312.046

Matematikai Lapok

20
1969

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

20. évfolyam, 1969

1-2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenként négyszer.
Budapest, 1969. december — 20. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Hajós György, Kalmár László, Rapcsák András, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311-793.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21. III.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAPIRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Csekkszámlaszám egyéni 61.257, közületi: 61-066.
MNB. egyszámlaszám: 8.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Csekkbefizetési számla: 0,5915,111-46.
MNB egyszámlaszám: 46.
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 20 Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

RÉNYI KATÓ: Tudományos munkái 1
VARGA OTTÓ: Tudományos munkái 3
KÁRTESZI FERENC: Konvex ötszögből származtatott affin-szabályos ötszögpár 7
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások 15
HORVÁTH JENŐ: Távolságok összegére vonatkozó egy mínimum problémáról 25
LEE ANNA és RÉDEI LÁSZLÓ: Matrix rangjának gyűrűelméleti értelmezése 39
SZEKERES GYÖRGY: Ferde konfigurációk 43
ALPÁR LÁSZLÓ: Az abszolút konvergencia egy közvetett Tauber-típusú feltételéről 53
SZÉNÁSSY BARNA: Martinovics Ignác egy eddig ismeretlen matematikai értekezéséről 57
FRIED ERVIN: A teljes mátrixgyűrű egy tulajdonsága 63
PALÁSTI ILONA: A lineáris teljes gráf Hamilton-köreinek közös éleiről 71
SZÁSZ FERENC: Gyűrűk radikáljairól II. 99
KÁTAI IMRE: Speciális diophantikus egyenletek megoldásainak eloszlása 117
KATONA GYULA: Gráfok, vektorok és valószínűségszámítási egyenlőtlenségek 123
LOVÁSZ LÁSZLÓ: Kapcsolatok polinomoknak és helyettesítési értékeiknek számelméleti tulajdonságai között 129
SEBESTYÉN ZOLTÁN: Banach-algebrák folytonos involúcióiról 133
KÁTAI IMRE: Egy lokális határeloszlástétel a számelméletben 137
BABAI LÁSZLÓ: Végtelen gráfok színezéséről 141
Jelentés az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről 145
Feladatrovat 173
Hírek 181
Társulati élet 189
Könyvismertetés 211
Új könyvek 217



RÉNYI KATÓ
1924—1969

RÉNYI KATÓ TUDOMÁNYOS MUNKÁI

1. Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace Euclidien à n dimensions. Zpravy o spolecnem 3. sjezdu matematiku Ceskoslovenskych a 7. sjezdu matematiku Polskych, Praha, 1950, 147—148.
2. Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace Euclidien à n dimensions. Colloquium Mathematicum *2* (1951) 130—135. (Rényi Alfréddal és Surányi Jánossal együtt.)
3. k-adik hatványmentes számok eloszlása racionális gyökű polinomok értékkészletében. Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó, Budapest 1950, 493—506. (Orosz kivonattal.)
4. A komplex potenciál egyrétűségéről, I. Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei *3* (1955) 353—367. (Rényi Alfréddal együtt) (Orosz és német kivonattal).
5. On a conjecture of G. Pólya, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae *7* (1956) 145—150. (Orosz kivonattal.)
6. Pólya György egy sejtéséről, kandidátusi értekezés tézisei, 1957, 1—8.
7. Über eine Vermutung von G. Pólya. Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft *47—48* (1957) 44—45.
8. On periodic entire functions. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae *8* (1957) 227—233.
9. Egy végtelen lineáris egyenletrendszerről. Matematikai Lapok *8* (1957) 61—67 (Orosz és angol kivonattal).
10. Über einige Fragen, die mit Lückensätzen verknüpft sind. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A I. 250/30, Helsinki 1958, 1—7.
11. On periodic entire functions, II. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de R. Eötvös nominatae, Sectio Mathematica *1* (1958) 123—126.
12. On multiple zeros of derivatives of periodic entire functions. International

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Congress of Mathematicians in Edinburgh 1958, Abstracts of short communications, 66.
13. Néhány megjegyzés trigonometrikus polinomokról. Matematikai Lapok *10* (1959) 249—254. (Angol és orosz kivonattal).
14. Bemerkungen über trigonometrische Polynome. Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft *66* (1961) 41.
15. On some questions concerning lacunary power series of two variables. Colloquium Mathematicum *11* (1964) 165—171.
16. On „small" coefficients of the power series of entire functions, Abstracts of the Conference on the Classical Theory of Functions of one complex variable, London 1964.
17. On "small" coefficients of the power series of entire functions, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica *6* (1963) 27—38 (Rényi Alfréddal együtt).
18. Some remarks on periodic entire functions. Journal d'Analyse Mathématique *14* (1965) 303—310 (Rényi Alfréddal együtt).
19. Über die Werteverteilung ganzer Funktionen, Tagungsbericht Oberwolfach, 1968.
20. The Prüfer-code for k-trees. Kombinatorikai Kollokvium Közleményei, sajtó alatt (Rényi Alfréddal együtt).
21. Egész függvények asszimptotikus értékeiről, Matematikai Lapok, sajtó alatt.

*

Rényi Kató működésének ismertetésére következő számunkban visszatérünk.



VARGA OTTÓ
1909—1969

VARGA OTTÓ TUDOMÁNYOS MUNKÁI

1. Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen. Lotos, Prag *84* (1936), 1—4.
2. Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum. Math. Z. *40* (1935), 384—405.
3. Integralgeometrie 8. Über Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum P_n. Rev. Mat. Hispano—Americana (1935), 241—279.
4. Integralgeometrie 9. Über Mittelwerte an Eikörpern. Mathematica *12*, 65—80. —W. Blaschke-vel közösen.
5. Integralgeometrie 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen. Math. Z. *41* (1936), 768—784.
6. Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum. Math. Z. *42* (1937), 710—736.
7. Über die Integralinvarianten die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören. Acta Sci. Math. Szeged *9* (1939), 88—102.
8. Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen. Monatshefte f. Math. und Phys. *50* (1941), 165—175.
9. Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen. Deutsche Math. *6* (1941), 192—212.
10. A invariáns differenciál megállapítása a Finsler- féle terekben. Mat. és Fiz. Lapok (1941), 423—435.
11. Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie. Acta Sci. Math. *10* (1943), 149—163.
12. A Finsler- féle geometria felépítése a Minkowski- féle simuló mértékmeghatározással. Mat. és Term. Ért. *61* (1942), 14—21.
13. Az állandó görbületű Riemann féle terek egyik jellemzési módjáról. Mat. és Fiz. Lapok *50* (1943), 34—39.

14. Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern. Comm. Math. Helv. *19* (1946), 367—380.
15. Linienelementräume, deren Zusammenhang durch eine beliebige Transformationsgruppe bestimmt ist. Acta Sci. Math. Szeged *11* (1946), 55—62.
16. Über die Lösung differentialgeometrischen Fragen in der nichteuklidischen Geometrie unter gleichzeitiger Verwendung homogener und inhomogener Koordinaten. Hung. Acta Math. *1* (1947), 35—52.
17. Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet. Hung. Acta Math. *4* (1949), 1—3.
18. Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Aquivalenz. Publ. Math. Debrecen *1* (1949), 1—17.
19. Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Dinghas „Zur Metrik nichteuklidischer Räume". Math. Nachrichten *2* (1949), 386—388.
20. Affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelemente, die ein Inhaltsmass besitzen. Proc. Acad. Amsterdam *52* (1949), 316—322.
21. Über den Zusammenhang der Krümmungsaffinoren in zwei eindeutig aufeinander abgebildeten Finslerschen Räumen. Acta Sci. Math. Szeged *12* (1950), 132—135.
22. Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen. Publ. Math. Debrecen *1* (1950), 116—122.
23. Az integrálgeometria alkalmazásai a geometriai optikában. MTA III. Oszt. Közleményei *1* (1951), 192—201.
24. Normalkoordinaten in allgemeinen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten. Comptes Rendus de I. Congrès des Math. Hongrois, 147—162.
25. Anwendung von p-Vektoren auf derivierte Matrizen. Publ. Math. Debrecen *2* (1951), 137—145. — Gyires Bélával közösen.
26. Szovjet eredmények a differenciálgeometriában. Mat. Lapok *2* (1951), 190—218.
27. Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *2* (1951), 281—283.
28. Az „Appendix" új kiadásának ismertetése. MTA III. Oszt. Közl. *3* (1953), 281—283.
29. A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása a geometria fejlődésére. MTA III. Oszt. Közl. *3* (1953), 151—171.
30. Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume mit absoluten Parallelismus der Linienelemente. Archiv der Math. *5* (1953), 128—131.
31. Bedingungen für die Metrisierbarkeit von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5* (1954), 7—16.
32. Bemerkung zur Cayley—Kleinscher Massbestimmung. Publ. Math. Debrecen *4* (1955), 3—15. — Aczél Jánossal közösen.
33. Olyan Finsler terek jellemzése, amelyekben létezik a vonalelemek párhuzamossága. A Kossuth Lajos Tudományegyetem Actája *1* (1954), 105—108.
34. Über Riemannsche Räume die freie Beweglichkeit besitzen. Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Math. *1* (1957), 124—130.
35. L'influence de la géométrie de Bolyai—Lobatschevsky sur le développement de la géométrie. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5* (1954), 71—94.
36. Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Räumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Räumes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *20* (1955), 41—51.

37. Eine Charakterisierung der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse mittels eines Satzes über derivierte Matrizen. Publ. Math. Debrecen *4* (1956), 418—430.
38. Normalkoordinaten in Kawaguchischen Räumen und seinen affinen Verallgemeinerungen sowie eine Anwendung derselben zur Bestimmung von Differentialinvarianten. Math. Nachrichten *18* (1958), 141—151.
39. Verallgemeinerte Riemannsche Normalkoordinaten und einige Anwendungen derselben. Izvestija Szofia *4* (1959), 61—69.
40. Ein elementargeometrischer Beweis des Sylvester-Frankeschen Determinantensatzes. Izvestija Szofia *3* (1959), 105—107.
41. Hilbertsche verallgemeinerte nicht-euklidische Geometrie und Zusammenhang derselben mit der Minkowskischen Geometrie. Internat. Congress of Math. Abstracts, Edinburgh (1958), 111.
42. Über die Zerlegbarkeit von Finslerschen Räumen. Acta Math. Hung. *11* (1960), 197—203.
43. Über eine Kennzeichnung der Riemannschen Räume konstanter negativer und positiver Krümmung. Annali di Mat. *53* (1961), 105—117.
44. Bemerkung zur Winkelmetrik in Finslerschen Räumen. Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. *3—4* (1960—61), 379—382.
45. Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen. Publ. Math. Debrecen *8* (1961), 208—217.
46. Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung. Monatshefte für Math. *65* (1961), 277—286.
47. Zur Begründung der Hilbertschen Verallgemeinerung der nichteuklidischen Geometrie. Mh. für. Math. *66* (1962), 265—275.
48. Herleitung des Cartanschen euklidischen Zusammenhanges in Finslerräumen mit Hilfe der Riemannschen Geometrie. Acta Phys. et Chimica *8* (1962), 121—124.
49. Eine einfache Herleitung der Cartansche Übertragung der Finslergeometrie. Math. Notae *18* (1962), 185—196.
50. Über Hyperflächen konstanter Normalkrümmung in Minkowskischen Räumen. Tensor N. S. *13* (1963), 246—250.
51. Hyperflächen mit Minkowskischer Massbestimmung in Finslerräumen. Publ. Math. Debrecen *11* (1964), 301—309.
52. Zur sphärischen Abbildung in Riemannschen Räumen. Annales de l' Univ. de Jassy *11 B* (1965), 507—517.
53. Die Methode des beweglichen n-Beines in der Finsler-Geometrie. Acta Math. Sci. Hung. *18* (1967), 207—215.
54. Kárteszi Ferenc 60 esztendős. Mat. Lapok *18* (1967), 273—282. — Merza Józseffel közösen.
55. Hyperflächen konstanter Normalkrümmung in Finslerschen Räumen. Math. Nachrichten *38* (1968), 47—52.

*

Varga Ottó tudományos munkásságának ismertetésére lapunk következő számában térünk vissza.

KONVEX ÖTSZÖGBŐL SZÁRMAZTATOTT AFFIN-SZABÁLYOS ÖTSZÖGPÁR

Varga Ottó emlékének

KÁRTESZI FERENC

Közleményünk Fejes Tóth László egy érdekes tételének bizonyos kiegészítését adja. Fejes Tóth a konvex sokszög *regularitását* egy csupán az alaktól függő ϱ számmal úgy jellemzi, hogy

$$0 \leqq \varrho(\mathbf{A}) \leqq 1$$

(**A** jelöli a sokszöget), ahol a $\varrho = 1$ akkor és csak akkor következik be, ha **A** egy affin-szabályos nem-elfajuló sokszög. E fogalom birtokában a következő kérdést vizsgálta **A** konvex ötszög és konvex hatszög esetében. Az **A** konvex sokszög oldalfelező pontjai kifeszítette sokszöget jelölje $\mathbf{A}'$, ezt az eredeti sokszög *elsőrendű felező sokszögének* nevezzük. Az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ művelet iterálásával nyert

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots, \mathbf{A}^{(r)}, \ldots$$

poligonsorozathoz tartozó reguláris sorozat, a

$$\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots, \varrho^{(r)}, \ldots$$

számsorozat érdekes viselkedését — ötszög és hatszög esetében — Fejes Tóth tétele fejezi ki:

$$\lim_{r \to \infty} \varrho^{(r)} = 1.$$

Vagyis minél magasabb fokú felező sokszöget tekintünk, az annál jobban megközelíti az affin-szabályos alakot. Mi most itt azt vizsgáljuk, hogy a poligonsorozat elemeit homotéciákkal alkalmas méretűvé nagyítva, a nyert

$$\check{\mathbf{A}}\,(=\check{\mathbf{A}}), \check{\mathbf{A}}', \check{\mathbf{A}}'', \ldots, \check{\mathbf{A}}^{(r)}, \ldots$$

poligonsorozat tart-e valamiféle határalakzathoz és határálláshoz. A felelet igenlő, ha **A** egy öt- vagy hatszög.

1. EGY KONVEX ÖTSZÖGBŐL KIINDULÓ SZERKESZTÉSSEL NYERT AFFIN SZABÁLYOS ÖTSZÖG ÉS ENNEK FELEZŐ ÖTSZÖGE

Legyen az $\mathbf{A} = A_1A_2A_3A_4A_5$ konvex ötszög (csúcsainak) súlypontja az Argand—Gauss-féle számsík zéruspontja, és a számsík A_k pontja legyen az a_k komplex szám képe. — A következőkben latin betűkkel komplex számokat, görög betűkkel valós számokat (vektorokat, illetve skalárokat) jelölünk. — Ilyen módon nyilvánvaló, hogy

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0. \tag{1. 1}$$

Jelölje a szabályos ötszög átlója és oldala hosszának a hányadosát ξ, vagyis

$$\xi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \text{tehát} \quad \xi^2 - \xi - 1 = 0. \tag{1.2}$$

Most pedig egy euklideszi értelemben való szerkesztésre adunk utasítást egyszerű egyenletrendszerrel:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B}: \begin{cases} b_1 = \xi a_1 + a_2 + * + * + a_5, \\ b_2 = a_2 + \xi a_2 + a_3 + * + *, \\ b_3 = * + a_2 + \xi a_3 + a_4 + *, \\ b_4 = * + * + a_3 + \xi a_4 + a_5, \\ b_5 = a_1 + * + * + a_4 + \xi a_5. \end{cases} \tag{1.3}$$

Az így szerkesztett pontok páronként különbözők, és nem esik három egy egyenesbe; ezt azonban igazolnunk kell. — Az azonban az öt egyenlet összegéből és az (1. 2)-ből nyilvánvaló, hogy a **B** és **A** súlypontja egybeesik: a számsík zéruspontja. — (A $*$ mindenütt a 0 helyett áll.)

Tekintsük a B_k pontok következő csoportosításait:

$$(B_1, B_2;\ B_5, B_3), \quad (B_2, B_3;\ B_1, B_4), \quad (B_3, B_4;\ B_2, B_5)$$

$$(B_4, B_5;\ B_3, B_1), \quad (B_5, B_1;\ B_4, B_2).$$

Hogyha itt bármelyik pontnégyes bármelyik pontpárjának a két eleme egybeesik, akkor a másik pontpárja is egybeeső pontokbó álll.

Elegendő ezt az állítást az első pontnégyesre bizonyítani, mert a többiekre vonatkozó bizonyítás hasonló. Az (1. 3)-ból

$$b_1 - b_2 = (\xi - 1)(a_1 - a_2) - (a_3 - a_5), \qquad b_5 - b_3 = (a_1 - a_2) - \xi(a_3 - a_5);$$

minthogy pedig $\xi^2 - \xi = 1$, a két előbbiből

$$\xi(b_1 - b_2) = b_5 - b_3. \tag{1.4}$$

Eszerint pedig $b_1 = b_2$-ből $b_3 = b_5$ következik és viszont, ami a bizonyítandó állításnak felel meg. Ez azonban csak akkor következhet be (a $b_5 - b_3$ fentebbi kifejezése alapján), ha

$$\xi(a_3 - a_5) = a_1 - a_2. \tag{1.5}$$

Könnyen belátható a szereplő indexek sorrendjéből és a $\xi > 1$ egyenlőtlenségből, hogy vagy egy szabályos csillagötszög (a szabályos ötszög átlói alkotta ötszög) affin képének éllánca az $A_5A_1 \cdot A_1A_2 \cdot A_2A_3$, vagy egy egyenesbe esik az A_3A_5 és a ξ-szerakkora A_1A_2 szakasz, vagy $A_1 = A_2$ és $A_3 = A_5$. Hogyha az **A** egy nem-degenerált konvex ötszög, akkor mindezek a feltételek kizártak.

No most vizsgáljuk meg, eshet-e egy egyenesbe **B**-nek három csúcsa. Az (1. 3) ciklikus rendszert alkot, elegendő csak a $B_1B_2B_3$ és a $B_1B_2B_4$ ponthármasok esetét tekinteni, mert a többi eset ezekhez hasonlóan tisztázható. Felhasználjuk a $Z_1Z_2Z_3$ háromszög területét kifejező

$$T = \frac{1}{4i}\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (z \text{ konjugáltja } \bar{z}) \tag{1.6}$$

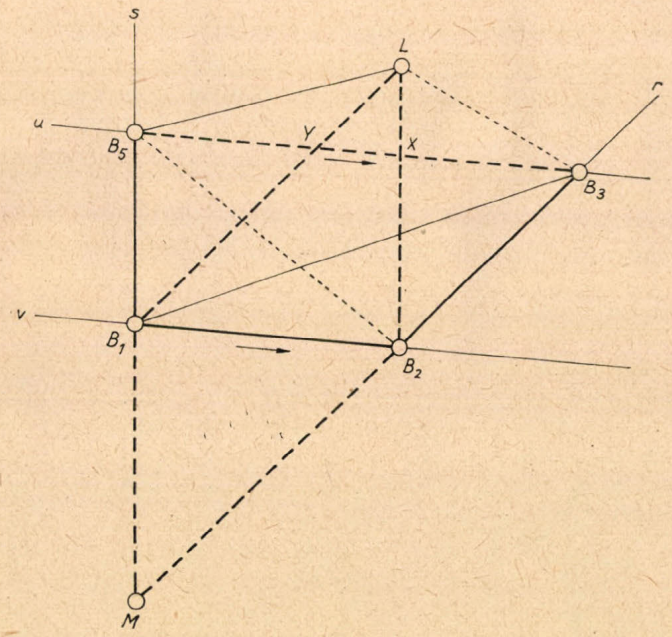
képletet. — Előjeles területről van szó; aszerint, hogy a kétféle körüljárás melyikéről van szó vagy $+$, vagy $-$ előjelű a terület. — Rövidség kedvéért az $A_1A_2A_3$ területet (123)-mal, a $B_1B_2B_3$ területet pedig (123)′-vel jelöljük. Az (1. 3) és (1. 6) alapján, ha nem is röviden, de könnyen levezethető, hogy

$$(1.\ 7)\qquad \begin{cases} (123)' = (\xi-1)^2(123)+(\xi-1)[(124)+(234)]+(123)+(345), \\ (124)' = (124)+(135)+(\xi-1)[(235)+(345)]+\xi(125). \end{cases}$$

Konvex **A** ötszög esetén az (12345) körüljárásnak megfelelő előjel szerint a jobb oldalon szereplő öt tag — minthogy a $(\xi-1)^2$, $(\xi-1)$, ξ, 1 együtthatók mindegyike pozitív szám — vagy mind nem-negatív, vagy mind nem-pozitív. A bal oldal csak akkor zéró, ha a jobb oldali öt terület mindegyike zéró, vagyis **A** minden csúcsa egy egyenesbe esik.

Hogyha tehát az **A** ötszög konvex és van három, valódi háromszöget kifeszítő, egymás utáni csúcspontja, akkor a tárgyalt degenerációk **B**-re nézve nem lehetségesek. Nevezzük az ilyen **A** ötszöget *normális konvex ötszögnek* (mert legalább háromszög a konvex burka).

Most konstruktív bizonyítást adunk arra, hogy **A** *normális konvex ötszög generálta* **B** *egy affin-szabályos ötszög.*



1. ábra

Az **A**-ra vonatkozó feltevés következtében feltehető, hogy az (1. 4)-et realizáló B_1B_2 és B_5B_3 szakasz egyenese egymástól különböző, párhuzamos u, v egyenespár. Az utóbbi szakasz aranymetszéssel való felbontása szolgáltatja az X vagy Y pontot. Így hát B_1B_5 a B_2X-szel, B_2B_3 a B_1Y-nal párhuzamos. Az L metszéspont nyilván u-nak v-vel ellenkező oldalán adódik. Az aranymetszés folytán

$$\xi = B_5B_3:B_5X = YB_3:XB_3 = XB_3:YX.$$

Ebből és az X centrumra homotétikus B_2XB_3, LXY háromszögpárból következik, hogy az X centrumra nézve B_2XB_5 és LXB_3 viszonya is homotécia, tehát B_2B_5 és B_3L párhuzamos szakaszok, és hányadosuk ξ. Hasonló helyzet- és nagyságviszony van B_1B_3 és B_5L közt is. Az (1. 4) és belőle az indexek ciklikus eltolásával adódó további négy egyenlet olyan B_4 pontról szól, mely nem más, mint a szerkesztésünk szolgáltatta L pont. (Ezzel a kérdéses bizonyítást befejeztük. A most igazolt tulajdonság ugyanis — **B** minden átlója egy-egy oldallal párhuzamos, és ezek hosszának a hányadosa ξ — csakis az affin-szabályos ötszög tulajdonsága.) A szerkesztéssel tehát *olyan konvex ötszöghöz jutottunk, melyben minden oldal átlóval párhuzamos, és az oldal hosszának ξ-szorosa a vele párhuzamos átló hossza.*

A **B** ötszög most tisztázott tulajdonságaiból — sőt már abból, hogy egy átló nagyobb a vele párhuzamos oldalnál, s a mondott oldalt az átellenes csúcstól elválasztja — következik, hogy *a* **B** *ötszög köré írt k kúpszelet nem más, mint egy ellipszis.* Mondhatjuk, hogy a k ellipszist **B** csúcsai úgy bontják fel öt ívre, hogy azok közül bármely két nem-szomszédos ív négy végpontját két párhuzamos húr köti össze. Minthogy ez egy affin tulajdonság, továbbá a k ellipszis alkalmas affinitással egy k^* körbe vihető át, ott az előbb mondott öt ellipszisívnek öt páronként egyenlő körív a képe, vagyis a $\mathbf{B}^*$ képötszög a k^* körbeírt szabályos ötszög. Eszerint szerkesztésünk valóban a szó szorosabb értelmében vett konvex, affin-szabályos ötszöget szolgáltat.

Abból, hogy egy szabályos ötszög felező ötszöge ugyancsak szabályos ötszög, már nyilvánvaló, hogy *egy affin-szabályos ötszög felező ötszöge ugyancsak affin-szabályos ötszög*, sőt az utóbbiból kétszeresre nagyító homotéciával származtatott ötszög is affin-szabályos ötszög. Ennek az alapján és az (1. 3)-ból következik, hogy ha $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ művelet (a szó szorosabb értelmében) egy **B** affin szabályos ötszöget eredményez, akkor ugyanaz áll az

$$(1.8)\qquad \mathbf{A}\to\mathbf{C}\begin{cases} c_1 = \ast + a_2+(\xi+1)a_3+(\xi+1)a_4+a_5, \\ c_2 = a_1+\ast+a_3+(\xi+1)a_4+(\xi+1)a_5, \\ c_3 = (\xi+1)a_1+a_2+\ast+a_4+(\xi+1)a_5, \\ c_4 = (\xi+1)a_1+(\xi+1)a_2+a_3+\ast+a_5, \\ c_5 = a_1+(\xi+1)a_2+(\xi+1)a_3+a_4+\ast \end{cases}$$

műveletre is. Az (1. 1) és (1. 8) egyenletekből közvetlenül kitűnik, hogy **A** és **C** súlypontja egybeesik; ez ugyan abból is nyilvánvaló, hogy a **B** súlypontú homotéciacentrumnak tekintve, a kétszeresre nagyító homotécia a **B** felező ötszögét **C**-be viszi át, és **B** súlypontja az **A**-nak is súlypontja.

Nevezzük el az **A**-ból (1. 3) és (1. 8) transzformációval származtatott **B** és **C** alakzatot *az* [**A**, ξ] *által generált ötszögeknek.*

2. EGY KONVEX ÖTSZÖG DERIVÁLT ÖTSZÖGEINEK LIMESALAKZATA

Az (1. 1)-nek megfelelő **A** konvex poligon elsőrendű felező poligonjának **A**′-nek a csúcsai:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} a_1' = \frac{1}{2}(a_3+a_4),\quad a_2' = \frac{1}{2}(a_4+a_5),\quad a_3' = \frac{1}{2}(a_5+a_1), \\ a_4' = \frac{1}{2}(a_1+a_2),\quad a_5' = \frac{1}{2}(a_2+a_3). \end{cases}$$

A rendezett komplex számötösök, az $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ és az $(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5)$ kapcsolatát tehát egy racionális együtthatós lineáris transzformáció fejezi ki, sőt elfajuló lineáris transzformáció, hiszen az együtthatóiból alkotott

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^{-1} \cdot \mathbf{U} \tag{2. 2}$$

matrix determinánsa zéró, ami a sorok váltakozó előjellel való összegezéséből azonnal látható. E művelet iterálásával olyan lineáris transzformációkat létesítünk, amelyekhez tartozó mátrixok a $2^{-1} \cdot \mathbf{U}$ matrix egymás utáni hatványai. Az eredeti mátrix szimmetrikus és ciklikus, azért a hatványai is olyanok. Jelölje $\mathbf{V}$ azt az ötödrendű négyzetes mátrixot, melynek minden eleme 1. Könnyen belátható, hogy a negyedik hatvány középső sora, ha csak az $\mathbf{U}^4$ tényezőt tekintjük:

$$1\ 4\ 6\ 4\ 1,$$

vagyis a 4-ik hatványhoz tartozó binomiális együtthatók. Az (1. 1)-re való tekintettel azonban a (2. 1) transzformáció negyedik hatványa egy a $\mathbf{V}$ által redukált mátrixú lineáris transzformációval azonos hatású az $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$-re nézve; a redukált mátrix pedig:

$$2^{-4} \cdot (\mathbf{U}^4 - \mathbf{V}).$$

A szorzat mátrixtényezője olyan ciklikus mátrix, melynek a középső sora a

$$0\ 3\ 5\ 3\ 0.$$

A következő hatványokat már úgy számítjuk ki, hogy az $\mathbf{U}_4$-et $\mathbf{U}_4 - \mathbf{V}$ mátrixszal helyettesítjük. A 6. hatvány ismét olyan, melynek a mátrix tényezője $\mathbf{V}$ segítségével úgy redukálható, hogy a redukált mátrix legkisebb eleme a zéró legyen. Így a hatodik hatványban a 2^{-6} skalár tényező után következő redukált mátrix középső sora

$$0\ 8\ 13\ 8\ 0.$$

Vegyük észre, hogy egy jól ismert számsorozat elemei lépnek itt fel. Tekintsük ugyanis az

$$\omega_1 = \omega_2 = 1, \quad \omega_n = \omega_{n-2} + \omega_{n-1} \qquad (n > 2)$$

előírással meghatározott

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

sorozatot: a Fibonacci-sorozatot. Azt állítjuk, hogy ha n egy páros szám, akkor az n-edrendű felező ötszöget definiáló lineáris transzformáció mátrixa:

$$2^{-n} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{n+1} & \omega_n & 0 & 0 & \omega_n \\ \omega_n & \omega_{n+1} & \omega_n & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n & \omega_{n+1} & \omega_n & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n & \omega_{n+1} & \omega_n \\ \omega_n & 0 & 0 & \omega_n & \omega_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{2. 3}$$

Ha n egy páratlan szám, akkor a mátrix:

$$(2.4) \qquad 2^{-n}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \omega_{n-1}\omega_{n+1} & \omega_{n+1}\omega_{n-1} & \\ \omega_{n-1} & 0 & \omega_{n-1}\omega_{n+1} & \omega_{n+1} \\ \omega_{n+1} & \omega_{n-1} & 0 & \omega_{n-1}\omega_{n+1} \\ \omega_{n+1} & \omega_{n+1}\omega_{n-1} & 0 & \omega_{n-1} \\ \omega_{n-1} & \omega_{n+1}\omega_{n+1} & \omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ez pedig teljes indukcióval könnyen igazolható, az olvasóra hagyjuk.

Az ilyen mátrixú — vagyis a (2. 3), illetve (2. 4) — lineáris transzformáció fejezi ki az $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^{(n)}$ műveletet. Írjuk e transzformáció mátrixát

$$\frac{\omega_n}{2^n}(\ldots)$$

szorzat gyanánt, vagy midőn a mátrixtényező középső sora:

$$\left(0, 1, \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}, 1, 0\right),$$

illetve

$$\left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n-1}}, 1, 0, 1, \frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n-1}}\right);$$

a mátrix ciklikus.

Hogyha most e transzformációval nyert $\mathbf{A}^{(n)}$-et a

$$(2.5) \qquad \hat{z} = \frac{2^n}{\omega_n} z$$

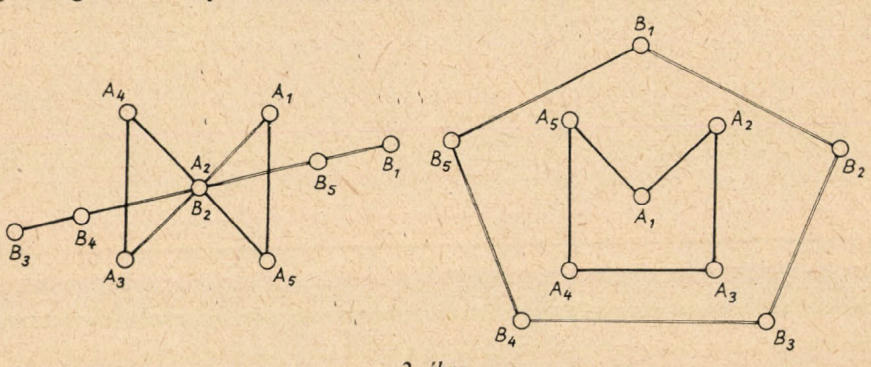
homotéciával tovább alakítjuk, akkor nyerjük az $\check{\mathbf{A}}$-et: *az* $\mathbf{A}^{(n)}$ *poligon n-edik deriváltpoligonját.*

Hogyha *az n páros értékein át* haladunk, akkor az n-edik deriválthoz tartozó mátrix az (1. 3) transzformáció mátrixához konvergál; hogyha pedig *az n páratlan értékein át* haladunk, akkor az n-edik derivált matrixa az (1. 8) mátrixához konvergál.

Ez az állításunk a Fibonacci-sorozat jól ismert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \xi \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n-1}} = \xi + 1$$

tulajdonságából könnyen következik.



2. ábra

Mondhatjuk tehát, hogy *egy* **A** *normális konvex ötszög páros rendű deriváltjai és páratlan rendű deriváltjai az* [**A**,ξ] *által generált affin szabályos* **B**, *illetve* **C** *ötszöghöz konvergálnak.*

A 2. ábra megmutatja, hogy a szóban forgó tétel **B**-re vonatkozó megállapítása nem csak akkor érvényes, ha **A** normális és konvex; erre példa az ábra jobb oldali képe. Továbbá ugyanaz az öt pont — az ábra mindkét **A** ötszögének csúcsait egy négyzet csúcsai és középpontja adja — az összekötéssel realizált ciklikus permutációtól függően lényegesen különböző **B** ötszögeket generál. A bal oldali kép esetében is $\xi \cdot B_4B_5 = B_3B_1$, s lehetne a degenerált **B**-t affin-szabályos ötszögnek mondani, és egy alkalmas szabályos ötszög egyenesre merőleges vetületeként előállítani. Az *ötszög* szó azonban ebben az esetben erőszakolt lenne.

АФФИННО-ПРАВИЛЬНАЯ ПАРА ПЯТИУГОЛЬНИКОВ, ВЫВЕДЕННАЯ ИЗ ВЫПУКЛОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Ф. КАРТЕСИ

SUI PENTAGONI AFFINI-REGOLARI GENERATI DA UN PENTAGONO CONVESSO

F. KÁRTESZI

Partendo da un recente risultato di Fejes Tóth, l'Autore tratta certi complementi. — Sia dato un pentagono convesso $\mathbf{A} = A_1 \ldots A_5$. Sia A'_j il punto medio del lato $A_{j+3}A_{j+4}$ (considerando gli indici in senso ciclico); $\mathbf{A}' = A'_1 \ldots A'_5$. Ripetendo l'operazione $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, si genera: **A**,**A**′, **A**″, ... Mediante una omotezia conveniente ϱ_k trasformiamo il pentagono $\mathbf{A}^{(k)}$, si ha

$$\varrho_k(\mathbf{A}^{(k)}) = \check{\mathbf{A}}^{(k)},$$

$\check{\mathbf{A}}^{(k)}$ verrà chiamata *k-esimo derivato di* **A**. L'Autore stabilisce le proprietà della successione dei pentagoni derivati. —

Considerando la successione

$$\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{A}}'', \ldots, \check{\mathbf{A}}^{(2r)}, \ldots$$

e la successione

$$\check{\mathbf{A}}', \mathbf{A}''' \ldots, \check{\mathbf{A}}^{(2r+1)}, \ldots,$$

si risulta: esistono pentagoni affini-regolari **B** e **C**, dove

$$\lim_{r\to\infty} \check{\mathbf{A}}^{(2r)} = \mathbf{B}, \quad \lim_{r\to\infty} \check{\mathbf{A}}^{(2r+1)} = \mathbf{C},$$

se **A** è un pentagono convesso (con non tutti vertici allineati). La costruzione di **B** (o di **C**) — partendo da **A**, in senso euclideo —, è semplice.

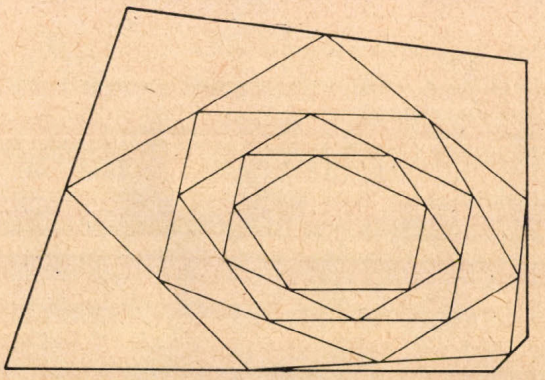
SOKSZÖGEKRE VONATKOZÓ ITERÁCIÓS ELJÁRÁSOK

Varga Ottó emlékének

FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Rajzoljunk egy konvex ötszöget és írjuk bele az oldalfelezők által felfeszített ötszöget. Ezt a szerkesztést iterálva azt vesszük észre, hogy a keletkező ötszögek egyre inkább hasonlítanak egy szabályos ötszög affin képéhez (1. ábra). Ezt a tényt fejezi ki az alábbi

1. tétel. *Legyen* $P^0, P^1, \ldots$ *ötszögeknek egy sorozata, amelyben* P^0 *egy tetszés szerinti konvex ötszög, és* P^n *csúcsait* P^{n-1} *oldalfelezői alkotják* $(n=1,2,\ldots)$. *Akkor megadható minden* P^n *ötszögnek egy-egy affin ekvivalens példánya,* P_n, *úgy hogy a* $P_0, P_1, \ldots$ *sorozat egy szabályos ötszöghöz konvergál.*



1. ábra.

Ez a tétel minden bizonnyal igaz bármely oldalszámú konvex sokszögekre is. Bizonyításunk egy kis kiegészítéssel alkalmazható hatszögekre is, de az általános eset tárgyalásánál bizonyos nehézségek lépnek fel.

A bizonyítás alapgondolata a következő: Definiálunk egy 0 és 1 között fekvő affin invariáns $S(P)$ mértékszámot, amely egy konvex P sokszög szabályosságát méri, és megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} S(P^n)=1$.

Bár tételünk az euklideszi síkra vonatkozik, célszerű lesz a bizonyításban az affin síkon operálni.

Egy konvex k-szöget k végesben fekvő nem kollineáris $A_1, \ldots, A_k$ pont, a k-szög csúcsai határoznak meg, amelyek mind rajta vannak saját konvex burokjuk h határán. A csúcsokat természetes ciklikus sorrendjükben indexezzük, úgy hogy az $A_1A_2, \ldots, A_kA_1$ szakasz, a k-szög oldalai, mind h-n legyenek, és h-t a csúcsok kivételével egyszeresen lefedjék. Nem zárjuk ki azt, hogy bizonyos csúcsok egybeessenek, s ennek megfelelően bizonyos oldalak egy pontból álljanak. Ha $i\equiv j \pmod k$, akkor az A_i csúcsot egyszersmind A_j-vel jelöljük, s ezt az $A_i \equiv A_j$ írásmóddal juttatjuk kifejezésre. Az $A_s = A_t$ reláció viszont azt jelenti, hogy az A_s és A_t csúcs egybeesik.

A P sokszög oldalfelezői által meghatározott sokszöget P *súlyponti sokszögének* nevezzük és P'-vel vagy P^1-gyel jelöljük. Használni fogjuk továbbá a $(P^n)' = P^{n+1}$ jelölést $(n=1, 2, \ldots)$.

Legyen $N = A_{i-1}A_iA_jA_{j+1}$ a konvex $P = A_1 \dots A_k$ k-szög $A_{i-1}A_i$ és A_jA_{j+1} oldala által meghatározott négyszög. Egy konvex sokszög definíciója szerint $A_{i-1} \neq A_{j+1}$, $A_i \neq A_j$ és A_{i-1}, A_i, A_j, A_{j+1} nem fekhet egy egyenesen. Előfordulhat azonban, hogy N egyik (de csak egyik) oldala egy pontból áll, tehát például $A_{i-1} = A_i$ vagy $A_i = A_j$. Az N négyszög $A_{i-1}A_i$ és A_jA_{j+1} oldala kitüntetett szerepet játszik. Ezeket az oldalakat N *szár*ainak nevezzük. Azt mondjuk, hogy N P-nek az $A_{i-1}A_i$ és A_jA_{j+1} szár által meghatározott négyszöge. Ha azt mondjuk, hogy N trapéz, ezt mindig úgy értjük, hogy N olyan trapéz, amelynek szárai megegyeznek N száraival. Könnyen belátható, hogy egy konvex sokszög csak akkor affin-szabályos, ha valamennyi négyszöge trapéz.

A csúcsok eddigi jelölésétől eltérően legyen $B\bar{B}\bar{C}C$ P-nek $B\bar{B}$ és $\bar{C}C$ szárú négyszöge. Definiáljuk most a $B\bar{B}\bar{C}C$ négyszög $T(B\bar{B}\bar{C}C)$ *trapezitás*át. Ha $B \neq C$ és $\bar{B} \neq \bar{C}$, akkor legyen a BC és $\bar{B}\bar{C}$ egyenes metszéspontja A. B és C szerepét itt és a továbbiakban is mindig úgy választjuk, hogy $0 \leqq (ABC) \leqq 1$ és $0 \leqq (A\bar{B}\bar{C}) \leqq 1$ legyen. Most a trapezitást az (ABC) és $(A\bar{B}\bar{C})$ osztóviszony közül a kisebbikkel definiáljuk:

$$T(B\bar{B}\bar{C}C) = \min\{(ABC), (A\bar{B}\bar{C})\}.$$

Ha viszont $B = C$ vagy $\bar{B} = \bar{C}$, akkor legyen $T(B\bar{B}\bar{C}C) = 1$.

A P sokszög $S(P)$ *szabályosság*át legkisebb trapezitású négyszögének trapezitásával definiáljuk.

Azt mondjuk, hogy P *teljesen szabálytalan*, ha van három kollineáris csúcsa.

1. lemma. Az $S(P) = 0$ egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P teljesen szabálytalan.

Ha P-nek van három kollineáris csúcsa, akkor van olyan $B\bar{B}\bar{C}C$ négyszöge, hogy $B \neq C$, és hogy B, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ egy egyenesen feküdjön, amely nem tartalmazza C-t. Ekkor

$$S(P) = T(B\bar{B}\bar{C}C) = (ABC) = 0.$$

Megfordítva, ha $S(P) = T(B\bar{B}\bar{C}C) = 0$, akkor $B \neq C$, $\bar{B} \neq \bar{C}$, és vagy B, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ vagy $\bar{B}$, B és C kollineáris.

2. lemma. Az $S(P) = 1$ egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P affin-szabályos.

Ha $P = A_1 \dots A_k$ affin-szabályos, akkor nyilvánvalóan $S(P) = 1$. Induljunk ki most megfordítva abból a feltevésből, hogy $S(P) = 1$. Akkor P-nek nincsenek egybeeső csúcsai, s így $A_1A_2A_3A_4$ trapéz. Mivel egy trapéz egy affinitással mindig egyenlőszárú trapézba vihető, feltehetjük, hogy $A_1A_2 = A_3A_4$. Azok közül a kúpszeletek közül, amelyek az A_1A_2 és A_3A_4 oldalt a középpontjukban érintik, van pontosan egy kúpszelet, s, amely az A_2A_3 oldalt is érinti. Az érintési pont a szimmetria miatt az A_2A_3 oldal felezőpontjában van.

Most P-t egy affinitással úgy transzformáljuk, hogy $A_2A_3 = A_3A_4$ legyen. Akkor $A_1A_4 \| A_2A_3$, $A_2A_5 \| A_3A_4$ és $A_2A_4 \| A_1A_5$ miatt az $A_2A_3A_4$ háromszöggel együtt az $A_1A_2A_4A_5$ trapéz is egyenlőszárú lesz. Az A_2A_3 és A_3A_4 oldalakat a felezőpontjukban érintő kúpszeletek között van pontosan egy, amely az A_1A_2 egyenest is érinti. Mivel s ezeket a feltételeket kielégíti, azért a tekintett kúpszelet s-sel azonos. Mivel továbbá s az A_1A_2 oldalt a felezőpontjában érinti, azért s a szimmetria miatt az A_4A_5 oldalt is a felezőpontjában érinti. Az s kúpszelet tehát P minden oldalát a felezőpontjában érinti. Ezért s egy ellipszis, és P affin-szabályos.

Azt mondjuk, hogy k-szögeknek egy sorozata, $Q_1, Q_2, \dots$, egy Q k-szöghöz konvergál, ha Q_n csúcspontjainak rendszere $n \to \infty$-re Q csúcspontjainak rendszeréhez konvergál.

3. lemma. Legyen $Q_1, Q_2, \ldots$ konvex k-szögeknek egy sorozata, amely a Q k-szöghöz konvergál: $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$. Akkor $S(Q) = \lim_{n\to\infty} S(Q_n)$.

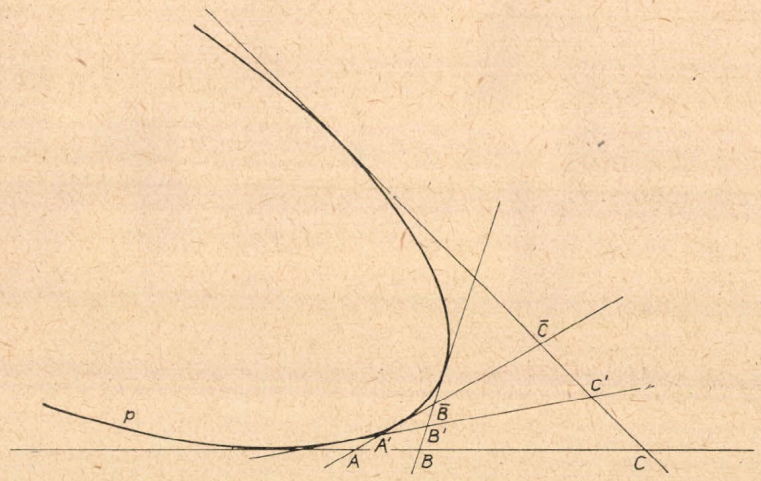
Ha Q-nak nincs két egybeeső csúcsa, akkor a lemma triviális. Ha van, akkor $S(Q) = 0$. Ekkor viszont Q_n-nek van egy olyan oldala, amelynek hossza nullához tart, és egy másik, az előbbivel nem szomszédos oldala, amelynek hossza nem tart nullához. E két oldal által meghatározott négyszög trapezitása, s ezzel együtt $S(Q_n)$ nullához tart.

4. lemma. Ha P egy konvex ötszög, akkor $S(P) \leqq S(P')$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P és P' vagy teljesen szabálytalan vagy affin-szabályos.

A bizonyításhoz egy megjegyzést teszünk, amelyre még később is szükségünk lesz.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy a $B\bar{B}\bar{C}C$ négyszög nem teljesen szabálytalan. Legyen B' és C' a $B\bar{B}$ és $\bar{C}C$ oldal középpontja és A' a $\bar{B}\bar{C}$ és $B'C'$ egyenes metszéspontja. Akkor $(ABC) = (A'B'C')$.

Ennek bizonyításához feltehetjük, hogy a $B\bar{B}\bar{C}C$ négyszög oldalai közül egyik sem párhuzamos egy másikkal, mert különben állításunk triviális. Akkor létezik egy egyértelműen meghatározott p parabola, amely $B\bar{B}\bar{C}C$ oldalegyeneseit érinti (2. ábra). Most hivatkozunk arra az ismert tényre, hogy egy parabolának

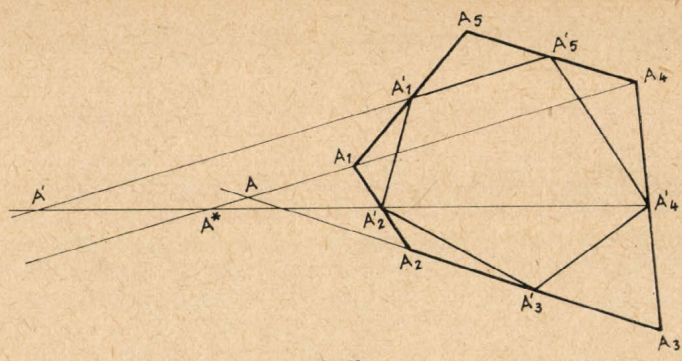


2. ábra

egy mozgó érintője két rögzített érintőjéből hasonló pontsorokat metsz ki, és fordítva, azok az egyenesek, amelyek két hasonló, nem perspektív pontsor megfelelő pontjait kötik össze, mindig egy parabolát burkolnak. Minthogy $(BB'\bar{B}) = (CC'\bar{C}) = 1/2$, azért a $B'C'$ egyenes is érinti a p parabolát. Ámde abban a hasonlóságban, amelyet p a BC és $B'C'$ érintőjén létesít, az A, B és C pontnak az A', B' és C' pont felel meg. Ezért megjegyzésünkkel összhangban $(ABC) = (A'B'C')$.

Legyen most $P = A_1 \ldots A_5$ egy konvex ötszög és $P' = A_1' \ldots A_5'$ P súlyponti ötszöge. A_i' legyen az $A_{i-1}A_i$ oldal felezőpontja. A 4. lemma bizonyításához feltehetjük, hogy $0 < S(P) < 1$, mert különben a lemma triviális. Válasszuk a jelöléseket úgy, hogy az $A_5'A_1'$ és $A_4'A_2'$ félegyenes egymást egy A' pontban messe, és hogy

$$S(P') = T(A_1'A_2'A_4'A_5') = (A'A_2'A_4')$$



3. ábra

legyen. Legyen továbbá az A_1A_4 és A_2A_3 egyenes metszéspontja A és az A_1A_4 és $A'_2A'_4$ egyenes metszéspontja A^* (3. ábra). Akkor megjegyzésünk szerint $(A^*A'_2A'_4) = (AA_2A_3)$, s ezért

$$S(P') = (A'A'_2A'_4) > (A^*A'_2A'_4) = (AA_2A_3) \geqq T(A_1A_2A_3A_4) \geqq S(P).$$

Ezután az előkészítés után az 1. tétel bizonyítása egyszerű lesz. Legyen H_n egy P^n-et tartalmazó legkisebb területű háromszög, és H egy tetszés szerinti háromszög. Az az affinitás, amely H_n-et H-ba viszi, vigye át P^n-et Q_n-be. H_n definíciójából következik, hogy Q_n tartalmazza H'-t. Ezért a $Q_0, Q_1, \ldots$ ötszögsorozatból kiválasztható egy $Q_{n_0}, Q_{n_i}, \ldots$ részsorozat, amely egy konvex Q ötszöghöz konvergál: $Q = \lim_{i\to\infty} Q_{n_i}$. Ekkor egyszersmind $Q' = \lim_{i\to\infty} Q'_{n_i}$.

Mivel a 4. lemma miatt

$$S(P^0) \leqq S(P^1) \leqq \ldots \leqq 1,$$

azért a 3. lemma szerint egyrészt

$$\lim_{n\to\infty} S(P^n) = \lim_{i\to\infty} S(P^{n_i}) = \lim_{i\to\infty} S(Q_{n_i}) = S(Q),$$

másrészt

$$\lim_{n\to\infty} S(P^n) = \lim_{i\to\infty} S(P^{n_i+1}) = \lim_{i\to\infty} S(Q'_{n_i}) = S(Q'),$$

Ezért $S(Q) = S(Q')$, ami az 1., 2. és 4. lemma alapján csak úgy lehet, ha $S(Q) = 0$ vagy $S(Q) = 1$. Mivel azonban egy ötszögnek legfeljebb 4 kollineáris csúcsa lehet, és egy teljesen szabálytalan sokszögnek a súlyponti sokszögére való áttérésekor a kollineáris csúcsok maximális száma eggyel csökken, azért $S(P^2)$ már biztosan pozitív. Így csak az $S(Q) = 1$ lehetőség jön tekintetbe, s következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} S(P^n) = 1.$$

Legyen most $R = R_1 \ldots R_5$ egy szabályos ötszög és $P_n = R_0R_1R_2^nR_{-2}^nR_{-1}$ a P^n ötszög egy affin képe. Azt állítjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} R_2^n = R_2$ és $\lim_{n\to\infty} R_{-2}^n = R_{-2}$. Ellenkező esetben ugyanis létezne egy olyan $n_1, n_2, \ldots$ indexsorozat, hogy az $(R_2^{n_i}, R_{-2}^{n_i})$ pontpár $i\to\infty$-re az (R_2, R_{-2}) pontpártól különböző valamilyen $(\bar{R}_2, \bar{R}_{-2})$ pontpárhoz konvergálna. Ez azonban lehetetlen, mert az $(\bar{R}_2, \bar{R}_{-2})$ pontpárt a

$$T(R_{-1}R_0R_1\bar{R}_2) = T(R_1R_0R_{-1}\bar{R}_{-2}) = T(R_0R_1\bar{R}_2\bar{R}_{-2}) =$$
$$= T(R_0R_{-1}\bar{R}_{-2}\bar{R}_2) = T(R_1\bar{R}_2\bar{R}_{-2}R_{-1}) = 1$$

feltétel egyértelműen meghatározza. Megmutattuk tehát, hogy $\lim_{n\to\infty} P_n = R$, s ezzel az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

Bebizonyítjuk most a 4. lemma hatszögre vonatkozó megfelelőjét.

Legyen $P = A_1 \dots A_6$ egy konvex hatszög és $P' = A_1' \dots A_6'$ P súlyponti hatszöge, ahol A_i' az $A_{i-1}A_i$ oldal felezőpontja. Most is csak a $0 < S(P) < 1$ esettel kell foglalkoznunk. Az ötszögre vonatkozó bizonyításból kitűnik, hogy ha

$T(A_{i-1}A_iA_{i+2}A_{i+3}) < 1$, akkor

$$T(A_i' A_{i+1}' A_{i+2}' A_{i+3}') > T(A_{i-1} A_i A_{i+2} A_{i+3}).$$

Ezért P'-nek csak $A_{i-2}'A_{i-1}'A_{i+1}'A_{i+2}'$ típusú négyszögeit kell vizsgálnunk. Tekintsük például az $A_1'A_2'A_4'A_5'$ négyszöget.

Előfordulhat, hogy az A_1A_2 és A_4A_3 vagy az A_1A_6 és A_4A_5 félegyenespár közül az egyik széttart. Ez azonban nem következhet be akkor, ha P maga is egy konvex hatszög súlyponti hatszöge. Valóban pl. az $A_1'A_2'$ és $A_4'A_3'$ félegyenesek párhuzamosak az A_6A_2 és A_4A_2 félegyenesekkel, s így biztosan összetartanak. Ezért feltehetjük, hogy mind az A_1A_2 és A_4A_3 félegyenes, mind az A_1A_6 és A_4A_5 félegyenes összetart. Megmutatjuk, hogy

$$T(A_1' A_2' A_4' A_5') \geqq \min\{T(A_1 A_2 A_3 A_4), T(A_4 A_5 A_6 A_1)\},$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a jobb oldal egyenlő eggyel.

Vezessük be a bizonyítás szempontjából áttekinthetőbb következő jelöléseket: $A_1 \dots A_6 \equiv BB_1C_1CC_2B_2$ és $A_1'A_2'A_4'A_5' \equiv B_2'B_1'C_1'C_2'$. Be kell látnunk, hogy

$$T(B_1' B_2' C_2' C_1') \geqq \min_{i=1,2} T(BB_iC_iC) = M.$$

Legyen a BC és B_iC_i egyenes metszéspontja A_i, a B_iC_i és $B_i'C_i'$ egyenes metszéspontja A_i' $(i = 1, 2)$ és a $B_1'C_1'$ és $B_2'C_2'$ egyenes metszéspontja A'. Feltehetjük, hogy $(A_1BC) \leqq 1$.

1. eset. $(A_2BC) \leqq 1$. Mivel most az első és második index szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy $(A_2BC) \geqq (A_1BC)$. Ha $(A_2BC) > (A_1BC)$, akkor mozgassuk a B_2 pontot B irányában, addig amíg A_2 A_1-be nem esik (4. ábra). Ezáltal $M = (A_1BC)$ nem változik, de $(A'B_i'C_i')$ csökken $(i = 1, 2)$. Az új helyzetben azonban

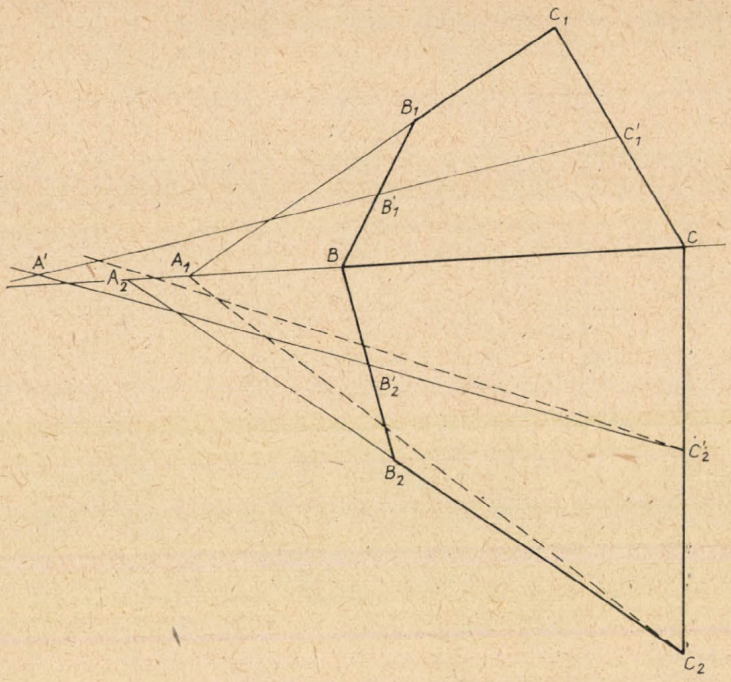
$$(A' B_i' C_i') \geqq (A_i' B_i' C_i') = (A_i BC) = M,$$

és egyenlőség csak az $M = 1$ esetben áll fenn.

2. eset. $(A_2BC) > 1$. Feltehetjük, hogy $(A'B_1'C_1') \leqq 1$, mert ellenkező esetben az indexek, valamint B és C szerepének felcserélésével a kívánt helyzet következik be. Mozgassuk ismét B_2-t B felé, addig amíg A_2 A_1-be nem esik. Ezáltal az 1. esethez jutunk, miközben M nem csökken, $(A'B_i'C_i')$ viszont csökken $(i = 1, 2)$.

Ezzel beláttuk, hogy a P hatszögre tett feltételek mellett $S(P) \leqq S(P')$, és egyenlőség csak az $S(P) = 1$ esetben áll fenn. Mivel az 1. tétel bizonyításában a 4. lemmát leszámítva seholsem használtuk ki lényegesen azt, hogy P^0 oldalszáma öt, látjuk egyúttal, hogy *az 1. tétel hatszögekre is igaz.*

Legyen $k > 5$ és $P = A_1 \dots A_k$ egy olyan konvex k-szög, amelyre $0 < S(P) < 1$. Legyen továbbá A_iA_j P-nek egy olyan átlója, amely P-t két legalább négyoldalú sokszögre bontja. A hatszöggel kapcsolatban mondottakból kitűnik, hogy ha minden ilyen átlóra az A_iA_{i-1}, A_jA_{j+1} és A_iA_{i+1}, A_jA_{j-1} félegyenespár közül egyik sem divergál, akkor $S(P) < S(P')$. Ha P fenti tulajdonsága, röviden jósága,



4. ábra

P^1-re, P^2-re, ... is öröklődik, akkor megfelelő affin normálással a P^1, P^2, ... sorozat is egy szabályos k-szögbe megy át.

Egy konvex P hétszög nem mindig jó. Mivel azonban egy szabályos hétszög az, sejthető, hogy egy bizonyos indextől kezdve a P^1, P^2, ... sorozat minden hétszöge jó. Úgy látszik, hogy ez már a hatodik indextől kezdve mindig bekövetkezik. Ily módon remélhető, hogy az 1. tétel hétszögekre is kiterjeszthető.

Jegyezzük még meg, hogy egy centrálszimmetrikus konvex nyolcszög mindig jó. Mivel egy ilyen nyolcszög súlyponti nyolcszöge is centrálszimmetrikus, kimondhatjuk, hogy *az 1. tétel centrálszimmetrikus nyolcszögre is érvényben marad.*

Az általános eset azért nem tárgyalható a fenti módon, mert abban az esetben, ha a fent tekintett $BB_1C_1CC_2B_2$ hatszögben mondjuk a BB_2 és CC_2 félegyenes divergál, akkor nem mindig áll fenn a

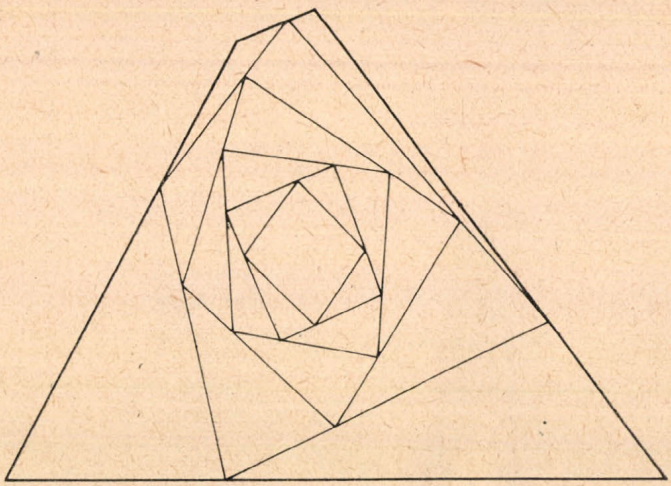
$$T(B_1'B_2'C_2'C_1') \geqq \min_{i=1,2} T(BB_iC_iC)$$

egyenlőtlenség. Elég volna azonban annyit bebizonyítani, hogy $T(B_1'B_2'C_2'C_1') \geqq \geqq \min \{T(BB_1C_1C), T(BB_2C_2C), T(BB_1CC_2), T(BB_2CC_1)\}$. Nincs elég tapasztalatunk annak a sejtésnek a kimondásához, hogy ez az egyenlőtlenség mindig fennáll, de mindenesetre meg lehetne kísérelni az általános esetnek ezen az úton való elintézését.

Teljesen más oldalról közelítette meg a kérdést Kárteszi Ferenc [1], aki a komplex számsíkon dolgozva olyan bizonyítást adott az öt- és hatszög esetére, amelyben még a konvexitás sincs felhasználva, és amely mélyebb bepillantást nyújt a P^0, P^1, ... sorozat szerkezetébe.

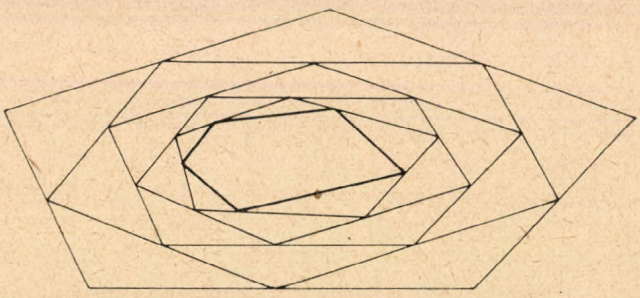
Most néhány további problémára szeretnénk rámutatni.

Tekintsük poligonoknak egy olyan $P_0, P_1, \ldots$ sorozatát, amelyben P_0 egy tetszés szerinti konvex k-szög és P_n csúcsai P_{n-1} oldalait ciklikusan haladva ugyanabban az állandó viszonyban osztják (5. ábra). Kimondható az a sejtés, hogy ezek a sokszögek is határesetben mindig affin-szabályos k-szögbe mennek át.



5. ábra

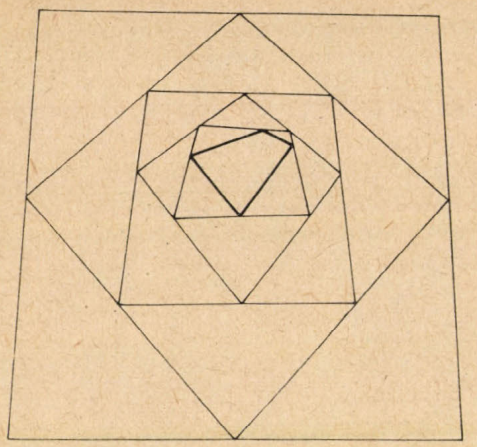
Rajzoljunk a konvex $P = A_1 \ldots A_k$ k-szög minden A_i csúcsán át az $A_{i-1}A_{i+1}$ egyenessel párhuzamos egyenest, s tekintsük azt a k-szöget, amelynek ezek az egyenesek az oldalegyenesei. Ez a sokszög tehát P köré van írva, s oldalai párhuzamosak P' oldalaival. Így ezt a sokszöget P súlyponti sokszögének a duálisaként foghatjuk fel. Úgy látszik, hogy ennek a szerkesztésnek az iterálása is határesetben mindig affin szabályos sokszöget eredményez (6. ábra).



6. ábra

További problémákhoz vezet a következő igen egyszerű

2. tétel. *Legyen $P_0, P_1, \ldots$ k-szögeknek egy olyan sorozata, amelyben P_0 egy tetszés szerinti konvex k-szög, és P_n oldalegyenesei P_{n-1} külső szögfelelői ($n = 1, 2, \ldots$). Akkor megadható minden P_n k-szögnek egy-egy hasonló példánya, Q_n, úgy hogy a $Q_0, Q_1, \ldots$ sorozat egy szabályos k-szöghöz konvergál.*

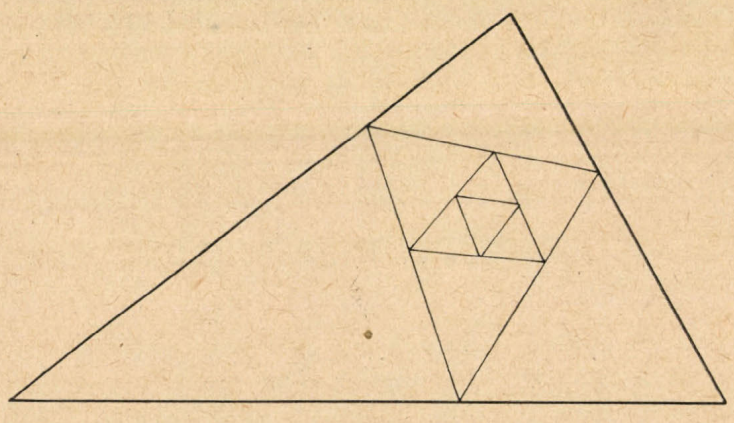


7. ábra. Kiindulunk egy kicsi (vastagabb) szabálytalan négyszögből, és megrajzoljuk a külső szögfelezők által határolt négyszöget. (Oldalak meghosszabbítása és szögek nem rajzolandók.) A folytatást illetőleg 1. a 6. ábrát.

Elégedjünk itt meg egy heurisztikus bizonyítással.

Közvetlenül látható, hogy Q_n minden külső szöge Q_{n-1} két szomszédos külső szögének számtani közepe. Ezért Q_n szögei n növekedtével egyre inkább kiegyenlítődnek, úgy hogy elég nagy indextől kezdve Q_n szögei tetszés szerinti kevéssel fognak eltérni egy szabályos k-szög egy szögétől. Úgy okoskodhatunk tehát, mintha elég nagy indextől kezdve Q_n minden külső szöge $2\pi/k$ volna. Ekkor azonban Q_{n+1} bármely oldalának a hossza úgy adódik, hogy Q_n két szomszédos oldalának számtani közepét szorozzuk $\sec \pi/k$-val. Ezért Q_n oldalai is kiegyenlítődnek, és az $n \to \infty$ határesetben egyenlő szögű és oldalú, vagyis szabályos k-szöget nyerünk (7. ábra).

Kérdés dualizálható-e ez a tétel? Megadható-e tehát egy egyszerű utasítás, amelynek alapján egy konvex k-szöghöz egy beírt k-szög szerkeszthető, úgy hogy a szerkesztés iterálása szabályos k-szöget eredményezzen? Rajzoljuk meg a konvex $P = A_1 \ldots A_k$ k-szög A_i és A_{i+1} csúcsában a belső szögfelezőket, s vetítsük ezek metszéspontját merőlegesen az A_iA_{i+1} oldalra ($i = 1, \ldots, k$). Könnyen belátható, hogy az így kapott pontok által meghatározott k-szög háromszög eseten teljesíti a kívánt feltételt (8. ábra), de általában nem.



8. ábra. Kiindulunk egy vastagabb szabálytalan háromszögből, és megrajzoljuk azt a háromszöget, amelynek csúcsai a belső szögfelezők metszéspontjának az oldalakra való merőleges vetületei. (Segédvonalakat nem rajzolunk.) Addig folytatjuk, amíg a legbelső háromszög túl kicsi nem ☺ sz.

Érdekesek és igen változatosak a fenti problémák térbeli analogonjai. Induljunk k[illegible]gy konvex P_0 poliéderből, s tekintsük azt a konvex P_1 poliédert, amelynek csúcsai P_0 élközéppontjai. Az iterációval nyert $P_0, P_1, \ldots$ sorozat egy konvex testhez, P *mag*jához konvergál, amelyet a sorozat minden poliéderének minden lapja a saját

csúcssúlypontjában érint. Egy konvex sokszög csúcssúlypontján itt csúcsrendszerének súlypontját értjük. Állításunk nyilvánvaló, ha meggondoljuk, hogy P_0 minden lapjának súlyponti sokszöge P_1 egyik lapja, és hogy egy sokszög csúcssúlypontja megegyezik súlyponti sokszögének csúcssúlypontjával.

Miféle test egy tetraéder magja? Ki lehet-e mondani valamilyen általános tételt, amely közelebbi információt adna egy konvex poliéder magjáról?

A súlyponti sokszög „igazi" térbeli analogonja azonban nem az élközéppontok, hanem a lapsúlypontok által felfeszített *súlyponti poliéder*. A különböző kérdések közül, amelyek ezzel a fogalommal kapcsolatban felmerülnek, befejezésképpen csak egyet említünk: Melyek azok a konvex poliéderek, amelyek affin ekvivalensek súlyponti poliéderük súlyponti poliéderével? Az affin-szabályos testeken kívül ilyenek például az affin-szabályos hasábok és kettős gúlák.

IRODALOM

[1] *Kárteszi Ferenc*, Konvex ötszögből származtatott affin-szabályos ötszögpár. Matematikai Lapok 20 (1969).

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, КАСАЮЩИЕСЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Л. ФЕЙЕШ ТОТ

ITERATIONSVERFAHREN BEI KONVEXEN POLYGONEN

L. FEJES TÓTH

Es sei P^0 ein konvexes Fünf- oder Sechseck und $P^0, P^1, \ldots$ eine Polygonenfolge, wobei die Ecken von P^n die Seitenmittelpunkte von P^{n-1} sind ($n = 1, 2, \ldots$). Es wird gezeigt, dass sich zu jedem Polygon P^0 ein affin aequivalentes Exemplar P_n so angeben lässt, dass die Folge $P_0, P_1, \ldots$ gegen ein reguläres Fünf- bzw. Secheck strebt.

TÁVOLSÁGOK ÖSSZEGÉRE VONATKOZÓ EGY MINIMUM PROBLÉMÁRÓL

Varga Ottó emlékének

HORVÁTH JENŐ

Hogyan képes az anyag olyan tömören elhelyezkedni, mint a Szíriusz sötét kísérőjében? Tegyük fel, hogy az anyag n egyfajta pontszerű atomból áll, amelyek nem juthatnak egymáshoz egységnyi távolságnál közelebb, s amelyek a köztük levő távolság négyzetével fordított arányú vonzóerő hatására tömörülnek. Mi lesz ennek a rendszernek a legstabilabb egyensúlyi állapota, vagyis mikor lesz csak a kölcsönös vonzásból származó potenciális energia maximális? Ez a probléma ekvivalens a következővel: Legyen az euklideszi térben n pont, amelyek azon feltétel mellett, hogy bármely kettő távolsága legalább egy, szabadon mozoghatnak. Keressük a pontoknak azt az elrendezését, amikor a pontok közt fellépő $\binom{n}{2}$ távolság reciprokának összege maximális.

Ilyen általánosságban a probléma természetesen reménytelenül nehéz. Követve azonban Pólya György tanácsát „Ha nem tudjuk megoldani a felvetett problémát, nézzünk körül alkalmas, rokon probléma után" (A problémamegoldás iskolája, I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 26. old.), rögtön az analóg síkbeli problémára gondolunk. Geometriai szempontból természetes továbbá a reciprok távolságok összegének maximuma helyett a távolság összeg minimumát keresni. Ilyen módon jutott Fejes Tóth László az alábbi problémához, amelyet Ő tréfásan Szíriusz problémának nevezett.

Tekintsük az euklideszi sík n számú pontját, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat, továbbá az általuk meghatározott összes A_jA_k $(j \neq k)$ távolságokat. Az így definiált távolságok összegét az

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \delta(n)$$

írásmóddal jelöljük. Mi a $\delta(n)$ minimuma és mely $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontalakzat esetén lép fel a minimum, ha bármely két pont távolsága $\geqq 1$.

Fejes Tóth kimondotta azt a sejtést, hogy az extremális helyzetben a pontok mindig egy egységnyi oldalú szabályos háromszögrács rácspontjaiba esnek.

Szemléletesebbnek tűnik a probléma következő átfogalmazása: Helyezzünk el n számú, egységátmérőjű körlemezt a síkon úgy, hogy semelyik kettőnek se legyen közös belső pontja, és az összes körpárok középpontjai meghatározta távolságok összegének minimuma valósuljon meg. A $\delta(n)$ minimumát $d(n)$-nel jelöljük. Ebben a dolgozatban megoldjuk a problémát $n = 3, 4, 5, 6, 7$ esetekben.

Főeredményünk a következő: Tekintsük az egységoldalú szabályos hatszög középpontját, az A_1 pontot, és az egyik körüljárásnak megfelelő sorrendben az

$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ *csúcsokat. Ez az extremális alakzat a megoldás az* $n=7$ *esetben. Töröljük egymásután az* A_7, A_6, A_5, A_4 *pontot, maradék alakzatunk rendre az* $n=6$, $n=5$, $n=4$, $n=3$ *esetnek megfelelő extremális alakzat lesz.*

Néhány könnyen bizonyítható segédtételre támaszkodva igyekeztünk a legelemibb eszközökkel dolgozni.

1. Tekintsük az egységátmérőjű körökhöz tartozó középpontok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazát, továbbá e ponthalmaz konvex burkát, az **A** tartományt; jelölje A az **A** tartomány határvonalát, az indexezést pedig eleve úgy választjuk meg, hogy az A vonalra eső középpontok legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_r$ pontok, $r \leqq n$, tehát $r<n$ esetén $A_{r+1}, \ldots, A_n$ az **A** tartomány belső pontjai. Az A_j középpontú egységátmérőjű körlemezt $\mathbf{k}_j$-vel jelöljük.

1. SEGÉDTÉTEL. *Hogyha az* A *vonal* $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ *darabja* A_j*-ben megtörik, és* $\mathbf{k}_j$ *vagy az* A_{j-1}*, vagy az* A_{j+1} *középpont körül úgy fordítható el az* $A_{j-1}A_{j+1}$ *egyenessel határolt,* A_j*-t nem tartalmazó félsík felé, hogy közben a többi körlemez egyikébe se ütközzék, akkor e művelet hatására a* $\delta(n)$ *távolságösszeg csökken.*

Bizonyítás. Nevezzük a szóban forgó műveletet ω_{j-1} vagy ω_{j+1} műveletnek, ha az A_j elfordítása az A_{j-1}, illetve az A_{j+1} középpont körül történt egy ω szöggel a mondott irányítás szerint. Bontsuk fel a távolságösszeget két részösszeg összegére. Az egyik részösszeg legyen:

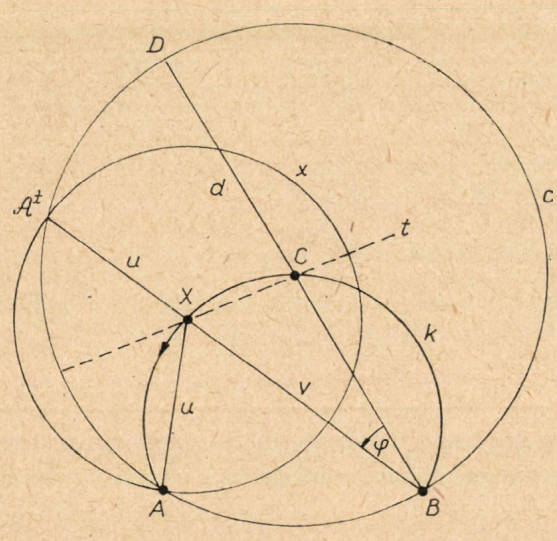
ω_{j-1} esetén az A_jA_k távolságok összege, midőn

$$k=1, 2, \ldots, j-2, j+1, \ldots, n;$$

ω_{j+1} esetén az A_jA_k távolságok összege, midőn

$$k=1, 2, \ldots, j-1, j+2, \ldots, n.$$

A művelet csak az A_j pontot változtatta meg, átvitte A_j^*-ba. Így az első részösszeg tagjai is megváltoztak, a másik részösszeg tagjai változatlanok. Idézzük a következő abszolút tételt: Ha két háromszög két oldalban megegyezik, a harmadik oldal abban a háromszögben kisebb, amelyikben az előbbi kettő bezárta szög kisebb. E tételnek, az **A** tartomány konvex voltának, valamint az ω szög irányításának következtében $A_j^*A_k < A_jA_k$, tehát a változó részösszeg kisebbedik. Ezzel pedig azt is bebizonyítottuk, hogy a segédtétel mindhárom elemi geometriában érvényes (abszolút tétel).



1. ábra

2. SEGÉDTÉTEL. (1. ábra) *Egy* k *kör* C *pontja által felezett* AB *ívének* AC *darabján elhelyezkedő* X *pontra nézve az* $AX+XB=w$ *távolságösszeg annál kisebb, minél kisebb az* AX *távolság.*

Bizonyítás. Legyen az A ponton átmenő c és x kör középpontja C és X. Az $XC=t$ összekötő egyenes e két körnek a közös szimmetria tengelye. A két kör másik közös pontja az A^t pont, az A-nak t-re vonatkozó tükörképe. Ennélfogva

$$A^tX = AX = u, \quad \text{amiből} \quad AX+XB = u+v = A^tB = w.$$

A c kör BA^t húrja pedig, ha a húr egyenesét B körül A felé forgatjuk, az elforgatási φ szög növekedésével csökken. (Megjegyezzük, hogy más módszerekkel bizonyítható, hogy a 2. segédtételünk is abszolút tétel.)

Most a 2. segédtétel két lényeges következményét emeljük még ki:

2. a — *Az r sugarú körbe írt nem tompaszögű, r-nél nem kisebb oldalú háromszögek halmazában azok a legkisebb kerületű háromszögek, amelyeknek az oldalai:* $r, 2r, \sqrt{3}r$.

2. b — *Ha négy egységátmérőjű, kettenként közös belső pontot nem tartalmazó körlemez középpontjainak konvex burka háromszög, akkor a középpontok meghatározta távolság összegre nézve:* $\delta(4) \geqq 6+\sqrt{3}$.

2. Most már rátérünk a körlemez elhelyezésének vizsgálatára. Úgy járunk el, hogy adott n értékre megmondjuk, milyen elhelyezés esetén valósul meg a középpontok távolságösszegének minimuma, $(d(n))$ és bebizonyítjuk, hogy minden más elhelyezésnél nagyobb távolságösszeg lép fel, azaz $\delta(n) > d(n)$. E bizonyítás vagy úgy történik, hogy egy adott elhelyezésről bebizonyítjuk, hogy $\delta(n) > d(n)$, vagy a körlemezeket úgy mozgatjuk, hogy $\delta(n)$ csökken és így vagy $d(n)$-nek megfelelő elhelyezéshez, vagy egy korábban vizsgált elhelyezéshez jutunk. Csak olyan elhelyezésekkel foglalkozunk, amelyekre az 1. segédtételben említett forgatás közvetlenül nem alkalmazható.

2. 1. *Nyilván $\delta(3)$ minimuma, $d(3)=3$ és az A_1, A_2, A_3 pontok egy egységoldalú szabályos háromszög csúcsai.*

2. 2. *$\delta(4)$ minimuma, $d(4) = 5+\sqrt{3}$ és az A_1, A_2, A_3, A_4 pont egy egységoldalú szabályos hatszög középpontja és 3 szomszédos csúcsa.*

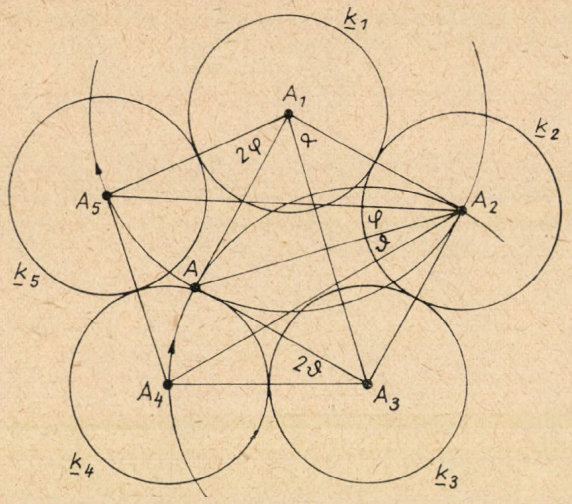
2. 2. 1. Az $A_1A_2A_3A_4$ középpontok konvex burka négyszög. Az 1. segédtételből következik, hogy elég azzal az esettel foglalkozni, mikor az $A_1A_2A_3A_4$ pontok egységoldalú rombuszt alkotnak. Ellenkező esetben az 1. segédtétel leírt módszerrel az egyik kör forgatható, miközben a $\delta(4)$ csökken. Legyen $A_2A_4 \geqq A_1A_3 > 1$, ezek metszéspontja F. Rögzítjük a k_1-et és k_2-t, k_3-at A_2 körül az $A_1A_2A_3 \sphericalangle$ csökkentésével forgatjuk, miközben k_4 k_3 érintésével k_1-en gördül. F az A_1A_2 fölé rajzolt Thales körön mozog, ezért a 2. segédtételből kifolyólag az $2(A_1F+A_2F) = A_1A_3+A_2A_4$ csökken. Az $A_1A_3=1$ esetén $d(4)$ értékét és annak megfelelő pont elrendezését kapjuk.

2. 2. 2. Ha a középpontok konvex burka háromszög, akkor a **2. b.** segédtételből következik, hogy $\delta(4) \geqq 6+\sqrt{3} > d(4)$.

2. 2. 3. Ha a középpontok egy egyenesen vannak, akkor $\delta(4) \geqq 10 > d(4)$.

2. 3. *$d(5) = 9+2\sqrt{3}$ és az extremális alakzatra adódik egy egységoldalú szabályos hatszög A_1 középpontja és az egyik körüljárásnak megfelelő A_2, A_3, A_4, A_5 csúcsa.*

2. 3. 1. Ha a középpontok konvex burka ötszög, akkor az 1. segédtételből következik, hogy elég azzal az esettel foglalkozni, mikor az ötszög minden oldala egységnyi



2. ábra

(2. ábra). Legyen A_2A_5 maximális hosszúságú átló, továbbá $A_2A_4 \geqq A_3A_5$. Tükrözzük A_2-t az A_1A_3 egyenesre, a tükörképet jelöljük A-val. Legyen az $A_2A_1A_3 \sphericalangle = \alpha$. Könnyen belátható, hogy

(1) $\qquad 36° \leqq \alpha \leqq 60°.$

Forgassuk A_1 körül k_5-öt, A_3 körül k_4-et úgy, hogy az A_2A_5 távolság növekedjen és a k_4 és k_5 körök továbbra is érintsék egymást. Bebizonyítjuk, hogy mozgás során az

(2) $\qquad A_2A_5 + A_2A_4$

és az

(3) $\qquad A_1A_4 + A_3A_5$

csökken, a többi távolság nem változik, így $\delta(5)$ csökken. (1) miatt A_4-et A-ba forgathatjuk. Majd az így kapott A_4 körül k_3-at, A_1 körül k_2-t forgatjuk az előző feltételek szerint, akkor a $\delta(5)$ tovább csökken. k_2-t és k_3-at addig forgathatjuk, míg k_3 nem érinti k_1-et. Érintés esetén a $d(5)$-nek megfelelő alakzatot kapjuk.

Rátérünk (2) és (3) bizonyítására. További jelölést vezetünk be. Legyen $A_5A_2A \sphericalangle = \frac{1}{2} A_5A_1A \sphericalangle = \varphi$ és $A_4A_2A \sphericalangle = \frac{1}{2} A_4A_3A \sphericalangle = \vartheta$. Mivel A_2A_5 maximális hosszúságú átló, ezért

(4) $$\varphi \geqq \vartheta.$$

Az $A_1A_3A_4A_5$ négyszögből $A_1A_3 \geqq 1$ miatt következik, hogy

(5) $$\alpha + \varphi + \vartheta \leqq \frac{\pi}{2},$$

φ növekedésével a $\vartheta(\varphi)$ csökken. Bebizonyítjuk először, hogy

(6) $$\vartheta'(\varphi) \leqq -1$$

Írjuk fel az $A_2A_4A_5$ háromszögben a cosinustételt:

$$4\sin^2(\alpha+\varphi) + 4\sin^2(\alpha+\vartheta) - 8\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha+\vartheta)\cos(\varphi+\vartheta) = 1.$$

Tekintsük ϑ-t φ függvényeként. Deriváljuk a fenti egyenletet φ szerint és rendezzük.

$$[\sin(2\alpha+2\varphi) - 2\sin(\alpha+\vartheta)\cos(\alpha+2\varphi+\vartheta)] +$$
$$+ \vartheta'(\varphi)[\sin(2\alpha+2\vartheta) - 2\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi+2\vartheta)] = 0.$$

(4) és (5) felhasználásával könnyen bizonyítható, hogy a szögletes zárójelben pozitív kifejezések állnak. Így (6) igazolásához elég bizonyítani, hogy

$$\sin(2\alpha+2\varphi) - 2\sin(\alpha+\vartheta)\cos(\alpha+2\varphi+\vartheta) \geqq$$
$$\geqq \sin(2\alpha+2\vartheta) - 2\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi+2\vartheta),$$

rendezve

$$2\sin(\alpha+\varphi)[\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+\varphi+2\vartheta)]\geqq$$

$$\geqq 2\sin(\alpha+\vartheta)[\cos(\alpha+\vartheta)+\cos(\alpha+2\varphi+\vartheta),$$

ebből

$$4\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi+\vartheta)\cos\vartheta\geqq$$

$$\geqq 4\sin(\alpha+\vartheta)\cos(\alpha+\varphi+\vartheta)\cos\varphi.$$

Az egyenlőtlenség (4) és (5) miatt nyilván teljesül és egyenlőség csak $\varphi=\vartheta$ esetén.

Legyen

$$f(\varphi) = A_2A_5 + A_2A_4 = 2[\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+\vartheta)]$$

ebből

$$f'(\varphi) = 2[\cos(\alpha+\varphi)+\vartheta'\cos(\alpha+\vartheta)]$$

(4), (5) és (6)-ból nyilvánvalóan következik, hogy

$$f'(\varphi)\leqq 0,$$

egyenlőség csak a $\varphi=\vartheta$ esetén. Így bebizonyítottuk, hogy $A_2A_5+A_2A_4$ csökken.

Legyen

$$g(\varphi) = A_1A_4 + A_3A_5.$$

Az $A_1A_3A_4$ és az $A_1A_3A_5$ háromszögekből cosinustétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$g(\varphi) = \sqrt{1+4\cos\alpha\sin(\alpha+\vartheta)\sin\vartheta} + \sqrt{1+4\cos\alpha\sin(\alpha+\varphi)\sin\varphi}$$

ebből

$$g'(\varphi) = \frac{2\cos\alpha\sin(\alpha+2\vartheta)}{A_1A_4}\vartheta' + \frac{2\cos\alpha\sin(\alpha+2\varphi)}{A_3A_5}$$

Az $A_1A_3A_4$ és $A_1A_3A_5$ háromszögekből a sinustétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$g'(\varphi) = \vartheta'\sin(A_1A_4A_3)\sphericalangle + \sin(A_1A_5A_3)\sphericalangle$$

(4)-et és (6)-ot figyelembe véve, nyilván

$$g'(\varphi)\leqq 0,$$

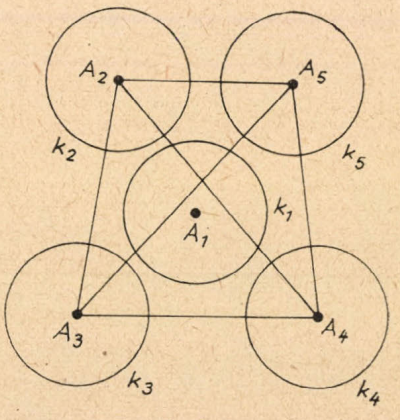
egyenlőség csak $\varphi=\vartheta$ esetén. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $A_1A_4+A_3A_5$ is csökken.

2. 3. 2. A középpontok konvex burka az $A_2A_3A_4A_5$ négyszög, és A_1 a tartomány belső vagy határpontja. Az $A_2A_3A_4A_5$ pontok négy háromszöget határoznak meg, A_1-et legalább két háromszög tartalmazza. Legyen A_1 az $A_2A_3A_4$ és az $A_3A_4A_5$ háromszögek belső vagy határpontja (3. ábra). A **2. b** segédtételből következik, hogy az $A_1A_2A_3A_4$ pontok távolság összege

$$\delta(4)\geqq 6+\sqrt{3}.$$

A **2. a** segédtételből következik, hogy

$$A_4A_5+A_3A_5\geqq 1+\sqrt{3},$$



3. ábra

továbbá

$$A_1A_5 + A_2A_5 \geqq 2.$$

Ezek összege

$$\delta(5) \geqq 9 + 2\sqrt{3}.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az előző három egyenlőtlenségben is egyenlőség van, ez pedig csak akkor, ha a középpontok $d(5)$-nek megfelelően helyezkednek el.

2. 3. 3. Ha a középpontok konvex burka háromszög, akkor **2. b** segédtétel felhasználásával egyszerű számolással kimutatható, hogy $\delta(5) > d(5)$.

2. 3. 4. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a középpontok egy egyenesen vannak, akkor is igaz, hogy $\delta(5) > d(5)$.

2. 4. $d(6) = 13 + 4\sqrt{3}$ *és az extremális alakzat egy egységoldalú szabályos hatszög középpontja és öt csúcsa.*

2. 4. 1. Ha a középpontok konvex burka hatszög, akkor az 1. segédtétel miatt elég az egységoldalú hatszögekkel foglalkozni. (Hatszögnek tekintjük az elfajuló hatszöget is, vagyis amikor van 180°-os szöge.) Bebizonyítjuk, hogy a hatszögnek van olyan csúcsa, A_1, melyre teljesül, hogy

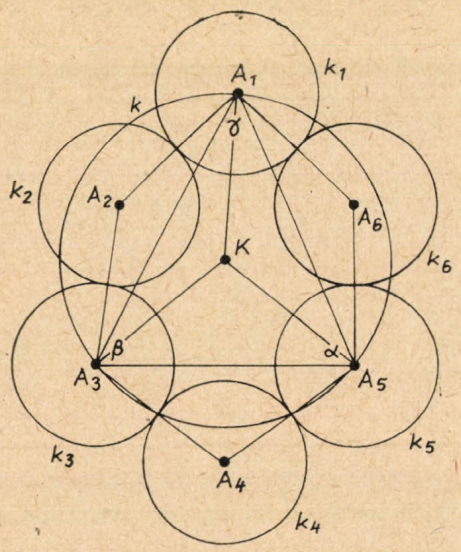
$$\sum_{i=2}^{6} A_1A_i \geqq 4 + 2\sqrt{3}.$$

Az $A_2 \ldots A_6$ pontok nem a $d(5)$-nek megfelelő extremális alakzatot adnak, így ezekre

$$\delta(5) > 9 + 2\sqrt{3}.$$

Ezek összege $\delta(6) > 13 + 4\sqrt{3} = d(6)$. Így a pontok ilyen elhelyezkedése esetén a távolságok összege nem lehet minimális.

Rátérünk ennek bizonyítására (4. ábra). A hatszög konvexitásából könnyen bizonyítható, hogy az $A_1A_3A_5$ és $A_2A_4A_6$ nem tompaszögű háromszögek, így köré írt körük középpontja nem lehet a háromszögön kívül. Bebizonyítjuk, hogy a két háromszög közül az egyik köré írt kör sugara nem kisebb az egységnél, a másiké nem nagyobb az egységnél. A hatszög szögeinek összege 4π, az A_1, A_3, A_5 és az A_2, A_4, A_6 csúcsoknál elhelyezkedő szögek összege közül az egyik csúcshármasnál a szögek összege nem kisebb 2π-nél. Tegyük fel, hogy



4. ábra

(7) $\quad A_2 \sphericalangle + A_4 \sphericalangle + A_6 \sphericalangle \geqq 2\pi$

Legyen K az $A_1A_3A_5$ háromszög köré írt kör középpontja. Kössük össze K-t a háromszög csúcsaival, így K-nál három szöget kaptunk. (7)-ben szereplő szögek között van legalább egy, amely nem kisebb a megfelelő K-nál elhelyezkedő szögnél pl.

$$A_1A_6A_5 \sphericalangle \geqq A_1KA_5 \sphericalangle$$

Tükrözzük A_6-ot az A_1A_5 oldalra, A_6 tükörképe K-ba vagy az A_1KA_5 háromszög tartományba esik, ez pedig azt jelenti, hogy az $A_1A_3A_5$ háromszög köré írt kör sugara, $r \geqq 1$. Másrészt mivel a háromszög oldalai nem nagyobbak 2-nél, ezért

$$1 \leqq r \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{8}$$

(Hasonlóan bizonyítható, hogy az $A_2A_4A_6$ háromszög köré írt kör sugara nem nagyobb 1-nél.)

Legyenek az $A_5A_3A_1$ háromszög szögei rendre

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma. \tag{9}$$

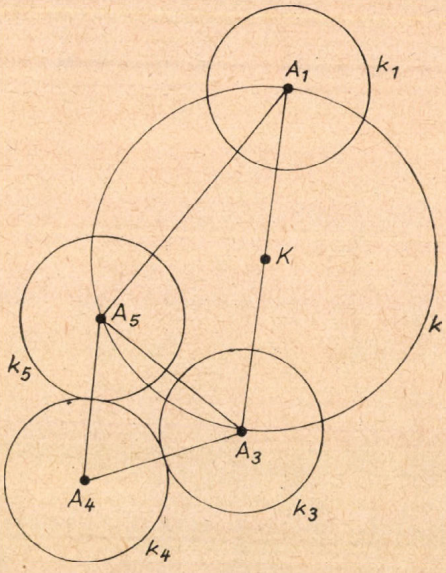
Bebizonyítjuk, hogy

$$\sum_{i=2}^{6} A_1A_i \geqq 4+2\sqrt{3}.$$

Nyilván elég bizonyítani, hogy

$$A_1A_3 + A_1A_5 + A_1A_4 \geqq 2+2\sqrt{3}. \tag{10}$$

Jelöljük az $A_1A_3A_5$ háromszög köré írt körét k-val. Mozgassuk A_1-t a k kör A_1A_5 ívén. A második segédtételből következik, hogy $A_1A_5 + A_3A_1$ csökken, továbbá A_1A_4 is csökken. (Az A_2, A_6 középpontoktól eltekintünk.)



4a. ábra

Legyen először $\gamma \leqq \frac{\pi}{4}$. Forgassuk A_1-t úgy, hogy A_1A_3 a kör átmérője legyen (4. a. ábra), $\gamma \leqq \frac{\pi}{4}$ miatt ez a mozgás elvégezhető.

$$A_1A_3 + A_1A_5 + A_1A_4 = 2r + 2r\cos\gamma + \\ + \sqrt{1+4r^2\cos^2\gamma + 4r\cos\gamma\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}}$$

A kifejezést alulról becsülve, kapjuk, hogy

$$A_1A_3 + A_1A_5 + A_1A_4 \geqq 2+\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez pedig nagyobb $2+2\sqrt{3}$-nál.

Legyen $\gamma \geqq \frac{\pi}{4}$, másrészt (9)-ből következik, hogy $\gamma \leqq \frac{\pi}{3}$. Az előző forgatással eljutunk a $\gamma = \beta$ esethez, közben az $A_1A_3 + A_1A_5 + A_1A_4$ csökken.

Az A_1KA_4 háromszögből

$$g(r,\gamma) = A_1A_4^2 = \left(r\cos\gamma + \sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}\right)^2 + \\ + r^2 - 2r\left(r\cos\gamma + \sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}\right)\cos 3\gamma$$

A kifejezést rendezve kapjuk, hogy

$$g(r,\gamma) = 1+4\sin 2\gamma \sin\gamma\left(r^2\cos\gamma + r\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}\right)$$

Ha γ-t állandónak tekintjük, akkor

$$g'(r) = 4\sin 2\gamma \sin\gamma\left(2r\cos\gamma + \frac{1-2r^2\sin^2\gamma}{\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}}\right) = 0$$

egyenletből $r \geqq 1$ miatt szélsőértékre adódik az

$$r_0 = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{1-\cos 2\gamma}}$$

Továbbá $1 \leqq r < r_0$ mellett $g'(r) > 0$, $r_0 < r$ mellett $g'(r) < 0$, így a függvény minimumát az értelmezési tartomány határán veszi fel. Könnyen megmutatható, hogy ha $\gamma \geqq \gamma_0 = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54°44'$, akkor az $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ helyen és ha $\gamma \leqq \gamma_0$, akkor $r = 1$ helyen lesz $g(r)$ minimális.

Legyen

$$f(r;\gamma) = A_1A_3 + A_1A_5 + A_1A_4 = 2r\sin 2\gamma + 2r\sin\gamma + \sqrt{g(r,\gamma)} \tag{11}$$

és γ-t továbbra is állandónak tekintjük. A függvény első két tagja r-nek növekvő függvénye, így $\gamma \geqq \gamma_0$ esetén $r = 1$ helyen lesz minimális. Könnyen megmutatható, hogy $\gamma \geqq \frac{\pi}{4}$ esetén $g''(r) < 0$, így $f''(r) = \frac{2g''(r)g(r) - [g'(r)]^2}{4[g(r)]^{\frac{3}{2}}} < 0$ így $\gamma \geqq \gamma_0$ esetén az intervallum határán lesz a függvény minimális, vagy $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$, vagy $r = 1$ helyen. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy $\frac{\pi}{3} \geqq \gamma \geqq \gamma_0$ és $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ esetén

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\gamma\right) > 2+2\sqrt{3}$$

$r = 1$ esetén

$$f(1:\gamma) = 2\sin 2\gamma + 2\sin\gamma + \sqrt{1+4\sin^2 2\gamma}$$

A függvényt kétszer deriválva belátható, hogy $\frac{\pi}{4} \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{3}$ mellett $f''(1;\gamma) < 0$, így a függvény minimumát $\gamma = \frac{\pi}{4}$ és $\gamma = \frac{\pi}{3}$ helyen veszi fel. Viszont $f\left(1;\frac{\pi}{4}\right) > 2+2\sqrt{3}$ és $f\left(1;\frac{\pi}{3}\right) = 2+2\sqrt{3}$. Ezzel (10)-et bebizonyítottuk.

2. 4. 2. A középpontok konvex burka ötszög és a hatodik középpont a tartomány határán van, pl. A_1 a konvex burok A_2A_6 oldalán van. Ha $A_2A_6 = 2$, akkor **2. 4. 1** speciális esete szerepel, így $\delta(6) > d(6)$. Ha $A_2A_6 > 2$, akkor 1. segédtételt alkalmazva, egy később tárgyalandó esethez jutunk, miközben $\delta(6)$ csökkent.

2. 4. 3. A középpontok konvex burka az A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ötszög és k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 érinti k_1-et (5. ábra). Legyen az ötszög csúcsait A_1-gyel összekötő szakaszok

által meghatározott szögek közül az $A_2A_1A_6\sphericalangle$ a legnagyobb. $\delta(6)$ sorozatos csökkentésével eljutunk a $d(6)$-nak megfelelő rendszerhez. Forgassuk A_1 körül k_2-t k_3-ig, ezután k_6-ot k_5-ig, majd együtt k_2-t és k_3-at k_4-ig, végül k_5-öt és k_6-ot együtt k_4-ig. A **2.** segédtételből következik, hogy egy-egy forgatás végén $\delta(6)$ csökken és $d(6)$-nak megfelelő kör elhelyezést kapunk.

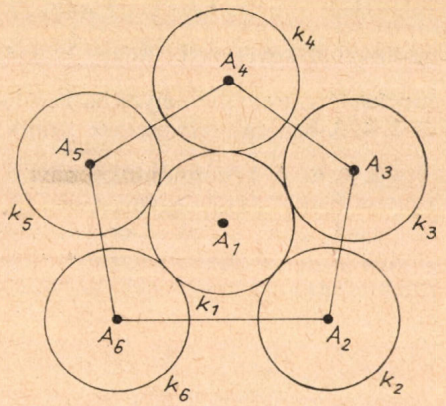
2. 4. 4. A középpontok konvex burka az A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ötszög és k_3 nem érinti k_1-et (6. ábra). Az A_5 és A_6 elhelyezkedésétől függően 3 esetet különböztetünk meg.

a. Ha A_5 és A_6 az $A_2A_1A_4\sphericalangle$ csúcsszög tartományában van, akkor A_2 körül k_3-at k_1-ig forgatjuk, közben k_4 k_3-at érintve k_1-en gördül. $A_1A_3+A_2A_4$ csökken (**2. 2. 1**). Az **1.** és **2.** segédtételből következik, hogy A_3 és A_4 pontoknak A_5 és A_6-tól mért távolsága csökken, így $\delta(6)$ csökkentésével **2. 4. 3.**-ban említett elhelyezkedéshez jutunk.

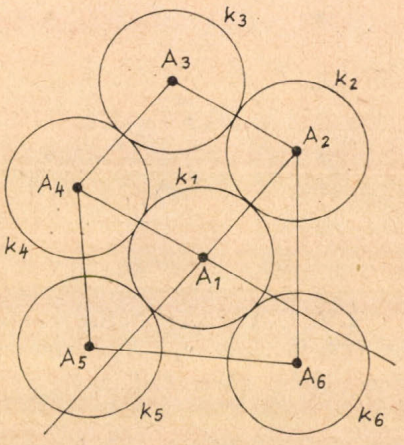
b. Ha A_5 és A_6 az $A_2A_1A_4$ két kiegészítő tartományában van, akkor A_1 körül k_6-ot k_2-ig, majd k_5-öt k_4-ig forgatjuk. Az **1.** és **2.** segédtételből következik, hogy $\delta(6)$ csökken. Ezután A_2 körül forgatjuk k_3-at k_1-ig, miközben k_4 és k_5 körök a korábbi érintkezéseket megtartva k_1-en gördülnek. Mozgás során a két segédtételből következik, hogy A_6A_3 és $A_6A_5+A_6A_4$ csökken, másrészt a mozgás végén $A_1A_2A_3A_4A_5$ pontok a $d(5)$-nek megfelelően helyezkednek el (**2. 3**), így $\delta(5)$ csökkent és a $d(6)$-nak megfelelő elhelyezkedést kapunk.

c. Ha A_5 az $A_2A_1A_4\sphericalangle$ kiegészítő tartományában, A_6 a csúcsszög tartományában van, akkor A_1 körül forgatjuk k_5-öt k_4-ig, majd A_4 körül forgatjuk k_3-at k_1-ig — miközben k_2 k_1-en gördül — az előzőek mintájára könnyen belátható, hogy a távolságok összege csökken és **2. 4. 3.**-ban említett esethez jutunk (A 6. ábrán a **c.** eset szerepel.)

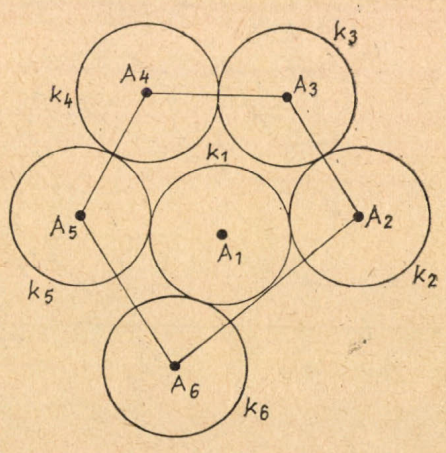
2. 4. 5. A középpontok konvex burka az $A_2A_3A_4A_5A_6$ ötszög, k_3 és k_4 egymást érinti, de nem érintik k_1-et (7. ábra). Forgassuk A_3 körül k_4-et, majd A_4 körül k_3-at,



5. ábra



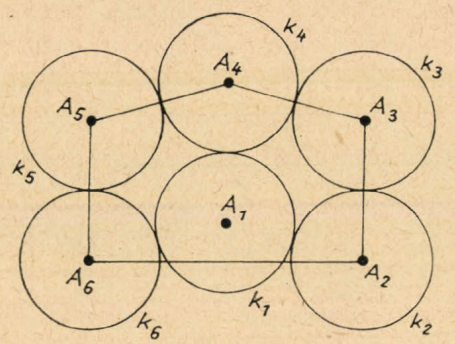
6. ábra



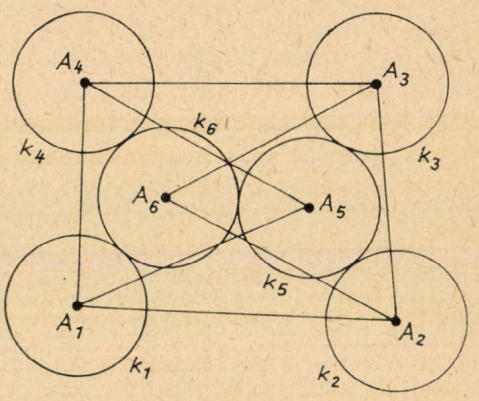
7. ábra

miközben k_5 és k_2 körök a korábbi érintkezést megtartva k_1-en gördülnek. Az 1. segédtételből következik, hogy $\sum_{i=1}^{5} A_6A_i$ csökken, az $A_1A_2A_3A_4A_5$ pontok a $d(5)$-nek megfelelő extremális helyzetbe kerülnek, így az általuk meghatározott $\delta(5)$ csökken és **2. 4. 3.**-ban említett esethez jutunk.

2. 4. 6. A középpontok konvex burka az $A_2A_3A_4A_5A_6$ ötszög, továbbá k_3 és k_5 nem érinti k_1-et és egymást sem (8. ábra). Forgassuk A_4 körül k_5-öt és k_3-at k_1-ig, közben k_2 és k_6 körök k_1-en gördülnek. Könnyen bizonyítható, hogy $A_1A_3+A_2A_4$, $A_1A_5+A_4A_6$, $A_2A_6+A_2A_5$ és $A_3A_6+A_3A_5$ külön-külön csökken, a többi nem változik és $d(6)$-nak megfelelő elhelyezkedést kapunk.



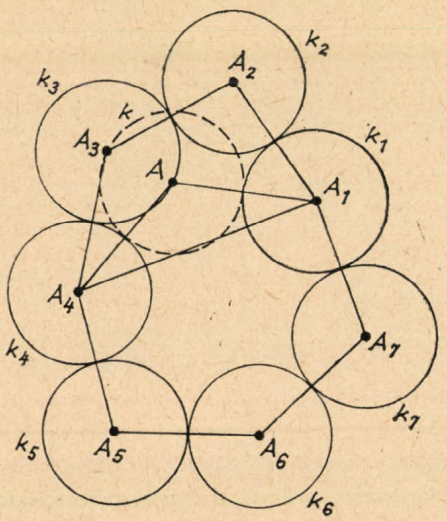
8. ábra



9. ábra

2. 4. 7. A középpontok konvex burka az $A_1A_2A_3A_4$ négyszög, továbbá A_5 az $A_2A_3A_6$, A_6 az $A_1A_4A_5$ háromszögnek belső, vagy határpontja (9. ábra). A **2. b.** segédtételből következik, hogy az $A_2A_3A_5A_6$ pontokra $\delta(4)\geqq 6+\sqrt{3}$, az $A_1A_4A_5A_6$ pontokra A_5A_6-ot nem számolva $\delta(4)-A_5A_6\geqq 5+\sqrt{3}$. Könnyen belátható, hogy $A_1A_3\geqq\sqrt{3}$ és $A_2A_4\geqq\sqrt{3}$, továbbá $A_3A_4+A_1A_2\geqq 2$. Ezeket összeadva és figyelembe véve, hogy az „=" nem állhat fenn mindenütt, kapjuk, hogy $\delta(6)>d(6)$.

Hasonló jellegű becslésekkel mutatható meg a többi esetben is hogy $\delta(6)>d(6)$.



10. ábra

2. 5. *$d(7) = 18+6\sqrt{3}$ és az extremális alakzat lesz egy egységoldalú szabályos hatszög középpontja és csúcsai.*

2. 5. 1. Legyen a középpontok konvex burka hétszög (10. ábra). Az 1. segédtételből következik, hogy elég egység oldalú hétszögekkel foglalkozni. Bebizonyítjuk, hogy $\delta(7)>d(7)$.

Tekintsük a hétszög harmadik csúcsait összekötő átlókat és tegyük fel, hogy

nincs köztük 2 egységnél rövidebb szakasz, így az átlók összege legalább 14. A **2. 3. 1.**-ben használt módszert alkalmazva, bizonyítható, hogy $A_1A_3+A_2A_4 \geqq 2+\frac{\sqrt{6}}{2}$ és $A_1A_6+A_5A_7 \geqq 2+\frac{\sqrt{6}}{2}$, a többit egységnek számítva kapjuk, hogy $\delta(7) \geqq$ $\geqq 28+\sqrt{6}>d(7)$.

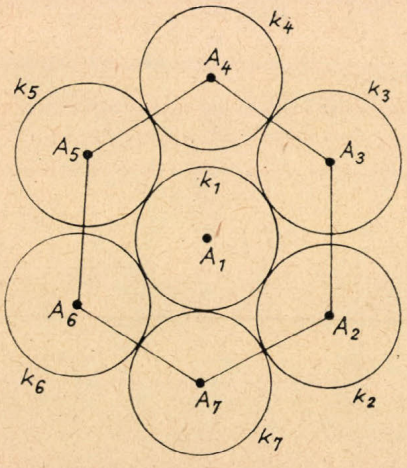
A hétszög harmadik csúcsait összekötő átlók között található két egységnél kisebb átló, legyen $A_1A_4<2$. A k_2 és k_3 helyett vegyük a k_1-et és k_4-et érintő A középpontú k körlemezt. Az 1. segédtételből következik, hogy $A_kA \leqq A_kA_2$ és $A_kA \leqq$ $\leqq A_kA_3$, ahol $k=1, 4, 5, 6, 7$. Az $A_1AA_4A_5A_6A_7$ egységoldalú hatszögre alkalmazzuk **2. 4. 1.**-ben bebizonyított állítást, mely szerint van olyan csúcsa, melynek a többitől mért távolságösszege nem kisebb $4+2\sqrt{3}$-nál. Ilyen tulajdonságú csúcs lehet A, vagy a megmaradt középpontok közül valamelyik.

Ha A-ra teljesül, hogy $\Sigma AA_k \geqq 4+2\sqrt{3}$, ahol $k=1, 4, 5, 6, 7$, akkor $\Sigma A_2A_k \geqq$ $\geqq 4+2\sqrt{3}$. Ehhez hozzáadva $A_2A_3=1$-et kapjuk, hogy $\Sigma A_2A_k \geqq 5+2\sqrt{3}$, ahol $k=1, 3, 4, 5, 6, 7$. Az $A_1A_3A_4A_5A_6A_7$ pontokra **2. 4.** alapján $\delta(6)>13+4\sqrt{3}$. Így $\delta(7)>d(7)$.

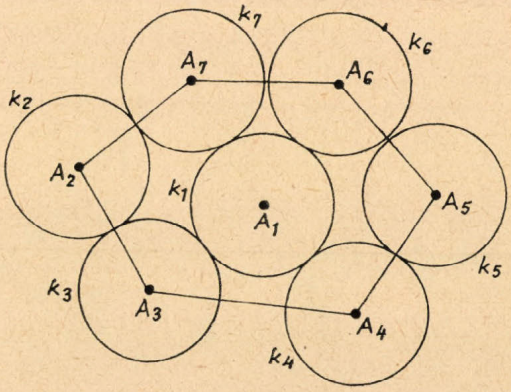
Hasonlóan látható be $\delta(7)>d(7)$ egyenlőtlenség abban az esetben is, ha a fenti hatszögben A helyett pl. A_5 rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a többitől mért távolság összege nem kisebb $4+2\sqrt{3}$-nál.

2. 5. 2. Ha a középpontok konvex burka az $A_2A_3 \ldots A_7$ hatszög és A_1 pl. A_2A_7 oldal pontja, akkor $A_2A_7=2$ esetén alkalmazhatjuk **2. 5. 1.** módszert, $A_2A_7>2$ esetén az 1. segédtételt alkalmazva $\delta(7)$ csökkentésével egy később tárgyalandó esethez jutunk.

2. 5. 3. A középpontok konvex burka hatszög és k_4 nem érinti a belső k_1-et (11. ábra). Tekintsük az A_4-gyel ellentétes A_7 középpontú k_7 kört és ezt rögzítjük. Forgassuk A_3 körül k_4-et, közben k_5, majd k_6 k_1-en gördül. A forgatást addig végezzük, míg k_5 nem érinti k_6-ot, majd k_6 k_7-et. Ezután A_5 körül forgatjuk k_4-et k_1 felé,



11. ábra



12. ábra

k_3, majd k_2 k_1-en gördül. Nyilván $\sum_{i=1}^{6} A_7A_i$ csökken, továbbá az A_1A_2, ... A_6 pontok a mozgás végén a $d(6)$-nak megfelelő extremális alakzatot veszik fel, így $\delta(6)$ csökkent. Ezért $\delta(7)$ csökkent és végül $d(7)$-nek megfelelő alakzathoz jutunk.

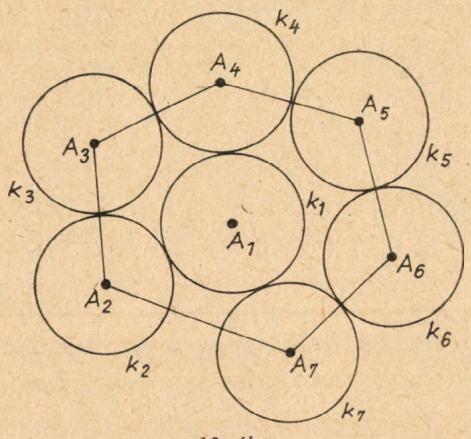
2. 5. 4. A középpontok konvex burka hatszög, két kör nem érinti a belső kört és ezek egymást érintik. A **2. 5. 3.**-ban használt módszerrel a körök úgy mozgathatók, hogy $\delta(7)$ csökken és vagy **2. 5. 3.**-ban említett alakzathoz, vagy $d(7)$-nek megfelelő alakzathoz jutunk.

2. 5. 5. A középpontok konvex burka hatszög, k_2 és k_5 nem érinti a belső k_1-et és ezek középpontja a hatszög két átellenes csúcsa (12. ábra). Legyen $A_6A_1A_7 \sphericalangle \leqq$ $\leqq A_3A_1A_4 \sphericalangle$. Forgassuk A_3 körül k_2-t k_1 felé, közben k_7 k_1-en k_6-ig gördül, majd A_7 körül k_2-t k_1-ig, közben k_3 k_1-en gördül. Ebben a helyzetben nyilván $A_2A_1A_4 \sphericalangle <$ $< 180°$. Ezután forgassuk A_6 körül k_5-öt k_1-ig, k_4 k_1-en k_3-ig gördül. A mozgások során ΣA_2A_k $(k = 1, 3, 4, 5, 6, 7)$ csökkent, az $A_1A_3A_4$ ... A_7 pontok $d(6)$-nak megfelelő extremális helyzetbe kerültek, így $\delta(7)$ is csökkent és $d(7)$-nek megfelelő alakzathoz jutottunk.

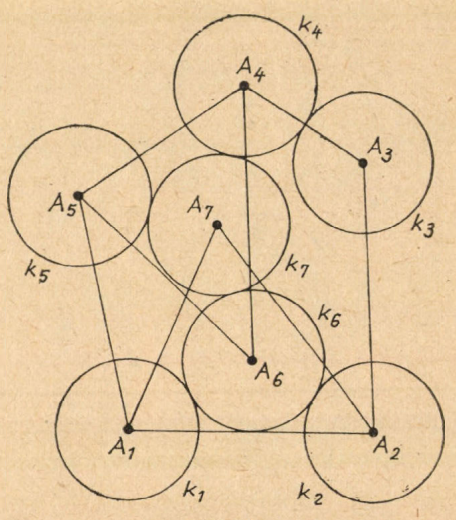
2. 5. 6. A középpontok konvex burka hatszög, két kör nem érinti a belső kört és ezek középpontjai a hatszög csúcsai közül két másod szomszéd. A **2. 5. 5.**-ben alkalmazott módszerrel csökkenthető $\delta(7)$ és $d(7)$-nek megfelelő rendszerhez jutunk.

2. 5. 7. A középpontok konvex burka hatszög és három kör nem érinti a belső kört. A belső kört nem érintő körök középpontjai vagy a hatszög három szomszédos csúcsa, vagy két szomszédos csúcs és egy harmadik. Mi az utóbbi esettel foglalkozunk, az előző analóg módon tárgyalható.

A 13. ábra jelölése alapján forgassuk A_4 körül k_3-at k_1-ig, közben k_2 k_1-en gördül. Majd A_4 körül k_5-öt és k_6-ot együtt. Ha közülük egyik érinti k_1-et utána csak a másikat A_4 vagy A_5 körül k_1-ig. Az 1. segédtételből következik, hogy A_3 és A_5 közelebb kerül A_7-hez, a 2. segédtételből pedig, hogy $A_7A_4 + A_7A_2$ csökken. Az A_1A_2 ... A_6 pontok a $d(6)$-nak megfelelő minimális pontrendszert alkotnak. Így $\delta(7)$ csökkent és $d(7)$-nek megfelelő pontalakzatot kaptunk.



13. ábra



14. ábra

2. 5. 8. A középpontok konvex burka hatszög és négy kör nem érinti a belső kört. Mozgatással $\delta(7)$ csökkentése mellett könnyen visszavezethető az előző esetek valamelyikére.

2. 5. 9. A középpontok konvex burka az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög. (14. ábra.) Kössük össze A_6-ot az ötszög csúcsaival, az így kapott háromszögek valamelyike tartalmazza A_7-et. Az A_6 és A_7 szerepét felcserélve, kapjuk, hogy A_6-ot is tartalmazza egy háromszög. (Az ábrán $A_1A_2A_7$ háromszög tartalmazza A_6-ot és $A_4A_5A_6$ háromszög tartalmazza A-$_7$et.) A **2. 4. 7.**-hez hasonlóan alkalmazzuk többször is a **2. b.** segédtételt, a többi távolságokat alulról becsüljük, és adódik, hogy $\delta(7) > d(7)$.

További esetekben ugyancsak a távolságok becslésével bizonyítható be, hogy $\delta(7) > d(7)$.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА МИНИМУМ ПО СУММЕ РАССТОЯНИЙ

E. ХОРВАТ

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки на евклидавой плоскости и преположим, что расстоянии между ними не меньши единицы. Обозначим через $f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \delta(n)$ сумму расстояний точек. Л. Ф. Тот выдвинул следующую проблему: Какое будет значение минимума $\delta(n)$ и как рассположены точки в эктремальном случае? В этой работе проблема решается для $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

Наш главный результат: Рассмотрим центр A_1 правильного шестиугольника со сторонами равными единицы и обозначим последовательные вершины через A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. Это будет экстремальная система точек для $n=7$. Вычеркиваем подряд вершины A_7, A_6, A_5, A_4 получаем экстремальные системы остающихся точек для $n=6$, $n=5$, $n=4$, $n=3$.

ÜBER DAS MINIMUMPROBLEM BEI DER SUMMIRUNG VON LÄNGEN

J. HORVÁTH

Betrachten wir n verschiedene Punkte $(A_1, A_2 \ldots, A_n)$ der euklidischen Ebene, weiterhin die gesamten durch diese Punkte bestimmten $A_jA_k (j \neq k)$ Längen, die nicht kürzer als 1 sein dürfen. Die Summe der so definierten Längen bezeichnen wir mit $f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \delta(n)$.

Fejes Tóth László warf das folgende Problem auf: Wie groß ist das Minimum von $\delta(n)$ und bei welchen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Punkten kommt es vor? Das Minimum von $\delta(n)$ bezeichnen wir mit $d(n)$. In dieser Behandlung lösen wir das Problem für die Fälle $n=3, 4, 5, 6, 7$.

Unser Hauptergebnis ist das Folgende. Betrachten wir ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seiten die Länge 1 betragen. Bezeichnen wir das Mittelpunkt mit A_1 und der Reihenfolge eines der beiden Umläufe entsprechend die Eckpunkte mit $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$. So bekommen wir im Fall $n=7$ die Extremalfigur. Streichen wir nacheinander der Punkte A_7, A_6, A_5, A_4. Den Streichungen entsprechend ergibt der Rest nacheinander die Extremalfiguren in den Fallen $n=6$, $n=5$, $n=4$, $n=3$.

MATRIX RANGJÁNAK GYŰRŰELMÉLETI ÉRTELMEZÉSE

LEE ANNA és RÉDEI LÁSZLÓ

1. Valamely K ferdetest feletti A mátrix $\varrho(A)$ rangjára a következő ekvivalens definíciók ismeretesek: $\varrho(A)$ egyenlő

(i) az $A=\sum_{i=1}^{s} A_i$ előállításához szükséges $A_i=v_i w_i^* \neq 0$ alakú mátrixok (diádok) minimális számával (lásd pl. [1]);

(ii) az A oszlopaiból (soraiból) kiválasztható lineárisan független oszlopvektorok (sorvektorok) maximális számával (lásd pl. [2] 417. o.);

és ha K kommutatív, akkor

(iii) $\varrho(A)=\max p$, ahol p annak a feltételnek van alávetve, hogy A-nak van p-edrendű nemzérus aldeterminánsa (lásd pl. [2] 398. o.).

Figyelembe véve a definíciókat látjuk, hogy a rang fogalmának az (i) *mátrixelméleti* értelmezésén kívül *geometriai* és *determinánselméleti* értelmezése is adható. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a mátrix rang fogalmának *gyűrűelméleti* értelmezést is adhatunk, amely — mint látni fogjuk — szorosan kapcsolódik az (i) definícióhoz.

2. Rangvizsgálat szempontjából elég négyzetes mátrixokra szorítkoznunk, mivel zérus sorok vagy oszlopok segítségével bármely mátrix — a *rang megváltozása nélkül* — négyzetessé tehető. Ezért a továbbiakban mátrixon mindig n-edrendű négyzetes mátrixot értünk.

Jelölje K_n a K ferdetest feletti n-edrendű mátrixok teljes gyűrűjét. Ez, mint ismeretes, Artin-féle egyszerű gyűrű. Tehát érvényes rá a Noether-féle struktúra tétel, azaz K_n felbontható n számú minimális balideál (modulusértelemben vett) direkt összegére. Ezek után az alábbi tételben fogalmazzuk meg egy tetszőleges $A \in K_n$ mátrix $\varrho(A)$ rangjának gyűrűelméleti értelmezését.

Tétel: Legyen a K_n teljes mátrixgyűrű tetszőleges direkt felbontása minimális balideálokra

$$K_n = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_n \tag{1}$$

és legyen az $A \in K_n$ mátrix megfelelő komponenselőállítása

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \qquad (A_i \in \mathrm{I}_i). \tag{2}$$

Akkor

$$\min N(A) = \varrho(A),$$

ahol $N(A)$ a (2) előállításban a nem-zérus komponensek száma.

1. *Megjegyzés:* A bizonyítás során a K_n teljes mátrixgyűrű Noether-felbontásait az E_{ij} mátrixegységek segítségével

$$K_n = K_n E_{11} C \oplus K_n E_{22} C \oplus \ldots \oplus K_n E_{nn} \tag{3}$$

alakban kapjuk meg. Ha C befutja a K_n reguláris mátrixait, akkor (3) megadja a K_n valamennyi Noether-felbontását. (Természetesen mindazok a C mátrixok, amelyek ugyanazt a (3) felbontást szolgáltatják, egymástól baloldali diagonális mátrixtényezőben térnek el.) A Noether-felbontásoknak ez a jól áttekinthető egységes alakja tudomásunk szerint eddig még nem szerepelt az irodalomban.

Bizonyítás: Jelölje E_{ij} a mátrixegységeket (az E_{ij} mátrix i, j indexű eleme 1, a többi 0 $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$). Tudjuk, hogy bármely R egységelemes gyűrű tetszőleges

$$\mathfrak{L} = R\alpha \qquad (\alpha \in R)$$

minimális balideálja esetén, ha $\xi\alpha \neq 0$, $\xi \in R$, akkor $\mathfrak{L} = R\xi\alpha$. Ezért K_n bármely minimális balideálja

$$\mathfrak{L} = K_n E_{ii} C \qquad (C \in K_n;\ E_{ii} C \neq 0)$$

alakban írható alkalmas i-vel.

Tekintsünk n számú minimális balideált K_n-ből

$$\mathfrak{L}_t = K_n E_{i_t i_t} C_t \quad (t = 1, 2, \ldots, n;\ C_t \in K_n), \tag{4}$$

ahol mindegyik i_t az $1, 2, \ldots, n$ egészek valamelyike. Akkor

$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \ldots + \mathfrak{L}_n = K_n C, \tag{5}$$

ahol

$$C = \sum_{t=1}^{n} E_{i_t i_t} C_t. \tag{6}$$

Ha $i_1, i_2, \ldots, i_n$ között valamelyik $i\ (= 1, 2, \ldots, n)$ nem fordul elő, akkor C nem reguláris, azaz $K_n C \neq K_n$, tehát (5) miatt (1) nem teljesül. Ezért (1) fennállása esetén $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ elemeknek egy permutációja és így akkor feltehető, hogy $i_t = t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$. Más szóval ekkor (4) (t helyett i indexet használva)

$$\mathfrak{L}_i = K_n E_{ii} C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ C_i \in K_n) \tag{7}$$

alakban írható, továbbá az (5) egyenlőségben (6) helyett

$$C = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} C_i \tag{8}$$

érvényes.

Ha most feltesszük, hogy (7) és (8) teljesül, (5) miatt világos, hogy (1) *akkor és csak akkor teljesül, ha C reguláris.* Minthogy pedig (8) alapján $E_{ii} C = E_{ii} C_i$ minden i-re, így

$$C_i = C \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

választható. Ilyen módon azt kaptuk, hogy K_n *összes* (1) *alatti Noether-felbontása*

$$\mathfrak{L}_i = K_n E_{ii} C \tag{9}$$

által van megadva, ahol C tetszőleges reguláris mátrix K_n-ből, és ezzel egyszersmind (3) bizonyítva van.

Mármost a tételbeli A mátrixot írjuk

$$A = XC \qquad (X \in K_n) \tag{10}$$

alakban. Minthogy $E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn} = E$ az egységmátrix, ezért

$$A = XE_{11}C + XE_{22}C + \ldots + XE_{nn}C$$

éppen az A komponenselőállítása, azaz a (2) előállításban

$$A_i = XE_{ii}C \tag{11}$$

érvényes. Minthogy C reguláris, azért

$$A_i \neq 0 \Leftrightarrow XE_{ii} \neq 0, \tag{12}$$

és így $N(A)$ egyenlő a nemzérus XE_{ii} szorzatok számával, vagyis az X zérustól különböző oszlopainak számával, tehát

$$N(A) \geqq \varrho(X) = \varrho(A).$$

Másrészt (10) szerint

$$X = AC^{-1},$$

tehát alkalmas C esetén az X nemzérus oszlopainak száma éppen $\varrho(A)$. Ekkor az XE_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ szorzatok közül pontosan $\varrho(A)$ számú nem tűnik el, tehát most (12) miatt

$$N(A) = \varrho(A).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. *Megjegyzés:* A tétel állítása és a rang (i) definíciója közötti kapcsolat még világosabb, ha észrevesszük, hogy a (11) alatti mátrixkomponens

$$A_i = XE_{ii}C = x_i c_i^*,$$

ahol x_i a bizonyítás során fellépő X mátrix i-edik oszlopát, c_i^* pedig a C mátrix i-edik sorát jelöli.

IRODALOM

[1] *Egerváry, J.:* Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról, Magyar Tud. Akad. Math. Fiz. Oszt. Közl., 3 (1963) 417—458.

[2] *Rédei, L.:* Algebra I., Leipzig, 1959.

ТОЛКОВАНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ В ТЕОРИИ КОЛЕЦ

А. ЛИ и Л. РЕДЕИ

ON THE RINGTHEORETICAL INTERPRETATION OF THE RANG OF MATRICES

A. LEE and L. RÉDEI

FERDE KONFIGURÁCIÓK

SZEKERES GYÖRGY

1. Legyenek $0<\lambda<k<v$ adott természetes számok és $S_1, S_2, \ldots S_v$ az $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ halmaz oly részhalmazai, hogy

(1) minden S_i pontosan k elemet tartalmaz, és

(2) minden $\{S_i, S_j\}$ $(1 \leqq i<j \leqq v)$ halmazpár pontosan λ közös elemet tartalmaz.

Egy az (1) és (2) feltételeket kielégítő $(S_1, S_2, \ldots, S_v)$ részhalmazrendszert *szimmetrikus* (v, k, λ)*-konfigurációnak* nevezünk.

A következő tétel jól ismert (l. Marshall Hall, Combinatorial Theory, Blaisdell 1967, 10. 2 fejezet, a következőkben M. H.-nak idézve), de a teljesség kedvéért bebizonyítjuk.

1. TÉTEL. *Ha* $(S_1, \ldots, S_v)$ *egy szimmetrikus* (v, k, λ)*-konfiguráció úgy*
(a) *minden* x_i *pontosan* k *különböző részhalmazban fordul elő,*
(b) *minden* (x_i, x_j) *elempár pontosan* λ *részhalmazban fordul elő együtt, és*
(c) *a* v, k, λ *paraméterek kielégítik a*

$$\lambda(v-1) = k(k-1) \tag{3}$$

feltételt.

Legyen $A=(a_{ij})_1^v$ a konfiguráció incidencia-mátrixja, vagyis

$$a_{ij} = 1, \quad \text{ha} \quad x_j \in S_i$$
$$= 0, \quad \text{ha} \quad x_j \notin S_i.$$

Legyen továbbá $I=(\delta_{ij})$ a v-edrendű egységmátrix, és $E=(e_{ij})$ azon v-edrendű mátrix, melyben minden e_{ij} elem 1-gyel egyenlő.

Ekkor az (1) és (2) feltételeket a

$$AE=kE, \tag{4}$$

$$AA' = (k-\lambda)I+\lambda E \tag{5}$$

egyenletek fejezik ki (hol A' az A mátrix transzponáltja), és az (a), (b) állításoknak a

$$A'E=kE, \tag{4'}$$

$$A'A = (k-\lambda)I+\lambda E \tag{5'}$$

egyenletek felelnek meg. Azt kell kimutatnunk, hogy (i) A nem szinguláris, és (ii) $AE=EA$.

Ugyanis tegyük fel, hogy (ii) teljesül. Ekkor (4) transzponálása azonnal megadja (4′)-t, és (ii) és (5) mutatja, hogy A felcserélhető AA'-vel, $A^2A'=AA'A$; ebből ha (i) is teljesül, azonnal következik, hogy $AA'=A'A$, vagyis (5′).

Mármost könnyű számolással adódik, hogy

$$\det(AA') = \det\big((k-\lambda)I+\lambda E\big) = (k-\lambda+\lambda v)(k-\lambda)^{v-1} \tag{6}$$

s ez utóbbi kifejezés pozitív, minthogy $k>\lambda$, ezért A^{-1} létezik. Ennélfogva (4)-ből $A^{-1}E=\frac{1}{k}E$, $EA^{-1}E=\frac{1}{k}E^2=\frac{v}{k}E$, tekintve, hogy $E^2=vE$, és (4) és (5)-ből

$$kE = EA' = (k-\lambda)EA^{-1}+\frac{\lambda v}{k}E,$$

$EA^{-1}=mE$ hol $m=(k^2-\lambda v)/k(k-\lambda)$, $mEA=E$. De EA nyoma ugyanaz, mint AE-é, s összehasonlítva (4)-gyel kapjuk, hogy $m=\frac{1}{k}$, $k^2-\lambda v=k-\lambda$, vagyis a (3) egyenlet. A (ii) feltétel ebből azonnal következik.

(3) és (6)-ból következik, hogy

$$(\det A)^2 = k^2(k-\lambda)^{v-1},$$

tehát $(k-\lambda)^{v-1}$ négyzetszám. Ha tehát v páros, csak oly (v, k, λ) paraméter rendszerhez létezhetik egy szimmetrikus (v, k, λ)-konfiguráció, melyre (a „triviális" (3) összefüggésen kívül) igaz, hogy $k-\lambda$ négyzetszám. Páratlan v esetén Bruck és Ryser kimutatták (M. H., 10. 3. fejezet), hogy egy szimmetrikus (v, k, λ)-konfiguráció létezéséhez (a (3) összefüggésen kívül) szükséges, hogy a

$$z^2 = (k-\lambda)x^2+(-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2 \tag{7}$$

egyenletnek legyen egész x, y, z megoldása. Máig eldöntetlen sejtés, hogy ez a feltétel elégséges is; a probléma nehézségére jellemző, hogy legalább oly mély mint a Hadamard mátrixok létezésének problémája. Egy n-edrendű $H=(h_{ij})$ mátrixot Hadamard-matrixnak nevezünk, ha $h_{ij}=\pm 1$ minden i, j-re és

$$HH'=nI,$$

vagyis a sorok (oszlopok) egymásra ortogonálisok. Könnyen belátható, hogy ha $n>2$, H csak úgy létezhetik ha $n\equiv 0 \pmod 4$, továbbá (M. H., 14. 1. fejezet), hogy $4m$-edrendű H-mátrix akkor és csakis akkor létezik, ha létezik szimmetrikus $(4m-1, 2m-1, m-1)$-konfiguráció. A Hadamard paraméterek triviálisan kielégítik úgy a (3) mint a (6) feltételeket, tehát a Bruck—Ryser feltétel elégségességének bizonyítása maga után vonná a H-mátrixok létezését is.

Megjegyezzük, hogy ha $(S_1, \ldots, S_v)$ egy szimmetrikus (v, k, λ)-konfiguráció és T_i az S_i részhalmaz komplementerje úgy $T_1, \ldots, T_v$ egy szimmetrikus $(v, v-k, v-2k+\lambda)$-konfiguráció. A komplementáris konfiguráció-pár két tagja közt pontosan egy van, mely kielégíti a

$$v \geqq 2k+1 \tag{8}$$

egyenlőtlenséget ($v=2k$ nem kompatibilis (3)-mal). (3) figyelembevételével ez ekvivalens a $k\geqq 2\lambda+1$ feltétellel.

2. Egy szimmetrikus (v, k, λ)-konfigurációt *ferde* konfigurációnak nevezünk ha (a részhalmazok megfelelő számozásával) a következő feltétel teljesül:

$$x_i \in S_j \Rightarrow x_j \notin S_i. \tag{9}$$

E feltételből következik, hogy $x_i \notin S_i$.

Egy ferde (v, k, λ)-konfiguráció ekvivalens egy oly v-edrendű irányított Γ gráffal, melyben minden ponthoz pontosan k számú él fut be és minden pontpárra pontosan λ számú pontból fut be mindkét pontba él. Egy ilyen gráfot leírhatunk a v elemű $X=\{x_1, \ldots, x_v\}$ halmazban való $x \to y$ relációval, mely a következő (P1), (P2), (P3) tulajdonságokkal bír:

Adva az X halmaz $Y=\{y_1, \ldots, y_r\}$ részhalmaza, legyen

$$S(Y) = S(y_1, \ldots, y_r) = \{x \in X \mid x \to y_i, i = 1, \ldots, r\},$$

$$S^*(Y) = S^*(y_1, \ldots, y_r) = \{x \in X \mid y_i \to x, i = 1, \ldots, r\}.$$

Ekkor

$$x \to y \Rightarrow y \nrightarrow x. \tag{P1}$$

(P2) Minden $y \in X$-re $S(y)$ pontosan k elemből áll.

(P3) Minden $(y_1, y_2) \in X \times X$ pontpárra $S(y_1, y_2)$ pontosan λ elemből áll.

Egy (P1), (P2), (P3) tulajdonságokkal rendelkező relációt (v, k, λ)-relációnak és a megfelelő gráfot (v, k, λ)-gráfnak nevezünk. Az 1. Tételből következik, hogy egy (v, k, λ)-relációban

(P2*) Minden $y \in X$-re $S^*(y)$ pontosan k elemből áll,

(P3*) Minden $(y_1, y_2) \in X \times X$-re $S^*(y_1, y_2)$ pontosan λ elemből áll.

Az $x \to y$ reláció duálisa azon $x \overset{*}{\to} y$ reláció, melyre $x \overset{*}{\to} y$ pontosan akkor, ha $y \to x$. Az előző eredményt így is megfogalmazhatjuk:

2. TÉTEL. *Egy (v, k, λ)-reláció duálisa is egy (v, k, λ)-reláció.*

A megfelelő (v, k, λ)-gráfban minden pontból pontosan k él fut ki és pontosan k él fut be. Ebből következik, hogy egy ferde (v, k, λ)-konfiguráció (reláció, gráf) létezéséhez szükséges, hogy $v-1 \geqq 2k$ legyen, vagyis hogy a (8) feltétel teljesüljön. Más szóval egy komplementáris paraméter-pár két tagja közt pontosan egy van, melyhez létezhetik egy ferde konfiguráció.

3. A (v, k, λ)-konfigurációk szerkesztésének egyik legeredményesebb módszere a differencia-bázisok szerkesztésén alapul. Egy v-edrendű additív G Abel-csoportnak egy k elemű $A=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ részhalmazát (v, k, λ)-differencia-bázisnak nevezzük, ha minden 0-tól különböző δ csoportelem pontosan λ-féleképpen állítható elő, mint A két elemének különbsége, azaz

$$\delta = \alpha - \alpha', \quad \alpha, \alpha' \in A$$

alakban.

Minthogy $k(k-1)$ ilyen különbség képezhető és a $v-1$ zérustól különböző csoportelem mindegyike λ-féleképpen állítható elő, a $(v-1)\lambda = k(k-1)$ összefüggésnek teljesülnie kell. Az

$$A_\beta = \{\alpha_1 + \beta, \ldots, \alpha_k + \beta\}, \quad \beta \in G$$

halmazok mindegyike egy (v, k, λ) különbségrendszer és $A_\beta \cap A_{\beta'}$ $(\beta \neq \beta')$ azon γ elemekből áll, melyekre $\gamma = \alpha_i + \beta = \alpha_j + \beta'$. Ennélfogva $A_\beta \cap A_{\beta'}$ annyi elemből áll ahány megoldása van az $\alpha_i - \alpha_j = \beta' - \beta = \delta \neq 0$ egyenletnek, vagyis λ elemből. Más szóval az A_β halmazok egy szimmetrikus (v, k, λ)-konfigurációt szolgáltatnak.

Ha G ciklikus, elemeit felfoghatjuk mint modulo v maradékosztályokat, és a differencia-bázist *ciklikus*nak hívjuk.

Egy (v, k, λ) differencia-bázist *ferdének* nevezünk, ha kielégíti a következő feltételt:

$$\alpha \in A \Rightarrow -\alpha \notin A.$$

Ekkor a megfelelő (v, k, λ)-konfiguráció ferde. Ugyanis $\gamma \in A_\beta$ ekvivalens avval, hogy $\gamma - \beta \in A$, de ekkor $\beta - \gamma \notin A$, $\beta \notin A_\gamma$.

Egy ismert szerkesztés (M. H., 11. 3 fejezet) mutatja, hogy minden q prímhatványhoz létezik egy ciklikus $(q^2+q+1, q+1, 1)$ differencia-bázis. Ez a következő módon nyerhető:

Legyen F a q számú elemet tartalmazó véges test, K az F test harmadfokú kiterjesztése, vagyis a $Q = q^3$ számú elemet tartalmazó test. Jelöljük K^*-gal a K test multiplikatív csoportját és $F^* = K^* \cap F$ jelentse F multiplikatív csoportját. Mint ismeretes, a K^* csoport ciklikus, vagyis létezik egy K^*-t generáló x primitív gyök úgy, hogy $x, x^2, \ldots, x^{Q-1} = 1$ hatványok előállítják K^* minden elemét. Nyilván $y = x^{(Q-1)/(q-1)}$ generálja F^*-ot.

Minden x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, Q-1)$ hatvány egyértelműen előállítható

$$x^\alpha = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

alakban, hol $a_i \in F$, $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ és

$$\varphi : \varphi(\alpha) = (a_0, a_1, a_2)$$

a modulo $(Q-1)$ maradékosztályok G additív csoportjának egy-egyértelmű leképezése a zérustól különböző F feletti 3-dimenziós vektorok V halmazára. Jelöljük V^*-gal a megfelelő 2-dimenziós projektív vektorok halmazát, vagyis az

$$(a_0, a_1, a_2) \sim (ba_0, ba_1, ba_2), \quad b \in F, \ b \neq 0$$

reláció ekvivalencia-osztályainak halmazát. Nyilván V^* különböző elemeinek száma $v = (Q-1)/(q-1) = q^2+q+1$, és $\varphi(\alpha_1) \sim \varphi(\alpha_2)$ akkor és csakis akkor ha $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{v}$. Ezért ha H jelenti G-nek $(q-1)$-edrendű alcsoportját, φ felfogható természetes módon mint a $G^* = G/H$ faktorcsoporton értelmezett V^*-ra való egy-egyértelmű leképezés.

Legyen β^* a G^*-nak $\beta \in G$ által reprezentált eleme, $(b_0, b_1, b_2)^* = \varphi(\beta^*)$ a $(b_0, b_1, b_2) \in V$ által reprezentált projektív vektor V^*-ban. Legyen továbbá

$$S_{\beta^*} = \{(a_0, a_1, a_2)^* \in V^* | a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0\}.$$

Nyilván S_{β^*} definíciója független a reprezentánsoktól. Minden S_{β^*} a v-edrendű V^* halmaz részhalmaza és a különböző S_{β^*} halmazok száma szintén v. Könnyen belátható, hogy minden S_{β^*} $q+1$ számú vektor tartalmaz és S_{β^*}, S_{γ^*} $(\beta^* \neq \gamma^*)$ közös vektorainak száma pontosan egy.

S_{0^*} a $(0, a_1, a_2)^*$ vektorokból áll és az $A = \{\varphi^{-1}(0, a_1, a_2)^*\}$ halmaz egy $(q^2+q+1, q+1, 1)$ differencia-bázis. Csak azt kell kimutatni, hogy ha $\delta^* \in G^*$, $\delta^* \neq 0^*$, úgy a $\delta^* = \alpha^* - \beta^*$, $\alpha^*, \beta^* \in A$ egyenletnek van megoldása. Mármost az $\alpha^* - \beta^*$ különbségek száma $(q+1)q$ és ugyanennyi a 0-tól különböző G^*-elemek száma is. Legyen

$$\varphi(\delta^*) = (d_0, d_1, d_2)^*, \ (d_1, d_2) \neq (0, 0);$$

bebizonyítandó, hogy $d_0 + d_1 x + d_2 x^2$ kifejezhető $(a_1 x + a_2 x^2)/(b_1 x + b_2 x^2)$ alakban

Legyen az x generáló elem irreducibilis egyenlete K felett $x^3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, $c_0 \neq 0$. Ekkor a megoldandó egyenlet

$$(a_1 + a_2 x) = (b_1 + b_2 x)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2) =$$

$$= b_1 d_0 + b_2 d_0 x + b_1 d_1 x + b_2 d_1 x^2 + b_1 d_2 x^2 +$$

$$+ b_2 d_2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2),$$

és a feltétel az, hogy a

$$b_1 d_2 + b_2 (d_1 + d_2 c_2) = 0$$

egyenletnek legyen $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ megoldása. De ha $d_2 \neq 0$, úgy $b_2 = 1$, $b_1 = (c_2 - d_1/d_2)$ megoldás, és ha $d_2 = 0$, $d_1 \neq 0$, úgy $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ megoldás.

A megadott differencia-bázis általában nem ferde; hogy ferdévé alakítsuk, megjegyezzük, hogy minden rögzített $\gamma^* \in G^*$-ra

$$A_{\gamma *} = \{\alpha^* + \gamma^* \mid \alpha^* \in G^*\}$$

is egy $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$-differencia-bázis. Mármost az

$$(\alpha_i^* + \gamma^*) + (\alpha_j^* + \gamma^*) = 0^*, \quad \alpha_i^*, \alpha_j^* \in G^* \tag{10}$$

egyenletnek minden adott $\alpha_i^* \neq \alpha_j^*$ elempárra pontosan egy megoldása van (tekintve, hogy G^* rendje $q^2 + q + 1$, páratlan), és ezen elempárok száma $q(q+1)$; ezért létezik egy γ^*, melyre nézve $A_{\gamma *}$-ban nincs megoldása a (10) egyenletnek, tehát $A_{\gamma *}$ egy ferde $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$-differencia-bázis. Bebizonyítottuk:

3. TÉTEL. *Ha q prímhatvány, úgy létezik egy ferde $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ differencia-bázis (ferde konfiguráció, reláció, gráf).*

4. Az előző tétel felveti a kérdést, hogy létezik-e ferde (v, k, λ)-konfiguráció minden oly (v, k, λ)-ra, melyre létezik szimmetrikus (v, k, λ)-konfiguráció s mely kielégíti a triviális (8) feltételt. Nem minden (v, k, λ)-ra sikerült idáig ferde konfigurációt találni, melyre ismeretes egy szimmetrikus konfiguráció, bár határozott ellenpélda nincsen. Például Singer tétele szerint (M. H., 11. 3 fejezet) ha q prímhatvány, úgy létezik minden $n \geqq 1$-re ciklikus

$$\left((q^{n+2} - 1)/(q-1), (q^{n+1} - 1)/(q-1), (q^n - 1)/(q-1)\right) -$$

differencia-bázis, de $n > 1$-re nem sikerült egy megfelelő ferde rendszert találni. A következő példa mutatja, hogy némely szimmetrikus konfigurációt alkalmas átszámozással lehet ferdévé alakítani.

Legyen G a $(2, 2, 2, 2)$ típusú additív Abel-csoport, melynek elemei előállíthatók (a_1, a_2, a_3, a_4) alakban, hol $a_i = 0$ vagy 1 modulo 2. Ebben a csoportban a következő egy (nem-ferde) differencia-bázis:

$$(1000), (0100), (1100), (0010), (0001), (0011).$$

Rendeljük (a_1, a_2, a_3, a_4)-hez az

$$= a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4$$

indexet; ekkor a differencia-bázis a következő (16, 6, 2)-konfigurációt adja.

(1 2 3 4 8 12) 0
(0 2 3 5 9 13) 11
(0 1 3 6 10 14) 13
(0 1 2 7 11 15) 6
(0 5 6 7 8 12) 14
(1 4 6 7 8 13) 5
(2 4 5 7 10 14) 3
(3 4 5 6 11 15) 8
(0 4 9 10 11 12) 7
(1 5 8 10 11 13) 12
(2 6 8 9 11 14) 10
(3 7 8 9 10 15) 1
(0 4 8 13 14 15) 9
(1 5 9 12 14 15) 2
(2 6 10 12 13 15) 4
(3 7 11 12 13 14) 15.

Jobb oldalon a részhalmazok azon számozása van megadva, mellyel a konfiguráció ferdévé válik.

Egy másik példa a

$$(1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34) \bmod 37$$

maradékrendszer, mely egy ferde (37, 9, 2)-*differenciabázis*. Ezzel szemben a

$$(1, 2, 3, 5, 6, 9, 14, 15, 18, 20, 25, 27, 35) \bmod 40$$

maradékrendszer egy nem-ferde (40, 13, 4)-*differenciabázis*, mely nem tehető ferdévé átszámozással; tudomásom szerint egy ferde (40, 13, 4)-konfiguráció nem ismeretes. Egy másik ilyen eset (25, 9, 3), melyre ismeretes egy szimmetrikus konfiguráció (M. H., 292. o.), de ferde konfiguráció nem ismeretes.

5. A ferde konfigurációk egyik legérdekesebb problémája a ferde Hadamard-konfigurációk létezésének kérdése. A $(4m-1, 2m-1, m-1)$ paraméterek kielégítik a (8) feltételt (egyenlőségjellel) s így elvileg lehetséges, hogy minden m-re létezik egy ferde $(4m-1, 2m-1, m-1)$-konfiguráció. A paraméterrendszer érdekességét mutatja, hogy a megfelelő gráfok teljes irányítottak és az $x \to y$ reláció minden elempárra értelmezve van. A megfelelő Hadamard mátrixokat az jellemzi, hogy $H = I + S$ alakúak, hol I az egységmátrix és $S' = -S$, ferdén szimmetrikus.

Paley és Williamson szerkesztéseiből ismeretes (M. H., 14. fejezet), hogy ha

$$n = 2^t(q_1+1) \dots (q_s+1),$$

hol $t \geqq 0$, $s \geqq 0$, q_i prímhatvány, $q_i + 1 \equiv 0 \pmod 4$ $(i = , \ldots, s)$ úgy létezik egy n-edrendű ferde H-mátrix. Újabban a szerző szerkesztett ferde H-mátrixot minden $2(q+1)$ alakú rendre hol q prímhatvány és $\equiv 5 \pmod 8$. A szerkesztés az ún. kettős differencia-bázisok létezésén alapul.

Legyen G egy $(2m+1)$-edrendű additív Abel-csoport. Két $A \subset G$, $B \subset G$ részhalmazt *kettős differencia-bázisnak* hívunk, ha

(i) $$\alpha \in A \Rightarrow -\alpha \notin A$$

és

(ii) minden $\delta \in G$, $\delta \neq 0$-ra a

(11) $$\delta = \alpha_1 - \alpha_2, \ \delta = \beta_1 - \beta_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in A \times A, \ (\beta_1, \beta_2) \in B \times B$$

egyenletek megoldásainak száma összesen $m-1$. Az (i) feltételből minden esetre következik, hogy $0 \notin A$.

4. Tétel. *Ha valamely $(2m+1)$-edrendű G Abel-csoportban létezik egy A, B kettős differencia-bázis, úgy létezik egy ferde $(4m+3, 2m+1, m)$-konfiguráció (tehát egy $4(m+1)$-edrendű ferde H-mátrix is).*

A konfigurációt a következőképpen kapjuk meg: Legyenek az X halmaz elemei $\{y, x_\gamma, x_\gamma^* | \gamma \in G\}$ és a konfiguráció részhalmazai

$$T = \{x_\gamma | \gamma \in G\}$$

$$S_\gamma = \{x_{\gamma+\alpha}, x^*_{\gamma-\beta'} | \alpha \in A, \beta' \in B' = G - B\}$$

$$S_\gamma^* = \{y, x^*_{\gamma-\alpha}, x_{\gamma+\beta} | \alpha \in A, \beta \in B\}, \quad \gamma \in G.$$

Nyilván $y \notin T$, $x_\gamma \notin S_\gamma$, $x_\gamma^* \notin S_\gamma^*$ (minthogy $0 \notin A$), és T, S_γ, S_γ^* pontosan $2m+1$ elemet tartalmaznak. Csak azt kell kimutatnunk, hogy bármely két fenti részhalmaz m közös elemet tartalmaz. Ez triviálisan igaz

$$T \cap S_\gamma = \{x_{\gamma+\alpha} | \alpha \in A\}, \quad T \cap S_\gamma^* = \{x_{\gamma+\beta} | \beta \in B\}$$

esetén. Mármost ha $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $S_{\gamma_1} \cap S_{\gamma_2}$ azon $x_{\gamma_1+\alpha_1}$, $x^*_{\gamma_1-\beta_1'}$ elemekből áll, melyek egyúttal $x_{\gamma_2+\alpha_2}$, $x^*_{\gamma_2-\beta_2'}$ alakúak, vagyis annyi elemet tartalmaznak, amennyi a

$$\delta = \gamma_2 - \gamma_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \delta = \beta_2' - \beta_1', \quad \alpha_1, \alpha_2 \in A, \quad \beta_1', \beta_2' \in B'$$

egyenletek megoldásainak száma. A kettős differenca-bázisok definíciója alapján azt kell csak kimutatnunk, hogy a

$$\delta = \beta_2' - \beta_1', \quad \beta_1', \beta_2' \in B' = G - B$$

egyenlet megoldásainak száma eggyel több mint a

$$\delta = \beta_2 - \beta_1, \ \beta_1, \beta_2 \in B$$

egyenlet megoldásainak száma. Általában

Lemma. *Legyen $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, $B' = \{\beta_1', \ldots, \beta_{n-k}'\}$ egy n-edrendű G additív Abel-csoport particiója. Legyen $N(\gamma)$, $N'(\gamma)$ $(\gamma \in G)$ a*

$$\gamma = \beta_i - \beta_j, \quad \gamma = \beta_i' - \beta_j'$$

egyenletek megoldásainak száma. Ekkor

$$N'(\gamma) - N(\gamma) = n - 2k.$$

Tekintsük a $\gamma+\beta_j$, $j=1, \ldots, k$ összegeket. Ha közülük r számú van B-ben, úgy $k-r$ van B'-ben. Ezért a $\gamma+\beta'_j$ összegek közül $(n-k)-(k-r) = n-2k+r$ van B'-ben, és $N(\gamma)=r$, $N'(\gamma) = n-2k+r$.

Ugyanígy beláthatjuk a lemma segítségével, hogy $S^*_{\gamma_1} \cap S^*_{\gamma_2}$ $(\gamma_1 \neq \gamma_2)$ rendje m. Végül $S_{\gamma_1} \cap S^*_{\gamma_2}$ annyi elemből áll, amennyi a

$$\delta = \gamma_1 - \gamma_2 = \beta - \alpha, \quad \delta = \beta' - \alpha$$

egyenletek összes megoldásainak száma, s ez pontosan m (tudniillik A rendje), minthogy $\delta+\alpha$ vagy B-ben vagy B'-ben van.

A 4. tétel felveti a kérdést, hogy mely G Abel-csoportoknak van kettős differencia-bázisa. A következőkben néhány részleges eredményt tárgyalunk.

5. TÉTEL. *Az additív G Abel-csoportnak van kettős differencia-bázisa a következő esetekben:*

(a) G ciklikus $(2m+1)$-rendű, $q=4m+3$ prímhatvány.

(b) G elemi $(p, \ldots, p)$ típusú, $q=p^k$ prímhatvány rendű, $q \equiv 3 \pmod 4$.

(c) G elemi, $q=p^k$ rendű, $q \equiv 5 \pmod 8$.

A differencia-bázisokat következőképpen nyerjük:

(a) Legyen $m \geqq 2$. G felfogható, mint a mod $(2m+1)$ maradékosztályok additív csoportja. Legyen ϱ a $q = 4m+3$ elemet tartalmazó véges test multiplikatív csoportjának primitív gyöke és $Q = \{\varrho^{2\gamma};\ \gamma=1, \ldots, 2m+1\}$ a quadratikus elemek alcsoportja. Ekkor

$$A = \{\alpha |\ \varrho^{2\alpha}-1 \in Q\}, \quad B = \{\beta | \varrho^{2\beta}+1 \in Q\}$$

egy kettős differencia-bázis. (A bizonyítást nem részletezzük.)

(b) G felfogható, mint a q elemet tartalmazó $GF(q)$ test additív csoportja. Legyen ismét Q a test négyzetelemeinek halmaza. Ekkor $A=Q$, $B=Q$ kielégíti a feltételeket. Ez abból a jól ismert tényből következik, hogy a $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in Q$ egyenletnek pontosan m megoldása van (M. H., 11. 6 fejezet).

(c) Legyen ismét G a $GF(q)$ test additív csoportja, ϱ a test primitív gyöke, H_0 a szorzáscsoport 4 indexű (ϱ^4 által generált) alcsoportja, és H_i, $i=1, 2, 3$ a H_0 alcsoportnak ϱ^i által reprezentált mellékosztálya. Kimutatjuk, hogy

$$A = H_0 \cup H_1, \quad B = H_0 \cup H_3$$

G-nek kettős differencia-bázisa.

Minthogy H_0 rendje $\frac{1}{4}(q-1)$, A és B $m = \frac{1}{2}(q-1)$ számú elemet tartalmaznak. Továbbá $-1 = \varrho^{\frac{1}{2}(q-1)} = \varrho^m \in H_2$ ezért

$$\alpha \in A \Rightarrow -\alpha \in H_2 \cup H_3, \quad -\alpha \notin A.$$

Tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy a

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2, \ \delta = \beta_1 - \beta_2, \ \alpha_1, \alpha_2 \in A, \ \beta_1, \beta_2 \in B \tag{12}$$

egyenleteknek ($\delta \neq 0$ esetén) összesen $m-1$ megoldása van. Legyen $\delta_0 \in H_0$ és tekintsük a következő egyenleteket:

$$\delta_0 = \alpha_1 - \alpha_2 \tag{13.0}$$

$$\varrho\delta_0 = \beta_1 - \beta_2 \tag{13.1}$$

$$\varrho^2\delta_0 = \alpha_1 - \alpha_2 \tag{13.2}$$

$$\varrho^3\delta_0 = \beta_1 - \beta_2, \tag{13.3}$$

hol $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, $\beta_1, \beta_2 \in B$. A négy egyenlet megoldásainak száma független δ_0 megválasztásától, tekintve, hogy

$$\alpha \in A, \quad \beta \in B \Rightarrow \varrho^{4i}\alpha \in A, \quad \varrho^{4i}\beta \in B$$

minden i-re. Továbbá (13. 0) és (13. 3)-nak ugyanannyi megoldása van, tekintve, hogy $\alpha \in A \Rightarrow \beta = \alpha\varrho^3 \in B$ és fordítva, $\beta \in B \Rightarrow \varrho^{-3}\beta \in A$. Hasonlóképpen (13. 1) és (13. 2)-nek ugyanannyi megoldása van, mivel $\beta \in B \Rightarrow \varrho\beta \in A$, $\alpha \in A \Rightarrow \varrho^{-1}\alpha \in B$. Végül (13. 0) és (13. 2) megoldásainak száma is megegyezik, minthogy

$$\alpha \in A \Rightarrow -\varrho^2\alpha \in A.$$

Hasonló módon belátható, hogy a

$$\delta_0 = \beta_1 - \beta_2, \quad \varrho\delta_0 = \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$\varrho^2\delta_0 = \beta_1 - \beta_2, \quad \varrho^3\delta_0 = \alpha_1 - \alpha_2$$

egyenletek mindegyikének ugyanannyi megoldása van. Ebből következik, hogy a (12) egyenletek összes megoldásainak száma egy δ-tól független μ szám. De $\mu(q-1) = 2\mu m$ egyenlő az $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$ különböző kifejezések számával, vagyis $= 2m(m-1)$, $\mu = m-1$.

A 4. és 5 (c). tételekből következik, hogy ha $q \equiv 5 \pmod 8$ prímhatvány, úgy létezik $2(q+2)$-rendű ferde Hadamard mátrix. A legalacsonyabb rendek, melyekre az előző eredmények nem szolgáltatnak megoldást 36, 52, 92 és 100. Egy teljes gépi keresés kimutatta, hogy a 17-edrendű ciklikus csoportnak nincsen kettős differencia-bázisa, ennélfogva ilyen módon nem lehet ferde 36 -odrendű H-mátrixot szerkeszteni. Más módon újabban Goethals holland matematikus szerkesztett egy 36-odrendű ferde H-mátrixot. D. Blattal való gépi keresés azt is kimutatta, hogy nincsen a 25-ödrendű ciklikus csoportnak kettős differencia-bázisa. Ezzel szemben sikerült az (5, 5) típusú Abel-csoportban kettős differencia-bázist találni s ennélfogva ferde 52-edrendű H-mátrixot szerkeszteni. Kiderült, hogy a differencia-bázis a következő alakra hozható:

Legyen G a 25 elemet tartalmazó test additív csoportja, ϱ egy primitív gyök, H_0 a ϱ^8 által generált harmadrendű alcsoport, $H_i (i = 1, \ldots, 7)$ a ϱ^i elem által reprezentált mellékcsoport. Ekkor

$$A = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3, \quad B = H_0 \cup H_1 \cup H_6 \cup H_7$$

egy kettős differencia-bázis. Ez az előzőhöz hasonló módon következik abból a közvetlenül könnyen igazolható tényből, hogy az $1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $1 = \beta_1 - \beta_2$ egyenleteknek összesen $\frac{1}{2}(q-1)$ megoldása van. Ez az eredmény sajnos nem általánosítható minden $q \equiv 1 \pmod 8$-re. A legalacsonyabb rend melyre tudomásom szerint nem ismeretes ferde H-mátrix 92.

КОСЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Д. СЕКЕРЕШ

ON SOME SKEW CONFIGURATION

G. SZEKERES

AZ ABSZOLÚT KONVERGENCIA EGY KÖZVETETT TAUBER-TÍPUSÚ FELTÉTELRŐL

ALPÁR LÁSZLÓ

1. Jelöljön t valós változót és legyen

$$F(t) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{i\nu t}.$$

Azt mondjuk, hogy F az $\mathscr{A}^\beta$, ill. az $\mathscr{A}^{\{\beta_\nu\}}$ függvényhalmaz eleme, ha

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |A_\nu|^\beta < \infty, \quad \text{ill.} \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |A_\nu|^{\beta_\nu} < \infty,$$

ahol $\beta > 0$, ill. véges sok ν-től eltekintve $\beta_\nu > 0$. $\mathscr{A}^1$ helyett csak $\mathscr{A}$-t írunk.

$f(t)$ valós értékű függvényt jelöl. f az $\mathscr{J}$ függvényhalmazhoz tartozik, ha van olyan tetszőlegesen kis $I = I(f) \subset [-\pi, \pi]$ szakasz, amelyen $f(t)$ kétszer differenciálható, és ott $f''(t) > \varkappa > 0$ (vagy $f''(t) < -\varkappa < 0$, $\varkappa$ állandó).

Végül jelölje C^k, mint szokásos, a k-szor folytonosan differenciálható függvények osztályát.

2. Több ízben vizsgáltuk azt a kérdést, hogy ha $F \in \mathscr{A}$, akkor mi mondható az

$$F(f(t)) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{i\nu f(t)} = G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{int}$$

függvény Fourier-sorának viselkedéséről. Láttuk [1], hogy még $f(t)$-nek a t tengely menti analiticitása is csupán a $G(t)$ Fourier-sorának egyenletes konvergenciáját biztosítja, abszolút konvergenciáját azonban nem. A [2], ill. [3] dolgozatban azt mutattuk meg, hogy van olyan $F \in \mathscr{A}$ függvény, amellyel $G \notin \mathscr{A}^{2-\varepsilon}$, ill. $G \notin \mathscr{A}^{\{2-\alpha_n\}}$, azaz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n|^{2-\varepsilon} = \infty, \quad \text{ill.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n|^{2-\alpha_n} = \infty, \tag{1}$$

ahol $\varepsilon > 0$ előre adott, tetszőlegesen kis szám, ill. $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ előre adott, később részletezendő feltételeket kielégítő, pozitív számsorozat, amelyben $\alpha_n \to 0$, ha $|n| \to \infty$; F itt természetesen függ f- és ε-tól, ill. f- és $\{\alpha_n\}$-től.

Legutóbb — HALÁSZ GÁBOR ([6] Lemma p. 65) egyik eredményét felhasználva — bebizonyítottuk ([4], Théorème 2), hogy (1) fennállhat az $F \in \mathscr{A}$ kikötés további erős megszorítása ellenére is; nevezetesen az alábbi eredményre jutottunk:

A TÉTEL. *Ha* $f \in \mathscr{I}$ *és az* $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *sorozat kielégíti a* $0 < \alpha_n < 2$, $\alpha_n \to 0$, $\alpha_n \log |n| \to \infty$, $|n| \to \infty$ *feltételeket, akkor van olyan* $F(t)$ *függvény és hozzá egy* $\{\varepsilon_\nu\}_{-\infty}^{\infty}$ *sorozat, ahol* $0 < \varepsilon_\nu < 1$, $\varepsilon_\nu \to 0$, $|\nu| \to \infty$, *hogy* $F \in \mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$, *de* $F(f) = G \notin \mathscr{A}^{\{2-\alpha_n\}}$. [1]

Hasonló tétel bizonyítható be a $|z| < 1$ körben analitikus függvények hatványsoraival kapcsolatban is ([4], Théorème 1), ahol azonban $f(t)$ szerepét a speciálisabb

$$h(z) = \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta} z} \tag{2}$$

függvény veszi át (ζ állandó, $0 < |\zeta| < 1$).

3. Természetes kérdés már most az, hogy az $F \in \mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$ kikötés fennállása esetén milyen további kiegészítő feltételeknek kell megvalósulniok ahhoz, hogy azok minden esetben biztosítsák azt, hogy $G \in \mathscr{A}$ legyen. A következőkben megadjuk a ΣB_n sor abszolút konvergenciájának ezt a kiegészítő szükséges és elégséges feltételét. Ez nem más, mint egy az $|A_\nu|$-kre vonatkozó, ν-től függő korlát létezésének megkövetelése, vagyis — azt lehet mondani — egy *közvetett* Tauber-típusú feltétel.

TÉTEL. *Ha* $f \in \mathscr{I} \cap C^1$, *és* $f'(t)$ *korlátos változású bármely véges szakaszon, továbbá ha* $f(t) \equiv f(t + 2\pi) \pmod{2\pi}$, *akkor*

$$A_\nu = O(|\nu|^{-\frac{1}{2(1-\varepsilon_\nu)}}) \quad (|\nu| \to \infty) \tag{3}$$

annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy $F(f) = G \in \mathscr{A}$ *legyen, valahányszor* $F \in \mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$, *ahol* $0 < \varepsilon_\nu < 1$, $\varepsilon_\nu \to 0$, $|\nu| \to \infty$. [2]

Bizonyítás. Az állítás igazolásához egyrészt J. P. KAHANE két tételére ([8], Théorème I, p. 249 és Théorème IV, p. 253), másrészt egyik saját eredményünkre ([5], Théorème 2, p. 281) fogunk hivatkozni. Kimondásukhoz néhány jelölést vezetünk be. Legyen

$$e^{i\nu f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n\nu} e^{int} \quad \text{és} \quad \|e^{i\nu f}\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{n\nu}| \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{4}$$

Azt mondjuk, hogy $F(t)$ az $\mathscr{A}\{\omega\}$ függvényhalmazhoz tartozik, ha van olyan $\omega = \{\omega_\nu\}_{-\infty}^{\infty}$ pozitív sorozat, amely kielégíti a következő feltételeket: $\omega_\nu \to \infty$, amidőn $|\nu| \to \infty$ és

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |A_\nu| \omega_\nu < \infty. \tag{5}$$

E jelölésekkel KAHANE I. tétele így hangzik:

B TÉTEL. $\|e^{i\nu f}\| = O(\omega_\nu)$ $(|\nu| \to \infty)$ *a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy* $F(f) = G \in \mathscr{A}$ *legyen, amikor csak* $F \in \mathscr{A}\{\omega\}$.

KAHANE másik tétele az alábbiakat mondja ki:

C TÉTEL. *Ha* $f \in \mathscr{I}$, *akkor van olyan* $\lambda_1 = \lambda_1(f)$ *pozitív állandó, amellyel*

$$\lambda_1 |\nu|^{1/2} < \|e^{i\nu f}\| \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

[1] Az F függvény egzisztenciáját olyan példa igazolja, amelyben $F(t)$ Fourier-sora hézagos.
[2] Itt is, akárcsak az A tételben, F Fourier-sora hézagos. Különben a (3) feltétel még azt sem biztosítaná, hogy $F \in \mathscr{A}$ legyen.

A mi említett eredményünk, többek között, a következőket tartalmazza:

D TÉTEL. *Ha* $f \in C^1, f'(t)$ *korlátos változású a* $[-\pi, \pi]$ *szakaszon, és* $f(t) \equiv f(t+2\pi) \pmod{2\pi}$, *akkor van olyan* $\lambda_2 = \lambda_2(f)$ *pozitív állandó, amellyel*

$$\|e^{ivf}\| < \lambda_2 |v|^{1/2} \qquad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7}$$

Ezek előre bocsátása után a tétel így bizonyítható: Feltevés szerint

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} |A_v|^{\varepsilon_v} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} |A_v| \cdot |A_v|^{\varepsilon_v - 1} < \infty, \tag{8}$$

ahol a második összegben $|A_v| . |A_v|^{\varepsilon_v - 1} = 0$, amikor $A_v = 0$. Mivel $A_v \to 0$, és így $|A_v|^{\varepsilon_v - 1} \to \infty$, ha $|v| \to \infty$, ezért az írható, hogy $|A_v|^{\varepsilon_v - 1} = \omega_v$, vagyis most (8) az (5) szerepét tölti be.

A B tétel értelmében így, akkor és csakis akkor lesz $G \in \mathscr{A}$ valahányszor $F \in \mathscr{A}\{\omega\}$, ha $\|e^{ivf}\| = O(|A_v|^{\varepsilon_v - 1})$ $(|v| \to \infty)$. Tegyük fel, hogy ez a követelmény teljesül, vagyis $G \in \mathscr{A}$. Egyidejűleg a C tétel (6) formulájából következik, hogy

$$\lambda_1 |v|^{1/2} < \|e^{ivf}\| = O(|A_v|^{\varepsilon_v - 1}),$$

amiből azonnal adódik (3). Megfordítva, ha (3) teljesül, akkor a D tétel (7) képlete szerint

$$\|e^{ivf}\| < \lambda_2 |v|^{1/2} = O(|A_v|^{\varepsilon_v - 1}).$$

A (3) kiegészítő feltétel tehát szükséges és elegendő.

Az $f_0(t) = -i \log h(e^{it})$ (l. (2)) speciális függvény felhasználásával analóg eredmény nyerhető hatványsorokra is.

1. *Megjegyzés.* Ha a tételben: *az* $f \in \mathscr{I} \cap C^1$, $f'(t)$ *korlátos változású bármely véges szakaszon* feltételek helyett az $f \in C^k$ $(k \geqq 2)$ kikötést tesszük, akkor e feltételek automatikusan teljesülnek, tehát a (6) és (7) egyidejűleg állnak fenn. (Vö. [5] Théorème 3, p. 282, és Corollaire, p. 283).

2. *Megjegyzés.* A tétel bizonyítása, mint láttuk erősen kihasználta azt a körülményt, hogy $F \in \mathscr{A}^{\{\varepsilon_v\}}$, ahol $0 < \varepsilon_v < 1$ és $\varepsilon_v \to 0$, amikor $|v| \to \infty$. Ha ui. $\varepsilon_v = 1$ lenne minden v-re, akkor az $|A_v|$-re adott nagyságrendi korlát értelmét vesztené.

A tétel bizonyításából kitűnik azonban, hogy az $\varepsilon_v \to 0$ kikötés nem elkerülhetetlen és könnyen levonható az alábbi konklúzió:

KÖVETKEZMÉNY. *A tétel akkor is igaz marad, ha* $0 < \varepsilon_v < c < 1$, *ahol* c *állandó; sőt az esetben is, ha* $0 < \varepsilon_v = \varepsilon < 1$ *minden* v*-re, bármilyen kis szám legyen is* $1 - \varepsilon$.

Arra az esetre, amikor $F(z)$ a $|z| < 1$ körben analitikus és $F(e^{it}) \in \mathscr{A}$ HALÁSZ GÁBOR [7] adott meg más természetű, elégséges kiegészítő feltételt, amely biztosítja azt, hogy $F(e^{if_0(t)}) = G \in \mathscr{A}$ legyen.

IRODALOM

[1] *Alpár L.:* Abszolút konvergens Fourier-sorok transzformáltjairól. *Matematikai Lapok* **18** (1967) 97—104.

[2] *Alpár L.:* A független változó bizonyos transzformációinak hatása a Fourier-sorok abszolút konvergenciájára. *Matematikai Lapok* **19** (1968) 49—54.

[3] *Alpár L.:* Sur certains théorèmes de Carleman et de Hardy. *Studia Sci. Math. Hung.* **4** (1969) (sajtó alatt).

[4] *Alpár L.:* Convergence absolue et changement de variable. *Studia Sci. Math. Hung.* **4** (1969) (sajtó alatt).

[5] *Alpár L.:* Sur une calsse particulière de séries de Fourier à certaines puissances absolument convergentes. *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968) 279—286.

[6] *Halász G.:* On Taylor series absolutely convergent on the circumference of the circle of convergence I. *Publicationes Mathematicae* **14** (1967) 63—68.
[7] *Halász G.:* On Taylor series absolutely convergent on the circumference of the circle of convergence II. *Publicationes Mathematicae* **15** (1968) 23—31.
[8] *Kahane, J. P.:* Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes. *Journal de Mathématiques Pures et Aplliquées* **35** (1956) 249—259.

ОБ ОДНОМ КОСВЕННОМ УСЛОВИИ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ТИПА ТАУБЕРА

Л. АЛПАР

Пусть будет t действительное переменное и

$$F(t)\sim\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu e^{i\nu t}.$$

Функция F принадлежит к множеству функций $\mathscr{A}$, соотв. $\mathscr{A}^{\{\beta_\nu\}}$ если

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|A_\nu|<\infty \quad \text{соотв.} \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|A_\nu|^{\beta_\nu}<\infty \qquad (\beta_\nu>0).$$

Обозначим через $f(t)$ функцию с действительными значениями. $f(t)$ принадлежит к множеству функций $\mathscr{I}$ если существует сколь угодно малый промежуток $I=I(f)\subset[-\pi,\pi]$ в котором f два раза дифференцируема и там $|f''(t)|>\varkappa>0$.

Было доказано ([4], Теорема 2), что к заданной функции $f\in\mathscr{I}$ и заданной последовательности $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ (где $0<\alpha_n<2$, $\alpha_n\to0$ и $\alpha_n\log|n|<\infty$, если $|n|\to\infty$) можно найти такую функцию $F\in\mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}(0<\varepsilon_\nu<1,\ \varepsilon_\nu\to0$, при $|\nu|\to\infty)$, что $F(f)\notin\mathscr{A}^{\{2-\alpha_n\}}$. В настоящей статье дано дополнительное условие для ограничения $F\in\mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$ такое, что соотношение $F(f)\in\mathscr{A}$ было обеспечено.

Теорема. *Если $f\in\mathscr{I}\cap C^1$, причём $f'(t)$ функция с ограниченным изменением на любом конечном промежутке и кроме того $f(t)\equiv f(t+2\pi)\pmod{2\pi}$ тогда $A_\nu=O(|\nu|^{-\frac{1}{2(1-\varepsilon_\nu)}})(|\nu|\to\infty)$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы было $F(f)\in\mathscr{A}$, если только $F\in\mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}(0<\varepsilon_\nu<1,\ \varepsilon_\nu\to0,$ при $|\nu|\to\infty)$.*

SUR UNE CONDITION INDIRECTE DU TYPE TAUBERIEN DE LA CONVERGENCE ABSOLUE

L. ALPÁR

Soit t une variable réelle et

$$F(t)\sim\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu e^{i\nu t}$$

F appartient à l'ensemble de fonctions $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{A}^{\{\beta_\nu\}}$ si

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|A_\nu|<\infty \quad \text{resp.} \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|A_\nu|^{\beta_\nu}<\infty \qquad (\beta_\nu>0).$$

$f(t)$ désigne une fonction à valeur réelle. Elle appartient à l'ensemble de fonctions $\mathscr{I}$ si, sur un segment $I=I(f)\subset[-\pi,\pi]$ arbitrairement petit, f est deux fois dérivable et $|f''(t)|>\varkappa>0$.

Il est démontré ([4], Théorème 2) que si l'on donne d'avance une fonction $f\in\mathscr{I}$ et une suite $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{\infty}$ $(0<\alpha_n<2,\ \alpha_n\to0,\ \alpha_n\log|n|\to\infty,\ |n|\to\infty)$, il existe $F\in\mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$ $(0<\varepsilon_\nu<1,\ \varepsilon_\nu\to0,\ |\nu|\to\infty)$ telle que $F(f)\notin\mathscr{A}^{\{2-\alpha_n\}}$. Dans cette note on donne une condition complémentaire à $F\in\mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$ qui entraîne que $F(f)\in\mathscr{A}$.

Théorème. *Si $f\in\mathscr{I}\cap C^1$, si $f'(t)$ est à variation bornée dans chaque intervalle fini, de plus si $f(t)\equiv f(t+2\pi)\pmod{2\pi}$, alors pour avoir $F(f)\in\mathscr{A}$ chaque fois que $F\in\mathscr{A}^{\{\varepsilon_\nu\}}$ $(0<\varepsilon_\nu<1,\ \varepsilon_\nu\to0,\ |\nu|\to\infty)$, il faut et il suffit qu'on ait $A_\nu=O(|\nu|^{-\frac{1}{2(1-\varepsilon_\nu)}})$ $(|\nu|\to\infty)$.*

MARTINOVICS IGNÁC EGY EDDIG ISMERETLEN MATEMATIKAI ÉRTEKEZÉSÉRŐL

SZÉNÁSSY BARNA

Szigorúbban véve az alábbi kis ismertetésnek nem egészen pontos a címe: *Martinovics* most bemutatandó kézírásos értekezésének a létéről tudtunk, sőt birtokunkban volt egy róla szóló rövid korabeli bírálat is. Egy régebbi tanulmányunkban a következőket írtuk [1]: „Arra is van adat, hogy a budai egyetemhez benyújtott pályázatával kapcsolatban a bírálók kezén átment Martinovics egy olyan kézírásos tanulmánya, mely a körre vonatkozó tételeket tárgyal. Maga a dolgozat azonban ma már fel nem lelhető, valószínűleg visszakerült Martinovicshoz és nála kallódott el". A pályázathoz csatolt *Martinovics* értekezés címe: „Mathematische Abhandlung über einige besondere Eigenschaften des Kreises". Közöltük [2] a budai egyetem akkori matematika professzorának, *Pasquich* Jánosnak (1762—1832) eredetileg latin szövegű következő bírálatát is: „Ezek a tulajdonságok olyasfélék, hogy nem hiszem létezik középszerű matematikus, aki figyelemreméltóknak találná; ha mégis az ellenkezőjét véli valaki, akkor megígérem neki, hogy egyetlen év alatt többszáz ilyen tulajdonságot napvilágra hozok".

Nos *Martinovics* e dolgozatának latin nyelvű változata mégis rendelkezésünkre áll: a múlt emlékeinek ma már nehezen kinyomozható vándorlása során Leningrádba került, és az ottani akadémiai levéltár őrzi [3]. Az a tény, hogy erről csak most szereztünk tudomást, újólag feléleszti a reményt, hátha egyszer, a világ eddig nem is sejtett levéltárából előkerül még *Bolyai* Jánosnak bécsi tanárához, Wolter von *Eckwehr*-hez 1825-ben küldött — tudománytörténeti szempontból felbecsülhetetlen értékű — tanulmánya is.

Martinovics most talált, 10 kézírásos oldalt, és ezen felül egy külön ábralapot tartalmazó latin szövegű értekezésének fejrészén a következő rövid francia mondat olvasható: „présenté à l'Académie le 28 Avril 1791". A kézírás kétségtelenül nem *Martinovics*é, nem is tudjuk biztosan, hogy mi az értelme. Valamiféle iktatói bejegyzés? Az valószínűtlen, hogy valamelyik tudományos akadémia bemutatására utalna, hisz a szóba jöhető akadémiák akkor már magasabb szinten működtek, semmint hogy ilyen jelentéktelen tanulmányt bemutatásra elfogadtak volna. *Benda* Kálmán véleménye szerint esetleg a „Hessen—Homburgi Hazafiúi Társaság"-ról

[1] *Szénássy Barna:* Martinovics Ignác matematikai munkássága. Matematikai Lapok, VII. évf. 1956. 277—290. o. L. c. 278. o.

[2] U. o. 287—288. o. Egyébként a *Pasquich*-féle bírálat jelzete: Országos Levéltár. Helytartótanács. Departementum Litt. Pol. C 67, 1791. Fons 3, Positio 243. Az egyetemi pályázattal kapcsolatos dolgokról részletes adatok találhatók: A Magyar Jakobinus Mozgalom Iratai, I. k. Bp. 1957. 410 és a köv. oldalak.

[3] A kéziratra *Sternberg* János, az ungvári tudományegyetem docense hívta fel figyelmemet, az ő szíves közbenjárása révén sikerült megkapnom a kézirat fotókópiáját is. *Benda* Kálmán több történelmi adat közlésével támogatott. Önzetlen segítségükért ezúton is hálás köszönetet mondok.

van szó, ez a svéd és a bajor tudományos akadémiával filiációs kapcsolatban állott. Valószínű az is, hogy ennek a Társaságnak a megbizottja írta a tanulmány végére — a később ismertetendő — bírálatot is.

Ezután olvassuk a tanulmány latin címét: „Dissertatio de non-nullis insignibus Circuli proprietatibus" (A kör néhány feltűnő tulajdonságáról szóló értekezés).

Nem kétséges, hogy *Martinovics* e latin című és szövegű értekezése a budai egyetemi pályázathoz csatolt német szövegű és című tanulmányának latin változata, és mindkettő megegyezik a már *Fraknói* által is említett [4] „Über besondere Eigenschaften des Zirkels" c. értekezéssel. E címet *Fraknói* egy *Martinovics* által 1791. július 18-án összeállított jegyzékről kölcsönözte.

Ugyanaz a tanulmány tehát nem egészen megegyező *három* különböző címmel is szerepel az irodalomban. Tekintettel arra, hogy a címek végső soron *Martinovics*-tól származnak, lehetséges, hogy csak általa elkövetett pontatlanságról van szó, de az sincs kizárva, hogy a kissé különböző címek megadásával *három* különböző tárgyú értekezés illúzióját akarta kelteni.

A tanulmány címe után *Martinovics* — a kor divatjának megfelelően — néhány figyelemreméltó tisztségét közli: a svéd és a bajor tudományos társaságok választott tagja, a lembergi cs. és k. egyetemen a kísérleti fizika és mechanika ny. r. tanára.

Egy pillanatra itt is meg kell állanunk: ismeretes, hogy a magyar jakobinusok perében az ügyész — nyilván *Martinovics* bemondására támaszkodva — azt közölte, hogy *Martinovics* a svéd, a bajor, a haarlemi, a dublini és a hamburgi akadémia rendes, a párizsi akadémia levelező tagja — sőt *Martinovics* alkalomadtán még Dijont, Leydent és Szentpétervárt is említette. Ezzel kapcsolatban vannak még tisztázatlan kérdések, annyi azonban bizonyos, hogy *Martinovics* a svéd, a bajor és a szentpétervári akadémiák egyikének *sem* volt tagja. [5] Itt a svéd és a bajor akadémiára való hivatkozás ismét csak a „Hessen—Homburgi Hazafiúi Társaság"-ot jelentheti, egy kis nagyképűséggel tetézve a tényleges helyzetet. Ezt egy nemrégiben megjelent tanulmány is valószínűsíti [6].

A 19 §-ra tagolt értekezés — tárgyát tekintve — a körnégyszögesítés kvadratura problémájának körébe sorolható, e problémakört azonban — a kor divatjának megfelelően — egész általánosan véve: minél pontosabban approximálandó a kör területe (ezzel együtt π értéke) szerkesztések, vagy számítások révén. Eredete *Archimédesz*ig nyúlik vissza, de az általa adott módszer idők folyamána jelentősen finomult. Ismeretes, hogy Ludolph van *Ceulen* 1615-ben π értékét már 32 tizedesnyi pontossággal közölte.

Martinovics értekezése pontosság tekintetében igen messze elmarad korának ismereteitől, mert célja csupán annak az „alaptétel"-nek az igazolása, hogy

„A kör területe nem egyenlő a körülírt négyzet területének $\frac{3}{4}$-szeresével".

Az egyenlőség feltételezéséből az

$$r^2\pi = \frac{3}{4}4r^2$$

összefüggés alapján az következnék, hogy $\pi = 3$. Ennél már a messzi ókorban is pontosabban ismerték (pl. Egyiptomban, vagy Babilóniában) π értékét.

[4] *Fraknói* Vilmos: Martinovics élete. Bp. 1921. 217. o.

[5] A Magyar Jakobinus Mozgalom Iratai. II. k. Bp. 1952. 29. és 372. o. Az itt található adatok szerint igen valószínű, hogy *Martinovics*ot egyetlen akadémia sem választotta tagjai sorába.

[6] Denis *Silagi:* Jakobiner in der Habsburger Monarchie. Wien—München, 1962. 76—77. o.

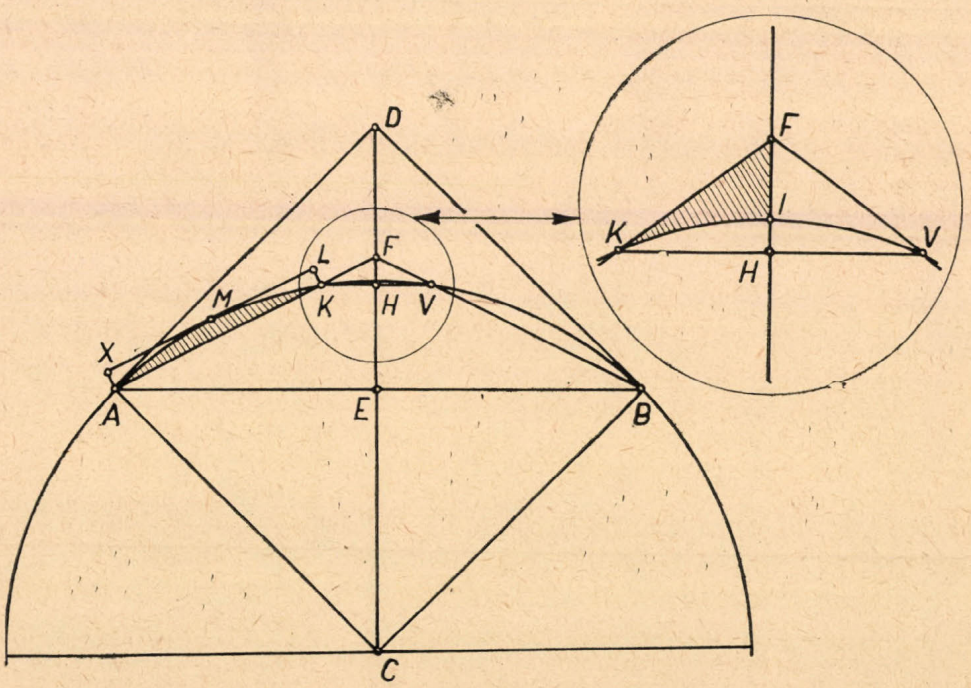
Ha tehát *csak* a bevezetőben kimondott alaptételt vennénk értékmérőnek, akkor *Martinovics* értekezését majdnem semmitmondónak, és rendkívül elavultnak kellene minősítenünk. Ez a súlyos elmarasztalás azonban nem volna egészen igazságos, éspedig két oknál fogva. Kisebb részben azért, mert *Martinovics* valójában nem a fentebb megfogalmazott alaptételt bizonyítja be, hanem valamivel többet. Azt ti., hogy „a kör területe nem egyenlő a körülírott négyzet területének $\frac{3}{4}$-szeresével, hanem *annál nagyobb*". Más szóval: $\pi > 3$. Kissé még figyelemreméltóbb a *módszer*, mivel *Martinovics* az eredményt eléri: eljárása egészen elemi, pontatlan, de némileg az *újszerűség* benyomását kelti.

Ez utóbbi megjegyzés még nem vonatkoztatható az értekezés 2. §-ában közölt naív megjegyzésre: legyen a kör kerülete p, átmérője d, akkor az „ismert" formula szerint a kör területe $\frac{p \cdot d}{4}$, a körülírt négyzet területének $\frac{3}{4}$-szerese pedig $\frac{3}{4} d^2$. Ha tehát helytálló lenne a

$$\frac{d \cdot p}{4} = \frac{3}{4} d^2$$

egyenlőség, akkor ebből az következnék, hogy $p = 3 \cdot d$, ami pedig — *Martinovics* szavával élve — abszurditás.

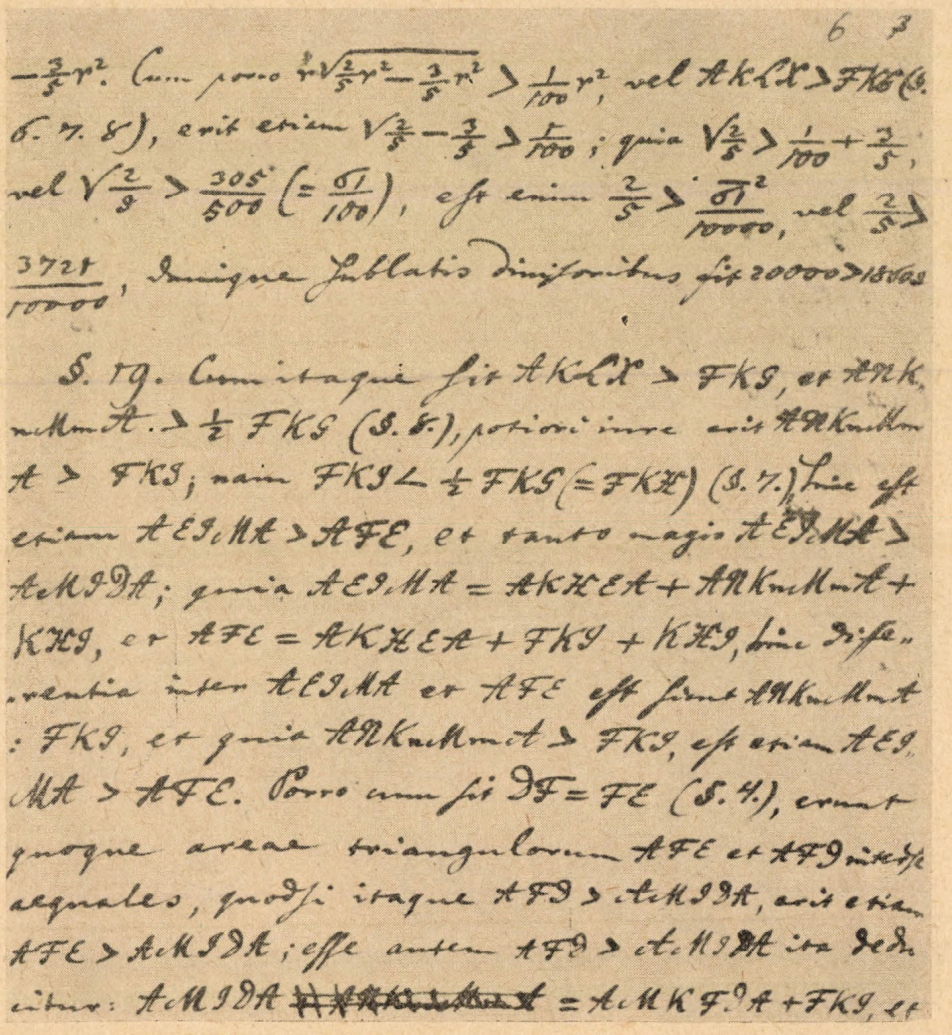
Valamivel részletesebben érdemes foglalkoznunk az alaptételnek az értekezés 3—19. §-aiban olvasható „direkt" bizonyításával. Hogy ennek a hosszadalmas és túlzottan is aprólékos útnak megértsük a gondolatmenetét, tekintsük az ábrát —



1. ábra

ez majdnem pontosan megegyezik a *Martinovics*nál találhatóval: az *ACBD* négyzet a körülírt négyzet negyede, az *F* pont pedig az *ED* szakasz felezőpontja. Ha feltételeznénk, hogy az *AEIMA* (az *I* pont a körvonal megfelelő pontja. L. az ábra kinagyított részét) fél-körszegmentum területe megegyezik az *AED* derékszögű háromszög területének a felével, akkor — rövid számítással — a kör területére a $3r^2$ képlet adódnék. Da $AEIMA \neq \frac{AED}{2} = AEF$. Azonnal belátható ugyanis, hogy az $AEIMA = AEF$ egyenlőség teljesüléséhez az kellene, hogy az *AKM* körszegmentum és a *KIF* alakzat (az ábrán és annak kinagyított részén bevonalkázott alakzatok) területe megegyezzék. De

$$AKM > KIF. \tag{I}$$



2. ábra

Jelölje *AKLX* az ábrán látható téglalap, *KHF* pedig a megfelelő derékszögű háromszög területét. (I) igaz, ha bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{1}{2} AKLX > KHF \qquad \text{(II)}$$

(mert hiszen egyrészt az *AKM* körszegmentum nagyobb, mint $\frac{1}{2} AKLX$, másrészt a *KIF* alakzat kisebb, mint *KHF*).

Martinovics a továbbiakban (II)-t bizonyítja olymódon, hogy ténylegesen kiszámítja az *AKLX* téglalap és a *KHF* háromszög területét.

Felesleges követnünk ezeket az aprólékos, és sokszor céltalan kitérőkkel tarkított számításokat. A felhasznált matematikai eszközök elemiek: Thalész-, Pithagorász-tétele, egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek egyenlősége, derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magassággal kapcsolatos arányossági tételek, továbbá elemi algebrai műveletek, bezárólag a négyzetgyökvonásig. Ezek alkalmazásában *Martinovics* nem téved, legföljebb néhány kisebb elírás nehezíti az értekezés megértését. A levezetés során előforduló egyenlőtlenségekkel is korrektül bánik.

Az értekezés végén még a következő, németül fogalmazott bírálatot olvassuk: „Ez az írás minden tekintetben jelentéktelen. Mint egy olyan abszurd tételnek a cáfolata, melyet minden személy meg tud cáfolni, ki még csak kezdő a geometriában, említést sem érdemel; és a körre vonatkozó eddig ismeretlen észrevételekből én nem tudtam benne semmit felfedezni".

A bíráló neve kiolvashatatlan.

Tehát két — egymástól függetlennek látszó — korabeli bírálat is rendelkezésünkre áll *Martinovics* értekezéséről, és mindkettő igen elmarasztaló. A mai kor szemlélőjének azonban ezektől — a talán nem is egészen elfogulatlan — bírálatoktól függetlenül kell ítéletet mondania, márcsak azért is, hogy történészeink elfogadható adalékhoz juthassanak *Martinovics* tudományos munkásságára vonatkozólag.

Összegezzük tehát véleményünket: *Martinovics* írása a korabeli matematikai ismereteket tekintve semmi újat sem tartalmaz, tudományos értéke nincs, és nem is csodálhatjuk, ha a bizonyára mélyebb képzettségű bírálók naívnak minősítették. A 18. században *Euler*, *Monge*, *Lacroix*, *Lagrange*, *Legendre* és a többi világhírű matematikus az alapvetően új eredmények egész tömegét tette közzé, és így a „tudományos" jelzőt érdemlő közleménynek már igen magas normája alakult ki — legalábbis külföldön. Nálunk ugyan ennek a hatalmas fellendülésnek még a csírái sem mutatkoztak, de azért ismertebb matematikusaink — pl. Kerekgedei *Makó* Pál, vagy *Pasquich* János — igényessége jóval nagyobb volt, semmint hogy a *Martinovics*éhoz hasonló színvonalú értekezéssel tudományos babérokra mertek volna pályázni. Viszont — talán nem tévedünk —, ha az alkalmazott matematikai eszközök és a számítástechnika vonatkozásában *Martinovics* írását egy szinten levőnek minősítjük *Dugonics* András „Tudákosság" c. egyetemi tankönyvével (eltekintve természetesen attól, hogy míg *Dugonics* könyve az elemi matematika számos részét felöleli, addig *Martinovics* egyetlen kis tárgykörre szorítkozik).

Külsőleg *Martinovics* írása „értekezés" jellegű, mint ilyen meglehetős újszerű nálunk, hisz ezekben az időkben még külföldön is általában a *könyv* volt az új eredmények közlési helye. Tanulmányának szerkezeti felépítése emlékeztet is az értekezések metódusára. Az alaptétel bizonyításának kisebb §-okra történő parcellázása is elfogadható, mert az egyes fejezetekben foglaltak tényleg egységet képeznek, egybetartoznak. Viszont szokatlan a fogalmazás terjengőssége, helyenként hangzatos, dagályos volta.

Ha még megemlítjük, hogy a *Martinovics*-féle eljárás — bár kevéssé hatékony —, de helyenként bizonyos számításbeli ötletességet kíván, akkor csak megerősödik matematikai tevékenységéről már másutt is megformált véleményünk: *nem sorolandó korának néhány élvonalbeli magyar matematikusa közé, de tudása akkori polihisztoraink többségének szürke dilettantizmusánál jóval többre becsülendő.*

ОБ ОДНОМ ДО СИХ ПОР НЕИЗВЕСТНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ТРУДЕ ИГНАЦА МАРТЫНОВИЧА

Б. СЕНАШИ

ON A HITHERTO UNKNOWN MATHEMATICAL PAPER OF I. MARTINOVICS

B. SZÉNÁSSY

A TELJES MÁTRIXGYŰRŰ EGY TULAJDONSÁGA

FRIED ERVIN

1. Az algebrai vizsgálatok nagy részében az algebrai struktúrák művelettartó leképezései játszák a főszerepet. Ezek a leképezések azonban még egy-egy struktúrafajtán belül is változnak, aszerint, hogy a pillanatnyi cél érdekében mely műveleteket kell figyelembe venni. Rögzített struktúrafajtán belül azonban kellemetlen lenne állandóan új műveleteket bevezetni. (Noha erre is van sok példa; és az is igen gyakran megesik, hogy pl. topológiát is bevezetnek.) Célszerűbb sokszor a leképezések körét bővíteni, és ezektől nem a művelettartást, hanem csak a műveletekkel való bizonyos kapcsolatokat megkövetelni. Pontosabban szólva azt kell megadni, hogy egy művelet „eredményének" a képe hogyan függ az egyes „összetevők" képétől.

Az általánosabb leképezések között kitüntetett szerepet játszanak azok, amelyek a műveletek segítségével adhatók meg. Tekintsünk egy S tetszőleges algebrai struktúrát. (A későbbiekben csak olyan struktúrákra lesz szükség, ahol csupán műveletek vannak, és relációk nincsenek; így már itt is ilyenekre szorítkozhatunk.) Legyen továbbá $f(x, y)$ egy olyan kifejezés, amely az x és y S-beli elemekből az S-beli műveletekkel — rögzített módon — van megadva. Ennek precíz definíciója helyett utalunk pl. arra, hogy ha a struktúra gyűrű, akkor $f(x, y)$ az x és y egy rögzített polinomját jelenti. Különösen fontos leképezést kapunk, ha a struktúra egy rögzített a elemével minden y eleméhez hozzárendeljük az $f(a, y)$ elemet.

Röviden utalunk arra, hogy ezek a leképezések központi jelentőségűek az ún. „reprezentációs tételeknél". Ezen a módon ugyanis az S struktúra minden a eleméhez hozzárendeltük azt az A leképezést, amely az y elemhez az $f(a, y)$ elemet rendeli hozzá. A továbbiakban ezt röviden $A: y \to f(a, y)$ fogja jelölni. Ha mármost az $A: y \to f(a, y)$ leképezések bizonyos tulajdonsággal rendelkeznek, akkor az $a \to A$ megfeleltetés az S truktúrának a szóban forgó tulajdonságú leképezésekkel való reprezentálását adhatja. (Ha ui. az $a \to A$ megfeleltetés művelettartó, és különböző elemeknek különböző a képe.) Erre talán legismertebb példa a Cayley tétel, ahol egy csoport bármely a elemének a vele való a_j „jobbszorzást" feletetjük meg, $a_j: y \to ya_j$. Ebben az esetben a leképezésnek azt a tulajdonságát használjuk ki, hogy az permutáció. Hasonlóképpen adhatunk meg mátrixokkal, vagy bizonyos tulajdonságú függvényekkel való reprezentációt.

Az eddigiekből is látszik, hogy lényeges az $y \to f(a, y)$ függvény tulajdonságainak ismerete; illetve megadása. Legyen most ez a tulajdonság előre megadott. Másszóval tekintsük egy S struktúrának olyan $x \to x'$ önmagába való leképezéseit, amelyek egy adott $\mathcal{T}$ tulajdonsággal rendelkeznek. Ha az $y \to f(a, y)$ leképezés is rendelkezik a $\mathcal{T}$ tulajdonsággal, akkor ezt egy *belső $\mathcal{T}$-tulajdonságú leképezés*nek fogjuk nevezni. (Az előző példában a tulajdonság az volt, hogy a leképezés permutáció — tehát kölcsönösen egyértelmű —, ennek megfelelően belső permutációról lehet beszélni.)

A leképezések közül legalapvetőbb az automorfizmus. Ennek megfelelően a belső leképezések közül is a *belső automorfizmus* a legfontosabb. Legyen a egy G csoportnak egy rögzített eleme, és legyen $A_a: x \to a^{-1}xa$ $(x \in G)$. Könnyen látható, hogy A_a valóban automorfizmusa a G csoportnak. Hasonló eljárással adható meg a belső automorfizmus a gyűrűk esetében is. Tekintsük az R gyűrű egy rögzített a elemét. Itt azonban fel kell tenni, hogy az a elemnek létezik (bal oldali) inverze. Most is igazolható, hogy az $x \to a^{-1}xa$ automorfizmusa a gyűrűnek $(x \in R)$. (Itt természetesen a leképezésnél mindkét műveletet meg kell vizsgálni.)

Általában egy-egy struktúrának nagyon sok automorfizmusa lehet; ezek számossága az S hatványhalmazának a számosságát is elérheti, míg a belső automorfizmusok számossága természetesen nem lehet nagyobb S számosságánál. Éppen ezért meglepő, hogy mind a csoportok mind a gyűrűk esetében érvényes az alábbi egészen hasonló jellegű tétel:

Egy véges elemszámú halmaz / véges dimenziós vektortér összes permutáció- / lineáris transzformáció- inak csoportjában / gyűrűjében minden automorfizmus belső.

Meg kell azonban jegyezni, hogy a fenti tételek csak lényegében igazak; mert a csoportoknál fel kell tenni, hogy a véges halmaz elemeinek a száma nem 6, és a gyűrűknél pedig azt, hogy az automorfizmusok a skalárral való szorzást is változatlanul hagyják.

2. Vizsgáljunk meg most közelebbről egy rögzített a elemmel megadott belső automorfizmust. Nézzük meg, hogy milyen x elemek maradnak az adott belső automorfizmusnál változatlanul. Ez a feltétel azt jelenti, hogy $a^{-1}xa = x$, vagyis $xa = ax$. Gyűrűk esetén ez a feltétel $ax - xa = 0$ alakban is írható. Ez a felírás gyűrűk esetén sokkal kényelmesebb is, hiszen magánál a felírásnál nem kell feltenni, hogy az a elemnek létezik az inverze. Világos, hogy mindkét alak az a és x elemek felcserélhetőségét fejezi ki. Így pl. a szorzás kommutativitása úgy is megfogalmazható, hogy minden belső automorfizmus triviális, de úgy is, hogy tetszőleges a estén az $x \to ax - xa$ megfeleltetés minden elemet 0-ba visz. Ennek a kommutativitási feltételnek éppen az ellenkezőjét fejezi ki az előző pont végén említett tétel; illetve annak az a konklúziója, hogy „minden automorfizmus belső". Ennek a feltételnek a gyűrűelméleti analogonját tehát úgy is fogalmazhatjuk, hogy minden olyan leképezés, amely rendelkezik az $x \to ax - xa$ leképezés tulajdonságával, valóban ilyen alakú is. Természetesen ez a két feltétel nem ugyanazt fejezi ki, és később látni fogjuk, hogy e feltételek valóban különböznek. Első feladatunk most tehát az $x \to ax - xa$ leképezés tulajdonságainak a meghatározása.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy nem gyűrűket, hanem algebrákat fogunk tekinteni. Ez nem jelent lényeges megszorítást, mert a mátrixgyűrűk — amelyeket vizsgálni akarunk — úgyis algebrák.

Legyen $\mathscr{K}$ egy kommutatív test — amelynek egységelemét 1 fogja jelölni. Az $\mathscr{A}$ gyűrűt a $\mathscr{K}$ feletti algebrának nevezzük, ha $\mathscr{K}$ bármely λ és $\mathscr{A}$ bármely a elemához hozzá van rendelve az $\mathscr{A}$-nak egy eleme, amelyet λa jelöl (néha ehelyett $a\lambda$-t is fogunk írni), úgy, hogy:

$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a), \quad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \quad 1a = a;$$

a $\mathscr{K}$ test bármely λ, μ és az $\mathscr{A}$ bármely a és b elemére.

Lemma: Az $\mathcal{A}$ algebrában az $x \to x' = ax - xa$ megfeleltetés a következő tulajdonságokkal bír:

$$(*) \qquad (x+y)' = x'+y'; \quad (\lambda x)' = \lambda x'; \quad (xy)' = x'y + xy'.$$

Bizonyítás: Az a elemmel való bal oldali szorzás is és jobb oldali szorzás is homogén lineáris leképezés, és ezért különbségük is az. Ez pedig éppen az első két feltétel teljesülését jelenti. A harmadik feltétel teljesülését pedig az alábbi rövid számolással igazolhatjuk:

$$(xy)' = axy - xya = axy - xay + xay - xay = (ax - xa)y + x(ay - ya) =$$
$$= x'y + xy'.$$

Ezzel már meg is határoztuk a vizsgált leképezéseknek és a műveleteknek a kapcsolatát; vi. a leképezés tulajdonságát. A feltételek alakja világossá teszi, hogy egy $\mathcal{A}$ algebra valamely $x \to x'$ leképezését *deriválójának* nevezik, ha kielégíti a $(*)$ alatti feltételeket. Ennek megfelelően az $x \to ax - xa$ megfeleltetés *belső derivációt*.

3. A definícióból világos, hogy ha $\mathcal{A}$ a $\mathcal{K}$ test felett algebra, akkor egyúttal vektortér is. Ennek a vektortérnek egy bázisát, illetve dimenzióját egyszersmind az algebra bázisának illetve dimenziójának nevezik. Az alábbiakban csak véges, dimenziós algebrákról beszélünk. Előzőleg azonban megjegyezzük, hogy ha egy algebrának van egységeleme, az bármely deriválásnál 0-ba megy át. Az e egységelemre ugyanis az $e = e^2$ feltételből $e' = e'e + ee' = e' + e'$, amiből tényleg $e' = 0$ következik.

Most kimutatjuk, hogy az 1. pontban említett tételnél automorfizmus helyett deriválást is mondhatunk, azaz:

1. TÉTEL: *Egy kommutatív test feletti n-szer n-es teljes mátrixgyűrűben minden derivációt belső.*

Bizonyítás: Jelölje E_{ij} azt a mátrixot, amelyikben az i-ik sor j-ik eleme 1, s a többi 0; és legyen E az egységmátrix. Az $E = \sum E_{ii} = \sum E_{i1}E_{1i}$ összefüggésből deriválással $0 = E' = \sum E'_{i1}E_{1i} + \sum E_{i1}E'_{1i}$ adódik. Tekintsük most az $A = \sum E'_{i1}E_{1i} = -\sum E_{i1}E'_{1i}$ elemet. Kimutatjuk, hogy tetszőleges T mátrixra $T' = AT - TA$. A deriválás homogén linearitása folytán elegendő ezt az E_{pq} báziselemekre bizonyítani. Márpedig:

$$AE_{pq} - E_{pq}A = \sum E'_{i1}E_{1i}E_{pq} + \sum E_{pq}E_{i1}E'_{1i} = E'_{p1}E_{1q} + E_{p1}E'_{1q} = E'_{pq}.$$

(Az összegzés végig $i = 1$-től $i = n$-ig történik.)

Megjegyezzük, hogy a bizonyításnál nem használtunk osztást, ezért az eredmény igaz pl. egész elemű mátrixok körében is. A továbbiakban egy másik fontos algebratípusra mutatjuk meg az állítás érvényességét.

Egy algebrát *csoportalgebrának* neveznek, ha van olyan bázisa, amelynek elemei a szorzásra nézve csoportot alkotnak. Kimutatható, hogy bármely G véges csoport és $\mathcal{K}$ kommutatív test esetén létezik olyan csoportalgebra, amelynek egy alkalmas bázisa a szorzásra nézve a G csoporttal izomorf. Egy ilyen csoportalgebrát megkaphatjuk úgy, hogy elkészítjük a G-beli elemeknek $\mathcal{K}$-beli együtthatós formális lineáris kombinációit, és a műveleteket a műveleti szabályok figyelembevételével végezzük. A továbbiakban feltesszük, hogy a $\mathcal{K}$ test karakterisztikája nem osztható a csoport rendjével (tehát létezik benne a csoport rendjének a reciproka).

2. TÉTEL: *Egy csoportalgebrában (véges csoport esetén) minden deriváció belső.*

Bizonyítás: Legyenek a csoport elemei $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Jelölje e a csoport egységelemét. A $g^{-1}g = e$ feltételből deriválással adódik, hogy $0 = e' = (g^{-1})'g + g^{-1}g'$. Ezt a csoport összes g_i elemére összeadva és n-nel osztva kapjuk, hogy $t = \frac{1}{n}\sum (g_i^{-1})'g_i = -\frac{1}{n}\sum g_i^{-1}g_i'$. Mármost tetszőleges h csoportelem esetén $th - ht = \frac{1}{n}\sum (g_i^{-1})'g_i h + \frac{1}{n}\sum h g_i^{-1}g_1'$. A g_i elemmel együtt a $g_j = g_i h$ elemek is végigfutják a csoportot. Erre a g_j elemre $hg_j^{-1} = g_i^{-1}$, így megfelelő átindexezés után a fenti összeg első tagja $\frac{1}{n}\sum (hg_i^{-1})'g_i$ lesz. Az összeadást ebben a formában végezve, az egyenlő indexű tagokat külön külön összeadva azt kapjuk, hogy $th - ht = \frac{1}{n}\sum (hg_i^{-1}g_i)' = h'$. Tekintettel arra, hogy a csoportelemek a csoportalgebra bázisát alkotják, a deriváció homogén linearitásából következik, hogy minden x elemre fennáll az $x' = tx - xt$ egyenlőség.

A csoportalgebrák egyben példát szolgáltatnak arra, hogy egy algebrában lehet minden deriváció belső, akkor is, ha van nem belső automorfizmusa. Láttuk ugyanis, hogy egy csoportalgebrában — például a racionális számtestbeli együtthatók esetén — minden deriváció belső. Ha az alapul vett csoport kommutatív, akkor az egész csoportalgebra kommutatív lesz, és így ennek a csoportaégebrának nem lesz belső automorfizmusa. Ezért az állítás kimutatásához elég megadni egy ilyen típusú csoportalgebrában egy automorfizmust (ami nem triviális). Elég kézenfekvő, hogy egy csoport bármely automorfizmusa indukálja a megfelelő csoportalgebrának egy automorfizmusát. Véges kommutatív csoportoknak viszont könnyen megadhatjuk az összes automorfizmusát. Legegyszerűbb erre a következő példa: A csoport elemei e, a és a^2 ($a^3 = e$). Az automorfizmust pedig $(\alpha e + \beta a + \gamma a^2) \to (\alpha e + \gamma a + \beta a^2)$ adja.

Emellet az természetesen még lehetséges, hogy ha egy algebrában minden automorfizmus belső, akkor minden derivált is belső. Erre a kérdésre nem is adunk választ.

A fenti példában szereplő csoportalgebra kommutatív volt. Ezért ebben a csoportalgebrában csak a triviális deriváció létezik. Ez kommutatív esetben mindig bekövetkezik, ha minden deriváció belső. Ehhez viszont felhasználtuk a karakterisztikára vonatkozó feltételt. A feltétel szükségességét mutató legegyszerűbb példa a kételemű csoportnak a kételemű test feletti csoportalgebrája. Ennek elemei: a 0 (nullelem), e (egységelem), a ($a^2 = e$) és $e + a$. Az összeadás annak a figyelembevételével történik, hogy bármely elemet önmagával összeadva 0-t kapunk; és a szorzás az összeadásra nézve disztributív. Ebben az algebrában az $(\alpha e + \beta a) \to \beta a$ megfeleltetésről könnyen kimutatható, hogy deriváció; de a kommutativitás miatt nem lehet belső.

A fenti két tétel bizonyítása kis ügyeskedéssel egységessé tehető, de nem éri meg a fáradságot, mert a hasonlóság ellenére is lényeges (technikai) különbségek vannak a bizonyításokban. Megemlítjük azonban, hogy ugyanilyen módon belátható pl., hogy a kvaterniók körében is érvényes a hasonló tétel, és a konstrukció is hasonlóan történik. Ott a megfelelő „deriváló elemet" az $\frac{1}{4}(i'i + j'j + k'k)$ adja.

4. Az alábbiakban a végtelen mátrixok körében nézzük meg, hogy van-e nem belső deriváció. Ebben az esetben azonban már eleve problémát jelent két mátrix

szorzata. A „sor-oszlop" szorzásnál ugyanis egy „végtelen összeg" lép fel. Analízisben ilyen „összeg" értelmezése természetesen konvergenciával történik. Algebrában azonban ezt nem lehet megtenni. (Már csak azért sem, mert előfordulnak olyan végtelen mátrixok is, amelyek elemeire nincs is értelme konvergenciáról beszélni.) Ezért itt általában úgy módosítják a feltételeket, hogy az összeg „ál-végtelen" legyen. Ez elérhető például, ha biztosítani tudjuk, hogy az összegben csak véges sok 0-tól különböző tag legyen. (A későbbiekben, ha bizonyos elemek között csak véges sok 0-tól különböző van, akkor azt mondjuk, hogy majdnem mind 0.) Azt, hogy a kapott összegben majdnem minden tag nulla legyen többféleképpen is biztosíthatjuk. Feltehetjük például, hogy az első tényező minden sorában majdnem minden elem 0. Ugyancsak 0 lesz az összeg majdnem minden tagja akkor is, ha a második tényező oszlopaiban szerepel majdnem minden helyen 0. Az ilyen típusú mátrixok a véges mátrixok általánosításainak tekinthetők. Ez azonban nem közvetlen általánosítás, a két lehetőség között még van egy harmadik; nevezetesen az olyan mátrixok, ahol egy-egy sorban valamely rögzített — a sortól független — helytől kezdve 0 áll. Hasonlóképpen lehet az oszlopokkal is eljárni.

Az alábbiakban a mátrixokat úgy tekintjük, hogy van „kezdetük", vagyis soraik és oszlopaik a természetes számokkal vannak indexezve. Ha egy mátrix minden sorában majdnem minden elem 0, akkor a mátrixot *sorvégesnek* nevezzük. Ha létezik egy olyan a mátrix soraitól független index, hogy bármely sorban az ennél nagyobb indexű elemek mindegyike 0, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *sorkorlátos*. Hasonlóan értelmezhető az *oszlopvéges* és az *oszlopkorlátos* mátrix is. Azokat a mátrixokat, amelyek sor- és oszlopkorlátosak is *korlátos*aknak fogjuk nevezni. Ezek a mátrixok úgy is jellemezhetők, hogy majdnem minden elemük 0. Az is könnyen látható, hogy egy mátrix már akkor is korlátos lesz, ha csak azt tesszük fel, hogy sorkorlátos és oszlopvéges (vagy oszlopkorlátos és sorvéges) legyen. Azokat a mátrixokat, amelyek egyszerre sor- és oszlopvégesek *véges jellegű* matrixoknak fogjuk nevezni. Könnyen látható, hogy a felsorolt hat típusú mátrixok bármelyikében elvégezhető az összeadás. Azt is könnyen be lehet látni, hogy az adott típusok mind különbözőek, tehát bármely két típushoz található olyan mátrix, amelyik a két típus közül csak az egyikbe tartozik. Az is könnyen látható, hogy a skalárral való szorzás is ugyanolyan típusú mátrixot eredményez. (Itt és a későbbiekben a kényelem kedvéért a mátrixok elemeit tekinthetjük számoknak.)

Térjünk most rá a végtelen mátrixok szorzásának a vizsgálatára. Legyen A és B két mátrix, és készítsük el a formális AB szorzatot; amelyről tehát nem tesszük fel, hogy tényleg létezik. A sorozatmátrix i-ik sorának j-ik elemét a $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + \ldots + a_{in}b_{nj} + \ldots$ ahol a_{ik}, illetve b_{ik} az A, illetve a B mátrix i-ik sorának k-ik elemét jelöli. A következőkben tetszőleges M (végtelen) mátrix esetén jelöljön $n(M, i)$ egy olyan indexet, amelytől kezdve a mátrix i-ik sorában csupa 0 áll. (Általában $n(M, i)$ azt a legkisebb indexet jelölje, amelyről be tudjuk bizonyítani, hogy a feltételnek eleget tesz.) Jelölje továbbá $k(M, i)$ az $n(M, j)$ számok maximumát $(1 \leqq j \leqq i)$; feltéve, hogy ez létezik. Amennyiben az összes $n(M, j)$ számoknak létezik (felső) korlátuk, akkor ezek egyikét jelölje $k(M)$.

a) Ha az A mátrix sorvéges, akkor létezik az AB szorzat. Valóban, ekkor c_{ij}-ben az első $n(A, i)$ tag után minden tagban 0 lesz az első tényező.

b) Ha B is sorvéges, akkor az AB szorzat is az. A B-re vonatkozó feltétel szerint létezik $k(B, n(A, i))$, amiből következik, hogy $n(AB, i) \leqq k(B, n(A, i))$.

c) Ha A és B közül valamelyik sorkorlátos, akkor a szorzat is az. Ha létezik $k(B)$, akkor $k(AB) \leqq k(B)$; amennyiben pedig a $k(A)$ létezik, akkor $k(AB) \leqq k(B, k(A))$

Természetesen az analóg állítás érvényes oszlopvéges és oszlopkorlátos mát-

rixokra is, csupán a tényezők sorrendjét kell felcserélni. Ezekből következik, hogy a sorvéges, az oszlopvéges és a véges jellegű mátrixok algebrát alkotnak; amelyekben a *c)* pont szerint a sorkorlátos, az oszlopkorlátos, illetve a korlátos mátrixok (megfelelően) ideált alkotnak.

5. Ezek után az előzmények után először a sorkorlátos (illetve oszlopkorlátos és korlátos) mátrixokat vizsgáljuk. Ezekhez szükségünk lesz a következőre.

2. *Lemma*: Egy algebra deriválói az alaptest fölött vektorteret alkotnak.

Tekintettel arra, hogy a deriválók lineáris leképezések, ezért elég kimutatni, hogy egy deriválás skalárszorosa és két deriválás összege kielégíti a $(*)$ alatti harmadik feltételt. Az $x \to \lambda x'$ leképezésre $\lambda(xy)' = [\lambda x']y + x[\lambda y']$. Legyen most $x \to x'$ és $x \to x^+$ két deriválás. Ezek $x \to x' + x^+$ összegére $(xy)' + (xy)^+ = x'y + xy' + x^+y + xy^+ = (x' + x^+)y + x(y' + y^+)$, mint állítottuk.

Az $\mathfrak{R}$ algebrának bármely $\mathfrak{S}$ részhalmazához tekintsük az $\mathfrak{R}$ azon z elemeinek $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ összességét, amelyekre tetszőleges $x \in \mathfrak{S}$ esetén $zs = sz$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ az $\mathfrak{R}$-nek egy részalgebrája; amelyet az $\mathfrak{S}$ *centralizátor*ának nevezünk.

3. Tétel: *Legyen $\mathfrak{S}$ az $\mathfrak{R}$ algebra ideálja és $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ az $\mathfrak{S}$ centralizátora. Ha $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S}$ valódi része $\mathfrak{R}$-nek, akkor $\mathfrak{S}$-nek van nem belső deriváltja.* ($\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S}$ a $z + s$ alakú elemek összességét jelenti, ahol $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$ és $s \in \mathfrak{S}$.)

Bizonyítás: Legyen $t \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S}$, és tetszőleges x $\mathfrak{S}$-beli elemhez rendeljük hozzá az $x' = tx - xt$ elemet. Ez a megfeleltetés az $\mathfrak{R}$-ben belső deriválás és ezért rendelkezik a deriválás tulajdonságaival. Mivel $\mathfrak{S}$ ideál, ezért $\mathfrak{S}$-beli x-ekre tx is és xt is, tehát x' is $\mathfrak{S}$-beli. Ezért $x \to x'$ az $\mathfrak{S}$-ben deriválás. Kimutatjuk, hogy ez nem belső deriválás. E célból tekintsük az $\mathfrak{S}$ egy tetszőleges s elemét. A feltétel szerint $t \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S}$ amiből következik, hogy $t - s$ nem lehet $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S})$-ben — hiszen ellenkező esetben $t = (t - s) + s \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S}$ volna —, és így van olyan $\mathfrak{S}$-beli x, amelyre $(t - s)x \neq x(t - s)$, amiből $x' = tx - xt = [(t - s)x - x(s - t)] + [sx - xs] \neq sx - xs$.

4. Tétel: *Mind a korlátos, mind a sorkorlátos, mind az oszlopkorlátos mátrixok körében van nem belső deriválás.*

Bizonyítás: Mint láttuk, ezek a mátrixok rendre a véges jellegű, a sorvéges és az oszlopvéges mátrixok egy-egy ideálját alkotják. Legyen E_{ij} az a (végtelennek tekintett) mátrix, amelyben az i-ik sor j-ik eleme 1, s a többi 0. Ez a mátrix nyilván mindig korlátos. Legyen továbbá T az a mátrix, amelyben az i-ik sor $i + 1$-ik helyén áll 1 (minden i-re), és a többi eleme 0. Világos, hogy T véges jellegű (s így sorvéges és oszlopvéges is). Az is világos, hogy T nem korlátos és sem sor- sem oszlopkorlátos. Legyen S tetszőleges sorkorlátos mátrix, és $i = k(S) + 1$. Ekkor $(T - S)E_{ii} - E_{ii}(T - S) = E_{i-1,i} - 0 - E_{i,i+1} + 0 \neq 0$, és így $(T - S)$ nincs benne a sorkorlátos mátrixok centralizátorában, egyetlen S sorkorlátos mátrixra sem. Ekkor viszont a 3. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy a sorkorlátos mátrixok körében van nem belső deriválás. Hasonlóan mutatható ki ugyanezt a T mátrixot felhasználva az analóg állítás az oszlopkorlátos és a korlátos mátrixok esetére.

Most a sorvéges (illetve oszlopvéges és végesjellegű) mátrixok vizsgálatára térünk. Először egy lemmát fogunk bizonyítani. Egy algebrának azokat az elemeit, amelyeknek a képe egy rögzített deriválásnál 0 lesz, a deriválás *konstans*ainak fogjuk nevezni.

3. *Lemma.* Egy algebrában rögzített deriválás esetén a konstansok egy részalgebrát alkotnak. Ha $\mathfrak{S}$ az $\mathfrak{R}$ algebrának egy jobbideálja, amelynek minden eleme konstans és bármely $\mathfrak{R}$-beli 0-tól különböző elemhez található a jobbideálban olyan

konstans, amellyel ezt az elemet balról szorozva ismét 0-tól különböző elemet kapunk, akkor az $\mathscr{R}$ minden eleme konstans. (Tehát a deriváció triviális.)

Bizonyítás: Az első állításból csak az nem triviális, hogy két konstans szorzata is konstans. Ha a konstans, akkor tetszőleges x-re $(ax)' = a'x + ax' = ax'$. Ha itt még $x' = 0$, akkor $(ax)' = 0$ is igaz. Legyen most $y \in \mathscr{R}$ tetszőleges. Bármely $\mathscr{S}$-beli a elemre $ay \in \mathscr{S}$, mert $\mathscr{S}$ jobbideál. Mivel mind a mind ay konstans, ezért $0 = (ay)' = ay'$. Mivel ez az $\mathscr{S}$ bármely a elemére fennáll, ezért a feltétel szerint $y' = 0$, mint állítottuk.

5. TÉTEL: *A sorvéges, az oszlopvéges és a véges jellegű mátrixok körében minden deriváció belső.*

Bizonyítás: Az állítást csak sorvéges mátrixokra fogjuk először igazolni. Oszlopvégesre ennek analogonja a bizonyítás.

A véges mátrixokhoz hasonlóan adjuk meg itt is a deriváló elemet: $T = \sum E'_{i1} E_{1i}$. Itt azonban az i index az összes természetes számon fut végig, tehát az összegnek végtelen sok tagja van. Ezért még azt is be kell látni, hogy a T mátrix valóban létezik. Nézzük meg az adott összeg egy tagját: $E'_{i1} E_{1i}$. A második tényező speciális alakjából azonnal következik, hogy a szorzatmátrixban az i-ik oszlopon kívül mindenütt 0 áll. Tekintettel arra, hogy minden i indexhez egyetlen ilyen mátrix szerepel az összegben, ezért a T mátrix minden helyén a szereplő összegben legfeljebb egyetlen tag különbözik 0-tól, vagyis a T mátrix valóban létezik. Az 1. Tételnél azt bizonyítottuk, hogy ez a mátrix negatívja az $S = \sum E_{i1} E'_{1i}$ mátrixnak. Az ottani bizonyítás itt nem alkalmazható, mert „végtelen tagú" összeget kellene tagonként deriválni, és ezt nem biztos, hogy lehet. Ezért még az is elképzelhető, hogy az S mátrix sem létezik. Ezt azonban hasonlóképpen láthatjuk be, mint a T létezését, csupán az oszlopok helyett a sorokat kell figyelembe venni. Sőt, az E'_{1i} mátrixok sorvégességéből az is következik, hogy S is sorvéges, konkrétebben $n(S, i) = n(E'_{1i}, 1)$. Az előbbiekben nem láttuk be, hogy T is sorvéges. Ezt úgy fogjuk belátni, hogy kimutatjuk a $T + S = 0$ egyenlőség teljesülését. Az első tételben szereplő E mátrix helyett itt azt az E_n mátrixot fogjuk segítségül venni $(n = 1, 2, \ldots)$, amelyben a főátlós első n eleme 1, s a többi elem 0. Nyilván $E_n = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$. Könnyű belátni, hogy tetszőleges A mátrix esetén $E_n A E_n$-ben az első n sorban az első n helyen pontosan ugyanazok az elemek állnak, mint A-ban, és a többi eleme 0. Ezért a $T + S = 0$ helyett elegendő kimutatni, hogy bármely n természetes számra fennáll az $E_n(T + S)E_n = 0$ egyenlőség. Vegyük most figyelembe, hogy az $E_n E_{i1}$, illetve az $E_{1i} E_n$ szorzat 0, ha $i > n$, míg egyébként E_{i1}, illetve E_{1i} lesz. Ha még azt is felhasználjuk, hogy $E_n^2 = E_n$, akkor azt kapjuk, hogy az $E_n(S + T)E_n$ egy véges összeg, amely $E_n(E_n S + T E_n)E_n$ alakban is felírható. Itt a zárójelen belül megfelelően az S és a T első n tagja lesz. Ezt konkréten felírva:

$$E_n S + T E_n = \sum_{i=1}^{n} (E_{i1} E'_{1i} + E'_{i1} E_{1i}) = \sum_{i=1}^{n} E'_{ii} = E'_n,$$

vagyis $E_n(S + T)E_n = E_n E'_n E_n$. Ezt az utóbbi mátrixot viszont a következőképpen határozhatjuk meg. Az $E_n = E_n^2$ egyenlőségből deriválással $E'_n = E'_n E_n + E_n E'_n$ adódik, amit mindkét oldalról E_n-nel szorozva — és 0-ra redukálva — kapjuk, hogy $E_n E'_n E_n = 0$ Ezzel igazoltuk tehát, hogy $T + S = 0$.

Mármost tetszőleges E_{pq} esetén:

$$T E_{pq} - E_{pq} T = T E_{pq} + E_{pq} S = E'_{p1} E_{1q} + E_{p1} E'_{1q} = E'_{pq}.$$

Rendeljük most hozzá minden A sorvéges mátrixhoz az $A' - (TA - AT)$ mátrixot. Ez a megfeleltetés a 2. Lemma szerint deriváció. Mint most láttuk ennél a deriválásnál az E_{pq} (tetszőleges p és q indexre) 0-ba megy át. Ebből adódik, hogy minden korlátos mátrix konstans. Világos továbbá, hogy ha A korlátos és B sorvéges, akkor AB is korlátos, tehát a korlátos mátrixok a sorvégesek körében jobbideált alkotnak. Végül, ha egy Y mátrix 0-tól különböző, akkor pl. az i-ik sorában is van 0-tól különböző eleme, amely esetben az E_{ii} korlátos mátrixszal balról szorozva a kapott $E_{ii}Y$ mátrix is különbözik 0-tól; hiszen i-ik sora megegyezik Y i-ik sorával. Ekkor viszont alkalmazhatjuk a 3. Lemmát; az ottani $\mathfrak{R}$ algebrának véve a sorvéges mátrixokat és $\mathfrak{S}$ helyett a korlátosokat. Így az $A \to A' - (TA - AT)$ deriválásnál minden elem 0-ra képeződik le, tehát $A' = TA - AT$. Ezzel igazoltuk, hogy a sorvéges mátrixok körében minden deriváció belső.

Az oszlopvéges mátrixok esetében hasonlóan járhatunk el; de a megfelelő állítás bizonyítható a sorvéges mátrixokra vonatkozó állítás érvényességéből, felhasználva, hogy az oszlopvéges mátrixok a sorvégesek transzponáltjai.

Véges jellegű mátrixok esetén az eddigiek felhasználásával csak azt tudjuk belátni, hogy bármely deriválás létrehozható sorvéges és oszlopvéges mátrix segítségével is. Az azonban nem következik ebből, hogy véges jellegű megfelelő mátrixot is találtunk, mert a kapott két mátrixnak nem kell megegyeznie. Kimutatjuk azonban, hogy ha a véges jellegű mátrixok körében adott $A \to A'$ deriváláshoz találtunk már olyan S sorvéges és T oszlopvéges mátrixokat, amelyekre $A' = TA - AT = SA - AS$, akkor mind S, mind T véges jellegű. A feltételből ugyanis következik, hogy bármely A véges jellegű mátrix esetén $(T - S)A = A(T - S)$, amiből $E_{ii}(T - S)E_{jj} = E_{ii}E_{jj}(T - S) = 0$ ha $i \neq j$. Ez pedig azt fejezi ki, hogy a $T - S$ mátrixban a diagonálison kívül csak 0 áll, vagyis $T - S$ véges jellegű. Ekkor pedig $T = (T - S) + S$ sorvéges, mert mindkét tag az. Feltétel szerint T oszlopvéges is volt, tehát T véges jellegű. (Persze ebből azonnal kapjuk, hogy $S = T - (T - S)$ is véges jellegű.)

A bizonyításnál nem használtuk ki, hogy a mátrixnak megszámlálható sok sora van. Tekintettel arra, hogy a sorvéges mátrixok egy vektortér lineáris transzformációinak algebrájával izomorfak, ezért az állítás érvényes tetszőleges vektortér lineáris transzformációinak gyűrűjére.

Végül megfogalmazunk egy következményt, amely az 1., 2. és 5. Tételekből következik nyilvánvalóan; a 3. Tétel figyelembevételével.

Korollárium: Legyen $\mathfrak{S}$ egy vektortér összes lineáris transzformációinak algebrája, vagy egy olyan véges csoportalgebra, amelynek dimenziója nem osztható az alaptest karakterisztikájával. Ha mármost az $\mathfrak{R}$ algebra az $\mathfrak{S}$-nek tetszőleges bővítése — amelyben tehát $\mathfrak{S}$ ideál — akkor található az $\mathfrak{R}$-ben olyan $\mathfrak{C}$ részalgebra, hogy $\mathfrak{R}$ minden eleme előállítható egy $\mathfrak{S}$-beli és egy $\mathfrak{C}$-beli elem összegeként, továbbá $\mathfrak{C}$ elemei $\mathfrak{S}$ elemeivel (a szorzásra nézve) felcserélhetők.

Ez a korollárium azt fejezi ki, hogy az $\mathfrak{S}$ algebrát csak úgy tudom bővíteni, hogy a bővítés az „majdnem" direkt összege az $\mathfrak{S}$-nek és egy másik $\mathfrak{C}$ algebrának.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛНОГО КОЛЬЦА МАТРИЦ

Э. ФРИД

ON A PROPERTY OF THE FULL MATRIX-RING

E. FRIED

A LINEÁRIS TELJES GRÁF HAMILTON-KÖREINEK KÖZÖS ÉLEIRŐL

PALÁSTI ILONA

BEVEZETÉS

Jelen dolgozat az n szögpontú teljes gráf egy adott körének éleivel közös élű Hamilton-körök leszámlálásával foglalkozik.[1]

ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD vetették fel a következő problémát:

Legyen h az n szögpontú teljes gráf egyik adott, rögzített Hamilton-köre és jelölje $H_n(r)$ azoknak a Hamilton-köröknek a számát, amelyeknek h-val pontosan r közös éle van ($0 \leqq r \leqq n$). A feladat a $H_n(r)$ függvény meghatározása.

Nyilvánvaló, hogy $H_n(n) = 1$.

Igaz továbbá, hogy a $H_n(r)$ *függvények összege megadja a teljes gráf összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-köreinek számát:*

$$\sum_{r=0}^{n} H_n(r) = \frac{(n-1)!}{2}. \tag{1}$$

Az is nyilvánvaló, hogy $H_n(n-1) = 0$. Ekkor ui. a rögzített, adott Hamilton-körrel közös élek egy $n-1$ hosszúságú utat alkotnak. Mivel pedig két pontot csak egyféleképpen lehet egy éllel összekötni (tekintve, hogy a gráf lineáris, azaz nincsenek párhuzamos élei), következik tehát, hogy *ha két Hamilton-körnek* $n-1$ *közös éle van, akkor az n-edik él is közös.*

A következőkben az 1. §-ban a $H_n(n-2)$, $H_n(n-3)$ és a $H_n(n-4)$ pontos kifejezéseit fogjuk meghatározni. Az az eljárás, amelyet a fenti függvények meghatározása során kidolgozunk, mint látni fogjuk, csak nehezen alkalmazható a $H_n(n-k)$ meghatározására, amikor $k > 4$, a gráfok szerkezetének egyre növekvő bonyolultsága miatt. Mégis az általunk nyert kifejezések alapján az általános esetre is sejtést mondunk ki a $H_n(n-k)$ függvény alakjára.

A 3. §-ban megmutatjuk, hogy $H_n(r)$ általában rekurziós formulával fejezhető ki, és a $H_n(0)$ pontos rekurziós kifejezését adjuk meg, de már ismert együtthatókkal.

Befejezésül megmutatjuk, hogy módszerünk alkalmas a $H_n(r)$ értékeinek numerikus meghatározására is.

[1] Hamilton-körnek nevezzük a gráf valamennyi csúcsán egyszer áthaladó kört. (Körnek pedig az élek olyan sorozatát hívjuk, amelyben két-két egymás után következő élnek közös csúcsa van, és csak ezeknek van közös csúcsuk, feltéve még, hogy az élsorozat kiindulási csúcsa azonos az élsorozat befejező csúcsával.)

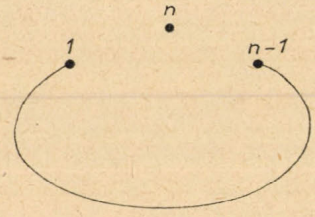
1. A $H_n(n-k)$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK MEGHATÁROZÁSÁRÓL

Bizonyítsuk be a következő tételt:

1. TÉTEL: *Egy adott, rögzített Hamilton-körhöz megadható összes olyan, egymástól különböző Hamilton-körök száma, amelyeknek a rögzített körrel $n-2$ közös éle van:*

$$H_n(n-2) = \binom{n}{2} - n. \tag{2}$$

Az 1. tétel bizonyítása. Mivel az összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-köröket vizsgáljuk, egy adott körrel $n-2$ közös élt tartalmazó kör annyiszor fordulhat elő ezen körök között, ahányféleképp a többi két él különbözhet a megadott kör éleitől. Rögzítsük tehát az adott kör pontjait. A rögzített h körből hagyjunk el két élt és helyettük vezessünk be új, az eredeti rögzített kör éleivel nem közös éleket úgy, hogy az így nyert új konfiguráció is Hamilton-kör legyen. Két élt $\binom{n}{2}$ féleképp lehet kiválasztani. Az összes lehetséges kiválasztásban azonban olyan élpárok is szerepelnek, amelyeknek van egymással közös csúcsuk. Könnyű belátni, hogy esetünkben ezek a 2 hosszúságú elhagyott utak nem fordulhatnak elő. Ha ui. két szomszédos élt hagynánk el a rögzített Hamilton-körből, akkor egy $n-2$ élből, ill. $n-1$ csúcsból álló összefüggő utat és egy izolált csúcsot nyerünk:



1. ábra

Egy izolált pontot egy összefüggő úttal összekötni két éllel úgy, hogy az egész gráf egyetlen kört alkosson (azaz az összes csúcsok fokszáma 2 legyen) csak egyféleképp lehetséges és így az új éleknek a régiekkel azonosaknak kell lenni. Mivel a gráfnak n csúcsa van, az ilyen, vagyis az egy csúcshoz illeszkedő különböző élpárok száma Hamilton-kör esetén n. Ezt az n számot le kell tehát vonni az összes lehetséges $\binom{n}{2}$ élpárok számából ahhoz, hogy a bevezetett új élek a rögzített kör éleitől különbözőek legyenek, s így

$$H_n(n-2) = \binom{n}{2} - n,$$

amit bizonyítani akartunk.

2. TÉTEL: *Az összes lehetséges, olyan Hamilton-körök száma, amelyeknek egy rögzített Hamilton-körrel pontosan $n-3$ közös éle van:*

$$H_n(n-3) = 4\binom{n}{3} - 3n^2 + 8n \qquad (n>3). \tag{3}$$

Bizonyítás. Az összes Hamilton-körök egymástól különbözőek. Egy adott körrel $n-3$ közös élű kör tehát annyiszor fordulhat elő ahányféleképp 3 él különbözhet a megadott kör éleitől. Rögzítsük az n hosszúságú kör csúcsait. Hagyjunk el az eredeti körből 3 élt abból a célból, hogy helyettük új, az eredeti kör éleitől különböző éleket vezessünk be úgy, hogy az új gráf is Hamilton-kör legyen.

Tekintve, hogy 3 mint pozitív egész számok összege az alábbi módokon állítható elő:

$$3=3,$$

$$2+1=3,$$

$$1+1+1=3,$$

jelen esetben így az elhagyott élek szerint három csoportba oszthatjuk az új gráfokat:

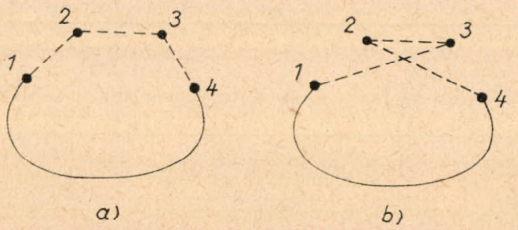
1. *Csoport.* A három elhagyott él egyetlen 3 hosszúságú utat alkot.

2. *Csoport.* A három él közül kettő egy utat alkot, és van egy ettől a 2 hosszúságú úttól pontfüggetlen elhagyott él is.

3. *Csoport.* Mind a három elhagyott él pontfüggetlen egymástól.

Vegyük sorra ezeket az eseteket:

1. *Csoport.* A három elhagyott él egyetlen utat alkot. Könnyű belátni, hogy ez az eset nem foroghat fenn. Ez ui. azt jelentené, hogy a három elhagyott élnek egymással két közös csúcsa van. A lehetséges ilyen konfigurációk száma a következő kettő:



2. ábra

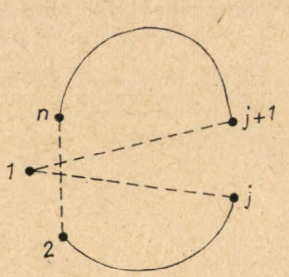
Tekintsük most a 2a) ábrán szereplő $\mu(P_1, P_2, P_3, P_4)$ utat. Ha ennek a μ útnak az (1, 2), (2, 3) és a (3, 4) éleit elhagyjuk és a megmaradt csúcsokból próbálunk egy másik, az előbbi μ úttól eltérő ν utat képezni, akkor ez a ν út csak a 2b) ábrán szereplő $\nu(P_1, P_3, P_2, P_4)$ új út lehet, amely eleget tesz annak a megszorításnak, hogy az új konfiguráció is Hamilton-kör legyen. Mivel azonban a gráf nem irányított a (2, 3) és a (3, 2) élek azonosak. Azaz a μ és ν utak a feltevésnek ellentmondva nem három, hanem csak két élben különböznek egymástól.

Ugyanez igaz akkor is, ha eredetileg a 2b) konfigurációból indulunk ki. Most a 2b) ábrán szereplő ν út (1, 3), (3, 2) és (2, 4) éleit hagyjuk el. A megmaradt csúcsokból képezhető, s a megkötéseknek is eleget tevő új ut csak a 2a) ábra μ útja lehet, és így a (2, 3) él ismét közös.

Az 1. csoportban tehát nem kaphatunk 3 nem közös élt, akár az a), akár a b) volt is az eredeti rögzített körünk.

2. *Csoport.* A három elhagyott él közül kettő egy utat alkot, és a harmadik elhagyott él pontfüggetlen ettől a 2 hosszúságú úttól. Ilyenformán a bevezetett új,

az eredeti rögzített körrel nem közös élek közül is lehet kettőnek egy közös csúcsa. A harmadik nem közös él pedig pontfüggetlen a másik kettőtől. Az egyetlen lehetséges ilyen konfigurációt a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Az eredeti körből hagyjunk el ui. két egymás melletti (a 3. ábrán az (1, 2) és az (1, n)) élt és egy ezektől független $(j, j+1)$ élt. Akkor az eredetileg közös P_1 csúcs csak a pontfüggetlen elhagyott él csúcsaival köthető úgy össze, hogy ezek az élek az eredeti kör éleitől különböző élek legyenek. S hogy az új körünk is záródjék, az eredeti körből elhagyott, 2 hosszúságú út végpontjait a P_2 és a P_n csúcsokat is össze kell kötni egymással.

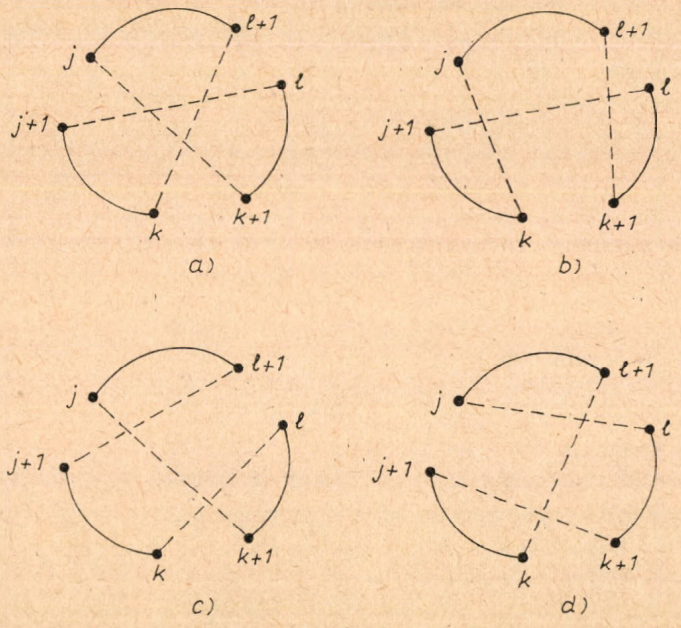
Másrészt a $(j, j+1)$ él lehetséges helyzeteinek a száma $n-4$, feltéve, hogy közben változatlanul a $\mu(P_2, P_1, P_n)$ volt az elhagyott út. Mert ezen a két élen kívül az 1. csoportban elmondottak miatt a (2, 3) és az $(n-1, n)$ éleknek is változatlanul kell maradniok. Azaz az összes lehetséges n él közül 4-nek a helyzetét nem veheti fel a $(j, j+1)$ él. Mivel azonban az eredeti élek elhagyása után a P_1 izolált csúcs szerepét az összes többi, $n-1$ számú csúcs is átveheti, tekintve továbbá, hogy a különböző izolált pontokhoz különböző új körök tartoznak, a 2. csoportban generálható összes lehetséges, egymástól különböző, az eredeti körtől 3 élben különböző Hamilton-körök száma így

$$n(n-4). \tag{4}$$

3. *Csoport.* A harmadik lehetséges eset az, amikor az elhagyott éleknek nincs egymással közös csúcsa. Minden ilyen esetben, eleget téve annak a megkötésnek, hogy az új konfiguráció olyan Hamilton-kör legyen, amelynek az eredeti, rögzített kör éleitől három különböző éle van, ezek az új élek az alábbi négyféle módon húzhatók meg (l. 4. ábra). A három él elhagyása után keletkező nem összefüggő gráf 6 elsőfokú csúcsot tartalmaz. Ezek közül egynek sincs kitüntetett szerepe. Ezért ha pl. a P_j csúcsból indulunk ki, akkor a $(j, j+1)$ él tilos, mert az eredeti kör is tartalmazza. Nincs megengedve a $(j, l+1)$ él sem, mert ez egy n-nél rövidebb kört eredményezne. Marad tehát a (j, k), $(j, k+1)$ és (j, l) lehetőség. Ehhez a háromhoz még egy további új kör járul, mert a P_{k+1} csúcs szimmetrikus helyzete az új kör kétféle lezárási módját engedi meg.

A 4. ábrán egy szimmetrikus az a) és három aszimmetrikus konfiguráció szerepel a b), c) és d).

A 3. csoportba tartozó gráfok számát tehát megkaphatjuk, ha a lehetséges n él közül 3 élt választunk ki a megfelelő módon. Az összes lehetséges, egymástól különböző élhármasok száma $\binom{n}{3}$. Ez a kiválasztás azonban magában foglalja,



4. ábra

a körök esetén ugyan nem realizálható, de mint kiválasztás létező, és az 1. csoportba sorolható kiválasztásokat, és a (4) képlettel már leszámlált 2. csoportbelieket is. Mindezek számát le kell tehát vonni az élhármasok összes lehetséges kiválasztásainak a számából. Mivel az 1. csoportban levő esetek száma nyilván a lehetséges középső élek számával egyezik meg, ez n féleképp fordulhat elő. A 2. csoportban levő kiválasztások számát pedig a (4) szolgáltatja, ezek szerint az n élből

$$\binom{n}{3} - n - n(n-4) \tag{5}$$

féleképpen lehet 3 élt úgy elhagyni, hogy az elhagyott éleknek ne legyen közös csúcsa. Továbbá a 4. ábrán látható elrendezés szerint minden ilyen konfigurációból 4 új kör generálható, ezért a 3. csoportba tartozó összes, egymástól különböző Hamilton-körök száma:

$$4\left[\binom{n}{3} - n - n(n-4)\right]. \tag{6}$$

Végezetül összegezve az 1., 2. és a 3. csoportokban szereplő körök számát:

$$H_n(n-3) = n(n-4) + 4\left[\binom{n}{3} - n - n(n-4)\right] = 4\binom{n}{3} - 3n^2 + 8n. \tag{7}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

3. TÉTEL: *Egy adott, rögzített Hamilton-körhöz megadható, egymástól különböző, összes olyan Hamilton-körök száma, amelyeknek a rögzített körrel pontosan* $n-4$ *közös éle van*:

$$H_n(n-4) = 25\binom{n}{4} - \frac{17}{2}n^3 + \frac{117}{2}n^2 - 105n \quad (n<4). \tag{8}$$

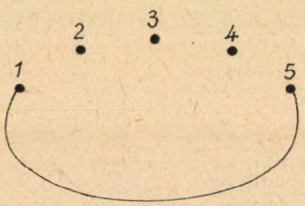
A 3. tétel bizonyítása. Mivel az összes Hamilton-körök egymástól különbözőek, egy kör $n-4$ számú éle annyiszor lehet az adott rögzített kör éleivel közös, ahányféleképpen a többi 4 él különbözhet az adott kör éleitől.

Osztályozzuk most is a gráfokat aszerint, hogy az eredeti, rögzített Hamilton-körből hogyan hagyhatunk el négy élt abból a célból, hogy helyettük olyan új éleket vezessünk be, amelyek nem közösek az eredeti kör éleivel. Ily módon a négy elhagyandó él utakra bontva a következő öt alakban fordulhat elő:

1. egyetlen négy hosszúságú út,
2. egy három hosszúságú út és egy tőle pontfüggetlen él,
3. két egymástól pontfüggetlen kettő hosszúságú út,
4. egy kettő hosszúságú út és tőle két, egymástól is pontfüggetlen él,
5. négy egymástól pontfüggetlen él.

1. *Eset.* A négy elhagyott él egyetlen, 4 hosszúságú utat alkot. Könnyű belátni, hogy ez az eset nem fordulhat elő.

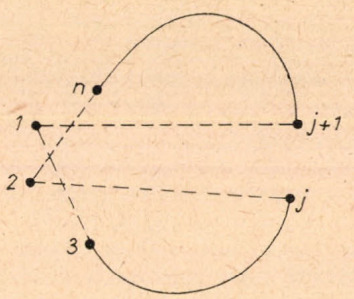
Tegyük fel ui., hogy volna egy ilyen, a követelményeknek eleget tevő 4 hosszúságú új út. Ennek előállításához 5 csúcs szükséges. Tekintsük az 5. ábrát:



5. ábra

Ez az öt csúcs összesen $\binom{5}{2} = 10$ különböző éllel köthető össze. De ezek közül ki kell zárni a rögzített körhöz eredetileg is hozzá tartozó négy élt. Az általánosság megszorítása nélkül, az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy ezek rendre az (1, 2), (2, 3), (3, 4) és a (4, 5) élek voltak. Ki kell zárni továbbá az (1, 5) élt, amely az eredeti körből megmaradt út végpontjait kötné össze. Tehát csak a következő öt él a megengedhető: (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5) és (3, 5). Ebből az öt élből négy élt csak úgy lehet kiválasztani, hogy vagy a P_1 vagy a P_5 csúcsnak kétszer kell szerepelni a kiválasztásban. Tekintve azonban, hogy a P_1 és a P_5 csúcsok az eredeti körből változatlanul megmaradt útnak is a végpontjai, így az új kiválasztásban való kétszeres előfordulásuk azt jelentené, hogy vagy a P_1, vagy a P_5 csúcshoz 3 él illeszkednék, ami viszont ellentmond annak a követelménynek, hogy az új konfiguráció is Hamilton-kör.

2. *Eset.* Az elhagyott négy él közül három egy utat alkot és egy elhagyott él pontfüggetlen ettől a három hosszúságú úttól (lásd a 6. ábrát).



6. ábra

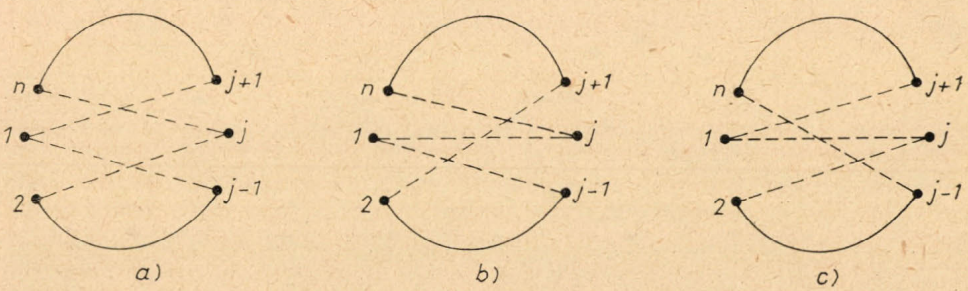
Az ily módon keletkező nem összefüggő gráfnak tehát két nulladfokú és négy elsőfokú pontja van, az összes többi csúcs másodfokú. Ez a gráf úgy egészíthető ki az eredeti körtől négy élben eltérő körré, ha a két nulladfokú pontból a P_1-ből és a P_2-ből két-két él indul ki, ami *négy új élt* jelent, mert az (1, 2), ill. (1, n) és a (2, 3) élek a régi körhöz tartoztak, tehát eleve kizártak. Ha az elsőfokú pontok közül kötünk össze kettőt, akkor már csak két elsőfokú csúcs maradna, s ezekhez nem illeszkedhet négy él. Elsőfokú csúcsokat elsőfokúakkal, jelen esetben, tehát ezért nem lehet összekötni. Tekintve, hogy az (1, n) és (2, 3) mint az eredeti kör élei kizártak, továbbá mivel a P_1 csúcsból kiinduló élek nem futhatnak be a megmaradt $\varrho(P_3, \ldots, P_j)$ út mindkét végpontjába, ezért csak az ábrán látható egyetlen lehetséges új kör állítható elő.

Másrészről, az osztályozási kritérium miatt a P_n és P_3 csúcsokhoz feltételnül illeszkedik egy-egy az eredeti körrel közös él is, ezért a $(j, j+1)$ él csak $n-5$ helyzetet foglalhat el. A $\mu(P_n, P_1, P_2, P_3)$ típusú utak száma n lehet, és így a 2. esetben

$$n(n-5) \tag{9}$$

azoknak az n hosszúságú köröknek a száma, amelyeknek a rögzített körrel $n-4$ közös éle van.

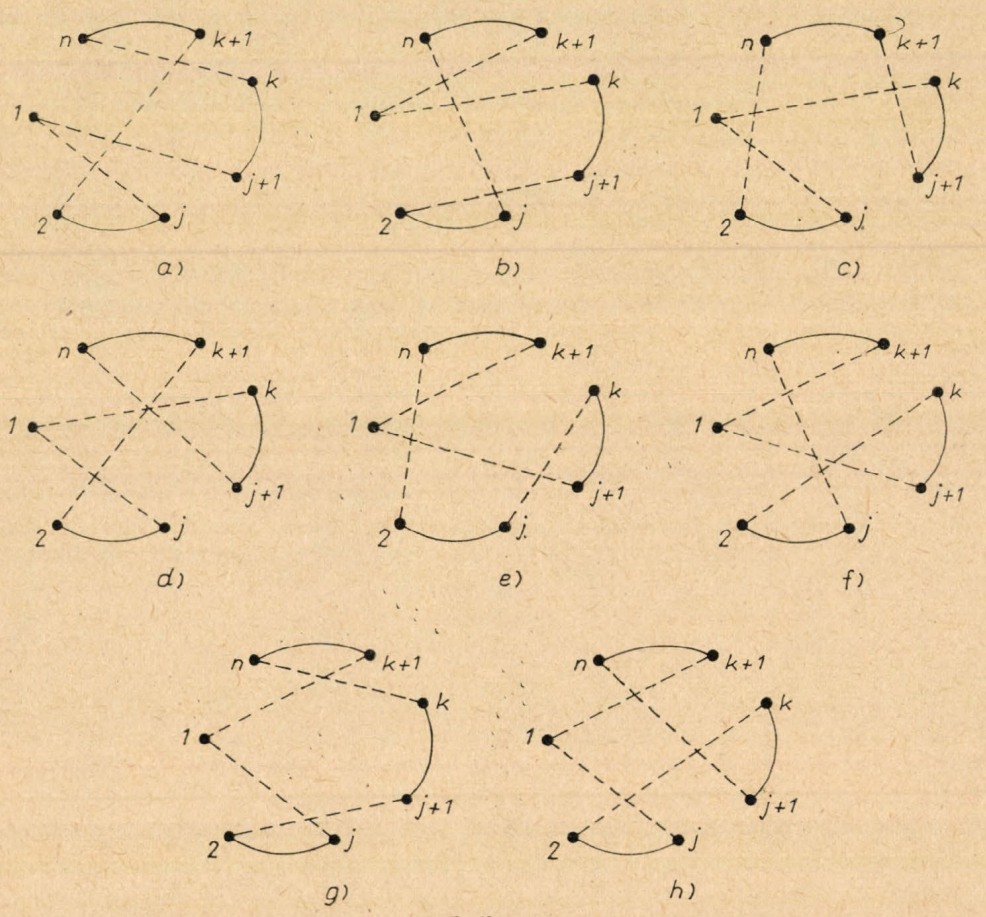
3. *Eset.* Az elhagyott négy él közül kettő-kettő egy-egy 2 hosszúságú, egymástól pontfüggetlen utat alkot. (A négy él közül tehát kettő-kettőnek közös csúcsa van, lásd a 7. ábrát.) Az így keletkező nem összefüggő gráfnak két nulladfokú,



7. ábra

a P_1 és a P_j, és négy elsőfokú, a P_n, P_2, P_{j-1}, P_{j+1} csúcsa van. A P_1 és P_j csúcsokhoz tehát két-két új él illeszkedik, de mivel a P_1 és P_j nem szomszédosak, ezért az $(1, j)$ él is megengedett. Ha az új körben az $(1, j)$ él nem szerepel (7a ábra), akkor a P_1, ill. P_j csúcsból kiinduló két-két él két-két nem szomszédos elsőfokú csúcshoz illeszkedik. Így csak az $(1, j-1)$, $(1, j+1)$, ill. $(j, 2)$, (j, n) új éleket vezethetjük be. Ha az új körben az $(1, j)$ él szerepel, akkor a P_1, ill. P_j csúcsot vagy a P_{j-1}, vagy a P_{j+1}, ill. vagy a P_2, vagy a P_n csúccsal lehet csak összekötni. Íly módon a 7b, ill. 7c ábrán látható konfigurációkhoz jutunk. Tehát a lehetséges új konfigurációk száma három.

Most már csak azt kell megszámlálnunk, hogy hányféleképp lehet a 3. esetnek megfelelő utakat elhagyni. Rögzítsük először is a P_n, P_1, P_2 csúcsokat, illetve az általuk megadott utat. De ezzel együtt az $(n, n-1)$ és a $(2, 3)$ éleket is rögzítettük, mert az osztályozási kritérium miatt ezek az élek az eredeti, rögzített kör éleivel közös élek maradnak. Ezek szerint a $\mu(P_{j-1}, P_j, P_{j+1})$ út összesen $n-5$ helyzetben fordulhat elő. A $v(P_n, P_1, P_2)$ út helyett rendre a $v_1(P_1, P_2, P_3)$, $v_2(P_2, P_3, P_4)$, ..., ..., $v_{n-1}(P_{n-1}, P_n, P_1)$ utakat véve rögzítettnek, összesen $n(n-5)$ eset adódik. Ezek közül azonban a szimmetria miatt 2—2 azonos, mert pl. egyszer a P_1 közös csúcsnak



8. ábra

a P_j közös csúcs felel meg és fordítva, a P_j közös csúcsnak a P_1. Tehát az $n(n-5)$-öt el kell osztani 2-vel. Figyelembe véve továbbá, hogy a 7. ábrán látható elrendezés szerint ezen lehetőségek mindegyike 3 új kört generál, az összes lehetséges körök száma tehát ebben a 3. esetben

$$\frac{3n(n-5)}{2}. \tag{10}$$

4. *Eset.* Az elhagyott négy él közül kettő egy utat alkot, a másik két él pedig pontfüggetlen egymástól is és a kettő hosszúságú elhagyott úttól is (8. ábra).

A keletkező nem összefüggő gráfnak egy nulladfokú és hat elsőfokú szabad csúcsa van. Az új körré való kiegészítés után, a nullafokú P_1 csúcshoz két új élnek kell illeszkednie, ami — figyelembe véve, hogy mely csúcsok nem köthetők össze új éllel — csak a következő öt féle módon történhet:

(i) $\{(1, j), (1, j+1)\}$,

(ii) $\{(1, k), (1, k+1)\}$,

(iii) $\{(1, j), (1, k)\}$,

(iv) $\{(1, j+1), (1, k+1)\}$,

(v) $\{(1, k+1), (1, j)\}$.

A P_1 csucs uï. nem köthető össze a P_n, és P_2 csúcsokkal, mert ezek a régi élek, csak a P_j, P_{j+1}, P_k, P_{k+1} csúcsok közül kettővel, ami $\binom{4}{2}=6$ féleképp történehet. Ezek közül azonban az $\{(1, j+1), (1, k)\}$ lehetőség kizárt, mert ez egy kisebb kört képezne. Az (i) és (ii) esetben ugyanannak az elhagyott élnek a csúcsai, a (iii)-, (iv)- és (v)-ben pedig különböző elhagyott élek csúcsai szerepelnek. Az új körré való kiegészítések ezért csak a következőképpen valósíthatók meg:

(i) $\{(1, j), (1, j+1)\}+(2, k+1)+(k, n)$, (8a ábra),

(ii) $\{(1, k), (1, k+1)\}+(2, j+1)+(j, n)$, (8b ábra),

(iii′) $\{(1, j), (1, k)\}+(2, n)+(j+1, k+1)$, (8c ábra),

(iii″) $\{(1, j), (1, k)\}+(2, k+1)+(n, j+1)$, (8d ábra),

(iv′) $\{(1, j+1), (1, k+1)\}+(2, n)+(j, k)$, (8e ábra),

(iv″) $\{(1, j+1), (1, k+1)\}+(2, k)+(j, n)$, (8f ábra),

(v′) $\{(1, k+1), (1, j)\}+(2, j+1)+(k, n)$, (8g ábra),

(v″) $\{(1, k+1), (1, j)\}+(2, k)+(j+1, n)$, (8h ábra).

Ez összesen nyolc lehetőség, amely az összes lehetséges, az eredeti körtől négy élben eltérő kiegészítéseket tartalmazza.

Most már csak azt kell belátnunk. hogy hányféleképp valósulhat meg maga a 4. eset, amelynek mindegyike a fenti 8 új kört generálja.

Ha mint azt a 8. ábrán is tettük, az $(n, 1)$ és az $(1, 2)$ éleket hagyjuk el, az $(n-1, n)$ és a $(2, 3)$ élek is változatlanul maradnak és így $n-4$ él fölött diszponálhatunk. Ezek közül kettőt $\binom{n-4}{2}$ féleképpen lehet kiválasztani, de ebből az osztályo-

zási kritérium miatt el kell hagyni azokat az eseteket, amikor a két élnek közös csúcsa van. Ezek száma esetünkben $n-5$. Más szavakkal, a $\mu\,(P_n, P_1, P_2)$ út elhagyása után

$$\left[\binom{n-4}{2}-(n-5)\right] \tag{11}$$

féle módon lehet elhagyni a $(j, j+1)$, $(k, k+1)$ éleket. Mivel továbbá a P_1 izolált csúcs a kör n pontja közül bármelyik lehet, és ezek mindegyike 8 új kört generál, tehát 4. esetbe tartozó az összes lehetséges körök száma:

$$8n\left[\binom{n-4}{2}-(n-5)\right]=4n(n-5)(n-6). \tag{12}$$

5. *Eset.* A négy elhagyott él mindegyike pontfüggetlen egymástól. Az összes lehetséges ilyen kiválasztások számát megkapjuk, ha az $\binom{n}{4}$-ből rendre levonjuk az 1., 2., 3. és a 4. esetben szereplő kiválasztások számát, vagyis

$$\binom{n}{4}-n-n(n-5)-\frac{n(n-5)}{2}-\frac{n(n-5)(n-6)}{2}, \tag{13}$$

az összes lehetséges, négy egymástól pontfüggetlen, s a rögzített körtől különböző élekkel rendelkező, különböző Hamilton-körök száma. S ezek mindegyike még további 25 kört generál. A 4. esetben, ill. a 2. tétel bitonyításának 3. csoportjában részletezett módon belátható ui., hogy a lehetséges új konfigurációk száma ez esetben 25. Ezt az igen egyszerű, de hosszadalmas bizonyítást elhagyva, az összes lehetséges ilyen típusú új köröket a következő 9. ábrán szemléltetjük (l. 81. o.).

Mivel a (13) kifejezés mindegyike 25 új kört generál az 5. esetbe tartozó, olyan Hamilton-körök száma, amelyeknek a rögzített éleitől négy olyan különböző éle van, amelyeknek nincs egymással közös csúcsuk, így

$$25\left[\binom{n}{4}-n-n(n-5)-\frac{n(n-5)}{2}-\frac{n(n-5)(n-6)}{2}\right]. \tag{14}$$

Végezetül, összefoglalva mind az öt esetet: az összes olyan Hamilton-körök száma, amelyeknek egy adott körrel pontosan $n-4$ közös éle van:

$$H_n(n-4)=25\left[\binom{n}{4}-n-n(n-5)-\frac{n(n-5)}{2}-\frac{n(n-5)(n-6)}{2}\right]+ \tag{15}$$

$$+n(n-5)+\frac{3n(n-5)}{2}+4n(n-5)(n-6).$$

Vagyis

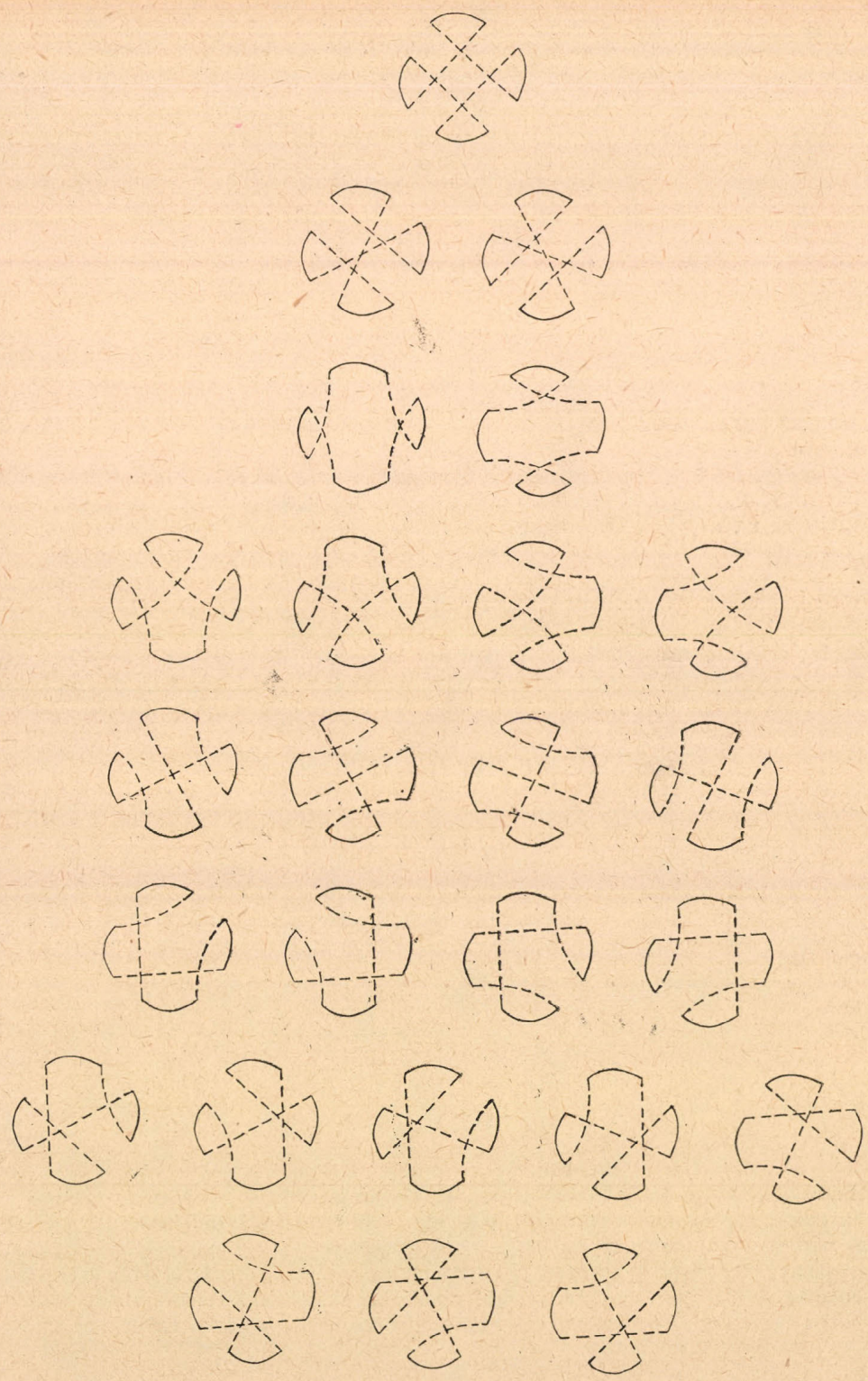
$$H_n(n-4)=25\binom{n}{4}-\frac{17}{2}n^3+\frac{117}{2}n^2-105n,$$

amit bizonyítani akartunk.

Az eddig bizonyítottak alapján kimondható az a *sejtés* is, hogy általában a

$$H_n(n-k)=A_0n^k-A_1n^{k-1}+A_2n^{k-2}\pm\ldots\pm A_{k-1}n,\quad k\ll\frac{n}{2} \tag{16}$$

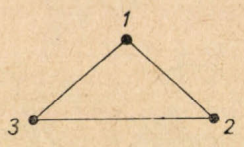
ahol sajnos az A_i együtthatókról semmit sem tudunk.



9. ábra

2. ALGORITMUS A HAMILTON-KÖRÖK ELŐÁLLÍTÁSÁRA

Tekintsük a lineáris, nem irányított, hurok élek nélküli háromszög gráfot.



10. ábra

Jellemezzük a fenti, teljes háromszöget az élek sorozatával, azaz az

(17) (1, 2) (2, 3) (1, 3)

számpárok sorozatának megadásával. Nyilvánvaló, hogy a háromszög gráf Hamilton-kör.

Az összes lehetséges, egymástól különböző 4 hosszúságú körök a (17) sorozatból az (1, 4), (2, 4) és a (3, 4) további számpárok felhasználásával származtathatók. Bővítsük ui. a (17) számsorozatot oly módon, hogy először az (1, 2) számpárnak megfelelő helyet üresen hagyva, azaz az (1, 2) élt elhagyva, de a többi tagot, ill. élt nem változtatva, az (1, 4) és a (2, 4) új számpárokat, ill. új éleket vezetjük be. Más szavakkal, az elhagyott (1, 2) él végpontjait a P_1 és a P_2 csúcsok mindegyikét összekötjük az új P_4 csúccsal. Ha az eredeti, három élből álló gráf kör volt, akkor az így generált, négy élből álló gráf is kör lesz, mert az elhagyott él mindkét végpontját összekötöttük az új P_4 csúccsal, tehát a gráf összefüggő és minden csúcsának fokszáma 2. Így pontosan kétszer fordul elő a csúcsoknak megfelelő valamennyi szám a számpárok új

(18) (,) (1, 3) (2, 3) (1, 4) (2, 4) (,)

sorozatában is. (Célszerű az elhagyott (1, 2) és a hiányzó (3, 4) számpár helyét is feltüntetni.) Azt is könnyű belátni, hogy a számpárok (18) sorozatával adott élsorozat Hamilton-kör is, mert a gráfnak mind a négy csúcsán áthalad és csak egyszer halad át.

Másodszorra, azaz a második 4 hosszúságú Hamilton-kör előállításánál a (17) sorozat második tagjaként szereplő (2, 3) számpárt hagyjuk el és a (2, 4), (3, 4) új tagokat vezetjük be, és így tovább.

Végezetül a következő számpárokból álló sorozatokat nyerjük:

(,) (1, 3) (2, 3) (1, 4) (2, 4) (,)

(19) (1, 2) (1, 3) (,) (,) (2, 4) (3, 4)

(1, 2) (,) (2, 3) (1, 4) (,) (3, 4).

Azt, hogy a (19) elrendezés első sorában álló számpárok sorozata egy 4-ed rendű Hamilton-kört ír le, már beláttuk. Ugyanígy látható be, hogy a második és harmadik sorban álló sorozatnak is egy-egy 4 hosszúságú Hamilton-kör felel meg. A három sorozatban más-más számpárok is szerepelnek, ill. más-más tagok is hiányoznak, és mivel a sorozatok egyértelműen meghatározzák a Hamilton-kört, következik, hogy ezek egymástól különböző körök lesznek. Természetesen vannak közös elemei is a sorozatoknak. Célunk éppen ezeknek a közös elemekkel rendel-

kező sorozatoknak, ill. a következő fejezetben a 0 közös elemekkel rendelkező sorozatok összeszámlálása.

A (18) és (19) sorozatokat mátrix elrendezésnek tekintve, azonnal leolvasható, hogy az oszlopok száma egyenlő az összes lehetséges élek számával, azaz $\binom{n}{2}$. Az egy sorban álló nem üres elemek száma pontosan n. A mátrix sorainak a száma pedig az összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-körök száma, azaz $\frac{(n-1)!}{2}$. Ugyanis az előző, $n-1$ tagból álló minden sorozatból annyi új sorozatot nyertünk, ahány nem üres tagja az előző sorozatnak volt, azaz $n-1$-et. Mert az új sorozat azáltal keletkezett, hogy az összes régiben elhagytunk egy-egy számpárt, és mindig más számpárt hagytunk el. Következik tehát, hogy a mátrix sorainak száma egyenlő $n-1$-szer az előző elrendezésben levő sorozatok számával, azaz az előző gráf összes, egymástól különböző Hamilton-körei számának $n-1$-szerese. Mivel $n-1$ pontból $\frac{(n-2)!}{2}$ egymástól különböző kör képezhető, így az új elrendezésnek

$$(20) \qquad (n-1)\frac{(n-2)!}{2} = \frac{(n-1)!}{2}$$

sora lesz. Esetünkben tehát 3.

Az öt hosszúságú körök előállításánál az összes 4 hosszúságú körökből rendre elhagytuk azok összes éleit és az elhagyott élek végpontjait az új P_5 csúccsal kötjük össze stb.

Teljes indukcióval igen könnyen belátható, hogy bármely n pontból álló gráfra a fenti módon szukcesszíve megadhatók az összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-körök. S így a körök közös élei leszámlálásának elvi akadálya nincs.

3. REKURZIÓS FORMULA $H_n(0)$ ÉRTÉKEINEK MEGHATÁROZÁSÁRA

A rekurziós formula bizonyításánál a fent tárgyalt algoritmusból indulunk ki. Ezt megelőzően azonban néhány megjegyzést teszünk. A $H_n(r)$ definíciójából következik, hogy az új Hamilton-körök közül is kell egyet rögzíteni, amivel összehasonlítjuk a többi új kört. A teljes gráf szimmetriája miatt egyik Hamilton-körnek sincs kitüntetett szerepe, tehát bármelyik új kört rögzíthetjük. Az egyszerűség kedvéért példáinkban így a régi rögzített körből származtatjuk majd az új rögzített kört. Az új rögzített körnek eggyel több éle van mint a réginek, tehát önmagával is eggyel több közös éle van, mint a régi rögzített körnek volt önmagával. Tekintve továbbá, hogy a konstrukciós eljárásnál az élek száma eggyel nő, így *a közös élek száma is legfeljebb csak eggyel növekedhet.*

A továbbiakban azt kell belátni, hogy a körök ilyen generálásánál a következő négy eset lehetséges, amelyeket alább tárgyalunk.

I. *A közös élek száma eggyel nő.*

II. *A közös élek száma nem változik.*

III. *A közös élek száma eggyel csökken.*

IV. *A közös élek száma kettővel csökken.*

Ezeket a tényeket foglalja össze a következő lemma.

Mielőtt a lemmára rátérnénk célszerű a következő jelöléseket bevezetni:

Az n szögpontú gráf Hamilton-köreit lássuk el tetszőleges módon sorszámokkal. A sorszámozás azért tetszőleges, mert egyetlen ilyen kör sem játszik kitüntetett szerepet, és célja csupán az, hogy e köröket megkülönböztethessük egymástól. A körök sorszámát általában görög kis betűkkel $\alpha, \beta, \ldots$ fogjuk jelölni. Jelölje tehát $C_\alpha^{(n)}$ az α-dik Hamilton-kört, ahol α a $0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{(n-1)!}{2} - 1\right)$ körök közül egyik sorszámát jelenti. Legyen $C_0^{(n)}$ az összehasonlítás alapjául szolgáló rögzített kör.

A gráf csúcsait is megszámozzuk, ugyancsak tetszőleges módon, de itt a számokat kis latin betűkkel jelöljük. Így egy él jele pl. (k, l). Ha azt is fel akarjuk tüntetni, hogy (k, l) az α-ik körhöz tartozik, akkor a $(k, l)_\alpha$, ill. $(k, l)_\alpha^{(n)}$ jelölést használjuk. Az utóbbi azt is mutatja, hogy (k, l) a $C_\alpha^{(n)}$ körhöz tartozik, amit még úgy is jelölünk, hogy $(k, l) \in C_\alpha^{(n)}$.

Azt a körülményt, hogy a $C_\alpha^{(n)}$ és a $C_\beta^{(n)}$ köröknek két közös éle van pl. (i, j) és (k, l) így jelöljük:

$$C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)} = (i, j) + (k, l), \tag{21}$$

vagy általánosabban, ha a köröknek q közös élük van:

$$C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)} = \bigcup_{p=1}^{q} (k_p, l_p). \tag{22}$$

A (21), ill. (22) feltünteti azt, hogy konkrétan melyek a közös élek. Ha csupán annyit akarunk kifejezni, hogy a két körnek hány közös éle van, azt így írjuk:

$$|C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)}| = 2, \quad |C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)}| = q.$$

Ha a két körnek nincs közös éle, akkor a $|C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)}| = 0$ és a $C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)} = 0$ jelölések ekvivalensek, ezért ebben az esetben csak az utóbbi jelölést használjuk.

A P_k csúcsnak a $C_\alpha^{(n)}$ körben levő azt a két „*szomszédját*", amelyekkel össze van kötve k_+, ill. k_--szal fogjuk jelölni, ha kell megtoldva ezt még indexekkel is $k_{+\alpha}$, $k_{+\alpha}^{(n)}$ stb.

Mint már említettük az egyszerűség kedvéért a csúcsok számának növelésekor a $C_0^{(n)}$-t a $C_0^{(n-1)}$ körből képezzük elhagyva ennek egy tetszőleges élét és a szabaddá vált csúcsokat az új P_n csúccsal összekötjük, vagyis

$$C_0^{(n)} = C_0^{(n-1)} - (k, l)^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (l, n)^{(n)}. \tag{24}$$

A $C_\eta^{(n-1)}$ $(\eta \neq 0)$ tetszőleges $(n-1)$-ed rendű Hamilton-körnek ezután rendre elhagyjuk egy-egy élét, s az így nyert két elsőfokú csúcsot összekötjük az új P_n csúccsal, pl. az $(i, j)^{(n-1)}$ él elhagyása után így kapjuk meg a

$$C_{\eta^*}^{(n)} = C_\eta^{(n-1)} - (i, j)^{(n-1)} + (i, n)^{(n)} + (j, n)^{(n)}, \tag{25}$$

n-ed rendű Hamilton-kört.

A $C_0^{(n)}$ és $C_{\eta^*}^{(n)}$ közös éleinek a számát kívánjuk meghatározni miközben $(i, j)^{(n-1)}$ rendre a $C_\eta^{(n-1)}$ kör bármely éle lehet. Ezért a $C_0^{(n-1)}$ és a $C_\eta^{(n-1)}$ körök közös éleinek számából fogunk kiindulni és a közös élek számának a változását fogjuk megállapítani, miközben az $(n-1)$ hosszúságú Hamilton-körből az n hosszúságúakra térünk át.

LEMMA. *A $C_0^{(n)}$ és $C_{\eta^*}^{(n)}$ körök közös éleinek száma és a $C_0^{(n-1)}$ és $C_\eta^{(n-1)}$ közös éleinek száma közötti különbség csak a $+1, 0, -1$ és -2 értékeket veheti fel, azaz*

$$\Delta = |C_0^{(n)} \cap C_{\eta^*}^{(n)}| - |C_0^{(n-1)} \cap C_\eta^{(n-1)} = +1, 0, -1, -2. \tag{26}$$

Bizonyítás. Legyen

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\eta^{(n-1)} = \bigcup_{p=1}^{q} (i_p, j_p) = E, \tag{27}$$

vagyis E a két $(n-1)$-ed rendű Hamilton-kör közös éleinek halmaza, míg a közös élek száma:

$$|C_0^{(n-1)} \cap C_\eta^{(n-1)}| = q. \tag{28}$$

A $C_0^{(n)}$ és $C_0^{(n-1)}$ köröknek $n-2$ közös éle van, nem közös éleik a (24) szerint $(k, l)^{(n-1)}$, ill. $(k, n)^{(n)}$ és $(l, n)^{(n)}$. Ezért a (26) értékének megállapításánál a $(k, l)^{(n-1)}$ és E, valamint a $C_\eta^{(n-1)}$ körből elhagyott él és E kölcsönös viszonyából kell kiindulni.

1. $(k, l)^{(n-1)} \in E$, például $k = i_1$, $l = j_1$ és a $C_\eta^{(n-1)}$ körből éppen a $(k, l)^{(n-1)}$ élt hagyjuk el. Így

$$C_{\eta_1}^{(n)} = C_\eta^{(n-1)} - (k, l)^{(n-1)} + (k, n)^n + (l, n)^{(n)}, \tag{29}$$

$$C_\eta^{(n-1)} \cap C_{\eta_1}^{(n)} = \bigcup_{p=2}^{q} (i_p, j_p) = E - (k, l)^{(n-1)} \subset C_0^{(n)}. \tag{30}$$

A (24), (29) és (30) következtében tehát

$$C_0^{(n)} \cap C_{\eta_1}^{(n)} = E - (k, l)^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (l, n)^{(n)}, \tag{31}$$

azaz

$$|C_0^{(n)} \cap C_{\eta_1}^{(n)}| = q + 1. \tag{32}$$

Tehát a $C_0^{(n-1)}$ és $C_\eta^{(n-1)}$ körök egyik kitüntetett közös élét a $(k, l)^{(n-1)}$ élt elhagyva, a $C_0^{(n)}$ és $C_{\eta_1}^{(n)}$ két közös éllel a $(k, n)^{(n)}$ és $(l, n)^{(n)}$ élekkel szaporodik. Könnyen belátható, hogy a (32)-ben szerepel az elérhető legnagyobb érték. Bármely más élt elhagyva ui. nem lép fel két új közös él. Ekkor a $\Delta = +1$ és ez a legnagyobb értéke. (Megjegyezzük azonban, hogy a Δ a maximális $+1$ értéket más esetben is felveheti. A későbbiek során erre is fogunk példát látni.)

2. Legyen $(k, l)^{(n-1)} \in E$, és $q \geqq 2$; hagyjuk el az $(i_1, j_1)^{(n-1)} \in E$ élt, ahol az $(i_1, j_1)^{(n-1)} \neq (k, l)^{(n-1)}$, $(k, k_+)^{(n-1)}$, $(l, l_-)^{(n-1)}$ (a megállapodás szerint ui. $(k, k_-) = (l, l_+) = (k, l)$). Ekkor

$$C_{\eta_2}^{(n)} = C_\eta^{(n-1)} - (i_1, j_1)^{(n-1)} + (i_1, n)^{(n)} + (j_1, n)^{(n)}, \tag{33}$$

$$C_\eta^{(n-1)} \cap C_{\eta_2}^{(n)} = \bigcup_{p=2}^{q} (i_p, j_p) = E - (i_1, j_1)^{(n-1)}. \tag{34}$$

A (24), (33) és a (34) folytán

$$C_0^{(n)} \cap C_{\eta_2}^{(n)} = E - (i_1, j_1)^{(n-1)} - (k, l)^{(n-1)}, \tag{35}$$

amiből

$$|C_0^{(n)} \cap C_{\eta_2}^{(n)}| = q - 2. \tag{36}$$

Az is egyszerűen belátható, hogy a (36)-ban szerepel a Δ elérhető legkisebb értéke, hiszen $C_0^{(n-1)}$ és $C_\eta^{(n-1)}$ két közös élét hagytuk el az $(i_1, j_1)^{(n-1)}$ és a $(k, l)^{(n-1)}$ élt és $C_0^{(n)}$, ill. $C_{\eta_2}^{(n)}$ megalkotásával egyetlen új közös élt sem nyertünk. Ez esetben $\Delta = -2$ és ez a legkisebb értéke.

A Δ értékei eszerint $+1$ és -2 közé eshetnek. Arra kell még példát mutatnunk, hogy a 0 és -1 értékeket valóban fel is veszi.

3. $(k, l)^{(n-1)} \notin E$; $(k, k_+)^{(n-1)} \in E$, pl. $k = i_1$, $k_+ = j_1$ és az $(i_1, j_1)^{(n-1)} \in E$ élt hagyjuk el a $C_\eta^{(n-1)}$ körből. Így

$$C_{\eta_3}^{(n)} = C_\eta^{(n-1)} - (k, k_+)^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_+, n)^{(n)}, \tag{37}$$

$$C_\eta^{(n-1)} \cap C_{\eta_3}^{(n)} = E - (i_1, j_1)^{(n-1)} \subset C_0^{(n)}. \tag{38}$$

A (24), (37) és (38) értelmében

$$C_0^{(n)} \cap C_{\eta_3}^{(n)} = E - (i_1, j_1)^{(n-1)} + (k, n)^{(n)}, \tag{39}$$

és így

$$|C_0^{(n)} \cap C_{\eta_3}^{(n)}| = q. \tag{40}$$

Ebben az esetben $\Delta = 0$.

4. Legyen $(k, l)^{(n-1)} \in E$, ahol $q \geqq 1$ és a $C_\eta^{(n-1)}$ körből az $(i, j)^{(n-1)}$ élt hagyjuk el, ahol az $(i, j)^{(n-1)} \notin E$. Így

$$C_{\eta_4}^{(n)} = C_\eta^{(n-1)} - (i, j)^{(n-1)} + (i, n)^{(n)} + (j, n)^{(n)}, \tag{41}$$

$$C_\eta^{(n-1)} \cap C_{\eta_4}^{(n)} = E. \tag{42}$$

A (24), (41) és (42) miatt

$$C_0^{(n)} \cap C_{\eta_4}^{(n)} = E - (k, l)^{(n-1)}, \tag{43}$$

vagyis

$$|C_0^{(n)} \cap C_{\eta_4}^{(n)}| = q - 1. \tag{44}$$

Ekkor $\Delta = -1$.

S ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Mindezek felhasználásával be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

4. TÉTEL. *Az n szögpontú teljes gráfban egy adott Hamilton-körhöz megadható összes olyan, egymástól különböző Hamilton-körök száma, amelyeknek az adott körrel nincs közös éle a következő rekurziós formulával állítható elő:*

$$H_n(0) = (n-5)\, H_{n-1}(0) + \frac{2(n-4)}{n-1} H_{n-1}(1) + \left[\frac{2}{n-1} H_{n-1}(2) - B(n)\right], \tag{45}$$

ahol a $B(n)$ értéke:

$$B(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \leqq 7, \\ 4H_{n-3}(0), & \text{ha} \quad n = 8, \\ 4\left[H_{n-3}(0) + \dfrac{H_{n-3}(1)}{n-3}\right], & \text{ha} \quad n = 9, \\ 4\left[H_{n-3}(0) + \dfrac{H_{n-3}(1)}{n-3} + H_{n-5}(0)\right], & \text{ha} \quad n = 10, \end{cases} \tag{46}$$

és így tovább, azaz

$$(47)\qquad B(2m) = 4\left\{\sum_{j=1}^{m-4}\left[H_{2m-(2j+1)}(0)+\frac{H_{2m-(2j+1)}(1)}{2m-(2j+1)}\right]+H_5(0)\right\}; \qquad m \geqq 4,$$

és

$$(47')\qquad B(2m+1) = 4\sum_{j=1}^{m-3}\left[H_{2m+1-(2j+1)}(0)+\frac{H_{2m+1-(2j+1)}(1)}{2m+1-(2j+1)}\right]; \qquad m \geqq 4.^2$$

A 4. tétel bizonyítása. A (45) formula bizonyításához vegyük sorra a jobb oldalon álló tagokat.

Könnyen belátható, hogy a (45) jobb oldalának *első tagja* $(n-5)H_{n-1}(0)$. Ha ui. a $H_{n-1}(0)$ elemszámú halmaz köreiből a fent ismertetett módon képezzük az összes lehetséges új köröket, akkor ezeknek az új rögzített $C_0^{(n)}$ Hamilton-körrel vagy csak 0, vagy csak *egy* közös éle lehet. A (45) első tagjával kapcsolatban a fent részletezett esetek közül tehát csak az I. és II. következhet be, míg a III. és IV. nem fordulhat elő, hiszen a 0 közös élek száma nem csökkenhet, mert a negatív élek nincsenek értelmezve.

Ezek után már csak azt kell belátni, hogy $n-5$ *esetben kapunk* 0 *közös élű kört.*

Ha a $H_{n-1}(0)$ elemszámú csoportba tartozó köröket vizsgáljuk, akkor tehát a $C_\alpha^{(n-1)}$ olyan kör, amelyre

$$(48)\qquad C_0^{(n-1)} \cap C_\alpha^{(n-1)} = 0.$$

A kérdés tehát az, hogy a $C_\alpha^{(n-1)}$ kör egy-egy élét rendre elhagyva és a szabad csúcsokat P_n-el összekötve, az így nyert gráfoknak hány közös éle lesz az új $C_0^{(n)}$ rögzített körrel. Elhagyva először a (k, k_+), (k, k_-), (l, l_+), (l, l_-) éleket azt nyerjük, hogy

$$(49)\qquad \begin{aligned} C_{\alpha_1}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (k, k_+)_\alpha^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_+, n)^{(n)}, \\ C_{\alpha_2}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (k, k_-)_\alpha^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_-, n)^{(n)}, \\ C_{\alpha_3}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (l, l_+)_\alpha^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}, \\ C_{\alpha_4}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (l, l_-)_\alpha^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_-, n)^{(n)}. \end{aligned}$$

A (24), (48) és a (49) szerint tehát

$$(50)\qquad \begin{aligned} C_0^{(n)} \cap C_{\alpha_1}^{(n)} &= (k, n), \quad C_0^{(n)} \cap C_{\alpha_2}^{(n)} = (k, n), \\ C_0^{(n)} \cap C_{\alpha_3}^{(n)} &= (l, n), \quad C_0^{(n)} \cap C_{\alpha_4}^{(n)} = (l, n), \end{aligned}$$

azaz a $C_0^{(n)}$ rögzített körnek a $C_{\alpha_1}^{(n)}$, $C_{\alpha_2}^{(n)}$, $C_{\alpha_3}^{(n)}$, $C_{\alpha_4}^{(n)}$ körökkel rendre egy-egy közös éle van, összesen tehát 4 ilyen kör van. Vagy ugyanezt szavakkal leírva: a konstrukciós eljárásból nyilvánvalóan következik, hogy ezek a közös élek csak a $C_0^{(n)}$ kör új élei közül az egyikkel lehetnek közösek (hiszen az eredeti rögzített $C_0^{(n-1)}$ kör éleivel 0 közös élt tartalmazó körökből indultunk ki). De ha ez így van, akkor a döntő szerepet mindig az új rögzített kör generálásánál elhagyott él végpontjai a P_k és a P_l csúcsok játszák. Vagyis valahányszor olyan élt hagyunk el, a két új él bevezetése céljából, aminek az egyik végpontja a P_k, vagy a P_l csúcs, akkor az új körnek

[2] Megjegyezzük, hogy a $B(n)$ értékekre egy következő dolgozatunkban sokkal egyszerűbb formulát adunk meg, amelyek bizonyítása hasonló az itt következőkhöz. Erre a lehetőségre Rényi Alfréd hívta fel figyelmemet, amiért köszönönetet mondok.

az új rögzített körrel lesz egy közös éle. Abból a tényből pedig, hogy eleve a $H_{n-1}(0)$ elemszámú halmazba tartozó körökből indultunk ki, következik, hogy ehhez a két csúcshoz összesen négy él illeszkedik. *Tehát bármely n hosszúságú Hamilton-kör esetén négy olyan, egymástól különböző kört generálhatunk, amelyeknek egy rögzített körrel 1 közös éle van, feltéve, hogy a kiindulási,* $(n-1)$ *hosszúságú köröknek nem volt közös élük.*

A generálás során nyert összes többi új kör szükségszerűen nem tartalmaz közös élt az új rögzített körrel. Mivel egy n hosszúságú új kör esetén az eredeti körnek $n-1$ éle van, ily módon *az új rögzített körrel* 0 *közös élt tartalmazó körök száma* $(n-1)-4 = (n-5)$.

Ezt a tényt formálisan is beláthatjuk a következő módon:

Legyen $(i_p, j_p) \in C_\alpha^{(n-1)}$ olyan él, amelyre $i_p \neq k, l$, és $j_p \neq k, l$, akkor

$$C_{\alpha p}^{(n)} = C_\alpha^{(n-1)} - (i_p, j_p)_\alpha^{(n-1)} + (i_p, n)^{(n)} + (j_p, n)^{(n)}, \quad p = 5, 6, \ldots, n-1. \tag{51}$$

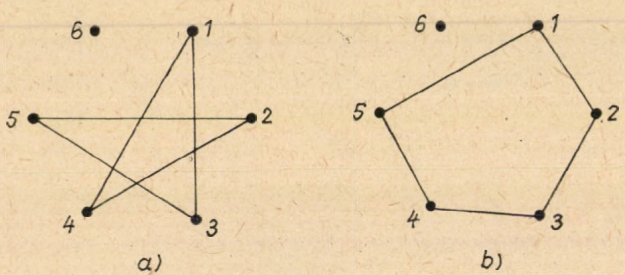
A (24), (48) és (51) formulák szerint

$$C_0^{(n)} \cap C_{\alpha p}^{(n)} = 0, \quad (p = 5, 6, \ldots, n-1). \tag{52}$$

A $C_0^{(n)}$ rögzített körnek a $C_{\alpha p}^{(n)}$ körökkel tehát nincs közös éle, A $C_{\alpha p}^{(n)}$ körök száma tehát $n-5$.

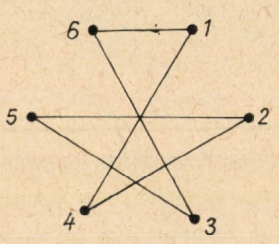
Mielőtt a bizonyítást folytatnánk, nézzünk meg egy konkrét példát az eddig elmondottakra, rajzokkal illusztrálva:

Legyen most az eredeti, $C_0^{(5)}$ rögzített Hamilton-kör az ötágú csillag, akkor a vele közös élt nem tartalmazó $C_\alpha^{(5)}$ típusú kör az ötszög gráf. Vegyük fel ezekhez a P_6 csúcsot (11. ábra).



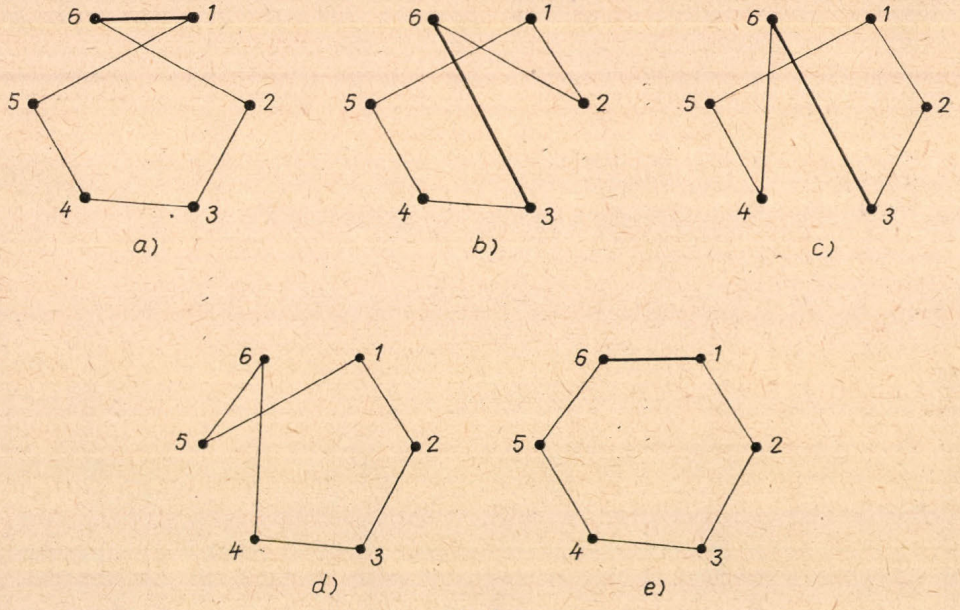
11. ábra

Legyen az új rögzített $C_0^{(6)}$ kör pl. az a Hamilton-kör, amelyet a 11a ábrán levő körből a $(k, l) = (1, 3)$ él elhagyásával, és helyette az előírásnak megfelelően az (1, 6) és a (3, 6) élek bevezetése által nyerünk, azaz a következő, 12. ábra köre:



12. ábra

Képezzük most a 11. ábra b) köréből az összes lehetséges, egymástól különböző új $C_{\alpha_i}^{(6)}$ köröket rendre az (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) és az (5, 1) élek elhagyásával, és az elhagyott él mindkét végpontjának a P_6 csúccsal való összekötésével, ezek a 13. ábrán láthatók. A 13. ábráról leolvasható, hogy az a), b), c) és e) köröknek egy közös (a vastagon kihúzott) éle van a 12. ábra körével, míg a d) körnek 0 közös éle van.



13. ábra

Ez minden olyan esetben fennáll, amikor az eredeti köröknek nem volt közös élük az eredeti rögzített körrel. Az ilyen körök száma pedig a definíció szerint $H_{n-1}(0)$ ezért a (45) első tagját helyesen írtuk fel. Vagyis *az összes lehetséges, egymástól különböző, olyan Hamilton-körök száma, amelyeknek egy rögzített körrel nincs közös éle, és előzőleg a* 0 *közös élű körökből a fenti módon generálhatók:*

(53) $$(n-5)\,H_{n-1}(0).$$

És ezzel a 4. tétel (45) kifejezésének első tagját igazoltuk.

Vegyük észre azonban, hogy ennél többet is bizonyítottunk, *kimutattuk ui., hogy az eredetileg* $n-1$ *hosszúságú, s egy megadott rögzített kör éleivel* 0 *közös élekkel rendelkező körökből összesen*

(54) $$4H_{n-1}(0)$$

számú olyan kör generálható, amely egy adott n hosszúságú körrel pontosan egy közös élt tartalmaz. Más szavakkal, azt is bizonyítottuk, hogy az 1 közös éllel rendelkező körök számának meghatározására szolgáló rekurziós formula úgy kezdődik, hogy

(55) $$H_n(1) = 4H_{n-1}(0) + \ldots$$

A 4. tétel bizonyításához a következő lépés annak igazolása, hogy a (45) *második tagja* $\dfrac{2(n-4)}{n-1}\,H_{n-1}(1)$ alakú.

Ehhez azt az esetet kell elemeznünk, amikor a kiindulási, $n-1$ hosszúságú köröknek eleve egy közös éle volt az eredeti, rögzített $C_0^{(n-1)}$ Hamilton-körrel. Már az előző meggondolásaink során nyilvánvalóvá vált, hogy a konstrukciós eljárásunk lényege az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör generálásánál elhagyott $(k, l)^{(n-1)}$ régi, ill. a bevezetett két új él a $(k, n)^{(n)}$ és $(l, n)^{(n)}$ helyzetéből adódik. Célszerű tehát a generálandó köreinket aszerint csoportosítani, hogy az a bizonyos, eredetileg közös él milyen helyzetben lehetett az új rögzített kör generálásánál elhagyott élhez viszonyítva. Ily módon az összes köröket három csoportba oszthatjuk:

1. *Csoport.* Az eredetileg közös él pontfüggetlen az új rögzített kör generálásánál elhagyott éltől.

2. *Csoport.* A régi rögzített $C_0^{(n-1)}$ körrel eredetileg közös él azonos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel. Más szavakkal, az új rögzített kör generálásánál pontosan az eredetileg közös élt hagytuk el.

3. *Csoport.* Az eredetileg közös él az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) él egyik szomszédos éle, azaz az elhagyott éllel volt egy közös csúcsa.

Más eset nem lehetséges.

Vegyük sorra most ezen csoportosításnak megfelelően generálható, összes lehetséges új köröket és számláljuk meg az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör éleivel közös élekkel rendelkező köröket.

1. *Csoport.* A csoportosítási kritérium miatt a közös él pontfüggetlen az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éltől, s így az összes generálható új körök között csak abban az *egy* esetben kapunk az új rögzített $C_0^{(n)}$ körrel 0 közös élű kört, amikor az új körök generálásánál, a szóban forgó közös él elhagyására kerül sor. Az összes többi esetekben ez az él változatlanul közös marad a $C_0^{(n)}$ kör megfelelő élével. Négy esetben ehhez az egy közös élhez még egy további közös él is járul. Azon négy esetről van ui. szó, amikor az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) él végpontjaihoz, a P_k és a P_l csúcsokhoz illeszkedő élek közül hagyjuk el valamelyiket. Ilyen él 4 db. van, mert abból indultunk ki, hogy az eredeti körnek az eredeti rögzített körrel csak egy közös éle volt, amely egyben pontfüggetlen volt az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör generálásánál elhagyott (k, l) éltől.

Ily módon tehát 1 új körnek 0 közös éle lesz az új rögzített körrel, 4 új körnek két közös éle lesz és a többi $(n-1)-1-4 = n-6$ kör esetén marad az 1 közös él.

De bizonyítsuk is be az eddig elmondottakat. Most a

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\beta^{(n-1)} = (i_1, j_1), \tag{56}$$

ahol az $(i_1, j_1) \neq (k, k_+)_\beta^{(n-1)}$, $(k, k_-)_\beta^{(n-1)}$, $(l, l_+)_\beta^{(n-1)}$, $(l, l_-)_\beta^{(n-1)}$. Az $(i_1, j_1) = (k, l)$ eset nem fordulhat elő, mert $(k, l) \in C_0^{(n-1)}$, de $(k, l) \notin C_\beta^{(n-1)}$.

Az előzőkhöz hasonlóan így

$$C_0^{(n)} \cap C_\beta^{(n-1)} = (i_1, j_1), \tag{57}$$

$$C_{\beta_1}^{(n)} = C_\beta^{(n-1)} - (i_1, j_1)_\beta^{(n-1)} + (i_1, n)^{(n)} + (j_1, n)^{(n)}, \tag{58}$$

ahonnan

$$C_0^{(n)} \cap C_{\beta_1}^{(n)} = 0, \tag{59}$$

azaz a $C_0^{(n)}$ körnek (lásd (24)) a $C_{\beta_1}^{(n)}$ körrel nincs közös éle. Ha az új kör generálásánál a szomszédos éleket hagyjuk el, akkor a következő összefüggésekre jutunk:

$$
\begin{aligned}
C_{\beta_2}^{(n)} &= C_\beta^{(n-1)} - (k, k_+)_\beta^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_+, n)^{(n)}, \\
C_{\beta_3}^{(n)} &= C_\beta^{(n-1)} - (k, k_-)_\beta^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_-, n)^{(n)}, \\
C_{\beta_4}^{(n)} &= C_\beta^{(n-1)} - (l, l_+)_\beta^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}, \\
C_{\beta_5}^{(n)} &= C_\beta^{(n-1)} - (l, l_-)_\beta^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_-, n)^{(n)}.
\end{aligned} \tag{60}
$$

Innen a (24) (56) és (60) kifejezések szerint

$$
\begin{aligned}
C_0^{(n)} \cap C_{\beta_2}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (k, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\beta_3}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (k, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\beta_4}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (l, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\beta_5}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (l, n).
\end{aligned} \tag{61}
$$

Tehát a $C_0^{(n)}$ rögzített körnek a $C_{\beta_2}^{(n)}$, $C_{\beta_3}^{(n)}$, $C_{\beta_4}^{(n)}$ és a $C_{\beta_5}^{(n)}$ körökkel rendre két-két közös éle van, az ilyen körök száma tehát 4. Az összes többire pedig igaz a következő:

$$
C_{\beta_p}^{(n)} = C_\beta^{(n-1)} - (i_p, j_p)_\beta^{(n-1)} + (i_p, n)^{(n)} + (j_p, n)^{(n)}, \quad (p > 5) \tag{62}
$$

és így

$$
C_0^{(n)} \cap C_{\beta_p}^{(n)} = (i_1, j_1). \qquad (p = 6, \ldots, (n-1)). \tag{63}
$$

A $C_0^{(n)}$ rögzített körnek a $C_{\beta_p}^{(n)}$ körökkel, számszerint $n-1-1-4 = n-6$ körre 1 közös éle van.

A $H_n(r)$ függvény definíciója szerint a $C_\beta^{(n-1)}$ típusú körök száma pontosan $H_{n-1}(1)$. A teljes gráf szimmetriája miatt bármely kiválasztott él $\dfrac{H_{n-1}(1)}{n-1}$ esetben lehet az eredeti, rögzített $C_0^{(n-1)}$ körrel az egyetlen (i_1, j_1) közös él. Másrészt az (i_1, j_1) közös él $n-4$ él helyét foglalhatja el. Tekintve, hogy $(k, l) \in C_0^{(n-1)}$ és így a $(k, k_+) = (l, l_-) = (k, l)$, azaz a (k, k_-), (k, l) és az (l, l_+) élek kivételével az összes többi $n-1-3$ él eljátszhatja az (i_1, j_1) él szerepét.

Következik tehát, hogy *az 1. csoportban generálható, összes lehetséges, egymástól különböző, olyan új körök száma , amelyeknek egy adott, rögzített körrel 0 közös éle van:*

$$
(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}. \tag{64}
$$

Az új rögzített $C_0^{(n)}$ körrel pontosan 1 közös éle

$$
(n-6)(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}, \tag{65}
$$

körnek van. Továbbá 2 közös éle:

$$
4(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1} \tag{66}
$$

Hamilton-körnek van, feltéve, hogy az eredeti, kiindulási $n-1$ hosszúságú köröknek 1 közös élük volt a $C_0^{(n-1)}$ körrel.

S ezzel az 1. csoportban generálható összes köröknek egy rögzített kör éleivel közös élekkel rendelkező köreit megszámláltuk.

2. *Csoport.* Számláljuk most meg, hogy a 2. csoportba sorolható, a $C_0^{(n-1)}$ rögzített körrel eredetileg 1 közös élt tartalmazó körök által generálható új köröknek hány közös éle lesz egy rögzített új $C_0^{(n)}$ körrel.

A csoportosítási kritérium miatt legyen tehát a $C_\gamma^{(n-1)}$ olyan kör, hogy

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\gamma^{(n-1)} = (k, l). \tag{67}$$

Ekkor azt írhatjuk, hogy a $C_\gamma^{(n-1)}$ körök esetén a $k_+ = l$ és $l_- = k$. A (24) és (67) folytán

$$C_0^{(n)} \cap C_\gamma^{(n-1)} = 0. \tag{68}$$

Más szavakkal, pont az eredetileg közös élt hagytuk el az új rögzített kör generálásánál. Így most a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
C_{\gamma 1}^{(n)} &= C_\gamma^{(n-1)} - (k, l)_\gamma^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (l, n)^{(n)}, \\
C_{\gamma 2}^{(n)} &= C_\gamma^{(n-1)} - (k, k_-)_\gamma^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_-, n)^{(n)}, \\
C_{\gamma 3}^{(n)} &= C_\gamma^{(n-1)} - (l, l_+)_\gamma^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}, \\
C_{\gamma p}^{(n)} &= C_\gamma^{(n-1)} - (i_p, j_p)_\gamma^{(n-1)} + (i_p, n)^{(n)} + (j_p, n)^{(n)}, \qquad (p = 4, 5, \ldots, n-1).
\end{aligned} \tag{69}$$

Összevetve ezeket az összefüggéseket a (24)-gyel, azt nyerjük, hogy

$$\begin{gathered}
C_0^{(n)} \cap C_{\gamma 1}^{(n)} = (k, n) + (l, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\gamma 2}^{(n)} = (k, n); \quad C_0^{(n)} \cap C_{\gamma 3}^{(n)} = (l, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\gamma p}^{(n)} = 0, \quad (p = 4, 5, \ldots, n-1).
\end{gathered} \tag{70}$$

Tehát a $C_0^{(n)}$ rögzített körnek 2 közös éle van a $C_{\gamma 1}^{(n)}$ körrel, 1 közös éle van a $C_{\gamma 2}^{(n)}$ és $C_{\gamma 3}^{(n)}$ körökkel, az összes többi, azaz számszerint $n-4$ körrel 0 közös éle van.

Ez esetben tehát az új rögzített kör generálásánál elhagyott él volt az eredeti, $n-1$ hosszúságú körök egyetlen közös éle. Az előzőkben már beláttuk, hogy egy él $\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}$-szer lehet az egyetlen közös él. Az új körök generálásánál $n-4$ esetben kapunk az új rögzített kör éleivel közös élű köröket. És így *a 2. csoportban generálható, egy új rögzített körrel* 0 *közös élű körök száma:*

$$(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}. \tag{71}$$

Tekintve továbbá, hogy bármilyen nagy n hosszúságú körben egy kitüntetett élnek két szomszédos éle van, következik, hogy *a 2. csoportban generálható, összes lehetséges olyan körök száma, amelyeknek egy adott Hamilton-körrel* 1 *közös éle van:*

$$2\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}. \tag{72}$$

Bármilyen n hosszúságú kör esetén is csak egy olyan él lehet, amely egy adott éllel

azonos, s ezért *az összes lehetséges, a 2. csoportban generálható, s egy adott körrel 2 közös élt tartalmazó körök száma:*

$$\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}. \tag{73}$$

S ezzel az összes 2. csoportban generálható, s egy adott kör éleivel közös éleket tartalmazó köröket megszámláltuk.

3. *Csoport.* (Jelen esetben is a $k_- = l$ és az $l_+ = k$ az eredeti $C_0^{(n-1)}$ rögzített körben.) Legyen most

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\delta^{(n-1)} = (k, k_+), \tag{74}$$

akkor

$$C_0^{(n)} \cap C_\delta^{(n-1)} = (k, k_+), \tag{75}$$

és

$$\begin{gathered}
C_{\delta_1}^{(n)} = C_\delta^{(n-1)} - (k, k_+)_\delta^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_+, n)^{(n)}, \\
C_0^{(n)} \cap C_{\delta_1}^{(n)} = k, n), \\
C_{\delta_2}^{(n)} = C_\delta^{(n-1)} - (k, k_-)_\delta^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_-, n)^{(n)}, \\
C_0^{(n)} \cap C_{\delta_2}^{(n)} = (k, k_+) + (k, n), \\
C_{\delta_3}^{(n)} = C_\delta^{(n-1)} - (l, l_+)^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}, \\
C_0^{(n)} \cap C_{\delta_3}^{(n)} = (k, k_+) + (l, n), \\
C_{\delta_4}^{(n)} = C_\delta^{(n-1)} - (l, l_-)_\delta^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}, \\
C_0^{(n)} \cap C_{\delta_4}^{(n)} = (k, k_+) + (l, n), \\
C_{\delta_p}^{(n)} = C_\delta^{(n-1)} - (i_p, j_p)_\delta^{(n-1)} + (i_p, n)^{(n)} + (j_p, n)^{(n)}, \\
C_0^{(n)} \cap C_{\delta_p}^{(n)} = (k, k_+); \qquad (p = 5, \ldots, n-1).
\end{gathered} \tag{76}$$

Vagyis a $C_0^{(n)}$ rögzített új körnek $n-4$ körrel van 1, és három körrel van 2 közös éle Ez esetben a $C_0^{(n)}$ körrel 0 közös élű kört nem kapunk.

Hasonló eredményre jutunk, ha a (74) jobb oldalán a (k, k_+) helyett az (l, l_-) szerepel.

Tehát *a 3. csoportban generálható, s egy adott körrel 0 közös élt tartalmazó körök száma* 0.

Az új rögzített körrel pontosan 1 közös éle van:

$$2(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}, \tag{77}$$

számú körnek.

A 3. csoportban generálható és egy adott körrel 2 közös élt tartalmazó körök száma:

$$6\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}. \tag{78}$$

S ezzel a 3. csoportban képezhető, összes olyan köröket, amelyek egy rögzített kör éleivel közös éleket tartal maznak, megszámláltuk.

A 4. tétel (45) formulája második tagjának igazolásához most már csak összegeznünk kell az 1., 2. és a 3. csoportban generálható összes 0 közös élekkel rendelkező köröket. Ezek száma a (64) és (71) felhasználásával:

$$(79) \qquad (n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}+(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}=\frac{2(n-4)}{n-1}H_{n-1}(1),$$

amit bizonyítani akartunk.

Vegyük észre azonban, hogy ennél sokkal többet is bizonyítottunk. Összegezzük ui. a (65), (72) és a (77) kifejezéseket. Ez az (55), azaz egy megadott körrel 1 közös éllel rendelkező körök számának meghatározására szolgáló rekurziós formula második tagját is megadja, vagyis

(80)

$$(n-6)(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}+2\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}+2(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}=\frac{(n-4)^2+2}{n-1}H_{n-1}(1),$$

ahonnan

$$(81) \qquad H_n(1)=4H_{n-1}(0)+\frac{(n-4)^2+2}{n-1}H_{n-1}(1)+\mathscr{C}_1(n)H_{n-1}(2)+\mathscr{C}_2(n)H_{n-1}(3).$$

Megjegyezzük, hogy a $\mathscr{C}_1(n)$ és $\mathscr{C}_2(n)$ is meghatározható a fenti módon, azonban a lehetséges csoportok száma nő. Komplikálja továbbá a megszámlálást a (45)-ben szereplő $B(n)$ értékek különbözősége.

Mindezen felül bebizonyítottuk még azt is, hogy az adott, rögzített körrel 2 közös élt tartalmazó körök meghatározására szolgáló rekurziós formula úgy kezdődik, hogy

$$(82) \qquad H_n(2)=\frac{4n-9}{n-1}H_{n-1}(1)+\ldots,$$

mivel a (66), (73) és a (78) kifejezések összege:

$$(83) \qquad 4(n-4)\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}+\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}+6\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}=\frac{4n-9}{n-1}H_{n-1}(1).$$

Ezekután már csak *a* (45) *harmadik tagjának az igazolása* van hátra.

Ehhez mindazon körök generálását kell elemeznünk, amelyeknek előzően 2 közös éle volt egy megadott $C_0^{(n-1)}$ körrel. Nézzük most az eredetileg két közös él lehetséges helyzetét az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) élhez viszonyítva.

1. *Eset.* Az eredetileg két közös él mindegyike pontfüggetlen az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éltől.

2. *Eset.* A régi rögzített $C_0^{(n-1)}$ körrel eredetileg közös élek közül az egyik azonos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel, a második közös él pedig ettől pontfüggetlen.

3. *Eset.* A régi rögzített körrel eredetileg közös élek közül az egyik azonos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel, a másik közös él szomszédos az elhagyott éllel.

4. *Eset.* A régi rögzített $C_0^{(n-1)}$ körrel eredetileg két közös éllel rendelkező körök közös élei közül az egyik szomszédos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel, a másik közös él pedig az elhagyott éltől pontfüggetlen.

5. *Eset.* Mindkét, eredetileg közös él szomszédos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel.

Az eddig elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy a fenti 5 eset közül egy új körrel 0 közös élű kört csak a 2. esetben kaphatunk. Ez esetben fordul csak elő, hogy az eredetileg mindkét közös élt elhagyjuk. (Lásd a lemma bizonyításának 2. pontja alatt elmondottakat.) Az összes többi esetekben az egyik él közös marad.

A továbbiakban a feladat tehát a 2. esetbe sorolható körök számának a meghatározása.

A $H_n(r)$ függvény definíciója és a teljes gráf szimmetriája miatt

$$2\frac{H_{n-1}(2)}{n-1} \tag{84}$$

esetben lehet egy kiválasztott él az eredeti $C_0^{(n-1)}$ rögzített körrel 2 közös éllel rendelkező körök egyik kitüntetett éle. Azonban a 2. esetnek megfelelő osztályozási kritérium miatt ennek az eredetileg két közös élnek egymástól pontfüggetlen élnek kell lennie. Így a (84)-ből le kell vonni az összes olyan $H_{n-1}(2)$ elemszámú halmazba tartozó körök számát, amelyek ugyanakkor a kitüntetett (k, l) él szomszédos élei is. Más szavakkal, azt az esetet, amikor a két közös él egy 2 hosszúságú utat alkot és ezek élei közül az egyik a kitüntetett, vagyis az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) él. Jelentse $B(n)$ ezeknek a 2 hosszúságú utakkal rendelkező köröknek a számát.

S ezzel a 4. tétel (45) formulájának a bizonyítása kész.

Hátra van még a 4. tétel (46) formulájának a bizonyítása, azaz *a $B(n)$ értékeinek a meghatározása.*

Nézzük először a jobb oldal első sorát.

Az $n=3, 4, 5, 6, 7$ esetekben ez az osztályozási követelmény automatikusan teljesül. Ami azt jelenti, hogy az $n=4, 5, 6, 7$ esetekben azt állítjuk, hogy a kiindulási, azaz az $n-1$ hosszúságú Hamilton-köröket tekintve ezekben nem lehetnek egy rögzített kör éleivel 2 hosszúságú közös utak, ha nincs legalább még egy további közös élük is, és így a (84)-ből nem kell levonni semmit.

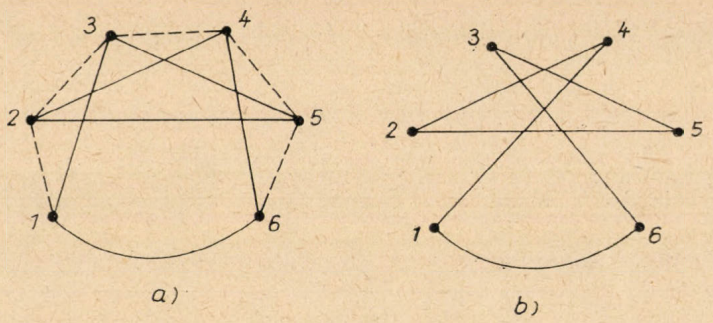
De ezt a tényt az 1., 2. és a 3. tételek bizonyításánál már rendre beláttuk. Az $n=7$, ill. az $n-1 = 6$ esetén elég csak a 3. tétel bizonyítására hivatkoznunk. A 3. tétel bizonyításának 1. esetében megmutattuk ui., hogy ha rögzítjük egy adott kör pontjait, akkor *a körből egy 4 hosszúságú utat elhagyva és helyette új, az elhagyott, régi élektől különböző éleket nem lehet úgy bevezetni, miközben a többi éleket változatlanul hagyjuk, (ezek száma jelen esetben 2), hogy az új konfiguráció is egyetlen, az eredeti körrel azonos hosszúságú, de attól nem kevesebb mint négy élben különböző kört alkosson.* (5. ábra.)

Az $n=6$ esetén a 2. tétel 1. csoportjában bizonyítottak következménye a fenti állítás (2. ábra) stb.

S ezzel a (46) első sorát be is bizonyítottuk, azaz megmutattuk, hogy az $n=5, 6, 7$ esetekben a $B(n)=0$.

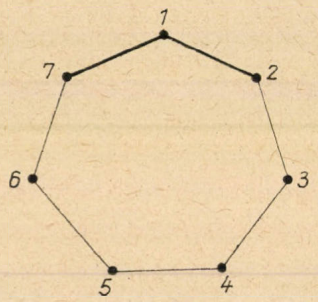
Az $n=8$, ill. $n-1 = 7$ esetben a rögzített körrel két közös élt tartalmazó körök közös élei már 2 hosszúságú utat is alkotnak. Hogy erről meggyőződhessünk elég csak egy pillantást vetnünk a következő 14. ábrára. Ezen 2 hosszúságú utakkal rendelkező olyan köröknek a számát kell tehát meghatározni, amelyekben a közös utak egy megadott él szomszédai és ezt kell levonni a (84)-ből.

Tekintve, hogy az összes Hamilton-körök egymástól különbözőek egy bizonyos 2 hosszúságú út annyiszor ismétlődhet az $n-1$ hosszúságú körök között, ahány-

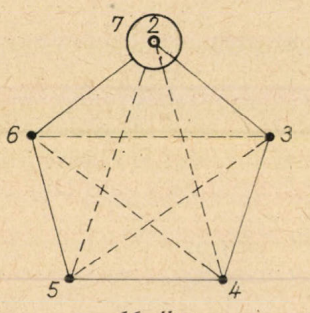


14. ábra

féleképp az összes többi, azaz az $n-1-2$ él különbözhet egymástól. Ezek száma a $H_n(r)$ definíciója szerint $H_{n-3}(0)$, de ehhez még egy szorzótényező is járul. Tekintsük ui. a következő 15. és 16. ábrákat:



15. ábra



16. ábra

Legyen az eredetileg közös út a $\mu(P_7, P_1, P_2)$. Ezt a μ utat zsugorítsuk egyetlen ponttá, és jelöljük ezt a pontot dupla karikával, a külsőt P_7-tel és a belsőt P_2-vel.

A 16. ábráról leolvasható, hogy a $H_{n-3}(0)$ egy 2-es faktorral azért szorzódik, mert a $H_{n-3}(0)$ köröket a μ útba kétféle módon lehet bekötni. Akkor is 0 közös éleket kapunk ui., ha a (2, 4) és (5, 7) élek helyett a (4, 7) és az (5, 2) éleket választjuk. De ez a tény nemcsak a 7 hosszúságú, hanem bármilyen nagy n hosszúságú körre is igaz.

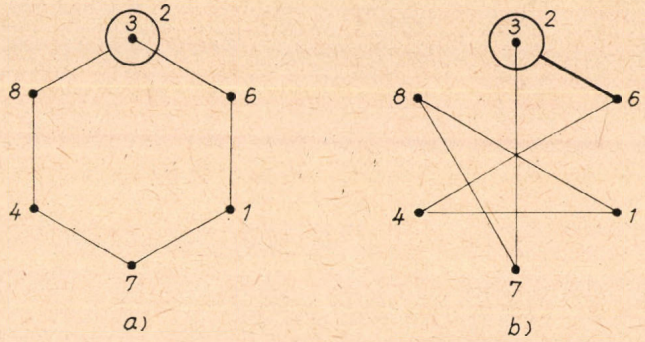
További 2-es faktor adódik onnan is, hogy a kitüntetett, azaz az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) élnek két szomszédja van, és $2H_{n-3}(0)$-szor az egyik szomszéddal alkot egy 2 hosszúságú utat és máskor, ugyancsak $2H_{n-3}(0)$-szor a másik szomszéddal.

Ezzel tehát a (46) második sorának, továbbá a (46) harmadik sor első tagjának a helyességét igazoltuk. Megjegyezzük még, hogy az itt elmondottak az $n \leqq 7$ esetre is érvényesek, akkor azonban a $H_{n-3}(0) = 0$.

Hátra van még a $B(n)$ értékének igazolása az $n = 9$ esetén, vagyis a (46) harmadik sora második tagjának az igazolása.

Az előző meggondolásunk szerint, ha most az $n = 9$, azaz az $n - 1 = 8$ esetben akarjuk megszámlálni egy kitüntetett (k, l) él és a vele szomszédos élek által alkotott, s egy rögzített körrel 2 hosszúságú közös utakkal rendelkező köröket, akkor a fenti zsugorítási eljárás után nem elég csak a $H_{n-3}(0)$ elemű halmaz köreire szorítkoznunk. Előfordul ui. az az eset, hogy a zsugorított ábrán, a zsugorított rögzített

körhöz viszonyítva, olyan 1 közös éllel rendelkező köröket kapunk, ami az előző, nem zsugorított körben nem volt közös él az eredeti rögzített kör élével. Tekintsük ui. a következő 17. ábrát:



17. ábra

Legyen a 17. ábra a) köre a zsugorított, rögzített kör. Akkor a 17. ábra b) köre a $H_n(r)$ definíciója szerint a $H_{n-3}(1)$ elemszámú halmaz körei közé tartozik. A valóságban azonban a nem zugorított körben a (6, 3) és nem a (6, 2) él szerepelt. Ezek szerint a (84)-ből nemcsak a $4H_{n-3}(0)$-at kell levonni, hanem azt a számot is ahányféleképp egy megadott él a rögzített kör egy élével közös lehet, ez pedig a definíció szerint, valamint a teljes gráf szimmetriája miatt

$$\frac{H_{n-3}(1)}{n-3}. \tag{85}$$

De a (85)-höz is járul még egy 4-es faktor. Tekintve, hogy a zsugorított körben a $P_{3,2}$-vel jelzett dupla csúcsba két él fut össze, ezért olyan körök is vannak, amelyekben ezt a szerepet a (8, 3) él játsza. Másrészt a nem zsugorított körben a kitüntetett, azaz az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör generálásánál elhagyott (k, l) élnek is két szomszédja van.

S ezzel a (46) harmadik sora második tagjának a helyességét is beláttuk.

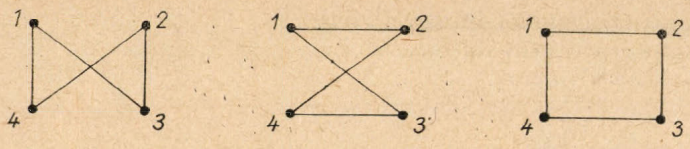
Meg kívánjuk jegyezni, hogy az itt most elmondottak az $n=8$ esetben, sőt az $n \leqq 7$ esetekben is igazak, csak akkor 0 a száma azon $n-3$ hosszúságú köröknek, amelyeknek egy megadott körrel 1 közös éle van.

Folytatva ezt az eljárást, ha a zsugorított körünk eléri a 7 hosszúságot, akkor ebben az $n-3$ hosszúságú körben már lesznek olyan kettő hosszúságú „látszólagosan" közös utak, melyekhez nincs további közös él, és az utak közös pontjai a zsugorított kör dupla pontjával azonosak. Ezek számát is le kell vonni a (84)-ből. Ám éppen ezeket számláltuk eddig is, ezért most már csak folytatni kell a rekurziós formulánkat, 2-vel alacsonyabb indexszel.

S ezzel a 4. tétel bizonyítását befejeztük.

4. A $H_n(r)$ FÜGGVÉNY ÉRTÉKEINEK NUMERIKUS MEGHATÁROZÁSA

A (19) elrendezés segítségével a közös élekkel rendelkező körök leszámlálásának egy igen egyszerű módja lehet pl. a lyukkártyás elv. Ily módon azonnal leolvasható, hogy a (19) első körének két közös éle van a második, és pontosan két éle közös a harmadik körrel is. Fel is rajzolhatjuk a (19) elrendezésnek megfelelő gráfokat, ezek rendre 18. ábrán láthatók



18. ábra

A (18) és (19) elrendezéshez hasonló sorozatok segítségével az $n=5$, $n=6$, $n=7$ és az $n=8$ esetekben numerikusan is meghatároztuk a teljes gráf egy rögzített Hamilton-körének éleivel közös élekkel rendelkező Hamilton-körök számát, ezek:

$r \backslash n$	4	5	6	7	8
0	–	1	3	23	177
1	–	–	12	70	544
2	2	5	15	112	740
3	–	5	20	91	640
4	1	–	9	49	302
5		1	–	14	96
6			1	–	20
7				1	–
8					1
$\sum_{r=0}^{n} H_n(r) = \frac{(n-1)!}{2}$	3	12	60	360	2520

IRODALOMJEGYZÉK

[1] *Ore, O.: Theory of Graphs.* Providence. American Math. Soc. 1962.
[2] *Berge, C.: The theory of graphs and its applications,* London Methuen Co. Ltd., and New York Wiley and Sons. 1969
[3] *Riordan, J.: An introduction to combinatorial analysis.* Wiley, New York, 1958.
[4] *Riordan, J.: Combinatorial identities.* New York. Wiley. 1968.

ОБ ОБЩИХ РЁБРАХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

И. ПАЛАШТИ

ON THE COMMON EDGES OF HAMILTON-CYCLES IN A COMPLETE LINEAR GRAPH

I. PALÁSTI

The number of Hamilton-cycles having common edges with a given Hamilton-cycle of a complete linear graph with n vertices is investigated in this paper.

Let H be a given Hamilton-cycle of this kind of graphs, and $H_n(r)$ denote the number of all Hamilton-cycles having r common edges with H (where $0 \leqq r \leqq n$). Exact expressions are given for the function $H_n(r)$ in the cases $H_n(n-2)$, $H_n(n-3)$ and $H_n(n-4)$. Furthermore a recursion formula is given for $H_n(0)$, i. e. the number of all different Hamilton-cycles having no common edges with a given Hamilton-cycle H of a complete linear graph having n vertices, can be formulated by the recursion formula

$$H_n(0) = (n-5)H_{n-1}(0) + \frac{2(n-4)}{n-1} H_{n-1}(1) + \frac{2}{n-1} H_{n-1}(2) - B(n),$$

where $B(n)$ is a finite sum.

Finally the result is applied for determining the numerical value of $H_n(r)$ up to n=8.

GYŰRŰK RADIKÁLJAIRÓL II.*

SZÁSZ FERENC

IV. JACOBSON-FÉLE RADIKÁL

18. §. *Irreducibilis modulusok, jobbprimitív ideálok, moduláris és kvázimoduláris jobbideálok*

Az alábbiakban definiáljuk a Jacobson-féle radikált. E radikálnak hatékonyság szempontjából gyakorlati vizsgálatokban más konkrét radikálok közt olyan a szerepe, mint a vezérnek a szerepe a sakktábla többi figurája közt.

Legyen A tetszőleges gyűrű és M tetszőleges A-jobbmodulus. A továbbiakban A-moduluson, ha csak nem hangsúlyozunk mást, mindig A-jobbmodulust fogunk érteni. Azt mondjuk, hogy M irreducibilis A-modulus, ha $MA \neq 0$ és ha nincs M-ben más A-részmodulus, csak 0 és maga M. Ebből a definícióból tüstént folyik, hogy bármely irreducibilis A-modulus még inkább A-prímmodulus is lesz a II. fejezetben levő értelmezést felhasználva, ugyanis, ha M egy irreducibilis A-modulus, továbbá ha $x \in M$ olyan nemzérus elem és B olyan ideál az A gyűrűben, hogy $xB = 0$ teljesül, akkor szükségképpen fennáll $B \subseteq (0:M)_A$ is, ahol $(0:M)_A$ jelöli az M annihilátorideálját az A gyűrűben. Továbbá jelölje a §-ban Σ_A az összes irreducibilis A-modulus osztályát, és legyen $\Sigma = \bigcup \Sigma_A$.

Bebizonyítható eléggé könnyen az, hogy Σ prímmodulusoknak ún. speciális osztálya (a II. fejezetben vett értelemben; pl. az is teljesül, hogy ha B tetszőleges ideál az A gyűrűben és ha $M \in \Sigma_B$, akkor $MB \in \Sigma_A$, stb. stb.). Minden gyűrűre nézve legyen $J(A) = \bigcap_{M \in \Sigma_A} (0:M)_A$, ahol Σ_A, miként előbb is, az összes irreducibilis A-modulus osztálya. A II. fejezet eredményeiből következik, de közvetlenül sem nehéz belátni, hogy $J(A)$ ideál az A gyűrűben, továbbá az A bármely J ideáljára $J(I) = I \cap J(A)$.

Ezt a $J(A)$ ideált az A gyűrű Jacobson-féle radikáljának nevezzük. Ezt a radikált moduluselméletileg korábban Chevally és Goldman is így definiálta.

Ha Σ_A üres, akkor A radikálgyűrű lesz, ha pedig $J(A) = 0$, akkor A féligegyszerű lesz Jacobson-féle értelemben. Ha A radikálgyűrű, akkor $A = J(A)$, ha pedig A féligegyszerű, akkor A minden nemzérus a eleméhez létezik olyan $M_a \in \Sigma_A$ irreducibilis A-modulus, amelyben a

$$\varphi_a : m \to ma$$

leképezés szintén nemzérus, tehát van olyan $m \in M_a$, amelyre $ma \neq 0$.

A II. fejezet Andrunakievics-től származó ama eredményeiből, amelyek a speciális radikálok és operátormodulusok kapcsolatát tárgyalják, nyilvánvalóan következik (és persze közvetlenül is belátható), hogy $J(A)$ radikál lesz Amitsur—Kuros-féle értelemben, méghozzá speciális radikál is lesz Andrunakievics-féle értelemben.

Tehát a $J(A)$ Jacobson-féle radikál szupernilpotens radikál is.

Még azokat a majdnem nyilvánvaló tényeket is megemlítjük, hogy $J(A)$ tehát

* Az irodalmi hivatkozásokat az utolsó közlemény végén fogjuk közölni.

Σ-radikálideál, ahol $\Sigma = \bigcup \Sigma_A$, Σ_A az irreducibilis A-modulusok osztálya és $J(A) = R(\Sigma, A)$ tartalmazza A minden más Σ-ideálját (azaz Σ-radikál ideálját), miközben A minden B ideáljára $(0:M)_{A/B} = ((0:M)_A)/B$ is teljesül.

Utóbbi tényből triviálisan adódik az is, hogy az $A/J(A)$ faktorgyűrű féligegyszerű, ami az Amitsur—Kuros-féle radikáloknak egyik fontos tulajdonsága.

Ha az A gyűrű P ideálja olyan, hogy hozzá létezik legalább egy olyan $M \in \Sigma_A$ irreducibilis A-modulus, amelyre teljesül $P = (0:M)_A$, akkor a P ideált jobbprimitívnek, röviden primitívnek nevezzük.

Továbbá az A gyűrűt jobbprimitívnek, röviden primitívnek nevezzük akkor, ha benne a (0) ideál primitív ideál.

Ferdetestek vagy a ferdetestek felett vett $n \times n$ típusú teljes matrixgyűrűk igen fontos példák primitív gyűrűkre. Ezek speciálisan olyan primitív gyűrűk is, amelyekben van nemzérus minimális jobbideál. Ugyanis a konkrét vizsgálatokban többnyire olyan primitív gyűrűk lépnek fel, és éppen ezek a fontosabbak, amelyekben létezik nemzérus minimális jobbideál. Az ilyen primitív gyűrűknek már elég jól kiépített elmélete van, és Dieudonné, Kaplansky, Mackey, és Litoff, de főképpen Jacobson munkássága nyomán viszonylag eléggé explicit struktúra-tétel írja le a nemzérus minimális jobbideálokat is tartalmazó primitív gyűrűk szerkezetét.

Megjegyzendő, hogy Wiegandt Richárd [359] igazolta azt, hogy olyan topologikus gyűrűkben, amelyek primitívek és lokálisan lineárisan kompaktok, létezik mindig minimális jobbideál.

Az is bebizonyítható, hogy kommutatív primitív gyűrű mindig test, tehát ekkor is létezik a gyűrűben minimális jobbideál, ti. maga a gyűrű.

Nem nehéz igazolni azt, hogy bármely P primitív ideál prímideál is, vagyis ha az A gyűrű B és C tetszőleges ideáljaira fennáll $BC \subseteq P$, akkor $B \subseteq P$ vagy $C \subseteq P$ is teljesül.

Másfelől nem minden prímideál lesz primitív, ugyanis legyen A mindazon racionális számok halmaza, amelyeknek a számlálója páros, a nevezője páratlan egész szám. A közönséges egyenlőségi, összeadási és szorzási definiciókkal A olyan kommutatív gyűrű, amely zérusosztómentes. Ezért (0) prímideál lesz az A gyűrűben, de megmutatható, hogy (0) nem primitív ideál A-ban, sőt, azt sem nagyon nehéz bebizonyítani, hogy ebben az A gyűrűben egyik valódi ideál sem lehet primitív.

Viszont bármely Artin-féle gyűrű, sőt általában bármely, a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrű a szerző [309] dolgozata alapján olyan, hogy benne bármely prímideál egyszersmind primitív is.

Ha pedig egy Jacobson-féle értelemben erősen féligegyszerű gyűrű olyan, hogy bármely ideálja idempotens (ilyen pl. bármely féligegyszerű, és főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrű is), akkor a gyűrű bármely ideálja egyenlő az őt tartalmazó összes primitív ideál metszetével.

A primitív ideálok legfőbb jelentősége abban rejlik, hogy a Jacobson-féle $J(A)$ radikál bármely A gyűrűben egybeesik az összes primitív ideál metszetével.

Ezért bármely Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrű primitív gyűrűknek lesz egy szubdirekt összege.

Továbbá az is bebizonyítható, hogy az összes primitív gyűrű osztálya ún.-speciális gyűrűosztály (a II. fejezetben ismertetett definíció szerint), és hogy a Jacobson-féle radikál egybeesik azzal a speciális radikállal, amely éppen ezzel a speciális osztállyal meghatározott felső radikál.

Bár a Jacobson-féle radikál ezek szerint öröklődő, azaz bármely A gyűrű bármely B ideáljára nézve

$$J(B) = B \cap J(A)$$

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

teljesül, nem lesz minden Jacobson-féle féligegyszerű gyűrű erősen féligegyszerű (azaz féligegyszerű gyűrűnek minden homomorf képe újra féligegyszerű), mert pl. a racionális egész számok I gyűrűje féligegyszerű, de az $I/4I$ faktorgyűrű nem féligegyszerű. Ehhez csak azt kell látnunk, hogy ebben az I kommutatív gyűrűben az összes (p) primitív ideál prímszámmal generált főideál, és ezen ideálok metszete nyilván (0), továbbá $2I/4I$ ideál nilpotens az $I/4I$ faktorgyűrűben.

Továbbá egy Jacobson-féle féligegyszerű gyűrűnek egy tetszőleges jobbideálja vagy balideálja általában szintén nem lesz féligegyszerű, mert pl. a racionális számtest felett vett összes 2×2 típusú négyzetes matrix gyűrűjéről eléggé könnyen igazolható, hogy Jacobson-radikálmentes, azaz féligegyszerű ebben az értelemben, de ennek a gyűrűnek az az A részgyűrűje, amelyet az összes

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

alakú matrix generál, olyan jobbideál a féligegyszerű gyűrűben, amelynek a Jacobson-féle radikálja az összes

$$\begin{pmatrix} 0, & b \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

matrixból álló $J(A)$ halmaz, és A-nak a $J(A)$ ideálja nem zérus. Ez a $J(A)$ egyébként csak A-nak ideálja, a teljes matrixgyűrűnek nem ideálja, sőt nem is jobbideálja, hanem annak csak ún. kváziideálja lesz Steinfeld-féle értelemben [292]. (Az A gyűrű Q részgyűrűjét kváziideálnak nevezzük akkor, ha $AQ\cap QA\subseteq Q$ teljesül. Minden jobbideál vagy balideál nyilvánvalóan még inkább kváziideál a gyűrűben.)

Minthogy a primitív gyűrűknek és primitív ideáloknak struktúratételek szempontjából az előzők szerint a fontosságuk igen nagy, és minthogy eddig a primitív ideáloknak csak egy ún. külső definícióját adtuk meg, ti. az összes irreducibilis A-jobbmodulus Σ_A speciális osztályával megfogalmazott definíciót, hogy P akkor primitív ideál, ha $P=(0:M)_A$, ahol $M\in\Sigma_A$ ezért célszerű lesz belső definíciót is megadni a primitív ideálra és primitív gyűrűre. Ennél nem fogunk a Σ_A osztályra hivatkozni, hanem csak a gyűrű belső tulajdonságait, elemeket, jobbideálokat stb. fogunk felhasználni. Természetesen az megengedett, hogy a külső és belső definiálás közt legyen valami átvezető híd, és ilyen lesz az ún. erősen ciklikus A-modulusnak a fogalma.

Azt mondjuk, hogy az M A-modulus erősen ciklikus, ha létezik az M modulusnak olyan m eleme, amelyre $M=mA$. Ezt az m elemet M erős értelemben vett generátorának nevezzük.

Nyilvánvaló az, hogy a racionális egész számok I gyűrűje olyan, hogy I-nek, mint önmaga felett tekintett I-jobbmodulusnak bármely részmodulusa erősen ciklikus és persze főjobbideál is. Megjegyzendő, hogy a szerző [319], [320] meghatározta explicit módon az összes olyan A gyűrűt, amelyben bármely valódi részgyűrű, illetve bármely végesen generált valódi részgyűrű olyan jobbideál, amely mint A-jobbmodulus erősen ciklikus. (Ismertek egyébként teljes leírással azok a gyűrűk is, ezeket szerző határozta meg, amelyekben bármely végesen generált valódi részgyűrű főjobbideál.)

Továbbá az A gyűrű egy R jobbideálját modulárisnak nevezzük akkor, ha létezik olyan $a\in A$ elem, amelyre minden $x\in A$ elemmel $x-ax\in R$ teljesül. A moduláris jobbideálokat Segal definiálta először, és látni fogjuk, hogy ezeknek nagy szerepe van a $J(A)$ Jacobson-féle radikál vizsgálatában. Megjegyzendő, hogy $R\neq A$ esetén szükségképpen $a\notin R$ áll fenn a modularitás fenti definíciójában szereplő a elemre.

Szerzőtől [323] származik a kvázimoduláris jobbideál fogalma. Korábban Kertész Andor [185] vezette be bizonyos speciális jobbideálnak a fogalmát, amelyről igazolható, hogy egybeesik a kvázimoduláris jobbideállal.

Azt mondjuk, hogy az A gyűrűnek egy R jobbideálja kvázimoduláris jobbideál, ha az $A^{-1}R = \{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R\}$ jobboldali ideálhányadosra $A^{-1}R \subseteq R$ tartalmazás áll fenn. Megjegyzendő, hogy itt $A^{-1}R$ szükségképpen kétoldali ideál az A gyűrűben.

Nem nehéz megmutatni azt, hogy bármely moduláris jobbideál még inkább kvázimoduláris.

Kertész Andor [185] könyvének 3. problémája kérdezte azt (más terminológiával és más megfogalmazásban), hogy vajon létezik-e olyan A gyűrű, amelynek egy kvázimoduláris és maximális jobbideálja nem moduláris. Ez a kérdés azért fontos, mert szorosan összefügg a Jacobson-féle radikál egyik jellemzésével, pontosabban azzal, hogy egy bizonyos jellemzés vajon csak formailag új vagy pedig tartalmilag is.

Szerző [323] megoldotta ezt a Kertész-féle fenti problémát, és explicit módon megadott olyan A gyűrűt, amelynek legalább egy R maximális jobbideálja kvázimoduláris, de nem moduláris jobbideál A-ban. Szerző az ilyen tulajdonságú gyűrűket Ω-gyűrűknek nevezte, és az Ω-gyűrűk létezésének bebizonyítása mellett vizsgált még bizonyos ideálelméleti kérdéseket, pl. ideálhányadosok egymáshoz való viszonyát az Ω-gyűrűkben, továbbá explicite meghatározta speciálisabb Ω-gyűrűknek az additív csoportját, leírta ezeknek a gyűrűknek a centrumát is, és vizsgált még ún. jobbról egy elemmel generált Ω-gyűrűket, amelyek $A = xA$ alakuak.

Később Jan Erik Björk [61] megmutatta (sajtó alatt levő dolgozatában megoldva a szerző [323] egyik felvetett nyitott problémáját), hogy milyen kapcsolat lehetséges egy gyűrű moduláris maximális jobbideáljai halmazának $\aleph_\alpha$ számossága és a kvázi moduláris és maximális, de nem-moduláris jobbideálok halmazának $\aleph_\beta$ számossága közt, és Björk ehhez olyan primitív gyűrűket vett alapul, amelyek egybeesnek a saját minimális balideáljaik összegével.

A szerző példája [323], amellyel megmutatta az Ω-gyűrűk létezését, a következő:

Legyen $p = 0$ vagy prímszám, K_p egy p-karakterisztikájú prímtest, m tetszőleges végtelen számosság, Γ egy m-számosságú indexhalmaz, és $\delta_{\alpha\beta}$ a jól ismert Kronecker-féle szimbólum (azaz $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ és $\alpha \neq \beta$ esetén pedig $\delta_{\alpha\beta} = 0$). Legyen továbbá A az összes a_α, $r_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta\gamma}$ bázis elemmel ($\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$) a K_p prímtest felett generált algebra, és legyen R az összes $r_{\beta\gamma}$ és $s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ ($\beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta \in \Gamma$) elemmel K_p felett generált részalgebra. Értelmezzük a báziselemek szorzását az alábbi szorzótáblával:

	a_ε	$r_{\varepsilon\eta}$	$s_{\varepsilon\eta\vartheta}$
a_α	a_ε	$\delta_{\alpha\varepsilon} \cdot a_\eta$	$\delta_{\alpha\varepsilon} \cdot a_\vartheta$
$r_{\alpha\beta}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\beta\varepsilon} \cdot r_{\alpha\eta}$	$\delta_{\beta\varepsilon} \cdot s_{\alpha\eta\vartheta}$
$s_{\alpha\beta\gamma}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\gamma\delta} \cdot s_{\alpha\beta\eta}$	$\delta_{\gamma\varepsilon} \cdot s_{\alpha\beta\vartheta}$

Ekkor megmutatható, hogy ez a szorzás asszociatív, továbbá ez az algebra monomiális lesz, azaz bármely két báziselemnek a szorzata egy alkalmas báziselemnek egy skalárissal való szorzatával esik egybe. Megállapítható eme algebra egy tetszőleges elemének az ún. kanonikus alakja, és ennek alapján annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy adott elem benne feküdjék az R részalagebrában.

Be lehet látni azt, hogy az R részalgebra az A algebrának jobbideálja, továbbá konkrét számolással azt is be lehet bizonyítani, hogy R olyan maximális jobbideál az A gyűrűben, amely kvázimoduláris, de nem moduláris. Ezért A nyilván Ω-gyűrű.

Ezeknek a fogalmaknak a fontosságát a következő eredmények mutatják.

Egy M A-jobbmodulus akkor és csak akkor irreducibilis, ha $MA \neq 0$ és ha M erősen ciklikus A-jobbmodulus minden $m \in M$ nemzérus elemmel, mint erős értelemben vett generátorral.

Továbbá, egy M A-jobbmodulus akkor és csak akkor erősen ciklikus, ha létezik olyan R moduláris (nem feltétlenül maximális) jobbideál, hogy fennáll az $M \cong A/R$ operátorizomorfia a két A-jobbmodulusra.

Az szinte triviális, hogy az A/R modulus, ahol R jobbideál az A gyűrűben, akkor és csak akkor irreducibilis, ha $A^2 \not\subseteq R$ és ha R maximális jobbideál az A gyűrűben.

Azt is megemlítjük, hogy az A gyűrű egy R jobbideálja akkor és csak akkor moduláris az A gyűrűben, ha létezik olyan erősen ciklikus M A-jobbmodulus, az m erős értelemben vett generátorral, hogy fennáll $R = (0:m)_A$, tehát R az m elem (jobb) annihilátora.

Egyébként az R moduláris (nem feltétlenül maximális) jobbideálokra a kvázimodularitás teljesülése csaknem triviális mádon igazolható.

Be lehet látni azt is, a Zorn-féle lemma felhasználásával, hogy bármely moduláris jobbideál beágyazható a gyűrűnek egy moduláris maximális jobbideáljába. Fontos észrevétel az is, hogy a maximális moduláris jobbideál egyszersmind moduláris maximális jobbideál is (ugyanis pl. egy a kommutatív részgyűrűk közt maximális részgyűrű, bár kommutatív lesz, de nem lesz feltétlen maximális az összes részgyűrű közt stb.).

Továbbá egy M A-jobbmodulus akkor és csak akkor irreducibilis, ha létezik az A gyűrűnek olyan moduláris maximális R jobbideálja, hogy az M modulusokra teljesül az $M \cong A/R$ operátorizomorfia.

Fontos tény az, hogy az A gyűrűnek egy P ideálja akkor és csak akkor primitív, ha létezik a gyűrűnek olyan R moduláris maximális jobbideálja, amelyre fennáll $P = A^{-1}R = \{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R\}$.

Ezek szerint egy A gyűrű akkor és csak akkor primitív, ha létezik a gyűrűnek olyan moduláris maximális R jobbideálja, amelyre $A^{-1}R = 0$, tehát $\{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R\} = 0$.

Megjegyezzük, hogy ez a két legutóbbi kritérium már olyan, hogy ezek a primitív ideál, illetve a primitív gyűrű *belső* jellemzéseként is tekinthetők.

Szerző [326] egyik eredménye szerint igaz az, hogy ha R tetszőleges kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor minden olyan $x \in A$ elemmel, amelyre $x \notin R$, az

$$R_x = \{x\}^{-1}A = \{z;\ z \in A,\ xz \in R\}$$

jobboldali ideálhányados olyan jobbideál lesz, amely egyidejűleg maximális és moduláris jobbideál az A gyűrűben. Ezzel a módszerrel bármely R kvázimoduláris maximális jobbideálból lehet tehát szerkeszteni R_x moduláris maximális jobbideálokat minden $x \notin R$ elemre, amelyre $x \in A$, és ez az R_x persze kvázimoduláris is.

Jacobson [159] igen fontos eredménye az, hogy bármely A gyűrűben a $J(A)$ Jacobson-féle radikál egybeesik a gyűrű összes moduláris maximális jobbideáljának a metszetével.

Továbbá, ha a gyűrű radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben, akkor a gyűrűnek nincs sem valódi moduláris jobbideálja, sem valódi primitív ideálja.

Kertész Andor [185] meglepő eredménye az, hogy a Jacobson-féle radikál egybeesik a gyűrű összes kvázimoduláris maximális jobbideáljának a metszetével,

bár Kertész Andor nem használja a kvázimoduláris elnevezést, hanem azt körülírja. Kertész Andor ezt az eredményét egyébként úgy bizonyította be, hogy lépésről lépésre megmutatta húsz feltételnek (ti. tíz feltételnek és ezek másik tíz bal-jobb duálisának) az ekvivalenciáját, és megjegyzendő, hogy e húsz feltétel zöme és ezek ekvivalenciája nagyrészt már korábban is ismert volt.

A szerzőt önmagát is meglepte a szerző [323] konstruktív példája az Ω-gyűrűk létezésének a bizonyításáról, amelyből az is folyik, hogy Kertész Andor előbb említett jellemzése a Jacobson-féle radikálról nemcsak formálisan, hanem tartalmilag is új (lásd ehhez Kertész [185] könyve 3. problémáját). Ugyanis bármely A Ω-gyűrűben van kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál, és másfelől minden gyűrűben az összes kvázimoduláris maximális jobbideál metszete nem szűkebb az összes moduláris maximális jobbideál metszeténél, hanem ez a kétféle metszet egymással egybeesik. A nem Ω-gyűrűk az Artin-féle és a kommutatív gyűrűknek olyan közös általánosításai, mint amilyen közös általánosításai a véges osztályú csoportok a véges csoportoknak és a kommutatív csoportoknak.

A primitív ideál és primitív gyűrű analógiájára definiálható az ún. kváziprimitív ideál és kváziprimitív gyűrű is.

Azt mondjuk, hogy az A gyűrűnek a Q kétoldali ideálja kváziprimitív, ha létezik a gyűrűben olyan kvázimoduláris maximális R jobbideálja, amelyre fennáll $Q = A^{-1}R$, és ekkor persze $Q \subseteq R$ is.

Továbbá azt mondjuk, hogy az A gyűrű kváziprimitív, ha benne (0) kváziprimitív ideál.

Rögtön látható az, hogy bármely primitív ideál méginkább kváziprimitív ideál, továbbá bármely kváziprimitív ideál egyszersmind prímideál is.

Ezenkívül belátható eléggé könnyen, hogy egyrészt bármely kommutatív kváziprimitív gyűrű szükségképpen test, másrészt jobbideálokra nézve minimumfeltételű bármely kváziprimitív gyűrű izomorf egy ferdetest felett vett teljes matrixgyűrűvel.

Szerző [326] megoldotta Steinfeld Ottónak az egyik problémáját azzal, hogy szerző bebizonyította azt, hogy a Jacobson-féle radikál minden gyűrűben egybeesik az összes kváziprimitív ideál metszetével.

Erre a tényre a szerző kétféle bizonyítást is adott. Az egyik, igen rövid bizonyítás felhasználja a gyűrű elemeit és erősebb fogalmakat, a másik, hosszasabb bizonyítás négy metszet egybeesését mutatja meg, és közben lényegében csak hálóelméleti fogalmakat és módszereket használ fel, de a gyűrű elemeit lényegében nem használja fel.

Steinfeld Ottó [293], még kéziratban olvasva a szerző fenti bizonyításait, megmutatta azt, hogy bármely kváziprimitív ideál primitív és ezért egyszersmind bármely kváziprimitív gyűrű primitív is.

Szerző [327] élesítette Steinfeld Ottó előbbi eredményét. Az élesítés szerint, ha R tetszőleges kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor *minden* $x \notin R$, $x \in A$ elemre $A^{-1}R = (xA)^{-1}R$ teljesül és ekkor $(xA)^{-1}R$ primitív ideál, tehát a kváziprimitív $A^{-1}R$ ideál is primitív ideál lesz.

Steinfeld Ottó a szerzővel szóbelileg közölte azt a megállapítását, hogy bármely A gyűrűben bármely kvázimoduláris maximális R jobbideálnak megvan az alábbi T tulajdonsága: Minden $a \notin R$ $(a \in A)$ elemhez és minden $\lambda \in A$ elemhez létezik olyan $b = b_{\alpha,c} \in A$ elem, hogy fennáll $\lambda^2 - abc \in R$.

Steinfeld Ottó azt is kérdezte a szerzőtől, hogy megfordítva a T tulajdonság a nemnilpotens gyűrűkben vajon jellemzi-e a maximális jobbideálok közt a kvázimodulárisokat.

Nyilvánvalóan azért kell e kérdésben a nemnilpotens gyűrűkre szorítkoznunk, mert egyerészt nilpotens gyűrűkben nincs valódi kvázimoduláris maximális jobbideál, másrészt pedig a T tulajdonság nilpotens gyűrűben minden maximális jobbideálra teljesül.

Szerző [321] megoldotta Steinfeld Ottónak a fenti problémáját, és megmutatta, hogy a T tulajdonság olyan enyhe, hogy nem jellemzi a kvázimoduláris maximális jobbideálokat, hanem minden nemnilpotens gyűrűben minden maximális jobbideál szükségképpen T tulajdonságú.

Ezért egy tetszőleges A gyűrűben az összes T-tulajdonságú maximális jobbideál metszete a Φ Frattini-féle jobbrészmodulus, amely általában nem esik egybe a Jacobson-féle radikállal.

Megemlítjük még Kertész Andornak [188] azt az eredményét, amely kissé más megfogalmazásban úgy szól, hogy a Jacobson-féle $J(A)$ radikál a legbővebb olyan K ideál az A gyűrűben, amelyre $AK \subseteq \Phi$ teljesül, ahol Φ az A összes maximális jobbideáljának a metszte, vagy pedig $A = \Phi$ akkor, ha nincs az A gyűrűben valódi, maximális jobbideál. Ezért $J(A) = A^{-1}\Phi$. Megint másféle megfogalmazásban $J(A)$ pontosan mindazon $x \in A$ elemek halmaza, amelyekkel az yx szorzat minden $y \in A$ elemmel elhagyható a gyűrűnek, mint önmaga felett vett jobbmodulusának bármely generátorrendszeréből. Ennélfogva a Jacobson-féle $J(A)$ radikál bizonyos értelemben Frattini-féle részmodulusként is felfogható. Tehát Kertész ezen kritériuma általánosítja Fuchs fontos, de majdnem triviális észrevételét. Kertész kritériumának egyik felét Hille (Functional Analysis and Semigroups, New York, 1948) korábban bebizonyította. Kertésznek ebből a tételéből $J(A)$ jellemzéséről öt korollárium is levezethető:

1. Ha egy gyűrűben az összes maximális jobbideál metszete nulla, akkor a gyűrű Jacobson-féle radikálja egybeesik a gyűrű jobbannihilátor ideáljával.

2. Bármely A gyűrűben az összes maximális jobbideál Φ metszete kétoldali ideál.

3. Ha egy A gyűrűnek az A/Φ faktorgyűrűje jobbannihilátormentes, akkor az A Jacobson-féle radikálja éppen Φ.

4. Ha az A gyűrű egyszerű (de nem zérógyűrű) és ha A Jacobson-féle értelemben radikálgyűrű, akkor nincs az A gyűrűben valódi maximális jobbideál, tehát $\Phi = A$. Ilyen tulajdonságú gyűrű létezését Sąsiada példával mutatta meg. Ilyen példa létezése még nyílt kérdés, ha A (erősebben) nilgyűrű is.

5. Minden n kitevőre $J(A) = (A^n)^{-1}\Phi$ és hasonlóan $J(A) = \Phi_l(A^n)^{-1}$ teljesül, amelyek a Jacobson-féle radikál újabb jellemzéseként is tekinthetőek (lásd ezekhez szerző [323] dolgozatát).

Megemlítjük, hogy egy A gyűrűben a $J(A)$ Jacobson-féle radikálnak bizonyos értelemben duálisa a gyűrű mindazon R maximális jobbideáljának a D metszete, amelyre $R \supseteq A^{-1}0$, teljesül, ahol $A^{-1}0$ jelenti az A gyűrű jobbannihilátor (kétoldali) ideálját. Azt nem nehéz belátni, hogy ez a D jobbideál szükségképpen ideál is az A gyűrűben. Másfelől az $A = \{a\}$ gyűrű, ahol $a^3 = pa = 0$, $a^2 \neq 0$, p prímszám, azt mutatja, hogy ez az $A \to D(A)$ hozzárendelés nem szolgáltat Amitsur-, és Kuros-féle értelemben vett radikált, ugyanis $D(\{a\}) = \{a^2\}$ ahol az $\{a^2\}$ részgyűrű tényleg ideál is, továbbá

$$D(\{a\}/\{a^2\}) = \{a\}/\{a^2\}.$$

Megjegyezzük, hogy szerző [325] a zéruselemes félcsoportokban definiált hat olyan ideált, amelyek hasonló szerepet játszanak félcsoportokban, mint a Jacobson-féle radikál a gyűrűkben. Szerző vizsgálta e hat ideál viszonyát a halmazelméleti tartalmazás szempontjából, és speciális esetekben kimutatta ezek egybeesését. Ko-

rábban Hoehnke [144] definiált és vizsgált félcsoportokban kongruenciák segítségével egy radikált. Szerző [225] azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az általa vizsgált hat ideál egymással és a Hoehnke-féle radikállal is egybeesik, és Seidel [283] meg tudta a hat ideál közül négyről mutatni azt, hogy ezek tényleg egybeesnek mindig egymással és a Hoehnke-féle radikállal is, de a másik két ideálról a kérdés általánosságban még nincs elintézve. Érdekes volna vizsgálni, hogy e hat radikál tartalmazza-e a Clifford-féle radikált, azaz az összes nilideál egyesítését.

Továbbá Kertész Andor [190] operátormodulusokban definiált egy olyan radikált, amelyről bizonyos speciális gyűrűk esetében megmutatható, hogy a gyűrűnek, mint önmaga felett vett modulusnak, ez a moduluselméleti radikálja egybeesik a gyűrű Jacobson-féle radikáljával. A Kertész-féle $K(M)$ radikál tudvalevőleg az M A-jobbmodulus mindazon x elemeinek a halmaza, amelyekre az xA részmudulus benne van M minden maximális A-részmodulusában, és $K(M)=M$ akkor, ha nincs az M modulusnak maximális A-részmodulusa. Ha A kommutatív, vagy ha A egységelemes, akkor az A gyűrűkre, mint A-jobbmodulusra, $K(A)=J(A)$ teljesül, ahol $J(A)$ a Jacobson-féle radikált jelenti.

Kertész Andor [190] kérdezte azt, hogy $K(A)$ vajon minden A gyűrűben megegyezik-e a $K(A)$ a $J(A)$ Jacobson-féle radikállal.

Szerző [316] megoldotta, negatív irányban, példák konstruálásával Kertész Andornak ezt a problémáját, mégpedig szerző a következő élesebb eredményt kapta:

Egy m tetszőleges (véges vagy végtelen) számossághoz mindig létezik olyan A gyűrű, amelynek m számú eleme és olyan $K(A)$ radikálja van, amely a $J(A)$ Jacobson-féle radikálnál valódi módon szűkebb, tehát $K(A)\neq J(A)$, $K(A)\subseteq J(A)$, kivéve akkor, ha m véges és négyzetmentes szám. Ha ugyanis m véges és négyzetmentes szám, továbbá ha az A gyűrűnek m eleme van, akkor mindig teljesül $K(A)=J(A)$, mert ekkor A kommutatív.

A szerző által kapott fenti példák olyan A gyűrűk, amelyekben létezik olyan ún. homoperfekt maximális jobbideál, amely nem moduláris. Megjegyzendő ehhez az, hogy homoperfektnek nevezzük az M A-jobbmodulusnak egy N A-részmodulusát akkor, ha $MA\subseteq N$ továbbá az R jobbideál az A gyűrűben akkor tekintendő homoperfektnek, ha R az A-nak, mint A-jobbmodulusnak homoperfekt A-részmodulusa, tehát $A^2\subseteq R$ teljesül.

Meg lehet említeni még Kertész Andornak [190] azt a megállapítását, hogy a $K(M)$ moduluselméleti radikál egybeesik az MA-jobbmodulus összes homoperfekt maximális részmodulusának a metszetével.

Szerző [311] bebizonyította az alábbi eredményt, amely a Jacobson-féle értelemben féligegyszerű és ugyanakkor az összes jobbideálra nézve minimum-feltételű gyűrűknek adja meg egy moduluselméleti jellemzését, a $K(M)$ Kertész-féle radikál felhasználásával:

Egy gyűrű A akkor és csak akkor jobbideálokra nézve minimum-feltételű és Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrű, ha az A gyűrűre egyidejűleg teljesül az alábbi két feltétel:

1. A egységelemes és teljesül a főjobbideálok minimumfeltétele;
2. minden M A-részmodulus $K(M)$ moduluselméleti radikáljára teljesül a $K(M)A=0$ feltétel.

Még nyitott kérdés az, hogy önmagában a 2. feltétel, az 1. feltétel nélkül, a gyűrűknek milyen osztályát jellemzi. Kertész Andor a szerző részére szóbelileg olyan sejtést közölt, amely szerint már önmagában a 2. feltétel is valószínűleg az Artin-féle féligegyszerű gyűrűk osztályát jellemzi.

19. §. *Példa jobbról primitív gyűrűre, amely balról nem pimitív és a Jacobson-féle radikál jellemzése kvázireguláris elemekkel*

Először Bergman [59] fontos példáját tárgyaljuk olyan gyűrűről, amelyik jobbról primitív, de balról nem primitív. Ha létezik ilyen A gyűrű, akkor létezik olyan A irreducibilis jobbmodulus, amelyre $(0:M)_A=0$, viszont minden N irreducibilis A-balmodulusra $(0:N)_A\neq 0$ teljesül. Ilyen A gyűrű létezik, tehát a jobbprimitívség és balprimitívség gyűrűknek két különböző osztályát határozza meg. Ennek ellenére be fogjuk látni az ún. kvázireguláris elemek segítségével azt, hogy az összes jobbprimitív ideálnak a metszete egybeesik az összes balprimitív ideál metszetével, és ez a metszet éppen a Jacobson-féle radikál. Tehát a Jacobson-féle jobbradikál és balradikál egyenlő egymással.

A Bergman-féle példa a következő. Legyen Q a racionális számtest, $Q(x)$ pedig az x-változós összes racionális törtfüggvény teste, továbbá legyen α ennek a testnek az a meromorfizmusa (önmagába való izomorfizmusa), amelyre

$$\alpha: r(x)\to r(x^2).$$

Legyen $A=Q(x)[y]$ az y változós „polinomgyűrű", amelyben ugyan közönséges módon értelmeztük az egyenlőséget és összeadást, kivonást az elemek közt, de a szorzás a közönségestől eltérő, ugyanis legyen

$$yr(x)=r(x^2)y=(\alpha(r(x)))y.$$

Ekkor A egységelemes, nullosztómentes, nemkommutatív olyan gyűrű, amely balról főideálgyűrű, tehát főbalideálgyűrű, ugyanis benne baloldali, euklideszi osztási algoritmus korlátlanul elvégezhető. Meg lehet mutatni azt, hogy a Q test felett vett A algebrának bármely olyan B részalgebrája, amelyre $x\in B$ és $y\in B$, jobbról primitív gyűrű. Ebből a célból, megmutatható, hogy megadható minden ilyen B részalgebrához egy hű és irreducibilis B-jobbmodulus.

Ha $r(x)\in Q(x)$, legyen $r^*(x)\in Q(x)$ olyan elem, amelyre $r^*(x^2)=\dfrac{r(x)+r(-x)}{2}$.

Legyen most M az a B-jobbmodulus, amelynek elemei éppen $Q(x)$ elemei, az összeadás $Q(x)$ összeadása, de az operátorszorzás legyen $r(x)\cdot q(x)=r(x)\cdot q(x)$ gyűrűszorzás, és ezenkívül $r(x)y=r^*(x)$ definíció szerint.

Nem nehéz belátni, hogy teljesül

$$x^n y^m=\begin{cases}x^{2^m\cdot n}, & \text{ha } 2^m/n\\ 0 & \text{ha } 2^m\nmid n\end{cases}$$

Legyen most M_0 az x által az M B-modulusban generált B-részmodulus. Megmutatható, hogy M_0 irreducibilis B-jobbmodulus, és valamivel körülményesebben az is bebizonyítható (miközben egyenlőtlenségi becsléseket és elemi számelméleti meggondolásokat kell végezni), hogy M_0 hű B-jobbmodulus, azaz $(0:M_0)_B=0$. Ezért az algebrának minden olyan B részalgebrája, amelyre $x\in B$ és $y\in B$ teljesül, jobbról primitív.

Annak a bizonyítása, hogy A tartalmaz olyan B részalgebrát, amely balról nem primitív, bár $x, y\in B$ teljesül, úgy történik, hogy bizonyos v_n értékelést (valuation) definiálunk minden n természetes számra.

Legyen ugyanis $p_n(x)$ a Q racionális számtest felett vett n-edik körosztási polinom, vagyis

$$p_n(x)=\prod_{d/n}(x^d-1)^{\mu(nd^{-1})}$$

ahol $\mu(m)$ jelenti a jólismert Moebius-féle számelméleti függvényt, és a szorzás az n szám összes d osztójára terjesztendő ki. Legyen továbbá v_n az a kitevő értékelése a $Q(x)$ testnek, amelynek az alapeleme a $p_n(x)$ polinom. Tehát $v_n(p_n(x))=1$, $v_n((p_n(x))^m)=m$ és $v_n(q(x))=0$, ha $(q(x), p_n(x))=1$, továbbá $v_n(\alpha\beta)=v_n(\alpha)+v_n(\beta)$, ahol $\alpha, \beta \in Q(x)$.

Minden páratlan n számra és minden $r(x)\in Q(x)$ elemre teljesül $v_n(r(x))=$ $=v_n(r(x^2))$, ugyanis ekkor a $p_n(x^2)=0$ egyenlet gyökei éppen az összes olyan $\sqrt{\vartheta}$ és $-\sqrt{\vartheta}$ szám, amelyre $p_n(\vartheta)=0$ teljesül, továbbá, ha $p(x)$-nek és $p_n(x)$-nek van közös gyöke, akkor $p_n(x)|p(x)$ és $p_n(x^2)=p_n(x)(p_n|-x)$ miatt belátható $v_n(f(x))=$ $=v_n(f(x^2))$ páratlan n-re és polinom $f(x)$-re. De ebből folyik az említett egyenlőség törtfüggvény $r(x)$ értékelésére is. Mármost definiáljuk a w_n értékelést v_n segítségével az A algebrán a következőképpen:

$$\omega_n\left(\sum_{i=1}^{k} r_i(x)y^i\right) = \underset{1\leq i\leq n}{\text{minimum}}\, v_n(r_i(x))$$

Nem nehéz bebizonyítani azt, hogy ez a w_n függvény tényleg értékelés az A algebrán.

Legyen továbbá $B_0=\{z;\ z\in A,\ w_n(z)\geqq 0$ minden páratlan n számra$\}$.

Igazolható, hogy ez a B_0 halmaz részalgebra A-ban, és $x\in B_0$, $y\in B_0$, tehát B_0 jobbról primitív gyűrű az előzők szerint. Most vázoljuk annak a bizonyítását, hogy ez a B_0 részalgebra balról nem primitív gyűrű. B_0 minden L valódi maximális balideáljára $AL=A$ teljesül, mert ha $AL\neq A$ volna, akkor teljesülne $AL=(g)_l$, ahol

$$g = a_0(x)+a_1(x)y+\ldots+a_m(x)y^m,$$

és $m>0$, $a_m(x)\neq 0$, mert $m=0$ esetén $(g)_l=A$ volna. Legyen mármost n olyan páratlan szám, amelyre $w_n(g)=0$, ilyen n biztosan létezik. Ha egy $a=\Sigma b_i y^i$ elemre j olyan index, amelyre $w_n(a)=w_n(b_j)$, legyen $\delta(a)$ az ilyen j számok maximuma egy a mellett. Belátható, hogy mindig teljesül

$$\delta(\lambda d) = \delta(c)+\delta(d),$$

továbbá $\delta(g)=m$, ahol g az AL főbalideál előbbi generátora. Ha u tetszőleges elem AL-ből, akkor belátható $\delta(u)\geqq\delta(g)>0$. Továbbá $AL\neq A$ esetén $B_0 = L+B_0p_n(x)$ volna, és ezért léteznék olyan $b\in B_0$ elem, amelyre

$$1 = l+bp_n(x).$$

De ekkor egyrészt $\delta(1-bp_n(x))\neq 0$, másrészt $\delta(l)=0$ adódnék, ami ellentmondás, tehát tényleg $AL=A$ teljesül B_0 minden L maximális balideáljára. Ezért

$$1 = \sum_{j=1}^{s} a_j l_j, \quad \text{ahol} \quad a_j\in A, l_j\in L.$$

Létezik olyan nemzérus $z\in Q(x)$ elem, hogy $w_n(za_j)\geqq 0$ áll fenn minden páratlan n-re, és minden j indexre, amelyre az $1\leqq j\leqq s$ feltétel teljesül. Ekkor $za_j\in B_0$ és $z=z(\Sigma a_j l_j)\in B_0L\subseteqq L$. Minthogy létezik z-nek a z^{-1} inverze A-ban, és minthogy

$$w_n(z^{-1}tz)=w_n(t)$$

ezért $zB_0=B_0z=I$ olyan nemzérus ideál B_0-ban, amely az L tetszőleges maximális balideálban fekszik.

Ezzel az erősen *vázlatos* gondolatmenettel beláttuk azt, hogy B_0 olyan gyűrű, amely jobbról primitív, de balról nem primitív.

Ezek után rátérünk az ún. kvázireguláris elemek tárgyalására.

Minden A gyűrű minden a eleméhez hozzárendelhető az összes $x - ax$ alakú elem halmaza, ahol $x \in A$. Ez a halmaz jobbideál, éspedig moduláris jobbideál, amelyet formálisan $(1-a)A$ szimbólummal fogunk jelölni még akkor is, ha nincs egységelem az A gyűrűben. (Ekkor 1 operátorként fogható fel.)

Az $a \in A$ elemet jobbkvázireguláris nak fogjuk nevezni akkor, ha $(1-a)A = A$ teljesül.

Majdnem triviális az, hogy akkor és csak akkor áll fenn

$$(1-a)A = A, \quad \text{ha} \quad a \in (1-a)A.$$

Minthogy pedig $a \in (1-a)A$ esetén nyilván $-a \in (1-a)A$, ezért ekkor létezik olyan $b \in A$ elem, amelyre $-a = (1-a)b$, tehát

$$a + b - ab = 0$$

áll fenn.

Ezt a b elemet az a elem jobbkváziinverzének nevezzük.

Egy elem akkor és csak akkor jobbkvázireguláris, ha létezik jobbkváziinverze. Ugyanis $a + b - ab = 0$ esetén $(1-a)A = A$ is teljesül.

A jobbkváziinverz elnevezést indikolni fogja az ún. „körművelet" bevezetése, amely egyszersmind könnyebbé is teszi a jobb-kvázireguláris elemek tárgyalását.

A körművelet definíciója ez:

$$a \circ b = a + b - ab.$$

Ha pedig a $\sigma : a \to 1 - a$ leképezést vesszük egységelemes gyűrűben vagy nemegységelemes gyűrűnek valamilyen egységelemes gyűrűbővítésében, akkor

$$(a \circ b)\sigma = (a\sigma) \cdot (b\sigma),$$

tehát

$$a \circ b = (a\sigma \cdot b\sigma)\sigma^{-1}.$$

Igazolható ezzel az is, hogy a körművelet asszociatív. A körművelettel bármely gyűrű elemei egységelemes félcsoportot alkotnak, és $a \circ 0 = 0 \circ a = a$ miatt éppen 0 lesz e félcsoportban az egységelem. Mármost a pontosan akkor lesz jobbkvázireguláris, ha ebben a gyűrűt kísérő, egységelemes félcsoportban létezik jobbinverze, vagyis, ha $a \circ b = 0$ teljesül.

Továbbá kvázireguláris nak nevezzük az a elemet, ha ebben az egységelemes, körműveletes félcsoportban létezik kétoldali inverze, vagyis van olyan b elem, amelyre teljesül $a \circ b = b \circ a = 0$. Tehát a kvázireguláris elemek pontosan azok, amelyek egyidejűleg balkvázireguláris ok és jobbkvázireguláris ok is.

Nem nehéz belátni azt, hogy ha egy R jobbideálnak minden eleme jobbkvázireguláris az A gyűrűben, akkor R minden eleme kvázireguláris is. Az ilyen R jobbideált kvázireguláris nak nevezzük.

Tetszőleges A gyűrű bármely R niljobbideálja kvázireguláris jobbideál. Ugyanis $a^n = 0$, $a^{n-1} \neq 0$ és $b = -a - a^2 - \ldots - a^{n-1}$ esetén nyilván $a \circ b = b \circ a = 0$.

Érvényes Jacobson ama fontos feltétele, amely szerint a $J(A)$ radikál minden A gyűrűben olyan kvázireguláris ideál, amely minden kvázireguláris jobbideált és minden kvázoreguláris balideált tartalmaz.

Egyébként $J(A)$ egybeesik egyrészt mindazoknak az x elemeknek a halmazával az A gyűrűben, amelyre az xy szorzat minden y elem mellett jobbkvázireguláris,

másrészt $J(A)$ mindazon y elemek halmazával is egybeesik, amelyekre az xyz szorzat minden x és z elem mellett kvázireguláris.

Minthogy $J(A)$ minden kvázireguláris balideált tartalmaz, a jobbról és balról (ti. jobbprimitívséggel és balprimitívséggel) értelmezett Jacobson-féle radikálnak egymással egybe kell esni.

Az előzők alapján az is világos, hogy $J(A)$ minden niljobbideált és minden nilbalideált tartalmaz. Megjegyezzük, hogy korábban Perlis [258] és Baer [49] vizsgáltak radikálokat, amelyeknek minden eleme kvázireguláris.

20. §. *Gyűrűkonstrukciók Jacobson-féle radikálja*

Mindenek előtt az A gyűrű felett vett összes $n \times n$ típusú matrix gyűrűjét, az A_n teljes matrix-gyűrűjét vizsgáljuk a Jacobson-féle radikál szempontjából.

Érvényes $J(A_n) = (J(A))_n$, tehát teljes matrixgyűrűnek a Jacobson-féle radikálja egybeesik az alapgyűrű Jacobson-féle radikálja felett vett teljes matrixgyűrűvel.

Erre a fontos tételre többféle bizonyítás ismeretes. Az egyik, amely Jacobsontól származik, a gyűrű kvázireguláris elemeit és a matrixgyűrű kvázireguláris matrixait használja fel. A másik bizonyítás, amely E. C. Posner [262]-től származik, átutalja a tétel igazolását a primitív gyűrű felett vett teljes matrixgyűrűk vizsgálatára, és ezért önmagában is igen tanulságos módszert mutat be.

Legyen ugyanis M olyan A_n-jobbmodulus, amelyre $MA_n = M$ teljesül, ahol A_n az A gyűrű felett vett teljes matrixgyűrű, amelyben nincs *triviális* részmodulus, azaz $mA_n = 0$ esetén $m = 0$, ahol $m \in M$. Legyen I_i mindazon matrixok halmaza A_n-ből, amelyeknek i-edik oszlopa tetszőleges elemekből, a többi oszlopa pedig csupa nullából áll. Ekkor I_i balideál az A_n gyűrűben és legyen $\overline{M}_i = MI_i$, továbbá érvényes $M = \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{M}_i$.

Létezik olyan $\overline{M}$ A-jobbmodulus, hogy létezik n számú f_i izomorfizmus is, $f_i : \overline{M} \to \overline{M}_i \subset M$, ahol M mint az A_n skalmatrixai felett vett A-jobbmodulus tekintendő. Továbbá $\overline{M}A = \overline{M}$ és M akkor és csak akkor irreducibilis A_n-jobbmodulus, ha $\overline{M}$ irreducibilis.

$\overline{M}$ létezésének bizonyítása Posnernél konstruktív.

Mindezekből levezethető az is, hogy az A_n teljes matrixgyűrű akkor és csak akkor primitív, ha maga A is primitív gyűrű.

Továbbá az A_n teljes matrixgyűrűnek egy ideálja akkor és csak akkor primitív ideál, ha ez P_n alakú teljes matrixgyűrű, ahol P az A gyűrű egy primitív ideálja.

Tudvalevőleg szemiprímnek, féligprímnek akkor nevezünk egy Q ideált az A gyűrűben, ha minden olyan B ideálra, amelyre $B^2 \subseteq Q$ áll fenn, már ez erősebb $B \subseteq Q$ feltétel is teljesül. Az ilyen tulajdonságú Q ideálokról a Zorn-féle lemma segítségével nem nehéz bebizonyítani azt, hogy előállíthatók bizonyos prímideálok metszeteként, és tetszőleges prímideálok metszete mindig féligprímideál lesz.

Azt is be lehet bizonyítani, hogy az A_n teljes matrixgyűrűnek bármely féligprím ideálja Q_n alakú, ahol Q féligprím ideál az A gyűrűben, és fordítva, ha Q tetszőleges féligprím ideál az A gyűrűben, akkor Q_n is féligprím ideál lesz az A_n teljes matrixgyűrűben.

Minthogy pedig minden primitív ideál prímideál, és a Jacobson-féle radikál pedig, lévén az összes primitív ideál metszete, féligprím ideál, ezért az utóbbi tételből szintén következik $J(A_n) = (J(A))_n$.

Ha R olyan általános radikáltulajdonság, hogy minden A gyűrűben az $R(A)$ radikál tartalmazza az összes R-jobbideált is (pl. ilyen tulajdonságú a Jacobson-

féle, a Levitzki-féle és a Baer-féle alsó nil radikál), és ha A tetszőleges R-félig-egyszerű gyűrű, akkor A bármely K jobbideáljának az R-radikálja éppen a K gyűrű balannihilátora lesz.

Ennek bizonyítása szinte triviális, ugyanis az $R(K)\cdot K$ szorzat egyrészt az A gyűrűnek is jobbideálja, másrészt $R(K)K \subseteq R(K)$ miatt ez a szorzat R-radikálgyűrű, és $R(A)$ miatt fennáll $R(K)\cdot K=0$, amit bizonyítani kellett.

Tehát speciálisan, tetszőleges, Jacobson-féle féligegyszerű gyűrű bármely jobbideáljának a Jacobson-féle radikálja egybeesik a jobbideálnak önmagában vett balannihilátorával.

Ha A olyan tetszőleges gyűrű, amely nem egységelemes, és ha I jelöli a racionális egész számok gyűrűjét, akkor tudvalevőleg létezik A-nak egységelemes A^* gyűrűbővítése, amely $A^* = A+I$ alakú, ahol $A \wedge I=0$, és A-nak bármely jobbideálja, balideálja vagy ideálja ugyanilyen típusú ideál marad a bővebb A^* gyűrűben is.

Belátható, hogy $J(A^*)=J(A)$. Ehhez elegendő arra hivatkozni, hogy egyrészt J öröklődő radikál, tehát bármely A gyűrű bármely B ideáljára

$$J(B)=B\cap J(A)$$

teljesül, másrészt pedig a racionális egész számok I gyűrűjére nyilván $J(I)=0$ teljesül, mert a primitív ideálok éppen a (p) főideálok, ahol p prímszám és az összes (p) metszete pedig (0).

A tetszőleges A gyűrű felett vett $A[\lambda]$ polinomgyűrű Jacobson-féle radikáljáról általánosságban még nincs annyira teljes eredmény, mint pl. az A^* egységelemes gyűrűbővítés radikáljáról, mert $A[\lambda]$ vizsgálata ebből a szempontból összehasonlíthatatlanul nehezebb. Amitsur kapott erre vonatkozóan speciális, de fontos eredményt, amely a következő:

Ha az A gyűrűben nincs nemzérus nilideál, akkor az $A[\lambda]$ polinomgyűrű féligegyszerű Jacobson-féle értelemben.

Amitsur eme tételét alkalmazva arra a szélsőséges esetre, amikor A zérusosztómentes (tehát még inkább nilideálmentes), de *radikálgyűrű* Jacobson-féle értelemben, adódik, hogy ekkor $A[\lambda]$ *féligegyszerű* lesz Jacobson-féle értelemben. Megjegyezzük, hogy pl. az összes páros számlálójú és páratlan nevezőjű tört részgyűrűje (a racionális számtestben) olyan gyűrű, mely zérusosztómentes, és Jacobson-radikálgyűrű, mert a triviális

$$\frac{2k}{2l+1}+\frac{2k}{2(k-l)-1}-\frac{2k}{2l+1}\cdot\frac{2k}{2(k-l)-1}=0$$

azonosság alapján minden $\frac{2k}{2l+1}$ törtnek van $\frac{2k}{2(k-l)-1}$ kváziinverze. Ennélfogva radikálgyűrű felett vett polinomgyűrű lehet féligegyszerű Jacobson-féle értelemben.

Egyébként Amitsur a fenti tételét úgy bizonyította be, hogy feltette azt, hogy $J(A[\lambda])$ radikál nemzérus, és ezzel a feltétellel meg tudta mutatni az A gyűrűben egy nemzérus nilideál létezését, miközben felhasználta az alábbi, önmagában is érdekes lemmáját:

Ha B tetszőleges ideál az $A[\lambda]$ polinomgyűrűben, és ha $p(\lambda) = a_0+a_1\lambda+\ldots+\ldots+a_n\lambda^n$, $a_n\neq 0$, egy legalacsonyabbfokú nemzérus polinom a B ideálban, továbbá ha $r(\lambda)$ olyan polinom $A[\lambda]$-ból, amelyre egy $k\geqq 1$ kitevővel az $a_n^k r(\lambda)=0$ feltétel teljesül, akkor fennáll $a_n^{k-1}p(\lambda)r(\lambda)=0$ is (ahol az esetleges 0-adik hatványon természetesen az 1 operátor értendő, még akkor is, ha nincs egységelem az A gyűrűben).

21. §. *Algebrák Jacobson-féle radikálja*

Már megmutattuk az I. fejezetben azt, hogy bármely A algebrának az R-radikálja egybeesik az operátortartomány nélkül tekintett A gyűrűnek az R radikáljával bármely R általános radikáltulajdonsággal. Ebben a §-ban egy Φ test felett vett algebrának a Jacobson-féle radikálját vizsgáljuk. Ekkor A egy Φ-vektortér, amelyben a $J(A)$ radikál részvektortér.

A Φ test felett vett A algebrának az a elemét Φ felett algebrainak nevezzük, ha az a elemmel generált $\{a\}$ részalgebra Φ felett végesrangú részvektortér. Továbbá az a elemet transzcendensnek fogjuk nevezni akkor, ha az $\{a\}$ részalgebrának a rangja végtelen a Φ test felett. Megjegyzendő, hogy az $\{a\}$ részalgebrának minden eleme bizonyos $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a^i$ alakú polinom, ahol $\alpha_i \in \Phi$.

Érvényes az a fontos tétel, hogy a Φ test felett vett tetszőleges A algebra $J(A)$ Jacobson-féle radikáljának minden eleme vagy nilpotens,, vagy transzcendens.

A Φ test felett vett A algebrát algebrainak nevezzük akkor, ha A-nak minden eleme algebrai Φ felett.

Az előzőkből adódik, hogy algebrai A algebra $J(A)$ Jacobson-féle radikálja nilideál. Tehát bármely algebrai algebrában az összes niljobbideál összege kétoldali nilideál, és minden niljobbideál beágyazható nilideálba.

Utóbbi ténynek az érvényessége tetszőleges gyűrűben még nyitott kérdés.

Most Amitsur bizonyos eredményeit tárgyaljuk, amelyhez bizonyos érdekes előkészületeket teszünk.

Ha a Φ test felett vett A algebrának nincs egységeleme, jelölje A^* az A legszűkebb egységelemes algebra-bővítését felett. Ekkor $A^* = A + \Phi 1$ és $A \cap \Phi 1 = 0$ miatt A^* rangja eggyel nagyobb A rangjánál, ha az utóbbi véges; és A^* rangja egyenlő A rangjával, ha ez a rang végtelen Φ felett. Hasonlóan jelölje $\{a\}^*$ az $\{a\}$ részalgebra legszűkebb egységelemes algebrabővítését, ha nem volna $\{a\}$ egységelemes. Világos, hogy az a elem akkor és csak akkor algebrai Φ felett, ha $\{a\}^*$ véges rangú. Ha $\Phi[\lambda]$ a λ-változós polinomgyűrű Φ felett, akkor a

$$\gamma : 1 \to 1$$

$$\gamma : \lambda \to a$$

megfeleltetések kiterjesztése a $\Phi[\lambda]$ gyűrűnek $\{a\}^*$-ra való olyan homomorfizmusa lesz, amelynek a magja egy $(\mu(\lambda))$ főideál, mert $\Phi[\lambda]$ euklidesi-gyűrű lévén egyszersmind főideálgyűrű is. Az a elem akkor és csak akkor algebrai Φ felett, ha $\mu(\lambda) \neq 0$. Ekkor $\mu(a) = 0$ áll fenn, és ezt a $\mu(\lambda)$ polinomot az a elem minimális polinomjának nevezik. Fel szabad tételezni, hogy $\mu(\lambda)$ legmagasabbfokú tagjának az együtthatója 1. Ha $\nu(a) \in \{a\}^*$, ahol $\nu(\lambda) \in \Phi[\lambda]$, akkor $\mu(\lambda)$ és $\nu(\lambda)$ relatív prímsége, azaz $(\mu(\lambda), \nu(\lambda)) = 1$ ekvivalens azzal a feltétellel, hogy létezik a $\nu(a)$ elemnek $\{a\}^*$-ban multiplikatív inverze. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \in \Phi$ elem az a-elem $\sigma(a)$ *spektrum*ához tartozik, ha az $a - \alpha 1$ elemnek nincsen inverze az A algebrában. Továbbá a $\sigma(a)$ spektrum komplementer halmazát az Φ testben *rezolvens halmaz*nak nevezzük, és $\varrho(a)$ szimbólummal jelöljük. Tehát $\varrho(a)$ mindazon $\alpha \in \Phi$ elemnek a halmaza, amelyre létezik az A algebrában az $(a - \alpha 1)^{-1}$ inverz.

Megjegyzendő, hogy $\alpha \in \sigma(a)$ akkor és csak akkor teljesül, ha a $\mu(\lambda)$ minimális polinom osztható a lineáris $\lambda - \alpha$ binommal. Ez pedig pontosan akkor áll fenn, ha $\mu(\alpha) = 0$. Tehát a $\sigma(a)$ spektrum minden eleme gyöke a minimális polinomnak.

Fontos a következő lemma:
Ha A egy Φ test felett vett algebra, és ha

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

különböző elemek egy adott, tetszőleges a elem $\varrho(a)$ rezolvens halmazából, akkor vagy Φ felett lineárisan függetlenek lesznek a megfelelő

$$(a-\alpha_1 1)^{-1}, (a-\alpha_2 1)^{-1}, \ldots, (a-\alpha_r 1)^{-1}$$

inverz elemek, vagy pedig a olyan algebrai elem, mely minimális polinomjának a fokszáma legfeljebb $r-1$.

Ebből a lemmából levezethető Amitsur-nak az a tétele, amely szerint ha A olyan algebra a végtelen Φ test felett, hogy Φ számossága nagyobb az A rangjánál, akkor a $J(A)$ Jacobson-féle radikál szükségképpen nilideál.

Minthogy a végesen generált algebrának a rangja vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen, ezért az előbbi tételből korollárium ként adódik a következő eredmény:

Nem megszámlálhatóan végtelen számosságú Φ test felett vett bármely végesen generált A algebrának a $J(A)$ Jacobson-féle radikálja nilideál.

Ennek pedig további, nem egészen triviális következménye az, hogy ha Φ nem megszámlálhatóan végtelen számosságú test, és ha N nilalgebra Φ felett, akkor az N felett vett $n \times n$ típusú N_n teljes matrix-gyűrű is nilalgebra Φ felett.

Megjegyzendő ezzel kapcsolatban az, hogy bár $J(A_n) = (J(A))_n$, a Jacobson-radikálra, és minden A gyűrű felett vett A_n teljes matrixgyűrűre teljesül, még nyitott kérdés $U(A_n) = (U(A))_n$ érvényessége általában, ahol $U(A)$ jelöli az A gyűrű felső nilradikálját.

22. §. *Példa olyan primitív gyűrűre, amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens, és példa olyan egyszerű gyűrűre, amely nem primitív*

A. G. Kuros [204] vetette fel 1953-ban azt a problémát, hogy vajon a Jacobson-féle radikál egybeesik-e azzal a felső radikállal, amelyet az összes egyszerű és ugyanakkor primitív gyűrűnek az osztálya határoz meg. Ha J a Jacobson-féle radikál, és J^* az utóbbi radikál, akkor a defiiníció alapján szinte triviálisan teljesül a $J \leqq J^*$ egyenlőtlenség.

Ha létezik olyan A gyűrű, amely Jacobson-féle értelemben fééigegyszerű, de amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens, akkor A szükségképpen primitív gyűrű, és akkor $J \neq J^*$.

Fenti tulajdonságú A gyűrű létezését 1962-ben Sasiada és Suliński közös [280] dolgozata bizonyította be. Az ebben a dolgozatban explicit megadott gyűrű már korábban is jól ismert volt (lásd pl. Jacobson [160], de korábban nem tárgyalták e gyűrűpéldának azt a tulajdonságát, hogy olyan primitív gyűrű, amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens.

Most bemutatjuk ezt a példát.

Legyen K tetszőleges nullkarakterisztikájú test, továbbá a S testnek végtelenrendű automorfizmusa. Tehát S^n minden $n \geqq 1$ kitevőre olyan testautomorfizmus, amely nem az identitás. Ha pl. K a valós számtestnek végtelen sok, egymás közt algebrailag független, transzcendens x_i elemmel való testbővítése, ahol

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

és ha $x_i^S = x_{i+1}$, továbbá ha $r^S = r$ minden r valós számra, akkor minden $n \neq 1$ kitevő esetén S^n olyan automorfizmus, amely nem az identitás.

Legyen továbbá R a z határozatlanban az összes jobbegyütthatós

$$a_0 + za_1 + z^2a_2 + \ldots + z^n a_n$$

polinomnak a halmaza, ahol $a_i \in K$, továbbá $az = za^S$ minden $a \in K$ elemre, és a polinomok egyenlőségét, összeadását, kivonását közönséges módon értelmezzük. Így R egy asszociatív gyűrű lesz, amelyben $az^m = z^m a^{S^m}$. Ezt az R gyűrűt $K[z, S]$ szimbólummal is jelölhetjük. Ebben a gyűrűben van minden polinomnak foka, és ez a gyűrű zérusosztómentes. Minthogy a baloldali euklidesi osztások e gyűrűben korlátlanul elvégezhetők, minden balideál szükségképpen főideál lesz, és minthogy a jobboldali euklidesi osztások is mindig elvégezhetők lesznek a $K[z, S]$ gyűrűben levő polinomokkal, ezért a gyűrű egyszersmind főjobbideálgyűrű is lesz, tehát minden jobbideál főjobbideál.

Igazolni lehet számolással azt, (és közben kihasználjuk azt, hogy $n \neq 1$ esetén S^n soha nem lesz az identikus automorfizmus,) hogy ha I kétoldali ideál a $K[z, S]$ gyűrűben, és ha $I = f(z)R = Rg(z)$, akkor szükségképpen $f(z)$ és $g(z)$ csak egy K testbeli faktorban térhetnek el egymástól, és kell, hogy $f(z)) = z^k a$ $(a \in K)$ alakú legyen. Ezért

$$I = Rz^k = z^k R.$$

Azt, hogy R primitív gyűrű, úgy lehet megmutatni, hogy számolással igazolható az, hogy $(1 - z)R$ moduláris minimális jobbideál az R gyűrűben, és hogy $R^{-1}(1 - z)R$ ideálhányados szükségképpen nulla.

Az R primitív gyűrűnek a $T = zR$ ideálja szintén primitív. Minthogy T tartalmazza az R gyűrű $z^k R$ ideáljait, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$, ezért T nem egyszerű gyűrű. Legyen S a T gyűrűnek tetszőleges nemzérus ideálja, és S^* pedig az S által az R gyűrűben generált ideál, tehát

$$S^* = S + RS + SR + RSR, \quad \text{ahol} \quad S \subseteqq S^*,$$

és belátható, hogy fennáll az $(S^*)^3 \subseteqq S$ tartalmazási reláció is. Minthogy a gyűrűk egyik izomorfia-tétele alapján

$$T/S \cong (zR/z^{3k}R)/(S/z^{3k}R).$$

és $(S^*)^3 = z^{3k}R \subseteqq S$ alapján a tetszőleges T/S valódi homomorf kép nilpotens, mert $(z^k R)^3 \subseteqq z^{3k}R$, ezért T olyan primitív gyűrű, amelynek minden valódi T/S homomorf képe nilpotens. Ennélfogva $J \neq J^*$.

Felvethető a J^* radikál definíciójával kapcsolatban, de egyébként is felvethető az az érdekes kérdés, hogy létezik-e olyan egyszerű gyűrű, amely nem primitív. Az ilyen tulajdonságú A gyűrűben $A^2 \neq 0$, továbbá csak A maga és 0 kétoldali ideál, és A egybeesik a $J(A)$ Jacobson-féle radikállal.

Egy A egyszerű gyűrű egyébként akkor és csak akkor radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben, ha nincs az A gyűrűnek maximális valódi jobbideálja. Ez annak alapján látható be, hogy $A\,J(A) \subseteqq \Phi$ áll fenn minden A gyűrűben a $J(A)$ Jacobson-féle részmodulusa, tehát az A gyűrű összes maximális valódi jobbideáljának a metszete, és $\Phi = A$, ha nincs az A gyűrűben maximális valódi jobbideál.

Sąsiada adott meg először olyan egyszerű gyűrűt explicit módon, amely radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben. Sąsiada konstrukciójában egy lemmának a bizonyítása igen alapvető szerepet játszik, és később Sąsiada és P. M. Cohn [279]

közösen írt dolgozata ennek a lemmának a bizonyítását áttekinthetőbbé, elemibbé és egyszerűbbé tette.

Maga a Sąsiada-féle konstrukció a következő. Legyen K tetszőleges test, x és y egymással nem felcserélhető határozatlanok, R az x és y változó összes formális, végtelen hatványsorának a gyűrűje és I az összes, zérus konstanstagú kétváltozós formális végtelen hatványsorból álló ideál az R gyűrűben. Az említett, elemibb bizonyításúvá tett lemma kimondja azt, hogy x nincs benne az $x-yx^2y$ elemmel R-ben generált $(x-yx^2y)_R$ főideálban. Ezért x nincs benne az illető elemmel az I gyűrűben generált $(x-yx^2y)_I$ főideálban sem. Legyen $\mathfrak{M}$ az I gyűrű mindazon M ideáljának a halmaza, amelyekre $x \notin M$ és $M \supseteq (x-yx^2y)_I$ egyidejűleg áll fenn. Minthogy $(x-yx^2y)_I \in \mathfrak{M}$, ezért $\mathfrak{M}$ nem üres halmaz. Belátható, hogy az $\mathfrak{M}$ halmazra alkalmazható Zorn lemmája, amelynek az alapján létezik az $\mathfrak{M}$ halmazban egy maximális M_0 ideál, amely az I gyűrű ideálja. Az M_0 maximalitása miatt az I/M_0 faktorgyűrű szubdirekt irreducibilis, mert I/M_0 minden nemzérus ideálja tartalmazza az $x+M_0$ elemet, és éppen $(x)_I/M_0$ lesz az I/M_0 szubdirekt irreducibilis gyűrűnek a szíve, vagyis az összes nemzérus ideálnak a nemzérus metszete. Ez a szív idempotens lesz, mert ha $\bar{z} = z+M_0$, akkor $x-xy^2x \in M_0$ miatt nyilván teljesül $\bar{x} = \overline{yx} \cdot \overline{xy}$, tehát $\bar{x} \neq 0$ miatt a szív nem zérógyűrű, s ennélfogva a szív tényleg idempotens. Ebből pedig levezethető az, hogy a szív egyszerű gyűrű lesz. Másfelől a Jacobson-féle radikál öröklődő. Minthogy pedig az I ideál radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben, ti. éppen az R gyűrűnek a radikálja, és minthogy $(x)_I$ ideál I-ben, ezért $(x)_I$ és vele együtt az $(x)_I/M_0$ homomorf kép is radikálgyűrű.

Tehát $(x)_I/M_0$ olyan egyszerű gyűrű, amely radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben.

23. §. *Jacobson sűrűségi tétele a primitív gyűrűkről, és az összes primitív gyűrű speciális osztálya*

Az előzőekben láttuk azt, hogy egy A gyűrű akkor és csak akkor primitív gyűrű, ha létezik az A gyűrűben olyan moduláris maximális R jobbideál, amelyre fennáll $A^{-1}R=0$, ahol az $A^{-1}R=\{x;\ x\in A,\ Ax\subseteq R\}$ ideálhányados ideál. Ekkor az A/R A-jobbmodulus olyan G Abel-féle csoport, amelynek az $E(G)$ teljes endomorfizmusgyűrűjébe az A gyűrű $A^{-1}R=0$ miatt izomorf módon beágyazható, amelynek során az $a\in A$ elemet azonosítjuk az a-val indukált jobbszorzással, mint G egyik endomorfizmusával.

I. Schur fontos és majdnem triviális lemmája, más megfogalmazásban, megállapítja azt, hogy az $A/R=G$ Abel-féle csoport $E(G)$ teljes endomorfizmusgyűrűjében az A részgyűrű centralizátora egy S ferdetest, ahol A centralizátora definíció szerint az A összes elemével multiplikatív felcserélhető endomorfizmusnak a részhalmaza $E(G)$-ben. Ekkor G felfogható S-jobbmodulusként, vagy felfogható S'-balmodulusként is, ahol S' jelenti az S egyik antiizomorf képét. Minthogy S ferdetest, ezért S' is ferdetest, továbbá a ferdetest felett vett operátormodulus nyilván vektortér lesz.

Bebizonyítható n szerint végzett teljes indukcióval az a tétel, hogy ha H tetszőleges n-rangú részvektor az $A/R=G$ jobbvektortérben (n természetes szám) és ha $v\in G$ tetszőleges olyan elem, amelyre $v\notin H$, akkor létezik az A részgyűrűben olyan a elem, amelyre, mint G-nek S-endomorfizmusára $va\neq 0$, de minden $h\in H$ elemre $ha=0$ teljesül.

Ezzel a tétellel kapcsolatban megemlítjük a sűrű részgyűrűnek a következő fogalmát. Azt mondjuk, hogy az A gyűrű egy S ferdetest felett vett V vektortér lineáris transzformációinak (azaz S-endomorfizmusainak) sűrű részgyűrűje, ha bár-

mely véges sok, az S felett lineárisan független $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ vektorhoz, és bármely előre megadott $y_1, y_2, \ldots, y_k \in V$ vektorhoz létezik olyan $a \in A$ elem, amelyre teljesül

$$x_1 a = y_1,\ x_2 a = y_2,\ \ldots,\ x_k a = y_k.$$

Az előbbi tétel segítségével bebizonyítható Jacobson sűrűségi tétele:

Bármely primitív gyűrű izomorf egy ferdetest felett vett vektortér összes lineáris transzformációja gyűrűjének egy alkalmas sűrű részgyűrűjével, és minden sűrű részgyűrű primitív gyűrű.

Ugyanis, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges, véges sok és S felett lineárisan független elem a $G = A/R$ vektortérben, ahol A a primitív gyűrű, akkor legyen H_i az összes olyan x_j által generált részvektortér, amelyekre $j \neq i$. Minthogy $x_i \notin H_i$, létezik olyan $t_i \in A$ elem, hogy $x_i t_i = z_i \neq 0$ és $h_i x_i = 0$, ahol z_i bizonyos adott elem a G vektortérben és h_i befutja H_i minden elemét. Minthogy G irreducibilis A-jobbmodulus és A/R operátorizomorf $z_i A$-val, van olyan $u_i \in A$, amelyre $z_i u_i = y_i$, ahol y_i tetszőleges, adott elem ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ha pedig

$$a = \sum_{i=1}^{n} t_i u_i$$

akkor $x_1 a = y_1,\ x_2 a = y_2,\ \ldots,\ x_n a = y_n$.

Megjegyzendő, hogy Jacobson [161] könyvében a fenti, vázlatos, bizonyítástól lényegesen eltérő típusú bizonyítás található.

Ennek a sűrűségi tételnek megfelelően bármely A Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrűhöz léteznek olyan S_γ ferdetestek és G_γ S_γ-vektorterek, hogy A izomorf lesz olyan A_γ gyűrűknek ($\gamma \in \Gamma$) egy szubdirekt összegével, amelyek izomorfok a G_γ vektortér lineáris transzformációinak (azaz S_γ-endomorfizmusainak) egy sűrű részgyűrűjével.

Végül megjegyezzük azt, hogy az összes primitív gyűrűnek az osztálya speciális gyűrűosztály, és az a felső radikál, amelyet az összes primitív gyűrű osztálya határoz meg, olyan speciális radikál, amely egybeesik a Jacobson-féle radikállal. Ezzel szemben az összes olyan egyszerű gyűrűnek az osztálya, amelyek primitívek is, olyan gyűrű osztály, hogy az ezzel meghatározott felső radikál — miként láttuk — valódi módon nagyobb a Jacobson-féle radikálnál. Egyébként a 26. §-ban részletesebben fogunk foglalkozni bizonyos egyszerű gyűrűk osztályával meghatározott felső radikállal.

О РАДИКАЛАХ КОЛЕЦ. II.

Ф. САС

ON RADICALS OF RINGS II.

F. SZÁSZ

SPECIÁLIS DIOPHANTIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSAINAK ELOSZLÁSA

KÁTAI IMRE

1. *Az osztók eloszlása.* Jelölje $\tau(n)$ az n természetes szám osztóinak számát. Legyen továbbá $\tau(n, \alpha, \beta)$ az n azon d osztóinak a száma, amelyekre $n^{\alpha} \leqq d < n^{\beta}$, azaz

$$\tau(n, \alpha, \beta) = \sum_{n^{\alpha} \leqq d < n^{\beta}} 1. \tag{1.1}$$

Megvizsgáljuk $\tau(n, \alpha, \beta)$ eloszlását. Speciális n-ekre ezt előzőleg *Babajev* vizsgálta [1].

Ha n törzstényezős felbontása

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}, \tag{1.2}$$

akkor

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)\dots(\alpha_r + 1).$$

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy

$$\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \left(\frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2} \right)^2 = \sum_{i=1}^{r} c_i \varepsilon_i^2, \tag{1.3}$$

ahol

$$c_i = \frac{\alpha_i(\alpha_i + 2)}{12}, \quad \varepsilon_i = \frac{\log p_i}{\log n}.$$

(1. 3) bizonyítására legyenek valamely (Ω, A, P) valószínűségi mezőn a $\xi_1, \dots, \xi_r$ független valószínűségi változók a következő módon definiálva:

$$P\left(\xi_i = \left(\beta_i - \frac{\alpha_i}{2} \right) \log p_i \right) = \frac{1}{\alpha_i + 1} \qquad (\beta_i = 0, \dots, \alpha_i). \tag{1.4}$$

Legyen

$$\eta = \sum_{i=1}^{r} \xi_i.$$

(1. 4)-ből világos, hogy η egyenletes eloszlású a $\log d - \frac{1}{2} \log n$ halmazon, d az n osztóin fut végig.

Mivel η várható értéke, $M\eta = 0$, így

$$M\eta^2 = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \left(\log d - \frac{1}{2} \log n \right)^2. \tag{1.5}$$

Másrészt, a függetlenség miatt

$$M\eta^2 = \sum_{i=1}^{r} M\xi_i^2,$$

továbbá

$$M\xi_i^2 = c_i \log^2 p_i.$$

Így

$$M\eta^2 = \sum_{i=1}^{r} c_i \log^2 p_i. \tag{1.6}$$

(1. 5) és (1. 6) egybevetésével (1. 3) következik.

Jelölje $P(n)$ az n legnagyobb prímhatványosztóját. (1. 3)-ból rögtön következik az alábbi

1. TÉTEL. *A természetes számok valamely* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *sorozatára a*

$$\tau\left(n_k, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \Big/ \tau(n_k) \to 1 \qquad (k \to \infty) \tag{1.7}$$

reláció akkor és csak akkor teljesül minden $\varepsilon > 0$*-ra, ha*

$$\log P(n_k)/\log n_k \to 0 \qquad (k \to \infty). \tag{1. 8}$$

A következőkben kimutatjuk, hogy amennyiben a szám legnagyobb prímhatványosztója kicsi, akkor érvényes a centrális határeloszlástétel is. Ehhez szükségünk lesz a következő *Ljapunov*tól származó segédtételre [2].

LEMMA. *Legyenek* $X_1, \ldots, X_r$ *független valószínűségi változók, amelyekre* $MX_i = 0$, $MX_i^2 = \sigma_i^2$, $M|X_i|^3 = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, r)$,

$$S_r^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2, \quad B_2 = \frac{1}{r} S_r^2, \quad B_3 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} B_i,$$

s jelölje $\overline{F}(x)$ *az* $X_1 + \ldots + X_r < xS_r$ *esemény valószínűségét. Ekkor*

$$|\overline{F}(x) - \Phi(x)| < \frac{c}{\sqrt{r}} \frac{B_3}{B_2^{3/2}}, \tag{1.9}$$

ahol c *abszolút állandó, és*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du.$$

Alkalmazzuk lemmánkat $X_i = \xi_i$ választással. Ekkor $S_r^2 = \sum_{i=1}^{r} c_i \log^2 p_i$, továbbá

$$M|\xi_i|^3 = \frac{1}{\alpha_i + 1} \sum_{r=0}^{\alpha_i + 1} \left| v - \frac{\alpha_i}{2} \right|^3 \log^3 p_i = \tau_i \log^3 p_i.$$

Könnyen látható, hogy τ_i / α_i^3 α_i minden értékére két pozitív konstans között változhat. Így

$$B_3 / B_2^{3/2} \leqq c \sqrt{r} \, \frac{(\sum \log^3 p_i)}{(\sum \log^2 p_i)^{3/2}}. \tag{1.10}$$

Legyen $\frac{\log P(n)}{\log n} = \Delta(<1)$. Bevezetve a $\delta_i = \frac{\log p_i^{\alpha_i}}{\log n}$ $(i=1, \ldots, r)$ jelöléseket, így

$$\frac{\sum \log^3 p_i^{\alpha_i}}{(\sum \log^2 p_i^{\alpha_i})^{3/2}} = \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{r} \delta_i^3\right)^{1/3}}{(\sum \delta_i^2)^{1/2}}\right)^3 = [A]^3. \tag{1.11}$$

Egyszerűen belátható, hogy a

$$A = \left(\sum_{i=1}^{r} \delta_i^3\right)^{1/3} \Big/ (\sum d_i^2)^{1/2}$$

függvényre a $0 \leqq \delta_i \leqq \Delta$, $\sum_{i=1}^{r} \delta_i = 1$ feltételek mellett érvényes az $A \leqq c\Delta^{1/6}$ egyenlőtlenség. Következésképpen (1. 9), (1. 10), (1. 11) miatt

$$|\bar{F}(x) - \Phi(x)| < c\left(\frac{\log P(n)}{\log n}\right)^{1/2}$$

Így érvényes a következő

2. TÉTEL. *Jelölje $\bar{N}_n(x)$ az n természetes szám azon d osztóinak a számát, amelyre*

$$\log d < \frac{1}{2}\log n + x\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \log^2 p_i\right)^{1/2}.$$

Ekkor

$$\left|\bar{N}_n(x) - \frac{\tau(n)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du\right| < c\left(\frac{\log P(n)}{\log n}\right)^{1/2} \tau(n).$$

2. *Az $n = x_1 \ldots x_k$ egyenlet* megoldásainak eloszlása hasonlóan vizsgálható. Jelölje $\tau_k(n)$ az összes pozitív egész megoldások számát, s $\tau_k(n; \beta_i, \gamma_i, i=1, \ldots, \ldots k-r)$ ezek közül azok számát, amelyekre $n^{\beta_i} \leqq x_i < n^{\gamma_i}$ $(i=1, \ldots, k-1)$. Érvényes a

3. TÉTEL. *Legyen $n_1 < n_2 < \ldots$ a természetes számok végtelen sorozata. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden $\varepsilon > 0$ állandóval és $\beta_i = \frac{1}{k} - \varepsilon$, $\gamma_i = \frac{1}{k} + \varepsilon$ választással a*

$$\frac{\tau_k(n_j \beta_i, \gamma_i, i = 1, \ldots, k-1)}{\tau_k(n_j)} \to 1 \quad (j \to \infty) \tag{2.1}$$

reláció teljesüljön, az hogy

$$\frac{\log P(n_j)}{\log n_j} \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Legyen n törzstényezős előállítása $n = p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_r^{\alpha_r}$, s tekintsük a

$$\varphi(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \frac{1}{\tau_k(n)} \sum_{x_1 \ldots x_k = n} e^{i(t_1 \log x_1 + \ldots + t_{k-1} \log x_{k-1})} \tag{2.3}$$

karakterisztikus függvényt. Bevezetve a $K_i = t_i / \log n$ $(i=1, \ldots, k-1)$,

$$\psi(K_1, \ldots, K_{k-1}) = (t_1, \ldots, t_{k-1})$$

jelöléseket, (2. 3) átírható a

$$\psi(K_1, \ldots, K_{k-1}) = \prod_{p^\alpha \| n} \left\{ \frac{1}{\tau_k(p^\alpha)} \sum e^{i \frac{\log p}{\log n} [\delta_1 K_1 + \ldots + \delta_{k-1} K_{k-1}]} \right\} \tag{2.4}$$

alakba, ahol a jobb oldalon azon $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ nemnegatív egészekből álló sorozatokra összegezünk, amelyekre $\delta_1 + \ldots + \delta_{k-1} \leqq \alpha$. Ezek száma nyilván $\tau_k(p^\alpha)$.

Továbbá az $e^{iz} = 1 + iz + O(|z|^2)$; $|z| < c$ relációt alkalmazva

$$\frac{1}{\tau_k(p^\alpha)} \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}} e^{i \frac{\log p}{\log n} (\delta_1 K_1 + \ldots + \delta_{k-1} K_{k-1})} =$$

$$= 1 + i \frac{\log p}{\log n} \frac{1}{\tau_k(p^\alpha)} \sum_{\delta_1 + \ldots \delta_{k-1} \leqq \alpha} (\delta_{11} K + \ldots + \delta_{k-1} K_{k-1}) + O\left(\left(\frac{\log^2 p^\alpha}{\log^2 n} \right)^2, \right) \tag{2.5}$$

feltéve, hogy $K_1, \ldots, K_{k-1}$ korlátosak. Könnyen verifikálható, hogy

$$\sum_{\delta_1 + \ldots + \delta_{k-1} \leqq \alpha} (\delta_1 K_1 + \ldots + \delta_{k-1} K_{k-1}) = (K_1 + \ldots + K_{k-1}) \frac{\alpha}{k} \tau_k(p^\alpha)$$

s így (2. 5) jobb oldala

$$1 + i \frac{\log p^\alpha}{\log n} \frac{K_1 + \ldots + K_{k-1}}{k} + O\left(\frac{\log p^\alpha}{\log n} \right). \tag{2.6}$$

Így, ha $\dfrac{\log P(n)}{\log n}$ elég kicsi, (2. 4), (2. 5), (2. 6)-ból

$$\log \psi(K_1, \ldots, K_{k-1}) = \frac{i}{k} (K_1 + \ldots + K_{k-1}) \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\log p^\alpha}{\log n} + O\left(\sum \left(\frac{\log p^\alpha}{\log n} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{i}{k} (K_1 + \ldots + K_{k-1}) + O\left(\frac{\log P(n)}{\log n} \right). \tag{2.7}$$

Tegyük fel most, hogy az n_j sorozatra (2. 2) fennáll. Ekkor (2. 7) miatt a megfelelő $\psi = \psi_n$ karakterisztikus függvények sorozatára

$$\lim_{j \to \infty} \psi_{n_j}(K_1, \ldots K_{,k-1}) = e^{i \frac{K_1 + \ldots + K_{k-1}}{k}}$$

egyenletesen, ha $K_1, \ldots, K_{k-1}$ korlátos tartományon változnak. Innen következik (2. 1).

A 3. tétel másik része nyilvánvaló.

3. *Összegezési függvények szeleteinek viselkedése.*

E §-ban néhány problémát említünk meg. Jelölje $\mu(n)$ a Möbius-függvényt, s legyen

$$m(n, z) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq z}} \mu(d). \tag{3.1}$$

$$M(n) = \max_{1 \leqq z \leqq n} |m(n, z)|. \tag{3.2}$$

Világos, hogy $M(n) \leqq 2^{\omega(n)}$. ERDŐS közölte, hogy $M(n) \leqq c \dfrac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}$ is fennáll, s ez utóbbi egyenlőtlenség pontos is. Valószínűnek látszik, hogy egy alkalmas nulla-sűrűségű

sorozatot elhagyva már $M(n) \leqq 2^{\alpha\omega(n)}$ is igaz alkalmas $\alpha < 1$ állandóval. $M(n)$ átlagos nagyságrendjének megtalálása nehéznek látszik.

További feladat lehet annak vizsgálata, hogy $m(n, z)$ $(1 \leqq z \leqq n)$ hányszor vált előjelet? Jelöljük ezt a számot $l(n)$-nel.

Erdős hívta fel a figyelmemet arra, hogy érdemes először megvizsgálni az $n_k = p_1 \ldots p_k$ speciális sorozatot, ahol p_i az i-edik prímszámot jelenti. Minthogy $z \leqq p_k$-ra

$$\sum_{\substack{d \mid n_k \\ d \leqq z}} \mu(d) = \sum_{v=1}^{[z]} \mu(v),$$

így felhasználva azt a tételt [4], hogy $\sum_{v=1}^{y} \mu(v)$ minden $y \in (T, T^{15})$ intervallumban pozitív és negatív értéket is felvesz minden $T > c$ esetén az

$$l(n_k) > c \log_2 p_k > c' \log_3 n_k \tag{3. 3}$$

egyenlőtlenség könnyen következik.

Valószínű, hogy (3. 3)-nál sokkal több igaz. Talán

$$\lim_{k \to \infty} \frac{l(n_k)}{\log_2 n_k} > 0,$$

Hasonló kérdések vizsgálhatók $\mu(n)$ helyett más függvényekre is, így pl. valós karakterek nem teljes részletösszegeire.

4. *Kör rácspontjainak eloszlása.*

Kárász Aranka szakdolgozatában a következő kérdést vizsgálta [3]. Jelölje $r(n)$ az $n = u^2 + v^2$ diofantikus egyenlet egész megoldásainak a számát. Tetszőleges $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ esetén legyen $r(n, \alpha, \beta)$ ezek közül azoknak a száma, amelyekre $\alpha \leqq \arg(u + iv) < \beta$. Jelöljük $\mathcal{K}$-val a két négyzetszám összegeként előállítható egészek halmazát, s $\mathcal{K}(V)$-al az Y-nál nem nagyobb, K-beli elemek számát. Ekkor alkalmas $o(K(Y))$ számú elem elhagyásával minden $n \leqq Y$, $n \in \mathcal{K}$-ra

$$\left| \frac{r(n, \alpha, \beta)}{r(n)} - \frac{(\beta - \alpha)}{2\pi} \right| = o(1) \qquad (n \to \infty), \tag{4.3}$$

egyenletesen $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$-re.

A bizonyítás felhasználja a Gauss-prímek szögterekben való eloszlására vonatkozó prímszámtételt.

Hasonló tétel bizonyítható be $u^2 + v^2$ tetszőleges $Q(u, v)$ pozitív definit kvadratikus alakra, ha az osztályszám 1. 1-nél nagyobb osztályszám esetén a

$$Q(u, v) = n$$

egyenlet megoldásai eloszlásának vizsgálata nehezebbnek látszik.

IRODALOM

[1] *Г. бабаев,* Распределение целых точек на алгебраических поверйхностях, Душанбе 1966, Министерство Народного Образования Таджикской ССР.
[2] *C. D. Esseen,:* Fourier analysis of distribution functions, Acta Math., *77* (1945), 1—125.
[3] *Kárász Aranka:* Kör rácspontjának eloszlásáról (szakdolgozat), Budapest, 1968.
[4] *I. Kátai:* О сравнительной теории простых чисел, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *17* (1967), 133—149.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

И. КАТАИ

ON THE DISTRIBUTION OF THE SOLUTIONS OF SPECIAL DIOPHANTINE EQUATIONS

I. KÁTAI

GRÁFOK, VEKTOROK ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI EGYENLŐTLENSÉGEK

KATONA GYULA

Turán Pál nemrég gráfelméleti-kombinatorikai tételek érdekes geometriai és potenciálelméleti alkalmazásait mutatta be [1]. Ebben a cikkben egy hasonló típusú példát szeretnénk ismertetni:

A. Tétel. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *d-dimenziós* ($d \geqq 1$) *vektorok, melyekre* $|a_i| \geqq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) *teljesül. Ekkor azon* a_i, a_j *párok* ($i \neq j$) *száma, melyekre* $|a_i + a_j| \geqq 1$ *fennáll, legalább*

$$E(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right), & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Az egyenlőtlenség pontos, hiszen ha az egyik tengelyen pozitív, illetve negatív irányban $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}$ (páratlan n esetén $\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}$) egységnyi vektort veszünk, ezekre a fenti párok száma éppen a tételben meghatározott minimum lesz.

Bizonyítás. 1. *A két-dimenziós euklideszi térben adott bármely három vektor között van kettő melyeknek egymás által bezárt szöge legfeljebb* 120° A vektorok a teljes szöget 3 szögre osztják, ezek között tehát a legkisebb legfeljebb 120°.

2. *A háromdimenziós euklideszi térben adott bármely három vektor között van kettő, melyeknek egymás által bezárt szöge legfeljebb* 120°. Jelöljük a három vektort a_1, a_2, a_3-mal. Vetítsük a_3-at az a_1 és a_2 által kifeszített S síkra (ha nem feszítenek ki síkot, akkor a három vektor egy síkban van, ezt az esetet már láttuk). Legyen a vetület a_3'. a_1, a_2, a_3' már egy síkban vannak, alkalmazható rájuk az 1 pont eredménye, van közöttük két, 120°-nál nem nagyobb szöget bezáró vektor. Ha ez a_1 és a_2, készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy pl. a_1 és a_3' ilyenek. Azon vektorok, amelyeknek a_1-gyel bezárt szöge 120°-nál nagyobb, egy K végtelen körkúp belsejében helyezkednek el, melynek tengelye a_1 egyenese, az alkotók tengellyel bezárt szöge 60°, és az a_1-gyel ellentétes féltérben helyezkedik el. Mivel a_3' nincs a K kúp belsejében, így a_3 sincs. Ugyanis K bármely belső pontjának vetülete S-re szintén K-beli, mert S áthalad a kúp tengelyén. Így a_3 és a_1 egymás által bezárt szöge legfeljebb 120°.

3. *Ha adott a 3-dimenziós euklideszi térben* 3 *vektor,* a_1, a_2, a_3, *melyekre* $|a_i| \geqq 1$ ($i = 1, 2, 3$), *akkor mindig van közöttük két különböző, melyekre* $|a_i + a_j| \geqq 1$ ($i \neq j$). Az előző pont alapján van a 3 vektor között kettő (pl. a_1 és a_2) melyeknek α szöge legfeljebb 120°. Így

$$|a_1 + a_2|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1|\,|a_2| \cos \alpha$$

alapján

$$|a_1+a_2|^2 \geqq |a_1|^2+|a_2|^2+2|a_1|\,|a_2|\cos 120^\circ =$$

$$=(|a_1|-|a_2|)^2+|a_1|\,|a_2| \geqq 1.$$

4. *Ha adott a d-dimenziós euklideszi térben* 3 *vektor*, a_1, a_2, a_3, *melyekre* $|a| \geqq 1$ $(i=1, 2, 3)$, *akkor mindig van közöttük két különböző, melyekre* $|a_i+a_j| \geqq 1$. A 3 vektor ugyanis egy legfeljebb 3 dimenziós alteret feszít ki. Ebben az altérben viszont az állítás a 3 pont alapján már igaz.

5. Bár a tétel bizonyításához nincs rá szükség, érdemes megjegyezni, hogy *a* 4 *állítás euklideszi tér helyett tetszőleges Hilbert térre is igaz.* Nyilvánvaló ugyanis, hogy a Hilbert tér 3 eleme — a_1, a_2, a_3 — egy legfeljebb 3 dimenziós alteret feszít ki, található tehát 3 ortonormált elem a térben (b_1, b_2, b_3), melyek lineáris kombinációiként kifejezhető A tetszőleges eleme: $a=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3$. Megfeleltetve a-nak a 3-dimenziós euklideszi tér $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ elemét, egy távolságtartó leképezést kapunk, s mivel az állítást euklideszi tér esetére már a 3. pontban igazoltuk, igaznak kell lennie a Hilbert térben is.

6. Bizonyítsuk most már a tételt. Készítsünk egy G gráfot, melynek csúcsai az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek, és két csúcs $(a_i$ és $a_j, i \neq j)$ akkor és csak akkor legyen összekötve, ha $|a_i+a_j| \geqq 1$. A 4., illetve 5. pont szerint a G gráfban nincs üres hármas, azaz, bárhogy kiválasztva 3 csúcsot, valamelyik kettő éllel össze van kötve. Turán Pál ismert gráfelméleti tétele [2] alapján azonban a gráfban legalább $E(n)$ élnek kell ehhez lenni, tehát legalább $E(n)$ azon párok száma, melyekre $|a_i+a_j| \geqq 1$.

A következőkben a fenti tétel és Hilbert térbeli változatának néhány, kaleidoszkópszerű alkalmazását mutatjuk be. Ezekkel a gráfelméletnek egyéb területekkel való meglepő kapcsolatát szeretnénk hangsúlyozni.

B. Tétel. *Legyenek* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *az* $[a, b]$ *intervallumban négyzetesen integrálható függvények, melyekre* $\int_a^b f_i^2(x)dx \geqq 1$. *Ekkor legalább* $E(n)$ $f_i(x), f_j(x)$ $(i \neq j)$ *párra teljesül* $\int_a^b (f_i(x)+f_j(x))^2 dx \geqq 1$.

C. Tétel. *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *nulla várható értékű és D szórású (nem feltétlenül független) valószínűségi változók. Ekkor legalább* $E(n)$ ξ_i, ξ_j $(i \neq j)$ *párra teljesül* $D(\xi_i+\xi_j) \geqq D$.

Fenti tételek az A Tétel Hilbert térbeli változatának egyszerű speciális esetei.

Fogalmazzuk most át az A Tételt a valószínűségszámítás nyelvére. Ha adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d-dimenziós vektorok $(|a_i| \geqq 1$ $i=1, 2, \ldots, n)$, és egymástól függetlenül kiválasztunk közülük kettőt, legalább mekkora a valószínűsége annak, hogy a két vektor összegének abszolút értéke legalább 1 legyen? Az összes lehetséges esetek száma n^2, a kedvező esetek száma legalább $2E(n)+n$, hiszen ha ugyanazt a vektort választjuk kétszer (ami itt megengedett), akkor az összeg abszolútértéke 1-nél nagyobb, és minden párt kétszer számoltunk. Azonban

$$2E(n)+n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \dfrac{n^2+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

azaz $2E(n)+n \geqq \frac{n^2}{2}$, és

$$P(|a_i+a_j| \geqq 1) \geqq \frac{1}{2}.$$

Vizsgáljuk meg, milyen egyenlőtlenség jön ki, ha nem tesszük fel az a_i vektorokról az $|a_i| \geqq 1$ tulajdonságot, és $P(|a_i+a_j| \geqq x)$-re keresünk hasonló alakú becslést. Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok közül $m(x)$ darabra teljesül az $|a_i| \geqq x$ feltétel. Ekkor, (1)-hez hasonlóan

$$(2) \qquad P(|a_i+a_j| \geqq x) \geqq \frac{2E(m(x))+m(x)}{n^2} \geqq \frac{m^2(x)}{2n^2} = \frac{1}{2}P(|a_i| \geqq x)^2.$$

Önkéntelenül adódik a gondolat, átvihető-e ez az egyenlőtlenség tetszőleges vektor valószínűségi változók esetére.

D. Tétel. *Legyenek tehát ξ és η független. egyforma eloszlású valószínűségi változók, folytonos és szigorúan monoton eloszlásfüggvénnyel, melyek a d-dimenziós térből veszik fel értékeiket. Ekkor teljesül a*

$$P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{P(|\xi| \geqq x)^2}{2}$$

egyenlőtlenség. (Az eloszlás függvényre vonatkozó feltevéseket csak azért tettük fel, hogy a bizonyítás egyszerűbben elmondható legyen, a tétel egyébként is helyes.)

Bizonyítás. A bizonyítást diszkrét, egyforma eloszlású valószínűségi változókkal való közelítéssel fogjuk végezni. A közelítést úgy hajtjuk végre, hogy ξ, illetve η lehetséges értékeit véges sok osztályba soroljuk, mely osztályok valószínűségei egyenlők. Az osztályokat 1—1 elemükkel helyettesítve már alkalmazhatjuk (2)-őt, s csupán a határátmenet helyességének igazolása marad hátra.

Az osztályokba sorolást koordinátánként végezzük el. Legyen ξ első koordinátája ξ_1 és legyen K egy természetes szám. Az első lépésben osszuk K osztályba ξ értékeit: $\xi = x$ legyen a k-adik osztályban, ha első koordinátájára, x_1-re

$$\frac{k-1}{K} \leqq P(\xi_1 < x_1) < \frac{k}{K}$$

teljesül ($k = K$ esetén a jobboldalon is $\leqq$ jel értendő). Ezzel ξ értékeit valóban egyenlő valószínűségű osztályokra bontottuk fel, ha $P(\xi_1 < x_1)$ folytonos függvény. Utóbbi azonban egyszerű következménye az eloszlásfüggvény folytonosságának.

Tekintsük a k-adik osztályt, de ismételjük meg benne az eljárást a második koordináta szerint:

$$\frac{k-1}{K} \leqq P(\xi_2 < x_2 |\ \xi \text{ eleme a } k\text{-adik osztálynak}) < \frac{k}{K}.$$

Így már K^2 osztályhoz jutottunk. Az eljárást hasonlóképpen folytatva K^d osztályt kapunk, melyeknek valószínűségei egyformák, hiszen minden lépésnél egyenlő valószínűségű halmazokat bontottunk K egyenlő részre.

Ha tehát most minden osztályból kiválasztunk egy tetszőleges elemet, és ahhoz $\frac{1}{K^d}$ valószínűséget rendelünk, akkor erre a ξ^K, és a hasonlóan képzett η^K valószínűségi változókra már alkalmazható (2):

$$P(|\xi^K+\eta^K| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi^K| \geqq x)^2. \tag{3}$$

Igazolnunk kell még, hogy ξ^K d-dimenziós eloszlásfüggvénye ξ d-dimenziós eloszlásfüggvényéhez tart pontonként, ha $K \to \infty$, azaz

$$\lim_{K\to\infty} [P(\xi_1^K < x_1, \ldots, \xi_d^K < x_d) - P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d)] = 0. \tag{4}$$

Könnyen látható, hogy ehhez elég igazolni a következőket:

$$\begin{aligned} &\lim_{K\to\infty} P(\overline{\xi_1^K < x_1, \ldots, \xi_d^K < x_d}, \xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d) = \\ &= \lim_{K\to\infty} P(\xi_1^K < x_1, \ldots, \xi_d^K < x_d, \xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

A zárójelben álló események csak olyan osztályokban következhetnek be, amelyekben van egy pont, amelynek i-edik koordinátája valamilyen i-re $(i=1, 2, \ldots, d)$ x_i. Vagyis azokat az osztályokat kell tekintenünk, melyeken átmennek az $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ pontból a tengelyekkel párhuzamosan húzott $d-1$-dimenziós hipersíkok. Egy ilyen hipersík legfeljebb K^{d-1} osztályt metszhet (teljes indukcióval könnyen belátható). A hipersíkok száma d, egy osztály valószínűsége $\frac{1}{K^d}$, így a (4)-ben szereplő valószínűségek $d\frac{K^{d-1}}{K^d} = \frac{d}{K}$-val becsülhetők felülről, ami $K \to \infty$ esetén 0-hoz tart, vagyis (5)-öt és (4)-et igazoltuk.

A valószínűségszámításból jól ismert, hogy (4) fennállása esetén

$$P(|\xi^K| \geqq x) \to P(|\xi| \geqq x)$$

is teljesül, ha d-dimenziós eloszlásfüggvénye folytonos. Ez esetben ugyancsak teljesül.

$$P(|\xi^K+\eta^K| \geqq x) \to P(|\xi+\eta| \geqq x).$$

Ezeket a konvergenciákat felhasználva (3)-ból már következik a tétel állítása.

Hasonló tétel bizonyítható olyan sztochasztikus folyamatokra, melyek egy $[a, b]$ intervallumban vannak értelmezve, és realizációik egy valószínűséggel négyzetesen integrálhatók itt. Ha $\xi(t)$ és $\eta(t)$ két független realizáció, akkor

$$P\left(\int_a^b (\xi(t)+\eta(t))^2 \, dt \geqq x\right) \geqq \frac{1}{2} P\left(\int_a^b \xi^2(t) \, dt \geqq x\right)^2$$

IRODALOM

[1] *Turán Pál:* Gráfok, geometria és generalizált potenciálok. Előadás a Bolyai János Matematikai Társulat rendezésében 1968. nov. 22-én.

[2] *Turán Pál:* Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat. Fiz. Lapok XLVIII, 1941., p. 436—452.

ГРАФЫ, ВЕКТОРЫ И НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Д. КАТОНА

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d-мерные векторы, где $|a_i| \geqq 1 (i=1, 2, \ldots, r)$. Доказано, что неравенство $|a_i + a_j| \geqq 1$ $(i \neq j)$ имеет место по крайней мере для $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ пар, если n чётно $\left[\text{и } \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{ пар, если } n \text{ нечётно}\right]$. Доказательство опирается на теорему Турана [2]. Утверждение имеет место и в случае гильбертового пространства. Даны приложения например $P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi| \geqq x)^2$, где ξ и η одинаково распределенны векторные случайные величины.

GRAPHS, VECTORS AND INEQUALITIES IN PROBABILITY THEORY

G. KATONA

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be d-dimensional vectors with the property $|a_i| \geqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. It is proved that the inequality $|a_i + a_j| \geqq 1$ $(i \neq j)$ holds for at least $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ pairs if n is even and $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ pairs if n is odd. The proof is based on Turán's graph theorem [2]. The statement is valid for Hilbert space, too. Among others the following application is given: $P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi| \geqq x)^2$, where ξ and η are independent uniquely distributed random vector-variables.

KAPCSOLATOK POLINOMOKNAK ÉS HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKEIKNEK SZÁMELMÉLETI TULAJDONSÁGAI KÖZÖTT

LOVÁSZ LÁSZLÓ

I. Az egész együtthatós polinomok körében egyértelmű az irreducibilis felbontás, így e polinomok körében az egész számok elméletéhez hasonló számelmélet építhető ki. Kérdés, hogy az a homomorfizmus, melyet a „behelyettesítés" létesít e két gyűrű között, mennyire tartja meg a számelméleti tulajdonságokat. Ilyen jellegű kérdés természetesen igen sok felvethető, és igen sok közülük nagyon nehéz. Az a kérdés pl., hogy ha egy $f(x)$ polinomra minden egész a helyen $f(a)$ összetett, akkor milyen feltételek mellett lesz más polinomok szorzata, a számelmélet igen nevezetes megoldatlan problémája és csak lineáris polinomokra adja meg a választ Dirichlet nevezetes tétele.[1]

Igen egyszerűen megválaszolható probléma azonban a következő: Tegyük fel, hogy minden $a \geqq a_0$ egész helyen

$$f(a) | g(a).$$

Igaz-e, hogy $f(x) | g(x)$? A válasz az, hogy ha $f(x)$ együtthatóinak legnagyobb közös osztója relatív prím $(gr\, g)$!-hoz, akkor igaz. Osszuk el ugyanis $g(x)$-et $f(x)$-szel maradékosan:

$$g(x) = q(x) f(x) + r(x),$$

ahol $q(x)$, $r(x)$ racionális együtthatós polinomok. Jelölje c a $q(x)$-ben fellépő nevezők legkisebb közös többszörösét, akkor

$$\frac{c g(a)}{f(a)} - c q(a) = \frac{r(a)}{f(a)}$$

egész szám minden $a \geqq a_0$ helyen. Mivel másrészt ez 0-hoz tart ($a \to \infty$; $gr\, r < gr\, f$ miatt), kell, hogy elég nagy a-ra — és így a számláló polinom lévén, minden a-ra — eltűnjék. Tehát

$$q(a) = \frac{g(a)}{f(a)}$$

értéke mindenütt egész szám, és így mint ismeretes,[2]

$$q(x) = \frac{1}{m!} Q(x) \qquad (m = gr\, q < gr\, g)$$

[1] T. i., hogy ha egy lineáris polinom értéke mindenütt összetett szám, akkor együtthatói nem relatív prímek. Általában szükséges még feltenni, hogy a tekintett polinomnak ne legyen konstans osztója, de hogy ez elégséges-e, az nem ismeretes.

[2] Lásd pl. [6] 61—62. oldal 1. jegyzet.

ahol $Q(x)$ egész együtthatós. Legyen mármost $f(x)$ együtthatóinak legnagyobb közös osztója d, ekkor $\frac{f(x)}{d}$ primitív polinom és így Gauss lemmája szerint

$$\frac{g(x)}{\frac{f(x)}{d}} = \frac{d}{m!} Q(x)$$

egész együtthatós. Ez azonban $(d, m!) = 1$ miatt csak úgy lehet, ha $q(x) = \frac{1}{m!} Q(x)$ is egész együtthatós.[3]

II. Dolgozatunk fő célja az alábbi tétel bizonyítása, mely Brissetől és Jentzschtől származik:

TÉTEL: *Ha $f(x)$ egész együtthatós polinom, melynek értéke minden egész helyen egy egész szám k-adik hatványa, akkor $f(x)$ egy egész együtthatós polinom k-adik hatványa.*

E tétel lényegesen mélyebben fekvő az I. pontban bizonyítottaknál, és számos különböző bizonyítás ismeretes rá[4]. Az alábbiakban egy polinomalgebrai jellegű bizonyítást mutatunk be rá. E bizonyítás — értelemszerű módosításokkal — minden olyan prímfaktorizációs integritási tartomány felett érvényben maradna, melyben az I. pont tétele érvényes.

III. A tétel bizonyítása céljából emeljük ki $f(x)$-ből azt a legmagasabb fokú polinomosztóját, mely teljes k-adik hatvány:

$$f(x) = g(x)^k h(x).$$

Bontsuk fel $h(x)$-et irreducibilis tényezők szorzatára:

$$h(x) = h_1(x)^{k_1} \dots h_n(x)^{k_n}.$$

Itt nyilvánvalóan $k_i < k$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Mivel a $h_i(x)$ polinomok Gauss lemmája szerint a racionális számok felett is irreducibilisek, nincs többszörös gyökük és két különböző $h_i(x)$-nek nincs közös gyöke. Ebből következik, hogy $h(x)$ gyökei legfeljebb $(k-1)$-szeres multiplicitásúak. Ha kimutatjuk, hogy másrészt legalább k-szoros multiplicitásúak, akkor $h(x)$ csak konstans lehet, éspedig csak egy másik konstans k-adik hatványa, ami a tételt bizonyítja.

$h(x)$-ről egyelőre annyit állapíthatunk meg, hogy értéke minden olyan egész helyen, ahol $g(x) \neq 0$, k-adik hatvány.

Azt akarjuk tehát bizonyítani, hogy ha egy m-ed fokú $h(x)$ polinom értéke

[3] A fenti bizonyítás tartalmaz algebrától idegen (azaz pl. primfaktorizációs gyűrűkben nem interpretálható) elemet, t. i. 0-hoz tartást. Ezt azonban némi bonyolódás árán elkerülhetjük. Legyen ui. $f(x)$ és $g(x)$ legnagyobb közös osztója $h(x)$, $f = h \cdot \varphi$, $g = h \cdot x$. Ekkor van olyan $p(x)$, $q(x)$ polinom és c egész szám, hogy $c \cdot h(x) = p(x)f(x) + q(x) \cdot g(x)$, amiből adódik, hogy $\varphi(a) | c$ minden egész a-ra. Ez nyilván csak úgy lehet, ha φ konstans. Innen a bizonyítás a fentiekhez hasonlóan folytatható. Az így módosított gondolatmenet adja a tétel érvényességét pl. minden olyan primfaktorizációs integritási tartományban, melyben véges sok egység van (itt „minden elég nagy számra" helyett „véges sok kivétellel minden elemre" írandó).

[4] Lásd pl. [1], [2], [4], [5]. A tétel messzemenő általánosításait tartalmazza pl. a [3] dolgozat

minden $a \geqq a_0$ helyen egy egész szám k-adik hatványa, akkor a polinom gyökei legalább k-szoros multiplicitásúak. Nyilvánvalóan elég ezt a

$$\varphi(x) = \frac{h(a_0 + xh(a_0)\, m!)}{h(a_0)}$$

polinomra igazolni, mely szintén egész együtthatós és melynek értékei $a \geqq 0$ esetén szintén k-adik hatványok. Ezenfelül, ha p m-nél nem nagyobb prímszám, akkor

$$\varphi(x) \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1}$$

Ahhoz, hogy a $\varphi(x)$ polinom gyökei legalább k-szoros multiplicitásúak legyenek, szükséges és elégséges, hogy

$$[\varphi(x)]^{k-1} \mid [\varphi'(x)]^k \tag{2}$$

legyen, hiszen $\varphi(x)$-nek egy α multiplicitású gyöke $\varphi'(x)$-nek $\alpha - 1$ multiplicitással gyöke és így (2) azzal egyenértékű, hogy $\varphi(x)$ bármely gyökének α multiplicitására

$$(k-1)\alpha \leqq k(\alpha - 1),$$

azaz

$$k \leqq \alpha.$$

IV. (2) belátása céljából (1) alapján támaszkodhatunk az I. pontban bizonyítottakra, vagyis elég belátni, hogy minden $a \geqq 0$ egész helyen

$$[\varphi(a)]^{k-1} \mid [\varphi'(a)]^k \tag{3}$$

Ezt igazolandó írjuk fel a Taylor-formulát:

$$\varphi(a+x) = \varphi(a) + x\varphi'(a) + \ldots + x^m \frac{\varphi^{(m)}(a)}{m!}. \tag{4}$$

Legyen p $\varphi(a)$-nak egy prímosztója; $\varphi(a)$ k-adik hatvány volta miatt p $\varphi(a)$-nak $k\alpha$-adik hatványon osztója valamely pozitív α-val. Azt kell belátnunk, hogy p $\varphi'(a)$-nak legalább $(k-1)\alpha$-adik hatványon osztója.

Legyen p^{β_ν} a $\frac{\varphi^{(\nu)}(a)}{\nu!}$-ból kiemelhető legnagyobb p-hatvány ($\nu = 1, \ldots, m$). Ha (4)-ben x helyébe $p^\gamma y$-t helyettesítünk úgy, hogy

$$\beta_\nu + \gamma_\nu \geqq k(\alpha - 1) + 1 \tag{5}$$

legyen, akkor minden egész y-ra

$$p^{k(\alpha-1)+1} \mid \varphi(a + p^\gamma y)$$

tehát $\varphi(a+p^\gamma y)$ $y \geqq 0$ esetén k-adik hatvány lévén,

$$p^{k\alpha} \mid \varphi(a + p^\gamma y) \tag{6}$$

Mivel $p > m$, (6) csak úgy állhat fenn minden $y \geqq 0$-ra az I. pontban bizonyítottak szerint, ha y hatványai szerint rendezve $p^{k\alpha}$ osztója minden együtthatónak, azaz

$$\beta_\nu + \gamma_\nu \geqq k\alpha \tag{7}$$

Válasszuk most γ-t úgy, hogy (5) teljesüljön, de γ minimális legyen e tekintetben. Ekkor tehát van olyan $\mu \geqq 1$, hogy

$$\beta_\mu + (\gamma - 1)\mu \leqq k(\alpha - 1) \tag{8}$$

(7)-ben $\nu = \mu$-t helyettesítve és (8)-at levonva belőle

$$\mu \geqq k$$

és így (8) azt adja, hogy

$$\gamma \leqq \alpha$$

Ekkor azonban (7)-be $\nu = 1$-et helyettesítve kapjuk, hogy

$$k\alpha \leqq \beta_1 + \gamma \leqq \beta_1 + \alpha$$

azaz

$$(k-1)\alpha \leqq \beta_1,$$

amit bizonyítani akartunk.

IRODALOM

[1] *Ch. Brisse:* Problème, Intermédiaire des Math., 1 (1894), 10. Megoldás: Uo. 2 (1895) 94. J. Franeltől.

[2] *R. Jentzsch:* Aufgabe, Archiv d. Math. u. Phys., Serie 3, 19 (1912) 361. Megoldás: Uo. 21 (1913) 368. W. Groschtól.

[3] *K. Dörge:* Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Annalen 96 (1926) 84—97.

[4] *G. Pólya—G. Szegő:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I—II., 2. Auflage, Springer-Verlag, 1954. 8. rész 114. és 190. feladat.

[5] *Fried E.* és *Surányi J.:* Egy polinomokra vonatkozó számelméleti problémáról, Mat. Lapok 11 (160) 75—78.

[6] *Kürschák J.—Hajós Gy.—Neukom Gy.— Surányi J.:* Matematikai versenytételek I. rész, 3. kiadás.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕОРЕТИКО-АРИФМЕТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

ЛАСЛО ЛОВАС

ON SOME CONNECTION BETWEEN ALGEBRAIC AND ARITHMETIC STRUCTURE OF POLYNOMIALS

L. LOVÁSZ

BANACH-ALGEBRÁK FOLYTONOS INVOLÚCIÓIRÓL

SEBESTYÉN ZOLTÁN

A.

Sokáig csak sejtés volt, hogy félig egyszerű Banach-algebra norma-topológiája homeomorfizmus erejéig egyértelmű: rajta csak ekvivalens normák létezhetnek. ([4], 70. old.) Ez azon alapult, hogy I. M. Gelfand a kommutatív esetben bizonyított egy hasonló tételt ([2]). Újabban B. E. Johnson igazolta az említett sejtést ([3]). Ennek az eredménynek nyilvánvaló következménye, hogy félig egyszerű Banach-algebra tetszőleges involúciója folytonos is.

Komplex Banach-algebra involúciójának folytonosságára több feltétel ismeretes ([1]). Közülük szükséges és elégséges feltétel a következő: van a Banach*-algebrának folytonos, teljes*-reprezentációja lineáris normált önduális téren, azaz van a Banach*-algebrának folytonos-izomorfizmusa lineáris normált önduális tér lineáris korlátos operátorainak Banach*-algebrájába.

Cikkünk kommutatív esetben az algebra struktúrájából kiindulva pontos feltételt ad folytonos involúció létezésére. Az eredmény a következő: komplex kommutatív Banach-algebrának akkor és csak akkor létezik folytonos involúciója, ha valós Banach-részalgebrájának komplexifikáltja. Valós Banach*-algebra esetén a Banach-algebra komplexifikáltja és a megfelelő, indukált involúció segítségével, szükséges feltételt kapunk az adott involúció folytonosságára.

Példát mutatunk komplex Banach-algebrára, amelynek involúciója folytonos és nem lehet valós Banach-algebra komplexifikáltja. Ez azt mutatja, hogy nemkommutatív esetben nem lehet a fentihez hasonló eredményt várni.

Minden szükséges fogalom megtalálható a ([4], [5]) monográfiákban, ezért mi csak azokat fogalmazzuk meg, amelyeket közvetlenül és sokszor fogunk alkalmazni.

B.

Legyen A Banach-algebra a komplex számtest fölött. Az A önmagára való $x \to x^*$ leképezését involúciónak, A-t pedig Banach*-algebrának nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak:

$$\text{(i)} \quad (x^*)^* = x$$

$$\text{(ii)} \quad (x+y)^* = x^* + y^*$$

$$\text{(iii)} \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$$

$$\text{(iv)} \quad (xy)^* = y^* x^* \qquad (x, y \in A; \lambda \text{ komplex})$$

Folytonosnak nevezzük az involúciót, ha az $x \to x^*$ leképezés folytonos az A norma-topológiájában.

Jelöljük H_A-val A önadjungált (Hermite-féle) elemeinek halmazát:

$$H_A = \{x \in A \mid x^* = x\}.$$

1. LEMMA. *A involúciója akkor és csak akkor folytonos, ha H_A A-nak zárt részhalmaza* ([1], 2 §).

Bizonyítás. a) Legyen A involúciója folytonos. Ekkor H_A zárt A-ban, mert ha

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (x_n \in H_A, \quad x \in A; \quad n = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\|x_n^* - x^*\| = \|x_n - x^*\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

és így $x^* = x$, $x \in H_A$ valóban.

b) Legyen most H_A A-nak zárt részhalmaza. Ha

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \|x_n^* - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad (x_n, x, \quad y \in A; \quad n = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\|x_n + x_n^* - (x+y)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De $x_n + x_n^* \in H_A$ $(n = 1, 2, \ldots)$, így H_A zártsága miatt $x + y \in H_A$, azaz

$$x + y = x^* + y^*.$$

Hasonlóan

$$\|i(x_n^* - x_n) - i(y - x)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad i(x_n^* - x_n) \in H_A \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ezért $i(y - x)$ is önadjungált, vagyis

$$y - x = x^* - y^*.$$

A fenti két egyenlet összevetésével adódik, hogy $x^* = y$, az ismert Banach-féle zárt gráf tételből pedig következik, hogy az involúció folytonos ([5]. II. fej., 6. §.).

2. LEMMA. *Ha A kommutatív és involúciója folytonos, akkor H_A Banach-algebra a valós számtest fölött.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in H_A$; α valós. Akkor (ii), (iii) és (iv) felhasználásával (figyelembe véve A kommutativitását) azt kapjuk, hogy $x + y$, xy, αx is önadjungált. Tehát — az 1. lemma felhasználásával — H_A valós Banach-algebra.

A B_C komplex Banach-algebrát a B valós Banach-algebra komplexifikáltjának nevezzük, ha $B_C = B \times B$ az

(v) $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$

(vi) $(\alpha + \beta i) \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$

(vii) $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$ $(x, y, u, v \in B; \alpha, \beta$ valósak)

műveletekkel és az $x \to (x, 0)$, $(x \in B, (x, 0) \in B_C)$ leképezés izometrikus valós izomorfizmus. Ismeretes a következő állítás ([4], Theorem (I. 3. 2), 8. old.)

3. LEMMA. *Minden valós Banach-algebrának létezik komplexifikáltja. Ez egyértelmű norma-topológiával rendelkezik.*

1. TÉTEL: *A komplex kommutatív A Banach-algebrának akkor és csak akkor létezik folytonos involúciója, ha A valós kommutatív, Banach-algebra komplexifikáltja.*

Bizonyítás. a) Legyen A komplex kommutatív Banach-algebra folytonos involúcióval. Ekkor A minden x eleme előállítható $x = h + ik$ $(h, k \in H_A)$ alakban, ahol a $h = \frac{x+x^*}{2}$, $k = \frac{x-x^*}{2i}$ elemek önadjungáltak és $x^* = h - ik$. Ha $y = l + im$, $y^* = l - im$ $(y \in A, l, m \in H_A)$, akkor nyilvánvalóak a következő összefüggések:

$$x + y = (h + l) + i(k + m),$$

$$(\alpha + i\beta)x = (\alpha h - \beta k) + i(\alpha k + \beta h),$$

$$xy = (hl - km) + i(hm + kl) \quad (\alpha, \beta \text{ valósak}).$$

A tehát (a természetes beágyazással) H_A komplexifikáltja.

b) Ha A a B valós kommutatív Banach-algebra komplexifikáltja, akkor az $(x, y) \to (x, -y)$ leképezés A-nak nyilván involúciója, és H_A izometrikusan (valós) izomorf B-vel. Ezért H_A zárt A-ban, az 1. lemma miatt a fenti involúció valóban folytonos.

Megjegyzés. A tételben szereplő valós részalgebra megtalálását megkönnyíti a valós Banach-algebráknak az a tulajdonsága, hogy minden elemének a (komplexifikált algebrában képezett) spektruma önkonjugált ([4], Cor. (1. 5. 7), 30. old.).

A valós esetben a következőt állapíthatjuk meg: Egy A valós Banach*-algebra A_C komplexifikáltja komplex Banach*-algebra az indukált $(x, y) \to (x^*, -y^*)$ involúcióval $(x, y \in A)$. Nyilvánvaló, hogy a két algebra egyszerre kommutatív és a két involúció egyszerre folytonos ([4], 179. old). Az 1. lemma szerint pedig A_C involúciója akkor és csak akkor folytonos, ha $H_{(A_C)} = \{(x, y) \in A_C | x^* = x, y^* = -y\}$ zárt részhalmaza A_C-nek; kommutatív esetben az 1. tétel alapján A_C még $H_{(A_C)}$-nek is komplexifikáltja.

Nem-kommutatív komplex A Banach-algebra, melynek involúciója folytonos, nem feltétlenül valós B Banach-algebra komplexifikáltja (indukált involúcióval). Legyen ugyanis Q a kvaterniók valós Banach-algebrája a szokásos N normával (ha $p = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, akkor $N^2(p) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$) és $A = Q \times Q$ komplex Banach-algebra a $\|(p, q)\| = \max(N(p), N(q))$ normával, a

(viii) $(p, q) + (r, s) = (p + r, q + s)$

(ix) $\lambda(p, q) = (\lambda p, \bar{\lambda} q)$

(x) $(p, q)(r, s) = (pr, sq)$ műveletekkel és a

(xi) $(p, q) \to (q, p)$ folytonos involúcióval $(p, q, r, s \in Q, \lambda$ komplex).

Ekkor A nem lehet valós Banach-algebra komplexifikáltja, hiszen ha

$$(j, 0) = (p, q) + i(r, s),$$

akkor

$$(k, o) = i(j, o) = (-r, -s) + i(p, q)$$

és egyrészt

$$(-l, o) = (j, o)(j, o) = (p^2 - r^2, q^2 - s^2) + i(pr + rp, sq + qs),$$

másrészt

$$(-1, o) = (k, o)(k, o) = (r^2 - p^2, s^2 - q^2) - i(pr + rp, sq + qs),$$

ami nyilvánvaló ellentmondás!

IRODALOMJEGYZÉK

[1] *J. Duncan:* The continuity of the involution on Banachalgebras. Journal London Math. Soc. 41. (1966), 701—706.
[2] *I. M. Gelfand:* Normierte Ringe. Mat. Sbornik 9. (1941), 3—24.
[3] *B. E. Johnson:* The uniqueness of the (complete) norm topology. Bull. Amer. Math. Soc. 73. (1967), 537—539.
[4] *C. E. Rickart:* General Theory of Banach algebras. Van Nostrand. 1960.
[5] *K. Yosida:* Functional Analysis. Springer. 1965.

О НЕПРЕРЫВНЫХ ИНВОЛЮЦИЯХ В-АЛГЕБР.

З. ШЕБЕШТЬЕН

ON CONTINUOUS INVOLUTIONS IN B-ALGEBRAS

Z. SEBESTYÉN

Theorem 1. A complex commutative B-algebra A has a continuous involution iff A is a complexification of a real commutative B-algebra.

The theorem is false in the noncommutative case. We exhibit a counter example for that.

EGY LOKÁLIS HATÁRELOSZLÁSTÉTEL A SZÁMELMÉLETBEN

KÁTAI IMRE

1. Jelölje $\mathscr{K}$ azon K természetes számok halmazát, amelyek prímtényezőiket legalább a második hatványon tartalmazzák. Világos, hogy minden n természetes szám

$$n = Km,\ K \in \mathscr{K},\ m\text{-négyzetmentes},\ (m, K) = 1 \tag{1. 1}$$

alakba alakba írható; továbbá ez az előállítás egyértelmű.

Legyen $g(n)$ tetszőleges komplex értékű számelméleti függvény, amelyre (1. 1) alakú n esetén $g(n) = g(K)$ teljesül. Jelölje $s_1, s_2, \ldots$ e függvény értékkészletét, s legyen

$$v_i(x) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{g(n)=s_i \\ n \leqq x}} 1. \tag{1.2}$$

Kimutatjuk a következő tételt.

TÉTEL. *Érvényes a*

$$v_i(x) = \lambda_i + O((\theta_i(x)x^{-1/2}(\log x)) \tag{1. 3}$$

reláció, ahol $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\Sigma\lambda_i = 1$; $0 < \theta_i(x) \leqq 1$, $\sum_i \theta_i(x) \leqq 1$. *Az O-ban foglalt konstans abszolút állandó.*

A probléma történetével kapcsolatban megemlítjük, hogy RÉNYI a $g(p_1^{\alpha_1}, \ldots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r - r$ [1] esetre kimutatta, hogy $v_i(x) = (1 + o(1))\lambda_i$, $\sum\lambda_i = 1$[1]. A konvergencia sebességét H. DELANGE [2] és a szerző [3] becsülte.

Additív, egész értékű $g(n)$ függvényre az (1. 3) relációt Kubilius [4] $rO(\log\log n/\log n)$ hi bataggal mutatta ki. Ezt LEVIN és FAJNLAJB [5] $O(\exp(-(\log n)^{\frac{3}{8}-\varepsilon})$-a javította. [2]

2. *Bizonyítás.* Rögzített $K(\in \mathscr{K})$ esetén legyen $B_K(x)$ az (1. 1) alatti x-nél nem nagyobb egészek száma. Vezessük be a

$$M(x, K) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n, K)=1}} |\mu(n)|, \quad M(x, 1) = M(x) \tag{2.1}$$

jelöléseket, ahol μ a Möbius-függvény. Világos, hogy

$$B_K(x) = M(x/K, K). \tag{2. 2}$$

[1] $p, p_1, p_2, \ldots$ primszámokat jelölnek.
[2] ε tetszőleges pozitív állandó.

Jól ismert továbbá, hogy

$$M(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}). \tag{2.3}$$

Jelölje B_K azon v természetes számok halmazát, amelyeknek minden prímtényezője K-nak osztója. Legyen $\lambda(n)$ a Liouville-függvény $(\lambda(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r})$.

Először bebizonyítjuk a

$$M(x, K) = \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \lambda(v) M\left(\frac{x}{v}\right) \tag{2.4}$$

azonosságot. Tekintsük a

$$F_K(s) = \sum_{(n, K)=1} \frac{|\mu(n)|}{n^s}, \quad F(s)\,(= F_1(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}$$

Dirichlet-sorokat. Minthogy a $\operatorname{Re} s > 1$ félsíkban érvényes a $F_K(s) = \prod_{p \nmid K} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)$ szorzatelőállítás, így ennek felhasználásával

$$F_K(s) = \prod_{p \mid K} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot F(s)$$

következik. Felhasználva, hogy

$$\prod_{p \mid k} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \frac{\lambda(v)}{v^s},$$

így

$$\sum_{(n, K)=1} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \left\{ \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \frac{\lambda(v)}{v^s} \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \right\},$$

ha $\operatorname{Re} s > 1$. A jobb oldalon álló két Dirichlet-sort összeszorozva és a bal és jobb oldalon álló megfelelő együtthatókat összehasonlítva — ennek jogosultsága abból az ismert tényből következik, hogy ha két Dirichlet-sor az abszolút konvergencia tartományában ugyanazt a függvényt állítja elő, akkor megegyeznek — innen

$$\sum_{\substack{vm=n \\ v \in \mathcal{B}_K}} \lambda(v) \mu(m) = \begin{cases} |\mu(n)|, & \text{ha} \quad (n, K) = 1 \\ 0\ , & \text{ha} \quad (n, K) > 1 \end{cases}$$

következik. Ezt a relációt minden $n \leqq x$-re alkalmazva és összegezve kapjuk (2. 4)-et. (2. 4)-ből (2. 3) felhasználásával

$$M(x, K) = \frac{6}{\pi^2} x \sum_{v \leqq x} \frac{\lambda(v)}{v} + O\left(x^{1/2} \sum_{v \leqq x} \frac{1}{\sqrt{v}}\right) = \frac{6}{\pi^2} x \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \frac{\lambda(v)}{v} + O\left(x^{1/2} \sum_{v} \frac{1}{\sqrt{v}}\right) + \tag{2.5}$$

$$+ O x \left(\sum_{v > x} \frac{1}{v}\right)$$

következik. Vezessük be a

$$\tau(K) = \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \frac{\lambda(v)}{v}, \quad \varrho(K) = \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \frac{1}{\sqrt{v}}$$

jelöléseket s a későbbiek miatt vegyük figyelembe, hogy $\tau(K)$ és $\varrho(K)$ a

$$\tau(K) = \prod_{p|K}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \varrho(K) = \prod_{p|K}\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1}$$

alakba is írható. Minthogy

$$\sum_{v>x}\frac{1}{v} \leqq x^{-1/2}, \quad \sum_{v\in\mathscr{P}_K}\frac{1}{\sqrt{v}} \leqq x^{-1/2}\varrho(K),$$

így (2. 5)-ből

$$M(x,K) = \frac{6}{\pi^2}\tau(K)\,x + O\left(\varrho(K)\sqrt{x}\right)$$

következik. Innen (2. 2) miatt

$$x^{-1}B_K(x) = \frac{6}{\pi^2}\frac{\tau(K)}{K} + O\left(x^{-1/2}\frac{\varrho(K)}{\sqrt{K}}\right). \tag{2.6}$$

Legyen most K_j $(j=1, 2, \ldots)$ azon $\mathscr{K}$-beli számok sorozata, amelyre $g(K_j)=s_i$. Ekkor (2. 6) miatt

$$v_i(x) = \sum_{K_j\leqq x} x^{-1}B_{K_j}(x) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{Kj}\frac{\tau(K_j)}{K_j} + O\left(x^{-1/2}\sum_{K_j\leqq x}\frac{\varrho(K_j)}{\sqrt{K_j}}\right) + O\left(\sum_{Kj>x}\frac{\tau(K_j)}{K_j}\right) =$$

$$= \lambda_i + O\left(x^{-1/2}\sum\nolimits_1^{(i)}\right) + O\left(\sum\nolimits_2^{(i)}\right).$$

Világos, hogy

$$\sum_i\sum\nolimits_1^{(i)} = \sum_{K\leqq x}\frac{\varrho(K)}{\sqrt{K}} \left(\overset{\text{def}}{=} A\right),$$

$$\sum_i\sum\nolimits_2^{(i)} = \sum_{K>x}\frac{\tau(K)}{K} \left(\overset{\text{def}}{=} B\right).$$

Most kimutatjuk, hogy $A = O(\log x)$, $B = O(x^{-1/2})$. Innen tételünk rögtön következik.

Valóban

$$A \leqq \prod_{p\leqq\sqrt{x}}\left\{1+\varrho(p)\left(\frac{1h}{p}\frac{1}{p^{3/2}}+\ldots\right)\right\} < \prod_{p\leqq\sqrt{x}}\left\{1+\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right)\right\} <$$

$$< C\exp\left(\sum_{p\leqq\sqrt{x}}\right) < C\log x.$$

Legyen $\vartheta(x) = \sum\limits_{\substack{K\leqq x\\ K\in\mathscr{K}}}{}^{1}$. Felhasználva, hogy minden K felírható $K=a^2b^3$ alakba, így

$$\vartheta(x) \leqq \sum_{a^2b^3\leqq x} 1 \leqq \sum_{b\leqq x^{1/3}}\frac{\sqrt{x}}{b^{3/2}} \leqq C\sqrt{x}.$$

Innen a $0\leqq\tau(K)\leqq 1$ egyenlőtlenség figyelembevételével

$$B \leqq \sum_{v=0}^{\infty}\sum_{2^v x\leqq K<2^x_x+1}\frac{\tau(K)}{K} \leqq \sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{2^v x}\vartheta(2^{v+1}x) \leqq \frac{G}{\sqrt{x}}.$$

IRODALOM

[1] *A. Rényi:* On the density of certain sequences of integers, Publ. Inst. Math. Belgrad *8* (1955). 157—162.
[2] *H. Delange:* Sur un theoreme de Rényi I, II, Acta Arithm., *11* (1965), 241—252; *13* (1967), 339—362.
[3] *Kátai I.:* Egy megjegyzés H. Delange „Sur un theoreme de Rényi" című dolgozatához, MTA III. Osztály Közleményei, *16* (1966), 269—273.
[4] *Й. Кубилюс,* Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
[5] *Б. В. Левин, А. С. Файнлеиб,* Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел, Успехи Мат. Наук, *22* (1967), 119—197.

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ИМРЕ КАТАИ

ON LOCAL LIMIT THEOREM IN NUMBER THEORY

I. KÁTAI

Let $\mathscr{K}$ be the set of integers all whose prime factors occur with an exponent greater than 1. Clearly every integer can be uniquely written in the form:

$$n = Km,\ K \in \mathscr{K},\ (m, K) = 1,\ m \text{ square-free.} \tag{1}$$

Let $g(n)$ be an arbitrary complex valued number-theoretical function such that $g(n) = g(K)$. Let $s_1, s_2, \ldots$ be the set of values of $g(n)$. Let

$$\nu_i(x) = x^{-1} \sum_{\substack{g(n)=s_i \\ n \leqq x}} 1.$$

We proved

Theorem. We have

$$\nu_i(x) = \lambda_i + O(\theta_i(x) x^{-1/2} \log x) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

where $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \ldots)$, $\Sigma\lambda_i$; $0 < \theta_i(x) \leqq 1$, $\Sigma\theta_i(x) \leqq 1$.

The constant implied by the O is an absolute one.

VÉGTELEN GRÁFOK SZÍNEZÉSÉRŐL

BABAI LÁSZLÓ

E dolgozatban gráfon egyszeres élekkel rendelkező és hurok nélküli gráfot értek. Egy gráf számosságán, rendezésén, rendtípusán a gráf szögpontjai halmazának számosságát stb. értem; egy rendezett gráf szeletein pedig szögpontjainak halmaza szeletei által feszített részgráfjait.

Valamely G gráf kromatikus-számát $\langle G \rangle$-vel jelölöm. Ezen azt a legkisebb számot vagy számosságot értem, ahány színnel (amekkora számosságú szín-halmaz elemeivel) G szögpontjai kiszínezhetők úgy, hogy azonos színű szögpontok között ne legyen él.

Gráfok egyesítésén azt a gráfot értem, amelynek szögpontjai halmaza az eredeti gráfok szögpontjai halmazainak egyesítése, éleinek halmaza pedig az eredeti gráfok élei halmazainak egyesítése.

*

Fel fogom használni Erdős P. és N. G. de Bruijn alábbi ismert tételét:

(1) Legyen k adott természetes szám. Ha valamely gráf minden véges részgráfja legfeljebb k-kromatikus, akkor a gráf maga is legfeljebb k-kromatikus.

*

E tétel a véges részgráfoktól korlátos kromatikus-számot követel. Felmerül a kérdés, milyen részgráfoktól kellene véges kromatikus-számot követelni (a korlátosság kikötésének elejtésével), hogy ez az egész gráf végeskromatikus voltát biztosítsa. A feltételnek nyilván bizonyos végtelen részgráfokról kell szólnia; ezek számossága legalább megszámlálható; jólrendezett gráf esetén rendszámuk legalább ω. Az alábbiakban igazolom, hogy az ilyen „legkisebb" végtelen részgráfokra tett kikötés elegendő is.

*

TÉTEL. *Legyen G jólrendezett végtelen gráf, melynek minden ω-típusú részgráfja végeskromatikus. Ekkor G is végeskromatikus.*

*

Először segédtételként a részgráfok számosságáról szóló állítást igazolom.

SEGÉDTÉTEL. Ha a G végtelen gráf minden megszámlálható számosságú részgráfja végeskromatikus, akkor G is végeskromatikus.

A SEGÉDTÉTEL IGAZOLÁSA

(1) szerint elegendő igazolni, hogy van olyan véges k, hogy G bármely véges részgráfja legfeljebb k-kromatikus.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis létezik G véges részgráfjainak olyan $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$ sorozata, hogy $\langle H_i \rangle \geqq i$. Legyen $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. Ekkor H nem végeskromatikus, hiszen különben a H_i-k korlátos kromatikusszámúak volnának. Másrészt H nyilván megszámlálható számosságú, és ez ellentmondás. Ezzel a segédtételt igazoltam.

A TÉTEL IGAZOLÁSA

A segédtétel alapján elegendő azt igazolni, hogy G minden megszámlálható számosságú részgráfja végeskromatikus.

Vegyük G egy tetszőleges megszámlálható részgráfját; ez is jólrendezett, legyen rendszáma α. Jelöljük a részgráfot G_α-val.

Legyenek G szeletei rendre $G_0, G_1, \ldots, G_\beta, \ldots, G_\alpha$. ($\beta$ az α-nál nem nagyobb rendszámok halmazán fut végig.) β-ra vonatkozó transzfinit indukcióval igazolom, hogy G_β végeskromatikus.

Véges β-ra az állítás nyilvánvaló, G_ω-ra a feltétel szerint igaz.

Tegyük fel, hogy $\alpha \geqq \gamma > \omega$, és minden $\beta < \gamma$-ra igaz az állítás. Ha $\gamma = \delta + 1$, akkor, mivel G_δ végeskromatikus, és G_γ-nak csak egy új szögpontja van G_δ-hoz képest, G_γ is végeskromatikus. Ezután azt az esetet kell vizsgálni, mikor γ limeszszám. Mivel γ megszámlálható rendszám, ω-val konfinális. Van tehát olyan $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_i < \ldots$ szigorúan monoton növekvő rendszámsorozat, melynek limesze γ. Így $G_\gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{\alpha_i}$.

Tegyük fel, hogy G nem végeskromatikus. Akkor (1) szerint létezik véges részgráfjainak olyan $S = \{H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots\}$ sorozata, hogy $\langle H_i \rangle \geqq i$. H_i véges, tehát van olyan G_{α_j}, amelyben benne van. (Mindabban, amelyik legnagyobb elemét tartalmazza.) Jelöljük ezek közül az elsőt K_i-vel. Tehát $H_i \subset K_i$. Legyen $\langle K_i \rangle = k_i$. (Ez az indukciós feltevés értelmében véges.)

Rekurzióval definiálom az $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ sorozatot. Legyen $i_0 = 1$. i_n definiálása után legyen i_{n+1} az a legkisebb index, melyre $\langle H_{i_{n+1}} \rangle \geqq 2k_{i_n}$. Ilyen nyilván van, tehát a rekurzió végrehajtható. $K_{i_{n+1}} \supset H_{i_{n+1}}$, így $k_{i_{n+1}} \geqq \langle H_{i_{n+1}} \rangle \geqq 2k_{i_n}$. $k_{i_0} = k_1 \geqq 1$ miatt világos tehát, hogy a k_{i_n} sorozat végtelenhez tart.

Legyen $R_n = H_{i_{n+1}} \setminus K_{i_n}$. ($H_{i_{n+1}}$-ből elhagyjuk azokat a szögpontokat — a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt —, amelyek K_{i_n}-nek is szögpontjai.) K_{i_n} színezhető k_{i_n} színnel, tehát ha R_n-t k_{i_n}-nél kevesebb színnel lehetne színezni, akkor $\langle H_{i_{n+1}} \rangle < 2k_{i_n}$ lenne, ami nem áll fenn. Tehát $\langle R_n \rangle \geqq k_{i_n}$. R_n véges, hiszen része $H_{i_{n+1}}$-nek. Tekintsük az $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ gráfot. Az R_n-ek kromatikusszáma nem korlátos, így R nem végeskromatikus. Ez ellentmondásra vezet, ugyanis igazolom, hogy R rendszáma ω.

R_n legnagyobb eleme kisebb R_{n+1} legkisebb eleménél, hiszen $R_n \subset K_{i_{n+1}}$; és $R_{n+1} = H_{i_{n+2}} \setminus K_{i_{n+1}} \subset K_{i_{n+2}} \setminus K_{i_{n+1}}$ és $K_{i_{n+1}}$ szelete $K_{i_{n+2}}$-nek.

Tehát R rendszámát éppen úgy kapjuk meg, ha $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ rendszámát ilyen sorrendben összeadjuk. Így R bármely valódi szelete véges számú szögpontot tartalmaz (és R nyilván nem véges), tehát R rendszáma valóban ω. Így a feltétel szerint R-nek végeskromatikusnak kellene lennie, pedig nem az.

Ezzel a tételt igazoltam.

IRODALOM

N. G. de Bruijn—Erdős P.: "A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations." Indagationes Math. 13. 369—373 (1951).

О РАСКРАСКЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Л. БАБАИ

ON COLORING OF INFINITE GRAPHS

L. BABAI

JELENTÉS AZ 1968. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1968. november 1 és 11. között rendezte meg az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt. A versenyen részt-vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató és középiskolai tanuló, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1968-ban fejezték be.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Bizonyítsuk be, hogy egy G Abel-féle torziómentes (torzió) csoport endomorfizmus gyűrűje akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha G a racionális számok additív csoportjával izomorf csoportoknak (prímrendű ciklikus csoportoknak) diszkrét direkt összege. (Egy gyűrű Neumann-reguláris, ha bármely α eleméhez van olyan β, amelyre $\alpha\beta\alpha=\alpha$.)

2. Legyen $a_i \geqq 0$ valós szám, $i=1, \ldots, n$, $n \geqq 1$. Bizonyítandó, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \leqq n \prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n$$

3. Legyen K kompakt topologikus csoport, F pedig a K-n értelmezett folytonos függvények kontinuumánál nagyobb számosságú halmaza. Bizonyítandó, hogy van olyan $x_0 \in K$ és vannak olyan $f \neq g \in F$ függvények, melyekre

$$f(x_0) = g(x_0) = \max_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} g(x)$$

4. Legyen $f(n)$ tetszőleges komplex értékű teljesen multiplikatív függvény. Bizonyítandó, hogy ha a természetes számok valamely végtelen növekvő N_k sorozatára

$$f(n) = A_k \neq 0, \quad \text{ha} \quad N_k \leqq n \leqq N_k + 4\sqrt{N_k}$$

akkor $f(n)$ azonosan 1.

5. Legyen k tetszőleges pozitív egész, z tetszőleges komplex szám, és $\varepsilon > 0$. Bizonyítandó, hogy végtelen sok pozitív egész n-re teljesül az

$$\left| \sum_{0 \leqq l \leqq \frac{n}{k+1}} \binom{n-kl}{l} z^l \right| \geqq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^n$$

egyenlőtlenség.

6. Legyen $\mathfrak{A} = \langle A \ldots \rangle$ tetszőleges megszámlálható algebrai struktúra ($\mathfrak{A}$-ban tetszőleges számú véges változós reláció és művelet szerepelhet).

Bizonyítandó, hogy $\mathfrak{A}$-nak akkor és csak akkor van kontinuum sok automorfizmusa, ha

A bármely véges A' részhalmazához van olyan $\pi_{A'}$ automorfizmus, mely nem az identitás, és amelyre $x \in A'$ esetén

$$\pi_{A'}(x) = x$$

7. A természetes számok r elemű részhalmazait minden véges r-re tetszőlegesen beosztjuk véges sok osztályba.

Bizonyítandó, hogy ha egy $f(r)$ függvényre $f(r) \geqq 1$, és $r \to +\infty$ esetén $f(r) \to +\infty$, akkor létezik a természetes számok halmazának olyan végtelen részhalmaza, mely minden r-re legfeljebb $f(r)$ különböző osztályból tartalmaz r elemű részhalmazt.

Mutassuk meg, hogy van egy olyan beosztás, melynél $f(r) \not\to +\infty$ esetén nincs $f(r)$-hez a fent kívánt tulajdonságú végtelen részhalmaz.

8. Legyenek n és k adott természetes számok. Legyen A véges halmaz. Jelölje $|B|$ B elemeinek számát. Tegyük fel, hogy

$$|A| \leqq \frac{n(n+1)}{k+1}$$

Legyenek A_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ olyan halmazok, melyekre

$$|A_i| = n \qquad (1 \leqq i \leqq n+1)$$

$$|A_i \cap A_j| \leqq k \quad (i \neq j)$$

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} A_i$$

Határozzuk meg A elemeinek számát.

9. Legyen $f(x)$ olyan valós függvény, hogy $x \to +\infty$ esetén

$$\frac{f(x)}{e^x} \to 1$$

és minden elég nagy x-re $|f''(x)| < c|f'(x)|$.

Bizonyítandó, hogy

$$\frac{f'(x)}{e^x} \to 1 \quad \text{ha} \quad x \to +\infty$$

10. Legyen h egy egységnyi kerületű háromszög, H pedig egy vele homotetikus λ kerületű háromszög. Legyenek $h_1, h_2, \ldots$ a h háromszög eltolt példányai, amelyek mind érintik H-t, mindegyik érinti az eggyel nagyobb indexűt, és egyik sem azonos a kettővel nagyobb indexűvel.

λ mely értékeire választhatók a háromszögek úgy, hogy a $h_1, h_2, \ldots$ lánc záródjék?

Tegyük fel, hogy $\lambda \geqq 1$ és a lánc záródik. Határozzuk meg, hogy λ-tól függően hány háromszögből áll a lánc, és hányszor fogja körül H-t. (Homotetikus = hasonló és hasonló helyzetű; két háromszög érintkezik, ha van közös határpontjuk, de nincs közös belső pontjuk; a záródás azt jelenti, hogy valamilyen $n > 0$ indexre

$$h_{n+1} = h_1).$$

11. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események egy valószínűségi mezőben.

Jelölje C_k azt az eseményt, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ események közül legalább k esemény következik be $(k = 1, \ldots, n)$.

Bizonyítandó, hogy

$$\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leqq \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Az 1. feladatot Fried Ervin, a 2. feladatot Surányi János, a 3. feladatot Juhász István, a 4. feladatot Kátai Imre, az 5. feladatot Turán Pál, a 6. feladatot Makkai Mihály, a 7. feladatot Erdős Pál és Hajnal András, a 8. feladatot Corrádi Keresztély, a 9. feladatot Erdős Pál, a 10. feladatot Fejes Tóth László, a 11. feladatot Rényi Alfréd bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére.

A kitűzött feladatokra 37 versenyző összesen 169 megoldást adott be. A versenyzők száma az előző évekhez képest nem csökkent, de a feladatok nehezebbeknek bizonyultak és csak 7 olyan versenyző akadt, aki a kitűzött 11 feladatból legalább 6 feladatra adott be teljes megoldást. A versenybizottság a versenydolgozatok megvitatása után úgy döntött, hogy már 5 feladat megoldása is jó teljesítménynek számít és ez csak kiemeli a verseny nyerteseinek teljesítményét, akik 10—10 feladatra adtak teljes megoldást. A versenybizottság úgy döntött, hogy három első, két második és egy harmadik díjat ad ki.

A versenybizottság a három I. díjat és az ezzel járó 1200 Ft-os pénzjutalmakat Gács Péternek, az ELTE IV. éves matematikus hallgatójának, Lovász Lászlónak, az ELTE III. éves matematikus hallgatójának és Makai Endrének, az ELTE IV. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.

Mindhárman a 3. feladat kivételével megoldották az összes feladatot.

Gács Péter dolgozatában az 1. és 2., Lovász László dolgozatában a 2. és 11., Makai Endre dolgozatában az 1. és 5. feladat megoldásai, illetve általánosításai kiemelkedően jók. Gács Péter és Makai Endre általában szabatosan és jól fogalmaznak. Lovász László fogalmazásai általában kiemelkedően jók és szépek, néha azonban kisebb pontatlanságokat enged meg magának. Lovász László a 3. feladatra is küldött be megoldást, ez azonban hibás, bár alapötlete jó és a megoldás alapját képező segédtételt is jól bizonyítja.

A versenybizottság a két második díjat és az ezzel járó 1000—1000 *Ft-os pénzjutalmat Laczkovich Miklósnak, az ELTE III. éves matematikus hallgatójának és Pósa Lajosnak, az ELTE III. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.*

Mindketten 10—10 feladatot oldottak meg, a 3. feladat kivételével valamennyit. Laczkovich Miklósnak az 1., Pósa Lajosnak a 10. feladatra adott megoldása azonban nem tekinthető teljesnek. Laczkovich Miklós általában jól fogalmaz. Pósa Lajos fogalmazása sokszor körülményes és nehezen érthető.

A versenybizottság a III. díjat és az ezzel járó 600 *Ft pénzjutalmat Babai Lászlónak, az ELTE I. éves matematikus hallgatójának ítélte oda.*

Babai László 8 feladatra, az 1., 2., 4., 5., 6., 9., 10. és 11. feladatokra adott be nagyon világosan és szépen fogalmazott megoldásokat és a 7. feladat egyik felét is megoldja. Kiemelendő az 1. és 6. feladatokra adott megoldása.

A versenybizottság kiemelt dicséretben és 200 *Ft könyvjutalomban részesíti Gerlits Jánost, az ELTE végzett hallgatóját.*

Gerlits János 6 feladatra, az 1., 3., 7., 9., 10. és 11. feladatra adott megoldást. Ő az egyetlen versenyző, aki a 3. feladatot megoldotta. Megoldásai elegánsak és fogalmazásuk jó. A 10. feladatban azonban számolási hibát követ el és így ez a megoldása nem teljes.

A versenybizottság első dicséretben és 120—120 *Ft könyvjutalomban részesíti Major Pétert az ELTE III. éves hallgatóját és Sulyok Miklóst az ELTE III. éves hallgatóját.*

Major Péter 6 feladatra, a 2., 6., 7., 8., 9. és 11. feladatokra nyújtott be megoldást. A 2. és 8. feladatok megoldása figyelemre méltó egyéni ötleteket tartalmaz. A 9. feladat megoldásában javítható számolási hibák vannak.

Sulyok Miklós 8 feladatra, a 2., 4., 6., 7., 8., 9., 10. és 11. feladatokra nyújtott be megoldást. A 10. és 11. feladatokra beadott megoldásai azonban hiányosak és a 6. feladat megoldásának fogalmazása rendkívül bonyolult.

A versenybizottság második dicséretben és 80—80 *Ft-os könyvjutalmakban részesíti a következő versenyzőket. Máté Attilát, a JATE végzett hallgatóját, Pelikán Józsefet, az ELTE III. éves matematikus hallgatóját és Simonovics Andrást, az ELTE IV. éves matematikus hallgatóját.*

Máté Attila 5 feladatra, az 5., 6., 7., 9., és 11. feladatokra adott be jól fogalmazott helyes megoldásokat.

Pelikán József 5 feladatra, az 1., 6., 7., 9. és 11. feladatokra adott be megoldást. A 9. feladatra adott megoldás hiányos.

Simonovits András 7 feladatra, az 1., 2., 6., 7., 9., 10. és 11. feladatokra adott be megoldásokat. A 10. feladatra adott megoldása nem jó és az 1. és 7. feladatokra adott megoldásai is erősen hiányosak. Másrészről azonban figyelemre méltó ügyes észrevételeket tesz a 6., 9. és 11. feladatokkal kapcsolatban. A 9. feladatra egy ismert és egyébként könnyen bizonyítható tétel felhasználásával igen egyszerű bizonyítást ad. Megoldásainak fogalmazása sokszor elkapkodott és pontatlan.

A versenybizottság (versenyen kívül) megdicséri és 50—50 *Ft-os könyvjutalomban részesíti Pintz Jánost, a Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulóját és Ruzsa Imrét, a Fazekas Mihály Gimnázium II. osztályos tanulóját* a 8., 10. és 11., illetve a 4., 9. és 10. feladatok helyes és szabatosan megfogalmazott megoldásáért.

Budapest, 1968. XII. 3.

A versenybizottság
Császár Ákos, Fejes Tóth László, Fried Ervin,
Hajnal András, Rényi Alfréd, Turán Pál.

A bizottság köszönetet mond Simonovits Miklósnak, aki a bizottság titkárát távollétében többször helyettesítette.

1. *Feladat*

Az alábbiakban csoporton mindig kommutatív csoportot értünk, amelyben a művelet az összeadás. Neumann-regularitás helyett röviden regularitást írunk.

Először a feltétel szükségességét bizonyítjuk. A torziómentes esetben jelöljük a csoportot G_0-lal. A torzió esetben G $G = G_1 + \ldots + G_i + \ldots$ alakban írható, ahol az összeg diszkrét direkt összeget jelent és a G_i részcsoportban az elemek rendje a p_i prímszám hatványa, $i = 1, 2, \ldots$ (p_1, p_2, $\ldots = 2, 3, \ldots$ az összes prímek sorozata).

Legyen p prím és legyen Φ_p a G csoportnak az a leképezése, amely tetszőleges G-beli a elemhez a pa elemet rendeli hozzá. Φ_p nyilván endomorfizmus. A regularitás miatt létezik olyan Ψ_p endomorfizmus, amelyre $\Phi_p \cdot \Psi_p \cdot \Phi_p = \Phi_p$. Ekkor bármely $a \in G$-re

$$pa = p^2 \Psi_p(a). \tag{1}$$

Az (1) állításból azonnal következik, hogy ha p prím és $p^2 a = 0$, akkor — Ψ_p endomorfizmus lévén — $p^2 \Psi_p(a) = 0$ és így pa is 0. Ezért $i \neq 0$-ra G_i minden 0-tól különböző eleme p_i rendű és ezért G_i elemi p_i csoport.

A $G = G_0$ esetben az (1) egyenlőséget p-vel egyszerűsíthetjük. Ebből azt nyerjük, hogy G_0 bármely a eleme osztható minden prímmel, ezért G_0 osztható csoport.

G_0 torziómentessége miatt az osztás egyértelmű. Legyen $p_0=0$, Θ_0 a racionális számtest Θ_{p_i} a (mod p_i) maradékosztályok teste, $i=1, 2, \ldots$. A fent mondottakból azt nyerjük, hogy G_i vektortér a Θ_{p_i} test felett $i=0, 1, 2, \ldots$. Vektorterekben a — Zorn lemma szerint létező — maximális lineárisan független rendszer bázis. Ez éppen a kívánt diszkrét direktösszeg-felbontást szolgáltatja.

A feltétel elégségessége nyilvánvalóan következik, ha bebizonyítjuk a következő erősebb állítást. A $G = G_0+G_1+\ldots+G_n+\ldots$ direkt összeg endomorfizmus gyűrűje reguláris, ha G_i vektortér a Θ_{p_i} fölött $i=0, 1, \ldots$. Itt az összeg akár diszkrét, akár teljes direkt összeg lehet. Először belátjuk, hogy állítás igaz valamennyi G_i endomorfizmusgyűrűjére. Legyen α G_i tetszőleges endomorfizmusa. Ekkor α G_i-nek mint vektortérnek lineáris transzformációja. Miután egy vektortérben minden altér direkt összeadandó — az α magterét Ker α-val, képterét Im α-val jelölve — léteznek olyan H_i és K_i alterek, melyekre

$$G_i = \operatorname{Ker}\alpha + H_i = K_i + \operatorname{Im}\alpha.$$

Az α leképezés H_i elemeit nyilván egy-egy értelműen képezi le Im α-ra. Definiáljuk G_i-nek egy önmagába való β leképezését a — $\beta(a)=0$, ha $a\in K_i$ és $\beta(a)=b$, $b\in H_i$, ha $a\in\operatorname{Im}\alpha$ és $\alpha(b)=a$ — feltételekkel. Ekkor β nyilván endomorfizmusa G_i-nek, melyre $\alpha\beta\alpha=\alpha$ áll. Ez bizonyítja G_i endomorfizmus gyűrűjének regularitását, ha $i=0, 1, \ldots$.

Tekintsük most G egy tetszőleges α endomorfizmusát. Miután tetszőleges p prímre igaz, hogy bármely p-rendű $a\in G$-re pa is p-rendű vagy 0, α G_i-t önmagába viszi át, ha $i\geqq 1$. Legyen $a\in G_0$ és $\alpha(a)\in G_i$ $i\geqq 1$. Ekkor $p_i\alpha(a)=0$. A G_0 vektor tér lévén Θ_0 felett van olyan $x\in G_0$, melyre $p_ix=a$. Ezért $p_i^2\alpha(x)=0$. Ezért $\alpha(x)\in G_i$ és így $p_i\alpha(x)=a=0$. Így α G_0-t is önmagába viszi át.

A mondottak szerint G bármely α endomorfizmusának megfeletethető egy egyértelműen meghatározott $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ vektor, ahol α_i a G_i endomorfizmusa, és nyilván bármely ilyen vektor egyértelműen meghatározza G egy endomorfizmusát, amelyhez a fenti utasítással rendelt vektor éppen ő maga. Ez a megfeleltetés nyilván művelettartó is, azaz $(\alpha\beta)_i=\alpha_i\beta_i$. Legyen α G tetszőleges endomorfizmusa és legyen $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ a hozzárendelt vektor. A G_i-kre már bizonyított állítás szerint léteznek olyan β_i G_i-beli endomorfizmusok, melyekre $\alpha_i\beta_i\alpha_i=\alpha_i$ $i=0, 1, \ldots$. A $(\beta_0, \beta_1, \ldots)$ vektorhoz tartozó β endomorfizmusra ekkor $\alpha\beta\alpha=\alpha$, mert $(\alpha\beta\alpha)_i=\alpha_i$ $i=0, 1, \ldots$. Ezért G endomorfizmus gyűrűje reguláris.

Lényegében *Gács Péter és Makai Endre* megoldása.

Megjegyzések

1. Több versenyző megjegyzi, hogy a feltétel szükségessége könnyen következik Fuchs László Abelian Groups, Bp. 1958. c. könyve 576-os tételéből (220. oldal).
2. A feladat állítása igaz marad és a közölt bizonyítás is csaknem szó szerint lefordítható, ha Abel csoport helyett főideál gyűrű fölötti modulust mondunk, a torzió (torziómentes) feltételt avval helyettesítjük, hogy a modulus egyetlen elemének rendje sem 0 (a modulus minden elemének rendje 0) a racionális számtest helyett a főideálgyűrű hányadostestjéről és a mod p_i maradékosztályok teste helyett prímideálok szerinti faktorokról beszélünk.

Makai Endre

3. Ha a feladatban megfogalmazott feltétel teljesül, akkor a torziómentes esetben G endomorfizmus gyűrűje az $((r_{\lambda,\mu}))$ oszlopfinit mátrixok gyűrűjével $(r_{\lambda,\mu} \in \Theta_0)$, a torziómentes esetben az $\langle((S_{\lambda,\mu}))_{p_i}\rangle$ oszlopfinit kvazidiogonális mátrixok gyűrűjével $(S_{\lambda,\mu} \in \Theta_{p_i})$ izomorf.

Gács Péter

Megoldották: *Babai László, Freud Róbert, Gács Péter, Gerlits János, Lovász László, Makai Endre, Pelikán József, Pósa Lajos.*
Majdnem teljes megoldást adtak: *Laczkovich Miklós, Simonovits András.*

2. *Feladat*

I. megoldás. Ha valamelyik $a_i = 0$ az állítás azonnal következik az n-edik hatványközép és az alacsonyabbrendű hatványközepek közötti ismert egyenlőségekből. Az is adódik, hogy egyenlőség csak akkor lehet, ha a többi a_j számok egyenlők. A továbbiakban feltesszük, hogy $a_i > 0$ $i = 1, \ldots, n$.

Jelölje Σ_k az $a_1, \ldots, a_n$ számok k-adik hatványainak összegét, S_k pedig a k-adik elemi szimmetrikus polinomjukat. Az egyenlőtlenséget általánosítjuk.

$$\binom{n-1}{k-1} \Sigma_1 \Sigma_{k-1} \leqq n S_k + (k-1)\binom{n}{k} \Sigma_k, \quad 1 \leqq k \leqq n. \tag{1}$$

Az (1) egyenlőtlenség $k = n$ speciális esete a bizonyítandó állítás.

Az $n = 1, 2$ és $k = 1$ esetekben egyenlőség áll. A továbbiakban feltesszük, hogy $n \geqq 3$, $k \geqq 2$. Bevezetjük a következő jelölést. Ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0$ valós számok, $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ az $\frac{1}{n!} \Sigma a_{i_1}^{\alpha_1} \ldots a_{i_n}^{\alpha_n}$ összeget jelenti, ahol az összegezés az $1, \ldots, n$ számok összes $i_1, \ldots, i_n$ permutációjára értendő.

Szükségünk van a következő segédtételre. Ha $n \geqq 3$; $\nu, \alpha_4, \ldots \geqq 0$, $\delta > 0$ valós számok, akkor

$$[\nu + 2\delta, 0, 0, \alpha_4, \ldots] - 2[\nu + \delta, \delta, 0, \alpha_4, \ldots] + [\nu, \delta, \delta, \alpha_4, \ldots] \geqq 0 \tag{2}$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha valamennyi a egyenlő.

A segédtétel bizonyításához a (2) alatti összeget $\binom{n}{3}(n-3)!$ tagra bonthatjuk és így elegendő igazolnunk, hogy tetszőleges $b_1, b_2, b_3 > 0$ valós számokra

$$b_1^{\nu+2\delta} + b_2^{\nu+2\delta} + b_3^{\nu+2\delta} - (b_1^{\nu+\delta} b_2^{\delta} + b_2^{\nu+\delta} b_1^{\delta} + b_1^{\nu+\delta} b_3^{\delta} + b_3^{\nu+\delta} b_1^{\delta} + b_2^{\nu+\delta} b_3^{\delta} + b_3^{\nu+\delta} b_2^{\delta}) +$$

$$+ b_1^{\nu} b_2^{\delta} b_3^{\delta} + b_1^{\delta} b_2^{\nu} b_3^{\delta} + b_1^{\delta} b_2^{\delta} b_3^{\nu} \geqq 0$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha $b_1 = b_2 = b_3$.

Ez azonnal következik a következő nyilvánvaló egyenlőtlenségből. Az $x, y, z > 0$ és $\mu \geqq 0$ számokra

$$x^{\mu}(x-y)(x-z) + y^{\mu}(y-x)(y-z) + z^{\mu}(z-x)(z-y) \geqq 0$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha $x = y = z$. x, y, z helyébe $a_1^{\delta}, a_2^{\delta}, a_3^{\delta}$-t μ helyébe $\frac{\nu}{\delta}$-t téve adódik a segédtétel.

A segédtétel és bizonyításának fent vázolt gondolatmenete szerepel Hardy—Littlewood—Pólya Inequalities c. könyvében.

A bizonyítandó (1) egyenlőtlenséget ilyen alakba írhatjuk

$$\binom{n-1}{k-1}\sum_{i\neq j} a_i a_j^{k-1} \leqq nS_k + \left((k-1)\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right)\sum_k \tag{3}$$

Az $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ jel definíciója szerint érvényesek a következő egyenlőségek

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} a_i a_j^{k-1} = [k-1, 1, \underbrace{0, \ldots 0}_{n-2}] \tag{4}$$

$$\frac{1}{n}\sum_k = [k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}]$$

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} S_k = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}]$$

A (4) alatti egyenlőségeket (3)-ba helyettesítve, figyelembe véve az $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ egyenlőséget, (3) ilyen alakba írható

$$(n-1)\frac{k}{n}[k-1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}] \leqq [\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}] + \left(k-1-\frac{k}{n}\right)[k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}] \tag{5}$$

Figyelembe véve, hogy $(n-1)\frac{k}{n} = k-1-\frac{k}{n}+1$, (5) igy írható

(6)

$$[k-1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}] - [\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}] \leqq \left(k-1-\frac{k}{n}\right)([k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}] - [k-1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}])$$

Vezessük be a következő jelölést

$$\Delta_t^k = [t+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-t-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k+t}] - [t, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-t}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k+t-1}]$$

$$n \geqq 3, \quad k \geqq 2, \quad t = 0, 1, \ldots, k-1$$

A (2) segédtételt $v = t-1$, $\delta = 1$ helyettesítéssel alkalmazva azonnal adódik, hogy

$$0 = \Delta_0^k \leqq \Delta_1^k \leqq \ldots \leqq \Delta_{k-1}^k \tag{7}$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha valamennyi a_i egyenlő.

A (6) egyenlőtlenség így írható

$$\sum_{t=0}^{k-2} \Delta_t^k \leqq \left(k-1-\frac{k}{n}\right)\Delta_{k-1}^k$$

Ez azonban igaz, mert (7) miatt

$$\sum_{t=0}^{k-2} \Delta_t^k \leqq (k-2)\Delta_{k-1}^k \quad \text{és} \quad k-2 \leqq k-1-\frac{k}{n}$$

Azonnal következik az is, hogy a tárgyalt esetekben ($n \geqq 3$, $k \geqq 2$) egyenlőség csak akkor állhat, ha $k = n$ és valamennyi a_i egyenlő.

Gács Péter és
Lovász László bizonyításából.

Megjegyzés.

Az (1) alatti általános egyenlőtlenséget Lovász László fogalmazza meg és bizonyítja be dolgozatában, teljes indukcióval. Bizonyítása akkor is érvényes, ha az a_i-k között van 0 is, de nem foglalkozik avval, hogy mikor állhat fenn egyenlőség.

A közölt bizonyítás viszont Gács Péter bizonyításának általánosítása, melyet ő csak a $k = n$ esetben tehát a kitűzött feladatra alkalmaz.

II. Megoldás.

Ha valamelyik $a_i = 0$ az egyenlőtlenség azonnal következik az egyenlően rendezett sorozatokra vonatkozó Csebisev egyenlőtlenségből (lásd pl. Matematikai Versenytételek II. 43. oldal). Az is adódik, hogy egyenlőség csak akkor van, ha a többi a_j egyenlő. Legyen

$$F(a_1, \ldots, a_n) = n \prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$$

F homogenitása miatt elegendő igazolni, hogy

$$F(a_1, \ldots, a_n) \geqq 0, \quad \text{ha} \quad a_1 + \ldots + a_n = n \tag{1}$$

$n = 1$, 2-re $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Feltesszük, hogy $n \geqq 3$.

A mondottak szerint elegendő megmutatni, hogy (1) teljesül minden olyan $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ értékrendszerre, ahol F-nek lokális szélsőértéke van az $a_1 + \ldots + a_n = n$ feltétel mellett. Mint ismeretes minden ilyen értékrendszerre

$$\frac{1}{n} a_i \frac{dF}{da_i} = (n-1)(a_i^n - a_i^{n-1}) + \prod_{i=1}^{n} a_i = \lambda a_i, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

valamely alkalmas valós λ-ra.

Figyelembe véve, hogy a Descartes előjel szabály szerint az $(n-1)x - (n-1)x^{n-1} + \lambda x + \prod_{i=1}^{n} a_i$ polinomnak legfeljebb két pozitív gyöke van (hiszen $\prod_{i=1}^{n} a_i > 0$), (2) miatt elegendő igazolni, hogy $F(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-k}) \geqq 0$, ha $x, y > 0$. Ismét a homogenitást használva elegendő bizonyítani, hogy ha $g(x) = F(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$ akkor $g(x) \geqq 0$, ha $0 < x \leqq 1$. $g(1) = 1$. Ha megmutatjuk, hogy $0 < x < 1$-re $g(x) > 0$, ha $k \neq 0$, $k \neq n$, akkor ebből az is következik, hogy az $n \geqq 3$, $a_i > 0$ esetekben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha valamennyi a_i egyenlő. Legyen $0 < x < 1$, $0 < k < n$. Rendezéssel adódik, hogy

$$g(x) = k(n-k)(x^n - x^{n-1} - x + 1) - kx^n + nx^k - n + k.$$

Ezért

$$\frac{g(x)}{1-x} = k(n-k)(1 - x^{n-1}) - n(1 + \ldots + x^{k-1}) + k(1 + \ldots + x^{n-1}) =$$

$$= k(n-k) - (n-k)(1 + \ldots + x^{k-1}) + k(x^k + \ldots + x^{n-1}) - k(n-k)x^{n-1} \geqq 0$$

mert

$$k(n-k) \geqq (n-k)(1+\ldots+x^{k-1}) \quad \text{és} \quad k(x^k+\ldots+x^{n-1}) \geqq k(n-k)x^{n-1}$$

Egyenlőség mindkét helyen csak akkor állhatna, ha $k=1$, $k=n-1$, azaz $n=2$.

Pósa Lajos.

III. Megoldás

$$(1) \qquad n\sum_{i=1}^{n} a_i^t - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i^{t-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)^2(a_i^{t-2}+a_i^{t-3}a_j+\ldots+a_j^{t-2})$$

(t tetszőleges), mert $(a_i-a_j)^2(a_i^{t-2}+\ldots+a_j^{t-2}) = a_i^t+a_j^t-a_i a_j^{t-1}-a_j a_i^{t-1}$

$$i,j=1,\ldots,n$$

$$(2) \qquad \text{Ha} \quad 0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n \leqq \ldots \leqq a_1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \text{akkor}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+a_i-a_{n+1}) \geqq a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{n+1}) = a_{n+1}^n(1-n)+a_{n+1}^{n-1}$$

A feladat állítását n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk $n=1$, 2-re az állítás igaz és egyenlőség áll. Legyen $n \geqq 2$, $a_{n+1} \leqq a_n \leqq \ldots \leqq a_1$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Bizonyítjuk, hogy igaz $n+1$-re is. A homogenitás miatt feltehetjük, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Az indukciós feltevés szerint

$$(3) \qquad (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n\prod_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \geqq 0$$

Bizonyítandó, hogy

$$(4) \qquad n\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{n+1} + (n+1)\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_i \sum_{i=1}^{n+1} a_i^n \geqq 0.$$

A (4) bal oldala így írható

$$(5) \qquad n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} + na_{n+1}^{n+1} + na_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - (1+a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + a_{n+1}^n\right)$$

(3) miatt elegendő belátni, hogy az (5) formula $\geqq$ a (3) bal oldalán álló formula a_{n+1}-szeresénél. Azaz a levonás és átrendezés után azt kell belátni, hogy

$$(6) \qquad \left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) + a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i - (1-n)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right) \geqq 0$$

Az (1) állítás miatt az első két tag különbsége

(7)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)^2\left[a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-2}-a_{n+1}\left(a_i^{n-2}+a_i^{n-3}a_j+\ldots+a_j^{n-2}\right)\right]\geqq 0$$

mert $a_i \geqq a_{n+1}$, $i=1, \ldots, n$. A harmadik tag $\geqq 0$ a (2) állítás miatt.

Ha $n \geqq 2$, akkor (7) szerint egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $a_1=\ldots=a_n$. Ha $a_{n+1}>0$ és $a_1=\ldots=a_n$, akkor (6) harmadik tagja csak úgy lehet 0, ha $a_i-a_{n+1}=0$ $(i=1, \ldots, n)$, mert ha nem, akkor (2)-ben határozott egyenlőtlenség áll fenn.

A III. megoldást *Békéssy András* bocsátotta a versenybizottság rendelkezésére

Megoldották: *Babai László, Freud Róbert, Gács Péter, Laczkovich Miklós, Lovász László, Major Péter, Makai Endre, Pósa Lajos, Simonovits András, Sulyok Miklós.*

3. *feladat*

A bizonyításban felhasználjuk Erdős Pál következő tételét.

Ha egy kontinuumnál nagyobb számosságú teljes gráf éleit a természetes számokkal megszámozzuk, akkor lesz olyan nem megszámlálható teljes részgráfja, melynek minden éléhez ugyanaz a szám tartozik. Lásd pl. P. Erdős, A. Hajnal, R. Radó: „Partition relations for cardinal numbers" Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16(1965) 1. Tétel.

Ha F_x-el jelöljük azon F-beli függvények rendszerét, amelyek maximuma x, azonnal látható, hogy valamely x valós számra F_x kontinuumnál nagyobb számosságú. Tegyük fel, hogy $f_{=x} \cap g_{=x}=\emptyset$ bármely $f \neq g \in F_x$ függvénypárra. Tekintsük azt a teljes gráfot, melynek pontjai az F_x-beli függvények. Ha $f \neq g \in F_x$, akkor van olyan n természetes szám, melyre $f_{\geqq x-\frac{1}{n}} \cap g_{\geqq x-\frac{1}{n}}=\emptyset$, különben az $\left\{f_{\geqq x-\frac{1}{n}}, g_{\geqq x-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1,2\ldots}$ zárt halmazok centrált rendszert alkotnak, melynek közös része a kompaktság miatt nem üres. Ez a közös rész azonban része az $f_{=x} \cap g_{=x}$ halmaznak. Rendeljük hozzá az f, g élhez a legkisebb ilyen természetes számot. Az idézett tétel miatt akkor lenne olyan n, és olyan $F' \subseteqq F_x$, hogy F' nem megszámlálható, és F' minden éléhez az n szám van hozzárendelve. Ekkor az $f_{>x-\frac{1}{n}}, f \in F'$ nem üres nyílt, halmazok páronként közös pont nélküliek lennének. Ez ellentmond annak a jólismert ténynek, hogy K-n létezik véges Haar-mérték, és ezért K-ban a páronként diszjunkt nem üres nyílt halmazok minden rendszere megszámlálható. A feladat állítása tehát igaz valamely $f \neq g \in F$ függvénypárra.

Megjegyzés: Tulajdonképpen a következő tételt igazoltuk.

A K kompakt téren teljesül a feladat állítása, ha K kielégíti a következő feltételt: K-beli páronként diszjunkt nyílt halmazokból álló halmaz legfeljebb megszámlálható.

Gerlits János

Megoldotta: *Gerlits János* .

A feladat állításánál gyengébb állításnak és az említett Erdős tételnek bizonyítását adja *Lovász László.*

4. *feladat*

Belátjuk, hogy a feladat állítása akkor is igaz, ha a 4 számot $2+\varepsilon$-nal helyettesítjük, ahol $\varepsilon>0$. Jelentse I_k az $[N_k, N_k+(2+\varepsilon)\sqrt{N_k}]$ intervallumot $k=1, 2, \ldots$. Megjegyezzük, hogy $f(n)\neq 0$ tetszőleges n-re. Valóban van olyan k, melyre $(2+\varepsilon)\sqrt{N_k}>n$. Ekkor van olyan x egész melyre $nx\in I_k$, $f(nx)\neq 0$, tehát $f(nx)=f(n)\cdot f(x)$ és $f(n)\neq 0$. Ha az n egészhez van olyan x egész és $k\geqq 1$, melyre nx, $(n+1)x\in I_k$, akkor $f(n)\cdot f(x)=$ $=f(n+1)\cdot f(x)$ és így $f(x)\neq 0$ miatt $f(n)=f(n+1)$.

Az $nx\in I_k$, $(n+1)x\in I_k$ feltételek így fogalmazhatók $\dfrac{N_k}{n}\leqq x\leqq \dfrac{N_k+(2+\varepsilon)\sqrt{N_k}}{n+1}$.

Adott k-hoz és n-hez biztosítva van ilyen x egész, ha $\dfrac{N_k}{n+1}+\dfrac{(2+\varepsilon)\sqrt{N_k}}{n+1}-\dfrac{N_k}{n}\geqq 1$.

Átrendezve e feltétel így fogalmazható $n^2+n(1-(2+\varepsilon)\sqrt{N_k})+N_k\leqq 0$. Ennek az a feltétele, hogy n e másodfokú egyenlet két gyöke közé essék, azaz

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{N_k}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-(4+2\varepsilon)\sqrt{N_k}+((2+\varepsilon)^2-4)\,N_k}\leqq n\leqq$$

(1)

$$\leqq\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{N_k}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-(4+2\varepsilon)\sqrt{N_k}+((2+\varepsilon)^2-4)\,N_k}$$

Legyen $M_k=\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{N_k}$. Az (1) képletből adódik, hogy elegendő nagy k-ra és valamely alkalmas $c>0$ konstansra f konstans az $I_k'=[M_k, M_k+cM_k]$ intervallumon ahol $M_k\to+\infty$, ha $k\to+\infty$.

Ismételjük az előző meggondolást. Ha van olyan x szám és $k\geqq 1$, melyre nx, $(n+1)x\in I_k'$, akkor $f(n)=f(n+1)$. Ennek adott k-ra és n-re az a feltétele, hogy

$$\frac{(1+c)\,M_k}{n+1}-\frac{M_k}{n}\geqq 1 \quad \text{azaz} \quad \frac{nc-1}{n(n+1)}M_k\geqq 1$$

Mivel $M_k\to\infty$ bármely $n>\dfrac{1}{c}$-hez van olyan k, melyre a feltétel teljesül. Ezért $f(n+1)=f(n)$, ha $n>\dfrac{1}{c}$. Legyen $n_0>\dfrac{1}{c}$. Ekkor tetszőleges n-re $f(nn_0)=f(n)\cdot f(n_0)$, $f(nn_0)=f(n_0)\neq 0$, tehát $f(n)=1$.

Laczkovich Miklós

Megjegyzések.

1. Megmutatjuk, hogy ha a feladatban szereplő $4\sqrt{N_k}$-t $\dfrac{1}{16}\log N_k$-val helyettesítjük, akkor a feladat állítása már nem szükségképpen igaz.

Teljes indukcióval megadunk minden p prímszámhoz egy $f(p)$ értéket és ezenkívül egy N_k sorozatot a következőképpen. Tegyük fel, hogy $N_k, f(p_1), \ldots, f(p_{2N_k})$ már adottak. Legyen $N=2^{8N_k}$ és tekintsük az $[iN_k, (i+1)N_k]$ intervallumokat $(1\leqq i\leqq N)$. Ezek között van olyan, melybe nem esik csak $P_1, \ldots, P_{2N_k}$-ból felépülő szám; ugyanis a $P_1, \ldots, P_{2N_k}$-ből felépülő számokat egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára bonthatjuk, az előbbit $\sqrt{N\cdot N_k}$-féleképpen, az utóbbit 2^{2N_k}-féleképpen választhatjuk, tehát az $[1, N\cdot N_k]$ intervallumba összesen legfeljebb

$\sqrt{N \cdot N_k} 2^{2N_k} < N$ darab olyan szám esik, mely $P_1, \ldots, P_{2N_k}$-ből épül fel. Tegyük fel tehát, hogy az $[iN_k, (i+1)N_k]$ intervallumban minden számnak van $P_1, \ldots, P_{2N_k}$-tól különböző prímosztója. Legyen mármost $N_{k+1} = 2N_k$ és az $f(p_v)$, $2N_k < v \leqq 2N_{k+1}$ függvényértékeket adjuk meg a következőképpen: p_v-nek a $[N_{k+1}, N_{k+1} + N_k]$ intervallumba vagy egy többszöröse esik, vagy egy se. Ha egy se, akkor legyen $f(p_v) = -1$; ha egy többszöröse esik, akkor válasszuk az $f(p_v)$ függvényértéket úgy, hogy végül az $[N_{k+1}, N_{k+1} + N_k]$ intervallumban minden függvényérték ($f(n)$-et teljesen multiplikatívan kiterjesztve) 1 legyen.

Az így értelmezett függvény a $[N_{k+1}, N_{k+1} + N_k]$ intervallumokon állandó, és

$$N_{k+1} + N_k \geqq N_{k+1} + \frac{1}{16} \log N_k$$

Lovász László

2. A feladat állítása akkor sem igaz szükségképpen, ha a feladatban szereplő $4\sqrt{N_k}$-t $\exp\left(c\sqrt{\log N_k \log\log\log N_k}\right)$-val helyettesítjük, ahol c alkalmas kicsi pozitív állandó. A bizonyítás elég könnyen keresztülvihető Rankin következő tételének felhasználásával [1]. Ha $N(x, y)$ azon $n \leqq x$ egészek száma, amelyek minden prímosztója kisebb y-nál, akkor

$$N(x, y) < x \exp\left(-\frac{\log\log y}{\log y} \log x + O(\log\log y)\right) \qquad y \to \infty$$

Kátai Imre

Megoldották: *Babai László, Balogh Kálmán, Gács Péter, Gáspár András, Gyárfás András, Horváth Sándor, Laczkovich Miklós, Lovász László, Makai Endre, Pósa Lajos, Ruzsa Imre, Sulyok Miklós.*

5. *feladat*

Legyen $a_n(z) = a_n = \sum_{0 \leqq l \leqq \frac{n}{k+1}} \binom{n-kl}{l} z^l, \quad n = 1, 2, \ldots$

A bizonyítandó állítás éppen az, hogy $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \geqq \frac{1}{2}$.

Ha $|w + w^{k+1} z| < 1$ úgy

$$\frac{1}{1 - (w + w^{k+1} z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} z^l w^{m+lk} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \tag{1}$$

Ezért az $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ sor az $\frac{1}{1 - (w + w^{k+1} z)}$ függvény $w = 0$ pont körüli hatványsora. A Cauchy—Hadamard kritérium alapján elegendő igazolni, hogy a hatványsor konvergenciasugara legfeljebb 2.

Ehhez elegendő igazolni, hogy az $1 - w - w^{k+1} z$ ($k \geqq 1$) polinomnak van olyan gyöke, amelynek abszolút értéke legfeljebb 2. Ha $\left|\frac{1}{z}\right| \leqq 2^{k+1}$ ez következik abból, hogy a polinom gyökeinek szorzata $\frac{1}{z}$. Ha $\left|\frac{1}{z}\right| > 2^{k+1}$ úgy a $|w| = 2$ körön

[1] Lásd pl. K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer 1957.

$|w^{k+1}z| < 1 \leqq |1-w|$ és így a vizsgált polinomnak e körön belül Rouché tétele szerint ugyanannyi gyöke van mint az $1-w$ polinomnak.

A $z = -\frac{1}{4}$, $k=1$ esetben az (1) összefüggés alapján könnyen látható, hogy $a_n\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{n+1}{2^n}$ és ez mutatja, hogy a limesz szuperiorra vonatkozó állítás nem javítható.

Makai Endre
Máté Attila

Megjegyzés.

1. Makai Endre dolgozatában a következő erősebb állítást bizonyítja: $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{k}{k+1}$ és ez minden k-ra pontos, $\overline{\lim}\, |a_n(z)|^{\frac{1}{n}}$ minimuma a $z = \frac{-k^k}{(k+1)^{k+1}}$ helyen vétetik fel.

Az eléggé hosszadalmas bizonyítást helyszűke miatt elhagyjuk.

2. Több versenyző bebizonyítja, hogy az a_n sorozat kielégíti a következő rekurzív definíciót:

$$a_0 = \ldots = a_k = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-k}z \quad \text{ha} \quad n \geqq k.$$

Megoldották: *Babai László, Gács Péter, Laczkovich Miklós, Lovász László, Makai Endre, Máté Attila, Pósa Lajos.*

6. *feladat*

Tegyük fel először, hogy a feladat feltétele nem teljesül. Legyen A' A olyan véges részhalmaza, melyre minden az A'-t fixen hagyó automorfizmus az identitás. Ekkor bármely két olyan π_1 és π_2 automorfizmusra melyekre $\pi_1(x) = \pi_2(x)$ áll minden $x \in A'$-re, $\pi_1\pi_2^{-1}$ az identitás és így $\pi_1 = \pi_2$. $\mathfrak{A}$-nak tehát legfeljebb annyi automorfizmusa van, ahány leképezése van A'-nek A-ba. A megszámlálható, tehát az automorfizmusok halmaza is megszámlálható.

Tegyük fel most, hogy a feladat feltétele teljesül. Feltehető, hogy $A = \{1, \ldots,\}$ n-szerinti teljes indukcióval definiáljuk A véges részhalmazainak egy $A_0 \subseteq \ldots$ $\ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ növekvő sorozatát és A automorfizmusainak egy $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ sorozatát. Legyen $A_0 = \emptyset$. Legyen $n \geqq 0$ és tegyük fel, hogy A_n-et és π_i-t már definiáltuk minden $i < n$-re úgy, hogy A_n véges. Legyen π_n $\mathfrak{A}$ olyan automorfizmusa, mely A_n-et fixen hagyja és nem az identitás, és legyen

$$A_{n+1} = \{1, \ldots, n\} \cup \bigcup_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \\ \varepsilon_i = 0 \vee 1}} \pi_1^{\varepsilon_1} \ldots \pi_n^{\varepsilon_n}(A_n) \cup \{\min\{k : \pi_n(k) \neq k\}\}$$

Ekkor A_{n+1} is véges, és A_n és π_n definiálva van.

Az így definiált sorozat kielégíti a következő feltételeket.

α) π_n identitás A_n-en, de nem identitás A_{n+1}-en.

β) Ha $\varepsilon_i = 0 \vee 1$, $i = 1, \ldots, n$, akkor

$$\pi_1^{\varepsilon_1} \ldots \pi_n^{\varepsilon_n}(A_n) \subseteq A_{n+1}$$

γ) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ és A_n véges minden n-re.

Legyen $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ tetszőleges végtelen sorozat, melyre $\varepsilon_n = 0 \vee 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Értelmezzük a $\prod_{n=1}^{\infty} \pi_n = \pi$ szorzatot. Ha $k \in A$

$$\pi(k) = \pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_{n_k}^{\varepsilon_{n_k}}(k), \tag{1}$$

ha n_k a legkisebb szám, melyre $k \in A_{n_k}$. γ) miatt π A önmagába való leképezése. Ha $n > n_k$, akkor

$$\pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_n^{\varepsilon_n}(k) = \pi_{n_k+1}^{\varepsilon_{n_k+1}} \dots \pi_n^{\varepsilon_n}\left(\pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_{n_k}^{\varepsilon_{n_k}}(k)\right) = \pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_{n_k}^{\varepsilon_{n_k}}(k), \tag{2}$$

mert β) szerint $\pi_1^{\varepsilon_1}, \dots, \pi_{n_k}^{\varepsilon_{n_k}}(k) \in A_{n_k+1}$, és α) szerint $\pi_{n_k+1}, \dots, \pi_n$ identitás A_{n_k+1}-en. Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{A}$-ban csak véges változós műveletek és relációk szerepelnek, (2) miatt π nyilván művelet és reláció tartó. Ha $l \in A$, akkor van olyan n, melyre $l \in A_{n+1}$. Ekkor van olyan k, melyre $\pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_n^{\varepsilon_n}(k) = l$. α) miatt bármely $m > n$-re, $\pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_m^{\varepsilon_m}(k) = l$ és így (2) miatt $\pi(k) = l$. π tehát automorfizmus. Megmutatjuk, hogy ha $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots) \neq (\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n', \dots)$, akkor $\pi = \prod_{n=1}^{\infty} \pi_n^{\varepsilon_n} \neq \pi' = \prod_{n=1}^{\infty} \pi_n^{\varepsilon_n'}$

Legyen n a legkisebb szám, melyre $\varepsilon_n \neq \varepsilon_n'$. Feltehető, hogy $\varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n' = 1$. Ekkor $\pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} = \pi_1^{\varepsilon_1'} \dots \pi_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}'}$. Legyen $l \in A_{n+1}$ olyan, hogy $\pi_n(l) \neq l$. Legyen k az a szám, melyre $\pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}(k) = l$. Ismét α) és (2) miatt $\pi(k) = \pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_n^{\varepsilon_n}(k) = \pi_1^{\varepsilon_1} \dots \pi_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}(k) = l$, és $\pi'(k) = \pi_n(l) \neq \pi(k) = l$. $\mathfrak{A}$-nak tehát legalább annyi különböző automorfizmusa van, mint ahány 0-ból és 1-ből álló sorozat. Figyelembe véve, hogy A megszámlálható ebből az következik, hogy $\mathfrak{A}$-nak pontosan kontinuum sok automorfizmusa van.

Máté Attila

Megjegyzés.

A következő példa muatja, hogy végtelen sok változós relációk esetén az állítás nem marad igaz. Legyen $\mathfrak{A} = \langle A, R \rangle$ ahol A a természetes számok halmaza és az $R(a_1, \dots, a_n, \dots)$ végtelen sok változós reláció akkor és csak akkor igaz, ha véges sok kivétellel $a_n = n$. Ekkor $\mathfrak{A}$ tetszőleges π automorfizmusára is teljesül, hogy $\pi(n) = n$ véges sok kivétellel. Ezért $\mathfrak{A}$-nak csak megszámlálható sok automorfizmusa van, pedig nyilvánvaló, hogy a feladat véges részhalmazokra vonatkozó feltétele teljesül.

Simonovics András

Megoldották: *Babai László, Gács Péter, Laczkovich Miklós, Lovász László, Major Péter, Makai Endre, Máté Attila, Pelikán József, Pósa Lajos, Simonovits András, Sulyok Miklós.*

7. *feladat*

Jelentse N a természetes számok halmazát. A bizonyításban felhasználjuk Ramsey következő ismert tételét. Ha N r-elemű részhalmazait véges sok osztályba osztjuk, akkor van N-nek olyan végtelen N' részhalmaza, melynek minden r-elemű részhalmaza ugyanabban az osztályban van.

A feladat első felének igazolására r-szerinti teljes indukcióval definiáljuk a részhalmazok egy csökkenő $N_0 \supseteq \dots \supseteq N_r \supseteq \dots$ sorozatát és a természetes számok egy $x_1, \dots, x_r, \dots$ sorozatát. Legyen $N_0 = N$. Tegyük fel, hogy $r \geqq 0$ és N_r, és x_i, $i < r$ már definiálva vannak és N_r végtelen. Legyen x_r N_r tetszőleges eleme, $N_r' = N_r - \{x_1, \dots, x_r\}$. Bármely $A' \subseteq \{x_1, \dots, x_r\}$-re, ha $|A'| = s$ osszuk be N_r' $r-s$ elemű részhalmazait véges sok osztályba. Két ilyen halmaz akkor kerül egy osztályba, ha A'-vel kiegészítve r-elemű halmazzá az r-elemű halmazok eredeti beosztásában egy osztály-

ban voltak. Ramsey tételét 2^r-szer alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik N_r'-nek olyan N_{r+1} végtelen részhalmaza, melyre

(1) $\quad |A|=|B|=r,\ A, B \subseteq \{x_1, \ldots, x_r\} \cup N_{r+1},\ A \cap \{x_1, \ldots, x_r\} = B \cap \{x_1, \ldots, x_r\}$-ből

következik, hogy A a B-vel egy osztályban van.

Ezzel az $x_1, \ldots, x_r, \ldots$; $N_0, \ldots, N_r, \ldots$ sorozatokat definiáltuk. Legyen $X = \{x_1, \ldots, x_r, \ldots\}$. (1) miatt X a következő tulajdonsággal rendelkezik.

(2) Ha r tetszőleges, $|A|=|B|=r$, $A, B \subseteq X$ és $A \cap \{x_1, \ldots, x_r\} = B \cap \{x_1, \ldots, x_r\}$ akkor A és B ugyanabban az osztályban van. Miután $f(r) \geqq 1$ és $f(r) \to \infty$ ha $r \to \infty$ létezik olyan x_{r_k} monoton részsorozat, melyre

$$|\{x_{r_k} : r_k \leqq r\}| \leqq \overset{2}{\log} f(r).$$

Legyen $X' = \{x_{r_k}\}_{k=1,2,\ldots}$. X' nyilván végtelen és (2) miatt kielégíti a feladat követelményeit.

A feladat második felénél élesebb állítást bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy egy kontinuum számosságú halmaznak is van a kívánt tulajdonságú beosztása. Legyen $S=[0, 1]$. S r-elemű részhalmazait minden r-re r osztályba osztjuk. Legyen X S r-elemű részhalmaza $X=\{x_0, \ldots, x_{r-1}\}$, $x_0 < \ldots < x_{r-1}$. X-et az i-edik osztályba osztjuk, ha az (x_j, x_{j+1}) $j=0, \ldots, r-2$ intervallumok között pontosan i van, mely $\frac{1}{r}$-nél hosszabb $i=0, \ldots, r-1$. Ha S' S tetszőleges végtelen részhalmaza, akkor — használva, hogy S'-nek van torlódási pontja — könnyen látható, hogy minden i-hez van olyan r_0 küszöbszám, hogy $r > r_0$-ra S' már tartalmaz az r-esek i-edik osztályából való halmazt és ez nyilván bizonyítja az állítást.

Lényegében *Gerlits János* megoldása

Megoldották: *Gács Péter, Gerlits János, Gyárfás András, Klimó János, Laczkovich Miklós, Lehel Jenő, Lovász László, Major Péter, Makai Endre, Máté Attila, Pelikán József, Pósa Lajos, Sulyok Miklós.*

Erősen hiányos *Simonovits András* megoldása.

Csak a feladat második felére nyújtott be megoldást *Babai László, Freud Róbert.*

8. *feladat*

I. megoldás.

Jelölje φ_x mindazon A_i halmazok számát, melyek az x pontot tartalmazzák. Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{x \in A_j} \varphi_x = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i \cap A_j| = n + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j|$$

innen

(1) $$\sum_{x \in A_j} \varphi_x \leqq n + nk = n(k+1)$$

Összegezzünk minden j-re. Ekkor a bal oldalon

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{x \in A_j} \varphi_x = \sum_{x \in A} \varphi_x \sum_{x \in A_j} 1 = \sum_{x \in A} \varphi_x^2$$

adódik. Ezt a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséggel megbecsülve

$$\sum_{x\in A}\varphi_x^2 \geqq |A|\left(\frac{\sum_{x\in A}\varphi_x}{|A|}\right)^2 = \frac{1}{|A|}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|A_j|\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{|A|}$$

Az (1) egyenlőtlenség jobb oldalából az összegezés után azt kapjuk, hogy

$$n(n+1)(k+1).$$

Tehát

$$\frac{n^2(n+1)^2}{|A|} \leqq n(n+1)(k+1).$$

Átrendezve:

$$|A| \geqq \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Mivel az ellenkező irányú egyenlőtlenséget feltettük, itt az egyenlőségnek kell állnia. Ahhoz, hogy ilyen halmazrendszer létezzen, szükséges természetesen $k+1 \mid n(n+1)$.

Lovász László

II. megoldás.

Felhasználjuk azt a tételt, hogy ha $F_1, \ldots, F_N$ az $A_1, \ldots, A_n$ események polinomjai és $c_1, \ldots, c_N$ valós számok, akkor a $\sum_{k=1}^{N} c_k p(F_k) \geqq 0$ egyenlőtlenség minden valószínűségi mezőn minden $A_1, \ldots, A_n$ eseményre igaz, feltéve, hogy a triviális valószínűségi mezőn igaz.

Így a $p(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) \geqq \frac{2k+1}{(k+1)^2}\sum_{i=1}^{n+1} p(A_i) - \frac{2}{(k+1)^2}\sum_{1\leqq i<j\leqq n+1} p(A_i \cap A_j)$

egyenlőtlenség azonos teljesülését elég megvizsgálni akkor, ha mindegyik $A_i = \emptyset$ vagy Ω. Ha mindegyik $A_i = \emptyset$, akkor azt kapjuk, hogy $0 \geqq 0$, ami igaz. Ha az A_i-k közt pontosan l Ω van ($l \geqq 1$), akkor azt kell igazolni, hogy $1 \geqq \frac{2k+1}{(k+1)^2} l - \frac{2}{(k+1)^2}\binom{l}{2}$ vagyis átrendezve $\frac{l^2-l}{(k+1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} l + 1 = \left(\frac{l}{k+1} - 1\right)^2 \geqq 0$, ami szintén áll. Legyenek most A_i $(i=1, \ldots, n+1)$ a feladatban megadott halmazok és tekintsük azt a valószínűségi mezőt, amelyben $\Omega = A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ és amelyben minden pont mértéke $\frac{1}{|A|}$. Tehát ebben a mezőben is

$$p(A) = 1 \geqq \frac{2k+1}{(k+1)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{|A_i|}{|A|} - \frac{2}{(k+1)^2}\sum_{1\leqq i<j\leqq n+1}\frac{|A_i \cap A_j|}{|A|} \geqq \frac{2k+1}{(k+1)^2}\frac{(n+1)n}{A} -$$

$$- \frac{2}{(k+1)^2}\binom{n+1}{2}\frac{k}{|A|}$$

Ebből átrendezéssel $|A| \geqq \frac{n(n+1)}{k+1}$ adódik. Feltettük, hogy $|A| \leqq \frac{n(n+1)}{k+1}$ tehát $|A| = \frac{n(n+1)}{k+1}$

Laczkovich Miklós

III. megoldás.

Legyen x_i az A halmaz azon elemeinek száma, melyek pontosan i halmazban vannak benne, $i=1, \ldots, n+1$. Ekkor nyilván

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = |A|. \tag{1}$$

A feltevés szerint $\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| = n(n+1)$ és a baloldali összegezésnél minden olyan elemet, mely i halmazban van i-szer számoltunk. Ezért

$$\sum_{i=1}^{n+1} i x_i = n(n+1). \tag{2}$$

A feltevés szerint $\sum_{1 \leqq i < j \leqq n+1} |A_i \cap A_j| \leqq \binom{n+1}{2} k$, és most egy pontosan t különböző A_i halmazban fekvő elemet $\binom{t}{2}$-ször számoltunk. Ezért $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \binom{i}{2} \leqq \binom{n+1}{2} k$. Ebből (2) felhasználásával

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 x_i \leqq (k+1)\, n(n+1) \tag{3}$$

adódik.

Megmutatjuk, hogy (2)-ből és (3)-ból következik, hogy $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \geqq \frac{n(n+1)}{k+1}$ és egyenlőség csak akkor állhat, ha $x_{k+1} = \frac{n(n+1)}{k+1}$ és a többi $x_i = 0$. Ez (1) miatt bizonyítja ez állítást.

A kívánt állításnál többet bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy ha az

(1′) $x_i \geqq 0$ valós számokra

$$\sum_{i=1}^{n+1} i x_i \geqq n(n+1) \text{ és} \tag{2′}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 x_i \leqq n(n+1)(k+1) \text{ áll, akkor } \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geqq \frac{n(n+1)}{k+1} \tag{3′}$$

Mivel a szóban forgó $x_1, \ldots, x_{n+1}$ értékrendszerek halmaza az $n+1$-dimenziós térben korlátos és zárt, a $\sum_{i=1}^{n+1} x_i$ összeg egy pontban felveszi a minimumát. Legyen $u_1, \ldots, u_{n+1}$ egy ilyen pont.

Ha $v_i=0$ ha $i\neq k+1$ és $v_{k+1}=\dfrac{n(n+1)}{k+1}$, akkor $v_1, \ldots, v_{n+1}$ kielégíti a feltételeket és $\sum_{i=1}^{n+1} v_i = \dfrac{n(n+1)}{k+1}$ ezért

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_i \leqq \frac{n(n+1)}{k+1}. \tag{4}$$

(3')-ből kivonva (2') $k+1$-szeresét azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(k+1-i)\,u_i \geqq 0. \tag{5}$$

(2')-ből levonva (4) $k+1$-szeresét azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i-k-1)\,u_i \geqq 0. \tag{6}$$

(6) $k+1$-szeresét (5)-höz adva

$$-\sum_{i=1}^{n+1} (k+1-i)^2\,u_i \geqq 0. \tag{7}$$

Ez (1) miatt csak úgy lehetséges, ha $u_i=0$ ha $i\neq k+1$. Ekkor azonban (2') és (3') miatt $u_{k+1}=\dfrac{n(n+1)}{k+1}$, és ez bizonyítja az állítást.

Major Péter

Megoldották: *Gács Péter, Laczkovich Miklós, Lovász László, Major Péter, Makai Endre, Nagy Miklós, Nádai László, Pataki István, Pintz János, Pósa Lajos, Pröhle Tamás, Somogyi Árpád, Sulyok Miklós, Szalay Sándor.*

Hiányos megoldást adott be *Huhn András* és *Bajmóczy Ervin.*

9. *feladat*

I. megoldás.

Tegyük fel, hogy $x\geqq x_0$ esetén $|f''(x)|<c|f'(x)|$. Megmutatjuk először is, hogy ha $x\geqq x_0$ és $t<\dfrac{1}{c}$ akkor

$$|f'(x+t)| \leqq \frac{1}{1-ct}\,|f'(x)| \tag{1}$$

Feltehetjük, hogy $|f'(x+t)|>|f'(x)|$, mert különben (1) triviálisan teljesül. Legyen

$$t_0 = \min\{t' : t'>0,\ |f(x+t')| = |f(x+t)|\}.$$

Mivel az $|f'(\xi)|$ függvény folytonos, és $\xi\in[x, x+t_0)$ esetén az $|f'(x+t)|$ ordinátájú vízszintes egyenest nem metszi, az x pontban pedig ez alatt az egyenes alatt van, így az egész $[x, x+t_0]$ intervallumon $|f'(\xi)|\leqq|f'(x+t)|$. A Lagrange középérték-tételből

$$|f'(x+t)|-|f'(x)|\leqq|f'(x+t_0)-f'(x)| = t_0|f''(\xi)|\leqq t_0 c|f'(\xi)|\leqq t_0 c|f'(x+t)|,$$

ami átrendezve (1)-et adja.

Látható (1)-ből, hogy ha egy $x \geqq x_0$ helyen $|f'(x)| = 0$, akkor minden $x' \geqq x$ helyen $|f'(x')| = 0$, ez azonban lehetetlen, mert ekkor $e^{-x}f(x)$ 0-hoz tartana. Így $x \geqq x_0$ esetén $f'(x)$ vagy mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív. $e^{-x}f(x) \to 1$ miatt azonban $f(x)$ nem lehet monoton csökkenő, így minden $x \geqq x_0$-ra

$$f'(x) > 0. \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből kapjuk, ha $x \geqq x_0 + \frac{1}{c}$ és $t < \frac{1}{c}$, hogy $0 \leqq u \leqq t$ esetén

$$(1-ct)f'(x+u) \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{1-ct} f'(x-u).$$

Ebből integrálással

$$(1-ct)[f(x+t)-f(x)] \leqq tf'(x) \leqq \frac{1}{1-ct}[f(x)-f(x-t)],$$

vagyis

$$\frac{1-ct}{t}\left[\frac{f(x+t)}{e^{x+t}}e^t - \frac{f(x)}{e^x}\right] \leqq \frac{f'(x)}{e^x} \leqq \frac{1}{t(1-ct)}\left[\frac{f(x)}{e^x} - \frac{f(x-t)}{e^{x-t}}e^{-t}\right] \tag{3}$$

Vegyük először (3) bal oldalát. Rögzített t mellett

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+t)}{e^{x+t}}e^t - \frac{f(x)}{e^x}\right) = e^t - 1.$$

Innen

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f'(x)}{e^x} \geqq (1-ct)\frac{e^t-1}{t},$$

tehát

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f'(x)}{e^x} \geqq \lim_{t\to+0}\left[(1-ct)\frac{e^t-1}{t}\right] = 1.$$

A (3) egyenlőtlenség jobb oldalából hasonlóan az adódik, hogy

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f'(x)}{e^x} \leqq \lim_{t\to+0}\left[\frac{1}{1-ct}\frac{1-e^{-t}}{t}\right] = 1,$$

ami az állítást bizonyítja.

Lovász László

II. megoldás.

Felhasználjuk a következő egyszerűen bizonyítható ismert tételt. (Lásd pl. Beke Manó: Differenciál és integrál számítás, Bp. 1950. I. kötet 223. oldal.)

Legyen g olyan kétszer differenciálható függvény, melyre $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ létezik és véges és $|g''(x)| \leqq C$, ha $x \geqq x_0$ valamely C, x_0 valós számokra. Ekkor $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Legyen $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$. Ekkor $g'(x) = \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ és

$$g''(x) = \frac{f''(x)-2f'(x)+f(x)}{e^x}$$

A feltevés szerint $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$. Az $|f''(x)|<c|f'(x)|$ feltevés miatt elegendő nagy x-re $f'(x)$ állandó előjelű, és $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ miatt nyilván pozitív. Így ha x_1 eléggé nagy és $x\geqq x_1$, akkor

$$|f'(x)-f'(x_1)| \leqq \int_{x_1}^{x} |f''(t)|\,\mathrm{dt} \leqq c\int_{x_1}^{x} f'(t)\,\mathrm{dt} = f(x)-f(x_1)$$

Ezért valamely alkalmas c' konstansra $|f''(x)|\leqq c'f(x)$ $|f'(x)|\leqq c'f(x)$ és így $|g''(x)|\leqq(3c'+1)g(x)$ ha $x\geqq x_1$. Ezért alkalmas C-re és x_0-ra $|g''(x)|\leqq C$ ha $x\geqq x_0$. Az idézett tétel szerint $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} = 0$, tehát $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1$.

Simonovits András

Megjegyzés: $\left|\frac{f''}{f}\right|$ illetve $|g''|$ korlátosságát bizonyos értelemben szükséges feltenni. Ezt bizonyítja a $g(x) = 1+\frac{\sin x^2}{x}$ függvény példája. E függvényre $g'(x) = \frac{-\sin x^2}{x^2}+2\cos x^2$. Ezért $\underline{\lim}_{x\to+\infty} g'(x) = -2<2 = \overline{\lim}_{x\to+\infty} g'(x)$.

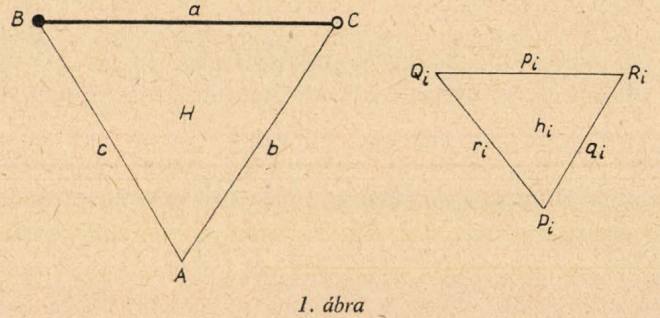
Simonovits András

Megoldották: *Babai László, Bajmóczy Ervin, Gács Péter, Gerlits János, Laczkovich Miklós, Lovász László, Herényi István, Horváth Sándor, Huhn András, Major Péter, Makai Endre, Máté Attila, Pósa Lajos, Ruzsa Imre, Simonovits András, Sulyok Miklós.*
Majdnem teljes *Pelikán József* megoldása.

10. *feladat*

Szorítkozhatunk arra az esetre, amikor H szabályos háromszög; ezt ugyanis alkalmas affinitással elérhetjük, és az affinitás sem az érintkezést, sem a homotétikus voltot, sem a kerületarányt nem változtatja meg.

Legyenek a H háromszög csúcsai A, B, C a h_i háromszög csúcsai P_i, Θ_i, R_i, a H háromszög oldalai a, b, c a h_i háromszög oldalai p_i, g_i, r_i, a szokásos sorrendben; azonban az a oldalhoz nem számítjuk hozzá a C pontot, a p_i oldalhoz nem számítjuk hozzá az R_i pontot stb. A és P_i, B és Θ_i, C és R_i legyenek homotetikusan megfelelő pontok (1. ábra).

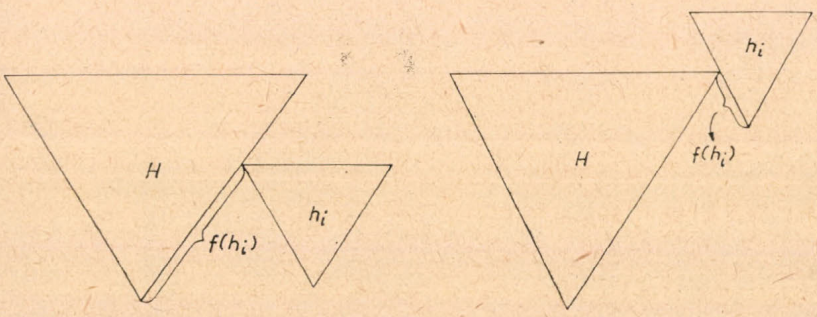


1. ábra

A H háromszög és valamelyik h_i háromszög érintkezése kétféleképpen történhet: vagy H valamelyik csúcsa rajta fekszik a neki h_i-ben homotetikusan megfelelő csúccsal szemköztes oldalon, vagy h_i valamelyik csúcsa fekszik rajta a neki H-ban homotetikusan megfelelő csúccsal szemközti oldalon. A fentebbi megállapodás miatt a két eset közül mindig egy és csak egy következik be. Az első esetben azt mondjuk, hogy h_i H-nak csúcsát, a második esetben, hogy h_i H-nak oldalát érinti. A két háromszög közös pontját érintkezési pontnak fogjuk hívni. Minden h_i-n és H-n rögzítjük a (P_i, Θ_i, R_i), ill. (A, B, C) körüljárási irányt.

Ha h_i H-nak oldalát érinti, akkor jelölje $f(h_i)$ az érintési pontnak és a H-n rögzített körüljárási irányban hozzá legközelebb eső csúcsnak a távolságát.

Ha h_i H-nak csúcsát érinti, akkor $f(h_i)$ jelölje az érintési pontnak és a h_i-n rögzített körüljárással szemben mérve h_i hozzá legközelebbi csúcsának távolságát. Nyilvánvaló, hogy az első esetben $0 < f(h_i) \leqq \frac{\lambda}{3}$, a második esetben $0 \leqq f(h_i) < \frac{1}{3}$ (2. ábra).

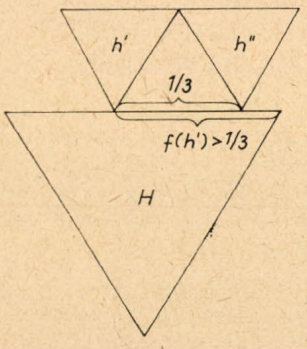


2. ábra

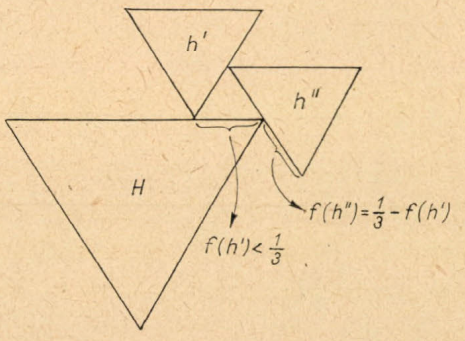
Nyilvánvaló, hogy h_i és h_{i+1} érintési pontja H-nak ugyanazon (lezárt) oldalára esik. Ily módon beszélhetünk h_i és h_{i+1} sorrendjéről a H-n értelmezett körüljárás szerint.

Megállapíthatjuk továbbá a következőket:

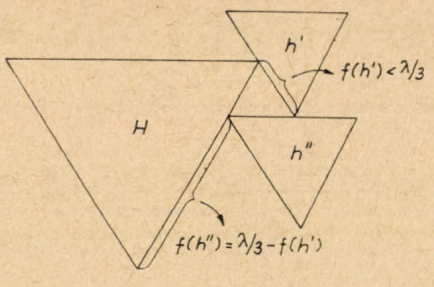
Jelöljön h' egy tetszőleges, h-ból eltolással származó, H-t érintő háromszöget. Keresünk olyan h''-t, mely h-ból eltolással származik, h'-t és H-t érinti és (a körüljárás szerint) h' után következik. Ekkor (3a—e. ábrák):



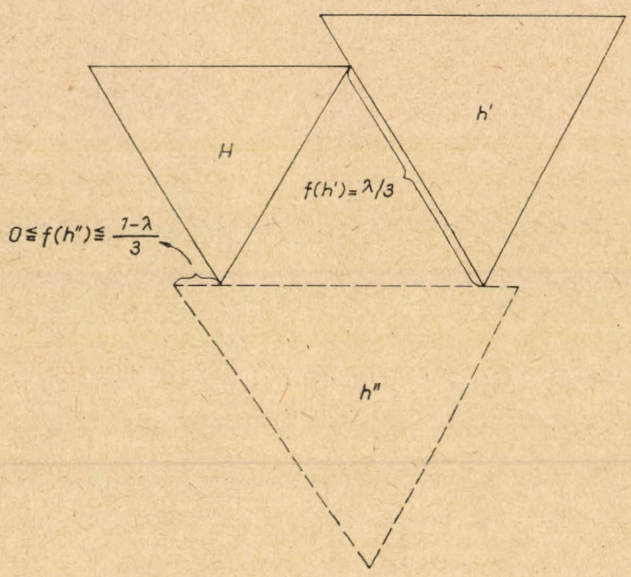
3a. ábra



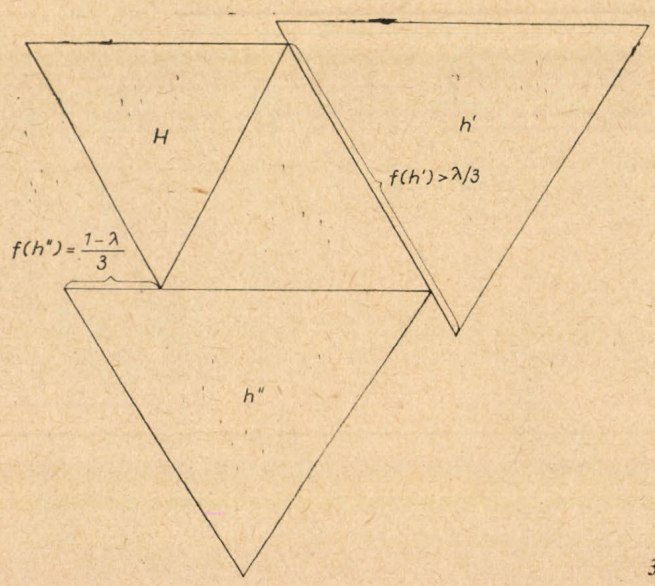
3b. ábra



3c. ábra



3d. ábra



3e. ábra

(a) Ha h' H-nak oldalát érinti és $f(h') > \frac{1}{3}$, akkor egyetlenegy ilyen h'' van, ez H-nak ugyanazt az oldalát érinti és a két érintési pont távolsága $\frac{1}{3}$ $\left(\text{tehát } f(h'') = f(h') - \frac{1}{3}\right)$.

(b) Ha h' H-nak oldalát érinti és $f(h') \leqq \frac{1}{3}$, akkor egyetlenegy h'' található, ez H-nak (a körüljárás szerint) $h'H$-hoz legközelebbi csúcsát érinti és $f(h'') = \frac{1}{3} - f(h')$.

(c) Ha h' H-nak csúcsát érinti, és $f(h') < \frac{\lambda}{3}$ akkor h'' egyértelmű, a h'' háromszög H-nak h' érintési pontját tartalmazó oldalát érinti, és $f(h'') = \frac{\lambda}{3} - f(h')$.

(d) Ha h' H-nak csúcsát érinti, és $f(h') = \frac{\lambda}{3}$, akkor h''-nek bármely olyan háromszög választható, mely H-nak h' érintési pontját követő csúcsát érinti, és melyre $f(h'') \leqq \frac{1-\lambda}{3}$.

(e) Végül, ha h' H-nak csúcsát érinti és $f(h') > \frac{\lambda}{3}$ akkor h'' ismét egyértelmű, h'' H-nak h' érintési pontját követő csúcsát érinti és $f(h'') = \frac{1-\lambda}{3}$.

I. Tegyük fel először, hogy $\lambda < 1$. Megmutatjuk, hogy akkor mindig található, záródó háromszöglánc.

Legyen h_1 az A csúcsot érintő háromszög, melyre $f(h_1) = 1 - \lambda$. Legyen $k = -\left[-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right]$. h_1-ből kiindulva, a körüljárásnak megfelelő sorrendben $h_1, \ldots, h_{2k+1}$ egyértelműen megkonstruálható az (a)—(e) megjegyzések alapján, közülük $h_2, \ldots, h_{2k}$ érintik H-nak oldalát és $h_1, \ldots h_{2k+1}$ csúcsát, és $f(h_{2k+1}) \leqq \lambda$. h_{2k+2}-t válasszuk (d)-nek megfelelően úgy, hogy $f(h_{2k+2}) = 1 - \lambda$ legyen. h_{2k+2} h_1-hez képest H középpontja körül valamely $i \cdot \frac{2\pi}{3}$ szöggel van elforgatva. Ha tehát h_{2k+2}-ből kiindulva ugyanígy folytatjuk eljárást, $f(h_{4k+3})$-at megint $1 - \lambda$-nak választva, akkor legkésőbb h_{6k+4} egybe fog esni h_1-gyel, q.e.d.

II. Vizsgáljuk most a $\lambda \geqq 1$ esetet. Ekkor csak az (a), (b), (c) esetek lehetségesek és bármely h'-höz egyértelműen található h''; ez ellenkező körüljárás választása esetén is ugyanígy igaz maradna, tehát minden h'-höz összesen két, h-ból eltolással származó, h'-et és H-t érintő háromszög van. Így ha h_1-et és egy őt és H-t érintő h_2-t megadunk, akkor a lánc egyértelműen megkonstruálható.

Tegyük fel először, hogy adott egy n lépésben záródó, H-t k-szor körülfogó $h_1, \ldots, h_n$ ($h_{n+1} = h_1$) lánc. Annak a kijelentésnek, hogy a lánc H-t k-szor fogja körül, van értelme, mert az egyes h_i-k érintési pontjai rögzített körüljárási sorrendben helyezkednek el H-n. Erről a sorrendről feltehetjük, hogy azonos az (A, B, C) sorrenddel.

Az (a), (b), (c) megjegyzésekből kitűnik, hogy az oldalakat érintő h_i-k érintési

pontjai egy $\frac{1}{3}$-közű, $n-3k$ elemű, ciklikus sorozatot alkotnak H kerületén, mely k-szor futja körül H-t, így

$$\frac{1}{3}(n-3k) = \lambda k$$

azaz

$$\lambda = \frac{n-3k}{3k}, \quad n = 3k(\lambda+1) \tag{1}$$

Ebből leolvasható, hogy záródó lánc létezésének szükséges feltétele a $\lambda \geqq 1$ esetben, hogy λ racionális szám legyen. Ebben az esetben a lánc annyiszor fogja körül H-t, mint 3λ nevezője és elemszámát úgy kapjuk, hogy ezt $3(\lambda+1)$-gyel szorozzuk (természetesen, ha k-nak és n-nek valamely egészszámú többszörösét tekintjük, akkor a lánc szintén záródik).

Meg kell még ehhez mutatnunk, hogy ha (1) fennáll valamely k, n természetes szám mellett, akkor található n elemű, záródó lánc. Ez egyben azt is bizonyítani fogja, hogy λ racionális volta elegendő záródó lánc létezéséhez.

Az állításon túlmenőleg azt mutatjuk meg, hogy bármely h_1-ből kiindulva a lánc k-szori körülfutás és n elem után záródik. Szorítkozhatunk arra az esetre, amikor h_1 a H háromszögnek oldalát érinti; ugyanis h_1, h_2 közül legalább az egyik H-nak oldalát érinti és ha h_2-ből kiindulva záródik a lánc, akkor h_1-ből kiindulva is, mert a lánc konstrukciója visszafelé is egyértelmű.

Tekintsük mármost a láncot addig, míg k-szor meg nem kerüli a H háromszöget és h_{m+1} érintési pontja h_1 érintési pontjától $\frac{1}{3}$-nál kisebb távolságra nem lesz. Ez előbb-utóbb bekövetkezik, hiszen a láncnak legfeljebb λ eleme érinti egymás után ugyanazt az oldalt. Ekkor, az előzőekhez hasonlóan,

$$0 \leqq \left| k\lambda - \frac{m-3k}{3} \right| < \frac{1}{3} \tag{2}$$

Itt λ értékét (1)-ből helyettesítve és 3-mal átszorozva

$$0 \leqq |n-m| < 1$$

Ez n és m egész volta miatt csak úgy lehetséges, ha és (2)-ben az egyenlőség áll, azaz $h_{m+1} = h_1$.

Lovász László

Megoldották: *Babai László, Bajmóczy Ervin, Balogh Kálmán, Freud Róbert, Gács Péter, Herényi István, Horváth Sándor, Laczkovich Miklós, Lovász László, Makai Endre, Pintz János, Pröhle Tamás, Ruzsa Imre, Szalay Sándor.*

Nem teljes megoldást adtak: *Gerlits János, Gyárfás András, Huhn András, Kóczy László, Michaletzky György, Nádai László, Pósa Lajos és Sulyok Miklós.*

11. *feladat*

I. megoldás.

Három előzetes megjegyzést teszünk:

(a) A feladat állítása igaz az $n=2$ esetben, azaz

$$P(A+B)\cdot P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Valóban, legyen $AB=x$, $A\bar{B}=y$, $\bar{A}B=z$. Azt kell igazolnunk, hogy

$$(P(x)+P(y)+P(z))P(x)\leqq(P(x)+P(y))(P(x)+P(z)),$$

ami kiszorozva közvetlenül látható.

(b) Ha $A_1\supseteq\ldots\supseteq A_n$, akkor $C_k=A_k$.

(c) C_k azonos azzal az eseménnyel, hogy az A_1+A_2, A_1A_2, A_3, ..., A_n események közül következik be legalább k. Ehhez azt kell belátnunk, hogy az A_1+A_2, A_1A_2, A_3, ..., A_n események közül mindig ugyanannyi következik be, mint az A_1, ..., A_n események közül; vagyis azt, hogy az A_1+A_2, A_1A_2 események közül mindig ugyanannyi következik be, mint az A_1, A_2 események közül; ez azonban nyilvánvaló.

Ezekután a feladat állítása így látható be: Legyen $A_i^0=A_i$ $(i=1, \ldots, n)$, és feltéve, hogy az A_1^μ, ..., A_n^μ események már definiálva vannak, adjuk meg az $A_1^{\mu+1}$, ..., ..., $A_n^{\mu+1}$ eseményeket a következőképpen: válasszunk egy olyan A_i^μ, A_j^μ párt, mely összehasonlíthatatlan $(i<j)$; legyen $A_i^{\mu+1}=A_i^\mu+A_j^\mu$, $A_j^{\mu+1}=A_i^\mu A_j^\mu$ és $A_k^{\mu+1}=A_k^\mu$ ha $k\neq i, j$. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg van összehasonlíthatatlan eseménypár. Az eljárás előbb-utóbb befejeződik, mert minden ilyen lépésnél az összehasonlíthatatlan esemény-párok száma csökken, hiszen A_i^μ és A_j^μ összehasonlíthatókká váltak és bármely esemény az $A_i^\mu+A_j^\mu$, $A_i^\mu A_j^\mu$ események közül legalább annyival összehasonlítható, mint az A_i^μ, A_j^μ események közül. Továbbá az (a) megjegyzés miatt

$$\prod_{k=1}^{n} p(A_k^{\mu+1}) \leqq \prod_{k=1}^{n} p(A_k^\mu) \tag{1}$$

és mivel a C_k események (c) miatt nem változtak és (b) miatt megegyeznek a végül kapott A_i^μ eseményekkel, (1) bizonyítja a feladat állítását.

Az (a) megjegyzés bizonyításából kiolvasható, hogy ha $\prod_{k=1}^{n} P(A_k^\mu)\neq 0$ és $P(A_i^\mu\ \bar{A}_j^\mu)\ p(\bar{A}_i^\mu A_j^\mu)\neq 0$, akkor (1)-ben a szigorú egyenlőtlenség érvényes. Tehát a feladatban az egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha vagy $\prod_{k=1}^{n} p(A_k)=0$, vagy az $\{A_k\}$ eseményrendszer „lényegében" rendezett.

Lovász László

II. megoldás.

Tekintsük a $B=B_1\ldots B_n$ eseményeket, ahol B_i vagy A_i vagy $\bar{A}_i$. Minden B eseményre jelölje $n(B)$ azon i-k számát, amelyre $B_i=A_i$.

Most nyilván $C_k=\sum\{B:n(B)\geqq k\}$ és mivel bármely két különböző B diszjunkt,

$$P(C_k)=\sum(n(B)\geqq k)P(B).$$

Ezek szerint a baloldal az összes $\prod_{i=1}^{n} p(B_i)$ alakú számok összegeiből áll, ahol $n(B_i)\geqq i$. Ha $n(B_i)=k_i+i$, ahol $k_i\geqq 0$, akkor ez a szorzat a baloldalon pontosan $\prod_{i=1}^{n}(k_i+1)$-szer fog fellépni, mert B_i állhat az i-edik, $i+1$-edik, ..., $(i+k_i)$-edik helyen.

Állítjuk, hogy minden ilyen szorzat szerepel a jobboldalon is, és legalább annyiszor. Ha u.i. $n(B_i)=k_i+i$, $k_i\geqq 0$, akkor tekintsük azokat az $\{A_{l_i}\}_{i=s\ldots n}$ sorozatokat, amelyekre B_i-ben A_{l_i} (és nem $\bar{A}_{l_i}$) szerepel $(A_{l_i}\neq A_{l_j}$ ha $i\neq j)$. Nyilván

minden ilyen sorozathoz hozzátartozik egy $\prod_{i=1}^{n} P(B_i)$ szorzat; ez tehát szerepel a jobboldalon is.

Világos az is, hogy egy ilyen $\prod_{i=1}^{n} p(B_i)$ szorzat legalább annyiszor szerepel a jobboldalon, ahány különböző fenti tulajdonságú $\{A_{l_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ sorozatot találunk. De A_{l_i} kiválasztható k_1+1-féleképpen; ha az elsőt már megválasztottuk, a második k_2+2-1-féle módon; ezután A_{l_3} megválasztható (k_3+3-2)-féleképpen stb., azaz összesen legalább $\prod_{i=1}^{n} (k_i+1)$ ilyen sorozat választható.

Gerlits János

Megjegyzés:

Simonovits András megemlíti, hogy ha a feladatban a szorzást összeggel helyettesítjük, akkor mindig egyenlőség áll, azaz $\sum_{i=1}^{n} p(C_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$. Ennél általánosabb a következő Simonovits Miklóstól származó megjegyzés. Ha $S_k(x_1, \ldots, x_n)$ az $x_1, \ldots, x_n$ változók k-adik eleme szimmetrikus polinomja akkor

$$S_k(P(C_1), \ldots, P(C_n)) \leqq S_k(P(A_1), \ldots, P(A_n)).$$

Ennek következtében az állítás igaz marad, ha S_k helyébe az $x_1, \ldots, x_n$ változók tetszőleges nem negatív együtthatós szimmetrikus polinomját írjuk.

Mindkét közölt bizonyítás egyszerű módosítással adja ezt az általánosabb eredményt.

Megoldották: *Babai László, Gács Péter, Gerlits János, Gyárfás András, Huhn András, Laczkovich Miklós, Lovász László, Major Péter, Makai Endre, Máté Attila, Michaletzky György, Pelikán József, Pintz János, Pósa Lajos, Simonovits András.*

Nem teljes megoldást adtak: *Klimó János, Nádai László, Sulyok Miklós.*

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER DE L'ANNÉ 1968

1. Démontrer que l'anneau d'endomorphisme d'un groupe Abélien G sans torsion (avec torsion) est régulier au sens de Neumann, si et seulement si G est la somme discrète directe des groupes isomorphes avec le groupe additif des nombres rationnels (des groupes cycliques d'ordre premier).

(Un anneau est régulier au sens de Neumann si à chacun de ses éléments α il existe un β tel que $\alpha\beta\alpha = \alpha$.)

2. Soit a_i un numbre réel non négatif, $i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 1$. Démonter que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \leqq n \prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n.$$

3. Soit K un groupe topologique compact et F un ensemble de fonctions continues définies sur K ayant la puissance supérieure à celles du continu. Démontrer qu'il existe un $x_0 \in K$ et des fonctions $f \neq g \in F$ telles que

$$f(x_0) = g(x_0) = \max_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} g(x)$$

4. Soit $f(n)$ une fonction totalement multiplicative arbitraire à valeur complexe. Démontrer que si, pour une suite infinie croissante N_k d'entiers positifs, on a

$$f(n) = A_k \neq 0 \quad \text{si} \quad N_k \leqq n \leqq N_k + 4\sqrt{N_k},$$

alors $f(n) \equiv 1$.

5. Soit k un entier positif, z un nombre complexe quelconque et $\varepsilon>0$.
Démontrer que l'inégalité

$$\left| \sum_{0 \leqq l \leqq \frac{n}{k+1}} \binom{n-kl}{l} z^l \right| \geqq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^n$$

est vérifiée pour une infinité de n positif.

6. Soit $\mathfrak{A} = <A \ldots>$ une structure algébrique dénombrable quelconque (un nombre arbitraire de relations et d'opérations à un nombre fini de variables peuvent être définies dans $\mathfrak{A}$).
Démontrer que l'ensemble d'automorphismes de $\mathfrak{A}$ a la puissance du continu, si et seulement si pour chaque sous-ensemble fini A' de A il existe un automorphisme $\pi_{A'}$ qui n'est pas une identité et pour lequel $x \in A'$ implique

$$\Pi_{A'}(x) = x.$$

7. Pour chaque r fini rangeons les sous-ensembles à r éléments des nombres naturels dans un nombre fini de classes.
Démontrer que si une fonction $f(r)$ satisfait aux conditions: $f(r) \geqq 1$ et $f(r) \to +\infty$ avec $r \to +\infty$, il existe un sous-ensemble infini des nombres naturels qui, pour chaque r, contient de sous-ensembles à r éléments appartenant à $f(r)$ classes différentes au plus.
Montrer qu'il y a de classement tel que, si $f(r) \neq +\infty$, il n'existe pas à $f(r)$ de sous-ensemble infini avec la propriété sus-mentionnée.

8. Soient n et k de nombres naturels donnés. Soit A un ensemble fini. $|B|$ dénote le nombre des éléments de B. Supposons que

$$|A| \leqq \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Soient $A_i (i = 1, \ldots, n+1)$ d'ensembles tels que

$$|A_i| = n \qquad (1 \leqq i \leqq n+1),$$

$$|A_i \cap A_j| \leqq k \qquad (i \neq j),$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i.$$

Déterminer le nombre des éléments de A.

9. Soit $f(x)$ une fonction continue telle que l'on ait

$$\frac{f(x)}{e^x} \to 1 \quad \text{pour} \quad x \to +\infty$$

et $|f''(x)| < C|f'(x)|$ pour tout x suffisamment élevé.
Prouver que

$$\frac{f'(x)}{e^x} \to 1 \quad \text{si} \quad x \to +\infty.$$

10. Soit t un triangle de périmètre unité, T un triangle de périmètre λ homothétique avec t. Soient $t_1, t_2, \ldots$ d'exemplaires déplacés de t; t_n est en contact avec T et t_{n+1}, et $t_n \neq t_{n+2}$ quel que soit n.
Pour quelle valeur de λ peut-on choisir les triangles de telle manière que la chaîne $t_1, t_2 \ldots$ soit fermée?
Supposons que $\lambda \geqq 1$ et que la chaîne soit fermée. Déterminer, en fonction de λ, le nombre des triangles formant la chaîne, ainsi que le nombre d'encerclements de T par la chaîne. (Homothétique = = semblable et de même sens; deux triangles sont en contact s'ils possèdent de point frontière commun sans avoir de point intérieur commun; la chaîne est dite fermée si, pour un indice $n>0$, on a

$$t_{n+1} = t_1.$$

11. Soient $A_1, \ldots, A_n$ d'événements arbitraires d'un champ de probabilité. C_k désigne l'événement que $k (k=1, \ldots, n)$ événements se réalisent au moins des événements $A_1, \ldots, A_n$.
Prouver que

$$\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leqq \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

171. Legyen $\mathfrak{R}$ végtelen sok elemből álló halmazgyűrű. Bizonyítandó, hogy készíthető szigorúan növekvő

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots \qquad (R_n \neq R_{n+1}, R_n \in \mathfrak{R})$$

halmazsorozat.

Császár Ákos

172. A természetes számok halmazán értelmezett f függvényt additív (multiplikatív) számelméleti függvénynek nevezzük, ha relatív prím a és b esetén

$$f(ab) = f(a)+f(b), \quad \text{ill.} \quad f(ab) = f(a)f(b).$$

f-et teljesen additívnak (teljesen multiplikatívnak) mondjuk, ha ez minden a-ra és b-re áll.

Határozzuk meg az összes olyan f, g függvénypárokat, hogy f és g multiplikatív (teljesen multiplikatív) számelméleti függvény, $f-g$ pedig additív (teljesen additív).

Freud Róbert

173. Mutassuk meg, hogy minden végtelen csoportban található két olyan $\mathfrak{u}_1$ és $\mathfrak{u}_2$ ultraszűrő, hogy az

$$\{U_1U_2 : U_1 \in \mathfrak{u}_1,\ U_2 \in \mathfrak{u}_2\}$$

halmazrendszer által generált szűrő nem ultraszűrő.

Császár Ákos

MEGOLDOTT FELADATOK

161. feladat. Mutassuk meg, hogy minden G Abel-csoporthoz található olyan csoport, amelynek kommutátoralcsoportja izomorf G-vel.

Fried Ervin

Megoldás. Legyen H Abel-csoport az e egységelemmel, továbbá $A=\{\varepsilon, \varphi\}$ másodrendű ciklikus csoport az ε egységelemmel (úgyhogy tehát $\varphi^2=\varepsilon$). Legyen $a\in H$ esetén

$$a^{\varepsilon}=a,\quad a^{\varphi}=a^{-1},$$

és értelmezzük az $A\times H$ halmazban a csoportműveletet az

$$(\alpha, a)(\beta, b)=(\alpha\beta, a^{\beta}b)\quad (\alpha, \beta\in A,\ a, b\in H)$$

képlettel. Könnyen belátható, hogy így valóban csoport keletkezik, amelynek egységeleme (ε, e), és amelyben

$$(\alpha, a)^{-1}=(\alpha, (a^{-1})^{\alpha}).$$

Határozzuk meg (α, a) és (β, b) kommutátorát:

$$(\alpha, a)(\beta, b)(\alpha, a)^{-1}(\beta, b)^{-1}=(\alpha\beta, a^{\beta}b)(\alpha, (a^{-1})^{\alpha})(\beta, (b^{-1})^{\beta})=$$

$$=(\alpha\beta, a^{\beta}b)(\alpha\beta, (a^{-1})^{\alpha\beta}(b^{-1})^{\beta})=(\varepsilon, a^{\alpha}b^{\alpha\beta}(a^{-1})^{\alpha\beta}(b^{-1})^{\beta}).$$

Eszerint a kommutátorok mind beleesnek $A\times H$-nak az (ε, a) alakú elemek által alkotott H^* alcsoportjába, amely az

$$(\varepsilon, a)(\varepsilon, b)=(\varepsilon, ab)$$

képlet értelmében H-val izomorf. Sőt az

$$a^{\alpha}(a^{-1})^{\alpha\beta}b^{\alpha\beta}(b^{-1})^{\beta}$$

szorzatban az első két tényező szorzata is, az utolsó két tényező szorzata is $c^{\gamma}c^{-1}$ alakú, ti. az első két tényező esetében $c=a^{\alpha\beta}$, $\gamma=\beta$, az utolsó kettő esetében pedig $c=b^{\beta}$, $\gamma=\alpha$ választható. Minthogy c^{γ} vagy c-vel, vagy c^{-1}-gyel egyenlő, azért a kommutátorok H^*-nak (ε, a^2) alakú elemei közül kerülnek ki. Megfordítva viszont minden (ε, a^2) alakú elem kommutátor, mégpedig az (ε, a) és (φ, e) elemeké.

Ilyenformán a fent értelmezett $A\times H$ csoport kommutátoralcsoportja izomorf H-nak

$$H^2=\{a^2 : a\in H\}$$

alcsoportjával.

Tekintsünk most egy tetszőleges G Abel-csoportot. Ismeretes, hogy G izomorfan beágyazható egy D osztható Abel-csoportba (azaz $a\in D$ esetén minden n természetes számhoz van olyan $b\in D$, hogy $b^n=a$). D-nek azok a h elemei, amelyekre $h^2\in G$, D-nek egy H alcsoportját alkotják, amelyre $H^2=G$. Ezt a H csoportot használva a fent leírt konstrukcióban olyan csoporthoz jutunk, amelynek kommutátoralcsoportja valóban G-vel izomorf.

Fried Ervin

Megjegyzés. A megoldás első felében elkészített csoport H-nak A-val való Schreier-féle bővítése.

Fried Ervin

A 161. feladatnak véges G csoport esetére szorítkozó megoldását beküldötte *Dénes József.*

162. feladat. Legyen K a racionális számtest feletti algebrai számtest, $b_1, \ldots, b_r$ alkossanak bázist a K test egészeinek számára. Rögzített n mellett az

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\qquad (a_k\in K)$$

polinomok együtthatói racionális egész c_{kj} együtthatókkal

$$a_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} b_j \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

alakúak. Mutassuk meg, hogy ha az f polinomokat a $|c_{kj}| \leqq u$ feltételnek vetjük alá és $m(u)$-val jelöljük az így keletkező polinomok közül a K felett reducibilisek számát, akkor $u \to \infty$ esetén $m(u)/u^{rn} \to 0$.

Turán Pál

Megoldás. Legyen s később meghatározandó természetes szám, és $p_1, p_2, \ldots, p_s$ jelölje az első s racionális prímszámot, továbbá legyen $t = 1, \ldots, s$ esetén $\mathfrak{p}_t$ a p_t által generált főideálnak egy tetszőleges prímideálfaktora. Legyen $\mathfrak{p}_t$ f_t-edfokú. Ismeretes, hogy a $\mathfrak{p}_t$-hez tartozó maradékosztályok egy $p_t^{f_t}$ számú elemből álló A_t véges testet alkotnak, és hogy az $A_t[x]$-hez tartozó olyan polinomok közül, amelyeknek fokszáma n és bennük x^n-nek együtthatója 1, az A_t fölött reducibilisek száma

$$q(p_t) = p^{nf_t} - \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p_t^{f_t n/d} \qquad (t = 1, \ldots, s), \tag{1}$$

ahol $\mu(d)$ a Moebius-féle függvény. Ezt

$$q(p_t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_t^{f_t n} + U,$$

$$U = -\frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} \mu(d)\, p_t^{f_t n/d} \tag{2}$$

alakban írva azt állítjuk, hogy

$$|U| \leqq \frac{1}{2n} p_t^{f_t n}, \tag{3}$$

azaz

$$q(p_t) \leqq \left(1 - \frac{1}{2n}\right) p_t^{f_t n} \qquad (t = 1, \ldots, s). \tag{4}$$

(3) igazolására jegyezzük meg, hogy (2)-ből

$$|U| = \frac{1}{n} p_t^{f_t n} \left| \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} \mu(d)\, p_t^{f_t n\left(\frac{1}{d}-1\right)} \right|,$$

és így (3) fennáll, ha

$$\left| \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} \mu(d) p_t^{f_t n\left(\frac{1}{d}-1\right)} \right| \leqq \frac{1}{2} \tag{5}$$

minden $n \geqq 2$-re. Nyilván elég azt igazolni, hogy

$$\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} 2^d \leqq 2^{n-1}, \tag{6}$$

hiszen $\frac{1}{d} - 1 < 0$ miatt (5) bal oldalán minden tag abszolút értékét növeljük, ha f_t helyébe 1-et, s aztán p_t helyett 2-t, $\mu(d)$ helyett 1-et írunk, akkor pedig d helyébe

$\frac{n}{d}$-t téve éppen (6) áll elő. Mármost (6) az $n=2, 3, \ldots, 8$ értékekre közvetlenül igazolható, $n \geqq 9$ esetén pedig $\tau(n)$-nel jelölve n pozitív osztóinak számát

$$\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} 2^d < 2^{n/2}\tau(n) < n2^{n/2} \leqq 2^{n-1}.$$

Ezzel (4)-et igazoltuk.

Tekintettel $q(p_t)$ értelmezésére rögzített t esetén megadható $q(p_t)$ számú

$$(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{nt}) \tag{7}$$

maradékosztály-rendszer mod $\mathfrak{p}_t$ úgy, hogy minden $A_t[x]$ felett reducibilis

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

polinomra

$$a_j \equiv g_{jt}^* \bmod \mathfrak{p}_t \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

alkalmas (7)-beli $(g_{1t}^*, \ldots, g_{nt}^*)$ rendszerrel. Mivel minden K fölött reducibilis polinom egyúttal mod $\mathfrak{p}_t$ is reducibilis $(t=1, \ldots, s)$, azért a feladatban szereplő $m(u)$ nem lehet nagyobb $M(u)$-nál, ahol $M(u)$ az olyan racionális egészekből álló

$$\{c_{ij}\} \qquad (i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, r) \tag{9}$$

értékrendszerek száma, amelyekre

$$|c_{ij}| \leqq u, \tag{10}$$

és minden $t=1, \ldots, s$ mellett

$$\sum_{j=1}^{r} c_{ij} b_j \equiv g_{it} \bmod \mathfrak{p}_t \tag{11}$$

valamelyik (7) alatti $(g_{1t}, \ldots, g_{nt})$ rendszerre.

Vizsgáljuk a (9) alatti értékrendszerek számát először rögzített t, i és g_{it} mellett. Ha d racionális egész, és $d \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_t$, akkor d osztható p_t-vel, hiszen ellenkező esetben alkalmas racionális egész x és y mellett $1 = dx + p_t y \in \mathfrak{p}_t$ adódnék, ami lehetetlen. Ebből rögtön következik, hogy a mod $\mathfrak{p}_t$ inkongruens racionális egészek maximális száma p_t. Így az eleve lehetséges $(c_{i1}, \ldots, c_{ir})$ értékrendszerek száma p_t^r, és ezeket helyettesítve (11) bal oldalába p_t^r számú helyettesítési érték áll elő. Azonban $g \in A_t$ esetén a

$$\sum_{j=1}^{r} b_j x_j \equiv g \bmod \mathfrak{p}_t$$

kongruencia megoldásszáma mindig ugyanaz, és az összes g-k száma $p_t^{f_t}$, úgyhogy (11)-nek rögzített t, i és g_{it} mellett éppen $p_t^{r-f_t}$ számú megoldása van. Továbbá a (11) kongruenciák rögzített t és $g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{nt}$ mellett különböző i-kre függetlenek, tehát az ilyen $\{c_{ij}\}$ rendszerek száma

$$(p_t^{r-f_t})^n.$$

(7) alapján az is látszik, hogy rögzített t mellett a (11)-et kielégítő $\{c_{ij}\}$ rendszerek száma

$$Q_t = q(p_t)(p_t^{r-f_t})^n. \tag{12}$$

Ha tehát (11)-nek rögzített t mellett tekintjük a Q_t számú (racionális egészekből álló)

$$\{d_{ij}\} \qquad (i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, r) \tag{13}$$

megoldás-rendszerét, akkor minden mod $\mathfrak{p}_t$ reducibilis

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{14}$$

polinomra

$$a_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} b_j \tag{15}$$

mellett érvényes alkalmas d_{ij}-kkel a

$$c_{ij} \equiv d_{ij} \bmod \mathfrak{p}_t \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, r)$$

kongruencia-rendszer. Mint láttuk, ez ekvivalens a

$$c_{ij} \equiv d_{ij} \bmod p_t \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, r) \tag{16}$$

kongruencia-rendszerrel. Így aztán a t számot az 1, 2, ..., s számokon végigfuttatva azt kapjuk, hogy a (15) alatti együtthatókkal felírt (14) polinomok közül a mindegyik $\mathfrak{p}_t$ modulusra nézve ($t=1, \ldots, s$) reducibilisekhez tartozó c_{ij} számok kielégítik a

$$c_{ij} \equiv d_{ij}^{(t)} \bmod p_t \tag{17}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, r;\ \ t = 1, \ldots, s)$$

rendszerek valamelyikét. E kongruencia-rendszerek száma

$$\prod_{t=1}^{s} Q_t = \prod_{t=1}^{s} q(p_t)\, p_t^{(r-f_t)n}. \tag{18}$$

Vegyük most figyelembe a $|c_{ij}| \leqq u$ kikötést. Rögzített $d_{ij}^{(t)}$ értékek mellett a c_{ij} számok mod $p_1 p_2 \ldots p_s$ vannak meghatározva, tehát mindegyik (17) alatti rendszer mindegyik c_{ij}-ére $\dfrac{2u+1}{p_1 p_2 \ldots p_s}$ választási lehetőségünk van. Így

$$m(u) \leqq M(u) \leqq \left(\frac{2u+1}{p_1 p_2 \cdots p_s}\right)^{nr} \prod_{t=1}^{s} q(p_t)\, p_t^{n(r-f_t)},$$

és (4) felhasználásával

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{m(u)}{u^{nr}} \leqq 2^{nr}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^s.$$

Minthogy itt s tetszőlegesen nagynak választható, csakugyan érvényes

$$\lim_{u\to\infty} \frac{m(u)}{u^{nr}} = 0.$$

Andrzej Schinzel (Varsó)

Megjegyzések. 1. Ha u természetes szám, akkor a (15) alatti együtthatókkal a $|c_{kj}| \leqq u$ feltétel mellett képezhető összes (14) alakú polinomok száma $(2u+1)^{nr}$. Eszerint a feladat állítása azt mutatja, hogy az ilyen polinomok közül „majdnem mindegyik" irreducibilis K felett.

Turán Pál

2. A feladatnak az a speciális esete, amikor K maga a racionális számtest, megtalálható G. Pólya—G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925) c. művében (II. kötet, 161. oldal, 266. feladat). A fent közölt megoldás B. L. van der Waerden egy ötletén alapszik.

Turán Pál

163. feladat. Legyen p páratlan prímszám, és

$$a_0(p)=p,\ a_{n+1}(p) = 2a_n(p)+1 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Mutassuk meg, hogy $a_{p-1}(p)$ mindig összetett szám, és határozzuk meg azokat a p-ket, amelyekre $a_0(p), a_1(p), \ldots, a_{p-2}(p)$ mind prímszámok.

Győry Kálmán

Megoldás. Teljes indukcióval rögtön látható, hogy

$$a_n(p) = 2^n(p+1)-1.$$

Eszerint

$$a_{p-1}(p) = 2^{p-1}p+2^{p-1}-1,$$

s ez Fermat tételének következtében osztható p-vel. Minthogy $n\geqq 1$ esetén $a_n(p)>p$, azért $a_{p-1}(p)$ valóban összetett.

Ha $(p-1)$-nek van egy q páratlan prímosztója, akkor

$$a_{q-2}(p) = 2^{q-2}p+2^{q-2}-1 = 2^{q-2}(p-1)+2^{q-1}-1,$$

és ez osztható q-val, ismét Fermat tétele szerint. Minthogy $q-2<p-2$, $a_{q-2}(p)>q$, azért az ilyen p nem felelhet meg a feladat második követelményének.

Tegyük most fel, hogy $p>3$, és $(p-3)$-nak van egy q páratlan prímosztója. Ekkor

$$p+1\equiv 4 \pmod q,$$

tehát

$$a_{q-3}(p) = 2^{q-3}(p+1)-1 \equiv 2^{q-1}-1 \equiv 0 \pmod q$$

újra Fermat tételének felhasználásával. Minthogy

$$q<p<a_{q-3}(p),$$

azért ekkor $a_{q-3}(p)$ ismét összetett szám.

A mondottak szerint a feladat második részének követelményét egy p páratlan prímszám csak akkor elégítheti ki, ha $p=3$, vagy pedig $p>3$, és $p-1$ is, $p-3$ is 2-nek hatványa. Az utóbbi kikötés nyilván csak $p=5$-re teljesül. A $p=3$ és $p=5$ prímszám meg is felel, mert

$$a_1(3)=7,\ a_1(5)=11,\ a_2(5)=23,\ a_3(5)=47.$$

Farkas Henrik

A 163. feladat megoldását beküldötte még *Császár Ákos*, *Fehér János* és *Komjáth Péter*.

PROBLÈMES PROPOSÉS

171. Soit $\mathfrak{R}$ un anneau d'ensembles composé d'un nombre infini d'éléments. Démontrer qu'il existe une suite d'ensembles

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots \qquad (R_n \neq R_{n+1},\ R_n \in \mathfrak{R})$$

strictement croissante.

Á. Császár

172. On dit qu'une fonction f définie sur l'ensemble des nombres naturels est additive (multiplicative) si

$$f(ab) = f(a)+f(b) \quad \text{ou} \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

respectivement pour a et b relativement premiers. f est dite totalement additive (totalement multiplicative) si la même égalité subsiste pour a et b quelconques.

Déterminer tous les couples f, g de fonctions tels que f et g soient multiplicatives (totalement multiplicatives) tandis que $f-g$ soit additive (totalement additive).

R. Freud

173. Soit G un groupe infini. Démontrer qu'il existe dans G deux ultrafiltres $\mathfrak{u}_1$ et $\mathfrak{u}_2$ tels que le système d'ensembles

$$\{U_1U_2 : U_1 \in \mathfrak{u}_1,\ U_2 \in \mathfrak{u}_2\}$$

engendre un filtre qui n'est pas un ultrafiltre.

Á. Császár

HÍREK

ANGLIA

Arató Mátyás a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. január 13. és március 14. között angliai tanulmányúton vett részt.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kalmár László 1968. május 7-től 15-ig Angliában tartózkodott. Kinttartózkodása alatt különböző szemináriumokon több előadást tartott.

Rényi Alfréd a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. április 22-től Cambridge-ben tartózkodott. Június 7-ig tartó kinttartózkodása alatt Cambridge-ben az alábbi előadásokat tartotta:

„On the notion of probability"
„On the large sieve for real polynomials"
„On conditional probability spaces"
„Information-theoretical inequalities".

További angliai tartózkodása alatt Oxford-ban „On the Vitali-Hahn-Saks theorem", Sheffield-ben és Manchester-ben „On finite and denumerable probability spaces", Londonban „On the notion of probability" és „On the Vitali-Hahn-Saks theorem" címmel tartott előadást.

Turán Pál 1968 májusában a londoni Imperial College, valamint a nottinghami és cambridgei egyetemek meghívására

„On some new results in the theory of Riemann zeta function"
„On some problems of a statistical group theory"

címmel tartott előadást.

Mikolás Miklós a cambridge-i egyetem meghívására június 4-én „A problem of Hardy and Littlewood in the theory of diophantine approximations" címen tartott előadást, továbbá Londonban a University of Surrey természettudományi karán május 30-án ismertető előadást tartott a magyar matematikai életről.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Dénes József részt vett az IFIP Angliában 1968. augusztus 5—10 között megtartott kongresszusán.

AUSZTRIA

Freud Géza és Varga Ottó részt vett az Osztrák Matematikai Társulat 1968 szeptember közepén Linz-ben megtartott VII. Kongresszusán, ahol Freud Géza „Untersuchungen über gleichmässige rationale Approximation", Varga Ottó „Zur Invarianz des Krümmungsmasses der Winkelmetrik in Finslerräumen bei Einbettung" címmel tartott előadást.

AUSZTRÁLIA

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Rényi Alfréd a Nemzetközi Statisztikai Intézet meghívására részt vett a szervezet 36. ülésszakán, amelyet 1967 augusztus végén és szeptember elején tartottak meg Sidney-ben. Az ülésszakon „On some problems in the theory of order statistics" címmel tartott előadást. Továbbá részt vett az ISI elnökségének ugyanitt tartott ülésén, valamint közgyűlésén.

BELGIUM

Muszka Dániel a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében részt vett a Namur-ben 1967. szeptember 11—15 között megtartott V. Nemzetközi Kibernetikai Kongresszuson.

Vargha Dénes a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vett az 1968 április

végén Antwerpen-ben megrendezett Nemzetközi Általános Nyelvészeti és Alkalmazott Nyelvészeti Konferencián. A tudományos tanácskozáson a nyelvészet gépesítésével foglalkozó témából tartott előadást.

BULGÁRIA

Alpár László a Magyar Tudományos Akadémia, Császár Ákos és Heppes Aladár a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében részt vettek a Várnában 1967. augusztus 29. és szeptember 7. között megtartott Bolgár Matematikai Kongresszuson. Alpár László „Sur une classe particulière de séries de Fourier à certaines puissances absolument convergentes" címmel tartott előadást.

Szász Ferenc a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. április 3. és május 7. között bulgáriai tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt az alábbi előadásokat tartotta:

„Kritériumok gyűrűk egységelemének létezésére"

„Új eredmények a Jacobson-féle radikállal és egyéb radikálokkal kapcsolatban".

CSEHSZLOVÁKIA

Újhelyi Adorjánné és Vincze István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vettek az 1968. április 16—20. között Prágában az UNESCO által támogatott, továbbképző tanfolyamok igazgatói részére rendezett értekezleten.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Kárteszi Ferenc 1968. május 30. és június 6. között előadások tartása céljából Csehszlovákiában tartózkodott.

Csáki Endre és Csiszár Imre a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében részt vettek az 1967. május 31. és június 3. között Liblice-ben „Convergence problems in Probability Theory" címmel megtartott tudományos tanácskozáson.

Szőkefalvi-Nagy Béla a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. november 25-től december 2-ig Csehszlovákiában tartózkodott. Kinttartózkodása alatt az alábbi előadásokat tartotta:

„Kontrakciók a Hilbert-térben"

„A kontrakciók C_0-osztályának értelmezése és tulajdonságai"

„Pták egy tételének egyszerűbb bizonyítása és általánosítása".

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Török Éva 1968. június 12—25. között csehszlovákiai tanulmányúton vett részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Peák István és Pollák György részt vettek az 1968. június 17—22. között Smolenice-n megtartott félcsoport-elméleti konferencián.

Mikolás Miklós a Művelődésügyi Minisztérium kiküldetésében 1968. IV. 2—5-ig részt vett a Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik Prágában tartott kongresszusán. Előadást tartott „Über die Derivation und Integration bei Randwertproblemen auftretender Reihenentwicklungen" címmel.

FINNORSZÁG

Turán Pál a Finn Matematikai Társulat fennállásának százéves évfordulóján rendezett ülésszakon a Finn Matematikai Társulat felkérésére előadást tartott október 10-én „On Lindelöf's conjecture in the theory of Riemann zeta function" címmel.

Szőkefalvi-Nagy Béla meghívásra, 1968. október 9—16. között a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vett a Finn Matematikai Társulat fennállásának 100. évfordulója alkalmából rendezett ülésszakon. Finnországi tartózkodása alatt Jyväskylä-ben „Hilbertraum-Operatoren und Hardyklassen" címmel tartott előadást.

FRANCIAORSZÁG

Kalmár László és Kiefer Ferenc a Magyar Tudományos Akadémia kiküldésében részt vettek az 1967. augusztus 21—27. között Grenoble-ban a „Nyelvi adatok számológépes feldolgozása" témájú konferencián.

Rényi Alfréd meghívásra, 1967. október 17—29. között Franciaországban tartózkodott a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében. Franciaországi tartózkodása alatt az alábbi előadásokat tartotta:

„Sur les processus de Poisson",

„La statistique mathématique du point de vue de la théorie de l'information",

„Application des methodes probabilistiques dans l'analyse",

„Méthodes probabilistiques dans la théorie des nombres".

Alexits György a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968 áprilisában előadások tartá sa céljából Franciaországban tartózkodott.

Kalmár László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968 májusában előadások tartása céljából Franciaországban tartózkodott, ahol Párizsban

„Sur un lemme dans la théorie des nombres" és

„Identification des formes et réflexes conditionnels"

címmel előadást tartott.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kalmár László és Kiefer Ferenc részt vettek az Aiquilles-ben megtartott Nemzetközi Formális Nyelvészeti Szemináriumon és Párizsban az ahhoz csatlakozó Nemzetközi Formális Nyelvészeti Napokon.

Kalmár László a Szemináriumon „Qu'est ce que le linguist peut apprendre de le sémantique exacte du langage de la logique mathématique" címmel tartott előadást.

Merza József a Magyar Tudományos akadémia kiküldetésében 1968. november 7-től december 2-ig franciaországi tanulmányúton vett részt.

Mikolás Miklós meghívásra résztvett a Société Mathématique de France Toulouse-i kongresszusán (Journées Mathématiques Fermat). Május 16-án előadást tartott „Séries de Farey et hypothèse de Riemann" címen.

HOLLANDIA

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Surányi János 1967. augusztus 21—26. között részt vett az ICMI nemzetközi tudományos Szervezet Utrecht-i kollokviumán és közgyűlésén.

Gyires Béla a Bolyai János Matematikai Társulat, Vincze István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vettek az Amsterdamban 1968. szeptember 2—7. között megrendezett Európai Matematikai Statisztikai Konferencián.

Vincze István a tudományos tanácskozáson a matematikai statisztika fizikai alkalmazásairól, valamint a matematikai statisztikának Rényi Alfréd által adott információ elméleti megalapozásáról tartott előadást.

INDIA

Szőkefalvi-Nagy Béla 1969 januárjában részt vett az „Indian Science Congress Association" 1969. évi Bombay-ban megtartott 56. Ülésszakán. Kinttartózkodása alatt a tudományos ülésszakon, majd az azt követő indiai körutazáson a következő előadásokat tartotta:

„Újabb eredmények a Hilbert-tér operátorainak elméletében",

„A Hilbert-tér operátoraira vonatkozó különböző kérdések",

„A komplex függvénytan és az operátorelmélet bizonyos kapcsolatairól",

„Az operátorok dilatáció-elméletéről".

JAPÁN

Mikolás Miklós a Japán Matematikai Társulat meghívására 1968 novemberében előadott Tokióban „Recent results on integro-differential operators", és Kiotóban „Some new aspects about the Riesz-Fischer theorem" címmel.

KANADA

Kalmár László a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967 decemberétől előadások tartása céljából 4 hónapos időtartamra a kanadai Waterloo-i Egyetemen tartózkodott. Előadásait „Fejezetek a matematikai logika és a matematika alapjai köréből" címen tartotta meg.

Alexits György 3 hónapos tartózkodása alatt Kanadában előadásokat tartott az approximáció elméletről és ortogonális sorok, valamint interpoláció-sorozatok konvergencia kérdéseiről, az alábbi egyetemeken:

Windsor (Ontario), Hamilton (Ontario), Torontó, Montreal, a Mc Gill Universityn és az Université de Montréal-on.

Turán Pál 1968 májustól szeptemberig a kanadai edmontoni, calgaryi, vancouveri, winnipegi, torontói és montréali egyetemek meghívására a következő témákról tartott előadást:

„On approximative solution of algebraic equations",

„Graph-theory, geometry, generalised potentials",

„On a new trend in the constructive function theory",

„On some new results in the theory of Riemann zeta function",

„On some problems of a statistical group theory".

Mikolás Miklós 1968 augusztusától novemberéig vendégprofesszorként előadott a torontói egyetemen. Ott-tartózkodása alatt a következő előadásokat tartotta:

Toronto: „Theory and application of infinitesimal operators of complex order",

Montréal: „Sur la convergence en moyenne dans les espaces L_p",

Hamilton: „Mean convergence in L_p-spaces",

Vancouver: „On a problem of Hardy and Littlewood".

T. Sós Vera meghívásra gráfelméleti előadásokat tartott az edmontoni egyetemen.

LENGYELORSZÁG

Varga Ottó a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében a Lengyel Matematikai Társulat meghívására 1968. május 12—19. között Lengyelországban tartózkodott. Kinttartózkodása alatt Krakkóban

„Hyperflächen konstanter Normalkrümmung in finslerschen Räumen",

Kattowice-ben

„Beziehung der ebenen verallgemeinerten nichteuklidischen Geometrie zu gewissen Flächen in pseudominkowskischen Raum"

címmel tartott előadást.

NÉMET DEMOKRATIKUS KÖZTÁRSASÁG

Császár Ákos és Juhász István a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1967. augusztus 14—19. között részt vettek a Berlinben megrendezett térbővítési témával foglalkozó szimpóziumon.

Elbert Árpád a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967. szeptember 3-tól 1968. március 17-ig tanulmányúton az NDK-ban tartózkodott.

Kiefer Ferenc a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vett a berlini Német Tudományos Akadémia által a német strukturális nyelvészet témájával foglalkozó 1967 szeptember elején megtartott berlini tudományos tanácskozáson.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Sarkadi Károly és Tusnády Gábor 1967. szeptember 24—30. között részt vettek a Magdeburg-ban megrendezett XI. „Probleme der Statistische Qualitätskontrolle" témájú kollokviumon.

Sarkadi Károly: „Wahl und Schätzung",

Tusnády Gábor „Über die OC-Funktion des Pólya-Prozesses" címmel tartott előadást.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Kántor Sándor 1967. december 14—18. között tanulmányúton volt Berlinben.

Freud Géza, Nemetz Tibor és Vincze Endre a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1968. február 12—16. között részt vettek az NDK Matematikai Társulatának Rostock-ban megrendezett tudományos ülésszakán.

Mikolás Miklós 1968. június 24. és július 4. között meghívásra a Német Demokratikus Köztársaságban előadást tartott a rostocki egyetemen „Theorie und Anwendung der Derivation und Integration gebrochener Ordnung", a jenai egyetemen „Eine Familie einfacher zahlentheoretischer Beziehungen, die von der Wurzelverteilung der Riemannschen Zetafunktion abhängen" címmel.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Dömötör Ferenc és Kiss Barna 1968. október 1—4. között részt vettek a matematika és kibernetika közgazdasági alkalmazásaival foglalkozó Freiberg-ben megrendezett tudományos tanácskozáson.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Wiegandt Richard 1968. október 11—15. között hallei tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt „Subdirekte Einbettungen und ihre Dualen in Kategorien" címmel tartott előadást a Martin Luther Egyetemen.

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Imrecze Zoltánné és Kóváry Károly 1968. november 25—30. között NDK-beli tanulmányúton vettek részt.

Daróczy Zoltán a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében részt vett az NDK Matematikai Társulatának 1969. február 9—16. között Magdeburg-ban megtartott tudományos ülésszakán.

NÉMET SZÖVETSÉGI KÖZTÁRSASÁG

Rényi Alfréd a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vett az Oberwolfach-i Matematikai Kutató Intézetben rendezett, az elágazó folyamatok elméletével foglalkozó kollokviumon.

Kinttartózkodása alatt

„On a branching process in virology"

címen tartott előadást a poliovirus szaporodásának az elágazó folyamatok elmélete segítségével való matematikai vizsgálatáról.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Alexits György 1968. áprilisában előadást tartott a Giessen-i Justus Liebig Egyetemen.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Rényi Alfréd 1968. június 9—20-ig Erlangenben tartózkodott, ahol négy előadásból álló sorozatban ismertette készülő új könyvének egyes részleteit.

Csiszár Imre a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. június 10—július 4. között az Erlangen—Nürnberg-i Egyetem meghívására előadások tartása céljából az NSZK-ban tartózkodott. Kinttartózkodása alatt öt előadást tartott „Informationsquellen mit bewerteten Zeichen" címmel.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Alexits György 1968. július 14—28. között az NSZK-ban tartózkodott. Kinttartózkodása alatt előadásokat tartott Marburg/Lahn-ban a legjobb lineáris approximációról, valamint a folytonos függvények bizonyos osztályainak trigonometrikus approximációjáról.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Alexits György és Szőkefalvi-Nagy Béla, a Művelődésügyi Minisztérium kiküldetésében Leindler László résztvettek az Oberwolfach-i Matematikai Kutató Intézet „Approximációk és absztrakt terek" témájú kollokviumán.

Alexits György a tudományos tanácskozáson „Über die Charakterisierung von Funktionsklassen mit bester linearer Approximation" címmel tartott előadást, továbbá egy külön előadásban ismertette Jean Favard francia matematikus életét és munkásságát. Szőkefalvi-Nagy Béla a „Hilbert-tér operátorainak C_0 osztályáról" címmel tartott előadást.

T. Sós Vera és Turán Pál meghívásra előadásokat tartottak az oberwolfachi Matematikai Kutatóintézet számelméleti kollokviumán „On the discrepancy of the sequence $n\alpha$" ill. „Einige Probleme der statistischen Gruppenthorie" címmel.

OLASZORSZÁG

Csiszár Imre a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vett az 1967. szeptember 11—15. között San Remo-ban megrendezett Nemzetközi Információelméleti Kollokviumon.

A kollokviumon a változó költségskálájú információ forrásokról tartott előadást.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Adler György és Kárteszi Ferenc részt vettek az Olasz Matematikai Társulat 1967. október 2—7. között Trieszt-ben megtartott VIII. Kongresszusán. Adler György a tudományos tanácskozáson egy, Kárteszi Ferenc három előadást tartott.

Bod Péter a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967. október 28—november 25. között olaszországi tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt az alábbi címekkel tartott előadást:

„Programmazione lineare con piu funzioni obiettivo",

„Impiego della programmazione lineare per la formulazione del piano dell'industria alimentare in Ungheria".

Reiman István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967. novemberétől 1968. júniusáig olaszországi tanulmányúton vett részt. A fogadó szervek kérésére olaszországi tartózkodása alatt az alábbi előadásokat tartotta:

„Su una proprieta dei 2-disegni",

„Matematica extrascolastica per studenti di scuole secondarie, in Ungharia",

„Questioni relativi alla teoria dei grafi",

„Metodi sintetici nella geometria finita".

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Adler György 1968. július 1-től 9-ig olaszországi nyári matematikai tanfolyamon vett részt.

Turán Pál a római Istituto di Alta Matematica által december 9—12 között rendezett számelméleti kollokviumon meghívásra előadást tartott „Analysis and diophantine approximation" címmel.

ROMÁNIA

Kiefer Ferenc a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vett az 1967 szeptember elején Bukarestben megtartott X. Nyelvészkongresszuson. A tudományos tanácskozáson a magyar nyelv transzformációs grammatikájának egy speciális problémájáról tartott előadást.

Freud Géza, Szőkefalvi-Nagy Béla és Turán Pál a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vettek az 1967. szeptember 15—20. között Kolozsvárott megtartott approximáció elméleti kollokviumon. A tudományos tanácskozáson Szőkefalvi-Nagy Béla

„Construction des échelles continues de sous-espaces invariants de certains opérateurs",

Turán Pál

„On approximative solution of algebraic equations"

címmel tartott plenáris előadást.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. április 8—29. között Viszt Éva tanulmányúton vett részt Romániában.

Mogyoródi József, Pergel József, Tomkó József a Magyar Tudományos Akadémia és Daróczi Zoltán a Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében 1968. szeptember 2—7. között részt vett a Brassóban megtartott valószínűségszámítási kollokviumon. A tudományos tanácskozáson az alábbi előadásokat tartották:

Mogyoródi József: „B. V. Gnedenko néhány problémájá"-ról,

Tomkó József: „Tömegkiszolgálási problémáknál előforduló néhány határeloszlási kérdés"-ről.

Pávó Imre a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Bukarestben részt vett az International Federation of Automatic Controltechnical Committee 1968. október 6—10-ig megtartott tudományos ülésszakán.

Gehér László és Kovács István a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1968. november 22-től december 6-ig Romániában tartózkodtak. Kovács István kinttartózkodása alatt „Invariant linear forms on von Neumann algebras" címmel előadást tartott Bukarestben.

SPANYOLORSZÁG

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Gádor Endréné részt vett az 1968. április 11—18. között Gandia-ban megtartott, a matematikatanítás tanulmányozásával és megjavításával foglalkozó konferencián.

SZOVJETUNIÓ

A Bolyai János Matematikai Társulat kiküldetésében Gacsályi Sándor résztvett az 1967. július 2—8. között Novoszibirszkben megtartott topológiai konferencián.

Fiedrich Ilona a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966. szeptember 15—1967. szeptember 15-ig a Szovjetunióban tartózkodott tanulmányúton. Kinttartózkodása alatt több előadást tartott kutatásainak eredményeiről.

Bognár János a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967. szeptember 26-tól október 20-ig szovjetunióbeli tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt több előadásban számolt be kutatásainak eredményeiről.

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Szőkefalvi-Nagy Béla 1967. november 29-től december 8-ig előadások tartása céljából a Szovjetunióban tartózkodott. Kinttartózkodása alatt „A Hilbert-tér operátorainak C osztályairól" címmel két előadást tartott.

Gyapjas Ferenc a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1967. április 25-től 1967. szeptember 16-ig, illetve 1967. december 6-tól 1967. december 31-ig szovjetunióbeli tanulmányúton volt.

Foltényi Vilmos 1968. január 1-től augusztus 19-ig a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében szovjetunióbeli tanulmányúton vett részt.

Frey Tamás és Szelezsán János a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében részt vettek az „Automaták elmélete és mesterséges gondolkodás" témájú Taskent-ben 1968. május 27—június 5. között megrendezett konferencián és az ezzel egyidejűleg ugyanott megrendezett szocialista akadémiák többoldalú együttműködése keretében tevékenykedő „A számítástechnika tudományos problémái" című témát koordináló bizottság évi ülésén. Frey Tamás a tudományos tanácskozáson két előadást tartott.

A Tudományos Akadémia kiküldetésében Wiegandt Richard 1968. szeptember 19—október 2. között szovjetunióbeli tanulmányúton vett részt. Kinttartózkodása alatt az alábbi előadásokat tartotta:

„Subdirekte Einbettungen und ihre Duale in Kategorien",

„Radikal- und halbeinfache Objekte in Kategorien",

„Struktursätze für Radikalobjekte in Kategorien".

Szőkefalvi-Nagy Béla vezetésével 1968. október 16—31. között az alábbi tagokból álló delegáció járt a Szovjetunióban a magyar-szovjet matematikus kapcsolatok továbbfejlesztése céljából;

Rényi Alfréd,

Balázs János,

Arató Mátyás,

Kovács József.

A delegáció kinttartózkodása alatt Szökefalvi-Nagy Béla:

„On operators admitting a Cayley-Hamilton equation",

„A Hilbert-tér operátorainak néhány modern kérdéskörérőI"

Rényi Alfréd:

„A nagy számok egy új törvényéről",

„A valószínűségszámítás alapfogalmairól"

címmel tartott előadást.

1968 decemberében a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Alexits György néhány napig Moszkvában tartózkodott az 1969-ben közös magyar-szovjet megrendezésben megszervezésre kerülő konstruktív függvénytani kollokvium szervezési és tudományos kérdéseinek megbeszélése céljából.

USA

Kovács László Béla a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében 1966. január 25-től 1967. január 26-ig az Egyesült Államokban tartózkodott ösztöndíjas tanulmányúton.

Bod Péter és Prékopa András részt vettek a Princeton-ban 1967. augusztus 14—18. között megrendezett VI. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpoziumon.

Prékopa András a tudományos tanácskozáson

„On probabilistic constrained programming"

címmel tartott előadást.

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS AZ 1968. évi GRÜNWALD GÉZA EMLÉKDÍJ ODAÍTÉLÉSÉRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki az 1968. évi Grünwald-díj odaítélésére: Varga Ottó elnök, Császár Ákos, Frey Tamás, Hajós György, Rényi Alfréd és Turán Pál. A bizottság 1968. november 29-én ülésezett. A beérkezett javaslatok alapos mérlegelése után az alábbi határozatot hozta:

A Grünwald-díj I. fokozatával tünteti ki és 3000 forint összegű díjban részesíti:

Halász Gábort, a MTA Matematikai Kutató Intézetének munkatársát.

A Grünwald-díj II. fokozatával tünteti ki és 1800 forint pénzjutalomban részesíti az alább felsoroltakat:

Fischer Pál (MTA Automatizálási Kutató Intézet)
Máté Attila (József Attila Tudományegyetem, Bolyai Intézet),
Nemetz Tibor (Belügyminisztérium),
Schipp Ferenc (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar Analízis II. Tanszék).

INDOKOLÁS

HALÁSZ GÁBOR 1965-ben kapott II. fokú Grünwald Géza emlékdíjat. Addig megírott 5 dolgozata (listájuk megjelent a Matematikai Lapok XVIII. 1—2. füzetének 229. oldalán) jelen jutalmazásnál nem jött figyelembe, csupán az alábbiakban megadott további 10 dolgozata. Ezek közül elsősorban a 4. dolgozat emelendő ki. Ebben először is egy, a multiplikatív függvények középértékeire vonatkozó régi sejtést megoldó, rendkívül hosszú és nehéz bizonyítású Wirsing tétel bizonyítását komplexfüggvénytani úton lényegesen egyszerűbben és rövidebben nyeri, azt jelentősen általánosítja, az általánosíthatóság határáig, továbbá Wirsing egy korábbi, általa igen nehéznek minősített sejtését bizonyítja be a középértékek általános jellemzéséről. E dolgozat gondolatait több további területen is tudja hasznosítani. A 7. dolgozatban azon váratlan tényt mutatja meg, hogy a multiplikativitás tud Tauber-feltétel gyanánt hatni, a 10. dolgozatban pedig, — számos nehézség áthidalása után — hogy az egyrétűség is, lényegesen továbbmenve Fejér idevágó első, klasszikusan elegáns eredményén. 1. dolgozata a Borel-szummáció elméletének egy 30 éves problémájával foglalkozik, amelyet Gaier oldott meg elsőnek 1965-ben. Halásznak e dolgozatban adott bizonyítása a tételre Gaier első bizonyításától teljesen különböző. Érdemén mitsem változtat az a tény, hogy Gaier maga is rájött ezen második bizonyításra és közölte azt, Halásszal lényegileg egyidőben. A 9. dolgozatban, kombinálva a 4. dolgozat egy módszerét Turán módszereivel, a Riemann-féle zeta-függvény gyökeloszlására vonatkozólag találtak az eddigieken messze túlmenő új eredményeket, amelyek az analitikai számelmélet más fontos függvényeire is kiterjeszthetőknek látszanak. 2. dolgozatában Alpár László egy szép tételére ad rövidebb elegáns bizonyítást, amely folytonos függvények egy általános osztályára mutatja meg Fourier-soruk részletösszegeinek korlátosságát.

Halász Gábor dolgozatainak jegyzéke (utolsó jutalmazása óta):

[1] Some remarks to a paper of D. Gaier on gap theorems, Acta Sci. Math. Hung. Szeged 28 (1967) 311—322.
[2] On a theorem of L. Alpár concerning Fourier series of powers of certain functions, Studia Sci. Math. Hung. 2(1967) 76—72.
[3] On the sequence of generalized partial sums of a series. Studia Sci. Math. Hung. 2(1967) 67—72.

[4] Über die Werteverteilung multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen. Acta. Mat. Acad. Sci. Hung. sajtó alatt
[5] Remark to K. Sarkadi's paper entitled „Estimation after selection", Studia Sci. Math. Hung. (Tusnády Gáborral), sajtó alatt.
[6] On Taylor series absolutely convergent on the circumference of the circle of convergence, I. Publ. Math. Debrecen 14 (1967) 68—78. II. Publ. Math. Debrecen, sajtó alatt
[7] Über die Konvergenz multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, Studia Sci. Math. Hung. sajtó alatt
[8] On the average order of magnitude of Dirichlet-series. Acta Math. Acad. Sci. Hung. sajtó alatt
[9] On the distribution of zeros of Riemann's zeta and allied functions (Turán Pállal), Journal of Number Theory Vol 1. № 1. (1969) 121—137.
[10] Tauberian theorems for univalent functions, Studia Sci. Math. Hung. sajtó alatt

FISCHER PÁL megjelent, ill. sajtó alatt levő dolgozatai a funkcionálanalízis néhány aktuális kérdésével és azok gyakorlati alkalmazásával foglalkoznak. A legmélyebb eredményeket néhány fontos függvényegyenlet általánosított megoldásairól írt cikkében publikálta. Első ilyen tárgyú, Muszély György társszerzővel írt dolgozata a Matematikai Lapok 1965-ös évfolyamában jelent meg, „A Cauchy-féle függvényegyenlet bizonyos típusú általánosításai" címmel. Ebben Hosszú Miklós egy kérdésére válaszolva igazolják, hogy az $f^2(x+y) = [f(x)+f(y)]^2$ függvényegyenlet tetszőleges valós megoldásai kielégítik az $f(x+y) = f(x)+f(y)$ Cauchy-egyenletet, majd ezt lényegesen általánosítva azt is bebizonyítják, hogy ha f az F félcsoport leképezésére valamely H Hilbert térbe, továbbá $e(x,y)$ egy izometrikus operátor FxF-en, akkor az eredetileg tekintett függvényegyenlettel ekvivalens $e(x,y)f(x+y) = f(x)+f(y)$-t kielégítő f-ek szintén megoldásai a Cauchy-egyenletnek. Egy ellenpéldával azt is megmutatják, hogy az e-re vonatkozó feltétel nem helyettesíthető azzal, hogy e legyen egységnyi normájú lineáris operátor; hasonlókép H sem helyettesíthető lineáris normál térrel. Ugyanezeket a tényeket igazolják kissé leegyszerűsített segédeszközökkel a Canadian Math. Bull. 1967-es évfolyamában megjelent „On some new generalizations of the functional equation of Cauchy" c. dolgozatukban. Kismértékben tovább általánosítja Fischer Pál az eredményeket az Annales de la Fac. des Sci. de Toulouse-ban sajtó alatt levő „Sur l'équivalence des équations fonctionelles $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f^2(x+y) = [f(x)+f(y)]^2$" c. cikkében. Igen érdekes és az információelméleti alkalmazások szempontjából értékes eredményeket publikál a Metrikában sajtó alatt levő „On the inequality $\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$" című dolgozatában. Igazolja többek között, hogy ($p_i, q_i \geqq 0$; $\sum p_i = \sum q_i = 1$ esetén) a fenti egyenlőtlenséget kielégítő f szükségképp monoton, sőt $n \geqq 3$ esetén differenciálható függvény, $n=2$ esetén viszont felbontható egy abszolút folytonos, egy folyton szinguláris és egy monoton ugrásfüggvény összegére, amelyek mindegyike kielégíti az egyenlőtlenséget. Sajtó alatt van az Amer. Math. Monthly-ban egy Aczél Jánossal közösen írt, „On certain generalization of the isomoment functional equations and theirs general solutions" című dolgozata is.

„Quelques remarques sur la transformation de Laplace" című, Balkányi Györggyel közösen írt, a Periodica Polytechnica 1965-ös évfolyamában megjelent dolgozata megmutatja, hogy a mérnökök által a tranziens jelenségek leírására használt $L\{f'(t)\} = p \cdot L\{f(t)\} - f(-0)$ formula, amely a Laplace-transzformáció klasszikus felépítésében nem alapozható meg szigorúan, igazolható a disztribúciók Laplace-transzformációjára támaszkodva.

Három dolgozatban foglalkozik azzal a lineáris szabályozó rendszerek optimális konstrukciója szempontjából igen jelentős kérdéssel, hogy mikor és hogyan lehet racionális törtfüggvényelemű mátrixot két olyan tényező szorzatára bontani, amelyek bal, ill. jobb oldali inverzükkel együtt racionális törtfüggvénymátrixok, és csak a bal, ill. jobb oldali félsíkon vannak pólus-helyeik. Ennek során a kívánt faktorizáció egy gyakorlatilag is jól használható algoritmusát is megadja, továbbá ügyes ellenpéldával kimutatja, hogy ún. minimálfázisú faktorizáció nem mindig létezik. („A racionális törtfüggvénymátrixok spektrum faktorizációja," „On the spectrum factorisation", „A remark concerning polynomial matrices".)

Fischer Pál dolgozatainak jegyzéke:

[1] Quelques remarques sur la transformation de Laplace (Balkányi Györggyel), Periodica Polytechnica, Elect. Eng. Vol. 9. No. 1. (1965) 97—102.
[2] A Cauchy-féle függvényegyenlet bizonyos típusú általánosításai (Muszély Györggyel) Mat. Lapok, 16 (1965) 67—75.
[3] A racionális törtfüggvénymátrixok spektrum-faktorizációja (Csáki Frigyessel) MTA Automatizálási Kut. Int. Közl. (1966) 4.
[4] On some new generalizations of the functional equation of Cauchy (Muszély Györggyel) Canad. Math. Bull. vol. 10. (1967) 197—205.

[5] On the spectrum factorization (Csáki Frigyessel) Acta Technica Acad. Sci. Hung. Tomus 58 (1—2) (1967) 145—168.
Sajtó alatt.
[6] A generalization of the controllability and observability concept from the point of view of systems identification (Vámos Tiborral) Identification in automatic control systems) Preprints of the IFAC Symposium, Prága, 1967.
[7] Sur l'équivalence des équations fonctionelles $f(x+y) = (fx)+f(y)$ et $f^2(x+y) = (f(x)+f(y))^2$. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. sajtó alatt
[8] On certain generalization of the isomoment functional equations and theirs general solutions (Aczél Jánossal) Amer. Math. Monthly sajtó alatt
[9] On the inequalitiy $\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$. Metrika. sajtó alatt
[10] A remark concerning polynomial matrices Studia Sci. Math. Hung. sajtó alatt

MÁTÉ ATTILA eddigi munkássága főleg a halmazelmélet, kisebb részben pedig a számelmélet, az analízis és a gráfelmélet körébe tartozó kérdésekkel kapcsolatos.

A halmazelméleti munkák mind módszertani, mind tematikai szempontból újat adnak. Módszertanilag új a halmazleképzések és a halmazelméleti ideálok elméletének összekapcsolása, lásd. [1] és [8]. Tematikailag különösen újszerű a majdnem diszjunkt halmazok elméletének Fodor Gézával közösen kidolgozott általánosítása; l. [10]. A stacionárius halmazok elméletével foglalkozó [11] és [12] munkák jelentősége az elmélet intuitív és axiomatikus halmazelméleti alkalmazhatóságának köszönhető. A halmazelméleti munkák közül még a [4]-et említjük, amely Erdős és Makkai egy sejtésének bizonyítását tartalmazza, messzemenően általánosított formában.

A [3] dolgozat Erdős Pál egy, az információelmélet megalapozásában szerepet játszó számelméleti tételére ad új bizonyítást, a [13]-as dolgozat pedig optimális tervezéssel kapcsolatos gráfelméleti problémákat vizsgál.

A lényegében azonos [5] és [7] munka, bár egészében új tudományos eredményt nem tartalmaz, a benne először teljes részletességgel tárgyalt kérdések aktualitása révén mégis külön említést érdemel.

Máté Attila dolgozatainak jegyzéke:

[1] Additive Ideale und unabhängige Mengen, Acta Sci. Math., Szeged, 25/1—2, (1964), 149—159.
[2] On the theory of relations, MTA Mat. Kut. Int. Közl., Bp. vol. 9. ser. A fasc. 3 (1965), 331—333.
[3] A new proof of a theorem of P. Erdős, Proc. Amer. Math. Soc., (USA), 18/1 (1967), 159—162.
[4] On the cardinality of strongly disjoint systems, Acta Math. Sci. Hung., Bp., 18/1—2 (1967), 1—3.
[5] Convergence of L^2 Fourier series (detailed exposition of Carleson's proof), mimeografált, Szeged, 1967., 68. old.
[6] Generalization of a theorem of W. Sierpinski, Czechl. Math. Journ., Praha, 18(93) (1968) 83—85.
[7] Négyzetesen integrálható függvények Fourier sorának konvergenciája, Mat. Lapok, Bp., 18/3—4 (1968), 195—242.
[8] Free sets and the structure of additive ideals, (Fodor Gézával) Annali di Mat., Bologna, ser. 4 tomo 65 (1964) 361—376.
[9] On the structure of set mappings and the existence of free sets, (Fodor Gézával) Acta Sci. Math., Szeged, 26/1—2 (1965) 1—7.
[10] Disjoint systems over set ideals (on a generalization of the usual conception of almost disjoint set systems) (Fodor Gézával) Fund. Math., Warszawa, 62 (1968) 211—222.
Sajtó alatt:
[11] Cardinals inaccessible with respect to a function defined on pairs of cardinals, Acta Sci. Math., Szeged.
[12] Some results concerning regressive functions, Acta Sci. Math., Szeged.
[13] Problems of graph theory concerning optimal design. (Erdős Pállal és Gerencsér Lászlóval).

NEMETZ TIBOR már egyetemi hallgató korában ért el új eredményeket. Katona Gyulával és Simonovits Miklóssal közös [1] dolgozatában a szerzők Turán Pál nevezetes gráf-tételére (Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat.—Fiz. Lapok 48 (1941) 436—452) adnak két új bizonyítást és bizonyítanak be a Turán probléma általánosítására vonatkozó egyenlőtlenségeket. Egy másik eredménye, amelyet még hallgató korában ért el, Rényi Alfréd egy lemmájának új bizonyítása (amelyet egymástól függetlenül ő és T. Sós Vera találtak) és amely Rényi Alfréd „On the theory of random search"

c. dolgozatában (Bulletin American Math. Soc. 71 (1965) 809—828) jelent meg. Egy, szintén még 1964-ben megjelent, Varga Gyulával közös dolgozata [2] fő eredménye valószínűségi változók egy végtelen sorozatára vonatkozólag a 0—1 törvény érvényességének bizonyos keverési tulajdonságokkal való ekvivalens voltának bizonyítása. E tételek alkalmazásaként sikerül kimutatniuk, hogy a 0—1 törvénynek eleget tevő sorozatokra érvényes egy határeloszlástétel, ez érvényes marad, ha az alapul vett valószínűségi mérték helyébe egy arra nézve abszolút folytonos más mérték lép, feltéve, hogy a határeloszlás véges számú változó értékének rögzítésétől nem függ. E tétel általánosítja Rényi Alfréd független valószínűségi változókra vonatkozó tételét (On mixing sequences of sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958) 215—227), tekintettel arra, hogy a független változókra a 0—1 törvény mindig érvényes. Nemetz két újabb dolgozata ([3] és [4]) a matematikai statisztika információelméleti megalapozásával kapcsolatos problémákkal foglalkozik: két hipotézis közötti választásra vonatkozó döntések közül azt a döntést vizsgálja, amely maximális információt tartalmaz arra nézve, hogy melyik hipotézis igaz. Kimutatja, hogy a maximális információt tartalmazó döntés csak a likelihood-hányados értékétől függhet és e döntés meghatározásának problémáját egy differenciálegyenlet megoldására vezeti vissza. Két további dolgozata ([6] és [7]) (amelyek közül az első Katona Gyulával közös) számológépek programozásával kapcsolatos kombinatorikai problémákat old meg

Nemetz Tibor dolgozatainak jegyzéke:

[1] Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira (Katona Gyulával és Simonovits Miklóssal), Mat. Lapok, 15 (1964) 228—238.
[2] Határeloszlások kiterjesztéséről (Varga Gyulával), MTA III. Oszt. Közl. 14/1964/415—421.
[3] Maximális információt tartalmazó döntésfüggvények, MTA III. Oszt. Közl. 17/1967/454—465.
[4] Information Theory and Testing of Hypotheses, Proc. of Colloquium on Information Theory, Debrecen, 1967.
[5] Egy számelrendezés szomszédos párjainak különbségéről (Tusnády Gáborral és Bakos Tiborral), Középiskolai Mat. Lapok 36 (1968) 202—205.
[6] Néhány megjegyzés a shift-regiszter generátorokról (Katona Gyulával), MTA Számítástechnikai Központ Közleményei, sajtó alatt.
[7] Permutációk szisztematikus és véletlenszerű generálása számológépeken, MTA III. Oszt. Közl. sajtó alatt.

Schipp Ferenc az eddigiekben igen intenzív és sikeres tudományos tevékenységet folytatott. Tudományos kutató munkája elsősorban arra irányult, hogy a Fourier-sorokra vonatkozó lényegesebb, ismert eredményeket Walsh-kifejtésekre vagy azoknál általánosabb, ún. W-rendszerek szerinti kifejtésekre vigye át. Eddigi eredményei alapos szakmai ismeretekkel párosult matematikai invencióról tesznek tanúbizonyságot.

[1] dolgozatában egy újszerű példát mutat be olyan folytonos függvényre, amelynek Walsh-kifejtése egy adott pontban divergál.

[2] dolgozatában A. N. Kolmogorov eredményét viszi át W-rendszerek szerinti kifejtésekre és így Walsh-kifejtésekre is, amennyiben példát konstruál olyan integrálható függvényre, amelynek Walsh-kifejtése mindenütt divergál: továbbá alsó becslést is ad a részletösszegek nagyságrendjére.

[3] dolgozatában Turán Pál egy a Steinhaus-problémával kapcsolatos, Fourier-sorokra vonatkozó eredményét (Matematikai Lapok, 9 (1953), 163—175) viszi át W-rendszerek szerinti kifejtésekre; kimutatja ui., hogy van olyan integrálható függvény, amely nem négyzetesen integrálható, és egy W-rendszer szerinti kifejtésének részletösszegei nem negatívok.

[5] dolgozatában a Fejér-féle trigonometrikus polinomok analogonját alkotja meg Walsh-függvények esetére, és ennek alapján egy további példát ad olyan folytonos függvényre, amelynek Walsh-kifejtése egy adott pontban divergál.

[6] dolgozatában felhasználva J. Marcinkievicz mélyebb gondolatait, A. Zygmund Fourier-sorok erős szummációjára vonatkozó tételének analogonját bizonyítja be Walsh-sorokra; a [7] dolgozatban pedig — kapcsolódva Tandori Károly Fourier-sorokra elért eredményéhez — kimutatja, hogy ez a tétel már nem finomítható.

[8] dolgozatában Y. Katznelson trigonometrikus sorokra vonatkozó eredményét viszi át Walsh-sorokra; kimutatja ui., hogy Walsh-sorokra sem áll fenn a Steinhaus-féle sejtés.

[9] dolgozatában több érdekes eredményt közöl. Többek között Walsh-sorokra átviszi J. Marcinkiewicz Fourier-sorok konvergenciájára vonatkozó kritériumát, és J. Marcinkiewiczhez hasonlóan kimutatja, hogy ez a feltétel tovább már nem finomítható.

[10] dolgozata, amelyet Pál Lászlóval közösen készítettek, Haar-féle nullsorokkal foglalkozik.

Schipp Ferenc dolgozatainak jegyzéke:

[1] Construction of a continuous function, whose Walsh series diverges at a prescribed point, Annales Univ. Budapest, Sect. Math. 2 (1966), 103—108.
[2] Über die Grösseordnung der Partialsummen der Entwicklung integrierbarer Funktionen nach W-Systemen, Acta Sci. Math., 28 (1967), 123—134.
[3] Über W-Fourierreihen mit nichtnegativen Partialsummen, Annales Univ. Budapest, Sect. Math., 10 (1967), 113—116.
[4] Walsh—Fourier-sorok erős approximációjáról. (Megjelenés alatt az MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.-nél).
[5] Bemerkung zur Divergenz der Walsh-Fourierreihen, Annales Univ. Budapest, Sect. Math. 11 (1968), 53—58.
[6] Bemerkung zur starken Summation der Walsh-Fourierreihen (Megjelenés alatt az Acta Mat. Acad. Sci. Hung.-nál).
[7] Über die starke Summation von Walsh-Fourierreihen (Megjelenés alatt az Acta Sci. Math.nál).
[8] Über Walsh-Fourierreihen mit nichtnegativen Partialsummen (Megjelenés alatt az Annales Univ. Budapest, Sect. Math.-nál).
[9] Über die Divergenz der Walsh-Fourierreihen (Megjelenés alatt az Annales Univ. Budapest, Sect. Math.-nál).
[10] On the Haar- and Schauder-series (Pál Lászlóval közösen). (Megjelenés alatt az Acta Sci. Math.-nál.)

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPESTI ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 3—4.

Az Ifjúsági Matematikai Kör kétnapos összejövetele.
Feladatmegoldások. (A kiküldött feladatok megbeszélése.)
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: A 13 gömb problémája.
SOÓS MIKLÓS és STEFANOVICZ KÁROLY: Polinomok gyökeinek közelítő meghatározása a Lobacsevszkij—Graeffe féle módszerrel.

Január 13.

MAKKAI MIHÁLY: A matematikai logika néhány alapvető eredményéről.

Január 19.

KLAUS HAERTIG: (NDK): Die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der DDR.

Január 26.

BOLLOBÁS BÉLA: Legújabb eredmények a Lorentz csoport felbonthatatlan reprezentációinak vizsgálatában.

Január 27.

BOLLOBÁS BÉLA: A vektormező és néhány alkalmazása. I. rész.
Középiskolai matematikai délután.

Február 2.

MOLNÁR EMIL: A csoportelmélet elemei és alkalmazásai. I. rész.
Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Február 9.

ALPÁR LÁSZLÓ: Carleman és Hardy bizonyos tételeiről.

Február 10.

BOLLOBÁS BÉLA: A vektormező és néhány alkalmazása. II. rész.
Középiskolai matematikai délután.

Március 1.

TORBJÖRN THEDÉEN (Svédország): Road Traffic with free Overtaking.

Március 16.

CSISZÁR IMRE: Elemi információelméleti problémák.

Március 22.

Ifjúsági Matematikai Kör. Feladatmegoldások.

Március 22.

CSÁSZÁR ÁKOS: Stone-Weierstrass-típusú approximációtételek.

Március 29.

WIEGANDT RICHÁRD: Radikál és féligegyszerűség kategóriákon.

Április 9—10.

Az Ifjúsági Matematikai Kör kétnapos összejövetele.
KÁRTESZI FERENC: Geometriai számelmélet.
BABAI LÁSZLÓ: Műveletek a végtelenek körében.

Feladatmegoldások

Április 23.

M. M. DZSRBASJAN (Szovjetunió): Az egységkörben meromorf függvények néhány általános osztályának integrál-előállítása és viselkedése a peremen.
A MTA III. Osztályával közös rendezésben.

Április 25.

M. KEANE: Generalized morse sequences.

Április 27.

HORVAY KATALIN: Az inverzió és néhány alkalmazása.
Középiskolai matematikai délután.

Május 3.

MAJTHAY ANTAL: A kiegészítő változók módszere.

Május 10.

TURÁN PÁL gráfelméleti előadása az Ifjúsági Matematikai Körben.

Május 17.

ELENA POPOVICIU (Románia): Az interpolációs függvényrendszerek halmazának rendezett részhalmazairól.
TIBERIU POPOVICIU (Románia): A függvények konvexitásának megtartásáról.

Május 24.

A. FLORIAN (Ausztria): Zur Geometrie der Kreislagerungen.

Május 25.

STROHMAJER JÁNOS: Helly tétele és alkalmazásai.

Május 31.

VÉGZŐS MATEMATIKUSOK KLUBESTJE a Tudományos és Alkalmazási Szakosztály rendezésében.
PÉTER RÓZSA: Ízelítő a matematikai nyelvészetből.
KATONA GYULA: Matematikus és a szakember.

Június 3.

CABIRIA ANDREIAN CAZACU (România): Über eine einheitliche Theorie der Riemannschen Überlagerungen.

FIATAL MATEMATIKUSOK ÖSSZEJÖVETELE a Tudományos és Alkalmazási Szakosztály rendezésében, Várgesztesen, az alább felsorolt előadásokkal:

Június 6.

KÁTAI IMRE: Néhány számelméleti problémáról.
KATONA GYULA—SZÁSZ DOMOKOS: Lefedhetőség általános lovakkal.
NEMETZ TIBOR: A diofantikus regiszterek egy egyszerű problémája.
KATONA GYULA: Keresés és a Sperner-tétel.
BÖRÖCZKY KÁROLY: Telített rendszerek.
MIHÁLYFFY LÁSZLÓ: Megjegyzés a particionálással történő mátrixverzióval.

Június 7.

NEMETZ TIBOR: Egy becsléses hipotézis-vizsgálat.
DÁVID GÁBOR: Sűrűségfüggvény becslése.
BÍRÓ ANDRÁS: Egy készletgazdálkodási szimulációs módszer.
HEMELA JÓZSEF: Tarfolt növekedés néhány problémája.
TUSNÁDY GÁBOR: Fágfejlődés a gazdasejtben.
KOMLÓS JÁNOS—CSISZÁR IMRE: Automaták kapacitása.
FRIVALDSZKY SÁNDOR: EKG görbék kiértékelése.
SONNEVEND GYÖRGY: Végtelen dimenziós konvex testek.
SZABADOS JÓZSEF: Racionális approximáció a komplex síkon.
BLEYER ANDRÁS: Iteráció teljesen reguláris terekben.
ELBERT ÁRPÁD: Egy függvényegyenletről.

Június 8.

JUHÁSZ ISTVÁN: A Tyihonov tétel egy általánosítása.
KÉRY GERZSON: Megjegyzések a kvadratikus programozásról.
KRÁMLI ANDRÁS: Racionális spektrálmátrixról.
HATVANI LÁSZLÓ: Egy nemlineáris differenciálegyenletről.
VIRÁG ILDIKÓ: Egy variációszámítási problémához vezető közgazdasági modell.
PETRUSKA GYÖRGY: A Bloch-tétel általánosításáról.
HALÁSZ GÁBOR: A zeta-függvény szerepe Dirichlet-soroknál
GONDOS ERNŐ-SÁRDY PÉTER—TUSNÁDY GÁBOR: Irodalom esztétikával kapcsolatos matematikai problémák.

Június 7.

F. KASCH (NSZK): Über das Radikal des Gruppenringes.

Június 14.

L. A. M. VERBEEK (Hollandia): On the extension of semi-groups.

Június 19.

E. CHAMBERLIN (USA): Some problems concerning the Poincaré-conjecture.
R. HERMANN (NSZK): Über lokale und globale Summierbarkeit von Fourier-reihen mit unendlich vielen Variablen.
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Június 21.

ERDŐS PÁL: Problémák és eredmények a kombinatorikus halmazelméletből.

Június 24.

KAI LAI CHUNG (USA): An integral equation and its significance.
A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

Július 1.

E. W. BARANKIN (USA): Toward the mathematics of a general theory of behavior.

Szeptember 2.

P. ARMITAGE (Medical Statistic Univ. of London): Sequential Methods in Clinical Trials.

Szeptember 9.

A. N. TIHONOV (Szovjetunió): Kísérleti adatok kiértékelésének teljes automatizálásáról.

Szeptember 21.

VINCZE ISTVÁN: Játékelmélet.
Középiskolai matematikai délután.

Október 11.

HÓDI IMRE: Beszámoló a X. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör rendezésében.

Október 11.

G. MICHLER (NSZK): Non-Commutative Dedekind-Rings.

Október 25.

FISCHER PÁL: A $\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$ egyenlőtlenségről, ahol

$$\begin{matrix} 0 < p_i < 1 \\ 0 < q_i < 1 \end{matrix} \quad (i = 1, \ldots,) \text{ és } \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1.$$

Október 26.

Az 1968. évi Kürschák József verseny megrendezése.

Október 28.

VINCZE ISTVÁN: A statisztikai fizika néhány eloszlás-tételéről.

November 1.

Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör ülése.

November 2.

TUSNÁDY GÁBOR: Az egyenlet megoldásának egy érdekes módszere: az iteráció.
Középiskolai matematikai délután.

November 8.

V. POPESCU (Románia): „Lifting property" az L^{∞} terekben

November 12.

I. C. GOHBERG (Szovjetunió): Néhány megoldott és megoldatlan geometriai feladatról.

November 22.

LEMPERT LÁSZLÓ: Elemi topológiai problémák.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 22.

TURÁN PÁL: Gráfelmélet, geometria, generalizált potenciálok.

December 2.

M. ALTMAN (Lengyelország): Dilating Mappings, Implicit Functions, Homeomorphismus and resolvents. A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

December 4.

W. ZELAZKO (Lengyelország): On Informal Talk on Topological Algebras. A MTA Matematikai Kutató Intézetével közös rendezésben.

December 6.

Az 1968. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny eredményhirdetés és díjkiosztása. A verseny feladatainak megoldását HAJÓS GYÖRGY ismertette.

December 7.

REIMAN ISTVÁN: Bolyai geometriája.
Középiskolai matematikai délután.

December 13.

CSIRMAZ LÁSZLÓ: Egy játékelméleti problémáról.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

December 13.

Az 1968. évi Schweitzer Miklós emlékverseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A verseny feladatait HAJNAL ANDRÁS ismertette. Az eredményhirdetés után osztották ki az 1968. évi Grünwald Géza díjakat.

INFORMÁCIÓELMÉLETI SZEMINÁRIUM

A Szovjet Tudományos Akadémia Információközlési Problémák Intézetének kilenc kutatója az alábbi szemináriumi előadásokat tartotta új eredményekről:

December 16.

SZIFOROV V. I.: Az információelméleti kutatások fejlődése a SZUTA, Információközlési Problémák Intézetében.

December 17.

OVSZEJEVICS I. A.: Folytonos közlemény átvitele véletlen paraméterű csatornán visszacsatolás alkalmazásával.

PROSZIN, N. N.: Információközlés véletlen paraméterű csatornán, visszacsatolás nélkül.

December 18.

PINSZKER M. Sz.: Közlemények átvitele visszacsatolásos csatornán.
CÜBAKOV B. S.: Vektorközlemények epszilon-entrópiája.

December 19.

HAZMINSZKIJ R. Z.: Sztochasztikus approximáció, sztochasztikus stabilitás.
SZAGALOVICS Ju. L.: Az információelmélet eredményeinek alkalmazása automaták megbízhatósági problémáira.

December 20.

ZIGANGIROV K. S.: Szekvenciális dekodolás.
LEBEGYEV D. Sz.: Képátviteli módszerek összehasonlítása zajos csatorna esetén.
A szemináriumi előadásokat a Társulat, a MTA Matematikai Kutató Intézete, a MTA Automatizálási Kutató Intézete és a Távközlési Kutató Intézet közösen hirdették meg.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT CSONGRÁD MEGYEI TAGOZATA ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 12.

SZENTHE JÁNOS: Zárt görbék teljes görbülete Riemann-féle terekben.

Február 16.

GÉCSEG FERENC: Modellelmélet. I.

Február 23.

GÉCSEG FERENC: Modellelmélet II.

Március 1.

GÉCSEG FERENC: Modellelmélet III.

Március 7.

CSÁKÁNY BÉLA: Modellelmélet IV.

Március 22.

CSÁKÁNY BÉLA: Modellelmélet V.

Április 22.

M. M. DZSRBASJAN (Örmény Tudományos Akadémia tagja): A körben mezomorf bizonyos függvények szerkezeti előállítása és a határon való tulajdonságai.

Április 26.

POLLÁK GYÖRGY: A modellelmélet és a gyűrű-, félcsoportelmélet.

Május 3.

DÖMÖSI PÁL: A modellelmélet és az automataelmélet I. rész.

Május 10.

RÉDEI LÁSZLÓ: Hézagos polinomok véges test felett.

Május 17.

DÖMÖSI PÁL: A modellelmélet és az automataelmélet. II. rész.

Május 24.

BALÁZS JÁNOS: Interpoláció-problémák végtelen intervallumon.

Június 5.

KALMÁR LÁSZLÓ: Kanadai utam. Élménybeszámoló, klubest.

Június 13.

LEÓ VERBEEK (Delft): Félcsoportok bővítéséről.

Szeptember 17.

SZENDREI JÁNOS: Megemlékezés Szőkefalvi-Nagy Gyula egyetemi tanárról halálának 15. évfordulója alkalmából.

Szeptember 27.

N. ZOLOTARJOV (Szovjetunió): Centrális határeloszlástételek bizonyos általánosításairól.

Október 4.

HUHN EDIT: Teljes Abel-csoportok.

Október 11.

LAPIS PÉTER: Rendezett csoportok.

Október 18.

DÉVÉNYI ILONA: Topologikus csoportok.

Október 25.

MAYER JÁNOS: Algebrák.

Október 31.

HEINZ SEIBT (Potsdam): Erweiterung von Halbgruppen durch wiederholte Quotientenbildung.

November 5.

I. C. GOHBERG (Szovjetunió): Néhány megoldott és megoldatlan geometriai problémáról.

November 14.

S. K. MITRA (India): Conditions for optimality and validity of simple least squares theory.

November 15.

PEÁK ISTVÁN: Automataelmélet alapjai I. rész.

November 16.

V. POPESCU (România): A kiemelési (lifting) tulajdonságról.

November 16.

D. GASPAR (România): Függvényalgebrák előállításai.

November 29.

PEÁK ISTVÁN: Automataelmélet alapjai II.

December 7.

H. BOSECK (Greifswald): Einlagerung topologischen Gruppen in Kompakte.

December 10.

A. CRUMEYROLLE (Toulouse): Travaux personnels sur la théorie hypercomplexe.

December 10.

N. ZELASKO (Lengyelország): Banach algebrákról.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT DEBRECENI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Március 29.

CZÁCH LÁSZLÓ: Az analízis oktatás modernizálásának kérdéséről.

Március 29.

CZÁCH LÁSZLÓ: Banach algebrák.

Április 27.

SZÁSZ DOMOKOS: Valószínűségeloszlások konvolúcióhatványainak aszimptotikus egyenletességéről.

Május 2.

G. PAZDERSKI: Gruppen mit isomorphen Subnormalteilerverbänden.

Május 6.

DEÁK ERVIN: Egy új topologikus dimenzió-fogalom I. rész.

Május 8.

DEÁK ERVIN: Egy új topologikus dimenzió-fogalom II. rész.

Május 2—3.

GISBERT STOYAN: Parabolikus parciális differenciálegyenletek számológépre alkalmazható numerikus megoldásairól I—II.

Június 10.

L. VERBEEK: Zur Erweiterungstheorie von Halbgruppen.

GEOMETRIAI KOLLOKVIUM

Május 30.

MEGNYITÓ

VARGA OTTÓ: Beziehung der ebenen verallgemeinerten nichteuklidischen Geometrie zu gewissen Flächen in pseudominkowskischen Raum.
GH. GHEORGIEV: Sur les distributions structurelles d'une G-structure.
MOÓR ARTHUR: Hiperfelületek elméletének alapvonalai $\mathfrak{M}_n$ terekben.
FARKAS MIKLÓS: Zárt geodetikus vonalak stabilitásáról.
DUX ERIK: Néhány megjegyzés a térbeli Pythagoras-tétel két és n-dimenziós vonatkozásairól.
SZENTHE JÁNOS: Egy teljes görbületre vonatkozó tételről.
BÉLTEKY KÁROLY: Egy speciális pályatartó leképezésről.

Május 31.

RAPCSÁK ANDRÁS: Metrikus terek geodetikus leképezése.
I. N. KOVANCOV: Dualität im Raum.
SOÓS SÁNDOR: Irány és érintkezés fogalma metrikus terekben.
MERZA JÓZSEF: A hiperbolikus síkgeometria egy modellje és viszonya a Hilbert-féle általánosított nemeuklideszi geometriához.
KÁRTESZI FERENC: Reguláris hiperbolikus véges síkok szerkesztése minimális pontszámosság esetén (Ismertette: Horváth Jenő).
GYARMATHI LÁSZLÓ: A hiperbolikus sík modellje a projektív egyenesen.
MOLNÁR EMIL: A hiperbolikus geometria kúpszeleteinek elemi tárgyalása.

Június 1.

HAJÓS GYÖRGY: A konvex idomokkal való körülzárás problémájához.
S. GOŁAB: (Lengyelország): Quelques remarques sur les fondaments de le geometrie affine. (Ismertette: Gyarmathi László.)
A. TANASESCU: Eine Perspektivinterpretation über eine spezielle hyperbolische oder parabolische Netzprojektion.
STROMMER GYULA: Érintkező felületek metszésvonala az érintkezés helyének közelében.
SZABÓ JÓZSEF: Eckhard-féle eljárás egy általánosítása: centrális összmetszési eljárás.
GACSÁLYI SÁNDOR: Uniformterek egy jellemzése.
BÖRÖCZKY KÁROLY: Telített rendszerek a síkban.
HORVÁTH JENŐ: Távolságok összegére vonatkozó minimum probléma.

Szeptember 11.

ROHLITZ SZILVESZTER: A gépi adatfeldolgozás lehetőségei Hajdú-Bihar megyében.

Október 26. és 28.

HANS JÜRGEN ALBRAND (NDK): Eindeutigkeitssätze in der Theorie der Funktionalgleichungen I—II.

November 9.

RENÉE DEHEUVELS (Franciaország): A globális differenciálgeometria tárgykörből.

November 20.

SZÉNÁSSY BARNA: Debrecen matematikai múltja.

November 22.

DARÓCZY ZOLTÁN: A fogalmak újjászületése a matematikában.

December 14.

ALBERT CRUMEYROLLE (Franciaország): Sur la géometrie differentielle.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BORSOD MEGYEI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 18.

KORÁNYI ERZSÉBET: Az analízis elemeinek oktatása a középiskolában.
Előadás tanárok számára a Városi Tanács Műv. Oszt. és a TIT városi szervezetével közös rendezésben.

Január 18.

SCHMAUSER KÁROLYNÉ: Szélsőértékfeladatok elemi megoldása.
Ifjú Matematikusok Köre rendezvénye.

Január 18.

NÉBLI VENDEL: Másodfokú egyenletek megoldása.
Ifjú Matematikusok Köre rendezvénye.

Február 1.

NÉBLI VENDEL: Feladatmegoldások.
Ifjú Matematikusok Köre előadás.

Február 9.

GYIRES BÉLA: A sztochasztikus extrapoláció problémájáról.
A Tudományos Szakosztály előadása.

Február 15.

RUZSA IMRE: Logika és matematika.
A Városi Tanács Műv. Oszt. és a TIT városi szervezetével közös rendezésben.

Február 15.

NÉBLI VENDEL: Első- és másodfokú függvények szerepe a fizikai feladatok megoldásában.
Diákszakosztály rendezése.

Február 23.

CZÁCH LÁSZLÓ: Modern elképzelések az analízis egyetemi oktatásában.
A Tudományos Szakosztály előadása.

Március 7.

NÉBLI VENDEL: Feladatmegoldások.
Ifjú Matematikusok Köre rendezése.

Március 8.

HIDASI KÁROLY: Esztergakés hátkopás geometriájának analízise.
Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Március 21.

SZÉNÁSSY BARNA: Nagy matematikusok főbb tételei.
Általánosiskolai Szakosztály rendezése.

Március 21.

KÁRTESZI FERENC: A nem euklideszi geometriáról.
A Városi Tanács Műv. Oszt. és a TIT Városi Szervezetével közös rendezésben.

Március 21.

NÉBLI VENDEL: Mozgásegyenletek származtatása, vizsgálata.
Diákszakosztály rendezése.

Március 29.

MAJTHAY ANTAL: A matematikai programozás újabb módszerei.
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Április 6.

KORÁNYI ERZSÉBET: Az analízis elemeinek oktatása a középiskolában.
URBÁN JÁNOS: Matematikai logika.
Előadások Sárospatakon, a Városi Tanács Műv. Oszt. és a TIT Megyei Szervezetével közös rendezésben.

Április 12.

VINCZE ENDRE: Az alkalmazott mechanikai szakon folyó matematikai oktatás ismertetése.
Klubszakosztály rendezése.

Április 18.

NÉBLI VENDEL: Feladatmegoldások.
Ifjú Matematikusok Köre előadása.

Április 18.

JUHÁSZ ISTVÁN: A kontinuum hipotézis bizonyításáról.
A Városi Tanács Műv. Oszt. és a TIT Városi Szervezetével közös rendezésben.

Április 19.

HEPPES ALADÁR: Gömbök felhőjellegű elrendezéseiről.
A Tudományos Szakosztály előadása.

Április 26.

TÖRŐ BÉLA: Néhány bányászati vonatkozású probléma gépi megoldása.
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Május 6.

TANDORI KÁROLY: Fourier-sorok konvergenciájáról.
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Május 10.

DÉNES JÓZSEF: Az algebra és az elektronikus számológépek kapcsolata.
A Tudományos Szakosztály rendezése.

Május 16.

HOSSZÚ MIKLÓS: Lineáris programozás.

Május 17.

HARASZTI REZSŐ: Összehasonlító szögsebesség mérés takarási görbékkel.
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Október 26.

HUSZTHY LÁSZLÓ: A kardáncsukló mozgásának elemzése vektorszámítás segítségével.
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

Október 30.

HNISZ LÁSZLÓ: Geometriai transzformációk szerepe és tanítása az általános iskolában.
BÓNUS RÓKUSNÉ: Világnézeti nevelés a matematika szaktárgyi vonatkozásaiban.
Félnapos továbbképzési ankét az általános iskolák matematika-fizika szakos tanárai részére.

November 15.

HIDASI KÁROLY: A Cone-féle globoid-csiga alkotómenti köszörülhetetlensége.
A Műszaki Matematikai Szakosztály rendezése.

November 29.

DRAHOS ISTVÁN: A kinematikai geometria alkalmazásai.
Vitaindító előadás a Műszaki Matematikai Szakosztály rendezésében.

December 6.

SZABÓ JÁNOS: 1. Variációs elvek a fizikában. 2. A variációszámítás oktatása a matematika anyagában.

December 10.

HUSZTHY LÁSZLÓ: Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában.
A Diákszakosztály rendezése a tiszaszederkényi gimnáziumban.

December 13.

VINCZE ENDRE—NIKODÉMUSZ ANTAL—OBÁDOVICS J. GYULA: Beszámoló az alkalmazott mechanikai ágazaton folyó matematikai képzésről.
Klubszakosztály rendezése.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT PÉCSI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 5.

Továbbképzési nap középiskolai matematika tanárok részére:
SZÉKELY JENŐ: Világnézeti nevelés a matematika órákon.
SZÁSZ GÁBOR: A csoport-elméleti anyag felhasználhatósága a matematika oktatásban.
PÁLMAY LÓRÁNT: A III. osztályos anyag korszerű módszerekkel való feldolgozása.
PÓDA BÉLA: Beszámoló az első félévi látogatások tapasztalatairól.

Április 12.

Továbbképzési nap középiskolai matematika tanárok részére:
SZÉKELY FRIGYES: Az analitikus geometria új módszerekkel.
PÁLMAY LÓRÁNT: A II. osztály anyagának súlypontozása.
HORVAY KATALIN: Geometriai anyag korszerű módszerekkel.
ZAVARKÓ JÓZSEFNÉ, HÁMORI ÁDÁM, VÖRÖS GYÖRGY: Beszámolók a kísérleti osztályokban végzett munkáról.

Szeptember 5.

PÓDA BÉLA: Az új tanév súlyponti feladatai.

Október 3.

SIMON ISTVÁN: Beszámoló a nyári tanfolyam tapasztalatairól, a III. osztály trigonometriai anyagával kapcsolatban.

Október 10.

SIMON ISTVÁN: Beszámoló a nyári tanfolyam analízis anyagáról.

Október 12.

REIMAN ISTVÁN: Feladatmegoldások.
Városi szintű szakköri foglalkozás vezetése.

Október 26.

REIMAN ISTVÁN: Feladatmegoldások.
Városi szintű szakköri foglalkozás vezetése.

November 12.

CZAPÁRY ENDRE: Feladatmegoldások.
Városi szintű szakköri foglalkozás vezetése.

November 26.

CZAPÁRY ENDRE: Feladatmegoldások.
Városi szintű szakköri foglalkozás vezetése.

November 12.

PÓDA BÉLA: Bemutató tanítás a kísérleti IV. osztályban. Integrálszámítás.

November 29.

FORRAI TIBORNÉ: Tapasztalatok a korszerű módszerekkel kapcsolatban.
KOVÁCS MARGIT: Bemutató tanítás.

December 14.

SELÉNYI GÉZA: Feladatmegoldások.
Városi szintű szakkör vezetése.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT VESZPRÉM MEGYEI TAGOZATA ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN.

Január 18.

Speciális (matematikai) osztályokban tanító tanárok tapasztalatcseréje, bemutató tanítással egybekötve.

Február 13.

GYÖRVÁRY JÁNOS: A matematika helye a tudományok rendszerében.

Április 5. és 6.

A Megyei Tanács V.B. Művelődésügyi Osztályával közös rendezésben tanfolyam a megye középiskolai matematika szakos tanárai részére a következő programmal:

Megnyitó.
KNOLL JÁNOS: Megjegyzések az analitikus geometria tanításához. I. rész.
CZAPÁRY ENDRE: Az analízis elemeinek tanítása a középiskolában. I. rész.
KISS KÁROLY: Tapasztalataim a trigonometria tanításával kapcsolatban. I. rész.
KNOLL JÁNOS: Megjegyzés az analitikus geometria tanításához. II. rész.
Klubest.
CZAPÁRY ENDRE: Az analízis elemeinek tanítása a középiskolában II. rész.
LADISLAV BERGER: (Zsolna) Az ábrázolások módszereinek általános elvei és klasszifikációja.
KISS KÁROLY: Tapasztalataim a trigonometria tanításával kapcsolatban. II. rész.

Május 18.

GRÓF JÓZSEF: Súlyozott hatványsorokkal való függvényapproximáció végtelen intervallumon.

Június 26.

KNOLL JÁNOS: Az általános iskola matematika-oktatásának néhány problémája a középiskolába került tanulók eredményeinek tükrében.

Szeptember 19.

KNOLL JÁNOS: A korszerű számonkérésről.

Október 18.

KNOLL JÁNOS: Hogyan tanítanám?
(Az általános iskolai tanterv egyes fejezeteinek tanítására vonatkozó megjegyzések.)

December 12.

KNOLL JÁNOS: A szeptemberi előadás megismétlése Pápán.

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT HEVES MEGYEI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Február 23.

JÁROSI ANDRÁS: Fogalomalkotás a matematikában.
Előadás Gyöngyösön a Városi Tanács V. B. Műv. Osztályával és a Városi Művelődési Házzal közös rendezésben.

Február 29.

VARGA TAMÁS: Új irányok a matematika tanításában.
Előadás Egerben a Tanárképző Főiskolán.

Március 4.

RAPCSÁK ANDRÁS: Bolyai—Lobacsevszkij munkássága és a nem-euklideszi geometria felfedezésének hatása a matematika fejlődésére.
PELLE BÉLA: A hiperbolikus geometria kialakulásának előzményei.
Mindkét előadás a TIT-tel közösen szervezett Bolyai-est keretében hangzott el, az Egerben megrendezett Természettudományi Hét megnyitásaként.

Április 8—10.

Egri Pedagógus Tudományos Napok:
PÁLMAY LÓRÁNT: A vektorok tanítása.
RUZSA IMRE: A matematikai megismerés néhány kérdése.
PAPP ISTVÁN: Világnézeti nevelés a matematika tanításában.
CZAPÁRY ENDRE: Az analízis tanítása a középiskolában.

Április 18.

BALÁZS JÁNOS: Függvények approximációja végtelen intervallumon.

November 2.

BALOGH TIBOR: A legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásáról.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT GYŐRI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 30.

PÁPAY PÉTER: Feladatmegoldások vektorok segítségével.
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

Január 31.

Vitadélután a Révai Gimnáziumban tanárok részére.
Vezette: MOLNÁR ERNŐ.

Február 29.

HORVAY KATALIN: Vektorok a középiskolai matematikában.

Március 8.

DOZMATI JÓZSEFNÉ: Az általános iskolai városi és járási verseny kiértékelése.

Március 12.

MARÓT REZSŐ: Egyenletek és egyenlőtlenségek diszkussziója.
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

Március 14.

MOLNÁR ERNŐ: vezetésével a Matematika Tanítása egyes feladatainak megbeszélése, tanárok részvételével.

Április 26.

OBONYA JÓZSEF (Csehszlovákia): Gyártási terv számítása összegező modellel.
A Gépipari Tudományos Egyesület Győri Csoportjával közös rendezésben.

Május 9.

MOLNÁR ERNŐ vezetésével a Matematika Tanítása egyes feladatainak megbeszélése, tanárok részvételével.

Szeptember 2.

MOLNÁR ERNŐ: A matematikatanítás tapasztalatai és feladatai.

Október 3.

HÁMORI MIKLÓS: A matematikai kibernetikai automatizálások (gépesítések) alkalmazásai.
A TIT megyei szervezetével közös rendezésben.

Október 21.

MOLNÁR ERNŐ: A szerkesztés szerepe a trigonometriai számításoknál.
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

Október 24.

Klubdélután tanárok számára. Vezette: MOLNÁR ERNŐ.

November 6.

MOLNÁR EMIL: Az 1968. évi Kürschák József verseny feladatainak ismertetése.
Diákdélután a Révai Gimnáziumban.

November 14.

Továbbképzési nap MARÓT REZSŐ vezetésével.
PATAKY ÉVA: Bemutató óra.
MARÓT REZSŐ: A IV. osztályos mat. tankönyv tanítása.

December 12.

Klubdélután tanárok számára. Vezette MOLNÁR ERNŐ.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SOPRONI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI AZ 1968. ÉVBEN

Április 9.

KERTÉSZ ANDOR: A vektortér fogalmainak általánosításáról.

Április 24.

PÁLMAY LÓRÁNT: A középiskolás II. osztályos tankönyv analitikus geometriai részének tanításáról.

Május 22.

MOÓR ARTUR: Megjegyzések felsőbb differenciál geometriai problémákról.

Október 31.

ROXER EGON: A gimnáziumi IV. osztályos tankönyv valószínűségszámítási részével kapcsolatos feladatok és problémák megbeszélése.

November 29.

GYARMATI LÁSZLÓ: Szerkesztések a komplex projektív geometriában.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT FEJÉR MEGYEI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 10.

SZABÓ ÁRPÁD: Az arány mint történeti probléma.

Január 10.

SZABÓ ÁRPÁD: Szerkesztések a korai görög matematikában.

Január 15.

CSISZÁR IMRE: Geometriai bizonyítások.

Január 15.

CSISZÁR IMRE: Vektorok alkalmazásai.

Január 29.

WOLKENSDORFER JÁNOSNÉ: Középértékek.

Január 31.

Fejér és Veszprém megyék közötti középiskolai matematika verseny.

Február 12.

CSISZÁR IMRE: Oszthatósági problémák.

Február 12.

CSISZÁR IMRE: Számelméleti kérdések.

Február 26.

WOLKENSDORFER JÁNOS: Középértékek alkalmazásai.

Március 11.

CSISZÁR IMRE: A valószínűségszámítás elemei.

Március 11.

CSISZÁR IMRE: Keresési, kódolási problémák.

Március 30.

Megyei matematikaverseny eredményhirdetése.

Október 7.

GÁL JÓZSEF: Bizonyítási módszerek I.

Október 16.

BAKOS TIBOR: A tanulóversenyek tapasztalatai.
Ankét a Középiskolai Matematikai Lapok munkájáról. Előadó: BAKOS TIBOR.

Október 21.

GÁL JÓZSEF: Bizonyítási módszerek II—III.

November 18.

WOLKENSDORFER JÁNOS: Geometriai paradoxonok.

December 2.

HORVÁTH MIKLÓS: Logikai problémák.

December 4.

URBÁN JÁNOS: Filozófiai problémák.
URBÁN JÁNOS: A végtelen problémája a matematikában.

December 11.

A Fejér megyei középiskolások matematikai versenye I. forduló.

December 16.

SZÉNÁSY MIHÁLY: Szerkesztések algebrai elmélete I—II.

December 18.

RÉDLING ELEMÉR: Felvételi vizsgák tapasztalatai.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT SZABOLCS-SZATMÁR MEGYEI TAGOZATÁNAK ELŐADÁSAI 1968. ÉVBEN

Január 4.

HAJDÚ SÁNDOR: A gimnázium III. o. analitikus geometria anyagának tanítási problémái.
Tanári továbbképző előadás.
SZABÓ LAJOS: A gimnázium III. o. trigonometria anyagának tanítási problémái.
Tanári továbbképző előadás.

Január 5.

BEREZNAI GYULA: A gimnázium II. o. analízis anyagának tanítási problémái.
Tanári továbbképző előadás.

Február 4.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Február 18.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Március 11.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Március 26.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Április 8.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Május 6.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Május 20.

LIPA ANDRÁS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Szeptember 21.

BEREZNAI GYULA: Egy vasútépítési probléma geometriai megoldása.

Szeptember 28.

SZABÓ LAJOS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Október 12.

SZABÓ LAJOS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

Október 19.

SZABÓ LAJOS: A halmazelmélet elemei.
Tanári továbbképző előadás Kisvárdán.

Október 21.

SZABÓ LAJOS: A halmazelmélet elemei.
Tanári továbbképző előadás Nagykállóban.

Október 22.

LIPA ANDRÁS: Geometriai transzformációk.
Tanári továbbképző előadás.

Október 26.

LIPA ANDRÁS: Egybevágósági transzformációk.
Tanári továbbképző előadás Mátészalkán.

Október 26.

SZABÓ LAJOS: A halmazelmélet elemei.
Tanári továbbképző előadás Fehérgyarmaton.

Október 28.

SZABÓ LAJOS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 6.

SZABÓ LAJOS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 20.

SZABÓ LAJOS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

December 11.

SZABÓ LAJOS: Logikai feladatok.

December 12.

SZABÓ LAJOS: Feladatmegoldások.
Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

VÁNDORGYŰLÉS 1968. JÚLIUS 10., 11., 12. ÉS 13-án NYÍREGYHÁZÁN

A Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztálya és Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Tanszékének rendezésében.

A vándorgyűlés megnyitása. Az 1968. évi Beke Manó emlékdíjak kiosztása.
RUZSA IMRE: Logikai problémák a matematika tanulásában és tanításában.
POGÁTS FERENC: Vektorok az általános- és középiskolában.
VARGA TAMÁS: Amerikai tapasztalataim.
HORVAY KATALIN: Beszámoló lengyelországi tanulmányutamról.
GÁBORNÉ DONÁTH BLANKA: A tanár—diák kapcsolat és a tanulás motiváltsága.
Az általános iskolai szekció előadásai:
SZÁSZ GÁBOR: A halmazelmélet és az absztrakt algebra szerepe az általános iskolai matematikaoktatás szempontjából.
ZÁTONYI SÁNDOR: A matematika és fizika kapcsolata az általános iskolában.
PÁLMAY LORÁNT: Közelítő számítások.
REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: Az algebra és a függvénytan kapcsolata az általános iskolában.
NÉMETHY KATALIN: Geometriai transzformációk.
A középiskolai szekció előadásai:
GÖNDÖCS LÁSZLÓ: Az ábrázoló geometria elemei a középiskola IV. osztályában.
SZÁSZ DOMOKOS: A valószínűségszámítás tanítása.
SURÁNYI JÁNOS: Algebrai struktúrák a középiskolai tananyagban.
RÁBAI IMRE: Koordináta geometriai feladatok megoldási módszereiről.
SZÁSZ GÁBOR: A matematikaoktatás néhány problémája az érettségi és felvételi vizsgák tükrében.
CZAPÁRY ENDRE: Néhány gondolat a gimnáziumban bevezetésre kerülő új III. osztályos matematika tankönyv „Differenciál-számítás és sorozatok" c. fejezetének tanításához.

KÖNYVISMERTETÉS

PÓLYA GYÖRGY: A PROBLÉMAMEGOLDÁS ISKOLÁJA; I—II. KÖTET

(Tankönyvkiadó, 1967, 228 oldal, illetve 1968, 204 oldal.)

Ki állíthatja magáról, hogy nem került még szembe sok-sok megoldandó problémával? A problémamegoldás az emberi értelem egyik leggyakoribb és legjellegzetesebb tevékenysége. Problémát megoldani annyit jelent, mint tudatosan megkeresni azokat a tennivalókat, amelyek egy világosan megfogalmazott, de közvetlenül meg nem közelíthető cél eléréséhez vezetnek.

„A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia." Ilyen gyakorláshoz ad rengeteg alkalmat és sok hasznos útmutatást Pólya Györgynek, a stanfordi (USA) egyetem magyar származású professzorának könyve, melynek előszavából idéztünk az előbb.

A könyv két részből áll.

Az első rész *(Megoldástípusok)* célja az, hogy néhány hasznos megoldástípust ismertessen meg az olvasóval. Ez a rész négy fejezetre oszlik.

Az első fejezet a mértani hely fogalmára támaszkodó megoldástípust ismerteti. Ennek során bemutatásra kerül a hasonló alakzat szerkesztésének módszere, a ponttá zsugorítás és a segédalakzatok bevezetésének módszere.

A második fejezet a Descartes-féle megoldástípust tárgyalja. Descartes úgy vélte, hogy minden típusú probléma az alábbi lépésekben oldható meg: 1. Minden problémát visszavezetünk matematikai problémára. 2. Minden matematikai problémát visszavezetünk algebrai problémára. 3. Minden algebrai problémát pedig egyetlen egyenlet megoldására. Descartes elgondolása sajnos nem válik be mindig, azonban sok fontos esetben igen. A fejezet ilyen eseteket mutat be, amikor a probléma megoldása algebrai egyenlet megoldását jelenti.

A harmadik fejezet a rekurzióval történő megoldás módszereit, elsősorban a teljes indukció néven ismert bizonyítási eljárást ismerteti részletesen.

A negyedik fejezet a szuperpozíció megoldási módszerét mutatja be, amely alkalmasan választott speciális esetek összességeként állítja elő az általános esetet. A módszer bemutatására választott példa, a Lagrange-féle interpoláció, kitűnő.

A könyv második része *(Utban az általános felé)* a problémák „elméletével" foglalkozik.

Az ötödik fejezet a problémák két fő típusát: a meghatározó és a bizonyító problémákat elemzi.

A hatodik fejezet az első részben már bemutatott megoldástípusokra mutat újabb példákat, újabb általánosításokat és alkalmazásokat.

A hetedik fejezet a megoldás menet egy igen lényeges kérdésével, a szemléltetéssel foglalkozik.

A nyolcadik fejezet a probléma megoldásának a megtervezését, a terv kiválasztását, a program végrehajtását mutatja be.

A kilencedik fejezet a megoldandó problémához kapcsolodó segédproblémák, vagy vele rokon problémák megoldásának módszertanát részletezi.

A döntő gondolat vagy ötlet megszületését elemzi a tizedik fejezet.

A probléma megoldása során kifejtett értelmi munkáról, annak formáiról, lépéseiről, módszereiről szól a tizenegyedik fejezet.

A tizenkettedik fejezetben a probléma megoldására irányuló fegyelmezett gondolkodás szempontjairól, folyamatáról és módszereiről van szó.

A tizenharmadik fejezetben a megoldás közben felhasználható és felhasználandó előismeretek kiválasztásáról, a szabályok célszerű kiválogatásáról olvashatunk.

A tizennegyedik fejezetben a szerző a tanulásról, a tanításról és a tanítani tanulásról fejti ki érdekes és értékes gondolatait.

Az utolsó, a tizenötödik fejezet a kutató és tudományos módszerek néhány jellegzetes tulajdonságát foglalja össze.

Minden egyes fejezet végén számos feladat áll (a kötetben összesen csaknem 500 feladat van), és ezekhez a szerző részletes megjegyzéseket fűz. Ezekben a megjegyzésekben sok új ismeret bukkan fel, és így az az olvasó, aki a feladatokat rendre megoldja, megismerkedhet például a mértani szerkesztések elméletével, a halmazok néhány tulajdonságával (1. fejezet), egyenlőtlenségekkel, a grafikus menetrenddel, az egyenletrendszerek megoldásával, a doifantikus egyenletekkel, a megoldás unicitásának kérdésével (2. fejezet), a binomiális tétellel, a binomiális együtthatók tulajdonságaival, a kombinációkkal, a trinomiális együtthatókkal, néhány numerikus sorral és hatványsorral (3. fejezet), néhány homogén lineáris állandó együtthatójú differenciálegyenlettel, a Fibonacci-féle számokkal, a Simpson-szabállyal (4. fejezet), a bizonyítás elmélet néhány kérdésével (9. fejezet), a tökéletes térkép készítésének problémájával (14. fejezet), a nem elégséges ok elvével, a trapézszámokkal (15. fejezet). A feladatok megoldásai és az ezekhez fűzött újabb jegyzetek és kiegészítések a *Megoldások* című részben találhatók.

A könyv leglényegesebb értéke a pedagógiai és didaktikai mondanivalója.

Pólya György ezt a könyvét elsősorban a már tanító és a leendő matematika tanároknak szánta, azonban a megoldások során alkalmazott módszerek és eljárások, elméleti és gyakorlati útmutatások és tanácsok mégis általános érvényűek, mert az emberi gondolkodás egy-egy lényeges mozzanatára, tipikus fordulatára, vagy éppen gyakori hibájára mutatnak rá. Minden tantárgy oktatásánál és ismeretátadásánál, de a matematika esetében különösen arra kell törekedni, hogy bizonyos mennyiségű tárgyi tudás átadásán kívül tanítványaink gondolkodási készségét is fejlesszük. Mi a matematikában a gondolkodási készség? A problémamegoldás készsége, mégpedig nemcsak a rutinproblémáké, hanem olyanoké is, amelyek bizonyos fokú önállóságot, ítélőképességet, eredetiséget és alkotóképességet kívánnak meg. A tanítványok önálló gondolkodásának csíráit azonban csak az a tanár veszi észre, és csak az a tanár tudja kibontakoztatni és helyesen irányítani, aki erre a feladatra felkészült, aki nemcsak saját maga is sokszor, szívesen és eredményesen oldott meg feladatokat, hanem a megoldások módszerét és lépéseit is gondosan végigelemezte, akinek már van bizonyos problémamegoldási képessége, és ezt állandó gyakorlással ébren tartja. Ehhez azonban szorosan hozzátartozik az is, hogy kellő mennyiségű, nehézségű és didaktikailag helyes sorrendben álló feladat álljon a tanár rendelkezésére. Pólya György könyve a tanárok eme fontos feladatának ellátásához nyújt komoly segítséget, mind módszertani eszközök, mind feladatanyag terén. Egy-egy jól választott kidolgozott feladat segítségével (pl. 2.2, 3.1, 3.8, 7.3, 10.2) bemutatja a probléma megfigyelésének, felismerésének, a megoldás lényeges ötlete megszületésének, a megoldás részletes végrehajtásának folyamatát, a problémával kapcsolatosan feltehető kérdéseket, a probléma megoldásának módszerével összefüggő megjegyzéseket, és a megoldott probléma másutt való felhasználásának a lehetőségeit. Ez röviden azt jelenti, hogy szemtanúi lehetünk annak, hogyan lehet tapasztalataink alapján egy problémát megfigyelni, megfogalmazni, körültekintően megoldani és a megoldást kiaknázni. „Figyeljük meg, általánosítsuk másképp is!" — hangzik a biztatás, de ez nem üres recept, hanem sok bemutatott példa alapján levont következtetés.

A gazdag feladatgyűjtemény is ezt a célt szolgálja. Az egy-egy témakörhöz összegyűjtött feladatok olyanok és olyan sorrendben állnak, hogy a feladatok megoldása során az olvasó saját maga fedezi fel a téma belső összefüggéseit, lehetőségeit és határait. Példák sokaságán látjuk, hogy még a középiskolás diák is végezhet matematikai megfigyeléseket, kifejezheti tapasztalatait képletekkel. E képleteket azonban módszeresen felül kell vizsgálnia: bizonyítania kell helyességüket, vagy cáfolnia kell állításukat. A megfigyelés és a meglátás jelentőségére éppen azzal hívja fel a figyelmet a szerző, hogy sok világhírű matematikus (Archimedes, Descartes, Euklides, Euler, Gauss, Leibniz, Newton, Pappus, Pascal, Püthagorasz) megfigyeléseit (amelyek esetleg egy-egy egész tudományág kiindulását jelentették) és feladatait is felhasználta.

A feladatok többségének a megoldása nem kíván olyan tárgyi tudást, amely a középiskolai színvonalat lényegesen meghaladná (az ennél nehezebb feladatokat csillag jelöli), azonban megkövetel bizonyos ötletességet, ítélőképességet, ügyességet és egyéni, önálló munkát.

Gyakran szokás szembeállítani a kutató és az oktató tanár típusát. Pólya György munkája e két típus szerencsés egységét tükrözi, mert azt mutatja, hogy az oktató típus sem nélkülözi a kutató típus főbb tulajdonságait és fordítva. Nem arról van szó, hogy minden tanárnak egyúttal nagy horderejű törvények felfedezőjének is kell lennie, hanem arról, hogy neki is ismernie kell az új felfedezéseket, az alkotó munkának az örömét. Pólya György éppen a könyvben is közölt típusú feladatok rendszeres megoldását tekinti annak az önálló alkotó munkának, ami minden középiskolai tanártól elvárható.

Külön kell még szólni a könyv két utolsó fejezetéről, amelyekben a tanulásról, a tanítani tanulásról, a kutatásról és a tudományos módszerekről mondja el nézeteit a szerző. Néhány kiragadott de jellemző idézet: „Az eredményes tanuláshoz szükség van a felderítés fázisára, amely megelőzi a szavakba foglalást és a fogalomalkotást. A tanuló lehetőleg maga találja ki az elsajátítandó anyag akkora hányadát, amekkorát az adott körülmények között egyáltalán lehetséges." — „Szükség van azonban arra is, hogy a megtanult anyag szerves egészbe forrjon össze a tanuló gondolkodásmódjával." — „A tanítás nem tudomány, hanem művészet." — „A tanár magatartásából néha

többet tanulunk, mint az előadott anyagból." — „Valójában mit tesz a tudós? Elméleteket dolgoz ki, és kísérleteivel ellenőrzi azokat. Ha három szóban akarjuk összefoglalni a tudományos módszert, akkor erre a következőt ajánlom: kitalálás és ellenőrzés."

Annak ellenére, hogy a könyv stílusa nagyon könnyed, szellemes, a szöveg tele van sziporkázó ötletekkel és kedves történetekkel, a könyv alapos tanulmányozása mégis komoly szellemi erőfeszítést jelent. Érdemes azonban tanulmányozásába ezt a munkát befektetni, mert aki csak a kidolgozott feladatok megoldásait futja át, nem lesz része sok, a hétköznapi tanításban is felhasználható tapasztalatnak.

A fordítás (dr. Pataki Béláné gondos munkája) hűen megőrizte a könyv lebilincselő stílusát.

Befejezésül talán érdemes idézni a szerzőnek könyve magyar kiadásához írott előszavából: „Igenis, a matematikaóra lehet érdekes és hasznos és még több is: amint azt Descartes olyan szépen mondta, ‚hozzászoktatja a szemünket, hogy lássa az igazságot tisztán és világosan'. Szívből kívánom, hogy hozzanak a matematika órák a magyar tanulóknak és tanítóknak több örömet, mint nekem hoztak annak idején, és ha ehhez a könyv hozzájárulhatna, az nekem okozna örömet."

Scharniztzky Viktor

KERTÉSZ ANDOR: VORLESUNGEN ÜBER ARTINSCHE RINGE

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

Egy R (asszociatív) gyűrűt *Artin-félének* nevezünk, ha R jobbideáljaira teljesül a minimumfeltétel. Az elnevezést az indokolja, hogy EMIL ARTIN neves algebrista vette azt észre, hogy a véges rangú (asszociatív) algebrákra vonatkozó leglényegesebb eredmények a fenti minimumfeltételt kielégítő gyűrűkre átvihetőek. Az Artin-féle gyűrűkre vonatkozó vizsgálatok igen lényeges hatással voltak az asszociatív gyűrűk általános elméletének kiépítésére. 1944-ben jelent meg ARTIN, NESBITT THRALL „Rings with minimum condition" című nagyjelentőségű könyve. A megjelenés óta eltelt több mint két évtized alatt olyan széles körű, jelentős vizsgálatok folytak az Artin-féle gyűrűkkel kapcsolatban, melyek feltétlenül időszerűvé tették Kertész Andor könyvének megírását.

Az előszó szerint a könyv anyaga azon az előadássorozaton alapul, melyet a szerző az 1962/63-as tanévben a hallei egyetemen vendégprofesszorként tartott. A könyv tíz fejezetre és egy függelékre tagolódik. Az első fejezet a halmazelméleti alapismereteket tartalmazza. A második és a harmadik fejezetben találhatóak a gyűrűelméletre, illetve ezen belül a gyűrűkonstrukciókra vonatkozó alapvető tudnivalók. A negyedik fejezetben a szerző a modulusok és az algebrák elméletének alapfogalmait ismerteti. Egyes eredmények ismertetése homológikus módszerekkel történik. Az ötödik fejezetben a szerző a gyűrűk Jacobson-radikáljával foglalkozik és e fontos fogalomnak számos újszerű jellemzését adja. Az Artin-féle gyűrűkre vonatkozó alapvető eredmények tárgyalása a hatodik fejezetben kezdődik. A hetedik fejezet, mely a lineáris transzformációk gyűrűiről szól, főeredményei a Jacobson-féle sűrűségi tétel és a Wedderburn—Artin-féle struktúratételek. A féligegyszerű, azaz a radikálmentes Artin-féle gyűrűk különböző jellemzései a nyolcadik fejezetben szerepelnek. A kilencedik fejezetben a szerző olyan operátormodulusokkal foglalkozik, amelyek operatortartománya Fuchs Artin-féle gyűrű. E fejezetben ismerteti a szerző a féligegyszerű gyűrű fölötti lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó elméletét. A tizedik fejezet az Artin-féle gyűrűk additív struktúrájának szerkezetéről szól. Az idevágó eredmények közül kiemelendők Szele Tibor, valamint Fuchs és Szele tételei. A függelékben azokat az Abel-csoportokról szóló eredményeket foglalja össze a szerző, amelyekre a tizedik fejezetben hivatkozik.

Az egyes fejezetek végén található gyakorló feladatok szorosan kapcsolódnak az illető fejezet anyagához. A könyvben hat érdeklődésre számot tartó probléma szerepel, melyek egy részét időközben megoldották.

A szerző művével kettős célt valósít meg. Egyrészt az első öt fejezetben egy jó bevezetést ad az asszociatív gyűrűk elméletébe, másrészt a könyv többi részében az Artin-féle gyűrűk elméletének legfontosabb fejezeteit tárgyalja. Amint a szerző előszavában megemlíti, teljességre nem törekszik és például a végesrangú asszociatív algebrák elméletének részletesebb tárgyalásától eltekint. A könyvben szereplő eredményekből, valamint az irodalomjegyzékből kitűnik, hogy a magyar algebristák jelentősen hozzájárultak e fontos gyűrűosztály elméletének továbbfejlesztéséhez. E megállapítás elsősorban az utolsó három fejezetben tárgyalt eredményekre vonatkozik.

A könyv szerkezete logikus, jól áttekinthető. A mű áttanulmányozásához az egyetemi anyagon túlmenő algebrai és matematikai előismeretekre nincs szükség, mert a szerző a felhasznált fogalmak definiálása terén teljességre törekszik. Az eredmények megfogalmazása világos, a bizonyítások menete jól követhető.

A könyv bel- és külföldön egyaránt sikerre számíthat.

Steinfeld Ottó

DR. OBÁDOVICS J. GYULA—DR. SZARKA ZOLTÁN: MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968., 294 oldal, 21,50 Ft.)

Obádovics J. Gyula Matematika című könyvének hatalmas közönségsikere (eddig 6 magyar kiadás jelent meg összesen több mint 100 000 példányban, ezen kívül német és orosz nyelvű fordítások) azt bizonyítja, hogy a matematika iránti érdeklődés középfokon is tömeges méretű, hiszen a középfokú és felsőfokú matematika oktatásban résztvevők számára egyaránt íródott könyv példányainak nagyobbik része középiskolások illetve egyetemi felvételre készülők kezébe került. Nyilvánvalóan ez adta az ötletet ahhoz, hogy hasznos volna egy olyan könyv kiadása is, amely csupán a középiskolai anyagot foglalná össze röviden (mégpedig már az új tanterv alapján), és amely közelebb állna a középiskolások pénztárcájához is. A Matematikai összefoglaló című könyv ezt a feladatot van hivatva betölteni.

A könyv 10 fejezetre oszlik, amelyekben helyet kapott a középiskolai anyag túlnyomó többsége és ezen túlmenően még néhány témakör.

Az első fejezetben *(Aritmetika)* a valós számkörben elvégezhető műveletekről, ezek tulajdonságairól, az oszthatóságról, az aránypárokról, a százalékszámításról és a közelítő számításokról esik szó. A második fejezetben *(Algebra)* az algebrai mennyiségekkel végezhető műveletek, ezek talajdonságai, a logaritmus, az első- és másodfokú egyenletek és egyenletrendszerek megoldása, az exponenciális és logaritmikus egyenletek, a sorozatok, az egyenlőtlenségek, a kombinatorika és a valószínűségszámítás elemei kaptak helyet. A harmadik fejezet *(Elemi geometria)* az elemi sík- és térgeometria szerkesztéseit, tételeit és számításait foglalja össze. A negyedik fejezet *(Trigonometria)* a szögfüggvények értelmezését, a rájuk vonatkozó összefüggéseket, a derékszögű és általános háromszög alkotórészeinek kiszámítását, a goniometrikus egyenletek megoldását és a gömbháromszögtan elemeit dolgozza fel. Az ötödik fejezet *(Analitikus geometria)* a pont, az egyes és a kúpszeletek analitikus tárgyalását adja derékszögű és polárkoordináták esetén. Itt esik szó a koordináta-transzformációkról és görbék paraméteres előállításáról is. A hatodik fejezet *(Vektoralgebra)* a vektorműveletekkel és a vektorok néhány alkalmazásával foglalkozik. A hetedik fejezet *(Komplex számok)* a komplex számokkal végezhető műveleteket tartalmazza. A nyolcadik fejezetben *(Bevezetés az analízisbe)* halmazelméleti alapfogalmakról, az egyváltozós függvény értelmezéséről, határértékéről, folytonosságáról, ábrázolásáról és az elemi függvényekről van szó. A kilencedik fejezet *(Differenciálszámítás)* tartalmazza a differenciálhányados és differenciál fogalmát, a deriválási szabályokat, valamint a differenciálszámítás alkalmazását a függvényvizsgálatban. A tizedik fejezet *(Integrálszámítás)* a határozatlan integrál fogalmát, az integrálási szabályokat, a határozott integrál fogalmát, tulajdonságait és néhány alkalmazását mutatja be.

A könyv nem tartalmazza a felsorolt anyag kidolgozását, hanem csupán definíciók, tételek, képletek, eljárások felsorolását, illetve egy-egy példán való illusztrálását. Ezért a könyv nem pótolhatja a tárgykörbe vágó tankönyvek, példatárok tanulmányozását, azonban alkalmas arra, hogy az olvasó a már egyszer elsajátított ismereteket felelevenítse, átismételhesse és áttekintést kapjon egy-egy anyagrész felett.

A könyvben közölt anyag kiválasztásával és rendszerezésével kapcsolatban nem akarok vitázni a szerzőkkel, ez sokféle módon valósítható meg jól (éppen egy ilyen jó megvalósítás ez a könyv), ha azonban az anyagot éppen a középiskolákban érvényben levő „legújabb tantervvel összhangban" (az előszóból idézve) akarták összeállítani, akkor a módszereket is össze kellett volna hangolni. Ez egy lényeges ponton nem sikerült. Ugyanis a középiskolában a tanuló először a határozott integrálról hall, és csak később a határozatlan integrálról. A fordított sorrend (az ellene felhozott elvi kifogásokon túl) egyrészt zavart okozhat éppen a középiskolai olvasóban, másrészt — ha nem figyelmeztetünk erre kellő súllyal, és ez a kötetben nem történik meg — azt a hamis látszatot sugallhatja, hogy csak azok a függvények integrálhatók, amelyeknek van primitív függvénye.

A kötetben közölt anyag egyébként logikus sorrendben követi egymást; tételek, szabályok, eljárások megfogalmazása átgondolt és szabatos, külön dicséret illeti a lényeget jól kiemelő tipografizálást és a megértést nagyban elősegítő szép ábrákat.

Felbuzdulva a kiadónak az előszóban kifejezett biztatásán, mely szerint „minden bírálatot és észrevételt szívesen fogad". Megemlítek néhány apró megjegyzést.

1. A valós számokkal végezhető műveleteknél nem esik szó az összeadás és a szorzás asszociativitásáról és a disztributív törvényről. Erről először csak az algebrai kifejezéseknél olvashatunk, nem ártana már előbb is.

2. Meg lehetett volna említeni, hogy a valós számok *rendezett* halmazt alkotnak, hiszen minden ehhez való fogalom szerepel a könyvben.

3. Az algebra alaptételének megfogalmazása véleményem szerint hiányos, mert nem mondja ki, hogy ez a megfogalmazás csak a komplex számok körében érvényes. Ez a kikötés a könyv szö-

vege alapján nem nyilvánvaló, mert komplex számokról a tétel kimondása előtt nem esett szó. (Utána igen.)

4. Az egyenlőtlenségek tulajdonságai mellett érdemes lett volna néhány szót áldozni az egyenlőségek tulajdonságaira is. Egyébként véleményem szerint „az egyenlőségek iránya megfordul" kifejezés pontosabb, mint az „egyenlőségek iránya megváltozik" kifejezés.

5. A háromszög területképletei közül hiányzik a

$$t = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

képlet.

6. A $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrikus alakban adott komplex szám konjugáltjának trigonometrikus alakja nem

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

mint ahogyan az a 226. oldalon olvasható, hanem

$$\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].$$

Az előbbi alak további számításokra nem használható.

7. Az alap integrálokat nem „a *deriválási szabályok* egyszerű megfordításával kapjuk", hanem az *alapfüggvények deriváltjait* megadó képletek megfordításával. Így például az

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x + c$$

vagy az

$$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x + c$$

nagyon fontos integrál, de nem alapintegrál.

8. A helyettesítéssel történő integrálásnál meglehetett volna említeni az

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

(ahol $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye) esetet is, mert ekkor a helyettesítés végrehajtása megtakarítható.

A könyvet figyelmébe ajánlhatjuk mindazoknak, akik a középiskolai anyagot tanítják vagy tanulják.

Scharnitzky Viktor

THEORY OF GRAPHS (PROCEEDINGS OF THE COLLOQUIUM HELD AT TIHANY, HUNGARY, SEPTEMBER 1966). EDITED BY P. ERDŐS AND G. KATONA

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. 370 oldal.

Az utóbbi évtizedben rendszeressé váltak a gráfelmélet művelői számára különböző országokban rendezett nemzetközi kollokviumok; az 1966 szeptemberében Tihanyban tartott előadássorozat már a második ilyen jellegű magyarországi rendezvény (az elsőt 1959-ben Dobogókőn rendezték meg). A tihanyi kollokviumon 58 matematikus vett részt, közöttük 32 külföldi résztvevő 10 államból. A kollokviumon 35 előadás hangzott el, az előadások szerzőiként 39 (ebből 26 külföldi) kutató szerepelt. A szóban forgó kötet a kollokviumon ismertetett vizsgálatok legtöbbjét teljesen kidolgozott formában közli, néhányat vázlatosan (a bizonyítások mellőzésével). A szép kiállítású kiadványt Erdős Pál akadémikus és Katona Gyula rendezték sajtó alá. Kettejük mellett meg kell még említeni Gallai Tibor professzor nevét, aki jelentékeny munkát végzett mind a kollokvium, mind az előadáskötet előkészítésében.

A kötetben foglalt 35 előadás a gráfelméleti kutatások legkülönbözőbb irányait képviseli. Több dolgozat foglalkozik az Euler-féle és Hamilton-féle utak kérdéseivel (Bánkfalvi-házaspár, Kotzig, Mendelsohn, Nash-Williams, Walther), a gráfok kromatikus számával és egyéb numerikus invariánsaival (Chartrand—Harary, Erdős—Hajnal, Finck, Gallai, Ringel, Voss, Wessel), gráfok segítségével értelmezett numerikus függvények aszimptotikus vagy pontos meghatározásával (Bollobás, Bosák—Rosa—Znám, Erdős, Lovász), lefedési és beágyazási problémákkal (Guy—Milner, Pelikán, Simonovits), topológiai vonatkozásokkal (Beineke, Boland, Wagner). Számos közlemény a gráfelméletnek egy-egy más matematikai ággal való határterületéről veszi tárgyát, mégpedig a szerzők a polinomok (Brown), leképzések (Dénes), mátrixok (Guy), kategóriák (Hasse), valós függvények és áramok (Hoàng Tuy, Katona—Korvin), kombinatorikus halmazelmélet (Katona,

Kleitman), algebrai formulák (Péter), permutációcsoportok (Sheehan) kérdéseit érintik. Jung dolgozata a gráfok irányíthatóságának körébe tartozó kérdéseket vizsgál, Zelinka pedig a Smolenicében (Csehszlovákia) 1963-ban tartott gráfelméleti kollokviumon felmerült nyílt kérdések közül öt különféle jellegű probléma megoldását adja.

A kötetet 54 megoldatlan probléma felsorolása zárja.

Mind a kötet szerkesztőit, mind az Akadémiai Kiadót elismerés illeti azért, hogy a tihanyi kollokviumon ismertetett kutatásokat összegyűjtött formában, méltó kiállításban nyilvánosságra hozták. Az is örvendetes, hogy a kötet csatlakozik a nyílt problémák közlésének szokásához. Vitathatónak érzem azonban, helyes szerkesztési elv volt-e a kötet valamennyi dolgozatát egységes (angol) nyelven publikálni, megvonva a szerzőktől a matematikai közleményekben bevett négy-öt világnyelv közötti szabad választás lehetőségét.

Ádám András

VINCZE ISTVÁN: MATEMATIKAI STATISZTIKA IPARI ALKALMAZÁSOKKAL

Műszaki Könyvkiadó, 1968.

Meglepő tény, hogy 1968-ig nem jelent meg magyar nyelven olyan könyv, amely a Matematikai Statisztika címet viselte és viselhette.

Meglepő ez a tény, ha a külföldi — elsősorban angol nyelvű — irodalmat vizsgáljuk. A különböző amerikai kiadók szinte hetenként jelentetnek meg különböző statisztikai könyveket, és úgy látszik, hogy számukra még ilyen mennyiségben is jó üzlet az ilyen könyvek gyártása.

Akkor is meglepő, hogy csak most jelenik meg az első magyar nyelvű statisztika könyv, ha a hazai igényeket és lehetőségeket vizsgáljuk. Jól tudjuk, hogy ma már a statisztika alkalmazóinak széles tábora van és az igény a matematikai statisztika módszerei iránt nagyobb, mint ami pillanatnyilag kielégíthető. Elmondhatjuk, hogy nem csak az alkalmazók tábora széles, hanem számos jól képzett elméleti kutatóval is rendelkezünk, olyanokkal, akik képesek (és már évekkel ezelőtt is képesek voltak) egy statisztika könyv megírására.

Az olvasó, aki ilyen hosszú várakozás után kezébe veszi a könyvet, érezheti azt, hogy az első magyar nyelvű statisztika könyvről lévén szó, „mindennek" örülnünk kell, de talán helyesebb, ha éppen a hosszú várakozási idő miatt az első könyvvel szemben magas igényeket támasztunk.

Milyen igényeket támaszt a szerző saját könyvével szemben? Már a cím is utal arra, hogy a könyv ipari alkalmazásokkal foglalkozik. A könyv bevezetése világosan megfogalmazza, hogy a könyv a statisztika ipari felhasználóinak íródott. Ennek megfelelően az olvasót arra kívánja megtanítani, hogy az egyes gyakorlati esetekben mit kell tennie. Természetesen a gyakorlati alkalmazó semmire sem megy módszerek puszta felsorolásával, ha nem érti világosan az egyes módszerek jelentőségét, előnyeit, hátrányait, alkalmazásának korlátait. A szerző ennek az elvnek megfelelően igyekszik az olvasó számára a matematikai statisztika fogalmait (általában elég nehéz, elvont fogalmait) világossá tenni és csak ezután megfogalmazni a statisztikai tételt, vagy módszert, anélkül, hogy ezek bizonyításába vagy részletesebb matematikai tárgyalásába belemenne. Általában rendkívül jó érzékkel találja meg azt a határt, ami a gyakorlati módszer alkalmazásához feltétlenül szükséges, de megértése a matematikában nem jártas olvasót sem veszi túlzottan igénybe. Talán nem ártott volna egyes helyeken kicsit több (esetleg a kezdő olvasó számára kihagyható) matematikai részt közölni. Ez nagymértékben növelte volna a könyvnek az egyetemi oktatásban való felhasználhatóságát, hiszen az egyetemi hallgatók igényeit kielégítő matematikai statisztika könyv mind a mai napig nem készült.

A könyv felépítése általában követi a statisztika könyvek többsége által követett sorrendet. Egy rövid valószínűségszámítási bevezetés után a mintavételi módszerek tárgyalása következik. A szokásos sorrendtől eltérően (de feltétlenül helyeselhetően) ezután az eloszlás- és sűrűségfüggvény becslésére vonatkozó módszerek következnek.

A következő fejezet a becslés elmélet módszereit és fogalmait tárgyalja. Ezután a hipotézis vizsgálatra, majd a szórás analízisre kerül sor.

A korreláció- és regresszióanalízis című fejezet a legmegszokottabb problémák tárgyalása után kitér a többváltozós eset vizsgálatára, majd az elhelyezési problémákra.

Az utolsó fejezet a minőségellenőrzés problémáival foglalkozik.

A könyv használhatóságát nagymértékben fokozza a benne található számos táblázat. A csatolt irodalomjegyzék talán nem mindig a legszerencsésebben válogatja össze a kezdő olvasónak ajánlható könyveket.

Egy a „Szakkifejezések idegen nyelvű jegyzéké"-nek csatolása a könyvhöz más szerzők számára is követendő példa lehet.

A könyv gondos kiállítása a kiadó és a szerkesztő lelkiismeretes munkáját dicséri.

Révész Pál

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1969 első félévében jelentek meg. A jegyzékben általános és középiskolai *tankönyvek*, felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

ARATÓ MÁTYÁS: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*, a Bolyai János Matematikai Társulat kiadása, Budapest, 1968, 160 oldal, 90,— Ft.

BAJCSAY PÁL: *Variációszámítás* (3. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, C. II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 88 oldal, 8,50 Ft.

BAJCSAY PÁL: *Közönséges differenciálegyenletek I.*, (4. kiadás), Műszaki Matematikai Gyakorlatok, B. VII*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 290 oldal, 27,50 Ft.

BAJCSAY PÁL—FAZEKAS FERENC: *Közönséges differenciálegyenletek II.*, Műszaki Matematikai Gyakorlatok, B. VII.**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 324 oldal, 31,— Ft.

BALOGH ARTUR: *A logarléc* (5. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, 1969, 176 oldal, 10,— Ft.

BANACH STEFAN: *Differenciál- és integrálszámítás* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 460 oldal, 56,— Ft.

BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 360 oldal, 26,— Ft.

CARMAN, R. A.: *Programozott vektoralgebra* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 120 oldal, 15,50 Ft.

CRISTESCU, R.—MARINESCU, G.: *Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 224 oldal, 18,— Ft.

CZAPÁRI ENDRE—HORVAY KATALIN—PÁLMAY LÓRÁNT: *Tanári segédkönyv a gimnázium és szakközépiskolák III. osztályában a matematika tanításához* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 308 oldal, 32,— Ft.

ELŐD ISTVÁNNÉ: *Számoljunk együtt! 5—6. osztály*, (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 362 oldal, 19,— Ft.

ERHARDT IMRE: *Tanári kézikönyv a 7. osztály számtan-mértan tanításához* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 280 oldal, 14,— Ft.

FARAGÓ LÁSZLÓ: *Szöveges feladatok megoldása egyenlettel* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 208 oldal, 11,20 Ft.

FREUD GÉZA: *Orthogonale polynome*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969, 294 oldal, 175,— Ft.

GÁSPÁR GYULA—RAISZ IVÁN—SZARKA ZOLTÁN: *Műszaki Matematika* III. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 328 oldal, 41,— Ft.

GÁSPÁR GYULA—SZARKA ZOLTÁN: *Műszaki Matematika* VI. kötet, (Komplex függvénytan), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 176 oldal, 25,50 Ft.

HORVAY KATALIN—PÁLMAY LÓRÁNT: *Tanári segédkönyv a gimnázium és szakközépiskolák I. osztályában a matematika tanításához* (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 192 oldal, 20,— Ft.

ITELSZON, L. B.: *Matematikai és kibernetikai módszerek a pedagógiában* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 300 oldal, 21,— Ft.

KERÉKJÁRTÓ BÉLA: *Les Fondaments de la Géométrie I*, (2. kiadás), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969, 340 oldal, 250,— Ft.

Matematikai érdekességek, Szerkesztette HÓDI ENDRE, Gondolat Kiadó, Budapest, 1969, 288 oldal, 25,— Ft.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Matematika* (7. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 808 oldal, 62,— Ft.

PETRICH GÉZA: *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 414 oldal + 1 melléklet, 60,— Ft

PETRICH GÉZA: *Ábrázoló geometriai példatár* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 180 oldal, 17,— Ft.

PONOMARJOV, K. K.: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása* (Gyakorlati feladatok), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 258 oldal, 18,50 Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája.* (2. kiadás), Gondolat Kiadó, Budapest, 1969, 270 oldal, 24,50 Ft.

PRÉKOPA ANDRÁS: *Lineáris programozás I.*, a Bolyai János Matematikai Társulat kiadása, Budapest, 1968, 402 oldal, 110,— Ft.

Proceedings of the Colloquium of Information Theory, I, II., Ed. A. RÉNYI, a Bolyai János Matematikai Társulat kiadása, Budapest, 1968, 520 oldal.

RALSTON, ANTHONY: *Bevezetés a numerikus analízisbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 572 oldal, 100,— Ft.

RIESZ, F.—SZ. NAGY, B.: *Leçons d'Analyse Fonctionelle* (5. kiadás), Akadémiai Kiadó—Gauthier—Villars Ed., Budapest—Paris, 1968, 448 oldal, 250,— Ft.

Studies in Mathematical Statistics. Theory and Applications. Ed. by SARKADI, K. and VINCZE, I., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 210 oldal, 100,— Ft.

SZABÓ ÁRPÁD: *Anfänge der griechischen Mathematik*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969, 496 oldal, 145,— Ft.

VARGA JÓZSEF: *Gyakorlati programozás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 324 oldal, 32,— Ft.

VINCZE ISTVÁN: *Matematikai statisztika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 352 oldal, 60,— Ft.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat beérkezett: 1969. V. 23. — Példányszám: 1500 — Terjedelem: 19,25 (A5) ív

69-7310 — Szegedi Nyomda

ОГЛАВЛЕНИЕ

К. Ренъи: Научные труды 1
О. Варга: Научные труды 3
Ференц Картеси: Аффинно-правильная пара пятиугольников, выведенная из выпуклого пятиугольника 7
Ласло Фейеш Тот: Итерационные методы, касающиеся многоугольников 15
Енё Хорват: Об одной задаче на минимум по сумме расстояний 25
Анна Ли и Ласло Редеи: Толкование ранга матрицы в теории колец 39
Дёрдь Секереш: Косые конфигурации 43
Ласло Алпар: Об одном косвенном условии типа Таубера абсолютной сходимости 53
Барна Сенаши: Об одном до сих пор неизвестном математическом труде Игнаца Мартыновича 57
Эрвин Фрид: Об одном свойстве полного кольца матриц 63
Илона Палашти: Об общих рёбрах Гамильтоновых окружностей линейных полных графов 71
Ференц Сас: О радикалях колец. II. 99
Имре Катаи: Распределение решений специальных диофантовых уравнений 117
Дюла Катона: Графы, векторы и неравенства теории вероятностей 123
Ласло Ловас: Связь между теоретико-арифметическими свойствами многочленов и их подстановочных значений. 129
Золтан Шебештьен: О непрерывных инволюциях Банаховых алгебр 133
Имре Катаи: Теорема о локальном предельном распределении в теории чисел. .. 137
Ласло Бабаи: О раскраске бесконечных графов 141
Доклад о конкурсе памяти М. Швейцера 1968 года 145
Задачи 173
Сообщения 181
Из жизни общества 189
Рецензии книг 211

CONTENTS

K. Rényi: Scientific works 1
O. Varga: Scientific works 3
F. Kárteszi: On an affin-regular pair of pentagons derived from a convex pentagon 7
L. Fejes Tóth: Iteration methods for polygons 15
J. Horváth: On a minimum problem concerning sums of distances 25
A. Lee and L. Rédei: On the ringtheoretical interpretation of the rang of matrices 39
G. Szekeres: On some skew configurations 43
L. Alpár: On a Tauberian condition of absolute convergence of certain series 53
B. Szénássy: On an hitherto unknown mathematical paper of I. Martinovics 57
E. Fried: On a property of the full matrix-ring 63
I. Palásti: On the common edges of Hamilton-lines of the linear complete graph. 71
F. Szász: On radicals of rings II. 99
I. Kátai: On the distribution of the solutions of special Diophantine equations 117
G. Katona: Graphs, vectors and inequalities in probability theory 123
L. Lovász: On some connections between algebraic and arithmetic structure of polynomials 129
Z. Sebestyén: On continuous involutions of Banach-algebras 133
I. Kátai: On a local limit theorem in number theory 137
L. Babai: On coloring of infinite graphs 141
Report on the M. Schweitzer competition 1968. 145
Problems 173
News 181
Activity of the Society 189
Book-review 211

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564

312.046

Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

20. évfolyam, 1969

3-4

2

RÉNYI KATÓ ÉLETE ÉS MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA

TURÁN PÁL

Rényi Katót egy év híján 25 éve ismertem. A dolgok természetes rendje az, hogy a tanítványok, volt aspiránsok búcsúztatják volt vezetőjüket, emlékezve és emlékeztetve annak matematikai munkásságára. Annál rendhagyóbb, tragikusabb az, hogy Rényi Katót, huszonötéves barátomat, volt aspiránsomat most én parentálom el, áttekintve matematikusi munkáját. A matematikai veszteség érzetét tetézi az, hogy alkotóereje teljében távozott körünkből. Hogy ez mennyire így van, mutatja sajtó alatt álló utolsó, Rényi Alfréddal közösen írott dolgozatának bevezetése („On Prüfer code for k-trees"; a dolgozatot Rényi Alfréd már egyedül rendezte sajtó alá és előadta az ez év augusztusában Balatonfüreden rendezett kombinatorikai kollokviumon). Ennek bevezetésében állanak a következő sorok: „...The results of § 2 — on which everything else in this paper is based — are due almost exclusively to Catherine Rényi..." Sokoldalú érdeklődése dolgozatai jegyzékéből is kitűnik; ezek közül azonban a fentemlített dolgozat az első, amely szorosabb értelemben vett kombinatorikával foglalkozik. A sors kegyetlensége nyilván egy újabb fejlődés több mint lehetőségét vágta el.

Szelleme meg fogja bocsátani nekem, hogy azzal kezdem, hogy 1924. október 29-én született Budapesten.* Egyetemi tanulmányait 1941-ben kezdte meg a budapesti egyetemen; 1945-ben a szegedi, majd 1946/47-ben a leningrádi egyetemen folytatta és a budapesti egyetemen fejezte be utána. 1945-ben díjtalan gyakornokká nevezték ki a budapesti egyetemen; ilyen minőségben igen aktív részt vett a Matematikai Intézet könyvtárának megmentésében. 1949-ben szerzett abszolutoriumot. 1946-ban ment férjhez Rényi Alfrédhoz; házasságukból egy lányuk született. 1950-ben tanársegéd lett tanszékemen, majd 1951—1954-ig aspiráns komplex függvénytani tárgykörből. Aspiranturája befejeztével Fejér tanszékére került át, mint tanársegéd. Kandidátusi disszertációját 1957-ben védte meg. 1958-ban adjunktusnak, 1963-ban docensnek nevezték ki az Analízis I. tanszéken.

Rényi Kató munkáinak túlnyomó része a komplex függvénytan körébe tartozik. Ezek megvilágítására tekintsük először az

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{\lambda_\nu}$$

hatványsort, melynek konvergenciakörének sugara legyen 1 és a pozitív egész ex-

* A szereplő adatokat Rényi Alfréd közléséből veszem és ezekért ezúttal is köszönetemet fejezem ki neki.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ponensekre álljon fenn a

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\lambda_\nu}{\nu}=\infty \tag{2}$$

ún. Fabry-féle hézagfelvétel. Fabry klasszikus tétele szerint az egységkörvonal e függvény *pontos* egzisztenciatartománya, ennek minden pontja $f(z)$ szinguláris pontja. Ebből rögtön következik, hogy ha $0<|a|<1$, úgy, ha a b_ν-számok az

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu(z-a)^{\mu_\nu} \tag{3}$$

a-körüli hatványsorfejtés együtthatóiként vannak értelmezve, ahol μ_ν azon összes kitevőkön fut végig, melyekhez tartozó b_ν együtthatók nem tűnnek el, úgy a

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\mu_\nu}{\nu}=\infty \tag{4}$$

Fabry feltétel *nem* állhat fenn. Ha $\Delta_a(n,f)$ jelenti az $f(z)$ függvénynek $z=a$ hely körüli kifejtésében az első n együttható körül az eltűnők számát, úgy tehát $a\neq b$, $0\leqq|a|,\ |b|<1$ mellett a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_a(n,f)+\Delta_b(n,f)}{n}=2 \tag{5}$$

reláció nem állhat fenn. Ezzel kapcsolatban két kérdés merült fel. Az elsőt Pólya és Gelfond egymástól függetlenül vetették fel: az irodalomban Pólya nevén szerepel a sejtés. Ez azzal kapcsolatban merült fel, hogy a fenti, a Fabry-féle tételen alapuló bizonyítás nyilván nem alkalmazható azon esetben, mikor $f(z)$ transzcendens egész függvény és azt kérdezi, hogy vajon ez esetben fennállhat-e egyidejűleg (2) és (4), illetőleg teljesülhet-e (5). Ha a λ_ν kitevőkre (2) helyett a sokkal erősebb megszorítást jelentő

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\geqq q>1$$

ún. Hadamard-féle hézagfeltétel teljesül $f(z)$ hatványsorának kitevőire, úgy Erdős — akivel Pólya közölte sejtését — bebizonyította, hogy ha a transzcendens egész $f(z)$ $z=a$ körüli hatványsorba fejtése Hadamard-hézagos, úgy $b\neq a$-ra a $z=b$ körüli hatványsorfejtése nem lehet Fabry-hézagos sem, de a „tiszta Fabry-hézagosság" jóval nehezebb esetével ő sem boldogult. A probléma első megoldása a lényeges tartalma Rényi Kató kandidátusi disszertációjának. Ebben (l. még [5])* nemcsak azt mutatja meg igen elegánsan, hogy $a\neq b$ esetén nem lehet mindkét kifejtés egyszerre Fabry-hézagos, hanem az (5)-nél jóval többet mondó

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\Delta_a(n,f)+\Delta_b(n,f)}{n}\leqq 1 \tag{7}$$

egyenlőtlenség is fennáll és, mint azt $f(z)=\sin z$ $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$ esete mutatja, itt már az egyenlőség is elérhető. A második kérdést — Rényi Kató disszertációjának

* A szögletes zárójelbe tett számok az előző számban megjelent dolgozatlistára vonatkoznak.

hatására — Kővári Tamás vetette fel; ez azt kérdezi, hogy véges konvergenciakör esetén (5) milyen alakban helyes. Eredménye* — némileg egyszerűsített formában — azt mondja ki, hogy ez esetben (7) jobb oldalán 1 helyett $\frac{3}{2}$-del lesz igaz az egyenlőtlenség és ismét alkalmas példa mutatja, hogy ez nem javítható. Gondolatmenete nem alkalmazható egész függvényekre.

A Rényi Kató által megnyitott kutatási irány távolról sem látszik kimerítettnek. (7) bizonyítása nyilván azt is kiadja, hogy bármilyen egész ν-re

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Delta_a(n,f)+\Delta_b(n,f^{(\nu)})}{n} \leqq 1 \tag{8}$$

is fennáll; a tétel $f^{(\nu)}$ helyett f-re alkalmazott differenciáloperátorok elég általános osztályaira is kiterjeszthetőnek látszik.

Rényi Kató (7) alatti tételét az egész függvény ϱ rendjétől és τ típusától függően erősebb formában még tovább szigorította (l. [8]). A

$$\Delta_a(n,f)+\Delta_b(n,f)-n = \Delta_{a,b}(n,f) \tag{9}$$

jelölés bevezetésével (7) nyilván

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Delta_{a,b}(n,f)}{n} \leqq 0 \tag{10}$$

alakba írható általánosan. Mármost ő megmutatta, hogy tetszőleges kis pozitív ε mellett az élesebb

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Delta_{a,b}(n,f)}{n^{1-\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}} \leqq 0 \tag{11}$$

és

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Delta_a(n)}{n^{1-\frac{1}{\varrho}}} \leqq e^2\left(\frac{\tau}{e}\right)^{\frac{1}{\varrho}}\left|\frac{a-b}{2}\right| \tag{12}$$

egyenlőtlenségek is fennállnak.

Fenti eredményeiből Rényi Kató érdekes további következtetéseket vont le (l. [8]). Így periodikus egész függvényekre egy tollvonással nyerte a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Delta_a(n,f)}{n} \leqq \frac{1}{2} \tag{13}$$

egyenlőtlenséget, melyben nyilván az $\frac{1}{2}$ állandó nem helyettesíthető kisebbel. Tehát pl. periodikus egész függvény hatványsora nem lehet Fabry-hézagos. A (13) egyenlőtlenség javítja Gelfond azon eredményét** 1941-ből, mely szerint egy $\varrho \geqq 1$ rendű periodikus egész függvényre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Delta_a(n,f)}{n} \leqq 1-\frac{1}{2\varrho}.$$

* „On the gap-theorem of Pólya", Journ. of London Math. Soc. Vol. 34 (1959), p. 185—194.
** „O koefficientach periodiceskich funkcii", Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. Vol. 5 (1941), p. 95—98.

Egy további alkalmazást talált az Hermite kifejtés elméletére, mely elmélet az utóbbi években a matematika újabb és újabb területein került előtérbe (l. [8]). (13) egy ötletes alkalmazásával megmutatta, hogy, ha

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu H_\nu(x) \tag{14}$$

egy 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Hermite-sora és $Z(n)$ jelenti az első n együttható közül az eltűnők számát, úgy fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z(n)}{n} \leqq \frac{1}{2},$$

sőt, szigorúbban

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z(n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leqq \frac{\pi^2}{2} e^2 \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

egyenlőtlenség.

Még távolibbnak tűnő alkalmazási területet is talált a végtelen lineáris egyenletrendszerek elméletében (l. [9]). E terület Fourier óta sok vizsgálat tárgya volt; elegendő Riesz Frigyes híres könyvére hivatkozni 1913-ból. Különösen klasszikus példák a

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^k a_k = b_k \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{2k-1} a_k = b_k \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{2k} a_k = b_k \tag{17}$$

alakú homogén és inhomogén rendszerek. H. von Koch* egy tételének javításaként Rényi Kató a (16) és (17) alatti homogén rendszerek minden nemtriviális megoldására a

$$\overline{\lim_k} |a_k|^{\frac{1}{k}} \geqq 1 \tag{18}$$

relációt mutatta ki, ismét tollvonásos eleganciával.

Rényi Kató (13) alatti tételének érdekes approximációelméleti alkalmazását találták L. A. Rubel és B. A. Taylor. Legyen a számhalmaz, melyen approximálni akarunk, az egész számok halmaza és az approximálandó függvények azon A_n számsorozatok ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), melyekre

$$\frac{\log |A_n|}{|n|} \quad \text{felülről korlátos.} \tag{19}$$

Ha az approximáló $P(x)$ polinomok m_ν kitevői a nemnegatív egészek olyan M soro-

* „On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations", Int. Congr. of Math. Cambridge 1912.

zatára vannak korlátozva, melynek alsó sűrűsége $>\frac{1}{2}$, továbbá a B_n előírt „súlyfüggvény" csupán a

$$\lim_{|n|\to\infty} |B_n|^{\frac{1}{|n|}} \to 0 \tag{20}$$

által van megkötve és, mint ilyen, rögzített, úgy tetszőleges (19)-beli A_n sorozathoz és tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-hoz van oly M-hez tartozó kitevős $P(x)$ polinom, hogy minden egész n-re

$$|P(n) - A_n| \, |B_n| \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Mint Rényi Alfréddal megjegyezték (l. [18]), (13)-ból rögtön következik, hogy ha $f(z)$ tetszőleges transzcendens egész függvény, úgy $f(z^n)$ nem lehet periodikus, ha $n \geqq 3$; $n = 2$-re még lehet. Ezen megjegyzés volt kiindulópontja azon dolgozatuknak, melyben megmutatták, hogy nemcsak $f(z^n)$, hanem $f(P(z))$ sem lehet periodikus, hacsak $P(z)$ tetszőleges, legalább harmadfokú polinom. Mint megmutatták, tetszőleges másodfokú $P(z)$-re a tétel nem áll, alkalmas f mellett. Ezen eredmények irodalmi hatásának illusztrálására H. S. Shapiro* és I. N. Baker** dolgozatait említem és utóbbiban azon egyetlen tételt, hogy $f(g(z))$ biztosan nem periodikus, ha $g(z)$ nem az és $f(z)$ oly egész függvény, melynek rendje $< \frac{1}{2}$. Ugyancsak Rényi Alfréddal feleltek pozitív értelemben (l. [17]) azon kézenfekvő kérdésre, vajon Rényi Kató (7) alatti egyenlőtlenségében nem helyettesíthetők-e a $\Delta_a(n, f)$ mennyiségek, az eltűnő együtthatók számosságfüggvényei, $S_a(n, f)$-ekkel, a „kis" együtthatók számosságfüggvényeivel, alkalmasan értelmezve az együtthatók „kis" voltát. Eredményük, egy elegáns speciális esetben, azt mondja ki, hogy ha

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \tag{22}$$

rögzített 0-adrendű egész függvény és a pozitívrendű, (3) alatti, $f(z)$-ben $S_a(n, f)$ az

$$|b_\nu| \leqq |c_\nu| \tag{23}$$

egyenlőtlenséget kielégítő indexek számosságfüggvénye, úgy fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_a(n, f) + S_b(n, f)}{n} \leqq 1 \tag{24}$$

egyenlőtlenség, (7)-tel teljes formai egyezésben.

Nem lenne teljes a kép Rényi Kató komplex függvénytani működéséről, ha nem ejtenénk szót általa felvetett kérdések irodalmi visszhangjáról. Egyik ilyen a következő. Jelentsen*** $G(z)$ tetszőleges egész függvényt és $D(G)$ azon ω komplex számok halmazát, hogy az $f(z) = \omega$ egyenlet gyökei a z-síkon semmilyen origó csúcsú szögteret nem hagynak ki. Rényi Kató megadott egy olyan $G(z)$ egész függvényt, melyre $D(G)$ egyetlen pontból áll és kérdezte (l. [19]), állhat-e $D(G)$ két

* „The functional equation $f(P(z)) = g(Q(z))$ and a problem of A. and C. Rényi", Studia Scient. Math. Hung. Vol. 1 (1966) p. 255—259.

** „On some results of A. Rényi and C. Rényi concerning periodic entire functions", Acta Szeged T. XXVII. Fasc. 3—4. (1966), p. 197—200.

*** Lecture Notes Summer Institut on entire functions, Univ. of California, La Jolla, Amer. Math. Soc. 1966.

pontból. A. A. Goldberg* megmutatta, hogy ilyen G is létezik (sőt, hogy $D(G)$ lehet akármilyen korlátos megszámlálható zárt halmaz) a síkon; ezeken, a nyitott síkon és a pontozott síkon kívül más előírhatósága nem ismert. Más problémái W. K. Hayman** „Research problems in function theory" c. könyvébe lettek felvéve; ezek egyikét, mely azt kérdezi, vajon lehetséges-e, hogy egy egész függvény egyik Julia-vonalához más kivételes érték tartozik, mint egy másikhoz, K. F. Barth és W. J. Schneider*** oldották meg pozitív értelemben.

[4] alatti, Rényi Alfréddal írott dolgozatában a komplex függvénytan hidrodinamikai alkalmazásai során felhasznált és a szakirodalomban sehol sem indokolt azon feltevéssel foglalkoztak, mely szerint egy síkbeli tartományban áramló ideális folyadék örvény- és forrásmentes áramlásának komplex potenciálja a tartományban *egyrétű* függvény. Megmutatták a dolgozatban, hogy ez áramlás egy fizikailag plauzibilis tulajdonsága alapján félsík és sávalakú tartományra levezethető.

Utolsó komplex függvénytani dolgozatát, melynek tárgyáról előadott nyáron még Kanadában, már nem láthatja nyomtatásban. Ezt Rényi Alfréd rendezte sajtó alá és a Matematikai Lapokban áll megjelenés alatt (l. [21]). Ebben megmutatja, hogy ha $f(z)$ oly transzcendens egész függvény, melyre $f'(z)$ a 0-t nem veszi fel, úgy $f(z)$-nek van aszimptotikus értéke, azaz van oly végtelenbe menő folytonos görbe, melyen $f(z)$ egy véges határértékhez tart, virtuóz megjegyzéseket fűzve a tétel bizonyítási változatainak, valamint általánosításainak lehetőségeihez.

Egyébirányú munkái közül a kombinatorikus jellegűt már említettük; most számelméleti eredményeire térünk át. Ezek közül elsősorban a [3] dolgozat érdekes, melyet az Első Magyar Matematikai Kongresszuson előadott. Ebben megmutatta, hogy ha

$$P(x) = \prod_{\nu=1}^{r} (a_\nu x - b_\nu)^{c_\nu}, \tag{25}$$

ahol a_ν, b_ν egészek, $a_\nu \neq 0$, a $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ számok különbözők, $1 \leqq c_\nu < k$ és egész és $P(x)$-nek prím p-vel nincs p^k alakú osztója (tehát oly p^k, mely minden $P(n)$ helyettesítési érték osztója volna), úgy azon $n \leqq x$ egészek száma, melyekre $P(n)$ „k-ik hatványmentes", azaz nem osztható egyetlen prím k-ik hatványával sem, x-szel osztva egy véges határértékhez tart, azaz van „sűrűsége". Alkalmazásként meghatározta azon egészek sűrűségét, melyekre a

$$4m+1, \quad 4m+2, \quad 4m+3$$

számok közül épp j darab ($j=0, 1, 2, 3$) négyzetmentes. Orientációképp megjegyezzük, hogy abban a jóval nehezebb esetben, mikor $r \geqq 3$-mal $P(x)$ irreducibilis r-edfokú egész együtthatós polinom, melynek nincs p^{r-1}-alakú osztója, Erdős megmutatta 1953-ban, hogy végtelen sok olyan egész számot állít elő, mely $(r-1)$-ik hatványmentes és Hooley 1966-ban, hogy ezek sűrűsége pozitív. Két szép feladata szerepelt, ill. szerepel a Matematikai Lapok feladatrovatában; a régebbi egy Hadamard által Hajóssal közölt állítás általánosítása, melynek pontos históriája

---

* „O raspredelnü znacsenü celoi funkcii po argumentam", Acta Math. Hung. 19 (1968) p. 191—199.

** The Athlone Press, London, 1967.

*** „On a problem of C. Rényi concerning Julia lines". Megjelenés alatt.

V. Thébault egy cikkében található a Mathésis 1959. évfolyamában, a másik egy érdekes prímszámkritérium, mely feljegyzései között volt. I. M. Vinogradov Bevezetés a számelméletbe c. könyvét ő fordította magyarra; fontos funkciót teljesített azzal, hogy a könyv legeredetibb részét, a nehéz feladatok sokszor igen vázlatosan közölt megoldásait az eredetinél jóval részletesebben dolgozta ki.

Egészen más tárggyal foglalkozó előadást tartott a Második Magyar Matematikai Kongresszuson „Über ein Extremalproblem in der Reihentheorie" címmel. A kérdés Erdős és Rényi Alfréd véletlen gráfokra vonatkozó vizsgálataiban merült fel és a következő. Legyen $0 < x \leqq 1$ rögzített és tekintsünk olyan $\sum a_n$ pozitív tagú sorokat, melyek összege 1 és $\max_n a_n = x$. Ha egy ilyen sor tagjait két diszjunkt osztályba osztjuk és ezek összegei S_1, ill. S_2 (ahol tehát $S_1 + S_2 = 1$) úgy a kérdés

$$\sup \inf |S_2 - S_1| = \varphi(x)$$

meghatározása, ahol az infimum a rögzített sor összes szétbontásaira, a supremum pedig a vizsgált soroszfályra vonatkozik. Szép eredménye az, hogy a supremum egyben maximum és ha a $0 < x \leqq 1$ közt

$$\frac{1}{2k+1} \leqq x \leqq \frac{k+1}{2k^2+k+1}$$

$$\frac{k+1}{2k^2+k+1} \leqq x \leqq \frac{1}{2k-1}$$

alakú közökre bontjuk, úgy az első típusú x-ekre

$$\varphi(x) = \frac{1-(k+1)x}{k},$$

míg a második típusúakra

$$\varphi(x) = 2kx - 1.$$

E bizonyítását azonban túl hosszúnak találván, előadása végén felvetette egy rövidebb bizonyítás szükségességét. Egy ilyent J. H. van Lint talált később és publikálta*. Ismét másirányú előadást tartott Prágában 1950-ben; itt Rényi Alfréddal és Surányi Jánossal végzett azon vizsgálatairól számolt be, melyek halmazok Marczewski-féle függetlenségére vonatkoznak. Ezen eredményei a [2] dolgozatban vannak részletesen kidolgozva.

Kitűnő előadó volt; egyetemi előadásai, melyek főleg a komplex függvénytan különféle fejezeteire vonatkoztak, közkedveltek voltak gondos kidolgozásuk, világos formájuk miatt, színezve azt az előadó szeretetreméltó egyéniségével. Élénken résztvett matematikai közéletünkben; jelentős részt vállalt pl. az Első Magyar Matematikai Kongresszus szervezésében. Élénk részt vett az egyetem életében is, annak viharjában és csendjében. Nem válogatott a feladatokban; reformmunkálatot, hallgatók ügyeinek támogatását, évfolyamfelelősi megbizatást egyként lelkesen vállalt, hozzáértéssel és tapintattal végzett. Korai eltávozásával matematikai életünk szelleme teljénél levő kutatót, szuggesztív tanárt, teljes embert veszített.

* „Über die Approximation von Zahlen durch Reihen mit positiven Gliedern" ,Colloqu. Mathem. Vol. IX. Fasc. 2 (1962), p. 281—285.

ЖИЗНЬ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАТО РЕНИ

П. ТУРАН

THE LIFE AND WORKS OF CATHERINE RÉNYI

P. TURÁN

EGÉSZ FÜGGVÉNYEK ASZIMPTOTIKUS ÉRTÉKEIRŐL*

RÉNYI KATÓ

1. §. BEVEZETÉS

Legyen $f(z)$ egy nem konstans egész függvény. Ha létezik olyan, egy z_0 pontból induló és a végtelenbe tartó G görbe,** hogy ha z a G görbén haladva a végtelenhez tart, akkor $f(z)$ konvergál a véges a értékhez, akkor az a komplex számot $f(z)$ *aszimptotikus értéké*nek és a G görbét $f(z)$ *aszimptotikus út*jának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy csak transzcendens egész függvénynek létezhet aszimptotikus értéke, ugyanis ha $f(z)$ legalább első fokú racionális egész függvény, akkor ha z bármely úton végtelenhez tart, $f(z)$ is végtelenhez tart.

A transzcendens egész függvények közül egyeseknek van aszimptotikus értéke, másoknak nincs. Például az e^z egész függvénynek egyetlen egy aszimptotikus értéke van, mégpedig a 0: ha z a negatív valós tengely mentén tart végtelenhez, akkor e^z nyilvánvalóan 0-hoz tart. A negatív valós tengely tehát e^z-nek (a 0 aszimptotikus értékhez tartozó) aszimptotikus útja. Megjegyzendő, hogy az a tény, hogy 0 az e^z függvénynek aszimptotikus értéke, következménye annak, hogy az e^z függvény a 0 értéket nem veszi fel.

Ha egy $f(z)$ transzcendens egész függvény valamely a értéket a nyílt komplex számsíkon sehol sem vesz fel (a Picard tétel szerint ilyen a érték adott $f(z)$ egész függvényhez csak egyetlen egy lehet), az a számot az $f(z)$ függvény *Picard féle kivételes értéké*nek nevezzük. Általában igaz mármost, hogy ha az $f(z)$ függvénynek van Picard féle kivételes értéke és ez az a szám, akkor a az $f(z)$ függvénynek egyben aszimptotikus értéke is.

Nem nehéz példát adni olyan transzcendens egész függényre, amelynek nincs aszimptotikus értéke: a 4. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy például az e^z+z és $\cos z$ egész függvények ilyenek. Egy egész osztályát nyerjük az aszimptotikus értékkel nem rendelkező transzcendens egész függvényeknek a következő módon.

Legyen $m(r)=\min\limits_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}|f(re^{i\varphi})|$. Vannak olyan egész függvények, amelyekre

$$\limsup_{r\to+\infty} m(r) = +\infty. \tag{1}$$

Ha $f(z)$ ilyen függvény, akkor $f(z)$-nek nyilvánvalóan nem lehet aszimptotikus

* E dolgozat tartalmát a szerző 1969 júniusában előadta Winnipegben (a University of Manitobá-n) és Kingstonban (a Queen's University-n a Canadian Mathematical Congress nyári szemináriumán). A dolgozatot Rényi Alfréd rendezte sajtó alá.

** E görbéről az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy minden véges szakasza rektifikálható.

értéke. Vizsgáljuk meg például az

$$f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \tag{2}$$

egész függvényt. Könnyen belátható, hogy ha N természetes egész szám,

$$m(2^{N+\frac{1}{2}}) \geqq \prod_{n=0}^{N} (2^{N+\frac{1}{2}-n} - 1) \cdot \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - 2^{N+\frac{1}{2}-n})$$

és így — felhasználva a minden $x > 0$-ra érvényes $1 - x \geqq e^{-\frac{x}{1-x}}$ egyenlőtlenséget — következik, hogy

$$m(2^{N+\frac{1}{2}}) \geqq 2^{\frac{(N+1)^2}{2}} \cdot e^{-4(\sqrt{2}+1)}, \tag{3}$$

tehát a (2) függvényre (1) teljesül és így nincs aszimptotikus értéke. Ismeretes például (lásd [1]), hogy ha $f(z)$ tetszőleges $\frac{1}{2}$-nél kisebb rendű, vagy $\frac{1}{2}$-rendű 0 típusú, egész függvény, akkor (1) teljesül. Egy másik osztályát nyerjük aszimptotikus értékkel nem rendelkező egész függvényeknek, ha az erősen hézagos hatványsorú egész függvényeket vizsgáljuk. PÓLYA GYÖRGY [2] bebizonyította, hogy ha

$$f(z) = \sum a_n z^{\lambda_n} \tag{4}$$

egy *végesrendű* egész függvény, ahol $\{\lambda_n\}$ a természetes számok egy olyan növekvő sorozata, amelyre teljesül a $\frac{\lambda_n}{n} \to +\infty$ ún. *Fabry-féle hézagfeltétel*, akkor $f(z)$-nek nincs aszimptotikus értéke. KŐVÁRI TAMÁS [3] viszont azt mutatta meg — TURÁN PÁL hatványösszeg-módszere felhasználásával —, hogy ha $f(z)$ tetszőleges egész függvény, amelynek hatványsora (4) és a λ_n kitevőkre teljesül a $\lambda_n > n(\log n)^{1+\varepsilon}$ feltétel, valamely $\varepsilon > 0$-ra, akkor $f(z)$-nek nincs aszimptotikus értéke.

E dolgozat célja a következő tétel bizonyítása.

1. TÉTEL. *Legyen $f(z)$ olyan transzcendens egész függvény, hogy $f'(z)$-nek a 0 Picard-féle kivételes értéke. Akkor $f(z)$-nek van aszimptotikus értéke.*

E tétel következik HUBER [4] következő általános tételéből:

2. TÉTEL *(Huber tétele): Ha $g(z)$ transzcendens egész függvény, akkor létezik olyan, a végtelenbe vezető lokálisan rektifikálható G görbe, hogy*

$$\int_G \frac{|dz|}{|g(z)|} < +\infty. \tag{5}$$

A 2. tételből az 1. tétel következik, ugyanis, ha $f(z)$ olyan transzcendens egész függvény, amelyre $f'(z) \neq 0$, akkor $g(z) = \frac{1}{f'(z)}$ is transzcendens egész függvény, és így a 2. tétel szerint létezik olyan, a végtelenbe vezető lokálisan rektifikálható G görbe, hogy

$$\int_G |f'(z)| \cdot |dz| < +\infty \tag{6}$$

és így az

$$A = \int_G f'(z)\, dz \tag{7}$$

integrál is létezik, tehát $\lim f(z)$ létezik, ha z a G görbén haladva tart $+\infty$-hez, vagyis a G görbe $f(z)$-nek aszimptotikus útja.

HUBER tételét — igen nagy — a szubharmonikus függvények elméletére támaszkodó — apparátussal bizonyította be: bizonyítása rendkívül hosszú és bonyolult. A következőkben azt fogjuk megmutatni, hogy az 1. tétel közvetlen következménye a függvénytan egy klasszikus tételének, az ún. *monodrómia tétel*nek. A 2. §-ban a monodrómia-tétellel foglalkozunk, rámutatva arra, hogy e tételt több tankönyv pontatlanul fogalmazza meg. A monodrómia tétel pontatlan fogalmazása helytelenségére a 2. § két ellenpéldát is tartalmaz. A második ellenpélda HALÁSZ GÁBORtól származik: éppen ez a példa vezette el a szerzőt annak felismeréséhez, hogy az 1. tétel a monodrómia-tétel közvetlen következménye. Az 1. tétel bizonyítását a 3. § tartalmazza; míg a 4. §-ban néhány kiegészítő megjegyzést teszünk.

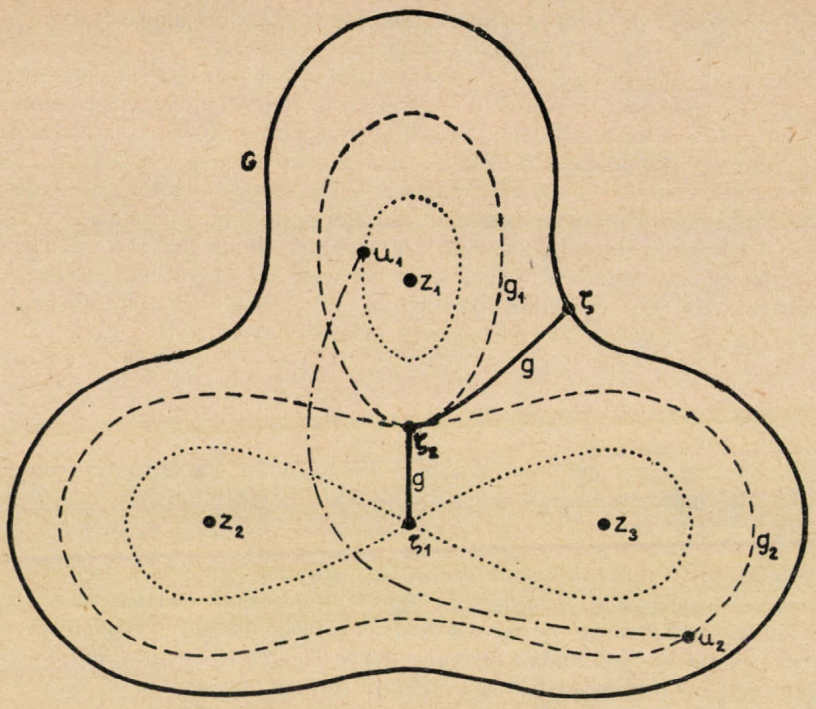
2. §. A MONODRÓMIA-TÉTELRŐL

A monodrómia-tétel egyike a komplex függvénytan legalapvetőbb tételeinek. Sajnos, e tételt számos tankönyv (l. pl. [5] 147. o.) pontatlanul mondja ki. A tétel helyes alakja a következő:

MONODRÓMIA TÉTEL. *Legyen T a komplex számsík egy egyszeresen összefüggő tartománya, és legyen z_0 a T tartomány egy pontja. Ha az $f(z)$ függvény reguláris a z_0 pont egy környezetében és bármely a T tartományban haladó, z_0-ból a T tartomány egy tetszőleges másik z_1 pontjába vezető g görbe mentén z_1-be analitikusan folytatható, akkor $f(z)$ a T tartományban egyértékű analitikus függvény.*

A hiba, amelyet sok tankönyv elkövet, az, hogy a tétel szövegéből kifelejtik azt a feltételt, hogy $f(z)$ bármely z_0-ból z_1-be vezető út mentén folytatható kell, hogy legyen, és ehelyett csak azt a lényegesen gyengébb feltételt mondják ki, hogy a függvény z_0-ból a T tartomány bármely más z_1 pontjába analitikusan folytatható legyen, vagyis ahelyett, hogy $f(z)$ *bármely* út mentén folytatható, csak azt kötik ki, hogy minden z_1-hez *van olyan* z_0-ból z_1-be vezető út, amely mentén $f(z)$ analitikusan folytatható. Ezen gyengébb feltevés mellett azonban a tétel állítása már nem igaz. Ezt két ellenpéldával fogjuk megmutatni.

1. ellenpélda. Legyen $P(z)$ egy olyan harmadfokú polinom, amelynek három különböző egyszeres gyöke van, és $P'(z)$-nek két különböző gyöke van. Jelöljék $P(z)$ gyökeit z_1, z_2 és z_3; $P'(z)$ gyökei legyenek ζ_1 és ζ_2. Tegyük fel továbbá, hogy $|P(\zeta_1)| = r_1 < r_2 = |P(\zeta_2)|$. A $|P(\zeta)| = r_2$ nívóvonalnak a ζ_2 pont nyilvánvalóan kettős pontja, vagyis e vonal olyan nyolcas alakú görbe, amely két egymással a ζ_2 pontban érintkező egyszerű zárt görbéből áll. E két zárt görbe közül az egyik — jelöljük ezt g_1-gyel — $P(z)$-nek egy gyökét, mondjuk a z_1 gyököt, a másik zárt görbe — jelöljük azt g_2-vel — $P(z)$ másik két gyökét, tehát a z_2 és z_3 gyököket tartalmazza a belsejében és a ζ_1 pont is g_2 belsejében fekszik. Míg z körbenhalad a g_2 görbén, $w = P(z)$ kétszer járja körül a w-síkon a $|w| = r_2$ kört, így a $P(\zeta_2) = v_2$ értéket még egy a ζ_2 ponttól különböző pontban fel kell, hogy vegye: jelöljük e pontot u_2-vel. Hasonlóképpen, a $P(\zeta_1) = v_2$ értéket $f(z)$ fel kell, hogy vegye a ζ_1 ponton kívül még egy, a g_1 görbe belsejében fekvő u_1 pontban. Legyen mármost R tetszőleges r_2-nél nagyobb szám és jelölje G a $P(z)$ polinomnak az R nívóhoz tartozó nívógörbéjét, vagyis a $|P(z)| = R$ feltétellel definiált görbét. Könnyen belátható, hogy G egyszerű zárt görbe, amely a g_1 és g_2 görbéket a belsejében tartalmazza. Legyen ζ a G görbe egy tetszőleges pontja, és legyen g egy a ζ pontot a ζ_1 ponttal összekötő



$$P(z_1) = P(z_2) = P(z_3) = 0$$

$$P'(\zeta_1) = P'(\zeta_2) = 0$$

$$v_1 = P(\zeta_1) \qquad v_2 = P(\zeta_2)$$

$$|v_1| = r_1 < r_2 = |v_2|$$

$$P(u_1) = v_1 \quad . \qquad P(u_2) = v_2$$

$$|P(\zeta)| = R > r_2$$

és a ζ_2 ponton áthaladó, önmagát nem metsző görbeív, amely a g_1 és g_2 görbéket csak a ζ_2 pontban metszi, és amely mentén ζ_1-ből ζ-ba haladva $|P(z)|$ szigorúan növekszik; tehát feltesszük, hogy a g görbe $P(z)$ minden $|P(z)| = r$ nívóvonalát ($r_1 \leqq r \leqq R$) egyetlen pontban metszi. Jelölje T a z-síkon azt az egyszeresen összefüggő tartományt, amelyet úgy nyerünk, hogy a G görbe belsejéből elhagyjuk a g görbeívet (beleértve annak ζ_1 végpontját is). Nyilvánvaló, hogy $P(z)$ a T tartományt a *teljes* $|w| < R$ körlapra képezi le: ugyanis G belsejében $P(z)$ minden $|w| < R$ értéket háromszor vesz fel ($P(z)$ w-helyeit multiplicitással számolva), míg a g görbeíven $P(z)$ a v_1 és v_2 értékeket a ζ_1, ill. ζ_2 pontban kettő multiplicitással veszi fel, minden más értéket azonban csak egy pontban vesz fel: így tehát $P(z)$ a T tartományban a v_1 és v_2 érték kivételével minden w értéket ($|w| < R$) legalább kétszer, az v_1

és v_2 értékeket viszont egyszer veszi fel (utóbbiakat a T belsejében fekvő u_1 ill. u_2 pontokban). Nyilvánvaló továbbá, hogy T-ben $P'(z) \neq 0$. Jelölje $z = Q(w)$ a $w = P(z)$ függvény inverz függvényét; nyilvánvaló, hogy $Q(w)$ nem egyértékű függvény. Azonban $Q(w)$ analitikusan folytatható a $|w| < R$ kör bármely w_0 pontjából bármely más w_1 pontjába, alkalmasan választott, a $|w| < R$ körben haladó görbe mentén, de nem bármely, a $|w| < R$ körben haladó ilyen görbeív mentén. Például a v_1 pontból a v_2 pontba $Q(w)$ nem folytatható semmilyen olyan görbe mentén, amely teljesen a $r_1 \leqq |w| \leqq r_2$ körgyűrűben halad: ugyanis bármely olyan görbeíven, amely összeköti az u_1 pontot az u_2 ponttal és teljes egészében a T tartomány belsejében halad, kell lennie olyan z pontnak, amelyben $|P(z)| > r_2$, hiszen u_1 a g_1 görbe belsejében, míg u_2 a g_2 görbén fekszik és a g_1 és g_2 görbék ζ_2 érintkezési pontja nem tartozik T-hez. Az 1. ábra szemlélteti a tényállást.

2. ellenpélda. (HALÁSZ GÁBOR példája). Vizsgáljuk a

$$f(z) = \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$$

egész függvényt. Nyilvánvaló, hogy $f(z)$ páratlan függvény és így $f(z)$-nek nem lehet Picard féle kivételes értéke, hiszen a 0 értéket $f(z)$ felveszi a $z = 0$ pontban és ha $f(z)$ nem venné fel a $w_1 \neq 0$ értéket, akkor a $-w_1$ értéket sem vehetné fel, mert ha $f(z_1) = -w_1$ volna, akkor $f(-z_1) = w_1$ volna; mivel azonban a Picard-tétel szerint $f(z)$-nek nem lehet két kivételes értéke, tehát egyáltalán nincs kivételes értéke. Másrészt nyilvánvaló, hogy $f'(z) \neq 0$. Így tehát a $w = f(z)$ függvény a w-sík minden pontjában lokálisan invertálható és a $w = f(z)$ függvény $z = g(w)$ inverz függvénye a w-sík bármely w_1 pontjából bármely más w_2 pontjába analitikusan folytatható; ugyanis legyenek z_1 és z_2 olyan pontok, amelyekre $f(z_1) = w_1$ és $f(z_2) = w_2$ és kössük össze a z_1 és z_2 pontokat a z-síkon egy G görbeívvel; ha a G görbe képe a $w = f(z)$ leképezésnél a w_1 és w_2 pontokat összekötő Γ görbeív, akkor $g(w)$-nek az az ága, amelyre $g(w_1) = z_1$, a Γ görbe mentén w_1-ből w_2-be folytatható. Azt, hogy $g(w)$ nem folytatható bármely w_1-et w_2-vel összekötő görbeív mentén, a következőképpen láthatjuk be. Legyen $w_1 = 0$ és $w_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ és induljunk ki a $g(w)$ függvény azon ágából, amely a 0 pontban a 0 értéket veszi fel. Mivel

$$\int_0^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

tehát, ha a w-sík valós tengelye $\left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$ szakaszán haladunk 0-ból $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$-be, $g(w)$ értéke $+\infty$-hez tart, és így $g(w)$ e szakasz mentén nem folytatható a végpontig. Másrészt $g(w)$ nyilván nem egyértékű függvény, hiszen az egész függvények közül kizárólag a lineáris függvények rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy inverz függvényük is egyértékű (és így szintén egész) függvény az egész komplex számsíkon.

3. §. AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA

Most bebizonyítjuk az 1. tételt, a monodrómia-tétel segítségével. Legyen $f(z)$ tetszőleges olyan transzcendens egész függvény, amelyre $f'(z) \neq 0$. Két esetet különböztethetünk meg: ha $f(z)$-nek van Picard-féle kivételes értéke, akkor ez

egyben aszimptotikus érték is. Így tehát feltehetjük, hogy $f(z)$-nek nincs kivételes értéke. Akkor azonban a $w=f(z)$ függvény $z=g(w)$ inverz függvénye a w-sík minden pontja egy környezetében értelmezhető. Ha $g(w)$ bármely ága bármely w_1-ből bármely w_2-be vezető *bármely* görbe mentén analitikusan folytatható volna, akkor a monodrómia-tétel szerint $g(w)$ egyértékű egész függvény volna, ami nyilván nem lehetséges. Így tehát kell léteznie egy olyan, a w_1-ből w_2-be vezető γ görbeívnek, hogy $g(w)$ egy függvényeleme w_1-ből γ mentén nem folytatható w_2-be. Feltehetjük, hogy ha w e görbe bármely belső pontja, akkor $g(w)$ még w-ig folytatható: legyen g a γ görbe képe a z-síkon. Mármost három eset lehetséges: 1. a g görbe teljesen a végesben fekszik, és a w pont képe a $g(w)$ leképezésnél egy véges z_2 ponthoz konvergál, ha w γ mentén w_2-hez tart; ezt a lehetőséget kizárhatjuk, hiszen $f'(z)\neq 0$ miatt $f(z)$ lokálisan invertálható a w_2 pont egy környezetében, és így ellentétbe jutunk feltevésünkkel. 2. A másik lehetőség, hogy $z=g(w)$ végtelenhez tart, ha γ mentén $w\to w_2$; ez esetben a g görbe az $f(z)$ függvény egy aszimptotikus útja, amely a w_2 aszimptotikus értékhez tartozik, és így állításunk ez esetben bizonyítást nyert, hiszen éppen azt akarjuk bizonyítani, hogy $f(z)$-nek van aszimptotikus útja. 3. Így csak azt a lehetőséget kell még kizárnunk, hogy ha w a γ görbe mentén w_2-hez tart, akkor $g(w)$ nem tart semmilyen határértékhez, vagyis oszcillál. Ez az eset azonban lehetetlen, ugyanis minden olyan z^* pontban, amelyhez megadható egy olyan w_2-hez konvergáló, γ-n fekvő v_n pontsorozat, hogy $g(v_n)\to z^*$, nyilvánvalóan ($f(z)$ folytonossága miatt) $f(z^*)=w_2$. Ha mármost $g(w)$ nem konvergálna sem véges határértékhez, sem a végtelen határértékhez, ha w a γ görbe mentén w_2-hez tart, akkor, elemi meggondolás szerint $f(z)$ a w_2 értéket kontinuumnyi sok ilyen z^* pontban venné fel, ami lehetetlen.

4. §. NÉHÁNY KIEGÉSZÍTŐ MEGJEGYZÉS

A) Az 1. tétel megfogalmazásában az a feltevés, hogy $f(z)$ olyan *transzcendens* egész függvény, amelyre $f'(z)\neq 0$, nyilvánvalóan helyettesíthető azzal a feltevéssel, hogy $f(z)$ olyan *nem lineáris* egész függvény, amelyre $f'(z)\neq 0$. Ugyanis, ha $f(z)$ 1-nél magasabbfokú polinom, akkor $f'(z)$ szükségképpen felveszi a 0 értéket.

B) Az 1. tétel állítását a következő heurisztikus meggondolással lehet plauzibilissé tenni: ha $f'(z)\neq 0$, vagyis ha 0 az $f'(z)$ függvénynek Picard-féle kivételes értéke, akkor 0 az $f'(z)$ függvénynek egyben aszimptotikus értéke is, vagyis megadható olyan végtelenhez tartó G görbe, amely mentén $f'(z)$ 0-hoz tart. Mármost, ha ez a G görbe úgy választható, hogy G mentén haladva $f'(z)$ oly gyorsan tart 0-hoz, hogy az $A=\int_G f'(z)\,dz$ integrál létezzék, akkor G az $f(z)$ egész függvénynek az A aszimptotikus értékhez tartozó aszimptotikus útja, vagyis $f(z)$-nek van aszimptotikus értéke. Bizonyításra szorul azonban, hogy a G görbe mindig megválasztható így, és ennek szabatos bizonyítása nem könnyű. (HUBER említett dolgozatában tulajdonképpen ezt bizonyítja be.)

A közölt heurisztikus meggondolás $f'(z)$-ről csak azt használta fel, hogy a 0 érték $f'(z)$ aszimptotikus értéke. Kézenfekvő ezért felvetni a kérdést, hogy ha ahelyett, hogy $f'(z)$-nek a 0 Picard-féle kivételes értéke, csak azt tesszük fel, hogy $f'(z)$-nek a 0 aszimptotikus értéke, következik-e már ebből is, hogy $f(z)$-nek is van aszimptotikus értéke? E kérdésre a válasz az, hogy: nem következik. Ezt a következő ellenpélda segítségével láthatjuk be. Legyen $f(z)=\cos\sqrt{z}$, akkor $f'(z)=$

$= -\frac{\sin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$ és ha z valós pozitív értékeken át tart $+\infty$-hez, akkor $f'(z)$ zérushoz tart, vagyis 0 az $f'(z)$ függvénynek aszimptotikus értéke. Azonban $f(z)=\cos\sqrt{z}$-nek nincs aszimptotikus értéke. Ennek bebizonyításához nyilván elegendő megmutatni, hogy a $\cos z$ függvénynek nincs aszimptotikus értéke. Ezt a következőképpen láthatjuk be.

Legyen $z = x+iy$, akkor

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{cosh} y - i \sin x \sinh y$$

és így $2|\cos(x+iy)|^2 = \operatorname{ch} 2y + \cos 2x$.

Ha léteznék olyan G végtelenbe tartó görbe, hogy míg z G mentén végtelenbe tart, $\cos z$ egy véges határértékhez tart, akkor e görbe mentén $|\cos z|^2$ határértéke is léteznék, és így y korlátos maradna; de akkor ez a görbe az $x=n\pi$ $(n=0, \pm1, \ldots)$ egyenesek közül végtelen sokat metszene, és az $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ egyenesek közül is végtelen sokat metszene, ezért $\cos z$-nek mind a valós, mind az imaginárius értéke 0-hoz tartana, vagyis maga $\cos z$ is 0-hoz tartana; ez azonban lehetetlen, mert azokban a pontokban, ahol a G görbe az $x=n\pi$ $(n=0, \pm1, \ldots)$ egyeneseket metszi (és mint mondottuk, G ezen egyenesek közül végtelen sokat kell, hogy messen), $|\cos z| \geqq 1$.

Így tehát $\cos z$-nek nincs aszimptotikus értéke, tehát $\cos\sqrt{z}$-nek sincs; e példa mutatja, hogy az említett heurisztikus meggondolás csalóka.

C) Kézenfekvő felvetni a következő két kérdést. a) Az 1. tételnek az a feltevése, hogy $f'(z)$-nek a 0 Picard-féle kivételes értéke, nem helyettesíthető-e azzal az enyhébb feltevéssel, hogy $f'(z)$-nek van Picard-féle kivételes értéke? b) Felvethető az a kérdés is, hogy az $f'(z)\neq0$ feltevés pótolható-e azzal a feltevéssel, hogy $f''(z)\neq0$? Mindkét kérdésre a válasz negatív és ugyanaz az ellenpélda cáfolja meg mind a két sejtést, az $f(z) = e^z+z$ függvény példája. Erre a függvényre ugyanis igaz az, hogy $f'(z)$-nek van Picard-féle kivételes értéke (mégpedig az 1 érték) és az is, hogy $f''(z)\neq0$. Ha tehát megmutatjuk, hogy az e^z+z függvénynek nincsen aszimptotikus értéke, ezzel mind a két említett sejtést megcáfoltuk.

Azt, hogy az e^z+z függvénynek nincs aszimptotikus értéke, a következőképpen láthatjuk be: ha $z = x+iy$, akkor $e^z+z = [e^x\cos y+x]+i[e^x\sin y+y]$. Ha mármost az e^z+z függvénynek volna egy aszimptotikus értéke, legyen G egy olyan végtelenbe vezető görbe, amely mentén e^z+z a véges A értékhez tart. Akkor tehát, ha $z = x+iy$ a G görbén fut végig, mind $e^x\cos y+x$, mind pedig $e^x\sin y+y$ véges határértékekhez tartanának. Mármost a következő esetek lehetségesek: 1. van olyan $z_n = x_n+iy_n$ a G görbén fekvő, végtelenhez tartó pontsorozat, hogy x_n véges korlát alatt marad; ez esetben $e^{x_n}\sin y_n$ is véges korlát alatt marad, és mivel $e^{x_n}\sin y_n+y_n$ is véges határértékhez tart, következnék, hogy y_n is véges korlát alatt marad; ez azonban lehetetlen, mert ellentmond annak a feltevésnek, hogy $z_n+iy_n\to+\infty$. 2. Megadható olyan a G görbén fekvő $z_n = x_n+iy_n$ pontsorozat, hogy $x_n\to-\infty$. Ez az eset is lehetetlen, mert akkor $e^{x_n}\cos y_n$ korlátos volna és így $e^{x_n}\cos y_n+x_n$ nem tarthatna véges határértékhez. 3. Így tehát csak az az eset marad hátra, hogy ha $z = x+iy$ a G görbén végtelenhez tart, akkor $x\to+\infty$; mivel feltevésünk szerint $e^x\cos y+x$ véges határértékhez tart, ez csak úgy lehetséges, hogy ha $z = x+iy$ a G görbén végtelenhez tart, akkor $\cos y\to0$; mivel G folytonos görbe, ez csak úgy lehetséges, hogy ha $z = x+iy$ a G görbe mentén végtelenhez

tart, akkor $y \to (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ahol k egy rögzített egész szám; de akkor $\sin y \to 1$ és így $e^x \sin y + y \; + \infty$-hez tartana, feltevésünkkel ellentétben. Így tehát bebizonyítottuk, hogy az $e^z + z$ függvénynek nincs aszimptotikus értéke.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] R. P. Boas, Jr., Entire functions, Academic Press, New York 1954, p. 39.
[2] G. Pólya, Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitschrift *29* (1929), 549—640.
[3] T. Kővári, On the asymptotic paths of entire functions with gap power series, Journal d'Analyse Mathématique *15* (1965), 281—286.
[4] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Commentarii Math. Helvetici *32* (1957/58), 13—72.
[5] A. Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

К. РЕНИ

ON ASYMPTOTICAL VALUES OF ENTIRE FUNCTIONS

C. RÉNYI

VERMES PÁL ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

C. B. SMITH

Vermes Pál 1897. július 31-én született Újpesten. A Bolyai Gimnáziumban Ascher Oszkárral, Román Andorral és Barta Károllyal kötött egy életre szóló barátságot. Elhatározták, hogy mind a négyen mérnökök lesznek. Fiatal matematika tanáruk, Pólya György, Vermes Pál kezébe adta Euler Algebráját és rábeszélte, hogy inkább matematikus legyen. Vermes Pál azonban gondolni sem akart arra, hogy más legyen belőle, mint mérnök. Mind a négyen beíratkoztak a József Nádor Műegyetem építész karára; Vermes jó eredménnyel végezte el tanulmányait, különösen a matematikában tűnt ki. 1919-ben abbahagyta tanulmányait és 1932-ig Menzler és Prengler budapesti tükörgyárát vezette. 1920-ban feleségül vette Csehszlovákiában élő unokahúgát, Rezek Hedviget. 1932-től 1938-ig apja bécsi fa export vállalatának társigazgatója.

Amikor a nácik elviselhetetlenné tették az életet, menekülniük kellett. Feleségével és lányával Londonba távozott. Fivére ismert New York-i sebész, nővére egy amerikai író özvegye. A háború alatt nehéz körülmények között éltek, mivel vállalatuk rövidesen megszűnt. Vermes Pál eredményesen dolgozott középiskolai tanárként, de fölhívták a figyelmét arra, hogy jobb kilátásai lennének, ha angol egyetemi végzettséget szerezne. Matematikai tanulmányait részben Chelsea-ben, részben a Londoni Egyetem Birbeck Kollégiumában végezte. Tanára, Dienes Pál felfigyelt rá és rábeszélte, hogy szerezze meg a doktori fokozatot. 1945-ben „Series to series transformations and matrix continuation of Taylor and Laurent series" című dolgozatával elnyerte a kollégium Armitage—Smith díját. 1947-ben doktori fokozatot szerzett „Gamma matrices and their applications to infinite series" című disszertációjával. A Birkbeck Kollégium külső meghívott előadója lett. Így, ha 50 évesen is, beváltotta Pólya hozzá fűzött reményeit: matematikus lett (A. C. Offord professzor dr. Vermes temetésén elmondott beszédében megjegyezte, hogy bár a matematika a fiatalok tudománya, dr. Vermes nem kivétel a szabály alól, mert ő lélekben mindig fiatal maradt.) 1948-ban kinevezték és a Kollégium rendes tanáraként működött tovább, először mint adjunktus, majd mint docens. 1953-ban a Londoni Egyetemen megszerezte a matematikai tudományok doktora fokozatot. 1963-ban súlyos betegség támadta meg, amelyből lassan épült fel, de szellemi aktivitását élete végéig megőrizte. 1964-ben visszavonult. Professzori állást ajánlanak fel neki, de az említett okok miatt nem vállalja. A Kollégium kérésére azonban külső előadói megbízást elfogad, mivel a Kollégium nem tudta nélkülözni egyik legnépszerűbb előadóját. Három évig működött ebben a minőségben, azonban ez nem jelentett számára könnyebbséget, mivel ugyanúgy ellátta munkáját, mint azelőtt. Betegsége súlyosbodott, kórházba szállították, kórházi ágyán is matematikai feljegyzéseivel foglalkozott, de egy hétre rá meghalt rákban. Özvegye és leánya maradt egyedül.

Vermes Pál 1938 után csak egyszer tudott hazalátogatni. 1959-ben résztvett egy Budapesten megszervezett kollokviumon. Származását sohasem tagadta meg; hosszú távollét után is ízes magyarsággal beszélt.

Ragyogó előadó volt, és minden áldozatra hajlandó, ha a fiatalokat kellett segíteni.

Vermes fő kutatási témája a végtelen sorozatok szummabilitása és az ehhez a témához kapcsolódó végtelen matrixok. Összefoglalva a definíciókat, jelentsen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

egy sort, mely **u** végtelen vektorral reprezentálható. Legyen $s_k = \sum_{n=o}^{k} u_n$ a k-adik részletösszeg, melyet a megfelelő **s** vektorral jelölhetünk. Az **s**, ill. **u** sorozat természetesen akkor konvergens, ha s_k valamely s határértékhez tart. Egy sort sorba transzformáló **A** transzformáció, ahol A egy végtelen matrix, jelentése nyilvánvaló: **u**-t $\mathbf{v} = \mathbf{Au}$-ba transzformálja. **A** reguláris, ha minden konvergens sort azonos összegű konvergens sorba transzformál; ez esetben α-matrixnak nevezzük. Ha a $\mathbf{v} = \mathbf{Au}$ összeg létezik, de változhat az értéke, akkor **A** egy δ-matrix.

Analóg módon értelmezhetjük nyilvánvalóan a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Fs}$ sorozatot sorozatba átvivő transzformációkat, melyek, ha regulárisak, T-matrixok, és a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Gu}$ sort sorba átvivő transzformációkat, melyek, ha regulárisak, γ-matrixok. Ha R, illetve S-sel jelöljük az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \\ 1 & 1 & 0 \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}, \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \\ -1 & 1 & 0 \dots \\ 0 & -1 & 1 \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

végtelen matrixokat, igazak az alábbi összefüggések:

$$\mathbf{G} = \mathbf{FR}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{GS}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{SG}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{RA}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{SFR},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{RAS} \quad \text{és} \quad \mathbf{RS} = \mathbf{SR} = \mathbf{I}.$$

A regularitásra vonatkozó szükséges és elégséges feltétel [26]-ban van összefoglalva.

[12]-ben kimutatja, hogy egy Taylor sor analitikus folytatása az α-szummabilitás speciális esetének tekinthető.

Egy korai dolgozatában Vermes kimutatta, hogy egy T és egy γ-matrix szorzata mindig γ-matrix [2] és hasonlóképpen, hogy $\gamma \times \alpha$ mindig γ [11], $\alpha \times \alpha$ mindig α [11], két γ-matrix Schur-szorzata γ [7] és más hasonló eredményeket is közöl. Ha **A** és **B** konvolúcióját $c_{nk} = \sum_{j=o}^{k} a_{nj} b_{n(k-j)}$-vel definiáljuk, akkor a T matrixok konvolúciója is T-matrix [17].

A [7], [8] és [34] dolgozatok szemi-transzlatív szummabilitási eljárásokkal kapcsolatos érdekes eredményeket tartalmaznak.

Egy sorozatot sorozatba átvivő A transzformáció egy s sorozatot $\lim \sigma_k$-ba „összegez", ahol $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{As}$. Ha az $\{s_{k-1}\}$ sorozatot mindig ugyanabba összegezi, mint $\{s_k\}$-t, akkor A jobbról transzlatív, megfordítva balról transzlatív, és mindkét esetben szemi-transzlatív [34]. Egyéb eredményei közül a következők említhetők meg: tegyük fel, hogy $\sum f_k z^k$ 0 környezetében konvergens és analitikus folytatással kiterjeszthető egy $f(z)$ függvényre, mely meromorf egy olyan nyílt körtartományban,

melynek középpontja 0 és tartalmazza z_0-t. Tekintsük a részletösszegek $s_k = \sum_{i=o}^{k} f_i z_o^i$ sorozatát. Ha $f(z)$ reguláris z_0-ban, minden szemi-transzlatív eljárás, mely a sorozatot egyáltalán összegezi, azt $f(z_0)$-ra összegezi; ha z_0 pólus, nincs ilyen eljárás, mely a sorozatot összegezi. [8] dolgozatában némi megszorításokkal sornak sorba való transzformálására ad hasonló eredményeket.

Bizonyos esetekben összefüggés áll fenn a sorozatnak sorozatba való **G** transzformációja és a sornak sorba való **A** transzformációja között. Például [13] dolgozatában Vermes általános feltételt ad arra, hogy **G** skalár többese legyen **A**-nak; ez tartalmazza a Hardy—Littlewood-féle kör módszert. Bizonyos feltételek mellett [26] egy T-matrix transzponáltja α-matrix; és bonyolultabb összefüggések is fennállhatnak.

Más dolgozataiban érdekes szummabilitási tulajdonságokra vonatkozó példák találhatók. Például [24]-ben megmutatja, hogy vannak olyan γ-matrixok, melyek $\sum z^k$-t egy többszörösen összefüggő tartományban összegezik és [25]-ben módszereket ad a geometriai sornak a konvergencia körön kívüli megszámlálhatóan végtelen izolált pontban való összegezésére (az összeg nem szükségszerűen a pontos $(1-z)^{-1}$ érték).

A szummabilitásra vonatkozó eredményein kívül Vermes számos alapvető fontosságú eredményt közölt végtelen matrixokkal kapcsolatban [18, 19, 21, 22, 29, 31, 32, 33, 36]. Meglepetésre sikerült neki végtelen matrixoknak egy nem-asszociatív gyűrűjét találnia és kidolgozott módszereket, melyekkel konstruálhatók olyan matrixok, melyeknek végtelen sok különböző valós vagy komplex kétoldali inverze létezik [19]. Előszeretettel foglalkozott véges sorú és véges oszlopú matrixok dekompozíciójával. Idézzük egy különösen elegáns példáját a [32] dolgozatából: „A diagonál lánc *(string)*, melynek elemei egy adott testben vannak, a végtelen diagonál matrixnak egy általánosítása, melyben a nem zérus elemeket tetszőleges rendű négyzetes, nem szinguláris matrixokkal helyettesítettük. Minden olyan B matrix, mely stringek véges szorzata, a nem szinguláris sorvéges és oszlopvéges matrixok multiplikatív **G**(**R**, **C**) csoportjába tartozik, azaz olyan matrixok, melyeknek azonos tulajdonságú, egyértelmű kétoldali reciprokja létezik... . Itt bizonyítom ... a 2. tételt. Minden nem-szinguláris sorvéges és oszlopvéges matrix előállítható, mint legfeljebb két string szorzata. Ez egyben az elérhető legjobb eredmény is."

Más témák iránt is érdeklődött, melyekkel kapcsolatban viszonylag keveset publikált. Több dolgozata komplex függvénytannal foglalkozik [11, 16, 20, 23, 24, 25]. Több magyar matematikushoz hasonlóan, a gráfelmélet iránt is érdeklődött, de csak egy dolgozatot [30] publikált ebből a témakörből. Utolsóelőtti dolgozata [36] eloszlásfüggvények dekompozíciójának egy fontos problémáját oldja meg.

Köszönetemet fejezem ki dr. B. Kuttnernek, a Birminghami Egyetemről, aki szíves segítségemre volt Vermes matematikai munkásságának értékelésében.

ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПАЛ ВЕРМЕШ

С. Б. СМИТ

THE LIFE AND WORKS OF PÁL VERMES

C. B. SMITH

VERMES PÁL MUNKÁINAK JEGYZÉKE

I. *Dolgozatok*

1. Geometric representation of analytic functions. Mathematical Gazette, *29*, (1945), 4—9.
2. The product of a T-matrix and a γ-matrix. Journal of the London Mathematical Society, *21*, (1946), 12—134.
3. The „continous" unit matrix. Mathematical Gazette, *30*, (1947), 88.
4. A real matrix representing an equilateral polygon in general Euclidean space. Mathematical Gazette, *31*, (1947), 240—241.
5. Diameter closed sets. Mathematical Gazette, *31*, (1947), 241—243.
6. Gamma matrices and their application to infinite series, Doktori Értekezés, Londoni Egyetem, (1947), 84.
7. On γ-matrices and their application to the binomial series. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2), *8*, (1947), 1—15.
8. The application of γ-matrices to Taylor series. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2), *8*, (1948), 43—49.
9. Note on a two-point boundary problem. Quarterly Journal of Mathematics, *19*, (1948), 109—116.
10. A simple example of a double series. Mathematical Gazette, *33*, (1949), 35.
11. Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. American Journal of Mathematics, *71*, (1949), 541—562.
12. Certain classes of series to series transformation matrices. American Journal of Mathematics, *72*, (1950), 615—620.
13. 8 II, III, IV, V, VI tételek, 4.4. VI (ii), (iv) tétel bizonyításai, meg 3,8, 4.7, 4.19, 5.18, 8.7, 8.8, 8.9 példák R. G. Cooke könyvében „Infinite Matrices and Sequence Spaces", 1950, Macmillan, London.
14. Note on two-point boundary problem, II. Quarterly Journal of Mathematics (2), *2*, (1951), 74—70.
15. Conservative series to series transformation matrices. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, *14*, (1951), 23—38.
16. An interpolation problem for integral functions. Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, *2*, (1952), 150—159.
17. Convolution of summability methods. Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, *2*, (1952), 160—177.
18. Note on certain differential equations of infinite order. Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, A, *55*, (1952), 28—31.
19. Non-associative rings of infinite matrices. Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, A, *55*, (1952), 150—159.
20. Note on γ-matrices efficient at an isolated point. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2), *10*, (1953), 11—12.
21. Infinite matrices associated with basic sets of polynomials. Proceedings of the International Mathematical Congress, Amsterdam, (1954), 182.
22. Generated basic sets of polynomials (M. N. Mikhaillal közösen). Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, A, *57*, (1954), 556—559.
23. Infinite matrices summing every polynomial sequence. Proceedings of the Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, A, *58*, (1955), 627—633.
24. Summability of power series in simply and multiply connected domains. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, *44*, (1958), 188—199.
25. Summability of power series at unbounded sets of isolated points. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, *44*, (1958), 830—838.
26. The transpose of a summability matrix. Colloque sur la Théorie des Suites, Centre Belge de Recherches Mathématiques, (1958), 60—68.
27. Regular Sonnenschein type summability methods (J. Clunieval közösen). Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, *45*, (1959), 930—954.

28. Transformations of periodic sequences. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, *5*, (1960), 153—163.
29. Matrix structure of basic sets of polynomials. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica, *3—4*, (1960—1961), 383—388.
30. Fixed points in graph-colouring. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, *6*, (1961), 8—96.
31. Multiplicative groups of row- and column-finite infinite matrices. Annales Uniservitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica, *1* (1964), 15—23
32. The group of both row- and column-finite infinite matrices. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio mathematica, *7*, (1964), 89—90.
33. Linear independence in basic set of polynomials. Annales Universitates Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio mathematica, *9*, (1966), 15—18.
34. Semi-transitive summability methods (B. Choudharyval közösen), Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, *1*, (1966), 403—410.
35. Richard George Cooke (obituary notice). Journal of the London Mathematical Society, *42*, (1967), 553—558.
36. Some infinite systems of linear equations in statistics. Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Roland Eötvös nominatae, Sectio mathematica, *10*, (1967), 17—24.
37. Note on Tauberian Constants. Publicationes Mathematicae, Debrecen, *15*, (1968), 203—209

II. *Könyvismertetések*

1. Lothar Heffter: Kurvenintegrale und Begründung der Funktionentheorie. Mathematical Gazette, *33*, (1949), 140.
2. R. G. Cooke: Infinite matrices and sequence spaces. Mathematical Gazette, *35*, (1951), 277—279
3. R. G. Cooke: Linear operators. Mathematical Gazette, *9*, (1955), 77—79.

INFORMÁCIÓELMÉLET ÉS HIPOTÉZISVIZSGÁLAT

NEMETZ TIBOR

BEVEZETÉS

Jelen dolgozatban a valószínűségszámítás egy viszonylag új ágának, az információelméletnek a matematikai statisztika területén, a hipotézisvizsgálatokkal kapcsolatos alkalmazásaival kívánunk foglalkozni.

Munkánkban következetesen Bayesi álláspontra helyezkedünk, így rövid történeti áttekintés (1. §) után Lindley alapvető jelentőségű munkája [19] alapján a 2. §-ban az egy kísérletben tartalmazott információ mennyiségének ismertetésével kezdjük vizsgálatainkat. Speciális esetként származtatjuk ebből egy valószínűségi változóban (ill. valószínűségi változók végtelen sorozatában) egy halmazra (ill. egy paraméterre) vonatkozóan tartalmazott információ mennyiségét. Ugyancsak ennek alapján tárgyaljuk a megfigyelhető koordináták esetét és a matematikai statisztikában oly jelentős elégségesség fogalmát. E részben sor kerül még az információmennyiség monotonitására és konvergenciájára vonatkozó tételek bizonyítására is.

A 3. §-t a klasszikus döntésprobléma ismertetésével kezdjük, majd áttérünk a Rényi A. által bevezetett standard döntés vizsgálatára, mely az összes megengedett döntések körében a legkisebb hibavalószínűséggel rendelkezik. Vizsgáljuk a standard döntés és az ún. Hellinger-távolság kapcsolatát. Alsó és felső becslést adunk a standard döntés hibájára, s a paragrafus befejezéseként néhány példát mutatunk.

Felmerül a kérdés, hogy a standard döntés egyben a leginformatívabb döntés-e. E kérdésre ad negatív választ a 4. §, melynek fő eredménye a Neyman—Pearson lemma egy információelméleti variánsa. Ez a leginformatívabb döntés alakját határozza meg. Az itt szereplő konstansról kimutatjuk, hogy az egy differenciálegyenlet megoldása. Néhány példában konkrétan kiszámítjuk a leginformatívabb döntést. Szerepel egy példa arra az esetre is, amikor összetett hipotézis esetén létezik egyenletesen leginformatívabb döntés.

Az 5. §-ban aszimptotikus vizsgálatokkal foglalkozunk. Tételek szerepelnek a standard döntés konvergenciájára, konvergens döntések hibájának és a bennük levő információ mennyiség konvergencia-sebességére vonatkozóan. Bebizonyítjuk, hogy Vajda I. egy, — a konvergencia exponenciális sebességére vonatkozó tétele speciális esete Rényi A. egy általános tételének.

A 6. §-ban aszimptotikus vizsgálataink és Kakutani egy mértékelméleti tétele közti kapcsolatot diszkutáljuk.

A szerző köszönetét fejezi ki RÉNYI ALFRÉDnak, aki a témakörre felhívta a figyelmét, s munkája során mindvégig segítőkészen látta el instrukciókkal. Ugyancsak köszönetet mond CSISZÁR IMRÉnek is az általa nyújtott segítségért.

1. §. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

A matematikai statisztika minden területén a következtetéseket megfigyelések, kísérletek útján végzett információakkumuláció előzi meg. Az így nyert információmennyiséget nyilvánvalóan valamilyen módon mérni szükséges ahhoz, hogy a következtetések jóságát, megbízhatóságát vizsgálni lehessen. Az információmennyiség megfelelően definiált mérőszámai nagy segítséget nyújthatnak a statisztikusnak munkájában. Ezt először R. A. Fisher ismerte fel, s az általa 1925-ben definiált információmérőszámot [8] jelentős sikerrel alkalmazta a becsléselméletben.

Jól használhatók azonban az információ-mérőszámok a valószínűségszámítási és matematikai statisztikai alkalmazások legkülönbözőbb területein is. Az első alkalmazást más területen Hartley [11] végezte 1928-ban, amikor a hírközlés elméletében a lehetséges jelek számának logaritmusát nevezte az információmennyiség mérőszámának. Ugyancsak az információ logaritmikus mértékét használta a hírközlés elméletében felmerülő statisztikai problémák megoldására egymástól függetlenül Shannon [32] és Wiener [37] (1948), akiknek munkássága alapvető jelentőségű. Az információelméletnek, mint a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika egy ágának kialakítását az ő munkájuk megjelenésétől kell számítanunk.

Shannon megállapítása szerint az információ fogalma is legtermészetesebben mint statisztikai fogalom értelmezhető, hiszen ez a fogalom lényegében megfigyelések, közlések, kísérletek eredményeként jelentkező, vagy megszerezhető ismereteket jelent, tehát nem más, mint a mintatéren értelmezett absztrakt függvény. Matematikai statisztikai problémákban a megfigyelések által megszerezhető minden ismeretet tartalmaz az empirikus eloszlásfüggvény, így az információ mennyiség mérésére az eloszlás valamely alkalmas függvénye használható. Shannon második lényeges megállapítása éppen arra vonatkozik, hogy lényegében egyetlen ilyen függvény megadása is elegendő. Ezt a Shannon és Wiener által az információ mérésére használt függvényt nevezik entrópia függvénynek. Más mérőszámot nem kívánunk ismertetni, megjegyezzük azonban, hogy ezek elég tág osztálya a statisztikai feladatok számára lényegében ekvivalens, mint ezt Csiszár I. bizonyította [4], [5].

A statisztikai problémák konkrét megoldásánál, így tehát az információelméleti módszerek gyakorlati alkalmazásánál is, határozottan meg kell különböztetnünk, hogy rendelkezünk-e már eleve valamilyen ismeretekkel, vagy nem. Kullback és Leibler [18] foglalkoztak elsőként azzal az esettel, amikor semmiféle előzetes információval nem rendelkezünk. Az általuk bevezetett I-divergencia, illetve J-divergencia a Shannon féle entrópia természetes általánosítása, melyet sikeresen alkalmaztak a becsléselmélet és a hipotézisvizsgálat különböző kérdéseiben.

Ha az előzetes információkat figyelembe akarjuk venni, akkor következetesen Bayesi álláspontra kell helyezkednünk. Ezt az utat követte Lindley [19], továbbá Cronbach [3], akik az egy kísérletben tartalmazott információt, illetve átlagos információt először határozták meg. Ezek a fogalmak nagyon hasznosak a hipotézisvizsgálatok területén is, amint arra Rényi A. rámutatott, aki e témakör számos kérdését vizsgálta eredményesen. A veszteségfüggvények esetén értékes eredményeket ért el A. Perez [22], [23], aki a veszteség várható értékét vizsgálta.

2. §. EGY KÍSÉRLETBEN TARTALMAZOTT INFORMÁCIÓ MÉRTÉKE

Mint már említettük, vizsgálatainkban következetesen Bayesi álláspontra helyezkedünk. Jelölje Θ a paraméterteret, s legyen τ a Θ részhalmazainak valamilyen σ-algebrája. Legyen $\{X, \mathcal{B}, P_\Theta\}$ egy statisztikai mező, azaz $\{X, \mathcal{B}\}$ mérhető tér,

$P_\Theta = \{P_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$ pedig ezen a mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek összessége. Tegyük fel, hogy a kísérletünk eredménye az $x \in X$ megfigyelés. Szokás ekkor az $\{X, \mathcal{B}\}$ párt mintatérnek nevezni.

2. 1. Definíció: Az $\{X, \mathcal{B}, \Theta, P_\Theta\}$ rendezett négyest kísérletnek, néha megfigyelésnek nevezzük.

Megfigyelésünk valamelyik P_ϑ valószínűségi törvényszerűség szerint realizálódik. Az éppen aktuális ϑ értéket szintén valószínűségi törvényszerűség határozza meg, tehát ϑ maga is valószínűségi változó, melynek eloszlását jelölje P. (P a $\{\Theta, \tau\}$ mérhető téren van értelmezve).

A továbbiak számára lényeges feltevés lesz, hogy P_Θ dominált mértékcsalád, azaz létezik olyan Q valószínűségi mérték melyre nézve P_ϑ abszolút folytonos minden $\vartheta \in \Theta$ esetén. (Ez nyilván nem jelent semmilyen megszorítást akkor, ha Θ legfeljebb megszámlálható pontból áll.) Ekkor beszélhetünk a

$$p(x|\vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{dQ}$$

Radon—Nikodym deriváltakról. Egyöntetűség kedvéért ϑ a priori eloszlását is a

$$p(\vartheta) = \frac{dP}{d\vartheta}$$

formális derivált alakjában adjuk meg. Az x megfigyelés sűrűségfüggvényét, mint az jól ismert, a

$$p(x) = \int_\Theta p(x|\vartheta) p(\vartheta)\, d\vartheta = \int_\Theta p(x|\vartheta)\, dP \tag{2. 1}$$

integrál adja meg, míg ϑ a posteriori sűrűségfüggvénye a Bayes tétel szerint

$$p(\vartheta|x) = \frac{p(x|\vartheta) p(\vartheta)}{p(x)}. \tag{2. 2}$$

A ϑ-ban meglevő bizonytalanság mértékének Shannont követve

$$\mathcal{I}_0 = -\int p(\vartheta) \log p(\vartheta)\, d\vartheta \tag{2. 3}$$

értéket tekintjük (itt és a továbbiakban $0 \log 0 = 0$ definíciószerűen). A kísérlet során megfigyelt x érték ismerete ezt a bizonytalanságot nyilván módosítani fogja a posteriori sűrűségfüggvénynek megfelelően. Az a posteriori bizonytalanságot

$$\mathcal{I}_1(x) = -\int p(\vartheta|x) \log p(\vartheta|x)\, d\vartheta \tag{2. 4}$$

integrállal mérjük.

A kísérlet rögzített x kimenetele mellett a paraméterre vonatkozóan nyert információ mennyiségének mérése Lindney definíciója alapján történik:

2. 2. Definíció: Jelölje ϑ eloszlását $p(\vartheta)$. Akkor az $\varepsilon = \{x, \mathcal{B}, \Theta, P_\Theta\}$ kísérletben tartalmazott információ mennyisége, feltéve, hogy a megfigyelt érték éppen x volt,

$$\mathcal{I}(\varepsilon, p(\vartheta), x) = \mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_1(x). \tag{2. 5}$$

Ez a mennyiség nyilvánvalóan függ x aktuális értékétől; — ugyanazon kísérlet többszöri végrehajtása során tehát más és más információt nyerhetünk. Beszél-

hetünk azonban a megfigyelés végrehajtása nélkül is egy kísérletben tartalmazott információról. Ezt célszerű megtenni már csak azért is, mivel a kísérletek megtervezését ily módon lényegesen egyszerűbbé lehet tenni, várható eredményünket pedig egzaktul becsülhetjük. Magában a kísérletben tartalmazott információ legtermészetesebb mértékének a (2. 5) információmennyiség várható értékét tekinthetjük. Ezt tartalmazza a következő, Cronbachtól származó

2. 3. DEFINICIÓ: Egy $\varepsilon = \{X, \mathscr{B}, \Theta, P_\vartheta\}$ kísérletben tartalmazott információ mennyisége

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = \mathscr{I}(\varepsilon, p(\vartheta)) = E_x\{\mathscr{I}_0 - \mathscr{I}_1(x)\} \tag{2. 6}$$

ahol $p(\vartheta)$ a ϑ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. (Itt és a továbbiakban $E_\xi\{\cdot\}$ a ξ valószínűségi változó által generált mérték szerint vett várható értéket jelöli.)

A (2. 6) összefüggést részletesen kiírva

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = \int_X p(x)\left[\int_\Theta p(\vartheta|x)\log p(\vartheta|x)\,d\vartheta - \int_\Theta p(\vartheta)\log p(\vartheta)\,d\vartheta\right] dQ\,.$$

Azonos átalakítás után

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = \int_X p(x)\int_\Theta p(\vartheta|x)\log\frac{p(\vartheta|x)}{p(\vartheta)}\,d\vartheta\,dQ + \int_X p(x)\int_\Theta [p(\vartheta|x) - p(\vartheta)]\log p(\vartheta)\,d\vartheta\,dQ\,.$$

Itt a második integrálban az integrálás sorrendjét felcserélve, s felhasználva, hogy

$$\int p(\vartheta|x)p(x)\,dQ = p(\vartheta)$$

adódik:

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = \iint_{X\,\Theta} p(x)p(\vartheta|x)\log\frac{p(\vartheta|x)}{p(\vartheta)}\,d\vartheta\,dQ = E_\vartheta E_x\left\{\log\frac{p(\vartheta|x)}{p(\vartheta)}\right\}. \tag{2. 7}$$

Ebből a (2. 2) összefüggés alkalmazásával nyerhetjük:

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = E_x E_\vartheta\left\{\log\frac{p(x|\vartheta)}{p(x)}\right\}. \tag{2. 8}$$

Bevezetve a $p(x, \vartheta)$ jelölést az x és ϑ változók együttes sűrűségfüggvényére, egyszerű átalakítással nyerhető a

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = \iint p(x, \vartheta)\log\frac{p(x, \vartheta)}{p(x)p(\vartheta)}\,d\vartheta\,dQ \tag{2. 9}$$

összefüggés.

Megjegyzés: A (2. 9) összefüggés azt mutatja, hogy egy kísérletben tartalmazott információ mennyisége az x és ϑ változók együttes eloszlásának és a megfelelő peremeloszlások Descartes szorzatának távolságát méri, s megegyezik ezen eloszlások Kullback-féle I-divergenciájával.

Szeretnénk rámutatni x és ϑ szimmetrikus szerepére a (2. 3) definícióban, mely jól látható akár (2. 9)-ből, akár a (2. 7) és (2. 8) összefüggések szimmetrikus voltából. Ez a szimmetrikus kapcsolat egyúttal azt is mutatja, hogy az egy kísérletben értelmezett átlagos információt mindig úgy kell érteni, hogy az két olyan valószínűségi változó közti kapcsolatot jellemzi, melyek közül egyik a mintatéren, a másik a paramétertéren van értelmezve. Mivel a valószínűségi változók értékeire semmiféle megszorítást nem tettünk, így a fenti definíció alkalmazható a következő esetekben.

2. 1. *Példa: Egy valószínűségi változóban egy halmazra vonatkozóan tartalmazott információ mennyisége.*

Legyen $\{\Omega, \mathcal{A}, P^*\}$ tetszőleges valószínűségi mező, s ξ az $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ egy mérhető leképezése az $\{X, \mathcal{B}\}$ mérhető térre. Legyen $P = P^{\xi}$ az $\{X, \mathcal{B}\}$ téren ξ által generált valószínűségi mérték, azaz legyen minden $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$Q(B) = P^*\{\xi^{-1}(B)\}.$$

A ξ valószínűségi változóban tetszőleges $A \in \mathcal{A}$, $P^*(A)[1 - P^*(A)] \neq 0$ halmazra vonatkozóan tartalmazott $I(\xi : A)$ információt a következőképpen értelmezhetjük:

Álljon Θ a 0 és 1 értékekből, s jelölje $\vartheta = \vartheta_A$ az A halmaz karakterisztikus függvényét. Ekkor ϑ a priori eloszlása nyilván

$$P(\vartheta = 1) = P^*(A) = p$$

$$P(\vartheta = 0) = P^*(\bar{A}) = 1 - p.$$

Tekintsük az

$$\text{(2. 10)} \qquad \begin{cases} \varepsilon = \{X, \mathcal{B}, \Theta, P_\Theta\}, \\ P_0(B) = P^*\{\xi^{-1}(B) | \bar{A}\} \\ P_1(B) = P^*\{\xi^{-1}(B) | A\} \end{cases}$$

kísérletet. E kísérlet mellett természetes a következő

2. 4. Definició: Egy ξ valószínűségi változóban egy A halmazra vonatkozóan tartalmazott információ mennyisége

$$I(\xi : A) = I(\varepsilon, p)$$

ahol az ε kísérletet a fenti (2. 10) összefüggés definiálja (lásd Rényi A. [27]).

Megjegyezzük, hogy ugyanilyen természetesen lehet értelmezni valamely valószínűségi változóban halmazok megszámlálható rendszerére, s így tetszőleges atomikus, továbbá megszámlálható kialakítójú térre vonatkozóan tartalmazott információ mennyiségét is.

2. 2. *Példa: Valószínűségi változók végtelen sorozatában tartalmazott információ mennyisége.*

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változónak egy sorozata, melyek értékeiket rendre az $\{X_1, \mathcal{B}_1\}, \{X_2, \mathcal{B}_2\}, \ldots$ mérhető tereken veszik fel. Jelölje ezen terek Descartes szorzatát $\{X, \mathcal{B}\}$ s legyenek ezen a téren értelmezettek a P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$ és Q mértékek úgy, hogy P_ϑ abszolút folytonos Q-ra nézve a ϑ minden értéke mellett. A (2. 3) definícióhoz hasonló a

2. 5. Definició: A valószínűségi változók $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ végtelen sorozatában tartalmazott információ mennyisége

$$I(\xi; \Theta) = \mathcal{I}(\varepsilon),$$

ahol $\varepsilon = \{X, \mathcal{B}, \Theta, P_\Theta\}$.

Véve a ξ vektorváltozó véges dimenziós megszorítását a megfelelő végesdimenziós szorzatterekre, természetes volna, ha a fenti információ mennyiséget úgy tudnánk definiálni, mint ezen véges sok valószínűségi változóban tartalmazott információ határértékét, azaz teljesülne, hogy

$$I(\varepsilon^n) \to I(\varepsilon)$$

ahol $\varepsilon^n = \{X^n, \mathscr{B}^n, \Theta, P_\Theta^n\}$ jelöli az $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \{X_i, \mathscr{B}_i\}$ szorzattér, a P_Θ erre vonatkozó megszorítása, továbbá a Θ paramétertér által meghatározott kísérletet. Látni fogjuk, hogy ez a határérték-reláció érvényes. Tekintsük azonban ez előtt az alábbi tételeket

2. 1. TÉTEL: *Egy kísérletben tartalmazott átlagos információ sohasem negatív, azaz*

$$\mathscr{I}(\varepsilon) \geqq 0, \tag{2. 11}$$

s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha x eloszlása nem függ ϑ-tól (nulla ϑ-mértékű halmaztól eltekintve).

Bizonyításunk alapja a Jensen egyenlőtlenség következő alakja:

2. 1. LEMMA: *Legyen ξ valamely $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett, véges várható értékű valószínűségi változó, melynek értékkészlete valamely $[a, b]$ (véges vagy végtelen) intervallumba esik és $f(u)$ az a, b intervallumban értelmezett alulról konvex függvény, mely az intervallum belsejében folytonos (végpontjában lehet $+\infty$ is). Legyen továbbá $\mathscr{F}_1$ az $\mathscr{F}$ tetszőleges rész σ-algebrája. Akkor egy valószínűséggel*

$$E\{f(\xi)|\mathscr{F}_1\} \geqq f(E\{\xi_1|\mathscr{F}\})$$

és speciálisan

$$E\{f(\xi)\} \geqq f(E\{\xi\}).$$

Ha $f(u)$ az $E(\xi)$ pont egyetlen környezetében sem lineáris, akkor itt egyenlőség csak $P\{\xi = E(\xi)\} = 1$ esetén áll fenn.

A lemma bizonyítása jól ismert, s megtalálható pl. Csiszár I. [4] dolgozatában. Ennek felhasználásával tételünk nagyon egyszerűen bizonyítható, kiindulva a (2. 9) összefüggésből. Legyen

$$f(x, y) = \frac{p(x, \vartheta)}{p(x)p(\vartheta)}.$$

Akkor

$$\mathscr{I}(\varepsilon) = \int\int f(x, y) \log f(x, y)\, d(P_x \otimes P_\vartheta).$$

A lemma értelmében tehát

$$\mathscr{I}(\varepsilon) \geqq E_{x\otimes\vartheta}\{f(x, \vartheta)\} \log E\{f(x, \vartheta)\} = 0$$

s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $f(x, \vartheta)$ egy valószínűséggel konstans, tehát ha a $p(x|\vartheta)$ sűrűségfüggvény nem függ ϑ-tól. Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük. Megjegyezzük még, hogy nem érvényes a tétel a 2. 2. definíció mellett, tehát adott megfigyelés mellett. Ilyenkor a kísérletben levő információ mennyisége lehet negatív is, hiszen egy-egy váratlan kimenetel fokozhatja a ϑ-ra nézve a priori meglevő bizonytalanságot.

2. 3. *Példa. Megfigyelhető koordináták esete.*

Legyen a ξ valószínűségi változó az $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ téren értelmezve, s legyen értékkészlete az $\{X, \mathscr{B}\}$ mérhető tér. Legyen T az $\{X, \mathscr{B}\}$ tér mérhető leképezése az $\{Y, \mathscr{F}\}$ mérhető térre. Értelmezzük az y valószínűségi változót a következően:

$$y(\omega) = T[\xi(\omega)]. \tag{2. 12}$$

Tegyük föl, hogy nem áll módunkban megfigyelni a ξ változó aktuális értékeit, hanem csak annak $y(\omega)$ transzformáltjait. Ezek a transzformált értékek generáljanak az $\{X, \mathscr{B}\}$ téren egy P_y dominált mértékosztályt a következőképpen:

$$P_y(B) = P\{\xi^{-1}(B)|y\}, \qquad y \in \mathscr{Y}. \tag{2.13}$$

y a priori eloszlását a

$$P^*(E) = P\{T^{-1}(E)\}, \qquad E \in \mathscr{F}$$

összefüggés segítségével definiálva alkalmazhatjuk a 2. 3. definíciót a ξ és y valószínűségi változókra, s így lényegében a T statisztikában a ξ valószínűségi változóra vonatkozóan tartalmazott információ mértékét kapjuk. Valóban, a fenti 2. 3. definíció mellett ξ-ben az y-ra vonatkozóan tartalmazott információ mennyisége szimmetrikus, így természetes a megfigyelhető koordinátákban a ξ-re vonatkozóan tartalmazott információ mennyiségét úgy értelmezni, mint az $\varepsilon_T = \{X, \mathscr{B}, Y, P_y\}$ kísérletben meghatározott információt, ahol P_y-t a (2. 13) összefüggés határozza meg. Ez az $\mathscr{I}(\varepsilon_T)$ azt az információt adja meg, amit ξ megfigyelése után átlagban nyerünk, feltéve, hogy y a priori eloszlását már ismertük. Természetes kitüntetni azt az esetet, amikor a megfigyelhető koordináták ismeretében ξ nem nyújt számunkra további információt. Erre vonatkozik a

2. 6. DEFINICIÓ: A T megfigyelhető statisztika akkor és csak akkor elégséges a ξ mintára nézve, ha a fenti ε_T mellett

$$\mathscr{I}(\varepsilon_T) = 0.$$

A 2. 1. tételből közvetlenül következik a

2. 1. *Következmény:* A T statisztika akkor és csak akkor elégséges ξ-re nézve, a 2. 6. definíció értelmében, ha a szokásos (klasszikus) értelemben is elégséges.

Bizonyítás: A faktorizációs tétel szerint T akkor és csak akkor elégséges a szó klasszikus értelmében, ha $p(\xi|y)$ nem függ y-tól. De a 2. 1. tétel szerint $\mathscr{I}(\varepsilon_T) = 0$ is ekkor és csak ekkor teljesül.

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a fenti információmennyiséget úgy értelmezzük, mint a T statisztika megfigyelése után a ξ valószínűségi változóban még tartalmazott további információt. Valóban, írja le a ξ változó realizálásakor végzett kísérletet $\{X, \mathscr{B}, \Theta, P_\Theta\}$, míg a megfigyelhető koordináták realizálásakor végzett megfigyelést $\varepsilon^* = \{Y, \mathscr{F}, \Theta, P^*_\Theta\}$ (Θ nyilván megegyezik a két kísérletben). Akkor a T megfigyelhető koordinátában a ξ valószínűségi változóra nézve tartalmazott információ mennyisége

$$I(T:\xi) = \mathscr{I}(\varepsilon) - \mathscr{I}(\varepsilon^*) = E_y\{\mathscr{I}_1^*(y)\} - E_x\{\mathscr{I}_1(x)\}$$

Hasonlóan értelmezhető az elégségesség fogalma a kísérletek között is. Tegyük föl, hogy két kísérletet végzünk, s ezt a következőképpen jellemezzük. Legyen kísérletünk eredménye az (x_1, x_2) rendezett számpár, melynek értékei az X térbe tartoznak. Legyen X-en értelmezve a $\mathscr{B}$ σ-algebra, s ezen a P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$ dominált mértékosztály. Legyen $\mathscr{B}_i$ és P^i_ϑ értelmezve az $x_i = x_i\{(x_1, x_2)\}$ transzformáció segítségével, $i = 1, 2$; ekkor a két kísérlet: $\varepsilon_i = \{X_i, \mathscr{B}_i, \Theta, P^i_\Theta\}$ $i = 1, 2$; — ezek együttes hatását pedig az $\varepsilon = \{X, \mathscr{B}, \Theta, P_\Theta\}$ kísérlet írja le. Akkor, ha az első kísérlet kimenetelét ismerjük, ennek ismerete módosítja a második kísérlet leírását. Ekkor az $\varepsilon_2(x_1) = \{X_2, \mathscr{B}_2, \Theta, P^{(2)}_\Theta(x_1)\}$ kísérletet kell tekintenünk, ahol $P^{(2)}_\Theta(x_1) = \{P_\vartheta(x_2|x_1); \vartheta \in \Theta\}$.

Az $\varepsilon_2(x_1)$ kísérletben tartalmazott információ mennyiségének meghatározásánál figyelembe kell venni azt is, hogy ϑ a priori eloszlása is megváltozott. Pontosabban ϑ a priori eloszlása az $\varepsilon_2(x_1)$ kísérlet számára megegyezik az $p(\vartheta|x_1)$ a posteriori eloszlással. Így az x_1 megfigyelés aktuális értékének ismeretében az $\varepsilon_2(x_1)$ kísérlet átlagban $\mathcal{I}\{\varepsilon_2(x_1); p(\vartheta|x_1)\}$ információt tartalmaz. E mennyiség x_1 szerinti várható értékét tekinthetjük azon információ mértékének, melyet ε_2 tartalmaz, feltéve, hogy az ε_1 kísérlet megelőzi. Jelöljük ezt a mennyiséget $\mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1)$-vel. A 2. 1. lemma alapján könnyen látható, hogy $\mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \geqq 0$, s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $p(x_2|x_1, \vartheta)$ nem függ ϑ-tól. Bebizonyítjuk a következő tételt:

2. 2. TÉTEL:

$$\mathcal{I}(\varepsilon_1) + \mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = \mathcal{I}(\varepsilon_1).$$

Bizonyítás: $\mathcal{I}(\varepsilon_1)$ (2. 8) alakjából kiindulva

$$\mathcal{I}(\varepsilon_1) = E_{x_1} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_1|\vartheta)}{p(x_1)} \right\} = E_{x_1} E_{x_2} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_1|\vartheta)}{p(x_1)} \right\}. \tag{2. 14}$$

Továbbá részletesen kiírva $\mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1)$ definícióját:

$$\mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = E_{x_1}\{\mathcal{I}[\varepsilon_2(x_1), p(\vartheta|x_1)]\} = E_{x_1} E_{x_2} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_2|x_1, \vartheta)}{p(x_2|x_1)} \right\}. \tag{2. 15}$$

Összeadva (2. 14)-et és (2. 15)-öt:

$$\mathcal{I}(\varepsilon_1) + \mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = E_{x_1} E_{x_2} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_2|x_1, \vartheta) \cdot p(x_1|\vartheta)}{p(x_2|x_1) \cdot p(x_1)} \right\} = \mathcal{I}(\varepsilon)$$

s éppen ezt akartuk bizonyítani.

Tételünkből $\mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \geqq 0$ miatt nyilván következik a

2. 2. *Következmény:*

$$\mathcal{I}(\varepsilon) \geqq \mathcal{I}(\varepsilon_1),$$

azaz „szűkebb" kísérletből átlagosan nem nyerhető több információ.

Abban az esetben, ha $\mathcal{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = 0$, azaz ha az ε_1 kísérlet mindazt az információt tartalmazza, amit az ε kísérlet, akkor azt mondjuk, hogy az ε_1 kísérlet elégséges kísérlet az ε számára. A megelőző megjegyzések értelmében igaz a

2. 3. *Következmény:* ε_1 akkor és csak akkor elégséges kísérlet ε számára, ha x_1 elégséges statisztikája x-nek ϑ-ra nézve.

2. 4. *Példa: A δ-elégségesség fogalma.*

Különböző okok (pl. a megfigyelés konkrét elvégzése, a nyert adatok könnyebb kiértékelhetősége, vagy lényegesen egyszerűbb analitikus tárgyalás lehetősége) megkívánhatják, hogy a kísérletet valamely más, redukált kísérlettel helyettesítsük. Természetes elvárni, hogy egy redukált kísérlet esetén az adott értelemben optimális döntés ne nagyon térjen el az eredeti tér optimális döntésétől. Mivel, mint azt a későbbiekben látni fogjuk, a döntések optimalitási tulajdonságai nagyon szorosan összefüggnek a kísérletben tartalmazott információval, így a redukált kísérlettől azt célszerű megkövetelni, hogy az „közel elégséges" legyen. Ezen elképzelés pontosabb megfogalmazását szolgálja a

2. 7. DEFINICIÓ: Legyen $\{X', \mathcal{B}'\} \subset \{X, \mathcal{B}\}$, továbbá $\{\Theta', \tau'\} \subset \{\Theta, \tau\}$ s jelölje minden $\vartheta \in \Theta'$ esetén P'_{ϑ} a P_{ϑ} mérték megszorítását az $\{X', \mathcal{B}'\}$ térre, s jelölje $p'(\vartheta')$

a $p(\vartheta)$ sűrűség megszorítását a redukált paramétertérre. Az $\varepsilon' = \{X', \mathscr{B}', \Theta', P'_\Theta\}$ kísérletet δ-elégségesnek nevezzük az $\varepsilon = \{X, \mathscr{B}, \Theta, P_\Theta\}$ kísérletre nézve, ha

$$\mathscr{I}(\varepsilon) - \mathscr{I}(\varepsilon') < \delta.$$

Tekintsük a kísérletek sorozatát, hasonlóan a 2. 2. tételhez. Legyen $\{X^m, \mathscr{B}^m\} = \bigotimes_{i=1}^{m} \{X_i, \mathscr{B}_i\}$ s legyen P^m_ϑ értelmezve $\{X^m, \mathscr{B}^m\}$-n minden $\vartheta \in \Theta$-ra, oly módon, hogy P^n_ϑ a P^m_ϑ mérték megszorítása az $\{X^n, \mathscr{B}^n\}$ σ-algebrára, hacsak $n < m$. A 2. 2. tétel általánosítása a

2. 3. TÉTEL

$$\mathscr{I}(\varepsilon^m) = \mathscr{I}(\varepsilon_1) + \sum_{i=1}^{m-1} \mathscr{I}(\varepsilon_{i+1}|\varepsilon^i)$$

ahol

$$\varepsilon^n = \{X^n, \mathscr{B}^n, \Theta, P^n_\Theta\}$$

és

$$\varepsilon_n = \{X_n, \mathscr{B}_n, \Theta, P_{\Theta,n}\}$$

A tétel bizonyítása teljes indukcióval egyszerűen elvégezhető.

Vizsgáljuk meg most független kísérletekben levő információ mennyiségét. Ehhez mindenekelőtt szükséges a következő

2. 7. DEFINICIÓ: Ugyanazon paramétertérhez kapcsolódó ε_1 és ε_2 kísérleteket függetleneknek nevezzük, ha

$$p(x_2, x_1|\vartheta) = p(x_2|\vartheta)p(x_1|\vartheta) \tag{2. 16}$$

összefüggés teljesül ϑ minden értékére.

Hangsúlyozzuk, hogy a kísérletek függetlensége nem jelenti az x_1 és x_2 valószínűségi változók feltétel nélküli függetlenségét. Teljesen analóg a fenti definícióval a következő

2. 8. DEFINICIÓ: Ugyanazon paraméterhez kapcsolódó $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ kísérletsorozatról azt mondjuk, hogy Markov-láncot alkot, ha

$$p(x_m|x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, \vartheta) = p(x_m|x_{ik}, \vartheta), \tag{2. 17}$$

ϑ minden lehetséges értékére teljesül, ahol $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < m$.

Könnyű látni, hogy független kísérletek esetén $\varepsilon_2(x_1) \equiv \varepsilon_2$, míg Markov-láncot alkotó kísérletek mellett $\varepsilon_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varepsilon(x_{n-1})$. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a bennük levő információ mennyisége is megegyezik. Ebben az irányban érvényes a

2. 4. TÉTEL: *Ha ε_1 és ε_2 független kísérletek, akkor*

$$\mathscr{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \leqq \mathscr{I}(\varepsilon_2)$$

s egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha x_1 és x_2 feltétel nélkül is függetlenek.

Bizonyítás:

$$\mathscr{I}(\varepsilon_2) - \mathscr{I}(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = E_{x_2} E_\vartheta \left\{\log \frac{p(x_2|\vartheta)}{p(x_2)}\right\} - E_{x_1} E_{x_2} E_\vartheta \left\{\log \frac{p(x_2|\vartheta)}{p(x_2|x_1)}\right\} =$$

$$= E_{x_1} E_{x_2} E_\vartheta \left\{\log \frac{p(x_2|\vartheta) \cdot p(x_2|x_1)}{p(x_2) \cdot p(x_2|\vartheta)}\right\} = E_{x_1} E_{x_2} \left\{\log \frac{p(x_2|x_1)}{p(x_2)}\right\}.$$

A 2. 3. definícióhoz fűzött megjegyzéseink szerint ez a mennyiség az x_1 és x_2 valószínűségi változók kölcsönös információja, ami a 2. 1. tétel miatt nem negatív, továbbá akkor és csak akkor nulla, ha x_1 és x_2 függetlenek. Ez állításunkat igazolja.

A 2. 4. tétel megfelelője Markov-láncok esetére a

2. 5. TÉTEL: *Ha az* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *kísérletek Markov-láncot alkotnak, akkor*

$$\mathcal{I}(\varepsilon_{n+1}|\varepsilon^n) \leqq \mathcal{I}(\varepsilon_{n+1}|\varepsilon_n)$$

s itt egyenlőség akkor és akkor áll fenn, ha az $x_1, x_2, \ldots$ *valószínűségi változók is Markov-láncot alkotnak.*

Bizonyítás:

$$\mathcal{I}(\varepsilon_{n+1}|\varepsilon^n) - \mathcal{I}(\varepsilon_{n+1}|\varepsilon_n) = E_{x_n} E_{x_{n+1}} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_{n+1}|\vartheta)}{p(x_{n+1}|x_n)} \right\} -$$

$$- E_{\underline{x}^{(n)}} E_{x_{n+1}} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_{n+1}|\vartheta)}{p(x_{n+1}|\underline{x}^{(n)})} \right\} =$$

$$= E_{x_n} E_{\underline{x}^{(n)}|x_n} E_{x_{n+1}} E_{\vartheta} \left\{ \log \frac{p(x_{n+1}|\vartheta)}{p(x_{n+1}|x_n)} \cdot \frac{p(x_{n+1}|\underline{x}^{(n)})}{p(x_{n+1}|\vartheta)} \right\}.$$

Így adódik

$$\mathcal{I}(\varepsilon_{n+1}|\varepsilon^n) - \mathcal{I}(\varepsilon_{n+1}|\varepsilon_n) = E_{x_n} E_{\underline{x}^n|x_n} E_{x_{n+1}} \left\{ \log \frac{p(x_{n+1}|x_n, \underline{x}^{(n)})}{p(x_{n+1}|x_n)} \right\}.$$

Ez a mennyiség nem más, mint az x_{n+1} és $\underline{x}^n$ valószínűségi változók kölcsönös információja, feltéve, hogy x_n adott. Ez az információ érték pedig nem negatív, s nulla akkor és csak akkor, ha $p(x_{n+1}|x^{(n)}) = p(x_{n+1}|x_n)$, azaz ha az $x_1, x_2, \ldots$ valószínűségi változók is Markov-láncot alkotnak.

A két utóbbi tételünkből a 2. 2. és a 2. 3. tétel alapján következik az alábbi két következmény

2. 4. *Következmény:* Ha ε_1 és ε_2 független kísérletek, továbbá $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, akkor

$$\mathcal{I}(\varepsilon_1) + \mathcal{I}(\varepsilon_2) \geqq \mathcal{I}(\varepsilon)$$

s egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha x_1 és x_2 is független.

2. 5. *Következmény:* Ha az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ kísérletsorozat Markov-láncot alkot, akkor

$$\mathcal{I}(\varepsilon_1) + \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{I}(\varepsilon_{i+1}|\varepsilon_i) \geqq \mathcal{I}(\varepsilon^m)$$

s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az $x_1, x_2, \ldots$ valószínűségi változók is Markov-láncot alkotnak.

Jelen fejezet befejezéseként válaszoljunk a 2. 2. példa kapcsán felvetett kérdésre. Az ottani jelöléseket használva megfogalmazzuk a következő tételt:

2. 6. TÉTEL: *Az* ε^n *kísérletsorozatban tartalmazott információ mennyiségének határértéke megegyezik az* ε *kísérletben tartalmazott információ mennyiségével, azaz*

$$\lim_{(n)} \mathcal{I}(\varepsilon^n) = \mathcal{I}(\varepsilon). \tag{2.18}$$

Bizonyítás: Az $\mathcal{I}(\varepsilon^n)$ sorozat monoton növekvő a 2. 2. következmény értelmében, tehát létezik a $\lim \mathcal{I}(\varepsilon^n)$ határérték, s ugyancsak ezért

$$\lim_{(n)} \mathcal{I}(\varepsilon^n) \leqq \mathcal{I}(\varepsilon). \tag{2.19}$$

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához vegyük észre, hogy mivel Q a P_Θ mértékosztályt dominálo mérték, így ugyanezt a szerepet játsza a Q^n mérték a P_Θ^n mértékosztályra vonatkozóan. Továbbá a feltételeink szerint létezik a $\frac{\mathrm{d}P_\vartheta}{\mathrm{d}Q}$ Radon—Nikodym derivált minden ϑ-ra, s így

$$p_\vartheta(\underline{x}^{(n)}) = \frac{dP_\vartheta^n}{dQ^n} = E\left\{\frac{dP_\vartheta}{dQ}\,\middle|\,\mathcal{B}^n\right\}.$$

Tehát a $p_\vartheta(x^{(n)})$ sorozat martingál. A martingálokra vonatkozó jól ismert konvergencia tétel (lásd pl. Doob [6]) értelmében:

$$\lim \frac{dP_\vartheta^n}{dQ^n} = \frac{dP_\vartheta}{dQ} \quad (Q \text{ majdnem mindenütt}).$$

A Fatou lemma alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\lim E_Q\left\{\log \frac{p(\underline{x}^n|\vartheta)}{p(\underline{x}^n)}\right\} \geqq E_Q\left\{\log \frac{p(x|\vartheta)}{p(x)}\right\}$$

s innen

$$\lim \mathcal{I}(\varepsilon^n) = \lim E_\vartheta\left[E_Q\left\{\log \frac{p(x^n|\vartheta)}{p(x^n)}\right\}\right] \geqq E_\vartheta\left[\lim E_Q\left\{\log \frac{p(x^n|\vartheta)}{p(x^n)}\right\}\right] \geqq$$

$$\geqq E_\vartheta E_Q\left\{\log \frac{p(x|\vartheta)}{p(x)}\right\} = \mathcal{I}(\varepsilon).$$

Ezt összevetve a (2. 19) egyenlőtlenséggel, nyerjük a bizonyítani kívánt (2. 18) összefüggést.

A vizsgált konvergencia gyorsaságával, pontosabban az $\mathcal{I}(\varepsilon^n)$ információ mennyiség aszimptotikájával az 5. §-ban fogunk foglalkozni.

3. §. A STANDARD DÖNTÉS VIZSGÁLATA

Jelen és a következő részben a klasszikus döntésproblémát fogjuk vizsgálni. Legyen, mint az előzőekben adva az $\{\Theta, \tau\}$ paramétertér, és az $\{X, \mathcal{B}\}$ mintatér. Legyen adva továbbá a $\{\Theta \otimes X, \tau \otimes \mathcal{B}\}$ mérhető téren egy $P_{\vartheta,x}$ valószínűségi mérték. Jelöljön x, ill. ϑ olyan valószínűségi változót, melynek értékkészlete az X, ill. a Θ halmaz, vagy annak része. Az x és a ϑ változók értelmezési tartománya tetszőleges valószínűségi mező, mely a továbbiakban nem fog lényeges szerepet játszani, így az egyszerűség kedvéért ezek jelölését mellőzzük. Mint az szokásos, az x változót mintának, konkrét értékét megfigyelésnek, ϑ-t pedig paraméternek fogjuk nevezni. Jelölje a $P_{\vartheta,x}$ mérték megszorítását a τ σ-algebrára P, továbbá legyen $p(x|\vartheta) = \frac{dP_\vartheta(x)}{dP_{\vartheta,x}(x)}$ az $\{X, \mathcal{B}\}$ mértéktéren rögzített ϑ által generált mérték. Ekkor

az előző rész terminológiájában fogalmazva definiáltuk az $\{\Theta, \tau, P\}$ paramétertérre vonatkozó $\varepsilon = \{X, \mathcal{B}, \Theta, P_\Theta\}$ kísérletet.

A döntésprobléma lényegében abban áll, hogy ezen kísérlet elvégzése után következtetni akarunk ϑ aktuális értékére. Ezt a következtetést akkor tudjuk következetesen végrehajtani, ha megadunk egy utasítást arra nézve, hogy adott megfigyelés esetén ϑ mely értékét kell elfogadnunk. Egy ilyen utasítást döntésnek nevezünk, s a továbbiakban d-vel, néha $d(x)$-szel jelölünk. Nyilván nem célszerű az összes lehetséges döntést általában figyelembe vennünk, hanem azok közül csak bizonyosakat. Ez utóbbiakat megengedett döntéseknek nevezzük, összességüket pedig D betűvel jelöljük és döntéstérnek nevezzük. A továbbiakban amikor döntésről beszélünk, mindig megengedett döntésre fogunk gondolni.

Vizsgálatainkban a D döntésteret a következőképpen értelmezzük:

3. 1. DEFINICIÓ: Legyen $\{\Omega, \mathcal{A}, P^*\}$ teljesen független mértéktér a $\{\Theta \otimes X, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}, P_{x,\vartheta}\}$ mértéktértől. Jelölje $d(x, \omega)$ az $\{X \otimes \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}\}$ tér mérhető leképezését a $\{\Theta, \mathcal{T}\}$ paramétertérre. Az ilyen mérhető leképezések $D = D_\Omega = \{d(x, \omega)\}$ összességét döntéstérnek nevezzük.

Abban az esetben, ha létezik olyan $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $P^*(A_1) > 0$, $P^*(A_2) > 0$ és $x \in X$, hogy

$$d(x, \omega_1) \neq d(x, \omega_2)$$

az $\omega_1 \in A_1$ és $\omega_2 \in A_2$ tetszőleges választása mellett, akkor azt mondjuk, hogy a d döntés randomizált döntés, míg ellenkező esetben direkt, vagy más néven tiszta típusú döntésről beszélünk.

Megemlítjük, hogy a gyakorlati életben célszerű a döntések nyomán fellépő veszteséget, illetve nyereséget számszerűen kifejezni. Mivel ez a mennyiség csak a valódi paraméterértéktől és annak a d döntés alapján elfogadott értékétől függ, így veszteségfüggvényként értelmezhető minden, bizonyos megszorításoknak eleget tevő $w(\vartheta, d)$, az $\Theta \otimes D$ téren definiált valós függvény. Vizsgálatainkban azonban a veszteségfüggvények esetét nem fogjuk tárgyalni.

A továbbiak számára hasznos lesz a

3. 2. DEFINÍCIÓ: Egy $d(x, \omega)$ döntés $e(d)$ hibájának nevezzük a téves döntés valószínűségét, azaz

$$e(d) = P\{d \neq \vartheta\}. \tag{3. 1}$$

Természetes érdeklődni aziránt, hogy van-e, s ha igen, melyik az a döntés, melynek hibája a lehető legkisebb. Erre a kérdésre fogunk most válaszolni abban az esetben, amikor $\Theta = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r\}$ véges sok értékből áll. E célból definiáljunk egy döntést a következőképpen:

3. 3. DEFINÍCIÓ: Egy $\Delta = \Delta(x, \omega)$ döntést standard döntésnek nevezünk, ha $\Delta(x, \omega) = \vartheta_k$, midőn $p(x|\vartheta_k) > p(x_l|\vartheta_k)$, $i \neq k$. Abban az esetben, ha $p(x|\vartheta_{i_1}) = \ldots = \ldots = p(x|\vartheta_{i_s}) > p(x|\vartheta_i)$ minden $i \neq i_j$, $j = 1, \ldots, s$ esetén, $\Delta(x, \omega)$ az ω-tól függően a ϑ_{i_j} értékek valamelyikét veszi fel.

A standard döntések hibájáról belátjuk, hogy

3. 1. TÉTEL: *A standard döntések hibája egyenlő.*

Bizonyítás: Tetszőleges $\Delta(x, \omega)$ esetén

$$e(\Delta) = P\{\Delta(x, \omega) \neq \vartheta\} = 1 - P\{\Delta(x, \omega) = \vartheta\} = 1 - E_x[P\{\Delta(x, \omega) = \vartheta|x\}]. \tag{3. 2}$$

Nyilván a standard döntések bármely variánsa esetén a $P\{\Delta = \vartheta | x\}$ valószínűség megegyezik, ha az x megfigyelés mellett nem randomizáltunk. Ellenkező esetben tekintsük a

$$P\{\Delta = \vartheta | x\} = E_\omega[P\{\Delta = \vartheta | x, \omega\}]$$

összefüggést. Itt a jobb oldalon álló kifejezésről könnyű látni, hogy az Ω tér tetszőleges kölcsönösen egyértelmű mérhető transzformációjánál nem változik. Ez pedig azt jelenti, hogy a (3. 2) várható érték argumentuma bármely standard döntés esetén megegyezik, ami állításunkat igazolja.

A standard döntések optimum tulajdonságát mutatja a

3. 2. TÉTEL: *A megengedett döntések között a standard döntések hibája a legkisebb.*

Bizonyítás: Legyen d egy tetszőleges döntés, s Δ a standard döntés egy variánsa. Ekkor, ugyanúgy, mint fentebb

$$e(d) - e(\Delta) = \{1 - E_x[P(d = \vartheta | x)]\} - \{1 - E_x[P(\Delta = \vartheta | x)]\} =$$

$$= E_x[P(\Delta = \vartheta | x) - P(d = \vartheta | x)].$$

Itt a várható érték argumentumában levő valószínűségi változó mindig nem negatív, s nulla akkor és csak akkor, ha d szintén a standard döntés egy variánsa, hiszen

$$P(\Delta = \vartheta | x) - P(d = \vartheta | x) = \max p(x | \vartheta_j) - p(x | \vartheta_{d(x,\omega)}) \geqq 0.$$

Tehát a standard döntések hibája valóban a legkisebb, s ha egy tetszőleges döntés hibája ezzel egyenlő, akkor ez utóbbi döntés majdnem minden x-re megegyezik a standard döntés valamelyik variánsával.

Tekintsük a hipotézisvizsgálat klasszikus esetét: Legyen H_0 az a hipotézis, hogy $\vartheta \in \Theta_0 \subset \Theta$, s jelölje a H_1 hipotézis az ellenkező esetet, tehát amikor $\vartheta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$. Tegyük föl, hogy $1 > P(\Theta_0) > 0$. Ekkor a hipotézisvizsgálatra nézve az $\varepsilon = \{X, \mathcal{B}, \Theta, P_\Theta\}$ kísérlet számára az $\varepsilon' = \{X, \mathcal{B}, \Theta', P'_\Theta\}$ kísérlet nyilvánvalóan elégséges kísérlet lesz, ahol Θ' a 0 és 1 értékekből áll, továbbá $P'_i(B) = P_{x,\vartheta}(B | \Theta_i)$. A klasszikus esetben elegendő tehát ezzel a redukált kísérlettel foglalkozni.

Megjegyzés: Erre az esetre a 3. 2. tétel a Neyman—Pearson lemma Bayesi variánsát szolgáltatja, hiszen a döntésfüggvény eloszlása

$$P(\Delta = 0) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \dfrac{dP'_0}{dP} > \dfrac{w_1}{w_0} \dfrac{dP'_1}{dP} \\ \gamma, & \text{ha} \quad = \\ 0, & \text{ha} \quad < \end{cases}$$

ahol $0 \leqq \gamma \leqq 1$.

Jelölje Λ a P'_0 és P'_1 mértékek Hellinger-távolságát*, azaz legyen

$$\Lambda = \int \sqrt{\frac{dP'_0}{d\mu} \frac{dP'_1}{d\mu}}\, d\mu \tag{3. 3}$$

* A Λ mennyiséget, illetve annak logaritmusát újabban egyre gyakrabban mint Bhattacharyya-távolságot idézik, Bhattacharyya [1] munkája nyomán. Mivel az eltérés mérésére ezen mennyiséget először Hellinger [12] használta, következetesen Hellinger-távolságnak fogjuk nevezni.

ahol μ az $\{X, B\}$ mértéktéren értelmezett tetszőleges mérték, melyre nézve a P_0' és P_1' mértékek abszolút folytonosak, $\frac{dP_i}{d\mu}$ pedig a P_i' mérték Radon—Nikodym deriváltját jelöli. Jól ismert, hogy Λ nem függ a μ megválasztásától. Legyen Δ egy tetszőleges, nem randomizált standard döntés. A következőkben a Λ Hellinger-távolságra alsó és felső becslést adunk a standard döntés $e(\Delta)$ hibája segítségével.

Legyen B tetszőleges mérhető részhalmaza X-nek, s jelölje $\bar{B}$ a B halmaz komplementerét. A Cauchy—Schwartz egyenlőtlenség alkalmazásával adódik, hogy

$$\int_B \sqrt{\frac{dP_0'}{dP}\frac{dP_1'}{dP}}\,dP \leqq \{P_1'(B)\}^{1/2}$$

és

$$\int_B \sqrt{\frac{dP_0'}{dP}\frac{dP_1'}{dP}}\,dP \leqq \{P_0'(\bar{B})\}^{1/2}$$

Legyen $w_0 = P(\Theta_0)$ és $w_1 = P(\Theta_1) = 1 - w_0$. Ekkor egyszerűen adódik, hogy

$$\Lambda \leqq \frac{1}{w_0}\{P_1'(B)\}^{1/2} + \frac{1}{w_1}\{P_0'(\bar{B})\}^{1/2}$$

ahonnan azonos átalakítás után

$$\Lambda \leqq \sqrt{\frac{2}{w_0 w_1}}\left[\{w_1 P_1'(B)\}^{1/2} + \{w_0 P_0'(\bar{B})\}^{1/2}\right].$$

Felhasználva az $y = \sqrt{x}$ függvény konvexitását, nyerjük:

$$\Lambda \leqq \sqrt{\frac{2}{w_0 w_1}}\{w_1 P_1'(B) + w_0 P_0'(B)\}^{1/2}.$$

Legyen speciálisan B a H_0 hipotézis elfogadási tartománya. Ekkor

$$e(\Delta) = w_0 P_0'(\bar{B}) + w_1 P_1'(B)$$

s így

$$\Lambda \leqq \sqrt{\frac{2e(\Delta)}{w_0 w_1}} \tag{3.4}$$

Legyen most B_c az a részhalmaz, melyen $\frac{dP_0'}{dP} \geqq c\frac{dP_1'}{dP}$. Mivel

$$\Lambda = \int_{B_c} \sqrt{\frac{dP_0'}{dP}\frac{dP_1'}{dP}}\,dP + \int_{\bar{B}_c} \sqrt{\frac{dP_0'}{dP}\frac{dP_1'}{dP}}\,dP$$

így felhasználva a B_c halmaz definícióját

$$\Lambda \geqq \sqrt{c}\,P_1'(B_c) + \frac{1}{\sqrt{c}}P_0'(\bar{B}_c).$$

Abban az esetben, ha $c=\frac{w_1}{w_0}$, B_c megegyezik egy standard döntés elfogadási tartományával, s ezért

$$\Lambda \leqq \frac{1}{\sqrt{w_0 w_1}} e(\Delta) . \tag{3. 5}$$

A (3. 4) és (3. 5) összefüggések összehasonlításából adódik

3. 3. TÉTEL: *Fennáll az*

$$\frac{e(\Delta)}{\sqrt{w_0 w_1}} \leqq \Lambda \leqq \sqrt{\frac{2e(\Delta)}{w_0 w_1}} \tag{3. 6}$$

reláció, ahol Λ-t a (3. 3) *összefüggés definiálja, $e(\Delta)$ pedig a standard döntés hibája.*

A (3. 6) becslés ekvivalens a standard döntés hibájára vonatkozó

$$\frac{w_0 w_1}{2} \Lambda^2 \leqq e(\Delta) \leqq \sqrt{w_0 w_1}\, \Lambda \tag{3. 7}$$

becsléssel.

Megjegyezzük, hogy az itt szereplő becslések lényegesen javíthatók (lásd Rényi A. [29]). A (3. 7) becslés jó egyezést mutat Kailath vonatkozó eredményével [13].

A 3. 3. tétel speciális esete a

3. 1. *Következmény:* Akkor és csak akkor létezik olyan döntés, melynek hibája nulla, ha a két hipotézisnek megfelelő mértékek ortogonálisak egymásra.

Ez a következmény megfogalmazható véges sok hipotézis esetére is, amint azt mutatja a

3. 2. *Következmény:* Véges sok paraméterérték mellett a standard döntés hibája akkor és csak akkor nulla, ha az egyes paraméterértékeknek megfelelő mintaeloszlások páronként ortogonálisak.

Bizonyítás: Legyen először a Δ standard döntés hibája nulla, s tekintsük a $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ hipotézist és az alternatív $H_1: \vartheta \neq \vartheta_0$ hipotézist. A feltétel miatt egy valószínűséggel helyes döntést eredményez a Δ döntés, így a 3. 1. következmény miatt a ϑ_0 paraméterértéknek megfelelő mintaeloszlás ortogonális lesz a többi mintaeloszlás pozitív súlyokkal vett keverékére, tehát minden más mintaeloszlásra is. Mivel ϑ_0 tetszőleges volt, így valóban ekkor az egyes paraméterértékeknek megfelelő mintaeloszlások ortogonálisak.

A fordított állítást bizonyítandó legyen $B_{k,i}$ olyan halmaz, melyre

$$P_{k_i}(B_{k,i}) = 1; \quad P_{\vartheta_i}(B_{k,i}) = 0, \qquad i \neq k$$

Ekkor véve a $B_k = \bigcap_i B_{k,i}$ halmazt, könnyű látni, hogy

$$P_{\vartheta_k}(B_k) = 1 \quad \text{és} \quad P_{\vartheta_i}(B_k) = 0, \quad \text{hacsak } i \neq k,$$

továbbá $P(\bigcup_k B_k) = 1$.

Legyen $d(x, \omega) = \vartheta_k$, ha $x \in B_k$. Így a $d(x, \omega)$ döntést majdnem minden x-re értelmeztük. Az esetleg fennmaradó x értékekre tetszőlegesen értelmezve olyan döntést nyerünk, melyre $e(d) = 0$ s ez az ellenkező állítást igazolja.

Tekintsük a 3. 3. tétel alkalmazására a következő példákat:

3. 1. *Példa:* Tekintsük az $\varepsilon' = \{X, \mathfrak{B}, \Theta', P'_\Theta\}$ kísérlet n független ismétlését (lásd 2. 7. definíció). Ekkor

$$\Lambda_n = \int \sqrt{\frac{dP'_0(\underline{x})}{dP(\underline{x})} \frac{dP'_1(\underline{x})}{dP(\underline{x})}}\, dP(\underline{x}) = \left[\int \sqrt{\frac{dP'_0(x_1)}{dP(x_1)} \frac{dP'_1(x_1)}{dP(x_1)}}\, dP(x_1)\right]^n = \lambda^n.$$

3. 2. *Példa:* Legyen

$$\frac{dP'_0(x_1)}{dP(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

és

$$\frac{dP'_1(x_1)}{dP(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

akkor

$$\lambda = \exp\left\{-\frac{(m_1-m_2)^2}{8\sigma^2}\right\}.$$

Legyen

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(x-\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Könnyű látni, hogy $I(\tilde{P}:P'_0) = I(\tilde{P}:P'_1) = \frac{(m_1-m_2)^2}{8\sigma^2}$ s ezért

$$\lambda = \exp\{-r(P'_0, P'_1)\} \tag{3. 8}$$

ahol $I(\nu:\mu)$ az I-divergenciát jelöli, míg $r(\nu, \mu)$ a ν és μ mértékek egy információelméleti távolsága, melyet az

$$r(\nu, \mu) = \min_{(m)} \{I(m:\nu) = I(m:\mu)\} \tag{3. 9}$$

összefüggés definiál.

3. 3. *Példa:* Tekintsük a 3. 1. példához hasonlóan független kísérleteket; a szereplő eloszlások mintánként azonos szórású normális eloszlások; — legyenek a két hipotézisnek megfelelő várható értékek a kísérletektől függetlenek, azonban a szórások kísérletenként változzanak. Az I-divergencia additivitása miatt e példa esetén is érvényben marad a (3. 8) összefüggés.

3. 4. *Példa:* Legyen P_0^n, ill. P_1^n binomiális eloszlás. Miként ezt Rényi A. bizonyította [25], fennáll, hogy

$$\mathcal{I}(\varepsilon) \approx O[\exp\{-r(P_0^n, P_1^n)\}].$$

Másrészt általánosan is könnyen igazolható, hogy

$$e(\Delta) \leqq 2 \cdot \mathcal{I}(\varepsilon)$$

s így elég nagy n esetén alkalmas c mellett

$$e(\Delta) \leqq c \cdot \exp\{-r(P_0^n, P_1^n)\}.$$

Ha a binomiális eloszlást úgy értelmezzük, mint egy egyszerű alternatíva n független ismétlését, akkor nyerjük

$$e(\Delta) \leqq c \cdot \lambda^n$$

ahol

$$\lambda = \exp\{-r(p_0, p_1)\}.$$

4. §. A LEGINFORMATÍVABB DÖNTÉS

Egy hipotézisvizsgálat számára a mintatér két függvénye közül kézenfekvő hasznosabbnak ítélni azt, amelyik a redukált Θ paramétertérre nézve több információt tartalmaz. Ennek a szemléletnek megfelelően a hipotézisvizsgálat során azt a döntési eljárást kell előnyben részesítenünk, azt kell legjobbnak ítélnünk, amelyik a legtöbb információt tartalmazza az összes megengedett döntések körében a ϑ paraméterre nézve. Természetesen nem mindegy, hogy ezt az információt hogyan használjuk fel. Mint azt könnyű látni ϑ két értéke mellett egy döntés, s ennek ellentettje ugyanannyi információt tartalmaz. Ennek ellenére jobbnak kell ítélnünk azt, amelyik átlagban többször adja a helyes eredményt, tehát amelyre nagyobb valószínűséggel teljesül a $d(x, \omega) = \vartheta$ összefüggés. Bebizonyítjuk, hogy egyszerű alternatíva esetén mindig létezik a döntéstéren leginformatívabb döntésfüggvény, s ez megadható a likelihood-hányadosnak megfelelően a szokásos alakban. Ez egyúttal tehát a Neyman—Pearson lemma információelméleti variánsát fogja szolgáltatni.

Tekintsük az előző részben leírt redukált döntésproblémát. Legyen először Θ a 0 és 1 számok halmaza, τ az összes részhalmaz „σ-algebrája", legyen továbbá $\varepsilon = \{X, \mathscr{B}, \Theta, P_\Theta\}$ a hipotézisvizsgálatban szereplő kísérlet. Randomizációs térnek vegyünk egy olyan $\{\Omega, \mathscr{A}, P^*\}$ teret, hogy tetszőleges $0 \leqq \gamma \leqq 1$ esetén létezik olyan $A \in \mathscr{A}$, melyre $\gamma = P^*(A)$. Legyen továbbá

$$w_k = P(\vartheta = k), \qquad k = 0, 1 \tag{4. 1}$$

s jelöljön $d \in D$ egy tetszőleges döntést. A 2. 3. definíció értelmében a $\underline{d}$ döntésben a ϑ paraméterre vonatkozóan tartalmazott információ:

$$\mathscr{I}(d, \vartheta) = E_d E_\vartheta \left\{ \log \frac{p(d|\vartheta)}{p(\vartheta)} \right\}. \tag{4. 2}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$h(p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p) \tag{4. 3}$$

$$\begin{cases} y_0 = P\{d = 0 | \vartheta = 0\} \\ y_1 = P\{d = 0 | \vartheta = 1\}. \end{cases} \tag{4. 4}$$

Ezek felhasználásával, mint az könnyen látható, az $\mathscr{I}(d, \vartheta)$ információmennyiség következő előállítása érvényes:

$$\mathscr{I}(d, \vartheta) = h(w_0 y_0 + w_1 y_1) - w_0 h(y_0) - w_1 h(y_1). \tag{4. 5}$$

Ugyancsak egyszerűen látható be ennek következő átalakítása:

$$\mathscr{I}(d, \vartheta) = [w_0 y_0 + w_1 y_1] \log \frac{w_0 y_0}{w_0 y_0 + w_1 y_1} + [1 - w_0 y_0 - w_1 y_1] \log \frac{w_0 (1 - y_0)}{1 - w_0 y_0 - w_1 y_1}. \tag{4. 6}$$

A $h(p)$ függvény konvexitásából következik, hogy $\mathcal{I}(d, \vartheta) \geqq 0$, továbbá $w_0, w_1 \neq 0$ esetén egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $y_0 = y_1$. Ennek triviális következménye az a szemléletesen nyilvánvaló tény, hogy semmi információt sem nyerünk, ha a megfigyeléstől függetlenül mindig ugyanúgy döntünk, azaz abban az esetben, ha a $P\{d(x, \omega) = 0\}$ valószínűség nem függ x-től, akkor $\mathcal{I}(d, \vartheta) = 0$.

A maximumot keresendő tekintsük $\mathcal{I}(d, \vartheta)$-t, mint az y_0 és y_1 változók függvényét. Jelöljük $i(y_0, y_1)$-gyel a (4. 5) összefüggés jobb oldalán álló kifejezést, s vizsgáljuk ennek viselkedését az egységnégyzetben. Megjegyezzük, hogy a valódi értelmezési tartomány része az egységnégyzetnek, s minden $0 \leqq y_0 \leqq 1$ esetén létezik olyan y_1 érték, hogy $\mathcal{I}(d, \vartheta)$ értelmezett az (y_0, y_1) pontban. Képezve az

$$\frac{\partial i(y_0, y_1)}{\partial y_k} = -w_k \left[\log \frac{w_0 y_0 + w_1 y_1}{1 - w_0 y_0 - w_1 y_1} - \log \frac{y_k}{1 - y_k} \right]$$

parciális deriváltakat, könnyen látható, hogy $\frac{\partial i}{\partial y_k} = 0$ akkor és csak akkor, ha $y_0 = y_1$, $k = 0, 1$.

Mint láttuk, az $y_0 = y_1$ egyenes mentén minimum van. A fentiekből tehát következik, hogy a maximumhely y_0 és y_1 értelmezési tartományának határán helyezkedik el, továbbá rögzített y_0 esetén a lehető legnagyobb vagy a lehető legkisebb y_1 mellett maximális $\mathcal{I}(d, \vartheta)$. Ebből rögtön következik a

4. 1. Tétel: *A $d(x, \omega)$ döntés akkor és csak akkor tartalmazhat minden információt ϑ-ra nézve, ha a P_0 és P_1 mértékek ortogonálisak.*

Bizonyítás: Valóban, ha $y_0 = 1$ és $y_1 = 0$, vagy $y_0 = 0$ és $y_1 = 1$, akkor $H(\vartheta) = I(d, \vartheta)$, s a fentiek szerint az egyenlőség máskor nem állhat fenn. Jelöljük a döntés feltételes eloszlását $\alpha_k(x)$-szel, azaz legyen

$$\alpha_k(x) = P_{x,\vartheta} \otimes P^*(d = k | x), \qquad k = 0, 1. \tag{4. 7}$$

Könnyű látni, hogy ekkor

$$y_k = E_k\{\alpha_0(x)\}. \tag{4. 8}$$

miatt $\alpha_0(x)$ akkor és csak akkor választható meg úgy, hogy (y_0, y_1) értéke a (0, 1) és az (1, 0) értékpár egyike legyen, ha a P_0 és a P_1 mértékek ortogonálisak.

Megjegyezzük, hogy a tétel következik $\mathcal{I}(d, \vartheta)$ (4. 6) előállításától is.

Jelöljük $f_k(x)$-szel a P_k mérték Radon—Nikodym deriváltját a $P_{x,\vartheta}$ mértékre vonatkozóan. Ennek segítségével (4. 8) ekvivalens előállítása

$$y_k = \int \alpha_0(x) f_k(x)\, dP_{x,\vartheta}$$

Nézzük meg, hogy rögzített y_0 esetén $\alpha_0(x)$ milyen választása mellett lesz y_1 maximális, ill. minimális. Legyen $\alpha_0^*(x)$ tetszőleges, 0 és 1 közti értékeket felvevő mérhető függvény, és legyen

$$y_0^* = \int \alpha_0^*(x) f_0(x)\, dP_{x,\vartheta}$$

akkor tetszőleges $c \geqq 0$ esetén

$$y_1^* = \int \alpha_0^* f_1\, dP_{x,\vartheta} = \int \alpha_0^* (f_1 - c f_0)\, dP + c y_0^*$$

s ezért nyilvánvalóan

$$cy_0^* - \int |f_1 - cf_0|_- \, dP \leqq y_1^* \leqq cy_0^* + \int |f_1 - cf_0|_+ \, dP$$

ahol

$$|g(x)|_+ = \begin{cases} g(x), & \text{ha} \quad g(x) \geqq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad g(x) \leqq 0 \end{cases}$$

és

$$|g(x)|_- = |-g(x)|_+ .$$

Legyen

$$\alpha^c(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad f_1(x) > cf_0(x) \\ \gamma_c, & \text{ha} \quad f_1 = cf_0 \\ 0, & \text{ha} \quad f_1 < cf_0 . \end{cases}$$

A fentiekből következik, hogy ha valamilyen y_0-hoz létezik c és γ_c úgy, hogy

$$y_0 = \int \alpha^c(x) f_0(x) \, dP \tag{4.9}$$

akkor y_1 keresett minimális értéke

$$y_1 = \int \alpha^c(x) f_1(x) \, dP$$

Könnyen látható, hogy az y_0 és y_1 valódi értelmezési tartománya szimmetrikus az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontra. Valóban, az (y_0, y_1) pont tükörképe az $(1-y_0, 1-y_1)$ pont, s ha az (y_0, y_1) pontot az $\alpha_0^*(x)$ függvény határozza meg, akkor annak tükörképét az $\alpha_0^{**}(x) = \alpha_1^*(x)$ függvény állítja elő. Figyelembe véve még, hogy $h(p) = h(1-p)$ adódik, hogy ha minden 0 és 1 közti y_0 előállítható (4. 9) alakban, akkor léteznek olyan $c > 0$ és $0 \leqq \gamma_c \leqq 1$ számok, hogy a hozzájuk tartozó $\alpha^c(x)$ függvény maximális információt szolgáltató döntésfüggvényt határoz meg. Nem randomizált esetben nyilván igaz a megfordítás is, azaz a maximális információt tartalmazó döntésfüggvényre $\alpha_0(x) = \alpha^c(x)$ vagy $\alpha_1(x) = \alpha^c(x)$ megfelelő c és γ_c mellett.

Lássuk be, hogy a fenti előállítás mindig létezik. Legyen

$$\tilde{\alpha}_c = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad f_1(x) \geqq cf_0(x) \\ 0, & \text{ha} \quad f_1 < cf_0 \end{cases}$$

és

$$y_0(c) = \int \tilde{\alpha}^c(x) f_0(x) \, dP_{x,\vartheta} .$$

Ekkor $y_0(0) = 1$, $y_0(+\infty) = 0$, továbbá $y_0(c)$ c-nek monoton csökkenő függvénye, tehát legfeljebb megszámlálható szakadási helye van. Ezekben az ugrás nagysága:

$$y_0(c+0) - y_0(c-0) = \lim_{\tau \to 0} \{y_0(c+\tau) - y_0(c-\tau)\} =$$

$$= \lim_{\tau} \left\{ \int_{B_{c+\tau}} f_0(x) \, dP - \int_{B_{c-\tau}} f_0(x) \, dP \right\} = -\int_{\{x: f_1 = cf_0\}} f_0(x) \, dP$$

ahol $B_t = \{x : f_1 \geqq tf_0\}$

Könnyen látható az is, hogy $y_0(c)$ balról folytonos függvény. Ez azt jelenti, hogy γ_c helyes megválasztásával minden $0 \leqq y_0 \leqq 1$ érték előállítható a kívánt alakban, tehát igaz a következő

4. 2. TÉTEL: *Létezik ϑ-ra nézve maximális információt tartalmazó döntésfüggvény, melyet $\delta(x)$-szel fogunk jelölni, mégpedig megfelelő c és $0 \leqq \gamma_c \leqq 1$ esetén vagy*

$$P\{\delta(x)=0\} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad f_1 > cf_0 \\ \gamma_c, & \text{ha} \quad f_1 = cf_0 \\ 0, & \text{ha} \quad f < cf_0 \end{cases}$$

vagy a $P\{\delta(x)=1\}$ valószínűségre érvényes a fenti összefüggés.

Megjegyzés: Ha az $\{x: f_1 > cf_0\}$ halmaz mértéke minden $c>0$ esetén nulla, akkor létezik nem randomizált optimális döntés. Ez azonban nem szükséges feltétel, mint azt a 4. 1. és 4. 3. példa mutatja.

Megjegyezzük még, hogy azon c-k halmaza, melyekre $\int \alpha^c f_0 dP$ konstans, mindkét végén zárt véges, vagy balról zárt végtelen intervallum, s ezen intervallumban $\int \alpha^c f_1 dP$ és ezért a megfelelő információmennyiség is konstans.

A c és γ_c értékek meghatározásához segítséget nyújt az $I(\delta, \vartheta)$ mennyiség (y_0, y_1) síkban vett értelmezési tartományának további vizsgálata. Láttuk, hogy a határ paraméteres egyenlete a c és γ_0 paraméterek mellett

$$y_0 = \int \alpha^c f_0 \, dP$$

$$y_1 = \int \alpha^c f_1 \, dP.$$

Legyen $y_0(c) = \int \bar{\alpha}_0^c f_0(x) dP$ a c pont környezetében c-nek szigorúan monoton, folytonos függvénye. Akkor, mint az könnyen látható,

$$c-h \leqq \frac{y_1(c-h)-y_1(c+h)}{y_0(c-h)-y_0(c+h)} \leqq c+h.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = c$$

vagyis az értelmezési tartomány felső határának ilyen esetben létezik az érintője, s c éppen az érintő iránytangensét adja meg.

Ha az $y_0(c)$ függvénynek a c pontban szakadása van, akkor

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y_0} = c$$

azaz a határon γ_c különböző értékeinek egyenesszakasz felel meg.

S végül abban az esetben, ha $y_0(c)$ konstans valamilyen $[c_1, c_2]$ intervallumban, akkor itt a $\frac{\partial y_1}{\partial y_0}$ derivált nem létezik, csak a jobb, ill. bal oldali deriváltak léteznek, mégpedig értékük c_2, ill. c_1. Abban az esetben, ha az $I(\delta, \vartheta) = i(y_0, y_1)$ függvény maximumát nem ilyen töréspontban veszi fel, akkor a maximum csak olyan c érték mellett lehetséges, melyre

$$c = -\frac{\dfrac{\partial i(y_0, y_1)}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial i(y_0, y_1)}{\partial y_1}}$$

Valóban, ha a (c_0, c_1) intervallum olyan, hogy $y_0(c_1\gamma_c)=\int \alpha^c f_0 dP$ c-nek, ill. rögzített c esetén γ_c-nek szigorúan monoton függvénye, akkor a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial i(y_0, y_1)}{\partial c}=0 \quad \text{ill.} \quad \frac{\partial i(y_0, y_1)}{\partial \gamma_c}=0 \quad \text{legyen.}$$

S mivel

$$\frac{\partial i(y_0, y_1)}{\partial c}=\frac{\partial i}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial c}+\frac{\partial i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial c}$$

és a feltétel miatt $\frac{\partial y_0}{\partial c}\neq 0$, így adódik, hogy szélsőérték csak ott lehet, ahol

$$\frac{\partial i}{\partial y_0}+c\frac{\partial i}{\partial y_1}=0.$$

Ugyanez az összefüggés adódik akkor is, ha rögzített c mellett γ_c szerinti deriváltat vizsgáljuk, így érvényes a következő

4. 3. TÉTEL: *Az $I(\delta, \vartheta)$ mennyiség, mint c függvénye csak olyan pontban veheti fel maximumát, melyre fennáll a*

$$\frac{\partial i}{\partial y_0}+c\frac{\partial i}{\partial y_1}=0 \tag{4.10}$$

differenciálegyenlet.

4. 1. *Példa:* Legyen X a pozitív féltengely, $\mathfrak{B}$ pedig a Lebesque mérhető részhalmazainak σ-algebrája. Θ álljon a 0 és 1 számokból, továbbá P_0 és P_1 legyen a [0, 1], ill. [0, d] intervallumban értelmezett egyenletes eloszlás, ahol $d>1$ rögzített szám. A két hipotézis között egyetlen kísérlet alapján akarunk dönteni; — feladat a leghatásosabb döntésfüggvény meghatározása.

A P_0 és P_1 mértékek abszolút folytonosak a μ Lebesque mértékre nézve, és

$$f_0(x)=\frac{dP_0}{d\mu}=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1\\ 0 & \text{másként}\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{d}, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq d.\\ 0, & \text{másként}\end{cases}$$

Könnyen látható, hogy egy döntésfüggvény csak $c=\frac{1}{d}$ esetén tartalmazhat maximális információt γ_c megfelelő megválasztása mellett, azaz akkor, ha

$$\alpha_0(x)=\begin{cases}\gamma, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ekkor $y_0=\gamma$ és $y_1=\frac{\gamma}{d}$, tehát tetszőleges w_0 esetén az

$$i(\gamma)=h\left\{\left(w_0+\frac{w_1}{d}\right)\gamma\right\}-w_0 h(\gamma)-w_1 h\left(\frac{\gamma}{d}\right) \tag{4.11}$$

függvény maximumhelyét kell megkeresni a [0, 1] zárt intervallumban. Egyszerű számolás után adódik, hogy

$$\frac{d^2 i}{d\gamma^2} = \left[\frac{1}{\ln 2}\right]^2 \frac{w_0 \cdot w_1 \left(1-\frac{1}{d}\right)^2}{\left[1-\gamma\left(w_0+\frac{w_1}{d}\right)\right][1-\gamma]\left[1-\frac{\gamma}{d}\right]}.$$

Figyelembe véve, hogy $d>1$, $w_0 \cdot w_1 > 0$, nyerjük:

$$\frac{d^2 i}{d\gamma^2} > 0, \quad \text{hacsak} \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1.$$

Ebből következik, hogy a döntésfüggvény $0<\gamma<1$ esetén nem tartalmazhat maximális információt. Mivel $\gamma=0$ esetén $\alpha_0(x)$ azonosan nulla lenne, így maximumhely csak $\gamma=1$ lehet, s a 4. 2. tétel miatt az is.

Ez azt jelenti, hogy $d>1$ esetén létezik nem randomizált optimális döntésfüggfény, s ez egy nulla Lebesque-mérhető halmaztól eltekintve azonos a következő döntésfüggvénnyel:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases} \tag{4. 12}$$

4. 1. *Következmény:* A kapott optimális döntésfüggvény összetett ellenhipotézis esetén egyenletesen leghatásosabb. Legyen a H_0 hipotézis szerint a vizsgált eloszlás a [0, 1] intervallumban, míg a H_1 hipotézis szerint a $[0, d]$ intervallumban egyenletes eloszlás, ahol $d>1$ rögzített, de ismeretlen szám. A fentiek szerint a legtöbb információt tartalmazó döntésfüggvényt ekkor is a (4. 12) összefüggés definiálja.

4. 2. *Következmény:* Vizsgáljuk a döntésproblémát abban az esetben, ha n független megfigyelés áll rendelkezésünkre. Ekkor a P_0, ill. P_1 mértékeknek az n-dimenziós Lebesque mértékre vonatkozó deriváltjai:

$$f_0(\underline{x}) = \prod_{(i)} f_0(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i \leqq 1 \\ 0, & \text{másként} \end{cases}$$

ill.

$$f_1(\underline{x}) = \prod_{(i)} f_1(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{d^n}, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i \leqq d \\ 0 & \text{másként}. \end{cases}$$

Optimalizáláshoz most is a (4. 11) maximumhelyét kell meghatározni, miközben d helyére d^n-t helyettesítünk. A maximumhely azonban nem függ d-től, így a leginformatívabb döntésfüggvény:

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i \leqq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i > 1. \end{cases}$$

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy $w_0 \neq \frac{1}{2}$ esetén a standard döntés és a leginformatívabb döntés általában nem egyezik meg. Valóban, $w_1\left(1+\frac{1}{d^n}\right)>1$ esetén a kísérlet kimenetétől függetlenül a standard döntés a H_1 hipotézis elfogadását

eredményezi. Ez a döntés nyilván semmi információt nem tartalmaz, szemben a leginformatívabb döntéssel, azonban ennek a hibája a minimális. Érdekes megjegyezni még, a kétféle döntés esetünkben nemcsak aszimptotikusan egyezik meg, hanem létezik olyan $N = N(w_0)$ küszöbszám, hogy $n \geqq N$ esetén a két döntés egybeesik.

4. 3. *Következmény:* Ha létezne olyan, csak a w_0-tól függő $c(w_0)$ konstans, mely tetszőleges P_0 és P_1 esetén optimális döntéshez vezetne, akkor ez csak $c(w_0) = 1$ lehetne, s így w_0-tól sem függnek. A következő példa azt mutatja, hogy $c(w_0)$ nem lehet azonosan 1.

4. 2. *Példa:* Legyen X a számegyenes, $\mathscr{B}$ a Lebesque-mérhető részhalmazok σ-algebrája. Legyen a P_0 és a P_1 mértékek mindegyike egységnyi szórású normális eloszlás, mégpedig $-m$, ill. $+m$ várható értékkel ($m > 0$). Tehát a Lebesque-deriváltak:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x+m)^2}{2}\right\}$$

és

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2}\right\}.$$

Mivel $\dfrac{f_1(x)}{f_0(x)} = e^{2mx}$, így tetszőleges c esetén

$$y_0(c) = \int_{-\infty}^{x(c)} f_0(t)\,dt,$$

$$y_1(c) = \int_{-\infty}^{x(c)} f_1(t)\,dt$$

ahol $x(c) = \dfrac{1}{2m} \ln c$

A 4. 3. tétel alkalmazásával nyerjük, hogy $c = 1$ csak akkor lehet szélsőérték, ha

$$w_0 \log\left[\frac{w_0 y_0 + w_1 y_1}{1 - w_0 y_0 - w_1 y_1} \cdot \frac{1 - y_0}{y_0}\right] = -w_1 \log\left[\frac{w_0 y_0 + w_1 y_1}{1 - w_0 y_0 - w_1 y_1} \cdot \frac{1 - y_1}{y_1}\right].$$

Felhasználva, hogy $c = 1$ esetén $y_1 = 1 - y_0$, azonos átalakítás után adódik, hogy

$$\frac{w_1 + (w_0 - w_1) y_0}{w_0 - (w_0 - w_1) y_0} = \left(\frac{y_0}{1 - y_0}\right)^{w_0 - w_1}$$

$w_0 \neq \frac{1}{2}$ esetén a szórás megválasztható úgy, hogy az egyenlőség ne álljon fenn, továbbá $\frac{1}{2} < y_0 < 1$ legyen. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $w_0 \neq \frac{1}{2}$ esetén léteznek olyan P_0 és P_1 mértékek, hogy $c = 1$ nem lehet optimális.

4. 3. *Példa:* Legyen P_0 és P_1 exponenciális eloszlás, melyeknek a Lebesque-mértékre vonatkozó deriváltjai rendre:

$$f_0(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{másként} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)}, & \text{ha } x \geqq a \\ 0 & \text{másként} \end{cases}$$

mivel

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \begin{cases} e^{\lambda a}, & \text{ha} \quad x \geqq a \\ 0 & \text{másként} \end{cases}$$

így

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq a \\ \gamma, & \text{ha} \quad a < x \end{cases}$$

γ optimális értékének meghatározásánál ugyanúgy járunk el, mint fentebb. Némi számolás után adódik, hogy az információmennyiség γ szerinti második deriváltja:

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\gamma^2} = \left[\frac{1}{\ln 2}\right]^2 \frac{w_0 \cdot w_1 (1-e^{-\lambda a})^2}{\gamma[\gamma + w_0(1-\gamma)(1-e^{-\lambda a})][1-(1-\gamma)e^{-\lambda a}]}.$$

Nyilván $w_0, w_1 \neq 0$, $a > 0$ esetén

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\gamma^2} > 0 \quad \text{hacsak} \quad 0 < \gamma < 1,$$

s így a leginformatívabb döntésfüggvény ismét nem randomizált:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq a \\ 1, & \text{ha} \quad a < x. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy összetett ellenhipotézis esetén most nem létezik egyenletesen leginformatívabb döntés.

4. 4. *Példa:* Legyen $f(x)$ az m pontra szimmetrikus, egycsúcsú sűrűségfüggvény, s legyenek

$$f_0(x) = f(x-m)$$

$$f_1(x) = f\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = f_0\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \sigma \neq 1$$

a H_0, ill. a H_1 hipotézisnek megfelelő sűrűségfüggvények. Jelölje x_c az $\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = c$ egyenlet pozitív megoldását. Akkor a 4. 3. tétel szerint a maximális információt eredményező c-hez tartozó $x = x$ értékre fenn kell állni a

$$\left[w_0 f_0(x) + w_1 \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] \log \frac{w_0 F_0(x) + w_1 F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}}{1 - w_0 F_0(x) - w_1 F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)} =$$

$$= w_0 f_0(x) \log \frac{F_0(x) - \frac{1}{2}}{1 - F_0(x)} + w_1 \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log \frac{F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}}{1 - F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)}$$

transzcendens egyenletnek, ahol $F_0(x)$ a H_0 szerinti eloszlásfüggvény. Speciális esetként tekintsük $w_0 = w_1 = \frac{1}{2}$ mellett

a) normális eloszlások,
b) Cauchy eloszlások esetét.

a) $$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad F_0(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\left[\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} + \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\right] \log \frac{\Phi(x) + \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1}{2 - \Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \log \frac{\Phi(x) - \frac{1}{2}}{1 - \Phi(x)} + \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \log \frac{\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}}{1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)}.$$

Könnyen látható, hogy független mintavétel esetén a keresett c érték csak az $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ elégséges statisztikától függ.

b) $$f_0(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2+x^2}\right] \log \frac{F_0(x) + F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1}{2 - F_0(x) - F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \log \frac{F_0(x) - \frac{1}{2}}{1 - F_0(x)} + \frac{\sigma}{\sigma^2+x^2} \log \frac{F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}}{1 - F_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)}.$$

5. §. ASZIMPTOTIKUS VIZSGÁLATOK

Aszimptotikus vizsgálatainkat egy, a standard döntés konvergenciájára vonatkozó tétellel kezdjük. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a Θ paraméter véges. A 2. 2. példával kapcsolatosan bevezetett jelölések mellett Δ_n az ε^n és Δ az ε kísérlet esetén értelmezett standard döntés. Ekkor érvényes a következő

5. 1. TÉTEL: *A standard döntések Δ_n sorozata 1 valószínűséggel konvergál a végtelen dimenziós szorzattéren értelmezett Δ standard döntéshez.*

Bizonyítás: Bizonyításunk alapja a 2. 6. tétel bizonyításakor már felhasznált martingál-konvergencia tétel, mely szerint tehát

(5. 1) $$\lim_{(n)} \frac{dP_\vartheta^{(n)}}{dQ^{(n)}} = \frac{dP_\vartheta}{dQ} \quad (Q \text{ majdnem mindenütt}).$$

Ennek segítségével a bizonyítást a standard döntés egy speciálisan választott variánsa segítségével végezzük el, ami a 3. 1. tétel szerint nem jelenti az általánosság megszorítását. Legyenek a Θ paramétertér elemei valamilyen módon megszámozva, azaz legyen $\Theta = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r\}$. Abban az esetben, ha valamilyen $\xi = x$ megfigyelés mellett több egyenlően maximális a posteriori valószínűségi paraméterérték van, definiáljuk standard döntésként a legkisebb indexű ilyen paraméterértéket. Könnyen látható, hogy ez a definíció ekvivalens a következővel:

$$\Delta_n(x) = \vartheta_k, \quad \text{ha} \quad \begin{cases} w_k \dfrac{dP^{(n)}_{\vartheta k}}{dQ^{(n)}} \geqq w_j \dfrac{dP^{(n)}_{\vartheta j}}{dQ^{(n)}}, & j = 1, 2, \ldots, r \\ \text{és } k \text{ a legkisebb index, melyre ez teljesül.} \end{cases} \tag{5. 2}$$

Feltéve, hogy $w_j = P\{\vartheta = \vartheta_j\} > 0$, $j = 1, \ldots, r$, az idézett martingál konvergencia tételből állításunk egyszerűen következik.

Megjegyzés: Az 5. 1. tétel akkor is érvényben marad, ha az ε^n kísérletsorozat helyett analóg módon definiált folytonos „időparaméterű" kísérletsokaságot tekintünk.

Legyen $d_n(x)$ az ε^n kísérlet esetén értelmezett tetszőleges döntéssorozat, s legyen $d(x)$ az ε kísérletre vonatkozó döntés. Azt fogjuk mondani, hogy $d_n(x)$ konvergál valamilyen értelemben a $d(x)$ döntéshez, ha az

$$\alpha_{j,n}(x) = P(d_n = \vartheta_j | \xi = x) \tag{5. 3}$$

valószínűségek sorozatai konvergálnak ugyanolyan értelemben az

$$\alpha_j(x) = P(d = \vartheta_j | \xi = x) \tag{5. 4}$$

valószínűségekhez. Az 5. 1. tétel értelmében standard döntés esetén az $\alpha_{j,n}(x) \to \alpha_j(x)$ konvergencia 1 valószínűséggel áll fenn.

A d_n döntés hibáját az (5. 3) mennyiséggel a következőképpen fejezhetjük ki:

$$e(d_n) = \sum_{j=1}^{r} P(d_n \neq \vartheta_j | \vartheta = \vartheta_j) P\{\vartheta = \vartheta_j\} = \sum_{j=1}^{r} w_j E_j\{1 - \alpha_{j,n}(x)\}.$$

Könnyű látni, hogy ha $d_n \to d$ egy valószínűséggel, akkor

$$e(d_n) \to \sum_{j=1}^{r} w_j E_j\{1 - \alpha_j(x)\} = e(d).$$

Hasonlóan a d_n döntésben a ϑ paraméterre vonatkozóan tartalmazott információ mennyisége

$$I(d_n, \vartheta) = \sum_{j=1}^{r} w_j \sum_{k=1}^{r} E_j\{\alpha_{k,n}(x)\} \log \frac{E_j\{\alpha_{k,n}(x)\}}{\sum_{i=1}^{r} E_i\{\alpha_{k,n}(x)\}}$$

konvergál az

$$I(d, \vartheta) = \sum_{j=1}^{r} w_j \sum_{k=1}^{r} E_j\{\alpha_k(x)\} \log \frac{E_j\{\alpha_k(x)\}}{\sum_{i=1}^{r} E_i\{\alpha_k(x)\}}$$

információ mennyiséghez.

Nyert eredményünket tétel formájában is megfogalmazzuk:

5. 2. TÉTEL: *Ha a döntések $d_n(x)$ sorozata egy valószínűséggel konvergál a $d(x)$ döntéshez, akkor*

a) $e(d_n) \to e(d)$,

b) $I(d_n, \vartheta) \to I(d, \vartheta)$.

Tételünkből és a 3. 2. következményből azonnal adódik az

5. 1. *Következmény:* A standard döntések hibáinak sorozata akkor és csak akkor tart nullához, ha az egyes paraméterértékeknek megfelelő mértékek a végtelendimenziós sorozattéren ortogonálisak.

Megjegyzés: Abban az esetben, ha a paraméterértékeknek megfelelő mértékek ortogonálisak, a fentiek szerint a végtelen dimenziós szorzattéren vett leginformatívabb döntés és standard döntés megegyezik. Mivel ekkor a leginformatívabb döntések és a standard döntések sorozata egyaránt konvergens, így fennáll a

$$P(\Delta_n \neq \vartheta_n) \to 0 \tag{5. 5}$$

összefüggés, tehát n növekedésével a standard döntés és a leginformatívabb döntés egyre inkább megegyezik. Ez az állítás nyilván nem lesz igaz teljes általánosságban, hiszen abban az esetben, ha a végtelen dimenziós mértékek nem ortogonálisak, elengedhetetlen, hogy a kísérletsorozat ún. információt hordozó sorozat legyen. Ezt egy egyszerű példa is mutatja. Tekintsük ugyanis a ξ_1 változó eloszlására a 4. 1. példa esetét, s legyen $\xi_n = \xi_1$ minden n-re. Ekkor nyilván létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $P\{\Delta_n \neq \delta_n\} > \varepsilon$ triviálisan teljesül n minden értékére. Megjegyezzük, hogy a 4. 1., ill. a 4. 4. példa segítségével olyan független kísérletsorozatot is konstruálhatunk, melyre nem teljesül az (5. 5) összefüggés.

A standard döntés hibája segítségével minorizálhatjuk a kísérlet elvégzése után a paraméterre nézve még hiányzó átlagos információ mennyiségét, azaz az

$$R(\varepsilon, \Theta) = H(\Theta) - I(\varepsilon) = E_x\{\mathcal{I}_1(x)\}$$

mennyiséget. Ismét csak véges paramétertérre szorítkozva felírhatjuk:

$$w_i E_x\{\mathcal{I}_1(x) | \vartheta_i\} = \sum_{j=1}^{r} w_i \int_X \frac{w_j \frac{dP_j}{dQ}}{\sum_{k=1}^{r} w_k \frac{dP_k}{dQ}} \log \left(1 + \sum_{k \neq j} \frac{w_k \frac{dP_k}{dQ}}{w_j \frac{dP_j}{dQ}} \right) \frac{dP_i}{dQ} \, dQ \geqq$$

$$\geqq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \int_{A_i} \frac{w_j \frac{dP_j}{dQ}}{\sum_{k=1}^{r} w_k \frac{dP_k}{dQ}} \log \left(1 + \sum_{k \neq j} \frac{w_k \frac{dP_k}{dQ}}{w_j \frac{dP_j}{dQ}} \right) w_i \frac{dP_i}{dQ} \, dQ$$

ahol A_i jelenti a $\vartheta = \vartheta_i$ hipotézis elfogadási tartományát a standard döntés esetén. Mivel ezen a halmazon

$$w_i \frac{dP_i}{dQ} \geqq w_j \frac{dP_j}{dQ}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

így

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{w_k \frac{dP_k}{dQ}}{w_j \frac{dP_j}{dQ}} \geqq \frac{w_i \frac{dP_i}{dQ}}{w_j \frac{dP_j}{dQ}} \geqq 1.$$

Ezért

$$w_i E_x\{\mathcal{I}_1(x)|\vartheta_i\} \geqq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} \int_{A_i} w_j \frac{dP_j}{dQ} \frac{w_i \frac{dP_i}{dQ}}{\sum_{k=1}^{r} w_k \frac{dP_k}{dQ}} dQ.$$

Továbbá, mivel az A_i halmazon

$$\frac{w_i \frac{dP_i}{dQ}}{\sum w_k \frac{dP_k}{dQ}} \geqq \frac{w_i \frac{dP_i}{dQ}}{r w_i \frac{dP_i}{dQ}} = \frac{1}{r}.$$

s ebből

$$w_i E_x\{\mathcal{I}_1(x)|\vartheta_i\} \geqq \frac{1}{r} \sum_{\substack{j=1\\i\neq 1}}^{r} w_j P_j(A_i)$$

tehát

$$R(\varepsilon, \Theta) \geqq \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j\neq i} w_j P_j(A_i) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r} P(\Delta = \vartheta_i | \vartheta = \vartheta_j) P(\vartheta = \vartheta_j) = \frac{1}{r} e(\Delta).$$

Összegezve a fentieket, fennáll a következő

5. 3. TÉTEL: *Ha $R(\varepsilon, \Theta)$ jelöli az ε kísérlet elvégzése után a paraméterre vonatkozóan még hiányzó átlagos információ mennyiségét, és $e(\Delta)$ a standard döntés hibája, akkor érvényes az*

$$\frac{1}{r} e(\Delta) \leqq R(\varepsilon, \Theta)$$

összefüggés, ahol r a pozitív a priori valószínűségű paraméterek (véges) száma.

Megjegyzés: Az 5. 3. tétel lényegesen erősebb formában is kimondható, sőt $e(\Delta)$ segítségével felső becslés is adható az $R(\varepsilon, \Theta)$ információmennyiségre. Az 5. 3. tétel jelölései mellett fennáll az

5. 3* TÉTEL: *Érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$\log_2 \frac{1}{1-e(\Delta)} \leqq R(\varepsilon, \Theta) \leqq h\{e(\Delta)\} + e(\Delta) \log_2 (r-1)$$

ahol a $h\{\cdot\}$ függvényt (4. 3) *definiálja.*

A tétel bizonyítását nem végezzük el, megjegyezzük azonban, hogy az első egyenlőtlenséget Rényi A. [29], míg a másodikat Feinstein találta [7].

Az 5. 1. következmény és az 5. 3* tétel alapján nyilvánvaló, hogy a hiányzó információ mennyisége akkor és csak akkor tart nullához, ha a végtelen dimenziós szorzattéren az egyes paraméterértékeknek megfelelő mértékek páronként ortogonálisak. A továbbiakban erre az esetre vonatkozóan a konvergencia gyorsaságát fogjuk vizsgálni. Alapvető jelentőségű lesz számunkra a következő tétel, mely Rényi A. egy tételének kissé módosított változata.

5. 4. TÉTEL: *Alkalmas $B>0$ konstans mellett érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$R(\varepsilon, \Theta) \leqq B \max_{i \neq j} \Lambda_{i,j} \tag{5.6}$$

ahol B csak a paraméter a priori eloszlásától függ, $\Lambda_{i,j}$ pedig a $P_{\vartheta i}$ és $P_{\vartheta j}$ mértékek Hellinger-távolságát jelöli (lásd (3. 3)*).*

A bizonyítás alapját a következő lemma képezi (lásd Rényi [31] 3. lemma):

R LEMMA: *Tetszőleges $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ valószínűségeloszlás esetén*

$$\sum_{k=1}^{N} q_k \log \frac{1}{q_k} \leqq \sum_{k=2}^{N} c \sqrt{q_k}$$

ahol a c pozitív konstans sem N-től, sem a $\{q_k, k=1, \ldots, N\}$ valószínűségeloszlástól nem függ.

Bizonyítás: Nyilvánvalóan a

$$\frac{x \log \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \quad \text{és} \quad \frac{(1-x) \log \frac{1}{1-x}}{\sqrt{x}}$$

függvények folytonosak a zárt egységintervallumban. Felveszik tehát maximális értéküket itt. Jelöljük ezeket c_1-gyel és c_2-vel, azaz legyen c_1 és c_2 a legkisebb pozitív szám, melyre teljesül, hogy

$$x \log \frac{1}{x} \leqq c_1 \sqrt{x}$$

és

$$(1-x) \log \frac{1}{1-x} \leqq c_2 \sqrt{x}.$$

Így nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{N} q_k \log \frac{1}{q_k} \leqq c_1 \sum_{k=2}^{N} \sqrt{q_k} + c_2 \sqrt{\sum_{k=2}^{N} q_k} \leqq (c_1 + c_2) \sum_{k=2}^{N} \sqrt{q_k}$$

ami a lemma állítását igazolja a $c = c_1 + c_2$ abszolút konstans mellett.

A lemma felhasználásával a következőképpen történhet az

5. 4. *tétel bizonyítása:*

$$R(\varepsilon, \Theta) = \int \sum_{i=1}^{r} P\{\vartheta = \vartheta_i | x\} \log \frac{1}{P\{\vartheta = \vartheta_i | x\}} \, dP =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} w_k \int \sum_{i=1}^{r} P\{\vartheta = \vartheta_i | x\} \log \frac{1}{P\{\vartheta = \vartheta_i | x\}} \, dP_k \leqq c \sum_{k=1}^{r} w_k \sum_{i \neq k} \int P\{\vartheta = \vartheta_i | x\} \, dP_k .$$

Használjuk fel a következő egyenlőtlenséget:

$$\int \sqrt{P(\vartheta=\vartheta_i|x)}\,dP_k = \int \sqrt{\frac{w_i \frac{dP_i}{dQ}}{\sum_{j=1}^{r} w_j \frac{dP_j}{dQ}}}\,dP_k \leqq \int \sqrt{\frac{w_i \frac{dP_i}{dQ}}{w_k \frac{dP_k}{dQ}}}\,dP_k =$$

$$= \sqrt{\frac{w_i}{w_k}} \int \sqrt{\frac{dP_i}{dQ}\frac{dP_k}{dQ}}\,dQ = \sqrt{\frac{w_i}{w_k}}\,\Lambda_{i,k}.$$

Így adódik:

$$R(\varepsilon, \Theta) \leqq c \sum_{k=1}^{r} \sum_{i \neq k} \sqrt{w_i w_k}\,\Lambda_{i,k} \leqq B \max_{i \neq k} \Lambda_{i,k},$$

ahol $B = c \sum_i \sum_k \sqrt{w_i w_k}$, s így a tételt bebizonyítottuk.

A 3. 3. tétel, az 5. 1. következmény és az 5. 3* tétel alapján nyilvánvalóan igaz az

5. 2. *Következmény:* Egy kísérletsorozat esetén a hiányzó információ mennyisége véges paramétertér esetén akkor és csak akkor tart nullához, ha a különböző paraméterpároknak megfelelő mértékek Hellinger-távolságai nullához tartanak.

A hiányzó információ mennyiségének exponenciális csökkenésére vonatkozik az 5. 4. tételből ugyancsak egyszerűen adódó

5. 3. *Következmény:* Ha egy véges paramétertérhez tartozó ε kísérlet n független ismétlését tekintjük, akkor létezik olyan $B>0$ és $0<\lambda<1$ szám, hogy

$$R(\varepsilon, \Theta) \leqq B \cdot \lambda^n \tag{5.7}$$

feltéve, hogy a különböző paraméterértékekhez tartozó mértékek különbözők.

Valóban, ha $\lambda_{i,k}$ jelöli a $P^1_{\vartheta_i}$ és $P^2_{\vartheta_k}$ mértékek Hellinger-távolságát, akkor $P^n_{\vartheta_i}$ és a $P^n_{\vartheta_k}$ mértékek Hellinger-távolságára $\Lambda_{i,k} = (\lambda_{i,k})^n$ áll fenn, s így $\lambda = \max_{i \neq k} \lambda_{i,k}$ mellett az (5. 7) egyenlőtlenség (5. 6) speciális esete.

A hiányzó információmennyiség exponenciális csökkenésére vonatkozóan I. Vajda [33] bizonyította a következő tételt, mely elégséges feltételt ad az (5. 7) egyenlőtlenség fennállására független kísérletsorozat esetén.

5. 5. Tétel: *Ha*

$$\liminf_{(n)} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \varrho(P_{\vartheta_i,l}; P_{\vartheta_j,l}) \geqq c > 0 \tag{5.8}$$

minden ϑ_i és ϑ_j esetén, akkor léteznek olyan $A>0$ és $0<\lambda<1$ számok, melyekre

$$R(\varepsilon^n, \Theta) < A \cdot \lambda^n \tag{5.9}$$

ahol $\varrho(\mu, \nu)$ jelöli a μ és ν mértékek variációs távolságát.

Be fogjuk bizonyítani, hogy a tétel következik az 5. 4. tételből. E célból tekintsük a következő elemi lemmát:

5. 1. LEMMA: *Tekintsünk egy tetszőleges* $a_1, a_2, \ldots; 0 \leqq a_k \leqq 1$ *sorozatot, s tegyük föl, hogy*

$$\liminf_{(n)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geqq c > 0.$$

Ekkor $c > c_1 > 0$ *esetén létezik olyan* $\alpha = \alpha(c_1)$, *hogy elég nagy* $N(c_1)$ *mellett az* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *számok között legalább* $\alpha \cdot n$ *olyan található, melyre az* $a_k \geqq c_1$ *egyenlőtlenség teljesül, hacsak* $n > N(c_1)$.

Bizonyítás: Legyen c^+ olyan szám, melyre $c > c^+ > c_1$, legyen továbbá

$$a_k' = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad a_k > c_1 \\ c_1, & \text{ha} \quad a_k \leqq c_1. \end{cases}$$

Ekkor elég nagy $N = N(c_1, c^*)$ esetén minden $n > N$-re

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k' \geqq c^*$$

vagy jelölve n^*-gal azon a_k-k számát, melyekre $a_k > c_1$

$$\frac{n^* + (n - n^*) c_1}{n} > c^*.$$

Átalakítva

$$\frac{n^*}{n} > \frac{c^* - c_1}{1 - c_1} > 0$$

ami a lemma állítását bizonyítja $\alpha = \frac{c^* - c_1}{1 - c_1} < 1$ mellett.

Az 5. 5. tétel bizonyítása: A lemma szerint $n > N_0$ esetén $\alpha \cdot n$ olyan $\varrho(P_{\vartheta_i, l}; P_{\vartheta_k, l})$ távolság van minden i és k pár esetén, melyre

$$\varrho(P_{\vartheta_i, l}; P_{\vartheta_k, l}) > \frac{c}{2}. \tag{5.10}$$

Következik ebből, hogy létezik olyan $1 > c_2 > 0$, hogy

$$\lambda_{i,k}(l) = \int \sqrt{\frac{dP_{\vartheta_i, l}}{dQ} \frac{dP_{\vartheta_k, l}}{dQ}}\, dQ < c_2 \tag{5.11}$$

minden olyan i, k, l értékre, melyre (5. 10) teljesül. Valóban, Csiszár I. egy, — az $\mathcal{F}$-divergencia és a variációs távolság kapcsolatára vonatkozó — tétele alapján (lásd Csiszár [4], 2. 1. tétel) létezik olyan $A_1 > 0$ és $1 > r_0 > 0$ szám, hogy

$$\frac{c}{2} < \varrho(P_{\vartheta_i, l}; P_{\vartheta_k, l}) \leqq A_1 \sqrt{1 - \lambda_{i,k}(l)}$$

hacsak $1 - \lambda_{i,k}(l) < r_0$. Tehát

$$c_2 = \max\left\{(1 - r_0), \min\left[\left(1 - \frac{c^2}{4}\right); \left(1 - \frac{c^2}{4A_1^2}\right)\right]\right\}$$

választása mellett teljesül (5. 11).

Így a következő nyilvánvaló egyenlőtlenség bizonyítja a tételt:

$$R(\varepsilon, \Theta) \leqq B \max_{i \neq k} \prod_{l=1}^{n} \lambda_{i,k}(l) \leqq B \max_{i \neq k} \prod_{l}' \lambda_{i,k}(l) \leqq B \cdot c_2^{\alpha \cdot n} = B \cdot \lambda^n,$$

ahol $\lambda = c_2^{\alpha}$ és a $\prod_{l}'$ szorzatban csak azok a tényezők szerepelnek, melyekre az (5. 10) egyenlőtlenség érvényes.

Megjegyzés: 1. Az (5. 8) feltétel teljesülése nem szükséges (5. 9) fennállásához, mint azt az 5. 4. tétel és egy tetszőleges

$$\lambda_{i,k}(l) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{s+1}}, & \text{ha} \quad l = \binom{s}{2} \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

Hellinger-távolságokkal rendelkező kísérletsorozat mutatja.

2. Az (5. 9)-ben szereplő lehető legjobb λ érték meghatározásával Rényi A. foglalkozott [30], aki $r=2$, és egy kísérlet független ismétlése esetére kimutatta, hogy erre az értékre

$$\lambda = \min_{\alpha} \int \left(\frac{dP_1}{dQ}\right)^{\alpha} \left(\frac{dP_2}{dQ}\right)^{1-\alpha} dQ$$

összefüggés érvényes. Ez az érték megegyezik a 3. § példáival kapcsolatosan számolt (3. 8) λ értékkel, mint ez Kullback vonatkozó eredményeiből következik [16], [17].

6. §. EGY MÉRTÉKELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

Legyen $S_n = \{\Omega_n, \mathfrak{M}_n\}$ mérhető tér, $n = 1, 2, \ldots$, és jelölje $S_k^n = \{\Omega_k^n, \mathfrak{M}_k^n\}$, illetve $S_k^{\infty} = \{\Omega_k^{\infty}, \mathfrak{M}_k^{\infty}\}$ az S_i, $i = k, k+1, \ldots, n$; illetve $i = k, k+1. \ldots$ terek Descartes szorzatát. Legyen P_0^n és P_1^n n minden értékére az S_1^n téren értelmezett két valószínűségi mérték, melyekre teljesül, hogy $i < n$ esetén a P_0^i, ill. P_1^i mértékek a P_0^n és P_1^n mértékeknek az S_1^i térre vett megszorításai. Belátható, hogy ekkor léteznek az S_1^{∞} téren értelmezett olyan P_0 és P_1 valószínűségi mértékek, melyekre teljesül, hogy P_0^n és P_1^n a P_0 és P_1 mértékek S_1^n térre vett projekciói.

Legyen $\{X_n, \mathscr{B}_n\}$ mérhető tér, $n = 1, 2, \ldots$ és legyen η_n az Ω_n tér mérhető leképezése az X_n térbe. A jelölések egyszerűsége kedvéért tegyük fel, hogy $\mathfrak{M}_n = \eta_n^{-1}\{\mathscr{B}_n\}$. Legyen továbbá P az S_1^{∞} téren értelmezett valószínűségi mérték, melyre valamely, csak két értéket felvevő ϑ valószínűségi változó mellett teljesül, hogy

$$P_k(\eta_1 \in B_1, \ldots, \eta_n \in B_n) = P(\eta_1 \in B_1, \ldots, \eta_n \in B_n | \vartheta = \vartheta_k) \tag{6. 1}$$

n minden fix értékére és minden $B_i \in \mathscr{B}_i$ esetén. Megjegyezzük, hogy a (6. 1) feltétel maga után vonja, hogy a P_0 és P_1 mértékek mindegyike abszolút folytonos a P mértékre nézve. Az előző részek egyes speciális eredményeit megfelelően csoportosítva nyerhetjük a következő tételt:

6. 1. TÉTEL: *A P_0 és P_1 mértékek akkor és csak akkor ortogonálisak a végtelen dimenziós szorzattéren, ha a P_0^n és P_1^n végesdimenziós megszorításaik Λ_n Hellinger-távolsága nullához tart.*

Mivel a tétel levezetése során a benne szereplő mértékterekre és leképezésekre semmiféle lényeges megszorítást nem tettünk, így speciálisan $\{\Omega_n, \mathfrak{M}_n\} \equiv \{X_n, \mathfrak{B}_n\}$ és $\eta_n(\omega) = \omega$ választása mellett látható, hogy ez az eredmény bizonyos értelemben általánosabb, mint Kakutani független mértékterek szorzatára vonatkozó következő tétele [14]:

K. TÉTEL: *Legyen* $S_n = \{\Omega_n, \mathfrak{M}_n\}$ *mérhető tér,* $n = 1, 2, \ldots$ *és jelölje* $S = S_1^\infty = \{\Omega_1^\infty, \mathfrak{M}_1^\infty\}$ *a fenti terek végtelendimenziós Descartes-szorzatát. Legyen* μ_n *és* ν_n *két ekvivalens valószínűségi mérték az* S_n *téren, s jelölje ezek direkt szorzatát* $\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$, *ill.* $\nu = \prod_{n=1}^{\infty} \nu_n$. *Akkor a* μ *és* ν *mértékek ortogonálisak vagy ekvivalensek aszerint, hogy a* $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ *szorzat nullához konvergál, vagy sem. Itt* λ_n *a* μ_n *és* ν_n *mértékek* (3. 3)*-ban definiált Hellinger-távolságát jelöli.*

A 6. 1. tétel semmit sem mond viszont abban az irányban, hogy mikor lesz P_0 és P_1 ekvivalens mérték az S_1^∞ téren (feltéve természetesen, hogy a P_0^n és a P_1^n mértékek ekvivalensek minden n esetén). Erre vonatkozóan bizonyítás nélkül idézzük J. Hajek eredményét, aki ugyancsak információelméleti úton nyer egy elégséges feltételt [9]:

H. TÉTEL: *Legyen* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$, *σ-algebrák egy monoton növekvő sorozata, s legyen* $\mathcal{F}_\infty$ *a legszűkebb, a* $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ *algebrát tartalmazó σ-algebra. Legyen P és Q két valószínűségi mérték az* $\mathcal{F}_\infty$ *σ-algebrán. Jelölje* J_n *a P és Q mértékek* $\mathcal{F}_n$ *σ-algebrára való megszorításainak J-divergenciáját. Akkor*

$$J_\infty = \lim_{(n)} J_n$$

és ha $\lim J_n < +\infty$, *akkor P és Q ekvivalens mértékek.*

Megjegyezzük, hogy mivel ekvivalens mértékek J-divergenciája $+\infty$ is lehet, könnyű példát találni arra, hogy a mértékek ekvivalenciájához a fenti kritérium teljesülése nem szükséges.

Hajek egy másik dolgozatában [10] ezt az eredményt használja fel annak bizonyítására, hogy tetszőleges sztochasztikus folyamat két Gauss-mértéke vagy ekvivalens, vagy ortogonális. Megjegyezzük, hogy a nem ekvivalens esetben az ortogonalitást Hajek direkt módszerrel bizonyítja, de ez elvégezhető lenne a 6. 1. tételre támaszkodva is, felhasználva pl. F. C. Schweppe vonatkozó számításait [38].

IRODALOMJEGYZÉK

[1] BHATTACHARYYA, A.: On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions, Bull. Calcutta Math. Soc. *35* (1947), 99—109.

[2] BLACKWELL, D.: Comparison of experiments, Proc of the 2-th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., (1951), 93—102.

[3] CRONBACH, L. J.: A consideration of informatiom theory and utility theory as tools for psychometric problems, Technical Report № 1, Contract N6ori-07146, Urbana, Illionis, 1953.

[4] CSISZÁR, I.: Eloszlások eltérésének információ-típusú mértékszámai, MTA. III. Oszt. Közl. *17* (1967), 123—149.

[5] CSISZÁR, I.: Information-type measures of divergence of probability distributions and indirect observations, Studia Sci. Math. Hung. *2* (1967), 299—318.

[6] DOOB, J. L.: Stochastic Processes, Wiley, New-York, 1953.

[7] FEINSTEIN, A.: Foundations of Information Theory, McGraw-Hill NewYork, 1958.

[8] FISHER, R. A.: Theory of statistical estimation. Proc. Camb. Phil. Soc. *22* (1925), 700—725.

[9] HÁJEK, J.: A property of J-divergences of marginal probability distributions, Czechoslovak Math. Journ. *8* (1958), 460—464.

[10] HÁJEK, J.: On a property of Gaussian measures of stohastic processes, Czechoslovak Math. Journ. *8* (1958), 610—619.

[11] HARTLEY, R. V. L.: Transmission of information, Bell System Techn. Journ. *7* (1928), 535—563.

[12] HELLINGER, E.: Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Journal für reine und. angew. Math. *13* (1909) 210—271.

[13] KAILATH, T.: The divergence and the Battacharyya-distance measures in signal detection, IEEE Trans. Commun. Tech. (1967)

[14] KAKUTANI, S.: On equivalence of infinite product measures, Annals of Math. *49* (1948), 214—226.

[15] E. R. von KAMPEN: Infinite product measures and infinite convolutions, Amer. Journ. of Math. *49* (1940), 417—448.

[16] KULLBACK, S.: Information Theory and Statistics, Wiley, 1959.

[17] KULLBACK, S.: A note on minimum discrimination information, Ann. Math. Stat. *37* (1966), 279—280.

[18] KULLBACK, S. and LEIBLER, R. A.: On information and sufficiency, Ann. Math. Stat. *22* (1951), 79—86.

[19] LINDLEY, D. V.: On a measure of the information provided by an experiment, Ann. Math. Stat. *27* (1956), 986—1005.

[20] NEMETZ, T.: Maximális információt tartalmazó döntésfüggvények, MTA. III. Oszt. Közl. *17* (1967), 455—465.

[21] NEMETZ, T.: Information theory and testing hypothesis, Proc. of the Colloqium on Information Theory, Debrecen, 1967.

[22] PEREZ, A.: Information theory methods in reducing complex decision problems, Trans of 4-th Prague Conference on Information Theory, 1965.

[23] PEREZ, A.: Information-Theoretic Risk estimates in Statistical Decision, Kybernetika, *3* (1967), 1—21.

[24] RÉNYI, A.: On the amount of information concerning an unknown parameter in a sequence of observations, MTA. III. Oszt. Közl. *9* (1964), 617—625.

[25] RÉNYI, A.: On the amount of information in a frequency count, 35-th Session of the International Stat. Inst. Beograd, 1965, 1—8.

[26] RÉNYI, A.: On the amount of missing information and the Neyman Pearson lemma, Festschrift for J. Neyman, Wiley, London, (1966), 281—288.

[27] RÉNYI, A.: On the amount of the information in a random variable concerning an event, Journal of Math. Sci. (Delhi) *1* (1966), 30—33.

[28] RÉNYI, A.: On some basic problems of statistics from the point of view of information theory, Proc of the 5-th Berkeley Symposium.

[29] RÉNYI, A.: Statistics and information theory, Studia Sci. Math. Hungarica *2* (1967), 249—256.

[30] RÉNYI, A.: On some problems of statistics from the point of view of information theory, Colloquium on Information Theory, Debrecen, 1967.

[31] RÉNYI, A.: Statistics based on information theory, European Meeting of Statisticians, 1966.

[32] SHANNON, C. E.: A Mathematical theory of communication, Bell System Techn. Journ; *27* (1948), 379—423; 623—656.

[33] VAJDA, I.: Rate of convergence of the information in a sample concerning a parameter, Czechoslovak Math. Journ. *17* (1967), 225—231.

[34] VAJDA, I.: On the statistical decision problems with finite parameter space, Kybernetika *3* (1967), 451—466.
[35] VAJDA, I.: On the statistical decision problems with disrete parameter space, Kybernetika *3* (1967), 110—126.
[36] VINCZE, I.: On the information theoretical foundations of mathematical statistics, Colloquium on Information Theory, Debrecen, 1967.
[37] WIENER, N.: Cybernetics, Wiley, NewYork, 1948.
[38] SCHWEPPE, F. C.: On the Bhattacharyya-distance and the divergence between Gaussian processes, Information and Controll *11* (1967), 373—396.
[39] BAHADUR, R. R.—RANGE, RAO R.: On deviation of the sample mean, Annals Math. Stat. *31* (1960), 1015—1027.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИЙ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

T. НЕМЕЦ

INFORMATION THEORY AND TESTING HYPOTHESIS

T. NEMETZ

After a short historical survey we deal with the measure of the information provided by an experiment, following D. V. Lindley [19]. As a special case, the amount of the information in a random variable (resp. in a sequence of random variables) concerning an event (resp. an unknown parameter), is treated, the concepts of sufficiency and ε-sufficiency and the case of observable coordinats are dealt with.

Adopting the Bayesian approach to statistical decision, we study the „best" statistical decision functions, namely the standard decision, introduced by A. Rényi, wich has minimal probability of wrong decision, and the most informative decision; — furthermore their convergency-properties.

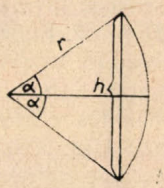
We examine the connections of this research with a problem of Kakutani in measure theory. Also same examples are given.

A COSINUS-TÉTEL A KORAI GÖRÖG GEOMETRIÁBAN

SZABÓ ÁRPÁD

A szögfüggvények használata a *trigonometria* kibontakozásával kezdődik. A trigonometria viszont eredetileg a csillagászatnak, az *asztronómiá*nak volt a segédeszköze. Mai történeti ismereteink szerint a nagy görög csillagász, HIPPARKHOSZ volt az első — az ie. 2. sz. közepe táján —, aki voltaképpen már szögfüggvényekkel dolgozott, amikor összeállította híres *húrtáblázatát*.[1] A görög csillagászok ugyanis a *sinus*, *cosinus* és *tangens* helyett a körívekhez tartozó *húrok* hosszúságára voltak kíváncsiak. De ez már alig különbözik a mi szögfüggvény fogalmunktól. Hiszen nyilvánvaló, hogy ha r-rel jelöljük valamely kör sugarát, és h-val az α szög duplájának körívéhez tartozó *húr* hosszúságát, akkor

$$\sin\alpha = \frac{h}{2r}.$$



1. ábra

A szögfüggvény fogalmának az ismerete azonban nem jelenti feltétlenül a szögfüggvényekről elnevezett *tételek* ismeretét is. Csakugyan, az egyik leggyakrabban használt tudománytörténeti kézikönyv külön ki is emeli, hogy PTOLEMAIOSZ (az i. sz. 2. században) „*nem ismerte még* az olyan ferdeszögű háromszögre is alkalmazható formulákat, mint a mi cosinus- és sinus-tételünk".[2]

Dehát mióta ismeretes akkor egyáltalán a *cosinus-tétel*? — Említsük meg mindenekelőtt, hogy a cosinus-tételt ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$) gyakran *Carnot-tétel*nek is nevezik, LAZARE NICOLAS CARNOT-ról (1753—1823), bár ezzel kapcsolatban sok lexikon azt is megjegyzi, hogy ugyanezt a tételt már F. VIETA (1540—1603) is használta.

Talán meglepő, ha ezekután ezt a dolgozatot a következő tények leszögezésével kezdem:

1. A *cosinus-tétel*, bár a szögfüggvény használata *nélkül*, megvan kettős megfogalmazásban — külön a tompaszögű és külön a hegyesszögű háromszögekre érvényes formában — már EUKLIDÉSZnél is: *Elemek II 12 és 13.*
2. Ez a két tétel nem EUKLIDÉSZtől, hanem még az EUKLIDÉSZ-*előtti* korból származik. Olyan régiek e tételek, hogy igazában nem is tudjuk, ki állította fel

[1] B. L. v. d. WAERDEN, „Erwachende Wissenschaft", Basel-Stuttgart 1956, 84.
[2] Uo. 449.

és ki bizonyította be őket először. Csak az bizonyos, hogy ismerte ezeket már az a khioszi HIPPOKRATÉSZ is, aki ie. 430 körül tanított Athénben.[3]

3. Érdekes, hogy a manapság közkeletű matematikatörténetek egyáltalán nem hívják fel a figyelmet arra, hogy a két említett tétel a mi cosinus-tételünk antik megfogalmazása. Úgy látszik, erre a tényre csak az egyik-másik figyelmesebb EUKLIDÉSZ-fordító szokott utalni — legalább egy-egy mellékesnek szánt jegyzetben.[4]

Azt hiszem, ezeknek az előrebocsátása után már önmagában is érdekes lehet — legalább didaktikai szempontból —, megvilágítani azt a kérdést: hogyan jöttek rá a görög matematikusok az említett két tételre *(II 12 és 13)*, mi volt ezeknek a tételeknek könnyen rekonstruálható genezise? — Valójában azonban ennek a dolgozatnak a célja jóval több ennél. Egy olyan tudománytörténeti problémára szeretném itt felhívni a figyelmet a cosinus-tétel antik formájával kapcsolatban, amelynek új megoldása gyökeresen módosíthatja eddigi elképzeléseinket a korai görög tudományról. Éppen ezt a tudománytörténeti problémát kell itt most röviden ismertetnem, mielőtt rátérhetnék a címben kitűzött téma tárgyalására.

*

Az alább tárgyalásra kerülő „cosinus-tételek" bizonyításában EUKLIDÉSZ szövege hivatkozik két általa már korábban bebizonyított „segédtételre": *Elemek II 4 és 7.* Figyelemre méltó számunkra ez a két „segédtétel" főként azért, mert mind a kettő beletartozik az euklidészi tételeknek abba az érdekes tömbjébe, amellyel kapcsolatban a matematikatörténeti kutatás a legutóbbi 80—90 év során egy egészen különös teóriát dolgozott ki.[5]

Úgy látszik, P. TANNERY volt az első, aki már 1882-ben észrevette, hogy az euklidészi Elemek II. könyvében több olyan geometriai tétellel találkozunk, amelynek problémája megfelel a mi *algebránk másodfokú egyenleteinek*. Erre utal TANNERY dolgozatának már a címe is.[6] Ez a cím ugyan már önmagában is azt a gondolatot sugalmazza, mintha a görögök az EUKLIDÉSZ-előtti korban csakugyan másodfokú egyenletek megoldására törekedtek volna. De legyünk méltányosak, TANNERYT még *nem* kápráztatta el annyira saját felfedezése, hogy ne vette volna észre egyszersmind a lényeges *különbségeket* is ugyanazoknak a problémáknak a görög és a modern megoldása között. Mint írta: „A görög geometriai szerkesztések *nem egyenletek megoldásai*. A görögök, úgy látszik, sohasem láttak mást az egyenletekben, mint valódi relációkat konkrét vagy ilyennek feltételezett mennyiségek között. Éppen ezért náluk az ismeretlennek *csak egyetlenegy értéke* lehetséges", amit nem lehet összehasonlítani a mi másodfokú egyenletünk gyökeivel.[7]

---

[3] Uo. 223.

[4] Pl. C. THAER, „Die Elemente von Euklid", I. Leipzig, 1933; jegyzet a 86. lapon. — Ezzel szemben B. L. v. d. WAERDEN, TH. L. HEATH, O. BECKER, vagy akár a ma már klasszikusnak számító P. TANNERY műveiben sehol sem találtam ilyen utalást, holott ezek a szerzők *mind* foglalkoznak — néha túl hosszadalmasan is — az említett euklidészi tételekkel.

[5] A következőkhöz lásd: VEKERDI LÁSZLÓ, „Az Euklidés előtti matematika felfedezése", a MTA III. Osztályának Közleményei, XIII. 1963, 133—150. — Szeretném ezen a helyen is köszönettel megemlíteni, hogy az ún. „geometrikus algebra" problémájára VEKERDI LÁSZLÓ hívta fel a figyelmemet — már évekkel ezelőtt.

[6] „De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide" (1882) = Mémoires Scientifiques I. Paris, 1912., 254—280.

[7] Uo. 280.

Tovább ment ennél egy lépéssel a TANNERY nyomdokaiba lépő H. G. ZEUTHEN, a kúpszeletek elméletének a történetírója. Ha figyelmesen olvassuk ZEUTHENnek — egyébként nagyon szép, tanulságos és ma is jól használható könyvét,[8] azonnal észrevesszük, hogy nála kezd eltűnni az az óvatos különbségtevés, amiről TANNERY még nem feledkezett meg. TANNERY még hangsúlyozta — legalább előbb említett munkájának a befejező részében —, hogy azok a geometriai szerkesztések az euklidészi Elemek II. és VI. könyvében, amelyeket mi manapság mint másodfokú algebrai egyenleteket tárgyalunk, *korántsem azonosak minden további nélkül a mi algebránkkal.* ZEUTHEN viszont, bár a szembeötlő különbségeket ő sem hallgatta el egészen, mégis inkább már az antik és a modern gondolatok *azonosságát*, vagy legalábbis messzemenő *rokonságát* igyekezett kiemelni. Szerinte a görögök kúpszelet-elmélete tulajdonképpen „analitikus geometria", a bennünket érdeklő geometriai szerkesztések viszont egyszerűen: „*geometriai formában tárgyalt algebra*". Ílymódon aztán az *euklidészi*, vagy még inkább: az EUKLIDÉSZ-*előtti* „*geometrikus algebra*" megjelölés azokra a geometriai szerkesztésekre, amelyekre először TANNERY hívta fel a figyelmet, tulajdonképpen ZEUTHEN nyomán nyert végleg polgárjogot a görög matematika történetében.

Említsük meg itt mindjárt, hogy H. G. ZEUTHEN igazában még csak kísérletet sem tett arra, hogy részleteiben is megvilágítsa: tulajdonképpen hogyan is jött létre a történeti fejlődés során a matematikusoknak az a különös „jelbeszéde" (Zeichensprache), amelynek ő a „görög geometrikus algebra" nevet adta. Minden részletező magyarázat helyett megelégedett azzal az egyszerű kijelentéssel, hogy ezeknek a feltűnő geometriai szerkesztéseknek a kiépítése nyilván az *inkommenzurábilis mennyiségek létezésének a felfedezésével* függ össze. — Bár meg vagyok győződve arról, hogy ZEUTHENnek ebben az utóbbi fontos kérdésben lényegében *igaza volt*, mégis az a körülmény, hogy ZEUTHEN egyrészt nem törődött a fejlődési folyamat rekonstruálásával, másrészt pedig úgyszólván szentesítette a „geometrikus algebrára" vonatkozó elképzeléseket, később alkalmat adott egy nagyon elhamarkodott történeti teória felállítására.

Mint ismeretes, O. NEUGEBAUER a babilóni számlisták tanulmányozása során arra az eredményre jutott, hogy az ókori Babylónban — már jóval a görög kultúra kibontakozása előtt — szigorú, egzakt, és meglepően modern fogalmakkal dolgozó tudomány virágzott.[9] Ezóta a felfedezés óta beszélnek az ókori matematika történetének a kutatói „babilóni algebráról",[10] bár megjegyezhetjük: O. NEUGEBAUER fejtegetései korántsem győztek meg minden illetékes szakembert a „babilóni tudomány" egykori létezéséről. E. BORTOLOTTI pl. azt állítja — NEUGEBAUERrel szemben —, hogy a babilóniaknál nyoma sincs még az algebrai módszernek. Szerinte azok az egyenletek, és az a normálformákra való redukció, amit NEUGEBAUER és az egész iskolája a babilóni szövegekben felismerni vélnek, csak a modern fordítók mesterkedései; a babilóniak számkörében elképzelhetetlen minden racionális algebrai elmélet.[11]

Szerencsére nekünk ebben az összefüggésben *nem kell állást foglalnunk* NEU-

[8] H. G. ZEUTHEN, „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum", Kopenhagen, 1886.

[9] Vö. O. NEUGEBAUER, „Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften", I. „Vorgriechische Mathematik". Berlin, 1934; és: „The exact sciences in antiquity", 2 1959.

[10] Pl. B. L. v. d. WAERDEN, op. cit.; vagy O. BECKER, „Das mathematische Denken der Antike", Göttingen, 1957.

[11] VEKERDInek az 5. jegyzetben említett cikke nyomán: E. BORTOLOTTI, „L'algebra nella storia e nella preistoria della scienza", Osiris, *1*, (1936), 184—230.

GEBAUERnek a „babilóni tudományra" vonatkozó elmélete kérdésében. Munkahipotézisként feltehetjük, hogy NEUGEBAUERnek minden csak a „babilóni matematikát" érintő fejtegetése megállja a helyét. Bennünket itt most csak az érdekel, amit NEUGEBAUER az általa felfedezett „babilóni algebrával" kapcsolatban *az euklidészi geometriáról próbált megállapítani.*

O. NEUGEBAUER szerint ti. az az „EUKLIDÉSZ-előtti geometrikus algebra", amelyről — P. TANNERY nyomán — H. G. ZEUTHEN beszélt először, valójában nem is egyéb, mint *a babilóni algebra átvétele a görögök részéről és egyben lefordítása a geometria nyelvére.*[12] — Igazában NEUGEBAUER egész elméletének csak ezt a legutóbbi pontját akarom itt érinteni — tekintet nélkül arra, hogy mennyiben helytállóak vagy tévesek magára a „babilóni algebrára" vonatkozó elgondolásai.

Mindenekelőtt tegyük itt föl mégegyszer a kérdést: hogyan is jutott el NEUGEBAUER ennek a történeti összefüggésnek a megállapítására? — Voltaképpen nagyon egyszerűen. P. TANNERY észrevette, hogy bizonyos geometriai szerkesztések (az euklidészi Elemek II. és VI. könyvében) olyan problémákkal foglalkoznak, amelyeket mi manapság mint másodfokú algebrai egyenleteket oldunk meg. Azzal a kérdéssel viszont már egyáltalán nem törődött O. NEUGEBAUER, hogy vajon milyen megszorításokkal érvényesek P. TANNERY megfigyelései. Ehelyett ő már H. G. ZEUTHENnek abból az elgondolásából indult ki, hogy a szóban forgó geometriai szerkesztések mögött *eredetileg csakugyan algebrai problémák állottak.* Minthogy pedig úgy gondolta, a „babilóni tudományban" sikerült kimutatnia hasonló „egyenleteket" és hasonló „normálformákra való redukciókat", a kettőt — az általa rekonstruált *„babilóni algebrát"* egyfelől, és másfelől az *„EUKLIDÉSZ-előtti geometrikus algebrát"* — mindjárt azonosította is. Ezzel már meg is volt — legalább az ő számára — a „kapcsolat" (Verbindung) a babilóni és a korai görög tudomány között.[13]

Hogy mennyire légből kapott ez az egész konstrukció, azt az alábbi két példán — az euklidészi „cosinus-tételek" segédtételeinek a vizsgálata során fogom kimutatni. Látni fogjuk majd, hogy a megvizsgálandó két tétel — bár csakugyan fölírható a mi algebránk formuláival — igazában *nem algebrai eredetű.*

De van NEUGEBAUER történeti konstrukciójának egy másik, talán még súlyosabb, belső gyöngéje is. — Induljunk ki megint abból a munkahipotézisből, hogy NEUGEBAUERnek a „babilóni tudományra" vonatkozó megfigyelései megállják a helyüket.

O. NEUGEBAUER kimutatta, hogy a babilóniak már ismerték a számoknak olyan *pozicionális jelölési rendszerét* — bár számjegyeik között a korai időkben a *nulla* még nem fordul elő —, amely kétségtelenül magasabbfokú, mint a görögöknek sokkal körülményesebb, sőt a NEUGEBAUER által rekonstruált babilónihoz viszonyítva egyszerűen *kezdetleges* számjelölési és számolási módszere. A babilóniak — mint NEUGEBAUER kimutatni igyekezett — éppen ügyes pozicionális számjelölésük alapján olyan szellemes „reciprok táblázatokat" is összeállítottak, amelyek szinte gyerekjátékká tették számukra a szorzást, osztást és a gyökvonást. — Dehát hogyan értékeli maga NEUGEBAUER ezeket a nagyszerű babilóni táblázatokat — összehasonlítva őket a jóval primitívebb görög számolási módszerrel? — Íme, hallgassuk meg őt magát!

„Ez a táblarendszer önmagában, úgy ahogy megvolt már ie. 1800 körül is, messze az antikvitás összes számolói fölé emeli a babilóniakat. Az alexandriai

[12] O. NEUGEBAUER, „Zur geometrischen Algebra. Studien zur Geschichte der antiken Algebra III.", Quellen und Studien zur Gesch. d. Math. etc. B 3., (1936), 245—259.

[13] Vö. Á. SZABÓ, „Anfänge der griechischen Mathematik", Budapest 1969, 34—36 és 240—243.

THEÓN i. sz. 350—400 között PTOLEMAIOSZ „Almagest"-jéhez írt kommentárjában hosszú oldalakon át magyarázgatja a hatvanas számrendszerben végzett műveleteket. Egy babilóni templom birtokainak adminisztrációs írnoka már 2000 évvel THEÓN előtt joggal csodálkozott volna azon, hogy ilyen sok szót kell vesztegetni az ő egyszerű technikájukra."[14]

Úgy látszik tehát, NEUGEBAUER tökéletesen tisztában volt azzal, hogy a görögök *nem vették át* sem a babilóniak pozicionális számjelölését, sem a nagyszerű babilóni számolási módszereket. Csakugyan, én magam sem tudok ilyesmiről. (Legfeljebb azt említhetnénk meg ezzel kapcsolatban, hogy a görög *csillagászok* a *fokokat*, *perceket* és *másodperceket* — éppúgy mint mi is — a babilónihoz hasonló sexagesimalis rendszer szerint osztották be!) Pedig milyen könnyű lett volna megtanulniok a görög matematikusoknak mindezt akármelyik babilóni templomi írnoktól! Mindez nemcsak a számolásban tette volna őket ügyesebbé, hanem egész matematikájukat jóval magasabb szintre emelte volna! — Dehát ha a görögök — a babilóniakhoz viszonyítva — csakugyan ilyen „primitívek" maradtak mindvégig, akkor mivel magyarázzuk meg azt, hogy mégis: már az EUKLIDÉSZ előtti kor ismeretlen görög matematikusai tökéletesen megértették azt az egész „babilóni algebrát", az „egyenletrendszereket" és a „normálformákra való redukciókat", amelyek úgyszólván *elválaszthatatlanok* a babilóni pozicionális számjelöléstől és számolási módszerektől? Sőt, nem elég az, hogy e régi görög matematikusok mindezeket a dolgokat éppolyan jól megértették volna, mint maga NEUGEBAUER, hanem ugyanakkor rögtön hibátlanul le is fordították volna az egész bámulatos „babilóni algebrát" a geometria nyelvére! Olyan jól el tudták volna rejteni a babilóni számok bölcsességét a geometriai szerkesztések mögé, hogy TANNERY—ZEUTHEN—NEUGEBAUER együttes éleslátása kellett ahhoz, hogy lelepleződjék: tulajdonképpen ez mégiscsak „geometrizált babilóni-görög algebra"!

El kell ismernem, hogy engem ennek a két ténynek a puszta egymás mellé állítása — tehát egyrészt a babilóni számrendszer és számolási módszerek *át-nem-vétele*, másrészt pedig a „babilóni algebra" állítólagos „*görög geometrizálása*" — már önmagában is mély bizalmatlansággal tölt el NEUGEBAUER egész történeti konstrukciójával szemben.

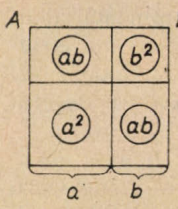
*

A következőkben dolgozatom két részből áll. Az 1. *részben* bemutatom az euklidészi „cosinus-tételek" két „segédtételét" *(Elemek II 4 és 7)*, valamint azt a magyarázatot, amelyet ezekhez a tételekhez a „geometrikus algebra" elmélete értelmében fűzni szoktak. Egyben utalok ebben az 1. részben a szokásos magyarázat hiányosságaira, nehézségeire. — A *2. részben* viszont a „cosinus-tételek" *(Elemek II 12 és 13)* tárgyalása során bemutatom egyszersmind saját magyarázatomat az előbb említett két „segédtételről".

1.

Az Elemek II. könyvének 4. tétele magyar fordításban így hangzik:
„Ha valamely adott egyenes szakaszt két tetszőleges részre osztunk, akkor az egész szakaszra emelt négyzet egyenlő a rész-szakaszokra emelt négyzetek,

[14] „The exact sciences in antiquity", *2* [1957], 33—34.



2. ábra

valamint a két különböző rész-szakaszból alkotott tégla lap kétszeresének az összegével."

Csakugyan, ezt a tételt nagyon könnyű felírni algebrai formában (lásd a *2. ábrát*). Legyen az adott egyenes szakasz AB, amelyet felosztunk két tetszőleges a és b részszakaszra $(AB = a+b)$. Az idézett tétel mármost kimondja, hogy

$$AB^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab.$$

Nem kétséges, hogy az EUKLIDÉSZnél tisztán geometriai formában megfogalmazott tétel algebrai átírása *helyes*. Legfeljebb arra kell itt felhívnunk a figyelmet, hogy a mi algebrai formulánk

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

jóval általánosabb, mint EUKLIDÉSZnek *csak a geometriára* érvényes tétele. Hiszen nyilvánvaló, hogy EUKLIDÉSZnél az adott esetben a és b *csak* egyenes szakaszok, a^2 és b^2 *csak* négyzetek, ab pedig *csak* egy bizonyos téglalap lehet. — Az algebrai formula szerint viszont ugyanezek a jelölések érvényesek bármilyen másfajta mennyiségekre, pl. *komplex számokra* is.

Mégis el kell ismernünk: ha csak az említett tételnek a mérlegelésére kellene szorítkoznunk, *nem utasíthatnánk el határozottan azt a gondolatot: vajon nem éppen a mi algebrai formulánkat* — $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ — *geometrizálta-e az idézett euklidészi szöveg*? — Egyelőre csak a geometriai tétel különös formájára hívhatjuk fel a figyelmet. Mert ne felejtsük el azt sem, hogy a mi algebrai átírásunk *két tag összegének a négyzetéről beszél.* EUKLIDÉSZ megfogalmazása viszont éppen megfordítva arról beszél, hogy *milyen alkotórészekre bomlik fel valamely adott egyenes szakaszra emelt négyzet akkor, ha magát az egyenes szakaszt két tetszőleges részre osztjuk.* Igaz, a két megfogalmazás között — abban az esetben, ha az algebrai tételt már eleve csak a lehetséges geometriai interpretációra szűkítjük — *nincs lényeges különbség.* De valami oka mégiscsak kell, hogy legyen annak is: miért beszél EUKLIDÉSZ szövege a két szakasz összegére emelt négyzet helyett inkább arról: hogyan bontja fel valamely adott szakasz két tetszőleges részre osztása az adott szakaszra emelt négyzetet magát különböző felületegységekre? — Erre a kérdésre egyáltalán nem kapunk választ akkor, ha abból a feltevésből indulunk ki, hogy a fenti tétel egyszerűen csak arra az algebrai kérdésre ad geometriai választ: hogyan kapjuk meg két tag összegének a négyzetét?

Még szembeötlőbbek lesznek a „geometrikus algebra" elméletének a hiányosságai akkor, ha a másik tételt — *Elemek II 7* — vesszük alaposabban szemügyre. Ez ugyanis így hangzik:

„*Ha valamely adott egyenes szakaszt két tetszőleges részre osztunk* $(b = x+y)$, *akkor az egész szakaszra és az egyik rész-szakaszra emelt négyzetek összege* (b^2+x^2) *egyenlő az egész szakaszból és az említett rész-szakaszból alkotott téglalap kétszeresének* $(2bx)$ *és a másik rész-szakaszra emelt négyzetnek* (y^2) *az összegével.*"

Mielőtt hozzákezdenénk ennek a tételnek az interpretálásához, nyomatékosan fel kell hívnom a figyelmet a következőre. Bár a „geometrikus algebra" elméletének a hívei ezt az utóbbit is „geometrizált algebrai tételnek" tartják, soha egyikük sem kísérelte meg, hogy éppen ezt az euklidészi tételt egy kissé komolyabban is meg-

vizsgálja. Ez pedig nem véletlen! A vizsgálatból ti. valami nagyon érdekes dolog derült volna ki. Mert lássuk csak ezt a *II 7*-et!

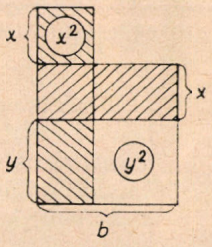
Nem kétséges, hogy ezt is fölírhatjuk algebrai formában, amint erre már a tétel szövegének az idézése kapcsán zárójelben utaltam is. Ez ti. röviden így hangzik:

$$b^2+x^2 = 2bx+y^2.$$

Az egész euklidészi tételt illusztrálja és ugyanakkor szemléletesen „bizonyítja" is *3. ábránk*.

De nézzük meg most a legutóbbi képletet *algebrai szempontból*. Formulánkban a $2bx$ mennyiség az egyenlőség jobb oldalán *pozitív* előjellel szerepel. Nyilván azért — felelhetnék erre a „geometrikus algebra" elméletének a hívei, mint ahogy ezt más, hasonló összefüggésben csakugyan hangsúlyozni is akarták —, mert EUKLIDÉSZ állítólag „kerüli a felületek kivonását".[15] De persze, algebrai szempontból semmi akadálya sincs annak, hogy a $2bx$-t átvigyük az egyenlet túlsó oldalára ellenkező előjellel:

$$b^2+x^2-2bx = y^2.$$



3. ábra

Az algebristát ennek az utóbbi képletnek a bal oldala rögtön emlékezteti a következő alapvető formulára:

$$(b-x)^2 = b^2+x^2-2bx.$$

Csakugyan, a „geometrikus algebra" történészei nem riadtak vissza attól, hogy most tárgyalt tételünket *(Elemek II 7)* a következő értelemben hasonlítsák össze az előbbi *(II 4)* tétellel: Amiképpen a *II 4* tétel a két tag *összegének* négyzetére érvényes algebrai formulát — $(a+b)^2$ —, ugyanúgy tárgyalja a *II 7* a két tag *különbségének* négyzetére alkalmazandó algebrai tételt — $(b-x)^2$ — geometriai formában.[16]

Dehát elképzelhető egyáltalán, hogy az imént idézett euklidészi tétel *(II 7)* csakugyan *egy már korábban, esetleg Babylónban meglevő algebrai felismerést utólag geometrizált volna* — némi módosítással? (A módosítás ti. mindössze abból állt volna, hogy nem az egyenlet bal oldalán szerepel $-2bx$, hanem a jobb oldalon áll $+2bx$.) — Én ezt egyszerűen *elképzelhetetlennek tartom.*

Mert tegyük föl az ellenkezőjét. Ha csakugyan létezett volna — akár a görögöknél, akár Babylónban — arra vonatkozó *algebrai formula*, hogyan kapjuk meg két tag különbségének a négyzetét — $(b-x)^2 = b^2+x^2-2bx$ —, és ha valóban ezt az algebrai képletet geometrizálta volna EUKLIDÉSZ fenti tétele, akkor már az ókorban ismeretes kellett volna hogy legyen a következő fontos *előjel-szabály* is: $(-x)^2 = +x^2$. Márpedig bizonyos, hogy a görög matematikusok ezt az előjelszabályt *nem ismerték*,[17] de nem igen tudhattak erről még NEUGEBAUER „babilóni algebristái" sem!

---

[15] B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 196 írja — a „geometrikus algebra" tárgyalása során: „da EUKLEIDES die Subtraktion von Flächen vermeidet" (?).

[16] B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 194: „In II 7 kann man die entsprechende Formel für $(a-b)^2$ erkennen. Wir haben hier sozusagen den Anfang eines Lehrbuches der Algebra vor uns, aber in geometrischer Sprache."

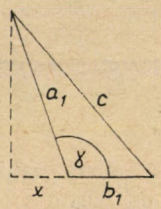
[17] Hogyan ismerhettek volna a görögök *„előjel-szabályokat"*, amikor még a *„negatív mennyiségek"* fogalmát sem ismerték! Vö. H. G. ZEUTHEN, op. cit. 8: „Ein Vorbehalt muss hier jedoch gemacht werden, insofern, als man im Altertum *keine negativen Grössen* oder ein irgendwie entsprechendes Hilfsmittel kannte."

Megállapíthatjuk tehát, hogy a „geometrikus algebra" elmélete *nem ad kielégítő magyarázatot* annak a két fontos „segédtételnek" *(Elemek II 4 és 7)* az eredetéről, amely nélkülözhetetlen az euklidészi „cosinus-tételek" bizonyításához.

2.

Most pedig lássuk a cosinus-tételnek a tompaszögű háromszögekre érvényes euklidészi formáját. (A tétel megértéséhez lásd a *4. ábrát*, valamint az idézendő szövegbe szúrt megjegyzéseimet zárójelekben!)

II 12: „Minden tompaszögű háromszögben a tompaszöggel szemben fekvő oldal négyzete nagyobb mint a tompaszöget alkotó oldalak négyzeteinek összege ($c^2 > a_1^2 + b_1^2$)*; mégpedig nagyobb egy olyan téglalap kétszeresével, amely téglalapnak egyik oldala az a tompaszög melletti háromszög-oldal, amelynek meghosszabbítására a merőlegest bocsátjuk* (b_1)*, másik oldala pedig ugyanennek a háromszög-oldalnak a meghosszabbítása a lebocsátott merőlegesig* (x)."

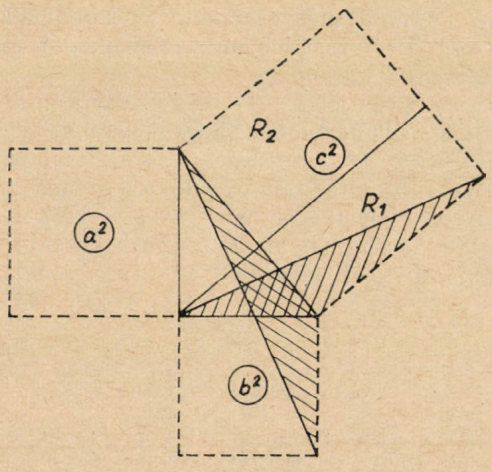


4. ábra

[Vagyis az egész idézett tétel a *4. ábrán:* $c^2 = a_2^1 + b_1^2 + 2b_1x$.]

Világos, hogy ez a tétel a közismert PYTHAGORAS-tételnek az általánosítása, amint erre a görög matematikával foglalkozó kézikönyvek utalni is szoktak.[18] Éppen ezért — mielőtt megpróbálnánk rekonstruálni e tétel genezisét — emlékeztessünk itt előbb még arra, hogyan bizonyítja EUKLIDÉSZ szövege magát a PYTHAGORAS-tételt *(Elemek I 47)*.

Ennek a másik bizonyításnak a gondolatmenete nagyjából a következő (lásd az *5. ábrát*). A derékszögű háromszög minden oldalára négyzeteket emelünk. Majd a derékszögnél levő csúcsból merőlegest bocsátunk az átfogóra; ennek a merőlegesnek a meghosszabbítása c^2 területét az R_1- és R_2-vel jelölt téglalapok összegére bontja. Azután megszerkesztjük az *5. ábrán* a két árnyalt háromszöget és utalunk arra, hogy *először:* e háromszögek kongruensek; *másodszor:* egyikük b^2-nek, másikuk R_1 téglalapnak a fele-területével egyenlő, mert alapjuk ugyanaz, mint a négyzeté, ill. az R_1 téglalapé, és mert ugyanazok között a párhuzamosok között fekszenek, mint az említett paralellogrammák (vö. *Elemek I 41*). Ezért $b^2 = R_1$ téglalap. — Ugyanilyen segédszerkesztéssel kimutatható, hogy $a^2 = R_2$ téglalap. — Összeadva a két részeredményt, megkapjuk PYTHAGORAS tételét: $c^2 = a^2 + b^2$.



5. ábra

[Érdemes lesz kiemelni ezzel a bizonyítással kapcsolatban *két negatívumot:*

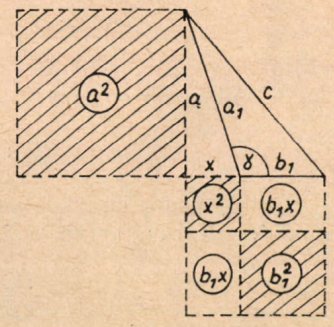
[18] Pl. TH. L. HEATH, Euclid's Elements, vol. I (Dover Publication) 409.

1. A bizonyításban *nincs* szó arról, hogy a háromszög oldalai, vagy az említett négyzetek és téglalapok *számokban* is kifejezhetők lennének.
2. *Nem* használja a bizonyítás az „*arány*" fogalmát sem.

Ugyanez a két negatívum jellemző nemcsak az itt vázolt bizonyításra, hanem mindazokra a geometriai szerkesztésekre is, amelyeket a szakirodalom eddig „geometrikus algebra" néven foglalt össze.][19]

Most pedig térjünk vissza a cosinus-tételnek a tompaszögű háromszögekre érvényes formájához *(II 12)*.

Minthogy ez a tétel a közönséges PYTHAGORAS-tétel általánosítása, annak, aki ezt először fölállította, ismernie kellett a PYTHAGORAS-tételt bizonyításával együtt. Nyilván azt kérdezte: hogyan módosul az előbbi tétel akkor, ha a derékszögből γ tompaszög lesz, amint ezt *6. ábránk* mutatja?



6. ábra

Amint erről az ábráról azonnal leolvasható, az eredeti derékszögű háromszög oldalai: a, $b = (b_1 + x)$ és c; az új tompaszögű háromszög oldalai viszont: a_1, b_1 és c. De rögtön látjuk ezen az ábrán azt is, hogy a tompaszögű háromszöggé való átalakítással kaptunk egy új derékszögű háromszöget is, amelynek átfogója a_1, két befogója pedig: az eredeti a oldal és x. Erre az új derékszögű háromszögre megint érvényes a PYTHAGORAS-tétel, vagyis:

$$a_1^2 = a^2 + x^2.$$

Ha viszont arra vagyunk kíváncsiak, hogyan fejezhetnénk ki a tompaszögű háromszög c oldalára emelt négyzetet magának a tompaszögű háromszögnek az alkotórészeivel, akkor — mint az ábra mutatja — nem elég összeadnunk a_1^2-et (ami csak $a_1^2 = a^2 + x^2$) és b_1^2-et; a c^2 ennél az összegnél nagyobb lesz: $c^2 > a_1^2 + b_1^2$. Ki kell ti. egészítenünk az egyenlőtlenség jobb oldalán álló összeget még azzal a két téglalappal, amelyet *6. ábránk* árnyékolás nélkül hagyott. Így aztán

$$c^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2b_1x.$$

Éppen ezt mondja ki a föntebb idézett *II 12* tétel.

Kitűnik ebből a gondolatmenetből mindjárt az is: miért kell az euklidészi bizonyításnak éppen arra a *II 4* segédtételre hivatkoznia, amelyet e dolgozat 1. részében tárgyaltunk? Hiszen ez a segédtétel *(II 4)* éppen arra a kérdésre adja meg a választ: *milyen felületegységekre bomlik fel valamely adott egyenes szakaszra emelt négyzet akkor, ha magát az egyenes szakaszt két tetszőleges részre osztjuk*? Csakugyan, amikor az eredeti derékszögű háromszöget tompaszögű háromszöggé alakítottuk át, az eredeti b oldalt két tetszőleges b_1 és x szakaszra osztottuk, ahol

$$(b_1 + x)^2 = b_1^2 + x^2 + 2b_1x.$$

[19] Igazában ennek a megjegyzésnek — bár természetesen érvényes az itt tárgyalt „cosinus-tételekre" is — a jelen dolgozat szempontjából még *nincs* különösebb jelentősége. Csak azért nem hagytam ki a fenti szövegből, mert ugyanez a megfigyelés fontos lesz majd a „geometrikus algebra" elméletének teljes revíziója során.

Úgy látszik tehát, az *Elemek II 4* tétele — bár kétségtelenül fölírható algebrai formában — mégsem az ismert algebrai képlet — $(a+b)^2$ — *utólagos geometrizálása*, hanem olyan *egyszerű és tisztán geometriai megfontolások eredménye*, amelyekre a görög geométereknek a PYTHAGORAS-tétel általánosítása *(II 12)* során volt szükségük.

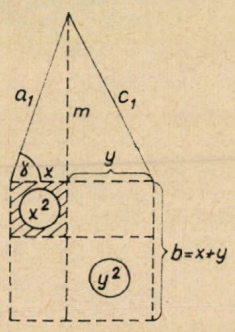
Mielőtt tovább mennénk és kimutatnánk, hogy ugyanilyen meggondolások még egyértelműbben érvényesek a cosinus-tétel másik euklidészi formájára is *(II 13)* — azaz hogy ennek az utóbbi tételnek a bizonyításában is tisztára geometriai eredetű segédtételt *(II 7)* használtak —, emlékeztessünk itt még röviden arra, hogy az imént tárgyalt *II 12* tétel csakugyan ekvivalens a mi cosinus-tételünkkel. Hiszen valóban (lásd a *6. ábrát*):

$$c^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2b_1x = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1(-\cos\gamma).$$

(Minthogy pedig γ 90° és 180° közé esik, a $\cos\gamma$ értéke *negatív*. Ezért a legutolsó tagot csakugyan *hozzá kell adnunk* az $a_1^2 + b_1^2$ összeghez.)

*

Most pedig lássuk a cosinus-tételnek a hegyesszögű háromszögekre érvényes euklidészi formáját (vö. a *7. ábrával*):



7. ábra

II 13: „Minden hegyesszögű háromszögben az egyik hegyesszöggel szembenfekvő oldal négyzete (c_1^2) *kisebb mint ugyanezt a hegyesszöget alkotó oldalak négyzeteinek összege* ($c_1^2 < a_1^2 + b^2$); *mégpedig kisebb egy olyan téglalapnak a kétszeresével, amely téglalapnak egyik oldala az a háromszög-oldal, amelyre a merőlegest bocsátjuk* (*b*), *másik oldala pedig az a szakasz, amelyet az előbbi háromszög-oldalból a reá lebocsátott merőleges a hegyesszög felé eső részen lemetsz* (*x*)."

(Hogy világosan megértsük a tétel szövegét: Minthogy $c_1^2 < a_1^2 + b^2$, ezért az egyenlőtlenség bal oldalához hozzá kell még adnunk $2bx$-t; így aztán: $c_1^2 + 2bx = a_1^2 + b^2$).

Ha most arra a kérdésre keresünk választ: hogyan jutottak el ehhez a tételhez az EUKLIDÉSZ-előtti kor matematikusai, akkor — azt hiszem — nem szabad megfeledkeznünk a következő fontos tényekről:

1. Az itt tárgyalandó tétel *(II 13)* éppenúgy a PYTHAGORAS-tétel általánosítása, mintahogy az volt az előbbi, a *II 12* is. Éppen ezért valószínű, hogy most is egy derékszögű háromszögnek az átalakításából indultak ki. A különbség csak az, hogy míg a *II 12* tétel genezise során az eredeti derékszögű háromszöget *tompaszögű* háromszöggé alakították át, a *II 13* tételhez ugyanazt a derékszögű háromszöget *hegyesszögűvé* kellett átalakítaniok.
2. A tompaszögű háromszöggé való átalakítás során (lásd a *6. ábrát*) az eredeti derékszögű háromszögnek a két befogója változott meg: *a*-ból lett a_1, és *b*-ből lett b_1. Amikor viszont hegyesszögűvé alakították át a derékszögű háromszöget *(7. ábra)*, megváltozott az átfogó (*c*-ből lett c_1) és az egyik befogó (*a*-ból lett a_1). De mind a két esetben *változatlan* maradt az eredeti derékszögű háromszögnek *egy* alkotórésze; az új tompaszögű háromszögnél ti. változatlan a *c* oldal (eredetileg: *átfogó*), a hegyesszögűnél pedig változatlan a *b* oldal (eredetileg: *az egyik befogó*). — Úgy látszik mármost, az a régi matematikus,

aki általánosította a PYTHAGORAS-tételt, arra törekedett, *hogy az új formulában ugyanúgy benne legyen a változatlanul hagyott oldal négyzete, mintahogy benne van ez magában a* PYTHAGORAS-*tételben.* (Csakugyan a tompaszögű háromszögekre vonatkozó tételben — *II 12* — benne van c^2, a hegyesszögűekre vonatkozóban pedig — *II 13* — benne van b^2.)

3. Ne feledkezzünk meg arról sem: a PYTHAGORAS-tétel általánosítását a tompaszögű háromszögekre az tette lehetővé, hogy most már egyszerre *két* derékszögű háromszöggel dolgozhattak (lásd a *6. ábrát*): az egyik volt az eredeti, amelynek oldalai: a, b és c; a másik pedig az, amelynek oldalai: a, x és a_1. — De ugyanígy kaptak *két új derékszögű háromszöget* akkor is, amikor az eredeti derékszögű háromszöget hegyesszögűvé alakították át (lásd a *7. ábrát*); az egyiknek az oldalai: m, x és a_1; a másiké pedig: m, y és c_1.

Ha viszont az a régi matematikus, aki megpróbálta általánosítani a PYTHAGORAS-tételt a hegyesszögű háromszögekre, csakugyan abból a törekvésből indult ki, hogy benne legyen az új képletben a változatlanul hagyott oldalnak (b-nek) a négyzete (b^2), akkor rögtön szemben találta magát egy érdekes nehézséggel. Elég egy pillantást vetnünk a *7. ábrára*, hogy belássuk: a PYTHAGORAS-tétel alkalmazása az újonnan nyert derékszögű háromszögekre a következő két képletet adja:

$$a_1^2 = x^2 + m^2 \quad \text{és} \quad c_1^2 = y^2 + m^2.$$

Vagyis mind a két esetben szerepel az egyenlet jobb oldalán az eredeti b^2-nek egy-egy alkotórésze, ti.: x^2, illetőleg y^2, de egyikben sincs benne maga a teljes b^2. — Valószínűleg éppen ez a megfigyelés adott alkalmat arra, hogy fölmerüljön a következő kérdés: Mi lenne, ha az *egész b szakaszra* és ugyanennek a szakasznak egyik *tetszőleges rész-szakaszára* emelt négyzeteknek az *összegéből* indulnánk ki? Hiszen a hegyesszögű háromszög b oldalát a szembenfekvő csúcsból reá lebocsátott merőleges két tetszőleges rész-szakaszra (x és y) osztja: $b = x + y$. Hogyan fejezhető ki ebben az esetben a $b^2 + x^2$ összeg? — Éppen erre a kérdésre felel az a *II 7* segédtétel, amelynek teljes szövegét idéztem már e dolgozat 1. részében (lásd a 64 lapon):

$$b^2 + x^2 = 2bx + y^2.$$

A szemléletes „bizonyítást" lásd a fönti *3. ábrán.*)

Abban a percben viszont, hogy megvolt ez a segédtétel, nem okozott már nehézséget a PYTHAGORAS-tétel általánosítása a hegyesszögű háromszögekre. Mint EUKLIDÉSZ második axiómája (az Elemek I. könyve előtt, „koinai ennoiai" címszó alatt) kimondja: az egyenlőség nem változik, ha mindkét oldalához hozzáadjuk ugyanazt a mennyiséget. Adjuk tehát hozzá a legutóbbi segédtételhez mind a két oldalon m^2-et:

$$b^2 + \underbrace{x^2 + m^2} = 2bx + \underbrace{y^2 + m^2}.$$

Egy pillantás a *7. ábrára* azonnal meggyőzhet arról, hogy ez a legutóbbi képlet — a PYTHAGORAS-tétel alkalmazásával — így is írható:

$$b^2 + a_1^2 = 2bx + c_1^2.$$

Éppen ezt mondja ki — szavakba foglalva — a most tárgyalt *II 13* tétel.

Azt hiszem, az előbbi gondolatmenetnek a rekonstruálása nemcsak az éppen szóban forgó euklidészi „cosinus-tételnek" *(II 13)* a genezisét világítja meg, hanem egyszersmind rámutat arra is, hogy a *II 7* tétel *pusztán geometriai jellegű meggondolásokra épült.* Annak, hogy e tétel felállítását „algebrai természetű megfontolások"

előzték volna meg, *nincs történeti nyoma.* Valószínű, hogy erre a tételre *(II 7)* éppen azért volt szükségük az antik matematikusoknak, mert általánosítani akarták a PYTHAGORAS-tételt hegyesszögű háromszögekre is. (Arról, hogy a *II 7* tételt a *II 13* bizonyításán kívül más alkalommal is használták volna az antik matematikában, *nem tudok.*)

Említsük meg befejezésül, hogy a legutóbbi képlet

$$b^2 + a_1^2 = 2bx + c_1^2$$

csakugyan ekvivalens a mi cosinus-tételünkkel. Hiszen ugyanez minden további nélkül fölírható a következő formában is:

$$c_1^2 = a_1^2 + b^2 - 2a_1 b \cos \gamma.$$

*

Végül pedig szeretném még fölhívni a figyelmet a következőre. Amiképpen ebben a dolgozatban rámutattam arra, hogy az Elemek II. könyvében a *4.* és a *7.* tétel *nem algebrai eredetű*, ugyanígy kimutattam már egy másik alkalommal azt is,[20] hogy az Elemeknek ugyanebben a II. könyvében az *5.*, *6.* és *14.* tétel szintén *tisztán geometriai eredetű.* Az a feltevés, hogy ez az *öt tétel* a „babilóni algebrából" került volna át a görögökhöz, mai történeti tudásunk szerint *semmivel sem valószínűsíthető.* — Ezzel azonban *még nem cáfoltam meg véglegesen* az állítólagos „geometrikus algebra" elméletét. Vannak az Elemek II. és VI. könyvében még más olyan tételek is, amelyeknek az eredetét a jövőben ugyanúgy tisztáznunk kell majd, mint ahogy ez eddig összesen *öt esetben* sikerült már.

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ В РАННЕЙ ГРЕЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. САБО

DER KOSINUSSATZ IN DER FRÜHGRIECHISCHEN GEOMETRIE

Á. SZABÓ

Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, jene Gedankengänge zu rekonstruieren, die die Mathematiker der voreuklidischen Zeit zu den beiden „Kosinussätzen" *Euklid, Elem. II 12 und 13* geführt haben mögen. Besonders berücksichtigt werden dabei, die durch EUKLID im Beweis benutzten „Hilfssätze": *Elem. II. 4 und 7.* Abgelehnt wird der Gedanke, dass diese letzteren Sätze „algebraischen Ursprungs" wären. (Es ist einfach unmöglich, den Satz *II 7* als eine nachträglich Geometrisierung unserer algebraischen Formel $(a-b)^2$ aufzufassen. Denn in diesem Fall hätten ja die Griechen auch „Vorzeichenregeln" kennen müssen.) Es wird auch nachdrücklich betont: es liegen gar keine historischen Indizien vor, die den Schluss erlaubten, dass die Griechen irgendeine „babylonische Algebra" — falls eine solche überhaupt je existiert hatte — „geometrisiert" hätten.

[20] Á. SZABÓ, op. cit. 455—488.

ADOTT HAMILTON-KÖRREL 1 KÖZÖS ÉLT TARTALMAZÓ HAMILTON-KÖRÖK LESZÁMLÁLÁSA

PALÁSTI ILONA

BEVEZETÉS

Ebben a dolgozatban az n szögpontú lineáris teljes gráf Hamilton-köreinek vizsgálatát folytatjuk. Előző [1] és [2] dolgozatunkban a $H_n(r)$ függvényt a következőképpen definiáltuk:

Legyen h egy tetszőlegesen megadott, r hosszúságú Hamilton-kör. Jelentse $H_n(r)$ az összes olyan, egymástól különböző n-ed rendű Hamilton-körök számát, amelyeknek az adott h körrel pontosan r $(0 \leqq r \leqq n)$ közös éle van.

A definícióból következik, hogy

$$\sum_{r=0}^{n} H_n(r) = \frac{(n-1)!}{2}. \tag{1}$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy $H_n(n)=1$, és $H_n(n-1) = 0$. Az alábbi speciális esetekben bebizonyítottuk, hogy

$$H_n(n-2) = \binom{n}{2} - n,$$

$$H_n(n-3) = \frac{n(n-4)(2n-7)}{3}; \qquad n \geqq 4 \tag{2}$$

$$H_n(n-4) = \frac{n(n-5)}{24}[(25n-79)(n-6)+60]; \qquad n \geqq 5.$$

A $H_n(0)$ értékeinek meghatározására egy rekurziós formulát adtunk meg. A [2] dolgozatban ezt a rekurziót a következő tétel formájában mondtuk ki:

A TÉTEL: *Az n szögpontú teljes gráfban egy tetszőlegesen adott, rögzített Hamilton-körhöz megadható, összes olyan, egymástól különböző Hamilton-körök száma, amelyeknek az adott, rögzített körrel közös éle nincs, a következő rekurziós formulával állítható elő, ha $n \geqq 6$:*

$$H_n(0) = (n-5)H_{n-1}(0) + \frac{2(n-4)}{n-1}H_{n-1}(1) + \frac{2}{n-1}\left[H_{n-1}(2) - \frac{n-1}{n-2}H_{n-2}(1)\right]. \tag{3}$$

Az A tétel igazolása során többet is bizonyítottunk, mint a tétel állítása. Megmutattuk azt is, hogy egy adott, rögzített Hamilton-körrel pontosan egy közös élt

tartalmazó, összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-körök számát megadó rekurziós formula a következő:

$$(4)\qquad H_n(1) = 4H_{n-1}(0) + \frac{(n-4)^2+2}{n-1} H_{n-1}(1) + \varepsilon_3(1,n) H^*_{n-1}(2) + \varepsilon_4(1,n) H^*_{n-1}(3),$$

ahol az $\varepsilon_3(1, n)$, $\varepsilon_4(1, n)$ és a $H^*_{n-1}(2)$, valamint a $H^*_{n-1}(3)$ kifejezések még nem ismertek.

Megmutattuk továbbá, hogy az adott, rögzített körrel 2 közös élt tartalmazó Hamilton-körök számát meghatározó rekurziós formula úgy kezdődik, hogy

$$(5)\qquad H_n(2) = \frac{4n-9}{n-1} H_{n-1}(1) + \cdots .$$

Jelen dolgozat célja a (4) összefüggésben szereplő $\varepsilon_3(1, n)$, $\varepsilon_4(1, n)$, ill. a $H^*_{n-1}(2)$ és a $H^*_{n-1}(3)$ kifejezések meghatározása.

1. §. REKURZIÓS FORMULA A $H_n(1)$ FÜGGVÉNY MEGHATÁROZÁSÁRA

A továbbiakban be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

1. TÉTEL: *Az n szögpontú teljes gráfban megadható, összes olyan, egymástól különböző Hamilton-körök száma, amelyeknek egy tetszőlegesen megadott, n-ed rendű Hamilton-körrel pontosan 1 közös éle van a következő:*

$$(6)\qquad H_n(1) = 4H_{n-1}(0) + \frac{(n-4)^2+2}{n-1} H_{n-1}(1) + 2\left[\frac{2(n-5)}{n-1} H_{n-1}(2) + \frac{3}{n-2} H_{n-2}(1)\right] + 2\left[3\frac{H_{n-1}(3)}{n-1} - 2\frac{H_{n-2}(2)}{n-2}\right], \qquad n \geqq 6.$$

Mielőtt az 1. tétel bizonyítására rátérnénk, idézzünk fel néhány fontos mozzanatot és jelölést az A tétel bizonyításából, amelyeket a későbbiek során majd felhasználunk.

Az A tétel bizonyításánál a következő algoritmusból indultunk ki. Tekintsük az $n-1$ hosszúságú körök halmazát. Vegyünk egy kört a halmazból és növeljük meg eggyel a kör csúcsainak és egyben éleinek számát is úgy, hogy hagyjunk el a körből egy élt és vezessünk be helyette két új élt oly módon, hogy az elhagyott él mindkét végpontját kössük össze az új P_n csúccsal. Egy másik n hosszúságú kört egy másik él elhagyása és a végpontjainak az új csúccsal való összekötésével nyerünk. Ezt az eljárást mindaddig folytatjuk, míg rendre az összes $n-1$ hosszúságú körök összes élei sorrakerülnek. Ez az eljárás az n hosszúságú körök mindegyikét megadja, és csak egyszer adja meg.

Bevezettük a következő jelöléseket:

A $C^{(n)}_\alpha$ jelenti az n hosszúságú körök közül az α-ik Hamilton-kört, ahol az α az összes lehetséges, azaz a $0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{(n-1)!}{2} - 1\right]$-ik körök közül bármelyik lehet, amely bizonyos tulajdonságokkal rendelkezik. A $C^{(n)}_0$ jelentése pedig az összehasonlítás alapjául szolgáló, tetszőlegesen választott, n-ed rendű, rögzített kör. Két kör a $C^{(n)}_\alpha$ és a $C^{(n)}_\beta$ közös éleit, ha pl. ezek az élek az (i, j) és a (k, l), a következőképpen jelöljük:

$$(7)\qquad C^{(n)}_\alpha \cap C^{(n)}_\beta = (i,j) + (k,l).$$

Ha csak a közös élek számát akarjuk megadni az élek feltüntetése nélkül, akkor a

$$|C_\alpha^{(n)} \cap C_\beta^{(n)}| = q, \tag{8}$$

jelölést alkalmazzuk (a q értéke tehát a fenti (7) példában $q=2$).

Megjegyezzük még, hogy a teljes gráf szimmetriája miatt egyik Hamilton-körnek sincs kitüntetett szerepe, az egyszerűség kedvéért példáinkban így az n hosszúságú, rögzített $C_o^{(n)}$ kört, a régi rögzített, $n-1$ hosszúságú $C_o^{(n-1)}$ körből képezzük, az algoritmusnak megfelelően, tehát

$$C_0^{(n)} = C_0^{(n-1)} - (k, l)^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (l, n)^{(n)}. \tag{9}$$

A $(k, l)^{(n-1)}$ jelölés az $n-1$ hosszúságú kör (k, l) élét jelenti. A későbbiek során még a $(k, l)_\alpha^{(n)}$ jelölést is fogjuk használni, ha azt is fel akarjuk tüntetni, hogy a (k, l) az α-ik, vagy α-típusú köröknek az egyik éle.

A bizonyítás során felhasználtuk még a következő lemmát is:

A LEMMA: *A $C_0^{(n)}$ és a $C_{\eta^*}^{(\eta)}$ körök közös éleinek a száma és a $C_0^{(n-1)}$ és $C_\eta^{(n-1)}$ körök közös éleinek a száma közötti különbség csak a $+1, 0, -1$ és a -2 értékeket veheti fel, azaz:*

$$\Delta = |C_0^{(n)} \cap C_{\eta^*}^{(n)}| - |C_0^{(n-1)} \cap C_\eta^{(n-1)}| = 1, 0, -1, -2. \tag{10}$$

(Az A lemma bizonyítása az [1] 85. oldalán található.)

Az 1. tétel bizonyítása. Az 1. tétel bizonyításánál is az A lemma állításából indulunk ki. Az A tétel bizonyítása során már bebizonyítottuk azt is, hogy a (6) első két tagját helyesen írtuk fel (lásd (4)).

A következőkben először a (6) harmadik tagjának helyességét igazoljuk.

Tekintsük tehát az összes olyan Hamilton-köröket, amelyek az eredeti, $n-1$ hosszúságú körök között a rögzített $C_0^{(n-1)}$ körrel két közös élt tartalmaznak. Ezek száma a $H_n(r)$ definíciója szerint $H_{n-1}(2)$. A fenti algoritmus szerint képezzük ezekből rendre az összes lehetséges, egymástól különböző, n hosszúságú köröket. Számláljuk meg, hogy az így nyert körök között hány esetben fogunk az új rögzített $C_0^{(n)}$ körrel pontosan egy közös élű köröket kapni. Más szavakkal a $C_\Gamma^{(n-1)}$ rendelkezzék azzal a tulajdonsággal, hogy

$$|C_0^{(n-1)} \cap C_\Gamma^{(n-1)}| = 2 \tag{11}$$

legyen. A kérdés most már az, hogy hány esetben veszi fel a (10) által definiált Δ kifejezés a -1 értéket (η, ill. η^* helyett Γ, ill. Γ^*-ot írunk). Hogy ezt meghatározhassuk, vizsgáljuk a $C_0^{(n)}$ és a $C_{\Gamma^*}^{(n)}$ típusú körök közös élei számának alakulását.

Megállapodásunk értelmében a $C_0^{(n)}$ kört a $C_0^{(n-1)}$ körből képezzük elhagyva ennek egy tetszőleges (k, l) élét és az így nyert elsőfokú csúcsokat összekötjük az új P_n csúccsal. (Lásd (9).) A konstrukciós eljárásunkból következik, hogy az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör generálásánál elhagyott $(k, l)^{(n-1)}$ régi, ill. a bevezetett két új a $(k, n)^{(n)}$ és az $(l, n)^{(n)}$ élek tulajdonságai (közös él, vagy nem közös él volta) lényegesen befolyásolják a $C_{\Gamma^*}^{(n)}$ és a $C_0^{(n)}$ körök közös éleinek a számát. Célszerű tehát a generálandó köreinket már eleve aszerint csoportosítani, hogy az $n-1$ hosszúságú körök között az a bizonyos két közös él milyen helyzetet foglalhat el egy tetszőlegesen megadott, rögzített él, azaz az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) élhez viszonyítva.

Mielőtt azonban a csoportosításra rátérnénk, vezessük be még a következő jelöléseket:

A P_k csúcsnak a $C_\Gamma^{(n-1)}$ körben levő azt a két „szomszédját", amelyekkel a P_k össze van kötve k_+, ill. k_--szal fogjuk jelölni.

Nézzük most az eredetileg két közös él lehetséges helyzetét az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) élhez viszonyítva. Ily módon a $H_{n-1}(2)$ elemszámú halmazba tartozó köröket, mint már azt a fent idézett dolgozatunkban is felsoroltuk a következő 5 csoportba oszthatjuk:

A) Az eredetileg két közös él mindegyike pontfüggetlen az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éltől. Azaz a

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\alpha^{(n-1)} = (i_1, j_1)^{(n-1)} + (i_2, j_2)^{(n-1)}, \tag{12}$$

ahol az $i_1, j_1, i_2, j_2 \neq k, l$, és $n \geqq 7$.

B) A régi rögzített $C_0^{(n-1)}$ körrel eredetileg közös élek közül az egyik azonos a (k, l) éllel, a másik közös él pedig a (k, l) éltől pontfüggetlen. Vagyis

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\beta^{(n-1)} = (k, l)^{(n-1)} + (i, j)^{(n-1)}, \tag{13}$$

ahol az $i, j \neq k, l$.

C) A $C_0^{(n-1)}$ körrel eredetileg közös élek közül az egyik az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel azonos, a másik közös él pedig a vele szomszédos él. Más szóval, vagy a

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\gamma^{(n-1)} = (k, l)^{(n-1)} + (k, k_+)^{(n-1)}, \tag{14}$$

vagy a

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\gamma^{(n-1)} = (k, l)^{(n-1)} + (l, l_-)^{(n-1)} \tag{15}$$

összefüggés teljesül, feltéve természetesen, hogy a $k_+ \neq l$ és az $l_- \neq k$, $n \geqq 7$.

D) Az eredetileg két közös él közül az egyik szomszédos a (k, l) éllel, a másik pedig pontfüggetlen a (k, l) éltől, azaz a

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\delta^{(n-1)} = (k, k_+)^{(n-1)} + (i, j)^{(n-1)}, \tag{16}$$

vagy a

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\delta^{(n-1)} = (l, l_-)^{(n-1)} + (i, j)^{(n-1)}, \tag{17}$$

feltétel teljesül, ahol a $k_+ \neq l$, $l_- \neq k$, az $i, j \neq k, l$ és $n \geqq 6$.

E) Mindkét eredetileg közös él szomszédos a (k, l) éllel:

$$C_0^{(n-1)} \cap C_\eta^{(n-1)} = (k, k_+)^{(n-1)} + (l, l_-)^{(n-1)}, \tag{18}$$

feltéve, hogy $k_+ \neq l$, $l_- \neq k$, és $n \geqq 5$.

Több eset nem lehetséges.

A következő lépés megszámlálni azt, hogy az $n-1$ hosszúságú $H_{n-1}(2)$ elemszámú halmazba tartozó körök között hány kör lesz az itt felsorolt 5 osztály mindegyikében külön-külön. Jelentse a, b, c, d, e rendre az A, B, C, D, E osztályba tartozó körök számát. A c értékét már az előző [2] dolgozatunkban meghatároztuk és ott $B(n-1)$-gyel jelöltük:

$$c = B(n-1) = \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1). \tag{19}$$

Ebből következik, amit már az A tétel bizonyítása során is beláttunk, hogy

$$b = \frac{2}{n-1} H_{n-1}(2) - \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1), \tag{20}$$

ami nem más, mint a (3) harmadik tagja. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$a+b+c+d+e = H_{n-1}(2). \tag{21}$$

Számítsuk most ki, hány olyan kör van összesen, amelyekben a két közös él közül legalább az egyik a (k, l) él szomszédos éle. Itt a C, D és E esetekről van szó. Akkor tekintve, hogy az összes, egy adott körrel két közös élt tartalmazó körök közül azoknak a *száma*, amelyekben az egyik közös él egy megadott él, a $H_n(r)$ függvény definíciója és a teljes gráf szimmetriája miatt,

$$\frac{2H_{n-1}(2)}{n-1}. \tag{22}$$

Ily módon a következő összefüggésekre jutunk:

$$c+d+2e = 4\frac{H_{n-1}(2)}{n-1}. \tag{23}$$

Helyettesítsük most a (21) és a (23) egyenletekbe a b és c megadott értékeit, akkor az

$$\begin{aligned} a+d+e &= \frac{n-3}{n-1} H_{n-1}(2), \\ d+2e &= 4\frac{H_{n-1}(2)}{n-1} - \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1), \end{aligned} \tag{24}$$

egymástól lineárisan független egyenletekhez jutunk. Ez két egyenlet három ismeretlennel, s hogy egyértelműen megoldható legyen még egy további egyenletre van szükségünk. Vegyük észre, hogy az öt csoportba osztott körök három alapvető tulajdonság szerint is vizsgálhatók. Ezek: 1. az egyik közös él maga a (k, l) él, 2. legalább az egyik közös él a (k, l) szomszédos éle, 3. legalább az egyik közös él pontfüggetlen a (k, l) éltől. Ezek közül az első tulajdonságot a c és b értékeinek meghatározásakor használtuk ki. A másik alapvető tulajdonság vezetett a (23) egyenletre. A harmadik tulajdonság felhasználásával is nyerhetnénk egy további egyenletet. Könnyű belátni azonban, hogy ez már nem lenne független az előzőektől. Célravezetőbb tehát az $e = e_{n-1}$ értékének közvetlen meghatározása.

Legyen $e_n = E(n)$, és bizonyítsuk be a következő lemmát:

1. LEMMA: *Legyen* $C_0^{(n)}$ *a rögzített Hamilton-kör,* $(k, l)^{(n)}$ *ennek egy kiválasztott éle és* $C_\eta^{(n)}$ *olyan kör, amelyre*

$$C_0^{(n)} \cap C_\eta^{(n)} = (k, k_+)^{(n)} + (l, l_-)^{(n)}, \tag{18a}$$

azaz a $C_0^{(n)}$ *és* $C_\eta^{(n)}$ *közös élei éppen a* $(k, l)^{(n)}$ *éllel szomszédos élek. Jelölje* $E(n)$ *azok-*

nak az összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-köröknek a számát, amelyekre a (18*a*) *teljesül. Akkor* $E(n)$ *a következő rekurziós formulával adható meg:*

$$(25)\qquad E(n)=\begin{cases}1, & \text{ha } n=4,5,6,\\ 1+\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}, & \text{ha } n=4,\\ 1+\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}+\dfrac{3H_{n-2}(1)}{n-2}, & \text{ha } n=8,\\ 1+\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}+\dfrac{4H_{n-2}(1)}{n-2}+\dfrac{3H_{n-3}(1)}{n-3}, & \text{ha } n=9,\end{cases}$$

és így tovább, azaz

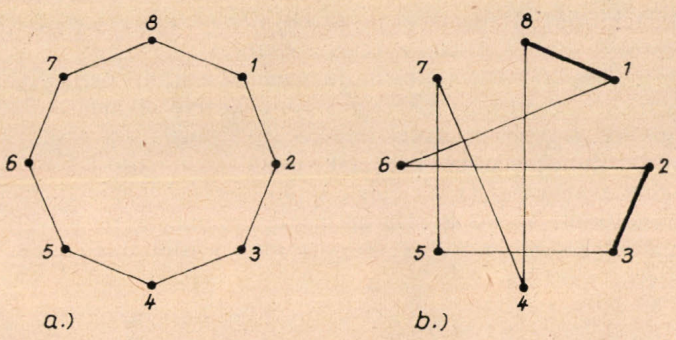
$$(26)\qquad E(n)=7+\frac{2}{n-1}H_{n-1}(1)+4\sum_{j=2}^{n-7}\frac{H_{n-j}(1)}{n-j},\quad \text{ha } n\geqq 10.$$

Az 1. *lemma bizonyítása.* Írjuk a (25)-öt és a (26) első tagját a következő alakba:

$$(27)\qquad E(n)=\begin{cases}1, & n=4,5,6,\\ [1]+\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}, & n=7,\\ \left[1+\dfrac{2H_{n-2}(1)}{n-2}\right]+\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}+\dfrac{H_{n-2}(1)}{n-2}, & n=8,\\ \left[1+\dfrac{3H_{n-3}(1)}{n-3}+\dfrac{2H_{n-2}(1)}{n-2}\right]+\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}+\dfrac{2H_{n-2}(1)}{n-2}, & n=9,\\ \left[1+\dfrac{3H_{n-4}(1)}{n-4}+\dfrac{4H_{n-3}(1)}{n-3}+\dfrac{2H_{n-2}(1)}{n-2}\right]+ & \\ +\dfrac{2H_{n-1}(1)}{n-1}+\dfrac{2H_{n-2}(1)}{n-2}, & n=10.\end{cases}$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben levő kifejezések az előző sorban álló teljes kifejezésektől csak abban különböznek, hogy eggyel alacsonyabb az indexük, más szóval ez azt jelenti, hogy azonos a számértékük. Megjegyezzük még, hogy a 3-as együtthatóval rendelkező tagok mindegyike azonos a $\dfrac{H_6(1)}{6}$-tal. Figyelembe véve továbbá, hogy a $H_6(1)=12$ (lásd [1] dolgozat) és így a $\dfrac{3H_6(1)}{6}=6$, vagyis a (27) utolsó sorát már a (26) tartalmazza. Az 1. lemma bizonyításához elég tehát csak a (27) helyességét igazolni és teljes indukcióval nyerhető a rekurzió folytatása.

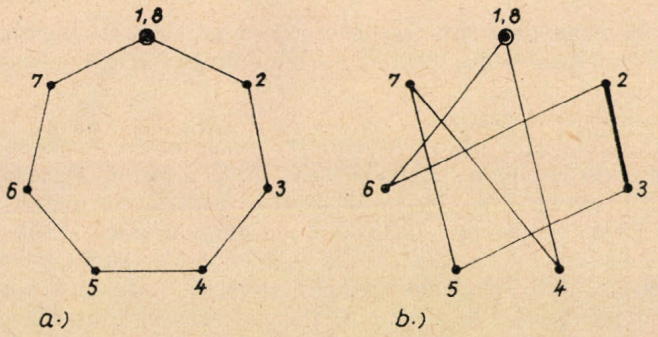
Igazoljuk először a (27) harmadik sorának helyességét. Kiindulásul adjunk meg egy rajzos példát a (18*a*) által megadott körpárra, elég nagy n-et választva. Legyen tehát az $n=8$. Tekintsük a következő 1. ábrát:



1. ábra

Legyen az 1a) kör a rögzített $C_0^{(8)}$ kör, és válasszuk az (1, 2) élt az új rögzített kör generálásánál elhagyandó (k, l) élnek. Így tehát a (k, l), ill. az (1, 2) él szomszédos élei a (vastagon kihúzott) (1, 8) és a (2, 3) élek. A (11) feltételnek, és ezen belül az E) osztályba sorolhatóság, azaz a (18) kritériumnak is eleget tevő $C_\eta^{(8)}$ típusú körökre egyik példa az 1b) kör. A feladat az összes lehetséges ilyen körök leszámlálása.

Zsugorítsuk az (1, 8) élt egyetlen ponttá, és jelöljük ezt a pontot dupla karikával, ill. a $P_{1,8}$ dupla indexszel. Állapodjunk meg abban, hogy a belső karika a P_1 és a külső a P_8 csúcsot reprezentálja. Akkor a következő 2. ábra köreire jutunk:



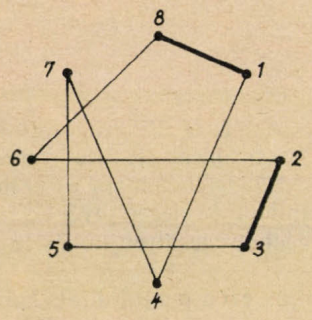
2. ábra

Az eddig elmondottak bármilyen $n \geqq 8$ értékre igazak. Mindebből az következik, hogy egy n hosszúságú körben egy kitüntetett él két szomszédos éle annyiszor lehet a két közös él, ahányszor az 1-gyel rövidebb, azaz az $n-1$ hosszúságú körben egy kitüntetett él közös lehet. Ez pedig — mint már beláttuk — a teljes gráf szimmetriájának és a $H_n(r)$ függvény definíciójának felhasználásával

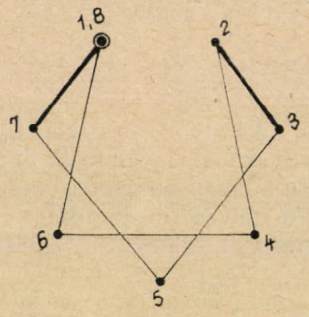
$$\frac{H_{n-1}(1)}{n-1}. \tag{28}$$

Valóban ez szerepel a (27) harmadik sorának a zárójel után következő első tagjában, csak még a 2-es faktor indokolt voltát kell igazolni. Ez azonnal nyilvánvaló lesz,

ha az 1b) kört tekintjük. Hagyjuk el ui. az 1b) kör (4, 8) és (6, 1) éleit és vezessük be helyettük a (6, 8) és a (4, 1) éleket (lásd a 3. ábrát):
Ily módon az 1. ábra b) körétől eltérő, de ugyancsak az E) osztályba tartozó kört nyertünk. Ha most a fenti zsugorítást a 3. ábra körére alkalmazzuk, akkor ismét a 2b) körre jutunk. S ezzel beláttuk, hogy a 2b) típusú zsugorított, azaz az $n-1$ hosszúságú körök mindegyike két-két, az E) osztályba tartozó n hosszúságú körnek felel meg, tekintve, hogy az (1, 8) élnek kétféle bekötési módja lehetséges és így a 2-es faktor indokolt. Vagyis a (27) harmadik sorának a zárójel után következő első tagjának a helyességét igazoltuk. Vegyük sorra a többi tagokat is.



3. ábra



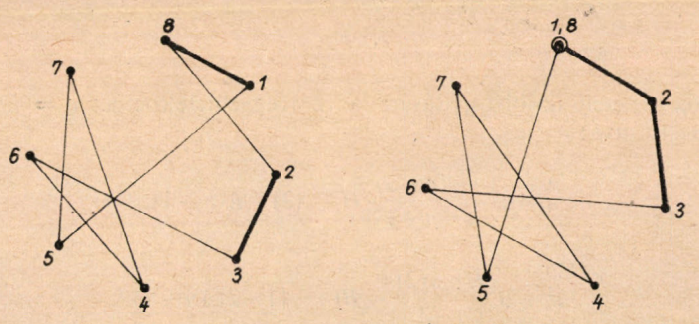
4. ábra

A (27) valamennyi sor első (zárójelben levő) tagjának az igazolásához azt kell belátnunk, hogy a zsugorított, azaz az $n-1$ hosszúságú körök között lesznek olyanok is, amelyeknek a (2, 3) az egyik közös éle a másik pedig a 2a) kör $(P_7, P_{1,8})$ élével közös (lásd a 4. ábrát):
Ezek azonban csak látszólagosan közös élek, hiszen az E) osztályba csak úgy tartozhattak, ha az eredeti n hosszúságú körben a (7, 1) él fordul elő nem pedig a (7, 8). Az ilyen körök száma $E(n-1)$, mivel a zsugorított, $n-1$ hosszúságú köröknek pontosan az E) halmazba való tartozás kritériumát teljesítő körök közé tartozik, vagyis olyan kör, amely egy adott, rögzített kör, példánkban a 2. ábra a) körének egy kitüntetett, a $(P_{1,8}, P_2)$ élének mindkét szomszédos élével közös éleket tartalmaz, és csak ezek az élek a közösek a rögzített kör éleivel. S ezzel a (27) összes sora zárójelben levő kifejezéseinek a helyességét is beláttuk.

A (27) harmadik sora, a zárójel után következő második és egyben utolsó tagjának igazolásához a következőket kell meggondolnunk. A zsugorított, rögzített kör $P_{1,8}$ dupla csúcsába befutó másik, azaz a $(P_{1,8}, P_2)$ éllel is lesznek ilyen, látszólagosan közös élű körök (az 5. ábra b) köre):
Azaz olyan körök, amelyekben a zsugorítás előtt a (2, 8) él szerepel (lásd az 5. ábra a) körét). De ezeknek a száma általunk már ismert. Ha ui. a zsugorított, rögzített 2a) körrel a $v(P_{1,8}, P_2, P_3)$ út a közös (mint ahogy ez az 5b) körnél látható), akkor ez a zsugorított 5b) kör eleget tesz a C) osztályba tartozó körök (14) kritériumának. Ezek számát már az előző dolgozatainkban megadtuk: $c = B(n-1)$. Így jutunk a (27) harmadik sorának utolsó tagjára, azaz az $\frac{1}{2} B(n-1)$ kifejezésre. De még be kell látnunk az $\frac{1}{2}$ faktor jelentését is. A (19) által megadott $B(n-1)$ értékek a C) halmazba tartozó összes körök számát adják meg, azaz a (14) és a (15) feltételeket kielégítő körök összegét. Jelen esetben pedig csak a (14) feltételt kielégítő körökről

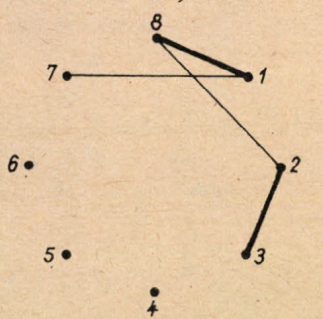
van szó, vagyis a $(k, l) = (1, 2)$ élnek és annak csak az egyik szomszédjával alkotott, látszólagosan közös utakról és így adódik az $^1/_2$ faktor.

Végezetül, hogy a (27) kifejezés helyességének a bizonyítását teljessé tegyük, már csak azt kell megmutatnunk, hogy a $P_{1,8}$ dupla csúcsba nem futhat össze két látszólagosan közös él, ha $n \leqq 8$, de $n > 8$ esetén már lesznek ilyen közös utak is.



5. ábra

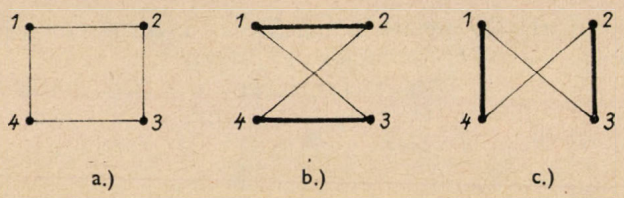
Ez ui. azt jelentené, hogy az eredeti, n hosszúságú körök között, az 1. ábra a) köréhez olyan köröket kell találnunk, amelyekben a (7, 8) és az (1, 2) élek helyett a (7, 1) és a (8, 2) élek szerepelnek. A megfelelő közös élek az (1, 8) és a (2, 3) pedig változatlanul közösek, hiszen az E) osztályba tartozó körökről van szó, az összes többi élnek pedig különböznie kell az 1a) kör összes többi élétől. (Lásd a 6. ábrát.) Előző dolgozatunkban azonban már bebizonyítottuk, hogy ez az eset nem fordulhat elő. (Lásd a 3. tétel bizonyításában szereplő 1. esetet.) Más szavakkal ez azt jelenti, hogy egy körből egy 4 hosszúságú út éleit elhagyva nem lehet olyan 4 új élet bevezetni, hogy ezek mindegyike különbözzék az eredeti kör éleitől és ugyanakkor az új konfiguráció is egyetlen kör legyen. Azt is megmutattuk azonban, hogy az 5 hosszúságú út esetén már megadható ilyen új, az eredeti körtől 5 élben különböző kör. S ezzel a (27) kifejezés harmadik sorától kezdve valamennyi sorának helyességít igazoltuk.



6. ábra

Az 1. lemma bizonyításának befejezéséhez már csak a (27) azonosság első és második sorának igazolása van hátra. Abból a tényből, hogy az összes lehetséges, egymástól különböző Hamilton-körök száma: $\frac{(n-1)!}{2}$ azonnal következik, hogy az $n = 3$ esetén az $E(n) = 0$. Az is könnyen belátható, hogy az $E(n) = 1$, ha az $n = 4$. Tekintsük ui. az összes lehetséges, egymástól különböző 4 hosszúságú köröket (lásd 7. ábra):

Legyen a $C_0^{(4)}$ a 7a) kör, és legyen a $(k, l) = (2, 3)$ él. Akkor az ábráról leolvasható, hogy az egyetlen $E(n)$ osztályba tartozó 4 hosszúságú kör a 7b) kör. Mivel továbbá az $n = 5$ és $n = 6$ esetén a $H_{n-1}(1) = 0$, és természetesen a $H_{n-2}(1) = 0$, (ami már következik az előzőekből, pl. a (21) miatt) vagyis igaz az, hogy az $E(5) = 1$ és $E(6) = 1$, és így a (27) azonosságot igazoltuk és ezzel az 1. lemma bizonyítása teljes.



7. ábra

Visszatérve tételünk bizonyítására a (24) egyenletekbe az $e = E(n-1)$ értékeket behelyettesítve:

$$a+d = \frac{(n-3)}{n-1} H_{n-1}(2) - E(n-1),$$

(29)

$$d = 4\frac{H_{n-1}(2)}{n-1} - B(n-1) - 2E(n-1)$$

egyenletrendszerre jutunk. Ezt az egyenletrendszert megoldva és a $B(n-1)$ értékét behelyettesítve az A), B), C), D) és E) osztályba tartozó körök száma rendre:

$$a = \frac{n-7}{n-1} H_{n-1}(2) + \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1) + E(n-1); \qquad n > 6,$$

$$b = \frac{2}{n-1} H_{n-1}(2) - \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1),$$

(30)

$$c = \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1),$$

$$d = 4\frac{H_{n-1}(2)}{n-1} - \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1) - 2E(n-1),$$

$$e = E(n-1).$$

Hogy az 1. tétel állításában szereplő (6) formula jobb oldalának harmadik tagjaként álló kifejezést igazoljuk, most már csak a következőket kell belátnunk:

Állítsuk elő az $n-1$ hosszúságú körökből, az A tétel bizonyításában szereplő algoritmus szerint az összes lehetséges n hosszúságú köröket, akkor az A) osztályba tartozó, minden egyes körből 2 olyan új kört nyerünk, amelynek egy közös éle lesz az új rögzített körrel, a B) osztály minden köréből $n-5$ számú, az új rögzített körrel 1 közös élű új kört nyerünk, a C) köreiből $n-3$ számú 1 közös élű új kört, a D) körök mindegyikéből egy 1 közös élű, és az E) osztály köreiből 0 számú, az új rögzített körrel 1 közös élt tartalmazó kört nyerünk. Ha ezekkel a számokkal a (30)-ban adott értékeket rendre beszorozzuk és az így nyert kifejezéseket összegezzük, eredményül a (6) harmadik tagját kapjuk.

Más szavakkal, azt kell még megállapítanunk, hogy a (10) által definiált Δ a -1 értéket hány esetben veszi fel rendre az A), B), C), D), E) osztály köreiből képezett összes új körök között. Ezért a következő lemmákat fogjuk bizonyítani:

2. LEMMA: *Az összes lehetséges, egymástól különböző, az* A) *osztályba tartozó körökből képezhető olyan Hamilton-körök száma, amelyeknek egy adott, rögzített körrel pontosan* 1 *közös éle van:*

$$2a = 2\left[\frac{n-7}{n-1} H_{n-1}(2) - \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1) + E(n-1)\right]. \tag{31}$$

A 2. lemma bizonyítása. Hogy a (31)-ben szereplő a érték azonos a (31) jobb oldalán álló zárójelben levő kifejezéssel, azt már beláttuk (lásd (30)). A lemma bizonyításához tehát már csak a 2-es faktor helyességét kell igazolni. Hogy a bizonyítást megkönnyítsük, a lemma állításánál sokkal többet fogunk bizonyítani. Megmutatjuk ui., hogy az A) osztályba tartozó körök mindegyikénél hány esetben veszi fel a Δ az összes lehetséges $+1$, 0, -1 és -2 értékeket.

Tekintsük az A) osztályba tartozó köröket. A $C_\alpha^{(n-1)}$ tehát olyan kör, amelyre a (12) feltétel teljesül, és így az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) élre igaz az, hogy a $(k, l) \notin C_\alpha^{(n-1)}$. Ily módon a P_k és P_l csúcsokhoz, két-két egymástól különböző él illeszkedik, vagyis a (k, k_+), (k, k_-), (l, l_+) és az (l, l_-) élek mindegyike szerepel a $C_\alpha^{(n-1)}$ körben. Ha most a $C_\alpha^{(n-1)}$ körből az algoritmus szerint képezzük az összes lehetséges, egymástól különböző n hosszúságú köröket, akkor, amikor a P_k és P_l csúcsokhoz illeszkedő élek elhagyására kerül sor, az így nyert n hosszúságú körök esetén a Δ értéke $+1$ lesz, mert

$$\begin{aligned}
C_{\alpha 1}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (k, k_+)_\alpha^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_+, n)^{(n)}, \\
C_{\alpha 2}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (k, k_-)_\alpha^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_-, n)^{(n)}, \\
C_{\alpha 3}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (l, l_+)_\alpha^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}, \\
C_{\alpha 4}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (l, l_-)_\alpha^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_-, n)^{(n)},
\end{aligned} \tag{32}$$

ahonnan a (9) és (12) felhasználásával

$$\begin{aligned}
C_0^{(n)} \cap C_{\alpha 1}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (i_2, j_2) + (k, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\alpha 2}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (i_2, j_2) + (k, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\alpha 3}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (i_2, j_2) + (l, n), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\alpha 4}^{(n)} &= (i_1, j_1) + (i_2, j_2) + (l, n).
\end{aligned} \tag{33}$$

Tehát az A) osztályba tartozó körökből generált új körök közül a fenti 4, a $C_{\alpha 1}^{(n)}$, $C_{\alpha 2}^{(n)}$, $C_{\alpha 3}^{(n)}$ és a $C_{\alpha 4}^{(n)}$ körnek 3 közös éle van az új rögzített $C_0^{(n)}$ körrel.

Ha most az algoritmus folytatásaként az eredetileg közös élek elhagyására kerül sor, azaz

$$\begin{aligned}
C_{\alpha 5}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (i_1, j_1)_\alpha^{(n-1)} + (i_1, n)^{(n)} + (j_1, n)^{(n)}, \\
C_{\alpha 6}^{(n)} &= C_\alpha^{(n-1)} - (i_2, j_2)_\alpha^{(n-1)} + (i_2, n)^{(n)} + (j_2, n)^{(n)},
\end{aligned} \tag{34}$$

akkor ezeket a (9) és (12) körökkel összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
C_0^{(n)} \cap C_{\alpha 5}^{(n)} &= (i_2, j_2), \\
C_0^{(n)} \cap C_{\alpha 6}^{(n)} &= (i_1, j_1).
\end{aligned} \tag{35}$$

Ebben a két esetben kapunk a $C_0^{(n)}$ körrel 1 közös élű kört (a $\Delta = -1$), s ezzel a 2. lemmát be is bizonyítottuk.

A teljesség kedvéért megmutatjuk azonban azt is, hogy az összes többi, azaz az $(n-1)-4-2 = n-7$ él elhagyása esetén közös marad az eredetileg két közös él. Ekkor ui.

$$(36)\quad C_{\alpha p}^{(n)} = C_\alpha^{(n-1)} - (i_p, j_p)_\alpha^{(n-1)} + (i_p, n)^{(n)} + (j_p, n)^{(n)}, \qquad (p = 7, 8, \ldots, n-1),$$

ahonnan a (9) és (12) felhasználásával

$$(37)\quad C_0^{(n)} \cap C_{\alpha p}^{(n)} = (i_1, j_1) + (i_2, j_2), \qquad (p = 7, 8, \ldots, n-1),$$

és így most a $\Delta = 0$. Ezzel az A) osztály köreiből generálható összes lehetséges n hosszúságú, a $C_0^{(n)}$ körrel különböző közös éleket tartalmazó köröket megszámláltuk.

Összefoglalva: *az* A) *osztály köreiből generált körök esetén a rögzített* $C_0^{(n)}$ *körrel*
1 *közös élt tartalmazó új körök száma:* $2a$,
2 *közös élt tartalmazó körök száma:* $(n-7)a$,
3 *közös élt tartalmazó körök száma:* $4a$,
(ahol az a *értékét a* (30) *adja meg).*

3. Lemma: *Az összes lehetséges, olyan Hamilton-körök száma, amelyek a* B) *osztály köreiből generálhatók és amelyeknek a rögzített körrel pontosan egy közös éle van:*

$$(38)\quad (n-5)b = (n-5)\left[\frac{2}{n-1} H_{n-1}(2) - \frac{2}{n-2} H_{n-2}(1)\right].$$

A 3. lemma bizonyítása. Az egyszerűség kedvéért most is többet bizonyítunk mint a 3. lemma állítása. Induljunk ki a B) osztályba tartozó, $n-1$ hosszúságú körökből és képezzük rendre az összes lehetséges n hosszúságú köröket az algoritmusnak megfelelően. Legyen tehát a $C_\beta^{(n-1)}$ olyan kör, amely eleget tesz a (13) feltételnek. Vagyis a $(k, l) \in C_\beta^{(n-1)}$ és van még egy a (k, l)-től pontfüggetlen közös éle is a körnek, az $(i_1, j_1)^{(n-1)}$ él.

Ha az új kör generálásánál a (k, l) élt hagyjuk el a $C_\beta^{(n-1)}$ körből, akkor

$$(39)\quad C_{\beta 1}^{(n)} = C_\beta^{(n-1)} - (k, l)_\beta^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (l, n)^{(n)},$$

és így a (9) és (13) miatt

$$(40)\quad C_0^{(n)} \cap C_{\beta 1}^{(n)} = (k, n) + (l, n) + (i_1, j_1).$$

Beláttuk tehát, hogy a $C_{\beta 1}^{(n)}$ körnek 3 közös éle van a $C_0^{(n)}$ rögzített körrel.

Ha a (k, l) szomszédos élei elhagyására kerül sor, akkor mivel a $(k, l) \in C_\beta^{(n-1)}$ körnek következik, hogy a (k, k_+), (k, k_-), (l, l_+) és az (l, l_-) élek közül kettő megegyezik, pontosabban a $(k, k_+) = (l, l_-) = (k, l)$ és így

$$(41)\quad \begin{aligned} C_{\beta 2}^{(n)} &= C_\beta^{(n-1)} - (k, k_-)_\beta^{(n-1)} + (k, n)^{(n)} + (k_-, n)^{(n)}, \\ C_{\beta 3}^{(n)} &= C_\beta^{(n-1)} - (l, l_+)_\beta^{(n-1)} + (l, n)^{(n)} + (l_+, n)^{(n)}. \end{aligned}$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Ezt a két kört a (9) és (13) körökkel összevetve következik, hogy

$$C_0^{(n)} \cap C_{\beta_2}^{(n)} = (k, n) + (i_1, j_1),$$

(42)

$$C_0^{(n)} \cap C_{\beta_3}^{(n)} = (l, n) + (i_1, j_1),$$

azaz a $C_{\beta_2}^{(n)}$ és a $C_{\beta_3}^{(n)}$ köröknek két közös éle van a $C_\beta^{(n)}$ körrel.

Ha pedig az (i_1, j_1) él elhagyása által generáljuk az új kört, akkor

$$C_{\beta_4} = C_\beta^{(n-1)} - (i_1, j_1)_\beta^{(n-1)} + (i_1, n)^{(n)} + (j_1, n)^{(n)}. \tag{43}$$

A (9), (13) és (43) formulák szerint

$$C_0^{(n)} \cap C_{\beta_4}^{(n)} = 0. \tag{44}$$

Vagyis egy körnek a $C_{\beta_4}^{(n)}$-nek 0 közös éle van a $C_0^{(n)}$ rögzített körrel.

Az összes többi $(n-1)-1-2-1 = n-5$ esetben igaz a következő:

$$C_{\beta_p}^{(n)} = C_\beta^{(n-1)} - (i_p, j_p)_\beta^{(n-1)} + (i_p, n)^{(n)} + (j_p, n)^{(n)}, \tag{45}$$

ahonnan a (9)- és (13)-ra tekintettel

$$C_0^{(n)} \cap C_{\beta_p}^{(n)} = (i_1, j_1), \qquad (p = 5, 6, \ldots, n-1). \tag{46}$$

Tehát $n-5$ olyan kört nyertünk, amelynek 1 közös éle van a $C_0^{(n)}$ rögzített körrel. Ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk. De többet is bizonyítottunk. Megmutattuk ui., hogy a B) *osztályba tartozó körökből generálható n hosszúságú körök esetén, egy adott, rögzített körrel*

0 *közös élű körök száma:* b,
1 *közös élű körök száma:* $(n-5)b$,
2 *közös élű körök száma:* $2b$,
3 *közös élű körök száma:* b.

(A b értéke a (30)-cal van megadva.)

A 2. és a 3. lemma bizonyításához teljesen hasonlóan bizonyíthatjuk be a következőket:

A C) *osztály köreiből generálható, s egy adott körrel*
1 *közös élt tartalmazó körök száma:* $(n-3)c$,
2 *közös élt tartalmazó körök száma:* c,
3 *közös élt tartalmazó körök száma:* c,

(a c értéke a (30) által megadott érték).

A D) *osztály elemeiből képzett körök közül a rögzített* $C_0^{(n)}$ *körrel*
1 *közös élt tartalmaz* d *kör.*
2 *közös élt tartalmaz* $(n-5)d$ *kör.*
3 *közös élt tartalmaz* $3d$ *kör.*

Végezetül az E) *halmazba tartozó körökből generálható n hosszúságú körök közül egy adott* $C_o^{(n)}$ *körrel*

1 *közös éle van* 0 *körnek,*
2 *közös éle van* $(n-3)e$ *körnek,*
3 *közös éle van* $2e$ *körnek.*

Visszatérve tehát az 1 tétel harmadik tagjának igazolsára már csak összegeznünk kell az A), B), C), D) és E) osztály köreiből generált körök közül azoknak a számát, amelyek egy adott körrel pontosan egy közös élt tartalmaznak. Tehát a

$$2a+(n-5)b+(n-3)c+d \tag{47}$$

összeg megadja a (6) harmadik tagját. Az a, b, c, d értékeket behelyettesítve

$$2\frac{n-7}{n-1}H_{n-1}(2)+\frac{4}{n-2}H_{n-2}(1)+2E(n-1)+\frac{2(n-5)}{n-1}H_{n-1}(2)- \tag{48}$$

$$-\frac{2(n-5)}{n-2}H_{n-2}(1)+\frac{2(n-3)}{n-2}H_{n-2}(1)+\frac{4H_{n-1}(2)}{n-1}-\frac{2}{n-2}H_{n-2}(1)-2E(n-1)=$$

$$=4\frac{n-5}{n-1}H_{n-1}(2)+6\frac{H_{n-2}(1)}{n-2}$$

valóban a (6) harmadik tagját adja meg és ezt akartuk igazolni.

(Megjegyezzük még, hogy az 1. lemma által megadott $E(n)$ értékek meghatározására végül is nem volt szükségünk, de a lemma önmagában is érdekes.)

Vegyük észre, hogy a (6) formula harmadik tagjának helyességénél sokkal többet is bizonyítottunk. Összegezzük most az A), B), C), D), E) osztályba tartozó körökből generált olyan körök számát, amelyeknek pontosan két közös éle van egy adott rögzített körrel, azaz

$$(n-7)a+2b+c+(n-5)d+(n-3)e. \tag{49}$$

A fenti összeg megadja az (5) második tagját. A (49) összegbe az a, b, c, d, e értékeket behelyettesítve és összevonva az

$$\frac{(n-5)^2+8}{n-1}H_{n-1}(2)-6\frac{H_{n-2}(1)}{n-2} \tag{50}$$

kifejezést nyerjük, és ebből már következik, hogy *egy adott, rögzített körrel pontosan 2 közös élt tartalmazó körök számát előállító rekurziós formula első két tagja:*

$$H_n(2)=\frac{4n-9}{n-1}H_{n-1}(1)+\left[\frac{(n-5)^2+8}{n-1}H_{n-1}(2)-6\frac{H_{n-2}(1)}{n-2}\right]+\cdots. \tag{51}$$

Végezetül összegezve a 3 közös élt tartalmazó körök számát:

$$4a+b+c+3d+2e, \tag{52}$$

megkapjuk *az adott rögzített* $C_0^{(n)}$ *körrel 3 közös élt tartalmazó körök számának meghatározására szolgáló rekurziós formula első tagját*, azaz

$$H_n(3)=\left[\frac{4n-14}{n-1}H_{n-1}(2)+\frac{2}{n-2}H_{n-2}(1)\right]+\cdots \tag{53}$$

Az 1. tétel bizonyításának befejezéséhez már csak a (6) formula jobb oldalán levő negyedik tag helyességét kell igazolnunk. Ennek belátásához a $C_0^{(n-1)}$ rögzített körrel eredetileg 3 közös élt tartalmazó körök halmazából kell kiindulni, azaz a $H_{n-1}(3)$ elemszámú halmazból.

Osztályozzuk most is a gráfokat a kitüntetett, (k, l) él és a három közös él helyzete szerint:

1. Az eredetileg 3 közös él közül az egyik azonos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel, a másik kettő pontfüggetlen a (k, l) éltől.

2. Az eredetileg 3 közös él közül az egyik azonos az új rögzített kör generálásánál elhagyott (k, l) éllel, a másik közös él a (k, l) szomszédos éle, a harmadik pedig pontfüggetlen a (k, l) éltől.

3. Az eredetileg három közös él közül az egyik azonos a (k, l) éllel és a másik kettő szomszédos a (k, l) éllel.

4. A három közös él közül kettő szomszédos a (k, l) éllel, a harmadik pedig pontfüggetlen a (k, l) éltől.

5. A három közös él közül az egyik szomszédos a (k, l) éllel, a másik kettő a (k, l)-től pontfüggetlen.

6. Mind a három eredetileg közös él pontfüggetlen a (k, l) éltől.

Több eset nem lehetséges.

Könnyű belátni, hogy csak az első két osztályba tartozó körök közül generálhatunk az új rögzített $C_0^{(n)}$ körrel 1 közös élű n hosszúságú kört. Az A lemma bizonyításánál megmutattuk ui., hogy a Δ a -2 értéket csak abban az esetben veszi fel, ha az új rögzített $C_0^{(n)}$ kör generálása során elhagyott $(k, l)^{(n-1)}$ éllel is közös élű körben egy a (k, l) éltől pontfüggetlen közös él elhagyása útján jutunk az új körre.

Azt is könnyű belátni, hogy az 1. osztályba tartozó körök mindegyikéhez 2 olyan új kört generálhatunk, amelynek a $C_0^{(n)}$ körrel pontosan 1 közös éle van, a 2. osztályba tartozó körök esetén 1 ilyen kör van. Ez ui. abból a tényből következik, hogy az 1. osztályba tartozó köröknél két olyan közös él van, amely pontfüggetlen a (k, l)-től, míg a 2. osztály köreinek csak egy a (k, l) éltől pontfüggetlen közös éle van a $C_0^{(n-1)}$ rögzített körrel.

Most már csak azt kell megszámlálnunk, hogy hány kör tartozik az 1. és a 2. osztályba külön-külön. Könnyű belátni, hogy azon körök száma, amelyekben a 3 közös él közül az egyik közös él a kitüntetett (k, l) él, a teljes gráf szimmetriája és a $H_n(r)$ függvény definíciója miatt

$$\frac{3H_{n-1}(3)}{n-1}. \tag{54}$$

Az (54) azonban tartalmazza az 1., a 2. és a 3. osztályba tartozó összes köröket. Az (54)-ből tehát le kell vonni a 2. és a 3. osztályba tartozó körök számát, hogy megkapjuk az 1. osztály köreinek elemszámát.

A 2. osztályba tartozó köröket az jellemzi, hogy a kitüntetett (k, l) él és az egyik vele szomszédos él a $C_0^{(n-1)}$ kör éleivel közösek és van még egy harmadik a (k, l)-től pontfüggetlen közös élük is. Hagyjuk el most ezekből a (k, l) élt. A (k, l) él végpontjait, azaz a P_k, és a P_l csúcsokat húzzuk össze egyetlen ponttá és jelöljük ezt az új csúcsot $P_{k,l}$-lel. Ily módon eggyel rövidebb kört kaptunk, amelyeknek az eggyel rövidebb rögzített körrel most már csak két közös éle van, s ezek közül az egyik közös él a kitüntetett, azaz a $P_{k,l}$ csúcshoz illeszkedő él. Az ilyen körök száma mint láttuk

$$\frac{2H_{n-2}(2)}{n-2}. \tag{55}$$

Az (55) azonban tartalmazza a 3. osztályba tartozó köröket is. Jelölje $2H_{n-4}(0)$ a 3. osztályba tartozó körök számát. (Az eddigiekhez hasonlóan igazolható, hogy ezek száma valóban $2H_{n-4}(0)$, de mint látni fogjuk ennek bizonyítására itt most

nem lesz szükségünk.) Mivel azonban a $P_{k,l}$ csúcs egy körben levő csúcs, így a $P_{k,l}$ csúcshoz két él illeszkedik, és ezt a szerepet (ti. hogy kitüntetett közös él) a másik él is eljátssza. (Vagy más szavakkal, a nem zsugorított körben a (k, l) élnek két szomszédos éle van és egyszer az egyikkel alkot közös utat, de más körökben a másik szomszédos éllel alkot közös utat, és így az ilyen körök száma megegyezik az előző körök számával.) Tehát a 2. osztályba tartozó körök száma:

$$2\left(\frac{2H_{n-2}(2)}{n-2}-2H_{n-4}(0)\right). \tag{56}$$

Az 1. osztályba tartozó körök számát most már megkapjuk, ha az (54)-ből rendre levonjuk a 2. és a 3. osztályba tartozó körök számát, ami

$$\frac{3H_{n-1}(3)}{n-1}-\frac{4H_{n-2}(2)}{n-2}+2H_{n-4}(0). \tag{57}$$

Mint azt már beláttuk, ezek mindegyike két olyan új kört generál, amelyeknek pontosan 1 közös éle van az új rögzített $C_0^{(n)}$ körrel, ezért az (57)-et még be kell szorozni 2-vel. Az így nyert kifejezéshez adjuk hozzá a 2. osztályba tartozó körök számát, azaz az (56)-ot, és ez

$$\frac{6H_{n-1}(3)}{n-1}-\frac{4H_{n-2}(2)}{n-2}, \tag{58}$$

amely valóban a (6) formula negyedik tagját adja meg.

Ezzel az 1. tétel bizonyítása teljes.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] PALÁSTI, I.: A lineáris teljes gráf Hamilton-köreinek közös éleiről. *Matematikai Lapok* **20** (1969 71—98.

[2] PALÁSTI, I.: On the common edges of Hamilton-cycles of a complete linear graph. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 4. Combinatorial Theory and its Applications, Balatonfüred (Hungary), 1969, 829—868.

СЧЕТ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ, ИМЕЮЩИХ ПО ОДНОМУ ОБЩЕМУ РЕБРУ С ДАННОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ

И. ПАЛАШТИ

ENUMERATION OF THE NUMBER OF HAMILTON-CYCLES HAVING A COMMON EDGE WITH A GIVEN CYCLE

I. PALÁSTI

Let h be an arbitrary given Hamilton-cycle of a complete linear graph with n vertices, and let us denote by $H_n(r)$ the number of Hamilton-cycles having exactly r common edges with h (where $0 \leqq r \leqq n$).

We have shown that the number of all possible, different Hamilton-cycles having exactly 1 common edge with a fixed Hamilton-cycle can be given by the following:

$$H_n(1) = 4H_{n-1}(0)+\frac{(n-4)^2+2}{n-1}H_{n-1}(1)+2\left[\frac{2(n-5)}{n-1}H_{n-1}(2)+\frac{3}{n-2}H_{n-2}(1)\right]+$$
$$+2\left[\frac{3H_{n-1}(3)}{n-1}-\frac{2H_{n-2}(2)}{n-2}\right]; \qquad n \geqq 6.$$

ORTOGONÁLIS POLINOMOKRA VONATKOZÓ MEGJEGYZÉSEK

TURÁN PÁL

Szegő Gábornak 75. születésnapja alkalmából, 1970. jan. 20-án

1. Az ortogonális polinomok a XIX. század eleje óta nevezetes szerepet játszanak az analízisben és elméleti fizikában, de *általános* eredmények nem voltak ismertek Szegő Gábor 1920 körül írott dolgozatai előtt. Ezen dolgozatok, S. Bernstein 1930 körül írott dolgozataival együtt, lényegében elintézik azon fontos esetet, mikor a (nemnegatív és L-integrálható) $p(x)$ súlyfüggvény egy véges intervallumon kívül eltűnik (a részletekre 1. [1] alatti könyvét). Az általános esetben, mikor a súlyfüggvény tartója a $(0, \infty)$, ill. $(-\infty, \infty)$ köz, *általános* elméletnek eddig nyoma sincs, csupán a $p(x)=e^{-x}$, ill. $p(x)=e^{-x^2}$ esetek sejtetik, hogy az általános eset a végestől lényegesen különbözik (bár Erdős Pál egy sajtó alatt álló dolgozata azt mutatja, hogy ha a súlyfüggvény *nagyon erősen* tart 0-hoz $x \to \pm\infty$-re, úgy ez csak korlátozott mértékben áll fenn). A következőkben az ortogonális polinomok gyökeloszlására egy általános tételt bizonyítunk be. Legyen $p(x)$ $(-\infty, +\infty)$-ben pozitív* súlyfüggvény, melyre az összes

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)x^m\,dx, \qquad m=0, 1, 2, \ldots$$

integrálok léteznek úgy, hogy a $p(x)$ súlyfüggvényre (normált) ortogonális polinomok

$$\omega_0(x), \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$$

sorozata létezzen; az általánosság rovása nélkül legyen

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1. \tag{1.1}$$

Mint ismeretes, $\omega_n(x)$ összes gyökei valósak és egyszeresek; legyenek ezek

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n. \tag{1.2}$$

Ha $x_n \leqq \xi \leqq x_1$ és

$$\frac{2n}{\min\limits_{-1\leqq x-\xi\leqq+1} p(x)} \overset{\text{def}}{=} w(=w(\xi, p, n)) \tag{1.3}$$

úgy fennáll a következő

* E megkötés a tétel eleganciájának bizonyos feláldozása árán újabb bizonyítási gondolat nélkül enyhíthető volna.

TÉTEL. *Ha* $8 \leqq \log w \leqq n$, *úgy minden* v-re

$$|x_v - x_{v+1}| \leqq 30(x_1 - x_n)\frac{\log w(x_v)}{n}. \tag{1.4}$$

Bármely felső korlát, mely $(x_1 - x_n)$-et $p(x)$ és n-nel limitálja, a tételt teljesen explicitté teszi.

2. Ha $p(x) = e^{-x^2}$, úgy a hozzátartozó ortogonális polinomok az ún. Hermite polinomok. Ha x_v korlátos, úgy (1. 4) (vagy (1. 5)) jobb oldala $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$, ami — mint ismert — csak $\log n$ faktorban tér el a legjobbtól. De még, ha $x_v = O(\log^{\omega} n)$ (ahol ω tetszőleges nagy pozitív szám), akkor is a tétel $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\log^{2\omega} n\right)$-et ad felső korlát gyanánt, ami szintén nem nagyon rossz becslés. Tájékoztatás végett megjegyzem, hogy véges tartó esetére a tételt Erdős Pállal 1936-ban bizonyítottuk be (lásd [3]); az ott közölt bizonyítás végtelen intervallum esetére az

$$|x_v - \xi| = O(1)\frac{\log(n+1)}{n}\left(\frac{1}{\min\limits_{-1 \leqq x-\xi \leqq +1} p(x)}\right)^{\frac{1}{2\log n}}(x_1 - x_n) \tag{2.1}$$

egyenlőtlenséget adná. Ez a $p(x) = e^{-x^2}$ esetében $\xi = O(\sqrt{\log n})$-re még ugyanolyan jó, mint (1. 4), de már $\xi = \log^{1+\delta} n$ esetében semmitmondó. A tétel előnye tehát a súlyfüggvénytől lényegesen kedvezőbb függés.

3. A tétel bizonyítása, mint a [2] dolgozatban, itt is oly $\pi(x)$ polinom használatán alapszik, melyre

$$\pi(\cos\vartheta) = \frac{1}{k^m}\left\{\left(\frac{\sin k\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}}\right)^m + \left(\frac{\sin k\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\right)^m\right\} \tag{3.1}$$

ahol k és m alkalmas pozitív egészek, m páros és ϑ_0 alkalmas valós szám. Legyen

$$x_1 - x_n = 2D_n, \quad \frac{x_1 + x_n}{2} = \eta \tag{3.2}$$

k és m legyenek olyan egészek, melyekre

$$m \text{ páros}, \quad \frac{k-1}{2}m \leqq n-1 \tag{3.3}$$

és Δ legyen adott ξ mellett (ahol $x_n < \xi < x_1$)

$$\min_{v} |x_v - \xi| = \Delta D_n \tag{3.4}$$

által értelmezve. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy

$$\eta \leqq \xi \leqq x_1 (= \eta + D_n);$$

ha ϑ_0 a

$$\frac{\xi - \eta}{D_n} = \cos\vartheta_0, \quad 0 \leqq \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{2} \tag{3.5}$$

által van definiálva, úgy tekintsük a (3. 1) alatti polinomot ezen k, m és ϑ_0-val. Ekkor $\pi(x)$ foka $\leqq n-1$ és ugyanez áll a

$$q(x) = \pi\left(\frac{x-\eta}{D_n}\right) \tag{3.6}$$

polinomra. Nyilván

$$q(\xi) = \pi\left(\frac{\xi-\eta}{D_n}\right) = \pi(\cos\vartheta_0) \geqq 1. \tag{3.7}$$

Ha $|x-\xi| \geqq \Delta D_n$ és ϑ a

$$\frac{x-\eta}{D_n} = \cos\vartheta, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi$$

által van értelmezve, úgy

$$\Delta \leqq \left|\frac{x-\xi}{D_n}\right| = |\cos\vartheta - \cos\vartheta_0| \leqq |\vartheta - \vartheta_0|,$$

tehát (2. 1)-ből

$$|q(x)| \leqq 2\left(\frac{\pi}{k\Delta}\right)^m, \quad \text{hacsak} \quad |x-\xi| \geqq \Delta D_n. \tag{3.8}$$

4. Tekintsük most azon Lagrange interpoláció alapfüggvényeit, melyek alappontjai $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ha ezek $l_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, úgy nyilván

$$\sum_{\nu=1}^{n} q(x_\nu) l_\nu(x) \equiv q(x), \tag{4.1}$$

azaz (3. 7)-ből

$$1 \leqq |q(\xi)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |q(x_\nu)|\,|l_\nu(\xi)| = \sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu q(x_\nu) l_\nu(\xi) \tag{4.2}$$

alkalmas $\vartheta_\nu = \pm 1$-ekkel. Értelmezzük a c_ν állandókat

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu q(x_\nu) l_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \omega_\nu(x) \tag{4.3}$$

által. Ekkor (4. 2)—(4. 3)-al

$$1 \leqq \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \omega_\nu(\xi)\right)^2 \leqq \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_\nu(\xi)^2\right) \overset{\text{def}}{=} UV. \tag{4.4}$$

Nyilván

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu q(x_\nu) l_\nu(x)\right)^2 p(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} q(x_\nu)^2 \int_{-\infty}^{\infty} l_\nu(x)^2 p(x)\,dx$$

tekintve az $l_\nu(x)$-ek ortogonalitását a $p(x)$ súlyra. Stieltjes szép megjegyzése szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} l_\nu(x)^2 p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} l_\nu(x) p(x)\,dx,$$

azaz $\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x) \equiv 1$, (3. 8) és (1. 1) miatt

$$U \leqq 4\left(\frac{\pi}{k\Delta}\right)^{2m} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} l_\nu(x)^2 p(x)\,dx = 4\left(\frac{\pi}{k\Delta}\right)^{2m}. \tag{4.5}$$

5. Továbbá, mint jólismert,

$$\frac{1}{V} = \min \int_{-\infty}^{\infty} r_{n-1}(x)^2 p(x)\, dx, \tag{5.1}$$

ahol $r_{n-1}(x)$ befutja azon legfeljebb $(n-1)$-ad fokú polinomokat, melyekre

$$r_{n-1}(\xi) = 1.$$

Ha (5. 1)-ben az extremális $r^*_{n-1}(x)$, úgy

$$\frac{1}{V} > \int_{\xi-1}^{\xi+1} r^*_{n-1}(x)^2 p(x)\, dx \geqq \min_{-1 \leqq x-\xi \leqq +1} p(x) \int_{\xi-1}^{\xi+1} r^*_{n-1}(x)^2\, dx \geqq$$

$$\geqq \min_{-1 \leqq x-\xi \leqq +1} p(x) \min \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)^2\, dx, \tag{5.2}$$

ahol most a minimum azon legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $r_{n-1}(x)$ polinomokra vonatkozik, melyekre $r_{n-1}(0) = 1$. Ez utóbbi, mint jólismert,

$$= \frac{2}{\sum\limits_{\nu \leqq \frac{n-1}{2}} (2\nu+1) \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2} > \frac{2}{n}$$

és így (5. 2)-ből az (1. 3) jelöléssel

$$V < \frac{w}{4}. \tag{5.3}$$

(4. 4), (4. 5) és (5. 3)-ból

$$1 \leqq w \left(\frac{\pi}{k\Delta}\right)^{2m}$$

ill.

$$\Delta \leqq \frac{\pi}{k} w^{\frac{1}{2m}}. \tag{5.4}$$

Válasszuk meg m-et úgy, hogy

$$m = 2\left[\frac{1}{4} \log w\right], \tag{5.5}$$

ez páros és nyilván a tétel feltétele alapján

$$m \leqq \frac{n}{2}. \tag{5.6}$$

Legyen továbbá

$$k = \left[\frac{n}{m}\right].$$

k és m ezen választásával a (3. 3) megszorítás nyilván ki van elégítve. Mivel (5. 6) miatt

$$k \geqq \frac{n}{2m},$$

tehát (5. 4) miatt

$$\Delta < \frac{2\pi m}{n} w^{\frac{1}{4[\frac{1}{4}\log w]}} < 30 \frac{\log w}{n}$$

a $w \geqq e^8$ megkötés miatt. Q.e.d.

IRODALOM

[1] G. SZEGŐ, „Orthogonal Polynomials", Revised edition 1959. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXIII.

[2] P. ERDŐS and P. TURÁN, „On interpolation, II." Annals of Math. *39* (1938) p. 703—724.

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

П. ТУРАН

REMARKS ON ORTHOGONAL POLYNOMIALS

P. TURÁN

The following theorem is proved. Let $p(x)$ a positive weightfunction for which all integrals $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^{2\nu} dx$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ exist and $\omega_\nu(x)$ the corresponding normed orthogonal polynomials the nth of which has the zeros $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. If $w(\xi)$ is defined by

$$w(\xi) = \frac{2n}{\min\limits_{-1 \leqq x-\xi \leqq +1} p(x)}$$

then we have the inequality $x_{\nu+1} - x_\nu \leqq c(p)(x_1 - x_n) \frac{\log w(x_\nu)}{n}$

if only

$$8 \leqq \log w(\xi) \leqq n.$$

GYŰRŰK RADIKÁLJAIRÓL III.

SZÁSZ FERENC

V. A BROWN—McCOY-FÉLE RADIKÁL ÉS MÁS KONKRÉT RADIKÁLOK

24. §. *A Brown—McCoy-féle radikál definíciója*

Bár hatékonyság terén a többi konkrét radikál közt a Jacobson-féle radikálnak van a legkiemelkedőbb szerepe, van a Jacobson-féle radikálnak mégis két kisebb hátrányos tulajdonsága. Az egyik az, hogy igen sok, bizonyos értelemben nem a legjobb tulajdonságú gyűrű hozzátartozik a Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrűk osztályához, hiszen már az összes primitív gyűrű (a vektorterek lineáris transzformációinak összes sűrű részgyűrűje) sincs teljesen explicit módon meghatározva. A másik negatívum pedig az, hogy a Jacobson-féle radikálgyűrűk osztálya igen nagy, ugyanis egyszerű gyűrűk és zérus-osztómentes gyűrűk is vannak a radikálgyűrűk között. Annak a célnak az érdekében, hogy minden zérus-osztómentes gyűrű féligegyszerű legyen, Fuchs László vezetett be egy kváziradikált, az ún. zéróidradikált, de ez nem radikál Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben. Az összes zérusosztómentes gyűrű osztályával meghatározott felső radikál Amitsur-Kuros értelemben is radikál, és e radikálra nézve minden zérusosztómentes gyűrű féligegyszerű.

Annak a törekvésnek a megvalósítására, hogy a féligegyszerű gyűrűk osztálya lényegesen jobb gyűrűkből, pl. az Artin-féle féligegyszerű gyűrűkhöz (ti. ferdetestek felett vett véges sok teljes matrix gyűrű (diszkrét) direkt összegeihez) eléggé rokon gyűrűkből álljon, Brown és McCoy vezettek be olyan konkrét radikált, amely Amitsur és Kuros értelmezése szerint is radikál.

Most az alábbiakban ezt a Brown—McCoy-féle radikált tárgyaljuk, de ennek itteni definiálási módja el fog térni az eredeti Brown—McCoy-féle definíciótól, viszont rá fogunk térni a két definíció ekvivalenciájának megmutatására is.

Legyen ugyanis A tetszőleges gyűrű, Σ_A pedig mindazon M A-jobbmodulusoknak az osztálya, amelyeknek megvan az a tulajdonságuk, hogy minden olyan B ideálhoz az A gyűrűben, amelyre $B \not\subseteq (0:M)_A$ (amely tehát nincs benne az M modulus A-beli $(0:M)_A$ annihilátorában, azaz $MB \neq 0$) létezik olyan $b \in B$ elem, hogy fennáll minden $m \in M$ elemmel az $mb = m$ egyenlőség. Ha $M \in \Sigma_A$, akkor az M A-jobbmodulus Brown—McCoy-féle modulusnak nevezhető.

Igazolható az, hogy ha $M \in \Sigma_A$, akkor M szükségképpen A-prímmodulus.

Továbbá belátható az is, hogy ha $M \in \Sigma_A$, és ha B tetszőleges olyan ideál az A gyűrűben, amelyre $MB \neq 0$ teljesül, akkor fennáll $M \in \Sigma_B$ is.

Azt sem nehéz bebizonyítani, hogy ha B olyan ideál az A gyűrűben, hogy fennáll $M \in \Sigma_B$, akkor egyszersmind $MB \in \Sigma_A$. Ennek az igazolása felhasználja (hallgatólagosan) azt a tényt is, hogy M prímmodulus, ugyanis ellenkező esetben az $(mb)a = m(ba)$ előírás nem adna egyértelmű operátorszorzást, hiszen $\Sigma m_i b_i$ alakban egy és ugyanazon elem többféleképpen is előállhat. Ekkor az is adódik még, hogy $(0:MB)_A = (0:M)_B : A$.

Az pedig majdnem nyilvánvaló tény, hogy ha $\bar{A} = A/B$ és $M \in \Sigma_{\bar{A}}$, akkor tekinthető olyan A-operáció az M moduluson, hogy $M \in \Sigma_A$, és $B \subseteq (0:M)_A$ és hogy megfordítva, ha $M \in \Sigma_A$ és ha B olyan ideál az A gyűrűben, melyre $B \subseteq (0:M)_A$ teljesül, akkor $M \in \Sigma_{\bar{A}}$ ahol $\bar{A} = A/B$.

Mindezekből következik az a fontos tény, hogy Σ_A bizonyos prímmodulusoknak ún. speciális osztálya a II. fejezetben megadott definíció szerint, ugyanis az előbbi tények Σ_A-ról éppen a speciális osztályt definiáló axiómáknak a teljesülését jelentik.

Ha Σ_A az előbbi modulusosztály, akkor a

$$G(A) = \bigcap_{M \in \Sigma_A} (0:M)_A$$

ideálmetszetet az A gyűrű Brown—McCoy-féle radikáljának fogjuk nevezni. Tehát $G(A) = R(\Sigma, A)$ egy Σ-radikál Andrunakievics-féle értelemben, ezért speciális radikál (és még inkább szupernilpotens radikál, és természetesen Amitsur—Kuros értelmezése szerint is radikál).

Ha Σ_A üres, akkor A radikálgyűrű Brown—McCoy-féle értelemben. Egy ideál radikálideál, ha az ideál radikálgyűrű. Az előzőkből folyik nyilvánvalóan az is, hogy $G(A) = R(\Sigma, A)$ olyan Σ-radikálideál, amely minden más Σ-radikálideált tartalmaz, továbbá hogy $A/G(A)$ mindig G-féligegyszerű. Egy A gyűrű akkor lesz G-féligegyszerű, ha $\bigcap_{M \in \Sigma_A} (0:M)_A = 0$, tehát akkor és csak akkor, ha létezik minden $a \in A$ nemzérus elemhez olyan $M_a \in \Sigma_A$ modulus, amelyben a $\varphi_a : m \to ma$ jobb szorzás ($m \in M_a$) nemzérus endomorfizmust indukál. Ha I tetszőleges ideál az A gyűrűben, akkor

$$G(I) = G(A) \cap I,$$

mert $G(A)$ szupernilpotens az előzők szerint, tehát öröklődő radikál is.

Megjegyezzük, hogy a $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikálnak az előbbi, modulus-elméleti definíciója ún. külső definíció, mert nem a gyűrű belső szerkezetét, pl. a jobbideálok, ideálok egymáshoz való viszonyát vagy speciális tulajdonságú elemek létezését veszi alapul.

Viszont belső definícióként is felfogható a következő eredmény:

$G(A)$, a Brown—McCoy-féle radikál, minden A gyűrűben mindazon T_α ideálok metszetével esik egybe, amelyekre az A/T_α faktorgyűrű egyszerű és egységelemes.

Ez a tény azzal van összefüggésben, hogy a modulusok előbb tárgyalt Σ_A speciális osztálya szükségképpen olyan, hogy az $A/(0:M)_A$ faktorgyűrű egységelemes egyszerű gyűrű minden $M \in \Sigma_A$ modulussal.

Ezek a megállapítások Σ_A definíciójából eléggé könnyen levezethetők.

A $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikálra minden A gyűrűben az is teljesül, hogy a féligegyszerű $A/G(A)$ faktorgyűrű bizonyos egységelemes, egyszerű gyűrűknek lesz egy szubdirekt összege. Éppen ez a tény húzza alá a Brown—McCoy-féle radikál fontosságát.

Megjegyezzük, hogy Suliński [303] absztrakt kategóriában definiálta és vizsgálta egy objektum Brown—McCoy-féle radikálját, amely az objektumnak egy normális részobjektuma lesz, és Suliński ügyesen tudta definiálni az egységelemes gyűrűknek megfelelő speciális képobjektumokat és a szubdirekt beágyazásokat is kategóriákban. Szerző és Wiegandt Richard [330] közösen írt cikke a szubdirekt összeg dualizálásról messzemenően figyelembe vette Sulińskinek ezt a cikkét.

Továbbá Wiegandt Richard [360] cikke kategóriákban általánosítja Suliński [303] kategória elméleti Brown—McCoy-féle radikálját, de ez általában csak Maranda-féle kváziradikál.

A továbbiakban kissé részletesebben foglalkozunk a Brown—McCoy-féle radikál belső jellemzéseivel, mégpedig általánosabban úgy, hogy Brown és McCoy [73] közös dolgozata alapján belsőleg definiáljuk konkrét radikáloknak olyan bőséges seregét, amelybe $G(A)$ és a Jacobson-féle $J(A)$ radikál is belefér.

Legyen $\mathcal{G}$ tetszőleges, nem feltétlenül kommutatív csoport, amelyet azonban bizonyos formai előnyök alapján nem multiplikatív, hanem additív csoportművelettel tekintünk (tehát ez az összeadás nem szükségképpen lesz kommutatív). Legyen továbbá Ω bizonyos olyan endomorfizmusok halmaza, amelyek a $\mathcal{G}$ csoporton operálnak, és ezenkívül még Ω tartalmazza a $\mathcal{G}$ csoport összes belső automorfizmusát. A tetszőleges $g \in \mathcal{G}$ elemmel $\mathcal{G}$-ben generált Ω-részcsoportot (g) szimbólummal fogjuk jelölni. Tegyük fel továbbá azt, hogy az összes $\mathcal{G}$ Ω-csoport osztályán értelmezve van egy olyan konkrét $g \to F(g)$ hozzárendelés, ahol $g \in \mathcal{G}$ tetszőleges elem, továbbá $F(g)$ olyan részcsoportja a $\mathcal{G}$ csoportnak, amelyre az alábbi két feltétel teljesül:

P_1: $F(g+h) \subseteq F(g) + F(h)$,

P_2: ha $h \in F(g)$, akkor $F(g+h) \subseteq F(g)$.

Azt fogjuk mondani, hogy a $\mathcal{G}$ csoport egy (F, Ω)-csoport, ha az előbbi $g \to F(g)$ hozzárendelésére a P_1 és P_2 axiómák teljesülnek.

Nyomatékosan felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy ebben a definícióban az $F(g)$ alcsoport nem szükségképpen lesz Ω-csoport, tehát lehetséges az, hogy $h \in F(g)$ esetén pl. fennáll $h\Omega \not\subseteq F(g)$, ahol $h\Omega$ jelöli természetesen mindazon $h\omega$ elem halmazát, amelyekre $\omega \in \Omega$.

Ha viszont speciálisan mégis az az eset áll fenn, hogy $F(g)$ minden $g \in \mathcal{G}$ elemmel Ω-részcsoport, akkor a P_2 axióma nyilván következik a P_1 axiómából.

Most további definíciókra van szükségünk az (F, Ω)-csoportokkal kapcsolatban.

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ (F, Ω)-csoportnak egy $g \in \mathcal{G}$ eleme F-reguláris, ha fennáll $g \in F(g)$. Továbbá a $\mathcal{G}$ csoport egy H részhalmazát F-regulárisnak akkor nevezzük, ha H minden eleme F-reguláris. Minthogy Ω tartalmazza a $\mathcal{G}$ csoportnak az összes belső automorfizmusát, ezért a (g) Ω-részcsoport szükségképpen normálosztója $\mathcal{G}$-nek. Ezért $(g)+(h)$ is normálosztója a $\mathcal{G}$ csoportnak, amelyre fennáll a $(g+h) \subseteq (g)+(h)$ tartalmazás.

Az alábbi, könnyen bebizonyítható megállapítás igen fontos lesz a továbbiakban:

Ha $\mathcal{G}$ tetszőleges (F, Ω)-csoport, akkor mindazon $g \in \mathcal{G}$ elemeknek az N halmaza, amelyekre a (g) Ω-részcsoport F-reguláris, a $\mathcal{G}$ csoportnak egy részcsoportja lesz és e mellett még N F-reguláris olyan Ω-részcsoport is, amely tartalmazza a $\mathcal{G}$ csoport minden más F-reguláris Ω-részcsoportját.

Ennek a bizonyítása a P_1 és P_2 axiómák ismételt felhasználásával történik.

Az a tény sem nehezen látható be a P_1 és P_2 axiómák segítségével, hogy ha $a \to a^*$ olyan Ω-homomorfizmusa a $\mathcal{G}$ (F, Ω)-csoportnak egy tetszőleges $\mathcal{G}^*$ Ω-csoportra, amelyre teljesül $(F(g))^* = F(g^*)$, akkor ez az $F(g^*)$ egyértelműen meghatározott és ezzel a G^* Ω-csoport is (F, Ω)-csoporttá tehető.

Továbbá, megfordítva az is igazolható, hogy ha $g \to F(g), g \in \mathcal{G}$, olyan egyértelmű leképezés, amelyre $F(g)$ egy Ω-részcsoport $\mathcal{G}$-ben, és amelyre $g^* = h^*$ esetén, ahol $g \to g^*$ egy tetszőleges Ω-homomorfizmus, mindig következik $(F(g))^* = (F(h))^*$ is, akkor $\mathcal{G}$ szükségképpen (F, Ω) csoport.

Láttuk az előzőkben azt, hogy $N = N(\mathcal{G})$ minden $\mathcal{G}$ (F, Ω)-csoportban az egyetlen maximális F-reguláris Ω-részcsoport. Ezt az $N(\mathcal{G})$ részcsoportot a $\mathcal{G}$ csoport (F, Ω)-radikáljának fogjuk nevezni.

Bármely $\mathcal{G}$ (F, Ω)-csoport $N = N(\mathcal{G})$ (F, Ω) radikáljára teljesül $N(\mathcal{G}/N(\mathcal{G})) = 0$.

Ha féligegyszerűnek az olyan (F, Ω)-csoportot nevezzük, amelyben nincs nemzérus F-reguláris Ω-részcsoport, akkor tehát $\mathcal{G}/N(\mathcal{G})$ mindig (F, Ω)-féligegyszerű csoport lesz.

Most további szükséges definíciókat ismertetünk. Ha Ω_1 a tetszőleges $\mathcal{G}$ (F, Ω)-csoport endomorfizmusainak olyan további halmaza, amely szintén tartalmazza $\mathcal{G}$ összes belső automorfizmusát és amelyre $\Omega_1 \subseteq \Omega$ teljesül, akkor a tetszőleges $g \in \mathcal{G}$ elemmel $\mathcal{G}$-ben generált Ω_1-részcsoportot, amely szintén normálosztója a $\mathcal{G}$ csoportnak, $(g)_1$ szimbólummal jelöljük. Triviálisan fennáll $(g)_1 \subseteq (g)$, ahol (g) jelenti a g elemmel generált Ω-részcsoportot.

Tegyük fel azt, hogy létezik olyan $g \to F(g)$ hozzárendelés, amely minden $g \in G$ elemnek megfeleltteti az $F(g)$ alcsoportot, ahol $F(g)$ legyen Ω_1-részcsoport és amelyre teljesül az alábbi feltétel:

$$P : F(g+h) \subseteq F(g) + (h)_1 .$$

Ha teljesül ez a P axióma, akkor a $\mathcal{G}$ csoportot (F, Ω_1, Ω)-csoportnak nevezzük.

Minthogy ebben a definícióban $F(g)$ mindig Ω_1-részcsoport, ezért $h \in F(g)$ esetén mindig fennáll $(h)_1 \subseteq F(a)$. Ennélfogva a korábbi P_1 és P_2 axiómák mindketten folynak P-ből, és abból, hogy $F(g)$ Ω_1-részcsoport. Tehát bármely (F, Ω_1, Ω)-csoport még inkább (F, Ω)-csoport, és így az (F, Ω_1, Ω)-csoportokra alkalmazható az $N = N(\mathcal{G})$-radikálnak, az (F, Ω)-radikálnak a létezését kimondó tétel és más efféle eredmények is.

Most megadjuk a gyűrű moduláris jobb ideáljának (lásd IV. fejezet) egyik általánosítási lehetőségét (F, Ω_1, Ω)-csoportokban. Ha $\mathcal{G}$ egy (F, Ω_1, Ω)-csoport, akkor abban az esetben mondjuk $\mathcal{G}$-nek egy I Ω_1-részcsoportjáról azt, hogy moduláris $\mathcal{G}$-ben, hogyha létezik olyan $e \in \mathcal{G}$ elem, amelyre fennállanak $F(e) \subseteq I$ és $e \nsubseteq I$. Ha I olyan moduláris Ω_1-részcsoport a $G(F, \Omega_1, \Omega)$-csoportban, hogy minden K olyan moduláris Ω_1-részcsoportban, amely valódi módon bővebb I-nél, fennáll $e \in K$, akkor az I moduláris Ω_1-részcsoportot *nagy*nak fogjuk nevezni Brown—McCoy [73] alapján. (Megjegyzendő, hogy a nagyságnak ez a definíciója általában eltér a szokásostól, ugyanis egy V teljes hálónak a O-tól különböző v elemét, ahol O a háló legkisebb eleme, akkor szokták nagynak nevezni, ha $v \cap \hat{w} \neq 0$ teljesül az összes olyan $w \in V$ elemre, amelyekre $w \neq 0$). Mármost a Zorn-féle lemma segítségével nem nehéz belátni azt, hogy minden moduláris Ω_1-részcsoportot be lehet ágyazni az (F, Ω_1, Ω)-csoportnak egy nagy, moduláris, Ω_1-részcsoportjába.

Továbbá, ha I tetszőleges Ω_1-részcsoport az (F, Ω_1, Ω)-csoportban, akkor jelölje I' a csoport mindazon Ω-részcsoportjának az összegét, amelyek I-ben fekszenek. Ekkor I' nyilván Ω-részcsoport, $I' \subseteq I$, és I' maximális erre a két tulajdonságra nézve.

Azt a tényt, hogy a $J(A)$ Jacobson-féle radikál a tetszőleges A gyűrű összes moduláris jobb ideáljának a metszetével esik egybe, általánosítja ez az alábbi tétel:

Ha $\mathcal{G}$ tetszőleges (F, Ω_1, Ω)-csoport, akkor $\mathcal{G}$-nek az $N(G)$ radikálja, tehát az (F, Ω)-radikálja egybeesik mindazon M' Ω-részcsoportnak a metszetével, amelyekre M nagy, moduláris Ω_1-részcsoport, és az $M \to M'$ hozzárendelés az előbb definiált megfeleltetés tetszőleges Ω_1-részcsoportok és bizonyos Ω-részcsoportok között.

A primitív gyűrű definíciójának analógiájára értelmezhető a primitív (F, Ω_1, Ω)-csoport fogalma. Azt mondjuk ugyanis, hogy a $\mathcal{G}$ tetszőleges (F, Ω_1, Ω)-csoport primitív, ha létezik $\mathcal{G}$-ben olyan nagy, moduláris M Ω_1-részcsoport, amelyre teljesül $M' = 0$. Továbbá $\mathcal{G}$-ben az N Ω-normálosztó primitív, ha a $\mathcal{G}/N$-faktorcsoport primitív.

Bebizonyíthatók az alábbi tételek:

Ha M tetszőleges nagy, moduláris Ω_1-részcsoport a $\mathcal{G}$ tetszőleges (F, Ω_1, Ω)-csoportban, akkor $\mathcal{G}/M'$, primitív faktorcsoport és így az M' Ω-normálosztó primitív normálosztó.

Továbbá bármely $\mathcal{G}$ (F, Ω_1, Ω)-csoportban az $N(\mathcal{G})$-radikál egybeesik az összes primitív Ω-normálosztónak a metszetével.

Ezért bármely (F, Ω)-féligegyszerű (F, Ω_1, Ω)-csoport bizonyos primitív (F, Ω_1, Ω)-csoportoknak egy szubdirekt összegével izomorf.

Már eddig is említést tettünk arról, hogy létezik bizonyos analógia a gyűrűk Jacobson-féle radikálja és az (F, Ω_1, Ω)-csoportok Brown—McCoy-féle (F, Ω)-radikálja közt és hogy az utóbbi az előbbi általánosítását jelenti. Most ezekről részletesebben szólunk, megmutatjuk továbbá azt, hogy a gyűrűk konkrét $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikálja, amelyet a 25. § elején definiáltunk, szintén egy (F, Ω_1, Ω)-radikál, és tárgyalunk még gyűrűkben további (F, Ω_1, Ω)-radikálokat és (F, Ω)-radikálokat is.

Legyen ugyanis A tetszőleges gyűrű, $\mathcal{G}$ pedig az A gyűrű additív csoportja. Ekkor $\mathcal{G}$ kommutatív csoport. Legyen továbbá Ω az $A^+ = \mathcal{G}$ csoport mindazon endomorfizmusának a részhalmaza, amely az identikus automorfizmusból, aztán az összes balszorzásból és az összes jobbszorzásból áll, és legyen előbb $\Omega_1 = \Omega$, majd legyen később Ω_1 az összes jobb szorzás és az identikus automorfizmus egyesítési halmaza. Legyen továbbá $F(a)$ minden $a \in A$ elemre A^+-nak egy Ω_1-alcsoportja, amelyre $F(a^*) = (F(a))^*$ teljesüljön minden $a \to a^*$ gyűrűhomomorfizmusra, és teljesüljön még a P axióma és erre az $a \to F(a)$ hozzárendelésre.

Ekkor az A gyűrű egy (F, Ω_1, Ω)-csoport, amelyben az előzőek alapján létezik az $N = N(A)$ (F, Ω)-radikál.

Ha előbb $\Omega_1 = \Omega$, akkor $F(a)$ ideál az A gyűrűben, és ekkor teljesül az is, hogy minden Ω_1-részcsoport Ω-csoport, és ideál az A gyűrűben, továbbá egy nagy, moduláris Ω-csoport olyan $M' = M$ ideál lesz az A gyűrűben, amelyre létezik olyan $e \in A$ elem, hogy fennáll $e \not\equiv M$ és $F(e) \leqq M$, és M maximális erre a két tulajdonságra nézve. Ezért az (F, Ω_1, Ω)-primitív A/M faktorgyűrű szubdirekt irreducibilis és persze (F, Ω)-radikálmentes lesz. Maga az $N(A)$ (F, Ω)-radikál pedig egybeesik mindazon M ideálok metszetével, amelyekre az A/M faktorgyűrű radikálmentes és szubdirekt irreducibilis.

Az is jól látható, hogy egy tetszőleges A gyűrű akkor és csak akkor lesz szubdirekt irreducibilis, és mint (F, Ω_1, Ω)-csoport $\Omega_1 = \Omega$ esetén az (F, Ω)-radikállal féligegyszerű, ha az A szubdirekt irreducibilis gyűrű szíve tartalmaz olyan e nemzérus elemet, amelyre fennáll $F(e) = 0$.

Az így kapott radikálokat az irodalomban F-radikáloknak is szokták rövidebben nevezni.

Ha pedig $\Omega_1 = \Omega$, éspedig Ω_1 jelenti az A gyűrű A^+ additív csoportjának mindazon endomorfizmusát, amely az identikus automorfizmusból és az összes jobb szorzásból áll, akkor az Ω_1-részcsoportok éppen az A jobbideáljai lesznek. Legyen továbbá speciálisan $F(a) = (1-a)A$. Ekkor $F(a)$ moduláris jobbideál, és egy elem akkor és csak akkor lesz F-reguláris, ha $a \in (1-a)A$, vagyis ha van olyan $b \in A$ elem, hogy $a + b - ab = 0$, és ez a legutóbbi feltétel éppen azt jelenti, hogy a jobbkvázireguláris Perlis—Baer—Jacobson-féle értelembem. Igazolható, hogy erre az $a \to (1-a)A$ hozzárendelésre teljesül a P axióma, tehát a P_1 és P_2 axióma is, ezért A egy (F, Ω_1, Ω)-csoporttá tehető. A megfelelő $N(A)$ radikál ekkor éppen a $J(A)$ Jacobson-féle radikált eredményezi. Továbbá, ha M moduláris maximális jobbideál, akkor M nagy moduláris Ω_1-részcsoport is, és megfordítva. Ekkor az

M-ben levő M' maximális Ω-részcsoport a gyűrűnek primitív ideálja és $J(A)$ egybeesik az összes M' primitív ideál metszetével. Egy tetszőleges Jacobson-féle féligegyszerű primitív gyűrűk egy szubdirekt összegével izomorf, és van olyan szubdirekt felbontás, amelyben minden primitív gyűrű, mint homomorf kép, szubdirekt irreducibilis is. Egyébként pedig nem kell az, hogy féligegyszerű gyűrűnek bármely szubdirekt irreducibilis homomorf képe ugyancsak féligegyszerű legyen.

Jelölje most pedig $F(a)$ az A gyűrű $(1-a)A$ moduláris jobb ideálja által A-ban generált kétoldali ideált, azaz legyen $F(a) = (1-a)A + A(1-a)A$.

Nem nehéz belátni azt, hogy erre az $a \to F(a)$ hozzárendelésre is teljesülnek az előbbi P_1, P_2, P axiómák, tehát A most is (F, Ω_1, Ω)-csoport, és legyen újra $\Omega_1 = \Omega$. Ekkor az Ω-részcsoportok éppen az ideálok lesznek. Fontos tény az, hogy ekkor az $N(A)$ (F, Ω)-radikál éppen a $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikált adja, ugyanis $N(A)$ mindazon M ideálok metszetével esik egybe, amelyekre A/M egyszerű és egységelemes faktorgyűrű.

Ugyanis, ha $F(a) = (1-a)A + A(1-a)A$, akkor az előző általánosabb elmélet szerint egy A gyűrű akkor és csak akkor lesz (F, Ω_1, Ω)-primitív, ha A szubdirekt irreducibilis, és ha létezik A szívében olyan e elem, amelyre $F(e) = 0$. Viszont az

$$(1-e)A + A(1-e)A = 0$$

feltételből folyik az, hogy e balegységelem az A gyűrűben, és ha A egyszerű is, akkor e tényleg egységelem.

Megjegyezzük, hogy Brown és McCoy eredetileg éppen az $a \in (1-a)A + A(1-a)A$ regularitással, mint a jobb kváziregularitás egyik általánosításával definiálták a $G(A)$ radikált, de ekkor elég sok előkészítő számolás szükséges már ahhoz is, hogy $G(A)$-ról megmutassuk, hogy ideál az A gyűrűben. Ugyancsak sok számolás kell annak közvetlen bebizonyításához is, hogy az úgy definiált radikálra $A/G(A)$ féligegyszerű és az öröklődőség stb. fennállnak. Ezért van előnye annak, ha a Σ_A speciális modulusosztályból indulunk ki a $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikál definiálásához.

Megjegyezzük végül azt, hogy az (F, Ω_1, Ω)-radikálok elméletének is megvannak az előnyei. Ugyanis vele bizonyítható be pl. az a fontos tény, hogy bármely A gyűrűben létezik maximális Neumann-reguláris ideál, és hogy ez az ideál radikáljellegű Amitsur és Kuros értelmezése szerint is.

25. §. *A Browm—McCoy-féle radikál, mint* (k, l, m, n)*-radikál*

Ebben a §-ban szintén fel fogjuk használni az előzőkben tárgyalt (F, Ω_1, Ω)-radikálok elméletét. Ugyanis szerző [314] bevezetett minden k, l, m, n számnégyeshez minden A gyűrűben egy (k, l, m, n)-radikált, ahol k, l, m és n nemnegatív racionális egész számok. Szerző megmutatta azt, hogy a $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikál egybeesik egy (k, l, m, n)-radikállal bizonyos számnégyesekre, tehát nem az összes k, l, m, n értékre. Ez a Brown—McCoy-féle radikál bizonyos újabb jellemzéseit szolgáltatja. Ezenkívül a (k, l, m, n)-radikálnak megvan pl. az alábbi három tulajdonsága is:

1. A $J(A)$ Jacobson-féle radikál benne fekszik a $(k, 0, 1, 1)$-radikálban és a $(0, l, 1, 1)$-radikálban minden A gyűrűben, minden k és l nemnegatív racionális egész számmal.

2. Ha az A gyűrű elemei az $x \circ y = x + y - xy$ körműveletre nézve Neumann-reguláris félcsoportot alkotnak, akkor A egyidejűleg $(k, 0, 1, 1)$-radikálgyűrű és

$(0, l, 1, 1)$-radikálgyűrű is lesz minden k, l egész számmal. Megjegyezzük egyébként, hogy az 1. tulajdonság levezethető ebből a 2. tulajdonságból, mert $J(A)$ elemei a körműveletre csoportot alkotnak és minden csoport nyilván még inkább Neumann-reguláris félcsoport.

3. Ha A olyan (k, l, m, n)-féligegyszerű gyűrű, amelyben teljesül a (kétoldali) főideálok minimum-feltétele, akkor A, mint (A, A)-duplamodulus teljesen reducibilis.

A (k, l, m, n)-radikál pontos definíciója a következő. Legyen A tetszőleges gyűrű k, l, m, n nemnegatív racionális egész számok, $a \circ b = a + b - ab$, $a^{(0)} = 0$, $a^{(1)} = a$, továbbá $a^{(k+1)} = a^{(k)} \circ a$. Rögzített $a \in A$ elem mellett jelöljük $(k, l, m, n)(a)$ s zimbólummal az összes olyan főideál összegét, amelyet az

$$a^{(m)} \circ x \circ a^{(n)} - k \cdot a^{(l)}$$

alakú elemek generálnak, ahol x végigfutja A összes elemét. Most egy F-regularitást definiálunk, amit (k, l, m, n)-regularitásnak nevezünk, ezt az

$$a \in (k, l, m, n)(a)$$

feltétel fejezi ki. Ha az Ω-részcsoportok éppen az ideálok, akkor az $F(a) = (k, l, m, n)(a)$ ideálokra teljesül a P_1 és P_2 axióma, tehát az A gyűrű (F, Ω)-csoport. A (k, l, m, n)-regularitással definiált (F, Ω)-radikál létezik minden A gyűrűben, és ezt $(k, l, m, n)A$ szimbólum fogja jelölni.

A megfelelő (k, l, m, n) primitív gyűrűk azok a szubdirekt irreducibilis gyűrűk lesznek, amelyeknek a szívében létezik olyan d elem, amelyre minden gyűrűelemmel fennáll

$$d^{(m)} \circ x \circ d^{(n)} = k \cdot d^{(l)}$$

Ezért a (k, l, m, n)-primitív gyűrűkben csak 0 és maga a gyűrű lehet kétoldali ideál, tehát más ideál nincs ezeken kívül, továbbá a fenti d elem a kétoldali egységelem általánosításaként is felfogható.

Még nyitott kérdés az, hogy az általános esetben milyen közelebbi jellemzés mondható ezekről a d elemekről. Azt a szerző [314] megmutatta, hogy van négy olyan fontos eset, amelyekben d éppen egységelem lesz az egyszerű gyűrűben és ekkor az egyszerű gyűrűkre nincsen más korlátozás. Olyan további esetek is fellépnek, amelyekben d speciálisan egységelem ugyan, de az A egyszerű gyűrű vagy olyan, hogy $2A = A$, vagy pedig olyan, hogy $2A = 0$, amelyek bizonyos megszorítások a karakterisztikára nézve.

Minthogy az (F, Ω)-radikál az A gyűrűben mindazon M ideálok metszete, amelyekre A/M egy (F, Ω)-primitív gyűrű, ezért a (k, l, m, n)-radikál a gyűrű mindazon M ideáljának a metszete, amelyekre A/M egy (k, l, m, n)-primitív gyűrű.

E legutóbbi megállapítás alapján bebizonyítható, hogy a G(A) Brown—McCoy-féle radikál minden A gyűrűben egybeesik az

$$(1, 1, 1, 1)A$$

$$(1, 1, 0, 1)A$$

$$(1, 1, 1, 0)A$$

és

$$(1, 2, 1, 1)A$$

radikálokkal.

Megemlítjük továbbá szerzőnek azt az észrevételét, hogy minden gyűrű radikálgyűrű lesz a $(0, 0, 0, 0)$, $(k, 0, 0, 1)$, $(0, l, 0, 1)$, $(k, 0, 1, 0)$, $(0, l, 1, 0)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 0, 0)$ és $(2, 1, 1, 1)$ radikálokra nézve. Azt is megjegyezzük, hogy például a $(3, 1, 1, 0)$-primitív P gyűrűkre $2P = 0$ teljesül, továbbá például minden $(k, 0, 1, 1)$: primitív P gyűrűre pedig fennáll $2P = P$.

26. §. *Egységelemes egyszerű gyűrűk osztályaival meghatározott felső radikálok*

Az (F, Ω_1, Ω)-csoportradikálok tárgyalásánál láttuk, hogy az (F, Ω_1, Ω)-primitív gyűrűk alkalmas Ω és Ω_1 mellett éppen a közönséges értelemben primitív gyűrűk lesznek. Továbbá a IV. fejezetben megjegyeztük azt is, hogy amíg az összes primitív gyűrű osztálya speciális és a vele meghatározott felső radikál egybeesik a Jacobson-féle radikállal, addig az összes egyszerű és primitív gyűrű osztályával meghatározott felső radikál valódi módon nagyobb, mint a Jacobson-féle radikál.

Hasonlóan, alkalmas F, Ω és Ω_1 mellett az (F, Ω_1, Ω)-csoportradikálok elméletében tárgyalt (F, Ω_1, Ω)-primitív gyűrűk éppen az egységelemes egyszerű gyűrűk lesznek és ekkor az (F, Ω_1, Ω)-radikál éppen a $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikált szolgáltatja.

Fontos tény, hogy az összes egységelemes egyszerű gyűrűnek az osztálya szintén speciális gyűrűosztály, és az a felső radikál, amelyet ez a speciális gyűrűosztály határoz meg, egybeesik a Brown—McCoy-féle radikállal.

A továbbiakban bizonyos egységelemes egyszerű gyűrűk osztályait fogjuk vizsgálni és Suliński eredményeit ismertetjük.

Az majdnem triviális, hogy egy ilyen osztállyal meghatározott felső radikál vagy nagyobb a Brown—McCoy-féle radikálnál, vagy pedig azzal a felső radikál egybeesik.

Tehát a Brown—McCoy-féle radikál minimális az olyan felső radikálok osztályában, amelyek bizonyos egységelemes egyszerű gyűrűk osztályaival vannak meghatározva.

Az ilyen felső radikálokat tárgyalva célszerű lesz az R absztrakt radikálok két speciális tulajdonságát elemezni:

1. ha R egy tetszőleges K osztállyal meghatározott felső radikál, akkor minden R-féligegyszerű gyűrű előáll a K osztályból vett bizonyos gyűrűknek egy szubdirekt összegeként.

2. Az R radikál öröklődő, vagyis R-radikál gyűrűnek bármely ideálja is R-radikálgyűrű.

A fenti 1. feltétellel kapcsolatban megemlítjük, hogy fordítva, K osztálybeli gyűrűknek bármely szubdirekt összege majdnem triviálisan mindig R-féligegyszerű. Továbbá pl. a szupernilpotens radikálokra a 2. feltétel, tehát az öröklődőség, mindig teljesül.

Mármost Suliński [302] egyik tétele kimondja azt, hogy ha U jelöli bizonyos egyszerű gyűrűk osztályával meghatározott felső radikált, akkor az 1. és 2. feltétel egyidejű teljesülése az U radikálra szükséges és elégséges ahhoz, hogy a K osztályban minden egyszerű gyűrű egységelemes legyen.

Megjegyezzük, hogy Suliński e tételének a bizonyítása egyáltalán nem triviális, mind az 1. és 2. feltételek szükségességének, mind pedig az elegendőségének a bizonyításához finomabb meggondolásokra van szükségünk.

Örvendetes tény, hogy a Brown—McCoy-féle értelemben féligegyszerű gyűrűkről majdnem annyi ismeretünk van, mint az Artin-féle féligegyszerű gyűrűkről.

E § további részében szintén Suliński [304], [305] eredményeit ismertetjük a Brown—McCoy-féle féligegyszerű gyűrűkről, tehát egységelemes egyszerű gyűrűk szubdirekt összegeiről.

Ennek során bizonyos topologikus algebrai előkészületet teszünk, majd definiáljuk és vizsgáljuk az ún. speciális féligegyszerű gyűrűket és a teljesen nem speciális féligegyszerű gyűrűket, továbbá definiáljuk a „felbontható" féligegyszerű gyűrűket és egy tetszőleges (Brown—McCoy-féle értelemben) féligegyszerű gyűrűnek az ún. típusát, amely egy transzfinit rendszám lesz. Be fogunk mutatni a τ típusú, erősen féligegyszerű gyűrűkről egy Suliński-féle struktúra tételt is, amelyet transzfinit számokkal és transzfinit kompozíciósorozatokkal lehet megfogalmazni.

Radikálon és féligegyszerűségen ebben a §-ban végig a Brown—McCoy-féle fogalmak értendők. Az A gyűrű M_α kétoldali ideálját modulárisnak nevezzük, ha az A/M_α faktorgyűrű egységelemes. Ha tehát M_α moduláris maximális ideál az A gyűrűben, akkor az A/M_α faktorgyűrű egyszerű és féligegyszerű és megfordítva.

Legyen $\mathfrak{M}$ az A féligegyszerű gyűrű összes moduláris maximális ideáljának a halmaza. Miként szokásos, az $\mathfrak{M}$ halmazon bevezetünk egy topológiát, amely alapján $\mathfrak{M}$ topologikus tér lesz. Ez a Jacobson-féle struktúra-térnek lesz egy topologikus résztere. Megjegyzendő, hogy korábban M. H. Stone [297] definiált és vizsgált ilyen típusú topologikus tereket, ehhez lásd még Gelfand és Silov [114] közös dolgozatát is.

Ha $\mathfrak{N}$ tetszőleges részhalmaz az $\mathfrak{M}$ halmazban, tehát $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{N}$ moduláris maximális ideálok halmazai, akkor legyen

$$I(\mathfrak{N}) = \bigcap_{M_\alpha \in \mathfrak{N}} M_\alpha \quad \text{és} \quad \overline{\mathfrak{N}} = \{M_\alpha ; M_\alpha \in \mathfrak{M}, M_\alpha \supseteq I(\mathfrak{N})\}$$

Triviálisan belátható, hogy $\mathfrak{N} \subseteq \overline{\mathfrak{N}}$, és $I(\mathfrak{N}) = I(\overline{\mathfrak{N}})$ teljesülnek. Azt is lehet pontosabban igazolni, hogy az $\mathfrak{N} \to \overline{\mathfrak{N}}$ hozzárendelés egy topologikus tér lezárási operációja lesz, ahol a pontok zártak lesznek tehát, hogy teljesül az alábbi négy feltétel:

I) $\overline{\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2} = \overline{\mathfrak{N}_1} \cup \overline{\mathfrak{N}_2}$ áll fenn minden $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{M}$ halmazra;

II) $\overline{\{M_\alpha\}} = \{M_\alpha\}$ minden M_α moduláris ideálra, más szavakkal a topologikus tér pontjai (egyelemű részhalmazai) zártak;

III) $\overline{\Phi} = \Phi$, ahol Φ jelöli $\mathfrak{M}$ üres részhalmazát;

IV) $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} = \overline{\mathfrak{N}}$ teljesül $\mathfrak{M}$ minden $\mathfrak{N}$ részhalmazára, vagyis a lezárási operáció idempotens művelet.

Megjegyezzük a II) axiómával kapcsolatban azt az érdekességet, hogy a Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrű összes primitív ideáljának a halmaza a struktúratér lezárási operációval megadott topológiával nem lesz általában Hausdorff-féle tér, azaz nem minden pont (azaz primitív ideál) lesz ebben a bővebb struktúratérben zárt. De e tér azon részterében, amely az összes moduláris maximális ideálból, mint speciális primitív ideálokból áll, teljesül a Hausdorff-féle elválasztási axióma, amely erősebb tulajdonságú teret ad, mint az ún. T_0-tér. Tehát T_0-tér valódi résztere lehet Hausdorff-tér.

Legyen $A_M = A/M$, ahol $M \in \mathfrak{M}$, továbbá legyen h_M a természetes homomorfizmus a A gyűrűről az A_M faktorgyűrűre, tehát

$$h_M : x \to x + M \qquad (M \in \mathfrak{M})$$

Ha $M \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, legyen $C(\mathfrak{N})$ az összes A_M gyűrű komplett direkt összege. Világos az, hogy $C(\mathfrak{N})$ minden eleme felfogható úgy is, mint olyan x függvény, amelynek értelmezési tartománya az $\mathfrak{N}$ részhalmaz, értékkészlete pedig $x(M) \in A_M$, ahol $M \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.

Azt mondjuk, hogy az A féligegyszerű gyűrűt szubdirekt módon beágyaztuk a $C(\mathfrak{M})$ komplett direkt összegbe, ha létezik olyan $S \leqq C(\mathfrak{M})$ részgyűrű, amelyre S és A egymással izomorf gyűrűk és ugyanakkor minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $s \in S$, amelyre $s(M) = a$ teljesül minden $M \in \mathfrak{M}$ moduláris maximális ideálra. Itt az $s(M)$ jelölés megfelel az $x(M)$ előbbi, függvényszerű felfogásnak.

Majdnem triviális, de fontos megállapítás az, hogy az A féligegyszerű gyűrű akkor és csak akkor ágyazható be szubdirekt módon a $C(\mathfrak{M})$ komplett direkt összegbe, ha teljesül $I(\mathfrak{M}) = 0$. Világos, hogy $I(\mathfrak{M}) = 0$ teljesülése pedig ekvivalens azzal, hogy $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, tehát azzal, hogy $\mathfrak{M}$ sűrű részhalmaz az $\mathfrak{M}$ topologikus térben.

Továbbá $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ esetén akkor és csak akkor áll fenn $x \in I(\mathfrak{N})$, ha minden $M \in \mathfrak{N}$ ideálra érvényes $x(M) = 0$.

Azt fogjuk mondani, hogy az A féligegyszerű gyűrűnek egy K ideálja topologikusan előállítható, röviden csak előállítható, ha létezik olyan $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ részhalmaz, amelyre fennáll $K = I(\mathfrak{N})$.

Mármost belátható az, hogy minden féligegyszerű gyűrűnek minden előállítható K ideálja szubdirekt módon beágyazható a $C(\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathfrak{N}})$ komplett direkt összegbe, ahol $\mathfrak{M} \setminus X$ jelöli, miként ez szokásos, az X részhalmaz kiegészítő részhalmazát $\mathfrak{M}$-ben. (Tehát fennállanak $X \cap (\mathfrak{M} \setminus X) = \varnothing$ és $X \cup (\mathfrak{M} \setminus X) > \mathfrak{M}$. Speciálisan az is igaz, hogy minden $M \in \mathfrak{M}$ moduláris maximális ideál szubdirekt módon beágyazható a $C(\mathfrak{M} \setminus \{M\})$ gyűrűbe.

Emlékeztetve az olvasót arra, hogy az A gyűrű K ideáljának K^* annihilátorán mindazon $x \in A$ elemek halmazát értjük, amelyekre $xK = Kx = 0$ teljesül, megjegyezzük az alábbi fontos megállapítást:

Bármely $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ részhalmazra fennáll

$$(I(\mathfrak{N}))^* = I(\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathfrak{N}})$$

Ez a tétel azért fontos, mert topologikus alakban elő tudja állítani az $I(\mathfrak{N})$ ideál annihilátorát. Speciálisan tehát, ha $K = I(\mathfrak{N})$ topologikusan előállítható ideál, akkor $K^* = I(\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathfrak{N}})$ áll fenn.

Továbbá akkor és csak akkor teljesül $(I(\mathfrak{N}))^{**} = I(\mathfrak{N})$, ahol X^{**} jelöli az X^* annihilátornak az annihilátorát, ha $\overline{\mathfrak{N}}$ *zárt tartomány*, vagyis teljesül az

$$\overline{\mathfrak{N}} = \overline{\operatorname{Int} \overline{\mathfrak{N}}}$$

feltétel, ahol definíció szerint

$$\operatorname{Int} \overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M} \setminus \overline{(\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathfrak{N}})}$$

azaz $\operatorname{Int} \overline{\mathfrak{N}}$ jelenti $\overline{\mathfrak{N}}$ belső részét.

Egy A féligegyszerű gyűrűt erősen féligegyszerűnek nevezünk akkor, ha minden A/B faktorgyűrű is féligegyszerű.

Meglepő tény az, hogy A akkor és csak akkor erősen féligegyszerű (Brown—McCoy-féle radikálra nézve), ha az A gyűrű minden B ideálja (topologikusan) előállítható.

Jelölje az $\overline{\mathfrak{N}} \cap \overline{\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathfrak{N}}}$ metszetet $\operatorname{Fr} \overline{\mathfrak{N}}$, amelyet az $\overline{\mathfrak{N}}$ zárt halmaz határának nevezünk (frontière).

Ha A tetszőleges erősen féligegyszerű gyűrű, és $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ tetszőleges részhalmaz, akkor a $\operatorname{Fr} \overline{\mathfrak{N}}$ határra érvényes lesz ez a gyűrűelméleti direkt felbontás:

$$I(\operatorname{Fr} \overline{\mathfrak{N}}) = I(\mathfrak{N}) \oplus (I(\mathfrak{N}))^*$$

Speciálisan tehát egy A erősen féligegyszerű gyűrű akkor és csak akkor lesz egy $K = I(\mathfrak{N})$ (topologikusan) előállítható ideáljának és a K^* annihilátornak a direkt

összege, ha Fr $\overline{\mathfrak{N}}$ az üres halmaz, vagyis ha $\overline{\mathfrak{N}}$ egyidejűleg zárt és nyílt részhalmaz az $\mathfrak{M}$ halmazban, ahol a nyílt részhalmazok pontosan a zárt részhalmazok halmazelméleti kiegészítői.

Továbbá érvényes bármely $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}$ részhalmazra és bármely $M \in \mathfrak{N}$ moduláris maximális ideálra:

$$M^* = (M \cap I(\mathfrak{N}))^* \cap I(\mathfrak{N})$$

A moduláris maximális M ideálok fontos tulajdonsága féligegyszerű A gyűrűkben az, hogy vagy $M^* = 0$ vagy pedig $M^* \cong A_M = A/M$ áll fenn.

Nem nehéz belátni azt, hogy ha az A féligegyszerű gyűrűnek egy K ideálja, mint gyűrű, egyszerű és egységelemes, akkor létezik olyan moduláris maximális M ideál, melyre fennáll $K = M^* = C(\mathfrak{M} \setminus \{M\})$. Ebben a Suliński [304]-féle elméletben az ún. „minimális halmaz" igen fontos szerepet játszik. Azt fogjuk mondani, hogy $\mathscr{D}$ az A féligegyszerű gyűrűnek a minimális halmaza, ha $\mathscr{D}$ mindazon $\mathfrak{N} (\subseteqq \mathfrak{M})$ részhalmazoknak a metszete, amelyekre $I(\mathfrak{N}) = 0$ teljesül.

Továbbá azt mondjuk, hogy az A féligegyszerű gyűrű *speciális*, ha a $\mathscr{D}$ minimális halmazára $I(\mathscr{D}) = 0$ áll fenn. Másfelől *teljesen nem speciális*nak nevezzük az A féligegyszerű gyűrűt, ha a $\mathscr{D}$ minimális halmaz üres, vagyis ha $I(\mathscr{D})$ egybeesik magával az A gyűrűvel.

Fontos, de csaknem triviálisan belátható tény az, hogy egy M moduláris maximális ideál az A féligegyszerű gyűrűben akkor és csak akkor tartozik a $\mathscr{D}$ minimális halmazhoz, ha M-nek az M^* annihilátora nemzérus ideál.

Továbbá bebizonyítható az, hogy ha K topologikusan előállítható ideál egy tetszőleges féligegyszerű gyűrűben, akkor a K gyűrű abban és csak abban az esetben lesz speciális féligegyszerű gyűrű, ha teljesül $K \cap I(\mathscr{D}) = 0$, ahol $\mathscr{D}$ jelöli az A minimális halmazát. Hasonlóan igaz az is, hogy a féligegyszerű gyűrűnek egy K előállítható ideálja akkor és csak akkor lesz teljesen nem speciális féligegyszerű gyűrű, ha $K \subseteqq I(\mathscr{D})$ fennáll.

N. H. McCoy [239] érdekes eredménye az, hogy egy (Brown—McCoy-féle értelemben) féligegyszerű A gyűrű akkor és csak akkor lesz speciális, ha A-nak minden K nemzérus ideálja tartalmaz egy olyan L ideált, amely egységelemes egyszerű gyűrű.

Továbbá egy A féligegyszerű gyűrű akkor és csak akkor teljesen nem speciális, ha az A gyűrűben nincs olyan ideál, amely egységelemes egyszerű gyűrű.

Ezek szerint bármely Artin-féle féligegyszerű gyűrű szükségképpen speciális féligegyszerű gyűrű. Másfelől a racionális egész számok gyűrűje példát mutat féligegyszerű és teljesen nem speciális féligegyszerű gyűrűre.

Egyébként pedig egy tetszőleges féligegyszerű gyűrű nyilván akkor és csak akkor teljesen nem speciális, ha minden moduláris maximális ideáljának az annihilátora a nulla ideál, (0).

Egy tetszőleges A féligegyszerű gyűrű $\mathscr{D}$ minimális halmazára igaz az, hogy

$$I(\mathrm{Int}(\overline{\mathscr{D}}) \cup (\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathscr{D}})) = 0$$

Továbbá mindig teljesül $\mathrm{Int}\,(\overline{\mathscr{D}}) \supseteqq \mathscr{D}$ is, és $\overline{\mathscr{D}}$ zárt tartomány az $\mathfrak{M}$ struktúratérben, azaz fennáll $\overline{\mathscr{D}} = \overline{\mathrm{Int}\,\overline{\mathscr{D}}}$.

Ha A tetszőleges féligegyszerű gyűrű és ha $\mathscr{D}$ a gyűrű minimális halmaza, akkor az A speciális részének nevezzük az $S(A) = I(\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathscr{D}})$ ideált, továbbá az A teljesen nem speciális részén értjük az $N(A) = I(\mathscr{D})$ ideált.

Az triviális, hogy az $S(A)$ gyűrű valóban speciális, és az $N(A)$ gyűrű pedig teljesen nem speciális.

Viszont nem triviális az a tény, hogy $S(A)$ éppen az $N(A)$ annihilátora, és ugyanakkor $N(A)$ pedig éppen az $S(A)$ ideálnak az annihilátora az A gyűrűben, tehát $S(A)=(N(A))^*$ és $N(A)=(S(A))^*$. Ezekből persze $(S(A))^{**}=S(A)$ és $(N(A))^{**}=N(A)$ is adódik, amiből újabb bizonyítás kapható arra, hogy $\mathscr{D}$ és $\mathfrak{M}\setminus\mathscr{D}$ egyaránt zárt tartományok az $\mathfrak{M}$ halmazban.

Az alábbi eredmény pedig arra mutat, hogy $S(A)$ és $N(A)$, bizonyos más értelemben, kváziradikálként is felfogható az A féligegyszerű gyűrűben:

$S(A)$ tartalmazza az A gyűrű összes olyan topologikusan előállítható ideálját, amelyek mint gyűrűk, speciális féligegyszerű gyűrűk, továbbá $N(A)$ tartalmazza az összes topologikusan előállítható és ugyanakkor teljesen nem speciális ideált.

Már most az $S(A)$ és $N(A)$ ideáloknak jelentősége van annak a kritériumnak a szempontjából is, amely így fogalmazható meg:

Egy erősen féligegyszerű A gyűrű akkor és csak akkor lesz az $S(A)$ speciális részének és az $N(A)$ teljesen nem speciális részének a gyűrűelméleti direkt összege, ha a $\mathscr{D}$ minimális halmaznak a $\overline{\mathscr{D}}$ lezártja nyílt részhalmaz $\mathfrak{M}$-ben, vagyis ha $\mathrm{Fr}(\mathscr{D})$ üres halmaz.

Majdnem nyilvánvaló az, hogy az $A/I(\mathfrak{N})$ faktorgyűrű szubdirekt módon beágyazható a $C(\mathfrak{N})$ komplett direkt összegbe, ahol A tetszőleges féligegyszerű gyűrű és $\mathfrak{N}$ tetszőleges részhalmaz $\mathfrak{M}$-ben, $\mathfrak{M}$ az összes moduláris maximális ideál halmaza.

Továbbá, ha $\mathfrak{N}_1\subseteqq\overline{\mathfrak{N}}$ és ha $\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{M}$, valamint ha $I_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{N}_1)$ jelenti az $\bar{A}=A/I(\mathfrak{N})$ faktorgyűrűben mindazon $M/I(\mathfrak{N})$ ideálok metszetét, amelyekre $M\in\mathfrak{N}_1$ teljesül, akkor fennáll $I_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{N}_1)=I(\mathfrak{N}_1)/I(\mathfrak{N})$.

Jelölje $D(\mathfrak{N})$ az összes $A/M=A_M$ gyűrűnek a diszkrét direkt összegét, ahol M befutja az $M\in\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{M}$ moduláris maximális ideálokat.

Ha az A_1 és A_2 féligegyszerű gyűrűket szubdirekt módon beágyaztuk $C(\mathfrak{N})$ komplett direkt összegbe, azt fogjuk mondani, hogy A_1 és A_2 hasonló helyzetű $C(\mathfrak{N})$-ben, ha teljesül $A_1\cap D(\mathfrak{N})=A_2\cap D(\mathfrak{N})$. (Ugyanis nyilván fennáll $D(\mathfrak{N})\subseteqq C(\mathfrak{N})$ tartalmazás.)

Ebből a definícióból következik az is, hogy bármely két olyan A_1 és A_2 teljesen nemspeciális féligegyszerű gyűrű, amelyek egyáltalán beágyazhatók szubdirekt módon egy közös, $C(\mathfrak{N})$ alakú gyűrűbe, szükségképpen hasonló helyzetűek lesznek $C(\mathfrak{N})$-ben, mert nyilvánvalóan fennáll $A_i\cap D(\mathfrak{N})=0$, ahol $i=1$ és 2, hiszen A_i nem tartalmazhat olyan nemzérus ideált, amely egységelemes egyszerű gyűrű.

Fontos tétel az, amelyik kimondja, hogy ha az A_1 és A_2 féligegyszerű gyűrűk hasonló helyzetűek a $C(\mathfrak{N})$ komplett direkt összegben, továbbá ha fennáll $A_1\subseteqq A\subseteqq A_2$ és ha A_1 és A_2 egyidejűleg vagy speciális vagy pedig teljesen nem speciális, akkor A is ennek megfelelően vagy speciális, vagy teljesen nem speciális lesz, és A hasonló helyzetű a $C(\mathfrak{N})$ gyűrűben, mint A_1 és A_2.

Nem triviális annak a ténynek a bizonyítása, hogy ha $S(A)$ a féligegyszerű gyűrű speciális része, továbbá $N(A)$ pedig a teljesen nem speciális része, akkor az $A/N(A)$ faktorgyűrű olyan speciális gyűrű, amely hasonló helyzettel ágyazható be szubdirekt módon a $C(\mathrm{Int}\,\overline{\mathscr{D}})$ komplett direkt összegbe, mint $N(A)$.

Bizonyos értelemben duális módon igaz az is, hogy az $A/S(A)$ faktorgyűrű olyan teljesen nem speciális féligegyszerű gyűrű, amely hasonló helyzettel ágyazható be szubdirekt módon a $C(\mathfrak{M}\setminus\overline{\mathscr{D}})$ komplett direkt összegbe, mint $N(A)$.

Miként a topológiában szokásos, jelölje $\mathfrak{M}'$ az $\mathfrak{M}$ halmaz derivált halmazát, ahol a derivált $\mathfrak{M}'$ halmaz mindazon $M\in\mathfrak{M}$ elemek részhalmaza, amelyekre teljesül $M\in\overline{(\mathfrak{M}\setminus\{M\})}$.

Az előzőek alapján szinte triviális az, hogy az $\mathfrak{M}'$ derivált halmaz mindazon M moduláris ideálok halmaza, amelyek annihilátorára fennáll $M^* = 0$.

Továbbá, az A féligegyszerű gyűrű $\mathscr{D}$ minimális halmazára $\mathscr{D} = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ adódik.

Most minden γ transzfinit rendszámhoz definiálunk bizonyos $\mathfrak{M}_\gamma$ és $\mathscr{D}_\gamma$ halmazokat és definiálni fogjuk az A féligegyszerű gyűrűnek a τ típusát is.

Legyen $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}$, ahol $\mathscr{D}$ a féligegyszerű gyűrűnek a minimális halmaza, továbbá legyen $\mathfrak{M}_1 = \operatorname{Fr} \overline{\mathscr{D}_1}$, ahol miként az előzőkben is, $\operatorname{Fr} \overline{\mathscr{D}_1} = \overline{\mathscr{D}_1} \cap \overline{\mathfrak{M} \setminus \mathscr{D}_1}$. Tegyük fel azt, hogy az α rendszám olyan, hogy az $\mathfrak{M}_\beta$ és $\mathscr{D}_\beta$ halmazokat már definiáltuk mindazokra a β rendszámokra, amelyekre $\beta < \alpha$. Ha α nem limeszszám, akkor létezik $\alpha - 1$, és ekkor legyen $\mathscr{D}_\alpha = \mathfrak{M}_{\alpha-1} \setminus \mathfrak{M}'_{\alpha-1}$, ahol X' a derivált halmaz jele és

$$\mathfrak{M}_\alpha = \mathscr{D}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{M}_{\alpha-1} \setminus \mathscr{D}_\alpha}.$$

Ha pedig α limiesz rendszám, akkor legyen

$$\mathfrak{M}_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathfrak{M}_\beta, \quad \mathscr{D}_\alpha = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'_\alpha$$

Ilyen módon az $\mathfrak{M}$ halmaz részhalmazainak két fogyó, transzfinit lánca adható meg:

$$\mathfrak{M}_0 \supseteq \mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_2 \supseteq \dots$$

$$\overline{\mathscr{D}_1} \supseteq \overline{\mathscr{D}_2} \supseteq \overline{\mathscr{D}_3} \supseteq \dots$$

Minthogy az A gyűrű elemeinek az összessége halmaz, ezért létezik olyan γ rendszám, amelyre fennáll $\mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{\gamma+1}$. Ekkor, mint belátható, teljesül az is, hogy $\mathfrak{M}_\gamma$ az üres halmaz. Továbbá nyilván létezik legkisebb olyan τ rendszám, amelyre $\mathfrak{M}_\tau$ üres halmaz.

Az A féligegyszerű gyűrű *típusának* nevezzük azt a legkisebb τ rendszámot, amelyre az $\mathfrak{M}_\alpha$-halmaz üres.

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha < \tau$, ahol τ a féligegyszerű gyűrű típusa, akkor az összes $\mathfrak{M}_\tau$ halmaz zárt az $\mathfrak{M}$ struktúratérben.

Továbbá, ha az A féligegyszerű gyűrűnek a típusa τ, akkor minden $\alpha < \tau$ rendszáma $\mathfrak{M}_\alpha$ lesz az $A_\alpha = A/I(\mathfrak{M}_\alpha)$ faktorgyűrűnek a struktúra tere, $\mathscr{D}_{\alpha+1}$ pedig az A_α faktorgyűrűnek a minimális halmaza. Ezenkívül minden $\alpha < \tau$ rendszámra $A'_\alpha = A_\alpha / N(A_\alpha)$ olyan speciális féligegyszerű gyűrű, amely az $S(A_\alpha)$ speciális részhez hasonló helyzettel ágyazható be szibdirekt módon a $C(\operatorname{Int} \overline{\mathscr{D}_{\alpha+1}})$ komplett direkt összegbe. Az is igaz, hogy minden $\alpha < \tau$ rendszámra $A'' = A_\alpha / S(A_\alpha)$ faktorgyűrű pedig olyan teljesen nem speciális féligegyszerű gyűrű lesz, amely az $N(A_\alpha)$ teljesen nem speciális részhez hasonló helyzettel ágyazható be szubdirekt módon a $C(\overline{\mathfrak{M} \setminus \mathscr{D}_{\alpha+1}})$ komplett direkt összegbe.

Ha A tetszőleges erősen féligegyszerű gyűrű, akkor bármely $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$ ($\subseteq \mathfrak{M}$) részhalmazra érvényes:

$$I(\overline{\mathfrak{N}_1} \cap \overline{\mathfrak{N}_2}) = I(\mathfrak{N}_1) + I(\mathfrak{N}_2)$$

Ennek a megállapításnak következménye az a tétel, hogy ha A tetszőleges erősen féligegyszerű gyűrű, $\mathscr{D}$ az A minimális halmaza és ha $\operatorname{Fr} \overline{\mathscr{D}} = \overline{\mathscr{D}} \cap \overline{\mathfrak{M} \setminus \mathscr{D}}$, akkor

$$I(\operatorname{Fr} \overline{\mathscr{D}}) = S(A) \oplus N(A)$$

Speciálisan, ha az A erősen féligegyszerű gyűrűnek a típusa 1, akkor érvényes az $A = S(A) \oplus N(A)$ direkt felbontás.

Felbonthatónak nevezzük mindazokat a féligegyszerű gyűrűket, amelyek speciális részüknek és teljesen nem speciális részüknek a gyűrűelméleti direkt összegei.

Az 1-típusú és erősen féligegyszerű gyűrűk példát mutatnak felbontható féligegyszerű gyűrűre.

Minthogy erősen féligegyszerű gyűrűknek bármely ideálja és bármely homomorf képe is erősen féligegyszerű, nem nehéz bebizonyítani azt, hogy τ-típusú és erősen féligegyszerű A gyűrűt alapul véve az összes $\alpha < \tau$ rendszámra az összes $C_\alpha = I(\mathfrak{M}_{\alpha+1})/I(\mathfrak{M}_\alpha)$ faktorgyűrű ugyancsak erősen féligegyszerű, sőt felbontható lesz.

Az erősen féligegyszerű és τ típusú A gyűrű kompozíciósorozatának nevezzük a transzfinit

$$(*) \qquad C_0, C_1, C_2, \ldots, C_\omega, \ldots, C_\alpha, \ldots$$

sorozatot, ahol $\alpha < \tau$ és $C_\alpha = I(\mathfrak{M}_{\alpha+1})/I(\mathfrak{M}_\alpha)$.

Megfogalmazható Suliński következő tétele a τ-típusú erősen féligegyszerű gyűrűkről:

I) Mindenik C_α erősen féligegyszerű és felbontható gyűrű.

II) Minden $\alpha < \tau$ rendszámhoz létezik $S_\beta(C_\alpha)$ speciális és erősen féligegyszerű gyűrűknek $(\alpha + 1 \leqq \beta \leqq \tau)$ olyan növekvő transzfinit sorozata, amelyre $S(C_\alpha) = S_{\alpha+1}(C_\alpha) \subseteq \cdots \subseteq S_\tau(C_\alpha) \subseteq \cdots \subseteq S_\beta(C_\alpha) = A_\alpha/N(A_\alpha)$ és $S_\beta(C_\alpha)$ ideál az $S_{\beta+1}(C_\alpha)/S_\beta(C_\alpha)$ gyűrűben, és fennáll az $S_{\beta+1}(C_\alpha)/S_\beta(C_\alpha) \cong C_\beta$ izomorfia.

III) Minden $\alpha < \tau$ rendszámhoz létezik $N_\beta(C_\alpha)$ teljesen nem speciális és erősen féligegyszerű gyűrűknek $(\alpha + 1 \leqq \beta \leqq \tau)$ olyan növekvő, transzfinit sorozata, amelyre $N(C_\alpha) = N_{\alpha+1}(C_\alpha) \subseteq \cdots \subseteq N_\beta(C_\alpha) \subseteq \cdots N_\tau \subseteq (C_\alpha) = A_\alpha/S(A_\alpha)$ és $N_\beta(C_\alpha)$ ideál az $N_{\beta+1}(C_\alpha)$ gyűrűben, továbbá fennáll az $N_{\beta+1}(C_\alpha)/N_\beta(C_\alpha) \cong C_\beta$ izomorfia.

IV) Mindegyik $S_\beta(C_\alpha)$ az $S(C_\alpha)$ gyűrűhöz hasonló helyzettel van szubdirekt módon beágyazva a $C(\mathrm{Int}\,\overline{\mathscr{D}_{\alpha+1}})$ komplett direkt összegbe és mindegyik $N(C_\alpha)$ szubdirekt módon beágyazható a $C(\mathfrak{M} \setminus \overline{\mathscr{D}_{\alpha+1}})$ gyűrűbe.

Megjegyzendő, hogy ezek az $S_\beta(C_\alpha)$ és $N_\beta(C_\alpha)$ részgyűrűk egy-egy gyűrű meta-ideáljai is.

Végezetül megemlítjük még Sulińskinak azokat az eddig publikálatlan, de igen fontos eredményeit, amelyek hasonló szerepet töltenek be struktúra-tételek szempontjából a Brown—McCoy-féle értelemben féligegyszerű gyűrűk elméletében, mint a nevezetes Prüfer-, Ulm- és Zippin-féle eredmények az Abel-féle megszámlálható számosságú p-csoportok elméletében.

Ugyanis Suliński szerint létezik egy τ típusú erősen féligegyszerű A gyűrű minden (a $(*)$-nál definiált) előre megadott olyan kompozíciósorozathoz, amelyre az előbbi tételben megfogalmazott I), II), III) és IV) feltétel teljesül úgy, hogy a $(*)$ alatti sorozat éppen az A gyűrű transzfinit kompozíció-sorozatát adja. Vizsgálható az izomorfia-probléma is.

A 26. § végén megállapíthatjuk, hogy Suliński fenti eredményei a Brown—McCoy-féle értelemben vett féligegyszerű gyűrűk struktúrájáról annyira alapvetőek, és a részben topologikus köntösben való megfogalmazásuk miatt is annyira érdekesek, hogy érdemes volt ezeket részletesebben ismertetni. Kívánatos volna ugyanis az, ha a Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrűkről is volna ennyire mélyen kiépített, a Suliński-féléhez hasonló elmélet, azon túlmenőleg, amit a Jacobson-féle sűrűségi tétel szolgáltat a primitív gyűrűkről.

Azt is megjegyezzük, hogy teljes matrix gyűrű Brown—McCoy-féle radikáljára $G(A_n) = (G(A))_n$ teljesül minden A gyűrűvel.

27. §. *A gyűrű maximális Neumann-reguláris ideálja*

Az olvasót emlékeztetjük arra, hogy egy A gyűrűt regulárisnak nevezünk Neumann-féle értelemben akkor, ha minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $x \in A$, amelyre $a = axa$ teljesül. Ez a feltétel nyilván ekvivalens azzal, hogy minden $a \in A$ elemre fennáll $a \in aAa$.

Jól ismert egyébként az is, hogy egy A gyűrű akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha minden $(a)_r$ főjobbideálra és minden $(a)_l$ főbalideálra teljesül

$$(a)_r \cap (a)_l = (a)_r \cdot (a)_l$$

Megemlítjük azt is, hogy egységelemes Neumann-reguláris gyűrűben a főjobbideálok is hálót alkotnak és a főbalideálok halmaza is háló.

Neumann-féle reguláris gyűrűre fontos példa bármely Artin-féle féligegyszerű gyűrű, vagy általánosabban bármely olyan Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrű, amely eleget tesz a főjobbideálok minimum-feltételének (lásd szerző [309]).

Másfelől Wiegandt Richard [357] igazolta azt, hogy ún. lineárisan kompakt topologikus gyűrűk osztályában a Neumann-regularitás egybeesik a Jacobson-féle féligegyszerűséggel.

Azt pedig eléggé könnyen lehet igazolni, hogy bármely Neumann-reguláris gyűrű féligegyszerű Jacobson-féle értelemben.

Forsythe és McCoy [102] közösen nyert, fontos eredménye az, hogy egy nemzérus-reguláris gyűrű akkor és csak akkor izomorf ferdetesteknek egy szubdirekt összegével, ha a gyűrű nem tartalmaz nemzérus nilpotens elemet.

Az olyan Neumann-reguláris gyűrűt, amelyben nincs nemzérus nilpotens elem, erősen regulárisnak nevezik. Az erősen reguláris gyűrűkben minden $a \in A$ elemhez van olyan $x \in A$ elem, amelyre fennáll $a = a^2x = xa^2$, és ekkor minden idempotens elem, így ax és xa is, benne van a gyűrű centrumában. Fontos annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy a Neumann-féle regularitás vajon radikáltulajdonság-e Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben.

Ha A tetszőleges (asszociatív) gyűrű, akkor legyen minden $a \in A$ elemre $F(a) = aAa$. Világos, hogy ez az $F(a)$ olyan részgyűrű A-ban (ha a nem centrumbeli elem, akkor általában nem jobbideál vagy nem balideál), amelyre teljesül az a P_1 és P_2 axióma, amelyet az (F, Ω_1, Ω)-radikálok elméletében fogalmaztunk meg:

P_1: $F(a+b) \subseteq F(a) + (b)$,

P_2: ha $b \in F(a)$, akkor $F(a+b) \subseteq F(a)$

minden a és b elemre. Itt (b) jelenti a b elemmel generált főideált, továbbá legyen Ω az A identikus automorfizmusának, az összes balszorzásának és az összes jobbszorzásának az egyesítési halmaza, és legyen Ω_1 az identikus automorfizmusnak és az összes jobbszorzásnak az egyesítési halmaza.

Az A gyűrű ekkor felfogható (F, Ω_1, Ω)-csoportként, ahol $F(a) = aAa$, és ennek a csoportnak a megfelelő (F, Ω_1, Ω)-radikálja, mint a csoport normálosztója egyszersmind a gyűrűnek olyan ideálja is lesz, amely Neumann-féle reguláris gyűrű és amely tartalmazza a gyűrűnek minden más Neumann-reguláris ideálját.

Ennek a maximális Neumann-reguláris ideálnak a létezése tehát folyik az (F, Ω_1, Ω)-rdikálok elméletéből.

Ezt a maximális Neumann-reguláris ideált az A gyűrűben $M(A)$ fogja jelölni.

Belátható, hogy bármely A gyűrű bármely I ideáljára: $M(I) = I \cap M(A)$, vagyis a maximális Neumann-reguláris öröklődik ideálokra.

Nyilván teljesül $M(A/M(A))=0$ az (F, Ω_1, Ω)-radikálok elmélete alapján, de ez közvetlenül is igazolható számolással.

Neumann-reguláris gyűrűnek bármely homomorf képe és bármely ideálja szintén Neumann-reguláris.

Ezek után kijelenthetjük, hogy az $M(A)$ ideál radikáltulajdonságot indukál Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben.

Lehet azt is igazolni, hogy bármely A gyűrűre és bármely n természetes számra teljesül

$$M(A_n) = (M(A))_n$$

ahol A_n a teljes matrix gyűrű és $M(A)$ a maximális Neumann-reguláris ideál.

E tétel Brown—McCoy [72]-féle bizonyításának érdekessége az, hogy az állítást előbb az $n=2$ speciális esetre igazolják, és ez a speciális eset már magában hordja az általános eset bizonyításának a legfőbb nehézségeit, és tetszőleges n értékre a tétel már könnyebben belátható az $n=2$ esetre nyert eredmény alapján.

Ha $M(A)$ a maximális Neumann-reguláris ideál és $J(A)$ a Jacobson-féle radikál az A gyűrűben, akkor fennállanak a $J(A) \subseteq (M(A))^*$ és $M(A) \subseteq (J(A))^*$ tartalmazások, ahol X^* jelenti az X halmaz annihilátorát. Továbbá érvényes még a $J(A) = J((M(A))^*)$ és az $M(A) = M((J(A))^*)$ egyenlőség is minden A gyűrűben, ugyanis nyilván $J(A) \cap M(A) = 0$ teljesül.

Hosszasabb számolással lehet bebizonyítani azt, hogy ha — az előző jelölésekkel — az $A/J(A)$ faktorgyűrű Neumann-reguláris, akkor $M(A)=0$ abban és csak abban az esetben áll fenn, ha teljesül $(J(A))^* \subseteq J(A)$.

Speciálisan az Artin-féle A gyűrűk, vagy általánosabban a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű A gyűrűk esetében akkor és csak akkor teljesül $(J(A))^* \subseteq J(A)$, ha fennáll $M(A) = 0$.

Miként a II. fejezetben Andrunakievics eredményeinek a tárgyalásánál láttuk, a $(J(A))^* \subseteq J(A)$ feltételnek nagy szerepe van annak a kapcsolatnak a vizsgálatánál, amely a tetszőleges szupernilpotens radikálok és egy, a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűnek bizonyos direkt felbontásai közt fennáll.

28. §. *A gyűrű maximális bireguláris ideálja*

Tudvalevőleg akkor nevezünk egy A gyűrűt biregulárisnak, ha A bármely főideálja egy centrumban fekvő idempotens elemmel generálható.

A biregularitás fogalmát Arens és Kaplansky [41] definiálták. Ez a fogalom az egyoldali Neumann-regularitás kétoldali megfelelőjeként tekinthető.

Egy gyűrű nyilván akkor és csak akkor bireguláris, ha minden főideáljának van kétoldali egységeleme. Ehhez megjegyezzük azt, hogy egy gyűrű akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha minden főjobbideáljának van balegységeleme, és ekkor minden főbalideáljának is van jobbegységeleme. Ebben az értelemben lesz a biregularitás a Neumann-regularitásnak kétoldali megfelelője.

Bebizonyítható, hogy bármely egységelemes, bireguláris gyűrűben bármely főideál gyűrűelméleti direkt összeadandó és az is igazolható, hogy bármely egységelemes, bireguláris gyűrű főideáljai Boole-féle algebrát alkotnak.

Nem nehéz belátni azt, hogy bármely bireguláris gyűrűnek a centruma ugyancsak bireguláris gyűrű.

Az A gyűrű egy a elemét akkor nevezzük biregulárisnak, ha az (a) főideál egységelemes gyűrű. Továbbá az A gyűrű egy B ideálját akkor hívjuk biregulárisnak, ha B minden eleme bireguláris.

Számolással könnyen igazolható, hogy véges sok tetszőleges bireguláris ideálnak az összege szintén bireguláris. Minthogy pedig bireguláris ideálok tetszőleges növő láncának az egyesítése újra bireguláris ideál, ezért egy A gyűrű összes bireguláris ideáljának az összege, amelyet $B(A)$ fog jelölni, szintén bireguláris ideál.

Ez a $B(A)$ ideál a gyűrű maximális bireguláris ideálja.

Az eléggé világos, hogy bireguláris gyűrűnek bármely ideálja és bármely homomorf képe is bireguláris gyűrű.

Az viszont még nyitott kérdés, hogy vajon minden A gyűrűre teljesül-e $B(A/B(A))=0$, ahol $B(A)$ a maximális bireguláris ideál. Mindaddig, amíg ez a nyitott kérdés nincs megoldva, az sem bebizonyított, hogy $B(A)$ radikál-e Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben.

Egy A gyűrű bármely B bireguláris ideáljának bármely K ideálja ideál lesz az A gyűrűben is. A bireguláris gyűrűk hozzátartoznak a Blair-féle, öröklődően idempotens gyűrűk hozzátartoznak a Blair-féle, öröklődően idempotens gyűrűk osztályához, amelyeket a II. fejezetben részletesebben tárgyaltunk. Ez utóbbi gyűrűk olyanok, hogy bennük minden ideál idempotens. Emlékeztetjük az olvasót még arra is, hogy gyengén regulárisnak az olyan gyűrűket hívják, amelyekben minden jobbideál idempotens. Ezek szerint bármely Neumann-reguláris gyűrű gyengén reguláris, és minden gyengén reguláris gyűrűben minden ideál is idempotens. Belátható eléggé könnyen az is, hogy minden bireguláris gyűrű is gyengén reguláris.

Ha $B(A)$ a tetszőleges A gyűrű maximális bireguláris ideálja és $G(A)$ a Brown—McCoy-féle radikálja, akkor belátható, hogy érvényesek a $G(A)\subseteq(B(A))^*$ és $B(A)\subseteq\subseteq(G(A))^*$ tartalmazások, ahol X^* az X halmaz annihilátora és fennállanak a $G(A)=$ $=G((B(A))^*)$, $B(A)=B((G(A))^*)$ egyenlőségek is.

Továbbá számolással bebizonyítható az, hogy ha — az előző jelölésekkel — az $A/G(A)$ faktorgyűrű bireguláris, akkor $B(A)=0$ abban és csak abban az esetben áll fenn, ha teljesül $(G(A))^*\subseteq G(A)$.

Megjegyzendő, hogy Artin-féle gyűrűk esetében a féligegyszerű A/G faktorgyűrű mindig bireguláris lesz, tehát egy A Artin-féle gyűrűre akkor és csak akkor teljesül $B(A)=0$, ha $(G(A))^*\subseteq G(A)$, ekkor persze $G(A)$ nilpotens, és egybeesik A összes nilpotens ideáljának az összegével.

Igazolható az is, hogy egy tetszőleges A gyűrű minden nemzérus K ideálja akkor és csak akkor tartalmaz nemzérus bireguláris ideált, ha fennáll $(B(A))^*=0$.

Bármely A gyűrűre és bármely n természetes számra bizonyítható a $B(A_n)=$ $=(B(A))_n$ egyenlőség, ahol A_n jelenti az $n\times n$ típusú teljes matrixgyűrűt az A gyűrű felett.

Végül megemlítjük azt az érdekes tételt, amely szerint akkor és csak akkor érvényes az $A=B(A)\oplus(B(A))^*$ gyűrűelméleti direkt felbontás az A gyűrűre, ha minden (a) főideálnak a $B((a))$ maximális bireguláris ideálja főideál az A gyűrűben.

29. §. *Gyűrűk Fuchs-féje zéroid kváziradikálja, és ennek általánosításai*

Ebben a §-ban a Fuchs-féle zéroid kváziradikált fogjuk tárgyalni. Ez a gyűrűnek olyan ideálja, amely egyrészt leméri bizonyos értelemben a gyűrű szingularitását, miközben ez a kváziradikál minden zérusosztómentes gyűrűben (0) lesz, másrészt pedig ez a Fuchs-féle kváziradikál nem radikál Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben.

Ugyanis, egyrészt bizonyítható az, hogy a radikál-tulajdonságok 1. axiómája (ti., hogy radikálgyűrűnek bármely homomorf képe is radikálgyűrű) nem teljesül a Fuchs-féle kváziradikálra, másrészt pedig még nincs a Fuchs-féle kváziradikálra

bebizonyítva az, hogy a radikáltulajdonságok 3. axiómája teljesül (vagyis hogy a radikál szerint vett faktorgyűrű féligegyszerű).

Utóbbi úgy értendő, hogy nem adtak meg eddig példát sem arra, hogy a Fuchs-féle kváziradikál szerint vett faktorgyűrűnek nemzérus a Fuchs-féle kváziradikálja. Persze az is lehetséges, hogy ilyen példa nem létezik. Mindenesetre az még nyitott kérdés, hogy a radikál-tulajdonságokat meghatározó axiómák közül 3) teljesül-e a Fuchs-féle kváziradikálra.

Bár minden zérusosztómentes gyűrű Fuchs-féle értelemben féligegyszerű, nem minden Fuchs-féle értelemben féligegyszerű gyűrű lesz zérusosztómentes. Például bármely $\mathfrak{F}$ ferdetest felett vett $n \times n$ típusú $\mathfrak{F}_n$ teljes matrixgyűrű $n \geqq 2$ esetén féligegyszerű Fuchs-féle értelemben (ui. $\mathfrak{F}_n$ egységelemes, Artin-féle, és Jacobson-féle radikálmentes), de az $\mathfrak{F}_n$ gyűrűben pl.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \dots & 01 \\ 0 & 0 \dots & 00 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 00 \end{pmatrix}$$

nyilvánvalóan nemzérus nilpotens matrix.

Az viszont igaz lesz, hogy bármely Fuchs-féle féligegyszerű gyűrű bizonyos prímgyűrűknek egy szubdirekt összege. (Emlékeztetjük az olvasót arra, hogy egy gyűrű prímgyűrű akkor, ha bármely két nemzérus ideáljának a szorzata olyan ideál, amely szintén nemzérus.)

A Fuchs-féle [111] kváziradikál gyűrűelméleti szerepének fenti előfutárszerű bemutatása után rátérünk a pontos definíciókra. Megjegyezzük, hogy Fuchs [111] dolgozatában megtalálható valamennyi idevágó definíció és eredmény részletesen.

Minthogy pedig szerző [317] a Fuchs-féle [111] kváziradikállal kapcsolatos fogalmakat több lépcsőben általánosította, és a legtöbb eredményt is vagy általánosította, vagy élesítette (egy [111]-beli eredményt pedig még helyre is igazított), ezért helykímélés végett, továbbá a Fuchs-féle eredmények általánosabb algebrai összefüggésekbe való beágyazottságának a megmutatása végett mindjárt a szerző [317] általánosabb definícióit és eredményeit tárgyaljuk. Közben meg fogjuk mutatni, hogy melyik éppen az a speciális eset, amelyben gyűrűk Fuchs-féle kváziradikáljáról van szó. Természetesen szerző [317] dolgozata Fuchs [111] dolgozatának megjelenése és tanulmányozása után jött létre.

Követve szerző [317] dolgozatát, legyen V teljes háló, amelynek nullelemét (a legkisebb elemét) 0, egységelemét (a legnagyobb elemét) pedig 1 jelölje. A V háló egy K részhalmazát felső halmaznak nevezzük, ha teljesül

$$x \in K \quad \text{és} \quad x \leqq y \quad \text{esetén mindig} \quad y \in K.$$

Ugyanis minden hálóban definiálható a szokásos $\cup$ és $\cap$ algebrai műveletekkel egy $\leqq$ részben rendezés, és megfordítva, a részben rendezéssel definiált háló meghatározza a $\cup$ és $\cap$ műveleteket. Definíció szerint legyen a V háló $\varnothing$ üres részhalmaza szintén felső halmaz V-ben.

Triviálisan akkor és csak akkor tartalmazza egy K felsőhalmaz a 0 elemet, ha $K = V$.

Egy K felső halmazt véges jellegű felső halmaznak, röviden v-felső halmaznak nevezünk akkor, ha teljesül az alábbi feltétel (amely a topologikus kompaktsághoz bizonyos mértékben hasonló):

Ha $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \in K$, akkor létezik olyan véges Δ indexrészhalmaz a Γ indexhalmazban, hogy fennáll a $\bigcup_{\delta \in \Delta} x_\delta \in K$ feltétel is.

Nem nehéz belátni azt, hogy véges sok v-felső halmaznak a halmazelméleti metszete és tetszőleges sok v-felső halmaznak a halmazelméleti egyesítése ugyancsak v-felső halmaz.

Ha K tetszőleges v-felsőhalmaz és x tetszőleges olyan elem a V teljes hálóban, amelyre $x \notin K$, akkor egy $y \in V$ elemet abban az esetben nevezünk (K, x)-elemnek, ha $x \cup y \notin K$.

Világos az, hogy maga x, ha $x \notin K$, példa (K, x)-elemre.

Továbbá egy $z \in V$ elemet erősen (K, x)-elemnek nevezünk akkor, ha $y \cup z$ egy (K, x)-elem lesz minden olyan y elemmel, amely szintén (K, x)-elem.

Ebből folyik az, hogy egyrészt $x \notin K$ esetén maga x nyilván erősen (K, x)-elem, másrészt az, hogy minden erősen (K, x)-elem még inkább (K, x)-elem.

Be lehet bizonyítani azt, hogy a V háló összes erősen (K, x)-elemének az egyesítése (rögzített, de tetszőleges x elem mellett) szintén erősen (K, x)-elem.

Ezt az egyesítést $z_K(x)$ szimbólummal jelöljük, és az x elem K-zeroid kváziradikáljának nevezzük, amely ezek szerint a V hálónak egy eleme.

Azt is lehet igazolni, hogy bármely x elem K-zeroid kváziradikálja egybeesik az összes maximális (K, x)-elemnek a metszetével.

Ehhez megjegyezzük azonban azt, hogy egy maximális (K, x)-elem nem feltétlenül lesz maximális elem a V hálóban, hiszen még az is lehetséges volna, hogy V-ben minden olyan elemnél, amely nem a legnagyobb elem, van nagyobb elem. Egy maximális (K, x)-elem csak a (K, x)-elemek halmazában maximális, és maximális ilyen elemnek a létezése következik a Zorn-féle lemma alapján a v-felső halmaz definíciójából.

Ha $\mathfrak{M}$ jelöli a V háló bizonyos (véges vagy végtelen sok) v-felső halmazainak a halmazát, akkor $z_{\mathfrak{M}}(x)$ szimbólummal jelöljük az x elem mindazon K-zeroid-radikáljának a metszetét, amelyekre fennáll $K \in \mathfrak{M}$.

Ezt a $z_{\mathfrak{M}}(x)$ elemet az x elem $\mathfrak{M}$-zeroid kváziradikáljának nevezzük, amely a V hálónak szintén egy eleme.

Legyen mármost V teljes hálógruppoid, vagyis olyan teljes háló, amely egyidejűleg gruppoid is (azaz olyan halmaz, amelyen egy kétváltozós, nem feltétlenül asszociatív algebrai műveletet értelmezünk), és amelyre teljesül az alábbi három axióma:

(1) $a \cdot b \leqq a \cap b$ („negatív" félig rendezés)

(2) $(a \cup b)c \leqq ac \cup bc$ (jobboldali félmonotonosság)

(3) $a(b \cup c) \leqq ab \cup ac$ (baloldali félmonotonosság).

Megjegyezzük azt, hogy az (1), (2) és (3) axióma, és ezért a teljes hálógruppoidnak a fenti fogalma kissé eltér a szakirodalomban elterjedt definíciótól, de a vizsgálataink számára a fenti definíció előnyösebb a szokásos értelmezésnél.

A V teljes hálógruppoid egy K részhalmazát v-felső részgruppoidnak nevezzük, ha a K részhalmaz egyrészt v-felső halmaz a V hálóban, másrészt pedig részgruppoid a V gruppoidban.

A V háló $\varnothing$ üres részhalmazát, amely nem részgruppoid, definíció szerint v-felső részgruppoidnak fogjuk tekinteni.

Nem nehéz belátni azt, hogy véges sok v-felső részgruppoidnak a halmazelméleti metszete, továbbá tetszőleges sok v-felső részgruppoid növő láncának a halmaz-

elméleti egyesítése szintén v-felső részgruppoid V-ben. Az pedig triviális, hogy $k_1, k_2 \in K$ esetén $k_1 \cdot k_2 \in K$ és $k_1 \cdot k_2 \leqq k_1 \cap k_2$ miatt bármely v-felső részgruppoid még inkább duális ideál, azaz „filter" lesz a V teljes hálógruppoidban.

Ha V teljes hálógruppoid, és ha $\mathfrak{N}$ bizonyos v-felső részgruppoidoknak (véges vagy végtelen) halmaza, akkor legyen $z_{\mathfrak{N}}(x)$ egy rögzített, de tetszőleges x elemmel az x elem mindazon K-zeroid kváziradikáljának a metszete, amelyekre fennáll $K \in \mathfrak{N}$.

Ezt a $z_{\mathfrak{N}}(x)$ elemet az x elem $\mathfrak{N}$-zeroid radikáljának nevezzük. Nyilván fennáll

$$Z_{\mathfrak{N}}(x) \in V, \quad \text{és} \quad x \leqq Z_{\mathfrak{N}}(x) \leqq 1.$$

A V teljes hálógruppoid egy p eleméről azt mondjuk, hogy prímelem V-ben, ha tetszőleges $a, b \in V$ elemekre $a \cdot b \leqq p$ esetén mindig igaz $a \leqq p$ vagy $b \leqq p$.

Világos, hogy ha V egy gyűrű összes ideáljának a halmaza, akkor V-re teljesül a teljes hálógruppoidokat meghatározó (1), (2) és (3) axióma, és ennek a V teljes hálógruppoidnak a prímelemei éppen a gyűrű prímideáljai lesznek.

Be lehet bizonyítani azt, hogy ha V egy tetszőleges teljes hálógruppoid, K egy v-felső részgruppoid, és ha $x \in V$ tetszőleges olyan elem, amelyre $x \notin K$, akkor minden maximális (K, x)-elem prímelem is lesz V-ben.

Minthogy pedig az előzők szerint az összes erősen (K, x)-elemnek az egyesítése a V teljes hálógruppoidban (rögzített x elem mellett) egybeesik az összes maximális (K, x)-elemnek a $z_K(x)$ metszetével, ezért a tetszőleges x elemnek a K-zeroid kváziradikálja bizonyos prímelemek metszetével lesz egyenlő.

Ezért speciálisan, ha V jelenti egy A gyűrű összes ideáljának a teljes hálógruppoidját, akkor A minden I ideáljára és V minden olyan v-felső részgruppoidjára, amelyre $I \notin K$ teljesül, igaz lesz az, hogy a $z_K(I)$ ideál egyenlő A bizonyos prímideáljainak a metszetével. Hasonló igaz a $z_{\mathfrak{N}}(I)$ ideálra is, ahol $\mathfrak{N}$ bizonyos v-felső részgruppoidok halmaza.

Szerző [317] bebizonyította a megfordított állítást is, amely szerint egy A gyűrű minden olyan I ideáljához, amely A bizonyos prímideáljainak a metszete, létezik olyan $\mathfrak{N}$ halmaz, amely az A gyűrű V teljes ideál gruppoidjának bizonyos K v-felső részgruppoidjaiból áll és amelyre teljesül

$$I = Z_{\mathfrak{N}}(0) = \bigcap_{K \in \mathfrak{N}} Z_K(0).$$

Ebben a relációban az A gyűrűnek az I tetszőleges féligprím ideálját (prímideálok metszetét) a szerző úgy állította elő, mint a (0) ideálnak egy $\mathfrak{N}$-zeroid kváziradikálját, persze a megszerkeszthető bármely I nemzérus ideálnak és bármely K olyan v-felső részgruppoiddal egy K-zeroid kváziradikálja, amelyre $I \in K$ és $I \subseteqq Z_K(I) \subseteqq A$, továbbá $Z_K(I) \in V$.

Szerző explicit módon megadta az $\mathfrak{N}$ halmazt az A gyűrű bármely I féligprím ideáljához, amelyre $I = Z_{\mathfrak{N}}(0)$ teljesül. Tehát a Baer-féle alsó nil, a Levitzki-féle, Jacobson-féle és Brown—McCoy-féle radikál zeroid kváziradikál.

Ezek után rátérünk a fenti általánosabb elmélet további gyűrűelméleti alkalmazásaira, köztük Fuchs dolgozata legfőbb eredményeinek a részletesebb tárgyalására is.

Azt mondjuk, hogy az A gyűrűnek a B részhalmaza gyenge blokk az A gyűrűben, ha az A gyűrű mindazon I ideáljai, amelyeknek nem üres halmazelméleti metszete van B-vel, félcsoportot alkotnak, tehát ha $I_1 \cap B \neq \emptyset$ és $I_2 \cap B \neq \emptyset$, akkor $I_1 \cdot I_2 \cap B \neq \emptyset$.

Az üres B halmaz legyen szintén gyenge blokk. Világos az, hogy az A gyűrű tetszőleges P prímideáljainak a halmazelméleti kiegészítője mindig gyenge blokk A-ban. Viszont egy tetszőleges B gyenge blokk esetén az $A \setminus B$ komplementer részhalmaz általában még csak nem is ideál az A gyűrűben. De igaz mégis az, hogy ha B olyan gyenge blokk, hogy az $A \setminus B$ komplementer részhalmaz ideál az A gyűrűben, akkor $A \setminus B$ prímideál is lesz A-ban.

Az A gyűrű gyenge blokkjainak az a legfőbb jelentősége, hogy mindazon I ideáloknak a K_B halmaza, amelyekre $B \cap I$ nem üres, az A gyűrű tetszőleges B gyenge blokkjával, egy v-felső részgruppoidot alkot a gyűrű összes ideáljának a V teljes hálógruppoidjában.

Továbbá egy A asszociatív gyűrű blokkján az olyan B gyenge blokkját értjük, amelyre minden $x \in A$ elem és minden n természetes szám mellett $x \in B$ esetén $x^n \in B$ is teljesül. Az üres B részhalmaz legyen szintén blokk. A definíció szerint tehát kell ahhoz, hogy B blokk is legyen, az, hogy B gyenge blokk legyen. Másfelől létezik olyan blokk, amely nem blokk. Ugyanis, ha $n \geqq 2$, akkor bármely $\mathscr{F}$ ferdetest felett vett $\mathscr{F}_n$ teljes matrixgyűrűben az összes nemzérus elemnek a B halmaza nyilván gyenge blokk, mert $\mathscr{F}_n$ egyszerű gyűrű, de B nem blokk $\mathscr{F}_n$-ben, mert az

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

matrix nyilván olyan, hogy $x \in B$, de $x^2 \notin B$.

Érdemes volna vizsgálni azt, az egyébként még nyitott kérdést, hogy vajon egy A (asszociatív) gyűrűnek minden gyenge blokkja beágyazható-e a gyűrűnek egy (bővebb) blokkjába. Ha ugyanis egy B gyenge blokkot kiegészítjük minden n kitevő mellett az összes b^n hatvánnyal, ahol $b \in B$, még megvizsgálandó az, hogy mikor lesz a kapott egyesítési halmaz blokk is.

Az szinte triviális, hogy az A gyűrű elemei multiplikatív félcsoportjának minden olyan H részcsoportja, amelyre $0 \notin H$ teljesül (itt 0 az A gyűrű nullelemét, nem pedig a V teljes háló legkisebb elemét jelenti, ugyanis $0 \notin V$, de $(0) \in V$) egyszersmind blokk is lesz a gyűrűben. Másfelől nem nehéz megadni explicit módon olyan gyűrűket, amelyekben egy B blokk nem lesz félcsoport a gyűrű szorzásra, vagyis B olyan blokk lesz, amelyben $b_1 \in B$ és $b_2 \in B$ esetén $b_1 b_2 \notin B$ is lehetséges. Itt persze $b_1 \neq b_2$ a blokk definíciója alapján. Ha viszont A kommutatív, és ha a B gyenge blokknak az $A \setminus B$ komplementer halmaza ideál az A gyűrűben, akkor B szükségképpen multiplikatív félcsoport, és B nem tartalmazza az A zéruselemét sem.

Az A gyűrű B blokkjainak pedig az a legfőbb jelentőségük a gyűrűk elméletében, hogy ha az $\mathfrak{N}$ halmaz olyan, hogy csupa olyan K v-felső részfélcsoportokból áll, hogy bármely K halmaz az A gyűrű mindazon I ideáljának a halmaza, amelyekre $I \cap B$ nem üres, ahol B tetszőleges blokk az A gyűrűben, akkor minden L ideálra az ideál $Z_{\mathfrak{N}}(L)$-zéroid kváziradikálja tartalmazza a felső nilradikált, vagyis az összes nilideál $U(A)$ összegét. Ekkor speciálisan

$$Z_{\mathfrak{N}}(0) \geqq U(A)$$

is adódik.

Ennek bizonyítása azon múlik, hogy megmutatjuk azt, hogy az $U(A)$ felső nilradikál erősen (K, L)-ideál lesz mindazokra a K v-felső részfélcsoportokra V-ből az ideálok teljes hálófélcsoportjából, amelyekre $L \notin K$ és $K \in \mathfrak{N}$.

Most konkrétan megemlítünk blokkra néhány olyan példát, amelyek a gyűrűnek zéruselemet nem tartalmazó, multiplikatív részfélcsoportjai, és amelyek közt olyan is előfordul, amely éppen a Fuchs-féle zeroid kváziradikált eredményezi az előzőkben megbeszélt módon:

I) Legyen A (asszociatív) gyűrű, G egy A-jobbmodulus, N egy A-részmodulus G-ben, továbbá H_1 és H_2 olyan részhalmazok G-ben, amelyekre $0 \notin H_2$, $H_1 \subsetneqq H_2$ állanak fenn. Most definiálunk négy olyan M_i részhalmazt az A gyűrűben, amelyek vagy üresek, vagy pedig olyan multiplikatív részfélcsoportok az A gyűrű elemeivel és szorzásával tekintett félcsoportban, amelyek nem tartalmazzák a gyűrű zéruselemét, tehát fennáll $0 \notin M_i$ ($i = 1, 2, 3$ és 4). Az pedig, hogy esetleg valamelyik M_i részhalmaz üres-e, nyilván attól függ, hogy milyen a G A-jobbmodulusban az N részmodulus, továbbá milyen további kapcsolatban áll a H_1 és H_2 részhalmaz G-ben egymással. Legyenek tehát:

(I_1) $M_1 = \{x; x \in A, Nx = N\}$

(I_2) $M_2 = \{x; x \in A, nx = n,$ minden $n \in N$ elemre$\}$

(I_3) $M_3 = \{x; x \in A, H_2 x \subseteqq H_1\}$

(I_4) $M_4 = \{x; x \in A, H_2 x \subsetneqq H_1\}$

Megjegyezzük, hogy az (I_3) alatt levő x elemeket, az ún. nagyító elemek általánosított dualisaként általánosított kisebbítő elemeknek, az (I_4) alatt levő elemeket pedig általánosított, erősen kisebbítő elemeknek lehetne nevezni. E fogalmak a félcsoport elméletében játszanak szerepet.

II) Az A gyűrű összes jobbegységének a halmaza és összes balegységének a halmaza. Megjegyezzük, hogy — miként szokásos — jobbegységen olyan $a \in A$ elemet értünk, amelyre igaz az, hogy minden $b \in A$ elemhez létezik olyan $c \in A$ elem, hogy fennáll $b = c \cdot a$, tehát a minden b elemnek jobbról osztója. A balegység bal-jobb dualitás alapján értelmezhető.

III) Az A gyűrű összes balegységelemének a halmaza, és összes jobbegységelemének a halmaza, vagyis az összes olyan $e_l \in A$ elem halmaza, hogy minden $a \in A$ elemre $a = e_l a$ áll fenn, és az összes olyan $e_r \in A$ elem halmaza, hogy minden $a \in A$ elemre teljesül $a = a e_r$. Világos, hogy pl. bármely balegységelem még inkább balegység és van olyan gyűrű, amelyben egy balegység nem balegységelem. Hasonló igaz a jobbegység és jobbegységelem fogalmának a viszonyára is.

IV) Azok az egyelemű M halmazok, amelyek egy tetszőleges nemzérus idempotens elemet tartalmaznak. (Nyilván $0 \notin M$ és M multiplikatív félcsoport.)

V) Mindazon elemnek a B_l halmaza az A gyűrűben, amelyek A-ban nem baloldali zérusosztók, tehát $b \in B_l$ esetén minden nemzérus $c \in A$ elemre a bc szorzat nemzérus elem. Bal-jobb duális módon definiálható B_r, az A gyűrű összes nem jobbzérus osztójának a halmaza. (Nyilván $0 \notin B_l$, $0 \notin B_r$, továbbá B_l és B_r multiplikatív félcsoportok.)

Minthogy az A gyűrűben az I_1, I_2, I_3, I_4, II, III, IV és V alatt definiált részhalmazok vagy üresek, vagy pedig olyan multiplikatív félcsoportok, amelyek a 0 zéruselemet nem tartalmazzák, ezért e részhalmazok blokkok, tehát gyenge blokkok is. Mindegyik ilyen B blokk egyértelműen meghatározza a V teljes ideálhálófélcsoportban azt a K_B v-felső részháló félcsoportot, amely az A gyűrű mindazon I ideáljaiból áll, amelyekre az $I \cap B$ metszet nem üres. Ez a K_B v-felső részháló pedig minden B-re és A minden $I \notin K_B$ ideáljára meghatároz a fentiek szerint egy olyan

$$Z_{K_B}(I) \in V$$

radikált, amely A bizonyos prímideáljainak a metszete és $J \subseteqq Z_K(I) \subseteqq A$, továbbá $I \cap B$ üres.

Szintén azért, mert mindegyik B vagy üres, vagy pedig multiplikatív félcsoport a gyűrűben, $Z_{K_B}(I)$ tartalmazni fogja a felső nilradikált is, vagyis a gyűrű összes nilideáljának az összegét.

Ha viszonta B gyenge blokk az A gyűrűben nem blokk, előfordulhat az, hogy pl. $Z_{K_B}(0)$ nem tartalmazza az A gyűrű felső nilradikálját.

Az a zéroid kváziradikál, amelyet Fuchs László [111] definiált és vizsgált abból a célból, hogy olyan kváziradikált kapjunk, amelyre minden zérusosztómentes gyűrű féligegyszerű, a szerző [317] fenti általánosabb eredményeiből a következőképpen származtatható.

Legyen B_l az összes nem balzérusosztónak a halmaza és B_r az összes nem jobbnullosztónak a halmaza egy tetszőleges (nem feltétlenül zérusosztómentes) A gyűrűben. Miként az előbbi I_1, I_2, I_3, I_4, II, III, IV, V példáknál láttuk, és B_l, B_r éppen az V esetnél szerepelnek, vagy üres halmazt vagy zéruselemet nem tartalmazó multiplikatív félcsoportokat kapunk, ilyen B_l és B_r is. (Az A gyűrű 0 zéruselemét céljainknak megfelelően hol zérusosztónak, hol nem zérusosztónak tekintjük.) Az előzők szerint B_l és B_r egyértelműen meghatároz egy-egy K_{B_l} és K_{B_r} v-felső részhálófélcsoportot az A összes ideáljából álló V teljes hálófélcsoportban, ezek pedig egyértelműen meghatározzák a (0) ideál megfelelő K_B zeroid kváziradikáliait, azaz

$$Z_{K(B(l))}(0) = Z_l(0)$$

és

$$Z_{K(B(r))}(0) = Z_r(0)$$

ideálokat. (Megjegyzendő, hogy itt az indexben az ismételt zárójelezés az index indexének indexét helyettesíti tipográfiai érdekekből.)

A Fuchs-féle $F(A)$ zeroid kváziradikál az A gyűrűben ennek a $Z_l(0)$ és $Z_r(0)$ ideálnak a metszete, amely tehát a (0) ideálnak az $\mathfrak{N} = \{K_{B_l}, K_{B_r}\}$ halmazhoz tartozó $\mathfrak{N}$-zeroid kváziradikáljával egyenlő. Ezek szerint $F(A)$ az A bizonyos prímideáljainak a metszete.

Továbbá pl. $Z_r(0)$ egyrészt az A gyűrű mindazon I kétoldali ideáljainak az összege, amelyekre $I+J$ minden eleme jobbnullosztó A-ban mindazon J kétoldali ideálokkal, amelyeknek minden eleme jobbnullosztó az A gyűrűben, másrészt $Z_r(0)$ egybeesik az A gyűrű mindazon M kétoldali ideáljainak a metszetével, amelyek az olyan ideálok közt maximálisok, amelyeknek minden eleme jobbzérusosztó az A gyűrűben. Ezek az M ideálok prímideálok az A gyűrűben.

Ezért, ha az A gyűrűben $F(A)=0$, akkor prímgyűrűknek egy szubdirekt összegével izomorf, de A nem feltétlenül zérusosztómentes. Pl. $n \geqq 2$ esetén egy $\mathscr{F}$ ferdetest felett vett $\mathscr{F}_n$ teljes matrixgyűrű Fuchs-féle értelemben féligegyszerű, de nem zérusosztómentes. De ha A zérusosztómentes, akkor $\mathscr{F}(A)=0$ triviálisan teljesül.

Még nyitott kérdés az, hogy vajon érvényes-e mindig $F(A/F(A))=0$. Minthogy az igaz, hogy $F(A)$ tartalmazza A felső nilradikálját, mert B_l és B_r egyaránt blokk az A gyűrűben, érdemes megjegyezni azt, hogy az $A/F(A)$ faktorgyűrűben nincs nemzérus nullideál, ezt Fuchs László [111] mutatta meg.

Amellett, hogy $F(A/F(A))$ végleges kivizsgálása még nem történt meg, van egy másik, éspedig súlyosabb ok is arra, hogy az A gyűrű $F(A)$ zeroid kváziradikálja nem tekinthető radikálnak. Ez az ok az, hogy $F(A)$ nem is radikál Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben. Arról van szó, hogy létezik (éspedig nagyon sok) olyan gyűrű, amely egybeesik a saját, Fuchs-féle zeroid kváziradikáljával, amely tehát

zeroid kváziradikálgyűrű, de a gyűrűnek van olyan nemzérus homomorf képe, amely nem zeroid kváziradikálgyűrű, sőt e homomorf kép éppen féligegyszerű lesz erre a zeroid kváziradikálra nézve. A nagyszámú ilyen példa közül mindjárt egy véges gyűrűt, éspedig négyelemű, kommutatív, egy elemmel generált A gyűrűt mutatunk be, amelyre $A = F(A)$ teljesül, de van olyan B kételemű ideál az A gyűrűben, hogy $F(A/B) = 0$ teljesül:

Legyen ugyanis $A = \{a\}$, ahol a jelenti a két elemű test felett vett

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrixot és az A gyűrű műveletei a matrixok körében végzett összeadás (kivonás) és szorzás. Majdnem triviális az, hogy teljesül $a^3 = a^2$, de $a^2 \neq 0$, és $a + a = 0$. Ezért A összes eleme: 0, a, a^2, $a + a^2$, tehát A valóban négyelemű gyűrű, amely egy elemmel generált. Minthogy $a(a + a^2) = a^2(a + a^2) = 0$ és $(a + a^2)a = 0$, ezért minden nemzérus elem bal oldali és jobb oldali zérusosztó, tehát fennáll $F(A) = A$. Másfelől az $a + a^2$ elem nem nulla, és az általa generált B ideál olyan, hogy A/B kételemű test, tehát fennáll $F(A/B) = 0$.

Ezek szerint $F(A)$ egy tetszőleges A gyűrűben nem radikál Amitsur-féle és Kuros-féle értelemben, mert erre a Fuchs-féle F tulajdonságra már a radikálok 1. axiómája (lásd az I. fejezet elejét) sem teljesül.

Be lehet látni még azt is, hogy az összes Fuchs-féle zeroid kváziradikálgyűrű osztályával meghatározott alsó radikál olyan nagy, hogy erre az alsó radikálra nézve már *minden* asszociatív gyűrű radikálgyűrű.

Ha az A gyűrű a véges sok A_i gyűrűnek a direkt összege, és mindenik i indexre $F(A_i) \neq A_i$, akkor teljesül $F(A) = \sum_{i=1}^{n} \oplus F(A_i)$. Ha pedig a véges sok i közül legalább az egyikre $F(A_i) = A_i$, akkor érvényes $F(A) = A$; ha viszont A végtelen sok A_i gyűrűnek a gyűrűelméleti direkt összege, akkor igaz $F(A) = A$.

Még nyitott kérdés annak a vizsgálata, hogy F-féligegyszerű gyűrűnek F-féligegyszerű gyűrűvel vett milyen bővítései lesznek szintén F-féligegyszerűek, és hogy F kváziradikálgyűrűnek F-kváziradikálgyűrűvel vett bővítései F-kváziradikálgyűrűk. Itt az A gyűrű F-féligegyszerűsége az $F(A) = 0$ feltételt, F-kváziradikál tulajdonsága pedig az $F(A) = A$ feltételt jelenti.

Szerző [317] bebizonyította azt, hogy ha A jobbegységelemes olyan gyűrű, amelyben teljesül a főjobbideálok minimum-feltétele, akkor a Fuchs-féle $F(A)$ zeroid kváziradikál egybeesik a $G(A)$ Brown—McCoy-féle radikállal.

Egyébként pedig, egy tetszőleges A gyűrűben már a $J(A)$ Jacobson-féle radikálra is teljesülhet az, hogy vagy $F(A)$ valódi része a $J(A)$ ideálnak, erre példa az összes páros számlálójú és páratlan nevezőjű racionális tört számnak a gyűrűje, vagy pedig $J(A)$ valódi része a $F(A)$ ideálnak. Utóbbira példa az előbb tárgyalt négyelemű, kommutatív, egy elemmel gererált $A = \{a\}$ matrixgyűrű, mert ebben $0 \neq J(A) = B = (a + a^2) \neq A$, továbbá $F(A) = A$ teljesül.

Még nyitott kérdés annak a vizsgálata, hogy jobbegységelem létezése nélkül vagy a főjobbideálok minimum-feltételének teljesülése nélkül milyen esetekben áll fenn $F(A) = G(A)$ vagy $F(A) = J(A)$.

Megemlítjük még e nyitott kérdéssel kapcsolatban a következő eredményt.

Szerző [317] bebizonyította azt, hogy bármely egységelemes és Neumann-féle

értelemben reguláris A gyűrűben $F(A)=G(A)$, tehát a Fuchs-féle zeroid kváziradikál egybeesik a Brown—McCoy-féle radikállal.

Korábban Fuchs [111] bebizonyította azt a megállapítását, hogy bármilyen Neumann-reguláris és egységelemes A gyűrűben teljesül $F(A)=0$.

Szerző [317] később konstruált ezzel kapcsolatban bizonyos ellenpéldákat. Legyen ugyanis $\aleph_\alpha$ tetszőleges, előre adott végtelen számosság. Explicit módon megadható olyan egységelemes és Neumann-reguláris A gyűrű, amely $F(A)$ Fuchs-féle zeroid kváziradikáljának éppen $\aleph_\alpha$ számú különböző eleme van. Szerzőnek ezek a példái egyszersmind azt is mutatják, hogy a (0) ideálnak $\aleph_\alpha$ számú egymástól különböző olyan általánosított zeroidradikálja létezhet, amelyek különböznek a Fuchs-féle zeroid kváziradikáltól.

Ilyen példák lineáris transzformációk teljes gyűrűiként is választhatók, amihez egy ferdetest felett vett elég nagy rangú vektorteret tekintünk.

A gyűrű felett vett teljes matrixgyűrű Fuchs-féle zeroid kváziradikáljának a vizsgálatához célszerű bevezetni az ún. uniform gyűrű fogalmát.

Ugyanis még nyitott kérdés az, hogy mi lesz egy tetszőleges (asszociatív) A gyűrű felett vett $n\times n$ típusú A_n teljes matrixgyűrűnek a Fuchs-féle kváziradikálja, de az uniform gyűrűk esetében a kérdést Fuchs László megoldotta.

Balról uniformnak nevezünk egy A gyűrűt akkor, ha megvan az a tulajdonsága, hogy minden olyan I kétoldali ideálban fekvő $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekhez, amelynek minden eleme jobbnullosztó A-ban, létezik egy olyan, az a_i elemekre nézve univerzális nemzérus $a\in A$ elem, hogy fennáll

$$aa_1=aa_2=\cdots=aa_n=0$$

Például balról uniform gyűrű minden olyan gyűrű, amely tartalmaz nemzérus balannihilátort, de a baluniformitás enyhébb a nemzérus balannihilátor létezésének a feltételnél.

Minden jobbnullosztómentes gyűrű nyilván balról uniform.

A jobbról uniform gyűrűt duálisan definiáljuk.

A gyűrű uniform akkor, ha egyidejűleg balról és jobbról is uniform.

Ha A jobbról uniform gyűrű, akkor az A felett vett A_n teljes matrixgyűrű egy I kétoldali ideáljának minden (nemzérus) eleme abban és csak abban az esetben A_n-beli baloldali zérusosztó, ha létezik az A gyűrűben olyan K kétoldali ideál, amelyre $K_n\subseteq I$ és K minden eleme baloldali zérusosztó az A gyűrűben.

Ha pedig A tetszőleges uniform gyűrű, A_n az $n\times n$ típusú teljes matrixgyűrű és $F(A)$ jelenti a Fuchs-féle kváziradikált, akkor fennáll $F(A_n)=(F(A))_n$, tehát a Fuchs-féle zeroid kváziradikálnak és a teljes matrixgyűrűnek a képzése egymással sorrendben felcserélhető műveletek uniform gyűrűk esetében.

Ha A tetszőleges (nem feltétlenül uniform) kommutatív gyűrű, akkor A izomorf olyan A_α szubdirekt irreducibilis gyűrűknek egy szubdirekt összegével, hogy mindenik A_α gyűrűnek az $F(A_\alpha)$ zeroid kváziradikálja éppen az A_α gyűrű összes zérusosztójából áll.

Továbbá, ha A tetszőleges olyan kommutatív algebra egy K test felett, amelyre $F(A)\neq A$ teljesül, akkor az $F(A)$ zeroid kváziradikálnak az elemei vagy transzcendensek a K test felett, vagy pedig nilpotens elemek.

Végül megemlítjük azokat a nyitott kérdéseket, hogy vajon mi lesz egy tetszőleges gyűrű felett vett teljes matrixgyűrűnek az a kváziradikálja, amelyet az előzőkben példaképpen említett I_1, I_2, I_3, I_4, II, III vagy IV alatt levő speciális blokk egyike határoz meg.

Továbbá érdemes volna még vizsgálni a főjobbideálokra nézve minimum-

feltételű (jobbegységelemes) gyűrűknek, a Neumann-féle reguláris (egységelemes) gyűrűknek, a kommutatív szubdirekt irreducibilis gyűrűknek, egy test felett vett kommutatív algebrának és tetszőleges gyűrűk gyűrűelméleti direkt összegének az előbbi hét blokk valamelyikének a segítségével meghatározott hét megfelelő kváziradikálját.

E fontos kérdésnek az esetleges megoldása egyrészt nagy mértékben bővítené gyűrűelméleti ismereteinket, másrészt pedig megoldásuk nem látszik reménytelenül nehéznek.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. Abian—W. A. McWorter, On the index of nilpotency of some nil algebras, Boll. Un. Mat. Ital. (3) *18* (1963), 252—255.

[2] S. A. Amitsur, Nil *PI*-rings, Proc. Amer. Math. Soc. *2* (1951), 538—540.

[3] S. A. Amitsur, An embedding of *PI*-rings, Proc. Amer. Math. Soc. *3* (1952), 3—9.

[4] S. A. Amitsur, The problem of Kurosh—Levitzki—Jacobson, Riveon Lemmatematika *5* (1952) 41—48. (héberül).

[5] S. A. Amitsur, A general theory of radicals I, Radicals in complete lattices, Amer. J. Math. *74* (1952), 774—486.

[6] S. A. Amitsur, A general theory of radicals, II. Radicals in rings and bicategories, Amer. J. Math. *76* (1954), 100—125.

[7] S. A. Amitsur, A general theory of radicals, III, Applications. Amer. J. Math. *76* (1954), 126—136.

[8] S. A. Amitsur, The identities of *PI*-rings, Proc. Amer. Math. Soc. *4* (1935), 27—34.

[9] S. A. Amitsur, On rings with identities, J. London Math. Soc. *30* (1955), 464—470.

[10] S. A. Amitsur, A generalization of Hilbert's Nullstellensatz, Proc. Amer. Math. Soc. *8* (1957), 649—656.

[11] S. A. Amitsur, Rings with a pivotal monomial, Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 635—642.

[12] S. A. Amitsur, The radical of field extensions, Bull. Res. Council Israel Sect. F7F (1957/58), 1—10.

[13] S. A. Amitsur, Rational identities and applications to algebra and geometry, J. Algebra *3* (1966), 304—359.

[14] S. A. Amitsur, The radical ring generated by a single element, Riveon Lemmatematika *9*, (1955), 41—44 (héberül).

[15] S. A. Amitsur, Radicals of polynomial rings, Canad. J. Math. *8* (1956), 355—361.

[16] S. A. Amitsur, On the semi-simplicity of group algebras, Michigan Math. J. *6* (1959), 251—253.

[17] T. Anderson—N. Divinsky—A. Sulinski: Hereditary radicals in associative and alternative rings. Canad. J. Math. *17* (1965), 594—603.

[18] T. Anderson—A. G. Heinicke, A note on the Jacobson and Brown-McCoy radicals, Canad. Math. Bull. (sajtó alatt)

[19] V. I. Andrijanov, Vegyes csoportú Hamilton-féle nilgyűrűk, Ural Gosz. Univ. Mat. Zap. *5:3* (1966), 15—30.

[20] V. A. Andrunakievič, Féligradikál és radikál gyűrűk, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *55* (1947), 3—5 (oroszul).

[21] V. A. Andrunakievič, Féligradikál gyűrűk, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *121* (1948), 129—178 (oroszul).

[22] V. A. Andrunakievič, A gyűrű radikáljának a meghatározása, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *16* (1952), 217—224 (oroszul).

[23] V. A. Andrunakievič, Az általánosított *Q*-gyűrűk radikálja, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *18* (1954), 419—426 (oroszul).

[24] V. A. Andrunakievič, Ideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk. Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *98* (1954), 329—332 (oroszul).

[25] V. A. Andrunakievič, Bireguláris gyűrűk, Mat. Szbor. *39* (81) (1956), 447—464 (oroszul)

[26] V. A. Andrunakievič, Antiegyszerű és erősen idempotens gyűrűk, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *21* (1957), 125—144 (oroszul).

[27] V. A. Andrunakievič, Gyűrűk moduláris ideáljai, radikáljai és féligegyszerűsége, Uszpehi Mat. Nauk *12* (1957), 133—139 (oroszul).

[28] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Adalékok az asszociatív gyűrűk radikálelméletéhez, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *113* (1957), 847—490 (oroszul).
[29] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Asszociatív gyűrűk radikáljai, I. Mat. Szbor. *44* (86), (1958), 179—212 (oroszul).
[30] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, A szupernilpotens radikál egy jellemzéséről, Uszpehi Mat. Naul *161* (1961), 127—130 (oroszul).
[31] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Féligradikál ideálok, Szibirszk. Mat. Zs. *1* (1960), 547—554 (oroszul).
[32] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Asszociatív gyűrűk radikáljai II., Mat. Szbor. *55* (97), (1961), 329—346 (oroszul).
[33] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Radikálok és a gyűrű felbontása, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *145* (1962), 9—12 (oroszul).
[34] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Prim-modulusok és a Baer-féle alsó nilradikál, Szibirszk Mat. Zs. *2* (1961), 801—806 (oroszul).
[35] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Erősen reguláris gyűrűk, Bull. Akad. Stiince RSZSZ Moldoven *6* (1964), 75—77 (oroszul).
[36] V. A. ANDRUNAKIEVIČ, Gyengén asszociatív gyűrűk radikáljai, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *134* (1960), 1271—1274 (oroszul).
[37] V. A. ANDRUNAKIEVIČ—JU. M. RJABUHIN, Speciális modulusok és speciális radikálok, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *147* (1962), 1274—1277 (oroszul).
[38] V. A. ANDRUNAKIEVIČ—JU. M. RJABUHIN, Speciális modulusok és speciális radikálok, A Kazáni Egyetem N. G. Csebotarjev Évkönyve (1964), 7—17 (oroszul).
[39] V. A. ANDRUNAKIEVIČ—JU. M. RJABUKIN, Összefüggő gyűrűk, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *162* (1965), 1219—1222 (oroszul).
[40] V. A. ANDRUNAKIEVIČ—JU. M. RJABUKIN, Modulusok és radikálok, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *156* (1964), 991—994 (oroszul).
[41] R. F. ARENS—I. KAPLANSKY, Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc. *63* (1948), 457—481.
[42] E. P. ARMENDARIZ, Hereditary subradicals of the lower Baer radical, Publ. Math. Debrecen (sajtó alatt).
[43] V. I. ARNAUTOV, A Baer-féle topologikus radikál és a gyűrű felbontása, Szibirszk. Mat. Zs. *5* (1964), 1209—1227.
[44] E. ARTIN—C. NESBITT—R. M. THRALL, Rings with minimum condition, Univ. Michigan (1944).
[45] K. ASAW, Über Ringe mit Vielfachenkettensatz, Proc. Imp. Acad. Tokyo *15* (1939), 288—291.
[46] S. ASANO, On the radical of quasi Frobenius algebras, Kodai Math. Semin. Rep. *13* (1961), 135—151.
[47] K. E. AUBERT, Sur le radical de McCoy, C. R. Acad. Sci. Paris *237* (1953), 10—12.
[48] A. M. BABIČ, A Levitzki-féle radikál, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *126* (1959), 241—243 (oroszul).
[49] R. BAER, Radical ideals, Amer. J. Math. *65* (1943), 537—568.
[50] R. BAER, Metaideal, In Report of a Conference on Linear Algebras, Nat. Acad. Sci. (1957), 33—52.
[51] R. BALLIEU, Anneaux finis, systemes hypercomplexes de trois sur un corps commutatif, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I. *61* (1947), 222—227.
[52] D. W. BARNES, On the radical of a ring with minimum condition, J. Austral Math. Soc. *5* (1965), 234—236.
[53] H. BASS, Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc. *95* (1960), 466—488.
[54] M. BECHEANU, Remarque sur les radicaux spéciaux, Rev. Roumaine Math. Pur. Appl. *10* (1965), 357—360.
[55] E. A. BEHRENS, Nichtassoziative Ringe, Math. Ann. *127* (1954), 441—452.
[56] J. C. BEIDLEMAN, Quasiregularitiy in near rings, Math. Z. *89* (1965), 224—229.
[57] J. C. BEIDLEMAN, A radical for near ring modules, Michigan Math. J. *12* (1965), 377—383.
[58] L. P. BELLUCE—S. K. JAIN, A remark on primitive rings and *I*-pivotal monomials, Jour. Math. Soc. *1* (1966), 49—51.
[59] G. M. BERGMAN, A ring primitiv on the right but not on the left, Proc. Amer. Math. Soc. *15* (1964), 473—475.
[60] G. BETSCH, Ein Radikal für Fastringe, Math. Z. *78* (1962), 86—90.
[61] J. E. BJÖRK, Quasi-modular maximal left ideals of primitive rings generated by their minimal left ideals, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[62] R. L. BLAIR, Ideal lattices and the structure of rings, Trans. Amer. Math. Soc. *75* (1953), 135—153.
[63] R. L. BLAIR, A note on -regularity in rings, Proc. Amer. Math. Soc. *6* (1955), 511—515.

[64] F. A. Bostock—E. M. Patterson, A generalization to Divinsky's radical, Proc. Glasgow Math. Soc. *6* (1963), 75—87.
[65] S. Bourne, The Jacobson radical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *37* (1951), 163—170.
[66] S. Bourne—H. Zassenhaus, On the semiradical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *44* (1958), 907—914.
[67] M. P. Brameret, Treillis d'idéaux et structure d'anneaux, C. R. Acad. Sci. Paris *255* (1962), 1434—1435.
[68] R. Brauer, On the nilpotency of the radical of a ring, Bull. Amer. Math. Soc. *48* (1942), 752—758.
[69] B. Brown, An extension of the Jacobson radical, Proc. Amer. Math. Soc. *2* (1951), 114—117.
[70] B. Brown—N. H. McCoy, Radicals and subdirect sums, Amer. J. Math. *69* (1947), 46—58.
[71] B. Brown—N. H. MocCoy, The radical of a ring, Duke Math. J. *15* (1948), 495—499.
[72] B. Brown—N. H. McCoy, The maximal regular ideal of a ring, Proc. Amer. Math. Soc. *1* (1950), 165—171.
[73] B. Brown—N. H. McCoy, Some theorems on groups with applications to ring theory, Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 302—311.
[74] R. L. Busarkina, Elsőfokban nemkommutatív gyűrűk nilpotens generátorokkal, Ural. Gosz. Univ. Mat. Zap. *3:3* (1962), 25—29.
[75] A. Büke, Nilpotente Algebren vom Index 3 über einem Körper der Charakteristik 2, Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul Ser. *622* (1957), 45—89.
[76] W. E. Clark—J. Lewin, On minimal ideals in the circle composition semigroup of a ring, Publ. Math. Debrecen *14* (1967), 99—104.
[77] F. M. Clarke, Note on quasiregularity and the Perlis—Jacobson radical, Portugaliae Math. *11* (1952), 89—94.
[78] P. M. Cohn, On a class of simple rings, Mathematika *5* (1958), 103—117.
[79] P. M. Cohn, Simple rings without zero-divisors and Lie division rings, Mathematika *6* (1959), 14—18.
[80] A. A. Costa, On semiprimary rings, Centro Estudos Mat. Fac. Ci. Porto Publ. *14* (1945), 1—38.
[81] A. A. Costa, Sobre nilideais e ideais quase regulares, Anais Fac. Ci. Porto *34* (1950), 1—28.
[82] W. E. Deskins, A radical for near rings, Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 825—827.
[83] S. E. Dickson, Direct decompositions of radicals, Proc. Confer. Categorical Algebra, La Jolla California (1965), 366—374.
[84] S. E. Dickson, A note on hypernilpotent radical properties for associative rings, Canad. J. Math. *19* (1967), 447—448.
[85] S. E. Dickson, A torsion theory for abelian categories, Trans. Amer. Math. Soc. *121* (1966), 223—225.
[86] J. E. Diem, A radical for lattice ordered rings, Pacific, J. Math. *25:1* (1968), 71—82.
[87] N. Divinsky, Rings and Radicals, London (1965).
[88] N. Divinsky, Pseudo-regularity, Canad. J. Math. *7* (1955), 401—410.
[89] N. Divinsky, *D*-regularity, Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 62—71.
[90] N. Divinsky, On simple semiradical and radical algebras, J. London Math. Soc. *34* (1959), 225—250.
[91] N. Divinsky, General radicals that coincide with the classical radical on rings with D. C. C. Canad. J. Math. *13* (1961), 639—644.
[92] N. Divinsky—A. Suliński, Kurosh radicals of rings with opertors, Canad. J. Math. *17* (1965), 278—280.
[93] M. P. Drazin, Rings with nil commutator ideals, Rend. Circ. Math. Palermo (2) *6* (1957), 51—64.
[94] M. P. Drazin, A generalization of polynomial identities in rings, Proc. Amer. Math. Soc. *8* (1957), 352—361.
[95] R. Dubisch—S. Perlis, The radical of an alternative algebra, Amer. J. Math. *70* (1948), 540—546.
[96] R. Dubisch—S. Perlis, On total nilpotent algebra, Amer. J. Math. *73* (1951), 439—452.
[97] V. P. Elizarov, Kvociens radikálgyűrű, Szibirszk Mat. Zs. *3* (1962), 360—367 (oroszul).
[98] C. C. Faith, Rings with minimum condition for principal ideals, I. Archiv Math. *10* (1959), 327—330. Erratum, Archiv Math. *10* (1959), 480.
[99] C. C. Faith, Rings with minimum condition for principal ideals, II. Archiv Math. *12* (1961), 179—181.
[100] C. C. Faith, Radical extension of rings, Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 274—283.
[101] C. C. Faith—Y. Utumi, On a new proof of Litoff's theorem, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14* (1963), 369—372.

[102] A. FORSYTHE—N. H. MCCOY, On the commutativity of certain rings, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 523—526.
[103] J. FORT, Radical tertiaire d'un sousmodule et sousmodules tertiaires dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif, C. R. Acad. Sci. Paris *254* (1962), 1900—1902.
[104] P. A. FREIDMAN, Jobbidealizátor-feltételű gyűrűk, Izv. Vüszcs. Ucsobn. Zav. Mat. *2* (15), (1960), 213—222 (oroszul).
[105] P. A. FREIDMAN, Idealizátor-feltételű gyűrűk, Ural. Gosz. Univ. Mat. Zap. *4* (1963), 51—58. (oroszul).
[106] P. A. FREIDMAN, Az asszociatív gyűrűk radikáljainak elmélete. Izv. Vüszcs. Ucsobn. Z. Mat. *3* (4), (1958), 225—232 (oroszul).
[107] P. A. FREIDMAN—A. J. ANDRIJANOV, Hamilton-féle gyűrűk, Symp. Alg. Tartu Gosz. Univ. (1966), 120—121 (oroszul).
[108] L. FUCHS, Abelian Groups, Budapest, 1958.
[109] L. FUCHS, Algebra, Egyetemi jegyzet, Budapest.
[110] L. FUCHS, A remark on the Jacobson radical, Acta Sci. Math. Szeged *14* (1952), 167—168.
[111] L. FUCHS, On a new type of radical, Acta Sci. Math. Szeged, 16/1955), 43—53.
[112] L. FUCHS—I. HALPERIN, On the embedding of a regular ring in a regular ring with identity, Fund. Maht. *54* (1964), 285—290.
[113] L. FUCHS—T. SZELE, Contribution to the theory of semi-simple rings, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *3* (1952), 233—239.
[114] I. GELFAND—G. ŠILOV, A topológia bevezetésének különböző módjai egy normált gyűrű maximális ideáljainak a halmazában, Mat. Szbor. *9* (1941), 25—38 (oroszul).
[115] V. I. GEMINTERN, A matrixgyűrűk bizonyos típusai, Szibirszk. Mat. Zs. *5* (1964), 310—318. (oroszul).
[116] M. GERSTENHABER, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, I., Amer. J. Math. *80* (1958), 614—622.
[117] M. GERNSTENHABER, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, II. Duka Math. J. *27* (1960), 21—31.
[118] M. GERNSTENHABER, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, III., Ann. of Math. *70* (1959), 167—205.
[119] M. GERNSTENHABER, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, IV. Ann. of Math. (2), *75* (1962), 382—418.
[120] R. W. GILMER, The pseudo-radical of a commutative ring, Pacific J. Math. *19* (1966), 275—284.
[121] I. M. GOJAN, The Baer radical of near rings, Bull. Akad. Stiince RSS Moldoven *4* (1966), 32—38.
[122] A. W. GOLDIE, The structure of prime rings under ascending chain condition, Proc. London Math. Soc. *8* (1958), 589—608.
[123] A. W. GOLDIE, The structure of prime rings with maximum condition, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *44* (1958), 584—586.
[124] A. W. GOLDIE, Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc. *10* (1950), 201—220.
[125] A. W. GOLDIE, Decompositions of semi simple rings, J. London Math. Soc. *3* (1956), 40—48.
[126] O. GOLDMAN, A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 1021—1027, Addition, Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 956.
[127] O. GOLDMAN, Semi-simple extensions of rings, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 1028—1032.
[128] E. S. GOLOD, Nilalgebrák és véglegesen approximálható p-csoportok, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *28* (1964), 273—276 (oroszul).
[129] E. S. GOLOD—I. R. ŠAFOREVIC, Osztálytestek tornyai, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *28* (1964), 261—272 (oroszul).
[130] L. J. GOLOVENA, Kommutatív radikálgyűrűk, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *14* (1950), 449—472.
[131] L. JA. GRINGLAZ, Lokálisan nilpotens kvázigyűrűk, Ural Gosz. Univ. Mat. Zap. *5* (1965), 35—42.
[132] R. N. GUPTA, On the existence of the Köthe radical and its coincidence with the lower nil radical for a class of rings, Nieuw Archiv voor Wiskunde (3), *16* (1968), 90—93.
[133] M. HALL, The position of the radical in an algebra, Trans. Amer. Math. Soc. *48* (1940), 391—404.
[134] HARISH CHANDRA, On the radical of a Lie algebra, Proc. Amer. Math. Soc. *1* (1950), 14—17.
[135] A. G. HEINICKE, A note on lower radical constructions for associative rings, Canad. Math. Bull. *11* (1968), 23—30.
[136] I. N. HERSTEIN, A theorem of Levitzki, Proc. Amer. Math. Soc. *13* (1962), 213—214.
[137] I. N. HERSTEIN, Theory of rings, Univ. Chicago (1961),

[138] I. N. Herstein, Topics in ring theory, Univ. Chicago (1965).
[139] I. N. Herstein, A counter example in Noetherian rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *54* (1965), 1036—1037.
[140] I. N. Herstein—L. Small, Nil rings satisfying certain chain conditions, Canad. J. Math. *16* (1964), 771—776, An addendum: Canad. J. Math. *18* (1966), 300—302.
[141] G. Higman, On a conjecture of Nagata, Proc. Cambridge Philos. Soc. *52* (1956), 1—4.
[142] H. J. Hoehnke, Nilpotenzkriterien, Math. Ann. *132* (1957), 401—404.
[143] H. J. Hoehnke, Lösung eines Problems von Ch. Hopkins, J. Reine Angew. Math. *198* (1957), 112—120.
[144] H. J. Hoenke, Structure of semigroups. Canad. J. Math. *18* (1966), 449—491.
[145] H. J. Hoehnke, Radikale in allgemeinen Algebren, Math. Nachr. *32* (1966), 347—383.
[146] H. J. Hoehnke, Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, Math. Nachr. *26* (1963), 1—13.
[147] A. E. Hoffman—W. G. Leavitt, A note on the determination of the lower radical construction, J. London Math. Soc. *43* (1968), 617—618.
[148] Ch. Hopkins, Rings with minimal condition for left ideals, Ann. of Math. *40* (1939), 712—730.
[149] Ch. Hopkins, Nilrings with minimal condition for admissible left ideals, Duke Math. J. *4* (1938), 664—667.
[150] K. Hunger, Nilpotence of nil subrings implies more general nilpotence, Archiv. Math. *18* (1967), 136—139.
[151] K. Jizuka, On the Jacobson radical of a semiring, Tohoku Math. J. *11* (1959) 409—421.
[152] K. Jizuka—K. Nakabura, A note on the semiradical of a semiring, Kumamoto, J. Sci. Ser. A *4* (1959), 1—3.
[153] M. Ikeda, Über die einstufig nichtkommutativen Ringe, Nagoya Math. J. *27* (1966), 371—379.
[154] L. S. Ioffe, Modulus radikalja, Szibirszk. Mat. Zs. *5* (1964), 820—826.
[155] J. D. Ion, Radicals of projective limits of associative rings, Stud. Cerc. Mat. *16* (1964), 1141—1145.
[156] K. Iseki, Sur le G-radical d'un anneau topologique, C. R. Acad. Sci. Paris *234* (1952), 1938—1939.
[157] K. Iseki, On the Brown-McCoy radical in topological rings, Anais Acad. Brasil Ci. *25* (1953), 79—86.
[158] K. Iseki—Y. Minayaga, On a radical in a semiring, Proc. Japan Acad. *32* (1956), 562—563.
[159] I. Ivan, The radical and semisimplicity of direct product of algebras, Mat. Fyz. Casopis Slovensk. Akad. Vied. *7* (1957) 158—167. (Szlovákul, angol és orosz összefoglalással.)
[160] N. Jacobson, The Theory of Rings, New-York (1943).
[161] N. Jacobson, Strukture of Rings, Providence (1964).
[162] N. Jacobson, Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc. *57* (1945), 228—245.
[163] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. *67* (1945), 300—320.
[164] N. Jacobson, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, Proc. Nat. Acad. Sci. *31* (1945), 333—338.
[165] N. Jacobson, On the theory of primitive rings, Ann. of Math. *48* (1947), 8—21.
[166] N. Jacobson, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, Ann. of Math. *46* (1945), 695—707.
[167] N. Jacobson, Une généralisation du théorème d'Engel, C. R. Acad. Sci. Paris *234* (1952), 579—581.
[168] J. P. Jans, Compact rings with open radical, Duke Math. J. *24* (1957), 573—577.
[169] W. E. Jenner, The radical of a non-associative ring, Proc. Amer. Math. Soc. *1* (1950), 348—351.
[170] S. A. Jennings, A note on chain condition in nilpotent rings and groups, Bull. Amer. Math. Soc. *50* (1944), 574—763.
[171] S. A. Jennings, On rings whose associated Lie rings are nilpotent, Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 593—597.
[172] S. A. Jennings, Radical rings with nilpotent associated groups, Trans. Royal Soc. Canada Sectio III. (3), *49* (1955), 31—38.
[173] S. A. Jennings, The group ring of a class of infinite nilpotent groups, Canad. J. Math. *7* (1955), 169—187.
[174] R. E. Johnson, Equivalence rings, Duke Math. J. *15* (1948), 787—793.
[175] R. E. Johnson, Prime rings, Duke Math. J. *18* (1951), 799—809.
[176] R. E. Johnson, Prime matrix rings, Proc. Amer. Math. Soc. *16* (1965), 1099—1105.
[177] R. E. Johnson, Representations of prime rings, Trans. Amer. Math. Soc. *74* (1953), 351—357.

[178] A. JONES—G. LUMER, A note on radical rings, Bol. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo *5* (1956), 11—15.
[179] J. KAPLANSKY, On a problem of Kurosh and Jacobson, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 496—500.
[180] J. KAPLANSKY, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. *54* (1948), 575—580.
[181] J. KAPLANSKY, Topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. *54* (1948), 809—826.
[182] J. KAPLANSKY, Infinite Abelian Groups, Univ. Michigan, 1954.
[183] O. KEGEL, Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe, Math. Ann. *149* (1962/63), 258—260.
[184] O. KEGEL, On rings that are sums of two subrings, J. Algebra *1* (1964), 103—109.
[185] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über Artinsche Ringe, Akadémiai Kiadó, Budapest (1968).
[186] KERTÉSZ, A., Gyűrűk Jacobson-féle radikáljáról, MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl. *16* (1966), 441—461.
[187] A. KERTÉSZ, On radical-free rings of endomorphisms, Acta Univ. Debrecen *5* (1959), 159—61.
[188] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, Proc. Amer. Math. Soc. *14* (1963), 595—597.
[189] A. KERTÉSZ, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *8* (1957), 235—257.
[190] KERTÉSZ, A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, III. MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl. *9* (1959), 105—120.
[191] A. KERTÉSZ—O. STEINFELD, On the symmetry of semisimple rings, Amer. Math. Monthly *67* (1960), 450—452.
[192] TH. P. KEZLAN, Some rings with nil commutator ideals, Michigan Math. J. *12* (1965), 105—111.
[193] G. KÖTHE, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, Math. Z. *32* (1930), 161—186.
[194] K. KOH—A. C. MEWBORN, The weak radical of a ring, Proc. Amer. Math. Soc. (sajtó alatt).
[195] K. KOH—A. C. MEWBORN, A class of prime rings, Canad. Math. Bull. *9* (1966), 63—72.
[196] L. A. KOIFMAN, Modulus radikálja, Szibirszk Mat. Zs. *7* (1966), 1204—1207 (oroszul).
[197] A. I. KOSTRIKIN, Az Engel-feltételű Lie-gyűrűk lokális nilpotenciája, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *118* (1958), 1074—1077.
[198] A. I. KOSTRIKIN—I. R. SAFAREVIC, Nilpotens algebrák homológia-csoportjai, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *115* (1957), 1066—1069.
[199] L. G. KOVÁCS, A note on regular rings, Publ. Math. Debrecen *4* (1956), 465—468.
[200] W. KRULL, Jacobsonsches Radikal und Hilbertscher Nullstellensatz, Proc. Internat. Congr. of Math., Cambridge (1950), vol. 2,56—64.
[201] W. KRULL, Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z. *54* (1951), 354—387.
[202] W. M. KUROČKIN, Algebrák felbontása radikál és féligegyszerű részalgebrák féligdirekt összegére, Moszkva, Gosz. Univ. Ucson. Zap. *148* (4), (1951), 192—203. (oroszul).
[203] A. G. KUROS, Gyűrűelméleti problémák, amelyek a periodikus csoportok Burnside-féle problémájával kapcsolatban állanak, Bull. Akad. Nauk. SZSZSZR *5* (1941), 233—241.
[204] A. K. KUROŠ, Gyűrűk és algebrák radikáljai, Mat. Szbor. *33* (75), (1953), 13—26.
[205] A. G. KUROSH, Radicaux en théorie des groupes, Bull. Soc. Math. Belgique *14* (1962), 307—310.
[206] A. G. KUROŠ, Radikálok a csoportelméletben, Szibirszk. Mat. Zs. *3* (1962), 912—931. (oroszul).
[207] A. G. KUROŠ, Csoportelmélet, Moszkva (1967) (oroszul).
[208] S. LAJOS, On quasiideals of regular rings, Proc. Japan Acad. *38* (1962), 210—211.
[209] S. LAJOS, A note on completely regular semigroups, Acta Sci. Math. Szeged *28* (1967), 261—265.
[210] S. LAJOS, Generalized ideals in semigroups, Acta Sci. Math. Szeged *22* (1961), 217—222.
[211] V. N. LATYSEV, Két megjegyzés *PI*-algebrákról, Szibirszk. Mat. Zs. *4* (1963), 112—1121 (oroszul).
[212] R. R. LAXTON, A radical and its theory for distributively generated near-rings, J. London Math. Soc. *38* (1963), 40—49.
[213] R. R. LAXTON, Prime ideals and the ideal radical of a distributively generated near-ring, Math. Z. *83* (1964), 8—17.
[214] W. G. LEAVITT, Sets of radical classes, Publ. Math. Debrecen *14* (1967), 321—324.
[215] L. C. A. VAN LEEUWEN, On the zeroid radical of a ring. Indag. Math. *21* (1959), 428—433.
[216] H. LEPTIN, Linear kompakte Moduln und Ringe, I. Math. Z. *62* (1955), 241—267.
[217] H. LEPTIN, Linear kompakte Moduln und Ringe, II., Math. Z. *87* (1965), 289—327.
[218] J. LEVITZKI, On rings which satisfy the minimum condition for the right hand ideals, Compositio Math. J. (1939), 214—222.
[219] J. LEVITZKI, On the radical of a general ring, Bull. Amer. Math. Soc. *49* (1943), 462—466.

[220] J. LEVITZKI, A characteristic condition for semi-primary rings, Duke Math. J. *11* (1944), 367—368.
[221] J. LEVITZKI, Solution of a problem of G. Koethe, Amer. J. Math. *67* (1945), 437—442.
[222] J. LEVITZKI, On three problems concerning nil-rings, Bull. Amer. Math. Soc. *51* (1945), 913—919.
[223] J. LEVITZKI, On a problem of A. Kurosh, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 1033—1035.
[224] J. LEVITZKI, On powers with transfinite exponents, I. Riveon Lematematika *1* (1946), 8—13 (héberül).
[225] J. LEVITZKI, On powers with transfinite exponents, II., Riveon Lematematika *2* (1947), 1—7 (héberül).
[226] J. LEVITZKI, A lemma on the radical and an application, Riveon Lematematika *3* (1949), 20—24 (héberül).
[227] J. LEVITZKI, On multiplicative systems, Compositio Math. *8* (1950), 76—80.
[228] J. LEVITZKI, A theorem on polynomial identities, Proc. Amer. Math. Soc. *1* (1950), 334—341.
[229] J. LEVITZKI, Prime ideals and the lower radical, Amer. J. Math. *73* (1951), 25—29.
[230] J. LEVITZKI, A note on prime ideals, Riveon Lemmatematika *5* (1951), 1—4 (héberül).
[231] J. LEVITZKI, Contributions to the theory of nilrings, Riveon Lemmatematika *7* (1954), 50—70 (héberül).
[232] J. LEVITZKI, On nil subrings, Israel J. Math. *1* (1963), 215—216.
[233] S. MACLANE, Duality for groups, Bull. Amer. Math. Soc. *56* (1950), 485—516.
[234] R. E. MACRAE, On the nilpotence of nil algebras, Proc. Cambridge Philos. Soc. *59* (1963), 679—680.
[235] L. M. MAHARADZE, Lokálisan nilpotens radikál a lokálisan korlátos topologikus gyűrűkben, Trudü Vücsisz. Centr. Akad. Nauk Gruzin SZSZSZR *2* (1961), 21—22 (oroszul).
[236]. L. M. MAHARADZE, Topologikus gyűrűk nilpotenciájáról, Szoobscs. Akad. Nauk Gruzin SZSZR *40* (1965), 257—269 (oroszul).
[237] A. I. MALCEV, Az algebra előállítása egy radikál részalgebra és egy féligegyszerű részalgebra direkt összegeként, Dokl. Akad. Nauk SZSZSZR *36* (1942), 42—45 (oroszul).
[238] J. M. MARANDA, Injective structures, Trans. Amer. Math. Soc. *110* (1964), 98—135.
[239] N. H. MCCOY, Subdirect sums of rings, Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 856—877.
[240] N. H. MCCOY, Prime ideals in general rings, Amer. J. Math. *71* (1948), 823—833.
[241] N. H. MCCOY, The prime radical of a polynomial ring, Publ. Math. Debrecen *4* (1956), 161—162.
[242] N. H. MCCOY, The theory of rings, New York—London (1964).
[243] W. A. MCWORTER, Some simple properties of simple nil rings, Canad. J. Math. Bull. *9* (1966), 197—200.
[244] G. MICHLER, Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen, Publ. Math. Debrecen *12* (1965), 231—252.
[245] G. MICHLER, Radikale und Sockel, Math. Ann. *167* (1966), 1—48.
[246] G. MICHLER, Radicals and structure spaces, J. Algebra *4* (1966), 199—219.
[247] D. R. MORRISON, Biregular rings and the ideal lattice isomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. *6* (1952), 46—49.
[248] M. NAGATA, On the theory of radicals in a ring, J. Math. Soc. Japan *3* (1951), 330—344.
[249] M. NAGATA, On the nilpotency of nil algebras, J. Math. Soc. Japan *4* (1952), 296—301.
[250] T. NAKANO, A nearly semi-simple ring, Comment. Math. Univ. St. Paul *7* (1959), 27—33.
[251] J. VON NEUMANN, On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *22* (1936), 707—713.
[252] G. PANELLA, On teorema di Golod-Safarevic e alcune sue conseguence, Confer. Sem. Math. Univ. Bari *104* (1966), 17.
[253] D. S. Passman, Nil ideals in group rings, Michigan Math. J. *9* (1962), 375—384.
[254] E. M. PATTERSON, On the radicals of certain rings of infinitive matrices, Proc. Roy. Soc. Edinburg *65* (1960), 263—271.
[255] E. M. PATTERSON, On the radicals of row-finite matrices, Proc. Roy. Soc. Edinburg *66* (1961—62), 42—46.
[256] E. M. PATTERSON, The Jacobson radical of a pseudo-ring, Math. Z. *89* (1965), 348—364.
[257] W. PEREMANS, The radical of a ring, Math. Centrum Amsterdam, Rapport ZW (1950), 013 (hollandul).
[258] S. PERLIS, A characterization of the radical of an algebra, Bull. Amer. Math. Soc. *48* (1942), 128—132.
[259] D. PHAM, Sur les anneaux indexables, C. R. Acad. Sci. Paris *245* (1957), 1683—1685.
[260] E. C. POSNER, Left valuation rings and simple radical rings, Trans. Amer. Math. Soc. *107* (1963), 458—465.
[261] E. C. POSNER, Prime ring satisfying a polynomial identity, Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 180—183.

[262] E. C. POSNER, Primitive matrix rings, Archiv Math. *12* (1961), 97—101.
[263] E. C. POSNER—H. SCHNEIDER, Hyperplanes and prime rings, Arch. Math. *11* (1960), 322—326.
[264] D. RAMAKOTAIAH, Radicals for near-rings, Math. Z. *96* (1967), 45—56.
[265] RÉDEI, L.: Algebra, I., Budapest (1954).
[266] L. RÉDEI, Die einstufig Nicht-Zeroringe und Verallgemeinerungen, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg *22* (1958), 201—214.
[267] JU. M. RJABUHIN, Radikálok kategóriákban, Bul. Stiince Akad. Mold. SZSZR (1964) *6*, 58—74 (oroszul).
[268] JU. M. RJABUHIN, Radikálok beágyazásáról, Bul. Stiince Akad. Mold. SZSZR (1963) *11*, 34—40 (oroszul).
[269] JU. M. RJABUHIN, Szupernilpotens és speciális radikálokról, Iszledov. Algebr. Mat. Anal. Akad. Nauk Mold. SZSZR, Kisinev (1965), 65—72 (oroszul).
[270] JU. M. RJABUHIN, Féligerősen öröklődő radikálok gyűrűk primitív osztályaiban, Iszled. Obscs. Algebr. Kisinev (1965), 111—122.
[271] JU. M. RJABUHIN, Gyűrűk alsó radikáljairól, Mat. Zametki Akad. Nauk SZSZSZR *2* (1967), 239—244 (oroszul).
[272] JU. M. RJABUHIN, Adalékok a gyűrűk alsó nilradikáljának az elméletéhez, Algebrai Logika *6* (1967), 83—92 (oroszul).
[273] P. ROQUETTE, Abspaltung des Radikales in vollständigen lokalen Ringen, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg *23* (1959), 75—113.
[274] J. C. ROBSON, Do simple rings have unity elements? J. Algebra *7* (1967), 140—143.
[275] M. I. ROSEN, The Jacobson radical of a group algebra, Michigan Math. J. *13* (1966), 447—480.
[276] A. D. SANDS, Primitive rings of infinite matrices, Proc. Edinburgh Math. Soc. *14* (1964), 47—53.
[277] A. D. SANDS, Prime ideals in matrix rings, Proc. Glasgow Math. Soc. *2* (1966), 193—195.
[278] E. SĄSIADA, Solution of the problem of existence of a simple radical ring, Bull. Acad. Polon. Sci. Classe III., *9* (1961), 257.
[279] E. SĄSIADA—P. M. COHN, An example of a simple radical ring, J. Algebra *5* (1967á3737—377.
[280] E. SĄSIADA—A. SULIŃSKI, A note on Jacobson radical, Bull. Acad. Polon. Sci. *10* (1962), 421—423.
[281] K. K. SCSUKIN, Csoportok radikálelméletéről, Szibirszk. Mat. Zs. *3* (1962), 932—942 (oroszul).
[282] I. E. SEGAL, The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. *61* (1947), 69—105.
[283] H. SEIDEL, Eine Charakterisierung des 0-Radikales einer Halbgruppe, Math. Nachr. *34* (1967), 163—166.
[284] H. SEIDEL, Über das Radikal einer Halbgruppe, Math. Nachr. *29* (1965), 255—263.
[285] K. SHODA, Bemerkungen über Ringelemente, Proc. Imp. Acad. Tokyo *17* (1941), 328—329.
[286] A. I. ŠIRSOV, Bizonyos nem-asszociatív nilgyűrűk és algebrai algebrák. Mat. Szbor. *41* (1957), 381—394 (oroszul).
[287] L. A. SKORNYAKOV, Lokálisan bikompakt bireguláris gyűrűk, Mat. Szbor. *69* (1966), 663 (oroszul).
[288] M. F. SMILEY, The radical of an alternative ring, Ann. of Math. *49* (1948), 702—709.
[289] M. E. SMILEY, An application of a radical of Brown and McCOY to non-associative rings, Amer. J. Math. *72* (1950), 93—100.
[290] G. SORANI, Radical subrings of matrix rings, Amer. Math. Monthly *73* (1966), 989—991.
[291] O. STEINFELD, Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen, Acta Sci. Math. Szeged *22* (1961), 136—149.
[292] O. STEINFELD, Über die Quasiideale von Ringen, Acta Sci. Math. Szeged *17* (1956), 170—180.
[293] O. STEINFELD, On. idealquotients and prime ideals, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *4* (1953), 289—298.
[294] O. STEINFELD, Ein Beweis des Wedderburn-Artisnchen Struktursatzes, Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. *3* (1958), 63—64.
[295] STEINFELD O., Negatívan rendezett struktúrák prímelemeiről, MTA III. Oszt. Közl. *17* (1962), 467—472.
[296] O. STEINFELD, Eine Charakterisierung der primitiven Ideale eines Ringes, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *19* (1968), 219—220.
[297] M. H. STONE, Application of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 375—381.
[298] E. G. ŠULGEIFER, Multiplikativ struktúrák prímelemfelbontásairól, Ukrain. Mat. Zs. *2* (1950), 100—114 (oroszul).
[299] E. G. ŠULGEIFER, Radikálok általános elmélete kategóriákban, Mat. Szbor. *51* (1960), 487—500 (oroszul).

[300] A. Suliński, Some characterizations of the Brown-McCoy radical, Bull. Acad. Polon. Sci. *5* (1957), 357—359.
[301] A. Suliński, Radicals in associative algebras of finite order, Bull. Acad. Polon. Sci. *5* (1957), 361—363.
[302] A. Suliński, Néhány kérdés a radikálok általános elméletében, Mat. Szbor. *44* (1958), 273—286 (oroszul).
[303] A. Suliński, The Brown-McCoy radical in categories, Fund. Math. *59* (1966), 23—41.
[304] A. Suliński, On subdirect sums of simple rings with unity, Bull. Acad. Polon. Sci. *8* (1960), 223—228.
[305] A. Suliński, A classification of semisimple rings, Bull. Acad. Polon. Sco. *9* (1961), 1—6.
[306] A. Suliński—R. Anderson—N. Divinsky, Lower radical properties for associative and alternative rings, J. London Math. Soc. *41* (1966), 417—424.
[307] I. Sussman—A. L. Foster, On rings in which $a^{n(a)}=a$, Math. Ann. *140* (1960), 324—333.
[308] F. Szász, Unabhängigkeitsfragen des Kurosschen Axiomensystems der Radikale der Ringe. Publ. Math. Debrecen (sajtó alatt).
[309] F. Szász, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, I. Publ. Math. Debrecen *7* (1960), 54—64.
[310] F. Szász, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *12* (1961), 417—439]
[311] F. Szász, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, III. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14* (1963), 447—461.
[312] Szász, F.: A topologikus algebrákról és gyűrűkről, I. Mat. Lapok *13* (1962), 256—278.
[313] Szász, F., A topologikus algebrákról és gyűrűkről, Mat. Lapok *14* (1963), 74—87.
[314] F. Szász, An observation on the Brown-McCoy radical, Proc. Japan Acad. *37* (1961), 413—416.
[315] Szász, F., A teljesen reducibilis operátormodulusokról, MTA III. Oszt. Közl. *11* (1961), 417—425.
[316] Szász, F., Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, MTA III. Oszt. Közl. *10* (1960), 35—38.
[317] F. Szász, Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe, Archiv der Math. *12* (1961), 282—289.
[318] F. Szász, Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *13* (1962), 115—132.
[319] F. Szász, Über Ringe, deren endlich erzeugte echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, MTA Mat. Kut. Int. Közl. *8* (1964), 443—453.
[320] F. Szász, Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, MTA Mat. Kut. Int. Közl. *5* (1960), 287—292.
[321] Szász, F., Gyűrűk maximális jobbideáljairól, MTA III. Oszt. Közl. *17* (1967), 473—476.
[322] F. Szász, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, Monatsh. Math. *67* (1963), 359—362.
[323] F. Szász, Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *18* (1967), 261—272.
[324] F. Szász, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, Acta Sci. Math. Szeged *28* (1967), 31—37.
[325] F. Szász, Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind, Math. Nachr. *34* (1967), 157—161.
[326] F. Szász, Eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, Bull. Acad. Polon. Sci. *15* (1967), 53—56.
[327] F. Szász, The sharpening of a result concerning the primitive ideals of an associative ring, Proc. Amer. Math. Soc. *18* (1967), 910—912.
[328] F. Szász, Die Lösung eines Problems bezüglich des Durchschnittes zweier modularer Rechtsideale in einem Ring, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[329] F. Szász, Über eine symultane Lösung eines halbgruppentheoretischen Problems von L. Rédei und des ringtheoretischen Problems 2 von A. Kertész, Acta Sci. Math. Szeged (sajtó alatt).
[330] F. Szász—R. Wiegandt, On the dualization of subdirect embeddings, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[331] F. Szász—R. Wiegandt, On radicals and semisimplicites in categories, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[332] T. Szele, Nilpotent Artinian rings, Publ. Math. Debrecen *4* (1955), 71—78.
[333] T. Szele, Simple proof of the Wedderburn-Artin structure theorem, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5* (1954), 101—107.

[334] T. Szele, Ein Zerfällungssatz für radikalfreie Ringe, C. R. due Premier Cong. Math. Hungr. 1950 (1952), 429—434.
[335] Szele, T., Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó.
[336] J. Szendrei, On the Jacobson radical of a ring, Publ. Math. Debrecen *4* (1955), 93—97.
[337] L. A. Szimonjan, Lie-algebrák két radikáljáról, Dokl. Akad. Nauk SzSzSzR *157* (1964), 281—283. (oroszul).
[338] G. Thierrin, Sur les ideaux completement premiers d'un anneau quelconque, Acad. Royale Belgique Bull. *43* (1957), 124—132.
[339] G. Theirrin, Sur le radical corpoïdal d'un anneau, Canad. J. Math. *12* (1960), 101—106.
[340] G. Thierrin, Duo rings, Canad. Math. Bull. *3* (1960), 167—172.
[341] G. Thierrin, Extensions radicales et quasi-radicales dans les anneaux, Canad. Math. Bull. *5* (1962), 29—35.
[342] G. Hierrin, Anneaux métaprimitifs, Canad. J. Math. *17* (1965), 119—205.
[343] J. Tiago de Oliviera, Residuals of systems and radicals of rings, Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci. A (2) *5* (1956), 177—248 (portugálul).
[344] A. Tihomirov, Malcev tételének általánosítása a cleft-algebrákról, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *11* (1947), 47—58 (oroszul).
[345] M. Tirnoveanu, Nilpotenciáról és a radikálról, Bul. Inst. Politechn. Bucuresti *24* (1962), 27—35 (románul).
[346] H. Tominaga, Some remarks on radical ideals, Math. J. Okayama Univ. *3* (1954), 139—142.
[347] H. Tominaga, Galois theory of simple rings, Math. J. Okayamo Univ. *6* (1956), 29—48.
[348] H. Tominaga, A^4theorem on rings, Math. J. Okayama Univ. *9* (1959), 9—12.
[349] J. Verhoeff, Recent investigations about the radical of a ring, Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW (1953), 1—7.
[350] E. B. Vinberg, Egy tétel az asszociatív algebrák rangjának végtelenségéről, Izv. Akad. Nauk SZSZSZR *29* (1965), 209—214.
[351] B. L. van der Waerden, Algebra, I. II (Berlin—Göttingen—Heidelberg) (1955).
[352] M. C. Wadell, Properties of regular rings, Duke Math. J. *9* (1952) 623—627
[353] A. P. J. van der Walt, Prime ideals and nil radicals in near rings, Archiv Math. *15* (1964), 408—414.
[354] A. P. J. van der Walt, On the Levitzki radical, Archiv Math. *14* (1965), 22—24.
[355] J. F. Watters, On the adjoint group of a radical ring, J. London Math. Soc. *43* (1968), 725—729.
[356] R. Wiegandt, Über halbeinfache linear kompakte Ringe, Studia Sci. Math. Hungar. *1* (1966), 31—38.
[357] R. Wiegandt, Über linear kompakte reguläre Ringe, Bull. Acad. Polon. Sci. *13* (1965), 445—446.
[358] R. Wiegandt, Über transfinit nilpotente Ringe, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *17* (1966), 101—114.
[359] R. Wiegandt, Über lokal linear kompakte Ringe, Acta Sci. Math. Szeged *28* (1967), 255—260.
[360] R. Wiegandt, Radicals and semisimplicities in categories, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[361] W. G. Witthoft, A class of nilstable algebras, Trans. Amer. Math. Soc. *111* (1962), 413—422.
[362] S. M. Yusuf, The classical radical of an additively inverse semiring, J. Natur Sci. Math. *5:1* (1965), 57—63.
[363] D. Zelinsky, Linearly compact modules and rings, Amer. J. Math. *75* (1953) 79—90.
[364] K. A. Ževlakov, Malcev-algebrák nilradikáljáról, Algebra i Logika Szemin. *4* (1965), 67—78. (oroszul).
[365] M. Zorn, Alternative rings and related questions, I: existence of the radical, Ann. of Math. (2) *42* (1941), 676—686.

РАДИКАЛАХ КОЛЕЦ, III.

Ф. САС

ON RADICALS OF RINGS III.

F. SZÁSZ

HATVÁNYSOR VISELKEDÉSE A KONVERGENCIAKÖR KERÜLETÉNEK EGY PONTJÁBAN

SZÁSZ DOMOKOS

A komplex síkon Abel folytonossági tételének megfogalmazásában három változat lehetséges. Mindegyik változatban egy

$$\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A \tag{1}$$

konvergenciát állítunk, ahol z az egységkörben konvergál az 1-hez, de különböző feltételek mellett:

α) $z\to 1$ az origóból húzott sugáron;

β) $z\to 1$ úgy, hogy közben $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ korlátos marad;

γ) $z\to 1$ tetszőlegesen.

Az eredeti Abel tétel azt állítja, hogy ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{2}$$

sor konvergens, akkor teljesül $(1)_\alpha$, ami azt jelenti, hogy teljesül (1), miközben $z\to 1$ az α) értelemben. (Hasonlóan fogjuk használni a $(\ )_\beta$ és a $(\ )_\gamma$ jelöléseket.) Ismeretes, hogy a tett feltevés mellett igaz az erősebb $(1)_\beta$ állítás is [1], viszont az $(1)_\gamma$ állítás általában már nem igaz, teljesüléséhez erősebb feltételeket kell szabnunk. Elegendő feltétel például a (2) sor abszolút konvergenciája.

Ha a sor tagjai nem negatívak, akkor tehát (2) konvergenciájából következik $(1)_\gamma$. Ha a (2) sor divergens, akkor

$$\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = +\infty$$

nyilvánvalóan érvényes az α) értelemben. Kérdés, hogy ha a konvergenciát a β) vagy a γ) értelemben tekintjük, akkor hogyan viselkedik $z\to 1$ esetén

$$\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \left(\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right),$$

pontosabban mikor igaz

$$\lim_{z\to 1}\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = +\infty \tag{3}$$

β) vagy γ) értelemben.

Egy, a karakterisztikus függvényekre vonatkozó probléma vizsgálatánál felmerült az a kérdés, hogy ha az együtthatók nem negatívak, és a (2) sor divergens, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \tag{4}$$

vajon igaz-e $(3)_\gamma$. Az alábbi megjegyzés célja megmutatni, hogy nem igaz, sőt még egy (4) típusú, de annál erősebb feltétel sem képes biztosítani azt, hogy $(3)_\gamma$ teljesüljön.

TÉTEL. *Legyen $\omega(n)$ a természetes számokon értelmezett nem csökkenő függvény, amelyre $\omega(1)=1$ és $\lim_{n\to\infty} \omega(n) = +\infty$. Ekkor van olyan, az egységkör belsejében konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor, hogy minden a_n valós,*

$$a_n \geqq 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega(n)} < \infty \tag{5}$$

és megadható olyan $\{z_l\}_0^\infty$ $(|z_l|<1,\ z_l \to 1,$ ha $l \to \infty)$ komplex számsorozat, hogy

$$\lim_{l\to\infty} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_l^n = -\infty.$$

Bizonyítás. A tételt úgy bizonyíthatjuk, hogy minden $\omega(n)$ függvényhez konstruálunk egy hatványsort, amelyre teljesül a tétel állítása. Ha minden n-re $\tilde{\omega}(n) \leqq \omega(n)$, akkor az $\tilde{\omega}(n)$ függvényre konstruált hatványsor nyilván $\omega(n)$-re is bizonyít. Adott $\omega(n)$ mellett tehát így fogunk bizonyítani: megadunk egy $\tilde{\omega}(n)$ $(\leqq \omega(n))$ függvényt, és ehhez definiálunk egy a feladat állításának eleget tevő hatványsort.

Legyen

$$n_1 = \min \{n : \omega(n) \geqq 2^2\},$$

$$n_{k+1} = \min \left\{ n : \omega(n) \geqq 2^{2^{k+1}},\ \frac{n}{n_k} \geqq 2^{2^k} \right\} \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Legyen továbbá

$$\tilde{\omega}(n) = \begin{cases} \min\left(\omega(n), 2^2\right), & \text{ha} \quad 1 \leqq n \leqq n_1 \\ \min\left(\omega(n), 2^{2^{k+1}}\right), & \text{ha} \quad n_k < n \leqq n_{k+1} \end{cases} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

$\tilde{\omega}(n)$ nyilván nemcsökkenő függvény, amelyre

$$\tilde{\omega}(1) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{\omega}(n) = +\infty \quad \text{és} \quad \tilde{\omega}(n) \leqq \omega(n).$$

Hatványsorunk a következő alakú lesz

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}, \tag{7}$$

ahol

$$a_{n_k} = \frac{2^{2^k}}{k^2},$$

és

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_{n_k}|^{1/n_k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{2^k/n_k}}{k^{2/n_k}} = 1.$$

$\tilde{\omega}(n)$ definíciójából következik, hogy

$$\tilde{\omega}(n_k) = 2^{2^k},$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n_k}}{\tilde{\omega}(n_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Legyen $z_l = \varrho_l e^{i\varphi_l}$, ahol

$$\varrho_l = 1 - \frac{1}{n_l} \quad \text{és} \quad \varphi_l = \frac{\pi}{n_l}.$$

Ekkor

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z_l^{n_k} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{l-1} a_{n_k} z_l^{n_k} + \operatorname{Re} a_{n_l} z_l^{n_l} + \operatorname{Re} \sum_{k=l+1}^{\infty} a_{n_k} z_l^{n_k} = A + B + C$$

Itt

$$|B| = -B = \frac{2^{2^l}}{l^2} \left(1 - \frac{1}{n_l}\right)^{n_l} \geqq \frac{2^{2^l}}{l^2} \cdot \frac{1}{4} \tag{8}$$

ugyanis $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ monoton nő $\left(\text{és } \frac{1}{e}\text{-hez tart, ha } n \to \infty\right)$. Viszont

$$|A| \leqq \sum_{k=1}^{l-1} a_{n_k} \leqq \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2^{2^k}}{k^2} \leqq (l-1) 2^{2^{l-1}}, \tag{9}$$

és

$$|C| \leqq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2^k}}{k^2} \left(1 - \frac{1}{n_l}\right)^{n_k} = \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2^k}}{k^2} \left[\left(1 - \frac{1}{n_l}\right)^{n_l}\right]^{\frac{n_k}{n_l}} \leqq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2^k}}{k^2} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n_k}{n_l}}$$

így (8)-ból

$$\frac{|C|}{|B|} \leqq 4 \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{l}{k}\right)^2 2^{2^k - 2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n_k}{n_l}}.$$

(6)-ból következik, hogy

$$\frac{n_k}{n_l} = \frac{n_k}{n_{k-1}} \cdot \frac{n_{k-1}}{n_{k-2}} \cdots \frac{n_{l+1}}{n_l} \geqq 2^{2^{k-1} + \cdots + 2^l},$$

így

$$\frac{|C|}{|B|} \leqq 4 \sum_{k=l+1}^{\infty} 2^{2^{k-1} + \cdots + 2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^{k-1}} + \cdots + 2^l}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^{k-1}} + \cdots + 2^l}{2}}.$$

Könnyen belátható, hogy $x > 2$-re az $xe^{-\frac{x}{2}}$ függvény monoton fogy, ezért

$$2^{2^{k-1} + \cdots + 2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^{k-1}} + \cdots + 2^l}{2}} \leqq 2^{2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^l}}{2}},$$

tehát

$$\frac{|C|}{|B|} \leqq 4 \cdot 2^{2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^l}}{2}} \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^{k-1}} + \cdots + 2^l}{2}} \leqq 4 \cdot 2^{2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^l}}{2}} \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^k - 1}}{2}} \leqq$$

$$\leqq c \cdot 2^{2^l} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2^{2^l}}{2}},$$

ahol c az l-től független állandó. (9) és (8) miatt

$$\frac{|A|}{|B|} \leqq \frac{4(l-1)l^2}{2^{2^l}}.$$

Végül is tehát

$$\left| \frac{\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z_l^{n_k}}{B} - 1 \right| \leqq \frac{4(l-1)l^2}{2^{2^l}} + c \cdot \frac{2^{2^l}}{e^{\frac{2^{2^l}}{2}}},$$

ami 0-hoz tart, ha $l \to \infty$. (8)-ból látható, hogy B $-\infty$-hez tart, midőn $l \to \infty$, így

$$\lim_{l \to \infty} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z_l^{n_k} = -\infty.$$

Q.e.d.

Nyitva marad az a kérdés, hogy nem lehet-e az $\omega(n)$ függvény alkalmas megválasztásával biztosítani, hogy (5)-ből csak $(3)_\beta$ következzék.

IRODALOM

[1] А. И. Маркушевич: Теория аналитических функций. т. I. стр. 350. Moszkva, 1967.

ПОВЕДЕНИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА В ОДНОЙ ТОЧКЕ ГРАНИЦЫ КРУГА СХОДИМОСТИ

ДОМОКОШ САНС

SUR LE COMPORTEMENT DE LA SÉRIE DE PUISSANCES EN UN POINT DE LA CIRCONFÉRENCE DE CONVERGENCE

D. SZÁSZ

On démontre la proposition suivante:

THÉORÈME. — *Soit $\omega(n)$ une fonction non décroissante, définie pour les nombres naturels, $\omega(1)=1$, $\omega(n) \to +\infty$ pour $n \to +\infty$. Il existe alors une série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle que les a_n soient réels, qu'on ait*

$$a_n \geqq 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega(n)} < \infty,$$

qu'on puisse trouver une suite $\{z_l\}_0^\infty$ de nombres complexes ($|z_l|<1$, $z \to 1$, si $l \to +\infty$) et que l'on ait

$$\lim_{l \to \infty} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_l^n = -\infty.$$

VÉGTELEN SOROK VÉGESTAGÚ SZORZATSORAINAK KIÉRTÉKELHETŐSÉGÉRŐL ÉS ABEL-FÉLE TULAJDONSÁGÁRÓL

SZABÓ DÁNIEL

A dolgozat választ ad két olyan kérdésre, amelyek a végtelen sorok „végestagú szorzatsoraira" ismert nevezetesebb eredmények alapján természetszerűen vetődnek fel.

Az első pont az előbb említett eredmények felsorolását tartalmazza. Az ezek következményeként felszínre került problémák megfogalmazása a második pont elején található. A továbbiakban a Riemann-féle sorátrendezési tételhez [6] hasonló olyan állítást bizonyítunk be végtelen sorok végestagú szorzatsoraira, amely választ a felvetett kérdésekre is.

1. Vizsgálatainkhoz bevezetünk néhány jelölést és fogalmat.

Jelölje $N=\{(i,k)\}$ a pozitív egész számokból képzett (i,k) rendezett számpárok halmazát.

Adjuk meg az $S=\{N_j : j=1,2,\ldots\}$ halmazt úgy, hogy elemei legyenek olyan páronként diszjunkt, véges $N_j \subset N$ halmazok, amelyekre $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j = N$. Jelölje továbbá

$$R=\{S\} \tag{1}$$

az így értelmezett S-ek halmazát.

E jelölések felhasználásával a végtelen sorok általános végestagú szorzatsorait a következő módon értelmezhetjük:

1. *értelmezés:* Adott

$$\text{a)}\quad X=\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{és} \quad \text{b)}\quad Y=\sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{2}$$ [1]

végtelen sorok valamely $S\in R$ halmaz által generált szorzatsorán a

$$S(X,Y)=Z=\sum_{j=1}^{\infty} z_j=\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{(i,k)\in N_j} x_i y_k\Big) \tag{3}$$

végtelen sort értjük [1].

Az 1. értelmezés alapján tehát minden egyes $S(\in R)$ halmaz a végtelen soroknak egy-egy szorzásmódját hozza létre, amelyeket röviden végestagú szorzásoknak nevezünk annak megfelelően, hogy (3)-ban mindegyik z_j tag véges összeg az N_j definíciója szerint.

[1] A továbbiakban a Σx_n, Σy_n, ... sorokat tagjaiknak megfelelően a X, Y, ... betűkkel jelöljük függetlenül attól, hogy e sorok konvergensek-e, vagy sem; ha a sorok konvergensek, akkor X, Y, ... az összegüket is jelöli.

2. *értelmezés:* Adott $T=[\alpha_{n,k}]_{n,k=1}^{\infty}$ valós számokból álló végtelen mátrix esetében a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ végtelen sort T-szummabilisnek nevezzük (jelben $\Sigma u_n \in T$), ha az $s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$ részletösszegeiből képzett $t_n=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k} s_k$ $(n=1, 2, \ldots)$ sorozat értelmezett és közönséges értelemben konvergens. A $\lim_{n\to+\infty} t_n=t$ határértéket a Σu_n sor T-szummájának nevezzük, és $T(\Sigma u_n)$-nel jelöljük.

3. *értelmezés:* A $T=[\alpha_{n,k}]_{n,k=1}^{\infty}$ mátrix által létesített szummáció permanens, ha minden konvergens Σu_n sorra $\Sigma u_n \in T$ és $T(\Sigma u_n)$ egyenlő a sor összegével.

4. *értelmezés:* Adott $S \in R$ halmaz által generált szorzástípust perfektnek nevezzük, ha tetszőlegesen vett (2)-beli konvergens X és Y sorokra $S(X, Y)$ is konvergens, és a szorzatsor összege a tényezősorok összegének szorzatával egyenlő, azaz $S(X, Y)=X \cdot Y$.

5. *értelmezés:* Adott $S \in R$ halmazzal értelmezett szorzástípust T-perfektnek nevezzük, ha

1° valahányszor a (2) alatti X és Y sorok konvergensek, mindannyiszor $S(X, Y) \in T$;

2° $T(S(X, Y))$ egyenlő az X és Y tényezősorok összegeinek szorzatával, azaz $T(S(X, Y)) = X \cdot Y$.

6. *értelmezés:* Adott $S \in R$ által generált szorzástípust Abel-tulajdonságúnak nevezünk, ha konvergens (2)-beli X és Y sorok esetén az $S(X, Y)$ szorzatsor konvergenciájából következik, hogy a szorzatsor összege szükségképpen a tényezősorok összegének szorzata.

A megadott értelmezések után közöljük azokat az ismert nevezetesebb eredményeket, amelyekhez a 2. pontban bebizonyítandó tételünk kiegészítésként csatlakozik.

(I) A. ALEXIEWICZ megadta a perfekt szorzástípusokat létesítő $S \in R$ halmazok jellemzését [1].

(II) Az alkalmazásokban leggyakrabban használt

$$S_N(X, Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{j} x_i y_j + \sum_{k=1}^{j-1} x_j y_k \right),$$

$$S_C(X, Y) = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\sum_{i+k=j} x_i y_k \right),$$

$$S_D(X, Y) = \sum_{j \cdot 1}^{\infty} \left(\sum_{i+k=j} x_i y_k \right)$$

ún. téglány-, Cauchy- és Dirichlet-szorzásokra érvényesek a következő eredmények:

(IIa) az S_N szorzás perfekt,

(IIb) az S_C szorzás $(C, 1)$-perfekt [2] [2],

---

[2]) A (C, 1)-szumációt az a $T=[\alpha_{n,k}]_{n,k=1}^{\infty}$ mátrix generálja amelyre

$$\alpha_{n,k}=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{ha } k \leqq n \\ 0, & \text{ha } k>n\end{cases}$$

(IIc) az S_D szorzás Abel-tulajdonságú [4].

(III) Ha a (2)-beli X és Y sorok négyzetesen konvergensek, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < +\infty$, akkor tetszőleges $S \in R$ esetén az $S(X, Y)$ szorzatsor 1 valószínűséggel Abel-tulajdonságú [5].

(IV) Megadhatók olyan

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k \right)$$

és

$$B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} b_k \right)$$

alakú konvergens sorok, amelyek ún. Laurent-féle szorzatsora[3] konvergens, és összege C, azaz

$$C = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} \right),$$

de $C \neq AB$. Más szóval a Laurent-szorzás nem Abel-tulajdonságú [3].

2. Az 1. pontban ismertetett bevezetés után természetszerűen vetődik fel a következő általános jellegű, egymással kapcsolatban álló két kérdés:

a) Tetszőlegesn vett $S \in R$ által generált szorzástípushoz megadható-e mindig olyan $T = [\alpha_{n,k}]_{n,k=1}^{\infty}$ mátrix, amellyel képzett szummáció permanens, és ugyanakkor az $S \in R$ által generált szorzástípus T-perfekt?

b) Az 1. értelmezésbeli végestagú szorzástípusok bármely $S \in R$-re Abel-tulajdonságúak-e?

Mindenek előtt ismertetjük azokat a fogalmakat és jelöléseket, amelyeket az a) és b) kérdések válaszát megadó tételünkben fel fogunk használni.

Jelölje M a pozitív egész számok nagyságrend szerint rendezett halmazát.[4]

A $P = \{M_j : j = 1, 2, \ldots\}$ halmazt alkossák az olyan páronként diszjunkt, véges $M_j \subset M$ halmazok, amelyekre $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Az így előállított P-k halmazára vezessük be a

$$\mathscr{P} = \{P\}$$

jelölést.

7. *értelmezés:* Adott

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{4}$$

végtelen sor valamely $P \in \mathscr{P}$ halmazzal generált *végestagú zárójelezett átrendezésén* a

$$P(X) = Y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in M_n} x_i \right)$$

végtelen sort értjük.

---

[3] Az A és B típusú sorokra a Laurent-szorzat a (II)-ben megadott S_c szorzat megfelelőjének tekinthető.

[4] A tetszőleges elemekből álló X halmazt rendezettnek nevezzük, ha bármely két eleme között értelmezve van egy sorrend-reláció, vagyis ha a X halmaz bármely két x, x' eleméről tudjuk, hogy melyik előzi meg a másikat.

8. *értelmezés:* Két tetszőleges halmaz, A és B Descartes-féle szorzatán az összes (a, b) rendezett elempárok halmazát értjük, ahol $a \in A$, $b \in B$, azaz

$$A \otimes B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}.$$

Az e pont elején megfogalmazott kérdésünkre nemleges választ ad az alább

TÉTEL: *Legyen*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{5}$$

feltételesen konvergens,

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad (Y \neq 0) \tag{6}$$

pedig konvergens végtelen sor, legyen továbbá Z tetszés szerint választott valós szám[5]. *Ekkor létezik olyan végestagú szorzás, amely az* (5) *és* (6) *sorok szorzatsoraként a Z valós számhoz konvergáló végtelen sort ad. Megadható továbbá olyan végestagú szorzás is, amely* (5)*-ből és* (6)*-ból divergens szorzatsort képez.*

Bizonyítás: Riemann sorátrendezési tétele [6] értelmében van olyan $P = \{M_j: j = 1, 2, \ldots\}$ végestagú zárójelezett átrendezés, amely az (5) feltételesen konvergens sort átrendezi $\frac{Z}{Y}$-hoz konvergáló végtelen sorba, azaz

$$P(X) = \frac{Z}{Y} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in M_j} x_k \right) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j. \tag{7}$$

Képezzük a (7) és (6) alatti sorok II-ben értelmezett téglány-szorzatát:

$$S_N\left(\frac{Z}{Y}, Y\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{h-1} z_i y_h + \sum_{i=1}^{h} z_h y_i \right) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{h-1} \left(\sum_{k \in M_i} x_k \right) y_h + \sum_{i=1}^{h} \left(\sum_{k \in M_h} x_k \right) y_i \right).$$

Mivel az M_i halmazok értelmezésük szerint páronként diszjunktak, ezért fennáll az

$$S_N\left(\frac{Z}{Y}, Y\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in \bigcup_{i=1}^{h-1} M_i} x_k y_h + \left(\sum_{k \in M_h} x_k \right) \left(\sum_{i=1}^{h} y_i \right) \right) \tag{8}$$

egyenlőség.

Bevezetve az

$$A_h = \{1, 2, \ldots, h\}$$

jelölést és alkalmazva a 8. értelmezést, a (8) alatti sor az

$$S_N\left(\frac{Z}{Y}, Y\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{(k, h) \in \left(\bigcup_{i=1}^{h-1} M_i \right) \otimes h} x_k y_h + \sum_{(k, i) \in M_h \otimes A_h} x_k y_i \right) \tag{9}$$

alakban írható. E felírás figyelembevételével képezzük az

$$N_j = \left\{ (i, k): (i, k) \in \bigcup_{l=1}^{j=1} M_l \otimes j, (i, k) \in M_j \otimes A_j \right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

[5] A tétel akkor is igaz, ha megengedjük, hogy $Z = \pm\infty$ legyen.

halmazokat, majd ezekből állítsuk elő a

$$S = \{N_j : j = 1, 2, \ldots\}, \tag{11}$$

halmazt.

Könnyű belátni, hogy a (11)-beli S-re $S \in R$. Így a (11)-beli S végestagú szorzást generál. (10) alapján tehát (9) a következő alakban írható:

$$S_N\left(\frac{Z}{Y}, Y\right) = \sum_{h=1}^{\infty}\left(\sum_{(i,k)\in N_h} x_i y_k\right).$$

A fenti egyenlőség jobb oldala viszont az (5) és (6) soroknak a (11)-beli S halmaz szerint képezett szorzatsora, azaz

$$S_N\left(\frac{Z}{Y}, Y\right) = S(X, Y). \tag{12}$$

Mivel a téglány szorzással nyert szorzatsor összege — IIa) szerint — a tényezősorok összegeinek szorzata, ezért a (12) bal oldalán álló sor — a (7) és (6) téglányszorzata lévén — összegül a Z értéket adja és így (12) alapján az (5) és (6) sorok (10) és (11) által generált $S(X, Y)$ szorzatsora konvergens és

$$S(X, Y) = \frac{Z}{Y} Y = Z,$$

amivel tételünk első állítását igazoltuk.

Ha tehát $XY \neq Z$ volt, akkor a (11)-ben megadott szorzástípus az (5) és (6) sorokra már nem rendelkezik az Abel-tulajdonsággal, és e szorzástípus — evidensen — semmilyen permanens T szummációra sem lehet T-perfekt. Az a) és b) alatti kérdésekre tehát nemleges választ tudtunk igazolni.

A tételben szereplő második állítás bizonyítását az előbbi gondolatmenet értelemszerű megismétlésével nyerhetjük, ezért azt nem részletezzük.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] ALEXIEWICZ, A.: On multiplication of infinite series. *Studia Math., 10* (1948), 104—112.

[2] CESÁRO, E.: Sur la multiplication des séries, *Bulletin des sciences mathematiques,* (2) *14* (1890), p. 14.

[3] CHAPMAN, S.: Some theorems on the multiplication of series which are infinite in both directions, *Quart. Journ. of Math., 44* (1913), 219—233.

[4] LANDAU, E.: *Handbuch der Primzahlen,* Band II., Leipzig und Berlin 1909, S. 765.

[5] PÁL, L. G.: On general multiplication of infinite series, *Acta Sci. Math., Szeged,* 29 (1968), 317—330.

[6] RIEMANN, B.: *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* Habilitationschrift, Göttingen, 1854.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСЧИСЛЕНИЯ И ОБ АБЕЛОВЫХ СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ РЯДОВ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОНЕЧНОГО ЧЛЕНА БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

Д. САБО

A NOTE ON PRODUCT OF INFINITE SERIES

D. SZABÓ

In this note the author gives an example to a simple method of product forming of infinite series, which has not the Abel's property and is not evaluable perfectly by any permanent Toeplitz-summation method.

AZ EGYENLŐOLDALÚ TETRAÉDEREK TULAJDONSÁGAI ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ TEREKBEN[1]

HORVÁTH JENŐ

A háromszög analóg alakzatának tekinthetjük a térben a tetraédert.[2] A szabályos háromszög analóg alakzatát aszerint kapjuk, hogy a szabályos háromszöget definiáló tulajdonságok melyikével hozzuk kapcsolatba. A definiáló tulajdonságoknak megfelelően négy esettel foglalkozunk.

A. A szabályos háromszög a legnagyobb csúcsszámú poligon, melyben bármely két csúcs távolsága egyenlő. A térben analóg alakzatnak tekinthetjük azt a legnagyobb csúcspontszámú poliédert, melyben bármely két csúcs távolsága egyenlő. Így megfelelő alakzatként a szabályos tetraéder adódik.

B. Ha a szabályos háromszög oldalainak egybevágóságából indulunk ki, akkor analóg alakzatként olyan tetraéder adódik, melynek lapjai egybevágó háromszögek. Az ilyen tetraédert *egyenlőoldalú tetraéder*nek nevezzük.

C. Ha a szabályos háromszög oldalainak hosszúságát tekintjük, akkor analóg alakzatként olyan tetraéder adódik, melynek lapjai *egyenlő területűek*.

D. Végül, ha szabályos háromszöget, mint egyenlőszögű háromszöget tekintjük, akkor analóg alakzatként az egyenlő térszögű tetraédert kapjuk. — Térszögön és a térszög mértékén a következőket értjük. A tetraéder egy csúcsában a lapok triédert alkotnak. Írjunk a szöglet csúcsa, mint középpont köré egy gömböt. A gömbből a szöglet lapjai egy gömbháromszöget vágnak ki. Ismert, hogy a fenti terekben elhelyezkedő gömbfelületen a gömbi geometria érvényes. Így a kimetszett gömbháromszög területe a triéder szögeinek és a gömb sugarának függvénye. Ha a triéder szögeit α-, β-, γ-val jelöljük, akkor a térszög, vagy szöglet mértékén a $\sigma = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ összeget értjük. — *Egyenlő térszögűnek* nevezzük a tetraédert, ha térszögeinek mértéke egyenlő.

KÁRTESZI [1] bebizonyította, hogy az euklideszi térben egy tetraéderre nézve az egyenlőoldalúság és az egyenlőtérszögűség ekvivalens tulajdonságok. Bebizonyította továbbá, hogy az egyenlő térszögű tetraéderek közül maximális térszöggel a szabályos tetraéder rendelkezik.

Dolgozatunkban megmutatjuk, hogy állandó görbületű terekben **B**, **C**, és **D** ekvivalens tulajdonságok. Bebizonyítjuk továbbá, hogy ha az egyenlőoldalú tetraéder lapháromszögeinek szögösszege állandó, akkor a szabályos tetraéder rendelkezik maximális térszöggel.

---

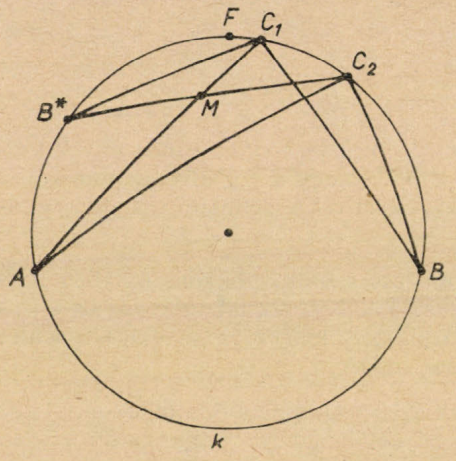
[1] Dolgozatunkban állandó görbületű téren a 3-dimenziós euklideszi és hiperbolikus teret, továbbá a 4-dimenziós egységgömb hiperfelületét értjük.

[2] A 4-dimenziós gömb hiperfelületén egy szférikus tetraéder.

A tételek bizonyítása előtt két egyszerű segédtételt bizonyítunk be.

1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen k az ABC gömbháromszög köré írt köre, F a C-t tartalmazó AB ív felezőpontja és $AC \equiv BC$. Ha a k körön az A és B pontot rögzítjük, és a C pontot F-felé mozgatjuk, akkor az $AC + BC$ összeg növekszik. $AC + BC$ maximális, ha $C \equiv F$.*

Bizonyítás: Legyen a k körbe írt, a segédtétel feltételeit kielégítő két háromszög ABC_1 és ABC_2, ahol $BC_2 < BC_1$. Elég megmutatni, hogy



1. ábra

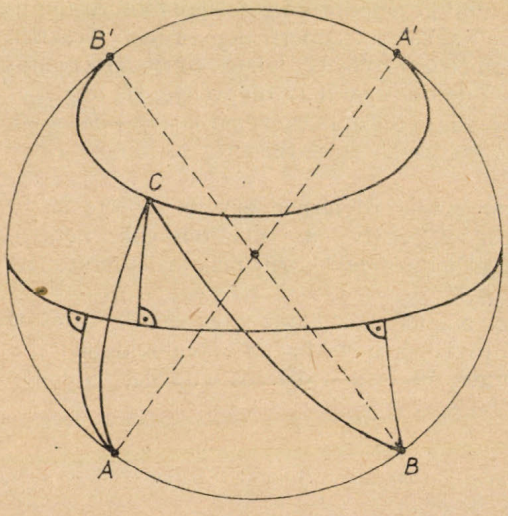
$$(1) \qquad AC_2 + BC_2 < AC_1 + BC_1.$$

(1) nyilván fennáll, ha $AC_2 \leqq AC_1$. Ezért tegyük fel, hogy $AC_2 > AC_1$. Tükrözzük B-t a C_1C_2 szakasz felező merőlegesére. A feltételekből következik, hogy B tükörképe, B^* a C_2-t nem tartalmazó AC_1 ívre esik (1. ábra). Így a k körön a B^* és C_2 pontot elválasztja az A és a C_1 pont. Ezért a B^*C_2 és az AC_1 ívek M metszéspontja létezik. Az AC_2M és a B^*C_1M háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(2) \qquad AC_2 + B^*C_1 < AC_1 + B^*C_2.$$

A tükrözés miatt $BC_1 = B^*C_2$ és $BC_2 = B^*C_1$. Ezeket (2)-be helyettesítve adódik az (1) egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy a segédtétel bizonyítását tükrözésekkel végeztük, így abszolút tétel, azaz érvényes az euklideszi és a hiperbolikus síkon is.



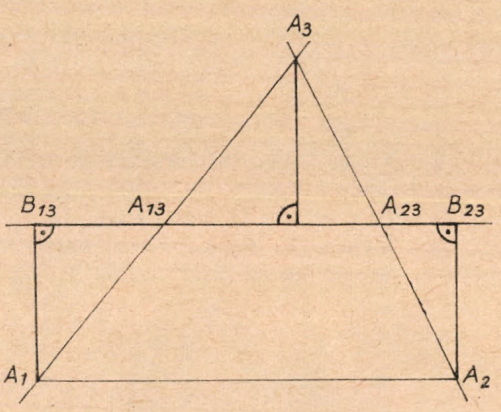
2. ábra

2. SEGÉDTÉTEL: *Ha az ABC gömbháromszög A és B csúcsát rögzítjük, akkor azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre az ABC háromszög területe állandó, két, az AB főkör síkjára szimmetrikus körív, amelyeknek két végpontja A-val és B-vel átellenes A' és B' (Lexell-kör).*

A bizonyítást nem részletezzük. Könnyen megmutatható, hogy ha tekintjük az AC és BC oldalak felezéspontján átmenő az AB főkör által határolt, C-t tartalmazó félgömbre eső ívét, akkor C mértani helye a félkörnek távolságvonala lesz, amelynek végpontjai A-val és B-vel átellenes A' és B' pont (2. ábra).

I. TÉTEL: *Ha egy tetraéder lapjai egyenlő területűek, akkor a tetraéder egyenlő oldalú.*

Bizonyítás: Tekintsük az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder egy lapját, pl. az $A_1A_2A_3$ háromszöget (3. ábra). Jelöljük A_iA_k felezőpontját A_{ik}-val, ($i, k = 1, 2, 3, 4$ $i \neq k$). Húzzunk merőlegest A_1-ből és A_2-ből az $A_{13}A_{23}$ egyenesre. A merőlegesek talppontját jelöljük B_{13}-mal, ill. B_{23}-mal. Nyilvánvaló, hogy az $A_1A_2A_3$ háromszög területe egyenlő az $A_1A_2B_{23}B_{13}$ négyszög (Saccheri-négyszög) területével, továbbá



3. ábra

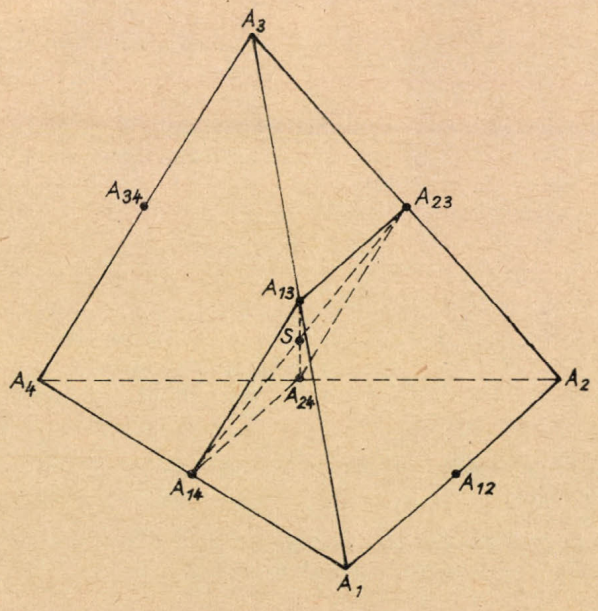
$$B_{13}B_{23} = 2 \cdot A_{13}A_{23} \tag{3}$$

Tekintsük az $A_1A_2A_3$ és az $A_1A_2A_4$ háromszögek A_1A_2 oldalához tartozó Saccherinégyszögeket. Az $A_1A_2A_3$ és az $A_1A_2A_4$ háromszögek területe egyenlő, ezért a Saccherinégyszögekre fennáll, hogy

$$A_1A_2B_{23}B_{13} \cong A_1A_2B_{24}B_{14} \tag{4}$$

Így a két négyszög szimmetrikus az A_1A_2-n átmenő, a tetraéder belső szögét felező síkra. Ebből következik, hogy az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ négyszög egy síkban van és a négyszög síkja merőleges az A_1A_2-n átmenő lapok belső szögfelező síkjára. (3)-ból és (4)-ből következik, hogy

$$A_{14}A_{24} = A_{13}A_{23} \tag{5}$$



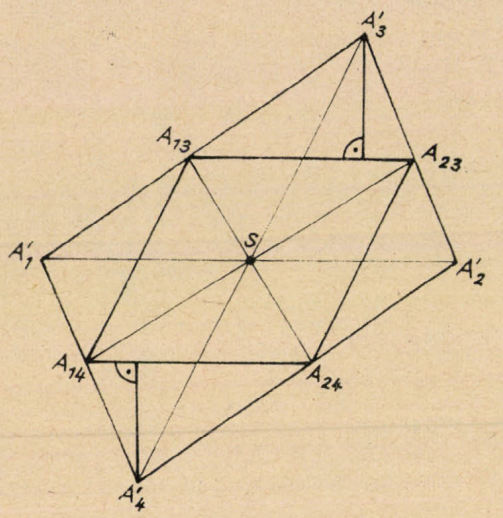
4. ábra

Hasonlóan adódik, hogy az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ négyszög síkja merőleges az A_3A_4-en átmenő lapok belső szögfelező síkjára és

$$A_{14}A_{13} = A_{24}A_{23} \tag{6}$$

(5)-ből és (6)-ból következik, hogy az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ négyszög centrálszimmetrikus. Legyen a szimmetriapontja S (4. ábra).

Vetítsük a tetraédert az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ négyszög síkjára merőlegesen, a csúcsok vetülete legyen A_1', A_2', A_3', A_4' (5. ábra). Mivel az A_1A_2-n átmenő belső szögfelező síkra szimmetrikus az $A_{14}A_{24}$ és az $A_{13}A_{23}$ egyenes, ezért szimmetrikus az $A_1'A_2'$-re is, így $A_1'A_2'$ átmegy S-en. Hasonlóan az $A_3'A_4'$ is átmegy S-en.



5. ábra

Az A_1, A_2, A_3, A_4 csúcsok egyenlő távolságra vannak az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ síktól. Az $A_1A_2A_3$ és az $A_1A_2A_4$ háromszög terület egyenlőségéből következik, hogy A_3-nak az $A_{13}A_{23}$ egyenestől mért távolsága megegyezik A_4-nek az $A_{14}A_{24}$ egyenestől mért távolságával. Ebből következik, hogy A_3'-nek az A_{13} A_{23} egyenestől mért távolsága is megegyezik A_4'-nek az $A_{14}A_{24}$ egyenestől mért távolságával. Így $A_3'A_4'$-nek is felezéspontja S. Hasonlóan felezéspontja S az $A_1'A_2'$ szakasznak is. Könnyen belátható, hogy A_1A_2 és A_3A_4 felezéspontjának vetülete a megfelelő szakasz vetületének is felezéspontja, azaz S. Így az $A_{12}A_{34}$ átmegy S-en és merőleges az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ síkra, ezért felező merőlegese az $A_{14}A_{23}$ és az $A_{13}A_{24}$ szakaszoknak.

Az eddigi gondolatmenetet megismételve, látható, hogy az $A_{14}A_{23}$, az $A_{34}A_{12}$ és az $A_{13}A_{24}$ szakaszok merőlegesen felezik egymást, ezért az $A_{14}A_{24}A_{23}A_{13}$ négyszög szomszédos oldalai is egyenlők.

$$A_{13}A_{14} = A_{13}A_{23} \tag{7}$$

Az $A_1A_2A_3$ és az $A_1A_3A_4$ háromszög területe egyenlő, így (3) és (7) miatt a 3. ábrának megfelelően az $A_1A_2B_{23}B_{13}$ és az $A_3A_4B_{14}B_{13}$ Saccheri-négyszögek egybevágók, ezért $A_1A_2 = A_3A_4$. Hasonlóan megmutatható, hogy $A_1A_3 = A_2A_4$ és $A_1A_4 = A_2A_3$. Ez pedig azt jelenti, hogy a tetraéder lapjai egybevágó háromszögek. Ezzel az I. tételt bebizonyítottuk.

II. TÉTEL: *Egy tetraéderre nézve az egyenlőoldalúság és az egyenlőtérszögűség ekvivalens tulajdonságok.*

Bizonyítás: Legyen az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder A_iA_k $(i \neq k)$ élében találkozó lapok alkotta szög ω_{ik}. Az A_1 csúcspontú tetraéder szöglet mértéke

$$\sigma_1 = \omega_{12} + \omega_{13} + \omega_{14} - \pi$$

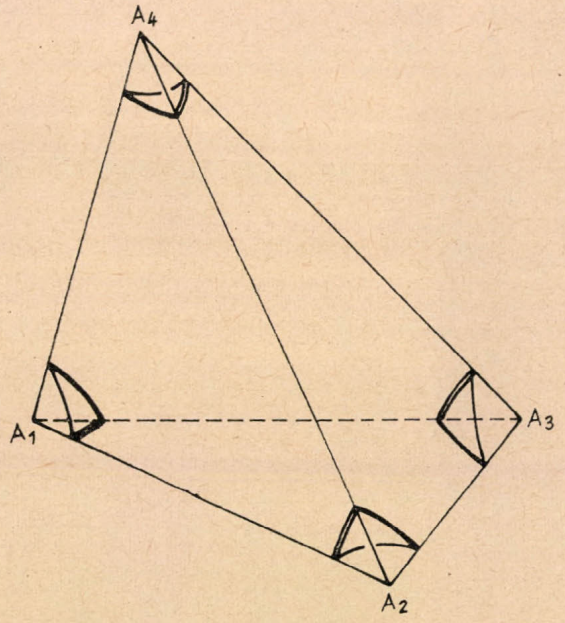
A tetraéder térszögeinek egyenlő voltából ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma$) felírhatjuk az

$$\begin{aligned} \omega_{12} + \omega_{13} + \omega_{14} &= \sigma + \pi \\ \omega_{21} + \omega_{23} + \omega_{24} &= \sigma + \pi \\ \omega_{31} + \omega_{32} + \omega_{34} &= \sigma + \pi \\ \omega_{41} + \omega_{42} + \omega_{43} &= \sigma + \pi \end{aligned} \tag{8}$$

egyenleteket, ahol $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ $(i \neq k)$. (8)-ból következik, hogy

$$\omega_{12} = \omega_{34}, \quad \omega_{13} = \omega_{24} \quad \text{és} \quad \omega_{14} = \omega_{23},$$

azaz az egyenlőtérszögű tetraéder szemközti lapszögei egyenlők. Mivel a lapszögekre három különböző értéket kaptunk és bármely csúcshoz tartozó szögletben fellép mindhárom, ezért egyenlőtérszögű tetraéder szögletei egybevágóak.



6. ábra

A szögletek egybevágóságából következik, hogy a tetraéder lapok megfelelő szögei egyenlők (6. ábra), így nyilván egybevágók is. Az egyenlőoldalú tetraéder pedig nyilvánvalóan egyenlő térszögű.

A III. tétel előtt egy jelölést vezetünk be. Jelöljük az egyenlőoldalú (egyenlőtérszögű) tetraéder lapjainak szögét a_1-, a_2-, a_3-mal. A lapok szögeinek defektusa vagy excesszusa

$$\delta = a_1 + a_2 + a_3 - \pi, \tag{10}$$

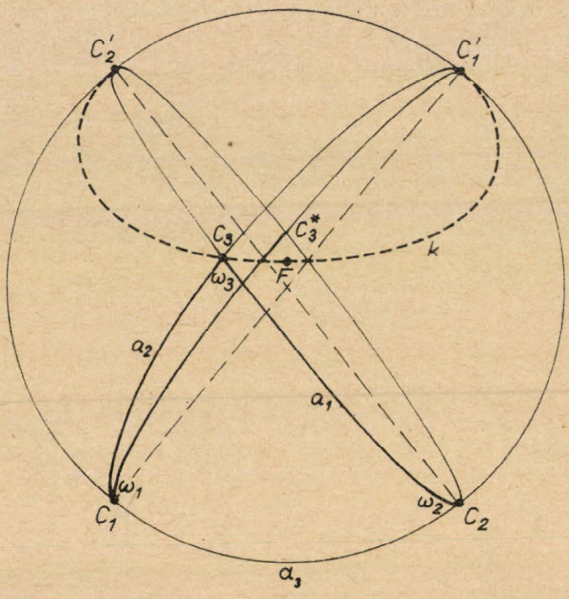
ahol

$$-\pi < \delta < \pi.$$

Azoknak az egyenlőoldalú tetraédereknek az összességét, amelyekre a lapok szögdefektusa v. excesszusa δ állandó, $\mathbf{T}_\delta$-val jelöljük.

III. TÉTEL: *Az egyenlőoldalú és* $\mathbf{T}_\delta$ *osztályba tartozó tetraéderek közül a szabályos tetraédernek van maximális térszöge.*

Bizonyítás: Legyen a (10)-ben bevezetett δ állandó. ($\delta<0$ esetén a tetraéder a hiperbolikus, $\delta=0$ esetén az euklideszi térben és $\delta>0$ esetén a 4-dimenziós egységgömb hiperfelületén van). Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder A_4 csúcsa körül írt gömbből a lapok egy gömbháromszöget vágnak ki. Jelöljük a gömbháromszög csúcsait C_1-, C_2-, C_3-mal, szögeit ω_1-, ω_2-, ω_3-mal és oldalait a_1-, a_2-, a_3-mal (7. ábra).



7. ábra

A térszög mértéke

$$\sigma = \omega_1+\omega_2+\omega_3-\pi$$

Bebizonyítjuk, hogy σ akkor maximális, ha a $C_1C_2C_3$ gömbháromszög szabályos. Ebből már következik, hogy a tetraéder is szabályos.

Tegyük fel, hogy a $C_1C_2C_3$ gömbháromszög nem szabályos. Legyen $C_2C_3>C_1C_3$. Jelöljük a C_1 és C_2 csúcsok átellenes pontjait C_1'-, ill. C_2'-vel, a $C_1'C_2'C_3$-n átmenő, C_1', C_2' végpontú körívet k-val, a $C_1'C_2'$ ív felezéspontját F-fel. Látható, hogy

$$C_1'C_3 = \pi-a_2 \quad \text{és} \quad C_2'C_3 = \pi-a_1 \tag{11}$$

Ha C_3-at k-n mozgatjuk, akkor a $C_1C_2C_3$ gömbháromszög területe nem változik (2. segédtétel). Ha C_3-t k-n F felé mozgatjuk, akkor $C_1'C_3+C_2'C_3$ az 1. segédtétel miatt növekszik, így a $C_1C_2C_3$ gömbháromszög kerülete csökken.

Az utóbbi két megjegyzésből következik, hogy ha C_3^* olyan pont, amelyre fennáll, hogy

$$C_1C_3^* = C_2C_3^* = \frac{C_1C_3 + C_2C_3}{2}, \tag{12}$$

akkor C_3^* a k kör belső pontja. Így a $C_1C_2C_3^*$ háromszög területe nagyobb a $C_1C_2C_3$ háromszög területénél, a kerületük pedig megegyezik. (Jelöljük H_δ-val a $\delta + \pi$ kerületű háromszögek halmazát.)

Ha az így kapott háromszög nem szabályos, akkor az előző eljárást a különböző oldalakra megismételve, a kapott háromszögek területe monoton növekszik és kerülete állandó. (12)-ből következik, hogy az így kapott háromszögek oldalainak különbsége monoton csökkenve 0-hoz tart. Így a gömbháromszögek oldalai a $\delta + \pi$ kerületű szabályos háromszög oldalaihoz tartanak.

Látható, hogy a H_δ osztályba tartozó háromszögek közül tetszőlegest kiválasztva, ha az nem szabályos, akkor van a H_δ osztályba tartozó nagyobb területű háromszög és a H_δ osztályba tartozó szabályos háromszög növekvő területű, H_δ osztályba tartozó háromszögek területe korlátos és az oldalak folytonos függvénye. Ebből következik, hogy a H_δ osztályba tartozó háromszögek közül a szabályos területe maximális. Így a megfelelő tetraéder szabályos. Ezzel a III. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy δ csökkentésével a térszög maximuma is csökken. Hiperbolikus térben az aszimptotikus tetraéder ($\delta = -\pi$) térszögnek mértéke 0.

IRODALOM

[1] Kárteszi, F.: Egy geometriai szélsőértékfeladat, Matematikai Lapok, XVIII. (1967), 1—2. sz. 67—74.

СВОЙСТВА РАВНОСТОРОННИХ ТЕТРАЭДРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

E. XORBAT

Назовем тетраэдр равносторонним тетраэдром (B), если его грани конгруэнтны; тетраэдром равной площади граней (C), если площади его граней равны и равноугольным тетраэдром (D), если меры его углов равны. Равносторонние тетраэдры принадлежат классу $\mathbf{T}_\delta$, если — обозначая углы его треугольных граней через a_1, a_2, a_3 —

$$a_1 + a_2 + a_3 - \pi = \delta,$$

где $-\pi < \delta < \pi$.

В этой работе показываем, что свойства B, C и δ эквивалентны и из тетраэдров, принадлежащих классу $\mathbf{T}_\delta$ имеет правильный тетраэдр максимальный телесный угол

EINE EIGENSCHAFT DER GLEICHSEITIGEN TETRAEDER IM RÄUMEN KONSTANTER KRÜMMUNG

J. HORVÁTH

In Räumen konstanter Krümmung nennen wir ein Tetraeder ein gleichseitiges Tetraeder (B), ein Tetraeder mit gleichen Seitenflächen (C), bzw. ein Tetraeder mit gleichen Raumwinkel (D), wenn seine Seiten kongruent sind, seine Seitenflächen gleich sind, bzw. das Maß seiner Raum-

winkel gleich sind. Wir sagen, daß die gleichseitige Tetraeder zu einer Klasse $\mathbf{T}_\delta$ gehören, wenn $\delta = a_1+a_2+a_3-\pi$, wo wir mit a_1, a_2 und a_3 die Winkel der Seitendreiecke des Tetraeders bezeichneten, und $-\pi<\delta<\pi$.

In dieser Arbeit werden wir zeigen, daß die Eigenschaften *B*, *C* und *D* äquivalent sind, weiterhin daß das regelmäßige Tetraeder von den zu der Klasse $\mathbf{T}_\delta$ gehörigenden Tetraeder einen maximalen Raumwinkel hat.

EGY TÉTEL HATVÁNYSOROKNAK A KONVERGENCIAKÖR HATÁRÁN VALÓ VISELKEDÉSÉRŐL

DEÁK JENŐ

CARLEMAN [1] dolgozatában kimondja, és $\alpha = 0$-ra bebizonyítja az alábbi tételt.

TÉTEL. *Legyen*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(C, α)-szummábilis $z = 1$-ben, $\alpha \geqq 0$. Tegyük fel, hogy $\varphi(t)$ reguláris a $|t| < \varepsilon$ körben, $\varepsilon > 1$, $\varphi(1) = 1$, $|\varphi(t)| < 1$, ha $|t| \leqq 1$ és $t \neq 1$. Érintse a $\varphi(e^{i\theta})$ görbe $\theta = 0$-nál az egységkört első rendben.

A fentiekből következik, hogy $f(\varphi)$-nek a $t = 0$ körüli hatványsora $t = 1$-ben (C, α)-szummábilis.

A BIZONYÍTÁS MENETE. Az f függvény hatványsorának 1-ben való (C, α)-szummabilitása az

$$L(z) = \frac{f(z)}{(1-z)^{\alpha+1}}$$

függvény hatványsorának együtthatóira jelent aszimptotikus feltételt. Az e) pontban bebizonyítjuk a TOEPLITZ—SCHUR-tétel felhasználásával, hogy ez a feltétel $L(\varphi(t))$ hatványsorának együtthatóira is teljesül, ebből már könnyen adódik az f) pontban a tétel állítása. Az e) pontban alkalmazott TOEPLITZ—SCHUR-tétel három feltételének a teljesülését a b), c), d) pontokban igazoljuk. Legelőször azonban kimondunk és bizonyítunk egy lemmát, amit később kétszer is felhasználunk.

a) LEMMA. *Ha*

$$g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p z^p$$

reguláris a $|z| < 1$ körben,

$$h(z) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p z^p$$

reguláris a $|z| < \delta$ körben, $\delta > 1$, továbbá az

$$\left\{\frac{u_p}{A_p^{\alpha}}\right\}_{p=0}^{\infty}$$

sorozat konvergens[1], $\alpha \geqq 0$ *és*

$$g(z)h(z) = \sum_{p=0}^{\infty} r_p z^p \qquad (|z|<1),$$

akkor az

$$\left\{\frac{r_p}{A_p^\alpha}\right\}_{p=0}^{\infty}$$

sorozat is konvergens.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA. Az

$$r_p = \sum_{n=0}^{p} u_n d_{p-n}$$

összefüggés alapján

$$\frac{r_p}{A_p^\alpha} = \sum_{n=0}^{\gamma}\left(\frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha} d_{p-n}\right)\frac{u_n}{A_n^\alpha}.$$

Legyen

$$c_{pn} = \frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha} d_{p-n} \qquad (n \leqq p).$$

Az n rögzítése esetén[2]

(1) $$c_{pn} = d_{p-n}\frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha} = o(1)O(p^{-\alpha}) = o(1).$$

$$\sum_{n=0}^{p} c_{pn} = \sum_{n=0}^{p}\frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha} d_{p-n} = \sum_{n=0}^{p}\frac{A_{p-n}^\alpha}{A_p^\alpha} d_n,$$

ami azonos a Σd_n sor p-edik (C, α)-közepével, tehát

(2) $$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p} c_{pn} = h(1).$$

$$\sum_{n=0}^{p}|c_{pn}| = \sum_{n=0}^{p}\frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha}|d_{p-n}| = \sum_{n=0}^{p}\frac{A_{p-n}^\alpha}{A_p^\alpha}|d_n|,$$

ami azonos a $\Sigma|d_n|$ sor p-edik (C, α)-közepével, tehát

(3) $$\sum_{n=0}^{p}|c_{pn}| = O(1).$$

(1), (2) és (3) alapján a TOEPLITZ—SCHUR-tétellel adódik a lemma állítása.

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA. b) Legyen

$$S(z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}$$

---

[1] $A_p^\alpha = \binom{p+\alpha}{p}$

[2] Az ordók mindenhol a $p\to\infty$ esetre vonatkoznak.

és

$$\varphi^n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} t^p.$$

Ekkor

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} z^n \qquad (|z|<1)$$

és

$$S(\varphi(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} t^p \qquad (|t|<1).$$

Mivel S hatványsora az egységkör belsejében egyenletesen konvergens, a szummációk sorrendje felcserélhető[3], azaz

$$S(\varphi(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} A_{np} \qquad (|t|<1).$$

Másrészt

$$S(\varphi(t)) = S(t)\left[\frac{1-t}{1-\varphi(t)}\right]^{\alpha+1} \qquad (|t|<1).$$

A φ-re kirótt feltételekből következik, hogy $\varphi'(1)>0$ (ennek a bizonyításához nem kell felhasználni, hogy az érintkezés elsőrendű), és így az

$$\left[\frac{1-t}{1-\varphi(t)}\right]^{\alpha+1}$$

függvény 1-nél nagyobb sugarú körben reguláris. A lemmát a

$$g = S, \qquad h(t) = \left[\frac{1-t}{1-\varphi(t)}\right]^{\alpha+1}$$

esetre alkalmazva adódik, hogy a

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{\alpha}}{A_p^{\alpha}} A_{np}\right\}_{p=0}^{\infty} \tag{4}$$

sorozat konvergens.

c) Rögzített n esetén

$$\frac{A_n^{\alpha}}{A_p^{\alpha}} A_{np} = O(p^{-\alpha}) o(1) = o(1). \tag{5}$$

d) Az elsőrendű érintkezést is figyelembe véve adódik, hogy alkalmas $y>0$ választásával, $-y<\theta<y$ esetén

$$\varphi(e^{i\theta}) = \exp\left(-\eta\theta^2 + i\beta\theta + \sum_{\nu=3}^{\infty} \alpha_\nu \theta^\nu + i \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta_\nu \theta^\nu\right), \tag{6}$$

ahol $\eta>0$, $\beta>0$, az α_ν-k és a β_ν-k valósak. Legyen

$$\psi(\theta) = -\eta\theta^2 + \sum_{\nu=3}^{\infty} \alpha_\nu \theta^\nu + i \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta_\nu \theta^\nu. \tag{7}$$

[3] WEIERSTRASS kettőssor-tétele, [2] 510. old.

Válasszuk l-et 0 és y között úgy, hogy

$$\operatorname{Re}\psi(\theta) < -\frac{\eta\theta^2}{2}$$

teljesüljön, ha $-l<\theta<l$. Jelölje E az egységkörvonalnak azt a részét, ahol $|\arg t| \leqq l$, E' pedig az egységkörvonal fennmaradó részét. Ekkor[4]

$$(8)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{A_n^{\alpha}}{A_p^{\alpha}}A_{np}\right| = O(1)\sum_{n=0}^{\infty}|A_{np}|\frac{n^{\alpha}}{p^{\alpha}} =$$

$$= O(1)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_E \frac{\varphi^n(t)}{t^{p+1}}dt\right|\frac{n^{\alpha}}{p^{\alpha}} + \sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{E'}\frac{\varphi^n(t)}{t^{p+1}}dt\right|\frac{n^{\alpha}}{p^{\alpha}}\right\},$$

$$(9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{E'}\frac{\varphi^n(t)}{t^{p+1}}dt\right|\frac{n^{\alpha}}{p^{\alpha}} \leqq \sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha}\int_{E'}|\varphi(t)|^n\cdot|dt| = O(1)\sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha}v^n = O(1),$$

ahol

$$v = \max_{t\in E'}|\varphi(t)| < 1.$$

Legyen

$$\Phi_{np}(\theta) = \exp\left[i(n\beta-p)\theta + n\psi(\theta)\right],$$

ekkor

$$(10)\qquad D_{np} = \int_{-l}^{l}\Phi_{np}(\theta)\,d\theta = \int_E \frac{\varphi^n(t)}{t^{p+1}}dt.$$

j-szeres parciális integrálással ($p\neq n\beta$ esetén):[5]

$$(11)\qquad |D_{np}| \leqq \sum_{\mu=0}^{j-1}\left[\frac{\Phi_{np}(\theta)}{(n\beta-p)^{\mu+1}}F_{\mu}\left(n,\psi'(\theta),\psi''(\theta),\ldots,\psi^{(\mu)}(\theta)\right)\right]_{-l+}^{l} +$$

$$+\frac{1}{|n\beta-p|^j}\left|\int_{-l}^{l}\Phi_{np}(\theta)F_j\left(n,\psi'(\theta),\psi''(\theta),\ldots,\psi^{(j)}(\theta)\right)d\theta\right|,$$

ahol az F_{μ}-k polinomok. Teljes indukcióval belátható, hogy

$$F_{2m} = n^{2m}\psi'^{2m} + n^{2m-1}G_{2m,2m-1}\psi'^{2m-2} + \cdots + n^{m+1}G_{2m,m+1}\psi'^{2} +$$
$$+ n^m G_{2m,m} + n^{m-1}G_{2m,m-1} + \cdots + G_{2m,0},$$

$$F_{2m+1} = n^{2m+1}\psi'^{2m+1} + n^{2m}G_{2m+1,2m}\psi'^{2m-1} + \cdots + n^{m+1}G_{2m+1,m+1}\psi' +$$
$$+ n^m G_{2m+1,m} + n^{m-1}G_{2m+1,m-1} + \cdots + G_{2m+1,0},$$

ahol a G-k ψ magasabb rendű deriváltjainak a polinomjai. Ebből

$$(12)\qquad \left|\int_{-l}^{l}\Phi_{np}(\theta)F_{2m}\,d\theta\right| \leqq$$

$$\leqq \int_0^l e^{-\frac{n\eta\theta^2}{2}}\left(k_{2m,2m}n^{2m}\theta^{2m} + k_{2m,2m-1}n^{2m-1}\theta^{2m-2} + \cdots + k_{2m,m}n^m\right)d\theta,$$

[4] A továbbiakban 0^{α} jelentsen 1-et.

[5] $[H(\theta)]_{a+}^{b} \overset{\text{def}}{=} |H(a)| + |H(b)|$

figyelembe véve l definícióját, valamint azt, hogy ψ' hatványsorában nincs konstans tag; a k-k n-től és p-től független konstansok. (12)-ből:

$$\left|\int_{-l}^{l} \Phi_{np}(\theta) F_{2m}\, d\theta\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{0}^{l\sqrt{n}} e^{-\frac{\eta\theta^2}{2}} \left(k_{2m,2m} n^m \theta^{2m} + k_{2m,2m-1} n^m \theta^{2m-2} + \cdots + k_{2m,m} n^m\right) d\theta \leqq$$

$$\leqq n^{m-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\eta\theta^2}{2}} \left(k_{2m,2m} \theta^{2m} + k_{2m,2m-1} \theta^{2m-2} + \cdots + k_{2m,m}\right) d\theta \leqq k_{2m} n^{m-\frac{1}{2}}.$$

Ugyanez a számítás $2m$ helyett $2m+1$-gyel is elvégezhető, és így

$$\left|\int_{-l}^{l} \Phi_{np}(\theta) F_j\, d\theta\right| \leqq k_j n^{\frac{j-1}{2}}. \tag{13}$$

Másrészt

$$|D_{np}| \leqq O(1) \int_{-l}^{l} e^{-\frac{n\eta\theta^2}{2}} d\theta = O(1) \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-l\sqrt{n}}^{l\sqrt{n}} e^{-\frac{\eta\theta^2}{2}} d\theta \leqq \frac{k^*}{\sqrt{n}}. \tag{14}$$

(6), (7), (10), (11), (13) és (14) alapján:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\int_E \frac{\varphi^n(t)}{t^{p+1}} dt\right| \frac{n^\alpha}{p^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} |D_{np}| \frac{n^\alpha}{p^\alpha} = \sum_{n \leqq \frac{p}{\beta} - \sqrt{p} - 1} |D_{np}| \frac{n^\alpha}{p^\alpha} + \tag{15}$$

$$+ \sum_{\frac{p}{\beta} - \sqrt{p} - 1 < n < \frac{p}{\beta} + \sqrt{p} + 1} |D_{np}| \frac{n^\alpha}{p^\alpha} + \sum_{\frac{p}{\beta} + \sqrt{p} + 1 \leqq n} |D_{np}| \frac{n^\alpha}{p^\alpha} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n \leqq \frac{p}{\beta} - \sqrt{p} - 1} \sum_{\mu=0}^{j-1} \left[\frac{\Phi_{np}(\theta)}{(n\beta - p)^{\mu+1}} F_\mu\right]_{-l+}^{l} \cdot \frac{n^\alpha}{p^\alpha} + \sum_{n \leqq \frac{p}{\beta} - \sqrt{p} - 1} k_j \frac{n^{\frac{j-1}{2}}}{|n\beta - p|^j} \frac{n^\alpha}{p^\alpha} +$$

$$+ \sum_{\frac{p}{\beta} - \sqrt{p} - 1 < n < \frac{p}{\beta} + \sqrt{p} + 1} \frac{k^*}{n} \frac{n^\alpha}{p^\alpha} + \sum_{\frac{p}{\beta} + \sqrt{p} + 1 \leqq n} k_j \frac{n^{\frac{j-1}{2}}}{|n\beta - p|^j} \frac{n^\alpha}{p^\alpha} +$$

$$+ \sum_{\frac{p}{\beta} + \sqrt{p} + 1 \leqq n} \sum_{\mu=0}^{j-1} \left[\frac{\Phi_{np}(\theta)}{(n\beta - p)^{\mu+1}} F_\mu\right]_{-l+}^{l} \cdot \frac{n^\alpha}{p^\alpha} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5,$$

itt j-t olyan páros számnak választjuk, hogy

$$j > 2\alpha + 1 \tag{16}$$

teljesüljön.

$$\Sigma_1+\Sigma_5 \leqq \sum_{|n\beta-p|\geqq\beta\sqrt{p}} \frac{n^\alpha}{p^\alpha} \sum_{\mu=0}^{j-1} \left[\frac{\Phi_{np}(\theta)}{(\beta\sqrt{p})^{\mu+1}} F_\mu\right]_{-l+}^{l} \cdot$$

$$\sum_{|n\beta-p|\geqq\beta\sqrt{p}} \frac{n^\alpha}{p^\alpha} \frac{|\Phi_{np}(l)|}{(\beta\sqrt{p})^{\mu+1}} |F_\mu(n, \psi'(l), \psi''(l), \ldots, \psi^{(\mu)}(l))| =$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha+\mu} |\Phi_{np}(l)| = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha+\mu} |e^{n\psi(l)}| = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha+\mu} |\varphi(e^{il})|^n = O(1),$$

ugyanígy a $-l$ helyen, tehát

(17) $$\Sigma_1+\Sigma_5 = O(1).$$

Elég nagy p-re

$$\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}-1>0,$$

ekkor

(18) $$\Sigma_3 = O(1) \sum_{|n\beta-p|\leqq\beta\sqrt{p}+\beta} \frac{n^\alpha}{p^\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= O(1) \sum_{|n\beta-p|\leqq\beta\sqrt{p}+\beta} \frac{\left(\frac{p}{\beta}+\sqrt{p}+1\right)^\alpha}{p^\alpha} \left(\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}-1\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)(2\sqrt{p}+3)\left(\frac{p}{\beta}+\sqrt{p}+1\right)^\alpha p^{-\alpha}\left(\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}-1\right)^{-\frac{1}{2}} = O(1).$$

Legyen

$$W_p(x) = \frac{x^{\frac{j-1}{2}+\alpha}}{(\beta x-p)^j p^\alpha}.$$

j párosságát felhasználva belátható, hogy $W_p'(x)>0$, ha $x<\frac{P}{\beta}$, így

$$\Sigma_2 \leqq \int_0^{\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}} W_p(x)\,dx.$$

Parciálisan integrálva, majd $\alpha>0$-t és (16)-ot figyelembe véve:

(19) $$\Sigma_2 =$$

$$= O(1)[x^{\frac{j-1}{2}+\alpha} p^{-\alpha}(\beta x-p)^{-j+1}]_{0+}^{\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}} + O(1)\left|\int_0^{\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}} x^{\frac{j-1}{2}+\alpha-1} p^{-\alpha}(\beta x-p)^{-j+1}\,dx\right| =$$

$$= O(1)\left|\left(\frac{p}{\beta}-\sqrt{p}\right)^{\frac{j-1}{2}+\alpha} p^{-\alpha} p^{\frac{-j+1}{2}}\right| + O(1)\int_0^{\frac{p}{\beta}} x^{\frac{j-1}{2}+\alpha-1} p^{-\alpha} p^{\frac{-j+1}{2}}\,dx =$$

$$= O(1)+O(1)p^{-\alpha+\frac{-j+1}{2}}[x^{\frac{j-1}{2}+\alpha}]_0^{\frac{p}{\beta}} = O(1).$$

Ha $x > \frac{p}{\beta}$, akkor (16) alapján belátható, hogy $W_p'(x) < 0$, így

$$\sum_4 \leqq \int_{\frac{p}{\beta}+\sqrt{p}}^{\infty} W_p(x)\,dx.$$

$t = \beta x - p$ helyettesítéssel, majd felhasználva, hogy rögzített $\gamma > 0$ esetén van olyan k konstans, hogy minden $t, p \geqq 0$-ra $(t+p)^\gamma \leqq k(t^\gamma + p^\gamma)$:

(20)
$$\sum_4 = O(1)p^{-\alpha} \int_{\beta\sqrt{p}}^{\infty} (t+p)^{\frac{j-1}{2}+\alpha} t^j\,dt =$$

$$= O(1)p^{-\alpha} \int_{\beta\sqrt{p}}^{\infty} t^{\frac{j-1}{2}+\alpha} t^{-j}\,dt + O(1)p^{-\alpha} \int_{\beta\sqrt{p}}^{\infty} p^{\frac{j-1}{2}+\alpha} t^{-j}\,dt = O(1).$$

(15), (17), (18), (19), (20), (9), (10), (11), és (8) alapján

(21)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha} A_{np} \right| = O(1).$$

e) Legyen

$$L(z) = \frac{f(z)}{(1-z)^{\alpha+1}},$$

ekkor

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha \sigma_n^\alpha z^n,$$

ahol a

$$\{\sigma_n^\alpha\}_{n=0}^{\infty}$$

sorozat a Σa_n sor (C, α)-transzformáltja. Legyen

$$L(\varphi(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} q_p t^p.$$

Másrészt

$$L(\varphi(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha \sigma_n^\alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} t^p,$$

itt ugyanúgy alkalmazhatjuk a WEIERSTRASS-féle kettőssor-tételt, mint a b) pontban, tehát

(22)
$$L(\varphi(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha A_{np} \sigma_n^\alpha,$$

így

$$\frac{q_p}{A_p^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^\alpha}{A_p^\alpha} A_{np} \sigma_n^\alpha.$$

Feltevésünk szerint

$$\{\sigma_n^\alpha\}_{n=0}^{\infty}$$

konvergens, így (4) konvergenciája, (5) és (21) alapján a TOEPLITZ—SCHUR-tétel biztosítja a

$$\left\{\frac{q_p}{A_p^\alpha}\right\}_{p=0}^{\infty}$$

sorozat konvergenciáját, tehát $L(\varphi)$ eleget tesz a lemmában szereplő g-re kirótt feltételeknek.

f) A lemmát a

$$g=L(\varphi), \quad h(t)=\left[\frac{1-\varphi(t)}{1-t}\right]^{\alpha+1}$$

esetre alkalmazva adódik, hogy az

$$\frac{f(\varphi(t))}{(1-t)^{\alpha+1}} = L(\varphi(t))\left[\frac{1-\varphi(t)}{1-t}\right]^{\alpha+1}$$

függvény

$$\sum_{p=0}^{\infty}\gamma_p t^p$$

hatványsorában

$$\left\{\frac{\gamma_p}{A_p^\alpha}\right\}_{p=0}^{\infty}$$

konvergens, ami azt jelenti, hogy $f(\varphi(t))$ hatványsora $t=1$-ben (C,α)-szummábilis, qu. e. d.

MEGJEGYZÉS. CARLEMAN az $\alpha=0$ esetre adott bizonyításában (22)-höz hasonló formulát ír fel közvetlenül $f(\varphi)$-re:

$$f(\varphi(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} t^p \sum_{n=0}^{\infty} A_{np}a_n.$$

A

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{np}a_n\right)$$

sor konvergenciájának a bizonyításához alkalmas átrendezések után elég belátni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\oint_{|t|=1}\frac{\varphi^n(t)}{t^{p+1}}\cdot\frac{1-\varphi(t)}{1-t}\,dt\right|$$

p-től független korlát alatt marad. Ez (21) bizonyításához hasonlóan történik, a (11)-nek megfelelő helyen $j=2$-t véve.

IRODALOM

[1] T. CARLEMAN: Some theorems concerning the convergence of power series on the circle of convergence *Arkiv för matematik, astronomi och fysik* **15** (1920).

[2] SZÁSZ PÁL: A differenciál- és integrálszámítás elemei II.

ТЕОРЕМА О ПОВЕДЕНИИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА ГРАНИЦЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

ЕНЁ ДЕАК

UN THÉORÈME SUR LE COMPORTEMENT DE LA SÉRIE DE PUISSANCE SUR LA CIRCONFÉRENCE DE CONVERGENCE

J. DEÁK

La proposition suivante est prouvée:

THÉORÈME. — *Soit*

$$f(z) = \Sigma a_n z^n$$

sommable (C, α) *au point* $z=1$, $\alpha \geqq 0$. *Supposons que* $\varphi(t)$ *soit régulière dans le circle* $|t|<\varepsilon$, $\varepsilon>1$, $\varphi(1)=1$, $|\varphi(t)|<1$, *pour* $|t| \leqq 1$ *et* $t \neq 1$. *Supposons de plus que la courbe* $\varphi(e^{i\theta})$ *ait un contact de premier ordre avec la circonférence* $|z|=1$ *au point* $\theta=0$. *Alors la series de puissance de* $f(\varphi)$ *développée autour de* $t=0$, *est aussi sommable pour* $t=1$.

Cette proposition a été formulée par T. CARLEMAN [1], mais il ne l'a démontré que pour $\alpha=0$.

TENZORNYALÁBOK KONSTRUÁLÁSA KOORDINÁTA TRANSZFORMÁCIÓKKAL

GERENCSÉR LÁSZLÓ és SZIGETI FERENC

Újabban a matematika több ágában fontossá vált a vektornyaláb fogalma. E fogalom segítségével pl. globálisan definiálható Riemann-metrika differenciálható sokaságokon, sokkal egyszerűbben fejthető ki az úgynevezett K-elmélet. M. ATIYAH [1] és S. LANG [2] szép konstrukciót mutat arra, hogy hogyan kapható vektornyalábból (illetve vektornyalábokból) adott típusú tenzornyaláb. Ebben a dolgozatban más úton konstruálunk tenzornyalábokat felhasználva N. STEENROD [3] vektornyaláb-konstrukcióját. (N. STEENROD a vektornyalábokat a koordináták transzformálódásával adja meg.)

X, Y, ... jelöljenek Banach-terekkel koordinátázott p-szer differenciálható sokaságokat. (A definíció pl. [1]-ben.)

A vektornyaláb fogalma nem annyira ismert, ezért ismertetjük:

Az X C^p-sokaság felett az E halmaz vektornyalábot alkot a $\pi: E \to X$ projekcióval (ahol π az egész X-re képez), ha igazak a következők:

1. Az X-nek van olyan nyílt fedőrendszere $\{U_i, i \in I\}$, amelyre igaz, hogy $\pi^{-1}(U_i)$ kölcsönösen egyértelműen leképezhető $U_i \times \mathbf{E}_i$-re, ahol $\mathbf{E}_i$ Banach tér, $(\tau_i: \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{E}_i)$ minden $i \in I$ esetén. Megköveteljük τ_i-től, hogy az $E_x = \pi^{-1}(x)$-et (az x fölötti fibrumot) $\{x\} \times \mathbf{E}_i$-re képezze. A nyaláb tehát lokálisan direktszorzat, továbbá az (1) diagram nyilvánvalóan kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \overset{\tau_i}{\sim} & U_i \times \mathbf{E}_i \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle pr_1} & \\ & U_i & \end{array} \tag{1}$$

A (π_i, U_i) párt trivializálásnak nevezzük.

2. A trivializálások differenciálhatóan „kapcsolódnak". Ha $x \in U_i \cap U_j$, akkor a $\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x)$ leképezés az $\{x\} \times \mathbf{E}_j$-ről $\{x\} \times \mathbf{E}_i$-re képez. Jelöljük $\tau_{ix}\tau_{jx}^{-1} = g_{ij}(x)$-szel a $\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x)$ által természetes módon indukált $\mathbf{E}_j \to \mathbf{E}_i$ leképezést. Feltesszük, hogy $g_{ij}(x)$ lineáris folytonos izomorfizmus az $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{E}_i$ Banach terek között $(g_{ij}(x) \in \mathrm{Lis}\,(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i))$ és az

$$x \to g_{ij}(x)$$

leképezés $U_i \cap U_j$-t p-szer differenciálhatóan viszi $\mathrm{Lis}\,(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i)$-be.

Az 1.-et és 2.-t kielégítő $\{(U_i, \tau_i \mathbf{E}_i)\ i \in I\}$ halmazt trivializáló rendszernek nevezzük. Két trivializáló rendszer ekvivalens, ha egyesítésük is trivializáló rendszer. Az ekvivalens trivializáló rendszerek ugyanazt a vektornyaláb-struktúrát adják. Az E halmazt ellátjuk C^p-sokaságstruktúrával, így topológiával. Elég megadni természetes módon egy C^p-atlaszt. Ha $\{(U_i, \tau_i, \mathbf{E}_i), i \in I\}$ egy trivializáló rend-

szer E-n, $\{(V_j, \varphi_j), j \in J\}$ C^p-atlasz X-en, akkor $\{(\pi^{-1}(U_i \cap V_j), (\varphi_j \circ \pi, p_2^r \circ \tau_i))$, $i \in I, j \in J\}$ C^p-atlasz E-n.

A $\pi^{-1}(x)$ fibrumon relatív struktúraként egyértelműen kapunk egy lineáris topologikus-tér struktúrát, mely lineárisan és topologikusan izomorf minden olyan $\mathbf{E}_i$ Banach-térrel, amelyre $x \in U_i$. Az $f: E \to F$ leképezést C^p-vektornyaláb-leképezésnek nevezzük, ha:

a) f C^p-morfizmus.

b) fibrumot fibrumba visz.

c) $f|_{\pi^{-1}(x)} \equiv f_x$ lineáris, folytonos leképezés.

a)-ból és b)-ből következik, hogy az $f: E \to F$ leképezés indukál az alapokon egy $\tilde{f}: X \to Y$ leképezést. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{f}$ is C^p-morfizmus.

Az indukált vektornyaláb fogalmát szeretnénk most ismertetni. Legyen $f: X \to Y$ C^p-morfizmus, F vektornyaláb Y fölött. Az $X \times F$ szorzat alakú nyaláb azon alterét nevezzük indukált vektornyalábnak ($f^*(F)$-fel jelöljük), amelynek elemeire $f(x) = \pi_F(u)$. Másképpen: vegyük a $\pi_F^{-1}(f(x))$ fibrumok egyesítését: $f^*(F) = \bigcup_{x \in X} \pi_F^{-1}(f(x))$. Ha $\{(U_i, \tau_i, \mathbf{E}_i), i \in I\}$ az F egy trivializáló rendszere, akkor az indukált vektornyalábot, $f^*(F)$-et így trivializáljuk:

$$\{(f^{-1}(\mathrm{Im} f \cap U_i), (f, \tau_i), \mathbf{E}_i), i \in I\}$$

Legyen $\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ $\mathbf{E}$-ben kontravariáns, $\mathbf{F}$-ben kovariáns funktor, amelynek értékkészlete a Banach-terek kategóriájában van. (Pl. a Hom funktor.) Legyenek $\varphi: \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}$, $\psi: \mathbf{F} \to \mathbf{F}_1$ lineáris folytonos leképezések; akkor

$$\lambda(\varphi, \psi): \lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \to \lambda(\mathbf{E}_1, \mathbf{F}_1)$$

lineáris folytonos leképezés. Ha a

$$\lambda: L(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{F}_1) \to L(\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}), \lambda(\mathbf{E}_1, \mathbf{F}_1))$$

leképezés p-szer differenciálható, akkor λ-t p-szer differenciálható funktornak nevezzük. Most már kimondhatjuk tételünket:

TÉTEL: Legyen λ C^p-funktor. Ekkor létezik olyan λ funktor az X feletti vektornyalábokon, melyre

1. $\lambda(E, F)$ olyan vektornyaláb, melynek az $x \in X$ pont fölötti fibruma $\lambda(E_x, F_x)$-szel izomorf. (A funktor fibrumonként hat.)

2. Legyenek E_1, F_1 az Y fölötti, E, F az X fölötti vektornyalábok, $f: E_1 \to E$, $g: F \to F_1$ C^p-vektornyaláb-leképezések, hogy $\tilde{f}^{-1} = \tilde{g}$. Ekkor a $\lambda(f, g): \lambda(E, F) \to \lambda(E_1, F_1)$ C^p-vektornyaláb-leképezést szálanként a $\lambda(f_x, g_x)$ leképezéssel adhatjuk meg.

3. Ha az E, F vektornyalábok X fölött triviálisak, akkor $\lambda(E, F)$ is. (Ha $E = X \times \mathbf{E}$, $F = X \times \mathbf{F}$, akkor $\lambda(E, F) = X \times \lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.)

4. A λ hatása felcserélhető a *-gal, az indukált vektornyaláb-képzéssel; azaz, ha $f: X \to Y$, E, F vektornyalábok Y fölött, akkor $f^*(\lambda(E, F)) = \lambda(f^*(E), f^*(F))$.

Megjegyzés: A $\lambda(E, F)$ vektornyalábot λ-típusú tenzornyalábnak nevezzük.

Mielőtt a bizonyításra térnénk, ismertetjük Steenrod „struktúrafüggvényeit" és vektornyaláb-konstrukcióját. Ha az E vektornyalábnak ismerjük az $\{(U_i, \tau_i, \mathbf{E}_i), i \in I\}$ trivializáló rendszerét, akkor könnyen kaphatunk az X C^p-sokaság fölött egy koordináta-transzformációt a következőképpen:

$$g_{ij}(x) = \tau_{ix} \tau_{jx}^{-1} \quad \text{ha} \quad x \in U_i \cap U_j$$

Nyilvánvaló, hogy g_{ij} C^p-morfizmus, $(g_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathrm{Lis}(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i))$.

α) $g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$, ha $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

β) $g_{ii}(x) = id_{\mathbf{E}_i}$.

$\{U_i, i \in I\}$ nyílt fedőrendszere X-nek, és legyenek adottak a $g_{ij}(x)$ C^p-függvények, melyek rendelkeznek az α), β) tulajdonságokkal. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$\{U_i, g_{ij} | i, j \in I\} \tag{2}$$

az X C^p-sokaságon megadott koordináta-transzformációk halmaza. Természetesen vetődik fel a következő két kérdés: Szerkeszthető-e (2)-ből vektornyaláb, melynek (2) koordinátatranszformációja?

Egyértelmű-e a konstrukció?

Először az utóbbi kérdésre válaszolunk. Legyen E, illetve F olyan vektornyaláb, melynek az $\{(U_i, \tau_i, \mathbf{E}_i)\ i \in I\}$, illetve $\{(U_i, \sigma_i, \mathbf{E}_i)\ i \in I\}$ trivializáló rendszeréből éppen az (1) koordináta-transzformációkat kapjuk. Ekkor az $u \leftrightarrow \sigma_{ix}^{-1}\tau_{ix}u$ leképezés egyrészt független i-től, másrészt kölcsönösen egyértelmű, mindkét irányban p-szer differenciálható vektornyaláb-leképezés, így E és F izomorfak.

Legyen T az $U_i \times \mathbf{E}_i \times \{i\}$ halmazok uniója. Ekvivalencia-relációt vezetünk be T-n.

$$(x, e, i) \sim (x', e', j)$$

ha $x = x'$ és $g_{ij}(x)é = e$. Az (x, e, i) elem osztályát $p(x, e, i)$ jelölje. Ezek az osztályok alkotják az E halmazt.

A $\pi: E \to X$ projekció nyilvánvalóan a

$$\pi(p(x, e, i)) = x$$

leképezéssel adható meg.

Legyen a

$$\vartheta_i: U_i \times \mathbf{E}_i \to \pi^{-1}(U_i)$$

leképezés a következő:

$$\vartheta_i(x, e) = p(x, e, i)$$

$\vartheta_i(x, e)$ fibrumonkénti izomorfizmus, hiszen $(x, e, i) \sim (x, é, i)$ akkor és csak akkor, ha $g_{ii}(x)é = e$, azaz $e = é$. Ha $\vartheta_i(x, e) = \vartheta_j(x, é)$, akkor az ekvivalencia definíciója szerint $e = g_{ij}(x)é$, másrészt $\vartheta_{ix}^{-1}\vartheta_{jx}é = e$, így $g_{ij}(x) = \vartheta_{ix}^{-1}\vartheta_{jx}$. Innen már következik, hogy $\{(U_i, \vartheta_i^{-1}, \mathbf{E}_i)\ i \in I\}$ trivializáló rendszere E-nek.

Ezzel E-n definiáltunk egy olyan vektornyaláb-struktúrát, melynek az $\{(U_i, \vartheta_i^{-1}, \mathbf{E}_i)\ i \in I\}$ trivializáló rendszeréhez tartozó koordináta-transzformációi a (2) alattiak.

Legyen $f: E \to F$-vektornyaláb-leképezés. Ez azt jelenti, hogy minden $x_0 \in X$ pontra igaz, hogy létezik olyan $(U_i, \tau_i, \mathbf{E}_i)$ trivializálás x_0-ban, $(V_k, \sigma_k, \mathbf{F}_k)$ trivializálás $\tilde{f}(x_0)$-ban, hogy $\tilde{f}(U_i) \subset V_k$ és az $x \to \sigma_{kx} f_x \tau_{ix}^{-1}$ leképezés C^p-morfizmusa az U_i-nek $L(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_k)$-ba. Vezessük be a következő jelölést:

$$f_{ki}(x) = \sigma_{kx} f_x \tau_{ix}^{-1} \tag{3}$$

Ha $f_{lj}(x): U_j \to L(\mathbf{E}_j, \mathbf{F}_l)$ olyan C^p-morfizmus, amelyet ugyanúgy kapunk, mint (3)-ban $f_{ki}(x)$-et $(\tilde{f}(U_j) \subset V_l$, és $f_{lj}(x) = \sigma_{lx} f_x \tau_{jx}^{-1})$, akkor

$$f_{lj}(x) = h_{lk}(\tilde{f}(x)) f_{ki}(x) g_{ij}(x) \quad \text{ha} \quad x \in U_i \cap U_j, \tag{4}$$

ahol:

$$h_{lk}(x) = \sigma_{lx}\sigma_{kx}^{-1}, \quad g_{ij}(x) = \tau_{ix}\tau_{jx}^{-1}.$$

Az eddigiekből nyilvánvalóan következik, hogy léteznek az

$$\{U_i, g_{ij}(x) | i, j \in I\},$$

(5) illetve

$$\{V_k, h_{kl}(x) | k, l \in K\},$$

koordináta-transzformációk az X, illetve Y-sokaságokon, amelyekre igaz, hogy minden $i \in I$-hez van olyan $k \in K$ index, hogy $\tilde{f}(U_i) \subset V_k$. Az ilyen (i, k) indexpárok halmazát jelöljük M-mel. $(M \subset I \times K)$. Válasszuk az E, illetve F vektornyalábok trivializáló rendszereit ilyeneknek. Ekkor definiálhatók az $f_{ki}(x): U_i \to L(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_k)$ C^p-morfizmusok minden $(i, k) \in M$ indexpárra, és ezekre teljesül (4). Most tegyük fel, hogy X-en, illetve Y-on adottak az (5) koordináta-transzformációk a fenti tulajdonsággal, és minden $(i, k) \in M$ indexpárra adottak az

$$f_{ki}: U_i \to L(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_k) \qquad (i, k) \in M \tag{6}$$

C^p-morfizmusok, amelyekre (4) teljesül az $\tilde{f}: X \to Y$ C^p-morfizmussal. Mint fentebb láttuk, X-en és Y-on egyértelműen megadhatók az E, F vektornyalábok az (5) koordináta-transzformációk segítségével. Kérdés, hogy a (6) függvények segítségével definiálható-e valamilyen $f: E \to F$-vektornyaláb-leképezés, amelyre $\tilde{f}$ az eredeti függvény.

Egyértelmű-e az f leképezés? Érdekes, hogy N. STEENROD ezeket a kérdéseket már nem vizsgálja, pedig (6) segítségével a vektornyaláb-leképezések ugyanúgy könnyebben kezelhetők, mint a vektornyalábok a koordináta-transzformációkkal.

Ezek után lássuk a konstrukciót, mely támaszkodik az N. STEENROD által [3]-ban, s az általunk fentebb bemutatott eljárásra. Legyen $\mathscr{F}_{ki}(x, e, i) = (\tilde{f}(x), f_{ki}e, k)$. Ennek segítségével

$$f(p(x,e,i)) = g(F_{ki}(x, e, i))$$

ahol $q(y, e, k)$ az (y, e, k) hármas osztályát jelöli.

Lássuk be, hogy az $f: E \to F$ leképezés jól definiált. Ha (x, e, i) és $(x, é, j)$ ekvivalensek és f_{ki} helyett az f_{lj}-t használjuk, akkor ismét ekvivalens hármast kapunk. Azt kell belátnunk, hogy

$$F_{ki}(x, e, i) \sim F_{lj}(x, e', j)$$

Írjuk be $\mathscr{F}_{ki}$ és $\mathscr{F}_{lj}$ definícióját, és azt, hogy $e' = g_{ji}e$, amivel a bizonyítandót kapjuk. f nyilvánvalóan vektornyalábleképezés, másrészt f lokálisan $f_{ki}(x)$. Azonnal látható, hogy egyetlen adott tulajdonságú f létezik.

Ezután rátérhetünk a tétel bizonyítására:

Bizonyítás: E, E_1, F, F_1 legyenek a tételben szereplő vektornyalábok, $f: E_1 \to E$, $g: F \to F_1$-vektornyaláb-leképezések, amelyekre $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$. Ez utóbbiból következik, hogy megválaszthatjuk az E, F, E_1, F_1 vektornyalábok koordináta-transzformációit úgy, hogy azok rendre:

$$\{U_i, t_{ij}\} \quad \{U_i, s_{ij}\}$$

(7)

$$\{V_i, t'_{ij}\} \quad \{V_i, s'_{ij}\}$$

ahol $\tilde{f}(V_i) = U_i$, illetve $\tilde{g}(U_i) = V_i$. Ezekből nyilvánvaló, hogy az M halmaznak választhatjuk az $I \times I$ átlóját: $M = \{(i, i)\ i \in I\}$

$$f_{ii}(x) = \tau_{ix} f_x \tau_{ix}^{-1}$$

(8)

$$g_{ii}(x) = \sigma'_{ix} g_x \sigma_{ix}^{-1}$$

ahol a (7) koordináta-transzformációkat rendre az

$$\{(U_i, \tau_i, \mathbf{E}_i)\} \quad \{(U_i, \sigma_i, \mathbf{F}_i)\}$$
$$\{(V_i, \tau_i', \mathbf{E}_i')\} \quad \{(V_i, \sigma_i', \mathbf{F}_i')\} \tag{9}$$

trivializáló rendszerekből származtatjuk. X-en illetve Y-on azonnal felírhatjuk a λ funktor segítségével a következő koordináta-transzformációkat:

$$\{u_i, \lambda(t_{ji}, s_{ij}) | i, j \in I\}$$
$$\{v_i \lambda(t'_{ji} s'_{ij}) | i, j \in I\} \tag{10}$$

N. STEENROD konstrukcióját alkalmazva kapjuk (10)-ből a $\lambda(E, F)$, illetve $\lambda(E_1, F_1)$ vektornyalábokat az X, illetve Y fölött. A p-szer differenciálhatóság abból következik, hogy a λ funktor p-szer differenciálható funktor. A Tétel 1. és 3. állítása konstrukcióból azonnal következik. (8)-ból a funktor segítségével a

$$\lambda(f_{ii}(x), g_{ii}(x)) \tag{11}$$

függvényeket kapjuk, melyek nyilvánvalóan teljesítik a (4)-ben megkövetelt transzformációs szabályt:

$$\lambda(f_{jj}(x) g_{jj}(x)) = \lambda(t'_{ij}, s'_{ji}) \lambda(f_{ii}, g_{ii}) \lambda(t_{ji}, s_{ij})(x)$$

ugyanis λ első változójában kontra-, második változójában kovariáns funktor az f_{ii}, illetve g_{ii} pedig nyilvánvalóan teljesítik (4)-et. Innen a második konstrukciónk segítségével kapjuk a $\lambda(f, g)$-vektornyaláb-leképezést. Itt is kihasználtuk, hogy λ C^p-funktor. A konstrukcióból azonnal következik a tétel 2. állítása.

Lássuk a Tétel 4. állításának igazolását. Legyenek f; $X \to Y$ C^p-morfizmus, és E, F vektornyalábok Y fölött az

$$\{U_i, g_{ij}\} \quad \text{illetve} \quad \{U_i, h_{ij}\}$$

koordináta-transzformációkkal, (ahol $g_{ij}(x) = \tau_{ix} \tau_{jx}^{-1}$, illetve

$$h_{ij}(x) = \sigma_{ix} \sigma_{jx}^{-1}.$$

Fentebb már láttuk, hogy az $f^*(E)$, illetve $f^*(F)$ vektornyalábok trivializáló rendszerei:

$$\{\tilde{f}^{-1}(I_m \tilde{f} \cap U_i), (\tilde{f}, \tau_i)\} = \{V_i, (\tilde{f}, \tau_i)\}$$
$$\{\tilde{f}^{-1}(I_m \tilde{f} \cap U_i), (\tilde{f}, \sigma_i)\} = \{V_i, (\tilde{f}, \sigma_i)\} \tag{12}$$

Így X-re a koordináta-transzformációk (12)-höz hasonlóan vihetők át:

$$\{V_i, (\tilde{f}, \lambda(g_{ji}, h_{ij}))\}$$

Ezért azt kell csak bizonyítanunk, hogy

$$(\tilde{f}, \lambda(g_{ji}, h_{ij})) = \lambda((\tilde{f}, g_{ji}), (\tilde{f}, h_{ij}))$$

ami viszont triviális.

Ezzel az N. STEENROD-féle konstrukcióból kapjuk a bizonyítandót:

$$\lambda(f^*(E), f^*(F)) = f^*(\lambda(E, F))$$

A Tétel bizonyítását így befejeztük.

Megjegyzés: Láthattuk, hogy a nyalábok legtermészetesebb megadási módja a koordináta-transzformációkkal történik. Ehhez a megadási módhoz áll legközelebb a geometriai szemlélet: elég megadni a direkt szorzat alakú részek „összeragasztásának" a módját. (Lásd pl. a Moebius-szalagot.)

IRODALOM

[1] M. ATIYAH: *K*-theory. Harvard Univ. Cambridge, Mass. 1965.
[2] S. LANG: Introduction to differentiable manifolds. Columbia Univ. New York.
[3] N. STEENROD: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press, Princeton, N. Y. 1951.

CONSTCRUTION OF TENSOR BOUNDLES

L. GERENCSÉR and F. SZIGETI

Our problem arises in differential geometry: if we deal with the set of bilinear functions in the form $g_{ij}\,dx^i xd^j$, we should like to consider this set as a geometrical object. This leads to the problem: if a bifunctor λ is given on the category of Banach-spaces, extend this bifunctor to λ which operates on the category of vectorbundles. We prove that this extension is possible satisfying all the natural requirements concerning λ.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРОВЫХ ПУЧКОВ ПОСРЕДСТВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ

Л. ГЕРЕНЧЕР и Ф. СИГЕТИ

A WALLACE-FÉLE EGYENES EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSA

CSIMA JÓZSEF

Az elemi geometriában jól ismert a következő tétel[1]:

„Egy háromszög oldalaira a körülírt kör egy pontjából bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak." Ezt az egyenest WALLACE-féle egyenesnek nevezzük. E tételt sok irányban általánosították. Egy ismert általánosításában a P pontból húzott merőlegeseket a P ponton átmenő, a háromszög oldalait megegyező hajlással metsző egyenesek helyettesítik.

Dolgozatunk főeredménye WALLACE tételének egy általánosítása, mely elfajult esetként magában foglalja e tétel említett általánosítását is.

Értelmezések. Az e_1 egyenes φ szögben metszi az e_2 egyenest, ha e_1-et φ szöggel pozitív irányba elforgatva e_2-vel párhuzamossá válik. K_1 kör a P pontban φ szög alatt metszi a K_2 kört, ill. az e_2 egyenest, ha a K_1 kör a P pont körül pozitív irányba φ szöggel elforgatva K_2-t, ill. e_2-t érintő körré válik.[2]

Háromszögnek nevezzük három különböző, egymást metsző egyenes konfigurációját. Ha ezek egy pontban metszik egymást, nullháromszögről beszélünk. A nullháromszög köré írt kör alatt mindig az oldalak metszéspontjában elhelyezkedő nullkört értjük.

1. TÉTEL: *A K_1 kör messe a K_2 kört a P pontban φ szög alatt. Legyen H_1 a K_1 körbe rajzolt tetszőleges háromszög. Vetítsük ennek csúcspontjait a P pontból K_2-re.*[3] *Állítás: A kapott H_2 háromszög oldalai H_1 megfelelő oldalait φ szögben metszik, és metszéspontjaik egy egyenesen vannak* (1. ábra).

Bizonyítás. Ha K_1 érinti a K_2-t, állításunk nyilván igaz, hiszen a H_2 háromszöget a H_1 háromszögnek P pontból való kinagyításával nyerhetjük, ezért a két háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak, így metszéspontjaik is egy egyenesen, a végtelen távoli egyenesen vannak.

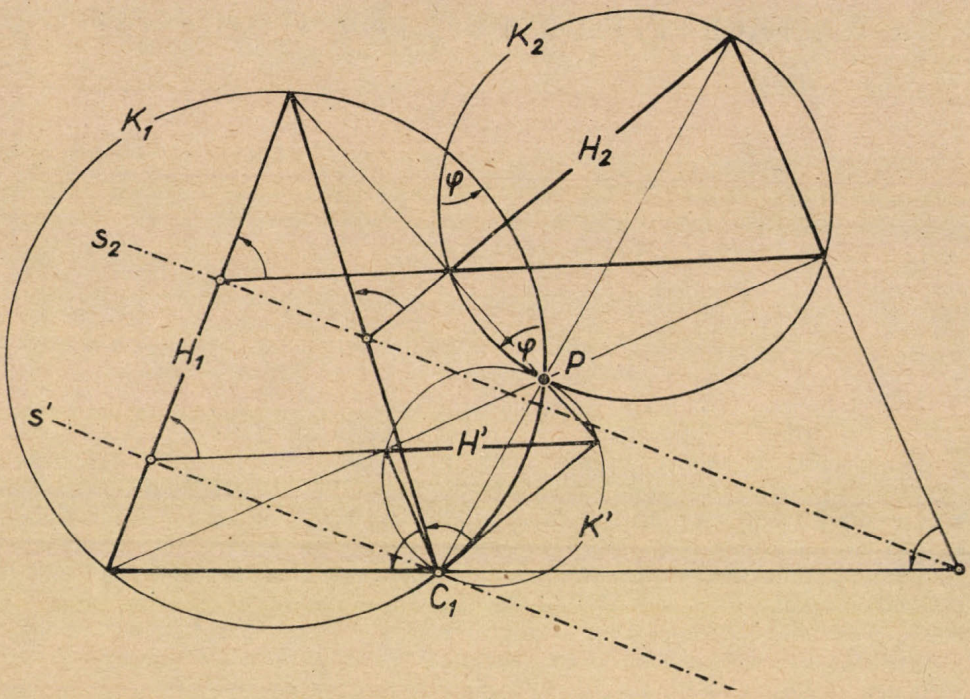
Ismeretes, hogy ha egy kör egy azt érintő kétszer akkora sugarú kör belsejében gördül, akkor az előbbinek egy pontja az utóbbinak egy átmérőjén mozog.

Rajzoljunk egy P középpontú és K_2-t érintő kört. Gördüljön ebben K_2 a beírt H_2 háromszöggel együtt mindaddig, míg K_1-et nem érinti (2. ábra). Mivel gördülés

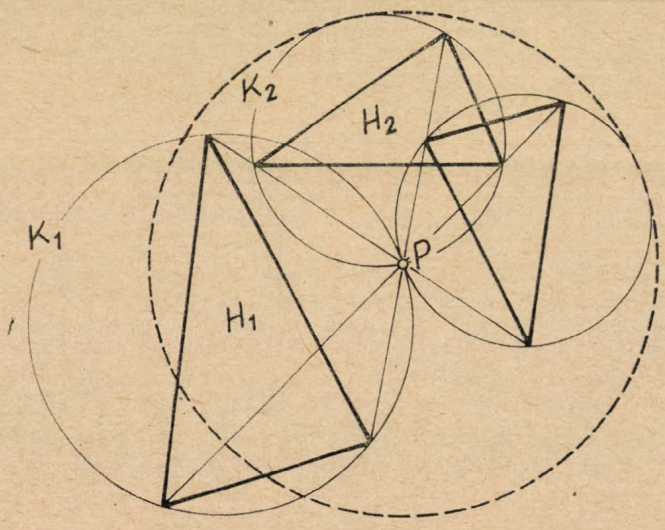
[1] Szokásos a „SIMSON-féle egyenes" elnevezés. Ez a megjelölés azonban helytelen, mert SIMSON ezt a tételt nem mondotta ki. E tételt WALLACE 1799-ben publikálta.

[2] Ha a K_1 kör a P pontban φ szög alatt metszi a K_2 kört, akkor K_1 és K_2 másik metszéspontjában K_2 φ szög alatt metszi K_1-et.

[3] Vetületi pont alatt a vetítőegyenesnek a K_2 körrel alkotott P ponttól különböző metszéspontját értjük. Ha a vetítőegyenes a K_2 kört a P csúcspontban érinti, P a vetületi pont. Ha a H_1 háromszög egyik csúcsa a P ponttal egybeesik, akkor a megfelelő vetítőegyenes alatt a K kör P pontbeli érintőjét értjük.



1. ábra



2. ábra

közben H_2 csúcsai a megfelelő vetítőegyeneseken maradnak, véghelyzetben (amikor K_2 érinti a K_1-et) a két háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak. Könnyen belátható, hogy H_2 elmozdulása úgy is felfogható, mint a K_2 kör középpontja körüli 2φ szöggel, majd a P pont körüli $-\varphi$ szöggel való elfordulás. Ezzel az 1. tételünk

első részét igazoltuk, hiszen a H_2 háromszög oldalai $2\varphi - \varphi = \varphi$ szöggel való elfordulás után H_1 megfelelő oldalaival párhuzamosakká váltak.

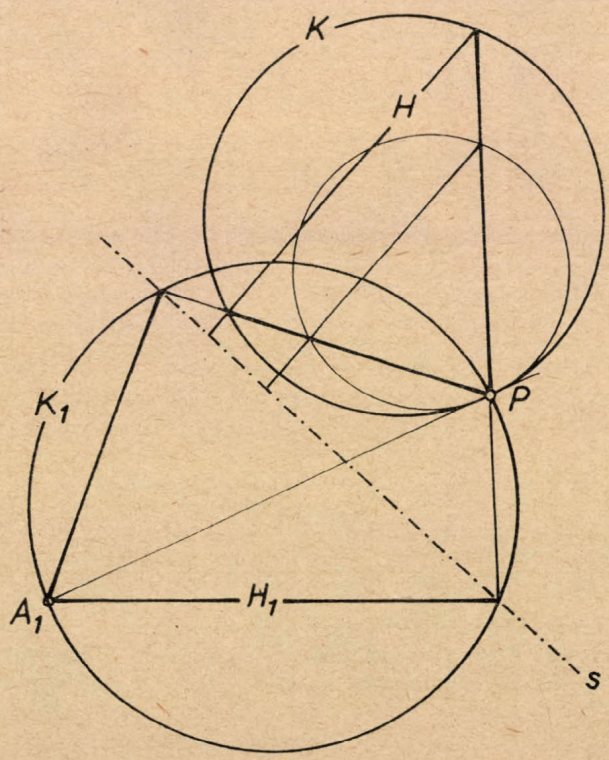
A tétel második része viszont nyilván igaz, hiszen a két háromszög a P pontra nézve perspektív, s így DESARGUES tétele szerint megfelelő oldalaik metszéspontjai egy egyenesen, a perspektivitás tengelyén vannak. Ezzel 1. tételünk igazolást nyert.

Megmutatjuk, hogy az 1. tételből határátmenettel adódik WALLACE tétele.

Legyen $K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots$ olyan köröknek nullkörhöz tartozó sorozata, melyeket K_1 a P pontban φ szög alatt metszi. Legyen H_i az 1. tételben megadott módon K_i-be rajzolt háromszög. $\lim_{n\to\infty} H_n = H_0$, ahol H_0 a P pontban elhelyezkedő nullháromszög, melynek oldalai H_1 megfelelő oldalait φ szögben metszik. E határátmenetből adódik, hogy H_0 és H_1 megfelelő oldalainak metszéspontjai — mint három egy egyenesen elhelyezkedő pont határhelyzetei — egy egyenesen, az s_0 tengelyen vannak. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ esetén H_0 oldalai megegyeznek a P pontból H_1 megfelelő oldalaira bocsátott merőlegesekkel, s_0 pedig ez esetben a WALLACE-féle egyenes.

2. TÉTEL: *Legyen H_1 egy a K_1 körbe beírt háromszög, továbbá legyen S az a körsor, melynek köreit a K_1 kör a P pontban $\varphi \neq 0$ szög alatt metszi. Állítás: Az S körsor köreihez (a nullkört is beleértve) tartozó tengelyek vagy mind egybeesnek H_1 egyik oldalával, vagy párhuzamos egyenessort alkotnak és ekkor különböző köröknek különböző tengelyek felelnek meg.*

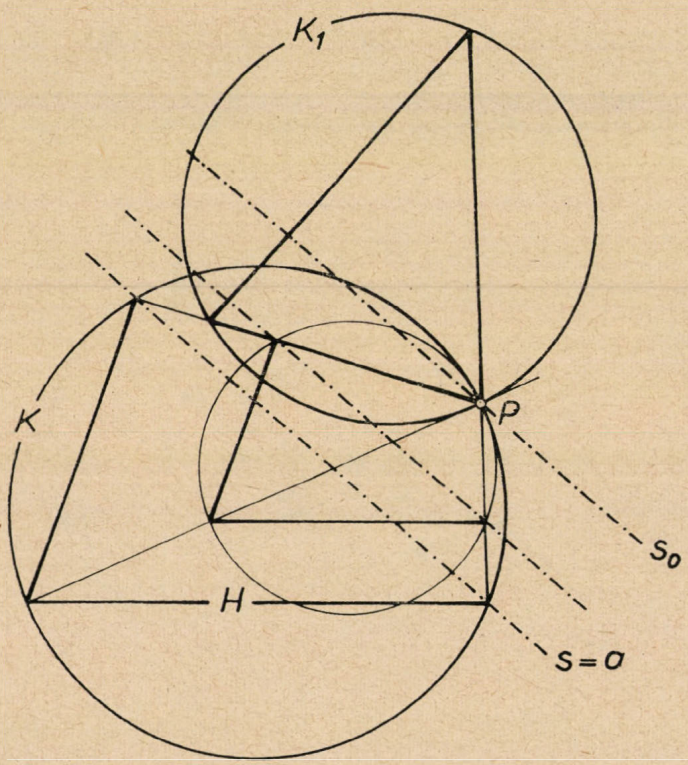
Bizonyítás. Először foglalkozzunk azzal az esettel, amikor a H_1 háromszög



3. ábra

egyik csúcsán pl. az A_1-en átmenő vetítőegyenest a K_1 kör a P pontban φ szög alatt metszi (3. ábra). Legyen K az S körsor tetszőleges köre és H az 1. tételben megadott módon a K körbe írt háromszög. A P pont csúcsa a H háromszögnek, mert az A_1P vetítőegyenes a P pontban érinti a K kört. A H_1 háromszög két másik csúcsán átmenő vetítőegyenes oldala H-nak. A H háromszög e két oldalának a H_1 háromszög megfelelő (az A_1 ponton átmenő) oldalaival alkotott metszéspontjai a H_1 háromszögnek A_1-től különböző csúcsai. A K körhöz tartozó s tengely tehát egybeesik a H_1 háromszögnek A_1-gyel szembenfekvő oldalával, és ez a körsor minden körére — s mint könnyen belátható, a nullkörére is — ugyanaz.

Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a K_1 kör a P pontban a vetítőegyenesek egyikét sem metszi φ szög alatt. Ha az S körsor körei a vetítőegyenesek egyikét φ szög alatt metszik, akkor — H_1 és H_2 szerepének szimmetrikus voltát figyelembe véve — bizonyításunk első részéből kiolvasható, hogy az S körsor K köréhez tartozó s tengely egybeesik e körbe írt háromszög egy oldalával (4. ábra)

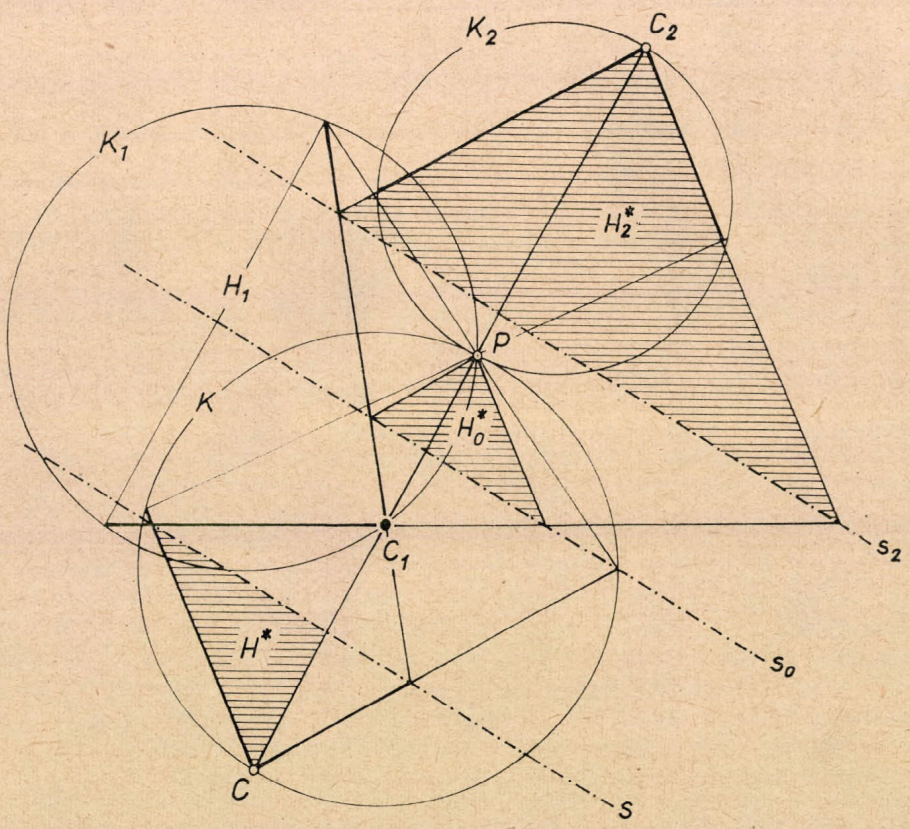


4. ábra

Ha a K kör befutja az S körsor köreit, a hozzátartozó tengely — mint a K körbe írt H háromszög a oldala — egy E párhuzamos egyenessor P ponton át nem haladó egyeneseit futja be, hiszen a H háromszög különböző helyzetei a P pontból történő kinagyításból adódnak egymásból, és a P pont nem lehet csúcsa H-nak. A P pontban elhelyezkedő nullkörhöz tartozó s_0 tengely pedig a P ponton átmenő, a H_1 háromszög

P-vel szemközti oldalát φ szögben metsző, azaz a-val párhuzamos egyenes. Így s_0 éppen az E egyenessor P ponton átmenő egyenese.

Ha sem a K_1 kör, sem az S körsor körei nem metszik a P pontban φ szög alatt a vetítőegyenesek egyikét sem, könnyen belátható, hogy az S körsor tetszőleges K körébe vagy nullkörébe írt H háromszöghöz tartozó s tengely nem eshetik egybe a H_1 és H háromszögek oldalainak egyikével sem. Ezt nem is részletezzük. Legyen K_2 az S körsor K-tól különböző tetszőleges köre. Mivel a K_2, ill. K-hoz tartozó s_2 és s tengelyek mindegyike a H_1 háromszögnek legfeljebb egy csúcsán megy át, van a H_1 háromszögnek olyan csúcsa, mely rajta sem az s_2, sem az s tengelyen. Jelöljük ezt a csúcsot C_1-gyel. A K_1 körbe írt H_2 háromszögben a C_1-nek megfelelő csúcs legyen C_2. A H_2 háromszögnek C_2 csúcsán átmenő két oldala és az s_2 tengely által alkotott háromszöget jelöljük H_2^*-gal (5. ábra)[4]. Hasonlóan a K körbe írt



5. ábra

H háromszögben a C_1-nek megfelelő csúcsot jelöljük C-vel, és e háromszögnek a C csúcson átmenő két oldala, valamint az s tengely által alkotott háromszöget pedig jelöljük H^*-gal. Az s tengely nem mehet át a C ponton, mert ellenkező esetben

[4] Az 5. ábrán a nullkörhöz tartozó H_0^* háromszög és s_0 tengely is fel van tüntetve.

e pontban H két oldalával együtt metszené H_1 megfelelő két oldalát is, azaz átmenne a C_1 ponton, ami azonban C_1 választása miatt lehetetlen.

A H_2^* és H^* háromszögek a C_1 pontra nézve perspektívek. Mivel e háromszögeknek a C_2, ill. a C ponton átmenő oldalaik közül a megfelelők párhuzamosak, a perspektivitás tengelye a végtelen távoli egyenes. Ezért kell, hogy a harmadik oldalpárra is teljesüljön a párhuzamosság, azaz $s_2 \| s$ legyen.

Be kell még látnunk, hogy tetszőleges $s \| s_2$ egyeneshez az S körsornak egy és csak egy K köre vagy nullköre tartozik. Legyen C_1 a H_1 háromszög olyan csúcsa, mely nincs rajta sem az s_2 tengelyen, sem az s egyenesen. A H_2 háromszög megfelelő C_2 csúcsán átmenő két oldala és az s_2 tengely által alkotott háromszöget jelöljük H_2^*-gal. Nagyítsuk ki a H_2^* háromszöget a C_1 pontból úgy, hogy az s_2 tengely az s egyenesbe jusson. A kapott háromszöget H^*-gal és az e nagyítás során C_2-ből keletkező csúcsot C-vel jelöljük. A C ponton át az S körsornak egy és csak egy egyede megy át, s az ehhez tartozó tengely éppen s.

A következő 3. tétel az 1. tétel megfordítása, egyben magában foglalja WALLACE tételének ismert megfordítását is.

3. TÉTEL: *Egy tetszőleges nem null H_1 háromszög oldalait messe egy — az oldalak egyikével sem párhuzamos — tetszőleges egyenes és legyen H_2 ezen metszéspontokon áthaladó H_1 megfelelő oldalait $\varphi \neq 0$ szögben metsző egyenesek által meghatározott háromszög. Állítás: H_2 vagy a K_1 körön levő nullháromszög, vagy nem nullháromszög és ekkor a H_2 köré írt kört a K_1 kör φ szög alatt metszi H_1 és H_2 perspektivitásának centrumában.*

Bizonyítás. A H_1 háromszögnek van egy olyan oldala, melyet az s_2 egyenes φ-től különböző szögben metsz. Ezen oldallal szemközti C_1 csúcson át húzzunk egy az s_2-vel párhuzamos s' egyenest (1. ábra). Az s' egyenes és a H_1 háromszög oldalainak metszéspontjain át húzzunk H_1 megfelelő oldalait φ szögben metsző egyeneseket. A kapott H' háromszög C_1 megválasztása miatt nem lehet nullháromszög. A H' háromszög köré írt K' kör a C_1 pontban φ szög alatt metszi a K_1 kört, mert a H' háromszögből a C_1 pont körüli φ szöggel való elforgatással, majd a C_1 pontból történő kinagyítással a H_1 háromszöget kapjuk, miközben a K' kör a K_1 körbe megy át.

Legyen P a K_1 és K' körök C_1-től különböző metszéspontja. Ez létezik, hiszen K' nem nullkör és K_1-et $\varphi \neq 0$ szög alatt metszi. Megmutatjuk, hogy H_1 és H' perspektivitásának centruma P. Vetítsük ugyanis H_1-et a P pontból K'-be. E vetítés csak a H' háromszöghöz vezethet, mert a C_1 pont vetülete maga C_1, és a vetítés során az 1. tétel szerint H_1 oldalaiból ezeket φ szög alatt metsző egyeneseket nyerünk, márpedig H' az egyetlen olyan K'-be rajzolt háromszög, melynek egyik csúcsa C_1, s melynek e csúcson átmenő oldalai a H_1 háromszögnek e csúcson átmenő oldalait φ szögben metszik. A K' kör egy körsort határoz meg, melynek köreit a K_1 kör a P pontban φ szög alatt metszi. Jelöljük K_2-vel ezen körsornak azt a körét vagy nullkörét, amelyhez tartozó tengely éppen s_2. A H_1 háromszöget a P pontból K_2-be vetítve a H_2 háromszöget kapjuk, hiszen a H_2 az egyetlen olyan háromszög, melynek oldalai H_1 megfelelő oldalait az (s_1 megadása által) adott pontokban φ szög alatt metszik. A H_1 és H_2 perspektivitásának centruma tehát P. Ezzel a 3. tételünk igazolást nyert.

Megjegyzés. A dolgozatban foglalt eredményt az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának 1953—54. évben rendezett diákköri pályázatán díjazták. Ezúton mondok köszönetet volt professzoromnak, Hajós Györgynek, aki annakidején odaadóan támogatta munkámat.

ОБОБЩЕНИЕ ВАЛЛАСОВОЙ ПРЯМОЙ

ИОЖЕФ ЧИМА

A GENERALIZATION OF THE WALLACE — LINE

J. CSIMA

The main result of this paper is a generalization of a well known theorem of Wallace. Let the triangle H_1 be inscribed in the circle K_1. Let K_2 be an arbitrary circle intersecting K_1 at the angle φ at the point P. Let H_2 be a triangle inscribed in K_2 such that each vertex of H_2 is collinear with P and a vertex of H_1. Then the angle between each pair of corresponding sides of H_1 and H_2 is φ and (Desargues theorem) the points of intersection are on a straight line (the axis of perspectivity). If $K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots$ is a sequence of circles intersecting K_1 at angle φ at P, then the axes of perspectivity between K_1 and K_n, $n=2, 3, \ldots$, are parallel. If $\varphi=\frac{\pi}{2}$ and if the radius of K_n approaches 0 as n approaches infinity, then the limit position of the axis of perspectivity is that of the *Wallace line* (also known as the *Simson line*) of H_1, corresponding to P. The converse of the above generalization is also proved. If H_1 and H_2 are perspective triangles such that the angle between each pair of their corresponding sides is φ, then the circumscribed circles intersect in the center of perspectivity at the angle φ.

A MULTIFAKTORIÁLIS ÖRÖKLŐDÉS

TUSNÁDY GÁBOR

A genetika első eredményei azokkal a betegségekkel kapcsolatosak, melyek egyetlen gén hibás működésére vezethetők vissza. Ezek öröklődésének szabályai pusztán abból a tényből levezethetők, hogy a kromoszómákban minden egyes génből kettő van és az utód génpárjába az egyik az apa, a másik az anya kromoszómájából kerül. Feltételezhető, hogy az öröklődő tulajdonságok túlnyomó része nem így, egyetlen gén révén kerül át az utódokba. A további lehetőségek közül egy többékevésbé kidolgozott modellről olvastam néhány cikket: a bennük felmerült matematikai problémákat foglalom össze az alábbiakban.

Itt mondok köszönetet dr. Czeizel Endrének, akitől a téma orvosi vonatkozását tanultam és egyben megemlítem [2] dolgozatát, mely a multifaktoriális öröklődést mint a veleszületett rendellenességek többségének genetikai modelljét tárgyalja.

1. A KÍSÉRLETEK, FELMÉRÉSEK EREDMÉNYEI

Fraser Roberts [9] cikkének első mondata a következő: „A multifaktoriális öröklődés alapgondolata olyan régi, mint maga a genetika és elsősorban a folytonos eloszlású metrikus jellemzők öröklődésének magyarázatára jött létre." Tipikus példája az öröklődő és mérhető mennyiségeknek a magasság, vagy az emberi test egyéb mérete. Magas embereknek magas gyerekük születik — ezt jelenti az örökletesség. A szülők hatása azonban bonyolult mechanizmusokon keresztül érvényesül: az egyes gének általában specifikus hatásúak, például az anyagcsere meghatározások szakaszára vonatkoznak, vagy a fejlődés egy bizonyos időszakában jelentősek — és a különböző, genetikailag irányított folyamatok eredőjeként alakul ki az utód magassága. Ezt jelenti, hogy az öröklődés több tényező együttes szerepének függvénye, vagyis a magasság multifaktoriálisan öröklődik.

Kérdés azonban, hogy pusztán abból a tényből, hogy a magasság folytonos eloszlású, következik-e, hogy csakis több gén működése határozhatja meg az értékét? A folytonos megoszlás létrejöhet a környezet hatására is: a genetikai tényezők csak az eloszlás paramétereit determinálják.

A bőrlétszám volt az első mérhető mennyiség, melynél a multifaktoriális öröklődés szabályát kimutatták. Az ujjlenyomat két jól identifikálható pontja közt áthaladó vonalak számát adták össze a tíz ujjra, és az így kapott változó korrelációs együtthatóját határozták meg a különböző rokonsági fokok függvényében. Az 1. táblázatban Holt [5] eredményeit adjuk meg. Látni fogjuk, hogy a multifaktoriális öröklődés szerint a szülő-gyermek vagy testvér-testvér közti korrelációs együttható $^1/_2$ — ezt ellenőrizték a vizsgálat során. A bőrlétszám már a méhen belüli

fejlődés első három hónapjában kialakul, a környezet hatás tehát minimális. Ennek felel meg, hogy az egypetéjű ikreknél az empirikus korrelációs együttható igen magas.

Hasonló eredményt kapott a vérnyomásra Miall és Oldham [6], az intelligenciára Roberts [10] — a legtöbb öröklődő tulajdonság, így elsősorban az öröklődő betegségek azonban nem állnak közvetlen kapcsolatban mérhető mennyiségekkel. Csak a betegek számát határozhatjuk meg, vagy azt, hogy az adott betegségben szenvedők rokonai között hány beteg van. Ilyen típusú vizsgálatot végzett Newcombe [7], aki a különböző veleszületett rendellenességekre adta meg a betegek testvérei közti gyakoriságot (1. ábra). Egy betegség családon belüli felhalmozódása mindenképpen a betegség öröklődése mellett szól. A feladat általában az, hogy a felhalmozódás természetétől függően — tehát attól függően, hogy a különböző rokonsági fokok mellett milyen szoros a kapcsolat — megadjuk az öröklődés mechanizmusát.

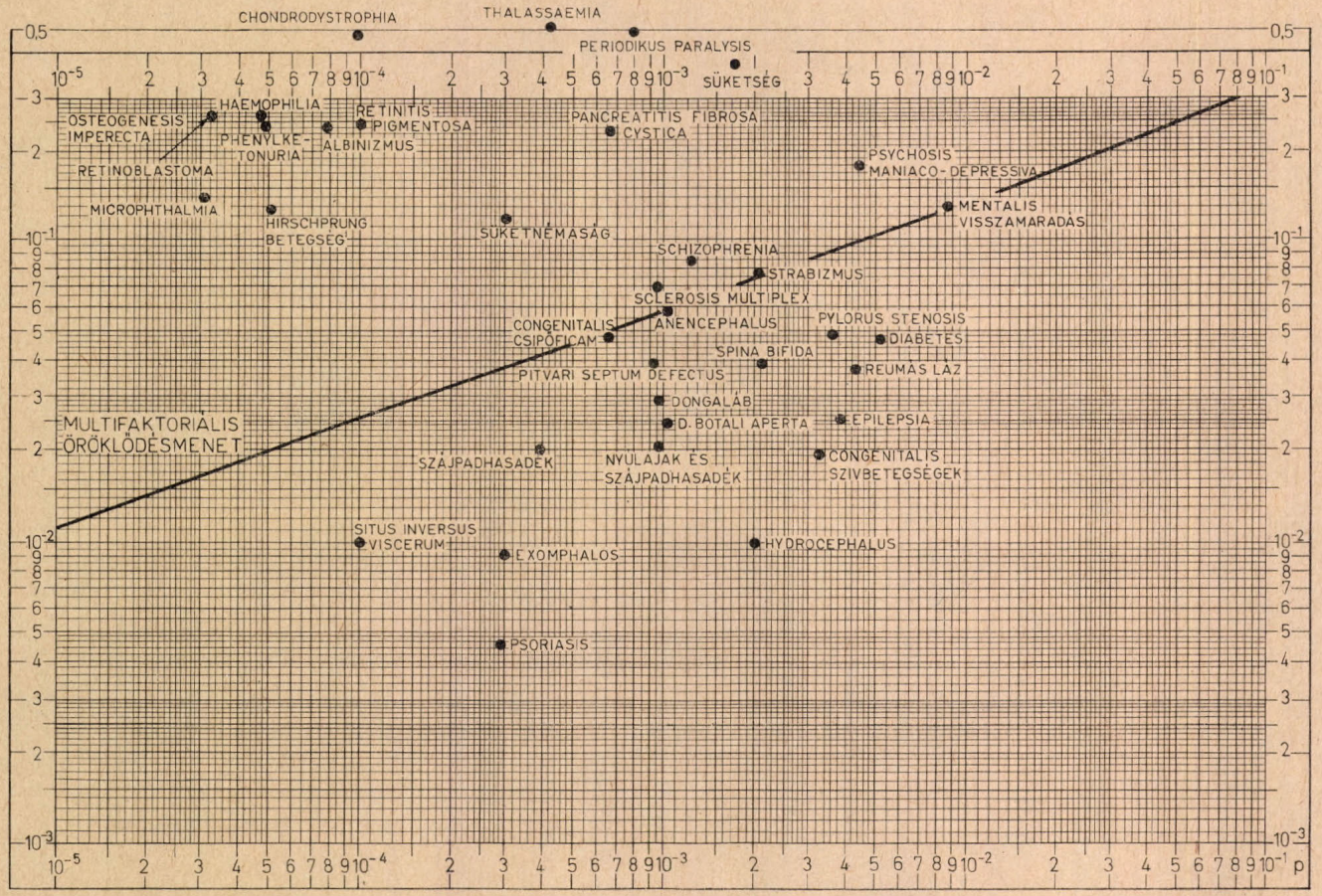
1. táblázat

Rokonsági fok	Vizsgálatok száma	Mért korrelációs együttható	Várt korrelációs együttható
Anya-gyermeke	405	$0{,}48 \pm 0{,}04$	$1/2$
Apa-gyermeke	405	$0{,}49 \pm 0{,}04$	$1/2$
$1/2$ (anya+apa)-gyerek	405	$0{,}66 \pm 0{,}03$	$1/\sqrt{2}$
Testvérek	642	$0{,}50 \pm 0{,}04$	$1/2$
Egypetéjű ikrek	80	$0{,}95 \pm 0{,}01$	1
Kétpetéjű ikrek	92	$0{,}49 \pm 0{,}08$	$1/2$

2. A MULTIFAKTORIÁLIS ÖRÖKLŐDÉS MODELLJE

Sejtmagjainkban 46 kromoszóma van, ezek 23 párt alkotnak. Egy-egy pár tagjai egyformák, identifikálható helyeiken — a lokuszokon — azonos rendeltetésű gének helyezkednek el. Általában feltételezik, hogy egy lokuszra csak kétfajta gén kerülhet, ezt mi is így tekintjük a továbbiakban, bár pl. a vércsoportok öröklődésénél szerepel több alternatív gén is egyetlen lokuszon. Ha a két alternatívának minden egyes lokuszon a 0 és 1 számokat feleltetjük meg, és a 23 kromoszóma-párt képzeletben egymáshoz fűzzük, a sejtmag genetikailag egyetlen matrixszal jellemezhető, melynek két oszlopa van és nagyon sok sora. (A sorok száma megegyezik az összes lokusz számával, ami 3—4 millióra tehető.) A matrix elemei vagy 0-k vagy 1-ek. Genetikailag annyiféle ember van tehát, amennyi matrix megadható.

Az utód matrixának első oszlopa az anya, második oszlopa az apa matrixából származik. Feltehetjük, hogy az anya k-ik sorának első eleme $1/2$ valószínűséggel kerül az utód matrixának k-ik sorába, hasonlóképp az anya k-ik sorában álló második elemnek is $1/2$ ugyanerre az esélye, és az egyes sorokból egymástól függetlenül választódnak ki az utód matrixába kerülő elemek.


CHONDRODYSTROPHIA
THALASSAEMIA
PERIODIKUS PARALYSIS
SÜKETSÉG
OSTEOGENESIS IMPERECTA
HAEMOPHILIA
PHENYLKE-TONURIA
RETINITIS PIGMENTOSA
ALBINIZMUS
RETINOBLASTOMA
MICROPHTHALMIA
HIRSCHPRUNG BETEGSÉG
SÜKETNÉMASÁG
PANCREATITIS FIBROSA CYSTICA
PSYCHOSIS MANIACO-DEPRESSIVA
MENTALIS VISSZAMARADÁS
SCHIZOPHRENIA
STRABIZMUS
SCLEROSIS MULTIPLEX
CONGENITALIS CSIPŐFICAM
ANENCEPHALUS
PYLORUS STENOSIS
DIABETES
SPINA BIFIDA
REUMÁS LÁZ
PITVARI SEPTUM DEFECTUS
DONGALÁB
D. BOTALI APERTA
EPILEPSIA
MULTIFAKTORIÁLIS ÖRÖKLŐDÉSMENET
SZÁJPADHASADÉK
NYULAJÁK ÉS SZÁJPADHASADÉK
CONGENITÁLIS SZÍVBETEGSÉGEK
SITUS INVERSUS VISCERUM
EXOMPHALOS
HYDROCEPHALUS
PSORIASIS
p

1. ábra

A szülők és az utód matrixának az elemeit rendre a

$$(\xi_{ij}),\quad (\eta_{ij}),\quad (\zeta_{ij}),\qquad (i=1,2,\ldots,N;\ j=1,2)$$

szimbólumokkal jelölve a fentiek szerint

$$\zeta_{i1}=\xi_{i\varepsilon_i};\quad \zeta_{i2}=\eta_{i\omega_i}$$

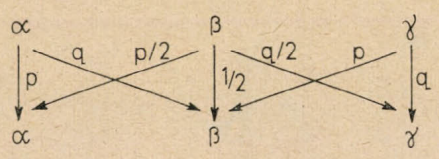
ahol az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak; lehetséges értékeik az 1 és 2, melyeket $^1/_2$—$^1/_2$ valószínűséggel vehetnek fel.

Az ε-ok, ω-k függetlenségére tett feltevés a valóságban nem teljesül: a mitotikus osztódás során a kromoszómapárok csak szakaszaikat cserélik ki. Így reálisabb lenne feltenni, hogy pl. az első ε-ok mind 1-gyel egyenlőek, majd egy elég hosszú 2-vel egyenlő blokk következik, és így tovább — azaz, hogy az ε-ok között jelentős pozitív korreláció van (és persze hasonló igaz az ω-kra is). Ez a pontatlanság azonban az alábbiakat nem zavarja.

Valamely öröklődő tulajdonságot a fenti modellben egy matrix-függvénnyel adhatunk meg. Tekintsük először azt az esetet, amikor a függvény egyetlen sortól — tehát amikor a vizsgált tulajdonság egyetlen gén-pártól függ. A megfelelő sor két eleme három lehetséges értéket vehet fel.

$$(0,0)\quad (1,0)\quad (1,1),$$

így a vizsgált tulajdonság csak három különböző formában figyelhető meg. Tegyük fel, hogy ez a tulajdonság valamely mérhető paraméterrel áll kapcsolatban, amelynek az értékét a környezet is befolyásolja. Jelöljük a megfelelő értékeket rendre α, β, γ-val, a két szülő és az utód értékét rendre ξ, η, ζ-val, és tegyük fel, hogy egy véletlenül választott gén értéke p valószínűséggel lehet 0, és q valószínűséggel 1. A ξ, η változók függetlenek (ami annak felel meg, hogy nincs irányított párválasztás) és egyforma eloszlásúak, a ξ, ζ együttes eloszlása pedig az egyes állapotok közti átmenetvalószínűségekkel adható meg:



ζ állapota: ξ állapota:

Legyen $M\alpha=a$, $M\beta=0$, $M\gamma=c$; $D^2\alpha=D^2\beta=D^2\gamma=\sigma^2$, akkor ξ és ζ korrelációs együtthatója

$$R(\xi,\zeta)=\frac{(pa-qc)^2}{(pa-qc)^2+(pa^2+qc^2)+\sigma^2/pq}$$

ez $a+c=0$ mellett $\dfrac{a^2}{2a^2+\sigma^2/pq}$, $c=0$ mellett $\dfrac{p^2a^2}{p(1+p)a^2+\sigma^2/pq}$. Ha a környezet hatása elhanyagolható, akkor az első esetben $^1/_2$-t, a másodikban $\dfrac{p}{1+p}$-t kapunk.

Hasonló módon kapjuk a testvérekre, hogy

$$R(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{pq\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + (pa-qc)^2}{(pa-qc)^2 + (pa^2+qc^2) + \sigma^2/pq}$$

tehát $\sigma = 0$ és $a+c = 0$ mellett a korrelációs együttható most is $^1/_2$, ha pedig $\sigma = 0$ és $c = 0$, akkor $R = \frac{1+3p}{4(1+p)}$. Ha $a+c \neq 0$, a testvérek közti korreláció mindig nagyobb, mint a szülő-gyermek közti korrelációs együttható, vagyis a testvérek jobban hasonlítanak egymásra, mint a szüleikre. Legélesebb az eltérés $c = 0$ mellett, amikor kis p-re a szülő-gyermek korreláció 0-hoz tart, a testvér-testvér korreláció pedig $^1/_4$-hez. Ezt az esetet hívják recesszív öröklés-menetnek, amikor tehát a ritka — és hibásnak tekintett — 0 génből kettőnek kell a kromoszómákban előfordulni, hogy a szervezet beteg legyen. Ilyenkor a beteg szülőknek szinte kizárólag csak egészséges gyermekeik születnek, viszont a beteg gyerek testvérei között minden negyedik ismét beteg lesz.

Ha $\sigma = c = 0$ és p közel van 1-hez, akkor mindkét korrelációs együttható közel van $^1/_2$-hez. Ezt az esetet hívják domináns öröklődésnek, most az 1-es gén ritka, és ha a két gén közül csak az egyik is 1-es, a szervezet beteg. A beteg ember gyerekei között és a beteg gyerekek testvérei között egyaránt minden második újra beteg.

Ha $\sigma \neq 0$, van környezeti hatás: a változók nem csak három értéket vehetnek fel, folytonos eloszlásúak is lehetnek — és hogy három különböző eloszlás keverékei, az nem mindig mutatható ki. Ha egy lokusz helyett a vizsgált tulajdonság két lokusztól függ, a lehetséges esetek száma 9, de ha van környezeti hatás, ez nem jelent lényeges változást. Nehéz elgondolni olyan próbát, mely megnyugtatóan külön tudná választani az egy lokusztól és a két lokusztól függő tulajdonságokat. Hasonló a helyzet, ha a lokuszok száma tovább növekszik: a számolás beláthatatlanul bonyolulttá válik és nincs mód a tett feltevések reális ellenőrzésére.

A multifaktoriális öröklődést tehát pusztán abban az értelemben, hogy egynél több lokusz hatására alakul ki az utód vizsgált tulajdonsága, igen nehéz konkrét statisztikai célokra használni. Lényegesen egyszerűsödik a helyzet, ha feltesszük, hogy az egyes gének hatása független, egyforma eloszlású, és összegeződik. Egyszerűség kedvéért használjuk most a ξ_{ij}, η_{ij}, ζ_{ij} szimbólumokat a matrixok megfelelő eleméhez rendelt valószínűségi változók jelölésére, akkor pl. a (ξ_{ij}) mátrixhoz rendelt érték

$$\xi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{2} \xi_{ij}$$

és a ξ_{ij} változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. A szülő ξ változója és az utód

$$\zeta = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{2} \zeta_{ij}$$

változója egyaránt $2N$ független és egyforma eloszlású változó összege, és e két összegben pontosan N tag közös, a többi N tag pedig független, tehát

$$R(\xi, \zeta) = \frac{1}{2}.$$

A testvérek közti korreláció esetében bonyolultabb a helyzet, hiszen közös génjeik száma a véletlentől is függ. A második gyerek ugyan génjei felét szintén az anyától, másik felét az apától kapja — ezek a gének azonban rendre csak $^1/_2$ valószínűséggel egyeznek meg azokkal, amelyeket az első gyerek kapott. Így a közös gének száma binomiális eloszlású $2N$ és $^1/_2$ paraméterekkel. Könnyen látható azonban, hogy a korrelációs együttható csak a közös gének számának várható értékétől függ, tehát $R(\zeta_1, \zeta_2)$ értéke is $^1/_2$.

A korrelációs együttható értéke nem függ N-től, a fentiekben ugyanezt kaptuk egy lokusz esetére az $a+c = 0$ feltétel mellett, ami épp annak felel meg, hogy a gének hatása additív.

A további utódok is rendre génjeik felét kapják az egyik szülőjüktől, így a k-ik leszármazottak génjeinek már csak 2^k-adrésze egyezik meg az eredeti ősükével. A k-adfokú és l-edfokú leszármazottak között pedig $^1/_{2^{k+l-1}}$ a korrelációs együttható.

Öröklődő betegségek leírására is alkalmazható lesz ez a modell, ha feltesszük, hogy a betegség akkor manifesztálódik, ha a megfelelő mérhető jellemző — mondjuk a betegségre való hajlamosság — egy bizonyos L korlát felett van. Ha a populációban p a betegség gyakorisága, akkor

$$p = P(\xi > L)$$

A betegek rokonai között a betegség gyakorisága

$$q = P(\zeta > L | \xi > L)$$

Ahhoz, hogy p alapján q-t meghatározzuk, természetesen nem elég a ξ, ζ változók $R(\xi, \zeta)$ korrelációs együtthatóját ismernünk. Ezen a ponton jó feltételezni, hogy N elég nagy, vagyis, hogy a ξ, ζ változók eloszlása közelíthető normális eloszlással. A normalitás feltételezése mellett Edwards [3] adott a q gyakorisága közelítő formulát, eredményeit Carter [1] használta fel konkrét betegségek vizsgálatára.

Edwards szerint elsőfokú sokaság mellett $q \sim \sqrt{p}$, feltéve, hogy a környezet hatása elhanyagolható. Ha egy betegségre adott rokonsági fok mellett meghatározzuk a p, q valószínűségek empirikus becsléseit, q értéke a környezeti hatás miatt általában nem éri el az elméleti értéket. Az eltérés alapján határozta meg Falconer [4] több betegség örökletességét. Az általa tárgyalt statisztikai feladat lényegében a következő:

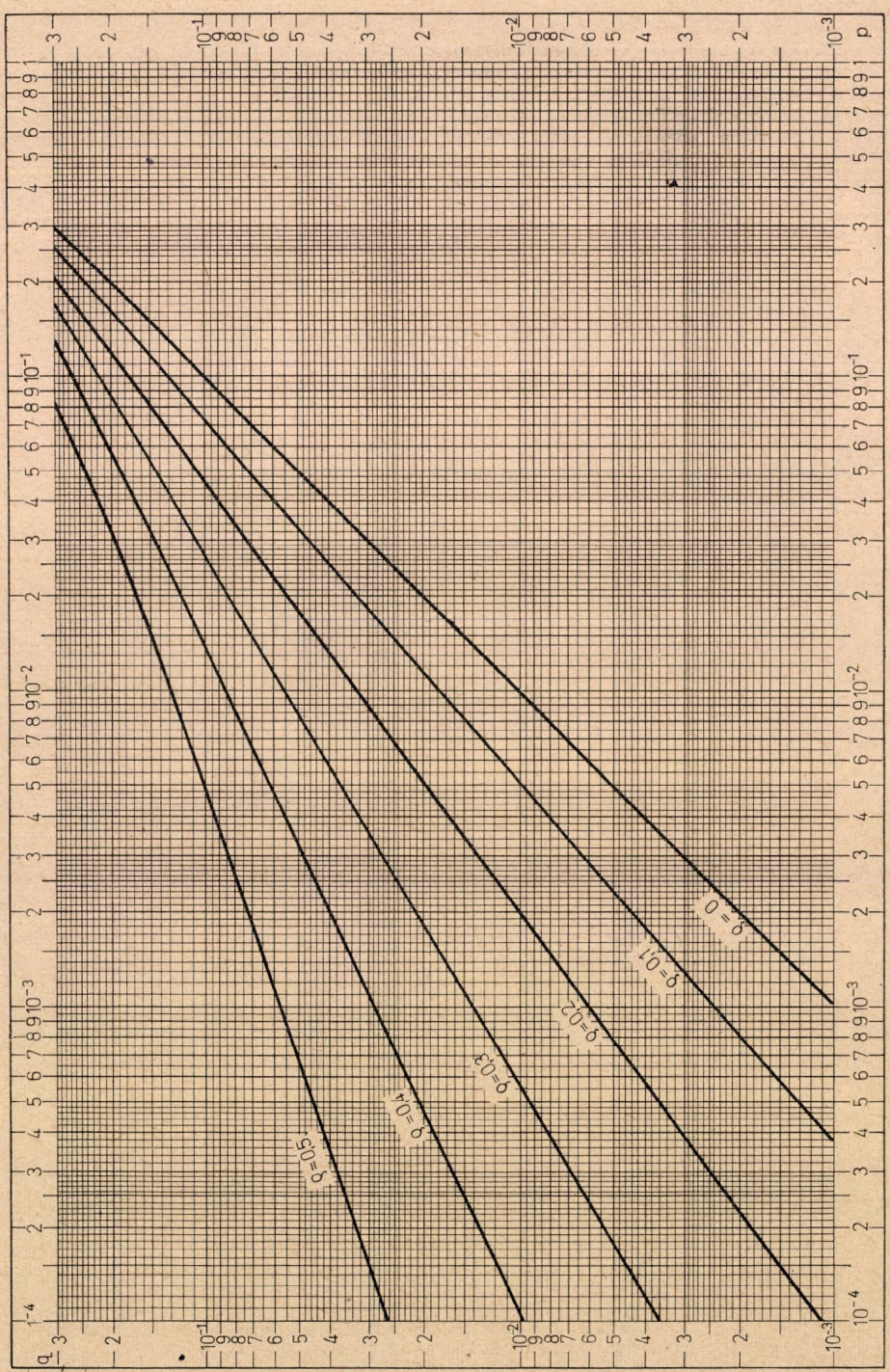
Legyen ξ, ζ együttes eloszlása normális eloszlás 0 várható értékkel, 1 szórással és ϱ korrelációs együtthatóval, és legyen most is

$$p = P(\xi > L)$$

$$q = P(\zeta > L | \xi > L)$$

a p, q valószínűségekre kapott becslés alapján kell a ϱ korrelációs együtthatót becsülni.

Falconer először módszert ad a rokonok közti q gyakoriság meghatározására, ha p és ϱ ismert. Közben azonban a ζ változó $\xi > L$ feltétel melletti feltételes eloszlását is normálisnak veszi, így eredményei csak közelítésnek tekinthetőek. A 2. ábrán megadjuk a pontos eredményt, melynek számolásához Owen [8] táblázatait használtuk fel. Ábráink alapján p, q empirikus értékéből becsülhetjük a ϱ korrelációs együtthatót. A ϱ korrelációs együttható becslésének a problémája azonban még további statisztikai vizsgálatot igényel.



2. ábra

IRODALOM

[1] C. O. CARTER: Genetics of common disorders. British Medical Bulletin (1969), 25/1. 52—57.
[2] CZEIZEL ENDRE: A multifaktoriális öröklődés — a gyakori veleszületett fejlődési rendellenességek kóreredetének magyarázata. Orvosi hetilap.
[3] J. H. EDWARDS: The simulation of Mendelism. Acta Genet. (1960), 10. 63—70.
[4] D. S. FALCONER: The inheritance of liability to certain diseases, estimated from the incidence among relatives. Ann. Hum. Genet. London (1965), 29. 51—76.
[5] S. B. HOLT: Quantitative genetics of finger-print patterns. Brit. Med. Bull. (1961), 17: 247—250.
[6] W. E. MIALL and P. D. OLDHAM: The hereditary factor in arterial blood pressure. Brit. Med. J. (1963), 1:75—80.
[7] H. B. NEWCOMBE: Discussion in: Second international Conference on Congenital Malformation, 1964 International Medical Congress, p. 345 New York.
[8] D. B. OWEN: Tables for computing bivariate normal probabilities. Ann. Math. Stat. *27* (1956), 1075—1090.
[9] J. A. F. ROBERTS: Multifactorial Inheritance and Human desease. Progress in Human Genetics (Ed. Steinberg A. G. Bearn, H. G. Vol. 4. New York 1964, 178.)
[10] J. A. F. ROBERTS: The genetics of mental deficiency Eugen. Rev. (1952), *44*. 3—15.

О МУЛЬТИФАКТОРИАЛЬНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

Г. ТУШНАДИ

THE MULTIFACTORIAL HERITABILITY

G. TUSNÁDY

A SMITH-FÉLE DETERMINÁNS MÁTRIXÁNAK SAJÁTÉRTÉKEIRŐL

BALATONI FERENC

Legyen az $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ n-edrendű mátrix i-edik sorának j-edik eleme (i, j), ahol (i, j) az i, j természetes számok legnagyobb közös osztóját jelenti. Mint ismeretes, az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának értéke

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi(k),$$

ahol $\varphi(k)$ az Euler-féle számelméleti függvény. Ez a tétel St. Smith [1] dolgozatában szerepel először az irodalomban. A tételt többen általánosították. (Lásd pl. a [2], [3] dolgozatokat, utóbbiból az irodalomjegyzéket is.) Az $\mathbf{A}$ mátrixhoz hasonló, de általánosabb típusú mátrixokhoz tartozó kvadratikus alakoknak jelentős szerepe van a Selberg-féle szitamódszerben [4].

A dolgozatban az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeivel foglalkozunk. $\mathbf{A}$ pozitív definit, tehát valamennyi sajátértéke pozitív. Becslést adunk a legkisebb és legnagyobb sajátértékre n-től függően. A dolgozatban nyert eredményeket az alábbi tételben foglaljuk össze:

TÉTEL: *Ha az* $\mathbf{A}$ *mátrix legnagyobb sajátértéke* $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$, *akkor*

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = O(n^{1+\varepsilon}) \tag{1}$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ *esetén, de*

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \neq O(n(\log n)^k), \tag{2}$$

ahol k *tetszőleges pozitív egész szám. Legyen* $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix legkisebb sajátértéke, akkor*

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) = O\left(\frac{1}{\log n}\right), \tag{3}$$

de

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \neq o\left(\frac{1}{\log n(\log\log n)^2}\right). \tag{4}$$

A tétel bizonyítása elemi (a mátrixelmélet és számelmélet határterületére esik), de inkább számelméleti jellegű. A kimondott becsléseket tovább lehetne javítani. Más hasonló típusú mátrixok sajátértékeire is lehet adni becslést. Végül meghatározzuk a $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektor elemeinek előjelét.

Legerősebb eredmény, melyet felhasználunk, van der Corput egy tételének [5] alábbi speciális esete:

LEMMA: *Jelölje* $d_v(n)$ *az* $x_1 x_2 \ldots x_v = n$ *egyenlet megoldásainak számát a pozitív egész számok körében (két szorzatelőállítást, ha azok csak a tényezők sorrendjében különböznek, különböztessünk meg). Vagy ha* $d(n) = d_2(n)$ *jelenti n osztóinak számát, akkor rekurzív definícióval legyen*

$$d_v(n) = \sum_{d|n} d_{v-1}(d) \qquad (v = 3, 4 \ldots)$$

(Itt az összegzés n osztóira van kiterjesztve.) Létezik csupán v-től függő $c(v)$ *állandó, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} d_v^2(k) \sim c(v) n (\log n)^{v^2-1} \tag{5}$$

$\left(a_n \sim b_n \text{ jelentése: } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \right)$

1. § $\lambda_{\max}$ (A) FELSŐ BECSLÉSE

A Smith-féle tétel bizonyításának alapgondolata a következő. Az **A** mátrix felbontható

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\Phi\mathbf{R}^* \tag{6}$$

alakban, ahol az **R** mátrix *i*-edik sorának *j*-edik r_{ij} eleme 1, ha $j|i$ és 0 különben és Φ egy diagonálmátrix, melynek *i*-edik eleme az Euler-féle $\varphi(i)$ függvény ($\mathbf{R}^*$ az **R** transzponáltja) [2]. Az **R** és Φ mátrixok nemnegatívok (elemei nemnegatívok), és **A** pozitív.

Ha a $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ tetszőleges négyzetes mátrix maximális abszolútértékű (egyik) sajátértéke $\lambda_{\max}(\mathbf{B})$, akkor

$$|\lambda_{\max}(\mathbf{B})| \leqq \max_{1\leqq i\leqq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|. \tag{7}$$

Ez könnyen következik $\lambda_{\max}(\mathbf{B})$ alábbi definíciójából

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \lambda_{\max}(\mathbf{B}) x_i,$$

ahol x_i a $\lambda_{\max}(\mathbf{B})$-hez tartozó sajátvektor *i*-edik eleme.

(6) és (7) szerint az **A** mátrix *i*-edik sorában levő elemek összege

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} r_{iv}\varphi(v) r_{jv} = \sum_{v=1}^{n} r_{iv}\varphi(v) \sum_{j=1}^{n} r_{jv} =$$

$$= \sum_{v=1}^{n} r_{iv}\varphi(v) \sum_{\substack{j\leqq n \\ v|j}} 1 = \sum_{v=1}^{n} r_{iv}\varphi(v) \left[\frac{n}{v}\right] = \sum_{v|i} \varphi(v) \left[\frac{n}{v}\right] \leqq \sum_{v|i} v \frac{n}{v} = nd(i)$$

($[x]$ az x egész részét jelenti). Innen

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leqq n \max_{1\leqq i\leqq n} d(i) = O(n^{1+\varepsilon}),$$

(tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén), mert $d(i) = 0(i^{\varepsilon})$, ha $\varepsilon > 0$. (Lásd pl. [6] 260. old.)

Megjegyzés: Felhasználva az erősebb

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log d(n) \log\log n}{\log n} \leqq \log 2$$

állítást ([6] 262. old.), következik,hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{n}}{\frac{\log n}{\log\log n}} \leqq \log 2.$$

2. § $\lambda_{\max}$ (A) ALSÓ BECSLÉSE

SEGÉDTÉTEL: *Legyen a* $\mathbf{Q}=[q_{ij}]$ *mátrixban* $q_{ij}=\mu\left(\frac{i}{j}\right)$, *ha* $j|i$ *és* 0 *különben. Ekkor*

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}^{-1}.$$

$\mu(k)$ *a Möbius függvényt jelenti.*

Bizonyítás: Az **RQ** mátrix i-edik sorának, j-edik eleme

$$\sum_{v=1}^{n} r_{iv} q_{vj} = \sum_{v|i} q_{vj} = 0,$$

ha $j\nmid i$, mert ekkor nincs olyan v, hogy $v|i$ és $j|v$. Ha $j|i$, akkor

$$\sum_{v|i} q_{vj} = \sum_{\substack{v|i \\ j|v}} \mu\left(\frac{v}{j}\right) = \sum_{a j|i} \mu(a) = \sum_{a\left|\frac{i}{j}\right.} \mu(a),$$

és ez 1, ha $i=j$ és 0, ha $i>j$, mert $\sum_{d|n} \mu(d)=1$, ha $n=1$ és 0, ha $n>1$. Ezzel a segédtételt bizonyítottuk.

A fenti segédtétel lényegében a Möbius inverziós formula egy átfogalmazása.

Ha $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ tetszőleges valós szimmetrikus mátrix $\lambda_{\min}(\mathbf{B})$ minimális és $\lambda_{\max}(\mathbf{B})$ maximális sajátértékekkel, továbbá x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots n)$ tetszőleges valós számok, akkor **B** kanonikus felbontása alapján következik, hogy

$$\max_{x_i} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \max_{y_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \lambda_{\max}(\mathbf{B}), \tag{8}$$

és

$$\min_{x_i} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \min_{y_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \lambda_{\min}(\mathbf{B}). \tag{9}$$

(Itt $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ a **B** mátrix sajátértékei.) Legyen $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$, **f** egy n elemű oszlop-

vektor, melynek j-edik eleme $f(j)$, ahol $f(j)$ tetszőleges számelméleti függvény, továbbá $\mathbf{g}$ egy oszlopvektor, melynek j-edik eleme $F(j)=\sum_{d|j} f(d)$.

Ekkor $\mathbf{Rf}=\mathbf{g}$, mert $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} f(j) = \sum_{j|i} f(j) = F(i)$.

Ezért $\mathbf{f}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{g}$. Tehát (9) és (6) szerint

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{A})} = \lambda_{\min}(\mathbf{A}^{-1}) = \min_{\mathbf{g}} \frac{\mathbf{g}^* \mathbf{R}^{*-1} \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}}{\mathbf{g}^* \mathbf{g}} = \min_{\mathbf{g}} \frac{\mathbf{f}^* \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{f}}{\mathbf{g}^* \mathbf{g}},$$

vagyis

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \max_{f(k)} \frac{\sum_{k=1}^{n} F^2(k)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(k)}{\varphi(k)}} \tag{10}$$

Legyen $f(k) = d_\nu(k)$, akkor

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \geqq \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{\nu+1}^2(k)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{d_\nu^2(k)}{\varphi(k)}} \tag{11}$$

Legyenek $b_1, b_2, \ldots b_6$ a továbbiakban csak ν-től függő pozitív állandók, hasonlóan $c_1, c_2 \ldots c_7$ abszolút pozitív állandók.

(5) szerint

$$\sum_{k=1}^{n} d_{\nu+1}^2(k) > b_1 n (\log n)^{(\nu+1)^2-1} \tag{12}$$

és

$$s_l = \sum_{k=1}^{l} d_\nu^2(k) < b_2 l (\log l)^{\nu^2-1} \qquad (\text{ha} \quad l>1).$$

Mivel ismeretes

$$\varphi(n) \geqq c_1 \frac{n}{\log\log n} \quad \text{alkalmas} \quad n \geqq c_2\text{-re.} \tag{13}$$

([6] 267 old.)

A fentiek szerint a parciális összegzés alapján a nevező

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d_\nu^2(k)}{\varphi(k)} \leqq b_3 \log n \sum_{k=1}^{n} \frac{d_\nu^2(k)}{k} = b_3 \log n \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{k} = \tag{14}$$

$$= b_3 \log n \left(\frac{s_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} \right) \leqq b_4 (\log n) \left((\log n)^{\nu^2-1} + b_2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\log k)^{\nu^2-1}}{k+1} \right) \leqq$$

$$\leqq b_5 (\log n)^{\nu^2+1}$$

(11), (12) és (14) szerint

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) > \frac{b_1 n (\log n)^{(\nu+1)^2-1}}{b_5 (\log n)^{\nu^2+1}} > b_6 n (\log n)^{2\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3 \ldots \text{ tetszőleges}).$$

Ezzel (2)-t bizonyítottuk.

3. § $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ FELSŐ BECSLÉSE

(10)-hez hasonlóan megmutatható $f(k)$ és $F(k)$ fenti értelmezése mellett, hogy

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) = \min_{f(k)} \frac{\sum_{k=1}^{n} F^2(k)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(k)}{\varphi(k)}} \tag{15}$$

ahol $f(k)$ tetszőleges számelméleti függvény. Legyen speciálisan $f(k)=\mu(k)$, akkor

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \leqq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{|\mu(k)|}{\varphi(k)}} \leqq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{|\mu(k)|}{k}} \tag{16}$$

De $\sum_{k=1}^{n} |\mu(k)| = Q(n)$ az első n természetes szám közt előforduló négyzetmentes számok száma, s erre teljesül valamely c_3-mal, hogy $Q(n) \leqq c_3 n$ ([6] 269. old.). Alkalmazzuk a parciális összegzést:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\mu(k)|}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Q(k)}{k(k+1)} + \frac{Q(n)}{n} \leqq c_3 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + c_3 \leqq c_4 \log n$$

Ezért (16) szerint

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \leqq c_5 \frac{1}{\log n}$$

(3)-at bizonyítottuk.

4. § $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ ALSÓ BECSLÉSE

$\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} = \lambda_{\max}(\mathbf{A}^{-1})$-et becsüljük felülről. Az $\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{Q}$ mátrix q_{ij} eleme $\mu\left(\frac{i}{j}\right)$, ha $\frac{i}{j}$ egész és 0 különben. Legyen $\lambda(k) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}$, ha k kanonikus felbontása $k = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ (Liouville-függvény) és $\mathbf{L}$ egy diagonálmátrix, melynek k-adik eleme $\lambda(k)$. Ekkor a $\mathbf{T}=\mathbf{LQL}$ mátrix t_{ij} eleme: $t_{ij} = \lambda(i) q_{ij} \lambda(j) = \left|\mu\left(\frac{i}{j}\right)\right|$, ha $j|i$ és 0 különben, mert $\lambda(i)\lambda(j) = \lambda\left(\frac{i}{j}\right)$, ha $j|i$ (a $\lambda(k)$ függvény teljesen multiplikatív és $\lambda(k)\mu(k) = |\mu(k)|$). A

$$\mathbf{T} = \mathbf{LQL} \tag{17}$$

mátrix elemei nemnegatívok, ezért az

$$\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{LR}^{*-1}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{T}^{*}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{T} \tag{18}$$

mátrix elemei is nemnegatívok, továbbá $\mathbf{A}^{-1}$ és a (18) alatti mátrix sajátértékei megegyeznek. Tehát elég (18) sajátértékeit felülről becsülni.

Legyen $\mathbf{N}$ diagonálmátrix, melynek k-adik eleme k. Vegyük figyelembe, hogy ha $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ négyzetes mátrixok, akkor $\mathbf{BC}$ és $\mathbf{CB}$ sajátértékei megegyeznek. Ezért (18) szerint

$$(19) \qquad \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} = \lambda_{\max}(\mathbf{T}^*\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{T}) = \lambda_{\max}(\mathbf{N}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^*\mathbf{N}^{-1}) \overset{\text{def}}{=} \lambda_{\max}(\mathbf{D}).$$

(19)-re alkalmazzuk (7)-et.

A $\mathbf{D}$ mátrix és minden tényezője nemnegatív. Legyen a $\mathbf{b}$ oszlopvektor minden eleme 1. A $\mathbf{k}$ vektor i-edik elemét $(\mathbf{k})_i$-vel jelölve

$$(\mathbf{T}^*\mathbf{N}^{-1}\mathbf{b})_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^* \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} \frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{\substack{k \leqq n \\ i \mid k}} \left|\mu\left(\frac{i}{k}\right)\right| \frac{1}{k} = \frac{|\mu(1)|}{i} + \frac{|\mu(2)|}{2i} + \cdots + \frac{\left|\mu\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)\right|}{\left[\frac{n}{i}\right] i} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{i}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{n}{i}\right]}\right) \leqq c_6 \frac{\log n}{i}.$$

Tehát

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} (\mathbf{Db})_i \leqq c_6 \log n \max_{1 \leqq j \leqq n} (\mathbf{N}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{N}^{-1})_j =$$

$$= \max_{1 \leqq j \leqq n} c_6 \log n \frac{j}{\varphi(j)} \sum_{k=1}^{n} t_{jk} \frac{1}{k} = c_6 \log n \max_{1 \leqq j \leqq n} \frac{j}{\varphi(j)} \sum_{k \mid j} \left|\mu\left(\frac{j}{k}\right)\right| \frac{1}{k} \leqq$$

$$\leqq \max_{1 \leqq j \leqq n} c_6 \log n \frac{j}{\varphi(j)} \sum_{k \mid j} \frac{1}{k} = c_6 \log n \max_{1 \leqq j \leqq n} \frac{j}{\varphi(j)} \frac{\sigma(j)}{j}.$$

Itt $\sigma(j)$ a j osztóinak összege. De $\sigma(j) < \dfrac{j^2}{\varphi(j)}$ ([6] 267. old.). Ezért

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} \leqq c_6 \log n \max_{1 \leqq j \leqq n} \frac{j^2}{\varphi^2(j)} \leqq c_7 \log n \max_{1 \leqq j \leqq n} (\log\log j)^2$$

(13) szerint. Tehát

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} \leqq c_7 \log n (\log\log n)^2$$

Ezzel (4)-et bizonyítottuk.

5. § λ_{min} (A)-HOZ TARTOZÓ SAJÁTVEKTOR ELEMEINEK ELŐJELÉRŐL

Egy **B** négyzetes mátrixot felbonthatónak nevezünk (angolul „decomposable", németül „zerlegbar"), ha létezik egy **P** permutáló mátrix úgy, hogy

$$\mathbf{P}^*\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C0} \\ \mathbf{DE} \end{bmatrix},$$

ahol **C** és **E** négyzetes mátrixok.

Perron és Frobenius tétele ([7] II. kötet 44—47. old.) szerint egy **B** nemnegatív felbonthatatlan mátrixnak létezik pozitív r sajátértéke, mely a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, r nem kisebb mint **B** bármely más sajátértékének abszolútértéke, az r-hez tartozó sajátvektor elemei pozitívok.

A pozitív elemű mátrix, a fenti értelemben nyilván felbonthatatlan. Ez igaz az $\mathbf{A}^{-1}$ reciprokmátrixra is. Ebből következik, hogy a fent definiált $\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{L}$ (18) nemnegatív mátrix felbonthatatlan, tehát kielégíti a Perron—Frobenius tétel feltételeit. De

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{min}(\mathbf{A})} = \lambda_{max}(\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{L}) = \lambda^*$$

A és $\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{L}$ pozitív definitek, tehát $\lambda_{min}(\mathbf{A})$ egyszeres sajátérték (hasonlóan $\lambda_{max}(\mathbf{A})$ is egyszeres). Legyen **v** a $\lambda_{max}(\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{L})$-hez tartozó sajátvektor (**v** pozitív vektor). Ekkor

$$\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{Lv} = \lambda^*\mathbf{v},$$

$$\mathbf{Lv} = \lambda^*\mathbf{ALv},$$

$$\mathbf{ALv} = \lambda\mathbf{Lv}.$$

Tehát, ha a $\lambda_{min}(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektor **u**, akkor $\mathbf{u} = \mathbf{Lv}$.

Innen következik, hogy *ha az* **u** *vektor* u_1 *első eleme pozitív, akkor az i-edik* u_i *elem előjele* $\lambda(i)$ *előjelével egyezik meg.* A fentieknél sokkal egyszerűbb megállapítani, hogy $\lambda_{max}(\mathbf{A})$ egyszeres, s a hozzá tartozó sajátvektor pozitív elemű.

IRODALOM

[1] ST. SMITH: On the value of a certain arithmetical determinant. Proc. London Math. Soc. **7** (1875—76), 208—212.

[2] G. PÓLYA—G. SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. II. (1954), 122. old. 33. feladat.

[3] OLÁH GYULA: A Smith-féle determináns általánosításai. Matematikai Lapok. **XII.** (1961), 174—189.

[4] A. SELBERG: On an elementary method in the theory of primes. Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **19,** no. **18,** (1947), 64—67.

[5] J. G. VAN DER CORPUT: Sur quelques fonctions arithmétiques élémentaires. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **42** (1939), 859—866.

[6] G. H. HARDY—E. M. WRIGHT: An introduction to the theory of numbers. (1960).

[7] F. R. GANTMACHER: Matrizenrechnung I—II. (1958).

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАТРИЦЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ СМИТА

Ф. БАЛАТОНИ

ON THE EIGENVALUES OF THE MATRIX OF THE SMITH DETERMINANT

F. BALATONI

EGY AFFIN SZABÁLYOS SOKSZÖGEKHEZ VEZETŐ ITERÁCIÓS ELJÁRÁS

KORCHMÁROS GÁBOR

Egy konvex sokszög szomszédos oldalfelező pontjainak összekötésével keletkező sokszöget a sokszög első felezőszögének nevezzük. A kapott sokszög felezősokszöge a második felezősokszög, s í. t.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ egy sejtést mondott ki, amely durván így hangzik: Elég nagy n esetén az n-ik felezősokszög közelítőleg affin szabályos. E sejtést $n \leqq 6$ FEJES TÓTH LÁSZLÓ [1] bebizonyította KÁRTESZI FERENC [2] $n = 5$-re egy új bizonyítást adott. E dolgozatban az $n = 7$-re vonatkozó sejtést igazoljuk az alábbi tételben:

Ha egy konvex hétszög súlypontjából a felezősokszögeit rendre alkalmasan kinagyítjuk, akkor az így nyert hétszögekből álló sorozat két olyan részsorozatra bomlik, melyek egy-egy affin szabályos hétszöghöz tartanak.

Helyezzük el a szóban forgó hétszöget a GAUSS-féle számsíkon úgy, hogy a súlypontja az origóba essék. Jelöljük az n-ik felezősokszög csúcsait $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_7^{(n)}$-nel. Válasszuk az indexezést oly módon, hogy az $A_i^{(n)} A_{i+1}^{(n)}$ oldal felezőpontja $A_{8-i}^{(n+1)}$ legyen. Jelöljük továbbá az X pontba mutató vektort x-szel. A bevezetett jelölésekkel az $(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_7^{(n)})$ komplex számhetes az alábbi matrixszal reprezentálható lineáris transzformációval nyerhető:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}.$$

Innen azonnal adódik, hogy az $(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_7^{(n)})$-et $(a_1^{(n+1)}, a_2^{(n+2)}, \ldots, a_7^{(n+2)})$-be vivő lineáris transzformáció mátrixa

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^2.$$

[1] Affin szabályos hétszögön egy szabályos hétszögből affinitással vagy elfajult affinitással származó hétszöget értünk.

Tekintsük a felezősokszögek alkotta sorozat páratlan indexű elemeiből álló részsorozatát. Azt állítjuk, hogy $\mathbf{T}^{2k+1}$ a következő alakú

$$\frac{1}{2^{2k+1}}\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & 0 & d_3 & d_2 & d_1 \\ d_2 & d_3 & 0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_1 \\ d_3 & 0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 & d_3 \\ d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 & d_3 & d_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{2k+1}$$

Ugyanis $k=0$-ra $d_1=1$, $d_2=0$, $d_3=0$. Tegyük fel, hogy $k=n$-re igaz az állítás. A $2^{2k+1}\mathbf{T}^{2k+1}=2^{2k-1}\mathbf{T}^{2k-1}\cdot 2^2\cdot\mathbf{T}^2$ összefüggést felhasználva, egyszerű számolással a következő összefüggéshez jutunk

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & 0 & d_3 & d_2 & d_1 \\ d_2 & d_3 & 0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_1 \\ d_3 & 0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 & d_3 \\ d_1 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 & d_3 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_1 \\ e_3 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_1 & e_2 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_3 & e_2 & e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_3 \\ e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_3 & e_2 \end{bmatrix},$$

ahol

$$e_1 = 3d_1 + d_2$$

$$e_2 = d_1 + 2d_2 + d_3$$

$$e_3 = d_2 + 2d_3$$

$$e_4 = 2d_3.$$

Legyen

$$f_1 = e_1 - 2d_3$$

$$f_2 = e_2 - 2d_3$$

$$f_3 = e_3 - 2d_3.$$

Ekkor az (e_i) mátrix két mátrix összegére bontható:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 & f_3 & f_2 & f_1 \\ f_2 & f_3 & 0 & f_3 & f_2 & f_1 & f_1 \\ f_3 & 0 & f_2 & f_1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2 & f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_3 \\ f_2 & f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_3 & 0 \\ f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_3 & 0 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_3 & 0 & f_2 & f_1 \end{bmatrix} + 2d_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az állításunkhoz elég belátni, hogy a második mátrix az $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$-hez a $(0, 0, \ldots, 0)$-t rendeli; ez nyilvánvaló mivel a hétszögünk súlypontja az origóba esik.

A mátrix elemeire vonatkozó, a fentiekből azonnal adódó

$$\begin{aligned} d_1^{(k+1)} &= 3d_1^{(k)} + d_2^{(k)} - 2d_3^{(k)} \\ d_2^{(k+1)} &= d_1^{(k)} + 2d_2^{(k)} - d_3^{(k)} \\ d_3^{(k+1)} &= d_2^{(k)} \end{aligned}$$

rekurziós formulákból nyerjük, hogy

$$d_2^{(k+3)} - 5d_2^{(k+2)} + 6d_2^{(k+1)} - d_2^{(k)} = 0,$$

ahol

$$k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{és} \quad d_2^{(0)} = 0, \quad d_2^{(1)} = 1, \quad d_2^{(2)} = 5.$$

E lineáris differenciaegyenletnek, mint ismeretes, létezik r^k alakú megoldása és az általános megoldás

$$c_1 \cdot r_1^k + c_2 \cdot r_2^k + c_3 \cdot r_3^k,$$

a c_1, c_2, c_3 konstansok, a kezdeti feltételekből határozhatók meg, r_1, r_2, r_3 pedig az

$$f(r) = r^3 - 5r^2 + 6r - 1 = 0$$

egyenletnek gyökei.

Legyen r az $|r_1|, |r_2|, |r_3|$ nem negatív számok közül a legnagyobb. Megmutatjuk, hogy

$$r = 4\cos^2\frac{\pi}{7}.$$

Mivel az $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x - 1$ függvény értéke a 0, 1, 2 helyen rendre $-1, 2, -1$, azért az $f(x)$ folytonossága miatt az $f(r) = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van a $[0, 2]$-ben. Mivel $4\cos^2\frac{\pi}{7} > 2$, így elegendő belátni, hogy $4\cos^2\frac{\pi}{7}$ kielégíti az $f(r) = 0$ egyenletet. Behelyettesítve

$$f\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right) = \left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right)^3 - 5\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right)^2 + 6\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right) - 1.$$

Ismeretes, hogy

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Így

$$f\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right) = 4\cos^2\frac{\pi}{7}\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}-2\right)\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}-3\right)-1 = 8\cos\frac{\pi}{7}$$

$$\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}-3\right)\left(2\cos^2\frac{\pi}{7}-1\right)-1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-\frac{1}{8}\right) = 0.$$

Legyen $c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3$-ban $4\cos^2\frac{\pi}{7}=r=r_1$. Könnyen adódik, hogy $c_1\neq 0$. Ellenkező esetben

$$c_2+c_3 = 0$$

$$c_2r_2+c_3r_3 = 1$$

$$c_2r_2^2+c_3r_3^2 = 5.$$

c_2 nem lehet 0, mert ez az első két egyenlettel ellentmondásban van. Osszuk el a harmadik egyenletet a másodikkal. A $c_2\neq 0$ és az $r_2-r_3\neq 0$ tényezőkkel egyszerűsítve az

$$r_2+r_3 = 5$$

egyenlőségre jutunk. Ez viszont nem állhat fenn az $r_2, r_3\in[0, 2]$ teljesülése miatt.

Nagyítsuk fel a $(2k+1)$-ik felezősokszöget a súlypontból $\dfrac{1}{c_1\left(\cos^2\frac{\pi}{7}\right)^k}$ arányban. A kapott nagyított képet reprezentáló komplex számhetes $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$-ből az

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 \\ g_2 & g_3 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_1 \\ g_3 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & g_3 \\ g_1 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & g_3 & g_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{(2k+1)}$$

transzformációval kapható, ahol

$$g_1 = \frac{1}{c_1\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right)^k}\left(d_2^{(k+1)}-2d_2^{(k)}+d_2^{(k-1)}\right)$$

$$g_2 = \frac{1}{c_1\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right)^k}d_2^{(k)}$$

$$g_3 = \frac{1}{c_1\left(4\cos^2\frac{\pi}{7}\right)^k}d_2^{(k-1)}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, \quad d_2^{(-1)}=0$$

Tartsunk k-val $a + \infty$-hez. A határátmenet elemenként végezhető. Mivel

$$|r_2|, |r_3| \leqq r_1 = r \quad \text{és} \quad c_1 \neq 0,$$

azért

$$\lim_{k=+\infty} g_1 = r - 2 + \frac{1}{r} = \alpha, \quad \lim_k g_2 = 1 = \beta, \quad \lim_k g_3 = \frac{1}{r} = \gamma$$

Tehát

$$\lim_{k=+\infty} \mathbf{U}^{(2k+1)} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 & \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \gamma & 0 & \gamma & \beta & \alpha & \alpha \\ \gamma & 0 & \gamma & \beta & \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \beta & \alpha & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha & \alpha & \beta & \gamma & 0 & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta & \gamma & 0 & \gamma & \beta \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{\infty}$$

Be kell még látnunk, hogy e transzfromáció tetszőleges hétszöget affin szabályos hétszögbe visz át. A bizonyítás az affin szabályos sokszögek egy tulajdonságán alapszik:

Ha egy $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög semelyik három csúcsa sem kollineáris és

(I) $\quad A_iA_{i+1} = A_{i-1}A_{i+2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad A_0 = A_n, \quad A_{n-1} = A_1;$

(II) $\quad A_{i-1}A_{i+1} = A_{i-2}A_{i+2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad A_0 = A_n, \quad A_1 = A_{n-1}, \quad A_{n-1} = A_1$

ekkor a sokszög affin szabályos. ([3], 47. old.)

Ha az $A_1A_2\ldots A_n$ hétszög csúcsai közül legalább három kollineáris, akkor egyszerű meggondolások alapján látható, hogy a (I—II) feltételek mellett minden pont egy egyenesen van.

A (I—II) feltételt a határhétszög kielégíti, s ezenfelül egy oldal a rövidebb átló és a hosszabb átló aránya $1 : \dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} : \dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$. Jelöljük a határhétszög csúcsait B_i-vel. Akkor

$$b_1 - b_7 = (\beta - \alpha)a_2 + (\gamma - \beta)a_3 - \gamma a_4 + \gamma a_5 + (\beta - \gamma)a_6 + (\alpha - \beta)a_7$$

$$b_2 - b_6 = (\gamma - \alpha)a_2 - \alpha a_3 + (\gamma - \beta)a_4 + (\beta - \gamma)a_5 + \alpha a_6 (\alpha - \gamma)a_7$$

$$b_3 - b_5 = -\beta a_2 + (\gamma - \alpha)a_3 + (\beta - \alpha)a_4 + (\alpha - \beta)a_5 + (\alpha - \gamma)a_6 + \beta a_7$$

Be kell látnunk, hogy

(1) $\quad \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \dfrac{\beta - \gamma}{\alpha};$ $\qquad$ (2) $\quad \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \dfrac{\gamma}{\beta - \gamma};$

(3) $\quad \dfrac{\alpha - \beta}{\beta} = \dfrac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha};$ $\qquad$ (4) $\quad \dfrac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} = \dfrac{-\gamma}{\beta - \alpha};$

Az (1) egyenlőség ekvivalens a következővel:

$$\left(\frac{1}{r}+r-3\right)\left(\frac{1}{r}+r-2\right)=(2-r)\left(\frac{1}{r}-1\right),$$

amely az r-rel való szorzással az $f(r)=0$ figyelembevételével azonnal adódik. Ugyanilyen egyszerűen látható be (2), (3), (4).

Egy oldal és a vele párhuzamos átlók fent megadott arányának igazolásához vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{1}{r-1}=\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{7}-1}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\left(3\cos^2\frac{\pi}{7}-\sin^2\frac{\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}}$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta}=r-2=2\left(2\cos^2\frac{\pi}{7}-1\right)=$$

$$=2\cos^2\frac{\pi}{7}=2\,\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$$

Ezzel a mátrix szabályos szerkezete miatt valamennyi párhuzamossági és arányossági feltétel is be van bizonyítva.

Hátra van még annak az esetnek a vizsgálata, amikor a határhétszög egyenessé fajul. Ha nincs négy különböző pont, akkor van legalább egy háromszorosan egybeeső pont, de akkor minden pont egybeesik. Legyen B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, e három különböző pont. Számozzuk meg egy szabályos hétszög csúcsait a szokásos ciklikus sorrendben. Tekintsük azt az affinitást, amely az előbbi szabályos hétszög i_j csúcsához a határhétszög B_{I_j} $(j=1, 2, 3)$ csúcsát rendeli. Ez az affinitás a szabályos hétszöget a határhétszög csúcsaira képezi le. Utóbbi kijelentésünk a határhétszög oldalaira és átlóira vonatkozó, a szabályos hétszöget jellemző arányokból könnyen belátható.

Megmutatható, hogy létezik olyan nem elfajult konvex hétszög, melynek határhétszöge elfajult. Ez azon alapszik, hogy az U mátrix determinánsa 0.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth László: Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások. Mat. Lapok *20* (1969).

[2] Kárteszi Ferenc: Konvex ötszögből származtatott affin szabályos ötszögpár. Mat. Lapok *20* (1969).

[3] László Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene auf der Kugel im Raum. (1953.)

ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ, ВЕДУЩИЙ К АФФИННЫМ МНОГОУГОЛЬНИКАМ

Г. КОРЧМАРОШ

THE ITERATION PROCESS WHICH LEADS TO AFFINE REGULAR POLYGONS

G. KORCHMÁROS

The polygon which anises by joining the centres of the neighbouring sides of a polygon, is said to be the bisecting polygon of the original polygon. The bisecting polygon of the first bisecting polygon of the first bisecting polygon is the second bisecting polygon, etc. The following conjecture is due to L. FEJES TOTH. If P_n is the n-th bisecting polygon of a given polygon, then there is an affine image R_n of P_n such that the set $R_1, R_2, \ldots$ converges to a regular polygon. Tron pentagons and hexagons this conjecture has been proved previously (1,2). Here we prove the conjecture for heptagons

FELADATROVAT

Szerkeszti: CSÁSZÁR ÁKOS

A feladatrovatnak szánt küldemények (minden feladat megoldása külön lapon) a következő címre küldendők: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

KITŰZÖTT FELADATOK

174. Legyen p és q két természetes szám, $n = p+q$, $p<q$, $(p, n)=1$. Tegyük fel, hogy $s = 1, \ldots, p-1$ esetén

$$\binom{n}{s} \equiv \binom{p}{s} \pmod{q} \quad \text{és} \quad \binom{n}{s} \equiv \binom{q}{s} \pmod{p},$$

$s = p+1, \ldots, q-1$ esetén pedig

$$\binom{n}{s} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Bizonyítandó, hogy ekkor p és q prímszám.

Rényi Kató

175. Legyen E topologikus tér, amelyben minden x ponthoz megadható x zárt környezeteinek olyan $\{V_n\}$ sorozata, hogy $\bigcap_1^\infty V_n = \{x\}$. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset E$ és minden A-beli pontsorozatnak van E-ben torlódási pontja, akkor minden A-beli sorozatnak van E-ben konvergens részsorozata is.

Császár Ákos

176. Jelölje $\lambda(n)$ a Liouville-féle függvényt (vagyis ha az n természetes szám prímtényezős előállítása $n = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$, akkor $\lambda(n) = (-1)^{a_1+\ldots+a_r}$). Mutassuk meg, hogy az $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ számpárok mindegyikéhez található végtelen sok olyan n, hogy $(\lambda(n), \lambda(n+1))$ az adott számpárral egyenlő.

Kátai Imre

164. feladat. Legyen $p_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ polinom, és $|z|<1$ esetén álljon fenn $p_n(z) \to f(z)$, ahol $f(z)$ az egységkörben reguláris függvény. Tegyük fel, hogy $n \geqq k$ esetén a $p_n(z)$ polinomot z növekvő hatványai szerint rendezve, első k tagja megegyezik az egységkörben konvergens

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

hatványsor k-adik részletösszegével. Igaz-e, hogy ekkor az egységkörben $f(z)=g(z)$?

(Császár Ákos)

Megoldás. A kérdésre tagadó a válasz. Valóban, legyen T_n a komplex síknak az a tartománya, amely a nyílt egységkörből keletkezik a 0 középpontú, $\frac{1}{n}$ sugarú zárt körlemeznek, továbbá a $0 \leqq \arc z \leqq \frac{1}{n}$ szögtartománynak eltávolításával. T_n egyszeresen összefüggő, mert határa egyszerű zárt görbe. Ezért a T_n-ben reguláris $z^{-(n-1)}$ függvényhez Runge tétele (l. pl. S. Saks—A. Zygmund: Analytic functions, 177. o.) alapján készíthető olyan $q_n(z)$ polinom, hogy T_n-en és határán

$$|z^{-(n-1)} - q_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

(Runge tételét egy T_n-et és határát tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományra kell alkalmazni.) Ekkor T_n-ben és határán

$$|z - z^n q_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

Ha tehát $p_n(z)=z^n q_n(z)$, akkor a zárt egységkörben $p_n(z) \to f(z)=z$, hiszen $T_n \subset T_{n+1}$, és a T_n-ek lezárásainak egyesítése a zárt egységkör a 0 pont kivételével, viszont $p_n(0)=f(0)=0$ minden n-re. Továbbá $n \geqq k$ esetén a növekvő hatványok szerint rendezett $p_n(z)$ első k tagja 0, úgyhogy a feladat feltételei $f(z)=z$, $g(z)=0$ mellett teljesülnek.

Császár Ákos

Megjegyzés. Lényeges, hogy példánkban a $p_n(z) \to f(z)$ konvergencia nem egyenletes. Ha ugyanis ez a konvergencia az egységkörben egyenletes, akkor bármely k-ra $p_n(z)$ 0 körüli kifejtésének k-adik együtthatója tart $f(z)$ kifejtésének k-adik együtthatójához, az utóbbi tehát $g(z)$ kifejtésének k-adik együtthatójával egyenlő. Ugyanez állna még akkor is, ha a konvergencia 0-nak egy környezetében egyenletes volna.

Császár Ákos

165. feladat. Legyen c olyan valós szám, hogy minden természetes szám c-edik hatványa is természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy c nem-negatív egész szám.

(Gerlits János)

Megoldás. Legyen x természetes szám, és tekintsük az $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+k)$ sorozat $\Delta^k f(x)$ k-adik differenciáját az $f(x)=x^c$ függvényre. A Schwarz—Stieltjes-féle tétel értelmében (l. pl. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, 2. kiadás, II. kötet, 8. o.) alkalmas x és $x+k$ közötti ξ helyre $\Delta^k f(x)=f^{(k)}(\xi)=$ $=c(c-1)\ldots(c-k+1)\xi^{c-k}$. Válasszuk a k természetes számot úgy, hogy $k-1\leqq c<k$ legyen; ez megtehető, hiszen $c<0$ esetén 2^c nem természetes szám. A k szám ilyen választásakor $x\to+\infty$ esetén $\Delta^k f(x)\to 0$, s minthogy ez a differencia egész szám, azért elég nagy x-re $\Delta^k f(x)=0$. Ez csak akkor állhat, ha $c-k+1=0$, azaz ha $c=k-1$.

Ifj. Ruzsa Imre

A 165. feladat megoldását beküldötte még CSÁSZÁR ÁKOS és FRIED ERVIN.

166. feladat Legyen f az

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

függvényegyenletnek olyan megoldása, amely nem $f(x)=cx$ alakú (c állandó). Bizonyítsuk be, hogy a sík minden pontjának minden környezetében kontinuumszámosságú az

$$\{(x,f(x)):\ -\infty<x<+\infty\}$$

grafikon.

(Fried Ervin)

I. megoldás. (a) Jól ismert és könnyen belátható, hogy ha f az

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

függvényegyenletnek megoldása, akkor racionális r számra és bármely valós x-re $f(rx)=rf(x)$.

(b) Ebből rögtön következik, hogy — a sík pontjait helyvektoraikkal azonosítva — a

$$G=\{(x,f(x)):-\infty<x<+\infty\} \tag{2}$$

grafikon pontjainak racionális együtthatójú lineáris kombinációi is G-hez tartoznak.

(c) Ha most f az (1) egyenletnek nem $f(x)=cx$ alakú megoldása, akkor van G-nek két olyan pontja, amelyeknek helyvektorai nem párhuzamosak. Ezeknek összes lineáris kombinációi kitöltik a síkot, racionális együtthatójú lineáris kombinációi pedig a síknak sűrű részhalmazát alkotják. Ekkor tehát G sűrű a síkon.

(d) Legyen most p tetszőleges pont a síkon, és $\varepsilon>0$ is tetszőleges. Minthogy a sík beborítható megszámlálható sok $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb átlójú négyzettel, a G halmaz pedig kontinuum-számosságú, azért van a síkon olyan q pont, amelynek $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú környezetében G-nek kontinuumnyi pontja van, hiszen König Gyula tétele szerint megszámlálható sok kontinuumnál kisebb számosságú halmaz egyesítése is kontinuumnál kisebb számosságú. (c) miatt a $p-q$ vektor $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú környezetében található egy $g\in G$ vektor, s akkor (b) folytán a $q+g$ pont $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú környezetében G kontinuum-számosságú, és ez a környezet része a p pont ε sugarú környezetének.

Komjáth Péter

II. megoldás. Legyen H Hamel-bázis, vagyis a 0-tól különböző valós számoknak olyan halmaza, hogy minden valós szám egyértelműen előállítható H elemeinek racionális együtthatójú lineáris kombinációjaként (az egyértelműség úgy értendő, hogy a 0-tól különböző együtthatóval fellépő elemek és a hozzájuk tartozó együtthatók vannak az előállított számmal egyértelműen meghatározva). Ismeretes, hogy létezik ilyen H, és világos, hogy kontinuum-számosságú. Könnyen látható, hogy (1) általános megoldását úgy kapjuk, hogy $f(0)=0$ mellet az $f(h)$ $(h\in H)$ értékeket tetszőlegesen előírjuk, majd $x=\sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ $(h_i\in H,\ r_i\neq 0$ racionális) esetén $f(x)$-et az

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(h_i) \tag{3}$$

képlettel értelmezzük.

Osszuk H-t osztályokba úgy, hogy h_i és h_j pontosan akkor tartozzék ugyanabba az osztályba, ha

$$f(h_i)/h_i = f(h_j)/h_j .$$

Ha f nem $f(x)=cx$ alakú, akkor legalább két osztály van.

Tekintsük a H elemeiből alkotott olyan (h_i, h_j) párokat, amelyekben h_i és h_j különböző osztályokból vannak véve. Az ilyen párok halmaza kontinuum-számosságú (még akkor is, ha a (h_i, h_j) és (h_j, h_i) párt azonosnak tekintjük). Valóban legyen H_0 az egyik osztály, H' pedig a többinek az egyesítése. Vagy a H_0 halmaz vagy a H' halmaz kontinuum-számosságú, és e két halmaz közül a kontinuum-számosságúnak mindegyik elemét párosíthatjuk a másiknak egy rögzített elemével, a kívánt típusba tartozó kontinuumnyi párt nyerve.

Ha most (h_i, h_j) a tekintett párok egyike, akkor a G grafikon h_i és h_j abszcisszájú pontjainak helyvektorai nem párhuzamosak egymással, és így az I. (c)-ben mondottak szerint a sík tetszőleges p pontjának tetszőleges környezete tartalmazza e két pontnak 0-tól különböző racionális együtthatókkal alkotott alkalmas lineáris kombinációját. E lineáris kombinációk különböző párokra különbözők, mert abszcisszáik különbözők, úgyhogy p adott környezete valóban kontinuum-számosságú halmazban metszi G-t.

Aczél János

III. megoldás. (a) Nevezzük a Q halmazt kvázicsoportnak, ha értelmezve van rajta egy $a\circ b=c$ művelet (azaz $Q\times Q$-nak Q-ba való leképezése) úgy, hogy bármely $a\in Q$ mellett az

$$L_a(x) = a\circ x \quad \text{és} \quad R_a(x) = x\circ a \tag{4}$$

képlettel értelmezett L_a és R_a leképezések Q-nak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését szolgáltatják. Ezeknek inverzeit jelölje L_a^{-1} és R_a^{-1}.

(b) A Q kvázicsoportnak $Q'\subset Q$ részkvázicsoportja, ha $a, b\in Q'$ esetén $a\circ b\in Q'$, $L_a^{-1}(b)\in Q'$ és $R_a^{-1}(b)\in Q'$. Ilyenkor Q' maga is kvázicsoport a $\circ$ művelettel.

(c) Ha Q_1 és Q_2 két kvázicsoport, és a $Q_1\times Q_2$ szorzathalmazban egy műveletet értelmezünk az

$$(a_1, a_2)\circ(b_1, b_2) = (a_1\circ b_1, a_2\circ b_2)$$

képlettel, újabb kvázicsoportot nyerünk.

(d) A Q_1 kvázicsoportnak a Q_2 kvázicsoportba vezető f leképezését homo-

morfizmusnak mondjuk, ha tetszőleges $a, b \in Q_1$ elemekre $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$. Az f homomorfizmus

$$G = \{(x, f(x)) : x \in Q_1\}$$

grafikonja a (c)-ben említett szorzat-kvázicsoportnak részkvázicsoportja.

(e) Legyen Q kvázicsoport s egyúttal topologikus tér, és tegyük fel, hogy $a \in Q$ esetén L_a és R_a homeomorfizmus, továbbá, hogy Q topológiája Lindelöf-féle (vagyis Q-nak minden nyílt befedéséből kiválasztható egy megszámlálható befedés). Legyen Q' Q-nak m számosságú sűrű részkvázicsoportja, és tegyük még fel, hogy m nem állítható elő megszámlálható sok nála kisebb számosság összegeként. Ekkor bármely $p \in Q$ pont bármely V környezetére $Q' \cap V$ számossága m.

Valóban, ekkor van olyan $q \in Q$ pont, amelynek minden V környezetére $Q' \cap V$ számossága m, hiszen különben volna Q-nak olyan nyílt befedése, amelynek minden tagja Q'-t m-nél kisebb számosságú halmazban metszi, s akkor a Lindelöf-féle tulajdonság miatt Q' számossága sem lehetne m. Legyen D az ilyen q pontoknak a halmaza; eszerint $D \neq \emptyset$, és világos, hogy D zárt.

Ha most $q \in D$ és $a \in Q'$, akkor $L_a(q)$ minden környezetében m számú pontja van $L_a(Q')$-nek és $L_a(Q') \subset Q'$ miatt még inkább Q'-nek, azaz $L_a(q) = a \circ q \in D$. Ez más szóval azt jelenti, hogy $q \in D$ esetén $R_q(Q') \subset D$, s minthogy Q'-val együtt $R_q(Q')$ is sűrű, innen $D = Q$ adódik.

(f) Legyen Q_1 és Q_2 két kvázicsoport, s egyben mindkettő olyan topologikus tér, hogy az összes L_a és R_a leképezések homoemorfizmusok. Legyen f Q_1-nek Q_2-be vezető homomorfizmusa, amelynek grafikonja sűrű a $Q_1 \times Q_2$ szorzattérben. Tegyük fel, hogy e szorzattér Lindelöf-féle, és hogy Q_1 számossága m, végül hogy m nem állítható elő megszámlálható sok nála kisebb számosság összegeként. Ekkor minden $p \in Q_1 \times Q_2$ pont minden környezete a grafikonnak m számú pontját tartalmazza.

Ez következik az (e) alatti állításból, hiszen (d) szerint a grafikon részkvázicsoportja a $Q_1 \times Q_2$ kvázicsoportnak és számossága m, úgyhogy csak azt kell belátni, hogy az L_a és R_a alakú leképezések a szorzat-kvázicsoportban is homeomorfizmusok; ez azonban könnyen adódik a szorzattopológia értelmezéséből.

(g) A feladat állítása következménye az (f)-ben bizonyított általános tételnek. Valóban, legyen Q_1 is, Q_2 is a számegyenes az $a \circ b = a + b$ művelettel, f pedig (1)-nek nem $f(x) = cx$ alakú megoldása. Ekkor f homomorfizmus, amelynek grafikonja I. (c) szerint sűrű a $Q_1 \times Q_2$ síkon. Az utóbbi Lindelöf-tér, és König Gyula tételéből tudjuk, hogy a kontinuum-számosság nem állítható elő megszámlálható sok nála kisebb számosság összegeként.

C. T. Ng (Kanada)

Megjegyzés. Nevezzük a Q kvázicsoportot topologikus kvázicsoportnak, ha topologikus tér, és az $x \circ y$, $L_x^{-1}(y)$, $R_x^{-1}(y)$ képletekkel adott leképezések mindegyike $Q \times Q$-nak Q-ba való folytonos leképezése. Ekkor Q minden részkvázicsoportjának lezárása is részkvázicsoport, továbbá ha Q_1 és Q_2 topologikus kvázicsoport, akkor szorzatuk is ilyen.

Ezért, ha az (e) alatti állítás feltételeit úgy módosítjuk, hogy Q topologikus kvázicsoport legyen, és elejtjük azt a feltevést, hogy a Q' részkvázicsoport sűrű legyen, akkor azt állíthatjuk, hogy Q' lezárásának minden pontja olyan tulajdonságú, hogy minden környezete tartalmazza Q'-nek m számú pontját; ekkor ugyanis Q szerepét Q' lezárásának adhatjuk. Ugyanígy, ha (f) alatt Q_1 és Q_2 topologikus

kvázicsoport, de a grafikon sűrű voltára vonatkozó kikötést elhagyjuk, állíthatjuk, hogy a grafikon lezárásának minden pontjára teljesül, hogy minden környezete m számosságú halmazban metszi a grafikont.

C. T. Ng

A 166. feladat megoldását beküldötte még CSÁSZÁR ÁKOS és J. HAMILTON (Kanada).

PROBLÈMES PROPOSÉS

174. Soient p et q des entiers positifs, $n = p+q$, $p<q$, $(p, n)=1$. Supposons que

$$\binom{n}{s} \equiv \binom{p}{s} \pmod{q} \quad \text{et} \quad \binom{n}{s} \equiv \binom{q}{s} \pmod{p}$$

pour $s=1, \ldots, p-1$, tandis que

$$\binom{n}{s} \equiv 0 \pmod{q}$$

pour $s = p+1, \ldots, q-1$. Démontrer que p et q sont des nombres premiers.

K. Rényi

175. Soit E un espace topologique tel que, pour $x \in E$, il existe une suite $\{V_n\}$ de voisinages fermés de x ayant la propriété $\bigcap_1^\infty V_n = \{x\}$. Démontrer que, si $A \subset E$ et toute suite de points contenue dans A admet un point d'adhérence dans E, alors toute suite tirée de A converge vers un point de E.

Á. Császár

176. Désigons par $\lambda(n)$ la fonction de Liouville (c. à. d., si $n=p_1^{a_1}\ldots p_r^{a_r}$, alors $\lambda(n) = (-1)^{a_1+\ldots+a_r}$). Démontrer qu'il existe, pour chacun des couples $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, une infinité d'entiers n tels que $(\lambda(n), \lambda(n+1))$ coincide avec le couple donné.

I. Kátai

TÁRSULATI ÉLET

JELENTÉS A BEKE MANÓ EMLÉKDÍJ TIZENKILENCEDIK KIOSZTÁSÁRÓL

Az 1969. évi Beke Manó emlékdíj odaítélésére az Elnökség bizottságot küldött ki, amelynek tagjai:

Ács Pál, Bartha Dénes, Cseh István, Gádor Endréné, Kőváry Károly és Fried Ervin előadó voltak.

A Bizottság május 6-án és május 27-én tartott ülésén foglalkozott a beérkezett javaslatokkal és kiegészítő információkkal. Munkájában szem előtt tartotta, hogy a Társulat a díjak odaítélésében elsősorban a matematika oktatása és népszerűsítése terén elért kiváló eredményeket kívánja jutalmazni.

A Bizottság a következő határozatot hozta:

3000,— Ft jutalomban részesíti Horvay Katalint, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának volt adjunktusát, 2000—2000,— Ft jutalomban részesíti a következőket: Molnár József budapesti vezető szakfelügyelőt, Póda Béla Baranyai megyei középiskolai szakfelügyelőt, Rédl Lászlót, a szolnoki Verseghy gimnázium tanárát és Tatár István Csongrád megyei általános iskolai vezető szakfelügyelőt.

Indoklás:

HORVAY KATALIN MUNKÁSSÁGÁNAK JELLEMZÉSE

Horvay Katalint a Bolyai János Matematikai Társulat 1962-ben már egyszer Beke-díjjal kitüntette.

Az azóta eltelt időszakban is igen eredményes munkásséggal vett részt Horvay Katalin a matematika népszerűsítésében, az alsó és középfokú oktatás hazai színvonalának emelésében.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán 1963 óta, mint a szakmódszertan előadója, a szakmódszertani szemináriumokon folyó munka irányítója, nagy munkát vállalt a középiskolai tanárképzésben. Rendszeresen látogatta és tanácsaival ellátta a gyakorló gimnáziumok vezető tanárait és a gyakorló tanításban résztvevő tanárjelölteket. Emellett az egyik gyakorló iskolában maga is oktatott, hogy megfigyeléseket, tapasztalatokat gyűjthessen a közelmúltban bevezetésre került reformtanterv egyes fejezeteinek kidolgozásához. Sokoldalú kísérletei közül publikálta A Matematika Tanításában a vektoralgebra középiskolai tanításának lehetőségeire vonatkozó észrevételeit.

A középiskolai matematika szakkörök munkájának segítése céljából két dolgozata jelent meg az „Előadások a középiskolai matematika köréből" című gyűjteményben.

Munkásságában kiemelkedő állomás volt az új középiskolai tankönyvek és az ezekhez készített tanári segédkönyvek elkészítése.

Éveken át vezetett általános iskolai szakköröket.

Az általános és középiskolai tanárok részére szervezett rendezvényeken módszertanilag is kitűnően felépített előadásaival nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy a korszerűbb oktatási módszereket és tantervi anyagot népszerűsítse a tanárság körében.

1965—67-ben elvégezte az MSZMP Budapesti Bizottsága Marxizmus—Leninizmus Esti Egyetemét.

A felsorolt, de semmi esetre sem teljes munkásságára jellemző volt példamutató szerénysége és közvetlen emberi magatartása.

Czapáry Endre

MOLNÁR JÓZSEF VEZETŐ SZAKFELÜGYELŐ

Polgári Iskolai Tanárképző Főiskolát végzett Szegeden 1936-ban; gimnáziumi matematika—fizika tanári oklevelet szerzett a Pázmány Péter Tudományegyetemen Budapesten 1946-ban, doktori szigorlatot tett az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen Budapesten 1946-ban. Tanári munkásságát 1936-ban kezdte 1962 óta fővárosi vezető szakfelügyelő.

A több, mint háromévtizedes pedagógusi pályából mintegy évtizede irányítja a fővárosi matematika szakfelügyeletet és a fővárosi pedagógusok továbbképzését. Ő szervezte meg a fővárosban — az országban elsőnek — az általános iskolai 8. osztályosok versenyét matematikából.

Szervezője és irányítója a „Gyakorlati szemináriumˮ-nak nevezett továbbképzési formának, amely a továbbképzés egyik legsikeresebb formájának bizonyult. Irányításával a fővárosi szakfelügyelet évről évre konkrét vizsgálati témákat tűz maga elé, amelynek eredménye többnyire valamilyen közérdekű publikáció a szóban forgó témáról. Fáradhatatlanul és lelkesen dolgozik a matematika oktatás színvonalának emeléséért. Tagja a MM által létrehozott és a matematikaoktatás korszerűsítésével foglalkozó bizottságnak.

A matematika órák tervezése és levezetése (Matematika Tanítása 1959/I). Számonkérés a matematika órákon (Pedagógia Szemle 1959/9). A valós számkör kiépítése a középiskolákban (Matematika Tanítása 1959/6). A gyakorló típusú matematika órák tervezése és bevezetése (Ped. Szemle 1961/6).

Az ismétlő-rendszerező matematika órák (Matematika Tanítás 1961/6 1962/1).

A matematika ismeretek alkalmazása (Matematika Tanítás 1966/3). Gondolatok az ált. iskola 7—8. oszt. mértan anyagának tanításához (Matematika Tanítás 1967/3).

A síkidomok hasonlóságának tanítása (Szocialista Nevelés Pozsony 1962). Az algebra és elemi függvények tanítása (Tankönyvkiadó Bp. 1965). Közelítő Számítások (Tankönyvkiadó 1966).

Általános iskolai versenyfeladatok (Tankönyvkiadó 1968). Általános Iskolai Szakköri Feladatgyűjtemény (Tankönyvkiadó 1968). Önállóságra nevelés a matematika órán (SZTCS kiadvány 1966). A függvényfogalom kialakítása és felhasználása a matematika órán (SZTCS kiadvány 1967).

DR. PÓDA BÉLA

Baranya megyei középiskolai matematika szakfelügyelő, a pécsi Nagy Lajos gimnázium tanára, a Bolyai János Matematikai Társulat pécsi Tagozatának titkára.

Tanári munkáját 1934-ben kezdte.

Kiváló oktató-nevelő munkájáért 1952-ben elnyerte az Oktatásügy Kiváló Dolgozója érdemérmet. Több ízben kapott soronkívüli előléptetést.

Jelentős része van abban, hogy a pécsi Tagozat hatásosan vesz részt a tanárok továbbképzésében.

Lelkesen keresi az eredményesebb módszereket. Iskolájában kísérleti osztályban is tanít, abban több ízben bemutató tanítást is tartott a megye középiskolai tanárai számára. Tanítványai szép tudást értek el. Oktató munkája gondosan előkészített, tanítása világos, jól érthető. Tanítványaival való kapcsolata meleg, atyaian baráti, tanítványai szeretik.

Nagy gondot fordít a szakköri munkára is. Megyei szintű szakkört szervezett, amelynek előadói részben Budapestről jönnek Pécsre, amelyet nemcsak a pécsi, hanem a megyei gimnáziumok tanulói is látogatnak. Ezeket a szakköröket az ifjúság kedveli, szívesen vesznek azon részt. Szakmai munkája mellett egyéb területen is fáradhatatlanul dolgozik. 1951-ben jelentős része volt a dunaújvárosi kohászati technikum és a gimnázium megszervezésében. Iskolájában hosszú éveken át a szakszervezet megbízottja volt.

Kiváló szakmai munkájáért, derék emberi magatartásáért felettesei sokra értékelik, tanár kollégái, akiket látogat, tisztelik, szeretik. Tanítványai közül többen lettek matematika szakos tanárok.

Cserháti Imréné

RÉDL LÁSZLÓ GIMNÁZIUMI TANÁR

Rédl László tizenkét évig dolgozott középiskolai (eleinte általános iskolai is) matematika szakfelügyelőként, s fáradhatatlan ügybuzgalmával, a megyei matematika oktatás eredményességének fokozásáért végzett tevékenységével osztatlanul szerezte meg a felettes hatóságok és kartársai elismerését.

Felügyelői beosztásáról történt lemondása óta is rendkívül sokat tesz városán és iskoláján belül, de amely mértékben ez lehetséges megyei vonatkozásban is a matematikai ismeretterjesztés és a középiskolai matematika tanítás színvonalának emeléséért, a matematika megszerettetéséért. Második éve tanít matematika—fizika tagozati osztályban, vezeti Szolnokon a „Kis matematikusok baráti körétˮ. Ez utóbbi tevékenységéről ebben az évben a szolnok megyei sajtóban is elismerő sorokat olvashattunk.

Kiemelkedő szakköri tevékenysége. Ennek egyik igen figyelemre méltó megnyilvánulása volt 1967 decemberében a Nagy Októberi Szocialista Forradalom 50. évfordulója alkalmából szovjet matematikusok életművéről, eredeti szovjet példatárak érdekes feladataiból tartott bemutató szakköri ülése, melyen részt vettek a város ált. és középiskoláiban, a megyei középiskoláinak érdeklődő matematika tanárai, az említett baráti kör tagjai, a város középiskolai szakköreinek képviselői.

Fentiek alapján Rédl László kartárs a megyei matematikai ismeretterjesztés és oktatás kiemelkedő egyénisége.

TATÁR ISTVÁN VEZETŐ SZAKFELÜGYELŐ

Tatár István ált. iskolai matematika szakos vezető szakfelügyelője, az egyik legaktívabb, legeredményesebben dolgozó felügyelő.

Eredményes oktató és irányító munkája mellett sokat tesz a matematika népszerűsítéséért. Csongrád megyében kezdeményezője és lelkes lebonyolítója volt az általános iskolai matematikai versenynek és évek óta fontos szerepet vállal az országos általános iskolai matematikai versenyek lebonyolításában.

Az Úttörő Szövetség megmozdulásaiban tevékenyen részt vesz és minden lehetőséget felhasznál ennek keretében a matematika népszerűsítésére. Ilyen irányú munkájának elismeréséül megkapta a KISZ Érdemérem bronz fokozatát.

Az úttörő próbafüzetek közül Tatár István állította össze a Matematikus Szakpróba Füzetet

Mindig lelkes, de jól megfontolt támogatója volt az új gondolatoknak, a kezdeményezésnek és ő maga is állandóan keresi az újat. Mágneses testmodell készletét országos újításnak fogadták el, a számfogalom kialakításának segítségére összeállított készletét pedig a Csongrád megyei Tanács fogadta el újításnak.

Irodalmi munkásságot is folytat: több tanulmánya jelent meg a szaklapokban. A Matematika Tanítása c. folyóiratban közreadta a Csongrád megyei ált. iskolai matematikai verseny tapasztalatait. Részletes tanulmányt készített a matematika nevelési problémáiról.

Az igen eredményes szakmai munkáját nagyon szerencsésen egészíti ki példát mutató egyénisége, fáradtságot nem ismerő ügyszeretete, mindig segíteni kész magatartása.

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT ALAPSZABÁLYAI

I. *Általános rendelkezések*

1. §.

(1) A Társulat neve: Bolyai János Matematikai Társulat.
A Társulat neve angolul: János Bolyai Mathematical Society.
A Társulat neve franciául: Société Mathematique János Bolyai.
A Társulat neve németül: János Bolyai Mathematische Gesellschaft.
A Társulat neve oroszul: Математическое Общество ИМ. János Bolyai.

(2) A Társulat a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének (továbbiakban: Szövetség) tagegyesülete.

(3) A Társulat a Nemzetközi Matematikai Unió (International Mathematical Union, továbbiakban: IMU) tagja.

(4) A Társulat a Közgyűlés és a Szövetség hozzájárulásával tagja lehet más nemzetközi tudományos szervezeteknek is.

(5) A Társulat az 1891-ben alapított „Mathematikai és Physikai Társulat" matematikai tevékenységét folytatja.

(6) A Társulat pecsétje: köriratban „Bolyai János Matematikai Társulat, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének tagja".

(7) A Társulat székhelye: Budapest, működési területe a Magyar Népköztársaság.

II. *A Társulat célja és tevékenysége*

2. §.

(1) A Társulat a Magyar Népköztársaság Alkotmányának szellemében az alábbi célokat követi: elősegíti
a) a matematikai tudományos kutatásokat;
b) a matematika alkalmazásainak fokozottabb meghonosítását és széles körű elterjesztését;
c) a matematika oktatásával kapcsolatos kérdések megoldását;
d) a matematika népszerűsítését és mindezek keretében társadalmunk világnézeti nevelését.

(2) E célok elérése érdekében a Társulat feladata tömöríteni mindazokat a magyar állampolgárokat, akik a matematikai tudomány művelésével, alkalmazásaival, oktatásával vagy népszerűsítésével foglalkoznak, vagy pedig a matematikával kapcsolatban tudománypolitikai tevékenységet fejtenek ki.

(3) E célok és feladatok megvalósítása végett a Társulat

a) szervezett lehetőséget biztosít matematikai eredmények ismertetésére, népszerűsítésére, a matematika elvi kérdéseinek haladó szellemű tudományos világnézeten alapuló elemzésére, időszerű tudomány- és oktatáspolitikai kérdések megvitatására;

b) kongresszusokat, kollokviumokat stb. rendez önállóan vagy más szervekkel együtt;

c) matematikai folyóiratokat, szakkönyveket szerkeszt, támogatja a szakirodalmi tájékoztatást;

d) megvitatja és társadalmi úton elősegíti matematikai életünk kérdéseinek megoldását és ennek érdekében szükség esetén javaslatokat dolgoz ki állami szervek részére, illetve ezek felkérésére szakvéleményt ad;

e) felkutatja a matematikai tehetségeket, előmozdítja továbbképzésüket, tanulmányi és emlékversenyeket szervez, pályadíjakat és emlékdíjakat tűz ki;

f) kiépíti és ápolja a tudományos és pedagógiai kapcsolatokat külföldi hasonló egyesületekkel, intézményekkel.

III. *A Társulat tagjai*

3. §.

(1) A Társulat tagjai rendes tagok, tiszteletbeli tagok vagy pártoló tagok.

(2) A Társulat rendes tagja lehet minden olyan magyar állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit, megvalósításukra képes, részt kíván venni a Társulat tevékenységében, elfogadja a Társulat Alapszabályát és vállalja, hogy rendszeresen fizeti a tagsági díjat.

(3) A Társulat tiszteletbeli tagja lehet minden olyan külföldi állampolgár, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit és Alapszabályát.

(4) A Társulat pártoló tagja lehet minden olyan természetes vagy jogi személy, aki elfogadja a Társulat célkitűzéseit, s erkölcsileg és anyagilag támogatja a Társulat tevékenységét.

(5) A rendes és pártoló tagokat a megfelelő tagozat vezetőségének javaslatára az Elnökség veszi fel. Tiszteletbeli tagokat a Szövetség hozzájárulásával a Választmány vesz fel.

(6) Tagfelvételi kérelem elutasítása ellen 15 napon belül a Választmányhoz lehet fellebbezni

4. §.

(1) A rendes tagok jogai:

a) részt vehetnek a Társulat minden rendezvényén, továbbá a Társulat vagy a Szövetség megbízásából részt vehetnek külföldi tanulmányutakon, rendezvényeken stb.;

b) kérhetik a Társulat támogatását a Társulat céljaival összefüggő javaslatok megvalósítására;

c) felszólalhatnak a Társulat Közgyűlésén;

d) választójoguk van a Küldöttválasztó Értekezleten;

e) megválaszthatók bármely társulati tisztségre egy évi társulati tagság után;

f) javaslatot, beadványt, panaszt intézhetnek a Társulat bármely testületéhez;

g) megbírálhatják a Társulat bármely testületének vagy tagjának társulati tevékenységét.

(2) A rendes tagok kötelességei:

a) megtartani a Társulat Alapszabályát és Fegyelmi Szabályzatát;

b) részt venni a Társulat céljainak megvalósításában;

c) megtartani a Társulat szerveinek határozatait;

d) rendszeresen fizetni a tagsági díjat, a felvétel évét is beleértve.

(3) A tiszteletbeli tagok jogai megegyeznek a rendes tagok jogaival, kivéve a 4. §. (1) bekezdés *d)* és *e)* pontjában felsorolt jogokat.

(4) A tiszteletbeli tagokra a 4. §. (2) bekezdés *a)* pontjában felsorolt kötelességek vonatkoznak.

5. §.

(1) A természetes személy pártoló tag jogai megegyeznek a rendes tagok jogaival.

(2) A jogi személy pártoló tag jogai:

a) képviseltetheti magát a Társulat és a Szövetség rendezvényein;

b) igényt tarthat arra, hogy dolgozói részére a Társulat rendezvényeket szervezzen;

c) kérheti a Társulat segítségét tudományos problémáinak megoldásához és dolgozóinak szakmai továbbképzéséhez.

(3) A természetes személy és jogi személy pártoló tagok kötelességei ugyanazok, mint a rendes tagok kötelességei; tagsági díjukat velük egyetértésben az Elnökség külön állapítja meg.

IV. *A Társulati tagság megszűnése*

6. §.

(1) A társulati tagság a következő okok folytán szűnik meg:
a) haláleset;
b) kilépés;
c) a tagok sorából való törlés;
d) kizárás.
(2) A Társulatból kilépni az Elnökséghez intézett írásbeli bejelentés útján lehet. A tagsági jogok és kötelességek a kilépés bejelentését követő hónap első napjával szűnnek meg.
(3) A Társulati tagság szünetel, ha a tag legalább két évi tagsági díj befizetésével elmaradt, mindaddig, amíg tagsági díj tartozását nem rendezi.
(4) Azt a tagot, aki legalább két évi tagsági díj hátralékát ismételt írásbeli felszólítás ellenére sem fizeti meg, a Választmány törli a tagok sorából.
(5) A Társulatból kizárható az a tag, aki az alapszabályt megszegte, vagy társulati taghoz nem méltó magatartást vagy tevékenységet tanúsított. A kizárás csak fegyelmi határozat alapján történhet. (15. §. (2) bekezdés.)
(6) A Társulat tagjai sorából kizárt vagy törölt személy a Választmány határozata ellen 15 napon belül a Közgyűléshez fellebbezhet. A Fegyelmi Bizottság kizárási javaslatától a fellebbezés elintézéséig a tagság szünetel.
(7) Az érdekelt személyt tagságának megszüntetéséről vagy szüneteléséről a Társulat írásban értesíti.
(8) A Társulatba való újrafelvétel indokolással kérhető a tagság megszűnését kimondó jogerős határozatot követő fél év elteltével.

V. *A Társulat testületei*

7. §.

(1) A Társulat testületei:
a) a vezető szervek;
b) a központi szervek;
c) a szakosztályok;
d) a tagozatok;
e) a Választmány, illetve az Elnökség által kiküldött állandó és időszaki bizottságok;
f) a Küldöttválasztó Értekezlet.
(2) A Társulat vezető szervei:
a) a Közgyűlés;
b) a Választmány;
c) az Elnökség.
(3) A Társulat központi szervei:
a) az Ellenőrző Bizottság;
b) a Fegyelmi Bizottság;
c) az IMU Bizottság;
d) a Külügyi Bizottság.

VI. *A Társulat működésének és vezetésének jellege*

8. §.

(1) A Társulat a társulati demokrácia és a kollektív vezetés elvei alapján működik.
(2) A Társulat vezető és központi szerveinek minden tagját választják.
(3) A választott szervek és tisztségviselő tagok tevékenységükről beszámolnak a Társulat magasabb vezető szerveinek.
(4) A magasabb szerv határozatai kötelezők az alacsonyabb szervre.

VII. *A közgyűlés*

9. §.

(1) A Közgyűlés a Társulat legfőbb vezető szerve. A Társulatot érintő bármely kérdésben dönthet. A Társulat Közgyűlése küldöttközgyűlés.
(2) A Közgyűlés
a) megalkotja és szükség esetén módosítja a Társulat Alapszabályát;

b) megvitatja a Társulatnak a legutóbbi Közgyűlés óta végzett munkáját, meghatározza a soron következő időszak legfontosabb feladatait;
c) felülvizsgálja a Választmány megfellebbezett határozatait, és dönt mindazokban a kérdésekben, amelyeket a Választmány vagy az Elnökség eléje terjeszt;
d) megtárgyalja a tagok által a Közgyűlés időpontja előtt legalább két héttel írásban beterjesztett javaslatokat, illetve dönt e javaslatok érdemi elintézésének előkészítésére vonatkozólag;
e) megvitathatja a Szövetség munkáját és erre vonatkozólag javaslatokat tehet;
f) megvitatja a Társulat pénztárosának jelentését, határoz fontosabb vagyoni jogügyletek, szerződések ügyében, illetve jóváhagyja a Választmánynak erre vonatkozó határozatait, javaslatot tesz a Szövetségnek a rendes tagok tagsági díjára vonatkozóan;
g) megadja a felmentvényt a leköszönő vezető és központi szerveknek, felelős tisztségviselő tagoknak; kellő indokolással visszahívhat a Közgyűlés által megválasztott tisztségviselő tagokat;
h) megválasztja névre és tisztségekre szólóan három évre a vezető és központi szervek tagjait és behívási sorrendjük meghatározásával póttagjait, a szakosztályok vezetőit, megbízza a Társulat lapjainak szerkesztőbizottságát, javaslatot tesz a Művelődésügyi Minisztériumnak a közös lapok szerkesztőbizottságára, kijelöli azt a négy vidéki tagozatot, amely a következő évben az Elnökségbe képviselőt küld;
i) megválasztja határidő nélkül a Társulat tiszteletbeli elnökeit;
j) megválasztja a küldötteket a Szövetség Közgyűlésére, ezek megbízatása a Társulat legközelebbi Közgyűléséig tart;
k) dönt a Szövetségből való kilépés, más egyesületbe való be- és kilépés, egyesülés, részekre való szétválás és megszűnés kérdésében és javaslatot tesz a Szövetségnek az utóbbi két esetben a Társulat vagyonának további sorsa ügyében.

10. §.

(1) Az Elnökség rendes Közgyűlést évente egyszer köteles összehívni. Ha a választott tisztségviselők megbízatása lejár, a Közgyűlés napirendjére kell tűzni a tisztújítást.
(2) Az Elnökség rendkívüli Közgyűlést bármikor összehívhat. Ha a Társulat teljes taglétszámának legalább egyharmada vagy a Választmányának legalább fele — a cél megjelölésével — kéri rendkívüli Közgyűlés összehívását, akkor a rendkívüli Közgyűlést az Elnökség köteles összehívni és 60 napon belül megtartani.
(3) Minden Közgyűlés előkészítése a Küldöttválasztó Értekezletek összehívásával kezdődik a tagozatok székhelyein. Ezen az értekezleten a tagozat bármely tagja felszólalhat és szavazhat.
(4) A Küldöttválasztó Értekezleteket a Közgyűlés napja előtt legalább 3 héttel, de legfeljebb 6 héttel kell összehívni. A Küldöttválasztó Értekezletek időpontját és helyét az értekezlet napja előtt legalább 10 nappal kell írásban közölni a Társulat minden érdekelt rendes és pártoló tagjával.
(5) A Küldöttválasztó Értekezleten a tagozatok minden tíz nem jogi személy tag után egy-egy küldöttet választanak.
(6) A Küldöttválasztó Értekezleten a küldöttek megválasztása jelölt-lista alapján, titkos szavazással történik. A jelöltlistát a tagozat vezetősége által felkért jelölőbizottság készíti. A küldöttek megválasztására a 20. §. szabályai vonatkoznak. A Küldöttválasztó Értekezlet határozatképességét az Ügyrend szabályozza.
(7) A megválasztott küldöttek megbízatása egy Közgyűlésre érvényes.
(8) A Közgyűlés időpontjáról, helyéről és napirendjéről a Társulat minden rendes és pártoló tagját a Közgyűlés időpontja előtt legalább 15 nappal írásban értesíteni kell.
(9) Minden jogi személy pártoló tag egy megbízottal képviseltetheti magát a Közgyűlésen.
(10) Ha a Közgyűlés napirendjén tisztújítás vagy alapszabálymódosítás is szerepel, akkor a Közgyűlés időpontját és helyét a napisajtóban is meg kell hirdetni.

11. §.

(1) A Közgyűlést a Társulat elnöke vagy az Elnökség egyik tagja vezeti. Ő a Közgyűlés elnöke, előterjeszti a Közgyűlés tárgysorozatát, a beérkezett írásbeli indítványokat. Javaslatot tehet mandátumvizsgáló-, szavazatszedő stb. bizottságnak a kiküldésére.
(2) A Közgyűlés tárgysorozatához és megvitatandó kérdéseihez bármely társulati tag hozzászólhat, de csak a megválasztott, küldött tagok szavazhatnak. A küldöttek szavazati jogukat csak személyesen gyakorolhatják.

(3) A közgyűlésen a választások titkos szavazással történnek. Kellő indokolással más kérdésben is elrendelhető titkos szavazás.
(4) A Közgyűlés határozatképessége, határozatérvényessége, tisztségekre jelölés és választás tekintetében a 18. 20. §. irányadó.

VIII. *A Választmány*

12. §.

(1) A Választmány a Közgyűlésnek alárendelt, az Elnökségnek fölérendelt vezető szerv. Foglalkozik az Alapszabály szerint hatáskörébe tartozó, valamint a Társulat más szervei által eléje terjesztett ügyekkel.
(2) A Választmány a Közgyűlés által megválasztott Elnökségből, a Közgyűlésen megválasztott 26—28 választmányi tagból, a Fegyelmi Bizottság, az IMU Bizottság és a Külügyi Bizottság elnökéből, a tagozatok egy-egy képviselőjéből és a társulati lapok felelős szerkesztőiből áll. A Közgyűlés az esetleg megüresedő választmányi tagsági helyek betöltésére 8—10 választmányi póttagot választ meg, meghatározott behívási sorrenddel. A póttagoknak a behívás előtt tanácskozási joguk van. Tanácskozási joggal részt vehetnek a Választmány ülésein további meghívott személyek is.
(3) A Választmány
a) vezeti és ellenőrzi a Társulat munkáját két Közgyűlés között;
b) ellenőrzi — az Ellenőrző Bizottsággal együttműködésben — a Társulat alapszabályszerű működését;
c) kiküld állandó és időszaki bizottságokat, megszabja feladatukat és hatáskörüket, beszámoltatja őket tevékenységükről és szükség esetén visszahívhatja tagjaikat;
d) felvesz tiszteletbeli tagokat; dönt a vitás tagfelvételi ügyekben; töröl, fegyelmi eljárás alapján kizár a tagok sorából egyes személyeket;
e) határoz tagozatok kialakítása ügyében; jóváhagyja a tagozatok vezetőségválasztásait;
f) kidolgozza és jóváhagyás végett a Közgyűlés elé terjeszti a Társulat ügyrendjét;
g) jóváhagyja a Társulat Fegyelmi Szabályzatát és dönt a Fegyelmi Bizottság megfellebbezett határozataival kapcsolatban.
(4) A Választmány határozatai ellen 15 napon belül a Közgyűléshez lehet fellebbezni. E fellebbezésnek halasztó hatálya csak fegyelmi ügyben van; kizárási határozat esetén a 6. §. (6) bekezdése irányadó.
(5) A Választmányt az Elnökség évente legalább kétszer hívja össze. Össze kell hívni akkor is, ha ezt a Társulat tagjainak legalább negyede, vagy a Választmány tagjainak legalább a fele kéri

IX. *Az Elnökség*

13. §.

(1) Az Elnökség a Közgyűlésnek és a Választmánynak alárendelt társulati vezető szerv. Foglalkozik az Alapszabály szerint hatáskörébe tartozó, továbbá a más társulati testületek által eléje terjesztett ügyekkel.
(2) Az Elnökség összetétele: elnök, egy budapesti és egy vidéki alelnök, főtitkár, pénztáros, a szakosztályok elnökei és titkárai, a Külügyi Bizottság elnöke és titkára, egy-egy titkár a dunántúli és a dunáninneni tagozatok ügyeinek intézésére, továbbá a vidéki tagozatok négy képviselője.
(3) Az Elnökség tagjait a Közgyűlés választja meg, kivéve a vidéki tagozatok 4 képviselőjét. Ezeket a Közgyűlés által kijelölt 4 vidéki tagozat választja egy évi időtartamra. Törekedni kell arra, hogy az Elnökségben a Társulat tagságának minden rétege megfelelően képviselve legyen.
(4) Az Elnökség
a) vezeti és ellenőrzi a Társulat munkáját két választmányi ülés között;
b) elkészíti a Társulat évi munkatervét;
c) megvitatja a Társulat éves pénzügyi tervét, megállapítja a pártoló tagok tagsági díját;
d) gondoskodik a vezető és központi szervek határozatainak végrehajtásáról;
e) irányítja és ellenőrzi a szakosztályok, tagozatok, állandó és időszaki bizottságok munkáját;
f) segíti és ellenőrzi a Társulat lapjainak szerkesztését;
g) kiküld állandó és időszaki bizottságokat, megbízottakat, megszabja őket tevékenységükről és szükség esetén visszahívhatja tagjaikat;
h) előkészíti a Közgyűlést és a Választmány üléseit;
i) javaslatot tesz a Közgyűlésnek és a Választmánynak a Szövetség munkájával kapcsolatosan;
j) felvesz a tagozatok vezetőségének javaslatára rendes és pártoló tagokat;

k) intézkedik az időközben megüresedett tisztségek betöltéséről a 13. § (5) bekezdés szerint;
l) dönt a társulati jutalmak kiosztásáról.

(5) Olyan tisztség megüresedése esetén, amelyet a Közgyűlés névre szólóan töltött be, az Elnökség ideiglenesen megbíz egy tagot a tisztség ellátásával. A tisztséget a legközelebbi Közgyűlés választás útján tölti be a legközelebbi tisztújításig. Ha az így ideiglenesen megbízott tisztségviselők száma eléri a Közgyűlés által névre szólóan tisztségekre megválasztottak számának 25%-át, akkor 60 napon belül rendkívüli Közgyűlést kell összehívni tisztújítás céljából.

(6) Az Elnökség határozatai ellen 15 napon belül a Választmányhoz lehet halasztó hatály nélkül fellebbezni.

(7) Az Elnökséget az elnök vagy a főtitkár hívja össze.

(8) Az Elnökség kéthavonként legalább egyszer ülésezik.

14. §.

(1) Az elnök vezeti a Társulat vezető szerveinek üléseit, képviseli a Társulatot más egyesületek szervek stb. irányában. Felelős a Társulat alapszabályszerű működéséért. Felelősség terhe mellett utalványozhatja a Társulat kifizetéseit.

(2) Az elnököt akadályoztatása esetén az általa felkért egyik alelnök helyettesíti.

(3) A tiszteletbeli elnökök tudományos és közéleti tekintélyükkel támogatják a Társulat tevékenységét. Őket a Közgyűlés határidő nélkül választja. Számuk legfeljebb 5. A Társulat vezető szerveiben az e szervek választott tagjait megillető jogokat gyakorolhatják, a Közgyűlésen a küldöttek jogai illetik meg őket.

(4) A főtitkár biztosítja a vezető szervek határozatainak végrehajtását, ellátja a két elnökségi ülés között a Társulat folyamatos ügyintézését, elkészíti a vezető szervek elé terjesztendő beszámolókat, gondoskodik a Fegyelmi, az IMU és a Külügyi Bizottság, a szakosztályok, a tagozatok az állandó és időszaki bizottságok és megbízottak munkájának irányításáról és ellenőrzéséről. Eljár a Társulat ügyeiben különféle szervek előtt. Felelősség terhe mellett utalványozhatja a Társulat kifizetéseit és elkészíti a pénztárossal együtt a Társulat éves költségvetési tervét. Akadályoztatása esetén valamelyik általa felkért elnökségi tag helyettesíti.

(5) A pénztáros felelősség terhe mellett intézi a Társulat pénzügyeit, utalványozza a Társulat kifizetéseit, elkészíti a főtitkárral együtt a Társulat évi költségvetési tervét, valamint a Közgyűlés elé terjesztendő jelentést. Okmányszerűen köteles igazolni a kifizetések jogosultságát. Működését az elnök, a főtitkár, az Ellenőrző Bizottság és a Szövetség bármikor ellenőrizheti.

(6) A vidéki ügyeket intéző két titkár a főtitkár irányításával intézi a vidéki tagozatok szervezési ügyeit. Működésüket az Ügyrend szabályozza.

X. *A központi szervek*

15. §.

(1) Az Ellenőrző Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 3 tagból és 2 tanácskozási jogú póttagból áll. Tagjai a Társulatban semmilyen más tisztséget nem viselhetnek. Az Ellenőrző Bizottság a Társulat alapszabályszerű működését és a Tásrulat költségvetési tervének megtartását ellenőrzi. Betekintési joga van a Társulat vezető és központi szerveinek, szakosztályainak, tagozatainak, állandó és időszaki bizottságainak munkájába. Észrevételeiről szükség esetén tájékoztatja a Választmányt és az Elnökséget. Működéséről beszámol a Közgyűlésnek.

(2) A Fegyelmi Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 2 tagból és 2 tanácskozási jogú póttagból áll. Kidolgozza és a Választmány elé terjeszti a Társulat Fegyelmi Szabályzatát. Az Alapszabályt vagy a Fegyelmi Szabályzatot megszegő társulati tagok ellen fegyelmi eljárást indít akár a vezető szervek, akár az Ellenőrző Bizottság utasítására. Ezekben az ügyekben határoz, kivéve ha kizárást tart szükségesnek; erre a Választmánynak tesz javaslatot. Határozatai ellen 15 napon belül halasztó hatállyal lehet a Választmányhoz fellebbezni.

(3) Az IMU Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból és 6—10 tagból áll. Képviseli a Társulatot az IMU-ban. Munkájához tervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

(4) A Külügyi Bizottság a Közgyűlés által megválasztott elnökből, titkárból, 6—8 tagból és 3 tanácskozási jogú póttagból áll. Ápolja a Társulat külföldi kapcsolatait, határoz a Társulat külföldi rendezvényeken való képviseletéről és külföldi vendégek meghívásáról. Munkáját a Szövetség külföldi kapcsolatokat intéző osztályával egyetértésben végzi. Évi munkatervet készít és tevékenységéről beszámol a Választmánynak.

XI. *A szakosztályok*

16. §.

(1) A Közgyűlés a Társulat nagyobb, állandó feladatainak önálló intézésére szakosztályokat létesít. A szakosztályok a szakterületi adottságoknak megfelelő tagokat tömörítik és ellátják a Társulat céljainak megfelelő előadások, kollokviumok, vándorgyűlések, ankétok stb. szervezésével kapcsolatos teendőket.
(2) A szakosztályokat a Közgyűlés által megválasztott elnökből, alelnökből és titkárból álló vezetőség irányítja. Működésüket az Ügyrend szabályozza.
(3) A szakosztály vezetősége munkájáról évente legalább egyszer beszámol az Elnökségnek.

XII. *A tagozatok, helyi csoportok*

17. §.

(1) A Választmány tagozatokat létesíthet ott, ahol erre igény merül fel, működési területük kijelölésével.
(2) A tagozat működési területén helyi csoportokat alakíthat. Működési területüket kijelöli és tevékenységüket irányítja.
(3) A tagozatok működését elnökből, alelnökből és titkárokból álló vezetőség irányítja. Ezeket maga a tagozat választja meg, legfeljebb három évre, megválasztásukat a Választmány hagyja jóvá. A vezetőségválasztás módját az Ügyrend szabályozza. A vezetőség a tagozat munkájáról időközönként beszámol az Elnökségnek.

XIII. *A testületek határozatképessége*

18. §.

(1) A Társulat bármely testületének határozatképességére vonatkozó alábbi szabályokat a testület ülésének teljes időtartamára alkalmazni kell.
(2) A Küldöttválasztó Értekezletek határozatképességét az Ügyrend szabályozza.
(3) A Társulat minden egyéb testülete akkor határozatképes, ha a testület ülésén jelen van a testület szavazati joggal rendelkező tagjainak több, mint fele.
(4) Határozatképtelenség esetén a testületet 30 napon belül újabb ülésre kell összehívni. Ennek tárgysorozatán az ülésen elintézetlenül maradt napirendi pontok szerepelnek. Ez az ülése mindenképpen határozatképes.

XIV. *Határozathozatal*

19. §.

(1) A testületek határozataikat általában nyílt szavazással, egyszerű szótöbbséggel hozzák. Az Ügyrend által meghatározott esetekben elrendelhető titkos szavazás is. Ugyancsak az Ügyrend szabályai alkalmazandók szavazategyenlőség esetén.
(2) A Közgyűlés a 9. § (2) bekezdés *a)* és *k)* pontjaiban felsorolt kérdésekben legalább kétharmados szótöbbséggel dönt, és a döntés érvényességéhez az is szükséges, hogy a 10. § szerint megválasztott teljes küldöttlétszámnak legalább a fele megszavazza a javaslatot.
(3) A testületek határozatainak megszavazásakor nem rendelkeznek szavazati joggal a testület olyan tagjai, akik a határozatban személy szerint közvetlenül érdekeltek. (Választásokra ez a rendelkezés nem vonatkozik.)

XV. *Választások*

20. §.

(1) A Küldöttválasztó Értekezleteken megválasztandó küldöttekre a tagozat vezetősége által felkért jelölő bizottság tesz javaslatot. A Küldöttválasztó Értekezleteken a jelöltlistát bármely szavazásra jogosult tag javaslatára további nevekkel kell kiegészíteni.
(2) A Közgyűlésen megválasztandó tisztségviselőkre a Választmány által felkért jelölő bizottság tesz javaslatot. Lehetőséget kell adni arra, hogy a küldöttek a jelölő bizottság javaslatát kiegészítsék.
(3) A választások titkosak. A Közgyűlésen a szavazólapra új név is beírható.
(4) A választások részletes lebonyolításának módját a Társulat Ügyrendje szabályozza.

XVI. *A Társulat kiadványai*

21. §.

(1) Céljainak hathatósabb előmozdítására a Társulat tudományos, didaktikai, népszerűsítő vagy kultúrpolitikai kérdéseket elemző kiadványokat, füzeteket, könyveket, folyóiratokat szerkeszthet vagy ilyenek kiadását kezdeményezheti.
(2) A Társulat lapjainak szerkesztő bizottságait a Közgyűlés bízza meg; egyéb kiadványokhoz a szerkesztői megbízatást a Választmány adja. Feladatukat az Ügyrend szabja meg.

XVII. *A függetlenített titkárság*

22. §.

(1) A Társulat függetlenített titkárságának munkatársait (a társulati titkárt és további alkalmazottakat) a Szövetség alkalmazza. Ők látják el a Társulat és a Szövetség határozatainak végrehajtásával kapcsolatos folyamatos ügyintéző és szervező munkát.
(2) Társulati munkájáért a függetlenített titkárság a Társulat Elnökségének és végső soron a Szövetség főtitkárának felelős.
(3) A függetlenített titkárság munkáját a Társulat főtitkára közvetlenül irányítja.

XVIII. *A Társulat pénzgazdálkodása*

23. §.

(1) A Társulat jövedelmének forrásai:
a) a rendes és pártoló tagok által fizetett tagdíjak;
b) a Szövetség és állami szervek által biztosított pénzügyi támogatás;
c) a Társulat rendezvényeire befizetett hozzájárulások;
d) egyéb bevételek.
(2) A Társulat pénzgazdálkodását éves költségvetés alapján végzi. Ezt a pénztáros készíti elő a főtitkárral egyetértésben, az Elnökség megvitatja és a Szövetség hagyja jóvá.

XIX. *Felsőbb felügyelet*

24. §.

(1) A Társulat felett a felügyeletet a Magyar Tudományos Akadémia elnöke a Szövetség főtitkára útján gyakorolja.

XX. *Vegyes rendelkezések*

25. §.

(1) Mindazokban a kérdésekben, amelyekről a Társulat Alapszabálya nem rendelkezik, a Társulat Ügyrendjét, Fegyelmi Szabályzatát és a Szövetség Alapszabályát kell figyelembe venni.
(2) A jelen Alapszabály hatályba lépése után a korábbról visszamaradt elintézetlen ügyekben is a jelen Alapszabály szerint kell intézkedni.

26. §.

Ezt az Alapszabályt a Társulat Közgyűlése 1966. július hó 1. napján elfogadta, és az Alapszabály 1968. év május hó 20. napján hatályba lépett.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

ELNÖK

A Bolyai János Matematikai Társulatnak az 1966. július 1-i közgyűlése által elfogadott alapszabályát jóváhagyom azzal, hogy az alapszabály 20. §-a kiegészül a következő bekezdéssel:
(4) A választások részletes lebonyolításának módját a Társulat ügyrendje szabályozza.

Budapest, 1968. május 20.

Rusznyák István s. k.

(P. H.)

Magyar Tudományos Akadémia

A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT 1969. JÚNIUS 26-ÁN MEGTARTOTT KÖZGYŰLÉSÉRŐL

A Közgyűlést Hajós György elnök távolléte miatt Surányi János alelnök nyitotta meg. Kegyeletes szavakkal emlékezett meg a Társulatot a közelmúltban ért nagy veszteségekről, Varga Ottó és Horvay Katalin elhunytáról, majd rámutatott arra, milyen fontos feladatok várnak a most megválasztandó új vezetőségre.

Bejelenti, hogy a Küldöttközgyűlés összes küldötteinek száma 138, ezek közül 108-an jelentek meg, így a közgyűlés határozatképes.

A Társulat Közgyűlésének napirendjét a küldöttek megkapták.

Napirend

De. 10 órakor:
1. Megnyitó
2. Főtitkári beszámoló (Császár Ákos)
3. Pénztárosi jelentés (Schmidt Tamás)
4. Az ellenőrző bizottság jelentése (Tandori Károly)
5. A jelölőbizottság jelentése (Rapcsák András)
6. A főtitkári beszámoló és a pénztárosi jelentés megvitatása.
7. Választás
8. A jelentések feletti vita folytatása
9. A Társulati Lapok szerkesztő bizottságainak megbízása.
10. Az Elnökségben képviselt négy vidéki tagozat kijelölése.
11. Küldöttek választása a MTESZ közgyűlésére
12. Indítványok
13. A szavazatszedő bizottság jelentése
14. Zárszó

Megkérdezi, hogy ezt elfogadja-e a Közgyűlés, van-e valami ellenvetés? (Nincs.)

Megállapítja, hogy a küldöttek a napirendet elfogadták. Ezután felkérte Császár Ákos főtitkárt beszámolója megtartására.

Az alábbiakban közöljük a küldöttek számára előzetesen kiküldött főtitkári beszámolót

Az elnök megköszönte a főtitkári beszámoló megtartását és felkérte Schmidt Tamást jelentése megtartására.

PÉNZTÁROSI JELENTÉS

1967., 1968. KÖLTSÉGVETÉSI ÉVRŐL ÉS 1969. ÉV ELSŐ ÖT HÓNAPJÁRÓL.

A Társulat *bevételei* a következő négy részből tevődnek össze:

1. A MTESZ-en keresztül Társulatunk állami támogatásban részesül.
2. Társulatunk tagjai tagdíjat fizetnek.
3. Kollokviumok vagy más rendezvények céljaira állami szervektől támogatást kapunk, illetve a résztvevők részvételi díjat fizetnek.
4. Saját kiadványok értékesítése. (Kollokviumok anyagának kiadása, illetve a Matematikai és Fizikai Lapok régebbi számainak újranyomatása.)

Bevételek (ezer Ft-ban)

	1967.	1968.	1969. (5 hónap)
Állami támogatás	258	243	260
Tagdíj	20	15	18
Jogi tagdíj.		6	
Rendezvények	108	100	119
Tanfolyam	70	113	40
Saját kiadv. értékesítése		107	378
Előző évi maradvány	48	100	49
	504	684	

A Társulat kiadásai az alábbiakból tevődnek össze:

1. A Társulat adminisztratív dolgozóinak fizetése.
2. A társulati helyiségek fenntartási költségei.
3. Működési kiadások.
4. Kiadványok előállítási költségei.

Bevételek (ezer Ft-ban)

KIADÁS:	1967.	1968.	1969. (5. hónap)
Reprezentáció	15	11	9
Külföldi vendéglátás	18	21	6
Kiküldetés belföldi	18	19	7
Külföldi kiküldetés	31	36	2
Alkalmi munka	5	7	1
Társ. munkát megh. tevékenys.	4	7	5
Pályadíj	25	28	2
Jutalmazás	18	2	29
Nyomtatvány	23	31	17
Berendezés jav.	1	1	
Posta, telefon	27	29	12
Könyvtár	2	9	1
Szolgáltató Ir.	12	17	7
Fenntart. hozzájár.		2	
Vidéki csop. tám.	31	25	
Rendezvények	161	129	81
Tanfolyam	14	93	16
Saját kiadv. ért.		174	140
	405	635	

1. BEVEZETŐ

A következő jelentés feladata elsősorban az, hogy képet adjon a Bolyai János Matematikai Társulatnak az 1967. december 28-án tartott Közgyűlés óta végzett tevékenységéről; annak érdekében azonban, hogy a Közgyűlés résztvevői átfogó képet kapjanak az 1966-ban megválasztott vezetőség munkájáról, kiterjed a jelentés az 1966. július 1-től 1967 végéig végzett társulati tevékenységre is.

A kérdéses időszakban a Társulat tovább folytatta a korábban kialakult irányokban a munkát; ezen belül egyes területeken jelentékenyen kiszélesedett a Társulat tevékenysége, és néhány tekintetben új kezdeményezések is jöttek létre, amelyek máris sikeresnek bizonyultak. Ezek a kezdeményezések nem kis részben tulajdoníthatók annak a körülménynek, hogy az 1966-ban megválasztott vezetőség tagjai közé többen bekerültek a Társulat fiatal tagjai közül; lelkesedésük és agilitásuk nagymértékben elősegítette a Társulat célkitűzéseinek megvalósítását.

2. A TÁRSULAT SZERVEZETE

A Társulat munkájának gerincét a szakosztályok és a vidéki tagozatok végzik; egyes konkrét feladatok ellátására a Választmány, az Elnökség, a szakosztályok ill. a tagozatok vezetőségei bizottságokat küldenek ki.

A Társulatnak jelenleg három szakosztálya van:

a) Tudományos Szakosztály,
b) Oktatási Szakosztály,
c) A Matematika Alkalmazásai Szakosztály.

A Vidéki Tagozatok száma 1966 óta kettővel emelkedett: 1967-ben megalakult a Komárom megyei Tagozat, 1968-ban pedig a Békés megyei Tagozat. Így jelenleg tagozataink száma 16.

1. Baranya megyei Tagozat
2. Bács-Kiskun megyei Tagozat
3. Békés megyei Tagozat
4. Borsodi Tagozat
5. Csongrád megyei Tagozat
6. Fejér megyei Tagozat
7. Hajdú-Bihar megyei Tagozat
8. Heves megyei Tagozat
9. Győri Tagozat
10. Komárom megyei Tagozat
11. Soproni Tagozat
12. Somogy megyei Tagozat
13. Szabolcs-Szatmár megyei Tagozat
14. Szolnok megyei Tagozat
15. Vas megyei Tagozat
16. Veszprém megyei Tagozat

A Tagozatok elnevezését a tagozati titkároknak 1967-ben tartott értekezlete a korábbiakhoz képest némileg módosította, s ugyanakkor került sor a tagozatok működési területeinek egyeztetésére is.

Több tagozat keretében működik helyi csoport olyan városokban, amelyekben a társulati tagok száma a tízet meghaladja. Az elmúlt három évben ilyen helyi csoport Dunaújvárosban alakult, a Fejér megyei Tagozat keretében.

3. SZAKOSZTÁLYOK

a) Tudományos Szakosztály

E szakosztály munkájának zömét előadó ülések szervezése (havonta a nyári hónapok kivételével 1—2 ízben, sok esetben más szervekkel közösen), valamint kollokviumok megrendezése alkotja. Az utóbbiakról a következőkben még részletesen szó lesz; az előadó ülések előadói között nagy számban szerepeltek a Társulat külföldi vendégei. Viszonylag kisebb számban szerepeltek a budapesti üléseken a Társulat vidéki tagjainak előadásai; a belföldi kapcsolatok ilyen irányú fejlesztése kívánatos volna. Ugyancsak sajnálatosnak mondható az előadó ülések igen gyakran mutatkozó csekély látogatottsága; ennek a hosszú évek óta mutatkozó stagnálásnak számos objektív oka van, de még ezek figyelembe vételével is nagyobb látogatottságot lehetne elérni az előadóknak és az előadások témájának a szélesebb rétegeket érdeklő kérdések felé való irányításával.

Igen örvendetes kezdeményezése volt a Szakosztálynak — a Matematika Alkalmazásai Szakosztállyal közösen — a Fiatal Matematikusok Találkozóinak megrendezése. Ezeken a két szakosztály fiatal (30 éven aluli) tagjai jönnek össze és számolnak be elért eredményeikről, élénk és termékeny vitákban beszélve meg tudományos problémáikat. Ilyen találkozót a két szakosztály első ízben 1966-ban Bánkúton rendezett, majd ennek tapasztalatait felhasználva 1967-ben Dobogókőn, 1968-ban Várgesztesen tartottak találkozót, 1969-ben pedig Pécsett készülnek a jól bevált, a fiatalok körében rendkívül népszerű találkozót megrendezni.

Ugyancsak az említett két szakosztály közös kezdeményezése volt első ízben 1967 tavaszán, majd azóta évente a végző matematikus hallgatók részére egy-egy klubest megrendezése. Ezen a fiatalokat a Társulat munkájába bekapcsolódásra mozgósító, ehhez kedvet csináló előadások hangzottak el. Ezeknek a klubesteknek a sikerét mutatja egyrészt az, hogy idén már egyetemi hallgatók is bekapcsolódtak a kollokviumok szervező munkájába, másrészt az a tény is, hogy ebben az évben az Oktatási Szakosztály is rendezett hasonló klubestet a végző matematika—fizika szakos hallgatók részére.

b) Oktatási Szakosztály

A Szakosztály *3* tagú vezetősége a Társulat vezetőségének és az Oktatási Bizottságnak a támogatásával végzi munkáját. Állandó élénk kapcsolatot tart fenn a Művelődésügyi Minisztérium, az OPI, az SZTI, valamint az AMI matematika tanításával foglalkozó szerveivel.

Az elmúlt időszakban az Oktatási Szakosztály munkája az évek során már kialakult tevékenységi területeken és formákban folyt. Ez a munka két nagy területet ölel fel: a tanárok munkájának segítése és a diákokkal való foglalkozás.

A tanári munka segítésének fő formái: előadások tartása Budapesten és vidéken, valamint az évenként megrendezésre kerülő vándorgyűlés.

Az elmúlt években egyre nagyobb intenzitással kapcsolódtak be a Szakosztály munkájába az általános iskolai tanárok. Számukra is rendeztünk külön előadásokat, sőt a nyíregyházi vándorgyűlésen már külön szekcióban dolgoztak. Az ez évi vándorgyűlésen is külön szekciót nyitunk számukra.

A vándorgyűlések résztvevőinek száma évről évre emelkedik, tavaly már elérte a 350-et. Megvalósítottuk a tanároknak azt a kívánságát, hogy a vándorgyűlések tartama 3 napról 4-re emelkedjék.

A vándorgyűlések és a tanévben rendezett előadások egyrészt az új tanterv megvalósítását segítik, másrészt pedig az oktatás egyes kérdéseivel — beleértve pszichológiai kérdéseket is — foglalkoznak. Változatlanul probléma már hosszú évek óta a budapesti előadások gyér látogatottsága. Ezen a nehézségen nem tudtunk úrrá lenni. Okait ismerjük, de azokat orvosolni nem tudjuk. Bár itt is akadnak kivételek, mint pl. Pólya György professzor előadásai, amelyeknek óriási hallgatósága volt.

Társulatunk tagjai segítik a tanárok kötelező továbbképzését előadásokkal, cikkekkel, javaslatokkal stb. mind Budapesten, mind a vidéki tagozatoknál. A Szakosztály figyelemmel kíséri a vidéki tagozatok munkáját és előadók küldésével is támogatja őket. Értékes segítséget nyújtott a Szakosztály az OPI 1967. júliusában Szegeden megrendezett továbbképző tanfolyamának rendezéséhez és lebonyolításához is.

Társulatunk könyvtára olyan irányban fejlődik, hogy egyre több könyvvel és folyóirattal rendelkezik, amelyek alkalmasak a tanárok munkáját segíteni mind szakmai, mind módszertani téren.

A Csehszlovák és NDK Matematikai Társulattal kötött egyezmény keretében tanárok is részt vettek több napos tanulmányúton ezekben az országokban. Évenként 10—10 napot használtunk fel erre a célra. Nehézségek e téren a vidéki tanárok részéről merültek fel, ugyanis a tanév folyamán a Művelődésügyi Osztályok nem szívesen engedik el tanáraikat. Pedig most már a Bolgár Matematikai Társulattal kötött egyezmény alapján bulgáriai út is áll rendelkezésünkre.

Az Oktatási Szakosztály az Oktatási Bizottság bevonásával több esetben juttatta el észrevételeit az illetékes szervekhez különböző kérdésekkel kapcsolatban. Így foglalkoztunk a következő témákkal:

reformtervezet az érettségi vizsgákhoz (Műv. Min. számára)
a tanulók matematikai tevékenységének fejlesztése (Műv. Min. számára)
a matematikaoktatás új koncepciójának kialakítása (Műv. Min. számára)
a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia alapszabálya (Műv. Min. számára)
szakköri füzetek felülvizsgálata, javaslat újak kiadására (Tankönyvkiadó)

Hozzászóltunk az MSZMP Központi Bizottsága Tudományos és Kulturális Osztálya anyagának a matematikát illető részéhez. Igen örvendetes, hogy az itt említett hozzászólások többsége az illetékes felsőbb szervek kérésére készült, mutatva, hogy ezek Társulatunk állásfoglalását igénylik és értékelik.

A Szakosztály munkája a tanulók körében is a már kialakult módon, s talán mondhatjuk, hogy növekvő intenzitással folyik. Ezek a munkaterületeink eléggé ismeretesek, így talán csak felsorolásukra szorítkozunk:

Középiskolai délutánok (havonta),
Ifjúsági Matematikai Kör (háromhetenként),
Általános Iskolai Szakkör (a TIT-el közösen),
Általános Iskolai Versenyek (az Úttörő Szövetséggel) együttes rendezésben,
Középiskolai versenyek: Arany Dániel verseny kezdők számára
Arany Dániel verseny haladók számára,
Országos Tanulmányi Verseny,
Kürschák-verseny,
Nemzetközi Matematikai Diákolimpia,
Tanárképző Főiskolák versenye.

Ezek közül az Általános Iskolai Versenyek új kezdeményezésként először 1967-ben kerültek megrendezésre.

Megváltozott az Arany Dániel és az Országos Tanulmányi Verseny I. fordulójának lebonyolítása is, 15, 12, illetve 8 feladattal és pontozással az eddigi 3—3 feladattal szemben. E változtatások bevezetése kezdetben némi zökkenővel járt, de ma már úgy látjuk, hogy jól be fog válni. Megemlítendő még, hogy az Ifjúsági Matematikai Kör minden téli és tavaszi szünetben 3—3 napos ankétot rendez, amelyen a vidéki tagok is részt vesznek. Ennek költségeit a Műv. Min. viseli.

c) A Matematika Alkalmazásai Szakosztály

E szakosztály munkájában is fontos szerepe van az előadó ülések és a kollokviumok szervezésének. Az ilyen irányú tevékenységre nagyjából a Tudományos Szakosztálynál elmondottak érvényesek; ott került említésre a két szakosztály közös rendezésében lezajlott néhány további rendezvény is.

A Társulat tevékenységét jelentékenyen kiszélesítő és a matematika terjesztésében országos viszonylatban jelentős munkát kezdeményezett a Szakosztály tanfolyamok szervezése révén. Az első ilyen tanfolyam S. Falk professzor (Braunschweig) vezetésével két részletben zajlott le, 1966 és 1968 őszén. Mindkét alkalommal 8-szor 2 óra előadás és 2 óra gyakorlat hangzott el, mintegy 40 főnyi hallgatóság részvételével.

A második tanfolyam jóval nagyobb volumenű volt; 1967 őszén indult meg, és négy féléven át tartott heti 8, ill. 6 óra előadás formájában. Az előadók között a témakör legkiválóbb hazai szakemberei szerepeltek. A hallgatóság teljes létszáma (legalább egy félévre beiratkozottak) 132 fő volt, és engedélyt kapott a részvételre néhány egyetemi hallgató is; mindnyájan rendkívül sokat profitáltak a magas színvonalú tanfolyamból. Az utolsó félév végén a tanfolyam lezárásaképpen ötnapos nyári iskolát tartottak Kőszegen.

Minthogy a végzett matematikusok továbbképzéséről jelenleg egyetemeinken nem történik szervezett gondoskodás, a Társulat által rendezett eme tanfolyam hézagpótlónak mondható. Erre és a tanfolyam sikerére való tekintettel már folynak egy 1969 őszén indítandó két féléves Matematikai statisztika c. tanfolyam szervezési munkálatai is.

A Szakosztály szervező munkájának eredményeképpen pártoló tagjaink száma az elmúlt három év során eggyel nőtt; nem kell hangsúlyozni, hogy e szervező munka folytatása és fokozása mennyire kívánatos.

4. VIDÉKI TAGOZATOK

A Társulat tagjainak mintegy fele működik vidéken; ezeknek munkáját az egyes tagozatok fogják össze. A vidéki tagok fokozódó aktivitását mutatja a két új tagozatnak és egy új helyi csoportnak megalakulása az elmúlt három évben.

A tagozatok mindegyikében folyik a közép- és általános iskolai tanárok továbbképzését elősegítő előadásoknak szervezése, és mindenütt rendeznek előadásokat a tanulók részére is. Azokban a tagozatokban, amelyeknek működési területén egyetem is található, ezenkívül a Tudományos, ill. a Matematika Alkalmazásai Szakosztály irányába eső tevékenység is folyik. Részt vesznek a tagozatok a Társulat különféle versenyeinek területükön való megrendezésben, sőt több tagozat (pl. a Baranya megyei és a Fejér m.) rendszeresen rendez további tanulóversenyeket is.

Igen jelentősen járulnak hozzá az egyes tagozatok a Társulat nagyrendezvényeinek szervezési munkáihoz. Ilyen irányú tevékenységet végzett az elmúlt három évben a Vas megyei tagozat (szombathelyi vándorgyűlés), a Hajdú-Bihar megyei tagozat (Matematikai statisztikai, Információelméleti és Számelméleti Kollokvium) a Csongrád megyei tagozat (szegedi vándorgyűlés), a Szabolcs-Szatmár megyei tagozat (nyíregyházi vándorgyűlés), a Veszprém megyei tagozat (az ez évi veszprémi vándorgyűlés előkészítése).

A Csongrád megyei tagozat bonyolította le 1967-ben a Schweitzer Miklós emlékversenyt.

A tagozatok egymás közötti együttműködése előadócserék formájában folyik, de ezen a téren még jelentős fejlődésre van lehetőség. A néhány éve megindult tagozatközötti oktatói tapasztalatcserék Társulatunkon kívül álló szervezési nehézségek miatt sajnos elakadtak, de ez az igény változatlanul fennáll, úgyhogy meg kell keresni az utat a nehézségek áthidalására.

A vidéki tagozatokban különösen eredményes munkát végző tagtársak közül a következőket szeretném név szerint is megemlíteni:

Póda Béla (Baranya m. tagozat)
Kiss Barna (Borsod m. tagozat)
Láng Hugó és Szénássy Mihály (Fejér m. tagozat)
Szénássy Barna (Hajdú-Bihar m. tagozat)
Járosi András (Heves m. tagozat)
Marót Rezső és Molnár Ernő (Győri tagozat)
Péter Gyula (Somogy m. tagozat)
Knoll János (Veszprém m. tagozat)

5. NAGYRENDEZVÉNYEK

A Társulat az elmúlt három évben a következő kollokviumokat rendezte:

Gráfelmélet (1966. szeptember, Tihany, 32 külföldi és 26 magyar résztvevő),

Matematikai statisztika (1966. október, Debrecen, 3 külföldi, 70 magyar résztvevővel),

Rekurzív függvények és alkalmazásaik (1967. szeptember, Tihany, 15 külföldi, 18 magyar résztvevő),

Információelmélet (1967. szeptember, Debrecen, 38 külföldi, 87 magyar résztvevő),

Számelmélet (1968. április, Debrecen, 21 külföldi, 14 magyar résztvevő),

Numerikus módszerek (1968. szeptember, Tihany, 14 külföldi, 40 magyar résztvevő).

Idén további két kollokvium megrendezésének előkészületei folynak:

Kombinatorika (1969. augusztus, Balatonfüred),

Megbízhatóságelmélet (1969. szeptember, Tihany).

Valamennyi megrendezett kollokvium szép sikerrel zárult, az elhangzott előadások a témakör legújabb eredményeibe adtak betekintést, és sokszor szerepelt a szakterület nemzetközi élvonalának számos képviselője a résztvevők között. A gazdag tudományos programot minden alkalommal kiegészítették kirándulások és más szórakozási lehetőségek. A költségek egy részét a résztvevők által fizetett hozzájárulásból fedeztük, a fennmaradó részt pedig a Társulat költségvetéséből, azonban a debreceni kollokviumhoz a KLTE, a Rekurzív függvények és alkalmazásaik kollokviumhoz az International Union of History and Philosophy of Science, Division of Logic, Methodology and Philosophy of Science, az Információelméleti kollokviumhoz pedig az Union Radioscientifique Internationale is adott támogatást. Másrészt viszont Társulatunk segítséget nyújtott a KLTE által 1968. májusában Debrecenben megrendezett Geometriai Kollokvium szervezéséhez.

1970-re a következő két kollokvium rendezését vettük tervbe: Differenciálgeometria, A matematika kémiai alkalmazásai.

A beszámolási időszakban megrendezett vándorgyűléseink a következők voltak:

Szombathely, 1966. július (280 résztvevő),

Szeged, 1967. július (320 résztvevő),

Nyíregyháza, 1968. július (350 résztvevő).

Rövidesen megrendezésre kerül az idei vándorgyűlés is Veszprémben, több mint 400 résztvevővel.

A vándorgyűléseken elhangzott előadások sok irányban hasznosan tágították a résztvevők látókörét (a matematika tanításának modernizálására irányuló kísérletek, az új tantervben bevezetésre kerülő anyagrészek, módszertani és lélektani kérdések). A vándorgyűlések népszerűségét hiven tükrözi a résztvevők évről évre növekvő száma. A színvonalas szakmai programot itt is hasznosan egészítették ki a kötetlen beszélgetéseket lehetővé tevő egyéb rendezvények; a szervezés igyekezett az igényekkel lépést tartani (az időtartam felemelése 3-ról 4 napra, külön szekció az általános és középiskolai tanárok részére), és e téren várhatók további újítások is.

6. EMLÉKDÍJAK, VERSENYEK

A beszámolási időszakban évenként, tehát összesen háromszor osztottuk ki a fiatal kutatók tudományos eredményeinek jutalmazására szolgáló Grünwald Géza emlékdíjat, valamint a matematika oktatásában és népszerűsítésében elért kimagasló teljesítmények jutalmazására szolgáló Beke Manó emlékdíjat. A díjak összege sajnálatosan alacsony volt, azonban a jelen évtől kezdve előreláthatólag lehetőségünk lesz az összeg jelentékeny felemelésére.

Évente megrendeztük szokásos tanulóversenyeinket is. A Schweitzer Miklós versenyt 1966-ban és 1968-ban Budapesten, 1967-ben Szegeden szerveztük, idén Debrecenre jut a szervezés sora. A többi versenyről az Oktatási Szakosztályról szóló pontban már szó esett, csupán az Általános Iskolások Matematikai Versenye érdemel külön említést, mint 1967-ben megindított új kezdeményezés, az Úttörő Szövetséggel közös rendezésben. Miután a tapasztalatok alapján beváltnak tekinthetjük, javasoltuk, hogy ezt a versenyt Rátz Lászlóról nevezzék el, aki a diákok körében végzett matematikai ismeretterjesztésnek a század elején egyik leglelkesebb munkása volt.

A Középiskolai Matematikai Lapok pontversenyén legjobb eredményt elért tanulókat a szokásos módon a Művelődésügyi Minisztérium által biztosított keretből jutalmaztuk. Idén ez a keret a Gaál Jenőné (az 1949. évi Schweitzer Miklós emlékversenyen II. díjat nyert és 1957-ben autóbaleset következtében elhunyt Gaál Egon villamosmérnök édesanyja) által felajánlott 1000 Ft, valamint a dr. Trencsényi-Waldapfel Imre egyetemi tanár által (elhunyt öccse, Waldapfel László emlékére) felajánlott 500 Ft összeggel bővül.

Megemlítendő még az a hasznos segítség, amelyet a Társulat a Nemzetközi Matematikai Olimpia magyar résztvevőinek előkészítéséhez nyújt. Nem kis részben ennek a munkának tulajdonítható, hogy a magyar versenyzők a beszámolási időszak mindegyik évében igen szép helyezéseket értek el az erős nemzetközi mezőnyt felvonultató, immár hagyományos nagy versenyen.

7. KIADVÁNYOK

A Társulat lapjai (Matematikai Lapok, Középiskolai Matematikai Lapok, A Matematika Tanítása, utóbbi a Művelődésügyi Minisztériummal közös szerkesztésben) a beszámolási időszakban is rendszeresen megjelentek, bár a nyomdai átfutási idők elhúzódása miatt ismételten előfordultak jelentékeny késések a névleges megjelenési időhöz képest.

Meg kell még említeni, hogy a múlt évben megtörtént a régi Matematikai és Fizikai Lapok több kötetének, valamint a Matematikai Lapok első három kötetének utánnyomása annak érdekében, hogy (elsősorban külföldi) megrendelőinknek teljes sorozatot tudjunk szállítani.

Vándorgyűlési és egyéb továbbképzési előadások gyűjteményes kötetben való kiadásának már szép hagyományai vannak. A legutolsó ilyen kötet „Élő matematika" címen 1968. decemberben jelent meg a Tankönyvkiadó Vállalat kiadásában, és három hét alatt teljesen elfogyott. A második kiadás már nyomdában van.

Új kezdeményezés volt az elmúlt három évben a Társulat által rendezett tanfolyamok jegyzeteinek megjelentetése. Mint maguk a tanfolyamok, a hozzájuk készített jegyzetek is hézagpótlónak mondhatók. Elkészült S. Falk professzor jegyzete a Műszaki mechanika numerikus módszerei c. tanfolyam mindkét részének anyagából, valamint az Operációkutatási Tanfolyam anyagához kapcsolódó következő jegyzetek:

Megjelent:

Prékopa András: „Lineáris programozás I."

Arató Mátyás: „Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe."

Tomkó József: „A Markov-folyamatok elemei és néhány operációkutatási vonatkozása."

Nyomdában van:

Kovács László Béla: „A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei."

Előkészületben:

Prékopa András: Lineáris programozás II.

Prékopa András—Majthay Antal: Nem lineáris programozás

Prékopa András: Készletezési modellek

Rényi Alfréd: Forgalmi problémák

Kósa András: Irányításelmélet
Dancs István—Klafszky Emil: Hálózati folyamok
Kovács László Béla: Dinamikus programozás
Bánkövi György: Szimulációs módszerek
Lipták Tamás: Nagyméretű lineáris programozási problémák megoldása
Mogyoródi József—Tomkó József: Kiszolgálási modellek

Ugyancsak új kezdeményezés volt a múlt évben a Társulat által rendezett kollokviumok anyagának saját kiadásban való megjelentetése. Eddig ezek közül megjelent két kötetben az Információelméleti Kollokvium anyaga, és előkészületben van a Számelméleti Kollokvium, valamint a Numerikus Módszerek Kollokvium anyagának kiadása is. Elsősorban ezeknek a kiadványoknak köszönhető, hogy a Társulat évek óta stagnáló pénzügyi lehetőségei a jelen évtől kezdve örvendetesen meg fognak előreláthatóan javulni.

8. NEMZETKÖZI KAPCSOLATOK

A Társulatnak hosszabb idő óta együttműködési egyezménye van a Csehszlovák Matematikai Társulattal, valamint az NDK Matematikai Társulatával. 1967-ben hasonló egyezményt kötöttünk a Bolgár Matematikai Társulattal is. Az évi keret az 1967-ben végrehajtott módosítás után csehszlovák viszonylatban 30 nap, NDK viszonylatban 30 nap, bolgár viszonylatban 10 nap. Ennek keretében részint tudományos rendezvényekre (kongresszusokra, konferenciákra) küldünk ki résztvevőket, részint általános és középiskolai tanárokat küldünk tapasztalatcserére, és a külföldi partnerek is hasonló célokra használják fel a rendelkezésükre álló keretet. Megemlítendő, hogy a csehszlovák csereegyezmény keretét az 1968-as évben egyik részről sem használtuk fel teljesen, és az ez évre való meghosszabbítást javasoló levelünkre csehszlovák részről mindeddig nem kaptunk választ. Mindent összevéve a három év alatt csereegyezményeink keretében összesen 19 tagtársunk kiküldésére nyílt lehetőség és 17 vendéget fogadtunk.

További kiutazási lehetőséget biztosít a társulati tagok részére a MTESZ devizakerete, ez azonban az utóbbi években meglehetősen kicsiny volt, úgyhogy ezen az úton viszonylag kisebb számú kiutazást sikerült lebonyolítani, jóllehet a MTESZ vezető szervei részéről mindig messzemenő jóindulatot tapasztaltunk e téren. E jóindulatnak volt köszönhető, hogy 1966-ban a moszkvai nemzetközi matematikai kongresszuson hárman vettek részt a Társulat kiküldetésében, továbbá ketten kaptak kiküldetést a Nemzetközi Matematikai Unió közgyűlésére, négyen pedig a jutalmazási alapból kaptak forinttámogatást a kongresszuson való részvételükhöz. Ezeket is beszámítva a beszámolási időszakban összesen 21 kiutazásra került sor ezen az úton.

Külföldi matematikusok nagy számban jártak nálunk az egyes kollokviumokon való részvétel céljából (ezekről ott már szóltam). További lehetőségünk volt külföldiek meghívására egy-egy előadás tartása céljából 500,— Ft-os tiszteletdíjjal; ebben a formában összesen 34 külföldi matematikust láttunk vendégül. Lehetőségeink e vonatkozásban a jelen évtől kezdve oly értelemben javulnak, hogy ezután a vendégeknek a tiszteletdíjon kívül három napos szállodaköltséget is módunkban lesz fizetni.

Más szervek vendégeként nálunk járt külföldi matematikusok összesen 25 alkalommal tartottak Társulatunkban előadást.

Társulatunk képviseli hazánkat a Nemzetközi Matematikai Unióban; minthogy a beszámolási időszak elején lezajlott IMU közgyűlés óta e vonatkozásban lényeges esemény nem történt, az IMU Bizottság munkája mindössze két kérdésre terjed ki, nevezetesen a jövő évi Nemzetközi Matematikai Kongresszus szervezésével kapcsolatos javaslattételre, valamint az IMU által új kiadásban elkészítendő World Directory of Mathematicias előkészítő munkájához való segítségnyújtásra.

9. KAPCSOLAT A MTESZ-SZEL, A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁVAL ÉS A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUMMAL

A MTESZ vezetői részéről Társulatunk problémái iránt állandó érdeklődést, jóindulatot és segítőkészséget tapasztaltunk. A MTESZ Központi Ellenőrző Bizottságának két tagja ez év elején részletesen áttanulmányozta a Társulat munkájáról szóló különféle dokumentumokat, és az Elnökség néhány tagjával folytatott megbeszélés keretében mondta el észrevételeit, hasznos tanácsokat adva problémáink megoldására.

A MTESZ többi egyesületével való kapcsolataink terén megemlítendő, hogy Társulatunk küldöttséggel képviseltette magát az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1966 novemberében tartott közgyűlésen, amelyen a két társulat közös elődjének 1891-ben történt megalakulásáról emlékeztek meg. Ugyancsak képviseltette magát a Társulat vezetősége a MTESZ Veszprém megyei szervezetének tízéves fennállása alkalmából rendezett jubileumi ülésen. A Szövetség egyéb egyesületeivel való kapcsolatainkat elsősorban a Matematika Alkalmazásai Szakosztály hivatott ápolni; korábban ezen a téren sok volt a hiányosság, és a helyzet ma sem mondható kifogástalannak, azonban kétségtelen a jelentős javulás, amit az is tükröz, hogy az idén rendezésre kerülő Megbízhatóságelméleti Kollokvium rendezésében a Gépipari Tudományos Egyesület, a jövő évben tervezett egyik kollok-

viumunk rendezésében pedig a Magyar Kémikusok Egyesülete együttműködését sikerült megnyernünk.

A Magyar Tudományos Akadémiával való kapcsolatunk főképpen abban állt, hogy az Akadémia vendégeként hazánkban tartózkodó külföldi matematikusok előadásainak szervezési munkájában segítséget nyújtott a Társulat. Nagyrendezvényeink tematikájának összehangolásában megfelelő volt az együttműködés.

A Művelődésügyi Minisztériummal elsősorban az Oktatási Szakosztály folytat hasznos együttműködést. Ez hagyományosan a lapkiadás és egyes versenyek szervezése formájában folyik, alkalmanként pedig azáltal, hogy a Társulat állást foglal az oktatással kapcsolatos különféle kérdésekben, részben saját kezdeményezéséből, igen gyakran azonban a Minisztérium felkérésére. Úgy tapasztaltuk, hogy javaslatainkat a Minisztérium mindig komolyan megfontolja, úgyhogy kapcsolatunk e vonatkozásban igen pozitívan értékelhető.

10. A VEZETŐ SZERVEK MŰKÖDÉSE

A Társulat új alapszabálya lényegében véve az 1966-os közgyűlés alkalmával lépett életbe (akkor jóváhagyása csak egy paragrafus kivételével történt meg): az akkor elfogadott módosítás után az alapszabályt a Magyar Tudományos Akadémia elnöke 1968. május 20-án hagyta teljes egészében jóvá.

Az 1966-os Közgyűlés a Választmány fontos feladatává tette a Társulat ügyrendjének kidolgozását. Az erre a célra kiküldött bizottság ismételt beható vitái után a Választmány is megvitatta az elkészített javaslatot, majd ezt az 1967 decemberében összehívott Közgyűlésen elhangzott hozzászólások alapján átdolgozta, § az ügyrend végül 1969. január 10-én hatályba lépett. Így most már az alapszabály és az ügyrend együttesen kellő részletességgel szabályozza a Társulat életének minden lényeges kérdését; ha nem tekinthetjük is egyiket sem véglegesnek, hiszen a viszonyok változásával egy ma célszerű intézkedés holnap már a fejlődés kerékkötőjévé válhat, mégis úgy gondolom, hogy egy ideig ezen az alapon biztosítva tudhatjuk a Társulat munkájának az egyesületi demokrácia elveinek megfelelő, sikeres tevékenységet eredményező feltételeit.

A jelenlegi vezetőség megválasztása óta a Közgyűlést egyszer, 1967 decemberében, a Választmányt évenként kétszer, összesen hat ízben, az Elnökséget pedig nagyjából kéthavonként hívtuk össze. Így a vezetőség üléseinek száma a korábbihoz képest csökkent, ami természetesen a Társulat funkcionáriusaira fokozott felelősséget ró, hiszen gyakrabban kell egyes kérdésekben előzetes vezetőségi állásfoglalás nélkül, önállóan dönteniök. Különösen nehéz és felelősségteljes a vidéki ügyek vitelével megbízott titkárok feladata, mivel a vidéki tagozatok csak a Választmány ülésein, azaz évente kétszer vannak hiánytalanul képviselve. Az egyes funkcionáriusok e beléjük helyezett bizalomnak általában meg is feleltek, amit az mutat, hogy az Elnökség, ill. a Választmány a kiküldött tájékoztatók alapján esetenként megvitatva a Társulatnak az előző vezetőségi ülés óta végzett munkáját, csekélyebb jelentőségű részletektől eltekintve mindig egyetértett a megtett intézkedésekkel.

A vezetőség tagjainak nagy elfoglaltsága okozta, hogy az Elnökség, ill. a Választmány ülésein megjelentek száma sajnálatosan gyakran nem érte el a határozatképességhez szükséges értéket; megnyugtató ugyan, hogy az ilyenkor távollevő tagoknak elküldött határozati javaslatokhoz csak elenyészően kevés esetben érkezett módosítási észrevétel, mutatva, hogy a távolvoltak is egyetértettek a vita eredményeképpen kialakult véleménnyel, azonban mégis kívánatos volna, hogy magában a vitában is részt vegyen a kérdéses vezető szervnek minél több tagja. Kívánatos, hogy a most megválasztásra kerülő új vezetőség ezt az észrevételt megszívlelje.

11. A KÖZPONTI APPARÁTUS MUNKÁJA

A Társulat tevékenységének évek óta, s a beszámolási időszakban is örvendetesen növekvő, egyre többrétűvé váló tendenciájával a központi apparátus létszáma nem nőtt arányosan (jelenleg 2 teljes és 2 fél álláshelyünk van), sőt meglevő állásaink egy része is gyakran betöltetlen, úgyhogy az állandó munkatársak száma kilépések, betegségek következtében inkább csökkenő tendenciát mutat. Csak a megmaradtak legmesszebbmenően áldozatkész lelkesedése tette lehetővé, hogy a Társulat munkája zökkenők nélkül folyjék. Sajnos a Társulat központjában folyó munka jellege által megkívánt követelmények (nyelvtudás, gyors- és gépírás stb.) és a rendelkezésre álló béralap között olyan ellentmondás van, amely ebben a vonatkozásban a jövőre vonatkozóan sem tehet optimistává.

Az állományban levők kiesését alkalmi munkaerők beállításával igyekeztünk pótolni; az e téren fennálló számos kötöttség mellett csak a MTESZ illetékes szerveinek megértése és segítőkészsége tette lehetővé a nehézségek áthidalását. Az új vezetőségnek fontos és nem könnyű feladata lesz, hogy az apparátus bővítésének problémáját megoldja annak érdekében, hogy fejlődésünknek, sőt eddigi mederben folytatott tevékenységünknek ne váljék gátjává az apparátus nem kellő fejlesztése.

Az Ellenőrző Bizottság jelentését Tandori Károly ismertette:

A Bolyai János Matematikai Társulat Ellenőrző Bizottsága 1969. jún. 24-én tartott ülésén megvizsgálta Schmidt Tamás pénztárosnak a Közgyűlés elé terjesztendő jelentését. A Bizottság vizsgálata megállapította, hogy a Társulat a rendelkezésére bocsátott anyagi eszközöket a költségvetési terveknek megfelelően használta fel.

Örvendetes jelenségnek tartja, hogy a Társulat jövedelme lényegében egyenletesen növekedik, amit elsősorban az elmúlt időszakban megrendezett tanfolyamok részvételi díjai és a Társulat kiadványaiért befolyt összegek eredményeztek. Viszont a tagdíjbefizetések terén nem észlelhető ugyanilyen kedvező javulás. A pénztárosi jelentésből nem derül ki, hogy jelenleg a tagság hány százaléka teljesítette tagdíjbefizetési kötelezettségét. A Bizottság egyetértően vette tudomásul, hogy a Társulat Elnöksége erőfeszítéseket tett a tagkönyv és tagsági bélyeg rendszerének bevezetésére. Kívánatos lenne, hogy a megfelelő határozatokat minél előbb meg is valósítsák.

A Bizottság megbeszélései során kitűnt, hogy egyes vidéki tagozatok még mindig nem használták fel a számukra rendelkezésre álló anyagi eszközöket.

Elismerést keltett az a körülmény, hogy ez évtől kezdve a verseny — és pályadíjak összege jelentős mértékben emelkedik.

A Társulat előbbiekben említett örvendetes jövedelemnövekedése lehetővé tenné egy régi kívánság teljesülését, egy idegen nyelvű társulati szakfolyóirat kiadását, ami a publikálást jelenlegi nehézségein könnyítene és a jövőben hozzájárulhatna a Társulat jövedelmének további emelkedéséhez is.

A Bizottság csatlakozott a főtitkár megállapításához, amennyiben a különböző szakosztályi ülések látogatottságát nem tartja kielégítőnek, és szükségesnek tartja olyan előadások napirendre tűzését, amelyek szélesebb érdeklődésre tarthatnának számot.

Ilyen jellegű előadások tartásának ösztönzésére a jelentősebb előadásoknak publikálását tartanánk célszerűnek egy társulati idegen nyelvű kiadványsorozat megindításával.

A főtitkári beszámolónak az egyes szakosztályok munkájával foglalkozó értékeléséből kitűnik, hogy az Oktatási Szakosztály az utóbbi időben igen dicséretes tevékenységet folytatott.

A Társulat könyvtára csere és vásárlás útján igen tetemes mértékben növekszik és ez a körülmény aggasztó helyhiányhoz vezetett.

Kívánatos lenne, hogy a korábban megkezdődött katalogizálási munka mielőbb befejeződjék, és az elkészült katalógust sokszorosított formában a tagságnak, vagy legalább az egyes tagozatoknak megküldjék. Ettől remélhető, hogy a könyvtár kihasználtsága elérje a kellő színvonalat.

A Társulat az elmúlt időszakban számos, igen sikeres és színvonalas kollokviumot szervezett. Számos tagtárs véleményének adunk hangot, amidőn javasoljuk, hogy a jövőben a hazai viszonylatban intenzívebben művelt szakterületek súlyuknak megfelelőbben kapjanak lehetőséget kollokviumok rendezésére.

A Bizottság továbbra is úgy véli, hogy a társulati propaganda még mindig lényegesen alatta marad annak a tevékenységnek, melyet a Társulat a legkülönbözőbb vonatkozásokban kifejt. Személyi és anyagi feltételek megteremtésével a társulati propaganda lényegesen javítható lenne.

Ami az adminisztratív és szervezési kérdéseket illeti, meg kell jegyezni — és ezt több tagtársunk is szóvá tette —, hogy a közgyűlés előkészítésére rendkívül rövid időt biztosítottak, aminek például egyik következménye, hogy a közgyűlésre szóló meghívó viszonylag késve lett kiküldve, és megfogalmazása sem volt túl szerencsés.

A főtitkári beszámoló is említést tesz arról, hogy az utóbbi időben a vezető szervek ülései nem kellően látogatottak, több ízben határozat képtelenség esete is előfordult. Ezen a problémán talán a vezetőségi ülések időpontjainak alkalmasabb megválasztásával segíteni lehetne.

Az előadottak alapján a Bizottság javasolja a pénztárosi jelentés elfogadását és a felmentvény megadását.

Surányi János alelnök felkérte Rapcsák András, a Jelölő bizottság elnökének távolléte miatt Lee Annát, ismertetesse a Jelölő bizottság javaslatát.

Lee Anna ismertette a Bizottság írásban szétküldött javaslatát az újonnan megválasztandó vezetőség összetételére, valamint a küldöttek által tett kiegészítő javaslatokat, és a választásnak az Ügyrend által előírt módját. Ezután a Közgyűlés a következő szavazatszedő bizottságot választotta meg.

Elnök: Szendrei János,

Tagok: Berényi Gusztáv, Bognár János, Császár Ákosné, Éltető Ödön, Kis Ottó, Kiss Barna, Lukács Ottó, Molnár Ernő.

A főtitkári jelentés feletti vitában Szőkefalvi-Nagy Béla a társulati tanfolyamok fontosságáról, a társulati könyvkiadásról, az 1971-ben rendezendő kongresszusról szólt, részben ezekre vonatkozó további felvilágosításokat is kérve. Kérdéseire Vincze István, Schmidt Tamás, Székely Gábor és Prékopa András válaszolt.

Turi Istvánné elmondta, hogy a Társulat tanfolyamszervező tevékenységét mennyire pozitívan értékelte a MSZMP-nak a Szövetség munkáját a közelmúltban felülvizsgáló magas szintű bizottsága. Mikolás Miklós kifogásolta, hogy a főtitkári jelentés nem foglalkozik külön pontban az Oktatási

Bizottság, a Matematika Alkalmazásai Bizottság és Könyvbizottság tevékenységével. Tomkó József sajnálatát fejezte ki, hogy a közgyűlési küldöttek körében nincs képviselve a MTA Számítástechnikai Központja, holott ennek dolgozói a Társulatban igen aktív munkát végeznek. Fekete István hangsúlyozva a matematikának a műszaki életben egyre növekvő szerepét, egy koordinációs bizottság létesítését indítványozta, amely a Társulatnak a műszaki egyesületekkel való kapcsolatát ápolná. Alpár László felhívta a figyelmet az Ellenőrző Bizottság jelentésében foglalt javaslatokra, így a társulati propaganda fokozására, felszabadulásunk 25. évfordulójának társulati megünneplésére, egy idegen nyelvű társulati folyóirat indítására, és a kollokviumok tárgyválasztásában a matematika egyes fejezeteinek arányosabb szerepeltetésére.

A felszólalásokra Császár Ákos főtitkár válaszolt, túlnyomó részükkel egyetértését fejezve ki, s megígérve, hogy az újonnan megválasztandó vezetőség törekedni fog a javaslatok megvalósítására.

Ezután a szavazás lebonyolítása céljából szünet következett, majd az elnöklést Marót Rezső alelnök vette át. A további vitában Wiegandt Richárd és Székely Gábor az új idegen nyelvű folyóirat megindításának fontosságáról és hasznosságáról szólt, majd a Közgyűlés ellenszavazat nélkül elfogadta a főtitkár és a pénztáros jelentését, és megadta a lelépő tisztikarnak a felmentvényt.

Következő pontként a társulati lapok szerkesztő bizottságait bízta meg a Közgyűlés a következő összetételben:

MATEMATIKAI LAPOK:

Turán Pál (fel. szerk.)
Hajós György (szerkesztők)
Kalmár László
Rapcsák András
Rényi Alfréd

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK:

Surányi János (szerk. biz. vez.)
Bakos Tibor (fel. szerk.)
Ács Pál (tagok)
Tolnai Jenő
Tusnády Gábor
Vigassy Lajos

A MATEMATIKA TANÍTÁSA:

Cser Andor (szerkesztő)
Ács Pál (szerk. biz.)
Előd Istvánné
Göndöcs László
dr. Molnár József
Némethy Katalin
Nyilas Dezső
Reiman István
Reményi Gusztávné
Vörös György
Tolnai Jenő

Az Elnökségben képviselt négy vidéki tagozat megválasztása következett; a következők nyertek megbízást: Békés megyei, Szabolcs-Szatmár megyei, Soproni és Fejér megyei tagozat.

Ezután a Közgyűlés a MTESZ közgyűlésébe választott küldötteket. Az elnökön és a főtitkáron kívül, akik hivatalból küldöttek, a következőket választották meg:

Fejes Tóth László
Gádor Endréné
Gyires Béla
Marót Rezső
Prékopa András
Surányi János
Szőkefalvi-Nagy Béla

A beérkezett indítványokkal kapcsolatban a Közgyűlés a következő határozatokat hozta: Tiszteletbeli elnökké választotta a Közgyűlés Kalmár Lászlót és Péter Rózsát.

A társulati tagdíj összege 1970-től kezdve a következő lesz:
Havi 1500 Ft jövedelmen alul évi 12 Ft,
havi 1500—2500 Ft jövedelem esetén évi 24 Ft,
havi 2500—3500 Ft jövedelem esetén évi 48 Ft,
havi 3500 Ft jövedelmen felül évi 60 Ft.

A közgyűlés kívánatosnak tartja egy idegen nyelvű társulati folyóirat megindítását. Az erre vonatkozó javaslat kidolgozásával a következő bizottságot bízza meg: elnök, főtitkár, pénztáros, Alpár László, Székely Gábor, Wiegandt Richárd. A bizottság javaslatát egy féléven belül terjessze a Választmány elé.

Hosszabb vita alakult ki a középiskolai tanárok tudományos és didaktikai munkásságának feltételeit szorgalmazó indítvány fölött. Végül is a Közgyűlés felkérte az Oktatási Bizottságot, hogy erre vonatkozó javaslatát az elhangzott felszólalások felhasználásával terjessze a Választmány elé.

Az Elenőrző Bizottság jelentésében foglalt többi javaslattal az újonnan megválasztandó vezetőség foglalkozzék és törekedjék megvalósításukra.

Hosszabb szünet után Szendrei János terjesztette elő a szavazatszedő bizottság jelentését. Ennek értelmében a következő új vezetőséget választotta meg a Közgyűlés:

Elnök: Hajós György
Budapesti alelnök: Surányi János
Vidéki alelnök: Marót Rezső
Főtitkár: Császár Ákos
Dunáninneni titkár: Pálfy Sándor
Dunántúli titkár: Czapáry Endre
Pénztáros: Fried Ervin

Tudom. Szakosztály
Elnök: Fejes Tóth László
Alelnök: Vincze István
Titkár: Sárközy András

Mat. Alk. Szakosztály
Elnök: Prékopa András
Alelnök: Heppes Aladár
Titkár: Katona Gyula

Oktatási Szakosztály
Elnök: Gádor Endréné
Alelnök: Reményi Gusztávné
Titkár: Kőváry Károly

Külügyi Bizottság
Elnök: Rényi Alfréd
Titkár: Petruska György
Tagok: Czách László
Genzwein Ferenc
Pollák György
Rózsa Pál
Sarkadi Károly
Vincze Endre
póttagok: Juhász István
Schmidt Tamás
Szilárd Károly

Ellenőrző Bizottság[1]
Elnök: Tandor Károly
Titkár: Merza József
Tagok: Kovács István
Moór Arthur
Pálmay Lóránt
Póttagok: Medgyessy Pál
Tamássy Lajos

Fegyelmi Bizottság
Elnök: Hosszú Miklós
Titkár: Lee Anna
Tagok: Csákány Béla
Mogyoródi József
Póttagok: Balázs János
Biró Béláné

IMU BIZOTTSÁG

Elnök: Szőkefalvi-Nagy Béla
Titkár: Daróczy Zoltán
Tagok: Császár Ákos
Fejes Tóth László
Hajós György
Rapcsák András
Rényi Alfréd
Surányi János
Turán Pál

Választmányi tagok:

Achátz Imréné
Ács Pál
Andrásfai Béla
Bajcsay Pál
Berkesi Jenő
Bélteky Károly
Bokor Géza
Fidrich Ilona
Frey Tamás
Hódi Endre
Imrecze Zoltánné
Járosi András
Krekó Béla
Knoll János
Makai Endre
Megyesi László
Pelle Béla
Puskás Imréné
Reményi Gusztáv
Scharnitzky Viktor
Szamosi Józsefné
Szendrei János
Urbán János
Varga Tamás
Veress Jenő

Póttagok:

Hajnal András
Alpár László
Békéssy András
Koncz Károly
Králik Dezső
Reiman István
Révész Pál
Szép Jenő
Szász Gábor
Székely Gábor

A szavazatok eredményének ismertetése után az elnök megköszönte a Szavazatszedő Bizottság munkáját, továbbá a Társulat tagjainak, illetve küldötteinek részvételét és a Közgyűlést bezárta.

KÖNYVISMERTETÉS

PELLER JÓZSEF: AZ ANALÍZIS ELEMEINEK TANÍTÁSA A KÖZÉPISKOLÁBAN

Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 302 oldal, 16,—Ft.

Hosszú idő után újra bekerültek a középiskola tananyagába a differenciál- és integrálszámítás elemei. Ennek az új anyagnak a tanításához kíván Peller József könyve segítséget adni.

A könyv két fő része „Az analízis tanításának előkészítése" és „Az analízis tanítása". Ezt a két részt bevezetés készíti elő és függelék zárja irodalomjegyzékkel. A bevezetésben az analízis tanításával kapcsolatos elvi szempontokat vet fel a szerző, majd vázolja a könyv felépítését. Az említett elvi szempontok a tudományosság elve, a fokozatosság elve, tantárgyak koncentrációja, valóság és matematika kapcsolata, a tanulók aktivitása. Néhány igen hasznos didaktikai vonatkozású gondolatot lehet kiemelni az itt felmerültek közül:

„Az önálló gondolkozás biztosítása céljából jobb, ha a tanulók a problémákkal maguk kerülnek szembe."

„Megfelelő feladatláncolat alkalmazásával a tanulók mintegy «felfedezhetik» az analízist."

„Csak a legszükségesebb jelöléseket vezetjük be, és ezek kialakításába a tanulókat is bevonjuk."

„Nagyon lényeges, hogy ne törekedjünk az anyag lezárt tárgyalására. Bár ez matematikailag eleve reménytelen vállalkozás lenne, de ennek a szándéknak az érvényesülése is nagyon káros lehet. Ilyen módon valami izolált, sajátos középiskolai analízis alakulna ki."

„Az analízis tanításának előkészítése" c. rész tulajdonképpen a függvényekkel való ismerkedéshez, a függvények elemi vizsgálatához ad tanácsokat, figyelembe véve az általános iskolai matematika anyagban rejlő lehetőségeket is. Néhány geometriai példa után rátér a függvények rendszeres vizsgálatára. A geometriai példák változatosak és ilyen vonatkozásban újszerűek. (Például a 26. oldalon két kör metszéspontjainak a száma mint a két kör közötti távolság függvénye.) Itt is, akárcsak a könyv későbbi részeiben is, több helyen ad igen hasznos tanácsokat arra, hogy milyen (manuálisan elvégezhető) kísérletek, vizsgálatok előzhetik meg a gondolati, absztrakt vizsgálatokat.

A függvények rendszeres vizsgálata a lineáris függvényekkel kezdődik, ezután a másodfokú függvények következnek, végül foglalkozik még néhány más függvénnyel ($\frac{a}{x}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$). A függvények összetételének szerepére külön felhívja a figyelmet.

A függvények vizsgálatát mindenütt konkrét jelentésű függvények tárgyalásával kezdi, amivel azt akarja biztosítani, hogy a valóságból absztrahált, valódi tartalommal rendelkező fogalmakkal dolgozzanak a tanulók, ne csak üres formulákkal. Az elsőfokú függvényeket az egyenletes mozgás vizsgálatával vezeti be, az átlagsebesség fogalmának tisztázása után szerepel az útgrafikon és a sebességgrafikon vizsgálata, egyszerű transzformációk, képlet és grafikon közötti kapcsolat. Ezután az elsőfokú függvény általános fogalmának kialakításával kapcsolatos kérdésekre tér ki. Itt említi azt is, hogy nagy hiba lenne az itt tárgyalt egyetlen példából (egyenletes mozgás) általánosítani. Felsorol néhány más konkrét jelentésű elsőfokú függvényt is. A fejezet végén még néhány példát mutat szakaszonként elsőfokú függvényekre. A másodfokú függvények vizsgálatának bevezetését az egyenletesen változó mozgás részletes tárgyalásával ajánlja. Később itt is (az elsőfokú függvényeknél említetthez hasonlóan) rátér arra, hogy milyen úton lehet egy általános fogalomhoz eljutni. A fejezet felépítése hasonló az előzőéhez, itt a pillanatnyi sebesség és az átlaggyorsulás tisztázása előzi meg a tárgyalást. Kitér az egyenletes és az egyenletesen változó mozgás összetételére is. Az egyenletesen változó mozgás sebességfüggvényének vizsgálatával fejezi be a másodfokú függvények tárgyalását.

„Az analízis tanítása" c. rész a függvények határértékével kezdődik, ezen belül szerepel a folytonos függvény fogalma, ezután következik a differenciálszámítás, majd a sorozatok és végül az

integrálszámítás. A függvények határértékének tárgyalására szemléletes, de amellett precíz utat javasol. Például az $y=\frac{2}{x}$ függvény végtelenben vett határértékét úgy vizsgálja, hogy az x tengelyre helyezett sávokhoz keres olyan küszöbszámokat, amelyeknél nagyobb x értékekre a függvény görbéje mindenütt a sávon belül lesz. Itt kitér arra is, hogy amennyiben az osztály vagy az osztály egy része igényli, a határértékre pontosabb, formális definíciót is lehet adni.

A „differenciálszámítás" c. részben először a sebesség fogalmát vezeti be mozgásfüggvények esetén, aztán erre visszavezetve old meg néhány más témájú szélsőértékfeladatot. Később hasonló utat követ a függvényvizsgálatoknál is (növekedés, fogyás, függvénygörbe alakja), mindenütt a mozgásfüggvényekre vezeti vissza a függvények vizsgálatát. A második derivált is csak mint gyorsulásfüggvény lép fel, ezzel a megjegyzéssel: „Természetesen nemcsak mozgást leíró függvényeknél — hanem analógiával élve — bármely matematikai függvénynél beszélhetünk «gyorsulásfüggvényről», második deriváltról."

A számsorozatokat mint speciális függvényeket (természetes számokhoz rendelt számok) tárgyalja, így a határértéküket is visszavezeti a függvények határértékére. Itt szerepel a végtelen mértani sor összege, amelyre egy, az iskolai munkában jól hasznosítható tárgyalást javasol.

Az integrálszámítást a határozott integrál fogalmával vezeti be. Itt többféle fizikai példát szerepeltet, az integrálfüggvény fogalmát viszont erősen a területfüggvényhez köti.

A függelékben a tanárok számára közöl néhány, a középiskolai analízisanyaghoz kapcsolódó, de azon már túllépő definíciót és tételt. Hiányosságnak érzem, hogy a függvény általános definíciójánál nem is említi, hogy az itt adott definíció csak a valós számokon értelmezett valós értékű függvényeké, és hogy a mai matematikában ennél általánosabb függvényfogalomnak is komoly szerepe van (az első osztályos középiskolai könyv is ennél általánosabb függvényfogalomból indul ki.)

Végül egy kételyt vetek fel a könyvvel kapcsolatban. Bár említi a szerző, hogy „nem lenne jó a függvényfogalmat csak a mozgások tárgyalásához kötni", mégis olyannyira egyetlen példát sugall, hogy ez veszélyes lehet egy matematikai fogalom kialakulása szempontjából. Szükség van erre a példára, de csak másokkal együtt, sőt arra is szükség lenne, hogy eljussanak a tanulók absztrakt függvények vizsgálatához (közben szükség esetén újra és újra vissza lehet térni a konkrét példákra). Az ilyen vizsgálatoknak megvan az a hasznuk, hogy bizonyos szempontokat kiemelve, és ebből a szempontból lényegteleneket elhanyagolva tudjuk az összefüggéseket vizsgálni. Érthetetlen, hogy egy olyan feladatnál, ahol egy maximális hordképességű gerenda adatait kell kiszámítani (151—152. old.), miért kézenfekvő az itt szereplő függvény vizsgálata helyett egy egyenesvonalú mozgás út-idő függvényét tekinteni, és miért nyilvánvaló, hogy szélsőérték olyan pontokban adódik, ahol a test mozgásirányát megváltoztatja. A mozgásokra való visszatérés itt homályos analógia alapján történik. Azért teszi ezt talán, hogy „ne szakadjon el túl korán a valóságtól", hogy szemléletes példánál maradjon? De hiszen az említett példa is szemléletes, ezért még nem kellene mozgásfüggvényt kölcsönkérnünk, nekiláthatunk például ábrázolni a függvényt, attól sem kell megijedni, és ennek segítségével is tudunk szemléletes alapon választ adni erre a szélsőértékfeladatra. Az igaz, amint a szerző is említi, hogy a függvényábrázolás a függvény ismerete nélkül bizonytalan eszköz, de nem bizonytalanabb, mint egy olyan okoskodás, hogy ott lesz szélsőértéke az említett függvénynek, ahol egy „megfelelő mozgást végző test mozgásirányát megváltoztatja".

A szemlélet valóban sokszor becsaphat, de egy laza fizikai analógia legalább annyira, és ez nem ok arra, hogy egyetlen fizikai példánál megragadjunk, inkább indíték egy szigorúbb tárgyaláshoz, amelynek célja elvont fogalmak és olyan valóban általános módszerek kialakítása, amelyek aztán az „egyetlen" fizikai példára is alkalmazhatóak.

Nem szabad arról elfeledkezni, hogy a matematikai fogalmak kialakítása szempontjából nagyon lényeges, hogy a konkrét példáktól elvonatkoztatva, egyre magasabb absztrakciós szinteken végezzük vizsgálatainkat. Az absztrakt fogalmak gyökerét mindig *egymástól erősen eltérő* konkrét példáknak kell alkotniuk, mivel az absztrakt fogalmak a legkülönbözőbb területekről származó konkrét tapasztalatok közös vonását ragadják meg. Épp ez teszi lehetővé ezen fogalmak sokoldalú alkalmazását.

Mivel ebben a könyvben a differenciálhányados és az integrál fogalma, valamint a függvényvizsgálatok erősen egy-egy konkrét példához kötődnek, nem jut el a szerző matematikai fogalmak kialakításához, és így természetesen odáig sem jut el, hogy az újonnan kialakított matematikai fogalmakat különböző területekről vett konkrét példákra alkalmazza. Pedig a matematikatanítás egyik leglényegesebb feladata épp az lenne, hogy megismertesse a tanulókat matematikai fogalmak kialakításával, és azután ezek alkalmazásával.

Befejezésül csak annyit, hogy a könyv sok hasznos tanácsot, jó ötletet tartalmaz, azonban az említett kételyek vitathatóvá teszik, hogy ilyen formában mintegy kézikönyvül szolgáljon a középiskolai analízis tanításához.

Halmos Istvánné

VACLAV PLESKOT: NOMOGRÁFIA

Egyetemi tankönyv

(Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. 290 old., 55,— Ft.)

A nomográfia a matematikának kótázott számolóábrák szerkesztésével foglalkozó ága. A mérnöki számítási igényekből született a múlt században, Franciaországban. A magasépítmények, a közlekedési és az egyéb mérnöki létesítmények megvalósítása kiterjedt, azonos jellegű számításokat tett szükségessé. A nomogramok alkalmazása elegendően pontos és az akkori időkben szokatlanul gyors eredményekhez vezetett, így a nomogramok felhasználása rohamosan terjedt. Még napjainkban is, amikor a tömeges számításokat már elektronikus számológépek végzik, tájékozódó jellegű, vagy helyszínen történő számításokat érdemes nomogramokkal végezni, mert szerkesztésük egyszerű, olcsó, és kezelésük nem kíván különösebb szakértelmet.

Bár hazánkban régi hagyományai vannak a nomográfiának, magyar nyelvű irodalma elég szegény. Ezért üdvözöljük örömmel Pleskot könyvét magyar nyelven. A kötet hat részre oszlik.

Az első rész *(A nomográfia alapfogalmai)* a számegyenes, a skála, a függvényskála és a függvényábra alaptulajdonságaival és a grafikus papírral foglalkozik.

A második rész *(A logarléc)* a logarléc felépítését, skáláit majd a logarléccel elvégezhető műveletek technikáját mutatja be részletesen.

A harmadik rész *(Grafikus papírok)* a nomogramok szerkesztéséhez előnyösen felhasználható, különböző függvényskálák szerint beosztott papírok alaptípusait (a milliméterpapír, a logaritmikus papír, a szemilogaritmikus papír, a sinus- és arcussinuspapír) és néhány speciális típusú papírt ismertet.

A negyedik rész *(Vonalsereges nomogramok)* vonalsereges nomogramok tervezésének és kivitelezésének kérdéseivel foglalkozik részletesen. Ennek során szóba kerülnek a milliméterpapírra és a logaritmikus papírra tervezett Descartes-féle nomogramok, a három egyenesseregből álló nomogramok, a körsereges nomogramok és a kapcsolt nomogramok.

Az ötödik rész *(Pontsoros nomogramok)* a legterjedelmesebb. Itt kerülnek tárgyalásra a pontsoros nomogramok szerkesztésének elméleti és gyakorlati kérdései. A szerkesztési alapelvek és az anamorfózis tisztázása után a Cauchy- és Clark-féle kanonikus alakokra hozható kifejezések nomogramjai, az ötöd- és hatodrendű kapcsolatok nomogramjai és a binér mezős nomogramok részletes tárgyalása következik. A szerző a nomográfiailag negyedrendű egyenletek tárgyalására fordította a legtöbb figyelmet.

A hatodik fejezet *(Mozgó alkatrészes nomogramok)* a mozgó alkatrészeket is tartalmazó nomogramok szerkesztésének módszereit mutatja be. Itt kapott helyet egy általános elméleti összefoglalás is, hiszen a vonalsereges és pontsoros nomogramok a mozgó alkatrészes nomogramok egy-egy speciális osztályának tekinthetők.

A könyv az alapfogalmaktól indul ki, és tárgyalásmódja deduktív. A definíciók, tételek kimondását bizonyítás követi, majd konkrét példák alapján nomogramok tervezése és megszerkesztése. A gyakorlás érdekében bőséges példaanyag található a könyvben, amelyhez útmutatások és eredmények csatlakoznak. Az elméleti kérdések iránt érdeklődő olvasók is elegendő alkalmat találnak a könyvben arra, hogy a nomográfia elvi alapjait megismerjék, sőt esetleg eredményesen továbbfejlesszék.

A könyv a magyar kiadás munkatársainak gondos munkáját is dicséri és értékes kötete az egyetemi tankönyvek sorozatának.

Scharnitzky Viktor

FRIED ERVIN—PÁSZTOR ISTVÁN— REIMAN ISTVÁN— RÉVÉSZ PÁL—RUZSA IMRE:

MATEMATIKAI KISENCIKLOPÉDIA

(Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1968, 598 oldal, 108,— Ft.)

Az utóbbi évtizedekben a matematika alkalmazási területe rohamosan terjed, és ennek során egyre többen kerülnek többé-kevésbé szoros kapcsolatba a matematikával. A felhasználásra kerülő matematikai anyag egyrészt bővül, másrészt specializálódik, és így az alkalmazók is egyre több matematikai fogalommal találkoznak. Így vetődött fel az a gondolat, hogy a szakkönyveken kívül célszerű volna egy olyan kötet megjelentetése, amely a matematika legfontosabb területeinek fogalmait, tételeit, eredményeit, eljárásait foglalná össze bizonyítások nélkül. Ez — amint azt a külföldi példák is bizonyítják — kétféle módon is lehetséges: *lexikonszerűen* vagy *enciklopédikus* módon. Az előbbi a fogalmakat betűrendben, az összefüggő anyagból kiragadva sorolja fel, az utóbbi logikus sorrendben dolgozza fel az anyagot. Az előbbi fajtához tartozik például a *Természettudományi*

Lexikon, vagy szorosan a matematikát tekintve, a német nyelvű *Mathematisches Wörterbuch* I—II. (Akademie Verlag und Teubner Verlag, Berlin — Leipzig, 1965); az utóbbi fajtát képviseli például a *Kleine Enzyklopädie, Mathematik*, (Enzyklopädie Verlag, Leipzig, 1965).

Mind a kétféle feldolgozási módnak vannak előnyei (és természetesen hátrányai). Mivel egy-egy fogalomnak címszó szerinti keresését a Természettudományi Lexikon lehetővé teszi, kézenfekvő volt az enciklopédikus feldolgozás.

A Matematikai Kisenciklopédia 8 részből áll (zárójelben a szerzők): *Algebra* (Fried Ervin), *Számelmélet* (Fried Ervin), *Geometria* (Reiman István), *Analízis* (Pásztor István), *Halmazelmélet* (Ruzsa Imre), *Valószínűségszámítás* (Révész Pál), *Matematikai statisztika* (Révész Pál), *Matematikai logika* (Ruzsa Imre).

Az egyes fejezetek megfelelő részletességgel és kimerítően tárgyalnak egy-egy témát. Ennek szemléltetésére csupán az első rész (Algebra) fejezeteit és ezek tartalmát soroljuk fel:

Az algebra tárgya.

A számfogalom felépítése (Természetes, egész, racionális, valós, komplex számok, a számfogalom további általánosításai).

Polinomok (Polinomgyűrű, racionális együtthatós polinomok, többhatározatlanú polinomok, számtani és mértani sorozat).

Egyenletek (Első-, másod-, harmad-, negyedfokú egyenletek, egyéb egyenletek, paraméteres egyenletek).

Kombinatorika, determinánsok (Kombinatorikai alapfogalmak, mátrixok, determinánsok).

Lineáris algebra (Vektorterek, lineáris leképezések, euklideszi tér, kvadratikus alakok).

Egyenletrendszerek (Lineáris egyenletrendszerek, homogén lineáris egyenletrendszerek, magasabbfokú egyenletrendszerek).

Csoportelmélet (Permutációcsoportok, ciklusok, csoportok kapcsolatai).

Testelmélet (A test fogalma, Galois-elmélet, az egyismeretlenes egyenletek osztályozása, logaritmikus és exponenciális egyenletek, véges testek).

Algebrai struktúrák (Csoportok, testek, gyűrűk, hálók, az algebrai struktúrák általában, az algebra mai fejlődésének irányai).

A kötet egy-egy tárgykör anyagát annak belső szerkezete szerinti sorrendben tárgyalja, ezért a fogalmak, eredmények, módszerek logikai sorrendben következnek előzményeikkel, hátterükkel és következményeikkel. A tájékozódást nagyon részletes tartalomjegyzék, név- és tárgymutató könnyíti meg.

A kötet korszerű anyagában, szemléletében és a feldolgozás módjában. Az egyes részekben a matematikának olyan modern fejezetei is szerepelnek, mint például a testelmélet, az algebrai struktúrák elmélete, a topológia, a gráfelmélet, a halmazelmélet, az információelmélet, a játékelmélet, a döntésfüggvények, a matematikai logika. Hiányzik viszont például a nomográfia, a hiba- és kiegyenlítőszámítás, a lineáris és egyéb programozás, egy, a számológépekről szóló fejezet, a variációszámítás, az integrálszámítás több alkalmazása. Azt hiszem érdemes lenne egy új kiadás esetén ezeknek a részeknek a beiktatását fontolóra venni.

Minden nagyobb anyagrész végén rövid történeti összefoglaló található, amely megemlíti az illető tudományág jeles művelőit is. Egy ilyen névsor összeállítása rendkívül nehéz és kényes feladat, de úgy vélem, hogy a megemlített matematikusok mellett ugyanolyan joggal szerepelhettek volna még mások is, például Egerváry Jenő, Hajós György, Varga Ottó a magyar, S. Banach, A. C. Clairaut, G. Darboux, G. Green, H. Minkowski, E. Landau, K. Pearson, E. Picard, J. H. Poincaré, J. T. Stieltjes, I. M. Vinogradov és mások a külföldi matematikusok közül.

A könyv stílusa világos, könnyen érthető, a tipografizálás ügyes.

A kötet hasznos segédkönyve lesz mind a matematikusoknak, mind az alkalmazó szakembereknek, és komoly segítséget nyújthat a vizsgákra készülő egyetemi hallgatóknak is.

Scharnitzky Viktor

ANTHONI RALSTON: BEVEZETÉS A NUMERIKUS ANALÍZISBE

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 572 oldal, 100,— Ft.)

Az elektronikus számológépek elterjedése az egész világon megnövelte a numerikus módszerek és a numerikus analízis iránti érdeklődést, hiszen a tudomány és a technika nagy része kapcsolatba került a digitális elektronikus számológépekkel. Ennek nyomán egyre több olyan cikk és könyv jelenik meg, amely számítási módszerekkel foglalkozik. Ralston könyve (egyike a legjobbaknak) bevezetés a numerikus analízisbe, mint az alkalmazott matematika egyik teljes és önálló ágába.

A könyv tárgya csaknem teljes egészében a numerikus analízis alkalmazása elektronikus digitális számológépekre, de a kézi számítás szempontjai sem maradtak figyelmen kívül.

A könyv *tíz* fejezetre oszlik.

Az első fejezetben *(Bevezetés)* a numerikus analízis tárgyáról, a hibaforrásokról, a hibákról, a kerekítési hibákról és a digitális elektronikus számológépek szerkezetéről és tulajdonságairól van szó.

A második fejezet *(Közelítés polinomokkal)* bevezetés a numerikus analízis központi problémájába, a közelítések problémájába, és főleg azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy miért éppen a polinomokkal való approximáció játszik uralkodó szerepet a numerikus analízisben.

A harmadik fejezet *(Interpoláció)* a különféle interpolációs eljárásokat (a Lagrange-féle, az iterált, az inverz, a Hermite-féle, a determinánsokon alapuló és más interpolációk, extrapoláció) ismerteti. A véges differenciákon alapuló számítástechnika itt a szokásoknál kisebb súlyt kapott, mert elektronikus számológépeken nem olyan előnyös mint a kézi számolás során.

A negyedik fejezet *(Numerikus differenciálás, numerikus kvadratura és összegezés)* a deriváltak kiszámítására adott módszerek után a Gauss-féle kvadraturára építi fel a különböző speciális és összetett eljárásokat, formulákat.

Az ötödik fejezet *(Közönséges differenciálegyenletek numerikus integrálása)* főleg a prediktor-korrektor módszereket és a stabilitás fontosságát hangsúlyozza. A Runge-Kutta módszerek mint kiindulásra jól használható eljárások jönnek tekintetbe.

A hatodik fejezet *(Függvények közelítése a legkisebb négyzetek módszerével)* először a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazását mutatja be diszkrét adatsorozatokra. A fejezet nagyobbik része ortogonális polinomok alkalmazását tárgyalja négyzetes közelítések előállítására.

A hetedik fejezet *(Függvények egyenletes közelítése)* ismerteti a függvények approximációját polinomokkal, illetőleg racionális függvényekkel, és egy algoritmussal zárul, amely a Csebisev-értelemben legjobb közelítések numerikus meghatározására alkalmas.

A nyolcadik fejezet *(Nemlineáris egyenletek megoldása)* mind az algebrai, mind a trancendens egyenletek megoldására mutat meg hatásos (például minden esetben konvergens) gépi módszereket.

A kilencedik fejezet *(Lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldása)* direkt, mátrix iterációs, stacionárius iterációs és más módszereket tartalmaz lineáris egyenletrendszerek megoldására.

A tizedik fejezet *(Mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása)* sokféle, a gépi számolás szempontjától előnyös módszert mutat a mátrixok saját értékeinek és saját vektorainak a kiszámítására.

Az egyes fejezetek tárgyalási részében a szerző általában a legismertebb, a legelterjedtebb eljárásokat ismerteti, lehetőleg rövidre fogott matematikai bizonyításokkal. Az eljárások leírását illusztratív példák kísérik. A fejezetekhez csatlakozó „Feladatok" című részekben találhatók a numerikus számolási feladatokon kívül az egyes hosszabb levezetések, finomabb matematikai meggondolást igénylő bizonyítások, valamint sok további numerikus eljárás, amelyekre a tárgyalási részben esetleg csak hivatkozás történt.

Annak ellenére, hogy Ralston könyve eredetileg egy egyetemi bevezető előadás segédkönyvének készült, az anyag alapos önálló feldolgozása helyenként komoly matematikai gondolkodást igényel.

A könyv tanulmányozása kétféle célból történhet: Egyesek számára a numerikus analízis csupán segédeszközt jelent, matematikai apparátust, amelynek birtokában eljuthatnak bizonyos problémák számszerű megoldásához. A könyv ezeknek a szakembereknek az igényét kielégíti, hiszen tartalmazza a hatékony módszerek tömör leírását. De kielégíti azoknak — főleg matematikusoknak — az igényét is, akik a numerikus analízisben nemcsak eszközt, hanem célt is látnak, akik az egyes eljárások matematikai háttere után is érdeklődnek, és azt tanulmányozva esetleg maguk is a numerikus analízis művelőivé válnak.

Külön dicséret illeti a Műszaki Könyvkiadót és a könyv magyar kiadásának munkatársait (Békéssy András és Lőcs Gyula fordítókat, Kis Ottó lektort, Oláh Gyuláné felelős szerkesztőt), hogy az eredeti könyvhöz méltó könyvet adtak a magyar szakemberek kezébe.

Scharnitzky Viktor

PONOMARJOV: DIFFERENCIÁLEGYENLETEK FELÁLLÍTÁSA ÉS MEGOLDÁSA

(Tankönyvkiadó, 1969, 258 oldal, 18,50,—Ft)

Fordította: dr. Schipp Ferenc,
Kontrollszerkesztő: dr. Kósa András

Ismeretes, hogy a természettudományok és a technika egyes problémáinak megoldásában milyen nagy szerepet játszanak a differenciálegyenletek. A differenciálegyenletek megoldás-technikájának elsajátítására a természettudományi karokon, műszaki felsőfokú intézményeinkben nagy gondot fordítunk, de nagyon sokszor elfelejtjük összekapcsolni az elméletet a gyakorlattal: hallgatóink egy kész differenciálegyenletet meg tudnak oldani, de a gyakorlati problémáknál a differenciálegyenletet felállítani kevésbé tudják.

Ponomarjov könyve ennek a problémának megoldására íródott. Az első rész 65 műszaki gyakorlati példát tartalmaz, részletesen bemutatja a differenciálegyenlet felállítását és megoldását. A feladatok több területet ölelnek fel: fizika, kémia, mechanika, geometria stb. A második részben 73 differenciálegyenletre vezető gyakorlati feladatot találunk önálló megoldásra, tehát itt a részletes megoldás helyett csak a rövid végeredmény, esetleg rövid útmutatás található. A harmadik rész elmélet: a közönséges differenciálegyenletek típusát és megoldásuknak alapvető módszereit mutatja be a szerző. Bizonyítást, levezetést nem közöl, általában megelégszik a műszaki gyakorlatban használt precizitással. A kontrollszerkesztő dr. Kósa András ezt a részt egészítette ki megjegyzéseivel, melyek a probléma pontosabb, a természettudományi karok igényeinek megfelelőbb megfogalmazását adják, közlik a szükséges feltételeket stb. A főbb differenciálegyenlet-típusokat felsoroljuk: elsőrendű differenciálegyenletek (szétválasztható változójú, homogén, egzakt, Bernoulli, Riccati, Lagrange, Clairaut- differenciálegyenlet), másodrendűek (hiányos, állandó együtthatós homogén és inhomogén lineáris, néhány változó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenlet (mint pl. az Euler, Bessel, Legendre, Mathieu-féle), magasabbrendű differenciálegyenletek, mint pl. az állandó együtthatós homogén és inhomogén lineáris egyenletek, speciális magasabbrendű differenciálegyenletek), közönséges differenciálegyenletrendszerek.

Az érdekes feladatokat tartalmazó könyvet ajánlhatjuk mindenkinek, aki a differenciálegyenletek iránt érdeklődik; felsőfokú oktatók jól használhatják példatárnak; mérnököknek, technikusoknak, kutatóknak igen hasznos ez a könyv a műszaki-tudományos problémák differenciálegyenlettel való megoldásának tanulmányozására.

Lukács Ottó

JAEGER, A.—WENKE, K.: LINEARE WIRTSCHAFTSALGEBRA, I—II.

(B. G. Teubner, Stuttgart, 1969, 334 oldal.)

A matematikának a közgazdasági tudományokban való egyre szélesebb alkalmazása természetszerűen azt hozta magával, hogy egyre több olyan mű jelenik meg a könyvpiacon, amely a matematika egy-egy (vagy több) fejezetének közgazdasági alkalmazásait vagy egy gyakorlati probléma matematikai apparátusát mutatja be rendszerint vagy a matematikus, vagy a közgazdász szemszögéből nézve. Jaeger és Wenke könyve szerencsés módon úgy foglalja össze a lineáris algebrának a különböző gazdasági alkalmazásokhoz szükséges közös alapjait, hogy közben mind az elmélet, mind a gyakorlat szempontjait messzemenően figyelembe vette. A szerzők általában egyszerű gyakorlati problémákból indulnak ki, majd a feltételek megváltoztatásával, a nehézségek növelésével az absztrakt tárgyalásmód szükségességét belátva eljutnak a pontos matematikai apparátusig, sőt egyes fejezetek végén a legújabb eredményekről is szó van.

Az *első kötet* 4 fejezetre oszlik.

Az első fejezetben *(Bevezetés nem matematikusok számára)* néhány, a problémák matematikai megfogalmazásával és a matematikai terminológiával kapcsolatos megjegyzés van.

A második fejezetben *(Elemi lineáris algebra)* adatoknak táblázatokkal való felírása, lineáris kapcsolatoknak egyenletrendszerekkel vagy egyenlőtlenségrendszerekkel való felírása, a változók vagy az optimális rendszerek meghatározásának módszerei szerepelnek.

A harmadik fejezet *(Halmazok, struktúrák, modellek)* a halmazok alapműveleteinek ismertetése után a leképezésekről, ezek megfordításáról, a relációkról, ezek szemléltetéséről, a gráfokról, néhány operációról, struktúrákról és néhány tapasztalati struktúra matematikai modelljeinek elkészítéséről szól.

A negyedik fejezet *(Családok, vektorok és mátrixok)* a címben foglalt fogalmak definíciója, kapcsolata után a velük végezhető műveletek közül az összeadás, a számmal való szorzás, a lineáris kombinálás és a belső (skalár) szorzat részletes feldolgozását tartalmazza.

A *második kötet* 3 fejezetből áll.

Az ötödik fejezetben *(Linearitás)* a lineáris hozzárendelések mátrix-előállítása után a mátrixok szorzását és a szorzás tulajdonságait részletezik a szerzők, majd a mátrix operátor jellegét vizsgálják. Külön alfejezet foglalkozik a Boole-féle mátrixoperációkkal. A fejezet végén a lineáris függetlenségről és függőségről és egy lineáris tér rangjáról és bázisáról van szó.

A hatodik fejezetben *(Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek)* a szokásos megoldási módszereken túlmenően a dualitás elvéről és ennek a lineáris programozásban történő alkalmazásáról is olvashatunk.

A hetedik fejezetben *(Speciális módszerek és problémák)* szereplő problémák közül az alábbiakat emeljük ki: Milyen módon lehet kihasználni egyenletrendszerek megoldásánál az esetlegesen fellépő nagyszámú zérus együtthatót. A Minkowski—Leontyev-féle rendszerek és a Neumann-féle sorok szerepe. Az optimális programok dekompozíciója. A szállítási probléma és a szállítási problémára visszavezethető problémák.

Minden fejezethez számos (összesen 136) gyakorló feladat tartozik. A kötetek végén tárgymutató, a fejezetek élén összefoglalás található.

A szerzők különös gondot fordítottak arra, hogy a tankönyvet szakmailag és didaktikailag úgy építsék fel, hogy ez első bevezetésként szolgálhasson gazdasági szakemberek számára az absztrakt matematikába.

Az olvasót úgy vezetik be a modern matematika gondolatvilágába, fogalom- és problémaköreibe, munkamódszereibe, hogy maga is képes legyen problémákat megszövegezni, megoldani, és a megoldásokat elemezni. A súlypont nem a könnyed csevegésen, hanem a tiszta fogalomalkotáson, a tételek pontos és szabatos megfogalmazásán és bizonyításán van. A matematikai fogalmakat gazdasági (és nem fizikai vagy geometriai) példákkal világítják meg a szerzők, a bizonyításoknál nem annyira a rövidség és a matematikai elegancia, mint inkább a szemléletesség, az egyszerűség és a bizonyítások algoritmizálása van előtérben.

A könyv a középiskolai ismereteknél nem kíván több matematikai előismeretet, néhány felhasznált fogalom a Bevezetésben külön szerepel.

A könyv felépítése arra enged következtetni, hogy a könyv hasznos olvasmánya lehet a közgazdászoknak is, akik a matematikai könyveket túl nehéznek, vagy nehezen követhetőnek tartják, de egyúttal a matematikusoknak is, akik viszont a közgazdasági szempontokat hangsúlyozó könyveket túlságosan bőbeszédűeknek, és nem egyszer receptszerűnek vélik. Külön érdemes megemlíteni, hogy matematikai szempontból is számos érdekes eredmény vagy módszer található a könyvben. Például a család matematikai fogalma, ennek speciális esetei és ezeknek alkalmazása részletes feldolgozást kap a könyvben. Egy sor más téma is, amelyekről más, hasonló jellegű könyvekben csak utalás van, itt részletes kidolgozás található. Ilyenek például a Boole-féle mátrixok alkalmazása gráfelméleti kérdésekre, a Minkowski—Leontyev-féle rendszerek, a lineáris optimális rendszerek dekompozíciója, a konzervatív és szubkonzervatív leképezések, stb.

Scharnitzky Viktor

KOVÁCS MIHÁLY: NÉHÁNY KIBERNETIKAI JÁTÉKGÉP

(Tankönyvkiadó, 1969, 184 oldal, 11,50 Ft)

A könyvnek kettős célkitűzése van. A *távlati cél,* hogy a ma ifjúsága felkészüljön a holnap automata gépeinek megértésére és a holnapután kibernetikai gépeinek tervezésére. Hogyan kezdje ezt el? Ezt szolgálja a *közeli cél:* a könyvben bemutatott egyszerű berendezések, játékgépek és oktató gép tanulmányozása. „A magasugrás bajnokjelöltjei nem a világcsúcs körüli magasságokkal kezdik a gyakorlást, hanem jóval lejjebb", mondja a szerző.

Ahhoz tehát, hogy valamikor eljusson az érdeklődő a bonyolult számítógépek, valamint az irányító berendezések, adminisztrációt, gyárak munkájának irányítását, előretervezést végző kibernetikai gépek megértéséhez és tervezéséhez, kezdje egyszerűekkel. Olyanokkal pl., mint a könyvben közölt gépek: *a)* öröknaptárral, amely villanyégő felvillanásával jelzi, hogy adott dátum a hét melyik napjára esik, *b)* számkitalálós játékokkal, *c)* malomjátékokkal (ez a nálunk ismert malomjátéknak egyszerűsített változatát hajlandó partnerével játszani), *d)* halomjátékkal (ezt a nemzetközi irodalom NIM-játék néven ismeri), a három vagy több halommal dolgozó PERMUTAX logikai játékgéppel, *e)* nyolcas kombinettel (az 1-től 8-ig terjedő természetes számokkal ellátott négyzet alapú lapocskákat tologathatjuk egy négyzet alakú keretben, amelyben mozgási lehetőségként egy négyzet alapú lapocska helye üres, a cél: tologatással a természetes sorrendbe állítani a számokat), *f)* LOGI kártyázógéppel (a gép a közismert zsírozást játssza ellenfelével).

És ha egy oktató korszerű eszközökkel akar kapcsolatot tartani előadás közben hallgatóival, látni akarja, hogy az ellenőrző kérdésre kik, milyen gyorsan, a hallgatóság hány százalékában válaszolnak helyesen, az használja a DIDAKTOMAT III. elnevezésű oktatógépet. A tanár által feltett ellenőrző kérdésre a hallgatók dolgoznak, a készenlétet jelzőlámpa kioltásával jelzik, a tanár megad négy feleletlehetőséget, a hallgatók kapcsolóval beállítják a helyesnek tartott felelet azonosítási jelzőbetűjét. Ekkor a tanár egyetlen gombnyomására megjelenik a jelzőtáblán, kik oldották meg helyesen a feladatot.

Az egyes gépek ismertetésénél megtalálható a játék leírása, elemzése, a gép eljárása (algoritmus)- az eljárás műszaki kivitelezése (többnyire egyszerű eszközök szerepelnek, inkább jelfogós megoldá, sok, mint elektroncsövek).

A roppant szellemes, ügyes és eddig magyar nyelvű könyvben fel nem dolgozott területet érintő mű olvasásához középiskolás tudás bőven elegendő, sőt: szinte még ez is alig kell. Meg kell említeni a könyv szép, színes borítóval ellátott külsejét. Csak azt nem értjük: miért titkolja a kiadó a szerző nevét? (Csupán a belső borító belső lapján közli.) Érdemes volna elgondolkozni: nem kellene-e változtatni azon a kiadói gyakorlaton, hogy egyes könyvek külső borítójára nem kerülhet fel a szerző neve.

A könyvben leírt játékgépek tervezői sokszor még középiskolások voltak a tervezés idején. Megérdemlik, hogy úttörő munkájukért nevüket leírjuk: Bertók Péter, Ágost Jenő és Zoltán, Perjés Zoltán, Vesztergombi György, Reé Eörs, Fodor Zoltán.

Lukács Ottó

DR. LILLY GÖRKE: HALMAZOK, RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

(Tankönyvkiadó, 1969, 421 oldal, 36,— Ft.)

Ismeretes, hogy korunkban a világról szerzett információink száma rohamosan növekszik, mintegy tíz évenként megduplázódik. E hatalmas ismeretanyag feldolgozása és fontos részeinek az oktatásba való bevonása már évekkel ezelőtt időszerűvé tette az oktatás reformját minden szinten. Az utóbbi két évtizedben világszerte (és így hazánkban is) számos kísérlet, és ezek nyomán számos oktatási reform valósult meg, vagy valósul meg. E kísérletek kiterjednek a matematika oktatására is, és bár különböző irányokban haladnak, abban megegyeznek, hogy az eddig tanított anyagnak nem másféle elrendezését, vagy másféle részét javasolják, hanem az oktatás módszerének gyökeres megváltoztatását, a szemléletmód más alapokra való helyezését.

Az 1960-ban Krakkóban tanácskozó nemzetközi bizottság állást foglalt amellett, hogy a matematika oktatásában lényegesen nagyobb szerepet kell kapnia a halmazelméletnek, nem annyira mint tantárgynak, hanem inkább mint alapelvnek, módszernek. A halmazelmélet fogalmai, eszközei, módszerei ugyanis nagyon alkalmasak a helyes gondolkodásmód kifejlesztésére és közvetlen alkalmazást nyernek a matematika csaknem minden ágában.

Az azóta eltelt időben például Lengyelországban már a középfokú matematika-oktatást is halmazelméleti alapokra helyezték, és sok országban — így hazánkban is — sikeres kísérletsorozatokat végeznek az alapfokú oktatás ilyen irányú átalakításának érdekében.

Lilly Görke könyve az NDK-ban folyó reform fontos segédeszköze, amely a matematikát tanító tanárokhoz szól.

A könyv *hat* fejezetre oszlik.

Az első fejezet *(Halmazok)* a halmazelmélet alapfogalmait, a halmazokkal végezhető alapműveleteket (egyesítés, metszetképzés, különbség-, szorzathalmaz, stb.), és a halmazelmélet antinomiáit foglalja össze.

A második fejezet *(Relációk)* a két és többváltozós relációk fogalmának bevezetése után a binér relációk tulajdonságaival (reflexivitás, tranzitivitás, szimmetria) foglalkozik, majd külön részletesen van szó a rendezési és az ekvivalenciarelációkról.

A harmadik fejezet *(Leképezések, függvények)* a függvény legáltalánosabb definíciója után a skalár függvények néhány tulajdonságával és a függvények invertálásával foglalkozik. A geometriai szemléltetés kapcsán részletesen szó esik a sík transzformációi közül az eltolásról, a forgatásról és a tengelyes szimmetriáról. A fejezet végén matematikai modellekről és ezek során az izomorfiáról olvashatunk.

A negyedik fejezet *(A számfogalom felépítése)* a legterjedelmesebb. A szerzőnő a számfogalom felépítését a természetes számok — abszolút racionális számok — racionális számok — valós számok — komplex számok úton hajtja végre. Külön ki kell emelni az egyes bővítéseknél fellépő problémák körültekintő és kimerítő tárgyalását. A valós számok bevezetésénél például mind az intervallumskatulyázással, mind a végtelen tizedestörtekkel, mind a Dedekind-féle szeletekkel való előállítás szerepel, és külön pontban ott áll a valós számkör axiomatikus felépítése is.

Az ötödik fejezet *(Végtelen halmazok összehasonlítása)* a végtelen halmazok számosságával és rendezésével kapcsolatos problémák töltik meg.

A hatodik fejezetet *(A halmazok alkalmazása az iskolai tananyagban)* az iskolai anyagnak néhány olyan fejezetét mutatja meg, amelyben a halmazelmélet fogalmai és eredményei közvetlenül hasznosan alkalmazhatók. Ilyen fejezet például az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásával kapcsolatos témakör.

A könyvhöz *Függelék* (itt található a szövegben csak kimondott tételek bizonyítása) és tárgymutató tartozik.

A könyv meglehetősen elvont és sok, nem éppen könnyű fogalmát számos nagyon találó és szellemes példa világítja meg, és a könnyed szövegezés is nagyon elősegíti a könnyebb megértést.

A fordítás (Dr. Sólyom Mihályné munkája) nagyon pontos, sőt helyenként túlságosan is tapad az eredeti szöveghez. Így például a német „überabzählbar" szót először a „megszámlálható halmazokra nem leképezhető" kifejezéssel fordítja és csak sokkal később használja az egyébként már régen bevett „nem megszámlálható" jelzőt.

Vagy egy másik példa: Az a tény, hogy a halmaz számossága és egy halmaz kardinális száma ugyanannak a fogalomnak két elnevezése, nincs megfogalmazva sehol sem. Ha a két elnevezést felváltva használjuk a szövegben, a kezdő olvasó figyelmét erre fel kell hívni.

Annak ellenére, hogy a könyv elsősorban matematikát tanító tanárok számára készült, hasznos olvasmánya lehet leendő matematikusoknak, egyetemi hallgatóknak, a matematika iránt érdeklődő diákoknak és nagyközönségnek is.

Scharnitzky Viktor

Középiskolai Szakköri Füzetek

ÉRDEKES MATEMATIKAI GYAKORLÓ FELADATOK III.

(Válogatás a Középiskolai Matematikai Lapok 1904—1914. évfolyamaiból)
Tankönyvkiadó, 1969, 232 oldal, 16,—Ft.

A kötetben 320 feladat, valamint ezek megoldása található. A feladatok az alábbi témakörökbe tartoznak:

I. Aritmetika (6 feladat)
II. Oszthatóság, számelmélet, számrendszerek (56)
III. Algebrai átalakítások (3)
IV. Elsőfokú (és ilyenre visszavezethető) egyenletek és egyenletrendszerek (7)
V. Magasabb fokú (és ilyenre visszavezethető) egyenletek és egyenletrendszerek (24)
VI. Diophantoszi problémák, egyenletek (4)
VII. Egyéb egyenletek (7)
VIII. Egyenlőtlenségek (14)
IX. Függvények, szélsőértékek (10)
X. Számsorozatok (23)
XI. Kombinálás, megszámlálás, elrendezés, kiválasztás (15)
XII. Mértani leírások (térben is) (4)
XIII. Síkmértani bizonyítások (48)
XIV. Síkmértani számítások trigonometria nélkül (15)
XV. Mértani helyek (8)
XVI. Síkmértani szerkesztések (14)
XVII. Goniometria (13)
XVIII. Trigonometria (19)
XIX. Koordinátageometria (6)
XX. Térmértani kérdések (17)
XXI. Egyéb (7)

A feladatok többsége a jelenlegi tanterv anyagához kapcsolódik. Nehézségi fokukat tekintve: mintegy 20 százalékuk könnyű, különösebb erőfeszítést nem igénylő, a legismertebb összefüggések, fogások egyszerű alkalmazása révén megoldható feladat; 60 százalékuk a közismert összefüggéseken felül ötleteket, elemző készséget, matematikai éleslátást kíván — ezek között a hasonló ötleteket igénylő feladatok a legjobb értelemben vett gyakorlást segítik elő; végül ismét 20 százalékuk részben már olyan ismereteket is feltételez, amelyekkel sok középiskolás olvasó nyilván e könyv feladatmegoldásai között találkozik majd először (euklideszi algoritmus, determinánsok, binomiális tétel stb.), részben bonyolultságuk teszi e feladatokat sokak számára megoldhatatlanná.

A könyv nagy érdeme, hogy (egy-két kivételtől eltekintve) a megoldások önmagukban érthetők, a felhasznált ismereteket is megértetik, vagy utalnak arra, hogy hol lehet utána nézni bővebben egy-egy kérdésnek. Az érthetőséghez hozzájárul a korszerű és pontos szóhasználat, a világos fogalmazás. Kitűnően sikerült a feladatok csoportosítása is. Mindez a kötet szerzőinek: Lukács Ottónak és Scharnitzky Viktornak érdeme, akik nemcsak kiválogatták e feladatokat, hanem a feladatok szövegét is „leporolták", több megoldást átírtak, új megoldásokat és jegyzeteket iktattak be, általánosításokat adtak.

Úgy érzem, a munka nem volt hiábavaló. Minden bizonnyal sokan örömmel forgatják ennek a gyűjteménynek lapjait, hiszen azok is sok érdekes és újszerű feladatot találnak benne, akik sok példatárat „elnyűttek" már. Éppen az újszerű, szokatlan feladatok szükségesek ahhoz, hogy a gondolkodást felfrissítsék, új elemekkel gazdagítsák. (Talán furcsa újszerűnek nevezni egy 1904 és 1914 között kitűzött feladatot, de több tucat, a jelenlegi reform-tantervhez vágó feladat láttán ez érthetővé válik.)

Kuriózumként megemlítem, hogy az 1968. évi országos felvételi matematika feladatok közül a hatodik lényegében azonos e könyv 134. feladatával (eredeti sorszáma 938.). Ez elég csattanós bizonyíték arra — ami persze ettől függetlenül is igaz —, hogy a könyv tanulmányozása jó előkészületet jelent a matematika érettségihez, felvételi vizsgához. A kötet e szempontból is legértékesebb részeinek a II., X., XI., XIII. és XVIII. feladatcsoportokat tartom.

Hasznos vállalkozás ez a munka azért is, mert a régi, ún. Rátz-féle Középiskolai Matematikai Lapok anyagából átmenti az értékeket az utókornak, amelyben egyébként sem idő, sem lehetőség nem lenne ezekkel megismerkedni.

A szerzők bevezetője szinte kötelez arra, hogy — a könyv még tökéletesebbé tétele érdekében — a hiányosságokról is szóljak. Érzésem szerint nem ártott volna még több helyen utalni a felhasznált ismeretekre (lehetőleg szakköri füzetre hivatkozni). A túl könnyű feladatokat szerencsésebb lett volna kirekeszteni e gyűjteményből. Ugyanezt lehetett volna tenni néhány másutt már megjelent, közismert feladattal. (Előfordul a köteten belül is átfedés: a 180. feladat azonos a 186. feladat első

felével.) Több helyen egyszerűbb megoldást lehetett volna adni. (A 28. feladat állítása hamis. A megoldásból ez ki is derül, de — talán éppen a kelleténél bonyolultabb megoldás következtében — a megoldó nem veszi észre.) Geometriai feladatok megoldásait — ahol lehet és egyszerű — vektorokkal is érdemes lett volna megmutatni. Pedagógiai szempontból hasznos lett volna egy ötlettár beiktatása, ahol még nem teljes megoldást, hanem csak útmutatást talál az olvasó.

Végül két dolog, amiről nem a szerzők tehetnek:

1. A sorozatban 1963-ban megjelent hasonló terjedelmű feladatgyűjtemény ára 6 Ft volt, a jelenlegi 16 Ft-ba kerül.

2. Ma már nem szokatlan, ha egy tankönyvnek ötletes, színes, figyelmet felkeltő borítója van. A Középiskolai Szakköri Füzetek is tett egy lépést előre a külsőt illetően: jobb anyagból készül a fedele; de a szürkeség az változatlan. (Pedig ennek a kötetnek tartalma nem szürke.)

Lorántt László

ÚJ KÖNYVEK

Az alábbi felsorolásban azok a matematikai tárgyú könyvek szerepelnek, amelyek 1969 második félévében jelentek meg. A jegyzékben általános- és középiskolai *tankönyvek*, felsőoktatási *jegyzetek* nem szerepelnek.

BUSACKER, R. G.—SAATY, T. L: *Véges gráfok és hálózatok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 348 oldal, 45,— Ft.

CSÁNK ISTVÁN: *Számolás vonalakkal, grafikus ábrázolás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 176 oldal, 10,— Ft.

CZAPÁRY ENDRE—GYAPJAS FERENC—HORVAY KATALIN—PÁLMAI LÓRÁNT: *Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák IV. oszt. matematika tanításához*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 204 oldal, 21,50 Ft.

CZAPÁRY ENDRE—SOÓS PAULA: *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 350 oldal, 18,— Ft.

DENKINGER GÉZA—GYURKÓ LAJOS: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 295 oldal, 37,— Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ (szerk.): *Élő matematika* (2. kiad.), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 227 oldal, 18,— Ft.

GÁSPÁR GYULA—RAISZ IVÁN—SALÁNKI JÓZSEF: *Műszaki matematika* IV. kötet, Tankönyvkiadó, 1969, 308 oldal, 39,— Ft.

GÖRKE LILLY *Halmazok, relációk, függvények*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 421 oldal, 36,— Ft.

HÁMORI MIKLÓS: *Halmazok, Matematikai logika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 160 oldal, 9,— Ft.

HOSSZÚ MIKLÓS: *Matematikai programozás, Műszaki matematika* VI. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 223 oldal, 30,— Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ: *Tanári segédkönyv az Iskolatelevízió műsoraihoz*, Számtan, mértan az általános iskolák 5., 6., és 8. osztálya számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 140 oldal, 11,— Ft.

KAUFMANN, A.—FAURE, R.: *Bevezetés az operációkutatásba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 276 oldal, 27,50 Ft.

KÁSEDI FERENC: *Egyenlőtlenségek* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 207 oldal, 11,50 Ft.

KOVÁCS MIHÁLY: *Néhány kibernetikai játékgép*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 184 oldal, 11,50 Ft.

LUKÁCS ERNŐNÉ—RÁBAI IMRE: *Feladatok és megoldások* (3. kiadás), Gondolat kiadó, Budapest, 1969, 286 oldal, 23,50 Ft.

LUKÁCS OTTÓ—SCHARNITZKY VIKTOR: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok* III. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 232 oldal, 16,— Ft.

OBÁDOVICS J. GYULA: *Matematika* (7. kiadás), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 810 oldal, 62,— Ft.

PATAKI BÉLÁNÉ—SCHARNITZKY VIKTOR: *Felsőfokú matematika*, Segédkönyv az iskolatelevízió adásaihoz, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 435 oldal, 46,— Ft.

PÁLFY SÁRDOR: *Tanári kézikönyv a 6. osztályos számtan—mértan tanításához* (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 248 oldal, 12,50 Ft.

PÉTER RÓZSA: *Játék a végtelennel* (4. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 266 oldal, 31,— Ft.

SOLT GYÖRGY: *Valószínűségszámítás,* Példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, 265 oldal, 20,— Ft.

SZTOLJÁR, A. A.: *A matematikai tanítás módszerei,* II. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 240 oldal, 22,50 Ft.

TOLNAI JENŐ: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok I. kötet* Algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 224 oldal 16,— Ft.

VARGA TAMÁS: *Matematikai logika kezdőknek,* I. kötet (5. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 199 oldal, 11,— Ft.

VARGA TAMÁS: *Matematikai logika kezdőknek,* II. kötet (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 275 oldal, 14,— Ft.

VENTCEL, E. SZ.: *A dinamikus programozás elemei,* Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1969, 196 oldal, 17,50 Ft.

VEKERDI LÁSZLÓ: *Kalandozások a tudományok történetében* (Művelődésügyi tanulmányok), Magvető Kiadó, Budapest, 1969, 320 oldal, 29,50 Ft.

Scharnitzky Viktor

Hibaigazítás: A Mathematikai Lapok 20. (1969) 1—2 számában a 22. oldalon a 7. és 8. ábránál tévedésből a rajzolási utasítás is ki lett szedve.

Szerkesztőség.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat beérkezett: 1970. I. 29. — Terjedelem: 20,65 (A/5) ív
70-533 — Szegedi Nyomda

Ára: 12,— Ft
Évi előfizetés: 20,— Ft

INDEX: 25 564