,1}^{16}=0 \tag{9}$$

egyenletet!
Ekkor

$$n=m_1=2, \qquad m=m_2=1,$$

$$k_{1,1}=k_{1,2}=3, \quad k_{2,1}=16,$$

$$g_1=3, \qquad g_2=1,$$

$$K_1=3, \qquad K_2=16,$$

$$k'=9, \qquad k''=16, \quad (k',k'')=1,$$

$$k=144, \qquad t=7,$$

$$D_1=u_{1,1}^9+u_{1,1}^6u_{1,2}^3+u_{1,1}^3u_{1,2}^6+u_{1,2}^9,$$

$$D_2=u_{2,1}^{16},$$

s így a (8) formulák alapján

$$\begin{cases} x_{1,1}=r^{16}\,u_{1,1}\,D_1^7\,D_2^9, \\ x_{1,2}=r^{16}\,u_{1,2}\,D_1^7\,D_2^9, \\ x_{2,1}=r^{9}\,u_{2,1}\,D_1^4\,D_2^5, \end{cases}$$

illetőleg az $ru_{2,1}^9=R$ helyettesítéssel

$$\begin{cases} x_{1,1}=R^{16}\,u_{1,1}\,D_1^7, \\ x_{1,2}=R^{16}\,u_{1,2}\,D_1^7, \\ x_{2,1}=R^{9}\,D_1^4. \end{cases} \tag{10}$$

Olyan megoldás, amelyre (7) nem teljesül, nem létezik. Az

$$x_{1,1}^9+x_{1,1}^6x_{1,2}^3+x_{1,1}^3x_{1,2}^6+x_{1,2}^9=0$$

egyenletből ugyanis $x_{2,1}=0$ következik, amit kizártunk. (10) tehát a (9) egyenlet minden olyan megoldását tartalmazza, amelyre $x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}\neq 0$. Ha például $u_{1,1}=u_{1,2}=1$, $R=1$, akkor $x_{1,1}=x_{1,2}=2^{14}$, $x_{2,1}=2^8$.

IRODALOM

[1] KELEMEN JÓZSEF: Megjegyzések az $a_1x_1^{k_1} + a_2x_2^{k_2} + \ldots + a_nx_n^{k_n} = 0$ diophantoszi egyenlethez. Matematikai Lapok 21. évfolyam, 1970.

РЕШЕНИЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ УМЕНЬШЕНИЯ ИХ СТЕПЕНЕЙ

Й. КЕЛЕМЕН

ON THE SOLUTION OF DIOPHANTINE EQUATIONS BY REDUCTION OF DEGREE.

J. KELEMEN

KVADRATIKUS ALAKOK OSZTÁLYSZÁMÁRÓL

SZALAY MIHÁLY

E dolgozatban LOO-KENG HUA háromváltozós, pozitív definit, egész együtthatós kvadratikus alakok osztályszámára vonatkozó alsó becslését általánosítjuk tetszőleges változószám esetére.

Ha azt kérdezzük, hogy egy adott n egész szám előállítható-e pl. $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, ill. $x_1^2+x_2^2+2x_3^2$ alakban, ahol x_1, x_2, x_3 egész, akkor kérdésünket mindkét esetben fogalmazhatjuk úgy, hogy egy eléggé speciális kvadratikus alak felveszi-e egész helyettesítéssel az n értéket. Lehetséges, hogy egy másik kvadratikus alak, amelynek értékkészlete ugyanaz, könnyebben vizsgálható. Kérdezhetjük tehát: Adott kvadratikus alakoknak mikor fog biztosan megegyezni az értékkészlete (egész helyettesítéssel)?

Próbálkozhatunk azzal, hogy egy lineáris transzformációval egyik alakot a másikba visszük át. Hogy triviális helyettesítésnek csak triviális helyettesítés feleljen meg, reguláris transzformáció kell, s célszerű, hogy mátrixának elemei egészek legyenek. Ha még megköveteljük, hogy a transzformáció determinánsának az értéke $+1$ vagy -1 legyen, ezzel azt is biztosítjuk, hogy az egészeknek megfeleltetett helyettesítési értékek egészek legyenek. Ezek a megfontolások szolgálhatnak a következő definíció alapjául.

Legyenek F és G n változós, valós együtthatós kvadratikus alakok. Az F alakot a G alakkal ekvivalensnek nevezzük, ha van olyan ± 1 determinánsú, egész együtthatós lineáris transzformáció, amely F-et átviszi G-be.

„F ekvivalens G-vel" jelölése: $F \sim G$.

Könnyen látható, hogy a definiált „ekvivalencia" ekvivalencia-reláció (reflexív, szimmetrikus, tranzitív), tehát osztályalkotó reláció: két kvadratikus alak akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha ekvivalensek.

Egy n változós, valós együtthatós kvadratikus alakot írhatunk a következőképpen:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_{jj} x_j^2 + \sum_{1 \le j < k \le n} f_{jk} x_j x_k .$$

(Ezen írásmód az egész együtthatós alakok szempontjából célszerű.) A fenti kvadratikus alak determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & \frac{f_{12}}{2} & \cdots & \frac{f_{1n}}{2} \\ \frac{f_{12}}{2} & f_{22} & \cdots & \frac{f_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f_{1n}}{2} & \frac{f_{2n}}{2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} .$$

Ugyanazon osztályba tartozó alakok ekvivalensek, s az egész elemű és egész eleműen invertálható transzformáció a helyettesítések között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít, s az ekvivalencia miatt a megfelelőkhöz tartozó helyettesítési értékek megegyeznek, megegyeznek tehát (egész helyettesítéssel) az értékkészletek is. Könnyen látható az is, hogy ugyanazon osztályba tartozó alakok determinánsának értéke megegyezik.

Néhány speciális esetben — pl. pozitív definit alakoknál $n=3$, $D=1$ esetén — az összes n változós, egész együtthatós, D determinánsú alakok ugyanabba az osztályba tartoznak. Ezt tudva: ha találunk egy háromváltozós, pozitív definit, egész együtthatós, 1 determinánsú kvadratikus alakot, amely egész helyettesítéssel előállítja az n természetes számot, akkor ezen n előállítható az $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ alakban is. Többek között ezen az úton bizonyítható a következő, GAUSStól származó tétel:

Tetszőleges n pozitív egész szám akkor és csak akkor állítható elő $n = x_1^2+x_2^2+x_3^2$ alakban, ha n nem írható $4^a(8k+7)$ alakban. (A bizonyításra nézve l. el, ital tip. E. LANDAU [4] vagy [5] alatti művét. Ugyanott az előbb említett tények bizonyítása is megtalálható.)

Hasonló módon pl. a következő is bizonyítható (egyenként ekvivalens az előbbivel):

Tetszőleges n pozitív egész szám akkor és csak akkor állítható elő $n=x_1^2+x_2^2+2x_3^2$ alakban, ha n nem írható $4^a(16k+14)$ alakban.

(Pl. a fentiek segítségével is látható, hogy minden pozitív egész szám előállítható négy négyzetszám összegeként, továbbá $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2$ alakban is.)

Észrevehetjük, hogy ha egy osztályban van egész együtthatós alak, akkor ebben az osztályban minden alak egész együtthatós. (Egy egész elemű lineáris transzformáció az egész együtthatós alakot egész együtthatósba viszi át.)

Hasonlóképpen, ha egy osztályban van olyan egész együtthatós alak, melynek minden vegyes indexű együtthatója páros, akkor ebben az osztályban minden alak ilyen tulajdonságú. (Ha f_{jk} páros, akkor a transzformációnál az $f_{jk}x_jx_k$-ból csak páros együtthatójú tagok adódnak, továbbá az $f_{jj}x_j^2$-ből jövő vegyes indexűek szintén páros együtthatóval adódnak.)

Ugyancsak osztálytulajdonsághoz jutunk, ha egész együtthatós alakok esetén pl. azt követeljük, hogy az együtthatók legnagyobb közös osztója 1 legyen (vagy akár más rögzített természetes szám).

A pozitív definit, valós együtthatós kvadratikus alakok redukcióelméletéből felhasználjuk a következőket:

Az $f(x_1, \ldots, x_n)$ alakot redukáltnak nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: $f_{kk} \leqq f(a_1, \ldots, a_n)$ hacsak $(a_k, \ldots, a_n)=1$ ($a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges egészek; $k=1, \ldots, n$). (Ez a definíció MINKOWSKItól származik.) Ekkor bebizonyíthatók:

I. Pozitív definit alakok minden ekvivalenciaosztályában van redukált alak.

II. Redukált alakra $f_{11} \leqq f_{22} \leqq \cdots \leqq f_{nn}$, továbbá $|f_{jk}| \leqq f_{jj}$ $(j<k)$.

III. Redukált alak esetén $f_{11}^n \leqq \mu_n D$, ahol μ_n csak n-től függ. (HERMITE) (D az alak determinánsa.)

IV. Redukált alak esetén $\lambda_n \cdot f_{11} \cdot f_{22} \cdot \cdots \cdot f_{nn} \leqq D$, ahol a λ_n csak n-től függ. (MINKOWSKI.)

$$\lambda_n = \begin{cases} \mu_n^{-1} & \text{ha} \quad n \leqq 4 \\ \mu_n^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)} & \text{ha} \quad n>4. \end{cases}$$

A bizonyításra és μ_n felső becslésére *l.* B. L. VAN DER WAERDEN [6] vagy [7]-et CH. HERMITE, H. MINKOWSKI, R. REMAK, K. MAHLER, H. WEYL nyomán). A μ_n pontos minimális értékei csak $n \leqq 8$-ra ismertek:

$$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = \frac{4}{3},\ \mu_3 = 2,\ \mu_4 = 4,\ \mu_5 = 8,\ \mu_6 = \frac{64}{3},\ \mu_7 = 64,\ \mu_8 = 256.$$

A továbbiakban pozitív definit, egész együtthatós alakokra szorítkozunk. Ezekre I—IV-ből következik:

V. Az n változós, pozitív definit, egész együtthatós, D determinánsú kvadratikus alakok véges sok osztályt alkotnak: az osztályszám véges.

(Az osztályszám végességét teljes indukcióval egyszerűen bizonyítja J. W. S. CASSELS [1]-ben tetszőleges egész együtthatós, zérustól különböző determinánsú kvadratikus alakokra.)

Legyen az n változós, pozitív definit, egész együtthatós, D determinánsú alakok osztályszáma $h_n(D)$, ha megköveteljük: f_{jk} $(j<k)$ páros és $(f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{nn}) = 1$; a második megszorítástól eltekintve pedig $H_n(D)$. Nyilván: $H_n(D) \geqq h_n(D)$.

H. HEILBRONN [2] tételéből: $\lim_{D \to +\infty} h_2(D) = +\infty$.

LOO-KENG HUA [3]-ban megmutatta: $h_3(D) \geqq h_2(D) - 1$. (Így HEILBRONN tételével: $\lim_{D \to +\infty} h_3(D) = +\infty$.)

Most HUA módszerének általánosításával megmutatjuk:

$$h_{n+1}(D) \geqq h_n(D) \quad \text{és} \quad H_{n+1}(D) \geqq H_n(D).$$

LEMMA: Ha $f(x_1, \ldots, x_n)$ redukált alak, akkor f_{kk} az $f(0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ alak pozitív értékkészletének minimuma $(k = 1, \ldots, n)$.

Bizonyítás: Legyenek $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ egészek s nem mind zérus, továbbá $d = (a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Így $f(0, \ldots, 0, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = d^2 \cdot f\left(0, \ldots, 0, \frac{a_k}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}\right) \geqq$ $\geqq d^2 f_{kk} \geqq f_{kk}$, mivel $\left(\frac{a_k}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}\right) = 1$. Másrészt az $x_k = 1$, többi $= 0$ helyettesítés elő is állítja f_{kk}-t.

Először azokkal az alakokkal foglalkozunk, amelyek az 1-et előállítják. Ha az $f(x_1, \ldots, x_n)$ redukált alak előállítja az 1-et, akkor a lemma szerint $f_{11} = 1$. Legyen most i olyan, hogy $f_{11} = f_{22} = \cdots = f_{n-i, n-i} = 1$, de $f_{n-i+1, n-i+1} > 1$. (Az $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ alak kivételével ilyen i létezik.) Mivel megköveteltük, hogy a vegyes indexű együtthatók párosak legyenek, s a redukált alaknál $|f_{jk}| \leqq f_{jj}$ $(j<k)$, következik:

$$f_{12} = f_{13} = \cdots = f_{1n} = 0,\ f_{23} = f_{24} = \cdots = f_{2n} = 0, \ldots,$$

végül

$$f_{n-i, n-i+1} = f_{n-i, n-i+2} = \cdots = f_{n-i, n} = 0.$$

Így $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + f(0, \ldots, 0, x_{n-i+1}, \ldots, x_n)$. A lemma szerint az $f' = f(0, \ldots, 0, x_{n-i+1}, \ldots, x_n)$ alak pozitív értékkészletének minimuma $f_{n-i+1, n-i+1} > 1$, így f' nem állítja elő az 1-et. Most indexcserét alkalmazva $(a_{lk} = \delta_{l, n+1-k}$-val — ahol δ_{lj} a Kronecker-szimbólum — az $(a_{lk})_{n \times n} \pm 1$ determinánsú transzformációt):

$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_i) + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2$, ahol $f^* \sim f$ és $f_i \sim f'$, tehát f_i nem állítja elő az 1-et.

Itt $1 \leqq i \leqq n-1$, s az $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ alak az egyetlen, amely — bár előállítja az 1-et — nem írható a fenti alakban, nem lévén alkalmas i. Ehhez az egyetlen alakhoz

hozzárendeljük $i=0$-t $f_0 \equiv 0$-val. — Ha pedig az eredeti $f(x_1, \ldots, x_n)$ alak nem állítja elő az 1-et, akkor legyen $i=n$-nel $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Most már az n változós alakok tetszőleges ekvivalenciaosztálya reprezentálható olyan alakkal, amely egy f_i i változós alak és $i \neq n$ esetén még $n-i$ db. négyzetes tag összege, s vagy $i=0$ (egyetlen alaknál), vagy $1 \leqq i \leqq n$ és nemtriviális helyettesítéssel az i változós alakba: $f_i \geqq 2$. A továbbiakban csak ilyen (*-gal jelzett) reprezentáns alakok szerepelnek.

1. Tétel: Ha $f^*(x_1, \ldots, x_n) \nsim g^*(x_1, \ldots, x_n)$, akkor

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}^2 \nsim g^*(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}^2.$$

Bizonyítás: Indirekte tegyük fel, hogy ekvivalensek. Ekkor van olyan ± 1 determinánsú, egész elemű lineáris transzformáció, amely az $f^*(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}^2$ alakot átviszi a $g^*(x_1', \ldots, x_n') + x_{n+1}'^2$ alakba, vagyis (a *-gal jelzett alakokra érvényes felírással) az $f_i(x_1, \ldots, x_i) + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ alakot a $g_j(x_1', \ldots, x_j') + x_{j+1}'^2 + \cdots + x_{n+1}'^2$ alakba.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i \geqq j$, s így legfeljebb j lehet 0, mivel zérust csak egyetlen alakhoz rendeltünk. Tehát $i \neq 0$, így nemtriviális helyettesítéssel $f_i \geqq 2$. A transzformáció:

$$(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \qquad |A| = \pm 1.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \cdots + a_{1,n+1}x_{n+1}' \\ x_2 &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \cdots + a_{2,n+1}x_{n+1}' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1} &= a_{n+1,1}x_1' + a_{n+1,2}x_2' + \cdots + a_{n+1,n+1}x_{n+1}'. \end{aligned}$$

Helyettesítsünk most a következőképpen:

$$x_k' = 1 \quad \text{és} \quad l \neq k\text{-ra} \quad x_l' = 0 \qquad (\text{itt } k \geqq i+1 \text{ rögzített}).$$

Ekkor a megfelelő helyettesítés

$$x_1 = a_{1k},\ x_2 = a_{2k},\ \ldots,\ x_{n+1} = a_{n+1,k}.$$

$k \geqq i+1 \geqq j+1$ miatt $g_j(0, \ldots, 0) + x_{j+1}'^2 + \cdots + x_{n+1}'^2 = 1$. Viszont a megfelelő helyettesítéseknél a helyettesítési értékek megegyeznek. Ezért $1 = f_i(a_{1k}, \ldots, a_{ik}) + a_{i+1,k}^2 + \cdots + a_{n+1,k}^2 \geqq f_i(a_{1k}, \ldots, a_{ik})$. Az f_i alaknál nemtriviális helyettesítés esetén $f_i \geqq 2$ lenne, de a fentiek szerint $f_i(a_{1k}, \ldots, a_{ik}) \leqq 1$, így $a_{1k} = \cdots = a_{ik} = 0$. Tehát $i+1 \leqq k \leqq n+1$ esetén $a_{1k} = \cdots = a_{ik} = 0$, és $a_{i+1,k}^2 + \cdots + a_{n+1,k}^2 = 1$. Mivel (A) elemei egészek, ezekből következik, hogy az $(i+1)$-edik, $(i+2)$-edik, …, $(n+1)$-edik oszlopban pontosan egy elem ± 1, s a többi zérus (a ± 1 nem lehet az első i sorban).

Ha a k-adik oszlopban az m-edik elem lesz ± 1 ($k \geqq i+1$, $m \geqq i+1$): $a_{mk} = \pm 1$, akkor $k \neq s \geqq i+1$ esetén a_{ms} a fentiek szerint vagy ± 1, vagy zérus. Ha $a_{ms} = \pm 1$ lenne, akkor már a k-adik és az s-edik oszlop többi eleme zérus, így a k-adik és az s-edik oszlop vagy megegyezne, vagy egymás (-1)-szeresei lennének. A transzformáció determinánsa mindkét esetben zérus lenne, holott $|A| = \pm 1$. Tehát $k \neq s \geqq i+1$ esetén $a_{ms} = 0$.

Tehát a transzformációnál a jobb alsó sarokban levő $(n+1-i)$-edrendű aldeterminánsban minden sorában és minden oszlopában pontosan egy ± 1 van, s a többi

elem zérus, továbbá a transzformáció mátrixának első i sora az $(i+1)$-edik elemtől kezdve végig zérus.

Vizsgáljuk most $m \geqq i+1$ esetén az m-edik sort! Ha itt $a_{mk} = \pm 1$ $(k \geqq i+1)$ és $i+1 \leqq l \neq k$-ra $a_{ml} = 0$, akkor $x_m = a_{m1}x_1' + \cdots + a_{mi}x_i' \pm x_k'$, így

$$x_m^2 = a_{m1}^2 x_1'^2 + \cdots + a_{mi}^2 x_i'^2 + x_k'^2 + 2a_{m1}a_{m2}x_1'x_2' + \cdots + 2a_{m,i-1}a_{mi}x_{i-1}'x_i' \pm$$
$$\pm 2a_{m1}x_1'x_k' \pm \cdots \pm 2a_{mi}x_i'x_k'.$$

De a k-adik oszlopban $(k \geqq i+1)$ egyedül $a_{mk} = \pm 1$, a többi zérus. Így a helyettesítésnél x_k' egyedül x_m révén jöhet be. Innen még $\pm 2a_{m1}x_1'x_k', \ldots, \pm 2a_{mi}x_i'x_k'$ is adódna. A $g_j(x_1', \ldots, x_j') + x_{j+1}'^2 + \cdots + x_{n+1}'^2$ alakban azonban csak $x_k'^2$ szerepel, hisz $k \geqq i+1 \geqq j+1$. Mivel a kapott alakban x_k' vegyesen nem fordul elő, szükségképpen $a_{m1} = a_{m2} = \cdots = a_{mi} = 0$ (tetszőleges $m \geqq i+1$-re).

Tehát a transzformáció mátrixa az eddigiek szerint:

$$(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1i} & 0 \ldots 0 \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ii} & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & \\ \vdots \quad\; \vdots & \\ 0 \ldots 0 & \end{pmatrix}.$$

Itt a jobb alsó sarokban levő $(n+1-i)$-ed rendű aldeterminánsminden sorában és minden oszlopában egyetlen zérustól különböző elem van, és ez vagy $+1$, vagy -1. Így ezen aldeterminánsértéke $+1$ vagy -1. (Kitöltésére tehát $(n+1-i)! \cdot 2^{n+1-i}$ lehetőség van.) Ezért

$$\pm 1 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1i} \\ \vdots \quad\; \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ii} \end{vmatrix} \cdot (\pm 1), \quad \text{így} \quad \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1i} \\ \vdots \quad\; \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ii} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Az A transzformáció révén tehát $x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ átmegy $x_{i+1}'^2 + \cdots + x_{n+1}'^2$-be, ahol csak sorrendcserék lehetnek. Így viszont az $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ alak átmegy $g_j(x_1', \ldots, x_j') + x_{j+1}'^2 + \cdots + x_i'^2$-be az

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1i} \\ \vdots \quad\; \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ii} \end{pmatrix}$$

mátrixú, ± 1 determinánsú transzformáció révén. Ezzel azonban $f_i(x_1, \ldots, x_i) \sim g_j(x_1', \ldots, x_j') + x_{j+1}'^2 + \cdots + x_i'^2$ adódik. (Ez $i > j$ esetén máris ellentmondás, mert akkor a jobb oldali alak előállítja az 1-et, f_i pedig nem.) Most már az

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1i} & 0 \ldots 0 \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ a_{i1} \ldots a_{ii} & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \\ \cdot \quad\; \cdot & \quad\; 1 \quad\; 0 \\ \cdot \quad\; \cdot & \quad\quad\; \ddots \\ \cdot \quad\; \cdot & \\ 0 \ldots 0 & 0 \quad\quad 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

mátrixú, ± 1 determinánsú transzformáció révén az $f_i(x_1, \ldots, x_i)+x_{i+1}^2+\cdots+x_n^2$ alak átmegy $g_j(x_1', \ldots, x_j')+x_{j+1}'^2+\cdots+x_n'^2$-be, azaz $f^*(x_1, \ldots, x_n)\sim g^*(x_1, \ldots, x_n)$, s ezzel ellentmondásra jutottunk.

2. Tétel: $h_{n+1}(D)\geqq h_n(D)$ és $H_{n+1}(D)\geqq H_n(D)$ $(n=2, 3, 4, \ldots)$.

Bizonyítás: Az n változós, D determinánsú, kívánt tulajdonságú alakok ekvivalenciaosztályait *-os alakokkal reprezentálva, ezek páronként inekvivalensek, s mindegyikhez $+x_{n+1}^2$-et adva ugyancsak D determinánsú, az 1. Tétel szerint páronként inekvivalens $n+1$ változós alakokhoz jutunk (melyekben az együtthatók legnagyobb közös osztója 1, s a vegyes indexű együtthatók párosak), ezek tehát különböző osztályokat reprezentálnak.

Heilbronn [2] tételének felhasználásával a 2. Tételből kapjuk:

1. Korollárium: $\lim\limits_{D\to+\infty} h_n(D)=+\infty$, $\lim\limits_{D\to+\infty} H_n(D)=+\infty$.

(Ehhez a 2. Tétel helyett elég lett volna $h_n(D)\geqq h_2(D)$ és $H_n(D)\geqq H_2(D)$ igazolása, ez pedig történhetett volna az 1. Tétel bizonyításához hasonlóan, némileg rövidebben, s az általános redukcióelmélet felhasználása nélkül.)

Még a 2. Tétel $H_n(D)$-re vonatkozó egyszerű alkalmazásait említjük.

2. Korollárium: $D\geqq 3$ és $n\geqq 2$ esetén $H_n(D)\geqq 2$.

Bizonyítás; A 2. Tétel szerint elegendő $H_2(D)\geqq 2$ igazolása $D\geqq 3$ esetére. Ehhez pedig elegendő találni két inekvivalens kétváltozós, pozitív definit, egész együtthatós, D determinánsú alakot, melyek vegyes indexű együtthatói párosak. Könnyen látható:

a) ha $D\geqq 4$ és páros, akkor $x_1^2+Dx_2^2$ és $2x_1^2+\frac{D}{2}x_2^2$,

b) ha $D\geqq 3$ és páratlan, akkor $x_1^2+Dx_2^2$ és $2x_1^2+2x_1x_2+\frac{D+1}{2}x_2^2$

eleget tesznek ezen kikötéseknek. (Közülük csak $x_1^2+Dx_2^2$ állítja elő az 1-et.)

3. Korollárium: $n\geqq 8$ esetén $H_n(1)\geqq 2$, továbbá

$n\geqq 7$ esetén $H_n(2)\geqq 2$.

Bizonyítás; Tekintsük a következő alakot $(n\geqq 4)$:

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = 2x_1^2+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2-2x_1x_4-2x_3x_4+2x_4^2-2x_4x_5+2x_5^2-$$
$$-2x_5x_6+\cdots+2x_{n-1}^2-2x_{n-1}x_n+2x_n^2. \quad \text{(H. S. M. Coxeter nyomán.)}$$

Könnyen látható, hogy $n=7$ és $n=8$ esetén f_n pozitív definit, egész együtthatós, vegyes indexű együtthatói párosak, továbbá $f_7(x_1, \ldots, x_7)$ determinánsa 2, $f_8(x_1, \ldots, x_8)$ determinánsa 1. (A főminorok értékei rendre: 2, 4, 6, 5, 4, 3, 2, (1).) Mivel minden együttható páros, f_n nem állítja elő az 1-et. Így $f_8(x_1, \ldots, x_8) \sim x_1^2+\cdots+x_8^2$ és $f_7(x_1, \ldots, x_7) \sim x_1^2+\cdots+x_6^2+2x_7^2$. Tehát a 2. Tétel felhasználásával: $n\geqq 8$ esetén $H_n(1)\geqq H_8(1)\geqq 2$ és $n\geqq 7$ esetén $H_n(2)\geqq H_7(2)\geqq 2$.

A μ_n említett pontos értékeinek felhasználásával belátható:

$1\leqq n\leqq 7$ esetén $H_n(1)=1$. Reprezentáns: $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+x_n^2$.

$1\leqq n\leqq 6$ esetén $H_n(2)=1$. Reprezentáns: $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+2x_n^2$.

(Továbbá természetesen $H_1(D)=1$.) Tehát csak ezekben az esetekben alkalmazható a bevezetőben említett gondolatmenet.

Végül köszönetet mondok TURÁN PÁL professzornak megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] J. W. S. CASSELS, "A Remark on the Class Number of Quadratic Forms of Given Determinant" Proc. Cambridge Phil. Soc. **47** (1951), 820.
[2] H. HEILBRONN, "On the Class Number in Imaginary Quadratic Fields" Quarterly Journal of Mathematics **5** (1934), 150—160.
[3] LOO-KENG HUA, "A Note on the Class Number of Ternary Quadratic Forms" Journal London Math. Soc. **16** (1941), 82—83.
[4] E. LANDAU, „Vorlesungen über Zahlentheorie", Leipzig 1927. I. 114—125.
[5] E. LANDAU, „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", Leipzig-Berlin 1909. I. 536—555.
[6] B. L. VAN DER WAERDEN—H. GROSS, „Studien zur Theorie der quadratischen Formen", Basel 1968, 17—35.
[7] B. L. VAN DER WAERDEN, „Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen", Acta Math. **96** (1956), 265—309.

О ЧИСЛЕ КЛАССОВ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

М. САЛАИ

ON THE CLASS NUMBER OF QUADRATIC FORMS

M. SZALAY

EGYBEVÁGÓ HIPERCIKLUSOK ELHELYEZÉSÉRŐL

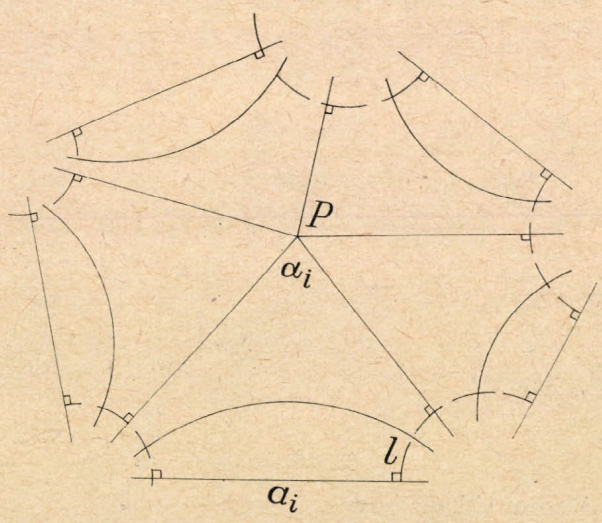
VERMES IMRE

Hajós György professzor emlékének

Hiperbolikus síkbeli mozaikok vizsgálatánál fontos szerep juthat a szabályos elhelyezkedésű egybevágó hiperciklusok által létesített síkkitöltés jellegű elrendeződésnek.*

Jogosan felvetődő kérdés tehát, hogy miként lehet n darab közös pont nélküli hiperciklus (tartomány) szabályos elhelyezkedését jellemezni.

Jelen dolgozatban *hiperciklus* alatt azon pontok összességét értjük, amelyek egy egyenestől adott távolságra vannak és az egyenes (alapvonal) által meghatározott két félsík egyikében helyezkednek el. E távolságvonal és az alapvonal között levő pontok összességét nevezzük *hiperciklus tartománynak*. n darab egybevágó hiperciklus síkkitöltés jellegű szabályos elhelyezkedésén értjük a hiperciklusok azon elrendeződését, amidőn a sík egy pontjából kiinduló és a síkot egybevágó szögekre bontó n darab félegyenes alkotta $\frac{2\pi}{n}$ nagyságú szögek mindegyikében egy-egy a szögszárakat érintő (s ezáltal a szomszédos hiperciklusokkal is érintkező) hiperciklus van.



1. ábra

Ha adott n darab egybevágó, egymásba nem metsző hiperciklus úgy, hogy bármelyik hiperciklus alapvonalára vonatkozóan az összes hiperciklus ugyanabba a félsíkba esik, mint az alapvonalhoz tartozó hiperciklus, akkor ezen alapvonalak nem metszhetik egymást és nem lehetnek párhuzamosak. Ezek szerint bármely két alapvonalnak van közös merőleges egyenese. A hiperciklusokhoz tartozó alapvonalak és a szomszédos alapvonalak közös merőleges egyenesei egy $2n$-szöget határoznak meg, amelynek területe — mivel minden szöge derékszög — $\pi(n-2)$

* L. Vermes I., Über die Parkettierungsmöglichkeit der hyperbolischen Ebene durch nichttotal asymptotische Vielecke. Beiträge zur Algebra und Geometrie, **1** (1971), 9—13.

(1. ábra). Mivel n darab egymásba nem metsző hiperciklus a fenti természetes kikötéseknek is eleget tevő bármely elhelyezése esetén az alapvonalak és a szomszédos alapvonalakat összekötő közös merőlegesek alkotta sokszög területe ugyanakkora, ezért célszerűnek mutatkozik az n darab hiperciklus elhelyezési sűrűségét ezen sokszögre vonatkozóan a következőképpen értelmezni.

$$D = \frac{\operatorname{sh} l \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i}{\pi(n-2)},$$

ahol l a hiperciklusokhoz tartozó távolságot és a_i azt a szakaszt jelenti, amely az i-edik hiperciklus alapvonalából a sokszög határához tartozik.

Ha van a $2n$-szög belsejében olyan P pont, amelyből az alapvonalak közös merőlegeseire bocsátott merőleges egyenesek a szomszédos hiperciklusokat szétválasztják, akkor ezen felosztással minden hiperciklushoz egy-egy négy derékszöget tartalmazó ötszög keletkezik, amelyekre vonatkozóan az illető hiperciklus *parciális sűrűségét* a következő módon értelmezzük.

Legyen α_i az i-edik hiperciklushoz tartozó ötszög ötödik szöge, akkor a parciális sűrűség:

$$d_i = \frac{a_i \cdot \operatorname{sh} l}{\pi - \alpha_i}.$$

A kétféle sűrűségre bebizonyítható a következő egyenlőtlenség: *A parciális sűrűségek számtani közepe legfeljebb akkora lehet, mint a $2n$ szögre értelmezett D elhelyezési sűrűség.*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \leqq D.$$

Bizonyítás: Ha az állítás igaz, akkor részletesen felírva:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot \operatorname{sh} l}{n(\pi - \alpha_i)} \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot \operatorname{sh} l}{\pi(n-2)}$$

s így

$$\operatorname{sh} l \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \left\{ \frac{1}{n(\pi - \alpha_i)} - \frac{1}{\pi(n-2)} \right\} \leqq 0$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n(n-2)\pi(\pi - \alpha_i)} \{n\pi - 2\pi - n\pi + n\alpha_i\} \leqq 0.$$

Viszont látható, hogy

$$\frac{a_i}{n(n-2)\pi(\pi - \alpha_i)} \leqq \frac{\max a_i}{n(n-2)\pi(\pi - \max \alpha_i)} = b,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n(n-2)\pi(\pi - \alpha_i)} \{n\alpha_i - 2\pi\} \leqq b \cdot \sum_{i=1}^{n} (n\alpha_i - 2\pi) = 0$$

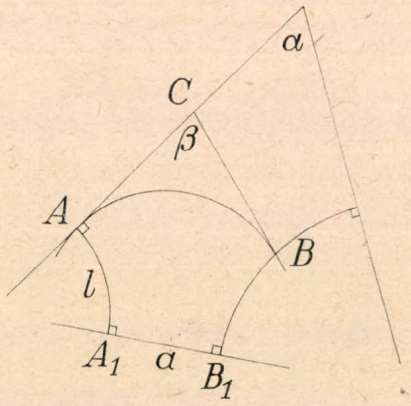
mivel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$. Tehát eredeti állításunk igazolást nyert.

A továbbiakban olyan kritériumot keresünk, amellyel n darab hiperciklus szabályos, kitöltés jellegű elhelyezkedését jellemezni tudjuk.

Ehhez mindenekelőtt bebizonyítjuk a következő

SEGÉDTÉTEL-t: *Ha egy α konvex szögtartományban adott egy olyan hiperciklus, amelynek alapvonala a szögszárakat nem metszi és nem is párhuzamos velük, akkor a hiperciklusnak a szögtartomány és az alapvonal által meghatározott ötszögön értelmezett d parciális sűrűsége maximális, ha az α szög szárai érintik a hiperciklust.*

Bizonyítás: Ha a hiperciklus az α szögnek csak az egyik szárát érinti az A pontban (2. ábra), akkor a hiperciklus ívnek azon B pontjában, mely a parciális sűrűségszámítás alapjául vett ötszög határára esik, meghúzható a hiperciklus további érintője és az A, ill. B pontbeli érintők β hajlásszöge mindig nagyobb, mint az α szög. Legyen C a két hiperciklust érintő egyenes metszéspontja, A_1 és B_1 az A, ill. B pontokból a hiperciklus a alapvonalára bocsátott merőlegesek talppontja. Mivel az $ACBB_1A_1$ ötszög két egybevágó Lambert-féle négyszögre bontható, így a következő szakasztrigonometriai összefüggés írható fel a két négyszög egyikére:



2. ábra

$$\operatorname{sh}\frac{A_1B_1}{2} = \operatorname{sh} l' \cdot \operatorname{th} \Delta\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

ahol l' a hiperciklus l távolságának komplementer szakasza** és $\Delta\left(\frac{\beta}{2}\right)$ a $\frac{\beta}{2}$ szöghöz tartozó párhuzamossági távolság. A fenti egyenlőség a következő formára hozható:

$$\operatorname{sh}\frac{A_1B_1}{2} = \frac{1}{\operatorname{sh} l} \cdot \cos\frac{\beta}{2}.$$

Azonos módon kapjuk az α szög mindkét szárát érintő hiperciklusnak a két érintési pont közti ívéhez tartozó alapvonal darab b_α hosszára, hogy

$$\operatorname{sh}\frac{b_\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{sh} l} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Minthogy $\beta > \alpha$, tehát $b_\alpha > A_1B_1$, vagyis a sűrűségekre a következő egyenlőtlenség áll:

$$\frac{A_1B_1 \cdot \operatorname{sh} l}{\pi - \alpha} < \frac{b_\alpha \cdot \operatorname{sh} l}{\pi - \alpha}.$$

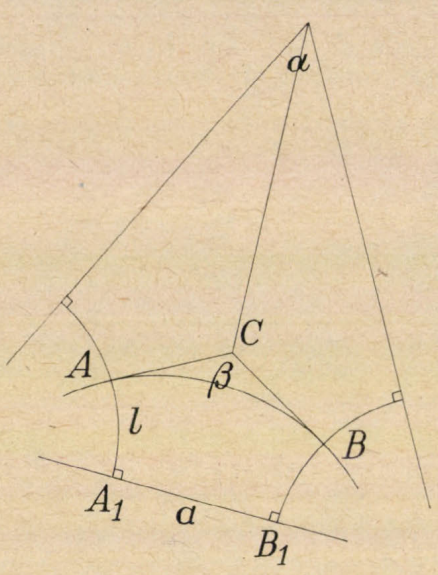
Ha a hiperciklus az α szög egyik szárát sem érinti, akkor a hiperciklusnak az alapul vett ötszög határán levő A és B pontjaiban vont érintői a C pontban metszik egy-

** Az l és l' komplementer szakaszok, ha $\Pi(l) + \Pi(l') = \frac{\pi}{2}$, ahol $\Pi(l)$ az l szakaszhoz tartozó párhuzamossági szöget jelenti. A hiperbolikus trigonometria összefüggéseire vonatkozóan l. pl. H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, (3. Aufl., Berlin und Leipzig, 1923).

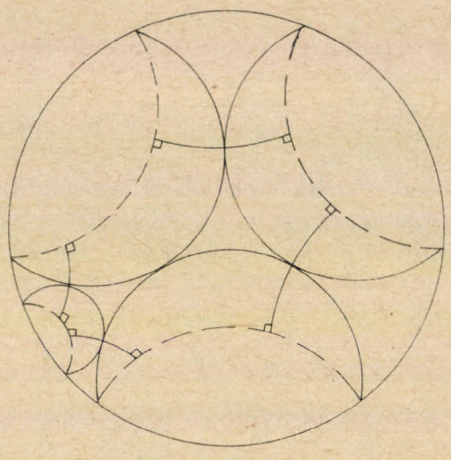
mást, s az itt keletkező β szög az α-nál nagyobb kell legyen (3. ábra). Pontosan úgy, mint a bizonyítás első részében belátható, hogy a hiperciklus azon elhelyezésénél jön létre a legnagyobb parciális sűrűség, amidőn az α szög mindkét szárát érinti a hiperciklus.

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

Ha n darab hiperciklus olyan szabályos elhelyezkedését akarjuk jellemezni, amelyben e hiperciklusok a sík egy összefüggő tartományát határolják, akkor nyil-



3. ábra



4. ábra

ván nem lehet ezt a D sűrűség maximumával karakterizálni. Példaképpen megemlítjük, hogy négy darab egybevágó hiperciklus negyedik ábra szerinti elhelyezkedése a tekintett tartományra vonatkozóan sűrűbb, mint az olyan elrendezésé, ahol a hiperciklusok egy pontból kiinduló négy, egymással kongruens szögtartományban úgy helyezkednek el, hogy a szomszédosak egymással érintkeznek.

Az n darab hiperciklus szabályos elhelyezkedésére vonatkozóan kimondható a következő

TÉTEL: *ha n darab hiperciklus úgy helyezkedik el, hogy nem metszenek egymásba, de mindegyik hiperciklus alapvonalára vonatkozóan ugyanabban a félsíkban vannak, mint az alapvonalhoz tartozó hiperciklus; továbbá van olyan P pont, amelyből az alapvonalak közös merőlegeseire bocsátott merőlegesek a szomszédos hiperciklusokat szétválasztják és a d_i parciális sűrűségek mind maximálisak, akkor a P pont körül elhelyezkedő n hiperciklus szabályos kitöltésnek megfelelő elhelyezkedést ad.*

Bizonyítás: A d_i parciális sűrűségek maximuma a segédtétel szerint azt jelenti, hogy a P pontból kiinduló félegyenesek által közrefogott hiperciklusok érintik e félegyeneseket. Ekkor viszont a szomszédos hiperciklusok is kell hogy érintkezzenek, mert különben a két szomszédos alapvonal közös merőlegesére a két szomszédos hiperciklus közös érintője nem lehetne merőleges.

Tehát a szomszédos hiperciklusok érintkeznek és így a P pontból egyenlő hosszúságú érintők húzhatók a hiperciklusokhoz. Mivel a szóban forgó hiperciklusok

egybevágók s így a hozzájuk tartozó l távolságok is azonosak, ezért a hiperciklusokhoz húzott érintők is egyenlő, $\frac{2\pi}{n}$ nagyságú szöget alkotnak.

A P pont körül elhelyezkedő hiperciklusok valóban szabályos kitöltésnek megfelelő elhelyezkedést mutatnak.

О РАЗМЕЩЕНИИ КОНГРУЕНТНЫХ ГИПЕРЦИКЛОВ

И. ВЕРМЕШ

ÜBER DIE REGULÄRE LAGERUNG KONGRUENTER ABSTANDSLINIEN UM EINEN PUNKT

I. VERMES

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der regulären Lagerung n kongruenter Abstandslinien um einen Punkt, die paarweise miteinander je einen Berührungspunkt haben. Diese reguläre Lagerung ist mit einer Extremaleigenschaft charakterisiert.

A KONGRUENCIATARTÓ FÜGGVÉNYEKRŐL

IFJ. RUZSA IMRE

1. §. Legyen f egészértékű számelméleti függvény; nevezzük kongruenciatartónak, ha tetszőleges a, b és m természetes számok mellett amennyiben $a \equiv b \pmod m$, akkor $f(a) \equiv f(b) \pmod m$.

Közismert, hogy az egész együtthatós polinomok kongruenciatartók. Könnyen felmerül a kérdés, hogy ez a tulajdonság mennyire karakterizálja őket. Még az sem triviális, hogy nem merítettük-e ki így teljesen a kongruenciatartó függvényeket.

Ez a függvényosztály azonban két szempontból is tágabb az egész együtthatós polinomokénál. Egyrészt van olyan kongruenciatartó függvény, amely egyáltalán nem polinom; sőt, kontinuum sok van — ez közvetlenül látszani fog az I. tételből —, míg polinom csak megszámlálható. Másrészt a kongruenciatartó polinomok sem mind egész együtthatósak [1].

A következőkben először meghatározom, mekkora lehet egy k-adfokú kongruenciatartó polinom nevezője, aztán bebizonyítom, hogy a kongruenciatartó függvények között a nagyságrendjük már meghatározza a polinomokat, végül megadom az összes additív és multiplikatív kongruenciatartó függvényeket.

2. §. Elsőnek egy olyan tételt bizonyítok be, amelyet alaptételnek is nevezhetnék, mivel több más tétel bizonyítása rá épül.

Legyen $A_k(n) = [n, n-1, \ldots, n-k+1]$ $(A_0(n)=1,\ A_1(n)=n)$, $A(n)=A_n(n)$.

I. TÉTEL. *Egy f függvény akkor és csak akkor kongruenciatartó, ha előállítható egész c_i-vel az alábbi alakban:*

$$f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A(i) \binom{n-1}{i}. \tag{1}$$

(Világos, hogy egy ilyen sor mindig konvergens, mert tetszőleges n mellett véges sok kivételével minden tagja 0.)

Szükségem lesz két lemmára:

1. LEMMA. *Tetszőleges valósértékű f számelméleti függvény előállítható az alábbi alakban:*

$$f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{n-1}{i}. \tag{2}$$

Ez az előállítás egyértelmű:

$$a_i = \Delta^i f(1), \tag{3}$$

ahol $\Delta^i f(n)$-t az alábbi rekurzió definiálja:

$$\Delta^0 f(n) = f(n),\ \Delta^{i+1} f(n) = \Delta^i f(n+1) - \Delta^i f(n). \tag{4}$$

Érvényes továbbá az alábbi:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+k} \binom{k}{i} f(n+i) \tag{5}$$

Ez tulajdonképpen a Newton-féle interpolációs formula f-re alkalmazva, alappontoknak a természetes számokat véve. Pontosabban: ha a fenti képleteket csak $n \leqq n_0$-ra tekintjük, akkor az első n_0 kivételével mindegyik tag 0 lesz (2)-ben, ami megmarad, az pedig a Newton-féle interpolációs polinom.

2. LEMMA. $A(k)\binom{n}{k}$ *kongruenciatartó.*

Ehhez megjegyzem az alábbi azonosságot (a kombinatorikai jelentésből nyilvánvaló):

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{x}{i}\binom{y}{k-i} = \binom{x+y}{k}. \tag{6}$$

Írjuk (6)-ot az alábbi alakba ($x = a-b$, $y=b$ helyettesítéssel):

$$\binom{a}{k} - \binom{b}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{a-b}{i}\binom{b}{k-i}. \tag{7}$$

(7) alapján egyszerű átalakítást végezve:

$$A(k)\left(\binom{a}{k} - \binom{b}{k}\right)\Big/(a-b) = \sum_{i=1}^{r} \binom{b}{k-i} A(k) \binom{a-b}{i}\Big/(a-b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \binom{b}{k-i} \frac{A(k)}{i} \binom{a-b-1}{i-1}.$$

Itt $\binom{b}{k-i}$, $\binom{a-b-1}{i-1}$ és $i \leqq k$ miatt $\frac{A(k)}{i}$ is nyilván egész, vagyis $a-b \mid A(k)\left(\binom{a}{k} - \binom{b}{k}\right)$, amit bizonyítani akartunk. A lemmából már nyilvánvalóan következik, hogy az (1) alatti függvények kongruenciatartók.

3. §. A tétel második részének igazolásához vegyük f (2) alatti előállítását. (3) és (5) miatt nyilvánvaló, hogy a_i egész. Az (1) alakú előállíthatósághoz azt kell még belátni, hogy

$$A(i) \mid a_i. \tag{8}$$

Evvel a tétel be lesz bizonyítva, hiszen (1) egyértelműsége (2) egyértelműségéből nyilvánvaló. (8)-at két módon is bizonyítom.

Az első út: teljes indukcióval. $i=0$-ra $A(0)=1$ lévén (8) nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $i \leqq k$-ra már igaz. Ekkor legyen

$$g(n) = f(n) - \sum_{j=0}^{k} c_j A(j) \binom{n-1}{j} = \sum_{j=k+1}^{\alpha} a_j \binom{n-1}{j}. \tag{9}$$

Feltevésünk szerint $c_0, \ldots, c_k$ már egész, tehát a 2. lemma szerint g kongruenciatartó. Továbbá

$$g(1)=g(2)=\cdots=g(k+1)=0,\ g(k+2)=a_{k+1}. \tag{10}$$

A kongruenciatartás miatt

$$j \mid g(k+2)-g(k+2-j), \qquad j=1, 2, \ldots, k+1. \tag{11}$$

Ez azonban (10) miatt azt jelenti, hogy

$$j \mid a_{k+1}, \qquad j=1, 2, \ldots, k+1, \tag{12}$$

azaz éppen (8)-at, $i = k+1$-gyel.

A másik út az alábbi: (8) igazolásához (3) miatt elég azt belátni, hogy ha $j \leqq k$, akkor $j \mid \Delta^k f(1)$; ehhez viszont (4) miatt elég, hogy $j \mid \Delta^j f(n), j=1, \ldots$. Viszont (5) alapján egyszerű átalakításokkal

$$\Delta^j f(n) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j+i} \binom{j}{i} f(n+i) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j+i} \binom{j}{i} f(n+i) -$$

$$-f(n)(-1)^j \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j+i} \binom{j}{i} (f(n+i)-f(n)) =$$

$$= j \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j+i} \binom{j-1}{i-1} \frac{f(n+i)-f(n)}{i};$$

és f kongruenciatartása miatt a $\sum$ utáni tagok egészek.

4. §. Az I. tételből már látszik, hogy a kongruenciatartó függvények számossága annyi, mint az egész számokból álló sorozatoké, azaz kontinuum. Ebből a polinomoké viszont csak megszámlálható, ugyanis az 1. lemmából látszik, hogy ha egy polinom minden természetes számnál egészet vesz fel, akkor racionális együtthatós.

Most megvizsgáljuk, mekkora lehet egy k-adfokú kongruenciatartó polinom nevezője. (Egy racionális együtthatós polinom nevezője a legkisebb természetes szám, amellyel megszorozva egész együtthatós lesz.) Az 1. lemmából világos, hogy egy k-adfokú, természetes számnál egész értékű polinom nevezője osztója $k!$-nak. Az I. tétel felhasználásával élesebb eredményt kapunk.

II. TÉTEL. *Minden k-adfokú kongruenciatartó polinom nevezője osztója $\frac{k!}{A(k)}$-nak. $\frac{k!}{A(k)}$ el is érhető.*

Hogy $\frac{k!}{A(k)}$ elérhető, azt a 2. lemma mutatja.

Egy k-adfokú kongruenciatartó polinom általános alakja:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{k} c_i A(i) \binom{n-1}{i}. \tag{13}$$

Ezt $\frac{k!}{A(k)}$-val szorozva $\sum_{i=0}^{k} c_i i! \binom{n-1}{i} \frac{k!}{A(i)} \Big/ \frac{i!}{A(i)}$-t kapunk; mivel $i! \binom{n-1}{i}$ egész együtthatós, elég belátni, hogy ha $i \leqq k$, akkor $\frac{i!}{A(i)} \Big| \frac{k!}{A(k)}$. Ez azonban teljesen nyilvánvaló, hiszen a számláló az i-nél nagyobb, de k-nál nem nagyobb természetes számok szorzatával, a nevező pedig legkisebb közös többszörösük valamelyik osztójával szorzódott.

5. §. Most rátérek, hogy a nagyságrend mennyire határozza meg a polinomokat. Megmutatom, hogy ha $f(n)=O(n^k)$ alkalmas k-val, és f kongruenciatartó, akkor polinom, illetve rögtön ennek két, különböző irányú általánosítását. Előrebocsátom az alábbi segédtételt:

3. LEMMA. *Tetszőleges rögzített k mellett*

$$\lim_{n\to\infty} A_{k+1}(n)n^{-k} = \infty. \tag{14}$$

Továbbá érvényes az alábbi:

$$A(n) = e^{n+o(n)}. \tag{15}$$

Ezeket nem bizonyítom. (14) nyilvánvaló, (15) pedig a prímszámtétel átfogalmazása.

Az általánosítás egyik lehetősége az n^k növelése. Azt sejtem, hogy az n^k helyébe $e^{n(1-\varepsilon)}$ rakható. Sejtésem alapja a következő: ha f már meg van adva az $1, 2, \ldots, m$ számoknál, akkor $f(m+1)$ egy mod $A(m)$ vett kongruencia erejéig van meghatározva (könnyen látható, hogy a meghatározó kongruenciarendszer nem lehet ellentmondó); tehát ha f nem „nagyon szabályos", azaz polinom, akkor valószínűleg nem lesz mindig sokkal $A(n)$ alatt; ez pedig (15) miatt adja a sejtésemet. Ez a mod $A(n)$ vett kongruencia egyszersmind azt nyújtja, hogy $e^{n(1+\varepsilon)}$-ra már nem lesz igaz.

Ehelyett azonban csak e^{cn}-t tudok bizonyítani, pontosabban:

III. TÉTEL. *Legyen f kongruenciatartó függvény. Ha akármilyen kicsi fix* $\varepsilon>0$-*nal* $f(n) = O((e-1)^{n(1-\varepsilon)})$, *akkor f polinom.*

Legyen $h = (e-1)^{1-\varepsilon}$. Feltevésünk szerint

$$f(n)=O(h^n), \quad h < e-1. \tag{16}$$

(5) miatt tehát

$$\Delta^n f(1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \binom{n}{i} f(i+1) = O\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^{i+1}\right) =$$

$= O(r^n)$, ahol $r = h+1<e-1$.

Tehát (2) és (3) szerint $c_i A(i)=O(r^i)$, $c_i = O\left(\frac{r^i}{A(i)}\right)$, azaz $\lim_{i\to\infty} c_i=0$ (15) és $r<e$ miatt. Mivel c_i egész, ezért $c_i=0$ elég nagy i-re, így a tételt bebizonyítottuk.

6. §. Másik irányú általánosításként csak annyit teszünk fel, hogy $f(n_i)=O(n_i^k)$ alkalmas k-val egy végtelen n_i sorozatra, ebből is következik, hogy f polinom.

IV. TÉTEL. *Ha f kongruenciatartó függvény, és nem polinom, akkor tetszőlegesen nagy fix k mellett*

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| n^{-k} = \infty. \tag{17}$$

Felhasználjuk az alábbit:

4. LEMMA. *Legyenek f és g kongruenciatartó függvények. Ha* $f(n)=g(n)$ *végtelen sok n-re, akkor* $f=g$.

Legyen $f(n_i)=g(n_i)$. Ekkor, mivel $f(n)\equiv f(n_i) \pmod{n_i-n}$, és $g(n)\equiv g(n_i) \pmod{n_i-n}$, $f(n)\equiv g(n) \pmod{n_i-n}$. Ha most $f(n)\neq g(n)$ volna, akkor ez nem állhatna fent olyan n_i választással, melyre $n_i > n+|f(n)-g(n)|$; pedig feltevésünk szerint ilyen n_i létezik.

Ez a lemma is a kongruenciatartó függvények egy „polinomtulajdonságát" fejezi ki, azt, hogy ha nem azonosan 0, akkor csak véges sok nullhelye lehet. Ez egyébként nyilván speciális esete a IV. tételnek.

A tétel bizonyítása: definiáljuk g-t a (9) alatti módon. Ekkor g szintén kongruenciatartó marad, igaz lesz (10), és az, hogy

$$f(n) = g(n) + O(n^k). \tag{18}$$

De mivel f nem polinom, $g(n) \not\equiv 0$, tehát a 4. lemma szerint

$$g(n) \neq 0, \quad \text{ha} \quad n > n_0 \qquad \text{(alkalmas } n_0\text{-lal)}. \tag{19}$$

(10) miatt azonban $n-j \mid g(n)-g(j) = g(n)$, $j=1, \ldots, k+1$, azaz

$$A_{k+1}(n-1) \mid g(n). \tag{20}$$

(19) miatt tehát $|g(n)| \geqq A_{k+1}(n-1)$, ha $n > n_0$; (14)-ből kifolyólag ekkor

$$|g(n)| n^{-k} \to \infty, \quad \text{ha} \quad n \to \infty. \tag{21}$$

(18) és (21) pedig már bizonyítja (17)-et.

7. §. A IV. tétel viszont már tovább nem javítható. Ugyanis igaz a következő:

V. TÉTEL. *Ha $w(n)$ tetszőleges valósértékű, felülről nem korlátos számelméleti függvény, akkor megadható hozzá olyan kongruenciatartó f, amely nem polinom, és végtelen sok n-re*

$$|f(n)| < n^{w(n)}. \tag{22}$$

Ilyen f-et úgy kapunk, hogy (1)-ben c_i-t egy olyan $0-1$ sorozatnak vesszük, amelyben 1 elég ritkán fordul elő. Legyen $c_{i_j}=1$, $j=1, 2, \ldots$, és $c_i=0$, ha $i \neq i_j$ semmilyen j-re. Nyilván $f(n) \geqq 0$ lesz. Most becsüljük meg felülről $f(i_j)$-t! Nyilván $A(k)\binom{n}{k} \leqq k!\binom{n}{k} \leqq n^k$, emiatt

$$f(i_j) = \sum_{k=0}^{j=1} A(i_k)\binom{i_j-1}{i_k} \leqq \sum_{k=0}^{j-1} i_j^{i_k} \leqq j i_j^{i_{j-1}} \leqq i_j^{i_{j-1}+1}. \tag{23}$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy $i_j \geqq j$; ez teljesül, ha i_j-t monoton növekedőre választjuk.

Most megválasztjuk i_j-t úgy, hogy $f(i_j) < i_j^{w(ij)}$ teljesüljön. Legyen mindenesetre $i_1=1$; ekkor $j=1$-re ez teljesül. Tegyük fel, hogy $i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}$ már meg van adva. Vegyük fel i_j-t úgy, hogy $i_j > i_{j-1}$ és $w(i_j) > i_{j-1}+1$ legyen; feltevésünk szerint ezt meg lehet csinálni. Ekkor (23) miatt $f(i_j) < i_j^{w(ij)}$ lesz, azaz éppen (22) $n=i_j$-re, qu.e.d.

Megjegyzem, sem a IV., sem az V. tétel bizonyításában az I. tételnek nem volt lényeges szerepe. Az I. tételt a IV. tétel bizonyításánál csak annyiban használtuk, hogy g kongruenciatartó. Ehelyett megfelelt volna a következő gondolatmenet. $f(n)$ felírható $f(n) = g(n)+h(n)$ alakban, ahol $g(1)=\cdots=g(k+1)=0$, $h(n)=0(n^k)$ és $h(n)$ racionális együtthatós polinom. Most $h(n)$ nevezőjével, m-mel végigszorozva $mg(n) = mf(n)-mh(n)$, de itt $mh(n)$ egész együtthatós polinom, vagyis mindenképpen kongruenciatartó. Az V. tételnél pedig a becslés olyan durva volt, hogy vehettünk volna $A(i)\binom{n-1}{i}$ helyett $i!\binom{n-1}{i}$-t, amely egész együtthatós, tehát az ilyenekből képzett összeg nyilván kongruenciatartó.

8. §. Mielőtt megvizsgáljuk az additív és multiplikatív függvényeket, kitérünk a többváltozós kongruenciatartó függvényekre. Az 1. §. definíciójának természetes kiterjesztéseként egy k változós $F(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ számelméleti függvényt (azaz olyan függvényt, melynek minden változója a természetes számokat futja be) kongruenciatartónak nevezünk, ha egész értékű, és tetszőleges $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ és m mellett amennyiben $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $\ldots$, $a_k \equiv b_k \pmod m$, akkor $F(a_1, \ldots, a_k) \equiv F(b_1, \ldots, b_k) \pmod m$.

Bebizonyítjuk a 4. lemma következő általánosítását.

VI. TÉTEL. *Legyen $F(n, m)$ kétváltozós kongruenciatartó függvény. Ha van végtelen sok olyan n, amelyhez létezik végtelen sok m, hogy $F(n, m) = 0$ legyen, akkor $F(n, m) \equiv 0$.*

A tételt kimondhattuk volna mindjárt k változós függvényekre is, de ez elvi különbséggel nem járna, csak fogalmazási nehézségekkel, és csak a fönti állítást fogjuk használni.

Legyenek a tételben mondott n-ek $n_1, n_2, \ldots$. Tekintsük egy fix i-re az $f(m) = F(n_i, m)$ egyváltozós kongruenciatartó függvényt. Feltevésünk szerint ennek végtelen sok nullhelye van, tehát a 4. lemma szerint azonosan 0. Így beláttuk, hogy minden m-re

$$F(n_i, m) = 0. \tag{24}$$

Legyen most m tetszőleges, és alkalmazzuk a 4. lemmát a $g(n) = F(n, m)$ függvényre! (24) miatt minden i-re $g(n_i) = 0$, tehát $g(n)$ is azonosan 0; mivel m tetszőleges volt, a tételt beláttuk.

Megjegyzem, míg a 4. lemma pontos volt abban az értelemben, hogy meghatározta azon halmazokat, melyeken egy kongruenciatartó függvény (ha külön mást nem mondok, ezen mindig egyváltozós függvényt értek) eltűnhetik anélkül, hogy azonosan nullává válnék, a VI. tétel nem az. Például a 4. lemma gondolatmenetével belátható, hogy ha $F(n, m) = 0$, valahányszor $n \leqq m \leqq 2n$, akkor $F(n, m) \equiv 0$.

9. §. Érdemes megnézni az I. tétel kiterjesztését többváltozós függvényekre.

VII. TÉTEL. *Egy k változós számelméleti függvény akkor és csak akkor kongruenciatartó, ha előállítható egész $c_{i_1, \ldots i_k}$-val az alábbi alakban:*

$$F(n_1 \ldots, n_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} c_{i_1, \ldots, i_k} A\left(\max_{1 \leqq j \leqq k} ij\right) \binom{n_1 - 1}{i_1} \cdots \binom{n_k - 1}{i_k} \tag{25}$$

Evidens, hogy egy k változós számelméleti függvény akkor és csak akkor kongruenciatartó, ha tetszőleges $k-1$ változóját tetszőlegesen lerögzítve a kapott függvény kongruenciatartó lesz. Ebből az I. tétel alkalmazásával azonnal adódik a feltétel elégségessége.

A szükségesség bizonyításához még az I. lemma alábbi általánosítása is szükséges, mely belőle könnyen levezethető.

5. LEMMA. *Egy k változós $F(n_1, \ldots, n_k)$ valósértékű számelméleti függvény egyértelműen előállítható az alábbi alakban:*

$$F(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} \binom{n_1 - 1}{i_1} \cdots \binom{n_k - 1}{i_k}. \tag{26}$$

Az $a_{i_1, \ldots i_k}$ együtthatók akkor és csak akkor mind egészek, ha F értékei mind azok.

Nyilván annyit kell belátni, hogy

$$A(\max_{1\leq j\leq k} i_j) | a_{i_1, \ldots, i_k},$$

ehhez pedig elég, hogy bármilyen j-re

$$A(i_j) | a_{i_1, \ldots, i_k}. \tag{27}$$

Mivel az indexek között nincs kitüntetett, elég a bizonyítást a $j=1$ esetre leírni.

Rögzítsük le tetszőlegesen az $n_2, \ldots, n_k$ változókat. Ekkor (26) jelölését használva, a kapott

$$f(n) = F(n, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \binom{n-1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} \binom{n_2-1}{i_2} \cdots \binom{n_k-1}{i_k}$$

függvény kongruenciatartó lesz. Az I. tétel szerint ez azt jelenti, hogy bármilyen $n_2, \ldots, n_k$-ra

$$A(i_1) \Big| \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} \binom{n_2-1}{i_2} \cdots \binom{n_k-1}{i_k}. \tag{28}$$

Legyen most

$$G(n_2, \ldots, n_k) = \frac{1}{A(i_1)} \sum_{i_k=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_1=0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} \binom{n_2-1}{i_2} \cdots \binom{n_k-1}{i_k} = \tag{29}$$

$$= \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} \frac{a_{i_1, \ldots, i_k}}{A(i_1)} \binom{n_2-1}{i_2} \cdots \binom{n_k-1}{i_k}.$$

(28) szerint G egészértékű; mivel a (29) alatti felírás éppen G előállítása a (26)-beli módon, az 5. lemma szerint $a_{i_1, \ldots i_k}/A(i_1)$ egész, vagyis éppen (27), qu.e.d.

10. §. Most rátérek az additív és multiplikatív függvényekre, illetve mindjárt egy általánosabb kérdést oldok meg. Hogy a tételt kimondhassam, szükségem lesz egy definícióra. Legyenek F és G kétváltozós számelméleti függvények. Azt mondjuk, hogy $F=G$ gyöngén, ha végtelen sok olyan n van, amelyhez létezik végtelen sok m, hogy $F(n, m)=G(n, m)$ legyen. Ha f számelméleti függvény az $F(n, m)= =f(nm)$ és $G(n, m) = f(n)+f(m)$, illetve $f(m)f(m)$ eseteknek megfelelően fogjuk használni a „gyöngén additív", illetve „gyöngén multiplikatív" kifejezést. Nyilvánvaló, hogy ezen föltételek tényleg gyöngébbek, mint az additivitás, illetve a multiplikativitás.

Ezen elnevezéssel a VI. tétel azt fejezi ki, hogy ha egy kongruenciatartó függvény gyöngén nulla, akkor azonosan az.

VIII. TÉTEL. *Legyen $P(x, y)$ valós együtthatós, kétváltozós polinom, f kongruenciatartó függvény, és tegyük fel, hogy*

$$f(nm)=P(f(n), f(m)) \tag{30}$$

gyöngén. Ekkor vagy $f(n)\equiv t$, $P(t, t)=t$, vagy $f(n) \equiv rn^k+t$ és $P(x, y) \equiv$ $\equiv \dfrac{(x-t)(y-t)}{r}+t$, ahol k természetes, t és $r\neq 0$ egész szám.

Speciálisan a kongruenciatartó függvények közül az egyetlen gyöngén additív az azonosan 0, gyöngén multiplikatívok pedig csak az azonosan 0, és $f(n)\equiv n^k$, ahol k nemnegatív egész.

Az additív és multiplikatív eset az általános tétel nyilvánvaló következménye. — Az, hogy a multiplikatív kongruenciatartó függvények csak a föntiek lehetnek, ismeretes [2], [3].

11. §. Ha f konstans, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy f nem konstans. Ekkor végtelen sok n-hez található végtelen sok m, hogy $P(n, m)$ egész. Ugyanis ez esetben a 4. lemma szerint f egy értéket csak véges sokszor vehet fel, tehát végtelen sok számnál felvett értékei is végtelen sokfélék. Ebből következik, hogy P racionális együtthatós. Ugyanis legyen P foka s, és vegyünk egy fent említett tulajdonságú n-et. Ekkor a $q(y)=P(n, y)$ polinom $s+1$ egész helyen egész, valamint azonos az ezen $s+1$ helyhez tartozó interpolációs polinomjával, amely racionális együtthatós. Mivel x együtthatói P-ben y polinomjai, és az előző eredmény szerint végtelen sok egész számnál racionális értékűek, az állítást beláttuk.

Legyen P nevezője v. Ekkor (30) miatt

$$vf(n, m)=vP\big(f(n), f(m)\big)$$

gyöngén, tehát ($vP(x, y)$ egész együtthatós, így a jobb oldal is kongruenciatartó) a VI. tétel szerint mindig, azaz (30) azonosság.

Első lépésként belátjuk, hogy

$$P(x, y) = axy+b(x+y)+c. \tag{31}$$

Nyilvánvaló, hogy P szimmetrikus; megmutatjuk, hogy bilineáris. Legyen ugyanis x-ben k-adfokú; ekkor a

$$P\big(f(j^2), f(n)\big) = f(j^2 n) = f(j\cdot jn) = P\big(f(j), f(jn)\big) = P\big(f(j), P\big(f(j), f(n)\big)\big)$$

egyenlet elején és végén elég nagy j választással $f(n)$-nek k, illetve k^2 fokszámú polinomja áll, amiből $k=k^2$ következik, qu.e.d.

(31) szerint

$$f(2^{k+1}) = (af(2)+b)f(2^k)+bf(2)+c. \tag{32}$$

(32)-ből egyszerű számolással $f(2^k)=O(2^{O(k)})$ adódik, tehát a IV. tétel szerint f polinom.

Végül megmutatjuk, hogy $a\neq 0$. Ha $a=0$ volna, akkor ugyanis (30)-at és (31)-et $n=m$ választással alkalmazva az $f(n^2) = 2bf(n)+c$ egyenlet adódnék, mely legalább elsőfokú f polinomra nyilván nem teljesülhet.

12. §. Most megoldjuk az így kapott egyenletet. $af(x)=f_1(x)$ helyettesítéssel

$$f_1(xy) = f_1(x)f_1(y)+b\big(f_1(x)+f_1(y)\big)+ac = \big(f_1(x)+b\big)\big(f_1(y)+b\big)+ac-b^2.$$

Most $f_2(x) = f_1(x)+b$-t véve

$$f_2(xy) = f_2(x)f_2(y)+ac-b^2+b. \tag{33}$$

(33)-ba $x=1$-et téve

$$ac-b^2+b = 0 \tag{34}$$

tehát (33) azzá alakul, hogy

$$f_2(xy)\equiv f_2(x)f_2(y). \tag{35}$$

Ez pedig csak úgy lehet, hogy $f_2(x)\equiv x^k$. Ugyanis legyen k az előforduló legkisebb

kitevő, $f_2(x)\equiv x^k f_3(x)$, $f_3(0)\neq 0$. Ekkor (35) miatt $f_3(xy)=f_3(x)f_3(y)$, ha $xy\neq 0$; de polinomokról lévén szó, $xy=0$ mellett is. Legyen $y=0$, ekkor $f_3(x)\equiv 1$ adódik, amint állítottuk.

$f_2(x)\equiv x^k$-ból visszaszámolva, $r=\frac{1}{a}$ és $t=\frac{b}{a}$ mellett, (34) figyelembevételével a tétel eredményét kapjuk. r és t azért egész, mert különben f nemhogy kongruenciatartó, de egész értékű sem volna. Az 1. lemmából következik, hogy ha f a természetes számoknál egész, akkor az összes egésznél az, tehát $n=0$ helyettesítéssel t egész; ekkor viszont $n=1$ helyettesítéssel már r egész voltát is kapjuk.

13. §. A számelméleti függvények között kitüntetett szerepük van az additív és multiplikatív függvényeknek. Ez indokolja, hogy ezen speciális esetekre egy egyszerű bizonyítást is adjunk.

Mindenesetre a VI. tételből nyerjük, hogy f teljesen additív, illetve multiplikatív.

Az additív eset egyszerű. $f(1)=0$ az additivitás miatt, továbbá mindig

$$nm-m|f(nm)-f(m)=f(n). \tag{36}$$

Ha most $n>1$ és $f(n)\neq 0$ volna, akkor (36)-ból tetszőleges $m>\frac{|f(n)|}{n-1}$ választással ellentmondást kapnánk.

Legyen most f teljesen multiplikatív. Ha $f(2)=0$, akkor $f(2^i)=0$, vagyis a 4. lemma szerint $f(n)\equiv 0$.

Ha viszont $f(2)\neq 0$, akkor $n=2^{2^i}$ választással $f(n)=n^{\log_2(f(2))}$. Ekkor a IV. tétel szerint f polinom; viszont egy polinom n^c-nel csak úgy egyezhet meg végtelen sok helyen, ha azonosan egyenlő vele, qu.e.d.

A bizonyítást befejezhetjük a IV. tétel felhasználása nélkül is. Megmutatjuk, hogy ha $f(2)\neq 0$, akkor 2-hatvány. Ebből már következik a tétel: ugyanis ha $f(2)=2^k$ akkor $f(n)=n^k$ végtelen sokszor (a 2-hatványokon), tehát a 4. lemma miatt $f(n)\equiv n^k$.

Ezt pedig az alábbi módon láthatjuk be: legyen $f(2)=2^k b$, ahol $2\nmid b$. f kongruenciatartása miatt $f(2^i)\equiv f(1) \pmod{2^i-1}$, azaz

$$2^i-1|2^{ki}b^i-1. \tag{37}$$

azonban $2^i-1|2^{ki}-1$, amit b^i-nel szorozva

$$2^i-1|2^{ki}b^i-b^i. \tag{38}$$

(37)-ből (38)-at kivonva

$$2^i-1|b^i-1. \tag{39}$$

Helyettesítsünk (39)-be $i=\varphi(|b|)-t$ (φ az Euler-függvényt jelenti). Ekkor $(2,b)=1$ miatt Euler tétele szerint $b|2^i-1$; (39) miatt tehát $b|1$, azaz $b=\pm 1$. De $b=-1$ nem lehet, mert akkor (39) $i=3$-mal nem áll fent. Tehát valóban $f(2)=2^k$.

IRODALOM

[1] L. Rédei—T. Szele: Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe I, Acta Mathematica **79** (1947), 291—319. o.

[2] Al Somayajulu: On arithmetical functions with congruence property, Portugaliae Mathematica **27**(1968), 1—2, 83—85. o.

[3] M. V. Subbarao: Arithmetical functions satisfying a congruence property, Canadian Mathematical Bulletin **9** (1966), 2, 143—146. o.

О ФУНКЦИЯХ СОХРАНЯЮЩИХ СРАВНИМОСТЬ

И. РУЖА МЛ.

ON CONGRUENCE PRESERVING FUNCTIONS

I. RUZSA JR.

Let f be an integer-valued arithmetical function. We call it „congruencepreserving" if for all natural numbers a, b, m, $a \equiv b$ (mod. m) implies $f(a) \equiv f(b)$ (mod. m). E. g. the polynomials with integral coefficients are such functions.

The author first proves that a function is congruencepreserving if and only if it can be written of the form (1), where $A(n) = [1, 2, \ldots n]$ and the c_i-s are integers. Later for functions of k variables we get formula (25). — From this theorem it is easily proven that the maximum of the denominator of a congruencepreserving polynomial of degree k is $\frac{k!}{A(k)}$, which is got e. g. when $f(n) = A(k)\binom{n-1}{k}$.

The most interesting question is what we can say about the behaviour of the congruencepreserving functions that are not polynomials. It is proven in the paper that in this case $\lim_{n\to\infty} \frac{\log |f(n)|}{\log n} = \infty$ and $\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |f(n)|}{n} \geqq \log (e-1)$. The first theorem is best possible in the following sense: if we are given an unbounded function $w(n) > 0$, then we can choose $f(n)$ so that $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log |f(n)|}{w(n) \log n} < \infty$. The author suggests that in the second theorem $\log (e-1)$ can be replaced by 1, which, if it were true, would be best possible.

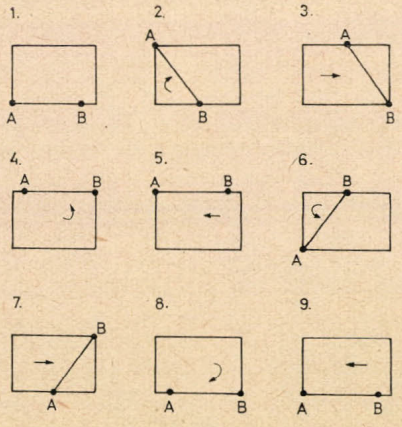
Another question is which the additive and multiplicative congruencepreserving functions are. We solve a more general problem. Let F and G be arithmatical functions of two variables. We say that $F = G$ weakly, if there is an infinity of n'-s for which exist infinitely many m'-s such that $F(n, m) = G(n, m)$. Suppose that P is a polynomial of two variables, f is a congruencepreserving function and $f(nm) = P(f(n), f(m))$ weakly. Then either $f(n)$ is constant or $f(n) \equiv rn^k + t$, $P(x, y) \equiv \frac{(x-t)(y-t)}{r} + t$, where t and $r \neq 0$ are integers, k is a natural number. Specially if f is weakly additive, then $f(n) \equiv 0$, and if f is weakly multiplicative, then either $f(n) \equiv 0$ or $f(n) \equiv n^k$, where $k \geqq 0$ is integer.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ EGY SEJTÉSÉNEK BIZONYÍTÁSA

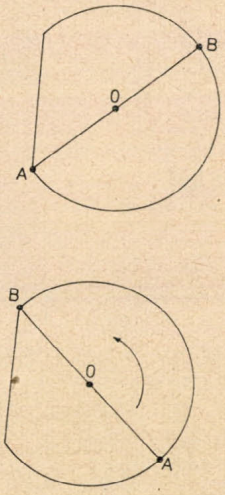
KISS ILDIKÓ

Egy konvex tartomány egy AB húrjának *mozgásán* az AB szakasz olyan folytonos mozgását értjük, amelynek során a szakasz végpontjai K határán maradnak. A következőkben egy húr olyan mozgását vizsgáljuk, amely közben a húr kiindulási helyzetét leszámítva, mindig új helyzetbe jut. A címben idézett sejtés szerint egy ilyen mozgás folyamán a húr legfeljebb kétszer változtat forgásirányt.

Legyen K egy téglalap, s a húr hossza essen K rövidebb és hosszabb oldalának hossza közé. Ez a példa mutatja, hogy két forgásirány változás valóban bekövet-



1. ábra



2. ábra

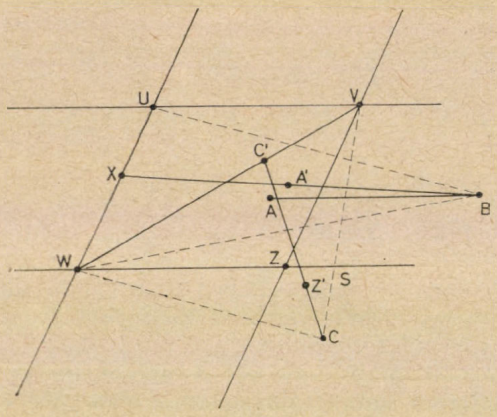
kezhet (1. ábra). (Előfordulhat viszont, hogy egy konvex tartomány egy húrja a tekintett mozgás során „elakad", mielőtt visszajutna eredeti helyzetébe. Ilyen esettel állunk szemben, ha K egy olyan körszelet, amely tartalmazza a kör középpontját, a húr pedig a kör egy átmérője (2. ábra).

Az alábbi tétel a fenti sejtés helyességét mondja ki:

TÉTEL: *Ha egy konvex tartomány egy húrját úgy mozgatjuk, hogy minden helyzetet csak egyszer vegyen fel, akkor a húr legfeljebb kétszer változtathat forgásirányt.*

A tétel bizonyítása röviden összefoglalható a következőképpen:

Legyen a konvex tartomány K, a határa H, a húr pedig $a=\overrightarrow{AB}$. Miközben az $a=\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt mozgatjuk H-n, forgassuk egy O középpontú, K kör $\overrightarrow{OC}=r$ sugarát is $a=\overrightarrow{AB}$-val együtt úgy, hogy $a=\overrightarrow{AB}$ és $r=\overrightarrow{OC}$ iránya minden pillanatban megegyezzék.



3. ábra

A bizonyítás indirekt:

Ha feltesszük, hogy a mozgatás közben a forgásának az iránya — így r forgásának az iránya is — legalább háromszor megváltozott, akkor lennie kell egy olyan O csúcsú szögtartománynak, amelyen r legalább háromszor végighaladt.

Ekkor minden olyan O-n áthaladó f egyenesre, mely metszi ezt a szögtartományt, van H-nak három különböző, f-fel párhuzamos, a-val megegyező hosszúságú húrja.

Nevezzük f-t $(*)$ típusúnak, ha van H-n f-fel párhuzamos szakasz, ellenkező esetben pedig nevezzük f-t $(**)$ típusúnak. Könnyű belátni (1/A és 2. segédtétel), hogy ha f $(**)$ típusú, akkor H-nak f-fel párhuzamos, a-val megegyező hosszúságú húrjai egy párhuzamos egyenespáron helyezkednek el, és hogy ezek a párhuzamosok tartalmaznak egy-egy H-hoz tartozó szakaszt.

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges f egyeneshez legfeljebb még egy olyan O-n áthaladó f' egyenes lehet, hogy H f-fel, ill. f'-vel párhuzamos, a-val megegyező hosszúságú húrjainak a végpontjai ugyanazon a párhuzamos egyenespáron helyezkednek el. Mivel az O-n áthaladó, a megadott szögtartományt metsző egyenesek halmaza kontinuum számosságú, vagy a $(*)$-típusú, vagy pedig a $(**)$-típusú egyenesekből álló részhalmaz kontinuum számosságú. Mindkét esetben a H által tartalmazott szakaszok halmaza tartalmaz egy olyan kontinuum számosságú részhalmazt, mely páronként nem egy egyenesbe eső szakaszokból áll.

Vetítsük H-t a síknak egy egyenesére úgy, hogy a fenti szakaszhalmaznak legyen olyan kontinuum számosságú részhalmaza, melyhez tartozó szakaszok képe is szakasz.

Mivel K konvex, a vetületi szakaszok közül legfeljebb kettő-kettőnek lehet közös belső pontja (ld. a 3. segédtételt).

Ekkor viszont kell, hogy legyen az egyenesen kontinuum-sok, egymásba nem nyúló szakasz, ami nyilvánvalóan lehetetlen.

Ez az ellentmondás a tétel helyességét bizonyítja.

*

Ha K egy síkbeli konvex tartomány, és H a határa, akkor $\overline{K}$ jelölje $K \cup H$ halmazt. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\overline{K}$ maga is konvex.

A részletes bizonyításhoz szükség van néhány segédtételre.

1/A Segédtétel: Ha H egy K síkbeli konvex tartomány határa, a_1, a_2, a_3 pedig K-nak három, páronként nem egy egyenesbe eső, egyenlő hosszúságú, párhuzamos húrja, akkor a_1, a_2, a_3 végpontjai egy párhuzamos egyenespáron helyezkednek el.

Bizonyítás: Jelölje U, V, Z, W az a_1 és a_2 végpontjai által határolt paralelogrammát. (3. ábra). Legyen S egyike azoknak a szögtartományoknak, melyek csúcsszöge a paralelogramma valamelyik szöge. Legyen pl. S a Z csúcsú szögtartomány. Legyen C S-nek egy tetszőleges belső pontja. Mivel Z K-nak határpontja, a WCV szögtartományban található egy Z' külső pont. Messe a CZ' félegyenes a VW szakaszt az C' pontban. Ekkor $C \notin \overline{K}$, mert ellenkező esetben C, $C' \in \overline{K}$ teljesülne, de az $\overline{CC'}$ szakasz Z' pontja mégsem tartozna $\overline{K}$-hoz, ami viszont ellentmond annak, hogy $\overline{K}$ konvex.

Beláttuk, hogy a_3 egyik végpontja sem helyezkedhet el azon szögtartományok egyikében sem, amelyek csúcsszöge a paralellogramma valamelyik szöge, így nem lehet az $UVWZ$ paralelogrammán kívül az UW és VZ párhuzamosok között sem.

De $a_3 = AB$ egyik végpontja sem helyezkedhet el azokban a tartományokban sem, amelyeket úgy kapunk, hogy az UV és WZ párhuzamosok közötti sávból elhagyjuk az $UVWZ$ paralelogrammát.

Tegyük fel például, hogy $a_3 = \overline{AB}$ egyik végpontja annak a tartománynak a belsejében helyezkedik el, mely az UW egyenestől messzebb van, és tegyük fel, hogy a_3 végpontjai közül az UW egyenestől B van messzebb. Mivel A K-nak határpontja, az A-t tartalmazó UBW szögtartomány tartalmaz egy A' külső pontot. Legyen a BA' félegyenesnek az $\overline{UW}$ szakasszal való metszéspontja X. Mivel $\overline{K}$ konvex, $X \in \overline{K}$, ez viszont ellentmondás, hiszen egyrészt X, $B \in \overline{K}$ teljesülne, másrészt pedig az $\overline{XB}$ szakasz tartalmazna egy A' külső pontot. Mivel a_3 az UV, ill. WZ egyeneseken sem lehet, beláttuk, hogy a_3 végpontjai az UW, ill. VZ egyeneseken helyezkednek el. Qu.e.d.

1/B Segédtétel: Legyen H egy síkbeli konvex tartomány határa, a egy adott hosszúság, O pedig a síknak egy tetszőleges pontja. Ekkor a sík minden egyes olyan O-n áthaladó f egyeneséhez, melyhez H-nak van legalább három, f-fel párhuzamos, páronként nem egy egyenesbe eső a hosszúságú húrja, hozzárendelhető a síknak egy e_1, e_2 párhuzamos egyenespárja úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

(α) $e_1 \cap H$ is, és $e_2 \cap H$ is legalább három pontot tartalmaz.

(β) az e_1, e_2 párhuzamospár legfeljebb még egy O-n áthaladó egyeneshez van hozzárendelve.

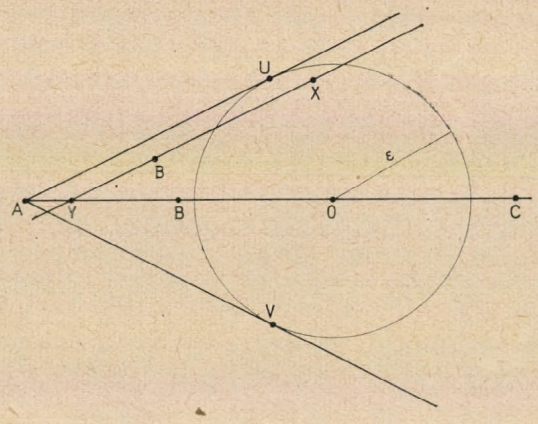
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az f egyenes párhuzamos az 1/A segédtételben szereplő a_1, a_2, a_3 húrokkal, és a éppen e húrok hosszát jelenti.

Rendeljük hozzá az f egyeneshez az $e_1 = UW$ és az $e_2 = VZ$ párhuzamos egyenespárt. Beláttuk, hogy ekkor az α) feltétel teljesül, hiszen a_1, a_2, a_3 egy-egy végpontja e_1, ill. e_2 három különböző pontja.

Nyilvánvaló, hogy legfeljebb még egy olyan O-n áthaladó f' egyenes létezik, melyből az e_1, e_2 párhuzamosok a hosszúságú szakaszt metszenek ki, így β) is teljesül.

2. Segédtétel: Legyen H egy K konvex síkbeli tartomány határa. Ha a sík valamely e egyenesére $e \cap H$ legalább három pontot tartalmaz, akkor $e \cap H$ tartalmaz szakaszt.

Bizonyítás: Legyen az e egyenes három (egymás után következő) pontja A, B, C (4. ábra). Mivel $\overline{K}$ konvex, az $\overline{AC}$ szakasz $\overline{K}$-hoz tartozik. Ha az $\overline{AC}$ szakasz nem tartozna H-hoz, akkor volna rajta egy D belső pont. (Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy D a $\overline{BC}$ szakaszon van.) Van olyan kicsiny ε hosszúság,

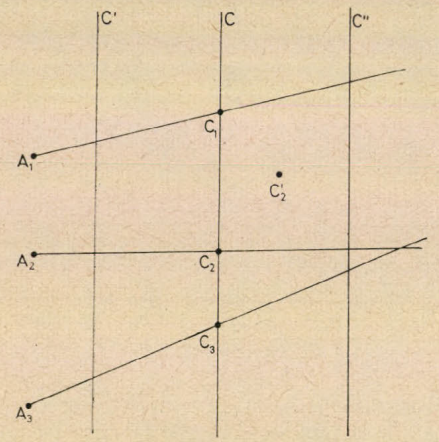


4. ábra

hogy a D pont körüli ε sugarú kör része K-nak. Legyen U, ill. V az A pontból e körhöz húzott érintők érintési pontja. Mivel B határpont, az UAV szögtartomány tartalmaz egy B' külső pontot. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy B' az e egyenes által határolt ugyanazon féltérben van, amelyikben U. Húzzunk a B' ponton keresztül az AU egyenessel párhuzamos egyenest. Legyen ennek az egyenesnek AC-vel való metszéspontja Y és a körlemezzel való valamely metszéspontja X. Ekkor az $\overline{XY}$ szakasz végpontjai hozzátartoznának $\overline{K}$-hoz, de lenne az $\overline{XY}$ szakaszon egy B' külső pont. Ez pedig ellentmondana annak, hogy $\overline{K}$ konvex.

3. Segédtétel: Egy síkbeli konvex tartományt metsző egyenes legfeljebb két olyan nem egy egyenesbe eső egyenes szakaszt metszhet, mely a tartomány határához tartozik.

Bizonyítás: Legyen K egy síkbeli konvex tartomány, legyen K határa H, és messe a c egyenes a H-hoz tartozó $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ szakaszokat az egymás után következő C_1, C_2, C_3 pontban (5. ábra).



5. ábra

Húzzunk mindkét, c által határolt félsíkban egy-egy c-vel párhuzamos egyenest (c', ill. c'').

Ha c' és c'' eléggé közel van c-hez, akkor a párhuzamosok közötti sávból $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{A_3B_3}$ egy C_2-t belsejében tartalmazó T konvex négyszöget (trapézt) metsz ki. Mivel C_2 K-nak határpontja, T belsejében tartalmazza K-nak valamely C_2' külső pontját. A C_2'-n keresztül húzott, c-vel párhuzamos egyenes $\overline{A_1B_1}$-t, ill. $\overline{A_3B_3}$-t messe az X, ill. az Y pont ban. Ekkor X, $Y \in \overline{K}$, de $C_2' \notin \overline{K}$, ami ellentmondás.

A kiválasztási axióma alapján könnyen bizonyítható a következő:

4. Segédtétel: Ha A végtelen számosságú halmaz, φ pedig A-nak egy B halmazba történő olyan egyértelmű leképezése, hogy minden $a \in A$-hoz legfeljebb egy olyan $a' \in A$ van, melyre $\varphi(a) = \varphi(a')$, akkor A-nak van egy A-val megegyező számosságú A' részhalmaza úgy, hogy φ-nek A'-re történő megszorítása A'-nek B-be történő egy-egyértelmű leképezése.

5. Segédtétel: Egy síkbeli konvex tartomány határához tartozó, páronként nem egy egyenesbe eső szakaszok halmaza mindig véges, vagy megszámlálható számosságú.

Bizonyítás: Legyen K egy konvex síkbeli tartomány, határa pedig legyen H. Legyen e és f a síknak két tetszőleges, egymást metsző egyenese. Legyen A a K határához tartozó, páronként nem egy egyenesbe eső szakaszoknak egy halmaza, és A számosságát jelölje α. Tegyük fel, hogy α nem véges. Ekkor vagy van A-nak olyan α számosságú részhalmaza, melynek elemei nem párhuzamosak f-fel, vagy olyan α számosságú részhalmaza, melynek elemei nem párhuzamosak e-vel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első eshetőség áll fenn. Vetítsük H-t f-fel párhuzamosan e-re. Legyen C a vetületi szakaszok halmaza, és minden egyes $c \in C$ szakasznak feleltessük meg $\{c, c'\}$-t, ha $c' \in C$ olyan c-től különböző szakasz, melynek van c-vel közös belső pontja, és $\{c, c\}$-t, ha nincs további ilyen $c' \in C$ szakasz.

A fenti megfeleltetés a 3. segédtétel értelmében eleget tesz a 4. segédtétel követelményeinek, így megadható az e egyenesen egy α számosságú A' szakasz-halmaz úgy, hogy tetszőleges $c, c'' \in A'$ esetén $\varphi(c) \neq \varphi(c'')$ teljesüljön, azaz c és c''-nek ne legyen közös belső pontja.

Tegyük fel, hogy e a számegyenes, és a tetszőleges valós szám; ha α megszámlálhatónál nagyobb számosság, akkor kell hogy legyen egy olyan N egész szám, hogy azon A'-beli szakaszok halmaza, melyek $\frac{a}{N}$-nél hosszabbak, megszámlálhatónál nagyobb számosságú.

Ekkor kell, hogy legyen az e egyenesen megszámlálhatónál több, páronként egymásba nem nyúló, $\frac{a}{N}$-nél hosszabb szakasz. Az $\frac{ai}{2N}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ pontok közül minden $\frac{a}{N}$-nél hosszabb szakasz legalább egy olyat tartalmaz, melyet a többi A'-beli szakasz egyike sem, így az $\frac{a}{N}$-nél hosszabb, A'-beli szakaszok halmazának számossága nem nagyobb, mint az $\left\{\frac{ai}{2N}: i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$ halmaz számossága, ami ellentmondás, mert az $\frac{ai}{2N}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ pontok halmaza megszámlálható.

Következmény: Legyen K egy síkbeli konvex tartomány, a adott hosszúság, O pedig a síknak egy tetszőleges pontja. Legfeljebb megszámlálható sok olyan O-n áthaladó egyenes van a síkban, melyhez van K-nak legalább három, vele párhuzamos, a hosszúságú húrja.

Bizonyítás: Legyen f egy olyan egyenes, mellyel párhuzamosan húzható K-ban legalább három, a hosszúságú húr. Nevezzük f-t $(*)$-típusúnak, ha van H-nak legalább kettő, f-fel párhuzamos, egy egyenesbe eső húrja, ellenkező esetben nevezzük f-t $(**)$-típusúnak. Ha f $(*)$-típusú, akkor a 2. és az 1/B segédtétel értelmében H tartalmaz egy f-fel párhuzamos szakaszt, így az 5. segédtétel alapján legfeljebb megszámlálható sok $(*)$-típusú egyenes lehet.

Az 1/B segédtétel alapján minden $(**)$-típusú f egyeneshez található egy e_1 és e_2 egyenespár, hogy az 1/B segédtétel α) és β) feltétele teljesüljön. Ekkor a 2. segédtétel értelmében e_1 és e_2 tartalmaz egy-egy H-hoz tartozó szakaszt. A 4. segédtétel szerint a $(**)$-típusú egyenesek halmazának számossága — ha végtelen — megegyezik a hozzájuk tartozó e_1, e_2 párhuzamos egyenespárok halmazának számosságával, ez utóbbiak számossága viszont a 4. és az 5. segédtétel értelmében legfeljebb megszámlálható.

*

Mivel a kiindulásul szolgáló sejtésben a mozgás fogalma alapvető szerepet játszik, a bizonyításnak is támaszkodnia kell a mozgás néhány alapvető sajátosságára.

I. Ha egy kör kerületén mozgó A pont a kör kerületének egy rögzített B pontjából elindul a kör kerületének egy rögzített C pontja felé, akkor az adott iránynak megfelelő $\overset{\frown}{BC}$ íven van egy olyan C' pont, hogy A a B-ből C-be vezető úton irányváltoztatás nélkül eljut C'-ig (ill. ha az A pont a B pontba a C pont felől érkezik, akkor van a $\overset{\frown}{CB}$ ívnek egy olyan C' pontja, hogy a C'-ből B-be vezető utat A már irányváltoztatás nélkül tette meg.)

II. Ha egy K kör kerületén mozgó A pont a kör kerületének egy rögzített B pontjából irányváltoztatás nélkül jut el a kör kerületének egy rögzített C pontjába, akkor az adott iránynak megfelelő $\overset{\frown}{BC}$ ív minden pontján át kell haladnia.

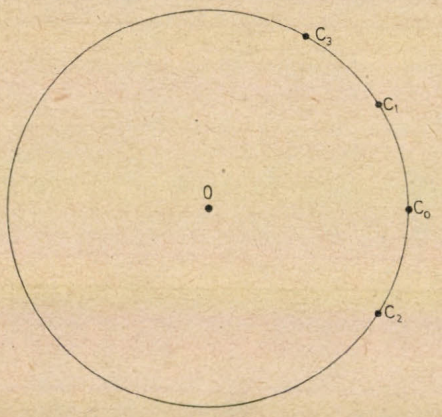
III. Ha egy kör kerületén mozgó A pont irányváltoztatás nélkül haladva (véges idő alatt) bármilyen közel kerül a körív egy rögzített B pontjához, akkor el is kell jutnia a B pontba.

*

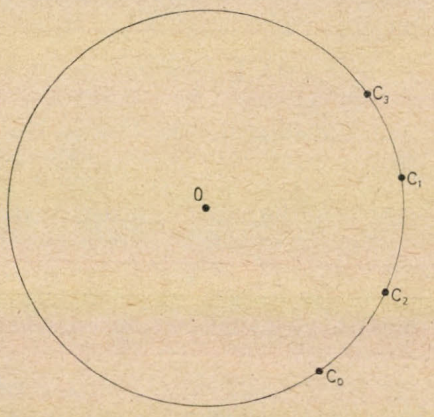
Legyen K egy konvex síkbeli tartomány, H a határa, $a=\overrightarrow{AB}$ pedig H-nak egy húrja. Mozgassuk az $a=\overrightarrow{AB}$ húrt H-n úgy, hogy mindig új helyzetet vegyen fel, és a végén visszajusson az eredeti helyzetébe. Jelölje $a_x=\overrightarrow{A_xB_x}$ $(x\in X)$ a mozgatás során nyert húrok halmazát, és jelölje a_0 a húr kiinduló helyzetét.

Legyen O a síknak egy tetszőleges, rögzített pontja, $\overrightarrow{OC}$ $(\overrightarrow{OC_x}: x\in X)$ pedig $\overrightarrow{AB}$-vel $(\overrightarrow{A_xB_x}$-szel) egyenlő hosszú, és megegyező irányú vektor. Nyilvánvaló, hogy ha az a húrt mozgatjuk H-n, akkor $\overrightarrow{OC}$ is a-val együtt forog az O középpontú, OC sugarú K körön. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy C C_0-ból pozitív irányban indult el a köríven. Az I. axióma értelmében van $x'\in X$ úgy, hogy C C_0-ból $C_{x'}$-be irányváltoztatás nélkül jutott el. Az ilyen x'-k halmazát jelölje X_1, $\varphi(x)$ $(x\in X_1)$ pedig jelölje a C_0CC_x forgásszöget.

Ha C C_0-ból indulva több, mint kétszer járná végig a kört irányváltoztatás nélkül, akkor volna olyan $\overset{\frown}{C_0C'}$ ív, amelyet háromszor járt végig, és ekkor minden olyan O-n áthaladó, f egyenesre, mely a $\overset{\frown}{C_0C'}$ ívet metszi, volna H-nak f-fel párhuzamos, három különböző, a-val megegyező hosszúságú húrja, ami viszont ellent-



6. ábra



7. ábra

mondás. Tehát $\varphi(x) \leqq 4\pi$ $(x \in X_1)$. Ekkor a $\{\varphi(x)\colon x \in X_1\}$ számhalmaznak van felső határa. Jelölje φ_1 ezt a felső határt. A III. axióma értelmében létezik $x_1 \in X$ úgy, hogy $\varphi(x_1) = \varphi_1$. Ekkor C C_0-ból $C_1 = C_{x_1}$-be irányváltoztatás nélkül jut el. C_1-ben vagy befejeződik a mozgás, vagy C_1-ben C visszafordul. Ha a második eset áll fenn, ugyanilyen módon látható, hogy van a körívnek egy C_2 pontja úgy, hogy C C_1-ből irányváltoztatás nélkül jut el C_2-be, C_2-ben pedig vagy befejeződik a mozgás, vagy C újra visszafordul, és ekkor van a köríven olyan C_3 pont, ameddig C C_2-ből irányváltoztatás nélkül jut el. Belátjuk, hogy C_3 már nem lehet fordulópont.

Ha C' és C'' a K kör kerületének két tetszőleges pontja, akkor $\overset{\frown}{C'C''}$ jelentse azt a körívet, melyet C ír le, miközben $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC'}$-ből pozitív irányban $\overrightarrow{OC''}$-be forog. C_3 nem lehet rajta a $\overset{\frown}{C_1C_2}$ íven, mert akkor vagy C_0 a $\overset{\frown}{C_2C_1}$ íven van, és ekkor C C_0-ból C_3-ig jutva, a $\overset{\frown}{C_0C_1}$ ívet járná végig háromszor (6. ábra) vagy C_0 a $\overset{\frown}{C_1C_2}$ íven van, és ekkor C C_0-ból C_3-ig jutva, a $\overset{\frown}{C_2C_1}$ ívet járta végig háromszor (7. ábra). C_3 tehát a $\overset{\frown}{C_2C_1}$ íven van. Ha C_3 fordulópont volna, akkor C_3-ból negatív irányban haladva eljutnánk a $\overset{\frown}{C_2C_1}$ ív valamely C' pontjáig. Eközben C a $\overset{\frown}{C'C_3}$ ívet háromszor járná végig, ami ellentmondás.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ГИПОТЕЗЫ ЛАСЛО ФЕЙЕШ-ТОТ

И. КИШ

THE PROOF OF A CONJECTURE OF L. FEJES TÓTH

I. KISS

A DIRICHLET-FÉLE L FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉNEK EGY PONTJÁHOZ

PINTZ JÁNOS

A Dirichlet-féle $L(1, \chi)$ függvényre fogunk elemi úton alsó korlátot adni, ahol χ valós, nem főkarakter modulo k, pontosabban bebizonyítjuk, hogy elég nagy k-ra

$$L(1, \chi) > \frac{c}{\sqrt{k} \log k}.$$

A problémával foglalkozott A. O. Gelfond is, aki egy dolgozatában — mint az a Mathematical Reviewsban Schoenfeld által írt referátumból kiderül — dolgozatunkban közölttől különböző, szintén elemi bizonyítást ad arra, hogy

$$|L(1, \varkappa)| > \frac{c'}{\sqrt{k} \log^2 k}.$$

Ezen alsó korlát felhasználásáról idézünk egy részletet Harold Davenport Multiplicative Number Theorie című könyvéből (99—100. o.):

„Egy χ valós primitív karakternek megfelelő L függvény β valós zérus-helyére adható egyetlen nyilvánvaló felső becslés az $L(1, \chi)$ alsó korlátjából származtatható, amit az osztályszám-formula szolgáltat. Mivel $h(d) \geqq 1$, a §6 (15) és (16) formuláiból*, ahol $d = \pm q$, azt kapjuk, hogy

$$L(1, x) > c_{25} q^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Könnyen látható, hogy

$$|L'(\sigma, \chi)| < c_{26} \log^2 q \quad \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{\log q} \leqq \sigma \leqq 1 \tag{13}$$

és ebből a differenciálszámítás középértéktételét felhasználva következik, hogy

$$L(1, \chi) = L(1, \chi) - L(\beta, \chi) < (1 - \beta) C_{26} \log^2 q$$

amiből

$$\beta < 1 - \frac{c_{27}}{\sqrt{q} \log^2 q}. \tag{14}$$

A szokásos érveléssel belátható, hogy ez fennáll a főkaraktertől különböző

* §6 (15) $h(d) = \frac{w\sqrt{|d|}}{2\pi} L(1, \chi)$, ha $d < 0$

§6 (16) $h(d) = \frac{\sqrt{d}}{\log \varepsilon} L(1, \chi)$, ha $d > 0$

valós imprimitív karakterekre is. Ha $\chi(-1)=1$, amelyik a $d>0$ esetnek felel meg, a (14) egyenlőtlenséget még az egyik $\log q$ tényező elvonásával javítani lehet**, mert §6 (16) formulájában van egy $\log \varepsilon$ tényező, és

$$\log \varepsilon \geqq \log \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{q}).''$$

Tétel: Legyen χ a mod k vett maradékosztályok csoportján értelmezett, a főkaraktertől különböző tetszőleges valós karakter. Ekkor létezik c konstans, hogy elég nagy k-ra

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} > \frac{c}{\sqrt{k}\log k}.$$

Bizonyítás: a tétel bizonyításához szükségünk van a következő segédtételre.

Segédtétel: Legyen α tetszőleges pozitív, l tetszőleges természetes szám, $\alpha = [\alpha]+\{\alpha\} = [\alpha]+\vartheta$. Ekkor

$$S = \sum_{m \leqq \alpha} (\alpha - m)^l = \frac{\alpha^{l+1} - \vartheta^{l+1}}{l+1} - \frac{\alpha^l - \vartheta^l}{2} + \sum_{i \leqq l-1} B_i^l (\alpha^{l-i} - \vartheta^{l-i})$$

alakba írható, ahol B_i^l l-től (és i-től) függő konstans, és páros i-re $B_i^l = 0$, páratlan i-re $B_i^l < c_3 l^i$, ahol c_3 konstans.

Bizonyítás:

$$S = \sum_{m \leqq \alpha} (\alpha - m)^l = \left(\sum_{m \leqq \alpha} e^{(\alpha - m)x} \right)_{x=0}^{l} = \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\vartheta x}}{e^x - 1} \right)_{x=0}^{l} =$$

$$= \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\vartheta x}}{x} \right)_{x=0}^{l} - \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{\vartheta x})_{x=0}^{l} + ((e^{\alpha x} - e^{\vartheta x}) f(x))_{x=0}^{l},$$

ahol $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$, $f(0) = 0$, továbbá

$$f(-x) = \frac{1}{e^{-x}-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1 + 1}{1 - e^x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = -f(x)$$

tehát

$$f^{(2n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Így

$$S = \frac{\alpha^{l+1} - \vartheta^{l+1}}{l+1} - \frac{\alpha^l - \vartheta^l}{2} + \sum_{0 \leqq i \leqq l-1} \binom{l}{i} f^{(i)}(0)(\alpha^{l-i} - \vartheta^{l-i}) =$$

$$= \frac{\alpha^{l+1} - \vartheta^{l+1}}{l+1} - \frac{\alpha^l - \vartheta^l}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq l-1 \\ 2 \nmid i}} B_i^l (\alpha^{l-i} - \vartheta^{l-i})$$

Mivel $f(z)$ reguláris $|z| < 2\pi$-re

$$|B_i^l| = \left| \binom{l}{i} f^{(i)}(0) \right| < c(\varepsilon) \frac{l(l-1)\ldots l-i+1}{(2\pi - \varepsilon)^i} < c_3 \cdot l^i$$

$$B_i^l = D_{l-i}^l, \quad \frac{1}{l+1} = D_{l+1}^l, \quad -\frac{1}{2} = D_l^l$$

** Nemrég bebizonyítottam (Göttinger Nachrichten, 1966, 203—212), hogy egy $\log q$ tényező elvonása $d<0$ esetén is lehetséges.

jelöléseket bevezetve:

$$S = \sum_{i \leqq l+1} D_i^l(\alpha^i - \vartheta^i); \quad |D_i^l| < c_3 \cdot l^{l-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l+1).$$

Rátérünk az eredeti tétel igazolására. Legyen $g(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$ Ekkor

$$g(n) = \prod_{p_i^{\alpha_i} || n} (1 + \chi(p_i) + \cdots + \chi^{\alpha_i}(p_i)) \geqq 0, \quad \text{és} \quad g(n) \geqq 1,$$

ha n négyzetszám. Legyenek l és x később meghatározandó, k-tól függő pozitív számok, l egész. Ezek úgy fognak függni k-tól, hogy $k \to \infty$ esetén $l \to \infty$ és $x \to \infty$, így mivel az állítást csak elég nagy k értékekre bizonyítjuk, a felírt egyenlőtlenségektől csak azt követeljük, hogy elég nagy l és x értékekre teljesüljenek, így ekkor

$$\Sigma_0 = \sum_{n \leqq x} (x-n)^l g(n) \geqq \sum_{n^2 \leqq x} (x-n^2)^l \geqq \sum_{n^2 \leqq \frac{x}{2l+1}} (x-n^2)^l \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{2lx}{2l+1}\right)^l \sum_{n^2 \leqq \frac{x}{2l+1}} 1 > x^l \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\sqrt{\frac{x}{2l+1}}\right] > \frac{c_1}{\sqrt{l+1}} x^l \sqrt{x}$$

Legyen β később meghatározandó 0 és 1 közti szám. Ekkor

$$\Sigma_0 = \sum_{n \leqq x} (x-n)^l \sum_{d|n} \chi(d) = \sum_{d \leqq x} \chi(d) \sum_{m \leqq \frac{x}{d}} (x-md)^l =$$

$$= \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d) \sum_{m \leqq \frac{x}{d}} (x-md)^l = \sum_{x \geqq d > x^{1-\beta}} \chi(d) \sum_{m \leqq \frac{x}{d}} (x-md)^l = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Felhasználva az elején bizonyított segédtételt, $\left\{\frac{x}{d}\right\} = \vartheta_d$ jelöléssel:

$$\Sigma_1 = \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d) \sum_{m \leqq \frac{x}{d}} (x-md)^l = \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d) d^l \sum_{m \leqq \frac{x}{d}} \left(\frac{x}{d} - m\right)^l =$$

$$= \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d) d^l \sum_{i \leqq l+1} D_i^l \left(\left(\frac{x}{d}\right)^i - \vartheta_d^i\right) =$$

$$= \frac{x^{l+1}}{l+1} \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \frac{\chi(d)}{d} + \sum_{i \leqq l} \underbrace{D_i^l x^i \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d) d^{l-i}}_{A} - \underbrace{\sum_{i \leqq l+1} D_i^l \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d) d^l \vartheta_d^i}_{B} =$$

$$= \frac{x^{l+1}}{l+1} \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \frac{\chi(d)}{d} + A - B$$

Az Ábel egyenlőtlenséget, valamint, hogy $\chi \neq \chi_0$ esetén tetszőleges a, b számokra fennáll a $\left|\sum_{d=a}^{b} \chi(d)\right| < c_0 \sqrt{k} \log k$ összefüggés, felhasználva kapjuk:

$$|A| < \sum_{i \leqq l} c_3 \cdot l^{l-i} x^i \cdot x^{(1-\beta)(l-i)} \cdot c_0' \sqrt{k} \log k$$

A későbbiek során úgy fogjuk megválasztani x, l, β értékeit, hogy $1<c_4 \leqq \frac{x^\beta}{l} \leqq c_4'$ fennálljon, ezért $l^{l-i}x^i x^{(1-\beta)(l-i)} = x^l\left(\frac{l}{x^\beta}\right)^{l-i} \leqq \frac{x^l}{c_4^{l-i}}$, így végül

$$|A| < c_0' c_3 x^l \sqrt{k} \log k \sum_{i \leqq l} \frac{1}{c_4^{l-i}} < c_5 x^l \sqrt{k} \log k \qquad \left(c_5 = \frac{c_0' c_3}{1-\frac{1}{c_4}}\right).$$

Ugyanilyen módon, továbbá felhasználva, hogy $0<h\leqq 1$ esetén $(1-h)^{\frac{1}{h}} \leqq \frac{1}{e}$ kapjuk, hogy

$$|\Sigma_2| = \left|\sum_{x^{1-\beta}<d\leqq x} \chi(d) \sum_{m\leqq \frac{x}{d}} (x-md)^l\right| = \left|\sum_{m<x^\beta} \sum_{x^{1-\beta}<d\leqq \frac{x}{m}} (x-md)^l \chi(d)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{m<x^\beta} (x-mx^{1-\beta})^l c_0' \sqrt{k} \log k = c_0' x^l \sqrt{k} \log k \sum_{m<x^\beta} \left(1-\frac{m}{x^\beta}\right)^{\frac{x^\beta}{m}\cdot\frac{l}{x^\beta}\cdot m} <$$

$$< c_0' x^l \sqrt{k} \log k \sum_{m<x^\beta} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{c_4'}}\right)^m} < c_6 x^l \sqrt{k} \log k \qquad \left(c_6 = \frac{c_0'}{e^{\frac{1}{c_4'}}-1}\right).$$

Míg B abszolút értékére a következő felső becslés adódik:

$$|B| = \left|\sum_{i\leqq l+1} D_i^l \sum_{d\leqq x^{1-\beta}} \chi(d)\, \vartheta_d^i d^l\right| < \sum_{i\leqq l+1} c_3 l^{l-i} \sum_{d\leqq x^{1-\beta}} d^l <$$

$$< \sum_{i\leqq l+1} c_3 l^{l-i} x^{(1-\beta)(l+1)} < c_3 l^l x^{(1-\beta)(l+1)}.$$

Így az eddig levezetett összefüggések alapján

$$\frac{c_1}{\sqrt{l+1}} x^l \sqrt{x} < \Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \frac{x^{l+1}}{l+1} \sum_{d\leqq x^{1-\beta}} \frac{\chi(d)}{d} + A - B + \Sigma_2$$

$$\frac{x^{l+1}}{l+1} \sum_{d\leqq x^{1-\beta}} \frac{\chi(d)}{d} > \frac{c_1}{\sqrt{l+1}} x^l \sqrt{x} - |A| - |\Sigma_2| - |B| >$$

$$> \frac{c_1}{\sqrt{l+1}} x^l \sqrt{x} - c_7 \sqrt{k} \log k\, x^l - c_3 l^l x^{(1-\beta)(l+1)} \qquad (c_7 = c_5 + c_6)$$

$$\sum_{d\leqq x^{1-\beta}} \frac{\chi(d)}{d} > \frac{c_1\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} - \frac{c_7(l+1)\sqrt{k}\log k}{x} - \frac{c_3(l+1)l^l}{x^{\beta(l+1)}}.$$

Az előzőkhöz hasonlóan

$$\left|\sum_{x^{1-\beta}<d<\infty} \frac{\chi(d)}{d}\right| < \frac{c_0'\sqrt{k}\log k\, x^\beta}{x} < \frac{c_8(l+1)\sqrt{k}\log k}{x} \qquad (c_8 = c_0' c_4').$$

Tehát végül azt kaptuk, hogy

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} > \frac{c_1\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} - \frac{c_2(l+1)\sqrt{k}\log k}{x} - \frac{c_3(l+1)l^l}{x^{\beta(l+1)}} \quad (c_2 = c_7 + c_8).$$

Már a $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} \geqq 0$ teljesüléséhez is szükséges, hogy

$$\frac{c_1\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} \leqq \frac{c_2(l+1)\sqrt{k}\log k}{x}, \tag{1}$$

azaz $\sqrt{x} \geqq \frac{c_2}{c_1}\sqrt{k}\log k$ álljon, de ekkor $\frac{c_1\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\frac{c_1^2}{c_2}}{\sqrt{k}\log k}$, tehát a $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d}$ összegre $\frac{c}{\sqrt{k}\log k}$-nál jobb alsó korlátot nem kaphatunk. Célunk tehát x, l, β, olyan megválasztása, hogy a $\frac{c}{\sqrt{k}\log k}$ értéket kapjuk alsó korlátként.

Mindenesetre ha $\sqrt{x} = c_9\sqrt{l+1}\sqrt{k}\log k$, és c_9 elég nagy, akkor (1) fennáll, és a $\frac{c}{\sqrt{k}\log k}$ határ is elérhető. $\frac{c_1\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} > \frac{c_3(l+1)l^l}{x^{\beta(l+1)}}$ teljesítése érdekében, bevezetve az $\alpha = \beta - \frac{1}{2(l+1)}$ jelölést, α-t úgy választjuk, hogy $x^{\beta(l+1)-\frac{1}{2}} = x^{\alpha(l+1)} > \frac{c_3}{c_1}\sqrt{l+1}\, l^l$ fennálljon, azaz például $\alpha = \log_x l$ megfelelő.

Ekkor már csak a bizonyításban már felhasznált feltételt, az $1 < c_4 \leqq \frac{x^{\beta}}{l} = x^{\frac{1}{2(l+1)}} \leqq c_4'$ összefüggést kell kielégíteni. De mivel $x^{\frac{1}{2(l+1)}} \sim k^{\frac{1}{2(l+1)}}$, ezt $l+1 \sim \log k$ választással biztosíthatjuk.

Legyen tehát az eddigi megfontolások alapján

$$l = [\log k], \quad x = \left(\frac{3c_2}{c_1}\sqrt{l+1}\,\sqrt{k}\log k\right)^2, \quad \alpha = \log_x l \quad \left(\beta = \frac{1}{2(l+1)} + \log_x l\right).$$

Ekkor

$$\frac{\frac{c_1}{3}\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} = \frac{c_2(l+1)\sqrt{k}\log k}{x} \tag{1}$$

$$\frac{\frac{c_1}{3}\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} = \frac{c}{\sqrt{k}\log k} \quad \text{ha} \quad c = \left(\frac{c_1}{3}\right)^2 c_2. \tag{2}$$

Továbbá $x^{\beta(l+1)-\frac{1}{2}} = x^{\alpha(l+1)} = l^{l+1} > \frac{3c_3}{c_1}\sqrt{l+1}\, l^l$, amiből

$$\frac{\frac{c_1}{3}\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} > \frac{c_3(l+1)l^l}{x^{\beta(l+1)}}. \tag{3}$$

Valamint teljesülnek az előzetes feltételek is, hisz

$$1 < c_4 = \sqrt{e} = (e^{l+1})^{\frac{1}{2(l+1)}} < x^{\frac{1}{2(l+1)}} = x^{\beta-\alpha} = \frac{x^\beta}{l} =$$

$$= x^{\frac{1}{2(l+1)}} < \left(e^{l+1}(l+1)^4\right)^{\frac{1}{2(l+1)}} < \sqrt{e}(1+\varepsilon) = c_4'$$

és $x^\beta < c_4' l < x$, azaz $\beta > 1$.

De ekkor az (1), (2) és (3) összefüggésekből következik, hogy

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} > \frac{c_1\sqrt{l+1}}{\sqrt{x}} - \frac{c_2(l+1)\sqrt{k}\log k}{x} - \frac{c_3(l+1)l^l}{x^{\beta(l+1)}} > \frac{c}{\sqrt{k}\log k}$$

amivel a tétel bizonyítást nyert.

Megjegyzés: (1) Az így kapott c effektív constans.

(2) Láttuk, hogy akárhogy is választjuk meg az x, l, β értékeket, nem kaphatunk $\frac{c}{\sqrt{k}\log k}$-nál jobb alsó korlátot. Belátjuk, hogy ezzel a módszerrel valóban ez a legjobb elérhető alsó korlát, azaz hogy a bizonyítás első részében alkalmazott becslések (legalábbis egyszerűen) nem javíthatók. A-nak $i=l$-hez tartozó tagja ugyanis $D_l^l = -\frac{1}{2}$ miatt $-\frac{1}{2}x^l \sum_{d \leqq x^{1-\beta}} \chi(d)$, amire nem adható $\frac{1}{2}cx^l\sqrt{k}\log k$-nál jobb felső becslés, míg a $\sum_{n^2 \leqq x} (x-n^2)^l > \frac{c_1}{\sqrt{l+1}} x^l\sqrt{x}$ becslés sem javítható, mivel

$$\sum_{n^2 \leqq x} (x-n^2)^l = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{\frac{i}{l}x < n^2 \leqq \frac{i+1}{l}x} (x-n^2) < \sum_{i=0}^{l-1} \left(x - \frac{i}{l}x\right)^l \left(\left[\sqrt{\frac{i+1}{l}x}\right] - \left[\sqrt{\frac{i}{l}x}\right]\right) <$$

$$< \sum_{i=0}^{l-1} x^l \left(1 - \frac{i}{l}\right)^l \sqrt{\frac{x}{l}} < \frac{x^l\sqrt{x}}{\sqrt{l}} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{e^i} < \frac{C_1}{\sqrt{l+1}} x^l\sqrt{x} \left(C_1 = \frac{e}{e-1} + \varepsilon\right).$$

IRODALOM

HAROLD DAVENPORT: Multiplicative Number Theory Markham, Chicago, 1967.

A. O. GELFOND: On an elementary approach to some problems from the field of distribution of prime numbers. Vestnik. Moskov. Univ. Ser. Fiz. Mat. Estest. Nauk 8 21—26 (1953).

Mathematical Reviews 1954. 5. 402. o.: Schoenfeld referátuma Gelfond fenti cikkéről.

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕТА

Я. ПИНТЦ

ON A POINT IN THE THEORY OF DIRICHLET'S L FUNCTIONS

J. PINTZ

A LAGUERRE-POLINOMOK GYÖKEIN ALAPULÓ LAGRANGE-FÉLE INTERPOLÁCIÓRÓL

NÉVAI G. PÁL

0. §. BEVEZETÉS

Legyen $f(x)$ olyan a $[0, \infty)$ intervallumon folytonos függvény, hogy

$$\lim_{\delta \to 0} \bar{\omega}_r(f; \delta) = 0$$

valamilyen r természetes számra, ahol $\bar{\omega}_r(f; \delta)$ az $f(x^2)$ függvény r-ik simasági modulusa, vagyis

$$\bar{\omega}_r(f; \delta) = \sup_{x,\, x+rh \in [0,\, \infty),\, |h| \leq \delta} \left| \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f((x+ih)^2) \right|.$$

Legyenek továbbá

$$x_{1n} > x_{2n} > \cdots > x_{nn} \tag{1}$$

az $x^\alpha e^{-x}$ $(\alpha > -1)$ súlyfüggvényhez tartozó a $[0, \infty)$ intervallumon ortogonális Laguerre-polinomok, vagyis az

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha} \Gamma(n+1)^{-1} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})$$

polinomok gyökei. Az (1) alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinomok legyenek

$$l_{kn}(x) = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_{kn})(x - x_{kn})}.$$

Legyen továbbá

$$L_n(x, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) l_{kn}(x)$$

az $f(x)$ függvényt az (1) alappontokban interpoláló Lagrange-parabola.

A jelen dolgozatban meg fogom mutatni, hogy

$$|f(x) - L_n(x, f)| \leq (C \log n + C e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}) \bar{\omega}_r(f; n^{-\frac{1}{2}}) + C e^{\frac{x}{2}} e^{-cn} [\|f\| + \bar{\omega}_r(f; r^{-1})]^*,$$

ahol $0 \leq x < \infty$ és

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|. \tag{2}$$

* Minden pozitív, n-től és x-től független konstansot C-vel jelölünk, két C még egy formulán belül is különbözhetik egymástól.

A jobb oldali első két C konstansot nem lehet valamilyen nullához tartó $\{\varepsilon_n\}$ sorozattal helyettesíteni. Továbbá, ha $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} L_n(0,f)=f(0).$$

Freud Géza az [1] dolgozatában az Hermite-polinomok gyökein alapuló Lagrange-féle interpoláció konvergenciáját vizsgálta. Az $L^{(\alpha)}(x^2)$, ha $\alpha=-\frac{1}{2}$, a $2n$ fokszámú Hermite-polinommal arányos (l. Szegő [2] 5.6.1.), tehát eredményeim az $\alpha=-\frac{1}{2}$ esetében ismertek voltak. Megjegyzem még, hogy Freud Géza a [3] dolgozatában a $-1<\alpha\leqq-\frac{1}{2}$ esetet is vizsgálta, és az ott található, erre az esetre vonatkozó tétel következik a jelen dolgozat 2. Tételéből.

Dolgozatom témáját Freud Gézától kaptam, aki munkámat mindvégig figyelemmel kísérte. Sok bizonyítás alapgondolata tőle származik, még akkor is, ha erre nem utalok a megfelelő helyen. Ez úton szeretném megköszönni Freud Gézának a segítséget, amely nélkül nem tudtam volna megbirkózni feladatommal.

1. §. NÉHÁNY ISMERT ÖSSZEFÜGGÉS

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az $a\overset{(c)}{=}b$ ($\overset{(c)}{\leqq}$, $\overset{(c)}{\geqq}$, $\overset{(c)}{\sim}$) kifejezés az alábbiakban azt jelenti, hogy $a=b$ a (c) formula következtében. Ezt a jelölést annak reményében vezettük be, hogy az Olvasó könnyebben el tud majd igazodni a sok képlet között.

Jelöljük

$$l_n^{(\alpha)}(x)=[\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\alpha)^{-1}]^{1/2}(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x)=\gamma_n x^n+\cdots$$

az $x^\alpha e^{-x}$ súlyfüggvényhez tartozó, a $[0,\infty)$ intervallumon ortogonális normált polinomokat, ahol

$$\gamma_n=[\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\alpha)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Jelöljük továbbá $\lambda_{kn}=\lambda_{kn}^{(\alpha)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, ill. $\lambda_n(x)=\lambda_n^{(\alpha)}(x)$ az $x^\alpha e^{-x}$ súlyra vonatkozó Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratúra eljárás Christoffel-féle számait, ill. Christoffel-féle függvényét (l. Freud [4] I. §. I. 3.). Megjegyezzük, hogy $\lambda_n(x_{kn})=\lambda_{kn}$.

Ismert, hogy (l. Freud [4] I.4.1 és I.4.3)

$$l_{kn}(x)=\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\lambda_{kn}\frac{l_{n-1}^{(\alpha)}(x_{kn})}{x-x_{kn}}l_n^{(\alpha)}(x), \tag{4}$$

valamint (l. Freud [4] I.4.7)

$$\lambda_n(x)^{-1}=K_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}^{-1}l_{kn}^2(x)=\sum_{k=0}^{n-1}[l_k^{(\alpha)}(x)]^2. \tag{5}$$

Az alábbi három összefüggés a Szegő [2] könyv (6.31.12), (8.1.4), (6.31.7), (6.31.11) és (1.71.7) formuláiból következik. ((6) és (7) valójában csak $n>C$ esetén

teljesül, de a dolgozat összes, valamilyen egyenlőtlenséget tartalmazó állítása triviális, ha $n<C$.)*

$$x_{nn} > \frac{\tau}{2n}, \tag{6}$$

$$x_{1n} < 5n, \tag{7}$$

$$x_{kn} \sim \frac{(n-k+1)^2}{n}. \tag{8}$$ **

Tekintsük a következő függvényt

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^{-1}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq n^{-1} \\ \left(\dfrac{x}{4n-x}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{ha} \quad n^{-1} < x \leqq 4n - 4n^{\frac{1}{3}} \\ n^{\frac{1}{3}}, & \text{ha} \quad x > 4n - 4n^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \tag{9}$$

A fenti jelölések mellett

$$x_{kn} - x_{k+1,n} \sim \varphi_n(x_{kn}) \tag{10}$$

(l. Freud [5] 2.2. Tétel). Továbbá

$$\sqrt{x_{kn}} - \sqrt{x_{k+1,n}} > C n^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

(l. Szegő [2] 35. feladat). A

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} x_{kn}^{\beta} e^{\frac{x_{kn}}{2}} \leqq \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta} e^{-\frac{x}{2}} dx, \qquad \beta = 0, 1, \tag{12}$$

egyenlőtlenséggel kapcsolatban l. Balázs János—Turán Pál [6] vagy Freud [4] III. Lemma 1.5.

Fontos szerepet fog játszani a

$$\lambda_{kn} \sim \varphi_n(x_{kn}) x_{kn}^{\alpha} e^{-x_{kn}}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \quad \alpha > -1 \tag{13}$$

reláció, amelyet Freud Géza az $\alpha \geqq 0$ esetre mutatott meg ([5] 4.1. Tétel), és amely akkor is érvényben marad, ha $-1 < \alpha < 0$. Ezt bebizonyítandó vegyük észre, hogy

$$\lambda_{kn}^{(\alpha)} = x_{kn}^{-1} \min_{\pi_{n-1}(x_{kn})^2 = 1} \int_0^{\infty} x \pi_{n-1}(x)^2 x^{\alpha} e^{-x} dx = x_{kn}^{-1} \lambda_n^{(\alpha+1)}(x_{kn}),$$

ahol $\pi_{n-1}(x)$ legfeljebb $(n-1)$ fokszámú polinom (l. Freud [4] I.4.1. Tétel és annak bizonyítása, valamint I.3.9), és

$$\lambda_n^{(\alpha+1)}(x_{kn}) \sim (\varphi_n(x_{kn}) x_{kn}^{\alpha+1} e^{-x_{kn}}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \quad \alpha > -1$$

(l. Freud [5] 4.1. Tétel). (13) következik a fentebbi két formulából.

* $\tau = \left(\dfrac{j_1}{2}\right)^2$, ahol j_1 a $J_{\alpha}(x)$ Bessel-függvény legkisebb pozitív gyöke.

** $a \sim b$ azt jelenti, hogy $C \leqq ab^{-1} < C$.

A Laguerre-polinomokra vonatkozó aszimptotikus formulákból következnek az alábbi egyenlőtlenségek

$$|l_n^{(\alpha)}(x)| < Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{ha} \quad \frac{\tau}{4n} \leqq x \leqq n \qquad (8.22.6,\ 8.22.9), \tag{14}$$

$$|l_n^{(\alpha)}(x)| < Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{12}}, \quad \text{ha} \quad x \geqq 1 \qquad (8.91.2), \tag{15}$$

$$|l_n^{(\alpha)}(x)| < Cn^{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\tau}{4n} \qquad (7.6.8), \tag{16}$$

$$|l_n^{(\alpha)}(0)| \sim n^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (5.1.7) \tag{17}$$

(a jobboldali zárójelekben levő számok a Szegő [2] könyv megfelelő formuláira utalnak). Ugyanennek a könyvnek a 7.6.2. Tételéből következik, hogy minden $x_{kn} \in [2, n]$ gyökhöz található egy olyan $y \in [x_{k+1,n}, x_{kn}]$, hogy

$$|l_n^{(\alpha)}(y)| > Ce^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}}. \tag{18}$$

A továbbiakban szükség lesz a következő, Freud Gézától származó tételre (l. [7]).

Legyen $Q(x)>0$ egy olyan az egész valós tengelyen folytonosan differenciálható páros függvény, hogy $xQ'(x)$ növekszik, ha $x>0$, és $Q'(x) \to \infty$, midőn $x \to \infty$. Jelöljük q_n-nel az $xQ'(x)=n$ egyenlet egyetlen pozitív megoldását. Legyen továbbá $f(x)$ egy olyan az egész $(-\infty, \infty)$ intervallumban folytonos függvény, hogy

$$\omega_r(f; \delta) = \sup_{\substack{|h| \leqq \delta \\ -\omega < x < \omega}} \left| \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+ih) \right| \to 0 \quad (\delta \to 0)$$

valamilyen r természetes számra. Ekkor létezik egy olyan $\{\Pi_n(x)\}$ polinomsorozat, hogy egyrészt $\Pi_n(x)$ fokszáma legfeljebb n, másrészt, ha $n>r$ és $q_n>1$, akkor

$$|f(x)-\Pi_n(x)| \leqq \begin{cases} A_r \omega_r(f; n^{-1}q_n), & \text{ha} \quad |x| \leqq 4q_n \\ e^{Q(x)} B_r(Q) e^{-K_r(Q)n} [\|f\| + \omega_r(f; r^{-1})], & \text{ha} \quad |x| > 4q_n, \end{cases}$$

ahol A_r, $B_r(Q)$, $K_r(Q)$ olyan pozitív konstansok, amelyek csak r-től, ill. r- és $Q(x)$-től függenek, és

$$\|f\| = \max_{|x| \leqq 1} |f(x)|.$$

Megjegyezzük, hogy ha $f(x)$ páros vagy páratlan függvény, akkor a $\Pi_n(x)$ polinomokat is választhatjuk párosnak, ill. páratlannak.

2. §. A LEBESGUE-FÜGGVÉNY BECSLÉSÉNEK ELŐKÉSZÍTÉSE

1. LEMMA.

$$|l_{kn}(x)| = |l_n^{(\alpha)}(x)| \cdot \frac{\sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}}}{|x - x_{kn}|}, \tag{19}$$

ha $k=1, 2, \ldots, n$.

A bizonyításhoz szükségünk van a Christoffel—Darboux-féle összegképletre, amely szerint

$$(20)\qquad K_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n-1} l_i^{(\alpha)}(x)l_i^{(\alpha)}(y)=\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\frac{l_{n-1}^{(\alpha)}(x)l_n^{(\alpha)}(y)-l_n^{(\alpha)}(x)l_{n-1}^{(\alpha)}(y)}{x-y}$$

(l. Freud [4] I.4.3). Ha $x=y=x_{kn}$, akkor

$$(21)\qquad \lambda_{kn}^{-1}\overset{(5)}{=}K_n(x_{kn})\overset{(5)}{=}K_n(x_{kn},x_{kn})\overset{(20)}{=}\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}l_n^{(\alpha)\prime}(x_{kn})l_{n-1}^{(\alpha)}(x_{kn}).$$

Jól ismert, hogy a Laguerre-polinomok eleget tesznek a következő egyenlőségnek

$$(22)\qquad l_n^{(\alpha)\prime}(x_{kn})=\frac{\sqrt{(n+\alpha)n}}{x_{kn}}l_{n-1}^{(\alpha)}(x_{kn})$$

(l. Szegő [2] 5.1.14). Tehát

$$|l_{n-1}^{(\alpha)}(x_{kn})|\overset{(21,22)}{=}[n(n+\alpha)]^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x_{kn}}{\lambda_{kn}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Innen

$$|l_{kn}(x)|\overset{(4)}{=}|l_n^{(\alpha)}(x)|\frac{\sqrt{\lambda_{kn}x_{kn}}}{|x-x_{kn}|}[n(n+\alpha)]^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Továbbá

$$\left(\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\right)^{\frac{1}{2}}\overset{(3)}{=}[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{4}}.$$

(19) következik az utóbbi két egyenlőségből.

2. Lemma. Az (5) formulával meghatározott $K_n(x)$ függvény eleget tesz a következő egyenlőtlenségeknek

$$(23)\qquad K_n(x)\leqq\begin{cases}Cn^{\alpha+1}, & \text{ha}\quad 0\leqq x\leqq\dfrac{\tau}{4n}\\[2ex] Ce^x x^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}, & \text{ha}\quad \dfrac{\tau}{4n}<x<\infty.\end{cases}$$

Bizonyítás: A Hille—Hardy-féle képlet szerint (l. Bateman—Erdélyi [8], 10.12.20)

$$\sum_{k=0}^{\infty}[l_k^{(\alpha)}(x)]^2w^k=(1-w)^{-1}\exp\left\{\frac{-2xw}{1-w}\right\}x^{-\alpha}w^{-\frac{\alpha}{2}}I_\alpha\left(\frac{2xw^{\frac{1}{2}}}{1-w}\right),\quad |w|<1,$$

ahol az $I_\alpha(z)$ az elsőfajú modifikált Bessel-függvény. Ha $w=\left(1-\frac{1}{n}\right)$, akkor

$$(24)\qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n K_n(x)\overset{(5)}{\leqq}\sum_{k=0}^{\infty}[l_k^{(\alpha)}(x)]^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=$$

$$=n\exp\left\{-2xn\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}x^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}I_\alpha\left[2xn\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

A Bateman—Erdélyi [8] könyv 7.2.1.12 és 7.13.1.5 formuláiból következik, hogy

$$I_\alpha(z) \leqq \begin{cases} Cz^\alpha & \text{ha } 0 \leqq z \leqq C \\ Ce^z z^{-\frac{1}{2}}, & \text{ha } C \leqq z < \infty. \end{cases} \tag{25}$$

Tekintettel arra, hogy $\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, ha $n \to \infty$,

$$K_n(x) \overset{(24,25)}{\leqq} Cnx^{-\alpha}(nx)^\alpha = Cn^{\alpha+1}, \quad 0 \leqq nx \leqq C$$

és

$$K_n(x) \overset{(24,25)}{\leqq} Cnx^{-\alpha}(nx)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{2xn\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{n}\right]\right\} \leqq Ce^x x^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}, \quad C \leqq nx < \infty.$$

3. LEMMA. Ha $a = a(n) \geqq 1$ tetszőleges valós szám, akkor

$$\sum_{0 < x_{kn} \leqq a} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \sim n^{\frac{1}{4}}. \tag{26}$$

Bizonyítás:

$$\sum_{0 < x_{kn} \leqq a} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \geqq \sum_{0 < x_{kn} \leqq 1} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \overset{(8,9,13)}{>} C \sum_{k=1}^{C\sqrt{n}} k^{\alpha-\frac{3}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}-1} > Cn^{\frac{1}{4}}$$

Továbbá

$$\sum_{0 < x_{kn} \leqq a} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \leqq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} x_{kn} e^{\frac{x_{kn}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{x_{kn}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\overset{(12)}{\leqq} \left(\int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{x_{kn}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(8)}{\leqq} C\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k^2}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq C\left(\int_1^n e^{-\frac{k^2}{n}} d_k\right)^{\frac{1}{2}} = Cn^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{e^{-\frac{k^2}{n}}}{\left(\frac{k^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} d\frac{k^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq Cn^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq Cn^{\frac{1}{4}}.$$

4. LEMMA. Ha $\frac{\tau}{4n} < x < n$, akkor

$$\sum_{|x-x_{kn}| \geqq 1} |l_{kn}(x)| \leqq Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}. \tag{27}$$

Bizonyítás:

$$\sum_{|x-x_{kn}| \geqq 1} |l_{kn}(x)| \overset{(19)}{=} \sum_{|x-x_{kn}| \geqq 1} |l_n^{(\alpha)}(x)| \frac{\sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}}}{|x-x_{kn}|} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |l_n^{(\alpha)}(x)| \cdot \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \overset{(14,26)}{\leqq} Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}.$$

5. LEMMA. Legyen $d = 2\alpha+3$. Ekkor

$$(28)\qquad \sum_{x_{kn}>d\log n} |l_{kn}(x)| \leqq \begin{cases} C, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \dfrac{\tau}{4n} \\ Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \text{ha} \quad x > \dfrac{\tau}{4n}. \end{cases}$$

Bizonyítás:

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| e^{\frac{x_{kn}}{4}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{l_{kn}^2(x)}{\lambda_{kn}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} e^{\frac{x_{kn}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\overset{(5,12)}{\leqq} K_n(x)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(23)}{\leqq} \begin{cases} Cn^{\frac{\alpha+1}{2}}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \dfrac{\tau}{4n} \\ Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}}, & \text{ha} \quad \dfrac{\tau}{4n} \leqq x < \infty. \end{cases}$$

Ha $x_{kn} > d \log n$, akkor $e^{\frac{x_{kn}}{4}} > n^{\frac{\alpha+1}{2}+\frac{1}{4}}$, tehát (28) valóban teljesül.

6. LEMMA.

$$(29)\qquad \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \leqq Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad \text{ha} \quad x \geqq n$$

és

$$(30)\qquad \limsup_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \leqq Cn^{\frac{1}{6}}.$$

Bizonyítás:

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{x_{kn}\leqq d\log n} |l_{kn}(x)| + \sum_{x_{kn}>d\log n} |l_{kn}(x)| \leqq$$

$$\overset{(28)}{\leqq} Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} + \sum_{x_{kn}\leqq d\log n} |l_{Kn}(x)| \leqq$$

$$\overset{(19)}{\leqq} Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} + |l_n^{(\alpha)}(x)| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}}}{n - d\log n} \overset{(15,26)}{\leqq} Ce^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad \text{ha} \quad x \geqq n.$$

(30) bizonyítását a következőképpen végezzük el.

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \overset{(15,19)}{\leqq} Cn^{-\frac{1}{12}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \frac{x}{|x - x_{kn}|} \leqq$$

$$\overset{(7)}{\leqq} Cn^{-\frac{1}{12}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}} \overset{(26)}{\leqq} Cn^{\frac{1}{6}},$$

hogyha $x \to +\infty$.

7. LEMMA. Ha $0 \leqq x \leqq \frac{\tau}{4n}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \leqq \begin{cases} Cn^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \text{ha} \quad \alpha > -\frac{1}{2} \\ C \log n, & \text{ha} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \\ C, & \text{ha} \quad -1 < \alpha < -\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{31}$$

sőt, ha $x=0$, akkor a $\leqq$ jelet helyettesíthetjük a $\sim$ jellel.

Bizonyítás: Ha $0 \leqq x \leqq \frac{\tau}{4n}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \overset{(19)}{=} |l_n^{(\alpha)}(x)| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}}}{|x - x_{kn}|} \overset{(6)}{\sim} |l_n^{(\alpha)}(x)| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{kn}}{x_{kn}}\right)^{\frac{1}{2}} \sim$$

$$\overset{(8,9,13,28)}{\sim} n^{-\frac{1}{4}} |l_n^{(\alpha)}(x)| \sum_{k=1}^{C\sqrt{n \log n}} x_{n-k+1,n}^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x_{n+k+1,n}}{2}} + C \sim$$

$$\overset{(8)}{\sim} n^{-\frac{1}{4}} |l_n^{(\alpha)}(x)| \int_{1}^{C\sqrt{n \log n}} \left(\frac{k^2}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{k^2}{n}} d_k \sim n^{\frac{1}{4}} |l_n^{(\alpha)}(x)| \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} dt.$$

Ha $\alpha > -\frac{1}{2}$, akkor az utóbbi integrál konvergál, ha $\alpha = -\frac{1}{2}$, akkor $\log n$ nagyságrendű, ha pedig $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, akkor $n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$ nagyságrendű lesz. Tehát, ha $0 \leqq x \leqq \frac{\tau}{4n}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \sim |l_n^{(\alpha)}(x)| \cdot \begin{cases} n^{\frac{1}{4}}, & \text{ha} \quad \alpha > -\frac{1}{2} \\ \log n \cdot n^{\frac{1}{4}}, & \text{ha} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \\ n^{-\frac{\alpha}{2}}, & \text{ha} \quad -1 < \alpha < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

A Lemma állítása a (16), ill (17) és az utóbbi formula következménye.

8. LEMMA. Ha $\frac{\tau}{4n} < x < n$ és $|x - x_{kn}| \leqq 2\varphi_n(x)$, akkor

$$|l_{kn}(x)| \leqq C. \tag{32}$$

Bizonyítás:

$$|l_{kn}(x)| \overset{(5)}{\leqq} (\lambda_{kn} K_n(x))^{\frac{1}{2}} \overset{(9,13,23)}{\leqq} C \left(\frac{x_{kn}}{x}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{(x-x_{kn})} \leqq$$

$$\leqq C e^{2\varphi_n(x)} \overset{(9)}{\leqq} C e^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \leqq C.$$

9. LEMMA. Ha $\frac{\tau}{4n} < x < n$, akkor

$$\sum_{2\varphi_n(x) \leqq |x - x_{kn}| \leqq 1} |l_{kn}(x) \leqq C\left(\log n + x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \tag{33}$$

Bizonyítás:

$$|l_{kn}(x)| \overset{(19)}{=} |l_n^{(\alpha)}(x)| \cdot \frac{\sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}}}{|x - x_{kn}|} \leqq$$

$$\overset{(9,13,14)}{\leqq} C x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x-x_{kn}}{2}} \varphi_n(x_{kn}) \cdot \frac{x_{kn}^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{|x - x_{kn}|} \leqq C x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int_{x_{kn}-\varphi_n(x_{kn})}^{x_{kn}+\varphi_n(x_{kn})} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{|x-t|} dt.$$

Tehát

$$\sum_{2\varphi_n(x) \leqq |x - x_{kn}| \leqq 1} |l_{kn}(x)| \leqq C x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{2\varphi_n(x) \leqq |x - x_{kn}| \leqq 1} \int_{x_{kn}-\varphi_n(x_{kn})}^{x_{kn}+\varphi_n(x_{kn})} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{|x-t|} dt.$$

Noha a jobb oldali összegben az integrálási határok fedhetik egymást, ez (10) következtében nem okoz problémát, és így elvégezvén az összegezést, továbbá az $u = |x-t|$ változót bevezetvén azt kapjuk, hogy

$$\sum_{2\varphi_n(x) \leqq |x - x_{kn}| \leqq 1} |l_{kn}(x)| \leqq C x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(t+x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{t} dt. \tag{34}$$

Ha $-1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}$, akkor

$$x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(t+x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{t} dt \leqq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dt}{t} = \log n, \tag{35}$$

ha pedig $\alpha > -\frac{1}{2}$, akkor

$$x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(t+x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{t} dt \leqq C x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} dt + C \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dt}{t} \leqq \tag{36}$$

$$\leqq C x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} + C \log n.$$

(33) következik (34), (35) és (36)-ból.

3. §. A FŐTÉTELEK

Jelöljük

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)|$$

az (1) alappontokhoz tartozó Lagrange-parabola Lebesgue-függvényét.

1. *Tétel.*

(37) $$L_n(x) \leqq C\left(\log n + e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right), \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x < \infty.$$

(38) $$L_n(x) \leqq C \log n, \quad \text{ha} \quad 0 < \varepsilon \leqq x \leqq \omega < \infty,$$

(39) $$L_n(x) \leqq C \log n, \quad \text{ha} \quad \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq \omega < \infty, \\ -1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}, \end{matrix}$$

(40) $$L_n(x) \leqq C n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, \quad \text{ha} \quad \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq \omega < \infty, \\ \alpha > -\frac{1}{2}, \end{matrix}$$

(41) $$L_n(0) \sim C, \quad \text{ha} \quad -1 < \alpha < -\frac{1}{2},$$

(42) $$\limsup_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} L_n(x) \leqq C n^{\frac{1}{6}}.$$

Bizonyítás: Ha $0 \leqq x \leqq \frac{\tau}{4n}$ vagy $x \geqq n$, akkor (37) következik (31), ill. (29)-ből.

Legyen most $\frac{\tau}{4n} < x < n$.

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| = \sum_{|x-x_{kn}| \geqq 1} |l_{kn}(x)| + \sum_{2\varphi_n(x) < |x-x_{kn}| < 1} |l_{kn}(x)| + \sum_{|x-x_{kn}| \leqq 2\varphi_n(x)} |l_{kn}(x)| \leqq$$

$$\overset{(27,33)}{\leqq} C\left(\log n + e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) + \sum_{|x-x_{kn}| \leqq 2\varphi_n(x)} |l_{kn}(x)| \leqq$$

$$\overset{(10,32)}{\leqq} C\left(\log n + e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) + C.$$

(38) és (39) következik (37)-ből, (40) és (41) (31) és (37), ill. (31)-ből, míg (42)-t a 6. Lemmában bizonyítottuk be.

2. *Tétel.* Legyen $f(x)$ olyan a $[0, \infty)$ intervallumon folytonos függvény, hogy valamilyen r természetes számra nézvést az $f(x^2)$ függvény r-ik simasági modulusa

$$\bar{\omega}_r(f; \delta) \to 0$$

ha $\delta \to 0$. Ekkor az $L_n(x, f)$ Lagrange-parabola eltérését az $f(x)$ függvénytől a következőképpen becsülhetjük.

(43) $$|f(x) - L_n(x, f)| \leqq$$

$$\begin{cases} C\left(\log n + e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \bar{\omega}_r\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right), & 0 \leqq x \leqq n \\ C e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \bar{\omega}_r\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right) + C e^{\frac{x}{2}} e^{-cn} \left[\|f\| + \bar{\omega}_r(f; r^{-1})\right], & x > n, \end{cases}$$

ahol a $\|f\|$-et a (2)-ben határoztuk meg.

Továbbá, ha $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, akkor $L_n(x, f)$ konvergál az $f(x)$ függvényhez az $x = 0$ pontban, pontosabban

(44) $$|f(0) - L_n(0, f)| \leqq C \bar{\omega}_r\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right), \quad -1 < \alpha < -\frac{1}{2}.$$

A Tétel bizonyítását az approximációelméletben immáron klasszikussá vált, még Lebesgue-től származó gondolat segítségével végezzük el, felhasználván az $L_n(x)$ Lebesgue-függvény becslését és az 1. §. végén említett Freud-tételt. Az utóbbi tételt alkalmazván a $Q(x) = \frac{x^2}{2}$ és a $g(x)=f(x^2)$ függvényekre, megállapíthatjuk, hogy létezik egy olyan $\{\Pi_n^*(x)\}$ sorozat, hogy egyrészt $\Pi_n^*(x)$ legfeljebb n-ed fokú páros polinom, másrészt

$$|g(x)-\Pi_n^*(x)| \leqq \begin{cases} C\omega_r(g; n^{-1}q_n), & \text{ha} \quad |x| \leqq 4q_n \\ Ce^{\frac{x^2}{2}} e^{-cn}[\|g\| + \omega_r(g; r^{-1})], & \text{ha} \quad |x| \geqq 4q_n, \end{cases}$$

ahol $q_n = \sqrt{n}$. Helyettesítsünk x helyébe $\sqrt{x}$-et $(x>0)$, és jelöljük a $\Pi_n^*(\sqrt{x})$ polinomokat $\Pi_n(x)$-szel. Figyelembe véve, hogy $g(\sqrt{x})=f(x)$, azt kapjuk, hogy

$$|f(x)-\Pi_n(x)| \leqq \begin{cases} C\bar{\omega}_r(f; n^{-\frac{1}{2}}), & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 16n \\ Ce^{\frac{x}{2}} e^{-cn}[\|f\| + \bar{\omega}_r(f; r^{-1})], & \text{ha} \quad x \geqq 16n. \end{cases}$$

Könnyű belátni, hogy ugyanez — más konstansokkal — igaz, ha a felső sorban $0 \leqq x \leqq 5n$, az alsóban pedig $x>n$. Tételünk állítása az 1. Tételből rögtön következik, ha tekintjük az alábbi egyenlőtlenségeknek a két szélső tagját.

$$\begin{aligned} |f(x)-L_n(x,f)| &= |f(x)-\Pi_n(x)-L_n(x, f-\Pi_n)| \leqq \\ &\leqq |f(x)-\Pi_n(x)|+|L_n(x, f-\Pi_n)| \leqq \\ &\leqq |f(x)-\Pi_n(x)|+L_n(x)\cdot \max_{0 \leqq x \leqq 5n} |f(x)-\Pi_n(x)|, \end{aligned}$$

ami abból következik, hogy $\Pi_n(x)$ fokszáma n-nél kisebb, és a Laguerre-polinomok gyökei 0 és $5n$ között helyezkednek el.

4. §. ALSÓ BECSLÉSEK

3. *Tétel.* Legyen y a $[2, n]$ intervallumnak egy olyan pontja, hogy (18) teljesül. Ebben az esetben

$$L_n(y) \geqq C\left(\log n + e^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}\right). \tag{45}$$

Bizonyítás: Világos, hogy

$$L_n(y) \geqq \sum_{0<x_{kn}\leqq 1} |l_{Kn}(y)| + \sum_{y-1<x_{kn}<y} |l_{kn}(y)| = A + B. \tag{46}$$

Továbbá, mivel $y \in [2, n]$,

$$A \overset{(19)}{\geqq} \sum_{0<x_{kn}\leqq 1} |l_n^{(\alpha)}(y)| \frac{\sqrt{\lambda_{kn}x_{kn}}}{y+x_{kn}} \geqq \tag{47}$$

$$\overset{(18)}{\geqq} Ce^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \sum_{0<x_{kn}\leqq 1} \sqrt{\lambda_{kn}x_{kn}} \overset{(26)}{\geqq} Ce^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}.$$

Ha

$$\log n < e^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}},$$

akkor (45) teljesül. Tegyük fel, hogy ez nem így van. Ekkor (9) és (10) következtében az $(y-1, y)$ intervallumon több, mint $Cn^{\frac{1}{2}}$ számú x_{kn} gyök helyezkedik el. Tehát

$$B \overset{(18,19)}{\geqq} Ce^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \sum_{y-1<x_{kn}<y} \frac{\sqrt{\lambda_{kn} x_{kn}}}{y-x_{kn}} \geqq$$

$$\overset{(9,13)}{\geqq} Cn^{-\frac{1}{2}} \sum_{y-1<x_{kn}<y} e^{\frac{y-x_{kn}}{2}} \left(\frac{x_{kn}}{y}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \frac{x_{kn}^{\frac{1}{2}}}{y-x_{kn}} \geqq \tag{48}$$

$$\geqq Cn^{-\frac{1}{2}} \sum_{y-1<x_{kn}<y} \frac{x_{kn}^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{y}-\sqrt{x_{kn}})(\sqrt{y}+\sqrt{x_{kn}})} \overset{(11)}{\geqq} Cn^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{Cn^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{kn^{-\frac{1}{2}}} \geqq C \log n.$$

(45) következik (46), (47) és (48)-ból.

Az imént bebizonyított Tételt használjuk majd fel a következő Tétel bizonyításánál. Megjegyezzük, hogy a 4. Tétel bizonyítása ugyanúgy, mint a 2. Tételé, egy régi, jól bevált módszerre alapul.

4. *Tétel.* Létezik egy olyan $\{f_n\}$ a $[0, \infty)$ intervallumon egyenletesen folytonos, korlátos függvények sorozata, és egy olyan $\{y_n\}$ számsorozat, hogy

$$|f_n(y_n) - L_n(y_n, f_n)| \geqq C(\log n + e^{\frac{y_n}{2}} y_n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}) \bar{\omega}_r(f_n; n^{-\frac{1}{2}}). \tag{49}$$

Bizonyítás: Az $\{y_n\}$ sorozatot úgy választjuk meg, hogy (18) teljesüljön. Legyen

$$f_n(x_{kn}) = \operatorname{sign} l_{kn}(y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

és

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n(x_{nn}), & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq x_{nn} \\ f_n(x_{1n}), & \text{ha} \quad x > x_{1n}. \end{cases}$$

A többi pontban határozzuk meg az $f_n(x)$ függvényt lineáris interpolációval. Világos, hogy

$$\bar{\omega}_r(f_n; \delta) \leqq 2^r \max_{0 \leqq x < \infty} |f_n(x^2)| = 2^r \tag{50}$$

és

$$L_n(y_n, f_n) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(y_n)| = L_n(y_n). \tag{51}$$

Tételünk állítása most már (45), (50) és (51)-ből következik.

Az 5. Tétel bizonyítása már lényegesen bonyolultabb lesz. Az 5. Tételt az $\alpha = -\frac{1}{2}$ esetre Freud Géza [1] mondta ki és bizonyította be. Az általános eset bizonyítása nem más, mint a speciális esetre Freud Géza által adott bizonyítás modifikálása.

5. *Tétel.* Legyen $\omega(\delta)$ folytonossági modulusok majoránsa, vagyis

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(\delta) \uparrow \delta, \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leqq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \quad (0 < \delta_1, \delta_2). \tag{52}$$

Létezik egy olyan a $[0, \infty)$ intervallumon egyenletesen folytonos, korlátos $F(x)$ függvény, hogy

$$\bar{\omega}_1(F; \delta) \leqq C\omega(\delta), \tag{53}$$

és léteznek olyan $\{n_i\}$ és $\{y_i\}$ természetes, ill. pozitív valós számoknak a sorozatai, hogy

$$|F(y_i)-L_{n_i}(y_i,F)|\leqq C\left(\log n_i+e^{\frac{y_i}{2}}y_i^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)\omega\left(n_i^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{54}$$

Bizonyítás: Először is meghatározzuk a keresett $F(x)$ függvényt és az $\{n_i\}$, $\{y_i\}$ sorozatokat. Legyen $\{n_i\}$ és $\{y_i\}$ olyan természetes, ill. pozitív valós számoknak a növekvő sorozata, hogy az y_i pont kielégíti a (18) relációt, vagyis $2\leqq y_i\leqq n_i$ és

$$|l_{n_i}^{(\alpha)}(y_i)|\leqq Ce^{\frac{y_i}{2}}y_i^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n_i^{-\frac{1}{4}}, \tag{55}$$

továbbá

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[(\sqrt{y_i}-2)^2,(\sqrt{y_i}+2)^2]=\emptyset,$$

ahol $\{n_i\}$ olyan gyorsan növekvő sorozat, hogy

$$e^{\frac{y_i}{2}}y_i^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}=o(\log n_i). \tag{56}$$

Tekintsük rögzített i mellett az olyan k indexeket, hogy

$$x_{k,n_i}\in[(\sqrt{y_i}-1)^2,y_i].$$

Legyen ekkor

$$F(x_{k,n_i})=\omega(n_i^{-\frac{1}{2}})\operatorname{sign} l_{k,n_i}(y_i). \tag{57}$$

Jelöljük y_i^* és y_i^{**} a $(\sqrt{y_i}-1)^2$-től balra eső legnagyobb, ill. az y_i-től jobbra eső legkisebb x_{k,n_i} gyököt. Legyen

$$F(0)=F(y_i^*)=F(y_i^{**})=F(+\infty)=0,\qquad i=1,2,\ldots.$$

Azokban a pontokban, ahol eddig még nem határoztuk meg az $F(x)$ függvényt, legyen a $G(x)=F(x^2)$ függvény lineáris. Most már az $F(x)$ függvény ismert a félegyenes minden pontjában. Világos, hogy $F(x)$ egyenletesen folytonos, korlátos, továbbá $|F(x)|\leqq\omega(1)$.

Megmutatjuk, hogy (53) teljesül, vagyis

$$|G(x+h)-G(x)|\leqq C\omega(h)$$

tetszőleges $h(>0)$-ra. Ha $h\geqq 1$, akkor

$$|G(x+h)-G(x)|\leqq 2\omega(1)\overset{(52)}{\leqq}2\omega(h). \tag{58}$$

Legyen most $h<1$. Ha $x, x+h\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}(\sqrt{y_i^*},\sqrt{y_i^{**}})$, akkor $G(x)=G(x+h)=0$. Ha x vagy $x+h\in(\sqrt{y_{i_0}^*},\sqrt{y_{i_0}^{**}})$, akkor a másik pont nem tartozhatik bele valamilyen $(\sqrt{y_i^*},\sqrt{y_i^{**}})$ $(i\neq i_0)$ intervallumba. Tehát

$$|G(x+h)-G(x)|\leqq 2\omega(n_{i_0}^{-\frac{1}{2}})\overset{(52)}{\leqq}2\omega(h),\quad h\geqq n_{i_0}^{-\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Ha $h<n_{i_0}^{-\frac{1}{2}}$, akkor mivel $G(x)$ x és $x+h$ között szakaszosan lineáris

$$|G(x+h)-G(x)| \leqq h \cdot \max_{x \leqq t \leqq x+h} |G'(t)| \tag{60}$$

és

$$\max_{x \leqq t \leqq x+h} |G'(t)| \overset{(57)}{\leqq} \frac{\omega(n_{i_0}^{-\frac{1}{2}})}{\min\limits_{1 \leqq k \leqq n_{i_0}} (\sqrt{x_{k,n_{i_0}}} - \sqrt{x_{k+1,n_{i_0}}})} \overset{(11)}{\leqq} C n_{i_0}^{\frac{1}{2}} \omega(n_{i_0}^{-\frac{1}{2}}). \tag{61}$$

Tehát

$$|G(x+h)-G(x)| \overset{(60,61)}{\leqq} \frac{ch}{n_{i_0}^{-\frac{1}{2}}} \omega(n_{i_0}^{-\frac{1}{2}}) \leqq c\omega(h), \quad h<n_{i_0}^{-\frac{1}{2}} \tag{62}$$

(a legutolsó egyenlőtlenség a majoránsoknak egy jól ismert tulajdonsága). (53) következik (58), (59) és (62)-ből.

Rátérünk a Lagrange-parabolák eltérésének a becslésére, vagyis megmutatjuk, hogy az $F(x)$ függvény és az $\{n_i\}$, $\{y_i\}$ sorozatok kielégítik (54)-et. Legyen

$$F_i(x) = \begin{cases} F(x), & \text{ha} \quad x \in [y_i^*, y_i^{**}] \\ 0, & \text{ha} \quad x \notin [y_i^*, y_i^{**}]. \end{cases}$$

Ekkor

$$L_{n_i}(y_i, F_i) \overset{(57)}{=} \sum_{y_i^* < x_{k,n_i} < y_i^{**}} \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) |l_{k,n_i}(y_i)| \geqq \tag{63}$$

$$\geqq \sum_{y_i - 1 < x_{k,n_i} < y_i} \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) |l_{k,n_i}(y_i)| \overset{(48,55)}{\leqq} C \log n_i \cdot \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}).$$

Jelöljük $F_i^*(x) = F(x) - F_i(x)$. Világos, hogy

$$\bar{\omega}_1(F_i^*; \delta) \leqq C\omega(\delta).$$

Az 1. §. végén megemlített Freud-tételt ugyanúgy alkalmazva, mint a 2. Tétel bizonyításánál, felépítünk egy olyan $\Phi_i(x)$ legfeljebb $\frac{n_i}{2}$ fokú polinomot, hogy

$$|F_i^*(x) - \Phi_i(x)| \leqq C\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}), \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 5n_i.$$

Legyen

$$h_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |x - \sqrt{y_i}| \leqq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad |x - \sqrt{y_i}| \geqq 2 \\ \text{lineáris}, & \text{ha} \quad 1 < |x - \sqrt{y_i}| < 2. \end{cases}$$

Tekintsük az $f_i(x) = h_i(\sqrt{x})$ függvényt. Világos, hogy $\bar{\omega}_1(f_i; \delta) \leqq C\delta$. Ismét csak a Freud-tételt alkalmazva megállapíthatjuk, hogy létezik egy olyan $\psi_i(x)$ legfeljebb $\frac{n_i}{2}$ fokú polinom, hogy

$$|f_i(x) - \psi_i(x)| \leqq C n_i^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 5n_i.$$

Tekintsük a $\Pi_i(x) = \Phi_i(x) \cdot \Psi_i(x)$ legfeljebb n_i fokszámú polinomot. Könnyen belátható, hogy

$$|F_i^*(x) - \Pi_i(x)| = |\Pi_i(x)| \leqq C n_i^{-\frac{1}{2}} \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}), \quad \text{ha} \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y_i}| \leqq 1, \tag{64}$$

és

$$|F_i^*(x) - \Pi_i(x)| \leqq |F_i^*(x) - \Phi_i(x)| + |\Phi_i(x)||f_i(x) - \Psi_i(x)| + |\Phi_i(x)|(1 - f_i(x)) \leqq$$

$$\leqq C\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) + C\omega(1) n_i^{-\frac{1}{2}} + C\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) \leqq C\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}), \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 5n_i. \tag{65}$$

Tehát

$$|F_i^*(y_i) - L_{ni}(y_i, F_i^*)| \leqq |F_i^*(y_i) - \Pi_i(y_i)| + |L_{n_i}(y_i, F_i^* - \Pi_i)| \leqq$$

$$\overset{(64,65)}{\leqq} C\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) + C \sum_{|\sqrt{x_{k,n_i}} - \sqrt{y_i}| \leqq 1} \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) \cdot n_i^{-\frac{1}{2}} |l_{k,n_i}(y_i)| +$$

$$+ C \sum_{|\sqrt{x_{kn,i}} - \sqrt{y_i}| > 1} \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) |l_{k,n_i}(y_i)| \leqq$$

$$\overset{(27)}{\leqq} C\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) + CL_{n_i}(y_i)\omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) n_i^{-\frac{1}{2}} + C \cdot e^{\frac{y_i}{2}} y_i^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \omega(n_i^{-\frac{1}{2}}) = \tag{66}$$

$$\overset{(37,56)}{=} o\left(\log n_i \cdot \omega(n_i^{-\frac{1}{2}})\right).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$|F(y_i) - L_{n_i}(y_i, F)| \geqq |L_{n_i}(y_i, F_i)| - |F_i(y_i)| - |F_i^*(y_i) - L_{n_i}(y_i, F_i^*)| \geqq$$

$$\overset{(63,66)}{\geqq} C \cdot \omega(n_i^{-\frac{1}{2}})(\log n_i - 0(\log n_i)) \overset{(56)}{\geqq} C \cdot \omega(n_i^{-\frac{1}{2}})(\log n_i + e^{\frac{y_i}{2}} y_i^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}).$$

Amit bizonyítanunk kellett.

IRODALOM

[1] FREUD, G.: Lagrangesche Interpolation über die Nullstellen der Hermiteschen Orthogonalpolynome. Studia Sci. Math. Hungar. **4** (1968), 179—190.
[2] SZEGŐ, G.: Orthogonal Polynomials, USA, 1967.
[3] FREUD, G.: Lagrange-féle interpolációs eljárások konvergenciája végtelen intervallumon. Mat. Lapok **18** (1967), 289—292.
[4] FREUD, G.: Orthogonal Polynomials, Budapest, 1971.
[5] FREUD, G.: Ortogonális polinomok egy osztályáról (oroszul), Matematicseszkije Zametki 9 (1971), 511—520.
[6] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation, VIII. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 469—474.
[7] FREUD, G.: On weighted polynomial approximation on the whole axis, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969), 223—225.
[8] BATEMAN, H.—ERDÉLYI, A.: Higher Transcendental Functions, vol. 2., New York, 1953.

О ЛАГРАНЖЕВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОСНОВАННОЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ ЛАГЕРРОВЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. П. НЕВАИ

В работе рассматриваются отклонения интерполяционных полиномов Лагранжа $L_n(x, f)$, построенных по корням многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > -1)$ от некоторой функции $f(x)$, и функции Лебега $L_n(x)$ этого же процесса.

Теорема 1. $L_n(x)$ удовлетворяет соотношениям (37)—(42).

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуоси $x \geqq 0$, и модуль гладкости порядка r функции $f(x^2)$ $\bar{\omega}_r(f; \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то тогда имеет место (43), далее если $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, то справедливо (44).

Теорема 3. Если точка $y \in [2, n]$ такова, что выполнена (18) (такие точки существуют между всякими соседними корнями n-го многочлена Лагерра), то тогда имеет место (45).

Теорема 4. Существуют последовательность равномерно непрерывных, ограниченных на полуоси $x \geqq 0$ функций $\{f_n\}$ и последовательность чисел $\{y_n\}$, такие, что выполнгяется (49).

Теорема 5. Для любой мажоранты $\omega(\delta)$, удовлетворяющей (52), существуют равномерно непрерывная, ограниченная на полуоси $x \geqq 0$ функция $F(x)$ и последовательности $\{n_i\}$ и $\{y_i\}$, такие, что выполнены (53) и (54).

LAGRANGE INTERPOLATION BASED ON THE ZEROS OF LAGUERRE POLYNOMIALS AS NODES

G. P. NÉVAI

In this paper we consider the deviation of the Lagrangean interpolation polynomials $L_n(x, f)$ over the zeros of Laguerre polynomials $L_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > -1)$ as nodes from a function $f(x)$, and investigate the Lebesgue functions $L_n(x)$ of this process.

Theorem 1. $L_n(x)$ satisfies the relations (37) up to (42).

Theorem 2. If the function $f(x)$ is continuous for $x \geqq 0$, and the modulus of continuity of r-th order of function $f(x^2)$ $\bar{\omega}r(f; \delta) \to 0$ for $\delta \to 0$ then (43) holds and if $-| < -\alpha < \frac{1}{2}$ them (44) holds.

Theorem 3. Let $y \in [2, n]$ satisfy (18) (there is such a point between any pair roots of the n-th Laguerre polynomial) then (45) holds.

Theorem 4. There is a sequence of uniformly continuous functions $\{f_n\}$, defined and bounded for $x \geqq 0$ and a sequence of numbers $\{y_n\}$ such that (49) is fulfilled.

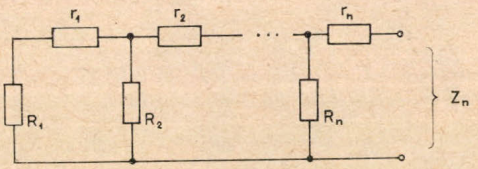
Theorem 5. For any majorant $\omega(\delta)$, satisfying (52), there is an uniformly continuous function $F(x)$, defined and bounded for $x \geqq 0$ and sequences $\{n_i\}$ and $\{y_i\}$ such that (53) and (54) are fulfilled.

A FIBONACCI-SZÁMOK ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

RECSKI ANDRÁS

I.

Az F_n Fibonacci-sorozat ($F_0=F_1=1$; $n\geqq 2$-re $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$) számos jelenség leírásánál felhasználható, például a képzőművészetben, zeneelméletben, biológiában [1]. Kevésbé ismert [2], hogy az ábrán látható elektromos hálózat Z_n eredő ellenállása is Fibonacci-számokkal fejezhető ki abban a speciális esetben, ha $r_1=r_2=\cdots=r_n=R_1=R_2=\cdots=R_n=1$. Ekkor ugyanis $Z_n=\dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$ (ugyanolyan egységben, mint amely mellett a z ábrán látható $2n$ darab tisztán ohmos ellenállás egységnyi volt). Ennél nem sokkal általánosabb, de a gyakorlatban már előforduló speciális eset, ha $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$; $R_1=R_2=\cdots=R_n=R$, de $r\neq R$. E kérdés vizsgálata veti fel az olyan sorozatok tárgyalását, amelyeket nem egy rekurzív összefüggés definiál, hanem két, felváltva használandó rekurzió.



1. ábra

Ennek általánosításaként dolgozatunkban olyan f_n sorozatokat vizsgálunk, melyeket kellő számú kezdő tag megadása után az alábbi rekurziórendszer definiál:

$$\text{(A)} \qquad f_n = \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i f_{n-j} \qquad i = 1, 2, \ldots, m;$$

ahol az m darab rekurzió közül mindig épp azt kell alkalmazni, melyre n pillanatnyi értékét tekintve teljesül, hogy $i\equiv n \pmod m$. A továbbiakban az ilyen rendszert *ciklikus rekurziórendszer*nek nevezzük. Speciális, könnyen kezelhető eset, ha

$$\text{(B)} \qquad k_1=k_2=\cdots=k_m=m.$$

Dolgozatunk I. részében megmutatjuk, hogy minden (A) rendszerhez található olyan $m_0\geqq m$, hogy ugyanaz a sorozat előállítható (B) feltételt is kielégítő (A) alakú rendszerrel is (persze m helyére minden helyen m_0-t írva).

A II. részben valamely m-re (A) alakú, (B)-t kielégítő rekurziórendszerek által definiált sorozatokról megmutatjuk, hogy egyetlen (C) alakú rekurzióval is előállíthatóak:

$$\text{(C)} \qquad f_n = \sum_{j=1}^{m} c_j f_{n-jm}.$$

Végül a dolgozat III. részében eredményeinket egy villamosságtani probléma megoldására alkalmazzuk, és néhány megjegyzést teszünk a Fibonacci-számok általánosításairól.

Megmutatandó, hogy (B) feltételezése indokolt, feltehetjük, hogy $k_1=k_2=\cdots$ $\cdots=k_m=K$. Legyen ugyanis $K=\max k_i$, és ha $k_i<K$, akkor $k_i<j\leqq K$ esetén $a_j^i=0$ írható. Ha $K\leqq m$, akkor minden rekurzióhoz további $m-K$ tagot 0 együtthatóval hozzáírva készen vagyunk. Ha $K>m$, akkor olyan c természetes számot tekintve, melyre $K\leqq cm$, minden rekurziót c-szer ciklikusan egymás alá írunk, és $m_0=cm$ választással vagyunk készen.

A továbbiakban így csak az alábbi rendszert vizsgáljuk:

$$(*)\qquad f_n\begin{cases}=a_1^0 f_{n-1}+\cdots+a_m^0 f_{n-m} & \text{ha } n\equiv 0 \pmod m\\ =a_1^1 f_{n-1}+\cdots+a_m^1 f_{n-m} & \text{ha } n\equiv 1 \pmod m\\ =a_1^{m-1} f_{n-1}+\cdots+a_m^{m-1} f_{n-m} & \text{ha } n\equiv m-1 \pmod m\end{cases}$$

Megkülönböztetésül *egységes rekurziónak* nevezzük az alábbit:

$$(**)\qquad g_n=b_1 g_{n-1}+\cdots+b_s g_{n-s}.$$

II.

TÉTEL: *Az $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ kezdőtagokkal és a $(*)$ ciklikus rekurziórendszerrel definiált f_n sorozat előállítható $(**)$ alakú egységes rekurzióval is, ahol $s\leqq m^2$. Ebben az előállításban $i\not\equiv 0\ (m)$ esetén $b_i=0$.*

Bizonyítás: Ha egy $(**)$ alakú egységes rekurziót tekintünk, mely $g_0, g_1, \ldots$ $\ldots, g_{s-1}$ megadásával együtt definiál egy g_n sorozatot, akkor a $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ generátorfüggvényre triviálisan adódik az alábbi összefüggés:

$$(1^{**})\qquad \left(1-\sum_{i=1}^{s} b_i z^i\right) G(z)=g_0+\sum_{i=1}^{s-1}\left(g_i-\sum_{j=1}^{i} b_j g_{i-j}\right) z^i.$$

Ha egy $(*)$ alakú ciklikus rekurziórendszer és az $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ kezdeti értékek definiálják az f_n sorozatot, akkor ne az $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ generátorfüggvényt tekintsük, hanem az alábbi m db segédfüggvényt:

$$F_l(z)=\sum_{n\equiv l\,(m)} f_n z^n;\qquad 0\leqq l<m.$$

Ezekre ugyanolyan eljárást alkalmazva, mint amelynek során (1^{**})-t kaptuk, az alábbi összefüggést nyerjük:

$$(1^{*})\qquad \sum_{l=0}^{m-1}[1-p_l(z)]F_l(z)=f_0+\sum_{i=1}^{m-1}\left(f_i-\sum_{j=1}^{i} a_j^i f_{i-j}\right) z^i;$$

ahol a $p_l(z)$ együtthatópolinomok definíciója:

$$p_l(z)=\sum_{i=1}^{m} a_i^{h(i,l)} z^i;\quad \text{ahol}\quad h(i,l)\equiv l+i\ (m)\ \text{ és}\ 0\leqq h(i,l)<m.$$

Mivel m darab függvény meghatározásához m független egyenletre van szükségünk, helyettesítsünk (1^{*})-ban z helyére $\varepsilon^k z$ értéket, ahol ε egy tetszőlegesen megválasztott és rögzített primitív m-ik egységgyök. Felhasználva, hogy $F_l(\varepsilon^k z)=\varepsilon^{kl} F_l(z)$,

bevezetve a $P_l^k(z) = \varepsilon^{kl}[1-p_l(\varepsilon^k z)]$ jelölést és $P(z)$-vel jelölve (1*) jobb oldalát, nyerjük, hogy

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_l^k(z)F_l(z) = P(\varepsilon^k z); \qquad k=1,2,\ldots,m-1.$$

Vizsgáljuk meg az egyenletrendszer determinánsát. $P_l^k(z)$ konstans tagja nyilván ε^{kl}, a konstans tagokból képzett determináns értéke — vagyis a polinomdeterminánsa értéke ha $z=0$ — épp a $V(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1})$ Vandermonde-determináns, és ez $\neq 0$, hisz ε primitív egységgyök volt. Ebből már következik, hogy az $F(z)$ generátorfüggvény racionális törtfüggvény, mely a 0 kis környezetében reguláris. A nevező alkalmas konstanssal szorozva $1-\sum_{i=1}^{s} b_i z^i$ alakba írható, ahol $s=m^2$. Megállapítható, hogy a determinánsban z^{m^2} együtthatója $a_m^0\, a_m^1 \ldots a_m^{m-1} V(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1})$, így, ha az a_m^l együtthatók valamelyike 0, akkor persze $b_{m^2}=0$. Így először a b_i értékeket határozzuk meg, majd ezek segítségével a számlálók összehasonlításával olyan g_i értékeket választunk, hogy az $F(z)$ generátorfüggvényre teljesüljön (1**).

A tétel második állításához elég belátni, hogy (1**)-ban a generátorfüggvény együtthatója (melyet a $(**)$ rekurzió karakterisztikus polinomjának nevezünk) alábbi alakú:

$$c_0 - \sum_{i=1}^{m} c_i z^{im}; \qquad c_0 \neq 0.$$

Egy, legfeljebb m^2 fokú $Q(z)$ polinom akkor és csak akkor ilyen alakú, ha egyrészt a 0 nem gyöke, másrészt pedig minden z_0 értékre teljesül, hogy $Q(\varepsilon z_0)=Q(z_0)$, ahol ε ismét primitív m-ik egységgyök. A $|P_l^k(z)|$ determináns kifejtésekor kapható polinomra pedig nyilván mindkét feltétel teljesül.

III.

Vizsgáljuk most a dolgozat elején említett villamosságtani problémát. Az ábrán látható hálózat eredő ellenállása $Z_n = R\dfrac{f_{2n}\left(\dfrac{r}{R}\right)}{f_{2n-1}\left(\dfrac{r}{R}\right)}$ alakban írható, ahol az $f_n(x)$ függvénysorozatot az $f_0(x)=f_1(x)=1$ kezdeti értékek és az alábbi ciklikus rekurzió-rendszer definiálja:

$$\begin{aligned} f_{2n}(x) &= xf_{2n-1}(x)+f_{2n-2}(x) \\ f_{2n+1}(x) &= f_{2n}(x)+f_{2n-1}(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Könnyen nyerhető a II-ben leírtak alapján, hogy az $F(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cdot z^n$ generátorfüggvényre

$$F(z;x) = \frac{1+z-z^2}{(1-z^2)^2-xz^2}. \tag{4}$$

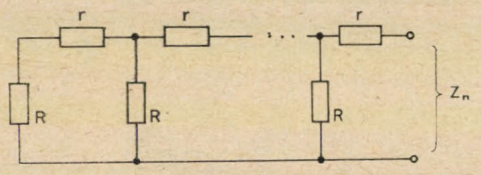
Egyébként $x=1$-re — az I-ben elmondottakkal összhangban — visszakapjuk a Fi-

bonacci-számok jól ismert $(1-z-z^2)^{-1}$ generátorfüggvényét. (4)-et z szerinti Taylor-sorba fejtve az alábbi explicit formulát nyerjük:

$$(5) \qquad f_n(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i}{\left[\frac{n}{2}\right]-i} x^i = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-i}{i} x^{\left[\frac{n}{2}\right]-i},$$

mely utólag triviálisan verifikálható is.

Hasonlóan látható be, hogy az alábbi hálózat Z_n^* eredő ellenállására $Z_n^* = r\dfrac{f_{2n-1}\left(\frac{r}{R}\right)}{f_{2n}\left(\frac{r}{R}\right)}$, ahol az $f_n(x)$ mennyiségek az előzőekkel azonosak. Az ábrákon látható hálózatokat — és sokkal általánosabbakat is — koncentrált paraméterű hálózatnak nevezik, ugyanis az ohmos ellenállásokat (és, más esetekben a többi alkatrészeket is) pontszerűnek képzelhetjük, az őket összekötő vezetékeknek pedig semmilyen hatást nem tulajdonítunk. Vannak azonban másfajta — ún. elosztott paraméterű — hálózatok is, ahol ez a feltevés nem jogosult (például egy távvezeték elektromos jellemzőinek kiszámításakor). Ha azonban egy távvezetékpárról csak annyit tudunk, hogy hosszában mérve az ellenállása r_0, míg a két vezeték közötti „átvezetést" mérő ellenállás R_0, akkor a távvezetékpár vizsgálatához kénytelenek vagyunk azt olyan koncentrált paraméterű hálózattal helyettesíteni, mint amilyen a 2. ábrán látható, úgy választva az ellenállásokat, hogy $\sum r = r_0$ és $\sum \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}$ teljesüljenek. Ekkor $\lim_{n\to\infty} Z_n^*$ nyújt fontos információt a távvezetékpárról. Ekkor kis átalakítással nyerhető:



2. ábra

$$Z_n^* = \frac{r_0}{n} \cdot \frac{g_n\left(\frac{R_0 n^2}{r_0}\right)}{h_n\left(\frac{R_0 n^2}{r_0}\right)},$$

ahol

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \binom{2n-j}{j-1} \cdot x^j$$

és

$$h_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n-j}{j} \cdot x^j.$$

Ha észrevesszük az alábbi szimultán rekurziórendszert:

$$h_n(x) - (1+x)h_{n-1}(x) = g_{n-1}(x); \quad g_n(x) - (1+x)g_{n-1}(x) = x^2 h_{n-2}(x),$$

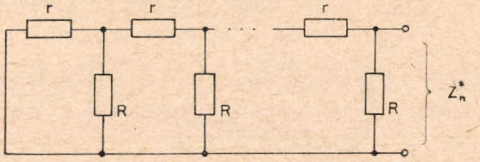
akkor mindkét mennyiségre könnyű explicit formulát adni. Elvégezve a számítást, határátmenettel:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n^* = \sqrt{R_0 r_0}\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{r_0}{R_0}},$$

és ez a gyakorlati tapasztalattal jól egyezik.

Említettük, hogy (4) az $x=1$ esetben a Fibonacci-sorozat generátorfüggvénye. Ekkor (5)-ből a Fibonacci-számok jól ismert előállítása adódik:

(5a) $$F_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-i}{i}.$$



3. ábra

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a Pascal-háromszöget torzítva (ld. az ábrán) leírva az n. sor elejétől „45°-os szögben felfelé indulva" a tagok összege F_n. Ezt általánosítja [3], olyan összegzési utasítással, hogy az n. sor elejétől indulva „lépjünk" mindig q oszlopot jobbra és p sort felfelé (ameddig el nem érünk a Pascal-háromszög szélére), és ezeket a számokat összegezzük:

(6a) $$F(n;p,q) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{p+q}\right]} \binom{n-ip}{iq}.$$

Ekkor nyilván $F(n;1,1)=F_n$ és $F(n;0,1)=2^n$. Ismeretes eredmény [4], hogy az $F_{p,q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n;p,q)z^n$ generátorfüggvényre

(7a) $$F_{p,q}(z) = \frac{(1-z)^{q-1}}{(1-z)^q - z^{p+q}}.$$

Általánosítjuk a fentieket (5a) helyett (5)-ből kiindulva.

(6) Az $$F(n;p,q;x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{p+q}\right]} \binom{n-ip}{iq} x^{\left[\frac{n}{p+q}\right]-i}$$

jelölést alkalmazva ez a sorozat is ciklikus rekurziórendszerrel tárgyalható. Az egyszerűség kedvéért legyen

$$w_t^n = \begin{cases} x, & \text{ha } t \equiv n \pmod{p+q} \\ 1, & \text{ha } t \not\equiv n \pmod{p+q}, \end{cases}$$

ekkor belátható, hogy

(8)
$$F(n;p,q;x) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} \binom{q}{i} \left(\prod_{j=0}^{i-1} w_j^n \right) F(n-i;p,q;x) + F(n-p-q;p,q;x)$$

ciklikus rekurziórendszer teljesül. Ehhez elég bebizonyítani, hogy alkalmazva az alábbi segédmennyiségeket:

$$F_t(n; p, q; x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-t}{p+q}\right]} \binom{n-ip}{iq+t} x^{\left[\frac{n-t}{p+q}\right]-i}, \qquad t = 1, 2, \ldots, q-1,$$

fennáll az alábbi szimultán ciklikus rekurziórendszer:

$$F(n; p, q; x) = w_n^0 F(n-1; p, q; x) + F_{q-1}(n-p-1; p, q; x)$$

$$F_t(n; p, q; x) = w_n^t F_t(n-1; p, q; x) + F_{t-1}(n-1; p, q; x),$$

melyből (8) már könnyen nyerhető. Ez az eredmény $x=1$ helyettesítéssel [4] eredményeit, mint speciális esetet adja. A binomiális tételt alkalmazva adódik ebben az esetben a $(\lambda-1)^q \lambda^p = 1$ egyenlet, mint az (ebben az esetben nem ciklikus) rekurzió karakterisztikus egyenlete. Könnyen látható, hogy ezen egyenlet legnagyobb pozitív gyökét λ_0-lal jelölve ez egyszeres és egyben a legnagyobb abszolútértékű gyök is, és így $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+k; p, q)}{F(n; p, q)} = \lambda_0^k$. Ennek általánosításaként nyerjük pl. $p=q=1$-re, hogy teljesül a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+2k; 1, 1; x)}{F(n; 1, 1; x)} = \left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)^k$$

összefüggés.

IRODALOM

[1] Rényi A. Változatok egy Fibonacci-témára, Természet Világa, 1968, 1—2. sz.
[2] A. M. Morgan—Voyce: Ladder-Network Analysis Using Fibonacci Numbers, I.R.E. Transactions on Circuit Theory 1959. szept.
[3] V. E. Hoggatt, Jr: A New Angle on Pascal's Triangle, The Fibonacci Quarterly, 1968. okt.
[4] V. C. Harris & C. C. Styles: A Generalization of Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, 1964. dec.

Об ОБОБЩЕНИИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

A. РЕЧКИ

ON THE GENERALIZATION OF THE FIBONACCI-NUMBERS

A. RECSKI

IRÁNYÍTHATÓ FELÜLETEK

GERENCSÉR LÁSZLÓ

1969 szeptemberében Sulanke professzor a Bolyai Társulatban egy egyszerű gráfelméleti módszert mutatott be annak eldöntésére, hogy egy felület irányítható-e vagy sem. E módszer segítségével bebizonyította a következő tételt: ha az $X \times Y$ szorzatfelület irányítható, akkor X is és Y is irányítható. Ebben a dolgozatban az irányíthatóság egy topológiai jellemzőjét mutatom be, mellyel az irodalomban utalás és bizonyítás nélkül találkoztam, ezért hasznosnak látom magyar nyelven való publikálását.

A dolgozatban feltételezzük a differenciálható sokaság és a nyaláb fogalmának ismeretét. (Ld. [1], [2], [3], [4].)

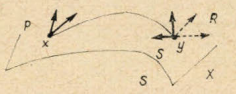
Legyen X C^∞ sokaság. n lineárisan független érintővektor együttesét n-élnek nevezzük. Az n éleket R, S, T fogja jelölni. Ha $R=(e_1, \ldots, e_n)$, akkor $-R=(-e_1, \ldots, e_n)$. Koordinátakörnyezetnek nevezünk egy U nyílt halmazt, mely el van látva $x^1, \ldots, x^n$ koordinátákkal. Az U_α koordinátakörnyezet egy x pontjában S_α-val jelöljük a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1}^n$ n-élt. Ha $x \in U_\beta$ is fennáll az S_α-t S_β-ba transzformáló mátrix determinánsát $J(S_\alpha, S_\beta)$ jelöli. Azt mondjuk, hogy X irányítható, ha van olyan $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasz (azaz $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$, ahol az U_α-k koordinátakörnyezetek), melyre $J(S_\alpha, S_\beta)>0$ minden x-pontban. Egy ilyen atlaszt irányított atlasznak nevezünk. Ha ilyen atlasz nincs, akkor a felület nem irányítható.

Az n élek nyalábját $E(X)$ jelöli. Ennek egy $x \in X$ pont fölötti fibruma az összes x-beli n-él. Ezek halmaza homeomorf GLn-nel. A GLn csoport R_1, R_2 elemeiről azt mondjuk, hogy összeköthetők, ha létezik olyan $R(t)$ görbe GLn-ben, melynek végpontjai R_1, ill. R_2. Egy ilyen $R(t)$ görbét az R deformációjának nevezünk.

Főcélunk a következő tétel bebizonyítása:

1. Tétel. Egy X sokaság irányítható vagy nem irányítható aszerint, hogy $E(X)$ komponenseinek száma kettő vagy egy.

Bizonyítás: Először is megmutatjuk, hogy $E(X)$ komponenseinek száma legfeljebb 2. Legyen R egy x-beli rögzített n-él, S pedig tetszőleges y-beli n-él. Kössük össze az x és y pontokat, és tekintsük az összekötő út egy felemelését $E(X)$-ben. Az y pont fölött az R_y n-élet kapjuk. Ha $J(R_y, S)>0$, akkor az y fölötti fibrumban az R_y és S n-élek összeköthetők. (Erre vonatkozóan l. [1].) Ekkor tehát S az R-rel egy komponensben van. Ha viszont $J(R_y, S)<0$, akkor a $(-R)$-rel van egy komponensben.



1. ábra

Tegyük fel már most, hogy $E(X)$-nek pontosan két komponense van, vagyis R és $(-R)$ különböző komponensekhez tartoznak. Legyen $\{U_\alpha\}$ egy atlasz az $\bar{x}_\alpha^i$

koordinátafüggvényekkel. Az U_α egy y_α pontjában felvesszük az $S_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha^i}\right)$ n-élt minden α-ra. Az R-nek y_α-ba való eltoltját az előbbiekhez hasonlóan R_α jelöli. Ha $J(R_\alpha, \bar{S}_\alpha)>0$, akkor U_α koordinátázását nem változtatjuk, ha viszont $J(R_\alpha, \bar{S}_\alpha)<0$, akkor új x_α^i koordinátafüggvényekként bevezetjük az $x_\alpha^1 = -\bar{x}_\alpha^1$, $x_\alpha^i = x_\alpha^i$ $(i \geqq 2)$ függvényeket. Az új koordinátákat egyöntetűen (x_α^i)-vel jelöljük a $\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)_{y_\alpha}$ n-élt pedig S_α-val. Állítjuk, hogy a módosított atlasz már irányított atlasz.

Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $y \in U_\alpha \cap U_\beta$-ra a $T_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)$ és $T_\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}\right)$ n-élekre $J(T_\alpha, T_\beta)<0$. A P, S_α, T_α, $-T_\beta$, $-S_\beta$, $-P$ n-élek $E(X)$-ben sorra összeköthetők, és így P és $-P$ egy komponensben vannak. Ez az ellentmondás bizonyítja a tétel egyik felét.

Fordítva, tegyük fel, hogy X irányítható. Egy $(U_\alpha, (x_\alpha^i))$ irányított atlasz alapján definiálunk $E(X)$-en egy f folytonos függvényt, melynek értékkészlete $+1$ és -1, $E(X)$ tehát előáll, mint két diszjunkt, nyílt nívóhalmaz uniója. Legyen R egy x-beli n-él, és jelölje T_α a $\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)$ n-élt ugyanazon x pontban. Mármost

$$f(R) = \begin{cases} +1 \text{ ha } J(R, T_\alpha)>0 \\ -1 \text{ ha } J(R, T_\alpha)<0. \end{cases}$$

Világos, hogy $f(R)$ definíciója korrekt. Világos, az is, hogy f folytonos, és ténylegesen felveszi a $+1$ és -1 értékeket.

Most bemutatjuk a tétel alkalmazását a Sulanke említette tétel egyszerű bizonyítására:

2. Tétel. Ha $X \times Y$ irányítható, akkor X is és Y is irányítható.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy van az $E(X \times Y)$-n értelmezett $+1$ és -1 értékeket felvevő f folytonos függvény. Ilyen függvényt akarunk megadni $E(X)$-en is. E célból rögzítsünk $E(Y)$-ban egy T n-élt, és egy $E(X)$-beli R n-élnek feleltessük meg az (R, T) $m+n$-élt $E(X \times Y)$-ban. A $h: R \to (R, T)$ leképezés nyilván folytonos. A $g = f \circ h$ függvény az $E(X)$-en értelmezett folytonos függvény, értékkészlete $+1$ és -1. Ugyanis $g(R) = -g(-R)$. Ezzel beláttuk, hogy X irányítható. Hasonlóan okoskodhatunk Y esetén is, ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] CRITTENDEN—BISHOP: Geometry of Manifolds 1964. Academic Press.

ОРИЕНТИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Л. ГЕРЕНЧЕР

ORIENTABLE MANIFOLDS

L. GERENCSÉR

The paper solves a simple problem mentioned by Prof. Sulanke in Budapest: if the manifold $X \times Y$ is orientable, so both X and Y are orientable as well. I used a theorem, for which I gave a proof as well: a manifold X is orientable if and only if its n-frame bundle $E(X)$ has two components.

EGY ELEMI MÓDSZER DIOFANTIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSÁRA

FREUD RÓBERT

I. A módszer lényege a következő:

Legyen $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, z)=0$ egy diofantikus egyenlet. Keresünk egy $g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ egész együtthatós polinomot a következő tulajdonsággal:

Effektív megadható olyan M természetes szám, hogy minden olyan $x_1, \ldots, x_r$-re, melyre legalább az egyik $|x_i| \geqq M$,

(1) $$z \geqq g(x_1, \ldots, x_r)+1 \quad \text{esetén} \quad f(x_1, \ldots, x_r, z)>0,$$

(2) $$z \leqq g(x_1, \ldots, x_r) \quad \text{esetén} \quad f(x_1, \ldots, x_r, z)<0$$

teljesül.

Ekkor az egyenletnek nem lehet olyan megoldása, ahol valamelyik $|x_i| \geqq M$, hiszen

$$g(x_1, \ldots, x_r) < z < g(x_1, \ldots, x_r)+1 \quad \text{egész} \quad x_1, \ldots, x_r, z$$

értékekre nem állhat fenn.

Az egyenlet esetleges — az $|x_i|<M$, $i=1, 2, \ldots, r$ feltételt kielégítő — megoldásait ezen korlátos sok $x_1, \ldots, x_r$ értékrendszer behelyettesítésével határozhatjuk meg.

II. Módszerünk jól alkalmazható a következő diofantikus egyenletek megoldásánál:

(3) $$F(x)=G(y),$$

ahol $F(x) = a_n x^n+\cdots+a_0$, $G(y) = b_k y^k+\cdots+b_0$, a_i, b_j egészek, $a_n b_k \neq 0$, továbbá k/n és

(4) $$u = \left(\frac{a_n}{b_k}\right)^{\frac{1}{k}} \text{ egész szám.}$$

A (4) feltétel nem jelent túl erős megszorítást, hiszen például $a_n=b_k=1$ esetben biztosan teljesül.

Legyen $\frac{n}{k} = t$.

A $c_t, c_{t-1}, \ldots, c_1 s, c_0$ számokat ilyen egymásutánban később alkalmasan meg fogjuk választani. Legyen

(5) $$h(x) = c_t x^t+\cdots+c_0.$$

Tekintsük $G(h(x))$-et:

$$G(h(x)) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i = b_k(c_t x^t + \cdots + c_0)^k + b_{k-1}(c_t x^t + \cdots + c_0)^{k-1} +$$

$$+ \cdots = b_k c_t^k x^n + k b_k c_t^{k-1} c_{t-1} x^{n-1} +$$

$$+ \left(k b_k c_t^{k-1} c_{t-2} + b_k \binom{k}{2} c_t^{k-2} c_{t-1}^2 \right) x^{n-2} + \cdots + (k b_k c_t^{k-1} c_1 + \cdots) x^{n-t+1} +$$

$$+ [(k b_k c_t^{k-1} c_0 + \cdots) + b_{k-1} c_t^{k-1}] x^{n-t} + \cdots$$

Válasszuk meg $c_t, c_{t-1}, \ldots, c_1$-et rendre úgy, hogy

(6) $$d_i = a_i, \qquad i = n, n-1, \ldots, n-t+1$$

teljesüljön.

Azaz

$$a_n = b_k \cdot c_t^k,$$

így (4) alapján

(7a) $$c_t = u$$

Továbbmenve: $a_{n-1} = k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1} \cdot c_{t-1}$, így

$$c_{t-1} = \frac{a_{n-1}}{k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1}}$$

és így tovább $j = t-2, \ldots, 1$-re c_j kifejezhető $a_{n-t+j}, b_k, c_t, c_{t-1}, \ldots, c_{j+1}$ segítségével racionálisan:

(7b) $$c_j = \frac{\varrho_j}{k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1}}, \qquad j = t-1, \ldots, 1$$

(4) és (7) alapján $c_t, c_{t-1}, \ldots, c_1$ racionálisak. Legyen most s a nevezőik legkisebb közös többese.

Legyen továbbá

(8) $$g(x) = s \cdot h(x).$$

Legyen

$$F^*(x) = s^k \cdot F(x) = (s^k a_n) x^n + (s^k a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + s^k a_0$$

$$G^*(y) = s^k \cdot G(y) = b_k (sy)^k + b_{k-1} s (sy)^{k-1} + \cdots + b_0 s^k.$$

$z = s \cdot y$ helyettesítéssel

(9) $$G^*(y) = E(z) = b_k \cdot z^k + (b_{k-1} s) z^{k-1} + \cdots + b_0 s^k$$

(9) alapján (3) átmegy

(10) $F^*(x) = E(z)$-be.

Ha valamilyen x_1 a (10) diofantikus egyenletnek nem megoldása, akkor x_1 nem lehet nyilván (3)-nak sem megoldása. (Fordítva nem igaz.)

$$(11)\qquad \begin{cases} E(g(x)) = G^*(h(x)) = s^k \cdot G(h(x)) = s^k \sum_{i=0}^{n} d_i x^i = \\ = F^*(x) + s^k \sum_{i=0}^{n} (d_i - a_i) x^i = F^*(x) + H_0(x) \end{cases}$$

(6) alapján

$$H_0(x) = s^k \sum_{i=0}^{n-t}{}' (d_i - a_i) x^i.$$

Legyen

$$G\left(h(x) + \frac{1}{s}\right) = \sum_{i=0}^{n} d_i^* x^i.$$

Nyilvánvalóan adódik, hogy

$$(12)\qquad d_i = d_i^* \quad \text{ha} \quad n-t+1 \leqq i \leqq n$$

és

$$(13)\qquad d_{n-t}^* = d_{n-t} + k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} E(g(x)+1) = G^*\left(h(x)+\frac{1}{s}\right) = s^k \cdot G\left(h(x)+\frac{1}{s}\right) = s^k \sum_{i=0}^{n} d_i^* x^i = \\ = F^*(x) + s^k \sum_{i=0}^{n} (d_i^* - a_i) x^i = F^*(x) + H_1(x), \end{cases}$$

ahol (6) és (12) alapján

$$H_1(x) = s^k \sum_{i=0}^{n-t}{}' (d_i^* - a_i) x^i.$$

Legyen most

$$(15)\qquad f(x, z) = E(z) - F^*(x).$$

Ezzel (10) átmegy

$$(16)\qquad f(x, z) = 0\text{-ba.}$$

Keressük (16)-nak $x \geqq 0$, $z \geqq 0$ megoldásait. Az $x \leqq 0$, $z \geqq 0$, ill. $x \leqq 0$, $z \leqq 0$, ill. $x \geqq 0$, $z \leqq 0$ megoldások keresése hasonló módon történhet.

Feltehető, hogy $b_k > 0$.

Ekkor van olyan z_0, explicite megadható, hogy $z \geqq z_0$-ra $E(z)$ monoton nő, és $E(z) \leqq E(z_0)$, ha $0 \leqq z \leqq z_0$.

Ha a_n negatív, akkor az $x \geqq 0$, $z \geqq 0$ megoldások könnyen megkaphatók, hiszen elég nagy x-, ill. z-re $F^*(x) < 0 < E(z)$.

Legyen tehát $a_n > 0$. Ekkor $c_t = u > 0$, így van olyan x_0, hogy $x \geqq x_0$-ra $g(x)$ monoton nő. Feltehető még, hogy $g(x_0) \geqq z_0$. Legyen most $x_1 \geqq x_0$ tetszőleges, de rögzített. Ekkor

$$(17)\qquad \begin{cases} z \geqq g(x_1)+1 \quad \text{esetén} \quad f(x_1, z) \geqq E(g(x_1)+1) - F^*(x_1) = H_1(x_1) \\ \text{és} \\ z \leqq g(x_1) \quad \text{esetén} \quad f(x_1, z) \leqq E(g(x_1)) - F^*(x_1) = H_0(x_1). \end{cases}$$

Ha sikerül c_0-t úgy megválasztani, hogy

(18) $\qquad c_0 \cdot s$ egész szám legyen,

akkor $g(x)$ (8) miatt egész együtthatós lesz, ha továbbá

(19) $$\begin{cases} H_1(x_1) > 0 \\ \text{és} \\ H_0(x_1) < 0, \end{cases}$$

akkor (17) és (19) alapján x_1 nem lehet (16)-nak megoldása.

$$H_1(x) \quad \text{főegyütthatója} \quad s^k(d_{n-t}^* - a_{n-t}) = w_1$$

$$H_0(x) \quad \text{főegyütthatója} \quad s^k(d_{n-t} - a_{n-t}) = w_0.$$

Ha $w_1 > 0 > w_0$ akkor explicite megadható x_0' úgy, hogy $x_1 \geqq x_0'$ esetén (19) teljesül. (13) felhasználásával $w_1 > 0 > w_0$ azt jelenti, hogy

(20) $$d_{n-t} - a_{n-t} < 0 < d_{n-t} + k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1} \cdot \frac{1}{s} - a_{n-t}$$

igaz.

Mivel $d_{n-t} = kb_k \cdot c_t^{k-1} \cdot c_0 + \vartheta$, így (20) ekvivalens a következővel:

(21) $$\frac{a_{n-t} - \vartheta}{k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1}} - \frac{1}{s} < c_0 < \frac{a_{n-t} - \vartheta}{k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1}}$$

c_0-nak (egyetlen) (21)-et és (18)-at kielégítő választása van, ha

$$T = \frac{a_{n-t} - \vartheta}{k \cdot b_k \cdot c_t^{k-1}} \text{ nem egy } s \text{ nevezőjű tört.}$$

Ha c_0 ilyen választása lehetséges, akkor tehát $x_1 \geqq \max(x_0, x_0')$ megoldás nincsen, tehát pozitív x megoldásként csak $0 < x < \max(x_0, x_0')$ jöhet szóba, ami korlátos sok behelyettesítést jelent. (x_0, x_0' explicite megadható $F(x)$, $G(y)$ együtthatóiból).

Ha T egy s nevezőjű tört, akkor a $c_0 = T$ vagy $c_0 = T - \frac{1}{s}$ választás csak a (21)-nél gyengébb

(22) $$T - \frac{1}{s} < c_0 \leqq T,$$

ill.

(23) $$T - \frac{1}{s} \leqq c_0 < T$$

feltételeket elégíti ki, de ezen esetek valamelyikében is könnyen teljesülhet (19), attól függően, hogy $H_1(x)$-ben, ill. $H_0(x)$-ben milyen lesz x^{n-t-1} együtthatója.

III. Egyszerű példaként bebizonyítjuk, hogy 4 szomszédos természetes szám szorzata nem egyezhet meg 2 szomszédos természetes szám szorzatával.

Azaz az $F(x) = (x-1)x(x+1)(x+2) = y(y+1) = G(y)$ egyenletnek nincs $x \geqq 2$ megoldása.

Könnyen látható, hogy a II-beli jelölésekkel $h(x) = x^2+x+c_0$, $s=1$, $c_0=-2$, azaz $g(x) = x^2+x-2$ adódik, továbbá $G(y)$ monoton nő $y \geqq 0$-ra, $g(x)$ monoton nő $x \geqq 1$-re, és

$$g(x)^2+g(x) < F(x) < (g(x)+1)^2+(g(x)+1)$$

ekvivalens a

$$-x^2-x+2 < 0 < x^2+x$$

egyenlőtlenséggel, és ez minden $x \geqq 2$-re fennáll, tehát $x \geqq 2$ megoldás nincs.

Hasonlóan kezelhető sok más

$$\prod_{i=1}^{n} (A_i x + B_i) = \prod_{j=1}^{k} (C_j y + D_j)$$

egyenlet is, ha $k|n$.

IV. A módszer alkalmazása kényelmes és gépi számolásra is igen alkalmas.

Természetesen csak akkor érdemes vele próbálkozni, ha azt sejtjük, hogy a diofantikus egyenletnek csak véges sok megoldása van, hiszen különben biztos nem létezik megfelelő $g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

Végül megjegyezzük, hogy ha az I-ben felsorolt feltételek csak részben teljesülnek, akkor is kaphatunk értékes információkat a megoldásokról:

Például, ha csak olyan $g(x_1, \ldots, x_r)$ egész együtthatós polinomot találunk, amelyhez olyan M létezik, hogy ha mindegyik $|x_i| \geqq M$, akkor (1) és (2) teljesül, úgy tudjuk, hogy egyenletünknek csak olyan megoldásai lehetnek, ahol valamelyik x_i-re $|x_i| < M$, és ezzel lényegében eggyel kevesebb változóra redukáltuk egyenletünket (igaz, hogy több egyenletet kapunk).

V. Hasonló módszert alkalmazhatunk sok más esetben is, például $F(x)=G(y)$ egyenleteknél az $(x, y) \geqq \frac{x}{c}$, c tetszőleges konstans, feltételt kielégítő megoldások megkeresésére gr $G \nmid$ gr F mellett is.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. ФРЕЙД

Имеем Диофантовое уравнение $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, z) = 0$. Мы ищем полином $g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ с целыми коэффициентами удовлетворяющий следующему условию:

Существует число M такое, что если по крайней мере один x_i из $x_1, x_2, \ldots, x_r$ удовлетворяет $x_i \geqq M$, то

(1) из $z \geqq g(x_1, x_2, \ldots, x_r)+1$ следует $f(x_1, \ldots, x_r, z) > 0$

(2) из $z \leqq g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ следует $f(x_1, \ldots, x_r, z) < 0$

При этом, если $x_1, x_2, \ldots, x_r, z$ является решением уравнения, то $|x_i| < M$ для всех $i=1, 2, \ldots, r$. И так простым подставлением мы получаем все решения.

Наш метод очень хорошо применяем например к уравнениям типа $F(x)=G(y)$.

AN ELEMENTARY METHOD FOR SOLVING DIOPHANTINE EQUATIONS

R. FREUD

Let $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, z_r)=0$ be a Diophantine equation. We try to find a $g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ polynomial with integral coefficients satisfying the following condition: There exists a concrete M natural number such that for every $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ system where at least for one x_i we have $|x_i| \geqq M$,

(1) $z \geqq g(x_1, \ldots, x_r)+1$ implies $f(x_1, \ldots, x_r, z)>0$,

(2) $z \leqq g(x_1, \ldots, x_r)$ implies $f(x_1, \ldots, x_r, z)<0$.

Then our equation can have only such solutions where $|x_i|<M$ for all $i=1, 2, \ldots, r$, and these values can be easily checked.

Our method is very conveniently applicable e.g. at many $F(x)=G(y)$ type equations.

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

183. Egy E metrikus térben az (x_n) pontsorozatot Corson-félének mondjuk, ha minden $\varepsilon>0$-ra van ε-nál kisebb átmérőjű részsorozata. A tér erősen teljes, ha minden Corson-sorozatnak van torlódási pontja. A térnek egy $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ nyílt halmazokból álló $E = \bigcup_1^\infty G_i$ befedése Cauchy-féle, ha minden (x_n) Cauchy-sorozathoz van olyan n_0 és i, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in G_i$; e befedés egyenletes, ha van olyan $\varepsilon>0$, hogy minden ε-nál kisebb átmérőjű halmaz része egy alkalmas G_i-nek. Mutassuk meg, hogy E akkor és csak akkor altere egy erősen teljes metrikus térnek, ha minden Cauchy-féle befedése egyenletes.

Császár Ákos

184. Legyen $a_i>0$, $\sum_1^n a_i = 1$, $0<b_1 \leqq \cdots \leqq b_n$, és

$$f(s) = \left(\sum_1^n a_i b_i^s \right)^{1/s}.$$

Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{s \to +\infty} f'(s) = 0.$$

Dobó Andor és *Szajcz Sándor*

185. Legyen $\mathfrak{C}$ az n-dimenziós térben a $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ halmazok rendszere ahol $a_i<b_i$ $(i=1, \ldots, n)$, és $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ az olyan $(x_1, \ldots, x_n)$ pontokból áll, amelyekre $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ minden i-re, s legfeljebb egy i-re áll (az egyik oldalon) egyenlőség. Bizonyítandó, hogy $\mathfrak{C}$ tetszőleges elemeinek egyesítése előállítható közülük megszámlálható soknak egyesítéseként is.

Gehér László

174. feladat. Legyen p és q természetes szám, $n = p+q$, $p<q$, $(p, n)=1$. Tegyük fel, hogy $s=1, \ldots, p-1$ esetén

$$\binom{n}{s} \equiv \binom{p}{s} \pmod{q} \quad \text{és} \quad \binom{n}{s} \equiv \binom{q}{s} \pmod{p},$$

$s = p+1, \ldots, q-1$ esetén pedig

$$\binom{n}{s} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Bizonyítandó, hogy ekkor p és q prímszám.

(Rényi Kató)

I. megoldás. Először igazoljuk, hogy az adott feltételek mellett q prímszám. Tegyük fel, hogy q nem prímszám, és legyen q' olyan prímszám, hogy $q=q'^k a$, $k \geqq 1$, $(q', a)=1$. $p=q'$ lehetetlen a $(p, n)=(p, q)=1$ feltétel miatt; vizsgáljuk először a $q'<p$ esetet. Ekkor $s=q'$ választással fenn kell állnia az

$$\binom{n}{q'} \equiv \binom{p}{q'} \pmod{q}$$

kongruenciának, holott már

$$\binom{n}{q'} \equiv \binom{p}{q'} \pmod{q'^k} \tag{1}$$

sem állhat.

Valóban, ellenkező esetben

$$n(n-1)\ldots(n-q'+1) \equiv p(p-1)\ldots(p-q'+1) \pmod{q'^{k+1}}$$

volna. Itt a jobb oldalon pontosan egy tényező osztható q'-vel, a bal oldal tényezői pedig a jobb oldal megfelelő tényezőiből rendre q hozzáadásával adódnak. Mármost

$$(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-q'+1)-p(p-1)\ldots(p-q'+1) = Aq+Bq^2,$$

ahol A és B egész, pontosabban A azoknak a szorzatoknak összege, amelyek a $p(p-1)\ldots(p-q'+1)$ szorzatból egy-egy tényezőjének törlésével adódnak. Innen látható, hogy A nem osztható q'-vel, hiszen a q'-vel osztható tényező törlésekor adódó szorzat nem osztható vele, a többi tényezők valamelyikének törlésével nyert szorzatok viszont igen. Így $Aq+Bq^2$ második tagja osztható q'^{k+1}-gyel, az első viszont nem, s ez ellentmond feltevésünknek.

A $p<q'$ esetben viszont az

$$\binom{n}{q'} \equiv 0 \pmod{q},$$

sőt az

$$\binom{n}{q'} \equiv 0 \pmod{q'^k},$$

feltevéssel jutunk ellentmondásba. Valóban, az utóbbiból

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-q'+1) \equiv 0 \pmod{q'^{k+1}}$$

következnék, holott $p+q-q'+1 \leqq q < p+q$ folytán a bal oldal egyetlen q'-vel osztható tényezője q.

Ennélfogva q prímszám. Tegyük most fel, hogy p nem prímszám, hanem $p=p'^m b$, ahol p' prímszám, $m \geqq 1$, $(p', b)=1$. Ekkor a feltevéseinkből $s=p'$ választással adódó

$$\binom{n}{p'} \equiv \binom{q}{p'} \pmod{p}$$

sőt már

$$\binom{n}{p'} \equiv \binom{q}{p'} \pmod{p'^m}$$

is ellentmondáshoz vezet. Ez pontosan úgy látható be, mint (1) lehetetlensége.

Hermann Tamás

II. megoldás. Tekintsük a kibővített Pascal-féle háromszöget, vagyis az $\binom{a}{b}$ binomiális együtthatók táblázatát, ahol $b \geqq 0$ egész, a pedig tetszőleges egész; természetesen $\binom{a}{b}=0$, ha $a<b$. Az ilyen általánosságban is érvényes

$$\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}=\binom{a+1}{b+1}$$

rekurziós képletből kiolvasható, hogy egyrészt

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{c}{d} \pmod{m} \quad \text{és} \quad \binom{a}{b+1} \equiv \binom{c}{d+1} \pmod{m}$$

esetén

$$\binom{a+1}{b+1} \equiv \binom{c+1}{d+1} \pmod{m},$$

másrészt

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{c}{d} \pmod{m} \quad \text{és} \quad \binom{a+1}{b+1} \equiv \binom{c+1}{d+1} \pmod{m}$$

esetén

$$\binom{a}{b+1} \equiv \binom{c}{d+1} \pmod{m}.$$

Minthogy a feltevés szerint

$$\binom{n}{s} \equiv \binom{q}{s} \pmod{p} \qquad (s = 1, \ldots, p-1),$$

továbbá

$$\binom{n-1}{0} = \binom{q-1}{0} = 1,$$

azért második megjegyzésünk ismételt alkalmazásával

$$\binom{n-1}{s} \equiv \binom{q-1}{s} \pmod{p} \qquad (s = 1, \ldots, p-1),$$

aztán

$$\binom{n-2}{0} = \binom{q-2}{0} = 1$$

felhasználásával hasonlóan

$$\binom{n-2}{s} \equiv \binom{q-2}{s} \pmod{p} \qquad (s = 1, \ldots, p-1);$$

eljárásunkat folytatva végül

$$\binom{n-q}{s} \equiv \binom{0}{s} \pmod{p} \qquad (s = 1, \ldots, p-1).$$

Mivel itt a jobb oldal értéke 0, továbbá $n-q = p$, azért

$$\binom{p}{s} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (s = 1, \ldots, p-1). \tag{2}$$

Az

$$\binom{n}{s} \equiv \binom{p}{s} \pmod{q} \qquad (s = 1, \ldots, p-1)$$

feltevésből kiindulva pontosan ugyanilyen okoskodással adódik

$$\binom{q}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = 1, \ldots, p-1). \tag{3}$$

Mivel $(p, q)=1$, azért még

$$\binom{q}{p} = \binom{q}{p-1} \frac{q-p+1}{p} \equiv 0 \pmod{q} \tag{4}$$

is fennáll.

Most a (3) és (4) kongruenciák felhasználásával első előrebocsátott megjegyzésünk alapján

$$\binom{q+1}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = 2, \ldots, p),$$

majd hasonlóan

$$\binom{q+2}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = 3, \ldots, p),$$

s végül $n-1 = q+p-1$ következtében

$$\binom{n-1}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = p).$$

Ebből és a feltevés szerint érvényes

$$\binom{n}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = p+1, \ldots, q-1)$$

kongruenciákból ismét a második előrebocsátott megjegyzést felhasználva

$$\binom{n-1}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = p+1, \ldots, q-1),$$

aztán ezekből és $\binom{n-2}{p} \equiv 0 \pmod{q}$ eredményünkből ugyanígy

$$\binom{n-2}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = p+1, \ldots, q-1);$$

az eljárást folytatva végül

$$\binom{q}{s} \equiv 0 \pmod{q} \qquad (s = p+1, \ldots, q-1) \tag{5}$$

nyerhető.

p és q prímszám-volta mármost egyfelől (2), másfelől (3), (4) és (5) alapján adódik a következő állításból:

Ha $s=1, \ldots, r-1$ esetén

$$\binom{r}{s} \equiv 0 \pmod{r},$$

akkor r prímszám.

Ez azonban könnyen igazolható. Ha ugyanis r legkisebb prímosztója r', és $r=r'^k a$, $(r', a)=1$, akkor az

$$r(r-1)\ldots(r-r'+1)$$

szorzatnak csakis az első tényezője osztható r'-vel, úgyhogy $\binom{r}{r'}$ csupán r'^{k-1}-gyel lehet osztható, r'^k-val már nem.

Göndöcs Ferenc

A 174. feladat megoldását beküldte még *Szüsz Péter*.

175. feladat. Legyen E topologikus tér, amelyben minden x ponthoz megadható x zárt környezeteinek olyan $\{V_n\}$ sorozata, hogy $\bigcap_1^\infty V_n = \{x\}$. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset E$ és minden A-beli pontsorozatnak van E-ben torlódási pontja, akkor minden A-beli sorozatnak van E-ben konvergens részsorozata is.

(Császár Ákos)

Megoldás. Legyen $x_i \in A$ $(i=1, 2, \ldots)$, és $x \in E$ e sorozat torlódási pontja. Ehhez az x ponthoz válasszunk olyan zárt V_n környezeteket, hogy $\bigcap_1^\infty V_n = \{x\}$ legyen. Nyilván feltehetjük mindjárt azt is, hogy $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$. Legyen

$$\xi_n = \{x_{kn}: \quad k=1, 2, \ldots\}$$

az adott sorozat V_n-be eső tagjaiból álló részsorozat (ilyen van, mert x a sorozatnak torlódási pontja). Ekkor ξ_{n+1} részsorozata ξ_n-nek. Jelöljük ξ-vel az $x_{11}, x_{22}, \ldots$ átlós sorozatot. Ez n-edik tagjától kezdve részsorozata ξ_n-nek. Megmutatjuk, hogy ξ konvergál x-hez.

Ellenkező esetben volna x-nek olyan V környezete, hogy ξ-nek egy részsorozata csupa V-hez nem tartozó pontból áll, s akkor feltevésünk szerint e részsorozatnak volna egy torlódási pontja, amely még szintén V-n kívül van, s így x-től biztosan különbözik. Ugyanez a pont persze a ξ sorozatnak is torlódási pontja volna. Azonban ξ-nek x-től különböző y torlódási pontja nem lehet. Valóban, elég nagy n-re $y \notin V_n$, így V_n zártsága miatt $E - V_n$ környezete y-nak, s ez a ξ sorozatból n-nél nagyobb indexű tagot nem tartalmaz.

Császár Ákos

1. megjegyzés. Az E térre vonatkozó feltevés biztosan teljesül, ha topológiáját $\mathcal{T}$-vel jelölve van egy $\mathcal{T}$-nél durvább $\mathcal{T}_1$ topológia, továbbá egy $\mathcal{T}_1$-nél durvább $\mathcal{T}_2$ topológia úgy, hogy $\mathcal{T}_1$ reguláris, és minden $x \in E$ pontnak vannak olyan V_n $\mathcal{T}_2$-környezetei, hogy $\bigcap_1^\infty V_n = \{x\}$. Ekkor ugyanis V_n az x pontnak $\mathcal{T}_1$-környezete is, tehát tartalmazza x-nek egy $\mathcal{T}_1$-zárt W_n $\mathcal{T}_1$-környezetét, és W_n x-nek $\mathcal{T}$-zárt $\mathcal{T}$-környezete, továbbá $\bigcap_1^\infty W_n = \{x\}$.

Az itt $\mathcal{T}_2$-re kirótt feltevés teljesül például, ha $\mathcal{T}_2$ eleget tesz a (T_1) szétválasztási axiómának és az első megszámlálhatósági axiómának, így speciálisan akkor, ha metrizálható. Érvényes eszerint a tétel (a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ választással), ha van E adott topológiájánál durvább metrizálható topológia.

Császár Ákos

2. megjegyzés. A topologikus vektorterek elméletének egy nevezetes tétele Smuljantól származik és a következőt mondja ki (l. pl. G. Köthe: Topologische lineare Räume I., 314. o.): Legyen E szeparált lokálisan konvex tér, E' E-nek duálisa, s tegyük fel, hogy E'-nek van a $\sigma(E', E)$ gyenge topológiára nézve sűrű megszámlálható részhalmaza. Ha $A \subset E$ és minden A-beli pontsorozatnak van a $\sigma(E, E')$ gyenge topológiára nézve E-ben torlódási pontja, akkor minden A-beli sorozatnak van $\sigma(E, E')$-re nézve E-ben konvergens részsorozata is.

Ez a tétel közvetlen következménye a feladat állításának, csupán azt kell belátni, hogy E a $\sigma(E, E')$ topológiával felruházva kielégíti a feladat feltételeit. Ha azonban E'-ben $\{u_n: n = 1, 2, \ldots\}$ $\sigma(E', E)$-re nézve sűrű, akkor a

$$V_n = \{x: |u_n(x)| \leqq 1\}$$

halmazok E 0-elemének $\sigma(E, E')$-re nézve zárt környezetei, és metszetük $\{0\}$, hiszen $x \in \bigcap_1^\infty V_n$ esetén $u_n(x) = 0$ minden n-re, s akkor az u_n-ek $\sigma(E', E)$-sűrű volta miatt $u(x) = 0$ minden $u \in E'$-re is, úgyhogy $x = 0$. Tetszőleges $a \in E$ elemre azután az $a + V_n$ halmazok szolgáltatják a kívánt környezeteket.

Császár Ákos

176. feladat. Jelölje $\lambda(n)$ a Liouville-féle függvényt (vagyis ha az n természetes szám prímtényezős előállítása $n = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$, akkor $\lambda(n) = (-1)^{a_1 + \cdots + a_r}$). Mutassuk meg, hogy az $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ számpárok mindegyikéhez található végtelen sok olyan n, hogy $(\lambda(n), \lambda(n+1))$ az adott számpárral egyenlő.

(Kátai Imre)

Megoldás. Tekintsük az $a_n = 3^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ számok sorozatát. Minthogy $\lambda(a_{2k}) = 1$, $\lambda(a_{2k+1}) = -1$, azért a_{2k} és a_{2k+1} között biztosan van olyan n, amelyre $\lambda(n) = 1, \lambda(n+1) = -1$. Ugyanígy található a_{2k-1} és a_{2k} között olyan n, hogy $\lambda(n) = -1$, $\lambda(n+1) = 1$.

Minthogy a_{2k} és a_{2k+1} páratlan, azért a kettő közötti páratlan számok sorozatát tekintve találunk köztük két szomszédosat, mondjuk a $2m-1$ és $2m+1$ számokat, amelyekre

$$\lambda(2m-1) = 1, \quad \lambda(2m+1) = -1.$$

Ekkor λ teljes multiplikativitása miatt $\lambda(4m^2-1) = -1$, viszont definíció szerint $\lambda(2m^2) = -1$, továbbá $\lambda(2m^2-1)$ és $\lambda(4m^2-2)$ közül az egyiknek az értéke is -1. Így vagy a $(\lambda(2m^2-1), \lambda(2m^2))$, vagy a $(\lambda(4m^2-2), \lambda(4m^2-1))$ pár $(-1, -1)$ alakú, s ezen a módon ilyen párból is végtelen sok nyerhető.

Végül az $(1, 1)$ alakú párok előállítására rekurziós eljárást adunk. Egy ilyen pár $(\lambda(9), \lambda(10))$. Ha pedig $\lambda(n) = \lambda(n+1) = 1$, akkor $\lambda(4n^2+4n) = \lambda(4n(n+1)) = 1$, és $\lambda(4n^2+4n+1) = \lambda((2n+1)^2) = 1$.

Göndőcs Ferenc

A 176. feladat megoldását beküldte még *Szüsz Péter*.

PROBLÈMES PROPOSÉS

183. Dans un espace métrique E, la suite de points (x_n) est une suite de Corson si elle possède, quel que soit $\varepsilon > 0$, une suite partielle de diamètre inférieur à ε. L'espace est fortement complet si toute suite de Corson admet un point d'accumulation. Un recouvrement ouvert $E = \bigcup_1^\infty G_i$ tel que $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ est un recouvrement de Cauchy s'il existe, pour toute suite de Cauchy (x_n), des entiers n_0 et i tels que $n \geqq n_0$ implique $x_n \in G_i$; ce recouvrement est uniforme s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre inférieur à ε est contenu dans un G_i. Démontrer que E est un sous-espace d'un espace métrique fortement complet si et seulement si chaque recouvrement de Cauchy est uniforme.

Á. Császár

184. Soient $a_i > 0$, $\sum_1^n a_i = 1$, $0 < b_1 \leqq \cdots \leqq b_n$,

$$f(s) = \left(\sum_1^n a_i b_i^s \right)^{1/s}.$$

Démontrer que

$$\lim_{s \to +\infty} f'(s) = 0.$$

A. Dobó et *S. Szajcz*

185. Soit $\mathfrak{C}$ le système des ensembles $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ dans l'espaces à n dimensions où $a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $C(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$ est composé des points $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ pour tous les i et l'égalité n'est valable que pour un i au plus. Démontrer que la réunion d'une famille quelconque d'éléments de $\mathfrak{C}$ peut être représentée par la réunion d'une famille partielle dénombrable de mêmes éléments.

L. Gehér

TÁRSULATI ÉLET

A SZELE TIBOR-EMLÉKÉREM BIZOTTSÁG JELENTÉSE

A Szele Tibor-emlékérem Bizottság örömmel állapította meg, hogy az emlékérem szabályzatában felsorolt szempontok alapján a magyar matematikusok közül többen is méltók az emlékérem elnyerésére. Az összes szempontok alapos mérlegelése után a Bizottság egyhangúlag úgy döntött, hogy az 1970. évi Szele Tibor-emlékérmet Kalmár László akadémikusnak, a József Attila Tudományegyetem professzorának adományozza.

Kalmár László tudományos munkássága a matematika számos ágára terjed ki. Kutatómunkája során jelentős eredményeket ért el a komplex változós függvénytanban, az analitikus számelméletben, az algebrában, a halmazelméletben; és szűkebb szakterületén, a matematika logikában kifejtett alkotó tevékenysége tette világszerte ismertté nevét.

Gazdag elméleti kutatásai mellett elévülhetetlen érdemeket szerzett matematikai logika kibernetikai és műszaki alkalmazása területén. Új elvet dolgozott ki a logikai gépek megszerkesztésére, majd ezt továbbfejlesztve megalkotta egy olyan számológép elvét, amelyet a feladat formulaként felírt alakja közvetlenül vezérel. Ezen elgondolásai alapján szerkesztették meg a Szovjetunióban az első formulavezérlésű számológépet.

Szakterületének, a matematikának átfogó és mély ismerete mellett otthonosan mozog a nem matematikai jellegű tudományágakban is. Kivételes intelligenciával képes átérteni az e tudományok által felvetett problémákat, és éles szemmel látja meg a lehetőséget, amikor matematikai módszerek alkalmazása megoldást ad, vagy segíthet a kérdés megoldásában. Ezt bizonyítja számos, újabban megjelent dolgozata is, amely a matematikai nyelvészetre és az orvosi diagnosztikára vonatkozik. Ilyen irányú munkásságát is nagyra becsülik, rendszeresen meghívják e tárgykörök konferenciáira, a világ minden részéből, és tanácsait kérik a problémák megoldásában, különböző külföldi egyetemek és kutatóintézetek kérik fel előadások tartására. Igen sok bel- és külföldi szakfolyóirat szerkesztőbizottságának tagja. Ezenfelül számos, a tudományos élet irányítását és szervezését szolgáló hazai és külföldi bizottság irányításában és munkájában vesz részt.

Már az eddigiekből is kitűnik, hogy Kalmár László kifogyhatatlan energiával, fáradhatatlan munkabírással, állandó kezdeményezőkészséggel rendelkező ember, aki sokrétű tevékenységét a legnagyobb lelkiismeretességgel végzi, mindegyik feladatának egész emberként tesz eleget. Ugyanez az odaadás és lelkesedés jellemzi oktató nevelő munkáját. Nevelő munkája már hallgató korában kezdődött, amikor hallgatótársaival feladatsorozat formájában ismertette meg, amit maga feldolgozott, így keltve fel érdeklődésüket és növelve önbizalmukat. Később is nagy segítséget jelentettek gyakorlatai sok szépen válogatott feladattal, ami a két világháború közt egyedülálló volt. Hallgatói érdeklődését figyelemmel kísérte, kívánságaikat kérdezve választotta speciálelőadásait, nemegyszer kedvükért tanulva bele újabb témakörbe. Tanítványait ötleteik hatóerejének kibontásán túl a világos megjelenési formáig támogatta. Kitűnő előadó, előadásai élményszerűek, szavai nyomán a hallgató szinte önállóan ismerheti fel a matematikai gondolatmenetek döntő mozzanatait, mert különös gondot fordít a matematikai gondolkodás kifejlesztésére. Előadásai éppen olyan mintaszerűek, mint tudományos dolgozatai. Közérthető egyszerűséggel, világosan fejti ki azokat a gondolatokat, amelyek a problémák megoldásához vezetnek. A legnehezebben megközelíthető kérdések is kristálytisztán bontakoznak ki cikkeiben és előadásaiban, a beavatott szakember is sokat meríthet ezekből, a kezdő pedig elindulhat segítségükkel a tudomány útján.

A Szele Tibor-emlékéremre ezután számbajöhetők legnagyobb része is többé vagy kevésbé, közvetlenül vagy közvetve az ő tanítványa. Magát Szele Tibort is Kalmár László tanítványai közé sorolhatjuk. Úgy gondoljuk, hogy ha Szele Tibort megkérdezhetnénk, ő is Kalmár Lászlót, első mesterét és elindítóját javasolná a Szele Tibor-emlékérem első tulajdonosaként. Amikor Szele érdeklődése a modern algebra felé fordult, Kalmár olyan levelet írt neki a Galois-elmélet alapgondolatáról, hogy ezt többen lemásolták, és kézről-kézre járt a fiatal matematikusok között. Amikor pedig

az 1955-ös balatonvilágosi algebrai konferencián Kalmár rávilágított arra, hogy mi a struktúrafogalom aktuálissá vált definíciója, Szele Tibor úgy nyilatkozott erről az előadásról, hogy Kalmár ezzel az algebristáknak egész életre szóló tennivalót adott.

Szele mellett számos ma már elismert matematikust sorolhatunk tanítványai közé.

Szinte felmérhetetlen jelentőségű, hogy időt és energiát nem kímélve megteremtette a népgazdasági szempontokból is oly jelentős matematikus képzés feltételeit a József Attila Tudományegyetemen. Az ország első programozó matematikusai 1958-tól folyamatosan végezhették ott munkájukat; ez tette lehetővé, hogy a népgazdaság különböző területein alkalmazott elektronikus számológépek mellett az első pillanattól kezdve szakemberek álljanak. Ez ismét egy megnyilvánulása az új iránti rendkívüli fogékonyságának.

Ma természetesnek tűnik, hogy van hazánkban programozó matematikus képzés, de ennek elindítása hihetetlenül sok munkát kívánt, és ennek az úttörő munkának oroszlánrészét Kalmár László vállalta magára.

Természetesnek tűnik az is, hogy kibernetikai kutatások folynak hazánkban is, de ehhez a feltételek megteremtése Kalmár László érdeme, aki már 1956-ban felismerte ennek jelentőségét. Kitartó munkájának gyümölcse az 1965-ben létrejött Kibernetikai Laboratórium, ahol minden matematikus az ő tanítványa, és mint a Kibernetikai Laboratórium tudományos vezetője irányítja ma is az ott folyó kutatómunkát.

A Bizottság a magyar matematikai nevelésben kiemelkedő tudósok munkásságát vizsgálva úgy gondolta, hogy meg kell emlékeznie a múlt (és közelmúlt) nagy matematikus alakjainak alapvető szerepéről a magas színvonalú magyar matematikai iskola megteremtésében. De alapos megfontolás után arra az elhatározásra jutott, hogy javasolja az Elnökségnek a Szele Tibor-emlékérem alapszabályzatának olyan módosítását, amely szerint posthumus díj nem adható ki.

Budapest, 1970. november 23.

Révész Pál
a bizottság titkára

Fejes Tóth László
a bizottság elnöke

JELENTÉS
A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ HUSZONEGYEDIK KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1971. évi BEKE MANÓ Emlékdíj odaítélésére a Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége az alábbi Bizottságot jelölte ki:

Elnök: Gádor Endréné

Titkár: Szendrei János

Tagok: Knoll János
Péter Gyula
Reiman István
Rohovszky Rudolf
Szalay András
Varga Tamás

A Bizottság 1971. május 6-án és június 7-én tartott ülésén foglalkozott a beérkezett javaslatokkal és kiegészítő információkkal. A Bizottság szem előtt tartotta, hogy a Társulat a díjak odaítélésében a matematika oktatása és népszerűsítése terén kifejtett tevékenységet és elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni.

A Bizottság a a következő határozatot hozta:

Az 1971. évben Beke Manó Emlékdíjjal, valamint emlékplakettel jutalmazza az alábbiakat, és

3000 Ft jutalomban részesül Dr. Ruzsa Imre kandidátus, a MTA Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa;

2000—2000 Ft jutalomban részesülnek:

Dr. Abonyi Ivánné, Keleti Magdolna a MTESZ központi titkárságának munkatársa;

Balogh Viktória az egri 2. sz. általános iskola tanára, Heves megyei általános iskolai vezető szakfelügyelő;

Lipa András a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola adjunktusa;

Macskásy Attila, a kaposvári Munkácsy Gimnázium nyugalmazott tanára és Somogy megye szakfelügyelője,

Puskás Imréné, a miskolci Kossuth Gimnázium tanára, szakfelügyelő.

Indoklás:

Dr. Ruzsa Imre

kandidátus, a MTA Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematika—fizika szakos tanári diplomát. Az egyetem elvégzése után a budapesti Szabó József geológiai technikumban tanított. 1961-től az ELTE TTK Analízis I. tanszékén tanársegéd, majd adjunktus. 1967-től a Magyar Tudományos Akadémia Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa és félállásban folytatja egyetemi oktatói munkáját. 1969-ben tudományos munkája alapján Grünwald Géza emlékdíjban részesült; 1970 tavaszán megvédte kandidátusi disszertációját. Tudományos munkásságának fő területe a matematikai logika.

Ruzsa Imre sokoldalú eredményes munkát végzett a matematika oktatása és népszerűsítése terén. Középiskolai tanárként szerzett tapasztalatait igen jól hasznosította oktató munkájában, a matematika szakos tanárjelöltekkel való foglalkozás során.

Egyetemi oktató munkájának jelentős részét képezték a filozófia szakosok számára tartott matematika előadások. Az első előadáshoz készült igen színvonalas jegyzete úttörő jellegű volt a hazai irodalomban abból a szempontból, hogy ez volt az egyik első kísérlet a matematika filozófiai problémáinak felvetésére és marxista szemléletű megválaszolására. A matematika filozófiai problémáinak és ezek megválaszolásának ismertetése Ruzsa Imre több magas színvonalú munkájában is helyet kapott, ezek közül a legfontosabbak: a Tankönyvkiadónál 1966-ban megjelent „A matematika néhány filozófiai problémájáról" c. munkája, amelyet elsősorban a matematika tanárok számára írt, és a Gondolat Kiadónál megjelent „A matematika és a filozófia határán" c. rendkívül sikeres népszerűsítő könyve.

Ruzsa Imre tudományos érdeklődési területéből eredően sokat és eredményesen foglalkozott a matematikai logika és a halmazelmélet középiskolai tanításával és népszerűsítésével is. Ő írta a matematikai osztályok számára készült tankönyv halmazelmélettel és matematikai logikával foglalkozó részét, társszerzője a „Matematikai kis enciklopédiá"-nak és társszerzővel írt „Matematikai logika" c. könyve 1966-ban jelent meg a Tankönyvkiadónál. A TV-ben nagysikerű ismeretterjesztő előadássorozatot tartott a matematikai logika gyakorlati alkalmazásáról.

Rendszeresen tartott középiskolai tanárok számára továbbképző előadásokat az ország több városában, a Bolyai Társulat rendezésében és számos vándorgyűlésen. A József Attila Szabadegyetemen is sok sikeres előadása volt.

Dr. Abonyi Ivánné, Keleti Magdolna

a MTESZ központi titkárságának munkatársa

1955-ben szerzett matematika—fizika szakos tanári oklevelet az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. 1956-ban a Belloiannisz Híradástechnikai Gyárban nyert alkalmazást gyártmánytechnikai mérnökként. 1959-ben a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat kikérésére a TIT Budapesti Szervezetéhez helyezték át. Itt a matematika—fizika—kémia és csillagászat szakosztályok szaktitkári teendőit látta el. 1966-ban „Kiváló Népművelő" kitüntetést kapott. 1971-ben vált meg a TIT-től és lett a MTESZ központi titkárságának munkatársa. 1971 tavaszán ismét meghívást kapott a TIT-től, hogy a Kis Matematikusok Baráti Köreit és az Ifjú Matematikusok Klubját irányítsa.

A Bolyai János Matematikai Társulat már egy évtizede elhatározta, hogy a Középiskolai Matematikai Lapokhoz hasonlóan, valami módon, ha nem is folyóiratot, de feladatokat juttat el rendszeresen az általános iskolai tanulókhoz. Elgondolásával a TIT-hez, pontosabban Abonyi Ivánnéhoz fordult, aki megértette ennek a tervnek a jelentőségét, és rendelkezésre bocsátotta a TIT apparátusát. Így jött létre kísérletképpen 1965 őszén Budapesten az első öt Kis Matematikus Kör. Abonyi Ivánné lelkesedésének, kiváló szaktudásának és szervező képességének köszönhető, hogy a Baráti Körök munkája rohamosan kibővült és megszilárdult. Már 1966 januárjában megindult egy Kör középiskolai tanulók részére is. Az 1966—67. tanévben a TIT Budapesti Szakosztályának irányításával és támogatásával megkezdődött a Baráti Körök vidéki szervezése is. Elsőnek Komárom és Heves megye csatlakozott. Komárom megyében, Tatabányán maga Abonyi Ivánné vezette a Kört. Budapesten negyedik éve vezet egy kört. Harmadik osztályos korukban kerültek hozzá a tanulók, most hatodikosok. Jellemző, hogy a négy év alatt egyetlen tanuló sem maradt ki a körből.

Az 1969/70-es tanév óta Budapesten és vidéken összesen már kb. 400 csoport működik több mint 8000 tanuló részvételével. Ehhez Abonyi Ivánné megszervezte a tanárok megfelelő felkészítését is. A matematika népszerűsítésére az általános iskolában ilyen méretekben eddig még nem volt példa.

A TIT, Abonyi Ivánné szerkesztésében több példatárat, segédanyagot és módszertani útmutatót is kiadott 1966 óta, a tanárok és a tanulók munkájának támogatására.

1970-ben a Kis Matematikusok Baráti Körei szervezésében és irányításában végzett országos jelentőségű munkájáért a Munka Érdemrend ezüst fokozatát kapta.

Balogh Viktória

egri általános iskolai tanár, Heves megyei matematika—fizika szakos vezető szakfelügyelő.

Balogh Viktória — az Oktatásügy Kiváló Dolgozója, a Munka Érdemrend ezüst fokozatának tulajdonosa, Kiváló Tanár — nemcsak megyéjében ért el kiemelkedő eredményeket a matematikatanítás fejlesztésében, munkássága kiterjedt általános iskolai matematikaoktatásunk egész területére.

Részt vett az új tantervhez készült általános iskolai tankönyvek lektorálásában, különböző folyóiratokban megjelent számos cikkével segítette az új tanterv célkitűzéseinek megvalósítását.

Úttörő jelentőségű munkát végzett a matematikatanítás korszerűsítésében.

A szakosított tantervű osztályok számára írt kiegészítő tankönyvei első jól sikerült példái hazánkban a munkáltató matematika tankönyvnek,

az alsó tagozatban tanító nevelők számára tartott tanfolyamain, valamint cikkeiben utat mutatott a matematikatanítás korszerű elemeinek gyakorlati felhasználására,

a matematika szakosított tantervű osztályok munkájának sikeréhez nemcsak tankönyveivel járult hozzá, hanem 1970 nyarán Pest, Komárom, Nógrád, Borsod és Szolnok megyék, valamint Miskolc város nevelői számára rendezett tanfolyamával, az Országos Pedagógiai Intézetben, valamint az elmúlt évi Bolyai Vándorgyűlésen tartott előadásával is.

Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékével együttműködve kezdeményezte és szervezte 4 megye szakfelügyelőinek és munkaközösségvezetőinek továbbképzését, de tartott továbbképző előadásokat Salgótarjántól Zalaegerszegig az ország más városaiban is.

E kiemelkedően széles körű és eredményes munkásság mellett Balogh Viktória önzetlen, szerény, segítőkész magatartásával kiérdemelte a matematikát tanító nevelők igen széles körének nagyrabecsülését és szeretetét is.

Lipa András

a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola adjunktusa

A Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika—fizika szakán szerzett oklevelet 1949-ben. Ekkor a nyíregyházi Kossuth Lajos gimnázium tanára lett, ahol 1952—56-ig, majd 1962—64-ig mint igazgatóhelyettes is tevékenykedett. Kiváló tanári tevékenységéért 1952-ben az Oktatásügy Kiváló Dolgozója elismerő kitüntetést kapta. 1964-től a Tanárképző Főiskola Matematikai Tanszékének adjunktusa.

Középiskolai tanárként intenzíven foglalkozott a felnőttoktatás problémáival; erre vonatkozó publikációi a Szabolcs-Szatmár Megyei Nevelőben jelentek meg. 1952-ben oktatókáderképző tanfolyamon vett részt Budapesten, ezt követően 1964-ig a Szabolcs-Szatmár megyei matematika szakos tanárok módszertani munkaközösségének irányítását látta el.

Pályafutása minden szakaszában a matematikaoktatás korszerűsítése érdekében kereste az újat. Behatóan foglalkozott, s még intenzívebben foglalkozik ma a gyakorlati órák hatékonysága növelésének problémáival. Éveken át végzett kísérleteket a csoportos foglalkozások eredményességének fokozása érdekében s az előadások hatásfokának emelésére sikeresen alkalmazza a szemléltetés korszerű eszközeit.

Az általános iskolai matematika szakos tanárok továbbképzése keretében évek óta előadásokat tart a geometria tárgyköréből, szem előtt tartva az oktatás és nevelés korszerű követelményeit.

A Kis Matematikusok és az Ifjú Matematikusok Körének szervezője és egyik előadója, s ilyen minőségben évről évre nagy számú érdeklődő fiatalt vezet be a mélyebb matematikai ismeretekbe. Vezeti a feladatmegoldásokat a középiskolai szakköri tagok részére; e munkájával elősegíti, hogy a szakkör tagjai eredményesebben szerepelhessenek a megyei, s esetenként az országos matematikai versenyeken.

Ismeretterjesztő előadásokat tart a TIT keretében, a Borsod—Hajdú—Szabolcs megyei továbbképzési napokon és a nyíregyházi Tanárképző Főiskola által periodikusan rendezett Tanárok Akadémiáján.

A TIT Szabolcs-Szatmár megyei szervezete matematikai szakosztályának elnöke, a Bolyai János Matematikai Társulat nyíregyházi tagozatának titkára, a MTESZ elnökségi és az országos választmány tagja. Az Arany Dániel és középiskolai matematikai tanulmányi versenyek dolgozatait elbíráló bizottság és a Ki miben tudós megyei selejtezőjének állandó tagja. A matematika-népszerűsítés iránti lelkesedésének és rendkívüli szervező képességének köszönhető az 1968. évi nyíregyházi vándorgyűlés nagy sikere.

Legutóbb számítógép-programozási tanfolyamot szervezett a Bolyai Társulat, az Építőipari és a Gépipari Tudományos Egyesület érdeklődő tagjai számára.

Lipa András a matematika szakos tanárképzésben és a továbbképzésben, a matematika oktatásában, megszerettetésében és népszerűsítésében több mint két évtizeden át fejtett ki odaadó tevékenységet és szerzett elismerést.

Macskásy Attila

a kaposvári Munkácsy Gimnázium nyugalmazott tanára, volt megyei szakfelügyelő

A kolozsvári egyetemen végzett, majd Romániából áttelepülve 1938-ban a szegedi egyetemen is megszerezte a középiskolai tanári oklevelet, 1947-ben pedig matematikából és fizikából tanítóképzőintézeti tanári képesítést nyert.

Oktató-nevelői munkásságának nagy részét Somogy megyében végezte, ahol 1944—1962-ig mint tanár, majd 1962-től 1968-ig, nyugdíjaztatásáig mint szakfelügyelő, azóta pedig mint nyugdíjas működik az oktatás területén.

Rendkívül képzett, sokoldalúan aktív, szellemes és kedves egyéniség. Mint tanár is nagyon népszerű és elismert. Tanítványai nagyon szerették, és a középiskolai tanulmányi versenyeken mindig kiemelkedő sikerrel szerepeltek. De nemcsak tanítványainak adta át szellemes matematikai gondolkodását és matematika iránti szeretetét, hanem Somogy megye tanáraira is nagy hatással volt. Sok gondolatot, matematikai módszert és szellemes megoldást adott át a megye tanárainak már akkor is, amikor még nem volt szakfelügyelőjük. Mint szakfelügyelő minden nyáron 7—10 napos megyei továbbképzést rendezett Balatonbogláron. A matematika modernebb fejezeteit már akkor is igyekezett előtérbe állítani és tanítási gyakorlatunkba — ahol csak lehetett — be is vinni, amikor középiskoláinkba még nem vezettük be.

Munkássága a felnőtt oktatás terén a középiskolainál is jelentősebb volt. Konzultáló tanára volt a Villamosmérnöki Karnak, a TTK-nak, a Mezőgazdasági Gépészmérnöki Karnak, a Közgazdasági Egyetemnek, a Számviteli Főiskolának. A pécsi Tanárképző Főiskola konzultáló tanára ma is.

Megszervezte Kaposváron a Gépipari Technikum esti tagozatát, majd a Felsőfokú Gépipari Technikumot, és ezeken tanította a matematikát.

A matematikát népszerűsítő társadalmi munkássága is kiváló. A TIT keretében is kiemelkedő munkát végzett. Jelenleg a Kis Matematikusok Körének megyei felügyelője. Macskásy volt az alapítója a Bolyai János Matematikai Társulat kaposvári tagozatának és ennek is jelenleg elnöke.

A matematika népszerűsítésében nyugdíjba menetele óta is nagy agilitással tevékenykedik.

Puskás Imréné

a miskolci Kossuth Gimnázium tanára, szakfelügyelő

Puskás Imréné a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematika—fizika szakos tanári képesítést. A miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematika Tanszékén 5 éven át tanított, majd 1956-tól a miskolci Kossuth Gimnázium tanára. 1965 februárjától fizika szakfelügyelői, majd 1965 szeptemberétől matematika szakfelügyelői munkakört is ellát. Kiváló tanári tevékenysége jutalmául 1966-ban az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést kapta.

Mint szaktanár kiválóan végzi munkáját. Tanítványai szeretik, tudják a matematikát. Nagyszerű eredményeket érnek el az érettségi vizsgákon, és az egyetemi felvételeken is jól megállják helyüket. Hathatós módszereivel ügyesen biztosítja tanítványai aktivitását, önállóságát.

Mint szakfelügyelő kiváló hozzáértéssel irányítja, vezeti Miskolc város matematika oktatását, és a tanári továbbképzést.

A szakmai munkaközösségeket egyre inkább képessé tette a színvonalas munka végzésére.

A szakmai továbbképzés tematikáját ügyes kézzel állítja össze. Nemcsak tervezője, szervezője a módszertani szakmai továbbképzésnek, hanem aktív szereplője is. Minden évben szakmai-módszertani előadásokat tart mind a középiskolai, mind az általános iskolai matematika tanároknak.

A Városi Tanács V. B. Művelődésügyi Osztálya által kiírt pályázatokon igen eredményesen szerepel minden évben. Pályamunkái hasznos segítői a matematika oktatásának.

Lelkes szervezője és megteremtője volt az Ifjú Matematikusok Körének.

A városban folyó matematikai kísérletek összefogója, irányítója.

A miskolci gimnáziumokban a matematikai tagozatú osztályok létrehozója. Munkájukat állandó figyelemmel kíséri, irányítja. Munkájának eredménye, hogy Miskolc középiskolás diákjai az elmúlt években egyre eredményesebben szerepelnek az országos versenyeken. Cikkei jelennek meg a Matematika tanítás c. folyóiratban is.

A Bolyai János Matematikai Társulatnak 1951 óta tagja. A társulat miskolci tagozatának vezetőségi tagja, és dolgozik az országos Oktatási Bizottságban is.

Az országos matematikai ankétok lelkes szervezője. Ilyen arányú fáradhatatlan tevékenységét az ország matematikus tanárai is elismerik.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulatban 1966 óta dolgozik, mint a matematika—fizika—kémia szakosztály alelnöke. 1968-ban TIT munkájáért Miniszteri Dicséretben részesült.

Kiváló, fáradhatatlan és eredményes munkáját széles körben erkölcsi elismerés, megbecsülés övezi.

KÖNYVISMERTETÉS

R. P. FEYNMAN—R. B. LEIGHTON—M. SANDS
MAI FIZIKA 3. OPTIKA. ANYAGHULLÁMOK

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970 (2. kiadás)

R. P. Feynman Nobel-díjas fizikusnak és munkatársainak fizika könyve magyar nyelven is napvilágot látott. A kitűnő és ízig-vérig modern munkát 9 kötetben jelentette meg a Műszaki Könyvkiadó. Több kötetnek már a második kiadására is sor került.

Ha nem is célunk a sorozat egészének tartalmi ismertetése, érdemesnek tartjuk a kötetcímek felsorolását:

1. A mai természettudomány alapjai. A mechanika törvényei
2. Relativisztikus mechanika. Forgó- és rezgőmozgás
3. Optika. Anyaghullámok
4. Statisztikus fizika és termodinamika. Hullámtan
5. Elektro- és magnetosztatika
6. Elektrodinamika
7. Kristályszerkezetek. Dia-, para- és ferromágnesség
8—9. Kvantummechanika

A mű bevezetés az elméleti fizikába. Bár az utolsó kötet végén név- és tárgymutató segíti a tájékozódást, e munkát aligha lehet kézikönyvként kezelni. A szerzők ugyanis nem annyira a fizika eredményeinek tényszerű összefoglalására törekedtek, mint inkább a tudományt mindenkor előrevivő, a fizikai valóság mélyebb megértését elősegítő gondolatok közlésére és ébresztésére.

Fiatalos lendülettel, a merev hagyományokat bátran mellőzve sikerült a fizikát, mint szerves egészet bemutatniuk, bevonva a legklasszikusabb fejezeteket is a modern gondolkodásmód áramába.

A mű pedagógiai vonatkozásban azt is példázza, hogyan lehet ismereteinket úgy szintetizálni, hogy a tényanyag szinte ijesztő növekedése ellenére egy tudomány elsajátítható legyen a felnövekvő nemzedék számára. A könyvben foglaltak elsajátítását segíti a szerzők közvetlen, színes előadásmódja, amely a művet lebilincselő, s helyenként kifejezetten szórakoztató olvasmánnyá teszi.

A most ismertetendő 3. kötet a 26—38. fejezeteket tartalmazza.

A *26. fejezet*ben a fény terjedésével, a visszaverődés és törés jelenségeivel, valamint a Fermat-elvvel ismerkedhetünk meg.

A *27. fejezet*et a geometriai optikának szentelik a szerzők. Ezen belül szerepel a gömbfelület és a lencse fókusztávolsága, lencserendszerek, lencsehibák, felbontóképesség.

A *28. fejezet* az elektromágneses sugárzás keletkezéséről szól.

A *29. fejezet* az elektromágneses hullámok interferenciájával foglalkozik.

A *30. fejezet* a diffrakciót tárgyalja. Itt szerepel többek között az optikai rács.

A *31. fejezet* a törésmutató eredetét tárgyalja. Itt még a diszperzió és a fényelnyelődés érdemel külön említést.

A *32. fejezet*nek a sugárzási csillapodás és a fényszóródás a témája.

A *33. fejezet* a polarizációról szól. Ezen belül említésre méltó a kettős törés, a polarizátorok, valamint az optikai aktivitás tárgyalása.

A *34. fejezet* a sugárzás relativisztikus jelenségeivel foglalkozik, többek között a Doppler-effektussal, az aberrációval és a fény impulzusával.

A *35. fejezet* a színlátást, a *36. fejezet* a látás mechanizmusát tárgyalja. Figyelemre méltó az a gondosság, mellyel a szerzők ezeket a nem kifejezetten a fizika tárgykörébe tartozó, ám a fizikusokat is érdeklő témákat kidolgozzák.

A *37. fejezet* a fény kvantumos viselkedését mutatja be, és sort kerít a kvantummechanika elvi alapjainak ismertetésére is.

A *38. fejezet* címe: A hullám- és részecskeszemlélet. A fejezetet a kvantummechanika néhány filozófiai vonatkozásának ismertetése zárja.

Az elméleti anyagot 66 feladatból álló példatár egészíti ki. Ez az ellenőrzés szempontjából is nagyon hasznos: tudjuk-e alkalmazni is új ismereteinket, magunkévá tettük-e a fizikai gondolatokat. A kötet végén a feladatok eredménye is megtalálható.

Szóvá kell tennünk, hogy amilyen gondos és szép a sorozat első kiadása, amelyet az Athenaeum Nyomda készített, olyan lehangoló a SZÁMGÉP nyomdában előállított második kiadás minősége.

Loránt László

B. P. GYEMIDOVICS: MATEMATIKAI ANALÍZIS, FELADATGYŰJTEMÉNY

Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 596 oldal

Az utóbbi években számos matematikai példatár jelent meg mind a középfokú, mind a felsőfokú oktatás számára, de az analízis nagy területét átfogó, részletes példatár GJUNTER és KUZMIN 3 kötetes példatárának 1951-ben történt megjelenése óta nem látott napvilágot magyar nyelven. A megjelent példatárak általában egy-egy szűkebb területre (differenciálszámítás, integrálszámítás, sorok, vektoranalízis, stb.) szorítkoztak.

Gyemidovics könyvének magyar fordítása a hatodik szovjet kiadás alapján készült, amihez a szerző még további módosításokat is javasolt.

A feladatok kitűzése két részben történik. Az első részben az *egyváltozós*, a második részben a *többváltozós* függvények analízisével kapcsolatos feladatok szerepelnek. Ezt követik a megoldások. A függelékben a fontosabb állandók és táblázatok kaptak helyet. A példatárban összesen 4462 számozott feladat van, mivel azonban egy sorszám sokszor több feladatot is összefog, a feladatok száma meghaladja az ötezret.

Az *Egyváltozós függvények* című első rész 5 fejezetre oszlik.

Az első fejezetben (Bevezető az analízisbe) a sorozatokkal, a függvények alaptulajdonságaival, nevezetesen az ábrázolással, a határértékkel, a folytonossággal és egyenletes folytonossággal az inverz függvény képzésével, valamint az o és O szimbólumok használatával kapcsolatos feladatokat gyűjtötte össze a szerző.

A második fejezet *(Differenciálszámítás)* az egyváltozós függvények differenciálszámításait tartalmazza. A differenciálás technikáját és különféle alkalmazási területeit (függvényvizsgálat, szélsőérték-feladatok, Taylor-polinomok, határértékszámítás, stb.) bemutató feladatokon kívül számos feladat az alapvető tételekre mutat példákat és ellenpéldákat.

A határozatlan integrál című fejezet a különböző típusú függvények (racionális, irracionális, trigonometrikus, transzcendens függvények) primitív függvényeinek megkeresésére mutatja meg a szokásos módszereket és eljárásokat.

A negyedik fejezetben *(A határozott integrál)* a határozott integrál kiszámítását és alkalmazását bemutató feladatok kaptak helyet. Az alkalmazások között szerepel a területszámítás, az ívhosszszámítás, a térfogatszámítás, a felszínszámítás, nyomatékok kiszámítása, stb. Itt van szó az improprius integrálok kiszámításáról, és az integrálok közelítő kiszámításáról is.

Az első rész utolsó fejezete *(Végtelen sorok)* a numerikus sorok konvergencia-kritériumait, a függvénysorokat (ezen belül a hatványsorokat és a Fourier-sorokat) a végtelen szorzatokat és a folytonos függvények polinomokkal való közelítését dolgozza fel bőséges példaanyagon keresztül.

A *Többváltozós függvények* című második rész 3 fejezetre oszlik.

A hatodik fejezet *(Többváltozós függvények differenciálszámítása)* a többváltozós függvények határértékének, folytonosságának, differenciálhatóságának részletes és sokoldalú elemzése után a differenciálás technikáját, majd az alkalmazásokat (geometriai alkalmazások, Taylor-formula, szélsőérték-feladatok) mutatja be.

A *Paraméteres integrálok* című fejezetben a közönséges és improprius paraméteres integrálok, az Euler-integrálok, a Fourier-integrál kiszámítására, továbbá a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálására és integrálására vonatkozó feladatok kaptak helyet.

Az utolsó fejezet *(Többszörös integrálok és vonalmenti integrálok)* a kettős és hármas integrálok kiszámítására és alkalmazásaira az integrálok transzformációira, a vonalmenti integrál kiszámítására és alkalmazásaira, a felületi és térfogati integrálok kiszámítására, az integrálredukciós formulák alkalmazásaira, és a vektorterek elméletének néhány fontos kérdésére mutat példákat.

A *Megoldások* című rész csak a feladatok végeredményét közli.

Ez a példatár elsősorban abban különbözik a magyar nyelven ma elérhető hasonló tárgyú munkáktól, hogy az algoritmikus eljárások begyakorlását elősegítő, a számolási készséget fejlesztő, rutin jellegű feladatok mellett sok olyan feladat található benne, amelyek a fogalmak jobb megértését szolgálják, egyes tételek feltételeinek szükséges vagy elegendő voltát illusztrálják, általánosításokat, ellenpéldákat tartalmaznak. Ezért a könyv kitűnően alkalmas arra, hogy feladatainak kidolgozása során az olvasó szilárdan megalapozza és elmélyítse analízisbeli ismereteit.

A könyv használatát elősegítik az egyes fejezetek előtt található rövid elméleti összefoglalások. Ezek a szóban forgó témakör legfontosabb fogalmaira, az alkalmazásra kerülő tételekre és összefüggésekre emlékeztetik az olvasót.

Kár, hogy az elméleti kérdéseket megvilágító feladatoknál is csak a végeredmény szerepel a Megoldások között. Részletesebb kidolgozás, vagy legalább bizonyos útmutatás itt nagyon hasznos lett volna, mert éppen ezek azok a feladatok, amelyeknek a megoldása — a tapasztalat szerint — nehézséget szokott okozni.

A gondos fordítás és a szép magyar szöveg a fordító Petruska György és a kontrollszerkesztő Urbán János munkáját dicséri.

A könyv elsősorban a tudományegyetemek matematika—fizika tanárszakos, matematikus és fizikus hallgatóinak ajánlható, de nagy haszonnal forgathatják mindazok, akik analízist tanulnak, vagy tanítanak.

Scharnitzky Viktor

BIZÁM GYÖRGY—HERCZEG JÁNOS: JÁTÉK ÉS LOGIKA 85 FELADATBAN

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 339 oldal

A matematika oktatásának általában kettős célja van. Egyrészt ki kell alakítania a logikus gondolkodás képességét, másrészt meg kell tanítania sok konkrét matematikai ismeretet. A két feladat természetesen nem zárja ki egymást, hanem szorosan összefügg, és sokszor nagyon nehéz lehet az anyagonként változó helyes arányok kialakítása. Még a mai iskolai matematika-tanításunkban is sok helyen inkább az utóbbi feladat kap nagyobb szerepet. A matematikai folyóiratok (mint például a Középiskolai Matematikai Lapok) vagy egyes népszerű tudományos folyóiratok matematikai vagy rejtvény sorozatai (ilyen például az Élet és Tudomány című hetilap A gondolkodás iskolája című rovata) a logikus gondolkodásmód fejlesztését tekinti az elsődleges célnak.

E könyv szerzői — mint az előbb említett rovat vezetői — szerkesztő munkájuk során sok tapasztalatot gyűjtöttek a gondolkodást jól fejlesztő *logikai feladatok* készítése terén. Ezeket a tapasztalatokat összefoglalva, kibővítve és rendszerezve született meg ez a megírásmódjában szokatlan és újszerű könyv.

A könyvben található 85 feladat öt fejezetre oszlik *(Ismerkedés, Két dimenzió, Három dimenzió, Nem mindig jó a kaptafa, Nincs kaptafa)*, de a feladatok megoldását a különböző előképzettségű, és a könyvet különböző céllal forgató olvasóknak különböző sorrendben ajánlják a szerzők.

Az az olvasó, aki meg akar barátkozni a matematikával, és el akarja sajátítani a matematikai gondolkodásmód elemeit, az oldja meg a feladatokat az eredeti sorrendben. A könyvben közölt megoldásokat természetesen olvassa el akkor is, ha már sikerült megoldania egy-egy feladatot, mert azokban számos megjegyzés és kiegészítés is található.

Azoknak az olvasóknak, akik nem óhajtják az egész könyvet végigtanulmányozni, vagy bizonyos gondolatok alapján összetartozó feladatokat keresnek, ún. túrákat ajánlanak a szerzők. A feladatokból 7 túrát alkottak. Az egyes túrákhoz tartozó feladatokat a könnyű tájékozódás érdekében külön jelekkel jelölték meg.

Az első túra áttekintést ad a két- és háromdimenziós elemi összetartozásos feladatok megoldásának technikájáról. E feladatokban kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kell meghatározni megadott információk alapján két véges halmaz elemei között. Az információk elemi összetartozások, illetve elemi kizárások lehetnek. Ha az információk elemi kizárások, akkor a megoldást könnyűvé, áttekinthetővé és gépiessé teszi a táblázatos módszer. Ez a módszer a könyv csaknem minden feladatában szerepel, és a kötet fő módszerének tekinthető. A módszer alkalmas a megoldások számának megállapítására, illetve az információk között esetleg fennálló ellentmondások kiderítésére is. A 26. feladat után szereplő Összefoglalás a módszer elméleti vonatkozásaira is rámutat.

A második túra a háromdimenziós elemi összetartozásos feladatok kocka-, illetve kristályrácscsal való szemléltetését tárgyalja. Ez alkalmas a térszemlélet fejlesztésére és elemi ábrázoló geometriai tapasztalatok szerzésére is.

A harmadik túra a függetlenség fogalmát vizsgálja, és rámutat a determinánsok kiszámításával való rokonságára.

A negyedik túra a feladatok megoldhatóságával és a megoldások számának meghatározásával foglalkozik.

Az ötödik túra főleg elméleti érdekességű, és éppen ezért nehezebb feladatokat tartalmaz.

A hatodik túra az analógia fogalmára mutat be feladatokat.

A hetedik túra feladatai a redundancia problémájával kapcsolatosak.

E hét túrát a szerzők egy-egy szakköri témának is ajánlják a matematikát tanító tanárok részére.

A matematikában gyakorlott olvasónak 3, az eddigiektől eltérő túra javasolható (ezek is külön jelet kaptak). Ezekben a túrákban szerepelnek a lényeges matematikai gondolatokat tartalmazó feladatok.

A csak szórakozni akaró olvasóknak, akik csupán változatos, tarkabarka fejtörőket keresnek, külön túrát szerveztek a szerzők (38 feladat szerepel ebben a túrában), amelynek végigjárásához semmi előismeret nem szükséges. Természetesen egy-egy feladat több túrában is szerepel.

A feladatok több mint 90%-a eredeti, és a maga nemében ügyes, szellemes feladat. A közölt megoldások rendkívül részletesek, körültekintőek. A legtöbb megoldás alapjait képező táblázat módszer nagyon ügyes eszköz, de néhány feladat megoldása még így is elég bonyolult, és a szellemes szöveg ellenére fárasztó. A megoldásokhoz fűzött megjegyzések, didaktikai észrevételek még a matematikát tanítók számára is sok hasznos ötletet rejtegetnek.

Scharnitzky Viktor

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat beérkezett: 1972. I. 3. — Terjedelem: 17,15 (A/5) ív
72-11 — Szegedi Nyomda

СОДЕРЖАНИЕ

Пал Эрдёш и Джол Спенсер: Об одной задаче Эрдёша и Хайнала 1
Список научных трудов Андраша Хайнала 3
Андраш Прекопа: Об одной дискуссии комбинаторного характера линейного программирования 7
Б. Л. ван дер Варден: Идея и обдумывание. Доказательство гипотезы Боде 25
Курт Махлер: Трансцендентные числа 31
Анна Ли: Новые формулы для обратных обобщённых матриц 51
Тибор Немету: Об асимптотическом числе Гамильтоновых окружностей, содержащих заданное число общих рёбер с данной Гамильтоновой окружностью полного графа 59
Ласло Геренчер: Глобальные связности в дифференцируемых многообразиях 65
Эмиль Молнар: Асимптотические свойства конических сечений гиперболической геометрии, связи между асимптотами и фокусами в синтетическом изложении 77
Роберт Фрейд: Замечания к доказательству одной теоремы Вирзинга 93
Йожеф Келемен: Решение диофантовых уравнений путём уменьшения их степеней 103
Михай Салаи: О числе классов квадратичных форм 111
Имре Вермеш: О размещении конгруентных гиперциклов 119
Имре Ружа младший: О функциях сохраняющих сравнимость 125
Ильдико Киш: Доказательство одной гипотезы Ласло Фейеш—Тот 135
Янош Пинтц: Об одном вопросе теории L-функций Дирихлета 143
Пал Г. Неваи: О Лагранжевой интерполяции основанной на распределении корней Лагерровых многочленов 149
Андраш Речки: Об обобщении чисел Фибоначчи 165
Ласло Геренчер: Ориентируемые поверхности 171
Роберт Фрейд: Элементарный метод для решения Диофантовых уравнений 173
Задачи 179
Аз жизни общества 187
Иннотации книг 193

CONTENTS

P. Erdős and J. Spencer: On a conjecture of Erdős and Hajnal. 1
The list of works of A. Hajnal 3
A. Prékopa: A combinatorial theory of linear programming 7
B. H. van der Waerden: The history of the proof of Baudet conjecture 25
K. Mahler: Transcendental numbers. I. 31
A. Lee: On some new formulae concerning generalised matrix inverses 51
T. Nemetz: On a problem about Hamiltonian cycles 59
H. Gerencsér: Global connections on differentiable manifolds 65
E. Molnár: On the asymptotic properties of conics in the hyperbolic geometry, the synthetic treatment of the relations between the asymptotes and foci 77
R. Freud: Some remarks on the proof of a theorem of E. Wirsing 93
J. Kelemen: On the solution of diophantine equations by reduction of degree 103
M. Szalay: On the class number of quadratic forms 111
I. Vermes: On the regular packing of congruent hypercycles 119
I. Ruzsa Jr.: On congruence preserving functions 125
I. Kiss: The proof of a conjecture of L. Fejes Tóth 135
J. Pintz: On a point in the theory of Dirichlet's L-functions 143
G. P. Névai: Lagrange interpolation based on the zeros of Laguerre polynomials 149
A. Recski: On the generalisation of the Fibonacci-numbers 165
H. Gerencsér: Oriantable manifolds 171
R. Freud: An elementary method for solving Diophantine-equations 173
Problems 179
Activity of the Society 187
Book-review 193

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

22. évfolyam, 1971

3-4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1971. december — 22. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Fejes Tóth László, Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András.
Szerkesztőség: 1368 Budapest, VI., Anker köz 1—3. Pf. 240.. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, 1900 Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: KHI. 215-96162
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: 1368 Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

HAJNAL ANDRÁS: Erdős Pál halmazelmélet munkásságáról 197
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Lencsék legsűrűbb elhelyezése a síkon 209
SURÁNYI JÁNOS: Kombinatorikus geometriai problémák 215
KERTÉSZ ANDOR: Százéves a valós számok egzakt bevezetése 231
ALPÁR LÁSZLÓ: Egyenletes konvergencia és folytonossági modulus 235
LOVÁSZ LÁSZLÓ: A matroidelmélet rövid áttekintése 249
ÁDÁM ANDRÁS: Gráfok és ciklusok 269
SZÁSZ DOMOKOS: Valószínűségeloszlások sorozatainak gyenge konvergenciájáról 283
BABCSÁNYI ISTVÁN: Ciklikus állapot-független kvázi-automaták 289
MÁRKI LÁSZLÓ: Egy Wiener—Lévy-típusú problémáról 303
SZŐKE LÁSZLÓ: Számalakzatok a Bell-számokra és a másodfajú Stirling-számokra 307
SZALAY MIHÁLY: Landau egy tételéről 317
NGUYEN MONG HY: A kilencedrendű affin Galois-sík szabályos sokszögeiről 323
PINTZ JÁNOS: A Dirichlet-féle *L*-függvények elméletének egy pontjához II. 331
Jelentés az 1971. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről 337
Feladatrovat 359
Társulati élet 367
Könyvismertetés 379
Új könyvek 381

ERDŐS PÁL HALMAZELMÉLETI MUNKÁSSÁGÁRÓL

Hatvanadik születésnapjára

HAJNAL ANDRÁS

„Alefegy, alefkettő, alefhárom,
Georg Cantor a legelső a világon"
Erdős Pál

1. Tíz évvel ezelőtt Turán Pál vállalkozott arra, hogy a Matematikai Lapokban Erdős 50. születésnapján képet adjon a matematika számos területét átfogó, hihetetlenül gazdag és jelentős munkásságáról. Már akkor sajnálkozott, hogy az erdősi életmű egy olyan fontos területe, mint a halmazelmélet, nem kerülhetett be az akkori beszámolóba és most lehetőség nyílt, hogy ezt a hiányt pótoljam.

Mikor Erdős matematikai pályafutását megkezdte, még javában működött a híres lengyel halmazelméleti iskola, de alapjában véve már elmúlt a halmazelmélet első nagy virágzása. Elkedvetlenítően hatott, hogy nyilvánvalóvá vált: számos fontos halmazelméleti probléma nem oldható meg a szokásos módon. Ez egyrészt azt eredményezte, hogy a konkrétan gondolkodó klasszikus beállítottságú matematikusok elfordultak a halmazelméleti jellegű problémáktól, mindent bizonytalannak érezve, ami kontinuumnál nagyobb számosságú halmazokra vonatkozik. Másrészt elsősorban a matematikai logikai érdeklődésű kutatókat fordította a halmazelmélet felé, akik ott a „megoldhatatlan" problémákat keresték.

A kissé sántító mottó versikét, melyet Erdős egyébként egy „úr epszilon" ugratására talált ki, nem azért írtam le, hogy költői vénáját igazoljam, hanem rendkívül jellemzőnek találom rá. Ő azok közé a ritka matematikusok közé tartozik, akik számára a végtelen matematikai objektumok ugyanolyan „valóságosan" léteznek, mint a 2 szám. Ugyanaz a belső kényszer hajtotta, mikor az elérhetetlen számosságok tulajdonságait vizsgálta, mint amikor Csebisev tételének bizonyításán gondolkodott. Amit végesben meg lehetett válaszolni és végtelenben is értelmes, azt meg kell kérdezni és meg kell válaszolni.

A végtelen halmazokra vonatkozó problémák a gráfelméleten keresztül kezdték érdekelni. Gallai Tibor meséli, hogy 1931-ben, mikor mint elsőévesek, König Dénes gráfelméleti előadásait hallgatták, felmerült a Menger-tétel végtelen gráfokra való általánosításának lehetősége, melyet azután Erdős hamarosan meg is csinált. (Ez az eredmény König gráfelmélet-könyvében jelent meg 1936-ban.)

Ugyanilyen jellegű Gallai Tiborral és Vázsonyi Endrével 1936-ban közösen írt dolgozata, melyben szükséges és elégséges feltételt adnak arra, hogy egy végtelen gráfnak legyen Euler-vonala. Mint látni fogjuk, ez a látásmód még sok más érdekes eredményhez vezetett.

Visszatérve a gondolatmenet fő vonalához, egy híres Hilbert idézet szavaival Erdős azon kevesek egyike volt, akik egy pillanatra sem „engedték magukat kiűzni abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett számukra".

Számtalan, mindig egyszerűen fogalmazható, de sokszor súlyos ötleteket igénylő halmazelméleti problémát vetett fel, oldott meg és adott más matematikusoknak. Ezek az első látásra egymástól független problémák végül is a halmaz-

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

elmélet egy új tárgykörévé álltak össze, az ún. kombinatorikus halmazelméletté, melyet sokan Erdős-féle halmazelméletnek is neveznek. Ez ma, a halmazelmélet új konjunktúrája idején már szorosan összefonódott a halmazelmélet két új főirányával, a nagy számosságok elméletével és a függetlenségi vizsgálatokkal.

Arról, hogy e tárgykör hova fejlődött, meg sem kísérelhetek itt átfogó képet adni. 1967-ben írtunk Erdőssel egy probléma-felvető dolgozatot [66]. (E műfaj is Erdős egyik specialitása.) Az ebben a dolgozatban összegyűjtött 82 probléma közül több mint ötven állása megváltozott az azóta eltelt idő alatt. A felvetett kérdésekkel a halmazelmélet, a modellelmélet és a matematikai logika világhírű kutatói foglalkoztak. Tételeket bizonyítottak és általánosítottak, függetlenségi és konzisztencia bizonyításokat adtak, vizsgálták a problémákat a konstruálható halmazok modelljén. Ezeket az eredményeket megpróbáltuk összegyűjteni a [72] dolgozatban, melyet a [66] dolgozat folytatásaként írtunk és amely még nem jelent meg. Már akkor legalább negyven kapcsolódó dolgozatról tudtunk és ezek száma állandóan nő.

Közös sajátja ezeknek a problémáknak, hogy talán még inkább, mint más területeken, az új eredmények rendszerint még nehezebb és értékesebb problémákhoz vezetnek.

Ez a kis dolgozat tehát nem a kombinatorikus halmazelmélet jelenlegi állásának áttekintése, hanem Erdősről és részben a problémák történetéről szól. Még arra sem tudok mindig vállalkozni, hogy a kimondott problémák jelenlegi állását ismertessem. Csak arra fogok vigyázni, ahol lehet, hogy Erdős szellemében olyan problémát is említsek, mely ma is megoldatlan.

2. Erdős egyik legkorábbi, kimondottan halmazelméleti tárgyú dolgozata, melyet Tarskival közösen, 1942-ben írt [4], a következő problémából indul ki. Lehetséges-e, hogy ha R egy halmazgyűrű, akkor nincs maximális azon λ számosságok között, melyekhez található R-ben λ páronként diszjunkt halmaz?

Hogy a választ megfogalmazhassuk, vezessünk be néhány jelölést.

Tetszőleges F halmazrendszerre legyen $L(F)=\{\lambda:\lambda$ számosság és található olyan páronként diszjunkt halmazokból álló $F'\subset F$, melyre $|F'|=\lambda\}$, és legyen $\varkappa(F)=\sup L(F)$.

Legyen $P(\varkappa)$ az a tulajdonság, hogy van olyan R halmazgyűrű, melyre $\varkappa(R)=\varkappa$ és $\varkappa\notin L(R)$.

Bebizonyítják, hogy $\varkappa$ akkor és csak akkor rendelkezhet a $P(\varkappa)$ tulajdonsággal, ha $\aleph_0$-nál nagyobb elérhetetlen (reguláris limesz) számosság. Ez a válasz akkor nagyon meglepő volt. Tarski csak néhány éve vezette be az elérhetetlen számosságokat a szabatos halmazelméleti irodalomba. Már tudták, hogy ilyen nem megszámlálható számosságok létezését bizonyítani nem lehet és kezdték érezni, hogy létezésüket valószínűleg ellentmondásmentesen fel lehet tenni. A következő megjegyzést is teszik.

Elképzelhető, hogy $2^{\aleph_0}$ elérhetetlen számosság. (Azóta ennek konzisztenciáját az elérhetetlen számosságok létezésének feltételezése mellett már bebizonyították.) Ekkor olyan R gyűrű is van, melyre $\lambda<2^{\aleph_0}$-ra található λ diszjunkt halmaz a gyűrűben, de $2^{\aleph_0}$ diszjunkt eleme nincs R-nek.

A dolgozat végén hat problémát vetnek fel. Fogalmazzunk meg hat tulajdonságot:

$P_1(\varkappa)$: (Reprezentációs tulajdonság.) Bármely $\varkappa$-teljes $\varkappa$-disztributív Boole-algebra izomorf egy $\varkappa$ teljes halmazgyűrűvel.

$P_2(\varkappa)$: (Mérhetőség): $P(\varkappa)$-ban ($\varkappa$ összes részhalmazai halmaza) létezik $\varkappa$ teljes nem fő primideál.

$P_3(\varkappa)$: (A halmazfüggvény problémája): Definiálható $P(\varkappa)$-n olyan $\varkappa$-additív $\varkappa$-multiplikatív halmazfüggvény, mely nem abszolút additív és multiplikatív.

$P_4(\varkappa)$: (A gráf probléma): Ha G $\varkappa$-számosságú gráf, akkor vagy G, vagy komplementere tartalmaz $\varkappa$-számosságú teljes gráfot.

$P_5(\varkappa)$: Ha R $\varkappa$ számosságú rendezett halmaz, akkor R tartalmaz egy $\varkappa$ számosságú részt, mely R rendezésében vagy annak megfordításában jól rendezett.

$P_6(\varkappa)$: Minden $\varkappa$-számosságú T (halmazelméleti) fában, melyre minden $\alpha<\varkappa$-ra az α magasságú elemek halmaza $\varkappa$-nál kisebb számosságú, van $\varkappa$ számosságú rendezett részhalmaz.

Tudták, hogy a $P_1, \ldots, P_5$ tulajdonságok hamisak, ha $\varkappa$ nem erősen elérhetetlen és lábjegyzetekben említettek néhány eredményüket a tulajdonságok közötti összefüggésekre.

Érthető analógiás tévedéssel úgy gondolták, hogy ezek a tulajdonságok az éppen felfedezett P-tulajdonságtól csak annyiban térnek el, hogy $\varkappa=\aleph_0$-ra is igazak és legalábbis konzisztens lesz annak feltételezése, hogy a P_i tulajdonságok minden $\aleph_0$-nál nagyobb erősen elérhetetlen számosságra fennállnak.

Talán ez az érzésük volt az oka, hogy csaknem húsz évig kellett várni, míg 1960-ban Tarski — felhasználva tanítványa, W.P. Hanf egy logikai jellegű eredményét — bebizonyította, hogy a legkisebb $\aleph_0$-nál nagyobb erősen elérhetetlen számosság, és még szinte elképzelhetetlenül sok más elérhetetlen számosság nem rendelkezik a $P_6(\varkappa)$ tulajdonsággal és így nem is mérhető.

Ekkor derült ki, hogy a lábjegyzetek megjegyzései milyen nagy anyagot tartalmaztak. Egy újabb 32 oldalas Erdős—Tarski-cikk jelent meg, melyben D. Monk írta le a régi bizonyításokat.

Ezután Hanf bizonyította be, hogy a P_4, P_5 tulajdonságok is csak nagyon nagy $\varkappa$-kra lehetnek igazak. Az olyan számosságokat, melyekre e tulajdonságok valamelyike igaz, „nagy számosságok"-nak nevezik. A nagy számosságok elméletében általában a nagy számosságok feltételezett létezésének különböző következményeit vizsgálják, többnyire matematikai logikai módszerekkel. Ebben Erdős nem vett részt, de a nagy számosságokkal még egy más módon is kapcsolatba került.

R. Rado-val közös [12] dolgozatában fogalmazták meg a jól ismert Ramsey-tétel következő lehetséges általánosítását. Legyenek $\varkappa$, λ végtelen számosságok. Igaz-e, hogy ha egy $\varkappa$ számosságú halmaz r-elemű részhalmazait minden $r<\omega$-ra 2 színnel megszínezzük, akkor van olyan λ számosságú rész, melynek minden $r<\omega$-ra egyszínűek az összes r elemű részhalmazai?

Azt, hogy a válasz igenlő, $\varkappa\to(\lambda)^{<\omega}$-val, tagadását $\varkappa\not\to(\lambda)^{<\omega}$-val jelölik. Már Rado-val bebizonyították, hogy $2^{\aleph_0}\not\to(\aleph_0)^{<\omega}$. Fodor Géza bizonyította be először, hogy $\lambda\not\to(\aleph_0)^{<\omega}$, ha λ kisebb, mint az első erősen elérhetetlen, nem megszámlálható számosság. Ez a bizonyítás elveszett és az első megjelent bizonyítást Erdőssel közösen csináltunk [24].

Erdős, akit a matematikai logika személy szerint nem vonz, mégis mindig gyorsan tudomásul vette eredményeit. Habozás nélkül alkalmazott minden olyan feltételezést, amelyről már bebizonyították vagy hitték, hogy nem vezethet ellentmondásra, ha úgy érezte, ezzel választ kaphat egy olyan problémára, mely egyébként nem megtámadható. Így történt, hogy minden erősen elérhetetlen $\varkappa$ számosságokra vonatkozó problémát megvizsgált azon feltételezés mellett is, hogy $\varkappa$ mérhető. Így bizonyítottuk be 1958-ban az Erdős—Hajnal-tétel néven ismert következő állítást [24].

Ha $\varkappa$ mérhető, akkor $\varkappa\to(\varkappa)^{<\omega}$. Az olyan számosságokat, melyekre $\varkappa\to(\varkappa)^{<\omega}$, ma Ramsey-számosságoknak nevezik. E tételt sokat alkalmazták, mert a mérhető

számosságok létezésének sok furcsa következménye már az olyan $\varkappa$-k létezéséből is folyik, melyekre $\varkappa \to (\aleph_1)^{<\omega}$ áll.

A [24] dolgozatban bebizonyított, most említett két tételből triviálisan következik, hogy az első $\aleph_0$-nál nagyobb, erősen elérhetetlen számosság nem mérhető. Ezt azonban csak Tarski dolgozatának megjelenése után vettük — szomorúan — észre [35].

3. 1943-ban írta Erdős első „Some remarks on set theory" c. dolgozatát. Ebből a tipikusan erdősi műfajból egy tíztagú sorozat lett, az ötödik-hatodik Fodor Gézával, a hetedik-kilencedik velem, a tizedik Makkai Mihállyal közösen. Hadd idézzem az első dolgozat első mondatát: „This paper contains a few disconnected results on the theory of sets."

Csak néhány eredményt tudok kiragadni. Az első dolgozat első tételét ma a könyvek Erdős—Sierpinski dualitási elvként idézik és Sierpinksi egy régebbi tételének általánosítása. Ezt mondja: Ha $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, akkor létezik olyan egy-egyértékű valós f függvény, melyet a részhalmazokra természetes módon kiterjesztve, f a nullmértékű halmazok halmazát az első kategóriájú halmazok halmazára, és ugyanakkor az első kategóriájú halmazok halmazát a nullmértékű halmazok halmazára képezi le.

A második „Remarks" 1950-ben jelent meg. Itt vizsgálja először a következő problémát. Legyen S egy halmaz $|S| = \varkappa$, $\lambda < \varkappa$. Legyen f egy halmazleképezés $(x \notin f(x) \subset S$, ha $x \in S)$; $|f(x)| < \lambda$ ha $x \in S$. Nevezzük S egy S' részhalmazát függetlennek, ha bármely két x, $y \in S'$-re $x \notin f(y)$. Kérdés, létezik-e $\varkappa$ számosságú független részhalmaz. Ezt a problémát $\varkappa = 2^{\aleph_0}$-ra és $\lambda = \aleph_0$-ra Turán Pál kérdezte először. S. Ruziewicz sejtette, hogy a válasz a mondott általános feltételek mellett igenlő. Számos a problémára vonatkozó részeredmény volt már ismert. A dolgozatban Erdős bebizonyítja Ruziewicz sejtését az általánosított kontinuumhipotézis feltételezése mellett. (Csak sokkal később, 1960-ban bizonyítottam én, hogy a sejtés e feltételezés nélkül is igaz.)

Erdőst a halmazleképezések problémája később is sokszor foglalkoztatta, számos olyan kérdést vetett fel, mely különböző értelemben nagy független halmaz létezését vizsgálja, ha az $f(x)$ képhalmazok megint csak más értelemben kicsik.

Egy más típusú szép sejtése volt, hogy a fenti feltételek mellett $\lambda \geqq \aleph_0$-ra S legfeljebb λ független halmaz uniója. Ezt Fodor Géza bizonyította be. Ha λ véges, akkor S legfeljebb $2\lambda - 1$ független halmaz uniója és ez pontos. Ezt Erdős De Bruijn nel közös [11] dolgozatában bizonyította. Itt fogalmazták meg a következő De Bruijn—Erdős-tétel néven közismert lemmát, mely szerint ha $K < \omega$ és egy gráf minden véges részgráfja $\leqq K$ kromatikus, akkor G is $\leqq K$-kromatikus. Ez a tétel ugyan mai tudásunk szerint akár a Tyihonov-kompaktsági tételnek, akár Gödel kompaktsági tételének közvetlen következménye, kimondása mégis nagyban hozzájárult a kombinatorikus halmazelmélet kifejlesztéséhez. E dolgozatban közli Ulam egy problémájára Alaogluval közösen talált bizonyítását. A tétel ezt mondja:

Nem lehet megszámlálható sok nem-triviális σ-additív 0−1 mértéket találni úgy, hogy ω_1 minden részhalmaza valamelyikre nézve mérhető legyen. Érdekes, hogy ez az egyszerűnek látszó probléma milyen messzire vezet. 1971-ben bizonyította be K. Prikry, hogy még az általánosított kontinuumhipotézis feltételezése mellett is konzisztens, hogy $\aleph_1$ darab 0−1 mértéket sem lehet így megadni. Az a kérdés, hogy ez utóbbi állítás tagadása is konzisztens-e a halmazelmélet axiómáival, ma egyike a legfontosabb és legérdekesebb megoldatlan problémáknak.

A harmadik „Remarks"-ban (1953) szerepelnek először olyan halmazleképezési tételek, ahol S a valós számok halmaza. Egy tipikus szellemes kis eredmény: Ha

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

$|f(x)|<2^{\aleph_0}$, és nem mindenütt sűrű, akkor van független pár, de nincs szükségképpen független hármas. Egy másik tétel:

Ha $f(x)$ sehol sem sűrű, akkor van végtelen független halmaz. Megemlíti, hogy még a kontinuumhipotézis feltételezésével sem tudja megmutatni, hogy a tétel nem javítható.

Érdemes talán elmondani, mi e probléma státusza ma. Először Máté Attila bizonyította, hogy tetszőleges $\alpha<\omega_1$-re létezik α típusú független halmaz. S. H. Hechler bizonyította be, hogy ha $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, akkor még akkor sincs szükségképpen nem megszámlálható független halmaz, ha minden $f(x)$ ω típusú és egyetlen limeszpontja x. Ezt egyébként Erdős sejtette. Másrészről, ha $2^{\aleph_0}>\aleph_1$, akkor a nem megszámlálható független halmaz létezésére vonatkozó tétel független a halmazelmélet axiómáitól. Olyan modell is van, amelyen igaz és olyan is, amelyen hamis. Itt sejtette, hogy ha $f(x)$ nem mindenütt sűrű, és korlátos külső mértékű, akkor van végtelen független halmaz. Ezt a problémát később úgy vizsgáltuk, hogy nem mindenütt sűrű helyett korlátosságot tettünk fel. A VIII-as Remarks-ban megmutattuk, hogy minden $K<\omega$-ra van K-elemű független, de nincs szükségképpen nem megszámlálható független halmaz. Később Hechler végtelen független halmaz létezését is bebizonyította.

Ugyancsak a VIII-as Remarks egy problémáját válaszolva meg, Gladysz bizonyította be, hogy ha $f(x)$ zárt és korlátos mértékű, akkor van kételemű független részhalmaz is. Ma sem ismert, hogy háromelemű független halmaz is létezik-e.

4. Ramsey 1930-ban bizonyította be a következő tételt, melyről kiderült, hogy mind a kombinatorikában, mind a matematikai logikában alapvető jelentőségű. Jelöljük egy X halmaz r-elemű részhalmazai halmazát $[X]^r$-rel. $[X]^r=\{Y\subset X:|Y|=r\}$ $[X]^r$ egy $f:[X]^r\to\gamma$ leképezését X egy γ-színű r-partíciójának nevezzük.

Ha $Z\subset X$, Z *homogén*, ha $[Z]^r$ minden eleme ugyanolyan színű, azaz, ha van $v<\gamma$, melyre

$$f([Z]^r)=\{v\}.$$

Ramsey tétele azt mondja, hogy ha r, $k<\omega$ X végtelen, és f X tetszőleges k-színű r-partíciója, akkor van végtelen homogén részhalmaz.

Erdős az elsők között volt, aki felismerte e tétel és lehetséges általánosításai fontosságát. Első eredménye e kérdésről B. Duschnik és E. W. Miller Partially ordered sets, Amer. J. Math. 60 (1941) p. 605. c. dolgozatában jelent meg. Itt a következő tételt bizonyítják: Ha $|X|=\lambda\geqq\omega$ és $f:[X]^2\to K=\{0,\ldots,K-1\}$ tetszőleges K-színű 2-partíciója, akkor vagy a 0-adik színben van $\lambda-s$ homogén, vagy van olyan i $1\leqq i<K$ hogy az i-edik színben van $\aleph_0$-ás homogén. Az említett dolgozatban szerzők közlik Erdős bizonyítását arra az esetre, mikor λ szinguláris. Ez volt talán az új elmélet első „nehéz" tétele. Ma már a bizonyítás egyszerűnek látszik, de én sok kiváló matematikust ismertem, akik hallgató korukban újra felfedezték ezt a sejtést, de szinguláris λ-ra egyik sem bizonyította be.

Erdős 1942-ben [3] dolgozatában bizonyította be az új elmélet kiinduló tételeit. Megmutatta:

1. Ha $|X|>2^\lambda$, ahol λ végtelen és f λ színű 2—partíció, akkor van λ-nál nagyobb számosságú homogén halmaz.

2. Ha $|X|=2^\lambda$ és f λ színű 2-partíció, akkor még 3 elemű homogén halmaz sincs.

(Erdős szerint 2.-t Gödel bizonyította egy beszélgetésük során.)

3. Ha $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$, f 2 színű 2-partíció $|X|=\aleph_{\alpha+2}$, akkor vagy van 0-színű, $\aleph_{\alpha+2}$-es homogén, vagy van 1-es színű $\aleph_{\alpha+1}$-es homogén.

1. Ramsey tétele közvetlen általánosítása.

3. Az Erdős—Duschnik—Miller tétel első olyan általánosítása, melyben szereplő keresett homogén halmazok egyike sem megszámlálható. Erdős e problémákat R. Rado-val közösen vizsgálta tovább 1950, 1952, 1953-ban írt közös dolgozataiban, és 1956-ban egy 62 oldalas dolgozatban, melyben már annyi eredmény és probléma szerepelt, hogy joggal nevezhették el azt, amit csináltak, halmazelméleti particiókalkulusnak.

Az eredeti probléma diszkusszióját legalábbis az általánosított kontinuumhipotézis feltételezése és bizonyos korlátozások mellett végülis Erdős Rado-val és velem írt közös dolgozatában fejezte be 1965-ban. Ez a több, mint százoldalas dolgozat, mely csak az olyan általánosításokkal foglalkozik, melyek számosságokra vonatkoznak, olyan nagy anyagot tartalmaz, hogy ismertetésére itt nincs hely. Csak két Erdőstől származó gondolatot mondok el, melyek további vizsgálata azután számtalan új problémához és eredményhez vezetett.

Az egyik „legősibb", Sierpinksitől származó eredmény, hogy ha $|X|=2^{\aleph_0}$ és f 2-színű 2-partíció, akkor nincs szükségképpen nem meg számlálható homogén halmaz.

Erdőst hosszú időn keresztül foglalkoztatta a kérdés, hogyan erősíthető ez az ellenpélda. Legyen f X 2-színű r-partíciója. Ha $Y \subset X$ homogén, ezt úgy is fogalmazhatjuk, nincs Y-ban minden színből r-es. Nevezzük az ilyen halmazt nem teljesen inhomogénnek. Ha most f nem 2-színű, hanem több, akkor egy nem teljesen inhomogén „nagy" halmaz létezése gyengébb állítás, mint egy homogéné.

Így fogalmazta meg a következő kérdést:

(1) Legyen X $2^{\aleph_0}$ számosságú halmaz, $2<\gamma\leqq 2^{\aleph_0}$. Létezik-e X-nek olyan γ-hosszúságú 2-partíciója, melyre nézve minden nem megszámlálható részhalmaz teljesen inhomogén.

Hamarosan be is bizonyította, hogy ha feltesszük a kontinuumhipotézist, azaz, ha $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, akkor a válasz $\gamma=2^{\aleph_0}$-ra is igenlő. Ez az eredmény is a [43] dolgozatunkban szerepel.

Kiderült később, hogy szinte valamennyi színezési típusú problémában az (1) típusú általánosítási lehetőség fontos és érdekes kérdésekhez vezet.

A kiinduló (1) probléma státusza ma a következő. J. Baumgartner bebizonyította, hogy konzisztens a halmazelmélet axiómáival, hogy $2^{\aleph_0}$ akármilyen nagy és Erdős eredménye mégis érvényes.

F. Galvin és S. Shelah egy közös dolgozatban bebizonyították, hogy (1) igaz, ha $\gamma\leqq\aleph_0$ és a követelményt úgy gyengítjük, hogy minden $2^{\aleph_0}$ számosságú részhalmaz teljesen inhomogén. Az azonban ma is megoldatlan még $\gamma=3$-ra is, hogy az (1) problémára igenlő válasz következik-e a halmazelmélet axiómáiból, vagy pedig tagadása konzisztens a $2^{\aleph_0}>\aleph_1$ feltevéssel.

Ugyancsak e probléma vizsgálata során vetette fel a következő kérdést.

Legyen X $\varkappa$ számosságú halmaz, $2\leqq\gamma<\varkappa$.

(1′) $f:[X]^2\to\gamma$ γ-színű 2-partíciójú. Van-e $\varkappa$ számosságú nem teljesen inhomogén halmaz?

Lehetséges-e most már, hogy valamely adott $\varkappa$-ra pl. $\gamma=2$-vel a válasz tagadó, de $\gamma=3$-ra már igenlő.

Ugyancsak ő bizonyította be az általánosított kontinuumhipotézis feltételezése mellett, hogy pl. $\aleph_\omega$-ra ez a helyzet.

Ebből a bizonyításból lett [43] dolgozatunk úgynevezett kanonizációs tétele, mely szinguláris számosságú halmazokon értelmezett r-partíciók vizsgálatát igen

általános feltételek mellett, reguláris számosságú halmazokon értelmezett r-partíciók vizsgálatára vezeti vissza.

A partíciókalkulus egy másik irányú általánosítási lehetősége, hogy az X alaphalmaz egy rendezését is adottnak tekintjük, és a v-edik színben előírt rendtípusú, v-színű homogén halmazt keresünk. Az ezirányú vizsgálatokat is Erdős és Rado indították el. Itt azonban már nem tudok kitérni az új eredményekre. A partíciókalkulus ma is élő terület. Eredményei és problémái egy részleges áttekintése megtalálható pl. [72]-ben.

4. A véges és végtelen gráfok elméletének talán legmélyebb kérdései gráfok kromatikus számaira vonatkoznak. Itt mindig lehet erdősi értelemben vett jó problémát találni, ahol a kérdés egyszerű, a válasz nehéz. Leírom egy történetét a sok közül. Tutte és Zykov egymástól függetlenül bizonyították 1947 körül, hogy minden k egészhez van olyan gráf, melynek kromatikus száma nagyobb mint k és nem tartalmaz háromszöget. Erdőst itt is azonnal foglalkoztatta egy erősebb ellenpélda lehetősége. 1959-ben, az általa felfedezett ún. valószínűségszámítási módszerrel megmutatta, hogy minden k, r egészhez létezik egy olyan viszonylag kevés szögpontú gráf, melynek kromatikus száma k-nál nagyobb, de nem tartalmaz r-nél rövidebb kört.

A valószínűségszámítási módszer igen egyszerű alapgondolata az, hogy a nem kívánt tulajdonságú gráfok leszámolásával és számuk felső becslésével egzisztenciabizonyítást lehet adni bizonyos kívánt tulajdonságú gráfok létezésére. A felfedezés lényege az, hogy ez a módszer nagyon sokszor működik olyan esetekben is, mikor a konstruktív bizonyítás reménytelen vagy nagyon bonyolult.

Még e bizonyítás előtt 1960-ban R. Rado-val közösen megmutatta, hogy a Tutte—Zykov tétel végtelen gráfokra is igaz, tetszőleges $\varkappa \geqq \omega$ végtelen számossághoz van $\varkappa$-számosságú $\varkappa$ kromatikus háromszöget nem tartalmazó gráf.

Természetesnek látszott most egy közös általánosítás lehetősége, ez azonban nem akart menni. Erdős állandó érdeklődése vezetett oda, hogy végül is a következő meglepő jelenséget fedeztük fel.

A közös általánosítás nem igaz. Ha egy gráf nem tartalmaz valamilyen páros kört, pl. négyszöget, akkor kromatikus száma legfeljebb $\aleph_0$. Ezután már könnyen ment a helyes általánosítás bizonyítása. Bármely $\varkappa \geqq \omega$ és $r < \omega$-ra van $\varkappa$-kromatikus $\varkappa$ számosságú gráf, mely nem tartalmaz r-nél rövidebb páratlan kört.

4. Az F halmazrendszer **B** tulajdonságú, ha létezik olyan B halmaz, mely F minden elemét metszi, de egyiket sem tartalmazza. Most ahelyett, hogy tételeket mondanék, pihenésül elmondom, hogyan fedeztük fel a **B** tulajdonságot. (A **B** tulajdonságot F. Bernstein fedezte fel 1908-ban, ő bizonyította, hogy ha $\varkappa \geqq \omega$, F $\varkappa$ számosságú és F $\varkappa$ számosságú halmazokból áll, akkor **B** tulajdonságú). 1959-ben Erdős Mátraházán nyaralt az Akadémia üdülőjében. Szokás szerint néhány napra meglátogattam, hogy dolgozzunk. Ezúttal egy könyv megírását terveztük (azóta sem készült el). Több folyóiratot vittem magammal, melyekben utána kellett volna nézni bizonyos dolgoknak. Egyik ezek közül a Comptes Rendus Varsovie 1937-es száma volt. Ebben Tarski egy hosszú összefoglaló jellegű cikkében kellett valamit megtalálni. Nem találtam a dolgozatban a megfelelő helyet és Erdős vállalkozott, hogy ő majd kikeresi. Valamiért a szobámba kellett mennem és néhány perc múlva visszatérve, Erdőst lázas izgalomban találtam, olvasott. De nem Tarski cikkét, hanem az utána következőt. „Te, nézd csak" — mondta — „ezt nem tudtuk". Ha F megszámlálható halmazokból áll és bármely kettőnek a közös része legfeljebb n-elemű, akkor **B** tulajdonságú. A bizonyításon gondolkodott. Nem próbáltam megállítani. A keresett idézetet, Tarski cikkét, a könyvet elfelejtettük. Vacsorára be

kellett látnunk, hogy E. W. Miller — a dolgozat tragikusan fiatalon elhúnyt szerzője — tényleg tudott valamit, amit mi nem. El kellett olvasnom a bizonyítást. Tulajdonképpen még el sem mondtam a részleteket, mikor Erdős közbevágott. „Mi van, ha csak azt tesszük fel, hogy bármely kettő közös része véges?" Itt az ellenpélda az előző tételben, próbáltam visszatérni a bizonyítás formális befejezéséhez, de akkor már Erdős azt mondta, hogy jó, de tegyük fel, hogy a halmazok $\aleph_1$-esek. A hetet, könyvvázlat helyett, egy a **B**-tulajdonságról szóló 37 oldalas dolgozattal zártuk, melyben tizenkét tétel és tizennyolc probléma volt.

Erdős sokszor visszatért a **B** tulajdonsághoz, melynek a véges kombinatorikában is fontos szerepe van. Számos dolgozatot írt később ilyen véges problémákról is. Utoljára Shelahhal írt egy érdekes cikket, ismét végtelen halmazok rendszerei **B** tulajdonságáról.

A problémák közül az egyik ez volt. Tegyük fel, hogy $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Tegyük fel, hogy a G gráfnak $\aleph_2$ szögpontja van és minden $\aleph_2$-nél kevesebb szögpontú részgráf kromatikus száma legfeljebb $\aleph_0$. Lehet-e G kromatikus száma $\aleph_0$-nál nagyobb? Ezt a problémát [54]-ben megválaszoltuk. Lehet. Ma ez a megoldatlan probléma: lehet-e a kromatikus szám $\aleph_2$ is?

6. R. Radoval közösen vizsgálta a következő problémát. Egy F halmazrendszer Δ-rendszer, ha van olyan D halmaz, hogy bármely A, $B\in F$-re $A\cap B = D$. A legegyszerűbb tétel: Ha $|F|>2^{\aleph_0}$ és F megszámlálható halmazokból áll, akkor van $F'\subset F$, $F'>2^{\aleph_0}$, mely Δ-rendszer. Az első tételeket 1960-ban bizonyították. Később 1968-ban visszatértek a problémához és a sok paramétertől függő kérdés valamennyi speciális esetét kivizsgálták. Érdekessége e tételnek, hogy nagyon sok alkalmazása van. Például a Cohen-módszerrel történő függetlenségi bizonyítások jelentős részénél a „láncfeltétel" igazolása e tétel alkalmazásával a legkönnyebb. Megemlítek egy véges esetet. Könnyű látni, hogy ha F n elemű halmazokból áll, és $|F|\geqq(2n)!$ akkor F tartalmaz három elemű Δ-rendszert.

A következő véges probléma rendkívül nehéznek látszik. Igaz-e, hogy van olyan C konstans, melyre ha $|F|>C^n$ és F n elemű halmazokból áll, akkor F tartalmaz három halmazból álló Δ-rendszert.

B. Jónsson kérdezte a következő problémát. Mely $\varkappa$ számosságokra létezik olyan $\varkappa$ számosságú általános algebra, melynek nincs valódi $\varkappa$-számosságú részalgebrája. 1966-ban bizonyítottuk, hogy a válasz pozitív, ha $\varkappa<\aleph_\omega$, vagy ha $\varkappa=2^\lambda=\lambda^+$ alakú. Ezt az eredményt a partíciókalkulus egy tétele alkalmazásaként kaptuk.

Legyen $(S, \leqq)$ valamely kvázi rendezett halmaz. S kvázi jól rendezett, ha valahányszor $x_0, \ldots, x_n, \ldots \in S$, akkor van $n<m$ melyre $x_n\leqq x_\mu$. Ha f, g két függvény, melyre $D(f)=\alpha$, $D(g)=\beta$, $R(f)$, $R(g)\subset S$, azt mondjuk, hogy $f\leqq g$, ha létezik olyan φ, hogy $\varphi:\alpha\to\beta$ monoton és minden $\xi<\alpha$-ra $f(\xi)\leqq g(\varphi(\xi))$ S rendezésében. G. Higman bizonyította, hogy egy kvázi jólrendezett halmaz véges vektorai kvázi jólrendezettek. 1959-ben [13] Radoval vizsgálták a következő problémát. Legyen S kvázi jólrendezett, α-rendszám és S ez α-nál rövidebb olyan sorozatok (függvények) halmaza, melyek csak véges sok különböző S-beli értéket vesznek fel. Bebizonyítják, hogy $\alpha<\omega^\omega$-ra S_α is kvázi jólrendezett. E dolgozatnak elsősorban történeti jelentősége van. Ez vezette Nash-Williams-t a következő tétel bizonyításához. A rendszámokból alkotott tetszőleges hosszú függvények halmaza kvázi jólrendezett. E tétel bizonyításához definiálta Nash-Williams az itt nem reprodukálhatóan bonyolult jobban kvázi jólrendezett halmazok fogalmát és végül ez vezette A. Lavert Fraissé híres sejtésének megoldásához. Ha $\Theta_0, \ldots, \Theta_n, \ldots$ tetszőleges megszámlálható rend-

típusok, akkor van $n<m$, melyre $\Theta_n \leqq \Theta_m$ ($A \leqq$ kvázi rendezést a beágyzás definiálja).

Végül a matematikai rész befejezéséül kimondok egy tipikus Erdős-tételt [40] (1964).

Legyen $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ analitikus függvények egy családja, melyre minden z-re $\{f_\gamma(z) : \gamma \in \Gamma\}$ megszámlálható. Igaz-e, hogy akkor $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ is megszámlálható. Erdős válasza: Akkor és csak akkor, ha $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ (ha nem igaz a kontinuum-hipotézis).

7. Ha elgondolom, hogy nem hagytam-e ki semmi nagyon fontosat és hogy sikerült-e az Erdős-féle halmazelméletet az olvasónak igazában bemutatnom, mindkét kérdésre az a válasz, hogy nem. A másodikra van mentségem. Az irodalomban felsorolt 75 dolgozat terjedelme becslésem szerint legalább ötszáz nyomtatott oldal. Igazi nagysága nem csak a kimutathatóan „nagy" tételekben rejlik, hanem problematikájának hihetetlen gazdagságában. E problémák finomságait, összefüggéseit, elágazásait részleteiben ismertetni meg sem kísérelhettem.

Köszönjük a sok szép problémát, E. P., és reméljük, hogy még nagyon sokat gondolkodhatunk új sejtéseiden.

ERDŐS PÁL HALMAZELMÉLETI DOLGOZATAI

[1] Végtelen gráfok Euler-vonalairól, Mat. és Fiz. Lapok 1936, 129—141. (Gallai T.-, Vázsonyi E.-vel).

[2] Über Euler-Linien unendlicher Graphen, Journ. of Math. and Phys. 17 (1930) 59—75. (Gallai T.-, Vázsonyi E.-vel.)

[3] Some set-theoretical properties of graphs, Revista de la Univ. Nac. de Tucuman, Ser. A. Mat. y Fiz. Teor. 3 (1942) 363—367.

[4] On families of mutually exclusive sets, Annals of Math. 44 (1943) 315—329. (Tarski A.-val.)

[5] Some remarks on set theory I., Annals of Math. 44 (1943) 643—646.

[6] Some remarks on connected sets, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944) 443—446.

[7] On the Hausdorff dimension of some sets in Euclidean space, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 107—109. (N. G. de Bruijn-al.)

[8] On a combinatorial problem, Akademia Amsterdam, 10 (1948) 421—423. (N. G. de Bruijn-al.)

[9] A combinatorial theorem, Journal London Math. Soc. 25 (1950) 249—255. (Rado R.-al.)

[10] Some remarks on set theory II., Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 127—141.

[11] A color problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Akademia Amsterdam 13 (1951) 371—373. (N. G. de Bruijn-al.)

[12] Combinatiroal theorems on classifications of subsets of a given set, Proc. London Math. Soc. 3 (1951) 257—271. (Rado R.-al.)

[13] A problem on ordered sets, Journ. London Math. Soc. 28 (1953) 426—238. (Rado R.-vel.)

[14] Some remarks on set theory III., Michigan Math. Journ. 2 (1953) 51—57.

[15] Some remarks on set theory IV., Michigan Math. Journ. 2 (1953) 169—173.

[16] Partitions of the plane into sets having positive measure in every non-null measurable product set, Amer. Math. Soc. 79 (1955) 91—102. (Oxtoby J. C.-vel.)

[17] Some theorems on graphs, Hebrew Univ. Jerusalem 10 (1955) 13—16.

[18] A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956) 427—489.

[19] Some remarks on set theory V., Acta Sci. Math. Szeged 17 (1956) 250—260. (Fodor G.-val.)
[20] On a perfect set, Coll. Math. 4 (1957) 195—196. (Kakutani S.-vel).
[21] Some remarks on set theory VI., Acta Sci. Math. Szeged 18 (1957) 243—260. (Fodor G-val.)
[22] Partition relations connected with the chromatic number of graphs, Journal London Math. Soc. 34 (1959) 63—72. (Rado R.-vel.)
[23] A theorem on partial well-ordering of sets of vectors, Journal London Math. Soc. 34 (1959) 222—224. (Rado R.-al.)
[24] On the structure of set mappings, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958) 111—130. (Hajnal A.-val.)
[25] On the structure of inner set mappings, Acta Sci. Math. Szeged 1 (1959) 359—369. (Fodor G.-val.)
[26] Intersection theorems for systems of sets, Journal London Math. Soc. 35 (1960) 85—90. (Rado R.-vel.)
[27] Some remarks on set theory VIII., Michigan Math. Jornal 7 (1960) 187—191. (Hajnal A.-val.)
[28] Some remarks on set theory VII., Acta Sci. Math. 21 (1960) 154—163. (Hajnal A.-val.)
[29] A construction of graphs without triangles having pre-assigned order and chromatic numbers, Journal London Math. Soc., 35 (1960) 85—90. (Rado R.-vel.)
30] On a theorem in the theory of relations and a solution of a problem of Knaster, Coll. Math. 8 (1961). (Specker E.-vel.)
[31] On some problems involving inaccessible cardinals, Essays on the Foundation of Math. Hebrew Univ. Jerusalem 1961. 50—82. (Tarski A.-vel.)
[32] On the topological product of discrete compact spaces, General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of Symposium in Prague in September 1961, 148—151. (Hajnal A.-val.)
[33] On a property of families of sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961) 87—123. (Hajnal A.-val.)
[34] Some extremal problems on infinite graphs, Publications of the Math. Inst. of the Hungarian Academy of Science, 7 Ser. A. (1962) 441—457. (Czipszer J.-, Hajnal A.-val.)
35] Some remarks concerning our paper „On the structure of set mappings" and Non-existence of two-valued 0,1-measure for the first uncountable inaccessible cardinal, Acta Math. Hung. 13 (1962) 223—226. (Hajnal A.-val.)
[36] On a classification of denumerable order types and an application to the partition calculus, Fundamenta Math. 51 (1962) 117—129. (Hajnal A.-val.)
[37] The Hausdorff measure of the intersection of sets of positive Lebesgue measure, Mathematika London 1 (1963) 1—9. (Taylor S. J.-vel.)
[38] On some properties of Hamel basis, Colloqu. Math. 10 (1963) 267—269.
[39] An intersection property of sets with positive measure, Colloqu. Math. 10 (1963) 75—80. (Kestelman R.-, Rogers C. A.-val.)
[40] An interpolation problem associated with the continuum hypothesis, Michigan Math. Journal 11 (1964) 9—10.
[41] On complete topological subgraphs of certain graphs, Annales Univ. Sci. Bp. 7 (1964) 143—149. (Hajnal A.-val.)
[42] Some remarks on set theory IX., Michigan Math. Journ. 11 (1964) 107—127. (Hajnal A.-val.)

[43] Partition relations for cardinal numbers, Acta Math. Hung. 16 (1965) 93—196. (Hajnal A., Rado R.-al.)
[44] The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for non-negative numbers, Publ. Math. Debrecen 12 (1965) 259—263. (Aczél J-vel.)
[45] On a problem of B. Jonsson, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 14 (1966) 19—23. (Hajnal A.-val.)
[46] On chormatic number of graphs and set-systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966) 61—99. (Hajnal A.-val.)
[47] On the complete subgraphs of graphs defined by systems of sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966) 159—229. (Hajnal A.-, Milner E. C.-vel.)
[48] An example concerning open everywhere discontinuous functions, Revue Roum. de Math. Pures et Appl. 11 (1966) 621—622.
[49] Some remarks on set theory X., Studia Sci. Math. Hung. ,1 (1966) 157—159. (Makkai M.-mel.)
[50] Partition relations and transitivity domains of binary relations formes LMS 42 (1967) 624—633. (Rado R.-vel.)
[51] Some remarks on chromatic graphs, Coll. Math. 16 (1967) 253—256.
[52] Kromatikus gráfokról, Mat. Lapok 18 (1967) 1—2. (Hajnal A.-val).
[53] On decomposition of graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967) 359—3776. (Hajnal A.-val.)
[54] On chromatic number of infinite graphs, Proc. of the Colloqu. held at Tihany, Hungary, Akadémiai Kiadó, Budapest-Academic Press, New York, 1968, 83—98 (Hajnal A,-val.)
[55] Egy kombinatorikus porblémáról, Mat. Lapok 19 (1968) 345—348. (Hajnal A.-val.)
[56] On sets of almost disjoint subsets of a set, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1968) 209—218. (Hajnal A.-, Milner E. C.-vel.)
[57] A problem on well ordered sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969) 323—329. (Hajnal A., Milner E. C.-vel.)
[58] Set mappigandins poandzed partitions, Combinatorial theory and its applications. Balatonfüred, Hungary (1969) 327—363. (Hajnal A.-, Milner E. C.-vel.)
[59] Problems and results in chromatic graphs theory (dedicated to the memory of Jon Folkman), Proof Techniques in Graph Theory, book, ed. by Frank Harary, Academic Press, New York and London, 1969. 27—35.
[60] Problems in combinatorial set theory. Combinatorial Structures and their Applications. (Proc. Calgary Internat. Conf. Calgary Alta., 1969), 97—100. Gordon and Breach, New York, 1970.
[61] Some results and problems for certain polarized partitions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21 (1970) 369—392. (Hajnal A.-val.)
[62] Polarized partition relations for ordinal numbers, Studies in pure Mathematics. Academic Press, 1969. 63—87. (Hajnal A.-, Milner E. C.-vel.)
[63] Problems and results in finite and infinite combinatorial analysis, Ann. of the New York A. Sci. 175 (1970) 115—124. (Hajnal A.-val.)
[64] Ordinary partition relations for ordinal numbers, P. M. H. 1 (1971) 171—185. (Hajnal A.-val.)
[65] Partition relations for η_α sets, J. London Math. Soc. 3 (1971) 193—204. (Milner, E. C., Rado R.-rel.)
[66] Unsolved problems in set theory, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics XIII. Providence, R. I. (1971) 17—48. (Hajnal A.-val.)

[67] Partition relations for η_α sets, Hausdorff Memorial volume (to appear) (Hajnal, A.-, Milner E. C.-vel.)
[68] Some remarks on simple tournaments, Algebra Universialis (in print) (Fried, E.-, Hajnal A.-, Milner E. C.-vel.)
[69] On chromatic number of graphs and set systems, Proceedings of the Cambridge Summer School 1971. (to appear) (Hajnal A., Rothchild, B.-el.)
[70] On Ramsey-like theorems. Problems and results. (megjelenés alatt) (Hajnal A.-val.)
[71] Chain conditions on set mappings and free sets, Acta Sci. Math. (to appear) (Hajnal A.-, Máté A.-val.)
[72] Unsolved and solved problems in set theory, Proceedings of the Tarski Symposium 1972 (Hajnal A.-val.) megjelenés alatt
[73] On some general properties of chromatic numbers, Proceedings of the Topology Symposium, Keszthely (1972) (Hajnal A.-val.) megjelenés alatt
[74] Simple one-point extensions of tournaments. Mathematika 19 (1972) 57—62. (Hajnal A.-, Milner E. C.-vel.)
[75] Separability properties of almost-disjoint families of sets, Israel Journal of Mathematics, 12 (1972) 207—214. (Shelah S.-vel.)
[76] Intersection theorems for systems of sets, II. J. London London Math. Soc. 44 (1969), 467—479

О ДЕЯТЕЛЬНОСТИ П. ЭРДЁША В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

АНДРАШ ХАЙНАЛ

THE SET-THEORATICAL WORK OF P. ERDŐS

A. HAJNAL

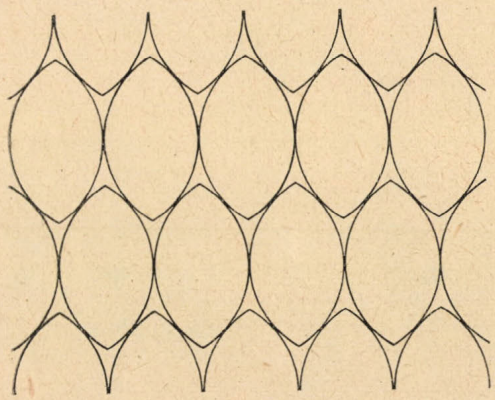
LENCSÉK LEGSŰRŰBB ELHELYEZÉSE A SÍKON

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

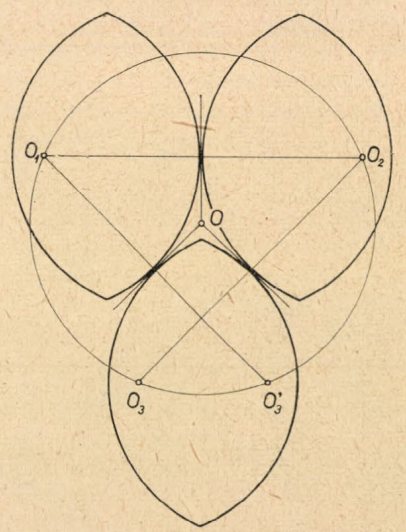
Emlékeztetünk egy általános tételre [1,2], amely szerint centrálisan szimmetrikus kongruens konvex lemezek semmilyen elhelyezésének a sűrűsége sem haladhatja meg a legsűrűbb rácselhelyezés sűrűségét. Egy centrálszimmetrikus konvex lemez kongruens példányainak legsűrűbb elhelyezésének vizsgálatában tehát elég rácselhelyezésekre szorítkozni. De egy konkrét lemez legsűrűbb rácselhelyezésének meghatározása gyakran nem könnyű feladat. Gyakorlati szempontból is érdekesnek látszik egy téglalap paralleltartományának az esete [3, 4]. Az alábbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a lemez két egybevágó kör metszete, röviden egy *lencse*. Látni fogjuk, hogy ebben az esetben a kérdés egy egyszerű megjegyzéssel elintézhető. A közlést az indokolja, hogy ehhez a kérdéshez több érdekesnek látszó probléma kapcsolódik.

A lencsét határoló körök középpontjain átmenő egyenest a lencse (optikai) tengelyének nevezzük. Meg fogjuk mutatni, hogy *kongruens lencsék legsűrűbb rácselhelyezése a lencsék tengelyével párhuzamos sorokból áll; minden lencse saját sorának két lencséjét és a szomszédos sorok két-két lencséjét érinti* (1. ábra).

Egy parallelogrammától különböző centrálszimmetrikus konvex l lemez kongruens példányainak egy legsűrűbb rácselhelyezését tudvalevőleg úgy nyerjük, hogy szerkesztünk egy l köré írt minimális területű centrálszimmetrikus hatszöget, ennek eltolt példányaival hézagmentesen kirakjuk a síkot és minden hatszögbe beírjuk l egy-egy eltolt pél-



1. ábra



2. ábra

dányát. Ismeretes, hogy az l köré írt minimális területű centrálszimmetrikus hatszög minden oldalfelezője l egy-egy határpontja. Ezért a közös oldalak mentén csatlakozó hatszögekhez tartozó lemezek érintik egymást.

Legyen l egy lencse, s tekintsük l kongreuns példányainak egy legsűrűbb rácselhelyezését. Az előbbiek szerint létezik ebben az elhelyezésben három, egymást kölcsönösen érintő lencse, l_1, l_2, l_3. Feltehetjük, hogy nincsenek csúcsaikkal érintkező lencsék, mert ebben az esetben a sűrűség kisebb, mint a fentebb leírt esetben. Ezért l_1, l_2, l_3 közül az egyiket, mondjuk l_3-at, a másik kettő két „különböző oldalról" érinti. Legyenek az l_1- és l_2-t határoló körök közül azok, amelyek egymást érintik, k_1 ill. k_2, az l_3-t határoló két kör pedig k_3 és k_3', úgy, hogy k_3 k_2-t, k_3' pedig k_1-t érintse (2. ábra). Legyenek a megfelelő körközéppontok O_1, O_2, O_3, O_3'. Legyen az l_1-, l_2-, l_3-hoz tartozó hatszögek közös csúcsa O. Akkor $\overline{OO_1}=\overline{OO_2}$, $\overline{OO_2}=\overline{OO_3}$, $\overline{OO_1}=\overline{OO_3'}$. Ezért O_1, O_2, O_3, O_3' egy körön fekszik. Mivel továbbá $\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=\overline{O_1O_3'}$, azért az O_1O_2 egyenes párhuzamos az O_3O_3' egyenessel. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Ha a lencsét határoló körök sugara egységnyi és a lencse vastagsága $2h$, akkor a lencsék legsűrűbb rácselhelyezésének sűrűsége

$$s = \frac{\arccos(1-h)-(1-h)\sqrt{2h-h^2}}{h\sqrt{4h-h^2}}, \quad 0<h\leqq 1.$$

Numerikus számítások azt sejtetik, hogy s h-nak fogyó függvénye. Mivel továbbá könnyen belátható módon $\lim_{h\to 0} s=\sqrt{8}/3$, várható, hogy $s<\sqrt{8}/3$. De s monotonitásának igazolása, vagy az $s<\sqrt{8}/3$ egyenlőtlenségnek közvetlen számolással való bizonyítása meglehetősen bonyolultnak látszik. Az alábbiakban, részben geometriai meggondolásokkal, egyszerű bizonyítást adunk az $s<\sqrt{8}/3$ egyenlőtlenségre. Eszerint *kongruens lencsék bármely elhelyezésének sűrűsége* $<\sqrt{8}/3$. Ez a korlát tetszés szerinti pontossággal megközelíthető olyan lencsék legsűrűbb rácselhelyezésével, amelyek vastagsága átmérőjükhöz képest elég kicsiny.

Tekintsük az $y^2\leqq x$, $0\leqq x\leqq h$ egyenlőtlenségekkel definiált parabolaszeletet tartalmazó minimális területű trapézt, vagyis azt a trapézt, amelyet az $x=0$, $x=h$ egyenletű két egyenes és a parabolának az $x=h/2$ abszcisszájú két pontjához húzott érintői határolnak. A parabolaszelet és a trapéz területének viszonya

$$\int_0^h \sqrt{x}\,dx/h\sqrt{\frac{h}{2}} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Ezt a viszonyt egy körszeletre vonatkozó megfelelő viszonnyal kell összehasonlítanunk.

Tekintsük az $y=\sqrt{1-x^2}$ egyenletű körnek és az $y=\sqrt{(1+\xi)(1-x)}$ egyenletű parabolának az $x\geqq 1-h$ félsíkba eső szeletét, ahol $0<h\leqq 1$ és $\xi=1-\frac{h}{2}$. Mivel a megfelelő trapézok területei egyenlők, csak annyit kell belátnunk, hogy a körszelet területe kisebb, mint a parabolaszeleté. Ez azonban valóban igaz, mert az

$$u=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{(1+\xi)(1-x)}$$

függvény $1-h \leqq x < \xi$-re negatív, $\xi < x < 1$-re pozitív és

$$2(1-x^2)^{3/2}u'' = -2+\frac{1}{2}\sqrt{1+\xi}\,(1+x)^{3/2} \leqq -2+\sqrt{2}\sqrt{1+\xi} < 0$$

miatt konkáv.

Az alábbiakban néhány további problémát említünk.

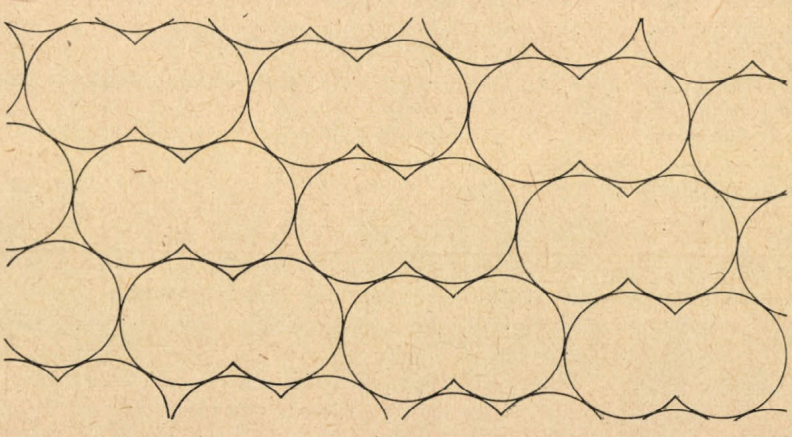
Mi történik, ha szimmetrikus lencsék helyett aszimmetrikus lencséket, azaz inkongruens körök metszetét tekintjük? Sejthető, hogy kongruens aszimmetrikus lencsék sem helyezhetők el a síkon $\sqrt{8}/3$ (vagy annál nagyobb) sűrűséggel. Ugyanez sejthető abban a határesetben, ha az aszimmetrikus lencse körszeletté fajul. Félkörnél nem nagyobb körszeletekre egy élesebb sejtést mondunk ki: Félkörnél nem nagyobb kongruens körszeletek nem helyezhetők el a síkon sűrűbben, mint a körszeletekből alkotott lencsék. Kiemeljük ennek a sejtésnek egy speciális esetét: Kongruens félkörök bármely elhelyezésének sűrűsége $\leqq \pi/\sqrt{12}$.

Felmerül itt egy általánosabb probléma. Bontsunk egy centrálszimmetrikus konvex lemezt a középpontján átmenő egyenessel két részre. Vajon igaz-e az, hogy a részekkel kongruens lemezek sohasem helyezhetők el sűrűbben, mint az eredeti lemezzel kongruens lemezek?

Ha a konvexitás feltételét elhagyjuk, akkor a válasz nemleges. Tekintsük egy szabályos hatszög egy oldalának az oldal középpontjától különböző pontját. Egészítsük ki a hatszöget erre a pontra vonatkozó tükörképével. A keletkező lemez kongruens példányai nyilvánvalóan nem helyezhetők el egységnyi sűrűséggel, de a hatszög kongruens példányai elhelyezhetők így. Konvex lemezekre azonban nem ismerek hasonló ellenpéldát.

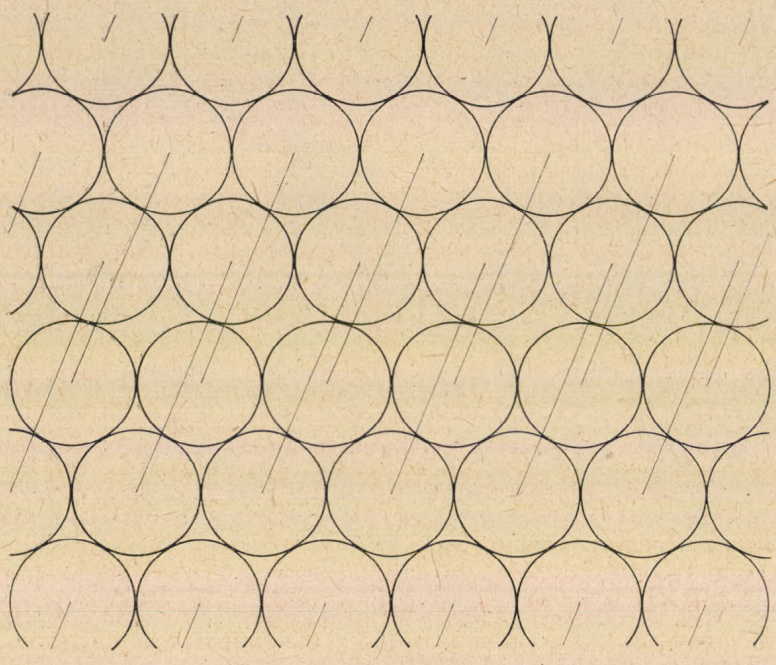
Tekintsük egy derékszögű xy-koordinátarendszerben a $(t, 0)$ pont körül írt egységkörnek az $x \geqq 0$ félsíkba eső részét, s egészítsük azt ki ennek a résznek az y-tengelyre vonatkozó tükörképével. Ha $-1 \leqq t \leqq 0$, akkor két egységkör metszete, azaz egy lencse keletkezik. Ha $t \geqq 0$, akkor két egységkör unióját nyerjük. Hogyan kapjuk $t > 0$-ra egy ilyen alakzat kongruens példányainak legsűrűbb elhelyezését?

Ha $2t$ olyan távolság, amely egységkörök legsűrűbb rácselhelyezésében két körközéppont között fellép, akkor a válasz nyilvánvaló. De a probléma megoldása t-nek egyetlen más pozitív értékére sem ismeretes. Ha $0 < t < 1$, akkor a sejthetőleg legsűrűbb elhelyezést a 3. ábra illusztrálja. Ha $t > 1$, de $2t$ nem egyenlő egy előbb



3. ábra

említett kritikus távolsággal, akkor a megoldást valószínűleg a következő konstrukció adja. Válasszunk ki egységkörök egy legsűrűbb rácselhelyezéséből egy megfelelő számú sorból álló „réteget". Illesszünk ehhez egy ugyanilyen réteget úgy, hogy az első réteg köreit úgy lehessen párosítani a második réteg köreivel, hogy az összetartozó körök középpontjai között meglegyen az előírt $2t$ távolság. A két réteg együtt egy újabb réteget alkot, amelynek eltolt példányait a legszorosabban illesztjük egymáshoz (4. ábra). Ez a konstrukció általában nem egyértelmű. A véges sok lehetőségből ki kell választani a legjobbat.



4. ábra

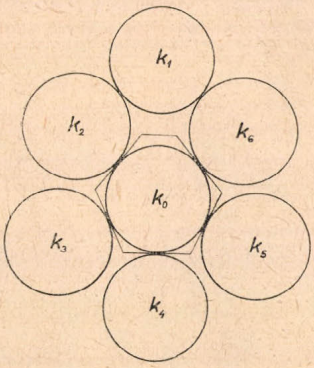
Ha $t=\sqrt{2}$, akkor az összetartozó köröket tartalmazó réteg csak két sorból áll és a „diszlokáció" maximális. Ezért a fenti elrendezésben a $t=\sqrt{2}$-höz tartozó sűrűség, azaz $\frac{\pi}{2+\sqrt{3}}$, kisebb, mint bármely más egynél nagyobb t-hez tartozó sűrűség. Mivel továbbá a $0<t<1$-re adott elhelyezésben a sűrűség $>\pi/\sqrt{12}$, azért *két kongruens kör uniójának kongruens példányai mindig elhelyezhetők legalább* $\frac{\pi}{2+\sqrt{3}}$ *sűrűséggel.* A fenti sejtés szerint ez a korlát nem javítható.

Egy igen jó felső sűrűség-korlát felállítása remélhető $1<t<\sqrt{3}$-ra egy kör Dirichlet-cellájának vizsgálata által. A Dirichlet-cellát azoknak a pontoknak a halmaza alkotja, amelyek közelebb vannak a kiszemelt kör középpontjához, mint bármelyik más körközépponthoz.

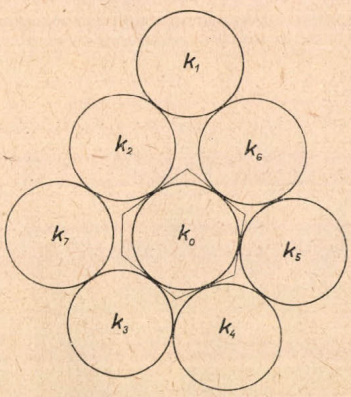
Legyenek $k_0, k_1, k_2, \ldots$ egységkörök. Rögzítsük k_0-t és k_1-t úgy, hogy középpontjaik távolsága $2t$ legyen. A többi kört viszont változtassuk úgy, hogy $k_0, k_1, k_2, \ldots$ közül egyiknek se legyen közös belső pontja egy másikkal. Keressük k_2,

$k_3, \ldots$ egy olyan helyzetét, amelyben k_0 Dirichlet cellájának területe minimális. Ha a minimumot $D(t)$-vel jelöljük, akkor a problémánkra javasolt felső sűrűségkorlát $\pi/D(t)$.

Az extremális helyzetre vonatkozó sejtésünk a következő. Mindig van öt kör, mondjuk $k_2, \ldots, k_6$, amelyek k_0-t érintik, s amelyek közül kettő, mondjuk k_2 és k_6, egyúttal k_1-et is érinti. Ha t egy bizonyos t_0 értéknél kisebb, akkor k_3, k_4 és k_5 egyenletesen van elosztva k_2 és k_6 között *(5. ábra)*. Ha viszont $t>t_0$, akkor van



5. ábra



6. ábra

egy további kör, mondjuk k_7, amely $k_2, \ldots, k_6$ közül kettőt érint, s ezek az utóbbi körök úgy helyezkednek el, hogy k_7 a lehető legközelebb jusson k_0-hoz *(6. ábra)*. $t=t_0$-ra a kétfajta körelhelyezéshez tartozó Dirichlet cella területe egyenlő. A k_7 kör csak $t>\sqrt{2}$-re vehet részt a Dirichlet cella képzésében, s így $t=\sqrt{2}$-re az első típusú körelhelyezés még jobb a másodiknál. Ezért t_0 kissé nagyobb $\sqrt{2}$-nél.

Ha a fenti sejtés helyes, akkor a javasolt sűrűségkorlát $t_0 \leqq t < \sqrt{3}$-ra pontos, mert ez a korlát a korábban adott konstrukcióval elérhető.

Végezetül megemlítjük, hogy az itt tárgyalt elhelyezési problémákkal analóg fedési problémák is felvethetők.

IRODALOM

[1] L. Fejes Tóth, Some packing and covering theorems. Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math. 12/A (1950) 62—67.

[2] L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren. Budapest 1965.

[3] L. Fejes Tóth, On the arrangement of houses in a housing estate. Stud. Sci. Math. Hungar. 2 (1967) 37—42.

[4] A. Florian, Bemerkung zu einer Arbeit von L. Fejes Tóth. Stud. Sci. Math. Hunfar. 3 (1968) 359—363.

НАИБОЛЕЕ ПЛОТНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ЛИНЗ В ПЛОСКОСТИ

ЛАСЛО ФЕЙЕШ—ТОТ

DENSEST PACKING OF LENSES

L. FEJES TÓTH

KOMBINATORIKUS GEOMETRIAI PROBLÉMÁK

SURÁNYI JÁNOS

1. ERDŐS P., A. MÉIR, T. SÓS V. és TURÁN P. az [1] dolgozatban háromszögekre értelmezett függvények értékeloszlására nyernek becslést gráfelméleti segédeszközökkel.

Vizsgáljunk általános elhelyezkedésű síkbeli ponthalmazokat, azaz olyanokat, amelyekben nincs 3 egy egyenesen levő pont. Ha f egy háromszögekre értelmezett valós értékű függvény, azt mondjuk, hogy a $P_1, \ldots, P_n$ általános ponthalmaz *(f-re) normált*, ha

$$f(P_i, P_j, P_k) \leqq 1,$$

valahányszor i, j, k különböző.

A gráfoknak bizonyos általánosításait használják fel a szerzők, az m-es-gráfokat. Így nevezünk egy rendszert, amelyik elemek, — ún. szögpontok — egy halmazából és ezekből kiválasztott m-esek (m-elemű részhalmazok) egy halmazából áll. Ha $m=2$, akkor a közönséges gráfokat kapjuk; a párokat a gráf éleinek nevezzük. A továbbiakban főként hármas-gráfokról lesz szó. Itt a hármasokat háromszögeknek is fogjuk nevezni. *Független*nek nevezzük a szögpontok egy olyan részhalmazát amelyik a gráf egyetlen m-esének sem tartalmazza mind az m elemét.

Az m-es gráfok fogalmát TURÁN P. már 30 évvel ezelőtt felvetette [3] dolgozatában egy rájuk vonatkozó problémával kapcsolatban. Ha $m \leqq l \leqq n$, jelentse $M_l^m(n)$ azt az r számot, amire készíthető n-szögpontú és r darab m-est tartalmazó m-es-gráf amiben nincs l szögpontú független részhalmaz, de kevesebb m-essel ilyen gráf nem létezik.

Ha a feltétel valamilyen l-re teljesül egy m-es-gráfban, (a minimalitást nem követelve meg), akkor azt mondjuk, hogy a gráf m-esei *lefogják* az összes l-elemű részhalmazokat.

Egy n szögpontú, $M_l^m(n)$ m-est tartalmazó, kívánt tulajdonságú gráfot a probléma *extremális* gráfjának nevezünk.

Az [1] dolgozat a következő általános tételre jut:

I. TÉTEL: *Legyen f és g két háromszögekre értelmezett függvény, és D_l olyan számérték, amelyre teljesül, hogy ha $P_1, \ldots, P_l$ egy f-re normált pontrendszer, akkor mindég van olyan i, j, k különböző számokból álló indexhármas, amelyre*

$$g(P_i, P_j, P_k) \leqq D_l.$$

Ekkor, ha $3 \leqq l \leqq r \leqq n$, akkor minden f-re normált n pontból álló pontrendszerben

legalább

$$M_l^3(r)\binom{r}{3}^{-1}\binom{n}{3}$$

olyan ponthármas van, amelyre g értéke D_l-nél nem nagyobb.

Így is fogalmazhatjuk az eredményt: annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott ponthármasra g nem nagyobb D_l-nél, legalább

$$\frac{M_l^3(r)}{\binom{r}{3}}.$$

A tétel alkalmazása egyfelől D_l meghatározását kívánja valamilyen f és g függvény és l érték mellett, másfelől erre az l-re és valamilyen r-re $M_l^3(r)$ meghatározását. Világos, hogy $M_l^3(r)$ helyettesíthető egy alsó korlátjával. Az is magától értetődő, hogy általában

$$M_l^m(l)=1.$$

Így amint ismerünk egy D_l értéket, alkalmazhatjuk az I. tételt.

Az [1] dolgozat szerzői megmutatják, hogy ha f is g is a terület, akkor D_5 minimuma $(\sqrt{5}-1)/2$, másrészt, hogy $M_5^3(7)=5$. Így az I. tétel a következőt adja:

Legalább 7 pontból álló, területre normált pontrendszer összes hármasainak legalább a hetedrésze $(\sqrt{5}-1)/2$-nél nem nagyobb területű háromszöget határoz meg.

Választhatjuk f-nek, ill. g-nek a háromszög bármilyen más jellemzőjét pl. kerület, beírt, körülírt kör sugara, legkisebb, legnagyobb magasság, stb. Mindezen esetekre D_l-ről semmi sem ismeretes egyelőre. Az alábbiakban meg fogom mutatni, hogy ha ismét f-et is g-t is a területnek választjuk, akkor D_6 minimuma 1/3.

2. Ugyancsak bő lehetőséget ad a kutatásra az $M_l^m(n)$ függvény vizsgálata. TURÁN [3] dolgozatában az élgráfokra megoldotta a problémát. (Ő a komplementer gráfra fogalmazta meg a kérdést, arra a gráfra, amely ugyanazokból a szögpontokból áll, mint az adott gráf és azokból az élekből, amelyek az adott gráfból hiányoznak.) Megmutatta, hogy ha $n=(l-1)q+r$ ahol $0 \leqq r \leqq l-2$, akkor

$$M_l^2(n)=\binom{q+1}{2}r+\binom{q}{2}(l-1-r)\left[=\binom{q}{2}(l-1)+qr\right].$$

Ezt az értéket az a gráf adja, amelyik r darab $q+1$ szögpontú és $l-1-r$ q-szögpontú teljes gráfból áll, azaz olyanból, amelyben minden pont mindegyik másikkal össze van kötve. Az egyes részeket egymással nem köti össze él. Ez az egyetlen extremális gráf.

Az általános esetben, legalábbis ha $h=(l-1)/(m-1)$ egész és osztója n-nek, TURÁN azt sejtette, hogy extremális gráfot kapunk, ha a szögpontokat $(l-1)/(m-1)$ egyenlő osztályba osztjuk és mindegyik osztály minden hármasát kiválasztjuk. Hasonló gráf képezhető akkor is, ha n nem osztható h-val. Akkor az egyes osztályok $[n/h]$ vagy $[n/h]+1$ eleműek. Azt fogjuk mondani, a szögpontokat „lehetőleg egyenletesen" soroltuk osztályokba. Az így keletkező m-es-gráfot $\mathcal{G}_{l,n}^m$-nel fogom jelölni.

Az $m>2$ esetre KATONA GY., NEMETZ T., SIMONOVITS M. a [2] dolgozatban becsléseket ad meg. Megmutatják többek közt, hogy

$$M_l^m(r)\Big/\binom{r}{l}$$

az r-nek nem-csökkenő függvénye.

Részletesebben foglalkoznak az $m=3$ esettel, és az alábbiakban is főleg erről lesz szó. Ezért $M_l^3(n)$ és $\mathcal{G}_{l,n}^3$ helyett rövidebben $M_l(n)$-t és $\mathcal{G}_{l,n}$-t fogok írni.

A [2] dolgozat egy $\mathcal{G}_{l,n}$-től különböző $\mathcal{H}_{l,n}$ gráftípust vizsgál, amelynek háromszögei minden l-elemű részhalmazt lefognak. A szögpontokat $l-1$ osztályba sorolják lehetőleg egyenletesen, ezeket ciklikus sorrendbe rendezik úgy, hogy a különböző szögpontszámú osztályok lehetőségig váltsák egymást. $\mathcal{H}_{l,n}$-hez azok a háromszögek tartoznak, amelyeknek a szögpontjai egy osztályban vannak és azok, amelyeknek 2 szögpontja egy osztályban van, egy a következőben.

Rámutatnak, hogy ha n nem osztható $l-1$-gyel, akkor bizonyos $\mathcal{G}_{l,n}$ és $\mathcal{H}_{l,n}$-től különböző $\mathcal{K}_{l,n}$ gráfok is ugyanannyi háromszöget tartalmaznak és le van fogva bennük minden l elemű részhalmaz. Ezek úgy keletkeznek $\mathcal{H}_{l,n}$-ből, hogy kiválasztunk 3 egymásutáni osztályt, amelyek közül az első eggyel több szögpontot tartalmaz, mint a harmadik. Választunk egy az első osztályból a másodikba menő élt, és minden azt tartalmazó háromszög harmadik csúcsát áthelyezzük az első osztályból a harmadikba. Ez arra utal, hogy itt nem várható az extremális gráfok egyértelműsége, ami bizonyos mértékig magyarázza a probléma nehézségét is.

Össze nem függő részekből álló extremális gráfokat úgy értelmezhetjük, hogy mindegyikben tekintjük a független szögpontok maximális számát. Az egyes részgráfok az ennél eggyel nagyobb pontszámú részhalmazok leforgására extremálisak, hiszen ha valamelyikből elhagyható volna egy m-es a független rendszerek pontszámának emelkedése nélkül, akkor az egész gráfban sem növekedne a független részhalmazok elemszámának a maximuma, tehát az sem volna extremális. Fordítva, ha egy gráf két részgráfból áll és az egyikben l_1, a másikban l_2 a független szögpontok maximális száma, akkor az egész gráfban l_1+l_2 ez a maximum, de ha a két részgráf extremális l_1+1-re ill. l_2+1-re, akkor sem biztos, hogy a kettőből összetett gráf extremális az l_1+l_2+1 elemű részhalmazok lefogására, mert más típusú gráfban lehetséges, hogy kevesebb m-es is lefogja az összes független l_1+l_2+1-est. Így

$$M_{l_1+1}^m(n_1)+M_{l_2+1}^m(n_2) \geqq M_{l_1+l_2+1}^m(n_1+n_2).$$

A $\mathcal{G}_{l,n}^m$ gráfok pl. h darab m-re extremális részgráfból állnak (az m-elemű részhalmazok lefogására csak az a gráf extremális, amelyhez az összes m-esek hozzátartoznak) és a sejtés szerint extremálisak $h(m-1)+1=l$-re. Látni fogunk más példát is össze nem függő részekből összetett extremális gráfra.

Az I. tétel alkalmazásához ugyan csak $M_6(9)$-re lesz szükségem, de a problémához nem érdektelen $M_5(n)$, $M_6(n)$ és a megfelelő extremális gráfok meghatározása néhány n értékre. Látni fogjuk, hogy $M_5(9)$ kisebb a sejtett értéknél. A $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ gráfok mellett fellépnek olyan extremális gráfok is, amelyek egymással össze nem függő $\mathcal{G}$ és $\mathcal{H}$ típusú részből állnak. Emellett $M_5(7)$-re fellép egy olyan extremális gráf is, amelyik a fönti típusok egyikébe sem sorolható, és aligha származtatható belőlük, hiszen két-két háromszögének legfeljebb egy közös csúcsa van. Ez továbbfejleszthető 8-szögpontú extremális gráffá is, 9 szögpontra pedig az ebből nyerhető gráf az egyetlen extremális gráf, ennek 2-vel kevesebb háromszöge van, mint a megfelelő $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$-típusú gráfnak.

Ez minden esetre egy újabb adalék a probléma bonyolultságához, bár könnyen lehetséges, hogy kis szögpontszámok esetén fellépnek olyan jelenségek, amelyekhez hasonlók a későbbiekben nem ismétlődnek meg.

3. Részletesebben megfogalmazva a következőket fogom bizonyítani:

II. TÉTEL: *Ahhoz, hogy egy hármas-gráfban minden 5-szögpontú részhalmaz le legyen fogva,* 6, 7, 8, 9 *szögpont esetén rendre* 2, 5, 8 *ill.* 12 *háromszögre van szükség.* 7, 8 *és* 9 *pont esetén* 4, 3 *ill. egyetlen extremális gráf van, ezeket az* 1., 2. *és* 3. *ábra mutatja.*

Az összes 6 *szögpontú részhalmazok lefogására* 7, 8, 9 *ill.* 10 *szögpont esetén legalább* 2, 4, 7 *ill.* 10 *háromszög szükséges.* 8, 9 *ill.* 10 *pont esetén* 1, 4 *ill.* 2 *extremális gráf van. Ezeket a* 4. 6. *ill.* 7. *ábra szemlélteti.*

Ezek szerint

$$M_5(6)=2, \quad M_5(7)=5, \quad M_5(8)=8, \quad M_5(9)=12;$$

$$M_6(7)=2, \quad M_6(8)=4, \quad M_6(9)=7, \quad M_6(10)=10.$$

III. TÉTEL: *Egy* 6 *pontból álló, területre normált pontrendszerből kiválaszthatók egy* 1/3*-nál nem nagyobb területű háromszög csúcsai. Itt „nem nagyobb" helyett „kisebb" mondható, kivéve, ha a pontok egy szabályos hatszög* 2 *területű affin képeinek a csúcsai,* azaz olyan konvex hatszögéi, amelyikben az egyes csúcsokat a következő harmadikkal (a „szemköztivel") összekötő átlók páronként felezik egymást és párhuzamosak egy-egy hatszögoldallal.

A II. és III. tétel felhasználásával az I. tétel a következőt adja:

IV. TÉTEL: *Ha* $n \geqq 9$ *és* $P_1, \ldots, P_n$ *egy területre normált pontrendszer, akkor a* $P_iP_jP_k$ $(1 \leqq i<j<k \leqq n)$ *háromszögek között legalább*

$$\frac{1}{12}\binom{n}{3}$$

1/3*-nál nem nagyobb területű van.*

Az alábbiakban a II. és III. tételt bizonyítom és teljesség kedvéért függelékben közlöm az I. tétel bizonyítását is, bár ebben csak megismétlem az [1] dolgozat gondolatmenetét.

4. A II. tétel állításai közül $M_5(6)=M_6(7)=2$ nyilvánvaló és mindkét esetben két közös csúcspont nélküli háromszög (a második esetben még egy különálló ponttal) az extremális gráf.

A továbbiakban ismételten használjuk a [2] dolgozat következő egyenlőtlenségét, (ez ott általánosabban tetszésszerinti m-es-gráfokra szerepel):

$$(n-3)M_l(n) \geqq nM_l(n-1). \tag{2}$$

Ez átrendezhető a következő alakba is:

$$\frac{M_l(n)}{\binom{n}{3}} \geqq \frac{M_l(n-1)}{\binom{n-1}{3}}, \tag{3}$$

ami a korábban említett monotonitást mondja ki $m=3$ esetben. Vagy mindkét esetben egyenlőség áll fenn vagy egyikben sem.

A (2) egyenlőtlenség könnyen adódik egy n-szögpontú extremális gráf háromszögeinek kétféle összeszámlálásából. Hagyjunk el tetszés szerint egy szögpontot és mindazokat a háromszögeket, amelyeknek ez csúcsa. A maradó $n-1$ szögpontú gráfban szintén nincs független l-es, tehát legalább $M_l(n-1)$ háromszög maradt vissza. Így megszámlálva mindegyik pont elhagyásakor a maradó háromszögeket legalább $nM_l(n-1)$ háromszöget számlálunk össze. Viszont egy-egy háromszöget így annyiszor vettünk számba, ahányszor a csúcsaitól különböző szögpontot hagytunk el, vagyis mindegyiket pontosan $n-3$-szor. Ezzel a (2) egeynlőtlenséget kaptuk.

Ebből azt kapjuk, hogy

$$M_5(7) \geqq 2\frac{7}{4} = 3{,}5$$

tehát $M_5(7)$ legalább 4. A 4 háromszög közül nem eshet össze háromnak egy csúcsa, mert ezt a csúcsot elhagyva csak egy háromszög maradna, annak két csúcsa és a további 3 pont tehát független. Olyan pontnak viszont kell lennie, ami 2 háromszöghöz tartozik. Egy ilyent elhagyva 2 közös csúcs nélküli háromszögnek kell maradnia. A további 2 háromszögnek az a 4 csúcsa, amelyek nem a hetedik csúcsba esnek, nem eshet az első két háromszög közül ugyanannak valamelyik csúcsával egybe, mert akkor valamelyik 3 háromszögnek volna közös csúcsa. Így viszont van két olyan pont, hogy mindegyik háromszög csúcsai közt előfordul valamelyikük. Elhagyva két ilyen pontot 5 független pont marad vissza. Eszerint

$$M_5(7) \geqq 5.$$

Ha viszont 5 háromszög van, akkor egyik szögpont sem lehet közülük négynek csúcsa, de kell olyannak lennie, amelyik 3 háromszögnek csúcsa. Egy ilyet elhagyva két közös csúcs nélküli háromszögnek kell maradnia. Legyenek ezek ABC és DEF, a hetedik pont G.

Lehet, hogy egy G-t tartalmazó háromszögnek csak egy háromszöggel van közös csúcsa, pl. ABG háromszöge a gráfnak. Ha még egy háromszög támaszkodik egészen az ABC háromszögre, pl. BCG is a gráfhoz tartozik, akkor B-t elhagyva adódik, hogy ACG-nek is hozzá kell tartoznia. A keletkező gráf $\mathcal{G}_{5,7}$, (egy $\mathcal{G}_{3,4}$ és egy $\mathcal{G}_{3,3}$ egyesítése), 1*a* ábra.

Más extremális gráfban nem csatlakozhat pl. ABC-nek két oldalához egy-egy háromszög. Így azonban az sem lehet, hogy pl. ABC, DEF és ABG mellett ADG is a gráfhoz tartozzék, mert akkor A-t elhagyva az adódnék, hogy BCG is a gráfhoz tartoznék, ellentétben az éppen mondottal. (Van 5 háromszög már de A, C, E, F, G független rendszer).

Támaszkodhat még két háromszög C-hez, melyeknek harmadik csúcsa mondjuk D ill. E, tehát ABC, DEF, ABG, CEG, CFG a gráf háromszögei. Ez $\mathcal{H}_{5,7}$ (1*b* ábra).

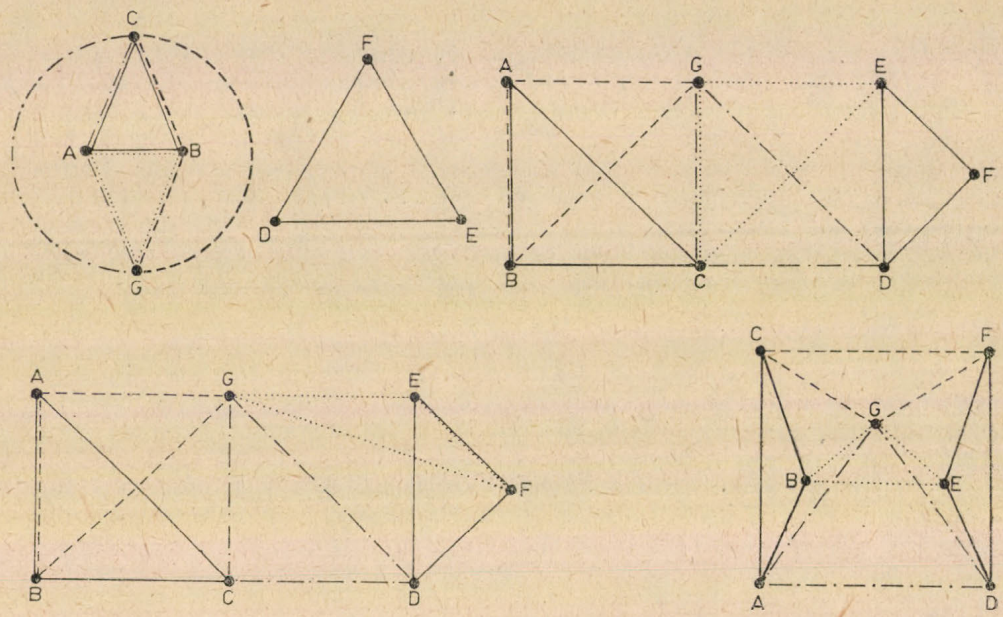
Ezeken kívül csak olyan extremális gráfok lehetnek, amelyekben G-n kívül mindegyik szögpont 2 háromszög csúcsa. Ez lehet ABC, DEF-en kívül ABG, CDG és EFG. Ez a $\mathcal{K}_{5,7}$ gráf, (1*c* ábra); vagy lehet, hogy semelyik két háromszögnek nincs két közös csúcsa, tehát G és a két háromszög egy-egy csúcsa alkotja a további háromszögeket, vagyis pl. ABC, DEF, ADG, BEG, CFG az öt háromszög (1*d* ábra). Nevezzük ezt $\mathcal{L}_{5,7}$ gráfnak.

5. 8 szögpont esetére (2)-ből azt nyerjük, hogy

$$M_5(8) \geqq \frac{8}{5}5 = 8.$$

Egy 8 háromszöget tartalmazó gráf egy csúcsában sem találkozhat 3-nál több háromszög, mert különben egy ilyen csúcsot elhagyva 7 pont közt legfeljebb 4 háromszög maradna, ami nem elég az 5 szögpontú részhalmazok lefogására. Ekkor viszont minden szögpont 3 háromszög csúcsa és elhagyásával 7 szögpontú extremális gráfnak kell visszamaradnia.

Vizsgáljuk meg sorra, melyik 7-szögpontú extremális gráf maradhat így vissza egy H szögpont elhagysásával és hogyan illeszkedhet a gráfhoz a H-ban találkozó 3 háromszög. $\mathcal{G}_{5,7}$-nél nyilván a DEF háromszög éleihez kell illeszteni a további háromszögeket (2*a* ábra) és a keletkező $\mathcal{G}_{5,8}$ gráf, (ami két $\mathcal{G}_{3,4}$-ből áll) valóban megfelel.



1. ábra

Ha a visszamaradó gráf $\mathcal{H}_{5,7}$, ebben F-hez 2 újabb háromszögnek kell csatcsatlakoznia, D-hez és E-hez egynek. Ha F-et elhagyjuk a maradó háromszögekhez csak DEH-t csatolhatjuk, hogy extremális gráfot kapjunk és a további két háromszög AEH és BEH, (2*b* ábra). Így $\mathcal{H}_{5,8}$-at kapunk.

A $\mathcal{H}_{5,7}$ gráfból csak úgy keletkezhetnék 8-szögpontú extremális gráf, ha G kivételével minden régi szögpont 1 új háromszögnek lenne csúcsa. Hagyjuk el pl. D-t; végignézve 7-szögpontú extremális gráfjainkat, könnyen láthatjuk, hogy a maradékból csak úgy lehetne újra extremális gráf, ha G-hez is illesztenénk új háromszöget. $\mathcal{H}_{5,7}$ tehát nem lehet része 8-szögpontú extremális gráfnak.

Az $\mathcal{L}_{5,7}$ gráfból is csak úgy keletkezhet 8-szögpontú extremális gráf, ha G kivételével minden szögpont egy új háromszög csúcsa. Hagyjuk el pl. A-t. A maradó alakzatban nincs két háromszögnek 2 közös csúcsa, és így egy szögpont elhagyásával csak $\mathcal{L}_{5,7}$ típusú gráfból keletkezhet. G szerepét csak E vagy F veheti át. Ha E, veszi át, akkor egy CFG-vel közös csúcsot nem tartalmazó háromszögre van szükség, azaz BDH-ra továbbá a CEH háromszögre. A nyolcadik háromszög ekkor AHF. A keletkező gráf átrendezhető a 2*c* ábra szimmetrikus alakjába, ahol min-

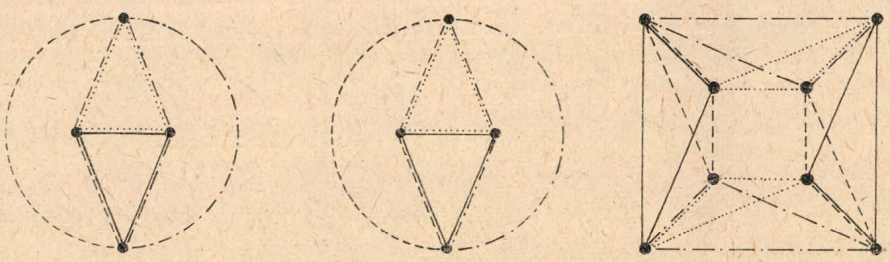
den csúcs—pozitív körüljárás szerint haladva — a következő és az azuátni második szögponttal alkot a gráfhoz tartozó háromszöget. Ebből az is világos, hogy bármelyik szögpont elhagysával $\mathcal{L}_{5,7}$ típusú gráf marad vissza. Nevezzük a nyert gráfot $\mathcal{L}_{5,8}$-nak.

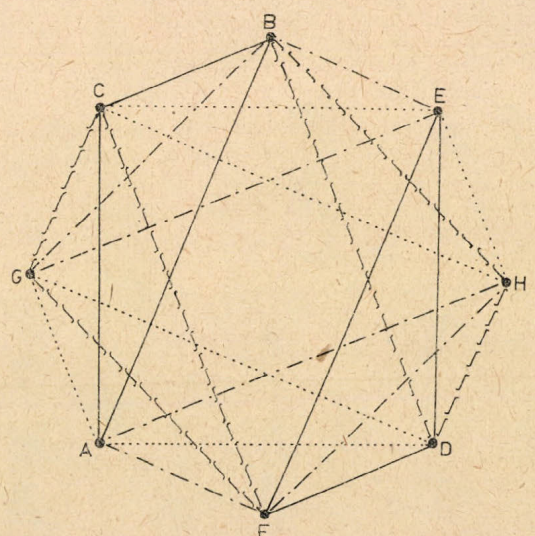
6. Ezzel előállítottuk a 8-szögpontú extremális gráfokat. A 9 szögpontúakra smét (2) szerint

$$M_5(9) \geqq \frac{9}{6} 8 = 12.$$

Egy 12 háromszöget tartalmazó extremális gráfban egy szögpont sem lehet 4-né több háromszög csúcsa, így mindegyik pontosan 4 háromszög csúcsa s így akármelyiket elhagyva extremális gráfnak kell visszamaradnia. Ez a gráf nem lehet sem $\mathcal{G}_{5,8}$, sem $\mathcal{H}_{5,8}$, mert ha ezekből egy régi pontot elhagyunk és egy újat hozzáveszünk, egy ugyanolyan gráfnak kell keletkeznie, mint éppen föntebb láttuk, amilyenből kiindultunk, ehhez azonban legalább egy régi csúcshoz 2 új háromszöget kellene illeszteni.

Ha $\mathcal{L}_{5,8}$-hoz veszünk egy új pontot és a 2*c* ábra két szemközti szögpontja pl. *A* és *E* nem ugyanannak az új háromszögnek a csúcsa volna, akkor ezt a két pontot





2. ábra

elhagyva 7 pont és csak 4 háromszög marad, tehát van 5 független pont. Így 12 háromszöget tartalmazó extremális gráf csak az az $\mathscr{L}_{5,9}$ gráf lehet, amelyik a fenti $\mathscr{L}_{5,8}$ gráfból a 2*c* ábra gráfján szemben levő pontokat egy újabb *J* ponttal összekötő háromszögek hozzácsatolásával keletkezik, vagyis az *AEJ*, *BFJ*, *CDJ*, *GHJ* háromszögekével.

Mivel itt a régi 8 pont szimmetriája továbbra is megmaradt,elég belátni, hogy pl. *A* elhagyásával is $\mathscr{L}_{5,8}$ típusú gráf marad vissza és erről nem nehéz meggyőződni. Eszerint $M_5(9)=12$, és az egyetlen extremális gráf $\mathscr{L}_{5,9}$, ami a 3. ábra szerint is elrendezhető. Ez mutatja, hogy a kilencedik pontnak sincs kitüntetett szerepe.

7. A 6 független pontot nem tartalmazó gráfokra (2)-ből

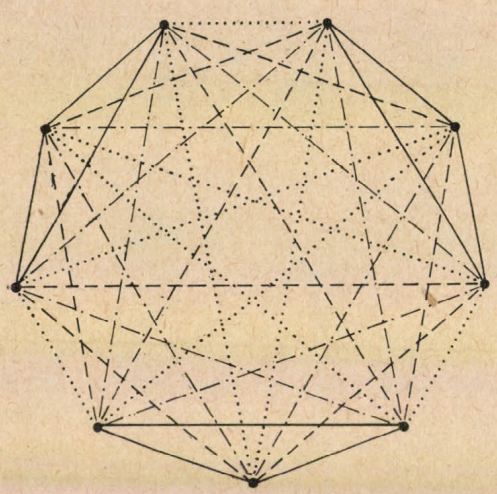
$$M_6(8) \geqq \frac{8}{5} 2 = 3{,}2, \quad M_6(8) \geqq 4.$$

A megfelelő gráf nem tartalmazhat izolált pontot, mert akkor a többi 7 pont közt már 5 független pont sem lehet és ehhez legalább 5 háromszög szükséges. Egy szögpontban sem találkozhat 2-nél több háromszög, így a 4 háromszög 12 csúcsa közül 4 szögpontba 2—2 esik, a másik 4 csak 1—1 háromszög csúcsa. Legyen *H* az előbbi típusú pont. Elhagyásával két közös csúcs nélküli háromszög marad *ABC* és *DEF* és egy magában álló *G* pont. Ehhez is csatlakozik egy új háromszög, mondjuk *FGH*. *F*-et elhagyva kell egy *ABC*-vel közös csúcsot nem tartalmazó háromszögnek maradnia, aminek *H* csúcsa. Ez akár *DEH*, akár *DGH*, akár *EGH* ugyanolyan típusú gráfhoz, $\mathscr{H}_{6,8}$-hoz jutunk, de a $\mathscr{H}_{6,8}$-hoz vezető átalakítás sem eredményez ezúttal más típusú gráfot. A nyert gráf (4. ábra) tehát az egyetlen extremális gráf, mely egy $\mathscr{H}_{4,5}$-re és egy $\mathscr{H}_{3,3}$-ra (vagy $\mathscr{G}_{3,3}$-ra) esik szét.

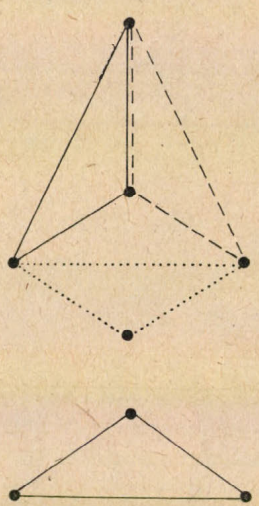
8. Ismét (2) szerint

$$M_6(9) \geqq \frac{9}{6} 4 = 6.$$

A 6 háromszög közül nem lehet 3-nak közös csúcsa, így viszont minden szögpont



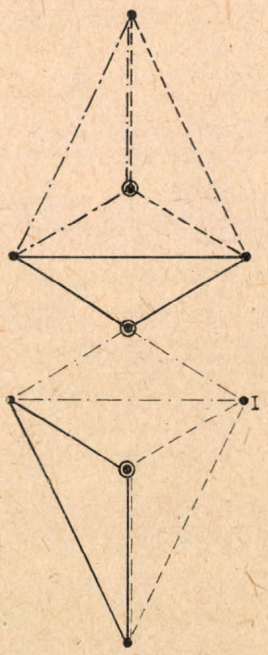
3. ábra



4. ábra

2 háromszög közös csúcsa kell, hogy legyen és bármelyik elhagyásával egy $\mathcal{H}_{6,8}$ típusú gráfnak kell visszamaradnia. Ekkor azonban egy kilencedik I csúcshoz illeszkedő 2 háromszög egyikének egy oldala közös a különálló háromszög egy oldalával, a másiknak egyik csúcsa e háromszög harmadik csúcsa, egy csúcsa pedig a másik részgráf magában álló csúcsa (5. ábra).

Ez sem extremális gráf azonban, mert az ábrán megjelölt pontok elhagyásával maradó 6 pont független. Legalább 7 háromszögre van tehát szükség. Ezek közül nem lehet 4-nek közös csúcsa. Így viszont legalább 3 szögpont 3—3 háromszögnek csúcsa. Ilyen szögpont, mondjuk I elhagyásával most is $\mathcal{H}_{6,8}$ típusú gráfnak kell visszamaradnia. Legyenek ennek háromszögei ABC, ABD, CDE, FGH. Ha pl. H is 3 háromszög csúcsa, akkor elhagyásával nyerjük, hogy FGI-nek is a gráfhoz kell tartoznia. Ha még GHI is hozzátartozik, akkor G elhagyásával adódik, hogy FHI is hozzátartozik és a keletkezett gráf (6*a* ábra) extremális.



5. ábra

Ha F-hez és G-hez nem csatlakozik több háromszög, akkor A, B, C és D közül legalább egyhez csalatkozik újabb háromszög, mert legalább 3 ponthoz kell 3 háromszögnek csatlakoznia. A és B továbbá C és D szerepe teljesen egyenrangú, így elég közülük egyikről megvizsgálni, hogyan csatlakozhat hozzá háromszög.

Ha AHI a gráfhoz tartozik, úgy az A elhagyásával keletkező gráfból egy háromszög hozzáfűzésével akkor lesz $\mathcal{H}_{6,8}$, ha a BHI háromszöget vesszük hozzá és a keletkező gráf valóban extremális (6*b* ábra).

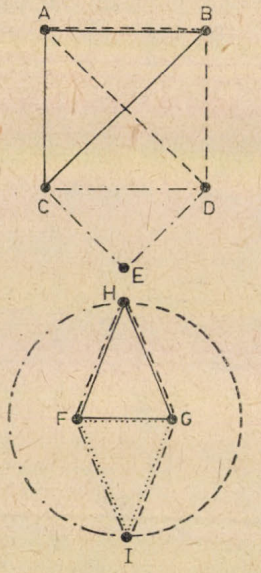
Ha CHI tartozik még a gráfhoz (a kiindulási $\mathcal{H}_{6,8}$ háromszögein kívül), akkor C elhagyásával adódik, hogy EHI-t kell még hozzávennünk, hogy ismét $\mathcal{H}_{6,8}$ keletkezzék. A keletkező gráf ismét extremális (6*c* ábra).

Mivel F, G és H szerepe egyenrangú, így megvizsgáltuk az összes olyan lehetőségeket, amelyekben valamelyik a gráf 3 háromszögének a csúcsa, tehát a továbbiakban feltesszük, hogy ezekhez legfeljebb még egy-egy háromszög csatlakozik.

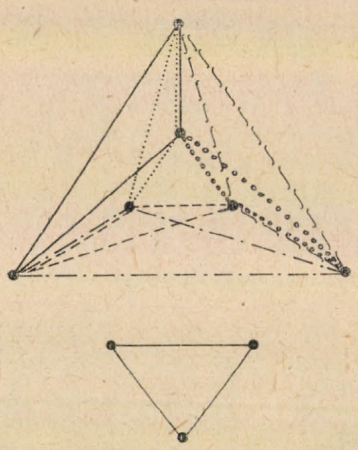
Csatlakozzék ismét A-hoz még egy háromszög. Ekkor az A elhagyásával maradó izolált B ponthoz és CDE, FGH háromszöghöz úgy kell még két háromszöget csatolni, hogy I közös csúcsuk legyen, B, C, D, F, G, H-hoz legfeljebb 1—1 háromszög csatlakozzék és $\mathcal{H}_{6,8}$ gráf keletkezzék. Ebben a gráfban két háromszög közös éle nem illeszkedhet I-hez, mert akkor másik végpontja csak B lehetne, de ahhoz is csak egy háromszög illeszkedhet, így valamelyik megmaradt háromszög egyik éle lehet ilyen él. Nem lehet ez az él az FGH háromszög éle sem, mert ha pl. az FGI, BHI háromszöget hozzávesszük, akkor mint föntebb láttuk, még AHI-t kell hozzávennünk, de ezzel H 3 háromszög csúcsa lett (a gráfot már egyszer számba vettük).

Marad két lehetőség: a CDI és BEI vagy a CEI és BDI egészíti ki a meglevő két háromszöget $\mathcal{H}_{6,8}$ gráffá. Az első esetben B elhagyásával adódik, hogy AEI-nek kell még a gráfhoz tartoznia és a 6*d* ábra gráfját kapjuk, ami ismét extremális. A második esetben ugyancsak B elhagyása még az ADI háromszög csatolását kívánná, de ekkor D 4 háromszög csúcsa lenne, a gráf tehát nem lehet extramális.

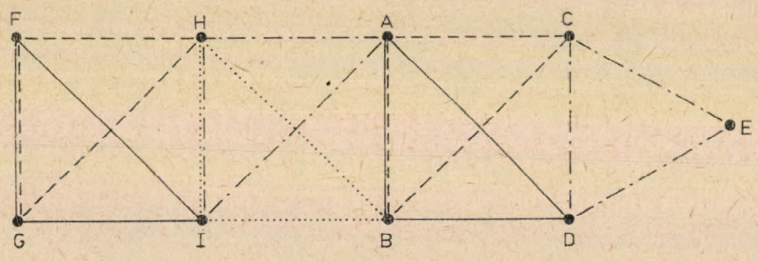
Hátra van még az a lehetőség, hogy A-hoz és B-hez nem csatlakozik újabb



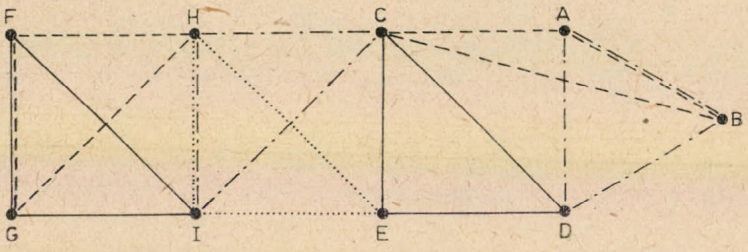
a)



d)



b)



c)

6. ábra

háromszög (és F, G, H-hoz továbbra is csak egy-egy). Ekkor A-n és B-n kívül legfeljebb egy pont lehet, amelyikbe nem esik új háromszög csúcsa (ha E-be kettőé esik) így C és D közül az egyikbe, pl. C-be esik és elhagyásával ismét $\mathcal{H}_{6,8}$-nak kell keletkeznie. Ennek ABD az izolált háromszöge (miután legfeljebb D-hez csatlakozhatnék egy háromszög csúcsa) és vagy pl. FGI, EHI-t vagy pl. EFI EGI-t kell még a gráfhoz vennünk. Az első esetben pl. B, E és F minden háromszögnek tartalmazza csúcsát, tehát egyik sem lehet csúcsa a hetedik háromszögnek (és G, H sem), tehát csak CDI lehet a még hiányzó, C-hez csatlakozó háromszög. Az utóbbi esetben pl. A, E és H tartalmazza mind a 6 háromszög egy-egy csúcsát, s így ismét csak CDI választható hetedik háromszögnek. Mindkét gráf extremális, de lényegében egyezik a 6*c* ill. 6*d* ábra már korábban talált gráfjaival.

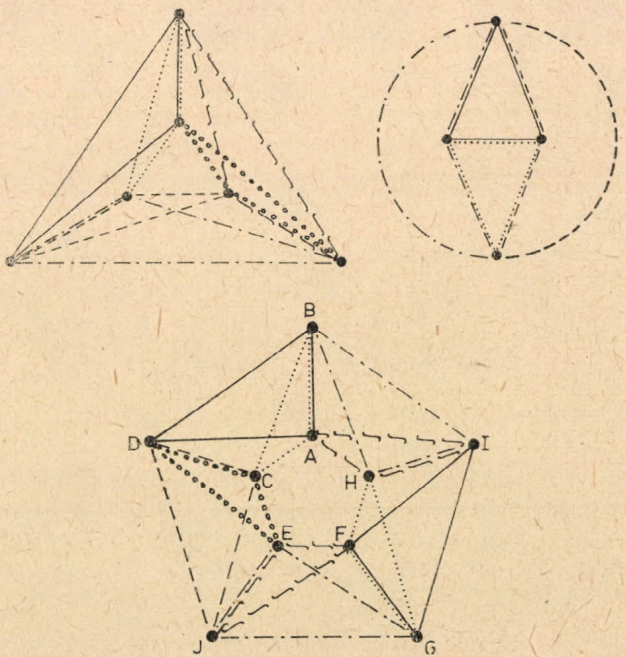
Az összes extremális gráfok tehát a 6. ábrán feltüntetettek. Ezek közül 6*a* egy $\mathcal{H}_{4,5}$-re és egy $\mathcal{H}_{3,4}$-re esik szét, 6*b* a $\mathcal{H}_{6,9}$ gráf, 6*c* a $\mathcal{H}_{6,9}$, 6*d* pedig egy $\mathcal{H}_{4,6}$ és egy $\mathcal{H}_{3,3}$ egyesítése.

9. A 10 szögpontú gráfokra a (2) egyenlőtlenség azt adja, hogy

$$M_6(10) \geqq \frac{10}{7}\,7 = 10,$$

és egy 10 háromszöget tartalmazó gráf egy pontja sem lehet háromnál több háromszög csúcsa. Így mindegyik szögpont 3 háromszög csúcsa és bármelyik elhagyásával 9 szögpontú extremális gráfnak kell keletkeznie.

Vegyük sorra, hogyan keletkezhetnek egy tizedik pont elhagyásával a 6. ábra gráfjai. A 6*d* ábrán csak a magában álló háromszög oldalához támaszkodhatnak az új háromszögek és a 7*a* ábra gráfját kapjuk.



7. ábra

Ha a tizedik pont elhagyásával a 6*a* gráf keletkezik, akkor a tizedik pontot tartva meg és pl. *I*-t hagyva el az *FGH* háromszög marad vissza, aminek a csúcsai nem lehetnek újabb háromszög csúcsai, mert a 10 szögpontú gráfban máris 3 háromszög csúcsai. Így *H* elhagyásával a 6*d* ábra gráfja keletkezik. Akkor viszont, mint láttuk, a 10 szögpontú gráf ismét csak a 7*a* ábra gráfja lehet.

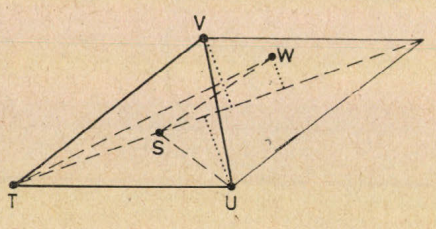
Ha a visszamaradt gráf a 6*b* gráf, abban *A*, *B*, *H*, *I*-hez nem csatlakozhat új háromszög. Ha a tizedik pont helyett *H*-t hagyjuk el, mivel a maradó gráfban *A*, *B*, *I*-hez nem csatlakozhat a még hiányzó háromszög, így az újra csak 6*a* típusú gráf lehet és — a tizedik pontot *J*-vel jelölve — ez csak a *CDJ*, *EJF*, *EJG* háromszögek hozzátételével keletkezhet. A teljes gráf tehát a 7*b* ábra gráfja, ami ismét extremális.

A 6*c* gráf ($\mathcal{K}_{6,8}$) nem maradhat vissza egy tíz szögpontú extremális gráfból egy pont elhagyásával. Ebben ugyanis a *C*, *H*, *I* szögpontokhoz nem csatlakozhat újabb háromszög. Ha most a tizedik pont helyett *E*-t hagyjuk el, könnyű látni, hogy a maradó gráf a 6. ábra többi gráfjainak nem lehet része, tehát a hiányzó háromszögeknek újra $\mathcal{K}_{6,9}$-cé kellene kiegészítenie a gráfot, ehhez is azonban újabb háromszögnek kellene illeszkednie *C*-hez, amit éppen kizárunk.

Ezzel beláttuk, hogy $M_6(10)=10$ és az extremális gráfok a 7. ábrán láthatók. Közülük 7*a* egy $\mathcal{K}_{4,6}$ és egy $\mathcal{K}_{3,4}$ egyesítése, 7*b* pedig a $\mathcal{K}_{6,10}$ gráf.[1]

10. *A III. tétel bizonyítása.* A tételben leírt normált ponthatos meghatározta legkisebb háromszög területe 1/3, így figyelmen kívül hagyhatjuk az olyan hatosokat, amelyekben van ennél kisebb területű háromszög. Ennek alapján nem kell foglalkoznunk az olyan pontrendszerekkel, amelyekben valamelyik háromszög egy oldalegyeneséhez van a hozzá tartozó magasság harmadánál kisebb távolságra levő pont. Ekkor viszont egy háromszög belsejében legfelejbb a súlypont tartozhat a pontrendszerhez.

Megmutatjuk, hogy ez sem fordulhat elő. Ha a $\mathcal{H}=TUV$ háromszög súlypontja *S* és *W* egy további pont, akkor, amennyiben *W* messzebb van $\mathcal{H}$ valamelyik oldalegyenesétől, mint a szemközti csúcs, akkor pl. $STU_{\triangle}$ területe kisebb, mint $TUW_{\triangledown}$ $TVW_{\triangle}$, $UVW_{\triangle}$ közül a legnagyobb területének a harmadrésze. Így, ha nincs egynél nagyobb területű háromszög, akkor $STU_{\triangle}$ területe kisebb 1/3-nál. Ha viszont *W* pl. abban a parallelogrammában van, aminek két szomszédos oldala *TU* és *TV*, (8. ábra), akkor *TS*-hez közelebb van, mint *U* és *V*, s így a $TSW_{\triangle}$ területe kisebb, mint $STU_{\triangle}$ területe, tehát kisebb, mint 1/3.



8. ábra

Ezzel azt is megmutattuk, hogy a tekintetbe jövő rendszerek egy-egy konvex hatszög csúcsai.

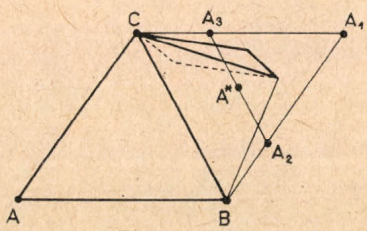
11. Legyen most *ABC* egy 1 területű, tehát maximális területű háromszög. Ekkor a további pontok nem lehetnek a csúcsokon át a szemközti oldallal párhuzamosan húzott egyenesek bezárta $A_1B_1C_1$ háromszögön kívül, másrészt eddigi megállapításaink szerint nem lehetnek az A_1BC, AB_1C, ABC_1 háromszögek A^*, B^*,

[1] Megjegyzendő, hogy $M_6(10)$ ismerete nem ad jobb becslést a IV. tételben, mint $M_6(9)$-é, mert $n=10$, $l=6$ esetén (2)-ben és így (3)-ban is az egyenlőség jele érvényes. Viszont nem nehéz belátni, hogy $15 \leqq M_6(11) \leqq 16$, aminek alapján az 1/12 helyettesíthető 1/11-del, ha $n \geqq 11$.

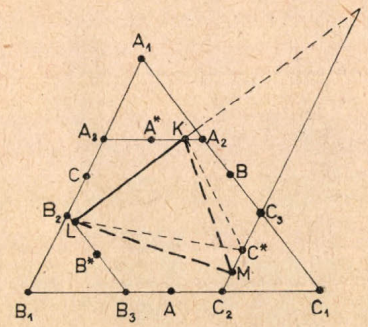
C^* súlypontján át a BC, CA ill. AB oldallal párhuzamosan húzott A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 tranzverzálisok és a háromszög között.

Nem lehet két további pont ugyanabban a részháromszögben, pl. $A_1A_2A_3$-ban. Ha ugynis volna itt további két pont (9. ábra), azok B-vel és C-vel konvex négyszöget kell, hogy meghatározzanak. Ennek van olyan csúcsa, amelyből induló két oldalt paralellogrammává egészítve ki ezt a négyszög tartalmazza, tehát az A_1BC háromszög is, ami egybevágó ABC-vel. Ekkor azonban a paralelogramma területe nem nagyobb a háromszög felénél, így a két négyszögoldal meghatározta háromszög területe az ABC háromszögének legfeljebb a negyede.

Eszerint az $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ háromszög egy-egy további A_0, B_0, C_0 pontot tartalmaz.



9. ábra



10. ábra

12. Nem lehet az $A_0B_0C_0$ háromszögnek pontja pl. az A_2A^*, B_2B^*, C_2C^* balról zárt szakaszokon, és ugyanígy nem lehet egyidejűleg közös pontja az A^*A_3, B^*B_3, C^*C_3 jobbról zárt szakaszokkal sem. Valóban, ha pl. K, L, M rendre az először említett három szakaszon van, akkor a KL szakasz K-n túli meghosszabbítása metszi C_2C_3-nak a C_3-on túli meghosszabbítását (10. ábra). Így a KLM háromszög területe nagyobb, mint KLC^*-é, mert ugyanez áll a közös oldalhoz tartozó magasságukra. Hasonlóan KLC^* háromszög területe nagyobb, mint KB^*C^*-é, mert KC^*-nak a C^*-on túli meghosszabbítása metszi B_2B_3-nak a B_3-on túli meghosszabbítását.

Az utolsó háromszög területe egyenlő $A^*B^*C^*$-évél, az viszont egybevágó az ABC háromszöggel, így az $A_0B_0C_0$ háromszög területe nagyobb volna, mint ABC-é, amit azonban kizártunk. Meggondolásunk akkor is helyes marad, ha K, L, M egyike egybeesik A^*, B^*, C^* közül a megfelelővel.

13. Vizsgáljuk most azt az esetet, amelyben a B_2B^* és C_3C^* balról zárt szakaszok az $A_0B_0C_0$ háromszögön kívül vannak (11. ábra). Megmutatjuk, hogy ekkor az AB_0C_0 háromszög terölete kisebb, mint 1/3, kivéve ha $B_0=B^*$ és $C_0=C^*$.

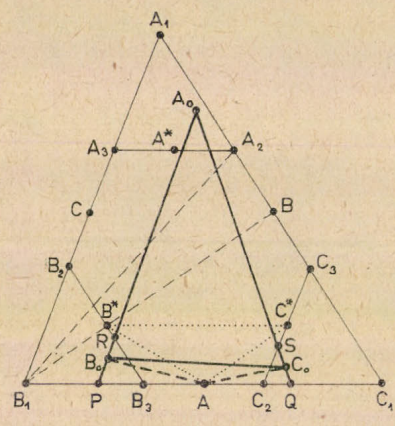
Messe az A_0B_0 és A_0C_0 félegyenes a B_1C_1 egyenest P-ben ill. Q-ban, a B^*B_3 ill. C^*C_2 szakaszt R-ben ill. S-ben. P és Q az A_1B_1 szakaszon van. Elég ezt P-re megmutatni. A B_1A_2 egyenes ellenkező oldalára esik B^*, mint az $A_1A_2A_3$ háromszög, mert B_1B^* a B ponton megy át. Így B_1A_2-nek van közös pontja az A_2A_3 bármely pontját B^*B_3 valamelyik pontjával összekötő szakasszal, tehát A_0B_0-lal is, ezért elválasztja A_0-t és P-t, ami állításunkat igazolja.

B_0A metszi a B_2B_3 egyenest, így A-n túli meghosszabbítása metszi C_3C_2-nek a C_2-n túli meghosszabbítását, és mivel Q a C_1C_2 szakaszon van, így A_0Q-nak a

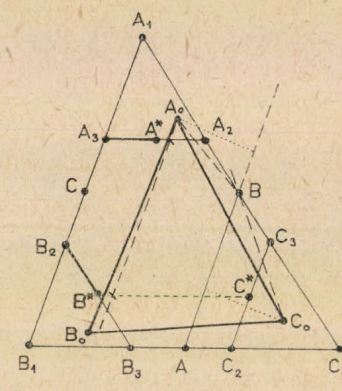
Q-n túli meghosszabbítását is. Eszerint C_0 távolsága B_0A-tól kisebb, mint S-é, kivéve, ha $C_0=S$, és S távolsága kisebb, mint C^*-é, kivéve ha $S=C^*$. Az AB_0C_0 háromszög területe tehát kisebb, mint az AB_0C^*-é, kivéve ha $C_0=C^*$.

Mivel meggondolásaink akkor is érvényesek, ha $B_0=B^*$ és érvényben maradnak, a B és C betűk megcserélésével is, így ugyanez a gondolatmenet adja azt is, hogy AB_0C^* területe kisebb, mint az AB^*C^* háromszögé, kivéve ha $B_0=B^*$.

Ha $B_0=B^*$ és $C_0=C^*$, akkor A_0 az A_2A_3 szakaszon kell, hogy legyen, mert különben az $A_0B_0C_0$ háromszög területe nagyobb volna, mint 1, továbbá egybe kellene esnie A_0-nak A^*-gal, mert különben vagy A_0B^*C vagy A_0BC^* területe kisebb volna, nint 1/3.



11. ábra



12. ábra

13. Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedhetik még el az $A_0B_0C_0$ háromszög. Ha a B_2B^* balról zárt szakasz az $A_0B_0C_0$ háromszögön kívül van (12. ábra), akkor a B^*B_3 zárt intervallumnak van közös pontja a háromszöggel, és, ha az előzőktől különböző esetet keresünk, akkor a C^*C_3 balról nyílt szakasznak is. Ekkor az A^*A_3 balról nyílt szakasznak a háromszögön kívül kell lennie, és ha ismét a fentitől különböző esetet keresünk, akkor a C^*C_2 balról nyílt szakasznak is kell, hogy legyen közös pontja a háromszöggel. Ez azt jelenti, hogy C^* az $A_0B_0C_0$ háromszög belsejében van, A^* és B^* pedig az A_0B_0 oldalegyenes ellenkező oldalán, mint C_0. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben vagy $A_0B_0C_0$ háromszög területe nagyobb, mint 1, vagy van 1/3-nál kisebb területű háromszög.

Feltehetjük, hogy A_0 nincs közelebb A^*B^*-hoz, mint B_0. Ha $A_0BC_{0\triangle}$ területe kisebb, mint 1/3, akkor állításunk helyes. Számítsuk ki e háromszög területét, mint az AB egyenes háromszögbe eső szakasza felének és a B_0 és C_0 pontok ezen egyenestől, mért távolsága összegének szorzatát. Mivel A_0C_0 a C^*C_3 és A_2A^* szakaszokat metszi, így C^* és A^* ellenkező oldalán van, mint B; másrészt az $A^*B^*C^*$ háromszög határával való metszésopntok harmadolják az AB szakaszt, így e szakasznak az A_0BC_0 háromszögbe eső része kisebb, mint $AB/3$. Ha tehát a háromszög területe nem kisebb, mint 1/3, akkor A_0 és C_0 AB-től mért távolságának összege nagyobb, mint az ABC háromszög C-ből húzott magassága. Ez az összeg a C_0-ból húzott magassága annak a háromszögnek, amelyiket az A_0-ból AB-vel párhuzamosan húzott egyenes metsz le $A_0B_0C_{0\triangle}$-ből. Ennek a háromszögnek AB-vel párhuzamos oldala az $A_0B_0C_0$ háromszögben metszi a B^*C^* szakaszt, mivel C^* a háromszög belsejében van, A^* A_0C_0-nak ugyanazon az oldalán, mint B_0, A_0B_0-nak ellenkező

oldalán, mint C_0, A_0 pedig nincs közelebb A^*B^*-hoz, mint B_0. Így a lemetszett háromszög AB-vel párhuzamos oldala tartalmazza az A_2A_3 és B^*C^* egyenesek közti szakaszt, ami AB hosszúságú. Ekkor azonban a lemetszett háromszög is és így $A_0B_0C_0$ is 1-nél nagyobb területű.

Ezzel bebizonyítottuk a III. tételt, mert az A, B^*, C, A^*, B, C^* egy a tételben leírt tulajdonságú hatszög hat csúcsa, másrészt minden ilyen hatszögben — A, B, C-vel jelölve minden második csúcsát, — a másik három csúcs az ABC háromszögnek az AB, BC és CA oldalak felezőpontjára vett tükörképében a súlypont, mint fent A^*, B^* és C^*.

FÜGGELÉK

Az I. tétel bizonyítása. Legyen $n \geqq r \geqq l$ és tegyük fel, hogy volna egy olyan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ normált pontrendszer, amelyben

$$g(P_i, P_j, P_k) > D_l \tag{4}$$

teljesülne több mint

$$\left(1 - M_l(r) \Big/ \binom{r}{3}\right) \binom{n}{3}$$

háromszögre. Készítsünk egy hármas-gráfot $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ szögpontokkal; a (Q_i, Q_j, Q_k) hármas akkor és csak akkor tartozzék a gráfhoz, ha a $P_iP_jP_k$ háromszögre nem teljesül (4). Ekkor a gráf hármasaira azt kapjuk (3) alapján, hogy azok száma kisebb, mint

$$\frac{M_l(r)}{\binom{r}{3}} \binom{n}{3} \leqq \frac{M_l(n)}{\binom{n}{3}} \binom{n}{3} = M_l(n).$$

Ez azt jelenti az $M_l(n)$ függvény értelmezése szerint, hogy van olyan l szögpont, amelyek közé egyetlen kijelölt hármas három pontja sem tartozik. Ekkor azonban léteznék olyan l pont normált pontrendszerünkben, amelyiknek minden háromszögére (4) teljesülne, ez azonban lehetetlen D_l definíciója szerint. Így az I. tétel állítása igaz.

IRODALOM

[1] P. Erdős, A. Méir, Vera T. Sós and P. Turán: On Some Applications of Graph Theory, II. Studies in Pure Mathematics, Presented to R. Rado, (Editor L. Mirsky), Academic Press, 1971. Lomdon—New York, 89—99. old.

[2] Katona Gy., Nemetz T., Simonovits M.: Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira. *Matematikai Lapok*, **15** (1964), 228—238 old.

[3] Turán P.: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), 436—452 old.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КОМБИНАТОРНОГО ХАРАКТЕРА

ЯНОШ ШУРАНЬИ

SOME COMBINATORIAL PROBLEMS OF GEOMETRY

J. SURÁNYI

Author deals with two problems. One is concerned with so called tri-graphs i.e. sets of points and of triades of these points (triangles). It is shown that at least 2, 5, 8 and 12 triangles are to be chosen out of 6, 7, 8 and 9 points respectively in order that any 5 points contain the vertices of at least one triangle. Figures 1, 2 and 3 illustrate the convenient choices of triangles. 1.d., 2.c. and 3. are different in type from extramel graphs found earlier and the number 12 of necessary triangles is under the conjectured number which was 14.

If we require only any 6 points to contain the vertices of a triangle then 2, 4, 7 and 10 triangles are to be chosen out of 7, 8, 9 and 10 points respectively. The extremal graphs are indicated by figures 4., 6. and 7.

The other result is as follows: if no 3 points out of 6 in the plane determine a triangle of area greater than 1, so there are three of the points determining a triangle of area at most 1/3, and even one of smaller area unless the points are vertices of an affine regular hexagone.

A general theorem of the paper [1] provides us, on the base of these results, the following theorem: For $n \geqq 9$, if in a point set $P_1, \ldots, P_n$ of the plane none of the triangles

$$P_i P_j P_k \, (1 \leqq i < j < k \leqq n)$$

has area greater than 1, then the area of at least

$$\frac{1}{12}\binom{n}{3}$$

of them is not greater than 1/3.

SZÁZ ÉVES A VALÓS SZÁMOK EGZAKT BEVEZETÉSE

KERTÉSZ ANDOR

Az emberiség számon tartja a kultúrtörténelem nevezetes eseményeit, s kerek számú évfordulók alkalmával megemlékezik róluk. Illik, hogy mi, matematikusok is megemlékezzünk arról, hogy száz évvel ezelőtt alkották meg a valós számok precíz fogalmát. A matematika történetében egy-egy fontos fogalom kialakulása általában hosszú kollektív munka eredménye, s ezért csak ritkán lehetséges valamely fogalom „születési" évéről beszélni. Érdekes, hogy ez az év a valós számok esetében egyértelműen az 1872-es esztendő, amint az alábbiakból is kitűnik.

A kontinuum, mint a számegyenes pontjainak összessége már igen korán fellép a matematikában. A racionális számoknak a számegyenesen való ábrázolása nem jelent nehézséget, s már a régi görögök (PYTHAGORAS és iskolája) is tudták, hogy a racionális számok nem töltik ki teljesen a számegyenest. Könnyű ugyanis belátni, hogy pl. $+\sqrt{2}$ nem racionális szám, mégis megfelel ennek a számnak a számegyenes egy jól meghatározott pontja, ti. az, amely a számegyenes pozitív részén van, s amelynek az O ponttól való távolsága az egységnyi oldalhosszúságú négyzet átlójának hossza.

Vannak tehát olyan számok, amelyek nem racionálisak, azaz „irracionális"-ak. A számegyenes pontjai a valós számok egy modelljét alkotják. A valós számok tehát a racionális és irracionális számok összessége.

A matematikusok hosszú időn át intuitíve kezelték a valós számokat, anélkül, hogy azok specifikus tulajdonságit ismerték volna. Már STEVIN (1548—1620) bevezeti a végtelen tizedes törtekkel való számolást, de ez approximatív jellegű marad, mivel akkoriban még nem ismerték a rekurzív definíciót [6]. A XIX. század első felében már jelentkeznek a valósszámok axiomatikus jellemzései, s ez vezetett el a modellek egzakt konstrukciójához.

A valós számok precíz bevezetésének éve az 1872-es esztendő. Csodálatos, hogy *ebben az évben egymástól függetlenül öt dolgozat jelenik meg, melyek mindegyike a valós számok bevezetésével foglalkozik*, mintegy ismételten igazolva azt a megállapítást, hogy a tudományok történetében a meglevő eredmények és a kutatók érdeklődése determinálják a következő eredményeket. Az analízis akkori helyzete, elsősorban CAUCHY és BOLZANO eredményei, továbbá a ponthalmazelmélet kialakulása éretté tették e korszakot a valós számok fogalmának precíz bevezetésére. Mégis akadtak kiváló matematikusok, mint pl. LEOPOLD KRONECKER (1823—1891), Németország akkori matematikus világának egyik koronázatlan királya, akiket WEIERSTRASS (1815—1897), DEDEKIND (1831—1916) és CANTOR (1845—1918) módszerei nem győztek meg. KRONECKER felfogása szerint a matematikában csak olyan fogalomalkotás engedhető meg, amely véges sok természetes szám segítségével véges sok lépésben megkonstruálható. Ebben az értelemben léteznek a racionális

számok, mint közönséges törtek, de nem léteznek az irracionális számok. KRONECKER a felfogására jellemző megjegyzést tett, amikor arról értesült, hogy LINDEMANN (1852—1939) bebizonyította a π transzcendenciáját: „Mire való az ön szép bizonyítása a π-re vonatkozólag? Minek egyáltalán ilyen problémákat vizsgálni, mikor irracionális számok nem léteznek?" Azóta a valós számok általánosan polgárjogot nyertek a matematikában, olyannyira, hogy ma már egyetemi hallgatók matematikai tanulmányaik kezdetén sem nélkülözhetik a valós számok ismeretét.

A valós számok bevezetésének különféle módszereiről részletes áttekintést nyerhetünk ALFRED LOEWY (1873—1935) [8] könyvéből. Az e tankönyvben kifejtett módszerek közül az analízis bevezető előadásában általában a következő három módszer egyikét szokásos használni az egyetemeken:

1. A valós számok bevezetése az ún. „Dedekind-féle szeletek" segítségével [4].

2. A valós számok bevezetése „intervallumskatulyázás" segítségével. (Amennyire e sorok írójának sikerült tisztáznia, ezt a módszert először P. BACHMANN (1837—1920) alkalmazta [1] könyvében.)

3. A valós számok bevezetése „Cauchy-sorozatok" segítségével (G. CANTOR [2], [3], 93—96. old.; E. HEINE (1821—1882) [5] és CH. MÉRAY (1835—1911) [9]).

A [4], [2], [5], [9] dolgozatok mindegyike 1872-ben jelent meg, míg a 2. módszer, mely az 1. és 3. módszer szerencsés kombinációjának tekinthető, még 20 esztendőt váratott magára. Bár az 1. és 3. módszer lényegesen különböző, köztük mégis fennáll valamelyes belső rokonság, melyre már DEDEKIND is rámutatott a [4] előszavában: „Während ich an diesem Vorwort schreibe (20. März 1872), erhalte ich die interessante Abhandlung: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", von G. CANTOR (Math. Annalen von CLEBSCH und NEUMANN, Bd. 5), für welche ich dem scharfsinnigen Verfasser meinen besten Dank sage. Wie ich bei raschem Durchlesen finde, so stimmt das Axiom in § 2 derselben, abgesehen von der äusseren Form der Einkleidung, vollständig mit dem überein, was ich unten in § 3 als das Wesen der Stetigkeit bezeichne.[1]

Ami a [2], [5] és [9] dolgozatokat illeti, HEINE a prioritást CANTORnak tulajdonítja: „Zu besonderem Danke bin ich dem Herrn CANTOR in Halle für seine mündlichen Mitteilungen verpflichtet, welche einen bedeutenden Einfluss auf die Gestaltung meiner Arbeiten ausübten, indem ich von ihm den Gedanken entlehnte, die allgemeinen Zahlen vermittelst jener besonders geeigneten Reihen einzuführen, die hier Zahlenreihen genannt werden" ([5], 173. old.)[2] — A [2] és [9] dolgozat független egymástól. Jóllehet a [2] és [9] dolgozat közvetlen összehasonlítása — [9] hozzáférhetetlensége miatt — nem volt lehetséges, a [8]-ban és [1]-ben található utalások miatt célszerűnek látszik a 3. módszert CANTOR—MÉRAY-féle módszernek nevezni.

Érdemes megjegyezni, hogy a fentiekben idézett [4], [2], [5] cikkek többé-kevésbé WEIERSTRASS hatása alatt állnak, aki a berlini egyetemen tartott előadásaiban

[1] „Midőn e sorokat írom (1872. márc. 20-án), megkaptam G. CANTOR „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" című érdekes dolgozatát, melyért az éleseszű szerzőnek hálás köszönetemet fejezem ki. Amint a gyors átolvasás után látom, a CANTOR dolgozatának 2. §-ában bevezetett axióma külső formájától eltekintve teljesen megegyezik azzal, amelyet én alább a 3. §-ban a folytonosság lényegeként jelölök meg."

[2] „Különös hálára vagyok kötelezve a hallei CANTOR úrnak azért a szóbeli közléséért, amely jelentős hatással volt e dolgozat megalkotására, minthogy tőle vettem át azt a gondolatot, hogy az általános számokat bizonyos alkalmas sorozatok — melyeket itt számsoroknak nevezünk — segítségével vezessük be."

a valós számokat olyan pozitív racionális tagú sorozatok segítségével vezette be, amelyeknek parciális összegei korlátos sorozatokat alkotnak. WEIERSTRASS módszerét tanítványa E. KOSSAK közölte [7] dolgozatában. (Vegyük észre, hogy ez a dolgozat is 1872-ből származik.)

IRODALOM

[1] P. BACHMANN, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen; Leipzig, 1892.
[2] G. CANTOR, Über eine Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen; *Math. Ann.* 5 (1872), 123—132.
[3] G. CANTOR gesammelte Anbhadlungen (Herausgegeben von E. ZERMELO, nebst einem Lebenslauf von A. FRAENKEL), Berlin, 1932.
[4] R. DEDEKIND, Stetigkeit und irrationale Zahlen; Braunschweig, 1872 (8. Auflage: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967).
[5] E. HEINE, Die Elemente der Functionenlehre; *J. Reine Angew. Math.* 74 (1872), 172—188.
[6] K. KOPFERMANN, Weierstrass' Vorlesung zur Funktionentheorie; *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass* 1815—1897 (Herausgegeben von H. BEHNKE und K. KOPFERMANN), Köln—Opladen, 1966, 75—96.
[7] E. KOSSAK, Die Elemente der Arithmetik; *Programm d. Friedr. Werderschen Gymnasiums*, Berlin, 1872.
[8] A. LOEWY, Lehrbuch der Algebra, Erster Teil (Grundlagen der Arithmetik); Leipzig, 1915.
[9] CH. MÉRAY, Nouveau précis d'analyse infinitésimale; Paris, 1872 (Leçons nouv. sur l'analyse infin. I.; Paris, 1894).

СТОЛЕТИЕ ТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

АНДОР КЕРТЕС

HUNDERT JAHRE EXAKTE EINFÜHRUNG DER REELLEN ZAHLEN

A. KERTÉSZ

Das Jahr 1872 ist das „Geburtsjahr" verschhiedener Konstruktionsprozesse der *reellen Zahlen* mittels der rationalen Zahlen. Diese Note gibt einen historischen Überblick über den Weg, der zu präziser Einführung der reellen Zahlen führte. Die Arbeiten [4] (Dedekindsche Schnitte), [2], [5], [9] (Fundamentalfolgen) und [7] (Weierstrasssche Methode mit Hilfe unendlicher Folgen positiver rationaler Zahlen, deren Partialsummen eine beschränkte Folge bilden) sind alle 1872 erschienen, während [1] (Intervallschachtelung) erst 20 Jahre später. Diese Schrift erörtert auch die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit dieser Arbeiten.

EGYENLETES KONVERGENCIA ÉS FOLYTONOSSÁGI MODULUS

ALPÁR LÁSZLÓ

Erdős Pál 60-ik születésnapjára

1. §. BEVEZETÉS

Legyen $\zeta (0<|\zeta|<1)$ komplex állandó, $h(z;\zeta)=h(z)=(z-\zeta)(1-\bar{\zeta}z)^{-1}$ és

$$f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.1}$$

a $|z|<1$ körben analitikus függvény. Az

$$f_1[h(z)]=f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (b_n=b_n(\zeta)) \tag{1.2}$$

függvény ugyancsak analitikus, amidőn $|z|<1$. Ezért, ha $z_1=h(z_2)$, $|z_1|<1$, és így $|z_2|<1$, akkor

$$f_1(z_1)=f_2(z_2)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_2^n. \tag{1.3}$$

TURÁN PÁL [7] vetette fel azt a kérdést, hogy milyen változást szenvednek az (1.3) egyenlőségek akkor, ha $|z_1|=|z_2|=1$. Megmutatta, hogy ebben az esetben létezik olyan $f_1(z)$ függvény, amelyre $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_1^\nu$ konvergens ugyan, és így az (1.3) első három egyenlősége továbbra is fennáll, de a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_2^n$ sor mégis divergens. Mivel $h(z)$ a $|z|\leqq 1$ kört konformisan és egyrétűen önmagára képezi le, ezért erre az érdekes jelenségre azt mondhatjuk, hogy *hatványsor lokális konvergenciája nem konform invariáns a konvergenciakör kerületén.*

Később TURÁN azt a problémát vetette fel, hogy vajon a fenti tulajdonsággal bíró $f_1(z)$ függvény lehet-e egyidejűleg folytonos is a $|z|=1$ körvonalon. Az igenlő választ J. CLUINE [3] adta meg, aki olyan $f_1^*(z)$ függvényt állított elő, amely a $|z|<1$ körben analitikus, a $|z|\leqq 1$ körben folytonos, és a $z=0$ pont körül kifejtett hatványsora[1] konvergens a $z_1=1$ pontban, mégis az $f_1^*[h(z)]=f_2^*(z)$ transzformált függvény hatványsora divergens a megfelelő $z_2=(1+\zeta)(1+\bar{\zeta})^{-1}$ helyen.

Egy korábbi eredményünket [1] és CLUNIE konstrukcióját felhasználva mi viszont azt muttattuk meg [2], hogy $f_1(z)$ hatványsora egyenletesen is konvergálhat a $|z|=1$ körvonalon, míg $f_2(z)$ hatványsora divergens e körvonal egy mindenütt sűrű, megszámlálható halmazán. Ez a tulajdonság más szavakkal így fejezhető ki: *hat-*

[1] Az ilyen hatványsort általában Maclaurin sornak nevezik. Mi, ebben a dolgozatban, csak egyszerűen hatványsornak fogjuk hívni.

ványsor egyenletes konvergenciája nem konform invariáns a konvergenciakör kerületén.

CLUNIE eredményének ismeretében, még 1967-ben, TURÁN azt a sejtést mondta ki, hogy $f_1(z)$ folytonossági modulusa a $|z|=1$ körvonalon logaritmikus nagyságrendű is lehet, azaz előfordulhat, hogy

$$\omega(\delta; f_1(e^{it})) = \sup_{0 \leqq \theta \leqq \delta} |f_1(e^{i(t+\theta)}) - f_1(e^{it})| = O(|\log \delta|^{-1}). \tag{1.4}$$

Ezt a sejtést K. H. INDLEKOFER [6] bizonyította be, aki szintén CLUNIE módszerét használja fel, és igazolja, hogy (1.4) teljesülése mellett is lehet a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ sor konvergens, míg a megfelelő $\sum_{n=0}^{\infty} b_n[(1+\zeta)(1+\bar{\zeta})^{-1}]^n$ sor divergens.

Ebben a dolgozatban azt mutatjuk meg, hogy az (1.4) feltétel megvalósulása esetén is lehet a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ sor egyenletesen konvergens, és egyidejűleg a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ sor divergens egy mindenütt sűrű, megszámlálható halmazon. Nevezetesen a következőket bizonyítjuk be:

TÉTEL. *Adott* ζ $(0<|\zeta|<1)$ *állandóhoz található olyan* $f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *a* $|z|<1$ *körben analitikus függvény, amely kielégíti a következő feltételeket:* (i) *a* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ *sor egyenletesen konvergens;* (ii)

$$\omega(\delta; f_1(e^{it})) = O(|\log \delta|^{-1}) \quad (\delta \to +0); \tag{1.4}$$

(iii) *és ha az* $f_1[h(z)]=f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *helyettesítéssel élünk, akkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ *sor divergens egy, a* $[0, 2\pi]$ *szakaszon mindenütt sűrű, megszámlálható* E *halmazon.*

Ha (1.4)*-ben* $O(|\log \delta|^{-1})$ *helyébe* $o(|\log \delta|^{-1})$ *tehető, ez már biztosítja a* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ *sor egyenletes konvergenciáját, és ekkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ *sor is egyenletesen konvergens.*

Más szavakkal, miközben z_1 és z_2, $z_1=h(z_2)$, befutják a $|z|=1$ körvonalat, $f_1(z)$ és $f_2(z)$ ugyanazokat az értékeket veszik fel ugyanabban a sorrendben, azaz $f_1(z_1)=f_2(z_2)$, mégis $f_1(e^{it})$ Fourier-sora egyenletesen konvergens, míg $f_2(e^{it})$ Fourier-sora egy mindenütt sűrű, megszámlálható halmazon divergens.

A tételt rövidebben is meg lehetne mutatni, mint az a következőkben történik, ha az összes felhasználásra kerülő eredményeket bizonyítás nélkül közölnénk. Ez azonban e dolgozat olvasását nagyon megnehezítené. A bizonyítás során igénybe vett eszközök és módszerek ismertetése — úgy véljük — nagyon tanulságos, ezért azokat, néhány kivételtől eltekintve, bizonyításaikkal együtt ismertetjük. A dolgozat így összefoglaló áttekintést ad majd e tárgykörben elért eredményekről.

2. §. A BIZONYÍTÁS EGYIK ALAPGONDOLATA

Mielőtt a tétel bizonyítására rátérnénk, bemutatjuk CLUNIE egyik alapötletét, amely itt (és több más munkában is) jelentős szerepet játszik. Csupán annyi változást eszközlünk, hogy megfordítjuk CLUNIE gondolatmenetének sorrendjét, ami rávilágít majd arra, hogy bizonyításának egyes lépései a kiindulás logikus folytatásai.

Végső soron olyan $f_2^*(z)$ függvényhez kell jutnunk, amely analitikus, ha $|z|<1$, folytonos, ha $|z|\leqq 1$, és hatványsora divergens a $z_2(|z_2|=1)$ pontban. Ilyen függvényt már FEJÉR szerkesztett (l. pl. [4]), és természetes gondolat ezt a Fejér-féle függvényt $f_2^*(z)$-nek tekinteni. Azt kell csak igazolni, hogy az inverz transzformációval nyert $f_2^*[h^{-1}(z)]=f_1^*(z)$ függvény folytonos a $|z|=1$ körvonalon, és hatványsora konvergens a $z_1=h(z_2)$ pontban; itt $h^{-1}(z)=(z+\zeta)(1+\bar{\zeta}z)^{-1}$ a $h(z)$ inverz függvénye.

FEJÉR konstrukciójának alapját az ún. Fejér-féle polinomok képezik. Az n-ik $(n\geqq 1)$ Fejér-féle polinomot a

$$\varphi_n(z)=\frac{z}{n}+\frac{z^2}{n-1}+\cdots+\frac{z^n}{1}-\frac{z^{n+1}}{1}-\cdots-\frac{z^{2n}}{n} \tag{2.1}$$

kifejezés értelmezi. Ismeretes (l. pl. [4]), hogy alkalmasan választott k_n pozitív egészek esetében a

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{k_n}}{n^2}\varphi_{2n^3}(z)$$

függvényt előállító sor hatványsor, amely konvergens a $|z|<1$ körben, divergens a $z=1$ pontban, bár $g(z)$ folytonos, ha $|z|\leqq 1$, és $g(1)=0$.

Legyen most $z_1=1$, ekkor $z_2=(1+\zeta)(1+\bar{\zeta}))^{-1}=e^{i\gamma}$, és válasszuk $f_2^*(z)$ gyanánt a következő függvényt:

$$g(e^{-i\gamma}z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-i\gamma}z)^{k_n}}{n^2}\varphi_{2n^3}(e^{-i\gamma}z)=f_2^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n. \tag{2.2}$$

A fentiek értelmében $f_2^*(z_2)=f_2^*(e^{i\gamma})=g(1)=0$, $f_2^*(z)$ hatványsora konvergens a $|z|<1$ körben, divergens a z_2 pontban, és $f_z^*(z)$ folytonos, ha $|z|\leqq 1$. $f_2^*(z)$ tehát megfelel a probléma követelményeinek. Így, a (2.2) folytán,

$$f_2^*[h^{-1}(z)]=f_1^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{-i\gamma}\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^{k_n}\varphi_{2n^3}\left(e^{-i\gamma}\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu. \tag{2.3}$$

$f_1^*(z)$ folytonos a $|z|\leqq 1$ körben, mert a konform leképezés a folytonosságot nem érinti. Azt kell tehát még igazolni, lévén $z_1=1$, hogy a $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$ sor konvergens.

Ezzel meg is kaptuk a bizonyításhoz szükséges további tennivalók programját: a k_n kitevőket kell alkalmasan megválasztani. E célból először a (2.3)-ban szereplő egyes függvényeket, majd a függvénysort kell megvizsgálni. Ez az, amit CLUNIE tesz, csak éppen ezzel kezdi a bizonyítást. Ezek után már mi is követhetjük ezt az utat, de természetesen saját tételünk bizonyítását fogjuk előkészíteni.

3. §. NÉHÁNY LEMMA

A továbbiakban igen fontos szerepet játszik majd egyik korábbi eredményünk, amelyet itt bizonyítás nélkül közlünk, tekintve, hogy bizonyítása hosszú és bonyolult.

1. LEMMA. *A* $h^n(z;-\zeta)=[(z+\zeta)(1+\bar{\zeta}z)^{-1}]^n$ *függvény hatványsorának részletösszegei egyenletesen korlátosak a* $|z|\leqq 1$ *körben, és közös korlátjuk csak* $|\zeta|=r$*-től függ* ([1], § 6, pp. 307—312).

Más szavakkal, ha $\sigma_{nj}(z;-\zeta)=\sigma_{nj}(z)$ a $h^n(z;-\zeta)$ hatványsorának j-ik részletösszege, akkor

$$|\sigma_{nj}(z)|\leqq K(r)=K \qquad (|z|\leqq 1), \tag{3.1}$$

ahol $K(r)$ nem függ sem n-től, sem j-től, sem z-től.

Ezt a lemmát hagyta figyelmen kívül CLUNIE is, INDLEKOFER is, ezért vonatkoznak eredményeik csupán a lokális konvergenciára. Az egyenletes konvergencia igazolásához az 1. lemma felhasználása szükséges.

2. lemmánk ugyancsak olyan eredmény, amelyet már [1] dolgozatunkban közöltünk (Lemme 2, p. 296), de itt más fogalmazásban adjuk meg, és a fellépő állandókat is igyekszünk pontosabban meghatározni, mint ezt korábban tettük. Ezért a bizonyítást részletezzük.

2. LEMMA. *Ha* $|\zeta|=r$, $0<r<1$, *akkor*

$$|C_{mj}(\zeta)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1}\omega^m\left(\frac{1+\zeta\omega}{\omega+\zeta}\right)^j d\omega\right|\leqq\begin{cases}c_1(r)j^{-1/3}\\ c_2(r)m^{-1/3},\end{cases} \tag{3.2}$$

$m=1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots,$ *ahol*

$$c_1(r)=\frac{3(1-r)}{[r(1+r)]^{1/3}}, \qquad c_2(r)=\frac{3(1+r)^{2/3}}{r^{1/3}}. \tag{3.3}$$

Bizonyítás. VAN DER CORPUT alábbi lemmáját használjuk fel ([8], I. p. 197): *Ha* $u(t)$ *az* $[a,b]$ *szakaszon értelmezett és kétszer deriválható függvény,* $u'(t)$ *ugyanitt monoton, és* $|u''(t)|>\varkappa>0$ ($\varkappa$ *állandó*), *akkor*

$$\left|\int_a^b e^{ iju(t)}dt\right|\leqq 8(\varkappa j)^{-1/2}. \tag{3.4}$$

Könnyen belátható, hogy $|C_{mj}(\zeta)|=|C_{mj}(r)|$, ezért az utóbbit fogjuk vizsgálni. Mivel $\omega=e^{it}$,

$$C_{mj}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}\left(\frac{1+re^{it}}{e^{it}+r}\right)^j dt,$$

ahol

$$\frac{1+re^{it}}{r+e^{it}}=e^{it}\frac{e^{-it}+r}{e^{it}+r}=e^{i\psi(t)}; \qquad \psi(t)=t-i\log\frac{e^{-it}+r}{e^{it}+r},$$

vagyis

$$C_{mj}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iju(t)}dt, \qquad u(t)=\frac{m+1}{j}t+\psi(t), \tag{3.5}$$

és így

$$u''(t)=\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}.$$

Ha $\xi j^{-1/3}\leqq t\leqq\pi-\xi j^{-1/3}$, akkor $u''(t)>0$; $\xi>0$ később megválasztandó állandó. A (3.5)-ből következik, hogy

$$\pi|C_{mj}(r)|\leqq\left|\int_0^{\xi j^{-1/3}}\right|+\left|\int_{\xi j^{-1/3}}^{\pi-\xi j^{-1/3}}\right|+\left|\int_{\pi-\xi j^{-1/3}}^{\pi}\right|=I_1+I_2+I_3. \tag{3.6}$$

ξ-t úgy kívánjuk meghatározni, hogy a jobb oldalon álló összeg minél kisebb legyen. Világos, hogy

$$I_1+I_3 \leqq 2\xi j^{-1/3}. \tag{3.7}$$

I_2 becsléséhez használjuk VAN DER CORPUT lemmáját. A tekintett integrációs úton $\sin t \geqq (2/\pi)\xi j^{-1/3}$, és így

$$u''(t) > \frac{2r(1-r^2)}{(1-r)^4}\frac{2}{\pi}\xi j^{-1/3} > \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}\xi j^{-1/3} = \varkappa. \tag{3.8}$$

A (3.4) révén azt találjuk, hogy

$$I_2 \leqq 8\frac{(1-r)^{3/2}}{[r(1+r)]^{1/2}}\xi^{-1/2}j^{-1/3}. \tag{3.9}$$

A (3.6)—(3.9)-ből pedig az adódik, hogy

$$|C_{mj}(r)| \leqq \frac{2}{\pi}\left\{\xi+4\frac{(1-r)^{3/2}\xi^{-1/2}}{[r(1+r)]^{1/2}}\right\}j^{-1/3}.$$

Meghatározva ξ-nek azt az értékét, amely mellett $j^{-1/3}$ együtthatója minimális lesz, a (3.2) első egyenlőtlenségéhez jutunk, $c_1(r)$-nek a (3.3) alatt jelzett értékével.

Másrészt az $(1+r\omega)(\omega+r)^{-1} = w$ helyettesítésből adódik, hogy

$$C_{mj}(r) = -\frac{1-r^2}{2\pi i}\int_{|w|=1} w^j\left(\frac{1-rw}{w-r}\right)^{m+2}\frac{dw}{(1-rw)^2}.$$

Lévén $|rw|<1$, ezért $(1-rw)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k w^k$; és ez a sor egyenletesen konvergens is. Írhatjuk tehát, hogy

$$|C_{mj}(r)| \leqq (1-r^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} w^{j+k}\left(\frac{1-rw}{w-r}\right)^{m+2}dw\right|$$

$$\leqq (1-r^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k|C_{j+k,m+2}(r)|$$

$$\leqq (1-r^2)c_1(r)(m+2)^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k$$

$$< \frac{3(1+r)^{3/2}}{r^{1/3}}m^{-1/3} = c_2(r)m^{-1/3}.$$

Fennáll tehát a (3.2), ill. (3.3) második része is.

3. LEMMA: *Ha $F(z)$ a $|z|<R (R>1)$ körben analitikus függvény, és ζ $(0<|\zeta|=r<1)$ adott állandó, akkor van olyan csak F-től és ζ-tól függő $n_0>0$ egész szám, hogy minden $n>n_0$ egész szám esetén a*

$$G_n(z) = \left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^n F\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)$$

függvény hatványsorának részletösszegei egyenletesen korlátosak a $|z| \leqq 1$ *körben, és közös korlátjuk csak r-től és* M_0*-tól függ, ahol*

$$M_0 = \max_{|z|=1} |F(z)|.$$

([2], Lemme 2, p. 189.)

Bizonyítás. Ha $F(z) \equiv$ állandó, akkor az 1. és 3. lemma tartalma ugyanaz. Feltesszük tehát, hogy $F(z) \not\equiv$ állandó. — Jelölje $\alpha_j(z_0)$ a $G_n(z)$ hatványsorának j-ik részletösszegét a $z_0 (|z_0| = 1)$ pontban, tehát

$$\alpha_j(z_0) = \frac{z_0^{j+1}}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^n F\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) \frac{dz}{(z_0-z)z^{j+1}}, \tag{3.10}$$

ahol Γ az origót körülvevő, egyszerű, zárt görbe. Az 1. lemmával értelmezett $\sigma_{nj}(z_0)$-t a (3.10)-ből úgy kapjuk meg, hogy F helyébe 1-t írunk. Eszerint

$$F\left(\frac{z_0+\zeta}{1+\bar{\zeta}z_0}\right)\sigma_{nj}(z_0) - \alpha_j(z_0) = \tag{3.11}$$

$$= \frac{z_0^{j+1}}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[F\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - F\left(\frac{z_0+\zeta}{1+\bar{\zeta}z_0}\right)\right] \frac{\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^n dz}{(z-z_0)z^{j+1}} = I_{nj}.$$

Itt Γ helyett a $|z|=1$ kör tekinthető integrációs görbének, mert az integrandusnak csak a $z=0$ pontban van szingularitása. Az $\omega = (z+\zeta)(1+\bar{\zeta}z)^{-1}$ és az $\omega_0 = (z_0+\zeta)(1+\bar{\zeta}z_0)^{-1}$ helyettesítéssel:

$$I_{nj} = (1-\bar{\zeta}\omega_0)\frac{z_0^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)-F(\omega_0)}{(\omega-\omega_0)(1-\bar{\zeta}\omega)} \omega^n \left(\frac{1-\bar{\zeta}\omega}{\omega-\zeta}\right)^{j+1} d\omega. \tag{3.12}$$

Mivel $[F(\omega)-F(\omega_0)]/(\omega-\omega_0)$ reguláris a $|z|<R$ körben, és $R>1$, ezért

$$\frac{F(\omega)-F(\omega_0)}{(\omega-\omega_0)(1-\bar{\zeta}\omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(\omega_0)\omega^k \qquad \left(|\omega| < \min\left(R, \frac{1}{r}\right)\right), \tag{3.13}$$

és van olyan csak F-től és ζ-tól függő $H = H(F, \zeta)$ állandó, amellyel

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k(\omega_0)| < H, \tag{3.14}$$

bármely pontja is ω_0 az $|\omega|=1$ körvonalnak. A (3.12)-ből így az adódik, figyelembe véve (3.2)-, (3.3)- és (3.14)-et, hogy

$$|I_{nj}| \leqq |1-\bar{\zeta}\omega_0| \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k(\omega_0)| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \omega^{n+k} \left(\frac{1-\bar{\zeta}\omega}{\omega-\zeta}\right)^{j+1} d\omega \right| \tag{3.15}$$

$$\leqq (1+r) \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k(\omega_0)| |C_{n+k,j+1}(r)| < (1+r)c_2(r)Hn^{-1/3}.$$

Ha n elég nagy, $c_2(r)Hn^{-1/3} \leqq 1$, és $|I_{nj}| \leqq 1+r$. A (3.1)-, (3.11)- és (3.15)-ből következik, hogy

$$|\alpha_j(z_0)| \leqq 1+r+KM_0 = N. \tag{3.16}$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Az 1. lemma hiányában CLUNIE a maga analóg állítását azzal a kiegészítő feltevéssel bizonyítja be, hogy $F(1)=0$, és az $[e^{-i\gamma}h^{-1}(z)]^n F[e^{-i\gamma}h^{-1}(z)]$ függvényt vizsgálva az $\alpha_j(1)=O(1)$ eredményre jut. Az 1. lemma azonban jól beépíthető az általa adott bizonyításba, amelyhez a 2. lemmát is előnyösen használtuk fel.

4. LEMMA. *Ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$, *és ha az* $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *függvénysorozat minden tagja kielégíti a következő feltételeket:*

(i) $F_n(z)$ *analitikus a* $|z|<R$ $(R>1)$ *körben;*

(ii) $\max_{|z|=1} |F_n(z)| \leqq M_0$ $(=const.)$,

akkor léteznek a pozitív egész számoknak egy olyan $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozata, hogy a*

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^{k_n} F_n\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) \tag{3.17}$$

függvény analitikus a $|z|<1$ *körben, és hatványsora egyenletesen konvergens a* $|z|=1$ *körvonalon.* ([2], Lemme 3, p. 190.)

Bizonyítás. A 3. lemma szerint a k_n számok úgy választhatók, hogy a

$$\Phi_n(z) = \left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)^{k_n} F_n\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)$$

függvény hatványsorának részletösszegei abszolút értékben az N korlát alatt maradjanak (l. (3.16)). Legyen továbbá

$$S_m(z) = \sum_{n=1}^{m} A_n \Phi_n(z),$$

és jelölje $s_k(z)$, ill. $s_{m_k}(z)$ $(|z|=1)$ a $\Phi(z)$, ill. $S_m(z)$ hatványsorának k-ik részletösszegét. Akkor $s_k(z) = s_{m_k}(z)+[s_k(z)-s_{m_k}(z)]$, és így

$$|s_k(z)-s_l(z)| \leqq |s_{m_k}(z)-s_{m_l}(z)| + |s_k(z)-s_{m_k}(z)| + |s_l(z)-s_{m_l}(z)|. \tag{3.18}$$

Feltevés szerint $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$, és tudjuk, hogy a $\Phi_n(z)$-k hatványsorai részletösszegeinek halmaza egyenletesen korlátos, ezért bármely $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $m>m_0(\varepsilon)$ egész szám, amely biztosítja, hogy (3.18) jobb oldalának utolsó két tagja, minden k- és l-re, egyenként kisebb legyen, mint $\varepsilon/3$. Az $m=m_1>m_0(\varepsilon)$ számot így rögzítve, a (3.18) első tagja nem más, mint $S_m(z)$ hatványsora két részletösszegének különbsége az egységkörvonal egyik pontjában. Mivel $S_m(z)$ analitikus a $|z|<R$ körben, és $R>1$, ez a különbség is kisebb, mint $\varepsilon/3$, ha k és l elég nagy. Végül is azt kapjuk, hogy $|s_k(z)-s(z)|<\varepsilon$. Itt ε *a* z*-től független*. A $\Phi(z)$ hatványsora tehát egyenletesen konvergens a $|z|=1$ körvonalon.

A fentiekben CLUNIE gondolatmenetét követtük. Az 1. lemma nélkül azonban ő csak az $\{s_k(1)\}_{k=1}^{\infty}$ numerikus sorozat konvergenciáját bizonyítja be, az $\alpha_j(1)=O(1)$ összefüggésből kiindulva.

Szükségünk lesz még a Fejér-féle polinomok néhány egyszerű tulajdonságának ismeretére; ezeket a következő paragrafusban vizsgáljuk meg.

4. §. A FEJÉR-FÉLE POLINOMOK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

A Fejér-féle polinomokat a (2.1) formulával a következőképpen definiáltuk:

$$\varphi_n(z)=\frac{z}{n}+\frac{z^2}{n-1}+\cdots+\frac{z^n}{1}-\frac{z^{n+1}}{1}-\cdots-\frac{z^{2n}}{n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{z^{n-j+1}-z^{n+j}}{j}.$$

E polinomok bizonyos sajátosságait a következő lemmában soroljuk fel, de azokat ismert és egyszerű voltuk miatt nem bizonyítjuk.

5. LEMMA. (i) *Létezik egy M abszolút állandó, amelyre teljesül az, hogy* $|\varphi_n(z)|\leqq M$ $(n\geqq 1,\ |z|\leqq 1)$;

(ii) $\varphi_n(1)=0$ $(n\geqq 1)$, *azaz a* $z=1$ *pontban* $\varphi_n(z)$ *2n-ik részletösszege nulla;*

(iii) *a* $z=1$ *pontban* $\varphi_n(z)$ *valamennyi részletösszege nem negatív;*

(iv) *a* $z=1$ *pontban* $\varphi_n(z)$ *n-ik részletösszege* $>\log n$.

1. *Megjegyzés.* M numerikus értékének meghatározása során H. HERZOG és G. PIRANIAN ([5], p. 385) a következőket találta. Legyen $\max_{|z|=1}|\varphi_n(z)|=M_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} M_n=3{,}704\ldots$.

2. *Megjegyzés.* A $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat nyilván eleget tesz a 4. lemma feltételeinek, tehát a (2.3) alatt megadott $f_1^*(z)$ függvény hatványsora egyenletesen konvergens a $|z|=1$ körvonalon. Transzformáltjának, $f_1^*[h(z)]=f_2^*(z)$-nek a (2.2)-vel értelmezett hatványsora viszont divergens a $z_2=(1+\zeta)(1+\bar{\zeta})^{-1}$ pontban. Ez pedig már igazolja, hogy az egyenletes konvergencia nem konform invariáns. A [2]-ben ennél többet bizonyítottunk be, és most egy lépéssel még tovább megyünk, Ehhez kell a 3. és 4. lemmát a Fejér-féle polinomokra alkalmazni.

6. LEMMA. *Ha* $z=e^{it}$, *akkor* $|\varphi_n'(e^{it})|\leqq 4Mn$.

Bizonyítás. Az állítás BERNSTEIN ismert egyenlőtlenségét mondja ki. $\varphi_n(e^{it})$ ui. $2n$-ed rendű, komplex értékű trigonometrikus polinom, tehát, az említett egyenlőtlenség következtében

$$\left|\frac{d\varphi_n(e^{it})}{dt}\right|=|ie^{it}\varphi_n'(e^{it})|\leqq 4Mn. \tag{4.1}$$

7. LEMMA. *Ha a 4. lemma* (3.17) *formulájában* $F_n(z)$ *helyett* $\varphi_n(z)$*-t írunk, akkor a*

$$k_n=k_1n^4,\quad k_1=\left[\frac{216(1+r)^2}{r(1-r)^3}\right]+1,\quad n=1,2,\ldots \tag{4.2}$$

egész számok kielégítik a 4. lemma követelményeit.[2]

[2] $[x]$ az $x>0$ szám legnagyobb egész része.

Bizonyítás. A (3.15) egyenlőtlenségből indulunk ki azzal, hogy n, ill. H helyébe k_n-t, ill. $H(\varphi_n)$-t írunk, és azt követeljük meg, hogy

$$c_2(r)H(\varphi_n)k_n^{-1/3} \leqq 1, \quad \text{ill.} \quad k_n \geqq c_2^3(r)H^3(\varphi_n) \tag{4.3}$$

legyen. A (3.13) helyébe most a

$$\frac{\varphi_n(\omega)-\varphi_n(\omega_0)}{(\omega-\omega_0)(1-\bar{\zeta}\omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{nk}(\omega_0)\omega^k$$

kifejezés kerül, amelybe a

$$\varphi_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega^{n-j+1}-\omega^{n+j}}{j}$$

alakot téve, azt találjuk, hogy

$$\frac{\varphi_n(\omega)-\varphi_n(\omega_0)}{\omega-\omega_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}[(\omega^{n-j}+\cdots+\omega_0^{n-j})-(\omega^{n+j-1}+\cdots+\omega_0^{n+j-1})]$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \gamma_{nk}(\omega_0)\omega^k,$$

amiből

$$\sum_{k=0}^{2n-1} |\gamma_{nk}(\omega_0)| \leqq (2n+1)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} < 2n(\log n+1).$$

Másrészt $(1-\bar{\zeta}\omega)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta\omega)^k$, és $\sum_{k=0}^{\infty}|\zeta|^k = (1-r)^{-1}$.

Így

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\beta_{nk}(\omega_0)| \leqq \sum_{k=0}^{2n-1}|\gamma_{nk}(\omega_0)|\sum_{k=0}^{\infty}|\zeta|^k \leqq \frac{2n(\log n+1)}{1-r} = H(\varphi_n). \tag{4.4}$$

(4.2)-t ezután a (4.3) és (4.4) szolgáltatja.

5. §. A TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Ismét $f_2(z)$-t fogjuk először meghatározni, és abból vezetjük le $f_1(z)$-t. Ehhez az INDLEKOFER által szerkesztett $f^*(w)$ függvényt ([6], (3.8) p. 127) használjuk fel, amely ugyancsak a Fejér-féle polinomok alkalmasan megválasztott sorának összegfüggvénye. A 4. §-ban nyert eredmények birtokában $f^*(w)$-t némileg módosítjuk. Ez azért is szükséges, mert hatványsorainknak nem csupán egyetlen pontban való viselkedését vizsgáljuk. E célból néhány jelölést vezetünk be.

$k_n = k_1 n^4$ a (4.2) alatt megadott egész szám, $n^* = 2^{2^n}$, és így $k_{n^*} = k_1 n^{*4}$. A tételben említett, a $[0, 2\pi]$ szakaszon mindenütt sűrű E halmaz megszámlálható; azt írhatjuk tehát, hogy $E = \{\tau_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ ($\tau_\nu \neq \tau_{\nu'}$, ha $\nu \neq \nu'$). Rendeljük hozzá minden τ_ν-höz a pozitív egész számok egy növekvő végtelen sorozatát, $\{n_{\nu j}\}_{j=1}^{\infty}$-t, azaz $n_{\nu j} < n_{\nu, j+1}$, $j \to \infty$. Feltesszük, hogy az E két különböző eleméhez, a τ_ν- és a $\tau_{\nu'}$-höz tartozó sorozatokban ugyanazok a számok nem fordulnak elő ($n_{\nu j} \neq n_{\nu' j'}$, ha $\nu \neq \nu'$, $j = 1, 2, \ldots$; $j' = 1, 2, \ldots$). Így $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\{n_{\nu j}\}_{j=1}^{\infty} = \{n\}_1^{\infty}$. Legyen továbbá

$$t_{n_{\nu 1}} = t_{n_{\nu 2}} = \ldots = t_{n_{\nu j}} = \cdots = \tau_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{t_{n_{\nu j}}\}_{j=1}^{\infty} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty} = E_0.$$

E_0-ban az E minden eleme megszámlálhatóan *végtelen sokszor* fordul elő.

Ezek után $f_2(z)$-t a következő kifejezés értelmezi:

$$(5.1) \qquad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-it_n}z)^{k_{n^*}}}{2^n} \varphi_{n^*}(e^{-it_n}z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n z^n \quad (n_1 = 4k_1 + 1).$$

Könnyen igazolható, hogy

$$k_{n^*} + 2n^* < k_{(n+1)^*} + 1,$$

azaz az (5.1)-ben szereplő függvénysor hatványsor. Bebizonyítjuk, hogy $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n e^{int}$ az E pontjaiban divergenss. Legyen $z = e^{it_\lambda}$, ahol $t_\lambda \in E_0$, $t_\lambda = \tau_\nu = t_{n_{\nu j}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$; legyen továbbá $p_j = k_{(n_{\nu j})^*} + (n_{\nu j})^*$, és $q_j = k_{(n_{\nu j})^*} + 2(n_{\nu j})^*$. Végül jelentse $s_\mu(z)$ az (5.1) hatványsor μ-ik részletösszegét a z pontban. Felhasználva most a Fejér-féle polinomoknak az 5. lemmában felsorolt (ii) és (iv) tulajdonságát, azt találjuk, hogy

$$|s_{q_j}(e^{it_{n_{\nu j}}}) - s_{p_j}(e^{it_{n_{\nu j}}})| = |s_{q_j}(e^{it_\lambda}) - s_{p_j}(e^{it_\lambda})| > \log 2, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Az $\{s_\mu(e^{it_\lambda})\}_{\mu=1}^{\infty}$ sorozat eszerint nem elégíti ki CAUCHY konvergencia feltételét, azaz divergens. A $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n e^{int}$ sor tehát divergens, amidőn $t \in E$.

Mivel $f_1(z) = f_2[h^{-1}(z)]$, ezért az (5.1)-ből nyerjük, hogy

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(e^{-it_n} \frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z} \right)^{k_{n^*}} \varphi_{n^*}\left(e^{-it_n} \frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu.$$

A 4. és 7. lemma értelmében a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ sor egyenletesen konvergens. Az 1. lemma hiányában, INDLEKOFER ezt nem mutatta meg.

Igazolni kell még, hogy $f_1(e^{it})$ folytonossági modulusa kielégíti az (1. 4) követelményt. Ezt INDLEKOFER már bebizonyította (az ő $f(z)$ és a mi $f_1(z)$ függvényünk között mutatkozó eltérés a bizonyításban nem játszik szerepet). Eljárását ([6], pp. 126—127) itt csak a teljesség kedvéért közöljük, kisebb módosítással, amire különben is szükségünk volna. Ehhez egy lemmát bizonyítunk be.

8. LEMMA. *A folytonossági modulus konform invariáns a konvergencia kör kerületén. Jelekben*

$$(5.2) \qquad 0 < c' < \omega(\delta; f_1(e^{it}))/(\omega(\delta; f_2(e^{it})) < c'' < \infty,$$

ahol c' és c'' állandók.

Bizonyítás. Ha $f_1(e^{it})$ folytonos, akkor ilyen $f_2(e^{it}) = f_1[h(e^{it})]$ is. Másrészt

$$|f_2(e^{i(\tau+\vartheta)}) - f_2(e^{i\tau})| = \left| f_1\left(\frac{e^{i(\tau+\vartheta)} - \zeta}{1 - \bar{\zeta}e^{i(\tau+\vartheta)}} \right) - f_1\left(\frac{e^{i\tau} - \zeta}{1 - \bar{\zeta}e^{i\tau}} \right) \right|,$$

ahol

$$\frac{e^{i\tau} - \zeta}{1 - \bar{\zeta}e^{i\tau}} = e^{it}, \qquad \frac{e^{i(\tau+\vartheta)} - \zeta}{1 - \bar{\zeta}e^{i(\tau+\vartheta)}} = e^{i(t+\theta)}.$$

Ebből

$$e^{i(t+\theta)}-e^{it}=e^{it}(e^{i\theta}-1)=\frac{(1-r^2)e^{i\tau}(e^{i\vartheta}-1)}{(1-\bar{\zeta}e^{i(\tau+\vartheta)})(1-\bar{\zeta}e^{i\tau})},$$

és így

$$\frac{1-r}{1+r}|e^{i\theta}-1|\leqq|e^{i\vartheta}-1|\leqq\frac{1+r}{1-r}|e^{i\theta}-1|,\quad\text{ill.}\quad\vartheta=O(\theta)\quad(\theta\to 0),$$

amiből (5.2) következik.

A 8. lemma értelmében elég $f_2(e^{it})$ folytonossági modulusát meghatározni. Adott δ-hoz $(0<\delta<(4k_1)^{-1})$ található olyan $n_0=n_0(\delta)>0$ egész szám, amelyre

$$k_{n_0^*}\leqq\frac{1}{\delta}\leqq k_{(n_0+1)^*},\tag{5.3}$$

azaz

$$2^{-n_0}(2^{-n_0}\log k_1+8\log 2)^{-1}\leqq|\log\delta|^{-1}\leqq 2^{-n_0}(2^{-n_0}\log k_1+4\log 2)^{-1}.$$

n_0-t így rögzítve, és $z^{k_n}\varphi_n(z)=\psi_n(z)$-t téve,

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{n_0}{}'\frac{\psi_{n^*}(e^{-it_n}z)}{2^n}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}{}'\frac{\psi_{n^*}(e^{-it_n}z)}{2^n}=f_{2(1)}(z)+f_{2(2)}(z).$$

Az 5. lemma (i) szerint minden n-, t- és δ-ra fennáll, hogy

$$|\psi_n(e^{i(t+\delta)})-\psi_n(e^{it})|\leqq 2M.$$

Ezért, az (5.3) folytán,

$$\omega(\delta;f_{2(2)}(e^{it}))\leqq 2M\sum_{n=n_0+1}^{\infty}2^{-n}=O(2^{-n_0-1})=O(|\log\delta|^{-1}).\tag{5.4}$$

Másfelől, felhasználva a 6. lemmát (l. (4.1)) azt találjuk, hogy

$$\left|\frac{d\psi_n(e^{it})}{dt}\right|=|ik_ne^{ik_nt}\varphi_n(e^{it})+ie^{i(k_n+1)t}\varphi_n'(e^{it})|\leqq$$

$$\leqq M(k_n+4n)\leqq c_3n^4.$$

Tehát

$$\omega(\delta;f_{2(1)}(e^{it}))\leqq c_4\delta\sum_{n=1}^{n_0}\frac{n^{*4}}{2^n}=c_4\delta\frac{n_0^{*4}}{2^{n_0}}\sum_{n=1}^{n_0}\left(\frac{n^*}{n_0^*}\right)^4\frac{2^{n_0}}{2^n}=O(2^{-n_0})=O(|\log\delta|^{-1})\tag{5.5}$$

mert $(n^*/n_0^*)^4 2^{n_0}<1$, és az (5.3) miatt $\delta n_0^{*4}<1$. Az (5.4) és (5.5) következtében $\omega(\delta;f_2(e^{it}))=O(|\log\delta|^{-1})$.

A tétel utolsó részéről kell még néhány szót mondani. DINI—LIPSCHITZ tétele szerint, ha $\omega(\delta;f_1(e^{it}))=o(|\log\delta|^{-1})$, akkor a $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu e^{i\nu t}$ sor egyenletesen konvergens. A 8. lemma miatt, ekkor fennáll az is, hogy $\omega(\delta;f_2(e^{it}))=o(|\log\delta|^{-1})$, vagyis a $\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{int}$ sor szintén egyenletesen konvergens. A folytonossági modulusra vonatkozó (1.4) feltétel tehát nem javítható.

3. Megjegyzés. Az 1. lemmát eredetileg azért bizonyítottuk be, hogy segítségével igazolni tudjuk a következő állítást:

A. TÉTEL. (i) *Előfordul, hogy* $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, *és ennek ellenére* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \infty$.

(ii) *Ha* $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$, *akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ *egyenletesen konvergens.* ([1], Théorèmes 1 et 2, pp. 287—288.)

Az A. (i) tétel azt jelenti, hogy *hatványsor abszolút konvergenciája nem konform invariáns a konvergenciakör kerületén.* Ha viszont az egyenletes konvergencia konform invariánsnak bizonyult volna, akkor az A. (ii) tétel semmitmondó lenne, hiszen a $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ kikötés már biztosítja a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ sor egyenletes konvergenciáját, amiből a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ sor egyenletes konvergenciája következnék. A most bizonyított tétel éppen azt mondja ki, hogy a $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ sor egyenletes konvergenciája még nem garantálja a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ sor egyenletes konvergenciáját, ami így csak a $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty$ kikötés következménye lehet.

4. Megjegyzés. Tekintetbe véve a 8. lemmát, valamint BERNSTEINnek a folytonossági modulus és az abszolút konvergencia kapcsolatára vonatkozó eredményét, az A. tétel következő állítással egészíthető ki:

(iii) *Ha* $\omega(\delta; f_1(e^{it})) = O(\delta^\alpha)$, $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$, *akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$.

A 8. lemma szerint ui., ekkor $\omega(\delta; f_2(e^{it})) = O(\delta^\alpha)$, amiből BERNSTEIN tétele értelmében az állítás következik.

IRODALOM

[1] ALPÁR L.: Sur certaines transformées des séries de puissances absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 7 (1962) 287—316.
[2] ALPÁR L.: Convergence uniforme et représentation conforme. *Periodica Mathematica Hungarica* **1** (1971) 187—193.
[3] CLUNIE, J.: On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18** (1967) 165—169.
[4] FEJÉR L.: A folytonos függvények Fourier-féle sorának singularitásairól. *Mat. és Term. Tud. Értesítő*, **28** (1910) 550—592.
[5] HERZOG, F.—PIRANIAN, G.: Some properties of the Fejér-polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956) 379—386.
[6] INDLEKOFER, K.-H.: Bemerkungen über äquivalenten Potenzreihen von Funktionen mit einem gewissen Stetigkeitsmodul, *Monatshefte für Math.*, **76** (1972) 124—129.
[7] TURÁN P.: A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence circle. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.*, **12** (1958) 19—26.
[8] ZYGMUND, A.: *Trigonometric series*, University Press, Cambridge, 1959.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ И МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Л. АЛЬПАР

Доказано следующее утверждение:

Теорема. *К заданной комплексной постоянной* $\zeta(0<|\zeta|<1)$ *можно найти фунцию* $f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, *аналитическую в круге* $|z|<1$, *удовлетворяющую следующим условиям:* (i) *ряд* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ *сходится равномерно;* (ii)

$$\omega(\delta; f_1(e^{it})) = O(|\log\delta|^{-1}) \quad (\delta\to+0);$$

(iii) *и если сделать замену переменной* $f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)=f_2|z|=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ *расходится на некотором счетном множестве* E, *всюду плотном на отрезке* $[0,2\pi]$.

Если в выражении модуля непрерывности вместо $O(|\log\delta|^{-1})$ *можно писать* $o(|\log\delta|^{-1})$, *то ряд* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ *сходится, равномерно откуда вытекает равномерная сходи мость и ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$.

CONVERGENCE UNIFORME ET MODULE DE CONTINUITÉ

L. ALPÁR

On démontre la proposition suivante:

Théorème. — *Étant donnée la constante complexe* $\zeta(0<|\zeta|<1)$, *il existe une fonction* $f_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *analytique dans le cercle* $|z|<1$ *satisfaisant aux conditions suivantes:* (i) *la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$ *est uniformément convergente;* (ii)

$$\omega(\delta; f_1(e^{it})) = O(|\log\delta|^{-1}) \quad (\delta\to+0);$$

(iii) *et si l'on pose* $f_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)=f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$ *est divergente sur un en semble* E *dénombrable et partout dense dans* $[0, 2\pi]$.

Si dans l'expression du module de continuité, $O(|\log\delta|^{-1})$ *peut être remplacer par* $o(|\log\delta|^{-1})$, *il en résulte la convergence uniforme de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}$, *et il en découle aussi la convergence uniforme de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$.

A MATROIDELMÉLET RÖVID ÁTTEKINTÉSE

LOVÁSZ LÁSZLÓ

BEVEZETÉS

E cikkben ismertetjük a matematika egy fiatal ágát, a matroidelméletet. A matroid fogalma szerencsés közös általánosításának tűnik a mátrix, a gráf, a projektív és affin tér fogalmának és ily módon közös vonásokat emel ki a gráfelmélet, geometria, lineáris algebra módszereiből; kapcsolatban van azonban a hálóelmélettel, algebrai geometriával, algebrai topológiával és lineáris programozással is. Egy cikkben természetesen csak néhány alkalmazást mutathatunk be.

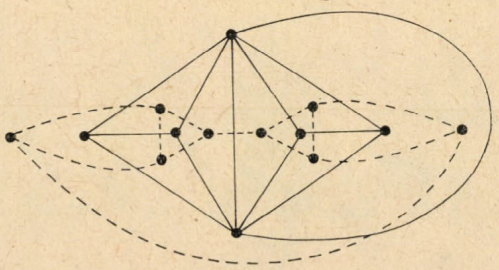
A matroidokra vonatkozó első észrevételek WHITNEY-től származnak, majd mintegy húsz év múlva az elmélet TUTTE, RADO, ROTA, WELSH és mások működése nyomán felvirágzott; ma már igen fontos helyet foglal el a kombinatorikában.

1. §. NÉHÁNY BEVEZETŐ ÉSZREVÉTEL

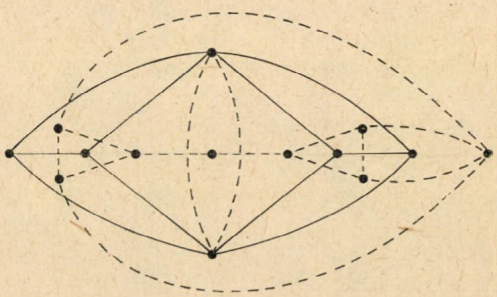
Megemlítünk néhány olyan problémát, mely a matroidok fogalmához elvezetett.

a) Tekintsünk egy síkbarajzolható (véges, irányítatlan) G gráfot. Ezt realizáljuk a síkban, és tekintsük a duális gráfját, vagyis minden országban vegyünk fel egy pontot (a „fővárost") és két „fővárost" kössünk össze annyi éllel, ahány közös határszakasza van a két országnak. Ha egy országnak önmagával van határa (ez G-ben egy elvágó él), akkor a megfelelő „fővárosba" hurokélt rajzolunk. A kapott G^* gráf, G *duálisa*, ugyancsak síkbarajzolható lesz (1. ábra).

A G gráf egy másik síkbeli realizációjából kiindulva ugyancsak kaphatunk egy duális gráfot; ez azonban nem szükségképpen azonos az előbbi G^*-gal (2. ábra.) Így egy G gráfnak több duálisa is lehet. Más szóval azt is mondhatjuk, hogy nemizomorf gráfok duálisai lehetnek izomorfak.



1. ábra



2. ábra

Felvetődik ezek után a kérdés, mennyire van a duális gráf mégis meghatározva, más szóval, mikor van két gráfnak izomorf duális gráfja.

Legyen G_1 és G_2 két síkbarajzolható gráf, és legyen G^* mindkettőnek duálisa. G_1 és G^* élei között a duális definíciója alapján egy természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk, egymáshoz rendelve a kereszteződő éleket. Ugyanezt mondhatjuk el G_2 és G^* éleiről. Nézzük meg most, hogy e megfeleltetések a gráfelméleti tulajdonságokat hogyan transzformálják.

Legyen K G_1-nek egy köre. A duális gráf definíciójából világos, hogy a K éleinek megfelelő G^*-beli éleket G^*-ból elhagyva, G^* két összefüggő D_1, D_2 komponensre esik szét. Ezt „visszafelé" is alkalmazhatjuk G^* és G_2-re, s így látható, hogy G_1 egy körön fekvő éleinek G_2 egy körön fekvő élei felelnek meg (és viszont). Az ilyen megfeleltetést röviden *körtartónak* nevezzük, a körtartó kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést két gráf élei között pedig *gyenge izomorfizmusnak*. Az eddigiekben az alábbi tétel egyik felét bizonyítottuk be:

(1. 1) *Két síkbarajzolható gráfnak akkor és csak akkor létezik közös duálisa, ha gyengén izomorfak.*

A fentiekben a G_1 és G_2 gráfok közötti kapcsolatot sikerült a síkbarajzolástól függetlenül megfogalmazni. Nézzük meg, mi mondható egy G gráf és G^* duálisa kapcsolatáról. Tudjuk, hogy G egy körének G^* egy olyan élrendszere felel meg, melyet elhagyva G^* pontosan két komponensre esik szét, és melyek e két komponenst kötik össze. Az ilyen élhalmazt *vágásnak* nevezzük. Szimmetrikusabb formát is adhatunk e kapcsolatnak. Az Euler-tétel szokásos bizonyítása kiadja, hogy

ha F egy összefüggő, síkbarajzolható G gráf egy feszítő fája, akkor az F éleinek megfelelő élek G^* egy feszítő fájának komplementumát alkotják.

A fentiek a síkgráfok olyan tárgyalását adják, melyben az alapegységek az élek (nem úgy, mint általában, a pontok) és az alapreláció az egy körön fekvésill. a feszítő fa alkotás (e kettő egymással persze könnyen kifejezhető). Ilyen tárgyalás szükségessége nem csak síkbarajzolható gráfokkal kapcsolatban merül fel, hanem általában is.

b) Hasonló problémák tárgyalására ismeretes egy lineáris algebrai segédeszközöket használó eljárás.

Tekintsük a G gráf élei $E(G)$ halmazának részhalmazait, és vezessük be ezek halmazában a (Boole-féle) *összeadást*, mely két élhalmazhoz szimmetrikus differenciájukat rendeli. E művelettel — és természetes módon értelmezhető „skalárral való szorzással" — $E(G)$ hatványhalmaza vektortérré tehető a kételemű test felett. Ezt a vektorteret V-vel jelöljük.

A fenti vektortér bevezetése az alábbi észrevétel miatt válik hasznossá. Nevezzük *ciklusnak* az olyan élhalmazt, melynek páros számú éle illeszkedik minden ponthoz, és *kociklusnak* azon élhalmazokat, melyeket úgy kapunk, hogy G pontjait két osztályba soroljuk és a köztük haladó éleket tekintjük. Minden ciklus felbomlik élidegen köröknek, minden kociklus élidegen vágásoknak egyesítésére. A ciklusok összességét M, a kociklusokét N jelölje. Mármost

$$M \text{ és } N \text{ } V\text{-nek alterei,}$$

mint az könnyen verifikálható. Sőt, e két altér között kapcsolat is van. Vezessünk be V-n egy *skaláris szorzást* az

$$(A, B) \equiv |A \cap B| \pmod 2$$

definícióval; ez úgy is kapható, hogy V-ben az egyelemű élhalmazok bázist alkotnak és a többi élhalmazt e bázisban felírva a megfelelő koordináták szorzatösszegét tekintjük (mod 2).[1] Két élhalmazt *merőlegesnek* nevezve, ha skaláris szorzatuk 0, megállapíthatjuk, hogy M definíciója szerint $C \in M$ akkor és csak akkor, ha C merőleges minden pont csillagára (egy pont csillagán a belőle kiinduló élek halmazát értjük). Mivel a pontok csillagai generálják N-et, nyerjük, hogy $M = N^{\perp}$, ahol $N^{\perp}$ az N altérre merőleges vektorok összességét jelöli.[2]

E lineáris algebrai apparátus működését két példán mutatjuk be.

1° $E(G) \in N$ nyilván azt jelenti, G *2-kromatikus gráf*. A fentiek szerint ez ekvivalens azzal, hogy $E(G)$ merőleges minden ciklusra. Mármost könnyen látható, hogy M-et generálják a körök, ez tehát azzal egyenértékű, hogy $E(G)$ merőleges minden körre, vagyis *minden kör páros*.

2° Sokkal mélyebb GALLAI alábbi eredménye, melynek első bizonyítása a fenti apparátussal történt (később PÓSA szellemes „elemi" bizonyítást talált rá):

(1. 2) *Minden gráf pontjai két osztályba oszthatók úgy, hogy mindkét osztály páros fokú részgráfot feszítsen.*

A fenti apparátussal úgy is megfogalmazható ez, hogy $E(G) \in \{M \cup N\}$ ($\{M \cup N\}$ az $M \cup N$ által genrált alteret jelenti; mint már megjegyeztük, ez nem szükségképpen az egész). Mivel a fenti tétel bizonyítása még nem jelent meg nyomtatásban, röviden közreadom: Egy élhalmaz akkor és csak akkor ortogonális $\{M \cup N\}$-re, ha M, N mindegyikére ortogonális; így $\{M \cup N\}^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} = N \cap M$, azaz $\{M \cup N\} = (M \cap N)^{\perp}$. Mármost $M \cap N$ minden eleme önmagára merőleges, azaz páros élszámú; de ezért $E(G)$-re is merőleges. Tehát $E(G) \in (M \cap N)^{\perp} = \{M \cup N\}$ amit bizonyítani akartunk.

Meg kell azonban jegyezni, hogy a fent vázolt lineáris algebrai apparátus csak igen speciális kérdések vizsgálatára alkalmas. Látni fogjuk, hogy a matroidelmélet ezen apparátus számos speciális vonását elveti, s így sokkal erősebb segédeszközöket ad.

c) Más módon is kapcsolatba hozhatjuk a gráfokat lineáris algebrával. Legyen T egy test, és rendeljünk az összefüggő G gráf minden egyes x_i pontjához egy b_i T feletti $(n-1)$-dimenziós vektort $(i = 1, 2, \ldots, n = |V(G)|)$ úgy, hogy $b_n = 0$ és $b_1, \ldots, b_{n-1}$ lineárisan függetlenek legyenek. Minden $E = (x_i, x_j)$ élhez rendeljük az $a_E = b_i - b_j$ vektort (a végpontok sorrendjét valahogyan rögzítve). Ekkor könnyen megmutatható, hogy

az $a_{E_1}, \ldots, a_{E_k}$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $\{E_1, \ldots, E_k\}$ nem tartalmazza egy kör összes élét.

Így, ha ismerjük az a_E vektorok közül a lineárisan függetleneket, ismerjük a G gráf köreinek szerkezetét. Az is megállapítható, hogy $a_{E_1}, \ldots, a_{E_{n-1}}$ akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $E_1, \ldots, E_{n-1}$ egy G-t kifeszítő fa élei.

Mármost egy vektortér lineárisan független részhalmazainak tulajdonságai a lineáris algebrában össze vannak gyűjtve (l. 2. §); már az algebrán belül is felmerül, hogy hasonló tulajdonságokkal más „függetlenség" fogalom is rendelkezik, pl. egy adott test feletti algebrai függetlenség.

[1] E skaláris szorzás teljesíti a szokásos axiómákat, de nem definit: lehet $(A, A) = 0$, $A \neq 0$.

[2] Alterek merőlegessége némileg eltérő tulajdonságokat mutat, mint azt a geometriában megszoktuk. Pl. lehet $U \cap U^{\perp} \neq \{0\}$, és általában U, $U^{\perp}$ nem generálják V-t Igaz azonban

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V, \text{ és ezért } (U^{\perp})^{\perp} = U.$$

d) A modern geometriában felvetődik a „tér" fogalmának olyan meghatározása, melynél a tér minden részhalmaza is tér. A topologikus vagy metrikus tér fogalma ilyen, és ennek a ténynek hasznát lépten-nyomon láthatjuk a topológiában. Ugyanilyen kiterjesztése az affin (és projektív) geometriának is megadható. Képzeljünk el egy S ponthalmazt az n-dimenziós P projektív térben. S alterei legyenek P altereinek S-be eső részei.

Ezek az alterek teljesíteni fogják még mindig a „két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van", „ha egy sík tartalmazza egy egyenes két pontját, tartalmazza a teljes egyenest"-szerű állításokat. Mármost mindezen állítások két alaptulajdonságban foglalhatók össze: ha A_i, $i \in I$ alterek, akkor

(i) $$\bigcap_{i \in I} A_i \quad \textit{is altér,}$$

így bármely X halmazhoz az őt tartalmazó alterek $\overline{X}$ metszete is altér, és

(ii) $$\dim (\overline{A \cup B}) + \dim (A \cap B) \leqq \dim A + \dim B.$$

Mármost (i)—(ii) könnyen a geometriák egy axiómamrendszerévé volna tehető. A matroidelmélet azonban e fogalmat sokkal több oldalról fogja megvilágítani.

2. §. MATROID-AXIÓMARENDSZEREK

E paragrafusban definiáljuk a matroidot és kimondjuk legfontosabb tulajdonságait. Erre „axiómacsoportok" formájában kerül sor, melyek egy-egy matroidelméleti fogalom kapcsán a matroidok újabb ekvivalens definícióját szolgáltatják. Hangsúlyozzuk, hogy a definíciók ekvivalens volta nem triviális, és a bizonyítások (melyeket itt nem közlünk) gyakran elég hosszadalmasak.

a) FÜGGETLENSÉG. Legyen S véges halmaz, $\mathcal{M}$ pedig S részhalmazainak egy összessége; az $\mathcal{M}$-beli halmazokat *független*nek nevezünk. Az $(S, \mathcal{M})$ párt *matroid*nak hívjuk, ha fennáll:

(F1) $\emptyset$ *független;*

(F2) *független halmaz részhalmaza is független;*

(F3) *ha A, B függetlenek és $|A| > |B|$, akkor van olyan $a \in A$, hogy $B \cup \{a\}$ is független.*

Érezhetően (F3) lesz itt az erős axióma. A definíció olyan, hogy $X \subseteqq S$ esetén $\mathcal{M}$-nek X-be eső elemei X-en matroidot alkotnak.

(F3) helyettesíthető volna az alábbi feltétellel;

(F3′) *bármely $X \subseteqq S$ esetén $\mathcal{M}$-nek X-be eső elemei közül azok, melyeket másik ilyen nem tartalmaz, azonos elemszámúak.*

Ezt a közös elemszámot X *rangjának* nevezzük (az $(S, \mathcal{M})$ matroidban) és $r(X)$-szel jelöljük. Az $r(S)$ elemszámú független halmazokat *bázisoknak* nevezzük.

b) BÁZISOK.

(B1) *Minden bázis r elemű ($r \geqq 0$).*

(B2) *Ha B_1, B_2 bázisok, és $b \in B_1$, akkor van olyan $b' \in B_2$, hogy $(B_1 - \{b\}) \cup \{b'\}$ bázis.*

A (B2) axióma helyettesíthető az alábbival:

(B2′) *Ha B_1, B_2 bázisok és $b \notin B_1$, akkor van olyan $b' \notin B_2$, hogy $(B_1 - \{b\}) \cup \{b'\}$ bázis.*

Megfordítva, könnyen látható, hogy ha adott S részhalmazainak egy összessége úgy, hogy (B1), (B2) teljesülnek, akkor ez egyetlenegy matroid bázisainak halmaza.

A megfordítás igazolása azon alapszik, hogy a független halmazok a bázisok részhalmazaiként jellemezhetők.

c) RANG. Az $r(X)$ rangfüggvénynek könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságai.

(R1) $r(\emptyset)=0$;
(R2) $X\subseteq Y$ esetén $r(X)\leqq r(Y)$ („monotonitás");
(R3) $r(X\cup\{x\})\leqq r(X)+1$ („folytonosság");
(R4) $r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqq r(X)+r(Y)$ („konvexitás").

Megfordítva, egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező halmazfüggvényhez egyértelműen meghatározható egy matroid, melynek ő a rangfüggvénye. Egy x halmaz nyilván akkor és csak akkor független, ha $r(X)=|X|$.

d) KÖRÖK. Egy $K\subseteq S$ halmazt körnek hívunk, ha K nem független, de bármely valódi részhalmaza már az. A körök alaptulajdonságai:

(K1) *Egyik kör sem tartalmazza a másikat;*
(K2) *ha* K_1, K_2 *körök és* $x\in K_1\cap K_2$, *akkor* $K_1\cup K_2-\{x\}$ *tartalmaz kört.*

A (K2) tulajdonság helyettesíthető az alábbi, látszólag erősebb axiómával:
(K2′) *ha* K_1, K_2 *körök,* $x\in K_1\cap K_2$ *és* $y\in K_1-K_2$, *akkor* $K_1\cup K_2-\{x\}$ *tartalmaz olyan kört, melynek* y *eleme.*

Egy halmaz nyilván akkor és csak akkor független, ha nem tartalmaz kört.

e) LEZÁRÁS. Minden $X\subseteq S$ halmazhoz tekintsünk mindazon Y halmazokat, melyekre $X\subseteq Y$ és $r(X)=r(Y)$. Ilyen halmazok egyesítése is ilyen, ugyanis ha Y_1, Y_2 ilyenek, akkor (R2) szerint

$$r(X)\leqq r(Y_1\cup Y_2),$$

másrészt (R4) szerint

$$r(Y_1\cup Y_2)\leqq r(Y_1)+r(Y_2)-r(Y_1\cap Y_2)=r(X),$$

hiszen $X\subseteq Y_1\cap Y_2\subseteq Y_1$ miatt $r(Y_1\cap Y_2)=r(X)$. Így az X-et tartalmazó, azonos rangú halmazok között van egy legnagyobb, melyet $\overline{X}$-szel (X lezárása, generátuma) elölünk. Az $X\to\overline{X}$ operáció alaptulajdonságai:

(L1) $X\subseteq\overline{X}=\overline{\overline{X}}$;
(L2) $X_1\subseteq X_2$ *esetén* $\overline{X}_1\subseteq\overline{X}_2$;
(L3) *ha* $a\notin\overline{X}$, *de* $a\in\overline{X\cup\{b\}}$, *akkor* $b\in\overline{X\cup\{a\}}$.

Másrészről, ha adott egy $X\to\overline{X}$ operáció S részhalmazain úgy, hogy (L1)—(L3) teljesül, akkor egyetlenegy olyan matroid van, melyben ez a lezárási operáció; ennek független halmazai azon $X\subseteq S$ halmazok, melyekre $\overline{X-a}\neq\overline{X}$ minden $a\in X$ esetén.

f) ALTEREK. Altérnek nevezzük S azon A részhalmazait, melyekre $\overline{A}=A$. Az altereket az alábbi axiómák jellemzik:

(A1) *Alterek metszete altér;*

(A2) *Ha* $a\in\overline{A\cup\{b\}}$, $a\notin\overline{A}$, *akkor* $b\in\overline{A\cup\{a\}}$ (itt $\overline{X}$ úgy is definiálható, mint az összes X-et tartalmazó altér metszete.)

Ha az egész S halmazról nem kötjük ki, hogy véges,[3] csak azt, hogy legyen olyan véges $X \subseteq S$ melyre $\overline{X} = S$, akkor az (A1)—(A2) axiómákat kielégítő altérrendszert *pregeometriának* hívjuk. *Geometria* egy pregeometria, ha

(A3) $\emptyset$ *és minden egyelemű halmaz altér.*

Így a véges geometriák speciális matroidok (bár könnyen látható, hogy (A3) nem jelent lényeges megszorítást).

3. §. ALAPVETŐ TULAJDONSÁGOK

Az előző pontban felsorolt eredményeket még néhánnyal egészítjük ki, melyek a matroidelmélet alapvető apparátusához tartoznak.

a) DUÁLIS MATROID. Könnyen látható a bázisokra vonatkozó axiómarendszerekből, hogy ha egy matroid bázisainak komplementereit tekintjük, ezek is egy matroid bázsiainak tekinthetők. Így minden $(S, \mathcal{M})$ matroidhoz egy $(S, \mathcal{M}^*)$ matroidot, a duális matroidot rendelhetjük. Ez meglepő tény, melyre a lineáris algebrai származtatás nem ad magyarázatot. Nyilván $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$. Vizsgáljuk meg, hogyan fejezhetők ki a duális matroid egyes jellemzői. A definíció alapján világos, hogy $X \subseteq S$ független $\mathcal{M}^*$-ban akkor és csak akkor, ha van $\mathcal{M}$-nek olyan B bázisa, mely X-et nem metszi. Ugyancsak könnyen felírható $\mathcal{M}^*$ rangfüggvénye, melyet r^*-gal jelölünk:

$$r^*(X) = r(S-X) + |X| - r(S),$$

speciálisan

$$r^*(S) = |S| - r(S).$$

Lényegesen mélyebb az alábbi tétel:

(3. 1) *$V \subseteq S$ alkkor és csak akkor kör $\mathcal{M}^*$-ban, ha $\mathcal{M}$ minden K körére $|V \cap K| \neq 1$, és V minimális az ilyen tulajdonságú halmazok közül.*

$\mathcal{M}^*$ köreit $\mathcal{M}$ *vágásainak* is nevezzük. Könnyen igazolható, hogy vágásnak (S-re vonatkozó) komplementere hipersík, ($r(S)$—1 rangú altér) és viszont.

b) MINOROK. Legyen $A \subseteq S$, $B = S - A$. Mint már említettük, az A-ba eső független halmazok A-n egy matroidot alkotnak, melyet $(A, \mathcal{M} - B)$-vel jelölünk. Az $(A, \mathcal{M} - B)$ matroid körei $\mathcal{M}$-nek A-ba eső körei, alterei $\mathcal{M}$ altereinek A-be eső részei, rangfüggvénye ugyanaz, mint $\mathcal{M}$-é.

Az $\mathcal{M}$ matroid az A halmazon egy másik matroidot is indukál természetes módon; legkényelmesebb ezt az $r'(x)$ rangfüggvénnyel definiálni, ahol

$$r'(X) = r(X \cup B) - r(B).$$

Nyilvánvaló, hogy $r'(X)$ eleget tesz (R1)—(R4)-nek, így egy matroidot határoz meg, amelyet $(A, \mathcal{M} \div B)$-vel fogunk jelölni. Egy $X \subseteq A$ halmaz független $(A, \mathcal{M} \div B)$-ben, ha van $(B, \mathcal{M} - A)$-nak olyan C bázisa, hogy $X \cup C \in \mathcal{M}$. Különösen érdekes ez akkor, ha B független $\mathcal{M}$-ben, ekkor $\mathcal{M} \div B = \{X : X \cup B \in \mathcal{M}\}$. $(A, \mathcal{M} \div B)$ körei általában eléggé áttekinthetetlenek, de vágásai $\mathcal{M}$-nek A-ban fekvő vágásai.

Az $\mathcal{M} - B$ típusú matroidokat $\mathcal{M}$ *részmatroidjainak*, az $\mathcal{M} \div B$ típusúakat $\mathcal{M}$ *kontrakcióinak* nevezzük. $\mathcal{M}$ kontrakcióinak részmatroidjait (vagy, ami ugyanaz, $\mathcal{M}$ részmatroidjainak kontrakcióit) $\mathcal{M}$ *minorjainak* hívjuk.

[3] Az S halmaz véges volta számos matroidelméleti vizsgálat során szükségtelen feltevés. Erre vonatkozóan l. [1].

Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathcal{M}-B)^* = \mathcal{M}^* \div B,$$

így a kontrakció és részmatroid duális fogalmak.

c) DIREKT ÖSSZEG. Legyen $(S_1, \mathcal{M}_1)$ és $(S_2, \mathcal{M})$ két matroid, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ekkor értelmezzük a *direkt összegüket*, mint azt az $(S_1 \cup S_2, \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ matroidot, melyre

$$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \{A_1 \cup A_2;\ A_i \in \mathcal{M}_i\}.$$

Legyen r az $(S_1 \cup S_2, \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ matroid rangfüggvénye, ekkor

$$r(X) = r_1(S_1 \cap X) + r_2(S_2 \cap X).$$

$(S_1 \cup S_2, \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ körei M_1 körei és M_2 körei. Fennáll

$$(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)^* = \mathcal{M}_1^* \oplus \mathcal{M}_2^*.$$

(3. 2) *Az $(S, \mathcal{M})$ matroid akkor és csak akkor direkt összege az $(S_1, \mathcal{M}-S_2)$, $(S_2, \mathcal{M}-S_1)$ matroidoknak, $(S_1 \cup S_2 = S,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset)$, ha*

$$r(S_1) + r(S_2) = r(S).$$

Egy matroidot *összefüggőnek* nevezünk, ha nem bontható direkt összegre. (3. 2)-ből kiindulva könnyen igazolható:

(3. 3) *Minden matroid egyértelműen állítható elő összefüggő matroidok direkt összegeként.*

E direkt felbontás más úton is megkonstruálható: Nevezzünk két S-beli elemet ekvivalensnek, ha egy körön fekszenek. Ekkor ez ekvivalencia-reláció lesz és az ekvivalencia-osztályok szolgáltatják $(S, \mathcal{M})$ összefüggő direkt összeadandóit.

d) Röviden megvizsgáljuk a matroidok 0 és 1 rangú halmazainak struktúráját. A $\bar{\emptyset}$ altér 0 rangú halmaz, ennek elemei nem lépnek fel független halmazban. $\mathcal{M} = \mathcal{M}-\bar{\emptyset} = \mathcal{M}+\bar{\emptyset}$. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $\bar{\emptyset}=\emptyset$.

Legyen másrészt $x \in S$. Ekkor $\bar{x}$ 1-rangú altér, melyet *pontnak* is fogunk nevezni.[4]

[4] Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy a terminológia nem egységes; TUTTE [16] könyvében pl. a köröket hívja pontnak.

Két különböző pont közös része 0 rangú altér, vagyis $\emptyset$; így

(3. 3) *Ha egy matroidban $\bar{\emptyset}=\emptyset$, akkor az*

$$r(\{x, y\}) = 1$$

reláció ekvivalencia-reláció, melyre az ekvivalencia-osztályok a maximális 1 rangú halmazok.

4. §. PÉLDÁK MATROIDOKRA

Ebben a pontban a matematika különböző területein felbukkanó matroidokat vesszük szemügyre. Minden matroiddal kapcsolatban kiemelünk néhány olyan matroidelméleti fogalmat, mely különösen jellemző; természetesen nem vállalkozhatunk az egyes matroidfajták rendszeres vizsgálatára.

a) TRIVIÁLIS MATROIDOK. Legyen $|S|=n$, és legyen S egy részhalmaza „független", ha legfeljebb k elemű ($k \leqq n$ rögzített). Így nyilván matroidot kapunk, melyet $\mathcal{M}_{n,k}$-val jelölünk. Ebben bázisok a k elemű, körök a $k+1$ elemű halmazok.

b) LINEÁRIS TEREK. Egy lineáris tér tetszőleges véges részhalmaza matroid, ha a „függetlenség" a lineáris függetlenséget jelenti. Egy részhalmaz rangja a lineáris tér általa generált alterének dimenziója.

c) PROJEKTÍV TEREK. Egy projektív tér tetszőleges véges részhalmaza matroid, ha n pont „függetlensége" azt jelenti, hogy $(n-1)$-dimenziós alterét feszítik ki a projektív térnek. Itt tehát egy részhalmaz rangja az által feszített altér dimenziójánál 1-gyel nagyobb. Körök lesznek az olyan n elemű ponthalmazok, melyek csak $(n-2)$-dimenzós alteret feszítenek, de *általános helyzetűek*, vagyis bármely $n-1$ pontjuk is $(n-2)$-dimenziós alteret feszít.

d) GRÁFOK. Egy G gráfban „függetlennek" nevezve egy élhalmazt, ha nem tartalmaz kört, egy $(E(G), \mathcal{M}_G)$ matroidot kapunk, a gráf *kör-matroidját*.

Ennek bázisai azok az erdők, melyeknek minden komponensbe összefüggő darabjuk esik; összefüggő gráf esetén tehát a feszítő fák. Körei lesznek a gráf körei, vágásai a gráf vágásai, egy él lezártja a vele párhuzamos élek halmaza. A matroid összefüggő direkt összeadandói a gráf tagjainak[5] élhalmazai. Egy X élhalmaz rangja $|V(G)|-p$, ahol p az eredeti gráf pontjaiból és X éleiből álló gráf összefüggő komponenseinek száma. Összefüggő gráfra tehát $r(E(G)) = |V(G)|-1$.

A kör-matroid duálisát a gráf vágás-matroidjának nevezzük, ennek körei a gráf vágásai. Síkba rajzolható gráf duálisának kör-matroidja a gráf vágásmatroidja. Ez bizonyos fokig meg is fordítható:

(4. 1) [WHITNEY, 19]. *Ha egy G gráf vágás-matroidja izomorf egy másik G' gráf körmatroidjával, akkor G síkbarajzolható úgy, hogy G' a duális gráfja.*

Látható, hogy egy gráf igen sok fontos tulajdonsága tükröződik a hozzá tartozó kör-matroidban. Ez nem meglepő, mert:

(4. 2) [WHITNEY, 20]. *Ha két háromszorosan összefüggő gráf körmatroidja izomorf, akkor a gráfok is izomorfak.* (Vegyük észre, hogy a kör-matroidok izomorf volta a gráfok *gyenge izomorfiáját jelenti.*)

Vizsgáljunk meg más gráfelméleti tulajdonságokat, hogyan fejezhetők ki a kör-matroid tulajdonságaival.

Nem nehéz megmutatni, hogy ha a gráf a nem-szomszédos a, b pontok között k-szorosan összefüggő,[6] akkor

$$k = 1 + \min_{\substack{A \subseteq X \\ B \subseteq S-X}} (r(X)+r(S-X)-r(S)),$$

ahol A, B az a, b-hez illeszkedő, S pedig az összes élek halmazát jelenti.

[5] Maximális kétszeresen összefüggő részgráfjai.

[6] Vagyis bármely $k-1$ a, b-től különböző pontot elhagyva visszamarad a-t b-vel összekötő út, de k pontra ez már nem igaz.

A gráf kromatikus száma a következőképpen tárgyalható matroidelméletileg. Legyen G összefüggő gráf, $|V(G)|=n$. Ekkor az

$$f_G(x)=\sum_{A\subseteq E(G)}(-1)^{|A|}x^{n-r(A)}$$

polinomnak egy $t\geqq 0$ egész helyen felvett értéke G t színnel való „jó" színezéseinek számát adja. Így G kromatikus száma 1-gyel nagyobb $f_G(x)$ legnagyobb egész gyökénél.

Megjegyezzük, hogy a hasonlóan alkotott $f_G(x)$ polinom vizsgálata más matroidfajtáknál is érdekes kérdésekhez vezet.

Természetesen érdekesek a gráf kör-matroidja duálisának, a gráf vágás-matroidjának jellemzői is; ezek megvizsgálását az olvasóra hagyjuk.

e) TRANSZVERZÁLISOK. Legyenek $A_1, \ldots, A_k$ az S halmaz részhalmazai. Egy $T\subseteq S$ halmazt *parciális transzverzálisnak* nevezünk, ha minden $x\in T$-re megadható egy x-et tartalmazó A_{i_x}, különböző x-re különböző i_x.

Ekkor „független" nevezve egy $X\subseteq S$ halmazt, ha parciális transzverzális, matroidot kapunk, melyet (az $A_1, \ldots, A_k$ részhalmazokhoz tartozó) *transzverzális matroidnak* nevezünk. Annak belátása, hogy ez matroid, valamint a rangfüggvény meghatározása lényegesen nehezebb, mint az eddigi példáknál, és a következő paragrafus eredményeiből lesz egyszerűen levezethető.

A transzverzális matroidok egy másik származtatása az alábbi:

Legyen G egy páros gráf, vagyis tegyük fel, hogy G pontjai „alsó" és „felső" pontokra oszthatók úgy, hogy minden él egy alsó és egy felső pontot köt össze. Legyen S az „alsó" pontok halamaza, és nevezzük $X\subseteq S$-t *„függetlennek"*, ha van független éleknek olyan rendszere, mely X-et lefedi. Könnyen látható, hogy így egy transzverzális matroidot nyerünk, és minden transzverzális matroid megkapható ilyen módon.

Megjegyezzük, hogy a transzverzális matroid rangja a páros gráf független éleinek maximális száma, s így a KŐNIG—HALL—ORE tétel alapján meghatározható volna. Látni fogjuk azonban, hogy általános matroidelméleti tételekből ez a tétel s levezethető.

f) PÁROSÍTÁSOK. Legyen G egy gráf, $S=V(G)$ és nevezzünk egy $X\subseteq S$ halmazt „függetlennek" ha van olyan független élrendszer, amely X minden pontját telíti. Így matroidot nyerünk, amit G párosítás-matroidjának nevezünk. Egy páros gráfhoz tartozó transzverzális-matroid a gráf párosítás-matroidjának részmatroidja.

Érdekes e matroid duálisa is: ebben egy részhalmaz akkor és csak akkor független, ha pontjait elhagyva a gráf független éleinek maximális száma nem csökken.

Nyilván a párosítás-matroidban $r(S)=2e_G$, ahol e_G a G gráf független éleinek maximális száma. TUTTE [13] 1-faktor-tételét általánosítva, BERGE [2] az alábbi formulát vezette le e_G-re. Legyen $X\subseteq S$ esetén $\tau(X)$ az X pontjai által feszített részgráf páratlan pontszámú komponenseinek száma. Ekkor

$$e_G=|S|-\frac{1}{2}\max_{X\subseteq S}(\tau(X)+|X|)$$

Megmutatjuk most, hogy a matroidelmélet eddig ismertett alapfogalmai és tételei alapján e formula néhány sorban levezethető.

A bizonyítást $|S|$ szerinti teljes indukcióval végezzük. Mivel triviális leszámlálás alapján

$$e_G\leqq|S|-\frac{1}{2}(\tau(X)+|X|)$$

minden X halmazra, elegendő megmutatni, hogy létezik olyan X_0 melyre

$$e_G = |S| - \frac{1}{2}(\tau(X_0) + |X_0|). \tag{1}$$

Tegyük fel először, hogy van olyan $x \in S$, hogy az x elhagyása után visszamaradó G' gráfra $e_{G'} = e_G - 1$. Ekkor az indukciós feltevés szerint van olyan $X_0 \subseteq S - \{x\}$ halmaz, hogy

$$e_{G'} = |S - x| - \frac{1}{2}(\tau(X_0) + |X_0|),$$

s így erre az X_0-ra (1) fennáll.

Másodszor, ha G nem összefüggő, akkor minden komponensére alkalmazhatjuk az indukciós feltevést.

Végül tekintsünk egy olyan összefüggő G gráfot, melynek bármely x pontját elhagyva e_G nem csökken; más szóval, bármely pont független a gráf duális párosítás-matroidjában, $\mathcal{M}$-ben. Ekkor tekintsük az 1 rangú halmazokat $\mathcal{M}$-ben. Ha két pont össze van kötve, akkor elhagyásuk után e_G-nek csökkenie kell, hiszen ha a visszamaradó gráf tartalmazna e_G elemű független élrendszert, akkor ezt az elhagyott pontokat összekötő éllel kiegészítve, $e_G + 1$ elemű független élrendszert kapnánk, ami lehetetlen; tehát összekötött pontok ugyanabba az 1 rangú halmazba esnek. G összefüggő volta miatt (3. 3) szerint $r(S) = 1$, vagyis $e_G = \frac{|S|-1}{2}$, $\tau(S) = 1$, s így $X_0 = S$ kielégíti (1)-et.

g) LÁNCCSOPORTOK. Legyen $n \geqq 1$, T valamely test és tekintsük az összes n-dimenziós T feletti vektorok T^n terét. Egy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vektor *tartójának* nevezzük azon i indexek halmazát, melyekre $\alpha_i \neq 0$. Legyen $V \subseteq T^n$ egy lineáris altér („láncCsoport"); az $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy $\{i_1, \ldots, i_n\}$ részhalmazát „függetlennek" nevezzük, ha nem tartalmazza egyetlen nem-nulla V-beli vektor tartóját sem. Ily módon egy $\mathcal{M}_V$ matroidhoz jutunk.

Ha egy G gráf éleivel vannak azonosítva az $1, 2, \ldots, n$ számok, $T = GF(2)$ és V a ciklusok altere (l. 1*b*), akkor az így kapott matroid a gráf körmatroidja lesz.

A V altérre ortogonális $V^\perp$ altérhez tartozó $\mathcal{M}_{V^\perp}$ matroidról megmutatható, hogy éppen $\mathcal{M}_V$ duálisa. Továbbá $\mathcal{M}_V$-ben S rangja $n - \dim V$. Az $\mathcal{M}_V$ alakban előálló matroidokat *láncCsoport-matroidoknak* is nevezzük.

5. §. ALAPVETŐ MAXIMUM-MINIMUM TÉTELEK

a) HOMOMORF KÉP. Legyen $(S, \mathcal{M})$ egy matroid, φ pedig olyan függvény, mely S-et egy $\varphi(S)$ halmazra képezi le. Ekkor az

$$\mathcal{M}\varphi = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{M}\}$$

halmazrendszer elemei egy matroid független részhalmazait alkotják, melyet az $\mathcal{M}$ matroid *homomorf-képének* nevezünk. A homomorf kép egy X részhalmazának rangjára az alábbi formula igazolható [NASH—WILLIAMS, 10]

$$r_\varphi(X) = \min_{Y \subseteq X} \left(r(\varphi^{-1}(Y)) + |X - Y|\right) \tag{1}$$

ahol r_φ a $(\varphi(S), \mathcal{M}_\varphi)$ matroid rangfüggvénye. Mivel definíció szerint

$$r_\varphi(X) = \max_{\substack{A \subseteq \varphi^{-1}(X) \\ A \in \mathcal{M}}} |\varphi(A)|,$$

az (1) formula egy maximum-minimum tételt ad az $(S, \mathcal{M})$ matroidra. E formula egyébként lényegesen mélyebben fekszik, mint az eddig említett matroidelméleti összefüggések.

Az (1) formula alkalmazásaként bebizonyítjuk az alábbi tételt[7]:

(5. 1) [LOVÁSZ,7]. *Legyen* $\{A_i : i = 1, \ldots, n\}$ *véges halmazoknak egy rendszere úgy, hogy bármely* v *darab* A_i *egyesítése legalább* $v+1$ *elemű* $(v = 1, \ldots, n)$. *Ekkor minden* A_i*-ből kiválasztható egy kételemű* B_i *részhalmaz úgy, hogy a* B_i *élek erdőt alkotnak.*

(Megjegyezzük, hogy e tételből adódóan az $\{A_i\}$ halmazrendszer kromatikus száma 2, vagyis az $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ halmaz elemei 2 színnel színezhetők oly módon, hogy minden egyes A_i halmaz mindkét színből tartalmazzon pontot; ezt ERDŐS sejtette.)

Legyen ugyanis G a következőképpen definiált gráf: $V(G) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, és minden A_i-hez tekintsük az általa feszített teljes G_i gráfot; ha egy pontpár több A_i-ban is fellép, mindegyik ilyen A_i-re tekintünk egy összekötő élt. Az összes így kapott élek legyenek G élei, összességüket jelölje S. Legyen továbbá φ az a leképezés, mely G_i éleihez az i számot rendeli. Tekintsük a $(\varphi(S), \mathcal{M}_G\varphi)$ matroidot. Egyszerű számolás mutatja a tétel feltétele alapján, hogy ennek r_φ rangfüggvényére

$$r_\varphi(\varphi(S)) = \min_{X \subseteq \varphi(S)} \left(r(\varphi^{-1}(X)) + |\varphi(S) - X|\right) = |\varphi(S)|$$

Vagyis e matroidban $\varphi(S)$ (és így minden halmaz) független. Van tehát egy olyan F független halmaz $\mathcal{M}_G$-ben, melyet φ az egész $\varphi(S)$ halmazra képez le; és ez éppen az, amit igazolni akartunk.

b) NASH—WILLIAMS-ÖSSZEG. Legyenek $(S, \mathcal{M}_1), \ldots, (S, \mathcal{M}_k)$ közös alaphalmazon értelmezett matriodok. Érdekes és nem triviális tény, hogy az $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ $(A_i \in \mathcal{M}_i)$ alakban előálló halmazok egy $\mathcal{M}$ matroidot alkotnak, melyet az $(S, \mathcal{M}_i)$ matroidok Nash—Williams-összegének nevezzük. A Nash—Williams-összeg más módon is származtatható. Tekintsük egy-egy $(S_i, \mathcal{M}_i)$ matroidot minden $1 \leqq i \leqq k$-ra úgy, hogy az S_i alaphalmazok diszjunktak legyenek és $(S_i, \mathcal{M}_i)$ $(S, \mathcal{M}_i)$-vel izomorf legyen; jelöljön φ_i egy izomorf leképezését S_i-nek S-re. Ekkor a φ_i-kből összetehető egy φ leképezése az $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ halmaznak S-re; a φ leképezésénél az $(S_i, \mathcal{M}_i)$ matroidok direkt összege egy $(S, \mathcal{M})$ matroidra képződik le, melyről nem nehéz észrevenni, hogy éppen az $(S, \mathcal{M}_i)$ matriodok Nash—Williams összege.

A fenti származtatás nemcsak azt igazolja, hogy a Nash—Williams-összeg valóban matroid, de lehetőséget nyújt az (1) formula alkalmazására is. Ily módon az alábbi képlet adódik [NASH—WILLIAMS 10]:

$$r(X) = \min_{Y \subseteq X} \left(\sum_{i=1}^{k} r_i(Y) + |X - Y| \right), \tag{2}$$

ahol r, ill. r_i az $(S, \mathcal{M})$ ill. $(S, \mathcal{M}_i)$ matroid rangfüggvénye.

[7] A bizonyítás T. HELGASONtól származik.

A (2) formula igen mély betekintést nyújt a matroid szerkezetébe. Ezt mutatja az alábbi két következménye is:

(5. 1) *Egy matroid S alaphalmaza akkor és csak akkor állítható elő k független halmaz egyesítéseként, ha minden $X \subseteq S$-re* $|X| \leqq k \cdot r(X)$.

(5. 2) *Egy matroidban akkor és csak akkor található k diszjunkt bázis, ha minden $X \subseteq S$-re* $k(r(S)-r(X)) \leqq |S-X|$.

Érdekes eredményeket kapunk, ha (5. 1)-et és (5. 2)-t egy gráf körmatroidjára alkalmazzuk.

(5. 3) [NASH—WILLIAMS 9]. *Egy gráf élei akkor és csak akkor színezhetők k színnel úgy, hogy minden kör tartalmazzon különböző színű éleket, ha bármely m pont legfeljebb $k(m-1)$ élt fesźit* $(m=1, 2, \ldots)$.

(5. 4) [TUTTE, 14]. *Egy G gráf akkor és csak akkor tartalmaz k élidegen feszítő fát, ha akárhogyan is osztva pontjait m osztályba, legalább $k(m-1)$ olyan él van, mely különböző osztályt köt össze* $(m=1, 2, \ldots)$.

A mélyen fekvő (5. 3), (5. 4) tételek ilyen természetes levezetése a matroidelmélet erejét mutatja.

A Nash—Williams-összeg egy érdekes alkalmazásaként bebizonyítjuk a Hall-tételt:

(5. 5) [HALL, 5]. *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ véges halmazok; akkor és csak akkor lehet minden A_i-hez egy $a_i \in A_i$ elemét rendelni úgy, hogy $i \neq j$-re $a_i \neq a_j$, ha az A_i halmazok közül bármely m-nek az egyesítése legalább m elemű* $(m=1, \ldots, n)$.

Tekintsük ugyanis az $A_1, \ldots, A_n$ halmazokhoz tartozó $(S, \mathcal{M})$ transzverzális matroidot $\left(S=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. A feltétel azt jelenti, hogy e matroidban $r(S)=n$. Mármost e transzverzális matroidot előállíthatjuk az alábbi $(S, \mathcal{M}_i)$ matroidok Nash—Williams-összegeként:

$$\mathcal{M}_i = \{\{x\};\ x \in A_i\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ily módon az $(S, \mathcal{M})$ transzverzális matroid rangfüggvénye

$$r(X) = \min_{Y \subseteq X} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i(Y) + |X-Y| \right). \tag{3}$$

Mármost könnyen látható, hogy a minimumot szolgáltató Y-ra $X-Y$ bizonyos A_i-k egyesítésének X-re eső része; így (3) így is írható

$$r(X) = \min_{\substack{1 \leqq v \leqq n \\ 1 \leqq i_1 < \cdots < i_v \leqq n}} \left(n-v+\left| X \cap \bigcup_{d=1}^{v} A_{i_d} \right| \right). \tag{4}$$

Ezzel meghatároztuk a transzverzális matroidok rangfüggvényét. Legyen speciálisan $r(S)=n$, ez tehát azzal ekvivalens, hogy

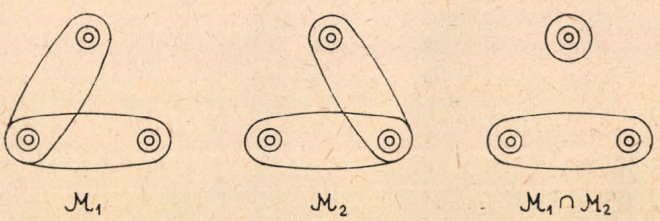
$$v \leqq \left| \bigcup_{d=1}^{v} A_{i_v} \right| \quad (1 \leqq v \leqq n,\ 1 \leqq i_1 < \cdots < i_v \leqq n)$$

ami Hall tételét bizonyítja.

c) METSZET. Legyen adott az S alaphalmazon két matroid, $(S, \mathcal{M}_1)$ és $(S, \mathcal{M}_2)$. Az $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ halmazrendszer általában nem alkot matroidot, mint azt pl. a 3. ábra mutatja. Kérdezhető mégis, mi e halmazrendszer legnagyobb számosságú eleme? Erre vonatkozólag az alábbi formula igazolható [RADÓ—EDMONDS 11, 3; lásd még WELSH 18].

$$\max_{F \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2} |F| = \min_{X \subseteq S} (r_1(X) + r_2(S - X)) \tag{5}$$

Ez a formula könnyűszerrel levezethető a (2) formulából, ha azt $n=2$-vel az $(S, \mathcal{M}_1)$ és $(S, \mathcal{M}_2^*)$ matroidok Nash—Williams-összegére alkalmazzuk. Másrészről a (5) formulából könnyen következik a homomorf képre vonatkozó (1) formula, ha $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$ és $\mathcal{M}_2$ az a matroid az S halmazon, melyben egy részhalmaz „független", ha elemeit φ különböző elemekre képezi le. Így e paragrafus három alapvető formulája lényegében ekvivalens.



3. ábra

A Nash—Williams-összegformula alapján azt várnánk, hogy (5) kiterjeszthető k matroid metszetére. Ez azonban, sajnos, nincs így; semmiféle nem-triviális formulát nem sikerült találni $k \geqq 3$ esetén a

$$\max_{F \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{M}_i} |F|$$

mennyiségre. Ez annál is sajnálatosabb (bár egyszersmind érthetőbb), mert pl. három matroid metszetének segítségével megfogalmazható páros gráfban, több matroid metszetének segítségével pedig tetszőleges gráfban Hamilton-kör létezése, és sok más nevezetes megoldatlan gráfelméleti probléma is.

Az (5) formula alkalmazásaként vázoljuk Menger tételének bizonyítását (Vö. TUTTE [21]).

(6. 6) [MENGER 8]. *Legyen a, b a G gráf két nem-szomszédos pontja, és legyen k az a-t b-től elvágó pontok minimális száma. Ekkor található G-ben k pontidegen (a, b)-út.*

Jelölje A, ill. B az, a ill. b pontokból kifutó élek halmazát. Az (5) formulát az $S = E(G) - A - B$ hamlazon az $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_G \div A - B$ és $\mathcal{M}_2 = M_G - A \div B$ matroidokra felírva a 4. § *c)*-ben tett megjegyzések alapján Menger tétele adódik.

Végül megemlítjük, hogy az (1), (2), (5) alapformuláknak sok változata, és sok hasonló jellegű, de tőlük különböző maximum-minimum tétel ismeretes, melyeket itt természetesen nem ismertethetünk. A fenti három alapformulának van a legtöbb ismert alkalmazása, ezért emeltük ki őket.

A reprezentáció problémáján az alábbit értjük: adott egy matroid; reprezentálható-e mint a 4. §-ban megadott matroidok (vagy más, speciálisan konstruált matroidok) valamelyike?

A koordinátázás speciálisan lineáris tér részhalmazaként történő reprezentációt jelent. E paragrafusban főként a koordinátázáshatóság kérdését vizsgáljuk; azonban megemlítünk néhány eredményt általánosabb reprezentációs kérdésekkel kapcsolatban is.

Könnyen igazolható, hogy *bármely gráf párosítás-matroidja reprezentálható transzverzális matroidként* [EDMONDS, FULKERSON 4].

Ismeretes a gráfok kör-matroidjaként reprezentálható matroidoknak (röviden: grafikus matroidoknak) teljes jellemzése (l. később). Nincsenek azonban kielégítően leírva a transzverzális matroidok.

Részletesebben rátérve a koordinátázhatóság kérdésére, először is definiáljuk a koordinátázhatóságot a következőképpen: Egy $(S, \mathcal{M})$ matroid *koordinátázható a T test fölött*, ha minden $x \in S$-hez hozzárendelhető egy T fölötti v_x vektor úgy, hogy $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{M}$ akkor és csak akkor, ha $v_{x_1}, \ldots, v_{x_k}$ lineárisan függetlenek. E definíció megengedi, hogy különböző x-ekhez ugyanazt a v_x-et írjuk (bár ez nem jelent lényeges különbséget). Könnyen látható, hogy minden v_x $r(S)$-dimenziósnak is választható.

Három típusú kérdést vizsgáltak: Mikor koordinátázható egy $(S, \mathcal{M})$ matroid (a) egy adott T test fölött; (b) valamely adott karakterisztikájú test fölött; (c) tetszőleges test fölött?

a) Legyen egy $(S, \mathcal{M})$ matroid koordinátázva a T test fölött, vagyis legyen minden $x \in S$-hez egy megfelelő v_x vektor rendelve. Feltehetjük, hogy $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Írjuk egymás mellé a $v_1, \ldots, v_n$ oszlopvektorokat, így egy $r \times n$-es mátrixot kapunk $(r = r(S))$. Tekintsük e mátrix sorvektorai által generált V alteret. Megmutatható, hogy a $V^{\perp}$-hez tartozó lánccsoport-matroid éppen $(S, \mathcal{M})$. Megfordítva, minden T feletti lánccsoport-matriodnak megadható egy koordinátázása. Így

(6. 1) *Egy matroid akkor és csak akkor koordinátázható egy T test fölött, ha reprezentálható, mint egy lánccsoportmatroid T fölött.*

E tételnek fontos következménye, mivel egy lánccsoport-matroid duálisa az ortogonális altérhez tartozó lánccsoport-matroid,

(6. 2) *Egy matroid akkor és csak akkor koordinátázható egy T test fölött, ha a duálisa koordinátázható.*

Kiegészítjük ezt azzal az észrevétellel, hogy ha egy matroid koordinátázható T fölött, akkor minden minora is.

Ezek után felvetődik a kérdés, megtartják-e a koordinátázhatóságot más operációk. Nyilvánvaló, hogy két matroid direkt összege akkor és csak akkor koordinátázható egy adott test felett, ha mindegyikük koordinátázható. Lényegesen mélyebb az alábbi tétel:

(6. 3) [PIFF—WELSH 17]. *Ha az $(S, \mathcal{M})$ matroid koordinátázható T fölött és $|T| \geqq 2^{|S|}$, akkor $(S, \mathcal{M})$ bármely homomorf képe is koordinátázható T fölött.*

Ebből könnyen levezethető

(6. 4) [PIFF—WELSH 17.] *Ha bizonyos matroidok mindegyike koordinátázható a T test fölött és T elemszáma elég nagy, akkor a Nash—Williams-összegük is koordinátázható T fölött.*

(6. 5) [PIFF—WELSH 17.] *Minden transzverzális matroid koordinátázható minden, a matroidtól függően elég nagy elemszámú test fölött.*

Itt említjük meg, hogy az 1. § *c)* pontjában láttuk, hogy

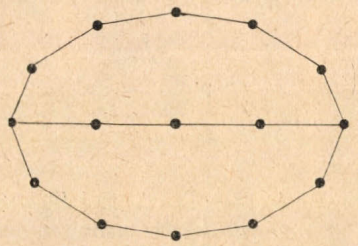
(6. 6) *egy grafikus matroid minden test felett koordinátázható.*

Ebből az is látható, hogy az 1. § *b)* és *c)* pontjában tárgyalt lineáris algebrai apparátus szorosan összefügg: a *b)* pontban a gráf kör-matroidját mint lánccsoport-matroidot származtattuk.

Térjünk vissza egy adott $(S, \mathcal{M})$ matroid koordinátázhatóságának kérdéséhez ($S=\{1, 2, \ldots, n\}$). Tegyük fel, hogy $(S, \mathcal{M})$-et egy V lánccsoport szolgáltatja és legyen v_K olyan V-beli elem, melynek tartója a K kör. A koordinátázási problémakör egy igen fontos lemmája ezeket a v_K vektorokat karakterizálja.

Nevezzük *körfészeknek* köröknek egy $\{K_1, \ldots, K_p\}$ $(p \geqq 3)$ halmazát, mely a következő struktúrájú: $S_1, \ldots, S_p \subset S$ diszjunkt halmazok, $S_0 = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$ és $K_i = S_0 - S_i$.

Egy körfészekhez tartozó köröket *szomszédosaknak* nevezünk. Könnyen belátható, hogy a K_1, K_2, körök akkor és csak akkor szomszédosak, ha $r(K_1 \cup K_2) + r(K_1 \cap K_2) = r(K_1) + r(K_2)$, és $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Grafikus matroidban minden körfészek egy Θ-gráf három köréből áll (4. ábra). Látható, hogy körök szomszédossága elég erős megkötés; másrészről igaz az alábbi



4. ábra

(6. 7) [TUTTE.] *Ha K, K' az $(S, \mathcal{M})$ matroid két köre és $e \in K \cap K'$, akkor található $(S, \mathcal{M})$-beli köröknek egy $K_0 = K, K_1, \ldots, K_m = K'$ sorozata úgy, hogy $e \in K_i$, továbbá K_{i-1} és K_i szomszédosak* $(i=1, \ldots, m)$.

Ennek felhasználásával igazolható a koordinátázás elméletének alaplemmája:

(6. 8) [TUTTE 15.] *Legyen $(S, \mathcal{M})$ egy matroid, $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ és legyen minden K körhöz egy $v_K \in T^n$ vektor rendelve. Akkor és csak akkor lesz a v_K-k által generált V lánccsoport-matroidja $\mathcal{M}$, ha bármely, egy körfészekhez tartozó K_1, K_2, K_3 körhármasra $v_{K_1}, v_{K_2}, v_{K_3}$ lineárisan összefüggnek.*

E tétel egyszerű következménye:

(6. 9) [WHITNEY, RADÓ, TUTTE 20, 12, 15.] *Egy $(S, \mathcal{M})$ matroidra az alábbi állítások ekvivalensek:*

(a) *$(S, \mathcal{M})$ koordinátázható a 2 elemű test fölött* (más szóval: $(S, \mathcal{M})$ bináris);
(b) *bármely két kör szimmetrikus differenciája tartalmaz kört;*
(c) *bármely két kör szimmetrikus differenciája diszjunkt körök egyesítése;*
(d) *bármely körfészek három körből áll.*
(e) *$(S, \mathcal{M})$ minorai között nem szerepel $M_{4,2}$.*

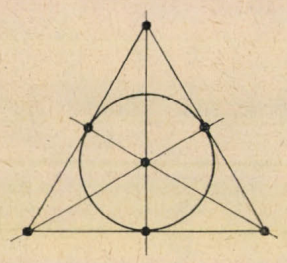
Megjegyezzük, hogy az (e) feltétel a legérdekesebb, mert ilyen típusú feltétel várható sok más „jellemezzük azokat a matroidokat..." kezdetű feladatnál is.

Egy matroidot *unimodulárisnak* nevezünk, ha bármely test fölött koordinátázható. Láttuk, hogy minden grafikus matroid unimoduláris; ugyancsak unimoduláris ezek duálisa. Az unimoduláris matroidok jellemzése igen mély, nehéz segédeszközöket felhasználó tétel. Kimondása előtt vezessünk be egy fogalmat: *Fano-matroid-*

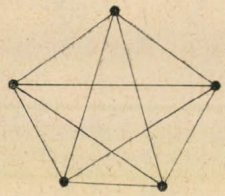
nak (Fano-síknak) nevezzük a 7 elemű projektív síkot (ez a $GF(2)$ fölötti projektív sík); ezt a matroidot $\mathcal{F}$-fel jelöljük (5. ábra). Az ábra úgy értendő, hogy alterek az $\emptyset$, a pontok, az egy egyenesen (ill. a körön) fekvő ponthármasok és az egész sík.

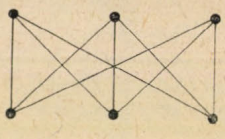
(6. 10) [TUTTE 15.] *Egy matroid akkor és csak akkor unimoduláris, ha bináris és minorai között nem szerepel sem* $\mathcal{F}$, *sem* $\mathcal{F}^*$.

Az unimoduláris matroidok elnevezése onnan származik, hogy ezeknek olyan koordinátázása is megadható, melynél a koordinátázó vektorokból alkotható mátrix unimoduláris. Az unimoduláris matroidok már igen közel vannak a grafikusokhoz. Jelölje ugyanis $\mathcal{K}_5$, ill. $\mathcal{K}_{3,3}$ a teljes ötszög, ill. a három-ház-három-kút gráf kör-matroidját (6. ábra).



5. ábra





6. ábra

(6. 11) [TUTTE 15.] *Egy matroid akkor és csak akkor grafikus, ha unimoduláris, és minorai között nem szerepel sem* $\mathcal{K}_5^*$, *sem* $\mathcal{K}_{3,3}^*$; *más szóval, ha minorai között* $\mathcal{M}_{4,2}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{K}_5^*$ *és* $\mathcal{K}_{3,3}^*$ *egyike sem szerepel.*

A $\mathcal{K}_5$ és $\mathcal{K}_{3,3}$ matroidok fellépése szembetűnő, mert a megfeellő gráfok szerepelnek a síkbarajzolható gráfok jellemzésénél:

(6. 12) [KURATOWSKI 6] *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem topologikus teljes ötszöget, sem topologikus három-ház-három-kutat.*[8]

Valójában a (6. 12) tétel könnyen levezethető (6. 11)-ből (4. 2) alapján.

b) Vizsgáljuk most azt a kérdést, mikor található olyan k karakterisztikájú test (k prím vagy 0), mely fölött az adott $(S, \mathcal{M})$ matroid koordinátázható. Tegyük fel, hogy van ilyen T test, és legyen T_0 a T-ben tartalmazott prímtest.

Jelölje $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ az i-edik ponthoz rendelt koordinátázó vektort, ekkor tehát

(8) $$\det (x_{i_\nu, \mu})_{\nu,\mu=1}^{r} = 0,$$

ha $\{i_1, \ldots, i_r\} \in M$ és

(9) $$\det (x_{i_\nu, \mu})_{\nu,\mu=1}^{r} \neq 0$$

egyébként. Jelölje röviden

$$F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$$

a (8) alatti egyenleteket,

$$F \neq 0$$

[8] Topologikus G-gráfon olyan gráfot értünk, mely a G gráfból úgy áll elő, hogy bizonyos éleire pontokat helyezünk.

a (9) alatti egyenlőtlenségek szorzatát, ahol $F_1, \ldots, F_m, F$ az x_{ij} $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq r)$ változók egész együtthatós polinomjai. Mármost algebrai eszközökkel igazolható, hogy

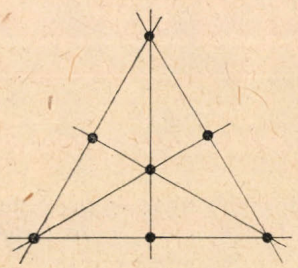
(6. 13) *$(S, \mathcal{M})$ akkor és csak akkor nem koordinátázható valamely k karakterisztikájú test felett, ha vannak olyan $c \not\equiv 0 \pmod k$ és $d > 0$ egészek, továbbá egész együtthatós $f_1, \ldots, f_m$ $n \cdot r$-változós polinomok, hogy*

$$c \cdot F^d \equiv f_1 F_1 + \cdots + f_m F_m \pmod k.$$

A fenti tétel nem tekinthető ugyan a probléma kielégítő megoldásának, de jól felhasználható pl. az alábbi tétel igazolásánál. Jelölje $C(S, \mathcal{M})$ mindazon k karakterisztikák halmazát, amely karakterisztikájú testek fölött $(S, \mathcal{M})$ koordinátázható.

(6. 14) [RADÓ, VÁMOS 12.] *Ha $0 \in C(S, \mathcal{M})$, akkor minden elég nagy p prímre $p \in C(S, \mathcal{M})$; ha $0 \notin C(S, \mathcal{M})$, akkor minden elég nagy p prímre $p \notin C(S, \mathcal{M})$.*

Felvetődik mármost a kérdés, milyen halmaz lehet $C(S, \mathcal{M})$. A (6. 14) tétel szerint vagy véges, vagy egy véges halmaz komplementere (a $\{0, 2, 3, \ldots\}$ halmazra vonatkozóan). Könnyen látható, hogy a $GF(p)$ fölötti projektív sík csak p karakterisztikájú testek fölött koordinátázható; így lehet $C(S, \mathcal{M}) = \{p\}$. Lehet azonban $C(S, \mathcal{M}) = \{0, 2, 3, 5. \ldots\} - \{p\}$; pl. $p = 2$-re a Fano-matroidból egy egyenest elhagyva nyerünk ilyen matroidot (7. ábra; ezt anti-Fano-matroidnak nevezzük). Hasonló, bár kissé bonyolultabb a konstrukció az általános esetben.



7. ábra

Direkt összeadással nyerhetünk mármost olyan matroidot, melyre $C(S, \mathcal{M}) = \{0, 2, 3, \ldots\} - \{p_1, \ldots, p_s\}$, így $0 \in C(S, \mathcal{M})$ esetén a (6. 14) tétel jellemzi a lehetséges $C(S, \mathcal{M})$ halmazokat. $0 \notin C(S, \mathcal{M})$ esetén lényegesen kevesebbet tudunk; lehet $C(S, \mathcal{M}) = \{p\}$ és legújabban READ adott olyan $(S, \mathcal{M})$ matroidot, melyre $C(S, \mathcal{M}) = \{1103; 2089\}$.

Természetesen felvetődik a kérdés, szükség van-e valóban p karakterisztikájú testekről beszélni, nem elegendő-e a prímtest a koordinátázáshoz. Ezzel kapcsolatban két, ellenkező irányú tételt említünk:

(6. 15) *Legyen T_0 egy prímtest és f T_0 felett irreducibilis polinom. Ekkor van olyan matroid, mely T_0-nak egy T bővítése fölött akkor és csak akkor koordinátázható, ha T tartalmazza f-nek gyökét.*

(6. 16) [RADÓ 12.] *Ha az $(S, \mathcal{M})$ matroid koordinátázható T_0 egy bővítése fölött, koordinátázható T_0 egy véges fokú algebrai bővítése fölött is.*

Megjegyezzük, hogy (6. 14) és (6. 16) azonnal adják, hogy

(6. 17) [RADÓ 12.] *Ha egy matroid koordinátázható, akkor egy véges test fölött akkor is koordinátázható.*

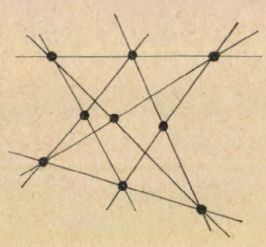
c) Végül röviden érintjük a koordinátázhatóság kérdését általában. Egyszerűség kedvéért matroidon a továbbiakban véges geometriát értünk. Először bemutatunk néhány konkrét matroidot.

1. A Fano és az anti-Fano-matroid direkt összege nyilván semmilyen test fölött sem koordinátázható.

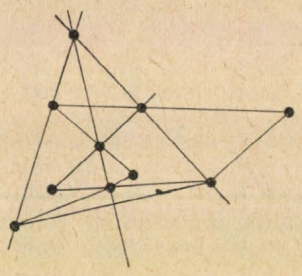
2. A 8. ábrán bemutatott matroid (az ábrák úgy értendők, hogy bázisok a nem kollineáris ponthármasok) nem teljesíti a Pappos-tételt, így nem koordinátázható test fölött (ferdetestek fölött azonban igen).

3. A 9. ábra matroidja a Desargues-tételt nem teljesíti, így egyáltalán nem koordinátázható.

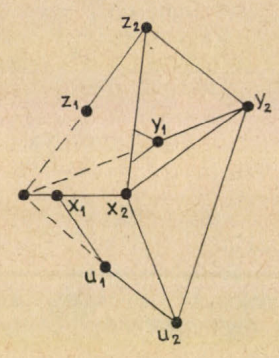
E példa azt sugallja, hogy különítsük el a 3 rangú matroidokat, hiszen a projektív tereknél is a síkok általában nem koordinátázhatók, a magasabb dimenziós



8. ábra



9. ábra



10. ábra

terek azonban igen (legalább is ferdetestek fölött). Legalább 4 rangú matroidoknál azonban a (ferdetestek fölötti) koordinátázhatóság és projektív térbe való beágyazhatóság ekvivalens.

4. [VÁMOS.] Legyen $(S, \mathcal{M})$ a következőképpen definiálva:

$S=\{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, u_1, u_2\}$;

$X=\{x_1, x_2\}$; $Y=\{y_1, y_2\}$, ... egy-egy egyenes;

$X \cup Y$, $X \cup Z$, $X \cup U$, $Y \cup Z$, $Y \cup U$ síkok;

$Z \cup U$ azonban nem sík, hanem bármely 3 eleme sík (vagyis „tetraéder"; 10. ábra). Könnyen látható, hogy ez matroid, és nem ágyazható be projektív térbe, mert az X, Y, Z, U egyenesekre adódnék, hogy egy ponton mennek át, akkor azonban Z és U is egy síkban volna.

Mármost általában a projektív térbe ágyazásnál úgy kellene a matroidot kibővíteni, hogy az új, bővebb matroid bármely két A, B alterére

$$r(A \cup B)+r(A \cap B) = r(A)+r(B) \tag{8}$$

legyen; összefüggő matroidoknál ez elegendő is. Speciális esetekre ez olyasmiket jelent, hogy egy síkban fekvő egyeneseknek van közös pontjuk stb. Ezt talán el lehet úgy végezni, hogy a matroidokhoz mindig egy újabb elemet veszek hozzá úgy, hogy (8) egyre több párra „egyre jobban" fennálljon. Ezt $r(S)=4$ esetén végre is lehet hajtani, és a beágyazhatóság szükséges és elegendő feltételeként az adódik, hogy a matroid ne tartalmazza 4.-et és még végtelen sok, hasonlóan származtatott matroidot.

IRODALOM

[1] D'Ambly, C.G.: Whitneysche Abhängigkeitstrukturen, Comb. Theory and its Appl. (Bolyai J. Mat. Társ., 1970), 25—37.
[2] Berge, C., Sur le couplage maximum d'un graphe, C. R. Acad. Scienses 247 (1958), 258—259.
[3] Edmonds, J., Submodular functions, matroids and certain polyhedra, Comb. Structures and their Appl. (Gordon and Breach, 1970) 69—87.
[4] Edmonds, J.—Fulkerson, D. R., Transversals and matroid partitions, J. Res. N.B.S. 69 (1965), 147—153.
[5] Hall, P., On representations of subsets, J. London Math. Soc. 10 (1934), 26.
[6] Kuratowski, K., Sur le probleme des courbes gauches en topologie, Fund. Math. 28 (1937), 22—32.
[7] Lovász, L., A generalization of Kőnig's theorem, Acta Mat. Acad. Sci. Hung. 21 (1970), 443—446.
[8] Menger, K., Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10 (1926), 96.
[9] Nash-Williams, C. St. J. A., Decomposition of finite graphs into forests, J. London Math. Soc. 39 (1964), 12.
[10] Nash-Williams, C. St. J. A., An application of matroids to graph theory, Theory of Graphs, I.C.C. Rome (Dunod-Gordon and Breach, 1967), 263—265.
[11] Rado, R., A theorem on independence relations, Quart. J. Math. 13 (1942), 83—89.
[12] Rado, R., Abstract linear independence, Colloq. Math. 14 (1966), 258—264.
[13] Tutte, W. T., The factorization of linear graphs, J. London Math. Soc. 22 (1947), 107—111.
[14] Tutte, W. T., On the problem of decomposing a graph into *n* connected factors, J. London Math. Soc. 142 (1961), 221—230
[15] Tutte, W. T., Lectures on matroids, J. Res. N. B. S. 69 (1965), 1—47.
[16] Tutte, W. T., Introduction to the theory of matroids.(Elsevier, 1971.)
[17] Piff, M. J. és Welsh, D. J. A., On the vector representation of matroids, J. London Math. Soc. 2 (1970) 284—288.
[18] Welsh, D. J. A., On matroid theorems of Edmonds and Rado, J. London Math. Soc. 2 (1970) 251—256.
[19] Whitney, H., Planar graphs, Fund. Math. 21 (1933), 73—84.
[20] Whitney, H., On the abstract properties of linear dependence, Amer. J. Math. 57 (1935), 509—533.
[21] Tutte, W. T., Mengers's theorem for matroids, J. Res. N. B. S. 69 (1965) 49—53.

КРАТКИЙ ОБЗОР ТЕОРИИ МАТРОИД

ЛАСЛО ЛОВАС

A BRIEF SURVEY OF MATROID THEORY

L. LOVÁSZ

GRÁFOK ÉS CIKLUSOK

ÁDÁM ANDRÁS

BEVEZETÉS

E dolgozat három fejezete egy-egy gráfelméleti tételt kíván megismertetni az olvasóval. Noha a fejezetek tartalmilag függetlenek egymástól, vannak olyan közös vonások az eredmények jellegében, amelyek alátámasztják azt, hogy egyetlen cikk keretébe foglaljuk őket. A tételek mindegyike egy-egy frappáns tényt mond ki irányított véges gráfok ciklusairól; rokon jelenség továbbá, hogy mindhárom kérdéskör alkalmazási lehetőségei a gráfelmélet területén túlra is kiterjednek.

Figyelembe véve a tárgyalandó eredmények alkalmazható voltát, az remélhető, hogy e cikk szélesebb olvasóközönségre számíthat, mint a gráfelméletben elmélyült kutató matematikusok köre. Ezért a vizsgálódások során helyenként olyan részletekre is kitérünk, amelyeken szűkebb olvasótábornak szánt közleményben át lehetne siklani. Fokozottan érvényes ez az első fejezetre, minthogy az ebben kimondott tétel igazolása a gráfelmélet specialistáinak aligha okoz számottevő nehézséget.

Az első két tételre három-három bizonyítást is adunk. Az olvasók közül a gráfelmélettel ismerkedő egyetemi hallgatók feltehetően méltányolni fogják a módszereknek ezáltal feltáruló változatosságát. Az alaposságra kevésbé törekvő olvasót természetesen az ízlésének legjobban megfelelő egy-egy bizonyítás is meggyőzheti a tételek helyességéről.

I. ORE TÉTELE A FUNKCIONÁLIS IRÁNYÍTOTT GRÁFOKRÓL

1. §

Annak az egyszerű, de érdekes gráfelméleti ténynek, amelynek e fejezetet szenteljük, fontos alkalmazási lehetősége van az automaták elméletében: a véges determinisztikus autonóm automaták leírását szolgáltatja.

Legyen G tetszőleges véges irányított gráf. Hurkokat megengedünk G-ben; G bármely két P, Q pontjához legfeljebb egy olyan él létezhet, amely P-ből Q-ba megy. Tetszőleges P pontra $d_b(P)$-vel jelöljük (és P *belső fokszámának* nevezzük) a P-be *be*futó élek számát; $d_k(P)$-vel jelöljük (és P *külső fokszámának* hívjuk) a P-ből *ki*futó élek számát. A G irányított gráfot *funkcionális gráfnak* nevezzük, ha a külső fokszám azonosan 1 G-ben.

Tekintsünk egy

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \qquad (k \geqq 1) \tag{1. 1}$$

pontsorozatot, ahol $P_1, \ldots, P_k$ páronként különbözőek. Ha minden i-re $(1 \leqq i < k)$ létezik él P_i és P_{i+1} között (akár P_i felé, akár P_{i+1} felé irányítva), akkor az (1. 1)

sorozatot *út*nak nevezzük (és azt mondjuk, hogy a szóban forgó élek az út élei). Hasonlóképpen, ha minden i-re ($1 \leqq i < k$) van P_i-ből P_{i+1}-be futó él, úgy azt mondjuk, hogy (1. 1) *pálya*. Ha (1. 1) út és P_k, P_1 között is van él, úgy *kör*ről beszélünk; ha pedig (1. 1) pálya és létezik P_k-ból P_1-be vivő él, akkor (1. 1)-re a *ciklus* elnevezést használjuk.

Tegyük fel, hogy G olyan véges összefüggő gráf, amely pontosan egy K kört tartalmaz. (Világos, hogy két K-beli pont között csak úgy lehet él, ha az éle K-nak.) Képezzünk egy újabb $\bar{G}$ gráfot G-ből úgy, hogy K pontjait egyetlen P_0 ponttá vonjuk össze (és K éleit természetesen töröljük). Nyilvánvaló, hogy ekkor $\bar{G}$ fa (azaz véges összefüggő körmentes gráf), tehát $\bar{G}$ tetszőleges e élét tekintve pontosan egy olyan a út van, amelynek első pontja P_0 és utolsó éle e. a utolsó előtti (ill. utolsó) pontját az e él P_0-hoz közelebbi (ill. P_0-tól távolabbi) végpontjának nevezzük. Az eredeti G gráfra áttérve beszélhetünk tehát egy — K-n kívüli — e élnek K-hoz közelebbi és K-tól távolabbi végpontjáról.

1. TÉTEL [8]. *Legyen G véges irányított gráf. Annak, hogy G funkcionális gráf (azaz G bármely P pontjából egy és csak egy kifelé irányított él indul ki), szükséges és elegendő feltétele, hogy G minden G^* összefüggő komponense teljesíti az alábbi három követelményt:*

(1) *G^* pontosan egy kört tartalmaz,*

(2) *a G^*-beli (egyetlen) K kör ciklus,*

(3) *valahányszor e olyan éle G^*-nak, amely nincs K-ban, úgy e a K-hoz közelebbi végpontja felé irányul.*

Megjegyzés. A tételben szereplő (1) és (2) feltételek ekvivalens módon helyettesíthetők az alábbi (4) és (5) állításokkal:

(4) *minden G^*-beli kör ciklus,*

(5) *G^* pontosan egy ciklust tartalmaz.*

Az 1. tétel bizonyításával a 2. §-ban foglalkozunk.

Mivel a véges, determinisztikus autonóm automaták (vagyis azon automaták, amelyek működése során véges sok állapot egyértelműen meghatározottan, külső behatásoktól függetlenül követheti egymást) természetes módon azonosíthatóak a (véges) funkcionális gráfokkal, az 1. tétel ennek az automata-típusnak teljes áttekintését nyújtja, és maga után vonja azt, hogy egy ilyen automata működése — esetleg véges hosszúságú „elő-periódus" után — ugyanazon periódus végtelen sokszori ismétlődéséből áll[1] (l. [13], 6. fejezet).

A [10] dolgozat egy további alkalmazási lehetőséget tárgyal.

2. §

Az 1. tétel elegendőségi állítása nyilvánvalóan helyes. A feltételek szükséges voltát elsőként Oystein Ore igazolta [8] dolgozatában (ennek anyaga a [9] könyv 4. 4 szakaszában is szerepel), a tételt tőle függetlenül Frank Harary [6] is felfedezte.

Az 1. tétel szükségességi állítását e paragrafusban több változatban bizonyítjuk. Az (A) részben (lényegileg Ore és Harary közös módszere alapján) (4)-et igazoljuk. (B)-ben nagyjából Ore eljárásával[2] mutatjuk ki (5)-öt, (C)-ben Harary gon-

[1] Ezt a tényt precízebben így fogalmazhatjuk: az automata bármely a állapotához van két A_1, A_2 véges állapot-sorozat úgy, hogy azokat az állapotokat, amelyeken az automata a-ból kiindulva átfut, az $A_1 A_2^{\infty}$ kifejezéssel előállított végtelen állapot-sorozat jellemzi.

[2] Ore eredeti gondolatmenetének egy lépése nem helytálló, ugyanis a $\tau^i(P) = \tau^j(Q)$ egyenlőségből $\tau^{mi}(P) = \tau^{mj}(Q)$ érvényességére következtet. Tévedését azonban könnyű kiigazítani.

dolatmenetével, (D)-ben pedig egy további, indirekt módon. Végül az (E) szakaszban (3) érvényességét bizonyítjuk (Ore és Harary módszere itt újra hasonló). *A tételben foglalt szükségességi állításnak tehát mind* (A)&(B)&(E), *mind* (A)&(C)&(E), *mind* (A)&(D)&(E) *bizonyítását képezi.* (A (C) rész rövidebb, mint akár (B), akár (D), de több előismeretet feltételez.)

(A) Legyen a K kör a G gráf G^* összefüggő komponensében. Legyen $\overrightarrow{PQ}$ tetszőleges éle K-nak; menjünk végig K-n Q-ból kiindulva, az első lépésben P felé tartva egészen addig, amíg újra Q-ba jutunk. A külső fokszám azonosan 1 voltát, minden lépésben tekintetbe véve azt kapjuk, hogy K minden élén annak irányításával ellentétesen haladtunk át, emiatt K ciklus.

(B) Tetszőlegesen P ponton jelöljük $\tau(P)$-vel azt a(z egyértelműen meghatározott) pontot, amelybe a P-ből kiinduló egyetlen él befut.

A
$$\tau(\tau(P)),\quad \tau(\tau(\tau(P))),\ \ldots$$
jelölések helyett $\tau^2(P)$-t, $\tau^3(P)$-t, ... is írunk. $\tau^0(P)$ magát P-t jelenti. Ha két P, Q pontra és alkalmas i, j számokra $\tau^i(P)=\tau^j(Q)$, akkor bármely k természetes számra $\tau^{i+k}(P)=\tau^{j+k}(Q)$ is teljesül. Ha P benne van egy K ciklusban, akkor K valamennyi $\tau^i(P)$ pontot tartalmazza.

Bármely P pontra a
$$P, \tau(P), \tau^2(P), \tau^3(P), \ldots$$
sorozat a gráf végessége folytán véges sok különböző pontból áll. Van tehát olyan legkisebb j szám, hogy alkalmas (egyetlen) i-re $0\leqq i<j$ és $\tau^i(P)=\tau^j(P)$ igaz. A
$$\tau^i(P), \tau^{i+1}(P), \tau^{i+2}(P), \ldots, \tau^{j-1}(P)$$
pontok ciklust alkotnak, ennélfogva *egy funkcionális gráf bármely összefüggő komponensében van (legalább egy) ciklus.*

Ha a P, Q pontokhoz vannak olyan i, j számok, hogy $\tau^i(P)=\tau^j(Q)$, akkor világos, hogy P és Q a gráf ugyanazon összefüggő komponensében fekszenek. Be fogjuk látni, hogy ennek az állításnak a megfordítása is igaz. Ha P, Q közös komponensben vannak, akkor létezik őket összekötő út, legyenek egy ilyen út pontjai
$$P=P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n=Q.$$
Indukciót alkalmazunk n szerint. Az $n=0$ esetben
$$\tau^0(P)=P=Q=\tau^0(Q).$$
Tegyük fel, hogy $n>0$ és alkalmas i, j számokra $\tau^i(P)=\tau^j(P_{n-1})$. Ha a P_{n-1} és Q közötti él P_{n-1} felé irányul, akkor $\tau^i(P)=\tau^{j+1}(Q)$. Ha ez az él Q felé irányul, úgy indirekt módon belátható, hogy minden k indexre (ahol $1\leqq k<n$) a P_{k-1} és P_k közötti él P_k felé van irányítva (ugyanis a maximális olyan k indexet tekintve, hogy $\overrightarrow{P_kP_{k-1}}$ létezik, ellentmondás adódna a gráf funkcionális voltával), tehát $\tau^{n-1}(P)=P_{n-1}$ és így $\tau^n(P)=Q$. Azt nyertük, hogy *ha egy funkcionális gráf két P, Q pontja ugyanabban az összefüggő komponensben van, akkor alkalmas i, j számokra* $\tau^i(P)=\tau^j(Q)$ érvényes.

Tegyük fel, hogy egy G^* összefüggő komponens két K_1, K_2 ciklust tartalmaz. Jelöljük K_2 hosszát m-mel. Vannak (esetleg K_1, K_2 számozását felcserélve) olyan P, Q pontok, hogy P K_1-ben és Q K_2-ben fekszik, de Q nincs benne K_1-ben. Alkalmas i-re és j-re $\tau^i(P)=\tau^j(Q)$ teljesül. Legyen t a legkisebb olyan szám, hogy $tm\geqq j$. Igaz a
$$\tau^{i+(tm-j)}(P) = \tau^{j+(tm-j)}(Q) = \tau^{tm}(Q) = Q$$

levezetés, tehát K_1 tartalmazza Q-t, ami ellentmondás. Ennélfogva *egy funkcionális gráf bármely összefüggő komponensében legfeljebb egy ciklus van.*

(C) Tekintsünk egy G^* összefüggő komponenst, jelöljük G^* pontjainak számát l-lel. Válasszunk ki G^*-ban egy olyan T részfát, amely G^* minden pontját tartalmazza. T éleinek száma $l-1$.

Rendeljük hozzá G^* minden egyes P pontjához a P-ből kiinduló élt. Ezzel — minthogy G^*-ban a külső fokszám azonosan 1 — kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesítettünk G^* pontjai és élei között, tehát G^*-nak l éle van. Ezek szerint G^* egyetlen él hozzávételével áll elő a T fából, és így G^* pontosan egy kört tartalmaz. (A) értelmében ez a kör ciklus.

(D) Tegyük fel, hogy a G^* összefüggő komponens ciklusainak száma különbözik 1-től, célunk minden lehetséges esetben ellentmondáshoz jutni. (A három eset közül a két későbbi átfedheti egymást.)

1. eset: G^*-ban nincs ciklus. Ekkor G^* egy leghosszabb pályájának P végpontjára $d_k(P)=0$, ami ellentmondás.

2. eset: G^*-ben van két olyan K_1, K_2 ciklus, amelyeknek nincs közös pontjuk. Minthogy G^* összefüggő, létezik olyan út, hogy annak

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \qquad (k \geqq 2)$$

pontjai közül P_1 K_1-ben, P_k K_2-ben van, de a $P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$ pontokon sem K_1, sem K_2 nem megy át. Legyen i a legkisebb olyan index, hogy a P_i és P_{i+1} közötti él P_{i+1} felé irányul (ahol $1 \leqq i \leqq k-1$; az is lehetséges, hogy nincs ilyen index). Ha $i=1$, úgy $d_k(P_1) \geqq 2$ (a $\overrightarrow{P_1P_2}$ élt és K_1-nek P_1-ből kifutó élét figyelembe véve); ha $2 \leqq i \leqq k-1$, akkor $d_k(P_i) \geqq 2$ (tekintettel a $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ és $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ élekre); ha pedig i nem létezik, úgy $d_k(P_k) \geqq 2$ adódik (a $\overrightarrow{P_kP_{k-1}}$ élt és K_2-nek a P_k-ból kifutó élét vizsgálva).

3. eset: G^*-ban létezik két olyan K_1, K_2 ciklus, hogy azoknak van közös pontjuk. Tetszőleges P közös pontból a két ciklus mentén „előre" haladva található olyan Q pont, hogy Q-ból K_1 más élen megy tovább, mint K_2 (ilyen Q hiányában a két ciklus ugyanaz volna); ekkor $d_k(Q) \geqq 2$.

(E) Tekintsük a G^* összefüggő komponensben a K cikluson kívüli valamely e élt. Vegyük azt az (egyetlen) utat, amelynek első éle e, utolsó pontja K-ban fekszik, és egy éle sincs K-ban. Hívjuk ennek az útnak a hosszát e magasságának. A magasság szerinti indukcióval könnyű belátni, hogy e azon végpontja felé irányul, amely K-hoz közelebb van.

II. FIDRICH TÉTELE AZ IRÁNYÍTOTT GRÁFOK PONTJAINAK SZÁMOZÁSÁRÓL

3. §

E fejezetben is irányított véges gráfokat vizsgálunk. Kizárjuk a hurkokat, de megengedjük (akár megegyezően, akár ellentétesen irányított) párhuzamos élek fellépését.

Legyen $e=\overrightarrow{AB}$ a G gráf éleinek egyike. Ha e-t töröljük és helyette hozzávesszük a gráfhoz a $\overrightarrow{BA}$ élt (ugyanazon pontpár között), úgy azt mondjuk, hogy e-t *megfordítottuk*. Több él egyidejű megfordítását a definíció természetes kiterjesztésével értelmezhetjük.

Legyen a G gráf pontjainak száma n. Ha G pontjaihoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendeljük az első n természetes számot, akkor G egy *számozásáról*

beszélünk. Az A pont számát $\alpha(A)$-val jelöljük. Az $e=\overrightarrow{AB}$ élt *reguláris*nak nevezzük az α számozásra vonatkozóan, ha $\alpha(A)<\alpha(B)$, és e *irreguláris* az $\alpha(A)>\alpha(B)$ esetben. Regulárisnak mondunk egy α számozást, ha minden él reguláris α-ra nézve (ez csak ciklusmentes gráfban lehetséges).

2/a. TÉTEL [2]. *Jelöljük a G gráf ciklusainak számát $\gamma(G)$-vel $(\gamma(G)\geqq 0)$. Léteznek G-ben olyan $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek, hogy $k\leqq\gamma(G)$, továbbá ha az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ éleket (és csak ezeket) megfordítjuk, úgy ciklusmentes gráfot kapunk.*

2/b. TÉTEL [3]. *Bármely G gráfnak létezik olyan számozása, hogy az irreguláris élek száma nem nagyobb G ciklusainak $\gamma(G)$ számánál.*

E paragrafus további részében (egy segédtételt felhasználva) a két tétel ekvivalens voltát igazoljuk, és egy nyílt problémát mondunk ki. A tételek bizonyítását a 4. §-ban végezzük el.

A 2/b. tétel az ún. tömegkiszolgálási elméletben nyer alkalmazást.

SEGÉDTÉTEL. *Ha a G gráf ciklusmentes, akkor G számozható reguláris módon.*

Bizonyítás. Mivel G ciklusmentes, ellentétesen irányított párhuzamos élek nem léphetnek fel G-ben. Az általánosság lényeges megszorítása nélkül kizárhatjuk a megegyező irányítású párhuzamos élek előfordulását is.

Egészítsük ki G-t irányított ciklusmentes teljes gráffá. Ez mindig elvégezhető, éspedig úgy történhet (v. ö. [12]), hogy a következő kétféle lépést alkalmazzuk, amíg csak lehetséges:

(α) valahányszor az $\overrightarrow{AB}$ él nincs meg a gráfban, de van A-ból B-be vivő pálya, úgy vegyük hozzá a gráfhoz az $\overrightarrow{AB}$ élt,

(β) ha az (α) lépés egy pontpárra sem alkalmazható, akkor válasszunk két, élel összekötetlen pontot, és kössük össze azokat (tetszőleges irányítású) éllel.

Ha az előálló ciklusmentes teljes gráf valamennyi A pontjához hozzárendeljük a $d_b(A)+1(=n-d_k(A))$ számot, úgy reguláris számozást kapunk (l. pl. [11], 1. §).

Rátérünk az ekvivalencia kimutatására. Tegyük fel, hogy érvényes a 2/a. tétel. Induljunk ki tetszőleges G gráfból, alakítsuk át a 2/a. tétel értelmében ciklusmentes gráffá, és számozzuk meg a kapott gráfot a segédtétel szerint. Az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek visszafordításával G-nek olyan számozását kapjuk, amely eleget tesz a 2/b. tételnek. — Ha tetszőleges G gráfban megfordítjuk azokat az éleket, amelyek a 2/b. tétel szerinti számozásban irregulárisak, úgy nyilván teljesülnek a 2/a. tétel állításai.

Az alábbi sejtés mindeddig eldöntetlen:

Sejtés [1], [2]. Ha a G gráfban van ciklus, úgy G-nek van olyan e éle, hogy az e megfordításával előálló gráfban kevesebb ciklus van, mint G-ben.

4. §

A 2/a. és 2/b. tételekre a következőkben három bizonyítást látunk. Az I. bizonyítás Fidrich Ilona [3] eredeti gondolatmenetét követi, a II. bizonyítás a [2] cikkben található, a III.-at Gallai Tibor adta.[3]

I. bizonyítás. Mindenekelőtt néhány fogalmat definiálunk. Ha egy G gráf minden egyes A pontjához hozzárendelünk egy $w(A)$ természetes számot, úgy G egy *súlyozás*áról beszélünk; a $w(A)$ értéket A *súly*ának, ezen értékek összegét a

[3] Személyes közlés; rokon meggondolások szerepelnek a [4] dolgozatban.

G gráf $w(G)$ *összsúlyának* mondjuk. (Nem tettünk megszorítást a tekintetbe jöhető súlyokra. Megengedjük, hogy különböző pontok ugyanazt a súlyt kapják.) Ha minden pont súlya 1, úgy *triviális* súlyozásról beszélünk. A w súlyozással ellátott G gráfot (G, w)-vel is jelöljük.

Legyen (G, w) súlyozott gráf. Ha G minden egyes A pontjához hozzárendelünk egy $\mathfrak{A}(A)$ számhalmazt, és kielégül az alábbi két feltétel, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ (G, w)-nek egy *általánosított számozása:*

(1) az $\mathfrak{A}(A)$ számhalmazok egyesítése az $\{1, 2, \ldots, w(G)\}$ halmaz,

(2) ha valamely A-ra az $\mathfrak{A}(A)$ halmaz legkisebb elemét t-vel jelöljük, úgy

$$\mathfrak{A}(A) = \{t, t+1, t+2, t+3, \ldots, t+w(A)-1\}.$$

Világos, hogy az $\mathfrak{A}(A)$ halmazok idegenek egymástól. Ha a súlyozás triviális, úgy az általánosított számozás (lényegében véve) közönséges számozássá egyszerűsödik. Ha egy $e=\overrightarrow{AB}$ élre az $\mathfrak{A}(A)$ halmaz kisebb számokat tartalmaz, mint $\mathfrak{A}(B)$, úgy e-t reguláris élnek nevezzük ($\mathfrak{A}$-ra nézve), az ellenkező esetben irreguláris élnek.

Rátérünk a bizonyítás végrehajtására. A G gráfból kiindulva szerkesszük meg súlyozott gráfoknak egy

$$(G_1, w_1), (G_2, w_2), \ldots, (G_m, w_m)$$

sorozatát a következő előírások szerint:

(a) $G_1=G$ és w_1 a triviális súlyozás.

(b) Tegyük fel, hogy (G_i, w_i)-t már meghatároztuk, és a G_i gráfban van ciklus. Válasszuk ki G_i tetszőleges K ciklusát, legyenek ennek pontjai rendre

$$A_1, A_2, \ldots, A_q.$$

(Lényeges lesz, hol kezdtük a felsorolást.) Legyen G_{i+1} az a gráf, amelyet K-nak egyetlen A_K ponttá való összevonásával kapunk (vagyis úgy, hogy K pontjait töröljük; ugyancsak töröljük azokat az éleket, amelyeknek mindkét végpontja K-beli pont; bevezetünk egy új A_K pontot; G_i azon éleit, amelyeknek egyik végpontja valamely A_j pont $(1 \leqq j \leqq q)$, most — irányítását megtartva — A_j helyett A_K-hoz illesztjük), értelmezzük w_{i+1}-et úgy, hogy

$$w_{i+1}(A_K) = w_i(A_1) + w_i(A_2) + \cdots + w_i(A_q),$$

és G_{i+1} többi pontjaira $w_{i+1}(A)=w_i(A)$.

(c) Tegyük fel, hogy (G_i, w_i)-t már meghatároztuk, és G_i ciklusmentes gráf. Ekkor nem folytatjuk a sorozatot, vagyis $(G_m, w_m)=(G_i, w_i)$.

A leírt konstrukcióból az következik, hogy bármely $w_i(G_i)$ összsúly G pontjainak számával egyenlő, továbbá hogy

$$\gamma(G_i) \geqq \gamma(G_{i+1}) + s_i + s_i^*$$

ahol s_i-vel jelöltük az A_q-ból A_1-be futó élek számát (G_i-ben), és s_i^*-gal azon (G_i-beli) élekét, amelyek két K-ban fekvő pontot kötnek össze, de nincsenek a K ciklusban és nem A_q-ból A_1-be vezetnek. (Az egyenlőtlenség azért igaz, mert egyrészt minden G_{i+1}-beli K' ciklushoz természetes módon hozzárendelhetünk egy G_i-beli K^* ciklust úgy, hogy amennyiben K' átmegy A_K-n, akkor K^* fusson végig A_K helyett K alkalmas részén; másrészt az említett $s_i+s_i^*$ számú él mindegyike kiegészíthető ciklussá alkalmas K-beli élekkel. Világos, hogy a kapott G_i-beli ciklusok különbözőek.)

Mivel G_m ciklusmentes gráf, a segédtétel miatt létezik egy α_m reguláris számozása.

Vezessük be a

$$(G_m, w_m), (G_{m-1}, w_{m-1}), \ldots, (G_2, w_2), (G_1, w_1)$$

súlyozott gráfoknak (ebben a sorrendben) rendre az

$$\mathfrak{A}_m, \mathfrak{A}_{m-1}, \ldots, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1$$

általánosított számozásait a következő módon:

(a) a G_m-beli pontokhoz úgy rendelünk számhalmazokat, hogy $|\mathfrak{A}_m(A)| = w_m(A)$ minden A-ra teljesüljön, és az $\mathfrak{A}_m(A)$-beli számok pontosan akkor legyenek kisebbek az $\mathfrak{A}_m(B)$-beli számoknál, ha $\alpha_m(A) < \alpha_m(B)$,

(b) tegyük fel, hogy (G_{i+1}, w_{i+1})-nek már meghatároztuk az $\mathfrak{A}_{i+1}$ általánosított számozását, és G_{i+1} G_i-ből az $A_1, A_2, \ldots, A_q$ pontokat tartalmazó K ciklus A_K-vá való összevonásával adódott; jelölje t az $\mathfrak{A}_{i+1}(A_K)$ halmaz legkisebb elemét; legyen ekkor

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i(A_1) &= \{t, t+1, t+2, \ldots, t+w_i(A_1)-1\},\\
\mathfrak{A}_i(A_2) &= \{t+w_i(A_1), t+w_i(A_1)+1, t+w_i(A_1)+2, \ldots,\\
&\qquad t+w_i(A_1)+w_i(A_2)-1\},\\
\mathfrak{A}_i(A_3) &= \{t+w_i(A_1)+w_i(A_2), \ldots, t+w_i(A_1)+w_i(A_2)+w_i(A_3)-1\},\\
&\ldots\\
\mathfrak{A}_i(A_q) &= \{t+w_{i+1}(A_K)-w_i(A_q), \ldots, t+w_{i+1}(A_K)-1\},
\end{aligned}$$

és $\mathfrak{A}_i(A) = \mathfrak{A}_{i+1}(A)$ a G_i gráf egyéb pontjaira.

Nyilvánvaló, hogy minden (G_i, w_i) súlyozott gráfnak egy $\mathfrak{A}_i$ általánosított számozását kaptuk. (G_m, w_m)-nek nincs irreguláris éle; a konstrukció egy-egy lépésében legfeljebb $s_i + s_i^*$ számú újabb irreguláris él lép fel, míg — mint láttuk — a ciklusok száma legalább $(s_i + s_i^*)$-gal emelkedik lépésenkint. Ebből következik, hogy a (triviális w_1 súlyozású) G_1 gráf kapott számozása kielégíti a 2/b. tételt.

II. bizonyítás. Tekintsük a G gráfban azt a kétváltozós relációt, amely akkor igaz az A, B pontokra, ha mind A-ból B, mind B-ből A elérhető egy-egy alkalmas pályán. Ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív; jelöljük C-vel G pontjainak a relációhoz tartozó osztályozását. Bármely K ciklus pontjai ugyanabban a C szerinti osztályban vannak. Egy $\overrightarrow{AB}$ élt akkor és csak akkor lehet ciklussá kiegészíteni, ha A és B közös osztályban vannak C szerint. A gráfban pontosan akkor nincs ciklus, ha a C szerinti osztályok mind egyeleműek.

Azt fogjuk igazolni a gráf éleinek n száma szerinti indukcióval, hogy vannak olyan $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek, amelyek mindegyike kiegészíthető ciklussá, és amelyek eleget tesznek a 2/a. tétel állításának. Ha $n=2$, úgy az igazolandó állítás nyilván érvényes. Tegyük fel, hogy $n \geqq 3$. Hagyjuk ki a G gráfból a (tetszőlegesen választott) $e = \overrightarrow{AB}$ élt, jelöljük a megmaradó gráfot G'-vel. Az indukciós feltevés miatt vannak olyan $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G'-ben, amelyek teljesítik a 2/a. tételben foglalt állításokat, és amelyek mindegyike kiegészíthető ciklussá. Célunk belátni, hogy az

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}, \quad \{e, e_1, e_2, \ldots, e_k\}$$

élhalmazok egyike kielégíti G-ben a tétel állításait, mégpedig akkor, ha e nem egészíthető ki ciklussá, az előbbi élhalmaz mindig megfelel. Jelöljük $\bar{G}'$-vel, ill. $\bar{G}$-sal a G'-ből ill. G-ből $e_1, e_2, \ldots, e_k$ megfordításával előálló gráfot.

1. eset: e nem egészíthető ki ciklussá (G-ben). G'-ben nincs B-ből A-ba vivő pálya, tehát a (G'-ben értelmezett) C osztályozás szerint A és B különböző osztályokban vannak. Tekintsünk tetszőleges G'-beli utat, amely B-ből A-ba visz (ha egyáltalán van ilyen út), legyenek az út élei rendre

$$\overline{D_1D_2},\ \overline{D_2D_3},\ \ldots,\ \overline{D_{q-1}D_q} \quad (D_1=B,\ D_q=A).$$

Van az élek között olyan $\overline{D_iD_{i+1}}$ él, hogy D_i és D_{i+1} különböző osztályokba esnek C szerint, továbbá az ilyen élek legalább egyike $\overrightarrow{D_{i+1}D_i}$ irányítású (ha ugyanis mindegyikük $\overrightarrow{D_iD_{i+1}}$ irányítású volna, úgy létezne B-ből A-ba menő pálya). — Az e_1, e_2, ..., e_k élekre nyilván igaz $k \leqq \gamma(G)$, és ezek mindegyike kiegészíthető ciklussá G-ben (a G'-beli analóg állítások folytán). Előző meggondolásainkból következik, hogy a $\bar{G}'$ gráfban nincs B-ből A-ba menő pálya, ennélfogva a $\bar{G}$ gráf ciklusmentes.

2. eset: G-ben $r(>0)$ számú olyan ciklus van, amelyek átmennek e-n. $\bar{G}$ ciklusai mind tartalmazzák e-t, azaz $\bar{G}$-ben pontosan akkor van ciklus, ha $\bar{G}'$-ben létezik B-ből A-ba futó pálya. Két lehetőséget különböztethetünk meg: ha $\bar{G}'$-ben nincs B-ből A-ba menő pálya, úgy $e_1, e_2, \ldots, e_k$ a G gráfban is teljesítik a bizonyítandó állításokat (nemcsak G'-ben), ha pedig van B-ből A-ba vivő pálya, úgy nincs ($\bar{G}'$-ben) A-ból B-be futó pálya (ha volna, zárt élsorozatot tudnánk konstruálni, és ismeretes, hogy zárt élsorozatból mindig kiválasztható ciklus; ellentmondásban azzal, hogy $\bar{G}'$ ciklusmentes), ennélfogva az $e, e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek megfelelnek a kívánalmaknak, ezek $k+1$ száma nem lehet nagyobb, mint $\gamma(G')+r = \gamma(G)$.

III. bizonyítás. Legyen H olyan élhalmaz a G gráfban, hogy

(α) G bármely ciklusa átmegy legalább egy H-beli élen, és

(β) H valódi részhalmazainak egyike sem elégíti ki az (α) állítást.

A (β) követelmény folytán minden $e(\in H)$ élhez van olyan K_e ciklus, hogy K_e nem megy át a $H-\{e\}$ élhalmaz egy elemén sem (csak e-n); minthogy a K_e ciklusok különbözőek, H elemeinek száma legfeljebb $\gamma(G)$ lehet.

Fordítsuk meg a H-beli élek irányítását, jelöljük a G-ből így előálló gráfot G^*-gal. Tegyük fel, hogy G^*-ban van ciklus, e feltevésből kiindulva ellentmondást akarunk kapni. Világos, hogy G^* bármely ciklusa átmegy legalább egy H-beli e élen (pontosabban: annak megfordításán). Legyen K tetszőleges ciklus G^*-ban, tekintsük mindazokat az $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}$ éleket K-ban, amelyek H-ba tartoznak. Módosítsuk K-t úgy, hogy az $e^{(i)}$ élek mindegyike helyett $(1 \leqq i \leqq m)$ a $K_{e^{(i)}}$ ciklusnak $e^{(i)}$ kihagyásával előálló részén futunk át. Ezzel H-tól idegen zárt élsorozatot kaptunk G^*-ban, ebből pedig kiválasztható ciklus. Az így nyert ciklus H-tól ugyancsak idegen, ami ellentmondás. G^* tehát ciklusmentes, így $H=\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ eleget tesz a 2/a. tételben szereplő állításnak.

Megjegyzés. E fejezetben olyan tulajdonságú élhalmazokat vizsgáltunk, hogy a halmaz éleinek *megfordítása* szünteti meg a gráf ciklusait. Rokon probléma olyan élek halmazaival foglalkozni, hogy a halmaz éleinek *törlésével* szüntethetőek meg a ciklusok. Nyilvánvaló, hogy ha egy élhalmaz megfordítással ciklus-megszüntető, akkor törléssel ciklus-megszüntető tulajdonságú is. Az a tény is ismeretes, hogy *a törléssel ciklus-megszüntető minimális élhalmazok egybeesnek a megfordítással ciklus-megszüntető minimális élhalmazokkal* (l. [15], 38. §, 2. tétel; valamint [4]).

III. KLEENE TÉTELE AZ ADOTT PONTOK KÖZÖTTI ÉLSOROZATOK JELLEMZÉSÉRŐL

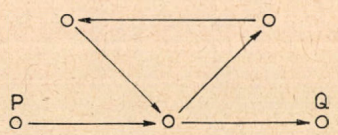
5. §

A tételt, amely köré a jelen fejezet épül, Kleene *automataelméleti* állításként mondta ki. Mivel a tételnek lényeges tartalma *gráfelméleti* jellegű, az alábbiakban ilyen beállításban tárgyaljuk, és az automatákkal való kapcsolatra csak befejezésül térünk rá.

Ebben a fejezetben olyan irányított véges gráfokat tekintünk, amelyekben egy P pontból ugyanazon gráf valamely Q pontjába (és viszont) egynél több él is vezethet (akár $P=Q$, akár $P\neq Q$). Egy

$$P_0, e_1, P_1, e_2, P_2, e_3, \ldots, P_{k-1}, e_k, P_k \qquad (k\geqq 0) \tag{5. 1)}$$

véges sorozatot (amelyben felváltva lépnek fel pontok és élek) *élsorozat*nak nevezünk, ha minden egyes e_i él $(1\leqq i\leqq k)$ a P_{i-1} pontból a P_i pontba fut. Az (5. 1)-ben szereplő élek nem feltétlenül különbözőek (tehát a szereplő pontok sem). Azt mondjuk, hogy az (5. 1) élsorozatnak P_0 a kezdőpontja és P_k a végpontja. Az élsorozat hosszán élei k számát értjük. Jelöljük $H(P, Q)$-val az összes olyan élsorozatok halmazát, amelyeknek P a kezdőpontja és Q a végpontja.



1. ábra

Noha véges gráfokra szorítkozunk, megtörténhet, hogy a $H(P, Q)$ halmaz végtelen. Az 1. ábra gráfján minden olyan k számhoz, amelyre $k\equiv 2 \pmod 3$, létezik (pontosan) egy $H(P, Q)$-ba tartozó k hosszúságú élsorozat.

Legyen Π és Ω a G gráf pontjai halmazának két nem-üres részhalmaza (esetleg $\Pi=\Omega$). Ekkor (lényegileg a $H(P, Q)$ jelölést kiterjesztve) $H(\Pi, \Omega)$-val jelöljük az összes olyan $H(P, Q)$ halmazok egyesítését, amelyekre $P\in\Pi$ és $Q\in\Omega$ (vagyis a Π valamely pontjából kiinduló, Ω valamely pontjába vezető élsorozatok halmazát.) A mondottakból világos a $H(P, \Omega)$, $H(\Pi, Q)$ formulák jelentése is.

E fejezetben az a célunk, hogy formális kifejezések egy olyan osztályát értelmezzük, amely alkalmas a $H(P, Q)$ (és általánosabban a $H(\Pi, \Omega)$) típusú élsorozathalmazok) jellemzésére.

6. §

Tekintsük (egymástól különböző) szimbólumoknak egy

$$X=\langle x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\rangle$$

véges halmazát.[4] X elemeit *betű*knek is nevezzük; (X fölötti) *szava*knak hívjuk az

$$x_1 x_2 \ldots x_k \qquad (k\geqq 0)$$

alakú véges sorozatokat, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mindegyike betű (nem feltétlenül különbözőek). A szó *hosszán* a k számot értjük. Két a, b szó szorzatán azt a szót értjük, amelyben először a betűi, majd b betűi következnek (az a-beli, illetve b-beli sorrendben). *Eseménynek* (X fölötti) szavak egy (véges vagy végtelen) halmazát hívjuk.

Legközelebbi feladatunk rekurzióval (formálisan) bevezetni az X fölötti regu-

[4] A halmaz-képzésre leginkább használt {, } típusú zárójeleket más célra tartjuk fenn.

láris kifejezéseket, és minden reguláris kifejezést egy (X fölötti) eseményként interpretálni.

Definíció. (1) Az üres (vagyis 0 hosszúságú) szót jelölő ε jel reguláris kifejezés.
(2) Tetszőleges betű reguláris kifejezés.
(3) Ha S_1 és S_2 reguláris kifejezések, akkor $S_1 \cup S_2$ is reguláris kifejezés.
(4) Ha S reguláris kifejezés, akkor $\{S\}$ is reguláris kifejezés.[5]

(5) Ha S_1 és S_2 reguláris kifejezések, akkor $(S_1)\cdot(S_2)$ is reguláris kifejezés. Az S_i-t körülvevő zárójel-párat csak akkor írjuk ki, ha S_i a (3) szabály alkalmazásával állt elő (ahol $i=1$ vagy $i=2$). A szorzást jelölő pontot el is hagyhatjuk.
(6) Csak azok a kifejezések regulárisak, amelyek a definíció (1)—(5) szabályainak véges sokszori alkalmazásával annak bizonyulnak. Az üres kifejezést (amely 0-szori alkalmazással áll elő) is regulárisnak tekintjük.

Interpretáció.[6,7] (a) Jelentse az ε reguláris kifejezés az üres szóból álló (egy elemű) halmazt.

(b) Jelentse $x^{(i)}$ (ahol $1 \leqq i \leqq n$) az $x^{(i)}$ betűből (mint 1 hosszúságú szóból) álló (egy elemű) halmazt.
(c) Ha az S_1, S_2 reguláris kifejezések jelentését ismerjük, úgy jelentse $S_1 \cup S_2$ az S_1 és S_2 által kifejezett események egyesítési halmazát.
(d) Ha az S reguláris kifejezés jelentését ismerjük, úgy jelentse $\{S\}$ az $a_1 a_2 \ldots a_t$ alakban írható összes szavak halmazát, ahol t tetszőleges nemnegatív egész szám lehet, és $a_1, a_2, \ldots, a_t$ az S eseménybe tartozó szavak.
(e) Ha az S_1, S_2 reguláris kifejezések jelentését ismerjük, úgy jelentse $(S_1)\cdot(S_2)$ az ab alakban írható összes szavak halmazát, ahol $a \in S_1$ és $b \in S_2$.
(f) Az üres kifejezés az üres eseményt jelentse (amely esemény egyetlen szót sem tartalmaz, az üres szót sem).
*Definíció. Reguláris*nak nevezünk egy eseményt, ha van (legalább egy) olyan reguláris kifejezés, amely a szóban forgó eseményt jelenti.

Az (1) szabályból, illetve a (2), (5) szabályokból rögtön következik minden olyan esemény reguláris volta, amely egyetlen szóból áll. A (3) szabály folytán tehát bármely véges esemény reguláris.
Mivel $t=0$ megengedett, minden $\{S\}$ iterált tartalmazza az üres szót. Minthogy t nem korlátos, $\{S\}$ vagy csupán az üres szóból áll, vagy végtelen halmaz (aszerint, hogy S csak az üres szóból áll, vagy tartalmaz nem-üres szót).

7. §

Legyen G irányított véges gráf, jelöljük μ-vel G élei halmazának az X betűhalmazra való bármely leképezését. Legyen $\bar{\mu}$ az a leképezés, amely az (5. 1) élsorozathoz a

$$\mu(e_1)\,\mu(e_2)\ldots\mu(e_k)$$

szót rendeli. Ha pedig H élsorozatok valamely halmaza, úgy jelöljük $\bar{\bar{\mu}}(H)$-val azt az eseményt, amely (pontosan) a $\bar{\mu}(f)$ szavakból áll, ahol f végigfut H elemein.

[5] Az $\{S\}$ kifejezést S iteráltjának mondjuk. A szerzők némelyike $\{S\}$ helyett S^*-ot ír.
[6] A következőkben azon, hogy egy kifejezés egy eseményt jelent, jellemez, kifejez ill. előállít, ugyanazt értjük.
[7] Szigorúan formális szemszögből nézve különbséget kellene tennünk egy reguláris kifejezés (mint szimbólumok sorozata) és az általa jellemzett esemény között. E megkülönböztetést az egyszerűség kedvéért mellőzni fogjuk.

μ általában több-egyértelmű leképezés. Ha egy-egyértelmű, úgy lényegében véve arról van szó, hogy megjelöljük az éleket. Ha μ nem egy-egyértelmű, ugy (az összes élsorozatokat tekintve) $\bar{\mu}$ sem az; előfordulhat továbá, hogy $\bar{\mu}(f)=\bar{\mu}(g)$, $f \in H$ miatt $\bar{\mu}(g)$ benne van a $\bar{\mu}(H)$ eseményben, holott esetleg $g \notin H$. A $\bar{\mu}, \bar{\bar{\mu}}$ hozzárendelések (pontos) értékkészlete általában nem meríti ki az összes szavak, illetve az összes események halmazát.

Az események között bevezetett háromféle művelet (az egyesítés, iteráció és szorzás) analógiában áll az élsorozatokra vonatkozó bizonyos műveletekkel; ez az analógia a következő — könnyen belátható — tényekben mutatkozik meg.[8] Ha H_1 és H_2 élsorozatokból álló két halmaz, akkor $\bar{\bar{\mu}}(H_1 \cup H_2)=\bar{\bar{\mu}}(H_1) \cup \bar{\bar{\mu}}(H_2)$. Ha egy H halmaz olyan ciklusokból áll, hogy e ciklusok mind átmennek valamely P ponton, de nincs olyan P-től különböző pont, amelyen a H-beli ciklusok közül kettő (vagy több) átmenne, akkor $\bar{\bar{\mu}}(H_1)=\{\bar{\mu}(H)\}$, ahol H_1 az összes olyan, P-ből kiinduló és P-ben végződő élsorozatokból áll, amelyek felbonthatóak H-beli ciklusokra.[9] Ha $H_1=H(\Pi, Q)$ és $H_2=H(Q, \Omega)$ élsorozatokból álló két halmaz, akkor $\bar{\bar{\mu}}(H_3) = \bar{\bar{\mu}}(H_1) \cdot \bar{\bar{\mu}}(H_2)$, ahol H_3 mindazon élsorozatok halmaza, amelyek előállnak úgy, hogy először egy H_1-beli, majd egy H_2-beli élsorozaton futunk végig.

Nagyjából arról van tehát szó, hogy a reguláris kifejezések egyesítése a párhuzamos kapcsolásnak, a szorzás a soros kapcsolásnak felel meg; az iteráció pedig azzal függ össze, hogy egy élsorozat akárhányszor végigfuthat egy cikluson.

8. §

Az alábbi eredmény lényegében véve Kleenetől származik ([7], 5. tétel, 34. oldal.)

3. TÉTEL. *Ha a G irányított véges gráfban P és Q tetszőleges pontok, és μ a G gráf él-halmazának az X halmazra való valamely leképezése, akkor van olyan (X fölötti) reguláris kifejezés, amely a $\bar{\bar{\mu}}(H(P, Q))$ eseményt állítja elő.*

Bizonyítás. A tételt indukcióval igazoljuk.

Az egy élt tartalmazó gráfokra az állítás egyszerűen belátható. Ha ugyanis P az egyetlen e él kezdőpontja, $Q(\neq P)$ pedig e végpontja, akkor $\bar{\bar{\mu}}(H(P, Q))=x$, ahol $x=\mu(e)$. Ha az egyetlen él a P ponthoz illeszkedő hurok, úgy $\bar{\bar{\mu}}(H(P, P))=\{x\}$. A P és Q pontok minden más megválasztása mellett[10] pedig $\bar{\bar{\mu}}(H(P, Q))$ az üres szó vagy az üres halmaz, amelyet — mint tudjuk — ε, ill. az üres reguláris kifejezés állít elő (aszerint, hogy $P=Q$, ill. $P \neq Q$).

A bizonyítás hátra levő részében azt igazoljuk, hogy amennyiben a tétel igaz a legfeljebb m élt tartalmazó gráfokra, úgy érvényes az $m+1$ élszámú gráfokban is. Jelöljünk G-vel egy $m+1$ élű gráfot.

1. eset: $P \neq Q$ és Q belső fokszáma pozitív. Legyenek $V_1, V_2, \ldots, V_v$ a Q-tól különböző azon pontok, amelyekből él megy Q-ba; legyenek $W_1, W_2, \ldots, W_w$ a Q-tól különböző azon pontok, amelyekbe Q-ból él fut. (A V-k némelyike megegyezhet egy-egy W-vel.) Töröljük Q-t és a hozzá illeszkedő éleket, jelöljük a megmaradó gráfot G'-vel. G' éleinek száma legfeljebb m.

Ha V és W a G gráf két pontja ($V=W$ megengedett), akkor jelöljük $\mathfrak{R}_{V,W}$-vel az összes olyan $\mu(e)$ szimbólumok egyesítéseként előálló reguláris kifejezést, hogy e a V pontból W-be futó él. Ha V és W a G' gráf két pontja, úgy legyen $\mathfrak{S}_{V,W}$ egy olyan (az indukciós feltevés miatt létező) reguláris kifejezés, amely a $\bar{\bar{\mu}}(H(V, W))$ eseményt állítja elő a G' gráfra vonatkozóan.

[8] A most következő állításokban feltesszük, hogy a formulák jobb oldalán szereplő $\bar{\mu}(H)$, $\bar{\bar{\mu}}(H_1)$, $\bar{\bar{\mu}}(H_2)$ események regulárisak.

[9] A legutóbb kimondott állítást általánosabban is megfogalmazhatnánk (H gyanánt tetszőleges $H(P, P)$ alakú élsorozat-halmazra), azonban H_1-nek az általánosított állításban elég körülményesen körülhatárolható halmaz felelne meg.

[10] Nem tettük fel, hogy összefüggő a gráf; tartalmazhat tehát izolált pontokat is e kezdő- és végpontján kívül.

Tekintsük most az

$$(8.1)\qquad \begin{aligned}&(\mathfrak{S}_{P,V_1}\mathfrak{R}_{V_1,Q}\cup\mathfrak{S}_{P,V_2}\mathfrak{R}_{V_2,Q}\cup\ldots\cup\mathfrak{S}_{P,V_v}\mathfrak{R}_{V_v,Q})\cdot\\&\cdot\{\mathfrak{R}_{Q,Q}\cup\mathfrak{R}_{Q,W_1}\mathfrak{S}_{W_1,V_1}\mathfrak{R}_{V_1,Q}\cup\ldots\cup\mathfrak{R}_{Q,W_w}\mathfrak{S}_{W_w,V_v}\mathfrak{R}_{V_v,Q}\}\end{aligned}$$

reguláris kifejezést, ahol az első tényező v számú tag egyesítése, az iteráción belül pedig $\mathfrak{R}_{Q,Q}$ után vw számú tag következik, az összes képezhető W_i, V_j ($1\leqq i\leqq w$, $1\leqq j\leqq v$) pároknak megfelelően.

Annak kimutatására törekszünk, hogy a (8. 1) kifejezés a $\bar{\mu}(H(P, Q))$ eseményt állítja elő. Jelöljük $H^*(P, Q)$-val a P-ből Q-ba menő azon élsorozatok halmazát, amelyekben Q csak egyszer (végpontként) szerepel; hasonlóképpen $H^*(Q, Q)$-val a Q-ból Q-ba vivő azon pozitív hosszúságú élsorozatok halmazát, amelyekben Q csupán kétszer (mint kezdőpont és végpont) lép fel. Könnyen beláthatóak a

$$\bar{\mu}(H^*(P, Q)) = \mathfrak{S}_{P,V_1}\mathfrak{R}_{V_1,Q}\cup\mathfrak{S}_{P,V_2}\mathfrak{R}_{V_2,Q}\cup\ldots\cup\mathfrak{S}_{P,V_v}\mathfrak{R}_{V_v,Q}$$

és

$$\bar{\mu}(H^*(Q, Q)) = \mathfrak{R}_{Q,Q}\cup\mathfrak{R}_{Q,W_1}\mathfrak{S}_{W_1,V_1}\mathfrak{R}_{V_1,Q}\cup\ldots\cup\mathfrak{R}_{Q,W_w}\mathfrak{S}_{W_w,V_v}\mathfrak{R}_{V,R}$$

egyenlőségek, ezek jobb oldalán (8. 1) bizonyos részformulái állnak. Tagoljunk szét egy $H(P, Q)$-beli élsorozatot Q előfordulásai szerint (vagyis tekintsük a Q első előfordulásáig terjedő szakaszát, a Q első és második előfordulása közöttit, a Q második és harmadik előfordulása közöttit stb.). Nyilvánvaló, hogy e szakaszok közül az első benne van $H^*(P, Q)$-ban, az összes többi pedig $H^*(Q, Q)$-ban. Az is világos, hogy csak $H(P, Q)$ elemei tagolhatóak szét ilyen módon. Meggondolásaink egybevetése azt mutatja, hogy a (8. 1) formula valóban a $\bar{\mu}(H(P, Q))$ eseményt jellemzi.

2. eset: $P=Q$ és e pont belső fokszáma pozitív. Ekkor a bizonyítás menete az előző esethez hasonló, de egyszerűbb annyiban, hogy elmarad a (8. 1) képlet első tényezője (csak az iterációval képzett részformulára van szükség).

3. eset: $P\neq Q$ és Q belső fokszáma 0. Ekkor $\bar{\mu}(H(P, Q))$ triviálisan az üres esemény.

4. eset: $P=Q$ és e pont belső fokszáma 0. Ekkor evidens, hogy $\bar{\mu}(H(Q, Q))=\varepsilon$.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha Π és Ω tetszőleges ponthalmazok G-ben, akkor van olyan reguláris kifejezés, amely a $\bar{\mu}(H(\Pi, \Omega))$ eseményt jellemzi.*

Bizonyítás. Vegyünk minden P, Q párhoz (ahol $P\in\Pi$, $Q\in\Omega$) egy-egy, a $\bar{\mu}(H(P, Q))$ eseményt előállító reguláris kifejezést; képezzük ennek a véges sok (éspedig $|\Pi|\cdot|\Omega|$ számú) reguláris kifejezésnek az egyesítését. Ezzel a $\bar{\mu}(H(\Pi, \Omega))$ eseményt jelentő kifejezéshez jutunk.

Megjegyzés. Az a reguláris kifejezés, amelyet $\bar{\mu}(H(P, Q))$ előállítására a 3. tétel bizonyítási eljárásának ismételt alkalmazásával kaphatunk, korántsem egyértelműen tartozik az eseményhez; arról sincs szó, hogy módszerünkkel a $\bar{\mu}(H(P, Q))$-t jellemző kifejezések között a legegyszerűbbekhez jutnánk.

9. §

Az előző szakaszban nyert eredmények főként akkor fontosak, ha eleve élsorozatoknak olyan összességét vizsgáljuk, hogy teljesül a μ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű volta. Amint tudjuk, ez a helyzet μ egy-egyértelműségekor. Egy más ilyen speciális eset az automaták esete.

A G gráfot az élein értelmezett μ hozzárendeléssel együtt *kimenő jel nélküli automatának* (a továbbiakban egyszerűen automatának) nevezzük akkor, ha

(1) minden pont külső fokszáma $n=|X|$ és

(2) valahányszor az e_1 és e_2 élek ugyanabból a pontból indulnak ki, úgy $\mu(e_1)\neq\mu(e_2)$.[11]

Amint az automaták elméletében szokásos, pont helyett *állapot*ot is fogunk mondani. (1) és (2) alapján bármely P állapothoz és $x(\in X)$ szimbólumhoz pontosan egy olyan e él van, hogy e P-ből indul ki és $\mu(e)=x$.

Ha a G automatában kitüntetünk egy P_0 állapotot, úgy *iniciális automatáról* beszélünk. Iniciális automatában egy Ω állapot-halmaz által előállított eseményen a $\bar{\bar{\mu}}(H(P_0, \Omega))$ eseményt értjük. A $H(P_0, \Omega)$ halmazon a $\bar{\mu}$ függvény nyilván egy-egyértelmű. Az 1. következmény révén igaz a

2. KÖVETKEZMÉNY. *Tetszőleges véges iniciális automatában bármely Ω állapot-halmaz reguláris eseményt állít elő.*

A 2. következmény azt mondja ki, hogy a reguláris kifejezéssel való jellemezhetőség *szükséges* feltétele az állapothalmazzal való előállíthatóságnak. Kleene bebizonyította, hogy *elégséges* feltétele is ([7], 3. tétel, 28. old.), azaz *minden reguláris esemény megvalósítható alkalmas véges automata valamely állapot-halmazával.*

Kleene eredményei közül e dolgozatban csupán a szükségességi állítással foglalkoztunk, minthogy csak ennél nyílik természetes lehetőség a gráfelméleti általánosságú tárgyalásra. Az automatákkal foglalkozó összefoglaló munkák mind a szükségességi, mind az elegendőségi tételt részletesen tárgyalják, közöttük a magyar nyelvű [5] és [14a] dolgozatok is. Míg a szükségesség bizonyítása mindenütt a fentebb tárgyalt induktív módszerhez hasonlóan történik, az elegendőség igazolására a különböző szerzők változatos automata-konstrukciókat dolgoztak ki.

IRODALOM

[1] ÁDÁM A.: Problem No. 2. *Theory of Graphs and its Applications (Proc. Symp., Smolenice, 1963)* (1964), 157.

[2] ÁDÁM A.: Bemerkungen zum graphentheoretischen Satze von I. Fidrich. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 16 (1965), 9—11.

[3] FIDRICH I. (Фидрих, И.): О перенумерации графов. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 16 (1965), 1—7.

[4] GALLAI T.: On directed paths and circuits. *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, (1966)* (1968), 115—118.

[5] GÉCSEG F. és PEÁK I.: Az automaták algebrai elmélete. *Matematikai Lapok* 17 (1966), 77—134.

[6] HARARY, F.: The number of functional digraphs. *Math. Annalen* 138 (1959), 203—210.

[7] KLEENE, S. C.: Representation of events in nerve nets and finite automata. *Automata Studies* (Princeton, 1956), 3—41.

[7a] Клини, С. К.: Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. *Автоматы* (Москва, 1956), 15—67.

[8] ORE, O.: Graphs and correspondences. *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. A. Speiser* (Zürich, 1945), 184—191.

[9] ORE, O.: *Theory of graphs.* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 38; Providence, 1962.)

[10] PÁVÓ I.: Egy gráf k-fáinak előállítása. *Matematikai Lapok* 19 (1968), 353—362.

[10a] PÁVÓ I.: Generation of the k-trees of a graph. *Acta Cybernetica* (Szeged) 1 (1971), 57—68.

[11] SZELE T.: Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban. *Mat. és Fiz. Lapok* 50 (1943), 223—256.

[11] Ha csak (2)-t tesszük fel ((1)-et nem), úgy a parciális automata fogalmához jutunk. A következő meggondolások parciális automatákra is érvényesek.

[11a] Szele T.: Kombinatorische Untersuchungen über gerichtete vollständige Graphen. *Publ. Math.* (Debrecen) 13 (1966), 145—168.
[12] Szpilrajn, E.: Sur l'extension de l'ordre partiel. *Fundamenta Mathematicae* 16 (1930), 386—389.
[13] Айзерман, М. А., Гусев, Л. А., Розоноэр, Л. И., Смирнова, И. М. и Таль, А. А.: *Логика, автоматы, алгоритмы.* (Москва, 1963.)
[13a] Aiserman, M. A., Gussew, L. A., Rosonoer, L. I., Smirnowa, I. M. und Tal, A. A.: *Logik, Automaten, Algorithmen.* (Berlin és München, 1967.)
[13b] Aiserman, M. A., Gusev, L. A., Rozonoer, L. I., Smirnova, I. M., Tal', A. A.: *Logic, automata, and algorithms.* (New York, 1971.)
[14] Глушков, В. М.: Абстрактная теория автоматов. *Успехи Мат. Наук* 16/5 (1961), 3—62; helyesbítés: 17/2 (1962), 270.
[14a] Gluskov, V. M.: Az automaták absztrakt elmélete, I—II. *A MTA Mat. Fiz. Osztályának Közleményei* 13 (1963), 287—309; 14 (1964), 71—110.
[14b] Gluschkow, W. M.: *Theorie der abstrakten Automaten.* (Berlin, 1963.)
[15] Зыков, А. А.: *Теория конечных графов, I.* (Новосибирск, 1969.)

ГРАФЫ И ЦИКЛЫ

А. АДАМ

Узучаются три известные теоремы о циклах конечных направлённых графов. В гл. I. трактуется теорема Орэ [8]; даются три доказательства, первое и второе из которых происходят от Орэ и Харари [6] соответственно, третьее является новым. В гл. II. исследуется теорема Фидриха [3] опять с трёми доказательствами: сверх методов Фидриха и автора [2] приводится краткий и элегантный (до сих пор непубликованный) вывод Галлаи. В гл. III. высказывается и доказывается одна из теорем Клини ([7], теорема 5) в терминах теории графов.

GRAPHS AND CYCLES

A. ÁDÁM

Three known theorems concerning the cycles of finite directed graphs are dealt with. In Chapter I the theorem of Ore [8] is treated; three proofs are given: the first and the second proof is due to Ore and Harary [6], resp., the third one is new. In Chapter II the theorem of Fidrich [3] is studied again with three proofs: after Fidrich's and the author's [2] methods a short and elegant inference (till now unpublished) of Gallai is contained. In Chapter III a theorem of Kleene ([7], Theorem 5) is exposed and verified in terms of graph theory.

VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSOK SOROZATAINAK GYENGE KONVERGENCIÁJÁRÓL

SZÁSZ DOMOKOS

1. Kolmogorov egy 1953-ban megjelent áttekintő cikkében ([1], § 1) foglalkozott valószínűségeloszlások konvergenciájának különböző fogalmaival. Itt egyik fő észrevétele az, hogy valószínűségeloszlások sorozataira tulajdonképpen a gyenge konvergencia a *természetes konvergenciafogalom*. Mielőtt idéznénk érvelését, vezessük be az általa is vizsgált konvergenciafogalmakat.

Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathcal{F}$ az X részhalmazainak egy σ-algebrája, és jelöljük $\mathcal{P}(X)$-szel az $(X, \mathcal{F})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmazát. $\mathcal{P}(X)$-en a

$$\varrho_1(P, Q) = \operatorname{Var}(P-Q) \qquad (P, Q \in \mathcal{P}(X))$$

reláció metrikát definiál, ahol Var S jelöli az $(X, \mathcal{F})$-en értelmezett S előjeles mérték teljes variációját. Ha mármost $P_n, P \in \mathcal{P}(X)$, akkor azt mondjuk, hogy a P_n eloszlások sorozata *variációban tart* a P eloszláshoz, ha

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_1(P_n, P) = 0.$$

Tegyük fel most, hogy X topologikus tér, és $\mathcal{F}$ az X Borel-halmazainak σ-algebrája. Jelölje $C(X)$ az X-en értelmezett folytonos és korlátos valós függvények halmazát. A P_n eloszlások sorozata *gyengén konvergál* a P eloszláshoz, ha minden $f \in C(X)$-re

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f dP_n = \int_X f dP.$$

Ha speciálisan X a számegyenes ($X=R$), és a $P \in \mathcal{P}(R)$ eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F_P(x) = P((-\infty, x)),$$

akkor a

$$\varrho_2(P, Q) = \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_P(x) - F_Q(x)|$$

reláció ismét egy metrikát definiál $\mathcal{P}(R)$-ben. Azt mondjuk, hogy a P_n eloszlások *erősen konvergálnak* a P eloszláshoz, ha

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_2(P_n, P) = 0.$$

Továbbra is a számegyenes eseténél maradva térjünk rá Kolmogorov gondolatmenetére. Jelöljük $P^{(\sigma)}$-val az

$$\eta = \xi + \delta^{(\sigma)}$$

valószínűségi változó eloszlását, ahol ξ eloszlása P és a $\delta^{(\sigma)}$ valószínűségi változó, amelyet mérési hibaként interpretálhatunk, a ξ-től független, normális eloszlású 0 várható értékkel és σ szórással. Bevezethetjük a következő két új konvergenciafogalmat:

a) $P_n \to P$, ha minden $\sigma > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_1(P_n^{(\sigma)}, P^{(\sigma)}) = 0 \tag{1}$$

b) $P_n \to P$, ha minden $\sigma > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_2(P_n^{(\sigma)}, P^{(\sigma)}) = 0.$$

E két konvergenciafogalom tükrözi azt a körülményt, hogy a valószínűségi változók értékeit általában csak bizonyos hibával tudjuk megfigyelni. Azonban — állapítja meg bizonyítás nélkül Kolmogorov — ez a két, látszólag új konvergenciafogalom valójában ekvivalens a gyenge konvergenciával.

Ibragimov és Linnik [2] (1. fejezet, 3. §) monográfiájukban bizonyítást adnak az a) konvergenciának a gyenge konvergenciával való ekvivalenciájára. (A b) konvergenciafogalom kevésbé érdekes, mert definíciója a számegyeneshez kötött.) Kiindulópontunk a következő meglepő tény: az a) konvergenciánál az (1) reláció teljesülését elegendő egyetlen $\sigma > 0$ értékre megkövetelnünk. Ez az észrevétel egyúttal lehetőséget ad arra is, hogy $\mathscr{P}(R)$ térben bevezessünk egy egész sereg metrikát, amelyek mindegyike ekvivalens a gyenge konvergenciával.

Definíció: Legyen $H \in \mathscr{P}(R)$ abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye folytonos és korlátos, továbbá tegyük fel, hogy H karakterisztikus függvénye sehol sem tűnik el. A $\mathscr{P}(R)$-ben a H eloszlás által indukált metrika legyen

$$\varrho_H(P, Q) = \mathrm{Var}\,[(P-Q)*H] \quad (= \mathrm{Var}\,[P*H - Q*H]),$$

ahol $*$ jelöli a konvolúciót.

Mielőtt belátnánk, hogy ϱ_H valóban metrika és ekvivalens a gyenge konvergenciával, megjegyezzük, hogy a gyenge konvergenciával ekvivalens metrikát már Lévy megadott [3] (l. még [4]) a következőképpen:

$$L(P, Q) = \inf\{h : h > 0,\ F_P(x-h) - h \leqq F_Q(x) \leqq F_P(x+h) + h\}.$$

Két eloszlás Lévy-távolsága azonban egyszerű, számolásra alkalmas alakban nem adható meg, míg ha $h(x)$-szel jelöljük a H eloszlás sűrűségfüggvényét, akkor

$$\varrho_H(P, Q) = \int_R \left| \int_R h(x-t)\, d(F_P - F_Q)(t) \right| dx,$$

ami jobban kezelhető, mint a Lévy-távolság. A Lévy-távolság előnye azonban, hogy átvihető arra az esetre amikor X metrikus tér (l. Prohorov, [5]), míg az általunk bevezetett ϱ_H metrika csak lokálisan kompakt metrikus Abel-csoportokra általánosítható minden nehézség nélkül.

Egyelőre nem világos, hogy elméleti érdekességén kívül a bevezetett ϱ_H metrika milyen mértékben alkalmazható határeloszlástételek bizonyítására. Az alkalmazhatóságra reményt ad Bergström konvolúciós módszere. E módszerrel sikerült valószínűségi változók összegei eloszlásának aszimptotikus viselkedését a karakterisztikus függvények apparátusa nélkül leírni [6]. E módszernél alapvető szerepet játszik a Gauss norma, ami azonban tulajdonképpen nem norma, hanem normák

egyparaméteres serege, és ezek csak együttesen alkalmasak konvergenciavizsgálatokra. (A Bergström által használt Gauss norma a b) konvergenciafogalommal mutat rokonságot.)

2. Rátérünk a ϱ_H metrika tulajdonságainak vizsgálatára. Az egyszerűség kedvéért eredményeinket az egydimenziós esetre mondjuk ki, bár ezek lokálisan kompakt metrikus Abel csoportok esetére minden nehézség nélkül átvihetők.

1. TÉTEL. *A H-ra a ϱ_H definíciójában tett feltevések mellett a következő két állítás ekvivalens:*

(i) *A P_n eloszlások sorozata gyengén konvergál a P eloszláshoz,*

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \varrho_H(P_n, P) = 0.$$

Bizonyítás: (i)→(ii). Adott $\varepsilon>0$-hoz válasszuk meg az $I=[-a, a]$ intervallumot úgy, hogy egyrészt folytonossági intervallum legyen a P eloszlásra vonatkozólag, másrészt teljesüljön, hogy

$$P_n(I^c)<\varepsilon \quad (n=1, 2, \ldots) \quad \text{és} \quad P(I^c)<\varepsilon.$$

Válasszuk meg továbbá a J korlátos intervallumot úgy, hogy minden $t\in I$-re $H(J^c-t)<\varepsilon$ teljesüljön.

Ekkor

$$\varrho_H(P_n, P) = \int_R \left| \int_R h(x-t)\,d(P_n-P)(t) \right| dx \leqq$$

$$\leqq \int_R \left| \int_I h(x-t)\,d(P_n-P)(t) \right| dx + \int_R \left| \int_{I^c} h(x-t)\,d(P_n-P)(t) \right| dx = A_1 + A_2$$

Itt egyfelől

$$A_2 \leqq \int_R \int_{I^c} h(x-t)\,d|P_n-P|(t)\,dx \leqq P_n(I^c)+P(I^c)<2\varepsilon,$$

másfelől

$$A_1 \leqq \int_J \left| \int_I h(x-t)\,d(P_n-P)(t) \right| dx + \int_{J^c} \left| \int_I h(x-t)\,d(P_n-P)(t) \right| dx = A_3 + A_4.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$A_4 \leqq \int_{J^c} \int_I h(x-t)\,d(P_n+P)(t)\,dx \leqq \int_I \int_{J^c} h(x-t)\,dx\,d(P_n+P)(t) \leqq 2\varepsilon.$$

Most már elegendő belátni, hogy $A_3=o(1)$. Jelöljük

$$u_n(x) = \int_I h(x-t)\,d(P_n-P)(t).$$

Mivel $P_n \to P$ gyengén és I folytonossági intervalluma P-nek, azért

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0.$$

Másrészt

$$|u_n(x)| \leqq 2 \sup_x h(x),$$

így a kis Lebesgue-tétel következtében valóban $A_3=o(1)$.

(ii) $\rightarrow$ *(i):* Jelöljük a P_n, P és H eloszlások karakterisztikus függvényeit rendre $\pi_n(u)$, $\pi(u)$ és $\chi(u)$-val. Ha a $P_n * H$ eloszlások sorozata variációban konvergál a $P * H$ eloszláshoz, akkor gyengén is konvergál, így

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(u)\chi(u) = \pi(u)\chi(u).$$

Mivel $\chi(u)$ sehol sem tűnik el, azért

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(u) = \pi(u)$$

így $P_n \rightarrow P$ gyengén. Q.e.d.

Megjegyzés: A Lévy-távolságról már mondottuk, hogy épp a gyenge konvergenciát indukálja, így tételünk a következőképpen is megfogalmazható: P_n, $P \in \mathscr{P}(R)$ esetén az 1. Tétel feltétele mellett

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, P) = 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_H(P_n, P) = 0.$$

Említést érdemel, hogy ugyanakkor, ha P_n, $Q_n \in \mathscr{P}(R)$ $(n=1, 2, \ldots)$, akkor általában a

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, Q_n) = 0 \tag{2}$$

relációból nem következik

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_H(P_n, Q_n) = 0. \tag{3}$$

Jelöljük ugyanis δ_x-szel azt az elfajult eloszlást, amely az x pontban tartalmaz egységnyi tömeget, és legyen

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{2k\cdot 2^n}$$

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{(2k+1)\cdot 2^n}$$

Könnyű belátni, hogy itt $L(P_n, Q_n) = \frac{1}{n}$, és ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_H(P_n, Q_n) = 2.$$

(Megjegyezzük, hogy ugyanez a példa ad negatív választ V. M. Zolotarjov egy kérdésére, amely arra vonatkozik, hogy következik-e a

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, Q_n) = 0$$

relációból

$$\lim_{n\to\infty} \sup_u |\pi_n(u) - K_n(u)| = 0$$

ahol $\pi_n(u)$ és $K_n(u)$ a P_n, ill. Q_n eloszlások karakterisztikus függvényei.)

Nem ismeretes az ellentétes kérdésre a válasz, azaz (3) teljesülése maga után vonja-e (2)-t.

2. TÉTEL. *$\varrho_H(P, Q)$ teljes metrikát definiál $\mathcal{P}(R)$-en, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

$$\varrho_H(P*\delta_x, Q*\delta_x) = \varrho_H(P, Q) \quad (x \in R) \tag{4}$$

és

$$\varrho_H(P_1*P_2, Q_1*Q_2) \leqq \varrho_H(P_1, Q_1)+\varrho_H(P_2, Q_2). \tag{5}$$

Megjegyzés: (4) a ϱ_H metrika eltolás-invarianciáját fejezi ki (a skála változtatással szemben a gyenge konvergenciával ekvivalens metrika természetszerűleg nem lehet invariáns). (5) a ϱ_H metrika, az alkalmazásoknál fontos, kontrakciós tulajdonsága (ugyanezt a Lévy metrikára vonatkozólag lásd [7]).

Bizonyítás: Az, hogy ϱ_H eltolás-invariáns teljes metrika, nyilvánvaló a teljes variáció tulajdonságai alapján. (5) a

$$\operatorname{Var}[(P-Q)*H] \leqq \operatorname{Var}(P-Q)$$

kontrakciós egyenlőtlenség felhasználásával

$$\varrho_H(P_1*P_2, Q_1*Q_2) \leqq \varrho_H(P_1-Q_1, P_2)+\varrho_H(Q_1, P_2-Q_2)$$

alapján adódik.

A szerző köszönetét fejezi ki Major Péternek a dolgozathoz fűzött értékes megjegyzéséért.

Megjegyzés: A gyenge konvergenciával ekvivalens metrikákról nemrég jelent meg R. M. DUDLEY áttekintő dolgozata, amely gazdag irogalomjegyzéket is tartalmaz. (Speeds of Metric Probability Convergence, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 22 (1972), 323—332.)

IRODALOM

[1] А. Н. Колмогоров: Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. Вестник Московского Университета. 10 (1953) 29—38.
[2] И. А. Ибрагимов—Ю. В. Линник: Независимые и стационарно связанные случайные величины. Москва. 1965.
[3] P. LÉVY: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
[4] B. V. GNEDENKO—A. N. KOLMOGOROV: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. Budapest 1951.
[5] Ю. В. Прохоров: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применения. 1 (1956) 177—238.
[6] H. BERGSTROM: Limit theorems for convolutions. Uppsala, 1963.
[7] В. М. Золотарев: Обобщение теоремы Линдеберга—Феллера. Теория вероятностей и ее применения. 12 (1967) 666—677.

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Д. САЛС

ON THE WEAK CONVERGENCE OF SEQUENCES OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS

D. SZÁSZ

Let H be a fixed absolutely continuous probability ditribution. Then

$$\varrho_H(P, Q) = \mathrm{Var}\,[(P-Q) * H]$$

defines a metric in the space of probability distributions. Under slight conditions this metric is equivalent with the weak convergence of probability distributions.

CIKLIKUS ÁLLAPOT-FÜGGETLEN KVÁZIAUTOMATÁK

BABCSÁNYI ISTVÁN

Ebben a dolgozatban igazoljuk a ciklikus kváziautomaták néhány tulajdonságát, majd a ciklikus kváziautomaták egyik osztályával, a ciklikus állapot-független kváziautomatákkal foglalkozunk. Az itt nem definiált fogalmak megtalálhatók a GÉCSEG F.—PEÁK I. [6], vagy a BABCSÁNYI I. [1] dolgozatokban.

Vezessük be az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata A állapothalmazán a következő relációkat:

$$a \sim b \Leftrightarrow \bigwedge_{f \in F} [\delta(a, f) = \delta(b, f)],$$

$$a \varrho_f b \Leftrightarrow \delta(a, f) = \delta(b, f).$$

Nyilvánvaló, hogy a $\sim$ és a $\varrho_f (f \in F)$ relációk ekvivalencia-relációk. Legyenek $\bar{a} = \langle b | b \sim a,\ b \in A \rangle$ $a_f = \langle b | b \varrho_f a, b \in A \rangle$, $\bar{A} = \langle \bar{a} | a \in A \rangle$ és $A_f = \langle a_f | a \in A \rangle$. Az is látható, hogy ha $a \sim b$ teljesül, akkor $a \varrho_f b$ is teljesül, és így $|\bar{A}| \geqq |A_f|$. Könyen igazolható a következő

1. LEMMA. *Minden* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *kváziautomatára az* $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{A}, F, \bar{\delta})$ *kváziautomata jól-definiált, és* $\bar{\mathbf{A}}$ *az* $\mathbf{A}$ *homomorf képe, ahol*

$$\bar{\delta}(\bar{a}, f) = \overline{\delta(a, f)} \quad (a \in A, f \in F).$$

2. LEMMA. *Ha az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata* $\bar{F}$ *karakterisztikus félcsoportja jobbegységelemes, akkor* $\bar{\mathbf{A}} \cong \mathbf{A}$.

Bizonyítás. Legyenek $a, b (\in A)$ olyan állapotok, amelyekre $a \sim b$ teljesül, azaz

$$\bigwedge_{f \in F} f[\delta(a, f) = \delta(b, f)].$$

Legyen $e \in \bar{e}$, ahol $\bar{e}$ az $\bar{F}$ jobbegységeleme, akkor

$$a = \delta(a_0, h) = \delta(a_0, he) = \delta(a, e) = \delta(b, e) = \delta(a_0, ke) = \delta(a_0, k) = b$$

ahol a_0 $\mathbf{A}$ egy generátoreleme, és $h, k \in F$. Q.e.d.

1. TÉTEL. *Tetszőleges* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata esetén* $E(A)$ *izomorf* $E(\bar{A})$ *egy részfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Definiáljuk a $\varphi_\alpha : \bar{A} \to \bar{A}$ leképezést a következő módon:

$$\varphi_\alpha : \bar{a} \to \overline{\alpha(a)} \quad (\alpha \in E(A)).$$

φ_α az $\bar{A}$ halmaznak önmagába való egyértelmű leképezése. Minthogy

$$\varphi_\alpha(\bar{\delta}(\bar{a}, f)) = \varphi_\alpha(\overline{\delta(a, f)}) = \overline{\alpha(\delta(a, f))} =$$

$$= \overline{\delta(\alpha(a), f)} = \bar{\delta}(\overline{\alpha(a)}, f) = \bar{\delta}(\varphi_\alpha(\bar{a}), f)$$

($\bar{a} \in \bar{A}, f \in F$), azért $\varphi_\alpha \in E(\bar{A})$. Megmutatjuk, hogy az

$$\alpha \to \varphi_\alpha \qquad (\alpha \in E(A)) \tag{1}$$

megfeleltetés egy-egyértelmű. Valóban, tetszőleges $\alpha, \beta \in E(A)$ és $a \in A$ esetén

$$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \Leftrightarrow \overline{\alpha(a)} = \overline{\beta(a)} \Leftrightarrow \bigwedge_{f \in F} f[\alpha(\delta(a, f)) = \beta(\delta(a, f))].$$

Legyen most a az **A**-nak egy generátoreleme, akkor ebből következik, hogy $\alpha = \beta$. Végül a

$$\varphi_{\alpha\beta}(\bar{a}) = \overline{\alpha\beta(a)} = \varphi_\alpha(\overline{\beta(a)}) = \varphi_\alpha \varphi_\beta(\bar{a})$$

számolással nyerjük, hogy az (1) leképezés művelettartó. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha \in G(A)$, akkor $\varphi_\alpha \in G(\bar{A})$, s így a tétel automorfizmuscsoportokra is érvényes.

Ha α az $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ kváziautomata endomorfizmusa, akkor $\alpha(\bar{a}) = \langle \alpha(b) | b \in \bar{a} \rangle \subseteq \overline{\alpha(a)}$, ha pedig α automorfizmusa **A**-nak, akkor $\alpha(\bar{a}) = \overline{\alpha(a)}$. Legyen ugyanis

$b \in \overline{\alpha(a)}$. Akkor

$$\bigwedge_{f \in F} f[\delta(\alpha(a), f) = \delta(b, f)] \Rightarrow \bigwedge_{f \in F} f[\delta(a, f) = \delta(\alpha^{-1}(b), f)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^{-1}(b) \in \bar{a} \Rightarrow b \in \alpha(\bar{a}).$$

Továbbá, ha α **A** önmagára való endomorfizmusa, a_0 az **A** egy generátoreleme és $b \in \overline{\alpha(a_0)}$, akkor b is generátoreleme **A**-nak. Jelöljük E-vel **A** generátorelemeinek halmazát. Bármely ciklikus kváziautomatára E $\bar{A}$-beli osztályok egyesítési halmaza.

R. H. Oehmke [7] megmutatta, hogy ha **A** ciklikus kváziautomata, akkor $O(E(A)) \leqq |A|$ teljesül. Igaz továbbá az alábbi

2. Tétel. *Ciklikus kváziautomata önmagára való endomorfizmusai halmazának számossága kisebb vagy egyenlő, mint* $|E|$.

Bizonyítás. Ha $\alpha(a_0) = \beta(a_0)$, ahol $\alpha, \beta \in E(A)$ és a_0 **A** egy generátoreleme, akkor $\alpha = \beta$. Az előző megjegyzések szerint, ha α az **A** ciklikus kváziautomata egy önmagára való endomorfizmusa, akkor $\alpha(a_0) \in E$. Így az $\alpha \to \alpha(a_0)$ $(\alpha \in E(A))$ hozzárendelés egy-egyértelműsége miatt igaz a tétel állítása.

Ebből a tételből G. Feichtinger [4] azon állítása is következik, hogy $O(G(A)) \leqq |E|$.

3. Lemma. *Ha az* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata nem erősen összefüggő, akkor* $\mathbf{A}' = (A - E, F, \delta')$ **A**-*nak A-részkváziautomatája.*

Bizonyítás. Legyen $a (\in A - E)$ tetszőleges állapot. Ha valamilyen $f (\in F)$ elemre $\delta(a, f)$ **A** egy generátoreleme, akkor tetszőleges $b (\in A)$ állapothoz van olyan $h (\in F)$, hogy $\delta(a, fh) = \delta(\delta(a, f), h) = b$, azaz $a \in E$. Ellentmondás. Így $\delta(a, f) \in A - E$. Q.e.d.

A 3. lemma segítségével könnyen belátható az

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata nem erősen összefüggő, akkor az* $\bar{\mathbf{A}}' = (\bar{A}-\bar{E}, F, \delta')$ *kváziautomata az* $\bar{\mathbf{A}}$ *kváziautomata A-részkváziautomatája és* $\bar{\mathbf{A}}'$ *az* $\mathbf{A}'$ *kváziautomata homomorf képe.*

Ismeretes, hogy egy kváziautomata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha nincs valódi A-részkváziautomatája (A. C. FLECK [5]). Így, ha az **A** ciklikus kváziautomata nem erősen összefüggő, akkor $\bar{\mathbf{A}}$ sem lehet erősen összefüggő. Ezenkívül, ha $\mathbf{A}'$ nem ciklikus, és bármely $a(\in A)$ állapothoz van olyan $h(\in F)$, amelyre $\delta(a, h)=a$ teljesül, akkor $\bar{\mathbf{A}}'$ sem lehet ciklikus. Legyen ugyanis $\bar{a}$ az $\bar{\mathbf{A}}'$ kváziautomata egy generátoreleme, akkor bármely $\bar{b}(\in \bar{A}-\bar{E})$ állapothoz van olyan $f(\in F)$, hogy $\delta(\bar{a}, f)=\bar{b}$, azaz

$$\bigvee_{h\in F} h[\delta(a, fh) = \delta(b, h)].$$

Ha most egy $h(\in F)$ elemre $\delta(b, h)=b$ teljesül, akkor $\delta(a, fh)=\delta(b, h)=b$, ami azt jelenti, hogy a az $\mathbf{A}'$ kváziautomata egy generátoreleme.

A. C. FLECK [5] megmutatta, hogy ha az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ és a $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ kváziautomaták izomorfak, akkor automorfizmuscsoportjaik is izomorfak. Teljesen hasonlóan bizonyítható be a

3. TÉTEL. $\mathbf{A}\cong\mathbf{B}\Rightarrow E(A)\cong E(B)$.

Bizonyítás. Legyen a $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ kváziautomata az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata izomorf képe a φ izomorfizmus mellett. Nyilvánvaló, hogy $\varphi\alpha\varphi^{-1}(\alpha\in E(A))$ B önmagába való egyértelmű leképezése. Mivel

$$\varphi\alpha\varphi^{-1}(\delta'(b, f)) = \varphi\alpha(\delta(\varphi^{-1}(b), f)) = \varphi(\delta(\alpha\varphi^{-1}(b), f)) = \delta'(\varphi\alpha\varphi^{-1}(b), f)$$

$(b\in B, f\in F)$, azért $\varphi\alpha\varphi^{-1}\in E(B)$. Legyenek α, $\beta(\in E(A))$ olyanok, hogy $\varphi\alpha\varphi^{-1}=$ $=\varphi\beta\varphi^{-1}$, azaz minden $b(\in B)$ állapotra $\varphi\alpha\varphi^{-1}(b)=\varphi\beta\varphi^{-1}(b)$ teljesüljön. Úgy $\alpha\varphi^{-1}(b)=\beta\varphi^{-1}(b)$ minden $\varphi^{-1}(b)(\in A)$ állapotra, amiből következik, hogy $\alpha=\beta$. Tehát a $\psi:\alpha\to\varphi\alpha\varphi^{-1}$ hozzárendelés egy-egyértelmű. Ha $\alpha'\in E(B)$, akkor $\varphi^{-1}\alpha'\varphi\in$ $\in E(A)$, s így $\psi(\varphi^{-1}\alpha'\varphi)=\alpha'$ teljesül, ami azt jelenti, hogy ψ $E(A)$-nak $E(B)$-re való leképezése. Most megmutatjuk, hogy ψ homomorfizmus:

$$\psi(\alpha\beta)=\varphi\alpha\beta\varphi^{-1}=\varphi\alpha\varphi^{-1}\varphi\beta\varphi^{-1}=\psi(\alpha)\psi(\beta)$$

$(\alpha, \beta\in E(A))$. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

4. TÉTEL. *Minden* **A** *erősen összefüggő kváziautomatára* $O(E(A))\leqq\min\{|A_f||f\in F\}$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $a(\in A)$ tetszőleges állapot; α, $\beta\in E(A)$. Ha van olyan $f(\in F)$, hogy

$$\alpha(\delta(a, f))=\delta(\alpha(a), f)=\delta(\beta(a), f)=\beta(\delta(a, f)),$$

akkor $\alpha=\beta$, mivel $\delta(a, f)$ is generátoreleme **A**-nak. Így ha $\alpha\neq\beta$, akkor $\alpha(a)\varrho_f\beta(a)$ nem teljesülhet egyetlen $f(\in F)$-re sem. Tehát minden $\alpha(a)$ $(\alpha\in E(A))$ az A_f halmaz különböző osztályába esik bármely $f(\in F)$ esetén. Nyilvánvaló, hogy az $\alpha\to\alpha(a)$ leképezés egy-egyértelmű. Q.e.d.

Az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ és a $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ ciklikus kváziautomatákat *kapcsoltaknak* nevezzük, ha van **A**-nak olyan a_0 és **B**-nek olyan b_0 generátoreleme, amelyekre teljesül a következő feltétel: Bármely $a(\in A)$-hoz és $b(\in B)$-hez található olyan

$f(\in F)$, hogy $\delta(a_0, f)=a$ és $\delta'(b_0, f)=b$ teljesülnek. A következő tétel A. C. FLECK [5] erősen összefüggő kváziautomatákra talált eredményének általánosítása ciklikus kváziautomatákra.

5. TÉTEL. *Az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *és a* $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ *ciklikus kváziautomaták* A*-direkt szorzata akkor és csak akkor ciklikus, ha* **A** *és* **B** *kapcsoltak.*

Vezessük be az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ kváziautomata F bemenő félcsoportján a következő relációkat:

$$f \equiv g(\varrho_{A,a}) \Leftrightarrow \delta(a, f) = \delta(a, g),$$

$(f, g \in F;\ a \in A)$. Könnyen látható, hogy $\varrho_{A,a}$ $(a \in A)$ jobbról stabil ekvivalencia-reláció. Ha bármely $a, b(\in A)$ állapot-párra $\varrho_{A,a}=\varrho_{A,b}$ teljesül, akkor az **A** kváziautomatát *állapot-függetlennek* nevezzük (CH. A. TRAUTH [8]). Nyilvánvaló, hogy ebben és csak ebben az esetben $\varrho_{A,a}=\varrho_A$ $(a \in A)$, ahol ϱ_A a Myhill-féle kongruencia.

4. LEMMA. *Ha az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor* **A** *karakterisztikus félcsoportja balegységelemes, és az* $\bar{\mathbf{A}}$ *kváziautomata karakterisztikus félcsoportja egységelemes.*

Bizonyítás. Legyen a_0 **A** egy generátoreleme. Akkor van olyan $e(\in F)$, hogy $\delta(a_0, e)=a_0$, így

$$\underset{f \in F}{\forall} f[\delta(a_0, ef) = \delta(a_0, f)].$$

Mivel **A** állapot-független, ezért minden $b(\in A)$ állapotra

$$\underset{f \in F}{\forall} f[\delta(b, ef) = \delta(b, f)]$$

teljesül, azaz $\bar{e}\bar{f}=\bar{f}$, s így $\bar{e}$ $\bar{F}$ balegységeleme. Továbbá,

$$\bar{\delta}(\bar{b}, \bar{e}) = \overline{\delta(b, e)} = \bar{b},$$

amiből már adódik, hogy az $\bar{\mathbf{A}}$ kváziautomata karakterisztikus félcsoportja egységelemes. Q.e.d.

6. TÉTEL. *Az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus állapot-független kváziautomata minden endomorfizmusa egy-egyértelmű,* $E(A) \cong E(\bar{A})$ *és* $O(E(\bar{A}))=|\bar{A}|$.

Bizonyítás. Legyen a_0 **A** egy generátoreleme, definiáljuk a következő $\alpha_{a_0 b}$ leképezést:

$$\alpha_{a_0 b}(\delta(a_0, f)) = \delta(b, f) \quad (b \in A;\ f \in F). \tag{2}$$

Az **A** állapot-függetlensége miatt $\alpha_{a_0 b}$ A önmagába való egy-egyértelmű leképezése. Most megmutatjuk, hogy $\alpha_{a_0 b}$ homomorfizmus:

$$\alpha_{a_0 b}(\delta(c, h)) = \alpha_{a_0 b}(\delta(\delta(a_0, k), h)) = \alpha_{a_0 b}(\delta(a_0, kh)) =$$

$$= \delta(b, kh) = \delta(\delta(b, k), h) = \delta(\alpha_{a_0 b}(\delta(a_0, k)), h) =$$

$$= \delta(\alpha_{a_0 b}(c), h);\ (\delta(a_0, k) = c \in A;\ h, k \in F).$$

Legyen $\alpha \in E(A)$, akkor

$$\alpha_{a_0 \alpha(a_0)}(\delta(a_0, f)) = \delta(\alpha(a_0), f) = \alpha(\delta(a_0, f)) \quad (f \in F),$$

így $\alpha=\alpha_{a_0\alpha(a_0)}$. Tehát az **A** minden endomorfizmusa (2) alakú. Ha $\overline{\delta(a,f)}=\bar{\delta}(\bar{a},f)=$ $=\bar{\delta}(\bar{a},g)=\overline{\delta(a,g)}$ teljesül valamilyen $a(\in A)$, $f,g(\in F)$ elemekre, akkor

$$\underset{h\in F}{\forall} h[\delta(a,fh)=\delta(a,gh)]$$

Mivel az **A** állapot-független, így tetszőleges $b(\in A)$ állapotára

$$\underset{h\in F}{\forall} h[\delta(b,fh)=\delta(b,gh)]$$

teljesül, azaz

$$\bar{\delta}(\bar{b},f)=\overline{\delta(b,f)}=\overline{\delta(b,g)}=\bar{\delta}(\bar{b},g).$$

Ez azt jelenti, hogy $\bar{\mathbf{A}}$ is állapot-független. Könnyen belátható ezek után, hogy az

$$\alpha_{\bar{a}_0\bar{b}}(\bar{\delta}(\bar{a}_0,f))=\bar{\delta}(\bar{b},f),\quad (\bar{b}\in\bar{A};\ f\in F)$$

leképezés $\bar{\mathbf{A}}$ endomorfizmusa, s $\bar{\mathbf{A}}$ minden endomorfizmusa ilyen alakú. Továbbá,

$$\alpha_{a_0b}=\alpha_{a_0d}\Rightarrow\underset{f\in F}{\forall} f[\delta(b,f)=\delta(d,f)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bar{b}=\bar{d}\Rightarrow\alpha_{\bar{a}_0\bar{b}}=\alpha_{\bar{a}_0\bar{d}}\quad (b,d\in A).$$

Legyen $\alpha_{\bar{a}_0\bar{b}}=\alpha_{\bar{a}_0\bar{d}}$, akkor

$$\underset{f\in F}{\forall} f[\bar{\delta}(\bar{b},f)=\bar{\delta}(\bar{d},f)]$$

A 4. lemma szerint $\bar{\mathbf{A}}$ karakterisztikus félcsoportja egységelemes, így van olyan $e(\in F)$, hogy

$$\underset{\bar{a}\in\bar{A}}{\forall}\bar{a}[\bar{\delta}(\bar{a},e)=\bar{a}].$$

Az előzőek szerint, akkor

$$\bar{b}=\bar{\delta}(\bar{b},e)=\bar{\delta}(\bar{d},e)=\bar{d},$$

amiből már látható, hogy $\alpha_{a_0b}=\alpha_{a_0d}$. Tehát

$$\psi\colon\ \alpha_{a_0b}\to\alpha_{\bar{a}_0\bar{b}}$$

$E(A)$-nak $E(\bar{A})$-ra való egy-egyértelmű leképezése. Legyenek $a\in A$ és α_{a_0b}, $\alpha_{a_0c}\in E(A)$, akkor:

$$\alpha_{a_0b}\alpha_{a_0c}(a)=\alpha_{a_0b}\alpha_{a_0c}(\delta(a_0,f))=\alpha_{a_0b}(\delta(c,f))=$$

$$=\alpha_{a_0b}(\delta(\delta(a_0,h),f))=a_{a_0b}(\delta(a_0,hf))=\delta(b,hf)=$$

$$=\delta(\delta(b,h),f)=\alpha_{a_0\delta(b,h)}(\delta(a_0,f))=\alpha_{a_0\delta(b,h)}(a).$$

Így $\alpha_{a_0b}\alpha_{a_0c}=\alpha_{a_0\delta(b,h)}$, ahol $\delta(a_0,h)=c\quad (h\in F)$.
Hasonlóan látható be, hogy $\alpha_{\bar{a}_0\bar{b}}\alpha_{\bar{a}_0\bar{c}}=\alpha_{\bar{a}_0\bar{\delta}(\bar{b},h)}$.

$$\psi(\alpha_{a_0b}\alpha_{a_0c})=\psi(\alpha_{a_0\delta(b,h)})=\alpha_{\bar{a}_0\overline{\delta(b,h)}}=$$

$$=\alpha_{\bar{a}_0\bar{\delta}(\bar{b},h)}=\alpha_{\bar{a}_0\bar{b}}\alpha_{\bar{a}_0\bar{c}}=\psi(\alpha_{a_0b})\psi(\alpha_{a_0c}),$$

azaz $E(A)\cong E(\bar{A})$. Az is látható, hogy $O(E(\bar{A}))=|\bar{A}|$.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az* **A** *kváziautomata állapot-független, akkor az* $\bar{\mathbf{A}}$ *kváziautomata is az.*

3. KÖVETKEZMÉNY. *Bármely* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomatára minden* (2) *alakú leképezés akkor és csak akkor endomorfizmusa* $\mathbf{A}$*-nak, ha a* ϱ_{A,a_0} *reláció kongruencia.*

Bizonyítás. Legyen a_0 az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata egy generátoreleme, továbbá minden (2) alakú leképezés az $\mathbf{A}$ endomorfizmusa. Így tetszőleges $h(\in F)$ elemre $\alpha_{a_0\delta(a_0,h)} \in E(A)$ teljesül. Ha $f \equiv g(\varrho_{A,a_0})$ $(f, g \in F)$, azaz $\delta(a_0, f) = \delta(a_0, g)$, akkor

$$\delta(a_0, hf) = \delta(\delta(a_0, h), f) = \alpha_{a_0\delta(a_0,h)}(\delta(a_0, f)) =$$

$$= \alpha_{a_0\delta(a_0,h)}(\delta(a_0, g)) = \delta(\delta(a_0, h), g) = \delta(a_0, hg),$$

ami azt jelenti, hogy $hf \equiv hg(\varrho_{A,a_0})$, tehát a ϱ_{A,a_0} reláció kongruencia.

Fordítva, ha a ϱ_{A,a_0} reláció kongruencia, akkor könnyen belátható, hogy minden $b=\delta(a_0, h)$ $(h \in F)$ állapotra a (2) leképezés egyértelmű. A 6. tétel bizonyítása során láttuk, hogy ezek a leképezések művelettartók. Q.e.d.

Az is nyilvánvaló, hogy ciklikus kváziautomata minden endomorfizmusa (2) alakú.

4. KÖVETKEZMÉNY. *Minden* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomatára* $O(E(A)) \leqq |\bar{A}|$ *teljesül.*

Bizonyítás. A 6. tétel bizonyítás közben láttuk, hogy ha $\alpha \in E(A)$, akkor $\alpha = \alpha_{a_0\alpha(a_0)}$, ahol a_0 az $\mathbf{A}$ egy generátoreleme. Másrészt, az $\alpha \to \alpha(a_0)$ hozzárendelés egy-egyértelmű. Legyenek most $\alpha, \beta(\in E(A))$ olyanok, amelyekre $\overline{\alpha(a_0)} = \overline{\beta(a_0)}$ teljesül. Akkor

$$\bigwedge_{f \in F} f[\alpha(\delta(a_0, f)) = \delta(\alpha(a_0), f) = \delta(\beta(a_0), f) = \beta(\delta(a_0, f))],$$

azaz $\alpha = \beta$. Tehát, ha $\alpha \neq \beta$, akkor $\overline{\alpha(a_0)} \neq \overline{\beta(a_0)}$, ami éppen azt jelenti, hogy $O(E(A)) \leqq |\bar{A}|$.

Megemlítjük, hogy a 4. Következmény eredménye jobb közelítést ad, min R. H. OEHMKE már említett becslése $(O(E(A)) \leqq |A|)$.

7. TÉTEL. *Ha az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor*

$$a_{a_0 b} \in G(A) \Leftrightarrow b \in E,$$

így $O(G(A)) = |\bar{E}|$.

Bizonyítás. Ha $\alpha_{a_0 b}$ $(b \in A)$ automorfizmus, akkor bármely $c(\in A)$ állapothoz van olyan $f(\in F)$, hogy $\alpha_{a_0 b}(\delta(a_0, f)) = c$, azaz $\delta(b, f) = c$. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy $b \in E$. Tegyük fel most, hogy $b \in E$, akkor $\alpha_{a_0 b}$ A-nak önmagára való leképezése. Így $\alpha_{a_0 b} \in G(A)$. Q.e.d.

5. KÖVETKEZMÉNY. *Erősen összefüggő állapot-független kváziautomata minden endomorfizmusa automorfizmus.*

A 2. Lemmát felhasználva adódik a

6. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus állapot-független kváziautomata* $\bar{F}$ *karakterisztikus félcsoportja egységelemes, akkor* $O(G(A)) = |E|$ *teljesül.*

A következő példa mutatja, hogy az $a_1, a_2(\in E)$ generátorelemekre általában nem állíthatjuk, hogy $a_1 \sim a_2$. Legyen az $F=\{f_1, f_2\}$ félcsoport az $f_i \cdot f_j = f_j$ $(i, j = 1, 2)$ művelettel definiálva. Az $\mathbf{F}=(F, F, \cdot)$ kváziautomata, ahol az átmenet-függvény

az F-beli művelet, erősen összefüggő állapot-független, s minden állapota ugyanazon ekvivalencia-osztályban van.

Az [1] dolgozatunkban tévesen jegyeztük meg, hogy minden erősen összefüggő állapot-független kváziautomata félperfekt. Az előbbi példában $\bar{F} \cong F$, de F nem csoport, mivel még egységeleme sincs. Ezek után az [1] dolgozat 2. Tétele így módosul:

8. TÉTEL. *Minden A-véges ciklikus állapot-független kváziautomata erősen összefüggő.*

A tétel bizonyítása [1]-ben korrekt.

5. LEMMA. (CH. A. TRAUTH [8]). *Erősen összefüggő állapot-független kváziautomata akkor és csak akkor félperfekt, ha karakterisztikus félcsoportja egységelemes.*

A 4. Lemmát felhasználva adódik a következő gyengébb állítás:

9. TÉTEL. *Ha az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ erősen összefüggő kváziautomata állapot-független, akkor az $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{A}, F, \bar{\delta})$ kváziautomata félperfekt.*

10. TÉTEL. *Az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ ciklikus állapot-független kváziautomata $E(A)$ endomorfizmus-félcsoportja izomorf az $\bar{F}$ karakterisztikus félcsoport egy részfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{F}'$ az olyan $\bar{f}(\in \bar{F})$ osztályok halmaza, amelyekre $\delta(a_0, f)= =\alpha(a_0)$ $(f \in \bar{f})$ teljesül valamilyen $\alpha(\in E(A))$-ra, ahol a_0 $\mathbf{A}$ egy rögzített generátoreleme. Nyilvánvaló, hogy $\bar{F}'$ az $\bar{F}$ részfélcsoportja. Definiáljuk a $\psi: \bar{F}' \to E(A)$ leképezést a következő módon: $\psi(\bar{f})=\alpha$, ha $\delta(a_0, f)=\alpha(a_0)$ $(f \in \bar{f})$. Könnyen belátható, hogy ψ az $\bar{F}'$-nak $E(A)$-ra való izomorf leképezése.

Felhasználva a 6., 8., 9., [1] 3. és [1] 4. Tételeket, a 10. Tétel alapján belátható a

7. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ A-véges ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor az $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{A}, F, \bar{\delta})$ kváziautomata karakterisztikus csoportja izomorf $\bar{F}$ egy részcsoportjával.*

11. TÉTEL. *Ha az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor az $\mathbf{E}(\mathbf{A})=(E(A), F, \delta')$ kváziautomata jól-definiált, ahol*

$$\delta'(\alpha_{a_0 b}, f) = \alpha_{a_0 \delta(b, f)},$$

és $\mathbf{E}(\mathbf{A}) \cong \bar{\mathbf{A}}$. (Lásd 6. Tétel.)

Bizonyítás. Mivel

$$\alpha_{a_0 b}=\alpha_{a_0 d} \Leftrightarrow \bar{b} = \bar{d} \Leftrightarrow \bigwedge_{f \in F} f[\delta(b, f) = \delta(d, f)] \Rightarrow \alpha_{a_0 \delta(b, f)} = \alpha_{a_0 \delta(d, f)},$$

és

$$\delta'(\alpha_{a_0 b}, fg) = \alpha_{a_0 \delta(b, fg)} = \alpha_{a_0 \delta(\delta(b, f), g)} =$$

$$= \delta'(\alpha_{a_0 \delta(b, f)}, g) = \delta'(\delta'(\alpha_{a_0 b}, f), g),$$

$f, g \in F$, $b \in A$, a_0 $\mathbf{A}$ generátoreleme), azért $\mathbf{E}(\mathbf{A})$ jól-definiált.

A $\psi: \alpha_{a_0 b} \to \bar{b}$ leképezés $E(A)$-nak $\bar{A}$-ra való egy-egyértelmű leképezése. Végül megmutatjuk még, hogy ψ homomorfizmus:

$$\psi(\delta'(\alpha_{a_0 b}, f)) = \psi(\alpha_{a_0 \delta(b,f)}) = \overline{\delta(b, f)} =$$

$$= \bar{\delta}(\bar{b}, f) = \bar{\delta}(\psi(\alpha_{a_0 b}), f) \quad (f \in F).$$

PÉLDA. Jelöljük az egész számok halmazát L-lel. Az $\mathbf{L}=(L, L, \cdot)$ kváziautomata ciklikus állapot-független, ahol $\cdot$ az L-en értelmezett közönséges szorzást jelöli. Generátorelemek az 1 és a -1. Könnyen igazolható, hogy $\bar{\mathbf{L}} \cong \mathbf{L}$ és $O(E(L))=|L|$. $E(L)=\langle \alpha_{1,b} | b \in L \rangle$, ahol $\alpha_{1,b}: a \to ba$ $(a \in L)$; $G(L)=\langle \alpha_{1,1}, \alpha_{1,-1} \rangle$. $\mathbf{E}(\mathbf{L})=(E(L), L, \delta')$, ahol $\delta'(\alpha_{1,b}, c)=\alpha_{1,bc}$. Az $\alpha_{1,b} \to b$ leképezés izomorfizmus.

Egy S félcsoport λ transzformációját S *bal oldali transzlációjának* nevezzük, ha $\lambda(s \cdot t) = \lambda(s) \cdot t$ $(s, t \in S)$ teljesül. A félcsoportok elméletéből ismeretes a következő

6. LEMMA. *Bármely egységelemes félcsoport izomorf bal oldali transzlációinak félcsoportjával.*

12. TÉTEL. *Ha az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata állapot-független, akkor* $E(E(A))$ *az* $E(A)$ *bal oldali transzlációinak félcsoportja és* $E(E(A)) \cong E(A)$.

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $E(E(A))$ az $\mathbf{E}(\mathbf{A})$ kváziautomata endomorfizmus-félcsoportját jelöli.

Legyenek $\alpha_{a_0 b}, \alpha_{a_0 c} (\in E(A))$ tetszőlegesek és $\mu \in E(E(A))$. Akkor

$$\mu(\alpha_{a_0 b} \alpha_{a_0 c}) = \mu(\alpha_{a_0 b} \alpha_{a_0 \delta(a_0, f)}) = \mu(\alpha_{a_0 \delta(b,f)}) =$$

$$= \mu(\delta'(\alpha_{a_0 b}, f)) = \delta'(\mu(\alpha_{a_0 b}), f) = \delta'(\alpha_{a_0 d}, f) =$$

$$= \alpha_{a_0 \delta(d,f)} = \alpha_{a_0 d} \alpha_{a_0 \delta(a_0, f)} = \mu(\alpha_{a_0 b}) \alpha_{a_0 c},$$

$(c = \delta(a_0, f), \mu(\alpha_{a_0 b}) = \alpha_{a_0 d})$, azaz μ az $E(A)$ félcsoport bal oldali transzlációja.

Legyen most μ $E(A)$ bal oldali transzlációja. Akkor

$$\mu(\delta'(\alpha_{a_0 b}, f)) = \mu(\alpha_{a_0 \delta(b,f)}) = \mu(\alpha_{a_0 b} \alpha_{a_0 \delta(a_0, f)}) =$$

$$= \mu(\alpha_{a_0 b}) \alpha_{a_0 \delta(a_0, f)} = \alpha_{a_0 d} \alpha_{a_0 \delta(a_0, f)} = \alpha_{a_0 \delta(d, f)} =$$

$$= \delta'(\alpha_{a_0 d}, f) = \delta'(\mu(a_{a_0 b}), f), \quad (\mu(\alpha_{a_0 b}) = \alpha_{a_0 d}),$$

azaz μ $\mathbf{E}(\mathbf{A})$ endomorfizmusa.

Mivel $E(A)$ egységelemes félcsoport, ezért izomorf bal oldali transzlációinak félcsoportjával. Q.e.d.

13. TÉTEL. *Ha a* $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ *állapot-független kváziautomata az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata homomorf képe, akkor* $E(A)$ *homomorf módon beágyazható* $E(B)$*-be.*

Bizonyítás. Legyen a $\mathbf{B}=(B, F, \delta')$ állapot-független kváziautomata az $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ ciklikus kváziautomata homomorf képe a φ homomorfizmus mellett. Legyen $\alpha \in E(A)$. Definiáljuk a következő leképezést:

$$\psi_\alpha: \varphi(a) \to \varphi(\alpha(a)) \qquad (a \in A).$$

Legyen most $\varphi(a)=\varphi(b)$ $(a, b\in A)$. Vannak olyan $f, g(\in F)$ elemek, hogy $\delta(a_0, f)=a$, $\delta(a_0, g)=b$, ahol a_0 **A** egy generátoreleme. Így

$$\delta'(\varphi(a_0), f)=\varphi(a)=\varphi(b)=\delta'(\varphi(a_0), g)$$

teljesül. Mivel **B** állapot-független, ezért

$$\varphi(\alpha(a)) = \varphi(\alpha(\delta(a_0, f))) = \varphi(\delta(\alpha(a_0), f)) = \delta'(\varphi(\alpha(a_0)), f) =$$

$$= \delta'(\varphi(\alpha(a_0)), g) = \varphi(\delta(\alpha(a_0), g)) = \varphi(\alpha(\delta(a_0, g))) = \varphi(\alpha(b)),$$

azaz ψ_α B önmagába való egyértelmű leképezése. Minthogy

$$\psi_\alpha(\delta'(\varphi(a), f)) = \psi_\alpha(\varphi(\delta(a, f))) = \varphi(\alpha(\delta(a, f))) =$$

$$= \varphi(\delta(\alpha(a), f)) = \delta'(\varphi(\alpha(a)), f) = \delta'(\psi_\alpha(\varphi(a)), f),$$

azért $\psi_\alpha\in E(B)$. Így az $\alpha\to\psi_\alpha$ leképezés $E(A)$-nak $E(B)$-be való egyértelmű leképezése. Végül a

$$\psi_{\alpha\beta}(\varphi(a)) = \varphi(\alpha\beta(a)) = \varphi(\alpha(\beta(a))) = \psi_\alpha(\varphi(\beta(a))) =$$

$$= \psi_\alpha\psi_\beta(\varphi(a)) \Rightarrow \psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha\psi_\beta \quad (\alpha, \beta\in E(A))$$

számolással nyerjük, hogy az $\alpha\to\psi_\alpha(\alpha\in E(A))$ leképezés homomorfizmus.

Végül néhány eredményt közlünk ciklikus állapot-független kváziautomaták **A**-direkt szorzatával kapcsolatban. Könnyen belátható, hogy kváziautomaták direkt szorzata akkor és csak akkor állapot-független, ha a kváziautomaták maguk is állapot-függetlenek. Sőt állapot-független kváziautomaták **A**-direkt szorzata is állapot-független, azaz állapot-független kváziautomaták **A**-direkt szorzatára csak állapot-független kváziautomata bontható fel (Babcsányi I. [2]). Állapot-független kváziautomaták azonban nemcsak állapot-független kváziautomaták **A**-direkt szorzatára bonthatók fel. Erre vonatkozóan tekintsük a következő példát, ahol a kváziautomatákat állapot-diagramokkal adjuk meg (A. C. Fleck [5], Ch. A. Trauth [8]): Az $F(X)$ bemenő félcsoport az $X=\langle x, y\rangle$ halmaz feletti szabad félcsoport. (Megjegyezzük, hogy a körök az állapotokat szimbolizálják.) Könnyen belátható, hogy **A** félperfekt és $\mathbf{A}\cong\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{A}_2$. Világos azonban, hogy $\mathbf{A}_1$ nem állapot-független. Igaz viszont a

14. Tétel. (Babcsányi I. [2].) *Legyen az* $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ *állapot-független kváziautomata az* $\mathbf{A}_1=(A_1, F, \delta_1)$ *és az* $\mathbf{A}_2=(A_2, F, \delta_2)$ *kváziautomaták* **A**-*direkt szorzata. Ha az* $\mathbf{A}_2$ *kváziautomata teljesíti a*

$$\delta_1(a_1, f) = \delta_1(a_1, g) \quad (a_1\in A_1; f, g\in F) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists_{a_2\in A_2} a_2[\delta_2(a_2, f) = \delta_2(a_2, g)]$$

feltételt, akkor az $\mathbf{A}_1$ *kváziautomata állapot-független.*

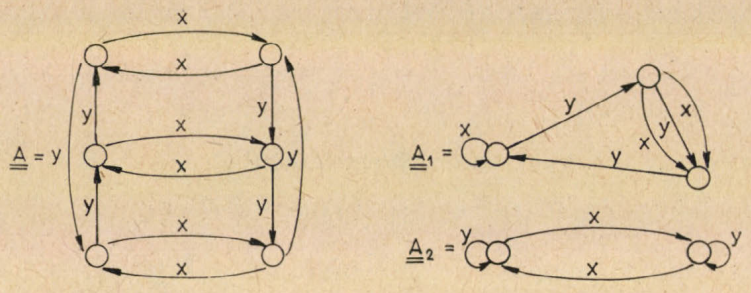
Bizonyítás. Legyenek $a_1(\in A_1), f, g(\in F)$ olyanok, amelyekre $\delta_1(a_1, f)=\delta_1(a_1, g)$ teljesül. A feltétel szerint van olyan $a_2(\in A_2)$ állapot, hogy $\delta_2(a_2, f)=\delta_2(a_2, g)$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\delta((a_1, a_2), f)=\delta((a_1, a_2), g).$$

Legyen most b_1 $\mathbf{A}_1$ egy további állapota. Mivel $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen,

$$\delta((b_1, a_2), f) = \delta((b_1, a_2), g),$$

amiből következik, hogy $\delta_1(b_1, f) = \delta_1(b_1, g)$, azaz $\mathbf{A}_1$ is állapot-független. Q.e.d.



8. Következmény. (Babcsányi I. [2].) *Legyen az* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *állapot-független kváziautomata az* $\mathbf{A}_1 = (A_1, F, \delta_1)$ *és az* $\mathbf{A}_2 = (A_2, F, \delta_2)$ *kváziautomaták A-direkt szorzata. Ha bármely* $f, g (\in F)$ *párra*

$$\exists_{a_1 \in A_1} a_1[\delta_1(a_1, f) = \delta_1(a_1, g)] \Leftrightarrow \exists_{a_2 \in A_2} a_2[\delta_2(a_2, f) = \delta_2(a_2, g)]$$

teljesül, akkor $\mathbf{A}_1$ *és* $\mathbf{A}_2$ *is állapot-független.*

7. Lemma. *Legyenek* $\mathbf{A}_1 = (A_1, F, \delta_1)$ *és* $\mathbf{A}_2 = (A_2, F, \delta_2)$ *tetszőleges kváziautomaták, és* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2 = (A_1 \times A_2, F, \delta)$, *akkor*

$$E(A_1) \otimes E(A_2) \subseteq E(A_1 \times A_2)$$

teljesül.

A. C. Fleck [5] ezt az állítást automorfizmus-csoportokra bizonyította be, de a bizonyítás endomorfizmus-félcsoportok esetén is ugyanúgy végezhető el. Azt, hogy általában az $E(A_1) \otimes E(A_2) = E(A_1 \times A_2)$ egyenlőség nem áll fenn, az előző példa is mutatja (l. A. C. Fleck [5]).

15. Tétel. *Ha az* $\mathbf{A} = (A, F, \delta)$ *ciklikus kváziautomata az* $\mathbf{A}_1 = (A_1, F, \delta_1)$ *és az* $\mathbf{A}_2 = (A_2, F, \delta_2)$ *állapot-független kváziautomaták A-direkt szorzata, akkor*

$$E(A) = E(A_1) \otimes E(A_2).$$

Bizonyítás. A 7. Lemma szerint $E(A_1) \otimes E(A_2) \subseteq E(A)$. Legyen most $\alpha \in E(A)$ és definiáljuk az α_i $(i = 1, 2)$ leképezéseket a következő módon:

$$\alpha_i(a_i) = b_i \ (a_i, b_i \in A_i; \ i = 1, 2), \quad \text{ha} \quad \alpha(a_1, a_2) = (b_1, b_2).$$

Megmutatjuk, hogy α_i az A_i önmagába való egyértelmű leképezése. Rögzítsük az a_1 állapotot, s legyen

$$\alpha(a_1, a_2') = (b_1', b_2') \quad (a_2' \in A_2, b_i' \in A_i).$$

Tekintsük az $\mathbf{A}$ egy (a_0, b_0) generátorelemét. Vannak olyan $f, g (\in F)$ elemek, hogy $\delta((a_0, b_0), f) = (a_1, a_2)$ és $\delta((a_0, b_0), g) = (a_1, a_2')$. Így $a_1 = \delta_1(a_0, f) = \delta_1(a_0, g)$. $\mathbf{A}_1$ állapot-függetlensége miatt

$$\forall_{c_1 \in A_1} c_1[\delta_1(c_1, f) = \delta_1(c_1, g)]$$

teljesül. Legyen $\alpha(a_0, b_0)=(d_1, d_2)$ $(d_i \in A_i)$, akkor

$$(b_1, b_2) = \alpha(a_1, a_2) = \alpha(\delta((a_0, b_0), f)) = \delta(\alpha(a_0, b_0), f) =$$

$$= \delta((d_1, d_2), f) = (\delta_1(d_1, f), \delta_2(d_2, f)),$$

$$(b_1', b_2') = \alpha(a_1, a_2') = \alpha(\delta((a_0, b_0), g)) = \delta(\alpha(a_0, b_0), g) =$$

$$= \delta((d_1, d_2), g) = (\delta_1(d_1, g), \delta_2(d_2, g)).$$

Az előzőek szerint

$$b_1=\delta_1(d_1, f)=\delta_1(d_1, g)=b_1',$$

azaz α_1 egyértelmű. Hasonlóan látható be, hogy α_2 A_2-nek önmagába való egyértelmű leképezése. Ezek után megmutatjuk, hogy α_i homomorfizmus:

$$\alpha(\delta_1(a_1, f), \delta_2(a_2, f)) = \alpha(\delta((a_1, a_2), f)) = \delta(\alpha(a_1, a_2), f) =$$

$$= \delta((b_1, b_2), f) = (\delta_1(b_1, f), \delta_2(b_2, f))$$

$(a_i, b_i \in A_i; f \in F)$, azaz

$$\alpha_i(\delta_i(a_i, f)) = \delta_i(b_i, f) = \delta_i(\alpha_i(a_i), f).$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha_i \in E(A_i)$. Definíció szerint $\alpha(a_1, a_2)=(b_1, b_2)=(\alpha_1, \alpha_2)(a_1, a_2)$ minden (a_1, a_2) állapot-párra, tehát $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2) \in E(A_1) \otimes E(A_2)$. Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei mellett az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ kváziautomaták mindegyike ciklikus állapot-független.

A tétel állítása automorfizmuscsoportokra is igaz. Ha ugyanis $\alpha \in G(A)$, akkor könnyen látható, hogy α_i $(i=1, 2)$ az A_i-nek önmagára való leképezése, ahol $(\alpha_1, \alpha_2)=\alpha$. Továbbá, ha például $\alpha_1(a_1)=\alpha_1(a_1')$ $(a_1, a_1' \in A_1)$, akkor tetszőleges $a_2 (\in A_2)$ állapotra $\alpha(a_1, a_2)=\alpha(a_1', a_2)$ teljesül. Mivel α automorfizmus, így $(a_1, a_2)=(a_1', a_2)$, azaz $a_1=a_1'$, tehát α_1 egy-egyértelmű leképezés. Ugyanígy látható be, hogy α_2 is egy-egyértelmű.

Nyilvánvaló, hogy a tétel $i>2$ esetre is érvényes.

Végül köszönetet mondok PEÁK ISTVÁN kandidátusnak, aki munkámban mindvégig segítségemre volt.

IRODALOM

[1] BABCSÁNYI I., A félperfekt kváziautomatákról, *Matematikai Lapok*, **21** (1970), 95—102.
[2] BABCSÁNYI I., Erősen összefüggő kváziautomaták, *József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete*, Szeged, 1967 (szakdolgozat-kézirat).
[3] W. BRAUER, Some remarks on a paper of G. Feichtinger, *Computing*, **3** (1968), 351—353.
[4] G. FEICHTINGER, Some results on the relation between automata and their automorphism groups, *Computing*, **1** (1966), 327—340.
[5] A. C. FLECK, Preservation of structure by certain classes of functions on automata and related group theoretic properties, *Computer Laboratory, Michigan State University*, 1961 (sokszorosításban).
[6] GÉCSEG F.—PEÁK I., Az automaták algebrai elmélete, *Matematikai Lapok*, XVII (1966), 77—134.
[7] R. H. OEHMKE, On the structures of an automaton and its input semigroup, *J. Assoc. Comp. Machinery*, **10** (1963), 521—525.
[8] CH. A. TRAUTH, Group-type automata, *J. Assoc. Comp. Machinery*, **13** (1966), 170—175.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ, ОТ СОСТОЯНИИ НЕЗАВИСИМЫЕ КВАЗИ-АВТОМАТЫ

ИШТВАН БАБЧАНЬИ

CYCLIC STATE-INDEPENDENT QUASIAUTOMATA

I. BABCSÁNYI

In this paper we verify some properties of cyclic quasiautomata, and in particular we deal with the cyclic state-independent quasiautomata.

We introduce on the state set A of a quasiautomaton $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ the following equivalence relations:

$$a \sim b \Leftrightarrow \underset{f \in F}{\forall} f[\delta(a, f) = \delta(b, f)],$$

$$a \varrho_f b \Leftrightarrow \delta(a, f) = \delta(b, f) \quad (a, b \in A).$$

Let $\bar{a} = \langle b | b \sim a, \ b \in A \rangle$, $a_f = \langle b | b \varrho_f a, b \in A \rangle$, $\bar{A} = \langle \bar{a} | a \in A \rangle$ and $A_f = \langle a_f | a \in A \rangle$. Denote by $E(A)$, $G(A)$ and $\bar{F} = F/\varrho_A$ the semigroup of endomorphisms, the group of automorphisms and the characteristic semigroup of $\mathbf{A}$, respectively. ϱ_A is the Myhill-congruence of $\mathbf{A}$. The set of the generator elements of $\mathbf{A}$ will be denoted by E.

Lemma 1. For each quasiautomaton $\mathbf{A}=(A, F, \delta)$ the quasiautomaton $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{A}, F, \bar{\delta})$, where

$$\bar{\delta}(\bar{a}, f) = \overline{\delta(a, f)} \quad (a \in A, f \in F),$$

is well-defined, and $\bar{\mathbf{A}}$ is the homomorphic image of $\mathbf{A}$.

Lemma 2. If the characteristic semigroup $\bar{F}$ of a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ has a right-identity element, then $\mathbf{A} \cong \bar{\mathbf{A}}$.

Theorem 1. If a quasiautomaton $\mathbf{A}$ is cyclic, then $E(A)$ is isomorphic with a subsemigroup of $E(\bar{A})$.

Theorem 2. If a quasiautomaton $\mathbf{A}$ is cyclic, then the cardinality of the set of endomorphisms of $\mathbf{A}$ onto itself is smaller or equal than $|E|$.

Theorem 4. If a quasiautomaton $\mathbf{A}$ is strongly connected, then $O(E(A)) \leqq \min \{|A_f| \mid f \in F\}$.

We define, moreover, on the input semigroup F of $\mathbf{A}$ a right-congruence relation $\varrho_{A,a}$ for each a by

$$f \equiv g(\delta_{A,a}) \Leftrightarrow \delta(a, f) = \delta(a, g) \quad f, g \in F).$$

If every state-pair $a, b (\in A)$ satisfies the condition $\varrho_{A,a} = \varrho_{A,b}$, then $\mathbf{A}$ is called a *state-independent* quasiautomaton (Ch. A. Trauth [8]).

Lemma 4. If a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then its characteristic semigroup has a left-identity element, and the characteristic semigroup of $\bar{\mathbf{A}}$ is a monoid.

Theorem 6. Every endomorphism of a cyclic state-independent quasiautomaton $\mathbf{A}$ is one-to-one, and $E(A) \cong E(\bar{A})$, $O(E(\bar{A})) = |\bar{A}|$ hold. Furthermore $E(A) = \langle a_{a_0 b} | b \in A \rangle$, where a_0 is a generator element of $\mathbf{A}$ (s. (2) in the proof of Theorem 6.).

Corollary 2. If a quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then the quasiautomaton $\bar{\mathbf{A}}$ is state-independent as well.

Corollary 4. If a quasiautomaton is cyclic, then $O(E(A)) \leqq |\bar{A}|$ hold.

Theorem 7. If a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then

$$\alpha_{a_0 b} \in G(A) \Leftrightarrow b \in E,$$

i.e. $O(G(A)) = |\bar{E}|$.

Corollary 5. Every endomorphism of a strongly connected state-independent quasiautomaton is an automorphism.

The correct version of Theorem 2 of [1] is the following

Theorem 8. Every A-finite cyclic state-independent quasiautomaton is strongly connected.

Theorem 9. If a strongly connected quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then the quasiautomaton $\bar{\mathbf{A}}$ is quasiperfect.

Theorem 10. The endomorphism semigroup $E(A)$ of a cyclic state-independent quasiautomaton $\mathbf{A}$ is isomorphic with a subsemigroup of the characteristic semigroup $\bar{F}$ of $\mathbf{A}$.

Corollary 7. If an A-finite cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then the characteristic group of $\bar{\mathbf{A}}$ is isomorphic with a subgroup of $\bar{F}$.

Theorem 11. If a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then the quasiautomaton $\mathbf{E(A)}=(E(A), \mathrm{F}, \delta')$ with

$$\delta'(\alpha_{a_0 b}, f) = \alpha_{a_0 \delta(b,f)},$$

is well-defined and $\mathbf{E(A)} \cong \bar{\mathbf{A}}$. (Cf. Theorem 6.)

Theorem 12. If a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ is state-independent, then $E(E(A))$ coincides with the semigroup of left translations of $E(A)$, and $E(E(A)) \cong E(A)$.

Theorem 13. If a state-independent quasiautomaton $\mathbf{B}$ is a homomorphic image of a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$, then $E(A)$ can be embedded homomorphically into $E(B)$.

Theorem 14. If the A-direct product of two quasiautomata $\mathbf{A}_1=(A_1, F, \delta_1)$ and $\mathbf{A}_2=(A_2, F, \delta_2)$ is state-independent, and $\mathbf{A}_2$ satisfy the condition

$$\delta_1(a_1, f) = \delta_1(a_1, g) \quad (a_1 \in A_1;\ f, g \in F) \Rightarrow \exists_{a_2 \in A_2} a_2[\delta_2(a_2, f) = \delta_2(a_2, g)],$$

then $\mathbf{A}_1$ is also state-independent.

Theorem 15. If a cyclic quasiautomaton $\mathbf{A}$ is the A-direct product of state-independent quasiautomata $\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n$, then $E(A)=E(A_1)\otimes \ldots \otimes E(A_n)$.

EGY WIENER—LÉVY TÍPUSÚ PROBLÉMÁRÓL

MÁRKI LÁSZLÓ

1. A WIENER—LÉVY-tétel Fourier-integrálokra így szól ([8]; lásd még [7]):

A. TÉTEL: *Legyen* $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$, $\hat{f}(t)$ *az* $f(x)$ *Fourier-transzformáltja. Ha a* $\varphi(z)$ *függvény egyértékű és analitikus egy, a* 0 *pontot és a* $z=\hat{f}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ *görbét magában foglaló tartományban, továbbá* $\varphi(0)=0$, *akkor van olyan* $g(x)\in L_1(-\infty, \infty)$, *hogy* $\hat{g}(t)=\varphi(\hat{f}(t))$.

Problémánk a következő: mi mondható akkor, ha ugyanilyen $\varphi(z)$ mellett az $f(x)$ függvényt $L_1(-\infty, \infty)$ helyett $L_p(-\infty, \infty)$-ből $(p>0)$ vagy annak egy alkalmasan választott alteréből vesszük? (Hasonló kérdésre ad választ Fourier-sorok esetén ALPÁR [1].)

Egyszerű a helyzet, ha $f(x)$-et $L_p(-\infty, \infty)\cap L_1(-\infty, \infty)$-ből választjuk $(p>1)$. A YOUNG-egyenlőtlenség (lásd [3]) szerint ugyanis, ha $g_1(x)\in L_1(-\infty, \infty)$ és $g_2(x)\in L_p(-\infty, \infty)$, $p>1$, akkor $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(t-x)dx\in L_p(-\infty, \infty)$ és $\|g_1 * g_2\|_p \leqq \|g_1\|_1\|g_2\|_p$.

([3] 280. tételéből ezt úgy kapjuk, hogy $\lambda=0$-t és $\mu=\frac{p-1}{p}$-t teszünk — a tétel feltételei között ugyan $\lambda>0$ szerepel, de a bizonyítás λ és μ itt megadott értékeivel is ugyanúgy végezhető.) Ezt fölhasználva a WIENER—LÉVY-tétel [7]-ben szereplő bizonyításával egyező módon kapjuk, hogy ha $f(x)\in L_p(-\infty, \infty)\cap L_1(-\infty, \infty)$ $(p>1)$ és $\varphi(z)$ olyan mint fent, akkor létezik olyan $h(x)\in L_p(-\infty, \infty)$, hogy $\hat{h}(t)=\varphi=(\hat{f}(t))$. A Fourier-transzformáció kölcsönös egyértelműsége miatt ez a $h(x)$ függvény megegyezik a WIENER—LÉVY tételben szereplő $g(x)$-szel. Ez azt jelenti, hogy a WIENER—LÉVY tétel akkor is igaz, ha $L_1(-\infty, \infty)$ helyett mindenütt $L_p(-\infty, \infty)\cap L_1(-\infty, \infty)$-t írunk.

Az az eset érdekes tehát, amikor $f(x)\notin L_1(-\infty, \infty)$, $f(x)\in L_p(-\infty, \infty)$. $f(x)$-nek nem biztos, hogy van Fourier-transzformáltja, ha $p>2$, ezért a problémánkban feltesszük, hogy $1<p\leqq 2$.

2. Most bevezetünk néhány jelölést és elnevezést. A rövidség kedvéért $L_p(-\infty, \infty)$ helyett egyszerűen L_p-t írunk; L_p konjugált tere L_q, azaz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; L_p^* az L_p-beli függvények Fourier-transzformáltjainak a terét jelöli. Ismeretes (lásd pl. [5], 74. tétel), hogy $L_p^*\subset L_q$, ha $1<p\leqq 2$.

Jelölje A függvények egy halmazát. Legyen a $\varphi(z)$ függvény értelmezve egy olyan tartományon, amely tartalmazza a $z=f(t)\in A$ függvény képének a lezárását. Azt mondjuk, hogy $\varphi(z)$ nem vezet ki A-ból, ha minden, a fenti tulajdonságú $z=f(t)\in A$-ra nézve a $\varphi(f(t))$ függvény is A-hoz tartozik.

Szükségünk lesz majd RUNGE tételének a következő általánosítására ([9], 392. o.):

B. TÉTEL: *Legyen G nyílt halmaz, $\infty \notin G$, G páronként diszjunkt, egyszeresen összefüggő, nyílt halmazok uniója; H perfekt, korlátos halmaz, H komplementuma összefüggő, $G \cap H = \emptyset$. Ha $\varphi(z)$, ill. $\psi(z)$ analitikus G-n, ill. H-n, akkor létezik olyan $\{P_k(z)\}$ polinomsorozat, amely G-n $\Phi(z)$-hez, H-n $\Psi(z)$-hez tart, és bármely $F \subset G$ korlátos, zárt halmazt veszünk is, a konvergencia egyenletes $F \cup H$-n.*

3. Problémánk most így fogalmazható: hogyan jellemezhető L_p^*-nak $(1 < p \leqq 2)$ az a részhalmaza, amelyből a 0-ban eltűnő analitikus függvények nem vezetnek ki?

Megmutatjuk, hogy a szóban forgó halmaz teljes egészében L_∞-be esik. $L_p^* \subset L_q$ miatt ehhez elegendő a következő állítást igazolnunk.

1. TÉTEL: *Legyen $p > 0$. Ha $f(x) \notin L_\infty$, akkor létezik olyan $\varphi(z)$ egész függvény, melyre $\varphi(0) = 0$ és $\varphi(f(x)) \notin L_q$.*

Bizonyítás: Ha $f(x)$ nem mérhető függvény, akkor már $\varphi(z) = z$ megfelel a fenti követelménynek. Ezért feltehetjük, hogy $f(x)$ mérhető.

Legyen $E_n = \{x \mid n \leqq |f(x)| \leqq n+1\}$. Az E_n-ek mérhető halmazok, és $f \notin L_\infty$ miatt közülük végtelen sok pozitív mértékű. Így $\{E_{2k} \mid k = 0, 1, \ldots\}$ és $\{E_{2k+1} \mid k = 0, 1, \ldots\}$ közül legalább az egyik végtelen sok nem nullmértékű halmazt tartalmaz — tegyük fel például, hogy végtelen sok páros indexű, pozitív mértékű E_n halmazunk van. Legyen $E_n^+ = \{x \in E_n \mid \operatorname{Im} f(x) \geqq 0\}$ és $E_n^- = \{x \in E_n \mid \operatorname{Im} f(x) \leqq 0\}$; ezek szintén mérhető halmazok.

Jelölje $\lambda(E)$ az E halmaz Lebesgue-mértékét, és legyen

$$D_n = \begin{cases} E_{2n}^+, & \text{ha } \lambda(E_{2n}^+) > 0 \text{ vagy ha } \lambda(E_{2n}) = 0 \\ E_{2n}^-, & \text{ha } \lambda(E_{2n}^+) = 0 \text{ és } \lambda(E_{2n}^-) > 0. \end{cases}$$

A D_n-ek mérhető halmazok, és közülük végtelen sok nem nullmértékű. Jelölje A_n a $\{z \mid 2n \leqq |z| \leqq 2n+1\}$ körgyűrűnek a valós tengely fölötti vagy alatti felét aszerint, hogy a D_n képe melyikbe esik.

Olyan $\varphi(z)$ egész függvényt keresünk, amelyre $\varphi(0) = 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(f(x))|^p dx = \infty$.

$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(f(x))|^p dx \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n} |\varphi(f(x))|^p dx$ miatt ehhez elegendő olyan $\varphi(z)$-t találunk, amelyre $\varphi(0) = 0$ és $\int_{D_n} |\varphi(f(x))|^p dx \geqq 1$ végtelen sok n esetén. Az utóbbi feltétel teljesül, ha minden $z \in A_n$-re $|\varphi(z)| \geqq k_n$, ahol $k_n = 0$, ha $\lambda(D_n) = 0$, és $k_n = \left(\frac{1}{\lambda(D_n)}\right)^{1/p}$, ha $\lambda(D_n) > 0$.

Most megadunk egy olyan $\varphi(z)$ egész függvényt, amelyre $\varphi(0) = 0$ és $|\varphi(z)| \geqq k_n$, ha $z \in A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Legyen a B. Tételben $H = B_n = \{z \mid |z| \leqq 2n-1\}$, G egy A_n-t tartalmazó, $A_{n-1} \cup A_{n+1}$-et nem metsző összefüggő nyílt halmaz, $F = A_n$; legyen továbbá $\Psi(z) = \psi_n(z) = 0$ és $\Phi(z) = \varphi_n(z) = k_n + 3c + M_n$, ahol $c > 0$ tetszőleges (rögzített) szám, az $M_n \geqq 0$ számokat pedig a későbbiekben fogjuk meghatározni. A B. Tétel állítása szerint létezik olyan $\tilde{P}_n(z)$ polinom, hogy

$$|\tilde{P}_n(z) - \varphi_n(z)| \leqq \frac{c}{2^n} < c, \quad \text{ha } z \in A_n$$

és

$$|\tilde{P}_n(z)-\psi_n(z)| \leqq \frac{c}{2^n}<c, \text{ ha } z\in B_n.$$

Legyen $P_n(z)=\tilde{P}_n(z)\tilde{P}-_n(0)$; akkor

$$|P_n(z)| \geqq k_n+c+M_n, \text{ ha } z\in A_n, \text{ és } |P_n(z)| \leqq \frac{2c}{2^n}, \text{ ha } z\in B_n.$$

Minden egyes z pont elég nagy n-ekre a B_n halmazba esik, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$ az egész síkban abszolút konvergens. — $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$ tehát egész függvény, és minthogy minden n-re $P_n(0)=0$, azért $\varphi(0)=0$. Most megadjuk az M_n konstansokat: legyen $M_1=0$, $n\geqq 2$-re pedig legyen $M_n=\max_{z\in A_n}\sum_{k=1}^{n-1}|P_k(z)|$. Ekkor $z\in A_n$ esetén

$$|P_n(z)| \geqq k_n+c+M_n, \quad \sum_{k=n+1}^{n-1}|P_k(z)| \leqq c, \quad \sum_{k=1}^{n-1}|P_k(z)| \leqq M_n,$$

így

$$|\varphi(z)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty} P_k(z)\right| \geqq |P_n(z)|-\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}|P_k(z)| \geqq k_n,$$

q.e.d.

Ha tehát azt akarjuk, hogy L_p^* egy részhalmazából a 0-ban eltűnő analitikus függvények ne vezessenek ki, akkor ezt a halmazt $L_p^*\cap L_\infty$-ből kell választanunk. $p=1$ és 2-re ez a feltétel elegendő is: $p=1$-re $L_1^*\subset L_\infty$ és a WIENER—LÉVY tétel szerint, $p=2$-re $L_2^*=L_2$ és az alábbi állítás miatt.

2. TÉTEL: *Legyen $p>0$. A 0-ban eltűnő analitikus függvények nem vezetnek ki $L_p\cap L_\infty$-ből.*

Bizonyítás: Legyen $f(x)\in L_p$, a $\varphi(z)$ függvény analitikus az f képe körül, $\varphi(0)=0$. $\varphi(z)$ analitikus a 0-ban, $\varphi(0)=0$, így a Schwarz-lemma szerint a 0 valamilyen ϱ sugarú környezetében $|\varphi(z)|\leqq c|z|$, $c>0$ konstans. $f(x)\in L_\infty$, $\varphi(z)$ analitikus az f képe körül, ezért $\varphi(z)$ majdnem mindenütt korlátos az f képén: $|\varphi(f(x))|\leqq M$ m.m. Eszerint $\varphi(f(x))\in L_\infty$, másrészt viszont ha

$$E_\varrho=\{x\,|\,|f(x)|<\varrho\}, \quad F_\varrho=\{x\,|\,|f(x)|\geqq\varrho\},$$

akkor $\lambda(F_\varrho)<\infty$ és

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(f(x))|^p dx=\int_{E_\varrho}|\varphi(f(x))|^p dx+\int_{F_\varrho}|\varphi(f(x))|^p dx \leqq c\int_{E_\varrho}|f(x)|^p dx+M\lambda(F_\varrho)<\infty,$$

tehát $\varphi(f(x))\in L_p$.

A bizonyításban $\varphi(z)$ analiticitásából csak annyit használtunk ki, hogy a 0 egy környezetében $\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right|$ korlátos (azaz $\varphi(z)$ a 0-ban eleget tesz az 1 kitevős Lipschitz-feltételnek), másutt pedig $\varphi(z)$ majdnem mindenütt korlátos. Ebből és az 1. Tételből következik a

3. TÉTEL: *Ha $L_2^*=L_2$ egy részhalmazából a 0-ban eltűnő analitikus függvények nem vezetnek ki, akkor a 0-ban eltűnő, 0-ban az 1 kitevős Lipschitz-feltételnek eleget tevő, m.m. korlátos függvények sem vezetnek ki belőle.*

Igaz-e $1<p<2$-re is az, hogy a 0-ban eltűnő analitikus függvények nem vezetnek ki $L_p^* \cap L_\infty$-ből? Nem tudjuk. Azt sem tudjuk, hogy a hatványfüggvények (vagy akár a négyzetfüggvény) nem vezetnek-e már ki belőle. Más szóval: zárt-e a majdnem mindenütt korlátos Fourier-transzformálttal rendelkező L_p-függvények tere a konvolúció-hatványok képzésére, ha $1<p<2$? Az ismeretes (lásd pl. [6]), hogy $p>1$ esetén L_p konvolúcióra nem zárt; ez azonban még nem döntő, amint az a $p=2$ esetből is látszik.

Végül ha azt tudnánk, hogy $\hat{f}(t) \in L_p^* \cap L_\infty$ esetén $\varphi(\hat{f}(t))$ (ami a 2. Tétel szerint $L_q \cap L_\infty$-ben van) szintén Fourier-transzformált, ez még mindig nem lenne elég, ugyanis sok, nem L_p-be tartozó függvény Fourier-transzformáltja esik L_q-ba (lásd [4]). Ilyen függvény például

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x \log x)^{1/p}} & x \geqq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}; \quad f(x) \notin L_p, \quad \text{de}$$

$$|f(x)| q_x q^{-2} = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\log x)^{1/(p-1)}} & x \geqq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases},$$

$|f(x)|^q x^{q-2} \in L_1$, így HARDY és LITTLEWOOD egy tétele ([2], 14. tétel) szerint $\hat{f}(t) \in L_q$.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] L. ALPÁR: Généralisation d'un théorème de Wiener et de Lévy, *Acta Math. Acad. Sci. Hung* 21 (1970), 11—19.

[2] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants, *Math. Ann.* 97 (1926), 159—209.

[3] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA: *Inequalities*, University Press, Cambridge, 1959.

[4] H. LAI: Category of $L^1(G) \cap L^p(G)$ in $A^q(G)$, *Proc. Japan Acad.* 45 (1969), 577—581.

[5] E. C. TITCHMARSH: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, Oxford, 1937.

[6] W. ŻELAZKO: On the algebras L_p of locally compact groups, *Colloq. Math.* 8 (1961), 115—120.

[7] Н. И. Ахиезер: *Лекции по теории аппроксимации*, изд. 2. Наука, Москва, 1965.

[8] В. А. Диткин: Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах, *Учен. Зап. Моск. Гос. Унив. Матем.* 30 (1939), 83—130.

[9] А. И. Маркушевич: *Теория аналитических функций* I., изд. 2. Наука, Москва, 1967.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТИПА ВИНЕРА—ЛЕВИ

Л. МАРКИ

В статье по ставится следующая проблема: характеризировать подмножество пространства $L_p(-\infty, \infty)$ $(1<p\leqq 2)$ для которого утверждение теоремы Винера—Леви справедлива. Доказываются некоротые частные результаты.

SUR UN PROBLÈME DU TYPE WIENER—LÉVY

L. MÁRKI

Il est posé le problème suivant: caractériser la partie de l'espace $L_p(-\infty, \infty)$ $(1<p\leqq 2)$, pour laquelle le théorème de Wiener—Lévy reste valable. Des résultats partiels sont montrés.

SZÁMALAKZATOK A BELL-SZÁMOKRA ÉS A MÁSODFAJÚ STIRLING-SZÁMOKRA

SZŐKE LÁSZLÓ

BEVEZETÉS

E dolgozatban a véges halmazok particióival foglalkozunk. Mivel szükségünk lesz minden lehetséges véges halmaz particióira, bevezetjük a FINIT partició fogalmát.

Mint ismeretes, egy X halmaz *particiójának* e halmaz olyan diszjunkt részhalmazainak osztályát nevezik, melyek uniója az X halmaz. E részhalmazokat nevezik a partició *atomjainak*. Ha az $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ megszámlálható halmaz partíciója végesszámú atomból áll, és valamely elemtől kezdve X minden eleme egyetlen atomban van, akkor a particiót *finit partíciónak* fogjuk nevezni. Az X halmaz összes finit partíciójának rendszerét $\Phi=\Phi(X)$ fogja jelölni, magukat a finit partíciókat pedig φ, különféle indexekkel ellátva.

Legyen φ az X halmaz finit partíciója. Azt az atomot, amely végtelen sok elemet tartalmaz, a $\mathfrak{B}_\infty$ szimbólummal fogjuk jelölni.

E dolgozatban az inklúzió megszokott $\subset$ jele helyett a $\rightarrow$ jelet fogjuk alkalmazni. Tehát $A \subset B$ helyett $A \rightarrow B$-t fogunk írni.

Adjunk meg a Φ rendszerben bizonyos $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \Phi_n \rightarrow \ldots$ részrendszereket. A Φ_n rendszerbe azok és csak azok a finit partíciók tartoznak, amelyekben x_n-től kezdve minden elem egyetlen atomba kerül, vagyis $\varphi \in \Phi_n$ akkor és csak akkor, ha a teljes $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ halmaz benne van φ valamelyik atomjában.

Ha minden Φ_n-be tartozó finit partícióból eltávolítjuk az összes elemet x_{n+1}-től kezdve, akkor az $X_n=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ véges halmaz particióinak teljes rendszerét, $\Pi(X_n)$-et kapjuk, tehát fennáll a

$$\Phi_n \leftrightarrow \Pi(X_n)$$

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

A Φ_n rendszer felosztható $\Phi_{n,k}$, $1 \leqq k \leqq n$; részrendszerekre. $\Phi_{n,k}$-ba soroljuk az összes Φ_n-be tartozó k-atomú finit particiót:

$$\Phi_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Phi_{n,k}.$$

Ha minden $\Phi_{n,k}$-ba tartozó finit partícióból eltávolítjuk az összes elemet x_{n+1}-től kezdve, akkor az X_n halmaz k-atomú particióinak teljes rendszerét, $\Pi_k(X_n)$-et kapjuk. Fennáll a

$$\Phi_{n,k} \leftrightarrow \Pi_k(X_n)$$

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

A Φ_n rendszerbe tartozó összes finit partició számát *Bell-számnak* nevezzük, és B_n-nel jelöljük. Az X halmaz összes Φ_n-be tartozó, k-atomú finit particióinak számát, azaz a $\Phi_{n,k}$-ba tartozó osztályok számát *másodfajú Stirling-számnak* nevezzük, és $S_{n,k}$-val jelöljük.

A továbbiakban $|A|$ szimbólummal fogjuk jelölni az A halmazba tartozó elemek, vagy az A osztályba tartozó halmazok, vagy pedig az A rendszerbe tartozó osztályok számát. Ily módon

$$B_n = |\Phi_n| = \sum_{k=1}^{n} |\Phi_{n,k}| = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}. \tag{1}$$

E dolgozatban kombinatorikai értelmezést adunk egy egyszerű számháromszögnek* (l. 309. old.), melynek segítségével a B_n számok könnyen megtalálhatók, hasonló elven felépítünk a másodfajú Stirling-számokra egy számpiramist (l. 311. old.), mely ugyancsak lehetővé teszi e számok könnyű kiszámolását.

1°. A BELL-SZÁMOK SZÁMHÁROMSZÖGE

Legyen A az X halmaz valamely részhalmaza. A Φ_n-be tartozó finit particiók közül azok rendszerét, melyekben $A \cap \mathcal{B}_\infty = \emptyset$, jelölje $\Phi_n(A)$, e particiók számát pedig $Q_{n,i} = |\Phi_n(A)|$, $i = |A|$.

Említést érdemel a $\Phi_n(A)$ rendszer négy tulajdonsága:

1. Ha $A = \emptyset$, akkor $\Phi_n(A)$ nem más, mint Φ_n, s ezért

$$|\Phi_n(\emptyset)| = B_n. \tag{2}$$

2. Legyen $A = X_{n-1}$. A $\Phi_n(X_{n-1})$ rendszerbe tartozó finit particiókat megkaphatjuk, ha X_{n-1} minden particióját kiegészítjük a $\mathcal{B}_\infty$ atommal. Akkor viszont a $\Phi_n(X_{n-1})$ és a $\Phi_{n-1} = \Phi_{n-1}(\emptyset)$ rendszer között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn:

$$\Phi_{n-1}(\emptyset) \leftrightarrow \Phi_n(X_{n-1}),$$

mivel $\Phi_{n-1}(\emptyset)$ bármely elemét megkaphatjuk úgy, hogy a megfelelő, $\Phi_n(X_{n-1})$-be tartozó finit partícióban az x_{n-1}-et tartalmazó atomot és a $\mathcal{B}_\infty$-t egyetlen atomnak tekintjük. Ebből következik, hogy

$$|\Phi_n(X_{n-1})| = B_{n-1}. \tag{3}$$

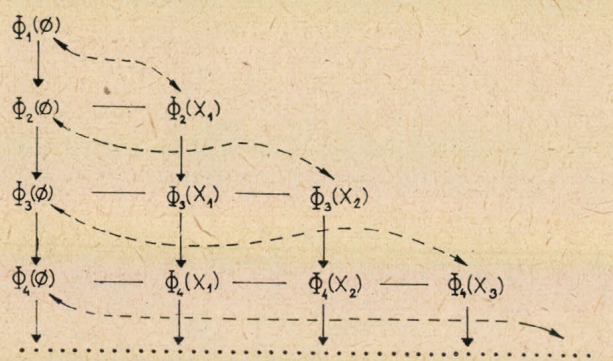
3. Legyen $A = A_1 \cup A_2$. Fennáll a következő egyenlőség:

$$\Phi_n(A_1 \cup A_2) = \Phi_n(A_1) \cap \Phi_n(A_2). \tag{4}$$

Ebből következik, hogy növekvő A esetén $\Phi_n(A)$ monoton csökken:

$$\Phi_n(\emptyset) \leftarrow \Phi_n(X_1) \leftarrow \Phi_n(X_2) \leftarrow \cdots \leftarrow \Phi_n(X_i) \leftarrow \cdots \leftarrow \Phi_n(X_{n-1}). \tag{5}$$

Ily módon a Φ rendszer egymásba zárt részrendszereit kaptuk meg:



(6)

* A B_n számok számháromszögét algebrai meggondolások alapján találták meg 1962-ben [2].

A (6) vázlat a szaggatott nyilak nélkül természetesen kommutatív, mivel minden folytonos nyíl egyszerűen inklúziót jelent. A szaggatott nyilakkal a 2.-ben leírt bijekciót ábrázoltuk.

4. Tekintsük a $\Phi_n(X_i)\setminus\Phi_n(X_{i+1})$ differenciarendszert. E differenciarendszerbe és a $\Phi_{n-1}(X_i)$ rendszerbe tartozó finit particiók között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn, ugyanis a $\Phi_n(X_i)\setminus\Phi_n(X_{i+1})$-be tartozó finit particiókat megkaphatjuk, ha a megfelelő, $\Phi_{n-1}(X_i)$-be tartozó finit particiókban felcseréljük egymással az x_{i+1} és az x_{n-1} elemet. E bijekció létezéséből következik, hogy

$$|\Phi_n(X_i)| = |\Phi_{n-1}(X_i)| + |\Phi_n(X_{i+1})|. \tag{7}$$

Képezzünk most egy számháromszöget, két egyszerű művelet felhasználásával: a) a soronkövetkező hely fölött és a tőle jobbra álló két szám összegzése, b) a kész sor bal szélső számának átvitele a következő sor jobb szélére:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & ; & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & ; & 2 & 1 & ; & 2 & 1 & ; & 2 & 1 & ; & 2 & 1 & ; & \dots \\ & & & & & & & 2 & & 3 & 2 & & 5 & 3 & 2 & \end{array}$$

Ily módon a következő számháromszöget kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 5 & 3 & 2 & & & & \\ 15 & 10 & 7 & 5 & & & \\ 52 & 37 & 27 & 20 & 15 & & \\ 203 & 151 & 114 & 87 & 67 & 52 & \\ 877 & 674 & 523 & 409 & 322 & 255 & 203 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{8}$$

TÉTEL: *A* (8) *számháromszög azonos a* $Q_{n,i}$ *számokból épített háromszöggel:*

$$\begin{array}{ccccc} Q_{1,0} & & & & \\ Q_{2,0} & Q_{2,1} & & & \\ Q_{3,0} & Q_{3,1} & Q_{3,2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ Q_{n,0} & Q_{n,1} & \cdots & Q_{n,i} & \cdots Q_{n,n-1} \end{array} \tag{9}$$

A $Q_{1,0}, Q_{2,1}, \dots, Q_{n,n-1}$ *számok azonosak a* $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ *Bell-számokkal, a* $Q_{1,0}, Q_{2,0}, \dots, Q_{n,0}$ *számok azonosak a* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *Bell-számokkal.*

Bizonyítás: Tekintsük az (5) sorozatot. E rendszerek elemszámára az 1. és a 2. tulajdonság értelmében kapjuk a

$$Q_{n,0}=B_n, Q_{n,1}, Q_{n,2}, \dots, Q_{n,i}, \dots, Q_{n,n-1}=B_{n-1} \tag{10}$$

számsorozatot. A 4. tulajdonság értelmében pedig

$$Q_{n,i} = Q_{n-1,i}+Q_{n,i+1}, \tag{11}$$

ahol $0 \leqq i \leqq n-1$.

A SZÁMHÁROMSZÖG KÖVETKEZMÉNYE. Könnyen belátható, hogy a $Q_{n,i}$ számok és a Bell-számok kapcsolatát a következő formula adja meg:

$$Q_{n,i} = \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} B_{n-j-1}. \tag{12}$$

Valóban, legyen benne a $\mathcal{B}_\infty$ atomban az $\{x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}\}$ halmaznak j eleme. Ezt a j elemet $\binom{n-i-1}{j}$-féleképpen választhatjuk ki. Bárhogyan történik is a kiválasztás, mindig megadható az X halmaznak olyan önmagára való egy-egyértelmű leképezése, amely a $\mathcal{B}_\infty$ atomban e j elemet tartalmazó finit partíciók rendszerét a $\Phi_{n-j}(X_{n-j-1})$ rendszerré alakítja át, amely kölcsönösen egyértelműen megfelel a $\Phi_{n-j-1}(\emptyset)$ rendszernek. Más szavakkal, a j elem kiválasztása után a többi $n-j-1$ elem B_{n-j-1}-féleképpen alkothat partíciót.

Ha $i=0$, akkor (12) a Bell-számok rekurzív összefüggését adja:

$$B_{n+1} = Q_{n+1,0} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}. \tag{13}$$

2°. A MÁSODFAJÚ STIRLING-SZÁMOK SZÁMPIRAMISA

A Φ_n rendszerben előforduló összes k-atomú finit partíció rendszerét $\Phi_{n,k}$-va jelöltük, s így $|\Phi_{n,k}| = S_{n,k}$.

Jelöljük $\Phi_{n,k}(A)$-val a $\Phi_n(A)$ rendszerben előforduló összes k-atomú finit partíció rendszerét. E rendszer elemeinek számát jelölje $Q^k_{n,i} = |\Phi_{n,k}(A)|$, $i=|A|$. Természetesen, a $\Phi_{n,k}(A)$ rendszer üres, ha $k>n$, vagy $i > n-1$. Rögzített k esetén pedig 1., 2., 3. és 4. a $\Phi_{n,k}(A)$ rendszerre — csekély változtatásokkal — szintén érvényes.

1. Ha $A=\emptyset$, akkor $\Phi_{n,k}(A)$ nem más, mint $\Phi_{n,k}$, ezért

$$|\Phi_{n,k}(\emptyset)| = S_{n,k}. \tag{14}$$

2. Legyen $A=X_{n-1}$. Ha a $\Phi_{n,k}(X_{n-1})$ rendszerbe tartozó finit partíciókban az x_{n-1} elemet tartalmazó atomot és a $\mathcal{B}_\infty$-t egyetlen atomnak tekintjük, akkor egyértelműen megkapjuk a $\Phi_{n-1,k-1}$ rendszerbe tartozó partíciókat. Így tehát fennáll a következő egy-egyértelmű megfeleltetés:

$$\Phi_{n-1,k-1}(\emptyset) \leftrightarrow \Phi_{n,k}(X_{n-1}), \tag{15}$$

és ezért

$$|\Phi_{n,k}(X_{n-1})| = S_{n-1,k-1}. \tag{16}$$

3. Igaz a

$$\Phi_{n,k}(A_1 \cup A_2) = \Phi_{n,k}(A_1) \cap \Phi_{n,k}(A_2) \tag{17}$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy növekvő A-ra a $\Phi_{n,k}(A)$ rendszer szintén monoton csökken:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,k}(\emptyset) \leftarrow \Phi_{n,k}(X_1) \leftarrow \Phi_{n,k}(X_2) \leftarrow \ldots \\ \ldots \leftarrow \Phi_{n,k}(X_i) \leftarrow \ldots \leftarrow \Phi_{n,k}(X_{n-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

Ily módon a Φ rendszerben k-atomú finit partíciók egymásba zárt részrendszereit kaptuk:

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{k,k}(\emptyset) & \leftarrow & \Phi_{k,k}(X_1) & \leftarrow \cdots \leftarrow & \Phi_{k,k}(X_{k-1}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Phi_{k+1,k}(\emptyset) & \leftarrow & \Phi_{k+1,k}(X_1) & \leftarrow \cdots & \cdots \leftarrow & \Phi_{k+1,k}(X_k) & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Phi_{k+2,k}(\emptyset) & \leftarrow & \Phi_{k+2,k}(X_1) & \leftarrow \cdots & \cdots \leftarrow & \Phi_{k+2,k}(X_{k+1}) & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \end{array} \tag{19}$$

Fent ábrázoltuk az összes $\Phi_{n,k}(A)$ rendszer egymásba záródásának (6)-tal analóg vázlatát. Ez a vázlat szintén kommutatív. A szaggatott nyilak a (15) bijekciók közül mutatnak meg néhányat.

4. Tekintsük a $\Phi_{n,k}(X_i) \setminus \Phi_{n,k}(X_{i+1})$ differenciarendszert. E differenciarendszerbe és a $\Phi_{n-1,k}(X_i)$ rendszerbe tartozó finit partíciók között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn, ugyanis a szóban forgó differenciába tartozó finit partíciók bármelyikét megkaphatjuk úgy, hogy a megfelelő, $\Phi_{n-1,k}(X_i)$-be tartozó finit partícióban felcseréljük egymással az x_{i+1} és az x_{n-1} elemet. Ebből következik, hogy

$$|\Phi_{n,k}(X_i)| = |\Phi_{n-1,k}(X_i)| + |\Phi_{n,k}(X_{i+1})|. \tag{20}$$

E tulajdonságok mellett a $\Phi_{n,k}(A)$ rendszerre még egy ötödik is érvényes.

5. Legyen $n=k$. A $\Phi_{n,n}(A)$ rendszer bármilyen $\emptyset \subseteq A \subseteq X_{n-1}$ esetén egy és ugyanazon finit partícióból áll, amelyben minden atom a $\mathfrak{B}_\infty$ kivételével csupán egy elemet tartalmaz. Ezért, ha $0 \leqq i \leqq n-1$, akkor

$$|\Phi_{n,n}(X_i)| = 1. \tag{21}$$

Képezzünk most egy számtrapézt a következő elv szerint: rögzítsük k értékét, és írjunk le $k-1$ darab egyest: 1 1 1 ... 1, majd e sorozat jobb szélétől kezdve írjuk le felülről lefele az $S_{n,k-1}$ számok sorozatát, minden következő számot egy hellyel jobbra csúsztatva:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & S_{k-1,k-1} & \\ & & & & & S_{k,k-1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & S_{n,k-1} & \end{array} \tag{22}$$

végezetül töltsük be a táblázatot, minden helyre a fölötte és a tőle jobbra álló számok összegét írva.

Tétel: *A (22) számtrapéz azonos a $Q^k_{n,i}$ számokból építhető táblázattal:*

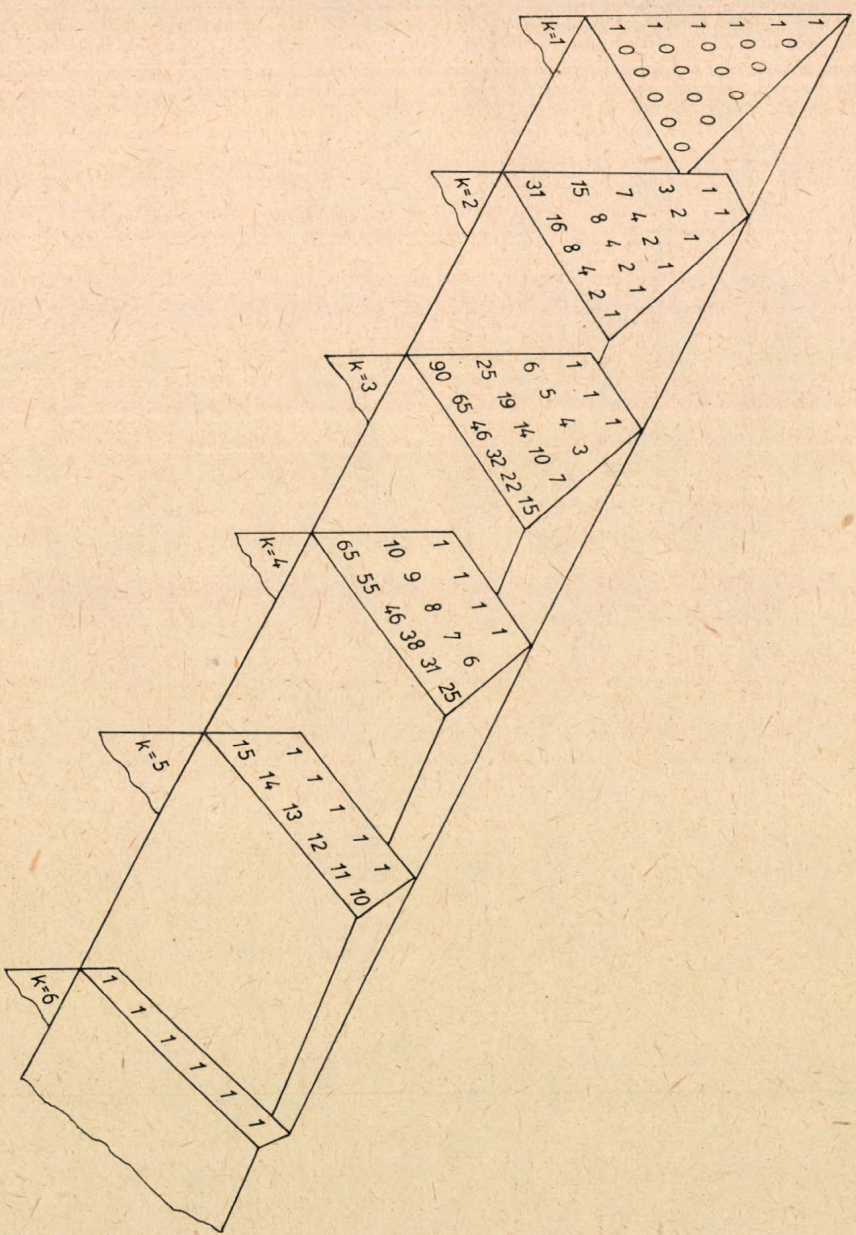
$$\begin{array}{l} Q^k_{k,0} \quad Q^k_{k,1} \quad \cdots \quad Q^k_{k,k-1} \\ Q^k_{k+1,0} \quad Q^k_{k+1,1} \cdots Q^k_{k+1,k-1} \quad Q^k_{k+1,k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q^k_{n,0} \cdots\cdots Q^k_{n,i} \cdots\cdots Q^k_{n,n-1} \end{array} \tag{23}$$

A $Q^k_{k,k-1}, Q^k_{k+1,k}, \ldots, Q^k_{n,n-1}$ számok azonosak az $S_{k-1,k-1}, S_{k,k-1}, \ldots, S_{n-1,k-1}$ másodfajú Stirling-számokkal. A $Q^k_{k,0}, Q^k_{k+1,0}, \ldots, Q^k_{n,0}$ számok azonosak az $S_{k,k}, S_{k+1,k}, \ldots, S_{n,k}$ másodfajú Stirling-számokkal.

Bizonyítás: Mivel (21) igaz, a (23) trapéz felső sorában csupa egyesek állnak. Mivel fennáll (16), (23) jobb szélső számai másodfajú Stirling-számok rögzített k-val ($k \leqq n-1$). A (23) trapézt (20) következtében a fent leírt sorozatos összegezéssel kell betölteni. S végül, (14) értelmében a bal szélső oszlopban az $S_{n,k}$ másodfajú Stirling-számokat kapjuk eredményül, ahol k rögzített, és $k \leqq n$.

A $Q^k_{n,i}$ számokra $k=1, 2, \ldots$ mellett felépített számtrapézokból számpiramist állíthatunk össze (l. 313. old.). A számpiramisban a trapézok függőlegesen felállítva sorakoznak egymás mellett, a bennük levő sorok horizontális szinteket alkot-

nak. A számpiramis két művelet alapján épül fel: a) összegzés a trapézokon belül, b) számátmásolás a k-adik trapéz n-edik sorának bal szélső helyéről a $k+1$-edik trapéz $n+1$-edik sorának jobb szélső helyére. Kezdőfeltételként a piramis csúcsában 1 áll. A számtrapézok szuperpozíciója a Bell-számok számháromszögét adja.



A SZÁMPIRAMIS KÖVETKEZMÉNYE. Könnyen belátható, hogy a $Q^k_{n,i}$ számok kapcsolatát a másodfajú Stirling-számokkal a következő formula fejezi ki:

$$Q^k_{n,i} = \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} S_{n-j-1,k-1}. \tag{24}$$

Valóban, a $\Phi_{n,k}(X_i)$ rendszert feloszthatjuk részrendszereire attól függően, hogy a $\mathcal{B}_\infty$ atom az $\{x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}\}$ halmaz mely elemeit tartalmazza. Ezen elemek száma legyen j. Nyilvánvaló, hogy $\binom{n-i-1}{j}$-féleképpen választhatjuk ki őket. Bármely kiválasztott j elem esetén található az X halmaz olyan önmagára való, egy-egyértelmű leképezése, amely a $\mathcal{B}_\infty$ atomban ezt a j elemet tartalmazó, k-atomú finit particiók rendszerét a $\Phi_{n-j,k}(X_{n-j-1})$ rendszerré alakítja át, amely (15) értelmében kölcsönösen egyértelműen megfelel a $\Phi_{n-j-1,k-1}(\emptyset)$ rendszernek.

A $Q_{n,i}$ és a $Q^k_{n,i}$ számok meghatározásából következik, hogy $Q_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} Q^k_{n,i}$. (Innen, ha $i=0$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$.)

Behelyettesítve (24)-et kapjuk, hogy

$$Q_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} Q^k_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} S_{n-j-1,k-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} \sum_{k=1}^{n} S_{n-j-1,k-1} =$$

mivel $S_{n-j-1,0}=0$,

$$= \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} B_{n-j-1},$$

azaz, ily módon (12)-t nyerjük.

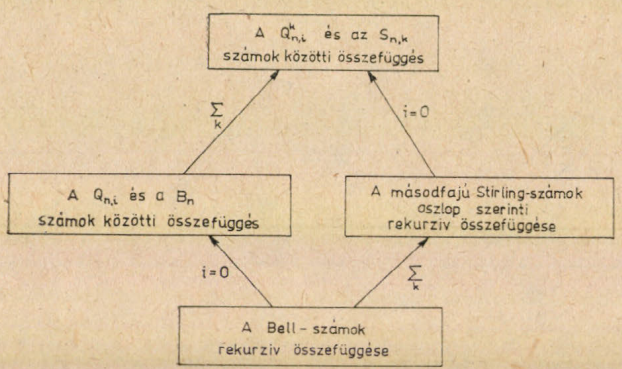
Ha pedig (24)-be $i=0$-t helyettesítünk be, akkor

$$S_{n,k} = Q^k_{n,0} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S_{n-j-1,k-1}. \tag{25}$$

Ez a másodfajú Stirling-számok „oszlop szerinti" rekurzív összefüggése, amely bonyolultabb, mint az ismert „sor szerinti" rekurzív összefüggés:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}. \tag{26}$$

Az alábbi vázlat a (12), (13), (24) és (25) közötti kapcsolatot mutatja:



A Φ_n-be tartozó finit particiók $Q_{n,i}$ elemszámú rendszerének többféle meghatározása lehetséges. Cikkünkben ez a $\Phi_n(A)=\Phi_n(A\cap\mathcal{B}_\infty=\emptyset)$ rendszer, amit az $A\cap\mathcal{B}_\infty=\emptyset$ egyenlőség definiál.

Legáltalánosabban a következőképpen határozhatjuk meg a szóban forgó rendszert: Legyen P az X halmaz elemeiből alkotható összes $p=\{x_s, x_t\}$, $s<t$; pár halmaza.

Ha egy φ finit partició egyetlen atomja sem tartalmaz egy p párt, akkor azt mondjuk, hogy φ-re érvényes a p korlátozás.

Legyen P' tetszőleges részhalmaza P-nek. Jelöljük $\Phi_n(P', i)$-vel azon Φ_n-be tartozó finit particiók rendszerét, melyekre a P'-ből i darab korlátozás érvényes.

A P halmazban bizonyos $P_1\subset P_2\subset\ldots\subset P_n\subset\ldots$ részhalmazokat választunk ki, P_n-be sorolva P azon elemeit, amelyekre $s\leqq n$. Meg lehet mutatni, hogy

$$Q_{n,i}=|\Phi_n(P_n, i)|. \tag{27}$$

$\Phi_n(P_n, i)$ meghatározása általánosabb, mint a $\Phi_n(A)$ rendszeré, ugyanis az $A\cap\mathcal{B}_\infty=\emptyset$ egyenlőség olyan i korlátozást jelent a P_n-ből $|A|=i$ esetén, amelyekre $t>n$.

A $\Phi_n(P_n, i)$ rendszerbe tartozó k-atomú finit particiók rendszere, a $\Phi_{n,k}(P_n, i)$ rendszer, hasonló meggondolások alapján a másodfajú Stirling-számok számpiramisának ad kombinatorikai értelmezést.

A cikk a Moszkvai Energetikai Intézet Felső Matematika Speckollégiumok Tanszéke mellett készült. A szerző köszönetét fejezi ki F. V. Sirokovnak, állandó segítségéért és értékes tanácsaiért.

IRODALOM

[1] Rényi Alfréd: Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisban I—II. A Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közleményei, 16, 1966.

[2] Martin Cohn, Shiman Even, Karl Menger, Jr., and Philip K. Hooper: On the number of partitionings of a set of n distinct objects, Amer. Math. Monthly, 69, (1962), 782—785.

[3] Gian-Carlo Rota: The number of partitions of a set, Amer. Math. Monthly, 71, (1964), 498—503.

ЧИСЛОВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ДЛЯ ЧИСЕЛ БЕЛЛА И ДЛЯ ЧИСЕЛ СТРИРЛИНГА ВТСРОГО РОДА

Л. СЁКЕ

В статье рассматриваются разбиения конечных множеств. Вводится понятие финитного разбиения φ счетного множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, то есть, разбиения, содержащего конечное число атомов, среди которых только один содержит бесконечное количество элементов множества X. Множество всех финитных разбиений обозначено через Φ. Φ_n — это множество тех $\varphi\in\Phi$, в которых $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ лежит целиком в одном атоме, обозначенном через $\mathcal{B}_\infty$.

Рассматривая некоторое конечное подмножество $A\subset X$, можно выделить в Φ_n множество $\Phi_n(A)$ тех финитных разбиений, в которых $A\cap\mathcal{B}_\infty=\emptyset$. Оказывается, что если число $Q_{n,i}$ есть мощность множества $\Phi_n(A)$, $i=|A|$; то таблица чисел $Q_{n,i}$ совпадает с известным числовым треугольником ([2]) для чисел Белла. С помощью множества $\Phi_{n,k}(A)$ k-атомных финитных разбиений, принадлежащих множеству $\Phi_n(A)$, для чисел Стирлинга второго рода строится числовая пирамида, аналогичная числовому треугольнику. Множества $\Phi_n(A)$ и $\Phi_{n,k}(A)$ дают комбинаторное обоснование этим числовым фигурам.

Статья была написана при Кафедре Спецкурсов высшей математики Московского Энергетического Института. Автор благодарит Ф. В. Широкова за постоянную помощь и полезные обсуждения.

NUMBER-CONFIGURATIONS FOR BELL-NUMBERS AND STIRLING-NUMBERS OF THE SECOND KIND

L. SZŐKE

In this paper the partitions of the finite sets are considered. We introduce the notion of the finite partition φ of the countable set $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, i.e. the partition containing the finite number of atoms, among which only one atom contains the infinite number of points of the set X. The set of all finite partitions is denoted by Φ. Φ_n is the set of all $\varphi \in \Phi$ in which the set $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ is contained in one atom, the atom is denoted by $\mathscr{B}_\infty$.

Considering a finite subset $A \subset X$ one can select in Φ_n the set $\Phi_n(A)$ of all finite partitions satisfying the condition $A \cap \mathscr{B}_\infty = \emptyset$. Let $Q_{n,i}$ be the number of points in the set $\Phi_n(A)$, $i=|A|$; than the table of the numbers $Q_{n,i}$ coincides with the known number triangle ([2]) for the Bell numbers. Using the set $\Phi_{n,k}(A)$ of the k-atomic finite partitions belonging to $\Phi_n(A)$ we build for the Stirling numbers of the second kind the number pyramid, analogous to the number triangle. The sets $\Phi_n(A)$ and $\Phi_{n,k}(A)$ are the combinatorial foundation of the number figures mentioned.

The paper was written at the Department of the Special Courses of Mathematics of the Moscow Power Engineering Institute. The author expresses his gratitude to F. V. Shirokov for his constant help and valuable suggestions.

LANDAU EGY TÉTELÉRŐL

SZALAY MIHÁLY

Jelöljük az S_n n-edfokú szimmetrikus csoport P elemének rendjét $O(P)$-vel. Amint azt E. LANDAU [1]-ben megmutatta, $\max_{P \in S_n} O(P)$ vizsgálható a következőképpen:

Legyen tetszőleges különböző (pozitív) p prímekre, továbbá v_p természetes számokra

$$G(x) = \max_{\sum p^{v_p} \leqq x} \prod p^{v_p},$$

ekkor

$$G(n) = \max_{P \in S_n} O(P).$$

E. LANDAU [1]-ben bebizonyította:

$$\log G(x) \sim \sqrt{x \cdot \log x}, \text{ azaz } \lim_{x \to \infty} \frac{\log G(x)}{\sqrt{x \cdot \log x}} = 1.$$

E dolgozatban bebizonyítjuk a következőt:

TÉTEL: $\varepsilon > 0$ esetén $x \geqq x_0(\varepsilon)$-ra

$$\log G(x) = \sqrt{x(\log x + \log\log x + \delta(x))},$$

ahol

$$-1 + \frac{\log\log x - 2 - \varepsilon}{\log x} < \delta(x) < \frac{1}{4}.$$

Az alsó becslést LANDAU bizonyítása nyomán kapjuk majd, a célnak megfelelő részletes számolással, míg a felső becslést más úton, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből a szereplő prímek száma szerinti esetszétválasztással. Felhasználjuk még a következőket:

Ismeretes, hogy van olyan $\alpha > 0$, hogy minden $0 < \beta < \frac{3}{5}$ esetén

$$\pi(x) = \sum_{p \leqq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x \cdot e^{-\alpha \cdot \log^\beta x}),$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p = x + O(x \cdot e^{-\alpha \cdot \log^\beta x}).$$

1. LEMMA:

$$\sum_{p \leqq z} p = \int_2^{z^2} \frac{du}{\log u} + O(z^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \log^\beta z}).$$

Bizonyítás:

$$\sum_{p \leqq z} p = 2 + \int_2^z t d\pi(t) = 2 + \int_2^z t d\left(\pi(t) - \int_2^t \frac{du}{\log u}\right) + \int_2^z \frac{t}{\log t} dt =$$

$$= 2 + \left[t\left(\pi(t) - \int_2^t \frac{du}{\log u}\right)\right]_2^z - \int_2^z \left(\pi(t) - \int_2^t \frac{du}{\log u}\right) dt + \int_4^{z^2} \frac{du}{\log u} =$$

$$= z\left(\pi(z) - \int_2^z \frac{du}{\log u}\right) + O\left(\int_2^z t \cdot e^{-\alpha \cdot \log^\beta t} dt\right) + O(1) + \int_2^{z^2} \frac{du}{\log u} =$$

$$= \int_2^{z^2} \frac{du}{\log u} + O(z^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \log^\beta z}),$$

mivel $t \geqq t_0(\alpha, \beta)$ esetén $t \cdot e^{-\alpha \cdot \log^\beta t}$ szigorúan monoton nő.
Az 1. Lemmából parciális integrálással adódik:

1. KOROLLÁRIUM: $\varepsilon > 0$, $z \geqq z_0(\varepsilon)$ esetén

$$\frac{z^2}{\log z^2} + \frac{z^2}{\log^2 z^2} + \frac{2z^2}{\log^3 z^2} < \sum_{p \leqq z} p < \frac{z^2}{\log z^2} + \frac{z^2}{\log^2 z^2} + \frac{(2+\varepsilon)z^2}{\log^3 z^2}.$$

2. LEMMA:

$$\varepsilon > 0,\ z > 0,\ z^2 = x\left(\log x + \log\log x - 1 + \frac{\log\log x - 2 - \varepsilon}{\log x}\right), \quad x \geqq x_1(\varepsilon) \text{ esetén}$$

$$\sum_{p \leqq z} p < x.$$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy $0 < t < 1$ esetén $\log(1+t) > t - \frac{t^2}{2}$, kapjuk $x \geqq x_{11}(\varepsilon)$-ra:

$$\log z^2 > \log x + \log\log x + \log\left(1 + \frac{\log\log x - 1}{\log x}\right) >$$

$$> \log x + \log\log x + \frac{\log\log x - 1 - \frac{\varepsilon}{2}}{\log x} = K(x) > \log x.$$

Az 1. Korollárium most már $x \geqq x_1(\varepsilon) \geqq x_{11}(\varepsilon)$-ra:

$$\sum_{p \leqq z} p < \frac{z^2}{\log z^2} + \frac{z^2}{\log^2 z^2} + \frac{\left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right) z^2}{\log^3 z^2} < \frac{z^2}{K(x)} \left(1 + \frac{2+\frac{\varepsilon}{2}}{K(x)} \right) <$$

$$< x \left(1 - \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{K(x)} \right) \left(1 + \frac{2+\frac{\varepsilon}{2}}{K(x)} \right) <$$

$$< x \left(1 - \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1+\frac{2+\frac{\varepsilon}{2}}{K(x)}\right) - 1}{K^2(x)} \right) < x.$$

3. Lemma:

$$\varepsilon > 0,\ y > 0,\ y^2 = x \left(\log x + \log\log x - 1 + \frac{\log\log x - 2 + \varepsilon}{\log x} \right),\ x \geqq x_2(\varepsilon) \text{ esetén}$$

$$\sum_{p \leqq y} p > x.$$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy $0 < t < 1$ esetén $\log(1+t) < t$, kapjuk $x \geqq x_{21}(\varepsilon)$-ra:

$$\log y^2 < \log x + \log\log x + \frac{\log\log x - 1 + \frac{\varepsilon}{2}}{\log x} = L(x) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \log x.$$

Az 1. Korollárium felhasználásával $x \geqq x_2(\varepsilon) \geqq x_{21}(\varepsilon)$-ra: $(\varepsilon < 2)$

$$\sum_{p \leqq y} p > \frac{y^2}{\log y^2} + \frac{y^2}{\log^2 y^2} + \frac{2y^2}{\log^3 y^2} > \frac{y^2}{L(x)} \left(1 + \frac{1+\frac{2}{L(x)}}{L(x)} \right) >$$

$$> x \left(1 - \frac{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{L(x)} \right) \left(1 + \frac{1+\frac{2}{L(x)}}{L(x)} \right) =$$

$$= x \left(1 + \frac{1+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{L(x)}\right)\left(1+\frac{2}{L(x)}\right)}{L^2(x)} \right) > x.$$

A fentiekből egyébként könnyen adódik az n-edik prímre:

2. Korollárium:

$$p_n = n \left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2 + o(1)}{\log n} \right).$$

Most már $\log^2 G(x)$ alsó becsléséhez a 2. Lemmából:

$$\varepsilon>0,\ z>0,\ z^2 = x\left(\log x+\log\log x-1+\frac{\log\log x-2-\frac{\varepsilon}{2}}{\log x}\right),\quad x\geqq x_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \text{esetén}$$

$$\sum_{p\leqq z} p<x,\ \text{így}\ \ G(x)\geqq \prod_{p\leqq z} p,\ \text{tehát}$$

$$\log^2 G(x)\geqq\Big(\sum_{p\leqq z}\log p\Big)^2=(\vartheta(z))^2=(z+O(z\cdot e^{-\alpha\cdot\log^\beta z}))^2=$$

$$=z^2+O(z^2\cdot e^{-\alpha\cdot\log^\beta z})=z^2+O\left(x\cdot\log x\cdot\frac{1}{\log^q x}\right)>$$

$$>x\left(\log x+\log\log x-1+\frac{\log\log x-2-\varepsilon}{\log x}\right),$$

ha $x\geqq x_0(\varepsilon)$, s ezzel a kívánt alsó becslést bebizonyítottuk.

Végül bebizonyítjuk a felső becslést: $x\geqq x_0'$-re

$$\prod_{\sum p^{\nu_p}\leqq x} p^{\nu_p}<e^{\sqrt{x\left(\log x+\log\log x+\frac{1}{4}\right)}}.$$

Ha a bal oldalon k db. prím szerepel:

$$\prod_{\sum_k p^{\nu_p}\leqq x} p^{\nu_p}\leqq\left(\frac{\sum_k p^{\nu_p}}{k}\right)^k\leqq\left(\frac{x}{k}\right)^k=e^{k(\log x-\log k)}.$$

Elegendő tehát belátni, hogy $x\geqq x_0'$-re minden szóba jövő k esetén

$$k(\log x-\log k)<\sqrt{x\left(\log x+\log\log x+\frac{1}{4}\right)}=M(x).$$

a) $k\leqq\sqrt{\dfrac{x}{\log x}}$

$$k(\log x-\log k)<\sqrt{\frac{x}{\log x}}\cdot\log x<M(x).$$

b) $\sqrt{\dfrac{x}{\log x}}<k\leqq 2\sqrt{\dfrac{x}{\log x+\log\log x}}$

$$k(\log x-\log k)<2\sqrt{\frac{x}{\log x+\log\log x}}\cdot\frac{1}{2}(\log x+\log\log x)<M(x).$$

c) $2\sqrt{\dfrac{x}{\log x+\log\log x}}<k,$ de $x\geqq\sum_k p^{\nu_p}\geqq\sum_k p\geqq\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu,$

így a 3. Lemma szerint $y>0,\ y^2=x\left(\log x+\log\log x-1+\dfrac{\log\log x-2+\varepsilon}{\log x}\right)$ jelö-

léssel $x \geqq x_0''(\varepsilon)$ esetén $k < \pi(y)$. Tehát most

$$k(\log x - \log k) < \pi(y) \cdot \frac{1}{2}\left(\log x + \log\log x - 2 \cdot \log 2 + \frac{\log\log x}{\log x}\right) <$$

$$< \frac{y}{\log y}\left(1 + \frac{1+\varepsilon}{\log y}\right)\left(\log y + \frac{1}{2}\frac{\log\log x}{\log x} - \log 2 - \frac{1}{2}\frac{\log\log x - 1 - \varepsilon}{\log x}\right) <$$

$$< y\left(1 + \frac{1 - \log 2 + \varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{2 \cdot \log x}}{\log y}\right) < y\left(1 + \frac{2 - 2 \cdot \log 2 + 3\varepsilon}{\log y}\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left[x\left(\log x + \log\log x - 1 + \frac{\log\log x - 2 + \varepsilon}{\log x}\right)\left(1 + \frac{4 - 4 \cdot \log 2 + 6\varepsilon}{\log x + \log\log x + \frac{\log\log x - 1 - \varepsilon}{\log x}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} <$$

$$< [x(\log x + \log\log x + 3 - 4 \cdot \log 2 + 6\varepsilon)]^{\frac{1}{2}} < \quad (\varepsilon = 10^{-3},\ x \geqq x_0')$$

$$< \sqrt{x\left(\log x + \log\log x + \frac{1}{4}\right)} = M(x).$$

Végül köszönetemet fejezem ki TURÁN PÁL professzor úrnak megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] E. LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I. (Leipzig—Berlin, 1909), 222—229.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Э. ЛАНДАУ

М. САЛАИ

ON A THEOREM OF E. LANDAU

M. SZALAY

Let $O(P)$ denote the order of the element P in the symmetric group S_n of n letters. E. LANDAU had proved (see [1]) for

$$G(n) \overset{\text{def.}}{=} \max_{P \in S_n} O(P)$$

the asymptotical relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log G(n)}{\sqrt{n \cdot \log n}} = 1.$$

In this paper we proved that (for $\varepsilon > 0$, $n \geqq n_0(\varepsilon)$)

$$\log G(n) = \sqrt{n \cdot (\log n + \log\log n + \delta(n))},$$

where

$$-1 + \frac{\log\log n - 2 - \varepsilon}{\log n} < \delta(n) < \frac{1}{4}.$$

A KILENCEDRENDŰ AFFIN GALOIS-SÍK SZABÁLYOS SOKSZÖGEIRŐL

NGUYEN MONG HY

1. Aspiránsvezetőm, KÁRTESZI F. hívta fel a figyelmem arra a tényre, hogy a szabályos sokszögeknek analóg megfelelőit a véges síkokon még nem vizsgálták meg teljességre törekvő alapossággal, noha az eredmények további érdekes problémák megoldásának alapjául szolgálhatnának. Kiinduló észrevétel elérése céljából a GALOIS-síkon (affin sík esetében) — röviden $GS(q)$, ahol q törzsszámhatvány — $q=3^2$ esetében kerestem az analóg alakzatot. Erről szól a jelen közlemény. Eredményeimet KORCHMÁROS GÁBOR más irányú vizsgálatai kapcsán tőlem függetlenül ugyancsak elérte, sőt általánosabb tétel következményeképpen igazolta.

Dolgozatomban a $GF(q)$ koordinátatest helyett röviden $\mathbf{K}_q$-t, esetleg $\mathbf{K}$-t írok. Ponton egy

$$(x, y); \qquad x, y \in \mathbf{K}$$

rendezett elempárt, egyenesen egy

$$ax+by+cz = 0; \quad a, b, c \in \mathbf{K}, \ (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

egyenlettel meghatározott ponthalmazt értünk. [1]

Már a klasszikus affin síkon is érdekes a következő feladat: Definiálható-e az affin szabályos n-szög úgy, hogy csak a pont, egyenes, összekötés, metszés és párhuzamosság fogalmára támaszkodik a definíció? Hiszen ezek a fogalmak az affin síkon is léteznek. Ha tehát ilyen definíció lehetséges, akkor függetlenül a közönséges (euklideszi) metrikától a szabályos n-szög analóg alakzata definiálható. Vagyis mellőzhető az affin szabályos n-szögnek az a származtatása, hogy *a közönséges szabályos n-szög affin képe.* — Ismeretes ennek a feladatnak a következő megoldása:

Tegyük fel, hogy a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok közül kettőnél több nincs egy egyenesen, és

$$\begin{cases} P_{k-1}P_k \parallel P_{k-2}P_{k+1} \\ P_{k-1}P_{k+1} \parallel P_{k-2}P_{k+2} \end{cases} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

(ahol $0, -1, n+1, n+2$ index helyett rendre $n, n-1, 1, 2$ indexet írunk).

Az (1. 1) *feltételeknek megfelelő* $\mathbf{P}=P_1P_2\ldots P_n$ *sokszöget affin szabályos n-szögnek nevezzük.*

Természetesen e definíciónak csak $n>4$ esetben van értelme. Az is ismeretes, hogy van egy (de csak egy) olyan *ellipszis*, mely $\mathbf{P}$ összes csúcspontjain áthalad.

Az így definiált pont n-es kritériumai a GALOIS-féle affin síkon is értelmezhetők, ami az analóg alakzat meghatározásánál alapul szolgál, sőt olyan fogalmi általánosítást tesz lehetővé, melynek a klasszikus affin síkon nincs is minden esetben megfelelője, mert létezése bizonyos esetekben a sík *véges* voltának a következménye.

2. Minthogy a GS(3^2) esetében vizsgáljuk a szabályos sokszög analóg alakzatait, szükségünk lesz a GF(9)=**K** koordinátatest művelettábláira, amiket a [2]-ben ismertetett módon lehet összeállítani. Evégből a 3, x^2+x+2 modulusokat választjuk, és a test elemeit a 0, 1, 2, ~, 8 számjegyekkel fogjuk jelölni, mégpedig az additíves multiplikatív neutrális elemet jelölve 0-, illetve 1-essel. A sor és az oszlopot megnevező számjegy az összeadás (szorzás) első és második tagját (tényezőjét) jelenti, a kereszteződési mezőben pedig az összeg (szorzat) áll.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

A

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	7	1	4	5	8	2
4	0	4	8	1	5	6	2	3	7
5	0	5	7	4	6	2	8	1	3
6	0	6	3	5	2	8	7	4	1
7	0	7	5	8	3	1	4	2	6
8	0	8	4	2	7	3	1	6	5

M

Könnyen ellenőrizhető, hogy e két művelettáblával definiált (A, M)=**K** koordinátatestben az

$$x^2+4y^2-1, \quad x^2-y, \quad x^2+y^2-1 \tag{2. 1}$$

polinomok mindegyike irreducibilis. Következésképpen a

$$C_e: x^2+4y^2 = 1, \quad C_p: y = x^2, \quad C_h: x^2+y^2 = 1 \tag{2. 2}$$

egyenletekkel definiált ponthalmazok mindegyike olyan, hogy kettőnél több eleme nincs egy egyenesen.

A C_e-, C_p-, C_h-t rendre *ellipszisnek*, *parabolának hiperbolának* nevezzük.

Könnyen megállapítható az *A* és *M* táblák segítségével hogy, az ellipszis 10, a parabola 9, a hiperbola 8 pontból áll. A pontok jegyzéke — (x, y) szerint felsorolva — a következő:

C_e: (1, 0), (2, 0), (3, 3), (3, 6), (4, 5), (4, 7), (6, 3), (6, 6), (8, 5), (8, 7);

C_p: (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 7), (4, 5), (5, 2), (6, 7), (7, 2), (8, 5);

C_h: (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0), (5, 5), (5, 7), (7, 5), (7, 7).

3. A GF(q)=**K** koordinátatesthez tartozó affin síkon az egyenesek egyenlete

$$y = mx+b \quad \text{vagy} \quad 0 = x+b \quad (m, b \in \mathbf{K})]$$

vagy

alakban is kifejezhető, ahol az utóbbi az olyan pontok halmazát jelenti, melyeknek az első koordinátája a **K**-nak egy rögzített eleme, a második koordináta pedig (a pontnak az egyenesen való változásával) végigfut a **K** összes elemein. Ebben az

értelemben szokás *elsőfajú* és *másodfajú egyenesről* is beszélni. Az m testelemet az elsőfajú egyenes *irányhatározójának* nevezzük. A másodfajú egyenesekhez is rendelünk irányhatározót, de az nem testelem, jelölésére a ∞ szimbólumot használjuk.

Ha két egyenes irányhatározója különböző, akkor e két ponthalmaznak egyetlenegy közös (x, y) eleme van; hogyha pedig a két egyenes különböző ugyan, de az irányhatározójuk ugyanaz, akkor nincs közös (x, y) elemük, s ebben az esetben a két egyenest *párhuzamosnak* nevezzük.

Könnyen adódik két különböző pont összekötő egyenesének az irányhatározója a fenti egyenletek alapján. Ha az $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ pontokról van szó, akkor $x_1 \neq x_2$ esetében

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{3.1}$$

hogyha pedig $y_1 \neq y_2$, de $x_1 = x_2$, akkor

$$m = \infty \tag{3.2}$$

A szóban forgó síkon nemcsak a párhuzamosságot, hanem a $q = p^r \neq 2^r$ megszorítás két pont középpontjának a fogalmát is definiálhatjuk. Ha (x_1, y_1) és (x_2, y_2) az adott pontok, s középpontjukat (x_0, y_0) jelenti, akkor

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{1+1}, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{1+1} \tag{3.3}$$

Szükségünk lesz még a (2. 2) definícióknak megfelelő kúpszeletek (ξ, η) pontjában érintő egyenes irányhatározójára is. Az érintő egyenlete a C_e-, C_p-, C_h-nak megfelelő rendben

$$\xi x + 4\eta y = 1, \quad y + \eta = (1+1)\xi x, \quad \xi x + \eta y = 1$$

Ha $\eta = 0$, akkor C_e és C_h érintőjének irányhatározója:

$$m = \infty; \tag{3.4}$$

C_p érintőjének az irányhatározója pedig:

$$m = 0. \tag{3.5}$$

Ha pedig $\eta = 0$, akkor a görbék érintőjének az irányhatározója rendre:

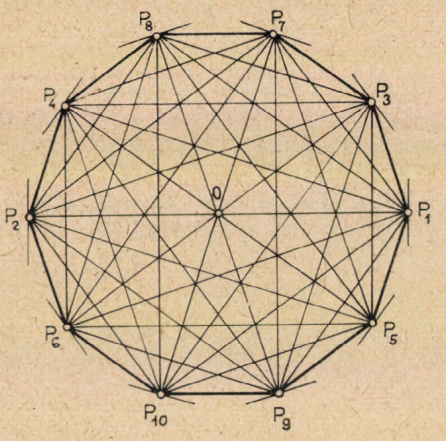
$$m = -\xi(4\eta)^{-1}, \; m = (1+1)\xi, \; m = -\xi\eta^{-1}. \tag{3.6}$$

Most már a kúpszeletet alkotó pontok által kettenként kifeszített egyenesek, illetve e pontokban érintő egyenesek irányhatározóit az előkészítés alapján rendre meghatározhatjuk.

4. Először is a C_e ellipszis 10 pontjának az alakzatát vizsgáljuk. Evégből a 10 pontot a következő ciklikus rendben tekintjük: $P_1P_3P_7P_8P_4P_2P_6P_{10}P_9P_5$, ahol

$$P_1{:}(2, 0), \; P_5{:}(6, 3), \; P_9{:}(8, 5), \; P_{10}{:}(4, 5), \; P_6{:}(3, 3),$$

$$P_2{:}(1, 0), \; P_4{:}(3, 6), \; P_8{:}(4, 7), \; P_7{:}(8, 7), \; P_3{:}(6, 6).$$



1. ábra

Feleltessük meg e GALOIS-féle tízszöget (egy-egyértelmű hozzárendeléssel) az 1. ábra euklideszi szabályos tízszögének! Ez a megfeleltetés *párhuzamosságtartó*, vagyis az euklideszi ábra párhuzamos, de csakis a párhuzamos egyeneseit ábrázolják. Állításunk helyessége a

$$P_jP_k \qquad (j, k=1, 2, \ldots, 10)$$

egyenesek irányhatározóinak a kiszámítását, vagyis a (3. 1), (3. 2), (3. 3) definíciónak megfelelő m-nek a meghatározását kívánja.

Jelölje az $m=\langle j, k\rangle$ a P_jP_k egyenes irányhatározóját; a P_kP_k egyenes értelme: C_e érintője a P_k pontban, ennélfogva $\langle k, k\rangle$ ennek az érintőnek az irányhatározóját jelöli. Így nyertük a következő táblázatot:

$\langle 1, 1\rangle = \langle 2, 2\rangle = \langle 3, 5\rangle = \langle 7, 9\rangle = \langle 8, 10\rangle = \langle 4, 6\rangle = \infty;$

$\langle 3, 3\rangle = \langle 6, 6\rangle = \langle 1, 7\rangle = \langle 5, 8\rangle = \langle 4, 9\rangle = \langle 2, 10\rangle = 6;$

$\langle 7, 7\rangle = \langle 10, 10\rangle = \langle 3, 8\rangle = \langle 1, 4\rangle = \langle 2, 5\rangle = \langle 6, 9\rangle = 5;$

$\langle 8, 8\rangle = \langle 9, 9\rangle = \langle 4, 7\rangle = \langle 2, 3\rangle = \langle 1, 6\rangle = \langle 5, 10\rangle = 7;$

$\langle 4, 4\rangle = \langle 5, 5\rangle = \langle 2, 8\rangle = \langle 6, 7\rangle = \langle 3, 10\rangle = \langle 1, 9\rangle = 3;$

$\langle 1, 3\rangle = \langle 2, 6\rangle = \langle 5, 7\rangle = \langle 8, 9\rangle = \langle 4, 10\rangle = 8;$

$\langle 3, 7\rangle = \langle 6, 10\rangle = \langle 1, 8\rangle = \langle 4, 5\rangle = \langle 2, 9\rangle = 2;$

$\langle 7, 8\rangle = \langle 9, 10\rangle = \langle 3, 4\rangle = \langle 1, 2\rangle = \langle 5, 6\rangle = 0;$

$\langle 4, 8\rangle = \langle 5, 9\rangle = \langle 2, 7\rangle = \langle 3, 6\rangle = \langle 1,10\rangle = 1;$

$\langle 2, 4\rangle = \langle 1, 5\rangle = \langle 6, 8\rangle = \langle 7, 10\rangle = \langle 3, 9\rangle = 4.$

Eszerint öt egyenes-hatos és öt egyenes-ötös van, melyeknek mindegyike párhuzamos egyenesekből áll, mégpedig ugyanúgy, mint az euklideszi képen (1. ábra) a megfelelő képegyenesek.

Ebben az értelemben a következőt mondhatjuk: *a kilencedrendű affin* GALOIS-*sík ellipszise nem más, mint egy affin szabályos tízszög.*

5. Másodszorra a C_h hiperbola 8 pontjának az alakzatát tárgyaljuk. Itt is először célszerű ciklikus sorrendet választunk: $P_3P_5P_1P_6P_4P_8P_2P_7$, ahol

$$P_1{:}(0, 2),\ P_3{:}(2, 0),\ P_5{:}(7, 7),\ P_6{:}(5, 7),$$

$$P_2{:}(0, 1),\ P_4{:}(1, 0),\ P_8{:}(5, 5),\ P_7{:}(7, 5).$$

A húrok és az érintők irányhatározóit most is, **miként a 4.**-ben, az A és M művelettáblák segítségével könnyen kiszámíthatjuk:

$$\langle 3, 3\rangle=\langle 4, 4\rangle=\langle 5, 7\rangle=\langle 1, 2\rangle=\langle 6, 8\rangle=\infty;$$

$$\langle 5, 5\rangle=\langle 8, 8\rangle=\langle 1, 3\rangle=\langle 6, 7\rangle=\langle 2, 4\rangle= 2;$$

$$\langle 1, 1\rangle=\langle 2, 2\rangle=\langle 5, 6\rangle=\langle 3, 4\rangle=\langle 7, 8\rangle= 0;$$

$$\langle 6, 6\rangle=\langle 7, 7\rangle=\langle 1, 4\rangle=\langle 5, 8\rangle=\langle 2, 3\rangle= 1;$$

$$\langle 3, 5\rangle=\langle 1, 7\rangle=\langle 6, 2\rangle=\langle 4, 8\rangle=4;$$

$$\langle 1, 5\rangle=\langle 3, 6\rangle=\langle 4, 7\rangle=\langle 2, 8\rangle=3;$$

$$\langle 1, 6\rangle=\langle 4, 5\rangle=\langle 3, 8\rangle=\langle 2, 7\rangle=6;$$

$$\langle 4, 6\rangle=\langle 1, 8\rangle=\langle 2, 5\rangle=\langle 3, 7\rangle=8.$$

Eszerint négy egyenes-ötös és négy egyenes-négyes van, melyeknek mindegyike párhuzamos egyenesekből áll, mégpedig ugyanúgy, mint a hozzárendelt euklideszi kép (2. ábra).

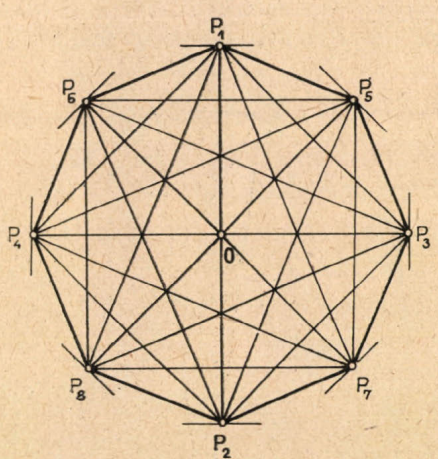
Így tehát a szóban forgó GALOIS-nyolcszöget egy-egyenértelmű és párhuzamosságtartó megfeleltetéssel az euklideszi szabályos nyolcszöghöz rendeltük.

Ebben az értelemben a C_h-val kapcsolatban is hasonlót mondhatunk, mint a **4.**-ben a C_e-ről: *a kilencedrendű affin* GALOIS-*sík hiperbolája nem más, mint egy affin szabályos nyolcszög.*

Megjegyezzük még, hogy a C_e és a C_h esetében a középpont analóg megfelelője is fellép, mégpedig az

$$(x, y)=(0, 0)$$

pont. A (3. 3) szerint ugyanis a



2. ábra

$$P_1, P_2;\quad P_3, P_6;\quad P_4, P_5;\quad P_7, P_{10};\quad P_8, P_9;$$

illetve a

$$P_1, P_2;\quad P_3, P_4;\quad P_5, P_8;\quad P_6, P_7$$

pontpárok középpontjaként egyaránt az O:(0, 0) origó adódik.

6. Utoljára hagytuk a C_p parabolát alkotó 9 pont alakzatának a vizsgálatát. Ez ugyanis az euklideszi szabályos kilencszöggel egybevetve csak lazább analógiát mutat, s azért majd *félig szabályos* poligonnak mondjuk.

Most a célszerű ciklikus csúcssorrend a következő: $P_1P_5P_6P_2P_7P_4P_3P_9P_8$. A pontpárok meghatározta egyenesek irányhatározói az A és M tábla segítségével

meghatározhatók. Ezekez párhuzamos ötösönként csoportosítva:

$$\langle 1,1\rangle=\langle 2,3\rangle=\langle 4,5\rangle=\langle 6,7\rangle=\langle 8,9\rangle=0;$$

$$\langle 2,2\rangle=\langle 1,3\rangle=\langle 4,9\rangle=\langle 5,6\rangle=\langle 7,8\rangle=1$$

$$\langle 3,3\rangle=\langle 1,2\rangle=\langle 4,7\rangle=\langle 5,8\rangle=\langle 6,9\rangle=2$$

$$\langle 4,4\rangle=\langle 2,5\rangle=\langle 2,9\rangle=\langle 3,7\rangle=\langle 6,8\rangle=3$$

$$\langle 8,8\rangle=\langle 1,9\rangle=\langle 2,7\rangle=\langle 3,5\rangle=\langle 4,6\rangle=4$$

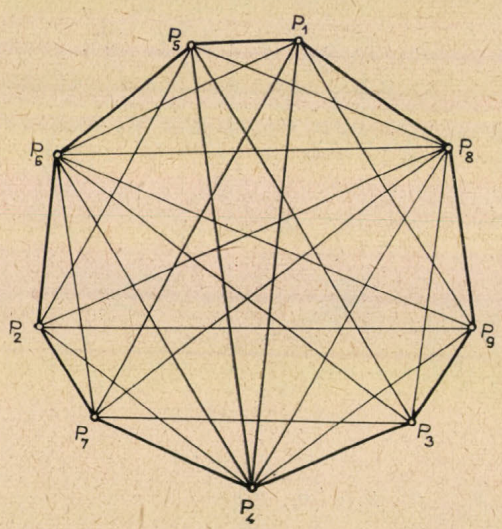
$$\langle 6,6\rangle=\langle 1,7\rangle=\langle 2,5\rangle=\langle 3,9\rangle=\langle 4,8\rangle=5$$

$$\langle 5,5\rangle=\langle 1,4\rangle=\langle 2,6\rangle=\langle 3,8\rangle=\langle 7,9\rangle=6$$

$$\langle 7,7\rangle=\langle 1,6\rangle=\langle 2,8\rangle=\langle 3,4\rangle=\langle 5,9\rangle=7$$

$$\langle 9,9\rangle=\langle 1,8\rangle=\langle 2,4\rangle=\langle 2,5\rangle=\langle 4,6\rangle=8$$

Leképezzük a GALOIS-sík így definiált alakzatát az euklideszi sík egy körbe írt félig szabályos kilencszögébe mégpedig úgy, hogy az euklideszi ábra megrajzolt egyenesei közül bármely párhuzamos pár a GALOIS-poligon párhuzamos egyenespárját reprezentálja (3. ábra). A leképezés ilyen értelemben párhuzamosságtartó, de a még hiányzó (az ábrán sem szereplő) 6 átló és 9 érintő a párhuzamosságtartásnak nem felel meg. A GALOIS-sík szóban forgó kilencszögével kifeszített $9 \cdot 4 = 36$ egyenes közül (az érintőket most nem tekintve)



3. ábra

$$9\binom{4}{2} = 54$$

párhuzamos egyenespár ragadható ki.

Leképezésünk párhuzamosságtartó hatása az euklideszi képen csupán

$$3 \cdot \binom{4}{2} + 6 \cdot \binom{3}{2} = 36$$

egyenespáron érvényesül.

Felvetődik a következő kérdés. Az euklideszi szabályos kilencszög különböző csúcspontjaiból álló párjai ugyancsak 36 egyenest feszítenek ki, és ezek közül ugyancsak 54 párhuzamos egyenespárt ragadhatunk ki. Vajon a P pontok alkalmas permutációja létesíthet-e a GALOIS-féle és az euklideszi szabályos kilencszög közt olyan megfeleltetést, mely a párhuzamosságot mind az 54 esetben megőrzi?

Hogy e kérdést eldöntsük, ismét figyelembe vesszük a kilencszög köré írt C_p kúpszeletet, aminek az euklideszi képen a képsokszög köré írt kör felel meg.

Az euklideszi szabályos kilencszögből szabályos háromszöget alkotó három csúcs háromféleképpen választható ki. Az ilyen háromszöget azzal a tulajdonsággal

definiálhatjuk, hogy bármelyik oldalával az átellenes csúcspontbeli körérintő párhuzamos.

A C_p kúpszelet 9 pontja közül azonban 3-nál több olyan háromszög választható ki, mely a szóban forgó tulajdonsággal rendelkezik. Így például a

$$P_1P_2P_3, \quad P_4P_6P_8, \quad P_5P_7P_9, \quad P_1P_8P_9.$$

Állításunk könnyen ellenőrizhető. Tekintsük — mondjuk — a $P_1P_8P_9$ háromszöget. A kérdéses hat egyenes irányhatározóira nézve a már közölt táblázat szerint valóban

$$\langle P_1P_1\rangle=\langle P_8P_9\rangle=0, \quad \langle P_8P_8\rangle=\langle P_1P_9\rangle=4, \quad \langle P_9P_9\rangle=\langle P_1P_8\rangle=8.$$

Eszerint a szóban forgó félig szabályos kilencszög párhuzamossági struktúrája más, mint az euklideszi szabályos kilencszögé, tehát nyilvánvaló, hogy teljesen párhuzamosságtartó megfeleltetés ilyenek közt nem létezik.

IRODALOM

[1] KÁRTESZI F.: Bevezetés a véges geometriákba (Akad. Kiadó, 1972).
[2] SZELE T.: Elemi bizonyítás a véges testek elméletének alaptételére (Mat. Lapok VII 249—254).

О РЕГУЛЯРНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ ГАЛУА ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

НГУЕН МОИГ ХИ

POLIGONI AFFINI-REGOLARI DI UN PIANO DESARGUESIANO D'ORDINE 9

NGUYEN MONG HY

Consideriamo il piano affine costruito sul campo di GALOIS $GF(9)$. Sia brevemente $K=GF(9)$. Le forme canoniche delle coniche di questo piano: $C_c: x^2-cy^2=1$, $C_h: x^2+y^2=1$, $C_p: x^2-y=0$, $(x, y \in K)$ dove $c=4$, ma secondo la tabella $A \circ M$. Le coniche C_c, C_h, C_p sono costituite (rispettivamente) 10, 8, 9 punti. Considerando le corde parallele, la struttura dei 10 e dei 8 punti sono delle stesse che hanno i poligoni regolari (di 10 od 8 lateri) del piano euclideo. Ma i 9 punti di C_p non hanno questa proprietà, soltanto »in parte« e diciamo che formano un poligono »*semiregolare affino*«.

A DIRICHLET-FÉLE L-FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉNEK EGY PONTJÁHOZ II.

PINTZ JÁNOS

A dolgozat I. részének [1] megírása után olvastam A. O. Gelfond [2] cikkében a következő tétel bizonyítását.

TÉTEL: Ha θ teljesen multiplikatív számelméleti függvény, mely csak a 0, $+1$, -1 értékeket veszi fel, továbbá

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{d=1}^{n}\theta(d)}{\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{12},\quad \text{akkor}\quad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\theta(d)}{d}\neq 0.$$

Ebben a dolgozatban egy ennél erősebb tételt fogunk belátni. Bizonyításunk a dolgozat I. részében követett gondolatmenet szerint történik. Gelfond a [2] cikkében szereplő tételt ettől eltérő, de szintén elemi úton bizonyítja. A tétel érdekessége, hogy speciális esetként magában foglalja a dolgozat I. részében bizonyított állítást, azaz hogy a mod k vett maradékosztályok csoportján értelmezett, a főkaraktertől különböző χ valós karakterre $L(1,\chi)>c/(\sqrt{k}\cdot\log k)$ valamilyen c effektív konstanssal.

Ezek után rátérünk a tétel kimondására és igazolására.

TÉTEL: Ha θ teljesen multiplikatív számelméleti függvény, mely csak a 0, $+1$, -1 értékeket veszi fel, továbbá

$$\left|\frac{\sum_{d=1}^{n}\theta(d)}{(\max\sqrt{n},\sqrt{n_\theta})}\right|\leqq c_\theta<\varrho\approx 0{,}222$$

fennáll tetszőleges n és $n_\theta\geqq N_0$ (N_0 abszolút konstans) esetén, akkor

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\theta(d)}{d}\geqq\frac{c'(\varrho-c_\theta)}{\sqrt{n_\theta}}\quad (c'\approx 6{,}904)$$

Bizonyítás: Legyen $g(n)=\sum_{d|n}\theta(d)=\prod_{p_i^{\alpha_i}\| n}(1+\theta(p_i)+\ldots\theta^{\alpha_i}(p_i))$. Ekkor $g(n)\geqq 0$, továbbá ha n négyzetszám, $g(n)\geqq 1$. Legyen $l>0$ később meghatározandó egész, mely mindenesetre egy L_0 abszolút konstansot meghalad, $y=n_\theta$, $x=\left(\frac{1}{3}\right)ly$. (A $\sum$

jelnél, ha a változó alsó határa nincs kiírva, az alsó határ egynek tekintendő)

$$\sum_0 = \sum_{n\leqq x} (x-n)^l g(n) \geqq \sum_{n^2\leqq x} (x-n^2)^l \geqq \int_0^{\sqrt{x}} (x-t^2)^l dt - x^l >$$

$$> \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \varepsilon_0\right) \frac{x^l\sqrt{x}}{\sqrt{l}} = c_1 \frac{x^l\sqrt{x}}{\sqrt{l}} \quad (c_1 \approx 0{,}885)$$

A konstansok meghatározása céljából szükségünk van a dolgozat I. részében említett segédtételre a következő erősebb formában.

SEGÉDTÉTEL: Legyen α tetszőleges pozitív szám, $\alpha = [\alpha] + \vartheta$, l tetszőleges természetes szám.

Ekkor $S = \sum_{m\leqq\alpha} (\alpha - m)^l = \sum_{i=1}^{l+1} D_i(l)(\alpha^i - \vartheta^i)$, és itt

$$D_{l+1}(l) = \frac{1}{l+1}, \quad D_l(l) = -\frac{1}{2}, \quad D_{l-1}(l) = \frac{l}{12}, \quad D_{l-3}(l) = -\frac{l(l-1)(l-2)}{720}$$

$$D_{l-2i} = 0, \qquad |D_{l-(2i+1)}| < \left(\frac{l}{6}\right)^{l-(2i+1)}$$

Bizonyítás: $S = \sum_{m\leqq\alpha} (\alpha - m)^l = \left(\sum_{m\leqq\alpha} e^{(\alpha-m)x}\right)^{(l)}_{x=0} =$

$$= \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\vartheta x}}{e^x - 1}\right)^{(l)}_{x=0} = \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{\vartheta x}}{x}\right)^{(l)}_{x=0} - \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{\vartheta x})^{(l)}_{x=0} +$$

$$+ [(e^{\alpha x} - e^{\vartheta x}) f(x)]^{(l)}_{x=0}, \quad \text{ahol} \quad f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0.$$

$$f(-x) = \frac{1}{e^{-x}+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1 + 1}{1 - e^x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = -f(x)$$

tehát $f^{(2n)}(0) = 0$. Így valóban

$$S = \frac{\alpha^{l+1} - \vartheta^{l+1}}{l+1} - \frac{1}{2}(\alpha^l - \vartheta^l) + \sum_{i=1}^{l-1} \underbrace{\binom{l}{i} f^{(l-i)}(0)}_{D_i(l)} (\alpha^i - \vartheta^i)$$

Egyszerűen kiszámítható, hogy $f'(0) = \frac{1}{12}$, $f'''(0) = -\frac{1}{120}$, továbbá az origó körüli 6 sugarú körön $|f|$ integrálközepe egynél kisebb, így mivel $|z| < 2\pi$-re $f(z)$ reguláris, kapjuk, hogy

$$|D_i(l)| = \left|\binom{l}{i} f^{(l-i)}(0)\right| < \frac{l(l-1)\ldots(i+1)}{6^{l-i}} < \left(\frac{l}{6}\right)^{l-i}$$

Az eredeti tétel igazolását folytatva $\sum_0$ a következő összegre bontható:

$$\sum_0 = \sum_{n\leqq x} (x-n)^l \sum_{d|n} \theta(d) = \sum_{d\leqq x} \theta(d) \sum_{m\leqq\frac{x}{d}} (x - md)^l =$$

$$= \sum_{d\leqq y} \theta(d) \sum_{m\leqq\frac{x}{d}} (x-md)^l + \sum_{x\geqq d>y} \theta(d) \sum_{m\leqq\frac{x}{d}} (x-md)^l = \sum_1 + \sum_2$$

A segédtétel felhasználásával, $\left\{\frac{x}{d}\right\}=\vartheta_d$ jelölést bevezetve:

$$\sum_1 = \sum_{d\leqq y}\theta(d)\sum_{m\leqq\frac{x}{d}}(x-md)^l = \sum_{d\leqq y}\theta(d)d^l\sum_{m\leqq\frac{x}{d}}\left(\frac{x}{d}-m\right)^l =$$

$$= \frac{x^{l+1}}{l+1}\sum_{d\leqq y}\frac{\theta(d)}{d}+\sum_{i=1}^{l}D_i(l)x^i\sum_{d\leqq y}\theta(d)d^{l-i}-\sum_{i=1}^{l+1}D_i(l)\sum_{d\leqq y}\theta(d)\vartheta_d^i d^l =$$

$$= \frac{x^{l+1}}{l+1}\sum_{d\leqq y}\frac{\theta(d)}{d} + A - B$$

Felhasználva, hogy $y=n_\theta$, a tételben θ-ra teljesülő feltétel miatt alkalmazhatjuk az Abel-egyenlőtlenséget, így figyelembe véve, hogy $ly/x=3$, A-ra a következő becslés adódik:

$$|A| \leqq \frac{1}{2}x^l c_\theta\sqrt{y}+\frac{l}{12}x^{l-1}\cdot 2c_\theta\sqrt{y}\cdot y+\frac{l^3}{720}x^{l-3}\cdot 2c_\theta\sqrt{y}\cdot y^3+$$

$$+\sum_{i=1}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}\left(\frac{l}{6}\right)^{2i+1}x^{l-(2i+1)}\cdot 2c_\theta\sqrt{y}\cdot y^{2i+1}\leqq$$

$$\leqq c_\theta\sqrt{y}x^l\left\{\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 3}{12}+\frac{2\cdot 3^3}{720}+2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2^{2i+1}}\right\} = c_\theta\cdot c_2 x^l\sqrt{y}$$

$$\left(c_2=\frac{139}{120}\approx 1{,}159\right)$$

Míg B-re a következő felső becslést nyerhetjük:

$$|B| \leqq (l+1)\left(\frac{l}{6}\right)^{l-1}y^{l+1} < \frac{c_3}{l+1}\left(\frac{ly}{6}\right)^{l+1} = \frac{c_3}{l+1}\frac{1}{2^{l+1}}x^{l+1} \quad (c_3=36+\varepsilon_1)$$

Válasszuk az α számot úgy, hogy $x=y\cdot\alpha^{2n}$ legyen valamilyen természetes n számra ezt csak a képletek egyszerűbb alakja végett kötjük ki), továbbá $1{,}2\leqq\alpha\leqq 1{,}3$ teljesüljön. Ekkor felhasználva, hogy $\sum_{m\leqq\frac{x}{d}}(x-md)^l$ d-ben monoton csökken:

$$|\sum_2| = \left|\sum_{d>y}^{x}\theta(d)\sum_{m\leqq\frac{x}{d}}(x-md)^l\right| \leqq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\sum_{y\cdot\alpha^{2(i+1)}\geqq d>y\cdot\alpha^{2i}}\theta(d)x^l\sum_{m\leqq\frac{x}{d}}\left(1-\frac{md}{x}\right)^l\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1}2c_\theta\sqrt{y}\cdot\alpha^{i+1}x^l\sum_{m\leqq\frac{x}{y\cdot\alpha^{2i}}}\left(1-\frac{my\alpha^{2i}}{x}\right)^l\leqq$$

$$\leqq 2c_\theta\sqrt{y}x^l\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{i+1}\sum_{m\leqq\alpha^{2(n-i)}}e^{-\frac{my\alpha^{2i}l}{x}} < 2c_\theta\sqrt{y}x^l\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha^{i+1}}{e^{3\alpha^{2i}}-1} <$$

$$< c_4\cdot c_\theta\sqrt{y}x^l \quad (c_4\approx 0{,}142)$$

Így a $\sum_0$, A, B, $\sum_2$-re eddig levezetett becslések alapján:

$$\frac{x^{l+1}}{l+1}\sum_{d\leqq y}\frac{\theta(d)}{d} > c_1\frac{x^l\sqrt{x}}{\sqrt{l}} - |A| - |\sum_2| - |B| >$$

$$> \underbrace{\frac{c_1 x^l\sqrt{y}}{\sqrt{3}} - c_\theta c_2 x^l\sqrt{y} - c_\theta c_4 x^l\sqrt{y}} - \frac{c_3}{l+1}x^{l+1}\cdot\frac{1}{2^{l+1}}$$

Felhasználva, hogy a kapoccsal jelölt kifejezés pozitív lesz, továbbá, hogy

$$\frac{l+1}{x^{l+1}} > \frac{l}{x}\cdot\frac{1}{x^l} = \frac{3}{y}\cdot\frac{1}{x^l}$$

$$\sum_{d\leqq y}\frac{\theta(d)}{d} > \frac{1}{\sqrt{y}}(c_5 - c_\theta c_6) - \frac{c_3}{2^{l+1}} \quad (c_5 \approx 1{,}532);\ (c_6 \approx 3{,}903)$$

Mivel l-t tetszőleges nagyra választhatjuk:

$$\sum_{d\leqq y}\frac{\theta(d)}{d} \geqq \frac{1}{\sqrt{y}}(c_5 - c_\theta \cdot c_6)$$

Másrészt az Abel-féle átrendezést alkalmazva, $S_d = \sum_{i=1}^{d}\theta(i)$

$$\left|\sum_{d>y}^{\infty}\frac{\theta(d)}{d}\right| = \left|\sum_{d>y}^{\infty}\frac{S_d - S_{d-1}}{d}\right| = \left|-\frac{S_{[y]}}{[y]+1} + \sum_{d=[y]+1}^{\infty} S_d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+1}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{c_\theta\sqrt{[y]}}{[y]+1} + \sum_{d=[y]+1}^{\infty} c_\theta\sqrt{d}\,\frac{1}{d(d+1)} < \frac{c_\theta}{\sqrt{[y]}} + \sum_{d=[y]+1}^{\infty} c_\theta\frac{1}{d\sqrt{d}} <$$

$$< c_\theta\left(\frac{1}{\sqrt{[y]}} + \int_{[y]}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt\right) = \frac{3c_\theta}{\sqrt{[y]}} < \frac{c_7\cdot c_\theta}{\sqrt{y}} \quad (c_7 = 3 + \varepsilon_2 = 3{,}01)$$

Így végül a bizonyítandó állítást kapjuk, azaz

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\theta(d)}{d} > \frac{1}{\sqrt{y}}(c_5 - c_\theta c_6 - c_\theta c_7) = \frac{c'(\varrho - c_\theta)}{\sqrt{n_\theta}}$$

$$(c' \approx 6{,}904;\ \varrho \approx 0{,}222)$$

A tételből speciális esetként adódik az alábbi következmény: Ha θ teljesen multiplikatív számelméleti függvény, mely csak a 0, +1, −1 értékeket veszi fel, amelyre $\left|\sum_{d=1}^{n}\theta(d)\right| < A$ tetszőleges n-re, akkor $n_\theta = \left(\frac{2A}{\varrho}\right)^2$ választással, akkor

$$\left|\frac{\sum_{d=1}^{n}\theta(d)}{\max(\sqrt{n},\sqrt{n_\theta})}\right| \leqq A\cdot\frac{\varrho}{2A}=\frac{\varrho}{2}, \text{ így}$$

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\theta(d)}{d}>\frac{c'\frac{\varrho}{2}}{\frac{2A}{\varrho}}=\frac{c'\frac{\varrho^2}{4}}{A}=\frac{c''}{A} \quad (c''\approx 0{,}085)$$

Legyen most χ a mod k vett maradékosztályok csoportján értelmezett valós, nem főkarakter, akkor a Pólya-egyenlőtlenség szerint $A = C\sqrt{k}\log k$ választással következményünk feltételei teljesülnek, így tehát $L(1,\chi)>c_0/(\sqrt{k}\cdot\log k.)$

Megjegyzések: 1. Gelfond [2] cikkében szerepel, hogy ha a Riemann-hipotézis igaz, az 1/2-es kitevő nem javítható, mert a Liouville-féle λ függvény választása esetén tetszőleges $\varepsilon>0$-ra

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{d=1}^{\infty}\lambda(d)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right|=0, \quad \text{ugyanakkor} \quad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\lambda(d)}{d}=0.$$

2. Könnyen látható, hogy az $n_\theta \geqq N_0$ feltétel elejthető, ebben az esetben csupán ϱ értéke csökken.

3. Az l, x, y, konstansok más megválasztásával sem érhető el $\frac{c}{\sqrt{n_\theta}}$-nál jobb alsó korlát, mivel könnyen láthatóan szükséges a bizonyításhoz az $\frac{ly}{2\pi x}<1$ feltétel, így alsó korlátként legfeljebb $\frac{c}{\sqrt{y}} \leqq \frac{c}{\sqrt{n_\theta}}$ adódik, mivel a tétel kimondásában szereplő $n^{-\frac{1}{2}}\left|\sum_{d=1}^{n}\theta(d)\right| \leqq c_\theta$ feltételt csak $y \geqq n_\theta$ esetén használhatjuk fel.

IRODALOM

[1] PINTZ JÁNOS: A Dirichlet-féle L függvények elméletének egy pontjához. Matematikai Lapok 22 (1971), 143—148.

[2] A. O. GELFOND: On an elementary approach to some problems from the field of distribution of prime numbers.
Vestnik. Moskov. Univ. Ser. Fiz-Mat. Estest. Nauk 8. 21—26 (1953).

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕТА II.

ЯНОШ ПИНТЦ

ON A POINT IN THE THEORY OF DIRICHLET'S L-FUNCTIONS II.

J. PINTZ

JELENTÉS AZ 1971. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1971. november 1. és 11. között rendezte meg az 1971. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató és középiskolai tanuló, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1971-ben fejezték be.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Minden G végtelen kompakt topologikus csoportnak van olyan $g \neq 1$ eleme, hogy g összes hatványának halmaza mindenütt sűrű vagy sehol sem sűrű G-ben. (G topológiája Hausdorff-féle.)

2. Bizonyítandó, hogy létezik olyan rendezett halmaz, amelynek minden nem-megszámlálható részhalmaza tartalmaz nem-megszámlálható jólrendezett halmazt, és amely nem állítható elő megszámlálható sok jólrendezett halmaz egyesítéseként.

3. Legyen $0<a_k<1$, $k=1, 2, \ldots$. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy minden $0<x<1$ esetén legyen a természetes számok halmazának egy olyan permutációja (önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése), hogy

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}/2^k.$$

4. Tegyük fel, hogy V egy lokálisan kompakt topologikus tér, amely nem fedhető le megszámlálható sok kompakt halmazzal. Jelölje $\mathbf{C}$ a V tér kompakt részhalmazainak halmazát, $\mathbf{U}$ pedig azon nyílt részhalmazainak halmazát, amelyeket tartalmaz kompakt halmaz. Legyen f egy függvény, amely $\mathbf{U}$-t $\mathbf{C}$-be képezi le oly módon, hogy $f(U) \subseteq U$ minden $U \in \mathbf{U}$ esetén. Bizonyítandó, hogy ekkor vagy

(i) van olyan nem üres kompakt C halmaz, hogy valahányszor $C \subseteq U \in \mathbf{U}$, mindannyiszor $f(U)$ nem valódi részhalmaza C-nek, vagy pedig

(ii) valamilyen C kompakt halmazra

$$f^{-1}(C) \overset{def}{=} \bigcup \{U \in \mathbf{U} : f(U) \subseteq C\} \in \mathbf{U},$$

azaz $f^{-1}(C)$ nem része egyetlen kompakt halmaznak sem.

5. Tegyük fel, hogy a $0<\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ számsorozatra valamilyen K konstanssal

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 < K\lambda_n^2 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Bizonyítandó, hogy ekkor valamilyen K' konstanssal

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k < K'\lambda_n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

6. Legyenek $a(x)>0$ és $r(x)>0$ a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett folytonos függvények, és legyen

$$\liminf_{n\to\infty} (x-r(x))>0. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy $y(x)$ az egész számegyenesen folytonos függvény, amely differenciálható a $[0, \infty)$ intervallumon és ott teljesül az

$$y'(x) = a(x)y(x-r(x)) \tag{2}$$

egyenlőség. Bizonyítandó, hogy ekkor létezik és véges a

$$\lim_{x\to\infty} y(x)e^{-\int_0^x a(t)\,dt}$$

határérték.

7. Legyen $n\geqq 2$ egész szám, S egy n elemű halmaz, és legyenek az A_i-k, $1\leqq i\leqq k$, olyan különböző, legalább kételemű részhalmazai S-nek, hogy minden i, j, r, $1\leqq i<j<r<k$, esetén, ha az $A_i\cap A_j$, $A_i\cap A_r$ és $A_j\cap A_r$ halmazok egyike sem üres, akkor $A_i\cap A_j\cap A_r$ sem az. Bizonyítsuk be, hogy $k\leqq 2^{n-1}-1$.

8. Bizonyítandó, hogy egy erősen összefüggő kétpólusú gráf éleit mindig lehet úgy irányítani, hogy bármely K élhez legyen olyan (önmagát nem metsző) irányított út, amely a P pólusból a Q pólusba vezet és átmegy a K élen. (Erősen összefüggő kétpólusú gráfon olyan összefüggő véges gráfot értünk, amelyben kitüntettük a P, Q pontokat, és nincs olyan A, B pontpár, hogy $A\neq B$ és a B-t P-vel, valamint a B-t Q-val összekötő utak mindegyike átmegy A-n.)

9. Legyen $F(x)$ a $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett pozitív függvény, és tegyük fel, hogy $F(x)/x$ monoton nemcsökkenő, továbbá valamilyen pozitív d-vel $F(x)/x^{1+d}$ monoton nemnövekvő. Legyen $\lambda_n>0$ és a $a_n\geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Bizonyítandó, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F\left(a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\lambda_n\right) < \infty, \tag{1}$$

vagy pedig ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k/\lambda_n\right) < \infty, \tag{2}$$

akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

10. Legyen $\{\varphi_n(x)\}$ egynél kisebb normájú $L^2(0, 1)$-beli függvények olyan sorozata, amelynek bármely $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ részsorozatára az

$$\left\{x\in(0, 1): \left|\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n_k}(x)\right| \geqq y\right\} \tag{1}$$

halmaz mértéke 0-hoz tart, amint y és N végtelenhez tart. Bizonyítsuk be, hogy ekkor φ_n gyengén 0-hoz tart az $L^2(0, 1)$ függvénytérben.

11. Legyen C olyan egyszerű görbeív, amelynek görbülete monoton, és amely egybevágó az evolutájával. Bizonyítsuk be, hogy megfelelő differenciálhatósági feltételek teljesülése esetén C része egy cikloisnak.

Az 1. feladatot Erdős Jenő, a 2. feladatot Hajnal András, a 3. feladatot Erdős Pál, a 4. feladatot Máté Attila, az 5. feladatot Leindler László, a 6. feladatot Győri István, a 7. feladatot Erdős Pál, a 8. feladatot Ádám András, a 9. feladatot Leindler

László, a 10. feladatot Móricz Ferenc, a 11. feladatot pedig Szenthe János bocsátotta a bizottság rendelkezésére. A 2. feladat állítását J. Baumgartner, a 7. feladatét pedig E. C. Milner bizonyította be először.

A kitűzött feladatokra 26 versenyző összesen 159 megoldást adott be, amelyek között azonban sok hibás van. A versenyzők közül Berényi Péter, Kiss Emil és Tuza Zsolt a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tanulói. Egy versenyző nem közölte végzettségét. Számos versenyző igen rossz külalakú dolgozatot adott be. Minden feladatra érkezett helyes megoldás, azonban egyetlen versenyző sem oldotta meg az összes feladatot. Legnagyobb nehézséget az 1. és a 2. feladat okozta; az előbbire három, az utóbbira két helyes megoldás érkezett be. A negyedik feladatra a kitűző szándéka ellenére triviális megoldás adható, és a feltételek jelentős része felesleges, amint ezt elég sokan észrevették. A 11. feladat megfogalmazása pontatlan; erre is több versenyző rámutatott.

A Bizottság az I. díjat és a velejáró 2000—2000 Ft pénzjutalmat Nagy Zsigmondnak, az ELTE IV. éves matematikus hallgatójának és Babai Lászlónak, az ELTE IV. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

Nagy Zsigmond a 2. feladat kivételével minden feladatot megold, bár a 6. és a 11. feladatra adott megoldásának megfogalmazása kissé pontatlan. A 3. feladatra kiemelkedően szép megoldást ad, továbbá a 10. feladat állítását kiterjeszti L^p terekre. Babai László az 1. feladatban csak kisebb részeredményeket ér el, a 11. feladatra adott megoldása pedig hibás. A 2. feladatot nemcsak helyesen oldja meg, hanem általánosítja is. A 4. feladathoz nagyon értékes megjegyzést fűz, az 5., 9. és 10. feladatot általánosítja. Fogalmazása világos, sokszor azonban túlzottan hosszadalmas.

A versenybizottság a II. díjat és a velejáró 1300 Ft-ot Pósa Lajosnak, az ELTE 1971-ben végzett matematikus hallgatójának ítélte oda.

Pósa Lajos az 1. és a 11. feladatra nem küldött megoldást, a 9. feladatnak pedig csak az első részét oldja meg. Kiemelkedő, hogy a 2. feladatot helyesen oldja meg, bár fogalmazása kissé pontatlan. A 6. feladatra ő adja meg a legszebb megoldást, a 10. feladathoz pedig értékes megjegyzést fűz.

A versenybizottság a III. díjat és a velejáró 900—900 Ft pénzjutalmat Pelikán Józsefnek, az ELTE 1971-ben végzett matematikus hallgatójának, Ruzsa Imrének, az ELTE I. éves matematikus hallgatójának, és Deák Jenőnek, az ELTE 1971-ben végzett matematikus hallgatójának ítélte oda.

Pelikán József a 2. feladatra nem küldött megoldást, a 3. és 7. feladatra adott megoldása hibás, a többi feladatot megoldotta. Kiemelkedő az 1. és a 6. feladatra adott szép megoldása. Az 5., 10. és 11. feladatot általánosítja. Ez utóbbi feladatra egyedül ő adott teljesen kielégítő megoldást. Ruzsa Imre a 2. és 11. feladatra nem ad megoldást, a 3. feladatra adott megoldása pedig hibás. Az 5. és a 10. feladathoz érdekes megjegyzéseket fűz. Az 5., valamint a 9. feladatra adott megoldása kiemelkedően szép. Deák Jenő az 1. és 2. feladatra nem küldött megoldást, a 11. feladatban csak azt mutatta ki, hogy a logaritmikus spirális is kielégíti a feltételt. A többi feladatra helyes megoldást ad, a 6. feladatban kicsit többet is bizonyít. Megoldásai szépek.

A versenybizottság figyelemre méltó teljesítményükért dicséretben részesíti Bajmóczy Ervint, az ELTE I. éves matematikus hallgatóját, Laczkovich Miklóst, az ELTE 1971-ben végzett matematikus hallgatóját, Lempert Lászlót, az ELTE II. éves matematikus hallgatóját, Pintz Jánost, az ELTE III. éves matematikus hallgatóját, Surányi Lászlót, az ELTE V. éves matematikus hallgatóját és Tuza Zsoltot, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulóját.

Bajmóczy Ervin a 3., 7., 8., 10. feladatot oldja meg helyesen, a 11. feladatra kicsit hiányos megoldást ad. Laczkovich Miklós kommutatív csoportokra megoldja az 1. feladatot, helyesen megoldja a 3., 4., 5., 6., 9. és 10. feladatot, a 8. feladatra adott megoldása erősen hiányos, a 11. feladatra pedig csak részmegoldást ad. Lempetr László a 3., 5., 7., 9. és 10. feladatra ad helyes megoldást, a 11. feladatra adott megoldása kicsit, a 8. feladatra adott megoldása pedig erősen hiányos. Pintz János a 3., 4., 5., 6., 8., 10. és 11. feladatot oldja meg, bár a 11. feladatra adott megoldása kicsit hiányos. Surányi László a 3., 4., 5., 7. és 8. feladatra, valamint a 9. feladat első felére ad megoldást, bár ez utóbbi kissé hiányos. A gimnáziumi tanulók közül a legjobb teljesítményt Tuza Zsolt nyújtja, aki a 3., 5., és 8. feladatot megoldja, bár ez utóbbira adott megoldása kissé hiányos.

Szeged, 1971. december 16.

A VERSENYBIZOTTSÁG

Csákány Béla
Fodor Géza
Gécseg Ferenc
Gehér László
Kalmár László
Kovács István
Leindler László
Máté Attila titkár
Megyesi László
Peák István
Pintér Lajos
Pollák György
Soós Gyula
Szenthe János
Szőkefalvi-Nagy Béla
Tandori Károly elnök

1. feladat

Legyen G olyan végtelen kompakt csoport, amelyben minden nem egyelemű ciklikus alcsoport lezárásának van belső pontja, vagyis G minden nem egyelemű zárt alcsoportja nyílt. Célunk annak a bizonyítása, hogy G-nek van sűrű ciklikus alcsoportja.

Először legyen G kommutatív. Egy $A \neq 1$ ciklikus alcsoport lezárása nyílt, így véges n indexű alcsoportja G-nek, ezért az $x \to x^n$ $(x \in G)$ folytonos φ izomorfizmus ebbe képezi le G-t. A $G^n \neq 1$ kompakt, vagyis zárt, így nyílt alcsoportja G-nek, ezért $G^n \cap A$ sűrű G^n-ben. Tehát a $\varphi^{-1}(G^n \cap A)$ ciklikus alcsoport sűrű G-ben.

Ezenfelül megmutatjuk, hogy G minden nyílt alcsoportjának az indexe ugyanannak a prímszámnak hatványa. Ha p prímosztója n-nek, akkor $G^p \neq G$ miatt a G^{p^i} $(i=0, 1, 2, \ldots)$ nyílt alcsoportok szigorúan fogyó láncot alkotnak, így metszetük nem véges indexű zárt alcsoport, vagyis egyelemű. A G csoportnak az a topológiája, amelynél a G^{p^i} alcsoportok az 1-nek környezetbázisát alkotják, durvább G eredeti kompakt topológiájánál, így azzal egyenlő. Tehát G-nek minden nyílt alcsoportja p-hatvány indexű, mert alcsoportja valamelyik G^{p^i}.

A továbbiakban nem tesszük fel, hogy G kommutatív. A G csoport Z centruma nyílt alcsoport. Valóban, G nem egyelemű ciklikus alcsoportjainak lezárásai nyílt alcsoportok és lefedik G-t, így közülük véges számú is lefedi G-t; ezeknek a metszete részhalmaza Z-nek, tehát Z nyílt alcsoport.

A G/Z csoport p-csoport. Valóban, ha Z minden nyílt alcsoportja p-hatvány indexű és a $H \subseteq G$ alcsoportnak q indexű alcsoportja Z (q prímszám, ezért H kommutatív), akkor a Z nyílt alcsoportjaival képzett $H^q/H^{q^2} \neq 1$ faktorcsoport minden eleme q rendű (kivéve 1-et), így $p=q$; tehát a G/Z véges csoport p-csoport.

A G csoport kommutatív. Valóban, ha $Z \subseteq V \subseteq G$ és G/Z-nek a centruma V/Z, akkor minden $g \in G$ elem esetén a V csoport $x \to [x, g]$ $(x \in V)$ endomorfizmusánál V képe véges (mert az endomorfizmus magjának alcsoportja a véges indexű z), így egyelemű alcsoport; ezért $V = Z$, tehát $G = Z$, mert G/Z véges p-csoport.

Megjegyezzük, hogy a fenti elemi megoldás 3., 5. és 6. bekezdése teljesen kihagyható, ha figyelembe vesszük R. Baernek azt a tételét, amely szerint ha egy G (diszkrét) csoport centruma szerinti faktorcsoport véges, akkor G kommutátor alcsoportja véges. Megemlítjük még, hogy a megoldás 2. bekezdésében szereplő topologikus csoport valójában topologikusan izomorf a p-adikus egész számok topologikus csoportjával (p prímszám).

Erdős Jenő

Megjegyzés. Pelikán József észreveszi, hogy haladottabb eszközök felhasználásával (amelyek biztosítják, hogy minden végtelen kompakt csoportnak van valódi zárt alcsoportja) az állítás átfogalmazható a következőképpen: Ha egy G végtelen kompakt topologikus csoportnak minden nem egyelemű zárt alcsoportja nyílt, akkor G topologikusan izomorf a p-adikus egész számok topologikus csoportjával (p prímszám). Rámutat, hogy így némi élesítés is elérhető és hogy ez nem lehetséges a feltételek vagy a következmény kézenfekvő gyengítésével, illetve erősítésével. Felfigyel az említett átfogalmazás révén a probléma diszkrét csoportokra vonatkozó párhuzamára is.

Megoldották: Nagy Zsigmond, Pelikán József, Ruzsa Imre.

Kisebb részeredményeket értek el: Babai László, Laczkovich Miklós.

2. feladat

Legyen R az ω_1-nél kisebb limeszszámok halmaza, és minden $\alpha \in R$-hez legyen $f_\alpha(n)$ egy α-hoz konvergáló ω-típusú monoton növekvő rendszámsorozat. Rendezzük R-et a következőképpen: $\alpha, \beta \in R$ esetén $\alpha \prec \beta$, ha az első olyan n-re, amelyre $f_\alpha(n) \neq f_\beta(n)$, $f_\alpha(n) < f_\beta(n)$ áll.

R minden nem-megszámlálható X részhalmaza tartalmaz ω_1-típusú jólrendezett halmazt a $\prec$ rendezésben. Legyen ugyanis

$$X|n = \{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n): \text{ van olyan } \alpha \in X, \text{ hogy minden } m \leqq n\text{-re } f_\alpha(m) = \alpha_m\}.$$

Elég nagy n természetes szám esetén $X|n$ nem-megszámlálható, ugyanis elég nagy n-re a

$$\gamma_n = \sup \{f_\alpha(n): \alpha \in X\}$$

rendszám megegyezik ω_1-gyel, hisz $f_\alpha(n) \to \alpha$ miatt

$$\sup \{\gamma_n: n < \omega\} = \sup \{\alpha: \alpha \in X\} = \omega_1.$$

Rendezzük $X|n$-et lexikografikusan, azaz

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \prec' (\alpha_0, \ldots, \beta_n),$$

ha a legkisebb m-re, amelyre $\alpha_m \neq \beta_m$, $\alpha_m < \beta_m$ áll. Ekkor $X|n$ jólrendezett, és feltéve, hogy n olyan nagy, hogy $X|n$ nem-megszámlálható, tartalmaz ω_1-típusú jólrendezett halmazt.

Legyen X' olyan részhalmaza X-nek, hogy bármely

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in X|n$$

esetén pontosan egy olyan $\alpha \in X'$ létezik, hogy

$$f_\alpha(0)=\alpha_0, \ldots, f_\alpha(n)=\alpha_n.$$

Ekkor az $(X', \prec)$ rendezett halmaz hasonló $(X|n, \prec')$-höz. Mivel az utóbbiról láttuk, hogy tartalmaz ω_1-típusú jólrendezett részhalmazt, ugyanez áll az előbbire. Éppen ezt akartuk kimutatni.

Most megmutatjuk, hogy R nem áll elő megszámlálható sok jólrendezett részhalmazának egyesítéseként. Ehhez egy kis kitérőt teszünk.

Egy rendszámokat rendszámokba átvivő f függvényt regresszívnek nevezünk, ha $f(\xi)<\xi$ teljesül minden az f értelmezési tartományába eső $\xi \neq 0$ rendszámra. Ha f értelmezési tartománya része ω_1-nek, és a

$$\{\xi : f(\xi) < \mu\}$$

halmaz semmilyen $\mu<\omega_1$-re sem kofinális ω_1-gyel, akkor f-et divergensnek nevezzük. $X \subseteq \omega_1$-et ritkának nevezzük, ha értelmezhető rajta regresszív divergens függvény, ellenkező esetben pedig stacionáriusnak.

ω_1 nyilván stacionárius. Ugyanis, feltéve, hogy f regresszív függvény ω_1-en, a

$$\xi, f(\xi), f(f(\xi)), \ldots$$

sorozat, lévén rendszámoknak egy leszálló sorozata, csak véges sok nullától különböző elemet tartalmaz. Így

$$\omega_1 = \bigcup_{n<\omega} X_n,$$

ahol

$$X_0 = \{0\}$$

és

$$X_{n+1} = \{\xi : f(\xi) \in X_n\}.$$

Feltéve, hogy f divergens is, teljes indukcióval igazolható, hogy minden n-re $\sup X_n < \omega_1$, ami természetesen ellentmondás.

Ebből könnyen következik az is, hogy az ω_1-nél kisebb limeszszámok halmaza, R, is stacionárius.

A definícióból könnyen adódik, hogy megszámlálható sok ritka halmaz egyesítése is ritka. Továbbá, ha X stacionárius, és f regresszív függvény X-en, akkor valamilyen $\mu<\omega_1$-re az

$$X_\mu = \{\xi : f(\xi) = \mu\}$$

halmaz stacionárius (ez Fodor tételének speciális esete). Tegyük fel ugyanis, hogy mindegyik X_μ ritka, és legyen f_μ az X_μ-n értelmezett regresszív divergens függvény. Ekkor a

$$g(\xi) = \max(\mu, f_\mu(\xi)) \qquad (\xi \in X_\mu, \mu < \omega_1)$$

X-en értelmezett függvény regresszív. g divergens is, hisz bármely $\nu<\omega_1$ esetén a

$$\{\xi : g(\xi) < \nu\} \subseteq \bigcup_{\mu<\nu} \{\xi : f_\mu(\xi) < \nu\}$$

halmaz nem kofinális ω_1-gyel, hisz a jobb oldalon egyesítendő halmazok egyike sem az, az f_μ függvények divergenciája értelmében. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy X stacionárius — ami bizonyítja állításunkat.

Legyen $X \subseteq R$ stacionárius. Kimutatjuk, hogy X nem jólrendezett a $\prec$ rendezésben. Legyen ugyanis $Y_{-1}=X$, és

$$Y_n = \{\alpha \in Y_{n-1} : f_\alpha(n) = \delta_n\},$$

ahol $\delta_n < \omega_1$ a legkisebb olyan rendszám, amelyre Y_n stacionárius (ilyen δ_n a fent kimutatott Fodor-tétel értelmében létezik).

Legyen

$$X' = X - \bigcup_{n<\omega} Y',$$

ahol

$$Y'_n = \{\alpha \in Y_{n-1} : f_\alpha(n) < \delta_n\}.$$

δ_n választása értelmében Y'_n nem stacionárius, így $X - X'$ sem az.

Legyen

$$\delta = \sup \{\delta_n : n < \omega\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\delta < \omega_1$. Legyen $\alpha \in X'$ nagyobb δ-nál (X' stacionárius, és így kofinális ω_1-gyel). Mivel $f_\alpha(n) \to \alpha$, valamilyen $n < \omega$-ra

$$f_\alpha(n) > \delta \geqq \delta_n,$$

áll, így $f_\alpha(m) = \delta_m$ nem teljesül minden m-re. $\alpha \in X'$-ből következik, hogy a legkisebb olyan m-re, amelyre $f_\alpha(m) \neq \delta_m, f_\alpha(m) > \delta_m$ áll. Így, erre az m-re, α nagyobb Y_m minden eleménél a $\prec$ rendezésben.

Legyen $X_0 = X$, $\alpha_0 = \alpha$, és $X_1 = Y_m$. Mivel Y_m stacionárius, X_0 helyett X_1-gyel megismételhetjük a fenti gondolatmenetet. Kapjuk α_1-et, és X_2-t, majd α_2-t és X_3-at stb. Mivel $\alpha_0 \succ \alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \ldots$, X nem jólrendezett a $\prec$ rendezésben; ezt akartuk bizonyítani.

Ha most $R = \bigcup_{n<\omega} R_n$, akkor valamelyik R_n stacionárius — ez az R_n nem jólrendezett a $\prec$ rendezésben. Ezzel a feladat második állítását is igazoltuk.

Babai László és *Pósa Lajos*
megoldása alapján

Megjegyzés: Babai László megmutatja, hogy minden $\varkappa > \omega$ számossághoz van olyan $\varkappa$ számosságú rendezett halmaz, amelynek minden $\varkappa$ számosságú részhalmaza tartalmaz $\varkappa$ számosságú jólrendezett halmazt, és amely nem állítható elő $\varkappa$-nál kevesebb jólrendezett halmaz egyesítéseként.

Megoldották: Babai László és Pósa Lajos.

3. feladat

Az előállíthatóságnak nyilván szükséges feltétele:

$$\inf_k a_k = 0, \qquad \sup_k a_k = 1$$

A feltétel elégséges is.

Legyen $x \in (0, 1)$ rögzített szám, a keresett π permutációval $a_{\pi(k)} = b_k$ és

$$d_k = 2^k \left[x - \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \ldots + \frac{b_k}{2^k} \right) \right] \quad (d_0 = x).$$

Ha a π permutációt úgy választjuk, hogy minden k-ra $0 < d_k < 1$, akkor nyilván

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k / 2^k.$$

Tegyük fel, hogy $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k)$ már definiálva van és teljesül $0<d_0, d_1, \ldots, d_1<1$. $\pi(k+1)$-et úgy akarjuk definiálni, hogy $0<d_{k+1}<1$ teljesüljön. Ez ekvivalens az alábbi két egyenlőtlenség mindegyikével:

(1) $$2d_k-1 < b_{k+1} < 2d_k,$$

vagy

(2) $$2(1-d_k)-1 < 1-b_{k+1} < 2(1-d_k).$$

Arra is vigyáznunk kell, hogy minden a_k egyszer és csak egyszer forduljon elő a konstrukció folyamán.

Legyen a_l a legkisebb indexű olyan eleme a sorozatnak, amit még nem használtunk fel a $b_1, b_2, \ldots, b_k$ számok között. Ha $2d_k-1 < a_l < 2d_k$, akkor $b_{k+1} = a_l$ választható. Ha $a_l \geqq 2d_k$, akkor legyen n a legkisebb természetes szám, amelyre $2^{n+1}d_k > a$; ekkor $2^n d_k \leqq a_l$, tehát $2^{n+1}d_k \leqq 2a_l < 1+a_l$, azaz

$$2^{n+1}d_k - 1 < a_l < 2^{n+1}d_k.$$

A $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{k+n}$ számokat elég kicsire választva (ami $\inf_k a_k = 0$ miatt lehetséges), $d_{j+1} = 2d_j - b_{j+1}$ miatt d_{j+n} elég közel kerül $2^n d_k$-hoz, azaz elérhető, hogy

$$2d_{k+n}-1 < a_l < 2d_{k+n}$$

teljesüljön. Ekkor $b_{k+n+1} = a_l$ választható.

Ha $a_l \leqq 2d_k - 1$, vagy ami ezzel ekvivalens, $1-a_l \geqq 2(1-d_k)$, akkor ugyanezt az eljárást kell ismételnünk a_l, a_j, d_j helyett az $1-a_l, 1-a_j, 1-d_j$ számokkal, az (1) helyett a (2) egyenlőtlenséggel, felhasználva az $1-d_{j+1} = 2(1-d_j)-(1-b_{j+1})$ összefüggést. Itt most az $1-b_j$ számokat kell elég kicsire, vagyis a b_j-ket 1-hez elég közel választanunk, ami $\sup_k a_k = 1$ miatt lehetséges.

Ezt az eljárást ismételve, végül is egy kívánt tulajdonságú permutációt kapunk.

Deák Jenő és *Nagy Zsigmond*
megoldása alapján

Megoldották: Babai László, Bajmóczy Ervin, Bárány Imre, Deák Jenő, Herényi István, Laczkovich Miklós, Lempert László, Mérő László, Nagy Zsigmond, Pintz János, Pósa Lajos, Tuza Zsolt, Vértes János.

4. feladat

Az állítás triviális. Jelölje ugyanis 0 az üres halmazt. Ha $f^{-1}(0) = V$, akkor (ii) teljesül. Ha nem, akkor tetszés szerinti $x \in V - f^{-1}(0)$-ra (i) teljesül a $C = \{x\}$ halmazzal. (Nem használtuk ki, hogy V nem σ-kompakt; csak annyit használtunk, hogy V nem kompakt.)

Nagy Zsigmond
megoldása alapján

Megjegyzés. Babai László bebizonyítja, hogy ha a feladat feltételei mellett (ii) nem teljesül, akkor (i) teljesül egy kételemű C halmazzal. Ennek bizonyítása igen nehéz.

Megoldották: Babai László, Deák Jenő, Laczkovich Miklós, Mérő László, Nagy Zsigmond, Pelikán József, Pintz János, Pósa Lajos, Ruzsa Imre, Surányi László.

5. feladat

I. megoldás

Feltehetjük, hogy K egész szám. Ekkor kimutatjuk, hogy a (2) fennáll $K'=8K$-val. Teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás nyilvánvalóan igaz $n \leqq 8K$ esetén, hiszen $K \geqq 1$. Legyen $n > 8K$.

Először is vegyük észre, hogy a $\{\lambda_n\}$ sorozat monotonitása és az (1) következtében

$$4K\lambda_{n-4K}^2 \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 \leqq K\lambda_n^2,$$

azaz $\lambda_{n-4K} \leqq \lambda_n/2$. Ezt és az indukciós feltevést, majd a $\{\lambda_n\}$ sorozat monotonitását felhasználva kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n-4K-1} \lambda_k + \sum_{k=n-4K}^{n-1} \lambda_k$$

$$\leqq 8K\lambda_{n-4K} + \sum_{k=n-4K}^{n-1} \lambda_n \leqq 4K\lambda_n + 4K\lambda_n = 8K\lambda_n,$$

ami a bizonyítandó volt.

Máté Attila

II. megoldás

A λ_i sorozat monotonitása nem is szükséges. Bebizonyítjuk ugyanis, hogy $\mu_i > 0$ mellett annak, hogy valamilyen K konstanssal

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i < K\mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

teljesüljön, szükséges és elégséges feltétele az, hogy létezzék olyan $c > 0$ valós és r természetes szám, hogy minden n-re

(a) $\qquad \mu_{n+1} > c\mu_n$ és

(b) $\qquad \mu_{n+r} > 2\mu_n$ legyen.

Ebből a feladat állítása már következik, ugyanis ha

$$\lambda_{n+1}^2 > c\lambda_n^2 \quad \text{és} \quad \lambda_{n+r}^2 > 2\lambda_n^2, \quad \text{akkor} \quad \lambda_{n+1} > \sqrt{c}\lambda_n, \quad \text{és}$$

$$\lambda_{n+2r}^2 > 2\lambda_{n+r}^2 > 4\lambda_n^2 \quad \text{miatt} \quad \lambda_{n+2r} > 2\lambda_n.$$

(a) szükséges. Ugyanis $(*)$-ból $\mu_i > 0$ miatt $\mu_{n-1} < K\mu_n$, tehát (a) $c = \frac{1}{K}$-val teljesül.

(b) szükséges. Ugyanis ekkor (megint $(*)$-ból)

$$\mu_{n+1} > \frac{1}{K}\mu_n, \quad \mu_{n+2} > \frac{1}{K}\mu_n, \quad \ldots \quad \mu_{n+r-1} > \frac{1}{K}\mu_n;$$

összeadva:

$$\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \ldots + \mu_{n+r-1} > \frac{r-1}{K}\mu_n.$$

(*) miatt tehát

$$\mu_{n+r} > \frac{1}{K}(\mu_{n+1}+\ldots+\mu_{n+r-1}) > \frac{r-1}{K^2}\mu_n,$$

vagyis (b) $r > 2K^2+1$ mellett igaz lesz.

(a) és (b) elégséges. Ugyanis ekkor, $\mu_0=\mu_{-1}=\ldots=0$-t írva,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}\mu_{n-i-jr} < \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu_{n-i}}{2^j}$$

$$\leqq 2\sum_{i=1}^{r}\mu_{n-i} < 2\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu_n}{c^i} = K\mu_n, \quad \left(K = 2\sum_{i=1}^{r}c^{-i}\right).$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy (a) miatt $\mu_{m+l} > c^l\mu_m$.

Látszik, hogy négyzet helyett bármely $\alpha>0$-dik hatványra is igaz a feladat állítása.

Ruzsa Imre

Megoldották: Babai László, Csörgő Piroska, Deák Jenő, Gegesy Ferenc, Herényi István, Laczkovich Miklós, Lempert László, Nagy Zsigmond, Pelikán József, Pintz János, Pósa Lajos, Ruzsa Imre, Surányi László, Tuza Zsolt, Vértes János.

6. feladat

A (2) egyenlőség integrálásával kapjuk, hogy

$$y(x) = y(u)+\int_u^x a(t)y(t-r(t))\,dt \quad (x\geqq u\geqq 0).$$

Bármilyen folytonos függvény $y(x)$ a $(-\infty, 0]$ intervallumon, könnyen látható, hogy $y(x)$ egyértelműen folytatható az egész számegyenesen úgy, hogy a (3) egyenlet fennálljon. Valóban, tegyük fel, hogy x_0 azon pontok szuprémuma, ameddig egyértelmű folytatás lehetséges. Ekkor az x_0 valamilyen δ sugarú környezetében $r(t)$ nagyobb valamilyen pozitív ε-nál. Legyen η az ε és δ számok közül a kisebb. Ekkor a (3) értelmében $y(x)$-nek $x \leqq x_0-\eta/2$ esetén felvett értékei egyértelműen meghatározzák $y(x)$ értékeit az $(x_0-\eta/2,\ x_0+\eta/2)$ intervallumban. Ez ellentmond x_0 választásának.

Hasonló okoskodással az is belátható, hogy ha $y(x)$ pozitív a $(-\infty, 0]$ intervallumon, akkor $y(x)$ pozitív az egész számegyenesen. Ebben az esetben a (2) figyelembevételével azt kapjuk, hogy $y(x)$ monoton növekvő a $[0, \infty)$ intervallumon.

Legyen

$$z(x) = y(x)e^{-\int_0^x a(t)\,dt} \quad (x\geqq 0). \tag{4}$$

Differenciálással, majd a (2) felhasználással kapjuk, hogy

$$z'(x) = a(x)e^{-\int_0^x a(t)\,dt}\,[y(x-r(x))-y(x)]. \tag{5}$$

A feladat állításának igazolásához tegyük fel egyelőre, hogy $y(x)$ pozitív a $(-\infty, 0]$ intervallumon. Ekkor, mint láttuk, $y(x)$ mindenütt pozitív, továbbá $x \geqq 0$ esetén monoton nő. Így $z(x)$ minden $x \geqq 0$-ra pozitív; továbbá elég nagy x-ekre $z(x)$ monoton csökken. Ugyanis az (1)-ből látható, hogy nagy x-ekre $x - r(x) > 0$; így $y(x)$ monotonitása miatt az (5) alapján kapjuk, hogy $z'(x)$ negatív. Mivel $z(x$ pozitív és monoton csökkenő, $\lim_{x \to \infty} z(x)$ létezik.

Az általános esetet igazolandó, állítsuk elő a $(-\infty, 0]$ intervallumon az $y(x)$ függvényt

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x) \tag{6}$$

alakban, ahol $y_1(x)$ és $y_2(x)$ pozitív folytonos függvények. Amint fent láttuk, $y_1(x)$ és $y_2(x)$ kiterjeszthető az egész számegyenesre oly módon, hogy $x \geqq 0$ esetén rájuk a (2) differenciálegyenlet teljesüljön. A (2) megoldásának imént látott egyértelműsége alapján az is világos, hogy a (6) összefüggés az egész számegyenesen érvényben marad. A (4)-gyel analóg módon definiálva a $z_1(x)$ és $z_2(x)$ függvényt, a fentiek szerint létezik a $\lim_{x \to \infty} z_1(x)$ és a $\lim_{x \to \infty} z_2(x)$ határérték. Így a

$$\lim_{x \to \infty} z(x) = \lim_{x \to \infty} \left(z_1(x) - z_2(x)\right)$$

határérték szintén létezik. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Győri István

Megoldották: Babai László, Deák Jenő, Gegesy Ferenc, Laczkovich Miklós, Nagy Zsigmond, Pelikán József, Pintz János, Pósa Lajos, Ruzsa Imre.

7. feladat

I. megoldás

Teljes indukciót alkalmazunk ($n=2$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz). Legyen $n>2$, és legyen $A_1 \neq S$ maximális eleme a

$$K = \{A_i : 1 \leqq i \leqq k\}$$

halmaznak abban az értelemben, hogy ha valamely $A_i \in K$-ra $A_1 \subseteq A_i$, akkor $i=1$, vagy $A_i = S$. Válasszunk az $S - A_1$ halmazból egy tetszés szerinti x elemet, és legyen

$$K_1 = \{A_i \in K : x \notin A_i\},$$

$$K_2 = \{A_i \in K : x \in A_i \& A_1 \cap A_i = 0\},$$

$$K_3 = \{A_i \in K : x \in A_i \& A_1 \subseteq A_i\},$$

$$K_4 = \{A_i \in K : x \in A_i \& A_1 \cap A_i \neq 0 \& A_1 \not\subseteq A_i\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4. \tag{0}$$

Megbecsüljük a K halmaz $|K|$ számosságát. Az indukciós feltevésből kapjuk, hogy

$$|K_1| \leqq 2^{n-2} - 1. \tag{1}$$

Jelölje l az A_1 halmaz elemeinek számát. Ekkor, figyelembe véve, hogy K-nak, és így K_2-nek is, minden eleme legalább kételemű halmaz, kapjuk, hogy

$$|K_2| \leqq 2^{n-l-1}-1. \tag{2}$$

Az A_1-re tett maximalitási feltétel miatt K_3 egyetlen eleme S lehet, azaz

$$|K_3| \leqq 1. \tag{3}$$

Végül, a K_4 halmaz elemei az $S-A_1$ halmazt 2^{n-l-1} különböző halmazban metszhetik, az A_1 halmazt pedig 2^l-2 halmazban (A_1 és az üres halmaz nem fordulhat elő az utóbbi metszetek között). Ezeket a metszeteket tetszés szerint párosítva kapnánk, hogy

$$|K_4| \leqq 2^{n-l-1}(2^l-2) = 2^{n-1}-2^{n-l}.$$

Valójában ez a becslés pontosítható. Ugyanis, ha $X \in K_4$, akkor biztos, hogy

$$Y = (X-A_1) \cup (A_1-X) \notin K_4,$$

hisz az A_1, X és Y halmazok nem teljesítik az A_1-kre kiszabott metszési feltételt ($A_1 \cap X$, $A_1 \cap Y$, $X \cap Y$ nem üres, viszont $A_1 \cap X \cap Y$ üres). Mivel pedig az

$$X \mapsto Y = (X-A_1) \cup (A_1-X)$$

hozzárendelés, fix A_1 esetén, egy-egyértelmű, és ha $x \in X \,\&\, A_1 \cap X \neq 0 \,\&\, A_1 \subseteq X$, akkor Y-ra ugyanez áll, K_4-nek legfeljebb fele annyi eleme lehet, mint amennyit a fenti becslés megenged; azaz

$$|K_4| \leqq 2^{n-2}-2^{n-l-1}. \tag{4}$$

A (0)—(4) figyelembevételével kapjuk, hogy $|K| \leqq 2^{n-1}-1$, ami éppen a kívánt eredmény.

Pósa Lajos dolgozatából
Pelikán József ötletének felhasználásával

II. megoldás

Teljes indukciót alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $n>2$, és tekintsük először a következő esetet: Nem létezik olyan i és j, hogy $A_i \cup A_j = S$, és $A_i \cap A_j$ egyelemű. Ekkor könnyen belátható, hogy teljesül a feladat állítása. Ugyanis, véve S-nek egy tetszés szerinti x elemét, azon A_i-k száma, amelyek x-et nem tartamazzák, az indukciós feltevés szerint legfeljebb $2^{n-2}-1$. Azon $X \subseteq S$ halmazok száma, amelyekre $x \in X$, pontosan 2^{n-1}. Ezeknek legfeljebb a fele, azaz 2^{n-2}, fordulhat elő az A_i-k között. Ugyanis, ha $X=A_i$ ezen halmazok egyike, akkor az előbbi feltevés szerint nincs olyan j, amelyre $A_j = (S-X) \cup \{x\}$. Így az A_i-k száma valóban legfeljebb $2^{n-1}-1$.

Feltehetjük tehát, hogy valamilyen $x \in S$-re $A_1 \cup A_2 = S$ és $A_1 \cap A_2 = \{x\}$. Legyen r és s A_1, illetve A_2 elemeinek száma. Világos, hogy $r+s=n+1$. Azon A_i-k száma, amelyekre $A_i \subseteq A_1$, az indukciós feltevés értelmében legfeljebb $2^{r-1}-1$. Hasonlóan, azoké, amelyekre $A_i \subseteq A_2$, legfeljebb $2^{s-1}-1$. Ha A_i-re a fenti esetek egyike sem áll, akkor nyilvánvalóan $x \in A_i$; ugyanis $A_1 \cap A_2 \neq 0$, $A_1 \cap A_i \neq 0$ és $A_2 \cap A_i \neq 0$, ezért a feladat feltételei értelmében $A_1 \cap A_2 \cap A_i \neq 0$. Ezért az ilyen A_i-ket a következőképpen lehet összeszámolni: az $A_i - A_1$ halmazok száma legfeljebb $2^{s-1}-1$ (az üres halmaz nem fordul elő közöttük); az $A_i - A_2$ halmazok

száma pedig legfeljebb $2^{r-1}-1$. Mivel e két halmaz egyértelműen meghatározza A_i-t (ugyanis $A_i = \{x\} \cup (A_i - A_1) \cup (A_i - A_2)$), ezért a tekintett A_i-k száma legfeljebb $(2^{s-1}-1)(2^{r-1}-1)$. A részeredményeket összeadva azt kapjuk, hogy az összes A_i-k száma legfeljebb $2^{r+s-2}-1 = 2^{n-1}-1$, ami a bizonyítandó volt.

Baranyai Zsolt és *Mérő László*
megoldása alapján

Megjegyzés. Több versenyző észrevette, hogy $k = 2^{n-1}-1$ csak akkor fordulhat elő, ha valamilyen $x \in S$-re az A_i halmazokat éppen S x-et tartalmazó legalább kételemű részhalmazai alkotják. Ez bebizonyítható teljes indukcióval, például az I. megoldás gondolatmenetnék felhasználásával.

Megoldották: Babai László, Bajmóczy Ervin, Baranyai Zsolt, Csörgő Piroska, Deák Jenő, Herényi István, Lempert László, Mérő László, Nagy Zsigmond, Pósa Lajos, Ruzsa Imre, Surányi László.

8. feladat

A) Bebizonyítom, hogy van a csúcsokon értelmezett olyan valós értékű függvény, amelyre

1° $f(P)=1$, $f(Q)=0$;

2° ha $f(A)=f(B)$, akkor $A=B$;

3° ha $A \neq P$, akkor van olyan AB él, hogy $f(B)>f(A)$;

4° ha $A \neq Q$, akkor van olyan AB él, hogy $f(B)<f(A)$.

a) A G gráf összefüggő, ezért van P és Q között $P=A_0, \ldots, A_m=Q$ út. Ezen a részhalmazon $f(A_k) = 1-k/m$ megfelelő függvény.

b) Legyen f a $G_1 \neq G$ részhalmazon értelmezett megfelelő függvény. Megmutatom, hogy f folytatható bővebb halmazra. Legyen C eleme $G_2 = G - G_1$-nek. C-ből vezet P-be út, mert G összefüggő; legyen A_1 egy ilyen útnak az utolsó G_2-be tartozó csúcsa, a következő csúcs A_0. Lévén pedig G erősen összefüggő, A_0-t elhagyva $A_1 \neq A_0$-ból vezet út P-be vagy Q-ba. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ ilyen út, $A_i \neq A_0$, és legyen $n \geqq 2$ a legkisebb olyan index, amelyre A_n G_1-ben van (ilyen létezik, mivel az út végpontja, P vagy Q, G_1-ben van 1° miatt). $A_n \neq A_0$, és mind a két pont G_1-ben van, ezért 2° miatt az $(f(A_0), f(A_n))$ nyílt intervallum nem üres, s még akkor is végtelen sok eleme marad, ha elhagyjuk belőle f-nek a G_1-en felvett értékeit. A megmaradó számok közül egy $n-1$ tagú szigorúan monoton részsorozatot hozzá lehet rendelni az $A_1, \ldots, A_{n-1}$ pontokhoz úgy, hogy $f(A_0), f(A_1), \ldots, f(A_n)$ is szigorúan monoton legyen. Az így kibővített értelmezési tartományon is igaz 1°–4°: 1° és 2° nyilvánvaló, 3° és 4° is, ha A G_1-ben van, ha pedig $A = A_i (1 \leqq i \leqq n-1)$, akkor B-nek A_{i-1}, illetve A_{i+1} választható.

a)-ból és *b)*-ből következik *A)*, mert G véges.

B) Megmutatom, hogy az éleknek megfelelő irányítása a következő: az AB él pontosan akkor vezet A-ból B-be, ha $f(A)>f(B)$. Legyen A_1 a K él kezdőpontja, B_1 a végpontja. Legyen A_{n+1} a 3°-nak megfelelő B csúcs, ha $A=A_n \neq P$. Hasonlóan képezem 4° szerint a B_n sorozatot. Az $\ldots, A_2, A_1, B_1, B_2, B_3, \ldots$ sorozat minden eleme különböző, mert f szigorúan monoton csökkenő sorozatba képezi le. Véges G-re ez csak úgy lehetséges, ha A_n és B_n is megakad: valamilyen r-re és s-re $(r, s \geqq 1)$ $A_r=P$, $B_s=Q$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_2, A_1, B_1, B_2, \ldots, B_{s-1}, B_s$ élsorozat a kívánt tulajdonságú út.

Bajmóczy Ervin

Megoldották: Babai László, Bajmóczy Ervin, Bárány Imre, Baranyai Zsolt, Berényi Péter, Deák Jenő, Herényi István, Nagy Zsigmond, Pelikán József, Pintz János, Pósa Lajos, Ruzsa Imre, Surányi László.

Hiányos megoldást küldtek: Győri György, Korchmáros Gábor, Laczkovich Miklós, Lempert László, Tuza Zsolt.

9. feladat

I. megoldás

Megoldás. A feltételek szerint $x \geqq 1$ esetén $F(x)/x \geqq F(1)$, $x \leqq 1$ esetén pedig $F(x)/x^{1+d} \geqq F(1)$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $F(1)=1$. Ekkor kapjuk, hogy

(3) $F(x) \geqq x$, ha $x \geqq 1$, és

(4) $F(x) \geqq x^{1+d}$, ha $x \leqq 1$.

Az állítást először az (1) feltétel fennállása esetén igazoljuk. Ebből a célból jelölje $\sum_n'$ azon n-ekre való összegezést, amelyekre

$$a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\lambda_n \geqq 1,$$

$\sum_n''$ pedig az egyéb n természetes számokra való összegezést. Ekkor az (1) és a (3) alapján

$$\infty > \sum_n' \lambda_n F\left(a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\lambda_n\right) \geqq \sum_n' a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geqq \sum_n' a_n \lambda_1.$$

Mivel $\lambda_1 > 0$, kapjuk, hogy

(5) $$\sum_n' a_n < \infty.$$

Másrészt az (1) és a (4) alapján kapjuk, hogy

(6) $$\infty > \sum_n'' \lambda_n F\left(a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\lambda_n\right) \geqq \sum_n'' a_n^{1+d} \lambda_n^{-d} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{1+d}.$$

Osszuk a $\sum_n''$ összeget két részre:

$$\sum_n'' = \sum_{n(1)}'' + \sum_{n(2)}'',$$

ahol az első összegezés olyan n-ekre történik, amelyekre

$$a_n < \lambda_n \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{(1+d)/d},$$

a második összegezés pedig az egyéb tagokra. Ekkor egyrészt Abel és Dini egy ismert tétele alapján (l. pl. Szász Pál, A differenciál- és integrálszámítás elemei, I. kötet második kiadás, Bp. 1951; 586—587. o.)

(7) $$\sum_{n(1)}'' a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{(1+d)/d} < \infty,$$

hiszen $(1+d)/d>1$, másrészt, a (6) alatti becslést figyelembe véve, kapjuk:

$$\infty > \sum_n{}''_{(2)} a_n a_n^d \lambda_n^{-d} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1+d}$$

$$\geqq \sum_n{}''_{(2)} a_n \left(\lambda_n \Big/ \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^{(1+d)/d}\right)^d \lambda_n^{-d} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1+d} = \sum_n{}''_{(2)} a_n .$$

Ezt összevetve az (5)-tel és a (7)-tel adódik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ valóban konvergens.

A (2) fennállása esetén az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_n>0$. Ezt megtehetjük, mivel ha $a_n=0$ véges sok n kivételével, akkor nincs mit bizonyítanunk; különben pedig a 0-val egyenlő a_n-ek és az azonos indexű λ_n-ek elhagyhatók. Legyen $X=\{n:a_n>1\}$. Ha $n\in X$, akkor

$$\sum_{k=1}^n a_k \lambda_k/\lambda_n \geqq a_n \lambda_n/\lambda_n > 1,$$

tehát a (2) és a (3) miatt

$$\infty > \sum_{n\in X} \lambda_n \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k/\lambda_n = \sum_{n\in X} \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k \geqq \sum_{n\in X} a_{n_0} \lambda_{n_0},$$

ahol n_0 X legkisebb eleme, feltéve, hogy X nem üres; így X mindenképpen véges. Eszerint az a_n sorozat korlátos. Legyen $a_n\lambda_n=\mu_n$. Ekkor a (2) így írható

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n/a_n) F\left(a_n \sum_{k=1}^n \mu_k/\mu_n\right) < \infty$$

ami az a_n sorozat korlátossága miatt azt jelenti, hogy az (1) feltétel teljesül λ_n helyett μ_n-nel. Ebből a feltételből pedig, amint az imént bizonyítottuk, következik $\sum a_n$ sor konvergenciája.

Laczkovich Miklós és *Ruzsa Imre*
megoldása alapján

II. megoldás

A (2) teljesülése esetén az állítás közvetlenül is igazolható. Felhasználjuk az előző megoldás gondolatmenetét a (4)-es formuláig bezárólag. $\sum_n{}'$-vel jelölve azon n természetes számokra való összegezést, amelyekre

$$\sum_{k=1}^n a_k \lambda_k/\lambda_n \geqq 1, \tag{5}$$

a (2) és a (3) alapján kapjuk, hogy

$$\infty > \sum_n{}' \lambda_n F\left(\sum_{k=1}^n a_k \lambda_k/\lambda_n\right) \geqq \sum_n{}' \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k$$

$$\geqq \sum_{n\geqq n_0}{}' a_{n_0} \lambda_{n_0} = a_{n_0} \lambda_{n_0} \sum_{n\geqq n_0}{}' 1.$$

Ha itt n_0-at úgy választjuk, hogy $a_{n_0}\neq 0$ (ha nincs ilyen n_0, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0$, így a feladat állítása nyilvánvalóan teljesül), következik, hogy az (5) csak véges sok n-re

teljesül. Így a (2) és a (4) alapján kapjuk, hogy

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k / \lambda_n \right)^{1+d} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-d} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k \right)^{1+d}. \tag{6}$$

Feltéve, hogy nem minden a_n nulla, innen adódik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-d} < \infty;$$

ezért

$$\lambda_n \to \infty. \tag{7}$$

Legyen n_q a lehető legnagyobb olyan n természetes szám, amelyre $2^q \leqq \lambda_n < 2^{q+1}$; ha ilyen n nincs, n_q-t tetszés szerint választhatjuk, ekkor ugyanis, amint látni fogjuk, λ_{n_q} szorzója úgyis nulla lesz. A (6) alatti becslést folytatva kapjuk:

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-d} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k \right)^{1+d}$$

$$\geqq \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{n_q}^{-d} \left(\sum_{\langle k : 2^q \leqq \lambda_k < 2^{q+1} \rangle} a_k \lambda_k \right)^{1+d}$$

$$\geqq \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-d(q+1)} 2^{q(1+d)} S_q^{1+d} = 2^{-d} \sum_{q=1}^{\infty} 2^q S_q^{1+d},$$

ahol

$$S_q = \sum_{\langle k : 2^q \leqq \lambda_k < 2^{q+1} \rangle} a_k.$$

Tehát, valamilyen K pozitív számmal

$$\sum_{q=1}^{\infty} 2^q S_q^{1+d} < K.$$

Így minden q természetes számra

$$2^q S_q^{1+d} < K,$$

azaz

$$S_q < K \cdot 2^{-q/(1+d)}.$$

Innen nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{q=1}^{\infty} S_q < \infty.$$

S_q definícióját és a (7)-et figyelembe véve világos, hogy $\sum_{q=1}^{\infty} S_q \geqq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ valamilyen n_0-ra, így valóban $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Máté Attila

Megjegyzések. 1. A feladatot Leindler László eredetileg az (1) feltétellel bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére. Máté Attila vette észre, hogy az állítás a (2) feltételből is következik.

2. Babai László integrálokra is kimond egy, a feladatéval analóg állítást: Ha $F(x)$ a $(0, \infty)$ intervallum értelmezett pozitív függvény, $F(x)/x$ monoton nem

csökkenő, és alkalmas $d>0$-ra $F(x)/x^{1+d}$ monoton nem növő, továbbá $\Lambda(t)$ és $A(t)$ a $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett abszolút folytonos függvények, $A(t)$ monoton nem csökkenő és $\Lambda'(t)>0$ m.m., továbbá $\lim_{t\to 0} A(t)=\lim_{t\to 0}\Lambda(t)=0$, akkor

$$\int_0^\infty \Lambda'(t)F\left(\frac{A(t)}{\Lambda'(t)}\Lambda(t)\right)dt<\infty$$

és

$$\int_0^\infty \Lambda'(t)F\left(\frac{1}{\Lambda'(t)}\int_0^t A'(x)\Lambda'(x)dx\right)dt<\infty$$

bármelyike maga után vonja, hogy $\lim_{t\to\infty} A(t)<\infty$. ($F(x)/x$ monotonitása folytán az $\int$ jel után mérhető függvények állnak.)

Megoldották: Babai László, Deák Jenő, Gegesy Ferenc, Laczkovich Miklós, Lempert László, Nagy Zsigmond, Pelikán József, Ruzsa Imre.

Az első részt megoldották: Baranyai Zsolt (kicsit hiányos), Mérő László, Pósa Lajos, Surányi László (kicsit hiányos).

10. feladat

Bizonyításul tegyük fel, hogy van olyan $f\in L^2(0, 1)$ függvény, hogy $\int_0^1 \varphi_n(x)f(x)dx$ $n\to\infty$ esetén nem tart 0-hoz. Ekkor

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(x)f(x)dx\right| \leqq \|\varphi_n\|^2\|f\|^2 \leqq \|f\|^2 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

miatt ($f(x)$ helyett esetleg alkalmas ϑ-val az $e^{i\vartheta}f(x)$ függvényt véve) van olyan $\alpha>0$ és olyan $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ részsorozat, hogy minden k-ra $\operatorname{Re}\int_0^1 \varphi_{n_k}(x)f(x)dx\geqq\alpha$. ($\|f\|^2$ jelöli az $f(x)$ függvény $L^2(0, 1)$-beli normáját.)

Nyilván minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\delta>0$, hogy $m(A)<\delta$, $A\subseteqq(0, 1)$ esetén $\|\chi_A f\|^2<\varepsilon$ ($m(A)$ az A halmaz mértéke és $\chi_A(x)$ jelöli az A halmaz karakterisztikus függvényét). Legyen ε α-nál kisebb pozitív szám, δ az ehhez az ε-hoz az előzőek szerint megválasztott pozitív érték, továbbá válasszuk meg $y(\varepsilon)$-t és $N(\varepsilon)$-t oly módon, hogy $N\geqq N(\varepsilon)$ esetén az

$$E=\left\{x\in(0, 1): \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^N \varphi_{n_k}(x)\right|>y(\varepsilon)\right\}$$

halmaz mértéke δ-nál kisebb legyen. Ekkor a fentiek szerint $N\geqq N(\varepsilon)$ esetén

$$N\alpha \leqq \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\int_0^1 f(x)\varphi_{n_k}(x)dx = \operatorname{Re}\int_{CE} f(x)\sum_{k=1}^N \varphi_{n_k}(x)dx$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^N\int_E f(x)\varphi_{n_k}(x)dx$$

$$\leqq \sqrt{N}\int_{CE}|f(x)|\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^N\varphi_{n_k}(x)\right|dx+\sum_{k=1}^N\int_E|f(x)\varphi_{n_k}(x)|dx$$

$$\leqq \sqrt{N}y(\varepsilon)\|f\|^2+N\|\chi_E f\|^2<\sqrt{N}y(\varepsilon)\|f\|^2+N\varepsilon,$$

azaz $\sqrt{N}(\alpha-\varepsilon)<y(\varepsilon)\|f\|^2$, ami $\alpha-\varepsilon>0$ miatt elég nagy N-re nem teljesülhet. Tehát valóban minden $f\in L^2(0,1)$ függvényre $\int_0^1 \varphi_n(x)f(x)dx\to 0$, ha $n\to\infty$.

Bárány Imre

Megjegyzések. Lényegében minden elfogadható megoldás ezt az utat követi.

Pelikán József és Pósa Lajos megjegyzik, hogy elegendő kikötni a következőt: bármely $\{\varphi_n(x)\}_k$ részsorozatra és bármely $c>0$ számra az

$$\left\{x\in(0,1):\left|\sum_{k=1}^{N}\varphi_{n_k}(x)\right|>cN\right\}$$

halmaz mértéke $N\to\infty$ esetén 0-hoz tart.

Ruzsa Imre ellenpéldával megmutatja, hogy a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat $L^2(0,1)$-beli normában való korlátossága nélkül az állítás általában nem igaz, valamint felhívja a figyelmet arra, hogy a feladat feltételei esetén az erős konvergencia nem áll fenn.

Babai László megemlíti, hogy elegendő a következő feltétel: a természetes számok bármely $\{n_k\}$ részsorozatához van olyan $f(N)\neq 0$ függvény, melyre $f(N)/N\to 0$ $(N\to\infty)$ és az

$$\left\{x\in(0,1):\left|\frac{1}{f(N)}\sum_{k=1}^{N}\varphi_{n_k}(x)\right|>y\right\}$$

halmaz mértéke $y\to\infty$, $N\to\infty$ esetén 0-hoz tart. Ő is megjegyzi, hogy a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozatról sem mértékben, sem átlagban való konvergenciát nem állíthatunk.

Lempert László megjegyzi, hogy a feladat feltevése a következőképpen enyhíthető: a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat bármely részsorozatából kiválasztható olyan $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ részsorozat, amelyre a (1) halmaz mértéke $y\to\infty$, $N\to\infty$ esetén 0-hoz tart. Ő is megemlíti, hogy a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozatról erős konvergencia nem állítható.

Nagy Zsigmond felhívja a figyelmet arra, hogy ha a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat $L^p(0,1)$-beli normában való korlátosságát tesszük fel $(1<p\leqq\infty)$, akkor megmutatható, hogy a feladat feltevése mellett $\int_0^1 \varphi_n(x)\,f(x)dx\to 0$ $(n\to\infty)$ minden $f(x)\in L^q(0,1)$ $(1/p+1/q=1)$ függvényre következik.

Bajmóczy Ervin, Bárány Imre, Lempert László és Nagy Zsigmond a feladato komplex esetre bizonyítják.

Megoldották: Babai László, Bajmóczy Ervin, Bárány Imre, Deák Jenő, Laczkovich Miklós, Lempert László, Nagy Zsigmond, Pelikán József, Pintz János, Pósa Lajos, Ruzsa Imre.

11. feladat

A feladat szövege pontatlan, mivek a feltételeket nemcsak ciklois ív, hanem az $r=ae^{\vartheta}$ polárkoordinatás egyenletű logaritmikus spirális tetszés szerinti íve is kielégíti.

Legyen $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}(s)$, $s\in[0,t]$ a C görbének az az ívhosszparaméterrel való előállítása, melynél a $\varrho(s)$ görbületi sugár monoton növő függvény. Ekkor az E evolutát az $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}(s)+\varrho(s)\mathbf{n}(s)$ állítja elő, ahol $\mathbf{n}$ a főnormális és az evoluta $\mathbf{r}_2(0)$, $\mathbf{r}_2(s)$ pontok közötti ívének hossza $\sigma=\varrho(s)-\varrho_0$, ahol $\varrho_0=\varrho(0)$. Legyen Φ a C-t az E-be vivő egybevágó transzformáció; két eset lehetséges:

1. Φ az $\mathbf{r}(0)$ pontot az $\mathbf{r}_2(0)$-ba viszi.
2. Φ az $\mathbf{r}(0)$ pontot az $\mathbf{r}_2(1)$-be viszi.

Az $\mathbf{r}_2(s)$ pontban az evoluta görbületi sugara az 1. esetben $\varrho(\varrho(s)-\varrho_0)$, a 2. esetben pedig $\varrho(l-\varrho(s)+\varrho_0)$. Mivel a Frenet-formulák alapján $\frac{d\mathbf{r}_2}{d\sigma}=\mathbf{n}$, $\frac{d^2\mathbf{r}_2}{d\sigma^2}=-\frac{1}{\varrho(s)\varrho'(s)}\mathbf{t}$, azért az 1. esetben $\varrho(\varrho(s)-\varrho_0)=\varrho(s)\varrho'(s)$, a 2. esetben $\varrho(l-\varrho(s)+\varrho_0)=\varrho(s)\varrho'(s)$.

Az 1. esetben $s=\varrho(s)-\varrho_0$ érvényes minden $s\in[0, l]$ értékre. Ellenkező esetben ugyanis a megfelelő differenciálhatósági feltevések miatt volna olyan $[a, b]$ intervallum, hogy $a=\varrho(a)-\varrho_0$, $b=\varrho(b)-\varrho_0$ és az intervallum belsejében vagy mindenütt $\varrho(s)-\varrho_0>s$, vagy mindenütt $\varrho(s)-\varrho_0<s$ áll. De ekkor $b-a=\varrho(b)-\varrho(a)=$ $=\int_a^b\varrho'(s)ds=\int_a^b\frac{\varrho(\varrho(s)-\varrho_0)}{\varrho(s)}ds\gtrless b-a$ volna, ugyanis $\varrho(s)-\varrho_0>s$ esetén $\varrho(\varrho(s)-$ $-\varrho_0>\varrho(s)$, és $\varrho(s-\varrho_0)<s$ esetén $\varrho(\varrho(s)-\varrho_0)<\varrho(s)$ érvényes. Az 1. esetben tehát az $s=\varrho(s)-\varrho_0$ természetes egyenletekkel rendelkező görbék ívei lehetnek csak megoldások. Ezek a görbék viszont azok a logaritmikus spirálisok, melyek polárkoordinátás előállítása $r=ae^{\vartheta}$, és egyszerűen igazolható, hogy ezeknek bármely íve megoldás.

A 2. esetben $l-s=\varrho(l-\varrho(s)+\varrho_0)-\varrho_0$ érvényes minden $s\in[0, l]$ értékre. Ehhez először is be kell látni, hogy Φ a sík irányítását megfordítja. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető ugyanis, hogy amíg $\mathbf{r}(s)$ befutja a C görbét, a $\mathbf{t}(s)$ érintőegységvektor pozitív forgást végez. Ekkor viszont, amíg $\mathbf{r}_2(s)$ befutja az E evolutát, annak $\mathbf{n}(s)$ érintőegységvektora szintén pozitív forgást végez. Mivel Φ az $\mathbf{r}(0)$ pontot az $\mathbf{r}_2(l)$ pontba viszi át, ezért $\Phi(\mathbf{r}(s))$ az E-t az előbbivel ellentétes irányban futja be és így eközben az érintőegységvektor negatív forgást végez. Tehát Φ irányítást vált. Mivel a sík irányítást váltó egybevágósági transzformációja csúsztató tükrözés, ezért a C görbét az evoluta F evolutájába egy eltolás viszi át. Legyen E-nek az $\mathbf{r}_2(s)$ ponthoz tartozó görbületi középpontja az F-nek $\mathbf{r}_3(s)$ pontja. Ekkor az F-en az $\mathbf{r}_3(l)$ és $\mathbf{r}_3(s)$ pontok közötti ívnek a hossza $\varrho(l-\varrho(s)+\varrho_0)-\varrho_0$. Másrészt viszont a görbület monoton volta miatt az érintő iránya egyértelműen meghatározza a pontot, tehát a fenti eltolás az $\mathbf{r}(s)$ pontot az $\mathbf{r}_3(s)$ pontba viszi át. Ezért $\varrho(l-\varrho(s)+\varrho_0)-\varrho_0=l-s$, amit be kellett látni. Innen $\varrho(s)\varrho'(s)=l-s+\varrho_0$ adódik az előbbiek alapján. Vagyis a 2. esetben a megoldást a $\varrho^2(s)+(l-s+\varrho_0)^2=c$ természetes egyenletű görbék ívei adhatják csak. Ezek a görbék viszont az $x=a(u-\sin u)$, $y=a(l-\cos u)$ alakban előálló cikloisok, ahol $a=\frac{1}{4}\sqrt{\varrho_0^2+(l+\varrho_0)^2}$.

Egy ilyen görbén az $u\in[0, \pi]$ értékeknek megfelelő ív tetszés szerinti olyan $\overset{\frown}{P_1P_2}$ része adja a feladat megoldását a 2. esetben, amelyre $a=\frac{1}{4}\sqrt{\varrho^2(P_1)+[\overset{\frown}{P_1P_2}+\varrho(P_1)]^2}$ (ilyen az egész ív is).

Pelikán József
megoldása alapján

Megjegyzés: A feladat általánosításaként kereshetők olyan görbeívek, melyek hasonlók az evolutájukhoz. Ennek megoldásában már az epicikloisok és az $r=ae^{\vartheta}$ poláregyenletű logaritmikus spirálisok is fellépnek.

Megoldotta: Pelikán József.

Lényegében megoldotta: Bajmóczy Ervin, Herényi István, Lempert László, Nagy Zsigmond, Pintz János.

Részmegoldást adtak: Laczkovich Miklós és Mérő László.

Kimutatta, hogy a logaritmikus spirális eleget tesz a követelményeknek: Deák Jenő.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER DE L'ANNÉE 1971

1. Démontrer que chaque groupe topologique compact G possède un élément $g \neq 1$ tel que l'ensemble de toutes les puissances de g est partout dense ou n'est nulle part dense dans G. (G est muni d'une topologie de Hausdorff.)

2. Prouver qu'il existe un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble non dénombrable contient un ensemble non dénombrable bien ordonné, et qu'on ne peut pas engendrer comme l'union d'un nombre dénombrable d'ensembles bien ordonnés.

3. Soit $0<a_k<1$, $k=1, 2, \ldots$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une permutation (une application biunivoque sur lui-même) de l'ensemble des nombres naturals à tout x, $0<x<1$, tel que l'on ait

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}/2^k$$

4. Supposons que V soit un espace topologique localement compact qu'on ne peut pas couvrir d'un nombre dénombrable d'ensembles compacts. Dénote $\mathbf{C}$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de l'espace V, et $\mathbf{U}$ l'ensemble de ses sous-emsembles ouverts contenus dans les ensembles compacts. Soit f une function qui applique $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{C}$ telle que l'on ait $f(U) \subseteq U$ pour tout $U \in \mathbf{U}$. Démontrer qu'ainsi les deux cas suivants peuvent se présenter:

(i) il existe un ensemble compact C non vide tel que $f(U)$ ne soit pas un vrai sous-ensemble de C chaque fois que $C \subseteq U \in \mathbf{U}$, ou bien

(ii) pour un ensemble compact

$$f^{-1}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{U \in \mathbf{U} : f(U) \subseteq C\} \in \mathbf{U},$$

c'est-à-dire que $f^{-1}(C)$ n'appartient à aucun ensemble compact.

5. La suite $0<\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ et la constante K satisfont à la condition suivante

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2 < K\lambda_n^2 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Démontrer qu'il existe alors une constante K, telle que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k < K'\lambda_n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

6. Soient $a(x)>0$ et $r(x)>0$ des fonctions definies sur l'intervalle $[0, \infty)$, et soit

$$\liminf_{x \to \infty} (x - r(x)) > 0. \tag{1}$$

On suppose de plus que $x(y)$ soit une fonction continue sur tout l'axe des x, dérivable dans l'inter valle $[0, \infty)$ et qu'on y ait

$$y'(x) = a(x)y(x - r(x)). \tag{2}$$

Prouver que sous ces conditions la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{x \to \infty} y(x) e^{-\int_0^x a(t)\,dt}. \tag{3}$$

7. Soit $n \geqq 2$ un entier, S un ensemble contenant n éléments, et l'on note par A_i, $1 \leqq i \leqq k$ les sousensembles différents de S qui contiennent deux éléments au moins et, pour tout i, j, r, $1 \leqq i<j<r<k$, remplissent la condition que si aucun des ensembles $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_r$ et $A_j \cap A_r$ n'est vide, alors $A_j \cap A_j \cap A_r$ ne l'est pas non plus. Il est à établir que $k \leqq 2^{n-1}-1$.

8. Démontrer qu'on peut orienter toujours les arêtes d'un graphe fortement connexe à deux pôles de telle manière qu'on puisse trouver à un arc K quelconque un chemin dirigé (sans points multiples) conduisant du pôle P au pôle Q et contenant l'arc K. (On entend sous un graphe fortement connexe à deux pôles un graphe connexe fini dans lequel on distingue deux points P et Q et il n'existe pas un couple de points A, B tel que $A \neq B$ et que chaque chemin reliant B acev P et avec Q passe aussi par A.)

9. Soit $F(x)$ une function positive définie dans l'intervalle $(0, \infty)$, et l'on suppose que $F(x)/x$ soit monotone croissante au sens large, de plus soit $F(x)/x^{1+d}$ monotone décroissante au sens large avec un certain $d>0$. Soit $\lambda_n>0$ et $a_n \geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Démontrer que si

$$\text{(1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F\left(a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\lambda_n\right) < \infty$$

ou bien si

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1} \lambda_n F\left(\sum_{k=1}^{n} a_n \lambda_k/\lambda_n\right) < \infty,$$

alors $\sum a_n$ converge.

10. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ une suite de fonctions de l'espace $L^2(0, 1)$ où la norme de chaque fonction est supposée inférieure à 1. On admet en outre que pour une suite partielle arbitraire $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ la mesure de l'ensemble

$$\text{(1)} \qquad \left\{x \in (0,1): \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n_k}(x) \right| > y \right\}$$

end vers 0 quand y et N tend vers l'infini. Démontrer que φ_n tend alors faiblement vers 0 dans l'espace $L^2(0, 1)$.

11. Soit C un arc de courve simple dont la courbure est monotone et qui est égal à son évolute Démontrer que si certaines conditions de dérivabilité sont réaliséses, alors C est un arc de cycloide

* Remarques de la rédaction:

Au problème 4: L' affirmation du problème est triviale.

Au problème 11: En dehors de l'arc de cycloïde celui du spirale logarithmique satisfait anssi aux conditions du problème.

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, 1061 Budapest, Anker köz 1—3. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

186. Jelölje $c_n(x)$ adott n természetes szám mellett azoknak az x-nél nem nagyobb természetes számoknak a számát, amelyek n páronként relatív prím szám négyzetének összegeként írhatók. Becsüljük meg felülről a $c_n(x)/x$ hányadost.

Surányi János

187. Bizonyítsuk be, hogy bármely, legfeljebb kontinuum számosságú metrizálható topologikus tér beágyazható altérként olyan kompakt Hausdorff-térbe, amelyben minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa.

Gerlits János

188. Legyen E Hausdorff-tér. Mutassuk meg, hogy a következő két állítás ekvivalens:

a) E-ben minden nyílt halmazokból álló rács, amelynek pontosan egy torlódási pontja van, konvergens;

b) Nincs E adott topológiájánál szigorúan durvább Hausdorff-topológia E-n.

Császár Ákos

MEGOLDOTT FELADATOK

177. feladat. Legyen f és g az $[a, b]$ intervallumban korlátos valós függvény. Az $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ osztópontok $H=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmazához és az $x_{i-1}\leqq y_i\leqq x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ feltételnek eleget tevő közbülső helyek $K=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ halmazához rendeljük hozzá a

$$\sigma(H, K) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

közelítő összeget. Tegyük fel, hogy egy I számra minden $\varepsilon>0$ mellett található olyan H halmaz, hogy $H' \supset H$ esetén tetszőleges K'-re $|\sigma(H', K')-I| < \varepsilon$. Adjuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

Riemann—Stieltjes-integrál I-vel legyen egyenlő.

(Császár Ákos)

Megoldás. A keresett szükséges és elégséges feltétel abban áll, hogy (a, b) minden helyén f és g közül legalább az egyik folytonos legyen.

Tegyük fel először, hogy ez a feltétel teljesül, és adott $\varepsilon>0$ számhoz legyen

$$H_0=\{a, c_1, c_2, \ldots, b\}$$

olyan halmaz, hogy

$$a<c_1<c_2<\ldots<c_m<b,$$

és $H_0 \subset H'$ esetén tetszőleges K'-re $|\sigma(H', K')-I| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen M olyan korlát, hogy $[a, b]$-ben $|f| \leqq M$, $|g| \leqq M$, és legyen $\delta>0$ olyan kicsiny, hogy egyrészt H_0 szomszédos elemeinek távolsága mind nagyobb legyen δ-nál, másrészt minden c_i hely δ sugarú környezetében vagy f-nek, vagy g-nek ingadozása kisebb legyen, mint $\frac{\varepsilon}{8mM}$.

Legyen most

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b,$$

$$H=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

és tegyük fel, hogy az x_i-x_{i-1} különbségek mindegyike kisebb δ-nál. Adjuk meg a közbülső helyek halmazát H-hoz tetszőlegesen, és jelöljük K-val. Legyen $H'=H_0 \cup H$, és válasszuk H'-höz a közbülső helyek K' halmazát úgy, hogy ha H' két szomszédos eleme H-ban is szerepel, akkor K'-nek az általuk határolt intervallumból vett eleme ugyanaz legyen, mint K-nak ebből az intervallumból választott eleme. Most H_0 megválasztása és $H_0 \subset H'$ folytán

$$|\sigma(H', K')-I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Minthogy továbbá H-nak két szomszédos eleme között H_0-nak legfeljebb egy eleme fekszik, azért a

$$\sigma(H, K)-\sigma(H', K') = d$$

különbség legfeljebb m tag összegeként írható, amelyek mindegyike

$$f(r)[g(q)-g(p)]-f(s)[g(c_i)-g(p)]-f(t)[g(q)-g(c_i)] =$$

$$= [f(r)-f(s)][g(c_i)-g(p)]+[f(r)-f(t)][g(q)-g(c_i)]$$

alakú, ahol p és q H-nak a $c_i \in H_0$ ponttól közvetlenül balra, ill. jobbra fekvő eleme, $r \in K$, $s \in K'$, $t \in K'$ pedig a $[p, q]$, $[p, c_i]$ ill. $[c_i, q]$ intervallumból választott közbülső helyek.

Mármost ha a c_i hely δ sugarú környezetében g-nek az ingadozása kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{8mM}$, akkor az utóbbi kifejezés első alakjából látszik, hogy abszolút értéke $<\frac{3\varepsilon}{8m}<\frac{\varepsilon}{2m}$; ha viszont c_i-nek δ sugarú környezetében f-nek az ingadozása kisebb $\frac{\varepsilon}{8mM}$-nél, akkor az említett kifejezés második alakjából olvasható ki, hogy értéke abszolút értékben $<\frac{\varepsilon}{2m}$. Eszerint $|d|<\frac{\varepsilon}{2}$, és így

$$|\sigma(H, K)-I| < \varepsilon.$$

Minthogy ez az egyenlőtlenség minden δ-nál finomabb felosztást szolgáltató H halmazra teljesül, valóban

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = I.$$

Tegyük most fel, hogy az állításunkban szereplő feltétel nem teljesül, vagyis hogy valamely (a, b)-ben fekvő c hely f-nek is, g-nek is szakadási helye. Két esetet különböztetünk meg annak megfelelően, hogy g-nek a c helyen van vagy nincs határértéke.

Az első esetben g-nek a c helyen vett határértéke természetesen különbözik $g(c)$-től, és így van olyan $\varepsilon>0$, s hozzá olyan $\delta>0$, hogy minden c-nek δ sugarú környezetében fekvő, de c-től különböző x helyen

$$|g(x)-g(c)| > \varepsilon.$$

Ha $\varepsilon>0$ elég kicsiny, akkor még az is igaz, hogy f-nek az ingadozása c-nek vagy minden baloldali környezetében, vagy minden jobboldali környezetében nagyobb, mint ε. Így készíthető $[a, b]$-ben tetszőlegesen finom felosztás, amelynek egyik intervalluma $[p, c]$, ill. $[c, q]$ alakú, és e felosztáshoz megválasztható a közbülső helyeknek kétféle rendszere úgy, hogy a két rendszer csupán a $[p, c]$ (ill. a $[c, q]$) intervallumból választott helyben különbözik, mégpedig úgy, hogy f e két helyen felvett értéke között a különbség abszolút értékben nagyobb legyen, mint ε. Tekintettel arra, hogy δ-nál finomabb felosztás esetén

$$|g(c)-g(p)| > \varepsilon \quad \text{ill.} \quad |g(q)-g(c)| > \varepsilon,$$

eszerint tetszőlegesen finom felosztást lehet készíteni úgy, hogy a hozzá tartozó közelítő összegek közül kettőnek a különbsége nagyobb legyen, mint ε^2. Ez nyilván lehetetlenné teszi az

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

integrál létezését.

Ha viszont g-nek a c helyen nincs határértéke, akkor van olyan $\varepsilon>0$, hogy c-nek bármely $\delta>0$ sugarú környezetéből kihagyva a c pontot, a megmaradó halmazon g-nek az ingadozása $>2\varepsilon$. Ekkor azonban c-nek minden δ sugarú környezetében vannak olyan p és q pontok, hogy $p<c<q$, és $|g(q)-g(p)| > \varepsilon$. Ha $\varepsilon>0$ elég kicsiny, akkor c-nek minden környezetében f-nek az ingadozása is ε-nál nagyobb lesz, és így $[a, b]$-nek tetszőlegesen finom felosztását el lehet készíteni úgy, hogy egyik intervalluma az előbbi típusú p és q pont közötti intervallum legyen, majd

ehhez a felosztáshoz meg lehet választani a közbülső helyek kétféle rendszerét úgy, hogy a két rendszer csak a $[p, q]$ intervallumból választott helyben különbözzék, és f-nek e két helyen felvett értéke között a különbség abszolút értékben ε-nál nagyobb legyen. Ekkor a megfelelő két közelítő összeg között a különbség abszolút értékben ismét ε^2-nél nagyobb, s ez ismét csak maga után vonja, hogy f-nek g szerinti Riemann—Stieltjes-integrálja nem létezik.

Császár Ákos

1. megjegyzés. Az előbbi megoldás második részében nem használtuk fel azt a feltevést, hogy létezik a feladat szövegében megfogalmazott tulajdonságú I szám. Más szóval bebizonyítottuk, hogy az f függvény g szerinti Riemannn—Stieltjes-féle integráljának létezéséhez szükséges, hogy f-nek és g-nek az intervallum belsejében ne legyen közös szakadási helye. Természetesen szükséges az integrál létezéséhez az is, hogy ha az integrál értéke I, $\varepsilon>0$ pedig tetszőleges, akkor létezzék a feladat szövegében leírt tulajdonságú H halmaz (ilyet adnak nyilván bármely elég finom felosztás osztópontjai). A feladat tehát voltaképpen azt mondja ki, hogy a két feltétel együtt szükséges és elégséges a Riemann—Stieltjes-féle integrál létezéséhez.

Császár Ákos

2. megjegyzés. A két feltétel külön-külön nem elegendő az integrál létezéséhez. Egyrészt ugyanis pl. a $g(x)=x$ esetben, tehát a Riemann-integrál esetében, f-nek és g-nek soha sincs közös szakadási pontja, de az integrál nem minden f-re létezik. Másrészt legyen $a=-1$, $b=1$,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } -1\leqq x\leqq 0,\\ 1, & \text{ha } 0<x\leqq 1,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } -1\leqq x<0,\\ 1, & \text{ha } 0\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Ekkor a 0 hely f-nek és g-nek közös szakadási helye, de minden olyan felosztásra, amelynek osztópontjai között a 0 pont szerepel, a közelítő összeg a közbülső helyek bármilyen megválasztása esetén 0.

Császár Ákos

3. megjegyzés. Az előbbi ellenpélda tipikus. Valóban, a feladat megoldásának második részében követett eljáráshoz hasonló okoskodással belátható, hogy ha van egy I szám s hozzá minden adott $\varepsilon>0$ mellett olyan H halmaz, hogy $H\subset H'$ esetén $|\sigma(H', K')-I|<\varepsilon$, akkor $a\leqq c<b$ esetén a c helyen f és g közül legalább az egyik jobbról folytonos, $a<c\leqq b$ esetén pedig a c helyen f és g közül legalább egyik balról folytonos.

Császár Ákos

178. feladat. Adjuk meg a valós $a_1, a_2, \ldots$ számsorozatot úgy, hogy a

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

végtelen szorzat konvergens legyen, továbbá

$$\lim_{r\to 1-0} \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n r^n)$$

is létezzék és véges legyen, de értéke különbözzék a végtelen szorzat értékétől.

(Kővári Tamás)

Megoldás. Legyen $m>16$, $a_n=0$, ha $n<m$, továbbá $n\geqq m$ esetén

$$a_n = \frac{(-1)^n\cdot 2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}.$$

Világos, hogy $|a_n|<1$, úgyhogy $N>m$ esetén

$$\log \prod_{n=1}^{N} (1+a_n) = \sum_{n=1}^{N} \log(1+a_n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a_n^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{n=1}^{N} a_n^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{n=m}^{N} a_n^k =$$

$$= \sum_{n=m}^{N} \left(\frac{(-1)^n\cdot 2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N} \left(\frac{4}{n} + \frac{8(-1)^n}{n^{3/2}} + \frac{4}{n^2} \right) +$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k} \sum_{n=m}^{N} \left((-1)^n + n^{-1/2}\right)^k n^{-k/2} =$$

$$= 2\sum_{n=m}^{N} (-1)^n n^{-1/2} - 4\sum_{n=m}^{N} (-1)^n n^{-3/2} - 2\sum_{n=m}^{N} n^{-2} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k} \sum_{n=m}^{N} \left((-1)^n + n^{-1/2}\right)^k n^{-k/2}.$$

Itt a jobb oldal $N\to\infty$ esetén véges határértékhez tart, ami az első három tag esetében evidens, a negyedik tag esetében pedig abból következik, hogy a sor a N változóra vonatkozóan egyenletesen konvergens. Valóban, mivel

$$|(-1)^n + n^{-1/2}| < 2,$$

továbbá $n-1 \leqq x \leqq n$ esetén $x^{-k/2}\geqq n^{-k/2}$, úgyhogy

$$n^{-k/2} \leqq \int_{n-1}^{n} x^{-k/2}\,dx,$$

azért

$$\left| \sum_{n=m}^{N} \left((-1)^n + n^{-1/2}\right)^k n^{-k/2} \right| \leqq 2^k \int_{m-1}^{\infty} x^{-k/2}\,dx = \frac{2^{k+1}}{k-2} (m-1)^{\frac{2-k}{2}}$$

N-től függetlenül, és így a sor k-adik tagjának abszolút értéke kisebb, mint

$$\frac{2^k}{k}\,\frac{2^{k+1}}{k-2} (m-1)^{\frac{2-k}{2}} \leqq \frac{2(m-1)}{k(k-2)},$$

hiszen $m>16$ folytán

$$4^k (m-1)^{-k/2} \leqq 1.$$

Így tehát N-től független tagokból álló konvergens majoráns sort találtunk. Ennek megfelelően az utolsó tagban az $N \to \infty$ határátmenetet a k szerinti összegezéssel fel lehet cserélni. Ez mutatja, hogy az $1+a_n$ tényezőkből alkotott végtelen szorzat konvergens, és

$$A = \log \prod_{n=m}^{\infty} (1+a_n) = 2 \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n n^{-1/2} - 4 \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n n^{-3/2} -$$

$$-2 \sum_{n=m}^{\infty} n^{-2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{k} \sum_{n=m}^{\infty} \left((-1)^n + n^{-1/2}\right)^k n^{-k/2}.$$

Ugyanilyen meggondolást alkalmazhatunk, ha a_n helyébe $a_n r^n$ kerül, ahol $0 < r < 1$:

$$A(r) = \log \prod_{n=m}^{\infty} (1+a_n r^n) = 2 \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n n^{-1/2} r^n + 2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^n}{n} -$$

$$-2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} - 4 \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n n^{-3/2} r^{2n} - 2 \sum_{n=m}^{\infty} n^{-2} r^{2n} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{k} \sum_{n=m}^{\infty} \left((-1)^n + n^{-1/2}\right)^k n^{-k/2} r^{kn}.$$

Alakítsuk át a jobb oldal második és harmadik tagját:

$$2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^n}{n} - 2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} - 2 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^n}{n} + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^{2n}}{n} =$$

$$= 2 \log \frac{1-r^2}{1-r} - 2 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^n}{n} + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{r^{2n}}{n}.$$

Tegyük ezt a kifejezést a második és harmadik tag helyébe, s aztán végezzük el az $r \to 1$ határátmenetet. Ezt az első, negyedik és ötödik tagban Abel tétele szerint tagonként hajthatjuk végre, sőt az utolsó tagban is, ami egyrészt ismét Abel tételéből következik, másrészt abból, hogy a sor k-adik tagjának abszolút értékére fent megadott becslés r-től függetlenül is érvényes. Így végül is

$$\lim_{r \to 1-0} A(r) = A + 2 \lim_{r \to 1-0} \log(1+r) = A + 2 \log 2.$$

Kővári Tamás

179. feladat. Legyen $M_i \subset R^m$ $(i \in I)$ olyan Lebesgue-mérhető halmaz, amelynek Lebesgue-féle sűrűsége egyetlen $x \in M_i$ pontban sem 0. Bizonyítandó, hogy az $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ halmaz Lebesgue-mérhető.

(Császár Ákos)

Megoldás. Jelölje λ az m-dimenziós Lebesgue-mértéket, $d_H(x)$ pedig a mérhető H halmaz felső sűrűségét az x pontban. Nyilván elég belátni, hogy M-nek a kezdőpont körüli n sugarú nyílt G_n gömbbel való metszete minden n-re mérhető, s mivel az M_i halmazokra vonatkozó kikötésünk G_n nyíltsága miatt az $M_i \cap G_n$ halmazokra is teljesül, azért az általánosság megszorítása nélkül rögtön feltehetjük, hogy $M_i \subset G_n$ minden i-re.

Legyen

$$m = \sup \left\{ \lambda \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{i_k} \right) \right\},$$

ahol a szuprémumot az I indexhalmazból kiválasztható összes megszámlálható részhalmazokra tekintjük. Világos, hogy m véges, hiszen $m \leqq \lambda(G_n)$, és az is, hogy m voltaképpen maximum, hiszen minden p természetes számhoz keresve I-nek egy részsorozatát, amelyre a megfelelő egyesítés mértéke $\left(m-\frac{1}{p}\right)$-nél nagyobb, e megszámlálható sok részsorozat egyesítésére az m érték el is éretik. Legyen tehát $H=\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{i_k}$, $i_k \in I$, $\lambda(H)=m$.

Most tetszőleges $i \in I$ indexre $\lambda(M_i - H) = 0$, hiszen ellenkező esetben az m szám növelhető volna. Ekkor azonban $x \in M-H$ esetén $d_H(x)>0$, hiszen olyan $i \in I$ indexet tekintve, amelyre $x \in M_i$, tetszőleges Q kockára

$$M_i \cap Q \subset (H \cap Q) \cup ((M_i - H) \cap Q),$$

úgyhogy

$$\lambda(M_i \cap Q) \leqq \lambda(H \cap Q),$$

és így $d_H(x) \geqq d_{M_i}(x) > 0$. Minthogy azonban a mérhető H halmaznak Lebesgue sűrűségi tétele szerint $R^m - H$ majdnem minden pontjában 0 a sűrűsége, azért $\lambda(M-H) = 0$, amiből $H \subset M$ figyelembevételével M mérhetősége következik.

Petruska György

Megjegyzés. Tulajdonképpen azt a kissé többet mondó tételt bizonyították be, hogy ha a mérhető halmazok valamely egyesítésének minden pontjához található az egyesített halmazok közül egy (amely a tekintett pontot nem feltétlenül tartalmazza), amelynek a felső sűrűsége a kérdéses pontban pozitív, akkor az egyesítés mérhető.

Petruska György

A 179. feladat megoldását beküldte még FISCHER PÁL.

PROBLÈMES PROPOSÉS

186. Désignons par $c_n(x)$, pour un entier positif n, le nombre des entiers positifs inférieurs ou égaux à x et tels qu'ils peuvent être écrits comme la somme de n entiers relativemen premiers deux à deux. Donner une évaluation supérieure pour $c_n(x)/x$.

Surányi J.

187. Démontrer que tout espace topologique métrisable, ayant au plus la puissance du continu, peut être plongé dans un espace de Hausdorff compact dans lequel chaque point possède un système fondamental dénombrable de voisinages.

J. Gerlits

188. Soit E un espace de Hausdorff. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

a) Dans E, chaque base de filtre composée d'ensembles ouverts et admettant un et un seul point d'accumulation est convergente;

b) Il n'existe pas de topologie de Hausdorff sur E qui soit strictement moins fine que la topologie de E.

Á. Császár

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS
A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ HUSZONEGYEDIK KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1971. évi BEKE MANÓ Emlékdíj odaítélésére a Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége az alábbi Bizottságot jelölte ki:

Elnök: Gádor Endréné
Titkár: Szendrei János
Tagok: Knoll János
Péter Gyula
Reiman István
Rohovszky Rudolf
Szalay András
Varga Tamás

A Bizottság 1971. máj. 6-án és június 7-én tartott ülésén foglalkozott a beérkezett javaslatokkal és kiegészítő információkkal. A Bizottság szem előtt tartotta, hogy a Társulat a díjak odaítélésében a matematika oktatása és népszerűsítése terén kifejtett tevékenységet és elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni.

A Bizottság a következő határozatot hozta:

Az 1971. évben Beke Manó Emlékdíjjal, valamint emlékplakettel jutalmazza az alábbiakat, és

3000 Ft jutalomban részesül dr. Ruzsa Imre kandidátus, a MTA Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa;

2000—2000 Ft jutalomban részesülnek:

Dr. Abonyi Ivánné Keleti Magdolna, a MTESZ központi titkárságának munkatársa;

Balogh Viktória az egri 2. sz. általános iskola tanára, Heves megyei általános iskolai vezető szakfelügyelő;

Lipa András, a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola adjunktusa;

Macskásy Attila, a kaposvári Munkácsy Gimnázium nyugalmazott tanára és Somogy megye szakfelügyelője;

Puskás Imréné, a miskolci Kossuth Gimnázium tanára, szakfelügyelő.

Indoklás:

Dr. Ruzsa Imre
kandidátus, a MTA Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematika—fizika szakos tanári diplomát. Az egyetem elvégzése után a budapesti Szabó József geológiai technikumban tanított. 1961-től az ELTE TTK Analízis I. tanszékén tanársegéd, majd adjunktus. 1967-től a Magyar Tudományos Akadémia Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa és félállásban folytatja egyetemi oktatói munkáját. 1969-ben tudományos munkája alapján Grünwald Géza emlékdíjban részesült; 1970 tavaszán megvédte kandidátusi disszertációját. Tudományos munkásságának fő területe a matematikai logika.

Ruzsa Imre sokoldalú eredményes munkát végzett a matematika oktatása és népszerűsítése terén. Középiskolai tanárként szerzett tapasztalatait igen jól hasznosította oktató munkájában, a matematika szakos tanárjelöltekkel való foglalkozás során.

Egyetemi oktató munkájának jelentős részét képezték a filozófia szakosok számára tartott matematika előadások. Az első előadáshoz készült igen színvonalas jegyzete úttörő jellegű volt a hazai irodalomban abból a szempontból, hogy ez volt az egyik első kísérlet a matematika filozófiai problémáinak felvetésére és marxista szemléletű megválaszolására. A matematika filozófiai prob-

limáinak és ezek megválaszolásának ismertetése Ruzsa Imre több magas színvonalú munkájában és helyet kapott, ezek közül a legfontosabbak: a Tankönyvkiadónál 1966-ban megjelent „A matematika néhány filozófiai problémájáról" c. munkája, amelyet elsősorban a matematika tanárok számára írt, és a Gondolat Kiadónál megjelent „A matematika és a filozófia határán" c. rendkívül sikeres népszerűsítő könyve.

Ruzsa Imre tudományos érdeklődési területéből eredően sokat és eredményesen foglalkozott a matematikai logika és a halmazelmélet középiskolai tanításával és népszerűsítésével is. Ő írta a matematikai osztályok számára készült tankönyv halmazelmélettel és matematikai logikával foglalkozó részét, társszerzője a „Matematikai kis enciklopédiá"-nak és társszerzővel írt „Matematikai logika" c. könyve 1966-ban jelent meg a Tankönyvkiadónál. A Tv-ben nagysikerű ismeretterjesztő előadássorozatot tartott a matematikai logika gyakorlati alkalmazásáról.

Rendszeresen tartott középiskolai tanárok számára továbbképző előadásokat az ország több városában, a Bolyai Társulat rendezésében és számos vándorgyűlésen. A József Attila Szabadegyetemen is sok sikeres előadása volt.

Balogh Viktória
egri általános iskolai tanár, Heves megyei matematika—fizika szakos vezető szakfelügyelő

Balogh Viktória — az Oktatásügy Kiváló Dolgozója, a Munka Érdemrend ezüst fokozatának tulajdonosa, Kiváló Tanár — nemcsak megyéjében ért el kiemelkedő eredményeket a matematikatanítás fejlesztésében, munkássága kiterjedt általános iskolai matematikaoktatásunk egész területére:

Résztvett az új tantervhez készült általános iskolai tankönyvek lektorálásában, különböző folyóiratokban megjelent számos cikkével segítette az új tanterv célkitűzéseinek megvalósítását.

Úttörő jelentőségű munkát végzett a matematikatanítás korszerűsítésében.

A szakosított tantervű osztályok számára írt kiegészítő tankönyvei első jól sikerült példái hazánkban a munkáltató matematika tankönyvnek,

az alsó tagozatban tanító nevelők számára tartott tanfolyamain, valamint cikkeiben utat mutatott a matematikatanítás korszerű elemeinek gyakorlati felhasználására,

a matematika szakosított tantervű osztályok munkájának sikeréhez nemcsak tankönyveivel járult hozzá, hanem 1970 nyarán Pest, Komárom, Nógrád, Borsod és Szolnok megyék, valamint Miskolc város nevelői számára rendezett tanfolyamával, az Országos Pedagógiai Intézetben, valamint az elmúlt évi Bolyai Vándorgyűlésen tartott előadásával is.

Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékével együttműködve kezdeményezte és szervezte 4 megye szakfelügyelőinek és munkaközösség-vezetőinek továbbképzését, de tartott továbbképző előadásokat Salgótarjántól Zalaegerszegig az ország más városaiban is.

E kiemelkedően széles körű és eredményes munkásság mellett Balogh Viktória önzetlen, szerény, segítőkész magatartásával kiérdemelte a matematikát tanító nevelők igen széles körének nagyrabecsülését és szeretetét is.

Lipa András
a Nyíregyházi Tanárképző Főiskola adjunktusa

A Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika—fizika szakán szerzett oklevelet 1949-ben. Ekkor a nyíregyházi Kossuth Lajos gimnázium tanára lett, ahol 1952—56-ig, majd 1962—64-ig mint igazgatóhelyettes is tevékenykedett. Kiváló tanári tevékenységéért 1952-ben az Oktatásügy Kiváló Dolgozója elismerő kitüntetést kapta. 1964-től a Tanárképző Főiskola Matematikai Tanszékének adjunktusa.

Középiskolai tanárként intenzíven foglalkozott a felnőttoktatás problémáival; erre vonatkozó publikációi a Szabolcs-Szatmár Megyei Nevelőben jelentek meg. 1952-ben oktatókáderképző tanfolyamon vett részt Budapesten, ezt követően 1964-ig a Szabolcs-Szatmár megyei matematika szakos tanárok módszertani munkaközösségének irányítását látta el.

Pályafutása minden szakaszában a matematikaoktatás korszerűsítése érdekében kereste az újat. Behatóan foglalkozott, s még intenzívebben foglalkozik ma a gyakorlati órák hatékonyságának növelésének problémáival. Éveken át végzett kísérleteket a csoportos foglalkozások eredményességének fokozása érdekében s az előadások hatásfokának emelésére sikeresen alkalmazza a szemléltetés korszerű eszközeit.

Az általános iskolai matematika szakos tanárok továbbképzése keretében évek óta előadásokat tart a geometria tárgyköréből, szem előtt tartva az oktatás és nevelés korszerű követelményeit.

A Kis Matematikusok és az Ifjú Matematikusok Körének szervezője és egyik előadója, s ilyen minőségben évről évre nagyszámú érdeklődő fiatalt vezet be a mélyebb matematikai ismeretekbe. Vezeti a feladatmegoldásokat a középiskolai szakköri tagok részére; e munkájával elősegíti, hogy a szakkör tagjai eredményesebben szerepelhessenek a megyei, s esetenként az országos matematikai versenyeken.

Ismeretterjesztő előadásokat tart a TIT keretében, a Borsod—Hajdú—Szabolcs megyei továbbképzési napokon és a nyíregyházi Tanárképző Főiskola által periodikusan rendezett Tanárok Akadémiáján.

A TIT Szabolcs-Szatmár megyei szervezete matematikai szakosztályának elnöke, a Bolyai János Matematikai Társulat nyíregyházi tagozatának titkára, a MTESZ elnökségi és az országos választmány tagja. Az Arany Dániel és középiskolai matematikai tanulmányi versenyek dolgozatait elbíráló bizottság és a Ki milyen tudós? megyei selejtezőjének állandó tagja. A matematika-népszerűsítés iránti lelkesedésének és rendkívüli szervező képességének köszönhető az 1968. évi nyíregyházi vándorgyűlés nagy sikere.

Legutóbb számítógép-programozási tanfolyamot szervezett a Bolyai Társulat, az Építőipari és a Gépipari Tudományos Egyesület érdelődő tagjai számára.

Lipa András a matematika szakos tanárképzésben és a továbbképzésben, a matematika oktatásában, megszerettetésében és népszerűsítésében több mint két évtizeden át fejtett ki odaadó tevékenységet és szerzett elismerést.

Macskásy Attila
a kaposvári Munkácsy Gimnázium nyugalmazott tanára, volt megyei szakfelügyelő

A kolozsvári egyetemen végzett, majd Romániából áttelepülve 1938-ban a szegedi egyetemen is megszerezte a középiskolai tanári oklevelet, 1947-ben pedig matematikából és fizikából tanítóképzőintézeti tanári képesítést nyert.

Oktató-nevelő imunkásságának nagy részét Somogy megyében végezte, ahol 1944—1962-ig mint tanár, majd 1962-től 1968-ig, nyugdíjaztatásáig mint szakfelügyelő, azóta pedig mint nyugdíjas működik az oktatás területén.

Rendkívül képzett, sokoldalúan aktív, szellemes és kedves egyéniség. Mint tanár is nagyon népszerű és elismert. Tanítványai nagyon szerették és a középiskolai tanulmányi versenyeken mindig kiemelkedő sikerrel szerepeltek. De nemcsak tanítványainak adta át szellemes matematikai gondolkodását és matematika iránti szeretetét, hanem Somogy megye tanáraira is nagy hatással volt. Sok gondolatot, matematikai módszert és szellemes megoldást adott át a megye tanárainak már akkor is, amikor még nem volt szakfelügyelőjük. Mint szakfelügyelő minden nyáron 7—10 napos megyei továbbképzést rendezett Balatonbogláron. A matematika modernebb fejezeteit már ekkor is igyekezett előtérbe állítani és tanítási gyakorlatunkba — ahol csak lehetett — be is vinni, amikor középiskoláinkba még nem vezettük be.

Munkássága a felnőttoktatás terén a középiskolainál is jelentősebb volt. Konzultáló tanára volt a Villamosmérnöki Karnak, a TTK-nak, a Mezőgazdasági Gépészmérnöki Karnak, a Közgazdasági Egyetemnek, a Számviteli Főiskolának. A pécsi Tanárképző Főiskola konzultáló tanára ma is.

Megszervezte Kaposváron a Gépipari Technikum esti tagozatát, majd a Felsőfokú Gépipari Technikumot és ezeken tanította a matematikát.

A matematikát népszerűsítő társadalmi munkássága is kiváló. A TIT keretében is kiemelkedő munkát végzett. Jelenleg a Kis Matematikusok Körének megyei felügyelője. Macskásy volt az alapítója a Bolyai János Matematikai Társulat kaposvári tagozatának és ennek jelenleg is elnöke.

A matematika népszerűsítésében nyugdíjba menetele óta is nagy agilitással tevékenykedik.

Puskás Imréné
a miskolci Kossuth Gimnázium tanára, szakfelügyelő

Puskás Imréné a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematika—fizika szakos tanári képesítést. A miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematika Tanszékén 5 éven át tanított, majd 1956-tól a miskolci Kossuth Gimnázium tanára. 1965 februárjától fizika szakfelügyelői, majd 1965 szeptemberétől matematika szakfelügyelői munkakört is ellát. Kiváló tanári tevékenysége jutalmául 1966-ban az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést kapta.

Mint szaktanár kiválóan végzi munkáját. Tanítványai szeretik, tudják a matematikát. Nagyszerű eredményeket érnek el az érettségi vizsgákon és az egyetemi felvételeken is jól megállják helyüket. Hathatós módszereivel ügyesen biztosítja tanítványai aktivitását, önállóságát.

Mint szakfelügyelő kiváló hozzáértéssel irányítja, vezeti Miskolc város matematika oktatását, és a tanári továbbképzést.

A szakmai munkaközösségeket egyre inkább képessé tette a színvonalas munka végzésére.

A szakmai továbbképzés tematikáját ügyes kézzel állítja össze. Nemcsak tervezője, szervezője a módszertani szakmai továbbképzésnek, hanem aktív szereplője is. Minden évben szakmai-módszertani előadásokat tart mind a középiskolai, mind az általános iskolai matematika tanároknak.

A Városi Tanács V. B. Művelődésügyi Osztálya által kiírt pályázatokon igen eredményesen szerepel minden évben. Pályamunkái hasznos segítői a matematika oktatásának.

Lelkes szervezője és megteremtője volt az Ifjú Matematikusok Körének.

A városban folyó matematikai kísérletek összefogója, irányítója.

A miskolci gimnáziumokban a matematikai tagozatú osztályok létrehozója. Munkájukat állandó figyelemmel kíséri, irányítja. Munkájának eredménye, hogy Miskolc középiskolás diákjai az elmúlt években egyre eredményesebben szerepelnek az országos versenyeken. Cikkei jelennek meg a Matematika tanítás c. folyóiratban is.

A Bolyai János Matematikai Társulatnak 1951 óta tagja. A társulat miskolci tagozatának vezetőségi tagja, és dolgozik az országos Oktatási Bizottságban is.

Az országos matematikai ankétok lelkes szervezője. Ilyen arányú fáradhatatlan tevékenységét az ország matematika tanárai is elismerik.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulatban 1966 óta dolgozik mint a matematika—fizika—kémia szakosztály alelnöke. 1968-ban TIT munkájáért Miniszteri Dicséretben részesült.

Kiváló, fáradhatatlan és eredményes munkáját széles körben erkölcsi elismerés, megbecsülés övezi.

JELENTÉS AZ 1971. ÉVI SZELE TIBOR EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1971. évi Szele Tibor emlékdíj odaítélésére bizottságot küldött ki. E díj alapszabályai értelmében — Szele Tibor célkitűzéseit követve — olyan matematikusoknak ítélendő oda, akik fiatal matematikusoknak megindulásukhoz a legtöbb segítséget nyújtották, rájuk a legnagyobb hatást gyakorolták. A bizottság, melynek elnöke Kalmár László, titkára Révész Pál, tagjai Császár Ákos, Fejes-Tóth László, Gyires Béla, Hajós György, Prékopa András, Rapcsák András, Szőkefalvi-Nagy Béla és Turán Pál voltak, ezt a főszempontot Erdős Pál akadémikus működésében látta leginkább érvényesülni. Így az emlékdíjat 1971. november 23-i ülésén neki ítélte oda és alulírottat bízta meg a jelentés megírásával. A bizottságnak jelen esetben igen könnyű dolga volt; nehézséget inkább az jelent, mi módon lehet azt a sokoldalú ráhatást adekvát módon érzékeltetni, mellyel Erdős fiatalokra hatni tudott és tud, itthon és külföldön, szóban, cikkekben és levelekben.

Jelentős ráhatás csak jelentős eredményeket elért matematikus egyéniségtől várható. Erdős 1963-ig elért eredményei jórészének egy áttekintése megtalálható a Matematikai Lapok XIV. kötete 1—2. füzetében, 50. születésnapja alkalmából 1963-ban. Bár ezen áttekintésben munkáinak egy jelentős része nem szerepel, mégis fogalmat ad matematikai sokoldalúságáról, bizonyító erejéről, matematikusi hatásáról és jellemvonásairól. Az említett hiányosságok pótlása igen kívánatos, erre — reméljük — Erdős még hátralevő sok évfordulói valamelyike alkalmat fog adni.

Így hát e jelentés Erdős ráható és rezonáló képességéről próbál majd valamelyest képet adni. Ennek illusztrálását mindjárt egy elképesztő ténnyel kezdhetem. Kevés matematikus van, akinek eredeti publikációi száma eléri a 100-at; Erdősnek eddig több mint 150 matematikussal van legalább egy közös dolgozata! Egy másik illusztráció. G. Goffman írta egy Monthly megjegyzésben (1969. aug.-szept. szám), hogy valaki definiálta egy A matematikus „Erdős számát", $\nu(A)$-t, mint a legkisebb egész E-t, melyhez létezik matematikusok egy $a_0, a_1, \ldots, a_E$ lánca úgy, hogy $a_0 = A$, $a_E =$ Erdős és $\nu = 0,1, \ldots, (E-1)$-re a_ν és $a_{\nu+1}$-nek van legalább egy közös dolgozata. Sejtése, hogy (eltekintve azoktól, akiknek egyáltalán nincs senkivel közös dolgozatuk) minden A-ra $\nu(A)$ létezik és véges. Mint írja továbbá, Erdős ezen fogalmat nem ismerte addig, míg össze nem találkoztak egyszer Londonban és nem közölte vele, hogy az ő Erdős-száma újabban már csak 3. „Milyen kár — felelte Erdős —, hogy ma el kell utaznom, különben megpróbálhattuk volna 1-re redukálni." Egy realitás, egy tréfa; más-más oldalakat mutatnak Erdős matematikai egyéniségéből. A második a sokirányú érdeklődést, sok tárgykörbe való gyors belekapcsolódás képességét jelzi. Az első azt, hogy Erdős nem négy fal között, elzártságban dolgozó matematikus, hanem olyan, aki közösségben él és rendkívüli kontaktusképző ereje van. Ebből teljesen természetszerűleg következik, hogy fiatal, pályájuk elején álló matematikusokkal könnyen szót ért. Ennek egyik titka közvetlen, póztalan modora és az a lángolás, mellyel szobában és szabadban, tanteremben és vendéglőben, sétálva és vonaton tud és szeret matematikáról beszélgetni és dolgozni. Megérzik rajta, hogy éltető közege levegője a matematika. Si vis me flere dolendum est ipsi tibi, tanácsolja Horatius a színésznek; itteni értelme szerint „ha azt akarod, hogy érdeklődjek, előbb magadnak kell lelkesedned". Ebben Erdősben nincs hiány ma sem. Másik titka rendkívüli problémalátása, valamint problémáinak egyszerűen való megfogalmazhatósága és szépsége, melynek hatása alól még kezdő matematikusok sem vonhatják ki magukat. A problémalátási képesség matematikai jelentőségének megítélésében, szemben a bizonyító erővel, a vélemények nagyon különbözők. Nagyfokú egyszerűsítéssel a fantázia és logikai erő összehasonlító értékeléséről van szó. G. Cantor összegyűjtött művei 454. oldalán a következő mondat áll. „In re mathematica ars proponendi questionem pluris facienda est quam

solvendi". Ez mintha az előbbi javára ítélne; magam is hajlok ilyen álláspontra. Problémái lávaként ömlenek belőle; ezek közlésére új műfajt vezetett be, a problémacikkeket, melyek egy-egy tárgykörrel kapcsolatos probléma tömegeit tartalmazzák, elrendezve, az addig elért részeredményekre vonatkozó megjegyzésekkel. E problémák javarészt gráf-, halmaz- és számelméletre vonatkoznak, de számos problémát vetett és vet fel a geometriában, a valós és komplex függvénytanban is, alkalmilag a matematika más ágaiban is. Jórészt az ő hatásának tulajdonítható, hogy Claude Berge 1970-ben megjelent, „Graphes et hypergraphes" c. könyvének előszavában „la florissante école hongroise"-ról beszélhet; jórészt az ő hatásának tulajdonítható a kombinatorika és kombinatorikus halmazelmélet hazai felfejlődése is.

Se szeri, se száma azon magyar fiataloknak, akik beszélgetés közben nyertek tőle impulzusokat. Tartott órát vidéki általános iskolában; Pósa Lajost általános iskolás korában fedezte fel. A Fazekas Mihály gyakorló gimnázium tanulói korán megismerik őt; a tanulóversenyeink számos feladata származik tőle. Jobban számon tartható azon hazai matematikusok sora, akikkel közös publikációi vannak, olykor 20—30-as multiplicitással; ezek (alfabetikusan):

Czipszer János
Fejes Tóth László
Fodor Géza
Fried Ervin
Gallai Tibor
Gerencsér Miklós
Hajnal András
Kátai Imre
Máté Attila
Obláth Richárd
Pósa Lajos
Rényi Alfréd
Sárközy András
Simonovits Miklós
Surányi János
Szemerédi Endre
T. Sós Vera
Turán Pál
Vincze István.

Nem fejezhetem be méltóbban jelentésemet, mint idézve néhány sort R. A. Rosenbaum „History of the Math. Association of America" c. cikkéből az Amer. Math. Monthly 1967. évi januári számából, mely a szóban forgó társulat 50. évfordulójára íródott, mely írás felvillantja egy pillanatra egyéb vonatkozásait is.* My notions on historiography have been influenced by Carlyle's "On heroes and hero-worship"... One of our heroes is ... although he might not appear heroic n other subcultures... Paul Erdős whose contribution to the Monthly and to Association meetings we appreciate along with his brilliant achievements in research. Erdős combines creativity and honesty with generosity and humility, extraordinary mathematical talent with exceptional human feeling. With unusual breadth in mathematics he is able, and ready, to help anyone with a question. He can always find something good to say about the mathematics of a fellow human being, even though he may despise his politics.

It seems a long-time since Erdős appeared at the Swarthmore meeting after Christmas of 1946, newly returned from the clothing store to which a group of friends had dragged him, attired in a brand new suit which somehow already looked slept in. There he stood, smiling gently at

* Történetírói alapfogalmaimat Carlyle-nek „Hősökről és azok tiszteletéről" c. könyve nagyon befolyásolta. Egyike hőseinknek, bár egyes kultúrákban nem tűnnék hősnek, Erdős Pál, akinek közreműködését a Monthlyban és a Társulat ülésein éppúgy becsüljük, mint ragyogó kutatási eredményeit. Erdősben egyesül alkotóképesség és tisztesség nemeslelkűséggel és alázattal, rendkívüli matematikai tehetség kivételes emberi érzésekkel. Széles körű matematikai tudásával képes (és akar) segíteni mindenkin, aki kérdéssel fordul hozzá. Mindig tud valami jót mondani embertársa matematikai munkájáról, még ha ellentétben is van annak politikai nézeteivel.

Hosszú ideje annak, hogy Erdőssel 1946 karácsonyán a swarthmore-i gyűlésen találkoztam, amint épp megérkezett egy ruhaüzletből, ahová barátai elvonszolták, vadonatúj ruhában, mely valahogy mégis úgy nézett ki, mintha benne aludt volna. Csak állt szeliden megmosolyogva barátai csacska sajnálkozását a vesztett idő felett, ő ugyanis az egész ügylet alatt egy matematikai problémán gondolkozott...

his friends' silly concern — he didn't resent the time which might have been wasted — he had thought about a mathematical problem throughout the merchandising transaction...

E képet még csupán egyetlen ecsetvonással egészítem ki. Erdős első dolgozatában foglalt bizonyítását Csebisev tételére elsőéves korában találta; hallgató korában több további dolgozata jelent meg, részint társszerzőkkel. Akkoriban elég nehezen fejezte ki magát; Csebisev-bizonyítását olyan kiváló matematikussal, és a fiatalok olyan istápolójával, mint Kürschák József volt, sem tudta megértetni. Az első Szele-díjas Kalmár László intuiciójára volt szükség kihüvelyezni a bizonyítás elegáns gondolatát; ő öntötte azután a cikket végleges formájába. Első pár további dolgozatát is Kalmár formálta meg. Kalmáron (és Fejéren) keresztül Erdős érezhette, hogy az akkori idősebb generáció híven teljesíti fiatalokat segítő kötelességét. Végigtekintve egész működésén, nyilván mindenki láthatja és látja, hogy ilyen kötelességét híven teljesítette. Ha Kalmár segítése egy kölcsön volt, úgy azt a kamatok kamatjaival fizette vissza, még abban a betű szerinti értelemben is, hogy pl. Pósa Lajos pár korai dolgozatát — Pósa ötleteit és *csak* azokat használva — ő öntötte formába.

Turán Pál

JELENTÉS AZ 1971. ÉVI RÉNYI KATÓ-EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által az 1971. évi Rényi Kató-emlékdíj odaítélésére kiküldött bizottság 1971. május 14-én megvitatta a választmány tagjaitól érkezett javaslatokat. Alapos mérlegelés után a bizottság az alábbi döntést hozta.

A bizottság a Rényi Kató-Emlékdíj I. fokozatával tünteti ki és 1200 Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

Babai Lászlót, az ELTE harmadéves
Berkes Istvánt, az ELTE ötödéves
Deák Jenőt, az ELTE ötödéves
Névai Pált, a leningrádi Tudományegyetem ötödéves
Pelikán Józsefet, az ELTE ötödéves és
Recski Andrást, az ELTE ötödéves

hallgatóit, továbbá a

Rényi Kató-emlékdíj II. fokozatával tünteti ki és 800 Ft pénzjutalomban részesíti a következőket:

Korchmáros Gábor, az ELTE ötödéves hallgatóját és
ifj. Ruzsa Imrét, a Fazekas Mihály gyakorló gimn. IV. osztályos tanulóját, továbbá
Surányi Lászlót, az ELTE negyedéves hallgatóját.

Az alábbiakban ismertetjük a díjazottak munkásságát.

Babai László az elmúlt három évben négy díjazott diákköri pályamunkát írt, melyek közül három már cikk formájában is megjelent, illetve sajtó alatt van. E dolgozatok figyelemre méltó eredményeket tartalmaznak csoportok gráfokkal való reprezentálására vonatkozóan. Eredményei egyrészt Frucht tételének élesítését, általánosítását adják Sabidussi vizsgálatainak irányában, azokat túlhaladva. (Kiemelendő síkbarajzolható gráfok automorfizmuscsoportjaira vonatkozó pozitív, illetve negatív jellegű tétele.) Másrészt igen szép és teljesen újszerű eredményeket is ért el ebben a témakörben.

Berkes István 1970-ben és 1971-ben összesen három első díjjal jutalmazott diákköri pályamunkát írt, melyek egyike már sajtó alatt van, és a másik kettő is feltétlenül publikációra érdemes. Sajtó alatt levő cikkében az iterált logaritmustétellel kapcsolatos eredmény élességét igazolja. Második dolgozatában független valószínűségi változókból készített véletlen törött vonalfüggvények aszimptotikus tulajdonságait vizsgálja, továbbfejlesztve Strassen eredményeit. Harmadik dolgozatában független valószínűségi változók részletösszegeire vonatkozó határérték-tételeknek hézagos Walsh-sorokra és Alexits-féle erősen multiplikatív rendszerekre való átvitelével foglalkozik.

*Deák Jenő*nek eddig egy cikke jelent meg, egy sajtó alatt van, és legutóbbi díjazott diákköri pályamunkája is feltétlenül publikálásra érdemes. Két cikkében Carleman eredményeihez kapcsolódva azt vizsgálja, hogy egy komplex változós függvénynek a konvergenciakör határán való viselkedését mennyiben befolyásolják a független változó bizonyos transzformációi. Harmadik dolgozatában egy általánosított Faber-sorokra vonatkozó ún. átviteli tételt és ennek érdekes konzekvenciáit bizonyítja. A dolgozatok figyelemre méltó analitikus érzékről tanúskodnak.

*Névai Pál*nak három cikke van sajtó alatt. Mindháromban az ekvidisztans alappontokhoz tartozó trigonometrikus interpolációs polinomok hibáját vizsgálja. Első két cikkében a hiba

aszimptotikusan pontos becslését adja az r-edik simasági modulus és a függvény variációjának felhasználásával. Harmadik cikkében igazolja, hogy az r-szer differenciálható $r+1$ vagy $r+2$ monoton függvények esetében a hiba nagyságrendje megegyezik a legjobb egyenletes közelítés nagyságrendjével.

Pelikán József az elmúlt három évben öt díjazott diákköri pályamunkát írt. Eddig két cikk jelent meg, és további két cikk sajtó alatt van. Figyelemre méltó eredményeket ért el a kombinatorika több területén, így gráfok fokszámelőírásaival, blokkrendszerekkel és külön Steiner-rendszerekkel, gráfok automorfizmus-csoportjával, valamint gráfok és 0,1 mátrixok sajátértékeivel kapcsolatban (utóbbit Lovász Lászlóval közösen). A „Középiskolai Szakköri Füzetek" c. sorozatban megjelent egy — Lovász Lászlóval és L. Vesztergombi Katalinnal közösen írt — könyve a kombinatorikáról.

Recski András 1970-ben és 1971-ben egy-egy díjazott diákköri pályamunkát írt. Eddig egy matematikai tárgyú cikke jelent meg, melyben a Fibonacci-sorotat általánosításaival foglalkozik. Értékesek elektromos hálózatokra vonatkozó kombinatorikus jellegű vizsgálatai, melyek során a vezérelt generátorokat is tartalmazó elektromos hálózatok tárgyalására matroid-modellt ad meg. Ezzel kapcsolatban matroidelméleti szempontból is érdekes eredményeket ér el, és igen sokat ígérő, az alkalmazások szempontjából is jelentősnek látszó tárgyalásmód lehetőségét teremti meg. Megjelent továbbá több, fizikai tárgyú népszerűsítő cikke is.

*Korchmáros Gábor*nak eddig egy cikke jelent meg, melyben konvex hétszög felező sokszögeinek sorozatával foglalkozik. A cikkben bizonyított értékes eredménye kapcsolódik Fejes Tóth László és Kárteszi Ferenc rokon témájú vizsgálataihoz.

*Ifj. Ruzsa Imré*nek két cikke van sajtó alatt, mindkettő számelméleti témájú. Az egyikben Erdős Pál egy problémáját oldja meg egy szellemes konstrukció segítségével. A másik cikkben azt vizsgálja, hogy — az egész együtthatós polinomokon kívül — melyek a kongruenciatartó számelméleti függvények. Ebben a cikkben már a problémafelvetés is igen értékes, a bizonyítás pedig szellemes és nehéz.

*Surányi László*nak eddig két cikke jelent meg. Az elsőben Gallai Tibor egy nehéz gráfelméleti tételére ad egyszerű és elegáns bizonyítást. A másik cikkben Erdős Pál egy kombinatorikai problémájával foglalkozik, és egy igen ötletes ellenpélda konstrukciót ír le.

Az 1971. évi Rényi Kató-emlékdíj odaítélésére kiküldött bizottság:
Elnök: Tandori Károly.
Titkár: Sárközy András.
Tagok: Bognár Mátyás,
Czách László,
Győry Kálmán,
Hosszú Miklós,
Kiss Ottó,
Pollák György,
T. Sós Vera.

JELENTÉS AZ 1972. ÉVI RÉNYI KATÓ EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az 1972. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítélésére a következő bizottságot küldte ki: Tandori Károly elnök, Bognár Mátyás, Czách László, Fejes Tóth Gábor, Győry Kálmán, Hajnal András, Hosszú Miklós, Králik Dezső és Pollák György. A Rényi Kató Emlékdíj Bizottság 1972. május 23-án tartotta ülését, melyen a beérkezett javaslatok mérlegelése után a következő döntést hozta:

A „Rényi Kató"-díj I. fokozatában és az ezzel járó 1500 Ft pénzjutalomban részesül
Baranyai Zsolt, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója.

A „Rényi Kató"-díj II. fokozatában és az ezzel járó 1000—1000 Ft pénzjutalomban részesülnek
Elekes György, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója,
Reményi György, az ELTE V. éves matematikus szakos hallgatója és
Turjányi Sándor, a KLTE V. éves matematika—ábrázoló geometria szakos hallgatója.

Baranyai Zsolt eddig három publikálásra érdemes eredményt ért el az információelmélet terén. Különösen értékes a Huffman kódokkal kapcsolatos eredménye.

Elekes György Erdős Pálnak egy halmazelméleti sejtését bizonyította be. Eredménye, mely általánosabb mint Erdős sejtése, tartalmazza van der Waerdennek egy Ramsey-típusú tételét.

Reményi György a számelmélet terén ért el új eredményeket. A Terjanian típusformáknak az eddigieknél lényegesen rövidebb, szellemes konstrukcióját adta, és ennek segítségével sikerült egyszerűbb bizonyítást adnia Browkin egy nevezetes tételére.

Turjányi Sándor kutatásai a számelmélet körébe tartoznak, és a Waring-problémához kapcsolódnak. Dolgozatának értékét növeli, hogy egy sokat vizsgált, klasszikus témakörből tartalmaz értékes, új eredményt.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT ELŐADÁSAI 1971. ÉVBEN

Január 5—6. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadássorozata:
Lovász László: Leszámlálási problémák.
Bognár Jánosné: Az információelméletről.
Február 12.
Füredi Zoltán: Konvex tartományok érdekesebb tulajdonságairól.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Február 12.
Böröczky Károly: Tammes problémáiról.
Február 13.
Freud Róbert: Hálók.
Középiskolai Matematikai Délután.
Február 19.
Szendrei János: A matematika oktatás helyzete néhány nyugat-európai országban.
Február 23.
P. Hamburg (Románia): Időszerű kérdések topológiai terek kompaktifikálásáról.
Február 26. Az Országos Matematikai Tanulmányi Verseny I. fordulójának feladatai.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Március 6.
Szalay Mihály: Kongruenciák.
Középiskolai Matematikai Délután.
Március 26.
Martoni Viktor: Többértékű logikák.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Április 5—6. Az Ifjúsági Matematikai Kör előadássorozata:
Feladatmegoldások.
Czách László: Problémák az analízis köréből.
Nemetz Tibor: A függetlenség szerepe a valószínűségszámításban.
Április 23.
Bognár Mátyás: Axiomatikus hurkoláselmélet.
Április 24.
T. Sós Vera: Gráfelméleti problémákról.
Középiskolai Matematikai Délután.
Április 28.
R. Telgarsky (Bratislava): Paracompactness and product spaces.
Május 7.
Az Országos Tanulmányi Verseny döntője feladatainak megbeszélése.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.
Május 7.
P. T. Bateman (USA): The distribution of values of Euler φ-function.
Május 17.
R. G. Douglas (USA): Wiener—Hopf operators having a real-valued index.
Május 21.
Szigeti Ferenc: Banach sokaságok.
Május 27.
Pálmay Lóránt: A matematika tanítás helyzete hazánkban.
A végzős matematika—fizika szakos hallgatók klubdélutánja.
Május 28.
Gulyás Ottó: Tanuló algoritmusok reprodukáló magú Hilbert terekben.
Május 29.
Császár Ákos: Mi a vonal?
Középiskolai Matematikai Délután.
Június 3.

Péter Rózsa: Az „egyszerű" nem is olyan egyszerű fogalom.
A végzős matematikus hallgatók klubdélutánja.

Június 4.
Olli Lehto (Finnország): Schlicht functions with a quasiconformal extension.

Június 5.
ARANY DÁNIEL MATEMATIKAI TANULÓVERSENY eredményhirdetése és díjkiosztása.
Baróti György és *Molnár Emil* ismertetik a kezdők (I. osztályosok) feladatait.
Frank András és *Lőrincz Pál* ismertetik a haladók (II. osztályosok) feladatait.

Június 28.
M. Beckmann (NSZK): Optimale Stoppregeln.

Augusztus 24.
E. Lukács (USA): A normális eloszlás két jellemzésénél fellépő függvényegyenletről.

Augusztus 27.
W. Philipp (USA): Mixing sequences of random variables and probabilistic number theory.

Szeptember 1.
Clas-Olaf Selenius (UPPSALA): Halbregelmässige Kettenbruchapproximationen und ihre Anwendung zur Erklärung der alten indischen Methoden, die Bhaskare-Pell-Gleichung zu lösen.

Szeptember 6.
J. Plonka (Lengyelország): Előállítható sorozatok.

Szeptember 20.
P. Burmeister (NSZK): Szabad parciális algebrák.

Szeptember 22.
E. Hille (USA): Középértékek és középértékekkel kapcsolatos függvényegyenletek.

Szeptember 24.
B. Scimemi (Olaszország): Diagonizable automorphismes and homogeneous functions on *P*-Groups.

Október 1.
J. Böhm (Jena): Über einige Ergebnisse aus der Polyedergeometrie.

Október 9.
Rahmi I. I. Abdel Karim (Kairo): On the resonance case in ordinary linear differential equations with periodic coefficients.

Október 15.
Hódi Endre: Beszámoló a XIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

November 5.
Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

November 5.
A. Schinzel (Lengyelország): On lacunary polynomials.

November 17.
H. H. Hinterhuber (Ausztria): Modern methods in research and development planning, aspects of decision theory.

November 25.
B. Penkov (Bulgária): Hausdorff metric and its applications.

December 3.
Móri Tamás: A Pell-egyenletek megoldásáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

December 3.
Hajnal András: Egy particiótétel logikai segédeszközöket igénylő bizonyításáról.

December 8.
H. J. Hoehnke (NDK): Algebraische Fragen der Automatentheorie.

December 15.
Jordán Károly emlékülés.
Szele Tibor emlékérem átadása.

December 16.
KÜRSCHÁK JÓZSEF MATEMATIKAI TANULÓVERSENY eredményhirdetése és díjkiosztása.
A feladatokat Surányi János ismerteti.

December 17.
SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY eredményhirdetése és díjkiosztása.

1971. április 7. és 13. között az Oktatási Szakosztály a Kulturális Kapcsolatok Intézetével közösen *Oktatási Kerekasztalkonferenciát* rendezett. A konferenciának 5 magyar és 12 külföldi résztvevője volt: Gádor Endréné, Klein Sándor, Surányi János, Szendrei János, Varga Tamás; A. Abele, NSZK. B. Christiansen, Dánia. J. Colomb, Franciaország. Z. Dienes, Kanada. E. Fischbein, Románia. M. Glayman, Franciaország. E. Pasini, Olaszország. A. Pescarini, Olaszország. W. Servais, Belgium. P. Seaborne, Anglia. P. Sorger, NSZK. és W. Walser, Svájc. A konferencia célja a szorosabb nemzetközi együttműködés lehetőségeinek megbeszélése volt a matematikatanítás korszerűsítésére irányuló kísérletek irányításában. A résztvevők tisztázták a kölcsönös információ szervezett továbbításának módozatait, és előkészítették egy olyan tanfolyam megszervezését, amely a különböző európai országok matematikaoktatási kísérleteket folytató vagy ilyenek megkezdését tervező tanárainak a továbbképzését szolgálná. Az ilyen tanfolyam tartalmára és szervezésére vonatkozó több lényeges kérdésben megegyezés született; a tanfolyam megrendezése 1972 tavaszán, Budapesten van tervbe véve, költségeit a Kulturális Kapcsolatok Intézete kész fedezni.

Június 3-án a *végzős matematikus hallgatók* részére rendeztünk *klubest*et, amelyen Péter Rózsa tartott előadást.

Ezen a klubesten került sor a *Rényi Kató Emlékdíj* 1971. évi kiosztására.

Az 1971. évi *vándorgyűlés*ünket július 5. és 8. között Miskolcon rendeztük meg a Neumann János Számítógéptudományi Társasággal együtt. A helybeli tanárokkal együtt összesen 400-an vettek rajta részt; ez azt mutatja, hogy az érdelkődés a vándorgyűléseink iránt változatlanul nagy.

A vándorgyűlést dr. Gáspár Gyula egyetemi tanár, a Társulat helyi tagozatának elnöke, a Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszék vezetője nyitotta meg. Ezután került sor az 1971. évi Beke Manó Emlékdíjak kiosztására, majd Gáspár Gyula és Császár Ákos előadásaira.

A második naptól kezdve a résztvevő tanárok külön általános és középiskolai szekciókban hallgattak előadásokat. A kormányhatározatoknak megfelelően, a számítótechnikával, annak problémáival, gépeivel, programozási nyelvvel ismerkedtek a résztvevők, nagy igyekezettel, érdeklődéssel vettek részt mind az előadásokon, mind az azt kiegészítő gyakorlatokon. Igen hasznosnak ítélték az itt eltöltött időt.

A vándorgyűlésen a következő előadások hangzottak el:

Gáspár Gyula: A középiskolai matematika oktatásunk az egyetemi felvételi vizsgák tükrében.

Császár Ákos: A vonal.

Kalmár László: A számítástechnika társadalmi jelentősége és szerepe az oktatásban.

Szendrei János: Algoritmusok.

Kovács Győző: A számítógépek műszaki felépítése és működési elvei.

Hámori Miklós: Számítógép ismeretek.

Ada-Winter Péter: Programozási ismeretek:

Obádovics J. Gyula: A MOST autokódrendszer ismertetése.

Hámori Miklós: A programozás alapjai.

Szelezsán János: A számítógépek alkalmazása és a fejlődés távlatai.

Az előadásokat gyakorlatok, gépbemutatók, géplátogatások tették érthetőbbekké.

A tudományos program mellett kellemes színfolt volt az aggteleki kirándulás és barlanglátogatás. A szokásos közös vacsorát is Aggteleken rendeztük.

A vándorgyűlés szép sikerrel zárult.

Az ELTE Matematikai Tudományos Diákköre Társulatunk támogatásával július 19. és 22. között *nyári iskolát* rendezett Egerben, a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematikai Tanszékének nagy előadótermében. Elszállásolás a Tardosi Fogadóban Egertől kb. 10—12 km-re.

A nyári iskolán 26 matematikus hallgató, valamint 8 oktató vett részt. Az iskolán 4 nap alatt négy előadás, s ezekhez egy-egy (összesen négy) hallgatók részéről tartott korreferátum hangzott el, az alábbiak szerint:

1. Czách László docens, (ELTE Analízis II. tanszék) Invariáns mérték- és integrál. Korefeenrs Sós Miklós.

2. Szűcs József tanársegéd (JATE, Analízis tanszék). Neuman algebrák. Korreferens Pintz János.

3. Schipp Ferenc docens (ELTE Analízis II. tanszék). Ortogonális rendszerek konvergencia tulajdonságai. Korreferens Dékány István.

4. Lovász László megb. tanársegéd (ELTE Geometria tanszék). Fixpont-tételek. Korreferens Babai László.

Augusztus 9. és 13. között Keszthelyen rendeztük meg az *Asszociatív gyűrűk, modulusok és radikálok* témakörű *kollokviumot*. A kollokviumnak 60 külföldi és 10 magyar résztvevője volt. A résztvevők a közvetlen Balaton partján levő Helikon Szállóban nyertek elhelyezést.

A megnyitó ülést 9-én, hétfőn du. 4 órakor tartottuk a keszthelyi Agrártudományi Egyetem dísztermében.

Az egyetem rektora, valamint Rédei László akadémikus, a szervező bizottság elnöke üdvözölte a résztvevőket. A megnyitó ülést állófogadás követte, majd megkezdődtek az előadások

(ugyancsak az Agrártudományi Egytemen) két szekcióban. Szerda délután és este hajókirándulással egybekötött badacsonyi borkóstoló, csütörtök este pedig bankett volt a résztvevők és családtagjaik számára. A tudományos program pénteken délelőtt ért végett. A csütörtök délutáni ülés problémafelvető ülés volt.

A kollokvium igen jól szolgálta mind a gyűrűelmélet jobb hazai megismerését, mind a hazai és a külföldi matematikusok közötti kapcsolat elmélyítését. A résztvevők egybehangzó állítása szerint szakmailag és vendéglátás szempontjából egyaránti igen kedvező benyomásokkal távoztak.

A szervező bizottság tagjai voltak:
Rédei László elnök,
Freud Róbert,
Kertész Andor,
Steinfeld Ottó,
Szász Ferenc,
Wiegandt Richárd,
Pelikán József titkár.

Augusztus 24. és 28. között a JATE a Társulat Csongrád megyei Tagozatának közreműködésével *Univerzális algebrai konferenciát* rendezett Szegeden. A konferencia tudományos programjának keretében 11 külföldi és 6 magyar előadó tartott előadást.

Augusztus 16. és szeptember 3. között Budapesten, a MTA Matematikai Kutatóintézetének helyiségeiben rendeztük meg a *Nyári iskolát a csoportreprezentációk elméletéről*. A szervező munka tudományos részét a szervező bizottság szovjet tagjai (I. M. Gelfand elnök, A. A. Kirillov, M. I. Grajev) valamint magyar részről
Szőkefalvi-Nagy Béla (JATE),
Császár Ákos (ELTE),
Györgyi Géza (EFKI),
Kovács István (JATE),
Mályusz Károly (MTA Mat. Kut. Int.) intézték. A nyári iskolának a hét szovjet előadón kívül 17 külföldi résztvevője volt (Franciaországból 5, az USA-ból 3, Indiából 3, Japánból 2. Hollandiából 2, az NSZK-ból 1, Ausztriából 1).

A rendezvény iránt a magyar fizikusok körében is élénk érdeklődés nyilvánult meg. A KFKI 10 000 forinttal hozzájárult a nyári iskola költségeihez. A nyári iskola keretében sor került G. W. Mackey fizikai tárgyú előadássorozatára is.

A nyári iskola megrendezéséről szóló első értesítést viszonylag későn, május legvégén küldtük ki. Meghívókat küldtünk lengyel, csehszlovák, NDK-beli intézeteknek és matematikusoknak, akikkel korábban is tudományos kapcsolatban álltunk. Sajnos, érdembeli választ nyilván az idő előrehaladott volta miatt már nem kaphattunk tőlük.

Meghívókat küldtünk a terület vezető szakembereinek, akik közül az itt-tartózkodási költség fedezését is megígértük az indiai matematikusoknak, továbbá S. Tanaka fiatal japán tudósnak, aki útiköltségét egyébként maga fedezte. Általános vélemény szerint a szakterület legjobb szakemberei gyűltek össze (Godement, Konstant, Mostow, Springern, Tanaka, Harder, Mautner, Mackey), illetve a környezetükhöz tartozó fiatal kutatók. Örvendetes módon erősen volt képviselve a párizsi matematikai iskola, mellyel a magyar matematikai életnek mindezideig sajnálatosan kevés kapcsolata volt.

Két megnyitó előadás után (Gelfand és Tanaka) a nyári iskola munkáját két szekcióban folytattuk.

A *tudományos szemináriumon* a résztvevők új tudományos eredményeket adtak elő, legalább egyórás előadásokon. A szeminárium nyelve angol volt, az előadások és viták rendszerint de. 10-től 14-ig tartottak.

A *kezdőknek* szóló előadássorozatot a szovjet matematikusok és S. Tanaka tartották orosz, illetve angol nyelven, (napi 3—4—5 óra). A hallgatóság főleg a fiatal magyar matematikusokból és fizikusokból állt. A jelentkezők száma mintegy 40 volt, megítélésünk szerint a résztvevők között van néhány fiatal kutató, aki a továbbikaban komolyan fog az elmélettel foglalkozni.

A bevezető sorozathoz kapcsolódott D. A. Kazsdan 3×2 órás *számelméleti* előadássorozata, részben külső hallgatóság számára.

A *fizikusok*nak szólt G. W. Mackey 3×2 órás előadássorozata a csoportreprezentációk elméletének kvantummechanikában történő alkalmazásáról.

A nyári iskola előadásai 3 héten keresztül folytak. (A külföldi résztvevők átlagban 2 hetet töltöttek nálunk.) A nyári iskola munkájának fontos összetevői az egyéni és csoportos megbeszélések és konzultációk. melyekre sikerült időt biztosítanunk.

Szeptember 13. és 18. között Győrött rendeztük meg a *Készletezési és tározási konferenciát*, az OVH Vízügyi Szervezési és Számítástechnikai Intézet és a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézet támogatásával

A konferencián mintegy százharminc magyar és harminc külföldi szakember vett részt.

KÖNYVISMERTETÉS

N. J. VILENKIN: KOMBINATORIKA

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 358 oldal, 38,— Ft)

Annak ellenére, hogy alig van olyan magyar matematikai verseny, vagy vetélkedő, ahol ne szerepelne egy-egy, a kombinatorika tárgykörébe tartozó feladat, a kombinatorikáról magyar nyelvű könyv (egy szakköri füzettől eltekintve) a felszabadulás óta nem jelent meg.

A kombinatorika, illetve annak néhány alapfogalma legfeljebb néhány, elsősorban a valószínűségszámítással foglalkozó könyv egy-egy (legtöbbször nagyon szegényes, és a könyv főmondanivalójának természetesen teljesen alárendelt) fejezetében kapott helyet. Ezért kell a dicséret hangján szólni a Műszaki Könyvkiadóról, amely megjelentette Vilenkinnek a Szovjetunióban is nagy sikert aratott *Kombinatorika* című könyvét.

A matematikának azt az ágát, amely bizonyos elemekből elkészíthető, adott tulajdonságú variánsok számának a meghatározásával foglalkozik, kombinatorikának nevezzük. Kombinatorikával a XVI. század óta foglalkoznak. Az első kombinatorikai feladatok a szerencsejátékokkal voltak kapcsolatosak, és az első elméleti vizsgálatok Pascal és Fermat nevéhez fűződnek. A kombinatorika további fejlődésében nagy szerepet játszott J. Bernoulli, Leibniz és Euler. A sokáig már lezártnak gondolt kombinatorika az utóbbi évtizedekben újabb rohamos fejlődésnek indult, hiszen fontos gyakorlati alkalmazást nyert többek között a különböző gazdasági programozásokban, az információelméletben, a játékelméletben, a statisztikában és a matematika olyan absztrakt ágaiban is, mint például a csoportelmélet, a reprezentációelmélet, vagy a geometria alapjai. A könyv 7 fejezetre oszlik. Az első fejezet *(Az általános kombinatorikai szabályok)* a kombinatorika általános, az összeadásra és a szorzásra vonatkozó szabályaival és a kombinatorikai feladatok megoldásánál gyakran alkalmazott logikai szitával foglalkozik. A második fejezet tárgyalja a hagyományos iskolai tananyagot: a permutációkat, a kombinációkat, a variációkat. A harmadik fejezetben *(Különleges korlátozásokat tartalmazó kombinatorikai feladatok)* olyan feladatokról van szó, amelyekben a vizsgált variánsok a legkülönbözőbb megszorításoknak tesznek eleget. Ez az az anyagrész, ahol a tárgyi tudás mellett egyre inkább előtérbe lép a logikus gondolkodás, az ötlet, a kombinatív készség. A negyedik fejezet *(Particiós problémák)* olyan felbontási feladatok megoldásával és az ehhez szükséges elmélettel foglalkozik, amelyek a különböző szempontok szerint csoportokba osztható elemek elrendezéséről szólnak. Itt esik szó a kombinatorikában alkalmazott geometriai módszerekről is. Az ötödik fejezet *(A sakktábla kombinatorikája)* főtémája különböző bolyongási feladatok megoldása, illetve ezeknek a legkülönbözőbb területeken való alkalmazása. Itt van szó a Pascal-féle háromszög különféle módosításaival kapcsolatos feladatokról is. A hatodik fejezet *(Rekurzív összefüggések)* a rekuzió fogalmának illusztrálása és néhány rekurzív összefüggésre, illetve ennek megoldására vezető feladat bemutatása után a rekurzív összefüggések általános elméletével foglalkozik. A hetedik fejezet *(Kombinatorikus analízis)* a generátor függvény módszerével és ennek alkalmazásával foglalkozik, és részletesen tárgyalja a binomiális és polinomiális tételt.

A könyv lényeges értékét jelenti a 439 számozott (lényegében több mint ötszáz) feladat és ezek megoldása. A feladatok között van könnyű gyakorló feladat, és meglehetősen nehéz, az olvasó gondolkodásmódját és idejét alaposan próbára tevő feladat is.

A könyvvel kapcsolatban három körülményre érdemes felfigyelni. Az első az, hogy a könyv a megszokott anyagnál lényegesen többet nyújt, a második az, hogy az ismertetett anyagot feladatokon át mutatja be rendkívül olvasmányos, népszerű stílusban, ami a matematikában kevésbé járatos olvasók számára is könnyen olvashatóvá és érthetővé teszi a szöveget, de nem megy a pontosság rovására, a harmadik pedig az, hogy nagyon sok klasszikus feladatot, sőt „storyt" tartalmaz a könyv, ami szórakoztató olvasmánynak sem utolsó.

A fordítás Rejtő Lídia munkája, aki a lektorral, Sárközy Andrással együtt több mint félszáz jegyzettel is elősegítette a szöveg pontosságának a fokozását.

Scharnitzky Viktor

FREUD GÉZA: ORTHOGONALE POLYNOME

Akadémiai Kiadó, Budapest — des VEB Deutscher Verlag des Wissenschaften, Berlin — Birkhäuser Verlag, Basel—Stuttgart, 1969. 294 oldal.

Az ortogonális polinomok elmélete a matematikai analízis egy szűkebb kérdéskörét alkotja, amely azonban a különböző matematikán belüli, de elsősorban a matematikán kívüli alkalmazások szempontjából igen fontos szerepet játszik; részben ennek következtében is ez az elmélet már hosszabb idő óta a matematikai kutatások intenzíven vizsgált területei közé tartozik. Ennek ellenére ortogonális polinomokról viszonylag kevés könyv jelent meg; közülük legismertebb SZEGŐ GÁBOR „Ortogonal polynomials" c. a harmincas évek közepén megjelent kiváló monográfiája, amely az elmélet akkori helyzetét tükrözte; 1959-ben e könyvnek újabb, változatlan kiadása jelent meg. Megemlítendő JA. L. GERONIMUSZ 1958-ban orosz nyelven, majd 1960-ban angol nyelven is megjelent monográfiája, amely azonban csaknem kizárólag az ún. Sztyeklov-problémával kapcsolatos Szegő-féle kérdéskörrel foglalkozik. Számos további, Fourier- és ortogonális sorokkal, valamint approximációelmélettel foglalkozó könyvet lehetne még említeni, amelyek ortogonális polinomokkal kapcsolatos kérdéseket is tárgyalnak, ilyenek például N. I. ACHIEZER, ALEXITS GYÖRGY, A. ERDÉLYI, D. JACKSON, I. P. NATANSON, G. SANSONE és F. G. TRICOMI monográfiái; ezek azonban nem adják az ortogonális polinomok elméletének részletesebb tárgyalását, illetve elsősorban speciális ortogonális polinomrendszerekkel foglalkoznak.

Az utóbbi négy évtizedben is az ortogonális polinomrendszerek terén igen intenzív kutatómunka folyt; a kutatások különösen megélénkültek a háború után. Míg korábban a speciális ortogonális polinomok vizsgálata állott elsősorban a vizsgálatok középpontjában, addig az újabb vizsgálatok jelentős része arra irányult, hogy a súlyfüggvényekre tett általánosabb jellegű feltételek alapján érjenek el olyan típusú eredményeket, amelyek még az egyes speciális ortogonális polinomrendszerekre is jelentősek. Ennek az utóbbi kutatási iránynak művelésében magyar matematikusok, így például ALEXITS GYÖRGY, ERDŐS PÁL és nem utolsó sorban e könyv szerzője döntő módon kivették részüket.

FREUD GÉZA monográfiájának megírásával azt az időszerű feladatot vállalta magára, hogy az ortogonális polinomok elméletében elért, az előbb említett értelemben általánosabb jellegű eredményekről adjon összefoglaló áttekintést. Ezt a célkitűzést a szerzőnek sikerült igen jól megvalósítani; a könyv jellemzőjeként kell megemlíteni azt is, hogy az elkészült monográfiában a magyar szerzők eredményei központi szerepet kaptak.

A könyv első fejezete az ortogonális polinomrendszerek elméletének alapfogalmait és alapvető klasszikus eredményeit foglalja össze; rekurziós formula, a zérushelyek eloszlására vonatkozó egyszerűbb eredmények, Gauss—Jacobi-féle kvadratura formula, ennek egyszerűbb következményei, a Markov—Stieltjes-féle egyenlőtlenség, a Csebisev, a Legendre és a Jacobi polinomok, és ezekre vonatkozó egyszerűbb becslések képezik ennek tárgyát. A második fejezet igen érdekes és mély kérdéseket tárgyal; ezek a klasszikus Hamburger—Stieltjes-féle momentumprobléma, megoldhatósága és a megoldás egyértelműsége, a momentumprobléma egyértelműségének jelentősége az ortogonális polinomokkal való approximációra, az ortogonális polinomrendszerek teljességének kérdése, a RIESZ MARCEL-féle egyértelműségi tétel. A harmadik fejezet a kvadratura- és az interpolációs eljárásokkal foglalkozik, az ortogonális polinomok gyökeire vonatkozó mélyebb eredmények alapján, a negyedik fejezet pedig az ortogonális polinomsorok konvergencia-kérdéseit vizsgálja; ezekben a fejezetekben az olvasó különösen sok új eredményt találhat; az eredmények nagy része a már említett magyar szerzők nevéhez fűződnek. Végül az ötödik fejezetben az ún. Szegő-féle elmélet legfontosabb eredményeinek kompakt és világosan kidolgozott összefoglalását találhatjuk. A könyv végén néhány oldalon bizonyos nyitott problémák vannak említve, majd alaposabb irodalomjegyzék, név-, valamint tárgymutató következik.

Az egyes fejezetek után külön paragrafusokban elméletibb jellegű megoldási utasításokkal kiegészített feladatok és megjegyzések találhatók; ezekben a megjegyzésekben a szerző történeti áttekintést ad az illető fejezetben tárgyalt kérdéskör kialakulásáról. Az eredmények áttekintését a szerző táblázatok közbeiktatásával is igyekszik elősegíteni, amelyekben a különböző formulák és feltételek vannak felsorolva.

A könyv tanulmányozásához az elemi matematikai analízis, valamint a Lebesgue-integrálelmélet ismerete szükséges. Tartalma és tárgyalásmódja alapján e könyv tanulmányazása hasznos lehet mindazok számára, akik az ortogonális polinomok elméletének alapjaival kívánnak megismerkedni, esetleg azért, hogy azokat más vizsgálatok során felhasználhassák, de azok számára is, akik a kérdéskör újabb eredményeiről kívánnak áttekintést nyerni. FREUD GÉZA monográfiája mind hazai, mind pedig nemzetközi tekintetben a matematikai szakirodalom jelentős nyeresége.

Tandori Károly

MTA Könyvtára
Periodika 3159 /19 73 ex.

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1971-ben jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyvek*, felsőoktatási *jegyzetek* és tanfolyami *segédletek* nem szerepelnek.

ALEXANDROV, P. SZ.: *A topológia egyszerű alapfogalmai,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971, 73 oldal, 13,— Ft.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Ismerkedés a gráfelmélettel,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 237 oldal, 24,— Ft.

ARCHIBALD, R. D.—VILLORIA, R. L.: *Hálós irányítási rendszerek* (PERT/CPM), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1971, 550 oldal, 74,— Ft.

BAJCSY PÁL: *Többváltozós függvények integrálása* (3. kiadás), Műszaki matematikai gyakorlatok A. VII. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 106 oldal, 14,50 Ft.

BALOGH ARTUR: *A logarléc* (6. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 175 oldal, 10,— Ft.

BERKES JENŐ—PINTÉR LAJOS: *Az e szám. Nevezetes sorozatok és alkalmazások,* Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 131 oldal, 7,50 Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás* (2. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 359 oldal, 26,— Ft.

BIZÁM GYÖRGY—HERCZEG JÁNOS: *Játék és logika 85 feladatban,* Műszaki Könyvkiadó, 1971, 339 oldal, 36,— Ft.

BOGNÁR JÁNOSNÉ—MOGYORÓDI JÓZSEF—PRÉKOPA ANDRÁS—RÉNYI ALFRÉD—SZÁSZ DOMONKOS: *Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 330 oldal, 37,— Ft.

ELŐD ISTVÁNNÉ: *Számoljunk együtt 5—6. osztály* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 362 oldal, 19,— Ft.

ELŐD ISTVÁNNÉ: *Számoljunk együtt 7—8. osztály* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 374 oldal, 34,— Ft.

FODOR JÁNOS—HORVÁTH ATTILA—RÁBAI IMRE—SZÉKELY JENŐ: *Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára,* I. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 304 oldal, 22,— Ft.

FREUD GÉZA: *Orthogonal polynomials,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971, 294 oldal, 230,— Ft.

FRIED ERVIN: *Oszthatóság és számrendszerek* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 145 oldal, 8,50 Ft.

FRITZ JÓZSEF: *Bevezetés az információelméletbe,* Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 182 oldal, 9,— Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *A geometriai transzformációk tanítása az általános iskolában,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 200 oldal, 15,— Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ: *Lineáris algebra. Példatár* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 266 oldal, 26,— Ft.

GÖRKE LILLY—LIGNER KURT—LORENZ GÜNTER—PIETZSCH GÜNTER—REHM MANFRED: *Séta a matematika birodalmában,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 160 oldal, 40,— Ft.

GYEMIDOVICS, B. P.: *Matematikai analizis, feladatgyűjtemény,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 595 oldal, 69,— Ft.

HORVAY KATALIN—PÁLMAY LÓRÁNT: *Tanári segédkönyv a gimnáziumok I. osztályában a matematika tanításához* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 191 oldal, 20,— Ft.

HORVAY KATALIN—PÁLMAY LÓRÁNT: *Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályában a matematika tanításához* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 153 oldal, 16,50 Ft.

KEMÉNY, I. G.—SNELL, J. L.—THOMPSON, G. L.: *A modern matematika alapjai, Véges struktúrák*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 497 oldal, 72,— Ft.

KUROS, A. G.: *Felsőbb algebra* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. 457 oldal, 53,— Ft.

LERNER, A. J.: *A kibernetika alapjai*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1971, 411 oldal, 29,— Ft.

LŐCS GYULA: *Az ALGOL 60 programozási nyelv* (4. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 254 oldal, 19,50 Ft.

LUKÁCS ERNŐNÉ—RÁBAI IMRE: *Eleget tudok-e matematikából? (Érettségire, felvételire)*, Minerva Kiadó, Budapest, 1971, 367 oldal, 26,— Ft.

LUKÁCS OTTÓ—SCHARNITZKY VIKTOR: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok* IV. kötet, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 167 oldal, 13,— Ft.

MANSFIELD, D. E.—THOMPSON, D.: *Matematika új felfogásban* I. kötet, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1971, 338 oldal, 31,— Ft.

Mc CRACKEN, D. D.: *Bevezetés az ALGOL programozásba*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 127 oldal, 17,50 Ft.

Mc CRACKEN, D. D.: *Bevezetés a Fortran IV. programozásba*, Számítástechnikai Oktató Központ, Budapest, 1971, 277 oldal, 70,— Ft.

METZGER, ROBERT W.: *Elemi matematikai programozás*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1971, 315 oldal, 28,50 Ft.

MOSONYI KÁLMÁN: *Matematikai játékok*, Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 143 oldal, 8,— Ft.

OBÁDOVICS GYULA: *Matematika* (8. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 807 oldal, 62,— Ft.

PAWLAK, Z.: *A gyártási folyamat a matematika tükrében*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1971, 175 oldal, 20,— Ft.

PETRICH GÉZA: *Ábrázoló geometriai példatár gépész-, elektro- és kohómérnök hallgatók számára* (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 180 oldal, 17,— Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *A problémamegoldás iskolája* II. kötet (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 204 oldal, 27,— Ft.

REIMAN ISTVÁN: *Vektorok a geometriában*, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 176 oldal, 10,— Ft.

SCSEDRIN, N. J.: *A gazdasági kibernetika alapjai*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1971, 117 oldal, 13,50 Ft.

SOLT GYÖRGY: *Valószínűségszámítás (Példatár)* 2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 265 oldal, 20,— Ft.

STROMMER GYULA: *Ábrázoló geometria gépészmérnökök számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, XV+566 oldal, 66,— Ft.

SZABÓ KÁLMÁN: *Számítógép ismeretek*, Statisztikai Kiadó, Budapest, 1971, 273 oldal, 50,— Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Théorie des treillis*, Akadémiai Kiadó, Budapesj, 1971, 227+IX oldal, 95,— Ft.

Szovjet és csehszlovák matematikai olimpiai feladatok gyűjteménye, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 295 oldal, 21,50 Ft.

Természettudományi kislexikon (Fel. szerk. SOMOGYI BÉLÁNÉ), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971, 1192 oldal 225,— Ft.

TOLNAI JENŐ: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok II., Geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 187 oldal, 13,— Ft.

VEKERDI LÁSZLÓ: *Befejezetlen jelen. Tudománytörténeti tanulmányok*, Magvető Könyvkiadó, Budapest, 1971.

VILENKIN, N. J.: *Kombinatorika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 358 oldal, 38,— Ft

VINCZE ISTVÁN: *Mathematische Statistik mit industriellen Anwendungen*, Akadémiai Kiadó Budapest, 1971, 440 oldal, 210, —Ft.

Scharnitzky Viktor

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat beérkezett: 1972. XII. 22. – Terjedelem: 17,2 (A/5) ív
72–5749 – Szegedi Nyomda

СОДЕРЖАНИЯ

Андраш Хайнал: О деятельности П. Эрдёша в теории множеств 197
Ласло Фейеш-Тот: Наиболее плотное размещение линз в плоскости 209
Янош Шураньи: Некоторые геометрические проблемы комбинаторного характера 215
Андор Кертес: Столетие точного определения действительных чисел 231
Ласло Альпар: Равномерная сходимость и модуль непрерывности 235
Ласло Ловас: Краткий обзор теории матроид 249
Андраш Адам: Графы и циклы 269
Домокош Сас: О слабой сходимости последовательностей распределений вероятностей 283
Иштван Бабчаньи: Циклические, от состоянии независиные квази-автоматы 289
Ласло Марки: Об одной проблеме типа Винер-Леви 303
Ласло Сёке: Числовые конфигурации для чисел Белла и для чисел Стирлинга второго рода 307
Михай Салай: Об одной теореме Ландау 317
Нгуэн Моиг Хи: О регулярных многоугольниках аффинной плоскости Галуа девятого порядка 323
Янош Пинтц: Об одном вопросе теории *L*-функций Дирихлета II. 331
Доклад о мемориальном математическом конкурсе имени Миклоша Швейцера 1971-ого года 337
Задачи 359
Из жизни общества 367
Обзор книг 379

CONTENTS

A. Hajnal: Paul Erdős's-work in set-theory 197
L. Fejes Tóth: Packing of lens of maximal density 209
J. Surányi: Some combinatorial problems of geometry 215
A. Kertész: The concept of real numbers was introduced hundred years ago 231
L. Alpár: Uniform convergence and modulus of continuity 235
L. Lovász: A brief survey of matroid theory 249
A. Ádám: Graphs and cycles 269
D. Szász: On the weak convergence of sequences of probability distributions 283
I. Babcsányi: Cyclic state-independent quasi-automata 289
L. Márki: On a Wiener—Lévy type problem 303
L. Szőke: Number-configurations for Bell-numbers and Stirling-numbers of the second kind . 307
M. Szalay: On a theorem of E. Landau 317
Nguyen Mong Hy: On the regular polygons of the nine order affine Galois plane 323
J. Pintz: On a point in the theory of Dirichlet's *L*-functions II. 331
Report on the M. Schweitzer competition, 1971 337
Problems 359
Activity of the Society 367
Book review 379

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564