312.046
IV
1953
1-4

MATEMATIKAI LAPOK

IV. ÉVFOLYAM

1.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1953

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1952. december. III. évfolyam 3—4. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.
Szerkesztőség: Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó Budapest V. Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 424—595, 424—589, 420—330.
Felelős kiadó: Mestyán János.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20.— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

A matematika multja és jelene hazánkban 1
Vincze István: Ünnepi ülésszak Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából 1952. december 14—18 5
Szőkefalvi-Nagy Béla: Pozitív polinomok. (Második közlemény) 13
Obláth Richard: Egy Fermat-féle bizonyítás helyreállításának kísérlete . . 18
Jelentés a Beke Manó emlékdíj odaítéléséről 31
Feladatrovat 34
Példarovat 45
Társulati élet 63
Matematikai és személyi hírek 71
Könyvismertetés 75
Tagnévsor 78

A matematika multja és jelene hazánkban

A május 17.-i választások alkalmából hasonlítsuk össze a matematika múltját és jelenét hazánkban néhány kiragadott tényen keresztül.

Emlékezzünk arra, hogy a 30-as években sok matematikus tartozott az állástalan diplomások szövetségéhez. Ez a szövetség egy alkalommal tiltakozó gyűlést is akart rendezni az állástalan diplomások nyomorúságos helyzetéről, azonban a tüntetőket a rendőrséggel fenyegetőzve szétkergették. Előfordult, hogy egy egész egyetemi évfolyamból csak egy matematikus hallgatónak sikerült közvetlenül a végzés után állást kapnia. Aki a tudományt választotta életcéljául, arra hosszú évek nélkülözése, nyomora várt.

Ezzel szemben ma a végző matematikusokkal kapcsolatban csak az okoz gondot, hogy igen sok iskola, tanszék és tudományos intézet igényeit kell kielégíteni. Minden hallgató már utolsóéves korában tudja, hogy hova kerül állásba. Akik a tudományos pályát választják, azok számára nyitva áll az aspirantúra intézménye.

Emlékezzünk arra, hogy milyen volt a matematika-tanárok élete és munkája. Lélektelen robot volt a munkájuk, mert a gazdag szülők gyermekei csak az érettségi bizonyítványt akarták megszerezni, a matematika, a tényleges tudás nem érdekelte őket, eltekintve kisszámú kivételtől.

Ezzel szemben ma az iskola padjaiban főként munkás és paraszt szülők gyermekei ülnek, akik tudják, hogy miért tanulnak, az iskolában tanultakat fel akarják használni a szocializmus építésében. Hogy mennyire megnőtt a diákok érdeklődése a matematika iránt, azt bizonyítja, hogy a Középiskolai Matematikai Lapok, amely a felszabadulás előtt csak néhány kiváló diák olvasmánya volt, ma 3400 példányban jelenik meg és még több példányra is szükség volna. Ez évben 800-nál több diák küldött be megoldásokat a Középiskolai Matematikai Lapokban megjelent feladatokra. Ugyanezt bizonyítja a RÁKOSI MÁTYÁS, ARANY DÁNIEL és KÜRSCHÁK JÓZSEF versenyeken résztvevő diákok egyre növekvő száma is. A RÁKOSI MÁTYÁS-versenyen például ez évben közel 3000 diák adott be dolgozatot. Megváltozott, új tartalommal telt meg a matematika-tanárok munkája is.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Emlékezzünk arra, hogy a multban a kormány nem törődött a matematikaoktatás színvonalával, a kiemelkedő jó munkát végző tanárokat nem becsülte meg.

Ezzel szemben Népköztársaságunk állandóan törekszik a matematika-oktatás színvonalának emelésére, a jó munkát végző matematika-tanárokat kitünteti, példaképül állítja. Ez évben HUSZKA ERNŐNÉ jó munkájáért Kossuth-díjban részesült, eddig 11 matematika-tanár kapta meg a BEKE MANÓ-díjat, számos tanárt a Közoktatásügyi Minisztérium tüntetett ki.

Emlékezzünk arra, hogy az egyetemről kikerült tanároknak nem volt továbbképzési lehetősége, legtöbbjük elszakadt a tudományos élettől, különösen, ha vidékre került.

Ezzel szemben ma Népköztársaságunk minden tanár részére biztosítja a továbbképzés lehetőségét, segíti a tanárokat, hogy megismerjék a tudomány újabb eredményeit és kicseréljék tapasztalataikat. A Bolyai János Matematikai Társulat a Közoktatásügyi Minisztériummal karöltve az elmúlt három évben a Budapesten rendezett konferenciákon kívül Miskolcon, Szegeden, Debrecenben, Pécsett, Győrött, Balatonfüreden, Békéscsabán, Szombathelyen és Sárospatakon rendezett konferenciákat. A matematika-tanárok nagy számban vehettek részt az I. Magyar Matematikai Kongresszuson és a Bolyai-héten. Számos könyv és előadás tette lehetővé, hogy a matematika-tanárok megismerjék a szovjet matematikusok nagyszerű eredményeit, a Szovjetunió magasszínvonalú matematikaoktatását. A most meginduló „A matematika tanítása" c. folyóirat újabb segítséget fog jelenteni tanárainknak.

Emlékezzünk arra, hogy a Matematikai és Fizikai Társulat a felszabadulás előtt alig 3—400 tagot számlált, csak Budapesten működött és gyárigazgatók adományaiból tengődött.

Ezzel szemben ma csak a Bolyai Társulatnak több, mint 1200 tagja van, Budapesten kívül 11 vidéki városban működik (Szeged, Debrecen, Miskolc, Pécs, Veszprém, Eger, Sopron, Nyíregyháza, Szolnok, Szombathely) és hathatós állami támogatásban részesül, minek következtében módjában áll konferenciákat, versenyeket rendezni, pályadíjakat osztani, előadócserével és minden más módon támogatni a matematikai élet fejlődését.

Emlékezzünk arra, hogy a felszabadulás előtt Magyarországról jóval több kiváló matematikus vándorolt ki külföldre és kapott ott katedrát, mint ahány idehaza egyetemi tanár lehetett. Az egyetemi tanszékeken fizetett állás csak igen kevés volt, nagy kitüntetés volt, ha egy fiatal matematikus díjtalan gyakornok lehetett.

Ezzel szemben ma már az a gondunk, hogyan töltsük be az egyetemi oktatásunk fejlődésével egyre szaporodó matematikai tanszékeket. Számos fiatal matematikus vezet ma már tanszéket és többszáz matematikus dolgozik a tanszékeken. Gyökeresen megváltozott, rendszeressé, korszerűvé vált az egyetemi oktatás.

Emlékezzünk arra, hogy a magyar matematikusokat régen külföldön jobban megbecsülték, mint idehaza, a magyar matematikai iskola nagy eredményeiről az egész világ tudott, csak éppen az itthoni hivatalos körök alig vettek róla tudomást.

Ezzel szemben a felszabadulás óta 14 kiváló magyar matematikust tüntettek ki tudományos munkájukért Kossuth-díjjal, köztük négyet már kétízben, RIESZ FRIGYEST ez évben a Kossuth-díj legmagasabb fokozatával, FEJÉR LIPÓTOT a legmagasabb munkaérdemrenddel, a Munka Vörös Zászló rendjével tüntette ki Népköztársaságunk kormánya.

Emlékezzünk arra, hogy milyen gyéren jelentek meg matematikai szakkönyvek és egyetemi tankönyvek a multban.

Ezzel szemben felszabadulásunk óta gyors fellendülésnek indult a matematikai könyvkiadás: eddig összesen kereken 70 matematikai könyv (tudományos monográfia, egyetemi tankönyv, népszerűsítő és didaktikai munka) jelent meg. A megjelent könyvek egy része magyar szerző munkája, más része kiváló szovjet művek fordítása. Az elkövetkező években még több matematikai munka fog megjelenni és néhány éven belül lehetségessé válik magyar nyelven megismerkedni a matematika összes fontosabb új irányaival és minden alapvető egyetemi tantárgynak lesz magyarnyelvű tankönyve.

Emlékezzünk arra, hogy a matematikusok a multban elszigetelten dolgoztak, nem találták meg a kapcsolatot a gyakorlattal, az iparral, de még a természettudományokkal sem.

Ezzel szemben ma, a szovjet tudomány példáját követve, a magyar matematikusok is felismerték, hogy nincs szebb és tudóshoz méltóbb feladat, mint hogy tudományuk eredményeit a dolgozó nép szolgálatába állítsák, azzal, hogy a tudomány és gyakorlat egységének megvalósítására törekszenek a matematika terén. Hogy ez a törekvésük máris meghozta első gyümölcseit, mégpedig mind az ipar, mind a rokon tudományok, mind pedig magának a matematikai kutatásnak a javára, azt bizonyítja az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményeinek nemrég kiadott első kötete is.

Az elmondottak is mutatják, hogy Pártunk és Kormányunk hatalmas támogatása a magyar matematikai élet pezsgő és virágzó korszakát teremtette meg hazánkban azóta, amióta a Szovjetunió felszabadító hadserege meghozta számunkra a várva várt szabad-

ságot. Szabad hazánk további fejlődése, ötéves tervünk teljesítése és túlteljesítése, valamint második ötéves tervünk a matematikának mint tudománynak, a matematika alkalmazásainak és a matematika-oktatásnak további nagyarányú fejlesztését követeli meg. Igen nagy feladatok állnak előttünk, magyar matematikusok előtt és minden erőnkkel arra kell törekednünk, hogy élni tudjunk azokkal a korlátlan lehetőségekkel, amelyet Népköztársaságunk biztosít számunkra. Ebben a munkánkban bizton számíthatunk Pártunk és Kormányunk, szeretett Rákosi elvtársunk további hathatós támogatására, támaszkodhatunk a szovjet matematikusok önzetlen segítségére és a többi baráti ország matematikusainak támogatására is. A magyar matematikai élet fényes jelenére és még ragyogóbb jövőjére szavazunk akkor, amikor május 17.-én a múltat, a jelent és a jövőt felmérve, egy emberként, öntudatosan, örömmel adjuk szavazatunkat a Függetlenségi Népfrontra.

Ünnepi ülésszak Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából 1952 december 14—18.

A Magyar Tudományos Akadémia, a Bolyai János Matematikai Társulat közreműködésével 1952. évi december hó 14-től 18-ig ünnepi ülésszakot tartott, amelyen BOLYAI JÁNOS, a magyar tudomány büszkesége, a matematika története egyik legkiemelkedőbb alakja születésének 150. évfordulóját ünnepelte meg. Ugyanekkor a Társulat országszerte az ünnepi ülések és ismertető előadások egész sorát rendezte, a magyar sajtó pedig cikkekben és beszámolókban emlékezett meg a nevezetes évfordulóról.

Az ünnepi ülésszakon részt vettek a Szovjetunió képviseletében P. Sz. ALEKSZANDROV, a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának lev. tagja és Sz. M. NYIKOLSZKIJ, SZTÁLIN-díjas matematikus, a Lengyel Népköztársaság részéről W. SIERPIŃSKI, a Lengyel Tudományos Akadémia alelnöke és S. TURSKI, a varsói egyetem rektora, a Csehszlovák Népköztársaság részéről EDUARD ČECH akadémikus, a Csehszlovák Központi Matematikai Intézet igazgatója, a Román Népköztársaság részéről T. POPOVICI akadémikus és G. PICK egyetemi tanár, a Német Demokratikus Köztársaság részéről W. RINOW és H. MARUHN egyetemi tanárok; beküldött előadásával képviseltette magát J. HADAMARD, a Francia Tudományos Akadémia tagja, a haladószellemű, világhírű francia matematikus.

Az ünnepi ülések előadásai nyomán megelevenedett előttünk a tragikus sorsú BOLYAI JÁNOS alakja, aki egész életében meg nem értetten és magányosan harcolt forradalmi igazságainak érvényesítéséért. Képet kaptunk BOLYAI JÁNOS zseniális matematikai felfedezéséről, arról a páratlan hatásról, amelyet e felfedezés a matematikának és más tudományoknak fejlődésében előidézett. Ugyanakkor megismerhettük társadalmi felfogását és világnézetét, ami világossá teszi, hogy korának uralkodó osztálya miért igyekezett forradalmi, haladó vonásait elleplezni. Végül a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ geometria világnézeti jelentőségének mélyenjáró elemzését kaptuk.

Az ünnepi ülések lelkes hangulata megmutatta, hogy a magyar nép, a magyar tudomány visszavonhatatlanul magához öleli egyik legnagyobb fiát, történelmének, nemzeti hagyományainak büszkeségét.

Az ünnepi ülésszakot december 14-én délelőtt 11 órakor megnyitó ülés vezette be, amelyen a matematikusokon kívül a politikai élet és más tudományok számos kiválósága is megjelent. RUSZNYÁK ISTVÁN, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke üdvözölte a részvevőket és megnyitó beszédet tartott. Beszédében utalt azokra a megváltozott körülményekre, amelyek megérlelték a magyar népben, a magyar tudomány dolgozóiban, hogy BOLYAI JÁNOS alakját tudományos és emberi értékét valóban megillető helyre állítsák haladó hagyományaik közé. Ezután a külföldi delegációk vezetőinek felszólalásaira került sor. Elsőnek P. Sz. ALEKSZANDROV, a szovjet delegáció vezetője szólalt fel. Az ünnepi ülésszak üdvözlése kapcsán a következőket mondta: „Mi, a szovjet küldöttség tagjai, büszkeséggel és örömmel hangsúlyozzuk, hogy ez az ünnep egyformán ünnepe a magyar és az orosz népnek... Legyen BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ neve újabb jelképe népeink örök barátságának, amelyek egymással szoros egységben küzdenek a békéért, az egész emberiség boldogulásáért." Utána W. SIERPIŃSKI, a Lengyel Népköztársaság küldöttségének vezetője mondott üdvözlő beszédet, melyben a lengyel matematikusok testvéri üdvözletét tolmácsolta. A Román Népköztársaság delegációjának vezetője, T. POPOVICI, felszólalásában elmondta, hogy ezekben a napokban az ő hazája is ünnepli BOLYAI JÁNOS születésének évfordulóját; a Román Munkapárt és a demokratikus állam gondoskodik a nagy magyar matematikus hagyományainak ápolásáról. Kiadják román nyelven az Appendixet, tanulmányok jelentek meg BOLYAIról, külön ülést tart a Román Tudományos Akadémia és kiállítást rendez BOLYAI hagyatékából. A Csehszlovák Népköztársaság részéről EDUARD ČECH üdvözletében annak a reményének adott kifejezést, hogy a jövőben matematikusaink a világbéke és a szocializmus építése érdekében egyre jobban együtt működhetnek.

Ezután RUSZNYÁK ISTVÁN elnök felolvasta a Kínai Tudományos Akadémia elnökének, KUO-MO-ZSO-nak táviratát, melyben a kínai nép testvéri együttérzését és üdvözletét küldte az ünnepi ülésszak részvevőinek.

A részvevő közönség hosszas tapsokkal, meleg fogadtatásban részesítette a testvéri Szovjetunió és a népi demokratikus országok küldötteinek üdvözlő felszólalásait.

Ezután ALEXITS GYÖRGY akadémikus „BOLYAI élete és munkássága" címen tartott ünnepi előadása következett. ALEXITS GYÖRGY előadásában és „BOLYAI JÁNOS" című könyvében elsőnek tárta fel a történelmi materializmus mélyenjáró módszereivel a zseniális tudós és szociálisan érző és gondolkodó ember tragikus sorsát, társadalmi összefüggéseiben és szükségszerűségében. Eddig ismeretlen kéziratok tanulmányozása alapján cáfolt meg számos BOLYAIra vonatkozó helytelen nézetet és mutatott rá BOLYAI alakjának emberi

nagyságára. Megmutatta, hogy BOLYAI JÁNOS mind a matematika elvi kérdéseiben, mind pedig társadalmi kérdésekben következetesen haladó, sőt harcos álláspontot foglalt el.

Az ünnepi ülésszak előadásai sokoldalúan, újszerűen világították meg BOLYAI JÁNOS tudományos eredményeit, ezeknek az eredményeknek számos különböző irányú továbbfejlesztését és azt a hatást, amelyet a tudományok fejlődésére a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ geometria gyakorolt. Külföldi vendégeink és hazai előadóink összefoglaló előadások mellett újabb tudományos eredményeikről is beszámoltak a matematika olyan ágainak területéről, amelyek kifejlődése a nem-euklidesi geometria felfedezésének köszönhető.

A Budapesten élő matematikusok teljes számban vettek részt a számukra jelentős tudományos élményt jelentő előadásokon, de a Bolyai János Matematikai Társulat gondoskodott arról is, hogy vidéki tagjai is igen nagy számban jelen lehessenek az ünnepi ülésszak előadásain és összejövetelein. Nagy számban jelentek meg az előadásokon a tudományegyetem és a műszaki egyetemek hallgatói is.

A megnyitó ülést követő napon P. Sz. ALEKSZANDROV és VARGA OTTÓ tartották meg előadásaikat.

P. Sz. ALEKSZANDROV „A tér fogalma a topológiában" című összefoglaló előadásában ismertette a topologikus tér fogalmának fejlődését, annak RIESZ FRIGYES által történt megalapozásától napjainkig. A metrizáció problémájának minden tekintetben teljes megoldását — néhány évvel ezelőtt — egy tanítványa, JU. V. SZMIRNOV adta meg. A teljesen reguláris testek bikompakt bővítésével kapcsolatosan kiemelte a maximális bikompakt bővítés egy E. ČECHTŐL származó egyszerű felépítését, végül a V. A. JEFREMOVICS által bevezetett „szomszédság-tér" fogalmáról beszélt.

VARGA OTTÓ „A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása a differenciálgeometria fejlődésére" című előadásában ismertette először azokat a vizsgálatokat, amelyek a geometria modern, axiomatikus megalapozásához vezetnek. Vázolta továbbá azokat a felfogásokat, amelyekből kiindulva már általánosabb geometriákhoz lehet jutni. Így a CAYLEY—KLEIN-féle projektív felfogás vezetett a geometriák csoportelméleti megalapozásához, míg kiindulva RIEMANN híres habilitációs előadásából, a vizsgálatok különböző geometriai diszciplinák differenciálgeometriai megalapozásához vezetnek.

RUSZNYÁK ISTVÁN, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke a külföldi vendégek tiszteletére fogadást rendezett a margitszigeti Nagyszállóban, amelyen a Szovjetunió és a baráti népi demokratikus országok diplomáciai testületei is képviseltették magukat. A fogadáson politikai és tudományos életünk több kiválósága és számos magyar matematikus vett részt.

Az ünnepi ülésszak következő napján J. HADAMARDnak a Bolyai ünnepi ülésszakra beküldött előadását HAJÓS GYÖRGY ismertette; az előadás címe „A nem-euklidesi geometria és az axiomatikus módszer". HADAMARD rövid történeti áttekintést adott EUKLIDES egyenes-definíciójának kritikájáról. Hangsúlyozta a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezésének nagy jelentőségét. A nem-euklidesi geometria szingularitás-mentes modelljének megszerkesztése azáltal sikerült, hogy e modellben az egyenes és a távolság szerepét olyan alakzat, ill. mennyiség veszi át, amely eltér a szemléletes egyenes- és távolság-fogalmaktól, azonban rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, amelyekkel a szemléletes egyenes- és távolság-fogalmak birnak. HADAMARD e meggondolásokból azt a következtetést vonja le, hogy az alapvető fogalmaknál a nominális definíció szerepét olyanoknak kell elfoglalni, amelyek e fogalmakat tulajdonságaik útján határozzák meg; ebben a vonatkozásban utalt PASCAL egy figyelemreméltó megállapítására.

KÁRTESZI FERENC „N. I. LOBACSEVSZKIJ élete és munkássága" címen tartott előadásában BOLYAI JÁNOS kortársa, a lángeszű orosz matematikus életét és munkásságát ismertette, akit egész életében tudományos és emberi törekvéseiben hasonló célok fűtöttek és aki BOLYAI JÁNOSTÓL függetlenül alkotta meg a nem-euklidesi geometriát. Életük, sorsuk sok hasonlóságot mutat; LOBACSEVSZKIJ szintén elszigetelten dolgozott, zseniális felfedezéséért életében csak kevés elismerést kapott. KÁRTESZI FERENC LOBACSEVSZKIJ életművét méltatva rámutatott arra, hogy mennyivel kedvezőbbek mai tudósaink körülményei, mind munkájuk megbecsülése, mind a haladó országok tudósaival való együttműködésük lehetősége tekintetében. Kiemelte a szovjet és magyar matematikusok együttműködésének jelentőségét.

Az ünnepi ülésszak negyedik napján SZÁSZ PÁL számolt be saját vizsgálatairól „A hiperbolikus trigonometria különböző elemi megalapozásai" címmel. Előadásában ismertette a hiperbolikus trigonometriának három, módszertanilag lényegesen különböző elemi előállítását. Az első egy a BOLYAI JÁNOS és LOBACSEVSZKIJ által teremtett klasszikus úton haladó térbeli előállítás, a második ugyancsak klasszikus segédeszközökkel dolgozó síkbeli, míg a harmadik közvetlen előállítás, amely nem a klasszikus segédeszközöket használja.

EDUARD ČECH tartotta meg ezt követően „Megjegyzések a projektív differenciálgeometriához" című előadását. Bevezetésében kritika tárgyává tette a geometria tudományában újabban elterjedt formalizmust. Ismertette a projektív deformációk FUBINITŐL származó fogalmát és E. CARTANnak ezzel kapcsolatos alapvető eredményeit, majd rövid áttekintést adott régebbi, valamint legújabb idevágó vizsgálatairól. Az előadás különösen felületek és sugárkongruenciák pro-

jektív deformációival foglalkozott. ČECH legújabb kutatásai során a CARTAN által tisztán formális számítással nyert kapcsolatoknak szemléletes geometriai tartalmat adott. Ezután W. RINOW „Felületek belső geometriájának egy axiomatikája" címen tartott előadást. Előadó egy felület geodetikus vonalainak illeszkedéseit, valamint infinitézimális projektív tulajdonságait tárgyalta. E tulajdonságokra építve rámutatott arra, hogyan lehet a felület belső geometriáját geodetikus vonalakból kiindulóan axiomatikusan felépíteni.

Az ülésszak utolsó napjának délelőtti előadóülésén KALMÁR LÁSZLÓ tartotta meg előadását „A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása az axiomatikus módszer fejlődésére" címmel. Előadásában rámutatott arra, hogyan vezetett BOLYAI JÁNOS modell-konstrukciója, melyet a Bolyai—Lobacsevszkij rendszerben az euklidesi geometria részére megalkotott, a *modell-módszerhez* az axiómarendszerek ellentmondásmentességének kérdésénél, valamint a modell-módszernek sok más alkalmazásához. Hangsúlyozta e módszer jelentőségét a dialektikus materializmus szempontjából: a valóságot helyesen tükröző fogalmak teljes jellemzéséhez módszereink, axiómarendszerünk állandó fejlesztésére van szükség s BOLYAI JÁNOS és LOBACSEVSZKIJ felfedezése indította meg az axiomatikus módszer fejlődését.

Sz. M. NYIKOLSZKIJ jelentős vizsgálatairól a következő címmel számolt be: „Differenciálható sokaságokon értelmezett többváltozós függvények bizonyos osztályainak tulajdonságai és ezek felhasználása variációszámítási problémáknál". Kiindulása az az ismeretes tény, hogy a LAPLACE-féle differenciálegyenlet adott kerületi értékek melletti megoldása nem minden esetben végezhető el a DIRICHLET-féle variációs elv segítségével. NYIKOLSZKIJ mármost azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy milyen követelményt állítsunk a kerületen megadott függvényre nézve ahhoz, hogy a DIRICHLET-féle probléma megoldható legyen. NYIKOLSZKIJ elégséges feltételeket talált, melyek nemcsak a harmonikus, hanem a poliharmonikus esetre is kiterjeszthetők. Eredményeit Sz. N. BERNSTEJNnek a végesrendű egészfüggvényekre vonatkozó vizsgálatainak általánosításával éri el. A nagy érdeklődéssel kísért előadáshoz FEJÉR LIPÓT professzor szólt hozzá, aki egy igen szemléletes komplex függvénytani példa bemutatásával világította meg az előadás bizonyos vonatkozásait.

Az ünnepi ülésszak táviratot intézett a népek bécsi Békekongresszusához. A távirat szövege egyebek között a következőket tartalmazta: „BOLYAIban azt a tudóst ünnepeljük, aki felfedezésével az emberiség jólétét kívánta szolgálni... Mély megdöbbenéssel látjuk azt, hogy egyes tudósok az imperializmus, új háború előkészítése és a népek szabadságának letörése szolgálatába állítják tudományukat... Felhívjuk a világ tudósait: csatlakozzanak a béke megvédéséért folytatott harchoz és akadályozzák meg a tudománynak

a rombolás és pusztítás szolgálatába való állítását." Az ünnepi ülésszak részvevői őszinte lelkesedéssel fogadták el a távirat szövegét.

Táviratban üdvözölte az ünnepi ülésszak RÁKOSI MÁTYÁS elvtársat, a magyar nép bölcs vezetőjét. A táviratban az ülésszak részvevői forró szeretetüket és hálás köszönetüket fejezték ki azért a hatalmas segítségért, amelyben a tudományos kutatómunka hazánkban részesül. Ígéretüket fejezték ki, hogy tudományos munkájukat a jövőben még fokozottabban fogják az ötéves terv mielőbbi sikeres megvalósítása, a békéért folyó harc és a szocializmus felépítése szolgálatába állítani. A részvevők lelkes tapsa tükrözte vissza azt az őszinte lelkesedést, amellyel e távirathoz csatlakoztak.

Ezután RÉNYI ALFRÉD „A Bolyai—Lobacsevszkij geometria világnézeti jelentősége" címmel tartotta meg előadását. Előadásában széleskörű tudománytörténeti elemzésen keresztül mutatta be, hogyan vitte előre ez a felfedezés a matematikán túlmenően az anyagi világ megismerését általában. Rámutatott ennek kapcsán a Bolyai—Lobacsevszkij geometria jelentőségére a tudományos materialista világnézet fejlődése szempontjából. Ismertette a materialista és idealista világnézet harcát a geometriában az ókortól napjainkig, és részletes filozófiai értékelését adta a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ geometria haladó szerepének a materialista és idealista világnézet harca szempontjából. Megmutatta, hogy BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ felfedezésükkel egyrészt döntő csapást mértek KANTnak a térfogalom „a priori" voltára vonatkozó idealista felfogására és ugyanakkor nyilvánvalóvá tették a fizikai teret a matematikai térfogalommal azonosító primitív metafizikus álláspont helytelenségét és ezzel a matematika és valóság viszonyának helyes, materialista és dialektikus felfogásának kialakulását segítették elő.

Ezután ERDEY-GRUZ TIBOR, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkárának zárszava következett. Hangsúlyozta azt a szerves összefüggést, amely multunk nagy haladó tudósai eredményeinek és hatásának feltárását mai munkánkkal, a holnap építésével összekapcsolja. Az ünnepi ülésszak eseményeinek méltatása után kiemelte, hogy ma már a multé a tudósnak saját népétől való elszigeteltsége, ugyanúgy, mint a világ haladó gondolkodású népeinek egymástól való elszigeteltsége is megszünt. Megköszönve a Szovjetunió, valamint a többi baráti államok akadémiái küldötteinek értékes közreműködését, az ünnepi ülésszakot bezárta.

Az ülésszak matematikai, ideológiai, történeti előadásai magas tudományos színvonalon mozogtak, de ugyanakkor szakemberek szélesebb köréhez szóltak. Ezek az előadások a maguk nemében jelentős tudományos értéket képviselnek a feldolgozások újszerűsége, másutt a vizsgálatok eredetisége következtében, ezért kívánatos mielőbbi kiadásuk. De az előadásokon túlmenően is komoly tudo-

mányos élményt jelentett az ünnepi ülésszak a magyar matematikusok számára azáltal, hogy a Szovjetunió és a baráti demokratikus népek kiváló matematikusaival megbeszéléseket folytathattak a matematika tudományának élő, aktuális problémáiról.

A külföldi vendégekkel való személyes megbeszéléseket a magyar matematikusok felhasználták a baráti országokkal való tudományos kapcsolatok további elmélyítésére.

A külföldi delegációk mindegyike meglátogatta a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetét és értékes tanácsaikkal segítséget nyújtottak az Intézet munkájához. Ezen látogatások alkalmával az Intézet és a baráti államok testvérintézményei közötti kapcsolatok és tapasztalatcsere továbbfejlesztéséről is folytak megbeszélések. Az intézetben tett látogatására utalva, EDUARD ČECH a záróülésen tartott felszólalásában egyebek között a következőket mondta: „Az Önök Alkalmazott Matematikai Intézete megmutatja nekünk az utat, hogyan lehet összekapcsolni a tudományos kutatómunkát a munkásosztály segítségével a szocializmus megvalósítására irányuló törekvésében."

S. TURSKI lengyel professzor az Intézetben előadást tartott, amelyben ismertette a rugalmasságtan alapegyenleteinek általánosítására vonatkozó vizsgálatait, és a lengyel Matematikai Intézet munkáját statikai problémák megoldása terén. Az előadást vita követte.

Az ünnepi ülésszak lezárását követő napon több külföldi vendég néhány napot még hazánkban töltött, és meglátogatta Sztálinvárost. A Bolyai János Matematikai Társulat december 20-án ünnepi előadóülésen emlékezett meg SZTÁLIN elvtárs 73. születésnapjáról, amelyen az ünnepi beszédet ALEXITS GYÖRGY, Társulatunk elnöke tartotta. Ezután a német vendégek tartottak előadásokat. W. RINOW „Konvex felületek jellemzése a belső metrika segítségével" címmel, míg H. MARUHN „Örvénygyűrűk mozgására vonatkozó exisztencia vizsgálatok" címmel számoltak be újabb eredményeikről.

Mind az ünnepi ülésszak előadásait, köszöntéseit, mind a külföldi vendégeinkkel való baráti megbeszéléseket áthatotta a megbecsülés a magyar matematika iránt, amely a legnagyobb fokban szeretett mestereink, FEJÉR LIPÓT és RIESZ FRIGYES professzorok iránt nyilatkozott meg.

A BOLYAI JÁNOS emlékünnepségek jelentősége messze túlterjedt a tudomány, a matematika körén. Az újságok megemlékezései, ismertető cikkei, az egyetemeken, főiskolákon, középfokú iskolákban megtartott BOLYAI JÁNOSról szóló előadások igen nagy érdeklődést keltettek a nagy magyar matematikus iránt, s ezen keresztül a magyar tudomány haladó hagyományai iránt és alkalmasak voltak arra, hogy népünkben, ifjúságunkban a nemzeti öntudatot emeljék,

a hazafias érzést ápolják. Ugyanakkor ezek az előadások BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ sorsközössége révén a Szovjetunióval való barátságot és általában a haladó országokkal való őszinte baráti együttműködést is szolgálták. Matematikusaink és sok rokon tudomány művelője számára az ünnepségek, az értékes tudományos előadások, a matematika kiváló külföldi művelőivel való közvetlen megbeszélések révén olyan élményt jelentettek, amelyben ritkán részesülnek és ami méltó folytatása volt az I. Magyar Matematikai Kongresszuson szerzett értékes benyomásoknak. Az ünnepségek előadásainak megalkotása, a külföldi matematikusokkal való megbeszélések a tudomány továbbfejlesztését eredményezték, mind a matematika, mind a matematika ideológiai vonatkozású problémáiban. Visszatekintve tehát az ünnepi ülésszakon nyert élményekre, az ünnepségek sokirányú hatására, megállapíthatjuk, hogy nemzeti hagyományaink ápolása a matematika területén igen fontos kötelességünk és a Bolyai János Matematikai Társulat a magyar tudomány felemelését, a baráti országokkal való nemzetközi kapcsolatok elmélyítését, hazánk további kulturális felemelését segíti elő, amikor nemzeti hagyományaink ápolását továbbra is elsőrendű feladatának tartja.

Vincze István

Pozitív polinomok

(Második közlemény)[1]

Írta: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA (Szeged)

Az első közleményben ismertettük többek között azt a tételt, amely szerint minden

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

polinom előállítható a

$$(H^{(s)}) \qquad P(x) = \sum_{m=0}^{s} u_m^{(s)} x^m (1-x)^{s-m}$$

alakban, hacsak $s \geqq n$; és ha $P(x) > 0$ a $[0, 1]$ szakaszon, akkor elég nagy s esetében az $u_m^{(s)}$ együtthatók mind pozitívok.

E tételt F. HAUSDORFF 1921-ben közölte, az irodalomban (pl. PÓLYA és SZEGŐ ismert feladatgyűjteményében is) e tétellel kapcsolatban csak az ő nevére történik hivatkozás. Első közleményünkkel körülbelül egyidőben jelent meg Sz. N. BERNSTEJN összegyűjtött munkáinak első kötete, és ebből kiderül, hogy ez a tétel benne foglaltatik BERNSTEJN doktori disszertációjában, amely a *Harkovi Matematikai Társaság Közleményei*ben 1912-ben jelent meg.[2] Ez a disszertáció két függelékkel bővített (orosz nyelvű) változata BERNSTEJNnak a Belga Akadémia által 1911-ben kitüntetett és 1912-ben francia nyelven kiadott híres dolgozatának. Az egyik függelék tetszőleges függvények ú. n. „normális" sorba való fejtésével foglalkozik, ebben szerepel a szóban forgó tétel mint korollárium. E függelék egyébként D'ADHÉMAR "Leçons sur les principes de l'analyse" c. műve 2. kötetének függelékeként (Páris, 1913) francia nyelven is megjelent, ott azonban éppen az illető rész csak vázlatosan van megfogalmazva s a korollárium nincs kimondva.

[1] Az első közlemény a *Matematikai Lapok* 3. kötetében, a 140—147. oldalakon jelent meg.

[2] С. Н. БЕРНШТЕЙН, Собрание сочинений, том. I: Конструктивная теория функций (1905—1930) (Moszkva, 1952), lásd különösen a 81—83. oldalt.

BERNSTEJN bizonyítása nem használja fel a polinom gyöktényezős felbontását s így éppen megfelel annak a kívánalomnak, amelyet első közleményünk végén kifejeztünk. A módszer további előnye, hogy több változó esetére is közvetlenül alkalmazható s nem teszi szükségessé a Borel-féle befedési tételre való hivatkozást.[3]

A bizonyítás, valamivel részletezettebb alakban, a következő: Minthogy

$$x^k = \sum_{m=k}^{s} \binom{s-k}{m-k} x^m (1-x)^{s-m} \qquad (k \leqq s),$$

azért

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=k}^{s} a_k \binom{s-k}{m-k} x^m (1-x)^{s-m},$$

tehát

$$u_m^{(s)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{s-k}{m-k} a_k \qquad (\nu = \min\{m, n\}).^4$$

Itt az összegezésben felső határként a ν helyett n-et is vehetünk, hiszen, ha $m < k \leqq s$, akkor $\binom{s-k}{m-k} = 0$.

Vezessük be a következő jelölést:

$$c_p = c(c-1)(c-2)\ldots(c-p+1) \quad (\text{ha } p = 1, 2, \ldots), \qquad c_0 = 1;$$

nyilván

$$\binom{s-k}{m-k} = \binom{s}{m} \frac{m_k}{s_k} \qquad (0 \leqq k \leqq s)$$

és így

$$u_m^{(s)} = \binom{s}{m} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{m_k}{s_k}.$$

Tekintsük a

$$\varrho^{(s)}(m, k) = \left(\frac{m}{s}\right)^k - \frac{m_k}{s_k}$$

különbséget. Ha $k = 0$, akkor ez 0-val egyenlő, és így

$$P\left(\frac{m}{s}\right) - \frac{u_m^{(s)}}{\binom{s}{m}} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varrho^{(s)}(m, k).$$

[3] Ehelyett csak azt kell felhasználnunk, hogy ha a polinom a zárt [0, 1] szakaszon (ill. többváltozós esetében a megfelelő zárt egységkockában) mindenütt pozitív, akkor ott pozitív alsó korlátja van.

[4] Az első közleményben ez a képlet hibás összegezési határokkal szerepelt.

Ha $1 \leqq k \leqq m \leqq s$, akkor

$$\varrho^{(s)}(m, k) = \left(\frac{m}{s}\right)^k \left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{\left(1-\frac{1}{s}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{s}\right)}\right] > 0,$$

továbbá, minthogy $\left(1-\frac{1}{s}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{s}\right) < 1$ és

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \geqq \left(1-\frac{k-1}{m}\right)^{k-1} \geqq 1 - \frac{(k-1)^2}{m},$$

azért

$$\varrho^{(s)}(m, k) \leqq \left(\frac{m}{s}\right)^k \frac{(k-1)^2}{m} = \left(\frac{m}{s}\right)^{k-1} \frac{(k-1)^2}{s} \leqq \frac{(k-1)^2}{s}.$$

Ha pedig $0 \leqq m < k \leqq s$, akkor $m_k = 0$, s így

$$0 \leqq \varrho^{(s)}(m, k) = \left(\frac{m}{s}\right)^k \leqq \frac{m}{s} \leqq \frac{(k-1)^2}{s}.$$

Mindezek alapján kapjuk, hogy

$$\left| P\left(\frac{m}{s}\right) - \frac{u_m^{(s)}}{\binom{s}{m}} \right| \leqq \frac{A}{s},$$

ahol

$$A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|(k-1)^2.$$

Ha tehát a $[0, 1]$ szakaszon

$$P(x) \geqq c > 0,$$

akkor

$$u_m^{(s)} \geqq \binom{s}{m} P\left(\frac{m}{s}\right) - \left| \binom{s}{m} P\left(\frac{m}{s}\right) - u_m^{(s)} \right| \geqq \binom{s}{m} c - \binom{s}{m} \frac{A}{s} > 0,$$

hacsak

$$s > \frac{A}{c}.$$

Ezzel a bizonyítás kész s egyben használható becslést nyertünk azokra az s-ekre, amelyekre a $(H^{(s)})$ előállítás együtthatói mind pozitívok.

Több változó esetére a bizonyítás analóg. Pl. két változó esetén

$$P(x, y) = \sum_{k,h=0}^{n} a_{kh} x^k y^h = \sum_{m,r=0}^{n} u_{mr}^{(s)} x^m (1-x)^{s-m} y^r (1-y)^{s-r} \quad (s \geqq n),$$

ahol

$$u_{mr}^{(s)} = \sum_{k,h=0}^{n} \binom{s-k}{m-k}\binom{s-h}{r-h} a_{kh}.$$

Ebből hasonló meggondolásokkal, mint az egyváltozós esetben, adódik, hogy

$$\left| P\left(\frac{m}{s}, \frac{r}{s}\right) = \frac{u_{mr}^{(s)}}{\binom{s}{m}\binom{s}{r}} \right| \leqq \frac{A}{s},$$

ahol most

$$A = \sum_{h=1}^{n} |a_{0h}|(h-1)^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_{k0}|(k-1)^2 +$$

$$+ \sum_{h,k=1}^{n} |a_{kh}|[(k-1)^2 + (h-1)^2],$$

s azután a bizonyítás ugyanúgy fejeződik be, mint előbb.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

(Второе сообщение)

Бела С.-Надь

В первом сообщении (Mat. Lapok, **3** (1952), 140—147) между прочим расматривалась теорема, согласно которой всякий на сегменте [0, 1] положительный многочлен $P(x)$ может быть представлен при достаточно болшом s в вуде

$$P(x) = \sum_{m=0}^{s} u_m^{(s)} x^m (1-x)^{s-m}$$

с положительными коэффициентами. Эта теорема приписывается вообще Хаусдорфу (1921). Однако, как это выясняется из только что вышедшего первого тома (стр. 81—83) Собрания сочинений С. Н. Бернштейна, эта теорема уже содержится в докторской диссертации С. Н. Бернштейна, появляющейся в журнале „Сообщения Харьковского Математического Общества“ в 1912 г.

Излагается доказательство Бернштейна. Оно имеет по сравнению с Хаусдорфовым преимущество что оно пе применяет основную теорему алгебры и может бись неподстредственно обобщено по многочлены с многыми переменными.

POLYNOMES POSITIFS

(Seconde communication)

BÉLA SZ.-NAGY

Dans la première communication (*Mat. Lapok*, **3** (1952), 140—147), il s'agissait entre autres du théorème selon lequel tout polynome $P(x)$ tel que $P(x) > 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, peut être représenté, pour des entiers s assez élevés, sous la forme

$$P(x) = \sum_{m=0}^{s} u_m^{(s)} x^m (1-x)^{s-m}$$

où tous les coefficients $u_m^{(s)}$ sont positifs. Ce théorème est généralement attribué à F HAUSDORFF, qui l'a publié en 1921. Or, comme on apprend du tome I des *Oeuvres* de S. BERNSTEIN, qui vient de paraître aux Éditions de l'Académie des Sciences de l'URSS (en particulier p. 81—83), ce théorème se trouve déjà dans la Thèse de S. BERNSTEIN, publiée (en russe) dans les *Communications de la Société Mathématique de Kharkov*, en 1912.

On fait connaître la démonstration de BERNSTEIN qui, contrairement à celle de HAUSDORFF, ne fait pas usage du théorème fondamental de l'Algèbre, et qui admet une généralisation immédiate au cas des polynomes de plusieurs variables.

Egy Fermat-féle bizonyítás helyreállításának kísérlete

Írta: Obláth Richárd

1. §. Bevezetés. Fermat jellemzése

A történelem általában csak hiteles okmányokat ismer el teljes értékű bizonyítéknak. A tudományok — különösen a matematika — történetében azonban ily okmányok híján a tárgyi érvek is súlyosan esnek latba. A matematika történetének több oly problémája van, mely okmányszerű bizonyítékok hiányában csak szakszerű érveléssel tisztázható. Elég lesz az ógörög klasszikusok (főleg Apollonius) műveinek helyreállítási kísérleteire utalnunk, amelyekkel a 17. és 18. század nagy matematikusai szinte versenyeztek, vagy az Archimedes kutatásra. Mindkét esetben az utólag felfedezett eredeti művek fényesen igazolták a szakszerű érveléssel dolgozó restaurátorokat.

Különösen a matematikatörténet legnépszerűbb alakjánál Pierre de Fermatnál[1] fájdalmas az eredeti írások hiánya, hiszen minden idők legnagyobb matematikusai közé tartozik, de az utókorra — főleg kedvenc területén, a számelméletben — alig hagyott teljes bizonyításokat,[2] hanem jóformán csak fogas kérdéseket. Sőt némelyek néha kétségbe is vonták, hogy valóban kifogástalan bizonyításokkal rendelkezett-e; jellemző azonban, hogy a legnagyobb matematikusok, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Dirichlet, Jacobi, Kummer, Kronecker, akiknek persze nem idegen a nagy matematikus észjárása, úgy vélték, hogy Fermat bizonyításai korrektek voltak. Kronecker jólismert számelméleti könyvében találhatók ezek a sorok,[3] „hogy ő . . . a számok additív összetételéről

[1] „Fermat hírneve páratlan a tudományok történetében" olvasható Rouse Ball ismert történeti művének (*Short account of the history of mathematics*, Vol. II.) olasz fordításában, *Le matematiche moderne*, Bologna, nyomtatás éve 1927., p. 42. Az eredetihez nem fértem hozzá.

[2] P. Tannery et Ch. Henry: *Oeuvres de Fermat.* Tome II. *Correspondance*, Paris, MDCCCXCIV. Ezt a kötetet a továbbiakban egyszerűen *Corr.* alatt idézem.

[3] L. Kronecker: *Vorl. ü. Zahlentheorie*, Leipzig 1901., p. 17 és 497.

szerzett magának oly felvilágosításokat, amelyekkel ma nem rendelkezünk." 1883/84. évi előadásának birtokomban lévő kéziratos jegyzetében pedig (FERMAT nagy tételéről szólva) azt mondja, hogy ez egy félelmes sziklavadonhoz hasonlítható, de FERMATról feltehető, hogy oly vezető, aki, bármennyire rejtett is, de megtalálja a csúcshoz vezető utat. Voltak, akik „Fermat-féle sejtésekről" és „Fermat-féle állításokról" beszéltek, ez már szünőben van, amióta FERMAT levelezését közzétették, amelyben oly sok hivatkozás történik bizonyításaira. A régi nagy könyvtárakban feltárt minden egyes Fermat-lelet csak növeli FERMAT dicsőségét. Oly szerencsés lelet, mint volt 1906-ban egy fontos Archimedes-kézirat feltalálása, itt mégsem várható, mert azok a tudósok, akiknek bizonyításai közlését felajánlotta, számelméleti tételeinek bizonyítására ritkán voltak kíváncsiak, tehát valószínű, hogy az esetleg még lappangó ismeretlen FERMAT-levelek sem igen tartalmaznak ilyeneket. FERMAT kortársait sokkal inkább lekötötte az ujjáéledő geometria és a keletkező infinitezimális számítás — amelyekben FERMAT szintén a vezető lángelmék közé tartozik — semhogy számelméleti munkásságát méltányolhatták volna. Pl. PASCAL ezt írja neki[4] „De Uram, ha ebben együtt is haladtam Önnel, keressen mást, aki követi az Ön számelméleti felfedezéseit, melyeket volt szíves nekem megküldeni. Tőlem, bevallom, mindez elég távol áll, csak csodálhatom őket . . ." Vagy amint FERMAT írja DIGBYnek[5] WALLISről „Az egész számokról való kérdések egyáltalán nincsenek ínyére".

FERMAT ugyan azt írja,[6] hogy „ha szabad időm lesz, írásba foglalom módszeremet és közlöm Önnel. Úgy találom, hogy FRÉNICLE igen titkolódzik és nem akarja felfedni fogását. Én nem teszek így, hiszen Ön tudja, mily nyiltan tárom fel Önnek összes gondolataimat." 1654 augusztus 29-én írja PASCALnak:[7] „egyébként semmi sincs, amit a jövőben ne közölnék Önnel teljes nyiltsággal." Nagyon közlékeny mégsem lehetett, hiszen ugyanazon tétel bebizonyítására évek mulva is felhívja szaktársait.

Természetesen senki sem tagadhatja, hogy az a férfi, aki a számelmélet évszázadokra szóló rendszerét feltalálta és egyik legfontosabb, legnagyobb horderejű bizonyító módszerével gazdagította, saját tételeit alkalmazni is tudta. Erre tömérdek adatunk van. CARCAVInak írja[8] 1659 augusztusában ezeket a nagyon jellemző sorokat: „Felemlítem itt a következő kérdést, melynek bizonyítását

[4] PASCAL FERMATnak, 1654 okt. 27. *Corr.* p. 314.

[5] *Corr.* p. 375., 1658 április 7.

[6] MERSENNEnek, 1638 augusztus 10. *Corr.* p. 165.

[7] *Corr.* p. 309.

[8] *Corr.* p. 434. FERMAT állítását fényesen igazolja a néhány évvel ezelőtt feltalált "*Supplément* etc". Ld. a [31] sz. lábjegyzetet.

elküldtem FRÉNICLEnek, *miután bevallotta, sőt nyomtatott irásában is tanúsította, hogy nem tudja bebizonyítani.*

„Az 1 és 7 számok az egyetlenek, melyek maguk is, négyzetük is, négyzet kétszerese mínusz egy."

Sok levele van, amelyben visszakéri a valakivel közölt bizonyítást, mert nincs róla másolata. Néha levelező társaira hivatkozik, akiknek már régebben megküldte valamely tételének bizonyítását. Pl. WALLISszel való vitájában,[9] hogy a hyperbola kvadratúráját már 11 évvel azelőtt közölte TORICELLIvel. Többször panaszkodik, hogy a tételt, amelyet talált, még nem tudja kifogástalanul bebizonyítani. EULERtől megcáfolt híres sejtését, hogy a $2^{2^n}+1$ alakú számok mindannyian prímszámok, sokszor ismétli, de azzal a hozzátétellel, hogy bizonyítása nem teljes. Sejtette azt a NEWTONtól precizírozott tételt is, hogy a harmadrendű görbék — éppúgy mint a kúpszeletek — szintén harmadrendű kúp szeletei. Ezt a tételt (valamint magasabbrendű görbékre való kiterjesztését) megvizsgálandó témának mondja.[10]

Vele szemben támasztott kételyekre így válaszol:[11] „Azon kérdésekre térek, amelyeket . . . megoldottam. Nem állítom, hogy nem nagyon kényelmetlenek és, hogy megoldásukhoz nem kell túlmenni Diophantoson, a régieken és a moderneken. De nem minden felfedezés történik egyszerre, ez is azok közül való, amely nincs a könyvekben, hanem kutatásaim szerencséjének tulajdonítható" és ugyanezen levélben[12] „. . . Önnek új dolgokat mutattam, amelyeket ne keressen a könyvekben" és „ez csalhatatlan jele a nehézségeknek, de a kérdések mégis tárgyalhatók, sőt felfedeztem a megoldást és nehogy kételkedjenek, idecsatolom . . . a megoldást." Az ilyen idézetek számát lényegesen szaporíthatnám.

A matematika azon területeiről, amelyeket kortársai is méltányoltak, FERMAT számos bizonyítása maradt fenn. J. E. HOFMANN, a neves matematikatörténész így jellemzi őket:[13] „A bizonyítás szigorúsága miatt a modern matematikában úttörő jelentőségűek."

[9] *Corr.* p. 338. (DIGBYnek), 1657 április 20.

[10] Animadversiojában. Ld. J. E. HOFMANN: *Neues über Fermats zahlentheoretische Herausforderungen von 1657. (Mit zwei bisher unbekannten Originalstücken Fermats).* Abhandlungen d. Preussischen Akademie d. Wissensch. Jahrgang 1943. Math-natw. Klasse Nr. 9., Berlin 1944. p. 39—40. és 47.

Pontos címe: Animadversio in Geometriam Cartesii, authore eodem illustrissimo et clarissimo Viro D. P. F. S. T. Ez Fermatnak egy Digbyhez intézett levele, melyet J. E. HOFMANN professzor úr néhány évvel ezelőtt a porosz állami könyvtárban felfedezett.

[11] *Corr.* p. 260. Mersenne-nek, 1643 aug.

[12] *Corr.* p. 262.

[13] J. E. HOFMANN 1. c. [10] p. 5.

Az a rendkívüli tisztelet, amelyben korának vezető szellemei részesítették, mutatja, hogy senki sem tételezett fel róla alaptalan dicsekvést. Nem kisebb lángelme mint PASCAL írja neki:[14] „Ime Uram, gondolataim erről a tárgyról, amiben csak az az előnyöm Ön fölött, hogy sokat gondolkoztam rajta, de ez vajmi csekélység Önnel szemben, hiszen az Ön első meglátásai behatóbbak hosszadalmas erőfeszítéseimnél" és 1660 augusztus 10-én[15] „. . . az Ön gyermekei . . ., akik a világ első emberének nevét viselik." 1651 július 29-én[16] „. . . megkaptam levelét . . ., amelyet annyira csodálok, hogy ki sem mondhatom." GASSENDI írja FERMATról[17] „... alázatos köszönetem, amellyel tartozom az említett Fermat úrnak közléseiért. Fölösleges Önnek mondanom, mily megtiszteltetésnek érzem, hiszen bárki másnál jobban tudja, hogy ily kézből nem kerül ki semmi, ami ne lenne minden tekintetben tökéletes." ROBERVAL írja FERMATnak 1637 április 4-én[18] „az Ön bizonyítása . . . amelyet . . . az Ön részéről bemutattam matematikusaink összejövetelén, amely ezekben a napokban Montholon tanácsosnál volt, akik ámulattal fogadták, vizsgálták és csodálták és az Ön nevét az égig magasztalták..." CARCAVI írja HUYGENSnek[19] 1656 szeptember 28-án „A kérdést PASCAL oly nehéznek tartotta, hogy kételkedett benne, hogy FERMAT boldogulhasson vele, de ez mégis *azonnal* megküldte nekem az alábbi bizonyítást". DESCARTES írja FERMATnak[20] 1638 október 11-én „. . . kötelességemnek érzem, hogy nyiltan megvalljam Önnek, hogy soha nem ismertem senkit, akiről úgy tetszik, hogy annyit tudna a geometriából, mint Ön . . ."

Ime a kiváló kortársak véleménye róla. Az ilyen nyilatkozatok számát lényegesen szaporíthatnók, de elég lesz. Nem beszélnek így egy olyan emberről, aki nem tartja meg szavát vagy akinek teljesítménye nem haladja meg igen lényegesen az átlagot.

Kiemelek továbbá még egy körülményt, mely nincs eléggé hangsúlyozva az irodalomban, hogy tudniillik a 17. század matematikai, általában tudományos élete lényegesen különbözött a maitól. EULER óta a matematikusok igyekeznek érthetően írni, a bizonyítás minden fontosabb lépését megmagyarázni, szóval, ahogy a két világháború között megjelent nagyszerű varsói folyóirat, az

[14] 1654 aug. 24., *Corr.* p. 307.

[15] *Corr.* p. 452.

[16] *Corr.* p. 289.

[17] *Corr.* p. 267.

[18] *Corr.* p. 103. Páris matematikusai azon időben hetenként összegyűltek, Mersenne páter életében nála, azután váltakozva. Ezt a szokást a felszabadulás után néhány évig Budapest matematikusai is követték.

[19] *Corr.* p. 330.

[20] *Corr.* p. 127.

Acta Arithmetica előírta szerzőinek: mindent megkísérelni, hogy az olvasó dolgát megkönnyítsék. Ennélfogva betekintést engednek szellemi műhelyükbe. (Az igazat megvallva, ezt nem mindenki teszi meg. Gondoljunk Gaussra, aki tételeinek keletkezését gondosan eltitkolta, azt a munkát, melynek eredete nem volt elködösítve, nem is tartotta közlésre érettnek. „Eredményeim már megvannak, csak azt nem tudom még, hogyan fogom őket elérni", mondta egyszer valakinek, aki valamely készülő munkája iránt érdeklődött. Ez a rossz szokás később sem szünt meg. H. LEBESGUEnek a geometriai szerkesztésekről szóló posthumus könyvében[21] találjuk a következő sorokat, hogy a 20. század fordulójakor, „amikor jelentékeny geometriai tehetséggel megáldott kiváló tudósok igyekeztek, hogy ne mutassák meg mindig az őket vezérlő egyszerű és közvetlen ideákat, hanem hogy elegáns eredményeiket általános abstrakt elméletekből függőknek mutassák be, s ezen elméletek gyakran csak éppen a szóbanforgó speciális esetre voltak alkalmazhatók...")

A 17. század matematikusa, sőt általában a 17. század tudósa módszerét eltitkolta, mégis meg akarta mutatni, hogy mily problémákat tud megoldani és milyen felfedezéseket tett. Tehát feladatokat tűztek ki egymásnak és gondosan ügyeltek arra, hogy a feladat lehetőleg nehéz legyen és a világért el ne árulja eredetét. Bizonyos fokig ez a törekvés is magyarázza a 17. században szokásos anagrammokat, amelyekbe felfedezéseiket elrejtették.[22] Szándékosan keresték a homályt. Ezt néha be is vallják. DESCARTES írja Geometriájában[23] „minden, amit kihagytam szándékos..., előre láttam hogy azok, akik azzal hivalkodnak, hogy mindent tudnak, nem mulasztanák el azt mondani, hogy semmi olyat nem írtam, amit ők ne tudtak volna azelőtt, ha úgy fejeztem volna ki magamat, hogy megértsék." Ugyancsak DESCARTES Geometriájának befejezésében mondja, hogy az utókor nemcsak azért lesz neki hálás, amit elmondott, hanem azért is, amit szándékosan elhallgatott, hogy az utókorra hagyja az újrafelfedezés dicsőségét. FERMATval való vitájának az az oka, hogy a két nagy stílusművész oly ügyesen leplezte gondolatait, hogy még az ily nagy riválisok részére is érthetetlenek maradtak. DESCARTES például 1638 július 27-én azt írja FERMATnak:[24] „ha mindjárt kezdetben így fejezte volna ki magát, egyáltalán nem mondtam volna Önnek ellent" és ugyanezen év ok-

[21] HENRI LEBESGUE: *Leçons sur les Constructions géométriques*. Paris, 1950., p. 210.

[22] Ismeretes pl., hogy GALILEI a Saturnus gyűrűjének felfedezését az „altissimum planetam tergeminum observavi" mondat betűinek alfabetikus sorrendben való lenyomásával közölte, illetve rejtette el. Ebben az ellenreformáció idején az inkvizíciótól való félelemnek is része lehetett.

[23] Ld. pl. ROUSE BALL i. h. [1] p. 12,

[24] *Corr.* p. 163.

tóber 11-én elismeréssel, de fenntartással „miként sokkal gondosabban vizsgálják a gyémánt legkisebb foltjait, mint a közönséges kövek nagy foltjait, azért kötelességemnek éreztem, hogy sokkal közelebbről tekintsek mindent, ami az Ön részéről jön, mintha egy kevésbbé becsült személytől érkeznék." FERMAT is hasonlóan ír, nem lettek volna ellenvetései, ha DESCARTES világosabban fejezi ki magát. Néha meg is állapítják, hogy ugyanaz a gondolatuk volt. (DESCARTES FERMATnak,[25] 1638 okt. 11). FERMAT egy később részletesebben ismertetendő művében, a „Relation"-ban nyiltan megírja:[26] „Nem teszem hozzá az okot, amelyből következtetem, hogy ha léteznék ily háromszög, akkor léteznék egy másik ugyanily természetű, az elsőnél kisebb számokban, mert a bizonyítás túlhosszú lenne és *ez módszeremnek egész titka.*"

A homály a 17. században — a tudomány nagy kárára — általános és szándékos. NEWTON homályossága közel jár a teljes érthetetlenséghez. LEIBNIZ sem fedi fel gondolatmenetét, sőt kifejezetten mondja „nem jó módszereinket prostituálni." Pedig LEIBNIZ idejében már voltak oly folyóiratok, amelyekben matematikai munkák is megjelentek, FERMAT életében még nem. Holott tehát FERMAT jóformán semmit sem publikált, mégis páratlan hírneve volt jelentékeny kortársai előtt. A 17. század ötvenes éveiben versenytárs nélkül áll, vitatlanul a legnagyobb élő matematikúsnak tekintik a vidéki magányban élő szenátort, akinek elismerését minden jobb matematikus (külföldiek is, mint HUYGENS, HUDDE, WALLIS, lord BROUNCKER stb.) igyekszik megnyerni.[27]

Mindenesetre igen sajnálatos, hogy bizonyításai főleg a matematikának azon részeiben maradtak fenn, ahol inkább csak a modern matematika úttörőihez számít, amelyek tehát ma inkább történeti érdekűek és épp azok kallódtak el, amelyek ma is ösztönzőek és termékenyítőek lehetnének. Ha tehát kétségtelen is, hogy számelméleti tételeit is kifogástalanul bebizonyította, nyilt kérdés, *milyenek* voltak bizonyításai.

2. §. *Fermat utalásai, mint a helyreállítási kísérletek forrásai*

FERMAT bizonyításainak helyreállításával való próbálkozásnál, amint a megelőző §-ban részletesen kifejtettem, azokra a különböző helyeken található szűkszavú, túlszűkszavú! utalásokra vagyunk rászorulva, amelyekben bizonyításairól beszél. Néha azonban már a tétel megfogalmazása is elárulja a bizonyítást, nemcsak negatív, hanem pozitív irányban is.

[25] *Corr.* p. 168.
[26] *Corr.* p. 432.
[27] J. E. HOFMANN, l. c. [10] p. 8.

Negatívra példa a híres sokszögtétel. FERMAT ezen híres tétele szerint minden szám előállítható mint legfeljebb k számú k-szög szám összege, tehát mint 3 háromszögszám, 4 négyzet összege stb. Ezt a tételt csak CAUCHY bizonyította be, de FERMAT bizonyítása különbözött CAUCHYétól, mert CAUCHYt és LEGENDREt a bizonyítás a tétel oly élesítésére vezette (csak legfeljebb 4 szám különbözhetik a 0-tól vagy 1-től), melyet FERMAT nem hallgatott volna el, ha ismeri.

FERMAT nyilatkozatainak értékelésénél figyelembe kell vennünk, hogy milyen alkalomból írta a vizsgált sorokat. Ma is a kollégák egymással való levelezésükben más, tömörebb fogalmazást választanak, mint a nyilvánosságnak szánt írásaikban — holott nem akarnak eltitkolni semmit. HILBERT említi Zahlberichtjének előszavában RIEMANN követelését, hogy ne számításokkal, hanem gondolatokkal bizonyítsunk. Nos, a szaktársakkal való érintkezésben csak a döntő gondolatokat — minden pusztán technikai részlet mellőzésével — szokás közölni. Figyelembe kell továbbá vennünk a közlés célját is. Ha FERMAT pl. azt írja, milyen problémákat tud módszerével, a descente infinie-vel elintézni, semmi esetre sem volt szándékában az egész bizonyítás előadása, tehát minden más részletet hallgatólag mellőz és súlyt csak a lényegre helyez, hogyan küzdötte le a legnagyobb nehézséget és hogyan vált az anyag fölött urrá. Igaza lehet M. CANTORnak,[28] hogy amikor bizonyításainak vázáról beszél, ezek szaktársaihoz intézett kihívásoknak tekintendők, tehát nem céljuk túlsokat elárulni.

A helyreállítási kísérletek fontos forrása egy a leydeni egyetemi könyvtárban őrzött HUYGENS kézírásával írt keletnélküli kézirat, melyet *„Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres de Fermat*[29] (Fermat új számelméleti felfedezéseinek elmondása) címen ismernek. Ezt CARCAVI, aki „kevéssel azelőtt" kapta, 1659 augusztus 14-én közölte HUYGENSszel, aki róla a máig fennmaradt másolatot vette. M. CANTORnak igaza lehet,[30] hogy ez alkalmasint FERMAT körlevele minden jelentékeny matematikushoz, amelyben felszólítja őket, hogy bizonyításait utalásai alapján találják fel újra. Ez persze igen megfelelt a kor irányzatának — ma viszont érthetetlennek találjuk. A Relationban beszámol módszeréről, melyet már ómaga is — mint ma — descente infinie-nek, vagy *ἀπαγωγὴ εἰς ἄδύνατος* nevez. (A módszer lényegét a Relation alábbi ismertetése tartalmazza.) Felsorol néhány lehetetlenségi tételt, amelyet segítségével bebizonyított és PASCALt és ROBERVALt is a bizonyításukra felszólított és így folytatja:

[28] M. CANTOR: *Vorl. ü. die Geschichte d. Mathematik.* II. Leipzig 1892., p. 708—711.

[29] *Corr.* p. 431—436.

[30] M. CANTOR l. c. [28] p. 711.

„Sokáig képtelen voltam módszeremet állító kérdésekre alkalmazni, mert ennek a módja sokkal nehézkesebb annál, amelyet tagadó tételekre alkalmaztam. Például, amikor be kellett bizonyítanom, hogy minden $4a+1$ alakú prímszám két négyzet összege, nagy zavarban voltam. Végül azonban egy többször megismételt elmélkedés megvilágította a kérdést és az állító kérdések is engedelmeskedtek módszeremnek, néhány szükséges új elv bevezetése után. Ezen állító kérdésekben való okoskodásomban a haladás ilyen: ha valamely $4a+1$ alakú prímszám nem lenne két négyzet összege, akkor létezik egy ugyanily alakú, az adottnál kisebb prímszám és így tovább egy harmadik stb. végtelenül leszállva, amíg az 5 prímszámhoz érkezünk, amely az ilyen prímszámok legkisebbike, amelynek tehát nem lenne szabad két négyzet összegének lennie, de amely mégis az. Innen kell következtetni, ad absurdum következtetéssel, hogy tehát az összes ily prímszámok két négyzet összegekép állíthatók elő."

„Végtelen sok ilyfajta kérdés van, de vannak mások, amelyek új elveket igényelnek, hogy rájuk is alkalmazhassuk a descenteot és ezek kutatása néha oly nehéz, hogy csak a legnagyobb kínnal lehet célt érni. Ilyen pl. az a kérdés, amelyről BACHET Diophantosában bevallja, hogy sohasem tudta bebizonyítani és amelyről Descartes egyik levelében ugyanezt mondja, sőt bevallja, hogy oly nehéznek tartja, hogy semmiféle utat nem lát a bizonyítására."

„Minden szám vagy négyzet vagy két, három vagy négy négyzet összege."

„Végül ezt is besoroztam módszerem alá és bebizonyítottam, hogy ha valamely adott szám nem lenne ilyen, volna egy kisebb, mely szintén nem ilyen, azután egy harmadik, mely a másodiknál kisebb, stb. a végtelenig, amiből következik, hogy minden szám ilyen."

Egy másik, csak néhány évvel ezelőtt megtalált fontos forrás FRÉNICLE 1657-ben megjelent Solutio stb.[31] c. munkájához mellékelt

[31] Solutio duorum problematum circa numeros cubos & quadratos, quae tamquam insolubilis vniuersis Europae Mathematicis a clarissimo Viro D. Fermat sunt proposita, & ad D. Cl. Laurenderium Doctorem Medicum transmissa. A. D. B. F. D. B. inventa. Nec non Alia duo Problemata numerica a D. Cl. M. Laurenderio Vicissim proposita, cum quibusdam solutionibus ab eodem D. B. F. D. B. datis. His accessit. Inquisitio in solutionem prioris Problematis a D. Francisco a Schooten in Academia Lugduno Bataua Matheseos Professore datam. In qua continentur. Sex aliae solutiones prioris Problematis terminis Analiticis ab eodem D. B F. sub forma Problematis datae. Insuper et Sofutio alterius Problematis ab eodem Cl. viro d. Fermat circa numeros vnitate a quadrato deficientes propositi cum ipsius solutionis constructione. Parisis M.DC.LVII.

A szerző nevének csak kezdőbetűit adja meg D(ominus) B(ernard) F(rénicle) D(e) B(essy).

A hozzátartozó függelék címe: Pour servir de supplément à l'Écrit Latin

Supplément. A Solutio annyira elkallódott, hogy M. CANTOR nagy matematikatörténetében nem is említi. FERMAT műveinek kiadói pedig megjegyzik, hogy „jelenleg feltalálhatatlan".[32] A Supplément, amint azt J. E. HOFMANN 1943-ban felismerte,[33] magának FERMATnak műve, sőt igen jelentékeny műve. Ezen lelet és a Relation segítségével sikerült HOFMANN úrnak néhány fontos bizonyításnak igen nagy valószínűséggel való helyreállítása. Azok a tételek, amelyeket FERMAT oly sokszor említ, hogy minden $4a+1$ alakú prímszám két négyzet összege és a kvadratikus reciprocitási tétel ú. n. „második kiegészítő tétele" is a 2 négyzetes jellegéről, amelyet FERMAT így fejez ki, hogy $2a^2+b^2$ minden osztója is előállítható ebben az alakban és amelyet geniálisan használ fel a most említett Supplémentban. Továbbá helyreállította azon FERMAT-féle tétel bizonyítását, mely szerint az ú. n. PELL—FERMAT-féle $t^2-Du^2=1$ egyenletnek, ha D nem teljes négyzet, mindig vannak nem triviális megoldásai, valamint FERMAT megoldását is.

3. §. Az ú. n. „kis" Fermat-tétel eredeti bizonyításának helyreállítási kísérlete

Az eddigiek alapján immár megkísérlem az ú. n. kis FERMAT-tétel eredeti bizonyításának helyreállítását, mégpedig főleg a tétel eredeti fogalmazásának pontos elemzése útján. A legtöbb tankönyvben ugyanis, sőt DICKSON hírneves Historyjában[34] is FERMAT-féle tétel címe alatt oly állítást találunk, amely a valóságban csak kis része — tulajdonképp korollárium — az eredeti FERMAT-tételnek.

Tételére a tökéletes számok vizsgálata vezette és előbb csak egy speciális esetben ismeri fel. Egy, valószínűleg 1640 júniusban

de Monsieur Frénicle. Par M. F. (= M(onsieur) F(ermat)).

Lásd: G. LORIA: *La Réponse de Frénicle au premier défi de Fermat*, Bulletin des sciences mathématiques 2. sorozat 54, 1930., p. 245—254. LORIA úr ott kilátásba helyezte, hogy részletesen foglalkozik a Solutioval, ami eddig nem történt meg, de HOFMANN úr [10] sz. alatt idézett munkájában behatóan tárgyalja. Ugyancsak HOFMANN úr most idézett írásában állapította meg, hogy a Supplément magától Fermat-tól származik.

Frénicle a Solutioban kitér az $a^n+1=x^2$ egyenletre is, ezzel az Annales de la Société Polonaise des Mathématiques-ban megjelenő, félben lévő dolgozatomban foglalkozom.

FERMAT a Relationban kitér a Supplémentra.

[32] *Corr.* p. 434.

[33] J. E. HOFMANN: *Studien zur Zahlentheorie Fermats* (*Über die Gleichung* $x^2=py^2+1$) Abhandlungen d. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1944., Mat.-natw. Klasse, Berlin 1944.

[34] L. E. DICKSON: *History of the Theory of Numbers I.*, New York, 1934., p. 59.

kelt, MERSENNE páterhez intézett levelében, amely válasz FRÉNICLE egy eléggé fennhéjázó levelére, írja Fermat:[35]

„A kettős haladvány számainál az egységgel kisebb számokat

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191

nevezzük a tökéletes számok gyökeinek, mert valahányszor prímszámok, azt létesítenek. Helyezze ezen számok fölé a szintén természetes haladványban lévő 1, 2, 3, 4, 5 stb. számokat, nevezzük őket kitevőjüknek. Ezt feltéve azt mondom, hogy

. . .

2. Amikor a kitevő prímszám, azt mondom, hogy a gyökénél az egységgel kisebb szám osztható a kitevő kétszeresével. Így mivel 7 a 127 kitevője prímszám, azt mondom, hogy 126 többszöröse 14-nek.

Mai jelöléssel $2p \mid 2^p - 2$.

Egy ROBERVALhoz intézett levelében[36] (valószínűleg 1640 augusztus) beszámol ezen közléséről és hozzáteszi „szép tételeket küldtem neki az egységgel kezdődő geometriai sorokról, amelyeket nemcsak találtam, hanem be is bizonyítottam, noha a bizonyítás elég rejtett . . .“

Ugyanezen tételről ugyanekkor írja[37] „Ime három igen szép tétel, melyeket fáradsággal találtam és bizonyítottam be.“

1640 október 18-án, tehát két hónappal később ezt írja Fréniclenek:[38]

„Ezek után úgy vélem, hogy fontos, miszerint megmondjam Önnek az alapot, amelyen minden, a geometriai sorról szóló vizsgálatom nyugszik, ami ez:

„Ha p valamely tetszőleges prímszám, akkor bármely geometriai sorban találunk oly hatványt, amelyből 1*-et kivonva, a különbség csalhatatlanul osztható a prímszámmal p-vel, és ennek a hatványnak a kitevője osztója p*—1*-nek, és miután megtaláltuk az első hatványt, mely a kérdésnek megfelel, mindazon hatványok, melyek kitevője az első hatvány kitevőjének többszöröse, szintén kielégítik a kérdést.*“

„Pl. Legyen adva az

1	2	3	4	5	6	
3	9	27	81	243	729	stb.

haladvány a fent jelzett kitevőkkel.

[35] *Corr.* p. 198. Szószerint fordítom Fermat eredeti kifejezéseivel és jelöléseivel.

[36] *Corr.* p. 203.

[37] *Corr.* p. 198.

[38] *Corr.* p. 208—209. A fordításban közelebb hoztam mai jelöléseinkhez, hiszen a megelőző idézet fogalmat ad FERMAT kifejezésmódjáról.

„Tekintse pl. a 13 prímszámot. Ez osztója a harmadik hatvány mínusz egynek, ahol 3 a kitevő, osztója 12-nek, ami 1-gyel kisebb 13-nál, és mert 729 kitevője 6, többszöröse az első kitevőnek, amely 3, innen következik, hogy 13 a mondott hatványnak 729—1-nek is osztója."

„Ez a tétel általában igaz minden haladványra és minden prímszámra, aminek a bizonyítását megküldeném Önnek, ha nem tartanék attól, hogy túlhosszú leszek."

Ezen mondatok figyelmes átolvasásánál rögtön feltűnik, hogy felfedezésének lényegéül azt a felismerést tekinti, hogy (modern jelöléseket használva) mindig van oly δ kitevő, amelyhez valamely adott a szám tartozik és, hogy δ mindig osztója $p-1$-nek.

A bizonyítás tehát a következő lehetett:

p legyen valamely páratlan prímszám és $(a, p) = 1$. Az egymásra következő

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

hatványok osztási maradékai mod p nem lehetnek mindannyian különbözők, mert hiszen csak véges számú $(= p-1)$ különböző osztási maradék van. Tehát — ahogy FERMAT kifejezi magát — a geometriai sorban okvetlenül találunk oly $a^{r+\delta}$ hatványt, melynek maradéka megegyezik valamely már előfordult maradékkal, a^r legyen ez a hatvány. Innen azonnal következik, hogy, ha a^δ-t p-vel elosztjuk, 1-et kapunk maradékul, mai jelölésben

$$a^\delta \equiv 1 \mod p$$

vagy ahogy Fermat mondta $a^\delta - 1$ osztható p-vel. A különböző maradékok tehát

(1) $$a, a^2, \ldots, a^\delta.$$

Ha ez a sorozat az összes maradékokat tartalmazza, hogy tehát minden maradék benne van, akkor számuk $p-1$; ha azonban vannak ezenkívül is maradékok, például b, akkor az összes

(2) $$b\,a, ba^2, \ldots, ba^\delta$$

maradékok egymás közt és az (1) alatti sorozat minden számától különbözők, mert ha

$$ba^i \equiv ba^j \mod p$$

lenne, akkor az (1) alatti sorozatban két egyenlő maradékot találnánk, ami a feltevéssel ellenkezik, ha pedig

$$ba^i \equiv a^j \mod p$$

lenne, ebből

$$b \equiv a^{j-i} \mod p$$

folynék, holott feltettük, hogy b nincs benne az (1) sorozatban.

Ebben a következtetésben semmi sincs, ami FERMATnak idegen lenne, amit tehát meg ne tehetett volna. Ilyen gondolatmenettel kellett dolgoznia oszthatóságról és a maradékosztályokról szóló elmélkedéseiben, amelyek hiszen annyira foglalkoztatták. Ugyanezzel az okoskodással kimutatható, hogy, ha az (1) és (2) sorozatok nem merítik ki az összes maradékokat, ha tehát belőlük c hiányzik, akkor

$$ca, ca^2, \ldots, ca^\delta$$

ugyancsak új maradékok stb.... Ezt az eljárást mindaddig folytathatjuk, míg nem marad fenn további maradék, vagyis amíg valamennyit ki nem merítettük, vagyis az összes maradékok száma $p-1$, osztható δ-val és ezzel a tétel teljes terjedelmében be van bizonyítva.

Ez a FERMAT-tétel úgynevezett harmadik EULER-féle bizonyitása.[39] FERMAT eredeti szövegezése alig hagy fenn kétséget, hogy tételét erre a geniális gondolatmenetre alapította. EULER maga is ezt a bizonyítást jóval magasabbra értékelte két megelőző bizonyításánál, melyekben a binomiális tételt használta fel és amelyek csak a FERMAT-tétel szokásos alakját szolgáltatják. Erről a bizonyításról írja A. SPEISER, ismert svájci matematikus egy érdekes könyvében.[40] „A következő számelméleti értekezés a 18. század alapvető teljesítményeinek egyike. ... vele kezdődik a csoportelmélet ... Elkerüli a „számolást" és épp ez az, amit Euler óta „eleganciának" neveznek a matematikában."

Ez a dícséret FERMATt mindenesetre csak részben illeti meg, mert a bizonyítás egész szépsége és nagy jelentősége tulajdonképp csak EULER következő munkájában[41] bontakozik ki, amely ezt csodálatosképpen csak két év múlva követi és amelyben a gondolatmenetet tetszésszerinti összetett számra terjeszti ki, hogy belőle a FERMAT-tétel ismeretes általánosítását $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ következtesse.

Természetesen tudom, hogy fejtegetéseim csak helyreállítási *kísérlet*nek tekintendők, FERMAT közlései túl szűkszavúak ahhoz, hogy belőlük eredeti gondolatsorát minden kétséget kizáróan felépíthessük. Azon esetleges ellenvetéssel szemben, hogy FERMAT a maga bizonyítását hosszadalmassága miatt tartotta vissza, míg az itt megadott bizonyítás igen rövid, megjegyzem, hogy a bizonyítás EULERnél (közel 120 évvel később!) 10 nyomtatott quartoldalt igényel, holott EULER jelölései és terminológiája összehasonlíthatatla-

[39] *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta,* Leonhardi EULERI Opera Omnia. Series prima. Vol. secundum. Volumen primum (No. 262) (Novi Comm. Petrop. 7. (1758/9—1761 p. 49—82) p. 493—518.

[40] A. SPEISER: *Klassische Stücke der Mathematik.* Zürich, 1925., p. 110.

[41] L. EULER: *Theoremata Arithmetica Nova Methodo Demonstrata.* u. ott, p. 531—555. (Eredetileg Novi Comm. Petrop. 8., (1760/1), 1763. p. 74—104.

nul fejlettebbek FERMATénál. FERMAT valószínű *gondolatmenetét* akartam megmutatni, nem elavult technikai részleteit, azért használtam a mai jelbeszédet, mely a gondolat lényegét ily tömören adja vissza.

ПОПЫТКА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФЕРМАТА

Р. Облат

Статья пытается восстановить оригинальное доказательство „меньшей“ теоремы Фермата, при помощи точного анализа оригиналного составления Фермата. 1. §. содержит характеристику Фермата, 2. §. занимается источниками, которые служат основой попыток.

Эта статья появится на неметском языке в журнале „Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.“

UNE TENTATIVE POUR RECONSTRUIRE UNE DÉMONSTRATION DE FERMAT

L'article précédent essaye à restituer la démonstration originale du "petit" théorème de FERMAT par une analyse profonde du texte dû à Fermat. De cette analyse il résulte avec grande probabilité que la démonstration de Fermat était identique à la troisième démonstration d'Euler. Le § 1 donne la caractérisation de Fermat, le § 2 fait connaître les sources et les méthodes de la restitution de ses démonstrations. Les sources principales en sont le *Supplément à l'Écrit latin de Frénicle* de 1657 récemment retrouvé et la *Relation* de 1659. Le § 3 enfin contient la reconstruction de la démonstration.

Le présent travail paraîtra en langue allemande dans les *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.*

Jelentés a Beke Manó-emlékdíj odaítéléséről

Az elnökség által kiküldött bizottság elnöke ALEXITS GYÖRGY, tagjai: HAJÓS GYÖRGY, NEUKOMM GYULA, KONCZ KÁROLY és GALLAI TIBOR előadó, a K. M. részéről pedig GÁDOR ENDRÉNÉ. A bizottság első ülésén az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak kiosztásánál elsősorban a matematika-oktató és a népszerűsítő könyvek és füzetek írását, valamint az ilyen tárgyú előadások tartását kívánja jutalmazni. Az elbírálásnál fontos körülménynek tekinti a bizottság a kiváló eredményt felmutató tanári munkát, a tanári továbbképzést elősegítő írói és előadói működést, a jó szakköri munkát, valamint a Bolyai Társulat keretében végzett szervező munkát.

A bizottság e szempontoknak megfelelően a következő határozatot hozta:

2000 forint jutalommal tünteti ki SURÁNYI JÁNOS egyetemi docenst, 1000—1000 forinttal jutalmazza HÓDI ENDRE főiskolai docenst, LŐRINCZ PÁL műegyetemi docenst, BUKOVSZKY FERENC, RIEGER RICHÁRD és VIKÁR ISTVÁN gimnáziumi tanárokat.

Indokolás

SURÁNYI JÁNOS az Eötvös Loránd tudományegyetem docense. Felszabadulás után Soós Paulával együtt elsőnek fogott hozzá a Középiskolai Matematikai Lapok újjáteremtéséhez, s ezzel a matematika iránti érdeklődés s a matematikai tehetségek fejlesztésének legfontosabb eszközét állította helyre. E lapok szerkesztésével kapcsolatban rendkívül sokoldalú működést fejtett ki. Feladatokat keres, megoldásokat bírál és értékes ismertető cikkeket ír. Több újítást vezet be; pontversenyt szervez a feladatmegoldók számára. 1947-ben megindítja a Középiskolai Matematikai Lapok Arany Dániel-versenyét, olyan új szervezési formák közt, melyek az érdeklődők széles körének részvételét teszik lehetővé. A minisztériummal karöltve ez évben először megszervezi a nagy sikert aratott Rákosi Mátyás matematikai tanulmányi versenyt. Hogy ma középiskoláink komoly szinvonalú matematikai lappal rendelkeznek, azt legnagyobbrészt Surányi Jánosnak köszönhetjük. Surányi népszerűsítő matematikai munkássága korántsem merül ki a Középiskolai Matematikai

Lapok szerkesztésével. Egy érdekes szakköri füzetben a hasonlósági szerkesztésekkel ismerteti meg a tanulókat. Ugyanebből a témakörből kiegészítő részletekkel látja el a II. osztályos gimnáziumi tankönyvet. Írásos működésén kívül számos előadást tartott elemi matematikai és didaktikai kérdésekről. Mint bíráló értékes tanácsokkal támogatta a gimnáziumi tankönyvek szerzőit. A budapesti matematikai délutánok megszervezésében döntő része van. Végül ki kell emelni, hogy egyetemi oktatómunkáját kiválóan végzi, melyért legutóbb a Köztársasági Érdemérem aranyfokozatával tüntették ki. Sokoldalú tevékenységének sikerét elsősorban az biztosította, hogy Surányi nemcsak kiváló kutató matematikus — bár a Beke Manó-díj odaítélésénél nem ezt a szempontot tekintettük irányadónak —, hanem jó elméleti és gyakorlati érzékkel rendelkező pedagógus is.

HÓDI ENDRE a budapesti Pedagógiai Főiskola docense. A III. és IV. osztályos gimnáziumi tankönyvek geometriai fejezeteinek megírásával értékes módon járult hozzá matematikai oktatásunk fejlesztéséhez. A Bolyai Társulatban, mint az Oktatási Szakosztály titkára kiválóan látja el feladatát. A tanári továbbképző konferenciák egyik legnépszerűbb szervezője, illetve előadója. Számos szinvonalas előadással segítette elő tanáraink szakmai és didaktikai fejlődését. Hódi a matematika minél szélesebb körben való népszerűsítésének fáradhatatlan és kiváló munkása. Érdemei vannak a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztésében és a matematikai délutánok szervezésében. Hosszabb időn keresztül eredményes középiskolai tanári működést fejtett ki, s jelenleg főiskolai oktatómunkáját is kiváló eredménnyel végzi.

LŐRINCZ PÁL műegyetemi docens. A középiskolai és szakérettségis ábrázoló tankönyvek megírásával figyelemreméltó érdemeket szerzett. Értékes előadásokat tartott a tanári továbbképzés keretében, valamint a szaktanári tanfolyamon. Részt vett és jelenleg is részt vesz a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztésében. Hosszú középiskolai tanári működésével igen komoly hírnevet szerzett. Jelenleg a Budapesti Műszaki Egyetemen ábrázoló geometriát ad elő és ugyanott gyakorlatokat is vezet. Előadásai is, gyakorlatai is igen népszerűek. A Bolyai Társulat különböző versenybizottságaiban értékes munkát fejtett ki.

BUKOVSZKY FERENC nagykanizsai tanár. Tanítványai és a felnőttek körében is sokat tesz a matematika népszerűsítéséért. Igen jól vezeti szakkörét. Műegyetemi előkészítő tanfolyamot vezetett, országos méretekben is kiváló eredménnyel. Igen sok, jó szemléltető eszközt készít és készíttet tanítványaival. Ebben az évben megnyerte a K. M. matematikai filmpályázatát. A megyei matematikatovábbképzést két év óta eredményesen, nagy buzgalommal vezeti.

RIEGER RICHÁRD budapesti gimnáziumi tanár. A Középiskolai Szakköri Füzetek sorozatában a komplex számokról jelent meg ér-

tekezése. Ez a kis füzet számos értékes gondolatot tartalmaz. Rieger Richárd hosszú tanári működése során egészen különleges elismerést váltott ki tanítványai és tanártársai körében. Művésze a tanításnak. Kiváló pedagógiai érzékkel mindig a dolgok lényegét tudta megvilágítani. Nemcsak a matematikai tehetségek, hanem a közepes képességű és a gyenge előképzettségű tanulók nevelésében és tanításában is kiváló eredményeket ért el, mind a gimnáziumban, mind pedig a szakérettségis tanfolyamon. Mint bíráló sok értékes megjegyzéssel támogatta a gimnáziumi tankönyvek szerzőit.

VIKÁR ISTVÁN szeghalmi gimnáziumi tanár. A matematika-szakos pedagógusok továbbképzését két éve vezeti a megyében. Jó munkájának eredménye a megye egész munkájában, a kartársak fejlődésében lemérhető. Iskolájában a matematikát igen eredményesen tanítja. Jó módszerrel, fáradhatatlanul dolgozik. Jól vezeti szakkörét. Tanítási munkája mintaszerű. A tanítás mellett kartársai munkáját is segíti.

Gallai Tibor — *Alexits György*
Gádor Endréné — *Hajós György*
Koncz Károly — *Neukomm Gyula*

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük. Nem zárkózunk el olyan feladat közlése elől sem, amelynek megoldását beküldője nem ismeri.

Kitűzött feladatok

58. Megállapítandó a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2kn}{kn} x^n \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

sor konvergencia-sugara és összege.

Takács Lajos

59. Bizonyítandó, hogy ha egy félig rendezett halmaznak bármely végtelen részhalmazában van két összehasonlítható elem, akkor van olyan végtelen részhalmaza is, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

Hajnal András

60. Bizonyítandó, hogy a 0-tól különböző s az $a_1 b_2 - a_2 b_1 + 0$ feltételt kielégítő a_1, b_1, a_2, b_2 komplex számokhoz meghatározható C úgy, hogy ha a $|z| \leqq C$ körlemezen reguláris $f_1(z), f_2(z)$ függvényekre

$$f_1(0) = a_1, \quad f_1'(0) = b_1, \quad f_2(0) = a_2, \quad f_2'(0) = b_2,$$

akkor az $|f_1(z)|$, $|f_2(z)|$ függvényeknek egyike sem lehet a körlemez minden pontjában a másiknál nagyobb.

Turán Pál

61. Legyen a adott egész szám és $f(n)$ olyan egész értékű számelméleti függvény, melyre

$$\sum_{d|n} f(d) = a^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Bizonyítandó, hogy $n | f(n)$.

Csima József

62. Bizonyítandó, hogy ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\log(1-x)} \sum_{k=0}^{\infty} x^{a^k} = -\frac{1}{\log a}.$$

Szűsz Péter

63. A páratlan fokszámú $P(z)$ polinom gyökhelyei szimmetrikusan helyezkednek el a polinom z_0 gyökhelyére nézve (többszörösségüket tekintve is). Bizonyítandó, hogy $P''(z_0) = 0$.

Szőkefalvi-Nagy Béla

64. Mely $f(z)$ egész függvényekre igaz az, hogy

$$n\left[f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z)\right]$$

az egész számsíkon egyenletesen tart $f'(z)$-hez?

Gehér László

Megoldott feladatok

37. feladat. Legyen $\frac{p(x)}{q(x)}$ valódi racionális törtfüggvény és

$$q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \cdots (x-l)^{\lambda}.$$

Bontsuk ezt fel parciális törtekre az együtthatók összehasonlításának szokásos módszerével. Mutassuk meg, hogy a keletkező lineáris egyenletrendszer Cramer-szabállyal való megoldásánál valamennyi determináns értéke változatlan marad, ha az $u = x - \xi$ lineáris helyettesítést alkalmazzuk.

(Császár Ákos)

Megoldás. Jelöljük $q(x)$ fokszámát $(n+1)$-gyel. Legyen

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i x^i.$$

A parciális törtek számlálói legyenek $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Az a polinom, amelyik $q(x)$-ből keletkezik, ha az A_j számlálójú parciális tört nevezőjével elosztjuk, legyen

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{ij} x^i \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

A parciális törtekre vonatkozó azonosság tehát, $q(x)$-szel való szorzás után

$$\sum_{i=0}^{n} P_i x^i = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} A_j Q_{ij} x^i.$$

Az $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ismeretlenek számára adódó lineáris egyenletrendszer Cramer-szabállyal való megoldásánál ezek szerint a

$$\begin{pmatrix} Q_{00} & Q_{01} & \cdots & Q_{0n} & P_0 \\ Q_{10} & Q_{11} & \cdots & Q_{1n} & P_1 \\ \vdots & & & & \\ Q_{n0} & Q_{n1} & \cdots & Q_{nn} & P_n \end{pmatrix}$$

mátrix $(n+1)$-edrendű aldeterminánsai lépnek fel.

Ha az $x = u + \xi$ helyettesítést elvégezzük, akkor a fenti azonosság a

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} P_i \binom{i}{k} \xi^{i-k} u^k \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} A_j Q_{ij} \binom{i}{k} \xi^{i-k} u^k$$

alakot ölti. Ezt

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} P_i \binom{i}{k} \xi^{i-k} u^k \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} A_j Q_{ij} \binom{i}{k} \xi^{i-k} u^k$$

alakban is írhatjuk. Innen kiolvasható, hogy most P_i szerepét u^i-nek

$$P_i' = \sum_{s=i}^{n} P_s \binom{s}{i} \xi^{s-i}$$

együtthatója, Q_{ij} szerepét pedig $A_j u^i$-nek

$$Q_{ij}' = \sum_{s=i}^{n} Q_{sj} \binom{s}{i} \xi^{s-i}$$

együtthatója játssza. Így tehát a fenti mátrix helyébe lépő új mátrix i-edik sora úgy keletkezik, hogy a régi i-edik sorhoz az alatta álló soroknak többszöröseit, mégpedig $(i < s \leqq n$ mellett) az s-edik sornak $\binom{s}{i} \xi^{s-i}$-szeresét adjuk hozzá. Ezek az összeadások egymás után egyenként hajthatók végre. Ezeknek az összeadásoknak révén tehát a mátrix $(n+1)$-edrendű aldeterminánsainak értéke nem változik meg.

Sarkadi Károly

39. feladat. Megadandó a $|z| \leqq 1$ körön reguláris $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ függvényeknek sorozata úgy, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ sor a $|z| \leqq 1$ körön abszolút konvergens legyen anélkül, hogy ott egyenletesen konvergálna.

(Turán Pál)

I. megoldás. Tekintsük a

$$\varphi_n(z) = \frac{1-z}{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

polinomokat.

Ha $|z| \leqq 1$ és $z \neq 1$, akkor $\left|\frac{1+z}{2}\right| < 1$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|$ konvergens mértani sor, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) = \frac{1-z}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+z}{2}} \equiv 1.$$

Másrészt $\varphi_n(1) = 0$, s így $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(1) = 0$.

Az így definiált sor tehát a zárt egységkörön abszolút konvergens. Viszont nem egyenletesen konvergens, mert összege a $z = 1$ helyen nem folytonos.

Rényi Kató

II. megoldás. Legyen $n = 1, 2, 3, \ldots$ mellett $\alpha_n = 1 + \frac{2}{n} i$ és

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n^n (z-\alpha_n)^n}.$$

A $\varphi_n(z)$ függvények a zárt egységkörben regulárisak, továbbá

A) $\quad |z-\alpha_n| \leqq \frac{1}{n}$ esetén $|\varphi_n(z)| \geqq 1$,

B) $\quad |z-\alpha_n| \geqq \frac{2}{n}$ esetén $|\varphi_n(z)| \leqq \frac{1}{2^n}$.

Minthogy *B)* $z = 1$ esetén minden n-re, $z \neq 1$ esetén pedig $n \geqq \frac{4}{|z-1|}$ mellett teljesül, azért a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ sor az α_n helyeket kivéve az egész síkon abszolút konvergens. De az egységkörön nem egyenletes a konvergencia, mert $n \geqq 2$ mellett *a)* teljesül az egységkör bizonyos (n-től függő) pontjaiban, hiszen

$$|\alpha_n|^2 = 1 + \frac{4}{n^2} < 1 + \frac{2n+1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

miatt $|\alpha_n| < 1 + \frac{1}{n}$.

Császár Ákos

A 39. feladat megoldását beküldötték még: CZIPSZER JÁNOS, KÖVÁRI TAMÁS, RÉNYI ALFRÉD, SZŰSZ PÉTER.

40. feladat. Bizonyítsuk be az Euler-féle φ-függvényre vonatkozólag, hogy bármely pozitív ε számhoz található olyan a egész-szám, melyre

$$\frac{\varphi(a)+\varphi(a+1)}{a}<\varepsilon.$$

(*Medgyessy Pál*)

Megoldás. Ismeretes, hogy ha p_i az i-edik prímszámot jelenti,

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=0.$$

Ebből következik, hogy elég nagy m, valamint elég nagy n számra

$$\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \prod_{i=m+1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)<\frac{\varepsilon}{3},$$

vagyis a $P_1=p_1p_2\cdots p_m$ és $P_2=p_{m+1}p_{m+2}\cdots p_n$ szorzatokra

$$\frac{\varphi(P_1)}{P_1}<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \frac{\varphi(P_2)}{P_2}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Minthogy $(P_1, P_2)=1$, az

$$a\equiv 0 \pmod{P_1},$$
$$a+1\equiv 0 \pmod{P_2}$$

kongruenciarendszernek van pozitív megoldása. Erre nézve tehát $a>1$ miatt

$$\frac{\varphi(a)+\varphi(a+1)}{a}=\frac{\varphi(a)}{a}+\frac{a+1}{a}\cdot\frac{\varphi(a+1)}{a+1}<\frac{\varphi(P_1)}{P_1}+2\frac{\varphi(P_2)}{P_1}<\varepsilon,$$

hiszen $A|B$ mellett $\varphi(B)/B\leqq\varphi(A)/A$, mert a baloldal a jobboldalból azon p prímszámokkal képzett $1-\frac{1}{p}$ szorzókkal szorozva áll elő, amelyek B-nek osztói, de A-nak nem.

Hosszú Zoltán

A 40. feladat megoldását beküldötték még: CSÁSZÁR ÁKOS, DUX ERIK, GEHÉR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, LIPTÁK JÓZSEF, SARKADI KÁROLY, SURÁNYI JÁNOS, TAKÁCS LAJOS, VINCZE ISTVÁN.

Megjegyzés. A feladat állítását a következőképpen általánosíthatjuk: *Adott $k_1, k_2, \ldots, k_n$ egész számokhoz és bármely pozitív*

ε számhoz található olyan a egész szám, melyre

$$\frac{\varphi(a+k_1)+\varphi(a+k_2)+\cdots+\varphi(a+k_n)}{a}<\varepsilon.$$

Ennek az általánosításnak bizonyítása közvetlenül adódik a közölt megoldásból, ha a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ szorzatokat $\frac{\varepsilon}{3}$ helyett $\frac{\varepsilon}{2n}$ szerepeltetése mellett definiáljuk, s azután az $a+k_i\equiv 0 \pmod{P_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ kongruenciarendszernek az $a>k_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ feltételt is kielégítő pozitív megoldását tekintjük.

Lipták József és *Takács Lajos*

41. feladat. Bizonyítandó, hogy egy egynél több tagot tartalmazó polinom hatványainak tagszáma a hatványkitevővel együtt végtelenhez tart.

(*Rényi Alfréd*)

I. megoldás. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy a szereplő polinom

$$p(x)=1+a_k x^k+\cdots+a_m x^m \qquad (a_k\neq 0)$$

alakú. Legyen ν egy természetes szám. Bizonyítjuk, hogy a p^n polinomban $x^{\nu k}$ együtthatója nem 0, hacsak n elég nagy. Ezzel a feladat állítását is igazoljuk.

$x^{\nu k}$ együtthatója a p^n polinomban $(\nu\leqq n)$ a polinomiális tétel szerint

$$A(\nu,n)=\binom{n}{\nu}a_k^{\nu}+\sum\frac{n!}{r_0!\,r_k!\cdots r_m!}a_k^{r_k}\cdots a_m^{r_m},$$

ahol az összegezés az

$$r_0+r_k+\cdots+r_m=n, \qquad kr_k+\cdots+mr_m=\nu k$$

feltételeket kielégítő $r_0, r_k, \ldots, r_m$ természetes számokra terjesztendő ki, kivéve az $r_0=n-\nu$, $r_k=\nu$, $r_j=0$ $(j>k)$ választást. E kizárás folytán a második feltételt k-val osztva az összeg valamennyi tagjára

$$r_k+\cdots+r_m<\nu$$

adódik, s ennek következtében

$$r_0>n-\nu, \quad r_j<\nu \qquad (j=k,\ldots,m).$$

Minthogy az $r_k, \ldots, r_m$ számok mindegyike legfeljebb ν különböző értéket vehet fel, az összeg tagjainak száma ν^{m-k+1}-nél nem nagyobb. Ha tehát

$$a=\max(|a_k|,\ldots,|a_m|),$$

akkor a szereplő összegre

$$|\Sigma| \leqq \nu^{m-k+1} \frac{n!}{(n-\nu+1)!} a^\nu .$$

A vizsgált együtthatóra tehát

$$|A(\nu, n)| \geqq \binom{n}{\nu} |a_k|^\nu - \nu^{m-k+1} \frac{n!}{(n-\nu+1)!} a^\nu =$$

$$= \frac{n!}{(n-\nu)!} \left[\frac{|a_k|^\nu}{\nu!} - \frac{\nu^{m-k+1}}{n-\nu+1} a^\nu \right],$$

s ez az alsó korlát elég nagy n mellett nyilván pozitív, hiszen a szögletes zárójelben álló második tag n növekedtével 0-hoz tart.

Czipszer János

II. megoldás. A feladat állításán túlmenően azt igazoljuk, hogy a polinom n-edik hatványában n-nél több tag van. Sőt még általánosabban a következőt bizonyítjuk: *Ha egy polinomnak van n-szeres és 0-tól különböző gyökhelye, akkor a polinom tagjainak száma n-nél nagyobb.* A binomhatvány mutatja, hogy állításaink nem is javíthatók.

Tegyük fel, hogy állításunk hamis. Van tehát olyan

$$p(x) = a_1 x^{r_1} + \cdots + a_n x^{r_n} \quad (a_i \neq 0;\ i = 1, \ldots, n)$$

polinom, melynek $\alpha \neq 0$ legalább n-szeres gyökhelye. Ha a_i helyébe $a_i \alpha^{r_i}$-t írunk, olyan polinomot kapunk, melynek 1 legalább n-szeres gyökhelye. Feltehetjük tehát, hogy $\alpha = 1$, azaz

$$p(1) = p'(1) = \cdots = p^{(n-1)}(1) = 0.$$

Az $a_1, \ldots, a_n$ együtthatók között fennálló n darab homogén lineáris összefüggéshez jutottunk, melyeknek együtthatói az

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & & r_n \\ (r_1)_2 & & (r_n)_2 \\ \vdots & & \vdots \\ (r_1)_{n-1} & \cdots & (r_n)_{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst alkotják, ahol az $(r)_k = r(r-1) \cdots (r-k+1)$ jelölést használtuk. E determináns az $r_1, \ldots, r_n$ számokkal alkotott VAN DER MONDE-féle determinánssal egyenlő, s így értéke nem 0. Ezt közvetlenül is mutatja az a tény, hogy a

$$c_1 + c_2 x + c_3 (x)_2 + \cdots + c_n (x)_{n-1} = 0$$

$(n-1)$-edfokú egyenletnek nem lehet gyöke az egymástól különböző $r_1, \ldots, r_n$ számoknak mindegyike, vagyis hogy determinán-

sunk sorai lineárisan függetlenek. A fellépő homogén lineáris egyenletrendszernek tehát csak triviális megoldása van, s ez ellentmond annak, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ együtthatók 0-tól különbözők. Ezzel állításunk bizonyítást nyert.

Megjegyezzük, hogy bizonyításunk szerint a feladat állítása akkor is helyes, ha a polinom együtthatói tetszőleges nullkarakterisztikájú, egységelemmel bíró integritási tartomány elemei.

Hajós György

A 41. feladat megoldását beküldötte még SZŰSZ PÉTER és TURÁN PÁL.

Megjegyzés. Az első megoldás gondolatmenetének megtartása mellett azt is igazolni lehet, hogy ha a $p(x)$ polinom valamelyik hatványaban x^n együtthatója nem 0, akkor ez a polinomnak minden elég magas kitevőjű hatványában bekövetkezik. *(Szerk.)*

42. feladat. Egy háromszög oldalait egy kúpszelet hat pontban metszi. Tekintjük a háromszög egy-egy csúcsának harmonikus társait a csúcsba futó oldalakon elhelyezkedő két-két kúpszelet-metszéspontra vonatkozólag. Bizonyítandó, hogy az így kapott hat pont egy kúpszeleten van.

(Obláth Richárd)

I. megoldás. Kimutatjuk, hogy a háromszög csúcsainak polárisai a háromszög szemközti oldalait kollineáris ponthármasban metszik. Ez PASCAL tétele szerint a feladat állítását bizonyítja.

A pontokat és egyeneseket homogén koordinátahármasaik (vagy projektív koordinátahármasaik) által adott vektorokkal jellemezzük. Tartozzanak ilyen módon a háromszög csúcsaihoz az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok. A kúpszelet egyenlete legyen $\mathbf{xAx} = 0$, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus tenzor.

A csúcsok polárisaihoz az $\mathbf{Aa}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}$ vektorok tartoznak, a háromszög oldalaihoz pedig a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok. Páronkénti metszéspontjaikat tehát az

$$\mathbf{Aa} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{cAa})\mathbf{b} - (\mathbf{bAa})\mathbf{c},$$

$$\mathbf{Ab} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{aAb})\mathbf{c} - (\mathbf{cAb})\mathbf{a},$$

$$\mathbf{Ac} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{bAc})\mathbf{a} - (\mathbf{aAc})\mathbf{b}$$

vektorok jellemzik. $\mathbf{A}$ szimmetrikus volta miatt e vektorok összege 0. Ezért a három metszéspont valóban egy egyenesen van.

Gehér László

II. megoldás. Legyen a szereplő $A_1 A_2 A_3$ háromszög alapháromszöge a baricentrikus koordinátarendszernek (vagy projektív

koordinátarendszernek). Legyen a kúpszelet egyenlete a koordinátarendszerben

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Feltehetjük, hogy az a_{12}, a_{13}, a_{23} együtthatóknak egyike sem 0. Ha ugyanis pl. $a_{12} = 0$, akkor A_1 és A_2 a kúpszeletre nézve konjugált pontok, a feladat előírása szerint adódó hat pont között tehát e két pont is szerepel, s így a hat pont a háromszög két oldalegyenese által alkotott elfajuló kúpszeleten helyezkedik el.

Az A_i csúcsok ($i = 1, 2, 3$) polárisainak egyenletei

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = 0.$$

Ezeknek a nem-homológ háromszögoldalakkal való metszéspontjai, vagyis a feladatban szerepeltetett hat pont:

$$(0, -a_{23}, a_{22}), \quad (0\ a_{33}, -a_{32}),$$
$$(-a_{13}, 0, a_{11}), \quad (a_{33}, 0, -a_{31}),$$
$$(-a_{12}, a_{11}, 0), \quad (a_{22}, -a_{21}, 0).$$

E hat pont koordinátái kielégítik az

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + \frac{a_{12}^2 + a_{11} a_{22}}{a_{12}} x_1 x_2 + \frac{a_{13}^2 + a_{11} a_{33}}{a_{13}} x_1 x_3 +$$

$$+ \frac{a_{23}^2 + a_{22} a_{33}}{a_{23}} x_2 x_3 = 0$$

egyenletet. Ez egy kúpszelet egyenlete, mert nem minden együtthatója 0. Ha ugyanis az első három együttható 0, akkor a többi együttható éppen a_{12}, a_{13} és a_{23}, tehát nem 0. A kapott hat pont tehát valóban egy kúpszeleten van.

Pápai Nárcisz

III. megoldás. CARNOT tétele szerint egy háromszög BC, CA, ill. AB oldalán elhelyezkedő A_1, A_2, B_1, B_2, ill. C_1, C_2 pontok akkor és csak akkor vannak egy kúpszeleten, ha a

$$(BCA_1) = a_1, \quad (CAB_1) = b_1, \quad (ABC_1) = c_1,$$
$$(BCA_2) = a_2, \quad (CAB_2) = b_2, \quad (ABC_2) = c_2$$

osztóviszonyok szorzata 1. (Ez PASCAL és MENELAOS tételének felhasználásával könnyen bizonyítható is.)

A feladat annak bizonyítását kívánja tehát, hogy ez a szorzat változatlanul 1 marad akkor, ha kúpszeletünk metszéspontjai közül az A_1 és A_2 pontokat B-nek és C-nek az A_1, A_2 pontpárra vonatkozó harmonikus társaival, az A_1' és A_2' pontokkal helyettesítjük, s ugyanígy járunk el a többi metszéspont esetében is.

A BC egyenesen B és C alappontú baricentrikus koordinátákat használva:

$$B(1, 0), \quad C(0, 1), \quad A_1(1, a_1), \quad A_2(1, a_2).$$

Minthogy A_1 és A_2 különböző pontok, azért $a_1 \neq a_2$. Feltehetjük, hogy $a_1 + a_2 \neq 0$. Hiszen ellenkező esetben A_1 és A_2 harmonikusan választja el a B, C pontpárt. Ebben az esetben tehát $A_1' = C$ és $A_2' = B$, a C, B, B_1, B_2, C_1, C_2 pontok pedig a CA és AB egyenesekből álló elfajuló kúpszeleten vannak.

Ha az A_1 és A_2 pontot a_2 és $-a_1$, ill. -1 és 1 súllyal súlyozzuk, akkor súlypontjukként $(a_2 - a_1, 0)$, ill. $(0, a_2 - a_1)$, tehát B, ill. C adódik. E pontoknak az A_1, A_2 pontpárra vonatkozó harmonikus társait, az A_1' és A_2' pontokat súlypontokként megkapjuk tehát, ha az A_1 és A_2 pontot a_2 és a_1, ill. 1 és 1 súllyal súlyozzuk. Ennek eredményeként

$$A_1'(a_1 + a_2, 2a_1 a_2), \qquad A_2'(2, a_1 + a_2)$$

adódik. Így tehát

$$a_1' = (BCA_1') = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \qquad a_2' = (BCA_2') = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Eszerint $a_1' a_2' = a_1 a_2$.

Ugyanígy következik a megfelelő értékekre $b_1' b_2' = b_1 b_2$ és $c_1' c_2' = c_1 c_2$ is. Ha tehát $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2 = 1$, akkor valóban $a_1' a_2' b_1' b_2' c_1' c_2' = 1$ is igaz.

Obláth Richárd

IV. megoldás. Ha a feladatban szereplő kúpszelet nem elfajuló, akkor a háromszög csúcsainak polárisai az eredeti háromszöghöz konjugált háromszögnek oldalai. A feladat e háromszögpár nem-homológ oldalainak metszéspontjairól szól. Ismeretes az, hogy egy kúpszeletre nézve konjugált háromszögek perspektívek. Viszont perspektív háromszögek nem-homológ oldalainak metszéspontjai PASCAL tétele szerint egy kúpszeleten vannak. Ez tehát a vizsgált hat pontra is áll.

Ha a feladatban szereplő kúpszelet elfajuló, akkor a csúcspontok polárisai egy ponton, a kúpszelet szinguláris pontján haladnak át, s a csúcspontok vetítő sugaraival involúciót alkotnak. Ismeretes az, hogy a teljes négyoldal átellenes szögpontpárjait egy pontból vetítve egy involúció homológ sugárpárjait kapjuk. Ebből következik, hogy a csúcspontok polárisainak a homológ háromszögoldalakkal alkotott metszéspontjai egy egyenesen (a teljes négyoldal negyedik oldalán) vannak. A nem-homológ háromszögoldalakkal alkotott metszéspontok tehát, ismét PASCAL tétele szerint, egy kúpszeleten helyezkednek el.

Gyarmathi László

V. megoldás. Tekintsük két háromszögoldalnak s a kúpszeletnek négy metszéspontját. E négy pont egy kúpszeletsort határoz meg. Ennek kúpszeletei a harmadik háromszögoldalt egy involúció homológ pontpárjaiban metszik.

Az adott kúpszelet, valamint az első két háromszögoldalból álló elfajuló kúpszelet ehhez a kúpszeletsorhoz tartozik. Ezért a harmadik oldalon levő kúpszeletpontok és csúcspontok a mondott involúciónak homológ pontpárjai. Így tehát a feladat előírása is ennek az involúciónak homológ pontpárjához vezet a harmadik háromszögoldalon. Ezért ez a két pont s az első két oldal négy kúpszeletpontja egy (az említett kúpszeletsorhoz tartozó) kúpszeleten van. Meggondolásunkat a másik két oldalra elismételve a feladat állításának bizonyítását kapjuk.

Okoskodásunkból a feladat állításának általánosítása is következik: a feladat állítása akkor is helyes, ha az előírt szerkesztést csak egy, vagy csak két oldalon hajtjuk végre*; sőt nem is kell harmonikus társakról szólni, hanem ehelyett ugyanakkora — más-más oldalon esetleg más-más — kettősviszonyt adó pontok szerepeltethetők.

Hajós György

A 42. feladat megoldását beküldötte még Blum Ottó és Sarkadi Károly.

* Ez az általánosítás a III. megoldásból is adódik. *(Szerk.)*

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Társulat címére kérjük (Bp., V., Reáltanoda u. 13—15). A borítékra írjuk feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Közlésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással, vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri.

Rovatunkban most először jelennek meg megoldások. Ezek mindjárt mintául szolgálhatnak arra, hogy akár precizitás, akár tömörség, akár az előismeretek felhasználása stb. terén nagyjából mi az a szinvonal, amit szem előtt kell tartaniok a megoldások beküldőinek. Diszkussziót például — az összes lehetséges esetek rendszerezését, feltételeinek megállapítását — csak akkor kívánunk, ha az könnyen elvégezhető, vagy ha a példa szövegezésében kifejezett utalás történt rá. (Mint például a **4.** vagy a most kitűzött **24.** példában). De már például a **11.** vagy **12.** példa teljes diszkussziója, ha a szövegezéshez pontosan ragaszkodunk, matematikai érdekességével arányban nem álló bonyodalmakra vezetne.

Reméljük, hogy az első megoldások megjelenése után a beküldött megoldások, különösen pedig a beküldők száma jelentékenyen növekedni fog.

Többek érdeklődésére közöljük, hogy megoldásokat bárkitől elfogadunk, tekintet nélkül végzettségére, jelenlegi foglalkozására, vagy arra, hogy előfizetője-e lapunknak.

Kitűzött példák

24. Oldjuk meg és diszkutáljuk az I. gimnáziumi matematikakönyv következő feladatát: „Szerkesszetek olyan kört, amely egy háromszög három csúcsától 1—1 cm távolságban halad". (211. lap.)

25. Mi azon körök középpontjának mértani helye, amelyek átmennek egy adott ponton és amelyekből egy adott egyenes adott hosszúságú húrt metsz ki.

26. Szerkesszünk egy körszeletben egy adotthoz hasonló háromszöget, két csúcsával az íven, egy csúcsával a húr adott pontjában.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

27. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1 + x_2 = a_1,$$
$$x_2 + x_3 = a_2,$$
$$x_3 + x_4 = a_3,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1} + x_n = a_{n-1}$$
$$x_n + x_1 = a_n.$$

28. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^y = y^x, \quad a^x = b^y.$$

29. Oldjuk meg és diszkutáljuk a következő egyenletrendszert:

$$\frac{x-a-b}{x-a+b} = \frac{x-b}{y-a}, \qquad \frac{b}{x-a} = \frac{a}{y+b}.$$

30. *a)* Forgassuk el a sík egy S alakzatát a sík egy O pontja körül tetszésszerinti szöggel, és hajtsunk végre rajta, ugyancsak O-ból mint centrumból kiindulva, tetszésszerinti arányú hasonlósági transzformációt. (Röviden: végezzünk S-en O centrummal forgatvanyújtást.) Az így kapott S' alakzatot ugyancsak O centrumú, tetszésszerinti szögű és arányú forgatvanyújtással vigyük át az S'' alakzatba. Bizonyítsuk be, hogy az S, S', S'' alakzatok egymásnak (a transzformáció következtében) megfelelő pontjait összekötő $P_1P_1'P_1''$, $P_2P_2'P_2''$, $P_3P_3'P_3''$ stb. háromszögek hasonlók, és ugyancsak O körüli forgatvanyújtással vihetők át egymásba.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az utóbbi forgatvanyújtások során a $PP'P''$ háromszögek egy csúcsa — és így másik két csúcsa is — leírja az S alakzatot, akkor e háromszögek többi pontjai, egyáltalán a sík minden pontja, amelyet e háromszögekhez tartozónak tekintünk, egy S-hez hasonló és S-ből O körüli forgatvanyújtással származtatható alakzatot ír le.

c) A fentiek alapján oldjuk meg a **12.** példát. (Adva van két négyszög. Írjunk egyikbe a másikhoz hasonlót.)

31. Egy szabályos háromszög alapú egyenes gúla köré írt gömb felszíne F, a beírt gömb felszíne f. Mekkora a gúla felszíne?[1])

Beküldési határidő: a lap megjelenésétől számított 2 hónap.

[1]) Ezt és az előző számban megjelent **15.**, **16.** és **23.** példát A. N. Kolmogorov „A matematikusi hivatásról" című füzetéből vettük át. A füzet sokszorosítva magyar nyelven is megjelent, anyagul az 1953. évi magyar-szovjet barátsági hónapon tartott előadásokhoz.

Megoldott példák

1. példa. Mint ismeretes, a régi egyiptomiak $3+4+5$ egyenlő részre osztott kötéllel tűztek ki derékszögeket. Bizonyítsuk be ennek az eljárásnak a helyességét. (Pythagoras tételéből ez nem következik!)

Megoldás. Pythagoras tétele, a II. gimnáziumi könyv fogalmazása szerint (77. old.) ezt mondja: „Egy derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével." Az egyiptomi derékszög-kitűzési eljárás helyességének igazolásához nyilván nem erre, hanem ennek a *megfordítására* van szükségünk: „Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege megegyezik a harmadik oldal négyzetével, akkor az utóbbi oldallal szemközti szög derékszög". Pythagoras tételének megfordításához elvezet például a következő gondolatmenet:

Legyen egy háromszög két oldala a és b, harmadik oldala $\sqrt{a^2+b^2}$. Be akarjuk látni, hogy az a és b oldal derékszöget zár be. Szerkesszük meg azt a háromszöget — ilyen mindig van, de mindig csak egy — amelynek két oldala a és b, a kettő közé zárt szöge 90°. E háromszög harmadik oldala Pythagoras tétele szerint $\sqrt{a^2+b^2}$, vagyis ugyanakkora, mint az eredeti háromszög harmadik oldala. Három oldal azonban egyértelműen meghatároz egy háromszöget, a két háromszög tehát egybevágó, vagyis az eredeti háromszög a és b oldala is derékszöget zár be. (Felhasználtuk Pythagoras tételét és két egybevágósági tételt.)

Megoldotta: Bukovszky Ferenc, Czapáry Endre, Csánk István, Reményi Gusztáv.

Megjegyzés. Ha a II. osztály elején nehéznek tartunk egy ilyen okoskodást, felhívhatjuk a figyelmet Pythagoras tételének megfordítására a cosinus-tétellel kapcsolatban is, amelyből az közvetlenül következik. Helyesebbnek tekintjük azonban az olyan matematika-tanítást, amely a tanulók logikai készségét az ismeretanyag bővülésével párhuzamosan, azzal lépést tartva fejleszti, többek között az ilyen problémák tisztázása kapcsán.

2. példa. Steinhaus „Matematikai kaleidoszkóp" c. könyvének első lapján bemutatja, hogyan lehet egy négyzetet egyenlőoldalú háromszöggé átdarabolni. Közelítsük meg ennek az átdarabolásnak az alapgondolatát a következőképpen:

1° Daraboljunk át egy parallelogrammát olyan parallelogrammává, amelynek

a) egy oldala ugyanakkora, mint az eredeti parallelogrammáé, egy szöge pedig adott;

b) egy oldala adott;

c) egy oldala és egy szöge adott.

2° Daraboljunk át egy egyenlőoldalú háromszöget parallelogrammává, majd ezt a fenti módon négyzetté.

3° Egyszerűsítsük a megoldást úgy, hogy az idomokat minél kevesebb darabra kelljen szétvágni.

Megoldás. 1a) Szeleteljük fel a parallelogrammát a változatlanul hagyandó a oldallal a megadott φ szöget alkotó, egymástól $a \sin \varphi$ távolságban haladó párhuzamos egyenesekkel. Nem nehéz belátni, hogy a kapott darabokból mindig össze lehet állítani egy olyan parallelogrammát, amelynek egy szöge φ, és egy oldala továbbra is a (1. és 2. ábra).

1b) Ha az adott p szakasz nagyobb a parallelogramma valamelyik magasságánál, akkor nyilvánvalóan alkalmazhatjuk az előbbi átdarabolást (csak éppen más szerkesztéssel jutunk el hozzá: pl. a parallelogramma egyik oldalának végpontjából elmetszük a szemközti oldal egyenesét, azután ezzel, ha kell, a fenti módon párhuzamosakat húzunk; 3. ábra). Ha a szakasz mindkét magasságnál kisebb, akkor a parallelogrammát először hosszában (azaz nemrövidebb oldalaival párhuzamosan) kettévágjuk, és a két részt félolyan magas parallelogrammává illesztjük össze, s ha kell, az eljárást megismételjük (4. ábra).

1c) Az *1b)*-típusú átdarabolással behozzuk a p oldalt, azután — p-t változatlanul tartva — az *1a)* átdarabolással behozzuk a φ szöget is.

2° 5—8. ábra.

3° 9.—10 ábra.

Megoldotta: BUKOVSZKY FERENC.

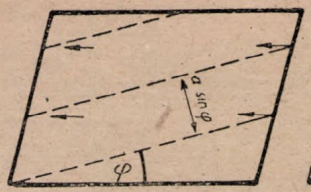
3. példa. *a)* Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$y = \sqrt{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2}; \qquad y = \sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{(x-1)^2};$$

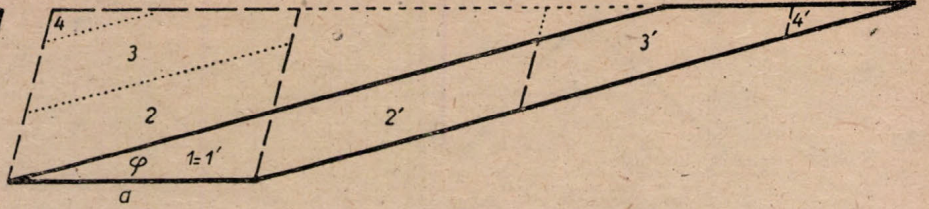
$$y = 1{,}5\sqrt{(x+1)^2} - 0{,}5\sqrt{(x-1)^2}; \qquad y = x + \sqrt{x^2}.$$

b) Milyen feltétel mellett tudunk egy töröttvonalat egyetlen algebrai kifejezéssel (függvénnyel) jellemezni?

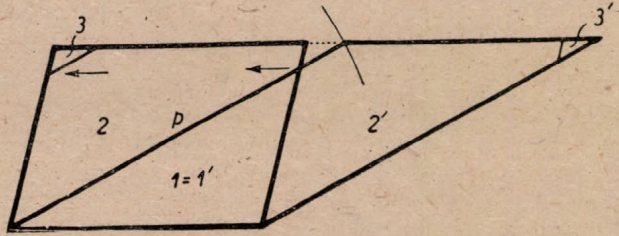
c) Írjuk fel az adott feltételnek eleget tevő töröttvonalak egyenletét!



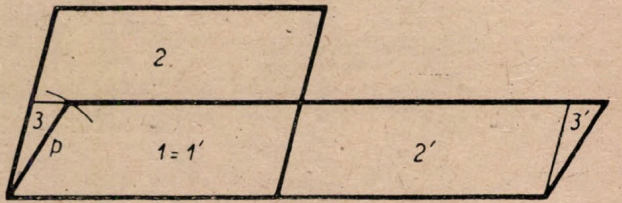
1. ábra



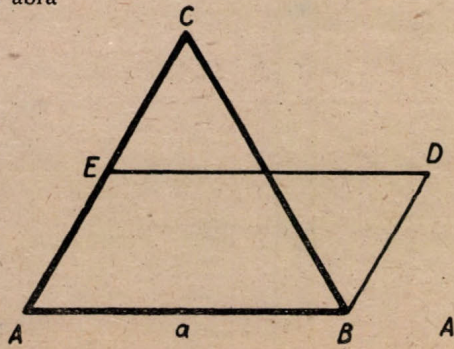
2. ábra



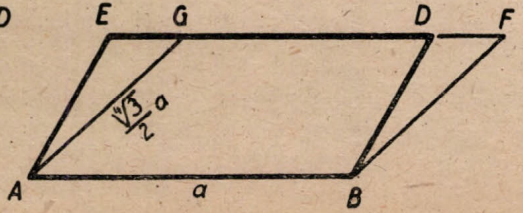
3. ábra



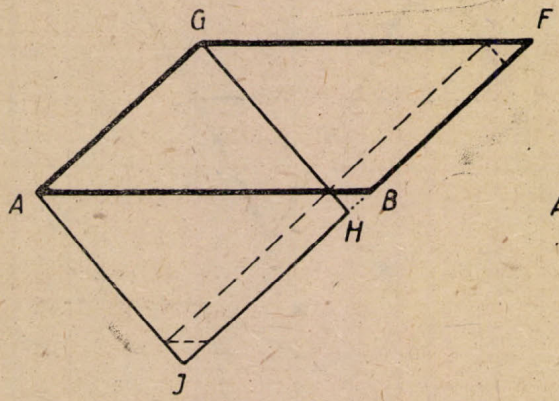
4. ábra



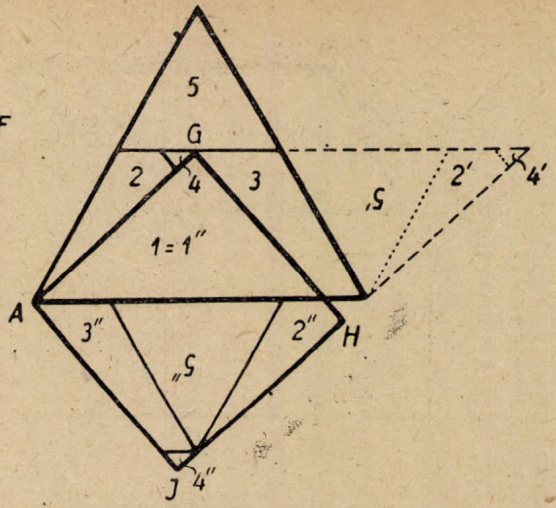
5. ábra



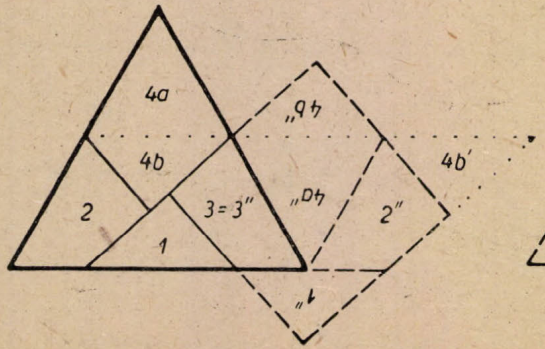
6. ábra



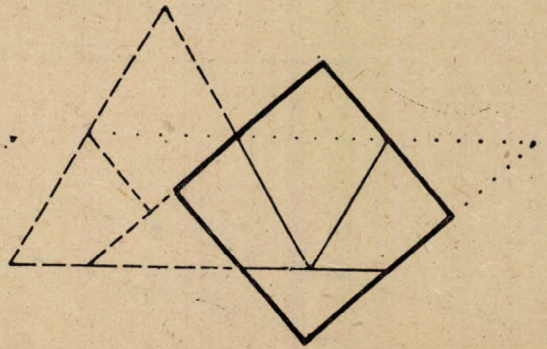
7. ábra



8. ábra



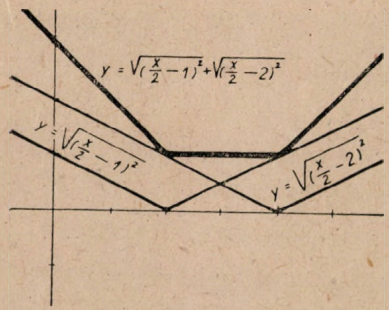
9. ábra



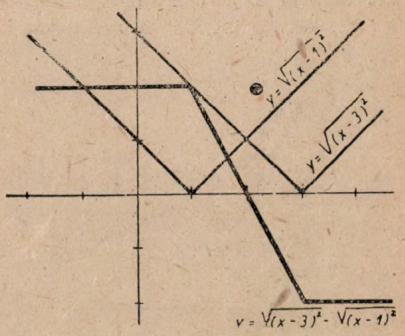
10. ábra

(Hogy az egyértelműséget biztosítsuk, a négyzetgyök értékét mindig pozitívnak vesszük.)

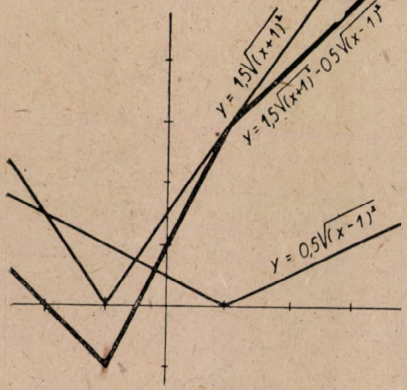
Megoldás. a) 11—14. ábra.



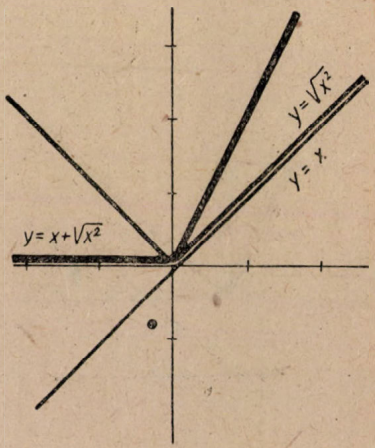
11. ábra



12. ábra



13. ábra

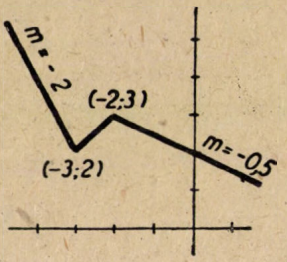


14. ábra

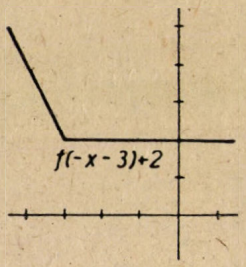
b) Ha az utolsónak ábrázolt függvényt $f(x)$-szel jelöljük, akkor $af(bx+c)+d$ alakú függvények összeadásával bármely olyan összefüggő [2]) töröttvonalat előállíthatunk, amely végesszámú pontban törik meg, és amelyet az abszcissza-tengelyre merőleges bármely

[2]) Nyilván előállíthatunk nem összefüggő töröttvonalakat is (pl. a $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ függvénnyel). Az ilyeneket azonban nem tekintjük *egy* töröttvonalnak, és ezért nem is vesszük tekintetbe.

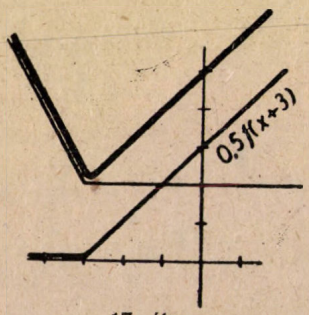
egyenes egy pontban metsz.[3] Például a 15. ábrán látható töröttvonal első (balról végtelen) szakaszát megadja az $f(-x-3)+2$ függvény (16. ábra); következő szakaszát az előző szakasz megváltoztatása nélkül létrehozza a $0{,}5f(x+3)$ függvény hozzáadása (17. ábra); végül utolsó (jobbfelé végtelen) szakasza is létrejön, ha az eddigiekhez hozzáadjuk még a $-1{,}5f(x+2)$ függvényt (18. ábra).



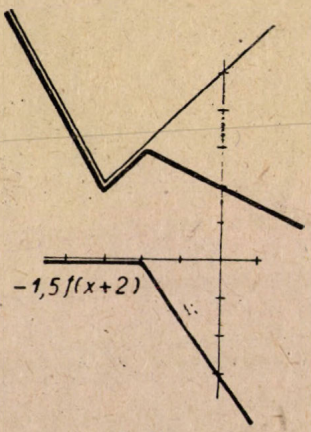
15. ábra



16. ábra



17. ábra



18. ábra

Olyan töröttvonalakat, amelyek a mondott feltételeknek nem tesznek eleget, algebrai kifejezéssel nem tudunk előállítani: végesszámú algebrai művelettel u. i. csak végesszámú töréspontot tudunk létrehozni, másrészt, mivel minden számításbajövő művelet egyértelmű, a kapott függvény is csak egyértékű lehet.

[3]) Elérhetjük azt is, hogy a töröttvonal, az értelmezési tartományra tett külön megszorítás nélkül is, egyik, vagy mindkét irányban végessé válik. Ehhez olyan algebrai kifejezések hozzáadására van szükség, melyek értéke egy félegyenesen 0, másutt pedig nincsenek értelmezve. Ilyen például $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-a}$.

c) A fenti konkrét példán alkalmazott eljárást fejezzük ki általános formában. Jelöljük (x_i, y_i)-vel a töröttvonal csúcsainak koordinátáit $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és m_i-vel az egyes szakaszok iránytangensét $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, ahol $m_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ $(i = 2, \ldots, n)$. Akkor a töröttvonal egyenlete a következő lesz ($f(x)$ jelentése a fenti):

$$y = -\frac{m_1}{2} f(x_1 - x) + y_1 + \frac{m_2}{2} f(x - x_1) + \frac{m_3 - m_2}{2} f(x - x_2) +$$

$$+ \frac{m_4 - m_3}{2} f(x - x_3) + \cdots + \frac{m_{n+1} - m_n}{2} f(x - x_n),$$

azaz (tekintetbevéve $f(x)$ jelentését):

$$y = m_1(x - x_1) + y_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_{i+1} - m_i) f(x - x_i).$$

Részben megoldotta: BUKOVSZKY FERENC és REMÉNYI GUSZTÁV.

4. példa. Adva van a síkban négy pont. Szerkesszük meg az összes olyan köröket, amelyek mind a négy ponttól egyenlő távolságban haladnak! (Hogyan függ a megoldások száma a pontok helyzetétől?)

Megoldás. A sík azon pontjai lehetnek a kívánt tulajdonságú körök középpontjai, amelyektől a négy pontig húzott szakaszok *a)* vagy mind egyenlők, *b)* vagy csak kétféle nagyságúak. Ennek megfelelően *a)* és *b)* típusú megoldásokat fogunk megkülönböztetni.

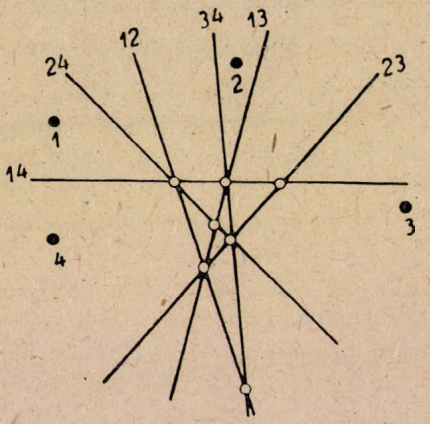
a) Ilyen tulajdonságú pontja csak akkor van a síknak, ha a négy pont húrnégyszöget alkot, és akkor is csak egy, t. i. a húrnégyszög köré írható kör középpontja. E középpont körül viszont bármekkora sugarú kört rajzolunk is, az mindig megoldása a feladatnak. Húrnégyszög esetén tehát végtelen sok *a)*-típusú megoldás van, egy koncentrikus körsor.

b) A sík ilyen tulajdonságú pontjaiból a két sugár számtani közepével húzott kör — és csak az — halad egyenlő távol a négy ponttól. Kérdés, hogy a sík mely pontjai ilyen tulajdonságúak, és hogyan függ az ilyen pontok száma a négy alappont helyzetétől?

A négy alapponttól a sík pontjai általában négyféle távolságra vannak. Ez a szám az alappontok alkotta szakaszok felezőmerőlegesein 3-ra csökken; 2-re akkor csökken ha egy pont egyidejűleg két szakasz felezőmerőlegesén is rajta van. (Ha egymáshoz csatlakozó szakaszok felezőmerőlegeseiről van szó, akkor ez azt jelenti, hogy az illető metszéspont három ponttól egyenlő, a negyediktől ettől különböző távolságra van, vagyis a kör a pontokat 3 és

1 pontra választja szét. Ha a szakaszok nem csatlakoznak egymáshoz, akkor a pont két alapponttól egyenlő, és a másik kettőtől is egyenlő — de az előbbitől különböző — távolságra van. Ekkor a négy pont közül 2 a kör belsejében, 2 rajta kívül van.)

Hány közös pontja lehet a négy pont alkotta hat szakasz felező merőlegeseinek? Hat különböző egyenesnek, ha köztük nincsenek párhuzamosak, legfeljebb $\binom{6}{2} = 15$ metszéspontja lehet. A mi hat egyenesünk azonban még akkor sem alkothat 7-nél több metszéspontot, ha feltesszük, hogy nincsenek köztük párhuzamosak; ugyanis a négy pont meghatározta négy háromszög oldalfelező merőlegesei 3—3 helyett 1—1 metszéspontot alkotnak, és ez $4 \cdot 2 = 8$ pont kiesésével jár. A *metszés*pontok maximális száma tehát 7: a 19. ábra mutatja, hogy ez az eset valóban fel is lép (7 metszéspont, 7 megoldás).



19. ábra

Tekintetbe kell még vennünk a következő lehetőségeket:

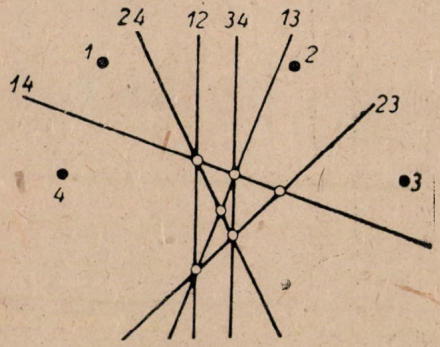
(1) bizonyos metszéspontok egybeesnek;

(2) bizonyos felező merőlegesek párhuzamosakká válnak;

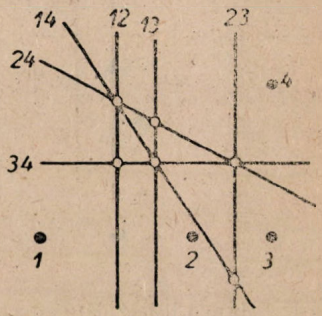
(3) bizonyos felező merőlegesek egybeesnek, és így végtelen sok közös pont, s ezzel végtelen sok megoldás keletkezik.

Az *(1)* lehetőség azonban mindjárt elesik. Ha ugyanis a 7 metszéspont közül akár csak kettő is egybeesik, akkor ez azt jelenti, hogy az így keletkező pont egyenlő távol van mind a négy alapponttól, és nem is csak két metszéspont esik egybe, hanem mindjárt mind a hét. Így tehát nem jutunk *b)* típusú megoldáshoz, hanem a már tárgyalt *a)* típusú megoldáshoz kerülünk vissza.

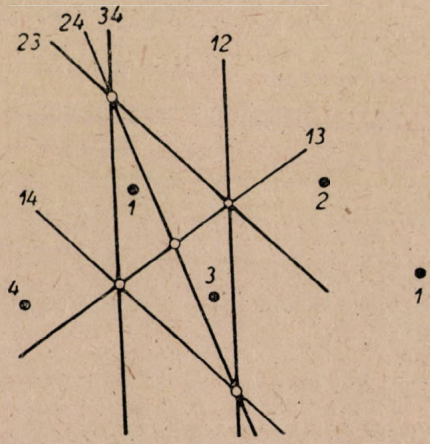
A *(2)* lehetőség többféleképpen is megvalósulhat, és különböző mértékben csökkenti a megoldásokat: 6 megoldás van nemegyenlőszárú trapéz és egyenesszögű négyszög esetén (20. és 21. ábra), 5 megoldás van ferdeszögű parallelogramma esetén (22. ábra), 0 megoldás van akkor, ha a pontok egy egyenesbe esnek, és ezen az egyenesen nem helyezkednek el szimmetrikusan (23. ábra).



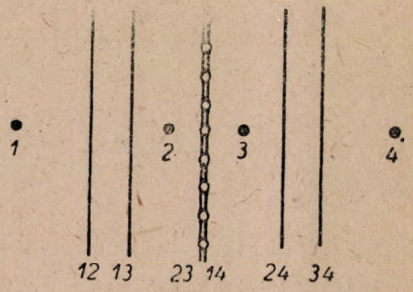
20. ábra



21. ábra



22. ábra

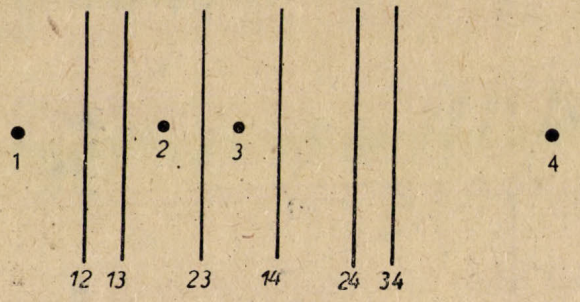


23. ábra

Végül a *(3)* lehetőség megvalósul és végtelen sok *b)* típusú megoldásra vezet akkor, ha a pontnégyesnek a pontokon át nem haladó szimmetriatengelye van. Tisztán lép fel ez a megoldás egy egyenesen szimmetrikusan elhelyezkedő pontok esetében (24. ábra), *a)* típusú megoldásokkal együtt pedig egyenlőszárú trapéz esetében; ha ennek mégegy szimmetriatengelye van (téglalap esete), akkor

mindkét tengely minden pontjához, metszéspontjukat kivéve, tartozik egy *b)* típusú megoldás. (Metszéspontjukhoz végtelen sok *a)* típusú megoldás tartozik.)

A fenti megoldásban elfajuló eseteket (egyenessé fajuló körök, egybeeső alappontok) nem vettünk tekintetbe.



24. ábra

Megoldotta: BUKOVSZKY FERENC.

6. példa. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$a)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}}; \qquad b)\ g(x)=\frac{x\sqrt{x^4-1}}{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)}}.$$

Megoldás. a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ $x=0$-ra nincs értelmezve. Minthogy

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & \text{ha } x\geqq 0,\\ -x, & \text{ha } x\leqq 0,\end{cases}$$

azért

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x>0,\\ -1, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

(25. ábra.)

Megjegyzés. A feladat más fogalmazásban megtalálható az I. gimnáziumi tankönyvben (211. lapon a 9. feladat). Minden esetre kiterjedő diszkusszióra azon a fokon természetesen nincs szükség.

b) $x^2-1=0$, ha $x=\pm 1$; $x^2(x^2+1)=0$, ha $x=0$; ezekre $g(x)$ nincs értelmezve. A gyökjel alatti tört nevezője mindig >0, a számláló azonban, és így a tört is <0, ha $|x|<1$. Ez esetben x^4-1 is <0. Tehát $g(x)$ nincs értelmezve, ha $-1\leqq x\leqq 1$.

Ha $|x|>1$, akkor $x^2>1$, $x^4>1$, $x^2-1=\sqrt{(x^2-1)^2}$, és mivel

$$x=\begin{cases} \sqrt{x^2}, & \text{ha } x>0,\\ -\sqrt{x^2}, & \text{ha } x<0,\end{cases}$$

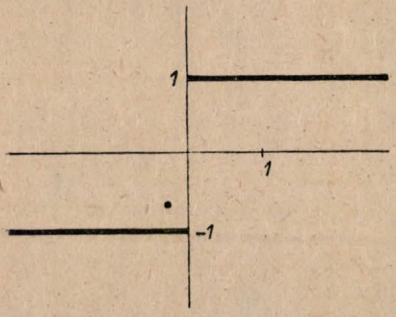
a négyzetgyökökre vonatkozó azonosságok alkalmazásával

$$g(x)=\frac{\pm\sqrt{x^2}\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)}}=\pm\sqrt{\frac{x^2(x^4-1)(x^2-1)}{x^2(x^2-1)^2(x^2+1)}}=\pm 1,$$

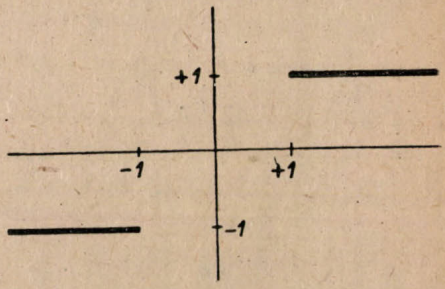
mégpedig

$$g(x)=\begin{cases}+1, & \text{ha } x>1\\ -1, & \text{ha } x<-1.\end{cases}$$

(Lásd a 26. ábrát.) *Reményi Gusztáv*



25. ábra



26. ábra

Megoldotta még: SZEMÉLYI KÁLMÁN.

7. példa. Írjuk fel egyetlen algebrai kifejezéssel azt a függvényt, amely a-tól b-ig nincs értelmezve, másutt az értéke c.

I. megoldás.

	$x<a$	$x=a$	$a<x<b$	$x=b$	$b<x$
$f_1(x)=\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2}}$	-1	-1	-1	nincs értelmezve	$+1$
$f_2(x)=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}}$	-1	nincs értelmezve	$+1$	$+1$	$+1$
$f_1(x)+f_2(x)$	-2	nincs értelmezve	0	nincs értelmezve	$+2$
$f_3(x)=f_1(x)[f_1(x)+f_2(x)]$	$+2$	nincs értelmezve	0	nincs értelmezve	$+2$
$\frac{1}{f_3(x)}$	$\frac{1}{2}$	nincs értelmezve			$\frac{1}{2}$

A táblázat egyes soraiban adott fokozatos felépítés után a keresett függvény: $y=\frac{2c}{f_3(x)}$, azaz

$$y=\frac{2c}{\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2}}\left(\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}}\right)}=\begin{cases} c, & \text{ha } b<x, \\ \text{nincs értelmezve,} & \\ & \text{ha } a\leqq x\leqq b, \\ c, & \text{ha } x<a. \end{cases}$$

Bukovszky Ferenc

II. megoldás.

$$f(x)=\frac{c\sqrt{(x-a)(x-b)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \qquad (a<b).$$

Ha $x>a, b$, vagy $x<a, b$, akkor $(x-a)(x-b)>0$, mert mindkét tényező >0 vagy <0; ha $a\leqq x\leqq b$, akkor $x-a\geqq 0$, $x-b\leqq 0$, és így $(x-a)(x-b)\leqq 0$, tehát a függvény nincs értelmezve. Az $[a, b]$ zárt intervallumon kívül $f(x)=c$.

Más ilyen tulajdonságú függvény:

$$f(x)=c+\sqrt{(x-a)(x-b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}.$$

(Ez utóbbi az (a, b) nyílt intervallumban nincs értelmezve.)

Reményi Gusztáv

Megoldotta még: CZAPÁRY ENDRE, MÓRITZ PÉTER, SZEMÉLYI KÁLMÁN.

8. példa. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1.$$

Megoldás. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$y=2x^2+5x. \qquad (1)$$

Rendezve és négyzetre emelve

$$\sqrt{y-2}-\sqrt{y-6}=1, \quad \text{ill.} \quad \sqrt{y-9}=3, \quad y=18$$

adódik. (1)-ből

$$2x^2+5x-18=0,$$

ebből pedig

$$x_1=2, \quad x_2=-4{,}5.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az eredeti egyenletet mindkét gyök kielégíti. Minthogy csupa olyan átalakítást végeztünk, amely egy egyenletet következményébe visz át, a fentieken kívül más gyöke nem lehet az egyenletnek.

Móritz Péter

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC, CZAPÁRY ENDRE, REMÉNYI GUSZTÁV, SZEMÉLYI KÁLMÁN.

9. példa. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}.$$

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy $x=0$ nem lehet gyök, viszont $x=\pm a$ (ha $a \neq 0$) megoldása az egyenletnek, mert a tört egyszerűsítése után mindkét oldalon $+1$, ill. -1 a kifejezés értéke. Más megoldás nincs, mert a baloldali tört nevezőjének gyöktelenítése és $x \neq 0$-val való egyszerűsítés után az

$$a+\sqrt{a^2-x^2}=a$$

egyenletre jutunk, melynek $x=\pm a$-n kívül más megoldása nyilvánvalóan nincs.

Személyi Kálmán

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC, CZAPÁRY ENDRE, REMÉNYI GUSZTÁV.

10. példa. Adva van két háromszög, írjuk egyiket a másikba. (Pontosabban: keressünk az ABC_Δ a, b, ill. c oldalán rendre egy-egy olyan D', E', ill. F' pontot, hogy a $D'E'F'_\Delta$ egybevágó legyen az adott DEF_Δ-gel.)

Megoldás. Feladatunkat nyilván akkor is megoldottuk, ha a DEF_Δ *köré* szerkesztettünk egy az ABC_Δ-gel egybevágó háromszöget, hiszen az így kapott alakzat a kívánttal kongruens lesz. A DEF_Δ minden oldala fölé megszerkeszthetjük azokat a köríveket, amelyek pontjaiból a DEF_Δ oldalai α, β, ill. γ szög alatt láthatók. El kell még helyeznünk az a, b, c szakaszokat végpontjaikkal a köríveken. Ez azonban már egy jólismert szerkesztési feladat. (Lásd I. gimn. könyv, 310. lap, 17. feladat: „Szerkesszetek két kör egyik metszéspontján át olyan egyenest, amelynek a két kör határolta darabja adott hosszúságú". A könyv I. kiadásában kidolgozva is megtalálható a 368. lapon.)

Czapáry Endre

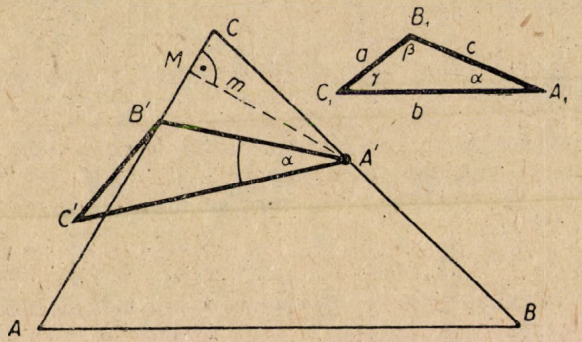
Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC.

11. példa. Adva van két háromszög. Írjunk egyikbe a másikhoz hasonló háromszöget úgy, hogy a „belső" háromszög egyik csúcsa a „külső" háromszög kerületének előre megadott pontjára essék.

Megoldás. Szerkesszünk az adott A' pont és az AC oldal tetszőleges B' pontja meghatározta szakaszra az adott $A_1B_1C_1\Delta$-gel hasonlót (például az eredetivel megegyező körüljárással), és keressük a C' pontok mértani helyét. B'-ből C'-be eljuthatunk úgy, hogy az $A'B'$ szakaszt A' körül elforgatjuk α szöggel és meg-

nyújtjuk $\frac{b}{c}$-szeresére. Ha ezt az AC egyenes minden pontjával megtesszük, megint egyenest kapunk. Ezt az egyenest megszerkeszthetjük például úgy, hogy az A'-ből AC-re bocsátott $A'M$ merőleges szakaszt forgatjuk el α szöggel és nyújtjuk meg $\frac{b}{c}$-szeresére. Így megkapjuk a C' pontok mértani helyét. Ha ez metszi AB-t, akkor metszéspontjuk a keresett második csúcspont lesz, amelynek alapján a háromszög már könnyen megszerkeszthető. Ha nem metszi, akkor a csúcsok ilyen elhelyezkedésének megfelelő megoldása nincs a feladatnak.

Reményi Gusztáv



27. ábra

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC, CZAPÁRY ENDRE.

13. példa. Milyen háromoldalú *a*) csonkagúlák köré, *b*) csonkagúlákba lehet gömböt írni. (Egy gömbről akkor mondjuk, hogy egy poliéder köré írtuk, ha a poliéder minden csúcsa a gömbön van, és akkor mondjuk, hogy egy poliéderbe írtuk, ha a poliéder minden lapja érinti a gömböt.)

Megoldás. a) Tegyük fel, hogy az $ABCA_1B_1C_1$ háromoldalú csonkagúla köré sikerült gömböt írni. Felhasználjuk azt a gömb szimmetriájából folyó tényt, hogy a gömb középpontján át fektetett bármely sík felezi a gömbnek e síkra merőleges húrjait. Fektessünk például az AB és a vele párhuzamos A_1B_1 élre merőleges síkot a gömb középpontján át. Ez a sík a mondottak szerint felezi AB-t és A_1B_1-et is, és így az ABB_1A_1 trapézt két olyan derékszögű trapézre bontja, amelyek három oldalukban megegyeznek, tehát egybevágók. Ezért $AA_1 = BB_1$. Hasonlóan adódik, hogy CC_1 is ugyanakkora. Tehát ha egy csonkagúla köré gömböt írhatunk, akkor a csonkagúla oldalélei egyenlők.

Ettől azonban még elképzelhető volna, hogy az egyenlő oldalélű csonkagúlák nem mind gömbbe írhatók. Vegyünk ezért egy $ABCA_1B_1C_1$ csonkagúlát, amelyről most kikötjük, hogy $AA_1 = BB_1 = CC_1$, és keressük azt a pontot, amelytől mind a hat csúcs egyenlő távol van. Az ABB_1A_1 egyenlőszárú trapéz síkjára szimmetriatengelyén át fektetett sík minden pontja egyenlő távol van egyrészt A-tól és B-től, másrészt A_1-től és B_1-től. A BCC_1B_1 trapéz síkjára szimmetriatengelyén át fektetett sík minden pontja egyenlő távol van egyrészt B-től és C-től, másrészt B_1-től és C_1-től. E két sík m metszésvonala egyenlő távol van tehát A-tól, B-től és C-től is, és egyenlő (de az előbbitől általában különböző) távolságra van A_1-től, B_1-től és C_1-től is. Az egyik oldalél — például AA_1 — felező merőleges síkja ezt az egyenest a kívánt tulajdonságú O pontban metszi. Metszéspont csak akkor nincs, ha AA_1 merőleges m-re, akkor viszont csonkagúla sincs („síkba lapul").

b) A csonkagúla alapélein átfektetett belső szögfelező síkok minden pontja egyenlő távol van az alaplaptól és a megfelelő oldallaptól. E három szögfelező sík metszéspontja tehát egyenlő távol van az alaplaptól és mindhárom oldallaptól. Hasonlóképpen a fedőéleken átfektetett belső szögfelező síkok metszéspontja egyenlő távol van a fedőlaptól és a három oldallaptól. Beírt gömb akkor és csak akkor van, ha ez a két pont egybeesik, azaz ha az alap- és fedőéleken átfektetett belső szögfelező síkok egyaránt a csonkagúla magasságvonalát merőlegesen felező síkon metszik egymást.

Reményi Gusztáv

Megoldotta még: CZAPÁRY ENDRE.

Kiegészítés b)-hez. A beírt gömb középpontján és az éleken átfektetett síkok a csonkagúlát öt olyan gúlára bontják, amelyeknek magassága egyenlő, és éppen feleakkora, mint a csonkagúláé. Tehát — az alaplap, a fedőlap és a palást területét T-vel, t-vel és P-vel jelölve —

$$\frac{m}{3}(T+\sqrt{Tt}+t)=\frac{m}{6}(T+P+t).$$

Ebből a feltétel ilyen alakban fejezhető ki:

$$\sqrt{P}=\sqrt{T}+\sqrt{t}.$$

Czapáry Endre

14. példa. El lehet-e helyezni *a)* egy gömbben, *b)* egy gömb körül hat egybevágó gömböt úgy, hogy ezek mindegyike érintse az eredeti gömböt és a többi öt gömb közül négyet? Ha lehet, hogyan? Ha nem, miért nem?

Megoldás. *a*) Írjunk egy tetszőleges a élű szabályos oktaéder mindegyik csúcsa mint középpont köré $\frac{a}{2}$ sugárral gömböt. A hat egybevágó gömb nyilván olyan tulajdonságú, hogy mindegyik érint a többi öt gömb közül négyet. Az így nyert gömbök köré rajzolható olyan főgömb, amelynek középpontja az oktaéder középpontjába esik, és mindegyik gömb érinti a főgömböt. A főgömb sugara:

$$R=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}+a)=\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1). \qquad (1)$$

Megfordítva: ha R adott, a meghatározható:

$$a=2R(\sqrt{2}-1). \qquad (2)$$

Adott gömbben tehát mindig elhelyezhető hat egybevágó gömb, amelyek mindegyike érinti az adott gömböt és a többi öt gömb közül négyet: a beírható gömbök középpontjai a (2)-vel kifejezett élű szabályos oktaéder csúcsain helyezkednek el, sugaruk az oktaéder élének fele.

b) A szabályos oktaéder csúcsai köré $\frac{a}{2}$ sugárral rajzolt gömbrendszer belsejébe, az oktaéder középpontja köré szerkeszthető gömb, amelyet mind a hat gömb érint. Ha az oktaéder éle a, akkor a gömb sugara

$$R=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}-a)=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1). \qquad (1)$$

Megfordítva: ha R adott, a meghatározható:

$$a=2R(\sqrt{2}+1). \qquad (2)$$

Adott gömb köré tehát mindig elhelyezhető hat egybevágó gömb, amelyek mindegyike érinti az adott gömböt és a többi öt gömb közül négyet: a körülírható gömbök középpontjai a (2)-vel kifejezett élű szabályos oktaéder csúcsain helyezkednek el, sugaruk az oktaéder élének fele.

Czapáry Endre.

Megoldotta még: SZEMÉLYI KÁLMÁN.

TÁRSULATI ÉLET

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadóülései

1952. október 4. SURÁNYI JÁNOS Az 1952. évi Rákosi Mátyás középiskolai tanulmányi verseny feladatait ismertette. (Középisk. d. u.)

1952. október 4. NEUKOMM GYULA Az 1952. évi Arany Dániel feladatait ismertette. (Középiskolai délután.)

1952. október 9. RÉDEI LÁSZLÓ: A Schreier-féle bővítéselmélet. A Schreier-féle bővítéselméletet csoportok esetére maga Schreier, gyűrűk esetére Everett alapozta meg. Lehetséges az elméletnek bizonyos félcsoportokra, továbbá az u. n. félgyűrűkre való kiterjesztése. Ez a kiterjesztés az előbb nevezett két klasszikus esetnek igen csekély módosításával történik.

1952. október 16. ALEXITS GYÖRGY: Bolyai Jánosról. (Klubest).

1952. október 25. HAJÓS GYÖRGY: A Gauss—Bonnet-féle tétel általánosítása. (L. III. évfolyam 2. szám, 1952. június 21-i debreceni előadás.)

1952. október 30. MOLNÁR JÓZSEF Szempontok a térmértan tanításához. (Pedagógus előadás.)

1952. október 31. TARGONSZKY GYÖRGY: Iterációs sorozatok és sorok konvergenciája.

1. Ha $f'(x)$ a 0 egy környezetében folytonos és $f'(0) \neq 0$, akkor $f(x) = f(0) + \frac{1}{p} \sum_{0}^{\infty} g_n(x)$, ahol $g_n(x) = g[g_{n-1}(x)]$, $g_0(x) = x$. Itt $g(x) = f_{-1}\left[f(x) - \frac{x}{p}\right]$, $|p| > \left|\frac{x}{f(x)-f(0)}\right|$ és $\operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn} f'(0)$.
Pl. $\operatorname{Arc}\sin x = x + g(x) + g_2(x) + \cdots$ ahol $g(x) = x\cos x + \sqrt{1-x^2}\sin x$, ha $-1 < x < 1$.

2. Legyen $p(z)$ tetszőleges analitikus függvény. Legyen $r = r(\varphi)$ csillaggörbe a komplex síkon, mely bezárja a

0-t. Legyen $R[r,\varphi]=|z|e^{-|mp(z)|^n}$. Ekkor $r_1(\varphi)=R[r(\varphi),\varphi]$, $r_2(\varphi)=k[r_1(\varphi),\varphi],\ldots,r_\nu(\varphi)=k[r_{\nu m}(\varphi),\varphi]$ egymásba skatulyázott csillaggörbék egyenletei, mely görbék által bezárt terület 0-hoz tart, de bármekkora ν mellett is $r_\nu(\varphi)$ bezárja $p(t)$-nek $r(\varphi)$ belsejébe eső összes nullahelyeit.

Itt $|mp(z)|<1$, ha $|z|\leqq \max r(\varphi)$ és $n>\dfrac{\log\log\left|\dfrac{z}{\alpha_i}\right|}{\log m|p(z)|}$, ahol $\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k$ $p(z)$-nek $r=r(\varphi)$ belsejébe eső összes nullahelyeit jelenti.

1952. november 15. MOLNÁR JÓZSEF: Mit tudunk a kör négyszögesítésének kérdéséről? (Középiskolai délután.)

1952. november 15. FREUD GÉZA: Egy Tauber-típusú tételről. Legyen $\Sigma a_n x^n$ $|x|<1$ esetén konvergens és ha $x\to 1-0$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S+O[(1-x)^\varepsilon]$, ahol ε tetszőlegesen kis pozitívszám lehet. Ugyanakkor legyen $\lim_{n=\infty}\dfrac{na_n}{\log n}\geqq 0$. Akkor a hatványsor $x=1$-re is konvergál, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

1952. november 20. KONCZ KÁROLY: Véges sorozatok és sorok. (Pedagógustovábbképző előadás.)

1952. november 22. A KÜRSCHÁK-verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A verseny feladatait Hajós György ismerteti.

1952. november 25. SOÓS GYULA ismerteti Janovszkája: Lobacsevszkij haladó eszméiről című művét.

1952. december 6. FEJES-TÓTH LÁSZLÓ: Elhelyezési problémák a síkban. Ismeretes, hogy egymásba nem nyúló, egybevágó körökkel a síknak legfeljebb $100\pi/\sqrt{12}=90{,}69\ldots\%$-a tölthető ki. Az előadó több ehhez hasonló eredményt ismertet, amelyeket az utóbbi időben R. Kershner, H. Hadwiger, K. Mahler, B. Segre, C. A. Rogers, az előadó és mások találtak.

1952. december 13. GALLAI TIBOR: A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriáról. (Középiskolai délután.)

1952. december 13., 14., 15. Konferencia a Közoktatásügyi Minisztériummal, a Pedagógus Szakszervezettel és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben.
Előadások (dec. 13-án):
KÁROLYHÁZI FRIGYES: A foton.

PÁSZTOR ISTVÁN ismertette P. Sz. Alexandrov: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe c. munkáját.

LÉVIUS ERNŐ: Hidrodinamikai áramlási készülékekről. (Bemutatással).

1952. december 14—18. ÜNNEPI ÜLÉSSZAK a Magyar Tudományos Akadémia rendezésében, Bolyai János születésének 150-ik évfordulója alkalmából. (L. Vincze István beszámolóját 5. oldalon.)

1952. december 20. Sztálin elvtárs 73. születésnapja alkalmából ünnepi ülés és klubest.

1. ALEXITS GYÖRGY elnök megnyitó beszéde.

2. Az 1952. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A versenyfeladatokat SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA ismertette.

3. W. RINOW (Greifswald): Die Bestimmung einer Eifläche durch ihre innere Metrik.

4. K. MAHRUN: Mathematische Betrachtungen über die Existenz von Wirbelringen. (Exisztenciális meggondolások örvénygyűrűk mozgásával kapcsolatban.) Ha egy egész teret kitöltő surlódásmentes homogén folyadékot tekintünk, akkor ebben a t_0 időpontban adott síkbeli örvénytér egyértelműen meghatároz tetszőleges hosszú időtartamra egy (szükségszerűen síkbeli) örvénymozgást; tetszőleges (vagyis nem feltétlenül síkbeli) örvénytér esetén hasonlóan általános exisztenciatétel csak „kicsiben", azaz rövid időközökre érvényes. Az előadó kimutatja, hogy egy a t_0 időpillanatban hengerszimmetrikus örvénytér, amely koaxiális örvénygyűrűkből áll, tetszőlegesen hosszú időtartamra meghatározza a folyadék mozgását, ha ebben az időpontban a gyűrűk meridiánmetszetei egybeesnek olyan örvényhengerek keresztmetszeteivel, amelyek egy ismert síkbeli mozgáshoz tartoznak, hacsak az örvénygyűrűk keresztmetszetei elég nagyok. Ebben az esetben a meridiánmetszetben vizsgált hengerszimmetrikus mozgás és az ismert síkmozgás örvénylése tartományai szomszédosak maradnak.

A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi előadóülései

1952. május 19. SZELE TIBOR: Izomorf alcsoportok nélküli csoportok. Előadó a következő tételt bizonyítja: Egy G csoportnak akkor és csakis akkor nincsen két egymástól különböző izomorf alcsoportja, ha G izomorf az összes komplex egységgyökök csoportjának valamely alcsoportjával.

1952. október 4. RÉDEI LÁSZLÓ: A Waring-képlet új bizonyításai. Előadó a Waring-féle képletnek egy tisztán algebrai úton való rövid, jól áttekinthető bizonyítását adta.

1952. október 25. SZELE TIBOR: Endomorfizmus-gyűrűk centruma. Bebizonyítja az előadó, hogy bármely (additive írt) Abel-féle csoport endomorfizmusgyűrűjének centruma éppen az $x \to \alpha x$ endomorfizmusokból áll, ahol α egy tetszőleges p-adikus szám. Hasonló egyszerűséggel írható le, az Abel-féle torziócsoportok endomorfizmusgyűrűjének centruma.

1952. október 25. KERTÉSZ ANDOR: Abel-féle csoportok endomorf képei.
Előadó az olyan Abel-féle csoportokat vizsgálja, amelyek bármely alcsoportja egyúttal homomorf képe is a csoportnak és meghatározza mindazokat az Abel-féle csoportokat, amelyekben ez a követelmény minden végesen generált alcsoportra teljesül.

1952. november 3. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Matematikai élet a Német Demokratikus Köztársaságban.
Beszámoló a Német Demokratikus Köztársaságban tett tanulmányútjáról.

1952. november 15. SZÁSZ GÁBOR: Szemimoduláris hálók (lattice-ek) szerkezetéről.
Az előadó ismerteti a „lattice"-elmélet fontosabb definicióit és néhány lényeges tételét. Majd, egy már ismert tétel általánosításaként kimutatja a következőt: ha egy szemimoduláris háló valamely $a<b$ elempárja között található egy véges maximális lánc, akkor minden más a és b közötti lánc is véges. Végül megemlíti ennek a tételnek következményét, a szemimoduláris hálók pontjainak a számára vonatkozólag.
Megjegyzés: a Magyar Tudományos Akadémia a „lattice" szó magyar megfelelőjéül a „háló" kifejezést állapította meg.

1952. december 6. STEINFELD OTTÓ: Gyűrűk zérusosztómentességéről.
Az előadó a következő tételt bizonyítja be: Az R gyűrű $\mathfrak{a}(\neq 0)$ zérusosztómentes ideáljának $\mathfrak{b}$ annulláló ideáljára érvényesek a következő állítások: $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$, $R/\mathfrak{b}$ faktorgyűrű zérusosztómentes (azaz $\mathfrak{b}$ prímideál), és ideálként tartalmaz egy $\mathfrak{a}$-val izomorf részgyűrűt.
Az R gyűrű zérusosztómentességéhez elegendő, hogy R egy $\mathfrak{a}$ zérusosztómentes ideáljának legyen egy $\alpha(\neq 0, \in \mathfrak{a})$ eleme, mely nem jobboldali zérusosztó R-ben.

A fenti eredményeknek a Schreier-féle gyűrűbővítésre való alkalmazásával kimutatja az előadó Szendrei Jánosnak a Schreier-féle bővítési gyűrű zérusosztómentességére vonatkozó tételét.

Bolyai János Matematikai Társulat debreceni előadóülései

1952. szeptember 29. FÉNYES IMRE: Megjegyzések Neumann Jánosnak a kvantummechanika matematikai alapjairól szóló munkáihoz.

Előadó ismertette Neumannak a rejtett paraméterek lehetetlenségére és több fizikai mennyiség egyidejű mérésére vonatkozó vizsgálatait. Ehhez kapcsolódva beszámolt saját folyamatban lévő vizsgálatairól, amelyek szerint a rejtett paraméter fogalmának Neumann-szerinti értelmezése túl erős megszorítást tartalmaz, így a kvantummechanikában mégsem kell lehetetlennek tekintenünk esetleges rejtett paraméterek exisztenciáját. A diffúzió elmélete, de a termodinamika is rendelkezik rejtett paraméterekkel, holott a Neumann-féle definíció szerint itt sem volna lehetséges. Végül azt a kérdést tárgyalta, hogy mit jelent a mérések lehetősége és a valószínűségi interpetáció szempontjából az a körülmény, hogy a kvantummechanika bizonyos valós értékű fizikai mennyiségekhez komplex értékű függvényeket rendel.

1952. október 7. RÉDEI LÁSZLÓ: Determinánsosztók.

Az elemi osztók elméletének ismert következménye egy oszthatósági kapcsolat az euklideszi gyűrűk elemeiből felépülő matrixok determinánsosztói között. Ezt Steinitz és mások Dedekind-féle gyűrűkre is kiterjesztették, tetszőleges kommutatív gyűrűkre azonban, csupán egységelem létezését tételezve fel, az elemi osztók elmélete nem vihető át. Előadó bebizonyítja, hogy az általános esetben is érvényes egy olyan tétel, amely az említett oszthatósági kapcsolat ideálelméleti megfelelőjének tekinthető.

1952. november 10. RAPCSÁK ANDRÁS: Az integrál értelmezése általános limesfogalommal.

Előadó ismerteti a Moore—Smith-féle általános limesfogalmat s ezt metrikus terekre alkalmazza. Ennek alapján a Riemann integrált, mint $\Sigma f(x_i)\delta_i(\alpha)$ Moore—Smith limesét lehet értelmezni, ahol α egy tetszőleges beosztás. Az integrálfogalom ilyen bevezetése mellett igen sok hosszadalmasabb bizonyítást lehet mellőzni.

1952. október 11. MOÓR ARTHUR: Finsler-féle terek algebrikus alapfüggvénnyel.

Az előadás azon Finsler-terekkel foglalkozott, melyek alapfüggvénye

$$F = \sqrt[4]{a_{ijkl}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k\dot{x}^l}$$

alakú. A megadott típusú Finsler-tér differenciálinvariánsai kapcsolatba hozhatók az alapforma algebrai invariánsaival. Ugyancsak a megadott típusú Finsler-terek ekvivalencia feltételei jellemezhetők az alapforma algebrai invariánsaival. Ezen Finsler-terek jellegét tehát bizonyos differenciálvariánsokon kívül az algebrai invariánsok is meghatározzák.

1952. december 5. ACZÉL JÁNOS: Összetett Poisson valószínűségi eloszlás.

Előadó ismertette Rényi A., Jánossy L., Prékopa A. és saját kutatásait az összetett Poisson-eloszlás kérdéskörére vonatkozóan. Függvényegyenletek segítségével az inhomogén esetben explicit képletet ad annak valószínűségére, hogy egy esemény két adott időpont között n-szer következzék be. Foglalkozott a homogén és ritka folyamatokkal, valamint A. N. Kolmogorovnak az összetett Poisson-eloszlásnak egyszerűekből való felépíthetőségére vonatkozó megjegyzésének bizonyításával az inhomogén esetben is. Az előadás bevezetésében a valószínűségszámítás alapfogalmait minőségellenőrzési példákon mutatta be.

Bolyai János Matematikai Társulat miskolci előadóülései

1952. szeptember 22. ACZÉL JÁNOS: A Poisson-eloszlás problémaköre. (L. 1952. december 5-i debreceni előadás.)

Évadnyitó konferencia:

1952. október 6. SÁLYI ISTVÁN: A matematika helye a mérnökképzésben.

BÉDA GYULA: Forgó gém által szállított teher pályájának meghatározása.

NAGY SAROLTA: A számfogalom kialakítása az általános iskolában.

1952. október 7. TARJÁN REZSŐ: Műszaki gyakorlat és matematika.

KOZARÓCZY MIKLÓS: Kardántengelyek szögsebesség változásának számítása vektoriális módszerekkel.

VÁGHÓ ILDIKÓ: A Legendre-tétel alkalmazási körének megállapítása.

BEJNA FERENC: Felületek vizsgálata a nomogramm szerkesztés szempontjából.

1952. október 9. MÓRICZ ISTVÁN: Beszámoló a Közoktatásügyi Minisztérium matematikai oktatásról szóló konferenciájáról.
SZABÓ JENŐ: Szakkörök munkája.
PARAI GUSZTÁV: Szerkesztések.

1952. december 10. NIKODÉMUSZ ANTAL: Riemann-terek felépítéséről.
Az euklideszi-teret általánosítva levezette a Riemann-tér tulajdonságait. Értelmezte az invariáns differenciált, a párhuzamos eltolást és a tér görbületét. Az elmondottakra egy példát mutatott be.

Bolyai János Matematikai Társulat veszprémi előadóülései

1952. október 28. FEJES-TÓTH LÁSZLÓ: Elhelyezési problémák a síkban.
Az előadó megjelenőben lévő „Elhelyezési problémák a síkban és a gömbfelületen" c. könyvét ismertette.

1952. december 3. VARGA DEZSŐ: Egyenletek közelítő megoldása. Előadó ismertetett néhány egyszerűbb eljárást egyenletek gyökeinek közelítő meghatározására. (Horner elrendezés; regula falsi; Newton módszere.)

1952. december 11. BEREND IVÁN: Bolyai János élete és munkássága.

Bolyai János Matematikai Társulat győri előadóülései

1952. február 13. DUSNOKI ISTVÁN és SCHAUB LÁSZLÓ: A matematika fejlődése.

1952. április 30. DUX ERIK: A sorelmélet összefoglaló áttekintése.

1952. május 14. VERMES MIKLÓS: Aerodinamika.
(Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben.)

1952. szeptember 24. SZŰSZ PÉTER: Elemi geometriai szélsőérték feladatok.

1952. október 22. MIKOLÁS MIKLÓS: Az integrálfogalom fejlődése. I. rész.

1952. november 29. KÁRTESZI FERENC: Bolyai János életéről és munkásságáról.
Ünnepi előadóülés.

Bolyai János Matematikai Társulat soproni előadóülései

1952. október 25. VINCZE ISTVÁN: A valószínűségszámítás alkalmazása az ipari minőségellenőrzés terén.
A valószínűségszámítás fejlődésének rövid áttekintése; az orosz és szovjet valószínűségszámítási iskola. A valószínűségszámítás tárgya, a valószínűség fogalma, ideológiai vonatkozások. Alkalmazás a tömeggyártásban folyamatos (gyártásközbeni) és végellenőrzésnél.
1952. december 15. VÁRKUTI JÁNOS: Bolyai Jánosról.

Bolyai János Matematikai Társulat szolnoki előadóüléséről

1952. november 16. KÁRTESZI FERENC: Bolyai János életéről és munkásságáról.
Alakuló ülés.

Egyéb vidéki előadások

1952. szeptember 28. Pedagógusnap Békéscsabán a Közoktatásügyi Minisztériummal közös rendezésben.
HÓDI ENDRE: Véges sorozatok és sorok.
SZÁSZ GÁBOR: Szélsőérték feladatok elemi megoldása.
1952. december 7. Pedagógustovábbképző előadások Szombathelyen a Közoktatásügyi Minisztériummal közös rendezésben.
HÓDI ENDRE: Térmértani feladatok megoldása.
VARGA TAMÁS: Egyenlőtlenségek.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Külföldi hírek

Szovjetunió

1952 június 24-én tartotta a Moszkvai Matematikai Társulat évi közgyűlését. A közgyűlés megválasztotta a Társulat új vezetőségét, amelynek személyi összetétele a következő:

Elnök: P. Sz. Alexandrov.
Alelnökök: A. N. Kolmogorov és L. N. Szretenszkij.
Titkár: O. N. Golovin.
Könyvtáros: Sz. P. Finikov.
Pénztáros: O. A. Oleinik.
Az elnökség tagjai: A. O. Gelfold, A. G. Kuros, A. I. Markusevics, V. V. Nyemückij, I. G. Petrovszkij, G. F. Rübkin, Sz. A. Janovszkája.

1952 május 20-án ünnepelte meg a Moszkvai Matematikai Társulat a moszkvai egyetem matematikai és mechanikai karának tudományos tanácsával karöltve D. E. Mensov, a kiváló szovjet matematikus 60-ik születésnapját. Az ünnepi ülésen N. K. Bari, A. N. Kolmogorov és M. A. Lavrentyev tartottak előadásokat D. E. Mensovnak a trigonometriai sorok, a valós- és a komplex függvénytan terén elért eredményeiről, P. Sz. Alexandrov pedig D. E. Mensov életét és munkásságát ismertette.

Német Demokratikus Köztársaság

A berlini Humboldt egyetem újjáépített Matematikai Intézetének megnyitása alkalmából 1953 január 14—18-ig matematikai kongresszust rendezett. A kongresszus megnyitó ünnepélyén az intézet igazgatójának, H. Grell professzornak megnyitó szavai után K. Schröder, a Német Tudományos Akadémia tagja tartott előadást „A matematika jelentősége az exakt természettudományok és a technika számára" címmel.

A kongresszus első napján matematikai-logikai előadásokat tartottak. K. Schröder professzor, a matematikai-logikai tanszék vezetője, „Matematikai következtetés elmélete" címmel adott elő.

A második nap témája az algebra volt. Előadott többek között L. Kaloujnin (Berlin) és R. Kochendörffer (Rostock).

A harmadik napon számelméleti és geometriai előadások hangzottak el, többek között E. Kähler (Leipzig) és E. Ulrich (Giessen, Nyugat-Németország) előadásai.

A negyedik napon alkalmazott matematikai tárgyú előadások kerültek sorra, így többek között, J. Lehmann (Dresden) matematikai gépekről szóló előadása és O. Emersleben (Berlin) előadása az Epstein-féle zéta-függvények alkalmazásáról a kristálytanban.

Az utolsó nap tárgyköre az analízis volt. Elhangzott többek között W. Rinow (Greifswald), valamint E. Köthe (Mainz, Nyugat-Németország) előadása.

A kongresszuson több népi demokratikus ország küldötte is részt vett: a Lengyel Népköztársaságból K. Kuratowski és S. Turski, a Csehszlovák Népköztársaságból V. Jarnik és K. Novak, a Bulgár Népköztársaságból N. Obreskov vettek részt a kongresszuson és tartottak előadásokat. Hazánkat Rédei László és Rényi Alfréd képviselték; Rédei László „Teljes ideálgyűrűk általános értelemben" és „Quadratikus számtest és a Pell-egyenletek elmélete" címmel, Rényi Alfréd „Egy új módszer a rendezett minták elméletében" címmel tartott előadást.

A berlini matematikusok nagy vendégszeretettel fogadták a baráti államoknak a kongresszuson résztvevő küldötteit, valamint nyugatnémetországi kollegáikat. A külföldi vendégek megtekintették az újjászülető Berlin nagyszabású épitkezéseit is. A kongresszus alatt a részvevők között termékeny tudományos együttműködés alakult ki. Ez a kongresszus jelentős állomás volt a Német Demokratikus Köztársaság fejlődő matematikai életében.

Román Népköztársaság

A Román Népköztársaság Tudományos Akadémiája 1948 őszén alakult újjá. A matematikai-fizikai osztály tagjai: D. Pompeiu, S. Stoilov, Gr. Moisil, A. Miller, S. Sanielevici, C. Popovici rendes tagok és T. Popoviciu, M. Haimovici, M. Niculescu és A. Ghika levelező tagok.

Az 1952. év folyamán állami díjat kapott C. Jacob, professzor (I. fokozat, 25,000 lei) „Bevezetés a hidrodinamika matematikai elméletébe" c. könyvéért, valamint a jassy-i egyetem egy munkaközössége (II. fokozat, 15,000 lei) egy analitikus-geometriai egyetemi tankönyv megírásáért.

Hazai hírek

A Magyar Népköztársaság Minisztertanácsának határozata szerint 1953-ban a matematika terén elért eredményeikért a következők kaptak Kossuth-díjat:

Ötvenezer forintos Kossuth-díjat kapott

Riesz Frigyes akadémikus, a matematika egész legújabb fejlődését befolyásoló alapvető eredményeiért, amelyek a Szőkefalvi-Nagy

Béla akadémiai levelezőtaggal együtt írt „Leçons d'analyse fonctionelle" című műben nyertek összefoglalást.

Huszezerforintos Kossuth-díjat kapott

Egerváry Jenő akadémikus, a differenciálegyenletek elméletében elért eredményeiért és ezeknek műszaki alkalmazásáért;

Szőkefalvi-Nagy Béla az Akadémia levelezőtagja, a „Leçons d'analyse fonctionelle" című mű II. részében foglalt új eredményeiért.

Tizezerforintos Kossuth-díjat kapott

Fuchs László egyetemi docens, az algebrai struktúrák elmélete terén elért újabb eredményeiért;

Huszka Ernőné, a VI. kerületi Varga Katalin-gimnázium matematika-fizika szakos tanára, kiváló szaktanári és elméleti munkájáért, valamint a gyakorló tanárjelöltek oktatása és nevelése terén végzett eredményes munkájáért. *

A Népköztársaság Elnöki Tanácsa hazánk felszabadulásának 8. évfordulója, április 4. napja alkalmából

Fejér Lipót Kossuth-díjas akadémikusnak a Munka Vörös Zászló Érdemrendjét adományozta.

Társulatunk tagsága meleg szeretettel üdvözli a kitüntetetteket és további sikereket kíván munkásságukhoz.

A Magyar Tudományos Akadémia rendes- és levelező tagjain kívül eddig a következők kaptak tudományok doktora, ill. kandidátusa fokozatot, matematikából.

Doktorok: Detre László, Fejes-Tóth László, Goldziher Károly, Péter Rózsa, Szele Tibor.

Kandidátusok: Aczél János, Bálint Elemér, Császár Ákos, Fenyő István, Földes István, Fuchs László, Gallai Tibor, Gyires Béla, Huszár Géza, Kárteszi Ferenc, Makai Endre, Surányi János, Szász Pál, Szentmártony Tibor, Szép Jenő, Vincze István.

Ez év első felében jelentek meg először a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, amelynek első kötete az intézet tudományos munkájának számos eredményét tartalmazó 28 dolgozatot foglal magában.

A Közoktatásügyi Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat karöltve új folyóiratot indít meg „A matematika tanítása" címmel. A folyóirat célja pedagógiai módszerek ismertetése, valamint a matematikai tanárok továbbképzése.

Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat kiadásában V. V. Sztyepanov „A differenciálegyenletek tankönyve". Ára 56,50 Ft.

* Ezévi Kossuth-díjasaink munkásságának ismertetésére lapunk következő számában vissza fogunk térni.

Ugyancsak az Akadémiai Kiadó kiadásában jelent meg Sz. G. Michlin: Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira. (Ára 60,— Ft.)

A Művelt Nép Könyvkiadó kiadásában megjelent a Használd a matematikát c. könyv (ára 14,50 Ft). Szerzője a Bolyai János Matematikai Társulat Népszerűsítő Bizottsága.

Megjelent az Akadémiai Kiadó kiadásában az „I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei", amely az 1950 augusztus 28—szeptember 3-ig tartott I. Magyar Matematikus Kongresszuson elhangzott előadásokat tartalmazza.

A Társulat az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal nagysikerű kirándulást rendezett Leányfalura. A különböző műsorszámok közül kiemelkedett a matematikusok és fizikusok válogatott football-csapatainak mérkőzése, melyet a matematikusok 5:3 arányban nyertek meg.

Riesz Frigyes—Szőkefalvi-Nagy Béla: Leçons d'analyse fonctionelle

Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952. VIII + 448 oldal

Írta: Császár Ákos

A funkcionálanalízis rövid multja alatt máris a matematika olyan ágának bizonyult, amelynek igen fontos alkalmazásai vannak nemcsak magában a matematikában, hanem a fizika bizonyos ágaiban is. Ennek tulajdonítható, hogy az ezen tárgyról szóló monográfiák megjelenése a szorosabb értelemben vett szakembereken kívül valamennyi matematikusnak és fizikusnak érdeklődését is felkelti. A jelen munka megjelenésekor ez az érdeklődés még inkább indokolt, hiszen a szerzők közül az egyik ezen tudományág megteremtésében döntő szerepet vitt, a másik pedig már kitűnő összefoglalásban számolt be egyszer az idevágó eredmények egyrészéről.

Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla könyvében a funkcionálanalízis módszereinek és eredményeinek tanulmányozását nagymértékben megkönnyíti az a körülmény, hogy a valós függvénytannak a későbbiekben felhasznált fogalmai, elsősorban a Lebesgue-féle és a Stieltjes-féle integrál és ennek általánosításai három fejezet tárgyát alkotják, amelyek így bevezetésül szolgálnak a tulajdonképpeni funkcionálanalízissel foglalkozó további fejezetekhez. Ezeknek a bevezető fejezeteknek különös értéket nyujt az a körülmény, hogy ezekben a szerzők egyike részletes kidolgozását adja a Lebesgue-integrál bevezetésére szolgáló módszerének, amelyet előadásaiban régóta használ s amelyet néhány éve egy előadásban már vázolt.

Az első fejezet van der Waerdennek seholsem differenciálható folytonos függvényre vonatkozó példája után a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságára vonatkozó Lebesgue-féle tételnek Riesz-féle bizonyításával kezdődik. Ennek többé-kevésbbé közvetlen következményei gyanánt adódik azután Fubininak a monoton tagú sorok differenciálására vonatkozó tétele, Lebesgue tétele a lineáris halmazok külső sűrűségi pontjairól, a szélső deriváltakra vonatkozó Denjoy—Young—Saks-féle tétel, végül az intervallumfüggvények Burkill-féle integráljának elmélete és alkalmazásai.

A második fejezetben mindenekelőtt a Lebesgue-féle integrál elméletét találjuk, amelyet a már előbb említett Riesz-féle módszerrel vezet be a könyv. Ennek a módszernek alapgondolata abban áll, hogy az integrált először a lépcsősfüggvények osztályára értelmezi elemi módon, majd az értelmezést határátmenettel kiterjeszti azon függvényekre, amelyek lépcsősfüggvények majdnem mindenütt konvergens monoton sorozatának határfüggvényeként állíthatók elő, majd végül az utóbbi típusú függvények különbségeként előállítható függvényekre az additivitás segítségével végzi el a kiterjesztést. Könnyen nyerhetők e definíció alapján az integrál formális tulajdonságai, a sorozatok integrálására vonatkozó tételek, továbbá a Schwarz, Hölder és Minkowski-féle egyenlőtlenségek Ezután kerül sor a mérhető halmaz fogalmára, mint olyan halmazra, amelynek karakterisztikus függvénye integrálható, majd a mérhető függvény fogalmára, mint olyan függvényre, amely integrálható függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatának határfüggvénye. Az elmélet kifejtése a hatá-

rozatlan integrálra vonatkozó tételekkel, valamint a parciális és a helyettesítéssel való integrálás szabályával végződik.

A Lebesgue-integrál fogalmának közvetlen alkalmazásaként az L^2 függvénytér alapvető tulajdonságainak tárgyalását találjuk, többek között a Riesz—Fischer-féle tételt, az L^2 tér lineáris operációiról szóló tételt, az ortonormális sorozatok tulajdonságait, az egymásra ortogonális terekre való felbontást, stb. További alkalmazásokat szolgáltatnak az L^p függvényterek.

A többváltozós függvények Lebesgue-integráljára vonatkozó legtöbb kérdés vissza van vezetve egy átviteli elv segítségével az egyváltozós Lebesgue-integrálra vonatkozó megfelelő kérdésre. Végül áttekintést kapunk a Lebesgue-integrál elméletének felépítésére szolgáló egyéb módszerekről.

A harmadik fejezet a Stieltjes—Riemann-integrál elméletével és a folytonos függvények által alkotott C függvénytér lineáris operációinak előállítására való alkalmazásával kezdődik, majd áttér a Stieltjes-integrál különféle általánosításaira, elsősorban a Stieltjes—Lebesgue-féle integrálra és a Daniell-féle integrálra.

Ezen bevezető fejezetek után a negyedik fejezet az

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x)$$

alakú integrálegyenletek elméletét tárgyalja, ahol a $K(x, y)$ magról feltesszük, hogy négyzetesen integrálható. Annak megállapítása után, hogy az ilyen mag az L^2 térben korlátos lineáris transzformációt létesít, az ilyen transzformációk alapvető sajátságait tanulmányozzuk. Ezeknek segítségével a megoldások létezését illetően a Fredholm-féle alternatíva fennállását mutatja ki a könyv, mégpedig több módszerrel is. Ezek közül különösen fontos a Schmidt-féle, amely a magnak véges rangú magokkal való approximációján alapszik, továbbá a teljesen folytonos transzformáció fogalmára alapított Riesz-féle módszer. Befejezésül néhány potenciálelméleti alkalmazást találunk.

Az ötödik fejezetben találjuk az absztrakt Hilbert-tér és a Banach-tér definícióját, s az előző fejezet módszereit az $(I-K)f=g$ függvényegyenlet tanulmányozására használjuk fel, ahol I az identitástranszformációt, K pedig teljesen folytonos transzformációt jelent. Ezeknek ismét több alkalmazását találjuk, többek között Paley és Wiener egy tételének Szőkefalvi-Nagy Bélától származó bizonyítását.

A következő fejezetben az egyre általánosabb típusú lineáris transzformációk spektrálelőállításának problémáját ismerjük meg. Ezek közül először is a hatodik fejezetben a Hilbert-tér szimmetrikus, teljesen folytonos transzformációinak spektrálfelbontásával ismerkedünk meg. Ezt a felbontást azután a szimmetrikus magú integrálegyenletek elméletére, a rezgő húr problémájára s a majdnem periódikus függvények főtételének bebizonyítására látjuk alkalmazva.

A hetedik fejezet mindenekelőtt a Hilbert-tér korlátos szimmetrikus transzformációinak alaptulajdonságaival, köztük a projekciókkal foglalkozik. Ezután kerül sor az ilyen transzformációk $u(A)$ függvényeinek értelmezésére, mégpedig először abban az esetben, amikor $u(\lambda)$ polinom, ilyenkor a definíció kézenfekvő, majd pedig félig folytonos $u(\lambda)$ függvény esetében határátmenet útján. E fogalom segítségével jutunk el az A transzformáció $\{E_\lambda\}$ spektrális seregének a fogalmához és az

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda$$

és

$$u(A) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, dE_\lambda.$$

spektrális felbontásokhoz. A spektrális felbontásnak ezen Riesz Frigyestől származó bizonyítása mellett megismerkedünk egy másik, Szőkefalvi-Nagy Bélától származó bizonyítással is. Ezután következik az unitér és a korlátos normális transzformációk spektrálelőállítása.

A nyolcadik fejezet a Hilbert-tér nemkorlátos lineáris transzformációinak értelmezésével és alaptulajdonságaik ismertetésével kezdődik. A nemkorlátos önadjungált transzformációk spektrális felbontására a Riesz—Lorch-féle és a Neumann-féle bizonyításokat ismerjük meg. Ezután a nemkorlátos szimmetrikus transzformációk kiterjesztésének problémájára kerül sor, többek között Neumann, Friedrichs és Krejn eredményeire.

A kilencedik fejezetben találjuk az önadjungált A transzformációk $u(A)$ függvényeinek értelmezését és vizsgálatát. Mind a definíciókban, mind a bizonyításokban alapvető szerepet játszik itt a spektrális felbontás. Kritériumokat találunk itt arra nézve, hogy valamely transzformáció függvénye-e egy másik transzformációnak, s hogy a transzformációk egy osztálya előállítható-e egyetlen transzformáció függvényeként. A fejezet második része az önadjungált transzformációk spektrumát tanulmányozza s különösen a spektrum perturbációjának elméletét, elsősorban Rellich és Szőkefalvi-Nagy Béla eredményeit tartalmazza.

A tizedik fejezet az unitér transzformációk csoportjainak (Stone) és az önadjungált transzformációk félcsoportjainak (Szőkefalvi-Nagy Béla) kanonikus spektrálelőállítását tárgyalja, majd pedig az ergodikus elmélet körébe vágó alkalmazásokat nyujt.

Végül a Hilbert-tér és a Banach-tér nem-normális transzformációinak spektrális elméletébe nyerünk bepillantást. Riesz Frigyesnek komplex függvénytani segédeszközöket felhasználó módszere mellett megismerjük Neumann legújabb vizsgálatait, amelyek a spektrális halmaz fogalmával kapcsolatosak. Itt is találunk érdekes alkalmazásokat.

Amint az ebből a rövid áttekintésből is kitűnik, a tárgyalt anyag felépítése fokozatos; a könyv először a könnyebben kezelhető speciális fogalmakkal ismertet meg s azután tér át a különféle általánosításokra. Az okoskodások megfogalmazása tömör, de eléggé részletes ahhoz, hogy nehézség nélkül követhető legyen (néhány inkább vázlatszerű részt kivéve).

Azt hisszük, hogy a kiváló szerzőknek ez a kitűnő munkája minden matematikusnál meleg fogadtatásra talál.

TAGNÉVSOR

Az alábbiakban közöljük a Bolyai János Matematikai Társulat budapesti tagjai névsorának egy részét. Kérjük Tagtársainkat, hogy amennyiben belépésük óta lakáscímükben, vagy beosztásukban változás történt, szíveskedjenek azt a Társulat központjával (V. Reáltanoda u. 13—15.) közölni. A következő számokban folytatólagosan közölni fogjuk a Társulat vidéki tagjainak névsorát.

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti tagjai:

1.	Ajtonyi Erzsébet	középisk. tanár	IX. Lónyai-u. 46.
2.	Alexanderné Vértes Edit	„	XII. Margaréta-u. 15.
3.	Alexits György	műegy. tanár	III. Mat. Tsz. Műegyetem
4.	Aujeszki László	egy. tanár	II. Bogár-u. 6.
5.	Ács Pál	főisk. hallg.	Reviczky-u. 3.
6.	Ádám Manó	középisk. tanár	Erzsébet királyné-út 1/a.
7.	Ákos L. Lászlóné	tanársegéd	Hernád-u. 40.
8.	Antal Árpád	középisk. tanár	XIX. Kende Kanuth-u. 65.
9.	Bajcsay Pál	műegy. tanársegéd	Ostrom-u. 10.
10.	Balázs László	főisk. hallg.	Kürt-u. 6.
11.	Balázs János	szaktitkár	Akadémia III. osztály
12.	Balassa Lóránt né	középisk. tanár	Molnár-u. 27.
13.	Balatoni Antalné	K. M. főelőadó	Szt. István park 23.
14.	Balogh József	mérnök	Márvány-u. 46.
15.	Barna Jenő	középisk. tanár	Rudas László-út 57.
16.	Barra György	„	Kékgolyó-u. 30.
17.	Bács Jenőné	„	Vaskapu-u. 1/b.
18.	Bálint Elemér	műegy. tanár	Endresz György-tér 1.
19.	Bánhegyi Zoltán	középisk. tanár	Kristóf-tér 4.
20.	Bárány Sándor	„	Práter-u. 59.
21.	Beleznay Andor	„	VIII. Baross-u. 116.
22.	Bencze László	„	XIII. Csáky-u. 35/a.
23.	Bendáné Szabó Mária	„	V. Molnár-u. 5.
24.	Bernoiák Kálmán	„	Rippl-Rónai-u. 13.
25.	Bihari Imre	„	V. Bank-u. 6.
26.	Biró Béláné	„	Delej-u. 38.
27.	Biró Imre	műegy. adjunktus	V. Váci-u. 12.
28.	Bizám György	fordító	XIII. Pozsonyi-út 20.
29.	Bacskay Zoltán	főisk. tanár	VIII. József-krt. 86.
30.	Bognár László	tud. kutató	Vecsés, Könyök-u. 4.
31.	Bognár Mátyás	aspiráns	II. Kavics-u. 1.
32.	Bognár Zoltán	főisk. hallg.	V. Mária Valéria-u. 3.
33.	Bolla Józsefné	középisk. tanár	II. Cimbalom-u. 19.
34.	Bordák János	főisk. hallg.	Kürt-u. 6.
35.	Boros Anna	„	V. Veres Pálné-u. 40.
36.	Buti Ernő	K. M. előadó	XI. Verpeléti-u. 14.
37.	Csaba Magdolna	főisk. hallg.	IX. Gönczi Pál-u. 4.

38.	Csank Lajos	tanársegéd	Piarista-u. 1.
39.	Császár Ákos	tansz. vez. docens	I. Logody-u. 14.
40.	Császár Ákosné	műegy. adjunktus	„
41.	Csekő Árpád	középisk. tanár	Böszörményi-út 40.
42.	Cser Andor	K. M. főelőadó	V. Szalay-u. 10—14.
43.	Csete Zoltán	főisk. hallg.	VIII. Mária-u. 7.
44.	Csizmás Lajos	orvos	II. Csalogány-u. 26.
45.	Csoma Zsigmond	középisk. tanár	IX. Mester-u. 33—35.
46.	Csonka Pál	műegy. tanár	XI. Bartók B.-út 31.
47.	Czipszer János	egy. hallg.	VI. Szív-u. 14.
48.	Dala László	középisk. tanár	II. Mártírok-útja 62.
49.	Darvasi Jánosné	„	XI. Parádi-u. 3.
50.	Dux Erikné	egy. hallg.	VI. Jókai-tér 8.
51.	Deli Lászlóné	középisk. tanár	VIII. Üllői-út 12.
52.	Deutsch Sándorné	„	Szigetszentm., Árpád-u. 10.
53.	Dezső Lóránt	csillagász	XII. Konkoly-Thege M.-u. 13—17.
54.	Dénes Péter	tud. kutató	XIII. Pozsonyi-u. 14.
55.	Dobó Ferenc	középisk. tanár	XII. Kékgolyó-u. 10.
56.	Domokos Géza	„	Vác, Szt. Miklós-tér 4.
57.	Dukáti Ferenc	„	VIII. Rákóczi-út 27/a.
58.	Egerváry Jenő	műegy. tanár	V. Kecskeméti-u. 4.
59.	Elek Tibor	honvédezredes	V. Honvéd-u. 28—30.
60.	Emődi Éva	docens	XI. Bartók Béla-út 85.
61.	Endrényi János	tanársegéd	V. Régiposta-u. 5.
62.	Erdei Mihály	kutató	VIII. Futó-u. 27.
63.	Erdősi József	tanár	XIII. Csáky-u. 13.
64.	Ereky Vilmos	gépészmérnök	XI. Bartók B.-út 77.
65.	Faragó Tibor	műegy. adjunktus	II. Bimbó-u. 20.
66.	Farkas István	egy. hallg.	VIII. Krudy-u. 11.
67.	Fazekas Ferenc	műegy. adjunktus	V. Kecskeméti-u. 5.
68.	Fazekas József	középisk. tanár	IV. Erkel-u. 7.
69.	Feith Magda	techn. tanár	VIII. Népszínház-u. 8.
70.	Fejér Lipót	egy. tanár	VIII. Rákóczi-út 5.
71.	Feldmann László	műegy. tanársegéd	VI. Csengery-u. 9.
72.	Fenyő István	műegy. tansz. vez. docens	Műegyetem, IV. sz. Tsz.
73.	Fenyvesi Andor	műegy. adjunktus	VI. Székely Bertalan-u. 2/a.
74.	Fiala Albert	Közp. Továbbképző Int. tansz. vez.	VIII. Népszínház-u. 29.
75.	Filárszky Erzsébet	középisk. tanár	XI. Bartók B.-út 39.
76.	Forgó Péterné	„	XIV. Thököly-u. 176.
77.	Földes István	egy. docens	XII. Széchenyi emlékút 4.
78.	Frank Zsuzsanna	egy. tanársegéd	VII. Rózsa Ferenc-u. 7.
79.	Frenyó Lajos	középisk. tanár	VII. Damjanich-u. 40.
80.	Freud Géza	aspiráns	XIV. Dózsa György-út 64.
81.	Frey Tamás	„	V. Szt. István-krt 15.
82.	Fried Ervin	egy. hallg.	VII. Akácfa-u. 54.
83.	Fried Vilmos	mérnök	Légrády K.-u. 15.
84.	Fuchs László	docens	VII. Elemér-u. 41.
85.	Fülöp Béla	ált. isk. igazgató	V. Szalay-u. 10—14.
86.	Gaál Egon	mérnök	Fohászlépcső-u. 8.
87.	Gaál Honora	középisk. tanár	V. Kecskeméti-u. 9.
88.	Gáspár Gyuláné	„	XV. Eötvös-u. 19.
89.	Gallai Tibor	műegy. tanár	XI. Műegyetem, I. M. Tsz.
90.	Gallai Tiborné	„ adjunktus	XI. „ III. M. Tsz.

91.	Gádor Endréné	K. M. főelőadó	II. Pasaréti-út 80.
92.	Gáspár Gyula	Ped. Főisk. tanárs.	IV. Komjáti Aladár-u. 102.
93.	Gedeon Sándor	tud. kutató	VI. Vörösmarty-u. 36.
94.	Gehér László	egy. hallg.	XI. Bocskay-u.
95.	Gehér István	középisk. tanár	„
96.	Gergő Gézáné	műegy. tanársegéd	VI. Szondy-u. 95.
97.	Gémesi József	egy. tanársegéd	Gödöllő
98.	Genczwein Ferenc	főisk. hallg.	Kürti-u. 6.
99.	Glück Vera	tud. kutató	VIII. Rákóczi-út 86.
100.	Godányi Béláné	középisk. tanár	XI. Fadrusz-u. 2.
101.	Goldziher Károly	egy. tanár	III. Hunor-u. 20/a.
102.	Golopencza Illésné	tanár	V. Szabadság-tér 17.
103.	Göndör Tibor	tisztviselő	XI. Budafoki-út 22.
104.	Gyurkó Lajos	tanársegéd	VIII. Kisfaludy-u. 29.
105.	Hallamassek Tivadar	ált. isk. tanár	Sztálinváros M. T. H. 366. sz. isk.
106.	Hajós Géza	ny. középisk. tanár	III. Lukács-u. 1.
107.	Hajós György	egy. tanár	VIII. Rákóczi-út 5.
108.	Halupka János	szaktanító	XX. Maróth-u. 64/b.
109.	Harsányi Éva	főisk. hallg.	II. Ady Endre-u. 10.
110.	Horváth István	középisk. tanár	VIII. Szabóka-u. 52.
111.	Horváth János	„	IX. Üllői-út 97.
112.	Havas Ottó	„	XIII. Kiss József-u. 15.
113.	Hável György	tanár	XI. Fehérvári-út 46.
114.	Hay Erzsébet	egy. hallg.	VIII. Légszesz-u. 6.
115.	Heinisch Rezsőné	középisk. tanár	XV. Andrássy-u. 1.
116.	Hernád Ferencné	„	Sashalom, Bezerédy-u. 11.
117.	Hodászi Gergely	egy. hallg.	VIII. Dankó-u. 11—13.
118.	Hódi Endre	főisk. docens	XVII. Zrínyi-u. 31.
119.	Horvai Katalin	tanársegéd	VIII. Rákóczi-út 5.
120.	Hornyák László	egy. tanársegéd	V. Bajcsy Zsilinszky-út 16.
121.	Horváth Jolán	főisk. hallg.	VII. Bajza-u. 2.
122.	Horváth Dezső	„	Kürt-u. 6.
123.	Horváth János	tanár	V. Szemere-u. 8.
124.	Hunyadi Erzsébet	középisk. tanár	I. Attila-krt 19.
125.	Hursán Pál	tanár	Pestszentlőrinc, Rezeda-u.
126.	Huszár Géza	egy. tanár	Budatétény, Kossuth-u. 24.
127.	Huszka Ernőné	középisk. tanár	XI. Aga-u. 6.
128.	Ispanovich István	„	IX. Tinódi-u. 2/f.
129.	Jaczina László	„	V. Szerb-u. 23.
130.	Jakobi Gyula	tanársegéd	XIV. Lőcsei-út 98/a.
131.	Jánossy Lajos	egy. tanár	XII. Konkoly Thege-u.
132.	Jármai Jánosné	középisk. tanár	VIII. Stróbl A.-u. 7. F.
133.	Jets Eszter	főisk. hallg.	XIV. Hungária krt. 105.
134.	Jeszenszky László	„	Rózsák tere
135.	Jordan Károly	egy. tanár	VIII. József-krt 65.
136.	Jung Jozefin	főisk. hallg.	Kürt-u. 6.
137.	Juhász Lászlóné	középisk. tanár	Vörösmarty-u. 45.
138.	Katona László	tisztviselő	IX. Ráday-u. 63.
139.	Karai Ambrus	főisk. hallg.	XIX. John Ferenc-u. 132.
140.	Kárteszi Ferenc	egy. tanár	VIII. Rákóczi-u. 5.

(Tagjaink névsorának közlését lapunk következő számában folytatjuk.)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

ОГЛАВЛЕНИЕ

Математика в Венгрии в прошлом и сегодня 1
И. Еинце: Торжественная сессия по случаю 150. годовщины со дня рождения Яноша Бояи (14—18 декабря 1952 г.) 5
Б. Сэкефальви-Надь: Позитивные полиномы (2-ое сообщение) 13
Р. Облат: Попытка восстановить одно из доказательств Ферма та . . . 18
Сообщение о присуждении премии в честь памяти Мано Беке 31
Проблемы и решения 34
Задачи 45
Жизнь Общества им. Я. Бояи 63
Известия из математической жизни Венгрии 71
Критика и библиография 75
Члены Общества 78

CONTENTS

Present and past of mathematics in Hungary 1
I. Vincze: Solemn session on the occasion of the 150 th anniversary of the birth of János Bolyai (14 - 18 December 1952) 5
B. Szőkefalvi-Nagy: Positive polynomials (Second part) 13
R. Obláth: An attempt at restoring one of the Fermatian demonstrations 18
Report on awarding the Manó Beke prize 31
Problems 34
Examples 45
Society notes 63
Mathematical and personal news 71
Book review 75
Members of the Society 78

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Ára 7·— Ft.
Előfizetés évi 20·— Ft.

A kiadásért felelős: Mestyán János — Műszaki felelős: Tóth Ferenc
A kézirat beérkezett: 1953. II. 17. — Példányszám: 700 — Terjedelem 5 A/5 ív, 27 ábra

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 53189 — Felelős vezető: Vincze György

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

IV. ÉVFOLYAM

2-3.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1953

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1953. december. IV. évfolyam 2—3. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.
Szerkesztőség: Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó Budapest V. Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.
Felelős kiadó: Mestyán János.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20.— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Megemlékezés Szőkefalvi-Nagy Gyuláról 81
Szőkefalvi-Nagy Gyula: Bolyai János szögharmadolása 84
Kárteszi Ferenc: Két szerkesztési feladat megoldása hiperbolikus síkon . 87
Fuchs László és Szele Tibor: Szovjet eredmények az absztrakt algebra területén 92
Obláth Richárd: Bauer Mihály tétele a geometriai szerkesztésekről 108
Molnár József: Körök elhelyezése gömbön 113
Fazekas Ferenc: Ellipszis-normális szerkesztése, komplex egyenlet alapján 124
Szőkefalvi-Nagy Béla: Az 1952. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny 126
Császár Ákos: A műszaki egyetemek részére rendezett matematikai tanulóverseny 156
Feladatrovat 177
Példarovat 184
Rövidített aspirantúra 194
Társulati élet 196
Matematikai és személyi hírek 234
Könyvismertetés 239

A Bolyai János Matematikai Társulat fájdalommal tudatja, hogy

Szőkefalvi-Nagy Gyula

egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnöke,

1953. évi október hó 14-én Szegeden, hosszas szenvedés után, 66 éves korában elhunyt.

Halála egy rendkívül szorgalmas és eredményes kutatótól fosztotta meg népünk tudományos életét. Áldozatos munkában telt életét a matematikának és tanári hivatásának szentelte. Tudományos és pedagógiai működése mintaszerű volt.

Magasra ívelő pályáját küzdelmes évekkel kezdte. Hat éves volt, mikor édesapja meghalt. Hajlama a szellemi pályához arra ösztönözte, hogy már 12 éves korától kezdve magántanítással és más munkák vállalásával előteremtse magának a tanuláshoz szükséges anyagi előfeltételeket. Küzdelmes körülmények között folytatta és 1905-ben jeles érettségivel fejezte be középiskolai tanulmányait. Ugyanabban az évben a kolozsvári egyetem matematikai és természettudományi karára iratkozott be. Itt is kitűnt kiváló tehetségével. Fejér professzor úgy emlékezik meg róla, mint legagilisabb

és legszorgalmasabb kolozsvári tanítványáról. Egyetemi tanulmányai alatt megkezdett tudományos munkásságát és szorgalmát bizonyítják a különféle jutalmi díjak, 5 ízben megnyert egyetemi pályadíjak és az ösztöndíj, melyek lehetővé tették egyetemi tanulmányainak sikeres elvégzését. 1909-ben fejezte be egyetemi tanulmányait és ugyanebben az évben megszerezte matematikából a doktori címet. 1911-ig mint gimnáziumi tanár működött Privigyén és Csíkszeredán, majd az 1911—12 tanévben, mint magyar állami ösztöndíjas Göttingában folytatta matematikai tanulmányait. Hazatérve Kolozsváron kapott tanári állást. 1915-ben megszerezte a kolozsvári egyetem magántanári címét az algebra és függvénytan tárgykörből. Ugyanekkor a Kolozsvári Marianum magyar nyelvű női felső kereskedelmi iskolának igazgatója is volt, de e nagymértékű elfoglaltsága mellett is állandóan folytatta sikeres tudományos munkásságát. 1926-ban az Eötvös Lóránd Matematikai és Fizikai Társulat eredményekben bővelkedő matematikai munkásságáért König Gyula-jutalommal tüntette ki. Kolozsváron működött 1929-ig, mikoris a szegedi polgári iskolai tanárképző főiskola matematikai tanszékére való kinevezését elfogadta és családjával együtt Szegedre költözött. Itt 1938-ban már mint igazgató működött, majd 1939-ben a szegedi tudományegyetemen a geometriai tanszék nyilvános rendes tanára lett. 1940-ben a kolozsvári egyetemre helyezték át, ott az 1940—41 tanévben a matematikai és természettudományi kar dékánja volt. Kolozsváron intenzíven folytatta tudományos munkáját és emellett számos egyetemi előadását és az intézet igazgatási teendőit is ellátta. Elfoglaltságai mellett nagy gondot fordított a tanárképzésre is. Ebben az időben tartotta a középiskolai, szakiskolai és tanítóképzőintézeti tanárok részére értékes módszertani előadásait, s így komoly, lelkiismeretes munkájával saját középiskolai tapasztalatait felhasználva arra is törekedett, hogy jó tanárokat neveljen. E nagyfokú munkásságában az akkori felsőbb szervek egyáltalán nem támogatták. Ennek ellenére minden óráját és gyakorlatát megtartotta, sőt ebben az időben írta meg és nyomatta ki „A geometriai szerkesztések elmélete" c. könyvét. Valószínűleg ennek a túlhajtott, fáradságot nem kímélő elfoglaltságának lett a következménye az 1943. dec. 13-án bekövetkezett agyvérzése, melynek következtében baloldala megbénult. Kolozsvár polgári kiürítésekor, 1944-ben a klinikáról Dunántúlra vitték, ott egészsége némileg javult, úgy annyira, hogy 1945-ben Szegedre ment és ott az egyetemen a tanári beosztást el tudta vállalni. Előadásait először egyetemi tanteremben, később lakásán rendszeresen megtartotta, míg 1953. okt. 10-én újabb agyvérzés érte, melynek következtében okt. 14-én elhúnyt.

Halálával egy dolgos, fáradhatatlan élet zárult le. Jóformán élete utolsó napjáig — még betegsége alatt is — folyton dolgozott.

Sokoldalú tudományos vizsgálatainak főbb tárgyköre: Juel-féle (végesrendű) geometria, racionális és transzcendens függvények geometriája, a geometriai szerkesztések elmélete, konvex görbék és felületek, görbevonalak topológiája, algebrai görbék és felületek valós és aritmetikai tulajdonságai*. Itthon, ill. külföldön megjelent dolgozatainak száma: 148. A tudományért hozott határtalan áldozatkészsége és kiváló pedagógiai érzéke mellett szeretetreméltó egyénisége volt az, mely közel hozta őt tanítványaihoz, akiknek minden problémáját jól ismerte és ahol módjában volt, segített is az adódott nehézségeken. Ez is hozzájárul ahhoz, hogy hálás tanítványai lelkében nagy szeretet övezze volt tanáruk emlékét.

Eredményes, tudományos és oktatói munkásságának emlékét Társulatunk kegyelettel fogja megőrizni.

* Munkásságának részletesebb méltatására egy későbbi cikkben visszatérünk.

Bolyai János szögharmadolása

Írta: Szőkefalvi-Nagy Gyula

A szögharmadolás, tetszőleges szög három egyenlő részre osztása többezer éves probléma. Már a régi görög matematikusok rájöttek arra, hogy ezt az szerkesztést a vonalzó és körző szokásos használatával, amikor a vonalzót két pont összekötő egyenesének húzására, a körzőt pedig egy pont körül egy (más) ponton átmenő kör leírására használjuk, nem lehet elvégezni. Ennek első bizonyítása azonban nem régi (P. L. Wantzel, Liouville Journal, 2. kötet, 1837, 366. lap), legegyszerűbb bizonyítása pedig E. Landau ifjúkori (21. évének betöltése előtt) teljesítménye[1].

Bolyai János csak pár hónappal volt 17 évnél idősebb, amikor 1820 tavaszán szögharmadolással foglalkozott és a hagyatékában talált egyik cédula szerint a szögharmadolást egyenlőoldalú hiperbola egyik ágának felhasználásával, körzővel és vonalzóval végezte[2]. A szerkesztést megokolás nélkül néhány sorban írta le. Szerkesztését bármely hegyesszög harmadolására lehet alkalmazni, ha a síkban egy egyenlőszárú hiperbolának egyik ága aszimptotáival meg van rajzolva.

Az aszimptotákat derékszögű koordinátarendszer tengelyeinek választjuk és a tengelyek irányát úgy határozzuk meg, hogy a megrajzolt hiperbolaág az első koordinátanegyedbe essék. A hiperbola O középpontjából az x-tengellyel α hegyesszöget alkotó félegyenes a hiperbolaágat egy $C=(a, b)$ pontban metszi. C körül 2. $\overline{OC}=2r$ sugárral leírt kör a hiperbolaágat D és D' pontban metszi. Ha D esik α szögterébe, a CD félegyenes és az x-tengely szögének nagysága $\beta=\frac{\alpha}{3}$.

Ha ugyanis $D=(x, y)$, akkor az egyenlőoldalú hiperbola egyenlete miatt

$$xy-ab=0 \text{ és } x=a+2r\cos\beta, \quad y=b-2r\sin\beta,$$

[1] L. Bieberbach: Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel 1952, 51. és 153. lap.

[2] Lásd Stäckel Pál: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. I. rész: A két Bolyai élete és művei (Radós Ignác fordítása). E könyv a 235. lapon közli Bolyai János cédulája sorait.

tehát

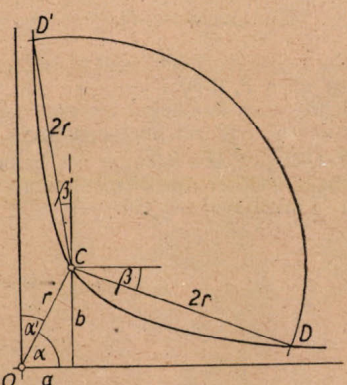
$$xy - ab = (a + 2r\cos\beta)(b - 2r\sin\beta) - ab =$$
$$= 2r(b\cos\beta - a\sin\beta) - 4r^2\sin\beta\cos\beta = 0,$$

vagyis

$$b\cos\beta - a\sin\beta = r\sin 2\beta.$$

De $b = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ és $a = r\cos\alpha$. Ha tehát ezt az egyenletet az $\frac{a}{\cos\alpha} = r$ egyenlőséggel átosztjuk, kapjuk, hogy

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta) = \sin 2\beta \text{ és így } \alpha = 3\beta.$$



Annak a β' hegyesszögnek nagyságára, amelyet a CD' félegyenes a másik aszimptotával alkot, hasonlókép kapjuk, hogy $3\beta' = \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Hegyesszögek harmadolására ezért az egyenlőoldalú hiperbola egyik ága felének megrajzolása is elégséges.

Tompa vagy domború γ szög harmadolása hegyesszög harmadolására visszavezethető, mivel az ilyen γ szöget $\gamma = \pi - \alpha$, ill. $\gamma = \pi + \alpha$ alakban írhatjuk, ahol α hegyesszög. Az egyenesszög harmadolása ugyanis közismert elemi szerkesztés.

A szögharmadolásnak egyenlőoldalú hiperbolával való elvégzésével már a régi görög matematikusok is foglalkoztak, s utánuk mások is. M. CHASLES francia matematikus is egyenlőoldalú hiperbolával végzett szögharmadolást 1837-ben. A szögharmadolásnak Bolyai János szerkesztésén alapuló, itt adott keresztülvitele legegyszerűbb azok közül, amelyek egyenlőoldalú hiperbolát használnak fel.

СПОСОБ ТРИСЕКЦИИ УГЛА ПО Я. БОЯИ

Дюла С.-Надь

Если даны одна ветвь и асимптоты равнобедренной гиперболы, то — по Я. Бояи — каждый острый угол α разделяется на три части следующим способом.

Угол α откладывается от одной из асимптот (см. чертёж), определяется точка пересечения с гиперболой C, берётся окружность с центром в C и с радиусом $2.\overline{OC}$. Если D является точкой пересечения окружности и гиперболы внутри угла α, то CD образует с асимптотой угол $\beta = \alpha/3$.

DREITEILUNG DES WINKELS NACH JOHANN BOLYAI

Gyula Sz.-Nagy

Sind ein Ast einer gleichschenkligen Hyperbel und die Asymptoten gezeichnet, so kann man nach F. Bolyai jeden spitzen Winkel α folgendermassen dreiteilen. Man zeichnet den Winkel α auf eine der Asymptoten (s. Figur), bestimmt den Schnittpunkt C, und zeichnet den Kreis mit dem Mittelpunkt C und dem Halbmesser $2.\overline{OC}$. Ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieses Kreises mit der Hyperbel, welcher im Winkelraum α liegt, so schliesst CD mit der Asymptote den Winkel $\beta = \alpha/3$ ein.

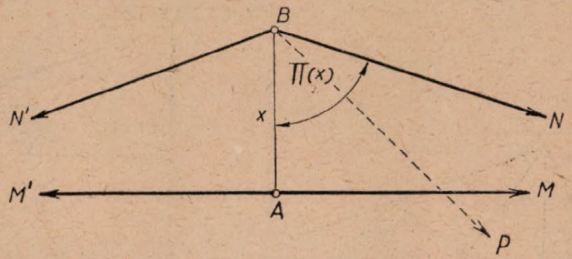
Két szerkesztési feladat megoldása a hiperbolikus síkon

Írta: Kárteszi Ferenc

A következőkben két szerkesztési feladat megoldásáról lesz szó, s csupán didaktikai szempontból lehet érdekes az *Appendix* ismertetése során.

Az *Appendix* első tíz paragrafusa felöleli a paraciklus fogalmának bevezetéséhez szükséges fogalmakat és tulajdonságainak levezetéséhez szükséges tételeket. Előadásaim során azt tapasztaltam, hogy a paraciklussal foglalkozó paragrafusok értelmes feldolgozását a párhuzamossági távolság és párhuzamossági szög összefüggésének a *10. §.* után következő, szerkesztés alapján való tárgyalása megkönnyíti. Éppen azt fogom megmutatni, hogy a *10. §.* és *11. §.* tárgyalása közé mit tartok célszerűnek beiktatni. Feltételezem, hogy az olvasó az *Appendix 1. §.—10. §.*-it már ismeri.*

Definíció. Ha $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{AM}$ és $BA \perp AM$ akkor a $\Pi(x) = ABN\sphericalangle$-et az $x = AB$ távolsághoz tartozó *párhuzamossági szögnek*, x-et pedig a $\Pi(x)$ szöghöz tartozó párhuzamossági *távolságnak* nevezzük. (1. ábra).



1. ábra

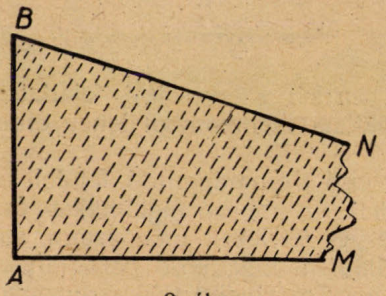
Az ABN szögtartomány bármely $\overrightarrow{BP}$ félegyenese metszi az $\overrightarrow{AM}$ félegyenest, a párhuzamosság definíciója szerint. Ha a Hilbert-féle axiómarendszerből töröljük a párhuzamossági axiómát,

* Bolyai János: *Appendix* (Akadémiai kiadó, Budapest, 1952), 73—82 l.

akkor a maradék axiómarendszert kielégítő síkon

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{k}},$$

ahol a k paraméter még határozatlan.* Határozottá válik azonban egy konkrét sík esetében. Legyen adva a síkon egy tetszőleges *Π-modell,* amin a következőt értjük. Ki van vágva a hiperbolikus síkból



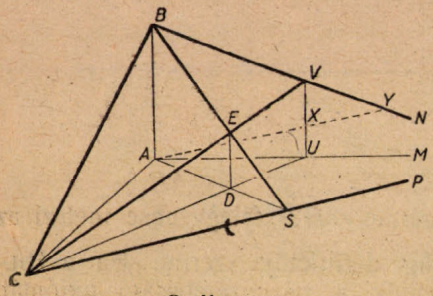
2. ábra

egy lemez — amelyet merevnek gondolunk —, mégpedig úgy, hogy

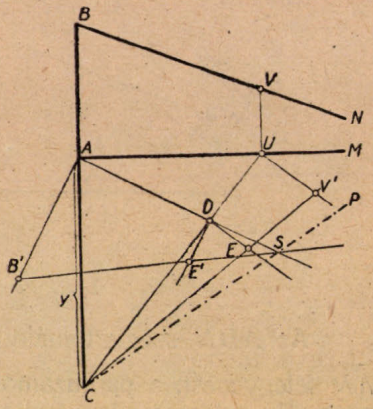
$$\overrightarrow{BN}\parallel\overrightarrow{AM} \quad \text{és} \quad BA \perp AM$$

legyen.

I. *Adott Π-modell segítségével megszerkesztjük bármely adott y távolsághoz tartozó Π(y) szöget.* (Azt is feltesszük, hogy van tetszőleges távolság átrakására alkalmas megengedett rajzeszközünk).



3. ábra



4. ábra

* *Appendix* 29. §.

A szerkesztés a következő — sztereometriai — meggondolásból adódik. Legyenek $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ páronként merőlegesek egymásra, továbbá $MABN$ az adott Π-*modellal* egybevágó $AC=y$. Az *Appendix 7. §.*-a szerint CBN sík CAM síkot ama CP egyenesben metszi, melyre nézve

$$\overrightarrow{CP} \| \overrightarrow{AM}.$$

AM tetszőleges U pontjában állítsunk AM-re merőleges egyenest a BAM síkban. Ha ennek az egyenesnek BAM szögtartományban levő tetszőleges pontja X, akkor $\overrightarrow{AX}$ egy Y pontban metszi BN-et. Minthogy UX és AB nem metszi egymást, UX a BN valamely V pontjában lép ki az ABY háromszögből. A $\overrightarrow{CP}$ egyik tetszőleges pontja legyen S. $\overrightarrow{AS}$ a CU egyenesszakaszt C és U között, D-ben metszi. Minthogy a BAS és CUV sík a CAM síkra merőleges AB és UV egyeneshez illeszkedik, a CAM síkra merőleges egyenesben metszi egymást. Ez a metszésvonal BS és CV egyenesszakasz közös E pontját tartalmazza, vagyis éppen a DE egyenes.

A *3.* és *4.* ábra egybevetéséből már tüstént érthető a *4.* ábrán bemutatott szerkesztés. A Π-*modellal* rajzolt BA-nak meghosszabbítására A-tól C-ig felrakjuk y távolságot. Tetszőlegesen választjuk $\overrightarrow{AM}$-en U-t és CU egyenesszakaszon D-t. A Π-*modellal* AM-re U-ban, CU-ra U-ban és D-ben, AD-re A-ban és D-ben merőlegest rajzolunk. Ezeken

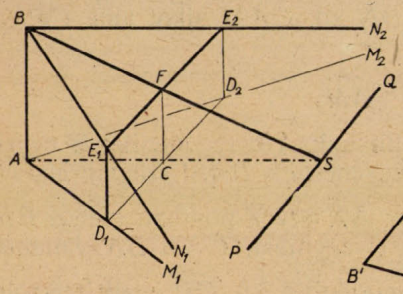
$$UV=UV', \quad DE=DE', \quad AB=AB'$$

távolságátrakásokkal nyerjük a V', E', B' pontokat (az E pontot CV' és a CU-ra D-ben merőleges egyenes metszéspontja szolgáltatta). Az S pont $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{B'E'}$ közös pontja $\Pi(y)=ACS\sphericalangle$ a keresett szög.

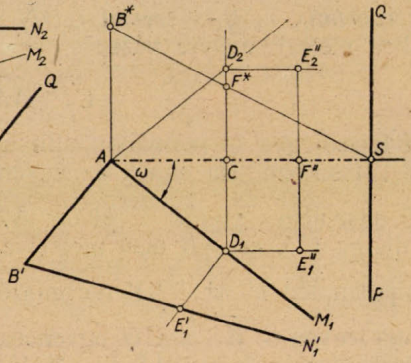
II. *Adott Π-modell segítségével megszerkesztjük bármely adott ω hegyesszöghöz azt az y távolságot, amelyre nézve $\Pi(y)=\omega$.*

A szerkesztés a következő — sztereometriai — meggondolásokból adódik. Ha $\overrightarrow{AC}$ az $M_1AM_2\sphericalangle$ felezője és AB az M_1AM_2 síkra merőleges, továbbá M_1ABN_1 és M_2ABN_2 az adott Π-*modellal* egybevágó, akkor az M_1AM_2 sík és és N_1BN_2 sík metszésvonala, a PQ egyenes az $M_1AM_2\sphericalangle$ mindkét szárával párhuzamos — az *Appendix 7. §.*-a szerint — és a konfiguráció szimmetriájából következőleg nyilván merőleges AC-re. Az AC szögfelező a PQ metszésvonalat egy S pontban metszi. Ha C az AS egyenes-

szakaszon van, akkor C-ben AC-re merőlegesen állított sík $D_1D_2E_2E_1$ SACCHERI-féle négyszögben metszi a konfigurációt. CF e négyszög szimmetria tengelye.



5. ábra



6. ábra

A *6.* ábrán bemutatott szerkesztés az *5.* ábrával való egybevetés alapján tüstént érthető. Az adott ω szög $\overrightarrow{AM_1}$ szárához másoljuk a *II-modellal* egybevágó $M_1AB'N_1'$-t. A másik szárán úgy választunk egy C pontot, hogy a szárra merőlegesen állított egyenes messe a másik szárat, valamely D_1 pontban. D_2-t e merőlegesen a $CD_1 = CD_2$ átrakás szolgáltatja. D_1-ben merőlegest állítunk AM_1-re. Ennek metszenie kell $\overrightarrow{B'N_1'}$-t valamely E_1' pontban. $D_1'D_2'$-re merőlegest állítunk D_1 és D_2-ben. E merőlegesekre átrakjuk a D_1E_1' szakaszt, D_1-től E_2''-ig és D_2-től E_2''-ig terjedően. Az $E_1''E_2''$ egyenes az AC egyenest egy F''-pontban metszi. $\overrightarrow{CD_2}$-re — C-től F^*-ig terjedően — átrakjuk a CF'' szakaszt. Az AC-re A-ban merőlegest állítunk, s arra — A-tól B^*-ig terjedően — felmérjük az AB' szakaszt. A B^*F^* egyenes $\overrightarrow{AC}$-t egy S pontban metszi. Az AS szakasz éppen az ω szöghöz tartozó, keresett párhuzamossági távolság.

Érdekes volna megvizsgálni, hogy az adott *II*-modellal, amelyet vonalzóként és arra használhatunk, hogy adott egyenesre adott pontjában merőlegest állítsunk, továbbá a körzőnek pusztán távolságátrakásra megengedett használatával milyen szerkesztési feladatok oldhatók meg a hiperbolikus síkon.

РЕШЕНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ ПО ПОСТРОЕНИЮ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Ф. Картеси

В настоящей работе даётся, по стереометрическим соображениям, конструкция данного угла параллельности, соотвествующего данному расстоянию параллельности, или данного расстояния параллельности, соотвествующего данному углу параллельности, если даны расстояние и угол параллельности, соответствующие друг дгугу.

THE SOLUTION OF TWO CONSTRUCTION PROBLEMS IN THE HYPERBOLIC PLANE

By F. Kárteszi

This paper deals with the construction of the angle of parallelism corresponding to a given distance of parallelism as well as with the construction of the distance of parallelism corresponding to a given angle of parallelism, if there are given a fixed distance and a fixed angle of parallelism corresponding to each other. The construction is based on a stereometric reasoning.

Szovjet eredmények az absztrakt algebra területén*

FUCHS LÁSZLÓ és SZELE TIBOR

1. §. Bevezetés

A szovjet matematikai életben az utolsó huszonöt esztendő alatt egy olyan absztrakt algebrai iskola alakult ki, amely számos világhírű matematikust kapcsol össze, s amelynek eredményeit világszerte igen nagyra értékelik. Rendkívül nagyjelentőségű új kutatási irányokat, szempontokat, módszereket és eszközöket köszönhet az absztrakt algebra legújabb fejlődése ennek az iskolának, továbbá sok olyan nagy probléma megoldását, amelyek azelőtt csaknem reménytelenül nehéznek látszottak.

A szovjet absztrakt algebrai iskola kettős gyökérből fejlődött ki: egyrészt O. JU. SMIDT híres csoportelméleti szemináriumából, melyet a csoportelmélet e világhírű művelője 1930-ban szervezett meg a moszkvai egyetemen, másrészt V. A. TARTAKOVSZKIJ kutató munkaközösségéből, amely a Smidt-féle szeminárium mintájára keletkezett Leningrádban. Ma már nemcsak ebben a két nagy tudományos központban dolgoznak a szovjet algebrai iskola tagjai, hanem számos más szovjet egyetemen is. Az iskolának negyvennél több olyan tagja van, aki alapvető fontosságú felfedezéssel gyarapította az absztrakt algebrát.

Ha közelebbről megvizsgáljuk, hogyan fejlődhetett ki aránylag ilyen rövid idő alatt ez az extenzitásában és kutató munkájának intenzitásában egyaránt oly kimagasló algebrai iskola, akkor számos tényező közül ki kell emelnünk mint legfontosabb mozzanatokat egyrészt a szovjet matematikai élet mintaszerű megszervezettségét, másrészt A. G. KUROS nagyhírű csoportelméleti könyvét. Az előbbivel kapcsolatban rámutatunk arra az igen jól bevált újításra, hogy a Szovjetunióban időnként egy-egy nagyobb terjedelmű ismertető cikk jelenik meg — többnyire az „Uszpehi Matyematyicseszkih Nauk" című folyóiratban — a modern matematika valamelyik ágáról, amelyben egyik kiváló tudós összefoglalja a legújabb

* A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadóülésén 1952. március 29-én elhangzott előadás.

haladás eredményeit, kidomborítja azokat a szempontokat, amelyek a szóbanforgó tudományág mai fejlődésének irányát megszabják, és ismerteti a legmodernebb kutatási módszereket, rámutatva egyszersmind azokra a megoldatlan problémákra is, amelyekkel való behatóbb foglalkozástól a jövőbeli fejlődés várható. Az ilyen iránymutató cikkek igen nagy mértékben megkönnyítik a fiatal, kezdő kutatók tájékozódását, s tapasztalat szerint nagyon ösztönzőleg hatnak. — A másik különösen kiemelendő tényező, amelynek igen lényeges része van abban, hogy a szovjet algebrai iskola ilyen magas színvonalra emelkedhetett, KUROS említett csoportelméleti könyve. Ez a könyv azokból az előadásokból fejlődött ki, amelyeket szerzője rendszeresen tartott a moszkvai egyetemen, s a benne feldolgozott anyag gazdag sokoldalúsága és modernsége következtében ez a mű annyira kiemelkedik a modern csoportelméleti irodalomban, hogy számos más nyelvre is lefordítják. A Magyar Tudományos Akadémia is lehetővé tette ezt és már folyamatban van KUROS könyvének magyar nyelvre való fordítása.

Általánosan elismert tény, hogy a szovjet absztrakt algebrai iskola mai legfőbb irányítója A. G. KUROS. Az iskola legtöbb tagja KUROS tanítványa, akiket ő vagy közvetlenül személyesen, vagy könyve és dolgozatai által nevelt. Maga KUROS viszont az iskola megalapítójának, O. JU SMIDTnek legkiválóbb tanítványa.

KUROS több helyen kinyilvánította, hogy megítélése szerint a szovjet algebrai iskola a csoportelmélet terén érte el a legnagyobb eredményeket Ugyanakkor azonban hangsúlyoznunk kell, hogy a szovjet matematikusok az absztrakt algebra számos más ágában is, így pl. a gyűrűelmélet, az algebrák elmélete, a Galois-elmélet és a rendezett algebrai struktúrák elmélete terén is értek el olyan eredményeket, amelyek döntő módon befolyásolták és elősegítették e tudományágak fejlődését. Mi az alábbiakban először a szovjet matematikusok legnagyobb jelentőségű *csoportelméleti* eredményeiről számolunk be, majd ezt követően *az absztrakt algebra egyéb ágaiban* elért szovjet eredményekről nyújtunk rövid tájékoztatót a rendelkezésünkre álló keretek között. Magától értetődik, hogy beszámolónk szükségképpen hézagos lesz, hiszen ha teljességre törekednénk, akkor egy vastag kötetre terjedő anyagot kellene feldolgoznunk. Beszámolónkban nem térhetünk ki a topológikus algebra terén elért nagy szovjet eredményekre, mert ezek ismertetése egy egészen különálló előadás anyaga lehetne csupán, továbbá nem szólhatunk a Galois-elmélet és a klasszikus algebra területén elért újabb szovjet eredményekről sem a rendelkezésünkre álló keretek között.

Beszámolónkban örömmel fogunk rámutatni azokra a pontokra, ahol magyar matematikusok vizsgálatai közvetlen kapcsolatban vannak az ismertetendő nevezetes szovjet eredményekkel.

2 §. A véges csoportok elmélete

O. JU. SMIDT és legelső tanítványai a moszkvai csoportelméleti szemináriumban eleinte leginkább a véges csoportok elméletével foglalkoztak, és ezen a területen értek el nagyjelentőségű eredményeket. Azonban a szovjet csoportelméleti kutatások súlypontja csakhamar áttolódott a végtelen csoportok elméletére, s ott hozta a legértékesebb, a szovjet iskolára legjellemzőbb eredményeket. Ezért mi is a véges csoportok elméletével kezdjük ismertetésünket, de ezen a területen csupán néhány szemelvényre szorítkozunk a legfontosabb eredmények közül, és nagyobb részletességgel inkább a végtelen csoportok elméletének fejlődését fogjuk tárgyalni.

Nevezetes eredmények fűződnek a szovjet kutatók nevéhez a véges csoportok feloldhatóságára vonatkozó kritériumok köréből. Ilyen pl. O. JU. SMIDT egyik tétele, mely szerint a csupa nilpotens valódi alcsoportokkal bíró véges csoport mindig feloldható. Ez az eredmény alkotja ama vizsgálatok alapját, amelyek az összes ilyen csoport meghatározására irányultak, s amelyek éppen a legutóbbi évek során vezettek teljes sikerre. GOLFAND szovjet matematikus tudta először megadni az összes ilyen csoportot. Majdnem egyidejűleg, GOLFANDtól függetlenül, más úton RÉDEI LÁSZLÓ is megoldotta ezt a problémát. RÉDEI módszere a ferde szorzatnak általa bevezetett fogalmára van alapítva, és mellékeredményképpen megadja az összes olyan véges csoportot is, amelynek valamennyi maximális alcsoportja Sylow-csoport.

Ugyanebbe a tárgykörbe tartozik SZ. A. CSUNYIHIN következő fontos és számos alkalmazásban szereplő tétele: egy n-edrendű csoport mindig feloldható, ha n minden olyan d osztójához tartalmaz d rendű alcsoportot, amely relatív prím $\frac{n}{d}$-hez.

Végül nevezetes szovjet eredmények egész sora keletkezett O. JU. SMIDT és tanítványai több mint két évtizeden át folytatott ama vizsgálataiból, amelyek REMAK tételéből indultak ki, s egy adott csoport direkt felbontásainak izomorfizmusaira vonatkoznak. Ezek az eredmények már átvezetnek a végtelen csoportok elméletébe, és SMIDT mellett főként KUROS, GOLOVIN, GRAJEV, valamint még több egészen fiatal matematikus nevéhez fűződnek.

3. §. Végtelen Abel-féle csoportok

A végtelen Abel-féle csoportok szerkezetének feltárására vonatkozó vizsgálatokban A. G KUROSnak és tanítványainak — ezek között mindenekelőtt L. JA. KULIKOVnak — a legutóbbi két évtized alatt olyan alapvető fontosságú eredményeket sikerült elérniök, amelyek egészen új utakat és azelőtt nem is remélt távlatokat nyi-

tottak meg ebben a problémakörben. A szovjet iskola eredményeit megelőzően három matematikus ért el fontos eredményeket a végtelen Abel-féle csoportok elméletében: H. PRÜFER, sajnos igen fiatalon elhunyt német matematikus, aki három alapvető fontosságú dolgozatával a tulajdonképpeni megindítójává vált a végtelen csoportok szerkezetének feltárására vonatkozó vizsgálatoknak, továbbá H. ULM és R. BAER. Ennek a német iskolának egyik legnevezetesebb eredménye az Ulm-féle struktúra-tétel, amely PRÜFER egyik nagy eredményére támaszkodva teljesen leírja az összes megszámlálható Abel-féle torziócsoport[1] szerkezetét, invariánsok rendszerével jellemezve e csoportokat. Ezzel a rendkívül szép és nagy eredménnyel azonban ezek a vizsgálatok egyszersmind meg is szakadtak, mert maga ULM és BAER mutatta meg először kontinuum számosságú csoportok ellenpéldájával, hogy az említett struktúra-tétel nem vihető át tetszőleges számosságú csoportokra. A fejlődés új útjait szovjet matematikusok találták meg.

A szovjet kutatók érdeklődése nevezetes okokból fordult a végtelen Abel-féle csoportok felé. 1932-ben ugyanis L. Sz. PONTRJAGIN világraszóló felfedezése, az ú. n. dualitási tétel, közvetlen kapcsolatot teremtett az absztrakt csoportok és a topológikus csoportok elmélete között, döntő jelentőségű új irányú fordulatot adva ezzel az egész topológia modern fejlődésének. Ilyen irányú kutatásai által maga PONTRJAGIN is nagy lépésekkel vitte előre az absztrakt végtelen Abel-féle csoportok elméletét, bár nála ezek az eredmények csupán nagyfontosságú topológiai tételek melléktermékeiként adódtak. PONTRJAGINnak két igen nevezetes, tisztán csoportelméleti tételét említjük e helyen. Az egyik azt mondja ki, hogy egy megszámlálható torziómentes Abel-féle csoport akkor és csak akkor bontható fel ciklikus alcsoportok direkt szorzatára, ha ez a követelmény a csoport bármely véges rangú alcsoportjára teljesül.[2] PONTRJAGIN másik igen nevezetes absztrakt csoportelméleti vonatkozású eredménye direkt felbonthatatlan másodrangú torziómentes Abel-féle csoportok létezésének bebizonyítása. PONTRJAGIN eme híres példájában található meg a kiinduló pontja azoknak a vizsgálatoknak, amelyek során A. G. KUROS és A. I. MALCEV szovjet matematikusok kidolgozták a véges rangú torziómentes Abel-féle csoportok teljes elméletét.

A megszámlálhatónál magasabb számosságú Abel-csoportok szerkezetének kivizsgálására szolgáló és hosszú időn át teljesen hiányzó módszerek felkutatása KUROS egyik legtehetségesebb tanítványának, L. JA. KULIKOVnak munkásságával kezdődik. KULIKOV

[1] Torziócsoportnak az olyan csoportot nevezzük, amelyben bármely elem véges rendű.

[2] Torziómentes az olyan csoport, amely az egységelemen kívül nem tartalmaz más véges rendű elemet.

első nagyfontosságú eredménye szükséges és elegendő feltételt ad meg arra, hogy egy tetszőleges számosságú Abel-féle p-csoport ciklikus csoportok direkt szorzata legyen. Ezzel az eredményével KULIKOV egészen új utat nyitott meg a végtelen Abel-féle csoportok szerkezetére vonatkozó kutatások számára abban az irányban, amelyben a fentebb említett Ulm-féle vizsgálatok elakadtak. KULIKOV emez eredményét legújabban J. DIEUDONNÉ francia, továbbá KERTÉSZ ANDOR és FUCHS LÁSZLÓ magyar kutatók általánosították. FUCHS LÁSZLÓ eredménye ciklikus csoportok direkt szorzatára való felbonthatóság kritériumát tartalmazza teljesen tetszőleges Abel-féle csoportokra, míg KERTÉSZ ANDOR eredménye olyan kritériumot tartalmaz, amely tetszőleges Abel-féle torziócsoportok *teljes felbonthatóságára* (azaz direkt felbonthatatlan csoportok direkt szorzataként való előállíthatóságára) vonatkozik. KULIKOV eredményének és módszerének nagy jelentőségét domborítja ki az is, hogy ilyen nagy mértékben és többféle irányban általánosíthatónak bizonyult. — Ezzel az eredményével szoros kapcsolatban van KULIKOVnak egy másik igen szép eredménye, amely azt mondja ki, hogy ciklikus csoportok direkt szorzatára bontható csoport bármely alcsoportja is ilyen tulajdonságú. KULIKOV előtt ez a tétel hosszabb ideig sejtésként szerepelt.

Igen nagyfontosságú új eredményeket értek el a szovjet kutatók az összes *direkt felbonthatatlan Abel-féle csoportok* meghatározásának nagy problémája tekintetében is. Ilyen vonatkozásban a szovjet iskola eredményeit megelőzően R. BAER következő tétele volt a legmesszebbmenő eredmény, amelyet BAER az említett Ulm-féle struktúra-tétel felhasználásával és csak megszámlálható csoportokra szorítkozva igazolt: a ciklikus p-csoportokkal és a (p^∞) típusú csoporttal ki vannak merítve az összes megszámlálható direkt felbonthatatlan Abel-féle torziócsoportok.[3] KULIKOVnak sikerült megmutatnia, hogy ez az eredmény akkor is igaz, ha nem szorítkozunk megszámlálható csoportokra, s kiemelendő, hogy KULIKOV ezt a sokkal általánosabb tételt jóval egyszerűbb úton, t. i. az Ulm-féle struktúra-tétel alkalmazása nélkül nyeri. Ugyancsak KULIKOV bizonyította be először azt is, hogy vegyes Abel-féle csoport mindig felbontható két valódi alcsoportjának direkt szorzatára.[4] Ez az eredmény nem értelmezendő úgy, hogy bármely vegyes Abel-féle csoport egy torziócsoport és egy torziómentes csoport direkt szorzatára volna bontható. Egy vegyes csoportban ugyanis a véges rendű elemekből álló torziócsoport nem mindig

[3] PRÜFER nyomán (p^∞) típusúnak az olyan csoportot nevezzük, amely izomorf az összes p-edik, p^2-edik, p^3-edik, ... komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával. Itt p tetszőleges rögzített törzsszámot jelent.

[4] Vegyes csoportnak az olyan csoportot nevezzük, amely nem torziócsoport, de nem is torziómentes csoport.

direkt faktora az egész csoportnak. FOMIN szovjet matematikus adott meg egy elegendő feltételt arra, hogy vegyes csoport torziócsoportja direkt faktor legyen. FOMIN tétele azt mondja ki, hogy ha egy vegyes csoport véges rendű elemei között van maximális rendű elem, akkor a csoport torziócsoportja direkt faktor. — Végül ezekhez az eredményekhez kapcsolódik KUROS következő tétele is: ha a tetszőleges G Abel-féle csoport alcsoportjainak bármely fogyó lánca véges számú alcsoportot tartalmaz, akkor G előállítható véges számú olyan csoport direkt szorzataként, amelyek bármelyike ciklikus p-csoport, vagy (p^{∞}) típusú csoport. Megemlítjük e nagyfontosságú szovjet eredményekkel kapcsolatban még azt, hogy legújabban SZELE TIBORnak sikerült nyernie egy olyan tételt, amely számos csoportelméleti tételt közvetlen korollárium ként foglal magában, így pl. a jelen bekezdésben szereplő összes eredményt is. SZELE emez eredménye így hangzik: egy tetszőleges G Abel-féle csoport valamely r rendű C ciklikus alcsoportja akkor és csak akkor direkt faktora G-nek, ha G egyetlen elemének az egységelemtől különböző r-edik hatványa sem fekszik C-ben.

Az említetteken kívül még nagyon sok, egészen más irányú szovjet kutatási eredményről is beszámolhatnánk a végtelen Abel-féle csoportokkal kapcsolatban, de azt hisszük, hogy a fentiek is világosan mutatják, milyen nagyjelentőségű fordulatot adott a matematika emez ágának a szovjet algebrai iskola.

4. §. A nem-kommutatív végtelen csoportok elmélete

Ez természetszerűleg a csoportelmélet legnehezebb problémaköre, de a szovjet iskolának ebben is sikerült számos alapvető fontosságú felfedezést tennie. Ezek a szovjet vizsgálatok két főirányban folytak és vannak jelenleg is folyamatban. Az egyik irány *tetszőleges csoportok szabad szorzatainak vizsgálata*, a másik a *torziócsoportok* szerkezetének kutatása.

KUROS bebizonyította, hogy csoportok szabad szorzatának bármely alcsoportja is mindig szabad szorzat, továbbá, hogy egy adott csoport két irreducibilis felbontása szabad szorzatra mindig izomorf egymással. Ugyancsak KUROSnak sikerült nevezetes eredményeket elérnie az olyan csoportok szerkezetének feltárásában, amelyeket *lokálisan szabad csoportok*nak nevezett, azaz amelyekben az elemek bármely véges rendszere benne van a csoport egy szabad alcsoportjában. — A szabad szorzatok automorfizmusait messzemenően sikerült kivizsgálnia O. N. GOLOVIN, L. E. SZADOVSZKIJ és D. I. FUKSZ-RABINOVICS szovjet matematikusoknak.

A nem-kommutatív torziócsoportok szerkezetének vizsgálatában szintén számos szovjet kutató ért el alapvető fontosságú eredményeket. A legjelentősebb eredmények ezen a téren A. G. KUROStól

és Sz. N. Csernyikovtól származnak. Kuros megmutatta, hogy van olyan végtelen p-csoport, amely centrum-nélküli. Ez igen fontos felfedezés volt, mert a véges csoportok analógiájára azelőtt sokan ennek az ellenkezőjét sejtették. — Csernyikov számos dolgozatában foglalkozik a végtelen csoportok egyik legfontosabb problémájával, a *Burnside-féle sejtéssel*, amely úgy szól, hogy bármely torziócsoport *lokálisan véges*, azaz véges számú eleme mindig benne van a csoport egy véges alcsoportjában. Csernyikov e sejtés bizonyításához olymódon közeledik, hogy a csoportok egyre nagyobb körére igazolja azt. Csernyikov ilyen irányú vizsgálatainak köszönhető egyebek között az olyan torziócsoportok szerkezetének teljes meghatározása, amelyekben érvényes a minimum-követelmény az alcsoportokra nézve, és amelyekben bármely valódi alcsoport különbözik a normalizátorától. Csernyikov bebizonyította, hogy az ilyen csoport mindig p-csoportok direkt szorzata, megszámlálható és lokálisan véges, továbbá mindig előállítható (p^{∞}) típusú csoportok direkt szorzatának véges csoporttal való Schreier-féle bővítéseként. — A. P. Dicman bebizonyította, hogy Burnside sejtése érvényes minden olyan torziócsoportra, amelyben bármely elemnek véges számú konjugáltja van.

Végül megemlítjük Ju. G. Fjodorov 1951-ből való következő igen szép eredményét, amellyel igazolást nyert egy O. Ju. Smidt által több évtizeddel ezelőtt kimondott sejtés: ha egy végtelen csoport bármely, egynél többelemű alcsoportja véges indexű, akkor a csoport ciklikus. Ezt a tételt Fjodorov mély eszközökkel, egyebek között O. Ju. Smidt 2. §-ban említett tételének felhasználásával bizonyítja. Örömmel említhetjük, hogy Fjodorov tételére más úton, egészen egyszerű eszközökkel Erdős Jenő III. éves egyetemi hallgatónak sikerült legújabban új bizonyítást találni.

5. §. Részben rendezett csoportok

Miként már említettük, a szovjet algebristák kutatásainak súlypontja kétségtelenül a csoportelméleti kérdések vizsgálata, e mellett azonban igen szép számmal értek el alapvetően fontos s jelentős eredményeket az absztrakt algebra legkülönfélébb területein is. Az e területeken elért fontosabb szovjet eredmények ismertetését a rendezett csoportok elméletébe vágó kutatásokról szóló beszámolóval kezdjük.

Egy G csoportot akkor mondunk részben rendezettnek, ha bizonyos elempárjaira értelmezve van egy $\geqq$ reláció a következő tulajdonságokkal: 1. reflexív: $a \geqq a$; 2. antiszimmetrikus: ha $a \geqq b$ és $b \geqq a$, akkor $a = b$; 3. tranzitív: ha $a \geqq b$ és $b \geqq c$, akkor $a \geqq c$; 4. homogén: ha $a \geqq b$, akkor $ac \geqq bc$ és $ca \geqq cb$ minden c elemre. Ha bármely két a, b elemre $a \geqq b$ vagy $b \geqq a$ egyike

érvényes, akkor a rendezést teljesnek mondjuk, a csoportot magát pedig rendezett csoportnak.

Elsőízben L. V. KANTOROVICS foglalkozott részben rendezett csoportokkal az általános terekkel kapcsolatos vizsgálatai során, majd G. BIRKHOFF amerikai matematikus kidolgozta az olyan részben rendezett csoportok elméletét, amelyek egyszersmind hálók[5] is a rendezési relációra vonatkozóan, azaz bármely két elemnek létezik legkisebb majoránsa és (ami csoportoknál már ennek következménye) legnagyobb minoránsa. BIRKHOFF eredményeit lényegesen általánosította E. P. SIMBIRJOVA olyan részben rendezett csoportokra, amelyek ugyan nem hálók, de bírnak az ú. n. Moore—Smith-féle tulajdonsággal, azaz bármely két elemüknek van legalább egy majoránsa és minoránsa (anélkül, hogy ezek között legkisebb, ill. legnagyobb szükségképpen léteznék). SIMBIRJOVA megadta annak feltételét is, hogy egy absztrakt csoport a rendezés alkalmas definiálásával Moore—Smith-féle tulajdonságú részben rendezett csoporttá, ill. teljesen rendezett csoporttá tehető legyen. Feltételt adott arra is, hogy egy részben rendezett csoport rendezett csoportok direkt szorzatába beágyazható legyen, általánosítva ezzel A. H. CLIFFORDnak az Abel-féle esetre vonatkozó régebbi eredményeit. BIRKHOFFnak egy másik eredményét továbbfejlesztve, SIMBIRJOVA kimutatta, hogy egy Moore—Smith-féle tulajdonsággal rendelkező részben rendezett csoportnak bármely két direkt felbontása izomorf felbontásokká finomítható.

Legújabban A. I. MALCEV nyert értékes eredményeket a rendezett csoportok elméletében. Egyik dolgozatában a konvex alcsoportok tulajdonságait vizsgálja, egy másikban pedig a következő érdekes tételt bizonyította be: egy G rendezett csoportnak egy F test feletti csoportalgebrája mindig beágyazható egy B divíziós algebrába. Sőt, ha F is rendezett, akkor B is rendezhető olyképpen, hogy az eredeti rendezések a G csoportban és az F testben megmaradjanak.

A rendezett csoportokkal kapcsolatosan végül hadd említsük meg A. A. VINOGRADOVnak azon fontos eredményét, hogy két rendezett csoport szabad szorzata mindig rendezhető azon kikötés mellett is, hogy az eredeti csoportok rendezése megmaradjon.

6. §. A csoport fogalmának általánosításai

Térjünk most át néhány olyan eredmény ismertetésére, amelyeket a csoportok különféle általánosítása terén értek el a szovjet kutatók. Ezek az eredmények olyan algebrai struktúrákra vonatkoz-

[5] A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Bizottságának határozata alapján *hálónak* mondjuk az angol *lattice*-nek megfelelő fogalmat.

nak, amelyekben bizonyos tulajdonságokkal felruházott operáció van értelmezve. Az ilyen rendszerek szükségességét az a jelentékeny számú fontos példa teszi indokolttá, amelyek a matematika számos ágában felbukkannak. E rendszerek a csoportokból úgy származtathatók, hogy a csoportaxiómák közül egyet vagy többet elvetünk, és ezeket esetleg helyettesítjük gyengébb követelményekkel.

A csoport fogalmának általánosításai közül a legfontosabb a félcsoport, amely egyszersmind a legegyszerűbb is. Félcsoportnak (vagy asszociatív rendszernek) nevezünk olyan algebrai struktúrát, amelyben egy asszociatív, egyértelműen végrehajtható operáció van értelmezve. A csoportaxiómák közül tehát egyszerűen elhagytuk az egységelem és az inverzelem létezését posztuláló axiómákat, de újabb követelményt nem támasztottunk.

Véges félcsoportokra az első struktúra-vizsgálatok A. K. Szuskevicstől valók. Szuskevics kimutatta, hogy minden véges félcsoportnak van olyan egyértelműen meghatározott részfélcsoportja, amelyet ő *mag*nak nevezett el s amely diszjunkt izomorf csoportok egyesítési halmaza (e csoportoknak még az egységelemük is különböző!). Szuskevics ezen vizsgálatai szolgáltatták az alapot Clifford, St. Schwarz és mások, köztük Fuchs László egyes kutatásaihoz.

A csoportfogalom általánosításainak vizsgálatainál a kutatóknak az a természetes törekvése figyelhető meg, hogy a csoportelmélet klasszikus tételeit ezen általánosabb struktúrákra megfelelő formában átvigyék. Ilyen célt követve, Szuskevics egyik dolgozatában azt vizsgálta, hogy mi felel meg a félcsoportoknál a véges csoportokra vonatkozó nevezetes Cayley-féle tételnek, amely szerint minden véges csoport izomorf egy permutációcsoporttal. Pontosabban: e tétel azt mondja ki, hogy bármely n-edrendű G véges csoport elemeihez hozzárendelhető egy-egy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

permutáció ($i_1, i_2, \dots, i_n$ az $1, 2, \dots, n$ számoknak valamely permutációját jelöli) olyképpen, hogy a G csoport elemei szorzásának e permutációk szorzása feleljen meg. Szuskevics teljesen megoldotta az analóg problémát egységelemmel bíró véges félcsoportokra, kimutatva, hogy ezekre egy teljesen hasonló tétel áll, a változás csupán annyi, hogy most az alulálló $i_1, i_2, \dots, i_n$ számok nem lesznek feltétlenül különbözők. Tehát minden egységelemes, véges félcsoport izomorf ilyen általánosított szubsztitúciókból álló félcsoporttal.

A félcsoportoknak nevezetes osztályát alkotják az ú. n. reguláris félcsoportok, azaz olyan félcsoportok, amelyekben érvényes az egyszerűsítési szabály: $ab = ac$ vagy $ba = ca$ fennállásából (tetszőleges a elemre) $b = c$ következik. Az ilyen félcsoportok már

igen közel állanak a csoportokhoz, olyannyira, hogy a véges esetben ezek már csoportok lesznek. A végtelen esetben azonban nem mindig (pl. a nem-negatív egészek additív félcsoportja). Ezekre viszont érvényes az a közismert tény, hogy a kommutatív esetben mindig beágyazhatók egy csoportba. Ezen csoport konstrukciója tökéletesen ugyanúgy történik, mint ahogy a racionális egészeket szokás bevezetni pozitív egészekből álló számpárok segítségével. A nem-kommutatív esetben azonban a beágyazás lehetősége sokáig nyílt probléma volt. Ugyanígy megoldatlan volt VAN DER WAERDEN-nek az a nevezetes problémája is, hogy vajjon beágyazható-e minden nullosztómentes nem-kommutatív gyűrű egy ferdetestbe, miként ez megvalósítható a kommutatív esetben: integritási tartománynak mindig létezik kvociensteste. E két alapvető jelentőségű kérdést egycsapásra elintézte A. I. MALCEV, aki igen szép példát adott csoportba be nem ágyazható nem-kommutatív reguláris félcsoportra, majd erre támaszkodva, egy példát ferdetestbe be nem ágyazható nullosztómentes gyűrűre. Félcsoport-példája a következő szellemes észrevételen alapszik: ha egy csoportban bizonyos nyolc elemre: a, b, c, d, x, y, u, v-re fennáll a következő három egyenlőség:

$$ax = by, \quad cx = dy, \quad au = bv,$$

akkor fenn kell állni a

$$cu = dv$$

egyenlőségnek is, hiszen a második egyenlőség az elsőből ca^{-1}-gyel való szorzás útján jön létre, s úgyanígy kell adódni a negyedik egyenlőségnek a harmadikból. Ha tehát sikerül találni olyan reguláris félcsoportot, amelyben az első három egyenlőség fennáll ugyan bizonyos elemekre, de a negyedik nem, akkor e félcsoport biztosan nem ágyazható be egyetlen csoportba sem. MALCEV konstruál ilyen reguláris félcsoportot, majd kimutatja, hogy ezen félcsoportnak racionális együtthatókkal képzett félcsoportgyűrűje nullosztómentes, s mivel a félcsoport maga nem ágyazható be csoportba, e gyűrű sem ágyazható be ferdetestbe.

MALCEV több dolgozatában foglalkozott a reguláris félcsoportoknak csoportba való beágyazhatóságának szükséges és elégséges feltételével és sikerült áttekintést adnia mindazon nem-izomorf csoportokról, amelyekbe egy adott félcsoport minimálisan beágyazható (tehát egyetlen valódi alcsoportjukba sem ágyazható be).

Kommutatív és reguláris félcsoportokra igen fontos példa egy integritási tartomány nem-zérus elemeinek multiplikatív félcsoportja. I. V. ARNOLD jutott arra a gondolatra, hogy félcsoportokban is bevezetve az ideál fogalmát, a klasszikus elméletet ezekre is átvigye. ARNOLD főeredménye a következő: amennyiben az ideáloknak véges bázisuk van, egy kommutatív és reguláris félcsoport mindig kiter-

jeszthető olyan félcsoporttá, amelynek minden eleme egyértelműen faktorizálható prímelemek szorzatára, és ezen kiterjesztés — ha minimális — izomorfizmustól eltekintve megegyezik a félcsoport ideáljainak félcsoportjával.

Több szovjet matematikus foglalkozott a csoportok másfajta általánosításával és e téren is számos szép eredmény született. Túl messze vezetne azonban, ha ezeket itt bővebben akarnók ismertetni. Mindössze A. K. SZUSKEVICSnek azon, többek érdeklődésére számot tartó vizsgálatainak eredményéről teszünk említést, amelyekben olyan véges nem-asszociatív rendszereket tekintett, ahol a csoportaxiómák érvényesek, csupán az asszociativitás helyett a következő, gyengébb tulajdonságot követelte meg:

$$(xa)\,b = xc,$$

ahol c csak az a-tól és a b-től függ, x-től független. Nyilvánvaló, hogy amennyiben $c = ab$, éppen az asszociatív törvényt kapjuk. Ilyen rendszer könnyen származtatható minden csoportból; ha t. i. vesszük a csoport elemeinek valamely permutációját: $a \to a'$, amely az egységelemet fixen hagyja és ha a ponttal jelölendő csoportművelet helyett az $xa = x \cdot a'$ új műveletet vezetjük be, akkor

$$(xa)\,b = (x \cdot a') \cdot b' = x \cdot (a' \cdot b') = x \cdot c' = xc,$$

ahol $c' = a' \cdot b'$, és így c valóban csak az a-tól és a b-től fog függni. SZUSKEVICS főeredménye az, hogy ez már az általános konstrukció, azaz a mondott tulajdonságokkal rendelkező akármilyen rendszerhez mindenkor található olyan véges csoport, amelyből az a bemutatott módon jön létre.

7. §. Gyűrűk és algebrák

Szovjet kutatóknak gyűrűkre és algebrákra vonatkozó számos jelentős eredménye közül hadd említsük meg először A. I. UZKOV figyelemreméltó tételeit. Bizonyos integritási tartományokra (nevezetesen azokra, amelyek maximum-feltételnek tesznek eleget és integrálisan zártak kvocienstestükben) VAN DER WAERDEN érdekes ideálelméletet állított fel, amelynek azután E. ARTIN igen elegáns fogalmazását adta. Az A és B ideálokat ekvivalensnek nevezi, ha $A^{-1} = B^{-1}$, ahol A^{-1} a kvocienstest mindazon x elemeinek a halmazát jelenti, amelyekre xa egész (azaz a gyűrűben van) minden $a \in A$-ra. VAN DER WAERDEN bebizonyította, hogy minden ideál ekvivalens prímideálok szorzatával és ez a felbontás ekvivalenciától eltekintve egyértelmű. UZKOV ehhez kapcsolódva bebizonyította, hogy a van der Waerden-féle ekvivalencia az ideálokra definiálható egyetlen olyan ekvivalencia-fogalom, amelyre igaz a prímosztályok szorzatára való felbontás egyértelműsége.

Uzkovnak jelentős eredményei vannak a nem-kommutatív gyűrűk ideálelméletében is. Szükséges és elégséges feltételt talált arra, hogy mikor bonthatók fel a kétoldali, ill. az egyoldali ideálok egyértelműen prímideálok szorzatára. Ezek a tételek tartalmazzák a klasszikus Noether-féle eredményeket, valamint a végesrangú félegyszerű algebrák ideálelméletét is. Uzkov eredményeit megkapta részben K. Asano japán és F. Kiokemeister német kutató is.

Uzkovnak sikerült általánosítania kommutatív gyűrűk kvociensgyűrűjének a fogalmát is, amelynek addig ismert legáltalánosabb definícióját C. Chevalley francia matematikus adta, de csak a maximum-feltételnek eleget tevő gyűrűk esetére. Evidens, hogy nullosztókat is tartalmazó gyűrűnek nem létezhet kvociensteste, hiszen ha nullosztók is kerülnének a törtek nevezőibe, akkor az egyes műveletek elvégzése során előfordulhatna, hogy eredményül egy 0 nevezőjű törtet kapunk. Ezért nullosztókat is tartalmazó gyűrűk esetében az ú. n. *kvociensgyűrűt* szokás értelmezni; ez olyan gyűrű, amelyben ugyan az adott gyűrű nem minden nem-zérus elemének, de minden *reguláris* (tehát nem-nullosztó) elemének már van inverze.[6] Ez a kvociensgyűrű igen alkalmasnak mutatkozott az eredeti gyűrű bizonyos tulajdonságainak kivizsgálására. A kvociensgyűrűben való vizsgálatokat az a körülmény teszi elég egyszerűvé, hogy benne csupán kétféle típusú elem van: nullosztó vagy egység. A kvociensgyűrű képzése az adott gyűrűből hasonló módon történik, mint a kvocienstest konstruálása integritási tartomány esetén, az egyetlen különbség csupán az, hogy most a nevezőbe nem kerülhet nullosztó. Uzkov — Chevalleyt követve — az R gyűrű bizonyos elemeiből álló olyan S multiplikatív félcsoportot tekint, amelyről csak azt teszi fel, hogy a gyűrű zéruselemét nem tartalmazza, és megengedi az S bármely elemét is nevezőként. Ezek szerint S tartalmazhat ugyan nullosztókat, de konjugált nullosztókat nem, s így a műveletek elvégzése során nem fordulhat elő, hogy egy tört nevezője 0 legyen. Ilyen S félcsoport természetesen több is akadhat. Uzkov az S-re vonatkozó kvociensgyűrűt az (r, s) elempárokkal vezeti be $(r \in R, s \in S)$. Ezen elempárokra az egyenlőséget így értelmezi: $(r_1, s_1) = (r_2, s_2)$, ha $r_1 s_2 s = r_2 s_1 s$ valan ilyen $s \in S$-re. A műveletek a szokásos módon definiálhatók. Belátható, hogy az (rs, s) elempárok és R-nek r elemei közt izomorfizmus áll fenn. A kvociensgyűrű struktúrájából értékes következmények vonhatók le az eredeti gyűrű szerkezetére vonatkozóan.

A nem-kommutatív gyűrűk elméletében a radikállal kapcsolatos vizsgálatok terén szinte egész szovjet iskola van most kialakulóban. A gyűrűkre és végesrangú algebrákra vonatkozó klasszikus Wed-

[6] Pl. a valós elemű n-edrendű négyzetes mátrixok ilyen tulajdonságú gyűrűt alkotnak: minden nem-zérusosztó mátrixnak van inverze.

derburn—Artin-féle struktúra-tételek radikálmentes gyűrűkre vonatkoznak, és ezért a radikál megfelelő definíciója elsőrendű fontosságú a gyűrűk és az algebrák elméletében. Minimum-feltétel fennállása esetén a radikált úgy szokás értelmezni, mint azt a legnagyobb baloldali ideált, amelynek minden eleme nilpotens (vagy maga az ideál nilpotens), azaz valamelyik hatványa zérus. Ez a definíció azonban nem bizonyult alkalmasnak minimum-feltételnek eleget nem tevő gyűrűkre és végtelenrangú algebrák (hiperkomplex rendszerek) esetére, mivel nem szolgáltatnak struktúra-tételt. Általánosabb radikáldefiníciót használt I. M. GELFAND a normált gyűrűkkel kapcsolatos vizsgálatainál, amelyek nagy horderejűeknek bizonyultak számos kutatásnál. A „norma" lényegileg az abszolút érték fogalmának megfelelője: oly nem-negatív valós szám, amely az abszolút értékkel analóg tulajdonságokkal bír, pusztán a szorzatra vonatkozó egyenlőség helyett az $\|ab\| \leqq \|a\| \, \|b\|$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie (az egyenlőségjel fennállása többek közt maga után vonná azt, hogy nincs a gyűrűben nullosztó, ami igen erős megszorítást jelentene és sok fontos esetben alkalmazhatatlanná tenné a GELFAND által felállított elméletet). GELFAND a kommutatív esetben bevezeti az általánosított nilpotens elem fogalmát: a általánosított nilpotens elem, ha

$$\lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} = 0.$$

(GELFAND nagyjelentőségű vizsgálatainak ismertetésére itt természetesen nem térhetünk ki.) A Gelfand-féle radikálnak megfelelő fogalmat N. JACOBSON amerikai matematikusnak sikerült megalkotnia tetszőleges gyűrűkre. Az ő radikál-fogalma a kvázi-reguláris elem fogalmára épül: a jobb kvázi-reguláris elem, ha a gyűrűnek van olyan b eleme, amelyre

$$a + b + ab = 0.$$

A Jacobson-radikál mármost az a maximális ideál, amely csupa jobb kvázi-reguláris elemből áll.

Az ehhez kapcsolódó szovjet vizsgálatok megindítása V. A. ANDRUNAKIJEVICS nevéhez fűződik. A gyűrűbeli szorzás helyett bevezeti az adjungált szorzás fogalmát:

$$a \circ b = a + b - ab.$$

Ezáltal az egységelem és a zérus szerepét felcseréli:

$$a \circ 0 = 0 \circ a = a \quad \text{és} \quad a \circ 1 = 1 \circ a = 1,$$

majd a radikált mint azon legnagyobb részgyűrűt értelmezi, amelynek elemei ezen szorzási műveletre nézve csoportot alkotnak. Ez az igen szellemes ötlet lehetővé teszi a radikál behatóbb vizsgálatát, az adjungált szorzásra a közönséges szorzással nyert eredményekhez

analóg tételek kimondását, valamint a radikáljukkal megegyező ú. n. radikálgyűrűk struktúra-kutatását. Legújabban ANDRUNAKIJEVICS vizsgálataihoz több szovjet szerző kapcsolódott: E. G. SULGEJFER, V. M. KUROCSKIN, L. I. GOLOVINA.

Az algebrákkal kapcsolatosan hadd említsük meg A. G. KUROS érdekes problémáját, amely teljesen analóg BURNSIDE már említett nevezetes megoldatlan csoportelméleti problémájához. KUROS problémája a következő: ha egy algebra minden eleme algebrai az alaptest felett, akkor igaz-e az, hogy véges-sok elem által generált szubalgebra végesrangú? Ekvivalens s tetszetősebb fogalmazásban: vajjon lokálisan véges-e minden algebrai algebra? E problémát speciális esetekre sikerült elintézni N. JACOBSONnak, I. KAPLANSKYnak és J. LEVITZKInek.

Számottevő eredményekkel gazdagították a szovjet kutatók az algebrák különféle típusainak vizsgálata terén is a matematikát. A végesrangú algebráktól kezdve a végtelenrangúakon keresztül egészen a nem-asszociatív algebrákig számos értékes eredményük látott napvilágot. Ezek ismertetését azonban a rendelkezésünkre álló szűk keretek közt nem tudjuk megvalósítani, minthogy itt számos olyan fogalomra lenne szükség, amelyek még az algebristák körében sem eléggé ismertek.

8. §. Hálók

Az absztrakt algebra területén elért szovjet eredmények közül utoljára a hálók terén elért eredmények ismertetésére térünk. Hálónak nevezünk olyan algebrai struktúrát, amelyben két operáció van értelmezve olyasformán, mint egy halmaz részhalmazai közt a metszet és az egyesítés képzése; tehát $a \cap b$ és $a \cup b$ a háló egyértelműen meghatározott elemei úgy, hogy ezek kommutatív, asszociatív és idempotens operációk, s a két operáció közt a kapcsolatot az a követelmény teremti meg, hogy $a \cap b = b$-ből $a \cup b = a$ következzék és viszont. (Ezen axiómák megfogalmazhatók a „$\geqq$“ fogalom segítségével is, ha t. i. $a \cap b = b$ esetén $a \geqq b$-t veszünk.) A háló fogalma csak az újabb időben vált közhasználatúvá, de ma már a matematikában közel olyan centrális és alapvető szerepet játszik, mint a csoport-fogalom. Ezt a megállapításunkat a matematika számos ágában szinte lépten-nyomon előforduló hálók támasztják alá; hogy csak néhány területet említsünk az algebrán kívül: valószínűségszámítás, halmazelmélet, matematikai logika, projektív geometria stb. Miként a csoportelmélet, a hálók elmélete is a matematika sok ága közt teremtett jótékony hatású kapcsolatot, amely számos esetben fontos és érdekes új eredményekre vezetett. Háló-elméleti jellegű tételnek bizonyult például egy csoport kompoziciósorára vonatkozó nevezetes Jordan—Hölder-tétel, s így min-

den további nélkül átvihető volt egyéb algebrai struktúrákra is, pl. egy gyűrű kétoldali ideáljaira.

A Noether-féle klasszikus ideálelmélet egyes tételeit is át lehetett vinni ú. n. Dedekind-féle hálókra. Dedekind-féle hálónak nevezünk olyan hálót, amelyben $a \cup c = c$ (azaz $a \leqq c$) esetén

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$$

következik. Ilyen hálót alkotnak pl. egy csoport normálosztói, vagy egy gyűrű kétoldali ideáljai stb. E téren megemlítjük KUROSnak és ORE norvég matematikusnak egymástól függetlenül talált azon érdekes tételét, hogy ha egy Dedekind-féle hálóban egy a elemet fel lehet bontani az

$$a = x_1 \cap x_2 \cap \cdots \cap x_n$$

alakban, ahol az x_i-k tovább már nem bonthatók a jelzett módon (tehát irreducibilisek), akkor ez a felbontás — a felesleges komponensek elhagyása után — lényegileg egyértelmű a következő értelemben: ha adva a-nak két felbontása:

$$a = x_1 \cap x_2 \cap \cdots \cap x_n = y_1 \cap y_2 \cap \cdots \cap y_m,$$

akkor minden x_i helyettesíthető alkalmas y_j-vel s viszont. (Ebből már könnyen adódik, hogy $n = m$.) KUROS bizonyításának alapgondolata lényegileg E. NOETHER eredeti bizonyítását követi.

A csoportelmélet Remak—Smidt-tételéről is bebizonyosodott, hogy háló-elméleti jellegű. E tétel a csoport direkt felbontásának egyértelműségét mondja ki direkt felbonthatatlan komponensekre; az egyértelműséget analóg módon értve, mint az imént, KUROS vetette fel azt az egész általános problémát, hogy mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy két adott felbontás izomorf felbontásokká finomítható legyen. Ugyanő mutatta ki, hogy az általa erre a célra bevezetett bizonyos „centrum"-nak a zérussal való egyenlősége a keresett kritérium.

Mint érdekességet megemlítjük, hogy M. I. GRAJEVnek sikerült Dedekind-féle hálókra hasonló tételeket bizonyítani, mint amilyeneket PRÜFER kapott az Abel-féle torziócsoportokra vonatkozó nevezetes vizsgálataiban, amelyekről már a 3. §-ban szólottunk.

Végezetül pedig legyen szabad említést tennünk V. I. GLIVENKO normált hálókra vonatkozó eredményeiről. GLIVENKO bevezet a hálóban egy nem-negatív valós normát olyképpen, hogy 1. $a \cup b = b$-ből (azaz $a \leqq b$-ből) $|a| \leqq |b|$ következzék; 2. $|a \cup b| + |a \cap b| = |a| + |b|$ legyen. Bebizonyította, hogy minden normált háló szükségképpen Dedekind-féle. Sőt, azt is sikerült kimutatnia, hogy normált hálókban bevezethető metrika is: az a és b „pontok" távolságán az $|a \cup b| - |a \cap b|$ számot értve, metrikus teret kapunk. Eredményeinek számos alkalmazása született a részben rendezett metrikus terek elméletében is.

РЕЗУЛЬТАТЫ СОВЕТСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ

Л. Фукс и Т. Селе

Авторы дают отчет о некоторых важнейших результатах, достигнутых советскими исследователями в области абстрактной алгебры. В отчет включены следующие области: конечные группы, бесконечные абелевы группы, бесконечные некоммутативные группы, частично упорядоченные группы, обобщения понятия группы, кольца, алгебры и структуры.

ON RESULTS OF SOWIET MATHEMATICIANS IN ABSTRACT ALGEBRA

L. Fuchs and T. Szele

The authors give a survey of certain important results, in the field of abstract algebra, got by Sowiet mathematicians. The following topics are included: finite groups, infinite abelian groups, infinite non-commutative groups, partially ordered groups, generalizations of the notion of group, rings and algebras, lattices.

Bauer Mihály tétele a geometriai szerkesztésekről

Írta: Obláth Richárd

A geometria axiómáinak Bolyai János és Lobacsevszkij részéről megkezdett felülvizsgálatát Hilbert ismert könyvében[1] kiterjesztette az összes axiómákra. Vizsgálatai az axiómák rendszerbe foglalását eredményezték, mely ma általánosan elterjedt a geometria megalapozásában. Az axiómákat öt csoportra osztja: az illeszkedés, az elrendezés, az összeillőség axiómái, a párhuzamosak axiómája, az ötödik csoport a folytonosság axiómái: az archimedesi (helyesebben eudoxusi) és a teljességi axióma.

Hilbert megvizsgálta, hogy az egyes axióma csoportok milyen szerkesztések elvégzését engedik meg. Az első axiómacsoport alapján összeköthetünk két pontot egyenessel és meghatározhatjuk két (nem párhuzamos) egyenes metszéspontját. Ezek tehát pusztán vonalzóval elvégezhetők. A második axiómacsoport hozzávételével sem oldhatunk meg egyéb feladatokat. A harmadik axiómacsoport alapján lehetségessé válik a távolságátvitel és a szögmásolás, a negyedik axióma alapján párhuzamos szerkeszthető.

Mindezen szerkesztések kivitelénél nincs szükség körvonalak leírására, a körző szerepe csupán távolságátvitelből áll. Kürschák József[2] megmutatta, hogy a távolságátvitel elérhető oly eszközzel, „étalon"-nal, mely csak egyetlen távolság, az egység átrakására alkalmas. A folytonos vonalat leíró körzőre csak a folytonossági axiómákat is feltételező feladatok megoldásánál van szükség. Az első négy axiómacsoport alapján végrehajtható szerkesztések kivitelére tehát egyszerűbb eszközök is elegendők. De már 1822-ben Poncelet és 1832-ben Steiner megmutatták, hogy az összes axiómákat felhasználó kvadratikus feladatok megszerkesztése sem igényli a bármely nyílásra kinyitható, bármely pontba beszúrható szabad mozgású, folytonos vonalat leíró körzőt, mert a célnak az egyszersmindenkorra kirajzolt körvonal is megfelel, ha középpontja ismeretes (Steiner-féle kör).

[1] D. Hilbert: Grundlagen d. Geometrie, 1. kiadás 1899, Leipzig, azóta számos újabb kiadás.

[2] J. Kürschák: Das Streckenabtragen. Math. Ann. 55., 1902, p. 597—598

Igen természetes kérdésfelvetés tehát, nem lehetne-e az egység, az étalon felmérésével kivitelezhető szerkesztéseket is egyszerűbb eszközzel végrehajtani. Szerző ebből a kérdésből indult ki 1915-ben megjelent dolgozatában[3], amelyben — teljesen elemi úton — megmutatta, hogy az étalonszerkesztések végrehajtásához elegendő a STEINER-kör bármily kicsiny íve. Utóbb azonban SZŐKEFALVI-NAGY GYULA észrevette[4], hogy az ott megadott módszerrel, tehát elemi meggondolásokkal minden másodfokú szerkesztés elvégezhető. (Ezt az eredményt projektív geometriai úton előzőleg SEVERI és MORDUKHÁJ-BOLTOVSZKOJ, utána pedig még néhány más szerző is elérte.) Ez a gondolat tehát nem vezetett az étalonszerkesztéseket jellemző egyszerűsítésre. VAHLEN-nek sikerült némi egyszerűsítést elérnie.[5] Ő ugyanis figyelmeztetett arra, hogy elegendő, ha az egységet, az étalont egyetlen pontból tudjuk felmérni. Műszerét tehát egységforgatónak (Einheitsdreher) nevezte. (Ezt a gondolatot egyébként WEISS tetszőleges kvadratikus szerkesztésekre is kiterjesztette.[6] Bebizonyította ugyanis, ha adva van egy kör és középpontja, akkor az összes kvadratikus szerkesztések lineárisan elvégezhetők, ha kizárólag oly egyeneseket használunk, amelyek mindegyike átmegy 4 előre megadott pont valamelyikén, sőt a négy adott pont közül 3 egy egyenesen lehet. Ezeket az egyeneseket „függő vonalzók"-nak, „hängende Lineale" nevezi.)

Logikus tehát az a kérdés, nem lehetne-e az étalon szerkesztéseknél a STEINER-kört valamely egyszerűbb ábrával pótolni, hiszen tudjuk, hogy pl. egy parallellogramma megadása után a sík bármely egyeneséhez pusztán vonalzóval húzhatunk párhuzamosat, vagy bármely távolságot a vonalzó kizárólagos használatával megfelezhetünk, sőt, ha a megadott parallellogramma négyzet, akkor a sík minden egyenesére vonalzóval állíthatunk merőlegeset, és csupán vonalzóval négyzetet is szerkeszthetünk. Egy fix szabályos hatszög kirajzolása után bármely egyenesdarab fölé lineárisan szerkeszthetünk egyenlő oldalú háromszöget, sőt derékszöget is, de négyzetet nem.[7]

KÜRSCHÁK JÓZSEF tette fel a kérdést, amely ezek szerint igen közelfekvő, hiszen szerkesztéseink nem igénylik a folytonossági

[3] R. OBLÁTH: Bemerkungen zur Theorie d. geometrischen Konstruktionen. Monatshefte für Mathematik u. Physik 26., 1915, p. 295—298.

[4] GY. (J.) SZ.-NAGY, Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen, The Tôhoku Math. Journ. 40, 1934, p. 76—78.

[5] OBLÁTH R. Merőleges szerkesztése egy egyenes adott pontjában vonalzóval és étalonnal. Mathem. és Phys. Lapok 18. 1909, p. 174—176., speciálisan p. 175. TH. VAHLEN: Konstruktionen und Approximationen, Leipzig 1911, p. 59.

[6] E. WEISS: Konstruktionen mit hängenden Linealen. Deutsche Mathematik 6., 1941, p. 3—15.

[7] DR. SZŐKEFALVI-NAGY GYULA: A geometriai szerkesztések elmélete. Kolozsvár 1943. Acta Scientiarum Mathematicarum et Naturalium 18, p. 43.

axiómákat: nem lehetne-e az étalont valamely sokszög megadásával pótolni. BAUER MIHÁLY válasza erre a kérdésre tagadó, mert fennáll a következő

Tétel. *A mozgatható étalon nem pótolható semilyen sokszöggel.*

Tételét BAUER MIHÁLY[8] KÖNIG GYULA következő tételével bizonyította. (KÖNIG GYULA ma már nem használatos terminológiájában, mely utóbb szőrszálhasogatónak bizonyult.) Minden orthoid tartomány,[9] mely egy racionalitási tartományban foglaltatik, maga is racionalitási tartomány. Szőrszálhasogatást mondtam, mert az „orthoid tartomány" és a KRONECKER-féle „racionalitási tartomány" kifejezések tartalma lényegében ugyanaz, ma DEDEKIND terminológiájával mindkettőt inkább számtestnek nevezzük. A tételen és bizonyításán tehát nagyon meglátszik, hogy 1902-ben a Műegyetemen keletkezett, amelyen akkor KÜRSCHÁK találta a maga említett tételét és KÖNIG írta most idézett „Bevezetés az algebrai mennyiségek általános elméletébe" című könyvét és heti 4 órás előadást tartott HILBERT idézett könyvéről. A szokatlan terminológia lehet az oka, hogy az érdekes tételt jóformán elfelejtették. VAHLEN idézett köny-

[8] BAUER MIHÁLY: A geometriai szerkesztések elméletéhez. Math. és Phys. Lapok 12., 1903, p. 251—255. és Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 20, p. 43—47.

[9] *Orthoid*nak nevezi KŐNIG GYULA *(Az Algebrai Mennyiségek Általános Elméletének Alapvonalai,* Budapest, 1903., p. 4) a számtartományt, melynek mennyiségei $\alpha \neq 0$ és β, amelyben az

$$\alpha\xi = \beta$$

egyenlet adott tartományban megoldható", ha tehát ebben a tartományban „található olyan ξ_1 mennyiség, melyre nézve $\alpha\xi_1 = \beta$, hacsak α a 0-tól különböző."

A racionalitási (vagy racionális) tartományt pedig így értelmezi (uo. p. 183—184).

Legyenek

$$\Re_1, \Re_2, \ldots, \Re_\mu$$

valamely meghatározott orthoid tartomány mennyiségei. Az „$\Re_1, \ldots, \Re_\mu$ racionális függvényeinek" összeségét, azaz a két ily racionális és egész formából alkotott hányadosok összeségét — természetesen a 0 nevező kizárásával — KRONECKERrel az $\Re$ mennyiségek racionális tartományának nevezi és az

$$(\Re_1, \ldots, \Re_\mu)$$

jellel jelöli. Ha az $\Re_1, \ldots, \Re_\mu$ mennyiségek mind határozatlanok $\Re_i = x_i$, akkor az orthoid tartományt *racionalitási tartomány*nak nevezi.

Az algebrai számok összesége tehát orthoid tartomány, de nem racionálitási tartomány. (Ld. KÜRSCHÁK és RADOS: Mathematikai és Physikai Lapok 12., 1903, p. 292.), amit ma úgy mondunk, hogy az algebrai számok összesége nem algebrai számtest. (Ld. pl. E. LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie* III., 1927., p. 80. Satz 718.).

vében [10] szerzője nevének említése nélkül szerepel a következő alakban: „Az egységátvivő nem äquivalens valamely rajzban megadott ábrával (irgendeinem gezeichnet vorliegenden Datum)" bizonyításul ott ez áll: „mert ez pontokból és egyenesekből állva csupán ezek koordinátáit vezetné be, de más irracionalitást nem." Ez persze nem nevezhető bizonyításnak. SZŐKEFALVI-NAGY GYULA könyvének 40. és 41. oldalán is találunk egy tételt, mely ehhez bizonyos fokig hasonló.[11]

Nem fölösleges azért, ha egy igen egyszerű bizonyítást adok BAUER tételére, melynek alapgondolata egyébként lényegileg azonos BAUER bizonyításával.

Az adott pontokból vonalzóval szerkeszthető pontok egy testben vannak a racionális test fölött. Ez a tétel megtalálható SZŐKEFALVI-NAGY GYULA könyvének 33. lapján is, még élesebben HENRI LEBESGUE posthumus könyvében.[12] (Megjegyzendő, hogy nem minden elsőfokú szerkesztés hajtható végre pusztán vonalzóval, pl. már a

$$2x = a$$

egyenlet megoldása sem. Csupán a projektiv elsőfokú szerkesztések). Ha tehát az adott pontok koordinátái $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ a belőlük lineárisan szerkeszthető pontok a

$$P(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$$

testben vannak, ha P-vel jelölöm a racionális testet. Ez a test tehát P-nek $x_1, \ldots, y_n$-nel való bővítése. A vonalzóval és étalonnal megszerkeszthető pontok azonban általában ezen a testen kívül vannak. Vonalzóval és étalonnal ugyanis, amint ismeretes $\sqrt{x_i^2 + x_k^2}$ alakú kifejezések megszerkeszthetők[13], vagy másszavakkal mindazon kvadratikus szerkesztések, amelyek az adott pontok bármely helyzeténél valós eredményre vezetnek. Ez pedig *nem* testoperáció, hiszen általában irracionális művelet, míg a testoperációk racionálisak. A szerkesztésekkel nyert pontok ennélfogva általában a $P(x_1, \ldots, y_n)$ testből kivezetnek. Q. e. d.

Idézett 1915. évi dolgozatomban kívánatosnak mondottam BAUER tételének tiszta geometriai bizonyítását. Kétségtelenül kívánatos lenne, de nem tartom valószínűnek ezen cél elérését. A tagadó megoldásra vezető geometriai problémák, amelyekkel közel két és

[10] VAHLEN i. h.[5] p. 61.

[11] L. még L. BIEBERBACH: Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel 1952, § 4 (melynek címe Konstruktionen mit dem Lineal allein nach Vorgabe eines fertig gezeichneten regulären Polygons), p. 11—17.

[12] H. LEBESGUE: Leçons sur les Constructions Géométriques professées au Collège de France en 1940—1941. Paris, 1950, p. 39.

[13] D. HILBERT i. h. a 3. kiadásban p. 112, Satz 41.

fél ezredéven át hiába foglalkoztak a legjobb elmék, minden, geometriai támadással dacoltak és csak a 19. század hathatós algebrai, sőt számelméleti módszereireivel (a számtest és az irreducibilitás fogalmaival) csak 1837!-ben sikerült WANTZELnek — a ma is fennálló Liouville Journal 2. kötetében — bebizonyítania, hogy a trisectió és a kocka megkettőzése körzővel és vonalzóval lehetetlen, a négyszögesítés problémájának elintézéséhez pedig az analízis nehéz fegyvereire is szükség volt. Mindezen eredmények ma sem érhetők el geometriai úton. Valószínű tehát, hogy a geometria ily természetű lehetetlenségi tételei nem kaphatók meg az algebra és az analízis segítsége nélkül.

ТЕОРЕМА М. БАУЭРА О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ

Согласно теореме М. Бауэра данные многоугольника с неопределенным числом сторон не заменяют эталона свободного движения. В статье эта теорема доказывается тем примечанием, что конструкции, исполняемые линейкой, образуют тела в то время, как при помощи эталона можно создавать квадратные корни, полученные из квадратных сумм, причем это действие выходит из рационального тела.

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. BAUER SUR LA THÉORIE DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

La note précédente contient une démonstration du théorème suivant de M. BAUER:

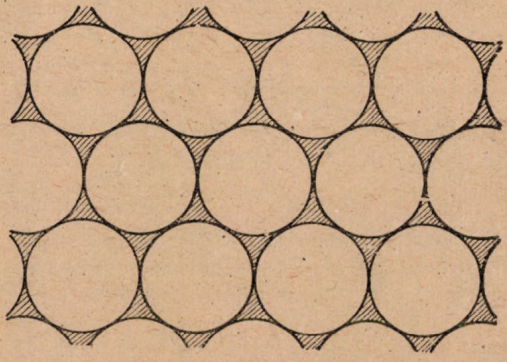
Théorème. *Les constructions quadratiques pour lesquelles il suffit la règle et l'étalon ne deviennent pas effectuables par la règle seule, même si l'on donne des points et des droites en nombre fini.*

La démonstration utilise le théorème connu (H. LEBESGUE l. c.[10]) selon lequel les points qui sont construisibles par la règle seule, forment un corps algébrique; à l'aide de la règle et de l'étalon cependant on peut construire des expressions $\sqrt{x_i^2+x_k^2}$ qui sont en général en dehors du corps déterminé par les données.

Körök elhelyezése gömbön

Irta: MOLNÁR JÓZSEF

Hogyan kell adott sugarú köröket egy — a kör sugarához viszonyítva — „nagy" lemezből legkisebb anyagveszteséggel kivágni, vagyis úgy, hogy a legtöbb kört kapjuk? Ismeretes, hogy a legjobb elhelyezésben minden kört hat másik érint (1. ábra).



1. ábra

A fenti problémával equivalens a következő: Egy gyümölcsösnek szánt „nagy" területen a lehető legtöbb fát akarjuk telepíteni úgy, hogy egyik fa se kerüljön a többitől adott távolságnál kisebb távolságra. A 2. ábra a hármaskötés néven ismert legsűrűbb telepítést szemlélteti.

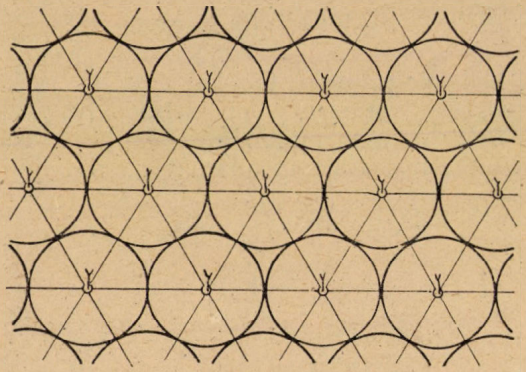
Megfelelő módon értelmezett határértékkel be lehet vezetni egy végtelen körrendszer sűrűségének fogalmát a síkban. Ez mint a körök területösszegének és a sík területének viszonya interpretálható. A sűrűség fogalmának segítségével fenti állításunk úgy fogalmazható, hogy egymásba nem nyuló egybevágó körök bármely rendszerének sűrűsége $\leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots$ és egyenlőség csak hatszöges[1] körrend-

[1] Lásd FEJES TÓTH L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin—Göttingen—Heidelberg (1953) 61. o.

szerre érhető el. Ezt először A. THUE bizonyította be mintegy 60 évvel ezelőtt.[2]

Fordítsuk figyelmünket az analóg problémára a gömbön.

Meghatározandó az egységsugarú gömb $n \geqq 2$ pontjának az az elrendezése, amelyben a két legközelebb fekvő pont távolsága maximális. Jelöljük ezt a maximális (euklideszi) távolságot d_n-nel.



2. ábra

Két pont extremális elrendezését nyilvánvalóan két diametrálisan átellenes pont adja. A probléma megoldása $n = 3$-, 4-, 6- és 12-re FEJES TÓTH LÁSZLÓ egy általános tételéből[3] adódik, amely szerint

$$(1) \qquad d_n \leqq \sqrt{3 - \operatorname{cotg}^2 \omega_n}\,; \quad n \geqq 3,$$

ahol $\omega_n = \frac{n}{n-2}\frac{\pi}{3}$. Ez az egyenlőtlenség az említett n értékekre nem javítható és n-nek nagy értékeire pontos asszimptotikus becslést ad. Az extremális pontrendszerek n felsorolt értékeire: egy főkörbe írt szabályos háromszög, egy szabályos tetraéder, oktaéder, illetve ikozaéder csúcspontjai. Figyelemreméltó azonban, hogy az $n = 8$ és $n = 20$ eset megoldását nem a kocka, ill. dodekaéder csúcspontjai adják.

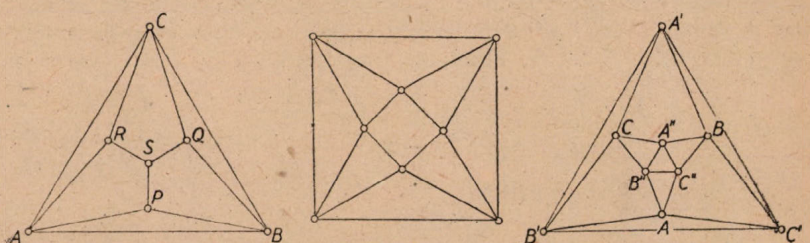
Ugyancsak FEJES TÓTH LÁSZLÓtól származik az az észrevétel is, hogy $d_5 = d_6 = \sqrt{2}$.[4] $n = 5$-re az extremális pontrendszerek a következők: a két pólus és az egyenlítőbe beírt olyan háromszög csúcspontjai, amelynek minden oldala $\geqq \sqrt{2}$.

[2] A. THUE: Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. Forhdl. Skand. Naturforsk. **14**. 352—353 (1892).

[3] FEJES TÓTH L.: Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jber, dtsch. Math-Ver. **53**, 66—68 (1943).

[4] Lásd a [3] alatt idézett dolgozatot.

K. SCHÜTTE és B. L. VAN DER WAERDEN egy közös dolgozatukban megoldják a problémát $n = 7$-, 8- és 9-re.[5] A 3. ábrán látjuk a szélsőértéket szolgáltató konfigurációk sematikus sztereografikus képét. A vetítés az „északi" pólusból történt. Az összekötött pontok éppen d_n távolságra vannak egymástól. Az $n = 7$ esetnek megfelelő konfigurációban három pont szimmetrikusan helyezkedik el az északi pólushoz viszonyítva egy d_7 oldalú ABC szabályos háromszög csúcspontjaiban. Másik három P, Q, R pont az A, B, C ponttal szintén d_7 oldalú szabályos ABP-, BCQ- és CAR háromszöget képez. A hetedik S pont a déli pólusban fekszik P, Q, R-től d_7 távolságra.



3. ábra

8 pont legjobb elhelyezését az ú. n. négyoldalú archimedeszi antiprizma csúcspontjai szolgáltatják.

Az $n = 9$ esetben három A, B, C pont az egyenlítőn helyezkedik el egy szabályos háromszög csúcspontjaiban. A többi hat pont az AB, BC, CA átlójú d_9 oldalú $AC'BC'$, $AA'CA''$ és $CB'AB''$ rombusz $A', B'C', A'', B'', C''$ csúcspontja. Az $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszög szintén d_9 oldalú.

Ugyancsak ebben a dolgozatban sejtések vannak $n = 10$-, 11-, 13-, 14-, 15-, 16-, 24- és 32-re.

Egy nem rég megjelent dolgozatban VAN DER WAERDEN[6] további legjobbnak sejtett konfigurációkat közöl $n = 20$-, 42- és 122-re. Az $n = 20$-ra adott konfigurációja jobb mint egy RUTISHAUSER[7] által előzőleg megadott elhelyezés.

A legsűrűbb gömbelhelyezkedés problémájában felmerül az a kérdés, hogy egy gömböt hány vele kongruens gömb érinthet. Ez

[5] K. SCHÜTTE és B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. **123**, 96—124 (1951).

[6] B. L. VAN DER WAERDEN: Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze. Math. Ann. **125**, 213—222 (1952).

[7] H. RUTISHAUSER: Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche. Comment. Math. Helvetici **17**, 327—331 (1944—45).

equivalens azzal a kérdéssel, hogy az egységsugarú gömbön hány egymástól legalább egységnyi távolságra fekvő pont helyezhető el. 12 pont biztosan elhelyezhető mégpedig egy ikozaéder csúcspontjaiba, mert az egységsugarú gömbbe írt ikozaéder éle nagyobb, mint az egység: $d_{12} = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}} = 1{,}05\ldots$. Az a kérdés, hogy vajjon 13 gömb is ráhelyezhető-e ugyanolyan sugarú gömbre, már NEWTON és GREGORY között is vitára adott alkalmat. K. SCHÜTTE és B. L. VAN DER WAERDEN[8] bebizonyította, hogy $d_{13} > 1$, megmutatva ezzel, hogy egy gömböt legfeljebb 12 vele egyenlő sugarú gömb érinthet.

Szemben FEJES TÓTH (1) egyenlőtlenségével, amely d_n-et felülről becsli meg, VAN DER WAERDEN — az említett dolgozatában — a következő alsó becslést adja d_n számára:

$$d_n^2 \geqq \frac{4}{2\sqrt{3s} + 3s^{2/3} + 3s^{1/3}}, \tag{2}$$

ahol $s = \frac{n}{4\pi}$ a pontszámsűrűség.

Egy gömbfelületen levő n kör (gömbsüveg) Δ sűrűségén a körök területösszegének és a gömb felszínének hányadosát értjük.

Írjunk az előbb tekintett extremális pontrendszer minden pontja köré $r = \text{arc sin}\,\frac{d_n}{2}$ (szférikus) sugárral egy-egy kört. Ezáltal n kör legsűrűbb elhelyezését nyerjük a gömbön. Jelöljük a megfelelő sűrűséget D_n-nel. Ha kiszámítjuk D_n értékét az $n \leqq 9$ és $n = 12$ esetben, valamint a SCHÜTTE és VAN DER WAERDEN által megadott elhelyezésekhez tartozó sűrűségértékeket, azt tapasztaljuk, hogy ezek közül a $D_5 = 0{,}732\ldots$ érték a legkisebb. Egybevetve ezt a tényt azzal, hogy $\lim_{n\to\infty} D_n = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots$ azt várhatjuk,[9] hogy $n \geqq 1$ minden értékére $D_n \geqq D_5$.

Meg fogjuk mutatni, hogy ez a várakozásunk helyes, azaz fennáll a következő tétel:

Egy gömbön fekvő egymásba nem nyuló $n \geqq 1$ kör maximális sűrűsége D_n, $n = 5$-re minimális:

$$D_n \geqq D_5 = \frac{5}{4}(2 - \sqrt{2}) = 0{,}732\ldots. \tag{3}$$

[8] K. SCHÜTTE és B. L. VAN DER WAERDEN: Das Problem der dreizehn Kugel. Math. Ann. **125**, 325—334 (1953).

[9] Lásd az [1] alatt idézett könyv 168. oldalát.

VAN DER WAERDEN (2) alatti egyenlőtlensége D_n számára a következő alsó becslést adja:

$$D_n \geqq \frac{n}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{2\sqrt{3}s+3s^{2/3}+3s^{1/3}}}\right), \text{ ahol } s=\frac{n}{4\pi}.$$

A jobboldali kifejezés n növekedtével monoton növekedve $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$-höz tart. Mivel továbbá ez a kifejezés $n=1089$-re már nagyobb mint D_5, elég $n<1089$-re szorítkoznunk. Nem kell foglalkoznunk a fentebb említett $n \leqq 16$, $n=20$-, 24-, 32-, 42- és 122 esetekkel sem. Tekintsük továbbá $n=20$ körnek VAN DER WAERDEN által megadott elhelyezését. Mivel ennek sűrűsége $\Delta_{20} \approx 0{,}852$, ebből az elhelyezésből egy, ill. két kör elhagyásával 19, ill. 18 kör elhelyezését nyerjük, amelyek sűrűsége $\Delta_{19}=\frac{19}{20}\Delta_{20} \approx 0{,}809$, ill. $\Delta_{18}=\frac{18}{20}\Delta_{20} \approx 0{,}767$ még mindig nagyobb mint D_5. Hasonlóképpen intézhetők el a $21 \leqq n < 24$, $38 \leqq n < 42$ és $103 \leqq n < 122$ értékeknek megfelelő esetek. A többi $n<1089$ értékre a legtöbb esetben a következő konstrukcióval jutunk el D_5-nél nagyobb sűrűséghez:

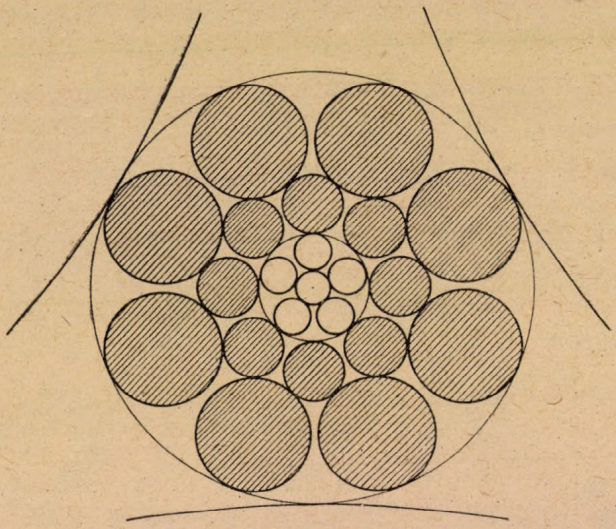
Bontsuk fel a gömböt az északi pólusban elhelyezett ϱ sugarú körhöz csatlakozó 2ϱ szélességű gömbövekre. Ezekben annyi ϱ sugarú kört helyezzünk el, amennyit csak tudunk. Ha a déli pólus körül szabadon maradt kör sugara $\geqq \varrho$, akkor természetesen ide is egy kört helyezünk el. Pl. $\varrho=24°$ esetén az északi pólustól számított 24°- és 72°-os szélességi kör közé 5 kört, a 72°- és 120°-os közé 7-et, a 120°- és 168°-os közé 4-et, összesen 17-et helyezhetünk. Az így nyert 17 kör sűrűsége $\Delta_{17} \approx 0{,}735 > D_5$. Táblázatunkban ezt az elhelyezést így jelöljük: 1, 5, 7, 4. Ilyen módon — ϱ alkalmas megválasztásával — a kérdéses esetek többsége elintézhető.

Vannak azonban olyan n értékek is, amelyekre az említett konstrukció nem vezet célhoz. Az első tekintetbejövő ilyen eset $n=25$-re lép fel. Ennél u. i. a legnagyobb ϱ érték, amely még megengedi 25 kör elhelyezését $\varrho_{25}=19°38'40''$. Az ehhez tartozó sűrűség $\approx 0{,}728 < D_5$. Ebben a konfigurációban az egymásután következő gömbövekben lévő körök száma: 1, 5, 8, 8, 3. Ezt nagyobb sűrűségű konfigurációvá változtathatjuk a következőképpen:

A 8 kört tartalmazó első sávban a köröket úgy helyezzük el, hogy középpontjai szabályos nyolcszöget alkossanak. Illesszünk az így nyert „körkoszorúhoz" dél felől egy másik nyolc körből álló kört,

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

hogy ennek minden köre az előbbinek két körét érintse (4. ábra). Ekkor a déli pólus körül akkora kör marad szabadon, amelybe három ϱ_{25} sugarú kör kis játékkal is elhelyezhető s így valamennyi kör sugarát növelhetjük. Elmehetünk így a $\varrho = 20°$ értékig, ami által $0{,}754 > D_5$ sűrűségű elhelyezést nyerünk. A köröknek ezt az elhelyezését a következőképpen jelezzük: 1, 5, 8—8, 3. Ugyanígy járunk el mindazokban az esetekben, amikor az első elhelyezési mód nem bizonyul megfelelőnek.[10] Ezek az $n = 34, 35, 36, 48, 49, 50, 51, 58$ és 67 esetek.



4. ábra

Bizonyos n értékekre a leírt elhelyezések olyan nagy sűrűséget szolgáltatnak, hogy egy vagy több kör elhagyásával is D_5-nél nagyobb sűrűségű elhelyezést nyerünk. Ez a jelenség különösen nagy n értékekre lép fel. Ez érthető abból, hogy a megadott elhelyezésekhez tartozó sűrűség n növekedtével $\frac{\pi}{4}$-hez, vagyis D_5-nél jóval nagyobb értékhez tart. Ez lehetővé teszi, hogy bizonyos n értéktől kezdve nagyobb lépésekben haladjunk. A mellékelt táblázaton bemutatjuk a szükséges számítások eredményeit $n \leqq 220$-ra. A teljes táblázatot — annak terjedelme miatt — nem közöljük.

[10] Annak ellenére, hogy utóbbi konstrukciónk minden n-re alkalmazható, mégis csak az említett esetekben használjuk azt, mert az elsőhöz viszonyítva komplikáltabb számításokat igényel.

n	ϱ	Δ	Elhelyezés
17	24°	0,735	1, 5, 7, 4
25	20°	0,754	1, 5, 8—8, 3
26	19°30′	0,746	1, 5, 9, 8, 3
27	19°	0,736	1, 5, 9, 8, 4
33	17°8′30″	0,733	1, 5, 9, 10, 7, 1
34	16°51′	0,733	1, 5, 9—9, 8, 2
35	16°46′	0,744	
36		0,767	1, 5, 9—9—9, 4
37	16°13′	0,736	1, 5, 10, 11, 8, 2
43	15°	0,733	
44		0,750	1, 5, 10, 12, 10, 5, 1
45	14°54′	0,756	1, 5, 10, 12, 10, 6, 1
46	14°30′	0,733	1, 5, 10, 12, 11, 6, 1
47	14°24′	0,738	1, 5, 10, 12, 11, 7, 1
48	14°12′	0,733	1, 5, 10, 11—11, 8, 2
49	14° 6′	0,738	
50		0.753	1, 5, 10, 12—12, 8, 2
51	13°54′	0,747	1, 5, 10, 12—12, 9, 3
52	13°39′	0,733	1, 5, 10, 13, 12, 8, 3
53	13°36′	0,743	1, 5, 10, 13, 12, 9, 3
54	13°24′	0,735	1, 5, 10, 13, 12, 9, 4
55	13°16′	0,740	1, 5, 10, 13, 13, 9, 4
56	13°12′	0,740	1, 5, 10, 13, 13, 10, 4
57	13° 6′	0,744	1, 5, 10, 13, 13, 10, 5
58	13° 6′	0,755	1, 5, 10, 13—13, 10, 5, 1
59	12°48′	0,733	
60		0,746	1, 5, 10, 13, 13, 11, 6, 1
61	12°37′	0,736	1, 5, 10, 13, 14, 11, 6, 1
62	12°30′	0,735	1, 5, 10, 13, 14, 11, 7, 1
63	12°23′	0,733	1, 5, 10, 13, 14, 12, 7, 1
64	12°18′	0,735	1, 5, 10, 14, 14, 12, 7, 1
65	12°12′	0,734	1, 5, 10, 14, 14, 12, 8, 1
66	12° 6′	0,733	1, 5, 11, 14, 14, 12, 8, 1
67	12°	0,757	1, 5, 11, 14—14, 12, 8, 1
68	11°57′	0,737	1, 5, 11, 14, 14, 13, 8, 2
69	11°54′	0,742	
70		0,752	1, 5, 11, 14, 15, 13, 9, 2
71	11°48′	0,750	1, 5, 11, 14, 15, 13, 9, 3
72	11°36′	0,735	
73		0,745	1, 5, 11, 14, 15, 13, 10, 4
74	11°30′	0,743	1, 5, 11, 14, 15, 14, 10, 4
75	11°24′	0,740	1, 5, 11, 14, 15, 14, 10, 5

n	ϱ	Δ	Elhelyezés
76	11°18′	0,737	1, 5, 11, 14, 15, 14, 11, 5
77		0,733	
78	11°12′	0,743	
79		0,752	1, 5, 11, 14, 16, 14, 11, 6, 1
80	11° 6′	0,748	1, 5, 11, 14, 16, 15, 11, 6, 1
81	11°	0,744	1, 5, 11, 14, 16, 15, 12, 6, 1
82	10°57′	0.746	1, 5, 11, 14, 16, 15, 12, 7, 1
83	10°48′	0,735	1, 5, 11, 15, 16, 15, 12, 7, 1
84	10°45′	0,737	1, 5, 11, 15, 16, 15, 12, 8, 1
85	10°42′	0,739	
86		0,748	1, 5, 11, 15, 16, 16, 13, 8, 1
87		0,733	
88	10°32′	0,741	
89		0,750	1, 5, 11, 15, 17, 16, 13, 9, 2
90	10°24′	0,740	
91		0,748	1, 5, 11, 15, 17, 16, 14, 9, 3
92	10°18′	0,741	
93		0,749	1, 5, 11, 15, 17, 16, 14, 10, 4
94	10°12′	0,743	1, 5, 11, 15, 17, 17, 14, 10, 4
95		0,736	
96	10° 6′	0,744	
97		0,752	1, 5, 11, 15, 17, 17, 15, 11, 5
98	10°	0,744	1, 5, 11, 15, 17, 17, 15, 11, 5, 1
99	9°54′	0,737	1, 5, 11, 15, 17, 17, 15, 11, 6, 1
100		0,737	
101	9°51′	0,745	
102		0,752	1, 5, 11, 15, 17, 18, 16, 12, 6, 1
123		0,740	
124	8°54′	0,746	
125		0,753	
126		0,759	1, 5, 11, 16, 19, 20, 19, 16, 12, 6, 1
127	8°48′	0,747	
128		0,753	1, 5, 11, 16, 19, 20, 19, 17, 12, 7, 1
129		0,742	
130	8°42′	0,748	
131		0,753	1, 5, 11, 16, 19, 20, 20, 17, 13, 8, 1
132	8°36′	0,742	
133		0,748	1, 5, 11, 16, 19, 20, 20, 18, 14, 8, 1
134		0,736	
135	8°30′	0,741	
136		0,747	
137		0,752	1, 5, 11, 16, 19, 21, 20, 18, 14, 9, 3
138		0,740	
139	8°24′	0,746	
140		0,751	
141		0,756	1, 5, 11, 16, 19, 21, 21, 18, 15, 10, 4

n	ϱ	Δ	Elhelyezés
142		0,735	
143	8°15′	0,740	
144		0,745	
145		0,750	1, 5, 11, 16, 19, 21, 21, 19, 16, 11, 5
146		0,737	
147		0,742	
148	8° 9′	0,747	
149		0,752	
150		0,757	1, 5, 11, 16, 20, 21, 21, 20, 16, 12, 6, 1
151		0,736	
152		0,740	
153	8°	0,744	
154		0,749	
155		0,756	1, 5, 11, 16, 20, 22, 22, 20, 17, 13, 7, 1
156		0,740	
157	7°54′	0,745	
158		0,750	1, 5, 11, 16, 20, 22, 22, 21, 18, 13, 8, 1
159		0,735	
160	7°48′	0,740	
161		0,745	
162		0,749	1, 5, 11, 16, 20, 22, 23, 21, 18, 14, 9, 2
163		0,746	
164	7°45′	0,751	
165		0,755	
166		0,760	1, 5, 11, 16, 20, 22, 23, 22, 19, 15, 9, 3
167		0,733	
168	7°36′	0,738	
169		0,742	
170		0,747	1, 5, 11, 16, 20, 22, 23, 22, 20, 16, 10, 4
171	7°33′	0,741	
172		0,746	1, 5, 11, 16, 20, 22, 23, 22, 20, 16, 11, 5
173	7°30′	0,740	
174		0,744	1, 5, 11, 16, 20, 22, 23, 23, 20, 16, 11, 5, 1
175		0,739	
176	7°27′	0,743	
177		0,747	
178		0,751	1, 5, 11, 16, 20, 22, 23, 23, 21, 17, 12, 6, 1
179		0,735	
180		0,739	
181	7°21′	0,744	
182		0,747	
183		0,751	1, 5, 11, 16, 20, 23, 24, 23, 21, 18, 13, 7, 1
184		0,746	
185	7°18′	0,750	
186		0,754	1, 5, 11, 17, 20, 23, 24, 24, 21, 18, 13, 8, 1
187		0,748	
188	7°15′	0,752	
189		0,756	1, 5, 11, 17, 21, 23, 24, 24, 22, 18, 14, 8, 1

n	ϱ	Δ	Elhelyezés
190		0,749	
191	7°12′	0,753	
192		0,757	1, 5, 11, 17, 21, 23, 24, 24, 22, 19, 14, 9, 2
193		0,740	
194		0,744	
195		0,748	
196	7° 6′	0,751	
197		0,756	
198		0,759	
199		0,763	1, 5, 11, 17, 21, 23, 25, 25, 23, 20, 15, 10, 3
200		0,745	
201		0,749	
202	7°	0,753	
203		0,757	
204		0,760	1, 5, 11, 17, 21, 24, 25, 25, 23, 20, 16, 11, 5
205		0,742	
206		0,746	
207	6°54′	0,750	
208		0,753	
209		0,757	
210		0,761	1, 5, 11, 17, 21, 24, 25, 25, 24, 21, 17, 12, 6, 1
211		0,742	
212		0,746	
213		0,749	
214	6°48′	0,753	
215		0,756	
216		0,760	
217		0,763	1, 5, 11, 17, 21, 24, 26, 26, 25, 22, 18, 13, 7, 1
218		0,744	
219	6°42′	0,748	
220		0,751	1, 5, 11, 17, 21, 24, 26, 26, 25, 23, 19, 14, 8, 1

РАЗМЕЩЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ НА ШАРЕ

Й. Молнар

Р е з ю м е

На некотором шаре следует разместить $n \geqq 1$ идентичных, не входящих одна в другую окружностей с возможно наибольшим радиусом. Под плотностью системы окружностей D_n следует понимать частное суммы площадей окружностей и поверхности шара. Показано, что:

$$D_n \geqq D_5 = \frac{5}{4}(2-\sqrt{2}) = 0{,}732\ldots; \quad n \geqq 1.$$

KREISLAGERUNGEN AUF EINER KUGEL

Von J. MOLNÁR

Legen wir auf eine Kugel $n \geq 1$ gleichgrosse, nicht übereinandergreifende Kreise von grösstmöglichem Radius. Wir definieren die Dichte D_n dieses Kreissystems, als die Inhaltssumme der Kreise geteilt durch die Oberfläche der Kugel. Es wird gezeigt, dass

$$D_n \geqq D_5 = \frac{5}{4}(2-\sqrt{2}) = 0{,}732\ldots;\ n \geqq 1$$

ausfällt.

Ellipszis-normális szerkesztése, komplex egyenlet alapján

Irta: Fazekas Ferenc

Induljunk ki a

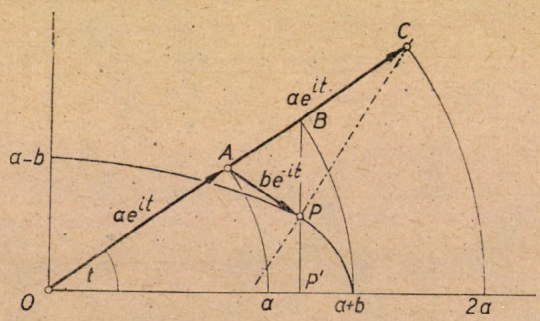
$$z = ae^{it} + be^{-it} \qquad (a \text{ és } b \text{ valós})$$

valós változós komplex függvényből. Koordinátás alakja:

$$x = (a+b)\cos t, \quad y = (a-b)\sin t$$

mutatja, hogy a függvény görbéje $a+b$ és $a-b$ féltengelyű ellipszis.

Az ellipszis t paraméterű P pontjának megszerkesztése, fenti komplex egyenlete alapján: a és $a+b$ sugarú kör felhasználásával megrajzoljuk, az origóból kiindulva az ae^{it} komplex vektort, majd ennek A végpontjából az be^{it} konjugáltját (az A-ból b körzőnyílással metszve a $\overline{BP'}$ egyenest).



Az ellipszis érintővektora:

$$\dot{z} = i(ae^{it} - be^{-it}),$$

következésképpen a normálvektor:

$$z_n = ae^{it} - be^{-it}.$$

A normális szerkesztése tehát: $2a$ sugarú segédkör felhasználásával az ae^{it} helyzetvektorú A pontból mégegyszer felrakjuk az ae^{it} vektort; a P-ből ennek C végpontjába húzott vektor már maga a P pontbeli normálvektor, nemcsak irány szerint helyesen, hanem éppen a kívánt helyen.

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЯ ЭЛЛИПСА НА ОСНОВАНИИ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ

Исходя из комплексного уравнения эллипса

$$z = ae^{it} + be^{-it}$$

у учтя обстоятельство

$$z_n = -i\dot{z} = ae^{it} - be^{-it}$$

автор показывает простое построение нормаля эллипса. См. рисунок.

CONSTRUCTION DE LA NORMALE DE L'ELLIPSE, SUR LA BASE DE L'ÉQUATION COMPLEXE

L'auteur partant de l'équation complexe de l'ellipse

$$z = ae^{it} + be^{-it}$$

et prise en considération la circonstance

$$z_n = -i\dot{z} = ae^{it} - be^{-it}$$

présente une construction simple de la normale de l'ellipse. Voir la figure.

Az 1952. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny

Írta: Szőkefalvi-Nagy Béla,
a versenybizottság előadója

A Bolyai János Matematikai Társulat ezévben negyedszer rendezte meg a Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. Ezúttal a kiküldött versenybizottság szegedi matematikusokból állott: Fodor Géza, Kalmár László, Rédei László, Szász Gábor, Szendrei János és Szőkefalvi-Nagy Béla voltak a bizottság tagjai, de a bizottság bevonta munkájába Pukánszky Lajost is. A bizottság előadója s egyben a verseny felelős vezetője Szőkefalvi-Nagy Béla volt.

A versenyzők egyheti gondolkozási időt kaptak a feladatok megoldására. A feladatokat nyomtatásban küldtük szét a Társulat helyi tagozatai, valamint az egyetemi és főiskolai tanszékek vezetőinek, akik a feladatokat 1952. november 22-én déli 12 órakor hirdették ki a jelentkezők előtt. A következő egyetemek, főiskolák és tudományos intézetek hirdetőtábláin jelentek meg a versenyfeladatok:

Budapesten: az Eötvös Loránd Tudományegyetem, a Műszaki Egyetem, a Közgazdaságtudományi Egyetem és a Pedagógiai Főiskola matematikai intézeteiben, ill. tanszékein, továbbá a Magyar Tudományos Akadémia alkalmazott matematikai intézetében,

Szegeden: a Tudományegyetem Bolyai intézetében és a Pedagógiai Főiskola matematikai tanszékén,

Debrecenben: a Kossuth Lajos Tudományegyetem matematikai intézetében,

Miskolcon: a Rákosi Mátyás Nehézipari Műszaki Egyetem matematikai tanszékén,

Veszprémben: a Nehézvegyipari Műszaki Egyetem matematikai tanszékén,

Szolnokon: a Közlekedéstudományi Egyetem matematikai tanszékén,

Pécsett: a Pedagógiai Főiskola matematikai tanszékén,

Egerben: a Pedagógiai Főiskola matematikai tanszékén.

A megoldások benyujtásának, ill. postára adásának határideje november 29-én déli 12 óra volt. A versenyen résztvehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, továbbá mindazok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1952-ben fejezték be.

A verseny tételei a következők voltak:

Az 1952—53. tanévi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny feladatai:

1. Melyek azok a konvex poliéderek, amelyeknek nincsen testátlójuk (tehát amelyek bármely két csúcsát összekötő egyenesszakasz a poliéder felületén fekszik)?

2. Lehet-e a síkban három kúpszeletet úgy felvenni, hogy a sík bármely egyenese legalább kettőt messen közülük és a sík bármely pontján át legalább kettőjüknek menjen érintője?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ tökéletes szám, akkor

$$2 < \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1} < 4;$$

ha ezenkívül az a még páratlan is, akkor a 4-es szám a jobboldalon a kisebb $2\sqrt[3]{2}$ számmal helyettesíthető.

4. Legyen K a p elemű véges test, p prímszám. Bármely

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (\in K[x])$$

polinom esetén legyen

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{p^i}.$$

Bebizonyítandó, hogy bármely két $f(x), g(x)$ $(\in K[x])$ polinomra akkor és csak akkor $\bar{f}(x) \mid \bar{g}(x)$, ha $f(x) \mid g(x)$.

5. Legyen G nem-kommutatív csoport. Tekintsük G-nek mindazon egy-egyértelmű $a \to a'$ leképezéseit, amelyekre $(ab)' = b'a'$ (anti-automorfizmusok). Bizonyítsuk be, hogy ezek a G csoport automorfizmusaival együtt csoportot alkotnak, amelynek az automorfizmus-csoport direkt faktora.

6. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör kerületén adott $2n$ számú pontot találomra párokba szedve és mindegyik pár két pontját egy-egy húrral összekötve, a kapott n számú húr közül egyik se messe a másikat? Feltételezzük, hogy az összes lehetséges párokba szedések egyenlő valószínűséggel bírnak.

7. Egy pont „bolyongó“ mozgást végez az x-tengelyen. A $t=0$ időpontban a pont az x_0 egész abszcisszájú pontban van ($|x_0| \leqq N$, ahol N pozitív egész szám). Ha valamely t (nemnegatív egész) időpontban a pont az x abszcisszájú pontban van és $|x| < N$, akkor a $t+1$ időpontra $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az $x+1$ abszcisszájú pontba, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig az $x-1$ abszcisszájú pontba kerül. Ha a t időpontban a pont az $x=N$, illetőleg az $x=-N$ pontban van, akkor a $t+1$ időpontra bizonyosan az $N-1$, illetőleg a $-N+1$ abszcisszájú pontba kerül. Jelentse $P_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a pont a t időpontban az $x=k$ abszcisszájú pontban van. Meghatározandó k minden rögzített egész értéke mellett $P_k(2t)$ és $P_k(2t+1)$ határértéke, ha t egész számokon át $\to \infty$.

8. Legyen $c_k > 0$, $\sum_1^\infty \frac{c_k}{k}$ konvergens. Mely z értékekre konvergál a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_1 c_2 \cdots c_n z^n$$

hatványsor?

9. Az (a, b) intervallumon értelmezett és a $0 \leqq f(x) \leqq 1$ feltételnek eleget tevő integrálható $f(x)$ függvények halmazát jelöljük C-vel. A C egy $\varphi(x)$ elemét „szélső“ elemnek nevezzük, ha nem állítható elő a C két elemének számtani közepeként máshogy, mint az evidens $\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(x)]$ módon. Megkeresendők a C szélső elemei és megkeresendők a C azon $f(x)$ elemei, amelyek szélső elemek valamely $\varphi_n(x)$ sorozatának „gyenge“ limeszeként állíthatók elő abban az értelemben, hogy

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, h(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, h(x)\, dx \qquad (n \to \infty),$$

bármely integrálható függvényt jelentsen is a $h(x)$. [Az integrál fogalmát érthetjük akár a Riemann-, akár a Lebesgue-féle értelemben.]

10. Bebizonyítandó, hogy a

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m}$$

függvény a $0 < x < \frac{\pi}{m+1}$ intervallumon aszerint nagyobb vagy kisebb, mint az $\frac{x}{2}$ függvény, amint az m szám páratlan vagy páros.

Határidőig 17-en nyujtottak be a 10 feladatra összesen 91 megoldást. A multévi versennyel összehasonlítva, amikor a 17 feladatra 26-an összesen 160 megoldást nyujtottak be, visszaesés mutatkozik a versenyzők számában, az egy-egy feladatra eső megoldások átlagos számában azonban alig van eltolódás. A visszaesés okai közt bizonyára az volt a döntő, hogy az idén kevesebb feladatot tűztünk ki mint tavaly s így kisebb volt a versenyzők számára a választék. Kétségtelen, hogy a kitűzött feladatok javarésze komoly erőpróbára tette a versenyzőket. Ennek ellenére változatos és ötletes megoldások érkeztek be mindegyik feladatra, úgy hogy a verseny sikeresen zárult. A legjobb versenyzők rangsorolása az idén is komoly gondot okozott a bizottságnak. A bizottság úgy döntött, hogy az idén az I. díj (1000.— forint) mellett két II. díjat (500.— forint) is ad ki, továbbá több versenyzőt dícséretben részesít.

Az I. díjat a bizottság GEHÉR LÁSZLÓnak, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kara IV. éves mat.-fiz. szakos hallgatójának ítélte oda. Gehér László a 7. kivételével mindegyik feladatra nyujtott be megoldást, ezek mind helyesek és igen figyelemreméltó matematikai érzékről tanúskodnak, fogalmazás tekintetében is kifogástalanok.

Az egyik II. díjat a bizottság CZIPSZER JÁNOSnak, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kara IV. éves alkalm. mat. hallgatójának ítélte oda. Czipszer a 3., 4. és 9. feladat kivételével mindegyik feladatra adott be megoldást, az 1.-re kettőt is. Mindegyik megoldása (az 1.-re adott első megoldása kivételével) kifogástalan, mind tartalmát, mind pedig fogalmazását illetően. Kiemelendők a 2., 5., 7. és 10. feladatra adott megoldásai, amelyek éles matematikai elemzőképességről és ötletességről tanúskodnak.

A másik II. díjat a bizottság megosztva KÁROLYHÁZY FRIGYESnek és HAJNAL JÁNOSnak ítélte oda, akik a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának volt, ill. IV. éves mat.-fiz. szakos hallgatói. Károlyházy mind a tíz feladatra adott be megoldást, ezek közül azonban csak 2., 6., 7., 8., 9. és 10. feladatra adott megoldása helyes. Kiemelendő a 7. és 10. feladatra adott eredeti és elegáns megoldása, továbbá általában szabatos fogalmazási készsége. Hajnal a 6. kivételével minden feladatra küldött be megoldást, ezek közül a 3., 4., 8. és 9. feladatra adottak teljesek; az 1., 2. és 5. feladatra adottak azonban itt-ott helyesbítést, ill. kiegészítést igényelnek.

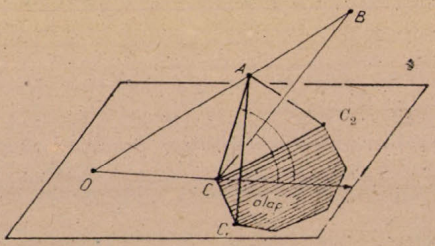
Dicséretben részesíti a bizottság GACSÁLYI SÁNDORt, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Természettudományi Kara volt hallgatóját a 3., 5. és 8. feladat helyes és szabatossággal megfogalmazott megoldásáért, FRIED ERVINt, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kara IV. éves hallgatóját a 3. és 8. feladatra adott szép megoldásáért, továbbá KÁLMÁN LAJOSt, a budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kara I. éves hallgatóját a geometriai feladatokra, különösen az 1. feladatra adott megoldásáért, végül KORÁNYI ÁDÁMOT, a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi Kara III. éves hallgatóját a 2., 7., 8. és 9. feladatra adott (bár részben nem teljes) megoldásaiért.

A feladatok megoldásai a következők (*-gal, ill. **-gal jelöltük meg azokat a megoldásokat, amelyeket a bizottság — gondolatmenetük lényegének megtartásával — kisebb, ill. nagyobb mértékben átfogalmazott).

I. feladat (beérkezett 15 dolgozat).

I. megoldás.** Nevezzük el a testátló nélküli konvex poliéder (egyik) legnagyobb oldalszámú lapját „alap"-nak és ennek síkját „alapsík"-nak. Tárgyalásunkban három esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy az alap hány oldalú.

1. *Az alap öt vagy több szögű.* Ebben az esetben a poliédernek nem lehet két csúcsa is az alapsíkon kívül.



1. ábra

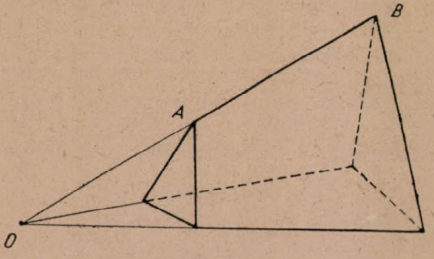
Tegyük fel az ellenkezőjét, tehát, hogy van két csúcs is, A és B, az alapsíkon kívül. Az AB egyenesnek az alapsíkkal alkotott metszéspontja legyen O, mely lehet a végtelen távolban is[1]. Az O-ból az alap pontjai irányában húzott sugarak egy szögtartományt határoznak meg, amelynek O a csúcsa. E szög mindkét szárán van az alap szögpontjai közül egy, vagy esetleg kettő.

[1] A poliéder konvexitásából következik, hogy az A, B pontok az alapsík ugyanazon oldalán fekszenek és hogy az O pont az alap külsejében van.

Minthogy az alap 5, vagy 5-nél többszögű, van az alapnak olyan C szögpontja, hogy az O-ból a C felé húzott sugár a szögtartomány belsejében halad. Legyen C_1 és C_2 az alapnak C-vel szomszédos két szögpontja. Tekintsük most a C-ből az A és a B felé húzott két sugár közül azt, amelyik a *kisebbik* szöget zárja be az OC egyenesnek a C-ből az alap belseje felé mutató irányával: legyen ez pl. a CB. Ekkor a BC szakasz teljes egészében a CC_1, CC_2 és CA szakaszok által meghatározott testszögletben halad, így annál inkább a belsejében halad a poliéder C csúcspontjához tartozó testszögletnek. A poliéder B és C csúcsait összekötő egyenes szakasz tehát a poliéder testátlója, ellentétben azzal, hogy a tekintett poliédernek nincs testátlója.

Tehát a poliédernek valóban csak egyetlen csúcspontja lehet az alapsíkon kívül, következésképpen a poliéder *gúla*.

2. *Az alap négyszögű.* Ha az alapsíkon kívül a poliédernek csak egy csúcsa van, akkor négyoldalú gúla. Tegyük fel most, hogy az alapsíkon kívül több csúcspont is van: legyen A és B két ilyen csúcspont és jelöljük újra O-val az AB egyenesnek az alapsíkkal való metszéspontját.[1] Ha legfeljebb egy alapél halad át az O-n, akkor az 1. esetben tett meggondolás újra alkalmazható s elvezet testátló létezéséhez. Tehát csak az a lehetőség marad, hogy az O ponton két (szükségképpen szembenfekvő) alapél is áthalad.



2. ábra

Kimutatjuk, hogy A-n és B-n kívül több csúcs nem létezhet az alapsíkon kívül. Ha ugyanis volna egy további ilyen csúcspont, D, akkor az AB-re vonatkozó előbbi meggondolást AD-re is, BD-re alkalmazva, azt kapnánk, hogy e három egyenes mindegyikének megvan az a tulajdonsága, hogy az alap síkjával való metszéspontja az alap két szembenfekvő oldala meghosszabbításának metszéspontjába esik. Ebből következik, hogy az AB, AD, BD egyenesek közül legalább kettő, mondjuk AB és AD, az alap síkját ugyanazon pontban metszi. E két egyenesnek az A-n kívül így még egy közös pontja létezvén, a két egyenes összeesik. Márpedig

lehetetlen, hogy konvex poliéder három csúcspontja egy egyenesbe essék.

Eszerint, ha az alap négyszög, akkor a poliéder vagy (négyoldalú) gúla, vagy pedig a 2. ábrán látható konvex poliéder (a metsző szembenfekvő élek helyett esetleg párhuzamos élekkel).

3. *Az alap háromszögű* (ekkor a poliéder minden lapja háromszög). Ebben az esetben újra nem lehet két csúcs is alapsíkon kívül.

Tegyük fel, hogy van két ilyen csúcs, A és B, és legyen O az AB egyenesnek az alapsíkkal való metszéspontja[1]. Ha egy alapél sem halad át O-n, akkor az 1. eset meggondolása alkalmazható s így testátló létezéséhez jutunk. Ha egy alapél áthalad O-n, akkor ez az alapél és az A, B pontok egy olyan konvex négyszöget határoznak meg, amelyik a poliéder felületén fekszik (különben a négyszög átlói a poliéder testátlói lennének), tehát a poliédernek van olyan oldalsíkja, amelyre négy, vagy több csúcspont esik. Feltevésünk tehát mindkét esetben ellentmondásra vezet: vagy azzal, hogy a poliédernek nincs testátlója, vagy pedig azzal, hogy a poliédernek csupa háromszögű lapjai vannak.

Tehát csak egy csúcs létezhet az alapsíkon kívül s így a poliéder ebben az esetben (háromoldalú) gúla.

Összegezve: Testátló nélküli konvex poliéderek az összes gúlák és azok a 6 csúccsal bíró testek, amelyeket úgy kapunk, hogy valamely (végesben fekvő, vagy végtelen távoli) pontból kiinduló háromélű testszögletet két síkkal elmetszünk; más testátló nélküli konvex poliéder nincs.

Kálmán Lajos

II. megoldás*. A megoldáshoz több lépésben jutunk el.

(1) *Ha egy konvex poliédernek nincs testátlója és nincs négy olyan csúcsa, amelyek egy síkban fekszenek, akkor az tetraéder.*

Bizonyítás. A feltételeknek megfelelő c csúcsú poliéder minden lapja háromszög, tehát $\frac{3l}{2} = e$, $l = \frac{2}{3}e$ (l a lapok, e pedig az élek száma). Mivel lapátlók nincsenek, azért bármely két csúcsot összekötő egyenes éle a poliédernek, azaz $e = \frac{c(c-1)}{2}$. Euler tétele szerint tehát

$$l - e + c = \frac{2}{3}\frac{c(c-1)}{2} - \frac{c(c-1)}{2} + c = 2.$$

Tehát $c = 4$, $e = 6$, $l = 4$; ilyen test valóban létezik, t. i. a tetraéder (és csak ez).

(2) *Konvex poliédernek nem eshet három csúcsa ugyanarra az egyenesre.* (Világos.)

(3) *Ha egy konvex poliéder egyes csúcsait elhagyva, a megmaradó csúcsok által meghatározott konvex poliédernek van testátlója, akkor ez az eredeti poliédernek is testátlója.* (Világos.)

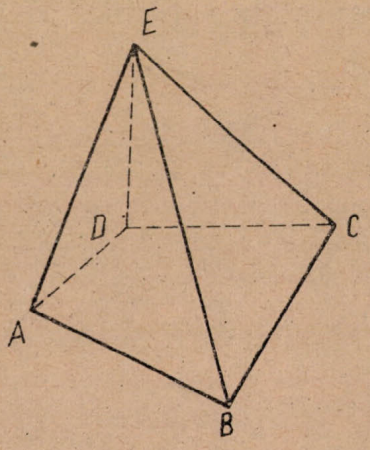
(4) *Ha egy konvex poliédernek legalább öt csúcsa van és nincs testátlója, akkor bármely öt pontja közül legalább négy egy síkban fekszik.*

Bizonyítás. Válasszuk ki a poliéder tetszésszerinti öt csúcsát. (3) szerint az ezek által meghatározott konvex poliédernek sem lehet testátlója, de akkor (1) alapján következik, hogy az öt csúcs közül legalább négy egy síkban fekszik.

Következmény:

(4') *Ha egy konvex poliédernek öt csúcsa van és nincs testátlója, akkor az konvex négyoldalú gúla.*

(5) *Ha egy konvex poliédernek hat csúcsa van és nincs testátlója, akkor az vagy konvex ötoldalú gúla, vagy pedig „háztető alakú" poliéder* (azaz háromoldalú hasáb vagy csonkagúla, esetleg az alaplap síkjával nem párhuzamos, de az alapsíkszög belsejét át nem metsző síkkal levágva).



3. ábra

Bizonyítás: Vegyük el a poliéder egyik csúcsát. A megmaradt öt csúcs által meghatározott konvex poliéder (3) és (4') miatt csak egy konvex négyoldalú $ABCDE$ gúla lehet. Ez a gúla fel-

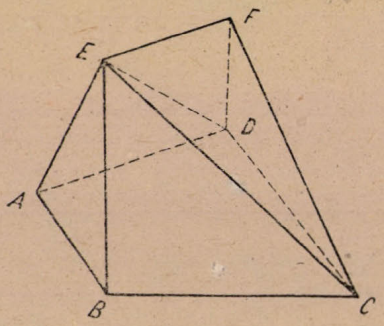
bontható $ABCE$ és $ACDE$ tetraéderekre. A poliéder hatodik, F csúcsa (4) szerint benne van mindkét tetraéder valamelyik lapjának a síkjában.

Ha F a két résztetraéder közös $ABCD$ lapsíkjára esik, akkor a poliéder ötoldalú gúla.

Az F az ACE közös lapsikra nem eshet, mert akkor az $ACFE$ (konvex) négyszög közös lapja lenne az $ACFEB$ és $ACFED$ konvex négyoldalú gúláknak, amelyek B és D csúcsai az $ACFE$ síkjának ellenkező oldalain helyezkednek el. Az $ACFE$ négyszög tehát a poliéder belsejébe esnék, s így átlói testátlók lennének.

Már csak az az eset van hátra, amikor az F csúcs a két résztetraéder egy-egy nem közös lapjának a síkjában is benne van. Ez a két sík nem lehet az $ABCDE$ gúla két szomszédos oldallapjának a síkja, mert akkor F a gúla valamely élére esnék, ami (2) miatt lehetetlen.

Tehát az F csúcs csak az $ABCDE$ gúla két szembenfekvő oldallapjának síkjára, pl. az ADE és BCE síkokra eshet. De akkor F rajta van az ADE és BCE síkok metszésvonalán. Ebben az esetben pedig az $ABCDEF$ poliéder a fenti értelemben vett „háztetőalakú" felület. (Ugyanis a BC, EF és AD élek közül bármelyik kettő egy síkban van, és így a három él vagy párhuzamos, vagy meghosszabbításuk egy ponton megy keresztül.

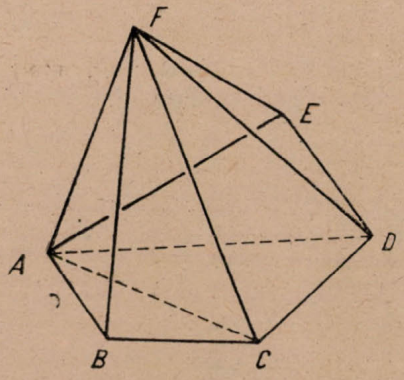


4. ábra

(6) *Ha egy konvex poliédernek hét csúcsa van és nincs testátlója, akkor az konvex hatoldalú gúla.*

Bizonyítás: Először azt mutatjuk meg, hogy az $ABCDEFG$ testátló nélküli konvex poliéder G csúcsát elvéve, a megmaradó csúcsok által meghatározott konvex poliéder csak ötoldalú gúla lehet.

Tegyük fel ugyanis, hogy az $ABCDEF$ testátló nélküli konvex poliéder „háztető alakú" felület (l. a 4. ábrát). Ebben az esetben az $ABCDEF$ poliéder felbontható az $ABCE$, $ACDE$ és $CFDE$ tetraéderekre. A G-nek (mint az $ABCEG$, $ACDEG$ és $CFDEG$ konvex poliéderek ötödik csúcsának) a (4) szerint mind a három tetraéder valamelyik lapjának síkjában kell feküdnie. Minthogy a három tetraédernek nincs közös lapja, ezért G-nek legalább két különböző lapsíkra kell esnie. Ez a két lap azonban nem lehet a (szembenfekvő) AEB és CFD, mert akkor G nem lenne rajta az $ACDE$ tetraéder egyik lapjának a síkján sem. Bármely más két lapsík metszésvonala pedig a poliéder valamely két csúcsát összekötő egyenes, s így (2) szerint G ezekre sem eshet. Így az a feltevés, hogy az $ABCDEF$ poliéder „háztető alakú" ellentmondásra vezet.



5. ábra

Az $ABCDEF$ poliéder tehát csak ötoldalú gúla lehet (legyen ennek pl. F a csúcsa). Ekkor viszont a G pont csak az $ABCDE$ síkra eshet. Az $ABCDEF$ gúla ugyanis felbontható az $ABCF$, $ACDF$ és $ADEF$ gúlákra, amelyeknek közös lapsíkjuk az $ABCDE$ síkon kívül nincs. Ha tehát a G nem esnék rá az $ABCDE$ síkra, akkor a fenti részgúláknak legalább két különböző lapsíkjára kellene esnie. Mivel azonban ezek metszésvonala az $ABCDEF$ gúla élei, (2) szerint ez az eset nem fordulhat elő.

Az $ABCDEFG$ poliéder tehát csak hatoldalú konvex gúla lehet.

(7) *Ha egy testátló nélküli konvex poliéder csúcsainak száma* $c \geqq 7$, *akkor az egy* $c-1$ *oldalú konvex gúla.*

Bizonyítás: Teljes indukcióval. A $c=7$ esetében az állítást kimutattuk. Legyen $c \geqq 8$ és tegyük fel, hogy $c-1$ csúcs esetében a tétel igaz. Vegyünk el egy csúcsot a poliéderből és képezzük a

megmaradó $c-1$ csúcshoz tartozó konvex részpoliédert. (3) miatt ennek is testátló nélkülinek kell lennie, s így az indukciós feltevés szerint ez egy $c-2$ ($\geqq 6$) oldalú gúla. Ezt fel lehet bontani (az előbbi pontban látott módon) $c-4$ számú tetraéderre, melyeknek közös lapsíkjuk az alapsíkon kívül nincs. A (6) második részében látott bizonyítást lemásolva, be lehet látni, hogy az elhagyott (c-edik) csúcs a $c-2$ oldalú részgúla alapsíkjára esik; tehát a test csak $c-1$ oldalú konvex gúla lehet.

Gehér László

Megoldotta még *Czipszer János*. Jó gondolatmenetű, de egy-egy lényeges ponton nem eléggé kidolgozott megoldást adott be *Fried Ervin*, *Hajnal András* és *Róna Péter*.

2. feladat (beérkezett 12 dolgozat).

E feladat fogalmazása hiányos volt, mert kétséget hagyott afelől, hogy a metszésekhez hozzáértendők-e az érintések is vagy sem. Ha hozzáértjük, akkor a feladatra a válasz igenlő, ha pedig nem, akkor a válasz tagadó.

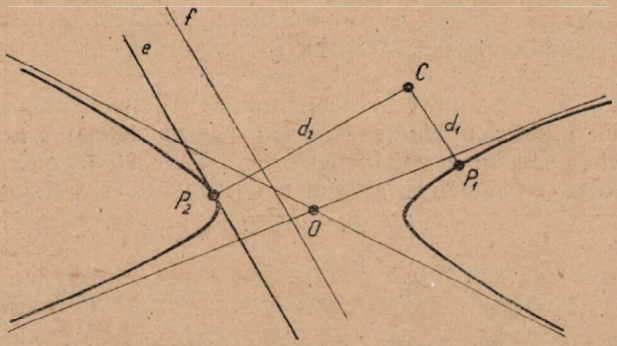
I. (igenlő) megoldás*. Síkon a projektív síkot fogjuk érteni s a metszésbe beleértjük az érintést is. Azt mondjuk, hogy két kúpszelet egymás külsejében van, ha nincs közös belső pontjuk. Megmutatjuk a következőt:

A) *Ahhoz, hogy három kúpszelet, K_1, K_2 és K_3, a feladatban kirótt követelményeknek eleget tegyen, szükséges és elegendő, hogy* (1) *közülük bármely kettő egymás külsejében legyen,* (2) *egymást páronként két-két pontban érintsék.*

Szükségesség. Az (1) szükségessége könnyen következik abból, hogy ha két kúpszeletnek, pl. K_1-nek és K_2-nek közös belső pontja volna, akkor ebből a pontból legfeljebb csak a K_3-hoz lehetne érintőt húzni.

A (2) szükségességének belátása végett először azt mutassuk meg, hogy ha két egymás külsejében levő kúpszelet egymást legfeljebb egy pontban érinti, akkor van olyan egyenes a síkban, amelynek egyikükkel sincs közös pontja. Feltehetjük, hogy az egyik kúpszelet hiperbola, a másik pedig kör. (A sík alkalmasan választott projektív leképezésével ugyanis bármely más eset erre visszavezethető.) Legyen r a kör sugara, C a kör középpontja; P_1 és P_2 pedig legyen a hiperbola egyik és másik ágán a C-hez legközelebb levő pont; tegyük fel, hogy $d_1 = \overline{CP_1} \leqq \overline{CP_2} = d_2$. Minthogy feltevés szerint a kör a hiperbola külsejében van és a hiperbolának legfeljebb egyik ágát érinti, azért bizonyosan $r < d_2$. Legyen e a

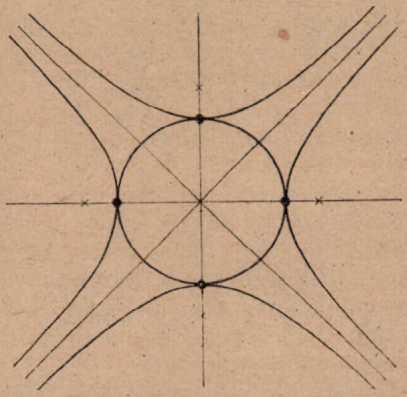
hiperbola érintője a P_2 pontban ($e \perp CP_2$). Most tekintsünk egy tetszésszerinti olyan, az e-vel párhuzamos f egyenest, amely e és a hiperbola O középpontja között halad és amelynek e-től való távolsága $\delta < d_2 - r$. Az f-nek nyilván sem a körrel, sem a hiperbolával nincs közös pontja.



6. ábra

Ezek után a (2) szükségessége azonnal adódik a feladatnak abból a követelményéből, hogy a sík minden egyenese a három kúpszelet közül legalább kettőt metsz.

Elégségesség. Nyilván elég azt bizonyítanunk, hogy ha két kúpszelet egymáson kívül van és egymást két pontban érintik, akkor a sík bármely pontján legalább az egyik kúpszelethez húzható érintő és a sík bármely egyenese legalább az egyik kúpszeletet metszi.



7. ábra

Az érintőre vonatkozó állítás triviális. A metszésre vonatkozó állítás a következőképpen látható be. Legyen L és M a két kúpszelet két érintkezési pontja. Az LM egyenest az L, M pontok két szakaszra bontják, amelyek közül az egyiknek a belseje az egyik kúpszelet, a másiknak a belseje a másik kúpszelet belsejébe esik. A sík bármely egyenese vagy tartalmazza legalább az egyik érintési pontot, vagy az egyik LM szakasz belső pontján haladva át, van pontja az egyik kúpszelet belsejében s így az illető kúpszeletet metszi.

Ezzel az A) állítást bebizonyítottuk. Könnyen megadható három olyan kúpszelet, amelyek az (1), (2) feltételeknek (s következésképpen a feladat követelményeinek is) eleget tesznek. Pl. az a három kúpszelet, amelyek egyenlete derékszögű koordinátákban:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (kör)}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ (hiperbola)}, \quad y^2 - x^2 = 1 \text{ (hiperbola)}.$$

Czipszer János

További megoldások: *Hajnal András* és *Korányi Ádám* (utóbbié nem teljes).

Megjegyzés. Azt az állítást, hogy ha két kúpszelet egymás külsejében halad és legfeljebb egy pontban érinti egymást, akkor van olyan egyenes, amelynek egyikükkel sincs közös pontja, *Czipszer János* bonyolultabb, de tisztán projektív geometriai módszerrel bizonyítja. Ugyancsak ő bebizonyítja a következő állítást is:

B) *Ahhoz, hogy három kúpszelet a feladatban kirótt követelményeknek eleget tegyen, szükséges és elegendő, hogy* (a) *egymást páronként két-két pontban érintsék,* (b) *a szóbajövő hat érintkezési pont mind különböző legyen.*

II. (tagadó) megoldás. Ha a metszéshez az érintést nem értjük hozzá, akkor nincs olyan három kúpszelet, amely a feladat követelményeinek eleget tenne. Ha ugyanis volna három ilyen kúpszelet, akkor az érintő húzására vonatkozó követelményből következőleg ezeknek páronként közös belső pont nélkülieknek kell lenniök. Ha azonban pl. az első és a második kúpszeletnek nincs közös belső pontja, akkor egymást vagy kívülről érintik, vagy teljesen egymás külsejében fekszenek, s így mindenesetre található olyan egyenes, amely egyiküket sem metszi (legfeljebb érinti)[2]. Ez az egyenes tehát akkor legfeljebb a harmadik kúpszeletet metszhetné, ami ellentmond a feladat másik követelményének.

Hajnal András

[2] Ha a két kúpszelet érinti egymást, akkor a közös érintő ilyen egyenes. Ha teljesen egymás külsejében fekszenek, akkor pl. az I. megoldásban szereplő meggondolás vezet célhoz.

A tagadó megoldást megtalálta még *Gehér László, Kálmán Lajos, Károlyházy Frigyes, Kiss István, Korányi Ádám, László Zoltán, Villányi Ottó.*

3. feladat.

I. megoldás. Ha $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ *tökéletes szám,* akkor osztóinak összege $2a$, tehát

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} = 2 \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}.$$

Innen Πp_i-vel való átszorzással és $\Pi(p_i^{\alpha_i+1}-1)$-gyel való átosztással adódik:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i-1} = 2 \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i+1}-1}.$$

Mivel a jobboldali szorzat minden tényezője 1-nél nagyobb, következik, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i-1} > 2.$$

Másrészt (felhasználva azt, hogy $\alpha_i + 1 \geqq 2$):

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i+1}-1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}} + \frac{1}{(p_i^{\alpha_i+1})^2} + \dots\right) \leqq$$

$$\leqq \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^4} + \dots\right) = \sum{}' \frac{1}{m^2},$$

ahol a szummációt az összes $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ $(\beta_i \geqq 0)$ alakú egész számokra kell kiterjeszteni. Ebből következik, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i-1} < 2 \sum{}' \frac{1}{m^2} < 2 \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^2} < 2\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{1}{k(k-1)}\right) =$$

$$= 2\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right) = 4.^{3}$$

[3] Felhasználva a $\sum_{1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ összegképletet, a pontosabb $\frac{\pi^2}{3}$ felső korlát adódik.

Ha a páratlan, akkor a $\Sigma' \frac{1}{m^2}$ összegben fellépő m-ek is páratlanok s így akkor

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i-1} \leqq 2\,\Sigma' \frac{1}{m^2} < 2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} =$$

$$= 2\frac{\pi^2}{8} < 2 \cdot \frac{10}{8} = 2\sqrt[3]{\frac{1000}{512}} < 2\sqrt[3]{2}.$$

Gehér László,
Hajnal András

Megoldották még *Fried Ervin* és *Gacsályi Sándor*, továbbá *Arató Mátyás* és *Károlyházi Frigyes* (az utóbbi kettőnek megoldásai azonban nem teljesek, mert páratlan a esetében a kívántnál valamivel nagyobb korláthoz jutnak).

Megjegyzés. Ha a páros tökéletes szám, akkor Euler szerint $a = 2^{\alpha} p$, ahol $\alpha \geqq 1$, $p \geqq 3$ (p törzsszám). Ennélfogva ebben az esetben

$$\prod \frac{p_i}{p_i-1} = \frac{2}{2-1} \cdot \frac{p}{p-1} = \frac{2p}{p-1} = 2 + \frac{2}{p-1} \leqq 2 + \frac{2}{3-1} = 3.$$

(Minthogy $2\sqrt[3]{2} < 3$, azért tehát minden a tökéletes szám esetében a 4 helyett a 3 is jó felső korlát.)

Arató Mátyás,
Gacsályi Sándor

II. megoldás. (Ezt a megoldást, amely nem használ fel végtelen sorokat, *Szép Jenő* főiskolai tanár bocsátotta a bizottság rendelkezésére. Tőle származik maga a feladat is.)

(1) alapján bármely a tökéletes számra:

$$2 = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} < \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i-1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} \frac{p_i}{p_i^{\alpha_i+1}-1} <$$

$$< \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} \right]^2 = 2^2 = 4,$$

ugyanis, mint átszorzással belátható,

$$\frac{p_i}{p_i^{\alpha_i+1}-1} < \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}.$$

Legyen a páratlan tökéletes szám; először is megmutatjuk, hogy ha $3|a$, akkor $3^2|a$. Ugyanis

$$2a = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n} = (1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{\alpha_n}),$$

s ha itt $p_1 = 3$ és $\alpha_1 = 1$ lenne, akkor a jobboldal 4-gyel osztható lenne, a baloldal pedig csak 2-vel, ami lehetetlen.

Másodszor igazoljuk, hogy

$$\frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha+1}-1} < \sqrt{\frac{p-1}{p}}\,\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha}(p-1)}, \tag{2}$$

ha

$$p^{\alpha} \geqq 4. \tag{3}$$

Mint négyzetreemeléssel és átszorzással belátható, (2) egyenértékű a

$$p^{4\alpha+3}(p-1) < (p^{\alpha+1}-1)^4 \tag{4}$$

egyenlőtlenséggel. Minthogy pedig

$$(p^{\alpha+1}-1)^4 - p^{4\alpha+3}(p-1) = p^{3\alpha+3}(p^{\alpha}-4) + 6p^{\alpha+1}\left(p^{\alpha+1}-\frac{2}{3}\right)+1;$$

s a (3) teljesülte esetén itt a jobboldal >0, azért ekkor (4) s így (2) is igaz.

Az $a = p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$ páratlan tökéletes szám mindegyik törzstényezőjére teljesül a $p_i^{\alpha_n} \geqq 4$ feltétel (hiszen, ha $p_1 = 3$, akkor $\alpha_1 \geqq 2$), tehát a (2) egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk a már igazolt

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1} < \prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}\cdot\frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i+1}-1}$$

egyenlőtlenség jobboldalán álló megfelelő tényezőkre és így nyerjük, hogy

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1} < \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{p_i-1}{p_i}}\left[\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}\right]^2 = 4\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{p_i-1}{p_i}},$$

azaz

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1}\right)^{\frac{3}{2}} < 4,$$

amiből adódik a kívánt eredmény:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1} < 2\sqrt[3]{2}.$$

4. feladat (beérkezett 4 dolgozat).

Megoldás. Először bebizonyítjuk, hogy bármely

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (\in K[x])$$

polinomra és bármely nem negatív egész m-re

(1) $$\overline{x^m f(x)}=\left(\overline{f(x)}\right)^{p^m}.$$

Bizonyítás: A polinomiális tétel szerint

$$\left(\overline{f(x)}\right)^{p^m}=\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{pi}\right)^{p^m}=\sum_{i=0}^{n} a_i^{p^m} x^{p^m+i},$$

ugyanis egyrészt a

$$\frac{p^m!}{k_0!\,k_1!\ldots k_n!}$$

polinomiális együttható osztható p-vel, ha a $k_0, k_1, \ldots, k_n$ közül legalább kettő nem 0, másrészt pedig p elemű test p karakterisztikájú, azaz minden $a\in K$ elemre $pa=0$. Minthogy továbbá a K test a zéruselem elhagyása után a szorzásra nézve csoportot alkot, azért minden $a\neq 0$ elemre $a^{p-1}=1$, vagyis $a^p=a$; utóbbi egyenlőség a zéruselemre is érvényes. Teljes indukcióval kapjuk ebből, hogy $a^{p^k}=a$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Tehát $a_i^{p^m}=a_i$ s így

$$\left(\overline{f(x)}\right)^{p^m}=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{p^m+i}=\overline{x^m f(x)},$$

amivel (1)-et bebizonyítottuk.

Jegyezzük még meg, hogy nyilván

(2) $$\overline{f_1(x)+f_2(x)}=\overline{f_1(x)}+\overline{f_2(x)},$$

(3) $$\overline{af(x)}=a\overline{f(x)}.$$

Legyen

$$f(x)\mid g(x).$$

Ekkor

$$g(x)=h(x)\cdot f(x),\quad h(x)=\sum_{i=0}^{l} b_i x^i.$$

Alkalmazva az (1)—(3) relációkat, kapjuk, hogy

$$\overline{g(x)}=\sum_{i=0}^{l} b_i\,\overline{x^i f(x)}=\sum_{i=0}^{l} b_i\left(\overline{f(x)}\right)^{p^i}.$$

Minthogy $i \geqq 0$ s így $p^i \geqq 1$, azért ebből

$$\overline{f(x)} \mid \overline{g(x)}.$$

Ha $g(x)$ nem osztható $f(x)$-szel, akkor

$$g(x) = h(x) \cdot f(x) + r(x),$$

ahol $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} f(x)$ és $r(x) \not\equiv 0$. Ekkor

$$\overline{g(x)} = \overline{h(x)}\,\overline{f(x)} + \overline{r(x)},$$

ahol $\operatorname{grad} \overline{r(x)} < \operatorname{grad} \overline{f(x)}$ és $\overline{r(x)} \not\equiv 0$. Mivel $\overline{h(x)f(x)}$ osztható $\overline{f(x)}$-sal, azért $\overline{g(x)}$ nem osztható $\overline{f(x)}$-sal.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Gehér László,
Hajnal András

Megoldotta még FRIED ERVIN.

5. feladat (beérkezett 6 dolgozat).

Megoldás. Világos, hogy két automorfizmus szorzata mindig automorfizmus, másrészt egy automorfizmus és egy antiautomorfizmus szorzata mindig antiautomorfizmus. Végül antiautomorfizmus inverze is mindig antiautomorfizmus. Ezért az összes automorfizmusok és antiautomorfizmusok a G önmagára való egy-egyértelmű leképezéseinek csoportjában egy $\bar{A}$ alcsoportot alkotnak (az asszociativitás a fortiori teljesül). Minthogy G nem kommutatív, azért G automorfizmusainak A csoportja valódi alcsoportja $\bar{A}$-nak.

Jelöljük $\bar{\varphi}$-sal azt az antiautomorfizmust, amelyre $\bar{\varphi}(x) = x^{-1} (x \in G)$. Ekkor $\bar{\varphi}^2 = \varepsilon$ (az azonosság). Tehát a $\bar{\varphi}$ által generált Φ alcsoport két elemből áll. Bebizonyítjuk, hogy $\bar{A}$ az A és Φ alcsoportok direkt szorzata. Ehhez elég azt bebizonyítanunk, hogy 1) bármely automorfizmus felcserélhető $\bar{\varphi}$-sal, 2) az $\bar{A}$ minden a eleme egy és csak egyféleképpen állítható elő az A egy α és a Φ egy β elemének szorzataként.

1) következik abból, hogy bármely $\alpha \in A$ és $x \in G$ esetén

$$(\alpha(x))^{-1} = \alpha(x^{-1}).$$

2)-t bizonyítandó, tekintsünk először egy a automorfizmust. Ekkor a kívánt $a = \alpha\beta$ felbontásban szükségképpen $\beta = \varepsilon$, hiszen minden $\alpha\bar{\varphi}$ alakú szorzat ($\alpha \in A$) antiautomorfizmus; de akkor szükségképpen $\alpha = a$, azaz az egyetlen a kívánt tulajdonságokkal biró felbontás $a = a\varepsilon$. Tekintsünk most egy a antiautomorfizmust.

A kívánt $a = \alpha\beta$ felbontásban most szükségképpen $\beta = \overline{\varphi}$ és következésképpen $\alpha = a\overline{\varphi}$, azaz az egyetlen a kívánt tulajdonságokkal bíró felbontás $a = (a\overline{\varphi})\overline{\varphi}$.

Czipszer János,
Fried Ervin,
Gacsályi Sándor,
Gehér László

Majdnem teljes ezenkívül még *Hajnal András* megoldása.

6. feladat (beérkezett 11 dolgozat).

Megoldás. A körön fekvő pontokat számozzuk meg 1-től $2n$-ig valamilyen körüljárási irányban:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{2n}.$$

A pontok párokba szedése és a párok összekötése révén nyert konfigurációt nevezzük párbaszedésnek; a lehetséges párbaszedések száma legyen p_n. Az olyan párbaszedést, amelynél nincsenek egymást metsző húrok, nevezzük húrozásnak; a lehetséges húrozások száma legyen h_n. Mint könnyen látható, p_n és h_n csak az n-től függ, a pontoknak a körön való eloszlási módjától nem. A keresett valószínűség

$$W_n = \frac{h_n}{p_n}.$$

Állapítsuk meg először is p_n értékét. Az A_1 pont az $A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$ pontok bármelyikével összeköthető, és mindegyik esetben a megmaradó $2n-2$ pont bárhogyan párbaszedhető. Tehát

$$p_n = (2n-1)p_{n-1}.$$

Ebből, tekintettel arra, hogy nyilván $p_1 = 1$, adódik:

(1) $$p_n = (2n-1)(2n-3)\ldots 3.1 = (2n-1)!!.$$

Most a h_n értékét állapítsuk meg. Az A_1 pont bármely húrozásnál az

$$A_2, A_4, \ldots, A_{2n-2}, A_{2n}$$

pontok valamelyikével van összekötve. (Ha ugyanis az A_1A_{2k+1} húrt húzzuk, akkor az $A_2, A_3, \ldots, A_{2k}$ pontok csak egymással párosíthatók, de — páratlan lévén a számuk — ez lehetetlen.) Az A_1A_{2i} húr viszont $(1 \leqq i \leqq n)$ megenged $h_{i-1}h_{n-i}$ lehetőséget, ugyanis a $2(i-1)$ számú $A_2, A_3, \ldots, A_{2i-1}$ pont az egyik oldalon, és a $2(n-i)$ számú $A_{2i+1}, A_{2i+2}, \ldots, A_{2n}$ pont a másik oldalon, csakis egymás

között, de egyébként tetszőlegesen húrozhatók. Tehát

$$(2) \qquad h_n = h_0 h_{n-1} + h_1 h_{n-2} + \cdots + h_{n-2} h_1 + h_{n-1} h_0,$$

ahol $h_0 = 1$ és $n \geqq 1$.

Képezzük a következő hatványsort:

$$\sum_0^\infty h_m z^m,$$

és tegyük fel, hogy ennek konvergenciasugara pozitív; az összegfüggvényt jelöljük $f(z)$-vel. Ekkor (2) alapján

$$f^2(z) = \sum_0^\infty (h_0 h_m + h_1 h_{m-1} + \cdots + h_m h_0) z^m = \sum_0^\infty h_{m+1} z^m;$$

innen következik, hogy

$$z f^2(z) = f(z) - 1.$$

Tehát $f(z)$ nem lehet más, mint vagy az $\dfrac{1+\sqrt{1-4z}}{2z}$, vagy az $\dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$ függvény. Minthogy az előbbinek a $z=0$ pontban pólusa van, azért ez nem jöhet számításba, s így $f(z) = \dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.

Ez a függvény a $z=0$ pont közül $\dfrac{1}{4}$ konvergenciasugárral hatványsorba fejthető, hatványsorának első tagja 1 és együtthatói kielégítik a (2) rekurziós formulát. Ennélfogva e függvény hatványsorának együtthatói éppen a keresett $h_0, h_1, h_2, \ldots$ számok. Tehát a binomiális tétel szerint ($n \geqq 1$)

$$h_n = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} =$$

$$= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!} = 2^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}.$$

Összevetve ezt (1)-gyel, kapjuk végeredményben a keresett valószínűségre a

$$W_n = \frac{h_n}{p_n} = \frac{2^n}{(n+1)!}$$

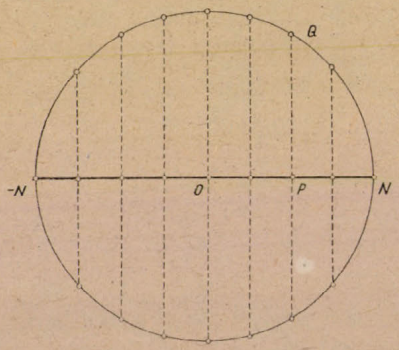
értéket.

Czipszer János,
Gehér László,
Károlyházy Frigyes

A rekurziós egyenlet megoldását megtalálta, de nem bizonyította *Fried Ervin* és *László Zoltán* (Debrecen). A rekurziós egyenletig eljutott még *Gacsályi Sándor, Kálmán Lajos, Korányi Ádám* és *Villányi Ottó*.

7. feladat (beérkezett 6 dolgozat).

I. megoldás. A feladat áttekinthetőbbé válik, ha nem az x-tengely $[-N, N]$ szakaszán mozgó P pontot, hanem az origó körüli N sugarú kör kerületén mozgó Q pontot vizsgálunk. Q lehetséges helyzetei legyenek a kör egész abszcisszájú pontjai; annak valószínűsége, hogy Q a t (nemnegatív egész) időpontban észlelt helyzetéből a $t+1$ időpontig egy szomszédos pontba átmenjen, legyen $\frac{1}{2}$. Q-nak a $t=0$ időpontban észlelt kiindulási helye legyen a kör x_0 abszcisszájú Q_0 pontja. A t (egész) értékei szerint való teljes indukcióval könnyen belátható, hogy annak valószínűsége, $P_k(t)$, hogy P a t időpontban az $x=k$ pontban legyen, ugyanannyi, mint hogy Q abszcisszája k legyen. Ebből következik, hogy a megfelelő határértékek is, ha léteznek, egyenlők.



8. ábra

Ha Q-t csak minden páros számértékű pillanatban vizsgáljuk, akkor Q lehetséges helyzetei a kör azon pontjai, amelyek abszcisszája ugyanolyan paritású, mint x_0. Így Q lehetséges helyzete $2N$ különböző pont; könnyen belátható, hogy a Q pont N lépésben bármelyik A helyzetből akármelyik B helyzetbe pozitív $V_{AB}^{(N)}$ valószínűséggel juthat el. Így Markov tétele biztosítja a

$$\lim_{n\to\infty} V_{Q_0 A}^{(n)} = V_A$$

határérték létezését és azt, hogy ez a Q_0 kiindulási ponttól független. Így

$$V_A = \lim_{n \to \infty} V_{AA}^{(n)},$$

s minthogy a kör egyik pontja sincs kitüntetve, azért ezek a V_A számok egymással mind egyenlők. Ennélfogva $V_A = \frac{1}{2N}$. Áttérve a P pontra, adódik, hogy

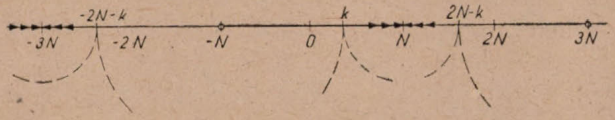
$$\lim_{t \to \infty} P_k(2t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \not\equiv x_0 \pmod 2, \\ \frac{1}{N}, & \text{ha } k \equiv x_0 \pmod 2 \text{ és } |k| < N, \\ \frac{1}{2N}, & \text{ha } k = \pm N, \text{ feltéve, hogy } N \equiv x_0 \pmod 2. \end{cases}$$

Teljesen hasonló meggondolással adódik, hogy

$$\lim_{t \to \infty} P_k(2t+1) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \equiv x_0 \pmod 2, \\ \frac{1}{N}, & \text{ha } k \not\equiv x_0 \pmod 2 \text{ és } |k| < N, \\ \frac{1}{2N}, & \text{ha } k = \pm N, \text{feltéve, hogy } N \not\equiv x_0 \pmod 2. \end{cases}$$

Czipszer János

II. megoldás. A bolyongásnak határt szabó „fal"-at úgy vesszük tekintetbe, hogy a $(-N, N)$ közt folytatólagosan a végpontjain tükrözzük (l. az ábrát, a nyilak a tükrözést szemléltetik). Hogy a bolyongó pont a falnál visszafordul, az most úgy fogalmazható, hogy a határpontokból is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel mozdulhat jobbra is, balra is. Ezután már könnyen kiszámíthatjuk, hogy milyen valószínűséggel jut el a bolyongó pont a számegyenes bármely (egész abszcisszájú) pontjába. A „homolog" pontokra eső valószínűségeket azután összegezni kell. Ha $|k| < N$, akkor a k-val homolog pontok nyilván a $k + 4N\alpha$ és $2N - k + 4N\alpha$ ($\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) pontok; ezek mind különbözők. Ha $k = \pm N$, akkor a vele homolog pontok: $k + 4N\alpha$ ($\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).



9. ábra

Tegyük fel először, hogy x_0 *páros*, $x_0 = 2\xi_0$. Ha k páratlan, akkor $P_k(2t) = 0$ (t-nek eleve csak egész számú értékei jönnek tekintetbe), mert hiszen két lépésben x_0 csak páros számmal változhatott meg (egy „lépés"-en a bolyongó pont abszcisszájának a megváltozását értjük t és $t+1$ között). Így $P_k(2t)$ határértéke is ($t \to \infty$) egyenlő 0-val.

Legyen most k páros, $k = 2\varkappa$. Először a fenti módon tekintsünk el a falaktól s számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a pont az $x_0 = 2\xi_0$ helyzetből az $n = 2\nu$ helyzetbe kerüljön. Ehhez az szükséges, hogy a jobbra lépések és a balra lépések számának különbsége $n - x_0 = 2(\nu - \xi_0)$-val legyen egyenlő. Vagyis, ha összesen $2t$-szer lépünk, akkor $t + (\nu - \xi_0)$-szor kell jobbra és $t - (\nu - \xi_0)$-szor balra lépnünk. Ennek a valószínűsége

$$\binom{2t}{t+\nu-\xi_0} \frac{1}{2^{2t}}.$$

A k-val homolog pontokra összegezve, az $|k| < N$ esetben azt kapjuk, hogy

$$(1) \qquad P_k(2t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \binom{2t}{t+(\varkappa-\xi_0)+2N\alpha} \frac{1}{2^{2t}} + \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \binom{2t}{t+(N-\varkappa-\xi_0)+2N\alpha} \frac{1}{2^{2t}}.$$

Mármost ismeretes, hogy ha

$$m = \frac{n}{2} + \lambda \frac{\sqrt{n}}{2},$$

akkor nagy n-ekre

$$\binom{n}{m} \frac{1}{2^n} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

A mi esetünkre alkalmazva, t nagy értékeire

$$\sum_{\alpha} \binom{2t}{t+\varkappa-\xi_0+2N\alpha} \frac{1}{2^{2t}} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi \cdot 2t}} \sum_{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = \frac{1}{2N\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \Delta\lambda,$$

itt λ a $(\varkappa + \xi_0 + 2N\alpha)\sqrt{\frac{2}{t}}$ ($\alpha = 0, \pm 1, \ldots$) számokon fut végig, $\Delta\lambda$ két szomszédos λ érték különbsége, azaz $\Delta\lambda = 2N\sqrt{\frac{2}{t}}$. (Ennek precíz bizonyítása szóról szóra átvehető a „binomiális eloszlás ~

Gauss-féle eloszlás nagy n esetére" tétel bizonyításából.) Ha $t \to \infty$, akkor a jobboldal határértéke

$$\frac{1}{2N\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2N}.$$

Az (1) alatti második összeg ugyanezt az eredményt szolgáltatja. Így tehát

$$\lim_{t \to \infty} P_k(2t) = \frac{1}{N}.$$

Abban az esetben, mikor N páros, tekintenünk kell még a $k = \pm N$ pontokat is. Ekkor az (1) alatti két összeg közül csak egy összeg szerepel és így ekkor

$$\lim_{t \to \infty} P_{\pm N}(2t) = \frac{1}{2N}.$$

Továbbra is feltételezve, hogy x_0 páros, páratlan k esetében $P_k(2t)$ nyilván 0, s így a határértéke is 0. Ugyancsak 0-val egyenlő páros k esetében $P_k(2t+1)$ s így a határértéke is; páratlan k esetében a $P_k(2t+1)$ határértékét teljesen hasonló eljárással nyerjük, mint páros k esetén a $P_k(2t)$ határértékét, így ezt nem részletezzük.

Ha végül x_0 páratlan, akkor (bizonyos mértékig szerepcserével) minden hasonlóan adódik.

Károlyházy Frigyes

Megoldotta még *Baráth Tibor* (Debrecen) a véges Markov-láncok algebrai elméletének alapján. Majdnem teljes megoldást adott be még *Arató Mátyás*, *Hajnal András* és *Korányi Ádám*.

8. feladat (beérkezett 12 dolgozat).

I. megoldás. A hatványsor konvergencia sugara

$$\varrho = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n}}. \tag{1}$$

Kimutatjuk, hogy

$$\lim \sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n} = 0. \tag{2}$$

Mivel $\sum \frac{c_k}{k}$ konvergens, azért minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N, hogy

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{c_k}{k} < \varepsilon.$$

Legyen $n > N$; akkor

$$0 < \sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n} \leqq \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} =$$

$$= \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_N}{n} + \frac{c_{N+1} + \dots + c_n}{n} \leqq \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_N}{n} + \frac{c_{N+1}}{N+1} +$$

$$+ \frac{c_{N+2}}{N+2} + \dots + \frac{c_n}{n} < \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_N}{n} + \varepsilon;$$

a jobboldal elég nagy n-re $< 2\varepsilon$. Ezzel (1)-et beláttuk.

(1) és (2) alapján $\varrho = \infty$, azaz a hatványsor az egész komplex síkon konvergál.

Fried Ervin,
Gehér József,
Gehér László,
Hajnal András,
Korányi Ádám

Megoldotta még *Arató Mátyás, Czipszer János, Gacsályi Sándor, Hajnal András, Károlyházy Frigyes,*

9. feladat (beérkezett 5 dolgozat).

Megoldás. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $a = 0, b = 1$.

Nyilvánvaló, hogy egy függvény akkor és csak akkor szélső eleme C-nek, ha valamely mérhető halmaz karakterisztikus függvénye. Ugyanis, ha $\varphi(x) \in C$ és valamely x_0 pontban $0 < \varphi(x_0) < 1$, akkor a $\varphi_1(x) = \varphi(x) + \varepsilon\delta(x_0, x)$ és $\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varepsilon\delta(x_0, x)$ függvények $\left(\text{ahol } \delta(x_0, x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = x_0 \\ 0, & \text{ha } x \neq x_0 \end{cases}\right)$, elég kis pozitív ε esetén szintén C-hez tartoznak és számtani közepük a $\varphi(x)$ függvény.

Azt állítjuk, hogy a C osztály minden $f(x)$ eleme előállítható szélső elemek valamely $\varphi_n(x)$ sorozatának gyenge limeszeként.

Osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot 2^n egyenlő részre, és legyen $\alpha_i^{(n)}$ az $f(x)$-nek az i-edik részintervallumon való integrálja; nyilván $0 \leqq \alpha_i^{(n)} \leqq \frac{1}{2^n}$. Definiáljuk a $\varphi_n(x)$ függvényt a következőképpen:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \dfrac{i-1}{2^n} \leqq x \leqq \dfrac{i-1}{2^n} + \alpha_i^{(n)} \\ 0, & \text{ha } \dfrac{i-1}{2^n} + \alpha_i^{(n)} < x < \dfrac{i}{2^n} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, 2^n).$$

Legyen $k(x)$ valamely $\left(0, \frac{j}{2^m}\right)$ alakú intervallum karakterisztikus függvénye. Világos, hogy ha n elég nagy ($n \geqq m$), akkor

$$\int_0^1 \varphi_n(x) k(x)\, dx = \int_0^1 f(x) k(x)\, dx.$$

Mivel minden olyan $l(x)$ lépcsős függvény, amelynél az ugrási pontok diadikusan racionális számok, előállítható a $k(x)$ típusú függvények véges lineáris kombinációjaként,

$$l(x) = \sum \beta_i k_i(x),$$

azért minden ilyen $l(x)$ lépcsősfüggvényre is

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\, l(x)\, dx \to \int_0^1 f(x)\, l(x)\, dx \qquad (n \to \infty).$$

Az ilyen $l(x)$ lépcsősfüggvények az integrálható függvények terében sűrűen fekszenek, azaz bármely a $(0, 1)$-en integrálható $k(x)$ függvényhez és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található $l(x)$ függvény úgy, hogy

$$\int_0^1 |h(x) - l(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Ekkor elég nagy n-re

$$\left| \int_0^1 \varphi_n(x)\, h(x)\, dx - \int_0^1 f(x) h(x)\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_0^1 \varphi_n(x) l(x)\, dx - \int_0^1 f(x) l(x)\, dx \right| + \int_0^1 |h(x) - l(x)|\, \varphi_n(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^1 |h(x) - l(x)|\, f(x)\, dx \leqq 3\varepsilon,$$

amivel az állításunkat bebizonyítottuk.

(Lényegében ugyanígy bizonyítható a tétel bármilyen véges, vagy végtelen mértékű halmazra is).

Gehér László

Megoldotta még: *Hajnal András, Károlyházy Frigyes, Korányi Ádám.*

Megjegyzés. KREJN és MILMAN nevezetes általános tétele (lásd: SZŐKEFALVY-NAGY BÉLA, Szovjet eredmények a funkcionál-

analízis terén, *Mat. Lapok*, **2** (1951), 5—33. o., különösen a 20. oldal) alapján (alkalmazva ezt arra az esetre, amikor E az (a, b) intervallumon Lebesgue-integrálható függvények L^1 terét és így E^* az (a, b) intervallumon értelmezett Lebesgue-mérhető és lényegében korlátos függvények L^∞ terét jelentik) azt kapjuk, hogy az $E^* = L^\infty$ tér szóbanforgó korlátos és (mint könnyen belátható) regulárisan konvex C részhalmaza egyenlő a C szélső elemei S halmazának regulárisan konvex burkolójával. Ez egyenértékű azzal, hogy a szélső elemekből alkotott $\psi(x) = \sum c_i \varphi_i(x)$ $(c_i \geqq 0, \sum c_i = 1)$ „konvex" lineáris kombinációk $S_{\text{konv.}}$ halmazának a „gyenge topológiában" való lezárása összeesik a teljes C halmazzal, azaz másszóval a C bármely $f(x)$ eleméhez, bármely véges sok integrálható $h_1(x), \ldots, h_r(x)$ függvényhez, és bármely pozitív ε-hoz található olyan $\psi(x)$ függvény $S_{\text{konv.}}$-ből, hogy

$$\left| \int_a^b f(x) h_i(x)\, dx - \int_a^b \psi(x) h_i(x)\, dx \right| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots r).$$

A feladatul kitűzött példa, amelyet PUKÁNSZKY LAJOS aspiráns bocsátott a bizottság rendelkezésére, azt a meglehetősen váratlan tényt bizonyítja, hogy előfordulhat olyan eset is, amikor nemcsak a szélső elemek $S_{\text{konv.}}$ konvex burkolójának, hanem magának a szélső elemek S halmazának a gyenge topológiában való lezárása egyenlő a C konvex halmazzal.

10. feladat (beérkezett 10 dolgozat).

Megoldás. Legyen

$$g_m(x) = (-1)^m \left(\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \cdots + (-1)^m \frac{\sin mx}{m} \right);$$

azt kell bebizonyítani, hogy

$$g_m(x) > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \frac{\pi}{m+1}.$$

Minthogy

$$g_m'(x) = (-1)^m \left(\frac{1}{2} - \cos x + \cos 2x - \cdots + (-1)^m \cos mx \right) = \frac{\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

(erről $2 \cos \frac{x}{2}$-lel való átszorzás útján könnyen meggyőződhetünk),

és minthogy $g_m(0)=0$, azért

$$g_m(x)=\int_0^x \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt.$$

Az integrandus a $0\leqq t<\frac{\pi}{2m+1}$ intervallumban pozitív, a $\frac{\pi}{2m+1}<t\leqq\frac{\pi}{m+\frac{1}{2}}$ intervallumban negatív. Ennélfogva $g_m(x)$ a kérdéses $0<x<\frac{\pi}{m+1}$ intervallumnak csak a $\frac{\pi}{2m+1}<t<\frac{\pi}{m+1}$ részében lehetne esetleg valahol negatív. Minthogy ebben az intervallumban $g_m(x)$ monoton fogy, azért elég kimutatni, hogy

$$g_m\left(\frac{\pi}{m+1}\right)>0, \tag{1}$$

azaz, hogy ($\tau=(m+1)t$ téve)

$$\int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt=\frac{1}{2(m+1)}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(1-\frac{1}{2(m+1)}\right)\tau}{\cos\frac{\tau}{2(m+1)}}\,d\tau>0.$$

Kimutatjuk általánosabban, hogy

$$\psi(\mu)=\int_0^{\pi}\frac{\cos(1-\mu)\tau}{\cos\mu\tau}\,d\tau>0,$$

ha $0<\mu<\frac{1}{2}$. Ez következik egyrészt abból, hogy

$$\psi(0)=\int_0^{\pi}\cos\tau\,d\tau=0,$$

másrészt abból, hogy az integrandus μ-nek szigorúan növekvő függvénye, ha $0<\tau<\pi$, hiszen

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\cos(1-\mu)\tau}{\cos\mu\tau}=\frac{\tau}{\cos^2\mu\tau}\sin\tau>0,\quad 0<\tau<\pi.$$

Ezzel (1)-et, és így a feladat állítását is bebizonyítottuk.

Czipszer János

Megoldották még: *Gehér László, Károlyházy Frigyes, Róna Péter.*

1. megjegyzés. A következő észrevétel *Császár Ákos* egyetemi docenstől származik.

Az (1) egyenlőtlenségét egyszerűbben a következőképpen bizonyíthatjuk be:

$$g_m\left(\frac{\pi}{m+1}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\frac{\cos\left[(m+1)t-\frac{1}{2}t\right]}{2\cos\frac{1}{2}t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\left[\cos(m+1)t+\sin(m+1)t\cdot\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{m+1}}\sin(m+1)t\cdot\operatorname{tg}\frac{t}{2}\,dt>0,$$

hiszen az utolsó integrál integrandusa az intervallum belsejében mindenütt pozitív.

2. megjegyzés. Ha az $x=\pi-u$ helyettesítést elvégezzük, akkor a feladat a következő alakot ölti:

$$(-1)^m\left(\frac{\pi-u}{2}-\sin u-\frac{\sin 2u}{2}-\cdots-\frac{\sin mu}{m}\right)>0,$$

ha

$$\frac{m}{m+1}\pi<u<\pi. \tag{2}$$

Minthogy

$$\frac{\pi-u}{2}=\sum_1^{\infty}\frac{\sin ku}{k}\qquad(0<u<2\pi),$$

azért ez egyenértékű azzal, hogy a (2) intervallumon

$$(-1)^m\sum_{m+1}^{\infty}\frac{\sin ku}{k}>0.$$

Ennél több is igaz (lásd: Béla Sz.-Nagy, Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I, *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys.*

Klasse, **90** (1938), 103—134. o., különösen 131—133. o.): *Bármely olyan*

$$\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots$$

számsorozatra, amelyre

$$\lambda_{m+1} > 0, \quad \lambda_k \geqq 0, \quad \lambda_k - \lambda_{k+1} \geqq 0, \quad \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \geqq 0 \quad (k \geqq m+1)$$

és

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$$

(azaz bármely nem csupa 0-ból álló nemnegatív konvex nullasorozatra), a (2) *intervallumon*

$$(-1)^m \sum_{m+1}^{\infty} \lambda_k \sin ku > 0.$$

A műszaki egyetemek részére rendezett matematikai tanulóverseny

Írta: Császár Ákos
a versenybizottság előadója

A versenyt első ízben 1952. április 26-án rendezte meg a Társulat Budapesten, Miskolcon, Szegeden, Sopronban, Győrött és Veszprémben egyidejűleg. A versenyzőknek a feladatok megoldására öt óra állt rendelkezésükre; logaritmustáblán, ill. lécen és rajzeszközökön kívül más segédeszközt nem használhattak. A verseny résztvevőinek és a beadott dolgozatoknak száma: Budapesten 86 és 55, Miskolcon 43 és 33, Szegeden 16 és 8, Sopronban 10 és 4, Győrött 8 és 3, Veszprémben 5 és 2. Ezen kívül részt vett a versenyen a miskolci műszaki egyetemnek három hallgatója, akik a verseny megrendezésének időpontjában Győrött tartózkodtak tanulmányúton és így a versenyen a győriekkel együtt vettek részt, mindhárman adtak be dolgozatot. A versenyzők száma így összesen 171, a beadott dolgozatok száma 108.

A kitűzött feladatok a következők voltak:

1. Az $ABCD$ négyszögben $AB = 4$ m, $BC = 5$ m, $CD = DA = 1$ m, a D-nél levő belső szög 195°. Az A, B, C pontok egy-egy 30 cm sugarú, a D pont pedig egy 20 cm sugarú szíjdob középpontjai. Ezeken egy szíj úgy fektetendő át, hogy az A, B, C középpontú dobokat pozitív, a D középpontút negatív irányban forgassa. Milyen hosszúnak kell a szíjnak lennie?

2. Az A, B, C aknák napi széntermelése rendre $t_A = 160\ t$, $t_B = 140\ t$, $t_C = 120\ t$. Keressük meg azt az egyes aknáktól rendre s_A, s_B, s_C távolságra fekvő D pontot (elosztó hely), melyre nézve az

$$S = s_A t_A + s_B t_B + s_C t_C$$

kilométertonnák összege a legkisebb, ha az aknák távolságai $AB = 4$ km, $BC = 5$ km, $CA = 6$ km.

3. Adva két kongruens háromszög, $A_1B_1C_1$ az első képsíkon és $A_2B_2C_2$ a második képsíkon, továbbá három különböző irányú egyenes, a, b, c. Az első háromszöget át kell vinni a másodikba oly három csavarmozgással, melyeknek tengelyei rendre a, b, c. Szerkesszük meg a három csavarmozgás mindegyikének forgási és transzlációs komponensét.

A résztvevők és a beadott dolgozatok számát tekintve a verseny sikeresnek mondható ugyan, de a dolgozatok minősége a kívánt mértéket nem üti meg. Ez jó részben a feladatok helytelen megválasztásának tulajdonítható; egyedül az első feladatot lehet ugyanis szerencsésen megválasztottnak mondani. Ez a feladat ugyan túlságosan könnyűnek minősíthető arra való tekintettel, hogy csupán középiskolai anyag szükséges a megoldásához s hosszadalmasan ugyan, de különösebb matematikai ötlet nélkül is megoldható, másrészt viszont ez a feladat jó alkalmat nyujt a versenyzőknek arra, hogy különféle matematikai ötletek segítségével a megoldást jelentékenyen egyszerűsítsék. Nem volt szerencsés a második feladat megválasztása, mert annak minden részletre kiterjedő szabatos megoldása — bár a műegyetemi matematikai anyagot nem lépi túl — túlságosan hosszadalmas ahhoz, hogy kötött időtartamú versenyen megkívánható legyen. Ugyancsak túlságosan nehéznek bizonyult a harmadik feladat is; az erre adott megoldások voltak a legkevésbbé kielégítők.

A díjak odaítélését illetően a bíráló bizottság a következőképpen döntött:

I. díjra érdemes dolgozat nem akadt. Második díjjal jutalmazza a bizottság SZÁNTÓ ISTVÁNT, a Budapesti Műszaki Egyetem gépészmérnöki karának II. éves hallgatóját. Ő az első feladatot helyesen oldotta meg, a második feladatban pedig valamennyi versenyző közül egyedül ő jut helyes megoldásra, melynek azonban szabatos indokolását nem adja. A kiindulási adatokat mindkét feladatban a megadottaktól lényegtelenül eltérőnek veszi fel. Tekintettel arra, hogy az első díj nem kerül kiadásra, a bizottság a II. díj összegét 300 Ft-ra emeli fel.

Dícséretben és könyvjutalomban részesíti a bizottság FLEISCHER BERTALAN, GALAMBOS JÁNOS, KEMÉNY TAMÁS, KORDA PÉTER, ROSTA PÉTER és STRÉBL LÁSZLÓ dolgozatát. Fleischer, Galambos és Kemény a Budapesti Műszaki Egyetem gépészmérnöki karának II. éves hallgatói, Rosta ugyanezen kar I. éves hallgatója, Korda és Strébl pedig ugyanazon egyetem mérnöki karának II. éves hallgatói. Fleischer, Galambos, Kemény és Strébl az első feladat megoldásában mutatnak matematikai ötletességet, Korda az első feladat helyes megoldása mellett a második feladathoz helyesen fog hozzá és a harmadik feladatban is a lényegre rávilágító megjegyzéseket tesz. Rosta valamennyi versenyző közül az egyetlen, aki megállapítja, hogy az első feladatban a szíj többféleképpen is vezethető, s a számítást egy ilyen esetben helyesen elvégzi.

A versenybizottság:
Egerváry Jenő, Gallai Tibor
Kovács Vilmos, Petrich Géza
Császár Ákos

A feladatok megoldásai

1. feladat. A távolságokat méterekben mérve, az (erősen torzított) 1. ábra jelöléseivel

$$A''B' = AB = 4, \quad B'C' = BC = 5,$$

mert egyenlő sugarú körökhöz húzott közös külső érintő hosszúsága egyenlő a középpontok távolságával. Az $A'D''$-vel párhuzamos és vele egyenlő hosszúságú AE szakaszt megrajzolva, az AED háromszög derékszögű, tehát

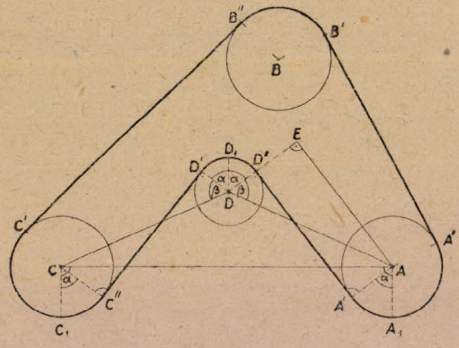
$$A'D'' = AE = \sqrt{AD^2 - (DD'' + D''E)^2} = \sqrt{1 - (0{,}2 + 0{,}3)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75},$$

és a szimmetria miatt $C''D' = \sqrt{0{,}75}$. Egyúttal látható, hogy

$$\cos\beta = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5,$$

ehát $\beta = 60°$.



1. ábra

Az A és C középpontú körökön az A_1 és C_1 pontokat úgy véve fel, hogy az AA_1 és CC_1 szakaszok AC-re merőlegesek legyenek, az A_1A'', $B'B''$ és $C'C_1$ körívek együttvéve egy teljes 0,3 sugarú kört adnak, ezen ívek együttes hossza tehát $0{,}6\pi$. Minthogy AA' és DD'' merőlegesek $A'D''$-re, azért egymással párhuzamosak s ennélfogva a D középpontú kör kerületén a D_1 pontot úgy véve fel, hogy DD_1 párhuzamos legyen AA_1-gyel, az A_1AA' és D_1DD'' szögek váltószögek és így egyenlők, s a szimmetria miatt egyenlők velük a C_1CC'' és $D'DD_1$ szögek is. Közös értéküket α-val jelölve $2\alpha + 2\beta = 195°$, tehát $2\alpha = 195° - 2\beta = 75° = \frac{5\pi}{12}$. Így az A_1A', $D''D'$ és $C''C_1$ körívek együttes hosszúsága

$\frac{5\pi}{12}(0{,}2+0{,}3)=\frac{5\pi}{24}$. Végül is a szíj teljes hosszúsága

$$5+4+2\sqrt{0{,}75}+0{,}6\,\pi+\frac{5\pi}{24}=13{,}27\text{ m}.$$

Megjegyezzük még, hogy a szíj a feladat kikötéseinek megfelelő módon többféleképpen is vezethető, a számítás a többi esetekben is hasonlóan történhetik.

2. feladat. I. megoldás.

A feladat általánosan a következőképpen fogalmazható: adva van az ABC háromszög és a pozitív t_A, t_B, t_C számok. Meghatározandó az ABC síkban azon P pont, amelyre az

$$f(P)=t_A\cdot PA+t_B\cdot PB+t_C\cdot PC$$

mennyiség a lehető legkisebb értékű. E híres feladat egyik megoldása a következő.

Az $f(P)$ kifejezés a P pont (x, y) koordinátáinak folytonos függvénye. Az A középpont körül az AB és AC távolságok kétszeresénél nagyobb sugárral rajzolt K kör külsejében fekvő P pontokra

$$PB>AB,\qquad PC>AC,$$

tehát ezen P pontokra $f(P)>f(A)$. Viszont a K kör belsejében és kerületén tekintve a folytonos $f(P)$ függvényt, az felvesz egy minimális értéket, amely persze $\leq f(A)$, és akkor ez a minimális érték egyszersmind az egész síkra nézve is minimális. A feladatnak tehát mindenesetre *van* megoldása. A minimumot az ABC háromszög külsejében lévő pont nem szolgáltathatja, mert ilyen pontból alkalmas irányban elindulva $f(P)$ mindhárom tagja egyidejűleg csökkenthető.

Az

$$A(a_1, a_2),\quad B(b_1, b_2),\quad C(c_1, c_2)$$

jelölésekkel

$$PA=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2},$$

ennek a függvénynek pedig az A pont kivételével véges parciális differenciálhányadosai vannak. Hasonlóan a PB és PC függvényeknek a B ill. C pont kivételével léteznek a parciális deriváltjai. Szélsőérték tehát csak az A, B, C pontok valamelyikében, vagy olyan P^* pontban lehet, ahol

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Mármost

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{t_A(x-a_1)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}}+\frac{t_B(x-b_1)}{\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}}+$$

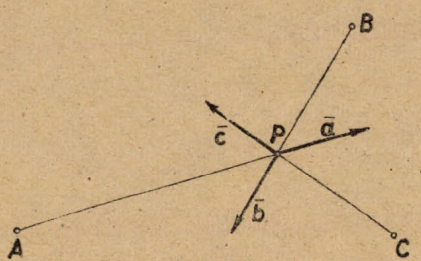
$$+\frac{t_C(x-c_1)}{\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}}=t_A\frac{x-a_1}{PA}+t_B\frac{x-b_1}{PB}+t_C\frac{x-c_1}{PC},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=t_A\frac{y-a_2}{PA}+t_B\frac{y-b_2}{PB}+t_C\frac{y-c_2}{PC}.$$

Ha tehát az A-ból, B-ből és C-ből P-felé mutató egységvektorokat $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$-vel jelöljük (2. ábra), akkor az (1) egyenlőség egyenértékű a

(2) $$t_A\mathbf{a}+t_B\mathbf{b}+t_C\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

egyenlőséggel.



2. ábra

A (2) egyenlőség azt jelenti, hogy a $t_A\mathbf{a}, t_B\mathbf{b}, t_C\mathbf{c}$ vektorok egy háromszög oldalai (amely esetleg el is fajulhat, azaz három csúcsa egy egyenesbe is eshetik). Ahhoz, hogy t_A, t_B, t_C hosszúságú oldalakból (valódi vagy elfajuló) háromszög legyen alkotható, szükséges és elegendő, hogy

(3) $$t_A\leqq t_B+t_C,\quad t_B\leqq t_C+t_A,\quad t_C\leqq t_A+t_B$$

legyen.

Ha tehát a (3) egyenlőtlenségek valamelyike nem teljesül, akkor az (1) feltételt kielégítő pont nincs, a keresett minimum csak az A, B, C pontok valamelyikében lehet, és pedig abban, amelyikben $f(P)$ a három pont közül a legkisebb értéket veszi fel.

Ha pl. $t_A>t_B+t_C$, akkor ez a pont az A pont. Ekkor ugyanis

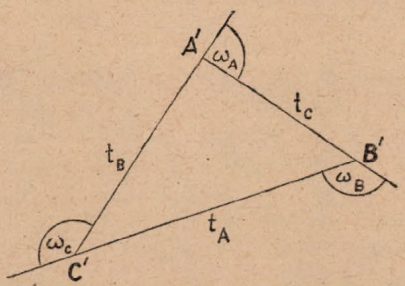
$$f(A)=t_B\cdot AB+t_C\cdot AC\leqq t_B\cdot AB+t_C(AB+BC)=$$

$$=(t_B+t_C)AB+t_C\cdot BC<t_A\cdot AB+t_C\cdot BC=f(B),$$

és hasonló számítással $f(A)<f(C)$. Hasonlóan $t_B>t_C+t_A$ esetén a B, $t_C>t_A+t_B$ esetén a C pont szolgáltatja a keresett minimumot.

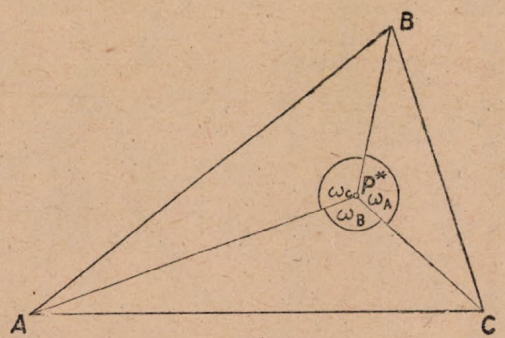
Tegyük fel, hogy a (3) alatti feltételek teljesülnek. Szerkesszük meg akkor a t_A, t_B, t_C oldalakból az $A'B'C'$ (esetleg elfajuló) háromszöget és jelöljük a külső szögeit $\omega_A, \omega_B, \omega_C$-vel (3. ábra). Ha a P^* pontra az (1) ill. (2) feltétel teljesül, akkor a P^* pontból felmérve a $t_A\mathbf{a}, t_B\mathbf{b}, t_C\mathbf{c}$ vektorokat, azok párhuzamosak lesznek a megfelelően elforgatott $A'B'C'$ háromszög megfelelő oldalaival, úgyhogy

(4) $$BP^*C\sphericalangle = \omega_A, \quad CP^*A\sphericalangle = \omega_B, \quad AP^*B\sphericalangle = \omega_C.$$



3. ábra

Keresendő tehát az ABC háromszög belsejében vagy kerületén, de nem valamelyik csúcsában fekvő olyan P^* pont, melyre a (4) feltételek teljesülnek (4. ábra).



4. ábra

Ahhoz, hogy ilyen P^* pont létezzék, szükséges, hogy

(5) $$\omega_A > \alpha, \quad \omega_B > \beta, \quad \omega_C > \gamma$$

legyen; α, β és γ az ABC háromszög szögeit jelentik. Ha tehát az (5) feltételek valamelyike nem teljesül, akkor az (1) feltételt kielégítő P^* pont nincsen, a minimumot az A, B, C pontok valamelyike szolgáltatja. Az (5) feltételek közül egyszerre legfeljebb egy

nem teljesülhet, mert pl. $\omega_A \leqq \alpha$, $\omega_B \leqq \beta$ esetén

$$\omega_A + \omega_B \leqq \alpha + \beta < 180°$$

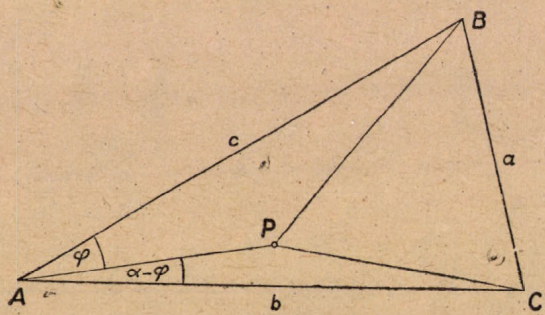
állna, tehát az $\omega_C \leqq 180°$ egyenlőtlenség figyelembe vételével $\omega_A + \omega_B + \omega_C < 360°$ állna, holott $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ az $A'B'C'$ háromszög külső szögei s így összegük 360° (még akkor is, ha $A'B'C'$ elfajuló háromszög).

Meg fogjuk mutatni, hogy ha $\omega_A > \alpha$, akkor $f(P)$-nek az A pontban nem lehet minimuma. Hasonlóan igaz persze, hogy $\omega_B > \beta$ esetén a B pontban, $\omega_C > \gamma$ esetén a C pontban nem lehet minimum. Ebből a feladat megoldása már kiolvasható. Ha ugyanis az (5) alatti feltételek mind teljesülnek, akkor az A, B, C pontok egyikében sem lehet minimum, tehát létezik a (4) feltételeket kielégítő P^* pont s ez szolgáltatja a keresett minimumot. Ha viszont az (5) feltételek egyike nem teljesül, pl. $\omega_A \leqq \alpha$, akkor a másik kettő szükségképpen teljesül, tehát B-ben és C-ben nem lehet minimum, de a P^* pont sem létezik ekkor, úgyhogy a minimum csak A-ban lehetséges.

Tegyük tehát fel, hogy $\omega_A > \alpha$. Induljunk el az A pontból az ABC háromszög belseje felé az AB oldallal φ szöget alkotó egyenes mentén. Ezen egyenesnek P pontjában a $PA = r$ jelöléssel (5. ábra).

$$(6)\quad f(P) = t_A r + t_B \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\varphi} + t_C \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos(\alpha - \varphi)}$$

itt $b = AC$, $c = AB$. Megmutatjuk, hogy ezen kifejezésnek r szerinti differenciálhányadosa φ alkalmas megválasztása esetén az $r = 0$ helyen negatív; ebben az irányban indulva tehát el az A pontból, az $f(P)$ függvény értéke csökkenni kezd, s ez adja előbbi állításunkat.



5. ábra

Valóban, a (6) kifejezés r szerinti deriváltja

$$t_A + t_B \frac{r - c\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\varphi}} + t_C \frac{r - b\cos(\alpha - \varphi)}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos(\alpha - \varphi)}},$$

s ez az $r=0$ helyen a

$$t_A - t_B \cos\varphi - t_C \cos(\alpha-\varphi) = g(\varphi)$$

értéket veszi fel. Válasszuk meg φ-t úgy, hogy $g'(\varphi)=0$ legyen, azaz

$$t_B \sin\varphi - t_C \sin(\alpha-\varphi) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{t_C}{t_B}.$$

fennálljon. Ez megtehető, mert ha φ 0-tól α-ig változik, akkor $\dfrac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}$ 0-tól $+\infty$-ig változik s így minden pozitív értéket felvesz. A φ ilyen megválasztásakor azonban $g(\varphi)<0$.

Ennek belátására azt kell igazolnunk, hogy

$$t_A < t_B \cos\varphi + t_C \cos(\alpha-\varphi).$$

Itt a jobboldal pozitív, mert

$$t_B \cos\varphi + t_C \cos(\alpha-\varphi) = t_B\left[\cos\varphi + \frac{t_C}{t_B}\cos(\alpha-\varphi)\right] =$$

$$= t_B\left[\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}\cos(\alpha-\varphi)\right] =$$

$$= t_B \frac{\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)+\sin\varphi\cos(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)} = t_B\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varphi)} > 0.$$

Ennélfogva elég megmutatnunk, hogy a négyzetreemelés után nyert

$$t_A^2 < t_B^2\cos^2\varphi + 2t_Bt_C\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) + t_C^2\cos^2(\alpha-\varphi)$$

egyenlőtlenség helyes. Az $A'B'C'$ háromszögre a cosinustételt alkalmazva

$$t_A^2 = t_B^2 + t_C^2 + 2t_Bt_C\cos\omega_A < t_B^2 + t_C^2 + 2t_Bt_C\cos\alpha,$$

mert feltettük, hogy $\omega_A > \alpha$ és a $(0,\pi)$ szakaszon $\cos x$ fogyó függvény. Elég tehát igazolnunk, hogy

$$t_B^2 + t_C^2 + 2t_Bt_C\cos\alpha = t_B^2\cos^2\varphi + 2t_Bt_C\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) + t_C^2\cos^2(\alpha-\varphi),$$

azaz

$$t_B^2(1-\cos^2\varphi)+t_C^2(1-\cos^2(\alpha-\varphi)) = 2t_Bt_C(\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha),$$

$$t_B^2\sin^2\varphi + t_C^2\sin^2(\alpha-\varphi) = 2t_Bt_C(\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha),$$

$$t_B^2\sin^2\varphi - 2t_Bt_C\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi) + t_C^2\sin^2(\alpha-\varphi) =$$

$$= 2t_Bt_C[\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha-\sin\varphi\sin(\alpha-\varphi)] = 0,$$

ez pedig (7) miatt igaz.

Mármost a megadott feladatban (távolságegységül a km-t választva)

$$a = BC = 5, \quad b = CA = 6, \quad c = AB = 4,$$

és — minthogy a t_A, t_B, t_C számoknak nyilván csak az aránya lényeges — feltehető, hogy

$$t_A = 8, \quad t_B = 7, \quad t_C = 6.$$

Ennélfogva a t_A, t_B, t_C hosszúságú szakaszokból *alkotható* háromszög:

$$8 < 7 + 6, \quad 7 < 6 + 8, \quad 6 < 8 + 7,$$

és ez az $A'B'C'$ háromszög hegyesszögű, mert

$$8^2 < 7^2 + 6^2, \quad 7^2 < 6^2 + 8^2, \quad 6^2 < 8^2 + 7^2.$$

Az $A'B'C'$ háromszög külső szögei, az $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ szögek eszerint tompaszögek; az ABC háromszög azonban ugyancsak hegyesszögű, mert

$$5^2 < 6^2 + 4^2, \quad 6^2 < 4^2 + 5^2, \quad 4^2 < 5^2 + 6^2,$$

és így az (5) egyenlőtlenségek esetünkben biztosan teljesülnek. Így tehát a minimumot az a P^* pont szolgáltatja, amelyre

$$BP^*C\sphericalangle = \omega_A, \quad CP^*A\sphericalangle = \omega_B, \quad AP^*B\sphericalangle = \omega_C.$$

Ezen pont meghatározása pl. a következő módon történik.

Az $A'B'C'$ háromszögre a cosinustételt alkalmazva

$$\cos \omega_B = \frac{7^2 - 8^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{-51}{96} = -0{,}531, \quad \omega_B = 122{,}1°,$$

$$\cos \omega_C = \frac{6^2 - 8^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{-77}{112} = -0{,}688, \quad \omega_C = 133{,}4°.$$

Az ABC háromszögnek azon P pontjai, melyekre $CPA\sphericalangle = \omega_B$, egy köríven fekszenek, melynek O_B középpontja az A_C oldalra M_B felezőpontjában kifelé állított merőlegesen fekszik, és amelyre (a 6. ábra jelöléseivel)

$$M_B O_B = AM_B \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = 3 \operatorname{tg} \varepsilon.$$

De a kerületi és középponti szögekre vonatkozó tétel szerint

$$2\delta = 2(180° - \omega_B), \quad \delta = 180° - \omega_B,$$

$$\varepsilon = 90° - \delta = \omega_B - 90° = 32{,}1°,$$

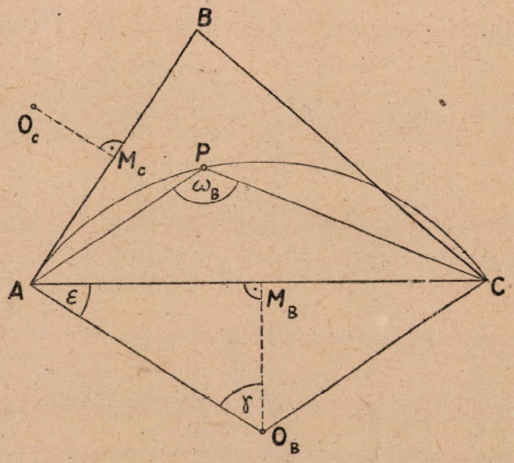
és így

$$M_B O_B = 3 \operatorname{tg} 32{,}1° = 1{,}88.$$

Egészen hasonló számítással az ABC háromszög azon P pontjai, amelyekre $APB\sphericalangle = \omega_C$, oly köríven fekszenek, melynek O_C középpontja az AB szakaszra M_C felezőpontjában kifelé állított merőle-

gesen fekszik és amelyre

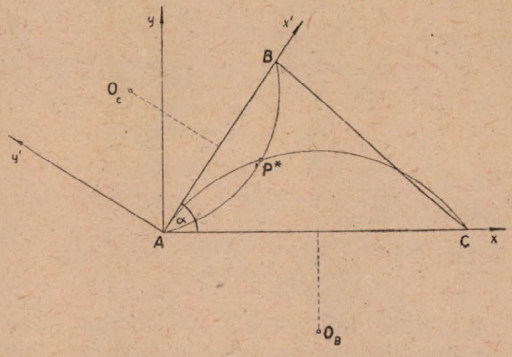
$$M_C O_C = A M_C \cdot \operatorname{tg}(\omega_C - 90°) = 2 \operatorname{tg} 43{,}4° = 1{,}89.$$



6. ábra*)

Vegyük most fel a koordinátarendszert úgy, hogy A koordinátái $(0, 0)$, C koordinátái $(6, 0)$ legyenek, B y-koordinátája pedig pozitív legyen (7. ábra). Ekkor O_B koordinátái $(3, -1{,}88)$, O_C koordinátái pedig azon koordinátarendszerben, melynek x'-tengelye AB, kezdőpontja A, $(2, 1{,}89)$. Így O_C koordinátái az xy-koordinátarendszerben

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = 2 \cdot 0{,}563 - 1{,}89 \cdot 0{,}827 = -0{,}44,$$
$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = 2 \cdot 0{,}827 + 1{,}89 \cdot 0{,}563 = 2{,}72,$$



7. ábra

*) Itt γ helyett δ olvasandó.

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

mert az ABC háromszögből $\cos\alpha = 0{,}563$, $\sin\alpha = 0{,}827$. Az O_B, ill. O_C középpontú, A-n áthaladó körök egyenlete

$$(x-3)^2+(y+1{,}88)^2 = 3^2+1{,}88^2,$$
$$(x+0{,}44)^2+(y-2{,}72)^2 = 0{,}44^2+2{,}72^2,$$

azaz

$$x^2+y^2-6x+3{,}76y = 0,$$
$$x^2+y^2+0{,}88x-5{,}44y = 0,$$

s innen kivonással

$$-6{,}88x+9{,}20y = 0,$$
$$y = \frac{6{,}88}{9{,}20}\ x = 0{,}75\ x = \frac{3}{4}x.$$

Ezt az első kör egyenletébe helyettesítve

$$x^2+\frac{9}{16}\ x^2-6x+2{,}8x = 0,$$

s az érdektelen $x = 0$ megoldást nem tekintve

$$\frac{25}{16}x = 3{,}2,\quad x = 2{,}05,\quad y = 1{,}53.$$

A minimumot tehát a $P^*(2{,}05,\ 1{,}53)$ pont szolgáltatja.

II. megoldás.

Abban az esetben, ha a t_A, t_B, t_C távolságokból háromszög szerkeszthető s ennek külső szögei nagyobbak az ABC háromszög belső szögeinél (a feladatban megadott adatok mellett ez a helyzet), a következő elemi geometriai meggondolással is belátható, hogy a minimumot azon pont szolgáltatja, melyből az ABC háromszög oldalai az $A'B'C'$ háromszög külső szögeivel egyenlő szögek alatt látszanak.

Az ABC háromszöghöz és a t_A, t_B, t_C pozitív számokhoz kell megkeresnünk a háromszög síkjában azt a P pontot, melyre az

$$f(P) = t_A\cdot AP + t_B\cdot BP + t_C\cdot CP = t_Ax + t_By + t_Cz$$

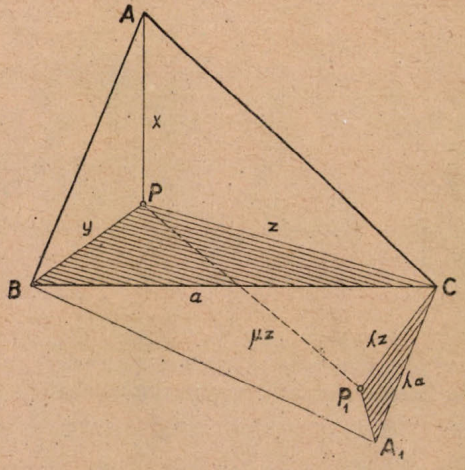
kifejezés minimum.

$f(P)$ helyett az

$$S = \frac{f(P)}{t_A} = x + \frac{t_B}{t_A}y + \frac{t_C}{t_A}z = x + \lambda y + \mu z$$

kifejezést is tekinthetjük. Miután könnyű belátni, hogy minimum az ABC háromszögön kívül nem következhet be, hiszen az ABC háromszög külsejében fekvő valamely pontból ABC kerületéig haladhatunk oly módon, hogy közben az x, y és z távolságok egy-

idejűleg csökkenjenek, elég az ABC belsejében vagy kerületén fekvő pontokat figyelembe vennünk. Szemeljünk ki egy ilyen P pontot. Egy olyan, három szakaszból álló törtvonalat fogunk szerkeszteni, melyben a szakaszok hossza x, λy, μz. E célból a BPC háromszöget (ha a P pont a BC szakasz egy pontja, akkor a BPC elfajuló háromszöget) C-ből mint hasonlósági centrumból λ-szorosra megnyújtjuk, majd pedig C körül olyan 180°-nál kisebb szöggel forgatjuk el (pozitív irányban), hogy az e transzformációk révén a P-ből származó P_1 pontra $PP_1 = \mu z$ fennálljon. (Feltesszük, hogy az ABC körüljárási irány pozitív.) Ez megtehető, mert miközben a λ-szorosra megnyújtott PC szakaszt 180°-kal elfordítjuk, a PP_1 távolság $(1-\lambda)z$-től $(1+\lambda)z$-ig változik, ha $\lambda \leqq 1$, s $(\lambda-1)z$-től $(\lambda+1)z$-ig, ha $\lambda > 1$, μz pedig ezen határok közé esik, hiszen feltevésünk szerint az $1, \lambda, \mu$ távolságokból háromszög szerkeszthető.



8. ábra

Ha a B pont e transzformációk során az A_1 pontba megy át, akkor az APP_1A_1 törtvonal hossza

$$x + \lambda y + \mu z.$$

A PP_1C háromszög oldalai:

$$PC = z, \quad P_1C = \lambda z, \quad PP_1 = \mu z.$$

A P_1PC háromszög tehát hasonló az 1, λ és μ súlyokból szerkesztett $A'B'C'$ háromszöghöz. Ugyancsak belátható, hogy

$$A_1BC\triangle \sim P_1PC\triangle$$

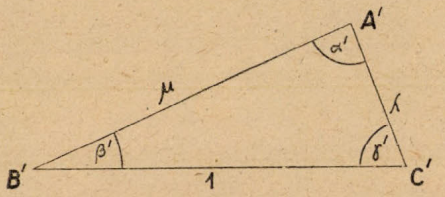
(a háromszögek a C-be futó oldalak arányában és a C-nél lévő szögben egyeznek).

Ha figyelembe vesszük, hogy az $A'B'C'$ háromszög független a P pont helyzetétől, akkor nyilvánvaló, hogy az A_1 pont is független a P ponttól. Ebből következik, hogy a P pont minden helyzetében

$$S \geqq AA_1, \tag{1}$$

s az egyenlőség csak olyan P pontra következhet be, amely a belőle származó P_1-gyel együtt az APP_1A_1 sorrendben az AA_1 egyenesen fekszik. Amennyiben a P-re a szóbanforgó eset fennáll, akkor, ha az $A'B'C'$ háromszög szögeit α', β' és γ'-vel jelöljük, és tekintettel vagyunk a $P_1PC \triangle \sim A'B'C' \triangle$ és $BPC \triangle \sim A_1P_1C \triangle$ hasonlóságra,

$$BPC\sphericalangle = A_1P_1C\sphericalangle = 180° - \alpha'. \tag{2}$$



9. ábra

Nyilvánvaló, hogy az ABC háromszög belsejében, az AA_1 szakaszon csak egy olyan P pont található, melyre (2) fennáll. P-nek az ABC háromszögben való elhelyezkedéséből következik, hogy

$$ABC\sphericalangle + CBA_1\sphericalangle < 180°, \quad ACB\sphericalangle + BCA_1\sphericalangle < 180°,$$

valamint, hogy $BPC\sphericalangle < BAC\sphericalangle$, azaz hogy

$$\beta + \beta' < 180°, \quad \gamma + \gamma' < 180° \quad \text{és} \quad \alpha + \alpha' < 180°. \tag{3}$$

Mármost feltettük, hogy a t_A, t_B, t_C, illetőleg az 1, λ, μ súlyokból, mint oldalakból, lehet háromszöget szerkeszteni ($A'B'C'$), és hogy ennek a háromszögnek α', β', γ' szögei, valamint az ABC háromszög α, β, γ szögei kielégítik a (3) feltételeket (amelyek épp azt fejezik ki más alakban, hogy $A'B'C'$ külső szögei nagyobbak, mint ABC megfelelő szögei). Szerkesszük meg ekkor az A_1BC háromszöget úgy, hogy $A_1BC \triangle \sim A'B'C' \triangle$ legyen és A_1 ne feküdjék a BC egyenesnek ugyanazon oldalán, mint A. Ekkor a (3) feltételek miatt AA_1 a BAC és a BA_1C szögtartományok belsejében halad. Az $\alpha + \alpha' < 180°$ feltétel következtében pedig létezik az AA_1 egyenesen egy olyan P pont, amely az ABC háromszögön belül

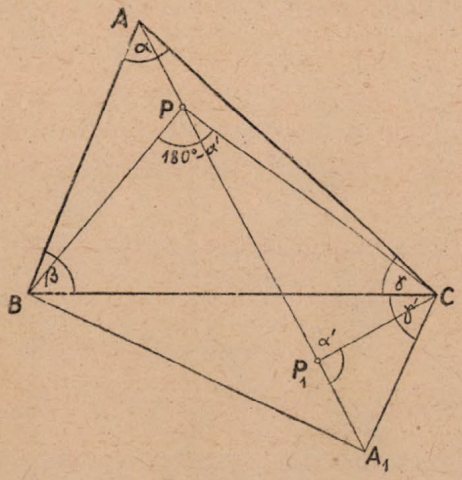
van, és melyre

$$BPC\sphericalangle = 180° - \alpha'.$$

Ha erre a P pontra végrehajtjuk a BPC háromszög nyújtását és forgatását, a

$$PP_1C\sphericalangle + CP_1A_1\sphericalangle = \alpha' + 180° - \alpha' = 180°$$

egyenlőség miatt a P_1 pont a PA_1 egyenesszakaszra kerül. (1) szerint a szóbanforgó P pontra az S kifejezés felveszi minimumát és a fentiek alapján P az egyetlen olyan pont, melyre a minimum bekövetkezik.



10. ábra

Miután meggondolásaink az A, illetőleg B csúcs körüli forgatásra is elvégezhetők, megállapíthatjuk, hogy a minimumot szolgáltató pontból az ABC háromszög oldalai rendre a $180° - \alpha'$, $180° - \beta'$, $180° - \gamma'$ szögek alatt látszanak, és hogy P megszerkeszthető, mint az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok közös metszéspontja. (A_1, B_1, C_1 az $A'B'C'$ háromszöghöz hasonló A_1BC, AB_1C, ABC_1 háromszögek csúcsai.)

III. megoldás.

A II. megoldás feltételeit kikötve még a következő ismert módon is belátható, hogy az ABC háromszög belsejében fekvő ama P pont a keresett minimum-pont, melyből az ABC háromszög oldalai rendre a $180° - \alpha'$, $180° - \beta'$ és $180° - \gamma'$ szögek alatt látszanak.

Állítsunk az A, B és C csúcsokban az AP, BP és CP egyenesekre merőlegeseket. E merőlegesek olyan $A_2B_2C_2$ háromszöget határolnak, mely körülveszi az ABC háromszöget, és melynek szögei rendre α', β' és γ'-vel egyenlők. A szögek egyezése miatt fennáll, hogy

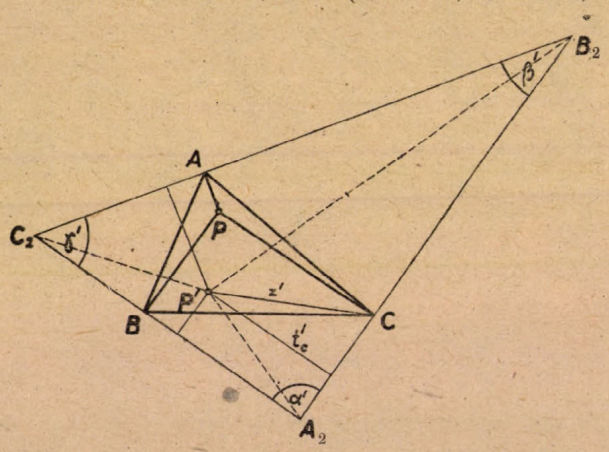
$A_2B_2C_2 \triangle \sim A'B'C' \triangle$, azaz $B_2C_2 = kt_A$, $C_2A_2 = kt_B$, $A_2B_2 = kt_C$.

Legyen mármost P' az $A_2B_2C_2$ háromszöglemez egy tetszőleges pontja. Ha P'-nek az $A_2B_2C_2$ háromszög oldalaitól való távolságait rendre t'_a, t'_b, t'_c-vel jelöljük, akkor, tekintettel arra, hogy a $P'B_2C_2$, $P'C_2A_2$, $P'A_2B_2$ háromszögek területének összege egyenlő az $A_2B_2C_2$ háromszög területével,

$t'_aB_2C_2 + t'_bC_2A_2 + t'_cA_2B_2 =$ állandó, azaz $t'_at_A + t'_bt_B + t'_ct_C =$ állandó.

Speciálisan

$t_At'_a + t_Bt'_b + t_Ct'_c = t_At_a + t_Bt_b + t_Ct_c$ $(t_a = PA,\ t_b = PB,\ t_c = PC)$.



11. ábra

A $P'A = x'$, $P'B = y'$, $P'C = z'$ szakaszokra nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$x' \geqq t'_a,\ y' \geqq t'_b,\ z' \geqq t'_c,$$

ahol mindhárom egyenlőség egyszerre csak a $P' = P$ esetben következik be. Eszerint

$$f(P') = t_Ax' + t_By' + t_Cz' \geqq t_At'_a + t_Bt'_b + t_Ct'_c =$$
$$= t_At_a + t_Bt_b + t_Ct_c = f(P).$$

Az egyenlőség csak a $P' = P$ esetben igaz. Q. E. D.

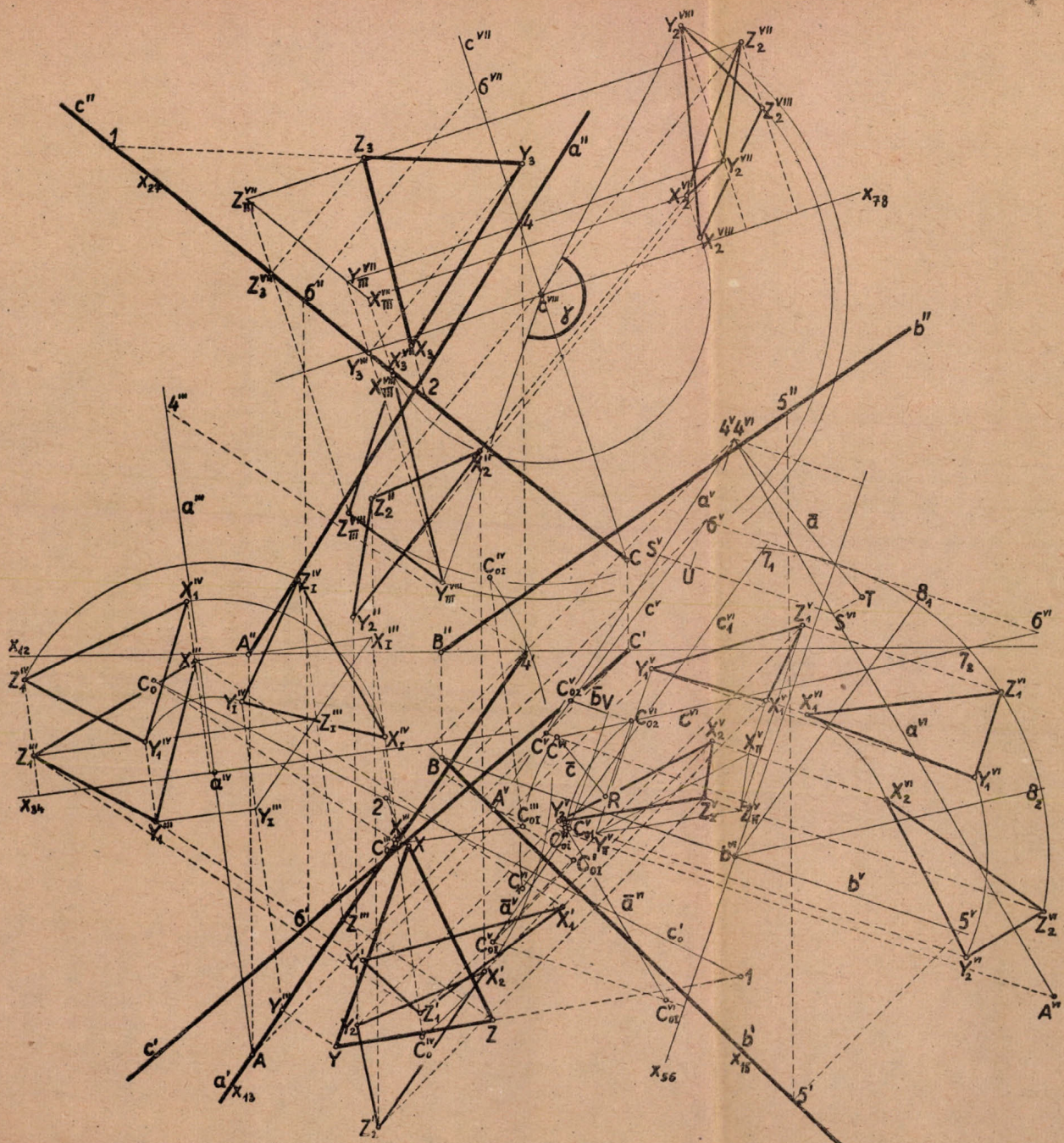
3. feladat. A feladat szerint két kongruens háromszöget kell három adott tengely körül végbemenő csavarmozgással egymásba átvinni. Az első képsíkon fekvő XYZ és a második képsíkon fekvő $X_3Y_3Z_3$ háromszögek az adott kongruens háromszögek, és az a, b, c egyenesek az adott tengelyek (12. ábra). A feladat pontosan fogalmazva a következő: XYZ háromszög a tengely körül végez egy csavarmozgást, kerül valamilyen $X_1Y_1Z_1$ helyzetbe; ezután az $X_1Y_1Z_1$ háromszög b körül végez egy újabb csavarmozgást, kerül az $X_2Y_2Z_2$ helyzetbe; végül az utóbbi háromszüg c tengely körül végzett újabb csavarmozgás után a megadott $X_3Y_3Z_3$ háromszöggel fedésbe kerül. Tájékoztatásul közöljük, hogy a tengelyek szerepének sorrendjét megváltoztatva, az egyes csavarmozgások is megváltoznak, ami azt jelenti, hogy megváltozik a csavarmozgások forgási szöge és tengelyirányú eltolása. Továbbá lehetséges az, hogy a feladatnak nincs (valós) megoldása. E kérdés további boncolását kikapcsolva, visszatérünk problémánkhoz és megállapítjuk az egyes csavarmozgások forgási szögeit, valamint tengelyirányú transzlációit (eltolásait). Jelöljük a fenti sorrendnek megfelelően az elfordulási szögeket α-, β-, γ-val és a transzlációkat $\bar{a}$-, $\bar{b}$-, $\bar{c}$-vel. Világos az, hogy ellentétes irányú mozgással, $X_3Y_3Z_3$ háromszögből kiindulva XYZ helyzethez jutunk, $\alpha, \beta, \gamma, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ mindössze ellentett értelműekké (előjelűvé) változnak. Ezt azért említjük meg, mert fejtegetéseink folyamán e fordított mozgásokat is alkalmazni fogjuk.

Nem szándékozom részletesen taglalni, csupán megemlítem, hogy a feladatnak végtelen sok megoldása lehet. Először α, β, γ szögek bármelyike 2π-nek (pozitív, vagy negatív) többszöröseivel megváltoztatható. Másodszor α, β, γ szögeknek vannak nem 2π-vel különböző megoldásaik is, amint ezt — szerkesztéseink folyamán — látni fogjuk. Végül $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ elmozdulások az említett esetek némelyikénél nem, másikánál szintén megváltoznak. A sorrakerülő megoldásunknál a szögeknek egy-egy π-nél kisebb értékét választottuk; az eljárás megismerése után, az esetek további diskutálása kis körültekintéssel elvégezhető.

Ezek után rátérünk a megoldások egyikének megszerkesztésére, ami azzal kezdődik, hogy problémánkat két részre bontjuk. Az első vizsgálat a forgási szögek, a második a transzlációk nagyságának megállapítása. Ha csak forgatásokat végzünk, akkor az a, b, c tengelyek, vagy ezekkel párhuzamos tengelyek körül történő α, β, ill. γ nagyságú forgatások az eredeti háromszöget oly helyzetbe juttatják, amelynél az az $X_3Y_3Z_3$ háromszöggel azonos állású, tehát síkja és oldalai amazéival párhuzamosak. Hogy a párhuzamos helyzeten kívül, még az összeesés is bekövetkezzék, az már a transzlációk feladata. A transzlációk pedig az egyenesek irányát (vagy a síkok állását) nem változtatják, tehát fordítva, az irányok megfelelő vál-

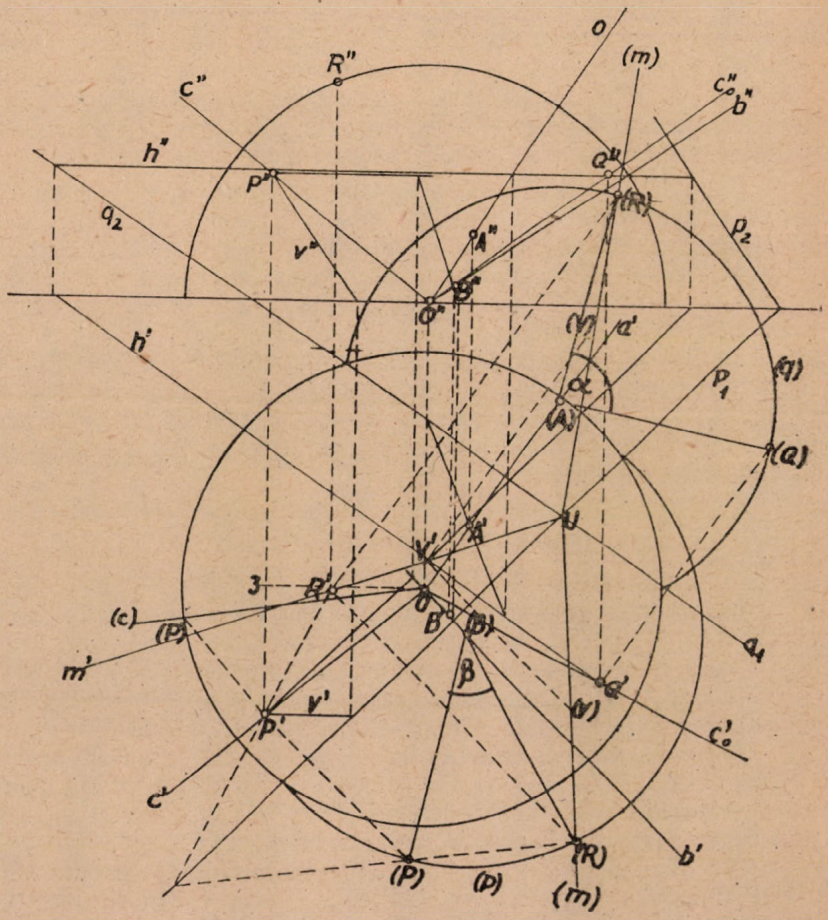
toztatása pusztán a forgatások dolga. Tekintsük a térnek egy tetszőleges egyenesét, e-t, és azt az e_3 egyenest, mely $X_3Y_3Z_3$ háromszöghöz viszonyítva oly helyzetű, mint e az XYZ háromszöghöz képest. Ekkor e-vel végrehajtva azon forgásokat, melyeket a háromszöggel végzünk, e az e_3-mal párhuzamos helyzetbe kerül. Ha a forgatásokon kívül a megfelelő transzlációkat (csavarmozgásokat) is végrehajtjuk, akkor e pontosan e_3-ra kerül. Ha pedig e helyett azt a c_0 egyenest választjuk, melynek helyzete XYZ háromszöghöz olyan, mint c helyzete $X_3Y_3Z_3$-hoz képest, akkor az a forgatások után c-vel párhuzamossá válik. De nyilvánvaló, hogy a c körül való forgatás a c-vel párhuzamos egyenes irányát nem változtatja, tehát c_0 már az a körül történő α nagyságú és b körül történő β szögű forgatások után c-vel párhuzamossá válik. A c egyenes második képe a Z_3Y_3 oldalt az 1, a Z_3X_3 oldalt a 2 pontban metszi. Ha az XYZ háromszög megfelelő oldalain megfelelően megrajzoljuk az 1 és 2 pontokat, akkor az 12 vonal, ama c_0-nak első képe, c_0', melyből a forgatások után c irányú egyenes lesz.

Az elmondottak végrehajtásául a 13. ábrán felvettük az első képsíkon az O pontot, ezen keresztül az a, b, c egyeneseket az előbbi ábra a, b, c egyeneseivel párhuzamosan. Ezenkívül megszerkesztettük azt a c_0 egyenest, melyről fentebb elmondottuk, hogy a körül α, b körül β szöggel forgatva c-re kerül, miután a közös O pontban egy rögzített pontunk van. E c_0 egyenesnek első képe a 12. ábra c_0' egyenesével párhuzamos, második képét úgy szerkesztettük, hogy c_0 akkora szöget alkosson az első képsíkkal, mint c alkot a második képsíkkal. A c egyenesen felvettük a tetszőleges P pontot, a c_0'-őn úgy rajzoltuk Q'-őt, hogy $O'Q' = O''P''$ legyen, és Q'' magassága egyezik O, P pontok első rendezőinek különbségével, $3P'$-vel. Ezek szerint egyrészt c_0 első képsíkszöge c második képsíkszögével egyezik, másrészt O-tól P és Q egyenlő távolságra vannak. Ezt a távolságot OP leforgatásával, $O(P)$-ben meg is határoztuk. Mivel tengelyeink O-n átmennek, a forgatásoknál P és Q oly köröket írnak le, melyek az O középpontú, $OP = OQ$ sugarú gömbön vannak. Ennek a gömbnek az első térnegyedben lévő felét meg is rajzoltuk. Ezen előkészítés után az α, β forgási szögek meghatározása a következő: P-n át b-re merőleges síkot szerkesztettünk, ennek egyik fővonala v, nyomvonalai p_1, p_2. Megszerkesztettük e síknak b-vel való metszéspontját, B-t (első fedő egyenessel), mely P forgáskörének középpontja. A p_1 nyomvonal körül leforgattuk P és B pontokat és megrajzoltuk a p kör leforgatását, (p)-t. Ugyanezt tettük Q ponttal a-ra nézve. A Q-n átmenő, a-ra merőleges síknak fővonala h, nyomvonalai q_1, q_2 és a-val való metszéspontja A (második fedő egyenessel szerkesztve). A q_1 nyomvonal körül leforgatott Q, ill. A a (Q), ill. (A) pontok.



12. ábra

Az (A) középpontú, (Q)-n átmenő (q) kör leforgatása annak a q körnek, melyet az a körül forgó Q pont ír le. Ennek a két körnek, p-nek és q-nak egyik metszéspontját (kettő közül az egyiket), R-et a következő megoldással nyerjük. A két kör különböző síkban van, tehát metszéspontjaik a két sík metszésvonalán vannak. Az m metszésvonalnak nyompontja, U a két nyomvonal metszéspontja, egy



13. ábra

másik pontja, V pedig két fővonal közös pontja. Úgy p_1, mint q_1 körül leforgattuk V-ét és m-et, (m) vonalak (p) és (q) köröket az (R) pontokban metszik, melyek visszaforgatva (ugyanazt) az R pon-

tot adják. (Most látjuk, hogy feladatunknak két megoldása van a $\pm 2\pi$ variációk nélkül is.) Ezek után világos, hogy Q pont úgy kerül P pontba, (és c_0 egyenes c-re) hogy a tengely körül α szöggel forogva R-be, és R pont b tengely körül β szöggel fordul P pontba. Az α, β szögek leforgatásban láthatók, $\alpha = QAR_{\sphericalangle}$, $\beta = RBP_{\sphericalangle}$.

Ha ugyanezt a szerkesztést, melyet most c tengelyre nézve végeztünk, a-ra megismételjük, a β, γ szögeket kapjuk meg. Miután azonban α, β ismeretesek, γ már egyszerűbben nyerhető. Ugyanis elvégezve az α, β forgatásokat, az ismeretes véghelyzet, $X_3Y_3Z_3$ a hiányzó c tengelyű forgást, közvetlenül megmutatja. Sőt γ ismerete nélkül hozzáfoghatunk a transzlációs komponensek meghatározásához.

Visszatérünk a 12. ábrához, ahol c_0'-őn már a C_0 pontot is megrajzoljuk, mely a c tengely második nyompontjának, C-nek felel meg. A c tengely C-ben metszi $X_3Y_3Z_3$ síkját, tehát c_0 egyenes C_0 pontja XYZ síkjában, azaz az első képsíkon lesz. A szerkesztés egyszerű másolás, abban áll, hogy $X_3Y_3Z_312C$ pontcsoporttal az $XYZ12C_0$ pontcsoport kongruens legyen. (Az első képen C_01, C_02 távolságok a második kép $C1$, $C2$ távolságaival egyeznek). Ha az XYZ háromszög a három csavarmozgással $X_3Y_3Z_3$ háromszögre kerül, C_0 pont — ugyanezen mozgásokkal — a C pontba jut. A C_0 pont útját fogjuk szétboncolni. Mielőtt ezt tennénk, az XYZ háromszög mozgását taglaljuk.

I. mozgás: a körül α szögű forgás (megfelelő értelemben, amit a 13. ábrán látunk) és (a irányú) $\bar{a}$ transzláció.

II. mozgás: b körül β szögű forgás és $\bar{b}$ transzláció.

III. mozgás: c körül γ szögű forgás és $\bar{c}$ transzláció. Ha e mozgásokat C_0 pontra alkalmazzuk, akkor lévén C a c tengelyen, a γ forgás elmarad. A III. mozgásból a forgatást elhagyván, megkezdjük a $C_0 \rightarrow C$ három fázisból, öt lépésből álló útvonal kialakítását úgy, hogy C_0-ból előre, C-ből visszafelé indulunk meg.

A három mozgás mindegyikét egy-egy kettős transzformációval végezzük el. Az I-et az a-n átmenő és az első képsíkra merőleges harmadik képsíkkal, melynek tengelye $x_{13} \equiv a'$, és az a-ra merőleges negyedik képsíkkal, melynek tengelye $x_{34} \perp a^{III}$. A II-őt a b-, b'-őn átmenő ötödik képsíkkal és b-re merőleges hatodik képsíkkal, midőn a tengelyek, $x_{15} \equiv b^{I}$ és $x_{56} \perp b^{V}$. Végül a III. mozgást ama hetedik és nyolcadik képsíkokkal, melyeknek tengelyei $x_{27} \equiv c^{II}$ és $x_{78} \perp c^{VII}$. Még két dolgot kell figyelembe vennünk. Először azt, hogy a csavarmozgás felbontásánál mindegy, hogy a forgatást és a transzlációt milyen sorrendben végezzük. Másodszor azt, hogy a forgatásokat csak a közölt 3,4; 5,6; 7,8 képsíkrendszerekben végezhetjük el, de a transzlációkat bármelyiken. Így a $C_0 \rightarrow C$ útvonal

szerkesztésénél a transzlációkat az 5,6 (középső) rendszerben, míg a háromszög útjának szerkesztésénél mindegyik transzlációt a neki megfelelő képsíkon fogjuk végrehajtani.

A szerkesztésre térve a tengely első nyompontja A, második nyompontja 4. E két pont segítségével szerkesztettük a^{III}-at. Az a negyedik képe, a^{IV} az x_{34} tengelyen lévő pont. A b tengely első nyompontja B, egy további pontja 5, ezekkel szerkesztettük b^{V}-öt, b^{VI} pont az x_{56} tengelyen van. A c tengely második nyompontja C, egy másik pontja 6, ezeket használva szerkesztettük c^{VII}-et, c^{VIII} megint az x_{78} tengelyen van. Ezenkívül megint az említett pontok segítségével megszerkesztettük a-nak is c-nek is ötödik és hatodik képét, ezek $a^{V}, a^{VI}, c^{V}, c^{VI}$ (nincs jelentősége, csak véletlen, hogy $4^{V}, 4^{VI}$ összeesik).

A C_0 pontból induljon meg a fent megbeszélt mozgás. C_0 harmadik képe az x_{13}-on van, negyedik képe C_0^{IV} az x_{34} alatt, mivel első rendezője (1,3 rendszerben) negatív. C_0 az a körül α szögű forgást végez, ennek negyedik képe $C_0^{IV}C_{0I}^{IV}$ kör, harmadik képe $C_0^{III}C_{0I}^{III}$ egyenes ($\| x_{34}$). A C_0 pont elvégezte I. mozgás forgási részét, az $\bar{a}$ transzlációt nem; került a C_0 helyzetből a C_{0I} helyzetbe. A továbbiakban az I, II, ill. III. mozgásokat elvégzett elem jelét 1, 2, ill. 3 indexszel látjuk el; azon elemek jelét, melyek e mozgásoknak csak egyik komponensét tették meg, I, II, ill. III indexszel. A C_{0I} pontott átvisszük az 5,6 rendszerbe, C_{0I} első képe C'_{0I}, ötödik képe C_{0I}^{V}. (Mivel az első képsíkra a második, harmadik és ötödik képsíkok merőlegesek, a második, harmadik, ötödik rendezők egyenlők.) A hatodik kép C_{0I}^{VI}, mely C_{0I}^{V}-tel rögzíti a C_{0I} pontot, melynél még hiányzik az $\bar{a}$ transzláció. Itt megállva, a C ponthoz fordulunk. A C pontnak és a c egyenesnek ötödik és hatodik képe $C^{V}, c^{V}, C^{VI}, c^{VI}$. Miután C a γ forgásnál változatlan, első útja (visszafelé) a $\bar{c}$ transzláció, melynek hatodik képe c^{VI}-on van. Másfelől a hatodik képsík b-re merőleges, a hatodik képen eltűnik a $\bar{b}$ transzláció. Ha tehát C^{VI} pontot és c^{VI} egyenest a hatodik képen β-val visszaforgatjuk, ezzel az előbb megállított C_{0I} pontnak elébe megyünk. A forgatást végeztük $7_2, 7_1; 8_2, 8_1$ pontokkal, midőn $b^{VI}8_2 \| c^{VI}$, $b^{VI}8_1 \| c_1^{VI}$. Az így szerkesztett c_1^{VI} egyenesen lesz — egymással fedésben — C_{0I}^{VI} és C_{0II}^{VI}. Ha tehát meghúzzuk C_{0I}^{VI}-on át az a^{VI}-tal párhuzamos $\bar{a}^{VI}$ egyenest (C_0 befejezte az I mozgást) és ennek c_1^{VI}-tal vesszük metszéspontját, az említett két pontnak összeeső hatodik képét nyertük. Ábránkon (zsúfoltság miatt) e pontot C_{0i}^{VI}-tal jelöltük, vagyis $i = 1, II$. E két pont közül az első, C_{0I} a C_{0I}-ből kiinduló $\bar{a}$ egyenesen, a második, C_{0II} a β-val visszaforgatott c egyenesen van. Megrajzolván tehát C_{0I}^{V}-ön $\bar{a}^{V}$ egyenest a^{V}-tel párhuzamosan és C_{0i}^{VI}-ból az x_{56}-ra merőleges rendezőt, metszéspontjukban nyerjük C_{01}^{V}-öt. A másik pontot, C_{0II}-őt megint előre forgattuk c egye-

nesre, tehát hatodik képe c^{VI}-on a C_{02}^{VI} — miután a β szögű forgatás megtörtént — és ötödik képe c^{V}-ön C_{02}^{V}. Az elvégzett szerkesztés C_0 útjának C_{01}-től C-ig menő részét tisztázta, amelynek részei: $C_{01}C_{01}$ az $\bar{a}$ transzláció, $C_{01}C_{011}$ a $\bar{b}$ transzláció, mely hatodik képen a C_{0i}^{VI} pontban látszik, $C_{011}C_{02}$ a β szögű forgás, végül $C_{02}C$ a $\bar{c}$ transzláció. Az $\bar{a}$ transzláció hosszát (zsúfoltság elkerüléséért) úgy szerkesztettük, hogy az előbb kapott képhosszait $4^{V}S^{V}$, $4^{VI}S^{VI}$ helyzetben a képeire mértük és $S^{V}U = S^{VI}T$ rendezőkülönbséget a^{VI}-ra merőlegesen állítottuk; $\bar{a} = 4^{VI}T = 4T$. A $\bar{b}$ hossza, lévén az a hatodik képsíkra merőleges, a C_{01}, C_{02} pontok rendezőinek különbsége; $\bar{b} = C_{02}^{V}V$, midőn $C_{01}^{V}V \| x_{56}$. A $\bar{c} = C_{02}C$ transzlációt rotációval nyertük; $\bar{c} = C^{VI}R$. Az egyetlen hiányzó komponens a γ forgás; ennek megállapítására a C pont alkalmatlan, azonban a háromszög mozgásának megszerkesztése közben az magától előtűnik.

Befejezésül a háromszög útját szerkesztjük meg. Az XYZ háromszög harmadik képe a^{I}-re esik. Az $\bar{a} = 4T$ transzlációt a harmadik képen látjuk $X_1^{III}Y_1^{III}Z_1^{III}$ (ezután röviden $X_1^{III}\ldots$) helyzetben. A negyedik kép, $X_1^{IV}\ldots$ ugyanaz, mint az eredeti $X\ldots$ háromszögé, mivel $\bar{a}$ transzláció a negyedik képsíkra merőleges. Az α forgatás eredménye látható az $X_1^{IV}\ldots$, $X_1^{III}\ldots$ képeken. Az $X_1\ldots$ háromszögnek megrajzoltuk első, ötödik és hatodik képeit. Hatodik képen látjuk a β forgatást, a hatodik kép egyszersmint $X_2^{VI}\ldots$, az ötödik pedig még csak $X_{II}^{V}\ldots$. A $\bar{b}$ transzlációt, melynél a hatodik kép nem változik, az ötödik képen látjuk, midőn a háromszög képe $X_2^{V}\ldots$ helyzetbe tolódik. Az $X_2^{VI}\ldots$, $X_2^{V}\ldots$ képekből megszerkesztettük a 2. helyzetű, $X_2\ldots$ háromszög első, második, hetedik és nyolcadik képeit. Ezután az $X_3\ldots$ véghelyzethez fordulunk, melynek hetedik képe c^{II}-őn van. A $\bar{c}$ transzlációt a hetedik képen látjuk, midőn a kép az $X_{III}^{VII}\ldots$-be kerül. Az $X_{III}^{VIII}\ldots$ nyolcadik kép ugyanaz, mintha az $X_3\ldots$ háromszög képe lenne ($\bar{c}$ a nyolcadik képsíkra merőleges). Végül az $X_{III}^{VIII}\ldots$ és $X_2^{VIII}\ldots$ háromszögek kongruensek és a c tengely nyolcadik képe, c^{VIII} pont körül egymásra forgathatók. Ez a γ forgás; ennek szögét az Y_2Y_{III} pontpár felhasználásával megrajzoltuk.

A 2. feladat II. és III. megoldásának közlését Gallai Tibor, a 3. feladat megoldását Zigány Ferenc kartársnak köszönöm. Ugyanő volt szíves az ábrákat megrajzolni.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda-utca 13-15. Az egyes feladatok megoldását külön lapon kérjük. Nem zárkózunk el olyan feladat közlése elől sem, amelynek megoldását beküldője nem ismeri.

Kitűzött feladatok

65. Legyen a síkbeli pontrács alapparallelogrammjának területe 1. Bizonyítandó, hogy ha egy síkbeli zárt konvex tartomány szimmetrikusan helyezkedik el egy rácspontra nézve és területe $4r$-nél nem kisebb, ahol r természetes szám, akkor legalább $2r+1$ rácspontot tartalmaz.

Turán Pál

66. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy lineáris egyenletrendszer egy adott ismeretlenre egyértelműen legyen megoldható.

Petheő Árpád

67. Megadandó egy intervallumon értelmezett, akárhányszor differenciálható, egyetlen részintervallumon sem állandó olyan valós függvény, amely egy pozitív mértékű halmazon valamennyi deriváltjával együtt eltűnik.

Kövári Tamás

Megoldott feladatok

43. feladat. k darab koncentrikus $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sugarú körön rendre $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tömegű pont kering állandó $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ szögsebességgel. Kimutatandó, hogy ha a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ számok lineárisan függetlenek, ha továbbá az $m_1 r_1, m_2 r_2, \ldots, m_k r_k$ számok egyike sem haladja meg a többinek összegét, akkor a k pont tömegközéppontja a legkisebbik körlap minden pontjához tetszőlegesen közel jut.

(Turán Pál)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a tömegpontok elhelyezhetők körpályáikon úgy, hogy tömegközéppontjuk a legkisebb körlapnak, sőt az ezt tartalmazó, koncentrikus,

$$r^* = \frac{m_1 r_1 + \cdots + m_k r_k}{m_1 + \cdots + m_k}$$

sugarú körlapnak tetszőleges adott pontja legyen.

Ismeretes, hogy ha az $a_1, \ldots, a_{k+1}$ számoknak egyike sem nagyobb a többi összegénél, akkor van olyan síkbeli zárt poligon, melynek oldalhosszai az $a_1, \ldots, a_{k+1}$ számok. Ha tehát az adott $\mathbf{a}_{k+1}$ vektor hossza a_{k+1}, akkor találhatók $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok úgy, hogy

$$\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{k+1} \quad \text{és} \quad |\mathbf{a}_i| = a_i .$$

E vektorokat megkapjuk, ha a mondott poligon a_{k+1} hosszúságú oldalát az $\mathbf{a}_{k+1}$ vektorral párhuzamosan helyezzük el, és a többi oldalt megfelelően irányítjuk.

Legyen $\mathbf{x}$ olyan vektor, melyre $|\mathbf{x}| \leqq r^*$. A feladatnak az $m_i r_i$ számokra vonatkozó megkötését is figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy az $m_1 r_1, \ldots, m_k r_k, (m_1 + \cdots + m_k)|\mathbf{x}|$ számok egyike sem nagyobb a többi összegnél. Vannak tehát olyan $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ vektorok, hogy

$$m_1 \mathbf{r}_1 + \cdots + m_k \mathbf{r}_k = (m_1 + \cdots + m_k)\mathbf{x} \quad \text{és} \quad |\mathbf{r}_i| = r_i .$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a tömegpontokat a közös centrumból induló $\mathbf{r}_i$ vektorok végpontjaiban helyezve el tömegközéppontjuk az $\mathbf{x}$ helyvektorú pont lesz. Ezzel fenti állításunkat bizonyítottuk.

Minthogy a tömegközéppont folytonos függvénye a tömegpontok helyzetének, a feladat állításának bizonyítása végett elég már csak azt bizonyítanunk, hogy van olyan pillanat, amikor a keringő pontok egy adott elhelyezkedést előírtan jól megközelítenek. Vagyis elég azt belátnunk, hogy van olyan t idő, amikor a pontok elhelyezkedését jellemző $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ szögkoordinátákra és előre adott $\beta_1, \ldots, \beta_k$ szögekre nézve

$$|\varphi_i - \beta_i - 2\pi n_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

ahol $n_1, \ldots, n_k$ egész számok.

Ez azonban nyomban következik KRONECKER tételéből (lásd pl. HARDY—WRIGHT: The theory of numbers (1945), p. 370.). Ugyanis $\varphi_i = \alpha_i + \lambda_i t$. Minthogy a λ_i számok lineárisan függetlenek, a tétel szerint van olyan t valós szám, valamint olyan $n_1, \ldots, n_k$ egész számok, hogy

$$\left| t\frac{\lambda_i}{2\pi} - \frac{\beta_i - \alpha_i}{2\pi} - n_i \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} .$$

Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Kővári Tamás

A 43. feladat megoldását beküldötték még CZIPSZER JÁNOS, GEHÉR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, IZSÁK IMRE, SARKADI KÁROLY, SURÁNYI JÁNOS, SZŰSZ PÉTER.

44. feladat.* Igazolandó, hogy

$$\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\varphi(i)=\binom{n}{2},$$

ahol φ az Euler-féle φ-függvény és $\left[\frac{n}{i}\right]$ az $\frac{n}{i}$-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

(Medgyessy Pál)

Megjegyzés. A feladat állítása nyilván

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\varphi(i)=\binom{n+1}{2}$$

alakban is írható. Az alább közölt első két megoldás ezt az alakot bizonyítja.

I. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$ esetben az állítás nyilván igaz. Feltesszük, hogy

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{n-1}{i}\right]\varphi(i)=\binom{n}{2}.$$

$\left[\frac{n}{i}\right]-\left[\frac{n-1}{i}\right]$ értéke $i\mid n$ mellett 1, s egyébként 0. Az ismert $\sum_{i\mid n}\varphi(i)=n$ összefüggés ezért a következő alakban írható

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{i}\right]-\left[\frac{n-1}{i}\right]\right)\varphi(i)=n.$$

Az indukciós feltevés szerint tehát, $\left[\frac{n-1}{n}\right]=0$ felhasználásával

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\varphi(i)=n+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{i}\right]\varphi(i)=n+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}.$$

Kis Ottó

II. megoldás. A vizsgált összeg

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\mid j}\varphi(i)$$

* A feladat eredetileg sajtóhibával jelent meg, helyesbítését lásd III. évf. 86. 1.

alakban írható, mert ebben $\varphi(i)$ annyiszor szerepel, ahány n-nél nem nagyobb többszöröse van i-nek, azaz éppen $\left[\frac{n}{i}\right]$-szer. Az összeg értéke tehát, az ismert $\sum_{i|j}\varphi(i)=j$ összefüggés felhasználásával

$$\sum_{j=1}^{n} j=\binom{n+1}{2}.$$

Szűsz Péter

III. megoldás. Az n-nél nem nagyobb nevezőjű (alakra különböző) valódi törtek száma nyilván

$$1+2+\cdots+(n-1)=\binom{n}{2}.$$

Osztályozzuk ezeket a törteket aszerint, hogy irreducibilis alakjuk nevezője mekkora. A nevező lehetséges értékei $2, 3, \ldots, n$. Az i nevezőjű irreducibilis valódi törtek száma $\varphi(i)$. Egy-egy ilyen $\frac{v}{i}$ tört $\left[\frac{n}{i}\right]$-szer lép fel irreducibilis alakként, mert $\frac{kv}{ki}$ akkor szerepel csak a vizsgált törtek között, ha $ki \leqq n$. A vizsgált törtek száma tehát

$$\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\varphi(i)=\binom{n}{2}.$$

Kővári Tamás

A 44. feladat megoldását beküldötték még Corradi Kereszтély, Gsászár Ákos, Czipszer János, Detre László, Gehér László, Hosszú Miklós, Lipták József, Madarász Béla, Mentes Imre, Ozsváth István, Sarkadi Károly, Surányi János, Takács Lajos, Tekse Kálmán.

Megjegyzés. A 44. feladat állítása Dirichlet-féle formula néven ismeretes, lásd *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (1904), I. 647. l. Ugyanott a formula különféle általánosításai is szerepelnek.

Detre László

46. feladat.* Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n+i}{l}=(-1)^k\binom{n}{l-k}.$$

(Surányi János)

* A feladat eredetileg sajtóhibával jelent meg, helyesbítését lásd III. évf. 154. l.

I. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás helyessége $k=0$ esetben nyilvánvaló. Feltesszük, hogy az állítás valamely k-ra igaz.

A $\binom{k+1}{i}=\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}$ összefüggés alapján, $\binom{k}{k+1}=$ $=\binom{k}{-1}=0$ felhasználásával

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\binom{n+i}{l}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n+i}{l}+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k}{i-1}\binom{n+i}{l}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left[\binom{n+i}{l}-\binom{n+i+1}{l}\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n+i}{l-1}.$$

Az indukciós feltevés szerint tehát valóban

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\binom{n+i}{l}=(-1)^k\binom{n}{l-k-1}.$$

Tekse Kálmán

II. megoldás. Szorozzuk meg a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát x^{l-k}-val, és összegezzünk az $l=0,1,2,\ldots$ értékekre. A jobboldalakból így a

$$(-1)^k\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n}{l-k}x^{l-k}=(-1)^k(1+x)^n$$

polinom keletkezik. A baloldalakból viszont

$$x^{-k}\sum_{i=0}^{k}\left[(-1)^i\binom{k}{i}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n+i}{l}x^l\right]=$$

$$=x^{-k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(1+x)^{n+i}=$$

$$=x^{-k}(1+x)^n\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1-x)^i=$$

$$=x^{-k}(1+x)^n(-x)^k=(-1)^k(1+x)^n.$$

Minthogy azonos polinomok adódtak, ezekben x^{l-k} együtthatói egyenlők, ami a feladat állítását adja.

L. Ziermann Margit

III. megoldás. Egy függvény magasabb differenciáira

$$\triangle^k f(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i).$$

Legyen $f(i) = \binom{n+i}{l}$. A Pascal-háromszög alaptulajdonságából következőleg

$$\triangle^k f(i) = \binom{n+i}{l-k}.$$

Így tehát

$$\binom{n}{l-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n+i}{l},$$

ami $(-1)^k$-val szorozva a bizonyítandó egyenlőséget adja.

Móritz Péter

IV. megoldás. Jelöljön $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ olyan tulajdonságokat, amelyek egy N elemű halmaz bizonyos elemeire teljesülnek. Jelölje $N_{\alpha_i \ldots \alpha_s}$ a halmaz azon elemeinek számát, amelyek rendelkeznek az $\alpha_i, \ldots, \alpha_s$ tulajdonságok mindegyikével. Közvetlenül belátható, hogy a halmaznak (a lehetséges kombinációkra kiterjesztett összegeket használva)

$$N - \sum_{(i)} N_{\alpha_i} + \sum_{(ij)} N_{\alpha_i \alpha_j} - + \cdots + (-1)^k N_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$$

olyan eleme van, amely nem rendelkezik az $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tulajdonságoknak egyikével sem (lásd KÜRSCHÁK: Matematikai versenytételek (1929), 90. 1.).

Tekintsük az $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_n$ elemekből alakuló l-ed-osztályú kombinációk halmazát. Jelentse α_i azt a tulajdonságot, hogy a kombináció nem tartalmazza az α_i elemet. $\binom{n}{l-k}$ olyan kombináció van, amely e tulajdonságoknak egyikével sem rendelkezik. A fenti megállapítás szerint tehát

$$\binom{n}{l-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+k-i}{l},$$

mert i darab tulajdonság $\binom{k}{i}$-féleképpen választható meg és

$\binom{n+k-i}{l}$ olyan kombináció van, amelyik az $a_1, \ldots, a_k$ elemek közül megadott i darabot nem tartalmaz.

Ha i helyébe $(k-i)$-t írunk, a feladat állítása következik.

Izsák Imre

A 46. feladat megoldását beküldötték még CSÁSZÁR ÁKOS, GEHÉR LÁSZLÓ, KIS OTTÓ, OZSVÁTH ISTVÁN, SZŰSZ PÉTER, TAKÁCS LAJOS. és (másik megoldást is) L. ZIERMANN MARGIT.

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp., V., Reáltanoda u. 13—15). A borítékra írjuk rá feltünően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Kitűzésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri.

Kitűzött példák

32. Keressük meg a hibát (vagy hibákat) a következő „bizonyításban" :*

„A tetraéder térfogatképletére következő gondolatmenet vezet: Kockába három, a kockával egyenlőalapú és magasságú négyzetes gúla fér. A „kockába írt" gúlára jellemző, hogy öt csúcspontja *megegyezik* a kocka nyolc csúcspontja valamelyikével. 1. A kockában *hézagtalanul* éppen három gúla van. 2. A gúla csúcspontjai *azonosak* a kocka valamely öt csúcspontjával. 3. A gúla alapterülete és a hozzátartozó magasság a bennfoglaló test alapterületével és az ahhoz tartozó magassággal egyenlő. Ez a három tény nem fog változni akkor sem, ha a kocka éleit (és vele együtt a kockát) egy vagy több irányban nyújtjuk vagy rövidítjük. Mivel a . . . párhuzamos oldalú hatlap a leírt módon keletkezett a kockából, ezért a bennefoglalt eltorzult gúlák mindegyike a párhuzamosoldalú hatlap térfogatának harmadrésze . . ."

33. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$x-3<\sqrt{-x^2+3x-10}.$$

34. Ábrázoljuk a következő implicit függvényeket:

$$a)\ \cos x=\cos y;\quad b)\ [\sin x]=[\sin y].$$

([a] a legnagyobb, a-nál nem nagyobb egész számot jelenti.)

* VEKTORALGEBRA, Középiskolai Szakköri Füzet, 1952, 28. oldal.

35. Adva van a térben két párhuzamos egyenes. Hogyan helyezkednek el mindazok az egyenesek, amelyek ettől a két egyenestől egyenlő távolságban vannak?

36. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaédernek nincs hatnál több oldalú síkmetszete.

(Surányi János)

Megoldott példák

15. példa. Bontsuk tényezőkre:

$$x^5+x+1.$$

I. megoldás. A fenti kifejezésnek — jelöljük $f(x)$-szel — elsőfokú tényezője csak $x+1$ vagy $x-1$ lehetne; ezek azonban nem tényezői az $f(x)$-nek, mert az $f(x)=0$ egyenletet sem -1, sem $+1$ nem elégíti ki. Ezért másodfokú tényezőt keresünk. Ez a másodfokú tényező vagy x^2+ax+1, vagy x^2+ax-1 alakú.

a) $$x^5+x+1=(x^2+ax+1)(x^3+bx^2+cx+1).$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításából:

$$\text{I. } a+b=0,$$
$$\text{II. } 1+ab+c=0,$$
$$\text{III. } b+ac+1=0,$$
$$\text{IV. } a+c=1.$$

I. és IV. alapján II-ből ezt kapjuk:

$$a^2+a-2=0.$$

Ebből

$$a_1=1,\quad b_1=-1,\quad c_1=0,$$
$$a_2=-2,\quad b_2=2,\quad c_2=3.$$

Ezek közül az első a III. egyenletet is kielégíti, a második azonban nem. Tehát egyetlen olyan felbontás van, amelyben x^2+ax+1 alakú tényező szerepel, és ez:

$$x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

(Nyilvánvaló, hogy x^3-x^2+1 már nem bontható tovább, hiszen ha tovább lehetne bontani, akkor volna egy elsőfokú tényezője, és ez az x^5+x+1 polinomnak is tényezője volna.)

b) $$x^5+x+1=(x^2+ax-1)(x^3+bx^2+cx-1)$$

alakú felbontás — mivel x^2+ax-1 nem bontható racionális együtthatójú tényezőkre — csak akkor volna lehetséges, ha x^2+ax-1

vagy x^2+x+1-nek, vagy x^3-x^2+1-nek tényezője volna. Könnyen belátható, hogy ez lehetetlen, ilyen típusú felbontást tehát nem kapunk.

Reményi Gusztáv

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC.

II. megoldás. x^2-et levonva és hozzáadva, a polinomot olyan két polinom összegeként állíthatjuk elő, amelyek mindegyike osztható x^2+x+1-gyel:

$$\begin{aligned} x^5+x+1 &= x^5-x^2+x^2+x+1 \\ &= (x^3-x^2)(x^2+x+1)+x^2+x+1 \\ &= (x^3-x^2+1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Iván László

16. példa. Bontsuk tényezőkre:

$$x^{10}+x^5+1.$$

I. megoldás. Azt mindjárt látjuk (ugyanúgy, mint a 15. példában), hogy elsőfokú tényezője nem lehet a polinomnak. Megpróbálunk leválasztani róla egy másodfokú tényezőt. Keressük ezt x^2+ax+1 alakban:

$$x^{10}+x^5+1 =$$
$$= (x^2+ax+1)(x^8+bx^7+cx^6+dx^5+ex^4+fx^3+gx^2+hx+1).$$

Az együtthatók összehasonlításával az

$$\begin{aligned} &\text{I. } a+b=0, \\ &\text{II. } 1+ab+c=0, \\ &\text{III. } b+ac+d=0, \\ &\text{IV. } c+ad+e=0, \\ &\text{V. } d+ae+f=1, \\ &\text{VI. } e+af+g=0, \\ &\text{VII. } f+ag+h=0, \\ &\text{VIII. } g+ah+1=0, \\ &\text{IX. } h+a=0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. I. és IX., II. és VIII., III. és VII. összehasonlításával sorban azt kapjuk, hogy $b=h$, $c=g$, $d=f$. Így végül öt ismeretlenre öt különböző egyenletünk marad. Ha I—V.-ből sorban kiküszöböljük az ismeretleneket, végül az

$$a^5-5a^3+5a-1=0$$

egyenletet kapjuk. Ezt a racionális gyökként szóbajöhető 1 és -1 közül az előbbi kielégíti, és így az

$$a=1,\ b=-1,\ c=0,\ d=1,\ e=-1,\ f=1,\ g=0,\ h=-1$$

gyökrendszert kapjuk s a következő felbontáshoz jutunk:

$$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

Bukovszky Ferenc

Megoldotta még: REMÉNYI GUSZTÁV.

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenettel meggyőződhetünk arról, hogy x^2+ax-1 alakú másodfokú tényezőt nem választhatunk le az $x^{10}+x^5+1$ polinomról. Ugyanígy arról is meggyőződhetünk, hogy a most kapott nyolcadfokú tényezőről sem harmad-, sem negyedfokú tényezőt nem tudunk leválasztani. Ebből következik, hogy az $x^{10}+x^5+1$ polinomot tovább már nem tudjuk bontani.

Reményi Gusztáv

II. megoldás. Az $x^{10}+x^5+1$ polinomot (x^5-1)-gyel szorozva és osztva ezt kapjuk:

$$x^{10}+x^5+1=\frac{x^{15}-1}{x^5-1}=\frac{(x^5)^3-1}{x^5-1}=\frac{(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\frac{x^{12}+x^9+x^6+x^3+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$$

(feltéve, hogy $x\neq 1$).

A jobboldalon kijelölt osztásokat maradék nélkül elvégezhetjük és a következő felbontáshoz jutunk:

$$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

Hammer Endre

Hasonló módon megoldotta még: IVÁN LÁSZLÓ.

17. példa. Oldjuk meg:

$$9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-x)=4x\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

Megoldás. $x=-\frac{1}{3}$ gyöke az egyenletnek. A többi gyök meghatározása végett oldjuk meg a

$$9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)(1-x)-4x=0,$$

azaz

$$9x^3+9x^2-6x-8=0$$

egyenletet. Ha x helyébe a $z-a$ különbséget helyettesítjük, és a

értékét úgy választjuk, hogy a másodfokú tag kiessen, $\left(a=\frac{1}{3}\right)$, akkor a

$$z^3-z-\frac{2}{3}=0$$

egyenlethez jutunk. Ha a Cardano-képlettel megoldjuk az egyenletet, egy valós gyökét találjuk:

$$z_1=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}=u_1+v_1\approx 1,24.$$

Ezenkívül két különböző konjugált komplex gyöke van az egyenletnek:

$$z_2=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1),$$

és

$$z_3=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1+v_1).$$

Reményi Gusztáv

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC.

18. példa. Legyenek egy háromszög oldalai $a<b<c$, szögei ennek megfelelően $\alpha<\beta<\gamma$. A háromszög magassági pontja *a*) melyik oldalhoz, *b*) melyik csúcshoz van legközelebb?

Megoldás: a) A C csúcsból kiinduló m_c magasságvonalról könnyen beláthatjuk, hogy minden pontja közelebb esik az a oldalhoz, mint a b oldalhoz. Ha a magasságvonal nem a háromszög belsejébe esik, akkor ez nyilvánvaló. Ha viszont a magasságvonal a háromszög belsejébe esik, akkor állításunk egyértelmű azzal, hogy m_c az f_c szögfelezőtől az a oldal felé esik, azaz hogy a közül a két szög közül, amelyre m_c a γ szöget felbontja, az a oldal felé eső kisebb mint a b oldal felé eső. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen az előbbi szög pótszöge, t. i. β, nagyobb mint az utóbbi szög pótszöge, t. i. α. Ugyanilyen meggondolással kapjuk, hogy az A csúcsból kiinduló magasságvonal minden pontja az A-ból kiinduló oldalak közül szintén a kisebbikhez, ebben az esetben a b oldalhoz van közelebb. A két magasságvonal metszéspontja tehát közelebb van a-hoz mint b-hez és közelebb van b-hez, mint c-hez, vagyis a legrövidebb oldalhoz, a-hoz van a legközelebb.

Bényei András

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC, CZAPÁRY ENDRE, REMÉNYI GUSZTÁV.

b) A bizonyítást arra az egyszerű tényre alapozzuk, hogy ha két derékszögű háromszög egyik befogójában megegyezik, akkor

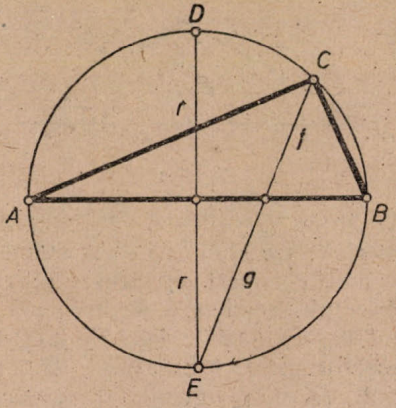
annak a háromszögnek a másik befogója kisebb, amelyiknek kisebb az átfogója, és megfordítva is, annak a háromszögnek az átfogója kisebb, amelynek kisebb a másik befogója. (Ez Pythagoras tételéből azonnal következik.) Ha állításunk első felét alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy például az m_c magasságvonal talppontja a B csúcshoz közelebb van, mint az A csúcshoz. Állításunk második feléből viszont következik, hogy az m_c magasságvonalnak nemcsak a talppontja, hanem minden pontja — és így többek között a magassági pont is — közelebb van B-hez mint A-hoz. Az m_a magasságvonalra vonatkozó hasonló meggondolással kapjuk, hogy a magassági pont a C csúcshoz közelebb van, mint a B csúcshoz. A magassági pont tehát a legnagyobb oldallal szemközti csúcshoz van a legközelebb.

Bukovszky Ferenc

Megoldotta még: REMÉNYI GUSZTÁV.

19. példa Szerkesszünk derékszögű háromszöget átfogója és a derékszöghöz tartozó szögfelezője alapján.

Megoldás. A feladat megoldásához a következő segédtételt használjuk fel: ugyanazon AB átfogóra rajzolt ABC derékszögű háromszögek C-ből kiinduló szögfelezői a háromszögek köré rajzolt kör AB-re merőleges DE átmérőjének valamelyik végpontján mennek keresztül. (Ha kikötjük hogy C és D ugyanazon az AB íven legyenek, akkor a C-ből kiinduló szögfelezők mind az E ponton mennek át.) A segédtétel abból következik, hogy egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek, például esetünkben 45°-os kerületi szögekhez negyedkörívek tartoznak.



1. ábra

A feladat tehát az E ponton átmenő olyan egyenes szerkesztését kívánja meg, amelynek az AB átmérő és az ADB ív közé

eső szakasza adott f hosszúságú. Nyilvánvaló azonban, hogy ha az egyenes f szakaszát ismerjük, akkor az AB átmérő és az AEB ív közé eső g szakaszát is ismerjük; ugyanis

$$\frac{f+g}{2r} = \frac{r}{g} \left(= \cos \widehat{CED}\right),$$

és így g az ismert r és f értékekből kiszámítható. Sőt nemcsak kiszámítható, hanem meg is szerkeszthető, mert g meghatározására a

$$g^2 + fg - 2r^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelyből

$$g = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 8r^2}}{2}.$$

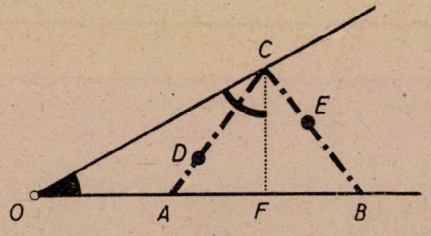
(Szakasz hosszáról lévén szó, a gyök negatív értékét figyelmen kívül hagyhatjuk.) Ebből a g távolságot könnyen megszerkeszthetjük, és az $f+g$ távolságot E-ből felmérve kapjuk a C csúcsot.

A megoldhatóság feltétele: $0 < f \leqq r$.

Bényei András

Megoldotta még: CZAPÁRY ENDRE.

20. példa. Szerkesszünk egy olyan egyenlőszárú háromszöget, amelynek alapegyenese egy előre megadott szög egyik szára, csúcsa a szög másik szárára esik, szárai pedig két, a szög szárai között megadott ponton mennek át.



2. ábra

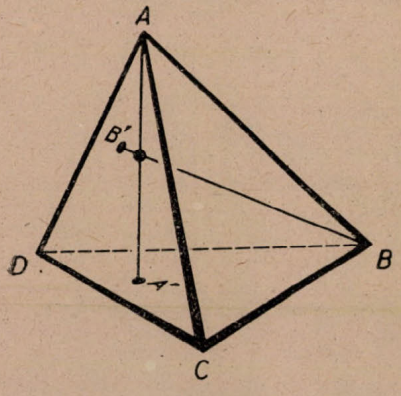
Megoldás. Az ábrán D-vel és E-vel jelölt pontokat és a megjelölt szögeket ismerjük. Ezekből az ismert elemekből transzformációk segítségével újabb ismert elemeket állíthatunk elő. Olyan transzformációt keresünk, amelynek segítségével az ismert és az ismeretlen elemeket összefüggésbe hozhatjuk egymással. A legegyszerűbb ilyen transzformáció: tükrözzük a D pontot az OC egyenesre. Az így kapott D' pont ugyanis az ismeretlen C-ből ismert szög alatt látszik ($D'CE\sphericalangle = 2OCF\sphericalangle$), tehát C megszerkeszthető.

Czapáry Endre

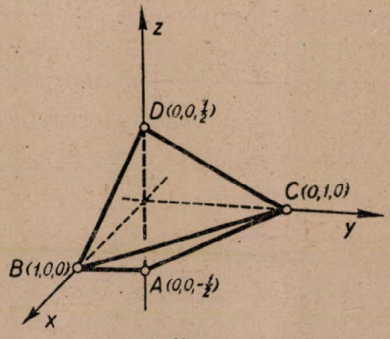
Megoldotta még: BÉNYEI ANDRÁS.

21. példa. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két magasságvonala metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást. Határozzuk meg ennek alapján annak feltételét, hogy a tetraéder magasságvonalai mind egy pontban messék egymást.

Megoldás. Jelöljük a tetraéder A, B, C, D csúcsából kiinduló magasságvonalak talppontját sorban A'-, B'-, C'-, D'-vel. Tegyük fel, hogy például az AA' és BB' magasságvonal metszi egymást, vagyis az A, B, A' és B' pont egy síkban fekszik. Ez a sík merőleges a BCD síkra is meg az ACD síkra is, tehát merőleges a metszésvonalukra, CD-re is. Ekkor azonban a sík minden egyenese merőleges CD-re, többek között AB is: $AB \perp CD$. Ebből mindjárt következik, hogy az a feltétel, hogy a tetraéder két magasságvonala metszi egymást, nem teljesül mindig, hanem egy bizonyos megszorítást jelent a tetraéderre vonatkozóan: a tér két tetszőlegesen felvett kitérő szakasza ugyanis mindig meghatároz egy tetraédert, de általában nem merőleges egymásra.



3. ábra



4. ábra

Most megmutatjuk, hogy a fenti állítás megfordítása is igaz: ha $AB \perp CD$, akkor AA' és BB' metszik egymást. Ez abból következik, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor merőleges magára a síkra is. Emiatt például a CD egyenes és az ABB' sík merőlegesek, mert $CD \perp AB$ és $CD \perp BB'$. Ugyanígy merőleges a CD egyenes és az ABA' sík is. Az ABB' és ABA' sík tehát vagy párhuzamos, vagy egybeesik. Párhuzamosak azonban nem lehetnek, hiszen van egy közös egyenesük: AB. Egybe kell tehát esniök, s ezért AA' és BB' metszik egymást.

Ezen a módon azonban AB és CD merőlegességéből nemcsak az AB él végpontjaiból kiinduló magasságvonalak metszése

következik, hanem a CD él végpontjaiból kiinduló magasságvonalak metszése is. Tehát valóban igaz: ha egy tetraéder két magasságvonala metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást.

Felmerül a kérdés, hogy ha a tedraéder két magasságvonala — és ennél fogva a másik kettő is — metszi egymást, nem következik-e ebből, hogy ez a két metszéspont egybeesik, vagyis hogy a tetraéder négy magasságvonala egy ponton megy keresztül. Ennek a cáfolatára elég egy ellenpéldát mutatni. A 4. ábrán látható tetraédernek két éle, AD és BC, merőleges, tehát két-két magasságvonala metszi egymást, de a két metszéspont közül nyilván csak az egyik esik az origóba.

Ezek szerint az, hogy a tetraéder mind a négy magasságvonala egy pontban (az ú. n. *magassági pontban*) metszi egymást, további megszorítást jelent. Az ilyen speciális tetraéderek bárhogyan kiválasztott két magasságvonala metszi egymást, tehát bárhogyan kiválasztott két szemközti élük merőleges.

Ha azonban annak (minimális) feltételét keressük, hogy a tetraédernek legyen magassági pontja, akkor nyilván elég annyit kikötnünk, hogy a hat él között két merőleges élpár legyen; ebből már következik, hogy mind a négy magasságvonal egy pontban metszi egymást, továbbá az is következik, hogy a hátralévő két él szintén merőleges élpárt alkot.

Czapáry Endre

Megoldotta még: BUKOVSZKY FERENC.

22. példa. Egy egyenes egy derékszögű lapszög mindkét lapjával 30°-os szöget zár be. Hány fokos szöget zár be a lapszög élével?

Megoldás. Az egyenesnek a lapszög által kimetszett szakaszát tükrözzük a lapokra és az élre. A kapott négyoldalú gúla élszögei 60°-osak. Ez a gúla tehát egy szabályos oktaéder fele. Az oktaéder csúcsai egy gömbön helyezkednek el, és így szemközti élei 90°-ot alkotnak (Thales tétele). Ezért az eredeti egyenes a lapszög élével 45°-os szöget alkot.

Bukovszky Ferenc

Megoldotta még: BÉNYEI ANDRÁS, CZAPÁRY ENDRE, REMÉNYI GUSZTÁV.

23. példa. Egy torznégyszög érint egy gömböt. Bizonyítsuk be, hogy az érintési pontok egy síkban vannak.

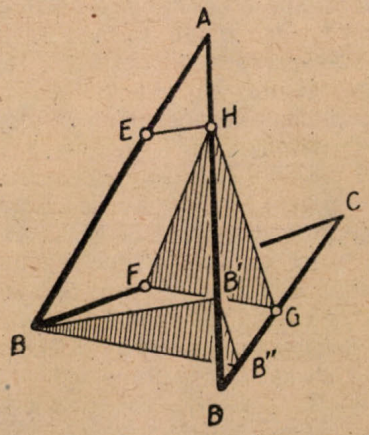
Megoldás. Legyenek az $ABCD$ torznégyszög AB, BC, CD, DA oldalain a gömbbel való érintési pontok sorban: E, F, G, H. Belátható — pontosan ugyanúgy mint síkbeli érintőnégyszögek esetében — hogy a négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő:

$$AB+DC=AD+BC.$$

Ha a négyszög két szomszédos oldala egyenlő (pl. $AB = AD$), akkor a másik kettő is egyenlő. („Torzdeltoid".) Ebben az esetben $HE \| DB$, $GF \| DB$, tehát $HE \| GF$; állításunkat tehát erre az esetre bebizonyítottuk.

Ha $AB \neq AD$, például $AB < AD$, akkor a fenti érintőnégyszög-összefüggésből következik, hogy $CB < CD$. Mérjük fel ebben az esetben az AB, ill. CB távolságot A-tól, ill. C-től számítva a torznégyszög másik két oldalára: $AB' = AB$, $CB'' = CB$ (lásd az ábrát). Nyilvánvaló, (megint az érintőnégyszög-összefüggés alapján), hogy ekkor $DB' = DB''$. Minthogy az AH és AE, CG és CF, DH és DG érintőszakaszok is egyenlők, a fentiekből következik, hogy

$$BB'' \| FG, \quad B''B' \| GH, \quad B'B \| HE.$$



5. ábra

Tehát a $BB'B''$ háromszög síkja mind az FGH, mind pedig az EGH síkkal párhuzamos. Az utóbbi két síknak azonban van egy közös egyenese (GH), ezek a síkok tehát egybeesnek. Az E, F, G, H pontok tehát csakugyan egy síkba esnek.

Megoldotta: Bényei András, Bukovszky Ferenc.

Rövidített aspirantúra

A Magyar Tudományos Akadémia Tudományos Minősítő Bizottsága az 1950. évi 44. törvényerejű rendelet 9. §-a, valamint a 8/1952. (I. 27) M. T. számú rendelet 9. §-ának végrehajtásával kapcsolatban az alábbiakban hívja fel az érdekelt intézmények és személyek figyelmét.

Az egyszerűsített eljárással történő tudományos minősítések befejeztével most kerül sor arra, hogy a TMB a kandidátusi fokozat elnyerését lehetővé tegye olyan személyek számára, akik meghatározott kandidátus-képzésben nem vesznek részt, vagy rövidített úton kívánják az aspirantúrát elvégezni.

Azok, akik kandidátus-képzésben való részvétel nélkül (1950. évi 44. tvr. 9. §-a) kívánják a kandidátusi fokozatot elnyerni, ezirányú kérelmüket a TMB-hez intézett kérvényükben tartoznak előadni, melyben feltüntetik, hogy az aspiránsképzés megszabott feltételei közül, melyeknek elengedését kérik. Disszertáció benyújtásának elengedése nem kérhető. A kérvényhez csatolni kell a kérelmező részletes önéletrajzát és tudományos munkásságának leírását. Az egyetemek és tudományos kutatóintézetek dolgozóinak kérelmét a felügyeletet gyakorló szerv véleményével ellátva a Tudományos Minősítő Bizottság titkárságához kell megküldeni. A Tudományos Minősítő Bizottság a folyamodó rendelkezésére bocsátja a vizsgatematikát és a vele való megállapodás alapján kijelöli a vizsga időpontját. Sikeres vizsga esetében a jelöltet azonnal a disszertáció megvédésére bocsátja, feltéve, hogy arra alkalmas kész disszertáció rendelkezésre áll. A főhatóságnál dolgozó kérelmezők véleményezését a személyzeti osztály adja meg. A disszertáció megvédésére és az eljárásra egyébként ugyanazok a szabályok érvényesek, mint a rendes aspiránsoknál.

Azok a személyek, akik az 1951. évi 26. sz. tvr. alapján történt minősítési eljárás alkalmával disszertáció benyújtására felszólítólevelet kaptak, vizsga letétele nélkül, disszertáció megvédésével nyerhetik el a tudományok kandidátusa fokozatot. A disszertáció bármikor benyújtható. A kérvényhez csatolni kell a folyamodó részletes önéletrajzát, tudományos munkásságának leírását és a disszertáció benyújtására felszólítólevelet. A kérvényt a felettes hatóság véleményével ellátva kell a Tudományos Minősítő Bizottság titkárságának megküldeni.

A kandidátusi tudományos fokozatot rövidített aspirantúrával azok nyerhetik el, akik erre a Tudományos Minősítő Bizottságtól engedélyt kapnak. A rövidített aspirantúrában való részvétel nincs korhatárhoz kötve, a felvétel előfeltétele a sikeres kandidátusi vizsga. A kandidátusi vizsga anyagát a TMB a kérelmező rendelkezésére bocsátja. Azok az aspiránsok, akik a vizsgát kiállták, aspiránsvezető irányítása mellett elkészítik disszertációjukat és azt szabályszerűen megvédik. A rövidített aspirantúra annyiban jelent megkötést, hogy a disszertációt egy éven belül be kell nyújtani. A jogszabály viszont lehetőséget ad arra, hogy a rövidített aspirantúrán résztvevő személy munkahelyén egy évre fizetett rendkívüli szabadságot kaphat.

Az aspiráns köteles munkáját jól ellátni, amennyiben munkája ellen kifogások merülnek fel, a rövidített aspirantúrából kizárható és ezzel fizetett rendkívüli szabadsága is megszűnik.

A Tudományos Minősítő Bizottság felhívja az érdekelt intézmények és személyek figyelmét, hogy azok, akik kandidátus-képzésben való részvétel nélkül kívánják a tudományos fokozatot megszerezni, illetve rövidített aspirantúrában akarnak résztvenni, 1953 július 1-től nyújthatják be ezirányú kérvényüket.

TÁRSULATI ÉLET

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadóülései

1953 január 10. MEDGYESI PÁL: A valószínűségszámítás elemei. (Középisk. d. u.)

1953 január 22. SURÁNYI JÁNOS: Függvénytan elemei a középiskolában. (Pedagógus előadás.)

1953 január 31. SURÁNYI JÁNOS: Elsőfokú egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról. — Az előadó lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságára ad egy tisztán az együtthatómatrixból leolvasható kritériumot és új bizonyítást ad L. M. Blumenthal egy hasonló eredményére. A bizonyítás Minkowski egy szükséges és elégséges feltételéből kiindulva igen egyszerűen adódik.

1953 február 7. GÉMESI JÓZSEF: Az ókori matematika problémái. (Középiskolai délután.)

1953 február 14. FUCHS LÁSZLÓ: Végtelen Abel-csoportokról.
Az előadó összefoglalóan ismerteti a végtelen Abel-csoportok elméletének újabb eredményeit. Megemlíti a Prüfertől, Kulikovtól és Kertész Andortól származó kritériumokat, valamint saját kritériumát arra, hogy egy csoport, ciklikus csoportok direkt összegére legyen bontható.
A megszámlálható primér Abel-csoportok Ulm—Zippin-féle elméletének ismertetése után a nem-megszámlálható esetre vonatkozó eredményekről ad rövid beszámolót, megemlítve Kulikov és saját idevágó kutatásait.

1953 február 26. LŐRINC PÁL: Az analitikus geometria tanításáról. (Pedagógus előadás.)

1953 február 28. SZŰSZ PÉTER: Egy Hardy—Littlewood-féle tételről.
Előadó a következő tételt ismerteti:
Legyen ω irracionális, tehát természetes szám $(y) = y - [y]$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik oly csak ω-tól, k-tól és ε-tól függő m, hogy tetszőleges ν-re teljesüljön

legalább egy egész n-re

$$|(n^{\varkappa}\omega)-\alpha_{\varkappa}|<\varepsilon, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k)$$

ahol $\nu \leqq n \leqq \nu+m$, míg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tetszőleges 0 és 1 között fekvő számok.

Fenti tétel Hardy és Littlewood egy tételének általánosítása. Hardy és Littlewood tétele azt állítja, hogy végtelen sok n-re teljesül

$$|(n^{\varkappa}\omega)-\alpha_{\varkappa}|<\varepsilon \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,k)$$

de arra vonatkozólag nem mond ki semmit, hogy milyen gyakran. Mint alkalmazás adódik ennek a Hardy—Littlewood és Weyltől származó tételnek egy elemi bizonyítása, amely szerint

$$(n^k\cdot\omega) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

számok (0, 1)-ben egyenletes eloszlásúak. E tételre elemi bizonyítást már Bergström talált.

1953 március 7. MIKOLÁS MIKLÓS: A matematikus hivatásáról. (Egy. hallgatók számára.)

1953 március 9. FÖLDES ISTVÁN: Ambarcumjan kozmogóniai vizsgálatai.

1953 március 11. LOVASS-NAGY VIKTOR ismerteti V. V. Sztyepanov: Differenciálegyenletek c. könyvét. (Műegyetemi hallgatók számára.)

1953. március 21. CSÁSZÁR ÁKOS: A valós függvénytan terén elért szovjet eredmények.

Azon fontosabb eredmények ismertetése, melyeket a szovjet matematikusok az egyváltozós függvények deriváltjának és integráljának különféle általánosításai, a a korlátos variációjú és abszolút folytonos függvények szuperpoziciója, valamint a többváltozós függvények differenciálásának elméletében elértek.

1953 március 23. SZENTMÁRTONY TIBOR: Szovjet eredmények a matematikai statisztikában. (Közgazdasági Egyetemen megtartott előadás.)

Az előadás vázolja Bernstejn és Romanovszkij regresszió- és korrelációelméleti munkásságát. Majd rámutat a Pearson-görbék stacionárius folyamatok határeseteiként való, Kolmogorov-, Bernstejn- és Ambarcumjantól származó előállítására. Végül taglalja Szmirnov, Gnegyenko, Kolmogorov és Koroljuk rendstatisztikai eredményeit, kiemelve az eloszlásfüggvénynek Kolmogorov által adott és legújabban táblázattal kezelhetővé vált véges becslését.

1953 március 27. RÉNYI ALFRÉD ismerteti A. M. Jaglom: Bevezetés a stacionér sztochasztikus folyamatok elméletébe c. munkáját, amely az Uszpechi Matyematyicseszkih Nauk 1952. évi kötetében jelent meg. (Klubest.) Az előadó által ismertetett cikk összefoglalóan tárgyalja a stacionárius sztochasztikus folyamatok extrapolációjára és filtrációjára vonatkozó elmélet elemeit A. N. Kolmogorov és N. Wiener alapvető eredményei alapján. Ezzel kapcsolatban ismerteti ezen folyamatok spektrális felbontásának és korrelációelméletének főbb eredményeit.

1953 március 28. GÁSPÁR GYULA: A matematikus hivatásáról. (Előadás a Pedagógiai Főiskolán.)

1953 március 28. GÁDOR ENDRÉNÉ: Szovjet és magyar matematikai módszertani folyóiratok. (Pedagógus előadás.)

1953 március 20. Matematikai logikai szeminárium. A szemináriumot kéthetenként tartottuk július végéig bezárólag. Vezette SURÁNYI JÁNOS.
Az előadó ismertette a matematikai logika elemeit, majd a szűkebb függvénykalkulus eldöntésproblémájának speciális eseteire vonatkozó megoldás, eljárások és különböző típusú redukciós eredmények ismertetésével folytatta.

1953 április 7. RÉDEI LÁSZLÓ: Bauer Mihály matematikai munkásságáról. (Emlékülés.)

1953 április 10. JORDAN KÁROLY: Interpoláció. I.—II. (Középiskolai előadás.)

1953 április 18. KALMÁR LÁSZLÓ: Olyan végtelen sok változós aritmetikai függvényekről, amelyek minden helyen csak véges számú változójuktól függenek.
Végtelen sok változós aritmetikai függvényen olyan $f(x_1, x_2, \ldots)$ függvényt értünk, amelynek független változói a természetes számok halmazán futnak át és értékei is természetes számok. Egy ilyen függvényt finitnek nevezünk, ha bármely $(a_1, a_2, \ldots)$ helyhez van olyan r index, hogy $f(a_1, a_2, \ldots, a_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots)$ független $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots$ értékétől. Az előadás rámutatott a finit függvények jelentőségére matematikai és matematikai logikai szempontból. Így pl. a finit függvények éppen a Baire-féle 0-térben folytonos, csak természetes számú értékeket felvevő függvények; másrészt a konstruktív értelemben definiált végtelen sok változós aritmetikai függvények mind finit függvények. Az előadás foglalkozott bizonyos, a finit függvényekre vonatkozó tételekkel, többek között azokkal, amelyek a finit függvényeknek

egy, az előadásban definiált, a diszkontinuus függvények Baire-féle osztályozásához analog, transzfinit osztályozasával kapcsolatosak. Az előadás néhány, a finit függvényekre vonatkozó probléma felvetésével végződött.

1953 április 18. CSÁSZÁR ÁKOS: A topológiáról.
(Középiskolai délután.)

1953 május 5. GEHÉR ISTVÁN: Kinetikus mértékről.

1953 május 9. SZÉNÁSSY BARNA: Nagy magyar matematikusok elemi természetű feladatokra adott megoldásai.
(Középiskolai délután.)

1953 május 23. MIKOLÁS MIKLÓS: Új eredmények a gamma-függvény elméletében és ezeknek alkalmazásai.
Az előadó főeredménye a gamma-függvény logaritmikus deriváltjának $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$-nek új előállítása zárt alakban, mely — szemben az összes eddig ismert idevágó integrál-képletekkel (Euler, Legendre, Hankel stb.) — 1. csak trigonometrikus és racionális függvényeket tartalmaz és a benne fellépő integrál nem improprius, 2. minden nem-egész z-re érvényes. A szóbanforgó előállítás számos alkalmazása közül az előadásban a következőkről történt említés:

a) $\psi^{(n)}(z+1)=(-1)^{n+1}n!\cdot\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(z+\lambda)^{n+1}}$ $(n=1,2,3,\ldots)$

szintén kifejezhető kizárólag trigonometrikus és racionális függvényekkel zárt alakban, *b)* innen folyik, hogy nemcsak $\zeta(2\nu)=\sum_{\lambda}\frac{1}{\lambda^{2\nu}}$, hanem az összes $\zeta(2\nu+1)=$

$=\sum_{\lambda}\frac{1}{\lambda^{2\nu+1}}$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ sor-összegek is felírhatók π megfelelő kitevőjű hatványa és egy Bernoulli-számokat, ill. polinomokat tartalmazó faktor szorzataként, *c)* az Euler-féle állandó a

$$\gamma=\log 2-\pi\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}\left(\frac{\sin\pi tu}{\sin\pi u}-t\right)du\,dt$$

alakba írható.

1953 június 6. SURÁNYI JÁNOS: Az 1953. évi Arany Dániel verseny feladatainak ismertetése.
(Középiskolai délután.)

1953 június 19. Ankét a „Matematika tanítása" c. lap feladatairól. Előadó: Gádor Endréné. Vitavezető: Surányi János.

1953 június 19. KÁRTESZI FERENC: Matematikus szemmel a Román Népköztársaságban.

1953 június 19: EGERVÁRY JENŐ: Megjegyzések a mátrix algebra elemeihez.
Előadó először kiemeli az egész mátrix-elmélet szempontjából egy konzekvens szimbolika alkalmazásának a jelentőségét és ismerteti az elsőrangú mátrix, azaz diad fogalmát, valamint annak felhasználóságát mátrix rangszámának a definiálására. Egy nem-szinguláris mátrix diadikus előállítása lehetővé teszi a reciprok mátrixának racionális egész műveletekkel való kiszámítását. A reciprok mátrix ezen előállítását felhasználva az előadó egy rövid bizonyítást ismertet Stieltjes-nek arra a tételére, amely a reciprok mátrix elemeinek pozitívitására ad elégséges feltételt.

1953 június 20. HAJÓS GYÖRGY: A középiskolai geometriai anyag szabatos tárgyalásával kapcsolatos kérdésekről: egy szemléletesen átérthető axiómarendszer, poligonok konvexitásának definíciója, valamint a síkra merőleges egyenesnek a közismert, Euklides-félétől eltérő tárgyalásmódja, stb. Ez az előadás nem közvetlen didaktikai célokat, hanem inkább elgondolkoztatásul szolgált.

A Bolyai János Matematikai Társulat a Magyar-Szovjet Baráti Hónap alatt a következő középiskolai előadásokat tartotta:

1953 február 27. HAJNAL ANDRÁS: Miért tanulunk matematikát?
Varga Katalin leánygimnázium, VI. Sztálin-út 65.

1953 március 2. GEHÉR ISTVÁN: Feladatmegoldások.
Berzsenyi Dániel gimnázium, V. Markó-u. 29.

1953 március 3. MOLNÁR JÓZSEF: Feladatmegoldások.
Dózsa György gimnázium, XV. Bartók Béla-út 25.

1953 március 5. GEHÉR ISTVÁN: Miért tanulunk matematikát?
Kölcsey Ferenc gimnázium, VI. Munkácsy Mihály-u. 26.

1953 március 5. TOLNAI JENŐ: Feladatmegoldások.
Rákóczi Ferenc gimnázium, II. Keleti Károly-u. 37.

1953 március 5. GALLAI TIBORNÉ: Miért tanulunk matematikát?
József Attila gimnázium, XI. Szt. Imre hg. útja 27.

1953 március 13. NEUKOMM GYULA: Egyenlőtlenségek.
Állami Tanítónőképző, III. Szentlélek-tér 9—11.

1953 március 16. KRATOFIL DEZSŐ: Feladatmegoldások.
Budai-Nagy Antal gimnázium, XXII. Pentz Károly-u. 13.

1953 március 16. FARAGÓ LÁSZLÓ: A teljes indukció módszere és felhasználása a feladatmegoldásokban.
Széchenyi István gimnázium, VIII. Kendeffy-u. 12.

1953 március 17. GÁDOR ENDRÉNÉ: Feladatmegoldások.
Eötvös József gimnázium, V. Reáltanoda-u. 7.

1953 március 18. GÁSPÁR GYULÁNÉ: Miért tanulunk matematikát?
Kossuth Zsuzsa gimnázium, V. Markó-u. 29—31.

1953 március 18. GREFF GÉZA: Feladatmegoldások.
Corvin Mátyás gimnázium, XVI. Mátyás-tér 4.

1953 március 19. NEUKOMM GYULA: Egyenlőtlenségek.
Jedlik Ányos gimnázium, XXI. Táncsics Mihály-u. 92.

1953 március 21. MOLNÁR JÓZSEF: Miért tanulunk matematikát?
Kossuth Lajos gimnázium, XX. Török Flóris-u. 89.

1953 március 21. GÁSPÁR GYULA: Miért tanulunk matematikát?
Könyves Kálmán gimnázium, IV. Április 4. tér

1953 március 21. GÁDOR ENDRÉNÉ: Feladatmegoldások.
Szerb-horvát tanítóképző, VII. Rózsák tere 6—7.

1953 március 23. ÁDÁM MANÓ: Miért tanulunk matematikát?
Zrinyi Ilona leánygimnázium, VIII. Csobánc-u. 1.

1953 március 24. FARAGÓ LÁSZLÓ: A teljes indukció módszere és felhasználása a feladatmegoldásokban.

1953 március 28. NEUKOMM GYULA: Egyenlőtlenségek.
Fáy András gimnázium, IX. Mester-u. 60—62.

A Társulat harmadik rendes közgyűlése

A Bolyai János Matematikai Társulat 1953 június 20-án tartotta meg harmadik rendes közgyűlését Budapesten (V. Reáltanoda u. 13-15.) a következő tárgysorozattal:

1. Elnöki megnyitó.
2. Valkó Endre, a MTESz főtitkárának megnyitó beszéde.
3. Főtitkári beszámoló.
4. A főtitkári beszámoló megvitatása.
5. Pénztárosi és számvizsgáló bizottsági jelentés.
6. A pénztáros és a számvizsgáló bizottság jelentésének megvitatása. Grünwald Géza díj kiosztása.
7. A főtitkár előterjesztése a Társulat alapszabályainak módosítására és ennek megvitatása.
8. A Társulat új tisztikarának megválasztására jelölő bizottság kiküldése.
9. Egyéb indítványok megvitatása.

10. A jelölő bizottság javaslattétele és szavazás a javaslat felett. A Társulat küldötteinek megválasztása a MTESz közgyűlésére.
11. Bejelentések.
12. Elnöki zárszó.

A közgyűlés programmjához a következő előadások és vitaülések kapcsolódtak:

Június 19-én, pénteken. Ankét a most meginduló „Matematika tanítása" c. lap feladatairól. Előadó: GÁDOR ENDRÉNÉ. Vitavezető: SURÁNYI JÁNOS.
KÁRTESZI FERENC: Matematikus szemmel a Román Népköztársaságban.
EGERVÁRY JENŐ: Megjegyzések a matrix algebra elemeihez.

Június 20-án, szombaton. HAJÓS GYÖRGY: A középiskolai geometriai anyag szabatos tárgyalásával kapcsolatos kérdésekről.

A közgyűlést ALEXITS GYÖRGY elnök nyitotta meg, és a következőket mondotta:

Tisztelt Társulat! 1953. évi közgyűlésünket megnyitom. Nem akarok a főtitkári beszámoló elévágni, amely eredményeink és hiányosságaink részletes elemzését tartalmazza. Nem lehet azonban meg nem állapítani, hogy Magyarországon megváltozott a helyzet a matematikáról való közvélekedés tekintetében. Csupán egy adatot említek meg: két év alatt 761 előadás hangzott el a Társulat keretein belül, vagyis azt lehet mondani, hogy naponta egy előadás. Ez olyan jelenség, amely nyilvánvalóan megmutatja, hogy a magyar társadalomnak megnövekedett a matematikával szembeni igénye. Ez érthető is, hiszen világos, hogy akkor, amikor az országos kérdések között a technikai építés és a természettudományi kutatás centrális helyet foglal el, a matematikának is más szerepe van a nemmatematikusok gondolataiban, mint amilyen volt régente, amikor ennyi matematikai előadást és ilyen létszámú matematikai egyesületet nálunk elképzelni lehetetlen lett volna.

Nem állítom azt, hogy a közfelfogás szerint a matematika ma ugyanolyan szerepet játszik, mint 20 esztendővel ezelőtt a latin nyelv. Ez ugyanis annakidején az akkori uralkodó osztály egyik osztályharcos fegyvere volt. De ha ez a helyzet nem is áll fenn, komoly érdeklődés mutatkozik a matematika iránt. Megjelent néhány népszerűsítő, részben matematikával foglalkozó kiadvány, közülük az egyik tízezres példányszámban, és ezek ma már nem kaphatók. Igen jellemző, hogy az Appendix sem kapható és egy csomó matematika-könyvvel ugyanez a helyzet, ami azt jelenti, hogy az országban élnek olyan emberek, akiket mi nem is ismerünk, és ezek megveszik a matematika-könyveket, és forgatják kulturális igényeik kielégítésére. Nagyon jól tudjuk, hogy akkor, amikor a burzsoázia

álhumanista, külső magatartásra való törekvése adta meg az „általános műveltség" mértékét, talán még 500 példányt sem lehetett volna eladni egy jó matematikai könyvből. Ez a tény megvilágítja azt is, hogy mi a teendőnk ebben a helyzetben. Nekünk, mint matematikai társulatnak, ezt a tendenciát fejlesztenünk kell. Fejlesztenünk kell elsősorban a saját körünkben, és ezzel meghatároztuk azt a legközelebbi teendőt is, amely valószínűleg évekig tartó munkát jelent és amivel adósai vagyunk az ország dolgozó népének és adósai vagyunk magunknak matematikusoknak is.

Azt hiszem, egyik maradványa a multnak az, hogy ugyanazon tudományág művelőinek ismeretei között nagyon nagy a minőségi különbség. Igen nagy mértékben áll ez a matematikára és egyik fontos feladatunk, hogy ezt a káros jelenséget megszüntessük. Ennek a széttagozódásnak a történelmi gyökerei a tőkés munkamegosztásban találhatók meg. A tőkés munkamegosztás elkülönítette az emberek tömegeit — elsősorban a szellemi munkát a testi munkától — teljesen szétbontotta őket apró rétegekre, amelyeknek egyik része ellenségesen állt a másikkal szemben, és ezt az állapotot még hamis ideológiával is támogatta a burzsoázia.

A matematikában is két táborra szakadtak az emberek: a csekély számú kutatókra és a nem kutatók, de matematikát hivatásukként űzők rétegére. Így jött létre az a képtelen helyzet, hogy a kutatók csak a maguk számára kutattak. A mi dolgozó társadalmunk azonban nem tűrheti ezt az állapotot. Nekünk komoly matematikai kultúrájú tömegekre van szükségünk. Rossz elmélet az, amely csupán egy-két zsenire bízná a kutatást és így próbálná meghódítani a tömegeket. A zsenik kivételesek, de a tudományszomjas emberek száma nagy, ezeknek tehát meg kell adni a lehetőséget a felemelkedésre. Maga a 761 előadás bizonyítja, hogy a fejlődés már megindult ebben az irányban.

Társulatunk azonban nem ismerte fel elég tudatosan saját tagságának igényeit és ezért nem támogatta olyan erővel ezeket az igényeket, mint amilyenek maguk az igények voltak a Társulattal és a fejlődéssel szemben. Tagságunk, melynek természetesen vezető szerepe van a matematikai kultúra terjesztésében, sokkal nagyobb igénnyel lépett fel a tudomány megismerése, a tudomány eredményeinek áttekintése tekintetében, mint amilyet képesek voltunk kielégíteni. Igaz, hogy tettünk lépéseket ebben az irányban, de az igények úgylátszik nagyobbak, mint a megtett lépések. Azt hiszem, hogy egyik legfontosabb problémánk e tekintetben segítségére lenni tagságunknak. Ez a mi legdöntőbb feladatunk, amelynek megvalósítására meg kell találnunk a legjobb módszereket. De egy ilyen célkitűzés természetesen nem néhányhónapi rohammunkát, hanem többéves, szisztematikus és meggondolt munkát igényel. Remélem,

hogy ez a közgyűlés, az itt felmerült ötletek is, hozzá fognak járulni a munka minél jobb megszervezéséhez.

Világos, hogy egy ilyen tudományos cél érdekében folyó munkának megvannak a társadalmi előfeltételei: a mi építő munkánk döntő előfeltétele a béke. Alig hiszem, hogy elképzelhető olyan matematikus, akinek ne volna tele minden gondolata azzal a természetes vággyal, hogy a békét megőrizzük, hogy a békét aktívan megvédjük. Olyan vérbeli matematikus, aki a koreai emberrablókkal, vagy a Berlinben zavartkeltő provokátorokkal csak a legtávolabbról is közösséget vállalna — elképzelhetetlen.

Most, amikor a Béke Világtanács ülésezik nálunk, tisztán láthatjuk, hogy többről van szó, mint csupán az e kérdésben való egyetértésről. Arról van szó, hogy mi is a munkánkkal, magatartásunkkal hozzá tudjunk járulni a béke aktív megvédéséhez, ahhoz a nemzetközi közhangulathoz, amely egy csomó provokációt meg tudott akadályozni és képessé tette a sokkal rosszabb társadalmi viszonyok között élő dolgozókat is, hogy saját országukban megvédjék a békét. Azt hiszem, amikor kitűzzük célul magunk elé az exakt tudományos kultúrának minél szélesebb körre való kiterjesztését, akkor egyszersmind a békét is védjük, ezen a módon fegyvert adunk a dolgozó magyar nép kezébe: a matematikai tudomány fegyverét.

Kérem, hogy a közgyűlés résztvevői járuljanak hozzá kritikájukkal céljaink megvalósításához, és akkor remélem, hogy ez a közgyűlés Társulatunk további működésének komoly segítséget fog nyújtani.

*

Valkó Endre a MTESZ főtitkárának megnyitó beszéde:

Tisztelt Elvtársak! Miután a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége nevében szólalok fel, tehát túlnyomó részben műszaki szakembereket képviselek az önök közgyűlésén — talán megbocsátják nekem, ha kissé egyoldalúan, a mérnök szemével nézem a matematikát és a Társulatot is.

Tapasztalatból tudom, hogy annak idején, felszabadulásunk előtt, kivétel volt az a mérnök, aki matematikai ismereteit a gyakorlatban hasznosította. Még akkor sem igen tudta hasznosítani, ha elhelyezkedett és történetesen műszaki munkát végzett. Ez iparunk elmaradt voltából következett.

Azóta a matematika jelentősége óriási mértékben megnövekedett, és nemcsak olyan mértékben növekedett meg, amilyen mértékben általában megnőtt a szerepe mindenfajta tudománynak szocializmust építő hazánkban, és nemcsak olyan mértékben, amilyen mértékben a technika szerepe megnőtt, hanem rendkívül mértékben megnőtt a matematikai apparátus szerepe a műszaki tudományokon belül is.

Fejlődésünk egészen más, új követelményeket támaszt ma mérnökeink, technikusaink és általában a termelésben dolgozók egészen széles rétegével szemben, mint még néhány évvel ezelőtt.

Ez a fejlődés olyan igényeket jelent a műszaki értelmiség munkájával szemben, amilyenekről azelőtt beszélni sem lehetett. A mérnöki, technikusi munkában egyre kisebb lesz a szerepe a rutinnak és egyre nagyobb az önálló tudományos vizsgálódásnak, az elméletnek, amelynek az alapja éppen a matematikai gondolkodás és a matematikai módszerek ismerete. És ha ez így van már ma, úgy még inkább így lesz holnap. Azokból a gyermekekből, akik ma a számtanórán a matematika elemeit tanulják, lesznek holnap azok a mérnökök, tudósok, akik holnap a Szovjetunió nyomán a mi hazánkban is a kommunizmust fogják felépíteni. Ők lesznek az emberiség évezredes álmának a megvalósítói a mi hazánkban.

Így nézzünk rájuk és így nézzük azoknak a felelősségét is, akik bennük a matematika iránti érdeklődést felkelteni, tudományos gondolkodásukat fejleszteni hivatottak.

Ennek a felelősségérzetnek emelésében, tanáraink felkészültségének növelésében hallatlanul sokat tett eddig is és a jövőben egyre többet kell, hogy tegyen a Bolyai János Matematikai Társulat. És egyre többet kell tennie az alkalmazott matematika eredményeinek megismertetése és a gyakorlatban való felhasználás terén is.

Segítséget kell adnunk mérnökeinknek, műszaki embereinknek, hogy problémáikat a matematika nyelvén meg tudják fogalmazni, illetve meg tudják oldani. Nagy feladat vár ebben a munkában Szövetségünkre is, hiszen eddig nem sokat tettünk azért, hogy egyrészt az itteni egyesületek, másrészt az alaptudományokkal foglalkozó egyesületek, így a Bolyai Társulat között is valódi együttműködés jöjjön létre, bár értékes kezdeményezésekben nem volt éppen hiány.

Mi, a MTESZ úgy tekintünk a Bolyai János Matematikai Társulatra, mint amelynek tagjai és nem utolsó sorban ma megválasztandó vezetősége bizonyos vonatkozásban tudományos életünk, iparunk, egész jövő fejlődésünk kulcsát tartják kezükben.

Ez nagy felelősséggel jár. Nem lehet semmi kétségünk az iránt, hogy az elvtársak érzik ezt a felelősséget, hiszen olyan egyesület tagjai és vezetői, mely valóban a legnemesebb haladó hagyományokra, a mai matematika világszerte ismert élenjáró gárdájának munkásságára és a szovjet tudomány segítségére támaszkodva folytatja munkáját. Ehhez a munkához kívánok a mai közgyűlés alkalmából Szövetségünk Elnöksége nevében sok sikert.

*

Ezután RÉNYI ALFRÉD az alábbi jelentésben számolt be a Társulatnak a második közgyűlés óta végzett munkájáról:

Tisztelt Közgyűlés!

A Bolyai János Matematikai Társulat előző (második) közgyűlése, 1951. V. 26 óta, több mint két év telt el. Az 1952. évben a Társulat választmányának határozata értelmében közgyűlést nem hívtunk egybe, tekintettel arra, hogy az 1952. évben rendezte meg a Magyar Tudományos Akadémia Társulatunkkal karöltve a Bolyai-ülésszakot, és az 1952. évben a közgyűlés megrendezésére rendelkezésre álló összeget arra fordítottuk, hogy a Társulat tagjai minél nagyobb számban vehessenek részt a Bolyai-héten. Ilyen módon beszámolómban két év munkáját kell összefoglalnom.

Ebből következik, hogy nem térhetek ki részletesen az elmúlt két év összes társulati eseményeire. Igyekezni fogok azonban vázolni a Társulat munkájának, fejlődésének az elmúlt két évben követett irányvonalát, főbb eredményeinket és ugyanakkor rámutatni munkánk hiányosságaira és hibáira. Kétévi munka felmérése alapján bizonyos következtetéseket is megpróbálok levonni a jövőben végzendő munkánkra vonatkozólag. Itt jegyzem meg, hogy az alapszabály-módosítások során javaslatot fogok tenni többek között arra, hogy a jövőben a Társulat kétévenként tartson közgyűlést, összhangban a MTESZ többi egyesületeinek alapszabályaival. Ezen javaslat elfogadása esetén mai közgyűlésünkre az a felelősségteljes feladat hárul, hogy az elmúlt kétévi munka megvitatása alapján kijelölje a Társulat következő *kétévi* munkájának irányvonalát. Kérem ezért a közgyűlés összes résztvevőjét, hogy beszámolómhoz való hozzászólásával, építő bírálatával járuljon hozzá, hogy közgyűlésünk ezt a legfontosabb feladatát eredményesen láthassa el.

Előző közgyűlésünkön tartott beszámolómat azzal kezdtem, hogy rámutattam egy, a Társulat minden tagja számára központi jelentőségű kérdésre, a béke kérdésére. Úgy gondolom, mai beszámolómat is ezzel a kérdéssel kell kezdenem. Hiszen mindaz a munka, melyet a Társulat az elmult két év alatt végzett, részét képezi kultúrforradalmunknak, ötéves tervünknek, a magyar nép azon törekvésének, hogy hazáját a béke virágzó országává tegye és ezzel a béke megvédéséért harcoljon.

Különösen aktuálissá teszi, hogy a békeharc kérdéseivel közgyűlésünk is foglalkozzék, az a tény, hogy a mai nap fejezi be üléseit a Béke Világtanács itt Budapesten. A Béke Világtanácsának üléseit mindannyian napok óta feszült érdeklődéssel kísérjük figyelemmel. A Béke Világtanács budapesti ülésszaka újabb hatalmas lendületet fog adni a békeharcnak, mely az elmúlt két évben, de különösen az utolsó hónapokban számtalan nagy győzelmet aratott az egész világon.

A következő két évre fog esni első ötéves tervünk befejezése, a második ötéves terv előkészítése és megindítása. Ezért közgyűlésünknek nyilvánvalóan foglalkoznia kell a második ötéves terv kérdéseivel és azzal, hogy ez milyen új, megnövekedett feladatokat szab a Társulat elé. Társulatunk tagjainak tevékenyen ki kell venni a részüket a második ötéves terv előkészítéséből és végrehajtásából. A második ötéves terv igen komoly feladatokat állít a matematikusok elé, amint az a Magyar Tudományos Akadémia ezévi nagygyűlésén tartott előadások és viták során nyilvánvalóvá vált. Második ötéves tervünk a közoktatás hatalmas méretű fejlesztését is tervbeveszi és ezzel kapcsolatban nagy mértékben megnövekednek pedagógus tagjaink feladatai is. A Társulatra váró nagy feladatok eredményes végrehajtásához elengedhetetlen eddigi munkánk felülvizsgálata. Áttérek ezért a Társulat elmúlt két évben végzett munkájának ismertetésére.

A Társulat működésének irányvonalát az elmúlt közgyűlésen elfogadott alapszabályok 2. §-a szabja meg, amely szerint a Társulat célkitűzése „a magyar matematikai élet fejlődésének elősegítése, a matematikai ismeretek terjesztése, dolgozó népünk matematikai ismereteinek társadalmi úton való emelése; tevékenységét a marxizmus-leninizmus alapján a Magyar Dolgozók Pártjának vezetésével, a Szovjetunió tudományának példája nyomán, a Magyar Népköztársaság alkotmányának szellemében végzi." Már előző közgyűlésünkön megállapítottuk, hogy a Társulat célkitűzései megvalósításának előfeltétele volt a Társulatnak országos jellegű tömegszervezetté való átalakulása, az, hogy a Társulat a matematika művelőit és oktatóit, az akadémikusoktól kezdve egészen a matematika iránt érdeklődő diákokig, a közös cél érdekében szoros egységbe tömörítse. Ezen a téren jelentős előrehaladásról számolhatok be. Megmutatkozik a Társulat fejlődése a Társulat taglétszámának alakulásában is. Míg előző közgyűlésünkkor a Társulat taglétszáma 761 volt, a jelenlegi taglétszám 1381, vagyis a taglétszám két év alatt közel megkétszereződött.

Ezenkívül további 50 belépési nyilatkozat érkezett az elmúlt hetek folyamán. — Képet ad a Társulat fejlődéséről, ha megvizsgáljuk a tagság összetételét foglalkozás szerint. Tagjaink közül 890 rendes tag és 491 diáktag. A rendes tagok közül 648 középiskolai és általános iskolai tanár, 162 egyetemi és főiskolai oktató, illetve tudományos intézet munkatársa, 80 műszaki szakember, tisztviselő, vagy egyéb foglalkozású. Érdekes megvizsgálni a foglalkozási ágak szerinti taglétszám növekedését. Az egész taglétszám növekedése 88%, a tanárok számának növekedése 90%, az egyetemi és kutatóintézeti tagok számának növekedése 67%, a diáktagok számának növekedése 75%, az egyéb foglalkozásúaké 82%.

Ezek a számok mutatják, hogy a Társulat fejlődése arányos volt és minden vonalon megmutatkozott. Külön ki kell emelnem, hogy a növekedés a legnagyobb a tanárok körében, aminek oka, hogy a Társulat az utóbbi év folyamán vidéken az egész országra kiterjesztette működését és fokozatosan törekedett arra, hogy az általános iskolában dolgozó kartársakat is bevonja a munkájába. Ugyanakkor megállapíthatjuk, hogy — bár történtek ilyen irányú kezdeményezések — a Társulatnak több támogatást kell nyújtania az általános iskolákban dolgozó kartársak számára. Annak oka, hogy százalékban a legalacsonyabb a taglétszám-növekedés az egyetemi és kutatóintézeti dolgozók körében, abban áll, hogy az egyetemeken és tudományos intézetekben dolgozó matematikusok túlnyomó része már az előző közgyűlés előtt tagja, sőt legtöbbjük aktív tagja volt Társulatunknak és ezen a vonalon létszámnövekedés elsősorban ezen intézetek új munkatársainak a Társulatba való belépése folytán jött létre. Ugyanakkor meg kell állapítanunk, hogy az egyetemi tanszékek fiatal munkatársai közül számosan még nem tagjai a Társulatnak, különösen Budapesten és akik már beléptek, azok közül is sokan még nem kapcsolódtak be aktívan a Társulat munkájába. Erre fel kell figyelnünk, mivel a társulati munka szempontjából igen nagy szükség van az egyetemi tanszékek fiatal munkatársaira. Ezúton is felkérem az egyetemi tanszékek vezetőit, hassanak oda, hogy munkatársaik belépjenek és aktívan résztvegyenek a Társulat életében. Kérem, hogy a tanszékvezetők biztosítsák munkatársaik számára ennek lehetőségét, mert e téren is tapasztaltunk elvétve hiányosságokat. Különösen megmutatkozik a Társulat fejlődése a vidéki tagozatok számának és taglétszámának növekedésében. Előző közgyűlésünk időpontjában a Társulat 7 városban működött (Budapest, Szeged, Debrecen, Miskolc, Pécs, Veszprém, Eger), azóta újabb öt vidéki tagozatot alakítottunk, mégpedig Győr, Sopron, Szolnok, Nyíregyháza és Szombathely székhellyel. Ilyen módon vidéki tagozataink száma hatról tizenegyre növekedett, vagyis közel megkétszereződött, Társulatunk tehát jelenleg 12 városban működik. Az újonnan alakult tagozatok közül három olyan városban működik, ahol egyetemi matematikai oktatás nem folyik. Vidéki tagozataink szervezésénél eleinte csak az egyetemi városokra szorítkoztunk, úgy gondolva, hogy ahol egyetemi matematikai tanszék van, ott meg van a Társulat megfelelő bázisa és bizonyos aggódással szántuk el magunkat, hogy ilyen bázis nélkül is tagozatot létesítsünk. Az eredmények azt mutatták, hogy ez az aggodalom alaptalan volt és lehetséges a Társulat jól működő aktív tagozatát kiépíteni egyetemi bázis hiányában is. Ezt bizonyítja elsősorban győri tagozatunk fejlődése. Hozzá kell ehhez tennünk, hogy azokban a városokban, ahol egyetemi matematikai tanszék nem működik,

még fokozottabb jelentősége van a társulati élet megindításának és ezzel az illető város és környéke matematikusainak az ország matematikai életébe való bekapcsolásának. Néhány szót szeretnék szólni tagozataink munkájáról.

Régebbi tagozataink közül a miskolci tagozat, — mely előző közgyűlésünkön a Társulat vándorzászlóját nyerte el — az elmúlt két évben is igen eredményes és aktív munkát végzett. Különösen kiemelkedtek az 1951- és 1952-ben rendezett évnyitó konferenciái, a tagozat által Sárospatakon rendezett tanári konferencia, valamint az ez év márciusában a matematika tanításáról rendezett ankét, amelyet a tagozat önálló kezdeményezésként szervezett meg és számos más didaktikai és továbbképző jellegű előadás. Szépen dolgozott a tagozat a Magyar—Szovjet Barátsági Hónap alatt is, azonban a tudományos vonalon a tagozat kevesebb aktivitást és kezdeményezést mutatott, mint az oktatási vonalon. Hiányolható a tagozat munkájában, hogy a tudományos előadások nem folynak rendszeresen és a középiskolai matematikai délutánok sem folynak olyan aktívan, mint ahogy ez más tagozatokban megvalósult.

A debreceni tagozat az 1950. évi munkaversenyben a miskolci tagozattal holtversenyben végzett és a közgyűlés ezért díszoklevéllel tüntette ki; a debreceni tagozat azóta is állandóan kiváló munkát végez. A vidéki tagozatok közül a tudományos előadások száma és színvonala, valamint a középiskolai matematikai délutánok rendezése terén a debreceni tagozat messze kiemelkedik az összes vidéki tagozatok közül. A debreceni tagozatban azonban a tanárok továbbképzése és a didaktikai kérdésekkel való foglalkozás tekintetében nem tapasztalható kiemelkedő aktivitás.

Régebbi tagozataink közül fejlődés tapasztalható a szegedi tagozatnál, amelynek munkája kétségkívül megélénkült. Aktívan dolgozik a pécsi tagozat is, ahol különösen az előadások száma növekedett meg szépen. A társulati munkában azonban csak kevés tag vesz részt és nem sikerült a tagozati munkába nagyobb számmal bevonni a kartársakat.

A veszprémi és egri tagozatok munkája is lehetne jobb. Különösen vonatkozik ez Veszprémre, ahol a lehetőségek kedvezőbbek. Ebben a tagozatban az önálló kezdeményezés kevés, de a Magyar—Szovjet Barátsági Hónap alatt, amikor kellő támogatást kaptak a központtól, jól dolgoztak.

Az új tagozataink közül, a győri tagozatot kell első helyen említenem, amely minden vonalon igen eredményes jó munkát végzett. Az új tagozat munkájában aktívan részt vettek szinte az összes győri és győrvidéki matematikus kartársak és a tagozat megalapítása óta eltelt $1^1/_2$ év alatt Győrben, amely azelőtt teljesen el volt szakadva az ország matematikai életétől, élénk matematikai

élet alakult ki. A tagozatnak számos más városban dolgozó matematikust sikerült megnyernie előadások tartására és a győri kartársak, élükön Szeliánszky Ferenc titkárral, maguk is igen áldozatkész, lelkes munkát végeztek. Ki kell emelnem a győri tagozat munkájából azt, hogy minden vonalon sikerült eredményt elérniök, különösen pedig azt, hogy nagyszámú üzemi előadást tartottak, főként az ezévi Magyar—Szovjet Barátsági Hónap alkalmából, valamint egy munkás-szállóban is tartottak előadást.

Pápán is rendezett a tagozat egy alkalommal ülést. Igen jó munkát végzett a győri tagozat a középiskolai diákok körében is, ennek eredményességét mutatja, hogy Győr—Sopron megye szerepelt legjobban a Rákosi versenyen: 18 győrmegyei diák jutott a döntőbe és közülük 9 kapott jutalmat.

A soproni, szombathelyi, szolnoki és nyiregyházi tagozatok még túl fiatalok ahhoz, hogy munkájukat ki lehessen értékelni. Általában véve a kezdet nehézségeivel küzdenek. Ki kell azonban emelnünk a szolnoki tagozat aktív munkáját a tagszerzés terén és a tagozatok közötti versenyre vonatkozó helyes kezdeményezését. A szombathelyi tagozat már megalakulás után a néhány héttel Nagykanizsára is kiterjesztette működését. A soproni tagozat viszonylag szép számmal rendezett tudományos előadóüléseket meghívott előadókkal. A nyíregyházi tagozatban a matematika néhány lelkes híve, különösen pedig Ambrózy Géza titkár munkája nyomán szintén kezd kialakulni a társulati élet. Itt jelentem be, hogy Ambrózy Géza a vakok számára egy matematikai tankönyvet írt, amelynek egy példányát a Társulat könyvtárának adományozta. Javaslom, hogy a közgyűlés ezért részesítse jegyzőkönyvi köszönetben.

Ilyen módon ezek a fiatal tagozatok már több jelét adták életképességüknek. A vidéki tagozatok munkájával kapcsolatban nehéz feladat előtt állok, amikor javaslatot kell tennem a közgyűlésnek a vándorzászló odaítélése ügyében, tekintve, hogy — mint az elmondottakból kitűnik — több oly tagozatunk is van, amely kiemelkedő eredményeket ért el. Gondos mérlegelés után arra az elhatározásra jutottam, hogy azt javasoljam, hogy *az előző közgyűlésen alapított vándorzászló mellett két további vándorzászlót létesítsen a Társulat, egyet a tudományos, egyet pedig az oktatási szakosztály vonalán legkiválóbb munkát végző tagozat részére.* Javaslom továbbá, hogy a Társulat a multkor alapított vándorzászlót a minden téren legjobb munkát végző győri tagozatnak ítélje oda, ugyanakkor a két új vándorzászló közül az egyiket az oktatási szakosztály vonalán legjobb munkát végző miskolci tagozatnak, a másikat a tudományos szakosztály vonalán legjobb munkát végző debreceni tagozatnak ítélje oda és ugyanakkor ezen tagozatok titkárait, névszerint Szeliánszky Ferencet, Batár Zoltánt és Szénássy Barnát, továbbá rajtuk kívül Szendrei János és Nagy Ferenc kartársakat a

vidéki tagozatok fejlesztése terén végzett lelkes és áldozatkész munkájukért részesítse jegyzőkönyvi köszönetben.

A vidéki tagozatok munkájának megvizsgálása során arra a meggyőződésre jutottunk, hogy a tagozatokban folyó matematikai élet megélénkítése és tudományos színvonalának emelése céljából, valamint abból a célból, hogy a Társulat vidéki tagjai könnyebben hozzájussanak matematikai szakkönyvekhez, feltétlenül szükségesnek látszik, hogy az összes vidéki tagozatainkban tagozati könyvtárat létesítsünk. Abból a célból, hogy ezeknek a tagozati könyvtáraknak alapjait, — szerény keretek között — megteremtsük, egy kb. 20 kötetből álló könyv- és folyóiratgyűjteményt fogunk néhány napon belül elküldeni minden tagozatunknak, amely a felszabadulás óta megjelent matematikai könyvekből lesz összeválogatva. Ez a gyűjtemény tartalmazza az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményeit, a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményeit, az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményeit, Alexits György munkáját Bolyai Jánosról, a Matematikai Lapok eddig megjelent füzeteit (a II. évfolyam híján) a Matematikai és Physikai Lapok (nem teljes) sorozatát és néhány nem régiben megjelent szovjet monográfia és tankönyv magyar fordítását.

Úgy gondoljuk, bármilyen szerény ez a kezdet, ezzel életre hívjuk a tagozatok könyvtárait és igyekezni fogunk a jövőben megfelelő anyagi támogatást szerezni ahhoz, hogy ezek komoly kézikönyvtárakká fejlődjenek. Ehhez természetesen a MTESZ támogatására van szükség. Ezúton is kérem a MTESZ-t, nyújtson segítséget a könyvtárak mielőbbi kibővítéséhez. Tagozataink könyvtáruk fejlesztéséhez vegyék igénybe a helyi MTESZ intézőbizottságok támogatását. Azt tapasztaltam, hogy egyes vidéki tagozatainkban nem is tudnak a legújabb magyar nyelven megjelent matematikai munkákról. Ezt a helyzetet fel kell számolni és ebben a tagozati könyvtárakra nagy szerep vár. Úgy gondolom, hogy a tagozat könyvtára fokozni fogja a tagozat vonzóerejét a tagozat matematikusaira és ezzel a tagozat munkáját, fejlődését fogja elősegíteni.

Ezen kitérés után vissza szeretnék térni a Társulat munkájának ismertetésére. A Társulat fejlődése megmutatkozik a Társulat által rendezett előadások, ankétok, konferenciák számában is. Az elmúlt két év alatt a Társulat összes tagozatai, — Budapestet beleértve — összesen 202 tudományos előadást, 35 klubestet, 110 tanári továbbképző előadást, 270 diákok számára szóló előadást, illetve matematikai délutánt és 143 üzemi előadást, összesen tehát 761 előadást rendeztek. Ez igen nagyarányú növekedést jelent a multtal szemben, mivel ez azt jelenti, hogy egy évre 380 előadás jut, ellentétben az előző közgyűlés előtti időszakra, amelyben 200 elő-

adás esett egy évre. Társulatunk tehát átlagban, — figyelembevéve a nyári szünetet, — az egész országban együttvéve havonta 38 előadást rendez. Úgy hiszem, ez a szám is mutatja, hogy a Társulat aktivitása általánosságban kielégítő, azonban, ha közelebbről megnézzük az előadások számának eloszlását az egyes tagozatok között, úgy ebből számos kisebb hiányosság derül ki. Így pl. klubesték Budapesten kívül csak Szegeden, Debrecenben és Miskolcon, valamint Győrött voltak, a többi tagozatban nem. A tudományos előadások száma legnagyobb Budapesten (50), utána Debrecen következik, a többi tagozat azonban még igen távol van attól, hogy a tudományos üléseket rendszeressé tette volna. A pedagógus továbbképző előadások száma tekintetében Miskolc és Pécs vezetnek. Debrecen e téren le van maradva, hasonlóképpen Veszprém is. Az üzemi előadások száma Szegeden a legmagasabb (50), hozzá kell azonban tenni, hogy ez a szám összefüggő előadássorozatok számából adódik. Szép számban voltak üzemi előadások Debrecenben és Győrött. Meglepően alacsony az üzemi előadások száma Budapesten. Itt jegyzem meg, hogy a matematika népszerűsítése vonalán fordulatot jelent a Tudományos és Társadalmi Ismereteket Terjesztő Társulatnak megalakulása. Társulatunk különböző, részben szervezési, részben káder-nehézség miatt ezt a feladatot nem tudta kellőképpen ellátni és jelenlegi helyzetében sem alkalmas arra. Nagy örömmel kell üdvözölni, hogy az újonnan alakult társulat ezt a feladatot átveszi, de természetesen minden segítséget meg kell adnunk az új társulat munkájához.

Érdekes megvizsgálni az egyes tagozatok által rendezett előadások számát is. Minden típusú előadást egybevéve, az elmúlt két év alatt Budapesten 130 előadás volt, a szegedi tagozat 122, a debreceni tagozat 183, a miskolci 75, a pécsi 95, a veszprémi 28, az egri 25, a győri 63, a soproni 13, a nyíregyházi 13, a szolnoki 9 és a szombathelyi tagozat 2 előadást rendezett. Igen figyelemreméltó, hogy a tagozatok előadásai között igen szép számban szerepelnek a tagozat székhelyén kívül tartott előadások, így többek között Makón, Hódmezővásárhelyen, Mezőtúron, Keszthelyen, Sümegen, Pápán, Sárospatakon, Ózdon, Kisvárdán, Nagykállón és Nagykanizsán is tartott a Társulat előadásokat. A tagozatok által tartott előadások száma önmagában nem ad reális képet a tagozat aktivitásáról, mert ezt viszonyítani kell a tagozat létszámához. Így pl. az a tény, hogy az 50 tagú győri tagozat másfél év alatt 63 rendezvényt tartott, nagyobb viszonylagos aktivitást mutat, mint a 220 tagú miskolci tagozat két év alatti 75 előadása, sőt nagyobbat mint a 145 tagú debreceni tagozat két év alatti 183 előadása.

Röviden meg szeretnék emlékezni a Társulat legkiemelkedőbb, nagyobb szabású rendezvényeiről is.

Első helyen a Magyar Tudományos Akadémiával karöltve 1952 december 14—18-ig rendezett ünnepi ülésszakot kell említenem, társulatunk névadójának, Bolyai Jánosnak születése 150. évfordulója alkalmával. Ez az ülésszak a magyar matematikai élet, legnagyobb szabású eseménye volt az I. Magyar Matematikai Kongresszus óta. Jelentőségét az adta meg, hogy ez volt az első alkalom, amikor hazánkban valóban megfelelő méltó formában emlékeztünk meg Bolyai Jánosról, a magyar tudomány büszkeségéről, a haladó tudomány lángeszű forradalmáráról.

Hogy ezt megtehettük, az igen nagy részben köszönhető Társulatunk elnöke, Alexits György kitűnő munkájának, amelyben Bolyai alakját igazi nagyságában állította elénk, megszabadítva azt számos előítélettől és hamisítástól. Bolyai-ülésszakunk sikerét nagy mértékben elősegítette, hogy azon a béketábor országainak matematikusai is résztvettek, élükön a Szovjetunió két kiváló matematikusával, P. Sz. Alexandrovval és Sz. M. Nyikolszkival és igen értékes előadásokat tartottak. A Bolyai-ülésszak jelentős eseménye volt a hazai matematikai életnek azért is, mert az elhangzott előadások Bolyai és Lobacsevszki nagy felfedezését, annak jelentőségét és hatását Sztálin legutolsó munkájának alapvető téziseire támaszkodva, a dialektikus materializmus fényével igyekeztek megvilágítani.

Nagyobb rendezvényeink közül rá szeretnék térni azokra a konferenciákra, amelyeket a középiskolai matematikai oktatás színvonalának emeléséért folyó, a Társulat által indított mozgalom továbbvitele során rendeztünk. Előző közgyűlésünkön 5 ilyen konferencia megrendezéséről számolhattam be, azóta 10 újabb többnapos konferenciát és 2 pedagógusnapot rendezett a Társulat a K. M.-el és az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal karöltve. Így 1951 XI. 2—4 között Pécsett, november 4—6-án Balatonfüreden, 1952 I. 4—6-án Győrött, március 1—2-án Egerben, május 4—5-én Szegeden, december 13—15-én Budapesten, 1953 február 15—17-én Pécsett, végül 1953 március 19—21-én Sárospatakon. Ehhez járul még a K. M.-el együtt 1951—1952 őszén rendezett konferencia, valamint az 1952 szeptember 28-án Békéscsabán és december 7-én Szombathelyen rendezett pedagógusnap. Konferenciáink általában sikeresen folytak és hozzájárultak a matematika-oktatás színvonalának emeléséhez. Több konferencián felmerült a résztvevő kartársak részéről az a kívánság, hogy a konferenciák anyagát megkaphassák. Erre vonatkozóan javaslat érkezett a közgyűléshez Batár Zoltán tagtársunktól, aki javasolja, hogy a Társulat tegyen javaslatot a K. M. felé, hogy a Szocialista Nevelés Könyvtára sorozatban a Társulat által rendezett konferenciák válogatott anyaga külön kötetenként jelenjék meg. Konferenciánk jelentőségét a Társulat élete szempontjából elsősorban abban látom, hogy ezeken keresztül

közelebb kerültek a Társulathoz azok a tagok, akik nem tagozati székhelyen laknak.

Egyéb rendezvényeink közül kiemelem, hogy a szóbanforgó időszakban a Bolyai-ülésszak alkalmából hazánkban tartózkodó két német matematikus, K. Maruhn és W. Rinow tartottak előadásokat Társulatunkban. Továbbá 1952 április 24—25-én K. Schröder professzor tartott két előadást a Társulatban. 1951. december 10-én ünnepelte meg a Társulat Jordan Károly díszelnökünk 80. születésnapját. Kiemelkedő rendezvények voltak az 1951 szeptember 29-én tartott számelméleti ankét és 1952 január 26—27-én tartott analízis ankét. Ezeken az ankétokon az egyetemi oktatás vitás kérdései kerültek tisztázásra. Érdekes kísérlet volt a matematikai szövegek szedésére vonatkozólag 1952 május 20-án a Papír- és Nyomdaipari Műszaki Egyesülettel közösen megrendezett ankét. Még ezt megelőzőleg a szegedi tagozat foglalkozott a matematikai szakszövegek szedésével, oly formában, hogy Keresztúri Jenőt, a szegedi Délmagyarország nyomda országszerte ismert híres nyomdászmesterét hívta meg előadások tartására. Ezt követte a matematikai szedőverseny, ahol a Társulat is közreműködött, azonban nem vonták be kellőképpen a Társulatot a verseny szempontjainak kidolgozásába és részben ennek következtében a verseny nem hozta meg a kívánt eredményt.

Sikerrel rendezte meg a Társulat mind 1952, mind 1953 tavaszán a Magyar—Szovjet Barátsági Hónapot. A szovjet tudomány nagyszerű eredményeinek ismertetése a társadalmi munka keretében nem kampányszerű munka. Ezt a munkát nemcsak a Magyar—Szovjet Barátsági Hónap alatt végezzük, hanem ez egyik legfontosabb munkaterületünk. E nélkül nem tudnánk megoldani egyéb feladatainkat. A Magyar—Szovjet Barátsági Hónap arra szolgál, hogy ez alkalommal sokkal szélesebb körben ismertessük a szovjet matematikusok nagy eredményeit. Mindkét évben azt a módszert követte a Társulat, hogy részletes silabuszt bocsátott az előadók rendelkezésére; így sikerült nagyobb számú előadógárdát biztosítanunk. 1952. és 1953. évben számos silabuszt dolgoztunk ki és fordíttattunk oroszból.

1952-ben 60, 1953-ban 122 előadást tartottunk a Magyar—Szovjet Barátsági Hónap alatt. Ugyanakkor ezévi előadásaink sokkal nagyobb létszámú hallgatóságot mozgattak meg.

Szólnom kell röviden a társulati munka egy igen fontos vonaláról, a matematikai versenyek szervezéséről is. A Schweitzer-versenyt 1951-ben a debreceni tagozat bonyolította le, 1952-ben a szegedi tagozat vállalta magára. A debreceni tagozat részéről elsősorban Szele Tibor, a szegedi tagozat részéről Sz.-Nagy Béla biztosították a verseny sikerét. Míg 1951-ben a Kürschák-versenyen

394 fő vett részt és 199 dolgozatot nyújtottak be, addig 1952-ben 700 részt vevő közül 390-en adtak be dolgozatot. A Kürschák-versenyekkel kapcsolatban meg kell jegyeznem, hogy elsősorban Hajós György munkája segítette elő a versenyek sikerét. — A Társulat az Arany Dániel matematikai versenyt nagy sikerrel rendezte és szinte teljes egészében magára vállalta a Rákosi Mátyás tanulmányi verseny megrendezését. Bár a minisztériummal való együttműködés kialakulása terén kezdeti nehézségek voltak és sokszor bürokratikus akadályok nehezítették a munkát, a versenyek mégis nagy sikerrel zárultak. Mindkét évben 3000 diák vett részt a Rákosi versenyen. Ez azért számít fejlődésnek, mert ezévben a matematikai versenyben résztvevő iskolák száma csökkent. (Csak a gimnáziumok és technikumok növendékei indulhattak.) Az Arany-versenyen 4500 diák vett részt, ebből a döntőbe 199 diák került. A versennyel kapcsolatos munkát Surányi János irányította. Javasolom, hogy a közgyűlés szavazzon jegyzőkönyvi köszönetet Hajós György, Surányi János, Szele Tibor és Szőkefalvi-Nagy Béla tagtársunknak a versenyekkel kapcsolatos lelkes munkájukért.

Multkori közgyűlésünk számos fontos határozatot hozott. Határozatot hoztunk a Beke- és Grünwald-emlékdíjak alapítására. Azóta a Beke-díjat két alkalommal osztottuk ki, ezzel sikerült az oktatásban jól működő tagtársak munkájára a figyelmet felhívni. A Grünwald Géza-emlékdíj a mai napon kerül első ízben kiosztásra.

Az elmúlt közgyűlés hozott határozatot az oktatási és tudományos szakosztályok létesítésére. Két év távlatából megállapíthatjuk, hogy ez a szervezeti forma bevált. Különösen az oktatási szakosztály végzett jó munkát. Meg kell jegyeznem, hogy a szakosztály eredményes munkája nagyrészben Hódi Endre tagtárs, szakosztályi titkár érdeme. Javasolom, hogy a közgyűlés részesítse őt munkájáért jegyzőkönyvi köszönetben.

Rá kell itt mutatnom egy alapvető kérdésre. A Társulat oktatási szakosztálya az elmult két évben jóval aktívabban működött, mint a tudományos szakosztály és a Társulat munkája az oktatás vonalán sokkal gyorsabban fejlődött, mint a tudomány vonalán. Ha a tudományos szakosztály munkáját nem fogjuk lényegesen megerősíteni, úgy az a veszély áll fenn, hogy a Társulat tudományos jellege háttérbe szorul. Bármennyire is fontos mindaz a munka, amit a Társulat oktatási szakosztálya kifejt, Társulatunk fő feladata mégis az, és az is kell, hogy maradjon, hogy a magyar matematikai élet fejlesztését segítse elő. Nem szabad elfelejteni, hogy feladataink közül ez az, aminek eredményes teljesítésén áll vagy bukik egyéb feladataink sikeres végrehajtása. Nem szabad elfelejtenünk továbbá, hogy ennek a feladatnak — ellentétben többi feladatunkkal, — nincs más gazdája. A tudományos élet irányító

szerve, a Magyar Tudományos Akadémia, csak az elvi irányítást adhatja meg. A széles alapokon nyugvó és ugyanakkor magas tudományos színvonalú matematikai élet társadalmi úton való fejlesztése olyan feladat, amelyet Társulatunknak kell ellátnia.

A Társulat sok mindent kezdeményezett az elmult évben. A tanárok továbbképzése és a diákok matematika iránti érdeklődésének fokozása terén is jelentős kezdeményezéseket tett. Gondolok itt a versenyekre és konferenciákra.

Ezeknek a kérdéseknek a tulajdonképpeni gazdája azonban a közoktatásügyi minisztérium. Ugyanez vonatkozik az egyetemi oktatás vonalára is. A Társulat e téren is sok értékes kezdeményező lépést tett, e kérdésnek igazi gazdája azonban a felsőoktatásügyi minisztérium.

Legfontosabb feladatunk azonban a magyar matematikai élet fejlesztése. Ha a Társulat ezt a feladatot nem látja el, akkor ezt senki más helyettünk nem teszi meg. Kétségtelen, hogy itt fordulatra van szükség és arra, hogy nagyobb számban tartsunk tudományos előadásokat és nagyobb mértékben igyekezzünk a Társulat tagjait bevonni a tudományos munkába. Különös figyelemmel kell fordulnia a Társulatnak a matematika alkalmazásai felé.

Éppen ezért javaslom, hogy az elnökség foglalkozzon azzal a kérdéssel, hogyan tudná a munkát eredményesebbé tenni. Az elnökség egyízben foglalkozott olyan javaslattal, hogy a Társulatnak alakuljon műszaki matematikai szakosztálya. Az a meggyőződés alakult ki, hogy hátrányos volna, ha elválasztanánk a tudományt és alkalmazásait egymástól. Ezzel szemben határozat született, hogy műszaki matematikai munkaközösséget hozzunk létre. Munkánk egyik komoly hiányossága, hogy ez eddig még nem valósult meg; ezt sürgősen pótolnunk kell.

Rátérek röviden a Társulat lapjaira, mégpedig először a Matematikai Lapokra. A Matematikai Lapok kétségtelenül sokat fejlődött az elmult két év alatt. Számos új rovat indult az eddigi rovatok mellett, melyek közül legnépszerűbb a feladatrovat, mely kétségtelenül nagyon nagy érdeklődést vált ki fiatal és felnőtt kutató matematikusok között egyaránt. Újabb kezdeményezés volt a Magyarországon található szovjet matematikai munkák közlése. Megkezdődött a Társulat tagjainak név- és lakcím közlése; ez azért fontos, hogy a Társulat tagjai közötti együttműködést elősegítsük. Kevés a lapban az összefoglaló referátum, a könyvismertetés, valamint az alkalmazott matematikai jellegű cikk.

A terjesztés körül számos hiba történt, melyek — meg kell, hogy mondjam, — nem a Társulat hibái, azonban a Társulatnak még erélyesebben kellett volna fellépnie és ezeket a hibákat megszüntetnie.

A Középiskolai Matematikai Lapok terén igen nagy fejlődésről beszélhetünk. Elmúlt közgyűlésünk úgy határozott, hogy a Középiskolai Lapok szerkesztése nem folytatható tisztán társadalmi úton, hanem függetlenített szerkesztőre van szükség. Rövidre rá a lap függetlenített szerkesztőt kapott Neukomm tagtárs személyében. Hogy a választás helyes volt, azt igazolták az eredmények. Javasolom, hogy szavazzunk neki jegyzőkönyvi köszönetet. A lap megjelenése rendszeressé vált, a példányszáma megkétszereződött, további emelkedésre lehetne számítani, ha a papírkorlátozások ezt megengednék. Különösen a feladatmegfejtések számának növekedése mutatja a lap sikerét.

Kiadványaink közül megemlítem az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményeit, amelynek megjelenése sajnos nagyon elhúzódott, azonban kétségtelen igen szép, méltó és maradandó emléke a kongresszusnak.

A harmadik új lapnak a kérdéséről, melyet a közoktatásügyi minisztérium a Társulat bevonásával készül kiadni, már tegnap beszéltünk.

Szólnom kell még röviden a tagdíjkérdésről. A tagdíjat a Társulat elnöksége 12 Ft-ra emelte az eddigi 6 forinttal szemben. Nem kell túl sok szót vesztegetnem arra, hogy havi 1 Ft nem túl magas összeg, viszont kérnem kell tagjainkat, hogy ezt a csekély tagdíjat mindenki fizesse be, mert ez a Társulat egyik bevételi forrását képezi.

Amikor a társulati munkáról beszélünk, nem hagyhatjuk említés nélkül, hogy a társulati munka eredményei nem csupán a társadalmi munkában résztvevő tagok munkájának eredményei, hanem része van ebben a Társulat titkárságának is. A Társulat volt szervező titkára, Láczay Ervinné, valamint jelenlegi szervező titkára, Székely Gáborné áldozatos munkájukkal nagyban hozzájárultak munkánk eredményességéhez. Ezért javasolom, hogy a közgyűlés szavazzon jegyzőkönyvi köszönetet nekik.

Az eredmények felsorolásával kapcsolatban kétségtelenül az a benyomás támad az emberben, hogy a Társulat igen sok mindennel foglalkozik és olyan széles kereteket teremtettünk, amelyeket káderekkel betölteni néha már csak nehézségekkel tudunk. Ezzel kapcsolatban rá szeretnék mutatni, hogy mindaz, amit a Társulat kezdeményezett, úgy született meg, hogy hazánknak a szocializmus építése során való fejlődése megkövetelte.

Olyan esetben, amikor az elnökség valami újfajta munka megindításáról megfeledkezett, azt megteremtette maga az élet. Ennek bizonyítéka pl. a „Matematikai Klub", amelyet a diákok önálló kezdeményezése hozott létre. A klub azt kérte tőlünk, hogy

tegyük lehetővé, hogy mint a Társulat ifjúsági tagozata működjék. Úgy hiszem, ezt meg is kell tennünk.

Más kérdés, hogy a széles kereteket betölteni csak úgy tudjuk, ha a munkát végzők számát szélesítjük. Egyre nagyobb számmal kell bevonnunk a tagokat a társadalmi munkába. E téren nem lehetünk megelégedve az eredményekkel. Ha jól megnézzük, a munkát csak 150—200 tag végzi, a többi tag csak passzív formában vesz részt a Társulat munkájában. Ebbe a helyzetbe nem szabad belenyugodnunk, különösen abba nem szabad belenyugodni, hogy Budapesten lecsökkent az ülések hallgatóinak száma. Ez természetesen összefügg a budapestiek nagy elfoglaltságával, de ebbe nem lehet belenyugodni és arra kell törekednünk, hogy a tagság minél nagyobb számban vegyen részt a munkában, beleértve az előadásokon való résztvételét is.

Áttérek ezután feladatainkra. A Társulat jövő évi munkájának irányítását és megvitatását illetőleg igyekeztünk, hogy a tagok minél nagyobb számban szóljanak hozzá ehhez a kérdéshez. E célból kérdőíveket bocsátottunk ki. A kérdőívek kibocsátása sikeresnek mondható és segíteni fog minket munkánkban.

Néhány olyan javaslatot szeretnék említeni, mely több kérdőívben is szerepelt. Javasolják, hogy a Társulatban elhangzott fontosabb előadásokat sokszorosítsuk. Többen kérték, hogy szakkönyvekhez hozzájuthassanak; többen kérték, hogy a vezető matematikusok konzultációkat tartsanak és hogy több összefoglaló referátum jelenjen meg a lapban. A matematika alkalmazásáról igen sokan szeretnének többet hallani és javaslatot tettek műszaki matematikai munkaközösség alakítására. A kérdőíveket kitöltő tagjaink szinte kivétel nélkül beszámolnak arról, hogy milyen nagy segítséget jelentett számukra a szovjet matematikusok munkáinak tanulmányozása. Ez is mutatja azt, hogy amikor a Társulat a szovjet eredmények ismertetésére törekszik, ezzel a tagság igényét igyekszik kielégíteni. Igen sok kérdőíven olvashatjuk, hogy keveslik azt a munkát, amit a Társulat az általános iskolai tanárok körében végzett az általános iskolák és a középiskolák között fennálló szakadék eltüntetése érdekében. Sokan szemináriumok rendszeres tartását javasolják. Több javaslatban szerepel, hogy vándorgyűléseket kívánnak; igen sok javaslat foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy a Társulat még szélesebbre terjessze munkáját a vidéken. Mint mondottam, a kérdőíveken beküldött válaszok mutatják, hogy sok a kielégítendő szükséglet. A javaslatokkal az elnökségnek igen komolyan kell foglalkoznia.

Ami általában társadalmi munkánk irányvonalát illeti, úgy fogalmaznám meg mégegyszer, hogy az oktatási, didaktikai jellegű munka továbbfejlesztése mellett *elsősorban a tudományos élet továbbfejlesztésére kell törekednünk.*

Hibája munkánknak, hogy a társulati élet a keretek növekedésével vesztett közvetlen jellegéből, így pl. a klubélet visszafejlődött. Ez helytelen jelenség és arra kell törekednünk, hogy a klubéletet jobban fejlesszük, a klubélet teszi lehetővé, hogy közvetlen kapcsolat alakuljon ki a Társulat tagjai között.

Egy másik igen fontos feladat a fiatalok fokozottabb bevonása. Helyes volna, ha a fiatalokból olyan munkaközösség alakulna, amilyen egyideig működött.

Arra kell törekednünk, hogy az elért eredményeket megszilárdítsuk és nagy mértékben aktivizáljuk a tagságot. Ha ezt sikerül elérnünk, úgy munkánk a jövőben még jobb, még eredményesebb lesz.

Eddigi eredményeinket annak köszönhetjük, hogy munkánkban támaszkodtunk a szovjet matematikusok munkájára és igyekeztünk az ő eredményeiket felhasználni. Eredményeinket köszönhetjük annak, hogy a Társulat a párt és a kormány állandó támogatásában részesült. A Szovjetunió példájának követése, az, hogy pártunk útmutatását követve, Marx, Engels, Lenin és Sztálin eszméit igyekezzünk érvényesíteni és felhasználni munkánkban, ezek szellemében felmérni feladatainkat, további munkánk eredményességének legfőbb előfeltétele.

Úgy hiszem, hogy amikor eredményeinkről beszámolok, fel kell hívnom a figyelmet arra, hogy nem lehetünk megelégedve eddigi eredményeinkkel és az elvégzett munkánkból azt a tanulságot kell levonnunk, hogy a jövőben még több és jobb munkát kell végeznünk. Számtalan esetben hasonlítottuk össze a jelenlegi helyzetet a multtal és mutattunk rá arra, hogy milyen óriási utat tettünk meg. Bármennyire érdekes és tanulságos is a multtal hasonlítani össze jelenünket, úgyhiszem, itt az ideje, hogy munkánkat ne a multhoz hasonlítsuk, hanem a jövőhöz, azokhoz a feladatokhoz, amelyek a második ötéves tervben előttünk állanak. Ebből az összehasonlításból láthatjuk meg, hogy mit kell tennünk. Remélem, hogy közgyűlésünk jelentős mértékben előre fogja vinni ennek tisztázását. Ennek reményében zárom beszámolómat.

A főtitkári beszámolóhoz 13 felszólalás hangzott el, amelyek a Társulat soron következő feladataival foglalkoztak. A közgyűlés a hozzászólások után elfogadta a főtitkár jelentését és jóváhagyta az abban foglalt javaslatokat.

* *

Fuchs László, a Társulat pénztárosa a következő zárszámadást terjesztette a közgyűlés elé:

A Bolyai János Matematikai Társulat pénztárosi jelentése az 1951. és 1952. évről.

1951. évi bevételek:		
Állami támogatás a MTESZ-en keresztül	70,132.33	
Tagdíjbevétel	1,392.20	
Összesen:		71,524.53
1951. évi kiadások:		
Adminisztratív munkaerők fizetése (111, 115, 122 alrovatok)	21,183.08	
Alkalmi díjazások (fordítás) (123 alrovat)	12,433.10	
Közteher (117 alrovat)	5,040.65	
Előadók útiköltsége, kiküldetési költségek (129 alrovat)	10,421.32	
Reprezentáció, jutalmak, pályadíjak (128 alrovat)	7,350.08	
Lap, folyóirat (146, 246 alrovat)	1,627.80	
Teremmel kapcsolatos költségek (138, 141, 143 alrovat)	1,229.12	
Irodaszerek, nyomtatványok (142, 145 alrovat)	5,403.94	
Posta, telefon (144 alrovat)	4,972,22	
Kulturális támogatás (179 alrovat)	1,863.22	
Összesen:		71,524.53
1952. évi bevételek:		
Állami támogatás a MTESZ-en keresztül	54,287.47	
Tagdíjbevétel	4,242.20	58,529.67
1952. évi kiadások:		
Alkalmi díjazások (fordítás 132 alrovat)	4,494.40	
Előadók költsége, kiküldetési költségek (123 alrovat)	15,608.68	
Pályadíjak, jutalmazások (131 alrovat)	14,807.—	
Reprezentáció (131 alrovat)	3,557.99	
Könyvbeszerzés (125 alrovat)	1,647.60	
Irodaszerek, nyomtatványok (151 alrovat)	12,421.64	
Posta, telefon (163 alrovat)	5,992.36	
Összesen		58,529.67

Budapest, 1953 június 15.

Aczél János s. k.
ellenőr

Fuchs László s. k.
pénztáros

Megjegyzés: Az 1952. évi költségek egyrészét a MTESZ saját költségelőirányzatából fedezte, illetőleg számolta el. (Állandó főfoglalkozásúak fizetése, közterhek, stb.)

Összehasonlításul megjegyezzük, hogy az 1952. évi elszámolásban szereplő rovatoknak megfelelő 1951. évi kiadások összesen

42.208.46 forintot tesznek ki. Így az ezeken a rovatokon mutatkozó emelkedés 16.321.— forint, azaz 38.6 %.

Ezután Fuchs László, mint az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei szerkesztő bizottságának tagja, beszámolt arról, hogy a szerkesztő bizottság a Közlemények tiszteletdíjából támogatást ajánlott fel a vidéki tagozatok könytárai részére.

A közgyűlés a számvizsgáló bizottság jelentése alapján a pénztárosnak a szükséges felmentvényt megadta.

*

Ezután következett a Grünwald Géza-emlékdíj elsőízben történő kiosztása.

Alexits György elnök bevezetője után, melyben méltatta Grünwald Géza munkásságát, Rényi Alfréd főtitkár a következőkben számolt be a Grünwald Géza-emlékdíj odaítélésére kiküldött bizottság munkájáról:

A Grünwald Géza-emlékdíj bizottságot a Társulat elnöksége 1952 november 28-i ülésén jelölte ki. A bizottság tagjai Fejér Lipót, Hajós György, Szele Tibor, Szőkefalvi-Nagy Béla és Turán Pál voltak. A bizottság első ülését 1953 március 3-án tartotta meg, tekintettel arra, hogy az emlékdíj összegére az anyagi fedezet biztosítása elhúzódott. A bizottság elnökéül Fejér Lipótot választotta meg. A bizottság kérésére a bizottság további munkájában az ügy jelentőségére való tekintettel részt vettek a Társulat elnöke és főtitkára is. A bizottság a beérkezett 14 pályázatot alaposan megvizsgálta, az egyes pályamunkák elbírálását részben a bizottság tagjai végezték el, részben másokat kértek fel arra.

A bizottság április 20-i és május 11-i ülésein a beérkezett jelentéseket megvitatta és az emlékdíj alapszabályainak értelmében figyelembe vette a pályázók 1952-ben magyar nyelven megjelent egyéb munkáit is. Mindezek alapján a bizottság a következő határozatot hozta:

I. díjjal (3000.— Ft) tünteti ki Freud Gézát „Maradéktagos Tauber-típusú tételek a Laplace transzformáció köréből" c. benyújtott munkájáért, valamint egyéb dolgozataiért.

Megosztott II. díjjal tünteti ki Kertész Andort és Takács Lajost (1000—1000 Ft). Kertész Andort „Teljesen redukálható Abel-féle torziócsoportok", Takács Lajost „Várakozási idő-probléma tárgyalása Markov folyamatok segítségével" c. benyújtott munkájáért.

A bizottság megállapította, hogy a pályázat igen sikeres volt és a fent említettek mellett még számos más, jutalmazásra érdemes dolgozat van a benyújtott pályamunkák között. A bizottság örömmel jutalmazott volna több pályamunkát, amennyiben erre lehetőség nyílt volna.

A bizottság javasolja, hogy a jövő évben a Grünwald Géza

emlékdíj kiírásánál a pályázók nyújtsák be a pályamunkával együtt, megjelent munkáik jegyzékét is és kívánatosnak tartja, hogy a téma a jövőben meg legyen kötve és a jövőben olyan problémakörre korlátozódjék, amely Grünwald Géza munkaterületéhez közel áll, így pl. a konstruktív függvénytanra.

A bizottság határozatát a Társulat Elnöksége május 11-én megtartott ülésén jóváhagyta és úgy döntött, hogy a díjkiosztás a közgyűlésen történjék meg.

A díjnyertes dolgozatok ismertetését lapunk következő számában közöljük.

*

Alexits György elnök ezután átadta a díjakat.

Szünet után Rényi Alfréd főtitkár előterjesztette az alapszabályok módosítását. Több kiegészítés után a közgyűlés a következő alapszabályokat fogadta el:

1. §

A Társulat neve:

Bolyai János Matematikai Társulat, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének tagja.
Oroszul: Matematicseszkoje Obscsesztvo im. János Bolyai.
Franciául: Société Mathématique János Bolyai.
Az egyesület székhelye: Budapest.
Működési területe: a Magyar Népköztársaság.
Hivatalos nyelve: magyar.
Pecsétje köríratban: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest.

2. §

A Társulat célja és feladata:

A Társulat célja a magyar matematikai élet fejlődésének elősegítése, a matematikai és a matematika oktatásával kapcsolatos ismeretek terjesztése, dolgozó népünk matematikai ismereteinek társadalmi úton való emelése. Tevékenységét a marxizmus-leninizmus alapján a Magyar Dolgozók Pártjának vezetésével, a Szovjetunió tudományának példája nyomán, a Magyar Népköztársaság alkotmányának szellemében végzi. Működésének főbb területei:

a) a kormányzati szervek támogatása a népgazdaság, a kultúra fejlesztésére irányuló munkájukban.

b) A matematika és alkalmazásai fejlesztése.

c) A matematika eredményeinek ismertetése, különös tekintettel a magyar tudomány haladó hagyományaira és a Szovjetunió élenjáró tudományának eredményeire.

d) A matematika népszerűsítése a dolgozó magyar nép körében.

e) A magyar egyetemi és főiskolai, valamint az általános- és középiskolai matematika-oktatás elvi és gyakorlati problémáinak megvitatása és megoldásának elősegítése társadalmi úton; valamint a kormányhatározatok, illetőleg rendeletek kezdeményezése ezen a területen.

f) Matematikusok, tanárok, műszaki értelmiségiek matematikai tudása emelésének elősegítése.

g) Matematikai szakfolyóiratok és szakkönyvek szerkesztése és a szakirodalmi tájékoztatás (dokumentáció) támogatása.

h) Matematikai kongresszusok, konferenciák, ankétek, stb. rendezése.

i) Tanulmányi versenyek rendezése, kiemelkedő teljesítmények jutalmazása (pályázatok, díjak, stb.).

j) A matematika ideológiai kérdéseinek megvitatása a marxizmus-leninizmus alapján.

k) Tudományos kapcsolatok kiépítése a Szovjetunió és a népi demokráciák felé.

l) A sztahanovista és újítómozgalom fejlődésének elősegítése matematikai tanácsadás útján.

3. §

A Társulat vagyona és jövedelme:

a) A Társulat ingó és ingatlan vagyona.

b) A Társulat tagjai által fizetendő tagdíjak.

c) A kormányzat által a Társulat céljaira rendelkezésre bocsátott összegek.

d) Esetleges egyéb jövedelmek.

e) A Társulat anyagi eszközeit a felsőbb szervek által előzetesen jóváhagyott költségvetés alapján használja fel.

4. §

A Társulat tagjai:

1. Rendes tagok. Rendes tag lehet minden magyar állampolgár, aki a Társulat célkitűzéseit magáévá teszi, a Társulat alapszabályainak aláveti magát, a Társulat munkájában részt kíván venni és akit két rendes tag ajánlata alapján a Társulat tagjai sorába felvesz.

Rendes tag csak természetes személy lehet. A belügyminiszter jóváhagyásával idegen állampolgár is lehet a Társulat tagja.

2. Diáktagok. Diáktag lehet bármely főiskolai, vagy egyetemi hallgató, továbbá kivételesen középiskolai tanuló is, aki a Társulat tudományos, vagy népszerűsítő rendezvényein rendszeresen részt kíván venni. A diáktagok csökkentett tagsági díjat fizetnek.

5. §

A tagok jogai:

A tagok résztvehetnek a Társulat életében. A rendes tagok résztvehetnek, továbbá szavazati joggal rendelkező küldötteket választhatnak a küldöttközgyűlésre. A diáktagok a Társulat közgyűlésén küldöttek nem lehetnek és tisztségre nem választhatók. A Társulat bármely rendes tagja bármely tisztségre megválasztható. Minden tag igényt tarthat a Társulat által nyújtott kedvezményekre és támogatásra a 2. §-ban felsorolt célkitűzések elérése érdekében.

6. §

A tagok kötelességei:

Minden tag kötelessége az alapszabályokat, valamint a Társulat szerveinek alapszabályszerűen hozott határozatait végrehajtani, illetve betartani. A tagdíj 50%-a minden év július 1-ig, másik fele december 1-ig esedékes. Azok a tagok, akiknek egy évet meghaladó tagdíjhátralékuk van és a hátralékot ajánlott levélben történő felhívás után sem rendezik, az ajánlott levélben meghatározott záros határidőn belül a tagok sorából törölhetők. A tagok a Társulattal kapcsolatos működésükért a Fegyelmi Szabályzat által meghatározott fegyelmi felelősséggel tartoznak.

7. §

A tagság megszűnése:

A tagság megszűnik halál, kilépés, a tagok sorából való törlés, kizárás esetében. Kilépés esetén a tagsági jogok a kilépést követő hó elsejével megszűnnek, de a tagdíjfizetési kötelezettségek a naptári év végéig fennállnak. Kizárandó az a tag, aki demokráciaellenes magatartást tanúsít, illetve a Magyar Népköztársaság törvényeit megsérti és jogerősen elítéltetett. Kizárható az a tag, aki magatartásával a Társulat, MTESZ, vagy a MTESZ kötelékébe tartozó más egyesület működését veszélyezteti, az egyesület alapszabályait nem tartja be.

A fegyelmi bizottság a fegyelmi szabályzat rendelkezéseinek megfelelően a szabályszerű fegyelmi eljárás lefolytatása után kizárási javaslatot tehet, amely a választmány jóváhagyása után lép életbe. Akit a választmány kizár, vagy a tagok sorából töröl, 15 napon belül a közgyűléshez fellebbezhet. A fellebbezés nem halasztó hatályú. A kizárás, vagy törlés okának megszűnése után a tag kérheti az egyesületbe újrafelvételét.

8. §

A Társulat intézőszervei:

Küldött-közgyűlés, országos választmány, elnökség, fegyelmi bizottság.

9. §

A küldött-közgyűlés:

A küldött-közgyűlés a tagok összességének képviselete és a Társulat legfőbb szerve. A küldött-közgyűlést az elnök hívja egybe. A küldött-közgyűlésen minden tagnak joga van résztvenni felszólalási és tanácskozási joggal, de szavazati joga csak a küldötteknek van. A küldötteket a Társulat szakosztályai és helyi csoportjai tagságukból választják, még pedig 10 tagonként egy küldöttet.

Rendes küldött-közgyűlés tartandó legalább kétévenként. Rendkívüli közgyűlést kell összehívni, ha ezt a választmány 2/3 többsége, vagy a MTESZ elnöksége kívánja.

A rendes közgyűlést legalább 15 nappal megelőzően, a rendkívüli közgyűlést pedig a kérelem benyujtásától számított 30 napon belül a Társulat elnöksége hívja össze és azt a Társulat hivatalos lapjában és más szokásos módon közzéteszik.

A közgyűlés határozatképes, ha ezen a küldötteknek 2/3-a megjelenik. A határozatokat a közgyűlés nyilt szavazással, egyszerű szótöbbséggel hozza, míg a Társulat intézőszerveinek megválasztása titkosan történik. Határozatképtelenség esetén legalább 8 és legfeljebb 30 napon belül ugyanazon tárgysorozattal új közgyűlés hívandó egybe, amely azután tekintet nélkül a megjelentek számára, határozatképes. Alapszabálymódosításhoz, más egyesületekbe való beolvadáshoz, valamint a Társulat feloszlása, vagyonának hovafordítása tárgyában hozott határozat érvényességének a jelenlévő küldöttek szavazatának 2/3 szótöbbsége szükséges. A Társulat közgyűlése nem hozhat olyan határozatot, amely ellenkezik a MTESZ alapszabályával, vagy alapszabályszerűen hozott határozataival. A közgyűlésről jegyzőkönyvet kell felvenni. A hitelesítést a közgyűlésen kijelölt 2 rendes tag végzi.

10. §

A küldött-közgyűlés tárgya és hatásköre:

a) A Társulat működésének megvitatása.

b) Az országos választmány, az elnökség és fegyelmi bizottság tagjainak két évre való megválasztása.

c) A tiszteletbeli elnökök megválasztása. A tiszteletbeli elnököket életfogytiglan választják.

d) A költségvetés és zárszámadás letárgyalása, a felelős számadók részére a felmentvények megadása.

e) Fontosabb szerződések és általában a Társulat vagyoni állagát érintő egyéb jogügyletek elhatározása és jóváhagyása.

f) A választmány megfellebbezett határozatainak felülvizsgálata.

g) A tagok által a közgyűlés elé legalább 5 nappal előterjesztett indítványok letárgyalása.

h) Az alapszabálymódosítás, valamint más egyesülettel való fúzió elhatározása.

i) Feloszlás és ez esetben a vagyon hovafordításának tárgyában való határozathozatal.

j) Tagdíj megállapítása.

11. §

Országos választmány:

Az országos választmány tagjai:

a) Az elnökség,

b) a közgyűlésen választott legalább 5, de legfeljebb 50 tag és 3—20 póttag.

Az országos választmány a közgyűlés és az elnökség által eléje utalt ügyekkel foglalkozik. Feladatkörébe tartozik a társulati tagok felvétele, törlése és kizárása. Az országos választmány tölti be a legközelebbi rendes közgyűlésig az évközben megüresedett tisztségeket. Az országos választmány két közgyűlés között felügyeletet és bírálatot gyakorol az elnökség munkája felett.

Az országos választmányt, legalább félévenként hívja egybe az elnökség és összehívásáért az elnökség felelős.

Az országos választmány tagjai 1/3 részének kívánságára soronkívül is összehívandó.

Az országos választmány határozatképes, ha választott tagjainak legalább fele megjelenik. Határozatait szótöbbséggel hozza. A szabályszerűen összehivott választmányi ülésnek határozatképtelensége esetén ugyanazzal a tárgysorozattal 8 napon túl és 30 napon belül újabb összehívásnak van helye. Az így egybegyűlt országos választmány létszámára való tekintet nélkül határozatképes.

A választmányi ülésnek a főtitkár az előadója. Az ülésekről hitelesített jegyzőkönyvet kell felvenni. A határozatok 15 napon belül a közgyűléshez megfellebbezhetők.

12. §

Elnökség:

Az elnökség intézi az országos választmány két ülésszaka között az ennek hatáskörébe utalt ügyeket és a tett intézkedésekről a legközelebbi országos választmányi ülésen beszámolni tartozik.

Az elnökség hatáskörébe tartozik a közgyűlés és az országos választmányi ülés előkészítése, a közgyűlés és az országos választmány elé terjesztendő indítványok feldolgozása, a főtitkár által előterjesztett munkaterv megvitatása és költségelőirányzat meghatározása, tagok felvétele, a társulati munkatársak beosztásának és fizetésének jóváhagyása, a közgyűlés által megválasztott tisztikar esetleges díjazása és az ügyviteli szabályzat elkészítése. Az elnökség tagjai a hozott határozatokat a közléstől számított 15 napon belül az országos választmányhoz megfellebbezhetik.

13. §

Elnökségi tisztségek:

1. Tiszteletbeli elnökök, ezek száma legfeljebb 5.

2. Az elnökség tagjai: elnök, 1—5 társelnök, ügyvezető alelnök, 1—4 alelnök, főtitkár, titkár, pénztáros, jegyző, valamint további 5—10 elnökségi tag, akiknek megbízatását az elnökség szabja meg. Fentiek lehetőség szerint a Társulat székhelyén működők közül választandók. Ezenkívül a szakosztályok és a vidéki tagozatok vezetősége, elnök, alelnök, titkár, hivatalból tagjai a Társulat elnökségének.

a) A tiszteletbeli elnökök tudományos tekintélyükkel támogatják a Társulatot. A választmányi ülésekre külön meghívandók. Amennyiben a választmányi üléseken megjelennek, mindazon jogokat gyakorolják, mint amelyek az elnökségi tagokat megilletik. A küldött-közgyűlésen a tiszteletbeli elnököket megjelenésük esetében a küldöttek joga illeti meg.

b) Elnök. Az elnök a Társulatot hivatalosan képviseli, jogában áll pénzt utalványozni, a pénztárt bármikor ellenőrizheti. Ő vezeti a közgyűlést, az országos választmányi és az elnökségi üléseket.

c) Társelnökök, alelnökök. Az elnököt akadályoztatása esetén helyettesíthetik.

d) Ügyvezető alelnök. Az elnökség megbízásából társulati ügyekben eljár, a társulati munka irányításában tevékenyen részt vesz.

e) Főtitkár. Az elnökség két ülése között ellátja az ennek hatáskörébe utalt ügyeket, mint felelős kiadó jegyzi a Társulat kiadványait, a pénztárossal együtt elkészíti az évi költségvetést, zárszámadást és a közgyűlési jelentést, valamint az országos választmány és az elnökségi ülések beszámolóit, jogában áll pénzt utalványozni és a Társulat pénztárát bármikor ellenőrizheti, a Társulatot kifelé, személyek és hatóságok felé képviseli.

f) Titkár. A Társulat szervezési ügyeit intézi és a főtitkárt távollétében helyettesíti.

g) Pénztáros. A Társulat mindennemű pénzügyeit intézi, minden teljesített kifizetést okmányszerűen igazolni tartozik és az év végén zárszámadást készít. A pénztáros a Társulat vagyonának kezeléséért anyagilag felelős. A pénztáros működését az elnök, a főtitkár és a MTESZ bármikor ellenőrizheti.

3. Az elnökség legalább háromhavonként tart ülést. Az ülést a főtitkár hívja össze. Tárgyalásmódjára nézve az országos választmányra vonatkozó szabályok értelemszerűen alkalmazandók.

Az elnökség határoz általában mindazon ügyekben, amelyek nem tartoznak kifejezetten a közgyűlés, vagy az országos választmány hatáskörébe.

14. §

Fegyelmi bizottság:

A közgyűlés a fegyelmi bizottságba 3 rendes és 2 póttagot, a fegyelmi bizottság tagjaiból elnököt választ. A fegyelmi bizottságot adott esetben az elnök hívja össze.

A fegyelmi bizottság tagjai a küldött-közgyűlés teljes jogú tagjai, míg elnöke az országos választmánynak tanácskozó tagja. A fegyelmi eljárásokat a MTESZ fegyelmi szabályzata alapján, a Társulat alapszabályainak szem előtt tartásával folytatja le.

15. §

Szakosztályok:

A Társulat egyes nagyobb feladatainak előmozdítására a Társulat szakosztályokat alakíthat. A szakosztályoknak önálló vezetősége van, elnök, alelnök,

titkár, amelyet a választmány bíz meg és a Társulat elnöksége irányít. A szakosztályok felépítését, működését az elnökség határozatai szabják meg.

16. §

A Társulat helyi szervezetei:

A Társulat területi tagozatokat és helyi csoportokat létesít, melyek működési területét és székhelyét az elnökség jelöli ki. A szervezetek működését a vezetőségek irányítják. A tagozatok vezetőségét, elnökét, alelnökét és titkárát a tagozat tagsága választja meg, működését a Társulat elnöksége irányítja. A tagozat felépítését, működését és képviseletét az elnökség határozatai szabályozzák. A tagozatok és csoportok nem önálló jogi személyek, ennek megfelelően önálló jogokat nem szerezhetnek, jogi kötelezettséget nem vállalhatnak.

Minden tagozatot egy elnökségi tag, minden helyi csoportot a területileg illetékes tagozat vezetőségének egy tagja patronál.

17. §

A Társulat kiadványai:

A Társulat céljainak hathatósabb előmozdítására központi lapot, szaklapokat, matematikai tárgyú könyveket és egyéb kiadványokat adhat ki, amelyeknek szerkesztői megbízatásait az elnökség hagyja jóvá.

18. §

A Társulat feloszlása:

A Társulat mindaddig fennáll, amíg önkéntes feloszlását az alapszabályoknak megfelelően el nem határozza. A Társulat feloszlása esetén, vagyon hovafordításáról a feloszlás tárgyában határozó küldött-közgyűlés dönt, de a vagyon csak hasonló célra fordítható.

A Társulatnak beolvasztása más szervezetekbe, alapszabálymódosítás, a Társulat önkéntes feloszlása és vagyonának hovafordítása tárgyában hozott küldött-közgyűlési határozatokat foganatosítás előtt, jóváhagyás végett a MTESZ útján a belügyminiszterhez kell felterjeszteni.

19. §

A Társulat és a MTESZ viszonya:

A Társulat a MTESZ-nek tagegyesülete. A Társulat küldött-közgyűlésének határozatait a MTESZ elnökségéhez jóváhagyás végett beterjeszti. A MTESZ küldött-közgyűlésén a Társulat küldöttei útján vesz részt. A küldöttek számát a MTESZ határozza meg. A küldötteket a Társulat közgyűlése választja. A küldötteknek tanácskozási, felszólalási és szavazati joga van. A MTESZ kiküldöttei a Társulat bármely szervezetének ülésein részt vehetnek. A Társulat közgyűlésének, országos választmányának, elnökségének és fegyelmi bizottságának ülései helyéről és időpontjáról a MTESZ főtitkárát időben értesítik. A Társulat közgyűlése, országos választmánya és elnöksége javaslatot tehet a MTESZ munkájára vonatkozólag, amely javaslatokat a MTESZ elnöksége megvitat és azok felett határoz.

A MTESZ munkáját a Társulat elnöksége megvitatja és az ezzel kapcsolatos észrevételeit a MTESZ elnökségével közli.

A Társulatnak a MTESZ felé adatszolgáltatási kötelezettsége van.

A MTESZ közgyűlésének, választmányának és elnökségének határozatai a Társulat működésére irányadók és kötelezők.

20. §

Felsőbb szervek által gyakorolt felügyelet:

A Társulat, mint a MTESZ tagegyesülete felett, a szakfelügyeleti jogot a Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya, a főfelügyeleti jogot a belügyminisztérium gyakorolja.

*

A közgyűlés jelölő bizottságot küldött ki Kalmár László, Gáspár Gyula, Szele Tibor és Szeliánszky Ferenc tagokkal. A jelölő bizottság bejelenti, hogy Rényi Alfréd főtitkár a továbbiakban ezt a tisztséget nem tudja vállalni. Kalmár László jelölő bizottsági tag javasolja a közgyűlésnek, hogy Rényi Alfrédnak mondjanak jegyzőkönyvi köszönetet eddigi fáradhatatlan működéséért. Kalmár László javaslatát a közgyűlés elfogadta.

A közgyűlés a jelölő bizottság javaslata alapján titkos szavazással a következő új tisztikart választotta meg:

Elnökség:

Elnök:	Alexits György
Társelnökök:	Hajós György, Kalmár László, Turán Pál
Ügyvezető alelnök:	Rényi Alfréd
Alelnökök:	Gallai Tibor, Kárteszi Ferenc
Főtitkár:	Surányi János
Titkár:	Pásztor István
Pénztáros:	Fuchs László
Jegyző:	Vincze István
Elnökségi tagok:	Aczél János, Császár Ákos, Fenyő István, Gádor Endréné, Gallai Tiborné, Hódi Endre, Koncz Károly, Neukomm Gyula.
Fegyelmi bizottság:	Elek Tibor, Koncz Károly, Simonovits Istvánné,
Póttagok:	Gergő Gézáné, Targonszky Iván.

Választmányi tagok:

Bakos Tibor, Szeged
Balázs János, Bpest
Bíró Imre, Bpest
Barna Béla, Debrecen
Bálint Elemér, Bpest
Bede Lajos, Miskolc
Bognár Mátyás Bpest
Császár Ákosné, Bpest
Cser Andor, Bpest
Dombi Béla, Pécs
Dusnoki István, Győr
Földes István, Bpest
Freud Géza, Bpest
Gáspár Gyula, Bpest
Gémesi József, Bpest
Gyarmathi László, Debrecen
Gyires Béla, Debrecen
Horvay Katalin, Bpest
Huszár Géza, Bpest
Huszka Ernőné, Bpest
Körmendi István, Bpest
Lőrincz Pál, Bpest
Makay Endre, Bpest
Mikolás Miklós, Bpest
Molnár József, Bpest
Obláth Richárd, Bpest

Pál Sándor, Bpest
Petrich Géza, Miskolc
Péter Rózsa, Bpest
Prékopa András, Bpest
Raisz Iván, Miskolc
Rieger Richárd, Bpest
Rényi Kató, Bpest
Soós Paula, Szeged
Szabó Jenő, Miskolc
Szász Pál, Bpest
Szentmártony Tibor, Bpest
Szép Jenő, Bpest
Székely Gábor, Bpest
Szász Gábor, Szeged
Strommer Gyula, Bpest
Takács Lajos, Bpest
Tandori Károly, Bpest
Tolnai Jenő, Bpest
Tóth Lajosné, Debrecen
Turán Pálné, Bpest
Varga Dezső, Veszprém
Varga Tamás, Bpest
Vermes Miklós, Bpest
Zigány Ferenc, Bpest

Választmányi póttagok:

Ádám Manó, Bpest
Bereczky Ilona, Szeged
Barabás Sára, Győr
Bejna Ferenc, Miskolc
Dénes Péter, Bpest
Döbrentei Éva, Bpest
Erdősi József, Bpest
Fazekas Ferenc, Bpest
Faragó László, Bpest
Gehér István, Bpest
Kertész Andor, Szeged
Králik Dezső, Bpest
Lánczi Ivánné, Bpest
Ozoray Mária, Bpest
Pataki Béláné, Bpest
Pál László, Bpest
Rapcsák András, Debrecen
Rejtő Magda, Bpest
Seres Iván, Bpest
Szüsz Péter, Bpest

A közgyűlés jóváhagyta a vidéki tagozatok által megválasztott vezetőségeket:

	Elnök:	Alelnök:	Titkár:
Szeged:	Rédei László	Szőkefalvi-Nagy Béla	Szendrei János
Debrecen:	Varga Ottó	Szele Tibor	Szénássy Barna
Miskolc:	Borbély Samu	Gáspár Gyula	Batár Zoltán
Nyíregyháza:	Baditz Károly	Román Ilona	Ambrózy Géza
Szolnok:	—	Dux Erik	Paár Jozefin
Győr:	Faludi Istvánné	Marót Rezső	Szeliánszky Ferenc
Sopron:	Garai József	Kiss Ignác	Takáts Endréné
Veszprém:	Fejes Tóth László	Berend Iván	Somkúti Lajosné
Pécs:	Nagy Ferenc	Bóka István	Achátz Imréné
Szombathely:	Bukovszky Ferenc	Pászthory Antal	Czapáry Endre
Eger:	Pallós Emil	—	Darvas Andorné

*

A közgyűléshez a következő javaslatok érkeztek be:

Hódi Endre javaslata: Tekintettel arra, hogy az utóbbi időben egyre fokozódott vidéken az érdeklődés a Bolyai Társulat tevékenysége iránt, és mivel a növekvő igényeknek a Társulat központja és tagozatai a jelenlegi szervezeti formákkal nem tudnak teljesen eleget tenni, azzal a javaslattal fordulok a tisztelt közgyűléshez, hogy

1. határozza el egy Budapestvidéki Tagozat létesítését Budapest székhellyel — amint erről előzőleg a társulati üléseken már többízben szó esett, és bízza meg az elnökséget, intézkedjék e tagozat megszervezésének előkészítő munkálatait illetően;

2. az egyes tagozatok munkaterületei közötti súrlódások elkerülése végett küldjön ki egy bizottságot azzal a feladattal, hogy ossza fel az egész ország területét a Társulat tagozatai között (az 1. pontban említett Budapestvidéki tagozatot is beleértve), nem ragaszkodva mereven a közigazgatási (megyei) határokhoz, hanem elsősorban a jó közlekedési lehetőségekre és egyéb kedvező adottságokra való tekintettel; ezt a területi beosztást azután a bizottság minden egyes új tagozat alapítása alkalmával megfelelően módosítsa;

3. járuljon hozzá ahhoz, hogy azoknak a megyéknek a székhelyén, amelyek saját tagozattal nem rendelkeznek, továbbá nagyobb, főleg a tagozati székhelyektől távoleső, vidéki városokban legyen a Társulatnak egy-egy képviselője. Ezek a képviselők adminisztráció tekintetében közvetlenül a Társulat központjával álljanak összeköttetésben, egyébként pedig kölcsönösen támogassák egymást annak a tagozatnak a vezetőségével, amelynek területéhez tartoznak. A Társulat ezen képviselőinek feladata a kapcsolatok szorosabbra fűzése a központi helyektől távolfekvő, főként falvakban lakó tagsággal.

Batár Zoltán javaslata: A sárospataki konferencia és az összes eddigi társulati konferenciák válogatott anyaga jelenjék meg a Szocialista Nevelés Kiskönyvtárában, a tanárok felkészültségének növelésére.

Pásztor István javaslata: A Társulat vezetősége gondoskodjék arról, hogy a vidéki tagozataink ellátása javasolt előadási témákkal és központi silabuszokkal ne kampányszerűen, hanem folyamatosan történjék.

Kívánatos, hogy mind a tudományos, mind az oktatási szakosztály kéthavonként legalább egyszer javasoljon előadási témákat és négyhavonként legalább egyszer készíttessen központi silabuszokat a tagozat számára.

A közgyűlés a fenti javaslatokat elfogadta.

A közgyűlés ezután a következő táviratot küldte el a Béke-Világtanácsnak:

Béke-Világtanács, Budapest.

Mi, a Bolyai János Matematikai Társulat küldött-közgyűlésének résztvevői, mélységes megdöbbenéssel és őszinte felháborodással hallottuk az amerikai halálgyárosok újabb galád gyilkosságáról szóló tudósítást, azt, hogy Ethel és Julius Rosenberget a béke e két kiváló harcosát, hazug és alaptalan vádak alapján meggyilkolták.

Meggyilkolták őket azért, mert ezzel az embertelen gonosztettel akarták a rabságukban és elnyomatásuk alatt élő embermilliók velük szemben fokozottabban megmutatkozó ellenállását megtörni, a békéért és szabadságukért harcolókat ezzel akarták megfélemlíteni.

Mi, a magyar matematikusok küldöttei, egyetemi, középiskolai és általános iskolai tanárok, a magunk és egész Társulatunk nevében tiltakozunk ez ellen az embertelen gyilkosság ellen. A világszerte megnyilvánuló ellenállhatatlan erejű tiltakozások azt bizonyítják, hogy az amerikai halálgyárosok tévedtek számításukban.

Nem retten meg senki galád tettük nyomán, hanem ellenkezőleg, erősödik az emberek akarata, hogy ilyen és hasonló gaztettek elkövetését lehetetlenné tegyék.

Ennek megvalósítása érdekében ígérjük, hogy még öntudatosabb katonái leszünk a békeharcnak, még eredményesebb munkánkkal akarjuk erősíteni a Szovjetunió vezette béketábort.

Megfogadjuk ezt azzal a bizonyossággal, hogy egységes és elszánt akaratunk megmutatja a háborús gyújtogatóknak békeakaratunkat.

Alexits György indítványára a közgyűlés a következő táviratot küldte Rákosi Mátyás elvtársnak:

Rákosi Mátyás miniszterelnök elvtársnak,

a Magyar Dolgozók Pártja főtitkára,

Budapest.

A Bolyai János Matematikai Társulat küldött-közgyűlése mély tisztelettel és forró szeretettel köszönti Önt, dolgozó népünk bölcs vezérét, a béke első magyar harcosát, aki sikerről-sikerre vezet minket a szocializmus építéséért, békés, boldog jövőnkért folytatott harcunkban.

Közgyűlésünk örömmel állapította meg, hogy Társulatunk a párt és a kormány hathatós támogatása következtében az elmúlt két év alatt eredményes munkát végezhetett. Társulatunknak ma már közel 1500 tagja van, és 12 városban működik rendszeresen. Vidéki tagozataink

közül a győri, miskolci és debreceni tagozatokat eredményes munkájukért vándorzászlóval tüntette ki közgyűlésünk. A Társulat az elmúlt két év alatt 761 matematikai előadást rendezett; előadásaink között egyaránt szerepelnek a magyar matematikusok beszámolói legújabb kutatásaik eredményeiről, a szovjet matematikusok nagyszerű eredményeit ismertető előadások és klubestek, az egyetemi, műegyetemi, középiskolai és általános iskolai matematika-oktatás problémáival foglalkozó didaktikai előadások, üzemekben, munkásszállókban tartott népszerűsítő előadások és középiskolai diákok számára tartott matematikai délutánok. Társulatunk országos mozgalmat indított a középiskolai matematika-oktatás színvonalának emelése érdekében, melynek keretében eddig 17 konferenciát rendeztünk a Közoktatásügyi Minisztériummal és az Eötvös Társulattal karöltve. A Társulat 2 folyóiratot ad ki rendszeresen, a Matematikai Lapokat és Középiskolai Matematikai Lapokat, kiadta az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményeit. Társulatunk minden évben megrendezi a Kürschák József, Schweitzer Miklós és Arany Dániel matematikai versenyeket és hathatósan kiveszi a részét az Ön nevéről elnevezett országos matematikai verseny megrendezéséből. A Társulat évente Beke Manó-díjjal tünteti ki a legjobb matematika-oktatókat és Grünwald Géza-díjjal a kiváló eredményt elért fiatal kutatókat. Társulatunkat mindebben a munkájában az a célkitűzés vezeti, hogy elősegítse a magyar matematikai élet fejlődését, tagjai szakmai tudásának állandó emelését, a matematikai ismeretek elterjedését. Munkánkat a marxizmus-leninizmus szellemében, a Szovjetunió élenjáró példája nyomán igyekszünk végezni, és arra törekszünk, hogy a magyar matematikusok tudásukat a szocializmus építésének szolgálatába állítsák. Jól tudjuk, hogy eddigi eredményeinkkel nem lehetünk megelégedve, hogy dolgozó népünk, nagy pártunk és Ön, szeretett vezérünk, még több és jobb munkát vár tőlünk. Minden erőnkkel azon leszünk, hogy megfeleljünk ennek a várakozásnak.

Most, amikor mélységes megdöbbenéssel értesültünk az imperialisták újabb gaztettéről, arról, hogy százmilliók tiltakozását semmibevéve meggyilkolták a Rosenberg házaspárt, erre, a béke ügye ellen elkövetett aljas merényletre azzal válaszolunk, hogy megfogadjuk Önnek: tántoríthatatlanul fogunk harcolni a béke megvédéséért.

Budapest, 1953 június 20.

a Bolyai János Matematikai Társulat
küldött-közgyűlése.

A közgyűlés a választmányt bízta meg, hogy a Társulat küldötteit megválassza a MTESZ közgyűlésre.

Alexits György elnök a közgyűlés nevében üdvözölte Surányi János főtitkárt és az új tisztikart; és az új tisztikar nevében megköszönte a közgyűlés bizalmát.

Alexits György elnök és Surányi János főtitkár hangsúlyozták, hogy az új tisztikar jó munkával fog igyekezni rászolgálni erre a bizalomra.

Ezután az elnök a közgyűlést bezárta.

K. m. f.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

Külföldi hírek

Szovjetunió

1953. április 25-én ünnepelték a szovjet matematikusok ANDREJ NIKOLAJEVICS KOLMOGOROV akadémikus, a világhírű szovjet matematikus 50-ik születésnapját. Ebből az alkalomból a Moszkvai Matematikai Társulat, a moszkvai egyetem matematikai-mechanikai karának tudományos tanácsa és a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának „V. A. Sztyeklov" Matematikai Intézete együttes ülést tartott, amelyen I. G. Petrovszki, P. Sz. Alexandrov, I. M. Gelfand és A. Ja. Hincsin méltatták A. N. Kolmogorov nagyjelentőségű és sokoldalú tudományos munkásságát. A szovjet matematikusok meleg ünneplésben részesítették A. N. Kolmogorovot, a Szovjetunió és az egész világ matematikai életének kimagasló alakját. A jubileum alkalmából a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának matematikai folyóirata részletesen ismerteti A. N. Kolmogorov munkásságát, kiemelve, hogy A. N. Kolmogorov matematikai alkotó tevékenységének legjellemzőbb vonásai rendkívüli sokoldalúsága, továbbá, az hogy a legaktuálisabb problémák megoldására összpontosul. Az ismertetés kiemeli, hogy milyen nagy hatást gyakoroltak A. N. Kolmogorov munkái a valószínűségszámítás és a matematika számos más ágának fejlődésére. A lap közli A. N. Kolmogorov tudományos munkáinak jegyzékét, amely 169 dolgozat, illetve könyv felsorolását tartalmazza. A cikk megemlíti Kolmogorov jelentős eredményeit a halmazelmélet, a Fourier-féle és általános orthogonális sorok, a funkcionális analízis, a topológia és a matematikai logika terén, és részletesen méltatja Kolmogorov munkásságának jelentőségét a valószínűségszámítás fejlődése szempontjából. Kolmogorov nagy érdeme, hogy a valószínűségszámítást szabatos matematikai alapokra helyezte 1933-ban megjelent alapvető munkájában, továbbá, hogy megalkotta a sztochasztikus folyamatok elméletét. Rámutat a cikk arra is, hogy A. N. Kolmogorov behatóan foglalkozott a matematika módszertani, filozófiai kérdéseivel, továbbá, hogy alkotó tudományos kutató munkája mellett igen nagy érdemei vannak a matematika oktatása terén is. A. N. Kolmogorov 1931 óta a moszkvai egyetem professzora és jelenleg a moszkvai egyetem matematikai-mechanikai intézetének

igazgatója. A. N. Kolmogorov 1939 óta a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának rendes tagja, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája „V. A. Sztyeklov" Matematikai Intézetének valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályának vezetője. A cikk beszámol arról is, hogy a szovjet kormány igen nagyrabecsüli A. N. Kolmogorov tevékenységét, őt Sztálin-díjjal, a Lenin-renddel (kétízben) és a Munka Vörös Érdemrendjével tüntette ki.

* * *

A Moszkvai Matematikai Társulat 1953 április 21-i ülésén megvitatta a „Matematika" című új szovjet referáló folyóirat próbaszámát.

Lengyelország

A Lengyel Tudományos Akadémia 1953. szeptember 6—12-ig rendezte a VIII. lengyel matematikai kongresszust Varsóban. A kongresszuson 6 külföldi delegáció vett részt, összesen 27 taggal. A Szovjetunió delegációját A. N. Kolmogorov akadémikus vezette, tagjai P. Sz. Alexandrov lev. tag, Sz. N. Mergeljan Sztálin-díjas professzor és O. Olejnyik voltak. A magyar delegációt Hajós György akadémikus vezette, tagjai: Alexits György, Egerváry Jenő, Turán Pál akadémikusok, valamint Kalmár László, Rényi Alfréd és Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tagok voltak. A népi demokráciákat hazánkon kívül a csehszlovák, bolgár és román delegáció képviselte. Részt vett a kongresszuson a Német Demokratikus Köztársaság delegációja is. Nyugatról 11 résztvevő volt.

A kongresszuson a következő referátumok hangzottak el:

A. Mostowski: A matematika alapjaira vonatkozó kutatások jelenlegi állása.

T. Wazewski: Az újabb matematikai módszereknek a matematika klasszikus fejezeteire gyakorolt hatása.

H. Steinhaus: A valószínűségszámítás, mint a természettudományi és a termelésre vonatkozó kutatások segédeszköze.

L. Infeld: A fizika jelenlegi fejlődésének megfelelő új matematikai problémák.

S. Turski: A modern technika matematikai módszerei.

K. Kuratowski: A lengyel népi demokrácia matematikai életének megszervezéséről.

Fenti referátumok a kongresszus egy-egy délelőttjének programját alkották. A referátumok szerzőit egy 5—6 főnyi munkaközösség támogatta és a referátumokat előzetesen megvitatták.

A délutáni órákban szekció-üléseket tartottak, amelyeken kb. 80 előadás hangzott el. A résztvevők beszámoltak kutatási területük legújabb eredményeiről.

A magyar delegáció tagjai a következő előadásokat tartották: Alexits György a függvények strukturális tulajdonságainak Fourier sorai majdnem mindenütt való konvergenciájára gyakorolt hatásáról, Egerváry Jenő a komplex koordináták háromtest problémánál való alkalmazásáról, valamint a mátrix-számítás újszerű megalapozásáról, Hajós György a Clark-féle nomogrammok tárgyalásáról, Kalmár László az olyan végtelen sokváltozós függvényekről, amelyeknek értéke mindenütt csak véges sok változótól függ, Rényi Alfréd a valószínűségeloszlások algebrájáról, valamint a rendezett minták elméletének egyes eredményeiről, Szőkefalvi-Nagy Béla a Hilbert-tér kontrakcióiról, Turán Pál egy Steinhaus-féle sorelméleti problémáról.

A kongresszust követő Kopernikus-ünnepségen, — melyet halálának 410. évfordulója alkalmával rendeztek, — Egerváry Jenő és Kalmár László vettek részt.

Németország

Matematikusok a békéért

A Regensburgban (Nyugatnémetország) megjelenő *Archimedes* c. matematikai folyóirat 1953 januári száma közli a következő feladatot: Egy elsüllyedt hadihajó 11000 méter mélyen fekszik a tenger fenekén. A hajó egy megtöltött ágyúja amelynek csöve 12,7 cm átmérőjü és 3,3 m hosszú, valamilyen okból elsül. A lövedék súlya 25 kg, a lövedék sebessége a csőben 600 m/sec és a lőporgáz maximális nyomása 3000 atmoszféra.

Kérdés: elhagyja-e a lövedék az ágyúcsövet. A lap közli a feladat megoldását is. A számítások arra az eredményre vezetnek, hogy ahhoz, hogy a lövedék el tudja hagyni az ágyúcsövet a tengervíz nyomásának legyőzésére és a víznek a csőből való kiszorítására 460000 mkg munkát kellene végezni, azonban a lőporgáz csak 459000 mkg munka végzésére képes és így a lövedék kevéssel a cső torkolata előtt megáll, és azután a lőporgáz lehülése után lassan visszasüllyed a kiindulási helyzetbe. A szerkesztőség megjegyzi, hogy „legyen ez a feladat a háborús veszélyek legyőzésének szimboluma". Tegyük hozzá, hogy a feladat azt is szimbolizálja, hogy a tömegek békeakarata olyan hatalmas erőt képvisel, amely — a tengervíz nyomásához hasonlóan mely visszanyomja a lövedéket az ágyú csövébe, — meg tudja akadályozni az új háborút kirobbantani akaró imperialistákat abban, hogy ágyúikat elsüssék.

Hollandia

1954 szeptemberében a Nemzetközi Matematikai Unió Amsterdamban matematikai kongresszust rendez.

Ausztria

Az Osztrák Matematikai Társulat „Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft“ című folyóirata a Nemzetközi Matematikai Unió lapjává alakult át „Nouvelles Mathematiques Internationales“ címen.

Hazai hírek

A Magyar Tudományos Akadémia nagygyűlését 1953 május 24—30-ig rendezte meg.

A III. Osztály előadásainak programmja a következő volt:

Május 27-én, szerdán délután 5 órakor

Rényi Alfréd lev. tag és Tarján Imre a fizikai tudományok kandidátusa beszámolói az osztály és a bizottságok munkájáról.

Jánossy Lajos akadémikus: Beszámoló a berlini fizikus kongresszus egyes problémáiról.

Május 28-án, csütörtökön délelőtt 11 órakor

Gombás Pál akadémikus: Elméleti fizikai kutatásokban alkalmazott matematikai módszerek, különös tekintettel a kvantummechanikai közelítő módszerekre.

Május 28-án, csütörtökön délután 3 órakor

Egerváry Jenő akadémikus: Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a matematikai fizika és annak ipari alkalmazása terén.

Rényi Alfréd lev. tag: Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a valószínűségszámítás és annak ipari alkalmazása terén.

Május 29-én, pénteken délelőtt 11 órakor

Vitaülés az algebra fejlődéséről, különös tekintettel a hazai algebrai kutatásokra. Rédei László lev. tag elnökletével.

Fuchs László a matematikai tudományok kandidátusának referátuma.

Május 29-én, pénteken délután 3 órakor

Vitaülés a hazai alkalmazott matematikai kutatások helyzetéről. Rázsó Imre akadémikus elnökletével.

Hajós György akadémikus referátuma.

* * *

A Magyar Tudományos Akadémia nagygyűlése alkalmával Hajós György és Turán Pál levelező tagokat rendes tagokká választotta.

* * *

MTA TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A népi demokratikus országokkal, illetve a Német Demokratikus Köztársasággal kötött kultúrális egyezmény keretében matematikusaink közül tanulmányútat tettek a következők: Hajós György Lengyelországban, Kárteszi Ferenc Romániában, Alexits György Bulgáriában, Péter Rózsa a Német Demokratikus Köztársaságban, Rényi Alfréd Csehszlovákiában. A baráti államokban tett látogatások alkalmával módjuk volt előadások tartására és az illető ország matematikusaival való szorosabb barátság kialakítására, egyetemek, tudományos intézetek látogatására, tapasztalatcserére.

* * *

A Bolyai János Matematikai Társulat 1953. évi vándorgyűlését három szakmai kollokvium formájában rendezte meg. A valószínűségszámítási kollokviumot augusztus 31-től szeptember 2-ig tartották meg Balatonföldváron. A konstruktív függvénytani és geometriai kollokviumot november 26-tól december 2-ig rendezte meg a Társulat Egerben. A kollokviumok részletes ismertetésére a következő szám Társulati Élet rovatában visszatérünk.

* * *

Az Akadémiai Kiadó kiadásában megjelent M. A. Lavrentyev és L. A. Ljuszternyik: Variációszámítás c. könyve. Ára 50,— Ft.

Ugyancsak az Akadémiai Kiadó adta ki Turán Pál könyvét: Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól. Ára 60,—Ft.

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei III. kötetének 2., 3. és 4. száma jelent meg. A 2. szám a Bolyai-hét anyagát foglalja magában, a 3. szám az Akadémia 1953. évi nagygyűlésének anyagát tartalmazza, a 4. szám számos matematikai dolgozatot közöl. Az egyes számok ára 33,— Ft, a 3. számnak 23,— Ft, ill. 33,— Ft.

Fejes Tóth László könyve: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel, und im Raum címmel jelent meg a Springer Verlag (Berlin, Göttingen, Heidelberg) kiadásában.

A Tankönyvkiadó adta ki B. A. Fuksz és B. V. Sabat: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk c. könyvét. Ára 38,50 Ft.

A Tankönyvkiadó Szocialista Nevelés Könyvtára sorozatában megjelent Novoszelov: Algebra és elemi függvények c. könyve. Ára 29,— Ft.

B. A. Fuksz—B. V. Sabat: Komplex változós-függvények és néhány alkalmazásuk*

A jelen munka magyarnyelvű kiadása azt a hiányt hivatott pótolni, amely komplex-függvénytani tankönyv terén mindezideig fennállott. A könyv egyúttal — eltérően az ilyen tárgyú, közhasználatú, idegennyelvű bevezető tankönyvektől — részletesen foglalkozik a komplex változós-függvénytan módszereinek alkalmazott matematikai kérdésekben való felhasználásával. Mint ismeretes, ezekben a kérdésekben a világhírű moszkvai matematikai iskoláé a kezdeményező szerep, és a szerzők — maguk is továbbfejlesztői ennek az iskolának — bőven merítettek ebből a forrásból, többek között N. J. Zsukovszkij úttörő munkásságából. Mint a szerzők előszavukban megírják, a könyvet nemcsak az egyetemek és főiskolák hallgatói, hanem azok a mérnökök is haszonnal forgathatják, akik emelni kívánják tudományos képzettségük színvonalát. Természetesen, a könyv tanulmányozása megköveteli az olvasótól a matematikai analízis alapjainak ismeretét. Az olvasó ezen a téren való esetleges hiányait pótolhatja Bermant analízis tankönyvéből, amely részére magyar nyelven is rendelkezésre áll.

A tankönyv célkitűzéseinek megvilágítására magukat a szerzőket idézzük: „A szerzők nagy figyelmet szenteltek a komplex változós-függvénytan alapfogalmainak. Azokban az esetekben, amikor egyik vagy másik tétel bizonyítását elhagyták, szerzők törekedtek arra, hogy az illető tétel feltételeinek és állításának értelmét példákkal világítsák meg. Nagy jelentőséget tulajdonítottak a szerzők annak is, hogy az olvasó a könyvben kifejtett módszerek konkrét alkalmazásában gyakorlatot szerezhessen". Ez utóbbi célt szolgálják a szövegben részletesen feldolgozott példák, valamint a fejezetek végén közölt jól összeválogatott feladatok.

Azon olvasók részére, akiknek nincs módjuk arra, hogy a tankönyvet a maga egészében áttanulmányozzák, a szerzők a könyv előszavában a könyv részleges áttanulmányozásának több lehetséges változatát ismertetik.

Az I. fejezet a komplex változós-függvények analízise alapfogalmait ismerteti, nagy súlyt helyezve a geometriai szemléletességre. A szerzők, igen helyesen, következetesen rámutatnak a komplex számgömb véges és végtelen pontjainak egyenjogúságára.

A II. fejezet a konform leképezésekkel foglalkozik. A fejezet az alapvető fogalmakon kívül a lineáris leképezéseknek részletes tárgyalását tartalmazza.

A III. fejezetben a legfontosabb elemi függvények kerülnek ismertetésre. A fejezet végén különösen gazdag feladatanyag van, amely elsősorban azt a célt szolgálja, hogy az olvasó gyakorlatot szerezzen adott tartományok konform leképezését megvalósító elemi függvények megkeresésében.

A IV. fejezetben összesítve vannak a komplex függvénytan legegyszerűbb módszereinek a kétdimenziós vektorterek elméletére vonatkozó alkalmazásai.

Az V. fejezet reguláris függvényekre, valamint harmonikus függvényekre vonatkozó legfontosabb integráltételeket tartalmazza.

* Tankönyvkiadó, 1953, 1—279 o.

A VI. fejezet a Taylor és Laurent sorfejtésekkel, valamint az analitikus folytatás alapfogalmainak ismertetésével foglalkozik. Az V. és VI. fejezethez csatolt feladatok a fejezet tartalmának a kétdimenziós vektorterekre való alkalmazását szolgálják.

A VII. és VIII. fejezet teljes egészében az alkalmazásoknak van szentelve, még pedig az előbbi a residuumelméletnek, az utóbbi a geometriai alkalmazásoknak, különös tekintettel a sokszögű tartományok leképzésére. A két fejezet, véleményünk szerint igen helyesen, a konkrét példákra van felépítve.

A könyv, eltekintve attól, hogy mint komplex függvénytani bevezetés is jó szolgálatot tesz, véleményünk szerint igen hatékonyan elő fogja mozdítani a komplex függvénytan műszaki alkalmazásainak műszaki értelmiségünk között való népszerűsödését.

Kővári Tamás

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

ОГЛАВЛЕНИЕ

Память Дь. Сэкефальви-Надь 81
Дь. Сэкефальви-Надь: Трисекция по Я. Бояи 84
Ф. Картеси: Решение двух задач по построению на гиперболической плоскости 87
Л. Фукс и Т. Селе: Результаты советских исследований в области абстракной алгебры 92
Р. Облат: Теорема М. Бауэра о геометрических конструкциях 108
Й. Молнар: Размещение окружностей на шаре 113
Ф. Фазекаш: Построение нормаля элипса на основании комплексного уравнения 124
Б. Сэкефальви-Надь: Математический конкурс на 1952 год в память М. Швейцера 126
А. Часар: Математический конкурс для техникумов 156
Проблемы и решения 177
Задачи 184
Сообщения о сокращенной аспирантуре 194
Жизнь Общества имени Я. Бояи 196
Известия из математической жизни Венгрии 234
Обзор книг 239

CONTENTS

To the memory of J. Szőkefalvi-Nagy 81
J. Szőkefalvi-Nagy: The method of trisectien of J. Bolyai 84
F. Kárteszi: The solution of two construction-problems in the hyperbolic plane 87
L. Fuchs and T. Szele: On results of Sowiet mathematicians in abstract algebra 92
R. Obláth: Une nouvelle démonstration du théorème de M. Bauer sur la théorie des constructions géometriques 108
J. Molnár: Kreislagerungen auf einer Kugel 113
F. Fazekas: Construction de la normale de l'ellipse, sur la base de l'equation complexe 124
B. Szőkefalvi-Nagy: The M. Schweitzer mathematical competition, 1952. 126
Á. Császár: Mathematical competition for technical universities 156
Problems 177
Examples 184
Communication 194
Society notes 196
Mathematical and personal news 234
Book review 239

Ára 14·— Ft.
Előfizetés évi 20·— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest V, Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor eziránvú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

A kiadásért felelős: Mestyán János — Műszaki felelős: Tóth Ferenc
A kézirat beérkezett: 1953. VI. 24—X. 27. — Példányszám: 750
Terjedelem 10 A/5 ív, 31 ábra (+1 melléklet)

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 532742 — Felelős vezető: Vincze György

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

IV. ÉVFOLYAM

4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1953

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer. Budapest, 1953. december. IV. évfolyam 4. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd, Szele Tibor.

Szerkesztőség: Budapest V. Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

Felelős kiadó: Mestyán János.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V. József nádor-tér 1. Telefon: 180-850.

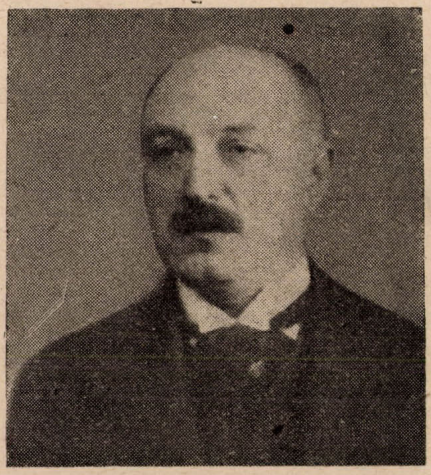
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20.— Ft.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hirlap Iroda V. József Attila-u. 3 szám alatti Ujságboltjában.

TARTALOMJEGYZÉK

Rédei László: Bauer Mihály élete és munkássága 241
Turán Pál: Egy Steinhaus-féle problémáról 263
Fenyő István: Néhány, a Bessel-függvényekkel kapcsolatos végtelen sorról 277
Példarovat 284
Társulati élet 303
Pályázati felhívás 314
Közlemény 314
Matematikai és személyi hírek 315
Könyvismertetés 316



Bauer Mihály élete és munkássága

Írta: Rédei László

Bauer Mihály 1874. szeptember 20-án Budapesten született. Tudományos munkásságát igen korán kezdte, 1892-ben, 18 éves korában jelent meg első dolgozata, amely Rados Gusztáv tanára vezetése mellett állt elő. Már két évvel később megindultak önálló publikációi. Korán kibontakozó tehetsége csakhamar figyelmet keltett, amiért 21 éves korában az 1895/96 tanévre 800 frt külföldi tanulmányi ösztöndíjat kapott. Az 1900. évi műegyetemi évkönyv adatai szerint ekkor már, tehát 26 éves korában műegyetemi adjunktus, 1909-ben magántanári képesítést nyert az „Analytikai számelmélet és függvénytan" c. tárgykörből, 1918. június 18-án megkapta a műegyetemi nyilvános rendkívüli tanári címet, amely alkalomból őt Kürschák József rektori beszámoló beszédében 1918. november 5-én üdvözölte. 1922-ben az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat neki ítélte az első ízben kiadásra került „König Gyula jutalomdíját". Ezek az adatok tudományos érdemének elismerését jelentik, mégis egyszersmind mellőzöttsége is megállapítható, mert 50 éves koráig, 1924-ig szolgált adjunktusként. Ekkor

műegyetemi szolgálati beosztásának meghagyása mellett középiskolai tanári kinevezést kapott, ami számára annyiban jelentett nyereséget, hogy ezzel megszünt alkalmazásának ideiglenes jellege, s nyugdíjra igényjogosulttá vált. Egyszersmind azonban ezidőtájt sajnálatos körülmények léptek fel életében, amelyek azután már élete egész hátralevő részét beárnyékolták. Kezdetét vette származása miatt való bántalmazása, amely egyelőre a műegyetemi hallgatók részéről gyakori tüntetésben, előadásainak erőszakos megzavarásában nyilvánult meg. Hallgatóinak ez a magatartása annál inkább is méltatlan volt, mert előadásaira rendkívüli gondot fordított, igazi példaképe volt a magát tanítványaiért feláldozó tanítónak. A hallgatóságnak ez a viselkedése kedvezett az akkori politikai céloknak és siettette korai nyugdíjazását (1936. körül). Az elszenvedett sérelmek már magukban is sok és tartós fájdalmat okoztak Bauer Mihálynak. Ezekhez járult ugyanebben az időben baljóslatú szembetegségének kezdete, ami szemevilága elvesztésével fenyegette. Mégis látása állapotában lényeges romlás később sem állt be. Végképpen szomorú volt életének utolsó szakasza, a rosszemlékű 1944. év, egészen a felszabadulásig. Bauer Mihály éppen 1944. szeptember 20-án érte meg 70 éves jubileumát, ha lehet ezt a szót használni, ami hiszen „örömünnepet" kellene, hogy jelentsen. Mondani sem kell, hogy mint politikai üldözött, nyilvános ünneplésben nem részesült, s jubileuma alkalmával csak igen kevesen kereshették fel tisztelői és tanítványai közül. Én levélben fejeztem ki neki jókívánságaimat, elküldve a szegedi Acta Scientiarum Mathematicarumban jubileumának szentelt cikkemnek éppen akkor elkészült korrektúráját. Válaszában, ami hozzám írt utolsó levele volt, s amelyben elmondta, hogy mennyire jól esett neki tanítványa megemlékezése, elpanaszolta, hogy kényszerű lakótársat kapott, aki miatt még íróasztalát sem mondhatja sajátjának. Ez még a Horthy-uralom idején volt. A nyilas hatalomátvétel másodnapján őt is sokadmagával a Tattersal nevű lovardába vitték, ahonnan pár nap múlva még visszajutott Tisza Kálmán-tér 11. (ma Köztársaság-tér) alatti lakásába. Onnan november végén a ghettóba vitték és ott érte meg sok nélkülözés után a felszabadulást. Fájdalom, ennek csak rövid ideig örvendezhetett. 1945. februárban szemcseppekért akarván menni, az utcán elesett, agyrázkódást kapott és kórházban halt meg.

Megkísérlem Bauer Mihályt, mint embert néhány vonással jellemezni, tudományos munkásságának ismertetésére később térek rá, de persze, ha róla szólok, akkor a tudósról és tanítóról is kell beszélnem. Nekem úgy tűnik, hogy fő jellemvonásai voltak lelkiismeretes szorgalma s egészen rendkívüli mértékű szerénysége. Szorgalmának nagysága megítélhető abból, hogy összesen 106 dolgozata jelent meg. Magas színvonalú előadásait igen nagy szeretettel és körültekintéssel dolgozta ki. Mindezekre nézve sokat-

mondó az az adat, hogy publikációi szinte egyenletesen oszoltak meg tudományos munkásságának 48 évnyi időtartamára, azzal a kivétellel, hogy magántanárrá történt kinevezése után, az 1910, 1916. évek között egyetlen dolgozata sem jelent meg. Ennek a szünetnek a magyarázatát tőle magától hallottam, oly sok időt fordított ugyanis előadásainak kidolgozására, hogy ez a kutatástól teljesen elvonta őt. Publikációi 1937. után újra megritkultak, s 1940. után nem jelent meg több dolgozata, aminek magyarázata fent leírt szenvedéseiben van. Szelleme akkor is töretlen maradt, mert utolsó vizsgálatai értékben nem maradnak azok mögött, amelyeket korábban, alkotóképessége teljességében végzett. Korai nyugdíjazása után beállott szomorú helyzetében továbbra is készített előadáskidolgozásokat, remélve, hogy még módjában lesz magántanári előadásokat tartani. Venia legendijétől nem volt megfosztva, de akkori helyzetében nem gondolhatott magántanári előadások tartására. Előadáskidolgozásait részben mégis értékesítette, azokat hozzá ragaszkodó tanítványainak átadta olvasásra, akik őt ebben az időben lakásán keresték fel. Tanítványai számára lakása már korábban is mindig nyitva állt, ilyen „házi tanítványai" voltak Erdős Pál, Turán Pál, magam is, továbbá élete utolsó szakaszában a tragikus sorsú Sándor Gyula igen tehetséges matematikusunk, aki az egyetemtől elzárva teljesen az ő vezetése alatt foglalkozott tanulmányaival. Egészen rendkívüli volt Bauer Mihálynak az a nemes nagylelkűsége, amely a tudomány iránti határtalan lelkesültségében gyökerezett, s aminek nevében mások minden hibáját megbocsátotta. Ennek ecsetelésére megemlítem egyik beszélgetésünkben hangoztatott ama véleményét, hogy a tudományban nemcsak a kimagasló teljesítményeket, hanem a kisebb fontosságú munkát is meg kell becsülni, s ezt a megjegyzést olyan személlyel kapcsolatban tette, akiről tudta, hogy elszegődött az akkori, ellene is irányuló hivatalos politikához.

Bauer Mihálynak tudományos munkássága kutatás tekintetében majdnem kizárólag az elemi-, továbbá algebrai számelmélet, valamint az algebra volt, az algebrának is nagyobbrészt a számelméleti oldala, de van néhány függvénytani és geometriai tárgyú kutatása is. Legkiemelkedőbbek algebrai számelméleti vizsgálatai, amelyek átszövik ennek a tudománynak szinte egész területét. Ezenkívül kitűnő, mindig a kor színvonalán álló magántanári előadásokat tartott az algebrai számelméletből, algebrából, továbbá a valós- és komplex függvénytanból és analitikus számelméletből.

Ki kell emelnem Bauer Mihálynak kiváló tudományos kvalitásai közül a haladás iránti rendkívüli készségét, ami munkásságában mindvégig tükröződik. Pályája kezdetén készen volt az algebrai számelméletnek Dedekind—Hilbert-féle, valamint Kronecker-féle elmélete, s ő hamarosan otthon volt ezeknek irodalmában. Így

igen jól ismerte a nehéz Kronecker-féle elméletről szóló König Gyula: „Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai" c. munkáját. Nemsokára ezután lépett fel Hensel, aki a p-adikus testek elméletével forradalmasította az algebrai számelméletet. Bauer ezt az új elméletet, csakúgy mint hazánk másik nagy fia, Kürschák József, hamar magáévá tette és továbbfejlesztette. Életében igen nagy eseményként hatottak rá még Steinitz, Ostrowski, Ore vizsgálatai és van der Waerden tankönyve a modern algebráról, továbbá az osztálytestek elméletének Furtwängler, Takagi, Artin, Hasse által való megalapozása és kiépítése. Mindezekre a nagy újságokra Bauer idősebb korában is fiatalos lelkesedéssel reagált, s az új elméletek kiszélesítésébe jelentős részben belefolyt. Így különösen Ostrowski, Ore, van der Waerden, Hasse munkáikban több helyen Bauer vizsgálataira is építenek. Ezek közül hadd említsem meg, hogy Hasse az osztálytestek elméletéről írt nagy „Bericht"-jében hazai matematikusaink közül egyedül őt idézi, mégpedig két dolgozatával (lásd a 60, 61. számú dolgozatokat), munkájába felveszi Bauer tételének tárgyalását, s azt további kutatáshoz fel is használja. Egyébként is igen nagy nemzetközi megbecsülésben részesült. A számelmélet és algebra legkiválóbb külföldi művelőivel élénk tudományos levelezést folytatott. Erre nézve érdekes adat, hogy négy dolgozata olyan levélből állott elő, amelyet Hilbert-, Hasse-, van der Waerden-, illetve Hardyhoz írt, ugyancsak levelezésből fakadt egy Csebotareff-fel közösen írt igen fontos dolgozata. (Lásd az ismertetéshez csatolt jegyzékben az 52, 89, 91, 100, 106. dolgozatokat.) Élénk levelezésben volt még Oreval, aki Bauernak egyik igen fontos kutatási területét folytatta. Többek, mint I. Schur, Landau, Ostrowski levélben fejezték ki Bauer munkássága iránti nagyrabecsülésüket. Mindezek a megnyilatkozások már magukban is mutatják Bauer Mihálynak tudományos súlyát, s hogy mily sokkal járult hozzá a magyar tudomány nemzetközi megbecsüléséhez — kiáltó ellentmondás, hogy ugyanakkor őt mint sok hozzáhasonlót, idehaza a magyar állam és társadalom éppen ekkoriban fosztotta meg utóvégre már legelemibb emberi jogaitól is.

Vizsgálatai közül a legjelentősebbek részletesebb felsorolásban a következő tárgykörökkel foglalkoznak:

Az elemi számelméletből (részben azonban az algebrai számelmélettel kapcsolatban): a számtani haladványról szóló Dirichlet-féle tételnek elemien bizonyítható esetei, a binér kvadratikus alakok aritmetikája, úgynevezett identikus (vagy polinom-) kongruenciák, polinomoknak mod p való faktorizációja, körosztási polinom.

Az algebrai számelméletből: a klasszikus (azaz Dedekind-féle) ideálelmélet, ebben a prímideálokra való faktorizációnak legkülönbözőbb kérdései, az összetett testek problémája, lényegtelen diszkriminánsosztók, körosztási test, Hensel-féle p-adikus számtest.

Az algebrából (részben az algebrai számelmélettel kapcsolatban): lineáris helyettesítések, karakterisztikus polinom, véges csoportok részcsoportjainak száma, az alternáló csoport egyszerűsége, véges testek, affektus nélküli egyenletek, irreducibilitási tételek, gyökmeghatározás iterációval.

Általánosságban megjegyzem, hogy Bauer teljesen eredeti kutatásain kívül igen nagy érdemeket szerzett nagy számú, már meglevő eredményeknek egyszerűbb bizonyításával is, vagy az eredmények kibővítésével. Ezenkívül igen becses ismertető cikkeket is írt.

Dolgozatai magas követelményt állítanak az olvasóval szemben, sok előismeretet tételeznek fel, s fogalmazásuk igen tömör. Mindezek miatt azok tanulmányozása a szakember számára sem könnyű feladat. Kivételt képeznek ismertető cikkei, ezek könnyed modorban vannak megírva.

Munkásságának egyenként való ismertetését alább közlöm. Ebben az ismertetésben az 1—106. sorszámok a csatolt jegyzékben felsorolt dolgozatcímekre utalnak. Avégből, hogy ez az ismertetés használható vezérfonalat nyujtson Bauer munkásságának tanulmányozásához, helyesnek véltem mindegyik dolgozatról, a kevésbbé fontosakról is legalább néhány szót szólni. Meg kell jegyeznem, hogy Bauer Mihály feladatának tartotta a hazai matematikának magyar nyelven való ápolását is, azért legfontosabb vizsgálatait majdnem kivétel nélkül (számszerint mintegy harmincat) két nyelven, magyarul és németül közölte, a legtöbb esetben azonos szöveggel, esetleg azonban két korábban közölt dolgozatnak egybeolvasztásával, vagy fordítva, egy dolgozatának később való kettéosztásával, ezekben az utóbbi esetekben változott cim alatt. Az ily egybeolvasztások, illetve kettéválasztások láthatóan úgy álltak elő, hogy szerzőjük későbbi időpontban az egyesítést, illetve elválasztást tárgyi okokból ajánlatosnak tartotta. A két nyelven való publikációk sorrendje megoszló, hol a magyar, hol pedig a német nyelvű publikáció előzi meg a másikat, néha tetemes időbeli eltéréssel. Szükségesnek tartottam ezekre a kétnyelvű publikációkra rövid utalással mindenegyes esetben figyelmeztetni, hogy Bauer munkásságának részletes tanulmányozását ezzel is megkönnyitsem.

Az alábbiakhoz megjegyzem még, hogy Bauer Mihálynak kétségtelenül legjelentősebb publikációi a 23, 24, (25), 29, 38, 44, (49, 53, 86), 60, 61, 62, (70, 71, 72, 102, 103), 65, 77, (83), 78, (85), 84, 87, 89. dolgozatok (a zárójelbe tett számok csatlakozó vizsgálatokat jelentenek). Közülük az 53, 68, 72, 78, 84, 85, 87, 89, 102. dolgozatok (részben német nyelvű kiadások) idézve vannak az Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften I_2, 2. Aufl., Heft 8, Teil II: Ph. Furtwängler—H. Hasse—W. Jehne, Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig, 1953) füzetben. Fájda-

lom, hogy e kiváló enciklopédiacikk megjelenését Bauer nem érhette meg, s nem tapasztalhata munkásságának abban lefektetett megörökítését. Az itt következők kiegészítéséül Bauer kutatásainak kellő értékelésére nézve erre az enciklopédiacikkre utalok.

Az 1. dolgozatban Bauer Rados Gusztáv ösztönzésére kimutatja, hogy a valós, ferdén szimmetrikus mátrix 0-tól különböző sajátértékei tiszta képzetesek és páronként konjugáltak. A bizonyítás lényege az, hogy az A ferdénszimmetrikus mátrix $f(\lambda)=|A-\lambda E|$ karakterisztikus egyenletének négyzete az $f^2(\lambda)=|B+\lambda^2 E|$ alakban írható, ahol B már szimmetrikus mátrix (E az egységmátrixot jelenti).

A 2. dolgozat Rados vizsgálataihoz kapcsolódva adott $f(x)$, $g(x)$ polinomok esetén annak a polinomnak racionális úton való meghatározását adja, amelynek gyökei a két polinom $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, illetve $\beta_1, \ldots, \beta_n$ zérushelyeiből képezett $\alpha_i \beta_k$ szorzatok.

A 3. dolgozatban Bauer a számtani haladványról szóló Dirichlet-féle tételnek az $ax+1$ esetre vonatkozó elemi bizonyítását adja. Az első ilyen bizonyítás Lucas-tól való, de Bauer eljárása egyszerűbb.

A 4. dolgozatban az $ax-1$ esetre ad ugyancsak elemi bizonyítást, feltéve, hogy az a páratlan prímszám hatványa, és megjegyzi, hogy bizonyítása bármely a-ra kiterjeszthető. Bizonyításában Dirichletnek doktori disszertációjához kapcsolódik. Valamivel Bauer után az $ax-1$ esetre Daublevsky v. Sterneck is hasonló bizonyítást adott.

Az 5. dolgozatban Bauer elemien kimutatja, hogy definit binér quadratikus alakok esetén az aritmetikai ekvivalenciából (azaz az értékkészletek egyenlőségéből) folyik a közönséges értelmű (azaz algebrai) ekvivalencia.

A 6. dolgozat az előbbinek fordítása.

A 7, 8. dolgozatok a $kx+l$ ($x=1, \ldots, m$) értékeknek m-hez prím eseteit számolják össze, s egyéb hasonló elemi kérdésekkel foglalkoznak.

A 9. dolgozat az előbbi kettőnek kivonatolt fordítása.

A 10. dolgozat Kőnig Gyula ösztönzésére végtelen szorzatokkal foglalkozik.

A 11. dolgozat ismertető jellegű; E. Borel szummabilitási vizsgálatairól számol be, mutatván Bauer érdeklődési körének szélességét.

A 12. dolgozat egyebek között egy n-edrendű véges csoport bizonyos részcsoportjainak számával foglalkozik. Legyen $p^k | n$ (p itt és ezután is prímszámot jelent). Frobenius (1895) bebizonyította, hogy a p^k rendű részcsoportok száma $\equiv 1 \pmod{p}$. Bauer azt mutatja ki, hogy a p^k indexű részcsoportok száma $\equiv 1$, vagy $0 \pmod{p}$ aszerint, hogy köztük van-e vagy nincs normálosztó. Je-

gyezzük meg, hogy újabban Hall-tól származó, részletesebb vizsgálatok vannak p-csoportok esetére.

A 13. dolgozat az utóbbi irányba eső egyszerű vizsgálatot tartalmaz. Érdekes, hogy ebben a speciális esetben Bauer lényegében véve a Frattini (1885) által felfedezett részcsoportot tőle függetlenül újra felfedezi.

A 14. dolgozat a 12-nek fordítása.

A 15, 16. dolgozatok a 13. dolgozatnak (két részletben való) fordítása.

A 17, 18, 19. dolgozatok oktató irányú ismertető cikkek (befejezés a 33. dolgozatban).

A 20. dolgozatban foglalkozik Bauer első ízben az úgynevezett identikus kongruenciák kérdésével, így nevez egy $f(x) \equiv g(x) \pmod m$ kongruenciát, ha a két oldal együtthatói páronként kongruensek. (Lényegében véve tehát polinomoknak a közönséges értelemben vett kongruenciájáról van szó.) Közismert példa a Lagrange-féle $x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)\ldots(x-p+1) \pmod p$ tétel, amely a Fermat-féle tételen nyugszik. Már Gruber Nándor vetette fel a kérdést, hogy mikor igaz az általánosabb

$$x^{\varphi(m)} - 1 \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(m)} (x - r_i) \pmod m$$

kongruencia, ahol az r_i számok prím maradékrendszert jelentenek mod m. A jobboldalt $F_m(x)$-szel jelölve, Bauer kimutatja, hogy ($m \geqq 3$ mellett)

$$F_m(x) \equiv (x^{p-1} - 1)^{\frac{\varphi(m)}{p-1}} \pmod{p^k} \qquad (p \neq 2;\ p^k \mid m),$$

illetve

$$F_m(x) \equiv (x^2 - 1)^{\frac{\varphi(m)}{2}} \pmod{2^k} \qquad (k > 1;\ 2^k \mid m).$$

Ezeket Bauer nyomán Wylie (1939) közös alakra hozta. Bauernek ezeket az eredményeit Hardy és Wright felvették nagy számelméleti kézikönyvükbe, s azokra Bauer és mások több ízben visszatértek. Zányi az algebrai számtestekre való általánosítással foglalkozott. Az identikus kongruenciák alkalmazására nézve l. a 106. dolgozatot.

A 21. dolgozat tárgya a végesfokú algebrai számtest (ezentúl röviden „algebrai számtest") Dedekind-féle elméletével kapcsolatos bizonyos axiomatikus jellegű kérdések.

A 22. dolgozat a 20. dolgozat folytatásaként megvizsgálja azokat az m-eket, amelyekre $x^n - 1 \pmod m$ lineáris tényezőkre bomlik.

A 23. dolgozat tétele: egy $f(x) = x^n + \cdots + a_n$ racionális egész együtthatós irreducibilis polinom akkor és csak akkor irredu-

cibilis legalább egy prímszámmodulusra nézve, ha az $f(x)$-nek G Galois-csoportjában van n elemű ciklus. (A Galois-csoportot mint az $f(x)=0$ gyökeinek permutációcsoportját értjük.) A bizonyítás többek között Dedekind ama híres tételén nyugszik, hogy ha p az $f(x)=0$ egyik gyökének adjunkciójával előállt testben e számú $f_1, \ldots, f_e$ fokú prímideál szorzatára bomlik, akkor G-nek van olyan eleme, amelynek idegen ciklusokra való felbontásában a ciklusok elemszáma rendre $f_1, \ldots, f_e$. Tételét Bauer alkalmazza még annak kimutatására, hogy bármely C ciklikus számtesthez megadhatók bizonyos számtani haladványok, amelyeknek minden prímszám eleme C-ben irreducibilis.

A 24. dolgozat nevezetes eredménye az a tétel (lásd a 25. dolgozat ismertetését), hogy két racionális egész együttthatós $f_i(x)$ $(i=1, 2)$ polinomhoz akkor és csak akkor tartozik ugyanaz a Galois-test, ha azok a polinomok (véges sok kivételtől eltekintve) ugyanazokra a prímszámmodulusokra nézve esnek szét lineáris tényezőkre. Az e tételben foglalt feltétel elégséges volta Kroneckertől származik. A bizonyítás egy Frobeniustól származó analitikus úton nyert tételen kívül Dedekindnek következő igen fontos tételén alapul. Legyen K algebrai számtest, amely egy $\bar{K}$ Galois-testnek része, G ennek Galois-csoportja és H a K-hoz tartozó részcsoport, továbbá p olyan prímszám, amely $\bar{K}$ diszkriminánsának nem osztója, legyen végül F a p valamelyik $\bar{K}$-beli prímideáltényezőjének felbontási csoportja (Zerlegungsgruppe), amely most ciklikus. Akkor a csoportoknak úgynevezett Dedekind-féle duplamodulus szerinti

$$G = Fa_1H + \cdots + Fa_kH$$

felbontására a következő érvényes. A p prímszám a $p = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k$ módon bomlik fel K-ban prímideálok szorzatára és $\mathfrak{p}_i$ foka $\frac{m}{d_i}$, ahol m az F rendje és d_i az $F, a_iHa_i^{-1}$ csoportok metszetének rendje. Bauer fenti tételének alkalmazásával még a következő tételt nyeri. Egy $f(x)$ racionális egész együtthatós polinom Galois-teste akkor és csak akkor Abel-féle, ha létezik egy n természetes szám úgy, hogy $f(x)$ az $nx+1$ alakú prímszámmodulusokra nézve legfeljebb véges számú kivételtől eltekintve lineáris tényezőkre bomlik.

A 25. dolgozatban Bauer nagy mértékben általánosítja a 24. dolgozat főeredményét, s általánosabb tételét aritmetikai úton bizonyítja. Egy p prímszámot a K algebrai számtestre nézve lényegesen elsőfokúnak nevez, ha K-ban csupa elsőfokú prímideál szorzatára bomlik. Tétele azt mondja, hogy o (véges számú kivételtől eltekintve) a K_1K_2 összetett testben akkor és csak akkor lényegesen elsőfokú, ha K_1, K_2 mindegyikében ilyen, s ama p-k sűrűsége a K_1K_2 Galois-teste fokszámának reciprokja. A bizonyítás igen egy-

szerű, ismét az elébb említett Dedekind-féle tételen nyukszik. Alkalmazásként előáll, hogy csakis az Abel-féle testek esetén helyezkednek el a lényegesen elsőfokú prímszámok számtani haladványokban.

A 26. dolgozat a 20-nak fordítása.

A 27. dolgozat a 23-nak fordítása.

A 28. dolgozat a 22-nek fordítása.

A 29. dolgozat igen fontos vizsgálatokat tartalmaz egy

(1) $$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$$

egész együtthatós irreducibilis polinomnak $\bmod p^\alpha$ irreducibilis tényezőkre való

(2) $$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{s} F_i(x) \pmod{p^\alpha}$$

felbontásáról ama feltevés mellett, hogy az $f(x)$ egyik ω gyökével meghatározott K számtestnek minimálbázisa az $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ sorozat. (Ez a feltevés azt jelenti, hogy az $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ diszkriminánsa egyenlő K diszkriminánsával.) Mindenekelőtt érvényes, hogy — mindvégig 1 kezdőegyütthatós polinomokra szorítkozva (röviden „főpolinom“) — a (2) felbontás minden $\alpha(>1)$ esetén egyértelmű, a tényezők $\bmod p^\alpha$ különbözők, s számuk nem függ α-tól. Továbbá az $F_i(x)$ tényezőkről még a következő felvilágosítások adhatók. Bontsuk fel (1)-et előbb $\bmod p$ irreducibilis tényezőkre. A (2) tényezőinek száma éppen az $f(x)$ $\bmod p$ különböző irreducibilis tényezőinek száma, tehát

(3) $$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{e_i} \pmod{p},$$

ahol $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ $\bmod p$ különböző irreducibilis főpolinomok. (Tudvalevő, hogy a (3) felbontás $\bmod p$ egyértelműen meghatározott.) Végül a (2)-beli tényezők alkalmas sorrendje mellett bármely $\alpha(>1)$ esetén fennáll

(4) $$F_i(x) \equiv f_i(x)^{e_i} \pmod{p}.$$

A bizonyítás egyrészt Schönemann ama ismert fontos tételén alapul, hogy ha egy főpolinom $\bmod p^\alpha$ irreducibilis, akkor a $\bmod p$ irreducibilis főpolinom tényezők $\bmod p$ kongruensek. Másik segédeszköz Dedekind ama alapvető tétele, amely a p prímszám K-beli prímideáltényezőinek vizsgálatát a (3) kongruenciára, valamint a belőle fakadó

$$f(x) = \prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{e_i} + pM(x)$$

egyenlettel definiált $M(x)$ polinomnak $\bmod (p, f_i(x))$ való viselkedésére vezeti vissza. Tételéből Bauer korollárium ként nyeri, hogy

(1) akkor és csak akkor reducibilis minden primszámhatvány modulusra nézve, ha K-ban minden prímszámnak van két különböző prímideál tényezője. Ilyen polinomokra első példát Hilberttől ismerünk:

$$x^4+13x^2+81=(x+\varrho+\sigma)(x+\varrho-\sigma)(x-\varrho+\sigma)(x-\varrho-\sigma)$$

$$\left(\varrho=\frac{1}{2}\sqrt{5},\ \sigma=\frac{1}{2}\sqrt{-31}\right).$$

A 30. dolgozat Kürschákaknak a vonalzóval és etalonnal kivihető geometriai szerkesztésekről szóló vizsgálatával kapcsolatos. Bauer algebrai úton kimutatja, hogy az etalon nem pótolható semmiféle rögzített szakasszal, sőt poligonnal sem.

A 31. dolgozat a 29-nek fordítása.

A 32. dolgozat új elemi bizonyítást ad a 4. dolgozatban tárgyalt kérdésre.

A 33. dolgozat a 17, 18, 19. ismertető cikkek befejező közleménye.

A 34. dolgozat egyszerű elemi vizsgálat a $\prod_{i=1}^{n}(x-i) \pmod n$ polinom együtthatóiról.

A 35. dolgozat a 30-nak fordítása.

A 36. dolgozat a 32-nek fordítása.

A 37. dolgozat tárgya az ismert Eisenstein-féle irreducibilitási tétel Kőnigsbergertől származó általánosításának további nagymértékű általánosítása többváltozós polinomokra. Kőnigsberger csupán kétváltozós polinomok esetét tekintette. Bauer bizonyítása tisztán ideálelméleti, sokkal egyszerűbb mint az eredeti Kőnigsberger-féle bizonyítás.

A 38. dolgozat egy Schönemann-féle tétel következő általánosítását adja. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom, amely egy p prímszámmodulusra nézve irreducibilis, és $M(x)$ az $f(x)^t$-nél alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom, amely nem osztható $f(x)$-szel mod p. Akkor az összes $f(x)^t+p^eM(x)\,((t,e)=1)$ polinomok irreducibilisek. Ennek $e=1$ esete éppen az eredeti Schönemann-féle tétel.

A 39, 40. dolgozatok a 24. dolgozatnak két részletben való fordítása.

A 41. dolgozat a 25-nek fordítása.

A 42. dolgozat a 38-nak fordítása.

A 43. dolgozat a 37-nek fordítása.

A 44. dolgozat igen nevezetes irreducibilitási vizsgálatokat tartalmaz az úgynevezett Puiseux- vagy Newton-féle poligon fogalmának felhasználásával. Legyen adva egy

$$(5)\qquad f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n \qquad (c_n\neq 0)$$

polinom. A $c_1, \ldots, c_n$ együtthatók egy $K[x_1, \ldots, x_m]$ $(m \geqq 1)$ vagy $I[x_1, \ldots, x_m]$ $(m \geqq 0)$ polinomgyűrűben fekhetnek, ahol K algebrailag zárt test (például a komplex számok teste), I a racionális egész számok gyűrűje. Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk azonban az $m = 0$ esetre, ekkor az alapul vett gyűrű I. Legyen p egy prímszám, w az (5)-nek egyik gyöke, s ennek testében legyenek érvényesek a

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r}, \quad w = \mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{a_r} \mathfrak{q}, \quad (p, \mathfrak{q}) = 1, \quad e_i > 0, \; a_i \geqq 0 \; (i = 1, \ldots, r)$$

felbontások, ahol $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ prímideálok, $\mathfrak{q}$ egész ideál. Bauer az $\frac{a_i}{e_i}$ számokat a w karakterisztikus számainak nevezi. Ezek nyilván eleget tesznek annak a feltételnek, hogy $T = \frac{a_i}{e_i}$ mellett az

$$nT, r_1 + (n-1)T, r_2 + (n-2)T, \ldots, r_n$$

sorozatnak legalább két legkisebb tagja van, ahol r_k jelöli c_k rendjét p-re vonatkozólag, azaz $p^{r_k} | c_k, p^{r_k+1} \nmid c_k$ (a $c_k = 0$ esetben $r_k = +\infty$ értendő). A mondottaknál fogva minden karakterisztikus szám szükségképpen (a Puiseux-féle poligonnal kapcsolatos) úgynevezett Puiseux-féle szám. Bauer kimutatja, hogy fordítva, minden lehetséges Puiseux-féle szám előfordul a karakterisztikus számok között, ha (5)-nek minden w gyökét figyelembe vesszük. Alkalmazásként egyéb irreducibilitási tételek között előáll Netto következő tétele: Ha $p | c_1, \ldots, c_n$ és $p^2 \nmid c_k$, akkor $f(z)$-nek van legalább k-adfokú irreducibilis tényezője. Bauernek ez a vizsgálata ösztönzően hatott Orenek ilyen irányú részletesebb vizsgálataihoz. (Lásd még a 49. dolgozatot.)

A 45, 46. dolgozatok kitűnő ismertető cikkek, mégpedig ismertetik Bauernek a 23. dolgozatban tárgyalt vizsgálatait és az azt megelőző Kronecker-, Frobenius-féle vizsgálatokat.

A 47. dolgozat egyszerű, nem elemi bizonyítást ad Dirichlet tételének az $ax - 1$ esetére.

A 48. dolgozat a 47-nek fordítása.

A 49. dolgozat a 44-ben ismertetett vizsgálatok alkalmazásával új bizonyítást ad Hilbert ama ismert tételére, hogy minden n fokszámhoz van végtelen sok affektusnélküli racionális együtthatós egyenlet, s egyszerű utasítást nyújt végtelen sok ilyen egyenlet megszerkesztésére.

Az 50. dolgozat a 44-nek fordítása.

Az 51. dolgozat a 49-nek fordítása.

Az 52. dolgozat a 49-ben is tárgyalt Hilbert-féle tételre újabb bizonyítást ad a 49. dolgozat eredményeinek felhasználásával.

Az 53. dolgozat ismét a 44. dolgozat alapján kimutatja az úgynevezett lényegtelen diszkriminánsosztók gyakori felléptét. Töb-

bek között azt nyeri, hogy már a harmadfokú racionális együtthatós egyenletek között is előfordul végtelen sok ilyen eset.

Az 54. dolgozat az 52-nek fordítása.

Az 55. dolgozat a 44. dolgozat eredményeit egyszerű úton nyeri.

Az 56. dolgozat az 53-nak fordítása.

Az 57. dolgozat az 55-nek fordítása.

Az 58. dolgozat az identikus kongruenciákról szóló két egyszerű feladat megoldása.

Az 59. dolgozat az

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

valós együtthatós egyenlet összes valós gyökeinek meghatározására olyan

$$x_{i+1} = F(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

iterációt ad meg, amely minden valós x_1 kezdőértékre konvergens $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot nyújt, s ennek határértéke (az $x_1 = x_2 = \cdots$ esetek kivételével) mindig gyök. Ezt a feladatot csupa valós gyök esetére néhány évvel előbb már Faber megoldotta. Bauer arra is rámutat, hogy bizonyos esetekben az ismert

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newton-féle iteráció is csupa konvergens $x_1, x_2, \ldots$ sorozatokra vezet.

A 60. dolgozat a 36-beli segédtételeket általánosítja s tartalmazza azt az osztálytestek elméletére nézve jelentős tételt, hogy egy K algebrai számtest akkor és csak akkor Galois-féle, ha benne minden olyan p prímszám csupa elsőfokú prímideál szorzatára bomlik, amelynek van K-ban elsőfokú prímideáltényezője. (Lásd Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischer Zahlkörper, Teil II, Leipzig u. Berlin 1930, 141 o.)

A 61. dolgozat Bauernek legjelentősebb munkája, bár ez is csupán néhány oldal terjedelmű, mint legtöbb egyéb dolgozata. A dolgozat jelentőségének megvilágítására előrebocsátom a következőt. Tetszésszerinti K (végesfokú) algebrai számtest esetén jelölje $P(K)$ (véges számú kivételtől eltekintve!) azoknak a prímszámoknak halmazát, amelyeknek K-ban van elsőfokú prímideáltényezője. Hasonlóan, mint ahogy Cauchy tétele megadja az analitikus függvény értékeit egy tartomány belső helyein, kizárólag a kerületen felvett értékekből, Kronecker felvetette azt az algebrai-számelméleti „kerületiértékproblémát" („Randwertproblem"), hogy a K testnek összes algebrai és számelméleti tulajdonságai a $P(K)$ halmazzal (vagy ehhez hasonló egyéb halmazokkal) jellemezendők. Egyébként a Kronecker-

éle probléma általánosabban is értendő $K|k$ relatívtestekre vonatkozóan; akkor $P(K)$ helyébe $P(K|k)$ lép, ama k-beli prímideálok halmaza, amelyeknek K-ban van 1 relatívfokszámú prímideáltényezője. Az általánosabb Kronecker-féle kerületiértékproblémának ragyogó megoldását nyújtja az osztálytestelmélet a $K|k$ relatív Abel-féle testekre vonatkozóan; ennek az elméletnek alaptétele ugyanis többek között kimondja, hogy a $K|k$ relatív Abel-féle testek és a $P(K|k)$ halmazok között egy-egyértelmű megfelelkezés van. Tetszésszerinti $K|k$ testre vonatkozóan is vannak már biztató eredmények. Ilyen a már fentebb (a 24. dolgozat kapcsán) említett Frobenius-féle „sűrűségi tétel". Ennek egy része kimondja, hogy (a $P(K|k)$ sűrűsége azaz) $d(P(K|k)) \geqq \frac{1}{n}$, ahol n a $K|k$ fokszáma, s az „$=$" akkor és csak akkor érvényes, ha $K|k$ Galois-test. Bauer Frobenius tétele és a 24, 25. dolgozatokban is felhasznált Dedekind-féle tétel alapján kimutatja a következő ugyancsak igen nevezetes tételt: Legyen K tetszésszerinti algebrai számtest (mint fent) és G Galois-test. Akkor és csak akkor

$$P(G) \supseteq P(K),$$

ha $K \subseteq G$. Hasse a 60. dolgozattal kapcsolatban említett „Bericht"-jében ezt a tételt általánosítja egy $K|k$, $G|k$ testpár esetére, s belőle további nevezetes következtetéseket nyer.

A 62. dolgozat (az előbbivel egy kötetben) ugyancsak igen nevezetes, s tárgyára Bauer később is többször visszatért, így utolsó dolgozataiban is. Legyen G_1, G_2 két algebrai számtest és k ezeknek egy közös részteste, úgy hogy $G_1|k$, $G_2|k$ Galois-féle testek. Legyen $\mathfrak{p}$ primideál k-ban, s legyenek érvényesek a

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_1^{(i)} \dots \mathfrak{p}_{e_i}^{(i)})^{g_i} \qquad (K_i|k\text{-ban}) \qquad (i = 1, 2),$$

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_e)^g \qquad (K_1 K_2|k\text{-ban})$$

prímfelbontások. Legyen f_i, f a $\mathfrak{p}_l^{(i)}, \mathfrak{P}_l$ prímideálok foka k fölött. Akkor

$$f \equiv 0 \pmod{f_i} \qquad (i = 1, 2),$$

$$\frac{f_1 f_2 g_1 g_2}{g} \equiv 0 \pmod{f}.$$

Ha éppen $g_1 = g_2 = 1$, akkor fennáll $g = 1, f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$ (azaz f, az f_1, f_2 legkisebb közös többese). Ha pedig a $\mathfrak{P}_l$ prímideálok tehetetlenségi csoportja ciklikus, akkor $g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}$. Ezek a tételek részben egészen újak, részben Hilbert, Weber és Hensel tételeinek

általánosításai. Bizonyításukat Bauer Dedekind és Hilbert klasszikus tételeiből nyeri.

A 63. dolgozat az előbbi kettőnek fordítása, kibővítve a 61. eredményeinek egy egyszerű alkalmazásával.

A 64. dolgozat az 59-nek fordítása.

A 65. dolgozat egy Hensel-féle tétel általánosításaként bebizonyítja, hogy az algebrai számtest (Kronecker-féle) alapegyenlete mod p^e egyértelműen bomlik irreducibilis polinomok szorzatára, és hogy az $e > 1$ esetben a tényezők (lényegesen) különbözők. Alkalmazásként újra foglalkozik a 29. dolgozat ismertetésének végén említett kérdéssel.

A 66. dolgozat egyszerű megjegyzést tartalmaz a többszörös algebrai testadjunkcióról, amely azonban ma már a modern algebra keretében elvesztette aktualitását.

A 67. dolgozat Hensel (1902) következő igen nevezetes tételének eredeti bizonyítását egyszerűsíti. Legyen egy K algebrai számtestben a p prímszám egyik prímideáltényezője $\mathfrak{p}$, s álljon fenn

$$\mathfrak{p}^p \| p \qquad (\text{azaz } \mathfrak{p}^g | k,\ \mathfrak{p}^{g+1} \nmid p),$$
$$g = p^s g' \quad ((p, g') = 1).$$

Legyen még $\mathfrak{d}$ a K differense, s álljon fenn

$$\mathfrak{p}^{v-1} \| \mathfrak{d}.$$

Hensel tétele azt mondja ki, hogy

$$v \leqq (s+1)g.$$

(Korábban Dedekind kimutatta, hogy az $s = 0$, azaz $(g, p) = 1$ esetben $v = g - 1$.) Hensel tételét később a $\mathfrak{p}$-adikus számtestek segítségével is bebizonyította. Bauer bizonyítása tisztán ideálelméleti.

A 68. dolgozat a 65-nek fordítása.

A 69. dolgozat a 67-ben említett Hensel-féle tételnek igen egyszerű ideálelméleti bizonyítása Galois-testek esetére.

A 70. dolgozat a 62-nek eredményeit élesíti arra az esetre, amelyben a G_1, G_2 diszkriminánsai relatív prímek. Ekkor az ott tárgyalt kérdésekre pontos válasz adható, mégpedig

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, \quad g = g_1 g_2,$$

következőleg

$$e = e_1 e_2 (f_1, f_2).$$

A 71. dolgozat ismét a 62. problémájával foglalkozik, s különböző megszorító feltevések mellett tüzetesebb eredményt nyer.

A 72. dolgozat a 67, 69. dolgozatokban is tárgyalt Hensel-féle tételre (az általános esetben) igen egyszerű ideálelméleti bizonyítást ad.

A 73. dolgozat ugyancsak a 62-beli problémára vonatkozó speciális vizsgálatokat tartalmaz.

A 74. dolgozat a 72-nek fordítása, ezenkívül külön megjegyzést tartalmaz a Galois-testek esetéről.

A 75. dolgozat becses észrevételeket tartalmaz a számtest differensének kétféle (Dedekind- és Hilberttől származó) definíciójával, s a differenst és diszkriminánst illető egyéb kérdésekkel kapcsolatban. Igen jelentős egyik eredménye, hogy a 67. dolgozatban említett $v \leqq (s+1)g$ Hensel-féle megbecslés általában nem javítható, ellenben Galois-testekben $v < (s+1)g$.

A 76. dolgozat az ideálelmélet felhasználása nélkül bizonyítja azt az ismert tételt, hogy két algebrai számtest nem redukálja egymást, ha diszkriminánsuk relatív prím.

A 77. dolgozat a 44-ben végzett és 49-ben is felhasznált vizsgálatok segítségével a következő nevezetes feladat megoldását adja. Meghatározandók mindazok az n-edfokú számtestek, amelyekben adott p prímszám adott

$$p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \dots \mathfrak{p}_r^{g_r} \qquad (g_1 + \dots + g_r = n)$$

módon elsőfokú prímideálok szorzatára bomlik. Érdekes a dolgozatnak az a segédtétele is, hogy ha egy n-edfokú számtestben a q prímszám a

$$q = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_n$$

módon csupa különböző prímideál szorzatára bomlik és egy α egész elemére fennáll

$$\mathfrak{q}_1 | \alpha; \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_n \nmid \alpha,$$

akkor α primitív elem.

A 78. dolgozat igen becses összefüggéseket állapít meg az algebrai számtestek Hensel-féle és Dedekind—Hilbert-féle elmélete között. Legyen K az

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

racionális egész együtthatós egyenlet egyik gyökével definiált test és G ennek Galois-teste. Ha $\mathfrak{P}$ a p-nek egyik prímideáltényezője G-ben, akkor ehhez Kürschák szerint tartozik G-nek egy $\| \Phi \| = e^{-k}$ értékelése ($\Phi \in G, \neq 0$), ahol $\mathfrak{P}^k \| \Phi$. A megfelelő $G(\mathfrak{P})$ perfekt lezárás éppen a Hensel-féle $\mathfrak{P}$-adikus test, s ebben $f(x)$ lineáris tényezőkre bomlik. A $G(\mathfrak{P})$ a („racionális") p-adikus számtest fölött algebrai, s Galois-csoportja azonosnak tekinthető $\mathfrak{P}$-nek $\mathfrak{H}$ felbontási csoportjával, úgyhogy a H felbontási testnek $G(\mathfrak{P})$-vé való bővítésénél az elemek racionális p-adikus számokba mennek át, s $f(x)$-nek H-ban való irreducibilis tényezői átmenek a p-adikus irreducibilis tényezőkbe. Ha $\mathfrak{p}$ jelöli K-nak $\mathfrak{P}$-vel osztható prím-

ideálját, akkor $G(\mathfrak{P})$ éppen a hasonlóan képezett $K(\mathfrak{p})$-nek Galois-teste. Hilbertnek a $\mathfrak{H}$ feloldhatóságáról szóló tételéből folyik Henselnek (1918) ama tétele, hogy a p-adikus számtestben minden algebrai egyenlet feloldható.

A 79. dolgozat az előbbinek fordítása.

A 80. dolgozat a 74, 75. dolgozatok fordítása.

A 81. dolgozatban Bauer ismét az affektusnélküli egyenletekkel foglalkozik, s ezek elméletét jelentős eredménnyel viszi tovább, bármely adott K algebrai számtesthez megszerkesztve olyan racionális együtthatós $f(x)$ polinomokat, hogy az $f(x)=0$ egyenlet K fölött affektusnélküli. Bauer előtt csak az az eset volt tárgyalva, amelyben K a racionális számtest.

A 82. dolgozat jelentősen egyszerűsíti a Hensel-féle elméletet (l. a 78. dolgozat ismertetését), kimutatva, hogy a $K(\mathfrak{p})$ $\mathfrak{p}$-adikus számtest előáll a p-adikus számtestből K bármely primitív elemének adjunkciója által. Ez ma is a $\mathfrak{p}$-adikus testek legegyszerűbb konstrukciója.

A 83. dolgozat a 67, 75. dolgozatok ismertetésében említett $v \leqq s(g+1)$ Hensel-féle becslést a $g+1 \leqq v$ alsó becsléssel kiegészíti, s kimutatja azt az igen jelentős tényt, hogy általában ez nem javítható. Galois-testek esetén Hilbert szerint érvényes a $p^s > 2$ esetben élesebb $g+p^s-1 \leqq v$ alsó becslés.

A 84. dolgozat Bauernek igen fontos vizsgálatát tartalmazza, amelyben egyszerű utasítással megszerkeszti a $K(p)$ p-adikus számtest $\mathfrak{K}$ algebrai lezárását (itt K a racionális számtest) a K-nak $\bar{K}$ algebrai lezártja alapján (más szóval $\bar{K}$ az összes abszolút algebrai számok teste). Tekinti az algebrai számoknak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sorozatát, amelyre a $K(\alpha_i)$ testek Galois-félék, $K(\alpha_i) \subset K(\alpha_{i+1})$ és $\bar{K}$ minden eleme előfordul egy $K(\alpha_i)$-ben. Legyen továbbá $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ olyan prímideálsorozat, hogy $\mathfrak{p}_i | p$, $\mathfrak{p}_i \in K(\alpha_i)$, $\mathfrak{p}_{i+1} | \mathfrak{p}_i$. Ezután definiálja azt az $\|\omega\| = e^{-\frac{a_i}{e_i}}$ értékelést ($\omega \in \bar{K}, \neq 0$), amelyben $\mathfrak{p}_i^{a_i} \| \omega$, $\mathfrak{p}^{e_i} \| p$. (Ez az $\|\omega\|$ i-től független.) Akkor $\bar{K}$-nak $\|\omega\|$-ra vonatkozó lezárása éppen $\mathfrak{K}$.

A 85. dolgozat a 78-ban tárgyalt kérdéseknek a Hensel-féle elmélet erősebb kihasználásával való tárgyalása.

A 86. dolgozat a 44. ismertetésében említett e_i, a_i számok és a p-hez tartozó Puiseux-féle számok között bizonyos összefüggéseket állapít meg. Ezeket Ore egy csatlakozó cikkében általánosítja.

A 87. dolgozat igen becses egyszerűsítéssel mutatja ki, hogy az ideálnorma szokásos kétféle definíciója azonos eredményre vezet. Legyen $\mathfrak{a}(\neq 0)$ ideál egy algebrai számtestben, $N(\mathfrak{a})$ a mod $\mathfrak{a}$ maradékosztályok száma, $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ az a pozitív egész szám, amely (mint

főideál) egyenlő az $\mathfrak{a}$ konjugáltjainak szorzatával. Az állítás: $N(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$. Könnyű látni, hogy

$$N(\mathfrak{a}) | \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

Legyen $\mathfrak{b}$ olyan ideál, amelyre $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \gamma (\neq 0)$ főideál. Akkor

$$N(\mathfrak{b}) | \mathfrak{N}(\mathfrak{b}), \quad N(\gamma) = \mathfrak{N}(\gamma).$$

Továbbá

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\mathfrak{N}(\mathfrak{b}), \quad N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

Ezekből folyik az állítás.

A 88. dolgozatban Bauer bebizonyítja az

$$(x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{\delta} \equiv (x-1^n)(x-2^n)\dots(x-(p-1)^n) \pmod{p}$$

kongruenciát, ahol $\delta = (n, p-1)$, amelyről a mod p primitív számok ismerete nélkül leolvasható a mod p n-dik hatványmaradékok száma.

A 89. igen jelentős dolgozatban Bauer és Csebotareff a p-adikus számok segítségével Ore második főtételére rövid bizonyítást adnak. Tudvalevőleg Ore (1926—27) két főtételben véglegesen elintézte egy p prímszám faktorizációjának problémáját bármely K algebrai számtestre vonatkozóan, a következő módon: Legyen a K test definiálva egy $g(x) = 0$ racionális egész együtthatós algebrai egyenlettel, jelölje p^{δ} az $f(x)$ diszkriminánsában foglalt legnagyobb p-hatványt. A $g(x)$ polinomot faktorizáljuk mod p^{α} irreducibilis tényezőkre, ahol $\alpha > \delta$:

$$g(x) = g_1(x)\dots g_r(x) \pmod{p^{\alpha}}.$$

Legyen n_i a $g_i(x)$ fokszáma. Ore első főtétele kimondja, hogy p-nek prímideáltényezőkre való faktorizációja

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1}\dots\mathfrak{p}_r^{e_r},$$

ahol $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ különböző prímideálok, $\mathfrak{p}_i$ foka f_i, s (alkalmas sorrenddel) fennáll

$$e_i f_i = n_i.$$

A második főtétel magukat az e_i, f_i számokat is megadja. Mégpedig legyen p^{δ_i} a $g_i(x)$ diszkriminánsának pontos osztója, s bontsuk fel $g_i(x)$-et tovább irreducibilis tényezőkre:

$$g_i(x) \equiv g_{i1}(x, y)g_{i2}(x, y)\dots \pmod{p^{\alpha-\delta_i}, \varphi_i(y)},$$

ahol $\varphi_i(y)$ bármely n_i-edfokú irreducibilis polinom mod p. Akkor a jobboldali tényezők fokszáma e_i, a tényezők száma f_i. Bauer és Csebotareff igen rövid bizonyításának lényege, hogy $g(x)$-et előbb a p-adikus számtestben faktorizálják, majd az így előálló minden

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

egyes $h(x)$ p-adikus irreducibilis tényezőt a p^m-1-edik egységgyökök adjunkciójával tovább faktorizálják, ahol m a $h(x)$ fokszáma.

A 90. dolgozat a polinomokra vonatkozó Löwy-féle két reciprocitástétel rövid bizonyítását adja.

A 91. dolgozat a 90-beli bizonyítást tovább egyszerűsíti.

A 92. dolgozat kimutatja, hogy a körosztási polinomnak mod p^e való irreducibilis faktorizációja a véges testek elméletének felhasználálásával is nyerhető.

A 93. dolgozat újra foglalkozik a 66, 90. dolgozatok tárgyával, s azokra néhány további egyszerűsítést nyújt.

A 94. dolgozat a 76. fordítása.

A 95. dolgozat a legalább 5-ödfokú alternáló csoport egyszerűségét igen röviden bizonyítja. Referens e bizonyítás nyomán újabban még egyszerűbb bizonyítást nyert.

A 96. dolgozat néhány egyszerű megjegyzés ideálmodulusú polinomkongruenciákról.

A 97. dolgozat a 95-nek fordítása.

A 98. dolgozat Ore egyik tétele bizonyításának egyszerűsítésével foglalkozik, amely egy algebrai egész számmal generált gyűrű vezetőjének prímideálfelbontásáról szól.

A 99. dolgozat a 89. dolgozat kapcsán említett Ore-féle első főtétel eredeti bizonyításához becses kiegészítő megjegyzéseket fűz.

A 100. dolgozat több különböző értékes megjegyzést tartalmaz egy Van der Waerden-féle és egy I. Schur-féle tétellel kapcsolatban. E tételek elsője a Hilbert-féle felbontási- és tehetetlenségi csoportról szól, a második azt mondja ki, hogy ha egy n-edfokú K számtest D diszkriminánsára fennáll $p^n \mid D$, akkor Galois-csoportjának rendje p-vel osztható.

A 101. dolgozat új bizonyítást ad arra a tételre, hogy az n-edik körosztási test minimálbázisa $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{\varphi(n)-1}$, ahol ω n-edik primitív egységgyök.

A 102, 103. dolgozatok ismét a 62-beli tárggyal foglalkoznak (mint már a 70, 71, 73. dolgozatok is), s az eredmények további élesítését tartalmazzák, speciális esetként felölelve Moriya és Ore időközben nyert tételeit is. A 103. dolgozat bármely algebrai számtest esetét tekinti, a 102. a Galois-testek esetére egyszerűbben bizonyítja a 103. eredményeit.

A 104. dolgozat a 102-nek fordítása.

A 105. dolgozat a 103-nak fordítása.

A 106. dolgozatban, amely Bauer utolsó dolgozata, ismét visszatér az identikus kongruenciák tárgyára, mégpedig ezúttal a 88-beli eredményeit felhasználja Gupta egyik tételének egyszerűbb bizonyítására, amely az m-hez prím és m-nél kisebb természetes számok n-edik hatványösszegének mod m való viselkedéséről szól.

Bauer Mihály dolgozatainak jegyzéke:

1. Ferdén szimmetrikus helyettesítések elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 1 (1892), 356—359.
2. A karakterisztikus egyenletek elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 3 (1894), 293—298.
3. Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez. *Math. Phys. Lapok* 3 (1894), 368—372.
4. Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez. *Math. Phys. Lapok* 4 (1895), 331—336.
5. A négyzetes alakok elméletéhez. *Math. és Term. Értesítő* 13 (1895), 316—322.
6. Zur Theorie der quadratischen Formen. *Ungarische Berichte* 13 (1895), 37—44.
7. Számelméleti tételek I. *Math. Phys. Lapok* 5 (1896), 149—160.
8. Számelméleti tételek II. *Math. Phys. Lapok* 5 (1896), 265—272.
9. Elementar-zahlentheoretische Sätze. *Ungarische Berichte* 15 (1887), 41—46.
10. Adatok a végtelen szorzatok elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 7 (1898), 19—26.
11. A határ fogalmának általánosítása. *Math. Phys. Lapok* 7 (1898), 385—398.
12. Adalék a véges csoportok elméletéhez. *Math. és Term. Értesítő* 17 (1899), 611—617.
13. A törzsszámhatvány-rendű csoportok elméletéhez. *Math. és Term. Értesítő.* 18 (1900), 133—135.
14. Remarque sur la theorie des groupes finis. *Nouv. Ann.* 3, 19 (1900), 59—66.
15. Note sur les groupes d'ordre fini. *Nouv. Ann.* 3, 19 (1900), 508—509.
16. Note sur les groupes d'ordre px. *Nouv. Ann.* 3, 19 (1900), 509—511.
17. A véges csoportok elméletének újabb irodalmából. I. *Math. Phys. Lap.* 9 (1900), 101—109.
18. A véges csoportok elméletének újabb irodalmából II. *Math. Phys. Lap.* 9 (1900), 179—194.
19. A véges csoportok elméletének újabb irodalmából. III. *Math. Phys. Lap.* 9 (1900), 264—284.
20. A Fermat-féle kongruencia tétel elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 10 (1901), 145—152.
21. Az ideálelmélethez. *Math. Phys. Lapok* 10 (1901), 217—224.
22. A binom kongruenciák elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 10 (1901), 274—278.
23. Az irreducibilis egyenletek elméletéhez. *Math. és Term. Ért.* 20 (1902), 81—84.
24. Kronecker egy tételéről. *Math. és Term. Ért.* 20 (1902), 470—473.
25. Az összetett számtestekről. *Math. és Term. Ért.* 20 (1902), 474—476.
26. Sur les congruences identiques. *Nouv. Ann.* 4, 2 (1902), 256—264).
27. Zur Theorie der irreduziblen Gleichungen. *Ungarische Berichte* 20 (1902), 30—33.
28. Zur Theorie der binomischen Kongruenzen. *Ungarische Berichte* 20 (1902), 34—38.
29. Zur Theorie der höheren Kongruenzen. *Ungarische Berichte* 20 (1902), 39—42.
30. Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. *Ungarische Berichte* 20 (1902), 43—47.
31. A magasabbfokú kongruenciák elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 11 (1902), 28—33.
32. A számtani haladvány elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 11 (1902), 313—317.
33. A véges csoportok elméletének újabb irodalmából. IV. *Math. Phys. Lapok* 11 (1902), 340—345.
34. Az azonos kongruenciák elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 12 (1903), 159—161.
35. A geometriai szerkesztések elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 12 (1903), 251—255.

36. Zur Theorie der arithmetischen Progression. *Arch. der Math. und Phys.* 3, 5 (1903), 274—277.
37. Adalékok az irreducibilis egyenletek elméletéhez. I. *Math. Phys. Lapok* 13 (1904), 92—95.
38. Adalékok az irreducibilis egyenletek elméletéhez. II. *Math. Phys. Lapok* 13 (1904), 319—322.
39. Über einen Satz von Kronecker. *Arch. der Math. und Phys.* 3, 6 (1904), 218—219.
40. Über Kreisteilungsgleichungen. *Arch. der Math. und Phys.* 3, 6 (1904), 220.
41. Über Zusammengesetzte Körper. *Arch. der Math. und Phys.* 3, 6 (1904), 221—222.
42. Verallgemeinerung eines Satzes von Schönemann. *Journ. f. Math.* 128 (1905), 87—89.
43. Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen. *Journ. f. Math.* 128 (1905), 298—301.
44. Az algebrai mennyiségek általános elméletéhez. *Math. és Term. Tud. Ért.* 23 (1905), 127—138.
45. Vizsgálatok az 1-ből származó algebrai genusztartományok körében. I. *Math. Phys. Lapok* 14 (1905), 1—22.
46. Vizsgálatok az 1-ből származó algebrai genusztartományok körében. II. *Math. Phys. Lapok* 14 (1905), 88—109.
47. A számtani haladványról. *Math. Phys. Lapok.* 14 (1905), 313—318.
48. Über die aritmetische Reihe. *Journ. f. Math.* 131 (1906), 265—267.
49. Affektus nélküli egyenletekről. *Math. és Term. Ért.* 24 (1906), 30—33.
50. Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen. *Journ f. Math.* 132 (1907), 21—32.
51. Über Gleichungen ohne Affekt. *Journ f. Math.* 132 (1907), 33 35.
52. Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt. *Math. Annalen* (aus einem Briefe an Herrn Hilbert), 64 (1907), 325—327.
53. Über die außerwesentlichen Diskriminantenteiler erster Gattung. *Math. Annalen* 64 (1907), 573—576.
54. Az affektusnélküli egyenletek sűrűségéről. *Math. és Term. Ért.* 25 (1907), 82—85.
55. Elemi irreducibilitási vizsgálatok. *Math. és Term. Ért.* 25 (1907), 312—318.
56. A lényegtelen diszkrimináns osztókról. *Math. és Term. Ért.* 25 (1907), 359—362.
57. Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen. *Journ. f. Math.* 134 (1908), 15—22.
58. Lösung Zu 282 (P. Muth.) *Arch. d. Math. und Phys.* 3, 17 (1910), 252—253.
59. Zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Iteration. *Jahresber. d. Deutschen Math. Ver.* 25 (1916), 294—301.
60. Zur Theorie der arithmetischen Progression. *Arch. d. Math. und Phys.* 3, 25 (1916), 131—134.
61. Zur Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Math. Ann.* 77 (1916), 353—356.
62. Über zusammengesetzte Zahlkörper. *Math. Ann.* 77 (1916), 357—361.
63. Az algebrai számtestek elméletéhez. *Math. és Term. Ért.* 34 (1916), 90—103.
64. Az algebrai egyenletek valós gyökeinek meghatározása iterációval. *Math. Phys. Lapok* 26 (1917), 57—66.
65. Az alapegyenlet elméletéhez. *Math. Phys. Lapok* 26 (1917), 173—182.
66. Eine algebraische Behauptung von Gauß. *Jahresber. d. Deutschen Math. Ver.* 26 (1917), 348—349.
67. Vizsgálatok az algebrai számtest diszkriminánsáról. *Mat. és Term. Ért.* 36 (1918), 55—67.
68. Zur Theorie der Fundamentalgleichung. *Journ f. Math.* 149 (1919), 89—96.
69. Bemerkungen über die Differente des algebraischen Zahlkörpers. *Math. Annalen* 79 (1919), 321—322.

70. Bemerkungen über die Zusammensetzung der algebraischen Zahlkörpers. *Journ. f. Math.* 150 (1919—1920), 185—88.
71. Über relativ Galoische Zahlkörper. *Math. Annalen* 83 (1921), 70—73.
72. Über die Differente eines algebraischen Zahlkörpers. *Math. Annalen* 83 (1921), 74—76.
73. Relativ-Galois-féle számtestek összetétele. *Mat. és Term. Ért.* 38 (1921), 173—177.
74. Az algebrai számtest differenséről. *Mat. és Term. Ért.* 38 (1921), 178—181.
75. Az algebrai számtest differenséről és diszkriminánsáról. *Mat. és Term. Ért.* 38 (1921), 421—428.
76. Beweis von einigen bekannten Sätzen über zusammengesetzte Körper ohne Anwendung der Idealtheorie. *Jahresber d. Deutschen Math. Ver.* 30 (1921), 186—188.
77. Über ein Problem von Dedekind. *Acta Sci. Math* 1 (1922), 14—17.
78. Die Theorie der p-adischen, bzw. p-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. *Math. Zeitschr.* 14 (1922), 244—249.
79. A p-adikus, illetőleg p-adikus számok elmélete és a közönséges algebrai számtestek. *Mat. és Term. Ért.* 39 (1922), 54—60.
80. Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers. *Math. Zeitschr.* 16 (1923), 1—12.
81. Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt. *Math. Zeitschr.* 16 (1923), 318—319.
82. Über die Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers durch Henselsche Grenzwerte. *Acta Sci. Math.* 1 (1923), 74—79.
83. Bemerkungen zur Theorie der Differente. *Acta Sci. Math.* 1 (1923), 195—198.
84. Über die Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper. *Math. Zeitschr.* 19 (1924), 308—312.
85. Die Theorie der p-adischen bzw. p-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. II. *Math. Zeitschr.* 20 (1924), 95—97.
86. Zur Theorie der algebraischen Körper. *Acta Sci. Math.* 2 (1925), 69—71.
87. Über die Norm eines Ideals. *Abhandlungen d. Hamburger Akad. d. Wiss.* 5 (1927), 184.
88. Zur Theorie der identischen Kongruenzen. *Bull. Soc. Phys.-Math. Kazan* (3) 31 (1928), 23—24.
89. p-adischer Beweis des zweiten Hauptsatzes von Herrn Ore. (N. Csebotarevvel együtt.) *Acta Sci. Math.* 4 (1928), 56—57.
90. Bemerkung zur Algebra. *Acta Sci. Math.* 4 (1929), 244—245.
91. Über einen Takagischen Satz. (Aus einem Briefe an Herrn H. Hasse.) *Journ. f. Math.* 163 (1930), 249—250.
92. A primitív körosztási polinom elemi elméletéhez. *Mat. Fiz. Lapok* 37 (1930), 22—24.
93. Algebrai megjegyzések. *Mat. Fiz. Lapok* 28 (1931), 105—111.
94. Az összetett számtestre vonatkozó néhány ismeretes tétel bebizonyítása az ideálelmélet alkalmazása nélkül. *Mat. Fiz. Lapok* 38 (1931), 112—115.
95. Az alternáló csoportról. *Mat. Fiz. Lapok* 39 (1932), 25—26.
96. Elementare Bemerkung über identische Kongruenzen. *Acta Sci. Math.* 6 (1932), 46—48.
97. Über die alternierende Gruppe. *Acta Sci. Math.* 6 (1934), 222—223.
98. Über den Führer eines Ringes in algebraischen Zahlkörpern. *Duke Math. Journ.* 2 (1936), 578—580.
99. Bemerkungen zum Hensel-Oreschen Hauptsatze. *Acta Sci. Math.* 8 (1936), 64—67.
100. Bemerkungen über die Galoische Gruppe einer Gleichung. (Aus einem Briefe an Herrn B. L. van der Waerden. *Math. Annalen* 114 (1937), 352—354.
101. Zur Theorie der Kreiskörper. *Acta Sci. Math.* 9 (1939), 110—112.

102. Relativ Galois-féle algebrai számtestek összetételéről. *Mat. Fiz. Lapok* 46 (1939), 127—133.
103. Az algebrai számtestek összetételének elméletéhez. *Mat. Fiz. Lapok* 46 (1939), 134—139.
104. Über zusammengesetzte relativ Galoische Körper. *Acta Sci. Math.* 9 (1940), 206—211.
105. Über die Zusammensetzung algebraischer Zahlkörper. *Acta Sci. Math.* 9 (1940), 212—217.
106. Zur Theorie der identischen Kongruenzen. (Aus einem Briefe an Herrn G. H. Hardy.) *J. London Math. Soc.* 15 (1940), 82—84.

Egy Steinhaus-féle problémáról[1]

TURÁN PÁLTÓL

1. H. Steinhaustól származik a következő érdekes kérdés. Ha egy

$$1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \tag{1.1}$$

trigonometrikus sorról azt tudjuk, hogy *minden*

$$s_n(x) = 1 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx \tag{1.2}$$

részletösszege nemnegatív trigonometrikus polinom, azaz

$$s_n(x) \geqq 0 \qquad n = 0, 1, \ldots, \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi \tag{1.3}$$

akkor igaz-e, hogy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 ? \tag{1.4}$$

Steinhaus e problémához azon 30 év előtti tételével kapcsolatban jutott, mely szerint, ha trigonometrikus sor pl. mindenütt konvergens és összege pozitív, akkor a sor az összegfüggvény Fourier-sora. Így vetődött fel azon általánosabb kérdés is, hogy vajjon az (1.3) Steinhaus-premissza nem vonja-e maga után azt, hogy az (1.1) sor egy L-integrálható függvény Fourier-sora.

A kérdés nehézsége nyilván abban áll, hogy az (1.3) premissza nehezen fogható meg igazán jól. Valamivel könnyebben kezelhetőnek látszik az a módosított Steinhaus-féle premissza, mikor csupán egy n_0 pozitív egész létezését követeljük, hogy

$$s_n(x) \geqq 0, \quad n \geqq n_0, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi. \tag{1.5}$$

Ez esetben is valószínű, hogy (1.4) fennáll.

A kérdésre vonatkozó utolsó munkájában[2] Sidon Simon, a tragikuséletű kiváló magyar matematikus, egy (1.5)-nél is általánosabb premisszát vezetett be oly A állandó létezését követelvén, melyre

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)| dx \leqq A, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.6}$$

[1] Szerző előadása a varsói VIII. lengyel math. kongresszuson 1953. szept. 11-én.

[2] Über orthogonale Entwickelungen, Acta Litt. ac Scient. Szeged T. X-fasc. 3—4 (1943) p. 206—254.

Ha (1. 5) fennáll, akkor nyilván (1. 6) is igaz, de nem megfordítva. Hogy ezen premissza mellett (1. 4) igaz-e, az már kétséges.[3] Egy további enyhítése a Steinhaus-féle premisszának, ha csupán oly

$$n_1 < n_2 < \cdots \qquad < n_k < \cdots \tag{1. 7}$$

végtelen indexsorozat létezését követeljük, melyre

$$s_{n_\nu}(x) \geqq 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi. \tag{1. 8}$$

Ebben az esetben, mint Alexits György megjegyezte, a Riesz Frigyes által először tekintett formális szorzat

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \cos 4^\nu x)$$

ellenpéldát ad (1. 4)-re, mivel a $\cos 4^\nu x$-ek együtthatói $\nu = 1, 2, \ldots$-re 1 és a részletszorzatok könnyen láthatólag egyben részletösszegek is.

Hogy a probléma mély, azt az is mutatja, hogy, ha részletösszegek helyett Fejér-közepeket veszünk, akkor (1. 4) már az (1. 3) Steinhaus-premissza esetén sem igaz. U. i. az

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots \tag{1. 9}$$

sor elsőrendű közepei, mint jól ismert, nemnegatívok.

2. Hogy a kevesebbetmondó

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{2. 1}$$

fennáll, azt Sidon bizonyította be.[4] Sőt azon többetmondó tényt is kimutatta, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| = 0. \tag{2. 2}$$

E tétel egy általánosítását Erdős Pál[5] bizonyította be. Szerinte az (1. 3) Steinhaus-premisszából bármely $c > 0$ mellett legalább annyi következtethető, hogy „kevés" oly ν index van, melyre

$$|a_\nu| \geqq c. \tag{2. 3}$$

Pontosabban szólva az (1. 3) premissza teljesülése esetén azon $\nu \leqq n$ indexek száma, melyre (2. 3) teljesül, legfeljebb

$$(\log n)^{1+\frac{4}{c^2}}; \tag{2. 4}$$

[3] L. c. [2] p. 242—243.

[4] Acta Litt. ac Scient. Szeged. T. II. p. 43—47. Szerinte (2. 1)-et előtte Neumann János és J. Schur is bebizonyították, de bizonyításaikat nem publikálták.

[5] Revista de la Univ. Nac. de Tucuman. Vol. I. (1940) p. 217—220.

$\log n$ itt kettes alapú logaritmust jelent. E tételből Sidon tétele a következőkép nyerhető. Rögzítve egy tetszőleges kis pozitív ε-t a $\nu \leqq n$ indexeket osszuk két osztályba, A és B-be aszerint, hogy $|a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$, ill. $|a_\nu| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor nyilván

$$\sum_{\nu \in A} |a_\nu| \leqq \frac{\varepsilon}{2} n. \tag{2.5}$$

Minden fix $k \geqq 1$-re

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_k(x) \cos kx \, dx,$$

azaz tekintve $s_k(x)$ nemnegativitását,

$$|a_k| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |s_k(x)| \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = 2,$$

tekintve az (1.2) normirozást.[6] Ezt és (2.4)-et használva

$$\sum_{\nu \in B} |a_\nu| < 2 \log^{1+\frac{16}{\varepsilon^2}} n. \tag{2.6}$$

Tehát ebből és (2.5)-ből

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu \leqq n} |a_\nu| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{n} \log^{1+\frac{1}{\varepsilon^2}} n; \tag{2.7}$$

ha tehát n oly nagy, hogy

$$\frac{2}{n} \log^{1+\frac{1}{\varepsilon^2}} n \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor (2.7) épp Sidon tételét adja ki. Mint könnyen látható volna, Erdős tételéből

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| < 5n \sqrt{\frac{\log \log n}{\log n}} \tag{2.8}$$

egyenlőtlenség is levezethető volna.

Sidon tételének egy további általánosítása A. Selbergtől származik.[7] Eszerint az (1.3) Steinhaus-premissza mellett van oly

[6] Fejér egy megjegyzése szerint még $|a_k| \leq 1$ is igaz. L. Pólya—Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. II. p. 274.

[7] Tudomásom szerint e tétel eddig nem lett publikálva. Hozzám szóbeli közléssel jutott.

$0 < \vartheta < 1$, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^{\vartheta}} < \infty. \tag{2. 9}$$

Ebből rögtön következik a Cauchy—Bunyakovszki-egyenlőtlenség alkalmazásával, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\nu^{\frac{\vartheta}{2}}\right)\left(\frac{|a_\nu|}{\nu^{\frac{\vartheta}{2}}}\right) \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\vartheta}} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^2}{\nu^{\vartheta}}} < c n^{\frac{1+\vartheta}{2}},$$

azaz van oly $0 < \delta < 1$, hogy

$$\frac{1}{n^{\delta}} \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| < \infty. \tag{2. 10}$$

Viszont Erdős és A. Selberg fenti tételei közül egyik se fedi a másikat.

3. Ugyancsak A. Selbergtől való azon megjegyzés, hogy egy trigonometrikus sor, melyre az (1. 3) Steinhaus-tulajdonság teljesül, nem szükségkép egy L^4-osztályú függvény Fourier-sora. A következőkben két többetmondó tételt mutatunk ki, melyek elsője az (1. 3), másika az (1. 5) módosított Steinhaus-premisszára vonatkozik.

I. tétel: Létezik oly $\Sigma a_n \cos nx$ trigonometrikus sor, melynek minden részletösszege nemnegatív és melyre Σa_n^2 divergens.

Tehát a sor nem lehet egy L^2-osztályhoz tartozó függvény Fourier-sora.

II. tétel: Ha a pozitív $\alpha < 1$ olyan, hogy

$$\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 2\pi^{\alpha-1}, \tag{3. 1}$$

akkor található oly $\Sigma b_n \cos nx$ trigonometrikus sor, melynek minden elég nagy indexű részletösszege nemnegatív és melyre a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3. 2}$$

sor divergens.

$\alpha = \frac{1}{2}$-re $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ miatt (3. 1) nyilván teljesül; tehát van oly $\beta_0 > 2$, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\beta_0}$ divergens, pedig a $\Sigma b_n \cos nx$ sor minden elég nagy indexű részletösszege nemnegatív. További megjegyzéseket ezzel kapcsolatban a 9. pontban fogunk látni.

Rögtön látható, hogy az előző pontok tételeiből semilyen fix pozitív k létezésére nem lehet következtetni arra, hogy minden (1. 1) sorra, mely (1. 3) alatti Steinhaus-tulajdonsággal bír, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^k$ sor konvergens volna, hiszen e tételek egyike se tudja kizárni azt a lehetőséget, hogy végtelen sok együttható 1 legyen (bár igen ritka indexsorozatra). Nagyon valószínű, hogy ilyen k nincs is, tehát tetszőleges nagy pozitív k-hoz található oly $\Sigma a_n \cos nx$ sor, melyre (1. 3) premissza fennáll és $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^k$ divergens. Ennek bizonyítása igen érdekes volna; ez a Young—Hausdorff-tétel szerint azt jelentené, hogy a látszólag erős (1. 3) megkötés mellett még az sem biztosítható, hogy a sor egy L_p-osztálybeli függvény Fourier-sora, ahol $p > 1$.

4. Az I. és II. tétel bizonyításához két segédtételre lesz szükség. Az első segédtétel a

$$c_n = \left|\binom{-\alpha}{n}\right| = \binom{\alpha+n-1}{n} \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4. 1}$$

számokra vonatkozik, ahol $0 < \alpha < 1$. Mivel c_n nyilván

$$c_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \tag{4. 2}$$

alakban írható, tehát a Stirling-formula alkalmazásával $n \to \infty$-re

$$c_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{4. 3}$$

Az első segédtétel azt fogja mondani, hogy a c_n-ek az aszimptotikus értéküknél kisebbek, azaz [8] $0 < \alpha < 1$-re

$$c_n = \binom{\alpha+n-1}{n} \leqq \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{4. 4}$$

Mielőtt az első segédtételt bebizonyítanánk, szükség van egy egyszerű egyenlőtlenségre. Mivel $0 < \alpha < 1$, tehát az $(1+x)^\alpha$ függvény $x > 0$-ra felülről konvex, tehát az $x = 0$-hoz tartozó érintő

[8] Hogy ezen egyenlőtlenség ismert-e, nem tudom. Az $\alpha = \frac{1}{2}$ esetben megtalálható pl. Szász Pál: „A differenciál- és integrálszámítás elemei" c. könyve második kiadás I. kötetének 405. oldalán az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ vizsgálatán át bizonyítva.

fölötte halad, azaz

$$(1+x)^{\alpha} \leqq 1+\alpha x,$$

ill. pozitív egész n-re

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \leqq 1+\frac{\alpha}{n}, \qquad \frac{(n+1)^{\alpha}}{n+\alpha} \leqq n^{\alpha-1}. \tag{4.5}$$

Ezután rátérhetünk az első segédtétel bizonyítására, mely a teljes indukció egy sajátságos módjával fog történni. A (4. 3) alatti aszimptotikus előállításból, ha ε tetszőleges kis pozitív szám, akkor $n \geqq n_0+1$-re, ahol $n_0 = n_0(\varepsilon)$

$$c_n \leqq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon\right) n^{\alpha-1}. \tag{4.6}$$

De ekkor azt állítjuk, hogy $n = n_0$-ra is igaz a (4. 6) egyenlőtlenség, ha $n_0 \geqq 1$. U. i. (4. 1)-ből nyilván

$$c_{n+1} = \frac{\alpha+n}{n+1} c_n, \tag{4.7}$$

azaz

$$c_{n_0} = \frac{n_0+1}{n_0+\alpha} c_{n_0+1}.$$

c_{n_0+1}-re alkalmazható (4. 6) az indukciós feltevés értelmében, azaz

$$c_{n_0} \leqq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon\right) \frac{(n_0+1)^{\alpha}}{n_0+\alpha}.$$

De (4. 5)-ből

$$c_{n_0} \leqq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon\right) n_0^{\alpha-1},$$

azaz ezt folytatva adódik *minden* pozitív egész n-re

$$c_n \leqq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon\right) n^{\alpha-1}.$$

Mivel ε tetszőleges kis pozitív érték volt, ebből az első segédtétel máris következik.

5. A második segédtétel azt fogja kimondani, hogy a

$$g(x) = d_0 + d_1 \cos x + \cdots + d_n \cos nx \tag{5.1}$$

pozitív monoton fogyó (ill. nemnövekvő) együtthatós trigonometrikus polinom nem tűnhet el a

$$0 < x < \frac{\pi}{n} \tag{5.2}$$

közben. Megjegyezhetjük — bár ennek már tételeink bizonyításánál nincs jelentősége — hogy az (5. 2) intervallum nem helyettesíthető nagyobbal. U. i. $n \geqq 1$-re a

$$g_0(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$$

polinom a kikötéseknek megfelel és

$$g_0(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{n}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

azaz $x = \frac{\pi}{n}$-re már eltűnik. Hogy $g(x)$ a kisebb $0 \leqq x < \frac{\pi}{2n}$ közben nem tűnik el, az triviális; ez azonban célunkhoz nem volna elég.

A második segédtétel bizonyítására írjuk az (5. 1) alatti $g(x)$-et

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} d_\nu \cos \nu x + \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} d_\nu \cos \nu x$$

alakba. Jegyezzük meg, hogy az első összeg tagjainak száma legalább akkora, mint a másodiké és az első összeg tagjai nem negatívok. Ha tehát a második összeg $d_\nu \cos \nu x$ tagját összefogjuk az elsőnek $d_{n-\nu} \cos (n-\nu)x$ tagjával, akkor

$$g(x) \geqq \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} (d_\nu \cos \nu x + d_{n-\nu} \cos (n-\nu)x). \tag{5. 3}$$

De nyilván

$$0 < (n-\nu)x < \frac{\pi}{2},$$

továbbá

$$(n-\nu)x < \nu x < \pi - (n-\nu)x,$$

tehát

$$|\cos \nu x| < |\cos (n-\nu)x| = \cos (n-\nu)x. \tag{5. 4}$$

Továbbá az együtthatók monotonitásából

$$d_\nu \leqq d_{n-\nu},$$

azaz ebből és (5. 4)-ből következőleg (5. 3) minden zárójeles kifejezése nemnegatív. De ezzel már a második segédtétel igazolva is van.

6. Ezután már rátérhetünk a kimondott tételek igazolására; a két tétel bizonyítása csak a végén válik majd szét. Mint tudjuk,

$|z|<1$-re, a (4. 1) alatti jelöléssel

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{-\alpha}{\nu}z^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\binom{-\alpha}{\nu}\right|z^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}z^{\nu}=(1-z)^{-\alpha},\qquad(6.1)$$

ahol a hatvány azon értéke veendő a jobboldalon, melynek értéke 1, ha $z=0$. Mivel a c_{ν}-együtthatók pozitív és monoton nullsorozatot alkotnak, tehát Abel—Schloemilch tétele szerint (6. 1) baloldali sora $z=e^{it}$-re is konvergál, ha $t\not\equiv 0 \bmod 2\pi$. De ekkor az Abel-féle hatványsortétel értelmében

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}e^{i\nu t}=(1-e^{it})^{-\alpha},\qquad 0<t<2\pi.$$

Mindkét oldalon a reális részt véve $0<t<2\pi$-re

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}\cos\nu t=\Re(1-e^{it})^{-\alpha}=\Re\left\{e^{-i\frac{\alpha t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}\right)^{-\alpha}\right\}=$$

$$=\Re\left\{e^{-i\frac{\alpha t}{2}}\left(-2i\sin\frac{t}{2}\right)^{-\alpha}\right\}=\Re\frac{e^{i(\pi-t)\frac{\alpha}{2}}}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(\pi-t)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha}}.\qquad(6.2)$$

(4. 3)-ból könnyen következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^{\frac{1}{1-\alpha}}$ sor divergens; tehát tételeink bizonyítására elég kimutatni, hogy $\alpha=\frac{1}{2}$-re a (6. 2) sor minden részletösszege, oly pozitív $\alpha<1$-ekre pedig, melyekre $\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}>2\pi^{\alpha-1}$, minden elég nagy indexű részletösszege nemnegatív trigonometrikus polinom.

7. Legyen előbb $\alpha=\frac{1}{2}$ és

$$g_n\left(x,\frac{1}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}c_{\nu}\cos\nu x.\qquad(7.1)$$

Ha $n\leqq 2$, az állítás evidens, hiszen

$$g_n\left(x,\frac{1}{2}\right)\geqq 1-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}>0.$$

Mivel (4. 7) alapján az együtthatók monoton fogynak, a második segédtétel alapján $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{n}$-re az állítás igazolva van. Feltehető

tehát, hogy mivel $g_n\left(x, \frac{1}{2}\right)$ páros,

$$n \geqq 3, \qquad \frac{\pi}{n} < x \leqq \pi. \tag{7.2}$$

(6.2) alapján

$$g_n\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\pi - x}{4}}{\sqrt{2\sin\frac{x}{2}}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \cos \nu x > \frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{x}{2}}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \cos \nu x. \tag{7.3}$$

Foglalkozzunk a második rész felső becslésével. Ha

$$s_\nu = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos \nu x \qquad \nu = 0, 1, \ldots$$

akkor, mint ismert, $0 < x < 2\pi$-re

$$|s_\nu| = \left| \frac{\sin\frac{2\nu+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leqq \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{7.4}$$

Parciális összegezéssel, ha $N > n$,

$$\sum_{\nu=n+1}^{N} c_\nu \cos \nu x = c_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \cdots + c_N(s_N - s_{N-1}) = -c_{n+1}s_n + (c_{n+1} - c_{n+2})s_{n+1} + \cdots + (c_{N-1} - c_N)s_{N-1} + c_N s_N.$$

Mivel $N \to \infty$-re $c_N \to 0$ és (7.4) alapján s_N egy N-től független korlát alatt marad, így

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \cos \nu x \right| \leqq \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(c_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \right) = \frac{c_{n+1}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{7.5}$$

Ebből, az első segédtételből és (7.3)-ból, tekintve, hogy $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, nyerjük, hogy

$$g_n\left(x, \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{x}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} > \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi n \sin\frac{x}{2}}} \right). \tag{7.6}$$

Ebből azonban a I. tétel könnyen nyerhető. Legyen először

$$\frac{4}{n} < x \leqq \pi.$$

Ekkor

$$\sin\frac{x}{2} \geqq \frac{x}{\pi} > \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n},$$

ill.

$$\sqrt{\pi n \sin\frac{x}{2}} > 2, \tag{7.7}$$

azaz (7.6)-ból $g_n\left(x, \frac{1}{2}\right) > 0$. Legyen végül

$$\frac{\pi}{n} < x \leqq \frac{4}{n},$$

ami a legkritikusabb rész[9]. Ekkor, mivel $x > 0$-ra

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

tehát

$$\sin\frac{x}{2} \geqq \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} \geqq \frac{x}{2}\left(1 - \frac{1}{24}\cdot\frac{16}{n^2}\right) \geqq \frac{\pi}{2n}\left(1 - \frac{2}{3n^2}\right),$$

azaz $n \geqq 2$-re

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n \sin\frac{x}{2}}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi^2\left(1 - \frac{2}{3n^2}\right)}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi^2\left(1 - \frac{1}{6}\right)}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{12}{5}} < \frac{1}{2}. \tag{7.8}$$

Tehát az első tétel igazolva van.

8. A második tétel bizonyítására legyen α olyan hogy

$$\alpha > \frac{1}{2}, \qquad \Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2} > 2\pi^{\alpha-1}. \tag{8.1}$$

Ekkor (6.2)-ből

$$g_n(x, \alpha) > \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\binom{-\alpha}{\nu}\right|\cos\nu x.$$

[9] Ha pl. a $c_\nu \leqq \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}$ egyenlőtlenség helyett csupán a $c_\nu \leqq \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$ egyenlőtlenség állott volna rendelkezésre, akkor fenti gondolatmenet nem vezetett volna célhoz.

A második részre parciális összegezést alkalmazva, mint (7. 5)-ben, adódik

$$g_n(x, \alpha) > \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha}} - \frac{\left|\binom{-\alpha}{n+1}\right|}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Az első segédtételből

$$g_n(x, \alpha) > \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha}} - \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha}}\left\{\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{2^{\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\left(n\sin\frac{x}{2}\right)^{1-\alpha}}\right\}.$$

Ha először

$$\frac{\pi\cdot 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\cdot\frac{1}{n} < x \leqq \pi,$$

akkor az állítás minden $n \geqq 3$-ra ugyanúgy következik, mint α-ban. Ha a (3. 1) alatti valamilyen α-ra

$$\left(\frac{\pi 2^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqq \pi, \tag{8. 2}$$

akkor ezen α mellett a II. tétel *minden* $n \geqq 3$-re igazolva volna. Feltehető tehát, hogy (8. 2) ellenkezője áll és hogy

$$n \geqq 3, \qquad \frac{\pi}{n} \leqq x \leqq \left(\frac{\pi 2^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Hogy ez esetben az *elég magas indexű* részletösszegek nemnegatívok, az (7. 8)-el teljesen analóg módon látható be. Ezzel a II. tétel is igazolva van.

9. Tekintsük a Steinhausénál valamivel lazább (1. 5) feltételt. Kézenfekvő volna azt gondolni, hogy pl. a

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log(n+2)}$$

sor kielégíti a feltételt, ami máris igazolná a 3. pontban kifejezett

sejtést. Ez azonban legalább is mélyebben fekszik, mint a II. tétel. U. i. mint ismert[10], $x \to 0$-ra

$$h(x) \sim \int_0^{1/x} \frac{dt}{\log^2 \frac{1}{t}} \sim \frac{1}{x \log^2 \frac{1}{x}}.$$

Tehát $h(x)$ sorának n-ik részletösszegét $h_n(x)$-el jelölve kis x-ekre

$$h_n(x) \sim \frac{1}{x \log^2 \frac{1}{x}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\cos n x}{\log (n+2)}.$$

Az utolsó összegre a (7. 5)-nek megfelelő becslést alkalmazva $0 < x < x_1(\varepsilon)$-ra

$$h_n(x) > \frac{1-\varepsilon}{x \log^2 \frac{1}{x}} - \frac{1}{\log (n+3) \sin \frac{x}{2}}.$$

Ez a nemnegatívitást csupán oly x-ekre adja ki, melyekre „kb."

$$\frac{1-2\varepsilon}{\log^2 \frac{1}{x}} > \frac{1}{\log n},$$

azaz x kb. nagyobb, mint $e^{-\sqrt{\log n}}$. Tehát a $\frac{\pi}{n} \leqq x \leqq e^{-\sqrt{\log n}}$ köz nem uralható így.

РЕЗЮМЕ

Данная проблема относится к следующему вопросу: следует ли из неотрицательности частных сумм условного ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x$$

(условие Штейнгауса), что $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ или же в общем случае, что ряд представляет собою интегрируемую функцию ряда Фурье. В данной работе на подходящем примере показано, что при условии Штейнгауса Σa_ν^2 может расходиться, более того, если мы желаем достигнуть неотрицательности всех частных сумм с дотаточно высоким индексом, то может расходиться даже и ряд

$$\sum |a_\nu|^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

[10] Salem egy tételének speciális esete. L. pl. A. Zygmund: Trigonometrical series. p. 115.

если только $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ и

$$\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 2\pi^{\alpha-1}.$$

Упомянутые выше примеры имеют вид

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{-\beta}{\nu} \cos \nu x.$$

Для доказательства необходимо иметь 2 леммы. Согласно первой леммы, если $0 < \gamma < 1$, то

$$\binom{\gamma+n-1}{n} \leqq \frac{n^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

А согласно второй леммы, если коэффициенты косинусного полинома порядка n образуют положительный, невозрастающий нулевой ряд, то полином не исчезает при

$$-\frac{\pi}{n} < x < \frac{\pi}{n}.$$

SUMMARY

The problem in question is whether or not the nonnegativity of all partial-sums of the formal series $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu x$ (Steinhaus-condition) implies the relation $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ or more generally that the series is the Fourier-series of an integrable function. In this paper is shown by example that a trigonometrical series satisfying the Steinhaus-condition not necessarily belongs to the class L^2, i. e. Σa_n^2 can diverge. If we require only that all partial-sums with sufficiently large index should be nonnegative, then it is shown by example that also the series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{1}{1-\alpha}}$ can be divergent if only $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ and

$$\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 2\pi^{\alpha-1}.$$

The examples are all of the form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{-\beta}{\nu} \cos \nu x;$$

in particular the apparently new property of the Mac-Laurin series of $\sqrt{1-z}$ is proved that the real part of every partial-sum is nonnegativ for $|z| \leqq 1$. The proofs require two lemmas. The first asserts that for $0 < \gamma < 1$ the inequality

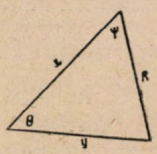
$$\binom{\gamma+n-1}{n} \leqq \frac{n^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

holds. According to the second lemma a cosine-polinomial of order n with positive non-increasing coefficients does not vanish for $-\frac{\pi}{n} < x < \frac{\pi}{n}$.

Néhány, a Bessel-függvényekkel kapcsolatos végtelen sorról

FENYŐ ISTVÁN

Az alábbiakban néhány, a Bessel-függvényekkel kapcsolatos végtelen sor összegét állapítjuk meg. E sorokhoz a Bessel-függvényekre vonatkozó úgynevezett addiciós tételek vezetnek. Ezen addiciós tételek egyik csoportját a Graf-féle képletek[1] fejezik ki, melyek a következő módon írhatók fel:



Egy háromszög két szöge legyen θ és ψ, a θ szöggel szemközti oldal legyen R, a ψ szöggel szemközti oldal hosszúsága y. A háromszög harmadik oldala legyen x. Akkor

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}.$$

Mármost a Graf-féle-tétel szerint

$$J_\nu(R)\cos\nu\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{\nu+m}(x)\,J_m(y)\cos m\theta \qquad (1)$$

és

$$J_\nu(R)\sin\nu\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{\nu+m}(x)\,J_m(y)\sin m\theta \qquad (2)$$

$J_k(t)$ az elsőfajú Bessel-féle függvények, ν pedig akármilyen $-\frac{1}{2}$-nél nagyobb számot jelenthet. Rögzítsük x és y-t és változtassuk θ-t. Akkor az (1) és (2) sorok θ-ban egyenletesen konvergensek.

[1] Graf: Math. Ann. XLIII. 1893. 142—144 old.

Figyelembe véve azt, hogy a $\cos m\theta$ és $\sin m\theta$ függvények a $(0, \pi)$ intervallumban ortogonálisak, azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} J_\nu(R)\cos\nu\psi\cos m\theta d\theta = J_{\nu+m}(x)J_m(y)+J_{\nu-m}(x)J_{-m}(y)$$

és

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} J_\nu(R)\sin\nu\psi\sin m\theta d\theta = J_{\nu+m}(x)J_m(y)-J_{\nu-m}(x)J_{-m}(y).$$

Adjuk össze e két egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_\nu(R)\cos(\nu\psi-m\theta)d\theta = J_{\nu+m}(x)J_m(y).$$

Ez x és y-ban azonosság. A J_ν Bessel-függvény pozitív gyökei legyenek (növekvő nagyság szerint felírva)

$$\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \ldots, \lambda_{\nu i}, \ldots .$$

Ha az előbbi összefüggésben x helyébe $\lambda_{\nu i}x$-et és y helyébe $\lambda_{\nu i}y$-t írunk, akkor a szóbanforgó összefüggés nyilván érvényes marad, mert ezáltal e dolgozat elején említett háromszög θ és ψ szögei változatlanok maradnak. Az is nyilvánvaló, hogy e helyettesítés révén R-ből $\lambda_{\nu i}R$ lesz. Így tehát

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_\nu(\lambda_{\nu i}R)\cos(\nu\psi-m\theta)d\theta = J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}x)J_m(\lambda_{\nu i}y),$$

vagy pedig

$$\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{2J_\nu(\lambda_{\nu i}R)}{\lambda_{\nu i}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})}\cos(\nu\psi-m\theta)d\theta = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}x)J_m(\lambda_{\nu i}y)}{\lambda_{\nu i}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})}.$$

Vegyük figyelembe, azt a közismert tényt,[2] hogy

$$f' = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\lambda_{\nu i}t)}{\lambda_{\nu i}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})}$$

egyenletesen konvergens a $[\delta, 1-\delta]$ zárt intervallumban, ahol δ

[2] Lásd például: Г. П. Толстов: Ряды Фурье. 1951. 282. old.

akármilyen egynél kisebb pozitív szám, ha $\nu > -\frac{1}{2}$. Legyen $0 < \delta \leqq x \leqq \frac{1}{2} - \delta$ és $0 < \delta \leqq y \leqq \frac{1}{2} - \delta$, akkor nyilván R a $(0, 1)$ számköz egy zárt rész-intervallumába esik és ezért

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_{\nu i} R)}{\lambda_{\nu i} J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = R^\nu$$

sor egyenletesen konvergens, tehát megengedett az előbbi képletben az integrálás és szummázás műveletének felcserélése. Írhatjuk tehát

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} R^\nu \cos(\nu\psi - m\theta) d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i} x) J_m(\lambda_{\nu i} y)}{\lambda_{\nu i} J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} \begin{pmatrix} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

A (3) alatti képlet önmagában is érdekesnek látszik, de érdekesebbek speciális esetei.

Legyen pl. $\nu = 0$, akkor a baloldali integrál nyilván 0 és kapjuk azt, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{0i} x) J_m(\lambda_{0i} y)}{\lambda_{0i} J_1(\lambda_{0i})} = 0. \qquad \begin{pmatrix} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{pmatrix}$$

A (3) képletben legyen $x = y$. Ekkor egyrészt

$$R = x\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 2x \sin\frac{\theta}{2},$$

másrészt $\frac{\theta}{2} + \psi = \frac{\pi}{2}$. Ebben a speciális esetben (3) baloldalán lévő integrálba vezessük be új változóként a ψ-t, így azt kapjuk, hogy

$$(-1)^m \frac{2^\nu x^\nu}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\nu \psi \cos(\nu + 2m)\psi d\psi = \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i} x) J_m(\lambda_{\nu i} y)}{\lambda_{\nu i} J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})}.$$

Ha $m=0$, akkor figyelembe véve a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu}\psi \cos\nu\psi d\psi = \frac{\pi}{2^{\nu+1}}$$

képletet[3] a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_{\nu i}x)\,J_0(\lambda_{\nu i}x)}{\lambda_{\nu i}\,J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = \frac{x^\nu}{2} \qquad \left(0<x<\frac{1}{2}\right)$$

érdekes eredményre jutunk.

Érdekes a $\nu=0$ eset kiemelése:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{0i}x)^2}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{1i})} = \frac{1}{2}. \qquad \left(0<x<\frac{1}{2}\right)$$

A (4) alatti képletben írjunk m helyébe $-m$-et $(m>0)$:

$$\frac{2^\nu x^\nu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu}\psi \cos(\nu-2m)\psi d\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}x)\,J_m(\lambda_{\nu i}x)}{\lambda_{\nu i}\,J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})}.$$

Ha itt $\nu=2m$, akkor

$$\frac{2^{2m}x^{2m}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\psi d\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{2mi}x)^2}{\lambda_{2mi}J_{2m+1}(\lambda_{2mi})}.$$

Ismeretes, hogy[4]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\psi d\psi = 2^{2m-1}B\left(\frac{2m+1}{2},\frac{2m+1}{2}\right) = \frac{\pi(2m-1)!}{2^{2m}m(m-1)!},$$

ezért

$$\frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!}x^{2m} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{2mi}x)^2}{\lambda_{2mi}J_{2m+1}(\lambda_{2mi})}.$$

Hasonló típusú, de más összeg-képleteket nyerünk, ha egy másik addiciós tételből indulunk ki. Ez az addiciós képlet:

$$\frac{J_\nu(R)}{R^\nu} = 2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^\nu}\frac{J_{\nu+m}(y)}{y^\nu}C_m^\nu(\cos\theta), \qquad (5)$$

[3] Lásd például: Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления. II. kötet. 1948. 153. oldal.

[4] D. Bierens de Haan: Nouvelles tables d'intégrales définies 1867. 41. old.

ahol $C_m^\nu(\cos\theta)$ a $(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{-\nu}$ függvénynek α hatványai szerinti hatvány sorfejtésében az α^m együtthatója[5] ($\nu \neq 0, -1, -2, \ldots$). A $C_m^\nu(\xi)$ függvényt magasabb gömbfelületi-, vagy Gegenbauer-függvénynek nevezik. A C_m^ν függvények egy ortogonális függvényrendszert képeznek a következő értelemben[6]

$$\int_{-1}^{+1} C_m^\nu(\xi) C_n^\nu(\xi)(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi = \int_0^\pi C_m^\nu(\cos\theta)\, C_n^\nu(\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ ha } m \neq n \\ \dfrac{\pi\Gamma(2\nu+m)}{2^{2\nu-1} m!(\nu+n)\Gamma(\nu)^2}, & \text{ha } m = n. \end{cases}$$

Az (5) alatti függvénysor rögzített x és y mellett θ-ban egyenletesen konvergens, szorozzuk végig $C_m^\nu(\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta$-val és integráljuk 0-tól π-ig tagonként:

$$\int_0^\pi \frac{J_\nu(R)}{R^\nu} C_m^\nu(\cos\theta)\, \sin^{2\nu}\theta d\theta = \frac{\pi\Gamma(2\nu+m)}{2^{\nu-1} m!\,\Gamma(\nu)} \frac{J_{\nu+m}(x) J_{\nu+m}(y)}{x^\nu y^\nu}.$$

Most ismét az előbbiekhez hasonlóan járunk el: x és y számok tartozzanak a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ számköz belsejébe és írjunk x helyébe $\lambda_{\nu i} x$, y helyébe $\lambda_{\nu i} y$-t. Az így kapott képletet osszuk el $\lambda_{\nu i} J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})$-vel és összegezzük i szerint. Ezáltal az

$$x^\nu y^\nu \int_0^\pi C_m^\nu(\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta d\theta = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i} x) J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i} y)}{\lambda_{\nu i}^{\nu+1} J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})}$$

eredményhez jutunk. A λ és y-tól független állandó, mely m és ν-től függ csupán.

Figyelembe véve azt, hogy $C_0^\nu \equiv 1$ és a $\{C_m^\nu\}$ függvénysorozat ortogonális, következik, hogy a baloldali integrál 0, így tehát

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i} x) J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i} y)}{J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i}) \lambda_{\nu i}^{\nu+1}} = 0 \qquad \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ \nu \neq 0, -1, -2, \ldots \\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

[5] G. N. Watson: A treatise on the Theory of Bessel-functions. 1952. 363. old.

[6] J. Lense: Kugelfunktionen. 1950. 290—291. old.

О НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫН РЯДАХ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ

(Р е з ю м е)

Обсуждается доказательство некоторых зависимостей, связанных с функцией Бесселя. Если Бесселевы функции первого рода выражены $J_\nu(x)$, и если положительный корень $\lambda_{\nu n}$ является J_ν, то действительны, например, следующей формы зависимости:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{0i}x)J_m(\lambda_{0i}y)}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{0i})} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ m \text{ целое } \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_{\nu i}x)J_0(\lambda_{\nu i}x)}{\lambda_{\nu i}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = \frac{x^\nu}{2} \qquad \left(0 < x < \frac{1}{2};\ \nu > -\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{0i}x)^2}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{0i})} = \frac{1}{2} \qquad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{2mi}x)^2}{\lambda_{2mi}J_{2m+1}(\lambda_{2mi})} = \frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!}x^{2m} \qquad \begin{pmatrix} 0 < x < \frac{1}{2} \\ m \text{ целое } \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}x)J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}y)}{\lambda_{\nu i}^{\nu+1}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ \nu \neq 0, -1, -2, \ldots \\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

ÜBER EINIGE UNENDLICHE REIHEN DIE MIT DEN BESSELSCHEN FUNKTIONEN IN BEZUG SIND

(Zusammenfassung)

Es werden manche Formeln bezüglich der Besselschen Funktionen bewiesen. Bezeichnen wir mit $J_\nu(x)$ die Besselschen Funktionen erster Art, mit $\lambda_{\nu n}$ positiven Wurzeln von J_ν, so bestehen z. B. folgende Relationen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{0i}x)J_m(\lambda_{0i}y)}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{0i})} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0<x<\frac{1}{2} \\ 0<y<\frac{1}{2} \\ m \text{ ganz } \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_{\nu i}x)J_0(\lambda_{\nu i}x)}{\lambda_{\nu i}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = \frac{x^\nu}{2} \qquad \left(0<x<\frac{1}{2};\ \nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{0i}x)^2}{\lambda_{0i}J_1(\lambda_{0i})} = \frac{1}{2} \qquad \left(0<x<\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{2mi}x)^2}{\lambda_{2mi}J_{2m+1}(\lambda_{2mi})} = \frac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}x^{2m} \qquad \begin{pmatrix} 0<x<\frac{1}{2} \\ m \text{ ganz } \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}x)J_{\nu+m}(\lambda_{\nu i}y)}{\lambda_{\nu i}^{\nu+1}J_{\nu+1}(\lambda_{\nu i})} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0<x<\frac{1}{2} \\ 0<y<\frac{1}{2} \\ \nu \neq 0, -1, -2, \ldots \\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Társulat címére kérjük (Bp., V. Reáltanoda u. 13—15). A borítékra írjuk feltűnően: PÉLDAROVAT. Minden megoldást külön lapra írjunk. Közlésre szánt példákat is szívesen fogadunk, megoldással, vagy annak közlésével, hogy a beküldő a példa megoldását nem ismeri.

Kitűzött példák

32. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget*:

$$x-3<\sqrt{-x^2+3x+10}.$$

37. Az ABC derékszögű háromszög köré írt kör AB ívét érintse a C_0 pontban egy olyan C_1C_2 szakasz, amelynek végpontjai az AC és BC egyeneseken vannak, és amelyre $C_0C_1=C_0C_2$. Hasonló tulajdonságú szakaszok érintsék a másik két ívet is (a betűzést ciklikusan folytassuk). Bizonyítsuk be, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszög egyenlőoldalú.

38. Meg akartuk oldani az

$$\frac{y^2}{4}-xy+3z=6,$$

$$\frac{y^2}{4}-x+3z=6,$$

$$2x+2xy-\frac{y^2}{2}=0$$

egyenletrendszert. Kivontuk egymásból az első két egyenletet, majd hozzáadtuk az első egyenlet kétszereséhez a harmadikat, végül mindhárom egyenletet összeadtuk. Így a következő egyenletekhez jutottunk:

$$x(1-y)=0, \quad \text{és innen} \quad x=0, \quad y=1;$$

$$2x+6z=12, \quad \text{tehát, mivel } x=0, \text{ azért } z=2;$$

$$x+xy+6z=12, \quad \text{és a fenti értékek ezt is kielégítik.}$$

* A példa lapunk előző számában előjelhibával jelent meg.

Az eredeti egyenletrendszert azonban ezek az értékek nem elégítik ki! Hol követtünk el hibát?

39. Milyen esetben ekvivalens az

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0,$$
$$f_3(x, y, z) = 0$$

egyenletrendszer az

$$a_1 f_1(x, y, z) + a_2 f_2(x, y, z) + a_3 f_3(x, y, z) = 0,$$
$$b_1 f_1(x, y, z) + b_2 f_2(x, y, z) + b_3 f_3(x, y, z) = 0,$$
$$c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z) + c_3 f_3(x, y, z) = 0$$

egyenletrendszerrel?

40. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyismeretlenes egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk ugyanazt a függvényt (de azonos átalakítást nem végzünk), akkor

a) ha a függvény mindenütt értelmezve van, olyan egyenlethez jutunk, amely az eredeti egyenletnek következménye;

b) ha a függvény amellett szigorúan monoton, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk.

Hogyan enyhíthetnénk a fenti feltételeket?

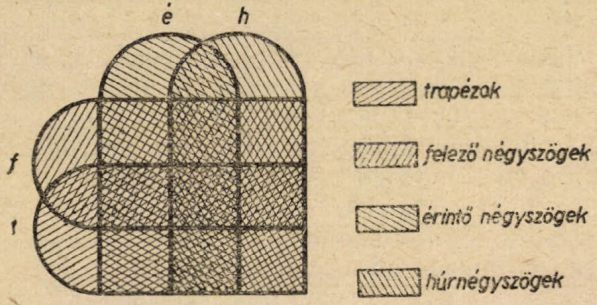
(Akkor mondjuk, hogy egy A egyenletnek egy B egyenlet következménye, ha valahányszor A teljesül, B is mindig teljesül, azaz ha A minden gyöke B-nek is gyöke; ekvivalensnek pedig akkor mondunk két egyenletet, ha mindkettő következménye a másiknak. Szigorúan monotonnak akkor nevezünk egy $f(x)$ függvényt, ha $x_1 < x_2$ esetén vagy mindig az $f(x_1) < f(x_2)$, vagy mindig az $f(x_1) > f(x_2)$ összefüggés teljesül.)

41. Vizsgáljunk n halmazt abból a szempontból, hogy a közülük tetszésszerint kiszemelt k számú halmaz ($1 \leqq k \leqq n$) közös része üres-e vagy nem, és tetszésszerinti l számú halmaz ($1 \leqq l \leqq n$) közös részével egybeesik-e vagy nem. Hány esetet különböztethetünk meg? Hány eset van akkor, ha kikötjük, hogy az n halmaz egyike sem üres? (Két halmaz, A és B között az utóbbi esetben nyilván a következő öt összefüggés egyike áll fenn: 1. a két halmaz közös része üres, azaz A és B idegenek; 2. közös részük nem üres, de egyik halmazzal sem esik egybe, azaz egyik sem részhalmaza a másiknak; 3. közös részük egybeesik az A halmazzal, de a B-vel nem, azaz A valódi része B-nek; 4. B valódi része A-nak; 5. közös részük mindkettőjükkel egybeesik, azaz A és B egybeesik. Három halmaz között 109 különböző összefüggés

lehet. Elég az n halmaz lehetséges összefüggéseinek számát explicit kifejezés helyett rekurzív formulával adni meg, vagyis az n-nél kevesebb halmazra vonatkozó megfelelő számokkal fejezni ki.)

42. Bizonyítsuk be, hogy az ábra helyesen tünteti fel az alábbi négy halmaz (fenti értelemben vett) összefüggését:

1. trapézok (a következő definíció szerint: olyan négyszög,* amelynek van két párhuzamos oldala);
2. felezőnégyszögek (definíció: olyan négyszög, amelynek egyik átlója felezi a másikat);
3. érintőnégyszögek;
4. húrnégyszögek.



1. ábra

Az ábra mely pontjai felelnek meg a deltoidoknak? (Definíció: olyan négyszög, amelynek két szomszédos oldala egyenlő, és a másik kettő is egyenlő.)

43. Ábrázoljuk a következő halmazok összefüggéseit:

1. húrnégyszögek;
2. érintőnégyszögek;
3. trapézok;
4. parallelogrammák;
5. deltoidok.

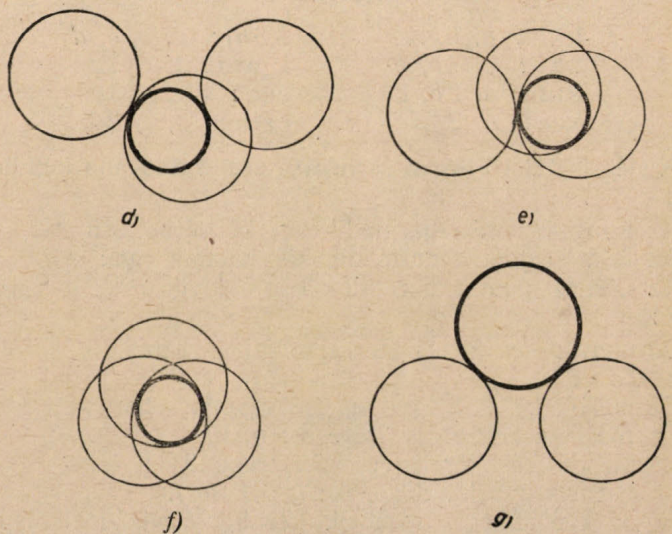
(Az ábránkról leolvasható állításokat bizonyítsuk is be.)

* Itt és az alábbiakban is kikötjük, hogy a négyszög oldalai ne messék egymást.

Megoldott példák

24. példa. Oldjuk meg és diszkutáljuk az I. gimnáziumi matematikakönyv következő feladatát: „Szerkesszetek olyan kört, amely egy háromszög három csúcsától 1—1 cm távolságban halad.“ (211. lap).

Megoldás. Ha egy kör a háromszög csúcsaitól 1—1 cm távolságra halad, akkor érinti a háromszög csúcsai köré 1 cm sugárral rajzolt köröket. Megfordítva, ha egy kör érinti a háromszög csúcsai köré 1 cm sugárral rajzolt köröket, akkor ez a kör 1 cm-re halad a háromszög csúcsaitól. Így a feladat ekvivalens a következővel: szerkesszünk olyan kört, amely három 1 cm sugarú kört érint.



2. ábra

Az érintőkör a következő helyzetet veheti fel az adott körökhöz képest:

a) mindhárom adott kört a belsejében tartalmazza;

b) szétválasztja a köröket, azaz vagy egyet vagy kettőt tartalmaz a belsejében;

c) egy adott kört sem tartalmaz, de őt sem tartalmazza egyik sem;

d) egy,

e) két,

f) három adott kör belsejébe esik;

g) valamelyik adott körrel egybeesik.

(A *d*)—*g*) eseteket lásd az ábrán.)

Természetesen ezek egyszerre mind nem fordulhatnak elő. Pl. *c* és *f* típusú kör nem lehet egyszerre. Viszont ugyanolyan típusú érintőkör több is lehet. Az érintőkörök maximális száma — mint általában appollóniusi feladatokban — nyolc. Hogy mikor milyen típusú van, és melyik típusból hány, attól függ, hogy az adott körök hogy helyezkednek el egymáshoz képest. A körök vagy közös pont nélküliek (**k**), vagy érintik (**e**), vagy metszik egymást (**m**). Pl. **kem** jelentse azt, hogy két kör a három adottból közös pont nélküli, kettő érinti, kettő pedig metszi egymást. A következő esetek lehetségesek; **kkk, kke, kkm, kee, kem, kmm, eee, eem, emm, mmm.**

Könnyen belátható, hogy az egyes esetekben a következő típusok a következő számosságban léphetnek fel:

kkk:	*a*, 6*b*, c	**kem**:	*a*, *b*, *c*, *d*
kke:	*a*, 4*b*, *c*	**kmm**:	*a*, *c*, 2*d*
kkm:	*a*, 2*b*, *c*	**eee**:	*a*, *c*, 3*g*
kee:	*a*, 2*b*, *c*, *g*	**eem**:	*a*, *c*, 2*d*, *g*

A még hátralevő **emm** és **mmm** eseteket tovább kell bontani:

emm:

Az érintési pont a harmadik kör belsejébe esik: *a*, *c*, 2*d*, 2*e*

Az érintési pont a harmadik kör határán van: *a*, *d*

Az érintési pont a harmadik körön kívül esik: *a*, *c*, 4*d*

mmm:

Bármelyik két kör metszéspontjai a harmadik körön kívül esnek: *a*, *c*, 6*d*.

Bármelyik két kör egyik metszéspontja a harmadik kör kerületére, a másik a körön kívülre esik: *a*, 3*d*.

Bármelyik két kör egyik metszéspontja a harmadik körön kívülre, a másik a belsejébe esik: *a*, 3*d*, 3*e*, *f*.

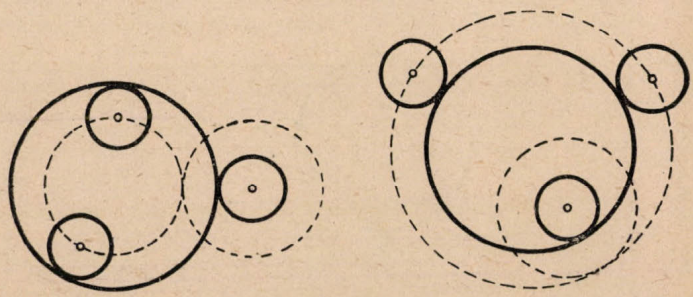
Egyik kör átmegy a másik két kör egyik metszéspontján, másik metszéspontjuk a kör belsejébe esik: *a*, *d*, 2*e*.

Egyik körnek a másik kör mindkét metszéspontja a belsejébe esik: *a*, *c*, 2*d*, 4*e*.

Előfordulhat, hogy egy vagy több érintőkör egyenessé fajul. Ha ezeket az elfajuló eseteket külön akarnánk választani, igen bonyolulttá válna az osztályozás.

Az érintőkör megszerkesztésének módja más és más aszerint, hogy milyen típusú érintőkörről van szó. Az összes esetet végiggondolva belátható, hogy a szerkesztés négy alaptípusra vezethető vissza. Az *a* és *c* típusú köröket úgy kaphatjuk meg, hogy a háromszög köré írt kör sugarát 1 cm-rel növeljük, illetve csökkentjük. Az *f* típusú kör ugyanígy szerkeszthető, csak nem 1 cm-rel kell csökkenteni a sugarat.

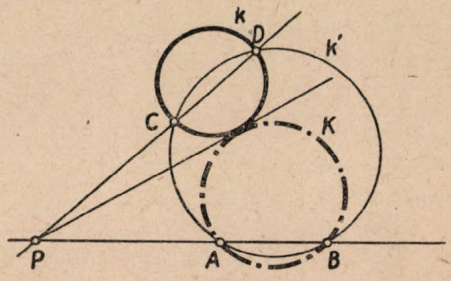
A többi esetben mindig van egy „kitüntetett“ kör. Pl. ha *két* kör van az érintőkörön kívül és *egy* belül, akkor *a belüllévő* a „kitüntetett“ kör. Növeljük ennek a „kitüntetett“ körnek a sugarát 2 cm-re, a másik kettőt pedig zsugorítsuk ponttá. Ha megszerkesztjük a kapott két ponton átmenő, és a 2 cm sugarú kört érintő köröket, aztán a kapott körök sugarát 1 cm-rel növeljük, illetve csökkentjük, a keresett köröket kapjuk.



3. ábra

A szerkesztés tehát erre redukálódott: szerkesztendő két adott ponton átmenő, adott kört érintő kör.

Jelöljük az adott kört k-val, a keresettet K-val, az adott pontokat pedig A-val és B-vel. Rajzoljunk olyan kört, amely átmegy A-n és B-n, és metszi k-t. Jelöljük ezt k'-vel. Kössük össze k és k' metszéspontjait, C-t és D-t egy egyenessel. Ennek az AB egyenessel való metszéspontja, P, éppen k, k', és K hatványpontja. De akkor P rajta kell legyen k és K hatványvonalán, azaz közös érintőjén.

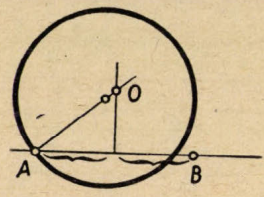


4. ábra

A szerkesztés a következő: tetszésszerinti, A-n, B-n áthaladó és k-t metsző kört rajzolunk. A kapott C és D metszéspontokat, valamint A-t és B-t összekötve megkeressük P-t. P-ből érintőt szerkesztünk k-hoz. Az érintési pont és az A és B pontok által meghatározott kör a keresett. Mivel P-ből két érintő húzható k-hoz, két megoldást kapunk.

Ha az egyik adott pont az adott körre esik, a szerkesztés egyszerűbb:

Az A pont közös pontja az adott és keresett körnek. Mivel ez a két kör érinti egymást, csak egy közös pontjuk lehet (vagy minden pontjuk közös; lásd alább) Így k és K A-ban érintik egymást, tehát K középpontja k-nak az A ponthoz húzott sugarán van. De ez a középpont rajta van A és B felező merőlegesén is, ezért ott van, ahol ez a felezőmerőleges a mondott sugarat metszi.



5. ábra

Ha B is a k körön van, akkor K egybeesik k-val, nincs mit szerkeszteni. Ez a helyzet a g esetben.

Megoldotta: Bukovszky Ferenc, Faragó László, Hammer Endre, Reményi Gusztáv. Részben megoldotta: Czapáry Endre, Fried Vilmos, Marik Miklós, Schandl Gábor, Schmidt Eligius, Zawadowski Alfréd.

25. példa. Mi azon körök középpontjának mértani helye, amelyek átmennek egy adott ponton, és amelyekből egy adott egyenes adott hosszúságú húrt metsz ki?

I. megoldás. Válasszuk az adott egyenest koordinátarendszerünk x-tengelyéül, s az y-tengelyt úgy helyezzük el, hogy átmenjen az adott P ponton. A húr hossza, melyet az x-tengely a körökből kivág, legyen d. Jelöljük a körök középpontja alkotta görbe pontjait $O(x, y)$-nal.

Az $O(x, y)$ középpontú kör átmegy a $P(0, p)$, $A\left(x-\frac{d}{2}, 0\right)$, $B\left(x+\frac{d}{2}, 0\right)$ pontokon. Ebből következik, hogy $OP=OA$, azaz

$$x^2+(y-p)^2=\frac{d^2}{4}+y^2.$$

Rendezve

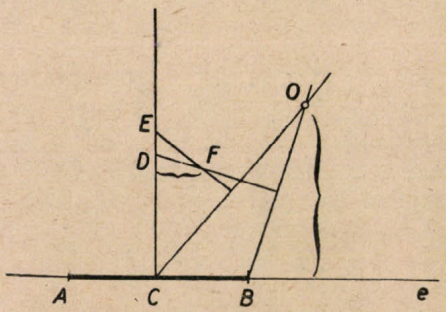
$$x^2=2py+\frac{d^2}{4}-p^2=2p\left(y-\frac{4p^2-d^2}{8p}\right).$$

Tehát a P-n átmenő, az x-tengelyből d hosszúságú szakaszt kivágó körök középpontja egy olyan, az y-tengelyre szimmetrikus parabolán van, melynek csúcsa $\frac{4p^2-d^2}{8p}$, fókusza pedig $\frac{8p^2-d^2}{8p}$ magasságban van.

Fordítva, ezen parabola minden pontja megfelel a feltételnek, mert a fenti számolás visszafelé is elvégezhető. Vagyis a kapott parabola a keresett mértani hely.

Czapáry Endre

Megoldotta még: Ádám András, Bukovszky Ferenc, Faragó László, Fitos László, Fried Vilmos, Horváth Márton, Kovács László, Marik Miklós, Reményi Gusztáv, Schmidt Eligius, Zawadowski Alfréd.



6. ábra

II. megoldás. Legyen O a megadott pont, AB pedig az e egyenesen mozgó megadott hosszúságú szakasznak egy helyzete. Kérdés, milyen mértani helyet ír le az OB és az AB szakaszok felezőmerőlegeseinek D metszéspontja. Az nyilvánvaló, hogy az OC (lásd az ábrán) és az AB szakasz felezőmerőlegesének E metszéspontja parabolát ír le; ez a pont ugyanis az AB szakasz bármely helyzetében ugyanakkora távolságra van O-tól, mint az e egyenestől. Azt állítjuk, hogy az ED távolság független az AB szakasz helyzetétől, és így a D pont is parabolát ír le. Valóban: $FDE\triangle \sim OBC\triangle$ (lásd az ábrát), mert oldalaik páronkint merőlegesek; amellett a két háromszög hasonlósági aránya állandó, mert F az ED egyenestől állandó $\frac{BC}{2}$ távolságra van (F ugyanis, mint az OBC háromszög köré írt kör középpontja, rajta van BC felezőmerőlegesén), és az OBC háromszögben ennek megfelelő magasság is állandó. De az OBC háromszögben BC is állandó, tehát állandó az FDE háromszögben BC-nek megfelelő DE oldal is.

26. példa. Szerkesszünk egy körszeletben egy adotthoz hasonló háromszöget, két csúcsával az íven, egy csúcsával a húr adott pontjában.

Megoldás. Legyen az adott háromszög ABC, a körív DE, a húr adott pontja A'. Vegyünk fel a köríven egy tetszésszerinti B' pontot, az $A'B'$ alapra rajzoljunk ABC-hez hasonló háromszöget. Csúsztassuk végig B'-t a köríven, ekkor C' olyan $D'E'$ ívet ír le, amely DE-ből A' körüli, α szögű, $\lambda = \frac{AC}{AB}$ arányú forgatvanyújtással keletkezik. C' keresett helyzetének ott kell lennie, ahol ez a két ív metszi egymást.

Az α szöggel való elforgatásnak és λ-szoros nyújtásnak megfelelő körívet a következőképpen szerkeszthetjük meg: Az $A'O$ és $A'D$ egyeneseket A' körül α-val elforgatjuk, és λ-szorosukra nyújtjuk. Így kapjuk az O' és D' pontot. Az O' körül $O'D'$ sugárral rajzolt kör a megoldás.

A feladat akkor oldható meg, ha a forgatvanyújtott kör metszi a DE ívet. Lehet, hogy nem metszi és lehet, hogy egyszer vagy kétszer metszi. Ha a DE húr adott pontjába nem A'-t, hanem B'-t vagy C'-t tesszük, újabb megoldásokat kaphatunk. A megoldások maximális száma tehát hat. Ez a szám megduplázódik, ha megengedjük, hogy $A'B'C'$ ellenkező körüljárási irányú legyen, mint ABC.

Kovács László

Megoldotta még: Bukovszky Ferenc, Czapáry Endre, Faragó László, Marik Miklós, Reményi Gusztáv, Schmidt Eligius (kétféle módon is), Vigassy József, Zawadowski Alfréd.

27. példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= a_1,\\
x_2 + x_3 &= a_2,\\
x_3 + x_4 &= a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1} + x_n &= a_{n-1},\\
x_n + x_1 &= a_n.
\end{aligned}$$

Megoldás. Tegyük fel először, hogy egyenletrendszerünk inhomogén, azaz nem minden a_i nulla. Szorozzunk meg minden második egyenletet -1-gyel, és adjuk őket össze. Kétféle eredményt kaphatunk. Ha n páros, akkor az összeg

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{n-1} - a_n = 0.$$

Vagyis páros n esetén egyenleteink nem függetlenek egymástól. Ha ez az összefüggés nem áll fenn a megadott konstansok között,

egyenletrendszerünk ellentmondó, nincs gyöke. Ha pedig teljesül, az egyik ismeretlen, mondjuk x_1 értékét tetszésszerint választhatjuk meg. x_1 tetszésszerinti értékét az egyetletrendszerbe írva a többit sorra kifejezhetjük vele:

$$x_2 = a_1 - x_1, \qquad x_3 = a_2 - x_2, \ldots$$

Ha n páratlan, az összeg

$$2x_1 = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{n-1} + a_n.$$

Ebből x_1-et kifejezve és értékét az egyenletekbe írva, a többi ismeretlent is meghatározhatjuk, ugyanúgy, mint előbb.

Ha egyenletrendszerünk homogén (minden a_i nulla), csak akkor van csupa 0-tól különböző megoldás, ha az egyenletrendszer determinánsa nulla. Ez a helyzet páros n esetén. Ekkor megoldás minden

$$x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 = \ldots$$

értékrendszer. Páratlan n esetén a determináns nem 0, így csak triviális megoldás van.

Bukovszky Ferenc

Megoldotta még: ÁDÁM ANDRÁS, CZAPÁRY ENDRE, FITOS LÁSZLÓ, FARAGÓ LÁSZLÓ, FRIED VILMOS, HAMMER ENDRE, HORVÁTH MÁRTON, KOVÁCS LÁSZLÓ, MARIK MIKLÓS, NAGY JENŐ, REMÉNYI GUSZTÁV, SCHMIDT ELIGIUS, ZAWADOWSKI ALFRÉD.

28. példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^y = y^x, \qquad a^x = b^y.$$

Megoldás. Ha a és b közül az egyik, mondjuk $a = 0$, akkor a második egyenletből

$$0^x = b^y.$$

Ez csak $b = 0$ esetén teljesülhet, akkor viszont mindig teljesül, kivéve ha $x = 0$ vagy $y = 0$. (0-nak a 0-adik hatványa nincs értelmezve.) Ekkor megoldás minden, az első egyenletet kielégítő x, y értékpár.

Ha a és b közül az egyik, mondjuk $a = 1$, akkor a második egyenletből

$$b^y = 1.$$

Ebből vagy $y = 0$ következik, ami az első egyenletet nem elégíti ki, vagy pedig $b = 1$. Ha $a = b = 1$, a második egyenlet minden x és y-ra teljesül. Így ekkor is minden, az első egyenletet kielégítő x, y megoldás.

Ha $a = b$, de sem nullával, sem eggyel nem egyenlők, a második egyenletet kielégíti minden $x = y$ értékpár. Mivel ez az elsőt is kielégíti, az egyenletrendszernek is megoldása.

Tegyük fel, hogy $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Vegyük mindkét egyenlet logaritmusát:

$$y \log x = x \log y,$$
$$x \log a = y \log b.$$

A másodikból

$$y = \frac{\log a}{\log b} x.$$

Írjuk be ezt az első egyenletbe. Egyszerűsíthetünk x-szel, mert nem nulla. Kapjuk, hogy

$$\frac{\log a}{\log b} \log x = \log \left(\frac{\log a}{\log b} x \right) = \log \frac{\log a}{\log b} + \log x.$$

Ebből

$$\log x = \frac{\log \frac{\log a}{\log b}}{\frac{\log a}{\log b} - 1} = \log \left(\frac{\log a}{\log b} \right)^{\frac{\log b}{\log a - \log b}},$$

és így

$$x = \left(\frac{\log a}{\log b} \right)^{\frac{\log b}{\log a - \log b}}.$$

$\frac{\log a}{\log b} - 1$-gyel szabad osztani, mert az $a \neq b$ feltétel miatt

$$\frac{\log a}{\log b} \neq 1.$$

Végül

$$y = \frac{\log a}{\log b} x = \left(\frac{\log a}{\log b} \right)^{\frac{\log a}{\log a - \log b}}.$$

Kovács László

Megoldották még: Ádám András, Bukovszky Ferenc (kétféleképpen), Czapáry Endre, Faragó László, Fried Vilmos, Hammer Endre, Horváth Márton, Nagy Jenő, Reményi Gusztáv, Schmidt Eligius, Vigassy József, Zawadowski Alfréd.

1. *megjegyzés.* Az $a = b = 0$ vagy 1 esetben az egyenletrendszert — amely ekkor az $x^y = y^x$ egyenletre redukálódik — nemcsak az $x = y$ feltételelnek elegettevő értékek elégítik ki, hanem végtelen sok különböző számpár is. Vizsgáljuk u. i. egy adott $y = y_0 > 0$-nak megfelelő $z = x^{y_0}$ és $z = y_0^x$ görbék menetét. Az $x = y_0$ helyen értékük megegyezik: iránytangensük itt $y_0^{y_0}$, ill. $y_0^{y_0} \log y_0$. Ha tehát y_0 kisebb a logaritmus alapszámánál — mondjuk e-nél — de nagyobb 1-nél,

akkor kezdetben a hatványfüggvény gyorsabban emelkedik, idővel azonban az exponenciális függvény, amely bármely hatványfüggvénynél erősebben tart a végtelenhez, fölébekerekedik; tehát a folytonosság miatt a két görbének az $x = y_0$ helyen kívül is van közös pontja. Hasonló okokból $y_0 > e$ esetén is van a görbéknek az $x = y_0$ helyen kívül még egy közös pontja.

2. *megjegyzés.* Azzal, hogy az egyenleteket logaritmáltuk, eleve pozitív gyökökre szorítkoztunk, összhangban az x^y függvény

$$x^y = e^{y \log x}$$

definíciójával, amely a valós számok körében kizárja a negatív alapot.

Reményi Gusztáv

29. példa. Oldjuk meg és diszkutáljuk a következő egyenletrendszert:

$$\frac{x-a-b}{x-a+b} = \frac{x-b}{y-a}, \quad \frac{b}{x-a} = \frac{a}{y+b}.$$

Megoldás. Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy $x = a-b$, $x = a$, $y = a$, $y = -b$ nem lehet gyöke az egyenletrendszernek, mert e helyeken az egyenletek értelmetlenné válnak.

Ha $a = 0$, a második egyenletből $\frac{b}{x} = 0$. Ennek csak $b = 0$ esetén van értelme. Ekkor viszont az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\frac{x}{x} = \frac{x}{y}, \quad \text{azaz} \quad x = y$$

kell legyen. Vagyis ebben az esetben az egyenletrendszer határozatlan, minden $x = y$ értékpár megoldása. Ugyanide jutunk, ha $b = 0$-ból indulunk ki.

Ha sem a, sem b nem nulla, a második egyenletből

$$y = \frac{a(x-a)-b^2}{b}.$$

Ezt az első egyenletbe írva az

$$(a-b)x^2 - (2a^2+ab+b^2)x + a(a+b)^2 + 2b^3 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ha $a \neq b$, ennek megoldása

$$x = \frac{2a^2+ab+b^2 \pm b\sqrt{9(a-b)^2+16ab}}{2(a-b)}.$$

Az egyenletnek mindig két valós gyöke van, mert a diszkrimináns

$$9(a-b)^2 + 16ab = 8(a^2+b^2) + (a-b)^2 > 0.$$

Ha $a=b$, az egyenlet elsőfokúra redukálódik, és a megoldás

$$x=\frac{3a}{2}.$$

y megfelelő értékei:

ha $a \neq b$,

$$y=\frac{3a^2-ab+2b^2 \pm a\sqrt{9(a-b)^2+16ab}}{2(a-b)},$$

ha $a=b$,

$$y=-\frac{a}{2}.$$

Természetesen ezek a kifejezések csak akkor gyökei valóban az egyenletnek, ha a és b értékei olyanok, hogy x és y nem egyezik meg egyik fent kizárt értékkel sem.

Schmidt Eligius

Megoldották még: BUKOVSZKY FERENC, CZAPÁRY ENDRE, FARAGÓ LÁSZLÓ, HAMMER ENDRE, KOVÁCS LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV, ZAWADOWSKI ALFRÉD.

30. példa. *a*) Forgassuk el a sík egy S alakzatát a sík egy O pontja körül tetszésszerinti szöggel, és hajtsunk végre rajta, ugyancsak O-ból, mint centrumból kiindulva, tetszésszerinti arányú hasonlósági transzformációt. (Röviden: Végezzünk S-en O centrummal forgatvanyújtást.) Az így kapott S' alakzatot ugyancsak O centrumú, tetszésszerinti szögű és arányú forgatvanyújtással vigyük át az S'' alakzatba. Bizonyítsuk be, hogy az S, S', S'', alakzatok egymásnak (a transzformáció következtében) megfelelő pontjait összekötő $P_1P_1'P_1''$, $P_2P_2'P_2''$ stb. háromszögek hasonlók, és ugyancsak O körüli forgatvanyújtással vihetők át egymásba.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az utóbbi forgatvanyújtások során a $PP'P''$ háromszögek egy csúcsa leírja az S alakzatot, akkor e háromszögek többi pontjai, egyáltalán a sík minden pontja, amelyet e háromszögekhez tartozónak tekintünk, egy S-hez hasonló és S-ből O körüli forgatvanyújtással származtatható alakzatot ír le.

c) A fentiek alapján oldjuk meg a **12.** példát. (Adva van két négyszög. Írjunk egyikbe a másikhoz hasonlót.)

Megoldás. a) Elég az állítást az S alakzat két tetszőleges P_1 és P_2 pontjára bizonyítani. Legyen az első forgatvanyújtásnál az elforgatás szöge α, a nyújtás pedig a-szoros, a másodiknál a szög β, a nyújtás b-szeres.

$$P_1P_1''O\triangle \sim P_2P_2''O\triangle,$$

mert

$$OP_2'' = b \cdot OP_1' = ab \cdot OP_1, \quad OP_2'' = ab \cdot OP_2,$$

és a közrefogott szög mindkettőben $\alpha + \beta$. Ugyanígy látható be, hogy $P_1P_1'O \triangle \sim P_2P_2'O \triangle$, és $P_1'P_2''O \triangle \sim P_2'P_2''O \triangle$; itt az oldalak a-szor, illetve b-szer akkorák, a közrefogott szög pedig α, illetve β. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$OP_1P_1'' \sphericalangle = OP_2P_2'' \sphericalangle, \quad OP_1''P_1 \sphericalangle = OP_2''P_2 \sphericalangle,$$

$$OP_1P_1' \sphericalangle = OP_2P_2' \sphericalangle, \quad OP_1''P_1' \sphericalangle = OP_2''P_2' \sphericalangle.$$

Az első kettőt a második kettőből kivonva kapjuk, hogy a $P_1P_1'P_1'' \triangle$ és $P_2P_2'P_2'' \triangle$ két szögben megegyezik, tehát hasonló. Azt kell még bizonyítani, hogy éppen O körüli forgatvanyújtással vihetők át egymásba.

A P_1 pontot P_1OP_2 szögű, $\lambda = \frac{OP_2}{OP_1}$ arányú, O körüli forgatvanyújtás viszi át a P_2 pontba. Ugyanez a forgatvanyújtás a P_1' pontot a P_2' pontba viszi át. Ugyanis

$$P_1'OP_2' \sphericalangle = P_1OP_2 \sphericalangle,$$

mert OP_1-et, és OP_2-t is α-val forgattuk el. Másrészt $\frac{OP_2'}{OP_1'} = \lambda$, mert $OP_1' = a \cdot OP_1$, $OP_2' = a \cdot OP_1$. Ugyanígy látható be, hogy ez a forgatvanyújtás P'-t éppen P''-be viszi át. Ha pedig a háromszög három csúcspontját egy forgatvanyújtás átviszi egy másik háromszög csúcsaiba, akkor az az egész háromszöget is átviszi a másik háromszögbe.

b) *(Megjegyzés:* A feladat szövegében tévesen szerepeltek a következő szavak: „és így másik két csúcsa is.“)

Legyen az S alakzat három pontja P_1, P_2, P_3, a háromszöghöz tartozónak tekintett pont megfelelő helyzetei X_1, X_2, X_3. Bizonyítandó, hogy az X_i-k által alkotott két szakasz aránya megegyezik a megfelelő P_i-k alkotta szakaszok arányával, és hogy a megfelelő szögek egyenlők. P_1-et P_2-be vígye át α szögű és a-szoros forgatvanyújtás, P_2-t P_3-ba β, b adatú. Ugyanezek viszik X_1-et X_2-be, illetve X_2-t X_3-ba. Ezért

$$P_1P_2O \triangle \sim X_1X_2O \triangle \text{ és } P_2P_3O \triangle \sim X_2X_3O \triangle \qquad (*)$$

Ezekből következik:

$$\frac{OP_2}{OX_2} = \frac{P_1P_2}{X_1X_2}, \quad \frac{OP_2}{OX_2} = \frac{P_2P_3}{X_2X_3},$$

vagyis

$$\frac{P_1P_2}{X_1X_2} = \frac{P_2P_3}{X_2X_3}.$$

Másrészt

$$OP_2P_1 \sphericalangle = OX_2X_1 \sphericalangle \text{ és } OP_2P_3 \sphericalangle = OX_2X_3 \sphericalangle,$$

ezeket összegezve:

$$P_1P_2P_3 \sphericalangle = X_1X_2X_3 \sphericalangle.$$

Az X_i-k által leírt alakzat S-ből forgatvanyújtással keletkezik: A (*) miatt

$$P_1OX_2 \sphericalangle = P_1OX_1 \sphericalangle + X_1OX_2 \sphericalangle = P_1OP_2 \sphericalangle + P_2OX_2 \sphericalangle,$$

minthogy pedig

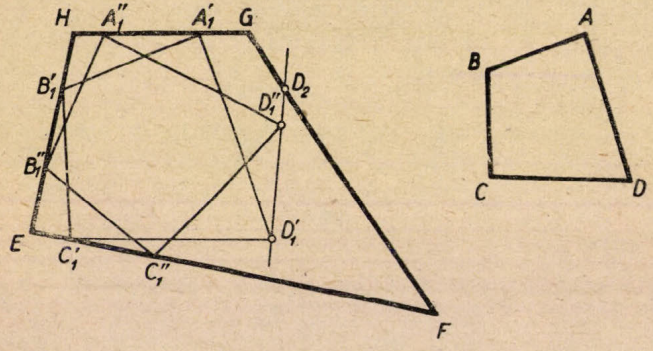
$$P_1OP_2 \sphericalangle = X_1OX_2 \overline{\sphericalangle},$$

ezért

$$P_1OX_1 \sphericalangle = P_2OX_2 \sphericalangle,$$

és

$$\frac{OX_1}{OP_1} = \frac{OX_2}{OP_2}.$$



7. ábra

c) I. megoldás.

Jelöljük az adott négyszög csúcsait A, B, C és D-vel, azét pedig, amelyikbe ehhez hasonlót kell szerkeszteni, E, F, G és H-val. Válasszunk ki a GH oldalon egy tetszésszerinti A_1' pontot. Az EF, EH és GH oldalak alkotta háromszögbe tudunk az $ABC\triangle$-höz hasonló $A_1'B_1'C_1'$ háromszöget szerkeszteni. (L. **11.** példa.) Vegyük fel a D_1' pontot úgy, hogy $A_1'B_1'C_1'D_1'$ hasonló legyen $ABCD$-hez. D_1' általában nincs rajta a GF oldalon. Az A_1' pont akárhol lehet a GH egyenesen, és minden helyzetéhez tartozik egy $A_1'B_1'C_1'D_1'$ négyszög. Ezek a négyszögek egy fix O pont körüli forgatvanyújtással kaphatók meg egymásból. Ez abból következik, hogy a *b*) állításnak a megfordítása is igaz: ha egy alakzat pontjai valamilyen transzformáció folyamán egymáshoz hasonló görbéken futnak végig, és

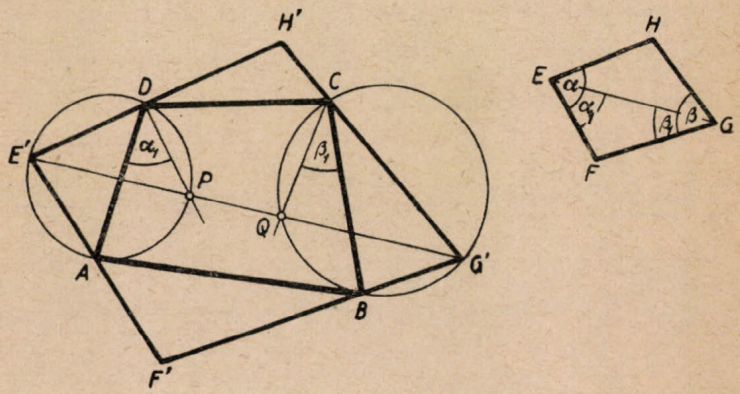
az alakzat közben önmagához hasonló marad, akkor ez a transzformáció forgatvanyújtás. Mivel az A_1, B_1, C_1 pontok egyeneseken, tehát egymáshoz hasonló görbéken futnak végig, valóban forgatvanyújtásról van szó. De akkor *b*) értelmében a D_1' csúcs is egyenesen mozog. Ahol ez az egyenes metszi a GF oldalt, ott van a keresett pont.

A szerkesztés menete ezek alapján a következő. Vegyünk fel az egyik, mondjuk a GH oldalon két tetszőleges pontot, legyenek ezek A_1' és A_1''. Szerkesszük meg belőlük kiindulva az $A_1'B_1'C_1'D_1'$ és $A_1''B_1''C_1''D_1''$ négyszögeket úgy, hogy hasonlók legyenek $ABCD$-hez, és B_1' és B_1'' az EH, C_1' és C_1'' pedig az EF oldalon legyen. A D_1' és D_1'' pontokon átmenő egyenesnek a GF egyenessel való metszéspontja D_2.

Határozzuk meg, hogy D_1'-t milyen forgatvanyújtás viszi át D_2-be. Ugyanilyen forgatvanyújtással vigyük át A_1'-t, B_1'-t, C_1'-t A_2, B_2, C_2-be. A fentiek alapján ezek a megfelelő oldalakon fekszenek.

Reményi Gusztáv

Megoldották még: CZAPÁRY ENDRE, FARAGÓ LÁSZLÓ, ZAWADOWSKI ALFRÉD.



8. ábra

c) *II. megoldás* (a **12.** példa közvetlen megoldása).

Ahelyett, hogy $EFGH$-ba szerkesztenénk $ABCD$-hez hasonló négyszöget, megtehetjük, hogy $ABCD$ köré szerkesztünk $EFGH$-hoz hasonlót. Rajzoljuk meg azt a két kört, melynek külső ívéről az AD oldal α szög alatt, illetve a BC oldal β szög alatt látszik. Ezen a két körön kell legyen az E', illetve a G' csúcs. Rajzoljuk meg a D csúcson átmenő, AD-vel α_1 szöget bezáró egyenest (l. az ábrát). Ez az egyenes az A és D csúcshoz tartozó kört a P pontban

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

metszi. Ez a pont a keresett négyszög $E'G'$ átlóján van, mert az AP szakasz a külső körív minden pontjából, így a keresett E' csúcsból is α_1 szög alatt látszik. Ugyanígy, β_1-et a BC oldaltól felmérve kapjuk a Q pontot. A PQ egyenes a két kört éppen a keresett E' és G' pontban metszi. Az AE', DE', BG' és CG' egyenest meghúzva megkapjuk az F' és H' csúcsot is.

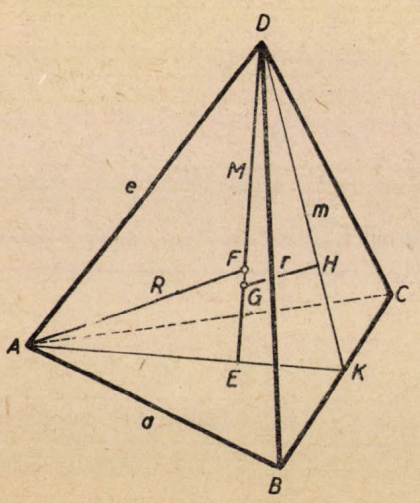
A feladatnak négy különböző megoldását kaphatjuk, aszerint, hogy az AD oldalhoz az E', F', G' vagy a H' csúcsot rendeljük. A megoldások száma megduplázódik, ha megengedjük, hogy $E'F'G'H'$ ellenkező körüljárási irányú legyen, mint $EFGH$. Előfordulhat természetesen az is, hogy $ABCD$ egy vagy több csúcsa nem az $E'F'G'H'$ négyszög valamelyik oldalán, hanem az oldal meghosszabbításán van. Mint könnyen meggondolható, a fenti szerkesztés ebben az esetben is helyes.

Vigassy József

Megoldotta még: ZAWADOWSKI ALFRÉD

31. példa. Egy szabályos háromszög alapú egyenes gúla köré írt gömb felszíne **F**, a beírt gömb felszíne **f**. Mekkora a gúla felszíne?

Megoldás. Jelöljük a gúla köré, illetve gúlába írt gömb középpontját F-fel, illetve G-vel, sugarukat R, illetve r-rel. Az ABC alap-háromszög súlypontja legyen E. Ez egyben a D csúcshoz tartozó magasságvonal talppontja. A szimmetria miatt F és G ezen a magasságvonalon vannak.



9. ábra

A számítás egyszerűbb, ha felszín helyett a gúla **K** köbtartalmát fejezzük ki a gömbök **F** és **f** felszínével, illetve először a

felszínnel

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{F}}{\pi}} \quad \text{és} \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{f}}{\pi}}$$

összefüggésben lévő sugarakkal. A köbtartalom segítségével a felszín a következőképpen kapható meg:

Bontsuk fel a gúlát a négy, egyformán r magasságú $ABCG$, $ABDG$, $ADCG$ és $BCDG$ gúlára. Ezek alapterülete együttesen éppen a nagy gúla $\mathbf{S}$ felszíne. Így tehát

$$\mathbf{K}=\frac{\mathbf{S}r}{3}.$$

Mivel pedig a gúla köbtartalma

$$\mathbf{K}=\frac{t_{ABC}\cdot M}{3}=\frac{a^2M}{4\sqrt{3}},$$

ahol M a gúla DE magassága, a pedig az alapéle, a felszínre az

$$\mathbf{S}=\frac{\sqrt{3}a^2M}{4r}$$

összefüggést kapjuk. Két egyenletet kell még felírnunk, melyekből a és M mint r és R függvénye kiszámítható.

Mivel $DHG\triangle \sim DEK\triangle$, $DG:HG=DK:EK$, azaz

$$(M-r):r=\sqrt{\frac{a^2}{12}+M^2}:\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Ebből

$$a^2=\frac{12Mr^2}{M-2r}. \tag{1}$$

Továbbá az AFE háromszögre érvényes, hogy

$$R^2=(M-R)^2+\frac{a^2}{3},$$

innen

$$a^2=6MR-3M^2. \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-bövetkezik, hogy

$$M=R+r\pm\sqrt{(R+r)(R-3r)}.$$

Mindezeket $\mathbf{S}$ fenti kifejezésébe írva, r-et és R-et $\mathbf{f}$-fel és $\mathbf{F}$-fel kifejezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{S}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(\sqrt{\mathbf{F}}+\sqrt{\mathbf{f}})\sqrt{\mathbf{f}}.$$

Az *M*-re kapott kifejezés kétértékűségéből következik, hogy két különböző magasságú gúla tartozhat adott nagyságú beírt és körülírt gömbökhöz. Az egyik magas, keskeny, a másik lapos, széles, felszínük azonban egyenlő.

Zawadowski Alfréd

Megoldotta még: BÁN LAJOS, CZAPÁRY ENDRE, FARAGÓ LÁSZLÓ, REMÉNYI GUSZTÁV. Részben megoldotta: FRIED VILMOS.

TARSULATI ÉLET

A balatonföldvári valószínűségszámítási kollokvium

A Bolyai János Matematikai Társulat, a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával, 1953. év folyamán három matematikai kollokviumot tartott: valószínűségszámítási kollokviumot Balatonföldváron 1953. aug. 31-től szeptember 2-ig, konstruktív függvénytani kollokviumot Egerben november 26-tól 29-ig és geometriai kollokviumot szintén Egerben november 30-tól december 2-ig. Alábbiakban számolunk be a valószínűségszámítási kollokviumról; a másik két kollokviumra lapunk következő számában visszatérünk.

A kollokviumok megrendezésével a Társulatnak az volt a célja, hogy a matematika egy-egy területén dolgozó kutatóknak alkalmat nyujtson, hogy mindennapi munkájukból kikapcsolódva, néhány napot zavartalanul a folyamatban levő tudományos kutatások megvitatásának szentelhessenek. A Társulat a kollokviumok megrendezésével a kutatók közötti együttműködést és a kollektív tudományos munkát, továbbá a fiatal kutatók fejlődését kívánta különösen elősegíteni.

Az eddigi rendezvényektől eltérően, a kollokviumokon nemcsak befejezett eredmények, hanem folyamatban levő kutatások ismertetésére és megoldatlan problémák kitűzésére is lehetőséget nyujtott a Társulat.

Megállapíthatjuk, hogy a valószínűségszámítási kollokvium fenti célkitűzéseket lényegében megvalósította és egészében igen eredményes volt. A kollokvium tapasztalatait a Társulat az 1953-ban rendezett másik két kollokviumon már hasznosította is. A kollokvium résztvevőiben és a Társulat vezetőségében az a meggyőződés alakult ki, hogy az ilyen típusú kollokviumok igen hasznosak és szükségesek, és kívánatos, hogy a Társulat jövőben minél nagyobb számban rendezzen hasonló kollokviumokat.

A valószínűségszámítási kollokviumon 34 matematikus vett részt és 17 előadás hangzott el. Az előadások rövid kivonatait alább közöljük. A kivonatok közül valamivel részletesebbek azok, amelyek nem jelennek meg a közeljövőben cikk formájában. Számos, a kollokviumon elhangzott előadás a Magyar Tudományos

Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete Közleményeinek 1953. évi kötetében fog megjelenni, ezek részletes ismertetése nem látszott szükségesnek.

A kollokviumon elhangzott előadásokat élénk vita követte. A kollokvium szervezőbizottsága lehetővé tette, hogy a résztvevők előadás közben is kérdéseket tegyenek fel az előadóhoz. Ez a módszer az előadásokat közvetlenebbé és élénkebbé tette. A kollokvium eredményességét bizonyítja, hogy az előadások megvitatása az ülések befejezése után is, kötetlen formában folytatódott. Az előadások száma azonban túl nagynak bizonyult és a résztvevőkben az a meggyőződés alakult ki, hogy a jövőben hasonló rendezvényeknél kevesebb hosszabb előadást kívánatos programmba venni és helyes még több időt biztosítani a kötetlen viták számára. Hozzájárult a kollokvium sikeréhez a megfelelő környezet. Köszönet illeti meg az IBUSZ-t azért, hogy a balatonföldvári Hullám-szállóban a kollokvium megfelelő munkájának lehetőségét a legnagyobb mértékben biztosította.

Rényi Alfréd

I. Sztochasztikus folyamatok elmélete

RÉNYI ALFRÉD

Bimolekuláris reakciókkal kapcsolatos valószínűségszámítási problémák

Előadó beszámolt arról, hogy a Guldberg—Waage-törvényt, mely szerint a reakció sebessége arányos a koncentrációk szorzatával hogyan lehet valószínűségszámítási úton igazolni. A bizonyításból az derül ki, hogy a törvény fenti alakjában csak közelítően igaz, ugyanis egy korrekciós tagot is figyelembe kell venni, mely bizonyos esetben nem hanyagolható el. A tárgyalás olyan reakciókra is kiterjeszthető, ahol disszociáció is fellép, továbbá egyéb kémiai problémákra is.

PRÉKOPA ANDRÁS

Hosszú láncmolekulák bomlási folyamatáról

A polyszacharidok és sok más kémiai vegyület azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy molekuláik nagyszámú, azonos típusú molekulákból tevődnek össze oly módon, hogy az utóbbiak egymáshoz kapcsolódva láncot alkotnak. A cukor, cellulóze, stb. gyártásának az a lényege, hogy egy ilyen hosszú láncmolekulákból álló vegyületet kénsavval hidrolizálnak, amely a láncokban szereplő kötéseket véletlenszerűen megtámadja és felbontja. Kérdés, hogy

ha a folyamat a 0 időpontban kezdődött, mennyi a t időpontban a k egységet tartalmazó láncok számának $N(k, t)$ középértéke?

Előadó ismertette azon dolgozatát, amely az $N(k, t)$ függvényekre vonatkozólag ismert, — de eddig nem bizonyított — differenciálegyenletrendszert valószínűségszámítási úton levezeti, továbbá megvizsgált két speciális típusú bomlási folyamatot.

PALÁSTI ILONA

Gépalkatrészek tartalékolásával kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról

Rényi Alfréd és Szentmártony Tibor azon eredményei, hogy mekkora törzskészletet kell egy üzemben gépalkatrészekből vagy felszerelési tárgyakból tartalékolni, hogy az üzem folyamatos működését megadott kockázat mellett biztosítani lehessen, kiterjeszthetők arra az esetre, ha a gépek működési szakaszai között fellépő véletlen és rendszeres üzemszüneteket is figyelembe vesszük.

Az előadó, Palásti—Rényi—Szentmártony—Takács dolgozatát ismertette, melyben meghatározták az alkatrészcserék átlagát és szórását abban a speciális esetben, ha feltesszük, hogy a működési szakaszok, a köztük levő szünetek és az alkatrész élettartama mind exponenciális eloszlást követ; és a legáltalánosabb esetben, amikor minden eloszlás tetszőleges.

L. ZIERMANN MARGIT

Gépalkatrészek gazdaságos tartalékolási és utánrendelési ütemtervéről

Az előadás kapcsolódik Rényi Alfréd és Szentmártony Tibor Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása (Matematikai Lapok III. évf. 2. sz). 129—139. l.) c. dolgozatához. E dolgozatban a szerzők megállapítják bizonyos gépalkatrészfajtákból tartalékolandó azon legkisebb mennyiséget, az ú. n. törzskészletet, amelyre ha a raktárkészlet lefogy, azonnal készletpótló rendelést kell foganatosítani — a gépek zavartalan ellátása érdekében. Fenti előadás viszont a készletpótló rendelés nagyságát állapítja meg — bizonyos alkatrészfajtákra nézve.

TAKÁCS LAJOS:

Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál

Rekurrens folyamatok alatt olyan folyamatokat értünk, amelyeknél kiválasztható egy bizonyos E esemény úgy, hogy ha ez az esemény előfordul, a folyamat sztochasztikusan újra kezdődik, azaz

a folyamat multja nem befolyásolja a jövő viselkedését. Ilyen folyamatokkal kapcsolatos kérdéseket az ismétlődési pontok közötti távolságok eloszlásának meghatározására vezetik vissza. Ez a tárgyalás elég komplikált és csak speciális esetekben vihető keresztül. Előadó módszere abban áll, hogy meghatározzuk az átlagfüggvényt, azaz t idő alatt előforduló ismétlődési pontok várható számát. Az átlagfüggvény legtöbbször a legáltalánosabb esetben is egyszerűen előállítható és az átlagfüggvény ismeretében a kérdéses valószínűségek meghatározhatók. A fenti folyamatra példaként szolgálhatnak részecskeszámlálásoknál, gépalkatrészek törésével kapcsolatos kérdéseknél fellépő sztochasztikus folyamatok.

PRÉKOPA ANDRÁS

Megjegyzések a differenciális folyamatok elméletéhez

Tekintsünk egy véges I időintervallumban egy additív sztochasztikus folyamatot. Ha a folyamat gyengén folytonos, akkor T_0, T_1-gyel jelölve I kezdő és végpontját a $\xi_I = \xi_{T_1} - \xi_{T_0}$ változó karakterisztikus függvények logaritmusa előállítható a Lévy-féle kanonikus alakban. Ebben a kifejezésben szerepelnek bizonyos $N(x, I)$, $M(x, I)$ függvények és $\gamma(I), \sigma(I) > 0$ állandók. Előadó ismertetett dolgozata ezen függvényeknek és állandóknak a folyamat valószínűségei segítségével való kifejezésével foglalkozik. Így pl. ha bevezetjük a $\xi_{\mathcal{J}} = \xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ jelölést, ahol $\mathcal{J}$ a (t_1, t_2) intervallumot jelenti, $\mathcal{J} \subset (T_0, T_1)$ akkor, ha $F(x, \mathcal{J})$ a $\xi_{\mathcal{J}}$ változó eloszlásfüggvényét jelenti, úgy

$$M(x, I) = \int_I F(x, \mathcal{J})$$

$$N(x, I) = \int_I [F(x, \mathcal{J}) - 1],$$

ahol az integrálok az I intervallum fölött vett Burkill integrálok. A $\gamma(I)$ és $\sigma(I)$ mennyiségek is Burkill integrálokkal fejezhetők ki, de az előbbieknél bonyolultabb módon.

PÁL LÉNÁRD:

Koincidencia berendezések valószínűségszámítási problémáiról

Kozmikus sugárzási méréseknél gyakran találkozunk azzal a feladattal, hogy meg kell határoznunk Geiger—Müller számlálócsövek bizonyos idő alatt bekövetkező „egyidejű" kisüléseinek átlagos számát. Ha feltesszük, hogy a Geiger—Müller számlálócsövek kisülései Poisson-eloszlást mutatnak (ami majdnem igaz, ha a „holt-idő" Θ és a beütésszám N szorzata $N\Theta \ll 1$), akkor abban

az esetben, amikor a Rossi-féle koincidencia berendezés keverőfokozatára exponenciális lefutású feszültséglökések érkeznek, az n-szeres véletlen koincidenciák sűrűségét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} N_k \Phi_k(v,t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [1 - G_i(v,t)] +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2} N_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(v,t) \Phi_{i_2}(v,t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1 \neq i_2}}^{n} [1 - G_i(v,t)] +$$

$$+ \cdots + \sum_{i_1 \ldots i_k} N_{i_1 \ldots i_k} \Phi_{i_1}(v,t) \cdots \Phi_{i_k}(v,t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1 \neq \ldots \neq i_k}}^{n} [1 - G_i(v,t)] +$$

$$+ \cdots + \sum_{i_1 \cdots i_{n-1}} N_{i_1 \ldots i_{n-1}} \Phi_{i_1}(v,t) \cdots \Phi_{i_{n-1}}(v,t) [1 - G_{i_n}(v,t)],$$

ahol $N_{i_1 \ldots i_k}$ az $i_1 \ldots i_k$ számlálócsövek egyidejű kisüléseinek a sűrűsége, míg

$$\Phi_k(v,t) = \int_0^v [1 - H_k(v-x)] \, dG_k(x,t),$$

ahol viszont $H_k(x)$ annak a valószínűsége, hogy a k-ik számlálócső formálókörének feszültségimpulzusa $G_i(v,t)$-nél kisebb legyen és pedig annak a valószínűsége, hogy a közös anód-ellenállású Rossi-csövek közül az i-ik vezető állapotban legyen t időpontban. (V a lezárási feszültség abszolút értékét jelenti.) Ezzel az eljárással elsőnek tárgyaltuk a koincidencia problémát olyan módszerrel, amely a koincidencia berendezés sajátosságait, ha durván is, de figyelembe veszi.

SZÉKELY GÁBOR

Egy minőségellenőrzéssel kapcsolatos sztochasztikus folyamatról

Automata-gépen történő gyártás esetén, ha több gépet ellenőriz egy futóellenőr, meghatározható egy adott gép által t idő alatt gyártott tételekben a selejtesek eloszlása. Szóbanforgó tárgyalás feltételezi azt, hogy a gép selejtmentes működési periódusai exponenciális eloszlást követnek.

II. Matematikai statisztika

SARKADI KÁROLY

A matematikai statisztika egy dualitási elvéről

Oderfeld egyik munkájában található annak bizonyítása, hogy a selejtarány megbízhatósági határai és a posteriori valószínűségi határai között a priori egyenletes eloszlás esetén egy egyszerű dualitási elv áll fenn. Bizonyításában a minta selejtarányának az eloszlását a binomiális eloszlással közelítette meg. Az előadó elvégezte a bizonyítást a pontos, hipergeometrikus eloszlás figyelembevételével is, továbbá kiterjesztette a dualitási elvet kettőnél több változó esetére. Végül ismertette Oderfeld a priori béta-eloszláson alapuló minőségellenőrzési módszerének módosítására vonatkozó elgondolásait.

VINCZE ISTVÁN

A regressziós egyenes meghatározásáról adott alappontok esetén

Antibiotikumok értékmeghatározásánál felmerül regressziós egyenes meghatározásának kérdése olyan esetben, amikor az y változó értékeit előre megadott és szórásmentesen beállítható $x_1 x_2 \dots x_s$ helyeken mérjük. Feladat a mérések számának az adott helyek közti olyan elosztása, amely mellett a regressziós egyenesre a legmegbízhatóbb állandókat kapjuk.

Előadó korábbi dolgozatában a regressziós együttható legkedvezőbb becslésére dolgozott ki módszert, most a regressziós egyenes mindkét állandójára éspedig oly feltétellel, hogy az egyenes két pontjában tekintve a szórásnégyzeteket, ezek összege minimális legyen. Bebizonyította, hogy ha e két pontot az alappontrendszer súlypontjától egyenlő távolságra választjuk, akkor általában legfeljebb négy pontban végzett mérések elegendők a regressziós egyenes állandóinak a mondott értelemben legkedvezőbb meghatározásához. Ha a megadott pontok mindegyikén a szórás állandónak tekinthető, akkor elég csupán a két szélső pontban méréseket végezni, a mérések számát egyenlő arányban osztva meg.

RÉNYI ALFRÉD

A Wilcoxon-féle kritériumról

Wilcoxon igen egyszerű kritériumot talált arra, hogy két minta származhat-e ugyanabból a statisztikai sokaságból? A Wilcoxon-féle kritériumban szereplő index-összeg eloszlásának generátor függvényére igen egyszerű kifejezést sikerült adni, melynek segít-

ségével a normális eloszláshoz való konvergenciát az irodalomban ismertnél egyszerűbb formában sikerült bizonyítani, mely a maradéktag becslését is lehetővé teszi. Mivel a Wilcoxon-féle kritérium arra érzékeny, hogy az egyik minta egy eleme a másik minta egy eleménél 1/2-től különböző valószínűséggel nagyobb, kívánatos volt a kritérium módosítása, mely mindenféle alternatívára érzékeny. Előadó ismertette a Wilcoxon-féle kritérium egy ilyen módosítását.

VASSNÉ—FONTÁNYI:

A rendezett minták elméletén alapuló minőségellenőrzés néhány kérdéséről

Az előadás ismertette a rendezett minták elméletén alapuló statisztikai minőségellenőrzési módszer alapelveit. A módszer alapgondolata Braginszkijtól származik, azonban szigorú matematikai statisztikai eszközökkel először intézetünkben került kidolgozásra. Az előadás ismertette a módszer bevezetésével kapcsolatos addigi munkálatokat, az ellenőrző határok mechanikus kiszámításának lehetővé tétele céljából az Intézetben elkészített táblázatokat és diagrammokat, a bevezetést megelőző kísérleti adatfelvételek menetét és a módszer még kidolgozatlan, nyitott problémáit.

III. Egyéb valószínűségszámítási problémák

MEDGYESSY PÁL

Kevert valószínűségeloszlások összetevőinek meghatározása

Az előadó normális sűrűség függvények konstans súlyokkal képezett keverékével foglalkozva, bemutatott néhány eljárást, amelyeknek segítségével a keverékfüggvény ismeretében a komponensek paraméterei egyértelműen meghatározhatók. A G. Doetsch-től eredő egyik eljárás Fourier-transzformáltakon, illetve Fourier-sorokon alapul, egy másik, Rényi Alfréd által javasolt és előadó által kidolgozott módszer pedig a felbontandó függvény deriváltjaival képezett függvénysor vizsgálatán. Az előadó ismertette Doetsch eljárásának kiterjesztését más függvénytípusokra, valamint két megoldatlan problémát, amelyek a tárgyalt módszerekhez kapcsolódnak.

RÉNYI ALFRÉD:

Valószínűségeloszlások algebrája

A valószínűségeloszlások a kompozíció és keverés műveleteire nézve egy algebrai struktúrát alkotnak. Ennek a struktúrának a tanulmányozása igen fontos, mert fényt vet a különböző eloszlások közötti összefüggésekre. Az eloszlás-algebra formális kalkulusa az esetek többségében pótolja a generátorfüggvényt. Jelölje az $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségeloszlást $\mathbf{F}$, a $G(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségeloszlást $\mathbf{G}$, s. i. t. A $\mathbf{H}=\mathbf{FG}$ eloszlás definíciója a következő: $\mathbf{H}$ az a valószínűségeloszlás, amelynek eloszlásfüggvénye

$$H(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dG(x).$$

Az $\mathbf{F}_n$ eloszlások p_n sulyokkal vett keverékén, (ahol $p_n \geqq 0$; $n=1,2\ldots$ és $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$) azt a $\mathbf{G}$ eloszlást értjük, amelynek eloszlásfüggvénye $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x)$ és a következőképpen jelöljük: $\mathbf{G}=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbf{F}_n$. Ezen műveletek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Az eloszlások a kompozícióra nézve kommutatív félcsoportot alkotnak, vagyis a kompozíció művelete kommutatív és asszociatív. Ennek a félcsoportnak az egységeleme az $E(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x<0\\ 1 & \text{ha } x\geqq 0\end{cases}$ eloszlásfüggvényű $\mathbf{E}$ eloszlás.

2. A keverés művelete a kompozícióval felcserélhető, tehát

$$\mathbf{G}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbf{F}_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbf{G}\mathbf{F}_n.$$

3. A keverésre a következő további összefüggések érvényesek:

a) $1\cdot\mathbf{F}+0\cdot\mathbf{G}=\mathbf{F}$

b) $p\cdot\mathbf{F}+q\cdot\mathbf{G}=q\mathbf{G}+p\mathbf{F}$

c) $p\mathbf{F}+q\mathbf{F}=\mathbf{F}\qquad (p+q=1)$

d) Ha $0<r<1$ és $r+s=1$, $0<p<1$ és $p+q=1$ akkor

$$(r(p\mathbf{F}+q\mathbf{G})+s\mathbf{H}=rp\mathbf{F}+(1-rp)\left(\frac{rq}{1-rp}\mathbf{G}+\frac{s}{1-rp}\mathbf{H}\right).$$

A kompozíció asszociatívitása folytán értelmezhető 3, vagy több tényező szorzata és ilyen módon értelmezhetők egy eloszlás pozitív egész kompozíció-hatványai. Ha $\mathbf{F}$ egy tetszőleges eloszlás, úgy legyen $\mathbf{F}^0=\mathbf{E}$. Legyen $f(z)$ egy tetszőleges nemnegatív

együtthatós hatványsor $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, amelyre $f(1)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$.

A fenti műveletek segítségével értelmezhető a $\mathbf{G}=f(\mathbf{F})=\sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbf{F}_n$ eloszlás. Így például, ha $\mathbf{E}_a$ az $E(x-a)$ eloszlás függvényű eloszlás, akkor $(\mathbf{E}_a)^n=\mathbf{E}_{na}$ és így a binomiális eloszlás $\mathbf{B}_n(p)=(p\mathbf{E}_1+q)^n$ alakban, ahol $0<p<1$ és $p+q=1$ és $n=1,2,\ldots$, a Poisson-eloszlás $\mathbf{P}(\lambda)=e^{\lambda(\mathbf{E}_1-1)}$ alakban, $(\lambda>0)$ a negatív binomiális eloszlás pedig $\mathbf{B}_{-n}(p)=\left(\frac{1-p}{1-p\mathbf{E}_1}\right)^n$ alakban $(n=1,2,\ldots 1;$ $0<p<1)$ állítható elő. Ezekből az előállításokból világos, hogy $\mathbf{B}_n(p)\,\mathbf{B}_m(p)=\mathbf{B}_{n+m}(p)$, $\mathbf{P}(\lambda)\,\mathbf{P}(\mu)=\mathbf{P}(\lambda+\mu)$, $\mathbf{B}_{-n}(p)\mathbf{B}_{-m}(p)=\mathbf{B}_{-(n+m)}(p)$. Hasonlóképpen egyszerűen belátható az

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,\mathbf{B}_n(p)=e^{\lambda[(p\mathbf{E}_1+q)-1]}=e^{\lambda p(\mathbf{E}_1-1)}=\mathbf{P}(\lambda p)$$

összefüggés is, vagyis, hogy a $\mathbf{B}_n(p)$ binomiális eloszlások a $\mathbf{P}(\lambda)$ Poisson-eloszlás tagjaival mint súlyokkal vett keveréke a $\mathbf{P}(\lambda p)$ Poisson-eloszlás. Ezen az úton egyszerűen, szinte számolás nélkül adódnak mindazok az összefüggések, amelyeket a generátorfüggvény segítségével szoktak bebizonyítani.

Megjegyzendő, hogy nemnegatív egész értékű $\mathbf{F}$ eloszlások esetében, vagyis ha $F(n+0)-F(n)=f_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n=1$ az $\mathbf{F}$ eloszláshoz hozzárendelve a

$$F=\begin{pmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & \ldots \\ 0, & f_0, & f_1, & f_2, & \ldots \\ 0, & 0, & f_0, & f_1, & \ldots \\ . & . & . & f_0 & \ldots \end{pmatrix}$$

végtelen mátrixot. az eloszlásalgebra izomorf ezen mátrixok közönséges mátrixalgebrájával.

A keverés fogalma kiterjeszthető eloszlások folytonos sokaságának keverékére is. Ha $\mathbf{F}_\lambda$ eloszlásoknak a λ valós paramétertől függő sokasága, $p(\lambda)>0$ és $\int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda)\,d\lambda=1$, úgy értelmezhetjük a

$$\mathbf{G}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{F}_\lambda p(\lambda)\,d\lambda$$

eloszlást, melynek eloszlásfüggvénye

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\lambda(x) p(\lambda)\, d\lambda.$$

Így például, ha $\mathbf{P}(\lambda)$ újból a λ várható értékű Poisson-eloszlást jelenti, úgy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\alpha\lambda) \frac{\beta^{n+1}\lambda^n}{n!} e^{-\beta\lambda}\, d\lambda = \mathbf{B}_{(n+1)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right).$$

GYIRES BÉLA:

A valószínűségszámítás lokális központi határeloszlás tételének általánosítása négyirányban végtelen sztochasztikus matrixokkal

Tekintettel arra, hogy a valószínűségszámításnak az egyforma eloszlású független valószínűségi változókra vonatkozó lokális központi határeloszlás tétele nem fejez ki mást, mint egy Toeplitz-féle L-típusú sztochasztikus matrix határértéktételét abban az esetben, ha a matrixot tetszésszerinti sokszor önmagával komponáljuk azért a valószínűségszámításnak az egyforma eloszlású független valószínűségi változókra vonatkozó lokális központi határeloszlás tételének általánosítását jelenti az, ha négyirányban végtelen sztochasztikus matrixnak a fenti értelemben vett határértékét keressük. Az előadó ezt a feladatot oldja meg bizonyos feltételeknek alávetett általánosított Toeplitz-féle matrixok esetén.

LIPTÁK JÓZSEF:

Néhány statisztikai problémáról

Az előadó néhány az Alkalmazott Matematikai Intézet orvosi statisztikai csoportjának munkája során felmerült elvi érdekességgel bíró problémáról számolt be.

BÉKÉSSY ANDRÁS:

A kozmikus záporok kaszkád-elméletének egy kérdéséről

A kozmikus sugárzás egyik érdekes jelensége a „zápor", azaz számos különféle részecske egyidejű beérkezése a regisztráló műszerekre. A kozmikus záporok ú. n. kaszkádelmélete szerint ilyen zápor úgy keletkezik, hogy egy nagy energiájú primér részecske útja során ütközik a levegő atomjaival, szekundéreket kelt, ezek a szekundérek azután, mint új primérek, újabb szekundéreket válta-

nak ki, és így tovább. Mivel az egyes ütközések száma és jellege véletlen jelenség, a záporrészecskék számának, energiájának, irányának stb. eloszlása ugyancsak véletlen jelenség, amelynek elméleti tárgyalásához valószínűségszámítási eszközöket kell igénybe venni.

Sikerült igen általános feltételek mellett felállítani a keresett eloszlást meghatározó ú. n. „*G*-egyenleteket", amelyek bonyolult integro-differenciálegyenletek, (l. pl. Jánossy Lajos akadémikus „Studies on the Theory of Cascades" c. dolgozatát, amely az Acta Phys. Hung. 1952. évi 4. füzetében jelent meg) és sikerült meglehetősen nagy munkával speciális záporok eloszlásfüggvényeinek átlagait és második momentumait kiszámítani, (l. pl. L. Jánossy and H. Messel: Fluctuations of the Electron-Photon Cascade — Moments of the Distribution. Proc. Phys. Soc. *A* Vol. LXIII, p. 1101, 1950) mindeddig azonban nem sikerült magukat a keresett eloszlásfüggvényeket előállítani, legalábbis olyan formában nem, hogy a megoldásból számszerű eredményeket kaphassunk.

Ezért érdekes egy olyan különleges leegyszerűsített *G*-egyenlet vizsgálata, amely a kozmikus záporokban fennálló tényleges viszonyoknak ugyan egyáltalán nem felel meg, de amelyekből az eloszlásfüggvény egyszerű eszközökkel zárt alakban állítható elő és magán viseli az exakt *G*-egyenletek megoldásának bizonyos jellegzetességeit, ennélfogva támaszpontot ad arra vonatkozólag, hogy esetleges későbbi numerikus integrációnak milyen lehetőségei vannak. Érdekes, hogy a vizsgált, leegyszerűsített *G*-egyenlet megoldása olyan, hogy abból az eloszlásfüggvényre egy sajátos retardált differenciálegyenlet származtatható, amely látszólag nincs összefüggésben a kiindulásul szolgáló integro-differenciálegyenlettel és amelynek valószínűségszámítási jelentése sincs felderítve. Kérdés, hogy az exakt eloszlásfüggvények is eleget tesznek-e ilyenfajta differenciálegyenleteknek. Ha igen, akkor ez a körülmény megkönnyítené a további vizsgálatot.

Pályázati felhívás az 1953. évi Grünwald Géza emlékdíjra

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége 1952-ben a fiatalabb magyar matematikusok önálló tudományos kutatómunkára való ösztönzésére, valamint a magyarnyelvű matematikai irodalom fejlesztése érdekében emlékdíjat alapított, melyet Grünwald Gézáról, a kiváló magyar matematikusról nevezett el.

A Grünwald Géza emlékdíj szabályzata a Matematikai Lapok 1952. évi számában jelent meg.

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége ezúton hirdeti meg második alkalommal a Grünwald Géza emlékdíjat és felhívja mindazokat, akik az 1953. évi munkásságuk alapján a Grünwald Géza emlékdíjra pályázni kívánnak, hogy az elbírálásnál a szabályzat szerint tekintetbe vehető magyarnyelvű dolgozatuk, ill. dolgozataik gépelt kéziratát (vagy ha megjelent, különlenyomatát) 1954. május 1-ig juttassák el a Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének (Budapest, V. Reáltanoda-u. 13—15). A pályázók tartoznak a pályázathoz mellékelni összes tudományos dolgozataik jegyzékét, és abban külön megjelölni az 1953. évben megjelent, ill. elkészült dolgozataikat. Ez évben a dolgozat tárgykörét a Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége nem köti meg.

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége.

Közlemény

Közöljük cikkíróinkkal, hogy az Akadémiai Kiadótól a különlenyomatokra vonatkozóan a következő adatokat kaptuk:

4	oldalig	különlenyomat	+ fedőlap	Ft	40·—	20—30 pld. esetén
8	„	„	„	Ft	70·—	„
16	„	„	„	Ft	130·—	„
24	„	„	„	Ft	180·—	„
32	„	„	„	Ft	220·—	„
48	„	„	„	Ft	300·—	„

Kérjük cikkíróinkat, hogy különlenyomatra vonatkozó igényüket cikkük hasáblevonatán írásban közöljék velünk.

MATEMATIKAI ÉS SZEMÉLYI HÍREK

November 7-e alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat tagjai közül a következők részesültek kitüntetésben: Balázs János, szaktitkár, Budapest, Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya. Bóka István, középiskolai tanár, Pécs, Nagy Lajos gimnázium, Csáki Imre, min. előadó, Budapest, Oktatásügyi Minisztérium, Dénes Péter, csoportvezető, Budapest, Távközlési Kutatóintézet, Varga Ottó, egyetemi tanár, Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem.

* * *

December 12-én osztotta ki a Bolyai János Matematikai Társulat az 1953. évi Beke-díjakat. Beke Manó emlékdíjban részesültek Péter Rózsa, főiskolai tanár, Bede Lajos, szakfelügyelő, Miskolc; Gádor Endréné, főisk. docens, Budapest; Szeliánszky Ferenc, középiskolai tanár, Győr. A jutalmazottak munkásságának ismertetésére visszatérünk.

* * *

Január 19-én tartották meg Freud Géza: „Tauber-típusú tételek maradéktaggal" és Tandori Károly: „Ortogonális polinomsorok Cesaro-summatiója" című kandidátusi disszertációjának nyilvános vitáját. Mindkét disszertáció opponensei: Szőkefalvi-Nagy Béla és Turán Pál. A viták ismertetésére visszatérünk.

* * *

Megjelent a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei III. kötet 4. száma. Ez a szám Egerváry Jenő, Fenyő István, Freud Géza, Jordan Károly, Králik Dezső, Rényi Alfréd, Szász Gábor és Szász Pál tudományos közleményeit, valamint könyvismertetéseket tartalmaz. Beszámol egyben O. J. Smidt „Négy előadás a Föld keletkezésének elméletéről" c. könyvéről tartott ankétról, az ott elhangzott referátumról és hozzászólásokról. Akadémiai Kiadó kiadása, ára 38,— Ft.

* * *

A Tankönyvkiadó kiadásában megjelent Szele Tibor: Bevezetés az algebrába c. könyve. Ára 39,— Ft.

Használd a matematikát!

Írta a Bolyai János Matematikai Társulat népszerűsítő bizottsága:
Csoma Zsigmond, Erdősi József, Gémesi József, Györffy Árpádné, Horvay Katalin, László Katalin, Stéger Ferenc, Varga Tamás

Kultúrforradalmunk hatalmas arányokban való kibontakozásának egyik jele az az óriási érdeklődés, amellyel dolgozóink a tudománynépszerűsítő irodalom felé fordulnak. Százezrek és milliók, akiket az úri Magyarország elzárt minden kultúrától, ma tudományra éhesen búvják azokat a könyveket, amelyekből megismerhetik az emberiség kultúrájának maradandó, haladó alkotásait, különösen pedig a modern tudomány eredményeit. Munkások és parasztok, akik tömegei számára évszázadokon át az álmoskönyv, a kalendárium, a ponyvaregény és a giccsfilm jelentette a szellemi táplálékot, ma mohón tanulmányozzák a modern fizika, kémia, biológia és egyéb természettudományok alapjait.

Nem hiányzik az érdeklődés a népszerű matematikai irodalom iránt sem. Mintegy másfél évvel ezelőtt a Művelt Nép Könyvkiadó egyik olvasóankétján üzemi és kultúrotthon könyvtárosok egyöntetűen arról számoltak be, hogy a felszabadulás óta megjelent (egyébként igen kis számú) népszerű matematikai művek állandóan használatban vannak, az olvasók között úgyszólván kézről-kézre járnak.

Már ezért is nagy örömmel kell üdvözölni a Bolyai Társulat népszerűsítő bizottságának nemrégiben megjelent könyvét, melyet a bizottság egyik tagja, Gémesi József a kiváló pedagógus és népszerűsítő szerkesztett. Annál is inkább elismeréssel kell adóznunk a könyv íróinak, mert ma már nyilvánvaló, hogy a matematika népszerűsítésének módszere távolról sem olyan egyértelmű, mint fizika, kémia, geológia vagy egyéb természettudományok esetében.

Engels a következőkben határozta meg a matematika és a valóság viszonyát: „A tiszta matematikának tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonylatai, tehát nagyon is reális anyag alkotja. Hogy ez az anyag felette elvont alakban jelenik meg, az csak felületesen fedheti el a külső világból való eredetét. De hogy ezeket az alakzatokat és viszonylatokat a maguk tisztaságában vizsgálhassuk, teljesen el kell őket választanunk tartalmuktól és ezt, mint közömböst, félre kell tennünk." (Engels: Anti-Dühring, Szikra, 1950. 39. old.) Ez a meghatározás rámutat, hogy az absztrakció a matematika egyik alapeleme, lényeges vonása. Ez az oka annak, hogy rendkívül nehéz a matematikai problémákat népszerűen tárgyalni, hiszen igen gyakran már a probléma felvetése is messzemenő absztrakciót tartalmaz. Maga az, hogy a matematika sajátos nyelvének ismerete is hosszabb előtanulmányokat igényel, indokolja azt a tényt, hogy a matematika népszerűsítése minden más tudomány népszerűsítésénél nehezebb, tisztázatlanabb és kevésbbé járt úton halad. A matematika régebbi és újabb népszerűsítői különböző szélsőségek között ingadoznak: egyesek nem népszerűsítenek, hanem iskolai oktatást nyújtanak, melynek folyamán igyekeznek a matematika „keserű piruláit" a mindennapi élet tapasztalatainak édes ostyájában beadni az olvasónak. Mások minden, az emberi gondolkodásban tapasztalható meglepő ellentmondást, furcsaságot, furfangot hajlamosak „népszerű matematika" címe alatt tálalni fel, sőt nem ismeretlen nálunk

az olyan népszerű matematikai irodalom sem, amely a matematikát az emberi gondolkodás öncélú játékának tünteti föl.

A szóbanforgó könyv szerzői igen helyesen visszamennek az engelsi meghatározáshoz és a valóságos világ, a matematika tárgyát képező „nagyon is reális anyag"-ból indulnak ki népszerű könyvük megírásánál. A könyvnek ez az elvi állásfoglalása annál is inkább megbecsülendő, mert hiszen a fentiek értelmében a matematika népszerűsítésének módszerei egyáltalán nem tisztázottak még, sem elméletileg, sem gyakorlatilag.

A szerzők a matematika története alapján ismertetik a különböző számrendszereket, azok összefüggéseit és közben észrevétlenül bizonyítják a számfogalom, a számírás és az ezzel összefüggő egyéb fogalmak anyagi eredetét. A naptárkészítés, a térképszerkesztésről és a távolságmérésről szóló fejezetek igazolják, hogy a matematika is, mint minden tudomány, a társadalom anyagi szükségleteiből kiindulva fejlődött ki. A könyv utolsó fejezete a függvény és a szögfüggvények fogalmát igyekszik népszerű és gyakorlati példák során közel vinni az olvasóhoz.

A könyvnek alapvetően helyes célkitűzése mellett azonban igen súlyos hiányosságai vannak. Elsősorban hiányzik belőle úgyszólván teljesen a matematika, a matematikai módszer lényege. Egyes fejezeteiben ez a könyv is támogatni látszik azt a téves felfogást, hogy ahol számokról vagy képletekről van szó, az már matematika. Teljesen érthetetlen módon idegenkednek a szerzők attól, hogy a matematikai gondolkodásnak akár történelmileg, akár jellegzetességüknél fogva jelentős érdekes példáival foglalkozzanak. Az első fejezetben pl. foglalkozik a szerző azzal a tétellel, hogy az első n páratlan szám összege egyenlő n^2-tel. Ezt igazán nem nehéz népszerűen bebizonyítani. Ehelyett a szerző, — miután többször „varázsszámról", „varázsnégyszögről" beszél, — a tételt elkönyveli, mint szabályt és evvel halálos döfést ad mind a matematikának, mind a népszerűsítésnek.

A matematikának ez a konyharecept szerű tárgyalása többször is visszatér, különböző szerzőknél. Egyik legkiáltóbb példája az „Öröknaptár" c. fejezet (38. oldal). Érthetetlen, hogy mit akart a szerző ezzel a fejezettel elérni. Talán azt, hogy a könyvet az olvasó állandóan magánál hordja, mert az abban közölt táblázatok nélkül nem tud öröknaptárt készíteni. A szerző u. i. csak a táblázatok használatának receptjét közli (ember legyen a talpán, aki ezt meg is jegyzi), de azt nem, hogy a táblázatok hogyan készültek. Pedig közismert e táblázatok és az öröknaptár készítésének is igen egyszerű logikus alapja.

A matematika lényegének teljes elhanyagolását mutatja a szögharmadolásnak és ötödölésnek a 110. oldalon kezdődő leírása. Bár a szerző megjegyzi, hogy a „szögharmadolás nem könnyű, körzővel és vonalzóval nem is végezhető el," (mintha azért nem volna elvégezhető körzővel és vonalzóval, mert nem könnyű!), de aztán nyugodtan beszél arról, hogy hogyan lehet szöget harmadolni. Itt kitűnő alkalom lenne arra, hogy megmutassuk, mit jelent annak a *bebizonyítása*, hogy szöget nem lehet körzővel és vonalzóval három egyenlő részre osztani és mennyiben használható a közölt gyakorlati módszer.

Egy másik, nem elszigetelt, hanem közös forrásból származó hibára is szeretnék itt rámutatni. Nem tételezhető fel, hogy a könyvben szereplő sok pongyola, sőt helyenként helytelen megállapítás, definíció helyes megfogalmazását a szerzők nem ismerik. Sokkal valószínűbb az, hogy lebecsülve a népszerűsítést és a népszerű művek olvasóit, úgy vélik, hogy erre a célra így is jó. Néhány példa szolgáljon bizonyítékul: A 158. oldalon a szerző (Győrffy Árpádné) így „definiálja" a szórást:

„Az eltérések átlaga az úgynevezett szórás. A szórás kiszámítása megint csak átlagolással történik, de nem olyan egyszerűen, mint az előbb, mivel itt pozitív és negatív eltérések egyaránt szerepelnek." Ugyanezen szerző a 159. oldalon a következőt írja: „Az első formai egyszerűsítés az, hogy a fogalmakat (!) betűkkel jelöljük."

A függvény fogalmának hathatósabb tisztázása céljából ezt írja: „A táblázat, a képlet és a grafikon ugyanazt fejezi ki." Majd így folytatja: „Röviden így lehetne összefoglalni: *M* értéke attól függ, hogy mekkora az *i*."

A szerzők figyelmébe ajánlom azt a megállapítást, „... hogy jó, valóban tudományos népszerűsítő könyvet nem könnyebb, de sokkal nehezebb alkotni, mint a kutatás eredményeit a szaktudomány nyelvén leírni." (I. Jefremov: A tudomány széleskörű népszerűsítéséről. Lityeraturnaja Gazeta, Moszkva, 1953. 36.)

Foglalkozni szeretnék a könyv népszerűsítési módjával, mely inhomogén. Helyenként leköti a figyelmet és könnyen hatol a kérdések mélyére. Ebből a szempontból jó a szögfüggvényekről szóló fejezet annak ellenére, hogy aránylag ismeretlen fogalmakkal foglalkozik. Helyenként azonban a szerzők nem helyeznek súlyt arra, hogy az olvasók tényleg meg is értsék azt, ami a könyvben áll. Ennek legszélsőségesebb esete a 157. oldalon kezdődő „Még egy gyakorlati feladat" c. fejezet, amely egyrészt érthetetlen okból került erre a helyre, másrészt teljesen felületes, odavetett és így nem érthető szöveg. Hozzájárul ehhez még egy csunya sajtóhiba is (a 158. oldalon „szórás" helyett „szorzás").

Az anyag kiválasztása sem homogén, sőt helyenként ebben is megnyilvánul az olvasók lebecsülése. A 88. oldalon kezdődő „Hogyan számítsuk ki a normát és a százalékot" c. fejezet írója nem veszi észre, hogy a százalékszámítás már úgy átment a köztudatba nálunk, hogy felesleges ezt ilyen módon magyarázni.

Nem hagyhatom szó nélkül a könyvben található súlyos ideológiai hibákat, melyek közül csak néhányat kívánok itt említeni. A 34. oldalon azt állítja a könyv, hogy „A természettudományok legnagyobb része, mint pl. a kémia, csillagászat, orvostudomány, szintén zavaros, babonás kuruzslásokból fejlődtek ki." A materialista tudománytörténet kétségtelenül bebizonyította, hogy a természettudományok a termelési tapasztalatokból fejlődtek ki, éppen a babonák, a kuruzslás és a klerikális reakció *ellen* folytatott harcban.

Politikai hiba a haladó átlagnormáknak a könyvben (88. oldal) adott meghatározása, amely természetesen nem igaz.

Ide sorolható a 167. oldalon szereplő egészen amerikai ízű mondat is: „A 173. ábra alapján például mindenki készíthet magának olyan grafikont, amelynek segítségével képességének megfelelően a legkedvezőbb kereseti lehetőséget is megállapíthatja." Ez persze nem igaz, hiszen nem is lehet igaz. A szocialista termelési és bérezési rendszerben nincs ilyen maximum, de lehet, hogy a szerző nem is így gondolta. Nálunk, amint Rákosi elvtárs mondotta, a termelés felső határa a csillagos ég.

Ezekért a hibákért nem csak és nem elsősorban a szerzők a felelősek, akik elsősorban matematikusok, hanem felelős a könyv szerkesztője, lektora és a kiadó is.

Minden hibája ellenére a könyv megérdemli, hogy az olvasók széles rétege olvassa, forgassa, — de megfelelő kritikával. Azoknak, akik az általános iskola nyolc osztályának tananyagát ismerik, a könyv egészének megértése nem okoz nehézséget és sok hasznos ismeretet nyujt.

Balog Emma

MTA Könyvtára
Periodika 3525/1961 sz.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ОГЛАВЛЕНИЕ

Л. Редеи: Низнь и творче ство Михая Бауэр 241
П. Туран: Об обной из проблем Штейгауза 263
И. Фенье: О некоторых бесконечных рядах, связанных с Бесселевыми функциями 277

Задачи 284
Жизиь Общества Я. Бояаи 303
Конкурсное объявление 314
Известия из математической жизни Венгрии 315
Обзор книг 316

CONTENTS

L. Rédei: Life and work of Mihály Bauer 241
P. Turán: On a problem of H. Steinhaus' 263
I. Fenyő: On some infinite series in connection with the Bessel function 277

Examples 284
Society notes 303
Announcement of the Géza Grünwald competition 314
Mathematical and personal news 315
Book review 316

Ára 7·— Ft.
Előfizetés évi 20·— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V. Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a Lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők (Budapest, V. Reáltanoda-utca 13—15).

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

A kiadásért felelős: Mestyán János Műszaki felelős: Tóth Ferenc
A kézirat beérkezett: 1953. XI. 11. — Példányszám: 750
Terjedelem 5 ív, 10 ábra

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 53-5167 Felelős vezető: Vincze György